О СУЩЕСТВОВАНІИ И ПРЕДѢЛАХЪ

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХЪ КОРНЕЙ

ТРЕХЧЛЕННЫХЪ И ЧЕТЫРЕХЧЛЕННЫХЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЙ ВЫСШИХЪ СТЕПЕНЕЙ.

Статья З. Пивето.

(Извлечено изъ IX т. Записокъ Императорской Академіи Наукъ.)

САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1866.
Въ типографіи Императорской Академіи Наукъ.
(В. О., 9 лин., № 12.)

О СУЩЕСТВОВАНІИ И ПРЕДѢЛАХЪ

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХЪ КОРНЕЙ

ТРЕХЧЛЕННЫХЪ И ЧЕТЫРЕХЧЛЕННЫХЪ АЛГЕБРАИЧЕСКИХЪ УРАВНЕНІЙ ВЫСШИХЪ СТЕПЕНЕЙ.

Статья З. Пипето.

(Извлечено изъ IX т. Записокъ Императорской Академіи Наукъ.)

САНКТПЕТЕРБУРГЪ, 1866.

Въ типографіи Императорской Академіи Наукъ.

(В. О., 9 лин., № 12.)

Во всей этой статьѣ мы полагаемъ, что уравненіе расположено по убывающимъ, цѣлымъ и положительнымъ степенямъ неизвѣстной. Кромѣ того, коеффиціенты a, b, c, будутъ представлять положительныя числа.

Первая Теорема.

Всякое алгебраическое трехчленное уравненіе вида

$$f(x) = x^m - ax^n + b = 0$$

не имѣетъ положительныхъ корней, когда

$$b > a \cdot \frac{m-n}{m} \cdot \left(a\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Оно имѣетъ два равные положительные корня, когда

$$b = a \cdot \frac{m-n}{m}\left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

и въ этомъ случаѣ двойной корень

$$x = \left(a\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}} = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{b\,n}{m-n}\right)^{\frac{1}{m}} \quad (3)$$

Когда же

$$b < a.\frac{m-n}{m}.\left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

тогда данное уравненіе имѣетъ всегда два положительные корня x_1 и x_2, заключающіеся между предѣлами:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} < x_1 < \left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}} < \left(\frac{b\,.\,n}{m-n}\right)^{\frac{1}{m}} < \left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}} < x_2 < a^{\frac{1}{m-n}}. \; (5)$$

Доказательство. Если параболическую линію, уравненіе которой есть

$$y = f(x) = x^m - ax^n + b,$$

отнесемъ къ прямолинейнымъ прямоугольнымъ координатнымъ осямъ, и будемъ изслѣдовать видъ ея въ сторонѣ положительныхъ абсциссъ, то вслѣдствіе послѣднихъ знаковъ $f(x)$ легко увидимъ, что $f(\alpha)$ будетъ значеніе minimum ординаты y, гдѣ α есть единственный положительный корень уравненія

$$f'(x) = mx^{m-1} - anx^{n-1} = 0,$$

а именно

$$\alpha = \left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}.$$

Подставляя эту величину въ $f(x)$ вмѣсто x, получимъ

$$f(\alpha) = b - a.\frac{m-n}{m}\left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}.$$

Такъ какъ, по сейчасъ сказанному, $f(\alpha)$ есть наименьшая величина $f(x)$ при положительномъ x, то очевидно, что въ случаѣ $f(\alpha) > 0$, т. е. при условіи (1):

$$b > a.\frac{m-n}{m}.\left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}},$$

данное уравненіе не можетъ имѣть положительныхъ корней.

Если же $f(\alpha) = 0$, т. е. при условіи (2), α въ одно время удовлетворяетъ уравненіямъ: $f(x)=0$, и $f'(x)=0$, а потому, какъ извѣстно, эта величина и есть двойной корень уравненія $f(x)=0$. Въ этомъ случаѣ изъ условія (2) выходитъ

$$\left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}=\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{b\,.\,n}{m-n}\right)^{\frac{1}{m}};$$

слѣдовательно

$$x=\left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}=\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{b\,.\,n}{m-n}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Остается намъ теперь разсмотрѣть случай $f(\alpha)<0$, то есть условіе (4). Тогда, очевидно, данное уравненіе имѣетъ два различные положительные корня, изъ которыхъ одинъ больше, а другой меньше α. Кромѣ того, изъ вида даннаго уравненія легко заключить, что низшій предѣлъ положительныхъ корней есть $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ а высшій $a^{\frac{1}{m-n}}$

Слѣдовательно будемъ имѣть

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{n}<x_1<\left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}<x_2<a^{\frac{1}{m-n}}.$$

Сличивъ эту формулу съ формулою (5), и принимая при томъ во вниманіе, что изъ условія (4) прямо вытекаетъ

$$\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}},$$

$$\left(\frac{bn}{m-n}\right)^{\frac{1}{m}}<\left(a\cdot\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}},$$

и

$$\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}}<\left(\frac{b\,.\,n}{m-n}\right)^{\frac{1}{m}}*),$$

*) Возведя неравенство (4) въ степень $m-n$, получимъ

$$\frac{b^m}{b^n}<\frac{a^m}{m^m}\cdot\frac{(m-n)^m}{(m-n)^n}\cdot n^n,$$

увидимъ, что намъ остается только доказать неравенство

$$x_1 < \left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

которое получается слѣдующимъ образомъ:

Подставивъ въ тожество:

$$f(x) - \frac{x}{m} f'(x) = b - a\frac{m-n}{m} x^n$$

x_1, меньшій положительный корень уравненія $f(x) = 0$, вмѣсто x, получимъ

$$\frac{x_1}{m} f'(x_1) = -b + a\frac{m-n}{m} x_1^n$$

Такъ какъ $x_1 < \alpha$, то по виду $f'(x)$ необходимо, чтобы $f'(x_1) < 0$. Слѣдовательно будемъ имѣть

$$-b + a\,.\frac{m-n}{m} x_1^n < 0$$

и отсюда

$$x_1 < \left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Слѣдствіе. Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что знакъ всякой алгебраической функціи вида

$$f(x) = x^m - ax^n + b,$$

при положительномъ x, зависитъ отъ слѣдующаго:

A) Когда

$$b > a\,.\frac{m-n}{m}\,.\left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \textbf{(6)}$$

откуда

$$\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{m-n}\right)^m < \left(\frac{b\,.\,n}{m-n}\right)^n,$$

слѣдовательно

$$\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}} < \left(\frac{b\,.\,n}{m-n}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

тогда

$$f(x) > 0.$$

B) Когда

$$b = a\frac{m-n}{m}\left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

тогда $f(x) > 0$, при всякомъ x не равномъ α, гдѣ α есть двойной корень уравненія $f(x) = 0$.

C) Когда же

$$b < a \cdot \frac{m-n}{m} \cdot \left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

тогда, обозначивъ чрезъ x_1 меньшій, а чрезъ x_2 большій положительный корень уравненія $f(x) = 0$, будемъ имѣть

$$\left.\begin{array}{l} f(x) > 0, \text{ при } x < x_1 \text{ и } x > x_2 \\ f(x) = 0, \quad \text{»} \quad x = x_1 \text{ и } x = x_2 \\ f(x) < 0, \quad \text{»} \quad x_1 < x < x_2. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Вторая Теорема.

Всякое четырехчленное уравненіе вида

$$f(x) = x^m + ax^n - bx^p + c = 0$$

только тогда можетъ имѣть положительные корни, когда

$$c < C_o, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

гдѣ C_o есть наименьшая изъ величинъ:

$$b \cdot \frac{n-p}{n} \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{p}{n}\right)^{\frac{p}{n-p}} \text{ и } b \cdot \frac{m-p}{m} \cdot \left(b \cdot \frac{p}{m}\right)^{\frac{p}{m-p}}.$$

Кромѣ того это уравненіе обладаетъ еще слѣдующими свойствами.

Пусть будетъ α единственный положительный корень уравненія

$$f'(x) = mx^{m-1} + anx^{n-1} - bpx^{p-1} = 0;$$

β_1 — меньшій, β_2 — большій положительный корень уравненія

$$\varphi(x) = x^n - \frac{b}{a}\frac{m-p}{m-n}x^p + \frac{cm}{a(m-n)} = 0;$$

γ — положительный корень уравненія

$$\psi(x) = x^m + b.\frac{n-p}{m-n}x^p - \frac{c.m}{m-n} = 0;$$

δ — положительный корень уравненія

$$\theta(x) = x^m + a.\frac{n-p}{m-p}x^n - \frac{c.p}{m-p} = 0;$$

гдѣ $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\theta(x)$ получаются изъ тожествъ

$$\left.\begin{aligned} f(x) - \frac{x}{m}f'(x) &= a.\frac{m-n}{m}\varphi(x) \\ f(x) - \frac{x}{n}f'(x) &= -\frac{m-n}{n}\psi(x) \\ \text{и} \quad f(x) - \frac{x}{p}f'(x) &= -\frac{m-p}{p}\theta(x). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Ко всему этому пусть будетъ ε любой изъ корней: β_1, γ, и δ.

Тогда данное уравненіе не имѣетъ положительныхъ корней въ случаѣ: α не $< \varepsilon$.

Если $\alpha = \varepsilon$, то оба положительные корня даннаго уравненія равны между собою и равны α или $\beta_1 = \gamma = \delta$.

