ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVIII.

PARS PRIOR.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXX.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXVIII. Janvier —— Juin.

GÉOGRAPHIE

ANATOMIE

MÉTÉOROLOGIE

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVIII. Pars prior.

cum tabulis XIII. aeri incisis.

MATHEMATICA

ANDR.

PHYSICO-MATHEMATICA

PHYSICA

ASTRONOMICA

HISTOIRE.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES

SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXVIII.

Janvier —— Juin.

GÉOGRAPHIE.

Profpectus d'une Defcription générale topographique & phyfique de l'Empire de Ruffie, projettée par l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. (*)

Le Comité nommé par S. E. Mr. le Directeur de l'Academie, pour compofer une Géographie topographique et phyfique de la Ruffie a debuté par la publication d'un Profpectus détaillé, qui fe partage en cinq parties principales.

 La

(*) Traduit du Ruffe.

La I^re^ s'occupe de la Géographie générale de l'Empire:
la II^de^ en donne une Hiſtoire générale:
la III^me^ en comprend l'État politique:
la IV^me^ la Géographie particuliere, & enfin
la V^me^ une deſcription phyſique du même Empire.

Premiere Partie principale,

c'eſt à dire

Géographie générale de l'Empire.

Elle ſe diviſe en huit Sections.

Section premiere.

Limites de l'Empire.

1) Du côté de l'Europe, l'Océan ſeptentrional & les deux golfes qu'il forme, la mer blanche & la mer baltique, la Suede, la Pologne, & la Turquie européenne.

2) En Aſie vers le Midi, la mer noire & celle d'Aſov, la Crimée indépendante, le Caucaſe, la mer Caſpiene, le déſert des Kirgiſes borné par le Gouvernement d'Orenbourg, la Mongolie & la Daurie, qui dépendent de la Chine.

3) vers l'Orient la partie ſeptentrionale de l'Océan oriental, le détroit entre l'Aſie & l'Amérique, & enfin

4) vers le Nord, tout l'Océan ſeptentrional, ou la mer glaciale.

Section

Section seconde.

Position de l'Empire sur le globe.

Son étendue par climats & degrés: sa dimension en verstes quarrées d'après le calcul le plus juste auquel on puisse aprocher.

Section troisieme.

Orographie générale de l'Empire· c'est à dire, Description de ses montagnes, se bornant à leur situation, pente, distribution, correspondance, & hauteur proportionée, sans avoir égard à leur exploitation.

1) le Caucase en général, particulierement cette partie qui en est située en Russie, & ses sommets du côté du nord.

2) les monts Krapacs ou Carpathes & leurs bras, qui se repandent jusques dans la Russie.

3) Cette bosse ou ce plateau élevé dans l'intérieur de la Russie européenne, connu des anciens Géographes sous le nom de *Mons alaunus*, dans lequel les couches horizontales de diverses montagnes semblent se réunir, & qui renferme les sources des principaux fleuves de cette partie de l'Empire,

4) les monts septentrionaux situés entre la mer baltique & la mer blanche, n'étant qu'une continuation de la chaine des montagnes de la Scandinavie.

5) les montagnes ouraliques, qui commencent près de la mer blanche & des îles de Nova-zemlia, & leurs branches qui se deployent vers le midi.

6) Les montagnes qui forment la frontiere entre la Sibérie & les autres contrées de l'Asie, & qui sont une branche du grand sisteme des Alpes de l'Asie, laquelle en s'étendant depuis l'Irtiche jusqu'à l'océan oriental, prend des noms divers comme ceux d'Altai, Telezkoi, Sayanskoi & Stanovoi Chrêbet, & appartient par sa pente septentrionale seulement à l'Empire russe. Entre les branches secondaires de cette chaine de montagnes limitrophes la plus remarquable sera celle, qui revient vers le Nord-Est en traversant le cours du Lena & du Yenisei, & qui fournit les eaux aux rivieres qui vont se décharger entre celles-là dans la mer glaciale.

Section quatrieme.

Limites fixes & immuables entre l'Asie & l'Europe dans l'intérieur de la Russie.

Après avoir remarqué les limites, que les Géographes en divers tems se sont avisés d'y mettre arbitrairement, on s'étendra sur celles, que la nature y forme elle même. Ce sont les montagnes ouraliques, qui separent, comme l'on sait, la Sibérie d'avec la Russie; puis cette grande suite de montagnes en couches horizontales, laquelle en commençant de la riviere Bielaya porte entre Casan & Orenbourg le nom d'Oural, & continue entre les rivieres de Samara & d'Oural sous le nom d'Obtschei Sirt, d'où part cette hauteur continue de pays, qui s'étend par les déserts des Calmouques & du Couma, va s'aprocher de la mer d'Asov, & sépare de l'Europe les déserts salés, qui avoisinent la mer Caspiene. C'est

par

par conféquent à cette mer, réputée depuis long tems enfemble avec la mer noire, comme fervant de limites entre l'Europe méridionale & l'Afie mineure, que la nature a fixé des bornes immuables, movennant lesquelles les différentes provínces attribuées tantôt à l'une tantôt à l'autre partie du monde, reftent attachées chacune à la fienne: du moins le circuit de l'Europe en eft une fois pour toutes déterminé au jufte.

Section cinquieme.

Defcription générale des mers fur lesquelles la Ruffie domine & des îles qu'elles forment: leur fituation générale, étendue, golfes principaux, propriétés, flux & reflux, avec un fimple indice des fleuves, qui s'y jettent immediatement.

Ces mers font:
la Cafpiene.
la noire & celle d'Afov.
une partie de la mer baltique.
la mer blanche.
la mer glaciale.
la mer qu'on trouve entre la partie de Nord-Eft de l'Afie & de l'Amérique: enfin les îles fituées dans chacune des dites mers appartenantes à la Ruffie.

Section fixieme.

Defcription des principaux fleuves fuivant leurs fources dans les montagnes marquées ci-deffus, leur cours & écoulement dans les mers mentionnées, qualité & raport entre

entre eux: puis les lacs qu'ils parcourent, ou auxquels ils communiquent. Comme la description suivant la source des fleuves semble être de beaucoup préférable, viennent à detailler:

1) Les eaux qui découlent du grand plateau élévé au milieu de la Russie & des monts septentrionaux, qui s'y joignent de près.

   a) la Dwina qui porte ses eaux dans la mer blanche, & les principales rivieres qui s'y mêlent.

   b) les grands réservoirs d'eaux, comme les lacs d'Onega, de Ladoga, de Plescou & de Peipus, & les rivieres de la Neva & de la Narova qui en sortent, & se jettent dans le golfe de Finlande.

   c) la Duna qui mêle ses eaux à la mer baltique.

   d) le Dnepr qui se décharge dans la mer noire.

   e) le Don ayant son écoulement dans celle d'Asov.

   f) la Wolga qui va se jetter dans la mer Caspiene, & les rivieres qu'elle reçoit dans son lit du côté du Sud.

2) Les fleuves qui se réunissent du côté occidental des montagnes ouraliques.

   a) la Petschora qui mene tous les ruisseaux de la partie septentrionale des monts ouraliques dans la mer glaciale.

   b) la Kama qui se jette elle même dans la Wolga, & y fait décharger moyennant la Bielaya toutes les autres rivieres de moindre grandeur, qui sortent de l'ouest des monts ouraliques.

3) les

3) les Rivieres qui ſortent à l'Eſt des dites montagnes.

a) l'Oural qui prend ſa direction vers l'Oueſt de ces montagnes & ſe décharge dans la mer Caſpiene.

b) les rivieres qui ont leur ſource dans une grande partie de ces montagnes, & qui mêient leurs eaux avec celles du Tobol.

c) les petites rivieres qui ſourdent au Nord des montagnes d'Oural, & vont directement ſe décharger dans l'Obi & dans la mer glaciale.

4) les Fleuves, qui deſcendent de ces grandes montagnes, qui font la barriere de la Sibérie, & leurs branches vers la mer glaciale.

a) l'Irtiche & l'Obi.

b) le Taſſe.

c) le Yeniſei & les rivieres conſidérables qui s'y rendent du côté de l'orient, les trois Toungonsks, & le lac Baical avec ſes rivieres.

d) les petites rivieres entre le Yeniſei & la Lena, qui viennent du Nord de la Toungouska inferieure, & entrent enfin dans la mer glaciale.

e) la Lena & les bras dans les quels elle ſe partage.

f) les rivieres de la Sibérie ſeptentrionale, la Jana, la Chrona, l'Indigirka, Alaſéia & Kowina.

5) le Fleuves découlants de la partie orientale des monts Sibériens, lesquels ſe réuniſſent à l'océan oriental:

a) l'Anadyr:

b) les fleuves du Kamtſchatka.

c) les petites rivieres & les torrents, qui venants des montagnes le long des côtes tombent dans la mer d'Ochotzk, dont le principal eſt nommé Oud.

d) l'Amur, & ſeparément les rivieres qu'il réunit, & qui traverſent la Daurie ruſſienne.

6) C'eſt ici où l'on pourra détailler le voiſinage des rivieres dans tout l'Empire, & la Communication par eau qui en dépend, tant par des canaux que par de courts trajets, qui ſe font par terre.

Section ſeptieme.

Topographie générale de la Ruſſie.

1) de la Ruſſie en général.

a) la conſtitution naturelle, ou les propriétés de cette grande plaine ſelon ſes différentes parties, ſes plateaux élevés & ſes vallées, ſes forêts, déſerts, marais, régions fertiles ou ſteriles, & les autres varietés du ſol, qui s'étendent ſur plus d'un ſeul gouvernement.

b) les différents climats dans la Ruſſie ſeptentrionale tempérée, & dans la méridionale, ſuivant des obſervations météorologiques: la culture des pays.

2) de la Sibérie en général.

a) Sa poſition conſidérée généralement; puis ſa pente depuis les monts ourals vers les Limans ou lacs marécageux de l'Obi, & celle depuis la grande

grande montagne frontiere vers la mer glaciale; ſa région vers le Nord-Eſt élevée & hériſſée de montagnes, celle vers le Sud qui eſt fertile, celle vers le Nord toute couverte de forêts, & enfin la plus voiſine du pole, marécageuſe & ſterile, ainſi que les différentes variétés du ſol.

b) Le climat rude de la Sibérie, & les raiſons qu'on en donne, eu égard à ſa ſituation, à ſes montagnes, & à d'autres circonſtances: les contrées qui ſont cultivées, & à quel point la culture y a été pouſſée, & lesquelles n'en ſont point du tout ſusceptibles.

3) des grands chemins dans l'Empire, de ceux de traverſe, qui ſont néceſſaires & fréquentés à l'ordinaire, comme auſſi de ceux de communication avec les pays limitrophes.

Section huitieme.

Spécification & Critique raiſonnée des cartes géographiques tant terreſtres que marines, qui regardent l'Empire.

Seconde Partie Principale.

Qui comprend l'hiſtoire générale de l'Empire de la Ruſſie & ſe diviſe en deux Sections.

Section premiere.

Points principaux de l'hiſtoire générale de la Ruſſie.

a) Hiſtoire ancienne de la Ruſſie, ſes anciens habitans,

tans, & les peuples qui s'y ſont établis, ou y ont fait des paſſages.

b) Hiſtoire moyenne, qui regarde la Ruſſie diviſée en pluſieurs principautés, leur ſort, ſéparation & réunion: On pourra traiter en même tems de l'ancienne diviſion en Ruſſie grande & petite, & en Ruſſie blanche & rouge.

c) l'Hiſtoire moderne eu égard ſur tout à ſes nouvelles conquêtes, & aux païs nouvellement découverts.

Section ſeconde.

Hiſtoire particuliere des nations ſujettes à la Ruſſie.

a) Spécification des nations.

b) Deſcription détaillée de chaque nation ſuivant leurs tiges différentes, l'hiſtoire de leur ſoumiſſion, puis leurs habitations, leur nombre, religion, maniere de vivre, moeurs & uſages, enfin leurs habillemens, économie, langue, arts & métiers.

La deſcription & la diviſion des nations ſelon les quinze tiges ou races principales, paroiſſent préférables.

Les voiçi:

I. Nations eſclavones.

a) Ruſſes par toute l'étendue de l'Empire.

b) Polonois dans les Gouvernements de Polotzk & de Mohilow.

II.

II. Nations allemandes.

a) Allemands en Esthonie & en Livonie.

b) Suédois dans la Finlande russe.

III. Nations lettonienes.

a) Lettoniens proprement dits, en Livonie, & dans la Livonie auparavant nommée polonoise.

b) Lithuaniens dans les Gouvernements de Polotzk & de Mohilow.

IV. Nations finlandoises.

a) Finlandois proprement dits dans les Gouvernements de Wibourg & de St. Pétersbourg.

b) Esthoniens dans le Gouvernement de Reval, & dans une partie de celui de Livonie.

c) Les Lives dans le Cercle de Riga près de Salis.

Nations qui descendent, à juger par la langue qu'elles parlent, des Finlandois.

d) Lapons dans le Cercle de Kola.

e) Permiens dans la Province de Permie située dans le Gouvernement de Casan & dans les régions septentrionales de l'Obi.

f) Sirianiens dans le Cercle de Iarensk.

g) Wotiakes dans les Gouvernements de Casan & d'Orenbourg.

h) Tscheremisses dans les Gouvernements de Casan, de Nischnei-Novogorod, & d'Orenbourg.

i) Tschouvasses.

k) Tepteres dans la Baschkierie mêlés de Tschouvasses, de Tscheremisses & de Wotiakes.

l) Mordouanes & ceux qui en descendent, les Moschkans, et les Ersans dans les Gouvernements de Nischnei-Novogorod, de Casan et d'Orenbourg.

m) Woguls aux deux côtés des monts ourals.

n) Ostiakes sur l'Obi jusqu'à Narim & Surgoutsch dans le Cercle de Beresow.

V. Nations Tatares.

1) Tatares proprement dits.

a) Ceux de Casan dans le Cercle du même nom, des quels descendent 1) les Tatares dans le Cercle de Woronése, dans la Ville de Kasimov & ses environs, 2) ceux dans le Gouvernement d'Orenbourg près de la Sakmara, 3) ceux à Kargal 4) ceux à Uffa, 5) les Itschiens près de la riviere d'Itsch, dans la Province d'Iset, 6) les Tschatzkiens à Tomsk & aux environs.

b) Ceux de Tobolsk aux deux rives du Tobol, depuis la frontiere des Kirguises jusqu'à l'embouchure du Tobol.

c) Ceux de Tomsk aux deux bords du Tom, depuis la montagne de Kousnezk jusqu'à l'embouchure du Tom.

d) Melesses dans le Cercle de Tomsk.

e) Tuliberdiens à la rive droite du Tom au dessus de Kousnezk.

f) Abinzes en rémontant le Tom, sur les montagnes & les rivieres de Kondoma & de Mrasa.

g)

g) Ceux d'Obi sur la riviere de ce nom, depuis l'embouchure du Tom jusqu'au dessus de Narim.

h) Barabinzes entre l'Irtiche & l'Obi dans le désert Barabinzien.

i) Turinskes au bord de la Tura depuis les frontieres des Wogals jusqu'à l'embouchure de la Tura.

k) Aiales à l'embouchure de la Tara.

l) Katschinzes au bord occidental du Yenisei entre les rivieres de Jusset & d'Abakan.

m) Tschulimes sur la riviere de Tschulima, lesquels se sont partagés en trois branches.

n) Udinskiens entre les montagnes près de Grenskoi-Ostrog.

o) Kaschiens.

p) Yarenskes & leurs différentes branches sur l'Abakan, le Kysir, le Tess & la Yurba.

q) Biriousses & leurs trois branches autour du Taschtip.

r) Kobinzes sur le Taschtip, le Taia, & l'Abakan.

s) Beltires sur l'Abakan.

t) Sagayes le long de l'Aschkisch, de Basa, de Sur, & dans le désert sur l'Abakan.

2) Mankates ou Nogaiens au bord de l'Agtuba depuis Tschigit jusqu'à la mer Caspiene.

3) Meschtscheräques dans le Gouvernement d'Orenbourg.

4) Baschkires dans le Gouvernement d'Orenbourg & dans la Province de Permie.

5)

5) Kirguiſes de la horde moyenne, & de la petite dans le déſert des Kirguiſes.

6) Jakoutes ſur la Lena & au bord oriental de ce fleuve.

7) Teléoutes ſur le Tom depuis les hautes montagnes jusqu'à Kouſnezk.

8) Téleſſes au bord du lac d'Oltan.

9) Les habitans du Caucaſe, dont une partie eſt d'origine tatare, & dont l'autre ne porte que le nom de Tatares.

a) Trouchménes à l'embouchure du Kouma.

b) Oſſettes dans le milieu du Caucaſe.

c) Tſchitſchenges dans la partie orientale de la grande Kabardie.

d) Kuſtengues ou Kiſténes en Kiſtézie ſur la Sunsha.

e) Koumukes ſur la Sunsha inférieure & le Téreck.

VI. Nations Samoyedes.

1) Samoyedes proprement dits dans la partie la plus ſeptentrionale de la Ruſſie ſur la Lena.

a) Européens, c'eſt à dire ceux qui habitent les cercles de Meſen, de Kanan, & de Yugorie.

b) Sibériens.

1) Taſiens ſur le Tas entre l'Obi & le Yeniſei.

2) Mangaſéens ſur le Tourachan & autour de la Ville de Mangaſéa.

2) Nations qui deſcendent de Samoyedes:

a) Moraſes ou Oſtiakes de Narim en rémontant le

Sur-

Surgut, sur le bord de l'Obi jusqu'à Narim, & à l'embouchure des rivieres Ketta & Tom.

b) Kaimaches dans le district de Krasnoiarsk à la source des rivieres de la Kana & de la Mana.

c) Ostiakes du Yenisei dans le district de Krasnoiarsk.

d) Kustimes sur la rive gauche du Tom.

e) Yourales entre l'Obi & le Yenisei, sur le bord de celui-ci, & en dedans du païs.

f) Kotovces sur la Kana.

g) Kaibales sur le Yenisei.

h) Karagasses dans le territoire d'Udinsk.

i) Moutores sur le Yenisei, l'Obi & Touba.

k) Ossanes dans le district de Yenisei, sur l'Ussolka.

l) Saiotes au pied des Montagnes Saianes, & au bord oriental du Yenisei au delà de l'Ussa.

VII. Nations Mongales.

a) Mongales proprement dits dans le cercle de Sélenguinski.

b) Derbétes
c) Torgautes } sur le Wolga.
d) Siongores

e) Bourates dans les Gouvernements d'Irkutzki & de Tobolski.

VIII. Toungouses & leurs différentes branches, depuis le Yenisei jusqu'à l'Océan oriental, & depuis le Golfe de Pensinski jusqu'aux frontieres de la Chine.

IX. Kamtschadales dans la partie méridionale du Kamtschatka.

X. Koryäkes dans la partie ſeptentrionale du Kamtſchatka, aux environs du Golfe de Penſinski, ſur l'Océan oriental presque jusqu'à l'Anadyr.

XI. Kouriles dans le Kamtſchatka méridional, & dans les îles Kouriles entre le Kamtſchatka & le Japon.

XII. Aléoutes dans les îles qu'on a nouvellement découvertes dans le detroit qui ſépare l'Aſie de l'Amérique.

XIII. Arinces dans le diſtrict de Krasnoiarsk.

XIV. Youkaguires près de la mer glaciale jusqu'à la ſource de l'Anadyr.

XV. Tſchouktſches dans la partie de Nord-Eſt de la Sibérie.

Colonies de peuples voiſins.

1) Tatares.
   a) Bouckhares dans la Province d'Uffa & à Tobolsk.
   b) Chivinces.
   c) Taſchkentiens. } dans les Gouvernements d'Orenbourg, de Caſan, & d'Aſtracan.
   d) Turkeſtaniens. }
2) Perſans dans le Gouvernement d'Aſtracan.
3) Indiens à Aſtracan.
4) Finlandois près de Waldaï.
5) Polonois ſur l'Irtiche, & dans le diſtrict de Sélenguinski.
6) Allemands dans les Gouvernements de Pétersbourg & d'Aſtracan.

7)

7) Grecs à Néshin.

8) Serviens dans la Nouvelle Russie.

9) Moldaves & Valaques dans la forteresse de St. Dmitrii.

Troisieme Partie principale.

ou

Description générale politique de l'Empire.

Section premiere.

Du Gouvernement.

1) De la souveraine Puissance, ses droits, titres & armes· de la Cour, des Ordres de Chevalerie, & de la classification des Rangs.

2) De la forme du Gouvernement, du Sénat, des Colleges de l'Empire, & des Loix.

3) De la forme des Magistrats particuliers dans les différentes provinces de l'Empire.

Section seconde.

De l'État militaire.

1) Des forces de terre, & de leur direction.

2) Des forces navales, de l'Amirauté & du département de l'Intendance, comme aussi des forêts, qui fournissent le bois pour la construction des vaisseaux &c.

Section troisieme.

De la Religion dominante
& de celles qui sont tolérées: du Clergé

1) Du Synode, & d'autres états ecclésiastiques.

2) Des Couvents & du nombre de leurs habitans, de leur entretien, & reglement.

3) Du nombre des Prêtres, & des desservants d'Eglise.

4) Des Religions tolérées, & de leur reglement ecclésiastique, sur tout de celles des peuples en Asie.

Section quatrieme.

Du Magistrat civil, & de sa forme.

1) Chambres de justice: la Police.

2) Etablissements d'éducation.

3) Histoire des Beaux arts & des Sciences.

Section cinquieme.

De la Population de l'Empire.

1) Supputation comparative du nombre des habitants & du terrein d'une province à l'autre.

2) Différents ordres du peuple, leur droits, immunités & charges ou impôts: le nombre que chaque ordre renferme, & leur rélation entr'eux dans les diverses provinces de l'Empire.

Section sixieme.

Raisonnement sur le raport actuel des occupations économiques.

Des membres de l'Etat qui consument, & de ceux qui produisent: de gens à capitaux, d'officiers publics, de do-

domeſtiques, de marchands & de merciers, de malades & de mendiants, conſidérés comme des membres de l'Etat qui ne ſont que conſumer. De ceux qui s'occupent à la chaſſe, à la pêche, ou à l'entretien du bétail, qui labourent la terre, ou travaillent aux mines, de ceux qui exercent les arts mechaniques & les métiers, de ceux qui ſont emploiés dans les fabriques & dans les manufactures, regardés comme des membres de l'Etat, qui produiſent.

Section ſeptieme.

Détail des richeſſes naturelles, & des prérogatives de l'Empire.

Des climats, de l'étendue des terres labourées calculée par Deſſätines; des fruits de la campagne qui ſervent à la nourriture; du lin, du chanvre, du coton avec le détail de leur produit annuel, & le raiſonnement ſur leur proportion: des terres incultes tant de celles qui ſont labourables, que de celles qui ſont tout à fait ingrates; des contrées riches en bois, à quoi l'on joindra des obſervations foreſtieres générales, & un calcul par raport au gain: du bois de charpente, & du bois à bruler, des nattes, du goudron, de la térébentine & de la ſoude: des différents paturages, des vignes & des avantages qu'on pourra tirer de leur culture, des plantes ſauvages qui ſont un objet du commerce; de la diſtillation de l'eau de vie, de la braſſerie de la biere, du vinaigre & de l'hydromel; du raport économique de l'entretien des abeilles, des vers à ſoie; des bêtes à cornes, & des autres animaux domeſtiques, de la nourriture de la volaille; de la chaſſe & de la pêche; enfin des revenus qu'on retire du ſalpetre, du ſouffre, de la poudre à canon, du vitriol, de l'alun, du ſel, des briques, de la chaux, du plâtre, des meules, des pierres à aiguiſer, des pierres de taille, & des métaux, comme auſſi des minéraux qu'on a manqué de mettre à profit, & de l'uſage auquel on pourroit les employer.

Section huitieme.

Du Commerce.

1) Du Commerce intérieur; des poſtes & des trajets en ſe raportant aux obſervations précédentes ſur les chemins, les paſſages & les communications par eau, des voitures; des exemtions de peage, des beſoins réciproques des places principales de l'Empire, des étapes, des foires & des marchés ordinaires; des poids & des meſures, de l'argent, où l'on fera l'hiſtoire de monnoies ruſſes & du monnoïage actuel, de la quantité des eſpeces tant intérieures qu' étrangeres qui circulent, & de leur proportion à la ſomme des marchandiſes; de l'établiſſement des banques & de la ſomme en argent de banque, ſuivie de la comparaiſon des eſpeces effectives à celles en papier; de l'intérêt de l'argent, & du crédit; du cours & du droit de change; du prix moyen des marchandiſes &c.

2) du Commerce extérieur de l'Empire & de la commodité que les ports, la navigation & les traités de commerce y apportent; des différens Bureaux de la douane, de leur reglements & diſtribution, du tarif & de la contrebande; de l'exportation annuel-

annuelle de marchandiſes cruës & de vivres, des frais d'exportation; de l'exportation de marchandiſes fabriquées & de leur impôt; de l'entrée de marchandiſes cruës & des droits qu'elles payent, de l'entrée de marchandiſes fabriquées & de leur péage; de la balance du commerce; du Commerce par la mer baltique & la mer blanche avec les autres Puiſſances de l'Europe; du Commerce par terre avec la Pologne, la Pruſſe & les villes de Dantzig, de Breslau & de Leipzig; du Commerce avec la Turquie par terre & par la mer noire; du Commerce entre la Perſe & le Gouvernement d'Aſtracan, de celui entre la Boukharie, les Kirguiſes & le Gouvernement d'Orenbourg, puis de celui qui ſe fait entre la Chine, & la Sibérie, & enfin de celui entre Kamtſchatka & l'Archipel oriental.

Quatrieme Partie principale.

ou

Géographie particuliere de l'Empire de Ruſſie.

Elle ne contient qu'une ſeule ſection.

Diviſion actuelle de l'Empire en ſes Lieutenances & ſes Gouvernements. Dénomination & déſignation d'après certains noms généraux uſités pour les diſtricts.

Voici le plan qu'on s'eſt propoſé de ſuivre dans la deſcription des Lieutenances & des Gouvernements, qui feront l'objet des chapitres ſuivants:

1) Eten-

1) Etendue & frontieres de la Lieutenance ou du Gouvernement. Dimenſion en miles quarrées géographiques. Diviſion en Provinces, Diſtricts & Cercles &c.

2) Qualité ou condition générale: montagnes, plaines, forèts, marais, deſerts, ſols fertiles & ſteriles, où l'on détaillera en même temps plus amplement les principales montagnes & les plateaux.

3) Deſcription plus circonſtanciée qu'elle ne l'a été dans la partie générale, des mers frontieres, (s'il y en a,) de leurs propriétés, golfes, caps, îles &c.

4) Deſcription des eaux courantes, tant des fleuves qui traverſent les Lieutenances & les Gouvernements, que des rivieres moins grandes, & des ruiſſeaux conſidérables qui s'y mêlent.

5) Détail des lacs d'eau douce & d'eau ſalée, des ſources, des eaux minérales, des bains &c.

6) Dénombrement des villes, villages, bourgs & habitations: Le nombre d'habitants & leur diverſité par raport aux nations, & le nombre de chaque eſpece.

7) Précis de l'hiſtoire ancienne & moderne des Gouvernements; des peuples qui les ont habités ou traverſés, enfin des tombeaux & d'autres monuments qui nous ſont reſtés d'eux.

8) Productions de chaque Gouvernement en pierres, minéraux & métaux, celles des regnes végétal & animal. On n'en fera qu'un ſimple indice en renvoyant le lecteur à la partie phyſique.

9) Agri-

9) Agriculture, entretien du bétail, métiers, établissements, fabriques & manufactures; commerce particulier de chaque Gouvernement.

10) Jurisdiction ecclésiastique & séculiere, revenus &c.

11) Enfin selon l'ordre des Provinces ou Districts,

a) Leurs frontieres fixées.

b) Description des villes, forteresses, couvents, villages, fontes de mines, pêcheries, ports & autres habitations remarquables selon l'ordre géographique.

Cinquieme Partie principale.

ou

Description physique de l'Empire & de ses Productions.

partagée en deux livres.

Livre premier.

Minérographie & Minéralogie de la Russie & de la Sibérie enrichie des cartes nécessaires minérographiques.

Introduction.

Nature générale & diversité des montagnes de la Russie.

Section premiere.

Du Caucase.

1) Sa qualité en général, ses différentes especes de montagnes, & ses couches.

2) Les différentes mines qu'on y a decouvertes & d'autres minéraux utiles.

3) Ses ſources d'eaux minérales, & l'uſage qu'on en peut faire.

Section ſeconde.

La Chaine de montagnes continuées des monts Krapacs, les différentes roches qui les compoſent; minéraux utiles & autres objets remarquables.

Section troiſieme.

Les montagnes ſeptentrionales dans l'enceinte de la Ruſſie.

1) Les diverſes eſpeces de roches dont elles ſont compoſées, leur ſite ou poſition naturelle.

2) Les mines qu'on y a ouvertes, & les travaux d'exploitation qui s'y trouvent.

3) Carriéres de marbre & autres minéraux utiles, ſources &c.

Section quatrieme.

La chaine des montagnes d'Oural.

1) Les diverſes roches qui les compoſent, leur poſition, & autres objets qui méritent attention.

2) Les grandes montagnes en couches horizontales de nouvelle formation du côté du couchant & l'abondance de mines de cuivre qu'on y trouve.

3) Les mines dans les montagnes à filons ſurtout du côté du levant de cette chaine, & tous les établiſſements métalliques, qui dépendent de Cathérinenbourg.

4) Car-

4) Carriéres de marbre & autres minéraux très utiles, ſalines, ſources d'eaux minérales &c.

Section cinquieme.

Les Couches dans le plat pays du Continent de la Ruſſie.

1) Leur Poſition, les plateaux qu'elles forment, anciennes traces de la mer, & autres obſervations & remarques générales.

2) Les minéraux & les différentes ſortes de pierres & de terres que ces couches contiennent.

3) Deſcription du déſert uni méridional, ſes riches ſalines, ſes lacs, & différentes eſpeces de ſel.

Section ſixieme.

La Chaine des montagnes Altaïques & toutes celles qui s'inclinent vers l'Obi & l'Irtiche.

1) Les différentes roches qui les compoſent, leur poſition & autres objets curieux.

2) Les riches mines & minieres altaïques.

3) Autres minéraux remarquables qui s'y trouvent.

Section ſeptieme.

Les plaines entre les chaines ouralique & altaïque.

1) Les monts dans les déſerts d'Iſchimsk, & des Kirguiſes.

2) Les métaux & les minéraux qu'on tire de ceux ci, & de ces plaines abondantes en couches.

3) Les lacs ſalés.

Section huitieme.

Les montagnes qui bordent le Yenisei & s'étendent jusqu'au Kossogol.

1) Les diverses sortes de montagnes qui les composent, disposition intérieure, couches, objets mémorables.

2) Les minieres dans le district de Krasnoiarsk & autres filons métalliques sur le Yenisei.

3) Minéraux, lacs salés, sources.

Section neuvieme.

Les contrées montagneuses au delà & autour du Baikal avec celles de Wercholénie.

1) Nature générale de ces contrées, & les différentes sortes de roches, dont elles sont formées.

2) Les mines de Nertschinsk.

3) Les filons métalliques qu'on exploite dans le désert des Bratski, dans les environs du Baikal & en remontant la Lena.

4) Minéraux & détails de tout ce qui mérite d'être remarqué de ces montagnes.

5) Bains chauds, & sources d'eaux minérales, lacs salés &c.

Section dixieme.

Les montagnes qui en prenant leur direction à travers de la Lena entre la Podkamennaia & la Toungouska inferieure, s'avancent du côté du couchant jusqu'au dessus

deſſus du Yeniſei, dont les couches s'aprochent de la mer glaciale, autant que nous en avons connoiſſance.

Section onzieme.

La partie montagneuſe de la Sibérie du côté du Levant, d'après le peu de connoiſſance qu'on en a.

Section douzieme.

La Presqu'île de Kamtſchatka & les îles ſituées vis a vis du Japon & de l'Amérique; deſcription des minéraux, & des métaux, qui s'y trouvent, autant qu'on en peut avoir de nouvelles.

Section treizieme.

Minéralogie de la Ruſſie.

Elle comprendra une deſcription détaillée de la nature & de la compoſition variée des montagnes mentionées ci deſſus:

1) Hydrologie.
2) Halurgie.
3) Minéraux combuſtibles.
4) Métaux.
5) Foſſiles.

Livre ſecond.

Deſcription économique & phyſique du regne végétal.

Section premiere.

Les diverſes ſortes du bled qu'on cultive en Ruſſie; détail de l'agriculture & de ſon état dans les différentes provinces de l'Empire, des instruments du labourage, des manieres usitées tant bonnes que mauvaises pour engraisser les champs; conseils pour les perfectioner, comme aussi pour préparer & pour conserver le bled.

Section seconde.

Végétaux dont les racines ou d'autres parties servent à la nourriture; herbes potageres, legumes, racines, épiceries russes de semence & d'herbes, plantes qui appartiennent au genre des concombres, des melons & des arbouses avec leurs especes, culture & préparation: indice général des especes universellement utiles dont l'usage n'est pas encore connu; plantes & racines sauvages propres à la nourriture.

Section troisieme.

Végétaux qui apportent immédiatement un avantage économique.

1) Le lin, ses especes, sa culture & préparation.
2) Le chanvre & d'autres végétaux, dont on pourra se servir à la place du chanvre:
3) Le coton, ses especes, préparation & culture.
4) Végétaux sauvages dont la soie des semences pourra devenir utile.
5) Le houblon.
6) Semences propres à exprimer de l'huile.
7) La culture du tabac.
8) Végétaux, dont la cendre sert pour en faire de la soude.

Section

Section quatrieme.

Végétaux qui peuvent être employés dans les fabriques & dans les manufactures.

1) Plantes & racines bonnes à la teinture, conseils pour les cultiver & pour les bien préparer: spécification de celles qu'on peut semer avec avantage dans diverses contrées marquées de l'Empire; indice des plantes exotiques qu'on pourroit indigéner à la Russie par une culture soigneuse, comme le safran, & la plante qui fournit l'indigo.

2) Plantes & racines bonnes à la tannerie.

Section cinquieme.

Végétaux salutaires & nuisibles pour la Santé.

1) Plantes utiles à la médicine, ou qu'on y pourroit employer; remedes domestiques usités en Russie, remedes pour le bétail.

2) Végétaux vénimeux & malfaisants, dont il faut ajouter le dessin pour prévenir toutes les méprises dangereuses.

Section sixieme.

Herbes qui font les meilleures prairies en Russie & en Sibérie, ou dont on pourroit former des prairies artificielles. Pâturages par raport à leur diverse utilité & à toute sorte de bétail qu'on y fait paître.

Section septieme.

Plantes & arbrisseaux qui aiment le terrein sabloneux & qu'on pourroit semer tant pour fixer ces terreins, que

que pour en faire des pâturages, à mesure que la population s'augmente.

Section huitieme.

Culture de la vigne & moyens de la perfectioner.

Section neuvieme.

Arbres qui portent des fruits en pommes ou à noyaux, leur culture, fruits, & grains sauvages.

Section dixieme.

Culture des meuriers.

Section onzieme.

Arbres forestiers & arbrisseaux qui croissent en Russie: arbres exotiques, qu'on pourroit propager dans l'Empire.

Section douzieme.

Champignons & mousses, leur utilité & leurs qualités nuisibles.

Section treizieme.

Détail général des végétaux spontanées en Russie; désignation des contrées où ils proviennent, & du sol qu'ils aiment préférablement, leur dénomination russe; indice de ceux qui sont odoriférants, & de ceux qui servent d'ornement aux jardins, ou qui se font remarquer par quelque autre qualité, sans répéter ce qui en a été dit plus haut, & sans entrer dans des recherches botaniques. C'est ici où il sera bon de faire mention de ces grands enclos destinés pour la coupe du bois, & de déterminer

enfuite

enſuite auſſi exactement qu'on peut, l'âge qu'il faut aux arbres, rélativement à la qualité du terrein, & aux forêts, pour venir à leur denſité ou dureté néceſſaire, & à quel tems il convient de les abattre, pour en pouvoir tirer le meilleur parti poſſible.

Livre troiſieme.

Le regne animal & les avantages que la Ruſſie en peut recueillir.

Section premiere.

Animaux domeſtiques, & leur entretien.

1) Le Chameau & ſes variétés chez les Calmouques & les autres peuples nomades.

2) Le Cheval, l'Ane & le Mulet.

3) Les Bêtes à corne & leurs variétés encore peu connuës comme le Bufle, & la vache de Tibet à crin de cheval.

4) L'entretien des brebis & l'amélioration de leur race moyennant des béliers étrangers.

5) Les Chêvres & l'utilité qu'on en peut attendre.

6) Les Rennes.

7) Les Pourceaux, & leurs eſpeces exotiques.

8) Les animaux domeſtiques de moindre grandeur qui ſervent à la nourriture, comme le Lapin & le Cochon de mer.

Section ſeconde.

Grands Animaux de chaſſe, auxquels apartiennent:

1) L'Elan.

2) Le Cerf.
3) Le Chevreuil.
4) Le Boeuf ſauvage.
5) Le Bouquetin.
6) Le Mouflon.
7) Les Antilopes.
8) L'animal qui porte le Muſc.
9) Le Sanglier.
10) Les différentes eſpeces de chevaux ſauvages.

Section troiſieme.

Animaux carnaciers, & ceux qui ſont eſtimés par raport à leur fourrure.

1) L'Ours blanc & l'ours terreſtre.
2) Le Glouton.
3) Le Blaireau.
4) Le Loup
5) Le Renard & ſes variétés.
6) L'Iſatis.
7) Le Loup-cervier & les chats ſauvages.
8) Les Loutres.
9) Les Martres zibelines, & les fouines.
10) Le Putois, l'Hermine, & la Civette.
11) Le Caſtor.
12) Le Lievre & ſes variétés.
13) L'Ecureuil & ſes variétés.
14) La Marmotte & ſes variétés.
15) Le Desman ou le Rat musqué.

Section quatrieme.

Animaux qui rongent & fouillent la terre & qui font du mal aux hommes.

1) La Taupe & les autres animaux qui fouillent comme celle-ci la terre.

2) Le Hériffon & fes variétés.

3) Les Souris des champs qui font de grands dégats dans les champs & dans les jardins.

4) Les efpeces de Souris vulgaires, qui caufent du dommage dans les demeures.

Section cinquieme.

Animaux marins dont la pêche eft lucrative, ou pourra le devenir.

1) La Morffe.
2) Les Phoques.
3) Les Baleines.
4) Le Dauphin & fes variétés.

Section fixieme

Oifeaux.

1) Oifeaux de proie comme l'Aigle, le Faucon, l'Autour, les Hiboux.

2) Oifeaux de la famille des Corbeaux.

3) Oifeaux de la famille des Poules.

4) Les petits oifeaux qu'on mange & les autres de volicre.

5) Les Pies, les Alouettes & leurs variétés.

6) Les Hérons & leurs variétés.

7) Les différentes ſortes d'oiſeaux aquatiques.
8) Oiſeaux domeſtiques.

Section ſeptieme.

Poiſſons & Pêche, ſalure & autres préparations de poiſſons.

1) Poiſſons d'eau douce.
   a) L'Eſturgeon & ſes variétés; la colle de poiſſon.
   b) Le Saumon, ſes variétés, & les autres poiſſons paſſagers.
   c) Poiſſons à écailles.
   d) D'autres eſpeces qui n'appartiennent pas aux mentionées.
2) Poiſſons de mer.
   a) Poiſſons de proie.
   b) La Morue & ſes variétés.
   c) Les Harengs & leurs variétés.
   d) Poiſſons plats.
   e) Les eſpeces qui reſtent.

Section huitieme.

Reptiles malfaiſants.

Les Serpens, les Lézards, les Crapauds & les Grenouilles.

Section neuvieme.

Inſectes.

1) L'entretien des abeilles, leur nature & nourriture.
2) L'entretien des vers à ſoie, & les moyens de le perfectioner.

3)

3) La Cochenille.

4) Les Sauterelles ordinaires, & les autres eſpeces de ce genre.

5) Les Vermines vénimeuſes qui font du mal, & qui ſont très incommodes.

6) Les Chenilles & les Scarabées.

7) Les inſectes qui ſervent à la nourriture, comme l'Ecreviſſe, la Crabe.

8) Les inſectes remarquables à cauſe de leurs qualités, & les inſectes utiles, ou qui peuvent le devenir.

Section dixieme.

Animaux Mollusques & Zoophytes.

1) Les limaçons & les autres animaux marins mangeables.

2) La moule à perles des rivieres.

3) Les vermines terreſtres & aquatiques, remarquables les unes par le bien, les autres par le mal, qu'elles nous font.

Section onzieme.

Spécification générale de toutes les eſpeces d'animaux qui ſe trouvent en Ruſſie, leur demeure, & leur dénomination ruſſe ſelon les differents dialectes qu'on parle dans l'Empire.

Extrait d'une Lettre de Mr. *Hähn* Sur-Intendant des Mines écrite à Mr. le Profeſſeur *Pallas*.

De Barnaoul, le 13 Novembre 1777.

Notre petite montagne dite *Serpentine* (Smeyefskaya) s'eſt bien épuiſée depuis votre abſence: cependant elle fournit encore annuellement aſſés de minerai pour la continuation de nos travaux des fonderies. Les ouvrages ſouterrains de *Séménof* ſe pouſſent avec plus d'ardeur que jamais, & fourniſſent ſeuls autant de mines de plomb qu'il en faut pour occuper continuellement ſix fourneaux.

L'hyver paſſé a été ici très doux, à l'exception de quelques bourasques & d'une grande abondance de neige. Le printems a auſſi paru de bonne heure cette année. Nos rivieres étoient déja ſans glaçons dès le 15 d'Avril: leurs débordements ont été petits & de peu de durée. Selon les avis que j'ai reçus de *Smeyefskaya Gora* il s'y montra le 21 Septembre un nuage chargé de beaucoup de parties terreſtres, qui y cauſa d'épaiſſes ténebres. Quelques minutes après ſe fit ſentir l'ouragan, qui pouſſoit devant

vant ſoi le nuage & qui emporta les toits des fabriques qui ſont ſur la *Korboluba*, outre le grand dommage qu'il cauſa dans pluſieurs habitations. Cela ſe paſſa entre 5 & 6 heures du matin. Après 7 heures de la même matinée cette tempête vint avec la même force vers nous: arrivant du Sud-Oueſt, elle renverſa la tuilerie, & arracha tout le toit & les chevrons de la fonderie (*), faiſant ſur ſon chemin encore d'autres ravages ſoit aux maiſons ſoit dans les jardins. Cependant graces aux ſoins de la Providence, ce phénomene redoutable n'a couté la vie ni la ſanté à perſonne. Il auroit pu aiſément en réſulter un incendie, le feu ne manquant pas dans la fonderie, qui étoit d'ailleurs toute pleine de ſcories ardentes: on prévint ce malheur par les bonnes meſures que l'on prit ſur le champ pour l'empêcher. Tous les habitans des endroits par où cet ouragan a paſſé, ſe plaignent du dégât qu'il a fait aux maiſons & aux forêts.

Le 2 de ce mois (Novembre) vers le ſoir nous eumes les premieres bourasques qui nous apporterent une quantité médiocre de neige: elles ſe terminerent le 4 à neuf heures & demie du ſoir par un petit tremblement de terre, qui ſemblable au roulement d'un chariot, paſſa de l'Oueſt à l'Eſt, & ne dura qu'une demie minute: les maiſons & les meubles en furent ébranlés. Nous n'en avions point remarqué depuis l'année 1761, & cette année là ce fut auſſi dans le mois de Novembre que la terre trembla, & cela par un mouvement cylindrique, pendant près de deux minutes.

De-

(*) Cette fonderie a 52 toiſes de long ſur 10½ de large: elle eſt adaptée pour rafraichir le cuivre de roſette & pour purifier l'oeuvre.

Depuis le mois de Juillet jusqu'à la fin d'Octobre, il a régné entre *Smeyefskaya Gora*, & nos environs de l'*Ob*, le long des rivages de ce fleuve, une mortalité subite parmi les chevaux & les boeufs. En recherchant la cause du mal dans les animaux crevés, on a trouvé qu'il provenoit de vers capillaires qu'ils avoient avalés, & dont les petites rivieres, les ruisseaux, & les eaux dormantes ont été toutes remplies cette année. Ces vers avoient pénétré de l'estomac dans les poumons, dans le foie, & même dans le coeur. Il n'en réchappa que les bêtes aux quelles on administra à tems des remedes vermicides & purgatifs, outre lesquels rien ne pouvoit les sauver. Dans ma maison il y eut 9 vaches de malades, & 5 en périrent.

ANA-

ANATOMIE.

Notice touchant un monſtre biforme, dont les deux corps ſont réunis par derriere.

Le 21 de Mai 1778 le Sénat dirigeant notifia à l'Académie que dans le Gouvernement de Twer & nommément dans le Village paroiſſial appellé *Sabeſtilova Gorka*, une femme étoit accouchée d'un monſtre encore vivant à double corps; demandant que l'Académie donnât une inſtruction par écrit touchant la maniere la plus convenable & la plus vraiſemblable de conſerver la vie à ce monſtre & de le ſoigner; ou en cas de mort, de le préſerver de dommage, afin de le faire parvenir à l'Académie. Celle-ci ſe chargea de ce ſoin, & l'inſtruction requiſe fut envoyée au Gouvernement de Twer.

Le monſtre expira au bout de deux mois, & parvint à l'Académie peu de tems après. A ſon aſpect on trouva qu'il étoit de cette ſorte de monſtres humains très rares, où les deux corps qui les compoſent ſont joints par derriere. Les troncs entiers jusqu'à la région des hanches, auſſi bien que les têtes, les bras, & les pieds étoient entierement dégagés. Il n'y avoit que les baſſins qui tinſſent enſemble par la moitié de leur ſurface poſtérieure depuis leurs bords ſupérieurs jusqu'à l'extrémité inférieure de l'*os coccyx*, & il n'y avoit qu'une ſeule ouverture commune pour *l'inteſtinum rectum.*

L'Académie conſerve dans ſa collection 42 monſtres tous différents, & il s'en trouve 60 dans celle du College de Médecine à Moscou, mais entre lesquels il y en a qui ſe reſſemblent. Parmi les uns & les autres on n'en voit aucun de ceux qui ſont biformes dont les corps ſoient réunis ſoit par les baſſins, ſoit dans une autre région de l'épine du dos, ſoit par les occiputs. Il paroit donc que les trois ou quatre monſtres de cette forme dont on a les deſcriptions (en ſuppoſant qu'il ne ſe ſoit gliſſé aucune erreur dans ces deſcriptions, ou dans les idées que les Anatomiſtes ſe ſont faites de leur formation) ſont, conjointement avec celui-ci, les ſeuls que la nature ait produits; ou du moins qu'ils n'ont jamais eu que bien peu de ſemblables.

Dès que l'on ſait par l'obſervation des oeufs couvés comment les diverſes parties du corps ſe forment peu à peu, & dès que l'on connoit la ſtructure interne de la plupart des ſortes de monſtres biformes ordinaires; il n'eſt pas difficile d'expliquer leur formation d'une maniere très ſûre & très ſolide. Mais alors il eſt d'autant plus inconcevable, comment il peut ſe former des monſtres de cette claſſe, dont le corps ſe confondent par derriere: c'eſt c'eſt ce qu'on ne ſauroit expliquer à moins d'en avoir anatomiſé un ſoi même.

Il fut donc plus heureux pour l'anatomie & la phyſiologie que ce monſtre mourût à propos, que s'il eût continué de vivre, & qu'on n'eût pas eu peut-être l'occaſion de l'anatomiſer. D'ailleurs la maniere dont les deux corps s'étoient joints n'auroit pu produire aucun changement dans leurs operations naturelles; & ces deux filles (car c'étoient des corps femelles) auroient rempli chacune ſéparément leurs fonctions vitales comme de coutume, hormis qu'elles ſe feroient ſans doute communiqué des maladies dont le principe auroit été dans les ſucs.

Le monſtre fut donc anatomiſé, & l'on trouva avec étonnement que l'union de ces deux corps étoit bien différente de celle de tous les autres monſtres à deux corps ou à deux têtes, & que la conformation des parties reunies ne reſſembloit point du tout à la ſtructure défigurée de tous les monſtres en général: de façon que ſi l'on veut abſtraire l'idée d'un monſtre de la conformation ſinguliere, mais réductible à certaines regles, que l'on rencontre dans tous les individus de cette claſſe; on ne pourra pas même compter parmi les monſtres ces deux corps joints par une ſimple concrétion.

Voilà donc la ſolution du probleme énigmatique, touchant l'idée que l'on doit ſe faire des monſtres qui conſiſtent en deux corps joints par derriere. Ce ne ſont pas de vrais monſtres, mais des corps doubles, dont la

 ſim-

ſimple concrétion eſt bien éloignée de la conformation extraordinaire & particuliere des monſtres proprement ainſi dits.

On donnera une deſcription détaillée de ces êtres ſinguliers avec les figures néceſſaires dans un traité qui contiendra la deſcription anatomique de toute la collection de monſtres que poſſede l'Académie, & des pieces les plus intéreſſantes de la collection de Moscou.

C. F. Wolff.

ME-

MÉTÉOROLOGIE.

Obſervation d'une Aurore Auſtrale.

vüe à St. Pétersbourg le $\frac{6}{17}$ Fevrier 1778.

A 10 heures du Soir il y eut d'abord une aurore boréale très vive & belle, qui d'ailleurs n'avoit rien d'extraordinaire, ſi ce n'eſt, qu'elle étoit conſiderablement éloignée du point de Nord, vers l'Eſt. Mais en même tems ſe fit voir un autre phénoméne qui paroit remarquable dans l'hiſtoire de ces meteores & intéreſſant pour leur Théorie. C'étoit une Aurore *Auſtrale*, parfaitement ſemblable à celles qu'on voit ordinairement vers le Nord, & placée juſtement au point de Sud.

Un arc lumineux, entrecoupé par des nuées, entouroit un eſpace plus obſcur que le reſte du Ciel, & lançoit de bas en haut jusqu'à une hauteur d'environ 60 degrés, des colomnes radiantes & des jets lumineux, qui ſe diſſipoient en haut par une eſpece de fulguration, comme s'ils étoient agités par le vent qu'il faiſoit alors.

J'ai vû ce phénomene environ une heure entiere: il devint plus foible enſuite & après quelques efforts pour ſe renouveller il diſparut entierement.

Mr. *Grischow* a déja observé ici une lumiere australe le $\frac{6}{17}$ Novembre 1751, mais elle étoit tout à fait fixe & immobile, & ne lançoit point de gerbes. Il en a donné une description détaillée dans le IV[e] Tome des nouveaux Commentaires.

W. L. Krafft.

Hyver de 1777 à 1778.

Cet hyver fut un des plus doux qu'on ait ressenti à St. Pétersbourg.

1. Il neigea pour la premiere fois le 7 Octobre 1777 & pour la derniere fois le 19 Avril 1778. L'intervalle entre ces deux termes est de 194 jours.

2. Il géla pour la premiere fois le 8 Octobre, Therm. $151^{d.}$, & pour la derniere fois le 7 Mai, Therm. $152^{d.}$. Cet intervalle entre la premiere & la derniere gelée est de 212 jours.

3. La Néva fut prise pendant 143 jours; depuis le 26 Novembre où elle se couvrit des glaces du Ladoga par un froid de $165^{d.}$, jusqu'au 18 Avril au soir, où elle débacla par une temperature de $149^{d.}$. Les Glaçons du Ladoga parurent le 29 Avril, & la Néva les charia jusqu'au 2 de Mai.

4. Depuis le 8 Octobre jusqu'au 7 Mai suivant, le plus grand froid n'a été observé que de $185^{d.}$ le 20 & 22 Janvier

Janvier matin. Le moindre froid à midi a été de 121$^{d.}$ le 25 Avril: ce qui donne une variation totale de 64 degrés de Delisle. Les jours ſont marqués ſuivant le nouveau ſtile.

5. Le froid moyen au matin & au ſoir a été trouvé de 158$^{d.}$. Le froid moyen à midi de 151$^{d.}$

6. Le froid au matin & au ſoir a été.

7 jours entre 180 & 190$^{d.}$, en Janvier & Fevrier (*)
26 jours entre 170 & 180, en Novembre — Mars (**)
44 jours entre 160 & 170 , en Novembre — Avril
93 jours entre 150 & 160, en Octobre — Mai
38 jours entre 140 & 150, en Octobre — Decembre, Mars — Mai : enfin
4 jours entre 130 & 140 en Avril.

7. Le froid à midi a été obſervé.

7 jours entre 130 & 120$^{d.}$ en Avril & Mai (***)
15 jours entre 140 & 130 en Octobre, Novembre, Mars, Avril & Mai (****)
83 jours entre 150 & 140 en Octobre — Mai
69 jours entre 160 & 150 en Octobre — Mars
26 jours entre 170 & 160 en Novembre — Mars

10 jours

(*) le 20. 21. 22. 26. 28 Janv. & le 11. 12 Fevrier.

(**) le 27 Nov. 30. 31 Dec. 7. 8. 12. 17. 18. 19. 23. 24. 25. 27 Janv. 2. 6. 10. 13. 14. 15 Fevr. 12. 15. 18. 19. 20. 21. 22 Mars.

(***) le 22. 23. 24. 25. 26. 27 Avril & le 1 Mai.

(****) le 1. 2. 3. 4. 5. 6. 27 Oct. 5 Nov. 28 Mars, 14. 15. 16. 17. 18. 21. 28. 30 Avril & le 2. 3. 4. 5. 7 Mai.

10 jours entre 180 & 170 en Janvier & Fevrier
1 jour entre 190 & 180 le 20 Janvier.

8. L'état du Barometre depuis le 8 Octobre jusqu'au 7 Mai suivant:

la plus grande élévation 28. 83 le 11 Fevrier
la plus petite élévation 27. 03 le 24 du même mois
la variation totale - - 1. 80 ou $1\frac{4}{5}$ pouces
le milieu - - - 27. 93
la hauteur moyenne - 28. 09 c. à. d. $28\frac{9}{100}$ pouces de Paris.

Le Barometre s'est trouvé 137 jours au dessus de $27\frac{9}{10}$; 102 jours au dessus de 28, & 78 jours au dessus de $28\frac{1}{10}$ pouces de Paris.

9. Les vents forts, toujours pendant ce même intervalle de 212 jours d'hyver, soufflerent.

8 jours du *Nord* le 8 Oct. 4. 24. 26 Jan. 11. 17. 21 Mars, & le 13 Avril
8 jours du N-E le 30 Dec. 17 Janv. 19. 20 Mars, 14. 29 Avr. & le 3. 6 Mai
5 jours de l'Est le 27 Dec. 28 Janv. 18 Fevr. 4 Mars & le 19 Avril.
10 jours du S-E le 31 Oct. 24 Nov. 6. 16. 17. 25. 26 Dec. 12 Janv. & le 14. 26 Fevrier
7 jours du Sud le 25 Oct. 9 Nov. 24 Dec. 11 Janv. & le 15. 21. 24. Avril
12 jours du S-Ou. le 16. 17. 23 Oct. 4. 12 Nov. 2 Dec. 20 Fevr. 28. 29. 30. 31 Mars & le 1 Mai

11 jours

11 jours de l'Oueſt le 11. 22. 28 Oct. 7. 15 Nov. 29 Janv. 3. 13 Févr. 7. 25 Mars & le 1 Avril
11 jours du N-Ou. le 13. 21 Oct. 1. 20. 22. 23 Dec. 3 Janv. 1 Févr. 12 Mars & le 7. 20 Avril

10. Les vents três forts regnerent.

2 jours du N-E le 4 & 5 Mai
1 jour de l'Eſt le 19 Février
3 jours du Sud le 30 Oct. 23 Févr. & le 22 Avril
10 jours du S-Ou. le 27 Oct. 5. 6 Nov. 15 Dec. 30 Janv. 24. 25 Févr. 24 Mars & le 16. 23 Avril
4 jours de l'Oueſt le 14 Dec. 27. 31 Janv. & le 13 Mars.

11. Les autres variations de l'Athmoſphere depuis le 8 Octobre jusqu'au 7 Mai ſuivant, ſont annotées dans la table ci-jointe

Athmoſphere.		Oct.	Nov.	Dec.	Janv.	Fvr.	Mars	Avr.	Mai	Somme
jours entierement ſereins		1	0	2	5	6	7	10	5	36
jours entierement couverts		6	13	22	11	16	11	6	0	85
Brouillards - - -		0	2	5	8	0	2	7	1	25
Pluie	médiocre - - -	10	1	6	0	0	5	7	2	31
	abondante - .	0	2	0	0	0	0	0	0	2
Neige	médiocre - -	5	8	9	11	7	12	4	0	56
	abondante - -	0	2	0	3	3	1	1	0	10

Etat du Barometre pour chaque mois des années 1772 — 1777.

Année.	La plus grande Elévation — le	Pouces.	La plus petite Elévation — le	Pouces.	La hauteur moyenne	Le Barometre a été au dessus de 27, 90	28, 00	28, 10
				Janvier.				
1772	20.	28, 61	13.	27, 47	28, 13	28 jours	22 jours	19 jours
1773	6.	28, 35	12.	26, 98	27, 82	15	10	7
1774	3.	28, 24	19.	26, 98	27, 78	10	4	3
1775	25.	29, 11	9.	27, 30	28, 29	27	24	21
1776	6.	28, 75	24.	27, 52	28, 26	26	23	19
1777	16.	28, 86	6.	27, 38	28, 33	28	27	25
				Février.				
1772	15.	28, 48	27.	27, 10	27, 93	15	11	8
3	10.	28, 78	25.	27, 77	28, 34	27	26	26
4	4.	28, 45	6.	27, 30	27, 84	11	9	6
5	27.	28, 83	5.	27, 22	27, 99	17	14	11
6	1.	28, 28	6.	27, 16	27, 78	12	6	3
7	6.	28, 88	28.	27, 12	28, 20	20	18	16
				Mars.				
1772	8.	28, 61	26.	27, 51	28, 10	28	22	16
3	4.	28, 55	17.	27, 07	28, 07	22	19	17
4	23.	28, 78	2.	27, 53	28, 20	25	21	19
5	7.	28, 58	26.	27, 12	27, 88	16	12	8
6	22.	28, 38	25.	27, 41	27, 92	18	12	8
7	25.	28, 44	8.	27, 54	27, 96	19	15	8

Avril.

Année.	La plus grande Élévation le Pouces.		La plus petite Élévation le Pouces.		La hauteur moyenne	Le Barometre a été au dessus de 27, 90	28, 00	28, 10
				Avril.				
1772	14.	28, 31	18.	27, 38	27, 86	11 jours	6 jours	5 jours
1773	18.	28, 72	30.	27, 90	28, 37	30	28	26
1774	9.	28, 69	25.	27, 76	28, 27	29	25	23
1775	15.	28, 44	12.	27, 44	28, 10	24	21	17
1776	21.	28, 73	13.	27, 33	28, 03	19	13	10
1777	5.	28, 61	17.	27, 45	28, 06	22	18	13
				Mai.				
1772	14.	28, 37	8.	27, 55	28, 05	25	22	16
3	23.	28, 63	7.	27, 83	28, 22	29	28	24
4	11.	28, 70	17.	27, 70	28, 27	29	28	26
5	2.	28, 53	17.	27, 33	28, 07	22	20	17
6	12.	28, 53	22.	27, 46	28, 06	24	20	14
7	21.	28, 41	19.	27, 59	28, 11	28	21	15
				Juin.				
1772	13.	28, 43	28.	27, 63	27, 95	16	12	7
3	13.	28, 52	4.	27, 48	28, 03	19	17	14
4	2.	28, 39	12.	27, 68	28, 07	25	22	14
5	3.	28, 39	24.	27, 48	28, 09	25	20	15
6	10.	28, 38	26.	27, 62	28, 04	22	20	14
7	5.	28, 27	28.	27, 67	28, 01	24	17	8

Année.	La plus grande Élévation le	Pouces.	La plus petite Élévation le	Pouces.	La hauteur moyenne	Le Barometre a été au dessus de 27, 90	28, 00	28, 10
				Juillet.				
1772	23.	28, 23	8.	27, 46	27, 89	18 jours	14 jours	8 jours
1773	20.	28, 39	15.	27, 70	28, 04	23	16	11
1774	27.	28, 54	18.	27, 82	28, 07	27	21	9
1775	23.	28, 43	17.	27, 62	28, 11	29	24	18
1776	26.	28, 35	10.	27, 75	28, 07	28	21	12
1777	30.	28, 23	28.	27, 46	27, 87	13	7	13
				Août.				
1772	6.	28, 22	15.	27, 45	27, 88	13	9	5
3	16.	28, 32	1.	27, 80	28, 05	28	22	10
4	20.	28, 59	4.	27, 68	28, 15	27	21	17
5	9.	28, 62	25.	27, 88	28, 29	31	30	28
6	7.	28, 38	22.	27, 58	28, 02	23	18	11
7	21.	28, 33	37.	27, 71	28, 07	25	21	15
				Septembre.				
1772	15.	28, 33	4.	27, 52	28, 01	21	16	8
3	30.	28, 48	13.	27, 67	28, 06	20	16	13
4	25.	28, 57	9.	27, 75	28, 28	28	27	25
5	16.	28, 57	21.	27, 88	28, 24	30	27	21
6	25.	28, 29	6.	27, 57	28, 00	22	17	10
7	28.	28, 53	21.	27, 31	27, 96	18	13	9

Octo-

Année.	La plus grande Elévati n le Pouces	La plus petite Elévation le Pouces	La hauteur moyenne	Le Barometre a été au dessus de 27, 90	28, 00	28, 10
Octobre.						
1772	13. 28, 65	26. 27, 41	28, 23	26 jours	24 jours	19 jours
1773	9. 28, 83	25. 27, 24	28, 12	26	23	19
1774	29. 28, 78	13. 27, 43	28, 13	23	22	17
1775	3. 28, 48	14. 27, 63	28, 15	25	22	20
1776	24. 28, 78	10. 27, 16	28, 26	26	25	23
1777	3. 28, 33	27. 27, 08	27, 94	21	16	10
Novembre.						
1772	18. 28, 41	12. 27, 66	28, 08	22	20	17
3	23. 28, 88	1. 27, 97	28, 43	30	29	28
4	27. 28, 78	16. 27, 67	28, 14	22	18	15
5	1. 28, 88	16. 27, 56	28, 26	26	26	23
6	12. 28, 87	21. 27, 02	28, 15	21	20	19
7	14. 28, 42	7. 27, 52	27, 91	16	9	4
Décembre.						
1772	12. 28, 77	29. 27, 62	28, 10	23	16	11
3	14. 28, 79	31. 26, 85	28, 06	22	17	12
4	8. 29, 21	23. 27, 50	28, 33	25	23	21
5	16. 28, 62	14. 27, 26	28, 01	26	18	14
6	1. 28, 83	24. 27, 51	28, 07	22	17	12
7	9. 28, 46	4. 27, 36	28, 00	25	17	9

Avertiſſement.

L'Echelle du Barometre eſt diviſée en pouces, dont douze ſont un pied de France, nommé *pied de Roi.* Chaque pouce eſt ſubdiviſé en 20 parties: de ſorte qu'il eſt aiſé d'eſtimer les hauteurs du mercure jusqu'aux centiemes parties de pouce.

La I^{ere} Colomne après celle des années indique les plus grandes élévations du Barometre pour chaque mois des ſix années. D'abord c'eſt le jour où cette plus grande élévation a été obſervée; enſuite la hauteur même dont les deux premiers chiffres marquent les pouces entiers, qui ſont 28 ou 29, & les deux ſuivans ſéparés par une virgule les centiemes parties de pouce.

La 2de Colomne marque de la même maniere les moindres élévations du mercure dans le Barometre.

La 3^{e} Colomne, les hauteurs moyennes, qu'on obtient en diviſant la ſomme de toutes les hauteurs barométriques par le nombre des obſervations.

Le trois dernieres Colomnes ſont voir, combien de jours dans chaque mois le mercure du Barometre a été au deſſus des trois termes indiqués de $27\frac{9}{10}$, 28 et $28\frac{1}{10}$ pouces.

État

Etat du Thermometre pour chaque mois des années 1772 —— 1777.

Année.	Jour le plus froid ou le moins chaud.		Froid moyen matin & soir.	Thermometre au dessous de 170 d.	Thermometre au dessous de 150 d.	Jour le plus chaud ou le moins froid.		Chaleur moyenne à midi.	Thermometre au dessus de 150 d	Thermometre au dessus de 130 d.
Janvier.										
1772	le 7	196	172 degrés	17 j.	31 j.	le 19	155	165 degrés	0 j.	
1773	29	203	178	23	29	10	146	169	4	
1774	15	190	175	21	31	19	149	167	1	
1775	24	191	168	10	30	12	147	163	3	
1776	18	200	181	27	31	31	155	172	0	
1777	30	185	166	8	31	6	148	160	1	
Février.										
1772	le 12	208	181 degrés	19 j.	29 j.	le 5	146	168 degrés	3 j.	
3	1	193	167	8	28	15	151	159	0	
4	10	191	162	9	20	26	144	155	15	
5	21	185	163	9	24	3	146	156	11	
6	4	187	156	5	18	15	145	150	21	
7	2	189	170	14	28	26	144	162	2	
Mars.										
1772	le 16	184	168 degrés	19 j.	25 j.	le 25	132	154 degrés	9 j.	
3	20	178	162	6	31	12	144	151	15	
4	13	182	162	4	30	30	142	151	15	
5	8	175	157	1	27	12	143	148	20	
6	31	177	160	4	28	16	142	151	16	
7	5	186	166	10	31	22	143	155	9	

Année	Jour le plus froid ou le moins chaud.	Froid moyen matin & soir.	Thermometre au dessous de 170 d.	Thermometre au dessous de 150 d.	Jour le plus chaud ou le moins froid.	Chaleur moyenne à midi.	Thermometre au dessus de 150 d.	Thermometre au dessus de 130 d.
				Avril.				
1772	le 4 158	151 degrés	0 j.	19 j.	le 16 128	137 degrés	30 j.	4 j.
3	1 153	147	0	5	20 127	136	30	5
4	8 171	153	1	18	28 124	140	25	5
5	15 168	154	0	22	28 135	144	25	0
6	1 176	156	1	25	10 136	144	27	0
7	2 176	157	4	23	13 133	146	20	0
				Mai.				
1772	le 3 151	141 degrés		5 j.	le 20 125	133 degrés	31 j.	10 j.
3	1 148	139		0	14 118	128	31	19
4	11 147	136		0	26 108	123	31	22
5	1 157	143		4	26 116	133	31	9
6	2 152	141		2	10 114	130	31	16
7	2 148	138		0	16 113	129	31	17
				Juin.				
1772	le 13 144	137 degrés			le 4 111	125 degrés	30 j.	23 j.
3	5 138	131			15 108	120	30	29
4	13 138	128			6 108	118	30	28
5	3 147	134			21 116	124	30	27
6	6 141	132			13 114	120	30	30
7	7 139	131			15 114	123	30	27

Juil-

Année.	Jour le plus froid ou le moins chaud.	Froid moyen matin & soir.	Thermometre au dessous de 170 d.	150 d	Jour le plus chaud ou le moins froid.	Chaleur moyenne à midi	Thermometre au dessus de 150 d.	130 d.
			Juillet.					
1772	le 7 136	129 degrés			le 26 104	112 degrés	31 j.	31 j.
3	8 136	127			24 104	116	31	31
4	20 130	124			8 106	114	31	31
5	1 131	124			24 107	114	31	31
6	13 133	125			22 106	113	31	31
7	9 135	132			6 109	121	31	30
			Août.					
1772	le 16 140	129 degrés			le 4 106	116 degrés	31 j.	31 j
3	7 134	130			22 107	119	31	31
4	21 139	131			12 113	122	31	31
5	26 141	127			10 105	115	31	31
6	28 139	130			9 109	119	31	31
7	30 144	135			4 113	126	31	26
			Septembre.					
1772	le 11 145	137 degrés			le 26 116	126 degrés	30 j.	24 j.
3	6 143	136			10 121	129	30	19
4	26 149	141			5 114	131	30	11
5	23 142	134			10 116	124	30	29
6	21 149	140			29 124	130	30	15
7	28 148	143			3 127	134	30	4

Année.	Jour le plus froid ou le moins chaud.	Froid moyen matin & soir.	Thermometre au dessous de 170 d.	Thermometre au dessous de 150 d.	Jour le plus chaud ou le moins froid.	Chaleur moyenne à midi	Thermometre au dessus de 150 d.	Thermometre au dessus de 130 d.
				Octobre.				
1772	le 21 151	147 degrés		4 j.	le 1 116	135 degrés	31 j.	5 j
3	24 160	146		7	7 124	139	28	4
4	31 162	149		13	10 134	142	28	0
5	30 153	140		1	5 123	135	31	6
6	27 156	147		11	7 128	141	30	2
7	20 158	149		17	4 133	143	29	0
				Novembre.				
1772	le 18 155	146 degrés	0 j.	5 j.	le 9 134	142 degrés	29 j.	
3	24 172	155	2	19	1 136	151	14	
4	19 185	171	16	30	2 148	164	1	
5	14 173	157	3	24	4 142	153	12	
6	12 172	159	1	29	4 141	152	9	
7	27 172	153	1	18	5 139	150	18	
				Décembre.				
1772	le 30 174	156 degrés	1 j.	26 j.	le 19 145	152 degrés	12 j.	
3	24 181	159	4	29	6 146	153	12	
4	30 187	167	11	31	21 149	161	1	
5	11 178	162	6	27	3 143	156	6	
6	8 172	158	1	29	10 147	154	8	
7	31 173	158	2	29	15 144	153	11	

Avertiſſement.

Le Thermometre eſt à mercure & l'échelle diviſée ſelon la méthode de *Delisle*: 0 eſt le terme de l'eau bouillante & 150 celui de la congélation naturelle.

La 1re Colomne après celle des années contient les moindres élévations du Thermometre, qui répondent aux jours les plus froids en hyver, & les moins chauds en été.

La 2de Colomne marque les froids moyens pour chaque mois des ſix années. Ce froid moyen ſe trouve en diviſant la ſomme de toutes les hauteurs du Thermometre obſervées le matin & le ſoir par le nombre des obſervations.

Les deux Colomnes ſuivantes, c'eſt à dire la 3^{e} & la 4^{e}, indiquent le nombre de jours auxquels le Thermometre eſt deſcendu au deſſous du 170^{e} degré & au deſſous du terme de la congélation naturelle 150.

La 5^{e} Colomne donne à connoître les plus grandes élévations du mercure dans le tuyau du Thermometre pour tous les mois des ſix années, ce qui répond aux jours les plus chauds en été, & les moins froids en hyver.

La 6ᵉ Colomne marque la chaleur moyenne, qui eſt la ſomme des hauteurs du Thermometre obſervées à midi, diviſée par le nombre des jours du mois.

Les deux dernieres Colomnes indiquent le nombre des jours auxquels le Thermometre eſt monté au deſſus du point de congélation 150 & au deſſus d'une chaleur de 130 degrés.

Etat

Etat de l'Athmosphere pour chaque mois des années 1772 — 1777.

Année.	Calme parfait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent tres - fort.	Direction du Vent.								Jours fereins.	Jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
					Nord.	N - E.	Est.	S - E.	Sud.	S - Ou.	Ouest.	N - Ou.					
Janvier.																	
1772	4	7	11	9	3	6	4	3	1	8	3	0	6	14	0	0	13
1773	6	20	3	2	6	14	0	0	0	0	3	7	12	13	5	2	11
1774	5	17	6	3	8	8	2	1	1	4	1	4	10	16	6	0	13
1775	0	12	10	9	10	1	0	4	1	2	6	7	5	18	6	1	12
1776	5	18	5	3	5	6	6	0	0	0	8	5	9	13	3	0	6
1777	1	15	12	3	8	1	3	5	3	2	2	7	6	18	5	1	10
Février.																	
1772	1	16	10	2	9	5	1	0	0	5	4	4	17	6	8	0	10
3	4	12	9	3	9	3	0	3	0	0	4	9	3	18	8	0	11
4	1	11	12	4	5	·1	0	0	2	5	5	8	4	16	5	3	12
5	1	9	13	5	4	9	0	0	2	6	4	3	4	17	1	2	13
6	1	14	10	4	1	1	0	6	10	6	4	1	1	16	2	0	17
7	6	16	5	1	11	5	1	1	1	3	3	3	5	14	5	0	16

Année	Calme parfait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent très-fort.	Direction du Vent. Nord.	N-E.	Est.	S-E.	Sud.	S-Ou.	Ouest.	N-Ou.	Jours sereins.	Jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
Mars.																	
1772	6	13	6	6	12	3	5	2	3	2	3	1	18	5	3	3	6
3	4	14	11	2	8	2	1	2	2	6	2	5	13	10	6	0	9
4	1	18	9	3	5	9	0	0	2	2	2	9	12	12	6	1	10
5	4	16	5	6	5	1	1	0	1	6	6	8	6	14	4	3	15
6	4	16	8	3	9	0	7	1	2	5	5	2	5	15	3	2	16
7	5	15	9	2	7	2	1	7	2	5	3	4	11	8	5	1	15
Avril.																	
1772	3	16	10	1	7	0	1	1	3	8	3	6	9	11	5	10	7
3	13	8	6	3	4	1	0	4	10	6	1	2	16	8	3	4	1
4	6	15	5	4	1	9	0	1	2	3	5	8	13	5	3	8	0
5	3	19	6	2	10	1	0	0	0	3	6	10	11	3	0	4	8
6	4	19	6	1	8	3	4	3	1	1	5	5	10	5	3	6	12
7	7	15	6	2	9	4	0	2	1	3	2	9	9	5	3	6	5
Mai.																	
1772	3	12	9	7	4	11	0	0	0	2	3	10	11	10	3	12	4
3	6	14	9	2	0	3	7	4	2	4	3	5	11	4	1	13	0
4	5	11	11	4	3	1	2	3	5	1	9	3	16	2	2	13	0
5	8	11	9	3	4	2	0	0	1	6	8	10	15	3	1	16	1
6	8	18	5	0	6	4	5	5	4	1	2	4	7	7	5	16	1
7	13	7	8	3	3	1	4	5	5	3	4	5	14	4	1	9	0

Année.	Calme parfait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent très-fort.	Direction du Vent.								Jours sereins.	Jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
					Nord.	N-E.	Est	S-E.	Sud.	S-Ou.	Ouest.	N-Ou.					

Juin.

Année.	Calme parfait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent très-fort.	Nord.	N-E.	Est	S-E.	Sud.	S-Ou.	Ouest.	N-Ou.	Jours sereins.	Jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
1772	5	14	8	3	8	3	0	2	1	3	6	6	6	12	3	12	0
3	3	13	6	8	0	1	9	1	1	5	5	7	10	11	1	14	0
4	10	6	11	3	1	4	2	0	4	1	4	10	11	2	3	11	0
5	5	11	10	4	2	4	2	0	3	6	6	3	9	4	0	13	1
6	6	14	9	1	0	8	8	1	3	2	4	1	14	3	1	8	0
7	6	9	12	3	0	0	6	3	3	2	9	7	10	3	0	13	0

Juillet.

Année.	Calme parfait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent très-fort.	Nord.	N-E.	Est	S-E.	Sud.	S-Ou.	Ouest.	N-Ou.	Jours sereins.	Jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
1772	9	11	9	2	6	2	14	0	1	0	1	7	16	10	6	9	
3	11	11	5	4	4	2	6	3	1	2	3	8	17	3	3	12	
4	7	12	8	4	2	2	6	2	3	2	5	6	9	5	5	12	
5	10	13	5	3	0	0	7	1	0	3	14	5	14	3	2	12	
6	5	17	8	1	0	8	9	2	5	2	2	1	10	1	5	8	
7	11	11	6	3	0	4	2	5	1	4	8	3	3	5	0	27	

Août.

Année.	Calme parfait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent très-fort.	Nord.	N-E.	Est	S-E.	Sud.	S-Ou.	Ouest.	N-Ou.	Jours sereins.	Jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
1772	7	20	3	1	1	2	2	2	2	11	4	6	3	18	4	17	
3	7	12	8	4	2	9	1	3	3	2	4	7	11	8	2	15	
4	9	12	7	3	0	1	5	4	6	4	5	4	9	6	2	12	
5	6	17	7	1	0	0	9	2	4	5	11	0	18	3	10	8	
6	5	19	4	3	0	6	2	2	5	4	8	0	10	12	6	17	
7	8	10	9	4	4	5	2	1	0	6	6	3	6	4	2	17	

Septem-

Année.	Calme parfait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent très-fort.	Direction du Vent. Nord.	N-E.	Eft	S-E.	Sud.	S-Ou.	Oueft.	N-Ou.	Jours fereins.	Jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
Septembre.																	
1772	9	9	8	4	0	1	2	4	2	8	8	5	3	12	5	19	
3	4	10	9	7	1	6	1	2	4	3	8	3	9	10	5	19	
4	2	16	10	2	5	9	3	1	5	3	1	2	6	9	3	8	
5	7	12	10	1	1	1	3	2	4	8	6	3	8	8	5	14	
6	5	10	11	4	2	0	2	3	2	7	6	6	10	6	5	10	
7	4	13	9	4	2	6	5	2	4	7	2	2	5	9	0	19	
Octobre.																	
1772	2	11	15	3	5	2	1	0	0	7	13	3	5	12	3	12	5
3	5	7	14	5	4	2	1	1	11	3	6	3	12	8	7	9	4
4	5	8	13	5	7	2	4	2	1	3	6	4	2	21	5	15	7
5	5	11	8	7	0	0	6	3	5	9	5	3	1	14	9	16	0
6	5	18	7	1	2	1	3	5	6	4	5	4	6	11	3	9	2
7	3	10	13	5	6	0	1	1	5	5	5	8	1	11	0	14	6
Novembre.																	
1772	8	3	12	7	0	3	2	5	8	7	3	2	5	10	7	15	1
3	5	15	9	1	5	7	2	3	5	5	1	1	11	14	5	6	7
4	3	16	9	2	7	9	4	1	0	1	2	4	5	9	3	0	17
5	5	16	8	1	1	0	4	6	3	6	9	1	3	16	8	8	8
6	7	14	4	5	2	1	2	8	7	2	2	6	4	14	3	1	17
7	7	15	6	2	1	1	5	5	1	8	4	5	0	18	2	3	10

Décem-

Année.	Calme parfait.	Petit vent.	Vent fort.	Vent très-fort.	Direction du Vent.								Jours ferains.	Jours couverts.	Brouillard.	Pluie.	Neige.
					Nord.	N-E.	Est.	S-E.	Sud.	S-Ou.	Oueſt.	N-Ou.					
Décembre.																	
1772	1	18	11	1	6	3	2	3	4	5	3	5	3	15	1	5	15
3	0	20	7	4	5	4	1	2	1	5	9	4	2	17	2	2	14
4	2	12	11	6	7	5	1	2	1	1	2	12	1	14	5	0	17
5	2	16	7	6	8	1	1	4	1	3	5	8	1	17	3	3	19
6	0	14	13	4	1	1	8	3	2	8	5	3	2	19	0	4	15
7	0	16	13	2	7	2	2	7	5	3	1	4	2	22	5	6	9

Ici toutes les colomnes après celle des années marquent le nombre de jours auxquels le vent ou la conſtitution de l'athmoſphere indiquée au deſſus a eu lieu.

MORTS.

L'Académie Impériale des Sciences a perdu vers la fin de l'année précédente deux de ses Membres externes universellement regrettés & très dignes de l'être:

Albert de Haller, Chevalier de l'Ordre royal Suédois de l'Étoile polaire, Seigneur de Goumoëns-le-Jux & d'Eclagnes, Président perpétuel de la Société royale de Göttinguen & Membre du Conseil Souverain de la République de Bern, Membre des principales Académies de l'Europe:

Reçu au nombre des Académiciens externes en 1776, le 29 Décembre dans l'Assemblée solemnelle par laquelle l'Académie Impériale des Sciences célébra le premier Jubilé demi-seculaire de sa fondation:

Décédé le 1^er^ Décembre 1777 v. St.

Charles de Linné, Chevalier de l'Ordre royal Suédois de l'Étoile polaire, Premier Médecin du Roi de Suede & Professeur de Botanique & de Médecine à Upsala, Membre des principales Académies de l'Europe:

Reçu au nombre des Académiciens externes en 1754 le 12 Juillet:

Décédé le 30 Décembre 1777 v. St.

Leurs noms seuls tiennent lieu d'Eloges & leurs écrits bien mieux que le bronze & l'airain braveront l'injure des âges.

OUVRA-

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS

présentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du premier Sémestre de l'Année 1778.

Dans l'assemblée du Lundi 8 Janvier, le Secrétaire de Conférences a communiqué la lettre de Mr. *Amadeus Emanuel de Haller* qui notifie la mort de son illustre pere. (*).

Le Vendredi 12 Janvier, le Secrétaire a lu un Rapport de Mr. *Jährig* (**) qui envoie une herbe médicinale que les Calmouques nomment *Sergénä* & qu'ils emploient avec succès contre les douleurs de rhumatisme.

Le 15 Janvier, le Secrétaire a présenté de la part de Mr. *Jean Bernoulli*, Astronome royal à Berlin, le *troisieme Cahier* de ses *nouvelles littéraires de divers païs.*

Mr. le Prof. *Krafft* a communiqué: *Exposition d'une expérience nouvelle & très curieuse que Mr.* Achard, *Académicien*

(*) Voyés ci dessus pag 66

(**) Histoire de l'Académie A. 1777, dernier Sémestre, à l'Article *Médecine*, pag. 45.

démicien de Berlin, *a faite sur la formation artificielle des cristaux de roche*, extraite d'une lettre que ce chymiste habile & laborieux avoit adressée à S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Galitzin*, Envoyé extraordinaire de la Cour Impériale de Russie auprès de Leurs Hautes Puissances les États Généraux de Hollande. Mr. le Directeur ayant souhaité que cette Expérience fut répetée à l'Académie, Mr. le Prof. *Krafft* en a été chargé, & Mr. l'Adjoint *Géorgi* nommé pour l'assister. (*)

Le 19 Janvier, Mr. le Prof. *Pallas* a lu une lettre de Mr. *Hähn*, Sur-Intendant des Mines à *Barnaoul*, qui communique les détails d'un ouragan suivi d'un tremblement de terre, qu'on a essuyé à *Barnaoul* le 2 Nov. 1777, & qui fait encore part de quelques observations sur une contagion de bestiaux, & sur l'état présent des mines dans cette contrée-la. (**)

Les Séances suivantes ont toutes été uniquement occupées par les lectures des mémoires présentés par Messieurs les Académiciens.

Le 9 Février, Mr. le Prof. *Lepechin* a remis de la part de S. E. l'Archéveque de Pétersbourg & Novogorod, *Gabriel*, quelques exemplaires d'une Dissertation latine intitulée *Tentamen medicum de generalioribus in sexu foemineo à graviditate oriundis mutationibus* &c. *pro gradu Docto-*

(*) Ces expériences n'ont pas réussi, quoique Mr. le Prof. *Krafft* ait scrupuleusement suivi tous les procédés prescrits par l'ingénieux Académicien de Berlin.

(**) Voyez ci-dessus pag. 38.

Doctoratus a Minas Isayev, Porchowo-welico-novo-grado-russo Lugd. Bat. 12 *Apr.* 1777, pour être distribués à Mrs. les Académiciens Médecins.

—— —— le même a communiqué une lettre de Mr. *Spielmann* de Strasbourg qui contient diverses nouvelles littéraires.

Le 12 Février, Mr. le Prof. *Pallas* a remis pour le jardin botanique un paquet de différentes semences, qui lui avoient été envoyées de Moscou par Mr. *Procopief Démidof.*

Le 26 Février, le Secrétaire a lu un rapport de Mr. *Jährig* qui envoie à l'Académie une traduction allemande de quelques écrits tongouts.

Mr. l'Adjoint *Géorgi* a remis un catalogue imprimé de médailles & monnoyes, dont la vente devoit se faire à Hambourg aux plus offrans.

Le 5 Mars, Mr. le Prof. *Güldenstädt* a lu la lettre de notification de la mort du très célebre Chevalier de *Linné*, addressée à l'Académie par Mr. *Charles de Linné* son fils. (*)

Mr. le Prof. *Pallas* a communiqué une copie des observations faites par Mr. le Conseiller de Collèges *Lerch* sur les inondations arrivées à St. Pétersbourg par la crue des eaux de la Néva depuis 1741 jusqu'en 1777.

(*) Voyez ci-dessus pag. *66*.

Mr. le Prof. *Krafft* a fait part d'une lettre écrite de Berlin ſur une nouvelle eſpece de faitieres propres à garantir de la foudre les toîts des bâtimens.

Le 9 Mars, Le Secrétaire a préſenté: *Unterſuchung warum geimpfte Blattern gelinder und ſicherer ſind als die natürlichen: aus dem engliſchen des D.* John Mudge, *von dem Verfaſſer des Unterrichts gegen die Kinder-Blattern, nebſt einem Anhange* &c. 8vo. Ouvrage envoyé à l'Académie par le Traducteur Mr. *Wolff*, Docteur en Médecine à Danzig.

—— —— il a lu une lettre de Mr. de *Magellan*, Gentilhomme Portugais établi à Londres, qui communique diverſes nouvelles littéraires.

—— —— Mr. le Prof. *Pallas* a communiqué un plan de ſouſcription pour des Globes, terreſtre & céleſte, de 15 pouces de diametre, que les Sieurs *Jeffenys* & *Hauwood* à Londres ont entrepris de faire.

Le 12 Mars, Mr. le Prof. *Güldenſtädt* a préſenté le catalogue du Cabinet d'Hiſtoire naturelle que poſſédoit le défunt Négociant *Saturgus* à Königsberg en Pruſſe, & que les héritiers ſouhaitoient de vendre en entier.

Le 19 Mars, le Secrétaire a lu des lettres, de Mr. de *Magellan* de Londres ſur les verres ardens, de Mr. *Schäffer* de Ratisbonne ſur ſes expériences nouvelles avec l'Electrophore, & de Mrs. *Preuſchen* & *Haas* de Bâle ſur la Typométrie des Cartes géographiques, & ſpécialement ſur la Carte imprimée de la Sicile.

Le

Le 23 Mars, Mr. le Directeur a remis de la part de l'Académie impériale & royale des Sciences & belles lettres de Bruxelles: *Mémoire sur les diverses méthodes inventées jusqu'a présent pour garantir les édifices d'incendie, par Mr. l'Abbé* Mann, *Chanoine. A Bruxelles de l'imprimerie Académique.* Ces intéressant ouvrage a été accompagné d'une lettre de S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Galitzin*, Envoyé extraordinaire à la Haye, adressée à Mr. le Directeur, qui sur cela a pris la résolution de faire insérer un extrait détaillé de l'ouvrage dans les Almanachs de l'année prochaine, & construire une maisonette de bois suivant la méthode du Lord Vicomte Mahon, pour faire sur elle publiquement l'expérience de l'incombustibilité.

Le 30 Mars, Mr. le Prof. *Pallas* a présenté de la part de Mr. *de Born*, Conseiller des mines & monnoyes de l'Impératrice-Reine, le troisieme volume des mémoires d'une Société des Sçavans établie en Bohème que Mr. *de Born* public sous le titre: *Abhandlungen einer Privat-Gesellschaft in Böhmen zum Druck befördert von Ignatz Edeln von Born.*

Le 16 Avril, Mr. *Euler* le pere a fait sçavoir que S. E. Mr. *de Cruse*, Conseiller d'Etat actuel & Médecin du Corps de *Sa Majesté Impériale* lui a envoyé tout l'appareil de barres & autres pieces d'acier trempé, que l'Académie avoit commande à sa fabrique pour un cours complet d'expériences sur le magnétisme; qu'il a déja commencé à en aimanter plusieurs pieces & que quelques unes en ont acquis une force magnétique fort supérieure à celle qu'on a été en état de donner jusqu'ici aux barres d'acier.

Le

Le Secrétaire a préſenté de la part de Mrs. les Aſtronomes de *Milan*, les années 1775-76 77 & 78 de leurs éphémerides aſtronomiques imprimées in 8vo.

Mr. le Prof. *Pallas* a communiqué une lettre, par laquelle Mr. *Hertel*, Candidat en Théologie à Lubec, offre en vente une collection très complette d'inſectes & d'autres animaux, qui avoit appartenu au defunt Apoticaire *Edler*.

Mr *Euler* le pere a fait remettre un imprimé ſur *l'art de peindre* que lui avoit adreſſé le Comte *de Rosnay-Cagus* d'Orange, pour le communiquer à l'Académie.

Le 27 Avril, le Secrétaire a remis avec un rapport de Mr. *Jähbrig*, une traduction allemande que celui-ci a faite d'un écrit moungal ſur la Chronologie des premiers Patriarches dans les royaumes indiens depuis la propagation du paganiſme.

Le 4 Mai, Mr. le Prof. *Pallas* a remis pour le jardin botanique une deuxieme collection contenant 400 paquets de ſemences de plantes diverſes, que Mr. *Procopief Demidof* lui avoit envoyée de Moscou.

Le 7 Mai, le Secrétaire a préſenté de la part de la Société de littérature ruſſe établie à Moscou, le 4me volume de ſes mémoires, qu'elle publie ſous le titre: Опытъ трудовъ вольнаго Россійскаго собранія при Императорскомъ Московскомъ Университетѣ.

— il a lu une lettre de Mr. *Kratzenſtein*, Doyen de la faculté de Médecine à Copenhague, qui contient diverſes réflexions ſur quelques objets de Phyſique & de Géometrie.

— enſuite une lettre adreſſée à l'Académie par Mr. *Pabin de Champlin de la Blancherie* qui envoie le Proſpectus & un échantillon d'un nouvel ouvrage périodique qui paroitra à Paris tous les 15 jours à compter du mois d'Avril.

— enfin le Proſpectus d'un nouveau Syſteme de Phyſique univerſelle par Mr. *Ignazio Gajone di Caſel Monferrato*, que les frères *Raimondi* vont publier à Naples.

Le 11 Mai, le Secrétaire a préſenté de la part de Mr. *Preuſchen*, Diacre à Carlsruh, une brochure allemande intitulée *Grundriſs der typometriſchen Geſchichte*, imprimée à Bâle.

Le 25 Mai, le Secrétaire a lu une notification du Haut Sénat dirigeant, concernant un monſtre biforme vivant, dont la femme d'un païſan eſt accouchée dans le Gouvernement de Twer. (*)

Le 11 Juin, Mr. le Prof. *Lepechin* a préſenté & diſtribué aux Académiciens une diſſertation inaugurale *de Spiritu ardente ex lacte bubulo*, que Mr. *Nicolas Oſeretzkovski*, éleve de l'Académie a ſoutenue à Strasbourg pour être revetû du Grade de Docteur.

(*) Voyes ci-deſſus l'Article *Anatomie* pag. 41.

Le 15 Juin, le Secrétaire a préſenté de la part de Mr. *Lazare Spallanzani*, Profeſſeur d'hiſtoire naturelle a Pavie ſes *Opuscules de phyſique animale & végétale* traduits de l'Italien par Mr. *Jean Senebier* en deux volumes in 8vo.

—— enſuite un Avis imprimé ſur la publication du Catalogue du fameux Cabinet impérial-royal de médailles antiques, qui ſera imprimé à Vienne par Souscription.

Mr. le Conſeiller d'Etat actuel *de Stehlin* a remis le programme de Prix de la Société hollandoiſe des Sciences de Harlem pour l'année 1778.

Le 18 Juin, le Secrétaire a remis: *An experimental inquiry into the cauſe of the changes of colours in opake and coloured bodies*, que l'Auteur Mr. *Edward Huſſey Delaval* Esq. lui avoit adreſſé pour être préſenté de ſa part à l'Académie.

Le 22 Juin, le Secrétaire a préſenté de la part de Mr. le Colonel *Lorgna*, l'ouvrage que celui-ci a publié à Verone ſous le titre: *Memorie intorno all'acque correnti.*

MATHE-

MATHEMATICA.

DE

CORPORIBVS REGVLARIBVS

PER DOCTRINAM SPHAERICAM DETERMINATIS; VBI SIMVL NOVA METHODVS, GLOBOS SIVE COELESTES SIVE TERRESTRES CHARTA OBDVCENDI, TRADITVR.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Corpus regulare vocatur Polyedrum circumquaque hedris planis regularibus et inter se aequalibus inclusum, et cuius omnes anguli solidi a totidem angulis planis formantur. Hedrae ergo erunt vel triangula aequilatera, vel quadrata, vel pentagona regularia, vel etiam hexagona; ad angulos autem solidos constituendos vel ternae hedrae, vel quatuor, vel quinque, vel etiam sex concurrunt.

§. 2. In singulis hedris praeter numerum laterum cuiusque, qui sit $= n$, in computum venire debet quantitas ſingulorum laterum, quae ſit $=x$, ita vt perimeter cuiusque hedrae ſit $=nx$. Deinde quia quaelibet hedra eſt polygonum regulare, ponatur radius circuli circumſcripti $=y$, hincque reperitur area cuiusque hedrae

$$=\tfrac{1}{2}nx\sqrt{(yy-\tfrac{1}{4}xx)}.$$

Denique vocetur radius ſphaerae ipſi polyedro circumſcriptae $=r$, eritque $\sqrt{(rr-yy)}$ perpendiculum ex centro ſphaerae in quamlibet hedram demiſſum, cuius pars tertia in aream hedrae ducta et per numerum omnium hedrarum multiplicata dabit ſoliditatem totius polyedri ſeu corporis regularis. Ita ſi numerus omnium hedrarum fuerit $=N$, erit ſuperficies polyedri $=\tfrac{1}{2}Nnx\sqrt{(yy-\tfrac{1}{4}xx)}$, tota autem ſoliditas $=\tfrac{1}{6}Nnx\sqrt{(yy-\tfrac{1}{4}xx)(rr-yy)}$. Hinc ſi fuerit ſuperficies $=S$, erit haec ſoliditas

$$=\tfrac{1}{3}S\sqrt{(rr-yy)}.$$

§. 3. Concipiatur igitur corpori regulari ſphaera circumſcripta, cuius radium vocauimus $=r$, et omnes anguli ſolidi reperientur in ſuperficie ſphaerae, qui ſi arcubus circulorum maximorum iungantur, cuilibet hedrae in ſuperficie ſphaerae reſpondebit polygonum ſphaericum regulare totidem laterum n; hocque modo tota ſuperficies ſphaerae, quae eſt $=4\pi rr$, diuidetur in tot huiusmodi polygona regularia ſphaerica quot habentur hedrae, quarum numerus cum ſit $=N$, area cuiusque horum Polygonorum ſphaericorum erit $=\frac{4\pi rr}{N}$.

§. 4. Quando ergo ternae hedrae planae ad angulos ſolidos conſtituendos concurrunt, tum in ſuperficie ſphaerica etiam ternae hedrae ſphaericae in ſingulis angulis ſolidis conuenient; vnde patet in his polygonis ſphaericis

ricis ſingulos angulos fore $= 120$ gr. Sin autem quaternae hedrae planae in angulis ſolidis concurrant, in hedris ſphaericis omnes anguli debent eſſe recti ſeu 90 graduum. At ſi quinae hedrae planae concurrant, in hedris ſphaericis ſinguli anguli erunt 72 gr. Denique ſi adeo ſex hedrae planae conueniant, in polygonis ſphaericis ſinguli anguli erunt 60 gr. Ulterius enim progredi ipſa rei natura prohibet.

§. 5. His praemiſſis omnes caſus, qui quidem occurrere poſſunt, ſeorſim euoluamus. Ac primo quidem ſint omnes hedrae triangulares, quarum vel ternae, vel quaternae, vel quinae, vel ſenae in ſingulis angulis ſolidis concurrere poſſunt: ſecundo pro hedris quadrungularibus vel ternae, vel etiam quaternae concurrere poterunt: pro pentagonis autem plures quam tres occurrere non poſſe manifeſtum eſt, quod multo magis pro hexagonis valet.

Caſus Primus.

Pro hedris triangularibus, quarum ternae in angulis ſolidis occurrunt.

§. 6. Hic igitur eſt $n = 3$, ſitque in ſuperficie ſphaerica triangulum ſphaericum A B C cuique hedrae planae reſpondens, et quia eius ſinguli anguli A, B, C debent eſſe $= 120°$ eorum ſumma ſit $360° = 2\pi$, vnde eius area colligitur $= \pi r r$, quae cum etiam ſit $= \frac{4\pi r r}{N}$, erit $N = 4$. Hinc patet quatuor tantum hedras requiri ad hoc corpus regulare formandum, vnde etiam iſtud corpus regulare Tetraedron appellatur. Quia ergo omnium angulorum planorum numerus eſt $= 12$, terni autem in ſingulis angulis ſolidis concurrant, angulorum ſolidorum numerus quoque erit $= 4$. Tab. I. Fig. 1.

§. 7. Iam quia in triangulo ſphaerico A B C dantur omnes anguli $A = B = C = 120$ gr. inde etiam latera definiri poterunt per regulas trigonometriae ſphaericae. Si enim terni anguli fuerint α, β et γ, et latera ipſis oppoſita a, b et c, erit

$$\operatorname{coſ.} a = \frac{\operatorname{coſ.} \alpha + \operatorname{coſ.} \beta . \operatorname{coſ.} \gamma}{\operatorname{ſin.} \beta . \operatorname{ſin.} \gamma}$$

et quia omnes anguli ſunt inter ſe aequales, erit

$$\operatorname{coſ.} a = \frac{\operatorname{coſ.} \alpha + \operatorname{coſ.} \alpha^2}{\operatorname{ſin.} \alpha^2} = \frac{\operatorname{coſ.} \alpha}{1 - \operatorname{coſ.} \alpha}.$$

Quoniam igitur noſtro caſu eſt $\alpha = 120$ gr. erit $\operatorname{coſ.} \alpha = -\frac{1}{2}$, ideoque $\operatorname{coſ.} a = -\frac{1}{3}$; vnde intelligitur, ſingula latera $A B = A C = B C$ eſſe quadrante maiora, ita vt exceſſus cuiusque ſupra 90 gr. ſinus ſit $= \frac{1}{3}$, vnde iam vnum latus erit $= 109^\circ. 28'$; quare cum latus hedrae planae x ſit ſubtenſa arcus A B erit $\frac{x}{2r} = \operatorname{ſin.} \frac{1}{2} a$. Eſt vero

$$\operatorname{ſin.} \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{(1 - \operatorname{coſ.} a)}{2}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

hinc ergo colligimus latus cuiusque hedrae $x = 2 r \sqrt{\frac{2}{3}}$.

§. 8. Vt autem ſimul etiam radium circuli hedrae planae circumſcripti y inueſtigemus, conſideremus centrum hedrae noſtrae ſphaericae, quod ſit in O, ex quo, ductis arcubus O A et O B, in latus A B demittamus perpendiculum O P, latus B A in P biſecans, eritque

$$\frac{x}{2r} = \operatorname{ſin.} A P \text{ et } \frac{y}{r} = \operatorname{ſin.} O A.$$

Quod ſi ergo in genere ponamus angulum $P A O = \alpha$ et angulum $A O P = \beta$, ob angulum A P O rectum, erit

$$\operatorname{coſ.} A P = \frac{\operatorname{coſ.} \beta}{\operatorname{ſin.} \alpha} \text{ et } \operatorname{coſ.} O A = \operatorname{cot.} \alpha . \operatorname{cot.} \beta.$$

Noſtro autem caſu eſt $\alpha = 60$ gr. et $\beta = 60$ gr. hinc

$$\operatorname{ſin.} \alpha = \operatorname{ſin.} \beta = \tfrac{\sqrt{3}}{2}; \ \operatorname{coſ.} \alpha = \operatorname{coſ.} \beta = \tfrac{1}{2} \text{ et } \operatorname{cot.} \alpha = \tfrac{1}{\sqrt{3}};$$

vnde

vnde colligitur cof. A P $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ et cof. O A $= \frac{1}{3}$, hincque fin. A P $= \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{x}{2r}$ et fin. O A $= \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{y}{r}$. Pro noftro igitur cafu obtinetur latus hedrae $x = 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$ et radius circuli circumfcripti $y = \frac{2r\sqrt{2}}{3}$.

§. 9. Ex his pro x et y inuentis valoribus fequitur fore, $\sqrt{(yy - \frac{1}{4}xx)} = \frac{r\sqrt{2}}{3}$ et $\sqrt{(rr - yy)} = \frac{r}{3}$; vnde pro tetraëdro, fphaerae, cuius radius $= r$, infcripto, fequentes nancifcimur determinationes, quas fimul in fractionibus decimalibus adiungamus:

I. Latus hedrae	$= 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$	$= 1,632993.\,r$
II. Radius circuli hedrae circumfcripti	$= \frac{2r\sqrt{2}}{3}$	$= 0,942809.\,r$
III. Area cuiusque hedrae	$= \frac{2rr}{\sqrt{3}}$	$= 1,154701.\,rr$
IV. Superficies tetraëdri	$= \frac{8rr}{\sqrt{3}}$	$= 4,618804.\,rr$
V. Soliditas tetraëdri	$= \frac{8r^3}{9\sqrt{3}}$	$= 0,513200.\,r^3$.

Cafus Secundus.

Pro hedris triangularibus, quarum quaternae in angulis folidis concurrunt.

§. 10. Hic ergo eft iterum $n = 3$, fitque in fuperficie fphaerica triangulum fphaericum A B C cuique hebrae refpondens, et quia quatuor coniunguntur, quilibet angulus erit quarta pars totius peripheriae, ideoque $= \frac{\pi}{2}$, vnde fumma trium angulorum erit 270 gr. $= \frac{3\pi}{2}$. Huius igitur trianguli fphaerici area erit $= \frac{\pi rr}{2}$, quae in tota fuperficie fphaerae octies continetur, ita ut hoc Polyedrum conftet octo haedris triangularibus, ideoque fiat $N = 8$; vnde de tiam Octaedron vocari solet. Quia ergo numerus angulorum planorum est 24, quorum quaterni occurrunt in singulis angulis solidis, numerus angulorum solidorum erit $= 6$.

§. 11. Sit nunc iterum O centrum trianguli sphaerici, ex quo in latus A B demittatur perpendiculum O P, vt obtineatur $\frac{x}{2r} =$ sin. A P & $\frac{y}{r} =$ sin. O A. Quia nunc in triangulo A O P est $\alpha = 45$ gr. & $\beta = 60$ gr. erit sin. $\alpha =$ cos. $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} =$ et cot. $\alpha = 1$; tum vero erit vt ante sin. $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; cos. $\beta = \frac{1}{2}$ & cot. $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$; vnde ex formulis superioribus colligitur cos. A P $= \frac{\text{cos. } \beta}{\text{sin. } \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ideoque sin. A P $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{2r}$; porro cos. O A $=$ cot. α cot. $\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, hincque sin. O A $= \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{y}{r}$, ideoque $x = r\sqrt{2}$ & $y = r\sqrt{\frac{2}{3}}$; ex quibus valoribus colligimus $\sqrt{(yy - \frac{1}{4}xx)} = \frac{r}{\sqrt{6}}$ et $\sqrt{(rr - yy)} = \frac{r}{\sqrt{3}}$.

§. 12. Ex his autem valoribus pro octaedro sequentes nascuntur determinationes:

I. Latus hedrae		$= r\sqrt{2}$	$= 1,414214.\ r$
II. Radius circuli		$= r\sqrt{\frac{2}{3}}$	$= 0,816496.\ r$
III. Area hedrae		$= \frac{rr\sqrt{3}}{2}$	$= 0,866025.\ rr$
IV. Superficies	octaedri	$= 4rr\sqrt{3}$	$= 6,928203.\ rr$
V. Soliditas	octaedri	$= \frac{4r^3}{3}$	$= 1,333333 \cdot r^3$

Casus Tertius.

Pro hedris triangularibus, quarum quinae in angulis solidis concurrunt.

§. 13. Hic ergo iterum est $n = 3$, ac in triangulo sphaerico A B C singuli anguli erunt $= \frac{360}{5} = 72$ gr.

vnde

vnde ſumma angulorum $= 216 = \frac{6\pi}{5}$. Hinc area trianguli ſphaerici erit $= \frac{\pi rr}{5}$, quae cum ſit vicies minor quam tota ſuperficies ſphaerae, hoc polyedron conſtabit ex viginti hedris, ita vt ſit $N = 20$, vnde hoc corpus Icoſäedron appellari ſolet. Quia porro omnino 60 anguli plani adſunt, quorum quini in angulum ſolidum coëunt, numerus angulorum ſolidorum erit $= 12$.

§. 14. Iam in triangulo ſphaerae rectangulo A O P erit angulus $\alpha = 36$ gr. manente $\beta = 60$ gr. Cum igitur conſtet eſſe

$$\text{coſ. } \alpha = \text{ſin } 54 \text{ gr.} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ erit}$$

$$\text{ſin. } \alpha = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \text{ hinque}$$

$$\text{cot. } \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}} = \frac{4}{\sqrt{(80-32\sqrt{5})}} = \frac{1}{\sqrt{(5-2\sqrt{5})}}$$

$$= \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}.$$

tum vero vt ante erit

$$\text{coſ. } \beta = \tfrac{1}{2} \ \& \ \text{cot. } \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hinc igitur fiet

$$\text{coſ. A P} = \frac{2}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}, \text{ vnde colligitur}$$

$$\text{ſin. A P}^2 = \frac{(6-2\sqrt{5})}{10-2\sqrt{5}} = \frac{40-8\sqrt{5}}{80} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \text{ ideoque}$$

$$\text{ſin. A P} = \frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{10}} = \frac{x}{2r}, \text{ vnde fit}$$

$$x = \frac{2r\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}. \text{ Deinde vero cum ſit}$$

$$\text{coſ. O A} = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}} \text{ erit}$$

$$\text{ſinus O A} = \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}} = \frac{y}{r}$$

$$\text{hinc } y = \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$$

§. 15. Cum igitur ſit

$$\tfrac{1}{2}\, x = \frac{r\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{2\sqrt{5}}, \text{ erit } \tfrac{1}{4}\, x\, x = \frac{rr(5-\sqrt{5})}{10},$$

quod ſubtractum ab

$$y\, y = \frac{rr(10-2\sqrt{5})}{15} \text{ relinquit}$$

$$\frac{(5-\sqrt{5})}{30}\, r\, r; \text{ ſicque erit } \sqrt{(y\,y - \tfrac{1}{4}\, x\, x)} = \frac{r\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{30}}.$$

Deinde vero erit

$$r\, r - y\, y = \frac{(5+2\sqrt{5})}{15}\, r\, r \text{ ideoque}$$

$$\sqrt{(r\, r - y\, y)} = \frac{r\sqrt{(5+2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$$

hinc igitur fiet

$$x\sqrt{(y\, y - \tfrac{1}{4}\, x\, x)} = \frac{r\, r\sqrt{(60-20\sqrt{5})}}{\sqrt{5}.\sqrt{30}} = \frac{r\, r\sqrt{(6-2\sqrt{5})}}{\sqrt{15}}$$

$$= \frac{r\, r\sqrt{(5-1)}}{\sqrt{15}}.$$

§. 16. Hinc igitur pro Icoſaëdro ſequentes nanciſcimur determinationes:

I.	Latus hedrae	$= \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$	$= 1{,}051462.\ r$
II.	Radius circuli	$= \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}$	$= 0{,}607062.\ r$
III.	Area hedrae	$= \frac{3rr(5-\sqrt{5})}{10\sqrt{3}}$	$= 0{,}478727.\ r\ r$
IV.	Superficies	$= \frac{6rr.(5-\sqrt{5})}{\sqrt{3}}$	$= 9{,}574542.\ r\ r$
V.	Soliditas	$= \frac{2r^3\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{3}$	$= 2{,}536150\ r^3$

Pro harum formularum euolutione numerica notaſſe iuuabit, eſſe $\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 4$ ſin. 36 gr., $\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 4$ coſ. 18 gr. $= 4$ ſin. 72 gr. et $5-\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ ſin. 18 gr. praeterea pro hedris triangularibus ſemper eſſe $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Caſus

Casus Quartus.

Pro hedris triangularibus, quarum sex in angulis solidis concurrunt.

