Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 9

Affine Schemata

Es sei

$$X = \operatorname{Spek}(R)$$

das mit der Zariski-Topologie versehene Spektrum eines kommutativen Ringes R. Wenn R ein Körper ist, so besteht das Spektrum allein aus einem einzigen Punkt, nämlich dem Nullideal, das zugleich das maximale Ideal ist, und beinhaltet so gesehen sehr wenig Information. Der kontravariante Funktor

$$\text{Kom Ringe} \longrightarrow \text{Top},\ R \longmapsto \operatorname{Spek}(R),$$

verliert also Information. Wir wollen dass Spektrum mit einer zusätztlichen Struktur anreichern, damit man daraus den Ring rekonstruieren kann. Dazu definieren wir eine (Struktur-)Garbe auf dem Spektrum. Zu einem Ring ist dann das Spektrum zusammen mit dieser Strukturgarbe eine sinnvolle Geometrisierung, nämlich ein beringter Raum.

Beispiel 9.1. Es sei $X = \operatorname{Spek}(R)$ das Spektrum eines kommutativen Ringes R. Darauf definiert man eine Prägarbe von kommutativen Ringen, indem man zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ die Festlegung

$$\mathcal{P}(U) = \operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} R_f$$

macht, mit den natürlichen Ringhomomorphismen $R_f \to R_g$ zu

$$U \subseteq D(g) \subseteq D(f).$$

Dies ist mit den natürlichen Ringhomomorphismen eine Prägarbe. Dabei ist $\mathcal{P}(D(f)) = R_f$ und insbesondere $\mathcal{P}(X) = R$, da das gerichtete System das finale Objekt $D(f)$ enthält. Der Halm dieser Prägarbe in einem Punkt $\mathfrak{p} \in X$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{colim}_{\mathfrak{p} \in U} \mathcal{P}(U) &= \operatorname{colim}_{\mathfrak{p} \in D(f)} \mathcal{P}(D(f)) \\ &= \operatorname{colim}_{f \notin \mathfrak{p}} R_f \\ &= R_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Dies ist keine Garbe. Ihre Vergarbung ist die Strukturgarbe auf dem Spektrum.

Definition 9.2. Es sei $X = \operatorname{Spek}(R)$ das Spektrum eines kommutativen Ringes R. Unter der *Strukturgarbe* auf X versteht man die Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \subseteq X$ den kommutativen Ring

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \left\{ (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U} \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} R_{\mathfrak{p}} \mid \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es } a, b \in R \text{ mit } \right.$$
$$\left. \mathfrak{p} \in D(b) \subseteq U \text{ und } s_{\mathfrak{q}} = \frac{a}{b} \text{ in } R_{\mathfrak{q}} \text{ für alle } \mathfrak{q} \in D(b) \right\}$$

und jeder Inklusion $U \subseteq U'$ die natürliche Projektion zuordnet.

Lemma 9.3. *Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ auf dem Spektrum $X = \operatorname{Spek}(R)$ eines kommutativen Ringes R ist eine Garbe von kommutativen Ringen.*

Beweis. Die angegebene Definition ist einfach die Vergarbung der in Beispiel 9.1 beschriebenen Prägarbe, wobei wir lediglich die Verträglichkeitsbedingung statt mit beliebigen offenen Umgebungen mit den Basisumgebungen formuliert haben. ☐

Definition 9.4. Das Spektrum $X = \operatorname{Spek}(R)$ eines kommutativen Ringes R zusammen mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ nennt man das *affine Schema* zu R.

Ein Element $q \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ nennt man eine auf U definierte algebraische (oder rationale oder reguläre) Funktion.