Если же $\alpha > \varepsilon$, то положительные корни даннаго уравненія, которые обозначимъ чрезъ x_1 и x_2, удовлетворяютъ условіямъ:

$$x_1 < \varepsilon < \alpha < x_2 < \beta_2.$$

Доказательство. Сдѣлавъ

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= a^{-1}.[f(x) - x^m] = x^n - \frac{b}{a}x^p + \frac{c}{a} = 0 \\ \text{и} \quad f_2(x) &= f(x) - ax^n = x^m - bx^p + c = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (12)$$

подставляемъ въ формулы (6), и (7) вмѣсто

$$b,\ a,\ m,\ \text{и}\ n,$$

соотвѣтственно выраженія

$$\frac{c}{a},\ \frac{b}{a},\ n,\ \text{и}\ p,$$

и

$$c,\ b,\ m,\ \text{и}\ p,$$

относящіяся къ (12). Отъ того придемъ къ тому заключенію, что въ случаѣ: *с не меньше наименьшей изъ величинъ*

$$b\,.\,\frac{n-p}{n}\left(\frac{b}{a}\,.\,\frac{p}{n}\right)^{\frac{p}{n-p}} \quad \text{и} \quad b\,\frac{m-p}{m}\,.\left(b\,.\,\frac{p}{m}\right)^{\frac{p}{m-p}}$$

одна изъ $f_1(x)$ и $f_2(x)$, *при* x *положительномъ, никогда не можетъ быть меньше нуля.*

Но по положенію (12) имѣемъ

$$\begin{aligned} f(x) &= af_1(x) + x^m \\ &= f_2(x) + ax^n; \end{aligned}$$

слѣдовательно всегда будетъ

$$f(x) > 0,$$

т. е. *ни одно положительное число не можетъ удовлетворять уравненію* $f(x) = 0$, *когда не выполнены условія* (10).

Изслѣдуемъ теперь свойства $f(x)$ независимо отъ этихъ условій.

Легко видѣть, что $f(\alpha)$ здѣсь, подобно $f(\alpha)$ предыдущей теоремѣ, будетъ наименьшая величина $f(x)$ при положительномъ x. Подставляя же α вмѣсто x въ тождества (11) получимъ

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha \,.\, \frac{m-n}{m}\varphi(\alpha) \\ &= -\frac{m-n}{n}\psi(\alpha) \\ &= -\frac{m-p}{p}\theta(\alpha). \end{aligned}$$

Слѣдовательно будетъ

$$\left.\begin{aligned} \text{minimum } f(x) &= a \,.\, \frac{m-n}{m}\varphi(\alpha) \\ &= -\frac{m-n}{n}\psi(\alpha) \\ &= -\frac{m-p}{p}\theta(\alpha). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Замѣтимъ, что $\varphi(x)$ совершенно того же вида, какъ $f(x)$ предыдущей теоремы, а потому все, что было сказано о $f(x)$ въ первой теоремѣ можетъ быть примѣнено и къ $\varphi(x)$.

Подставивъ въ формулы: (1), (2), (3), (4) и (6) вмѣсто

$$b,\ a,\ m,\ n,\ x_1 \text{ и } x_2,$$

соотвѣтствующія имъ здѣсь величины:

$$\frac{cm}{a(m-n)},\ \frac{b}{a}\cdot\frac{m-p}{m-n},\ n,\ p,\ \beta_1 \text{ и } \beta_2,$$

и положивъ для краткости

$$b.\frac{m-p}{m}.\frac{n-p}{n}.\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m-p}{m-n}\cdot\frac{p}{n}\right)^{\frac{p}{n-p}} = C,$$

получимъ слѣдующія свойства $\varphi(x)$ при x положительномъ, а именно:

A) При $c > C$, всегда $\varphi(x) > 0$.

B) При $c = C$, $\varphi(x) > 0$ для всякаго положительнаго x, неравнаго β, гдѣ β есть двойной корень уравненія $\varphi\,(x) = 0$, а именно:

$$\beta = \left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m-p}{m-n}\cdot\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-p}} = \left(\frac{c}{b}\cdot\frac{m}{m-p}\cdot\frac{n}{n-p}\right)^{\frac{1}{p}} *).$$

$$c = C = b\,\frac{m-p}{m}\cdot\frac{n-p}{n}\cdot\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m-p}{m-n}\cdot\frac{p}{n}\right)^{\frac{p}{n-p}}.$$

C) При $c < C$, будемъ имѣть

$$\varphi(x) > 0, \text{ при } x < \beta_1 \text{ и } x > \beta_2;$$

$$\varphi(x) = 0, \quad » \quad x = \beta_1 \text{ и } x = \beta_2;$$

$$\varphi(x) < 0, \quad » \quad \beta_1 < x < \beta_2.$$

Но прежде чѣмъ воспользуемся этими свойствами $\varphi\,(x)$ для изслѣдованія свойствъ $f(x)$, мы докажемъ еще два предложенія, а именно:

1) *Въ случаѣ $c = C$, непремѣнно α не равно β.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ опредѣленія $f(x)$, по предварительному замѣчанію въ началѣ статьи, слѣдуетъ, что

$$\left(\frac{m-p}{m-n}\right)^{\frac{1}{n-p}} > 1.$$

Принимая притомъ въ соображеніе видъ $f'(x)$, очевидно получимъ

$$\alpha < \left(\frac{b}{a}\cdot\frac{p}{n}\cdot\frac{m-p}{m-n}\right)^{\frac{1}{n-p}}.$$

---

*) Эта формула получается или изъ формулы (3), или изъ сравненія положительнаго корня уравненія

$$\varphi'(x) = nx^{p-1}\left(x^{n-p} - \frac{b}{a}\cdot\frac{m-p}{m-n}\cdot\frac{p}{n}\right) = 0$$

съ условіемъ:

Но по вышесказанному въ выводѣ B) мы имѣемъ

$$\beta = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{m-p}{m-n} \cdot \frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-p}},$$

слѣдовательно

$$\beta > \alpha.$$

2) *Въ случаѣ* $c < C$, *непремѣнно* $\alpha < \beta_2$, такъ какъ очевидно $\beta_2 > \beta$, и по сейчасъ доказанному $\alpha < \beta$.

Сличая теперь эти предложенія съ формулою (13) и найденными выше свойствами $\varphi(x)$, мы придемъ къ слѣдующимъ результатамъ:

I. Minimum $f(x)$ для положительныхъ значеній x, больше нуля, въ случаяхъ: $c > C$; $c = C$; и $c < C$ когда $\alpha < \beta_1$.

II. Minimum $f(x) = 0$, когда $c < C$, и притомъ $\alpha = \beta_1$.

III. Minimum $f(x) < 0$, когда $c < C$ и $\alpha > \beta_1$.

Приступимъ теперь къ изложенію нѣкоторыхъ свойствъ $\psi(x)$ и $\theta(x)$. По виду этихъ функцій не трудно убѣдиться въ слѣдующемъ:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(x) > 0, \text{ при } x > \gamma; \\ &\psi(x) = 0, \text{ » } x = \gamma; \\ &\psi(x) < 0, \text{ » } x < \gamma; \\ \text{и}\quad &\theta(x) > 0, \text{ при } x > \delta; \\ &\theta(x) = 0, \text{ » } x = \delta; \\ &\theta(x) < 0, \text{ » } x < \delta. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (14)$$

Сравнивъ эти результаты съ формулою (13), получимъ

1) Minimum $f(x) > 0$, когда $\alpha < \gamma$, или $\alpha < \delta$.

2) Minimum $f(x) = 0$, при $\alpha = \gamma$, или $\alpha = \delta$.

3) Minimum $f(x) < 0$, при $\alpha > \gamma$, и $\alpha > \delta$.

Такъ какъ Minimum $f(x)$ при данномъ $f(x)$ непремѣнно имѣетъ опредѣленный знакъ, то въ силу сейчасъ полученныхъ и предъидущихъ выводовъ: I, II и III, заключаемъ, что въ одно и то же время должны существовать условія:

$$\alpha > \beta_1, \alpha > \gamma, \text{ и } \alpha > \delta,$$

или

$$\alpha = \beta_1, \alpha = \gamma; \text{ и } \alpha = \delta,$$

или

$$\alpha < \beta_1, \alpha < \gamma; \text{ и } \alpha < \delta.$$

И такъ, если обозначимъ чрезъ ε одинъ изъ корней: β_1, γ, или δ, то вслѣдствіе выводовъ: 1), 2), 3) и I, II, III будемъ имѣть:

a) Minimum $f(x) > 0$, при x положительномъ, когда c не $< C$, или когда $c < C$, и притомъ $\alpha < \varepsilon$. Очевидно, что при этихъ условіяхъ уравненіе $f(x) = 0$ не можетъ имѣть положительныхъ корней.

b) Minimum $f(x) = 0$, когда $\alpha = \varepsilon = \beta_1 = \gamma = \delta$. Въ этомъ случаѣ, очевидно, α или $\varepsilon = \beta_1 = \gamma = \delta$ и есть двойной корень уравненія $f(x) = 0$.

c) Minimum $f(x) < 0$, когда $\alpha > \varepsilon$. При этомъ условіи легко видѣть, что уравненію $f(x) = 0$, удовлетворяютъ два различныя положительныя числа: x_1 и x_2, и что при этомъ имѣемъ

$$x_1 < \alpha < x_2.$$

Докажемъ теперь, что $C > C^\circ$. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ

$$\frac{m-p}{m}\left(\frac{m-p}{m-n}\right)^{\frac{p}{n-p}} = z, \quad \frac{n-p}{m-p} = v,$$

то получимъ

$$\frac{dz}{dp} = \frac{nz}{(n-p)^2}\cdot\left[-v - \log(1-v) = \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3}\ldots\ldots\right],$$

Отсюда выходитъ, что z возрастаетъ съ возрастаніемъ p отъ нуля до n, а потому здѣсь всегда $z > 1$. Вслѣдствіе этого и значенія C° (10), очевидно $C > C^{\circ}$. По той же причинѣ въ теоремѣ не помѣщено условіе: $c < C$.