§. 17. Quia hic sex anguli plani concurrunt, in hedris sphaericis singuli anguli erunt $\frac{360\ gr.}{6} = 60$ gr., quorum summa in quolibet triangulo cum sit 180 gr. $= \pi$, area horum triangulorum euanescit et numerus hedrarum fiet infinitus. Scilicet tota superficies sphaerica in infinita triangula diuisa concipi potest, ita vt ipsa sphaera hoc corpus regulare exhibeat, cuius superficies est

$$= 4\pi rr = 12,56637060.\, rr,$$

soliditas vero $= \frac{4}{3}\pi r^3 = 4,18879020.\, r^3$; vnde intelligitur, sphaeram merito inter corpora regularia numerari. Manifestum autem est simili modo superficiem sphaerae etiam in innumera quadrata, vel etiam hexogona regularia, diuisam concipi posse.

Casus Quintus.

Pro hedris quadratis, quarum ternae in angulis solidis concurrunt.

§. 18. Hic igitur est $n = 4$ et cuilibet hedrae quadratae planae in superficie sphaerica respondet quadrilineum sphaericum A B C D, cuius singuli anguli erunt $= 120$ gr. $= \frac{2\pi}{3}$, quoniam tres tales anguli totam peripheriam complere debent. Hinc summa quatuor angulorum erit $= \frac{8\pi}{3}$, vnde, ablatis 2π, remanent $\frac{2\pi}{3}$, ita vt area futura sit $= \frac{2\pi}{3} rr$, quae in tota superficie sphaerae sexies continetur, ita vt hoc polyëdrum ex sex hedris planis quadratis formetur, vnde etiam Hexaëdron vocatur, quae denominatio cum cubo congruit. Quia igitur in iis dantur 24 anguli plani, eo- Tab. I. Fig. 2.

 rum-

rumque terni in singulis angulis solidis concurrunt, numerus angulorum solidorum erit $= 8$.

§. 19. Sit nunc punctum O centrum cuiusque hedrae sphaericae A B C D, vnde ad vnum angulum A ducto arcu O A et demisso in latus A B perpendiculo O P, in triangulo O A P debet esse

$$\text{sin. } AP = \frac{x}{2r} \text{ et sin. } AO = \frac{y}{r}.$$

Quia nunc angulus

$$\alpha = 60 \text{ gr. et } \beta = 45, \text{ fit sin. } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{cos. } \alpha = \frac{1}{2}, \text{ cot. } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{sin. } \beta = \text{cos. } \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et cot. } \beta = 1.$$

Hinc igitur ex regulis supra datis colligimus

$$\text{cos. } AP = \frac{\text{cos. } \beta}{\text{sin. } \alpha} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \text{ et}$$

$$\text{cos. } AO = \text{cot. } \alpha. \text{ cot. } \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hinc ergo porro fit

$$\text{sin. } AP = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{2r} \text{ et sin. } AO = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{y}{r},$$

vnde habebimus

$$x = \frac{2r}{\sqrt{3}} \text{ et } y = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

sicque colligetur

$$\sqrt{(yy - \tfrac{1}{4}xx)} = \frac{r}{\sqrt{3}} \text{ et } \sqrt{(rr - yy)} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

§. 20. Ex his ergo valoribus pro Hexaëdro seu cubo sequentes adipiscimur valores:

I. Latus hedrae $= \frac{2r}{\sqrt{3}} = 1,154700 . r$

II. Radius circuli $= \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 0,816496 . r$

III. Area

III. Area hedrae $= \frac{4rr}{3} = 1,333333 \cdot rr$
IV. Superficies $= 8rr = 8,000000 \cdot rr$
V. Soliditas $= \frac{8r^3}{3\sqrt{3}} = 1,539600\, r^3$

Casus Sextus.

Pro hedris pentagonis, quarum ternae in angulis solidis concurrunt.

§. 21. Hic igitur est $n = 5$, et singuli anguli hedrae sphaericae pentagonae iterum erunt 120 gr. $= \frac{2\pi}{3}$, et talium quinque angulorum summa erit $\frac{10\pi}{3}$, vnde, ablatis 3π, remanet $\frac{\pi}{3}$. Hinc area erit $\frac{\pi rr}{3}$, quae in tota superficie spaerae duodecies continetur, sicque hoc corpus formabitur ex duodecim hedris pentagonis, vnde etiam Dodecaedron appellari solet, et quia omnino dantur $5 \cdot 12 = 60$ anguli plani, eorumque terni in angulis solidis coëunt, numerus angulorum solidorum erit $= 20$.

§. 22. Si hic vt hactenus constituatur triangulum sphaericum rectangulum O A P, erit angulus $\alpha = 60$ gr. et $\beta = 36$ gr. vnde habetur

$$\text{sin. } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ cot. } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{sin. } \beta = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \text{ cos. } \beta = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ et}$$

$$\text{cot. } \beta = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$$

hincque colligimus

$$\text{cos. A P} = \frac{\text{cos. } \beta}{\text{sin. } \alpha} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}} \text{ et}$$

$$\text{cos. O A} = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}},$$

vnde fit

 sin.

$$\text{ſin. } AP = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{6}} = \frac{x}{2r}, \text{ ideoque}$$

$$x = \frac{2r\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{6}} = \frac{r\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}},$$

vbi notetur eſſe $\sqrt{5} - 1 = 4$ ſin. 18 gr. tum vero erit

$$\text{ſin. } OA = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}} = \frac{y}{r} \text{ ideoque}$$

$$y = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}},$$

vbi notetur eſſe $\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = 4$ ſin. 36 gr. Ex his autem colligitur

$$\sqrt{(yy - \tfrac{1}{4}xx)} = \frac{r\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{15}}$$

(vbi notaſſe iuuabit eſſe $\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} = 4$ coſ. 18 gr.) et

$$\sqrt{(rr - yy)} = \frac{r\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}},$$

tum autem erit

$$x\sqrt{(yy - \tfrac{1}{4}xx)} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{3\sqrt{5}}.$$

§. 23. Hinc igitur pro dodecaedro, Sphaerae, cuius radius $= r$, inſcripto ſequentes inuenimus determinationes:

I. Latus hedrae	$= \frac{r\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$	$= 0{,}713644\, r$
II. Radius circuli	$= \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{15}}$	$= 0{,}607062\, r$
III. Area hedrae	$= rr\frac{\sqrt{5}}{6}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$= 0{,}876218\, rr$
IV. Superficies	$= 2rr\sqrt{5}.\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$= 10{,}514616\, rr$
V. Soliditas	$= \frac{2r^3(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}}$	$= 2{,}785164\, r^3$

pro vltimo valore notetur eſſe $5 + \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ ſin. 54. gr.

§. 24. Sic igitur nacti ſumus quinque illa corpora regularia, quorum inueſtigatio vulgo laborem non parum

rum molestum, atque imprimis figuras maxime intricatas, requirere solet, quorum naturam hic tam facile et propemodum sine figuris ex theoria sphaerica deduximus, vnde simul patet ipsi sphaerae sextum locum merito concedi. Quo autem ea facilius inter se comparare liceat omnes eorum determinationes hic iunctim conspectui exponamus:

Corpus regulare.	Latus cuiusque hedrae.	Radius circl. circumscripti	Area vnius hedrae.	Superficies tota.	Soliditas corporis.
Tetraëdron.	1,63299r	0,94281r	1,15470rr	4,61880rr	0,51320r^3
Octaëdron.	1,41421r	0,81650r	0,86602rr	6,92820rr	1,33333r^3
Icosaëdron.	1,05146r	0,60706r	0,47873rr	9,57454rr	2,53615r^3
Hexaëdron.	1,15470r	0,81650r	1,33333rr	8,00000rr	1,53960r^3
Dodecaëdron.	0,71364r	0,60706r	0,87622rr	10,51462rr	2,78516r^3
Sphaera.	0,00000r	1,00000r	0,00000rr	12,56637rr	4,18870r^3

§. 25. Hinc igitur, patet Dodecaëdron prae reliquis tam maximam superficiem quam soliditatem habere, vnde merito suspicari licet, totam sphaerae superficiem commodissime duodecim pentagonis planis obduci posse. Etsi enim superficies sphaerica nullo modo figuris planis, nisi sint quam minimae, exacte repraesentari potest: tamen nouimus, sphaeras per lacinias chartaceas, quae in polis coeant, satis accurate obduci solere, dum scilicet charta aliquantillum in medio se expandi patitur, ita vt quampiam gibbositatem recipiat convexitati sphaerae conuenientem. Talem igitur effectum multo magis in pentagonis chartaceis exspectare licebit, hicque modus vulgari longe anteferendus videtur, ideo quod hic nusquam plures tribus anguli plani sint iungendi, cum more solito ad minimum

minimum duodecim laciniae in polis concurrere debeant, id quod plerumque fine infigni vitio vix praeftare licet.

§. 26. Operae igitur pretium erit inueftigare, quam exacte duodecim illa pentagona, in quae fuperficies globi ab infcripto Dodecaëdro diuiditur, figuris planis obduci queant; Hunc in finem primo omnes dimenfiones vnius pentagoni fphaerici accurate determinemus, vbi quidem fufficiet vnicum fectorem A O B condideraffe, exiftente fcilicet centro talis pentagoni in puncto O, et radio fphaerae manente perpetuo $= r$. Hic igitur demiffo perpendiculo O P erunt anguli $\alpha = 60°$ et $\beta = 36°$, area vero talis pentagoni fupra eft inuenta $\frac{\pi r r}{3} = 1{,}0471975.\ rr$: tantam igitur etiam aream figura plana inducenda recipere debebit.

§. 27. Nunc more folito triangulum fphaericum A O P euoluamus, ope formularum cof. A P $= \frac{cof.\ \beta}{fin.\ \alpha}$ et cof. O A $=$ cot. α. cot. β

a *l.* cof. $\beta = 9{,}9079576$	ad. *l.* cot. $\beta = 10{,}1387390$
fubtr. *l.* fin. $\alpha = 9{,}9375306$	adde *l.* cot. $\alpha = 9{,}7614394$
l. cof. A P $= 9{,}9704270$	*l.* cof. O A $= 9{,}9001784$
ergo A P $= 20°.\ 54'.\ 19''$	hinc O A $= 37°.\ 22'.\ 38'$
fiue A P $= 75259''$	fiue O A $= 134558''$
ad. *l.* A P $= 4{,}8765584$	ad. *l.* O A $= 5{,}1289095$
adde $= 4{,}6855749$	adde - $4{,}6855749$
$9{,}5621333$	$9{,}8144844$
Arcus A P $= 0{,}3648660.r$	Arcus OA $= 0{,}6523556.r$

§. 28.

§. 28. Eodem modo etiam computemus quantitatem arcus O P ex formula

cof. O P $= \frac{cof.\,\alpha}{fin.\,\beta}$, vt fequitur

a $l.$ cof. α	$= 9,6989700$	ad $l.$ O P	$= 5,0576014$
fubtr. $l.$ fin. β	$= 9,7692187$	adde	$4,6855749$
$l.$ cof. O P	$= 9,9297513$		$9,7431763$
ergo O P	$= 31^\circ.\ 43'.\ 3''$	Arcus O P	$= 0,5535749.r$
fiue O P	$= 114183$ fec.		

§. 29. Confideremus nunc pari modo pentagonum regulare planum, feu potius tantum eius partem quintam, vni lateri refpondentem $a\,o\,b$, cuius latus fit ab, centrum circuli circumfcripti o, eiusque radius $o\,a$, qui, quia tanquam incognitus fpectari debet, ponatur $o\,a = z$, ac demiffo ex o in latus $a\,b$ perpendiculo $o\,p$, ob angulum $a\,o\,p = 36$ gr. erit $a\,p = z$ fin. 36 gr. et $o\,p = z$ cof. 36 gr. ideoque $a\,p = 0,5877853.\,z$ et $o\,p = 0,8090170.\,z$; area vero trianguli $a\,o\,p$ erit $= 0,2377671.\,zz$ Tab. I. Fig. 2.

§. 30. Quia autem in hac figura angulus $o\,a\,p$ eft tantum 54 gr. dum in fphaera erat 60 gr., eo angulus fphaericus neutiquam obtegi poterit, fed nimis paruus eft 6 gradibus. Ad hunc ergo defectum fupplendum lateri $a\,b$ adiungatur fegmentum circulare $a\,\pi\,b$, cuius arcus cum chorda faciat angulum $p\,a\,\pi = 6$ gr. vt fiat angulus $o\,a\,\pi = 60$ gr. angulo fcilicet O A P obtegendo aptus. Huius arcus centrum fit in v, ductaque recta $v\,a = v\,\pi$, ob angulum $v\,a\,\pi = 90$, erit angulus $a\,v\,\pi = 6$ gr.; quare fi ponamus $v\,a = v$, erit $\frac{a\,p}{v} =$ fin. 6 gr. ideoque

$$v = \frac{a\,p}{fin.\,6\,gr.} = \frac{z\,fin.\,36\,gr.}{fin.\,6\,gr.}$$

 vnde

vnde fit $v = 5,6232078.z$ et $l.\frac{v}{z} = 0,7499841$.
Cum igitur arcus $a\pi$ contineat 6 gr. $= \frac{\pi}{30}$, eius quantitas erit $a\pi = \frac{\pi}{30}v = 0,5888643.z$, qui si ducatur in $\frac{1}{2}v$, prodibit area sectoris $av\pi = 1,655652.z^2$. Hinc auferatur area trianguli $vpa = \frac{1}{2}ap.vp = \frac{1}{2}v$ sin. 6 gr. v cos. 6 gr. $= \frac{1}{4}vv$ sin. 12 gr. $= 1,643566.z^2$, et remanebit area semi-segmenti $\pi ap = 0,012086\,z^2$, quae addita ad aream trianguli $opa = 0,237767.zz$ producet aream trilinei

$$oa\pi = 0,249853.zz$$

quae decies sumta dabit aream totius figurae planae quam quaerimus $= 2.49863\,zz$. Denique cum sit
$vp = v$ cos. 6 gr. $= 5,592403$, haec linea a $v\pi = v$ subducta relinquet sagittam $p\pi = 0,030804$, vnde fit recta $o\pi = 0,839821.z$

§. 31. Omnes igitur has determinationes, quas tam pro figura sphaerica quam pro figura plana inuenimus, ita repraesentemus, vt vno obtutu percipi queant

Pro Pentagono sphaerico	Pro Pentagono plano.
$OA = 0,6523556.r$	$oa = z$
$AP = 0,3648660.r$	$a\pi = 0,5888643.z$
$OP = 0,5535749.r$	$o\pi = 0,8398210.z$
tota area $= 1,0471975.rr$	tota area $= 2,49863.zz$

§. 32. Vt nunc hae duae figurae satis exacte inter se congruere queant, dum scilicet charta circa medium o aliquantillum expanditur, quod humectatione facillime obtinetur, manifestum est, extremitates, vbi talis expansio locum non habet, exacte inter se conuenire debere, ita vt fiat $a\pi = AP$ siue $0,5888643\,z = 0,3648660.r$, vnde colligitur

$$z = \frac{0,3648660\,r}{0,5888643} = 0,6196096.r \text{ et } \frac{lz}{r} = 9,7921125$$

hoc

hoc igitur valore ſubſtituto praecedentes determinationes ad ſequentes valores reducentur:

Pro Pentagono ſphaerico	Pro Pentagono plano.
$AO = 0{,}6523556.r$	$oa = 0{,}6196097.r$
$AP = 0{,}3648612.r$	$a\pi = 0{,}3648612.r$
$OP = 0{,}535749.r$	$o\pi = 0{,}5175824.r$
tota area $= 1{,}0471975.rr$	tota area $= 0{,}9591895.rr$

Vnde apparet per expanſionem chartae rectam oa incrementum capere debere $= 0{,}0327459.r$, quod eſt fere viceſima pars totius longitudinis; at vero recta $o\pi$ capere debet incrementum $0{,}0359925.r$, quod valet circiter partem decimam quartam; denique totius ſuperficici incrementum erit $= 0{,}0880080$, quae eſt pars fere vndecima: tantam autem expanſionem chartam recipere poſſe experientia ſatis declarat, hinc itaque ſequens problema commode reſoluere poterimus.

Problema.

Superficiem dati globi per duodecim pentagona plana quam fieri poteſt exactiſſime obducere.

Solutio.

Sit radius globi dati $= r$, et in plano deſcribatur circulus radio $z = 0{,}6196097.r$, cui inſcribatur pentagonum regulare, ſuper cuius ſingulis lateribus adiungantur ſegmenta circularia $a\pi b$ radio

$$= v = 5{,}6232078.z = 3{,}484114.r$$

tum huiusmodi duodecim pentagona accurate ex charta exſcindantur, iisque ternis ad angulos coniungendis ſuperficies globi ſatis perfecte obtegi poterit.

DILVCIDATIONES
SVPER METHODO ELEGANTISSIMA, QVA ILLVSTRIS *DE LA GRANGE* VSVS EST IN INTEGRANDA AEQVATIONE DIFFERENTIALI
$\frac{dx}{\surd X} = \frac{du}{\surd Y}$.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Postquam diu et multum in perscrutanda aequatione differentiali $\frac{dx}{\surd X} = \frac{dy}{\surd Y}$ desudassem, atque imprimis in methodum *directam*, quae via facili ac plana ad eius integrale perduceret, nequicquam inquisiuissem; penitus obstupui, cum mihi nunciaretur, in volumine quarto *Miscellaneorum Taurinensium* ab Illustri *de la Grange* talem methodum esse expositam, cuius ope pro casu, quo

$$X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4 \text{ et}$$
$$Y = A + By + Cyy + Dy^3 + Ey^4$$

propositae aequationis differentialis hoc integrale algebraicum atque adeo completum felicissimo successu elicuit.

$$\frac{\surd X + \surd Y}{x - y} = \surd (\Delta + D(x+y) + E(x+y)^2)$$

vbi Δ denotat quantitatem constantem arbitrariam per integrationem ingressam.

§. 2.

§. 2. Iſtud autem egregium inuentum eo magis ſum admiratus, quod equidem ſemper putaueram, talem methodum in iuueſtigando idoneo factore, quo aequatio propoſita integrabilis redderetur, quaeri oportere, cum vulgo omnis methodus integrandi vel in ſeparatione variabilium, vel in idoneo multiplicatore contineri videatur, etiamſi certis caſibus quoque ipſa differentiatio ad integrale perducere queat, quemadmodum tam a me ipſo quam ab aliis per plurima exempla eſt oſtenſum. Ad hanc autem tertiam viam illa ipſa methodus *Grangiana* rite referri poſſe videtur.

§. 3. Quanquam autem facile eſt inuentis aliquid addere, tamen in re tam ardua plurimum intererit, hanc methodum ab Illuſtri *la Grange* adhibitam accuratius perpendiſſe atque ad vſum analyticum magis accommodaſſe; ſiquidem totum negotium multo facilius ac ſimplicius expediri poſſe videtur; quamobram, quae de hoc argumento, quod merito maximi momenti eſt cenſendum, ſum meditatus, hic data opera fuſius ſum expoſiturus.

§. 4. Quoniam autem hoc integrale ab Illuſtri *la Grange* iuuentum, ab iis formis quas ipſe olim dederam, plurimum diſcrepat, ac ſimplicitate non mediocriter antecellit, ante omnia viſum eſt ſcitari, quomodo aequationi differentiali ſatisfaciat. Hunc in finem pono breu. gr. $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = V$, vt habeam

$$\frac{V}{x-y} = \sqrt{(\Delta + D\,(x+y) + E\,(x+y)^2)},$$

quam aequationem ita differentiare oportet, vt conſtans arbitraria Δ ex differentiali excedat. Sumtis igitur quadratis erit

$\frac{VV}{(x-y)^2} = \Delta + D(x+y) + E(x+y)^2$, quae differentiata dat

$$\frac{2VdV}{(x-y)^2} - \frac{2VV(dx-dy)}{(x-y)^3} -$$
$$D(dx+dy) - 2E(x+y)(dx+dy) = 0.$$

§. 5. Quo nunc calculus planior reddatur, seorsim partes vel per dx vel per dy affectas inuestigemus. Pro elemento igitur dx, si y vt constans spectetur, erit

$$dV = \frac{X^1 dx}{2\sqrt{X}},$$

vnde singulae partes ita se habebunt:

$$dx\left(\frac{VX^1}{(x-y)^2\sqrt{X}} - \frac{2VV}{(x-y)^3} - D - 2E(x+y)\right)$$

vbi notetur esse $V = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$, hincque

$$VV\sqrt{X} = (X+Y)\sqrt{X} + 2X\sqrt{Y}$$

vnde hic duplicis generis termini occurrunt, dum vel per $\sqrt{X}$ vel per $\sqrt{Y}$ sunt affecti. Duo autem termini adsunt $\sqrt{Y}$ affecti, qui sunt

$$-\frac{4X\sqrt{Y}}{(x-y)^3} + \frac{X^1\sqrt{Y}}{(x-y^2)},$$

qui ergo iunctim sumti dabunt

$$\frac{\sqrt{Y}}{(x-y)^3}(X^1(x-y) - 4X),$$

quae forma ob

$$X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4, \text{ hincque}$$
$$X^1 = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3, \text{ dabit}$$
$$X^1(x-y) - 4X = -4A - B(3x+y)$$
$$-2C(xx+xy) - D(x^3+3xxy) - 4Ex^3y$$

Termini autem per $\sqrt{x}$ affecti sunt

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-y)^3}(X^1(x-y) - 2(X+Y) - D(x-y)^3 - 2E(x+y)(x-y)^3).$$

Cum

Cum igitur ſit

$$X + Y = 2A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + D(x^3+y^3) + E(x^4+y^4)$$

facta ſubſtitutione iſte poſtremus factor erit

$$-4A - B(x+3y) - 2C(xy+yy) - D(3xyy+y^3) - 4Exy^3$$

quae forma a praecedente hoc tantum diſcrepat, quod litterae x et y ſunt permutatae.

§. 6. Quod ſi ergo breu. gr. ponamus

$$M = 4A + B(3x+y) + 2C(xx+xy) + D(x^3+3xxy) + 4Ex^3y$$

$$N = 4A + B(x+3y) + 2C(yy+xy) + D(y^3+3xyy) + 4Exy^3$$

hinc pars elemento dx affecta ita erit expreſſa:

$$-\frac{dx}{(x-y)^3\sqrt{X}}(M\sqrt{Y} + N\sqrt{X}).$$

§. 7. Simili modo

ob $dV = \frac{Y'dy}{2\sqrt{Y}}$,

partes elemento dy affectae erunt

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}}\left(\frac{VY'}{(x-y)^2} + \frac{2VV\sqrt{Y}}{(x-y)^3} - D\sqrt{Y} - 2E(x+y)\sqrt{Y}\right).$$

Haec iam forma ob

$$V = \sqrt{X} + \sqrt{Y} \text{ et } VV\sqrt{Y} = (X+Y)\sqrt{Y} + 2Y\sqrt{X}$$

continebit ſequentes terminos per $\sqrt{X}$ affectos,

$$\frac{\sqrt{X}}{(x-y)^3}(Y'(x-y) + 4Y)$$

quae forma ex priore praecedentis calculi oritur, ſi litterae x et y permutentur, ſimulque ſigna; vnde patet hanc ex-

preſſi-

pressionem praebere valorem $+$ N. Reliqui autem termini per $\sqrt{Y}$ effecti erunt

$$\frac{\sqrt{Y}}{(x-y)^3}\left(Y'(x-y)+2(X+Y)-D(x-y)^3-2E(x+y)(x-y)^3\right).$$

Haec forma iterum ex permutatione litterarum et signorum ex forma praecedentis calculi oritur, quae ergo cum esset $-$N, haec erit $+$M. Hoc igitur modo partes elementum dy continentes erunt

$$\frac{+dy}{(x-y)^3\sqrt{Y}}(N\sqrt{X}+M\sqrt{Y})$$

§. 8. Coniungendis igitur his membris aequatio differentialis ex forma *Grangiana* orta erit

$$\left(\frac{dy}{\sqrt{Y}}-\frac{dx}{\sqrt{X}}\right)\left(\frac{N\sqrt{X}+M\sqrt{Y}}{(x-y)^3}\right)=0,$$

quae per factorem comunem diuisa praebet ipsam aequationem differentialem propositam $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$; vnde simul patet aequationem integralem exhibitam recte se habere, atque adeo valorem litterae Δ arbitrio nostro penitus relinqui.

§. 9. Antequam autem methodum *Grangianum* ad ipsam aequationem differentialem $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ in omni extensione acceptam applicemus, a casu simpliciore inchoëmus, quo aequatio adeo rationalis proponitur haec:

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx}=\frac{dy}{a+2by+cyy}.$$

Analysis.

Pro integratione aequationis differentialis.

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx}=\frac{dy}{a+2by+cyy}.$$

§. 10. Ponamus br. gr. $a+2bx+cxx=X$ et $a+2by+cyy=Y$, vt fieri debeat $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}$, quae formu-

formulae cum inter se debeant esse aequales, vtraque per idem elementum $d\,t$ designetur, ita vt nanciscamur has duas formulas: $\frac{dx}{dt} = X$ et $\frac{dy}{dt} = Y$.
Quod si ergo iam statuamus

$$x - y = q, \text{ erit } \frac{dq}{dt} = X - Y = 2\,b\,q + c\,q\,(x + y)$$

vnde per q diuidendo erit $\frac{d\,q}{q\,d\,t} = 2\,b + c\,(x + y)$.

§. 11. Nunc primas formulas differentiemus, sumto elemento $d\,t$ constante, et facto

$$d\,X = X'\,d\,x \text{ et } d\,Y = Y'\,d\,y$$

orientur hae duae aequationes:

$$\frac{d\,d\,x}{d\,x\,d\,t}\ X' \text{ et } \frac{d\,d\,y}{d\,y\,d\,t} = Y',$$

quae inuicem additae praebent

$$\frac{d\,d\,x}{d\,x\,d\,t} + \frac{d\,d\,y}{d\,y\,d\,t} = X' + Y'.$$

Quare cum sit

$$X' = 2\,b + 2\,c\,x \text{ et } Y' = 2\,b + 2\,c\,y \text{ erit}$$

$$\frac{1}{dt}\left(\frac{d\,d\,x}{d\,x} + \frac{d\,d\,y}{d\,y}\right) = 4\,b + 2\,c\,(x + y).$$

§. 12. Quoniam igitur hic postremus valor duplo maior est praecedente $\frac{d\,q}{q\,d\,t}$, hoc modo deducti sumus ad hanc aequationem:

$$\frac{d\,d\,x}{d\,x} + \frac{d\,d\,y}{d\,y} = \frac{2\,d\,q}{q},$$

quae integrata dat $l\,d\,x + l\,d\,y = 2\,l\,q +$ const, hincque in numeris erit

$$d\,x\,d\,y = C\,q\,q\,d\,t^2, \text{ ita vt sit } C = \frac{d\,x\,d\,y}{q\,q\,d\,t^2}.$$

Quare cum sit

$$\frac{dx}{dt} = X \text{ et } \frac{dy}{dt}\ Y, \text{ aequatio integralis erit}$$

$$\frac{X\,Y}{(x-y)^2} = C, \text{ quae ergo non solum est algebraica,}$$

sed etiam completa.

§. 13. Si igitur propoſita fuerit haec aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx}=\frac{dy}{a+2by+cyy},$$

eius integrale completum ita erit expreſſum:

$$\frac{(a+2bx+cxx)(a+2by+cyy)}{(x-y)^2}=C$$

quae, vtrinque addendo $bb-ac$, induet hanc formam:

$$\frac{aa+2ab(x+y)+2acxy+bb(x+y)^2+2bcxy(x+y)+ccxxyy}{(x-y)^2}=\Delta\Delta,$$

ſicque, extracta radice, integrale hanc formam habebit:

$$\frac{a+b(x+y)+cxy}{x-y}=\Delta,$$

quae ſine dubio eſt ſimpliciſſima, quandoquidem tam y per x quam x per y facillime exprimi poteſt, cum ſit

$$y=\frac{(\Delta-b)x-a}{\Delta+b+cx} \text{ et } x=\frac{a+(\Delta+b)y}{\Delta-b-cy}.$$

§. 14. Calculum, quo hic vſi ſumus, perpendenti facile patebit, in his formis X et Y, non vltra quadrata progredi licere. Si enim ipſi X inſuper tribuamus terminum dx^3 et ipſi Y terminum dy^3, pro priore forma prodit

$$\frac{X-Y}{x-y}=2b+c(x+y)+d(xx+xy+yy)=\frac{dq}{qdt};$$

pro altera autem forma eſt

$$X'+Y'=4b+2c(x+y)+3d(xx+yy)=\frac{ddx}{dxdt}+\frac{ddy}{dydt}.$$

Quare ſi hinc duplum praecedentis auferamus, colligitur

$$\frac{ddx}{dxdt}+\frac{ddy}{dydt}-\frac{2dq}{qdt}=d(x-y)^2,$$

quam aequationem non amplius integrare licet.

§. 15. Facile autem oſtendi poteſt, talem aequationem differentialem, in qua vltra quadratum proceditur, nullo amplius modo algebraice integrari poſſe. Si enim tan-

tantum hic casus proponeretur: $\frac{dx}{1+x^3} = \frac{dy}{1+y^3}$, notum est, vtrinque integrale partim logarithmos partim arcus circulares innoluere, ideoque quantitates transcendentes diuersos, quae nullo modo inter se comparari possunt. Huiusmodi scilicet comparationes iis tantum casibus locum habere possunt, quando vtrinque vnius generis tantum quantitates transcendentes occurrunt.

Analysis.

Pro integratione aequationis

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx} + \frac{dy}{a+2by+cyy} = 0.$$

§. 16. Quod si hic vt ante ponamus $\frac{dx}{a+2bx+cxx} = dt$, statui debebit $\frac{dy}{a+2by+cyy} = -dt$: at vero si calculum simili modo quo ante instituere velimus, nihil plane proficimus. Postquam autem omnes difficultates probe perpendissem, tandem in artificium incidi, quo hunc casum expedire licuit, ita vt hinc non contemnendum incrementum methodo *Grangianae* attulisse mihi videar.

§. 17. Quoniam igitur has duas habeo aequationes: $\frac{dx}{dt} = X$ et $\frac{dy}{dt} = -Y$, hinc formo istam nouam aquationem:

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{dt} = yX - xY.$$

Iam facio $xy = u$, vt habeam

$$\frac{du}{dt} = a(y-x) + cxy(x-y),$$

vnde posito

$$x - y = q \text{ erit } \frac{du}{dt} = q(cu - a),$$

 quae

quae aequatio per $cu-a$ diuiſa ductaque in c praebet $\frac{c\,du}{dt\,(cu-a)} = cq$, hocque modo nacti ſumus differentiale logarithmicum.

§. 18. Dein vero aequationes principales vt ante differentiemus, et obtinebimus

$$\frac{ddx}{dt\,dx} = X' \text{ et } \frac{ddy}{dt\,dy} = -Y',$$

quae inuicem additae dant

$$\frac{1}{dt}\left(\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy}\right) = X' - Y' = 2cq;$$

quare ſi hinc duplum praecedentis aequationis ſubtrahamus, remanebit

$$\frac{1}{dt}\left(\frac{ddx}{dx} + \frac{ddy}{dy} - \frac{2c\,du}{cu-a}\right) = 0,$$

vnde per dt multiplicando et integrando nanciſcimur $l\,dx + l\,dy - 2\,l(cu-a) = l\,C$, ideoque $\frac{dx\,dy}{(cu-a)^2} = C\,dt^2$. Cum igitur ſit $dx = X\,dt$ et $dy = -Y\,dt$, aequatio integralis noſtra erit $-\frac{XY}{(cu-a)^2} = C$.

§. 19. Per hanc ergo analyſin deducti ſumus ad hanc aequationem integralem aequationis propoſitae:

$$\frac{(a+2bx+cxx)(a+2by+cyy)}{(a-cxy)^2} = C.$$

quae aequatio, ſi vtrinque vnitas ſubtrahatur, reducitur ad hanc formam:

$$\frac{2ab(x+y)+ac(x+y)^2+4bbxy+2bcxy(x+y)}{(a-cxy)^2} = C.$$

§. 20. Illuſtremus hanc integrationem exemplo, ponendo $a=1$, $b=0$ et $c=1$, ita vt propoſita ſit haec aequatio differentialis: $\frac{dx}{1+xx} + \frac{dy}{1+yy} = 0$, cuius integrale nouimus eſſe A tang. x + A tang. y = A tang. $\frac{x+y}{1-xy} = C$,

ſicque

ſicque nouimus eſſe $\frac{x+y}{1-xy} = C$. At vero noſtra poſtrema formula dat pro hoc caſu

$$\frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2} = C \text{ ideoque } \frac{x+y}{1-xy} = C$$

quod egregie conuenit.

§. 21. Conſideremus etiam caſum, quo $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = 1$, ita vt proponatur haec aequatio:

$$\frac{dx}{1+x+xx} + \frac{dy}{1+y+yy} = 0,$$

cuius integrale eſt

$$\frac{2}{\surd 3} \text{ A tang. } \frac{x\surd 3}{2+x} + \frac{2}{\surd 3} \text{ A tang. } \frac{y\surd 3}{2+y} = C,$$

vnde ſequitur fore

$$\text{A tang. } \frac{2(x+y+xy)\surd 3}{4+2(x+y)-2xy} = C,$$

ideoque etiam $\frac{x+y+xy}{2+x+y-xy} = C$. At vero forma integralis inuenta pro hoc caſu dabit

$$\frac{x+y+(x+y)^2+xy+xy(x+y)}{(1-xy)^2} = C$$

quae in factores reſoluta dat

$$\frac{(1+x+y)(x+y+xy)}{(1-xy)^2} = C.$$

Prior vero aequatio

$$\frac{x+y+xy}{2+x+y-xy} = C \text{ inuerſa praebet } \frac{2+x+y-xy}{x+y+xy} = C,$$

et vnitate ſubtracta $\frac{1-xy}{x+y+xy} = C$, atque haec in praecedentem ducta dat $\frac{1+x+y}{1-xy} = C$.

§. 22. Videamus igitur, vtrum haec poſteriores aequationes inter ſe conueniant, et quia conſtantes vtrinque inter ſe diſcrepare poſſunt, ambas aequationes ita referamus:

$$\frac{1-xy}{x+y+xy} = \alpha \text{ et } \frac{1+x+y}{1-xy} = \beta;$$

 vnde

vnde cum ſit $\frac{1}{\alpha} = \frac{x+y+xy}{1-xy}$, euidens eſt fore $\beta - \frac{1}{\alpha} = 1$, ex quo pulcherrimus conſenſus inter ambas formulas elucet. Ex his exemplis intelligitur aequationem generalem ſupra inuentam hoc modo per factores repraeſentari poſſe:

$$\frac{(2b+c(x+y))(a(x+y)+2bxy)}{(a-cxy)^2}.$$

Ceterum conſideratio harum formularum haud iniucundas ſpeculationes ſuppeditare poterit.

§. 23. Sequenti autem modo forma illa integralis inuenta:

$$\frac{(2b+c(x+y))(a(x+y)+2bxy)}{(a-cxy)^2} = C$$

ſtatim ad formam ſimpliciſſimam reduci poteſt; ſi enim eius factores ſtatuamus

$$\frac{2b+c(x+y)}{a-cxy} = P \text{ et } \frac{a(x+y)+2bxy}{a-cxy} = Q$$

vt eſſe debeat $PQ = c$, erit

$$aP - cQ = \frac{2ab-2bcxy}{a-cxy} = 2b \text{ vnde fit } Q = \frac{aP-2b}{c},$$

ſicque quantitati conſtanti aequari debet haec forma: $\frac{aPP-2bP}{c}$; ex quo patet, etiam ipſam quantitatem P conſtanti aequari debere, ita vt iam aequatio noſtra integralis ſit

$$\frac{2b+c(x+y)}{a-cxy} = C, \text{ vel etiam } \frac{a(x+y)+2bxy}{a-cxy} = C.$$

Alia ſolutio facillima eiusdem aequationis

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx} + \frac{dy}{a+2by+cyy} = 0.$$

§. 24. Poſtrema reductione probe perpenſa, comperui, ſtatim ab initio ad formam integralis ſimpliciſſimam perueniri poſſe, atque adeo non neceſſe eſſe ad differentialia ſecunda aſcendere. Si enim vt ante ponamus $x+y$

$=p$

$= p$; $x - y = q$ et $xy = u$, ex formulis

$$\frac{dx}{dt} = X \text{ et } \frac{dy}{dt} = -Y$$

ſtatim deducimus

$$\frac{dp}{dt} = X - Y = 2bq + cpq, \text{ vnde fit } \frac{dp}{2b+cp} = q\,dt.$$

§. 25. Porro vero erit

$$\frac{ydx + xdy}{dt} = \frac{du}{dt} = yX - xY = -aq + cqu,$$

vnde fit $\frac{du}{cu-a} = q\,dt$, quam ob rem hinc ſtatim colligimus hanc aequationem: $\frac{dp}{2b+cp} = \frac{du}{cu-a}$, cuius integratio praebet $l(2b+cp) = l(cu-a) + lC$; vnde deducitur haec aequatio algebraica: $\frac{2b+cp}{cu-a} = C$, quae, reſtitutis literis x et y, dat $\frac{2b+c(x+y)}{cxy-a} = C$, quae eſt forma ſimpliciſſima aequationis integralis deſideratae. Hic imprimis notatu dignum occurrit, quod caſum primum hac ratione reſolvere non licet.

§. 26. Ex forma autem integrali inuenta facile aliae deriuantur, veluti ſi addamus $\frac{2b}{a}$, orietur haec forma $\frac{a(x+y)+2bxy}{cxy-a} = C$, quae per praecedentem diuiſa denuo nouam formam ſuppeditat, ſcilicet: $\frac{2b+c(x+y)}{a(x+y)+2bxy} = C$, quae formae quomodo ſatisfaciant operae pretium erit oſtendiſſe. Et quidem poſtrema forma, differentiata, erit

$$\frac{-2ab(dx+dy) - 4bb(ydx+xdy) - 2bc(yydx+xxdy)}{(a(x+y)+2bxy)^2}$$

quae in ordinem redacta praebet

$$dx(2ab+4bby+2bcyy) + dy(2ab+4bbx+2bcxx) = 0.$$

Haec per $2b$ diuiſa et ſeparata dat

$$\frac{dx}{a+2bx+cxx} + \frac{dy}{a+2by+cyy} = 0$$

quae eſt ipſa propoſita.

Ana-

Analysis.

Pro integratione aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cyy)}}.$$

§. 27. Introducto nouo elemento dt, deinceps pro constanti habendo, oriuntur hae duae aequationes:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{X} \text{ et } \frac{dy}{dt} = \sqrt{Y},$$

vbi literis X et Y valores initio assignatos tribuamus. Videbimus autem, pro methodo, qua hic vtemur, terminos litteris D et E affectos omitti debere. Sumtis ergo quadratis erit

$$\frac{dx^2}{dt^2} = X \text{ et } \frac{dy^2}{dt^2} = Y.$$

§. 28. Nunc istas formulas differentiemus, positoque, vt fieri solet, $dX = X'dx$ et $dY = Y'dy$ nanciscemur has aequationes:

$$\frac{2ddx}{dt^2} = X' \text{ et } \frac{2ddy}{dt^2} = Y',$$

ac posito $x + y = p$ fiet $\frac{2ddp}{dt^2} = X' + Y'$. Cum iam sit

$$X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3 \text{ et}$$
$$Y' = B + 2Cy + 3Dyy + 4Ey^3 \text{ erit}$$
$$X' + Y' = 2B + 2Cp + 3D(xx + yy) + 4E(x^3 + y^3) = \frac{2ddp}{dt^2},$$

quae aequatio manifesto integrationem admittet, si fuerit et $D = 0$ et $E = 0$, quemadmodum assumsimus. Multiplicando igitur per dp et integrando nanciscimur

$$\frac{dp^2}{dt^2} = \Delta + 2Bp + Cpp$$

et radicem extrahendo

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{(\Delta + 2Bp + Cpp)}.$$

Cum

Cum igitur ſit $\frac{dp}{dt} = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$, aequatio integralis, quam ſumus adepti, erit

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{(\Delta + 2B(x+y) + C(x+y)^2)},$$

quae adeo eſt algebraica; vbi notetur eſſe

$$X = A + Bx + Cxx \text{ et } Y = A + By + Cyy.$$

§. 29. Sumamus igitur quadrata, et noſtra aequatio integralis erit

$$2A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + 2\sqrt{XY}$$
$$= \Delta + 2B(x+y) + C(x+y)^2, \text{ ſiue}$$
$$2A - B(x+y) - 2Cxy + 2\sqrt{XY} = \Delta,$$

quae penitus ab irrationalitate liberata, poſito $\Delta - 2A = \Gamma$ praebebit

$$4XY = 4AA + 4AB(x+y) + 4AC(xx+yy)$$
$$+ 4BBxy + 4BCxy(x+y) + 4CCxxyy$$
$$= \Gamma^2 + 2\Gamma B(x+y) + 4\Gamma Cxy + BB(x+y)^2$$
$$+ 4BCxy(x+y) + 4CCxxyy$$

ſiue

$$(4AA - \Gamma^2) + 2B(2A - \Gamma)(x+y) + 4(BB - \Gamma C)xy$$
$$+ 4AC(xx+yy) - B^2(x+y)^2 = 0.$$

§. 30. Quod ſi iam hanc aequationem rationalem cum formula *canonica*, qua olim ſum vſus ad huiusmodi integrationes expediendas, comparemus, quae erat

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy = 0,$$

dum ſcilicet loco $(x+y)^2$ ſcribamus $(xx+yy) + 2xy$, reperiemus fore

$$\alpha = 4AA - \Gamma^2; \; \beta = B(2A - \Gamma); \; \gamma = 4AC - B^2;$$
$$\delta = BB - 2\Gamma C.$$

§. 31. Alio vero insuper modo eandem aequationem differentialem propositam integrare poterimus, introducendo literam $q = x - y$; tum enim habebimus

$$\frac{2\,ddq}{dt} = X' - Y'. \quad \text{At vero erit}$$

$$X' - X' = 2\,Cq + 3\,Dq\,(x + y)$$

vbi iterum patet statui debere tam $D = 0$ quam $E = 0$, vt integratio, multiplicando per dq, succedat. Hoc autem notato erit integrale $\frac{dq^2}{dt^2} = \text{Const} + Cqq$, ideoque

$$\frac{dq}{dt} = \surd(\Delta + Cqq).$$

§. 32. Cum igitur sit $\frac{dq}{dt} = \surd X - \surd Y$, hoc integrale ita erit expressum:

$$\surd X - \surd Y = \surd(\Delta + Cqq)$$

quae aequatio sumtis quadratis abit in hanc:

$$2\,A + B\,(x + y) + C\,(xx + yy) - 2\surd XY$$
$$= \Delta + C\,(x - y)^2 \text{ siue}$$

$$2\,A + B\,(x + y) + 2\,Cxy - 2\surd XY = \Delta$$

vnde fit

$$2\surd XY = 2\,A - \Delta + B\,(x + y) + 2\,Cxy,$$

vbi si ponatur $2\,A - \Delta = -\Gamma$ aequatio ab ante inventa prorsus non discrepat.

§. 33. Quod si autem proposita fuisset aequatio

$$\frac{dx}{\surd(A + Bxx + Cxx)} + \frac{dy}{\surd(A + By + Cyy)} = 0,$$

integralia ante inuenta ad hunc casum referentur, si modo loco $\surd Y$ scribatur $- \surd Y$; vnde patet pro hoc casu haberi hanc aequationem:

$$\surd X - \surd Y = \surd(\Delta + 2\,B\,(x + y) + C\,(x + y)^2)$$

vel

vel etiam

$$\surd X + \surd Y = \surd (\Delta + C (x-y)^2)$$

§. 34. Hic singularis casus occurrit, quando formulae $A + Bx + Cxx$ sunt quadrata. Sit enim

$$X = (a + bx)^2 \text{ et } Y = (a + by)^2 \text{ ideoque}$$

$$A = a^2,\ B = 2ab,\ C = bb;$$

tum enim prior forma integralis erit

$$b(x-y) = \surd (\Delta + 4ab(x+y) + bb(x+y)^2)$$

sumtisque quadratis

$$-4bbxy = \Delta + 4ab(x+y), \text{ ideoque}$$

$$\Delta = a(x+y) + bxy$$

cuius aequationis differentiale est

$$a(dx + dy) + b(xdy + ydx) = 0 \text{ ideoque}$$

$$dx(a + by) + dy(a + bx) = 0.$$

Sin autem altera formula vtatur, erit

$$2a + b(x+y) = \surd (\Delta + bb(x-y)^2)$$

vnde quadratis sumtis, positoque $\Delta - 4aa = \Gamma$ prodit vt ante $\Gamma = a(x+y) + bxy$.

Analysis

Pro integranda aequatione

$$\frac{dx}{\surd X} = \frac{dy}{\surd Y}$$

existente $X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4$

et $Y = A + By + Cyy + Dy^3 + Ey^4$.

§. 35. Introducto iterum elemento dt, vt sit

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{X} \text{ et } \frac{dy}{dt} = \sqrt{Y}$$

ideoque sumtis quadratis

$$\frac{dx^2}{dt^2} = X \text{ et } \frac{dy^2}{dt^2} = Y,$$

statuamus $x + y = p$ et $x - y = q$, et quia hinc prodit

$$dx^2 - dy^2 = dp\,dq, \text{ erit}$$

$$\frac{dp\,dq}{dt^2} = X - Y = B(x-y) + C(x^2-y^2) + D(x^3-y^3) + E(x^4-y^4)$$

§. 36. Quoniam igitur est

$$x = \frac{p+q}{2} \text{ et } y = \frac{p-q}{2}$$

his valoribus introductis reperietur

$$X - Y = Bq + Cpq + \tfrac{1}{4}Dq(3pp+qq) + \tfrac{1}{2}Epq(pp+qq)$$

vnde per q diuidendo oritur

$$\frac{dp\,dq}{q\,dt^2} = B + Cp + \tfrac{1}{4}D(3pp+qq) + \tfrac{1}{2}Epq(pp+qq).$$

§. 37. Nunc etiam formulas quadratas primo exhibitas differentiemus, et statuendo vt ante

$dX = X'dx$ et $dX = Y'dy$ habebimus

$\frac{2ddx}{dt^2} = X'$ et $\frac{2ddy}{dt^2} = Y'$, hincque addendo

$\frac{2ddp}{dt^2} = X' + Y'$. Cum vero sit

$$X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3 \text{ et}$$

$$Y' = B + 2Cy + 3Dyy + 4Ey^3$$

erit $X' + Y' = 2B + 2Cp + \tfrac{3}{2}D(pp+qq) + Ep(pp+3qq)$,

ita

ita vt ſubſtituto hoc valore fiat

$$\frac{ddp}{dt^2} = B + Cp + \tfrac{3}{4}D(pp+qq) + \tfrac{1}{2}Ep(pp+3qq)$$

a qua aequatione ſi priorem $\frac{dpdq}{qdt^2}$ ſubtrahamus, remanebit ſequens:

$$\frac{ddp}{dt^2} - \frac{dpdq}{qdt^2} = \tfrac{1}{2}Dqq + Epqq.$$

§. 38. Haec iam aequatio per qq diuiſa producit iſtam:

$$\frac{1}{dt^2}\left(\frac{ddp}{qq} - \frac{dpdq}{q^3}\right) = \tfrac{1}{2}D + Ep,$$

quae ducta in $2\,dp$ manifeſto fit integrabilis: prodit enim

$$\frac{dp^2}{qqdt^2} = \Delta + Dp + Epp$$

ex qua radice extracta colligitur:

$$\frac{dp}{qdt} = \sqrt{(\Delta + Dp + Epp)}.$$

Cum igitur poſuerimus

$p = x + y$ et $q = x - y$, erit $\frac{dp}{dt} = \sqrt{X} + \sqrt{Y}$,

vnde reſultat haec aequatio integralis algebraica:

$$\frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{x-y} = \sqrt{(\Delta + D(x+y) + E(x+y)^2)}$$

quae eſt ipſa forma ab Illuſtri *la Grange* inuenta.

§. 39. Euoluamus vlterius hanc formam, ac ſumtis quadratis erit

$$\frac{X+Y+2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta + D(x+y) + E(x+y)^2.$$

Eſt vero

$$X + Y = 2A + B(x+y) + C(xx+yy)$$
$$+ D(x^3+y^3) + E(x^4+y^4)$$

vnde ſi auferamus

$$(D(x+y) + E(x+y)^2)\,(x-y)^2$$

remanebit

$$2A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + Dxy\,(x+y)$$
$$+ 2Exxyy,$$

 quo

quo ſubſtituto aequatio integralis erit

$$\frac{2A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + Dxy(x+y) + 2Ex^2y^2 + 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta$$

§. 40. Haec aequatio aliquanto concinnior reddi poteſt ſubtrahendo vtrinque C et ſtatuendo $\Delta - C = \Gamma$: habebitur enim hoc facto

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy + 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Gamma$$

vnde deducimus

$$2\sqrt{XY} = \Gamma(x-y)^2 - 2A - B(x+y) - 2Cxy$$
$$- Dxy(x+y) - 2Exxyy$$

ſiue ponendo

$$2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy = V$$

aequatio noſtra erit

$2\sqrt{XY} = \Gamma(x-y)^2 - V$, quae ſumtis quadratis abit in hanc:

$$4XY = \Gamma^2(x-y)^4 - 2\Gamma V(x-y)^2 + VV \text{ ſiue}$$
$$4XY - VV = \Gamma^2(x-y)^4 - 2\Gamma V(x-y)^2$$

§. 41. Facta nunc ſubſtitutione erit

$$4XY = 4A^2 + 4AB(x+y) + 4AC(xx+yy)$$
$$+ 4AD(x^3+y^3) + 4AE(x^4+y^4) + 4BBxy$$
$$+ 4BCxy(x+y) + 4BDxy(xx+yy)$$
$$+ 4BExy(x^3+y^3) + 4CCxxyy$$
$$+ 4CDxxyy(x+y) + 4CExxyy(xx+yy)$$
$$+ 4DDx^3y^3 + 4DEx^3y^3(x+y)$$
$$+ 4EEx^4y^4.$$

At vero porro colligitur fore

$$VV = 4AA + 4AB(x+y) + 8ACxy$$
$$+ 4ADxy(x+y) + 8AExxyy + BB(x+y)^2$$

+ 4 B

$$+ 4 BCxy(x+y) + 2 BDxy(x+y)^2$$
$$+ 4 BE(x+y)xxyy + 4 CCxxyy$$
$$+ 4 CD(x+y)xxyy + 8 CEx^3y^3$$
$$+ DDxxyy(x+y)^2 + 4 DEx^3y^3(x+y)$$
$$+ 4 EEx^4y^4.$$

§. 42. Quod si iam posteriorem formulam a priore subtrahamus et singulos terminos ordine analogos disponamus, reperiemus

$$4XY - VV = 4AC(x-y)^2 + 4AD(x+y)(x-y)^2$$
$$+ 4AE(x+y)^2(x-y)^2 - B^2(x-y)^2$$
$$+ 2BDxy(x-y)^2 + 4BExy(x+y)(x-y)^2$$
$$+ 4CExxyy(x-y)^2 - DDxxyy(x-y)^2$$

quae expressio factorem habet communem $(x-y)^2$, per quem ergo si diuidamus perueniemus ad hanc aequationem concinniorem:

$$4AC + 4AD(x+y) + 4AE(x+y)^2 - BB$$
$$+ 2BDxy + 4BExy(x+y) + (4CE - DD)xxyy$$
$$= \Gamma\Gamma(x-y)^2 - 4\Gamma A - 2\Gamma B(x+y) - 4\Gamma Cxy$$
$$- 2\Gamma Dxy(x+y) - 4\Gamma Exxyy.$$

§. 43. Transferamus nunc omnes terminos ad partem sinistram et loco $(x+y)^2$ scribamus $(xx+yy)+2xy$, tum vero $(xx+yy)-2xy$ loco $(x-y)^2$, quo facto talis oritur aequatio meae canonicae respondens:

$$0 = \begin{cases} 4AC + 4AD(x+y) + 4AE(x^2+y^2) + 2BDxy + 4BExy(x+y) + 4CExxyy \\ -BB + 2\Gamma C(x+y) - \Gamma\Gamma(x^2+y^2) + 8AExy + 2\Gamma Dxy(x+y) - DDxxyy \\ +4\Gamma A \qquad\qquad\qquad\qquad +2\Gamma^2 xy \qquad\qquad\qquad +4\Gamma Exxyy \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +4\Gamma Cxy \end{cases}$$

§. 44.

§. 44. Hinc ergo pro aequatione canonica literae graecae α, β, γ, δ, etc. per latinas A, B, C, D, E, vna cum conſtante Γ ſequenti modo determinantur:

$$\alpha = 4AC + 4\Gamma A - BB$$
$$\beta = 2AD + \Gamma B$$
$$\gamma = 4AE - \Gamma\Gamma$$
$$\delta = BD + 4AE + \Gamma^2 + 2\Gamma C$$
$$\varepsilon = 2BE + \Gamma D$$
$$\zeta = 4CE + 4\Gamma E - DD$$

ita vt aequatio canonica, qua olim ſum vſus, ſit

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy$$
$$+ 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy = 0.$$

§. 45. Haec autem aequatio integralis ad rationalitatem perducta latius patet quam aequatio propoſita differentialis $\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$: ſimul enim complectitur integrale huius: $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$. Scilicet haec aequatio complectitur duos factores, quorum alteruter alterutri ſatisfacit. Ex geneſi autem patet hanc aequationem eſſe productum ex his factoribus: $\Delta(x-y)^2 - V + 2\sqrt{XY}$, et $\Delta(x-y)^2 - V - 2\sqrt{XY}$.

§. 46. Supra iam obſeruauimus, eiusdem aequationis differentialis integrale hoc quoque modo exhiberi poſſe:

$\frac{M\sqrt{Y} + N\sqrt{X}}{(x-y)^3} = C$ (vide §. 8. et praec.) exiſtente

$$M = 4A + B(3x+y) + 2C(xx+xy)$$
$$+ Dxx(x+3y) + 4Ex^3y$$
$$N = 4A + B(3y+x) + 2Cy(x+y)$$
$$+ Dyy(y+3x) + 4Exy^3$$

vbi

vbi notasse iuuabit esse

$$M + N = 8\,A + 4\,B\,(x + y) + 2\,C\,(x + y)^2$$
$$+ D\,(x + y)^3 + 4\,E\,x\,y\,(x\,x + y\,y)$$
$$M - N = 2\,B\,(x - y) + 2\,C\,(x + y)\,(x - y)$$
$$+ D\,(x - y)\,(x^2 + 4\,x\,y + y^2)$$
$$+ 4\,E\,x\,y\,(x + y\,(x - y)$$

Interim tamen haud facile intelligitur, quomodo haec forma cum ante inuenta consentiat, dum tamen de consensu certi esse possumus.

§. 47. Ex iis, quae hactenus sunt allata, satis liquet, eandem aequationem integralem innumeris modis exhiberi posse, prout constans arbitraria alio atque alio modo repraesentatur; vnde plurimum intererit certam legem stabilire, secundum quam quouis casu constantem illam arbitrariam exprimere velimus. Hunc in finem ista regula obseruetur: vt perpetuo integralia ita capiantur, vt posito $y = 0$ fiat $x = k$, hincque secundum legem compositionis $X = K$, existente

$$K = + A + B\,k + C\,k\,k + D\,k^3 + E\,k^4$$

Hac enim lege obseruata omnia integralia, vtcunque diuersa videantur, ad perfectum consensum perduci poterunt. Hoc igitur modo quae hactenus inuenimus sequentibus Theorematibus complectamur.

Theorema I.

§. 48. Si haec aequatio differentialis

$$\frac{d\,x}{a + b\,x + c\,x\,x} - \frac{d\,y}{a + b\,y + c\,y\,y} = 0,$$

ita integretur, vt posito $y = 0$ fiat $x = k$, integrale ita se habebit:

$$\frac{2\,a + b\,(x + y) + 2\,c\,x\,y}{x - y} = \frac{2\,a + b\,k}{k}.$$

Theorema II.

§. 49. Si haec aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{a+bx+cxx} + \frac{dy}{a+by+cyy} = 0$$

ita integretur, vt posito $y = 0$ fiat $x = k$, integrale supra triplici modo est inuentum; erit enim:

$$\text{I. } \frac{b+c(x+y)}{cxy-a} = -\frac{b+ck}{a};$$

$$\text{II. } \frac{a(x+y)+bxy}{cxy-a} = -k$$

$$\text{III. } \frac{b+c(x+y)}{a(x+y)+bxy} = \frac{b+ck}{ak}.$$

Theorema III.

§. 50. Si haec aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}} - \frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cyy)}} = 0$$

ita integretur, vt posito $y = 0$ fiat $x = k$, integrale erit

$$-B(x+y) - 2Cxy + 2\sqrt{(A+Bx+Cxx)}\,\sqrt{(A+By+Cyy)} =$$

$$-Bk + 2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)},\ \text{siue}$$

$$B(k-x-y) - 2Cxy = 2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)} - 2\sqrt{(A+Bx+Cxx).(A+By+Cyy)}.$$

Corollarium.

§. 51. Hinc ergo patet, si aequatio differentialis proposita, fuerit ista:

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cyy)}} = 0,$$

eaque integretur ita, vt posito $y = 0$ fiat $x = k$, integrale fore

$$B(k-x-y) - 2Cxy = 2\sqrt{(A+Bx+Cxx)}\,\sqrt{(A+By+Cyy)} - 2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}.$$

Theo-

Theorema IV.

§. 52. Si posito br. gr.

$$X = A + Bx + Cxx + Dx^3 + Ex^4$$
$$Y = A + By + Cyy + Dy^3 + Ey^4.$$
$$K = A + Bk + Ckk + Dk^3 + Ek^4$$

haec proponetur aequatio differentialis: $\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, quae ita integrari debeat, vt posito $y = 0$ fiat $x = k$, eius integrale ita erit expressum:

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy + 2\sqrt{XY}}{(x+y)^2} = \frac{2A + Bk + 2\sqrt{AK}}{kk}.$$

Sin autem aequatio proposita fuerit

$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, eius integrale erit

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy - 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \frac{2A + Bk - 2\sqrt{Ak}}{kk}.$$

Corollarium I.

§. 53. Quod si hic ponamus $D = 0$ et $E = 0$, casus oritur Theorematis tertii, pro aequatione

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cxx}} - \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cyy}} = 0,$$

cuius ergo integrale hinc erit

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + 2\sqrt{(A + Bx + Cxx)(A + By + Cyy)}}{(x-y)^2} = \frac{2A + Bk + 2\sqrt{A(A + Bk + Ckk)}}{kk},$$

quae forma si cum superiori comparetur, formulae irrationales eliminari poterunt. Quoniam enim ex priore est

$$2\sqrt{XY} = 2\sqrt{A(A + Bk + Ckk)} - B(k - x - y) + 2Cxy$$

 erit

erit hoc integrale poſtrenum

$$\frac{2A + B(2x + 2y - k) + 4Cxy + 2\sqrt{A(A + Bk + Ckk)}}{(x-y)^2} =$$

$$\frac{2A + BK + 2\sqrt{A(A + Bk + Ckk)}}{kk}$$

vnde ſtatim deduci poteſt aequatio canonica

$$\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy = 0.$$

Corollarium II.

§. 54. Ponamus nunc eſſe $A = 0$ et $B = 0$, vt ſit $X = xx(C + Dx + Exx)$ et $Y = yy(C + Dy + Eyy)$ et $K = kk(C + Dk + Ekk)$

aequatio differentialis integranda fiet

$$\frac{dx}{x\sqrt{(C + Dx + Exx)}} - \frac{dy}{y\sqrt{(C + Dy + Eyy)}} = 0,$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{xy(2C + D(x+y) + 2Exy) + 2xy\sqrt{(C + Dx + Exx)(C + Dy + Eyy)}}{(x-y)^2} = \Delta$$

atque hic conſtantem Δ per k definire non licebit: poſitio enim $y = 0$ incongruum iam inuoluit. Interim tamen et haec integratio maxime eſt memoratu digna.

Corollarium III.

§. 55. Quod ſi autem in hac poſtrema integratione loco x et y ſcribamus $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ primo aequatio differentialis erit

$$\frac{dy}{\sqrt{(Cyy + Dy + E)}} - \frac{dx}{\sqrt{(Cxx + Dx + E)}} = 0;$$

tum vero integrale ſequentem induet formam:

$$\frac{2Cxy + D(x+y) + 2E + 2\sqrt{(Cxx + Dx + E)(Cyy + Dy + E)}}{(y-x)^2} = \Delta$$

$$= \frac{Dk + 2E + 2\sqrt{E(Ckk + Dk + E)}}{kk}.$$

Si igitur hic loco literarum E, D, C, ſcribamus A, B, C, prodibit aequatio differentialis ſupra tractata

$$\frac{dx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}} - \frac{dx}{\sqrt{(A+By+Cyy)}} =$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{2A+B(x+y)+2Cxy+2\sqrt{(A+Bx+Cxx)(A+By+Cyy)}}{(x-y)^2} =$$
$$\frac{Bk+2A+2\sqrt{A(A+Bk+Ckk)}}{kk},$$

quae egregie conuenit cum ea in Coroll. I. data.

Corollarium IV.

§. 56. Contemplemur nunc etiam caſum, quo formula $A+Bx+Cxx+Dx^3+Ex^4$ fit quadratum, quod ſit $(a+bx+cxx)^2$, ita vt iam habeamus

$$A=aa,\ B=2ab,\ C=bb+2ac,\ D=2bc,\ E=cc,$$

tum vero

$$\sqrt{X}=a+bx+cxx,\ \sqrt{Y}=a+by+cyy,$$
$$\sqrt{K}=a+bk+ckk$$

atque aequatio differentialis pro priore caſu erit

$$\frac{dx}{a+bx+cxx} - \frac{dy}{a+by+cyy} = 0,$$

cuius ergo integrale erit

$$(2aa+2ab(x+y)+2(bb+2ac)xy+2bcxy(x+y)$$
$$+2ccxxyy+2(a+bx+cxx)(a+by+cyy)):$$
$$(x-y)^2 = \Delta,$$

quae reducitur ad

$$\frac{aa+ab(x+y)+(b^2+ac)xy+bcxy(x+y)+ccxxyy}{(x-y)^2} =$$

$\frac{aa+abk}{kk}$. Quod ſi iam vtrinque addamus $\frac{1}{4}bb$, prodibit

$$\frac{(a+\frac{1}{2}b(x+y)+cxy)^2}{(x-y)^2} = \frac{(a+\frac{1}{2}bk)^2}{k^2}$$

 vnde

vnde extracta radice obtinetur forma integralis in theoremate primo assignata.

§. 57. Sin autem hoc modo alterum casum aequationis

$$\frac{dx}{a+bx+cxx} + \frac{dy}{a+by+cyy} = 0$$

euoluere velimus, peruenimus ad hanc aequationem:

$$\frac{2aa+2ab(x+y)+2(bb+2ac)xy+2bcxy(x+y)+2ccxxyy}{(x-y)^2}$$
$$-\frac{2(a+bx+cxx)(a+by+cyy)}{(x-y)^2} = \Delta,$$

quae euoluta praebet $\Delta = -2ac$, haecque aequatio manifesto est absurda, et nihil circa integrale quaesitum declarat, cuius rationem maximi momenti erit perscrutari.

Insigne Paradoxon.

§. 58. Cum huius aequationis differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$$

integrale in genere inuentum sit

$$\frac{2A+B(x+y)+2Cxy+Dxy(x+y)+2Exxyy-2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta$$

casu autem, quo statuitur

$$\sqrt{X} = a+bx+cxx \text{ et } \sqrt{Y} = a+by+cyy$$

aequatio absurda inde oriatur, quaeritur enodatio huius insignis difficultatis ac praecipue modus, hinc verum integralis valorem inuestigandi.

Enodatio Paradoxi.

§. 59. Quemadmodum scilicet in Analysi eiusmodi formulae occurrere solent, quae certis casibus indeterminatae atque adeo nihil plane significare videntur: ita hic

hic ſimile quid vſu venit, ſed longe alio modo, cum neque ad fractionem, cuius numerator et denominator ſimul euaneſcunt, neque ad differentiam inter duo infinita perveniatur, quod exemplum eo magis eſt notatu dignum, quod non memini, ſimilem caſum mihi vnquam ſe obtuliſſe. Iſtud ſingulare phaenomenon ſe nimirum exerit, quando ambae formulae X et Y euadunt quadrata, ad quod ergo reſoluendum ad ſimile artificium recurri oportet, quo formulae X et Y non ipſis quadratis aequales ſed ab iis infinite parum diſcrepare aſſumuntur.

§. 60. Statuamus igitur

$$X = (a + bx + cxx)^2 + \alpha \text{ et } Y = (a + by + cyy)^2 + \alpha,$$

ita vt pro litteris maiuſculis A, B, C, D, E, fiat $A = aa + \alpha$, $B = 2ab$, $C = 2ac + bb$, $D = 2bc$, $E = cc$, vbi α denotat quantitatem infinite paruam, deinceps nihilo aequalem ponendam. Hinc ergo ſi br. gr. ponamus

$$a + bx + cxx = R \text{ et } a + by + cyy = S \text{ erit}$$

$$\sqrt{X} = R + \frac{\alpha}{2R} \text{ et } \sqrt{Y} = S + \frac{\alpha}{2S}.$$

§. 61. Nunc igitur conſideremus formam integralis primo inuentam, quae erat

$$\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x - y} = \sqrt{(\Delta + D(x + y) + E(x + y)^2)}$$

pro qua igitur habebimus

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} = R - S - \frac{\alpha(R - S)}{2RS}.$$

Quia vero hic erit

$$R - S = b(x - y) + c(xx - yy) \text{ fiet } \frac{R - S}{x - y} = b + c(x + y).$$

At poſito br. gr. $x + y = p$ erit $\frac{R - S}{x - y} = b + cp$, vnde aequa-

aequatio noſtra erit

$$b + cp - \frac{\alpha(b+cp)}{2RS} = \sqrt{\Delta + 2bcp + ccpp}.$$

§. 62. Sumantur nunc vtrinque quadrata et aequatio noſtra ſequentem induet formam: $bb - \frac{\alpha}{RS}(b+cp)^2 = \Delta$. Alteriores ſcilicet poteſtates ipſius α hic vbique praetermittuntur. Hic ergo ratio noſtri Paradoxi manifeſto in oculos incidit, quia poſito $\alpha = 0$ oritur $bb = \Delta$; vnde, vt Δ maneat conſtans arbitraria, euidens eſt, differentiam inter bb et Δ etiam infinite paruam ſtatui debere; quam obrem ponamus $\Delta = bb - \alpha\Gamma$, ac obtinebitur iſta aequatio penitus determinata $\frac{(b+cp)^2}{RS} = \Gamma$, ſiue

$$(b + c(x+y))^2 = \Gamma(a + bx + cxx)(a + by + cyy)$$

quae forma non multum diſcrepat a formula ſupra inuenta.

§. 63. Haec quidem forma magis eſt complicata quam ſolutiones §§ 24 et ſeqq. inuentae: Sequenti autem artificio ad formam ſimpliciſſimam redigi poterit. Cum haec fractio $\frac{RS}{(b-cp)^2}$ debeat eſſe quantitas conſtans, ſit ea $= F$, vt eſſe debeat $F(cp+b)^2 = RS$, et quemadmodum hic poſuimus $x + y = p$, ponamus porro $xy = u$, fietque:

$$RS = aa + abp + ac(pp - 2u) + bbu + bcpu + ccuu$$

atque aequatio iam ſecundum poteſtates ipſius p diſpoſita erit

$$\begin{aligned} F(cp+b)^2 = acpp &+ abp + aa \\ &+ bcpu + bbu \\ &\qquad\quad - 2acu \\ &\qquad\quad + ccuu \end{aligned}$$

vb

vbi primo vtrinque diuidamus, quatenus fieri poteſt, per $cp + b$, ac reperietur

$$F(cp + b) = ap + bu + \frac{(a - cu)^2}{cp + b}.$$

Diuidamus nunc porro per $cp + b$, quatenus fieri poteſt, ac fiet

$$F = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}\frac{(a - cu)}{(cp + b)} + \frac{(a - cu)^2}{(cp + b)^2}.$$

§. 64. Hac forma inuenta, ſi ſtatuamus

$$\frac{a - cu}{cp + b} = V, \text{ erit } F = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.V + VV.$$

Cum igitur iſta expreſſio aequari debeat quantitati conſtanti, euidens eſt ipſam quantitatem V conſtantem eſſe debere, ita vt iam noſtrum integrale reductum ſit ad hanc formam:

$$\frac{a - cu}{cp + b} = \frac{a - cxy}{c(x + y) + b} = \text{Conſt.}$$

Subtrahamus vtrinque $\frac{a}{b}$

fietque $\frac{cxy + a(x + y)}{b + c(x + y)} = \text{Conſt.}$

quae forma per priorem diuiſa producit hanc:

$$\frac{a(x + y) + cxy}{cxy - a} = \text{Conſt.}$$

quae formae conueniunt cum ſupra exhibitis.

Theorema V.

§. 65. Si in genere haec ratio deſignandi adhibeatur: vt ſit $Z = A + Bz + Czz + Dz^3 + Ez^4$, atque valor huius formulae integralis $\int\frac{dz}{\sqrt{Z}}$, ita ſumtus vt euaneſcat poſito $z = 0$, deſignetur hoc charactere $\Pi : z$; tum, vt fiat $\Pi : k = \Pi : x \pm \Pi : y$. neceſſe eſt vt inter quantitates k, x, y iſta relatio ſubſiſtat:

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy \mp 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \frac{2A + Bk \mp 2\sqrt{AK}}{kk},$$

cuius ratio ex superioribus est manifesta. Cum enim k denotet quantitatem constantem erit

$$d.\Pi : x + d.\Pi : y = 0 \text{ siue } \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

cuius integrale modo ante vidimus ita exprimi:

$$\frac{2A + B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) + 2Exxyy \mp 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2} = \Delta.$$

Quare cum esse debeat $\Pi : x + \Pi : y = \Pi : k$, manifestum est posito $y = 0$ fieri debere $\Pi : x = \Pi : k$ ideoque $x = k$ vnde constans indefinita Δ eodem prorsus modo definitur, vti est exhibita.

Corollarium I.

§. 66. Hinc si formule $\Pi : z$ exprimat arcum cuiuspiam lineae curuae abscissae siue applicatae Z respondentem, in hac curua omnes arcus eodem modo inter se comparare licebit, quo arcus circulares inter se comparantur, quandoquidem, propositis duobus arcubus $\Pi : x$ et $\Pi : y$, tertius arcus $\Pi : k$ semper exhiberi poterit vel summae vel differentiae eorum arcuum aequalis.

Corollarium II.

§. 67. Ita si in hac forma $\Pi : k = \Pi : x + \Pi : y$ statuatur $y = x$, prodibit $\Pi\, k = 2\,\Pi : x$; sicque arcus reperitur duplo alterius aequalis. At vero si in nostra forma faciamus $y = x$, tam numerator quam denominator in nihilum abeunt. Vt autem eius verum valorem eruamus, vtamur aequatione primum (§. 38.) inuenta:

$$\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x - y} = \sqrt{(\Delta + D(x+y) + E(x+y)^2)},$$

et

et iam in membro ſiniſtro ſpectetur y vt conſtans; ipſi x vero valorem tribuamus infinite parum diſcrepantem, ſiue, quod eodem redit, loco numeratoris et denominatoris eorum differentialia ſubſtituantur, ſumta ſola x variabili, hocque modo pro caſu $y = x$ membrum ſiniſtrum euadit $\frac{X'}{2\surd X}$, vbi eſt $X' = B + 2Cx + 3Dxx + 4Ex^3$. Nunc ergo ſumtis quadratis habebitur:

$$\frac{X'X'}{4X} = \Delta + 2Dx + 4Exx,$$

exiſtente Δ vt ante $= \frac{2A + Bk - 2\surd Ak}{kk}$.

Corollarium III.

§. 68. Verum ſine his ambagibus duplicatio arcus ex altera forma $\Pi : k = \Pi : x - \Pi y$ deduci poteſt, ponendo $y = k$, ſiquidem hinc fit $\Pi : x = 2\Pi : k$, pro quo ergo caſu relatio inter x et k hac aequatione exprimetur:

$$\frac{2A + B(k + x) + 2Ckx + Dkx(k + x) + 2Ekkxx + 2\surd KX}{(x - k)^2}$$
$$= \frac{2A + Bk + 2\surd AK}{kk}.$$

Facile autem patet quomodo hinc ad triplicationem, quadruplicationem et quamlibet multiplicationem arcuum progredi debeat, quod argumentum olim fuſius ſum tractatus.

Theorema VI.

§. 69. Si in formis ſupra inuentis ponatur tam $B = 0$ quam $D = 0$, vt ſit $X = A + Cxx + Ex^4$ et $Y = A + Cyy + Ey^4$ et $K = A + Ckk + Ek^4$; tum ſi iſta aequatio $\frac{dx}{\surd X} \pm \frac{dy}{\surd Y} = 0$ ita integretur, vt poſito $y = 0$ fiat $x = k$, tum aequatio integralis erit:

$$\frac{A + Cxy + Exxyy \mp \surd XY}{(x - y)^2} = \frac{A \mp \surd AK}{kk}.$$

Co-

Corollarium I.

§. 70. Hic notari meretur, iſtum caſum adhuc alio modo ex forma generali deduci poſſe, ſi ſcilicet ſumatur $A = o$ et $E = o$, tum enim prodit iſta aequatio differentialis:

$$\frac{dx}{\sqrt{(Bx + Cxx + Dx^3)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(By + Cyy + Dy^3)}} = o$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{2B(x+y) + 2Cxy + Dxy(x+y) \mp 2\sqrt{(Bx + Cxx + Dx^3)(By + Cyy + Dy^3)}}{(x-y)^2}$$

$= \frac{Bk}{kk} = \frac{B}{k}$, vbi valor conſtantis admodum ſimplex euaſit. Nunc in his formilis loco x et y ſcribamus xx et yy, at vero loco literarum B et D ſcribamus A et E, fietque aequatio differentialis

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Cxx + Dx^4)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(A + Cyy + Ey^4)}} = o$$

cuius ergo integrale etiam hoc modo exprimetur

$$\frac{A(xx+yy) + 2Cxxyy + Exxyy(xx+yy) \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx-yy)^2} = \frac{A}{kk}$$

Corollarium II.

§. 71. Ecce ergo hac ratione peruenimus ad aliam integralis formam non minus notabilem priore, atque adeo nunc ex earum combinatione formula radicalis $\sqrt{XY}$ eliminari poterit, quandoquidem ex poſteriore fit

$$\mp 2\sqrt{XY} = \frac{A(xx-yy)^2}{kkxy} - \frac{A(xx+yy)}{xy} - 2Cxy - Exy(xx+yy)$$

qui valor in priore ſubſtitutus conducit ad hanc aequationem rationalem:

$$2A + 2Cxy + 2Exxyy$$
$$+ \frac{A(xx-yy)^2}{kkxy} - \frac{A(xx+yy)}{xy} - 2Cxy - Exy(xx+yy)$$
$$= \frac{2A(x-y)^2}{kk} \mp \frac{2(x-y)^2\sqrt{AK}}{kk}$$

quae

quae porro reducta et per $(x-y)^2$ diuisa reuocatur ad hanc formam:

$$\frac{2A \mp 2\sqrt{AK}}{kk} = \frac{A(x+y)^2}{kkxy} - Exy - \frac{A}{xy}$$

siue ad hanc:

$$\frac{A}{kk}(xx+yy-kk) - Exxyy \pm \frac{2xy\sqrt{AK}}{kk} = 0$$

quae egregie conuenit cum aequatione canonica, qua olim sum vsus: scil.

$$0 = \alpha + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + \zeta xxyy$$

si quidem est

$$\alpha = -\frac{A}{kk};\ \gamma = +\frac{A}{kk};\ 2\delta = \pm\frac{2\sqrt{AK}}{kk};\ \zeta = -E$$

Corollarium III.

§. 72. Methodo posteriore, qua hic vsi sumus ad hanc aequationem integrandam, aequatio multo generalior tractari poterit, vbi in formulis radicalibus potestates vsque ad sextam dimensionem assurgunt. Namque si tantum statuamus $A = 0$, vt sit aequatio

$$\frac{dx}{\sqrt{x(B+Cx+Dxx+Ex^3)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{y(B+Cy+Dyy+Ey^3)}} = 0$$

eius integrale est

$$\frac{B(x+y)+2Cxy+Dxy(x+y)+2Exxyy}{(x-y)^2}$$
$$\mp\frac{2\sqrt{xy(B+Cx+Dxx+Ex^3)(B+Cy+Dyy+Ay^3)}}{(x-y)^2} = \frac{B}{k}.$$

Quod si iam hic loco x et y scribamus xx et yy, aequatio differentialis fiet

$$\frac{dx}{\sqrt{(B+Cxx+Dx^4+Ex^6)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(B+Cyy+Dy^4+Ey^6)}} = 0,$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{B(xx+yy)+2Cxxyy+Dxxyy(xx+yy)+2Ex^4y^4}{(xx-yy)^2}$$
$$\mp\frac{2xy\sqrt{(B+Cxx+Dx^4+Ex^6)(B+Cyy+Dy^4+Ey^6)}}{(xx-yy)^2} = \frac{B}{kk}.$$

Nunc autem ostendamus, quomodo ope methodi Illustris *de la Grange* idem integrale impetrari queat.

 Analy-

Analyſis.

Pro integratione aequationis differentialis
$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, exiſtente $X = B + Cxx + Dx^4 + Ex^6$
$Y = B + Cyy + Dy^4 + Ey^6$

§. 73. Poſito igitur
$\frac{dx}{\sqrt{X}} = dt$ erit $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \mp dt$
hincque ſumtis quadratis
$\frac{dx^2}{dt^2} = X$ et $\frac{dy^2}{dt^2} = Y$.
Hinc formentur hae aequationes:
$\frac{xxdx^2}{dt^2} = xxX$ et $\frac{yydy^2}{dt^2} = yyY$.
Iam introducantur duae nouae variabiles p et q vt ſit $xx+yy=2p$ et $xx-yy=2q$, ex quo fit $xdx+ydy=dp$, hincque $xxdx^2 - yydy^2 = dpdq$; quam obrem habebimus
$\frac{dpdq}{dt^2} = xxX - yyY$,
quae aequatio diuidatur per $xx-yy=2q$, prodibitque
$\frac{dpdq}{2qdt^2} = \frac{xxX - yyY}{xx-yy}$
quae forma, valoribus pro X et Y ſubſtitutis, dabit
$\frac{dpdq}{2qdt^2} = B + 2Cp + D(3pp+qq) + 4E(p^3 + pqq)$.

§. 64. Nunc porro aequationes $\frac{dx^2}{dt^2}$ et $\frac{dy^2}{dt^2}$ differentiatae dabunt
$\frac{2ddx}{dt^2} = X'$ et $\frac{2ddy}{dt^2} = Y'$.
Ex priore fit $\frac{2xddx}{dt} = xX'$, cui addatur $\frac{2dx^2}{dt^2} = 2X$, vt prodeat
$\frac{2(xddx + dx^2)}{dt^2} = \frac{2d.xdx}{dt^2} = xX' + 2X$.

Simili

Simili modo erit $\frac{2d.ydy}{dt^2} = yY' + 2Y$, quae duae aequationes inuicem additae dabunt

$$\frac{2d.dp}{dt^2} = \frac{2ddp}{dt^2} = xX' + yY' + 2(X+Y).$$

Subſtitutis autem valoribus et facta ſubſtitutione reſpectu literarum p et q reperitur

$$2X + 2Y = 4B + 4Cp + 4D(pp+qq) + 4Ep(pp+3qq).$$

Deinde ob

$$X'x = 2Cxx + 4Dx^4 + 6Ex^5 \text{ et}$$
$$yY' = 2Cyy + 4Dy^4 + 6Ey^6 \text{ erit}$$
$$xX' + yY' = 4Cp + 8D(pp+qq) - 12Ep(pp+3qq)$$

ex quibus coniunctis fit

$$\frac{2ddp}{dt^2} = 4B + 8Cp + 12D(pp+qq)$$
$$+ 16Ep(pp+3qq).$$

§. 75. Ab hac formula ſubtrahatur ſupra inuenta $\frac{dpdq}{2qdt^2}$ quater ſumta, ac remanebit

$$\frac{2ddp}{dt^2} - \frac{2dpdq}{qdt^2} = 8Dqq + 32Epqq.$$

Nunc vtrinque multiplicetur per $\frac{dp}{qq}$ et prodibit

$$\frac{1}{dt^2}\left(\frac{2dpddp}{qq} - \frac{2dp^2dq}{q^3}\right) = 8Ddp + 32Epdp$$

cuius integrale ſponte ſe offert ita expreſſum

$$\frac{dp^2}{qqdt^2} = 4\Delta + 8Dp + 16Epp$$

ideoque extracta radice

$$\frac{dp}{qdt} = 2\sqrt{\Delta + 2Dp + 4Epp}.$$

§. 76. Cum nunc ſit

$$\frac{dp}{dt} = x\sqrt{X} \mp y\sqrt{Y} \text{ et } 2q = xx - yy$$

facta ſubſtitutione orietur haec aequatio:

$$\frac{x\sqrt{X} \mp y\sqrt{Y}}{xx-yy} = \sqrt{(\Delta + D'(xx+yy) + E(xx+yy)^2)}$$

quae

quae ſumtis quadratis reducetur ad iſtam formam:

$$\frac{xxX + yyY \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx - yy)^2} = \Delta + D(xx + yy) + E(xx + yy)^2.$$

Eſt vero

$$xxX + yyY = B(xx + yy) + C(x^4 + y^4) + D(x^6 + y^6) + E(x^8 + y^8)$$

hincque peruenietur ad hanc aequationem

$$\frac{B(xx + yy) + C(x^4 + y^4) + Dxxyy(xx + yy) + 2Ex^4y^4 \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx - yy)^2} = \Delta.$$

§. 77. Sumamus nunc vt ſupra conſtantem Δ ita vt poſito

$$y = 0 \text{ fiat } x = k \text{ et } X = K = B + Ckk + Dk^4 \, Ek^6$$

et aequatio integralis induet hanc formam:

$$\frac{B(xx + yy) + C(x^4 + y^4) + Dxxyy(xx + yy) + 2Ex^4y^4 \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx - yy)^2} = \frac{B + Ckk}{kk},$$

quae aliquanto ſimplicior euadit ſi vtrinque ſubtrahamus C: erit enim

$$\frac{B(xx + yy) + 2Cxxyy + Dxxyy(xx + yy) + 2Ex^4y^4 \mp 2xy\sqrt{XY}}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{B}{kk}$$

quae egregie conuenit cum integrali ſupra §. 72. exhibito.

§. 78. Hic caſus notatu dignus ſe offert, dum $B = 0$, tum autem aequatio differentialis ita ſe habebit:

$$\frac{dx}{x\sqrt{(C + Dxx + Ex^4)}} + \frac{dy}{y\sqrt{(C + Dyy + Ey^4)}} = 0$$

cuius ergo integrale per conſtantem Δ expreſſum erit

$$\frac{C(x^4 + y^4) + Dxxyy(xx + yy) + 2Ex^4y^4 \mp 2xy\sqrt{XY}}{(xx - yy)^2} = \Delta.$$

Hoc autem caſu integratio non ita determinari poteſt, vt poſito $y = 0$ fiat $x = k$, quia integrale poſterioris membri hoc caſu manifeſto abit in infinitum; quam obrem alio

alio modo integrationem determinari conueniet veluti vt posito $y = b$ fiat $x = a$, tum autem erit ista constans

$$\Delta = \frac{C(a^4 + b^4) + D a^2 b^2 (aa + bb) + 2 E a^4 b^4 \mp 2 ab \sqrt{AB}}{(aa - bb)^2}$$

existente

$$A = C + D a a + E a^4 \text{ et } B = C + D b b + E b^4.$$

Conclusio.

§. 79. Qui processum Analyseos hic vsitatae comparare voluerit cum methodo, qua Illustris D. *de la Grange* vsus est in *Miscellan. Taur. Tom. IV.* facile perspiciet, eam multo facilius ad scopum desideratum perducere atque multo commodius ad quosuis casus applicari posse. Introduxerat autem Vir. Ill. in calculum formulam $\frac{dt}{T}$, cuius loco hic simplici elemento dt sumus vsi, ac deinceps quantitatem T tanquam functionem literarum p et q spectauit, quae positio satis difficiles calculos postulauit, dum nostra methodo longe concinnius easdem integrationes inuestigare licuit. Quanquam autem nullum est dubium, quin ista Analyseos species insigne incrementum polliceatur, tamen nondum patet, quemadmodum ad alias integrationes ea accommodari queat, praeter hos ipsos casus, quos hic tractauimus et quos olim ex aequatione canonica deriuaueram.

DE REDUCTIONE FORMULARUM INTEGRALIUM AD RECTIFICATIONEM ELLIPSEOS ET HYPERBOLAE.

Auctore

A. L E X E L L.

§. 1.

Ex eo tempore quo Illuſtris *Newtonus* formulas differentiales, quarum integratio per quadraturam circuli vel hyperbolae aequilaterae abſoluitur, contemplatus eſt; primus qui hoc negotium vlterius proſequendo, formulas quoque differentiales ad rectificationem Ellipſeos et Hyperbolae reducibiles, examinare inſtituit, Celebris erat Anglorum Mathematicus *Colin Maclaurin*, quippe qui in II Volumine ſui Tractatus de doctrina Fluxionum, nonnulla ſpecimina talium formularum differentialium attulit. Quum vero maxime ſpecialia eſſent, quae docuerat Maclaurin, Illuſtris *d'Alembert* operae pretium duxit, hanc doctrinam vlterius perficere, quod inſtitutum deinceps Illuſtris quoque *Eulerus* in quibusdam de hoc argumento Diſſertationibus (Nouor. Comment. Tom. VIII et X.) ita proſecutus eſt, vt vix quidquam ad Ipſius inuenta addi poſſe videatur. Nec igitur iſta, quae hac occaſione proponere conſtitui, ſi reſpectus habeatur concluſionum inventarum, prorſus noua ſunt; quin potius omnes reductiones heic tradendae in Diſſertatione Illuſtris *Euleri* Tom. X. Nou. Comment. inſerta, iam habeantur expoſitae; quum

quum vero Methodus, qua ad has reductiones perductus sum, ab illa, qua Illustris *Eulerus* vsus est, prorsus sit diuersa, et vt spero nonnulla non prorsus contemnenda Analyseos specimina exhibeat, nec Geometris prorsus ingratum fore confido, si ea quae hoc de argumento meditatus sum, succincte exposuero.

§. 2. Formula igitur differentialis, quam heic imprimis mihi considerandam proposui, ista est $\frac{dz\sqrt{(1+mz^2)}}{\sqrt{(1+nz)}}$, quae re bene perpensa, omnino cum illa, quam Illustris *Eulerus* Tom. X. Comment. contemplatus est, congruere inuenitur. Licet enim formula Illustris *Euleri* $dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ latius patere videatur, tamen facile colligitur eandem ad nostram formulam reduci, si ita supponatur expressa:

$$dz\sqrt{\frac{f}{g}}\sqrt{\frac{1+\frac{g}{f}zz}{1+\frac{k}{h}zz}};$$

nam ponendo $\frac{g}{f}=m$, et $\frac{k}{h}=n$, emerget nostra formula per $\sqrt{\frac{f}{g}}$ multiplicata. Patet igitur nostram formulam aeque late patere ac illam Illustris *Euleri*, quare quum calculus eo facilior euadat, quo minor adhibeatur numerus quantitatum, nostrae formulae continuo vsum adhibebimus, vbi tamen formulae istae propositae hanc alteram adiungere necesse est: $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{nzz-1}}$, his enim duabus expressionibus, omnes casus formularum differentialium infra contemplandi, continentur.

§. 3. Perfecta enumeratio horum casuum ipsam quidem reductionem formularum differentialium iam sup-

 ponit,

ponit, interim tamen quum ad ea, quae infra tradentur, melius intelligenda, multum conducat, ſi enumeratio horum caſuum ob oculos ponatur, eam heic ſtatim exponere, animus eſt. Primum itaque caſus heic contemplandi, eo inter ſe differunt, quod in expreſſionis denominatore occurrat, vel $\sqrt{(1+nz^2)}$, vel $\sqrt{(1-nz^2)}$, vel $\sqrt{(nz^2-1)}$. Ex prima hypotheſi pro ratione ſigni, quo littera m afficitur, ſequentes reſultant formulae:

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}};\ dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1+nzz}};\ dz\sqrt{\frac{mzz-1}{1+nzz}}.$$

Secunda hypotheſis, pro diuerſo ſigno quantitatis m ſequentes ſuppeditat formulas:

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1-nzz}};\ dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1-nzz}};\ dz\sqrt{\frac{mzz-1}{1-nzz}}.$$

Denique ex tertia Hypotheſi hi ſequentes emergunt caſus:

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{nzz-1}};\ dz\sqrt{\frac{1-mzz}{nzz-1}};\ dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}}.$$

Tum vero pro ſingulis his formulis, binae habentur poſitiones $n > m$ vel $m > n$, exceptis tamen formulis:

$$dz\sqrt{\frac{mzz-1}{1-nzz}} \text{ et } dz\sqrt{\frac{1-mzz}{nzz-1}},$$

nam pro priori earum, neceſſario eſt $m > n$ et pro ſecunda $n > m$, quippe quum alioquin imaginaria in noſtras formulas inducerentur. Nam ſi pro priori eſſe poſſet $n > m$, poſita $1-nzz$ quantitate poſitiua, eſſe deberet $nzz-1$, negatiuum, ideoque tanto magis $mzz-1$ valorem conſequeretur negatiuum, vnde neceſſum eſt, vt fieret $\sqrt{\frac{mzz-1}{1-nzz}}$ imaginarium. Simili quoque ratione demonſtratur, non fieri poſſe, vt ſit in expreſſione

$$\sqrt{\frac{1-mzz}{nzz-1}},\ m > n.$$

§. 4. Nunc igitur hinc ſequentes caſus formularum differentialium emergunt:

I. dz

I. $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$, posito $n > m$.

II. $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$, posito $n < m$.

III. $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1+nzz}}$, sine vlla restrictione, vti ex infra dicendis patebit.

IV. $dz\sqrt{\frac{mzz-1}{1+nzz}}$, sine vlla restrictione.

V. $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1-nzz}}$, sine vlla restrictione.

VI. $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1-nzz}}$, si sit $n > m$.

VII. $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1-nzz}}$, si sit $m > n$.

VIII. $dz\sqrt{\frac{mzz-1}{1-nzz}}$, vbi necessario $m > n$.

IX. $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{nzz-1}}$, sine vlla limitatione.

X. $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{nzz-1}}$, vbi necessario $n > m$.

XI. $dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}}$, si sit $n > m$.

XII. $dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}}$, si sit $m > n$.

Formulae etenim pro quibus diuersitas casuum $n \lessgtr m$ nihil mutare censenda est, ita comparatae sunt, vt pro vtroque horum casuum reductio eodem modo fiat; cum contra vbi positiones $n > m$ vel $n < m$, ad diuersas perducere censentur conclusiones, formulae differentiales ad rectificationes sectionum conicarum, diuersis plane rationibus reducantur. Sic ex: causa, formula $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1-nzz}}$ reducitur ad rectificationem Ellipseos, si fuerit $n > m$, ad rectificationem vero Hyperbolae, si sit $m > n$. At formulae $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1+nzz}}$ integrale semper et omni casu, praeter quantitatem algebraicam, binos arcus sectionum conicarum, Ellipseos vnum, alterum Hyperbolae, inuoluit,

§. 5. Quum igitur nunc reductionem formulae differentialis $dz \sqrt{\frac{1+\nu zz}{1+nzz}}$ ad rectificationem Ellipseos et Hyperbolae ostensuri simus, primum quidem et ante omnia formulam tradere conueniet, qua arcus quipiam harum
Tab. I. Sectionum Conicarum exprimitur. Ponamus igitur esse
Fig. 5. B L D sectionem quandam Conicam, cuius axis est B F A, foco existente in F, tumque si ad punctum quodpiam D huius sectionis ducatur linea recta F D, eiusque valor per v indicetur, valore anguli B F D per Φ expresso, aequatio pro Sectione Conica relationem harum quantitatum v et Φ exprimens, ita erit comparata: $v = \frac{b}{1+e\,\text{cos}.\,\Phi}$, indigitante scilicet b semiparametrum Sectionis Conicae et e ipsius excentricitatem. Hinc si arcus sectionis conicae B D, per s exprimatur, facile perspicitur fore: $ds = \sqrt{(dv^2 + v^2 d\Phi^2)}$, quare quum sit:

$$dv = \frac{b\,e\,d\Phi.\,\text{sin}.\,\Phi}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2} \text{ et } v\,d\Phi = \frac{b\,d\Phi}{1+e\,\text{cos}.\,\Phi}, \text{ fiet}$$

$$ds^2 = d\Phi^2 \left(\frac{b^2 e^2\,\text{sin}.\,\Phi^2}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^4} + \frac{b^2\,d\Phi^2}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2}\right)$$

$$= \frac{b^2\,d\Phi^2}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^4}\,(1 + 2\,e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2),$$

ideoque

$$ds = \frac{b\,d\Phi}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2}\sqrt{(1 + 2\,e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2)}.$$

Haecque illa est expressio pro arcu Sectionis Conicae, cuius potissimum vsum in sequentibus faciemus. Caeterum facile perspicitur, pro negotio praesenti, statim valorem semiparametri vnitati poni posse aequalem, ita vt vnica quantitas, qua in nostra formula, species Sectionis Conicae definiatur, sola remaneat excentricitas. Et quidem si fuerit $e < 1$, Sectio Conica erit ellipsis, sin vero $e > 1$, ista Sectio erit Hyperbola, tumque si $e = 1$ in Parabolam abibit, pro qua igitur habebitur:

ds

$$d s = d \Phi \frac{\sqrt{2(1 + \operatorname{cof.} \Phi)}}{(1 + \operatorname{cof.} \Phi)^2} = \frac{d \Phi}{2 \operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi^3}.$$

Integralibus autem ſumtis fiet:

$$s = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi}{\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi^2} + \frac{1}{2} \mathrm{L} \left(\frac{\operatorname{cof.} \frac{1}{2} \Phi}{1 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2} \Phi} \right),$$

ex quo id confirmatur, quod aliunde quoque conſtat, arcum Parabolae partim per quantitatem algebraicam, partim etiam per Logarithmum exprimi.

§. 6. Quum id in noſtra disquiſitione agatur, vt formula $d z \sqrt{\frac{1 + m z z}{1 + n z z}}$ ad iſtam formulam praeſcriptam $d \Phi \frac{\sqrt{(1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2)}}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2}$ reducatur, ſiue etiam huic formulae, vna cum quantitate quapiam algebraica aequalis fiat; facile liquet id negotium perfici, dum pro z idonea quaedam adhibeatur ſubſtitutio. Ipſa autem rei natura declarat, idoneas ſubſtitutiones pro z illas eſſe, quibus z ſtatuitur ſiue directe, ſeu inuerſe proportionalis cuipiam harum fractionum:

$$\frac{\operatorname{fin.} \Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi}; \quad \frac{\operatorname{fin.} \Phi}{e + \operatorname{cof.} \Phi}; \quad \frac{e + \operatorname{cof.} \Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi}; \quad \frac{\sqrt{(1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2)}}{\operatorname{fin.} \Phi};$$
$$\frac{\sqrt{(1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2)}}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi}; \quad \frac{\sqrt{(1 + 2 e \operatorname{cof.} \Phi + e^2)}}{e + \operatorname{cof.} \Phi}.$$

Quare quum in ſequentibus, huiusmodi expreſſionum differentialium vſum adhibere neceſſe ſit, vt res in compendium redigatur, nunc ſtatim illa differentialia ſequenti ſchemate repraeſentare licebit:

$$\text{I. } d. \frac{\operatorname{fin.} \Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi} = \frac{d \Phi (e + \operatorname{cof.} \Phi)}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2};$$

$$\text{II. } d. \frac{1 + e \operatorname{cof.} \Phi}{\operatorname{fin.} \Phi} = - \frac{d \Phi (e + \operatorname{cof.} \Phi)}{\operatorname{fin.} \Phi^2};$$

III. $d.$

$$\text{III. } d.\frac{\text{fin.}\,\Phi}{e+\text{cof.}\,\Phi}=\frac{d\Phi(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)}{(e+\text{cof.}\,\Phi)^2};$$

$$\text{IV. } d.\frac{e+\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi}=-\frac{d\Phi(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)}{\text{fin.}\,\Phi^2};$$

$$\text{V. } d.\frac{e+\text{cof.}\,\Phi}{1+e\,\text{cof.}\,\Phi}=\frac{(e^2-1)\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2};$$

$$\text{VI. } d.\frac{1+e\,\text{cof.}\,\Phi}{e+\text{cof.}\,\Phi}=\frac{(1-e^2)\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi}{(e+\text{cof.}\,\Phi)^2};$$

$$\text{VII. } d.\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{\text{fin.}\,\Phi}=-\frac{d\Phi(1+e\,\text{cof.}\Phi)(e+\text{cof.}\Phi)}{\text{fin.}\,\Phi^2\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}};$$

$$\text{VIII. } d.\frac{\sqrt{(1+2e\text{cof.}\Phi+e^2)}}{1+e\,\text{cof.}\Phi}=\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{cof.}\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\Phi+e^2)}};$$

$$\text{IX. } d.\frac{\sqrt{(1+2e\text{cof.}\Phi+e^2)}}{e+\text{cof.}\Phi}=\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)}{(e+\text{cof.}\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}};$$

$$\text{X. } d.\frac{\text{fin.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}=\frac{d\Phi(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{XI. } d.\frac{1+e\,\text{cof.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}=-\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\text{XII. } d.\frac{e+\text{cof.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}=-\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 7. Quum in fuperioribus allata fit formula pro arcu fectionis conicae, ad quam igitur reducitur iftud differentiale propofitum, quoties per folum arcum Ellipfeos vel Hyperbolae exprimi poteft, nunc etiam e re erit, vt oftendamus, quomodo fe habeant formulae, ad quas iftud diffe-

differentiale reducitur, quoties fiue quantitati algebraicae et arcui Sectionis conicae, feu etiam quantitati algebraicae et binis arcubus Sectionum Conicarum aequetur. Facili autem coniectura affequi licuit, quantitatem iftam algebraicam, quae heic in cenfum venit, vnam fore harum quatuor fractionum:

$$\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)};\quad \frac{(e+\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi(1+e\cos.\Phi)};$$

$$\frac{\sin.\Phi(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}};\quad \frac{\sin.\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)};$$

quo fuppofito, ad fequentia deducti fumus Theoremata:

$$\text{(I.)}\ \int\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} = \frac{\sin.\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)}$$
$$-\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}.$$

Eft enim

$$d.\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(e+\cos.\Phi)}.\,d.\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}$$
$$+\frac{\sin\Phi}{1+e\cos.\Phi}\,d.\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi}$$
$$=\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2}+\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

ex quo patet propofitum.

§. 8. Theorema autem (II.) ita fe habet:

$$\int.\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} = \frac{(e+\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(e^2-1)(1+e\cos.\Phi)\sin.\Phi}$$
$$+\frac{1}{e^2-1}.\int\frac{d\Phi(e+\cos.\Phi)^2}{\sin.\Phi^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}.$$

Eft enim

$$d.\frac{(e+\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi(1+e\cos.\Phi)} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi}.\,d.\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi}$$
$$+\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi}\,d.\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi}$$
$$=\frac{(e^2-1)d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2}-\frac{d\Phi(e+\cos.\Phi)^2}{\sin.\Phi^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

hinc fumtis integralibus, colligitur aequalitas Theoremate propofita. Vlterius procedendo Theorema (III.) erit:

$$\int \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} = \frac{e^2}{e^2-1} \cdot \frac{\sin.\Phi\,(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

$$-\frac{1}{e^2-1}\int \frac{d\Phi\,(1+e\cos.\Phi)^2}{(1+2e\cos.\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$ Nam $d.\frac{\sin.\Phi\,(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$

$$= \frac{\sin.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}\, d.\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi} + \frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi}\, d.\frac{\sin.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

$$= \frac{(e^2-1)\,d\Phi.\sin.\Phi^2}{(1+e\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} + \frac{d\Phi\,(e+\cos.\Phi)^2}{(1+2e\cos.\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

hinc fit

$$\frac{e^2}{e^2-1}\, d.\frac{\sin.\Phi\,(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} = \frac{e^2\,d\Phi\sin.\Phi^2}{(1+e\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

$$+\frac{e^2}{e^2-1}\cdot\frac{d\Phi\,(e+\cos.\Phi)^2}{(1+2e\cos.\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$ ideoque

$$\frac{e^2}{e^2-1}\, d.\frac{\sin.\Phi\,(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

$$-\frac{1}{e^2-1}\cdot\frac{d\Phi\,(1+e\cos.\Phi)^2}{(1+2e\cos.\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{e^2\,d\Phi\sin.\Phi^2}{(1+e\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

$$+\frac{d\Phi}{e^2-1}\cdot\frac{(e^2(e+\cos.\Phi)^2-(1+e\cos.\Phi)^2)}{(1+2e\cos.\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{e^2\,d\Phi\sin.\Phi^2}{(1+e\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

$$+\frac{d\Phi}{e^2-1}\cdot\frac{(e^4+2e^3\cos.\Phi-1-2e\cos.\Phi)}{(1+2e\cos.\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{e^2\,d\Phi\sin.\Phi^2}{(1+e\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} + \frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

$$= \frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2}.$$

§. 9.

§. 9. Denique Theorema nostrum (IV.) sequenti ratione habetur expressum:

$$e^2 \int \frac{d\Phi \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2} + \int \frac{d\Phi \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(e + \cos. \Phi)^2}$$
$$= \frac{e^2 \sin. \Phi \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)(e + \cos. \Phi)} + \int \frac{d\Phi (1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)},$$

quod sequenti ratione demonstratur,

$$d. \frac{\sin. \Phi \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)(e + \cos. \Phi)} = \frac{\surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{e + \cos. \Phi} \, d. \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}$$
$$+ \frac{\sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi} \, d. \frac{\surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{e + \cos. \Phi}, \text{ hinc}$$
$$e^2 \, d. \frac{\sin. \Phi \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)(e + \cos. \Phi)} = e^2 \, d\Phi \frac{\surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$$
$$+ \frac{e^2 \, d\Phi \sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}.$$

Porro habetur

$$\frac{d\Phi \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(e + \cos. \Phi)^2} - \frac{e^2 \, d\Phi \sin. \Phi^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}$$
$$= \frac{d\Phi (1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}, \text{ hinc}$$
$$\frac{d\Phi \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(e + \cos. \Phi)^2} = \frac{e^2 \, d\Phi \sin. \Phi^2 + d\Phi (1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)} \text{ et}$$
$$\frac{e^2 \, d\Phi \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2} + \frac{d\Phi \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(e + \cos. \Phi)^2}$$
$$= \frac{e^2 \, d\Phi \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2} + \frac{e^2 \, d\Phi \sin. \Phi^2 + d\Phi (1 + e \cos. \Phi)^2}{(e + \cos. \Phi)^2 \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)},$$

vnde veritas nostrae propositionis omnino est manifesta.

§. 10. His igitur praemissis, iam ipsum negotium adgredi licebit, vbi quidem primum dispiciendum est, quomodo differentiale $d z \surd \frac{1 + m z z}{1 + n z z}$ comparatum esse oportet, vt ad formulam $d \Phi \surd \frac{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$ reductionem admittat. Breuitatis autem gratia in differentiali proposito, loco numeratoris $\surd (1 \pm m z z)$ vel $\surd (m z z - 1)$ litteram Z adhibebimus et pro denominatore $\surd (1 \pm n z z)$ vel $\surd (n z z - 1)$ littera Z' in vsum vocetur, quare pro casu praesenti dum differentiale $d z . \frac{Z}{Z'}$ ad formam

$$d\Phi \frac{\surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$$

 redu-

reducendum eſt, id agitur vt pro z idoneae adhibeantur ſubſtitutiones. Quare quum in denominatore formulae propoſitae occurrat $(1 + e \cos. \Phi)^2$, facile colligitur pro z eiusmodi adhibendam eſſe fractionem, in cuius denominatore etiam occurrit $1 + e \cos. \Phi$, vnde anſa nobis ſuppeditatur, ſtatuendi ſiue

$$z = \frac{\lambda \sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}, \text{ ſiue } z = \frac{\lambda (e + \cos. \Phi)}{1 + e \cos. \Phi},$$

nam de ſubſtitutione

$$z = \frac{\lambda \surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{1 + e \cos. \Phi}$$

infra videbimus, eam non ſuccedere.

§. 11. Ponamus igitur primum $z = \frac{\lambda \sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}$, ex quo fiet $dz = \frac{\lambda d \Phi (e + \cos. \Phi)}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$, tumque vt differentiale $dz, \frac{Z}{Z'}$, formam adipiſcatur

$$d \Phi \frac{\surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

facile colligitur neceſſe eſſe, vt ſit

$$Z = \frac{\surd (1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}{1 + e \cos. \Phi} \text{ et } Z' = \frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}.$$

Patet igitur heic pro Z non aliam quam hanc expreſſionem $\surd (1 + m z z)$ valere, nam

$$1 - m z z = \frac{1 + 2 e \cos. \Phi + e^2 \cos. \Phi^2 - m \lambda^2 \sin. \Phi^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

nullo modo ad iſtam formam

$$\frac{1 + 2 e \cos. \Phi + e^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$$

reduci poteſt, quod idem quoque valet de $m z z - 1$. Erit itaque

$$1 + m z z = \frac{1 + 2 e \cos. \Phi + e^2 \cos. \Phi^2 + m \lambda^2 \sin. \Phi^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2}$$

$$= \frac{1 + 2 e \cos. \Phi + e^2}{(1 + e \cos. \Phi)^2},$$

poſito $m \lambda^2 = e^2$, ſiue $\lambda = \frac{e}{\surd m}$, tum vero conſequimur

$Z' =$

$$Z' = \sqrt{(1 \pm nzz)} = \frac{\sqrt{(1 + 2\,e \operatorname{cof.} \Phi + e^2 \operatorname{cof.} \Phi^2 \pm \frac{ne^2}{m} \operatorname{fin.} \Phi^2)}}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 \pm \frac{ne^2}{m} + 2\,e \operatorname{cof.} \Phi + (e^2 \mp \frac{ne^2}{m}) \operatorname{cof.} \Phi^2)}}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi};$$

ideoque ſi fuerit

$$1 \pm \frac{ne^2}{m} = e^2, \text{ ſiue } e^2 = \frac{m}{m \mp n},$$

obtinebimus

$$Z' = \frac{\sqrt{(e^2 + 2\,e \operatorname{cof.} \Phi + \operatorname{cof.} \Phi^2)}}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi} = \frac{e \operatorname{cof.} \Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi}.$$

Hincque fiet

$$dz \cdot \frac{Z}{Z'} = \lambda\, d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2\,e \operatorname{cof.} + e^2)}}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2}$$

$$= \frac{e}{\sqrt{m}}\, d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2\,e \operatorname{cof.} \Phi + e^2)}}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2},$$

vbi eſt

$$Z = \sqrt{(1 + mzz)} \text{ et } Z' = \sqrt{(1 \pm nzz)}.$$

Si n poſitiuum habeat valorem, neceſſum eſt vt ſit $m > n$; nam alioquin valor ipſius e fieret imaginarius, ideoque illo etiam caſu $e > 1$, hincque differentiale $dz \sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$ poſito $m > n$, erit pro arcu Hyperbolico, qui eſt caſus II. §. 4. allatus. At vero ſi n negatiuo afficiatur ſigno, fiet e omni caſu reale et quidem < 1, ideoque differentiale $\sqrt{\frac{1+mzz}{1-nzz}}$ ſemper et omni caſu per rectificationem arcus Elliptici exprimetur, vnde formula noſtra V. §. 4. allata emergit. Caeterum ſponte intelligitur caſu praeſenti pro Z' nequaquam $\sqrt{(nzz - 1)}$ adhiberi poſſe, quippe quod fieret

$$= \frac{\sqrt{(n\lambda^2 \operatorname{fin.} \Phi^2 - 1 - 2\,e \operatorname{cof.} \Phi - e^2 \operatorname{cof.} \Phi^2)}}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi},$$

ideoque nulla ratione ad formam

$\frac{e + \operatorname{cof.} \Phi}{1 + e \operatorname{cof.} \Phi}$ reduci poſſet.

