45-479

東京普通教育學會

平面三角法講義　全

奥平浪太郎著述

帝國圖書館藏

三角法講義錄目次

(目　次　終)

平面三角法

第壹編

測角法

1.　平面三角法 (Plane Trigonometry) ハ三角函數(此レハ 5 章ニ於テ詳述スル)ト稱スルモノノ性質ト，ソレカラ其性質ヲ平面圖形ニ應用スルコトヲ論ズル學科デアル.

〔注意〕 平面三角法ヲ學ブニハ多少代數學及ビ平面幾何學ヲ知ルコトヲ要スル,故ニ初學者ハ先ヅ代數學及ビ平面幾何學ノ初歩ヲ習讀シテカラ平面三角法ヲ研究スルガヨロシイ.ノデアル

又 * ヲ附シテアル處ハ、平面幾何學ヲ 壹通リ理會スル迄デハ省イテ置ク方ガヨロシイ.ノデアル

2.　測角法 ソコデ 幾何學ニ於テハ直角ヲ單位トシテ角ヲ測タリ(2 直角, $\frac{2}{3}$直角等トイフガ如シ), ケレ𪜈直角ヨリ小ナル角ヲ測ルノニハ不便デアル,

ソコデ實用ノ計算ニ於テハ,直角ヨリ小サキ角ヲ單位トシテ角ヲ測ルノデアル,即チ

直角ヲ 90 等分シ其壹部分ヲ 1 度 (Degree) トナシ,

ソコデ

又1度ヲ 60 等分シ,其壹部分ヲ 1分 (Minute) ト稱シ,

又1分ヲ 60 等分シ,其壹部分ヲ 1秒 (Second) ト稱シ,

此ノ 1度, 1分, 1秒ヲ單位トシテ角ヲ測ル,

ソレデ此ノ測リ方ヲ **六十分法** (Sexagesimal method) ト稱スル.

3. 符號 度ヲ示スニハ「°」ナル符號ヲ用ヒ,分ヲ示スニハ「′」ナル符號ヲ用ヒ,秒ヲ示スニハ「″」ナル符號ヲ用ユ,但シ此ノ符號ハ度數,分數等ヲ示ス數ノ右ノ肩ニ小サク書クノデアル.

例ヘバ 28 度, 16 分, 36 秒ハ $28^{\circ}, 16', 36''$ ニテ示ス.

〔注意〕 六十分法ノ外ニ「百分法」「弧度法」ト稱スル測角法ガアルガ,此レハ後ニ至ツテ話スコトスル.

4. 單位ヲ變更スルコ

直角ヲ單位トシテ或ル角ヲ測リタル値ヲ知リテ,之レヲ度,分,秒ニ改メタリ,又ハ六十分法ニテ測リタル値即チ何度,何分,何秒トイフコヲ知リテ直角ヲ單位トシテ測リタル値ヲ求メタリスルコガ出來ル,

次ニ例題ヲ掲ゲテ其解法ヲ示サン.

(演算)

1·253
×90
112°·77
×60
46′·2
60
12″

答＝112°46′12″

例 1. 1·253 直角ヲ度,分,秒ニテ示セ,

〔解〕 1 直角ハ 90° デアル, 故ニ 1·253 ニ 90° ヲ乘ズレバ度トナリテ即チ 112°·77 ヲ得ルノデアル,

ソコデ 1 度ハ 60′ デアルカラ上ノ 112°·77 ノ小數部即チ 0·77 度ニ 60 ヲ乘ズレバ分トナリ即 46′·2 ヲ得ル,

又 1 分ハ 60 秒デアルカラ上ノ 46′.2 ノ小數部即チ 0·2 分ニ 60 ヲ乘ズレバ秒トナリテ即チ 12″ ヲ得.

(例 2.) 直角ノ $\frac{7}{80}$ ヲ度,分,秒ニテ示セ.

(演算)

$\frac{7}{80}\times 90 = \mathbf{7^{\circ}\frac{7}{8}}$

$\frac{7}{8}\times 60 = \mathbf{52'\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}\times 60 = \mathbf{30''}$

答 $7^{\circ}\ 52'\ 30''$

〔解〕 1 直角ハ 90° デアルカラ $\frac{7}{80}$ ニ 90 ヲ乘ズレバ度トナリテ $7\frac{7}{8}$ 度ヲ得.