Bemerkung 9.5. Zu einem Integritätsbereich R lässt sich die Strukturgarbe besonders einfach beschreiben, zu einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ ist einfach

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U} R_{\mathfrak{p}},$$

wobei der Durchschnitt im Quotientenkörper $Q(R)$ genommen wird, in dem sämtliche Lokalisierungen $R_{\mathfrak{p}}$ Unterringe sind. Die Funktionen auf U sind also einfach diejenigen rationalen Elemente aus $Q(R)$, die in allen Punkten aus U definiert sind. Dabei gilt

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} R_{\mathfrak{p}} = R$$

nach Lemma 16.4 (Kommutative Algebra). Entsprechend gilt $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in D(f)} R_{\mathfrak{p}} = R_f$. Wenn eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ vorliegt, so ist

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U} R_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{\mathfrak{p} \in D(f_i)} R_{\mathfrak{p}} \right) = \bigcap_{i \in I} R_{f_i}.$$

Beispiel 9.6. Wir betrachten $R = K[X,Y]/(XY)$ über einem Körper K. Auf der offenen Menge

$$U = D(X, Y) = D(X) \cup D(Y) = \operatorname{Spec}(R) \setminus \{(X, Y)\}$$

ist diejenige Funktion, die auf der (punktierten) Geraden $V(X) \cap U = D(Y)$ den Wert 0 und auf der (punktierten) Geraden $V(Y) \cap U$ den Wert 1 besitzt, eine algebraische Funktion. Durch diese Festlegung ist für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in U$ ein $s_{\mathfrak{p}} \in R_{\mathfrak{p}}$ gegeben. Bei

$$\mathfrak{p} \in V(X) \cap U = D(Y)$$

ist $0 = \frac{0}{Y}$ eine Beschreibung als Bruch und bei

$$\mathfrak{p} \in V(Y) \cap U = D(X)$$

ist $1 = \frac{X}{X}$ eine Beschreibung als Bruch.

Bemerkung 9.7. Zu einem Integritätsbereich R mit Quotientenkörper $Q(R)$ und einer rationalen Funktion $q \in Q(R)$ gibt es eine größte offene Menge $U \subseteq \operatorname{Spek}(R)$, auf der q definiert ist. Es ist nämlich $U = D(\mathfrak{a})$ mit dem sogenannten *Nennerideal*

$$\mathfrak{a} = \{r \in R \mid rq \in R\}.$$

Wenn $q \in R_{\mathfrak{p}}$ gilt, so ist $q = \frac{s}{r}$ mit $r \notin \mathfrak{p}$, r gehört zum Nennerideal und somit ist $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{a})$. Dieses Argument rückwärts gelesen ergibt die andere Implikation. Die Menge $D(f)$ ist der maximale Definitionsort für $1/f$.

Satz 9.8. *Es sei R ein faktorieller Integritätsbereich. Dann ist für offene Mengen $U \subseteq \operatorname{Spek}(R)$ die Zuordnung*

$$U \longrightarrow \operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} R_f$$

gleich der Strukturgarbe auf $\operatorname{Spek}(R)$.

Beweis. Die angegebene Zuordnung ist eine Prägarbe von kommutativen Ringen, deren Vergarbung gleich der Strukturgarbe ist. Wir müssen also zeigen, dass diese Prägarbe im faktoriellen Fall bereits eine Garbe ist. Es sei

$$q \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \subseteq Q(R)$$

von 0 verschieden. Wegen der Faktorialität gibt es eine gekürzte Darstellung

$$q = \frac{a}{f}.$$

Wir behaupten $U \subseteq D(f)$, sei also $\mathfrak{p} \in U$. Da q auf U definiert ist, gibt es nach Bemerkung 8.5 eine Darstellung $q = \frac{b}{g} = \frac{a}{f}$ mit $g \notin \mathfrak{p}$. Dies bedeutet $fb = ag$ in R. Jeder Primfaktor von f teilt ag aber nicht a, also muss er g teilen. Daher umfasst das Radikal von f das Radikal von g und somit ist $\mathfrak{p} \in D(g) \subseteq D(f)$. □

Diese Aussage gilt insbesondere für den Polynomring bzw. den affinen Raum.

Beispiel 9.9. Wir betrachten den Integritätsbereich

$$R = K[X, Y, Z, W]/(WX - ZY)$$

über einem Körper K und die offene Teilemenge $D(X,Y) \subseteq \text{Spek}\,(R)$. Nach Bemerkung 8.5 ist

$$q = \frac{Z}{X} = \frac{W}{Y}$$

eine auf U definierte algebraische Funktion, also ein Element aus $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Es gibt aber außer den Einheiten kein Element $f \in R$ mit $(X,Y) \subseteq (f)$, da X und Y irreduzibel sind. Deshalb ist q kein Schnitt der Prägarbe aus Beispiel 9.1 über U, aber ein Schnitt ihrer Vergarbung.