§. 12. Nunc vero denuo ſtatuamus $z = \frac{\lambda(e + cof.\Phi)}{1 + e\,cof.\Phi}$, vnde obtinebimus $dz = \lambda(e^2 - 1)\frac{d\Phi\, fin.\Phi}{(1 + e\,cof.\Phi)^2}$, hincque vt differentiale propoſitum ad formam $d\Phi\frac{\sqrt{(1 + 2e\,cof.\Phi + e^2)}}{(1 + e\,cof.\Phi)^2}$ reducatur, neceſſum eſt vt ſit:

$$Z = \mu\frac{\sqrt{(1 + 2e\,cof.\Phi + e^2)}}{1 + e\,cof.\Phi} \text{ et } Z' = \frac{\mu\, fin.\Phi}{1 + e\,cof.\Phi}.$$

Heic autem patet pro denominatore non adhiberi poſſe, niſi has binas formas:

$$Z' = \sqrt{(1 - nz^2)}, \text{ vel } Z' = \sqrt{(nzz - 1)},$$

ſiquidem

$$1 + nzz = \frac{1 + 2e\,cof.\Phi + e^2\,cof.\Phi^2 + n\lambda^2(e^2 + 2e\,cof.\Phi + e^2),}{(1 + e\,cof.\Phi)^2}$$

nullo modo ad formam $\frac{fin.\Phi^2}{(1 + e\,cof.\Phi)^2}$, ſe reduci patiatur. Habebimus itaque

$$1 - nzz = \frac{1 + 2e\,cof.\Phi + e^2\,cof.\Phi^2 - n\lambda^2(e^2 + 2e\,cof.\Phi + cof.\Phi^2)}{(1 + e\,cof.\Phi)^2}$$

$$= \frac{(1 - e^2)\,fin.\Phi^2}{(1 + e\,cof.\Phi)^2},$$

ſi nimirum ponatur $n\lambda^2 = 1$, ſiue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$, tum vero viciſſim erit

$$nzz - 1 = \frac{(e^2 - 1)\,fin.\Phi^2}{(1 + e\,cof.\Phi)^2}.$$

Pro numeratore autem Z adhiberi debet vel $1 - mzz$, vel $mzz - 1$, priori caſu eſt

$$1 - mzz = \frac{1 + 2e\,cof.\Phi + e^2\,cof.\Phi^2 - \frac{m}{n}(e^2 + 2e\,cof.\Phi + cof.\Phi^2)}{(1 + e\,cof.\Phi)^2},$$

vbi ſi ſtatuatur $\frac{m}{n} = e^2$ fiet

$$1 - mzz = \frac{1 - e^4 + 2e\,cof.\Phi(1 - e^2)}{(1 + e\,cof.\Phi)^2} = (1 - e^2)\frac{(1 + 2e\,cof.\Phi + e^2)}{(1 + e\,cof.\Phi)^2},$$

ſimilique ratione erit

$$mzz - 1 = (e^2 - 1)\frac{(1 + 2e\,cof.\Phi + e^2)}{(1 + e\,cof.\Phi)^2},$$

vbi quidem mox liquet pro ſuppoſitione $1 - nzz$, adhibendum

eſſe

esse $1 - mzz$, et vicissim adhibito $nzz - 1$, in vsum vocari debere $mzz - 1$, nisi calculum quantitatibus imaginariis implicare velimus. Hinc itaque sequentes binae oriuntur aequalitates:

$$dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1-nzz}} = \frac{e^2-1}{\sqrt{n}}\, d\,\Phi\, \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cos}.\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2} \text{ et}$$

$$dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}} = \frac{e^2-1}{\sqrt{n}}\, d\,\Phi\, \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cos}.\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2}.$$

In priori casu est $n > m$, ideoque $e < 1$, vnde arcus sectionis conicae erit ellipticus, nec heic poni potest $m > n$, quippe quum tunc esset $1 - mz^2 < 1 - nzz$, ideoque esse deberet $1 + 2e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2 < \text{sin}.\,\Phi^2$, quod fieri nequit, ob $\text{cos}.\Phi^2 + 2e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2 > 0$. Posteriori casu est $m > n$, hinc $e > 1$, et arcus hyperbolicus, nam si statueretur $n > m$, fieret $mzz - 1 < nzz - 1$, ideoque iterum

$$1 + 2e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2 < \text{sin}.\,\Phi^2,$$

quod fieri nequit. Prior igitur horum casuum is est, qui §. 4. No. VI. designatur, posterior vero is, qui sub No. XII. occurrit, et hi quidem quatuor casus formulae nostrae differentialis modo allati, ii sunt, quorum integratio non nisi vnicum arcum sectionis conicae, siue Ellipticum, seu Hyperbolicum supponit.

§. 13. Si substitutionem,

$$z = \frac{\lambda\sqrt{(1+2.\,e\,\text{cos}.\,\Phi+e^2)}}{1+e\,\text{cos}.\,\Phi}$$

tentare vellemus, ob

$$dz = \frac{\lambda\, d\,\Phi\,\text{sin}.\,\Phi\,(e+\text{cos}.\,\Phi)}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{cos}.\,\Phi+e^2)}}, \text{ esse deberet } \frac{z}{z'}$$

$$= \frac{1+2e\,\text{cos}.\,\Phi+e^2}{\text{sin}.\,\Phi\,(e+\text{cos}.\,\Phi)},$$

quae aequalitas subsistere non potest, quia in fractione ista

$$\frac{1+2e\,\text{cos}.\,\Phi+e^2}{\text{sin}.\,\Phi\,(e+\text{cos}.\,\Phi)},$$

tam

tam numerator, quam denominator, ad ſecundum dignitatis gradum euectus ſit, quod nequaquam pro valoribus quantitatum Z et Z' locum habere poteſt.

§. 14. Progrediamur igitur nunc ad formam in Theoremate noſtro (1) occurrentem:

$$\frac{d\,\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{(e + \text{coſ.}\,\Phi)^2 \sqrt{(1 + 2\,e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}}$$

et diſpiciamus, quos valores pro z ſubſtituere oporteat, vt formula $d\,z.\,\frac{Z}{Z'}$, ad formam hanc propoſitam reducatur. Heic vero quum ſtatim pateat, denominatorem valoris pro z ſubſtituendi, eſſe $e + \text{coſ.}\,\Phi$, quia in denominatore formae propoſitae occurrit $(e + \text{coſ.}\,\Phi)^2$, ponamus primum:

$$z = \lambda \frac{\sqrt{(1 + 2\,e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}}{e + \text{coſ.}\,\Phi},$$

ex quo colligitur

$$d\,z = \frac{\lambda\,d\,\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{(e + \text{coſ.}\,\Phi)^2 \sqrt{(1 + 2\,e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}},$$

hincque conficitur eſſe debere,

$$Z = \frac{\mu\,\text{ſin.}\,\Phi}{e + \text{coſ.}\,\Phi}, \text{ et } Z' \frac{\mu\,(1 + e\,\text{coſ.}\,\Phi)}{e + \text{coſ.}\,\Phi};$$

ita vt iam pateat pro Z, non niſi hanc formam

$\sqrt{(m\,z\,z - 1)}$ adhiberi poſſe, nam neque

$$1 + m\,z^2 = \frac{e^2 + 2\,e\,\text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,\Phi^2 + m\,\lambda^2 (1 + 2\,e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2}{(e + \text{coſ.}\,\Phi)^2};$$

nec

$$1 - m\,z\,z = \frac{e^2 + 2\,e\,\text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,\Phi^2 - m\,\lambda^2 (1 + 2\,e\,\text{coſ.}\,\Phi + e^2)}{(e + \text{coſ.}\,\Phi^2},$$

vllo modo huic expreſſioni $\frac{\mu^2\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{(e + \text{coſ.}\,\Phi)^2}$, reddi poſſunt aequales. Nam priori caſu ob m poſitiuum, quantitates $2\,e\,\text{coſ.}\,\Phi + 2\,m\,\lambda^2\,e\,\text{coſ.}\,\Phi$ elidi non poſſunt, poſteriori vero caſu ſi ponatur $m\,\lambda^2 = 1$, fiet

$$1 - m\,z\,z = \frac{\text{coſ.}\,\Phi^2 - 1}{(e + \text{coſ.}\,\Phi)^2} = - \frac{\text{ſin.}\,\Phi^2}{(e + \text{coſ.}\,\Phi)^2},$$

hinc

hinc itaque concluditur

$$m z z - 1 = \frac{\sin.\Phi^2}{(e + \cos.\Phi)^2},$$

posito nimirum $m\lambda^2 = 1$, siue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{m}}$. Tum vero fiet

$$1 \pm n z z = \frac{e^2 + 2e\cos.\Phi + \cos.\Phi^2 \pm \frac{n}{m}(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}{(e + \cos.\Phi)^2}$$

$$= \frac{(1 \pm \frac{n}{m})(1 + e\cos.\Phi)^2}{(e + \cos.\Phi)^2} + \frac{(e^2 - 1 \pm \frac{n e^2}{m})\sin.\Phi^2}{(e + \cos.\Phi)^2},$$

posito igitur

$$1 = e^2(1 \pm \tfrac{n}{m}) = e^2(\tfrac{m \pm n}{m}),\ \text{siue}\ e = \sqrt{\frac{m}{m \pm n}},$$

fiet

$$1 \pm n z z = \frac{(1 + e\cos.\Phi)^2}{e^2(e + \cos.\Phi)^2},\ \text{hincque}\ Z' = \frac{1 + e\cos.\Phi}{e(e + \cos.\Phi)},$$

vnde demum deducitur

$$d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{1 \pm n z z}} = \frac{e\, d \sin.\Phi^2}{\sqrt{m}(e + \cos.\Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}$$

$$= \frac{d\Phi \sin.\Phi^2}{\sqrt{(m \pm n)}(e + \cos.\Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}.$$

Si pro n signum adhibeatur positiuum et $e^2 = \frac{m}{m+n}$, ideoque $e < 1$, hinc integratio formulae $d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{1 + n z z}}$ praestabitur per quantitatem algebraicam et arcum ellipticum, qui est Casus IV. §. 4. At si $e^2 = \frac{m}{m-n}$, necessum est vt ponatur $m > n$, ideoque $e > 1$, hinc formulae

$d z \sqrt{\frac{m z z - 1}{1 - n z z}}$ posito $m > n$, integrale dabitur per quantitatem algebraicam et arcum Hyperbolicum, qui Casus est VIII. §. 4.

§. 15. Ponamus deinde $z = \lambda \frac{(1 + e\cos.\Phi)}{e + \cos.\Phi}$, vnde fit

$$d z = (1 - e^2)\frac{\lambda\, d\Phi \sin.\Phi}{(e + \cos.\Phi)^2},$$

ideoque quum esse debeat

$$dz.\frac{Z}{Z'}=\frac{d\,\Phi\, sin.\,\Phi^2}{(e+cos.\,\Phi^2)\sqrt{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}},$$

vel saltem huic quantitati proportionale, colligitur

$$Z=\frac{\mu\, sin.\,\Phi}{e+cos.\,\Phi} \text{ et } Z'=\frac{\mu'\sqrt{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}}{e+cos.\,\Phi}.$$

Heic itaque mox liquet pro Z vel $\sqrt{(1-mzz)}$, vel $\sqrt{(mzz-1)}$ adhibendum esse, priori casu fit

$$1-mzz=\frac{e^2+2\,e\,cos.\,\Phi+cos.\,\Phi^2-m\lambda^2(1+e\,cos.\,\Phi)^2}{(e+cos.\,\Phi)^2},$$

vbi si statuatur $m\lambda^2=1$, fiet

$$1-mzz=\frac{(e^2-1)\,sin.\,\Phi^2}{(e+cos.\,\Phi)^2},$$

hincque vicissim

$$mzz-1=\frac{(1-e^2)\,sin.\,\Phi^2}{(e+cos.\,\Phi)^2}.$$

Pro denominatore autem Z', nunc non nisi has expressiones $\sqrt{(1-nzz)}$, vel $\sqrt{(nzz-1)}$ adhibere oportet, estque

$$1-nzz=\frac{(e+cos.\,\Phi)^2-\frac{n}{m}\,(1+e\,cos.\,\Phi)^2}{(e+cos.\,\Phi)^2}$$

$$=\frac{(1-\frac{n}{m})\,(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}{(e+cos.\,\Phi)^2}-\frac{sin.\,\Phi^2(1-\frac{n}{m}e^2)}{(e+cos.\,\Phi)^2},$$

ideoque si sit $1=\frac{n}{m}e^2$, seu $e=\sqrt{\frac{m}{n}}$, erit

$$1-nzz=\left(1-\frac{n}{m}\right)\frac{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}{(e+cos.\,\Phi)^2}$$

$$=\frac{e^2-1}{e^2}.\frac{1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2}{(e+cos.\,\Phi)^2}, \text{ et vicissim}$$

$$nzz-1=\frac{1-e^2}{e^2}.\frac{1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2}{(e+cos.\,\Phi)^2}.$$

Quare fiet

$$\frac{Z}{Z'}=\frac{e\,sin.\,\Phi}{\sqrt{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}} \text{ et } dz.\frac{Z}{Z'}=\frac{e(1-e^2)\lambda\,d\,\Phi\, sin.\,\Phi^2}{(e+cos.\,\Phi)^2\sqrt{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}}$$

$$=\frac{1-e^2}{\sqrt{n}}\;\frac{d\,\Phi\, sin.\,\Phi^2}{(e+cos.\,\Phi)^2\sqrt{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}},$$

hinc itaque Casus formulae nostrae VII et XI. deriuantur §. 4. Pro priori autem $dz\sqrt{\left(\frac{1-mzz}{1-nzz}\right)}$, praescribitur vt fit $m > n$, ideoque $e > 1$, nam fi $m < n$, fieret $1 - mzz > 1 - nzz$ hoc eft $(e^2 - 1)$ fin. $\Phi^2 > \frac{e^2 - 1}{e^2} (1 + 2e$ cof. $\Phi + e^2)$, fiue e^2 fin. $\Phi^2 > 1 + 2e$ cof. $\Phi + e^2$, ideoque

$$0 > 1 + 2e \text{ cof. } \Phi + e^2 \text{ cof. } \Phi^2,$$

quod effet abfonum, integratio igitur formulae iftius

$$dz \sqrt{\left(\frac{1 - mzz}{1 - nzz}\right)} \text{ pofito } m > n,$$

perficitur partim per quantitatem algebraicam, partim arcu Hyperbolae. Pro pofteriori formula $dz \sqrt{\frac{mzz - 1}{nzz - 1}}$, neceffum eft vt fit $m < n$, ideoque $e < 1$, nam fi effet $m > n$, fieret quoque $mzz - 1 > nzz - 1$, hincque vti fupra

$$e^2 \text{ fin. } \Phi^2 > 1 + 2e \text{ cof. } \Phi + e^2,$$

quod omnino fieri nequit, proinde integratio formulae huius pofterioris, quantitate algebraica et arcu Elliptico abfoluitur.

§. 16. Sicque igitur iam expediuimus Cafus formulae noftrae IV. VIII. VII. XI, quorum integratio quantitatem algebraicam et arcum fiue Ellipticum feu Hyperbolicum inuoluit, ita vt nunc non remaneant nifi quatuor cafus nimirum I. III. IX. X, quorum integratio praeter quantitatem algebraicam, binos arcus Sectionum Conicarum, vnum Ellipticum, alterum Hyperbolicum inuoluit; hi autem cafus formulae propofitae omnes et finguli fe reduci patiuntur ad iftud differentiale, quod Theoremate noftro (IV) occurrit $\frac{d\Phi (1 + e \text{ cof. } \Phi)^2}{(e + \text{cof. } \Phi)^2 \sqrt{(1 + 2e \text{ cof. } \Phi + e^2)}}$. Antequam vero hanc reductionem fufcipiamus, hanc praeter rem erit, vt difpiciamus, quinam cafus noftrae formulae fe reduci patiantur ad differentialia

$$\frac{d\Phi (e + \text{cos}.\Phi)^2}{\text{sin}.\Phi^2 \sqrt{(1 + 2e\,\text{cos}.\Phi + e^2)}} \text{ et } \frac{d\Phi (1 + e\,\text{cos}.\Phi)^2}{(1 + 2e\,\text{cos}.\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quae noſtris Theorematibus (II) et (III) occurrunt.

§. 17. Pro differentiali $dz.\frac{Z}{Z'}$, ad iſtam formam $\frac{d\Phi(e + \text{cos}.\Phi)^2}{\text{sin}.\Phi^2 \sqrt{(1 + 2e\,\text{cos}.\Phi + e^2)}}$ reducendo, primum poni conueniet

$$z = \frac{\lambda \sqrt{(1 + 2e\,\text{cos}.\Phi + e^2)}}{\text{sin}.\Phi}, \text{ vnde deducitur}$$

$$dz = -\lambda\, d\Phi \frac{(1 + e\,\text{cos}.\Phi)(e + \text{cos}.\Phi)}{\text{sin}.\Phi^2 \sqrt{(1 + 2e\,\text{cos}.\Phi + e^2)}},$$

hincque eſſe debet

$$Z = \mu \frac{(e + \text{cos}.\Phi)}{\text{sin}.\Phi} \text{ et } Z' = \mu' \frac{(1 + e\,\text{cos}.\Phi)}{\text{sin}.\Phi},$$

quod omnino procedet, ſi ſtatuatur $Z = \sqrt{(mzz - 1)}$, tum enim fiet

$$mzz - 1 = \frac{m\lambda^2(1 + 2e\,\text{cos}.\Phi + e^2) - \text{sin}.\Phi^2}{\text{sin}.\Phi^2}$$

$$= \frac{e^2 + 2e\,\text{cos}.\Phi + \text{cos}.\Phi^2}{\text{sin}.\Phi^2},$$

poſito $m\lambda^2 = 1$, ſiue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{m}}$. Deinde vero fiet

$$Z' = \sqrt{(nzz - 1)}, \text{ eſt enim}$$

$$nzz - 1 = \frac{n}{m}\,\frac{(1 + 2e\,\text{cos}.\Phi + e^2) - \text{sin}.\Phi^2}{\text{sin}.\Phi^2}$$

$$= \frac{n}{m}\,\frac{(1 + 2e\,\text{cos}.\Phi + e^2\,\text{cos}.\Phi^2)}{\text{sin}.\Phi^2} + \left(\frac{ne^2}{m} - 1\right),$$

ideoque ſi ſtatuatur

$$e^2 = \frac{m}{n}, \text{ fiet } nzz - 1 = \frac{(1 + e\,\text{cos}.\Phi)^2}{e^2\,\text{sin}.\Phi^2}.$$

Hinc itaque colligitur

$$dz\sqrt{\frac{mzz - 1}{nzz - 1}} = -\frac{\lambda e\, d\Phi (e + \text{cos}.\Phi)^2}{\text{sin}.\Phi^2 \sqrt{(1 + 2e\,\text{cos}.\Phi + e^2)}},$$

$$= -d\Phi \frac{(e + \text{cos}.\Phi)^2}{\sqrt{n}.\text{sin}.\Phi^2 \sqrt{(1 + 2e\,\text{cos}.\Phi + e^2)}}.$$

Et quum pro caſu praeſenti, tam eſſe poſſit $m > n$, quam

$m \lessgtr n$, consequimur hinc Casus nostros XI. et XII., prior scilicet locum habet, si fuerit $m \lessgtr n$, posterior vero si statuatur $m > n$. Quum vero supra inuenerimus formulam nostram XII. ad solum arcum Hyperbolicum reduci, nunc omnino e re esset, vt ostenderetur reductionem modo inuentam, cum illa quae §. 12. allata est, plane conuenire. Verum tamen ne filum nostrae disquisitionis abrumpatur, hoc examen reseruabimus, vsque dum omnes reductiones ad finem perducere nobis licuerit.

§. 18. Altera substitutio pro praesenti casu, illa est, qua statuitur $z = \lambda \frac{(1 + e\,cos.\,\Phi)}{sin.\,\Phi}$, vnde colligitur

$$dz = -\lambda\, d\Phi \frac{(e + cos.\,\Phi)}{sin.\,\Phi^2}.$$

quamobrem fiet

$$Z = \mu \frac{(e + cos.\,\Phi)}{sin.\,\Phi} \quad \text{et} \quad Z' = \mu' \frac{\sqrt{(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}}{sin.\,\Phi}.$$

Heic vero statim liquet pro Z', non nisi istam formam $\sqrt{(1 + nzz)}$ adhiberi posse, quippe pro qua colligetur:

$$1 + nzz = \frac{sin.\,\Phi^2 + n\lambda^2 (1 + e\,cos.\,\Phi)^2}{sin.\,\Phi^2} = \frac{1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2}{e^2\,sin.\,\Phi^2},$$

si fuerit $n\lambda^2 = \frac{1}{e^2}$. Pro numeratore autem Z, adhiberi potest $\sqrt{(mzz \pm 1)}$, eritque

$$mzz \pm 1 = \frac{m}{n}.\frac{(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2\,cos.\,\Phi^2)}{e^2\,sin.\,\Phi^2} \pm \frac{e^2\,sin.\,\Phi^2}{e^2\,sin.\,\Phi^2}$$

$$= \frac{m}{n}\frac{(cos.\,\Phi^2 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}{e^2\,sin.\,\Phi^2} + \frac{(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}.e^2 \pm e^2)\,sin.\,\Phi^2}{e^2\,sin.\,\Phi^2},$$

vnde si ponatur

$$\frac{m}{n} = (\tfrac{m}{n}. \mp 1)\,e^2, \text{ seu } e^2 = \frac{m}{m \mp n}, \text{ fiet}$$

$$Z = \sqrt{\frac{m}{n}}\,\frac{(cos.\,\Phi + e)}{e\,sin.\,\Phi},$$

 ideoque

ideoque erit

$$d\,z.\frac{Z}{Z'} = d\,z\sqrt{\frac{m\,z\,z \pm 1}{1 + n\,z\,z}}$$

$$= -\lambda\,d\,\Phi\sqrt{\frac{m}{n}}.\frac{(e + \text{cos}.\,\Phi)^2}{\text{sin}.\,\Phi^2\sqrt{(1 + 2\,e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2)}},$$

$$= -\frac{\sqrt{(m \mp n)}}{n}\,d\,\Phi\frac{(e + \text{cos}.\,\Phi)^2}{\text{sin}.\,\Phi^2\sqrt{(1 + 2\,e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2)}}.$$

Caſus igitur noſtri differentialis II. et IV. hinc deriuantur, pro priori eſt $m > n$, vt e valorem ſortiatur realem, ſitque $e > 1$, ideoque pro integratione arcum hyperbolicum adhibere neceſſe eſt, pro poſteriori autem eſt $e < 1$, ideoque arcus Ellipticus in vſum vocandus.

§. 19. Vlterius procedendo formula

$$\frac{d\,\Phi\,(1 + e\,\text{cos}.\,\Phi)^2}{(1 + 2\,e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ad formam differentialis propoſiti reducetur, ponendo

$$z = \frac{\lambda\,\text{sin}.\,\Phi}{\sqrt{(1 + 2\,e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2)}},$$

hinc enim fit

$$d\,z = \frac{\lambda\,d\,\Phi\,(1 + e\,\text{cos}.\,\Phi)\,(e + \text{cos}.\,\Phi)}{(1 + 2\,e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

tumque colligitur

$$Z = \frac{\mu\,(1 + e\,\text{cos}.\,\Phi)}{\sqrt{(1 + 2\,e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2)}} \text{ et } Z' = \frac{\mu'\,(e + \text{cos}.\,\Phi)}{\sqrt{(1 + 2\,e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2)}}$$

Si itaque ſtatuatur $Z = \sqrt{(1 - m\,z\,z)}$, conſequemur

$$1 - m\,z\,z = \frac{1 + 2\,e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2 - m\,\lambda^2\,\text{sin}.\,\Phi^2}{1 + 2\,e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2}$$

$$= \frac{(1 + e\,\text{cos}.\,\Phi)^2}{1 + 2\,e\,\text{cos}.\,\Phi + e^2},$$

poſito $m\,\lambda^2 = e^2$, tum vero erit

$$1 - nzz = \frac{1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2 - \frac{ne^2}{m}\,\text{fin.}\,\Phi^2}{1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2}$$

$$= \frac{(\text{cof.}\,\Phi + e)^2}{1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2},$$ pofito

$1 - \frac{ne^2}{m} = 0$, fiue $e^2 = \frac{m}{n}$. Hinc igitur erit

$$dz.\frac{Z}{Z'} = dz\sqrt{\frac{1 - mzz}{1 - nzz}} = \frac{\lambda\,d\Phi\,(1 + e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{d\Phi\,(1 + e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{\sqrt{n}\,(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

vnde cafus noftri differentialis VI. et VII. deriuantur, dum pro priori eft $n > m$, ideoque $e < 1$, quod valet pro arcu Elliptico, pro pofteriori autem eft $m > n$, hincque $e < 1$, quod indicat arcum Hyperbolicum.

§. 20. Deinde differentiale propofitum, ad formam

$$\frac{d\,\Phi\,(1 + e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{(1 + 2\,e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

quoque reducetur, ponendo

$z = \frac{\lambda(e + \text{cof.}\,\Phi)}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)}}$, vnde colligitur

$$dz = -\frac{\lambda\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi\,(1 + e\,\text{cof.}\,\Phi)}{(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

hinc facile perfpicitur effe debere

$Z = \frac{\mu(1 + e\,\text{cof.}\,\Phi)}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)}}$ et $Z' = \frac{\mu'\,\text{fin.}\,\Phi}{\sqrt{(1 + 2e\,\text{cof.}\,\Phi + e^2)}},$

ex quo patefcit, ftatui debere $Z' = \sqrt{(1 - nzz)}$, fiet autem tum

1 — n

$$1 - nzz = \frac{1 + 2e\cos.\Phi + e^2 - n\lambda^2(e^2 + 2e\cos.\Phi + \cos.\Phi^2)}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2}$$
$$= \frac{(1 - e^2)\sin.\Phi^2}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2},$$

si fuerit $n\lambda^2 = 1$. Tumque habebimus $Z = \sqrt{(mzz \pm 1)}$, ita vt sit

$$mzz \pm 1 = \frac{m}{n}\,\frac{(\cos.\Phi^2 + 2e\cos.\Phi + e^2) \pm (1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2}$$
$$= \frac{(\frac{m}{n} \pm 1)(1 + 2e\cos.\Phi + e^2\cos.\Phi^2)}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2}$$
$$- \frac{\sin.\Phi^2(\frac{m}{n} - \frac{m}{n}e^2 \mp e^2)}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2},$$

vbi si ponatur

$\frac{m}{n} = e^2(\frac{m}{n} \pm 1)$, siue $e^2 = \frac{m}{m \pm n}$, erit $\sqrt{(mzz \pm 1)}$
$= \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1 + e\cos.\Phi}{e\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}$.

Hinc fiet

$$dz.\frac{Z}{Z'} = -\frac{\lambda}{e}\sqrt{\frac{m}{n}}.\frac{d\Phi(1 + e\cos.\Phi)^2}{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= -\frac{\sqrt{(m \pm n)}}{n}.\frac{d\Phi(1 + e\cos.\Phi)^2}{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

per hanc igitur reductionem, formularum nostrarum Nris. V. et VIII. §. 4. occurrentium integratio perficitur, vbi quidem pro priori earum, in qua $1 + mzz$ occurrit, nulla adhibenda est limitatio, ob $e^2 = \frac{m}{m + n}$ semper positiuum, erit vero tum $e < 1$, ideoque integratio rectificationem arcus Elliptici inuoluet. Quodsi vero habeatur $mzz - 1$, praescribitur vt sit $m > n$, quia alioquin e fieret imaginarium, existente autem e reali, erit > 1, vnde integratio rectificationem arcus hyperbolici supponit.

§. 21.

§. 21. Iam denique ſi differentiale $dz.\frac{Z}{Z'}$ ad iſtam formam:

$$\frac{d\Phi\,(1+e\,\mathrm{cof.}\,\Phi)^2}{(e+\mathrm{cof.}\,\Phi)^2\,\sqrt{(1+2\,e\,\mathrm{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

reducendum ſit, adhibeatur primum ſubſtitutio

$$z=\frac{\lambda\,\mathrm{ſin.}\,\Phi}{e+\mathrm{cof.}\,\Phi},\text{ vnde } dz=\frac{\lambda\,d\Phi\,(1+e\,\mathrm{cof.}\,\Phi)}{(e+\mathrm{cof.}\,\Phi)^2}.$$

Tum vero patet eſſe debere,

$$Z=\mu\,\frac{(1+e\,\mathrm{cof.}\,\Phi)}{e+\mathrm{cof.}\,\Phi}\text{ et } Z'=\mu'\,\frac{\sqrt{(1+2\,e\,\mathrm{cof.}\,\Phi+e^2)}}{e+\mathrm{cof.}\,\Phi},$$

hincque pro Z' non niſi haec formula $\sqrt{(1+nzz)}$ adhiberi poteſt, eritque

$$1+nzz=\frac{e^2+2\,e\,\mathrm{cof.}\,\Phi+\mathrm{cof.}\,\Phi^2+n\,\lambda^2\,\mathrm{ſin.}\,\Phi^2}{(e+\mathrm{cof.}\,\Phi)^2}$$
$$=\frac{1+2\,e\,\mathrm{cof.}\,\Phi+e^2}{(e+\mathrm{cof.}\,\Phi)^2},$$

ſi ponatur $n\lambda^2=1$. Pro Z autem adhibendo $\sqrt{(1\pm mzz)}$, conſequimur

$$1\pm mzz=\frac{e^2+2\,e\,\mathrm{cof.}\,\Phi+\mathrm{cof.}\,\Phi^2\pm\frac{m}{n}\,\mathrm{ſin.}\,\Phi^2}{(e+\mathrm{cof.}\,\Phi)^2}$$

$$\frac{1+2\,e\,\mathrm{cof.}\,\Phi+e^2\,\mathrm{cof.}\,\Phi^2}{(e+\mathrm{cof.}\,\Phi)^2}+\frac{\mathrm{ſin.}\,\Phi^2\,(e^2-1\pm\frac{m}{n})}{(e+\mathrm{cof.}\,\Phi)^2},$$

hincque ſi ponatur

$$e^2=1\mp\frac{m}{n}=\frac{n\mp m}{n},\text{ fiet } 1\pm mzz=\frac{(1+e\,\mathrm{cof.}\,\Phi)^2}{(e+\mathrm{cof.}\,\Phi)^2},$$

vnde concluditur

$$dz.\frac{Z}{Z'}=\frac{\lambda\,d\Phi\,(1+e\,\mathrm{cof.}\,\Phi)^2}{(e+\mathrm{cof.}\,\Phi)^2\,\sqrt{(1+2\,e\,\mathrm{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$
$$=\frac{d\Phi\,(1+e\,\mathrm{cof.}\,\Phi)^2}{\sqrt{n}\,(e+\mathrm{cof.}\,\Phi)^2\,\sqrt{(1+2\,e\,\mathrm{cof.}\,\Phi+e^2)}}.$$

Per hanc igitur reductionem Caſus Formulae noſtrae I. et III. conficiuntur, ſcilicet $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$, exiſtente $n>m$, quia alioquin e fieret imaginarium, tumque $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1+nzz}}$ ſine vlla limitatione, quippe quum valor ipſius e ſemper fiat realis, ſiue n maior, ſeu minor quam m ſupponatur.

§. 22. Alteram reductionem differentialis $dz. \frac{Z}{Z'}$, ad formam

$$\frac{d\Phi\,(1+e\,cos.\,\Phi)^2}{(e+cos.\,\Phi)^2\,\sqrt{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}},$$

praebet substitutio, qua ponitur

$$z = \frac{\lambda\sqrt{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}}{e+cos.\,\Phi}, \text{ vnde fit}$$

$$dz = \frac{\lambda\,d\Phi\,sin.\,\Phi\,(1+e\,cos.\,\Phi)}{(e+cos.\,\Phi)^2\,\sqrt{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}},$$

tumque esse debet

$$Z = \mu\,\frac{(1+e\,cos.\,\Phi)}{e+cos.\,\Phi} \text{ et } Z' = \frac{\mu'\,sin.\,\Phi}{e+cos.\,\Phi},$$

quamobrem pro Z' adhibere conueniet $\sqrt{(n.zz-1)}$, eritque

$$nzz-1 = \frac{n\lambda^2(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)-(e^2+2\,e\,cos.\,\Phi+cos.\,\Phi^2)}{(e+cos.\,\Phi)^2}$$

$$= \frac{sin.\,\Phi^2}{(e+cos.\,\Phi)^2},$$

si ponatur $n\lambda^2 = 1$, tum vero erit pro Z,

$$1 \pm mzz = 1 \pm \frac{m}{n}.\frac{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}{(e+cos.\,\Phi)^2}$$

$$= \left(1 \pm \frac{m}{n}\right)\frac{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2\,cos.\,\Phi^2)}{(e+cos.\,\Phi)^2}$$

$$+\,sin.\,\Phi^2\,\frac{\left(e^2-1\pm\frac{m}{n}\,e^2\right)}{(e+cos.\,\Phi)^2},$$

vnde si statuatur $e^2\left(1 \pm \frac{m}{n}\right) = 1$, seu $e^2 = \frac{n}{n \pm m}$, fiet

$$1 \pm mzz = \frac{(1+e\,cos.\,\Phi)^2}{e^2(e+cos.\,\Phi)^2}, \text{ proinde fiet}$$

$$dz.\frac{Z}{Z'} = \frac{\lambda\,d\Phi}{e}.\,\frac{(1+e\,cos.\,\Phi)^2}{(e+cos.\,\Phi^2)\sqrt{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(n\pm m)}\,d\Phi\,(1+e\,cos.\,\Phi)^2}{n.\,(e+cos.\,\Phi)^2\,\sqrt{(1+2\,e\,cos.\,\Phi+e^2)}},$$

et hac reductione iam Casus IX. et X. nostrae formulae differentialis absoluuntur, vbi quidem pro priori

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{nzz-1}}$$

nulla praescribitur conditio, quia e semper fiet reale, pro posteriori autem seu $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{nzz-1}}$ necessario esse debet

$n < m$,

$n > m$, quum alioquin e valorem ſortiretur imaginarium. Quatuor proinde Caſus noſtrae formulae differentialis, quorum integratio praeter quantitatem algebraicam, binos arcus vnum Ellipticum, alterum Hyperbolicum inuoluit, iſti ſequentes ſunt, I. III. IX. X.

§. 23. Nunc quoque operae pretium erit, vt diſpiciamus quomodo reductiones, iſtae quae pro eodem caſu duplices occurrunt, inter ſe conciliari queant. Et primum quidem ſi propoſita fuerit formula $dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}$ poſito $m > n$, in §. 11. inuenimus eſſe:

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}} = \frac{e}{\sqrt{m}}\, d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,cof.\Phi+e^2)}}{(1+e\,cof.\Phi)^2},$$

poſito

$$z = \frac{e}{\sqrt{m}}.\frac{fin.\Phi}{1+e\,cof.\Phi},$$ ex §. 18. vero conſtat eſſe:

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}} = -\frac{\sqrt{(m-n)}}{n}.\frac{d\psi(e+cof.\psi)^2}{fin.\psi^2\sqrt{(1+2e\,cof.\psi+e^2)}},$$

poſito

$$z = \frac{1}{e\sqrt{n}}.\frac{1+e\,cof.\psi}{fin.\psi},$$ pro vtroque caſu exiſtente $e = \sqrt{\frac{m}{m-n}}$.

Hinc itaque concluditur eſſe debere $\frac{d\psi(e+cof.\psi)^2}{fin.\psi^2\sqrt{(1+2e\,cof.\psi+e^2)}}$

$$= \frac{-n}{m-n}.\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\,cof.\Phi+e^2)}}{(1+e\,cof.\Phi)^2} = -\frac{(e^2-1)\,d\Phi\sqrt{(1+2e\,cof.\Phi+e^2)}}{(1+e\,cof.\Phi)^2},$$

iam vero per Theorema (II.) colligitur

$$\frac{1}{e^2-1}\int\frac{d\psi(e+cof.\psi)^2}{fin.\psi^2\sqrt{(1+2e\,cof.\psi+e^2)}} = \int\frac{d\psi\sqrt{(1+2e\,cof.\psi+e^2)}}{(1+e\,cof.\psi)^2}$$
$$-\frac{(e+cof.\psi)\sqrt{(1+2e\,cof.\psi+e^2)}}{(e^2-1)(1+e\,cof.\psi)\,fin.\psi},$$

quamobrem eſſe debebit

$$\int\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\,cof.\Phi+e^2)}}{(1+e\,cof.\Phi)^2}+\int\frac{d\psi\sqrt{(1+2e\,cos.\psi+e^2)}}{(1+e\,cos.\psi)^2}$$
$$= \frac{(e+cof.\psi)\sqrt{(1+2e\,cof.\psi+e^2)}}{(e^2-1)fin.\psi(1+e\,cof.\psi)}.$$

Cuius propoſitionis demonſtratio ſequenti ratione adornatur: quia

$$\frac{e}{\sqrt{m}}.\frac{fin.\Phi}{1+e\,cof.\Phi} = \frac{1}{e\sqrt{n}}.\frac{1+e\,cof.\psi}{fin.\psi}$$

 colligi-

colligitur

$$e \sqrt{(e^2 - 1)}\ \frac{\sin.\Phi}{1 + e \cos.\Phi} = \frac{1 + e \cos.\psi}{\sin.\psi},$$

hincque

$$\frac{\sin.\Phi \sqrt{(e^2 - 1)}}{1 + e \cos.\Phi} = \frac{1 + e \cos.\psi}{e \sin.\psi},$$

ex quo deducitur

$$\frac{(1 + e \cos.\Phi)^2 + \sin.\Phi^2 (e^2 - 1)}{(1 + e \cos.\Phi)^2} = \frac{(1 + e \cos.\psi)^2 + e^2 \sin.\psi^2}{e^2 \sin.\psi^2},$$

fine

$$\frac{(\cos.\Phi + e)^2}{(1 + e \cos.\Phi)^2} = \frac{1 + 2 e \cos.\psi + e^2}{e^2 \sin.\psi^2} \text{ et}$$

$$\frac{\cos.\Phi + e}{1 + e \cos.\Phi} = \frac{\sqrt{(1 + 2 e \cos.\psi + e^2)}}{e \sin.\psi},$$

viciffim autem erit

$$\frac{\cos.\psi + e}{1 + e \cos.\psi} = \frac{\sqrt{(1 + 2 e \cos.\Phi + e^2)}}{e \sin.\Phi}.$$

Fiet proinde

$$\frac{(e + \cos.\psi) \sqrt{(1 + 2 e \cos.\psi + e^2)}}{(e^2 - 1) \sin.\psi\ (1 + e \cos.\psi)} = \frac{e}{e^2 - 1}.\ \frac{(e + \cos.\psi)\ (e + \cos.\Phi)}{(1 + e \cos.\psi)\ (1 + e \cos.\Phi)},$$

cuius differentiale erit

$$\frac{e\, d\Phi. \sin.\Phi}{(1 + e \cos.\Phi)^2}\ \frac{(e + \cos.\psi)}{(1 + e \cos.\psi)} + \frac{e\, d\psi \sin.\psi}{(1 + e \cos.\psi)^2}\ \frac{(e + \cos.\Phi)}{(1 + e \cos.\Phi)}$$

$$= d\Phi \frac{\sqrt{(1 + 2 e \cos.\Phi + e^2)}}{(1 + e \cos.\Phi)^2} + d\psi \frac{\sqrt{(1 + 2 e \cos.\psi + e^2)}}{(1 + e \cos.\psi)^2}, \text{ ob}$$

$$e \sin.\Phi \frac{(e + \cos.\psi)}{1 + e \cos.\psi} = \sqrt{(1 + 2 e \cos.\Phi + e^2)},$$

et viciffim

$$e \sin.\psi \frac{(e + \cos.\Phi)}{1 + e \cos.\Phi} = \sqrt{(1 + 2 e \cos.\psi + e^2)}.$$

Egregium igitur hinc colligitur Theorema Geometricum, quod nimirum fi in Hyperbola conftituantur ad focum bini anguli Φ et ψ ita comparati, vt fit

$$\sqrt{(e^2 - 1)}\ \frac{\sin.\Phi}{1 + e \cos.\Phi} = \frac{1 + e \cos.\psi}{e \sin.\psi},$$

tum fummam binorum arcuum Hyperbolae his angulis refpondentium, aequalem effe quantitati algebraicae

$$\frac{e}{e^2-1}\cdot\frac{(e+\text{cos}.\,\Phi)\,(e+\text{cos}.\,\psi)}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)\,(1+e\,\text{cos}.\,\psi)}+C$$
$$=\frac{(e+\text{cos}.\,\Phi)\,(e+\text{cos}.\,\psi)}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}\,\text{sin}.\,\Phi\,\text{sin}.\,\psi}+C.$$

§. 24. Porro si reductiones formulae $dz\,\sqrt{\frac{1+mzz}{1-nzz}}$ §§. 11. et 20. traditas, inte se comparemus, consequimur has aequationes:

$$\sqrt{(1-e^2)}\;\frac{\text{sin}.\,\Phi}{1+e\,\text{cos}.\,\Phi}=\frac{e+\text{cos}.\,\psi}{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}}\text{ et}$$
$$d\Phi\,\frac{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2}=\frac{d\,\psi\,(1+e\,\text{cos}.\,\psi)^2}{(e^2-1)\,(1+2\,e\,\text{cos}.\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=-d\,\psi\,\frac{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}}{(1+e\,\text{cos}.\,\psi)^2}+\frac{e^2}{e^2-1}\cdot d.\frac{\text{sin}.\,\psi\,(e+\text{cos}.\,\psi)}{(1+e\,\text{cos}.\,\psi)\,\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}}$$

ideoque heic demonstrari debet, esse

$$\int d\,\Phi\,\frac{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2}+\int d\,\psi\,\frac{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}}{(1+e\,\text{cos}.\,\psi)^2}=C$$
$$-\frac{e^2}{1-e^2}\cdot\frac{\text{sin}.\,\psi\,(e+\text{cos}.\,\psi)}{(1+e\,\text{cos}.\,\psi)\,\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}}$$
$$=C-\frac{e^2}{\sqrt{(1-e^2)}}\,\frac{\text{sin}.\,\psi.\,\text{sin}\,\Phi}{(1+e\,\text{cos}.\,\psi)\,(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)},$$

existente

$e=\sqrt{\frac{m}{m+n}}$. Quum igitur sit

$\frac{\text{sin}.\,\Phi\,\sqrt{(1-e^2)}}{1+e\,\text{cos}.\,\Phi}=\frac{e+\text{cos}.\,\psi}{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}}$, fiet $\frac{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2-\text{sin}.\,\Phi^2\,(1-e^2)}{(1+e\,\text{cos}.\,\Phi)^2}$
$$=\frac{1+2\,e\,\text{cos}.\psi+e^2-(e+\text{cos}.\,\psi)^2}{1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2},$$

ideoque

$$\frac{e+\text{cos}.\,\Phi}{1+e\,\text{cos}.\,\Phi}=\frac{\text{sin}.\,\psi}{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cos}.\,\psi+e^2)}},$$

nec non

$$\frac{\text{sin}.\,\Phi\,\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cos}.\,\Phi}=\frac{e+\text{cos}.\,\psi}{\text{sin}.\,\psi};$$

quare fieri oportet

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \int d\psi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(1+e\cos.\psi)^2}$$
$$= C - \frac{e^2}{1-e^2}.\frac{(e+\cos.\Phi)(e+\cos.\psi)}{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\psi)}.$$

Sumto autem differentiali fractionis

$$\frac{e^2}{e^2-1}\ \frac{(e+\cos.\Phi)(e+\cos.\psi)}{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\psi)},$$

habebimus

$$\frac{e^2 d\Phi \sin.\Phi}{(1+e\cos.\Phi)^2}.\left(\frac{e+\cos.\psi}{1+e\cos.\psi}\right) + \frac{e^2 d\psi \sin.\psi}{(1+e\cos.\psi)^2}\left(\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi}\right)$$
$$= \frac{e^2 d\Phi.\sin.\Phi^2}{(1+e\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$
$$+ \frac{e^2 d\psi.\sin.\psi^2}{(1+e\cos.\psi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},\ \text{ob}\ \frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi}$$
$$= \frac{\sin.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}\ \text{et viciſſim}$$
$$\frac{e+\cos.\psi}{1+e\cos.\psi} = \frac{\sin.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

quare vt veritas propoſitionis ſibi conſtet, neceſſum quoque eſt fore:

$$d\Phi \frac{(1+2e\cos.\Phi+e^2\cos.\Phi^2)}{(1+e\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$
$$+ d\psi \frac{(1+2e\cos.\psi+e^2\cos.\psi^2)}{(1+e\cos.\psi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}} = 0,$$

hoc eſt

$$\frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} + \frac{d\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}} = 0,$$

id quod ſequenti ratiocinio confirmatur, ob

$$\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi} = \frac{1+e\cos.\psi}{e+\cos.\psi},\ \text{fiet}$$
$$\frac{d\Phi(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)}{\sin.\Phi^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} = (e^2-1)\frac{d\psi\sin.\psi}{(e+\cos.\psi)^2},$$

hinc

$$\frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} = (e^2-1)\frac{d\psi\sin.\psi.\sin.\Phi^2}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)(e+\cos.\psi^2)}$$
$$= -\frac{\sqrt{(1-e^2)}\,d\psi\sin.\Phi}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\psi)} = -\frac{d\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

ob $\sin.\Phi\ \sin.\psi\ \sqrt{(1-e^2)} = (e+\cos.\Phi)(e+\cos.\psi)$ et

$$\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1-e^2)}}{1+e\cos.\Phi} = \frac{e+\cos.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}.$$

Hinc

Hinc elegans quoque iſtud Theorema comprobatur, quod ſi ad focum Ellipſeos, a vertice eius, conſtituantur bini anguli Φ et ψ ita comparati, vt ſit

$$\text{ſin.}\,\Phi\;\text{ſin.}\,\psi\;\sqrt{(1-e^2)} = (e+\text{coſ.}\,\Phi)\;(e+\text{coſ.}\,\psi),$$

tum ſummam binorum arcuum Ellipticorum his angulis reſpondentium, eſſe aequalem quantitati algebraicae:

$$\frac{e^2}{e^2-1}\cdot\frac{(e+\text{coſ.}\,\Phi)\;(e+\text{coſ.}\,\psi)}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)\;(1+e\,\text{coſ.}\,\psi)} + C.$$

§. 25. Deinde ſi conferamus inter ſe reductiones formulae VI. $dz\sqrt{\frac{1-mzz}{1-nzz}}$, poſito $n > m$, §§. 12. et 19. inſtitutas, has obtinebimus aequationes:

$$\frac{e+\text{coſ.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{\text{ſin.}\,\psi}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}} \text{ et}$$

$$(e^2-1)\;d\,\Phi\;\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}$$

$$d\,\psi\,\frac{(1+e\,\text{coſ.}\,\psi)^2}{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

poſito $e = \sqrt{\frac{m}{n}}$, vnde per Theorema (III.) colligetur:

$$\int d\,\Phi\,\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} + \int d\,\psi\,\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\psi)^2}$$
$$= \frac{e^2}{e^2-1}\cdot\frac{\text{ſin.}\,\psi\,(e+\text{coſ.}\,\psi)}{(1+e\,\text{coſ.}\,\psi)\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}},$$

demonſtratio autem huius propoſitionis §. praecedenti iam eſt allata, quia aequalitas

$$\frac{e+\text{coſ.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{\text{ſin.}\,\psi}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}},$$

omnino congruit cum illa:

$$\frac{\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{(1-e^2)}}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{e+\text{coſ.}\,\psi}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}}.$$

Denique reductiones formulae XII. $dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}}$, poſito $m > n$, §§. 12. et 17. inſtitutas, inter ſe conferendo, colligiligimus:

$$\frac{e+\cos.\Phi}{1+e\cos.\Phi}=\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{e\sin.\psi}\text{ et}$$

$$d\Phi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2}=d\psi\frac{(e+\cos.\psi)^2}{(1-e^2)\sin.\psi^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

ex quo per Theorema (II.) conficitur:

$$\int d\Phi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2}+\int d\psi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(1+e\cos.\psi)^2}$$

$$=C+\frac{(e+\cos.\psi)\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(e^2-1)\sin.\psi(1+e\cos.\psi)}$$

$$=C+\frac{e(e+\cos.\psi)(e+\cos.\Phi)}{(e^2-1)(1+e\cos.\psi)(1+e\cos.\Phi)},$$

cuius propositionis demonstratio iam §. 23. est allata.

§. 26. Porro si vlterius procedendo, reductiones formulae IV. §§. 14. et 18. institutae, inter se conferantur, has obtinebimus aequationes

$$\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi}=\frac{1+e\cos.\psi}{\sin.\psi\sqrt{(1-e^2)}}\text{ et}$$

$$\frac{d\Phi.\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}=\frac{d\psi(e+\cos.\psi)^2}{(e^2-1)\sin.\psi^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

vnde per Theoremata (I.) et (II.) concludetur:

$$\int d\Phi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2}+\int d\psi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(1+e\cos.\psi)^2}$$

$$=\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)}-\frac{(e+\cos.\psi)\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(1-e^2)\sin.\psi(1+e\cos.\psi)}+C,$$

quae expressio algebraica ob

$$\frac{\sin.\psi\sqrt{(1-e^2)}}{e+\cos.\psi}=\frac{\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi},$$

in hanc abit:

$$\frac{\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi}\left(\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{1+e\cos.\Phi}-\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{\sqrt{(1-e^2)}(1+e\cos.\psi)}\right),$$

et denuo ob

$$\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{1+e\cos.\psi}=\frac{1+e\cos.\Phi}{\sqrt{(1-e^2)}(1+2e\cos.\Phi+e^2)},$$

in hanc

$$\frac{\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi}\left(\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{1+e\cos.\Phi}-\frac{1+e\cos.\Phi}{(1-e^2)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}\right),$$

cuius

cuius quantitatis facta euolutione, istam demum consequimur expressionem:

$$\frac{+e^2}{e^2-1}\cdot\frac{\sin.\Phi(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}=\frac{e^2}{e^2-1}\cdot\frac{(e+\cos.\Phi)(e+\cos.\psi)}{(1+e\cos.\Phi)(1+e\cos.\psi)}$$

quam iam supra §. 24, cum istis formulis integralibus congruere inuenimus. Vlterius si reductiones pro formula VIII. §§. 14. et 20 allatae, inter se conferantur, hae prodibunt aequationes:

$$\frac{\sqrt{(e^2-1)(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi}=\frac{e(e+\cos.\psi)}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}\ \text{et}$$

$$\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

$$=-\frac{1}{e^2-1}.\int\frac{d\psi(1+e\cos.\psi)^2}{(1+2e\cos.\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

vnde per Theoremata nostra (I.) et (III.) colligitur:

$$\int d\Phi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2}+\int d\psi\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{(1+e\cos.\psi)^2}$$

$$=C+\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)}$$

$$+\frac{e^2}{e^2-1}\ \frac{\sin.\psi(e+\cos.\psi)}{(1+e\cos.\psi)\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

hinc quum sit per §. 23.

$$\frac{e\sin.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}=\frac{1+e\cos.\Phi}{e+\cos.\Phi}\ \text{et}$$

$$\frac{e+\cos.\psi}{1+e\cos.\psi}=\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e\sin.\Phi},$$

quantitas ista algebraica in hanc abibit:

$$\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi}\left(\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}+\frac{1+e\cos.\Phi}{(e^2-1)\sin.\Phi}\right)$$

$$=\frac{(e+\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(e^2-1)\sin.\Phi(1+e\cos.\Phi)}$$

cuius quantitatis aequalitas cum integralibus istis, iam supra §. 23. est demonstrata.

§. 27. Nunc quoque comparationem instituendo reductionum pro formula VII. §§. 15. et 19. institutarum, ad has pertingemus aequationes:

$$\frac{1+e\cos.\Phi}{e+\cos.\Phi}=\frac{e\sin.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}} \text{ et}$$

$$\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}=$$

$$\frac{1}{1-e^2}\int\frac{d\psi(1+e\cos.\psi)^2}{(1+2e\cos.\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quarum expressionum aequalitas modo a nobis est demonstrata. Tum vero demum, instituta comparatione reductionum pro formula XI. $dz\sqrt{\frac{mzz-1}{nzz-1}}$, casu $m < n$, §§. 15. et 17. institutarum, has obtinebimus aequationes:

$$\frac{1+e\cos.\Phi}{e+\cos.\Phi}=\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}{\sin.\psi} \text{ et}$$

$$\int\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}=$$

$$\frac{1}{e^2-1}\int\frac{d\psi(e+\cos.\psi)^2}{\sin.\psi^2\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

quod cum veritate consentire, iam in §. modo antecedenti est demonstratum.

§. 28. Hinc igitur iam facile perspicitur, quomodo singuli casus nostrae formulae differentialis expediri queant, quicunque valores litteris m et n tribuantur, nisi quaepiam harum quantitatum vel euanescat, vel in infinitum abeat; quibus casibus euenit, vt integrale vel per rectificationem parabolae, vel quadraturam circuli exprimatur, vel denique algebraicum consequatur valorem. Ne igitur quidquam in hac nostra disquisitione deficere videatur, iam etiam expendamus, quomodo integralia talium formularum ex nostris quoque praeceptis deriuari queant. Casus igitur vbi primum vel m vel n euanescere supponitur,

nitur, sunt hi sequentes:

$$dz\sqrt{(1+mzz)};\quad dz\sqrt{(1-mzz)};$$

$$dz\sqrt{(mzz-1)};\ \text{posito}\ n=0;$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)}};\quad \frac{dz}{\sqrt{(1-nzz)}};\quad \frac{dz}{\sqrt{(nzz-1)}},\ \text{posito}\ m=0.$$

Si prima harum formularum conferatur cum illis, quas contemplati sumus, videbimus esse $e=1$, ideoque fiet

$$dz\sqrt{(1+mzz)}=\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\frac{d\Phi\sqrt{2(1+\cos.\Phi)}}{(1+\cos.\Phi)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\frac{d\Phi}{2\cos.\frac{1}{2}\Phi^3},\ \text{posito}$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\sin.\Phi}{1+\cos.\Phi}=\frac{1}{\sqrt{m}}\cdot\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi.$$

Secunda harum formularum nimirum $dz\sqrt{(1-mzz)}$, expeditur ope formulae III. §. 21. vbi $\frac{1}{e}=0$, tum enim fiet:

$$e\sqrt{n}=\sqrt{(n+m)}=\sqrt{m}\ \text{et}\ \frac{\lambda}{e}=\frac{1}{e\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{m}},$$

quare erit

$$dz\sqrt{(1-mzz)}=\frac{\lambda d\Phi(1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$

$$=\frac{\lambda}{e}d\Phi.\cos.\Phi^2=\frac{1}{\sqrt{m}}d\Phi.\cos.\Phi^2,\ \text{posito}$$

$$z=\frac{\lambda\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi}=\frac{\lambda}{e}\sin.\Phi=\frac{\sin.\Phi}{\sqrt{m}}.$$

Deinde formula $dz\sqrt{(mzz-1)}$ reducitur ad casus nostros IV. et VIII. §. 14. posito $e=1$, eritque

$$dz\sqrt{(mzz-1)}=\frac{d\Phi\sin.\Phi^2}{\sqrt{m}(1+\cos.\Phi)^2\sqrt{2(1+\cos.\Phi)}}$$

$$=\frac{d\Phi.\sin.\frac{1}{2}\Phi^2}{2\sqrt{m}.\cos.\frac{1}{2}\Phi^3},$$

quod omnino rite se habet, posito $z=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m(1+\cos.\Phi)}}$.

§. 29. Vlterius procedendo, pro casibus vbi m statuitur $=0$, differentiale $\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)}}$ reducitur ad Casus

no-

noſtros I. vel III, ſtatuendo $e = 1$, tum vero fit

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)}} = \frac{d\Phi}{\sqrt{2n(1+\text{coſ}.\Phi)}} = \frac{d\Phi}{2\sqrt{n}.\,\text{coſ}.\frac{1}{2}\Phi}, \text{ vbi}$$

$$z = \frac{\text{ſin}.\Phi}{\sqrt{n}(1+\text{coſ}.\Phi)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\text{Tang}.\tfrac{1}{2}\Phi.$$

Tum differentiale $\frac{dz}{\sqrt{(1-nzz)}}$ per formulas V. et VI. expeditur, poſito $e = 0$, (vid. §. 11. vel 12.) eritque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-nzz)}} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}.d\Phi,$$

prouti ponatur z vel $= \frac{\text{ſin}.\Phi}{\sqrt{n}}$ vel $z = \frac{\text{coſ}.\Phi}{\sqrt{n}}$. Denique differentiale $\frac{dz}{\sqrt{(nzz-1)}}$ per Formulas noſtras IX. et X. expeditur §. 22, vbi $e = 1$, eritque

$$\frac{dz}{\sqrt{(nzz-1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{d\Phi}{\sqrt{2(1+\text{coſ}.\Phi)}} = \frac{d\Phi}{2\sqrt{n}.\,\text{coſ}.\frac{1}{2}\Phi},$$

poſito

$$z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(1+\text{coſ}.\Phi)} = \frac{1}{\sqrt{n}.\,\text{coſ}.\frac{1}{2}\Phi}.$$

§. 30. Formulae hucusque conſideratae facile expediuntur, maius autem negotium faceſcunt, illae, pro quibus ſtatuitur ſiue m, ſeu n infinito aequale, quae ſequentes ſunt:

$$\frac{dz}{z}\sqrt{(1+mzz)};\ \frac{dz}{z}\sqrt{(1-mzz)};$$

$$\frac{dz}{z}\sqrt{(mzz-1)} \text{ poſito } n = \infty.$$

$$\frac{zdz}{\sqrt{(1+nzz)}};\ \frac{zdz}{\sqrt{(1-nzz)}};\ \frac{zdz}{\sqrt{(nzz-1)}}, \text{ poſito } m = \infty.$$

Si primum horum differentialium ad Formam IX. §. 22. reducere vellemus, conſequeremur $e = 1$, tum vero eſſe deberet:

$$z = \frac{\lambda\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\text{coſ}.\Phi)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(1+\text{coſ}.\Phi)},$$

quod

quod ſuppoſitionem dat incongruam. Loco igitur anguli Φ, introducamus in calculum angulum ψ ita comparatum, vt ſit:

$$\sqrt{(1-e^2)}\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}=\frac{e+\text{coſ.}\,\psi}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}} \text{ et}$$

$$\frac{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}{e+\text{coſ.}\,\Phi}=\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}}{\text{ſin.}\,\psi}.$$

Hinc differentiando colligitur:

$$(1-e^2)\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2}=-\frac{d\psi(1+e\,\text{coſ.}\,\psi)(e+\text{coſ.}\,\psi)}{\text{ſin.}\,\psi^2\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}},$$

vnde multiplicando per

$$\frac{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{(1-e^2)\,\text{ſin.}\,\Phi^2}=\frac{1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2}{(e+\text{coſ.}\,\psi)^2},$$

producitur,

$$\frac{d\Phi(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2\,\text{ſin.}\,\Phi}=-\frac{d\psi(1+e\,\text{coſ.}\,\psi)\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}}{\text{ſin.}\,\psi(e+\text{coſ.}\,\psi)},$$

denique facta multiplicatione per

$$\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}=\frac{e+\text{coſ.}\,\psi}{1+e\,\text{coſ.}\,\psi},$$

concluditur

$$\frac{d\Phi(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2}{(e+\text{coſ.}\,\Phi)^2\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}=-\frac{d\psi}{\text{ſin.}\,\psi^2}\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)};$$

proinde erit

$$\frac{dz}{z}\sqrt{(1+mzz)}=-\frac{d\psi}{\text{ſin.}\,\psi^2}\sqrt{2(1+\text{coſ.}\,\psi)}, \text{ vbi}$$

$$z=\lambda\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{e+\text{coſ.}\,\Phi}=\frac{\lambda(1+e\,\text{coſ.}\,\psi)}{\sqrt{(1-e^2)}\,\text{ſin.}\,\psi}=\frac{1+e\,\text{coſ.}\,\psi}{\sqrt{m}.\,\text{ſin.}\,\psi}, \text{ ob}$$

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } \sqrt{(1-e^2)}=\sqrt{\frac{m}{n+m}}=\sqrt{\frac{m}{n}}, \text{ poſito } n=\infty.$$

§. 31. Secundum horum differentialium ad Formam III. §. 21. reduceretur quidem, fieretque $e=1$, verum ſubſtitutio:

$$z=\frac{\lambda\,\text{ſin.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}=\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{n}.(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)}$$

incongrua euadit, quapropter iam angulum ψ in calculum introducamus ita comparatum, vt ſit

$$e\sqrt{(e^2-1)}\,\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}=\frac{1+e\cos.\psi}{\sin.\psi},$$

nec non

$$\sqrt{(e^2-1)}\,\frac{\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi}=\frac{1+e\cos.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

vnde differentiando eruitur:

$$\sqrt{(e^2-1)}\,\frac{d\Phi(1+e\cos.\Phi)}{(e+\cos.\Phi)^2}=-\frac{d\psi\sin.\psi(e+\cos.\psi)}{(1+2e\cos.\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

tumque multiplicando per

$$\frac{1+e\cos.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}=\sqrt{(e^2-1)}\,\frac{\sin.\psi}{e+\cos.\psi},$$

obtinebimus:

$$\frac{d\Phi(1+e\cos.\Phi)^2}{(e+\cos.\Phi)^2\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}=-\frac{d\psi.\sin.\psi^2}{(1+2e\cos.\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Quare fiet

$$\frac{dz}{z}\sqrt{(1-mzz)}=-\frac{d\psi\sin.\psi^2}{(2+2\cos.\psi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{d\psi\sin.\psi^2}{8\cos.\frac{1}{2}\psi^3}=-\frac{d\psi\sin.\frac{1}{2}\psi^2}{2\cos.\frac{1}{2}\psi},$$

posito

$$z=\frac{\lambda\sin.\Phi}{e+\cos.\Phi}=\frac{\lambda(1+e\cos.\psi)}{\sqrt{(e^2-1)}\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}}.$$

At pro casu praesenti est, $\lambda=\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sqrt{(e^2-1)}=\sqrt{\frac{m}{n}}$, hinc $\frac{\lambda}{\sqrt{(e-1)}}=\frac{1}{\sqrt{m}}$, vnde erit

$$z=\frac{1+\cos.\psi}{\sqrt{2m(1+\cos.\psi)}}=\frac{\cos.\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{m}},$$

et facta hac substitutione, formulas differentiales perfecte congruere facile perspicietur. Denique $\frac{dz}{z}\sqrt{(mzz-1)}$ ad formulas IV. vel XI. reducitur per §. 14. et 15. posito

ſito $e = 0$, tumque fiet:

$$\frac{dz}{z}\sqrt{(mzz-1)} = \frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2}{\text{coſ.}\,\Phi^2}, \text{ poſito } z = \frac{1}{\sqrt{m}.\,\text{coſ.}\,\Phi}.$$

§. 32. Nunc ſi differentiale $\frac{z\,dz}{\sqrt{(1+nzz)}}$ ad formulam II. §. 11, reducere vellemus, ponendum eſſet $z = \frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\sqrt{m.(1+\text{coſ.}\,\Phi)}}$, exiſtente $e = 1$ et m infinito, quae ſubſtitutio incongrua eſt, huic autem incommodo medela adfertur, ſtatuendo

$$\frac{1+e\,\text{coſ.}\,\psi}{\text{ſin.}\,\psi} = e\sqrt{(e^2-1)}\,\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi}, \text{ ſiue}$$

$$\frac{e+\text{coſ.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}}{e\,\text{ſin.}\,\psi},$$

vnde fit

$$(e^2-1)\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = -\frac{d\psi(1+e\,\text{coſ.}\,\psi)(e+\text{coſ.}\,\psi)}{e\,\text{ſin.}\,\psi^2\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}}$$

et multiplicando per

$$\frac{\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{\text{ſin.}\,\Phi} = \frac{e(\text{coſ.}\,\psi+e)}{1+e\,\text{coſ.}\,\psi};$$

$$(e^2-1)\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2} = -\frac{d\psi(e+\text{coſ.}\,\psi)^2}{\text{ſin.}\,\psi^2\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}},$$

quare fit

$$\frac{z\,dz}{\sqrt{(1+nzz)}} = \frac{e\,d\Phi\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\Phi+e^2)}}{m(1+e\,\text{coſ.}\,\Phi)^2},$$

$$= -\frac{e\,d\psi(e+\text{coſ.}\,\psi)^2}{m(e^2-1)\,\text{ſin.}\,\psi^2\sqrt{(1+2e\,\text{coſ.}\,\psi+e^2)}}.$$

Eſt vero $e^2-1 = \frac{n}{m-n} = \frac{n}{m}$, ob $m = \infty$, hinc erit $m(e^2-1) = n$, ideoque ob $e = 1$,

$$\frac{z\,dz}{\sqrt{(1+nzz)}} = -\frac{d\psi(1+\text{coſ.}\,\psi)^2}{n\,\text{ſin.}\,\psi^2\sqrt{2(1+\text{coſ.}\,\psi)}}$$

$$= -\frac{d\psi\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\psi}{2n\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\psi^2}, \text{ poſito}$$

$$z = \frac{e}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{e\sqrt{(e^2-1)}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{1+e\,\text{coſ.}\,\Phi} = \frac{1+e\,\text{coſ.}\,\psi}{\sqrt{n}.\,\text{ſin.}\,\psi},$$

hinc ob $e = 1$, $z = \frac{1}{\sqrt{n}}.\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\psi$. Deinde ſi propoſitum fuerit differentiale $\frac{z\,dz}{\sqrt{(1-nzz)}}$, quod ſub Formula noſtra V. comprehenditur, idem occurrit incongruum, quod ſuppo-

ſitio

ſitio $z = \frac{e}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}$, ſubſiſtere nequeat, poſito autem

$$\sqrt{(1-e^2)}\,\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi} = \frac{e+\cos.\psi}{\sqrt{(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

fit differentiando:

$$\sqrt{(1-e^2)}\,\frac{d\Phi(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\Phi)^2} = -\frac{d\psi\sin.\psi(1+e\cos.\psi)}{(1+2e\cos.\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et multiplicando per

$$\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi} = \frac{1+e\cos.\psi}{\sin.\psi\sqrt{(1-e^2)}},\text{ erit}$$

$$\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} = -\frac{d\psi.(1+e\cos.\psi)^2}{(1-e^2)(1+2e\cos.\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

nec non

$$\frac{z\,dz}{\sqrt{(1-nzz)}} = \frac{e}{m}\cdot\frac{d\Phi\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2}$$

$$= -\frac{e\,d\psi(1+e\cos.\psi)^2}{m(1-e^2)(1+2e\cos.\psi+e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

At eſt $1-e^2 = \frac{n}{m+n}$, hinc $m(1-e^2)\frac{mn}{m+n}$, et caſu m infiniti, fit $m(1-e^2) = n$, ideoque

$$\frac{z\,dz}{\sqrt{(1-nzz)}} = -\frac{d\psi(1+\cos.\psi)^2}{n(2(1+\cos.\psi))^{\frac{3}{2}}}$$

$= -\frac{d\psi}{2}.\cos.\frac{1}{2}\psi$ ob $e = 1$, exiſtente

$$z = \frac{e}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi} = \frac{e\sqrt{(1-e^2)}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi} = \frac{e+\cos.\psi}{e\sqrt{n(1+2e\cos.\psi+e^2)}},$$

$$\text{ſeu } z = \frac{\sqrt{(1+\cos.\psi)}}{\sqrt{2n}} = \frac{\cos.\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{n}}.$$

Caeterum binae hae reductiones iam quoque directe ex §. 18. et 19. deduci poſſunt. Denique differentiale $\frac{z\,dz}{\sqrt{(nzz-1)}}$ reducitur ad formulam noſtram XI. §. 22, ponendo $e = 0$,

erit-

eritque $\frac{z\,dz}{\sqrt{(nzz-1)}} = \frac{d\Phi}{n\,cof.\Phi^2}$, pofito $z = \frac{1}{\sqrt{n.cof.\Phi}}$, et fubftitutione facta, horum differentialium aequalitas mox innotefcet.

§. 33. Dum fupra §. 23. 24, oftendimus effe pro Hyperbola:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,cof.\Phi+e^2)}}{(1+e\,cof.\Phi)^2} + \int d\psi \frac{\sqrt{(1+2e\,cof.\psi+e^2)}}{(1+e\,cof.\psi)^2}$$
$$= C + \frac{e}{e^2-1} \cdot \frac{(e+cof.\Phi)(e+cof.\psi)}{(1+e\,cof.\Phi)(1+e\,cof.\psi)},$$

pofito

$$e\sqrt{(e^2-1)}\frac{fin.\Phi}{1+e\,cof.\Phi} = \frac{1+e\,cof.\psi}{fin.\psi},$$

et pro ellipfi:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,cof.\Phi+e^2)}}{(1+e\,cof.\Phi)^2} + \int d\psi \frac{\sqrt{(1+2e\,cof.\psi+e^2)}}{(1+e\,cof.\psi)^2}$$
$$= C - \frac{e^2}{e^2-1} \cdot \frac{(e+cof.\Phi)(e+cof.\psi)}{(1+e\,cof.\Phi)(1+e\,cof.\psi)},$$

pofito

$$\sqrt{(1-e^2)}\frac{fin.\Phi}{e+cof.\Phi} = \frac{e+cof.\psi}{fin.\psi},$$

valorem conftantis C nondum definiuimus, quare reftat, vt id hic expediamus. Definietur autem ille valor commodiffime ex fuppofitione $\Phi = \psi$, tum fcilicet erit pro priori cafu $e\sqrt{(e^2-1)}\,fin.\Phi^2 = (1+e\,cof.\Phi)^2$, ideoque $e\sqrt{(e^2-1)} = 1 + 2e\,cof.\Phi + e\,cof.\Phi^2(e+\sqrt{(e^2-1)})$, vnde deducitur:

$$cof.\Phi + \frac{1}{e+\sqrt{(e^2-1)}} = \frac{\sqrt{((e\sqrt{(e^2-1)}-1)(e^2+e\sqrt{(e^2-1)}+e^2)}}{e(e+\sqrt{(e^2-1)})},$$

haec autem formula aliquanto fit concinnior, fi loco e in computum introducatur $fin.\lambda = \frac{1}{e}$, tum enim erit:

$$cof.\Phi^2(1+cof.\lambda) + 2\,fin.\lambda\,cof.\Phi = cof.\lambda - fin.\lambda^2$$

et proinde

$$cof.\Phi^2 + 2\,tang.\tfrac{1}{2}\lambda\,cof.\Phi = \frac{cof.\lambda - fin.\lambda^2}{1+cof.\lambda},\ \text{ob}\ \frac{fin.\lambda}{1+cof.\lambda} = tang.\tfrac{1}{2}\lambda,$$

hincque $cof.\Phi^2 + 2\,tang.\frac{1}{2}\lambda\,cof.\Phi = \frac{cof.\lambda^2 + cof.\lambda - 1}{1+cof.\lambda}$, quamobrem obtinebimus

$$(\operatorname{cof.} \Phi + \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2}\lambda)^2 = \frac{(\operatorname{cof.} \lambda^2 + \operatorname{cof.} \lambda - 1)(1 + \operatorname{cof.} \lambda)}{(1 + \operatorname{cof.} \lambda)^2}$$
$$+ \frac{\operatorname{fin.} \lambda^2}{(1 + \operatorname{cof.} \lambda)^2} = \frac{\operatorname{cof.} \lambda^3 + \operatorname{cof.} \lambda^2}{(1 + \operatorname{cof.} \lambda)^2} = \frac{\operatorname{cof.} \lambda^2}{1 + \operatorname{cof.} \lambda},$$

hincque fit:

$$\operatorname{cof.} \Phi + \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2}\lambda = \frac{\operatorname{cof.} \lambda \sqrt{2}}{2 \operatorname{cof.} \frac{1}{2}\lambda} \text{ et}$$

$$\operatorname{cof.} \Phi = \frac{1}{\operatorname{cof.} \frac{1}{2}\lambda} \left(\frac{\operatorname{cof.} \lambda}{\sqrt{2}} - \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\lambda \right),$$

quae aequatio femper fubfiftere poteft, fiquidem quadratum denominatoris $\operatorname{cof.} \frac{1}{2}\lambda^2$ excedat quadratum numeratoris $\frac{1}{2}\operatorname{cof.} \lambda^2 - \sqrt{2}. \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\lambda \operatorname{cof.} \lambda + \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\lambda^2$, eft vero $\operatorname{cof.} \frac{1}{2}\lambda^2 - \operatorname{fin.} \frac{1}{2}\lambda^2 = \operatorname{cof.} \lambda$, vnde effe debet

$$\operatorname{cof.} \lambda > \tfrac{1}{2}\operatorname{cof.} \lambda^2 - \sqrt{2}. \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\lambda \operatorname{cof.} \lambda, \text{ fiue}$$
$$1 + \sqrt{2}. \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2}\lambda > \tfrac{1}{2}\operatorname{cof.} \lambda,$$

de quo nullum eft dubium, quia $\operatorname{fin.} \lambda$ ideoque tanto magis $\operatorname{fin.} \frac{1}{2}\lambda$, femper poni poteft pofitiuus. Si igitur arcus Hyperbolae angulo iam quaefito Φ refpondens indigitetur per π, fiet

$$2\pi = C - \frac{e^2}{e^2 - 1} \cdot \frac{(e + \operatorname{cof.} \Phi)}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2},$$

ideoque

$$C = 2\pi + \frac{e^2}{e^2 - 1} \cdot \frac{(e + \operatorname{cof.} \Phi)^2}{(1 + e \operatorname{cof.} \Phi)^2},$$

vbi expreffio algebraica ob

$$\operatorname{cof.} \Phi = \frac{\operatorname{cof.} \lambda}{\sqrt{(1 + \operatorname{cof.} \lambda)}} - \frac{\operatorname{fin.} \lambda}{1 + \operatorname{cof.} \lambda} = \frac{\operatorname{cof.} \lambda \sqrt{(1 + \operatorname{cof.} \lambda)} - \operatorname{fin.} \lambda}{(1 + \operatorname{cof.} \lambda)}$$
$$= \frac{\operatorname{cof.} \lambda - \sqrt{(1 - \operatorname{cof.} \lambda)}}{\sqrt{(1 + \operatorname{cof.} \lambda)}},$$

in fequentem abit

$$\frac{e^2}{e^2 - 1} \cdot (1 + \operatorname{cof.} \lambda) = \frac{1 + \operatorname{cof.} \lambda}{\operatorname{cof.} \lambda^2}.$$

Pro

Pro posteriori casu si statuatur $e = \sin.\lambda$, prorsus ad eandem perueniemus aequationem, vnde similis valor pro cos. Φ deriuatur.

§. 34. Quia pro Ellipsi supposuimus

$$\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1-e^2)}}{e+\cos.\Phi} = \frac{e+\cos.\psi}{\sin.\psi},\quad \frac{1+e\cos.\psi}{e+\cos.\psi} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi},$$

hinc diuidendo per e,

$$\frac{1-e^2}{e+\cos.\psi} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}-e\sin.\Phi}{\sin.\Phi} \text{ et}$$

$$e+\cos.\psi = \frac{(1-e^2)\sin.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}-e\sin.\Phi},$$

quare fiet

$$\cos.\psi = \frac{\sin.\Phi - e\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}-e\sin.\Phi)},$$

tumque

$$\sin.\psi = \frac{\sqrt{(1-e^2)}\,(e+\cos.\Phi)}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}-e\sin.\Phi},$$

ex his vero formulis quum elegans aliqua constructio elici nequeat, negotium alio modo tentabimus. Sit igitur A C D B ellipsis cuius axis est A B et focus in F, tumque ductae concipiantur rectae F C, F D ea ratione, vt cum A F constituant angulos A F C $= \Phi$ et A F D $= \psi$, ita comparatos, vt sit $\frac{\sin.\Phi\sqrt{(1-e^2)}}{e+\cos.\Phi} = \frac{e+\cos.\psi}{\sin.\psi}$, et rectae C E, D E normales ad Ellipsin in punctis C et D; eritque ex nota proprietate Sectionum Conicarum F C : F E = F D : F G in data ratione $= 1 : e$. In triangulo igitur F C E, habebimus C E $= v\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}$, linea scilicet F C per v indigitata, quare si angulus C E F per θ exprimatur, erit $\sin.\theta = \frac{v\sin.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$, hinc itaque ex valore pro cos. ψ supra allato, colligitur Tab. I. Fig. 6.

$$\cos.\psi = \frac{\sin.\theta - e}{1-e\sin.\theta},\quad \text{indeque}\quad \frac{1-\cos.\psi}{1+\cos.\psi} = \frac{(1+e)\,(1-\sin.\theta)}{(1-e)\,(1+\sin.\theta)}.$$

 Si

Si nunc ex puncto F in C E ducatur perpendicularis F K et ponatur angulus E F K $= \eta = 90 - \theta$, erit

$$\frac{1 - cos. \psi}{1 + cos. \psi} = \frac{1 + e}{1 - e} . \frac{1 - cos. \eta}{1 + cos. \eta},$$

hincque si e statuatur $=$ cos. γ,

$$\frac{1 - cos. \psi}{1 + cos. \psi} = \frac{1 + cos. \gamma}{1 - cos. \gamma} . \frac{1 - cos. \eta}{1 + cos. \eta},$$

vnde deducitur Tang. $\frac{1}{2} \psi =$ cot. $\frac{1}{2} \gamma$ Tang. $\frac{1}{2} \eta$. Simili ratione pro Hyperbola formula satis concinna, determinatio anguli ψ tradi potest, cui tamen explicandae non est vt heic immoremur.

§. 35. Leui adhibita attentione patet, esse

$$\text{Tang. } \theta = \frac{sin. \Phi}{e + cos. \Phi},$$

vnde si consimili modo angulus D G F per θ' exprimatur, erit:

$$\text{Tang. } \theta' = \frac{sin. \psi}{e + cos. \psi}, \text{ ideoque}$$

$$\text{Tang. } \theta \text{ Tang. } \theta' = \frac{sin. \Phi \, sin. \psi}{(e + cos. \Phi)(e + cos. \psi)} = \frac{1}{\sqrt{(1 - e^2)}} = \frac{1}{sin. \gamma},$$

vnde elegans ista deducitur proprietas, productum tangentium ex angulis C E F, D G F esse constans. Caeterum de relatione angulorum Φ et ψ sequentia notari merentur: 1°. Pro angulo Φ euanescente, erit cos. $\psi = - e$, ideoque $\psi = 180° - \gamma$, vbi facile perspicitur angulum γ illum esse, quem recta a foco Ellipsis ad verticem axis minoris ducta, cum axe principali Ellipseos constituit. 2°. Aucto angulo Φ diminuetur angulus ψ, qui euanescet dum statuitur $\Phi = 180° - \gamma$. 3°. Si angulus Φ adhuc augeatur vltra hunc limitem $\Phi = 180° - \gamma$, fiet angulus ψ negatiuus. 4°. Si $\Phi = 180°$, fiet $\psi = \gamma - 180°$.

§. 36.

§. 36. Plurima quidem adhuc restarent obseruanda de reductione formularum differentialium ad rectificationes Sectionum Conicarum, verum quum ea heic singula exsequi non liceat, alia Dissertatione, quae hic nondum exposita sunt, luculentius pertractabimus.

DE
INFINITIES INFINITIS
GRADIBVS TAM INFINITE MAGNORVM QVAM INFINITE PARVORVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Si x denotet quantitatem infinite magnam, tum iſta progreſſio geometrica 1, x, xx, x^3, x^4, x^5, etc. ita eſt comparata, vt quilibet terminus ſit infinities maior praecedente, at vero infinities minor ſequente. Vnde ſi poteſtatem x^{1000} tanquam vltimum terminum huius progreſſionis ſpectemus, inter terminum primum 1 et eum ſtatui poterunt mille gradus diuerſi infinite magnorum, vbi quidem ad eundem gradum referimus omnes quantitates finitam rationem inter ſe tenentes. Neque tamen iſte numerus millenarius omnes gradus intermedios inter 1 et x^{1000} exhibet; vbi obſeruandum, quae hic de numero determinato 1000 dicuntur, de quolibet alio numero, quantumuis magno, eſſe intelligenda.

§. 2. Plurimum abeſt, vti modo diximus, vt illa progreſſione omnes gradus intermedii inter 1 et x^{1000}, qui quidem ſint diuerſi, repraeſententur. Si enim ponamus $z = y^{1000}$ vt ſit

$y =$

$y = \sqrt[1000]{x}$, ob x quantitatem infinitam etiamnunc y erit quantitas infinita; vnde ſequitur, quia inter 1 et y^{1000} denuo mille gradus intermedii aſſignari poſſunt, quorum quilibet pariter infinities maior eſt quam praecedens, infinities vero minor quam ſequens, etiam inter vnitatem et x denuo mille gradus intermedios conſtitui poſſe, etiamſi ante x fuiſſet primus gradus infiniti. Simili vero modo etiam inter praecedentem gradum primum x et ſecundum xx iterum mille gradus intermedii conſtitui poſſunt, atque adeo inter binos quoſuis gradus proximos, qui omnes ita ſunt comparati, vt quilibet ſit infinities maior quam praecedens, infinities vero minor quam ſequens.

§. 3. Neque vero hic ſubſiſtere cogimur. Cum enim ſit y quantitas infinite magna, ſi ponamus $y = z^{1000}$, etiamnunc z erit quantitas infinite magna; vnde intelligitur, inter 1 et z^{1000}, hoc eſt, inter 1 et y, denuo mille gradus intermedios infinitorum conſtitui poſſe, atque hoc modo vlterius progredi licet, quousque libuerit, ita vt numerus omnium graduum diuerſorum reuera in infinitum augeri poſſit.

§. 4. Haec eadem quoque inuerſo modo valent de infinite paruis. Si enim x denotet quantitatem infinite paruam huius progreſſionis geometricae: $1, x, xx, x^3 \ldots x^{1000}$, quilibet terminus infinities minor eſt quam praecedens, at vero infinities maior quam ſequens, hincque inter 1 et x^{1000} adipiſcimur mille gradus intermedios infinite paruorum, omnes diuerſos; quandoquidem quilibet infinities minor eſt praecedente, infinities vero maior ſequente.

§. 5.

§. 5. Quod ſi iam vlterius ponamus $x = y^{1000}$, vt ſit $y = \sqrt[1000]{x}$, etiamnunc y erit quantitas infinite parua; vnde patet inter 1 et y^{1000}, hoc eſt inter 1 et x, denuo mille gradus infinite paruorum intermedios conſtitui poſſe, quod etiam fieri poterit inter x et xx, ſimilique modo inter xx et x^3, atque in genere inter binos quosuis proximos praecedentis ſeriei; et quia, poſito vlterius $y = z^{1000}$, etiamnunc z eſt quantitas infinite parua, numerus graduum diuerſorum denuo millies euadet maior, quae multiplicatio vlterius ſine fine continuari poterit.

§. 6. Haec quidem, quae ex conſideratione poteſtatum ſunt deducta, in vulgus ſunt notiſſima, atque adeo ad Algebram communem referri poſſunt; verum Analyſis ſublimior praeterea ſuppeditat innumerabiles alios gradus tam infinite magnorum quam paruorum, quae nullo modo in vllo eorum graduum, quos modo commemorauimus, quantumuis etiam multiplicentur, comprehendi poſſunt, ſed perpetuo vel infinities maiores, vel minores deprehenduntur quam vllus graduum praecedentium, quod cum nusquam ſatis clare explicatum eſſe memini, operae pretium erit hic fuſius perpendiſſe.

§. 7. Tales autem quantitates in Analyſi ſublimiori occurrentes ad duas claſſes referri poſſunt, quarum altera complectitur logarithmos, altera vero quantitates exponentiales, De logarithmis igitur primum agamus, ac denotante x numerum infinite magnum conſtat quoque eius logarithmum eſſe infinite magnum. Perinde autem hic eſt, quonam canone logarithmorum vti velimus, ſiue communibus, ſiue hyperbolicis, ſiue quouis alio genere.

§. 8.

§. 8. Quando autem x eſt numerus infinite magnus, per ſe ſatis clarum eſt, eius logarithmum, hoc eſt $l\,x$, infinitum quidem, attamen infinities eſſe minorem ipſo numero x, quam ob rem ad gradum quempiam inferiorem referri debebit. Quoniam igitur gradus ipſo x inferiores per $x^{\frac{1}{n}}$ repraeſentari poſſunt, denotante ſcilicet n numerum quantumuis magnum, haud difficulter oſtendi poteſt, ſemper eſſe $l\,x$ infinities minorem quam $x^{\frac{1}{n}}$, quantumuis etiam magnus numerus pro n accipiatur.

§. 9. Sequenti autem modo demonſtrare licet, ſemper $x^{\frac{1}{n}}$ infinities maius eſſe quam $l\,x$, ſiquidem $x = \infty$, ſiue valorem huius fractionis $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{l\,x}$ ſemper eſſe infinite magnum. Statuatur enim iſte valor $= v$, vt ſit $v = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{l\,x}$, ac ponatur $p = \frac{1}{l\,x}$ et $q = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$, eritque $v = \frac{p}{q}$, cuius fractionis tam numerator p quam denominator q fit $= 0$ caſu $x = \infty$; quam ob rem ſecundum regulam notiſſimam erit quoque $v = \frac{d\,p}{d\,q}$. Cum igitur ſit $d\,p = -\frac{d\,x}{x\,(l\,x)^2}$ et $d\,q = \frac{-d\,x}{n\,x^{\frac{1}{n}+1}}$, erit $v = \frac{n\,x^{\frac{1}{n}}}{(l\,x)^2}$, quem ergo valorem praecedenti $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{l\,x}$ aequalem eſſe oportet. At vero ſumtis quadratis ex praecedente fit $v\,v = \frac{x^{\frac{2}{n}}}{(l\,x)^2}$, qui valor per posteriorem diuisus praebet $v = n x^{\frac{1}{n}}$, qui cum manifesto sit infinitus, etiam patet esse $\frac{x^{\frac{1}{n}}}{l x}$ quantitatem infinite magnam, siue semper esse $l x$ quantitatem infinities minorem quam $x^{\frac{1}{n}}$, quantumuis etiam magnus numerus pro n accipiatur.

§. 10. Hinc igitur manifestum est, si fuerit $x = \infty$, tum eius logarithmum $l x$ ad nullum gradum superiorum infinitorum referri posse, quantumuis etiam illi gradus per continuam multiplicationem coarctentur. Quam ob rem hic constitui debebit nouus plane gradus infiniti, classificationi logarithmi $l x$ conueniens, ad quem scilicet potestas $x^{\frac{1}{n}}$ continuo propius accedat, quo maior statuatur numerus n. Neque tamen idcirco casus quo $n = \infty$ satisfacit, quia ob $\frac{1}{n} = 0$ foret $x^{\frac{1}{n}} = 1$, cum tamen $l x$ sit infinitus; verum probe notandum est, demonstrationem ante allatam praebuisse $n x^{\frac{1}{n}}$, vnde sumto etiam $n = \infty$ nihilominus prodit $v = n$, ideoque adhuc infinitum.

§. 11. Cum igitur $l x$ constituat quasi gradum infimum omnium quantitatum infinite magnarum, euidens est, hinc numerum graduum supra constitutorum, qui iam erat infinitus, insuper in infinitum augeri debere. Si enim contemplemur gradum quemcunque potestate x^{α} designatum, manifestum est, hanc formulam: $x^{\alpha} l x$, infinities esse maiorem quam x^{α}; statim vero atque exponens α fractione quam minima $\frac{1}{n}$ augetur, tum certe formula $x^{\alpha} l x$ infinities

nities erit minor quam $x^{\alpha+\frac{1}{n}}$, ideoque necessario inter gradus x^α et $x^{\frac{1}{n}}$ constitui debebit.

§. 12. Verum hoc modo neutiquam adhuc multitudo omnium graduum diuersorum exhauritur. Etsi enim $(lx)^2$ sit infinities maior, quam lx, ideoque peculiarem gradum constituere debeat: tamen adhuc infinities minor est quam potestas $x^{\frac{1}{n}}$, quantumuis etiam numerus n augeatur. Simili porro modo omnes diuersae potestates ipsius lx peculiares prorsus praebent casus infinitorum, id quod adeo ad exponentes fractos est extendendum, cum $(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ certe infinities maior sit quam $(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{n}}$, attamen infinities minor quam $(lx)^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{n}}$, ideoque peculiarem gradum constituere debeat. Totidem vero etiam noui Casus exsurgent, si insuper per potestatem quamcunque ipsius x multiplicemus: scilicet formula $x^a (lx)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ infinities maior quam $x^a (lx)^{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{1}{n}}$, interim tamen infinities minor est quam $x^a (lx)^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{n}}$.

§. 13. Neque vero adhuc hoc modo omnes gradus infinitorum enumerari possunt. Quia enim lx est quantitas infinite magna, etiamnunc eius logarithmus llx erit infinitus, etiamsi infinities minor quam lx; vnde patet, ex hac formula: llx, eiusque potestatibus $(llx)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ insuper infinitos nouos gradus infinitorum statui debere, imprimis si haec formula non solum cum pote-

 statibus

ſtatibus ipſius lx ſed etiam cum poteſtatibus ipſius x combinetur; haecque conſideratio adeo vlterius ad formulas $lllx$, $llllx$, etc. extendi poterit.

§. 14. Immenſa haec graduum multitudo etiam locum habet in infinite paruis, quippe quae ſpectari poſſunt vt reciproca infinite magnorum, quoniam quodlibet infinitum ∞, ſi vnitas per id diuidatur, ſcilicet $\frac{1}{\infty}$, peculiarem gradum infinite parui conſtituere cenſeri debet. Ita ſi x ſit quantitas infinita, non ſolum haec ſeries: $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{xx}$; $\frac{1}{x^3}$; $\frac{1}{x^4}$; etc. infinitos gradus infinite paruorum ſuppeditat, ſed etiam haec ſeries: $\frac{1}{lx}$; $\frac{1}{(lx)^2}$; $\frac{1}{(lx)^3}$; $\frac{1}{(lx)^4}$; etc. vna cum omnibus poteſtatibus ſingulorum terminorum nouos gradus infinite paruorum praebet; tum vero etiam ſeries $\frac{1}{llx}$; $\frac{1}{(llx)^2}$; $\frac{1}{(llx)^3}$; etc. atque adeo omnes ſequentes, vbi ſignum logarithmi vlterius multiplicatur, hanc multitudinem in immenſum adaugent.

§. 15. Quae hactenus de logarithmis ſunt tradita ſimili modo extendi poſſunt ad quantitates exponentiales, vnde pariter innumerabiles noui gradus tam infinite magnorum quam infinite paruorum conſtitui poſſunt, qui a praecedentibus prorſus erunt diuerſi. Si enim vt hactenus x denotet numerum infinitum, notum eſt valorem poteſtatis a^x etiam eſſe infinite magnum, quoties ſcilicet numerus a vnitatem ſuperauerit; ſin autem fuerit $a < 1$, eandem poteſtatem a^x exhibere quantitatem infinite paruam. Conſideremus autem primo infinite magna, ſumendo $a > 1$, atque

atque manifeſtum eſt poteſtatem a^x infinities non ſolum ſuperare ipſum exponentem, verum adeo demonſtrari poteſt, ſemper fore a^x quantitatem infinities maiorem quam poteſtatem x^n, quantumuis magnus etiam fuerit exponens n. Demonſtratio autem ſequenti modo ſe habet.

§. 16. Ponatur $\frac{a^x}{x^n} = v$, ſitque $p = \frac{1}{x^n}$ et $q = \frac{1}{a^x}$, vt fiat $v = \frac{p}{q}$, cuius fractionis tam numerator p quam denominator q caſu $x = \infty$ euaneſcit, ſicque erit etiam $v = \frac{dp}{dq}$. Eſt vero $dp = -\frac{n\,dx}{x^{n+1}}$ et $dq = -\frac{dx\,la}{a^x}$, vnde fit $v = \frac{n\,a^x}{x^{n+1}\,la}$, quae quidem formula multo magis eſt complicata quam ipſa propoſita $v = \frac{a^x}{x^n}$, ita vt hinc nihil concludi poſſe videatur. Interim tamen ex harum formularum comparatione verus valor ipſius v concludi poterit. Cum enim ex priore ſit $v^{n+1} = \frac{a^{x(n+1)}}{x^{n(n+1)}}$, ex poſteriore vero $v^n = \frac{n^n\,a^{nx}}{x^{n(n+1)}\,(la)^n}$, prior valor per poſteriorem diuiſus dabit $v = \frac{a^x\,(la)^n}{n^n}$, qui valor manifeſto eſt infinitus. Sicque demonſtratum eſt, formulam a^x ſemper eſſe infinities maiorem quam x^n, quatumuis etiam magnus capiatur exponens n, dummodo fuerit $a > 1$. Hinc igi-

 tur

tur patet, quantitatem exponentialem a^x omnes gradus infinitorum ex poteſtate x^n oriundorum infinities ſuperare. Hinc, quamquam x eſt quantitas infinita, tamen omnes iſtae fractiones: $\frac{a^x}{x}$; $\frac{a^x}{xx}$; $\frac{a^x}{x^3}$; et in genere $\frac{a^x}{x^n}$ ad tantum gradum infiniti exſurgunt, vt omnes gradus infinitorum primae claſſis excedant. Manifeſtum autem eſt haec eadem valere de formulis $a^{\alpha x}$, dummodo fuerit $\alpha > 0$; atque adeo etiam valet de formulis $a^{\alpha x^\beta}$, ſi modo literis α et β valores poſitiui tribuantur; quae ergo infinita infinities ſunt altiora quam poteſtates ipſius x, quantumuis fuerint magnae.

§. 17. Praeterea etiam notandum eſt, etiamſi formula a^x ad gradum infiniti infinite alti pertineat: tamen, ſimul ac valor litterae a quam minime augeatur, valorem huius formulae adhuc infinities euadere altiorem. Si enim fuerit $b > a$, tum formula a^x ſe habebit ad formulam b^x, vt 1 ad $(\frac{b}{a})^x$, hoc eſt, vt 1 ad infinitum infiniteſimi gradus.

§. 18. Quando autem $a > 1$, tum omnes huiusmodi poteſtates a^x reuocari poſſunt ad poteſtates numeri fixi e, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, cum ſit $a^x = e^{xla}$; ſicque omnia huius generis infinita repraeſentari poterunt ſub hac forma $e^{\alpha x^\beta}$, exiſtente $\alpha > 0$ et $\beta > 0$; tum vero etiamnunc iſta formula $\frac{e^{\alpha x^\beta}}{x^n}$ ad gradum infiniteſinitesimum infinitorum referri debebit. Multo magis etiam hi gradus infinitesimi in infinitum eleuari poterunt, si loco αx^{β} scribamus $e^{\alpha x^{\beta}}$, quo pacto peruenietur ad hanc formam: $e^{e^{\alpha x^{\beta}}}$; haecque augmentatio vlterius sine fine continuari poterit.

§. 19. Omnia haec inuerso modo ad infinite parua transferri possunt, quae iam aliquanto accuratius perpendamus. Denotet igitur litera x quantitatem infinite paruam, cuius ergo potestates singulae x^{α} innumeros gradus infinite paruorum suppeditant, quoniam aucto vel minimum exponente α formula euadit infinities minor. Hos autem gradus omnes sub prima classe infinite paruorum complectamur, si modo exponenti α omnes valores positiui tribui intelligantur.

§. 20. Ad secundam vero classem referamus ea infinite parua, quae ex logarithmis nascuntur. Quoniam enim $l\frac{1}{x}$ est infinitus, eius reciprocum $\frac{1}{l\frac{1}{x}}$ erit infinite paruum. Ponamus autem commoditatis gratia $l\frac{1}{x}=u$, vt ista forma fiat $\frac{1}{u}$, quae erit tale infinite paruum, quod omnia infinite parua primae classis infinities superat. Ad hanc classem quoque pertinebunt formulae $\frac{1}{uu}$; $\frac{1}{u^3}$; $\frac{1}{u^4}$ etc. et in genere $\frac{1}{u^{\alpha}}$. Tum vero etiam huc referendae erunt

formae

formae $\frac{x^x}{u^6}$, quae quasi mixtae sunt ex prima et secunda classe. Praeterea vero, quia adhuc est $l\,u$ infinite magnum, sed infinities minor quam u, eius reciprocum $\frac{1}{l\,u}$ erit infinite paruum, sed infinities maius quam $\frac{1}{u}$. Simili modo hae formulae: $\frac{1}{l.\,l.\,u}$ et $\frac{1}{l.\,l.\,l.\,u}$ erunt infinite parua continuo infinities maiora praecedentibus; vnde ergo per compositionem cum superioribus innumerabiles noui gradus infinite paruorum constitui poterunt, quos enumerare nequaquam licet.

§. 21. In hoc genere autem imprimis notari debet, quod, etiamsi $u = l\frac{1}{x}$ sit infinite magnum, tamen producta $x^n u$ omnia esse infinite parua, si modo fuerit $n > 0$. Etsi hoc ex praecedentibus sequatur, tamen ita succincte demonstrari potest. Ponatur $x^n u = v$, sitque $x^n = p$ et $\frac{1}{u} = q$, vt fiat $v = \frac{p}{q}$, cuius fractionis tam numerator quam denominator euanescit casu $x = 0$, vnde quoque erit $v = \frac{d\,p}{d\,q}$. Est vero $d\,p = n\,x^{n-1}\,d\,x$, et quia $u = l\frac{1}{x}$, siue $u = -l\,x$, erit $d\,u = -\frac{d\,x}{x}$, ideoque $d\,q = \frac{d\,x}{x\,u\,u}$, vnde fit $v = n\,x^n\,u\,u$. Quare cum ex priore valore sit $v\,v = x^{2n}\,u\,u$, hic per modo inuentum diuisus dat

$v = \frac{x^n}{n}$; vnde patet valorem ipsius v esse infinite paruum, id quod etiam valebit de formula $x^n u^\alpha$, hocque non solum quando α est numerus positiuus, sed etiam quando do eſt negatiuus, cum formula $\frac{x^n}{u^m}$ per ſe ſit infinite parua.

§. 22. Praeter has autem duas claſſes infinite paruorum quantitates exponentiales tertiam nobis praebebunt claſſem. Cum enim ob $x = 0$ formula $e^{\frac{1}{x}}$ praebeat infinite magnum quaſi ſupremi ordinis, eius reciprocum $\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = e^{-\frac{1}{x}}$ dabit infinite paruum etiam ſupremi ordinis, quod ſcilicet infinities erit minus quam vllum infinite paruum primae claſſis, id quod etiam tenendum eſt de formula generali $\frac{1}{e^{\frac{\alpha}{x^\beta}}}$. Ponamus autem breuitatis gratia $e^{\frac{\alpha}{x^\beta}} = v$, vt haec infinite parua comprehendi queant in hac forma $\frac{1}{v}$. Cum igitur hinc fit $l v = \frac{\alpha}{x^\beta}$, erit differentiando,

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\alpha\beta\, dx}{x^{\beta+1}}, \text{ ideoque } dv = -\frac{\alpha\beta\, v\, dx}{x^{\beta+1}}.$$

Praeterea vero hic imprimis notandum eſt, etiamſi x ſit quantitas euaneſcens, tamen has formulas $\frac{1}{x^n v}$ etiamnunc exprimere infinite parua ſupremi ordinis.

§. 23. His iam claſſibus conſtitutis inſignia ſubſidia tam pro differentiatione quam integratione talium infinite paruorum reperiri poſſunt, quemadmodum enim, ſi pro prima claſſe ponatur $a x^\alpha = y$ fit $\frac{dy}{dx} = \alpha a x^{\alpha-1}$ et

$\int y\,dx = \frac{a}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1}$, patet, hoc integrale infinities minus esse quam y, dum contra differentiale $\frac{dy}{dx}$ infinities est maius, atque adeo fieri queat infinite magnum, si $\alpha < 1$; id quod etiam de infinite paruis reliquarum classium est intelligendum.

§. 24. Consideremus nunc infinite paruum secundae classis, ac posito $l\frac{1}{x} = u$, vt sit $du = -\frac{dx}{x}$, statuamus $y = a\,x^\alpha\,u^m$, vbi sit $\alpha > 0$, m vero numerus siue positiuus, siue negatiuus, siquidem vtroque casu haec formula est infinite parua. Hinc igitur fiet

$\frac{dy}{dx} = \alpha\,a\,x^{\alpha-1}\,u^m - a\,m\,x^{\alpha-1}\,u^{m-1} = a\,x^{\alpha-1}\,u^{m-1}\,(\alpha\,u - m)$, quia autem u est infinitum, reiecto termino posteriore $-m$ erit $\frac{dy}{dx} = \alpha\,a\,x^{\alpha-1}\,u^m$, vnde per dx multiplicando et integrando fit $\int a\,\alpha\,x^{\alpha-1}\,u^m\,dx = y = a\,x^\alpha\,u^m$, vnde hanc nanciscimur integrationem satis memorabilem:

$\int x^{\alpha-1}\,u^m\,dx = \frac{1}{\alpha}\,x^\alpha\,u^m$, siue loco $\alpha - 1$ scribendo β erit

$\int x^\beta\,u^m\,dx = \frac{1}{\beta+1}\,x^{\beta+1}\,u^m$.

§. 25. Hinc ergo si concipiamus lineam curuam, cuius abscissae x respondeat applicata $y = a\,x^\beta\,u^m$, vbi sit $\beta > 1$, et exponens m siue positiuus siue negatiuus, huius curuae applicata in ipso initio, vbi $x = 0$, euanescet, area vero huius curuae abscissae x infinite paruae respondens erit

erit $\int y\,dx = \frac{a}{\beta+1} x^{\beta+1} u^m = \frac{1}{\beta+1} x\,y$: aequabitur ſcilicet rectangulo ex abſciſſa x in applicatam y, diuiſo per $\beta+1$, quod eo magis eſt memorabile, quia formula $x^\beta u^m dx$ nullo modo integrari poteſt, praeter caſus pauciſſimos, quibus exponens m eſt numerus integer poſitiuus.

§. 26. Conſideremus nunc quoque infinite parua tertiae claſſis, ac ponamus breuitatis gratia vt ſupra

$$e^{\frac{\alpha}{x^\beta}} = v, \text{ vt ſit } dv = -\frac{\alpha\beta\,v\,dx}{x^{\beta+1}},$$

eritque, vt vidimus, haec formula $\frac{x^m}{v}$ ſemper quantitas infinite parua, ſiue exponens m fuerit poſitiuus, ſiue negatiuus. Quodſi ergo ponatur $\frac{x^m}{v} = z$, erit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m x^{m-1} + \alpha\beta x^{m-\beta-1}}{v} = \frac{x^{m-\beta-1}}{v}(m x^\beta + \alpha\beta)$$

vbi quia $m x^\beta$ euaneſcit prae $\alpha\beta$ erit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\alpha\beta x^{m-\beta-1}}{v}$$

vnde viciſſim integrando erit

$$z = \alpha\beta \int \frac{x^{m-\beta-1}\,dx}{v} = \frac{x^m}{v},$$

ideoque ſi loco $m-\beta-1$ ſcribamus n, ita vt n ſit numerus quicunque ſiue poſitiuus ſiue negatiuus, ſemper erit

$$\int \frac{x^n\,dx}{v} = \frac{1}{\alpha\beta}\,\frac{x^{n+\beta+1}}{v},$$

quae integratio vera eſt, quamdiu x eſt infinite paruum,

 cum

cum tamen formula differentialis omnem integrationem respuat.

§. 27. Quodsi ergo linea curua concipiatur, cuius abscissae x respondeat applicata $y = \frac{a x^n}{v}$, existente $v = e^{\frac{\alpha}{x^\beta}}$, vbi α et β sint numeri positiui, exponens vero n quicunque siue positiuus siue negatiuus, applicata huius curuae in ipso initio vbi $x = 0$ etiam euanescet, huius vero curuae area abscissae x infinite paruae respondens erit

$$\int y\, d x = \frac{a}{\alpha \beta} \frac{x^{n+\beta+1}}{v} = \frac{1}{\alpha \beta} x^{\beta+1} y, \text{ hinc ergo si}$$

fuerit $y = \frac{a x^n}{e^{\frac{1}{x}}}$, vbi $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ erit $\int y\, d x = x x y$. Hoc est area curuae aequabitur rectangulo ex quadrato abcissae in applicatam.

§. 28. Quodsi iam vicissim quaeramus curuam cuius area in genere debeat esse $\int y\, d x = x x y$, peruenitur ad hanc aequationem differentialem: $y\, d x = 2 x y\, d x + x x\, d y$ vnde fit

$$\frac{d y}{y} = \frac{d x (1 - 2 x)}{x x}$$

denique integrando

$l y = - \frac{1}{x} - 2\, l\, x$, atque ad numeros surgendo

$$y = \frac{a}{x x\, e^{\frac{1}{x}}}, \text{ quae in forma proposita continetur,}$$

si ca-si capiatur $n = -2$, at vero superior integratio locum habet quando x infinite paruum.

§. 29. Postrema autem integratio etiam valet, si quantitas infinite parua insuper classem secundam vtcunque inuoluat. Posito enim $l\frac{1}{x} = u$, si statuamus $z = \frac{a x^m u^n}{v}$ (vbi exponentes m et n tam negatiue quam positiue accipi possunt, quandoquidem haec quantitas semper est infinite parua, dummodo fuerit $v = e^{\frac{\alpha}{x^\beta}}$) atque vt valorem $\frac{dz}{dx}$ facilius eruamus, sumamus logarithmos, erit

$$l z = l a + m l x + n l u - l v \text{ ideoque}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{m dx}{x} + \frac{n du}{u} - \frac{dv}{v}. \text{ Quia vero est}$$

$$du = -\frac{dx}{x} \text{ et } dv = -\frac{\alpha \beta dx}{x^{\beta+1}} v$$

binis his valoribus in superiore expressione substitutis ea sequentem induet formam:

$$\frac{dz}{z dx} = \frac{m}{x} - \frac{n}{ux} + \frac{\alpha \beta}{x^{\beta+1}},$$

vbi cum sit $\beta + 1 > 1$, ambo termini priores prae tertio euanescunt, sicque erit concinnius

$$\frac{dz}{z dx} = \frac{\alpha \beta}{x^{\beta+1}}, \text{ ideoque } dz = \frac{a \alpha \beta x^{m-\beta-1} u^n}{v} dx.$$

§. 30. Quodsi iam hic loco $n - \beta - 1$ scribamus k, ita vt k aeque ac m denotent numeros quoscunque tam positiuos quam negatiuos, ob $n = k + \beta + 1$ semper erit

$$\frac{\int x^k u^m dx}{v} = \frac{1}{\alpha \beta} \cdot \frac{x^{k+\beta+1} u^m}{v}$$

ideoque si fuerit $\frac{x^k u^m}{v} = y$, et y spectetur vt applicata curuae, eius area erit

$$\int y\, dx = \frac{1}{\alpha \beta} \cdot y x^{\beta+1},$$

quamdiu scilicet fuerit x infinite paruum, quod eo magis est notatu dignum, quia nulla adhuc via inuenta est huiusmodi integrationes instituendi.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DETERMINATIO
ONERVM, QVAE COLVMNAE GESTARE VALENT.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

In Tomo XIII. Actorum Academiae Berolinensis exhibui commentationem de vi columnarum; vbi ex principio prorsus singulari, quod ab hoc argumento penitus alienum videatur, determinaui quantitatem oneris, quod data quaeuis columna sustinere valeat, quin rumpatur. Ista determinatio mihi ob hanc causam non solum prorsus noua, sed etiam maxime memorabilis est visa, quandoquidem in gestatione onerum vera natura columnarum constitui debet, idque eo magis, quod vulgo ab Auctoribus, qui doctrinam de columnis tractauerunt, hoc argumentum penitus negligi solet, dum potissimum in describendis ordinibus et ornamentis columnarum sunt occupati. Quin etiam Scriptores physici, qui tenacitatem et cohaesionem corporum solidorum sunt perscrutati, experimenta quidem instituerunt circa vires, quas exiguae columnae sustinere valeant, neque vero in legem et proportionem inquisiuerunt, quam quantitas oneris ſuſtinendi, tam ratione craſſitiei, quam altitudinis ſequatur.

§. 2. Non parum igitur ſum miratus, cum nuper celeberrimam Encyclopediam Gallicam euoluerem, quod ſub titulo columnarum diſertis verbis ipſa mea proportio, quaſi in vulgus cognita, in medium profertur, ſecundum quam onera, quae columnae cylindricae eiusdem diametri geſtare valent, rationem reciprocam duplicatam altitudinum tenere perhibentur; ita vt columna duplo altior quartam tantum partem oneris ſuſtinere queat; neque vero vllus auctor allegatur, qui hanc proportionem ſiue ex experimentis concluſerit, ſiue per theoriam confirmauerit.