Остается доказать неравенства

$$x_1 < \varepsilon_1 < x_2 < \beta_2,$$

которыя выводимъ слѣдующимъ образомъ.

Отъ подстановленія x_1 и x_2 вмѣсто x въ тождества (11) получимъ

$$\begin{aligned} -x_1 f'(x_1) &= a\,(m-n)\,\varphi(x_1) \\ &= -(m-n)\,\psi(x_1) \\ &= -(m-p)\,\theta(x_1) \end{aligned}$$

и

$$-x_2 f'(x_2) = a\,(m-n)\,\varphi(x_2).$$

Но такъ какъ вслѣдствіе неравенства

$$x_1 < a < x_2$$

и на основаніи вида $f'(x)$ непремѣнно

$$f'(x_1) < 0, \text{ и } f'(x_2) > 0,$$

то

$$\varphi(x_1) > 0, \quad \text{и} \quad \varphi(x_2) < 0,$$

$$\psi(x_1) < 0, \ \theta(x_1) < 0,$$

а отсюда, на основаніи вывода C) и формулы (14),

$$x_1 < \beta_1 < x_2 < \beta_2,$$

$$x_1 < \gamma, \text{ и } x_1 < \delta.$$

Слѣдовательно

$$x_1 < \varepsilon < x_2 < \beta_2,$$

что и требовалось доказать.

Третья Теорема.

Четырехчленное уравненіе вида

$$f(x) = x^m - ax^n - bx^p + c = 0$$

имѣетъ *всегда* два положительные корня: x_1 и x_2, когда c не больше C', гдѣ C' означаетъ бо́льшую изъ величинъ:

$$b \cdot \frac{m-p}{m} \left(\frac{b \cdot p}{m}\right)^{\frac{p}{m-p}}, \text{ и } \quad a \cdot \frac{m-n}{m} \left(a \cdot \frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}};$$

и въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто *по крайней мѣрѣ* одно изъ неравенствъ:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < \left(b \cdot \frac{p}{m}\right)^{\frac{1}{m-p}} < x_2 \\ \text{и} \\ x_1 < \left(a \cdot \frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}} < x_2. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Кромѣ того мы можемъ доказать еще слѣдующія свойства этого уравненія.

Обозначимъ чрезъ α положительный корень уравненія

$$f'(x) = mx^{p-1} - anx^{n-1} - bpx^{p-1} = 0,$$

чрезъ β положительный корень уравненія

$$\varphi(x) = x^n + \frac{b}{a} \cdot \frac{m-p}{m-n} x^p - \frac{cm}{a(m-n)} = 0;$$

чрезъ γ положительный корень уравненія

$$\psi(x) = x^m + b \cdot \frac{n-p}{m-n} x^p - \frac{cn}{m-n} = 0;$$

чрезъ δ положительный корень уравненія

$$\theta(x) = x^m - a \cdot \frac{n-p}{m-p} x^n - \frac{cp}{m-p} = 0;$$

чрезъ ε же — одинъ изъ корней β, γ, или δ, гдѣ $\varphi(x)$ $\psi(x)$ и $\theta(x)$ опредѣляются тождествами:

$$\left.\begin{aligned} f(x)-\frac{x}{m}f'(x) &= -a\frac{(m-n)}{m}\varphi(x) \\ f(x)-\frac{x}{n}f'(x) &= -\frac{m-n}{m}\psi(x) \\ \text{и}\quad f(x)-\frac{x}{p}f'(x) &= -\frac{m-p}{p}\theta(x). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Тогда уравненіе $f(x)=0$ не имѣетъ положительныхъ корней, если $\alpha<\varepsilon$. Оно имѣетъ два равные положительные корня, когда $\alpha=\varepsilon$. Въ этомъ случаѣ двойной корень уравненія равенъ α или ε. Наконецъ, въ случаѣ $\alpha>\varepsilon$, данное уравненіе имѣетъ два различные положительные корня, удовлетворящіе неравенствамъ

$$x_1<\varepsilon<\alpha<x_2.$$

Доказательство. Если положимъ

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= f(x)+ax^n = x^m-bx^p+c \\ f_2(x) &= f(x)+bx^p = x^m+ax^n-c \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

и внесемъ въ формулы (3), (5) и (9) *) вмѣсто

$$b,\ a,\ m \text{ и } n,$$

соотвѣтствующія имъ выраженія въ (17), а именно:

$$c,\ b,\ m \text{ и } p,$$

и

$$c,\ a,\ m, \text{ и } n;$$

---

*) Подъ этими формулами мы подразумѣваемъ выраженія:

$$x=\left(a\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}},\quad x_1<\left(a\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}<x_2$$

и

$$f(x)<0, \text{ при } x_1<x<x_2.$$

то будемъ вправѣ сдѣлать слѣдующія заключенія:

1) Величина $f_1(x)$, при $x=\left(\frac{bp}{m}\right)^{\frac{1}{m-p}}$, будетъ отрицательною или нулемъ, смотря по тому, будетъ ли c меньше или равно

$$b\cdot\frac{m-p}{m}\cdot\left(\frac{bp}{m}\right)^{\frac{p}{m-p}}.$$

2) Величина $f_2(x)$, при $x=\left(a\cdot\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}$, равна или меньше нуля, когда соотвѣтственно

$$c \overline{\overline{<}}\, b\cdot\frac{m-n}{m}\cdot\left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}.$$

И такъ въ случаѣ c не $> C'$ наименьшая изъ

$$f_1(x), \text{ при } x=\left(b\cdot\frac{p}{m}\right)^{\frac{1}{m-p}}$$

и

$$f_2(x), \text{ при } x=\left(a\cdot\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

никогда не можетъ быть больше нуля. Но по положенію (17), очевидно, при $x>0$,

$$f(x)<f_1(x), \quad \text{и } f(x)<f_2(x);$$

слѣдовательно *по крайней мѣрѣ одно изъ* значеній $f(x)$ при

$$x=\left(\frac{bp}{m}\right)^{\frac{1}{m-p}} \text{ или } x=\left(\frac{an}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

непремѣнно будетъ отрицательнымъ.

Принимая притомъ во вниманіе общія свойства алгебраическихъ уравненій, мы очевидно придемъ къ тому результату, *что въ случаѣ c не $> C'$ уравненіе $f(x)=0$ имѣетъ всегда два различные положительные корня, которые удовлетворяютъ или одному или каждому изъ неравенствъ* (15), какъ это сказано въ началѣ нашей теоремы.

Займемся теперь прочими ея частями. Подставляя α вмѣсто x въ тождества, опредѣляющія функціи: $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\theta(x)$, получимъ

$$f(\alpha) = -a \cdot \frac{m-n}{m} \varphi(\alpha)$$

$$= -\frac{m-n}{n} \psi(\alpha)$$

$$= -\frac{m-p}{p} \theta(\alpha);$$

или

$$\text{minimum } f(x) = -a \cdot \frac{m-n}{m} \varphi(\alpha)$$

$$= -\frac{m-n}{n} \psi(\alpha)$$

$$= -\frac{m-p}{p} \theta(\alpha);$$

такъ какъ $f(\alpha)$ и есть наименьшее значеніе $f(x)$, при положительномъ x, что доказывается точно такимъ же образомъ, какъ для подобнаго значенія $f(\alpha)$ въ предъидущихъ теоремахъ.

Изъ вида же $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\theta(x)$ слѣдуетъ, что

$\varphi(\alpha) > 0$, когда $\alpha > \beta$;

$\varphi(\alpha) = 0$, » $\alpha = \beta$;

$\varphi(\alpha) < 0$, » $\alpha < \beta$;

$\psi(\alpha) > 0$, когда $\alpha > \gamma$;

$\psi(\alpha) = 0$, » $\alpha = \gamma$;

$\psi(\alpha) < 0$, » $\alpha < \gamma$;

$\theta(\alpha) > 0$, когда $\alpha > \delta$;

$\theta(\alpha) = 0$, » $\alpha = \delta$;

$\theta(\alpha) < 0$, » $\alpha < \delta$;

слѣдовательно будемъ имѣть

$$\begin{array}{lll} \text{minimum } f(x) > 0, & \text{когда } \alpha < \beta, & \alpha < \gamma, \text{ или } \alpha < \delta; \\ \text{»} \quad f(x) = 0, & \text{»} \quad \alpha = \beta, & \alpha = \gamma, \text{ или } \alpha = \delta; \\ \text{»} \quad f(x) < 0, & \text{»} \quad \alpha > \beta, & \alpha > \beta, \text{ или } \alpha > \delta. \end{array}$$

Отсюда видно, что въ одно и то же время должны существовать условія:

$$\alpha > \beta, \alpha > \gamma, \text{ и } \alpha > \delta;$$

или

$$\alpha = \beta, \alpha = \gamma, \text{ и } \alpha = \delta;$$

или

$$\alpha < \beta, \alpha < \gamma, \text{ и } \alpha < \delta.$$

Принимая при томъ въ соображеніе общія свойства уравненій, очевидно придемъ къ слѣдующимъ заключеніямъ, а именно:

A) Въ случаѣ $\alpha < \varepsilon$, уравненіе $f(x) = 0$ не можетъ имѣть положительныхъ корней.

B) Въ случаѣ $\alpha = \varepsilon$, каждая изъ этихъ величинъ въ одно время удовлетворяетъ уравненіямъ: $f(x) = 0$, и $f'(x) = 0$, а потому α или ε и есть двойной корень уравненія $f(x) = 0$.

C) Въ случаѣ же $\alpha < \varepsilon$, уравненіе $f(x) = 0$ имѣетъ два положительные корня: x_1 и x_2, удовлетворяющіе условію

$$x_1 < \alpha < x_2.$$

Послѣ того остается доказать неравенство $x_1 < \varepsilon$. Оно получается слѣдующимъ образомъ.