ソコテ 1 度ハ 60′ デアルカラ上ノ度ノ分數即チ $\frac{7}{8}$ ニ 60 ヲ乘ズレバ分トナリテ $52\frac{1}{2}$ 分ヲ得,

又 1 分ハ 60 秒デアルカラ上ノ $\frac{1}{2}$ 分ニ 60 ヲ乘ズレバ秒トナリテ 30″ ヲ得.

(例 3.) $31^{\circ}\ 8'\ 24''$ ヲ直角ノ小數ニテ示セ.

```
60|24″
60|  ·4′
90|31·14°
    ·346 直角
```

答 ·346 直角

〔解〕 1 分ハ 60 秒デアルカラ 24″ ヲ 60 ニテ除スレバ分トナリテ即チ 0·4 分ヲ得,之レニ本題ニ於テ與ヘラレタル 8′ ヲ加ヘテ 8·4 分ヲ得.

ソコデ 60 分ハ 1 度デアルカラ上ノ 8·4 分ヲ 60 ニテ除スレバ度トナリテ即チ 0·14° ヲ得, 之レニ本題ニ於テ與ヘラレタル 31° ヲ加ヘテ 31°·14 ヲ得.

又 90° ハ 1 直角デアルカラ上ノ 31°·14 ヲ 90 ニテ除スレバ直角トナリテ即チ 0·346 直角ヲ得,之レヲ答トス.

例　　題

〔注意〕 次ノ諸題ハ學生諸子ノ練習ノ爲メニ掲ゲタモノデアル,ソレデ特更ニ解式ヲ示サズシテ唯答ノミヲ示スヿニ止メテ置ク.諸子ハ他人ノ力ニ賴ラズシテ自身ニ計算シテ見ラレヨ,前ノ例題ノ解ガ判ツタラ出來ナクテハナラナイノデアル,然シドーシテモ出來ナカツタラ質問スルガヨロシイ.

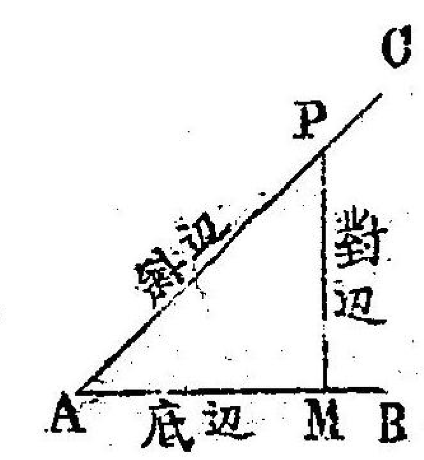
1. $73^{\circ}\ 6'\ 5''$ ヲ秒數ニ示セ　　答 $263165''$
2. $123456''$ ヲ度,分,秒ニテ示セ　　答 $34^{\circ}\ 17'\ 36''$
3. 直角ノ $\frac{5}{12}$ ヲ度,分,秒ニテ示セ　　答 $37^{\circ}\ 30'$
4. $15^{\circ}\ 28'\ 48''$ ヲ直角ノ小數ニ化セヨ　　答 ·172 直角
5. 0·4567 直角ヲ度,分,秒ニ化セヨ　　答 $41^{\circ}\ 6'\ 10{\cdot}8''$

第　貳　編

銳角之三角函數

5. 三角函數 (Trigonometrical Function)

任意ノ銳角 BAC ノ壹邊 AC ノ上ニ壹點 P ヲ取リ, P ヨリ AB 邊ニ垂線 PM ヲ下ス.



ソコデ三角形 APM ニ於テ

AP ヲ斜邊, AM ヲ底邊, PM ヲ對邊ト名ツケ,此三ツノ長サノ中, 二個ツヽ組ミ合セテ比ヲ作リ,此比ヲ次ノ如ク名附クル

$\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$ ヲ A角ノ正弦(サイン)(sine) ト稱ヘ, 之レヲ sinA ト記ス,

$\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$ ヲ A角ノ餘弦(コサイン)(cosine) ト稱ヘ, 之レヲ cosA ト記ス,

$\frac{\text{對邊}}{\text{底邊}}$ ヲ A角ノ正切(タンゼント)(tangent) ト稱ヘ, 之レヲ tanA ト記ス,

$\frac{\text{底邊}}{\text{對邊}}$ ヲ A角ノ餘切(コタンゼント)(cotangent) ト稱ヘ, 之レヲ cotA ト記ス,

$\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$ ヲ A角ノ正割(セカント)(secant) ト稱ヘ, 之レヲ secA ト記ス,

$\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$ ヲ A角ノ餘割(コセカント)(cosecant) ト稱ヘ, 之レヲ cosecA ト記ス,

上ノ六個ノ比ヲ總稱シテA角ノ **三角函數** ト稱ヘル.