§. 3. Quando autem quaeritur, quantum onus O data quaeuis columna A B C D pro ratione altitudinis et craſſitiei geſtare valeat, quaeſtio ſine dubio maxime eſt ardua; neque enim video, quomodo ea ex cognitis principiis, circa ſoliditatem corporum ſtabilitis, reſolui poſſit. Quoniam enim onus O perpendiculariter deorſum premit, nulla prorſus vis adeſſe videtur, quae columnam rumpere tendat, quantumuis etiam magnum fuerit onus; propterea quod nulla ratio deprehenditur, cur columna potius verſus vnam regionem, quam quamuis aliam inflectatur et frangatur. Interim tamen experientia ſatis declarat, tale onus non vltra certos limites augeri poſſe, atque adeo in natura nunquam cauſae deſunt, quae rupturam in vnam plagam potius, quam omnes alias producant. Neque tamen a quoquam Auctore eiusmodi principia ſtabilita eſſe reperio, vnde ſolutionem huius quaeſtionis petere liceat.

Tab. II. Fig. 1.

§. 4.

§. 4. Quin etiam ipſe praeter omnem expectationem ad enodationem huius quaeſtionis ſum perductus, cum olim incuruationem laminarum elaſticarum, quae ipſis a viribus quibuscunque inducatur, inueſtigarem. Cum enim laminam elaſticam A C B eſſem contemplatus, quae tenſione chordae A B in ſtatum incuruatum A C B fuerit reducta, et pro quouis gradu incuruationis quantitatem tenſionis chordae eſſem perſcrutatus, non ſine admiratione inveni, incuruationem adeo infinite paruam iam tenſionem finitam poſtulare, ita vt, quamdiu chorda A B, vtrique termino laminae elaſticae alligata, vi quacunque minore intendatur, laminam nullam plane inflexionem, ne infinite quidem paruam, eſſe paſſuram, cum tamen eidem laminae A C B, parieti in B infixae, etiam a minima vi A α quaedam incuruatio inducatur. Tab. II. Fig. 2. Fig. 3.

§. 5. Quanquam autem columna maxime diſcrepat a lamina elaſtica, tamen in hoc egregie conueniunt, quod columna a pondere incumbente rumpi nequeat, niſi ipſi ante vel minima quaedam inflexio inducatur. Quoniam igitur pondus incumbens ſimili modo in columnam agit, quo lamina elaſtica A C B (Fig. 2.) a chorda A B ſollicitatur, euidens eſt, etiam columnae ne minimam quidem inflexionem induci poſſe, niſi pondus incumbens certum quendam limitem ſuperauerit. Conſideremus enim columnam A B C D, cui ab incumbente pondere iam inflexio infinite parua ſit inducta, qua eius axis curuaturam infinite paruam O V P acceperit, ita vt recta O P ſit verticalis, et quoniam onus incumbens ſecundum hanc ipſam directionem O P vrget, eandem vim manifeſto exerit, ac ſi chorda recta O P pari vi ſe contrahere anniteretur; ex Fig. 4

 quo

quo ſimilitudo cum lamina elaſtica ſupra conſiderata manifeſto elucet, ſimulque intelligitur, columnam talem inflexionem, etiamſi infiuite paruam, recipere non poſſe, niſi onus incumbens certum quendam limitem ſuperauerit, atque hic ipſe limes nobis maximum onus indicat, quod columna ſuſtinere valebit.

§. 6. Quemadmodum autem quaeuis incuruatio, quae laminae elaſticae induci debet, certam requirit vim, ita etiam facile intelligitur, certam quandam vim requiri, quae columnae noſtrae incuruationem inducere valeat, quandoquidem ea tam ob ſoliditatem quam cohaeſionem partium omni incuruationi reſiſtit, quae reſiſtentia ſine dubio eo maior eſt cenſenda, quo craſſior fuerit ipſa columna et quo maior ſimul fuerit incuruatio. Ad talem effectum explicandum in calculum introduci ſolet formula quaepiam rigorem abſolutum corporis inflectendi exprimens, quae per radium curuaturae diuiſa praeciſe aequalis euadat momento virium ad hanc ipſam incuruationem producendam requiſito; vnde cum momenta virium ſint producta ex vi agente ſeu quodam pondere per quampiam lineam rectam multiplicato, euidens eſt formulam, qua rigor abſolutus exprimitur, eſſe debere productum ex quopiam pondere et quadrato cuiuspiam lineae rectae, ita vt ſi per radium oſculi diuidatur, prodeat formula ſimilis ei, qua momenta virium exprimuntur.

§. 7. Quo noſtram inueſtigationem a caſu ſimpliciſſimo exordiamur, contemplemur primo eiusmodi columnam, quae per totam ſuam altitudinem eandem habeat craſſitiem, ita vt rigor abſolutus, quo omni incuruationi reſi-

resistit, habeat vbique eandem quantitatem, quam ergo exprimamus formula Ekk, vbi E certum designet pondus, k autem certam lineam rectam. Hic quidem in genere statim patet, quo crassior fuerit columna, et quo maiore soliditate praedita, eo maiorem fore valorem formulae Ekk. Infra autem ostendemus, si huiusmodi columnae fuerint cylindricae, ex materia eiusdem soliditatis formatae, tum formulam Ekk proportionalem fore biquadrato diametri crassitiei.

§. 8. Dum autem columnae cylindricae certae crassitiei tribuimus rigorem $= Ekk$, valorem huius formulae haud difficulter per experimenta assignare licebit. Concipiamus enim, talem columnam, cuius axem tantum hic in figura repraesentamus, in B pauimento firmo ita firmiter esse infixam, vt inde dimoueri prorsus nequeat, cuius ergo rigor vbique sit $= Ekk$, longitudo autem eius vocetur $AB = a$. Iam huic columnae in summitate A applicetur vis horizontalis AV, quae aequiualeat pondere $= F$, a qua igitur ipsa columna incuruabitur in situm Bya, hancque curuaturam tanquam minimam spectemus, scilicet vis illa horizontalis F maior capi non debet, quam vt punctum supremum A per spatiolum $Aa = \alpha$ detorqueat. Quibus positis ostendam, quomodo formula nostra rigorem exprimens, scilicet Ekk, ex vi sollicitante F et altitudine $AB = a$ cum spatiolo $Aa = \alpha$ determinari possit. Tab. II. Fig. 5.

§. 9. Hunc in finem ante omnia in naturam curvae Bya inquiri oportet. Ducta igitur ex quouis curuae puncto y ad verticalem AB, normali yx, vocetur abscissa $Bx = x$ et applicata $xy = y$, quae ergo per hypothesin

 est

eſt quam minima, ita vt longitudo curuae B y, quae ſit $= s$, ab ipſa abſciſſa B $x = x$ non diſcrepet. Quare ſi radius oſculi huius curuae in y fuerit $y\,r$, eius longitudo, vti conſtat, eſt $= \frac{ds^3}{dx\,ddy}$, ideoque ob $ds = dx$ iſte radius oſculi erit $= \frac{dx^2}{ddy}$, ex quo rigor per hunc radium oſculi diuiſus erit $\frac{Ekk\,ddy}{dx^2}$, quae formula aequalis ſtatui debet momento vis ſollicitantis F hanc curuaturam producentis, quod momentum cum ſit F. A $x = F(a - x)$, habebitur pro noſtra curua haec aequatio: $\frac{Ekk\,ddy}{dx^2} = F(a - x)$, ex qua ante omnia naturam curuae definire oportet.

§. 10. Multiplicemus hanc aequationem per dx atque integratio nobis dabit:

$$\frac{Ekk\,dy}{dx} = \tfrac{1}{2} F(2ax - xx) + C$$

quae conſtans C ita debet eſſe comparata, vt poſito $x = 0$, hoc eſt in ipſo puncto B, non ſolum fiat $y = 0$, ſed etiam $\frac{dy}{dx} = 0$, propterea quod recta A B in B firmiter eſt infixa, vnde patet ſumi debere $C = 0$, ita vt hanc habeamus aequationem: $Ekk\,dy = \tfrac{1}{2} F\,dx(2ax - xx)$, quae denuo integrata praebet $Ekky = \tfrac{1}{6} F(3axx - x^3)$, vnde poſito $x = 0$ iam fit $y = 0$. Transferamus nunc punctum y in ipſam extremitatem a, ſumendo $x = a$, et quoniam nouimus, tum fieri applicatam $= A\,a = \alpha$, aequatio noſtra dabit $Ekk\alpha = \tfrac{1}{3} F a^3$, ex quo manifeſto prodit formula rigorem exprimens $Ekk = \frac{F a^3}{3\alpha}$, ſicque per vnicum experimentum pro quauis columna cylindrica eius rigor abſolutus ſeu valor formulae Ekk expedite determinari poterit, cum ex elementis cognitis, ſcilicet F, a et α ſtatui poſſit $E = F$ et $kk = \frac{a^3}{3\alpha}$.

§. 11.

§. 11. Postquam igitur exploratus fuerit valor formulae Ekk pro quapiam proposita columna cylindrica, ponamus istam columnam, cuius axem tantum AB in figura exhibemus, a pondere incumbente O infinite parum esse inflexam, ita vt curuam AyB induerit, ambaeque extremitates A et B immotae manserint; quoniam enim incuruatio supponitur infinite parua, ipsa curua AyB ab axe AB prorsus non discrepabit. His igitur positis vocemus altitudinem huius columnae $AB = a$, et pro puncto eius quocunque y ponamus abscissam $Ax = x$ et applicatam $xy = y$, ita vt y euanescere debeat tam pro $x = 0$ quam pro $x = a$: modo ante autem vidimus radium osculi in hoc puncto y esse $= \frac{dx^2}{ddy}$, qui cum hic axem versus vergat, poni debet $yr = -\frac{dx^2}{ddy}$, ita vt momentum inflexioni resistens sit $-\frac{Ekkddy}{dx^2}$. Tab. II. Fig. 6.

§. 12. Quoniam nunc onus columnae incumbens O secundum directionem verticalem AB deorsum vrget, eius momentum respectu puncti y erit $= Oy$, vnde statim deducitur haec aequatio: $-\frac{Ekkddy}{dx^2} = Oy$, pro qua breuitatis gratia scribamus $\frac{Ekk}{O} = cc$, vt habeamus hanc aequationem: $\frac{ccddy}{dx^2} + y = 0$, quae ducta in $2dy$ et integrata dat $\frac{ccdy^2}{dx^2} + yy = ff$, vnde elicimus

$$dx^2 = \frac{ccdy^2}{ff-yy}, \text{ ideoque } dx = \frac{cdy}{\sqrt{(ff-yy)}}.$$

Hinc denuo integrando peruenimus ad hanc aequationem: $x = c$ Arc. sin. $\frac{y}{f} + C$, ita vt duae constantes f et c in calculum sint ingressae, quas ita definiri oportet, vt y euanescat tam casu $x = 0$ quam casu $x = a$; prior autem conditio statim nobis dat $C = 0$, ita vt habeamus

$x = c$

$x = c$ Arc. ſin. $\frac{y}{f}$. Fiat nunc $x = a$, et quia fieri debet $y = 0$, habebimus $a = c$ Ar. ſin. o. Tales autem arcus ſunt o, π, 2π, 3π etc. quorum primus iam pro termino A valuit; hic igitur valebit valor π, ita vt ſit $a = \pi c$. Poſueramus vero $cc = \frac{Ekk}{O}$, quamobrem habebimus $a = \pi \sqrt{\frac{Ekk}{O}}$.

§. 13. Hic notatu dignum eſt, alteram conſtantem ff prorſus ex calculo eſſe egreſſam. Quoniam igitur inuenimus $x = c$ A. ſin. $\frac{y}{f}$, erit inuertendo $y = f$ ſin. $\frac{x}{c}$; vnde patet, quo maior fuerit quantitas f, eo magis incuruationem augeri; ideoque aequationem noſtram finalem $a = \pi \sqrt{\frac{Ekk}{O}}$ perinde ſubſiſtere, ſiue columnae curuatura inducta fuerit tantillo maior ſiue minor, dummodo fuerit quam minima. Nunc vero ex ipſa hac aequatione innoteſcet pondus O, quod talem incuruationem producere valeat: reperietur enim $O = \frac{\pi\pi Ekk}{aa}$; vnde intelligitur, quamdiu onus, columnae incumbens, non maius fuerit quam $\frac{\pi\pi Ekk}{aa}$, columnam omnino firmam conſiſtere, neque vllum eſſe periculum, vt oneri ſuccumbat. Hinc igitur ſtatim patet, quod iam dudum inueneram, onera, quae columnae cylindricae eiusdem craſſitiei ſuſtinere valent, tenere rationem reciprocam duplicatam altitudinum a, ita vt columna duplo altior tantum quartam partem oneris geſtare valeat.

§. 14. Vt nunc etiam columnas diuerſae craſſitiei inter ſe comparare queamus, inueſtigari oportet, quomodo quouis caſu formula rigorem exprimens Ekk a craſſitie pendeat, id quod ex principiis phyſicis et experimentis ſuper cohaeſione et firmitate corporum inſtitutis deriuari debet; vbi imprimis ad ipſam materiam, ex qua columnae paran-

parantur, erit respiciendum; et quoniam corpora incuruari nequeunt, nisi quaedam elementa a se inuicem longius remoueantur, eiusmodi experimenta consulere debebimus, quibus talis diductio vel elongatio a viribus quibuscunque produci potest. Hanc igitur inuestigationem sequenti modo adgrediamur.

§. 15. Ex eadem materia, qua columnae constant, paretur bacillus cylindricus, vel prismaticus EEFF, qui altero termino EE pauimento MN ita firmiter infigatur, vt aliter inde diuelli nequeat, nisi dirumpatur, in altero vero termino pondus P appendi concipiatur, quod eo vsque augeri potest, vt iste bacillus dirumpatur. Ante autem quam ipsa ruptura eueniat, bacillus aliquantillum elongabitur per spatiolum Ff, quod eo minus erit, quo firmior et solidior fuerit massa bacilli. Concipiamus ergo tale experimentum institui cum bacillo, cuius longitudo $EF = f$ et crassities $= gg$, tum vero istum bacillum ab appenso pondere P elongari per spatiolum $Ff = \Phi$; ac primo quidem patet, istam elongationem Φ ipsi longitudini bacilli f esse proportionalem: si enim bacillus duplo esset longior, ab eodem pondere P duplo maior elongatio Φ produceretur; vnde si statuamus $\Phi = \delta f$, dabitur certa relatio inter pondus P et litteram δ, ita vt non amplius opus sit ipsam longitudinem f in computum ducere. Tab. II. Fig. 7.

§. 16. Euidens autem est, quo maius fuerit pondus P, eo maiorem quoque esse debere litteram δ, hanc autem non vltra certum terminum augeri posse, quin bacillus penitus dirumpatur. Quamdiu autem istae elongationes sunt satis paruae, dubitari nequit, quin valor litterae δ

ipsi ponderi P sit proportionalis, quandoquidem in omnibus huiusmodi mutationibus minimis effectus caussae semper est proportionalis. Deinde etiam euidens est, si bacillus esset duplo crassior, tum ad eandem elongationem producendam requiri pondus duplo maius; ex quo intelligitur, pondus P tenere rationem compositam ex littera δ et crassitie, quam posuimus $= gg$, ita vt ipsum pondus P semper proportionale sit formulae δgg.

§. 17. Quo nunc etiam crassitiem gg ex calculo expellamus, loco ponderis P commode substitui poterit pondus voluminis ex eadem materia constantis, quod ergo per similem bacillum, cuius longitudo sit $= p$, repraesentari poterit, ita vt sit $P = pgg$, hoc est vt P aequetur ponderi cylindri ex ipsa materia columnae confecti, cuius basis sit $= gg$ et altitudo $= p$. Quo constituto, cum istud pondus pgg semper sit proportionale formulae δgg, eandem proportionem tenebit p ad δ; vnde si statuatur $p = \delta h$, erit h certa quaedam longitudo, quae pro omnibus bacillis ex eadem materia confectis erit eadem, quandoquidem neque a longitudine f neque a crassitie gg pendet; ex quo hanc longitudinem h tanquam veram mensuram tenacitatis seu firmitatis materiae spectare poterimus, de qua quouis casu agitur, ita vt cuique materiae determinata quaedam longitudo h conueniat. Hac igitur semel cognita, si fuerit $\frac{\Phi}{f} = \delta$, semper erit $p = \delta h$, eritque p longitudo similis bacilli crassitiei gg, cuius pondus aequetur ponderi appenso P.

§. 18. Hinc igitur vbicunque materia, ex qua columna est confecta, de statu suo naturali diducitur, ex ipsa

di-

diductione determinari poterit vis ad eam producendam requisita. Consideremus igitur elementum columnae quodcunque $E e F f$, cui ob incuruationem inducta sit figura elementi annularis $E e F f$ ex centro R descripti, cuius radius sit $E R = r$, ipsum vero elementum curuae $E e = d s$, vbi quidem solam crassitiem E F in figura exhibere licuit, latitudinem autem in singulis punctis x mente suppleri conuenit. Iam intra columnam consideremus punctum quodcunque X, per quod centro R describatur arculus $X x$, ac posito interuallo $E X = x$ erit iste arculus Tab. II. Fig. 8.

$$X x = \frac{(r + x) d s}{r} = d s + \frac{x d s}{r}$$

cuius longitudo cum in statu naturali fuerit $= E e = d s$, nunc spatium elongationis, quod supra vocauimus Φ, erit $= \frac{x d s}{r}$: hic vero pro longitudine f habemus $E e = d s$. Hinc ergo cum fuerit $\delta = \frac{\Phi}{f}$, hoc casu erit $\delta = \frac{x}{r}$, quae fractio ducta in longitudinem illam constantem h, si per totam columnae crassitiem extendatur, dabit pondus, quod ista incuruatio postulat.

§. 19. Promoueamus punctum X more solito per elementum $d x$, sitque latitudo columnae in $X = y$, atque elementum voluminis basi $y d x$ insistens in statu naturali erit $y d x d s$, quod cum elongationem littera $\delta = \frac{x}{r}$ indicatam sit passum, vis ad hoc requisita aequabitur ponderi voluminis $= \frac{h x y d x}{r}$, cuius ergo integrale, per totam amplitudinem sectionis sumtum, dabit totam vim ad incuruationem elementi $F f E e$ requisitam.

§. 20. Pro nostro autem instituto non tam ipsam hanc vim quam eius momentum respectu puncti E, a quo

incuruatio incipit, exigimus; quam ob rem illa formula $\frac{bxydx}{r}$ insuper in distantiam $EX = x$ duci debet, prodi- Tab. II. Fig. 3
bitque elementum huius momenti $= \frac{bxxydx}{r}$, cuius integrale per totam crassitiem sumtum, quod est $\frac{b}{r}\int xxydx$, ipsum dabit momentum virium ad hanc curuationem producendam requisitum. Quoniam igitur ante idem momentum ex formula rigoris absoluti Ekk ita expressimus, vt esset $\frac{Ekk}{r}$: nunc manifestum est, qualis valor formulae Ekk pro quouis casu tribui debeat; semper enim erit $Ekk = b\int xxydx$, si modo hoc integrale rite capiatur, ac per amplitudinem columnae circa sectionem EF extendatur.

§. 21. Pendet igitur ista determinatio a figura istius sectionis columnae per EF factae, siue a relatione, quam latitudo y pro quauis abscissa x tenet. Ponamus primo latitudinem vbique esse eandem, scilicet $y = c$, crassitiem vero $EF = b$, atque formula integranda erit

$$\frac{cb}{r}\int xxdx = \frac{1}{3}\frac{cbx^3}{r}$$

quae formula vsque ad terminum F extensa, posito $x = b$, dabit momentum ad incuruationem requisitum $= \frac{b^3}{3}\frac{cb}{r}$ qui hoc casu est valor formulae superioris $\frac{Ekk}{r}$, ita vt sit $Ekk = \frac{1}{3}b^3cb$. Hinc si aliam columnam consideremus, cuius crassities sit $EF = B$, latitudo vero $= C$, valores formulae Ekk inter se erunt vt $b^3c : B^3C$; vnde iam intelligitur, si sectiones columnae fuerint inter se similes, quod fit, si fuerit $B : C = b : c$, tum valores formulae Ekk fore in ratione $b^4 : B^4$, quod de omnibus sectionibus similibus valet. Vnde si sectiones fuerint circuli, vt supra assumsimus, valores formulae Ekk tenebunt rationem biquadraticam diametrorum.

§. 22.

§. 22. Parum quidem refert, pro aliis figuris valores absolutos formulae $E\,k\,k$ euoluere; interim tamen speciminis loco computemus casum, quo sectio $E\,F\,f\,e$ est circulus, diametro $E\,F = b$ descriptus. Hinc ergo pro abscissa $E\,X = x$ tota latitudo erit $y = 2\sqrt{b\,x - x\,x}$, ita vt sit $E\,k\,k = 2\,h\int x\,x\,d\,x\sqrt{b\,x - x\,x}$, si quidem hoc integrale ab $x = 0$ vsque ad $x = b$ extendatur. Pro illo inueniendo ponamus $x = b$ sin. Φ^2, erit $b - x = b$ cos. Φ^2, hincque $\sqrt{b\,x - x\,x} = b$ sin. Φ cos. $\Phi = \frac{1}{2}b$ sin. $2\,\Phi$; tum vero erit $d\,x = 2\,b\,d\,\Phi$ sin. Φ cos. $\Phi = b\,d\,\Phi$ sin. $2\,\Phi$, quibus substitutis fiet $E\,k\,k = b^4\,h\int d\,\Phi$ sin. Φ^4 sin. $2\,\Phi^2$, quod integrale extendi debet a $\Phi = 0$ vsque ad $\Phi = 90°$.

§. 33. Nunc per notam angulorum Analysin primo est sin. $\Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. $2\,\Phi$, hincque

$$\text{sin.}\,\Phi^4 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,2\,\Phi + \tfrac{1}{8}\,\text{cos.}\,4\,\Phi,$$

porro vero sin. $2\,\Phi^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. $4\,\Phi$, vnde conficitur

$$\text{sin.}\,\Phi^4\,\text{sin.}\,2\,\Phi^2 = \tfrac{5}{32} - \tfrac{1}{8}\,\text{cos.}\,2\Phi - \tfrac{1}{8}\,\text{cos.}\,4\,\Phi + \tfrac{1}{8}\,\text{cos.}\,6\,\Phi - \tfrac{1}{32}\,\text{cos.}\,8\,\Phi,$$

quae formula ducta in $d\,\Phi$ et integrata dat

$$\int d\,\Phi\,\text{sin.}\,\Phi^4\,\text{sin.}\,2\,\Phi^2 = \tfrac{5}{32}\,\Phi - \tfrac{1}{16}\,\text{sin.}\,2\,\Phi - \tfrac{1}{32}\,\text{sin.}\,4\,\Phi + \tfrac{1}{48}\,\text{sin.}\,6\,\Phi - \tfrac{1}{256}\,\text{sin.}\,8\,\Phi,$$

quae expressio iam euanescit facto $\Phi = 0$. Sumatur igitur $\Phi = 90° = \frac{\pi}{2}$, ac totum hoc integrale euadet $= \frac{5\pi}{64}$, ita vt sit $E\,k\,k = \frac{5\,\pi\,b^4\,b}{64}$, quae formula ergo vtique biquadrato diametri est proportionalis.

§. 24. Regrediamur nunc ad columnam cylindricam supra tractatam, cuius altitudo erat $A\,C = a$ (Fig. I.)

 eius

eius vero diametrum nunc ponamus $= b$, et quoniam modo inuenimus $Ekk = \frac{5\pi b^4 h}{64}$, erit onus quod iſta columna ſuſtinere valebit ante quam incuruetur $O = \frac{5\pi^3 b^4 h}{64 aa}$, cuius quantitas aequatur ponderi voluminis ex eadem materia confecti, cuius ſoliditas eſt haec ipſa quantitas $\frac{5\pi^3 b^4 h}{64 aa}$, ſiue aequabitur ponderi paris cylindri, cuius diameter $= b$, altitudo vero $= \frac{5\pi^3 bbh}{64 aa}$. Vnde ſi plures habeantur huiusmodi columnae cylindricae ex eadem materia confectae, onera, quae geſtare valent, tenebunt rationem compoſitam ex directa quadruplicata diametrorum et reciproca duplicata altitudinum; ſin autem ex diuerſa materia fuerint factae, quoniam cuilibet materiae certa longitudo h conuenit, onera inſuper erunt in ratione harum ipſarum altitudinum h.

§. 25. In ſolutione autem ſupra data aſſumſimus columnam a ſolo pondere incumbente O comprimi, ipſum autem columnae pondus neglevimus; plerumque autem onus ſuſtentatum tantopere ſuperat pondus proprium columnae, vt error hinc oriundus tuto negligi queat. Interim tamen deinceps operam dabimus, vt etiam rationem proprii ponderis in ſolutione habeamus, quod in prima ſolutione, quam olim in loco initio allegato dederam, expedire non ſum auſus, ob ſummas difficultates, quae in hac euolutione occurrebant. Facile autem intelligitur, tali columnae tantam altitudinem tribui poſſe, vt ne proprium quidem pondus ſuſtentare valeat, etiamſi fuerit $O = 0$, qui ergo Caſus vtique peculiarem ſolutionem poſtulat.

§. 26.

§. 26. His expofitis confideremus aliquot experimenta, quae celeberrimus *Mufchenbroekius* de vi columnarum inftituit; non autem cylindros adhibuit, fed prismata quadrata, vnde valorem formulae $E\,k\,k$ pro fectionibus quadratis explorare oportet. Supra autem iam pro cafu $y = c$ inuenimus $E\,k\,k = \frac{1}{3} b^3\, c\, b$ (§. 21.), hinc pro experimentis modo memoratis erit $E\,k\,k = \frac{1}{3} b^4\, b$, vbi b denotat latus fectionis quadratae. Quamobrem fi altitudo talis columnae prismaticae fuerit $= a$, onus, quod geftare valebit erit $O = \frac{\pi\pi b^4 b}{3aa}$. Secundum hanc igitur formulam experimenta illa examinemus.

§. 27. Parauit autem primo *Mufchenbroekius* ex abiete trabeculam, 4 pedes longam, prismaticam, cuius bafis erat quadratum, cuius latus $= \frac{51}{100}$ digit. eaque in fitu verticali conftituta dirupta fuit ab impôfito pondere 64 libr. 9. unc. Deinde alia trabecula ex eodem ligno confecta pariter quatuor pedes longa fed cuius bafeos quadratae latus erat $\frac{70}{100}$ dig., dirupta fuit a pondere 226 libr. Hic ergo erat altitudo, quam vocauimus a, $= 4$ ped. et in pofteriore experimento latus quadrati $b = 0,70$ digitis onus vero impofitum $O = 226$ lib. Hinc ergo fi ex eodem ligno paretur columna prismatica altitudinis $= A$ pedum, cuius bafeos latus $= B$ digitor, ifta columna fuftinere poterit onus, cuius pondus $= \frac{226 . B^4\, 4^2}{(0,70)^4 . A^2}$ libr. ideoque hoc onus erit $15060\, \frac{B^4}{A^2}$ libr. Vnde fi altitudo A effet $= 20$ ped. et craffities $B = 20$ dig. talis columna fuftentare poffet onus $= 6024000$ libr.

§. 28.

§. 28. Ex hoc experimento etiam ipſam longitudinem b pro iſta ſpecie ligni definire licebit ope aequationis $b = \frac{3aaO}{\pi\pi b^4}$, ſi modo loco O ſubſtituatur maſſa ex eodem ligno conſtans, cuius pondus valeat 226 libr. Cum nunc pedis cubici aquae pondus ſit circiter 70 libr. grauitas autem ſpecifica huius ligni ſit duplo minor quam grauitas ſpecifica aquae, vnus pes cubicus talis ligni pondus habebit 35 libr. quare fiat 35 libr. : 1 = 226 libr. : O, ſicque erit $O = \frac{226}{35}$, ideoque in pedibus cubicis erit $O = 6{,}457$. Reliquas igitur quantitates etiam in pedibus exprimamus, eritque $a = 4$ et $b = 0{,}058$; vnde ex ſequente calculo ipſa longitudo h eruetur

$l.\ 3aa = 1{,}6812412$	$l.\ \pi\pi = 0{,}9942996$
$l.\ O = 0{,}8100308$	$l.\ b^4 = 5{,}0537120$
$l.$ Num. $= 2{,}4912720$	$l.$ Denom. $= 6{,}0480116$
ſub. $l.$ Denom. $= 6{,}0480116$	
$l.\ h = 6{,}4432604$	ergo $h = 2774980$

conſequenter pro hac ſpecie ligni longitudo h, qua tenacitatem metimur, valet 2774980 ped. vnde, quantum trabecula ex tali ligno parata a quauis vi elongari poſſit, definire poterimus. Ita ſi ipſam trabeculam ab auctore vſurpatam conſideremus, cuius longitudo $a = 4$ ped. et baſeos quadratae latus $= \frac{7}{10}$ digit. eamque a pondere 226 libr. non comprimi ſed diſtendi concipiamus, ſecundum praecepta ſupra data hoc pondus 226 libr. per talem trabeculam exprimamus, tam longam, vt eius pondus ſit 226 libr. ſitque haec longitudo $= p$. et quoniam vidimus pondus 226 libr. conuenire maſſae ligneae, cuius volumen $= 6{,}457$ ped.

ped. cubicor. eritque $b\,b\,p = 6{,}457$ ped. cubicor. Cum igitur in pedibus ſit $b = 0\,058$, reperietur $p = 1919$. Quodſi iam elongatio iſtius trabeculae, a tanta tenſione orta, vocetur vt ſupra $= \delta\,a$, erit $p = \delta\,b$, ideoque $\delta = \frac{p}{b}$ $= 0{,}00069$, ideoque ipſa elongatio $\delta\,a = 0{,}00276$ ped. in digitis vero erit $\delta\,a = 0{,}03312$, ſiue propemodum $\frac{1}{30}$ digit. id quod ab experientia non abhorrere videtur.

§. 29. In hoc ligno auctor iam obſeruauit, vim, qua columna dirumpitur, ſatis exacte eſſe proportionalem biquadrato craſſitiei b^4; in aliis autem lignis, praecipue in quercu, animaduertit, vim rumpentem in minore ratione quam quadruplicata augeri, cuius phoenomeni ratio ſine dubio in indole fibrarum, ex quibus hoc lignum conſtat, eſt quaerenda; ſcilicet, quia aſſumſimus, elongationem duplo maiorem etiam vim duplo maiorem poſtulare, concludere debemus, in ligno quercino plures fibrillas rumpi, antequam elongatio fiat duplo maior, vnde etiam renitentia tanto erit minor. Hinc intelligitur, formulae noſtrae inuentae, quatenus biquadratum craſſitiei b^4 continet, in praxi non nimium tribui poſſe, et pro varia materiae, ex qua columnae conficiuntur, natura quandam correctionem admitti debere, ex pluribus experimentis determinandam.

§. 30. Quae hactenus de Columnis cylindricis in medium attulimus, haud difficulter ad eiusmodi Columnas transferuntur, quarum craſſities certa quadam lege aſcendendo decreſcit, quod argumentum hic de nouo tractare ſuperfluum foret, propterea quod iam fuſius id expoſui in diſſertatione mea initio allegata. Verum quia tum temporis non videbam, quomodo ipſum quoque pondus columnae in computum duci queat, istum defectum hic supplere conabor; vbi imprimis sum inuestigaturus, ad quantam altitudinem columna cylindrica extendi possit, ne sub proprio pondere succumbat, etiamsi superne nullum onus sustentet.

Tab. II. Fig. 9

§. 31. Referat igitur vt supra curua $AqyB$ axem columnae, qui a proprio pondere iam ad hanc figuram sit reductus, ac ponatur altitudo, quam quaerimus, $AB = a$, et abscissae cuicunque $Ax = x$ respondeat applicata $xy = y$, quae prae abscissa pro infinite parua haberi queat, ita vt in puncto y radius osculi sit $r = -\frac{dx^2}{ddy}$; tum vero denotet Ekk, vt supra, formulam rigoris, ita vt incuruatio in puncto y postulet virium momentum $= \frac{Ekk}{r} = -\frac{Ekkddy}{dx^2}$.

§. 32. Quoniam igitur ista incuruatio a solo pondere portionis superioris columnae Aqy producitur, consideremus eius elementum quodcunque in q, quod respondeat abscissae $Ap = p$ et applicatae $pq = q$, sitque bb crassities columnae per totam eius longitudinem; et cum elementum arcus Aq ipsi elemento abscissae dp aequale spectari possit, eius pondus exprimi poterit formula $bbdp$, quod agit in directione verticali qs; quam ob causam etiam in formula rigoris Ekk pondus E per massam eiusdem materiae, ex qua columna constat, exhiberi oportebit. Nunc igitur consideremus punctum y tanquam fixum, ad quod vsque puncta q ab A promoueantur, et momentum vis elementaris $bbdp$, in directione qs agentis, respectu puncti y erit $= bbdp(y-q)$, cuius integrale, ob y constans, erit $= bbpy - bb\int qdp$, quo momentum ex pondere

dere arcus Aq ortum, exprimitur. Nunc igitur punctum q vsque in y promoueatur, fietque $p = x$ et $q = y$; vnde totum momentum, incuruationem in y producens, erit $bbxy - bb\int y\,dx = bb\int x\,dy$, cui ergo aequalis esse debet formula $-\frac{Ekk\,ddy}{dx^2}$, ita vt habeatur ista aequatio:

$$\frac{Ekk\,ddy}{dx^2} + bb\int x\,dy = 0.$$

§. 33. Haec autem aequatio ita est comparata, vt nullo modo ad integrabilitatem perduci queat, quae etiam est ratio, cur olim hunc casum euoluere non sim ausus; verum deinceps perspexi, integratione actuali non esse opus, dummodo integrale completum per seriem infinitam euolui queat. Quod quo facilius fieri possit, statuamus breuitatis gratia $Ekk = mbb$, vt haec aequatio habeatur: $\frac{m\,ddy}{dx^2} + \int x\,dy = 0$, et quia abscissae $x = 0$ etiam applicata y euanescit, statuamus, saltem pro initio seriei quaesitae, $y = \alpha x + \beta xx + \gamma x^3 + \delta x^4$, eritque

$$dy = \alpha\,dx + 2\beta x\,dx + 3\gamma xx\,dx + 4\delta x^3\,dx,$$

hincque

$$\int x\,dy = \tfrac{1}{2}\alpha xx + \tfrac{2}{3}\beta x^3 + \tfrac{3}{4}\gamma x^4 + \tfrac{4}{5}\delta x^5,$$

tum vero erit

$$\frac{m\,ddy}{dx^2} = 2m\beta + 6m\gamma x + 2m\delta xx,$$

quae expressio, praecedenti iuncta, nihilo debet esse aequalis; vnde fit $\beta = 0$; $\gamma = 0$ et $\delta = \frac{1}{24}\alpha m$; vnde intelligimus, seriem quaesitam a termino αx incipere, tum vero, ob $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, sequentes potestates per x^3 increscere.

§. 34. Hoc obseruato fingamus pro y sequentem seriem:

 $y = Ax$

$$y = A x + B x^4 + C x^7 + D x^{10} + E x^{13} + F x^{16} + G x^{19} + \text{etc.}$$

eritque

$$\int x\, dy = \tfrac{1}{2} A x x + \tfrac{4}{5} B x^5 + \tfrac{7}{8} C x^8 + \tfrac{10}{11} D x^{11} + \tfrac{13}{14} E x^{14} + \tfrac{16}{17} F x^{17} + \text{etc.}$$

ad quam ſeriem addere debemus iſtam:

$$\frac{m\, ddy}{dx^2} = 3.4\, m B x x + 6.7\, m C x^5 + 9.10\, m D x^8 \quad 12.13\, m E x^{11} + \text{etc.}$$

quarum ſerierum ſumma, quia debet euaneſcere, dabit ſequentes determinationes:

1°. $\tfrac{1}{2} A + 3.4\, m B = 0$, hinque $B = - \frac{A}{2.3.4\, m}$.

2°. $\tfrac{4}{5} B + 6.7.\, m C = 0$, hinc $C = - \frac{4B}{5.6.7\, m} = \frac{1.4.A}{2.3.4..7\, m^2}$.

3°. $\tfrac{7}{8} C + 9.10\, m D = 0$, hinc $D = - \frac{7.C}{8.9.10\, m} = - \frac{1.4.7\, A}{2.3.4...10\, m^3}$.

4°. $\tfrac{10}{11} D + 12.13\, m E = 0$, hinc $E = - \frac{10\, D}{11.12.13\, m} = \frac{1.4.7.10\, A}{2.3....13\, m^4}$.

§. 35. His valoribus inuentis applicata y per ſequentem ſeriem infinitam exprimetur:

$$\frac{y}{A} = x - \frac{1.x^4}{2.3.4\, m} + \frac{1.4\, x^7}{2.3...7\, m^2} - \frac{1.4.7\, x^{10}}{2.3...10\, m^3} + \frac{1.4.7.10\, x^{13}}{2.3...13\, m^4} \text{ etc.}$$

quae expreſſio rite ad caſum noſtrum eſt accommodata: continet enim adhuc vnam conſtantem arbitrariam A; altera vero iam inde eſt determinata, quod facto $x = 0$ etiam fieri debeat $y = 0$. Transferamus nunc punctum y in terminum imum B, ponendo $x = a$, et quia hic applicata y euaneſcere debet, prodibit iſta aequatio infinita:

$$0 = 1 - \frac{1.a^3}{2.3.4\, m} + \frac{1.4\, a^6}{2.3..7\, m^2} - \frac{1.4.7\, a^9}{2.3...10\, m^3} + \frac{1.4.7.10\, a^{12}}{2.3...13\, m^4} \text{ etc.}$$

ex qua ipſam altitudinem columnae $AB = a$ eruere oportet: ſic enim inueniemus eam noſtrae columnae altitudinem, in qua iam a proprio ſuo pondere incuruari incipiet:

cipiet. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia $\frac{a^3}{m} = v$, vt resoluenda proponatur haec aequatio:

$$0 = 1 - \frac{1 . v}{2 . 3 . 4} + \frac{1 . 4 \, v v}{2 . 3 \ldots 7} - \frac{1 . 4 . 7 \, v^3}{2 . 3 \ldots 10} \text{ etc.}$$

sicque totum negotium huc est reductum, vt inueniatur valor litterae v, qui hanc seriem infinitam nihilo reddat aequalem; hoc enim valore inuento altitudo columnae quaesita erit $a = \sqrt[3]{m v}$.

§. 36. Euidens est hanc seriem vehementer conuergere, quantumuis etiam magnus numerus pro v accipiatur. Primo autem hic obseruamus, quamdiu fuerit $v < 24$, quoniam termini iam ab initio continuo decrescunt, seriei summam necessario esse positiuam; vnde patet, numerum v necessario maiorem esse debere quam 24. Quo autem resolutionem huius aequationis faciliorem reddamus, ponamus $v = 6 u$, vt sit $a = \sqrt[3]{6 m u}$, et aequationem hinc natam hoc modo repraesentemus:

$$0 = 1 - \alpha u + \beta u^2 - \gamma u^3 + \delta u^4 - \varepsilon u^5 \text{ etc.}$$

eritque

$$\alpha = \tfrac{1}{4};\ \beta = \tfrac{6}{35}\alpha;\ \gamma = \tfrac{7}{120}\beta;\ \delta = \tfrac{10}{188}\gamma;\ \varepsilon = \tfrac{13}{360}\delta;$$
$$\zeta = \tfrac{16}{969}\varepsilon;\ \eta = \tfrac{19}{1340}\zeta;\ \theta = \tfrac{22}{2303}\eta;\ \iota = \tfrac{25}{3270}\theta;\ \varkappa = \tfrac{28}{4495}\iota;$$
$$\lambda = \tfrac{31}{5984}\varkappa;\ \mu = \tfrac{34}{7770}\lambda \text{ etc.}$$

Hinc in subsidium sequentium calculorum colligamus harum literarum logarithmos, eosque cum suis differentiis primis et secundis ordine referamus hoc modo:

Logarithmi literarum α, β, γ etc.	Differentiae primae.	Differentiae secundae.
$l\,\alpha = 9,3979400$	0,9420080	0,2920752
$l\,\beta = 8,4559320$	1,2340832	0,2222828
$l\,\gamma = 7,2218488$	1,4563660	0,1778786
$l\,\delta = 5,7654828$	1,6342446	0,1479592
$l\,\varepsilon = 4,1312382$	1,7822038	0,1265633
$l\,\zeta = 2,3490344$	1,9087671	0,1105380
$l\,\eta = 0,4402673$	2,0193051	0,0980988
$l\,\theta = 8,4209622$	2,1174039	0,0881678
$l\,\iota = 6,3035583$	2,2055717	0,0800582
$l\,\varkappa = 4,0979866$	2,2856299	0,0733122
$l\,\lambda = 1,8123567$	2,3589421	
$l\,\mu = 9,4534146$		

§. 37. His praeparatis ad radicem aequationis propositae $0 = 1 - \alpha u + \beta u u - \gamma u^3 + \delta u^4$ etc. inueniendam vtamur methodo per series recurrentes procedente, quae iubet talem seriem formare ex scala relationis $\alpha, -\beta, \gamma, -\delta, \varepsilon, -\zeta$ etc. quae sit 1, A, B, C, D, E, F etc. ita vt sit $A = \alpha$; $B = \alpha A - \beta$; $C = \alpha B - \beta A + \gamma$; $D = \alpha C - \beta B + \gamma A - \delta$; $E = \alpha D - \beta C + \gamma B - \delta A + \varepsilon$ etc. tum vero sequentes fractiones continuo propius ad radicem ipsius u appropinquabunt: $\frac{1}{A}$; $\frac{A}{B}$; $\frac{B}{C}$; $\frac{C}{D}$; $\frac{D}{E}$ etc. Calculo igitur instituto termini huius seriei recurrentis sequenti modo determinabuntur:

$$A = 0,25$$
$$B = 0,033929$$
$$C = 0,00300610$$
$$D = 0,0001448750$$
$$E = -\ 0,000006336562$$

Quo-

Quoniam hic litera E valorem sortita est negatiuum, hinc iam tuto concludere possumus, aequationem nostram propositam nullam plane habere radicem realem, quod etiam inde patet, quod fractiones supra allatae $\frac{1}{A}$; $\frac{A}{B}$; $\frac{B}{C}$; etc. ad nullum certum terminum conuergunt: fit enim

$$\frac{1}{A} = 4;\ \frac{A}{B} = 7;\ \frac{B}{C} = 11;\ \frac{C}{D} = 20;\ \frac{D}{E} = -23.$$

§. 38. Aequatio igitur infinita $0 = 1 - \alpha u + \beta u^2$ etc. ita est comparata, vt nullam plane radicem realem inuoluat, ideoque nullus datur numerus, quantumuis magnus accipiatur, pro u, qui summam huius seriei reddat nihilo aequalem, sed quicunque numerus pro u accipiatur, summa seriei $1 - \alpha u + \beta u^2 - \gamma u^3 + \delta u^4$ etc. semper erit positiua, quam adeo quouis casu assignare licebit. Ponamus enim verbi gratia $u = 10$, et singulos terminos istius seriei euoluamus; vbi quidem termini ab initio vehementer diuergent, mox autem ita conuergent, vt sequentium omnium summa haud difficulter assignari queat. Singuli autem huius seriei termini sequentes adipiscentur valores:

$$\begin{aligned}
+\ 1 &= 1,0000000\\
-\ \alpha u &= -2,5000000\\
+\ \beta u^2 &= 2,8571428\\
-\ \gamma u^3 &= -1,6666666\\
+\ \delta u^4 &= 0,5827506\\
-\ \varepsilon u^5 &= -0,1352814\\
+\ \zeta u^6 &= 0,0223375\\
-\ \eta u^7 &= -0,0027603\\
+\ \theta u^8 &= 0,0002636\\
-\ \iota u^9 &= -0,0000201\\
+\ \kappa u^{10} &= 0,0000012
\end{aligned}$$

Quodsi

Quodſi iam huius ſeriei ab initio duo, tres, quatuor, quinque termini coniungantur, prodibunt numeri alternatim maiores, vel minores quam vera ſumma, veluti hic repraeſentatur.

Termini	Summa
1.	1,0000000
2.	− 1.5000000
3.	1,3571428
4.	− 0,3095238
5.	0,2732275
6.	0,1379461
7.	0,1602836
8.	0,1575233
9.	0,1577869
10.	0,1577668
11.	0,1577680

Vnde patet, veram ſummam contineri intra hos limites: 0,1577668 et 0,1577680, ideoque medium ſumendo vera ſumma aeſtimari poteſt $=$ 0,1577674.

§. 39. His obſeruatis ſequens paradoxon maxime memorabile ſe nobis offert: quod columnae cylindricae, ad quamcunque altitudinem etiam porrigantur, nunquam ſub proprio pondere ſuccumbant, quod vtique eo magis eſt admirandum, quod aucta columnae altitudine onus ſuſtentandum decreſcat in ratione duplicata altitudinem, etiamſi proprium pondus columnae negligatur; ex quo concludi debere videbatur, ſi etiam proprii ponderis ratio habeatur, onus ſuſtentandum adhuc magis diminui, atque adeo

adeo tandem penitus euanefcere debere, ita vt columna nimis alta nullum plane onus geftare valeret, quod tamen nunc longe aliter fe habere inuenimus. Haec autem omnia accuratius examen requirunt, quod in fequente differtatione inftituemus.

EXAMEN INSIGNIS PARADOXI IN THEORIA COLVMNARVM OCCVRRENTIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Non ſolum maxime paradoxa, verum etiam vehementer ſuſpecta videri debet concluſio, ad quam in ſuperiore diſſertatione, *de vi Columnarum* agentes, ſumus perducti: quod ſcilicet nulla columna cylindrica, quantumuis fuerit alta, vnquam a proprio pondere frangatur. Cum enim, aucta altitudine columnae, eius vis onera geſtandi ſecundum duplicatam rationem diminuatur, vtique tanta dabitur altitudo, qua columna ne leuiſſimum quidem ponduſculum ſuſtinere valeret; vnde maxime abſurdum videtur, quod talis columna, etiamſi in immenſum vlterius eius altitudo augeretur, tamen nunquam diffringi debeat. Hanc ob rem maxime neceſſarium videtur, omnes rationes, quibus iſta concluſio innititur, accuratius perpendere.

§. 2. Totum autem iudicium ſuper hac quaeſtione pendet a natura iſtius ſeriei infinitae:

$$1 - \frac{v}{4.1.} + \frac{v^2}{7.1.5} - \frac{v^3}{10.1.5.12} + \frac{v^4}{13.1.5.12.22} - \frac{v^5}{16.1.5.12.22.35} + \text{etc.}$$

vbi numeri 1, 5, 12, 22, 35, etc. ſeriem pentagonalium con-

conſtituunt, atque tota quaeſtio huc reducitur: vtrum ſumma huius ſeriei vnquam fieri poſſit nihilo aequalis, nec ne? Hic primo quidem ſtatim patet, quamdiu numerus v fuerit vnitate minor, ſummam huius ſeriei neceſſario ſemper eſſe poſitiuam, id quod etiam euenire deprehendi, etiamſi valor ipſius v multo maior accipiatur. Neque vero ob ſummas calculi difficultates centenario maiores valores ipſius v examini ſubiici poſſunt.

§. 3. Confugiendum ergo ſum arbitratus ad methodum, radices aequationum per ſeries recurrentes explorandi, quippe qua olim iam in ſimili quaeſtione, cum in motum oſcillatorium catenae libere ſuſpenſae inquirerem, felici ſucceſſu ſum vſus; verum praeſenti caſu iſta methodus penitus invtiliter eſt adhibita, vnde concludere non dubitaui, nullos prorſus pro v dari valores reales, quibus illa ſeries prorſus ad nihilum redigatur.

§. 4. Interim tamen certum eſt, iſtam methodum, radices aequationum per ſeries recurrentes explorandi, maxime eſſe lubricam, et ſaepiſſime in errores inducere poſſe, cuius defectus vnicum exemplum attuliſſe iuuabit, circa hanc aequationem tantum cubicam: $1 - 2z + 4zz - 3z^3 = 0$, cuius vna radix manifeſto eſt $z = 1$; at ſi ex ſcala relationis $2, -4, +3$ ſeries recurrens formetur, ea prodit

$$1 + 2 + 0 - 5 - 4 + 12 + 25 - 10 - 84, \text{ etc.}$$

vnde radix cognita nullo modo concludi poteſt. Ratio autem huius defectus in radicibus imaginariis eſt quaerenda, et quoniam noſtra aequatio ſine vllo dubio plurimas, ſi non omnes, inuoluit radices imaginarias, mirum non eſt hanc operationem ſucceſſu caruiſſe.

§. 5. Fateri igitur cogimur, hinc nihil tuto concludi posse, vtrum aequatio proposita radices habeat reales, nec ne, atque hic potius nostrum iudicium suspendere conueniet. Quamobrem ista ipsa aequatio:

$$0 = 1 - \frac{v}{4.1} + \frac{v^2}{7.1.5} - \frac{v^3}{10.1.5.12} + \frac{v^4}{13.1.5.12.22} - \text{etc.}$$

omnino digna videtur, vt Geometrae omni studio in eius naturam inquirant.

§. 6. Quoniam autem haec aequatio nata est ex consideratione illius lineae curuae, ad quam tales columnae, a sola grauitate sollicitatae, inflecti deberent ante quam rumperentur, necesse erit huius curuae symptomata accuratius examini subiicere. Referat igitur recta verticalis
Tab. III. Fig. 1. A B huiusmodi columnam, sitque A Y B ea linea curua, ad quam inflecti debet, antequam penitus corruat, atque inter eius coordinatas $AX = x$ et $XY = y$ sequens inventa est aequatio infinita:

$$\frac{Y}{A} = x - \frac{1.x^4}{2.3.4.m} + \frac{1.4x^7}{2.3..7.m^2} - \frac{1.4.7x^{10}}{2.3...10.m^3} + \text{etc.}$$

Quoniam igitur in infimo columnae termino B applicata y iterum euanescere debet, hic ante omnia inuestigari oportet abscissam illam x, cui respondeat applicata euanescens $y = 0$, quandoquidem haec ipsa abscissa aequabitur altitudini totius columnae A B; quamobrem si hoc, vti visum erat, nunquam euenire posset, sed, etiamsi abscissae x in infinitum augeantur, applicatae tamen semper positiuum sortirentur valorem, id vtique certum foret signum, columnam etiam infinite altam sub proprio pondere nunquam succumbere debere, propterea quod alter columnae terminus B in infinitum remoueretur.

§. 7.

§. 7. Vt igitur accuratius in formam huius columnae inquiramus, ponamus br. gr. $x^3 = m\,t$, vt sit $x = \sqrt[3]{m\,t}$, et habebimus hanc aequationem:

$$\frac{y}{A\,x} = 1 - \frac{1.\,t}{2.\,3.\,4} + \frac{1.\,4\,t^2}{2.\,3.\,\ldots\,7} - \frac{1.\,4.\,7\,t^3}{2.\,3.\,\ldots\,10} + \frac{1.\,4.\,7.\,10\,t^4}{2.\,3.\,\ldots\,13} - \text{etc.}$$

quam seriem littera s indicemus, ita vt sit $\frac{y}{A} = s\,x = s\sqrt[3]{m\,t}$. Ad hoc igitur examen instituendum litterae t successiue tribuamus valores continuo maiores, et pro singulis computemus valores respondentes tam ipsius s quam formulae $s\sqrt[3]{t}$, atque hos valores, prouti, instituto calculo, sumus adepti, in sequenti tabula referamus:

t	s	$s\sqrt[3]{t}$
0	1, 0000	0, 0000
10	0, 6556	1, 4125
20	0, 4290	1, 1645
30	0, 2882	0, 8955
40	0, 2086	0, 7134
50	0, 1712	0, 6307
60	0, 1577	0, 6173
70	0, 1629	0, 6672
80	0, 1744	0, 7515
90	0, 1897	0, 8501
100	0, 2046	0, 9496
120	0, 2248	1, 1088
240	0, 1856	1, 1534
400	0, 1338	0, 9850

§. 8. Secundum hanc tabellam exstruximus binas curuas, ad axem, in quo abscissae t capiuntur, relatas, quarum

Tab. III. Fig. 2. et 3. rum altera exhibet valores litterae s, altera vero (Fig. 3.) valores formulae $s\sqrt[3]{t}$, quae posterior figura ergo ipsam curuam, quam columnae tribuimus, repraesentabit, si modo notetur, applicatas secundum modulum multo maiorem esse expressas, quo variationes earum clarius in oculos inciderent. Principalis igitur quaestio huc redit, vtrum hae duae curuae, continuo magis prolongatae, tandem per axem sint transiturae? Manifestum enim est, talem transitum in ambabus curuis simul contingere debere.

§. 9. Quod si iam siue illam tabellam, siue figuras inde delineatas attente consideremus, circa valores litterae s generatim obseruamus, eos propius versus axem conuergere, interea autem miris inflexionibus modo magis ab axe recedere modo propius accedere, atque adeo in hac curua plura maxima et minima occurrere; veluti, primum minimum deprehenditur prope abscissam $t = 60$; deinde vero applicatae iterum crescunt, vsque ad $t = 120$, inde vero iterum decrescunt propemodum vsque ad 400. Quamobrem, cum satis certi esse queamus, valores minimos, quippe qui secundum numeros 0, 1577 et 0, 1338 procedunt. continuo propius ad axem accedere, hinc iam satis probabile videtur, eos tandem, veruntamen valde sero, penitus euanescere, quod autem ob defectum subsidiorum calculi nondum definire licet.

§. 10. Simili modo propemodum res se habet in altera figura, quae ipsam columnae figuram referre censenda est, vbi ab initio $t = 0$ applicatae subito increscunt, vsque ad terminum circiter $t = 8$, vbi applicata singulari

cal-

calculo circiter inuenta eſt $= 1,60$; hinc autem per $t = 10$ procedentes ſatis repente decreſcunt, dum circa $t = 60$ minimum quaſi valorem attingunt, hinc vero vsque ad $t = 120$ ſatis ingenti ſaltu aſſurgunt, inde multo lentius iterum decreſcunt vsque ad $t = 400$, hincque iterum increſcendo ſatis vniformiter aſcendunt, quovsque quidem nobis calculum inſtituere licuit. Hic igitur nulla ratio occurrit, vnde concludere, probabili ſaltem modo, liceret, iſtas applicatas tandem penitus euaneſcere.

§. 11. Cum igitur iſta quaeſtio maximi ſit momenti atque ſine dubio ſummam attentionem mereatur, haud parum lucis afferre poterit inueſtigatio omnium locorum, vbi applicatae poſterioris curuae euadunt vel maximae vel minimae, quandoquidem totum iudicium ad ſolas applicatas minimas reuocatur, quae ſi nusquam penitus euaneſcerent, certum id foret ſignum, concluſionem ſupra memoratam veritati eſſe conſentaneam.

§. 12. Cum igitur applicatae huius curuae ibi fiant vel maximae vel minimae, vbi fuerit $\frac{dy}{dx} = 0$, ex ſerie ſupra exhibita concludimus

$$\frac{dy}{A\,dx} = 1 - \frac{x^3}{2.3m} + \frac{x^6}{2.3.5.6.m^2} - \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9.m^3} + \frac{x^{12}}{2.3.5.6.8.9.11.12.m^4} - \text{etc.}$$

Ponamus igitur vt ante $x^3 = mt$, ac perueniemus ad hanc aequationem infinitam:

$$0 = 1 - \frac{t}{2.3} + \frac{t^2}{2.3..5.6} - \frac{t^3}{2.3...5.6..8.9} + \frac{t^4}{2.3..5.6..8.9..11.12} - \text{etc.}$$

cuius ergo radices inueſtigare oportet: euidens autem eſt pri-

primam, ſiue minimam radicem, aliquanto maiorem eſſe debere quam primum denominatorem $2 . 3 = 6$.

§. 13. Calculus autem ad hoc negotium requiſitus haud difficulter per logarithmos inſtitui poterit; ſi enim ipſos terminos huius ſeriei per cyphras romanas deſignemus, vt ſit $\mathrm{I} = 1$, logarithmi ſequentium iuxta tabulam ſubnexam colligentur:

$l\,\mathrm{II} = l\,\mathrm{I} + l\,t - l\,6$	0, 7781513
$l\,\mathrm{III} = l\,\mathrm{II} + l\,t - l\,30$	1, 4771213
$l\,\mathrm{IV} = l\,\mathrm{III} + l\,t - l\,72$	1, 8573325
$l\,\mathrm{V} = l\,\mathrm{IV} + l\,t - l\,132$	2, 1205739
$l\,\mathrm{VI} = l\,\mathrm{V} + l\,t - l\,210$	2, 3222193
$l\,\mathrm{VII} = l\,\mathrm{VI} + l\,t - l\,306$	2, 4857214
$l\,\mathrm{VIII} = l\,\mathrm{VII} + l\,t - l\,420$	2, 6232493
$l\,\mathrm{IX} = l\,\mathrm{VIII} + l\,t - l\,552$	2, 7419391
$l\,\mathrm{X} = l\,\mathrm{IX} + l\,t - l\,702$	2, 8463371
$l\,\mathrm{XI} = l\,\mathrm{X} + l\,t - l\,870$	2, 9395193
$l\,\mathrm{XII} = l\,\mathrm{XI} + l\,t - l\,1056$	3, 0236639
$l\,\mathrm{XIII} = l\,\mathrm{XII} + l\,t - l\,1260$	3, 1003705
$l\,\mathrm{XIV} = l\,\mathrm{XIII} + l\,t - l\,1482$	3, 1708482
$l\,\mathrm{XV} = l\,\mathrm{XIV} + l\,t - l\,1722$	3, 23[illegible]0331
$l\,\mathrm{XVI} = l\,\mathrm{XV} + l\,t - l\,1980$	3, 2966652
$l\,\mathrm{XVII} = l\,\mathrm{XVI} + l\,t - l\,2256$	3, 3533390
$l\,\mathrm{XVIII} = l\,\mathrm{XVII} + l\,t - l\,2550$	3, 4065402
$l\,\mathrm{XIX} = l\,\mathrm{XVIII} + l\,t - l\,2862$	3, 4566696
$l\,\mathrm{XX} = l\,\mathrm{XIX} + l\,t - l\,3192$	3, 5040629

§. 14. Hoc modo primo fecimus calculum pro $t = 8$, prodiitque ſeriei ſumma negatiua $= -0,0149$; ſumto

ſumto autem $t = 7, 50$, ſumma prodiit poſitiua $= 0,0318$, vnde concludimus, verum valorem primae radicis eſſe $t = 7, 840$, cui in curua reſpondere debet applicata maxima. Deinde, quia ex figura colligere licet, ſequens minimum cadere inter $t = 50$ et $t = 60$, inſtituto calculo pro $t = 60$, prodiit ſumma ſeriei $t = + 0, 1144$: at pro $t = 50$ prodiit ſumma $= - 0, 1791$; vnde tuto concludere licet, ipſum minimum reſpondere abſciſſae $t = 56, 10$.

§. 15. Pro ſequente maximo eruendo faciamus calculum pro abſciſſa $t = 150$, hincque ſeriei ſumma reperitur $= - 0, 0244$; at vero, ſumto $t = 145$, prodit $+ 0, 2736$; vnde concluditur, maximum iſtud conuenire cum $t = 149, 59$. Nimis autem operoſum foret iſtum calculum vlterius proſequi; verum ipſa aequatio ſuppeditat certam rationem, ſequentes valores ipſius t ſatis exacte colligendi. Cum enim aequationis ſecundus terminus ſit $\frac{1}{8} t$, patet, ſi literae α, β, γ, δ, denotent omnes radices ipſius t, tum neceſſario eſſe debere $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{etc.} = \frac{1}{8}$. Praeterea vero rationes non deſunt, quod iſtae radices α, β, γ, δ, ſecundum legem ſatis ſimplicem progrediantur et earum differentiae ſecundae pro conſtantibus haberi poſſint. Quamobrem cum tres primae radices inuentae ſint $\alpha = 7, 84$; $\beta = 56, 10$ et $\gamma = 149, 59$, differentiae primae ſunt $48, 26$; $93, 49$; vnde oritur differentia ſecunda $45, 23$. Hinc igitur, quousque libuerit, loca maximorum et minimorum continuari poterunt. En paradigma:

Diff. II.	Diff. I.	Termini.
45, 23	48, 26	7, 84 Max.
45, 23	93, 49	56, 10 Min.
45, 23	138, 72	149, 59 Max.
45, 23	183, 95	288, 31 Min.
45, 23	229, 18	472, 26 Max.
45, 23	274, 41	701, 44 Min.
45, 23	319, 64	975, 85 Max.
45, 23	364, 87	1295, 49 Min.

§. 16. Poteſt etiam in genere talis ſeries inueſtigari, cuius ſumma ſit $= \frac{1}{6}$. Statuatur enim ſeries

$$s = \frac{1}{6} + \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \text{etc.}$$

et cum hinc ſit

$$s - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \text{etc.},$$

poſterior ſeries a priore ſublata relinquit hanc:

$$\frac{1}{6} = \frac{A-6}{6A} + \frac{B-A}{AB} + \frac{C-B}{BC} + \frac{D-C}{CD} + \text{etc.}$$

Iam fiat

$$\frac{A-6}{6A} = \frac{1}{\alpha}, \text{ ſiue } \frac{6A}{A-6} = \alpha;$$

tum vero

$$\frac{AB}{B-A} = \beta, \ \frac{BC}{C-B} = \gamma, \text{ etc.}$$

hincque, ob α, β, γ, cognita, reperitur

$$A = \frac{6\alpha}{\alpha-6} = 25,56, \ B = \frac{\beta A}{\beta - A} = 46,95,$$
$$C = \frac{\gamma B}{\gamma - B} = 68,43, \text{ etc.}$$

Iam nullum eſt dubium, quin iſti numeri, terminum primum ſequentes, ſatis regulariter progrediantur, et, niſi adeo progreſſionem arithmeticam conſtituant, tum ſaltem eorum diffe-

differentiae ſecundae quaſi ſint aequales. Sunt vero differentiae primae 19, 56; 21, 39; 21, 48; quae parum a numero 20 diſcrepant; ſin autem differentias ſecundas admittere velimus, eae propemodum vnitati aequales ſtatui poſſunt. Ceterum pro inſtituto noſtro parum referet, ſiue valores, pro litteris $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. exhibiti, ſint ad amusſim exacti, nec ne, ſi adeo calculum vlterius proſequi vellemus; verum cum inde nihil plane certi circa Paradoxon memoratum concludere valeamus, atque etiamnunc in dubio ſit relinquendum, vtrum curua noſtra alicubi cum axe concurrat nec ne, hanc Analyſin, quippe quae ſola nihil decidere videtur, deſeramus, noſtramque quaeſtionem ex principiis Mechanicis examinemus.

Examen eiusdem Paradoxi, ex Principiis Mechanicis petitum.

§. 17. Conſideremus columnam quamcunque, cylindricam, determinatam A B, quae ſub dato pondere, quod ſit $= P$, corruat. Iam loco huius ponderis ſubſtituatur alia columna A P, eiusdem diametri, cuius longitudo ſit $= p$, quae ergo, illi columnae ſuperimpoſita, evndem effectum erit praeſtatura, et columnam A B diffringet. Tab. III. Fig. 4.

§. 18. Quanquam autem hoc modo obtinetur columna quaſi vnica P A B, ſub proprio pondere ſuccumbens, tamen hinc quaeſtio noſtra non conficitur. Quoniam enim haec columna in A quaſi eſt diſſecta, dubitari omnino nequit, quin talis columna, ſi continua, multo plus roboris eſſet habitura. Accuratius igitur examinemus, quomodo continuitas ambarum columnarum impedire poſſit, quo minus inferior columna A B frangatur, cum tamen hic

 eſſe-effectus certe contingeret, si superior pars A P tantum simpliciter esset imposita.

§. 19. In superiore autem dissertatione columnam A B ita ab onere imposito rumpi sumus contemplati, vt primo instanti certam quandam curuaturam A Y B accipiat, dum termini A et B in eodem situ verticali perseverant; atque hanc curuam ita comparatam esse inuenimus, vt in A cum verticali A B angulum finitae magnitudinis X A Y constituat, quoniam, positis coordinatis $AX = x$ et $XY = y$, talis aequatio est eruta: $y = \alpha x - \beta x^4 +$ etc.; vnde, sumto x infinite paruo, foret $y = \alpha x$, ideoque α exprimeret tangentem anguli X A Y. Haec igitur inflexio tanquam effectus spectari debet, a pondere columnae superimpositae A P oriundus.

§. 20. Manifestum autem est, istum effectum nullo modo produci posse, si superior columna cum inferiore firmiter esset connexa; propterea quod suprema portiuncula A X a situ verticali declinari nequit, nisi simul infima portiuncula superioris partis A P similem declinationem accipiat, ad alteram scilicet partem, veluti A Z, tendentem, quod autem ob continuitatem totius columnae contingere nequit.

§. 21. Quamdiu autem superior pars A P situm verticalem seruat, inferior portio A B, siquidem fractioni fuerit obnoxia, aliam inflexionem recipere nequit, nisi in qua angulus X A Y penitus euanescat, et curuae A Y tangens in puncto A sit verticalis. Quoniam igitur haec

ratio

ratio frangendi prorsus discrepat ab illa, quam supra tractauimus, in eam hic accuratius inquiramus.

§. 22. Hunc in finem supremam columnae A B portiunculam laqueari fixo esse infixam concipiamus, siue ita a viribus horizontalibus vtrinque detineri, vt a situ verticali deflectere penitus nequeat. Scilicet, dum portio A Y incuruatur, ad punctum superius a in situ verticali conseruandum, necesse est, vt a vi quadam horizontali $a q$ sollicitetur, ne istud punctum retrocedere queat, quem ergo effectum firmitas laquearis praestare est censenda. Tum vero, ne tota columna ab ista vi horizontali $a q$ prosterni queat, in puncto A aequalis vis horizontalis A Q, contrarie agens, est concipienda, quae istum effectum destruat. Interim tamen hae duae vires non impedire debent, quominus columna imposita A P toto suo pondere in columnam inferiorem agat, eamque deprimat. Tab. I Fig. 5

§. 23. Ad hunc ergo casum euoluendum vocemus istas vires horizontales $A Q = a q = Q$, et interuallum $A a = \alpha$, ita vt nunc tres habeamus vires, quibus columna inferior sollicitatur, siquidem praeter has vires horizontales adhuc a pondere superimposito P deorsum vrgetur; a quibus viribus quomodo columna haec A B inflecti debeat, iam indagabimus, vbi quidem ipsum pondus columnae inferioris negligere licebit; nam si, eo neglecto, columna A B a pondere superimposito A P inflecti poterit, multo magis, accedente proprio pondere, talem inflexionem pati debebit.

§. 24. Ponamus igitur vt supra abscissam $A X = x$ et applicatam $X Y = y$; atque a pondere incumbente P ad inflexionem in puncto Y producendam orietur momentum

mentum $= P. y$. In eandem porro plagam a vi horizontali $AQ = Q$ momentum nascitur $= Qx$; ab altera vero vi horizontali $aq = Q$ momentum producitur in plagam contrariam vergens, quod erit $= Q(\alpha + x)$; quibus tribus momentis collectis totum momentum, columnam principalem AB incuruans, erit $= Py - Q\alpha$.

§. 25. Hoc iam momento incuruationis inuento in §. 12. superioris dissertationis: *De oneribus, quae columnae gestare valent*, loco Oy tantum scribi oportebit $Py - Q\alpha$, vnde nanciscimur hanc aequationem:

$$Py - Q\alpha + \frac{Ekkddy}{dx^2} = 0,$$

quae autem nunc ita integrari debet, vt, posito $x = 0$, non solum fiat $y = 0$, sed etiam $\frac{dy}{dx} = 0$. Praeterea vero, si columnae altitudo ponatur $= a$, applicata y insuper euanescere debet posito $x = a$.

§. 26. Diuidatur aequatio modo allata

$$Py - Q\alpha + \frac{Ekkddy}{dx^2} = 0$$

per P, et ponatur $\frac{Ekk}{P} = cc$; tum vero fiat $\frac{Q\alpha}{P} = b$, vt habeatur haec aequatio simplicior:

$$y - b = -\frac{ccddy}{dx^2}, \text{ siue } z = -\frac{ccddz}{dx^2},$$

posito scilicet $y - b = z$, cuius integrale completum est

$$z = y - b = \mathfrak{A} \sin. \frac{x}{c} + \mathfrak{B} \cos. \frac{x}{c}.$$

Cum igitur, posito $x = 0$, fieri debeat $y = 0$, pro constantibus determinandis habetur primo haec determinatio: $\mathfrak{B} = -b$; deinde cum sit $\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{A}}{c} \cos. \frac{x}{c} - \frac{\mathfrak{B}}{c} \sin. \frac{x}{c}$, vt posito $x = 0$ fiat quoque $\frac{dy}{dx} = 0$, obtinetur haec altera

aequa-

aequatio: $\mathfrak{A} = 0$; quocirca aequatio, curuam noſtram exprimens, erit

$$y - b = - b \text{ coſ.} \tfrac{x}{c}, \text{ ſiue } y = b\ (1 - \text{coſ.} \tfrac{x}{c}).$$

§ 27. Augeatur nunc abſciſſa x vſque ad totam columnae altitudinem a, et quia, poſito $x = a$, fieri debet $y = 0$, orietur haec noua aequatio: $b\,(1 - \text{coſ.} \tfrac{a}{c}) = 0$, cui ſatisfit ponendo coſ. $\tfrac{a}{c} = 1$. Fit autem coſ. $\tfrac{a}{c} = 1$ caſibus $\tfrac{a}{c} = 0$, vel $\tfrac{a}{c} = 2\,\pi$, etc.; atque hinc pondus determinabitur, quod iſtam columnam ad rupturam adiget. Cum enim ſit $c = \tfrac{a}{2\pi}$, ob $c = k \surd \tfrac{E}{P}$. (vid. §. 26.), reperitur hoc pondus $P = \tfrac{4\pi\pi Ekk}{aa}$, quae ergo quantitas pariter ſequitur rationem quadruplicatam craſſitiei directam et reciprocam duplicatam altitudinis. Cum igitur in caſu praecedentis diſſertationis inuentum fuiſſet onus $O = \tfrac{\pi\pi Ekk}{aa}$, noſtro caſu pondus, quod eadem columna, quando ſuperne in A laqueari eſt infixa, geſtare valet, quadruplo erit maius.

§. 28. Conuertatur nunc iſtud pondus P in columnam pariter cylindricam eiusdem diametri, ac ponatur, pondus noſtrae columnae A B, cuius altitudo $= a$, eſſe $=$ A, altitudinem vero illius columnae ſuper imponendae, cuius pondus inuenimus $= \tfrac{4\pi\pi Ekk}{aa}$, $= p$, eritque

$$a : p = A = \tfrac{4\pi\pi Ekk}{aa},$$

vnde colligitur altitudo $p = \tfrac{4\pi\pi Ekk}{Aa}$. Quod ſi ergo talis columna A P inferiori A B imponatur, vt habeatur columna altitudinis P B $= a + \tfrac{4\pi\pi Ekk}{Aa}$, haec certe proprio ſub ſuo pondere ſuccumbere debebit, ſiquidem a viribus ho-

horizontalibus AQ et aq constringitur, quippe quae vires vicem gerunt continuitatis: quam ob rem nullum amplius dubium superesse potest, quin, remotis istis viribus horizontalibus, columna pariter sit prolapsura, quoniam remotio harum virium roborem columnae certe non auget.

§. 29. Ecce ergo reuera exhiberi poterit columna tantae altitudinis, quae sub proprio pondere necessario prosternetur, quandoquidem hoc eueniet, si tota columnae altitudo fuerit $= a + \frac{4\pi\pi Ekk}{Aa}$; atque adeo euidens est, talem columnam, notabiliter adeo breuiorem, fractioni resistere non posse. Ponatur enim altitudo inuenta

$$a + \frac{4\pi\pi Ekk}{Aa} = b,$$

sitque C pondus columnae, cuius altitudo $= c$, ita vt sit

$$A = \frac{Ca}{c}, \text{ eritque } b = a + \frac{4\pi\pi cEkk}{Caa},$$

in qua expressione si quantitates C et c vt constantes spectemus, eiusmodi valor pro a assignari poterit, vnde altitudo b minimum sortiatur valorem; reperitur enim differentiando

$$\frac{db}{da} = -\frac{8\pi\pi cEkk}{Ca^3} = 0,$$

vnde colligitur

$$a^3 = \frac{8\pi\pi cEkk}{C} \text{ ideoque } a = 2\sqrt[3]{\frac{\pi\pi cEkk}{C}},$$

quo valore substituto fiet altitudo columnae caducae, quam quaerimus, $b = 3\sqrt[3]{\frac{\pi\pi cEkk}{C}}$. Hinc igitur tandem pro certo asseuerare possumus, pro quauis columnae crassitie et robore semper eiusmodi assignari posse altitudinem, quae ob proprium suum pondus rupturae resistere non valeat;

sicque

ſicque paradoxon, et quaeſtio ſuper eo nata, iam manifeſto eſt ſoluta; quamobrem ea, quae in ſuperiore diſſertatione ſub finem in ſententiam, hic aſſertae contrariam, ſunt allata, ſiue dubie expoſita, nunc facile emendari poterunt.

§. 30. Quo vim formulae pro altitudine h inuentae clarius perſpiciamus, in eam introducamus onus, quod columna altitudinis c, cuius pondus ſtatuimus $= C$, ſuſtinere valet, et quod, per experimenta explorandum, tanquam cognitum ſpectemus. Sit iſtud onus $= \Gamma$, atque ex ſuperiore diſſertatione habemus $\frac{\pi\pi Ekk}{cc} = \Gamma$, ita vt habeamus $\pi\pi Ekk = \Gamma cc$, qui ergo valor ſubſtituatur in formula pro altitudine h inuenta, ac reperietur

$$h = 3\sqrt[3]{\frac{\Gamma c^3}{C}} = 3c\sqrt[3]{\frac{\Gamma}{C}};$$

vbi fracto $\frac{\Gamma}{C}$ denotat, quoties onus, ab hac columna ſuſtentatum, ipſum eius pondus ſuperat, cuius ergo radix cubica, per $3c$ multiplicata, praebet altitudinem columnae ex eadem materia confectae et eiusdem diametri, quae ſub proprio ſuo pondere certe ſuccumbet.

§. 31. Quoniam igitur altitudinem h inuenimus columnae, quae proprium pondus certe ſuſtinere nequit, hinc iam viciſſim in linea curua, quam modo ante inuenimus, eam abſciſſam aſſignare poterimus, cui applicata euaneſcens reſpondere debet. Primo ſcilicet, poſito $Ekk = mbb$, inter coordinatas x et y hanc adepti ſumus aequationem:

$$\frac{y}{A} = - x\frac{x^4}{2.3.4.m} + \frac{1.4.x^7}{2....7.m^2} - \frac{1.4.7.x^{10}}{2....10.m^3} + \text{etc.}$$

deinde ſtatuimus $\frac{x^3}{m} = t$, ita vt ſit $t = \frac{x^3 bb}{Ekk}$. Modo autem vidimus eſſe $Ekk = \frac{\Gamma cc}{\pi\pi}$. Quod ſi ergo iam hic ipſi x

tribuamus valorem totius altitudinis b, ob

$$b^3 = 27\, c^3 . \frac{\Gamma}{C} \text{ fiet } t = \frac{27\, b\, b\, \pi\, \pi\, c}{C}.$$

Quoniam autem c exprimit altitudinem nostrae columnae, et C eius pondus, erit $C = b\, b\, c$, quo valore substituto fit $t = 27\, \pi\, \pi$; vnde discimus, iam ante terminum $t = 27\, \pi\, \pi = 266$ circiter locum existere debere, vbi applicata curuae, y, euanescit.

§. 33. Formula, quam pro maxima columnae altitudine inuenimus, scilicet: $b = 3\, c \sqrt[3]{\frac{\Gamma}{C}}$, ob summam simplicitatem maxima attentione est digna. Quanquam enim ex casu columnae determinatae, cuius altitudo est $= c$, pondus vero $= C$, est deriuata: tamen facile generalis reddi atque ad omnes plane columnas cylindricas, ex eadem materia confectas, extendi potest. Posita enim istius columnae amplitudine $= b\, b$, erit primo $C = b\, b\, c$; tum vero onus Γ, quod haec sustentare valet, constat esse proportionale quadrato amplitudinis, diuiso per quadratum altitudinis, ita vt sit $\Gamma = \frac{b^4}{c\,c}$, quibus valoribus substitutis erit altitudo nostra maxima $b = 3 \sqrt[3]{b\, b}$, vnde sequens constituatur.

Theorema maxime memorabile.

§. 34. *Maxima altitudo, qua columnae cylindricae, ex eadem materia confectae, proprium pondus etiamnunc sustinere valent, tenet rationem subtriplicatam amplitudinis.* Ita si duae huiusmodi habeantur columnae, quarum diameter, prioris sit D, posterioris vero d, altitudines maximae, quibus proprium pondus adhuc sustentare valent, erunt vt $\sqrt[3]{D\, D} : \sqrt[3]{d\, d}$.

DE

DE ALTITVDINE COLVMNARUM SVB PROPRIO PONDERE CORRVENTIVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Cum nuper hanc quaestionem resoluere essem conatus pro curua, ad quam columnam ante inflecti concepi, quam frangeretur, inter abscissam verticalem $AX = x$ et applicatam horizontalem $XY = y$, hanc inueneram aequationem $\int x\,dy + \frac{E\,ddy}{dx^2} = 0$; vbi littera E momentum elasticitatis, quo columna inflexioni resistit, complectitur, vnde valor ipsius y per sequentem seriem infinitam exprimebatur: Tab IV. Fig. 1.

$$\frac{y}{A} = x - \frac{1.\,x^4}{2.\,3.\,4.\,E} + \frac{1.\,4.\,x^7}{2.\,\ldots.\,7\,E^2} - \frac{1.\,4.\,7.\,x^{10}}{2.\,\ldots\ldots.\,10\,E^3} + \text{etc.}$$

Hinc porro per constructionem nata est linea curua figurae prorsus mirabilis, innumerabiles applicatas, tam maximas quam minimas, continens, quae autem omnes ad eandem partem axis verticalis sitae videbantur, ita vt ista curua non nisi in infinitum continuata in ipsum axem incideret; quae circumstantia me seduxerat quasi, vt arbitrarer, columnarum altitudinem adeo sine periculo fractionis in infinitum augere posse. Postmodum vero ex aliis principiis

piis

piis clariſſime oſtendi, rem aliter ſe habere, et pro quouis columnarum robore certam altitudinem aſſignari poſſe, quam ſi ſuperent, certe proprio ponderi ſuccumberent.

§. 2. Cum autem aequatio ex certiſſimis principiis aequilibrii ſit deducta, nullius erroris coargui poteſt, ſi modo omnes rationes, quibus innititur, probe perpenduntur, nullaeque circumſtantiae immiſceantur ipſis principiis huius calculi contrariae; quamobrem, antequam hinc concluſiones deducere liceat, omnia momenta, ex quibus iſta ſingularis figura eſt deducta, accurate euoluere oportet. Ac primo quidem ſupremus columnae terminus A nulli prorſus actioni cuiusquam vis ſubiectus eſt aſſumtus, ita vt liberrime de ſuo loco moueri et reliquis viribus cedere poſſet, quae circumſtantia iam a ſtatu, quem in noſtra quaeſtione contemplamur, prorſus diſcrepat. Quando enim quaerimus, in quanta altitudine columnae etiamnunc proprium pondus ſuſtinere valeant, manifeſto ſupponimus, ſupremum terminum A, perinde ac infimum B, conſtanter in eadem recta verticali A B retineri, neque ab actione virium, quibus pars media incuruatur, de hoc ſitu dimoueri poſſe. Sin autem iſta circumſtantia praetermitteretur et ſupremo termino A plena libertas relinqueretur, nihil prorſus abſurdi in illa curua mirabili deprehendetur, ſed potius ſemper eiusmodi caſus aſſignari poterunt, quae cum iſta curua pulcherrime conueniant, id quod paucis oſtendere operae erit pretium.

§. 3. Ante omnia autem hic loco columnarum laminas elaſticas eiusdem roboris, mente ſaltem, ſubſtitui

tui conueniet: ſemper enim concipi poteſt lamina elaſtica, quae inflexioni tantum reluctetur, quantum columna fractioni reſiſtit; totum autem diſcrimen in eo erit poſitum, quod lamina elaſtica a viribus ſollicitantibus reuera incurvetur, dum columna, ab iisdem viribus ſollicitata, disrumpitur. Hoc praemonito ſemper eiusmodi lamina elaſtica concipi poterit, quae, a ſolo ſuo pondere ſollicitata, ad eam ipſam curuam inflecti atque adeo in aequilibrio conſiſtere queat, quam ex aequatione initio allata deduximus; ſi modo obſeruemus, in calculo illo omnes huius curuae applicatas X Y tanquam infinite paruas ſpectari debere, etiamſi in noſtra figura multo maiores ſint repraeſentatae, quo variae inflexiones facilius perſpici poſſent. Abſciſſae autem huius curuae ad eo maiorem altitudinem aſſurgent, quo fortiores fuerint laminae noſtrae elaſticae: applicatae vero, ſingulis abſciſſis reſpondentes, perpetuo eandem inter ſe rationem tenere ſunt cenſendae.

§. 4. His notatis quaelibet portio huius curuae, veluti A Y, ſtatum aequilibrii cuiuspiam laminae elaſticae repraeſentabit: ſcilicet ſemper aſſignari poterit lamina elaſtica longitudinis A Y, quae, ſi in Y ſecundum directionem ſuam firmiter retineatur, atque ad figuram Y A inflectatur, ob ſolum proprium pondus in hoc ſtatu ſe conſeruare poſſit, hocque modo punctum Y, vbicunque libuerit, accipere licet. Hic primum occurrunt ea puncta curuae, quibus applicatae ſunt vel maximae vel minimae, vbi ergo tangentes ſunt verticales. Quod ſi ergo quodpiam horum punctorum pro infimo termino laminae elaſticae accipiatur, is pauimento quoque verticaliter infigi debebit, vt de hoc ſitu declinare nequeat; tum enim pars ſuperior figu-

Tab. IV. Fig. 2.

figuram aſſignatam ob proprium pondus recipere ſimulque in aequilibrio conſiſtere poterit.

§. 5. Praeterea vero in hac curua infinita dabuntur puncta, quae littera O deſignauimus, vbi datur punctum flexus contrarii, atque adeo curuatura prorſus euaneſcit; vnde ſi infimus laminae elaſticae terminus in tali puncto accipiatur, non opus eſt, vt pauimento infigatur ſecundum ſuam directionem, ſed ſufficiet vt ſimpliciter inſiſtat, et talis lamina ob proprium pondus figuram exhibitam recipere et in aequilibrio conſiſtere poterit. Veluti ſi inferior laminae terminus in puncto O′ capiatur, isque ſimpliciter pauimento E F inſiſtat, tum ob ſolum proprium pondus la-
Tab. IV. mina inflecti poterit ſecundum curuam O′ N G M A, hoc-
Fig. 3. que ſtatu in aequilibrio perſiſtere, propterea quod totius huius laminae centrum grauitatis G perpendiculariter puncto O′ imminebit; euidens autem eſt, hunc ſtatum aequilibrii eſſe labilem, et laminam minima vi eſſe prolapſuram.

§. 6. Hinc iam clariſſime intelligimus, nullum horum caſuum ad quaeſtionem propoſitam accommodari poſſe, quippe qua eiusmodi columna conſideratur, cuius vterque terminus perpetuo in eadem recta verticali firmiter retineatur, dum in omnibus his caſibus ſupremo termino A plena libertas conceditur; quamobrem, vt noſtram quaeſtionem rite euoluamus, ſtatum columnae, ſiue laminae elaſticae, initialem aliter conſtituere debemus atque ante fecimus, ſcilicet praeter ſollicitationes a grauitate oriundas ſupremo termino A certam quandam vim horizontalem applicatam concipere debemus, qua iſtud punctum A perpetuo in eadem recta verticali contineatur. Facile autem intellitelligitur, magnitudinem huius vis prius definiri non posse, quam totus calculus ad finem fuerit perductus; quandoquidem tum demum patebit, quanta vi opus sit, ad supremum terminum A in debito situ conseruandum. Quo autem haec noua inuestigatio clarius perspici queat, ipsi quaestioni principali maiorem extensionem tribuamus eamque sequenti modo constituamus.

Status Quaestionis.

§. 6. Proposita sit columna cylindrica, in situ verticali A B constituta, siue eius loco lamina elastica eiusdem roboris, cuius autem ambo termini A et B perpetuo in hoc situ ita retineantur, vt ab aliis viribus sollicitantibus inde neutiquam dimoueri queant. Huic iam laminae elasticae circa medium C quandam vim horizontalem C *c* applicatam concipiamus, qua laminae figura incuruata A B C tribuatur, quam mutationem autem tam exiguam esse statuamus, vt tota curua quasi infinite parum a recta verticali A B discrepet. Hoc posito quaeramus naturam huius curuae A C B, ad quam, tam ab ista vi, quam a proprio pondere inflectetur; hac enim quaestione resoluta facile patebit, vtrum, si vis sollicitans C *c* euanesceret, talis inflexio certo casu nihilominus locum habere queat; hoc enim ipso continebitur casus, quo columna a solo proprio pondere prosternetur, quandoquidem ne minimam quidem curuaturam pati potest. Tab. IV. Fig. 4.

§. 7. Quoniam vero haec quaestio non solum summam circumspectionem postulat, sed etiam plurimis difficultatibus est inuoluta, laborem nostrum ab euolutione casus simplicissimi inchoëmus, quo columnae omnis flexibilibilitas adimatur, eiusque loco in medio C eiusmodi iunctura tribuatur, quae cum certo elasticitatis momento flexurae resistat. Referat igitur recta verticalis A B talem columnam, cuius ambo termini A et B de suo loco amoueri nequeant; tum vero isti columnae in medio applicata sit vis horizontalis C c, qua haec columna in statum inflexum A C B sit perducta, atque tam ex pondere columnae quam vi applicata C c, ad momentum flexurae relata, quaeri debet status iste inflexus, siue anguli deflexionis a situ verticali C A O et C B O, qui quidem inter se erunt aequales, quia partes A C et B C aequales supponuntur.

Tab. IV. Fig 5.

§. 8. Vt nunc solutionem huius casus ordine instituamus, primo omnes vires consideremus, quibus haec columna actu sollicitatur. Hic igitur occurrit pondus, quo vtrumque brachium C A et C B deorsum vrgetur. Posita igitur longitudine vtriusque C A et C B $= a$ vocetur pondus siue massa vtriusque $= M$, quae vis in vtriusque centro grauitatis seu medio applicata concipi potest; tum vero etiam actu sollicitatur a vi illa horizontali C c, quam vocemus $= C$. Praeterea vero, quatenus ambo brachia iam ad angulum A C e sunt inflexa, loco vis elasticae mente substituamus elastrum E e, quod vi sua contractiua conetur ambo brachia in directum extendere. Quod si ergo vocemus angulum C A B $=$ C B A $= \theta$, erit angulus E C $e = 2\,\theta$, cui proportionalis statui potest vis elastri, siquidem hunc angulum tanquam minimum spectemus. Hinc ergo, si vim elasticam absolutam littera E et interuallum C E $=$ C e littera e designemus, momentum huius elastri erit $2\,E\,e\,\theta$; vnde simul patet, si horizontalis C O ducatur, fore C O $= a$ sin. θ et A O $=$ B O $= a$ cos. θ, sicque, quia angu-

angulus θ tanquam minimus spectatur, statuere poterimus $CO = a\theta$ et $AO = BO = a$.

§. 9. His autem viribus praeterea adiungi debent eae vires, quae requiruntur, ad columnam in statu, quem supponimus, retinendam. Primo igitur, quoniam terminus A perpetuo in recta verticali A B retineri debet, ibi applicemus vim horizontalem $A a$, quae sit $= A$, cuius valor autem nondum est cognitus, quandoquidem praecise tanta esse debet, vt punctum A in suo loco conseruetur. Deinde quia terminus inferior B fundo ita insistere assumitur, vt etiam de suo loco dimoueri nequeat, primo ipsum fundum sustinebit totum columnae pondus, vnde ipsum punctum B sursum vrgeri censendum est vi $BO = 2M$; dein vero, ne de suo loco, siue dextrorsum siue sinistrorsum, dimoueatur, illi vim horizontalem $Bb = B$ applicatam concipiamus, quae etiam inter incognita est referenda. Tota autem columna suo pondere ita aget, quasi eius pondus in communi centro grauitatis G vtriusque brachii esset applicatum; quod quia in medium interualli CO cadit, erit $OG = \frac{1}{2} a\theta$, cuius ergo directio erit recta verticalis Gg.

§. 10. Cum nunc totum hoc systema in aequilibrio consistere assumamus, primo omnes vires, ratione quantitatis, se mutuo destruere debent, vnde pro viribus horizontalibus habebimus hanc aequationem: $A + B = C$; vnde, simulac altera harum virium A et B fuerit cognita, etiam altera innotescet. Tum vero vires verticaliter agentes iam sibi contrariae sunt constitutae; tertio vero vires elastri, in puncta E et e. agentis, se mutuo perfecte destruunt. Praeterea autem ad aequilibrium requiritur, vt momenta omnium harum virium, refpectu cuiuscunque axis, fe mutuo deftruant: conftat enim, fi hoc eueniat pro quolibet axe, id fimul pro omnibus aliis locum habere. Confideremus igitur momenta harum virium refpectu puncti A, vbi ergo vis $A a = A$ et vis $B O = 2 M$ momenta euanefcent, quia directiones per ipfum punctum A tranfeunt; at vis horizontalis $B b = B$ dabit momentum finiftrorfum vergens $= 2 a B$, vis vero horizontalis $C c = C$ dabit momentum dextrorfum vrgens $= C a$; vis denique verticalis $G g$ gignit momentum finiftrorfum, quod erit $M a \theta$; vnde nancifcimur hanc aequationem: $2 a B + M a \theta = C a$. Quoniam igitur iam ante inuenimus $A + B = C$, nunc vtramque feorfim determinare valemus: reperimus enim

$$A = \tfrac{1}{2} C + \tfrac{1}{2} M \theta \text{ et } B = \tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2} M \theta.$$

§. 11. His iam viribus determinatis ipfam refolutionem huius cafus aggrediamur, quem in finem noftrum fyftema in puncto C fixum concipiamus, cuius ergo refpectu vires, quae brachium C A feorfim follicitant, fe mutuo in aequilibrio feruare debent; tum enim vires, alterum brachium follicitantes, fe quoque fponte in aequilibrio continebunt. At vero brachium C A primo follicitatur a vi $A a = A$, cuius momentum eft $A a$, finiftrorfum tendens; in eandem vero etiam plagam tendet momentum, ex proprio pondere huius brachii ortum, quod eft $\tfrac{1}{2} M a \theta$. In contrariam autem plagam hoc brachium ab elaftro abripietur, cuius momentum eft $2 E e \theta$, ideoque habebimus hanc aequationem: $A a + \tfrac{1}{2} M a \theta = 2 E e \theta$, quae, fi loco A valor inuentus fubftituatur, dabit $\tfrac{1}{2} a C + M a \theta = 2 E e \theta$, in qua aequatione tota folutio noftri problematis continetur.

tur.

tur. Eadem autem aequatio etiam obtinetur ex confideratione alterius brachii. Primo enim hoc brachium vrgetur a vi $B b = B$, cuius momentum, finiftrorfum tendens, eft $B a$; deinde ex vi $B O = 2 M$, fiue reactione fundi, oritur momentum in eandem plagam vergens $= 2 M a \theta$; tum vero hoc brachium ob proprium pondus praebet momentum dextrorfum vergens $= \frac{1}{2} M a \theta$; denique vero ab elaftro in e applicato oritur momentum etiam dextrorfum tendens $= 2 E e \theta$; ficque hinc orietur ifta aequatio:

$$B a + 2 M a \theta = \tfrac{1}{2} M a \theta + 2 E e \theta,$$

in qua fi loco B fuus fcribatur valor, proueniet haec aequatio: $\frac{1}{2} C a + M a \theta = 2 E e \theta$.

§. 12. Cum igitur tota folutio cafus propofiti in hac aequatione contineatur: $2 E e \theta = \frac{1}{2} C a + M a \theta$, hinc ftatim angulus θ definiri poteft, ad quem noftra columna a propofita vi horizontali $C c$ deflecti poterit: erit enim $\theta = \frac{C a}{4 E e - 2 M a}$; vbi manifeftum eft, hunc cafum locum habere non poffe, nifi vis elaftica, in formula $E e$ contenta, multo maior fuerit quam $M a$, quandoquidem hic fupponimus, angulum θ valde effe exiguum. Hinc autem viciffim affignare poterimus vim horizontalem $C c = C$, quae valeat noftram columnam ad datum angulum $B A C = \theta$ deflectere: erit enim ifta vis $C = \frac{2 \theta}{a} (2 E e - M a)$. Hinc ftatim patet, dari eiusmodi cafus, quibus talis deflexio nullam vim horizontalem poftulat, atque adeo columna a proprio pondere ad hanc deflexionem vrgebitur; et quoniam angulus θ hic non determinatur, ifta columna a folo pondere continuo maiorem deflexionem recipiet, atque adeo penitus corruet. Hoc nempe toties eueniet, quoties fuerit

$M a = 2 E e$, qui est ipse ille casus, quem hic euoluere nobis proposuimus.

§. 13. Hunc igitur casum diligentius perpendamus, ac primo quidem ponamus, totam huius columnae altitudinem esse $AB = h$, ita vt sit $a = \frac{1}{2} h$; tum vero sit amplitudo huius columnae $= dd$; atque hinc sumi poterit $M = \frac{1}{2} ddh$, quia M denotabat dimidiae columnae pondus. Hinc ergo postrema aequatio dabit $\frac{1}{4} hhdd = 2 E e$, vnde altitudo huius columnae ita determinabitur, vt sit $h = \sqrt{\frac{8 E e}{dd}}$. Quoties ergo talis columna, qualem hic assumimus, quae scilicet nullam inflexionem recipere queat, praeterquam in suo medio, vbi momentum inflexioni resistens sit $E e$, tantam habeat altitudinem, vel maiorem, tum certe proprium suum pondus sustinere non valebit, sed penitus prosternetur; vnde iam nouum argumentum habemus contra opinionem supra memoratam, qua arbitratus sum; nullam columnam sub proprio pondere occumbere posse. Hoc igitur casu expedito multo facilius resolutionem quaestionis §. 6. et seqq. descriptae suscipere poterimus.

Resolutio Quaestionis.

§. 14. Quoniam, si huic columnae vnica vis horizontalis in medio applicaretur, tota columna non in curuam continuam deflecteretur, totam istam vim horizontalem aequaliter per totam columnae altitudinem, quae
Tab. IV. Fig. 6. sit $AB = h$, distribuamus, ita vt, si tota illa vis horizontalis fuerit $= C$, elemento cuicunque $X x = dx$ applicari debeat vis horizontalis elementaris $= \frac{C dx}{h}$. Tales igitur vires horizontales singulis columnae elementis applicatae concipiantur. Deinde etiam singula elementa ob proprium

pon-

pondus deorſum ſollicitabuntur, viribus $\frac{M\,dx}{b}$, ſiquidem M denotet pondus totius columnae; ſicque iam habemus omnes vires, quibus haec columna actu ſollicitatur; ſiquidem iis adiungamus momentum elaſticitatis, quo haec columna in ſingulis punctis pollere ſtatuitur, quod, vt hactenus fecimus, per formulam $E\,k\,k$ repraeſentemus.

§. 15. Praeterea vero, quoniam ſupremus columnae terminus A perpetuo in ea recta verticali retineri debet, ei horizontaliter applicatam concipiamus vim $A\,a = A$; tum vero termino inferiori B, ob eandem rationem, applicemus vim horizontalem $B\,b = B$. Porro vero iſte terminus inferior, ob pondus columnae, verticaliter ſurſum vrgeri cenſendus eſt vi M; inſuper autem in calculum introduci debebit centrum grauitatis columnae incuruatae, quod ſi ponamus cadere in punctum G, eius diſtantia ab axe reperietur $G\,O = \frac{\int y\,dx}{b}$. Poſita enim abſciſſa $A\,X = x$ et applicata $X\,Y = y$, ob inflexionem infinite paruam, elementum $Y\,y$ ipſi elemento abſciſſae $X\,x$ aequale cenſeri poteſt. Cum igitur eius pondus ſit $\frac{M\,dx}{b}$, eius momentum, reſpectu axis A B, erit $\frac{M\,y\,dx}{b}$, cuius integrale, per totam columnam extenſum, erit $\frac{M}{b}\int y\,dx$, cui ergo aequale eſſe debet momentum totius columnae, ſi eius pondus in puncto G eſſet collectum, quod ergo erit $M.\,G\,O$; vnde manifeſto ſequitur interuallum $G\,O = \frac{1}{b}\int y\,dx$; pro quo ergo interuallo inueniendo area totius curuae A Y B inueſtigari debet, ſicque in hoc puncto G vis applicata eſt concipienda horizontalis $G\,g = M$.

§. 16. Quoniam nunc primo omnes iſtae vires ratione quantitatis ſe inuicem deſtruere debent, pro viribus horizontalibus hanc nanciſcimur aequationem: $A + B = C$; vires autem verticales iam ſe ſponte deſtruunt, cum ſit vis $BO = M$ et vis $Gg = M$. Praeterea vero neceſſe eſt, vt omnium harum virium momenta reſpectu puncti A ſe deſtruant: vbi ergo virium Aa et BO momenta per ſe ſunt nulla, vis autem Bb momentum ſiniſtrorſum vergens erit Bb, atque in eundem ſenſum verget momentum, ex vi ſeu pondere columnae $Gg = M$, ortum, quod ergo momentum, ob $GO = \frac{\int y\,dx}{b}$, erit $\frac{M}{b}\int y\,dx$, hoc ſcilicet integrali per totam columnam extenſo. Ne autem haec conditio calculum turbet, vocemus hoc interuallum $GO = g$, ita vt ſit $g = \frac{\int y\,dx}{b}$ et momentum hinc natum erit $= Mg$. Supereſt igitur, vt omnia momenta ex omnibus viribus horizontalibus $YV = \frac{C\,dx}{b}$ nata, colligantur; quare, cum ex iſta vi YV naſcatur momentum $\frac{Cx\,dx}{b}$, ſumma omnium horum momentorum per totam altitudinem erit $\frac{1}{2}Cb$, quod dextrorſum vergit, ita vt hinc obtineamus hanc aequationem: $Bb + Mg = \frac{1}{2}Cb$, ex qua aequatione ſtatim colligimus $B = \frac{1}{2}C - \frac{Mg}{b}$, hincque porro alteram vim incognitam $A = \frac{1}{2}C + \frac{Mg}{b}$.

§. 17. Nunc iam totam columnam, quaſi in puncto Y eſſet fixa, contemplemur, atque ex omnibus viribus, arcum AY ſollicitantibus, earum momenta inueſtigemus reſpectu huius puncti Y, quippe quorum ſumma aequalis eſſe debet momento elaſticitatis, quod quoniam a curuatura in hoc loco pendet, ſi radium oſculi in hoc loco ſtatuamus $= r$, ipſum elaſticitatis momentum erit $\frac{Ekk}{r}$; praeterea

terea vero momentum vis $A a = A$, respectu huius puncti Y, est $A x$. Momenta autem, quae tam ex viribus horizontalibus quam verticalibus toti arcui $A Y$ sunt applicatae, seorsim inuestigari debent.

§. 18. Cum igitur hic punctum Y tanquam fixum spectetur, arcum $A Y$ secundum maiorem scalam hic seorsim repraesentemus, ita vt sit $A X = x$ et $X Y = y$, quas quantitates ergo tantisper quasi constantes spectari licet; tum autem consideretur huius arcus elementum quodcunque $U u$, per coordinates $A T = t$ et $T U = u$ determinatum, quae hic solae vt variabiles sunt tractandae. Cum igitur, ob deflexionem minimam, sit vt supra elementum $U u = T t = d t$, ei primo applicata erit vis horizontalis $U P = \frac{C dt}{b}$; praeterea vero eidem applicata est vis verticalis $U Q = \frac{M dt}{b}$. Illius igitur vis $U P = \frac{C dt}{b}$ momentum, respectu puncti Y, erit $\frac{C (x - t) dt}{b}$, cuius ergo integrale erit $\frac{C t}{b} (x - \frac{1}{2} t)$, quod summa horum momentorum per arcum $A U$ continet. Promoueatur nunc punctum U vsque in Y, atque summa omnium horum momentorum, ex arcu $A Y$ natorum, erit $\frac{\frac{1}{2} C x x}{b}$, cuius effectus dextrorsum tendit. Tab. IV. Fig. 7.

§. 19. At vero pro viribus verticalibus, vis $U Q = \frac{M dt}{b}$ momentum respectu puncti Y erit

$$\frac{M dt}{b} Q Y = \frac{M (y - u) dt}{b},$$

quod sinistrorsum tendit, prorsus vt momentum vis $A a = A$. Integretur iam ista formula, vt obtineatur momentum ex arcu cu A U oriundum, quod erit $\frac{M}{b}(yt - \int u\,dt)$. Promoueatur punctum u vsque in y, faciendo $t = x$ et $u = y$, atque totum momentum, ex arcu A Y ortum, erit $\frac{M}{b}(xy - \int y\,dx)$, quae formula manifesto reducitur ad hanc: $\frac{M}{b}\int x\,dy$.

§. 20. Inuentis igitur his tribus momentis, quorum primum Ax sinistrorsum, secundum $\frac{\frac{1}{2}Cxx}{b}$ dextrorsum, tertium vero modo inuentum, $\frac{M}{b}\int x\,dy$, iterum sinistrorsum agit, totum momentum sinistrorsum vrgens erit $Ax + \frac{M}{b}\int x\,dy - \frac{Cxx}{2b}$, cui ergo aequale esse debet momentum elasticitatis $\frac{Ekk}{r}$, quippe quod dextrorsum vergit, vnde adipiscimur hanc aequationem:

$$Ax + \frac{M}{b}\int x\,dy - \frac{Cxx}{2b} = \frac{Ekk}{r},$$

quae, si loco A valorem ante inuentum substituamus, induet hanc formam:

$$\tfrac{1}{2}Cx - \frac{Cxx}{2b} + \frac{Mgx}{b} + \frac{M}{b}\int x\,dy = \frac{Ekk}{r}.$$

In hac ergo aequatione omnia continentur, quae circa solutionem problematis propositi desiderari possunt.

§. 21. Quoniam autem radius osculi etiamnunc in hac aequatione reperitur, propter applicatas y vt infinite paruas spectandas statui poterit $r = -\frac{dx^2}{ddy}$, siquidem elementum dx pro constante accipiatur. Hinc ergo nostra aequatio erit:

$$(\tfrac{1}{2}C + \frac{Mg}{b})x - \frac{Cxx}{2b} + \frac{M}{b}\int x\,dy + \frac{Ekk\,ddy}{dx^2} = 0,$$

quae per $\frac{M}{b}$ diuisa euadit:

$$(\frac{Cb}{2M} + g)x - \frac{Cxx}{2M} + \int x\,dy + \frac{Ebkk\,ddy}{M\,dx^2} = 0,$$

vbi

vbi notetur, fractionem $\frac{M}{b}$ amplitudinem columnae exprimere, neque adeo ab altitudine columnae b pendere. Si enim amplitudo columnae ponatur $= b\,b$, statui poterit $M = b\,b\,h$; quo obseruato aequatio nostra hanc induet formam:

$$\left(\frac{C}{2\,b\,b} + g\right)\,x - \frac{C\,x\,x}{2\,b\,b\,b} + \int x\,d\,y + \frac{E\,k\,k\,d\,d\,y}{b\,b.\,d\,x^2}.$$

Deinde etiam initio ostendimus, formulam $E\,k\,k$ quadrato amplitudinis, seu ipsi b^4, esse proportionalem, vnde statuere poterimus, $E\,k\,k = b^4\,e$, vbi e est linea, vi elasticae absolute proportionalis. Hoc igitur valore introducto aequatio sequentem induet formam:

$$\left(\frac{C}{2\,b\,b} + g\right)\,x - \frac{C\,x\,x}{2\,b\,b\,b} + \int x\,d\,y + e\,b\,b.\frac{d\,d\,y}{d\,x^2} = 0,$$

vnde ergo per geminam integrationem valor applicatae y, per abscissam x expressus, erui debet, quod aliter nisi per series infinitas praestari nequit.

§. 22. Vt autem istae integrationes rite ad statum quaestionis accommodentur, sequentia praecepta sunt tenenda:

1°. Formulae $\int x\,d\,y$ integrale ita capi debet, vt euanescat posito $x = 0$.

2°. Quia curua necessario per ipsum punctum A transit, altera aequationis nostrae integratio ita debet determinari, vt posito $x = 0$ fiat quoque $y = 0$.

3°. Altera vero integratio pro abscissis minimis dare debet talem aequationem: $y = \alpha\,x$; vbi ergo ista constans α designat tangentem anguli, quem curua cum axe in A constituit, vel adeo ipsum hunc angulum, siquidem vt infinite paruus eſt ſpectandus. Hic autem imprimis eſt obſeruandum, iſtum angulum α effectum totum exhibere, quem vis horizontalis C, columnae applicata, producere valet. Hoc igitur modo ſeries infinita reperiri poterit, quae pro qualibet abſciſſa x quantitatem applicatae y determinabit.

§. 23. Integratione autem hac lege inſtituta eam conditionem principalem adimpleri oportet, quae poſtulat, vt, poſita abſciſſa $x = b$, applicata y denuo euaneſcat. Hoc igitur modo obtinebitur aequatio, meras quantitates conſtantes inuoluens; eas ſcilicet, quae in aequatione differentiali continentur, ac praeterea angulum deflexionis α. Hinc autem ipſam hanc deflexionem α, quatenus a vi horizontali C producitur, nondum definire licet, quoniam in hac aequatione adhuc ineſt quantitas g, interuallum G O exprimens, cuius valor nunc demum per integrationem, ex aequatione inter x et y inuenta, definiri debet. Vidimus enim eſſe $g = \frac{\int y\,dx}{b}$, poſtquam ſcilicet integrale $\int y\,dx$ a termino $x = 0$ vſque ad terminum $x = b$ fuerit extenſum.

§. 24. Poſtquam igitur aequatio inter x et y fuerit inuenta, ex ea per integrationem euoluatur formula $\int y\,dx$, quae, per totam altitudinem extenſi, praebebit valorem producti $g\,b$; ſicque denuo hinc colligitur aequatio inter easdem quantitates conſtantes, quae ergo ſi cum ſuperiore aequatione combinetur, inde quantitas g eliminari poterit, quo facto habebitur noua aequatio, ex qua pro quauis vi horizontali C definiri poterit angulus deflexionis

xionis α, quandoquidem reliquae quantitates in aequatione contentae omnes tanquam datae ſpectari poſſunt.

§. 25. Ex hac autem vltima aequatione, vnde valorem ipſius α elici oportet, ſimul patebit, eiusmodi dari caſus, quibus eadem deflexio α oriri poteſt, etiamſi vis horizontalis C prorſus euaneſcat; atque hinc orietur caſus, quem hic praecipue examinare conſtituimus, quo ſcilicet in eam columnae altitudinem inquirimus, quam ſi columna attigerit, ob proprium pondus incuruari incipiat, atque adeo frangatur, quare ad hunc caſum analyſin ſuperiorem accommodabimus.

Inueſtigatio maximae altitudinis, qua columna adhuc proprium ſuum pondus ſuſtinere valet.

§. 26. Pro hoc ergo caſu ſtatim ponamus vim horizontaliter applicatam $C = 0$, et iam aequatio noſtra differentio-differentialis erit:

$$g\,x + \int x\,dy + e\,b\,b.\,\frac{ddy}{dx^2} = 0,$$

in qua loco $e\,b\,b$ br. gr. ſcribamus litteram m, pro cuius integrali ſi fingamus ſeriem

$$y = \alpha\,x + \beta\,x\,x + \gamma\,x^3 + \delta\,x^4 \text{ etc.}$$

mox patebit, fore $\beta = 0$, ſimulque omnes poteſtates ſequentes ipſius x, quarum exponentes ſunt formae $3n+2$; tum vero poteſtatum, quarum exponentes ſunt formae $3n+1$, coefficientes tantum per literam α determinari; at vero poteſtatum, quarum exponentes ſunt formae $3n$, coefficientes per ſolam litteram g definiri.