Изъ тождествъ (16) выходитъ

$$\begin{aligned} x_1 f'(x_1) &= a(m-n)\varphi(x_1) \\ &= (m-n)\,\psi(x_1) \\ &= (m-p)\,\theta(x_1). \end{aligned}$$

Но въ силу неравенства $x_1 < \alpha$, и по виду $f'(x)$ имѣемъ $f'(x) < 0$; слѣдовательно

$$\varphi(x_1) < 0,\ \psi(x_1) < 0,\ \theta(x_1) < 0,$$

откуда, принимая въ соображеніе видъ $\varphi(x)\ \psi(x)\ \theta(x)$, очевидно получимъ искомое неравенство: $x_1 < \varepsilon$.

Четвертая Теорема.

Всякое четырехчленное уравненіе вида

$$f(x) = x^m - ax^n + bx^p + c = 0$$

только *тогда* можетъ имѣть положительные корни, когда

$$\left.\begin{array}{l} b < a\,.\,\dfrac{m-n}{m-p}\,.\left[a\,.\,\dfrac{n-p}{m-p}\right]^{\frac{n-p}{m-n}} \\ \text{и} \\ c < a.\,\dfrac{m-n}{m}.\,\left(a.\,\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (18)$$

Если это условіе выполнено, то присутствіе положительныхъ корней въ данномъ уравненіи зависитъ еще отъ слѣдующихъ условій.

Обозначимъ чрезъ β положительный корень уравненія чрезъ

$$\varphi(x) = x^n - \frac{b}{a}\,.\,\frac{m-p}{m-n}\,x^p - \frac{cm}{a(m-n)} = 0,$$

γ положительный корень уравненія

$$\psi(x) = x^m - b\,.\,\frac{n-p}{m-n}\,x^p - \frac{c\,.\,n}{m-n} = 0;$$

чрезъ δ положительный корень уравненія

$$\theta(x) = x^m - a\,.\,\frac{n-p}{m-p}\,.\,x^n - \frac{c\,.\,p}{m-p} = 0;$$

чрезъ ε же — одну изъ величинъ:

$$\beta,\ \gamma,\ \text{и}\ \delta;$$

гдѣ φ, ψ и $\theta(x)$ выводятся изъ тожествъ

$$\left.\begin{aligned} f(x)-\frac{x}{m}f'(x)&=-a\,.\frac{m-n}{m}\varphi(x)\\ f(x)-\frac{x}{n}f'(x)&=-\frac{m-n}{n}\psi(x)\\ f(x)-\frac{x}{p}f'(x)&=-\frac{m-p}{p}\theta(x); \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(19)$$

и

и наконецъ изобразимъ чрезъ α_1 меньшій, чрезъ α_2 — большій положительный корень уравненія

$$f'(x)=mx^{p-1}\left[x^{m-p}-\frac{an}{m}x^{n-p}+\frac{bp}{m}\right]=0.$$

Тогда данное уравненіе не имѣетъ положительныхъ корней въ случаѣ $\alpha_2<\varepsilon$. Оно имѣетъ два равные положительные корня, и этотъ двойной корень равенъ α_2 или ε, когда $\alpha_2=\varepsilon$. Оно же имѣетъ два различные положительные корня: x_1 и x_2, когда $\alpha_2>\varepsilon$; притомъ будетъ

$$\alpha_1<x_1<\varepsilon<\alpha_2<x_2.$$

Для *доказательства* сдѣлаемъ сперва

$$\left.\begin{aligned} f_1(x)&=x^{-p}\,[f(x)-c]=x^{m-p}-ax^{n-p}+b;\\ f_2(x)&=f(x)-bx^p=x^m-ax^n+c. \end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(20)$$

и

Замѣнивъ потомъ величины

$$b,\ a,\ m \text{ и } n$$

формулъ (6), (7) и (8) соотвѣтственно величинами

$$b,\ a,\ m-p, \text{ и } n-p,$$

и

$$c,\ a,\ m \text{ и } n,$$

относящимися къ (20), мы наконецъ, на основаніи *слѣдствія* изъ первой теоремы, дойдемъ до слѣдующихъ результатовъ, а именно:

a) Функція $f_1(x)$, при x положительномъ, только тогда можетъ сдѣлаться отрицательнымъ числомъ, когда $b < B_o$, гдѣ

$$B_o = a \cdot \frac{m-n}{m-p} \cdot \left(a \cdot \frac{n-p}{m-p}\right)^{\frac{n-p}{m-n}}.$$

b) Функція $f_2(x)$, при $x > 0$, никогда не можетъ сдѣлаться меньше нуля, если

$$c \text{ не } < a \cdot \frac{m-n}{m}\left(a \cdot \frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m-n}}.$$

Слѣдовательно или $f_1(x)$ или $f_2(x)$ не способна, при $x > 0$, сдѣлаться отрицательною величиною, когда не выполнены въ одно время условія (18). Изъ положенія же (20) выходитъ

$$\begin{aligned} f(x) &= x^p f_1(x) + c \\ &= f_2(x) + bx^p; \end{aligned}$$

и потому очевидно, что $f(x)$ никогда не можетъ равняться нулю, если условія (18) не имѣютъ мѣста въ одно и то же время, какъ это сказано въ началѣ нашей теоремы.

Изслѣдуемъ теперь свойства положительныхъ корней уравненія $f'(x) = 0$. Такъ какъ множитель mx^{p-1} функціи $f'(x)$ очевидно не имѣетъ вліянія на ея положительные корни, а другой ея множитель

$$\frac{f'(x)}{mx^{p-1}} = x^{m-p} - \frac{an}{m} x^{n-p} + \frac{bp}{m}$$

совершенно того же вида, какъ $f(x)$ первой теоремы; то на основаніи этой теоремы, подставивъ въ формулы (1), (2), (3) и (4) вмѣсто

$$b, a, m, \text{ и } n$$

соотвѣтствующія имъ здѣсь выраженія:

$$\frac{bp}{m}, \frac{an}{m}, m-p, \text{ и } n-p,$$

найдемъ слѣдующія свойства.

1) Уравненіе $f'(x) = 0$ не имѣетъ положительныхъ корней, когда $b > B$, положивъ для краткости

$$a \cdot \frac{n}{p} \cdot \frac{m-n}{m-p} \left[a \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{n-p}{m-p}\right]^{\frac{n-p}{m-n}} = B.$$

2) Оно имѣетъ два равные положительные корня, когда $b = B$.

3) Оно имѣетъ два различные положительные корня: α_1 и α_2, въ случаѣ $b < B$.

Принимая притомъ во вниманіе, что на основаніе извѣстнаго свойства непрерывныхъ функцій, въ случаяхъ $b > B$ и $b = B$, $f(x)$ неспособна сдѣлаться ни minimum ни maximum; и что при $x = 0$ уже $f(x) > 0$; легко увидимъ, что данное уравненіе въ этихъ случаяхъ не можетъ имѣть положительныхъ корней.

Это же свойство $f(x)$, а именно, что она, при b не $< B$, начиная съ $x =$ нулю до безконечности, *непрерывнымъ образомъ* возрастаетъ съ возрастаніемъ x, послужитъ намъ доказательствомъ того, *что $f'(x)$ должна имѣть два различные положительные корня, когда b не $> B_o$.*

Въ самомъ дѣлѣ, если для краткости изобразимъ

$$\left(a \cdot \frac{n-p}{m-p}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

чрезъ μ, то по значенію $f(\alpha)$ первой теоремы и выводу а) здѣсь будемъ имѣть

$$f_1(\mu) \text{ не } > 0, \text{ при } b \text{ не } > B_o.$$

Изъ положенія (20) же слѣдуетъ

$$f(\mu) = \mu^p f_1(\mu) + c;$$

слѣдовательно

$$f(\mu) \text{ не } > c,$$

или

$$f(\mu) \text{ не } > f(0),$$

такъ какъ $f(0) = c$.

И такъ $f(x)$ не возрастаетъ *непрерывнымъ образомъ* между предѣлами: $x = 0$, и $x = \infty$, когда b не $> B_o$.

Но это, по вышесказанному, было бы невозможно, если бы въ то же время b не $< B$; слѣдовательно въ одно и то же время удовлетворены условія

$$b < B, \text{ и } b \text{ не } > B_o\text{*)}.$$

И потому въ силу предъидущаго вывода 3) заключаемъ, *что уравненіе, въ случаѣ* b не $> B_o$, $f'(x)$ *имѣетъ всегда два различные положительные корня.*

Посмотримъ теперь, какова $f(x)$ въ случаѣ $b < B_0$, въ которомъ, по сейчасъ доказанному, уравненіе $f'(x)$ имѣетъ два различные положительные корня: α_1 и α_2.

Обративъ вниманіе на знаки послѣднихъ членовъ $f(x)$, мы очевидно вправѣ заключить, что $f(\alpha_1)$ всегда будетъ *положительною* и maximum и что $f(\alpha_2)$ будетъ minimum.

На основаніи этихъ свойствъ $f(\alpha_1)$ и $f(\alpha_2)$ можемъ сдѣлать слѣдующія заключенія, а именно:

A) Данное уравненіе $f(x) = 0$, даже въ случаѣ $b < B_0$, только *тогда* имѣетъ положительные корни, когда

$$f(\alpha_2) \text{ не } > 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \textbf{(21)}$$

B) Это уравненіе имѣетъ два равные положительные корня, и этотъ двойной корень равенъ α_2, когда

$$f(\alpha_2) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \textbf{(22)}$$

C) И наконецъ уравненіе имѣетъ два различные положительные корня: x_1 и x_2, когда

$$f(\alpha_2) < 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \textbf{(23)}$$

и въ этомъ случаѣ непремѣнно:

$$\alpha_1 < x_1 < \alpha_2 < x_2.$$

---

*) По этой же причинѣ формула (19) содержитъ въ себѣ, какъ частный случай, условіе: b не $< B$.