但シ「三角函數」ヲ「三角比」或ハ「圓函數」トイツテモヨロシイ.

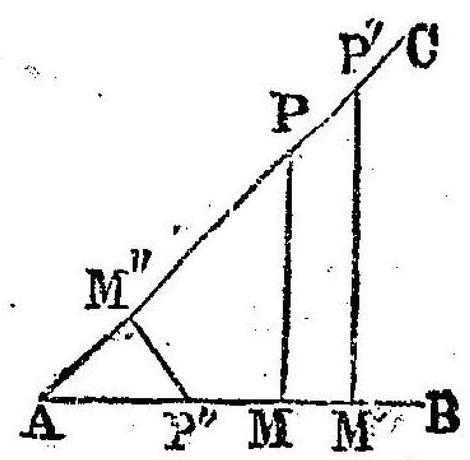
〔注意壹〕 上ノ定義ハ平面三角法ノ基礎トナルベキモノデアツテ極メテ必要デアルカラ充分ニ暗記スルヿヲ要スル.

〔注意貳〕* 前章ニ於テA角ノ三角函數ヲ定ムル爲メニ AC ノ上ニ P 點ヲ取リシガ, 此ノ P 點ハ AB 又ハ AC 上ノ何レノ場所ニ取ツテモヨロシイノデアル, ツマリ P點ノ取リ方ニヨリテ三角函數ノ値ガ變ルトイフ樣ナコトハナイノデアル.

例ヘバ AC 上ニ P, P′ ヲ取リ, AB 上ニ P″ ヲ取リ P, P′ ヨリ AB ニ垂線 PM, P′M′ ヲ引キ, 又 P″ ヨリ AC ニ垂線 P″M″ ヲ引ク

然ルトキハ △AP″M″ ニ就テ考フレバ

P″M″ ハ對邊, AP″ ハ斜邊, AM″ ハ底邊デアル



故ニ △AP″M″ ヨリ $\sin A=\frac{P''M''}{AP''}$

又同樣ニ △AP′M′ ヨリ $\sin A=\frac{P'M'}{AP'}$

又 △APM ヨリ $\sin A=\frac{PM}{AP}$

然ルニ △AP″M″ △APM ニ於テ, A 角ハ共通デアル, 又 ∠M, ∠M″ ハ共ニ直角デアルカラ ∠M=∠M″ デアル,

故ニ平面幾何ノ定理ニヨリテ

$$\triangle AP''M''\propto\triangle APM \quad \therefore \quad \frac{P''M''}{AP''}=\frac{PM}{AP}$$

又同樣ノ理ニヨリ

$$\triangle AP'M'\propto\triangle APM \quad \therefore \quad \frac{P'M'}{AP'}=\frac{PM}{AP}$$

$$\therefore \quad \frac{P''M''}{AP''}=\frac{P'M'}{AP'}=\frac{PM}{AP}$$

故ニ△AP″M″ヨリ得タ sinA ノ値モ, △AP′M′ ヨリ得タ sinA ノ値

モ, △APM ヨリ得タ sinA ノ値モ等シイノデアル.

コーイフ譯デアルカラ AB, AC 上ノ何處ヘPヲ取リテモ sinA ノ値ハ變ラナイノデアル.

又之レト同樣ニ, P ノ取リ方ニヨリテ cosA, tanA 等ノ値ガ變ラヌトイフヿガ判カル.

6. 方乘之記號

sinA ノ平方, 立方等ハ $(\sin A)^2$, $(\sin A)^3$ 等ト書クベキヲ畧シテ $\sin^2 A$, $\sin^3 A$ 等ト記ス

又他ノ函數ノ方乘モ上ノ記法ヲ用ユル.