§. 27. Hinc ergo ſtatim valorem ipſius y in duas partes diuellere poterimus, quae ſint $y = \alpha p + g q$; hoc autem valore introducto aequatio noſtra erit

$$g x + \alpha \int x\, dp + g \int x\, dq + m\alpha.\frac{ddp}{dx^2}.\, mg.\frac{ddq}{dx^2} = 0.$$

vnde hae duae aequationes deriuantur:

$$\text{I. } \int x\, dp + m\frac{ddp}{dx^2} = 0.$$

$$\text{II. } x + \int x\, dq + m\frac{ddq}{dx^2} = 0.$$

Pro priore, quoniam nouimus, primum terminum ipſius p eſſe x, ſtatuamus $p = x - \mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^7 + \mathrm{C}x^{10} + \text{etc.}$ factaque ſubſtitutione perueniemus ad ſequentem aequationem:

$$0 = \begin{cases} \frac{m\,ddp}{dx^2} = -4.3m\mathrm{A}x^2 + 7.6m\mathrm{B}x^5 - 10.9m\mathrm{C}x^8 + 13.12.m\mathrm{D}x^{11}\ \text{etc.} \\ \int x\,dp = \tfrac{1}{2}xx \quad - \tfrac{4}{5}\mathrm{A}x^5 \quad + \tfrac{7}{8}\mathrm{B}x^8 \quad - \tfrac{10}{11}\mathrm{C}x^{11} + \text{etc.} \end{cases}$$

vnde ergo coefficientes aſſumti ſequenti modo determinantur:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2.3.4.m};\quad \mathrm{B} = \frac{4\mathrm{A}}{5.6.7.m} = \frac{1.4.}{2.3.\ldots.7m^2},$$

$$\mathrm{C} = \frac{7\mathrm{B}}{8.9.10.m} = \frac{1.4.7.}{2.3.\ldots.10.m^3}$$

$$\mathrm{D} = \frac{10\mathrm{C}}{11.12.13.m} = \frac{1.4.7.10.}{2.3.\ldots.13.m^4},\ \text{etc.}$$

Pro valore ipſius q, ex altera aequatione eruendo, fingamus $q = -\mathfrak{A}x^3 + \mathfrak{B}x^6 - \mathfrak{C}x^9 + \mathfrak{D}x^{12} - \text{etc.}$ et facta ſubſtitutione perueniemus ad hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{m\,ddq}{dx^2} = -3.2m\mathfrak{A}x + 6.5m\mathfrak{B}x^4 - 9.8m\mathfrak{C}x^7 + 12.11m\mathfrak{D}x^{10} - \text{etc.} \\ \int x\,dq = \quad - \tfrac{3}{4}\mathfrak{A}x^4 \quad + \tfrac{6}{7}\mathfrak{B}x^7 \quad - \tfrac{9}{10}\mathfrak{C}x^{10} \quad + \text{etc.} \\ + x = +1.x \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \end{array}\right\} = 0$$

vnde ergo coefficientes aſſumti ſequenti modo determinabuntur:

$\mathfrak{A} =$

$\mathfrak{A} = \frac{1}{2.3.m}$; $\mathfrak{B} = \frac{3\mathfrak{A}}{4.5.6.m} = \frac{1.3}{2.3....6m^2}$; $\mathfrak{C} = \frac{1.3.6}{2.3...9m^3}$;
$\mathfrak{D} = \frac{1.3.6.9}{2.3.....12m^4}$; etc.

§. 28. Pro his igitur litteris p et q, habebimus iſtas ſeries infinitas:

$$p = x - \frac{x^4}{2.3.4.m} + \frac{1.4.x^7}{2.3....7.m^2} - \frac{1.4.7.x^{10}}{2.3.....10m^3} + \text{etc.}$$

$$q = -\frac{x^3}{2.3m} + \frac{1.3x^6}{2.3....6.m^2} - \frac{1.3.6.x^9}{2.3.......9m^3} + \text{etc.}$$

quibus ſeriebus inuentis erit $y = \alpha p + g q$. Statuamus $x = h$, et quia fieri debet $y = 0$, habebimus hanc primam aequationem pro ſolutione noſtri problematis: $\alpha p + g q = 0$. At vero pro valore literae g eruendo, cum ſit $g h = \int y\, dx = \alpha \int p\, dx + g \int q\, dx$, his integralibus ab $x = 0$ ad $x = h$ extenſis, habebimus primo

$$\int p\, dx = \tfrac{1}{2} x^2 - \frac{x^5}{2.3.5m} + \frac{1.4x^8}{2.3....8m^2} - \frac{1.4.7.x^{11}}{2.3.....11m^3} + \text{etc. et}$$

$$\int q\, dx = -\frac{x^4}{2.3.4m} + \frac{1.3.x^7}{2.3....7.m^2} - \frac{1.3.6.x^{10}}{2.3.....10.m^3} + \text{etc.}$$

vbi ergo, poſtquam poſuerimus $x = h$, oriri debet haec aequatio: $g h = \alpha \int p\, dx + g \int q\, dx$, vnde deducimus

$$g = \frac{\alpha \int p\, dx}{h - \int q\, dx},$$

qui valor in ſuperiore aequatione $\alpha p + g q = 0$ ſubſtitutus praebet

$$p + \frac{q \int p\, dx}{h - \int q\, dx} = 0,$$

ſiue $h p - p \int q\, dx + q \int p\, dx = 0$, quae aequatio duas tantum quantitates h et m inuoluit, ex qua ergo valorem ipſius h eruere licebit, hicque valor ipſam illam maximam altitudinem columnae declarabit, in qua ſe tantum non ſuſtinere valebit.

§. 29. Quo nunc has formulas propius ad calculum accommodemus, ponamus $\frac{x^3}{m} = \frac{h^3}{m} = t$, atque ſeries, quibus indigemus, ſequenti modo deſignemus, poſito ſcilicet vbique $x = h$:

$$p = h\left(1 - \frac{1.\,t}{2.\,3.\,4} + \frac{1.\,4\,t^2}{2.\,.\,.\,.\,.\,7} - \frac{1.\,4.\,7\,t^3}{2.\,.\,.\,.\,.\,.\,10} + \text{etc.}\right) = h.\,P$$

$$q = -1\left(\frac{t}{2.\,3} - \frac{1.\,3\,t^2}{2.\,.\,.\,.\,.\,6} + \frac{1.\,3.\,6\,t^3}{2.\,.\,.\,.\,.\,.\,9} - \text{etc.}\right) = -1.\,Q$$

$$\int p\,dx = h^2\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2.\,.\,.\,.\,5} + \frac{1.\,4\,t^2}{2.\,.\,.\,.\,8} - \frac{1.\,4.\,7\,t^3}{2.\,.\,.\,.\,.\,.\,11} + \text{etc.}\right) = -h^2.\,P'$$

$$\int q\,dx = -h\left(\frac{t}{2.\,3.\,4} - \frac{1.\,3\,t^2}{2.\,.\,.\,.\,7} + \frac{1.\,3.\,6\,t^3}{2.\,.\,.\,.\,.\,10} - \text{etc.}\right) = -h\,Q'.$$

Quod ſi iam iſtos nouos valores introducamus, poſtrema noſtra aequatio ſequentem induet formam:

$$hh\,P + hh\,P\,Q' - hh\,Q\,P' = 0,$$

at per hh diuiſa fit $P + P\,Q' - Q\,P' = 0$, quae aequatio nullam aliam literam inuoluit niſi t, vnde ergo ſi definire licuerit hanc quantitatem t, erit $h = \sqrt[3]{m\,t}$, hoc eſt $t = \sqrt[3]{b\,b\,e\,t} =$ altitudini columnae quaeſitae; vbi valor t eſt numerus quidam abſolutus, ex illa aequatione eruendus. Quare cum e pro eadem materia, ex qua columnae conficiuntur, eundum retineat valorem, pro variis amplitudinibus columnarum maximae altitudines quaeſitae ſequuntur rationem ſubtriplicatam altitudinum, id quod egregie conuenit cum theoremate diſſertationi praecedenti annexo.

§. 30. Vt igitur iſta altitudo h per calculum definiri poſſit, ſequentes quatuor ſeries, quantitatem incognitam t inuoluentes, rite euolui debebunt:

$$P = 1 - \frac{1.\,t}{2.\,3.\,4} + \frac{1.\,4.\,t^2}{2.\,.\,.\,.\,.\,7} - \frac{1.\,4.\,7.\,t^3}{2.\,.\,.\,.\,.\,10} + \text{etc.}$$

$$P' = \frac{1}{2} - \frac{1.\,t}{2.\,.\,.\,.\,5} + \frac{1.\,4.\,t^2}{2.\,.\,.\,.\,8} - \frac{1.\,4.\,7.\,t^3}{2.\,.\,.\,.\,.\,11} + \text{etc.}$$

Q =

$$Q = \frac{1.t}{2.3} - \frac{1.3.t^2}{2....6} + \frac{1.3.6.t^3}{2.....9} - \text{etc.}$$
$$Q' = \frac{1.t}{2.3.4} - \frac{1.3.t^2}{2....7} + \frac{1.3.6.t^3}{1.....10} - \text{etc.}$$

atque nunc totum negotium huc redit, vt ille valor ipsius t inueſtigetur, quo huic aequationi ſatisfiat: $P + PQ' - QP' = 0$, id quod aliter niſi tentando fieri nequit: plures ſcilicet pro t aſſumi conueniet ſucceſſiue valores, atque ex erroribus ſingulorum concludi poterit verus valor ipſius t. Mox autem inueſtiganti patebit, valorem ipſius t non exiguum eſſe, ſed potius ſatis magnum accipi debere.

§. 31. Poſtquam autem hinc verus valor numeri t fuerit erutus, vt inde ſtatim quaeſitam altitudinem h in menſura penitus cognita aſſignare valeamus, ponamus haberi columnam cylindricam, ex eadem materia paratam, cuius altitudo ſit $= a$, amplitudo vero $= dd$, et quae per experimenta comperta ſit geſtare poſſe onus Γ, quod ſe habeat ad pondus huius columnae, vt $\lambda : 1$, ita vt ſit $\Gamma = \lambda\, a\, d\, d$. Iam ex iis, quae de vi columnarum iam olim ſunt tradita, iſtud onus Γ inuentum eſt

$$\Gamma = \frac{\pi \pi E k k}{a a},$$

exiſtente $E k k = d^4 e$, vnde ergo fiet

$$e = \frac{\Gamma a a}{\pi \pi d^4} = \frac{\lambda a^3}{\pi \pi d d}.$$

Subſtituatur ergo iſte valor in formula noſtra pro h inventa, ac reperietur

$$h = a \sqrt[3]{\frac{\lambda b b}{\pi \pi d d}}.$$

vbi iam omnia elementa penitus ſunt cognita.

Calculus

Pro inueſtigando valore numeri t.

§. 32. Quoniam hic quatuor ſeries euolui debent, deſignemus terminos cuiusque ſeriei ordine per cyphras romanas I, II, III, IV, etc. atque pro ſeriebus P et P′, in ſubſidium vocentur ſequentes formulae:

Pro ſerie P		Pro ſerie P′
$l\,\mathrm{II} = l\,\mathrm{I} + l\,t$.	$-1,3802112$	$\mathrm{II}' = \frac{1}{5}\,\mathrm{II}$
$l\,\mathrm{III} = l\,\mathrm{II} + l\,t$.	$-1,7201593$	$\mathrm{III}' = \frac{1}{8}\,\mathrm{III}$
$l\,\mathrm{IV} = l\,\mathrm{III} + l\,t$.	$-2,0122340$	$\mathrm{IV}' = \frac{1}{11}\,\mathrm{IV}$
$l\,\mathrm{V} = l\,\mathrm{IV} + l\,t$.	$-2,2345173$	$\mathrm{V}' = \frac{1}{14}\,\mathrm{V}$
$l\,\mathrm{VI} = l\,\mathrm{V} + l\,t$.	$-2,4123950$	$\mathrm{VI}' = \frac{1}{17}\,\mathrm{VI}$
$l\,\mathrm{VII} = l\,\mathrm{VI} + l\,t$.	$-2,5603551$	$\mathrm{VII}' = \frac{1}{20}\,\mathrm{VII}$
$l\,\mathrm{VIII} = l\,\mathrm{VII} + l\,t$.	$-2,6869185$	$\mathrm{VIII}' = \frac{1}{23}\,\mathrm{VIII}$
$l\,\mathrm{IX} = l\,\mathrm{VIII} + l\,t$.	$-2,7974566$	$\mathrm{IX}' = \frac{1}{26}\,\mathrm{IX}$
$l\,\mathrm{X} = l\,\mathrm{IX} + l\,t$.	$-2,8955551$	$\mathrm{X}' = \frac{1}{29}\,\mathrm{X}$
$l\,\mathrm{XI} = l\,\mathrm{X} + l\,t$.	$-2,9837228$	$\mathrm{XI}' = \frac{1}{32}\,\mathrm{XI}$
$l\,\mathrm{XII} = l\,\mathrm{XI} + l\,t$.	$-3,0637814$	$\mathrm{XII}' = \frac{1}{35}\,\mathrm{XII}$
$l\,\mathrm{XIII} = l\,\mathrm{XII} + l\,t$.	$-3,1370931$	$\mathrm{XIII}' = \frac{1}{38}\,\mathrm{XIII}$
$l\,\mathrm{XIV} = l\,\mathrm{XIII} + l\,t$.	$-3,2047065$	$\mathrm{XIV}' = \frac{1}{41}\,\mathrm{XIV}$
$l\,\mathrm{XV} = l\,\mathrm{XIV} + l\,t$.	$-3,2674417$	$\mathrm{XV}' = \frac{1}{44}\,\mathrm{XV}$
$l\,\mathrm{XVI} = l\,\mathrm{XV} + l\,t$.	$-3,3259545$	$\mathrm{XVI}' = \frac{1}{47}\,\mathrm{XVI}$
$l\,\mathrm{XVII} = l\,\mathrm{XVI} + l\,t$	$-3,3807774$	$\mathrm{XVII}' = \frac{1}{50}\,\mathrm{XVII}$
$l\,\mathrm{XVIII} = l\,\mathrm{XVII} + l\,t$	$-3,4323474$	$\mathrm{XVIII}' = \frac{1}{53}\,\mathrm{XVIII}$
$l\,\mathrm{XIX} = l\,\mathrm{XVIII} + l\,t$	$-3,4810291$	$\mathrm{XIX}' = \frac{1}{56}\,\mathrm{XIX}$
$l\,\mathrm{XX} = l\,\mathrm{XIX} + l\,t$	$-3,5271282$	$\mathrm{XX}' = \frac{1}{59}\,\mathrm{XX}$

§. 33.

§. 33. Simili modo pro computo ſerierum Q et et Q' inſeruient ſequentes formulae:

Pro ſerie Q	Pro ſerie Q'
$l\,\mathrm{I} = \ldots + l\,t - 0,7781513$	$\mathrm{I}' = \frac{1}{4}\,\mathrm{I}$
$l\,\mathrm{II} = l\,\mathrm{I} \ldots + l\,t - 1,6020600$	$\mathrm{II}' = \frac{1}{7}\,\mathrm{II}$
$l\,\mathrm{III} = l\,\mathrm{II} \,.\, + l\,t - 1,9242793$	$\mathrm{III}' = \frac{1}{10}\,\mathrm{III}$
$l\,\mathrm{IV} = l\,\mathrm{III} \,.\, + l\,t - 2,1663314$	$\mathrm{IV}' = \frac{1}{13}\,\mathrm{IV}$
$l\,\mathrm{V} = l\,\mathrm{IV} \,.\, + l\,t - 2,3569815$	$\mathrm{V}' = \frac{1}{16}\,\mathrm{V}$
$l\,\mathrm{VI} = l\,\mathrm{V} \,.\, + l\,t - 2,5137501$	$\mathrm{VI}' = \frac{1}{19}\,\mathrm{VI}$
$l\,\mathrm{VII} = l\,\mathrm{VI} \,.\, + l\,t - 2,6467304$	$\mathrm{VII}' = \frac{1}{22}\,\mathrm{VII}$
$l\,\mathrm{VIII} = l\,\mathrm{VII} \,.\, + l\,t - 2,7621424$	$\mathrm{VIII}' = \frac{1}{25}\,\mathrm{VIII}$
$l\,\mathrm{IX} = l\,\mathrm{VIII} \,.\, + l\,t - 2,8640659$	$\mathrm{IX}' = \frac{1}{28}\,\mathrm{IX}$
$l\,\mathrm{X} = l\,\mathrm{IX} \,.\,.\, + l\,t - 2,9553135$	$\mathrm{X}' = \frac{1}{31}\,\mathrm{X}$
$l\,\mathrm{XI} = l\,\mathrm{X} \,.\, + l\,t - 3,0379043$	$\mathrm{XI}' = \frac{1}{34}\,\mathrm{XI}$
$l\,\mathrm{XII} = l\,\mathrm{XI} \,.\, + l\,t - 3,1133355$	$\mathrm{XII}' = \frac{1}{37}\,\mathrm{XII}$
$l\,\mathrm{XIII} = l\,\mathrm{XII} \,.\, + l\,t - 3,1727474$	$\mathrm{XIII}' = \frac{1}{40}\,\mathrm{XIII}$
$l\,\mathrm{XIV} = l\,\mathrm{XIII} \,.\, + l\,t - 3,2470286$	$\mathrm{XIV}' = \frac{1}{43}\,\mathrm{XIV}$
$l\,\mathrm{XV} = l\,\mathrm{XIV} \,.\, + l\,t - 3,3068844$	$\mathrm{XV}' = \frac{1}{46}\,\mathrm{XV}$
$l\,\mathrm{XVI} = l\,\mathrm{XV} \,.\, + l\,t - 3,3628844$	$\mathrm{XVI}' = \frac{1}{49}\,\mathrm{XVI}$
$l\,\mathrm{XVII} = l\,\mathrm{XVI} + l\,t - 3,4154951$	$\mathrm{XVII}' = \frac{1}{52}\,\mathrm{XVII}$
$l\,\mathrm{XVIII} = l\,\mathrm{XVII} + l\,t - 3,4651028$	$\mathrm{XVIII}' = \frac{1}{55}\,\mathrm{XVIII}$
$l\,\mathrm{XIX} = l\,\mathrm{XVIII} + l\,t - 3,5120318$	$\mathrm{XIX}' = \frac{1}{58}\,\mathrm{XIX}$
$l\,\mathrm{XX} = l\,\mathrm{XIX} \,.\, + l\,t - 3,5565564$	$\mathrm{XX}' = \frac{1}{61}\,\mathrm{XX}$

§. 34. Nunc igitur tantum opus eſt, vt numero t varii valores tribuantur pro lubitu, qui tamen non nimium a veritate abhorrere videantur; quare cum in praecedente diſſertatione oſtenderimus, hunc numerum t certe minorem eſſe quam 266, incipiamus noſtram inueſtigatio-

 nem

nem a valore $t = 200$, viſuri, vtrum iſte valor iuſto ſit maior, an minor. Quod ſi enim hinc valor formulae noſtrae $P(1 + Q') - QP'$ prodierit poſitiuus, id erit indicio, iſtum valorem $t = 200$ eſſe nimis paruum; ſin autem prodierit negatiuus, numerum t diminui oportebit.

§. 35. Sumamus igitur $t = 200$ et calculus pro ſeriebus P et P' ita ſtabit:

	Pro ſerie P.	Pro ſerie P'.
$l\,\mathrm{I} = 0,0000000$	$\mathrm{I} = +1,0000$	$\mathrm{I}' = +0,5000$
$l\,t = 2,3010300$		
2,3010300		
1,3802112		
$l\,\mathrm{II} = 0,9208188$	$\mathrm{II} = -8,3333$	$\mathrm{II}' = -1,6667$
2,3010300	$-7,3333$	$-1,1667$
3,2218488		
1,7201593		
$l\,\mathrm{III} = 1,5016895$	$\mathrm{III} = +31,7460$	$\mathrm{III}' = +3,9682$
2,3010300	$+24,4127$	$+2,8015$
3,8027195		
2,0122340		
$l\,\mathrm{IV} = 1,7904855$	$\mathrm{IV} = -61,7285$	$\mathrm{IV}' = -5,6117$
2,3010300	$-37,3158$	$-2,8102$
4,0915155		
2,2345173		
$l\,\mathrm{V} = 1,8569982$	$\mathrm{V} = +71,9446$	$\mathrm{V}' = +5,1389$
	$+34,6288$	$+2,3287$

$l\,\mathrm{V} =$

	Pro ſerie P.	Pro ſerie P′.
lV = 1,8569982	V = + 71,9446	V′ = + 5,1389
2,3010300	+ 34,6288	+ 2,3287
4,1580282		
2,4123950		
lVI = 1,7456332	VI = − 55,6715	VI′ = − 3,2748
2,3010300	− 21,0427	− 0,9461
4,0466632		
2,5603551		
lVII = 1,4863081	VII = + 30,6414	VII′ = + 1,5321
2,3010300	+ 9,5987	+ 0,5860
3,7873381		
2,6869185		
lVIII = 1,1004196	VIII = − 12,6014	VIII′ = − 0,5479
2,3010300	− 3,0027	+ 0,0381
3,4014496		
2,7974566		
lIX = 0,6039930	IX = + 4,0179	IX′ = + 0,1545
2,3010300	+ 1,0152	+ 0,1926
2,9050230		
2,8955551		
lX = 0,0094679	X = − 1,0220	X′ = − 0,0352
2,3010300	− 0,0068	+ 0,1574
2,3104979		
2,9837228		
lXI = 9,3267751	XI = + 0,2122	XI′ = + 0,0066
	+ 0,2054	+ 0,1640

	Pro ſerie P.	Pro ſerie P'.
l XI = 9,3267751	XI = + 0,2122	XI' = + 0,0066
2,3010300	+ 0,2054	+ 0,1640
1,6278051		
3,0637814		
l XII = 8,5640237	XII = − 0,0366	XII' = − 0,0010
2,3010300	+ 0,1688	+ 0,1630
0,8650537		
3,1370931		
l XIII = 7,7279606	XIII = + 0,0053	XIII' = + 0,0001
2,3010300	+ 0,1741	+ 0,1631
0,0289906		
3,2047065		
l XIV = 6,8242841	XIV = − 0,0007	
	+ 0,1734	

§. 36. Simili modo inſtituatur calculus pro inueniendis valoribus Q et Q', quippe qui, in vſum vocando formulas §. 33. exhibitas, ita ſe habebit:

	Pro ſerie Q.	Pro ſerie Q'.
l t = 2,3010300		
0,7781513		
l I = 1,5228787	I = + 33,3333	I' = + 8,3333
2,3010300		
3,8259087		
1,6020600		
l II = 2,2218487	II = − 166,6667	II' = − 23,8095
	− 133,3334	− 15,4762

l II =

	Pro ſerie Q.	Pro ſerie Q'.
l II = 2,2218487	II = − 166,6667	II' = − 23,8095
2,3010300	− 133,3334	− 15,4762
4,5228787		
1,9242793		
l III = 2,5985994	III = + 396,8254	III' = + 39,6825
2,3010300	+ 263,4920	+ 24,2063
4,8996294		
2,1663314		
l IV = 2,7332980	IV = − 541,1255	IV' = − 41,6250
2,3010300	− 277,6335	− 17,4187
5,0343280		
2,3569815		
l V = 2,6773465	V = + 475,7147	V' = + 29,7322
2,3010300	+ 198,0812	+ 12,3135
4,9783765		
2,5137501		
l VI = 2,4646264	VI = − 291,4918	VI' = − 15,3417
2,3010300	− 93,4106	− 3,0282
4,7656564		
2,6467304		
l VII = 2,1189260	VII = + 131,5001	VII' = + 5,9773
2,3010300	+ 38,0895	+ 2,9491
4,4199560		
2,7621424		
l VIII = 1,6578136	VIII = − 45,4793	VIII' = − 1,8192
	− 7,3898	+ 1,1209

	Pro ſerie Q.	Pro ſerie Q'.
l VIII = 1,6578136	VIII = − 45,4793	VIII' = − 1,8192
2,3010300	− 7,3898	+ 1,1299
3,9588436		
2,8640659		
l IX = 1,0947777	IX = + 12,4388	IX' = + 0,4442
2,3010300	+ 5,0490	+ 1,5741
3,3958077		
2,9553135		
l X = 0,4404942	X = − 2,7574	X' = − 0,0889
2,3010300	+ 2,2916	+ 1,4852
2,7415242		
3,0379043		
l XI = 9,7036199	XI = + 0,5054	XI' = + 0,0149
2,3010300	+ 2,7970	+ 1,5001
2,0046499		
3,1133355		
l XII = 8,8913144	XII = − 0,0779	XII' = − 0,0021
2,3010300	+ 2,7191	+ 1,4980
1,1923444		
3,1727474		
l XIII = 8,0195970	XIII = + 0,0105	XIII' = + 0,0002
2,3010300	+ 2,7296	+ 1,4980
0,3206270		
3,2470286		
l XIV = 7,0735984	XIV = − 0,0012	
	+ 2,7284	

§. 37. Inuentis igitur quatuor his valoribus:

$$P = + 0,1734;\; Q = + 2,7284$$
$$P' = + 0,1631;\; Q' = + 1,4980$$

colligimus inde ista producta:

$$P(1 + Q') = 0,4331$$
$$QP' \qquad = 0,4450$$

quorum posterius primum tantum superat particula $= 0,0119$, quae differentia cum iam sit vehementer parua, et negatiua, nobis iam manifesto declarat, valorem assumtum $t = 200$ vix a valore vero discrepare, eumque aliquantillum superare, vnde superfluum foret accuratius in istum valorem inquirere: eius enim radix cubica tantum in computum ingreditur, quae a notabiliori errore litterae t vix sensibilem errorem gigneret. Hoc igitur numero t inuento, quem tamen tantillo minorem accipere conueniet, problema principale, quod hic nobis est propositum, perfecte resoluere poterimus.

Problema.

§. 38. *Pro omnibus columnis cylindricis assignare maximam altitudinem, quam sustinere valent, antequam sub proprio pondere corruant.*

Solutio.

Praesto sit columella, pariter cylindrica, ex eadem materia parata atque ipsae columnae, de quibus quaestio formatur; sit istius columellae altitudo $= a$ eiusque amplitudo $= dd$, atque per experimenta exploretur maximum onus, quod ista columella sine periculo fractionis sustinere valet

valet, cuius pondus repertum ſit ſe habere ad proprium pondus columellae vt $\lambda : 1$, ita vt iam λ ſit numerus cognitus, quo inuento ponamus quaeſtionem inſtitui circa columnam ex eadem materia confectam, cuius amplitudo ſit $= bb$, atque ſupra oſtendimus maximam altitudinem quaeſitam eſſe $h = a\sqrt[3]{\frac{\lambda bb}{\pi\pi dd}}.\, t.$ Sumto iam $t = 200$ erit $l\frac{t}{\pi\pi} = 1,3067302$, hincque $\frac{1}{3}\, l\frac{t}{\pi\pi} = 0,4355767$, cui reſpondet numerus $2,7263$, qui cum aliquantillum diminui debeat, eius loco ſcribamus numerum e, cuius logarithmus hyperbolicus $= 1$, quippe qui eſt $2,71828$, ita vt iam maxima altitudo quaeſita ſit $h = 2,7183.\, a\sqrt[3]{\frac{\lambda bb}{dd}}$, vel adeo in numeris rotundioribus ſtatui poterit $h = 2,70\sqrt[3]{\frac{\lambda bb}{dd}}$.

§. 39. Cum igitur antehac in determinatione oneris, quod quaeuis columna geſtare valet, nullam proprii ponderis rationem tenuiſſem, regula etiam, quam inde deduxeram, quadam leui correctione indigebit, quae autem tam erit exigua, vt in praxi tuto negligi queat. Ad quod oſtendendum columnam hic inuentam, quae ſub proprio pondere occumbit, iuxta regulam ante datam examinemus, qua onera inuenta ſunt tenere rationem dupplicatam compoſitam ex directa amplitudinum ſeu baſium et reciproca altitudinum. Hinc cum columellae pro modulo aſſumtae altitudo eſſet $= a$, amplitudo ſiue area baſeos $= dd$ et onus geſtatum $= \lambda add$, ipſius autem columnae inuentae amplitudo $= bb$, altitudo vero $h = a\sqrt[3]{\frac{\lambda bbt}{\pi\pi dd}}$, ponamus onus, quod haec columna iuxta regulam geſtare poſſet $= \xi hbb$; vbi hbb exhibet ipſum huius columnae pondus.

dus. His positis, secundum nostram regulam esse deberet $\lambda\, a\, d\, d : \xi\, b\, b\, b = \frac{d^4}{a\, a} : \frac{b^4}{b\, b}$, vnde deducitur $\xi = \frac{\lambda\, a^3\, b\, b}{b^3\, a\, d}$, et loco b^3 substituto suo valore erit $\xi = \frac{\pi\pi}{f}$, hoc est circiter $\xi = \frac{1}{20}$; scilicet iuxta regulam haec columna sustineret partem vigesimam proprii ponderis, dum reuera sub proprio pondere succumbit.

§. 40. Vicissim ergo, quoties ista regula declarat, columnam quampiam tantum vigesimam proprii ponderis partem sustinere posse, tum concludere debemus, eam nullum plane onus gestare posse, sed sub proprio pondere occumbere. Cum igitur nullae vnquam columnae adhiberi soleant, nisi quae onera multo grauiora sustentare valeant, manifestum est, errorem illius regulae nullius plane esse momenti, atque in praxi tuto negligi posse, perinde ac si proprium pondus nihil plane conferret, ad vim columnarum diminuendam, quemadmodum in prima de hoc argumento dissertatione est assertum.

VARIA PROBLEMATA CIRCA STATVM AEQVILIBRII TRABIVM COMPACTILIVM ONERATARVM, EARVMQVE VIRES ET PRESSIONEM CONTRA ANTERIDES.

Auctore
NICOLAO FVSS.

Problema I.

§. 1.

Tab. V. Fig. 1. *Si duae trabes AC et BC, plano horizontali in A et B insistentes, in C contra se inuicem innitantur et ab incumbente pondere P deorsum premantur, definire vires, quibus trabes in A et B retineri debent, tum vero etiam vires quas vtraque trabs sustinet.*

Solutio.

Sit trabium longitudo $AC = a$ et $BC = b$, interuallum vero $AB = c$ et pondus deorsum premens $= P$, quas quantitates constanter vt cognitas spectare licet. Statuantur porro anguli, sub quibus trabes ad horizontem incliclinantur $BAC = \alpha$ et $ABC = \beta$, eritque angulus $ACB = 180° - \alpha - \beta$, anguli vero (demiſſo ex C perpendiculo COP) $ACO = 90° - \alpha$ et $BCO = 90° - \beta$. At ex elementis conſtat, angulos inclinationis α et β ita per quantitates a, b, c, definiri, vt ſit

$$\text{coſ.}\ \alpha = \frac{cc + aa - bb}{2ac} \text{ et coſ.}\ \beta = \frac{cc + bb - aa}{2bc}.$$

Reſoluatur iam vis deorſum vrgens P ſecundum directiones CA et CB. Hunc in finem repraeſentet perpendiculum CP ipſum pondus P, ducanturque rectae Pa et Pb, ipſis BC et AC parallelae, eritque Tab. V. Fig. 4.

$$CP : Ca = P : \text{vim ſec. } CA$$
$$CP : Cb = P : \text{vim ſec. } CB.$$

Cum igitur ex parallelogrammo $CaPb$ ſit

$$CP : Ca = \text{ſin. } CaP : \text{ſin } CPa \text{ et}$$
$$CP : Cb = \text{ſin. } CaP : \text{ſin. } CPb, \text{ erit}$$
$$\text{Vis ſecundum } CA = \frac{P\,\text{ſin. } CPa}{\text{ſin. } CaP} \text{ et}$$
$$\text{Vis ſecnndum } CB = \frac{P\,\text{ſin. } CPb}{\text{ſin. } CaP}.$$

Manifeſtum autem eſt, angulum CPa aequalem eſſe eius alterno $BCO = 90° - \beta$, et angulum CaP anguli ACB complemento aequalem, hoc eſt $= \alpha + \beta$, ſimilique modo erit $CPb = ACO = 90° - \alpha$, quibus introductis fiet

$$\text{Vis ſecundum } CA = \frac{P\,\text{coſ. } \beta}{\text{ſin. } (\alpha + \beta)}$$
$$\text{Vis ſecundum } CB = \frac{P\,\text{coſ. } \alpha}{\text{ſin. } (\alpha + \beta)}$$

atque hae binae vires idem praeſtabunt ac ſola vis $CP = P$, in cuius effectum inquirendi nobis eſt propoſitum.

Quoniam igitur trabs CA baſin vrget in directione $A\alpha$ vi $= \frac{P\,\text{coſ. } \beta}{\text{ſin. } (\alpha + \beta)}$, ſi eam denuo reſoluamus, ſecundum directio- Fig. 3.

 nes

nes Af et Ag, in duas alias vires, orietur

Pro directione horizontali Af vis $= \frac{P\, cos.\, \alpha\, cos.\, \beta}{sin.\, (\alpha + \beta)}$ et

Pro directione verticali Ag vis $= \frac{P\, sin.\, \alpha\, cos.\, \beta}{sin.\, (\alpha + \beta)}$.

Pro altera vero trabe, basin in directione $B\beta$ vrgente, vi $= \frac{P\, cos.\, \alpha}{sin.\, (\alpha + \beta)}$, eam secundum directiones Bf' et Bg' in duas alias resoluendo, obtinetur

Pro directione horizontali Bf' vis $= \frac{P\, cos.\, \alpha\, cos.\, \beta}{sin.\, (\alpha + \beta)}$

Pro directione verticali Bg' vis $= \frac{P\, cos.\, \alpha\, sin.\, \beta}{sin.\, (\alpha + \beta)}$.

Corollarium I.

§. 2. Ex hac solutione patet, vires horizontales, non obstante differentia trabium esse aequales vtrinque; ambas vero vires verticales, iunctim sumtas, aequari ponderi P, vti requiritur. Tum vero, posita trabium longitudine aequali, hoc est $a = b$, fiet $\alpha = \beta$, et vires tam horizontales quam verticales erunt vtrinque aequales; illae scilicet $= \frac{1}{2} P\, cot.\, \alpha$, hae vero $= \frac{1}{2} P$. At casu $\alpha = \beta = 45°$ erit vtrinque vis horizontalis $=$ vi verticali $= \frac{1}{2} P$.

Corollarium II.

§. 3. Quia trabes altera AC comprimitur secundum suam longitudinem vi $= \frac{P\, cos.\, \beta}{sin.\, (\alpha + \beta)}$, altera vero BC vi $= \frac{P\, cos.\, \alpha}{sin.\, (\alpha + \beta)}$: euidens est, trabem minori angulo oppositam maiorem vim sustinere, contra vero, trabem maiori angulo oppositam minorem. Positis autem angulis inclinationis aequalibus, vis compressiua vtrinque est eadem $= \frac{P}{2\, sin.\, \alpha}$.

Scho-

Scholion.

§. 4. Hinc etiam definiri poterit craſſities, vtrique trabi ad has vires ſuſtentandas neceſſaria, ex iis, quae ſummus *Eulerus*, de vi columnarum agens, non ita pridem cum Academia communicauit; vbi ſcilicet oſtendit: *Vim, quam columna ſuſtinere valet, eſſe vt quadratum craſſitiei directe et vt quadratum longitudinis inuerſe.* Si enim columna, ex eadem, qua trabes, materia confecta, longitudinis $= A$ et craſſitiei $= CC$, ſuſtinere valeat onus $= O$ erit vi memorati Theorematis $O = \frac{C^4}{A^2}$. Spectato igitur hoc onere O vt cognito, quoniam trabis alterius A C longitudo poſita eſt $= a$, ſi eius craſſities deſignetur per ff, ob vim eam comprimentem $= \frac{P\, cof.\, \beta}{fin.\,(\alpha + \beta)}$ habebitur haec proportio: $O : \frac{C^4}{A^2} = \frac{P\, cof.\, \beta}{fin.\,(\alpha + \beta)} : \frac{f^4}{aa}$, vnde deducitur craſſities trabis A C, ſcil. $ff = \frac{aCC}{A} \sqrt{\frac{P\, cof.\, \beta}{O\, fin.\,(\alpha + \beta)}}$. Similique modo reperietur craſſities gg trabis alterius B C, ſcil.

$$gg = \frac{bCC}{A} \sqrt{\frac{P\, cof.\, \alpha}{O\, fin.\,(\alpha + \beta)}}.$$

Problema II.

§. 5. *Si compages ex tribus trabibus A B, B C, C D compoſita punctis fixis A et D inſiſtat, atque in punctis B et C grauata fuerit ponderibus P et Q, inuenire ſitum, in quo haec compages erit in aequilibrio; tum vero vires, quas ſingulae trabes ſuſtinebunt, vna cum preſſione contra terminos fixos ſiue anterides A et B.* Tab. V. Fig. 4.

Solutio.

Vocentur trabium longitudines $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, ductisque ex B et C rectis horizontalibus B b

 et

et $C c$ ſint inclinationes ad horizontem, ſeu anguli

$$BAa = \alpha,\ CBb = \beta,\ DCc = -\gamma.$$

His poſitis erunt interualla

$$Aa = a \operatorname{coſ.} \alpha;\ Bb = b \operatorname{coſ.} \beta;\ Cc = c \operatorname{coſ.} \gamma,$$

et altitudines, ſeu perpendicula ex iuncturis demiſſa

$$Ba = a \operatorname{ſin.} \alpha;\ Cb = b \operatorname{ſin.} \beta;\ Dc = -c \operatorname{ſin.} \gamma.$$

Iam cum puncta A et D ſint data, ducatur verticalis D M, voceturque diſtantia $AM = m$ et altitudo $MD = n$, atque manifeſtum eſt fore

$$m = a \operatorname{coſ.} \alpha + b \operatorname{coſ.} \beta + c \operatorname{coſ.} \gamma \text{ et}$$
$$n = a \operatorname{ſin.} \alpha + b \operatorname{ſin.} \beta + c \operatorname{ſin.} \gamma$$

atque ex his duabus aequationibus, in quibus tam longitudines trabium a, b, c, quam interualla m et n ſunt cognita, trium angulorum α, β, γ, duo determinantur: tertius vero, ex conditione aequilibrii definiendus, adhuc manet indefinitus.

Tab. V. Fig. 5. Reſoluatur nunc vis deorſum vrgens $BP = P$ ſecundum directiones longitudinales trabium B A et B C; hunc in finem faciatur Parallelogrammum $Pa' Bc'$, ex quo colligitur: $BP : Ba' = P :$ vim ſec. B A

et $BP : Bc' = P :$ vim ſec. B C.

Eſt vero

$$BP : Ba' = \operatorname{ſin.} Ba'P : \operatorname{ſin.} BPa' = \operatorname{ſin.} ABC : \operatorname{ſin.} aBC$$
$$BP : Bc' = \operatorname{ſin.} Ba'P : \operatorname{ſin.} BPc' = \operatorname{ſin.} ABC : \operatorname{ſin.} aBA$$

Fig. 4. vnde per angulos ad priorem figuram relatos erit

$P :$ vim ſec. $BA = \operatorname{ſin.} ABC : \operatorname{ſin.} aBC$

$P :$ vim ſec. $BC = \operatorname{ſin.} ABC : \operatorname{ſin.} aBA$

ex

ex quibus analogiis nancifcimur

$$\text{vim fecundum } BA = \frac{P \sin. aBC}{\sin. ABC}$$

$$\text{vim fecundum } BC = \frac{P \sin. aBA}{\sin. ABC}.$$

Eft vero angulus $ABC = 180° - \alpha + \beta$, angulus

$$aBC = 90° + \beta \text{ et } aBA = 90° - \alpha,$$

quibus introductis fiet

$$\text{vis fecundem } BA = \frac{P \cos. \beta}{\sin. (\alpha - \beta)} \text{ et}$$

$$\text{vis fecundum } BC = \frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \beta)}.$$

Quod fi iam fimili modo pondus alterum deorfum vrgens $CQ = Q$ fecundum directiones trabium CB et CD refoluatur, ex praecedentibus manifeftum eft, ambas vires, ponderi Q aequiualentes, fequenti modo expreffas haberi:

$$\text{Vis fecundum } CB = \frac{Q \sin. bCD}{\sin. BCD},$$

$$\text{Vis fecundum } CD = \frac{Q \sin. bCB}{\sin. BCD},$$

quae autem expreffiones, ob angulos

$$BCD = 180° - \beta + \gamma;\ bCD = 90° + \gamma \text{ et}$$

$$bCB = 90° - \beta,$$

hanc induent formam:

$$\text{Vis fecundum } CB = \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)},$$

$$\text{Vis fecundum } CD = \frac{Q \cos. \beta}{\sin. (\beta - \gamma)}.$$

His inuentis notetur primo aequilibrium fubfiftere non poffe, nifi vires, fecundum directiones fibi contrarias BC et CB agentes, fint inter fe aequales, hoc eft, nifi fuerit

$$\frac{P \cos. \alpha}{\sin. (\alpha - \beta)} = \frac{Q \cos. \gamma}{\sin. (\beta - \gamma)}.$$

En igitur nacti fumus tertiam aequationem, duabus prioribus

bus iungendam, ex quibus ſtatus aequilibrii, ſiue terni anguli inclinationis α, β, γ, perfecte determinantur, cum fieri debeat.

$$\text{I}^\circ.\ m = a \operatorname{coſ.} \alpha + b \operatorname{coſ.} \beta + c \operatorname{coſ.} \gamma$$
$$\text{II}^\circ.\ n = a \operatorname{ſin.} \alpha + b \operatorname{ſin.} \beta + c \operatorname{ſin.} \gamma,$$
$$\text{III}^\circ.\ \frac{P \operatorname{coſ.} \alpha}{\operatorname{ſin.} (\alpha - \beta)} = \frac{Q \operatorname{coſ.} \gamma}{\operatorname{ſin.} (\beta - \gamma)}.$$

Poſtquam autem hi anguli rite fuerint determinati, videndum eſt, quantas vires termini fixi, ſeu fulcimenta A et D ſuſtinere debent. Ac primo quidem, cum inuenerimus vim ſecundum BA, baſin in directione Aα vrgentem $= \frac{P \operatorname{coſ.} \beta}{\operatorname{ſin.} (\alpha - \beta)}$, reſoluatur ea in duas alias vires, ſecundum directiones Ap et Aq agentes, eritque

$$\text{Vis horizontalis A}p = \frac{P \operatorname{coſ.} \alpha \operatorname{coſ.} \beta}{\operatorname{ſin.} (\alpha - \beta)},$$
$$\text{Vis verticalis A}q = \frac{P \operatorname{ſin.} \alpha \operatorname{coſ.} \beta}{\operatorname{ſin.} (\alpha - \beta)}.$$

Eodem modo ſi vis altera CD $= \frac{Q \operatorname{coſ.} \beta}{\operatorname{ſin.} (\gamma - \gamma)}$, baſeos terminum D in directione Dδ vrgens, reſoluatur ſecundum directiones Dr et Ds, orietur

$$\text{Vis horizontalis D}r = \frac{Q \operatorname{coſ.} \beta \operatorname{coſ.} \gamma}{\operatorname{ſin.} (\beta - \gamma)},$$
$$\text{Vis verticalis D}s = -\frac{Q \operatorname{coſ.} \beta \operatorname{ſin.} \gamma}{\operatorname{ſin.} (\beta - \gamma)}.$$

Corollarium I.

§. 6. Ex natura aequilibrii ſupra deduximus hanc aequationem:

$$\frac{P \operatorname{coſ.} \alpha}{\operatorname{ſin.} (\alpha - \beta)} = \frac{Q \operatorname{coſ.} \gamma}{\operatorname{ſin.} (\beta - \gamma)},$$

quae

quae, ſi vtrinque multiplicetur per coſ. β, abit in ſequentem:

$$\frac{P \cos.\alpha \cos.\beta}{\sin.(\alpha-\beta)} = \frac{Q \cos.\beta \cos.\gamma}{\sin.(\beta-\gamma)}.$$

Cum igitur huius aequationis pars dextra exhibeat vim horizontalem ſecundum D r, ſiniſtra vero vim horizontalem ſecundum A p, manifeſtum eſt, vires horizontales itidem, non obſtante differentia trabium, inter ſe eſſe aequales, vti in Problemate primo, pro caſu duarum trabium, obſeruauimus.

Corollarium II.

§. 7. Hic autem altera proprietas, ſupra in Problemate primo obſeruata, quod vires verticales aequentur ponderibus grauantibus, non tam facile perſpicitur; verum ſequenti modo haec proprietas pro hoc caſu demonſtrari poteſt. Cum ſit ſumma virium verticalium

$$A\,q + D\,s = \frac{P \sin.\alpha \cos.\beta}{\sin.(\alpha-\beta)} - \frac{Q \cos.\beta \sin.\gamma}{\sin.(\beta-\gamma)},$$

reſumatur aequatio ex natura aequilibrii deducta

$$\frac{P \cos.\alpha}{\sin.(\alpha-\beta)} - \frac{Q \cos.\gamma}{\sin.(\beta-\gamma)} = 0,$$

quae, ſi ducatur in ſin. β et ſubtrahatur a priori, ſummae ponderum P + Q aequanda, relinquit hanc aequationem:

$$\frac{P(\sin.\alpha \cos.\beta - \cos.\alpha \sin.\beta)}{\sin.(\alpha-\beta)} - \frac{Q \cos.\beta \sin.\gamma - \cos.\gamma \sin.\beta)}{\sin.(\beta-\gamma)} = P + Q,$$

quae manifeſto eſt identica.

Corollarium III.

§. 8. Sumatur $\alpha = -\gamma = 90°$ et $\beta = 0$, ita vt tota compages conſiſtat ex duabus trabibus verticalibus Tab. V. Fig. 6.

A B et C D, horizontali B C iunctis, eruntque vires horizontales $A p$ et $D r = o$, verticales vero $A q = P$ et
Tab. V. Fig. 7 $D s = Q$, vti rei natura postulat. Sin autem solus angulus β fuerit $= o$, ita vt media trabs B C in directione horizonti parallela binis reliquis A B et C D, vtcunque inclinatis, insistat, erunt vires

$$A p = \frac{P \, cos. \, \alpha}{sin. \, \alpha}; \; A q = P; \; D r = \frac{Q \, cos. \, \gamma}{sin. \, \gamma} \text{ et } D s = Q.$$

Casu igitur $\alpha = - \gamma = 45°$ fiet, vti requiritur,

$$A p = A q = P \text{ et } D r = D s = Q.$$

Scholion I.

§. 9. Quod si vim horizontalem, quam compages in vtroque termino exerit, littera V designemus, eamque tanquam cognitam spectemus, inde definire poterimus onera grauantia P et Q. Cum enim hoc modo sit

$$\frac{P \, cos. \, \alpha \, cos. \, \beta}{sin. \, (\alpha - \beta)} = V \text{ et } \frac{Q \, cos. \, \beta \, cos. \, \gamma}{sin. \, (\beta - \gamma)} = V,$$

colligimus

$$P = \frac{V \, sin. \, (\alpha - \beta)}{cos. \, \alpha \, cos. \, \beta} \text{ et } Q = \frac{V \, sin. \, (\beta - \gamma)}{cos. \, \beta \, cos. \, \gamma}.$$

Tum vero erit vis, qua trabes A B secundum suam longitudinem comprimitur $= \frac{P \, cos. \, \beta}{sin. \, (\alpha - \beta)} = \frac{V}{cos. \, \alpha}$; similique modo vis, qua trabes B C comprimitur

$$= \frac{P \, cos. \, \alpha}{sin. \, (\alpha - \beta)} = \frac{Q \, cos. \, \gamma}{sin. \, (\beta - \gamma)} = \frac{V}{cos. \, \beta};$$

denique vis, qua trabes C D sollicitatur, quae erat

$$= \frac{Q \, cos. \, \beta}{sin. \, (\beta - \gamma)} = \frac{V}{cos. \, \gamma}.$$

Vnde patet, has vires esse reciproce vt cosinus, siue directe vt secantes inclinationum.

Scholion II.

§. 10. Ex his autem viribus, vt supra §. 4. crassities cuiusque trabis determinari potest. Sit enim A longitudo et C C crassities columnae ligneae, oneri O sustentando paris, et posita crassitie trabis $AB = ff$, trabis $BC = gg$ trabisque $CD = hh$, ob analogiam theorematis *Euleriani*,

$$O : \frac{C^4}{A^2} = \frac{V}{cos.\alpha} : \frac{f^4}{aa} = \frac{V}{cos.\beta} : \frac{g^4}{bb} = \frac{V}{cos.\gamma} : \frac{h^4}{cc}, \text{ erit}$$

Pro trabe A B crassities $ff = \frac{aCC}{A} \sqrt{\frac{V}{O\,cos.\alpha}}$,

- - - B C - - $gg = \frac{bCC}{A} \sqrt{\frac{V}{O\,cos.\beta}}$,

- - - C D - - $hh = \frac{cCC}{A} \sqrt{\frac{V}{O\,cos.\gamma}}$.

Scholion III.

§. 11. Ceterum notetur, formulas pro ponderibus grauantibus P et Q etiam sequenti modo exprimi posse:

$$P = \frac{V\,(sin.\alpha\;cos.\beta - cos.\alpha\;sin.\beta)}{cos.\alpha\;cos.\beta} = V\;(tang.\alpha - tang.\beta)$$

$$Q = \frac{V\,(sin.\beta\;cos.\gamma - cos.\beta\;sin.\gamma)}{cos.\beta\;cos.\gamma} = V\;(tang.\beta - tang.\gamma).$$

Hinc si ambo pondera P et Q fuerint inter se aequalia, erit $tang.\alpha - tang.\beta = tang.\beta - tang.\gamma$; vnde patet, tangentes inclinationum α, β, γ, constituere progressionem arithmeticam.

Scholion IV.

§. 12. Quod si insuper trabium longitudines a, b, c, statuantur inter se aequales, ternae aequationes, an-

 gulos

gulos inclinatorios definientes, sequentem induent formam:

$$\text{I. } \frac{m}{a} = \text{cos.}\,\alpha + \text{cos.}\,\beta + \text{cos.}\,\gamma.$$

$$\text{II. } \frac{n}{a} = \text{sin.}\,\alpha + \text{sin.}\,\beta + \text{sin.}\,\gamma.$$

$$\text{III. } 0 = \text{tang.}\,\alpha - 2\,\text{tang.}\,\beta + \text{tang.}\,\gamma.$$

Hinc si fuerit altitudo $MD = n = 0$, erit

$$\text{II. } 0 = \text{sin.}\,\alpha + \text{sin.}\,\beta + \text{sin.}\,\gamma,$$

cui aequationi, pariter ac tertiae, satisfit sumendo $\beta = 0$ et $\gamma = -\alpha$; ex prima autem definitur angulus α, cum sit cos. $\alpha = \frac{m-a}{2a}$.

Problema III.

Tab. V. Fig. 8. §. 13. *Si compages ex quotcunque trabibus confecta in punctis fixis* A *et* E *insistat, iuncturae autem* B, C, D, etc. *grauentur ponderibus* P, Q, R, etc. *inuenire statum aequilibrii, in quem haec compages se componet, dein vires, quas in anterides in* A *et* E *exerit, ac tertio vires, quas singula trabes sustinere debet.*

Solutio.

Sit longitudo trabis $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, etc. ductisque rectis horizonti parallelis Bb, Cc, Dd, etc. vocentur inclinationes ad horizontem

$$BAa = \alpha;\ CBb = \beta;\ DCc = -\gamma;\ EDd = -\delta;\ \text{etc.}$$

eruntque hinc interualla

$$Aa = a\,\text{cos.}\,\alpha;\ Bb = b\,\text{cos.}\,\beta;\ Cc = c\,\text{cos.}\,\gamma;\ Dd = d\,\text{cos.}\,\delta;\ \text{etc.}$$

et

et perpendicula ex iuncturis demissa

$Ba = a \sin.\alpha$, $Cb = b \sin.\beta$; $Dc = -c \sin.\gamma$; $Ed = -d \sin.\delta$; etc. Vnde si fuerit distantia $AM = m$, et eleuatio alterius termini $ME = n$, habebimus statim has aequationes pro determinatione inclinationum:

$$\text{I. } m = a \cos.\alpha + b \cos.\beta + c \cos.\gamma + d \cos.\delta + \text{etc.}$$

$$\text{II. } n = a \sin.\alpha + b \sin.\beta + c \sin.\gamma + d \sin.\delta + \text{etc.}$$

Denotet iam V vim horizontalem, quam compages in vtroque termino A et E exerit, atque ex solutione Problematis praecedentis manifestum est, fore

$$V = \frac{P \cos.\alpha \cos.\beta}{\sin.(\alpha - \beta)} = \frac{Q \cos.\beta \cos.\gamma}{\sin.(\beta - \gamma)} = \frac{R \cos.\gamma \cos.\delta}{\sin.(\gamma - \delta)} \text{ etc.}$$

siue, pressione horizontali contra anterides vt cognita spectata, fient pondera

$$P = \frac{V \sin.(\alpha - \beta)}{\cos.\alpha \cos.\beta}; \quad Q = \frac{V \sin.(\beta - \gamma)}{\cos.\beta \cos.\gamma}; \quad R = \frac{V \sin.(\gamma - \delta)}{\cos.\gamma \cos.\delta}; \text{ etc.}$$

atque ex his aequationibus, cum binis prioribus coniunctis, inclinationes, seu status aequilibrii determinari debet.

Circa vires, quibus singula trabs secundum suam longitudinem comprimitur, consultetur etiam solutio praecedentis Problematis, ac inuenientur:

Vis trabem AB comprimens $= \frac{V}{\cos.\alpha}$

\- - BC - - $= \frac{V}{\cos.\beta}$

\- - CD - - $= \frac{V}{\cos.\gamma}$

etc.

Supra enim iam obseruauimus, has vires esse inter se inuerse vt cosinus siue directe vt secantes inclinationum.

Scholion I.

§. 14. Cum igitur prima trabes A B terminum A vrgeat vi $= \frac{V}{cos.\,\alpha}$, inde oritur

Vis horizontalis $= V$ et

Vis verticalis $= V$ tang. α.

Simili modo pro altero termino E (considerando tantisper casum determinatum quatuor trabium) vis sollicitans est $= \frac{V}{cos.\,\delta}$, quae resoluta dat

Vim horizontalem $= V$ et

Vim verticalem $= - V$ tang. δ.

Vnde patet vires horizontales iterum esse inter se aequales. Vires autem verticales iunctim sumtae summae ponderum aequales esse debent, hoc est

$$V\,(\text{tang.}\,\alpha - \text{tang.}\,\delta) = P + Q + R.$$

Cum autem sit

$$P = \frac{V\,\sin.\,(\alpha - \beta)}{cos.\,\alpha\,cos.\,\beta} = V\,(\text{tang.}\,\alpha - \text{tang.}\,\beta)$$

$$Q = \frac{V\,\sin.\,(\beta - \gamma)}{cos.\,\beta\,cos.\,\gamma} = V\,(\text{tang.}\,\beta - \text{tang.}\,\gamma)$$

$$R = \frac{V\,\sin.\,(\gamma - \delta)}{cos.\,\gamma\,cos.\,\delta} = V\,(\text{tang.}\,\gamma - \text{tang.}\,\delta)$$

erit reuera

$$P + Q + R = V\,(\text{tang.}\,\alpha - \text{tang.}\,\delta).$$

Scholion II.

§. 15. Si igitur dentur longitudines trabium a, b, c, d, et interualla A M $= m$ et M E $= n$, vna cum ponderibus

deribus grauantibus P, Q, R, tot inde eruuntur aequationes, quot requiruntur, tam ad ſingulas inclinationes, quam ad vim horizontalem V, definiendas. Ita in figura 8, pro caſu quatuor trabium, quinque adſunt incognitae, ſcil. anguli inclinationis α, β, γ, δ vna cum vi V, totidemque aequationes, quae autem ita ſunt comparatae, vt nullo modo reſolui queant, propter plures formulas maxime irrationales. Quod ſi enim ſtatuere velimus tang. $\alpha = t$, erit

$$\text{ſin.}\,\alpha = \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}} \text{ et coſ.}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}.$$

Deinde vero cum ſit

$$\frac{V}{P} = t - \text{tang.}\,\beta, \text{ erit tang.}\,\beta = t - \frac{V}{P},$$

eodemque modo colligitur

$$\text{tang.}\,\gamma = t - \frac{V}{P} - \frac{V}{Q}; \text{ tang.}\,\delta = t - \frac{V}{P} - \frac{V}{Q} - \frac{V}{R}.$$

Quare ſi breuitatis gratia ponatur

$$\text{tang.}\,\beta = t - fV; \text{ tang.}\,\gamma = t - gV; \text{ tang.}\,\delta = t - hV$$

exiſtente

$$f = \frac{1}{P}; \; g = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q}; \; h = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R},$$

ita vt tantum duae adſint incognitae t et V, erit

$$\text{ſin.}\,\beta = \frac{t-fV}{\sqrt{1+(t-fV)^2}}; \text{ coſ.}\,\beta = \frac{1}{\sqrt{1+(t-fV)^2}};$$
$$\text{ſin.}\,\gamma = \frac{t-gV}{\sqrt{1+(t-gV)^2}}; \text{ coſ.}\,\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(t-gV)^2}};$$
$$\text{ſin.}\,\delta = \frac{t-hV}{\sqrt{1+(t-hV)^2}}; \text{ coſ.}\,\delta = \frac{1}{\sqrt{1+(t-hV)^2}};$$

qui valores ſi in duabus prioribus aequationibus, pro diſtantia A M $= m$ et altitudine M E $= n$ inuentis, ſubſtituantur, orientur hae duae aequationes:

$m =$

$$m = \frac{a}{\sqrt{1+tt}} + \frac{b}{\sqrt{1+(t-fV)^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+(t-gV)^2}} + \frac{d}{\sqrt{1+(t-hV)^2}};$$

$$n = \frac{at}{\sqrt{1+tt}} + \frac{b(t-fV)}{\sqrt{1+(t-fV)^2}} + \frac{c(t-gV)}{\sqrt{1+(t-gV)^2}} + \frac{d(t-hV)}{\sqrt{1+(t-hV)^2}};$$

quae autem ita ſunt comparatae, vt facile intelligatur, nullam dari viam, hinc binas incognitas t et V eruendi.

Scholion III.

§. 16. Sin autem quaeſtio inuertatur, ita vt praeter ſingularum trabium longitudinem a, b, c, d, etiam dentur inclinationes α, β, γ, δ, atque inſuper vis illa horizontalis V, qua anterides in A et E vrgentur, inde facile definiri poterunt pondera grauantia P, Q, R, vna cum interuallis m et n. Erit enim in genere:

$$m = a \operatorname{coſ}.\alpha + b \operatorname{coſ}.\beta + c \operatorname{coſ}\gamma + d \operatorname{coſ}.\delta + \text{etc.}$$

$$n = a \operatorname{ſin}.\alpha + b \operatorname{ſin}.\beta + c \operatorname{ſin}.\gamma + d \operatorname{ſin}.\delta + \text{etc.}$$

ipſa vero pondera grauantia erunt

$$P = V(\operatorname{tang}.\alpha - \operatorname{tang}.\beta)$$
$$Q = V(\operatorname{tang}.\beta - \operatorname{tang}.\gamma)$$
$$R = V(\operatorname{tang}.\gamma - \operatorname{tang}.\delta)$$
$$\text{etc.}$$

Haecque ſolutio inſignem vſum haberi poterit in experimentis, quae ſuper talibus trabibus compactilibus inſtituuntur.

Problema IV.

§. 17. *Si numerus trabium hoc modo iunctarum fuerit infinitus, trabium autem longitudines vt et pondus, quod ſin-*

singula trabecula sustinet, infinite paruae, inuenire curuam, ad quam istae trabeculae se component, dum in aequilibro subsistunt.

Solutio.

Sit A Y y curua, quam ista compages accipiat, dum in aequilibrium se componit, atque in axe horizontali A M vocetur abscissa A X $= x$ et applicata X Y $= y$, ipse vero curuae arcus A Y $= s$. Iam consideretur curuae elementum quodcunque Y $y = d\,s$, vnamquamque compagis trabeculam repraesentans; atque pro hoc elemento (demissa ex puncto y applicata proxima $y\,x$, ductaque recta Y u axi parallela) erit interuallum X $x =$ Y $u = d\,x$ et $u\,y = d\,y$; tum vero elementum arcus Y $y = d\,s = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}$, siue, posito $d\,y = p\,d\,x$, erit $d\,s = d\,x\,\sqrt{(1 + p\,p)}$. Tab. V. Fig. 9.

Vocetur nunc elementi Y y ad horizontem inclinatio, siue angulus y Y $u = \Phi$, erit tang. $\Phi = \frac{d\,y}{d\,x} = p$, sequentis vero elementi inclinatio cum sit $\Phi + d\,\Phi$, erit eius tangens $= p + d\,p$. Iam quia ponduscnlum, quo hoc elementum grauatur, est infinite paruum, ponatur id $= d\,\Pi$, et ob vim horizontalem, quam compages in termino A exerit, constantem, sit nobis nunc K, quod supra per V designauimus.

His positis quaelibet aequationum superioris Problematis, veluti R $=$ V (tang. γ — tang. δ), huc transferri poterit. Erit enim vis horizontalis V $=$ K, vis grauans R $= d\,\Pi$, inclinatio $\gamma = \Phi$ et $\delta = \Phi + d\,\Phi$, ideoque tang. $\gamma = p$ et tang. $\delta = p + d\,p$, quibus substitutis statim colligitur ista aequatio: $d\Pi = -K\,dp$, quae aequatio eſt pro *Catenaria inuerſa*, vti ex ſequentibus clarius patebit. Nota enim eſt proprietas huius curuae, a celeberrimo *Ioanne Bernoulli* inuenta, quod ſit dx ad dy vt pondus catenae ad potentiam grauantem. Spectata igitur vi fulcrum vrgente K vt effectum ponderis catenae, in ſenſum contrarium agentem, ſumma ponduſculorum grauantium exiſtente $= \Pi$, erit

$$dx : dy = -K : \Pi,$$

ex quo naſcitur aequatio $\Pi = -\frac{K\,dy}{dx} = -K\,p$, vnde fit differentiando $d\Pi = -K\,dp$, quae eſt ea ipſa aequatio, quam noſtra ſolutio ſuppeditauit.

Statim igitur ac lex, qua grauationes in ſingula elementa agunt, fuerit cognita, ſpecies curuae, ſiue curuatura A Y accuratius definietur. Tres autem pro lege grauationis caſus principales locum habere poſſunt: 1°.) Si vires grauantes elemento abſciſſae fuerint proportionales, quo igitur caſu poni conueniet $d\Pi = \lambda\,dx$. 2°.) Si pondera fuerint in ratione elementorum arcus, hoc eſt $d\Pi = \lambda\,ds$. 3°.) Si fuerit $d\Pi = \lambda\,y\,dx$, ita vt onera ſint in ratione ſpatiorum; quibus inſuper quartus caſus adiungi poteſt, quo compages a fluido ſuperincumbente premitur, cuius altitudo ſuper horizontali A M ſi ponatur $= b$, elementum Y y ſuſtinebit pondus columnae, cuius altitudo $= b - y$ et baſis $= dx$; tum igitur ponendum erit $d\Pi = (b-y)\,dx$. Hos ergo ſingulos caſus hoc loco ſucceſſiue percurramus.

Euolutio caſus primi.

§. 18. Cum igitur hoc caſu ſit $d\Pi = \lambda\,dx = -K\,dp$, erit integrando $\lambda x = \text{conſt.} - K\,p = C - K\,p$, vnde fit

$p =$

$p = \frac{C - \lambda x}{K}$. Statuatur $\frac{C}{K} = \alpha$ et $\frac{\lambda}{K} = \beta$, ita vt ſit $p = \alpha - \beta x$, vnde multiplicando per dx erit $p\,dx = dy = \alpha\,dx - \beta x\,dx$, ideoque integrando $y = \alpha x - \frac{1}{2}\beta xx$, vbi conſtantis additione non opus eſt, quia poſito $x = 0$ ſponte fit $y = 0$. Prodit autem etiam $y = 0$ caſu quo $x = \frac{2\alpha}{\beta}$; ex quo manifeſtum eſt curuam quaeſitam hoc caſu primo eſſe *Parabolam*, ex altera parte I in horizontem cadentem, ad diſtantiam $AI = \frac{2\alpha}{\beta}$. Si igitur capiatur punctum medium O, erit abſciſſa $AO = \frac{\alpha}{\beta}$, et applicata media $OM = \frac{\alpha\alpha}{2\beta}$, quae erit axis Parabolae, cuius parameter eſt $\frac{AO^2}{OM} = \frac{2}{\beta}$.

Euolutio caſus ſecundi.

§. 19. Cum hic ſit $d\Pi = \lambda\,ds = -K\,dp$ erit integrando $\lambda s = C - Kp$. Hic ergo arcus curuae aſſignatur, ex quo patet, eam fore rectificabilem. Quo autem aequationem inter coordinatas, obtineamus, loco ds ſcribamus $dx\sqrt{1+pp}$, fietque

$$dx\sqrt{1+pp} = -\frac{K}{\lambda}dp = -a\,dp,$$

exiſtente $a = \frac{K}{\lambda}$, vnde ſtatim integrando prodiret:

$$x = -a\,l\,(p + \sqrt{1+pp}) + C.$$

At vero cum ſit $dx = -\frac{a\,dp}{\sqrt{1+pp}}$, multiplicetur vtrinque per p, vt fiat

$$p\,dx = dy = -\frac{a\,p\,dp}{\sqrt{1+pp}},$$

eritque integrando $y = b - a\sqrt{1+pp}$, ex qua aequatione eruitur:

 $p =$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{((y-b)^2 - aa)}}{a},$$

vnde iſta aequatio colligitur:

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{(y-b)^2 - aa}},$$

quae eſt pro Specie *Catenariae inuerſae*, vti mox clarius patebit.

Conſideretur enim curuae punctum ſupremum M, vbi eius tangens horizonti ſit parallela, capiaturque verticalis, ſiue applicata media O M, pro axe. Cum igitur elementi in M angulus inclinatorius ſit $= 0$, erit etiam tangens $p = 0$, ideoque, ob $y = b - a\sqrt{1 + pp}$, fiet applicata media M O $= b - a$. Statuatur autem br. gr. M O $= f$ et A O $= g$, ſumtisque ſuper axe M O, abſciſſa M T $= t$ et applicata T Y $= u$, erit $x = g - u$ et $y = f - t$, atque $b = a + f$, vnde aequatio noſtra ſupra inuenta, $dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{((y-b)^2 - aa)}}$, hanc induet formam:

$$du = \frac{a\,dt}{\sqrt{((a+t)^2 - aa)}} \text{ ſiue } du = \frac{a\,dt}{\sqrt{(2at + tt)}},$$

quae eſt aequatio ſatis nota pro catenaria.

Pro rectificatione huius curuae notetur eſſe arcus

$$\text{M Y} = \int \sqrt{dt^2\,du^2} = \int \frac{(a+t)\,dt}{\sqrt{(2at + tt)}},$$

vnde colligitur integrando M Y $= \sqrt{2at + tt}$. Ex hac euolutione patet, quamlibet huius curuae portionem talem compagem trabium exhibere poſſe, quoniam ambae literae f et g, ex calculo excesserunt, per quas ſcilicet relatio inter coordinatas, ad ambos axes A O et M O relatas, exprimebatur.

Operae

Operae pretium erit naturam aequationis inter coordinatas t et u explorare et, quomodo altera per alteram tranſcendenter exprimitur, ob oculos ponere. Hunc in finem reſumatur aequatio differentialis

$du = \frac{a\,dt}{\sqrt{(2at+tt)}}$; ex qua fit $u = a\int\frac{dt}{\sqrt{(2at+tt)}}$, pro qua formula $\int\frac{dt}{\sqrt{2at+tt}}$ commode integranda ſtatuatur

$$t\,(2a+t) = (2a+t)^2\,zz, \text{ vt ſit } t = \frac{2azz}{1-zz},$$

eritque

$$dt = \frac{4azdz}{(1-zz)^2} \text{ et } \sqrt{2at+tt} = \frac{2az}{1-zz},$$

quibus ſuſtitutis erit

$$\int\frac{dt}{\sqrt{2at+tt}} = 2\int\frac{dz}{1-zz}.$$

Notum autem eſt eſſe

$$\int\frac{dz}{1-zz} = \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1+z}{1-z},$$

vnde colligitur $u = a\,l\,\frac{1+z}{1-z}$. Eſt vero $z = \sqrt{\frac{t}{2a+t}}$, quo valore reſtituto reperitur

$$u = a\,l\,\frac{\sqrt{2a+t}+\sqrt{t}}{\sqrt{2a+t}-\sqrt{t}}, \text{ ſiue}$$
$$u = a\,l\,\frac{a+t+\sqrt{2at+tt}}{a},$$

vbi conſtantis additione non opus eſt, quia poſito $t=0$, ſponte fit $u = l\,1 = 0$. Viciſſim autem abſciſſa t per applicatam y ſequenti modo determinari poteſt. Cum invenerimus,

$$u = a\,l\,\frac{1+z}{1-z}, \text{ erit } \frac{u}{a} = l\,\frac{1+z}{1-z}, \text{ ſiue } l\,e^{\frac{u}{a}} = l\,\frac{1+z}{1-z},$$

(denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas), ſiue $e^{\frac{u}{a}} = \frac{1+z}{1-z}$, vnde elicitur:

 $z =$

$$z = \frac{e^{\frac{u}{a}} - 1}{e^{\frac{u}{a}} + 1} = \sqrt{\frac{t}{2a + t}}, \text{ ideoque}$$

$$t = \frac{a\,(e^{\frac{u}{a}} - 1)^2}{2\,e^{\frac{u}{a}}}.$$

Euolutio caſus tertii.

§. 20. Cum hoc caſu, vti §. 17. videre eſt, ſit $d\Pi = -K\,dp = \lambda y\,dx$, erit multiplicando per p,

$$\lambda p y\,dx = \lambda y\,dy = -K p\,dp,$$

et ſumtis integralibus $\lambda yy = C - Kpp$. Pro conſtante C determinanda ponatur, in ipſo initio abſciſſarum A, vbi $y = 0$, fuiſſe $p = \alpha$, eritque $C = K\alpha\alpha$ et aequatio

$$\lambda yy = K(\alpha\alpha - pp), \text{ ſiue } yy = \tfrac{K}{\lambda}(\alpha\alpha - pp),$$

ex qua deducitur

$$pp = \alpha\alpha - \beta yy, \text{ exiſtente } \beta = \tfrac{\lambda}{K};$$

hinc extracta radice fiet

$$p = \tfrac{dy}{dx} = \sqrt{\alpha\alpha - \beta yy}, \text{ ideoque } dx = \frac{dy}{\sqrt{(\alpha\alpha - \beta yy)}}.$$

Hinc ob $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ foret arcus,

$$AY = s = \int dy \sqrt{\frac{1 + \alpha\alpha - \beta yy}{\alpha\alpha - \beta yy}}.$$

Ponatur br. gr. $\alpha\alpha - \beta yy = zz$, erit $yy = \frac{\alpha\alpha - zz}{\beta}$, ideoque

$$y\,dy = -\tfrac{z\,dz}{\beta}, \text{ hincque } dy = -\frac{z\,dz}{\sqrt{\beta}.\sqrt{\alpha\alpha - zz}},$$

quo ſubſtituto foret arcus

$$AY = s = -\tfrac{1}{\sqrt{\beta}} \int z\,d\sqrt{\frac{1 + zz}{\alpha\alpha - zz}}.$$

Arcus ellipticus, cuius rectificatio fruſtra tentaretur.

Cete-

Ceterum notetur, ex aequatione $dx = \frac{dy}{\sqrt{(\alpha\alpha - \beta yy)}}$ prodire $x = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ A fin. $\frac{y\sqrt{\beta}}{\alpha}$, unde colligitur $y = \frac{\alpha \sin. x\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}}$. Cafu igitur $x = 0$, fit etiam $y = 0$; tum vero fit adhuc $y = 0$ cafu $x = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$. Cum igitur fit $AI = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$, erit abfciffa $AO = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}$, et applicata media $MO = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$, tum vero parameter $\frac{AO^2}{OM} = \frac{\pi\pi}{4\alpha\sqrt{\beta}}$.

Euolutio cafus quarti.

§. 21. Supra iam vidimus, hoc cafu fore

$$d\Pi = -K\,dp = (h-y)\,dx,$$

vnde multiplicando per p, fit

$$(h-y)\,p\,dx = (h-y)\,dy = -Kp\,dp,$$

ideoque integrando $hy - \frac{1}{2}yy = -\frac{1}{2}Kpp$, vel adiecta conftante et fublatis fractionibus, erit $2hy - yy = C - Kpp$. Quod fi igitur, vti cafu praecedente ftatuimus, in ipfo termino A fuerit $p = \alpha$, pofito $y = 0$ fieri debet $0 = C - K\alpha\alpha$, vnde colligitur conftans $C = K\alpha\alpha$, quo valore fubftituto aequatio noftra integrata fiet

$y\,(2h - y) = K\,(\alpha\alpha - pp)$, ex qua deducitur

$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\alpha\alpha - \frac{1}{K}y\,(2h - y)}$, fiue

$$dx = \frac{dy\sqrt{K}}{\sqrt{\alpha\alpha K - y\,(2h - y)}}.$$

Iam referamus haec ad axem verticalem MO, pofitoque vt fupra $MO = f$ et $AO = g$, fit abfciffa $MT = t$ et applicata $TY = u$, et quoniam in puncto fupremo M eft $p = 0$, erit $2hf - ff = \alpha\alpha K$; et cum fit $x = g - u$ et

$y =$

$y = f - t$, his valoribus introductis erit

$$du = \frac{dt\sqrt{K}}{\sqrt{2bf - ff - 2by + yy}} = \frac{dt\sqrt{K}}{\sqrt{2b(f-y) - (f-y)(f+y)}}.$$

Est vero $f - y = t$ et $f + y = 2f - t$, vnde fit

$$du = \frac{dt\sqrt{K}}{\sqrt{2bt - t(2f-t)}} = \frac{dt\sqrt{K'}}{\sqrt{2at + tt}},$$

existente $a = b - f$, haecque aequatio iterum est pro curua ex familia catenariarum, quae autem non erit rectificabilis, nisi fuerit $\sqrt{K} = b - f = a$, qui casus cum secundo conuenit.

Ceterum ex iis quae supra §. 19. ad finem allata sunt, facile perspicitur, hoc casu fore,

$$u = \sqrt{K}.\, l\frac{a + t + \sqrt{(2at + tt)}}{a} \text{ et } t = a\frac{(e^{\frac{u}{\sqrt{K}}} - 1)^2}{2e^{\frac{u}{\sqrt{K}}}}.$$

PHYSI-

PHYSICA.

LYCIA HYBRIDA.

Auctore

I. T. KOELREVTER.

EXPERIMENTVM I.

Lycium barbarum, ♀.
Lycium afrum, ♂.

An. 1766. d. 11 Iul. et seq. Flor. plur.

Vid. Exper. inuerſ. VII.

Inter frutices arboreſcentes hic primus eſt hybridus. Generatio eius, ſi ♀ in fertiliori ſolo ac ſub dio vigeat, proſpere ſatis ſuccedit, rarius autem, ſi in ollam transplantata eſt. Semina d. 10 April 1767, in fimetum ſata poſt octiduum copioſe progerminabant. Frutices inde prognati plurimi vtrumque parentem incremento praecoci adeo ſuperabant, vt prima iam aeſtate floruerint egregie, novemque pedum altitudinem attigerint, cum Lycia barbara eiusdem aetatis vix duos cum dimidio aequarent, florumque nê veſtigium quidem proderent. Subſequenti etiam anno iam Maji initio novis iterum ſuperbiebant floribus,

ribus, quo tempore ne barbara quidem; multo minus afra, florere ſolent. Idem an. 1768 et 1770, ſub iisdem circumſtantiis euenit. Ita quoque copioſiſſimo per totam aeſtatem florum prouentu vtraque longe antecellebant.

Deſcriptio.

CAVLIS multo altior ac craſſior, quam ♀ et ♂; rigidior idem, magiſque aculeatus, quam ♀, aſt flexilior longe, leuiorisque armaturae, quam ♂.

FOLIA lineari-lanceolata; minora ac tenuiora, quam ♀, maiora ac craſſiora, quam ♂.

CALYX maior, longior, amplior ac obſcurius vireſcens, quam ♀; minor, breuior, anguſtior atque pallidior, quam ♂.

COROLLA infundibuliformis, violacea: maior. quam ♀, minor vero, quam ♂. Matris autem corolla ad rotatam, patris ad cylindraceam magis accedit; color illius ex rubicundo violaceus, pallidiſſimus, huius e violaceo purpureus, obſcuriſſimus. Ita quoque laciniae corollae ☿ inter longas et anguſtas ſiue ellipticas ♀, ac perbreues, latas ac obtuſas ♂, medium quaſi tenent.

STAMINA violacea, pallidula; longiora, quam ♀, aſt breviora, quam ♂.

PISTILLVM mediae inter ♀ et ♂ magnitudinis ac formae.

PERICARPIVM: Bacca rarior, miniacea, paene cylindracea ſiue obtuſe oualis, bilocularis, ſero demum autumno no matura. Semen vnum alterumue tantum in quouis loculo, vel etiam nullum. Bacca ♀ ovato-oblonga, ♂ ſubrotunda.

Pedunculi florum 5‴ longi. Longitudo totius floris, a baſi calycis vsque ad laciniarum corollae angulos $6\frac{1}{2}$‴. Amplitudo floris ab vno laciniae angulo ad alterum oppoſitum 4‴. Latitudo laciniarum corollae 3‴; longitudo earundem $2\frac{1}{2}$‴.

Hyemes noſtrates (*), niſi ſolito aſperiores ſint, aeque fere fert, ac barbarum, cum afri natura iis nunquam aſſueſcat. Turionibus ac reſectis ſtirpis ramulis facile propagatur.

EXPERIMENTVM II.

Lycium { barbarum. ♀.
afrum. ♂.

Sem. An. 1769. ſponte nata.

Ex his ſeminibus, an. 1770. ortae ſunt plantae ſex, quarum pleraeque patri naturali foliis anguſtioribus iam multo ſimiliores, quam ſub priori ipſarum ſtatu hybrido, adeoque tenerae erant, vt proxima hyeme ſub dio, ante floreſcentiam, perierint omnes.

(*) De regione Carlsruhenſi in Suevia intelligendus eſt Cl. Auctor, vbi experimenta inſtituta ſunt.

EXPERIMENTVM III.

Lycium $\left\{\begin{array}{l}\text{barbarum. } ♀. \\ \text{afrum. } ♂.\end{array}\right\}$ ♀.
Lycium afrum. ♂.
An. 1768. d. 15. Mai. et seq. Flor. plur.

Idem fere habitus plantarum duarum an. 1769. inde prognatarum, eademque sors, qualis priorum Exp. II.

EXPERIMENTVM IV.

Lycium afrum. ♀.
Lycium europ. ♂.
An. 1773. d. 14. Iun. Flor. 5.
Vid. Exp. inuerſ. V.

Plantae duae, hoc experimento an. 1774. pluresque aliae, an. 1778 enatae, inter vtrumque parentem exacte medium tenebant.

EXPERIMENTVM V.

Lycium europ. ♀.
Lycium afrum. ♂.
An. 1773. d. 17. Iun. Flor. 3.
Vid. Exp. inuerſ. IV.

Plantae duae, an. 1774 inde procreatae, prioribus Exp. IV. ſimillimae erant.

EXPERIMENTVM VI.

Lycium barbar. ♀.
Lycium europ. ♂.

An.

An. 1773. d. 13. Iul. Flor. pauci.
Vid. Exp. inuerſ. IX.

E pauciſſimis ſeminibus, an. 1774. vnicus tantum exortus eſt frutex, qui vtrumque parentem ex toto ſimulabat.

Copulationes Lyciorum aliae fruſtra huc vsque tentatae.

EXPERIMENTVM VII.

Lycium afrum. ♀.
Lycium barbar. ♂.
An. 1766. d. 18. Iul. Flor. 2.
it. An. 1768. d. 6. Aug. Flor. 15.
it. An. 1772. d. 25. Aug.
et ſeq. Flor. 20.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. I.

EXPERIMENTVM VIII.

Lycium $\left\{ \begin{array}{l} \text{barbar. ♀.} \\ \text{afrum ♂.} \end{array} \right\}$ ♀.
Lycium europ. ♂.
An. 1771. d. 14. Sept.
Flor. plur.
Conceptio nulla.

EXPERIMENTVM IX.

Lycium europ. ♀.
Lycium barbar. ♂.

An.

An. 1771. d. 25. Sept. Flor. I.
Conceptio nulla.
Vid. Exp. inuerſ. VI.

EXPERIMENTVM IX.

Lycium barbar. ♀.
Solan. Pſeudocapſ. ♂.
An. 1766. d. 1. Aug. Fl. I.
Conceptio nulla.

Explicatio Figurarum.

Tab. VI.

A. Lycii { barbari. ♀. / afri. ♂. } ramulus floridus.
B. Calyx diſſectus ac explicatus.
C. Corollae facies anterior.
D. Corollae facies poſterior.
E. Corolla ſecundum longitudinem diſſecta, cum ſtaminibus.
F. Piſtillum.
G. Bacca.

DE

DE CONFERVAE NATVRA, DISQVISITIO CHEMICA.

Auctore

I. G. GEORGI.

Postquam *Peyſonelli* inuentum de Lithophytis ad animalia referendis conſenſu et applauſu celebrari coepit, pluribus inter recentiores naturae ſcrutatores contigit in aliis quoque generibus corporum organicorum, quae ad Cryptogamas plantas olim ab Ill. Equite a *Linné* referebantur, obſeruaſſe ſenſum vitalem, motum ſpontaneum, et cum aemula Hydrae ſic dictae ſeu Polypi natura (gemmaſcendi et per ſectionem corporis in partes multiplicandi) alias quoque regni animalis proprietates; quibus permoti ea non pro ambiguis et intermediis, ſed pro veris animantibus declarare haud dubitarunt. Contra alii hodienum argumenta ſatis numeroſa protulerunt, quibus dubia iſta genera ad regnum vegetabile eſſe referenda, imo pro imperfectis potius plantis habenda, ſibi perſuadent.

Aliqui ex vtraque diſſentientium cohorte inter regnum animale et vegetabile tantum ponunt analogiae, tot enumerant affinitatum momenta, quibus vtrumque hoc regnum retis fere inſtar cohaeret; vt diſtinctiuos vtriusque

Regni characteres externos haud sufficere, sed corpora vniversa globi nostri terraquei non in *tria regna*, sed in *duo* tantum dispescenda esse statuant, quarum vnum vniuersum corporum organicorum, vegetabilis et animalis naturae, apparatum, alterum corpora bruta vel mineralia comprehendat; Organicorum vero corporum in duo Regna subdiuisionem, licet pro methodo vtilem, non tamen ab ipsa natura institutam docent.

Chemia potuisset litem dirimere, nisi eius quoque opera ex vtriusque naturae regni corporibus, educta et producta analoga, principia admodum affinia, eademque basis terrea e minerali regno assumta, cum aquea parte prodirent; vnde plantarum et corporum animalium analyses chemicae vtplurimum steriles obtinentur.

Attamen similitudo ista non tanta est, vt non chemia satis multa inter animalia et plantas, ex iis praesertim classibus, quae non ambiguae sunt naturae, differentiae momenta detegat; sic in vegetabilibus omnibus tendentia ad acescendum, fermentatio spirituosa et acida, alcali fixum vegetabile; dein mucilaginum eductorum acescentia, resinae, gummi-resinae, olea essentialia cum rectore, cera, camphorae, peculiares constituunt characteres. Animali contra regno propria: putrescentia alcalina, nulla fermentatione spirituosa acidoque praeuia, alcali volatile sub destructionem omnis ex hoc regno substantiae, (non excepta gelatina, lacte et adipe, ad vegetabilem naturam propius accedentibus) generatum, et sal ammoniacalis; deficientibus simul oleis essentialibus, camphora, cera et praeter paucas exceptiones, etiam resina.

Haec

Haec me adduxerunt vt, licet Naturae Myſtarum lites componendo imparem me ſentiam, ambiguorum corporum aliqua chemicae analyſi ſubiicerem, praeſertim quum pauca eorum hucusque chemice illuſtrata fuerint. Conſtabit inde ſaltem cuinam Naturae regno, quoad mixtionem, ſint analoga. Dabo hic primum vulgaris Conferuae riuularis et lacuſtris L. analyſin, quae licet motu vitali ab *Adanſonio* et Abbate *Corti* in alia ſpecie obſeruato haud gaudeant, tamen vti externa ſimilitudine, ita et principiorum chemicorum natura iſti conſentire, ſaltem proxime videbuntur.

Conferuas pro experimentis adhibitas, riuularem et lacuſtrem Auguſto menſe in ripa arenoſa oſtii Neuae fluuii, recedente aqua, promiscue collegi. Arena ſubtilis alba quaſi inſerta videbatur, neque repetita lotione, ſiccasve Conferuas conciſas in cribro agitando plane ſeparari potuit. Odor recentis et dum ſiccabatur, quod etiam in hypocauſto nonniſi lente factum eſt, paluſtris fuit, licet in puriſſima aqua creuerat; isque odor ne in ſicca quidem penitus abſuit.

Conferua recens vel ſiccata commanducantis ſaliuam vireſcente imbuit colore, guſtui ſenſum vix vllum excitans, et filamenta exſucca, tenacia ſatis relinquit. Siccata ad candelam facile comburitur, at ſine flamma, empireuma volatile ſimul ſpargens. Librae quatuor recentis, ex aqua deſtillatae, phlegma inſipidum, odore paludoſo, nullumque olei veſtigium dedere.

Siccatae Conferuae vnciae duae cum aqua iterato ebullientes, decoctum praebuerunt vireſcens, limpidum

 ſub-

ſubacidulo fere guſtu; quod evaporatione ad decem drachmas coactum, extracti formam habuit, conſiſtentia mellis, guſtu vix amarum; quod, per quatuor et vltra menſes aſſeruatum, nihil ſalini cryſtalliſabilis exhibuit, licet reagentia aliquid ſalis muriatici adeſſe teſtarentur. Reſiduum a coctura filamentis ſatis tenacibus, viridiuſculis conſtat, quorum maſſa ſiccata vnciam cum duabus drachmis efficit, et ad candelam viuida cum flamma, ſine fumo vllo, comburitur.

Vncia Conferuae ſiccatae in ſpiritu vini alcoholiſato extracta, infuſione pulcre viridem colorem liquido praebuit, digeſtione ſaturatum. Tinctura ſic parata gratum amarorem prodidit; qua euaporata et abluto reſiduo, octodecim grana reſinae vegetabilis nigreſcentis, ſiccae ſuperfuerunt, quae alba cum flamma incenditur, ſimul liquatur et odorem gratum ſpargit. Conferuae ſic extractae reſiduum ſiccatum, fuit ſex drachmarum, fragilis atque fuſcae ſubſtantiae.

Vnciae octo Conferuae ab adhaerente arena quantum fieri potuit depuratae, deſtillatione ex retorta vitrea ſequentia producta largiebantur:

1. Phlegmatis limpidi, inſipidi, paludem redolentis vnciam vnam.

2. Phlegmatis empireumatici, primum flaueſcentis, deinde ſaturatioris, collectim vnciam cum drachmis ſex.

3. Olei

3. Olei empireumatici nigrescentis atque satis crassi drachmam sesquitertiam; quod vero huius olei in retortae recipientis collo adhaeserat adustum, tantundem videbatur ponderis aequasse.

4. Residuum destillationis carbonaceum, pulueruleutum, vnciarum trium cum dimidia fuit.

Salis volatilis sicci nihil omnino apparuit, licet vasis recipientibus saepius permutatis, semperque luto bene munitis; odor tamen phlegmatis cum oleo destillantis aliquantum volatilis visus est.

Phlegma N°. 2. addito alcali deliquato lactescit, odoremque vrinosum, sed leuissimum prodidit; quiete deinde secedit oleum ex hoc phlegmate nigrescens.

Cum acidis nihil mutatur idem; ab oleo tamen separatum aliquantum acidis mouetur et odorem vrinosum amittet.

Cretae solutio in acido nitri hoc eodem phlegmate haud praecipitatur; mercurius eodem acido dilutus statim, et argentum post aliquod horas fusci sedimenti forma deiicitur.

Hepar sulphuris, digestione cum oleo tartari deliquati paratum, statim cum foetore turbatur, flauumque sedimentum deponit.

Tincturae Heliotropii aquosae mixtum phlegma laete rubrum colorem illico inducit, eundemque colorem chartae iſta coloratae tinctura ex eodem aſſumunt. Quae vero ligno Fernambucano et radice Curcumae tinctae ſunt chartae, nihil inde mutantur.

Caput mortuum, ſatis ponderoſum, ab arena tamen immixta ſeparari non poterat. In crucibulo calcinatum in cineres rubeſcentes et ſatis ponderoſos tranſiit, qui aqua bulliente abluti, drachmas ſex cinerum leuiorum eiusdem coloris praebuerunt, reliquo pondere per depoſitam arenam amiſſo.

Aqua, in qua eloti fuerant cineres filtrata, euaporatione reliquit ſalis rufeſcentis quindecim grana, lamellarum forma, cum immixtis teſſeris minutis. Hic ſal guſtu culinarem, cum amarore iuncta, refert, aëris humore non deliqueſcit, in igne crepitat ſine odore ſulphureo, cum acidis parum feruet, argentum in acido nitri ſolutum floccorum ſpecie deiicit. Vt itaque pro *ſale culinari*, nimio alcali onuſto habendus ſit, cuius pars, vi ignis amiſſo acido, alcalinam illam mixturam produxiſſe videtur.

Vt cineres et terream baſin Conferuae penitius ſcrutarer, iterum vncias eius octo, quantum poterat fieri depuratae, in crucibulo ignito ſucceſſiue combuſſi. Succendebatur flamma lenta, depreſſa, violacea, comite fumo ſpiſſo, odoris aliquantum volatilis. Carbo leuis, multo citius, quam qui a combuſtis agaricis obtinetur, in cineres rufeſcentes, grauiores abiit, quorum pondus fuit duarum et ſemis vnciarum, cum immixta ſcilicet arena, quae inter dentes aperte ſtridebat. Hac dein lotione ſegregata, ſal ex adhibita aqua prodiit ſimillimus illi, quem

ex

ex capite mortuo descripsi, culinaris nempe, cum tantillo alcali mineralis non saturati. Eiusque pondus vniuersum septendecim fuit granorum.

Leues *cineres* lotione depuratos, siccatosque calcinaui. Subtilissimi videntur, et particulas satis multas continent ferreas, magneti adhaerescentes, praesertim post praeuiam cum sebo vstionem. Gallarum quoque infusum inde nigrescit; sed cum acidis cineres isti vix quidquam mouentur.

Semidrachma horum cinerum, cum drachma salis tartari et dimidia boracis facile funditur in vitrum impurum seu scoriam virescentis coloris, quae aëri exposita humescit sensim, fit nigra, tandemque fere deliquescit. Hac feruenti aqua soluta, grana octodecim terrae nigrae, aliquantum vitrificatae superfuerunt; solutio vero limpida, sine vllo colore apparuit. Huic si affundas acidum vitrioli, sub efferuentiam insignis surgit hepatis sulphuris foetor, et sensim aucta acidi proportione color viridis magisque saturatus oritur, seruata tamen limpiditate liquoris adusque saturationem; qua perfecta, turbatur et sedimentum ponit, quod tamen denuo ex parte resoluitur, superstite post elixiuationem exigua (granor. sex) quantitate terrae siliceae, dilute coeruleae.

Liquor acido saturatus euaporatione generat crystallos exiguas, depressas, partim polyedras, perfecte hyalinas, in ore difficillime solubiles, subamaricantes, in igne cum crepitatione dissilientes, quae spatosae naturae esse videbantur. Vlteriore euaporatione producuntur crystalli

ſtalli tartaro vitriolato et alumine mixtae, quae ex parte in phialae pariete dendritica forma concreſcunt.

Drachma cinerum depuratorum in vncia ſpiritus vitrioli digeſta, eundem nullo colore tinxit. Liquor poſt colaturam, vt et aqua quibus cineres abluti fuerunt, acidum et ſtypticum ſaporis ſenſum excitabant, et ablutio cinerum, licet fervida inſtituta, multam aquam requirebat. Reſiduum ſcrupulos duos pondere ſuperauit. Liquori acido atque ſtyptico, qui limpidus manſerat, aliquantum alcali fixi ſoluti, ſed nequaquam ad ſaturationem, adfuſum eſt, cuius efferueſcentia viridem excitauit colorem, et terrei aliquantum, ſeliniticae, vt videtur, naturae praecipitauit. Euaporatione deinde inſtituta inſignes cryſtalli virides, pellucidae oriebantur: verum ſcilicet alumen, acido ſuperabundante foetum; ſimul apparuere paruulae cryſtalli, paruaque copia et albo colore, quae tartari vitriolati characteres ferebant. In hoc experimento viridis ille color, et nigreſcentia liquoris cum tinctura gallarum, indicabat acidum vitrioli ſimul cum terra aluminari particulas ferreas in cineribus contentas ſoluiſſe.

Semidrachma cinerum cum quinque drachmis Spir. nitri digeſta, e filtrato liquore, poſt ſaturationem ope Alcali fixi inſtitutam, ſedimentum calcareum album proiecit, cuius pars aliqua denuo reſoluta fuit, vt reſiduum ſiccatum trium modo granorum pondus aequaret.

Itaque libra (ſexdecim vnciarum) Conferuae lacuſtris et fluuiatilis exſiccatae, quae recens ex aqua educta, obiterque expreſſa quatuor fere librarum pondus efficit, per

per analyſin noſtram, ſubducta arena adhaerente haec circiter principia continet:

Phlegmatis partim aquei puri, partim empyreumatici, addito, quod in extracto aquoſo remanet circiter . .	vnc. viij.
Extracti aquoſi mucilaginoſi poſt exſiccationem .	vnc. vj.
Reſinae vegetabilis circiter	drach. v.
Phlegmatis aciduli empyreumatici, ſupra . .	vnc. iij.
Alcali volatilis aciditate abſorpti	veſtigium.
Olei empyreumatici, vltra	ſeſcunciam
Cinerum carbonaceorum ſine arena, circiter .	vnc. v.
Cinerum teneriorum fere	vnc. ij.
In iisque Sal. culinaris ex parte in alcalinam indolem decompoſiti, vſque ad . .	ſcrup. ij.

Cum terrae vitreſcibilis, aluminaris, calcareae et principii ferrei mixtura.

Nihil ergo olei eſſentialis aliorumue ſalium; omniaque principia vegetabilis naturae, nullis animali regno peculiaribus admixtis.

DESCRIPTIO
VESICVLAE FELLEAE TIGRIDIS,
EIVSQVE
CVM LEONINA ET HVMANA COMPARATIO.

Auctore

C. F. WOLFF.

Insignem omnino in plerarumque partium ſtructura ſimilitudinem inter tigrim et leonem reperi; multa tamen haud parui momenti diuerſa quoque in vtroque hoc animali inueniuntur; atque inter ea imprimis veſicula fellea referenda eſſe videtur. Ea enim quamuis in iis etiam in vtroque animali conueniat, quae maxime ſingularia in leonina obſeruabantur, (*) et quibus haec ab humana et plerorumque animalium caeterorum veſiculis diuerſa eſt, tamen non deſunt quoque varia in ipſa hac ſingulari ſtructura, quibus veſicula leonis a tigridis veſicula differt.

Hepar in tigri ſex lobis conſtat oblongis, plane ad marginem vsque poſtremum a ſe inuicem ſeparatis, nec niſi paruis portionibus carnis hepaticae inter ſe cohaerentibus. Horum qui dexterior medius, idemque et caeteris maior, iterum inciſus eſt, atque in duas diuiſus portio-

(*) Vide Commentar. nouor. Tom. XIX. Differt. De ſtructura interna veſiculae felleae leonis.

tiones. Inter quas veſicula fellea ea ratione haeret, vt ſolo fundo ſuo et libera ſit ab adhaeſione, et anterius prae hepate emineat, toto reliquo corpore autem inter binas iſtas portiones, ipſaque in carne hepatis immerſa, haereat.

Ab ea leonina ſtructura recedit, propiusque multo accedit ad humanam. In leone nimirum aeque atque in homine veſicula fellis ſuperficiei inferiori hepatis applicata eſt, eiusque communi tunica externa ſimplici obducta. Quo fundus non modo, ſed totum veſiculae corpus, et ipſum collum quoque, in inuerſo hepate protinus in conſpectum veniunt. Attamen ſunt quaedam in ipſo hoc leoninae veſiculae ſitu, quibus haec aliquomodo ad tigridis veſiculam inclinare, atque medium quaſi locum inter eam et humanam obtinere videtur. Ligamenta dantur peculiaria in veſicula leonis, quae ex tunica eius externa duplicata orta vtrinque de medio corpore exeunt, et ad ſuperficiem hepatis ſe applicant, firmiterque eidem adhaerent. His media pars veſiculae arctius ad hepar adſtringitur, eoque efficitur planior, vt vix in hac ſede de ſuperficie hepatis emineat; cum contra in partibus, fundo et collo propioribus, tumida ſit veſicula atque inflata. Humanam conſtat vbique aequaliter tumere, totaque ſua ſuperficie inferiori puluinata ad collum vsque liberam eſſe ab omni adhaeſione. Sic tigridis ergo et leonis veſiculae arctius et ligamentis fortioribus ad hepata ſua alligata atque adſtricta eſſe videntur.

Figura his tribus veſiculis fere eadem eſt, oblonga et fere pyriformis; neque videtur in caeteris quoque ani-

 ma-

malibus quadrupedibus, quorum hepar veſicula inſtructum eſt, valde ab ea figura differre. Incipit in omnibus ex ductu anguſtiori, quem cyſticum dicunt; inde continuo magis magisque amplitudine augetur, et finitur fundo clauſo inflato, qui partibus reliquis omnibus largior eſt. Haec, ni fallor, notiſſima veſiculae felleae figura communis eſt animalibus, quae eam habent, omnibus; niſi forte paulo anguſtior in aliis proportione et longior, in aliis largior et breuior inueniatur. Aliquid tamen in leonina, cum hanc obſeruarem, reperi peculiare reſpectu figurae, quo ſe ab humana et a reliquorum, quantum ſcio, animalium veſiculis diſtingueret. Non recta extenſus eſt ſacculus; ſed variis in ſedibus vno alteroue latere inflexus, quo tunicae, quibus veſicula efficitur, duplicatae introrſum in cauitatem ducuntur, ſeptaque producunt latiora, aut anguſtiora, quibus in loculamenta quaſi varia veſicula diuiditur. Circa partem imprimis poſteriorem eiusmodi inflexiones in veſicula leonina obſeruantur; ſolentque alternatim vtrinque poſitae eſſe, quo ductum quaſi ſerpentinum veſicula in his regionibus imitari videtur. Similis ergo et tigridis veſiculae figura atque fabrica eſt.

Deinde haec quaſi torta ſimul eſſe videtur, cuius in ſuperficie, ab hepate auerſa, rugae et crenae ſatis profundae apparent, quae a margine dextro oblique antrorſum ad fundum veſiculae et ſiniſtrorſum ad partem ſiniſtram decurrunt, vel a ſiniſtro eius latere incipiunt atque in dextrum oblique retrorſum tranſeunt. Maxima pars harum inflexionum obliquarum et torſionum poſteriorem veſiculae partem occupat. Quaedam tamen earum ſuper vniuerſam fere veſiculam et ad fundum vsque continuantur.

tur. Vna tandem eiusmodi inflexio eſt, quae inter reliquas notari meretur, et qua veſicula tigridis a leonis veſicula aeque atque obliquitate inflexionum et torſionibus ſe diſtinguit. Prope fundum ea eſt, duciturque praeter morem caeterarum trausuerſim circa veſiculam, eamque in hac ſede quaſi conſtringit, quo, quae reliqua eſt, eius pars ad ſundum vsque, extenditur tumidiorque atque inflata eſſe videtur. Ad eandem hanc ſedem vsque, vbi veſicula conſtringitur, immerſa haec quoque eſt, et abſcondita inter lobos hepatis. Quae vltra conſtrictionem autem ſupereſt eius pars caeteris magis inflata, ea ſola et libera eſt ab adhaeſione et prae hepate anterius eminet. Sic iſta pars ſitu figura et magnitudine diſtincta tota in veſicula tigridis fundus appellari meretur.

Veſicula fellea hominis tota aequalis eſt et aequaliter extenſa in ſuperficie ſua exteriori ſeu inferiori. In ſolo fine poſteriori, vbi veſicula eſſe deſinit et ductus fieri incipit, vel etiam in collo veſiculae, vna et altera leuior curuatura obſeruari ſolet. Ductus autem cyſticus ipſe variis in homine inflexionibus et curuaturis omnino notatur; vt ſpiralem quoque ei figuram nonnulli anatomicorum adſcripſerint.

Ligamentis tigridis veſicula tribus gaudet teretibus, quibus ad hepar reuincitur. Haec membranis latioribus, ex tunica veſiculae externa continuatis, obducuntur et inuoluuntur, cum iisque ad hepar ſe applicant; quemadmodum vteri ligamenta teretia in alis veſpertilionum continentur, in iisque ad latera peluis feruntur. Craſſa ſunt et robuſta haec ligamenta teretia et duplicatura tunicae ex-ternae vesiculae efficiuntur, in qua densa et dura cellulosa tela continetur. Duo eorum lateralia sunt et anteriora, tertium posterius et longitudinale seu obliquum. Hoc in ea sede vesiculam tenet, vbi pars eius maxime plicata et torta desinit, inter eam et mediam vesiculae partem, magis aequalem. Tum ita positum est, vt ex media vesiculae superficie retrorsum progrediatur primum, deinde flexum ad partem dextram hepati adhaerescat.

Anteriora duo teretes funiculi sunt, quae in vna membrana, vtrinque expansa, continentur. Membrana vesiculam in ea ipsa sede complectitur, vbi haec constricta est, inter partem eius mediam aequalem et fundum distinctum. Bina teretia ligamenta vtrinque a se mutuo discedunt, et vesicula iis ad binas lobi hepatici portiones alligatur; inter quas illa quasi abscondita haeret.

Sic patet, vesiculam tigridis in tres partes natura esse diuisam, quarum posterior a ductu cystico incipit et ad ligamentum posterius vsque se extendit. Ea quartam circiter totius vesiculae partem, aut paulo plus eo continet, efficitque ipsam eam regionem, quae intus multis variisque plicis et recessibus insignita est. Altera pars media est, quae inter ligamentum posterius et anteriora continetur, quaeque quasi vnam cum dimidia quartam vesiculae partem efficit. Haec aequalis est externe, et plicis interne caret. Tertia pars anterior et ipsa ea est, quam fundum dixi, quae notabili illa vesiculae constrictione a reliquis posterioribus partibus adeo manifesto distinguitur. Haec ergo ligamenta anteriora inter et extremum finem vesi-

veſiculae continetur, vnamque quaſi quartam longitudinis veſiculae partem efficit.

Leoni duo tantum ligamenta ſunt lateralia et transverſa, quae mediam fere veſiculam tenent, indeque vtrinque egrediuntur. Diuiſio tamen ſimilis in leone atque in tigride obtinet in partem poſteriorem, intus plicatam, quae inter collum in leone et ligamenta continetur; in mediam, plicis vacuam, quae ligamenta inter et fundum eſt, et in fundum ipſum. Humanam veſiculam ſimplici tunica externa, in externam hepatis tunicam continuata, hepati annexam eſſe conſtat; nec aliter niſi in collum corpus et fundum eſſe diuiſam.

Vt fundus autem merito haec pars anterior in tigride dici poſſe videtur, mediam procul dubio corpus veſiculae, collumque poſteriorem appellare recepta inter anatomicos denominatio ſuadet. Verumenim et ipſa in tigride haec pars veſiculae poſterior longa nimis eſt, nimisque notabilem totius veſiculae partem continet, quam vt ad collum referri poſſit, vel comparari cum ea minima parte, quae in humana veſicula eo nomine venit, et nimis praeterea ſimilis eſt haec pars illi, quae in veſicula leonis plicata intus et folliculoſa eſt, ſimiliterque inter ductum cyſticum et ligamenta continetur, et quae dimidiam fere in hoc animali totius veſiculae partem efficit. Accedit, quod aliqua huius partis portio in leone detur, cyſtico ductui proxima, et manifeſto diſtincta, quae merito cum collo veſiculae humanae comparari poteſt, et quae docet igitur, partem intus plicatam in tigride non minus quam in leone aliam, et maiorem collo, veſiculae partem eſſe;

esse; et naturam ergo non adeo vsque solitam eam diuisionem curare, vt in omnibus animalibus inueniatur.

Tunicae, quibus tigridis vesicula constat, pariter atque leoninae, cum iis omnino numero, natura, ordine, conueniunt, quibus humana efficitur. Neque dubito, quin in omnibus animalibus quadrupedibus vesiculae similibus sint compositae tunicis. Hoc solum vtrique, leonis et tigridis, vesiculae prae humana et caeterorum, ni fallor, animalium vesiculis peculiare est, vt variis in sedibus, imprimis in parte posteriori, intus plicata, tunicae interiores varie ab exterioribus secedant interstitiaque efficiant, quae densa duraque cellulosa replentur. Hinc vesiculae substantia, imprimis leoninae, in qua tunicae et frequentius et longius a se inuicem secedunt, tres passim et quatuor imo et quinque lineas crassa inuenitur. In humana vesicula tunicae vbique sibi parallelae, vbique sibi contiguae sunt, et vniuersa vesicula vbique tenuis, vbique aequalis.

Incisa vesicula fellea tigridis, partem posteriorem, leoninae analogam, ea tamen minorem, plenam reperi plicis, variae figurae et magnitudinis, sinibusque et recessibus, variae pariter indolis. Generatim et plicae et recessus maiores multo in leone, in tigride multo minores sunt; similitudo autem insignis, imprimis inter plicas vtriusque vesiculae intercedit.

Primum ergo in postrema vesiculae eaque angustissima parte, qua ex ductu continuatur cystico, moles continuo apparet plicarum conglomeratarum, quae cauitatem fere vesiculae in hac sede occupat. Indicaui in descriſcriptione veſiculae leoninae (Tomo Commentarior. nouor. XIX. pag. 383. 384.) qua ratione et ſimplices plicae et moles eiusmodi plicarum conglomeratarum efficiantur. Secedit vel neruea tunica vna cum villoſa a muſculoſa, vel ipſa haec poſterior cum binis prioribus ab externa veſiculae tunica, et interſtitium inter ſecedentes eamque, quae recta tranſit, quod oritur, denſa craſſaque celluloſa repletur. Sic intra veſiculam protuberantia efficitur, quae veſiculae cauitatem, vel aliquam eius partem in ea ſede occupat. Tum vero in ipſa protuberantia ſeu mole, intra veſiculam eminente, interna villoſa tunica porro a neruea variis in locis ſecedit, variasque ſui duplicatura plicas producit, quae baſibus ſuis ſingulae iſti protuberantiae inſident, marginibusque acutis in cauitatem veſiculae reſpiciunt. Atque ea ratione omnes plicae iſtae quaſi in vnam molem conglomerantur. Simplices autem oriuntur, dum ſola villoſa a neruea recedit, ſuique duplicatura plicas diſtinctas efficit.

Seriem quaſi hae plicae in principio veſiculae inter ſe efficiunt, quarum prima et ſecunda transuerſim poſitae marginibus ſuis acutis retroſum et ductum verſus cyſticum reſpiciunt, tertia vero, quarta quintaque et ſexta demum, transuerſae ſimiliter, acutis marginibus antrorſum ad veſiculam ſpectant. Simillima ſeries plicarum, in vnam ſimiliter molem conglomeratarum, in leoninae quoque veſiculae principio reperiebatur; modo vt plicae multo maiores in hoc animali eſſent, magisque a ſe mutuo diſtarent, et interſtitia loculamentaque maiora efficerent.