Lemma 9.10. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ das affine Schema zu einem kommutativen Ring R und es sei $x \in X$ ein Punkt, der dem Primideal $\mathfrak{p}$ entspreche. Dann ist der Halm der Strukturgarbe gleich*

$$\mathcal{O}_x = R_{\mathfrak{p}}.$$

Beweis. Dies ergibt sich aus Beispiel 9.1 und Lemma 5.2 (2). □

Korollar 9.11. *Ein affines Schema ist ein lokal beringter Raum.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 9.10 und Satz 16.3 (Kommutative Algebra). □

Lemma 9.12. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ das affine Schema zu einem kommutativen Ring R und es sei $f \in R$. Dann ist*

$$\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = R_f.$$

Insbesondere ist der globale Schnittring gleich $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = R$.

Beweis. Wir beweisen den angeführten Spezialfall. Es gibt einen natürlichen Ringhomomorphismus $R \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Dieser ist injektiv, da man das Nullsein eines Elementes lokal testen kann, vergleiche Lemma Anhang 1.1. Zum Nachweis der Surjektivität sei $q \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ein globales Element. Dies bedeutet, dass es eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$$

und Elemente

$$q_i = \frac{a_i}{f_i^{k_i}},$$

die als Schnitte über

$$D(f_i) \cap D(f_j) = D(f_i f_j),$$

also als Elemente in $R_{f_i f_j}$ übereinstimmen. Nach Korollar 8.6 können wir annehmen, dass I endlich ist. Ferner können wir die k_i durch ihr Maximum k ersetzen (was natürlich die lokalen Zähler a_i auch ändert). Die Verträglichkeit $\frac{a_i}{f_i^k} = \frac{a_j}{f_j^k}$ bedeutet die Existenz von Gleichungen

$$(f_i f_j)^m a_i f_j^k = (f_i f_j)^m a_j f_i^k$$

in R, wobei wir m als ein Maximum gewählt haben. Nach Proposition 8.4 ((2), (4)) erzeugen die f_i, $i \in I$, das Einheitsideal. Dies gilt dann auch für die f_i^{m+k}, $i \in I$, d.h. es gibt $g_i \in R$ mit

$$1 = \sum_{i \in I} g_i f_i^{m+k}.$$

Wir setzen

$$a := \sum_{i \in I} g_i a_i f_i^m.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} a f_j^{m+k} &= \left(\sum_{i \in I} g_i a_i f_i^m \right) f_j^{m+k} \\ &= \sum_{i \in I} g_i (f_i f_j)^m a_i f_j^k \\ &= \sum_{i \in I} g_i (f_i f_j)^m a_j f_i^k \\ &= a_j f_j^m \left(\sum_{i \in I} g_i f_i^{m+k} \right) \\ &= a_j f_j^m . \end{aligned}$$

Dies bedeutet wiederum $a = \frac{a_j}{f_j^k} = q_j$ in R_{f_j}, d.h. der Schnitt wird von einem Ringelement repräsentiert.

Wir betrachten nun die Situation auf $D(f)$. Diese entspricht aber der behandelten Situation, wenn man R_f als neuen Ring ansetzt. □

LEMMA 9.13. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ das affine Schema zu einem kommutativen Ring R und es sei $f \in R$. Dann ist $D(f) = \operatorname{Spec}(R_f)$.*

Beweis. Nach Proposition 8.11 (3) induziert der kanonische Ringhomomorphismus $R \to R_f$ eine offene Einbettung

$$\operatorname{Spek}(R_f) \longrightarrow D(f) \subseteq \operatorname{Spek}(R).$$

Nach Satz 9.12 ist links und rechts der Schnittring gleich R_f. Entsprechendes gilt für jede offene Teilmenge $D(g) \subseteq D(f)$, und dadurch ist die Strukturgarbe links und rechts festgelegt, so dass ein Isomorphismus von beringten Räumen vorliegt. □

Abbildungsverzeichnis