例ヘバ $(\tan A)^4$ ハ $\tan^4 A$ ト書キ, $(\sec A)^3$ ハ $\sec^3 A$ ト書ク.

〔注意〕 sinA ヲ sin ト A トノ乘積ト考ヘ, 此考ヘヨリシテ $\sin A+\sin B$ ヲ $\sin(A+B)$ トシタリ, 或ハ $\sin^2 A$ ヲ $\sin^2$ ト A トノ乘積ト思フ等ノヿハ初學者ニ於テ兎角有リ勝チノヿデアルガ之レハ大ナル誤リデアル, 抑モ sinA ハ「A角ノ正弦」トイフ意味デアツテ$\frac{對邊}{斜線}$ヲ表ハス符號デアルカラ sin ト A トヲ分離スルヿハ決シテ出來ナイノデアル,

故ニ $\sin A+\sin B$ ヲ $\sin(A+B)$ ナドトスルヿハ出來ナイ.

又 $\sin^2 A$ ハ元ト $(\sin A)^2$ ノ代リニ用ユルモノデアルカラ $\sin^2 A$ ヲ $\sin^2$ ト A トノ乘積ト見ルヿハ出來ナイノデアル.

又 cosA, tanA 等ニ就テモ之レト同樣デアル.

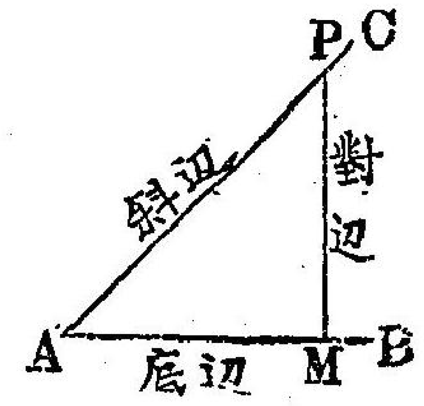
7. 三角函數相互之關係

〔第壹〕 $\sin A\times\operatorname{cosec}A=1$ (1)

$\cos A\times\sec A=1$ (2)

$\tan A\times\cot A=1$ (3)

〔證〕 A角ノ壹邊上ニ壹點Pヲ取リPヨリ他ノ壹邊ヘ垂線PMヲ下スキハ



$$\sin A=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\frac{PM}{AP},\qquad \operatorname{cosec}A=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}=\frac{AP}{PM}$$

$$\therefore\ \sin A\times\operatorname{cosec}A=\frac{PM}{AP}\times\frac{AP}{PM}=1$$ 〔(1)ノ證〕

又
$$\left.\begin{aligned}\cos A&=\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}=\frac{AM}{AP}\\ \sec A&=\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}=\frac{AP}{AM}\end{aligned}\right\}\ \therefore\ \cos A\times\sec A=\frac{AM}{AP}\times\frac{AP}{AM}=1$$

$$\left.\begin{aligned}\tan A&=\frac{\text{對邊}}{\text{底邊}}=\frac{PM}{AM}\\ \cot A&=\frac{\text{底邊}}{\text{對邊}}=\frac{AM}{PM}\end{aligned}\right\}\ \therefore\ \tan A\times\cot A=\frac{PM}{AM}\times\frac{AM}{PM}=1.$$

〔第貳〕 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ (4)

$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$ (5)

〔證〕 $\tan A=\frac{\text{對邊}}{\text{底邊}}=\frac{PM}{AM}$, 代數學ニヨレバ,比ノ兩項ヲ同シ數ニテ除シテモ,其比ノ値ハ變ハラヌモノデアル,故ニ上ノ比ノ兩項ヲ斜邊APニテ除スルキハ $\tan A=\dfrac{\frac{PM}{AP}}{\frac{AM}{AP}}=\frac{\sin A}{\cos A}$ ...〔(4)ノ證〕

同樣ニ $\cot A=\frac{\text{底邊}}{\text{對邊}}=\frac{AM}{PM}=\dfrac{\frac{AM}{AP}}{\frac{PM}{AP}}=\frac{\cos A}{\sin A}$ ...〔(5)ノ證〕

〔第三〕 $\sin^2A+\cos^2A=1$ (6)

$1+\tan^2A=\sec^2A$ (7)