Continuo hanc feriem plicarum in tigridis veficula fouea excipit magna et profunda, elegantia ftructurae infignis, et vorticis maris fimillima. Ea plicis efficitur circularibus aut femicircularibus et concentricis, quarum exteriores maioresque fuperficiei internae veficulae aequales funt, interiores autem et minores, quo propius ad centrum commune accedunt, eo funt profundius in fubftantiam veficulae immerfae. Intimus denique circulus, qui integer eft, profundiffimam continet fpeluncam, quafi abyffum.

Poft hunc antrorfum alius fequitur eiusmodi vortex, fabrica tamen minus pulchra quam ille prior, et duo alii porro, iuxta fe inuicem pofiti, in parte veficulae latiori obferuantur. His fingulis in media parte fouea profundior eft, quae plicis circularibus minoribus, paucioribus pluribufue, circumdatur atque includitur. Interftitium autem inter vortices hos quatuor plicis obtufioribus repletur.

In leone vortices eiusmodi nulli reperiuntur. Sunt autem duo magni et ampliffimi folliculi in eo, integerrimi et fubrotundi anguftoque inter fe orificio communicantes. Horum parietes intus plicis transuerfalibus partim, partimque arcuatis exornantur; atque hi funt, ad quos vortices tigridis comparaueris, quibusque illi analogi effe videntur.

Denique tota haec pars veficae pofterior in tigride, quae plicis defcriptis et vorticibus repleta eft, magna fed fimplici plica transuerfali terminatur et a reliqua anteriori

riori parte, quae plicis caret, diſtinguitur. Similis in leone quoque magna latiſſima et egregia plica eſt, qua ſimili modo pars anterior rugoſa a poſteriori plicata et folliculoſa parte ſeparatur.

Rugis, quae nunc ſequitur in tigride vt in leone, tota reliqua veſiculae et maxima pars intus ornatur; plicae vero non porro reperiuntur; excepta vnica inſigni ſimplici, de qua continuo dicam. Rugae retiformes paſſim vel ſubretiformes eſſe videntur. Alibi arcuatim ducuntur; maximam partem autem vndulatim ſe mutuo excipiunt.

In ipſa ea ſede, vbi exterius ligamenta anteriora veſiculam tenent, vbi haec conſtricta eſſe videtur, quo fundus a corpore veſiculae diſtinguitur, inſignis intus et ſemipollicem lata plica transuerſalis haeret, qua ipſa conſtrictio efficitur, et qua intus cauitas fundi aeque a reliqua veſiculae cauitate diſtinguitur ac extus ligamentis et conſtrictione a veſicula fundus. Nullam in ipſo leone ad hanc ſedem veſiculae plicam, ne minimam quidem, inueni. Simplices rugae ſunt, quibus ad extremum finem vsque veſicula repletur. Et fundus in leone non magis quam in homine terminis notatur, niſi imaginariis et vagis, quibus a corpore diſtingueretur.

Sic facies eſt interna veſiculae felleae tigridis. Inſignes ſunt plicae et ſatis copioſae, figura ſingulae ſimiles valuulis ſemilunaribus vaſorum, modo vt non munere verarum valuularum fungantur. At enim cum leoninis ſi comparantur, paruae eſſe videntur et paucae et imperfectae;

ctae; atque id eo magis, cum adeo figura et ſitu et poſitione ſint ſimiles illis; quo quaſi veſicula tigridis imaginem leoninae imperfectiorem referre videtur.

Similitudo ergo omnino vera quoque exiſtit in hac corporis particula inter tigrim et leonem; quamuis ea ob varias diuerſitates interſperſas non adeo ſit luculenta. Et verus character, quo tigris cum leone ad vnum ordinem redigitur naturalem, vti per omnem procul dubio fabricam corporis diffuſus, veſiculae felleae quoque impreſſus exiſtit.

Aperto ductu cyſtico, inanem hunc reperi et vacuum plicis et cellulis in tigride aeque ac in leone. Laevis eſt intus in animali vtroque et ſtriis modo longitudinalibus notatus; eminentiis omnino caret.

Contrarium plane in homine obſeruatur, cuius veſicula plicis priuata fere, ductus contra refertiſſimus eſt. Sed pulchra haec fabrica humana, quae tam varia in variis biliferorum vaſorum partibus, nec cognita plane ac penitus, vt opinor, eſt, proprio ſermone definiri minutius que explicari meretur; idque eo magis, cum antequam iconem huius veſiculae exponam, conſultum mihi eſſe videtur quaedam praemonere de inconſtantia fabricae corporis humani generatim, et de eligendis ad illam repraeſentandam exemplaribus.

Fig. I.

'ab. VII. Veſicula fellea tigridis integra, ex hepate reſecta, figura magnitudine naturali. Situs vt in hepate ſurſum reflexo.

a. a. b.

a. a. b. Fundus, liber a ligamentis et adhaesione, inter lobos hepatis solus eminens, magisque reliquis partibus inflatus.

b. Fundi apex, seu finis extremus, qui in situ naturali ante hepar sursum respicit.

a. a. c. d. Tota haec pars ligamentis partim, partimque cellulosa hepati non modo adharet, sed latet quoque profundius inter lobos hepatis.

a. e. c. Latus ad hepar applicatum.

a. f. d. Latus ab hepate auersum.

a. a. e. f. Pars vesiculae plicis intus vacua.

e. f. c. d. Pars posterior plicis repleta et folliculosa.

g. h. Ligamenta anteriora lateralia, membrana inter se connexa, quibus anterior vesiculae pars hepati alligatur. *g* Quod ex latere hoc vesicae, quod repraesentatur, *h* alterum, quod ex opposito vesicae latere, deriuatur.

i. Ligamentum posterius longitudinale, quod in latere (*e. c.*) vsque ad diuisionem fere ductus cystici continuabat, et cuius ope haec pars (*e. f. k.*) hepati adhaerebat.

k. Ductus cysticus.

l. m. Duo ductus hepatici.

n. Ductus choledochus.

Fig. II.

Vesicula fellea longitudinali sectione aperta.

a. b. b. Fundi cauitas (fig. 1. *a. b. a.*)

b. b. Plica magna transuerſalis ſemilunaris, qua fundus a corpore diſtinguitur. Fundus rugis repletus eſt.

b. b. c. c. Pars veſicae anterior, quae plicis ſimiliter caret, et rugis, varie ductis, ornatur.

c. c. Plica altera magna ſemilunaris transuerſalis, qua pars anterior a poſteriori diſtinguitur.

c. c. c. Pars poſterior veſicae plicis plena (fig. I. *i. f. c. d.*)

e. f. Ductus cyſticus apertus.

d. d. Ligamenta anteriora lateralia ab inuoluente membrana liberata.

g. et *i.* Ductus hepatici.

h. Ductus choledochus.

k. Cauitas ſub plica (*c.*) recluſa, plicis longitudinalibus repleta.

l. m. Subſtantia veſiculae craſſior in his ſedibus; eius ſuperficies externa.

n. n. n. n. Vortices, ſeu folliculi plicati, leoninis folliculis analogi; quorum poſtremus elegantiſſime ſtructus, bini anteriores autem, iuxta ſe poſiti, valde profundi ſunt; dum cauitatibus ſuis et fundis ſub partem (*k*) producuntur.

o. Series plicarum conglomeratarum quae primum veſiculae principium occupat.

p. Lacuna in ductu cyſtico inſignis.

TRES

TRES ONISCORVM SPECIES DESCRIPTAE.

Ab

I. LEPECHIN.

ONISCVS ACVLEATVS.

Tab. VIII. Fig. 1.

Oniſcus thorace nudo, dorſo tribus ordinibus cuſpidum notato.

Deſcriptio.

Longitudo totius animalculi, exceptis antennis, XI. linearum. Caput hemiſphericum, oculi magni, protiberantes, coerulei. Os inferius ſitum in fouea rotundata pone inſertionem antennarum, protuberans denticulis quatuor, quorum duo ſuperiores, maxillam efficientes, validiores ſunt, inſtructum. Antennae IV. per paria diſpoſitae: par inferius magis validum quadriarticulatum: articulus capiti proximus breuiſſimus, ſecundus longior craſſior que complanatus, tertius breuior ſecundo et debilior, quartus longiſſimus ſetaceus. Thorax ſemiouatus gibbus, ſegmentis VI. quorum vnumquodque in medio tuberculo, vix nudo oculo conſpicuo, notatur; at in vltimo ſegmento inferior margo euidentibus cuſpidibus armatur; reliquum corpus tribus conſtat ſcutis, quorum latera ſunt plana in formam ſemi-

lunae

lunae efficta, in abdomine appendicibus trium parium pediformibus, articulatis, extremo fetaceis, inftructa; in dorfo autem tribus ordinibus cufpidum armata, quorum debiliores medium dorfum, fortiores vero vncinnatae, latera, occupant. Dedes VII. parium, quorum duo anteriora cheliformia, vnco acuto terminata, breuiora, reliqua longitudine crefcunt, ita vt vltimum fit longiffimum, quadriarticulatum, femora latiora fere triangularia.

Cauda tribus conftat fegmentis attenuatis, vbi aculei, ratione ad dorfum habita, funt debiliores, et tandem in aculeum complanatum, fubulatum et firmum exit; reliquam caudam conftituunt tria paria appendicum filiformium, quarum extremitates bifidae fetaceae. Color totius pulcre cinnabarinus. Locus mare album.

ONISCVS SCORPIOIDES.

Tab. VIII. Fig. 2. Onifcus thorace globofo ouato, glabro; cauda elongata, articulata, fpina fetis que bifidis terminata.

Defcriptio.

Curiofum atque fingulare animalculum tam ratione ftructurae fuae, quam ratione anomaliae partium. Caput valde exiguum, oculi prominentes approximati. Thorax vndique tegitur fcuto globofo ouato transuerfis atque femilunaribus rugis notato; ex cuius parte anteriori exeunt appendices duae breues, claudentes caput et antennas, quae funt IV. breuiffimae filiformes. Os inferius fitum exiguum, appendiculis IV. fetaceis minimis inftructum, quae, vti videtur, pro maxillis inferuiunt. Dorfum itidem tegitur fcuto,

fed

ſed molliori in formam coni truncati, cuius vertex caudam, baſis vero thoracem reſpiciunt; lineis circularibus tribus notatum, quae totidem dorſi ſegmenta repraeſentant. Pedes vtrinque VII; horum paria anteriora IV validiora, ex tribus articulis conflata, apice vncinnulo armata, antrorſum verſa, et quae pro lubitu animalculi ſub margine prominente ſcuti thoracici tanquam in vagina reconduntur; reliqua pedum paria retrorſum ſpectant. Cauda longitudinem totius corporis adaequat, tenuis, triquetra, conſtans articulis V. Horum vltimus medio in aculeum, ſat firmum exit, ad latera vero ſetis longis apice bifidis terminatur. Ad ripas maris albi copioſus. Longitudo totius animalculi X linearum.

ONISCVS CVSPIDATVS.

Tab. VIII. Fig. 2.

Oniſcus thorace articulato, tuberculoſo, ſegmentis dorſalibus VI, cuſpidatis.

Deſcriptio.

Caput prominulum a thorace diſtinctum inaequale, oculis diſtinctis protuberantibus. Antennae IV, quarum baſes conſtant articulis cylindricis breuioribus, apex vero exit in ſetam longam attenuatam. Os inferne ſitum, inſtructum maxillis hamatis euidentibus. Thorax articulatus oblongus, ſegmentis IV, quorum vnumquodque tuberculis III, ſat eleuatis, medio oblongiore, notatur, vltimum vero ſegmentum, praeter tubercula, cuſpidibus IV dorſum reſpicientibus inſtructum. Dorſum et abdomen conſtant itidem ſegmentis IV, quae ſulcis profundis atque euidentioribus diſtinguuntur.

margo inferior anteriorum ſegmentorum armatur cuſpidibus VI, ratione magnitudinis corporis, validis, vltimum vero ſegmentum, non niſi vnicam cuſpidem in medio gerit. Cauda in formam penicilli efformatur ex laminibus attenuatis mollioribus. Pedes VII parium, quatuor articulis conſtantes. Horum anteriores teneriores, hiſpidi; vltimi vero validiores, femoribus craſſioribus, complanatis, ſpina notatis; abdomen tegunt tria paria appendicum pediformium, baſi ſolidiore ſulcata, apice bifido filiformi. Longitudo totius, exceptis antennis, X linearum; color lateritius; locus, mare album.

ANTI-

ANTILOPE SVBGVTTVROSA DESCRIPTA

Auctore

A. I. GÜLDENSTAEDT.

Peregrinatores quam plurimi, qui Aſiam ac Africam viſitauerunt, multa de Gazellis ſeu Antilopibus, quadrupedibus forma elegantiſſimis, caprino ceruinoque generi affinibus reliquerunt, earumque fragmenta & exuvias muſeis europaeis tradiderunt. Datis hiſce inſiſtentes Zoologi ſyſtematici ſpecies varias numeroſiſſimae huius familiae determinandi ac auctores veteres neotericosque conciliandi ſtudio flagrauerunt, infelici autem ſemper ſucceſſu. Tandem illuſtriſſ. Comes de *Buffon*, in Tomo 12mo *hiſtoriae naturalis* tenebras has, cognitionem horum animalium impedientes diſſipare, nouamque lucem accendere incoepit, quam poſtea clariorem reddidit ill. *Pallas*, omnes notas Antilopum ſeu Gazellarum ſpecies ſyſtematicorum more, in *primo faſciculo ſpicilegiorum zoologicorum* exponens atque diſtinguens, easdemque, poſt nouiſſimas curas ill. *Pennant*, de hac quadrupedum ſtirpe (vid. *Ej. ſynopſis of Quadrupeds*) praeclare meriti, in *duodecimo faſciculo* in inſigne ſcientiae naturalis incrementum retractans.

 Zoolo-

Zoologos hosce celeberrimos in speciebus Antilopum determinandis nec sibimetipsis vbique satisfacere, nec inter se conuenire, nemini mirum videbitur, qui norit, quam paucas integras viderint, quamque pauciores adhuc dissecauerint. Errores eousque ineuitabiles erunt, donec exstabunt icones, descriptiones, dimensiones atque anatomiae singularum, quales omnibus numeris absolutas ill. *Pallas*, de Antilope Ceruicapra (vid. *fasc.* 1. *spicil. zool.*) atque de Antilope gutturosa & Saiga (vid. *fasc.* 12.) physiophilis communicauit. Reliquae, quas huc vsque possidemus, notitiae plerumque adeo incompletae sunt, vt minime sufficiant, ad distinguendas species huius generis arctiori affinitate cognatas.

Hanc difficultatem praesertim expertus sum conferens Gazellam (*Histor. nat. Tom.* 12, *Tab.* 23), Kenellam (l. c. *Tab.* 26) atque Corinnam (l. c. *Tab.* 27.) *Buffonii*, cum illa Antilope, quae campos ad australem caucasi pedem inter mare nigrum & caspium inhabitat, quam interim subgutturosam appello. Descriptiones horum animalium, quas ill. *Daubenton* disquisitionibus criticis *Buffonianis l. c.* addidit, ob defectum indiuiduorum integrorum valdopere mancae sunt; nec vllam anatomicam expositionem, si Corinnae ventriculos excipias, subministrant; nec dimensiones animalis iustas, sed ad exemplar effarctum taliter qualiter factas indicant; hinc ex illis nihil cum certitudine deduci potest. Nam omnes fere notae istorum trium animalium competunt etiam nostrae Antilopi subgutturosae, cornuum magnitudine, ac faciei & reliqui corporis colore, pro aetate varia, haud parum varianti; de qualitatibus autem, quas priuas habet nostra, ignora-

ignoratur, an iis animalia illa tria *Buffoniana* careant ex naturae decreto, an tantum per accidens.

Ad inopias has litterarias remouendas, atque ad facilitandam fpecierum affinium diftinctionem, decreui amplam ac iconibus dimenfionibusque illuftratam externarum internarumque partium Antilopis fubgutturofae defcriptionem naturae fcrutatoribus tradere, qualem fplendidiffima *CATHARINAE MAGNAE* munificentia ftipatus per Georgiam peregrinator, ex indiuiduis quinque adultis mafculis, iuffu *fereniffimi* HERACLEI, per Cardueliam & Cachetiam regis, mihi menfe Ianuario anni 1772 Teflifii oblatis conciunaui, quo in pofterum gnari, Arabiam & Palaeftinam, atque Africam feptentrionalem vifitantes, Antilopes feu Gazellas illis terris proprias cum noftra conferre, atque conuenientiam feu diuerfitatem absque haefitatione eruere poffint. Sed antequam ad defcriptionem accedam, liceat quaedam de nomine, de fynonymis, ac de qualitatibus animalis noftri praemittere.

Antilope haec fubgutturofa dicitur, quia caput laryngis in collo eximie prominet, tantum non adeo ac in Antilope gutturofa *Pallafii*, (vid. *Ej. fpicil. zool. fafc.* 12, *Tab.* 2), quae Caprea gutturofa *I. G. Gmelini* (vid. *Nov. Comment. Petrop. Tom.* V. *Tab.* 9.).

Antilope fubgutturofa mox defcribenda communi linguis armenae, georgianae, tataricae, turcicae & perficae, in prouinciis inter mare nigrum & cafpium fitis, nomine Dfchaïran (джанранЪ) appellatur, a quo Dféren, nomen a Mongolis & Ruffis in Dauuria Antilopi gutturosae impositum vix differt. Hac nominum barbarorum analogia deceptus *S. G. Gmelinus*, Dschairan Persarum, quem gregatim eminus in via a Baku ad Schamachiam viderat, et habitu fidens pro Cervo Capreolo vix declarauerat, alteri errori obnoxius pro Dséren Mongolorum seu pro Caprea gutturosa patrui sui *I. G. Gmelini* nimis praecipitanter declarauit (vid. *S. G. Gmelini Itiner. Tom.* 3. *pag.* 58.). Antilope seu Caprea gutturosa differt autem euidentissime ab Antilope subgutturosa: cornubus minoribus, lutescentibus, aliter flexis; colore capitis & trunci vniformi, non fasciato; area anali alba vltra caudam extensa; cauda griseo - fuscescente; sinu circa praeputium grumoso; gutture multo eminentiori, seu cartilagine thyreoidea maiore; scoparum in genubus defectu. Haec *S. G. Gmelini* hallucinatio eo magis releuanda est, ne credatur, Antilopem gutturosam *Pall.* ad occidentem maris caspii peruenire, a quo longissime distat. Iam certo certius ex commilitonibus *S. G. Gmelini* scio, illum nunquam Dschaïran Persarum seu nostram Antilopem subgutturosam coram habuisse, sed ceu animal ex illius sententia sat notum neglexisse. Eiusdem fere incuriae reus est *Kämpferus*, in *Amoenitatibus academicis* animal Persis Ahu dictum *pag.* 407 *icone* 1 repraesentans et *pag.* 403 ita describens, vt icon vix recognosci queat. *Icon Kämpferiana* quanquam rudissima sat accedit ad Antilopem subgutturosam, cui forte male nomen Ahu adpositum; nam Persae Antilopem, Dschairan appellant; Ahu autem illorum, rectius pro Ceruo Capreolo ecaudato haberi debet, quem *S. G. Gmelin* in *Tomo tertio Itinerarii germanici p.* 496 ex indiuiduo iuniori in prouincia Gilan obtento descripsit, de quo iterum mihi ex commilitonibus illius constat, quod

non

non altiſſimos montes, ſed tantum loca ſubmontoſa ſylvatica, vt Cervi ſolent, occupet. De reliquis ſynonymis, quae minus proprie ad me pertinent, eo lubentius taceam, cum iam opus egregium meritiſſimi Göttingenſium profeſſoris, praematura cheu! morte orbi litterato erepti, *Erxlebeni claſſis mammalium*, locupletiſſima ſynonymia abvndans exſtet, quod curioſi etiam in Antilopum genere cum emolumento conſulent.

Patria Antilopes ſubgutturoſae Perſia eſt. Inter mare caſpium & nigrum ſeptentrionem verſus vſque ad pedem auſtralem promontorii iugi alpini caucaſici, vix vltra gradum latitudinis 42 procedit. Ad Cyrum fluuium ab oſtio vſque ad confinia metropolis georgicanae *Teflis* in campis apricis, & planis, & collibus obſitis, ſat frequens eſt, ſyluas omnino reſpuens. Ex variis traditionibus accepi, eandem occidentem verſus vſque ad Conſtantinopolin, auſtrum verſus vsque ad Iſpahanum, orientemque verſus vſque ad Buchariam omnes regiones apricas occupare. Gregatim incedit ſemper, celerrimi curſus terrefacta. Per ſclopetum ex inſidiis vulgo per venatores occiditur. Odor animalis recenter mortui nullus. Caro ſapida, expetita. Pro pabulo ſibi eligit herbas aromaticas, amaricantes, praeſertim Abſinthium ponticum, quo rumen repletum inueni. Parit per Maium, teſte haedillo neonato, quem medio Maii circa Teflifium, hominum manibus captum, obtinui.

DESCRIP-

DESCRIPTIO

Antilopes ſubgutturoſae.

Imaginem animalis, magnitudine naturali octuplo mi-
Tab. IX. norem, *Tabula* IX ſiſtit. *Statura*, *magnitudine*, trunci *coloribus*, *pilorumque habitu* maximopere accedit ad Ceruum Capreolum ecaudatum, quem ſimul occiſum coram habui; ſed *caput* diuerſiſſimum, quoad cornua praeſertim. *Naſus* rectus obtuſus, naribus linearibus, diuergentibus, nudis, nigris terminatus. *Rictus* oris anguſtus, terminalis; *labiis* ſtrictis, nudis, nigricantibus, inferiore aliquantum breuiore. *Mentum* imberbe. *Myſtaces* ad latera naſi breviſſimae, detritae, paucae. *Oculi* laterales magni, nigricantes; membrana nyctitante ad angulum anticum albida; palpebris ſtrictis, margine nudis, atris; pilis breuibus, raris in medio palpebrae vtriusque, & ſetis pluribus, breuibus in verruca ſupraoculari. *Sinus lacrymalis* oblongus, a cantho antico deorſum deſcendens, labiis tumidis, nigris, nudis, collabentibus, fundo foraminulis octo maioribus perforato & plurimis minimis. *Auriculae* elongatae, cylindricae, acutae, erectae, extus pilis breuiſſimis veſtitae; intus liuidae, ordinibus tribus pilorum rigidiuſculorum, alborum obſitae, quibus accedunt ordines pilorum duo ad margines auriculae.

Cornua (*conf. Tab.* X & XI, cranium cum cor-
Tab. X. & XI. nubus, magnitudine naturali dimidio minori, ſiſtentes) pedalia, perennia, ſimplicia, concaua, fuſco-nigra, ſtriata; baſi tantillum compreſſa, ſuperficie exteriore planiuſcula, interiore conuexa, (vt ex fig. 2 Tab. XI patet, quae perepheriam cornu dextri, magnitudine et craſſitie naturali reprae-

repraeſentat, ſuperficie exteriore per *a*, interiore per *b* et angulo antico per *c* indicatis); apicem verſus teretia, apice laeuia, ceterum annulata; annulis 14 ad 23 (pro varia longitudine inter 8 & 12 poll. paris.); ad baſin approximatis, eminentioribus & horizontalibus; apicem verſus remotioribus, obſoletioribus, antrorſum obliquis, nonnunquam retrorſum bifidis; omnibus ad marginem poſticum ſubeuaneſcentibus. Situs cornuum a baſi vsque ad annulum vltimum ſuperiorem ſurſum & retrorſum tendens atque divergens; ſed apices laeues introrſum atque antrorſum curvati.

Collum compreſſum, elongatum, capite laryngis euidentiſſime prominulo, quod etiam in mare neonato auellanae magnitudine protuberat.

An etiam *femina* collo gutturoſo & capite cornuto gaudeat, affirmare vel negare nequeo, quia nec femineum indiuiduum obtinere, nec ex incolarum relationibus aliquid ſat certo comperire potui. Aiunt equidem, feminas cornubus carere.

Truncus oblongus, natibus decliuibus, pectore compreſſo, abdomine ſtricto; perinaeum latum, vellere veſtitum; ſcrotum longe pendulum, euidenter bilobum, piloſum; praeputium breue, conicum, pariter piloſum, apice nudiuſculo nigro; regio inter ſcrotum & praeputium media nuda, rubicunda, transuerſalis, in qua *papillae mammales* duae, conicae ſitae ſunt. Vtrinque ad mammas aliquantum retrorſum, in ipſis regionibus inguinalibus *ſinus* dantur *caeci*, ex duplicatura cutis orti, nudi, margine circulari patentes, fundo papilloſo mucum grumoſum luteſcentem, hircino foetore imbutum exſudantes.

 Cauda

Cauda ſpithamea, baſi teres, dein ſurſum dyſticha, compreſſa.

Pedes graciles ſubaequales, quorum anteriores antice ad genua *ſcopis*, ſeu faſciculo pilorum ſetaceorum, pollicarium, deorſum pendentium ornati ſunt. *Vngulae* in quolibet pede duae, pyramidatae, baſi ligamento ſemipollicem lato connexae, quod retrorſum adſcendit & etiam digitorum phalanges connectit, quarum ſecundae antice disiunctae ſunt, ita vt ſupra ligamentum vngularum foſſula triquetra adſit. *Vngulae ſpuriae* in quolibet pede pariter duae, conico compreſſae, breues, retrorſum ad primam phalangium flexuram ſitae.

De *velleris colore* ſequentia valent. *Facies* luteſcens, macula in dorſo naſi fuſceſcente picta, & nigro alboque faſciata; litura ſcilicet vtrinque albida, digitum transuerſum lata, ex angulo narium externo ſeu poſtico ad canthum oculi internum excurrente; alteraque vtrinque fuſceſcente eiusdem latitudinis, ex angulo oris ad ſinum lacrymalem tendente. Sed hae faſciae, quae in adultis iunioribus, cornubus vix 8 poll. longis & annulis tantum 13 exaſperatis, ſat euidentes ſunt, (vt ex capite magni-
Tab. XII. tudine naturali dimidio minori Tab. XII repraeſentato cognoſcere licet), in ſenioribus magis magisque euaneſcunt, adeo vt in illo indiuiduo, cornubus fere pedalibus, quale Tab. IX ſiſtit, fere nullae ſint; tandemque in grandaeuis facies tota vniformiter albida, deletis non ſolum faſciis, ſed etiam exſtincta omni lutei tinctura, vt in altero indiuiduo obſeruaui, cuius cornua nec longiora, nec pluribus annulis inſtructa fuerunt, illis Tab. IX exhibitis,

tis, ſed inter ſe, & ad annulum vltimum ſeu ſupremum, & ad apicem, quoad $1\frac{1}{4}$ poll. magis diſtabant. Caueant igitur ſyſtematici, ne ex faciei colore, pro aetate variabili, notas ſpecificas Antilopum ſumant. — *Auriculae* extus albido-luteſcentes, intus albae. — Luteſcenti-alba ſunt *collum ſubtus* totum a labio inferiori vſque ad pectus, nec non *pedes intus*; — niuea *pectus*, *hypochondria*, *abdomen* totum & *nates*, non vltra caudam; — cineraſcenti-brunnea *collum ſupra* & ad latera, atque *dorſum* totum cum *hypochondriis*, quae faſcia longitudinali, albido-luteſcenti, digitum transuerſum lata, ornata & verſus abdominis albedinem vmbra intenſiori fuſceſcenti-brunnea terminata ſunt; — *femora* & *crura extus* pariter ac dorſum cineraſcenti-brunnea, area in femoribus dilutiori; — *ſcopae* ad gambas anteriores infra carpi flexuram luteſcenti, albido & nigro ſtriatae; — *palmae* & *plantae* ab vngulis ſpuriis ad vngularum verarum baſin vſque, & corona tota vngularum nigrae; — *cauda* tota nigra, in grandaeuis pilis albis variegata.

Pilorum longitudo varia; in dorſo longiſſimi, bipollicares; in ventre breuiores; in pedibus, naſo & auriculis breuiſſimi. Tactu pili molliſſimi, praeſertim in abdomine, totum corpus obueſtientes, mammarum & ſinuum inguinalium regione tantum nuda.

In *haedillo neonato color* vniformiter fuſco-luteſcens; pectore, abdomine, atque humeris femoribusque interne niueis; cauda ſubtus & ad apicem nigricante. Ad vngularum iuncturam anticam tantum aliqui pili nigri, ceterum nullibi. Faſciae nec in facie, nec ad hypochondria;

 ſcopae

ſcopae ad carpum luteae, non nigro ſtriatae. Atque in hoc cornuum tubercula vix protuberantia inter pilos. Guttur auellanae magnitudine prominens in hoc animalculo, ab apice roſtri ad anum 1 ped. 8 poll. longo, & ad pedes anticos 1 ped. 5 poll. ad poſticos autem 1 ped. & 6 poll. alto, longitudine caudae $4\frac{3}{4}$ poll. & auricularum $3\frac{1}{3}$ poll. menſurae ſemper pariſinae.

Hiſce ſubiungam *dimenſiones partium externarum* Antilopes ſubgutturoſae adultae ſenioris, quae ſequuntur:

	poll.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad anum in linea recta - - - - - -	40	—
Longitudo capitis a roſtro ad occiput - -	9	—
Circumferentia roſtri pone nares - - -	6	9
Circumferentia oris - - - -	5	—
Diſtantia inter nares inferne - - - -	—	4
Diſtantia inter nares ſuperne - - -	1	4
Diameter inter canthos oculi - - -	1	3
Diameter perpendicularis inter palpebras - -	1	—
Diameter inter roſtrum & canthos anticos -	4	10
Diameter inter canthos poſticos & aurem -	2	9
Diameter inter canthos anticos in linea recta.	3	—
Diameter eadem in linea curua - - -	3	9
Diameter ſinuum lacrymalium - - -	—	10
Profunditas eorum - - - -	—	10
Diameter inter angulum ſuperiorem ſinuum lacrymalium & canthum anteriorem oculi - - - - -	—	5

Diame-

	poll.	lin.
Diameter inter angulum inferiorem ſinuum lacrymalium & canthum anteriorem oculi - - - - -	—	10
Diſtantia inter baſes cornuum interne - -	—	4
Diſtantia inter baſes cornuum externe - -	2	8
Diſtantia inter cornua maxima - - -	7	—
Diſtantia inter apices cornuum - -	6	6
Longitudo cornuum in linea recta - -	11	4
Longitudo cornuum in linea curua antica -	13	6
Longitudo apicis laeuis cornuum - -	2	4
Peripheria capitis ante cornua - - -	15	—
Longitudo auricularum a vertice ad apicem -	5	2
Diſtantia inter baſes auricularum - -	3	—
Longitudo colli a gula inflexa ad ſterni caput	10	—
Circumferentia colli ad gulam - - -	15	—
Circumferentia colli ad ſternum - -	17	—
Diameter perpendicularis colli in medio -	5	6
Circumferentia corporis pone pedes anticos -	27	6
Eadem ad proceſſum xyphoideum - -	29	—
Eadem ante pedes poſticos - - -	25	6
Diameter perpendicularis corporis ad apicem ſterni - - - - -	11	—
Longitudo caudae ab ano ad apicem oſſis coxygis - - - -	7	4
Longitudo eiusdem ad apicem pilorum extimorum - - - -	9	6
Longitudo a capite ſterni ad apicem - -	11	—
Longitudo ab apice ſterni ad praeputium - -	7	—
Longitudo a praeputio ad lineam transuerſalem mammalem - - - -	2	9

	poll.	lin.
Longitudo a linea transuersali mammali ad scrotum - - - -	1	2
Longitudo a scroto ad anum - - -	5	3
Longitudo scroti - - - - -	2	9
Latitudo scroti - - - -	2	6
Crassitudo scroti - - - -	1	5
Distantia inter mammarum papillas - -	1	3
Distantia inter sinus inguinales - - -	2	—
Diameter sinuum inguinalium - - -	—	10
Profunditas sinuum inguinalium - - -	—	10
Altitudo perpendicularis ab interscapulio ad apicem vngularum anticarum - -	26	6
Longitudo cubiti - - - -	7	2
Circumferentia cubiti - - -	3	3
Longitudo gambae anterioris - - -	6	—
Circumferentia gambae minima - -	2	2
Longitudo phalangum pedum anteriorum -	2	6
Longitudo vngularum verarum ad marginem anticum - - - -	2	2
Longitudo ab vngulis spuriis ad basin verarum	1	6
Latitudo vngularum verarum anteriorum - -	1	2
Altitudo a lumbis ad apicem vngularum posteriorum - - - -	28	6
Longitudo cruris a patella ad calcaneum - -	10	—
Longitudo gambae posterioris a calcaneo ad vngulas spurias - - -	9	—
Longitudo phalangum posteriorum - -	2	6
Longitudo vngularum verarum posteriorum ad marginem anticum - - - -	1	3

Longi-

	poll.	lin.
Longitudo ab vngulis ſpuriis poſticis ad baſin verarum - - - -	1	2
Latitudo vngularum verarum poſteriorum -	—	11

ANATOMIA
Antilopes ſubgutturoſae.

Buccae interne papillis conicis acuminatis obſitae, quarum anteriores liuidae, poſteriores albae. Dimidia antica *palati* pars rugis transuerſis duodecim exarata; quae aequales & planae, lineola intermedia disiunctae & ſitu ad hanc alternae; ante primam rugam tuberculum rhombeum; margo anterior palati rotundatus, obtuſus, edentulus, niger; poſtica palati pars alba, laeuis.

Dentes inciſivi inferiores octo, intermediis duobus latiſſimis, ceſtriformibus, vtrinque ſubſequentibus dimidio anguſtioribus, vtrinque duobus extimis linearibus auguſtiſſimis, longitudine omnes aequales & apice ſcindentes, (vid. Tab. XI fig. 3, quae crus maxillae inferioris ſiniſtrum repraeſentat). *Dentes canini* nulli; *molares* remoti, ſupra infraque ſex vtrinque, truncati, rugoſi; inferiorum primus ſeu anterior acutus et ſimplex, ſecundus & tertius obſolete bilobi, quartus & quintus euidenter bilobi, ſextus trilobus; ſuperiorum tres primi ſimplices, tres vltimi ſeu poſteriores bilobi, (vt ex fig. 1 & 3 Tab. XI patet).

Lingua oblonga, latitudinis pollicaris vbique aequalis, a ligamento ſublinguali ad apicem ſeſquipollicem, a baſi ad apicem quinque pollices longa; apice obtuſo, nigro,

gro, tenui, laevi; medio papillis conicis, rigidis, magnis, in triangulum diſpoſitis exaſperata; ad baſeos latera papillis nonnullis calyculatis obſita.

Epiglottis cordiformis, apice et marginibus antrorſum reflexis. *Oſſis hyoïdei* corpus ſphaerico-triangulum, cartilagineum, pollicem latum, horizontale, interſtitio ſuperiori alarum cartilaginis thyreoïdeae reſpondens et ad angulos eiusdem poſteriores duobus cruribus auctum, quorum vnum inferius, alterum ſuperius; crus inferius oſſis hyoïdei perpendiculariter ad margines laterales cartilaginis thyreoïdeae deſcendens, vix duos pollices longum, apice cartilagineum et acuminatum; crus ſuperius horizontaliter ad vertebras colli procedens, quatuor pollices longum, triarticulatum, articulo primo pollicari, ſecundo vix ſemipollicari, tertio fere tripollicari et apice bifido.

Cartilago thyreoïdea integra, perfecte naſiformis, apice obtuſo valde prominulo, diametro longitudinali trium pollicum, transuerſali ab apice ad partem poſticam $2\frac{1}{4}$ poll. exinde guttur tuberoſum, apice huius cartilaginis ſesquipollicem ante arteriam aſperam prominente. *Cartilagines aritenoïdeae* & *cricoïdea* nil ſingularis habent. Trachea diametro pollicari, ex annulis cartilagineis, tres lineas latis compoſita, quorum extremitates poſtice membrana duas lineas lata connectuntur. Haec omnia oculis lectoris exhibet figura 4 Tabulae XI, quae caput laryngis Antilopes ſubgutturoſae adultae magnitudine naturali repraeſentat: *A* margo poſticus alae ſiniſtrae cartilaginis thyreoïdeae, ab altero dextro interuallo duorum pollicum diſtans; *G* margo ſuperior cartilaginis eiusdem, cui corpus oſſis hyoïdei in in ſitu naturali incumbit; *B* apex eiusdem cartilaginis ſub gula prominens et collum ſubgutturoſum reddens; *D* rima glottidis, muſculis cricothyreoideis remotis conſpicua; *C* pars antica cartilaginis cricoïdeae; *F* annuli tracheae.

Glandulae thyreoïdeae duae, vtrinque ſolitarie infra marginem cartilaginis cricoïdeae ſitae, lateribus tracheae incumbentes, brunneae, tenues, oblongae, pollice breuiores, ſemipollice anguſtiores, quarum ſiniſtra ſub littera *E* fig. cit. exhibita eſt. —— Sub ſinu lacrymali ſupra deſcripto, ante oculos in fouea anteorbitali, (quam ſub litteris *r s* in Tab. X et in Tab. XI fig. 1 videre licet), ſita eſt *glandula* ouata, iuglandis minoris magnitudine, tunica muſculari externe veſtita, ſubſtantia ſtipata, muco ſebaceo-grumoſo nigricante ſcatens, qui e foraminulis in fundo ſinus obuiis digitis exprimi poteſt; hinc male *ſinus*, lacrymalis dicitur, rectius *anteorbitalis* dicendus. *Lacrymarum glandulae* ſolito modo in orbita ſitae ſunt, earumque ductus in marginibus palpebrarum hiant. —— Sub *ſinubus inguinalibus*, (quorum ſitum *Tabula* XXIV *Tomi* XII *Hiſt. natur. Buff.* bene exprimit), glandula conglobata nulla, ſed ſub cute *glandulae ſolitariae*, ſeminis miliacei magnitudine, ſubſtantiam grumoſam, luteam, hircine foetentem exſudantes.

Pulmo dexter quinquelobus; lobi quatuor longitudinaliter ad ſpinam ſiti, vltimo diaphragmati incumbente maximo, reliquis ſubaequalibus, quinto inter maximum hunc et cor collocato omnium minimo. *Pulmo ſiniſter* bilobus, lobo ſuperiore longiſſimo et ſinuato. Hinc ſeptem lobi pulmonales euidentiſſimi et octauus obſoletus. *Cor* in

 me-

medio pectore ſitum ſub oſſe ſterni, apice vix ſiniſtrorſum ſpectante, quatuor pollices longum, acuminatum. *Diaphragmatis* ſpeculum ouatum, ſeptem pollices latum.

Situs viſcerum abdominalium remotis tunicis obſervatur ita: in regione iliaca et inguinali ſiniſtra rumen, fundo in ipſa pubis regione, et ſub hoc ſupra criſtam oſſium pubis fundus inteſtini caeci; in regione iliaca dextra ſub coſtis curuaturae duae transuerſales coli; infra has ad regionem inguinalem dextram vsque, per omnem regionem epigaſtricam et vmbilicalem gyri inteſtinorum tenuium, quorum extrema pars ipſam peluim replet; cardiacam regionem occupant ventriculi ſecundarii; lien in imo hypochondrio ſiniſtro rumini arcte adhaeret; hepar fundum hypochondrii dextri adimplet, vix in epigaſtrium pergens, diaphragmati et ſpinae dorſali per ligamentum coronarium adnexum, deficiente ligamento lato ſuſpenſorio.

Hepar rotundatum, bilobum, lobo dextro maiore; accedente lobulo triquetro, tres pollices longo, ad lobum dextrum ſubtus obuio; latitudo hepatis a margine dextro ad ſiniſtrum octo pollicum, a margine antico ad poſticum quinque pollicum; craſſitudo maxima decem lineas non exſuperat.

Veſicula fellea ſubtus in medio lobi dextri hepatis ſita, ſeſquipollicem longa, anguſta, collapſa, bile carens, muco tantum luteſcente amaricante parietibus adhaerente, vt in tribus indiuiduis adultis obſeruaui. Hinc etiam ex hoc titulo, inter Ceruos & Capras haec Antilopum ſpecies medium tenet.

Lien

Lien patelliformis, fere ſex pollices longus, quatuor pollices latus, ſemipollicem craſſus, margine obtuſiori vsque ad medium ſuperficiei inferioris rumini adhaerens.

Ventriculorum Antilopes ſubgutturoſae figura & proportio omnino eadem, quae Corinnae *Buffonii* et *Daubentoni*, ſecundum *tab.* 28 et 29 *Tomi* 12 *Hiſt. natur.*, propria eſt. *Rumen* bituberculatum, inciſura tres pollices profunda ſinuatum, a cardia ad fundum inferiorem tredecim, et ad fundum ſuperiorem decem pollices longum. Tunica interna ruminis facillime ſecedens papilloſa; papillis ad inciſuram minimis tuberculatis, in fundis $2\frac{1}{2}$ lineas longis et vnam lineam latis, reticulum verſus longiſſimis, ſemipollicem adaequantibus, latitudine ſemper lineari, apice rotundo, ſubſtantia tenui compreſſa. *Reticulum* paruum, ſphinctere a cardia ruminis vix ſex pollicum interuallo diſtante, ſuperficie interna hexagonis, diametro ſemipollicari atque lateribus vnam lineam altis, papillulis breuiſſimis echinatis, cancellata. *Omaſus* ouato-acuminatus, tres pollices longus, diametro vix bipollicari, lamellis latiſſimis vnum pollicem altis, papillulis iis reticuli analogis ſed duplo longioribus muricatis. *Abomaſus* ſex pollicum longitudine, diametro ad omaſum quatuor, ad pylorum vnius pollicis, rugis internis laeuibus, raris, latiſſimis vnum pollicem altis. Nec aegagropilas, nec concreta bezoartica in indiuiduis tribus maſculis diſſectis vidi; nec ab incolis, quod alias inueniantur, comperi.

Inteſtinum tenue 571 pollices longum, diametro pollicari; *caecum* 11 pollices longum, diametro ſeſquipollicari; *colon* cum *recto* 207 pollices longum, diametro cum

 coe-

coeco aequali; ſcybala in recto ouata, ouinis ſimilia. *Pancreas* difforme, duodeno adnexum.

Renes figurae humanae, dextro duobus pollicibus altiore in ſitu naturali; longitudo eorum $2\frac{1}{2}$ poll., latitudo $1\frac{1}{2}$ poll., craſſitudo 1 poll.; ſubſtantia duplici et hilo renali ſat euidentibus. *Renes ſuccenturiati* difformes, tenues, albidi, parui. *Veſica vrinaria* ouata, tres pollices longa, in imo fundo peluis repoſita.

Teſticuli ouati duos pollices longi et fere ſeſquipollicem craſſi. *Epidydymis* cylindrica, diametro ſemipollicari, ad marginem internum teſtis decurrens et ad extremitatem inferiorem tuberculo ſemipollicari prominens. *Veſiculae ſpermaticae* oblongae, depreſſae, ſemiarcuatae, ſeſquipollicem longae, ſeptem lineas latae, duas lineas craſſae, ex inteſtinulo gyratim inflexo conflatae. *Vas deferens* duodecim pollices longum. *Bulbus vrethrae* cylindricus, craſſiſſimo muſculo veſtitus, tres pollices longus, diametro octo linearum. *Penis* cylindrico-compreſſus, quatuor linearum diametro, ab angulo conuergentiae radicum corporum cauernoſorum ad apicem glandis duodecim pollices longus, in medio in figuram S romani retrorſum curuatus per muſculum gracilem a perinaeo procedentem. *Glans* penis cylindrico-acuminata, vix trium linearum diametro, vnum pollicem et octo lineas longa, apice obtuſiuſculo, laeui, ex quo *vrethra* tenuiſſima longitudine trium linearum libere propendet. *Praeputium* margine extimo ad ſex pollices retractile, et circa marginem eundem interne tuberculis calloſis, albidis, ſemine miliaceo maioribus obſitum. *Proſta-*

tae

tae vtrinque ad bulbi vrethrae extremitatem anteriorem ſitae, compreſſo-ouatae, octo lineas longae.

Sceleton Antilopes ſubgutturoſae ſimillimum ſceleto Gazellae *Buffonianae*, quod Tabula XXV Tomi XII *Hiſt. natur.* repraeſentat. In oſſibus trunci & extremitatum differentiae minimae, quas ſuo loco enumerabo. Nec puto; illa in congeneribus magis diſcrepare. Sed cranii oſſa, quoad figuram & proportionem, imo numerum probabiliter in ſpeciebus veris huius generis adeo differunt, vt pariter ac in adfini ouillo & caprino genere in determinandis differentiis ſpecificis vtiliter adhiberi poſſint. Hinc curaui, vt conficiantur icones cranii, faciem anticam (Tab. X) et lateralem (Tab. XI fig. 1) oculis exhibentes magnitudine naturali dimidio tantum minores, quia dimenſiones figurarum *Buffonianarum* nimis paruae ſunt, adeo vt ſingula oſſa eorumque ſuturas diſtinguere non liceat. In iconibus his noſtris ſequentia notatu digniora ſunt: *b* oſſa roſtri; *c* oſſa maxillae ſuperioris dentes molares ſuſcipientia, foramine infraorbitali *d* perforata; *e* conchae naſi, extremitatibus anterioribus in narium cauitatem prominentes, vomere ſeparatae; *l* margo e iunctura oſſium roſtri ortus, pro adhaeſione ſepti narium cartilaginei inſeruiens; *f* oſſa naſi, conchis ad margines externos conſpicuis; *g* oſſa frontis, cornuum radicibus aucta et foraminibus ſupraorbitalibus *i* pertuſa; *h* os verticis vnicum; *m* os occipitis cum apophyſibus candyloidea *n* et maſtoidea *o*; *k* pars ſquamoſa et *q* pars petroſa oſſis temporum, cum apertura auris *p*; *r* oſſa zygomatica; *s* oſſa lacrymalia, quorum pars inferior cum parte ſuperiori oſſis zygomatici foſſam pro glandula illa ſupra deſcripta anteorbitali conſtituit,

tuit, quae fossae in craniis ouillis obseruabili perfecte analoga, sed aliquantum profundior est.

Vertebrae colli 7, processubus spinosis breuioribus quam in Gazella, iisque Corinnae (vid. Tab. XXX Tomi XII *Hist. nat. Buff.*) similibus, processu epistrophaei non dentiformi, sed semiannulari; vertebrae dorsi 13, processubus spinosis illis Gazellae (vid. Tab. XXV Tomi XII l. c.) aequalibus; vertebrae lumborum 6, processubus spinosis non antrorsum inclinatis, vt in Gazella, sed perpendicularibus, vt in Corinna; vertebrae ossis sacri spuriae 4; vertebrae ossis coxygis 12, quarum Cel. *Daubenton* in Gazella tantum 10 numerauit, vltimis tenuissimis forte deperditis. Costae 13, quarum 8 verae, 5 spuriae. Ossis sterni articuli 6, vltimo latissimo quadrato in processum xyphoideum triquetrum truncatum abeunte, qui cartilagine rotundata, plana, tenuissima terminatur. Cubitus, in medio praesertim, tenuior adhuc quam in Gazella *Buffoniana* atque adeo arcte cum radio coalitus, vt nil nisi crista radii esse videatur, quae infra extremitatem superiorem radii ad pollicis longitudinem rima tenui separata est.

Addamus dimensiones cranii Tab. X & XI repraesentati, nec non trunci & extremitatum, quo sceleton integrum animalis, cuius mensurae externarum partium illis, quas antea dedimus, perfecte aequales erant, secundum proportiones illi proprias innotescat, adhibito semper pede *parisino* in duodecim pollices diuiso, atque pollice 12 lineas continente.

Longi-

	poll.	lin.
Longitudo in linea recta ab roſtri extremitate ad ſuperficiem anticam radicis cornuum	5	10
Longitudo in linea recta a ſuperficie antica radicis cornuum ad foramen occipitis -	3	10
Longitudo ab extremitate oſſium roſtri ad apicem proceſſus maſtoidei in eodem plano horizontali ſitum - - - -	7	3
Latitudo frontis maxima inter orbitarum margines ſuperiores - - - -	3	—
Latitudo capitis maxima inter margines poſticos orbitarum - - - -	3	10
Diſtantia inter apices proceſſuum maſtoideorum	2	1
Diſtantia inter zygomata - - -	3	2
Diſtantia inter dentes molares ſuperiores vltimos - - - -	2	1
Diſtantia inter dentes molares medios - -	2	2
Diſtantia inter dentes molares anteriores - -	1	4
Latitudo ad extremitatem oſſium roſtri - -	—	8
Diameter inter aperturas aurium - -	2	7
Diameter perpendicularis inter oſſa palati & marginem anteriorem oſſis frontis -	2	3
Longitudo ab extremitate oſſium roſtri ad extremitatem anteriorem oſſium naſi -	2	4
Longitudo oſſium naſi - - - -	2	1
Diameter foraminis atlantis perpendicularis -	—	5
Diameter eiusdem transuerſalis - - -	—	9
Longitudo corporis epiſtrophaei, qui vertebrarum longiſſimus - - - -	2	1

Longi-

	poll.	lin.
Longitudo proceſſus ſemi-annularis epiſtrophaei	—	4
Altitudo proceſſus ſpinoſi per totum epiſtrophaeum decurrentis - - - -	—	9
Longitudo vertebrarum dorſi, ſubaequalium inter ſe - - - - -	—	9
Longitudo ſpinoſi vertebrae dorſalis tertiae proceſſus, qui omnium longiſſimus - -	3	2
Longitudo vertebrae lumborum quintae - -	1	—
Longitudo transuerſi vertebrae lumborum quintae proceſſus, qui omnium longiſſimus	1	8
Longitudo oſſis ſacri - - - -	2	9
Latitudo oſſis ſacri maxima ad extremitatem dorſalem - - - - -	2	11
Latitudo oſſis ſacri minima ad extremitatem caudalem - - - -	—	11
Longitudo vertebrarum oſſis coxygis ſubaequalium - - - - -	—	9
Diameter peluis inter ſymphyſin pubis et angulum oſſis ſacri - - - -	2	10
Diameter peluis transuerſalis ſuperior - -	2	4
Longitudo oſſium innominatorum maxima -	7	4
Longitudo coſtae primae, quae breuiſſima -	3	10
Longitudo coſtae nonae, quae longiſſima, in linea recta - - - -	7	7
Latitudo coſtae quintae, quae latiſſima - -	—	8
Latitudo coſtae decimae tertiae quae anguſtisſima - - - - -	—	$3\frac{1}{2}$
Longitudo oſſis ſterni - - - - -	8	8
Latitudo ſterni maxima ad proceſſum xyphoideum - - - - -	1	7

Longi-

	poll.	lin.
Longitudo ſcapulae ad marginem ſuperiorem -	5	—
Longitudo eiusdem ad marginem inferiorem -	5	3
Longitudo baſeos ſeu marginis poſterioris -	3	—
Altitudo maxima ſpinae ſcapulae - - -	—	8
Longitudo oſſis humeri - - - -	5	3
Diameter eius minima - - - -	—	7
Longitudo cubiti cum olecrano - -	7	5
Longitudo olecrani - - - -	1	10
Longitudo radii - - - - -	6	—
Longitudo carpi - - - - -	—	8
Diameter carpi - - - -	—	11
Longitudo gambae anterioris - - -	6	5
Diameter transuerſalis gambae anterioris in medio - - - - -	—	6
Longitudo phalangis primae anterioris - -	1	7
Longitudo phalangis ſecundae anterioris - -	—	10
Longitudo phalangis tertiae anterioris - -	—	10
Longitudo femoris - - - -	6	8
Longitudo patellae - - - - -	1	—
Latitudo patellae - - - -	—	9

 Longi-

	poll	lin.
Longitudo cruris - - - -	8	—
Longitudo tarſi - - - -	—	9
Latitudo transuerſalis tarſi - - -	—	11
Longitudo calcanei - - - -	2	—
Longitudo gambae poſterioris - - -	7	4
Diameter transuerſalis gambae poſterioris in medio - - - - -	—	6
Longitudo phalangis primae poſterioris - -	1	3
Longitudo phalangis ſecundae poſterioris - -	—	9
Longitudo phalangis tertiae poſterioris - -	—	11

ASTRO-

ASTRONOMICA.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES
FAITES À GENEVE

par

J. A. MALLET.

Les obſervations que j'ai l'honneur de préſenter à l'Illuſtre Académie des Sciences, ſont 11 occultations d'étoiles par la Lune faites à Genève dans mon obſervatoire dans les années 1775, 1776 & 1777. M. *Jean Trembley* & *Marc. Pictet* mes compatriotes très verſés dans l'aſtronomie, ont fait avec moi la plûpart de ces obſervations, & m'ont beaucoup aidé auſſi dans les calculs dont je donne ici les principaux réſultats. Les Elémens du calcul ont été pris dans les Tables de la Lune & du Soleil de *Mayer* imprimées à Londres en 1770; il n'y a que l'obliquité de l'écliptique qui pour les trois premieres obſervations ſeulement, a été priſe dans la Connoiſſance des Temps. La différence des méridiens de Genève & Greenwich a été ſuppoſée pour ces trois premieres obſervations de 24'. 6'' de temps, & pour les ſuivantes de 24'. 16''.

Les parallaxes de longitude & de latitude de la Lune ont été calculées par la methode de Mr. *Lexell*, ſuivant les formules qu'il a données dans les Ephemerides de Berlin de 1777. La poſition des étoiles a été priſe dans le Catalogue de *Bradley* imprimé dans le Nautical-Almanach de 1773, & dans celui de *la Caille* qui eſt dans *l'Aſtronomiae Fundamenta.* Lorsque l'étoile s'eſt trouvée dans les deux catalogues, on a pris une moyenne entre les deux poſitions données par ces deux auteurs.

Cette poſition a été reduite au moment de l'obſervation, par les formules ordinaires de préceſſion, d'aberration & de nutation, & en outre on a fait uſage des dernieres formules données par Mr. *de la Grange* dans le Recueil des Tables aſtronomiques de Berlin, pour calculer la variation ſéculaire en longitude & latitude.

Le réſultat de tous ces calculs eſt le tems vrai de la Conjonction, & l'erreur des Tables de la Lune. L'un & l'autre ont été calculés ſéparément pour l'Immerſion & l'Emerſion ſuivant la methode de Mr. *Lexell*, en faiſant uſage de la latitude de la Lune priſe dans les Tables, & on a ajouté à la ſuite du temps trouvé pour la Conjonction, la quantité dont il doit varier pour une petite correction faite au diametre de la Lune, à ſa latitude, & à ſa parallaxe horizontale, corrections que l'on pourra déterminer par la comparaiſon de la même occultation obſervée dans différens endroits, comme Mr. *Lexell* l'a fait avec beaucoup de ſagacité dans pluſieurs obſervations, & ſurtout pour celle de l'eclipſe de Soleil de 1769. δ déſigne le nombre de ſecondes, dont il faut augmenter le rayon de la Lune,

Lune, η l'augmentation de ſa latitude, & π de ſa parallaxe horizontale. Ces corrections produiſent auſſi un changement dans l'erreur de la longitude de la Lune donnée par les Tables : ce changement eſt le même que celui qu'on a trouve pour le temps de la conjonction & qu'on reduit en ſecondes de degré, mais il peut avoir un ſigne différent. Ainſi par exemple dans la 3^e obſervation, on trouve pour l'Immerſion le temps de la Conjonction de Regulus à $14^h\ 11'\ 0'',6 + (2,26\ \delta + 0,974\ \eta - 0,00\ \pi).''$, & en appellant Φ'' la ſomme des trois derniers termes compoſés de δ, η, & π, on aura $52'',4 + 0,49\ \Phi''$ pour le nombre de ſecondes dont la longitude de la Lune, calculée par les Tables, eſt trop grande.

Par l'Émerſion de la même occultation l'erreur des Tables en longitude eſt $54,''6 - 0,49\ \Phi''$ (en déſignant ici par Φ'', la variation $-2,24\ \delta - 0,93\ \eta + 0,00\ \pi$ trouvée pour le temps de la conjonction déterminée par cette Émerſion).

Lorsque l'Immerſion & l'Émerſion ont pu être toutes les deux obſervées, nous avons encore calculé le temps de la conjonction & l'erreur des Tables en longitude & latitude, par une autre methode qui n'employe pas la latitude abſolüe de la Lune, mais ſeulement les mouvemens de la Lune en longitude & latitude pendant la durée de l'occultation; cette methode eſt celle que Mr. *de la Lande* a donnée dans ſon Aſtronomie.

G I repréſente l'ecliptique, S le lieu de l'étoile, Tab. XIII. Fig. 1.
L le centre apparent de la Lune affectée de la parallaxe, au mo-

moment de l'Immerſion, F ſon centre au moment de l'Émerſion, F A & D E deux paralléles à l'ecliptique, D G, S H & E I des perpendiculaires à l'ecliptique; enſorte que F L ſera le mouvement de la Lune ſur ſon orbite apparente pendant l'occultation, A F L l'angle d'inclinaiſon de l'orbite apparente. H I la différence des longitudes apparentes de la Lune au moment de l'Immerſion & au moment de la Conjonction & E L la différence des latitudes apparentes de l'étoile & de la Lune au moment de l'Immerſion. Après avoir donné la valeur de ces quatre quantités calculées, nous en avons tiré les trois reſultats importants, le temps de la conjonction & l'erreur des Tables en longitude & latitude.

1. Obſervation.

Émerſion de Regulus, de la partie obſcure de la Lune obſervée par Mrs. *Mallet* & *Trembley* le 12 Decembre 1775 à $10^{h}. 27'. 57''. 8$ temps vray.

Calcul.

Différence des méridiens ſuppoſée entre Genêve & Paris 14'. 50''. de temps.
- - entre Genêve & Greenwich 24'. 6''.

Longitude du ☉ calculée par les Tables de *Mayer* - -	VIII^s.20°.48'.11''.5.
Aſcenſion droite du ☉ - - -	VIII. 19. 59. 25. 2.
Obliquité de l'écliptique priſe dans la Connoiſſance des temps - -	23. 27. 49.
Longitude vraye de la ☾ calculée par les Tables de *Mayer* - -	IV. 26. 9. 58. 6.

Lati-

Latitude vraye boréale de la ☾ -	- 0°. 48′. 56″. 9.
Mouvement horaire de la ☾ en longitude - - - -	- - 29. 28, 9.
Mouvement horaire de la ☾ en latitude - - - -	- - 2. 37, 0.
Parallaxe horizontale aequatorienne de la ☾ - - - -	- - 54. 20, 1.
Diamètre horizontal de la ☾ -	- - 29. 36, 7.
Diamètre de la ☾ augmenté à cauſe de ſon élévation - - -	- - 29. 40, 4.
Parallaxe dont la longitude vraye de la ☾ eſt augmentée - -	- - 48. 30, 7.
Parallaxe dont la latitude vraye de la ☾ eſt diminuée - -	- - 23. 6, 0.
Longitude apparente de Regulus tirée des Catalogues de *la Caille* & de *Bradley* -	IV^s. 26. 42. 52, 8.
Latitude apparente boréale de Regulus	- 0. 27. 34, 7.

Reſultat.

Temps vrai de la Conjonction le 12 Decembre 1775 à $11^h. 36'. 42''. 3 - 2,05\,\delta - 0,24\,\eta + 1,92\,\pi$.

Erreur dont la longitude de la ☾ calculée par les Tables de *Meyer* eſt trop grande $= 52''. 4 + 0', 49\,\Phi''$.

2. Obſervation.

Immerſion de Regulus, dans la partie obſcure de la Lune, obſervée par Mrs. *Mallet* & *Trembley* le 3. Mars 1776 à $5^h. 42'. 17''. 5$ Temps vray.

Calcul.

Différence des méridiens ſuppoſée
entre Genève & Paris de $14'. 50''$ de temps.
entre Genève & Greenwich de $24'. 6''$ de temps.

Obliquité de l'ecliptique priſe dans la connoiſſance de temps - -		-	23°.27'.49''.
Longitude du ☉ - - -	Par les Tabl. de *Mayer*.	XIˢ.	13. 46. 22, 6.
Aſcenſ. droite du ☉ - -		XI.	15. 3. 7, 7.
Longit. vraye de la ☾ - -		IV.	25. 44. 26, 2.
Latit. vraye boréale de la ☾ -		-	0. 56. 15, 0.
Mouv. horiz. de la ☾ en longit. -		-	- 29. 30, 3.
Parallaxe horiz. aequator. de la ☾		-	- 54. 7, 3.
Diamètre horiz. de la ☾ - -		-	- 29. 29, 7.
Diamètre de la ☾ augmenté -		-	- 29. 37, 8.
Parallaxe dont la longit. vraye de la ☾ eſt augmentée - - -		-	- 46. 51, 9.
Parallaxe dont la latit. vraye de la ☾ eſt diminuée - - -		-	- 21. 19, 8.
Longit. appar. de Regulus tirée de *Bradley* & de la *Caille* - -		IV.	26. 43. 15, 2.
Latit. appar. - id. - - -		-	0. 27. 35, 1.

Reſultat.

Temps vrai de la Conjonction le 3 Mars 1776 à $7^h. 43'. 46''. 2 + 2. 34\,\delta - 1. 16\,\eta + 2. 22\,\pi$.

Erreur dont la longit. de la ☾ par les Tables de *Mayer* eſt trop grande $= 55''. 2 + 0, 49\,\Phi'$.

3. Ob-

3. Obfervation.

Occultation de Regulus par la Lune, obfervée par Mrs. *Mallet* & *Trembley* le 30 Mars 1776.

Immerfion dans la partie obfcure à $14^h. 29'. 9''. 4$ } Temps vray.
Emerfion de la partie éclairée à 15. 23. 47. 8 }

Calcul.

Différence des méridiens
de Genève & Paris fuppofée de $14'. 50''$ de temps.
de Genève & Greenwich fuppofée de $24'. 6''$ de temps.

		Pour l'Immerf.	Pour l'Emerf.
Obliquité de l'eclipt. prife dans la connoiffance des temps - -		- $23°.27'.49''$.	- - -
Longitude du ☉ - - -		0^s. 10. 56. 9. 0.	0^s. $10°.58'.23''.6$.
Afcenf. droite du ☉ - -		0. 10. 3. 2. 9.	0. 10. 5. 7. 1.
Longitude vraye de la ☾ - -		IV. 26. 53. 0. 0.	IV. 27. 19. 49. 9.
Latitude vraye de la ☾ boréale		- 1. 7. 45. 9.	- 1. 10. 6. 5.
Mouvement hor. de la ☾ en longit.	Par les Tabl. de *Mayer*.	- - 29. 27. 0.	- - 29. 26. 9.
Mouvement hor. de la ☾ en latit.		- - 2. 34. 4.	- - 2. 34. 1.
Parallaxe horiz. aequator. de la ☾		- - 54. 11. 7.	- - 54. 11. 6.
Diamètre horiz. de la ☾ - -		- - 29. 32. 1.	- - 29. 32. 1.
Diamètre de la ☾ augmenté -		- - 29. 40. 3.	- - 29. 35. 9.
Parallaxe dont la longit. de la ☾ eft diminuée - - -		- - 22. 18. 3.	- - 22. 15. 1.
Parallaxe dont la latitude de la ☾ eft diminuée - - -		- - 46. 33. 4.	- - 48. 41. 9.
Longitude appar. de Regulus tirée de *Bradley & de la Caille*. - -		IV. 26. 43. 13. 2	- - -
Latitude appar. de Regulus id. - -		- 0. 27. 35. 1.	- - -

 Re-

Resultat.

Par l'Immersion: Temps vray de la Conjonction
le 30 Mars à $14^h. 11'. 0''. 6 + 2,26\,\delta + 0,97\,\eta - 0,005\,\pi$.

Par l'Emersion: Temps vray de la Conjonction
le 30 Mars à $14^h. 11'. 3''. 3 - 2,24\,\delta - 0,93\,\eta + 0,004\,\pi$.

Par un milieu entre l'Immersion & l'Emersion
le 30 Mars à $14^h. 11'. 2''. 0 + 0,01\,\delta + 0,02\,\eta + 0,00\,\pi$.

Erreur dont la longitude de la ☾ par les Tables
de *Mayer* est trop grande $\begin{cases} 52''. 4 + 0,49\,\Phi'' & \text{par l'Imm.} \\ 54''. 6 - 0,49\,\Phi''. & \text{par l'Emers.} \end{cases}$

Par la methode qui est dans l'Astronomie de Mr. *de la Lande* on trouve:

Mouvement de la ☾ sur l'orbite appar. pendant l'occultation F L $= 0°. 26'. 53''. 1$.

Inclinaison de l'orbite appar. A F L $= 0°. 25'. 47''. 3$.

Distance de l'Immers. à la Conjonct. appar. H I $= 13'. 24''. 9$.

Différence des latitudes apparentes de la ☾ & de l'étoile, pour l'Immersion E L $= 6'. 20''. 1$.

D'où resulte le Temps de la Conjonct. vraye à $14^h. 11'. 2''. 6$.

L'Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longitude de la ☾ trop grande $= 53''. 5$.

Et l'erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent la latitude de la ☾ trop petite $= 2''. 5$.

4. Ob-

4. Obſervation.

Immerſion de γ de la Balance, dans la partie éclairée de la Lune, obſervée par Mr. *Mallet* le 6 Avril 1776.

à $14^h. 55'. 50''$. = Temps vray.

Calcul.

Différence des méridiens ſuppoſée
entre Genève & Paris de $15'. 00''$. de temps.
entre Genève & Greenwich de $24'. 16''$. de temps.

Longitude du ☉ - - -	Par les Tabl. de *Mayer*.	$0^s. 17^\circ. 49'. 2'',2$.
Aſcenſ. droite du ☉ - -		0. 16. 25. 35,
Obliquité de l'ecliptique - -		- 23. 28. 00,
Longit. vraye de la ☾ - -		VII. 21. 42. 29, 4.
Latit. vraye boréale de la ☾ -		- 4. 59. 4, 4.
Mouvement hor. de la ☾ en longit.		- - 31. 38, 5.
Parallaxe horiz. aequator. de la ☾		- - 55. 53. 8.
Diamètre horiz. de la ☾ - -		- - 30. 27, 8.
Diamètre de la ☾ augmenté -		- - 30. 42, 8.
Parallaxe dont la long. vr. de la ☾ eſt augmentée - - -		- - 9. 6, 9.
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ eſt diminuée - - -		- - 47. 35, 2.
Longit. appar. de γ de la Balance tirée de *la Caille* & *Bradley* -		VII. 22. 00. 38, 2.
Latitude appar. boreale - id. - - -		- 4. 24. 32, 4.

Reſultat.

Temps vrai de la Conjonction le 6 Avril 1776
à $15^h. 10'. 54''. 7 + 3,13\,\delta + 2,49\,\eta - 1,81\,\pi$.

Erreur dont la Longit. de la ☾ par les Tabl. de *Mayer* eſt trop grande $= 17''. 8 + 0,53\,\Phi''$.

5. Obſervation.

Immerſion d'une étoile qui eſt entre la Balance & le Scorpion, dans la partie obſcure de la Lune, obſervée par Mrs. *Trembley* & *Pictet* le 25 Juillet 1776 à [illegible] Temps vray.

Calcul.

Différence des méridiens
de Genève & Paris ſuppoſée de 15′. 00″. de temps.
de Genève & Greenwich ſuppoſée de 24′. 16″. de temps.

Longitude du ☉ - - -	Par les Tabl. de *Mayer*.	IVˢ.	3°.23′.26′,9.
Aſcenſ. droite du ☉ - -		IV.	5. 42. 0, 2.
Obliquité de l'ecliptique - -		-	23. 28. 1, 0.
Longitude vraye de la ☾ - -		VII.	28. 22. 11, 9.
Latitude vraye boréale de la ☾ -		-	4. 54. 42, 3.
Mouvement hor. de la ☾ en longit.		-	- 32. 1, 9.
Parallaxe horiz. aequator. de la ☾		-	- 56. 27, 7.
Diamètre horiz. de la ☾ - -		-	- 30. 46, 4.
Diamètre de la ☾ augmenté -		-	- 30. 52, 7.
Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ eſt diminuée - - -		-	- 20. 58, 1.
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ eſt diminuée - - -		-	- 51. 4, 9.
Longitude appar. de l'étoile tirée du Catalogue de Flamſtead - -		VII.	28. 17. 24, 0.
Latitude appar. boréale de l'étoile id.		-	4. 4. 21, 5.

Reſultat.

Temps vrai de la Conjonction le 25 Juillet 1776
à $10^h. 29'. 58''. 7 + 1,87\,\delta + 0,09\,\eta - 0,78\,\pi$.

Erreur dont la Longit. de la ☾ par les Tables de *Mayer* eſt trop petite $= 42''. 5 - 0,53\,\phi''$.

6. Ob

6. Obſervation.

Immerſion de la précédente des deux auſtrales du quarré des Poiſſons, dans la partie éclairée de la Lune, obſervée par Mrs. *Mallet* & *Trembley* le 20 Aouſt 1777 à $10^h. 59'. 3'', 7$ Temps vrai.

Calcul.

Différence des méridiens
de Genève & Paris ſuppoſée de $15'. 00''$. de temps.
de Genève & Greenwich ſuppoſée de $24'. 16''$. de temps.

Longitude vraye du ☉ - - -	Par les Tables de *Mayer*.	IV^s. 28°. 6'.29'',0.
Aſcenſ. droite du ☉ - -		V. 0. 16. 59,
Obliquité de l'ecliptique - -		- 23. 28. 3,
Longit. vraye de la ☾ - -		XI. 24. 33. 22, 2.
Latit. vraye auſtrale de la ☾ -		- 4. 45. 16, 2.
Mouvement hor. de la ☾ en longit.		- - 36. 19, 6.
Parallaxe horiz. aequator. de la ☾		- - 59. 55, 6.
Diamètre horiz. de la ☾ - -		- - 32. 39, 8.
Diamètre de la ☾ augmenté - -		- - 32. 54, 3.
Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ eſt augmentée - - -		- - 7. 4, 7.
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ eſt augmentée - -		- - 53. 50, 6.
Longit. appar. de l'étoile tirée de *Bradley*		XI. 24. 56. 30, 0.
Latit. appar. auſtrale de l'étoile id.		- 5. 42. 33, 5.

Reſultat.

Temps vrai de la Conjonction le 20 Aout 1777
à $11^h. 37'. 27''. 3 + 1,69\,\delta + 0,36\,\eta + 0,51\,\pi$.
Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longitude de la Lune trop grande $= 7''. 1 + 0,61\,\Phi''$.

7. Ob-

7. Obſervation.

Immerſion de la ſuivante des deux auſtrales du quarré des Poiſſons, dans la partie éclairée de la Lune, obſervée par Mrs. *Mallet* & *Trembley* le 20 Aouſt 1777 à $13^h. 6'. 13,'' 5$ Temps vrai.

Calcul.

Différence des méridiens

de Genève & Paris ſuppoſée de 15'. 00'' de temps.

de Genève & Greenwich ſuppoſée de 24. 16

Longitude vraye du ☉ - - -	par les Tables de *Mayer*.	IV^s.28°. 11'. 35'',6
Aſcenſ. droite du ☉ - - -		V. 0. 21. 52, 0
Obliquité de l'ecliptique - -		- 23. 28. 3, 0
Longitude vraye de la ☾ - -		XI. 25. 50. 22, 1
Latitude vraye auſtrale de la ☾ -		- 4. 47. 52, 6
Mouvem. hor. de la ☾ en longit.		- - 36. 20, 9
Parallaxe horiz. aequator. de la ☾		- - 59. 56, 9
Diamètre horizont. de la ☾ - -		- - 32. 40, 4
Diamètre de la ☾ augmenté - -		- - 33. 0, 8
Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ eſt diminuée - - -		- - 11. 34, 6
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ eſt augmentée - - -		- - 46. 50, 4
Longitude appar. de l'étoile tirée de *Bradley* - - - -		XI. 25. 50. 18, 0
Latitude appar. auſtrale, *id.* - -		- 5. 46. 23, 3

Reſultat.

Temps vrai de la Conjonction le 20 Aouſt 1777

à $13^h. 6'. 28'', 8 + 2, 33\,\delta + 1, 65\,\eta + 0, 97\,\pi$.

Erreur des Tables de *Mayer* qui donnent la Longitude de la ☾ trop grande de $13'', 4 + 0, 61\,\Phi''$.

8. Ob-

8. Obſervation.

Occultation de μ de la Baleine par la Lune, obſervée par Mrs. *Mallet* & *Trembley* le 23 Aouſt 1777.

Immerſion dans la partie éclairée à $10^h. 55'. 41'', 5$ } Temps vr.
Emerſion de la partie obſcure 11. 51. 36,0 }

Calcul.

Différence des méridiens
de Genève & Paris ſuppoſée de $15'. 00''$. de temps
de Genève & Greenwich de 24. 16

		Pour l'Immerſ.		Pour l'Emerſ.	
Longitude vraye du ☉	par les Tables de *Mayer*.	Vs.	$0°. 59'. 59'', 2$	Vs.	$1°. 2'. 14'', 1$
Aſcenſ. droite du ☉		V.	3. 2. 53, 7	V.	3. 5. 2, 9
Obliquité de l'ecliptique		-	23. 28. 3, 0	-	- - -
Longitude vraye de la ☾		I.	8. 7. 22, 7	I.	8. 40 55, 1
Latitude vraye auſtrale de la ☾		-	4. 48. 36, 0	-	4. 47. 31, 0
Mouvem. hor. de la ☾ en longit.		-	- 36. 1, 2	-	- 36. 0, 3
Mouvem. hor. de la ☾ en latit.		-	- 1. 9, 3	-	- 1. 11, 0
Parallaxe horiz. aequat. de la ☾		-	- 59. 48, 3	-	- 59. 47, 6
Diamètre horiz. de la ☾		-	- 32. 35, 6	-	- 32. 35, 2
Diamètre de la ☾ augmenté		-	- 32. 43, 3	-	- 32. 48, 3
Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ eſt augmentée		-	- 25. 56, 6	-	- 24. 1, 4
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ eſt augmentée		-	- 52. 10, 3	-	- 49. 47, 6
Longitude appar. de l'étoile tirée de *Bradley*		I.	8. 49. 2, 8	-	- - - -
Latitude appar. auſtrale *id.*		-	5. 34. 44, 8	-	- - - -

Resultat.

Par l'Immers. Temps vrai de la Conjonct. le 23 Aoust 1777 à $12^h. 4'. 22'', 0 + 1, 79\,\delta - 0, 66\,\eta + 0, 157\,\pi$.

Par l'Emers. à $12. 4. 30, 5 - 1, 69\,\delta + 0, 26\,\eta + 0, 897\,\pi$.

Par une moyenne entre l'Immersion & l'Emersion à $12^h. 4'. 26'', 2 + 0, 05\,\delta - 0, 20\,\eta + 0, 527\,\pi$.

Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop petite de $\left\{\begin{array}{l} 26'', 3 - 0, 60\,\Phi'' \text{ par l'Immers.} \\ 23, 0 - 0, 60\,\Phi \text{ par l'Emers.} \end{array}\right.$

Par la methode qui est dans l'Astronomie de Mr. *de la Lande* on trouve:

Mouvement sur l'orbite apparente pendant l'occultation, - - - FL = 0°. 31'. 39'', 6

Inclinaison de l'orbite apparente, AFL = 6. 16. 37, 8

Distance sur l'eclipt. de l'Immers. à la conjonct. appar. - HI = 15. 19, 7

Différ. des latit. appar. de l'étoile & de la ☾ à l'Immers. - EL = 5. 56, 1

D'où resulte le temps vrai de la Conjonction à $12^h. 4. 29'', 1$

l'erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop petite de - - 23'', 8

& l'erreur dont elles donnent la latit. de la ☾ trop grande - - - 5'', 4

9. Observation.

Occultation de δ précédente du Taureau par la Lune, observée par Mrs. *Mallet* & *Pictet* le 21 Septembre 1777.

Immersion dans la partie éclairée à $11^h. 11'. 42'', 3$ } temps vr.
Emersion de la partie obscure - 12. 8. 32, 0 }

Calcul.

Calcul.

Différence des méridiens
de Genève & Paris ſuppoſée - de 15′. 00″ } de temps
de Genève & Greenwich - de 24. 16 } de temps

		Pour l'Immerſ.	Pour l'Emerſ.
Longitude vraye du ☉ - -	par les *Tables de Mayer*	$V^s. 29^\circ. 12'. 54'',4$	$V^s. 29^\circ. 15'. 13'',6$
Aſcenſ. droite du ☉ - - - -		V. 29. 16. 48, 0	V. 29. 18. 56, 0
Obliquité de l'ecliptique - -		- 23. 28. 4	- - - - -
Longitude vraye de la ☾ - -		II. 2. 58. 13, 8	II. 3. 32. 15, 1
Latitude vraye auſtrale de la ☾		- 3. 22. 9, 6	- 3. 19. 54, 7
Mouvem. hor. de la ☾ en longitude		- - 35. 58, 5	- - 35. 56, 6
Mouvem. hor. de la ☾ en latitude		- - 2. 21, 7	- - 2. 22, 7
Parallaxe horiz. aequat. de la ☾		- - 59. 53, 3	- - 59. 51, 9
Diamètre horiz. de la ☾ - -		- - 32. 38, 3	- - 32. 37, 6
Diamètre de la ☾ augmenté -		- - 32. 51, 5	- - 32. 55, 9
Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ eſt augmentée - - -		- - 32. 27, 0	- - 29. 27, 8
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ eſt augmentée - - -		- - 44. 48, 5	- - 41. 17, 0
Longitude appar. de l'étoile tirée de *la Caille* & *Bradley* - -		II. 3. 45. 28, 8	- - - - -
Latitude appar. auſtrale *id.* - -		- 3. 59. 31, 3	- - - - -

Reſultat.

Par l'Immerſ. Temps vrai de la Conjonct. le 21 Septembre 1777 à $12^h. 30'. 19'',2 + 1,87\delta - 0,85\eta + 0,27\pi$.
Par l'Emerſ. à $12. 30. 18, 2 - 1,68\delta + 0,17\eta + 0,94\pi$.
Par une moyenne entre l'Immerſion & l'Emerſion
à $12^h. 30'. 18'',7 + 0,09\delta - 0,34\eta + 0,60\pi$.

Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la Longitude de la ☾ trop petite de 6″, 7 — 0, 60 Φ″ par l'Imm.
& de 11, 2 — 0, 60 Φ″ par l'Emerſ.

Par la methode qui eſt dans l'Aſtronomie de Mr. *de la Lande* on trouve:

Mouvem. ſur l'orbite appar. pendant l'occultation - - FL = 0°. 31′. 29,″6
Inclinaiſon de l'orbite apparente AFL = 10. 33. 47, 2
Diſtance ſur l'eclipt. de l'Immerſ. à la Conjonct. appar. - HI = 14. 37, 0
Differ. des latit. appar. de l'étoile & de la ☾ à l'Immerſion - EL = 7. 34, 0
D'où reſulte le temps vrai de la Conjonction à 12^h. 30′. 12″,2
l'erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop petite - de 11,″0
& l'erreur dont elles donnent la latit. de la ☾ trop petite de - - de 7,″2

10. Obſervation.

Occultation de δ ſuivante du Taureau par la Lune, obſervée par Mrs. *Mallet* & *Pictet* le 21 Septembre 1777.

Immerſion dans la partie éclairée à 11^h. 36′. 55″,2 } Temps vr.
Emerſion dans la partie obſcure à 12. 32. 46,4 }

Calcul.

Différence des méridiens
ſuppoſée de Genève & Paris de 15′. 00″ } de temps.
de Genève & Greenwich de 24. 16 }

Lon-

		Pour l'Immerſ.	Pour l'Emerſ.
Longitude vraye du ⊙ - -	par les Tables de *Mayer.*	Vˢ. 29°. 13'. 58'',8	Vˢ. 29°. 16'. 14'',8
Aſcenſ. droite du ⊙ - - -		V. 29. 17. 45, 0	V. 29. 19. 51,0
Obliquité de l'ecliptique - -		- 23. 28. 4, 0	- - - -
Longitude vraye de la ☾ - -		II. 3. 13. 20, 6	II. 3. 46. 46, 2
Latitude vraye auſtrale de la ☾		- 3. 21. 10, 1	- 3. 18. 57, 1
Mouv. horiz. de la ☾ en longit.		- - 35. 58. 5	- - 35. 56, 6
Mouvement. hor. de la ☾ en latit.		- - 2. 21, 7	- - 2. 22, 7
Parallaxe horiz. aequat. de la ☾		- - 59. 52, 7	- - 59. 51, 3
Diamètre horiz. de la ☾ - -		- - 32. 38, 0	- - 32. 37, 3
Diamètre de la ☾ augmenté -		- - 32. 54, 4	
Parallaxe dont la longit vr. de la ☾			- - 32. 58, 4
eſt augmentée - - -		- - 31. 24, 2	
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾			- - 27. 31, 3
eſt augmentée - - -		- - 43. 16, 1	- - 39. 44, 5
Longitude appar. de l'étoile tirée *de la Caille* & *Bradley* - -		II. 4. 0. 56, 7	- - - - -
Latitude appar. auſtrale *id.* - -		- 4. 8. 0, 8	- - - - -

Reſultat.

Par l'Immerſ. Temps vrai de la Conjonct. le 21 Septembre 1777 à $12^h. 56'. 9'',0 + 1,71\,\delta + 0,37\,\eta + 1,14\,\pi$.

Par l'Emerſ. à $12. 55. 57,3 - 2,02\,\delta - 1,14\,\eta + 0,01\,\pi$.

Par une moyenne entre l'Immerſion & l'Emerſion

à $12^h. 56'. 3'',1 - 0,15\,\delta - 0,38\,\eta + 0,57\,\pi$.

Erreur dont les Tables de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop petite - de $5'',9 - 0{;}60\,\Phi''$ par l'Immerſ.
& de $17,2 - 0,60\,\Phi''$ par l'Emerſ.

Par la methode qui eſt dans l'Aſtronomie de Mr. *de la Lande* on trouve:

Mouvement ſur l'orbite appar. pendant l'occultation FL = 0°. 30′. 1″, 4

Inclinaiſon de l'orbite apparente AFL = 11. 1. 43, 2

Diſtance ſur l'ecliptique de l'Immerſ. à la Conjonct. app. - HI = 16. 3, 3

Différence des latit. appar. de l'étoile & de la ☾ par l'Immerſ. - LE = 3. 46, 9

D'où reſulte le temps vrai de la Conjonct. à 12^h. 56′. 4″, 3

l'erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop petite - - de 8″, 6

& l'erreur dont elles donnent la Latit. de la ☾ trop grande de - - - 11, 9

11. Obſervation.

Occultation de δ précédente du Taureau par la Lune, obſervée par Mr. *Trembley* le 15 Novembre 1777.

Immerſion dans la partie éclairée à 6^h. 50′. 53″, 6 } Temps vr.
Emerſion dans la partie obſcure à 7. 36. 40, 7 }

NB. Le bord de la ☾ étoit très tremblant à l'Immerſion.

Calcul.

Différence des méridiens

de Genève & Paris ſuppoſée de 15′. 00″ } de temps
de Genève & Greenwich - de 24. 16 }

Longi-

		Pour l'Immerſ.	Pour l'Emerſ.
Longitude vraye du ☉ - -	par le Tables de *Mayer*.	$VII^s.23^\circ.47'.14'',2$	$VII^s.23^\circ.49'.\ 9'',7$
Aſcenſ. droite du ☉ - -		VII. 21. 24. 4,0	VII. 21. 26. 2,0
Obliquité de l'ecliptique - -		- 23. 28. 4,0	- - - -
Longitude vraye de la ☾ - -		II. 2. 55. 57,1	II. 3. 25. 00,0
Latitude vraye auſtrale de la ☾		- 3. 4. 24,5	- 3. 2. 18,9
Mouvem. hor. de la ☾ en longit.		- - 38. 2,1	- - 38. 1,1
Mouvem. hor. de la ☾ en latit.		- - 2. 44,1	- - 2. 45,1
Parallaxe horiz. aequat. de la ☾		- - 61. 27,8	- - 61. 27,1
Diamètre horiz. de la ☾ - -		- - 33. 29,8	- - 33. 29,4
Diamètre de la ☾ augmenté -		- - 33. 39,7	- - 33. 43,7
Parallaxe dont la longit. vr. de la ☾ eſt augmentée - - -		- - 34. 9,9	- - 33. 43,0
Parallaxe dont la latit. vr. de la ☾ eſt augmentée - - -		- - 48. 55,3	- - 46. 13,4
Longitude appar. de l'étoile tirée *de la Caille* & *Bradley* - -		II. 3. 45. 46,1	- - - -
Latitude appar. auſtrale *id.* - -		- 3. 59. 32,4	- - - -

Reſultat.

Par l'Immerſ. Temps vrai de ſa Conjonct. le 15 Nov. 1777

à $8^h.\ 9'.\ 31'',4 + 1,70\,\delta + 0,63\,\eta + 1,38\,\pi$.

Par l'Emerſ. à $8.\ 9.\ 41,7 - 2,08\,\delta - 1,36\,\eta - 0,16\,\pi$.

Par une moyenne entre l'Immerſion & l'Emerſion

à $8^h.\ 9'.\ 36'',5 - 0,19\,\delta - 0,36\,\eta + 0,61\,\pi$.

Erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent la longit. de la

☾ trop grande de $\begin{cases} 1'',7 + 0,63\,\Phi^h \text{ par l'Immerſ.} \\ 9,2 + 0,63\,\Phi \text{ par l'Emerſ.} \end{cases}$

Par

Par la methode qui est dans l'Astronomie de Mr. *de la Landé* on trouve:

Mouvement sur l'orbite appar. pendant l'occultation - - -	F L =	0°. 28'. 55'', 8
Inclinaison de l'orbite appar. -	A F L =	9. 32. 1, 5
Distance sur l'eclipt. de l'Immers. à la Conjonct. apparente -	H I =	15. 42, 8
Différence des latitudes appar. de l'étoile & de la ☾ pour l'Immers.	L E =	6. 7, 5

D'où resulte le temps vrai de la Conjonct. à $8^h. 9'. 34'', 6$

l'erreur dont les Tabl. de *Mayer* donnent la longit. de la ☾ trop grande - de 3'', 7

& l'erreur dont elles donnent la latit. de la ☾ trop petite de - - - de 5'', 1

RÉFLE-

RÉFLEXIONS SUR LES INÉGALITÉS DANS LE MOUVEMENT DE LA TERRE, CAUSÉES PAR L'ACTION DE VENUS

par

Mr. *L. EULER.*

Pour déterminer les dérangemens dans le mouvement des Planètes, qui ſont cauſés par leur action mutuelle, on ſe ſert ordinairement de la méthode, que j'ai employé le premier, ſi je ne me trompe, dans mes recherches ſur les irrégularités, qu'on obſerve dans le mouvement de Saturne. Or cette méthode ne ſçauroit réüſſir, à moins qu'on ne trouve moyen de transformer une telle formule irrationelle: $(1 \pm n \cos.\Phi)^{-\frac{3}{2}}$ dans une ſérie convergente, dont les trois premiers termes expriment déjà aſſés exactement la juſte valeur; ce qui n'a aucune difficulté dans tous les cas, où la lettre n marque une fraction très petite, puisque alors les trois premiers termes de cette ſerie: $1 \pm \frac{3}{2} n \cos.\Phi + \frac{15}{8} nn \cos.\Phi^2$ ne ſçauroient s'écarter ſenſiblement de la vérité. Mais quand la valeur de n devient plus considérable & qu'elle approche même de l'unité: alors il est clair, que ces mêmes trois termes pourront bien énormément s'écarter de la valeur de la formule, & que les termes suivans, qu'on néglige, pourront causer une erreur très considérable.

Or cette formule entre très essentiellement dans le calcul; vu qu'elle renferme l'effet de l'action, que les deux Planètes exercent l'une sur l'autre. Pour montrer cela plus clairement, soient P & Q les deux Planètes, le Soleil étant supposé en repos en S, & nommant les distances $SP = p$ & $SQ = q$ & l'angle au Soleil $PSQ = \Phi$, la distance entre les Planètes sera $\sqrt{pp + qq - 2pq \operatorname{cos.} \Phi}$, au quarré de la quelle l'action des Planètes est réciproquement proportionelle, qui sera donc comme $\frac{A}{pp + qq - 2pq \operatorname{cos.} \Phi}$; mais la décomposition de cette force, que l'application aux principes du mouvement exige, conduit à des formules, divisées par le cube de cette distance PQ, dont la forme sera par conséquent

$$\frac{S}{(pp + qq - 2pq \operatorname{cos.} \Phi)^{\frac{3}{2}}}$$

ou bien $S(pp + qq - 2pq \operatorname{cos.} \Phi)^{-\frac{3}{2}}$, qui se reduit à la forme mentionnée, en supposant

$$pp + qq = SS \ \& \ \frac{2pq}{pp + qq} = n.$$

De là on voit, que la valeur de la lettre n dépend du rapport des distances p & q, dont les deux Planètes sont éloignées du Soleil, & qu'elle ne sçauroit être une petite fraction, à moins que l'une de ces deux distances ne soit plusi-

plusieures fois plus grande que l'autre. Ainsi dans le cas ou Jupiter est supposé en P & Saturne en Q on a

$$p = 52029 \ \& \ q = 95418$$

ou bien à peu près $p : q = 5 : 9$, d'où résulte la valeur de $n = \frac{45}{53}$, dont la proximité de l'unité est sans doute la raison, pourquoi tous les éfforts de la Théorie ont jusqu'ici si peu réüssi.

Or cet inconvénient devient encore beaucoup plus considérable lorsqu'on veut déterminer l'effet de l'action mutuelle de la Terre & de Venus; car supposant Venus en P & la Terre en Q, on aura les distances moyennes $p = 72340$ & $q = 100000$, d'où l'on tire $n = 0,94979$. Cette valeur approche déjà tant de l'unité, que la résolution mentionnée ci-dessus doit s'écarter très énormément de la vérité. Car supposant

$$(1 - n \operatorname{cos.} \Phi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2} n \operatorname{cos.} \Phi + \tfrac{15}{8} n^2 \operatorname{cos.} \Phi^2$$

on aura pour la conjonction, où l'angle $\Phi = 0$

$$(1 - n)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2} n + \tfrac{15}{8} n n.$$

Or on trouve la vraye valeur de la formule

$$(1 - n)^{-\frac{3}{2}} = 88,882$$

& la somme des trois termes ne donne que

$$1 + \tfrac{3}{2} n + \tfrac{15}{8} n n = 4,116.$$

Cette différence est sans doute extravagante. Considérons aussi le cas des oppositions, où $\Phi = 180°$, & qu'on suppose

$$(1 + n)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \tfrac{3}{2} n + \tfrac{15}{8} n n;$$

or le premier membre de cette équation produit

$$(1 + n)^{-\frac{3}{2}} = 0,367$$

& les trois termes de l'autre membre donnent

$$1 - \frac{3}{2} n + \frac{15}{8} nn = 1,268.$$

D'où il eſt clair, qu'en employant cette méthode on risquera de ſe tromper très groſſiérement.

Pour remédier à ce grand défaut je doute fort qu'on puiſſe découvrir une autre méthode, que celle, que j'ai expoſée dans le Volume XVI des nouveaux Commentaires de l'Académie, où j'ai formé le plan de pourſuivre quaſi pas à pas les deux Planètes dans leur mouvement & de déterminer pour chaque petit intervalle de tems l'effet, que l'action de Venus doit produire dans le mouvement de la Terre; & nôtre habile Aſtronome, Mr. *Lexell*, a bien voulu ſe charger de ſon exécution, en faiſant tous les calculs laborieux & pénibles, qu'il exigeoit, et qui lui ont fourni la table, qu'on y trouve ajoutée, pour la correction, à employer dans le lieu de la Terre, pour chaque ſituation par rapport à Venus. Or comme l'effet eſt toujours porportionel à la maſſe de Venus, nous l'avons ſuppoſée égale à celle de la Terre, de ſorte qu'en cas qu'elle fut ou plus grande ou plus petite, on n'auroit qu'à changer les nombres de la Table dans la même proportion.

On trouve auſſi une telle correction dans les tables ſolaires de feu Mr. de la *Caille*, que je préſume être calculée ſuivant la méthode ordinaire, dont je viens de démontrer l'inſuffiſance. Je me propoſe de comparer plus ſoigneuſement cette table avec celle que Mr. *Lexell* a conſtruite ſur les véritables principes. Ce qui eſt d'autant plus facile, que l'une & l'autre ſe rapporte au même argument, qu'on trouve, en ſouſtrayant la longitude

Table des Corrections

Du Lieu de la Terre

tant suivant la Table de Mr. *de la Caille* que suivant les vrais principes.

Argument.

Longitude héliocentrique de ♀ — Longitude de ♄.

	0.		I.		II.		III.		IV.		V.		
	LaCaille.	Vraye.	La Caille.	Vraye.	La Caille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye	LaCaille.	Vraye	
	−	−	−	−	−	−	+	−	+	−	+	−	
0	0, 0	0,0	5, 6	13,8	0, 9	21,6	9, 4	20,6	15, 1	13,0	11, 4	4, 4	30
1	0, 3	0,5	5, 6	14,2	0, 6	21,7	9, 7	20,4	15, 1	12,7	11, 1	4, 1	29
2	0, 6	1,0	5, 6	14,6	0, 3	21,8	10, 0	20,2	15, 2	12,4	10, 8	3, 9	28
3	0, 9	1,5	5, 6	15,0	+	21,9	10, 3	20,0	15, 2	12,1	10, 5	3, 7	27
4	1, 2	2,0	5, 5	15,4	0, 5	22,0	10, 6	19,8	15, 2	11,8	10, 3	3, 5	26
5	1, 4	2,4	5, 5	15,7	0, 8	22,1	10, 8	19,6	15, 2	11,5	10, 0	3, 3	25
6	1, 7	2,9	5, 4	16,1	1, 1	22,2	11, 1	19,4	15, 1	11,2	9, 7	3, 1	24
7	1, 9	3,4	5, 4	16,5	1, 4	22,2	11, 4	19,2	15, 1	10,9	9, 3	2, 9	23
8	2, 2	3,9	5, 3	16,8	1, 8	22,3	11, 7	19,0	15, 1	10,6	8, 9	2, 7	22
9	2, 4	4,4	5, 2	17,1	2, 2	22,3	11, 9	18,8	15, 0	10,3	8, 6	2, 5	21
10	2, 7	4,8	5, 1	17,4	2, 6	22,3	12, 2	18,5	15, 0	10,0	8, 3	2, 3	20
11	2, 9	5,3	5, 0	17,8	2, 9	22,3	12, 4	18,3	14, 9	9,7	7, 9	2, 1	19
12	3, 1	5,8	4, 9	18,1	3, 2	22,3	12, 7	18,1	14, 9	9,4	7, 5	1, 9	18
13	3, 3	6,3	4, 8	18,4	3, 6	22,3	12, 9	17,9	14, 8	9,1	7, 1	1, 7	17
14	3, 5	6,8	4, 6	18,7	3, 9	22,2	13, 2	17,6	14, 7	8,8	6, 7	1, 6	16
15	3, 7	7,3	4, 5	18,9	4, 3	22,2	13, 4	17,3	14, 5	8,5	6, 4	1, 5	15
16	3, 9	7,8	4, 3	19,2	4, 6	22,2	13, 6	17,1	14, 4	8,2	6, 0	1, 3	14
17	4, 1	8,3	4, 1	19,5	4, 9	22,1	13, 8	16,8	14, 3	7,9	5, 6	1, 1	13
18	4, 3	8,8	3, 9	19,7	5, 3	22,1	13, 9	16,5	14, 2	7,6	5, 2	1, 0	12
19	4, 5	9,2	3, 6	19,9	5, 7	22,0	14, 1	16,2	14, 1	7,3	4, 8	0, 9	11
20	4, 7	9,6	3, 4	20,1	6, 1	21,9	14, 2	15,9	13, 9	7,0	4, 4	0, 8	10
21	4, 8	10,1	3, 2	20,3	6, 5	21,8	14, 3	15,7	13, 7	6,7	3, 9	0, 6	9
22	4, 9	10,6	2, 9	20,5	6, 8	21,7	14, 4	15,4	13, 5	6,4	3, 5	0, 5	8
23	5, 0	11,0	2, 7	20,7	7, 2	21,6	14, 5	15,1	13, 3	6,1	3, 1	0, 4	7
24	5, 1	11,4	2, 5	20,9	7, 5	21,5	14, 6	14,8	13, 0	5,9	2, 7	0, 3	6
25	5, 2	11,8	2, 2	21,0	7, 9	21,3	14, 7	14,5	12, 8	5,7	2, 3	0, 2	5
26	5, 3	12,2	1, 9	21,2	8, 2	21,2	14, 8	14,2	12, 5	5,4	1, 8	0, 2	4
27	5, 4	12,6	1, 7	21,3	8, 5	21,1	14, 9	13,9	12, 3	5,1	1, 4	0, 1	3
28	5, 5	13,0	1, 4	21,4	8, 8	21,0	15, 0	13,6	12, 0	4,8	1, 0	0, 1	2
29	5, 5	13,4	1, 1	21,5	9, 1	20,8	15, 1	13,3	11, 7	4,6	0, 5	0, 0	1
30	5, 6	13,8	0, 9	21,6	9, 4	20,6	15, 1	13,0	11, 4	4,4	0, 0	0, 0	0
	+	+	+	+	−	+	−	+	−	+	−	+	
	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	LaCaille.	Vraye.	
	XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.		

gitude moyenne de la Terre, vuë du Soleil, de la longitude héliocentrique moyenne de Venus. La table ci-jointe peut ſervir à faciliter cette comparaiſon entre les deux tables des corrections mentionnées, & en la conſidérent plus attentivement elles nous fournit les réflexions ſuivantes.

I. Deſignons d'abord l'argument de cette Table par la lettre Φ, qui marque comme ci-deſſus l'angle au Soleil compris entre les lieux de la Terre & de Venus, & on voit d'abord, que tant pour $\Phi = 0$ que $\Phi =$ VI. ſignes l'une & l'autre équation évanouit. Enſuit. on voit que la plus grande équation de nos tables eſt plus grande que celle de Mr. *de la Caille*; mais ce n'eſt pas au défaut de la Théorie qu'il faut attribuer cette différence, qui provient uniquement de l'eſtime de la maſſe de Venus, que j'ai ſuppoſée égale à la Terre; fondé ſur la véritable parallaxe du Soleil de $8\frac{1}{2}''$, pendant que Mr. *Clairaut*, ſur la Théorie du quel les Tables de Mr. *de la Caille* ſont fondées, l'a ſuppoſée de $10''$; d'où le volume de Venus ſe conclud environ deux tiers de la Terre, ce qui eſt très bien d'accord avec les valeurs de la plus grande équation, qui dans ma table monte à 22, 3 & dans la Table de Mr. *de la Caille* à 15, 2. Nous avons ſuppoſé ici l'un & l'autre, que les maſſes ſont en raiſon des volumes; donc ſi, comme le grand *Newton* a ſoutenu, la denſité des Planètes eſt plus grand dans celles qui ſont les plus proches du Soleil, il faudroit encore augmenter la plus grande équation.

II. En partant de la conjonction, où $\Phi = 0$, les équations de notre table augmentent beaucoup plus que dans celle de Mr. *de la Caille*, & cette augmentation s'etend auſſi beaucoup plus loin, puisque dans nôtre table elles croiſſent jusqu'à $\Phi = 2^s. 8°$, pendant que dans celle *de la Caille* l'équation atteint la plus grande valeur à $\Phi = 30°$. Cette différence provient ouvertement de la fauſſeté de la Théorie, puisque on y ſuppoſe l'action de Venus ſur la Terre environ 20 fois plus petite, qu'elle n'eſt effectivement comme nous avons obſervé ci-deſſus. Donc puisque cette action eſt en effet tant de fois plus grande, il s'enſuit néceſſairement que ſon effet doit être beaucoup plus grand & qu'il ſe doit auſſi étendre plus loin.

III. Le contraire arrive après les oppoſitions, où $\Phi > VI^s$. où la véritable action de Venus eſt presque quatre fois plus petite que la fauſſe Theorie la ſuppoſe, comme nous avons déjà remarqué ci-deſſus. Il faut donc auſſi que dans nôtre table les équations croiſſent plus foiblement que dans la Table de Mr. *de la Caille*, & en regardant nôtre table de comparaiſon, on voit qu'elles diffèrent réellement de la même manière comme nous venons d'obſerver.

IV. Enſuite il ſe trouve auſſi une grande différence entre les endroits répondans aux plus grandes équations, qui ſont, après les conjonctions, ſelon les tables de Mr. *de la Caille*, à $\Phi = 30°$. & dans ma table à $\Phi = 2^s. 8°$. & après l'oppoſition, ſelon les premières à $\Phi = 7^s. 25°$. & ſelon la mienne à $\Phi = 9^s. 17°$. Or la plus grande différence ſe trouve dans la marche de ces équations; puisque dans la table conſtruite ſur les vrais principes les équations conſervent le même ſigne depuis la conjonction jusqu'à l'oppoſition, pendant que dans les tables de Mr. *de la Caille* elles changent de ſigne à $\Phi = 2^s. 3°$.

V.

V. Remarquons auſſi les endroits, où la différence entre les deux Tables devient la plus grande, ce qui arrive à $\Phi = 3^s. 12^\circ.$ où elle monte à 30, 8″. Donc ſi pour une telle ſituation on calcule le lieu de la Terre ſelon les tables *de la Caille*, on ſe trompera de plus du 30″; & partant on ne doit pas être ſurpris, quand Mr. *de la Caille* avoue lui même, que ſes tables peuvent quelques fois différer des obſervations d'autant de ſecondes; & peutêtre ſeront-ce les mêmes cas, où ſa table des perturbations de Venus diffère ſi enormément de la vérité, parce que depuis $\Phi = 2^s.$ jusqu'à $\Phi = 4^s. 22^\circ.$ c'eſt à dire pendant un intérvalle de 82°. la différence entre les deux tables monte au de la de 20″.

VI. Puisque Mr. *de la Caille* dit avoir calculé cette table ſur les formules de feu Mr. *Clairaut*, il ſera aiſé de retrouver ces formules des équations mêmes de la Table, vu qu'il eſt certain que cette formule doit avoir une telle forme: α ſin. $\Phi + \beta$ ſin. $2\Phi + \gamma$ ſin. $3\Phi +$ &c. Car on n'a qu'à tirer de cette formule les équations pour quelques ſituations principales, que nous ajouterons ici dans cette table, en marquant les équations, qui en réſultent, par les lettres A, B, C, D, &c.

$3^s.$ —	$A = \alpha - \gamma$
2. —	$B = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2} - \frac{\delta\sqrt{3}}{2}$
4. —	$C = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} - \frac{\beta\sqrt{3}}{2} + \frac{\delta\sqrt{3}}{2}$
1. 15°	$D = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$
4. 15	$E = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \beta + \frac{\gamma}{\sqrt{2}}$
1. —	$F = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2} + \gamma + \frac{\delta\sqrt{3}}{2}$
5. —	$G = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta\sqrt{3}}{2} + \gamma - \frac{\delta\sqrt{3}}{2}$

De

De ces équations nous déduiſons les combinaiſons ſuivantes:

$$B+C=\alpha\sqrt{3} \ \& \ B-C=\beta\sqrt{3}-\delta\sqrt{3},$$
$$D+E=\alpha\sqrt{2}+\gamma\sqrt{2} \ \& \ D-E=2\beta,$$
$$F+G=\alpha+2\gamma \ \& \ F-G=\beta\sqrt{3}+\delta\sqrt{3}.$$

Appliquons maintenant ces formules à la table de Mr. *de la Caille*, & nous aurons:

$$A=9,4,\ B=-0,9,\ C=15,1,\ D=-4,5,$$
$$E=14,5,\ F=-5,6,\ G=11,4.$$

De là on tire

$$A=\alpha-\gamma=9,4$$
$$B+C=\alpha\sqrt{3}=14,2$$
$$B-C=\beta\sqrt{3}-\delta\sqrt{3}=-16,0$$
$$D+E=\alpha\sqrt{2}+\gamma\sqrt{2}=10,0$$
$$D-E=2\beta=-19,0$$
$$F+G=\alpha+2\gamma=5,8$$
$$F-G=\beta\sqrt{3}+\delta\sqrt{3}=-17,0$$

& de ces équations on tire $\alpha=8,2$, $\beta=-9,5$; $\gamma=-1,2$, $\delta=-0,3$. Voilà donc la formule de Mr. *Clairaut*, ſur laquelle l'Abé *de la Caille* a calculé ſa Table, qui donne pour chaque argument Φ l'équation Venérienne $8,2.\ \text{ſin.}\ \Phi-9,5\ \text{ſin.}\ 2\Phi-1,2\ \text{ſin.}\ 3\Phi-0,3\ \text{ſin.}\ 4\Phi$.

VII. Quelque fauſſe que ſoit cette formule elle a pourtant depuis été adoptée de preſque tous les Aſtronomes, vu qu'on trouve la même table dans tous les recueils de tables aſtronomiques qui ont été publiés depuis ce temps, & même la trouve-t-on, à quelques arrangemens de la forme près, dans les tables lunaires de feu Mr. *Mayer*, publiées à Londres, qu'on regarde comme les plus exactes.

Or

Or après les remarques, que j'ai rapportées ici, on ne ſçauroit plus douter, qu'en ſe ſervant de ces tables, on ne ſe trompe très ſouvent de 20 à 30 ſecondes, ce qui doit avoir une influence très eſſentielle dans les tables lunaires, où la détermination du vrai lieu de la Lune ſuppoſe toujours celle du Soleil, & partant cette obſervation doit être de la dernière importance dans le grand Problème de la Longitude.

VIII. Comme nôtre table n'a été calculée ſur aucune formule ſemblable: mais qu'elle renferme le réſultat de toutes les actions élémentaires ajoutées enſemble il n'eſt gueres probable, qu'on puiſſe trouver une formule, qui repréſente exactement toutes les équations de cette table. Cependant il ne ſera pas difficile de déterminer les coëfficiens α, β, γ, δ, enſorte que la formule répond au moins à peu près à la vérité.

Faiſons un eſſai la deſſus & nous aurons pour les poſitions principales indiquees ci-deſſus les valeurs ſuivantes: $A = -20,6$, $B = -21,6$, $C = -13,0$, $D = -18,9$, $E = -8,5$, $F = -13,8$, $G = -4,4$. De là on tire les égalités ſuivantes: 1°. $\alpha - \gamma = -20,6$; 2°. $\alpha \sqrt{3} = -34,6$; 3°. $(\beta - \delta)\sqrt{3} = -8,6$; 4°. $(\alpha + \gamma)\sqrt{2} = -27,4$; 5°. $2\beta = -10,4$; 6°. $\alpha + 2\gamma = -18,2$; 7°. $(\beta + \delta)\sqrt{3} = -9,4$; d'où l'on tire les valeurs α, β, γ, δ de cette manière: Cherchons les valeurs des lettres α & γ, & d'abord la ſeconde équation donne $\alpha = -20,0$, ce qui étant ſubſtitué dans la première fournit $\gamma = +0,6$. Or de la quatrième on tire $\gamma = +0,5$, & de la ſixième $\gamma = 0,9$. Mais puiſque ces trois valeurs de γ ne quadrent pas aſſes

 bien

bien ensemble, il faut réconnoitre une petite erreur dans l'une & l'autre des deux lettres α & γ, & cette erreur sera partagée également, en prenant $\alpha = -19,7$ & $\gamma = +0,8$. Pour les deux autres lettres β & δ la 5^e. équation donne d'abord $\beta = -5,2$ & la 3^e & 7^e, jointes ensemble, donnent $2\beta = -10,4$, de sorte que nous pouvons hardiment supposer $\beta = -5,2$. Enfin la 7^e. — la 3^e. nous fournit $\delta = -0,2$.

IX. Voilà donc contre toute nôtre attente une formule, qui représente les équations de nôtre table plus exactement qu'on n'auroit osé espérer. Sçavoir pour chaque argument Φ l'équation de nôtre table se trouve être $-19,7 \sin.\Phi - 5,2 \sin.2\Phi + 0,8 \sin.3\Phi - 0,2 \sin.4\Phi$, & cette formule ne diffère presque du tout des positions, d'où nous l'avons tirée. Voyons donc comment elle satisfait à d'autres positions, & pour cet effet prennons $\Phi = 2^s.15^\circ. = 75^\circ$. d'où en faisant le calcul on tire de la formule l'équation 22, 0, qui ne diffère que de $5''$ de la table. Prennons aussi $\Phi = 3^s.15 = 105^\circ$. & en faisant le calcul on trouve 17, 2 ce qui ne diffère que de 0, $1''$ de la table. En examinant les cas $\Phi = 15^\circ$. & $\Phi = 5^s.15^\circ = 165^\circ$. on trouve les équations 7, 3 & 1, 7. dont les erreurs ne sont que 0, $0''$ & 0, $2''$.

