Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 13

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 13.1. Bestimme für einen Körper K die idempotenten Elemente, also Elemente $e \in K$ mit $e^2 = e$. Bestimme die linearen Projektionen $\varphi\colon K \to K$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 13.2. Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Projektion auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Zeige, dass φ bezüglich einer geeigneten Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 13.3.*

Wir betrachten die Basis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$ und es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Projektion von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser Basis. Bestimme die Matrix zu φ bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 13.4. Es sei $L \subseteq \mathbb{R}^3$ der Lösungsraum zur linearen Gleichung

$$3x + 4y + 6z = 0$$

und $W = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Zeige

$$\mathbb{R}^3 = L \oplus W$$

und beschreibe die Projektionen auf L und auf W bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 13.5. Zeige, dass die Summe von zwei linearen Projektionen

$$\varphi, \psi \colon V \longrightarrow V$$

im Allgemeinen keine Projektion ist.

Aufgabe 13.6. Vereinfache den Beweis zu Lemma 13.5 mit Hilfe der Dimensionsformel.

Aufgabe 13.7. Bestimme die Spur zu einer linearen Projektion

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

Aufgabe 13.8. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass der Homomorphismenraum

$$\operatorname{Hom}_K(V, W)$$

ein Vektorraum ist.

Aufgabe 13.9. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass der Homomorphismenraum

$$\operatorname{Hom}_K(V, W)$$

ein Untervektorraum des Abbildungsraumes $\operatorname{Abb}(V, W)$ ist.

Aufgabe 13.10. Es sei W ein K-Vektorraum über dem Körper K. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(K, W) \longrightarrow W, \, \varphi \longmapsto \varphi(1),$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Aufgabe 13.11.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ der K-Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W und es sei $v \in V$ ein fixierter Vektor. Zeige, dass die Abbildung

$$F \colon \operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow W, \, \varphi \longmapsto F(\varphi) := \varphi(v),$$

K-linear ist.

Aufgabe 13.12.*

Es sei K ein Körper, V und W seien endlichdimensionale K-Vektorräume und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung.

a) Zeige: φ ist genau dann surjektiv, wenn es eine lineare Abbildung

$$\psi\colon W \longrightarrow V$$

mit

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W$$

gibt.

b) Es sei nun φ surjektiv, es sei

$$S = \{\psi : W \to V \mid \psi \text{ linear}, \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W\}$$

und es sei $\psi_0 \in S$ fixiert. Definiere eine Bijektion zwischen $\mathrm{Hom}_K(W, \mathrm{kern}\,\varphi)$ und S, unter der 0 auf ψ_0 abgebildet wird.

Aufgabe 13.13. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass die ersten $n^2 + 1$ Potenzen[1]

$$M^i, i = 0, \ldots, n^2,$$

linear abhängig in $\mathrm{Mat}_n(K)$ sind.

Aufgabe 13.14. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon U \longrightarrow V$$

mit einem weiteren Vektorraum U induziert eine lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(U, W),\ f \longmapsto f \circ \varphi.$$

(2) Eine lineare Abbildung

$$\psi\colon W \longrightarrow T$$

mit einem weiteren Vektorraum T induziert eine lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, T),\ f \longmapsto \psi \circ f.$$

Aufgabe 13.15. Formuliere Lemma 13.8 mit Matrizen bezüglich gegebener Basen.

[1] Wir werden später eine deutlich stärkere Aussage kennenlernen.

Aufgabe 13.16. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass

$$\mathrm{End}\,(V) = \{\varphi : V \to V \,|\, \varphi \text{ linear}\}$$

mit der Addition und der Hintereinanderschaltung von Abbildungen ein Ring ist.

Den Ring der vorstehenden Aufgabe nennt man *Endomorphismenring* zu V.

Aufgabe 13.17. Es sei V ein K-Vektorraum und

$$g\colon V \longrightarrow V$$

ein Isomorphismus. Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi_g\colon \mathrm{End}\,(V) \longrightarrow \mathrm{End}\,(V)\,,\; f \longmapsto gfg^{-1},$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist und dass darüber hinaus

$$\Psi_g(f_1 \circ f_2) \,=\, \Psi_g(f_1) \circ \Psi(f_2)$$

und

$$\Psi_g(\mathrm{Id}_V) \,=\, \mathrm{Id}_V$$

gilt.

Aufgabe 13.18. Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Bestimme die Dimension des Raumes der Endomorphismen

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

mit

$$\varphi(v_i) \,\in\, Kv_i$$

für alle i.

Aufgabe 13.19. Es sei V ein K-Vektorraum und es seien

$$\varphi, \psi\colon V \longrightarrow V$$

Automorphismen derart, dass für jeden Untervektorraum $U \subseteq V$ die Gleichheit $\varphi(U) \,=\, \psi(U)$ gilt. Zeige, dass $\varphi \,=\, a\psi$ mit einem $a \in K$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.20. (4 Punkte)

Wir betrachten die Basis

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$ und es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Projektion von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser Basis. Bestimme die Matrix zu φ bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 13.21. (5 (1+4) Punkte)

a) Zeige, dass die 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1 \mp \sqrt{1-4bc}}{2} \end{pmatrix}$$

Projektionen beschreiben. Dabei sind $b, c \in K$ derart, dass eine Quadratwurzel $\sqrt{1-4bc}$ existiert.

b) Bestimme sämtliche 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

die eine Projektion beschreiben.

Aufgabe 13.22. (2 Punkte)

Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$. Zeige

$$\operatorname{rang}(\varphi_1 + \cdots + \varphi_k) \leq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rang} \varphi_i.$$

Aufgabe 13.23. (3 Punkte)

Es seien G_1, G_2 und H_1, H_2 jeweils verschiedene Geraden im K^3. Welche Dimension hat der Raum

$$W = \left\{ \varphi \in \operatorname{Hom}_K\left(K^3, K^3\right) \mid \varphi(G_1) \subseteq H_1 \text{ und } \varphi(G_2) \subseteq H_2 \right\}?$$