$1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A$ (8)

〔證〕 $\sin^2A+\cos^2A=(\sin A)^2+(\cos A)^2=\left(\frac{PM}{AP}\right)^2+\left(\frac{AM}{AP}\right)^2$

$$=\frac{PM^2}{AP^2}+\frac{AM^2}{AP^2}=\frac{PM^2+AM^2}{AP^2},$$

然ルニ△APMニ於テ∠Mハ直角デアルカラ,平面幾何學ニヨリテ

$$PM^2+AM^2=AP^2$$

$$\therefore\ \sin^2A+\cos^2A=\frac{AP^2}{AP^2}=1\cdots\cdots\cdots$$ 〔(6)ノ證〕

又 $1+\tan^2A=1+(\tan A)^2=1+\left(\frac{PM}{AM}\right)^2=1+\frac{PM^2}{AM^2}$

$$=\frac{AM^2+PM^2}{AM^2}=\frac{AP^2}{AM^2}$$

$$=\left(\frac{AP}{AM}\right)^2=(\sec A)^2=\sec^2A\cdots\cdots\cdots$$ 〔(7)ノ證〕

又 $1+\cot^2A=1+\frac{AM^2}{PM^2}=\frac{PM^2+AM^2}{PM^2}$

$$=\frac{AP^2}{PM^2}=\operatorname{cosec}^2A\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$ 〔(8)ノ證〕

注意 上ノ(1)ヨリ(8)ニ至ル八ツノ關係ハ三角法ニ於ケル基礎ノ公式ニシテ實ニ必要ナルモノデアル,學生諸子ハ充分ニ此ノ八ツノ公式ヲ暗記シテ置クコトヲ要スル.

8. 前章ノ八ツノ公式ヲ用ヒテ三角函數ヲ含ムデ居ル式ヲ變化シタリ,又ハ貳式ノ恆等ナルコヲ證明スルコ等ハ必要ナル事柄デアル,ソレデ次ニ貳三ノ例題ヲ示ス,

第壹例. 次ノ式ヲ正弦(即チ サイン Sin テ示セ.

$\tan^2A—\operatorname{cosec}^2A+2\sin$

〔解〕 公式(1)ヨリ $\operatorname{cosec}A\times\sin A=1$ ..

又公式(4)ヨリ $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ デアル, 故ニ

$$\tan^2 A-\operatorname{cosec}^2 A+2\sin A\cos A=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}-\frac{1}{\sin^2 A}+2\sin A\cos A$$

然ルニ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$〔公式(6)〕ヨリ $\cos^2 A=1-\sin^2 A$ デアル

$$\therefore\ \tan^2 A-\operatorname{cosec}^2 A+2\sin A\cos A$$

$$=\frac{\sin^2 A}{1-\sin^2 A}-\frac{1}{\sin^2 A}+2\sin A\sqrt{1-\sin^2 A}$$

即チ $\sin A$ ノ項ノミニテ表ハスコトガ出來タ.

第貳例. 次ノ恆等式ヲ證セヨ,

$$\tan A+\cot A=\sec A\operatorname{cosec} A.$$

〔證〕 $\tan A+\cot A=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}$ 〔公式(4),(5)ヨリ〕.

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1}{\sin A\cos A}\quad \because〔公式(6)ヨリ\ \sin^2 A+\cos^2 A=1〕$$

$$=\frac{1}{\sin A}\times\frac{1}{\cos A}$$

$$=\operatorname{cosec} A\sec A.\quad \because〔公式(1)(2)ヨリ\ \frac{1}{\sin A}=\operatorname{cosec} A,\ \frac{1}{\cos A}=\sec A〕$$