X. Ce merveilleux accord de la formule que nous venons de trouver avec nôtre table ne sçauroit certainement être attribué à un pur hazard, & on pourroit même soupçonner que Mr. *Lexell* eut calculé cette table précisement sur cette même formule, si le détail de tout le calcul ne se trouvoit pas exposé dans les commentaires. Nous devons donc conclure, que cette formule est fondée réellement dans la véritable théorie, ce qui ouvrit une nou-

nouvelle carrière pour perfectionner la Théorie, & tout revient maintenant, à sçavoir manier la Théorie ensorte, qu'on en puisse précisement tirer la formule dont nous venons de parler.

XI. Puisque les corrections, qu'on a données jusqu'ici pour les inégalités de Saturne, causées par l'action de Jupiter, sont tirées de la même fausse Théorie, on ne doit pas être surpris, qu'elles répondent si mal aux observations, & comme le cas est presque semblable à celui de la Terre & de Venus, on pourra à présent presque déviner la véritable formule, d'où l'on doit tirer les inégalités. Ainsi dans la formule α sin. $\Phi + \beta$ sin. $2\,\Phi + \gamma$ sin. $3\,\Phi + \delta$ sin. $4\,\Phi$ le premier coëfficient α, qui selon la méthode commune étoit positif, doit être négatif & même beaucoup plus grand; ensuite le second coëfficient demeure bien négatif, mais il doit être diminué. Pour les deux autres coëfficiens γ & δ ils influeront fort peu sur le lieu de Saturne. Mais il faut ici bien considerer que la force de Jupiter exerce encore un autre effet sur Saturne, qui provient de l'excentricité de leurs orbites, ce qui est une circonstance, à la quelle on n'a pas eu besoin de faire attention dans les orbites de la Terre de Venus, puisque l'excentricité de l'une & de l'autre est si petite, qu'il n'en sçauroit résulter un effet considérable.

INVESTIGATIO PERTVRBATIONVM, QVAE IN MOTV TERRAE AB ACTIONE VENERIS PRODVCVNTVR.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Tab. XIII. Fig. 2. Existente Sole in S ſit A T orbita Terrae, B V Veneris, ambae in plano eclipticae ſitae. Sumamus autem initio, vnde tempora metimur, ambos Planetas fuiſſe in coniunctione i. e. in A et B; nunc vero elapſo tempore t, cui motus Terrae medius reſpondeat $= \theta$, Terram verſari in T, venerem vero in V, vocemusque angulos A S T $= \Phi$ et B S V $= \psi$; tum vero ſit angulus T S V $= \eta$, ita vt ſit $\eta = \psi - \Phi$, et iam η deſignet elongationem Veneris a Terra, ex Sole viſam. Praeterea vocetur diſtantia Terrae a Sole S T $= v$; Veneris autem diſtantia S V vt conſtans ſpectetur, ſitque S V $= a$. Denique ſtatuatur diſtantia Veneris a Terra T V $= w$, ita vt $w = \sqrt{v v + a a - 2 a v \cos. \eta}$.

§. 2. Exprimatur jam maſſa Solis per vnitatem ſitque maſſa Terrae $= m$, quam ex Parallaxi Solis concluſiclusimus $= \frac{5}{1000000}$, eique massam Veneris aequalem supponamus. His positis Terra ad Solem sollicitabitur in directione T S, vi $= \frac{m+1}{vv}$ et a Venere sollicitabitur in directione T V, vi $= \frac{m}{ww}$. Denique quia etiam Sol, a Venere vrgetur vi $= \frac{m}{aa}$, haec vis contrario modo, secundum directionem V S, Terrae est applicanda. Has autem ternas vires ad duas revocare licet, complendo parallologrammum S T O V; tum enim vis T V $= \frac{m}{ww}$ resoluétur in vim secundum T S $= \frac{mv}{w^3}$ et in vim secundum T O $= \frac{ma}{w^3}$, cuius directio convenit cum directione S V. Hinc ergo omnino Terra sollicitabitur in directione T S,

$$\text{vi} = \frac{1+m}{vv} + \frac{mv}{w^3};$$

tum vero etiam in directione V S,

$$\text{vi} = \frac{m}{aa} - \frac{ma}{w^3},$$

§. 3. Inuentis his viribus ex T ad axem S A demittatur perpendiculum T X, et vocentur binae coordinatae S X $= x$ et X T $= y$, secundum quas ambae vires sollicitantes, resoluantur, vnde orietur vis secundum S X

$$= -\frac{(1+m)\,cos.\Phi}{vv} - \frac{mv\,cos.\Phi}{w^3} - \frac{m\,cos.\psi}{aa} + \frac{ma\,cos.\psi}{w^3}$$

et vis secundum X T

$$= -\frac{(1-m)\,sin.\Phi}{vv} - \frac{mv\,sin.\Phi}{w^3} - \frac{m\,sin.\psi}{aa} + \frac{ma\,sin.\psi}{w^3}$$

quibus viribus cum accelerationes debeant esse aequales, quae sunt secundum easdem directiones $\frac{ddx}{d\theta^2}$ & $\frac{ddy}{d\theta^2}$, habebuntur hae duae aequationes:

$$\frac{ddx}{d\theta^2} = -\frac{(1+m)\,cos.\Phi}{vv} - \frac{mv\,cos.\Phi}{w^3} - \frac{m\,cos.\psi}{aa} + \frac{ma\,cos.\psi}{w^3}$$

$$\frac{ddy}{d\theta^2} = -\frac{(1+m)\,sin.\Phi}{vv} - \frac{mv\,sin.\Phi}{w^3} - \frac{m\,sin.\psi}{aa} + \frac{ma\,sin\,\psi}{w^3}$$

ex quibus aequationibus omnia repeti debent, quae ad institutum nostrum desiderantur.

§. 4. Cum jam sit $x = v \operatorname{cos}. \Phi$ et $y = v \operatorname{sin}. \Phi$ erit $dx = dv \operatorname{cos}. \Phi - v d\Phi \operatorname{sin}. \Phi$ et $dy = dv \operatorname{sin}. \Phi + v d\Phi \operatorname{cos}. \Phi$; porro vero

I. $ddx = ddv \operatorname{cos}. \Phi - 2dv d\Phi \operatorname{sin}. \Phi - v d\Phi^2 \operatorname{cos}. \Phi - v dd\Phi \operatorname{sin}. \Phi$

II. $ddy = ddv \operatorname{sin}. \Phi + 2dv d\Phi \operatorname{cos}. \Phi - v d\Phi^2 \operatorname{sin}. \Phi + v dd\Phi \operatorname{cos} \Phi$

ex quibus formulis per combinationem colliguntur sequentes:

I. $ddy \operatorname{cos}. \Phi - ddx \operatorname{sin}. \Phi = 2dv d\Phi + v dd\Phi$

II. $ddx \operatorname{cos}. \Phi + ddy \operatorname{sin}. \Phi = ddv - v d\Phi^2$.

Hic iam loco ddx et ddy valores ex primis aequationibus, ex actione virium ortis, substituantur, prodibitque

$$\frac{2dv d\Phi + v dd\Phi}{d\theta^2} = -\frac{m}{aa}(\operatorname{sin}. \psi \operatorname{cos}. \Phi - \operatorname{cos}. \psi \operatorname{sin}. \Phi) + \frac{ma}{w^3}(\operatorname{sin}. \psi \operatorname{cos}. \Phi - \operatorname{cos}. \psi \operatorname{sin}. \Phi)$$

$$\frac{ddv - v d\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{(1+m)}{vv} - \frac{mv}{w^3} - \frac{m}{aa}(\operatorname{cos}. \psi \operatorname{cos}. \Phi + \operatorname{sin}. \psi \operatorname{sin}. \Phi + \frac{ma}{w^3}(\operatorname{cos}. \psi \operatorname{cos}. \Phi + \operatorname{sin}. \psi \operatorname{sin}. \Phi$$

siue ob $\psi - \Phi = \eta$ erit

$$\frac{2dv d\Phi + v dd\Phi}{d\theta^2} = \frac{ma}{w^3} \operatorname{sin}. \eta - \frac{m}{aa} \operatorname{sin}. \eta$$

$$\frac{ddv - v d\Phi^2}{d\theta^2} = -\frac{(1+m)}{vv} - \frac{mv}{w^3} - \frac{m}{aa} \operatorname{cos}. \eta + \frac{ma}{w^3} \operatorname{cos}. \eta.$$

§. 5. Hic totum negotium pendet ab idonea euolutione membrorum per w^3 diuisorum, vnde reliquas aequationum partes ad sinistram transponamus, vt aequationes nanciscamur huius formae:

$$\frac{2dv d\Phi + v dd\Phi}{d\theta^2} + \frac{m}{aa} \operatorname{sin}. \eta = \frac{ma}{w^3} \operatorname{sin}. \eta$$

$$\frac{ddv - v d\Phi^2}{d\theta^2} + \frac{1+m}{vv} + \frac{m \operatorname{cos}. \eta}{aa} = \frac{m}{w^3}(a \operatorname{cos}. \eta - v)$$

Vidi-

Vidimus autem initio, esse $w = \sqrt{vv + aa - 2av \cos. \eta}$, vbi, quia hi termini, vtpote littera m affecti, per se sunt quam minimi, etiam distantiam v tanquam constantem spectare licebit, siquidem ab excentricitate orbitae Terrae mentem abstrahamus, quippe quae non solum est satis parua, sed etiam in praesenti negotio nihil in actione Veneris mutare est censenda; quam ob caussam loco v scribamus distantiam mediam Terrae a Sole, quam ponimus $= 1$, sicque erit $w = \sqrt{1 + aa - 2a \cos. \eta}$, ideoque

$$w = \sqrt{1 + aa} \cdot \sqrt{1 - \frac{2a}{1 + aa} \cos. \eta},$$

vbi loco $\frac{2a}{1 + aa}$ scribamus litteram n, cuius valor, ob distantiam mediam Veneris a Sole $a = 0, 72344$, erit $n = 0, 94979$. Erit autem nunc

$$\frac{m}{w^3} = \frac{m}{(1 + aa)^{\frac{3}{2}}} (1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}}$$

siue, si breuitatis gratia ponatur

$$\frac{m}{(1 + aa)^{\frac{3}{2}}} = \mu, \text{ erit } \frac{m}{w^3} = \mu (1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}},$$

vbi notetur esse $\mu = 0,0000015 \, \Phi$.

§. 6. Alio autem loco hanc formulam irrationalem pro hoc ipso casu iam euolui, atque inueni esse

$$(1 - n \cos. \eta)^{-\frac{3}{2}} = A + B \cos. \eta + C \cos. 2\eta + D \cos. 3\eta + \text{etc.}$$

et pro his litteris A, B, C, etc. sequentes exactissimos, methodo prorsus singulari, adeptus sum valores:

$A = 9, 39852$; $B = 16, 68153$; $C = 13, 87191$
$D = 11, 17685$; $E = 8, 80776$; $F = 6, 85206$
$G = 5, 26990$; $H = 4, 04433$; $I = 3, 08789$.

Ho-

Horum autem valorum numericorum loco in calculo retineamus litteras A, B, C, etc.

§. 7. Quoniam igitur in noſtra priore aequatione continetur membrum

$$\frac{m\,a\,\text{ſin.}\,\eta}{w^3} = \mu\, a\,\text{ſin.}\,(A + B\,\text{coſ.}\,\eta + C\,\text{coſ.}\,2\eta + D\,\text{coſ.}\,3\eta + \text{etc.})$$

facta euolutione hoc membrum ita erit expreſſum

$$\mu\, a \begin{pmatrix} A\,\text{ſin.}\,\eta + \tfrac{1}{2}B\,\text{ſin.}\,2\eta + \tfrac{1}{2}C\,\text{ſin.}\,3\eta + \tfrac{1}{2}D\,\text{ſin.}\,4\eta + \text{etc.} \\ -\tfrac{1}{2}C\,\text{ſin.}\,\eta - \tfrac{1}{2}D\,\text{ſin.}\,2\eta - \tfrac{1}{2}E\,\text{ſin.}\,3\eta - \tfrac{1}{2}F\,\text{ſin.}\,4\eta - \text{etc.} \end{pmatrix}$$

Pro alterius vero aequationis membro dextro erit primo

$$\frac{m\,a\,\text{coſ.}\,\eta}{w^3} = \mu\, a\,\text{coſ.}\,\eta\,(A + B\,\text{coſ.}\,\eta + C\,\text{coſ.}\,2\eta + D\,\text{coſ.}\,3\eta + \text{etc.})$$

ſiue facta euolutione

$$\frac{m\,a\,\text{coſ.}\,\eta}{w^3} = \mu \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2}B + A\,\text{coſ.}\,\eta + \tfrac{1}{2}B\,\text{coſ.}\,2\eta + \tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,3\eta + \text{etc.} \\ + \tfrac{1}{2}C\,\text{coſ.}\,\eta + \tfrac{1}{2}D\,\text{coſ.}\,2\eta + \tfrac{1}{2}E\,\text{coſ.}\,3\eta + \text{etc.} \end{pmatrix}$$

Pro altera vero eiusdem membri parte, quae eſt $-\frac{m v}{w^3}$, tuto aſſumere licet $v = 1$, quoniam ſupponimus, actione Veneris ſublata, Terram in circulo eſſe progreſſuram; ſicque iſta pars dabit,

$$-\mu\,(A + B\,\text{coſ.}\,\eta + C\,\text{coſ.}\,2\eta + D\,\text{coſ.}\,3\eta + \text{etc.})$$

Hanc ob rem ſi pro vtraque parte iunctim ſumta ponamus hanc ſeriem:

$$\mu\,(A' + B'\,\text{coſ.}\,\eta + C'\,\text{coſ.}\,2\eta + D'\,\text{coſ.}\,3\eta + \text{etc.}) \text{ erit.}$$

$$A' = \tfrac{1}{2}aB - A;\; B' = \tfrac{1}{2}a(2A + C) - B;\; C' = \tfrac{1}{2}a(B + D) - C$$
$$D' = \tfrac{1}{2}a(C + E) - D;\; E' = \tfrac{1}{2}a(D + F) - E;\; \text{etc.}$$

cui ergo expreſſioni: $\mu\,(A' + B'\,\text{coſ.}\,\eta + C'\,\text{coſ.}\,2\eta + \text{etc.})$ aequale eſſe debet membrum ſiniſtrum

$$\frac{d\,d\,v - v\,d\,\Phi^2}{d\,\theta^2} + \frac{1 + m}{v\,v} + \frac{m\,\text{coſ.}\,\eta}{a\,a}.$$

§. 8. Incipiamus nunc ab euolutione primae aequationis, et quoniam aſſumimus Terram ſine actione Veneris

neris in circulo motu vniformi esse processuram in distantia media $= 1$, ita vt etiam foret $\Phi = \theta$, ideoque $\frac{d\Phi}{d\theta} = 1$; nunc accedente actione Veneris hae quantitates quasi infinite parum immutabuntur. Statuamus ergo tum fore

$$v = 1 + \mu p \text{ ac } \frac{d\Phi}{d\theta} = 1 + \mu q;$$

vnde in compositione membra, quae continerent μ^2, tuto omitti poterunt. Cum igitur sit

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\mu dp}{d\theta} \text{ et } \frac{dd\Phi}{d\theta^2} = \frac{\mu dq}{d\theta},$$

oritur hinc sequens aequatio:

$$\frac{2 dv d\Phi + v dd\Phi}{d\theta^2} + \frac{m}{aa} \text{fin. } \eta = \frac{2\mu dp + \mu dq}{d\theta} + \frac{m}{aa} \text{fin. } \eta$$
$$= \frac{ma}{w^3} \text{fin. } \eta.$$

Pro cuius parte dextra scribamus hanc seriem:

$$\mu (\mathfrak{B} \text{ fin. } \eta + \mathfrak{C} \text{ fin. } 2\eta + \mathfrak{D} \text{ fin. } 3\eta + \mathfrak{E} \text{ fin. } 4\eta + \text{etc.}$$

ita vt ob resolutionem huius membri iam supra traditam sit

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2} a (2A - C);\ \mathfrak{C} = \tfrac{1}{2} a (B - D);\ \mathfrak{D} = \tfrac{1}{2} a (C - E);$$
$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{2} a (D - F);\ \mathfrak{F} = \tfrac{1}{2} a (E - G);\ \text{etc.}$$

atque hinc aequatio resoluenda erit

$$\frac{2dp + dq}{d\theta} + \frac{m}{\mu aa} \text{fin. } \eta = \mathfrak{B} \text{ fin. } \eta + \mathfrak{C} \text{ fin. } 2\eta + \mathfrak{D} \text{ fin. } 3\eta + \text{etc.}$$

vbi notetur esse $\frac{m}{\mu aa} = \frac{(1 + aa)^{\frac{3}{2}}}{aa}$, quem numerum brevitatis gr. per litteram k designemus, ita vt sit $k = 3,592551$, et nostra aeqnatio nunc erit

$$\frac{2dp + dq}{d\theta} + k \text{ fin. } \eta = \mathfrak{B} \text{ fin. } \eta + \mathfrak{C} \text{ fin. } 2\eta + \mathfrak{D} \text{ fin. } 3\eta + \text{etc.}$$

quam igitur integrari oportet.

§. 9. Quoniam hic duo anguli η et θ insunt, nosse oportet relationem $d\eta$ et $d\theta$. Erat autem

$$\eta = \psi - \Phi, \text{ unde fit } \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{d\psi}{d\theta} - \frac{d\Phi}{d\theta}.$$

Hoc autem loco vtrumque motum Terrae ac Veneris vt vniformem spectare licet, ita vt sit $\frac{d\Phi}{d\theta} = 1$. Pro Venere autem, eius motus diurnus in tabulis exhibetur $= 1°, 36', 9'' = 5769''$, dum pro Terra est $59', 8'' = 3548''$. Quocirca habemus

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{5769}{3548}, \text{ vnde fit } \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{2221}{3548}.$$

Ponamus autem

$$d\theta = i\, d\eta, \text{ eritque } i = \frac{3548}{2221} = 1,597479.$$

Nunc igitur manifestum est, aequationem nostram, per $d\theta = i\, d\eta$ multiplicatam, euadere integrabilem; reperietur enim

$$2p + q - ik\cos.\eta = \Delta - i\mathfrak{B}\cos.\eta - \tfrac{1}{2}i\mathfrak{C}\cos.2\eta - \tfrac{1}{3}i\mathfrak{D}\cos.3\eta - \text{etc.}$$

ex qua propterea fit

$$q = \Delta - 2p + i(k - \mathfrak{B})\cos.\eta - \tfrac{1}{2}i\mathfrak{C}\cos.2\eta - \tfrac{1}{3}i\mathfrak{D}\cos.3\eta - \text{etc.}$$

§. 10. Aggrediamur iam posteriorem aequationem, pro qua notetur fore $\frac{ddv}{d\theta^2} = \frac{\mu\, ddp}{d\theta^2}$, tum vero

$$\frac{v\, d\Phi^2}{d\theta^2} = 1 + \mu(2q + p), \text{ et } \frac{1+m}{vv} = \frac{1+m}{1+2\mu p}$$

siue supra et infra per $1 - 2\mu p$ multiplicando erit

$$\frac{1+m}{vv} = 1 + m - 2\mu p$$

quibus valoribus substitutis aequationis nostrae membrum sinistrum erit.

$$\frac{\mu\, ddp}{d\theta^2} - \mu(3p + 2q) + m + \frac{m\cos.\eta}{aa}.$$

Quod si iam per μ dividamus, et loco $\frac{m}{\mu aa} = 3,592551$ scribamus k, loco $\frac{m}{\mu} = 1,880217$ vero scribamus l, posterior aequatio hanc induet formam:

$\frac{ddp}{d\theta^2}$

$\frac{ddp}{d\theta^2} - 3p - 2q + l + k\,\text{cof.}\,\eta = A' + B'\text{cof.}\,\eta + C'\text{cof.}\,2\eta + D'\text{cof.}\,3\eta\,\text{etc.}$
in qua fi loco q valor ante inuentus fubftituatur, fiet

$$\frac{ddp}{d\theta^2} - 3p + l + k\,\text{cof.}\,\eta = A' + B'\text{cof.}\,\eta + C'\text{cof.}\,2\eta + D'\text{cof.}\,3\eta + \text{etc.}$$
$$+ 4p - 2\Delta + 2i(k - \mathfrak{B})\,\text{cof.}\,\eta - \tfrac{1}{2}i\mathfrak{C}\,\text{cof.}\,2\eta - \tfrac{2}{3}i\mathfrak{D}\,\text{cof.}\,3\eta - \text{etc.}$$

fiue $\frac{ddp}{d\theta^2} + p = 2\Delta - l + A' + (2i(k - \mathfrak{B}) - k + B')\,\text{cof.}\,\eta + (C' - \tfrac{1}{2}i\mathfrak{C})\,\text{cof.}\,2\eta$
$$+ (D' - \tfrac{2}{3}i\mathfrak{D})\,\text{cof.}\,2\eta + (E' - \tfrac{2}{4}i\mathfrak{E})\,\text{cof.}\,3\eta + \text{etc.}$$
cuius loco brevitatis gratia fcribamus
$$\frac{ddp}{d\theta^2} + p = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'\,\text{cof.}\,\eta + \mathfrak{C}'\,\text{cof.}\,2\eta + \mathfrak{D}'\,\text{cof.}\,3\eta + \text{etc.}$$
ita vt fit
$$\mathfrak{A}' = 2\Delta - l + A';\ \mathfrak{B}' = 2i(k - \mathfrak{B}) - k + B';\ \mathfrak{C}' = C' - i\mathfrak{C}$$
$$\mathfrak{D}' = D' - \tfrac{2}{3}i\mathfrak{D};\ \mathfrak{E}' = E' - \tfrac{2}{4}i\mathfrak{E};\ \text{etc.}$$

§. 11. Manifeftum autem eft, huic aequationi fatisfieri, ftatuendo
$$p = \alpha + \beta\,\text{cof.}\,\eta + \gamma\,\text{cof.}\,2\eta + \delta\,\text{cof.}\,3\eta + \text{etc.}$$
vnde ob $\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{1}{i}$ membrum finiftrum refoluitur in has duas feries:
$$\frac{ddp}{d\theta^2} = -\frac{\beta}{ii}\,\text{cof.}\,\eta - \frac{4\gamma}{ii}\,\text{cof.}\,2\eta - \frac{9\delta}{ii}\,\text{cof.}\,3\eta - \frac{16\varepsilon}{ii}\,\text{cof.}\,4\eta - \text{etc.}$$
$$+ p = \alpha + \beta\,\text{cof.}\,\eta + \gamma\,\text{cof.}\,2\eta + \delta\,\text{cof.}\,3\eta + \varepsilon\,\text{cof.}\,4\eta + \text{etc.}$$
ita vt, fingulis ambarum partium membris feorfim aequatis, fe prodeant fponte fequentes determinationes:
$$\alpha = \mathfrak{A}';\ \beta(1 - \tfrac{1}{ii}) = \mathfrak{B}';\ \gamma(1 - \tfrac{4}{ii}) = \mathfrak{C}';\ \delta(1 - \tfrac{9}{ii}) = \mathfrak{D}';\ \text{etc.}$$
ideoque
$$\alpha = \mathfrak{A}';\ \beta = \frac{\mathfrak{B}'}{1 - \frac{1}{ii}};\ \gamma = \frac{\mathfrak{C}'}{1 - \frac{4}{ii}};\ \delta = \frac{\mathfrak{D}'}{1 - \frac{9}{ii}};\ \varepsilon = \frac{\mathfrak{E}'}{1 - \frac{16}{ii}}.$$

§. 12. Cum igitur ex valoribus litterarum A, B, C, D, etc. fupra §. 6. inuentis facile colligi queant valores

lores deriuati A', B', C', D', etc. tum vero $\mathfrak{A}_{,}$ $\mathfrak{B}_{,}$ $\mathfrak{C}_{,}$ $\mathfrak{D}_{,}$ etc. ac denique $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$, etc. ex iis iam deduci possunt α, β, γ, δ, etc. vnde porro innotescunt valores p & q, quarum prior praebet exiguam illam mutationem quam actio Veneris in distantia Terrae et Sole producit, cum sit $v = + \mu p$. Denique ex valore p deriuatur valor ipsius q quem breu. gr. statuamus:

$$q = \alpha' + \beta' \operatorname{cos.} \eta + \gamma' \operatorname{cos.} 2\delta + \delta' \operatorname{cos.} 3\eta + \text{ etc.}$$

ita vt sit

$$\alpha' = \Delta - 2\alpha; \ \beta' = i(k - \mathfrak{B}) - 2\beta; \ \gamma' = -2\gamma - \tfrac{1}{2} i \mathfrak{C},$$
$$\delta' = -2\delta - \tfrac{1}{3} i \mathfrak{D}; \ \varepsilon' = -2\varepsilon - \tfrac{1}{4} i \mathfrak{E}; \text{ etc.}$$

Inuento autem valore q inde colligitur series

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = 1 + \mu\alpha' + \mu\beta' \operatorname{cos.} \eta + \mu\gamma' \operatorname{cos.} 2\eta + \text{ etc.}$$

ex qua pro quouis tempore vera Solis longitudo concluditur fore

$$\Phi = (1 + \mu\alpha')\theta + \mu i \beta' \operatorname{fin.} \eta + \tfrac{1}{2}\mu i \gamma' \operatorname{fin.} 2\eta + \tfrac{1}{3}\mu i \delta' \operatorname{fin.} 3\eta + \text{etc.}$$

vbi pars prima $(1 + \mu\alpha')\theta$ exhibet longitudinem mediam Terrae, quam quia supponimus esse exacte $= \theta$, sequitur esse debere $\alpha' = 0$. Reliquae autem partes continent inaequalitates motus periodici, quae ergo pendent a finibus angulorum η, 2η, 3η, 4η, etc. Hoc modo sequens tabula perturbationem est facta.

VLTE-

Tabula Perturbationum in distantia et motu Terrae, ab actione Veneris, in eam agente, ortarum.

Argumentum
Elongatio Veneris a Terra.

Signa Grad.	0.		I.		II.		III.		IV.		V.		Signa Grad.
	Long. −	Dist. +	Long. −	Dist. +	Long. −	Dist. −	Long. +	Dist. −	Long. +	Dist. −	Long. +	Dist. +	
0	0, 0	20	4, 0	5	0, 3	14	6, 9	16	11, 1	1	8, 4	18	30
1	0, 2	20	4, 0	4	0, 1	14	7, 1	16	11, 1	+	8, 1	19	29
2	0, 4	20	4, 0	3	+	14	7, 3	15	11, 2	0	7, 9	19	28
3	0, 6	20	3, 9	3	0, 3	15	7, 6	15	11, 2	1	7, 7	20	27
4	0, 8	20	3, 9	2	0, 5	15	7, 8	15	11, 2	2	7, 5	20	26
5	1, 0	20	3, 9	1	0, 8	15	8, 0	14	11, 2	2	7, 2	21	25
6	1, 2	20	3, 8	0	1, 0	16	8, 2	14	11, 1	3	7, 0	21	24
7	1, 4	19	3, 8	−	1, 3	16	8, 4	14	11, 1	4	6, 7	22	23
8	1, 6	19	3, 7	1	1, 5	16	8, 6	13	11, 1	4	6, 4	22	22
9	1, 8	19	3, 6	1	1, 7	16	8, 8	13	11, 0	5	6, 2	23	21
10	2, 0	18	3, 5	2	2, 0	17	9, 0	12	10, 9	6	5, 9	23	20
11	2, 2	18	3, 4	3	2, 2	17	9, 1	12	10, 9	6	5, 7	23	19
12	2, 4	17	3, 3	4	2, 5	17	9, 3	11	10, 8	7	5, 4	24	18
13	2, 5	17	3, 2	4	2, 7	17	9, 4	11	10, 7	8	5, 1	24	17
14	2, 7	16	3, 1	5	3, 0	17	9, 6	10	10, 7	8	4, 9	24	16
15	2, 8	16	3, 0	6	3, 2	17	9, 8	10	10, 5	9	4, 6	25	15
16	3, 0	15	2, 9	6	3, 5	17	9, 9	9	10, 4	10	4, 3	25	14
17	3, 1	15	2, 7	7	3, 7	17	10, 0	9	10, 3	10	4, 0	25	13
18	3, 2	14	2, 6	8	4, 0	17	10, 1	8	10, 2	11	3, 7	25	12
19	3, 3	13	2, 4	8	4, 2	17	10, 3	8	10, 1	12	3, 4	26	11
20	3, 5	13	2, 3	9	4, 5	17	10, 4	7	9, 9	12	3, 1	26	10
21	3, 6	12	2, 1	9	4, 7	17	10, 5	7	9, 8	13	2, 8	26	9
22	3, 6	11	1, 9	10	5, 0	27	10, 6	6	9, 6	14	2, 5	26	8
23	3, 7	11	1, 7	10	5, 2	17	10, 7	5	9, 5	14	2, 2	26	7
24	3, 8	10	1, 6	11	5, 5	17	10, 8	5	9, 3	15	1, 9	27	6
25	3, 8	9	1, 4	11	5, 7	17	10, 9	4	9, 1	15	1, 6	27	5
26	3, 9	8	1, 2	12	6, 0	17	10, 9	3	8, 9	16	1, 2	27	4
27	3, 9	8	1, 0	12	6, 2	17	11, 0	3	8, 7	17	0, 9	27	3
28	3, 9	7	0, 8	13	6, 5	16	11, 0	2	8, 6	17	0, 6	27	2
29	4, 0	6	0, 6	13	6, 7	16	11, 1	2	8, 5	18	0, 3	27	1
30	4, 0	5	0, 3	14	6, 9	16	11, 1	1	8, 4	18	0, 0	27	0
Grad.	+ Long.	− Dist.	+ Long.	+ Dist.	− Long.	+ Dist.	− Long.	+ Dist.	− Long.	− Dist.	− Long.	− Dist.	Grad.
Signa	XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.		Signa

VLTERIORES DISQVISITIONES DE TEMPORE PERIODICO COMETAE, ANNO 1770 OBSERVATI.

Auctore

A. I. LEXELL.

§. 1.

Quamuis argumenta, quibus pro ſtabiliendo tempore Periodico Cometae Anno 1770 obſeruati, in priori hac de re disquiſitione, vſus ſum, adeo ſtringentia mihi eſſe videantur, vt concluſioni a me inuentae veriſimilitudinem ſaltem inſignem, conciliare debeant; tamen aegre ferre non potui, quod haec concluſio, vtpote omnino inexſpectata et valde ſingularis, apud Aſtronomos fidem vix ac ne vix quidem, inuenire potuerit. Quemadmodum enim pro re valde ſingulari iam haberi mereatur, quod ex obſeruationibus alicuius Cometae in vicinia eius ad Perihelium factis, tempus eius Periodicum determinari potuerit, ita vix quidem primo intuitu credibile videri debuit, quod Cometa hic Anno 1770 obſeruatus, Periodum ſuam circa Solem, annis quinque cum dimidio, abſolueret; praeprimis quum nullum eſſet indicium hunc Cometam vnquam antea terricolis fuiſſe viſum. Vt igitur hoc in negotio, non ſolum mihimet ipsi satisfacerem, sed etiam eos Astronomorum conuincere possem, quibus mea determinatio adhuc videbatur dubia, nouo examine eandem stabilire et confirmare constitui. Cum igitur in prioribus ostendissem, Elementa a me inuenta, quae tempori Periodico quinque annorum cum dimidio erant accommodata, obseruationibus Cometae saltem secunda eius apparitione factis, egregie satisfacere, nunc ad plenam conuictionem adhuc desiderabatur, vt ostendi posset, aucto aliquantum tempore Periodico Cometae, eiusmodi Elementa pro eius orbita inueniri, quae non aeque bene obseruationibus satisfaciendis inseruirent, quoque maius augmentum tempori Periodico tribuatur, eo insigniores obseruationibus induci errores. Qua autem ratione hoc argumentum instruximus, id cum alia occasione iam a nobis succincte sit expositum, prolixius quidem hic tradere constituimus; idque eo potius quod in hac disquisitione varia inuenimus, quae opinionibus in priori de hoc argumento Dissertatione traditis, emendandis & corrigendis inseruire debeant. In exponenda autem serie nostrorum argumentorum, eundem sequemur ordinem, quem in nostris meditationibus secuti sumus, vt pateat quam exacte et scrupulose nostram demonstrationem adornare, conati sumus.

§. 2. Elementa pro orbita Cometae, in priori nostra Dissertatione allata, licet obseruationibus Cometae secunda eius apparitione factis, tam bene satisfaciant, vt maior consensus desiderari nequeat, tamen ab illis, quae prima apparitione mense nimirum Iunii Anno 1770, institutae sunt, aliquanto magis abludunt; vnde iure concludi posse mihi videbatur, propter actionem telluris in nostrum

ſtrum Cometam, binas portiones orbitae ante et poſt eius ad tellurem noſtram approximationem, deſcriptas, non prorſus conuenire, ſeu ad eandem Sectionem Conicam non pertinere. In illa autem opinione eo magis confirmatus fui, quod tum quidem nullum mihi pateret medium, quo conſenſus harum obſeruationum obtineri poſſet, licet vti infra videbimus, poſtmodum eiusmodi Elementa inuenerim, quae tantum non omnibus huius Cometae obſeruationibus ſatisfaciunt. Quum igitur perſuaſus eſſem, non admodum ſcrupuloſe in eo eſſe elaborandum, vt obſeruationes prima et ſecunda Cometae apparitione factae, inter ſe redderentur conſentientes, primum quidem examinandum tantummodo eſſe exiſtimaui, quam Latitudinem Elementa, ſolis obſeruationibus ſecundae apparitionis ſatisfacientia, admitterent. Hunc in finem, quia vti ex priori Diſſertatione conſtat, definita Longitudine Cometae, per ipſas obſeruationes loci Geocentrici, inclinatio orbitae ſaltem intra limitem vnius minuti primi, cognoſcatur; examen noſtrum ita inſtruximus, vt aſſumtis pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae certis hypotheſibus, pro binis obſeruationibus ſecundae apparitionis, quaereremus loca Cometae Heliocentrica, tum vero aſſumto certo valore excentricitatis, pro orbita Cometae, reliqua huius orbitae Elementa inueſtigaremus, cuius methodi adumbrationem, nuper peculiari Schediaſmate huic volumini Actorum inſerendo adornauimus. Iam ſi tempus Perihelii per vtramque obſeruationem definitum, non congrueret, valorem excentricitatis immutauimus ita, vt tandem ex vtraque obſeruatione tempus pro Perihelio Cometae prorſus redderetur congruum. Elementis autem ſic inuentis in vſum adhibitis, computavimus loca Cometae Geocentrica pro temporibus aliarum obſer-

obſeruationum, quo ipſo innotuit, vtrum obſeruationes cum calculo conſentirent, nec ne.

§. 3. Poſita igitur Longitudine Nodi Aſcendentis $= 4^s. 12^\circ. 40'$. et inclinatione orbitae $= 1^\circ. 35'. 30''$, quaerendam inſtituimus orbitam, quae binis ſequentibus obſeruationibus exacte ſatisfaceret:

		Longit. Com. obſerv.	Latit. Com.
Aug. 10.	$14^h. 30'. 23''$	$3^s. 9^\circ. 32'. 42''$	$1^\circ. 9'. 18''$ A
Octob. 2.	16. 38. 50	4. 10. 41. 52	1. 10. 10 A

Methodo igitur in prioribus deſcripta ad haec deuenimus Elementa: Elongatio Perihelii a Nodo deſcendente $= 43^\circ. 14'. 26''$. Tempus Perihelii 1770 13, 1606 Aug., Excentricitas orbitae $= 0,7822473$, Semiparameter orbitae $= 1,1988111$, ex quo colligitur tempus Periodicum Cometae $= 5,4291$ Anni. His autem Elementis adhibitis, ſequentia per computum eliciuntur loca Cometae Geocentrica:

		Longit. Com. obſerv.	Latit. Comet.
Aug. 2.	$15^h. 3'. 15''$	$3^s. 6^\circ. 4'. 19''$	$49'. 11''$ A
29.	15. 21. 53	3. 21. 1. 12	$1^\circ. 21. 1.$ A

quarum determinationum diſſenſus ab obſervationibus, non omnino maior eſt, quam vt facile admitti queat.

§. 4. Nunc vero ſi ponatur Longitudo Nodi Aſcendentis $= 4^s. 12^\circ. 20'$ et inclinatio orbitae $1^\circ. 34'. 30''$, pro ſequentibus obſeruationibus:

		Longit. Com. obſerv.	Latit. Comet.
Aug. 7.	$14^h. 49'. 19''$	$3^s. 8^\circ. 6'. 40''$	$1^\circ. 3'. 35''$ A
Octob. 1.	15. 23. 22	4. 10. 12. 6	1. 9. 51

Ele-

Elementa isthaec inuenientur: Elongatio Perihelii a Nodo descendente $= 44^\circ. 8'. 40''$; Tempus Perihelii 1770, Aug. 13, 7155; Excentricitas orbitae $= 0, 7908100$; Semiparameter orbitae $= 1, 2085528$; hinc Tempus Periodicum Cometae $= 5, 7944$ Anni. Pro supra allatis autem obseruationibus dier. 2 et 29 Aug. Longitudines Cometae Geocentricae ex calculo erunt: $3^s. 6^\circ. 2'. 50''$ et $3^s. 21^\circ. 0'. 51''$, quae cum obseruatis pulchre admodum consentiunt. Tum vero si, eadem pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae facta hypothesi, itemque in vsum vocata obseruatione die 7. Aug. instituta, loco obseruationis pro 1 Octob. supra allatae, ista adhibeatur, qua pro 1 Octob. $16^h. 33'. 28''$, inuenta est Longitudo Cometae $4^s. 10^\circ. 13'. 54''$ et Latitudo $1^\circ. 10'. 4''$ A, Elementa orbitae hunc in modum determinabuntur: Elongatio Perihelii a Nodo ascendente $= 43^\circ. 54'. 18''$; Tempus Perihelii 1770 Aug. 13, 6320; Excentricitas orbitae $= 0, 7817800$; Semiparameter orbitae $= 1, 2031183$, indeque Tempus Periodicum Cometae $= 5$ 4430. Ex quibus Elementis, pro modo citatis temporibus obseruationum, diebus 2 et 29 Augusti factarum, sequentes eliciuntur Longitudines Cometae: $3^s. 6^\circ. 4'. 20''$. et $3^s. 20^\circ. 58'. 44''$; quae quidem prius allatis aliquanto magis erroneae sunt, interim nec in his errores iusto grauiores habendae sunt. In Latitudines Cometae ex Elementis deducendas, necesse non erat, vt inquireremus, quia illas ab insignioribus aberrationibus immunes esse, facile praesumi potuit.

§. 5. His igitur speciminibus iam equidem satis perspicuum redditur, Elementa quae obseruationibus Cometae, secunda eius apparitione factis, satisfaciant, aliquali

 cum

cum Latitudine accipi posse, eaque aliquantum diuersa prodire, prouti hypothesis pro Longitudine Nodi et inclinatione orbitae, alia et alia statuatur, vel diuersae in vsum vocentur obseruationes. Hinc autem suspicio mihi oborta est, an non fieri posset, vt Elementorum in priori Disquisitione inuentorum aliquanta immutatione, id praestari posset, vt obseruationes, prima Cometae apparitione factae, ad consensum redigerentur cum illis, quae secunda apparitione institutae habentur. Aliquot itaque hunc in finem institutis tentaminibus, ad eiusmodi deueni Elementa, quae obseruationibus huius Cometae tantum non omnibus, ita satisfacerent, vt maximi errores vix duo minuta prima excederent. Antequam vero horum Elementorum expositionem tradam, haud praeter rem erit, vt primum succinctam adumbrationem Methodi, in hac disquisitione adhibitae, exponam.

§. 6. Quum igitur principalis difficultas hoc in negotio inde oriatur, quod binae quaepiam obseruationes primae apparitionis, vtpote illae quae 15 & 29 Iunii institutae sunt, reduci debeant tam ad consensum inter se, quam cum illis, quae ab initio Augusti, vsque ad initium Octobris factae habentur; primum quidem de eo imprimis solliciti fuimus, vt obseruationes diebus 15 & 29 Iunii inter se redderentur conspirantes. Ne autem consideratio Latitudinis hanc disquisitionem turbaret, illius primo quidem nullum habuimus respectum, vsque dum Elementa ita adornare licuerit, vt Longitudinibus Cometae satisfacerent. Scilicet pro tempore Periodico Cometae certum adhibentes valorem, quantitatem semiparametri quoque hypothesi effinximus, vnde his binis quantitatibus datis ipsa species orbi-

orbitae determinata habebatur. Deinde quum pro obseruatione, die 29 Iunii instituta, determinatio Longitudinis Geocentricae praeprimis dependeat ab elongatione Cometae a terra e Sole visa, in qua quidem si vno minuto secundo fuerit aberratum, inde in Elongationem Cometae a Sole e terra spectatam deriuabitur error 45″, priorem harum elongationem tamquam cognitam spectare licebit. Hinc si tempus Perihelii etiam pro cognito habeatur, ope obseruationis die 29 Iunii institutae, Elongatio Perihelii a nodo innotescet. Nam si detur tempus Perihelii, dabitur pro obseruatione die 29 Iunii angulus anomaliae, quem exprimamus littera θ, elongatione Perihelii a Nodo per ω indicata; dabit igitur $\theta - \omega$ elongationem Cometae a Nodo, quam ob inclinationem orbitae proxime cognitam, paruula quantitate δ ad elongationem in Ecliptica reducere licet, quae erit $\theta - \omega - \delta$. Porro ob datas longitudines Nodi et terrae, dabitur elongatio Nodi a terra e Sole visa $= \eta$; hincque elongatio terrae a Cometa Heliocentrica $= \theta - \omega - \delta - \eta = \gamma$; ideoque si hic angulus γ supponatur cognitus, vicissim habebitur $\omega = \theta - \delta - \eta - \gamma$.

§. 7. Exemplo autem res fiet illustrior. Ponamus esse tempus Periodicum Cometae $= 5, 585$ Annorum, et semiparametrum orbitae $= 1, 2042869$, Tempusque Perihelii incidere in $13, 5400$ Augusti, pro 29 Iunii $11^h. 59'. 26''$ erit angulus anomaliae $= \theta = 78°. 9'. 3''$; tum vero, ob Longitudinem Nodi ascendent $= 4^s. 12°. 20'. 0''$ et Solis $= 3^s. 8°. 6'. 25''$, est angulus $\eta = 34°. 13'. 35''$, porro est angulus paruulus $\delta = 35''$ et $\gamma = - 1'. 53''$, ex quo obtinebitur $\omega = 43°. 56'. 46''$. Deinde pro 15 Iunii $11^h. 53'. 22''$, habetur angulus anomaliae $\theta = 90°. 15'. 41''$, vnde fit

$\theta - \omega = 46^\circ.\ 18'\ 55''$ et $\theta - \omega - \delta = 46^\circ\ 18'\ 17''$, atque eſt pro hoc tempore $\eta = 46^\circ\ 36'.\ 16''$, hinc fit $\gamma = -1^\circ.\ 17'.\ 59''$; vnde calculo inſtituto reperietur angulus elongationis inter Solem et Cometam e Sole viſus $8^\circ.\ 7'.\ 53''$, ideoque Longitudo Cometae $9^s.\ 2^\circ.\ 51'.\ 37''$.

§. 8. Nec hoc negotium eo ipſo turberi cenſendum eſt, quod Longitudo Nodi nondum exacte ſit definita, ſcilicet elongatio Perihelii a Nodo certae hypotheſi Longitudinis Nodi accommodata eſt, quantumque poſterius horum Elementorum immutatur, tantam etiam mutationem in priori ſtatuendam eſſe, oportet. Exactum autem iudicium de vera quantitate Longitudinis Nodi et inclinationis orbitae ex Latitudinibus Cometae diebus 15 et 29 Iunii obſeruatis, formandum eſt, ſcilicet haec Elementa ita aſſumenda ſunt, vt, quantum fieri liceat, iſtis Latitudinibus ſatisfiat.

§. 9. Elementa igitur hoc modo definita, quibus, pro orbita Cometae determinanda, adquiecendum eſſe exiſtimaui, ad ſequentia reducuntur capita:

I. Longitudo Nodi Aſcendentis $= 4^s.\ 12^\circ.\ 0'$.

II. Inclinatio orbitae ad Eclipticam $= 1^\circ.\ 33'.\ 40''$.

III. Elongatio Nodi deſcendentis a Perihelio $= 44^\circ.\ 17'.\ 3''$, hincque Longitudo Perihelii $11^s.\ 26^\circ.\ 16'.\ 25''$.

IV. Tempus tranſitus Cometae per Perihelium, Anno 1770 die 13,5450 Auguſti, ſiue $13^h.\ 5'$ circiter.

V. Diſtantia Cometae in Perihelio ſuo a Sole $= 0{,}6743815$, dum nimirum diſtantia media Solis a terra vnitate exprimitur.

VI.

VI. Semiaxis principalis orbitae a Cometa deſcriptae = 3, 1478606 diſtantiarum huiusmodi mediarum, vnde colligitur tempus Periodicum Cometae = 5,585 Annorum, ſeu 5 Annor. 7 Menſium circiter. Reliqua Elementa orbitae, prouti ſemiparameter et excentricitas, ex his facile quidem colliguntur, interim tamen ſi cuipiam volupe fuerit, calculos noſtros examini ſubiicere, horum Elementorum valores cum adiectis eorum Logarithmis heic adponere non ſuperfluum erit:

Semiparamet. orbitae = 1, 2042869, Log. = 0, 0807300.
Excentric. orbitae = 0, 7857652, Log. = 9, 8952927.
Diſtantia Perih. = 0, 6743815, Log. = 9, 8289057.
Semiaxis orbitae = 3, 1478606, Log. = 0, 4980155.
Diſtantia Aphel. = 5, 6213397, Log. = 0, 7498399.

§. 10. His igitur Elementis ſtabilitis loca Cometae Geocentrica per calculum elicita ſe habebunt, vti ſequens Tabula declarat, quae eorum comparationem cum obſeruationibus ſimul ob oculos ponit:

Tempus medium Pariſinum.	Long. Comet ex calculo.	Differ. ab obſerv.	Latit. Comet. ex calculo.	Differ. ab obſerv.
Iunii 14.11^h.29$'$.48$''$	9^s.2°.48$'$. 1$''$	− 17$''$	6°.40$'$.54$''$ B	− 30$''$
15.11. 23.22	- 2. 51. 54	− 5	6. 57. 51	− 36
17.11. 11.33	- 3. 0. 52	− 54	7. 38 37	+ 14
20.10. 40.48	- 3. 17. 2	− 50	9. 5. 29	+ 9
21.10. 27.45	- 3. 24. 26	−1$'$. 9	9. 45. 27	− 51
22.12 9.36	- 3. 34. 9	− 26	10. 39. 54	− 49
24.12. 3.18	- 3. 59. 51	+ 7	12. 59. 52	+ 3
25.13. 27.55	- 4. 21. 21	+ 21	14. 54. 37	− 41

Tempus medium Parisinum.	Longit. Comet. ex calculo.	Differ. ab observ.	Latit. Comet. ex calculo.	Differ. ab observ.
Iunii 27.13^h.13$'$.17$''$	9^s. 5°.36$'$. 6$''$	− 1$'$.12$''$	21°. 8$'$.38$''$ B	+ 9$''$
28.10. 46. 34	- 6. 43. 58	+ 2. 0	26. 30. 39	− 1$'$. 6
29.10. 2. 51	- 9. 22. 1	+ 1. 25	36. 48. 4	− 4. 16
- 10. 32. 33	- 9. 27. 31	+ 44	37. 6. 30	− 4. 55
- 11. 59. 26	- 9. 42. 30	+ 15	38. 0. 37	− 3. 5
30.12. 3. 11	*- 21. 1. 45	− 37. 17	61. 22. 26	−1°.18$'$. 3$''$
Iulii 1.12. 3. 23	* 1. 29. 59. 15	−4°.17$'$.37$''$	70. 48. 44	+ 20. 54
3.11. 3. 45	* 2. 27. 40. 38	+ 1. 35. 44	25. 18. 50	+ 14. 31
Aug. 2.15. 3. 15	3. 6. 2. 4	+ 28	49. 59 A	+ 8
15. 39. 12	- 6. 2. 37	+ 21	50. 4	+ 17
3.14. 45. 9	- 6. 24. 32	+ 43	52. 46	+ 50
15. 19. 43	- 6. 25. 9	+ 32	52. 51	+ 5
15. 24. 9	- 6. 25. 13	+ 37	52. 52	+ 14
4.14. 12. 48	- 6. 47. 46	− 18	56. 4	− 20
14. 21. 52	- 6. 47. 53	+ 50	56. 5	+ 22
14. 38. 22	- 6. 48. 11	+ 49	56. 7	+ 29
14. 54. 12	- 6. 48. 26	+ 48	56. 9	+ 37
15. 7. 25	- 6. 48. 39	+ 57	56. 11	− 25
15. 33. 8	- 6. 49. 5	+ 1. 3	56. 14	− 15
5.14 38. 43	- 7. 13. 3	+ 48	58. 50	+ 27
14. 55. 3	- 7. 13. 22	+ 1. 6	58. 52	+ 34
15. 13. 28	- 7. 13. 45	+ 36	58. 54	+ 37
15. 28. 24	- 7. 14. 3	+ 40	58. 55	+ 24
6.14. 29. 42	- 7. 38. 45	+ 40	1. 1. 16	+ 2
14. 45. 26	- 7. 39. 1	+ 47	1. 1. 17	− 5
15. 0. 5	- 7. 39. 18	+ 50	1. 1. 19	+ 22
7.14. 49. 19	- 8. 5. 59	+ 41	1. 3. 34	+ 1
14. 56. 9	- 8. 6. 6	+ 44	1. 3. 35	+ 13

Tem-

Tempus medium Parifinum.	Longit. Com. ex calculo.	Differ. ab obferv.	Latit.Comet. ex calculo.	Diff. ab obferv.
Aug. 8.14^h.20$'$.13$''$	3^s. 8°.33$'$.17$''$	+12$''$	1°. 5$'$.35$''$ A	+1$'$. 1$''$
14. 20. 29	- 8. 33. 17	+57	1. 5. 35	+1. 3
14. 51. 12	- 8. 33. 52	+21	1. 5. 36	+1. 4
15. 10. 28	- 8. 34. 14	+35	1. 5. 37	+1. 6
9.14. 48. 10	- 9. 2. 40	NB.+1$'$.50	1. 7. 29	+2. 4
10.14. 14. 27	- 9. 31. 44	+52	1. 9. 9	+4
14. 21. 43	- 9. 31. 53	+49	1. 9. 9	+4
14. 30. 23	- 9. 32. 4	+38	1. 9. 10	+8
14. 39. 32	- 9. 32. 16	+41	1. 9. 11	+13
14. 46. 16	- 9. 32. 25	− 8	1. 9. 12	+52
15. 0. 49	- 9. 32. 43	+26	1. 9. 13	+33
15. 19. 55	- 9. 33. 7	+45	1. 9. 14	+13
11 14. 23. 23	-10. 2. 37	+25	1. 10. 40	+11
14. 31. 49	-10. 2. 47	+31	1. 10. 40	+15
14. 45. 6	-10. 3. 5	+49	1. 10. 41	+1. 32
14. 54. 20	-10. 3. 17	+52	1. 10. 41	+1. 31
12.14. 46. 25	-10. 34. 43	+ 5	1. 12. 4	+48
15. 9. 4	-10. 35. 13	+39	1. 12. 5	+1. 8
15. 27. 46	-10. 35. 36	+20	1. 12. 7	+14
15. 30. 25	-10. 35. 40	+ 6	1. 12. 7	+1. 25
14.14. 37. 29	-11. 40. 4	+21	1. 14. 25	+1. 0
14. 58. 39	-11. 40. 33	+22	1. 14. 26	+1. 3
15. 18. 39	-11. 41. 1	−21	1. 14. 27	+1. 5
15. 28. 39	-11. 41. 15	−20	1. 14. 28	+1. 10
15.15. 43. 33	-12. 15. 37	−41	1. 15. 26	+1. 17
15. 56. 37	-12. 15. 55	−29	1. 15. 26	+1. 19
16. 4. 32	-12. 16. 6	−10	1. 15. 27	+1. 19
18.14. 24. 32	-13. 59. 37	−13	1. 17. 39	+56

Tem-

Tempus medium Parisinum.	Longit. Com. ex calculo.	Diff. ab observ.	Latit. Com. ex calculo.	Diff. ab observ.
Aug. 18. $14^h.43'.23''$	$3^s.14°.\ 0'.\ 5''$	$-\ 0''$	$1°.17'.39''$ A	$+1'.\ 2''$
15. 4. 7	-14. 0. 37	+ 20	1. 17. 40	+1. 15
19. 14. 33. 18	-14. 36. 16	− 13	1. 18. 37	+ 41
14. 57. 41	-14. 36. 52	− 11	1. 18. 38	+ 50
26. 15. 39. 38	-19. 3. 59	− 15	1. 20. 5	+ 40
16. 16. 4	-19. 4. 56	− 52	1. 20. 5	+ 51
28. 14. 44. 8	-20. 20. 27	− 45	1. 20. 5	+ 50
15. 8. 38	-20. 21. 5	− 25	1. 20. 5	+ 59
29. 15. 21. 53	-21. 0. 31	− 28	1. 20. 3	+ 2
15. 43. 31	-21. 1. 6	− 28	1. 20. 3	+ 38
16. 3 59	-21. 1. 37	− 9	1. 20. 3	+ 37
16. 25. 17	-21. 2. 8	− 0	1. 20. 3	+ 36
30. 14. 48. 22	-21. 38. 44	+ 28	1. 19. 58	+ 58
15. 6. 15	-21. 39. 14	+ 51	1 19. 58	+1. 0
15. 26. 31	-21. 39. 46	+ 41	1. 19. 58	+1. 2
31. 14. 38. 25	-22. 17. 49	− 33	1. 19. 50	+ 33
15. 19. 4	-22. 18. 54	− 38	1. 19. 50	+ 35
Sept. 4. 15. 5. 20	-24. 53. 46	$-1'.\ 5$	1. 19. 2	+ 21
15. 15. 42	-24. 53. 56	− 45	1. 19. 2	+ 23
15. 32. 42	-24 54. 28	− 47	1. 19. 2	+ 29
15. 48. 29	-24. 54 54	− 58	1. 19. 2	+ 32
16. 11. 28	-24. 5. 30	− 19	1. 19. 1	+ 50
5. 14. 48. 37	-25. 31. 44	− 37	1. 18. 47	+ 58
15. 2. 43	-25. 32. 6	− 59	1. 18. 47	+ 56
15. 14. 55	-25. 32. 26	−1. 1	1. 18. 47	+ 57
8. 15. 57. 4	-27. 27 41	−1. 9	1. 17. 51	+ 32
16. 5 45	-27. 27. 54	−1. 7	1. 17. 51	+ 33
9. 15. 6, 30	-28. 3. 52	− 33	1. 17. 33	+ 49

Tem-

Tempus medium Parisinum.	Longit. Comet ex calculo.	Differ. ab obferv.	Lat. Comet. ex calculo.	Different. ab obferu.
Sept. 9. 15^h. 22'. 5''	3^s. 28°. 4'. 18''	— —44''	1°. 17'. 33''	+ 50''
15. 37. 23	- 18. 4. 41	— 1. 7	1. 17. 33	+ 51
10. 16. 26. 23	- 28. 43. 15	NB.-2. 49	1. 17. 12 A	+1. 52 NB.
14. 14. 16. 26	4. 1. 5. 36	— 1. 0	1. 15. 46	+ 32
14. 14. 33. 47	- 1. 6. 1	— 44	1. 15. 45	+ 36
15. 0. 21	- 1. 6. 43	— 37	1. 15. 45	+ 38
15. 42. 21	- 1. 7. 50	— 43	1. 15. 44	+ 41
17. 15. 53. 3	- 2. 53. 13	— 33	1. 14. 35	+ 17
16. 5. 15	- 2. 53. 31	— 36	1. 14. 35	+ 17
16. 13. 53	- 2. 53. 43	— 33	1. 14. 34	+ 19
18. 15. 30. 16	- 3. 27. 6	— 9	1. 14. 12	+ 46
15. 56. 6	- 3. 27. 45	— 18	1. 14. 12	+ 48
16. 9. 58	- 3. 28. 4	— 24	1. 14. 11	+ 51
19. 15. 19. 4	- 4. 0. 37	— 5	1. 13. 48	— 46
15. 29. 50	- 4. 0. 52	— 5	1. 13. 46	— 46
20. 15. 33. 45	- 4. 34. 27	— 10	1. 13. 35	— 1. 0
29. 15. 23. 51	- 9. 15. 53	— 59	1. 9. 42	+ 34
15. 37. 50	- 9. 16. 10	— 1. 6	1. 9. 42	+ 1. 53
16. 39. 30	- 9. 17. 24	— 1. 30	1. 9. 41	+ 1. 12
Oct. 1. 15. 23. 22	- 10. 13. 31	— 1. 25	1. 8. 54	+ 57
16. 33. 28	- 10. 14. 55	— 1. 1	1. 8. 53	+ 1. 11
2. 15. 43. 37	- 10. 41. 59	— 1. 9	1. 8. 29	+ 35
16. 38. 50	- 10. 43. 5	— 1. 13	1. 8. 29	+ 41

§. 11. Ex inſpectione huius Tabulae iam oppido liquet, Elementa a nobis inuenta adeo exacte cum obſeruationibus conſentire, vt vix vllibi diſſenſus maiores, quam duorum minutorum primorum, reperiantur, exceptis tamen obſeruationibus, quae diebus 30 Iunii, 1 et 3

Iulii

Iulii institutae sunt, pro quibus errores omnino enormes emergunt. De his autem obseruationibus tenendum, quod, ipso Cel. *Messier* fatente, pro exactis reputari non queant; nam quae his diebus Cometae assignavit loca, illa per aestimationem solum determinata sunt, in quam omnino insignes errores irrepere potuerunt. Et quod speciatim die 1 Iulii institutam attinet, pro qua error in Longitudine integros quatuor gradus exsuperat; calculo inueni, quod si in declinatione Cometae aestimanda vnico Gradu a Cel. *Messier* fuerit aberratum, Longitudinem Cometae inde plus quam tribus Gradibus factam esse erroneam. Quod si vero quis existimauerit, insignes errores, qui diebus modo commemoratis obseruationibus insunt, indicio esse, quod motus Cometae isto tempore ab actione telluris affectus fuerit, nec nos plane habebit refragantes; hoc enim in negotio vix quicquam certi statuere licet, nisi experimento facto ipsa quantitas actionis, quam terra in Cometam exseruit, fuerit inuestigata.

§. 12. Deinde licet errores, pro obseruationibus secunda apparitione factis, numeris satis exiguis concludantur, tamen vtique singulare videbitur, quod pro Latitudinibus, tantum non omes hi dissensus in eundem sensum cadant, id est singuli fere sint positiui. Quatenus autem id praecipue intendimus, vt Latitudinibus diebus 15 et 29 Iunii obseruatis satisfaceremus, id vix aliter praestare nobis licuit, quam huiusmodi valore pro inclinatione orbitae adhibito, quo obseruationibus secundae apparitionis, respectu Latitudinis, errores non quidem praegrandes, verumtamen in eundem sensum cadentes inducerentur. Fieri quidem potest, vt leui quadam correctione ne noſtris Elementis adplicata, errores obſeruationum ſecundae apparitionis reſpectu Latitudinis tantillum mutentur, cuius etiam ſpecimen infra dabimus, verum vt incommodo, ſupra commemorato, penitus obuiam iri queat, nullum adhuc nobis innotuit remedium. Caeterum facile liquet, obſeruationes, quas ſigno NB. diſtinximus, pro aliquantum erroneis eſſe habendas, id quod quoque exinde probabile redditur, quod Cel. *Meſſier* non licuerit harum obſeruationum verificationem per alias, iisdem diebus factas, inſtituere.

§. 13. Elementa noſtra licet obſeruationibus egregie ſatisfaciant, tamen non dubitamus, quin leui earum mutatione, conſenſus calculi cum obſeruationibus vel aeque aptus, vel maior obtineri queat, hoc enim in negotio aliquam Latitudinem pro definiendis Elementis Cometae eſſe admittendam, ipſa rei indoles declarat. Si itaque Elementa noſtra pro ipſa ſpecie orbitae, nimirum eius ſemiparameter et excentricitas, vti ſupra definita ſunt, retineantur, tum vero ſupponatur Tempus Perihelii Cometae contigiſſe Aug. 13,5500, fiet pro obſeruatione die 15 Iunii inſtituta Longitudo Cometae ex calculo $9^s. 2^\circ. 52'. 23''$ et pro 29 Iunii $11^h. 59'. 26''$ Longitudo erit $9^s. 9^\circ. 43'. 6''$: ita vt iam quidem obſeruatio die 15 Iunii aliquanto magis ſit erronea, quam ſecundum Elementa a nobis ſtabilita, qui tamen error facile admitti poſſet. Pro tempore autem 2 Aug. $15^h. 3'. 15''$ fiet nunc Longitudo Cometae $3^s. 6^\circ. 2'. 14''$, ex quo liquet poſteriori hac expreſſione pro tempore Perihelii adhibita, pro obſeruationibus ſecunda Cometae adparitione factis errores in Longitudinibus commiſſos aliquantulum imminui.

Pro Latitudinibus vero Cometae calculus sequentes praebet conclusiones: Primum si inclinatio orbitae statuatur 1°. 33′. 50″, tumque Latitudini obseruatae die 29 Iunii, habita tamen ratione effectus ex Parallaxi oriundi, satisfiat, erit Longitudo ☊ = 4ˢ. 12°. 3′ et pro obseruatione 15 Iunii Latitudo ex calculo 6°. 58′. 50″. B, pro 2 autem Aug. 49′. 56″ Austr. Deinde si inclinatio orbitae ponatur 1°. 33′. 40″, satisfaciendo iterum Latitudini die 29 Iunii obseruatae, fiet pro 15 Iunii Latitudo ex calculo 6°. 58′. 20′ Bor. et pro 2 Aug. 49′. 51″ Austr, Longitudine ☊ existente = 4ˢ. 12°. 7′. Hinc igitur patet ista correctione temporis Periodici, Latitudinibus Cometae maiores induci errores; quam ob rem nisi scrupulosiores esse velimus circa errores obseruationum in Longitudinibus, Tempus Perihelii in nostris Elementis assignatum potius retrahi quam promoueri debet.

§. 14. Sequitur nunc, vt exactius examinemus an non, aucto aliquantillum tempore Periodico Cometae nostri, eiusmodi Elementa inuenire liceat, quibus obseruationes, quantum fieri potest, exacte impleantur. Incipiamus vero primum ab augmentis huius temporis Periodici exiguis, hincque supponamus esse tempus Periodicum 5, 6 Annorum. Tum vero calculo instituto reperire licebit, quod si reliqua Cometa Elementa hunc in modum determinentur:

Semiparameter orbitae = 1, 2044811

Distantia Perihelii = 0, 6743408

Excentricitas = 0, 7861608

Tem-

Tempus Perihelii Aug. 13,5420, Long. ☊ = $4^s. 12^\circ. 9'$ Elongatio Perihelii a nodo descend. = $44^\circ. 7'. 59''$ et inclinatio orbitae $1^\circ. 33'. 40''$; Longitudines et Latitudines Cometae pro quinque momentis obseruatis inuenientur ex calculo, vti sequens Tabella declarat:

Temp. Med. Parisinum.					Longit. Cometae ex calculo.				Latit. Cometae ex calculo.			
Iunii	15.	$11^h.$	$23'.$	$22''$	$9^s.$	$2^\circ.$	$52'.$	$12''$	$6^\circ.$	$58'.$	$37''.$	B
	29.	11.	59.	6	9.	9.	42.	59	38.	0.	54.	B
Aug.	2.	15.	3.	15	3.	6.	2.	7		49.	35.	A
	29.	15.	21.	53	3.	21.	0.	33	1.	20.	1.	A
Oct.	1.	16.	33.	28	4.	10.	14.	44	1.	9.	0.	A

Harum autem determinationum comparatio cum Tabula nostra superius allata declarabit, an his Elementis adhibitis obseruationum errores augeantur, an minuantur. Liquet igitur pro obseruationibus secunda apparitione factis, errores obseruationum in Longitudine aliquantillum diminui; in Latitudine vero hi errores partim augentur, vti pro obseruationibus diebus 2 et 29 Augusti, partim minuentur, vti pro obseruatione die 1 Octob. instituta. At pro obseruatione die 15 Iunii facta error in Latitudine omnino multum excedit illum, qui secundum Elementa a nobis adoptata reperitur.

§. 15. Tribuamus nunc tempori Periodico Cometae nostri augmentum aliquanto maius, ponendo nimirum quod integrorum sex sit annorum. Tum autem si reliqua Cometae Elementa sequentem in modum determinentur:

Semiparameter orbitae $= 1,2071811$
Diſtantia Perihelii $= 0,6719267$
Excentricitas $= 0,7965047$

Longitudo ☊ $= 4^s. 12^\circ. 6'$, Elongatio Perihelii a ☋ $= 44^\circ. 9'. 56''$, inclinatio orbitae $= 1^\circ. 34'. 30''$, pro quinque obſeruationibus modo memoratis, calculus ſequentia praebebit Cometae loca Geocentrica:

	Longit. Cometae.	Latit. Cometae.
15 Iunii -	$9^s. 2^\circ. 51'. 52''$	$6^\circ. 58'. 6''$ B
29 Iunii -	9. 9. 43. 6	38. 0. 27.
2 Aug. -	3. 6. 3. 18	- - 50. 15 A
29 - - -	3. 21. 5. 42	1. 20. 0.
1 Oct. -	4. 10. 13. 18	1. 9. 10.

vbi quidem reſpectu Latitudinis obſeruationibus ſecundae apparitionis melius ſatisfit, quam per vlla Elementa hucvsque commemorata. Longitudinum autem ſi habeatur ratio, obſeruationes quidem 2 Aug. et 1 Octob. inſtituta egregie adimplentur, at pro 29 Aug. error obſeruationis ſecundum haec Elementa excederet quinque minuta cum dimidio.

§. 16. Quia vero Elementa allata certo valori pro ſemiparametro aſſumto accommodata ſunt, nunc quoque videndum, an non ſemiparametrum hunc immutando, error Longitudinis pro 29 Aug. imminui queat. Retenta igitur eadem quantitate temporis Periodici, reliqua Cometae Elementa ſtatuantur: Semiparameter orbitae $= 1,2073967$; Excentricitas $= 0,7964519$; Longitudo ☊ $= 4^s. 12^\circ. 28'$; Elongatio Perihelii a ☋ $= 43^\circ. 47'. 28''$,

Incli-

Inclinatio orbitae $= 1^\circ. 34'. 0''$, hincque erunt loca Cometae, ex calculo:

	Longit. Cometae.	Latit. Com.	
d. 15 Iunii -	$9^s. 2^\circ. 51'. 25''$	$6^\circ. 58'. 6''$	B
29 - - -	9. 9. 42. 42	8. 0. 24	
2 Aug. -	3. 6. 2. 47	- 49. 3	A
29 - - -	3. 21. 4. 56	1. 19. 36.	
1 Octob. -	4. 10. 12. 23	1. 9. 1.	

Sic itaque id quidem obtinetur, vt error in Longitudine pro obseruatione, die 29 Augusti instituta, aliquantum deprimatur, verum praeterquam quod errores in Latitudine, tam pro hac obseruatione, quam illa, quae 2 Aug. facta est, augeantur, obseruatio 1 Octob. iam respectu Longitudinis magis fit erronea, quam secundum Elementa prius commemorata. Quo autem magis valor pro semiparametro minuitur, eo maiores errores obseruationi 1 Octob. factae inducentur, ita vt hinc tuto colligere licet, si tempus Periodicum statuatur sex annorum, pro obseruationibus secundae apparitionis respectu Longitudinis summam maximorum errorum positiui et negatiui quinque saltem minutis primis aequari.

§. 17. Vlterius autem procedendo nunc examinabimus, quibus erroribus obseruationes fiant obnoxiae, si tempus Periodicum statuatur septem annorum. Heic igitur si pro semiparametro adhibeatur valor $= 1,2125511$, vt obseruationibus diebus 15 & 29 Iunii institutis satisfiat, reliqua Elementa sequenti ratione definientur: Excentricitas $= 0,8177036$; Longitudo ☊ $= 4^s. 12^\circ. 49'$; Elongatio Perihelii a ☋ $= 43^\circ. 26'. 10''$; Inclinatio orbitae

$= 1^\circ.$

$= 1^\circ.\ 35'.\ 30''$. Hinc vero loca Cometae, pro quinque momentis ſupra commemoratis, fient:

	Longit. Comet.	Latit. Com.
d. 15 Iunii -	$9^s.\ 2^\circ.\ 52'.\ 1''$	$6^\circ.\ 58'.\ 16''$ B
29 - -	9. 9. 42. 50	38. 0. 26.
2 Aug. -	3. 6. 6. 19	49. 3 A
29 - -	3. 21. 16. 18	1. 19. 31.
1 Octob.	4. 10. 10. 46	1. 9. 17.

Conſtat itaque ex hac Tabella, errores obſeruationum ſecunda Cometae apparitione factarum reſpectu Longitudinis praegrandes eſſe, et imprimis quidem illam, quae obſeruationi die 29 Aug. ineſt, adeo ſedecim minuta prima excedere, cuiusmodi errem vix quispiam hac in obſeruatione ſuſpicari poterit.

§. 18. Quod ſi vero, valorem ſemiparametri aliquantum augendo, id intendamus, vt errorem in obſeruatione d. 29 Aug. deprimamus, ex altera parte plurima alia incommoda experiemur; tum enim non ſolum error in obſeruatione die 1 Octob. inſtituta, reſpectu longitudinis commiſſus, in maiori ratione augebitur, ac illa pro 29 Aug. minuitur; ſed etiam ſingulis Latitudinibus Cometae, ſecunda eius apparitione obſeruatis, inſignes inducentur errores. Statuatur enim Semiparameter orbitae $= 1,2133888$; Excentricitas $= 0,8175636$; Longitudo ☊ $= 4^s.\ 13^\circ.\ 58'$; Elongatio Perihelii a ☋ $= 42^\circ.\ 14'.\ 41''$; Inclinatio orbitae $1^\circ.\ 33'.\ 50''$, eruntque loca Cometae ſubſidio horum Elementorum determinata

Lon-

	Longit. Comet.				Latit. Comet.			
15 Iunii -	9s.	2°.	51'.	54"	6°.	58'.	30"	B
29 - - -	9.	9.	42.	38	38.	0.	30.	
2 Aug. -	3.	6.	5.	59		45.	25	A
29 - - -	3.	21.	13.	54	1.	17.	57.	
1 Octob. -	4.	10.	7.	26	1.	9.	13.	

§. 19. Ratiocinio igitur iam expofito euidenter comprobatur, fi Tempus periodicum Cometae, vltra eum valorem, quem in noftris calculis adoptauimus, augeatur, obferuationibus errores continuo maiores induci, et fiquidem illi errores, qui pro hypothefi temporis Periodici fex annorum locum habent, verifimilitudine non prorfus deftitui reputentur, faltem certum eft, valore temporis Periodici vsque ad feptem annos aucto, obferuationes maioribus obnoxias reddi erroribus, quam vt vllo modo fidem inuenire queant. Verum quum huius ratiocinii vis praecipue in eo refideat, quod omnes omnino obferuationes circa hunc Cometam inftitutae ad confenfum inter fe redigendae fint, fi cui verifimile videatur, actionem telluris in Cometam adeo fuiffe infignem, vt motum Cometae fenfibili perturbatione afficere potuerit; etiam adhuc examinandum reftat, quam Latitudinem tribuere liceat Elementis, quae obferuationibus fecunda tantum Cometae apparitione factis fatisfacere debent. Quandoquidem autem angulus anomaliae, a Cometa circa Solem defcriptus a 2 Augufti vsque ad initium Octobris, multo fit minor illo, quem in prioribus noftris calculis confiderauimus, facile intelligitur, dum quaeftio eft de Elementis, quibus obferuationes fecundae apparitionis implentur, illa non adeo arctis limitibus circumſcribi, ac quae omnibus in vniuerſum obſeruationibus ſatisfacere debent.

§. 20. Praeterea quum Latitudines Cometae ſecunda eius apparitione obſeruatae valde ſint exiguae, nullum omnino eſt dubium, quin facili negotio illis ſatisfiat, modo obſeruationibus, circa Longitudines inſtitutis, fuerit ſatisfactum; hinc in ſequenti disquiſitione nihil neceſſe erat, vt Latitudinis haberemus reſpectum, quo ipſo ingens compendium noſtro examini acceſſit. Scilicet quia iam Longitudinem Nodi pro cognita habere liceat, ſi pro tempore Periodico Cometae et ſemiparametro orbitae certi valores hypotheſi effingantur, in eo tantum elaborandum eſt, vt inueniatur Tempus Perihelii Cometae et Elongatio Perihelii a Nodo, pro orbita, quae binis datis obſeruationibus ſatisfaciat. Vt autem euidentius pateat, qua ratione hoc examen inſtruximus, exemplo quodam eius ideam declarabimus. Supponamus igitur eſſe Longitudinem ☊ $= 4^s. 12^\circ. 0'$; Tempus Periodium Cometae $= 7$ Annis; Semiparametrum orbitae $= 1,2302688$, et quaeramus orbitam, quae binis obſeruationibus: die 2 Aug. $15^h. 3'. 15''$ et die 1 Octob. $15^h. 23'. 22''$ ſatisfaciat. Nunc vero oppido liquet, ſi pro alterutra harum obſeruationum conſtaret angulus anomaliae a Perihelio deſcriptus, eo ipſo non ſolum ipſum tempus Perihelii ſed etiam elongationem Perihelii a Nodo determinari. Faciendo igitur pro illa obſeruatione aliquot hypotheſes anomaliae, et quaerendo Tempora Perihelii et elongationes Perihelii a Nodo iſtis hypotheſibus conformes, deinde inueſtigentur loca Cometae Geocentrica ex elementis inuentis, pro altera obſeruatione, tumque diſſenſus harum determinatio-

num

num cum obseruatione declarabit, quos valores pro Tempore Perihelii et elongatione Perihelii a Nodo assignare necesse erit.

§. 21. Sic si pro obseruatione 1 Octob. statuantur hae hypotheses anomaliae: 80°. 40′. et 81°. 0′, inde habebuntur pro Tempore Perihelii hi valores: August 14, 5976 et 14, 2359. Deinde, calculo instituto, quaerantur distantiae Cometae a Sole his hypothesibus accommodatae, et quum inclinatio orbitae saltem proxime sit cognita, etiam distantiae curtatae dabuntur. Vnde si consideretur triangulum, quod formatur a loco Cometae ad Eclipticam reducto, centro telluris et Solis; in isto triangulo bina cognita sunt latera, distantia nimirum Cometae curtata et distantia Solis a terra, una cum elongatione Solis a Cometa, quae per ipsam obseruationem datur. Innotescet igitur hinc elongatio Cometae a terra e Sole visa, quae pro priori quidem harum hypothesium est 69°. 23′. 31″. Porro datur elongatio Nodi a terra, propter datas longitudines Nodi et terrae, haec elongatio pro casu praesenti est 56°. 56′. 30″; erit igitur elongatio Cometae a Nodo 126°. 19′. 1″, qui angulus ad orbitam Cometae reductus erit 126°. 18′. 25″, vnde subtrahendo angulum Anomaliae suppositum 80°. 40′. 0″, fiet elongatio Perihelii a Nodo = 45°. 38′. 25″; pro altera vero hypothesi inuenitur haec elongatio 45°. 37′. 28″. Deinde pro binis his hypothesibus computetur locus Cometae ad momentum die 2 Aug. notatum, eruntque eius valores 3ˢ. 5°. 47′. 16″ et 3ˢ. 5°. 16′. 38″, ex quo per regulam falsi concluditur, Tempus Perihelii statui debere Aug. 14, 7772 et elongationem Perihelii a Nodo 45°. 39′. 0″,

 quod

quod etiam ſatis bene cum obſeruatione die 2 Aug. facta congruit: nam ex vltimis his Elementis habetur locus Cometae die 2 Aug. et momento citato 3ˢ. 6°. 2′. 56″.

§. 22. Nunc igitur, ad principales concluſiones, ex noſtris calculis eliciendas, propius accedentes, primum obſeruabimus, ſuppoſito tempore Periodico ſex annorum, obſeruationibus ſecundae apparitionis ſatis exacte ſatisfieri. Nam ſi ſtatuatur ſemiparameter orbitae = 1, 2143963; Excentricitas = 0, 7951200; Tempus Perihelii Aug. 14, 1023; Elongatio Perihelii a ☋ = 44°. 50′. 46″. Longitudine ☊ ſuppoſita = 4ˢ. 12°. 0′, loca Cometae ex calculo deducta erunt:

	Long. Cometae	Differ. ab obſerv.
2 Aug. 15ʰ. 3′. 15″	3ˢ. 6°. 2′. 53″	— 21″
12 - - 14. 46. 25	3. 10. 36. 52	— 2′. 4
29 - - 15. 21. 53	3. 21. 0. 12	— 9
1 Oct. 15. 23. 22	4. 10. 12. 15	— 9

vbi vix quidem maior conſenſus Theoriae cum calculo deſiderari poteſt. Caeterum obſeruari quoque meretur, ſi his Elementis adhibitis, inſuper ſtatuatur inclinatio orbitae 1°. 34′. 30″, Latitudinibus Cometae obſeruatis admodum egregie ſatisfactum iri.

§. 23. Sequitur autem, vt iam quoque inquiramus, an, ſuppoſito tempore Periodico Cometae ſeptem annorum, obſeruationes ſecunda apparitione factae impleri queant. Hoc vero examen ita inſtituemus, vt reſpectu imprimis habito quatuor momentorum obſeruatorum, de quibus

quibus in ſuperiori § egimus, diſpiciamus, quales errores cuipiam harum obſeruationum ineſſe oportet, dum tribus reliquis fuerit ſatisfactum. Iam igitur in id intenti, vt obſeruationibus diebus 2 Aug. 29 Aug. et 1 Octob. ſatisfaciamus, ſequentia adipiſcimur Elementa: Semiparametrum orbitae = 1, 2373712; Excentricitatem = 0,8135456; Tempus Perihelii Aug. 15,6280; Elongationem Perihelii a ☋ = 46°. 14′. 6″, poſita Longitudine ☊ = 4^s. 12°. 0′, quibus in vſum vocatis erunt:

	Longit. Cometae.	Differ. ab obſerv.
2 Aug.	3^s. 6°. 2′. 27″	+ 5″
12 -	3. 10. 41. 45	− 6′. 55
29 -	3. 21. 0. 20	− 17
1 Octob.	4. 10. 12. 29	− 23

Facile autem colligi poteſt, hunc errorem in obſeruatione, die 12 Auguſti facta, commiſſum, minimum eſſe, qui prodit, dum obſeruationibus 2 Aug. et 1 Octob. ſatisfaciendum eſt.

§. 24. Nam ſi pro Elementis orbitae ſequentes binae effingantur hypotheſes:

	I. Hyp.	II. Hyp.
Semiparameter orbitae	1, 2125511	1, 2473836
Tempus Perihelii Aug.	12, 8000	16, 8328
Elongatio Perihelii a ☋	44°. 20′. 2″	47°. 1′. 0″

Longitudine Nodi ſemper ſuppoſita = 4^s. 12°. 0′, obſeruationibus dier. 2 Aug. et 1 Octob. quidem ſatisfiet; at pro momento die 12. Aug. obſeruato ex his Elementis ſequentes deducentur Longitudines Cometae:

	I. Hyp.	II. Hyp.
Longit. Cometae die 12. Aug.	$3^s. 10^\circ. 43'. 25''$	$3^s. 10^\circ. 42'. 54''$

ex quo omnino patefcit, determinationem in § praecedenti inuentam ab obferuatione fere tam parum recedere, ac fieri poteft, quatenus obferuationibus diebus 2 Aug. et 1 Octob. omnimode fatisfaciendum eft; id quod aliis quoque calculis comprobari poffet, nifi breuitati confulendum effet. Sufficiet autem quod hoc fpecimine iam fit comprobatum, fuppofito Tempore Periodico Cometae feptem annorum, non fieri poffe, vt Elementa inueniantur quae obferuationes, diebus 2 Aug. 12 Aug. et 1 Octob. inftitutas, fimul ab omnibus plane erroribus immunes reddat.

§. 25. Deinde vero pro conciliandis inter fe obferuationibus die 12 Aug. 29 Aug. et 1 Octob. inftitutis, fequentia pro orbita Cometae inuenientur Elementa: Semiparameter orbitae 1, 2345253; tempus tranfitus per Perihelium Aug. 15, 1340 et elongatio Perihelii a Nodo defcendente $45^\circ. 59'. 24''$, et tum quidem Longitudines Cometae his Elementis conformes, pro momentis faepius commemoratis, fequentes habebuntur:

	Long. Com.				Differ.
2 Aug.	$3^s.$	$5^\circ.$	$49'.$	$1''$	$+ 13'. 31''$
12 -	3	10.	34.	31	+ 17
29 -	3	21.	0.	20	− 17
1 Octob.	4	10.	12.	6	+ 0.

Experimento autem inftituto reperitur, hunc errorem pro obferuatione, die 2 Aug. facta, minimum fere effe, qui prodit, quatenus obferuationum, diebus 12 Aug. et 10 Octob. inftitutarum, intenditur confenfus.

§. 26.

§. 26. Iam itaque vltimo loco disquirendum eſt, quid fiat de obſeruatione 1 Octob. inſtituta, adhibitis Elementis, quibus tres obſeruationes, diebus 2, 12 et 29 Auguſti factae, implentur? Iſta autem Elementa ſequentem in modum determinantur: Semiparameter orbitae $=$ 1,2125511; Tempus Perihelii Aug. 12, 1500; Elongatio Perihelii a ☋ $= 43°. 16'. 33''$, et Longitudines Cometae, ex his elementis, pro momentis obſeruationum adnotatis, deducendae, erunt:

Longit. Cometae.		Differ. ab obſerv.
2 Aug.	$3^s. 6°. 2'. 33''$	$-1''$
12 -	3. 10. 34. 34	+ 14
29 -	3. 21. 0. 11	− 8
1 Octob.	4. 9. 37. 14	$+ 34'. 52$

vbi quidem error, qui pro obſeruatione die 1 Octob. facta reſultat, enormis plane eſt. Caeterum heic obſeruari meretur, quod ſi obſeruationibus 2 et 12 Aug. ſatisfaciendum ſit, eiusmodi quidem Elementa inueniri poſſe, quae minorem pro obſeruatione diei 1 Octob. inuoluant errorem, interim tamen ſimul obſeruationem die 29 Aug. inſtitutam, valde ſenſibilibus obnoxiam reddi erroribus. Sic ſi ſemiparameter orbitae ſtatuatur $=$ 1, 2302688; Tempus Perihelii Aug. 14, 2900; Elongatio a ☋ $= 44°. 55'. 21''$, erit Longitudo Cometae pro 1 Octob. $4^s. 9°. 48'. 4''$ et pro 29 Aug. $3^s. 20°. 52'. 54''$, vbi nunc quidem Longitudo die 29 Aug. obſeruata, errori ſeptem minutorum redditur obnoxia.

§. 27. Hoc igitur ratiocinio, vti ſperamus, exacte demonſtratum eſt, poſito, quod Tempus Periodicum Comemetae ad ſeptem vsque annos aſſurgat, fieri nequaquam poſſe, vt omnes obſeruationes ſecunda Cometae apparitione inſtitutae, cum veritate conſentiant, et inter illas ſaltem nonnullas occurrere, quae ſeptem minutis primis a vero aberrant, quod ſcilicet fiet cum obſeruatione die 12 Aug. facta, dum Elementa quaeruntur, quae obſeruationibus dierum 2 Aug. 29 Aug. et 1 Octob. penitus quadrant. Ex ipſa vero rei indole, facile colligitur, quod ſi quatuor iſtae obſeruationes, quas hic contemplati ſumus, ad conſenſum inter ſe redigi non potuerint, et quidem, ſi eueniat, vt prima, tertia et quarta cum Elementis conciliantur, in ſecunda autem quispiam reperiatur error, tum multo maiores prodituros fore errores, ſi vel obſeruationes prima, ſecunda et tertia cum Elementis conſentiant, quarta diſcrepante, vel conſenſus obſeruationum ſecundae, tertiae et quartae cum Elementis obtineatur, obſeruatione prima diſcrepante; nam conſenſum obſeruationum primae, ſecundae et quartae cum iisdem Elementis ne in poteſtate quidem eſſe, iam ſupra oſtendimus.

§. 28. Si igitur hanc disquiſitionem vlterius proſequi velimus, ſufficit vt, pro maiori adhuc Temporis Periodici incremento, quaeramus Elementa, quae cum obſervationibus prima, tertia et quarta conſentiant, tumque inveſtigemus, quantus diſſenſus inter haec Elementa et obſeruationem ſecundam reperiatur. Hinc ſi ponamus tempus Periodicum 8 Annorum, pro Elementis orbitae has conſequemur determinationes: Semiparameter orbitae $= 1,2589255$; Tempus Perihelii Aug. 17, 2300; Elongatio Perihelii a Nodo deſc. $= 47^\circ. 32'. 4''$, exiſtente Longitudine Nodi Aſc. vt in ſuperioribus $= 4^s. 12 . 0'$. Ex his

his vero Elementis Longitudines Cometae ita erunt determinatae:

	Longit. Cometae.	Different. ab obſeruat.
2 Aug.	$3^s. 6^\circ. 2'. 44''$	$-12''$
12 -	3. 10. 47. 42	$-12'. 56$
29 -	3. 21. 0. 43	-40
1 Octob.	4. 10. 12. 6	$+ 0$

ita vt nunc quidem perſpicuum fiat, aucto tempore Periodico errores obſeruationum ſecundae apparitionis continuo magis magisque increſcere. Quam ob rem, etiamſi adhibito tempore Periodico ſex annorum, Elementa orbitae facile detegantur, quae cum vniuerſis his obſeruationibus conſentiunt, tamen dubitare licet, an tempus Periodium 6 annorum cum dimidio, ita admitti queat, vt modo dictis obſeruationibus veriſimiles inducantur errores.

§. 29. Denique pro confirmando valore temporis Periodici a nobis inuento, ſequens adhiberi poteſt argumentum. Vtcunque motus Cometae per actionem telluris fuerit perturbatus, tamen pro certo ſtatuere licebit, hinc ipſum Cometae per Perihelium tranſitum vix vnico die fuiſſe immutatum, nec in ipſa Cometae diſtantia Perihelii praegrandes mutationes inde oriri potuerunt; ex quo concluditur, aſſumto certo valore temporis Periodici, obſeruationes ante et poſt Cometae proximum ad tellurem acceſſum, ſaltem eo vsque conſentire debere, vt tempora praebeant pro tranſitu per Perihelium, quae vix vno vel altero die inter ſe diſcrepent. Iam vero ex calculis Cel. *Pingré*, pro orbita Parabolica, obſeruationibus menſe Iunii inſtitutis, ſatisfaciente, perſpicuum fiet, quo magis augeatur tempus

Periodicum Cometae, eo citius tempus tranſitus per Perihelium incidere, eo autem minorem euadere valorem pro ſemiparametro orbitae, quatenus nimirum ratio habeatur harum obſeruationum menſe Iunii inſtitutarum. Nam ex calculis Cel. *Pingré* habetur tempus tranſitus per Perihelium Aug. d. 9. $0^h. 19'. 17''$ et ſemiparameter orbitae $= 1,25918$, quarum determinationum prior eam, quam pro tempore Periodico 5 Annorum cum dimidio inuenimus, quatuor diebus anteuertit. Contra autem ex calculis noſtris, in ſuperioribus allatis, perſpicitur, vt obſeruationibus ſecundae apparitionis ſatisfiat, aucto tempore Periodico Cometae, ipſum tempus Perihelii prorogari, ita vt pro Periodo Cometae 8 annorum iam in 17 diem Auguſti incidere debuiſſet, tum vero pro hac hypotheſi erit ſemiparameter orbitae 1, 25892, ideoque parum diuerſus ab illo, quem pro orbita Parabolica inuenit Cel. *Pingré*.

§. 30 Sicque iam ad finem perduximus demonſtrationem noſtram, qua oſtendere conati ſumus, omnes valores, pro tempore Periodico Cometae Anno 1770 obſeruati, eo magis fieri erroneos, quo longius abludunt ab iſto valore, quem in noſtris Elementis adoptauimus, idque ſiue ratio habeatur omnium in vniuerſum obſeruationum, ſeu tantummodo earum, quae ſecunda Cometae apparitione factae habentur. Facile autem nobis perſuademus, vt vnusquisque, qui huius argumenti rigoroſum quantumlibet examen inire voluerit, reperiet, omnes rationes adeo exacte a nobis eſſe ſubductas, vt contra huius ratiocinii vim vix quicquam aliud excipi queat, quam quod ſtatuatur, obſeruationibus praegrandes ineſſe errores. Verum ſi ſeriem harum obſeruationum vsque ad 2 diem Octobris, a Cel. *Meſſier* ſingulari ſtudio et induſtria continuatam, examinemus,

mus, tantum earum reperimus tam inter ſe quam cum Theoria conſenſum, vt plane pro re quam maxime incredibili haberi mereatur, pleraſque harum obſeruationum ingentibus obnoxias eſſe erroribus. Interim tamen ſi, contra omnem noſtram ſpem, obſeruationes fuerint erroneae, tum omnes quidem noſtri calculi incaſſum erunt inſtituti, verum eo tamen magis venia noſtri errori tunc dabitur, quod id vnice noſtra disquiſitione intendimus, vt oſtenderemus, quid ex obſeruationibus circa hunc Cometam inſtitutis ſequatur. Caeterum licet operae pretium non reputauimus, vt inquireremus, quanta diminutio pro tempore Periodico Cometae noſtri, locum habere queat, quia vix quisquam in eam inclinabit opinionem, hoc tempus potius eſſe minuendum, quam augendum, tamen facili coniectura ex calculis noſtris colligi poteſt, hanc diminutionem ſi ſemiſſem anni excedat, vix aliqua veriſimilitudine gaudere.

§. 31. In priori de hoc argumento disquiſitione examinauimus, quam prope Cometa hic noſter accedere queat ad orbitas illorum Planetarum, quas in motu ſuo traiicit, et quamuis hae determinationes ob mutata Cometae Elementa, aliquatenus immutentur, tamen operae pretium non erit, vt hos calculos denuo exſequeremur, niſi pro orbita Iouis, quippe quum per propiorem Cometae ad Iouem acceſſum vtique fieri potuit, vt eius motus plane fuerit immutatus. Si igitur ex puncto N, vbi orbitae Cometae I N et Iouis C N ſe interſecant, intelligatur ad Eclipticam demiſſus arcus normalis N L; pro ineunte anno 1778 erit Longitudo puncti I $= 3^s. 8^\circ. 44'. 0''$ et puncti C $= 4^s. 12^\circ. 0'. 0''$, hinc arcus I C $= 33^\circ. 16'. 0''$, tumque ob angulum N I L $= 1^\circ. 19'. 10''$; et angulum N C L Tab XIII. Fig 3.

$= 1^\circ.$

$= 1^\circ. 33' 40''$, fiet $IL = 90^\circ. 54'. 44''$; $CL = 57^\circ 38'. 44''$, hinc $IN = 90^\circ. 54' 43''$; $CN = 57^\circ. 39'. 19''$ et angulus $INC = 51'. 17''$. Tum vero ob Longitudinem puncti $N = 6^s. 9^\circ. 38'. 44''$, et Longitudinem Aphelii ♃ $= 6^s 10^\circ. 51'. 27''$, fiet differentia harum Longitudinum $= 1^\circ. 12'. 43''$; et si locus Aphelii Iouis fuerit α, fiet $I\alpha = 92^\circ. 7'. 27''$, hincque $N\alpha = 1^\circ. 12'. 42''$. Porro si locus Aphelii Cometae super arcu CN sit A, fiet $CA = 44^\circ. 17'. 4''$ et $NA = 13^\circ. 22'. 15''$; hinc si locus Aphelii Cometae, ad orbitam Iouis reductus, sit a, fiet $Na = 13^\circ. 22'. 10''$, hinc $a\alpha = 14^\circ. 34' 52''$.

§. 32. Nunc igitur quum constet, pro binis orbitis, minimo angulo ad se inclinatis, proximam distantiam reperiri, vbi radii vectores ad Solem ducti inter se fiunt aequales, si pro Cometa binae constituantur hypotheses anomaliae ab Aphelio computatae $7^\circ. 26'$. et $7^\circ. 28'$, habebuntur Logarithmi pro distantiis a Sole 0, 7366557; 0, 7365387, at pro anomalia Iouis $7^\circ. 8'$ est Logarithmus distantiae Iouis a Sole = 0, 736539; vnde colligitur, distantias Iouis et Cometae a Sole proxime coincidere, existente anomalia Cometae a suo Aphelio $= 7^\circ. 27'. 59''$, hincque anomalia Iouis a suo Aphelio $7^\circ. 6'. 56''$; hinc quum Longitudo Aphelii Iouis sit $6^s. 10^\circ. 51'. 27''$, erit Longitudo puncti in orbita Iouis ad quam proxime accedere potest $= 6^s. 3^\circ. 44'. 31''$. Pro hoc autem puncto habetur distantia Iouis a Cometa = 0. 00836 ideoque 119^{ma} pars distantiae mediae telluris a Sole. Quum itaque sit massa Iouis ad illam Solis, in ratione 340 : 365, 412, hinc concluditur, in proxima Iouis ad Cometam distantia vim Iouis actionem a Sole oriundam fere 396 vicibus fore

supe-

ſuperaturam. Porro ſi ſtatuatur anomalia Cometae ab Aphelio A verſus C computata $7^\circ. 48'. 48''$, fiet Logarithmus diſtantiae Cometae $= 0,735298$, tumque, reducto loco Cometae ad orbitam Iouis, fiet anomalia ab Aphelio Iouis $= 22^\circ. 23'. 37''$ et Longitudo huius puncti in orbita Iouis $5^s. 18^\circ. 27'. 42''$, pro qua etiam eſt Logarithmus diſtantiae $= 0,735298$. Ex his autem fiet diſtantia Cometae a Ioue $= 0,0293$, ſiue vix 34^{ta} parte diſtantiae mediae Solis a tellure maior, et pro hoc loco actio Iouis illam Solis 32 vicibus exſuperabit.

§. 33. Praeſtabit autem vt nunc accuratius expendamus, quam prope Iupiter, dum in coniunctione cum Cometa Anno 1767 erat, ad eum acceſſit, ſeu etiam in quanta vicinia Cometae verſabitur in proxima eius cum hoc Aſtro coniunctione Anno 1779. Quia igitur ipſum Aphelium Cometae contigit Anno 1767 die 28 Octobris h. 8 circiter, exiſtente Longitudine Aphelii $5^s. 26^\circ. 16'. 26''$, hinc conficitur, die 27 Maii eiusdem anni fuiſſe Longitudinem Cometae $= 5^s. 20^\circ. 57'$, quae eadem quoque pro hoc die eſt Longitudo Iouis, vnde coniunctionem horum Aſtrorum iſto die contigiſſe, neceſſe eſt. At pro eodem tempore quum ſit Longitudo interſectionis orbitarum $= 6^s. 9^\circ. 28'$. et inclinatio earum inter ſe $51'. 38''$, propter diſtantiam Cometae a Sole $= 5,5340$, et diſtantiam Iouis a Sole $= 5,4423$, fiet diſtantia Iouis a Cometa $= 0,09531$ circiter, ex quo ſequitur, actionem Iouis in Cometam Solis vi attractrice tribus vicibus fuiſſe maiorem, vnde ob motum Cometae, prope Aphelium admodum lentum, haec actio Iouis in motum Cometae effectum ſenſibilem habuiſſe, veriſimilitudine haud deſtituitur.

§. 34.

§. 34. In proxima Cometae cum Ioue coniunctione, quae Anno 1779 continget, sequentia habentur obseruanda: Quoniam tempus Aphelii incidit Anno 1778 die 29 Decembris hora 10 circiter, coniunctio Iouis cum Cometa locum habebit Anno 1779 die 23 Augusti versus horam 12, existente vtriusque Astri Longitudine $6^s. 3^\circ. 34'. 26''$, et quum pro isto tempore sit Longitudo intersectionis orbitarum $6^s. 9^\circ. 39'$ et inclinatio $51'. 17''$, distantia Iouis a Sole existente $= 5,4520$, distantia autem Cometae $= 5,4590$, habebitur distantia Iouis a Cometa $= 0,0111$, ideoque actio Iouis tunc temporis, actionem Solis 225 vicibus exsuperabit, quo ipso non potest non fieri, vt orbita Cometae totalem subeat mutationem. Caeterum facile intelligitur, has determinationes pro omnimode exactis non esse reputandas, nisi quatenus Elementa nostra summo rigore fuerint definita, et quidem ex comparatione harum conclusionum cum illis, quas in priori Dissertatione attulimus, perspicitur, si tempus Periodicum Cometae aliquantum imminuatur, tum ea de caussa coniunctio Iouis cum Cometa aliquanto citius contingeret, quam secundum Elementa iam adoptata, ideoque et propius ad Longitudinem Cometae $5^s. 18^\circ. 28'$, vbi vnus proximorum accessuum Cometae ad orbitam Iouis situs est; simul vero coniunctio Anno 1779 aliquanto tardius continget, Longitudo igitur Cometae magis ac pro casu praecedente diverget a $6^s. 3^\circ. 44'$, quae locum habet pro accessu Cometae proximo ad orbitam Iouis, vnde actio Iouis in Cometam hac de ratione imminuetur. Siquidem autem in tempore Periodico Cometae definiendo, vtique aliqua Latitudo admittenda est, facile concedimus calculis nostris modo

modo allatis id non esse tribuendum, vt ipsis demonstretur, quam praecise actionem Iupiter in sua coniunctione cum Cometa, siue Anno 1767, seu 1779 in hoc Astrum exercuerit, sed vt hinc verisimile reddatur, vtique fieri potuisse, vt ob vim perturbatricem Iouis orbita Cometae plane fuerit immutata, ita vt ipse Cometa antehac motum suum in orbita a praesenti plane diuersa descripserit, itaque hanc ob rationem Cometam nunquam antea, saltem in ista orbita, cuius iam dedimus Elementa, fuisse obseruatum.

§. 35. Ope Elementorum nostrorum pro motu Cometae stabilitorum, deducitur, distantia Cometae a tellure, pro isto momento, quo Anno 1770 die 1 Iulii hoc Astrum in proxima telluris vicinia versabatur = 0, 014953, seu aequalis fere 70^{mae} parti distantiae mediae Solis a tellure, quae etiam distantia minima fere est, ad quam hoc Astrum orbitae telluris adpropinquare poterit; vnde quum nullum sit indicium, actionem huius Cometae in nostrum globum terraqueum fuisse sensibilem, nec in posterum ab hoc Astro vllum periculum telluri imminebit; ex quo etiam tanto maior est ratio, vt animum omni metu ex appropinquatione Cometarum oriundo liberemus, quod inter omnes Cometas obseruatos, hic praecise sit, qui proxime ad tellurem accessit. Contra vero vix cum certitudine quicquam statuere licet de actione telluris in Cometam, quippe cuius rei examen calculis hunc in finem institutis, perficere nobis non licuit. Si autem aliqua fuerit actio telluris in Cometam, illa non potuit non valde exigua esse, quum adeo nobis successerit, obseruationes post proxi-

proximum Cometae ad tellurem acceſſum factas cum illis, quae ante hanc adproximationem inſtitutae ſunt, ad conſenſum redigere. Et ſi fides habenda ſit argumentis haud contemnendis, quibus Cel. *Du Séjour* in erudito ſuo de Cometis opere (*Eſſai ſur les Comètes*) Sectionis 7 Articulo 1. oſtendere annititur, Sphaeram actiuitatis telluris noſtrae vltra 125 ſemidiametros telluris protendi non debere; pro caſu praeſenti actionem telluris pro inſenſibili habere neceſſe eſt, quippe quum proxima Cometae a tellure diſtantia 357 ſemidiametris telluris aequetur.

SVP-

SVPPLEMENTVM AD DISSERTATIONES NOVIS COMMENTARIIS INSERTAS, DE ECLIPSIBVS SOLARIBVS ANNIS 1769 et 1773 OBSERVATIS, VT ET OCCVLTATIONIBVS FIXARVM A LVNA.

Auctore

A. I. LEXELL.

§. 1.

Ex eo tempore, quo commemoratas Eclipſes Solares et fixarum a Luna occultationes computo ſubieci, plurimae poſtmodum ad meam notitiam peruenerunt obſeruationes eorundem phaenomenorum, quas etiam calculo ſubiicere eo magis e re eſſe exiſtimaui, quod per nonnullas earundem calculi mei prius inſtituti vel confirmari, vel emendari poſſent; tumque egregius earundem adhiberi poſſet vſus, ad determinandas Longitudines locorum, in quibus inſtitutae fuerunt. Concluſiones autem ex his calculis deductas, hac occaſione dum ſuccinctae exponere conſtitui, rem Aſtronomis non prorſus ingratam me praeſtiturum eſſe confido.

De Eclipſi Solis Anno 1769 obſeruata,
conferatur Tom. XV. Nouor. Comment. pag. 588. et ſeqq.

§. 2. Antequam expreſſiones pro tempore coniunctionis ex obſeruationibus deductas heic expoſuero, primum principalia Elementa calculi pro ſingulis obſeruationibus adferre animus eſt, vt ſcilicet eo facilius ſit iudicium, vtrum mei calculi rite ſibi conſtant, nec ne. Quamuis enim eadem mihi ac plurimis aliis Aſtronomis, libertas conceſſa eſſe poſſet, vt vltimas concluſiones ex calculis erutas tantum exponerem; tamen quum multiplici experientia edoctus ſim, hiſce in calculis ſaepe ab exercitatiſſimo etiam calculatore errores committi poſſe, operae pretium eſſe duxi, Elementa calculi fideliter exponere, quo facilius mearum concluſionum ſit examen.

§. 3. Phaenom. obſer.	Paral. Long.	Lat. ☽ appar.	Semid. ☽ apparens.	Diff. Long. ☉ et ☽ app.
Gryphiswald Initium	27′. 13″, 2	18′. 14″, 6	16′. 54″, 3	27′. 7″, 5
- - - - - Finis	17. 52, 1	18. 22, 0	16. 57, 9	27. 6, 3
Toloſatii - Initium	39. 0, 7	21. 22, 8	16. 51, 3	24. 39, 7
- - - - - Finis	33. 59, 4	23. 11, 9	16. 55. 7	23. 3, 1
Burdegalae - Initium	38. 9. 3	19. 55, 8	16. 50. 9	25. 50, 3
- - - - - Finis	29. 46, 6	25. 49, 0	16. 56, 9	20. 7, 3
Auſtorpi - Initium	30. 11, 8	14. 30, 4	16. 53, 9	29. 14, 9
- - - - - Finis	25. 8, 0	15. 8, 1	16 55, 3	28. 59, 5
Breſtiae - - Finis	31. 10, 4	18. 3, 1	16 54, 4	27. 15, 6
Gadeti - - Initium	44. 50, 4	23. 39, 3	16. 48, 7	23. 4, 8
- - - - - Finis	43. 2, 2	25. 47, 6	16. 54, 7	20. 1, 2
Promont. Initium	8. 1, 5	10. 37, 7	16. 54, 6	30. 55, 1
Cap Nord - Finis	5, 0	6. 41, 6	16. 55, 6	31. 56, 1
Hammerfoſt - Finis	1. 7, 0	6, 54, 1	16. 55, 7	32. 42, 7

Phae-

Phaenom. obſeru.	Paral. Long.	Lat. ☽ appar.	Semid. ☽ apparens.	Diff. Long. ☉ & ☾ app.
Caroli coronae Finis	14'. 48'', 9	17'. 0'', 7	16'. 57'', 3	27'. 58'', 6
- - - - - Finis	24. 37. 0	17. 25, 7	16. 54, 8	27. 39, 9
Eſt Dereham Initium	31. 1, 9	15. 44, 1	16. 51, 8	28. 36, 3
- - - - - Finis	25. 18, 4	16. 31, 7	16. 55, 8	28. 13, 7
Lipſiae - - Finis	20. 59, 8	19. 16, 3	16. 57, 4	26. 28, 0
Miſniae - - Finis	20. 37. 4	20. 39, 6	16. 57, 5	25. 24, 0
Heracleae Calpe Gibaltar. Initium	44. 48, 4	24. 22, 8	16. 49, 4	21. 39, 0
- - - - - Finis	43. 11, 6	26. 29, 4	16. 52, 9	19. 6, 7
Hawkhill - - Finis	23. 38, 6	13. 16, 3	16. 55, 2	29. 53, 4
Ingolſtadii - - Finis	24. 2, 8	22. 9, 4	16. 57, 4	24. 6, 1
Kirknewton - Finis	23. 42, 1	13. 10, 6	16. 55, 2	29. 45, 8
Leiceſtriae - Initium	31. 15, 7	15. 16, 4	16. 51, 6	28. 51, 0
- - - - - Finis	26. 10, 8	16. 1, 6	16. 55, 5	28. 30, 8
Mediolani - - Finis	28. 34, 5	24. 8, 0	16. 56, 9	22. 6, 7
Wanhalinna Initium	18. 19, 4	16. 11, 9	16. 55, 5	28. 25, 0
- - - - - Finis	7. 13, 1	14. 31, 7	16. 57, 6	29. 20, 6
Oxonii - - Initium	32. 6, 1	15. 39, 7	16. 51, 4	28. 38, 2
- - - - - Finis	27. 3, 6	16. 36, 1	16. 55, 4	38. 10, 8
St. Huberti - Finis	28. 40, 2	19. 29, 0	16. 55, 6	26. 16, 4
Schirburni - Initium	32. 9, 5	15. 47, 2	16. 51, 4	28. 53, 9
- - - - - Finis	27. 3, 4	16. 44, 2	16. 55, 5	28. 6, 1
Caſtellum - Initium	34. 17, 1	19. 11, 0	16. 52, 3	26. 25, 4
Saronis - Finis	28. 9, 8	20. 10, 5	16. 56, 1	25. 41, 7
Vranieburgi - Finis	16. 37, 5	16. 42, 5	16. 57, 1	28. 9, 1
Vpſaliae - - Finis	10. 40, 6	14. 21, 6	16. 57, 4	29. 25, 4
Herbipoli - - Finis	23. 52, 7	20. 56, 5	16. 57, 0	25. 9, 8
Piſis - - - Finis	29. 46, 6	25. 49, 0	16. 56, 9	20. 7, 3

§. 4. His praemiſſis ipſas expreſſiones pro temporibus coniunctionum adferemus, vbi quidem, quia in Tomo XV Commentariorum demonſtrauimus eſſe correctionem Latitudinis $y = -22''$ ſaltem proxime, poſuimus ſtatim $y = -10$, vnde momenta pro temporibus coniunctionum ita habebuntur expreſſa:

Promont. Lezard $20^h.\ 0'.\ 39'' + 1,92\,\delta - 0,91\,y + 1,63\,\pi$
ex initio.
$20.\ \ 0.\ 44 - 1,96\,\delta + 1,01\,y + 0,19\,\pi$
ex fine.
$5 - 3,88\,\delta + 1,92\,y - 1,44\,\pi = 0$

Grenouici - $20.\ 21.\ 27 + 1,94\,\delta - 0,96\,y + 1,61\,\pi$
ex initio.
$20.\ 21.\ 36 - 1,98\,\delta + 1,04\,y + 0,09\,\pi$
ex fine.
$9 - 3,92\,\delta + 2.00\,y - 1,52\,\pi = 0$

Lutetiae Pariſ. $20.\ 30.\ 42 + 2,04\,\delta - 1,15\,y + 1,76\,\pi$
ex initio.
$20,\ 31.\ \ 0 - 2,11\,\delta + 1,27\,y + 0,03\,\pi$
ex fine.
$18 - 4,15\,\delta + 2,42\,y - 1,73\,\pi = 0$

Bononiae - $21.\ \ 6.\ 54 + 2,49\,\delta - 1,84\,y + 2,12\,\pi$
ex initio.
$21.\ \ 7.\ 14 - 2,70\,\delta + 2,10\,y - 0,28\,\pi$
ex fine.
$20 - 5,19\,\delta + 3,94\,y - 2,40\,\pi = 0$

Caianeburgi - $22.\ 12.\ 31 + 1,89\,\delta - 0,86\,y + 0,99\,\pi$
ex initio.
$22.\ 12\ \ 29 - 1,81\,\delta + 0,66\,y - 0,38\,\pi$
ex fine.
$-\ \ 2 - 3,70\,\delta + 1,52\,y - 1,37\,\pi = 0$

Petro-

Petropoli - $22^h. 22'. 47'' + 2,03\,\delta - 1,12\,y + 1,19\,\pi$
ex initio.
$22. 22. 47 - 1,39\,\delta + 0,93\,y - 0,49\,\pi$
ex fine.
$0 - 3,95\,\delta + 2,05\,y - 1,68\,\pi = 0$

Wardhus - $22. 26. 22 + 1,80\,\delta - 0,64\,y + 0,69\,\pi$
ex initio.
$22. 25. 51 - 1,74\,\delta + 0,39\,y - 0,25\,\pi$
ex fine.
$-31 - 3,54\,\delta + 1,03\,y - 0,94\,\pi = 0$

Umbae - $22. 38. 24 + 1,87\,\delta - 0,81\,y + 0,84\,\pi$
ex initio.
$22. 38. 15 - 1,78\,\delta + 0,56\,y - 0,44\,\pi$
ex fine.
$-9 - 3,65\,\delta + 1,37\,y - 1,28\,\pi = 0$

Guriefi - $23. 48. 35 + 6,25\,\delta - 6,00\,y + 2,54\,\pi$
ex initio.
$23. 49. 51 - 3,89\,\delta + 3,50\,y - 1,59\,\pi$
ex fine.
$76 - 10,14\,\delta + 9,50\,y - 4,13\,\pi = 0$

Orenburgi - $24. 1. 17 + 3,25\,\delta - 2,78\,y + 1,38\,\pi$
ex initio.
$24. 2. 6 - 2,49\,\delta + 1,83\,y - 1,22\,\pi$
ex fine.
$49 - 5,74\,\delta + 4,61\,y - 2,60\,\pi = 0$

Iakuti - $29. 0. 9 + 1,82\,\delta - 0,68\,y - 0,45\,\pi$
ex initio.
$29. 0. 15 - 1,69\,\delta + 0,05\,y - 1,08\,\pi$
ex fine.
$6 - 3,51\,\delta + 0,73\,y - 0,63\,\pi = 0$

Cauae - $19^h.\ 51'.\ 57'' + 1,83\,\delta - 0,70\,y + 1,37\,\pi$
ex initio.
Hafniae - $21.\ 11.\ 55 - 1,97\,\delta + 1,02\,y - 0,16\,\pi$
ex fine.
Windobonae - $21.\ 27.\ 7 - 2,46\,\delta + 1,79\,y - 0,37\,\pi$
ex fine.
Stockholmiae $21.\ 33.\ 48 - 1,90\,\delta + 0,86\,y - 0,25\,\pi$
ex fine.
Pello - $21.\ 57.\ 43 - 1,77\,\delta + 0,53\,y - 0,29\,\pi$
ex fine.
Kolae - $22.\ 33.\ 29 - 1,75\,\delta + 0,46\,y - 0,39\,\pi$
ex fine.
Ponae - $23.\ 5.\ 59 - 1,78\,\delta + 0,54\,y - 0,53\,\pi$
ex fine.
Lundae - $21.\ 14.\ 20 - 1,97\,\delta + 1,02\,y - 0,17\,\pi$
ex fine.
Gryphiswald. $21.\ 14.\ 46 + 2,04\,\delta - 1,13\,y + 1,56\,\pi$
ex initio.
$21.\ 15.\ 5 - 2,05\,\delta + 1,16\,y - 0,17\,\pi$
ex fine.
$$18 - 4,09\,\delta + 2,29\,y - 1,73\,\pi = 0$$
Tolosatii - $20.\ 27.\ 7 + 2,23\,\delta - 1,46\,y + 2,03\,\pi$
ex initio.
$20.\ 27.\ 25 - 2,40\,\delta + 1,71\,y - 0,00\,\pi$
ex fine.
$$18 - 4,63\,\delta + 3,17\,y - 2,03\,\pi = 0$$
Burdegalae - $20.\ 19.\ 10 + 2,13\,\delta - 1,27\,y + 1,93\,\pi$
ex initio.
$20.\ 19.\ 19 - 2,30\,\delta + 1,57\,y + 0,05\,\pi$
ex fine.
$$9 - 4,43\,\delta + 2,84\,y - 1,88\,\pi = 0$$

Anstorp

Auftorp - - $20^h. 15'. 41'' + 1,88\,\delta - 0,84\,y + 1,49\,\pi$
ex initio.
$20. 15. 47 - 1,91\,\delta + 0,88\,y + 0,12\,\pi$
ex fine.
$6 - 3,79\,\delta + 1,72\,y - 1,37\,\pi = 0$

Breftiae - - $20. 3. 43 - 2,02\,\delta + 1,12\,y + 0,17\,\pi$
ex fine.