Доказавъ все это, въ тождества (19) вмѣсто x подставляемъ α_2, что намъ дастъ

$$f(\alpha_2) = -a\frac{m-n}{m}\varphi(\alpha_2)$$

$$= -\frac{m-n}{n}\psi(\alpha_2)$$

$$= -\frac{m-p}{p}\theta(\alpha_2).$$

Но изъ вида функцій: $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\theta(x)$ слѣдуетъ, что

$$\varphi(\alpha_2) < 0, \text{ когда } \alpha_2 < \beta;$$

$$\varphi(\alpha_2) = 0, \quad \text{»} \quad \alpha_2 = \beta;$$

$$\varphi(\alpha_2) > 0, \quad \text{»} \quad \alpha_2 > \beta;$$

$$\psi(\alpha_2) < 0, \quad \text{»} \quad \alpha_2 < \gamma;$$

$$\psi(\alpha_2) = 0, \quad \text{»} \quad \alpha_2 = \gamma;$$

$$\psi(\alpha_2) > 0, \quad \text{»} \quad \alpha_2 > \gamma;$$

$$\theta(\alpha_2) < 0, \quad \text{»} \quad \alpha_2 < \delta;$$

$$\theta(\alpha_2) = 0, \quad \text{»} \quad \alpha_2 = \delta;$$

$$\theta(\alpha_2) > 0, \quad \text{»} \quad \alpha_2 > \delta;$$

слѣдовательно будемъ имѣть

$$f(\alpha_2) > 0, \text{ когда } \alpha_2 < \beta,\ \alpha_2 < \gamma, \text{ или } \alpha_2 < \delta;$$

$$f(\alpha_2) = 0, \quad \text{«} \quad \alpha_2 = \beta,\ \alpha_2 = \gamma, \text{ или } \alpha_2 = \delta;$$

$$f(\alpha_2) < 0, \quad \text{«} \quad \alpha_2 > \beta,\ \alpha_2 > \gamma, \text{ или } \alpha_2 > \delta.$$

Такъ какъ $f(\alpha_2)$ не можетъ имѣть болѣе *одного* значенія, то, въ силу этихъ формулъ, должны существовать въ одно и то же время условія:

$$\alpha_2 > \beta, \alpha_2 > \gamma, \text{ и } \alpha_2 > \delta;$$

или

$$\alpha_2 = \beta, \alpha_2 = \gamma, \text{ и } \alpha_2 = \delta;$$

или

$$\alpha_2 < \beta, \alpha_2 < \gamma, \text{ и } \alpha_2 < \delta.$$

Вслѣдствіе этого и значенія ε, предъидущія формулы, опредѣляющія $f(\alpha_2)$, могутъ быть представлены въ слѣдующемъ видѣ:

$$f(\alpha_2) > 0, \text{ когда } \alpha_2 < \varepsilon,$$

$$f(\alpha_2) = 0, \quad » \quad \alpha_2 = \varepsilon,$$

$$f(\alpha_2) < 0, \quad » \quad \alpha_2 > \varepsilon.$$

Отсюда видно, что условія (21), (22) и (23) соотвѣтственно тождественны съ условіями:

$$\alpha_2 \text{ не } < \varepsilon, \quad \alpha_2 = \varepsilon, \quad \text{и} \quad \alpha_2 > \varepsilon.$$

Слѣдуетъ еще доказать неравенство $x_1 < \varepsilon$, которое получимъ слѣдующимъ образомъ.

Подставляя x_1 вмѣсто x въ тождества (19), получимъ

$$\begin{aligned} x_1 f'(x_1) &= a(m-n)\varphi(x_1) \\ &= (m-n)\psi(x_1) \\ &= (m-p)\,\theta(x_1). \end{aligned}$$

Но такъ какъ вслѣдствіе неравенства C):

$$\alpha_1 < x_1 < \alpha_2$$

и на основаніи формулы (9), непремѣнно

$$f'(x_1) < 0,$$

то и

$$\varphi(x_1) < 0, \psi(x_1) < 0, \text{ и } \theta(x_1) < 0;$$

а для этого, какъ показываетъ видъ этихъ функцій, необходимо

$$x_1 < \beta,\ x_1 < \gamma, \text{ и } x_1 < \delta;$$

т. е.

$$x_1 < \varepsilon.$$

Пятая Теорема.

Относительно существованія и предѣловъ положительныхъ корней всякаго четырехчленнаго уравненія вида

$$f(x) = x^m - ax^n + bx^p - c = 0$$

можно доказать слѣдующія предложенія:

I. Если положимъ

$$B = a \cdot \frac{n}{p} \cdot \frac{m-n}{m-p} \left(a \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{n-p}{m-p}\right)^{\frac{n-p}{m-n}}$$

$$C = b \cdot \frac{m-p}{m} \cdot \frac{n-p}{n} \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{m-p}{m-n} \cdot \frac{p}{n}\right)^{\frac{p}{n-p}};$$

и будетъ имѣть $b = B$ и $c = C$, то уравненіе имѣетъ три равные положительные корня, и этотъ тройной корень есть

$$x = \left(\frac{c}{b} \cdot \frac{m}{m-p} \cdot \frac{n}{n-p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left[\frac{b}{a} \cdot \frac{m-p}{m-n} \cdot \frac{p}{n}\right]^{\frac{1}{n-p}}$$

$$= \left(a \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{n-p}{m-p}\right)^{\frac{1}{m-n}} = \left(b \cdot \frac{p}{m} \cdot \frac{n-p}{m-n}\right)^{\frac{1}{m-p}}$$

$$= \left(\frac{c}{a} \cdot \frac{p}{n-p} \cdot \frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(c \cdot \frac{n}{m-n} \cdot \frac{p}{m-p}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

II. Это же уравненіе, кромѣ предъидущаго случая, только *тогда* имѣетъ три положительные корня, когда въ одно время выполнены четыре слѣдующія условія, а именно когда

$$b < B,\ c < C,\ \alpha_1 \text{ не } < \varepsilon_1, \text{ и } \alpha_2 \text{ не } < \varepsilon_2;$$

здѣсь α_1 означаетъ меньшій; α_2 — больщій положительный корень уравненія

$$f'(x) = mx^{m-1} - anx^{n-1} + bpx^{p-1} = 0;$$

а ε_1 — какую ни есть изъ величинъ:

$$\beta_1, \gamma_1, \text{ и } \delta_1;$$

ε_2 — какую ни есть изъ величинъ:

$$\beta_2, \gamma_2 \text{ и } \delta_2;$$

гдѣ β_1 есть меньшій, β_2 — больщій положительный корень уравненія

$$\varphi(x) = x^n - \frac{b}{a} \cdot \frac{m-p}{m-n} x^p - \frac{cm}{a(m-n)} = 0,$$

γ_1 — меньшій, γ_2 — больщій положительный корень уравненія

$$\psi(x) = x^m - b.\frac{n-p}{m-n} x^p + \frac{c.n}{m-n} = 0;$$

δ_1 — меньшій, δ_2 — больщій положительный корень уравненія

$$\theta(x) = x^m - a.\frac{n-p}{m-p} x^n + \frac{c.p}{m-p} = 0;$$

функціи же $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\theta(x)$ связаны съ $f(x)$ и $f'(x)$ тождествами:

$$\left.\begin{aligned} f(x) - \frac{x}{m} f'(x) &= -a\frac{(m-n)}{m}\varphi(x) \\ f(x) - \frac{x}{n} f'(x) &= -\frac{m-n}{n}\psi(x) \\ f(x) - \frac{x}{p} f'(x) &= -\frac{m-p}{p}\theta(x). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

III. Если при всемъ томъ имѣемъ, что

$$\alpha_1 = \varepsilon_1, \text{ или } \alpha_2 = \varepsilon_4;$$

то два изъ трехъ положительныхъ корней даннаго уравненія равны между собою и равны α_1 или α_2, смотря потому, какое изъ этихъ равенствъ имѣетъ мѣсто. Что же касается третьяго корня, то онъ больше двойнаго корня, въ случаѣ $\alpha_1 = \varepsilon_1$, и меньше его, когда $\alpha_2 = \varepsilon_2$.

IV. Если же

$$\alpha_1 > \varepsilon_1, \quad \text{и} \quad \alpha_2 > \varepsilon_2,$$

то данное уравненіе $f(x) = 0$, имѣетъ три различные положительные корня: x_1, x_2 и x_3, заключающіеся между предѣлами:

$$x_1 < \varepsilon_1 < \alpha_1 < x_2 < \varepsilon_2 < \alpha_2 < x_3.$$

Доказательство. Прежде всего замѣтимъ, что функція $f'(x)$ здѣсь та же самая, что $f'(x)$ въ четвертой теоремѣ, а $\varphi(x)$ та же самая, что $\varphi(x)$ во второй теоремѣ, а потому свойства уравненій: $f'(x) = 0$, и $\varphi(x) = 0$, въ отношеніи ихъ положительныхъ корней, какъ найдено было выше, заключаются въ слѣдующемъ:

1) Уравненіе $f'(x) = 0$ не имѣетъ положительныхъ корней, когда $b > B$.