第三例. 次ノ恆等式ヲ證セヨ

$$(1-\sec A+\tan A)(\sec A+\tan A+1)$$

$$=(1+\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A-1)$$

〔證〕 $(1-\sec A+\tan A)(\sec A+\tan A+1)$

$$=(1+\tan A-\sec A)(1+\tan A+\sec A)$$

$$=(1+\tan A)^2 [illegible] =1+2\tan A+\tan^2 A-\sec^2 A$$

$$=[illegible]-\sec^2 A$$

$$[illegible]-\sec^2 A\quad \because〔公式(7)ヨリ\ 1+\tan^2 A=\sec^2 A〕$$

$$[illegible]\tan A\cdots\cdots(1)$$

又 $(1+\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A-1)$

$$=\{\sec A+(1-\tan A)\}\{\sec A-(1-\tan A)\}$$

$$=\sec^2 A-(1-\tan A)^2$$

$$=\sec^2 A-(1-2\tan A+\tan^2 A)$$

$$=\sec^2 A-(1+\tan^2 A-2\tan A)$$

$$=\sec^2 A-(\sec^2 A-2\tan A)\quad \because〔公式(7)ヨリ\ 1+\tan^2 A=\sec^2 A〕$$

$$=2\tan A\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)(2)ヨリ所題ノ式ノ左邊モ,右邊モ共ニ $2\tan A$ トナツタ.故ニ

$$(1-\sec A+\tan A)(\sec A+\tan A+1)$$

$$=(1+\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A-1).$$

注意 二式ノ恆等ナルコトヲ證明スルニハ,第貳例ノ如ク左邊ヲ段々ニ變化シテ右邊ニ變シテモ,又ハ第三例ノ如ク,左邊ト右邊トヲ別々ニ或ル同シ式ニ變ジテモヨロシイノデアル, 證明ショートスル式ノ形狀ニヨリテ第二例ノ樣ニシタリ,又ハ第三例ノ樣ニシタリスルノデアル.ガ線習ノ爲メニハ成ルベク第二例ノ樣ニ左邊ヲ右邊ニ變形スル方ガヨロシイノデアル.

第一例題

次ノ諸題ニ於ケル恆等式ヲ證明セヨ

1. (a) $\sec A-\cos A=\tan A\sin A.$

(b) $\operatorname{cosec} A-\sin A=\cot A\cos A.$

〔證〕 (a) $\sec A-\cos A=\dfrac{1}{\cos A}-\cos A$ $\because$〔公式(2)ヨリ〕

$$=\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}=\frac{\sin^2 A}{\cos A}\quad \because〔公式(6)ヨリ\ 1-\cos^2 A=\sin^2 A〕$$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}\times\sin A=\tan A\sin A\ \because〔公式(4)ヨリ\ \frac{\sin A}{\cos A}=\tan A〕$$

(b) ノ解ハ (a) ノト同様デアル, 學生諸子練習ノ爲メ自身ニテ之レヲ證セヨ.

2. $\cos^2A-\sin^2B=\sin^2A-\cos^2B.$

〔證〕 本式ヲ見ルニ右邊ニハ $\cos^2A$. 及ビ $\sin^2B$ ハナイカラ, 公式(6) ニヨリテ左邊ノ $\cos^2A$ ヲ $\sin^2A$ ノ項ニテ表ハシ, $\sin^2B$ ヲ $\cos^2B$ ノ項ニテ表ハシ之レヲ簡短ニスレバヨロシイ, 即チ

$$\cos^2A-\sin^2B=1-\sin^2A-(1-\cos^2B)$$

$$=1-\sin^2A-1+\cos^2B=\cos^2B-\sin^2A$$

3. (a) $\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B=\cos^2B-\cos^2A.$

(b) $\cos^2A\cos^2B-\sin^2A\sin^2B=\cos^2B-\sin^2A.$

〔證〕 (a) 前題ト同ジ考ニテ, 左邊ノ $\sin^2A$ 及ビ $\sin^2B$ ヲ cos ノ項ニテ表ハシ之レヲ簡短ニスレバヨロシイ, 即チ

$$\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B=(1-\cos^2A)\cos^2B-\cos^2A(1-\cos^2B)\ \text{〔公式(6)〕}$$

$$=\cos^2B-\cos^2A\cos^2B-\cos^2A+\cos^2A\cos^2B$$

$$=\cos^2B-\cos^2A$$

(b) (a ト同ジ考ヘヲ以テ證スルヿヲ得ルカラ練習ノ爲メニ學生諸子自ラ之レヲ證明セヨ.