Gadeti - $19. 56. 52 + 2,35\,\delta - 1,73\,y + 1,92\,\pi$
ex initio.
$19. 56. 30 - 2,76\,\delta + 2,18\,y + 0,04\,\pi$
ex fine.

Promont. $- 2 - 5,11\,\delta + 3,91\,y - 1,88\,\pi = 0$

Cap Nord $22\ 5,11 + 1,78\,\delta - 0,58\,y + 0,68\,\pi$
ex initio.
$22\ 5. 18 - 1,71\,\delta + 0,44\,y - 0,33\,\pi$
ex fine.
$7 - 3,49\,\delta + 1,02\,y - 1,01\,\pi = 0$

Hammerfoft $21. 56. 19 - 1,73\,\delta + 0,37\,y - 0,25\,\pi$
ex fine.

Caroli coronae $21. 23. 50 + 2,00\,\delta - 1,06\,y + 1,43\,\pi$
ex initio.
$21. 23. 41 - 1,98\,\delta + 1,03\,y - 0,20\,\pi$
ex fine.
$- 9 - 3,98\,\delta + 2,09\,y - 1,63\,\pi = 0$

Eft Derehami $20. 25. 27 + 1,92\,\delta - 0,93\,y + 1,56\,\pi$
ex initio.
$20. 25. 13 - 1,94\,\delta + 0,97\,y + 0,08\,\pi$
ex fine.
$- 14 - 3,86\,\delta + 1,90\,y - 1,48\,\pi = 0$

Heracl. Calpe $20. 0. 32 + 2,54\,\delta - 1,90\,y + 1,93\,\pi$
ex initio.

Calpe - $20^h.\ 0'.\ 50'' - 2,87\,\delta + 2,32\,y - 0,01\,\pi$
ex fine.

$18 - 5,41\,\delta + 4,22\,\gamma - 1,94\,\pi = 0$

Lipsiae - $21.\ 11.\ 3 - 2,15\,\delta + 1,33\,y - 0,14\,\pi$
ex fine.

Misniae - $21.\ 14.\ 57 - 2,18\,\delta + 1,37\,y - 0,21\,\pi$
ex fine.

Hawkhill - $20.\ 8.\ 57 - 1,85\,\delta + 0,75\,y + 0,13\,\pi$
ex fine.

Ingolstadii - $21.\ 7.\ 11 - 2,30\,\delta + 1,55\,y - 0,19\,\pi$
ex fine.

Kirknewton $20.\ 7.\ 41 - 1,85\,\delta + 0,75\,\gamma + 0,13\,\pi$
ex fine.

Leicestriae - $20.\ 17.\ 1 + 1,91\,\delta - 0,90\,y + 1,53\,\pi$
ex initio.

$20.\ 17.\ 6 - 1,94\,\delta + 0,95\,y + 0,11\,\pi$
ex fine.

$5 - 3,85\,\delta + 1,85\,y - 1,42\,\pi = 0$

Mediolani - $20.\ 58.\ 27 - 2,50\,\delta + 1,84\,y - 0,19\,\pi$
ex fine.

Wanhalinna $21.\ 51.\ 34 + 1,94\,\delta - 0,96\,y + 1,19\,\pi$
ex initio.

$21.\ 51.\ 22 - 1,88\,\delta + 0,84\,y - 0,33\,\pi$
ex fine.

$-\ 12 - 3,82\,\delta + 1,80\,y - 1,42\,\pi = 0$

Oxonii - $20.\ 16.\ 28 + 1,92\,\delta - 0,92\,y + 1,59\,\pi$
ex initio.

$20.\ 16.\ 39 - 1,96\,\delta + 1,00\,y + 0,12\,\pi$
ex fine.

$11 - 3,88\,\delta + 1,92\,\gamma - 1,47\,\pi = 0$

St. Huberti $20.\ 28.\ 35 - 2,10\,\delta + 1,24\,\gamma + 0,05\,\pi$
ex fine.

Saro

Saron - $20^h.35'.51'' + 2,07\,\delta - 1,20\,y + 1,80\,\pi$
ex initio.
$20.36.12 - 2,14\,\delta + 1,32\,y + 0,00\,\pi$
ex fine.
$21 - 4,21\,\delta + 2,52\,y - 1,80\,\pi = 0$

Shirburni - $20.17.39 + 1,92\,\delta - 0,93\,y + 1,58\,\pi$
ex initio.
$20.17.38 - 1,97\,\delta + 1,01\,y + 0,11\,\pi$
ex fine.
$-1 - 3,89\,\delta + 1,94\,y - 1,47\,\pi = 0$

Vranieburgi $21.12.20 - 1,96\,\delta + 0,99\,y - 0,16\,\pi$
ex fine.

Vpsaliae - $21.32.\ 4 - 1,88\,\delta + 0,82\,y - 0,24\,\pi$
ex fine.

Herbipoli - $21.\ 1.16 - 2,19\,\delta + 1,40\,y - 0,14\,\pi$
ex fine.

Pisis - $21.\ 3.14 - 2,74\,\delta + 2,17\,y - 0,27\,\pi$
ex fine.

Heic vero obseruare conuenit, quod aequatio pro Parisiis multum discrepans sit ab illa, quam in Tomo XV Comment. adhibuimus, quia nunc pro initio Eclipsis momentum a Celeb. *Bailly* obseruatum, substituimus in locum momenti a Celeb. *Messier* assignati, quippe quod minus exactum videbatur.

§. 5. Quamuis valores in Tomo XV Commentar. pro δ, y, π assignati, aequationibus plerisque, saltem fide maxime dignis, satisfaciant, tamen vt errores aequo iure inter obseruationes Guriefenses et Orenburgenses distribuentur, existimaui correctionem Latitudinis supponi posse $-24''$, ita vt sit pro nostris expressionibus $y = -14$, positis vt antea $\delta = -3$ et $\pi = -3$. Patet autem

 his

his ſubſtitutis valoribus aequationem pro Lutetia Pariſiorum et Grenouico bene impleri, pro quibus locis obſeruationes inſtitutae merito fundamenti loco ſubſterni poterunt, vt per comparationem cum illis Longitudines reliquorum locorum explorentur. Caeterum non dubito quin aliquantulum diminutis valoribus ipſorum δ et π, etiam paulo minor valor pro y aequationibus ſatisfaciens inueniri poſſet; tamen certo perſuaſus ſum, vix hunc valorem vltera bina, vel ad ſummum tria ſcrupula ſecunda, diminui poſſe. Nec ex immutatis his valoribus ipſorum δ, y, π inſigniores variationes deriuari poſſunt in determinationem Longitudinum, niſi pro Gurjef. quia, vti iam vidimus, coefficientes ipſorum δ, y, π pro hoc loco praegrandes ſunt. Quicquid vero ſit, valores ipſorum δ, y, π modo recenſitos adhibebimus, quorum ſubſtitutione facta, momenta pro temporibus coniunctionum ita erunt expreſſa:

	Momentum pro tempore coniunct. ☉ et ☽.		Long. in tempore a Merid. Obſeru. Pariſ.
Lutetiae Pariſior. -	$20^h. 30'. 47''$	(I)	
	20. 30. 49	(II)	
Promont. Lezard -	20. 0. 41	(I)	$0^h. 30'. 6''$ Occid.
	20. 0. 39	(II)	0. 30. 10
Obſeruat. Grenou. -	20. 21. 29	(I)	0. 9. 18 Occid.
	20. 21. 27	(II)	0. 9. 22 Occid.
Obſeruat. Bonon.	21. 7. 6	(I)	*0. 36. 19 Orient.
	21. 6. 54	(II)	0. 36. 5
Cajaneburgi	22. 12. 34	(I)	0. 41. 47 Orient.
	22. 12 29	(II)	0. 41. 40
Obſeruat. Petropolit.	22. 22. 53	(I)	1. 52. 6 Orient.
	22. 22. 41	(II)	1. 51. 52
Wardhus. -	22. 26. 21	(I)	*1. 55. 44 Orient.

Ward-

	Momentum pro tempore coniunct. ☉ et ☽.		Long. in tempore a Merid. Obser. Parif.	
Wardhus -	$22^h. 25'. 53''$	(II)	$1^h. 55'. 4''$	
Vmbae -	22. 38. 30	(I)	*2. 7. 43	Orient.
	22. 38. 18	(II)	2. 7. 29	
Gurjef -	23. 49. 35	(I)	*3. 18. 48	Orient.
	23. 49. 18	(II)	3. 18. 29	
Orenburgi -	24. 1. 45	(I)	3. 30. 58	Orient.
	24. 1. 52	(II)	3. 31. 3	
Iakutfk -	29. 0. 12	(I)	8. 29. 25	Orient.
	29. 0. 23	(II)	8. 29. 35	
Cauae -	19. 51. 56	(I)	0. 38. 51	Occid.
Obferu. Hafnienf.	21. 11. 47	(II)	0. 40. 58	Orient.
Obferu. Windobon.	21. 26. 51	(II)	0. 56. 2	Or.
Obferu. Stockholm.	21. 33. 42	(II)	1. 2. 53	Or.
Pello -	21. 57 44	(II)	1. 26. 55	Or.
Kolae -	22. 33. 31	(II)	2. 2. 44	Or.
Ponoi -	23. 6. 0	(II)	2. 35. 11	Or.
Obferu. Lundenf. -	21. 14. 12	(II)	0. 43. 23	Or.
Obferu. Gryphiswald.	21. 14. 51	(I)	0. 44. 4	Or.
	21. 14. 55	(II)	0. 44. 6	
Lipfiae -	21. 10. 51	(II)	0. 40. 2	Or.
Mifniae -	21. 14. 45	(II)	0. 43. 56	Or.
Tolofatii -	20. 27. 15	(I)	0. 3. 32	Occid.
	20. 27. 19	(II)	0. 3. 40	
Burdegalae	20. 19. 16	(I)	0. 11. 31	Occ.
	20. 19. 4	(II)	0. 11. 45	
Auftorp -	20. 15. 42	(I)	0. 15. 5	Occ.
	20. 15. 40	(II)	0. 15. 9	
Breftiae -	20. 3. 44	(II)	0. 27. 15	Occ.
Obferu. Gadeti -	19. 56. 46	(I)	*0. 34. 1	Occ.

Ob-

	Momentum pro tempore coniunct. ☉ et ☽				Longit. in tempore a Merid. Obſerv. Pariſ.			
Obſerv. Gadeti -	19^h.	$56'$.	$9''$	(II)	0^h.	$34'$.	$40''$.	Occ.
Prom. Cap. Nord	22.	5.	12	(I)	1.	34.	23.	Or.
	22.	5.	20	(II)	1.	34.	31.	
Hammerfoſt	21.	56.	22	(II)	1.	25.	33	Or.
Caroli coronae	21.	23.	54	(I)	*0.	53.	7	Or.
	21.	23.	33	(II)	0.	52.	45	
Eſt Derehami	20.	25.	30	(I)	*0.	5.	17	Occ.
	20.	25.	5	(II)	0.	5.	44	
Heracleae Calpe	20.	0.	44	(I)	*0.	30.	3	Occ.
al. Gibaltar	20.	0.	26	(II)	0.	30.	23	
Hawkhill	20.	8.	54	(II)	0.	21.	55	Occ.
Ingolſtadii	21.	6.	56	(II)	0.	36.	7	Or.
Kirknewton	20.	7.	38	(II)	0.	23.	11	Occ.
Leiceſtriae	20.	17.	3	(I)	0.	13.	44	Occ.
	20.	16.	58	(II)	0.	13.	51	Occ.
Obſeruat. Mediolan.	20.	58.	9	(II)	0.	27.	20	Or.
Wanhalinna	21.	51.	38	(I)	*1.	20.	51	Or.
	21.	51.	16	(II)	1.	20.	27	
Obſeruat. Oxon.	20.	16.	30	(I)	0.	14.	17	Occ.
	20.	16.	30	(II)	0.	14.	19	
St. Huberti	20.	28.	24	(II)	0.	2.	25	Occ.
Saron -	20.	35.	56	(I)	0.	5.	9	Or.
	20.	36.	0	(II)	0.	5.	11	
Shirburn	20.	17.	36	(I)	0.	13.	11	Occ.
	20.	17.	29	(II)	0.	13.	20	
Uranieburgi	21.	12.	12	(II)	0.	41.	23	Or.
Obſeruat. Upſalienſe	21.	31.	59	(II)	1.	1.	10	Or.
Herbipoli	21.	1.	5	(II)	0.	30.	16	Or.
Obſeruat. Piſan. -	21.	2.	53	(II)	0.	32.	4	Or.

vbi

vbi obſeruandum, breuitatis cauſſa momenta coniunctionum ex obſeruationibus pro initio et fine Eclipſis reſpectiue his numeris (I) et (II) indigitari. Caeterum nulla quidem eſt dubitandi anſa, quin haec momenta pro tempore coniunctionis, ſub hypotheſi aſſumtarum correctionum pro δ, y, π rite ſe habeant, niſi pro obſeruationibus in Gurjef inſtitutis, ſaltem illa pro initio. Adhibitis autem correctionibus pro δ, y, π, ſi pro hoc loco calculus pro tempore coniunctionis repetatur, prodibit iſtud momentum $23^h.49'.30''$, quod quinque ſecundis a ſupra allato differt et melius quidem conſentit cum momento coniunctionis ex fine Eclipſis deducto.

§. 6. Vt concluſiones prius allatae eo magis ſtabiliantur, examinemus quoque, quomodo Longitudines locorum determinentur pro illis locis, vbi initium et finem Eclipſis obſeruare licuit, idque ſi vel maxime nulla habeatur ratio correctionum δ, y, π. Si igitur momenta coniunctionum ex obſeruationibus pro fine et initio Eclipſis coniunctim ſumantur, ſequentes prodibunt expreſſiones:

		Longit. a Pariſ.
Lutetia Pariſ.	$20^h.30'.51'' + 0{,}06y + 0{,}90\pi$	
Grenovic.	$20.\ 51.\ 32 + 0{,}04y + 0{,}85\pi$	$9'.19''$. Occ.
Prom. Lezard.	$20.\ 0.\ 42 + 0{,}05y + 0{,}91\pi$	30. 9. Occ.
Cajaneburg.	$22.\ 12.\ 30 - 0{,}10y + 0{,}32\pi$	41. 43. Or.
Petropol.	$22.\ 22.\ 47 - 0{,}10y + 0{,}35\pi$	1^h.51. 58. Or.
Jakutsk	$29\ \ 0.\ 12 - 0{,}33y - 0{,}76\pi$	8. 29. 31. Or.
Gryphiswald.	$21.\ 14.\ 55 + 0{,}03y + 0{,}70\pi$	0. 44. 5. Or.
Toloſat.	$20.\ 27.\ 16 + 0{,}12y + 1{,}00\pi$	0. 3. 36. Occ.
Auſtorp.	$20.\ 15.\ 44 + 0{,}02y + 0{,}80\pi$	0. 15. 7. Occ.

Cap

Cap Nord	$22^h. 5'. 14'' - 0,07 y + 0,17 \pi$	$1^h. 34'. 28''$. Or.
Leiceſt.	$20. 17. 4 + 0,[illegible]2 y + 0.81 \pi$	13. 47. Occ.
Oxon.	$20. 16. 34 + 0,04 y + 0,85 \pi$	14. 17. Occ.
Saron.	$20. 36. 2 + 0,06 y + 0,90 \pi$	5. 11. Or.
Shirburn	$20. 17. 38 + 0,04 y + 0,85 \pi$	13. 13. Occ.

In hac autem comparatione illas tantum obſeruationes adhibuimus, pro quibus colligere licuit, initium Eclipſis non valde erroneum eſſe; tumque ad id etiam reſpectum habuimus, ne concluſio media, ex initio et fine deducta, inſignes coëfficientes ipſorum δ, y, π innolueret, quare hac ratione obſeruationes in Gurjef, Orenburg, Bononiae et Gadeti inſtitutae cum reliquis non comparari poſſent, etiamſi momentum pro initio rite ſe haberet. Interim adhibito quodam artificio obtineri poteſt, vt iſti coëfficientes δ, y, π ſaltem qua potiorem partem eliminentur, quod iam exemplo declarabimus. Sumamus igitur medium ex concluſionibus pro Gurjef, quod erit:

$$23^h. 49'. 13'' + 1,18\,\delta - 1,25\,y + 0,47\,\pi,$$

iam quia habetur pro Gurjef:

$$76 - 10,14\,\delta + 9,50\,y - 4,13\,\pi = 0,$$

ſi haec aequatio ducatur in 0,11, fiet:

$$8,4 - 1,11\,\delta + 1,04\,y - 0,45\,\pi = 0,$$

quae aequatio ad valorem pro tempore coniunctionis addita praebet:

$$23^h. 49'. 21'' + 0,07\,\delta - 0,21\,y + 0,02\,\pi,$$

vbi quidem iam ſaltem ſine inſigni errore coëfficientes ipſorum δ, y, π negligi poſſunt, hinc vero fiet Longitudo Gurjef a Pariſiis $3^h. 18'. 30''$. Ex obſeruationibus Orenburgenſibus ſimili ratione colligitur:

$$24^h. 1'. 42''. + 0,38\,\delta - 0,47\,y + 0,08\,\pi,$$

at

at pro Orenburg habetur aequatio:

$$49 - 5,74\,\delta + 4,61\,y - 2,60\,\pi = 0,$$

cuius decima pars ad expreſſionem modo allatam addita praebet:

$$24^h.\ 4'.\ 47'' - 0,19\,\delta - 0,01\,y - 0,18\,\pi,$$

vbi iterum coefficientes ipſorum δ, y, π valde parui ſunt, fietque Longitudo Orenburgenſis $3^h.\ 30'.\ 56''$. Medium ex concluſionibus pro Bononia eſt:

$$21^h.\ 7'.\ 4'' - 0,10\,\delta + 0,13\,y + 0,92\,\pi,$$

quod iam immediate cum concluſione Pariſienſi conferri poteſt, vnde reſultabit differentia Meridianorum $36'.\ 13''$, quae certe nimis magna eſt, ob aliquantum errorem, quo obſeruatio initii huius Eclipſeos affecta videtur.

§. 7. Ad vlteriorem confirmationem noſtrarum concluſionum, conducet, vt comparationem inſtituamus expreſſionum pro tempore coniunctionis praecipue ex fine Eclipſis deductarum, in quibus coefficientes ipſorum, δ, y, π haud multum inter ſe diſcrepantes habentur. Cum expreſſione igitur pro obſeruatorio

Pariſino $20^h.\ 31'.\ 0'' - 2,11\,\delta + 1,27\,y + 0,03\,\pi$

ſequentes conferantur:

Gryphisw.	21.	15.	5	$- 2,05\,\delta + 1,16\,y - 0,17\,\pi$
Breſtia	20.	3.	43	$- 2,02\,\delta + 1,12\,y + 0,17\,\pi$
St. Hubert.	20.	28.	35	$- 2,10\,\delta + 1,24\,y + 0,05\,\pi$
Saron	20.	36.	12	$- 2,14\,\delta + 1,32\,y + 0,00\,\pi$
Herbipolis	21.	1.	16	$- 2,19\,\delta + 1,40\,y - 0,14\,\pi$
Lipſia	21.	11.	3	$- 2,15\,\delta + 1,33\,y - 0,14\,\pi$
Miſnia	21.	14.	57	$- 2,18\,\delta + 1,37\,y - 0,21\,\pi$

vnde

vnde ſepoſita conſideratione correctionum fiet differentia Meridianorum, inter

Parif. et Gryphisw. 44'. 5''. Or.	Inter Parif. et Saron. 5'. 12''. Or.
Breſtiam 27. 17 Oc.	et Herbipol. 30. 16. Or.
St. Hubert. 2. 25 Oc.	et Lipſiam 40. 3. Or.
	et Miſniam 43. 57. Or.

Procedamus nunc ad obſeruationem Grenouicenſem et quae cum illa commode comparari poſſunt:

		Longitud. a Merid. Gren.
Grenouic.	$20^h.21'.36''-1,98\delta+1,04y+0,09\pi$	
Prom. Lez.	$20.\ 0.44-1,96\delta+1,01y+0.19\pi$	20'. 52'' Occ.
Petropolis	$22.\ 22.\ 47-1,93\delta+0,93y-0,49\pi$	2^h. 1. 9 Or.
Hafnia	$21.\ 11.\ 55-1,97\delta+1,02y-0,16\pi$	50. 19 Or.
Lunda	$21.\ 14.\ 20-1,97\delta+1,02y-0,17\pi$	52. 44 Or.
Gryphisw.	$21.\ 15.\ 5-2,05\delta+1,16y-0,17\pi$	53. 29 Or.
Car. corona	$21.\ 23.\ 41-1,98\delta+1,03y-0,20\pi$	1. 2. 5 Or.
Oxonium	$20.\ 16.\ 39-1,96\delta+1,00y+0,12\pi$	4. 57 Occ.
Shirburn	$20.\ 17.\ 38-1,97\delta+1,01y+0,11\pi$	3. 58 Or.
Uranieb.	$21.\ 12.\ 20-1,96\delta+0,99y-0,16\pi$	50. 44 Or.
Eſt Dereh.	$20.\ 25.\ 13-1,94\delta+0,97y+0,08\pi$	3. 37 Or.
Leiceſtria	$20.\ 17.\ 6-1,94\delta+0,95y+0,11\pi$	4. 30 Occ.

vbi ſi ponatur differentia Meridianorum inter obſeruatorium Pariſinum et Grenouicenſe 9'. 20'' Occ. prodibunt Longitudines locorum a Meridiano Pariſino computatae, haud multum diſcrepantes ab illis, quas ſupra attulimus. Videamus nunc quoque de obſeruationibus, quae cum Stockholmienſi comparari poſſunt:

Long.

		Long. a Merid. Stockholm.
Pro Stockholmia	$21^h.33'.48''-1,90\delta+0,86y-0,25\pi$	
Auftorp	$20.\ 15.\ 47-1,91\delta+0,88y+0,12\pi$	$1^h.18'.\ 1''$.Occ.
Eft Dereham	$20.\ 25.\ 13-1,94\delta+0,97y+0,08\pi$	1. 8. 35. Occ.
Hawkhill	$20.\ 8.\ 57-1,85\delta+0,75y+0,13\pi$	1. 24. 51. Occ.
Kirknewton	$20.\ 7.\ 41-1,85\delta+0,75y+0,13\pi$	1. 26. 7. Occ.
Leiceftria	$20.\ 17.\ 6-1,94\delta+0,95y+0,11\pi$	1. 16. 42. Occ.
Wanhalinna	$21.\ 51.\ 22-1,88\delta+0,84y-0,33\pi$	17. 34. Or.
Upfalia	$21.\ 32.\ 4-1,88\delta+0,82y-0,24\pi$	1. 44. Occ.

vnde fi ftatuatur Longitudo obferuatorii Stockholmienfis a Parifino $1^h.\ 2'.\ 55''$, orientur Longitudines a Meridiano Parifino pro locis modo commemoratis, quae a fupra §. 5. adductis vix tantillum different. Quia Longitudo loci pro Pello in Lapponia tam per Eclipfin Solis 1764, quam varias Satellitum Eclipfes fatis bene habetur determinata, iam quoque obferuationes in Lapponia inftitutas cum ifta in Pello facta, comparare licebit:

		Long. a Merid. pro Pello.
Pro Pello	$21^h.57'.43''-1,77\delta+0,53y-0,29\pi$	
Caianeburg	$22.\ 12.\ 29-1,81\delta+0,66y-0,38\pi$	$14'.46''$. Or.
Wardhus	$22.\ 25.\ 51-1,74\delta+0,39y-0,25\pi$	28. 8. Or.
Umba	$22.\ 38.\ 15-1,78\delta+0,56y-0,44\pi$	40. 32. Or.
Kola	$22.\ 33.\ 29-1,75\delta+0,46y-0,39\pi$	35. 46. Or.
Ponoi	$23.\ 5.\ 59-1,78\delta+0,54y-0,53\pi$	$1^h.\ 8.\ 16$. Or.
Cap Nord	$22.\ 5.\ 18-1,71\delta+0,44y-0,33\pi$	7. 35. Or.
Hammerfoft	$21.\ 56.\ 19-1,73\delta+0,37y-0,25\pi$	1. 24. Oc.

Transſeamus autem nunc quoque ad obſeruationes, quae cum Windobonenſi comparari poſſunt:

		Long. a Merid. Windobon.
Pro Windobona	$21^h.27'.\ 7''-2{,}46\delta+1{,}79\gamma-0{,}33\pi$	
Orenburg	$24.\ 2.\ 6-2{,}49\delta+1{,}83\gamma-1{,}22\pi$	$2^h.34'.59''$. Or.
Toloſatio	$20.\ 17.\ 25-2{,}40\delta+1{,}71\gamma-0{,}00\pi$	1. 9. 42. Oc.
Burdegala	$20.\ 19.\ 19-2{,}30\delta+1{,}57\gamma+0{,}05\pi$	1. 7. 48. Oc.
Ingolſtadio	$21.\ 7.\ 11-2{,}30\delta+1{,}55\gamma-0{,}19\pi$	0. 19. 56. Oc.
Mediolano	$20.\ 58.\ 27-2{,}50\delta+1{,}84\gamma-0{,}19\pi$	0. 28. 40. Oc.

vbi ſi ſtatuatur Longitudo Meridiani Windobonenſis a Pariſienſi 56′. 10″, prodirent differentiae Meridianorum a ſupra §. 5. allatis non multum diuerſae, niſi ſuſpicari liceret, finem huius Eclipſis iuſto citius Windobonae fuiſſe obſeruatum. Denique comparationem inſtituamus obſeruationis Bononiae circa finem Eclipſis inſtitutae, cum illis, quae ipſi ſunt correſpondentes:

		Long. a Merid. Bononienſi.
Pro Bononia	$21^h.\ 7'.14''-2{,}70\delta+2{,}10\gamma-0{,}25\pi$	
Gadete	$19.\ 56.\ 29-2{,}76\delta+2{,}18\gamma+0{,}04\pi$	$1^h.10'.45''$.Occ.
HeracleaCalpe	$20.\ 0.\ 50-2{,}87\delta+2{,}32\gamma-0{,}01\pi$	1. 6. 24. Occ.
Piſis	$21.\ 3.\ 14-2{,}74\delta+2{,}17\gamma-0{,}27\pi$	4. 0. Occ.

vbi obſeruare conuenit differentiam Meridianorum inter obſeruatoria Pariſinum et Bononienſe per varias obſeruationes inuentam eſſe 36′. 6″. Haec modo allata ſi bene perpendantur, facile confidimus, vnumquemque harum re-

rerum aequum iudicem nobis largiturum, quod dubium iſtud, quo Celebris quidam Aſtronomus vſum Eclipſium Solarium, ad determinandas Longitudines locorum, infringere voluit, non eius eſſe momenti, ac ipſe ſibi perſuaſerat. Exiſtimat enim has obſeruationes pro fine commemorato, eo minori cum fructu adhiberi poſſe, quod concluſiones per calculos erutae, inſignes variationes ſubire queant, propter correctiones, quibus Elementa calculi, vtpote Longitudo et Latitudo Lunae, Parallaxis et Diameter Lunae adfectae eſſe poſſunt. Verum praeterquam quod nonnullis ſaltem in caſibus principalem harum correctionum, Latitudinis nimirum Lunae, exacte determinare liceat, etiamſi quoque hae correctiones plane manerent incognitae, tamen incidunt caſus, quibus per comparationem concluſionum, in quibus correctiones δ, y, π neque fere magnis coefficientibus adficiuntur, differentiae Meridianorum independenter ab his correctionibus determinari poſſunt. Caeterum ſi nonnunquam continget, vt concluſiones a diuerſis Eclipſibus elicitae aliquantum inter ſe diſcrepent, perpendendum eſt, has obſeruationes pro quantitatibus praeciſione Geometrica definitis non eſſe habendas, quippe quum experientia comprobatum ſit, eodem loco circa definiendum momentum pro fine Eclipſis, diſcrepantias inter obſeruatores reperiri 10 et 12 ſecundorum. Verum ſi maiores diſcrepantiae in concluſionibus, vtpote 20 vel 30 ſcrupulorum ſecundorum reperiantur, tum certo contendere licet, in vna vel altera obſeruatione inſigniorem quendam latere errorem.

§. 8. Quum pleraeque harum obſeruationum a Cel. *Du Sejour* computatae ſint, qui etiam ſuas concluſiones iam dudum publici iuris fecit, haud praeter rem erit, vt de illis noſtrarum concluſionum, quae a concluſionibus Cel. *Du Séjour* iuſto magis differunt, dilucide exponamus; non quidem quod noſtris calculis maiorem fidem vindicare velimus, ſed vt ſaltem rationes explicemus, cur cum Cel. hoc Mathematico conſentire nobis non liceat. De obſeruatione quidem Guriefwenſi nihil adferre attinet, quippe quum inſignis diſcrepantia hic reſultare poteſt, prouti alii valores pro correctionibus δ, y, π adhibeantur, interim pro noſtra concluſione militat, quod per eam obſeruationes Guriefwenſes minus reddantur erroneae, ac ſecundum calculum D^{ni} *Du Séjour.* Pro obſeruatione Gaditana inter meam et D^{ni} *Du Séjour* concluſionem diſcrepantia adeſt $15''$; iam etiamſi concedere vellem, correctiones δ, y, π ita definiri poſſe, vt concluſio prodeat $15''$ a mea diuerſa, tamen non video quomodo tum obſeruationes Bononienſes et Gaditanae inter ſe conciliari queant. Erit enim differentia Meridianorum ex obſeruato fine $1^h. 10'. 45'' + 0,06\,\delta - 0,08\,y - 0,29.\,\pi$, vnde ſi Longitudo pro Bononia ſupponatur $36. 10''$, erit Longitudo pro Gadete $34'. 35''$; nequaquam autem $34'. 25''$, vti perhibet D^{nus} *Du Séjour.* De meo autem calculo pro obſeruatione Gaditana ſatis perſuaſus mihi ſum, quum eam pluribus vicibus examini ſubiecerim. Adhuc minus perſpicere licet, quomodo Cel. *Du Séjour* ad ſuas concluſiones pro Heraclea peruenerit, quippe quum illa pro fine a mea concluſione adeo $32''$ differat. Caeterum obſeruare conuenit, quod Cl. D^{nus} *Mechain* ex obſeruato fine Heracleae inuenerit Longitudinem huius loci $30'. 13''$,

quae

quae multo propius cum mea conclusione consentit. In nullis autem conclusionibus maius est discrimen, quam pro illis, quae obseruationibus St. Huberti et Saronis institutis, respondent; nec alia mihi explicatio huius discrepantiae probabilis videtur, quam quod Cel. *Du Séjour* alia forsan momenta adhibuerit, quam quae in Commentariis Academ. Scientiar. Parisinae pro Anno 1769, vel in Dissertatione Cel. *de la Lande* (Mémoire sur le Passage de Venus) continentur; quod si vero iisdem vsus est, tum sine vlla haesitatione pronunciare ausim, pro his saltem obseruationibus calculos D^ni^ *Du Séjour* rite sibi constare non posse. Praeterea nec ea quidem conclusio prorsus exacta mihi videtur, qua Cel. *Du Séjour* affirmat, ex initio Eclipsis Glasgowii obseruato, sequi huius loci Longitudinem 26′. 27″; nam si, vti in Transactionibus Societatis Londin. perhibetur, initium Eclipsis ibidem obseruatum sit $18^h. 30'. 14''$, hinc sequeretur Longitudo pro Glasgow, ista proposita saltem quinque minutis primis minor; nec aliud argumentum ad hoc comprobandum adducere opus est, quam quod perhibeatur, in Kirknewton initium Eclipsis quoque $18^h. 30'. 19''$ esse obseruatum, quum tamen inter hunc locum et Glasgow adsit in Longitudine differentia 3 Minutor. cum dimidio; et quia momentum allatum pro Kirknewton nimis tarde sit assignatum, id tanto magis de obseruatione Glasgowiensi valebit. Caeterum quod ad Longitudines locorum, quae in vicinia obseruatoriorum Londinensis et Parisiensis sita sunt, attinet, eas speciali calculo determinare superfluum existimaui, quia in tanta vicinia, differentia momentorum obseruatorum, saltem intra vnum vel alterum scrupulum secundum, differentiam Meridianorum exprimet. Heic autem sponte li-

quet

quet, insignes discrepantias oriri, prouti vnum vel alterum momentum pro initio vel fine obseruato adhibeatur. Si pro obseruatorio Grenouicensi adhibeantur momenta a Cel. *Maskelyne* assignata, pro initio $18^h. 38'. 54''$ et pro fine $20^h. 23'. 30''$, non concipere possum, quomodo ex illis, comparatis cum obseruationibus Cel. *Canton*, pro initio $18^h. 38'. 51''$ et pro fine $20^h. 23'. 18''$, deduci queat Longitudo loci vbi D^nus^ *Canton* obseruauerat $7''$ vel $17''$. Oc.

§. 9. Inter reliquas determinationes supra allatas quum praecipue commemorabilis sit illa pro Longitudine Vranieburgensi, quippe quum hic sit celebris locus, vbi insignis Astronomus *Tycho Brahe* suas faceret obseruationes; nonnulla adferemus momenta pro hac Longitudine vlterius confirmanda. Primum igitur obseruo, ex obseruato fine Eclipsis Anno 1764 deduci Longitudinem pro Lunda Scanorum a Meridiano Parisino $43'. 30''$, ita vt si medium sumatur ex hac conclusione et illa, quam §. 5 attulimus, statui queat Longitudo Lundensis $47'. 26''$. Porro ex mensuris, quibus Cel. *Schenmark* distantias inter Lundam, Vranieburgum et Hafniam determinauit, constat Hafniam Vranieburgo $29''$ occidentaliorem esse, Lundam vero ab Vranieburgo $1'. 59''$ versus orientem esse sitam, quod cum determinationibus nostris §. 5 allatis bene consentit, nam ex illis est differentia Meridianorum inter Vranieburgum atque Lundam $2'$. Hincque iam certissime affirmare licebit, determinationem pro Longitudine Vranieburgensi a Cel. *Picard* allatam saltem 40 scrupulis secundis a veritate aberre; nec paucae illae obseruationes, circa Eclipses Satellitum Iouis a *Picard* institutae, conclusiones nostras multo tutiores infringere valebunt.

De

De Eclipſi Solis Anno 1773 obſeruata.

Conferatur Nov. Comment. Tom. XVIII pag. 571.

§. 10. Hic iterum, vti pro Eclipſi Solis Anni 1769 obſeruata, elementa calculi praemittere conueniet:

Phaenom. obſeru.	Paral. Longit.	Latit. ☽ apparens.	Semid. ☽ apparens.	Different. Long. app.
Windobon. - Finis	16′.36″,2	9′.47″,4	14′.56″,3	29′.22″,8
Schwezingae - Finis	16. 13, 3	10. 32, 8	14. 55, 0	29. 5, 6
Lutet. Pariſ. - Finis	16. 48, 4	10. 26, 9	14. 53, 7	29. 6, 4
Piſis - - Finis	21. 17, 0	8. 18, 4	14. 54, 8	29. 48, 2
Montis Peſſulani Finis	21. 28, 2	8. 33, 6	14. 53, 9	29. 43, 2
Petropoli - - Finis	2. 15, 6	11. 49, 7	14. 58, 1	28. 39, 2
Dmitriewſk Initium	15. 4, 9	4. 56, 1	14. 55, 8	30. 33, 9
Pekin - - Initium	23. 50, 0	16. 7, 7	15. 4, 5	23. 50, 0
- - - Finis	44. 43, 2	18. 5, 1	15, 0, 5	25. 13, 5

vnde ſequentes valores pro tempore coniunctionis prodeunt:

pro Windobona (II) $18^h. 26'. 22'' - 2,29\,\delta - 0,72\,y + 1,33\,\pi$
Schwezinga (II) $17. 55. 11 - 2,30\,\delta - 0,76\,y + 1,38\,\pi$
Piſis - - (II) $18. 2. 34 - 2,25\,\delta - 0,61\,y + 1,41\,\pi$
Petropoli (II) $19. 22. 9 - 2,35\,\delta - 0,90\,y + 0.94\,\pi$
Dmitriewſk (I) $20. 22. 40 + 2,19\,\delta + 0,35\,y + 0,26\,\pi$
Pekin - (I) $25. 6. 32 + 2,54\,\delta - 1,32\,y - 0,31\,\pi$
(II) $25. 6. 21 - 2,67\,\delta + 1,56\,y - 2,29\,\pi$

§. 11. Nunc quidem pro vera differentia Meridianorum elicienda principale negotium eo rediret, vt valores

lores correctionum δ, y, π elicerentur; verum huic fini non nisi vnica suppetit obseruatio Pekinensis ex qua obtinetur haec aequatio:

$$11 + 5,21\,\delta - 2,88\,y + 1,98\,\pi = 0$$

vbi quidem si ponatur $\delta = -2$, fieret $y = 0$, et si pro δ valor aliquanto maior adhibeatur, vtpote -3, fieret valor ipsius y adeo negatiuus, quod quidem minime consentire videtur cum mensuris Micrometro obiectiuo captis, quippe ex quibus concludendi ansam habui, Latitudinis correctionem fuisse positiuam et vix minorem 10 scrupulis secundis. At quum nullo criterio dignosci queat, vtrum error siue in obseruatione Pekinensi pro initio Eclipseos, seu in nostra mensura distantiae minimae, lateat; iam considerationem correctionum δ, y, π eo tutius seponere licebit, quod qualiscunque fuerit correctio y, eam tamen quam minimam esse, necesse sit.

§. 12. Comparatis igitur obseruationibus Schwezingae et Pisis institutis, cum Petropolitana et Windobonensi, fiet differentia Meridianorum inter Petropolin et Schwezingam $1^h.\ 26'.\ 58''$, atque inter Petropolin et Pisas $1^h.\ 19'.\ 35''$; similiter inter obseruatorium Windobonense et Schwezingense erit differentia Meridianorum $31'.\ 11''$ et inter obseruatorium Windobonense atque Pisanum $23'.\ 48$. Hinc si Longitudo Petropolis supponatur a Meridiano Parisino $1^h.\ 51'.\ 57''$ et Windobonae $56'.\ 10''$, erit Longitudo obseruatorii Schwezingensis $24'.\ 59''$ a Parisino, et Longitudo obseruatorii Pisani $32'.\ 22''$, vtraque orientalis. Praeterea si obseruatio in Dmitriewsk pro initio Eclipsis conferatur cum obseruatione Pekinensi, fiet differentia Meridianorum inter Dmitriewsk et Pekinum $4^h.\ 43'.\ 52''$,

hinc-

hincque si Longitudo pro Pekin supponatur a Meridiano Parisino $7^h. 36'. 20''$, erit Longitudo Dmitriewsk ab eodem Meridiano $2^h. 52'. 28''$.

§. 13. Supra ex obseruatione Eclipsis Solis, Anno 1709 Pisis instituta, inuenimus Longitudinem huius loci $32'. 4''$, ab obseruatorio Parisino, quae a modo allata nimis discrepare videtur. Cuinam autem harum conclusionum potior debeatur fides, id quidem discerni non potest; sufficit autem nobis, quod per has obseruationes innotuerit, Longitudinem obseruatorii Pisani saltem $32'$ esse maiorem, adeoque determinationem Longitudinis, ex obseruatis Eclipsibus Satellitum Iouis deriuatam, qua haec Longitudo statuitur $31'. 28''$, multum a veritate abludere. Praeterea hoc loco obseruari quoque meretur, quod si medium ex determinationibus pro Pekin, quod est:

$$25^h. 6'. 26'' - 0,06\,\delta + 0,12\,y - 1,00\,\pi$$

conferatur cum determinatione media pro Petropoli, Tom. XVIII Comment. pag. 595 allata:

$$19^h. 22'. 5'' - 0,02\,\delta + 0,05\,y + 0,16\,\pi,$$

reperietur differentia Meridianorum Pekinensis et Petropolitani: $5^h. 44'. 21'' + 0,17\,y - 1,16\,\pi$; vbi si correctiones y, π plane negligantur, fiet Longitudo pro Pekin a Meridiano Parisino $7^h. 36'. 18''$, quae egregie consentit cum determinatione ex variis aliis obseruationibus conclusa.

§. 14. Obseruationis Parisinae hac occasione non eo fine fecimus mentionem, vt inde conclusiones quasdam deducere vellemus, quippe quum, ipsis fatentibus obseruatoribus, haec obseruatio valde sit dubia, ob Solem vaporibus horizontis tempore obſeruationis plane immerſum; interim tamen, hac difficultate non obſtante, vix maior quam $26''$ ſcrupulorum ſecundorum error obſeruationi Pariſinae ineſſe poteſt; adhibita enim obſeruatione Ccl. *Mesſier* fiet tempus coniunctionis pro Meridiano Pariſino $17^h. 29'. 46''$, quod cum momentis pro Petropoli et Windobona collatum, oſtendit, errorem obſeruationis Pariſienſis vix $26''$ excedere poſſe. Cum obſeruatione autem, quae Montis Peſſulani inſtituta perhibetur, longe alia eſt ratio, nam ex hac obſeruatione ſequeretur, finem Eclipſis integris quatuor minutis tardius hoc loco fuiſſe viſum, quam ex calculo ſequi deberet. Nam ſi Finis Eclipſis in hoc loco Tempore vero $17^h. 59'. 1''$, obſeruatus fuiſſet, vti affirmatur in Commentariis Acad. Scient. Pariſienſis pro Anno 1774 Pag. 693, inde ſequeretur pro Monte Peſſulano tempus coniunctionis fuiſſe $17^h. 41'. 7''$, ideoque differentia Meridiani huius loci a Petropoli $1^h. 41'. 2''$, hinc a Meridiano Pariſino $10'. 55''$, quae fere quinque Minutis primis nimis magna eſt. Ne autem dici poſſet, meis calculis aliquem forſan errorem irrepſiſſe, eosdem primum pro momento allato variis rationibus repetere operae pretium duxi, tumque inſuper ſi momento huic 4 Minutorum primorum correctio adplicetur, inueni momentum coniunctionis $17^h. 36'. 58''$, reliquis Elementis calculi pro hoc momento vti ſequitur inuentis:

Parallax. Longit. $21'. 26'',5$; Latit. ☽ appar. $8'. 23'',9$

Diam. ☽ appar. 14. 53. 8; Diff. Long. ☉ et ☽ app. $29'. 45'',8$.

Primum quidem exiſtimaueram per errorem quendam hoc momentum ſecus eſſe aſſignatum, ac obſeruatio id praebuerat, verum haec rem explicandi ratio non ſuccedit, quod

quod D^nus *Poitevin* affirmauerit, ipſum calculum oſtendere, quod finis Eclipſis verſus 17^h. 59$'$ finiri deberet; id quod tamen nunquam demonſtratione firmare poterit. Nec discrepantia calculi ab obſeruatione effectui refractionis adſcribi poterit, quippe quum tum Pariſiis quoque phaenomenon aeque ſingulare ſe ſpectandum praebuiſſet. Quare nihil aliud remanet, quam vt Aſtronomi Montis Peſſulani, fallacia calculi inducti, inciſuram quandam limbi Solaris, ex vndulatione ortam, pro indicio Eclipſeos habuerint.

De occultatione Aldebaran a Luna Anno 1773, die 1 Nov. Conferat. Tom. XVIII Comment. pag. 610.

§. 15. Pro obſeruationibus huius occultationis, quae mihi innotuerunt, Elementa calculi habentur ſequentia.

Phaenom. obſeru.		Paral. Longit.	Latit. ☽ apparens.	Diam. ☽ apparens.	Diff. app. in Long.
Gadeti -	Immerſio	37′.34″,1	5°.15′.30″,0A	14′.48″,5	6′.26″,5
	Emerſio	36. 51, 5	5. 14. 38, 5	14. 49, 4	4. 27, 8
Grenouici	Immerſio	25. 11, 8	5. 22. 37, 7	14. 50, 0	13. 33, 0
	Emerſio	21. 46, 5	5. 20 52, 2	14. 51, 9	12. 37, 8
Bruxellis	Immerſio	24. 41, 9	5. 21. 23, 5	14. 50, 7	12. 55, 3
Florentiae	Immerſio	27. 19, 0	5. 15. 28, 5	14. 52, 2	6. 36, 4
Gryphiswald.	Immerſ.	19. 2, 2	5. 21. 8, 7	14. 52, 0	12. 48, 1
	Emerſio	13. 49, 4	5. 19. 37, 5	14. 53, 5	11. 46, 9
Petropoli	Emerſio	0. 32, 7	5. 20. 31, 2	14. 54, 0	12. 26, 6

Hinc pro temporibus coniunctionum ſequentes prodeunt expreſſiones:

pro Gadete -	$10^h.\ 7'.\ 33'' + 4{,}65\delta + 4{,}19y + 4{,}12\pi$	(I)
	$10.\ 5.\ 2 - 6{,}85\delta - 6{,}54y - 2{,}65\pi$	(II)
	$2.\ 31 + 11{,}50\delta + 10{,}73y + 6{,}77\pi = 0$	
pro Grenouico -	$10.\ 31.\ 58 + 2{,}24\delta + 0{,}93y + 1{,}82\pi$	(I)
	$10.\ 31.\ 32 - 2{,}40\delta - 1{,}28y - 0{,}10\pi$	(II)
	$26 + 4{,}64\delta + 2{,}21y + 1{,}92\pi = 0$	
Bruxellis -	$19.\ 49.\ 22 + 2{,}35\delta + 1{,}17y + 1{,}96\pi$	(I)
Florentia -	$11.\ 16.\ 45 + 4{,}58\delta + 4{,}10y + 2{,}88\pi$	(II)
Gryphiswaldia	$11.\ 25.\ 47 + 2{,}35\delta + 1{,}18y + 1{,}59\pi$	(I)
	$11.\ 25.\ 8 - 2{,}58\delta - 1{,}59y - 0{,}59\pi$	(II)
	$39 + 4{,}93\delta + 2{,}77y + 2{,}18\pi = 0$	
Petropoli -	$12.\ 32.\ 41 - 2{,}45\delta - 1{,}36y - 0{,}93\pi$	(II)

§. 16. Si obſeruationes Grenouicenſes ſumantur pro termino comparationis, obſeruationes Bruxellis, Gryphiswaldiae et Petropoli inſtitutae cum illis facile comparari poſſunt, etiamſi correctiones δ, y, π plane non habeantur determinatae; verum obſeruationes Gaditanae et illa Florentiae inſtituta minime cum Grenouicenſibus comparari poſſunt, ſine cognitione correctionum δ, y, π, quippe quum earum coefficientes pro his obſeruationibus ſint praegrandes. Facile autem patet ex aequatione pro Gadete inuenta:

$$151 + 11{,}50\delta - 10{,}73y + 6{,}77\pi = 0$$

Latitudinis correctionem proxime ſtatui poſſe $-10''$, vnde vt aequationes paullo exactiores obtineremus, ſtatim huius correctionis vſum adhibuimus, ſicque momenta pro temporibus coniunctionum ſequentia elicuimus:

pro

pro Gadete -	(I)	$10^h. 6'. 48'' +$	$4.90\delta +$	$4,46y + $	4.29π
	(II)	$10. 6. 13 -$	$7,90\delta -$	$7,63y -$	$2,85\pi$
		$35 +$	$12,80\delta +$	$12,09y +$	$7,14\pi = 0$
Grenouico	(I)	$10. 31. 49 +$	$2,24\delta +$	$0,93y +$	$1,82\pi$
	(II)	$10. 31. 45 -$	$2,40\delta -$	$1,28y -$	$0,10\pi$
		$4 +$	$4,64\delta +$	$2,21y +$	$1,92\pi = 0$
Gryphiswald.	(I)	$11. 25. 35 +$	$2.35\delta +$	$1,18y +$	$1,59\pi$
	(II)	$11. 25. 24 -$	$2,58\delta -$	$1,59y -$	$0,59\pi$
		$9 +$	$4,93\delta +$	$2,77y +$	$2,18\pi = 0$
Bruxellis -	(I)	$10. 49. 11 +$	$2,35\delta +$	$1,17y +$	$1,96\pi$
Florentia -	(I)	$11. 16. 2 +$	$4,83\delta +$	$4,38y +$	$3,02\pi$
Petropoli -	(II)	$12. 32. 55 -$	$2,45\delta -$	$1,36y -$	$0,93\pi$

§. 17. Nunc quidem ſi pro obſeruatione Gaditana implenda, ponatur $\delta = -2$, $y = -1$ et $\pi = 0$, obſeruationibus Gryphiswaldenſibus cum praeciſione 3 ſcrupulorum ſecundorum ſatisfiet, nec Grenouicenſibus maior quam 7 ſecundor. error inducetur, qui quidem eo minus probabilitate deſtituitur, quod ipſo Cel. *Maſkelyne* fatente, emerſio aliquantum dubia fuerit. His igitur adhibitis correctionibus, ſequentes prodibunt determinationes pro momentis coniunctionum et pro differentia Meridianorum

			Differentia a Meridiano Grenovicenſi
pro Grenouico	(I)	$10^h. 31'. 44''$	
	(II)	10. 31. 51	
Gadete -	(I)	10. 6. 34	- - $25'. 10''$ Occ.
	(II)	10. 6. 36	- - 25. 15 Occ.
Gryphiswald.	(I)	11. 25. 29	- - 53. 45 Orient.
	(II)	11. 25. 31	- - 53. 40 Orient.

 Bru-

			Differentia a Meridiano Grenouicensi
Bruxellis	(I)	$10^h. 49'. 5''$	$17'. 21''$ Orient.
Florentia	(I)	11. 15. 48	44. 4 Orient.
Petropoli	(II)	12. 33. 1	$1^s. 1. 10$ Orient.

Hinc fiunt Longitudines a Meridiano Parifino, differentia Longitudinum inter Meridianum Parifinum et Grenouicenfem fuppofita $9'. 20''$:

pro Gadete	(I)	$34'. 30''$ Occ.	Bruxellis	(I)	$8'. 1''$ Or.
	(II)	34. 35	Florentia	(I)	34. 44 Or.
Gryphisw.	(I)	44. 25 Or.	Petropoli	(II)	$1^h.51.50$ Or.
	(II)	44. 20			

Vbi quidem, fi correctio pro emerfione Grenouicenfi 5 fcrupulis fecundis fupponatur dubia, Longitudines ex hac obferuatione deductae, tantundem erunt augendae. Supra ex obferuatione Eclipfis Solis Anno 1769 Gryphiswaldiae inftituta elicuimus Longitudinem huius loci $44'. 4''$ vel $5''$, quae a iam inuenta $20''$ differt: Noftrum autem non eft disquirere, quaenam conclufio potiori loco fit habenda, nifi quod pofterior propius accedat ad determinationem Longitudinis pro hoc loco ex Eclipfibus Satellitum Iouis, quae tamen, quum fupponi foleat $45'. 10''$, certe nimis eft magna, vnde nouo argumento comprobatur, quam parum in hoc negotio his Eclipfibus fit tribuendum.

§. 18. Nunc etiam multo exactius correctiones Tabularum definire licet, quam id a nobis praeftitum eft in Tomo XVIII Commentariorum. Incidet enim Tempus coniunctionis Lunae cum α Tauri in tempus Parifinum verum $10^h. 41'. 5''$, ideoque medium $10^h. 24'. 52''$, exiftente tunc Longitudine Lunae $2^s. 6^\circ. 38'. 3'',9$, cum Tabulae *Mayeri* pro hoc momento dent Longitudinem Lunae $2^s. 6^\circ. 38'. 38'',7$, vnde prodibit correctio pro Longitudine Lunae $35''$ circiter, additiua, Latitudinis correctione $11''$ subtractiua existente; vbi tamen supponitur locum Stellae exacte esse definitum. Conclusio igitur pro loco Lunae ex his calculis deducta eo reducitur, vt contigerit.

Coniunctio Palilicii cum Luna

Anno 1773 die 1 Nou. $10^h. 24'. 52''$ Temp. Paris. medio
existe Longitudine Lunae $2^s. 6^\circ. 38'. 3'',9$
et Latitudine Lunae Austr. $4. 41. 58,6$

§. 19. Correctio semidiametri Lunae δ quum a nobis supposita sit $-2''$, merito hoc loco disquiri potest, an quae a variis Auctoribus fortior huius diametri statuatur diminutio, vtpote 4 secundorum cum dimidio, saltem pro hac obseruatione admitti queat? Quodsi igitur pro aequatione Gaditana §. 16 supponeretur $\delta = -4$, fieret $y = +1$; tum vero in aequationem Grenouicensem deriuaretur error $13''$ et in Gryphiswaldensem error $9''$. Nec quidem maior consensus, saltem pro obseruatione Grenovicensi prodire poterit, si ipsi π aliqualis tribuatur valor siue positiuus seu negatiuus, quem tamen sponte intelligitur inter quinque scrupula secunda concludi debere.

§. 20. Praeter obseruationes supra commemoratas, in Commentariis Acad. Scientiarum Parisinae pro Anno 1774, recensentur huius occultationis obseruationes factae Montis Pessulani, vbi perhibetur, occultationem contigisse

tigisse tempore vero $9^h. 16'. 34''$ et emersionem $10^h. 6'. 20''$; verum computo facto ex priori horum momentorum, elicitur Tempus coniunctionis $10^h. 39'. 34''$, quod octo fere minutis primis erroneum est, nec momentum coniunctionis ex obseruato fine elicitum $10^h. 47'. 16''$ rite sibi habere potest. Suspicio igitur mihi oborta est, quod in priori horum momentorum adesse posset error integrorum decem Minut. primorum, in posteriori vero error vnius Minuti primi, ita vt momenta obseruata statui deberent $9^h. 26'. 34''$ et $10^h. 5'. 20''$, ex quibus sequentes prodirent expressiones pro tempore coniunctionis:

$$\begin{array}{lll} 10^h. & 47'. & 38'' + 3,16\,\delta + 2,42\,y + 2,79\,\pi \\ 10. & 46. & 18 - 4,06\,\delta - 3,51\,y - 0,62\,\pi \\ & & 80 + 7,22\,\delta + 5,93\,y + 3,41\,\pi \end{array}$$

aequationi autem resultanti, posito $\delta = -2$ et $y = -11$, optime satisfit. Momenta autem vera pro coniunctione erant: $10^h. 47'. 5''$, ex vtraque obseruatione, vnde fieret Longitudo Montis Pessulani a Meridiano Grenouicensi $15'. 21''$, vel $15'. 14''$, vbi tamen posterior determinatio quinque secundorum correctionem admittere poterit. Quicquid autem sit, hanc hypothesin, vtcunque probabilem, proposuisse suffecerit, donec ipsi Auctores huius obseruationis declarauerint, quid de ista explicandi ratione sit censendum.

De occultatione Aldebaran a Luna

Anno 1774 d. 14 Aprilis. Conferet. Tom. XIX Comment. pag. 592.

§. 21. Pro obseruationibus calculo subiectis Elementa inuenta sunt sequentia:

Phae-

Phaenom. obseru.	Paral. Longit.	Latit. ☽ apparens.	Diam. ☽ apparens.	Different. Lon. app.
Massiliae Imersio	38'.51'',9	5° 25'. 5'',4	14' 56'',9	14'.32'',4
Emersio	43. 32, 0	5. 28. 10, 2	14. 54, 2	14 57 4
Gadeti Emersio	42. 43, 1	5. 20. 26, 3	14. 54, 4	12. 23, 1

Hinc sequentes pro tempore coniunctionis eliciuntur expressiones:

$$\begin{array}{lll} \text{Massiliae (I)} & 5^h.\ 59'.\ 30'' & + 2,08\,\delta + 0,52\,y - 1,21\,\pi \\ \text{(II)} & 5.\ 59.\ 9 & - 2,02\,\delta - 0,09\,y - 1,56\,\pi \\ & 21 & + 4,10\,\delta + 0,61\,y + 0,35\,\pi = 0 \\ \text{Gadeti (II)} & 5^h.\ 12.\ 19 & - 2,44\,\delta - 1,37\,y - 2,04\,\pi \end{array}$$

Hinc primum quidem liquet, pro aequatione ex obseruationibus Massiliensibus deducta, valores correctionum δ et y in Tomo XIX. Comment. stabilitos, adprime satisfacere; nam si ponatur $\delta = -3$, $y = -14$, haec aequatio perfecte implebitur, eritque momentum coniunctionis pro Massilia $5^h.\ 59'.\ 16''$; vnde quum pro Meridiano obseruatorii Parisiensis momentum coniunctionis $5^h.\ 47'.\ 12''$ inveneramus, erit differentia Meridianorum inter obseruatorium Parisiense et Massiliam $12'.\ 4''$. Pro obseruatione vero Gaditana, si valores commemorati substituantur, erit momentum coniunctionis: $5^h.\ 12'.\ 45''$, vnde fiet differentia Meridianorum inter Gadetem et obseruatorium Parisinum $34'.\ 27''$, quae cum supra §. 20 inuentis bene consentit. Idem vero proxime inuenietur, si obseruatio Cel. *Messier* pro emersione comparetur cum illa Gadeti facta: erit enim

pro Gadete moment. conj. $5^h. 12'. 19'' - 2{,}44\delta - 1{,}37y - 2{,}04\pi$
pro obſeruat. Pariſino $5. 47. 11 - 2{,}05\delta + 0{,}39y - 1{,}24\pi$
hinc differentia Meridian. $34\ 52 + 0{,}39\delta + 1{,}76y + 0{,}80\pi$,
quae poſitis $\delta = -3$, $y = -14$, $\pi = 0$, abit in $34'. 26''$.

Praeter commemoratas obſeruationes innotuit quoque mihi de emerſione huius Stellae Bruxellis obſeruata; verum quum ex hac obſeruatione Longitudo huius loci prodeat valde erronea, ſuſpicor momentum, quod ex Transactionibus Societatis Londinenſis excerpſi, eſſe erroneum; idque eo magis, quod Cl. *Mechain* affirmauerit, ſe ex hac obſeruatione inueniſſe Longitudinem pro Bruxellis $8'. 13''$, ſeu ſatis bene ſibi conſtantem.

De occultatione γ Tauri a Luna, die 24 Sept. 1774.
Conferat. Tom. XIX Comment. pag. 599.

§. 22. Elementa calculi pro obſeruatione Gadeti inſtituta ſequentia habentur: Pro immerſione: Paral. Long. $23'. 59'',1$; Latit. ☽ appar. $5°. 35'. 24'',1$; Diam. ☽ appar. $15'. 6''6$; Differentia Longitud. apparens $11'. 30'',7$. Pro emerſione: Paral. Longit. $13'. 17'',0$; Latit. ☽ apparens $5°. 33'. 35'',2$; Diamet. ☽ apparens $15'. 13'',3$; Differ. apparens Longitud. $9'. 49'',5$. Hinc ſequentes colliguntur expreſſiones pro tempore coniunctionis:

$$\begin{array}{ll}
\text{(I)} & 14^h. 35'. 1'' + 2{,}60\,\delta + 1{,}69\,y + 1{,}63\,\pi \\
\text{(II)} & 14.\ 34.\ 7 - 3{,}07\,\delta - 2{,}36\,y - 0{,}54\,\pi \\
 & \qquad\quad 54 + 5{,}67\,\delta + 4{,}15\,y + 2{,}17\,\pi = 0
\end{array}$$

Pro Pariſiis erat:

$$\begin{array}{ll}
\text{(I)} & 15.\ 9.\ 9 + 2{,}00\,\delta + 0{,}28\,y + 0{,}47\,\pi \\
\text{(II)} & 15.\ 8.\ 54 - 2{,}07\,\delta - 0{,}64\,y - 0{,}46\,\pi \\
 & \qquad\quad 15 + 4{,}07\,\delta + 0{,}92\,y + 0{,}93\,\pi = 0
\end{array}$$

Heic

Heic ſi ponatur $\delta = -2$, $y = -11$, $\pi = 0$, vtrique obſeruationi ſatis bene ſatisfit. Tum vero erit pro Gadete:

			Diff. Meridian.
Momentum coniunctionis	$14^h. 34'. 37''$	(I)	
	14. 34. 39	(II)	
et pro obſeruat. Pariſino	15. 9. 0	(I)	. . $34'. 23''$
	15. 9. 3	(II)	. . 34. 24

In caeteris pro hac occultatione concluſionibus, vt aliquid immutetur, neceſſe non eſt.

De occultatione Palilicii a Luna, die 18 Nou. 1774.

Conferat. Tom. XIX Comment. pag. 600.

§. 23. Pro Emerſione Palilicii, Grenouici obſeruata, ſequentia habentur Elementa calculi: Paral. Longit. $34'. 25''$; Latit. ☽ apparens $5°. 30'. 39'',6$; Diamet. ☽ apparens $15'. 4'',7$; Differentia Longitudinum apparens $15'. 1'',8$. Hinc colligitur tempus coniunctionis pro Grenouico:

$$14^h. 57'. 33'' - 1,99\,\delta + 0,21\,y - 1,36\,\pi.$$

Pro Immerſione, Gadeti obſeruata, Elementa calculi ſunt: Paral. Longit. $30'. 24'',6$; Lat. ☽ apparens $5°. 16'. 30'',5$; Diamet. ☽ appar. $15'. 8'',1$; Differentia Longit. apparens $7'. 31'',4$, hinc tempus coniunctionis:

$$14^h. 32'. 39'' + 3,40\,\delta + 2,78\,y - 1,93\,\pi.$$

Pro eruendis valoribus correctionum aliud heic non ſuppetit remedium, quam quod concluſio ex Emerſione Grenouici deducta reducatur ad Meridianum Pariſinum, et cum concluſione ex immerſione Pariſiis obſeruata confe-

 ratur.

ratur. Eſt igitur pro Meridiano Pariſino, ex obſeruatione Grenouicenſi, momentum coniunctionis:

$$15^h.\ 6'.\ 53'' - 1,99\,\delta + 0,21\,y - 1,36\,\pi,$$

ex obſeruatione autem Cel. *Meſſier*, pro immerſione, idem concluſum eſt

$$15.\ 6.\ 27 + 1,98\,\delta + 0,19\,y - 1,00\,\pi,$$

vnde colligeretur aequatio

$$26 - 3,97\,\delta + 0,02\,y - 0,36\,\pi = 0,$$

quae ſane ſubſiſtere nequit, quum valorem omnino poſitiuum eumque valde inſignem pro δ praebeat, omnibus hucusque obſeruationibus refragantibus. Eo potiori igitur iure contendimus, hanc Cel. *Meſſier* obſeruationem rite ſibi conſtare non poſſe, quod Cel. *Monnier* eandem immerſionem $15^h.\ 35'.\ 32''$ obſeruauerit, ideoque 25 ſecundis tardius, quam Cel. *Meſſier*, habita ratione differentiae Meridianorum inter obſeruatoria Celeberrimorum horum Aſtronomorum. Si igitur vſus fiat obſeruationis a Celeb. *Monnier* inſtitutae, prodibit aequatio

$$1 - 3,97\,\delta + 0,02\,y - 0,36\,\pi = 0,$$

quae quidem nec prorſus exacta videtur, interim tamen non adeo grauia abſurda perducit, ac prior illa. Et ſi ſupponamus emerſionem Grenouici iuſto tardius eſſe obſeruatam, vtpote ſex vel ſeptem ſecundis, haec aequatio abſurdi nil inuoluet. Caeterum nec ex hac poſtrema aequatione de valore ipſius y quidquam concludi poteſt; igitur pro hac correctione ſaltem proxime inuenienda, reducamus concluſiones, ex obſeruatione Petropolitana et Gaditana deductas, ad Meridianum Pariſinum, ſicque habebimus has expreſſiones pro tempore coniunctionis:

$$15^h.\ 7'.\ 7'' + 3,40\,\delta + 2,78\,y - 1,93\,\pi,$$
$$15.\ 6.\ 51 + 2,53\,\delta - 1,59\,y + 0,09\,\pi, \text{ hinc}$$
$$16 + 0,87\,\delta + 4,37\,y - 2,02\,\pi = 0,$$

vbi ſi ponatur

$\delta = -2$, $\pi = 0$, fiet $y = -3'',3$. Tumque habebimus momenta coniunctionum

		Differ. Meridian.
pro Grenouico ex Emerſione	$14^h.\ 57'.\ 36''$	
pro Gadete ex Immerſ.	14. 32. 23	- $25'.\ 13''$ Oc.
Petropoli ex Immerſ.	16. 58. 48	- 2. 1. 12 Or.

obſeruatio vero Cel. *Monnier* dabit tempus coniunctionis, $15^h.\ 6'.\ 47''$. Hinc inter Gadetem et obſeruatorium Pariſinum differentia Meridianorum erit $34'.\ 24''$, inter obſeruatoria autem Petropolitanum et Pariſinum $1^h.\ 52'.\ 1''$, quae certe aliquot ſecundis iuſto maior eſt. Quae autem heic attulimus tantum hypothetice vera ſunt, ſi correctiones δ, y rite a nobis fuerint definitae, de quo occaſio forſan dabitur vlterius diſquirendi, dum plures huius occultationis obſeruationes nobis innotuerint.

§. 24. Antequam hic Diſſertationi finem imponamus, nonnullas animaduerſiones circa rationem determinandi Longitudines locorum ex obſeruationibus circa Eclipſes Solis et occultationes fixarum a Luna adiiciemus. Primum igitur ex ſpeciminibus iam allatis, vti et multis aliis calculis pro hoc inſtituto factis, ſatis patere arbitror, vix vllam dari rationem certiorem, determinandi Longitudines locorum, quam hanc, et ſi quae incertitudo concluſionibus ex illa deductis nonnunquam adhaerere videtur, illam qua potiorem partem ex defectu obſeruatio-

 num

num eſſe deriuandam. Si concluſiones pro Longitudine obſeruatorii Gaditani ſupra allatas inter ſe conferamus, vix maiorem conſenſum exſpectare licebit; eſt enim:

Different. Meridianorum inter Obſeru. Pariſin. et Gaditan.		
Ex Eclipſi Solis 1769. - - - -	$0^h. 34'. 40''$ Oc.	
Ex Occultatione Palilicii 1773 d. 1 Nou.	0. 34. 30	(I)
	0. 34. 35	(II)
Ex Occultatione Palilicii 1774 d. 14 Apr.	0. 34. 26	(II)
Ex Occultat. γ Tauri 1774 die 24 Sept.	$0^h. 34'. 23$	(I)
	0. 34. 24	(II)
Ex Occultat. Palilicii 1775 d. 18 Nou.	0. 34. 24	(I)

Hinc medio inter ſeptem has determinationes ſumto: $34'. 29''$ Occid., quod tamen medium forſan correctionem duorum, aut trium ſecundorum diminutiuam, admittere poterit. Quod autem concluſio ex Eclipſi Solis deducta a reliquis plus iuſto diſcrepet, id quidem nemini mirum eſſe poterit, qui nouerit, inter momenta, pro fine Eclipſis Solis in eodem loco, adducta, nonnunquam diſcrepantias 15 ſcrupulorum ſecundorum reperiri, pro diuerſa oculorum et inſtrumentorum vi. Caeterum tam pro his obſeruationibus, quam illis, quae circa occultationes fixarum a Luna inſtituuntur, errores, in determinando tempore vero commiſſi, ipſas obſeruationes erroneas reddunt; huiusmodi autem errores committi poſſe, et ſaepe commiſſos eſſe pluribus exemplis confirmari poteſt. Vnicum autem hanc in rem exemplum ſufficere poterit:

1774 d. 14 April. Immerſio α Tauri ad Meridian. obſeruat. Pariſini reducta, ex obſeruatione

Cel.

Cel.	*Meſſier*	6^h.	$26'$.	$2''$
Cel.	*Caſſini*	6.	26.	2
Cel.	*Anthelmi*	6.	26.	2
Cel.	*Mechain*	6.	25.	52.

Haec exacte conſentiunt, excepta obſeruatione D. *Mechain*. Eodem die Emerſio α Tauri ad Merid. obſeruat. Pariſini:

ex obſeruatione D.	*Meſſier*	7^h.	$35'$.	$57''$
	Caſſini	7.	35	58
	Anthelmi	7.	36.	1
	Mechain	7.	36.	1
	Du Séjour	7.	35.	55
	Le Monnier	7.	36.	11.

§ 25. Inter alia dubia, quae contra Methodum determinandi Longitudines locorum ex obſeruationibus huius generis, proponi poteſt, etiam illud eſt, quod de Diametris Solis et Lunae probabile ſit, eas ſiue per inflexionem radiorum luminis, ſiue per quandam irradiationem diminui, quare nullae certae concluſiones exſpectari poſſunt, antequam haec diminutio exacte definiatur. Huic incommodo remedium vt adferatur, quidam Mathematici hanc diminutionem determinare annisi ſunt, inter quos praecipue mihi nominandi ſunt Cel. *Du Séjour* et Cel. *de La Lande*, quorum prior contendit inflexionem radiorum luminis ad marginem Lunae eſſe 4 ſecund. cum dimidio, poſterior autem perhibet pro explicandis phaenomenis tranſitus Veneris, diametrum Solis $7''$ eſſe diminuendam. Verum etiamſi non negauerim, tam pro Eclipſibus Solaribus, quam occultationibus fixarum, diametrum Lunae diminutionem quandam pati, tamen plerisque in caſibus haec dimiminutio vix 3 ſcrupula ſecunda excedit, ideoque menſura a Cel. *Du Séjour* ſtabilita iuſto maior videtur. Quod autem diminutionem diametri Solaris a Celeb. *de la Lande* ſtabilitam attinet, argumentis exceptione maioribus demonſtrare valeo, eandem nequaquam locum habere poſſe. Tanto magis igitur falſum eſt, quod contendit Abbas Reggio in Ephemeridibus Aſtronomicis pro Anno 1776 Mediolani euulgatis, diametrum tam Solis quam Lunae $6''$ eſſe diminuendam, quod exemplo Eclipſis Solaris, Anno 1769 obſeruatae, comprobare conatur. Si enim in aequationibus noſtris, ſupra §. 4. allatis, praecipue Gurjefwenſi ponatur $\delta = -6$, quia ex aequatione Pariſina eſſe deberet $y = -20''$, poſito $\pi = -3$, in iſtam aequationem Gurjefwenſem error deriuaretur circiter $41''$, quem abſurdum eſſe facile quiuis largietur. Ponamus autem eſſe $\pi = 0$, fietque per aequationem Pariſinam $y = -18''$, et in aequatione Gurjefwenſi erit error $34''$. Porro ſi etiam ipſi π tribuatur valor poſitiuus $3''$, vt ſit y ex aequatione Pariſina $= -16''$, et in aequatione Gurjefwenſi adhuc remanebit error $28''$. Hinc igitur euidentia, vt puto Geometrica, demonſtratum eſt, iſtam correctionem 6 vel 7 ſecundorum, pro ſemidiametris Solis et Lunae omni deſtitui fundamento. Idem vero inſuper patet ex obſeruatione Jakutenſi, in quam error ſaltem $12''$ ex his valoribus deriuaretur. Caeterum differentia Meridianorum inter Mediolanum et Lutetias Pariſiorum habetur:

$$27'.\ 27'' - 0,39\,\delta + 0,57.y - 0,22\,\pi$$

vbi ob exiguos coefficientes ipſorum δ, y, facile eiusmodi valor pro y ſeligi poteſt, vt prodeat differentia Meridianorum, $27'.\ 25''$, quo tamen nihil demonſtratur pro exactitudine correctionis δ.

§. 26.

§. 26. Vltimo autem loco obſeruaſſe iuuat, fieri vtique poſſe, vt haec correctio δ pro variis locis diuerſa ſit; nam in his disquiſitionibus ſupponi ſolet, imagines Solis et Lunae circularem habere figuram, quod tamen, ſaltem pro imagine Solis, aliquantum a veritate abludere, per menſuras Micrometro obiectiuo inſtitutas, ſe inueniſſe nonnulli Aſtronomi contendunt; nec veriſimilitudine deſtituitur, idem pro Luna obtinere. Quare ſi obſeruationes inter ſe conferantur, pro quibus Latitudines Lunae apparentes diſcrepantiam inter ſe inſignem habeant, tum vtique fieri poteſt, vt phaenomenon circa valde diuerſa imaginis Solaris et Lunaris puncta obſeruetur, vnde diametrorum aeſtimatio pro vtroque loco non eſſe poteſt eadem. Quum vero huius diſcrepantiae rationem in calculo vix a ne vix quidem habere liceat, ſaltem quousque experimentis exactiſſimis non fuerit definitum, ſecundum quam rationem diametri Solis vel Lunae variationem patiantur; conſueta Methodo haec Phaenomena computo ſubiicere praeſtabit, ſaltem ſi licuerit earum praecipue obſeruationum comparationem inſtituere, pro quibus Latitudo Lunae apparens non inſigni variatione afficiatur, ita vt phaenomenon ad puncta haud multum inter ſe diſtantia limbi Lunae contigerit.

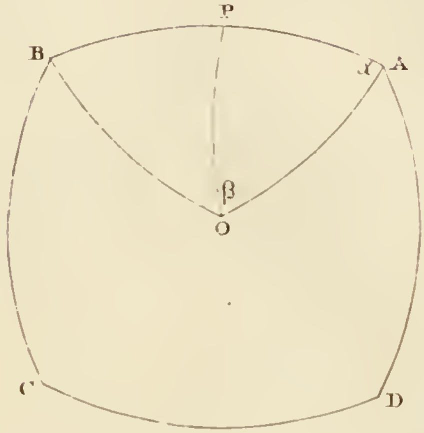


Fig. 2.

1.

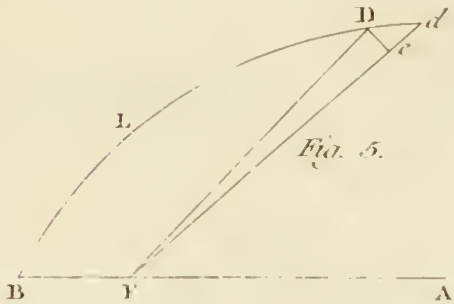


Fig. 5.

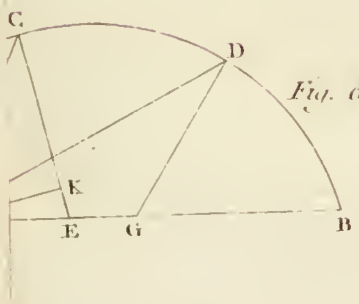


Fig. 6.

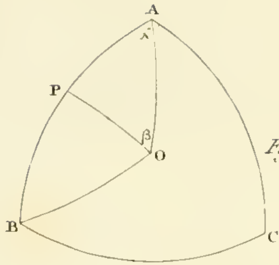


Fig. 1.

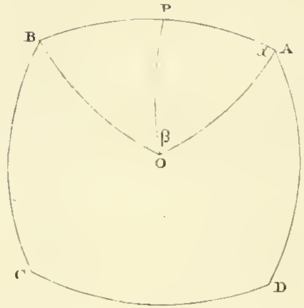


Fig. 2.

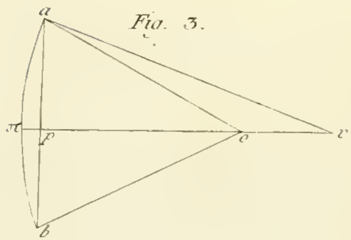


Fig. 3.

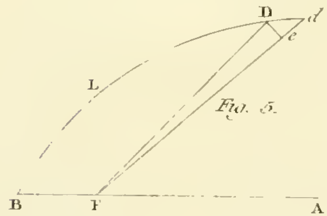


Fig. 5.

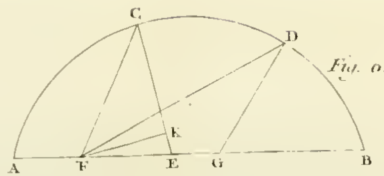


Fig. 6.

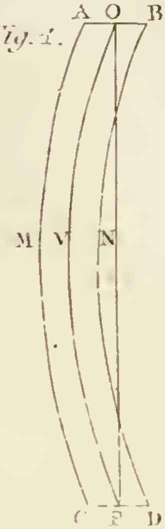


Fig. 1.

Fig. 6.

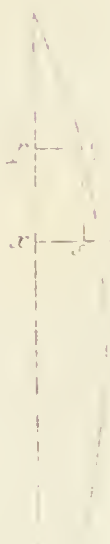
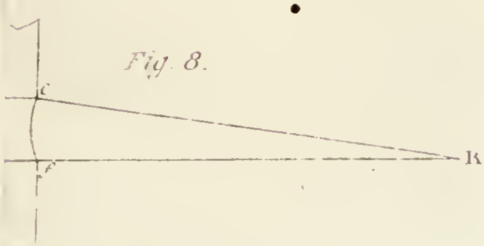


Fig. 9.

Fig. 8.



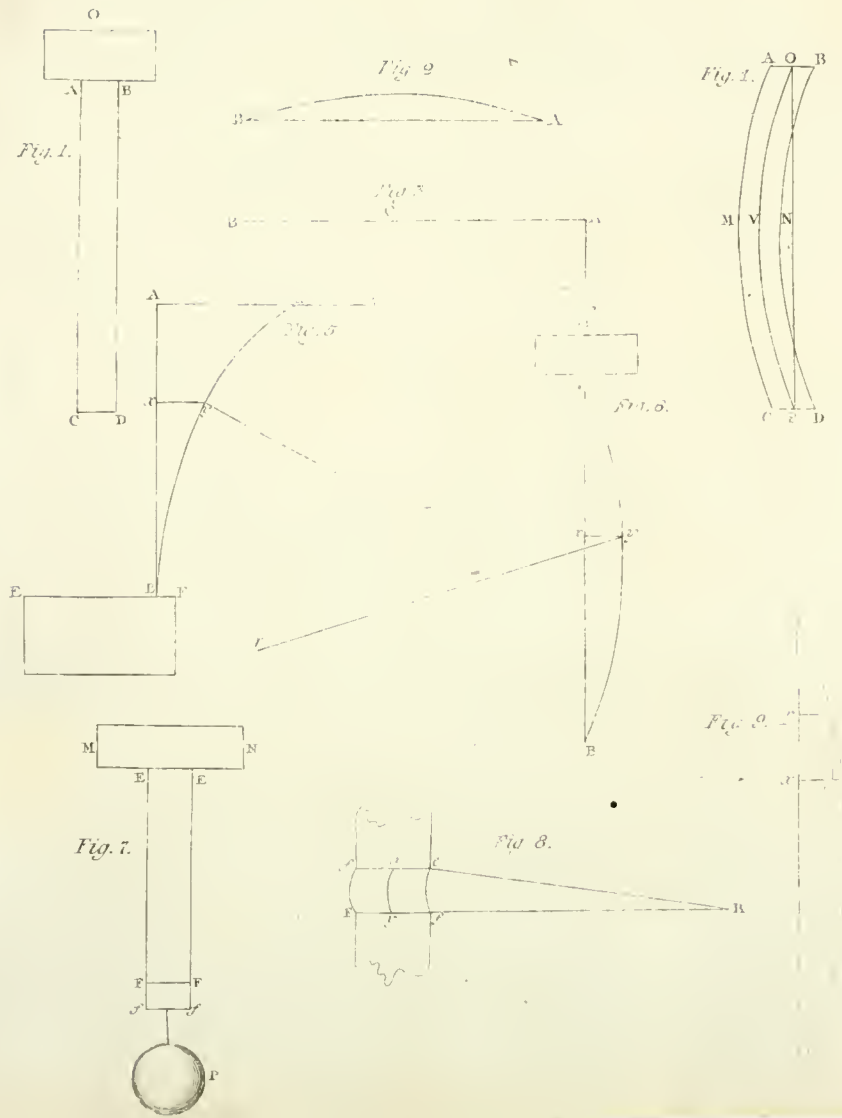


Fig. 1.
O
A
B
C
D
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4.
M
V
N
Fig. 5
E
F
Fig. 6.
Fig. 7.
M
N
E
F
f
P
Fig. 8.
R
Fig. 9.

Fig. 3.

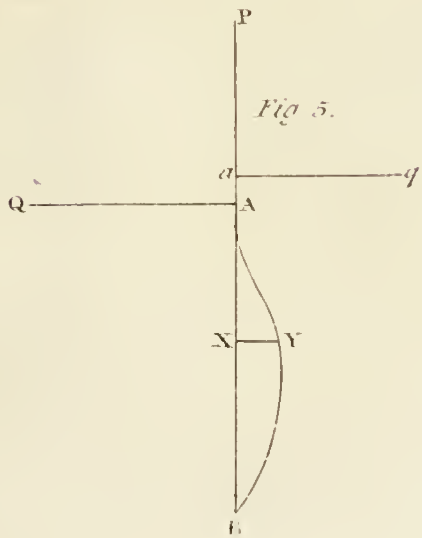


Fig. 5.

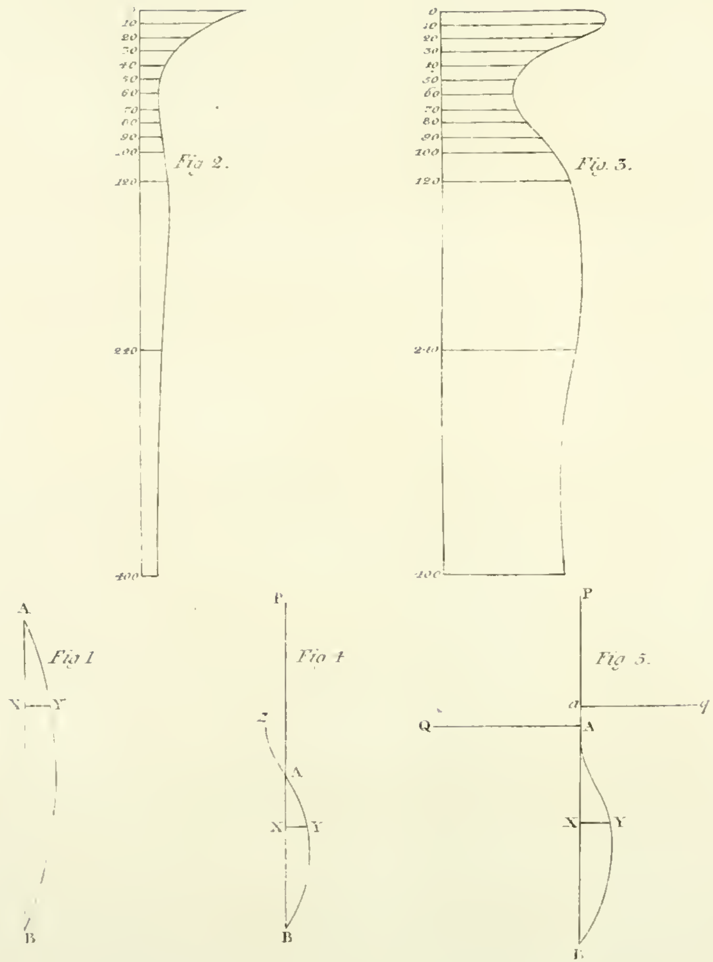


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig 1
Fig 4
Fig 5.
A
X
Y
B
P
z
Q
a
q

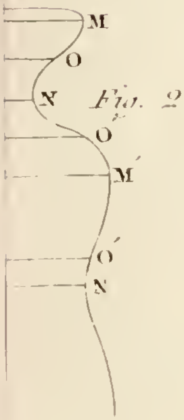


Fig. 2

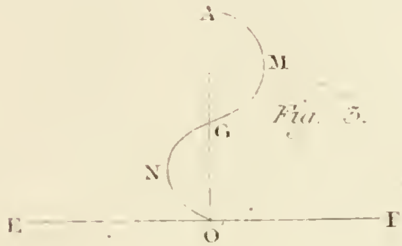


Fig. 3.

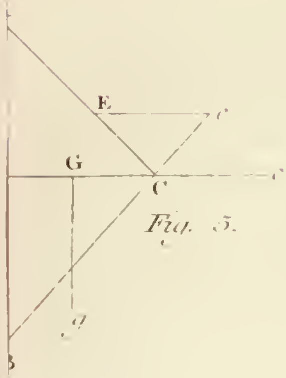


Fig. 5.

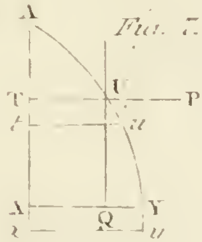


Fig. 7.

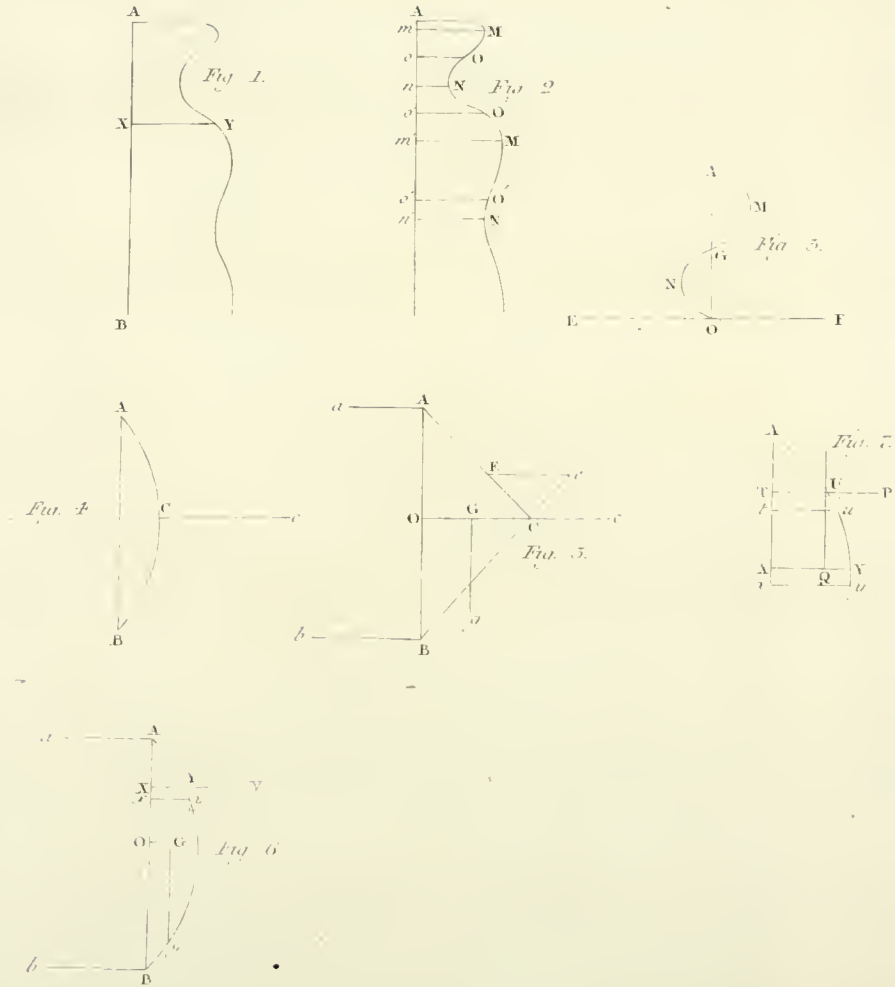


Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 6

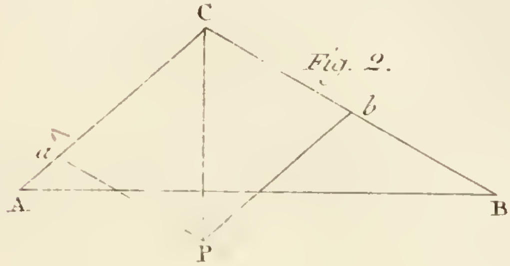


Fig. 2.

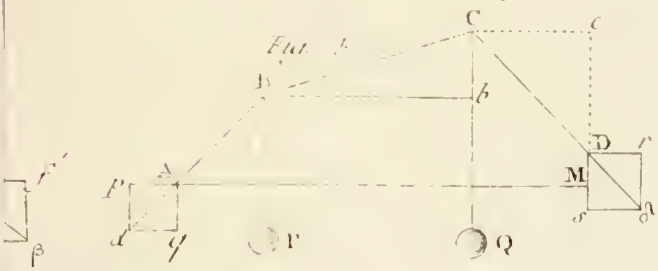


Fig. [illegible]

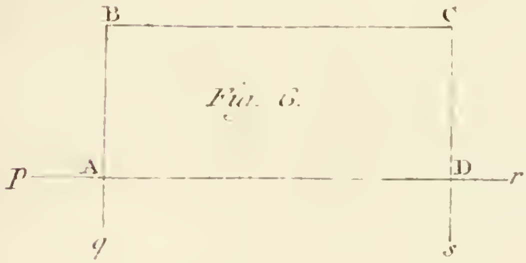


Fig. 6.

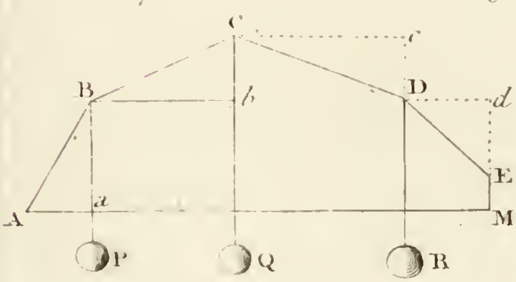


Fig. 8.

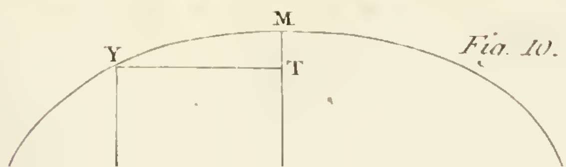


Fig. 10.

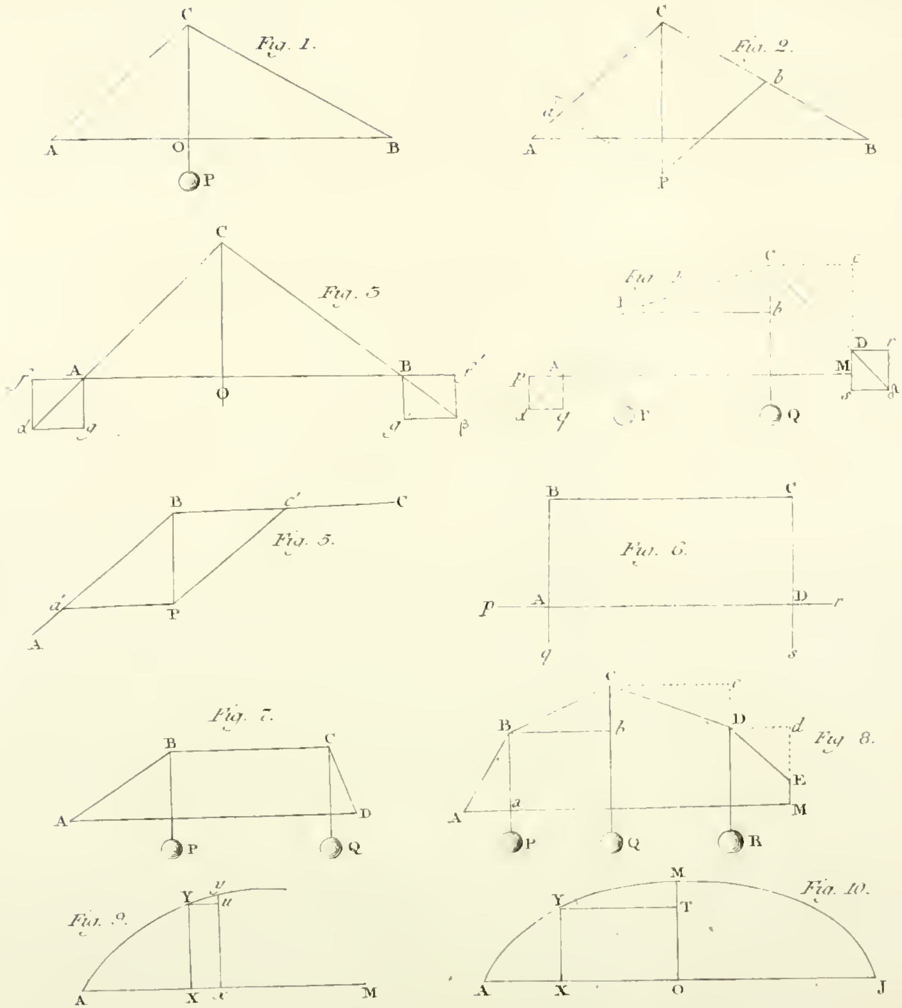


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

et VIII.

Fig. 1.

Fig. 2.

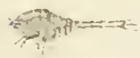
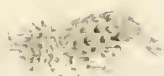


Fig. 3.



C D E F

Fig 1.

Fig. 2.

A

Fig. 3

G

B

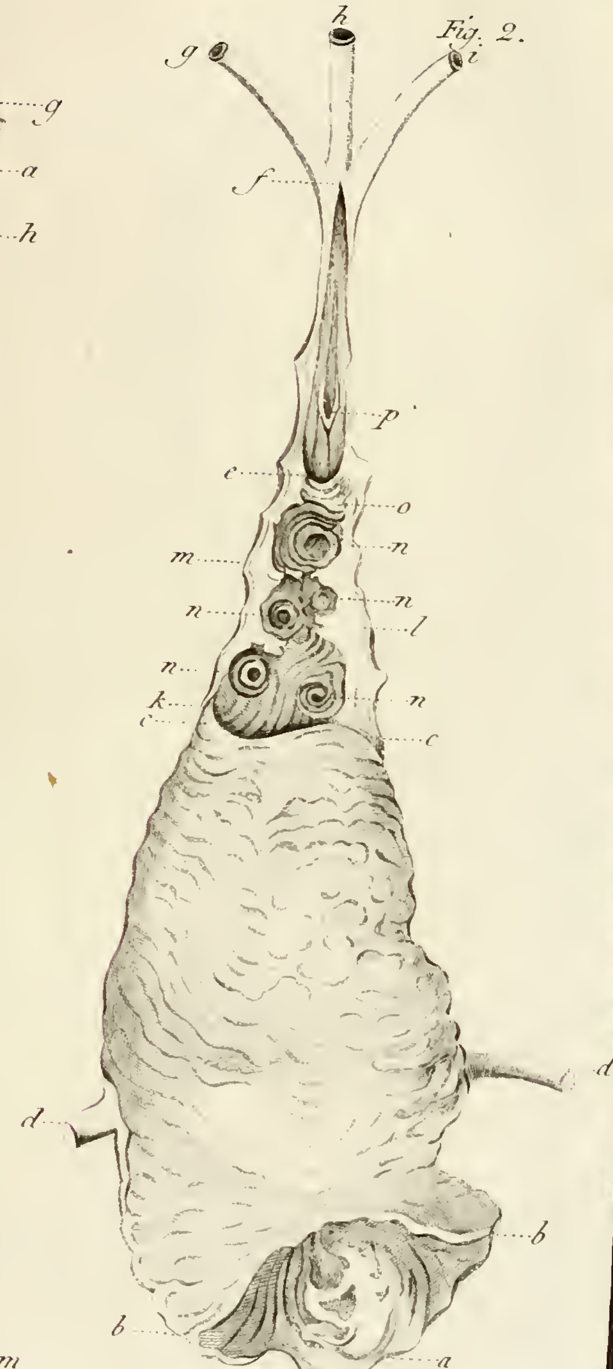
C

D

E

F

Fig. 2.



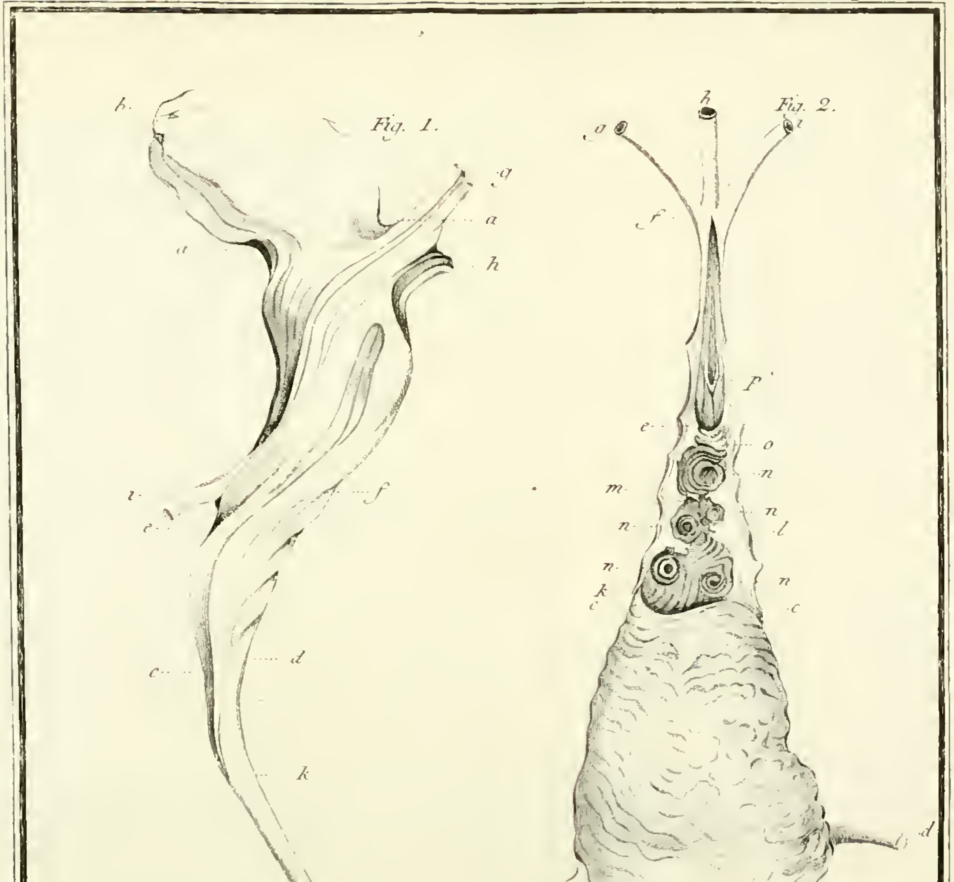
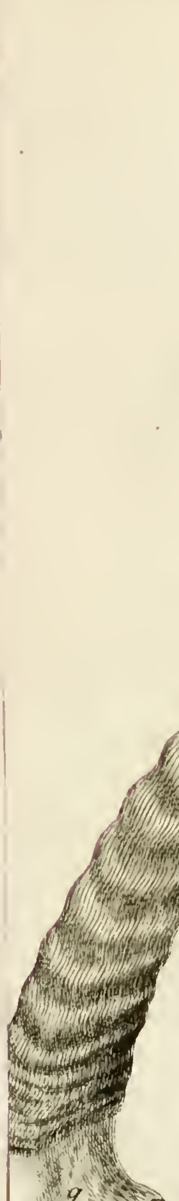


Fig. 1.
Fig. 2.

Act. Acad. Sc. Petrop. Tom. II. P. I. Tab. IX.


g
r

Act. Acad. Imp. Sc. Petropol. Tom. II. P. I. Tab. X.

Fig. 4.

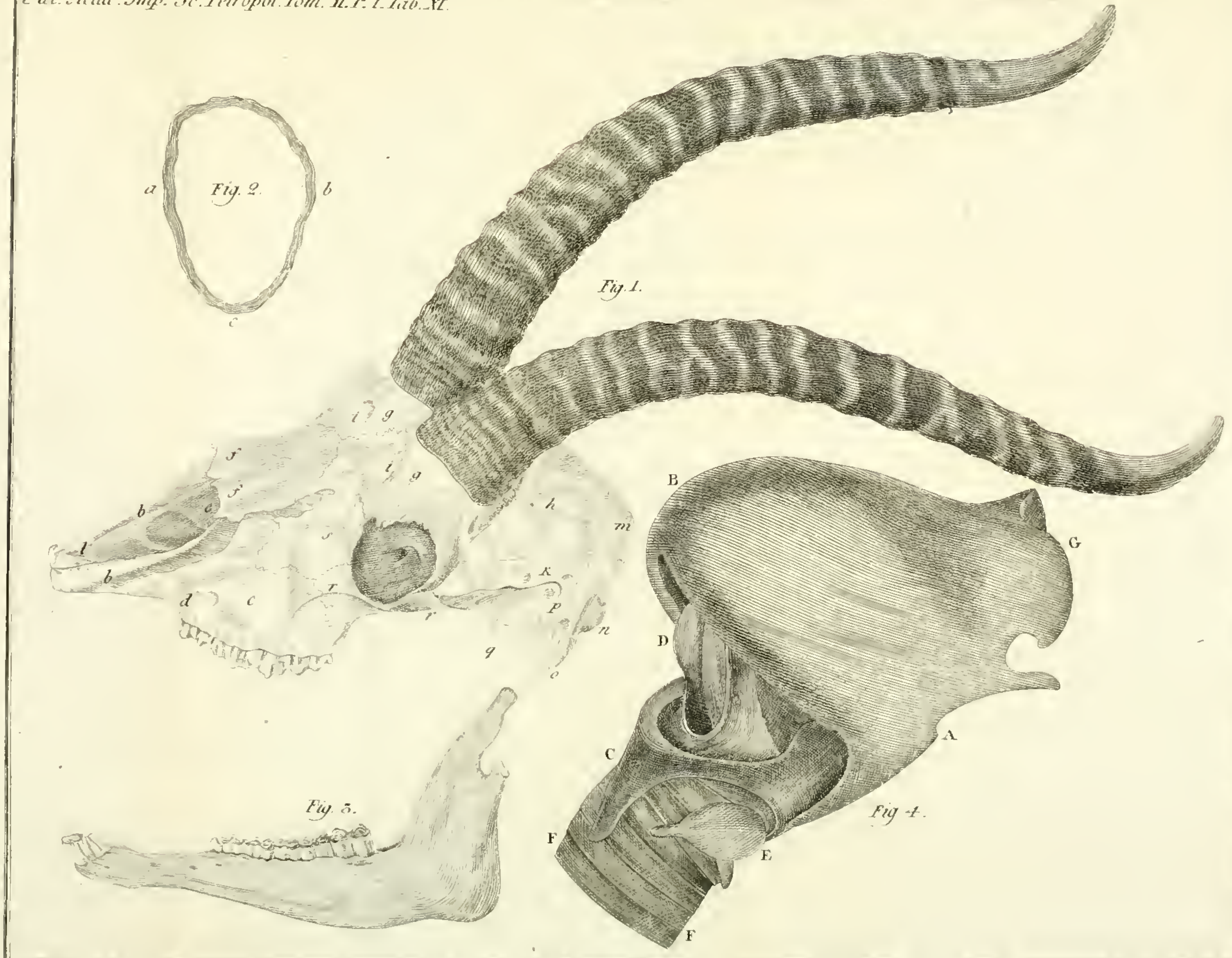
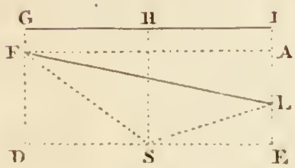


Fig. 1.
Fig. 2.
a
b
c
Fig. 3.
Fig. 4.
A
B
C
D
E
F
F
G

Act. Acad. Imp. Sc. Petropol. Tom. II. P. I. Tab. XII.

Fig. 1.



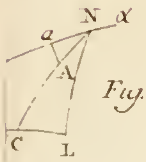


Fig. 3.

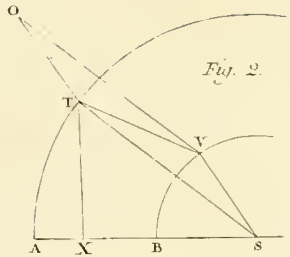
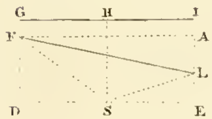


Fig. 2.

Fig. 1.



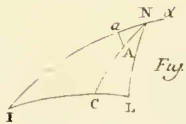


Fig. 3.