2) Оно имѣетъ два равные положительные корня, когда $b = B$, и въ этомъ случаѣ двойной корень уравненія есть

$$\alpha = \left(\frac{an}{m} \cdot \frac{n-p}{m-p}\right)^{\frac{1}{m-n}} = \left(b . \frac{p}{m} . \frac{n-p}{m-n}\right)^{\frac{1}{m-p}} = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{m-p}{m-n} \cdot \frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-p}} \text{*)} \quad \mathbf{(25)}$$

---

*) Мы найдемъ эти выраженія для α, положивъ

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f'(x)}{mx^{p-1}}\right] = \frac{d}{dx}\left(x^{m-p} - a\frac{n}{m}\,x^{n-p} + \frac{bp}{m}\right) = 0,$$

и сравнивая потомъ найденный положительный корень съ условіемъ:

$$b = B = a . \frac{n}{p} \cdot \frac{n-p}{m-p} \cdot \left(a . \frac{n}{m} \cdot \frac{n-p}{m-p}\right)^{\frac{n-p}{m-n}}$$

3) Это же уравненіе имѣетъ всегда два различные положительные корня: α_1 и α_2, когда $b < B$.

Въ этомъ случаѣ имѣемъ *вопервыхъ*, на основаніи *) формулы (5), что

$$\alpha_1 < \left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m-p}{m-n}\cdot\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-p}} < \left(b\cdot\frac{p}{m}\cdot\frac{n-p}{m-p}\right)^{\frac{1}{m-p}} < \left(a\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{n-p}{m-p}\right)^{\frac{1}{m-n}} <_2; \quad \textbf{(26)}$$

и *вовторыхъ*, въ силу формулы (9), что

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0, \text{ при } x < \alpha_1 \text{ и } x > \alpha_2 \\ f'(x) = 0, \text{ при } x = \alpha_1 \text{ и } x = \alpha_2 \\ f'(x) < 0, \text{ когда } \alpha_1 < x < \alpha_2. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \textbf{(27)}$$

4) При $c > C$, функція $\varphi(x)$ для положительныхъ x всегда больше нуля.

5) При $c = C$, уравненіе $\varphi(x) = 0$ имѣетъ два равные положительные корня, и этотъ двойной корень есть

$$\beta = \left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m-p}{m-n}\cdot\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-p}} = \left(\frac{c}{b}\cdot\frac{m}{m-p}\,\frac{n}{n-p}\right)^{\frac{1}{p}} \quad . \quad \textbf{(28)}$$

Кромѣ того въ этомъ случаѣ при x положительномъ и не $= \beta$ всегда

$$\varphi(x) > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \textbf{(29)}$$

---

*) Если въ неравенства (5) подставимъ вмѣсто

$$x_1,\ b,\ a,\ m,\ n \text{ и } x_2,$$

соотвѣтственныя имъ выраженія

$$\alpha_1,\ \frac{bp}{m}\cdot\frac{an}{m},\ m-p,\ n-p, \text{ и } \alpha_2,$$

относящіяся къ уравненію

$$x^{m-p} - \frac{an}{m}x^{n-p} + \frac{bp}{m} = 0,$$

то получимъ неравенство (26).

6) Когда $c < C$, тогда уравненіе $\varphi(x) = 0$ имѣетъ два различные положительные корня β_1 и β_2, и на основаніи неравенства $\beta_1 < \beta < \beta_2$, имѣемъ

$$\beta_1 < \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{m-p}{m-n} \cdot \frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-p}} < \beta_2 \quad . \quad . \quad . \quad \textbf{(30)}$$

Кромѣ того, на основаніи формулы (9), при положительномъ значеніи x, будетъ

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) > 0, \text{когда } x < \beta_1 \text{ и } x > \beta_2 \\ \varphi(x) = 0, \text{когда } x = \beta_1 \text{ и } x = \beta_2 \\ \varphi(x) < 0, \text{когда } \beta_1 < x < \beta_2. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad \textbf{(31)}$$

Изслѣдуемъ теперь нѣкоторыя свойства $\psi(x)$ и $\theta(x)$. Внеся въ формулы (2), (3), (5), (8) и (9) вмѣсто

$$b,\ a,\ m,\ n,\ x,\ x_1, \text{ и } x_2$$

соотвѣтствующія имъ выраженія въ $\psi(x)$ и $\theta(x)$, а именно:

$$\frac{c \cdot n}{m-n},\quad b.\frac{n-p}{m-u},\ m,\ p,\ \gamma,\ \gamma_1, \text{ и } \gamma_2;$$

и

$$\frac{c \cdot p}{m-p},\quad a.\frac{n-p}{m-p},\ m,\ n,\ \delta,\ \delta_1, \text{ и } \delta_2;$$

и положивъ для краткости

$$b.\frac{m-p}{m}.\frac{n-p}{n}\left(b.\frac{n-p}{m-u}.\frac{p}{m}\right)^{\frac{p}{m-p}} = C',$$

$$a.\frac{n-p}{p}.\frac{m-n}{m}\left(a.\frac{n}{m}.\frac{n-p}{m-p}\right)^{\frac{n}{m-n}} = C'';$$

получимъ слѣдующіе результаты:

7) Уравненіе $\psi(x) = 0$ имѣетъ два равные положитель-

ные корня, когда $c = C'$. Обозначивъ этотъ двойной корень чрезъ γ, имѣемъ

$$\gamma = \left(b.\frac{p}{m}.\frac{n-p}{m-n}\right)^{\frac{1}{m-p}} = \left(\frac{c}{b}.\frac{m}{m-p}.\frac{n}{n-p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(c.\frac{n}{m-n}.\frac{p}{m-p}\right)^{\frac{1}{m}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \textbf{(32)}$$

8) Когда $c < C'$, тогда уравненіе $\psi(x) = 0$ имѣетъ два положительные корня: γ_1 и γ_2, удовлетворяющіе неравенству

$$\gamma_1 < \left(b.\frac{p}{m}.\frac{n-p}{m-n}\right)^{\frac{1}{m-p}} < \gamma_2 \text{ *)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \textbf{(33)}$$

Въ этомъ случаѣ, по формулѣ (9), будетъ

$$\left.\begin{array}{l} \psi(x) > 0, \text{ при } x < \gamma_1 \text{ и } x > \gamma_2 \\ \psi(x) = 0, \quad \text{»} \quad x = \gamma_1 \text{ и } x = \gamma_2 \\ \psi(x) < 0, \quad \text{»} \quad x < \gamma_1 \text{ и } x < \gamma_2. \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad \textbf{(34)}$$

9) Если $c = C''$, то уравненіе $\theta(x) = 0$ имѣетъ двойной положительный корень. Назвавъ его δ, будемъ имѣть

$$\delta = \left(a.\frac{n-p}{m-p}.\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}} = \left(\frac{c}{a}\,\frac{p}{n-p}.\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left(c.\frac{p}{m-p}.\frac{n}{m-n}\right)^{\frac{1}{m}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \textbf{(35)}$$

10) Если $c < C''$, то уравненію $\theta(x) = 0$ удовлетворяютъ два положительные корня: δ_1 и δ_2, и притомъ

$$\delta_1 < \left(a.\frac{n}{m}.\frac{n-p}{m-p}\right)^{\frac{1}{m-n}} < \delta_2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \textbf{(36)}$$

---

*) Получается изъ (5), если имѣть въ виду неравенство:

$$x_1 < \left(a.\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}} < x_2.$$

Кромѣ того въ этомъ случаѣ, на основаніи (9), имѣемъ

$$\left.\begin{array}{l} \theta(x) > 0, \text{ при } x < \delta_1 \text{ и } x > \delta_2 \\ \theta(x) = 0, \quad » \quad x = \delta_1 \text{ и } x = \delta_2 \\ \theta(x) < 0, \quad » \quad \delta_1 < x < \delta_2. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (37)$$

Изъ всего этого мы выводимъ еще нѣкоторыя заключенія, которыя намъ понадобятся впослѣдствіи:

A) Сличивъ сперва между собою формулы (25) и (28), и сравнивая ихъ потомъ съ (32) и (35), увидимъ, что при $b = B$ и $c = C$ будемъ имѣть:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta \text{ *)}.$$

---

*) Это не случайно, что при $c=C$, и $b=B$, α, β, γ и δ равны между собою. Въ необходимости этого равенства можно удостовѣриться слѣдующимъ образомъ.

Изъ тождества

$$f(x) - \frac{x}{m} f'(x) = -a\frac{m-n}{m}\varphi(x)$$

легко видѣть, что уравненіе $f'(x)=0$ только тогда имѣетъ три равные положительные корня, когда уравненія $f'(x)=0$ и $\varphi(x)=0$ имѣютъ два общіе равные корня. Но по вышесказанному относительно свойствъ этихъ уравненій, они только тогда имѣютъ по два равные корня, когда существуютъ въ одно и то же время условія: $b=B$ и $c=C$. Слѣдовательно, если положить, что въ настоящемъ случаѣ α не $=\beta$, то наше уравненіе $f'(x)=0$ не могло бы имѣть трехъ равныхъ положительныхъ корней. А на самомъ дѣлѣ оно можетъ имѣть такое число равныхъ корней, какъ сейчасъ покажемъ.

Если въ случаѣ $b = B$, въ $f(x)$ подставимъ α — двойной корень уравненія: $f'(x) = 0$ — вмѣсто x, то a priori можемъ сказать, что величина $S = x^m - ax^n + bx^p$ непремѣнно будетъ положительнымъ числомъ. Ибо S не можетъ быть нулемъ по той причинѣ, что тогда уравненіе: $x^m - ax^n + bx^p = 0$ содержало бы этотъ корень α три раза, что очевидно невозможно. Величина же S не можетъ быть отрицательною и равною $-T$ потому, что въ такомъ случаѣ уравненіе $x^m - ax^n + bx^p + T = 0$ должно было бы содержать корень α три раза, что также невозможно. И такъ S непремѣнно должно быть положительною величиною. Слѣдовательно, если возьмемъ $c=S$, то уравненіе

$$f(x) = x^m - ax^n + bx^p - c = 0$$

содержитъ корень α три раза.

По этому нельзя допустить, что α не равно β. Отсюда мы очевидно вправѣ заключить, что $(x-\alpha)^2$ или $(x-\beta)^2$ есть общій множитель $f(x)$ и $f'(x)$. Прини-

$$\left.\begin{aligned}&=\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{m-p}{m-n}\cdot\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-p}}=\left(b\cdot\frac{p}{m}\cdot\frac{n-p}{m-n}\right)^{\frac{1}{m-p}}\\&=\left(a\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{n-p}{m-p}\right)^{\frac{1}{m-n}}=\left(\frac{c}{b}\cdot\frac{m}{m-p}\cdot\frac{n}{n-p}\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{p}{n-p}\cdot\frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(c\cdot\frac{p}{m-p}\cdot\frac{n}{m-n}\right)^{\frac{1}{m}}.\end{aligned}\right\}\quad\textbf{(38)}$$

B) Изъ формулъ (26) и (28) выходитъ, что при $c=C$ и $b<B$,

$$\alpha_1<\beta<\alpha_2,$$

вслѣдствіе чего, по формуламъ (29) и (27), здѣсь всегда будетъ

$$\varphi(\alpha_1)>0,\ \text{и}\ \varphi(\alpha_2)>0\quad.\ .\ .\ .\ .\quad\textbf{(39)}$$

$$a\,f'(\beta)<0.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\quad\textbf{(40)}$$

C) Въ случаѣ: $b<B$, и $c<C$, какъ видно изъ формулъ (26) и (30), будемъ имѣть

$$\alpha_1<\beta_2;\ \text{и}\ \alpha_2>\beta_1,$$

откуда, на основаніи формулъ (31), получимъ

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(\alpha_1)>0,\ \text{при}\ \alpha_1<\beta_1\\&\varphi(\alpha_1)=0,\ \text{при}\ \alpha_1=\beta_1\\&\varphi(\alpha_1)<0,\ \text{при}\ \alpha_1>\beta_1\\ \text{и}\quad&\varphi(\alpha_2)>0,\ \text{при}\ \alpha_2>\beta_2\\&\varphi(\alpha_2)=0,\ \text{при}\ \alpha_2=\beta_2\\&\varphi(\alpha_2)<0,\ \text{при}\ \alpha_2<\beta_2\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\quad\textbf{(41)}$$

мая притомъ въ соображеніе тождества (24), легко увидимъ, что каждая изъ функцій $\psi(x)$ и $\theta(x)$ содержитъ въ себѣ множителемъ $(x-\alpha)^2$ или $(x-\beta)^2$. И потому α и β суть въ одно время двойные корни $\psi(x)$ и $\theta(x)$. Слѣдовательно

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta.$$

Кромѣ того въ настоящемъ случаѣ, по (26) и (27), непремѣнно

$$f'(x) < 0, \text{ при } x = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{m-p}{m-n} \cdot \frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-p}} \quad \ldots \quad \textbf{(42)}$$

D) *Въ случаѣ* $b < B$ и c не $> C$, *непремѣнно*

$$c < C' \text{ и } c < C''.$$

Мы дойдемъ до этого результата слѣдующимъ путемъ:

Пусть будетъ β, по прежнему, двойной корень уравненія $\varphi(x) = 0$, при $c = C$; въ случаѣ же $c < C$, пусть β означаетъ

$$\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{m-p}{m-n} \cdot \frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-p}}.$$

Тогда, на основаніи предъидущихъ формулъ (40) и (42),

$$f'(\beta) < 0, \text{ при } c \text{ не } > C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(43)}$$

Кромѣ того, въ силу формулъ (28) и (30), будетъ

$$\varphi(\beta) = 0, \text{ при } c = C,$$

$$\varphi(\beta) < 0, \quad \text{»} \quad c < C.$$

Вставка β вмѣсто x въ первое тождество (24) намъ дастъ

$$f(\beta) - \frac{\beta}{m} f'(\beta) = -a\frac{m-n}{m}\varphi(\beta).$$

Слѣдовательно будемъ имѣть:

$$\left.\begin{array}{l} f(\beta) - \frac{\beta}{m} f'(\beta) = 0, \text{ въ случаѣ } c = C; \\ f(\beta) - \frac{\beta}{m} f'(\beta) > 0, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad c < C. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \textbf{(44)}$$

Изъ опредѣленія $f(x)$, по предварительному замѣчанію въ началѣ статьи, выходитъ

$$m > n > p.$$

Отсюда, вслѣдствіе (43), получимъ

$$-\frac{f'(\beta)}{m} < \frac{-f'(\beta)}{n} < \frac{-f'(\beta)}{p}.$$

Сличивъ это съ (44), найдемъ:

$$f(\beta) - \frac{\beta}{n} f'(\beta) > 0, \text{ при } c \text{ не } > C;$$

$$f(\beta) - \frac{\beta}{p} f'(\beta) > 0, \quad » \quad » \quad .$$

Но съ другой стороны, а именно на основаніи (24), имѣемъ

$$f(\beta) - \frac{\beta}{n} f'(\beta) = -\frac{m-n}{n} \psi(\beta)$$

и

$$f(\beta) - \frac{\beta}{p} f'(\beta) = -\frac{m-p}{p} \theta(\beta);$$

слѣдовательно

$$\psi(\beta) < 0, \text{ и } \theta(\beta) < 0.$$

Принимая вмѣстѣ съ тѣмъ въ соображеніе, что въ силу предъидущихъ выводовъ: 7), 8), 9) и 10), и на основаніи *слѣдствія* изъ первой теоремы, эти функціи, для положительныхъ значеній x, не могутъ сдѣлаться отрицательными числами, когда соотвѣтственно

$$c \text{ не } < C', \text{ и } c \text{ не } < C'';$$

мы очевидно вправѣ заключить, что въ случаяхъ:

$$b < B \text{ а } c = C, \text{ и } b < B \quad \text{а } c < C,$$

непремѣнно

$$c < C', \text{ и } c < C'',$$

что и требовалось доказать.

На этомъ основаніи мы въ теоремѣ умалчивали объ случаяхъ:

$$c < C', \text{ и } c < C''.$$

E) Приступимъ теперь къ разбору нѣкоторыхъ условій, относящихся еще къ случаю:

$$b < B, \text{ и } c < C.$$

Такъ какъ, по сейчасъ доказанному здѣсь, необходимо

$$c < C', \text{ и } c < C'',$$

то въ силу формулъ: (26), (33) и (36) будемъ имѣть:

$$\alpha_1 < \gamma_2 \text{ а } \gamma_1 < \alpha_2;$$

$$\alpha_1 < \delta_2 \text{ а } \delta_1 < \alpha_2;$$

вслѣдствіе чего, изъ (34) и (37) вытекаетъ:

$$\left.\begin{array}{lll} \psi(\alpha_1) > 0, & \text{при} & \alpha_1 < \gamma_1; \\ \psi(\alpha_1) = 0, & \text{»} & \alpha_1 = \gamma_1; \\ \psi(\alpha_1) < 0, & \text{»} & \alpha_1 > \gamma_1; \\ \psi(\alpha_2) > 0, & \text{»} & \alpha_2 > \gamma_2; \\ \psi(\alpha_2) = 0, & \text{»} & \alpha_2 = \gamma_2; \\ \psi(\alpha_2) < 0, & \text{»} & \alpha_2 < \gamma_2; \\ \text{и} & & \\ \theta(\alpha_1) > 0, & \text{»} & \alpha_1 < \delta_1; \\ \theta(\alpha_1) = 0, & \text{»} & \alpha_1 = \delta_1; \\ \theta(\alpha_1) < 0, & \text{»} & \alpha_1 > \delta_1; \\ \theta(\alpha_2) > 0, & \text{»} & \alpha_2 > \delta_2; \\ \theta(\alpha_2) = 0, & \text{»} & \alpha_2 = \delta_2; \\ \theta(\alpha_2) < 0, & \text{»} & \alpha_2 < \delta_2. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (45)$$

Разобравъ свойства функцій: $f'(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\theta(x)$, приступимъ къ доказатетьству нашей теоремы.

Если примемъ въ соображеніе формулу (38) и то, что сказано нами въ примѣчаніи къ этой формулѣ, мы легко придемъ къ тому заключенію, *что въ случаѣ* $b = B$, *и* $c = C$, *и что только въ этомъ единственномъ случаѣ данное уравненіе:* $f(x) = 0$ *содержитъ три равные положительные корня, и что этотъ тройной корень*

$$x = \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{m-p}{m-n} \cdot \frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-p}} = \left(\frac{c}{b} \cdot \frac{m}{m-p} \cdot \frac{n}{n-p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(a \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{n-p}{m-p}\right)^{\frac{1}{m-n}} = \left(b \cdot \frac{p}{m} \cdot \frac{n-p}{m-n}\right)^{\frac{1}{m-p}}$$

$$= \left(\frac{c}{a} \cdot \frac{p}{n-p} \cdot \frac{m}{m-n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(c \cdot \frac{n}{m-n} \cdot \frac{p}{m-p}\right)^{\frac{1}{m}},$$

какъ это было сказано въ первомъ предложеніи теоремы.

Перейдемъ ко второму предложенію теоремы, и займемся сперва случаями:

$$b = B \text{ и } b > B.$$

При этихъ условіяхъ, уравненіе $f'(x) = 0$, по вышесказанному, или имѣетъ два равные положительные корня, или вовсе не имѣетъ положительныхъ корней, и слѣдовательно функція $f(x)$, при положительномъ x, не способна сдѣлаться ни minimum ни maximum. По этому $f(x)$ *безпрерывно* увеличивается съ увеличиваніемъ x, а такъ какъ

$$f(0) < 0, \quad \text{а} \quad f(\infty) = +\infty,$$

то функція $f(x)$ только *одинъ разъ* перемѣняетъ свой знакъ между этими предѣлами. Вслѣдствіе этого, уравненіе $f(x) = 0$ (исключая разсматриваемый выше случай: $b = B$ и $c = C$), не можетъ имѣть болѣе *одного* положительнаго корня.

Посмотримъ, какова $f(x)$ въ случаѣ $b < B$, гдѣ, по вышесказанному, уравненіе $f'(x) = 0$ имѣетъ два неравные положительные корня: α_1 и α_2.

Принимая во вниманіе знакъ предпослѣдняго члена $f(x)$, легко увидимъ, что величина $f(\alpha_1)$ будетъ maximum, а $f(\alpha_2)$ minimum.

Отсюда выходитъ:

$$\text{Если } f(\alpha_1) = 0, \text{ то } f(\alpha_2) < 0;$$

$$\text{»} \quad f(\alpha_1) < 0, \ \text{»} \ f(\alpha_2) < 0;$$

$$\text{»} \quad f(\alpha_2) = 0, \ \text{»} \ f(\alpha_1) > 0;$$

$$\text{»} \quad f(\alpha_2) > 0, \ \text{»} \ f(\alpha_1) > 0.$$

Такъ какъ здѣсь всегда

$$f(0) < 0, \text{ и } f(\infty) > 0;$$

и кромѣ того въ случаяхъ:

$$f(\alpha_1) = 0, \quad f(\alpha_2) = 0,$$

этотъ корень α_1 или α_2 непремѣнно есть двойной корень уравненія $f(x) = 0$, то изъ всего этого можемъ вывести слѣдующія заключенія:

$A°$) Данное уравненіе только *тогда* имѣетъ три положительные корня, когда въ одно и то же время выполнены условія:

$$f(\alpha_1) \text{ не } < 0, \text{ и } f(\alpha_2) \text{ не } > 0,$$

такъ какъ въ противномъ случаѣ, $f(x)$, при положительномъ x, не можетъ болѣе *одного раза* перемѣнить свой знакъ.

$B°$) Въ случаѣ $f(\alpha_1) = 0$, данное уравненіе, кромѣ двойнаго корня α_1, имѣетъ еще третій положительный корень, который больше α_2. Это видно изъ того, что

$$f(\alpha_1) = 0, f(\alpha_2) < 0, f(\infty) > 0.$$

$C°$) Въ случаѣ $f(\alpha_2) = 0$, третій положительный корень разсматриваемаго уравненія меньше α_1. Ибо мы имѣемъ

$$f(\alpha_1) > 0, f(0) < 0.$$

D°) Въ случаѣ:

$$f(\alpha_1) > 0 \text{ и } f(\alpha_2) < 0$$

данное уравненіе $f(x) = 0$ имѣетъ три различные положительные корня, удовлетворяющіе неравенствамъ

$$x_1 < \alpha_1 < x_2 < \alpha_2 < x_3 \;, \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

по той причинѣ, что

$$f(0) < 0, f(\alpha_1) > 0, f(\alpha_2) < 0, \text{ и } f(\infty) > 0.$$

Подставивъ теперь въ тождества (24) послѣдовательно α_1 и α_2 вмѣсто x, получимъ

$$\begin{aligned} f(\alpha_1) &= -a\,.\frac{m-n}{m}\varphi(\alpha_1) \\ &= -\frac{m-n}{n}\psi(\alpha_1) \\ &= -\frac{m-p}{p}\theta(\alpha_1) \\ f(\alpha_2) &= -a\,.\frac{m-n}{m}\varphi(\alpha_2) \\ &= -\frac{m-n}{n}\psi(\alpha_2) \\ &= -\frac{m-p}{p}\theta(\alpha_2). \end{aligned}$$

Сличивъ эти уравненія съ выводомъ 4) и формулами (39) (41) и (45), придемъ къ слѣдующимъ заключеніямъ, а именно:

1°) Когда c не $< C$, тогда

$$f(\alpha_1) < 0 \text{ и } f(\alpha_2) < 0.$$

2°) Въ случаѣ же $c < C$, будемъ имѣть

$$f(\alpha_1) > 0, \text{ при } \alpha_1 > \beta_1, \alpha_1 > \gamma_1, \text{ и } \alpha_1 > \delta_1;$$

$$f(\alpha_1) = 0, \quad \text{»} \quad \alpha_1 = \beta_1, \alpha_1 = \gamma_1, \text{ и } \alpha_1 = \delta_1;$$

$$f(\alpha_1) < 0, \quad » \quad \alpha_1 < \beta_1, \; \alpha_1 < \gamma_1, \text{ и } \alpha_1 < \delta_1;$$

и

$$f(\alpha_2) > 0, \text{ при } \alpha_2 < \beta_2, \; \alpha_2 < \gamma_2, \text{ и } \alpha_2 < \delta_2;$$

$$f(\alpha_2) = 0, \quad » \quad \alpha_2 = \beta_2, \; \alpha_2 = \gamma_2, \text{ и } \alpha_2 = \delta_2;$$

$$f(\alpha_2) < 0, \quad » \quad \alpha_2 > \beta_2, \; \alpha_2 > \gamma_2, \text{ и } \alpha_2 > \delta_2;$$

Но такъ какъ каждая изъ $f(\alpha_1)$ и $f(\alpha_2)$ не можетъ имѣть болѣе одного значенія, то всѣ условія, отъ которыхъ зависитъ знакъ этихъ величинъ, должны имѣть мѣсто въ одно и то же время, а потому, вслѣдствіе значенія ε_1 и ε_2 нашей теоремы, можемъ дать послѣдней формулѣ слѣдующій видъ, а именно:

$$f(\alpha_1) > 0, \text{ при } \alpha_1 > \varepsilon_1;$$

$$f(\alpha_1) = 0, \quad » \quad \alpha_1 = \varepsilon_1;$$

$$f(\alpha_1) < 0, \quad » \quad \alpha_1 < \varepsilon_1;$$

и

$$f(\alpha_2) > 0, \quad » \quad \alpha_2 < \varepsilon_2;$$

$$f(\alpha_2) = 0, \quad » \quad \alpha_2 = \varepsilon_2;$$

$$f(\alpha_2) < 0, \quad » \quad \alpha_2 > \varepsilon_2.$$

Слѣдовательно, условіе, чтобы вмѣстѣ было

$$f(\alpha_1) \text{ не } < 0 \text{ и } f(\alpha_2) \text{ не } > 0,$$

зависитъ отъ условія, чтобы въ одно и тоже время было

$$c \text{ не } < C, \; \alpha_1 \text{ не } < \varepsilon_1 \text{ и } \alpha_2 \text{ не } < \varepsilon_2;$$

случай же $f(\alpha_1) = 0$ представится, когда $\alpha_1 = \varepsilon_1$, а случай $f(\alpha_2) = 0$, когда $\alpha_2 = \varepsilon_2$.

Принимая притомъ въ соображеніе предъидущіе выводы: $A°$), $B°$), $C°$) и $D°$), а равно и доказанныя нами выше свойства $f(x)$ въ случаяхъ: $b = B$, и $b > B$, мы наконецъ получимъ слѣдующіе результаты:

a) Уравненіе $f(x) = 0$, *кромѣ случая* $b = B$ и $c = C$, *толь-*

ко тогда имѣетъ три положительные корня, когда въ одно и тоже время имѣютъ мѣсто условія:

$$b < B,\ c < C,\ \alpha_1 \text{ не } < \varepsilon_1 \text{ и } \alpha_2 \text{ не } < \varepsilon_2.$$

b) Когда $\alpha_1 = \varepsilon_1$, *тогда* α_1 *или* ε_1 *есть двойной корень даннаго уравненія, а третій корень онаго больше* α_2.

c) Въ случаѣ $\alpha_2 = \varepsilon_2$, *это уравненіе имѣетъ три положительныхъ корня, изъ которыхъ два равны между собою и равны* α_2 *или* ε_2, *а третій меньше* α_1.

d) Если $\alpha_1 > \varepsilon_1$, *и* $\alpha_2 > \varepsilon_2$, *и положительные корни даннаго уравненія мы обозначимъ чрезъ* x_1, x_2 *и* x_3, *то будемъ имѣть*

$$x_1 < \alpha_1 < x_2 < \alpha_2 < x_3.$$

И такъ намъ остается теперь доказать только неравенство

$$x_1 < \varepsilon_1 < x_2 < \varepsilon_2.$$

Оно выводится слѣдующимъ образомъ:

Подставивъ послѣдовательно x_1 и x_2 вмѣсто x въ тождества (24), получимъ

$$\begin{aligned} x_1 f'(x_1) &= a(m-n)\varphi(x_1) \\ &= (m-u)\ \psi(x_1) \\ &= (m-p)\ \theta(x_1) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x_2 f'(x_2) &= a(m-n)\varphi(x_2) \\ &= (m-u)\ \psi(x_2) \\ &= (m-p)\ \theta(x_2). \end{aligned}$$

Въ силу же неравенства (46)

$$x_1 < \alpha_1 < x_2 < \alpha_2,$$

а поформулѣ (27) имѣемъ:

$$f'(x_1) > 0,\ f'(x_2) < 0,$$

слѣдовательно

$$\varphi(x_1) > 0,\ \varphi(x_2) < 0,$$

$$\psi(x_1) > 0,\ \psi(x_2) < 0,$$

$$\theta(x_1) > 0,\ \theta(x_2) < 0,$$

откуда наконецъ, вслѣдствіе формулъ (31), (34) и (37), получимъ

$$x_1 < \beta_1 < x_2 < \beta_2$$

$$x_1 < \gamma_1 < x_2 < \gamma_2$$

$$x_1 < \delta_1 < x_2 < \delta_2;$$

т. е.

$$x_1 < \varepsilon_1 < x_2 < \varepsilon_2.$$