4. $(1+\tan A)(1+\cot A)=\dfrac{1+2\sin A\cos A}{\sin A\cos A}$

〔證〕 本題ハ右邊ハ sinA, cosA ノミデアッテ外ノ函數ヲ含ムデ居ラヌカラ左邊ノ tanA, cotA ヲ公式 (4) (5) ヨリ sinA ト cosA トデ表ハス, 即チ

$$(1+\tan A)(1+\cot A)=\left(1+\frac{\sin A}{\cos A}\right)\left(1+\frac{\cos A}{\sin A}\right)\qquad\text{〔公式(4) (5)〕}$$

$$=\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}\times\frac{\sin A+\cos A}{\sin A}$$

$$=\frac{(\sin A+\cos A)^2}{\sin A\cos A}=\frac{\sin^2A+2\sin A\cos A+\cos^2A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{1+2\sin A\cos A}{\sin A\cos A}\qquad\because\ \text{〔公式(6)ヨリ}\ \sin^2A+\cos^2A=1\text{〕}$$

5. $\sec^2A+\mathrm{cosec}^2A=\sec^2A\ \mathrm{cosec}^2A.$

〔證〕 本題モ, 公式(1) (2) ニヨリテ左邊ヲ sinA ト cosA トニテ表ハセバヨロシイ, 即チ

$$\sec^2A+\mathrm{cosec}^2A=\frac{1}{\cos^2A}+\frac{1}{\sin^2A}\qquad\text{〔公式 (1) (2) ヨリ〕}$$

$$=\frac{\sin^2A+\cos^2A}{\cos^2A\sin^2A}=\frac{1}{\cos^2A\sin^2A}\quad\because\ \text{〔公式(6)ヨリ}\ \sin^2A+\cos^2A=1\text{〕}$$

$$=\frac{1}{\cos^2A}\times\frac{1}{\sin^2A}=\sec^2A\ \mathrm{cosec}^2A\qquad\text{〔公式(1) (2)〕}$$

〔注意〕 公式(1) (2) (4) (5) ヨリ cosecA, secA, tanA, cotA ハ sinA cosA ニテ表ハスヿヲ得ルモノデアル, ソコデ或ル恒等式ヲ證明スルニハ其ノ式中ニ含マレテ居ル函數ヲ sin カ cos カニテ表ハセバ大概出來ルモノデアル.

6. $\dfrac{\sec A+\mathrm{cosec}A}{\sin A+\cos A}=\sec A.\ \mathrm{cosec}A.$

〔證〕 本題モ, 左邊ヲ公式(1) (2) ニヨリ sinA. cosA ニテ表ハセバヨロシイノデアル. 即チ

$$\text{左邊}=\frac{\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\sin A}}{\sin A+\cos A}=\frac{\dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}}{\sin A+\cos A}=\frac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A(\sin A+\cos A)}\text{(約シテ)}$$

$$=\frac{1}{\sin A\cos A}=\frac{1}{\sin A}\times\frac{1}{\cos A}=\mathrm{cosec}A\ \sec A.$$

7. $\dfrac{\cot A+\mathrm{cosec}A}{\sin A+\tan A}=\mathrm{cosec}A\ \cot A.$

本題モ亦公式(1) (4) (5) ニヨリテ cosecA tanA cotA ヲ sinA cosA ニテ表ハシ之レヲ簡短ニスレバヨロシイ. 學生自ラ之レヲ試ムベシ.

8. (*a*) $\sin^4 A-\cos^4 A=\sin^2 A-\cos^2 A$

(*b*) $\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin^2 A\cos^2 A.$

(*c*) $\sin^3 A+\cos^3 A=(\sin A+\cos A)(1-\sin A\cos A).$

(*d*) $\sin^3 A-\cos^3 A=(\sin A-\cos A)(1+\sin A\cos A)$

(*e*) $\sin^6 A+\cos^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$

〔證〕(*a*) $\sin^4 A-\cos^4 A=(\sin^2 A)^2-(\cos^2 A)^2$

此ノ右邊ヲ代數學ノ分括法公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ニヨリテ分括スルトキハ $(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sin^2 A-\cos^2 A)$ トナル，故ニ

$$\sin^4 A-\cos^4 A=(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sin^2 A-\cos^2 A)$$

$$=\sin^2 A-\cos^2 A.$$ ∵〔公式(6)ヨリ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$〕

(*b*) $\sin^4 A+\cos^4 A=\sin^4 A+2\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A-2\sin^2 A\cos^2 A$

$$=(\sin^2 A)^2+2\sin^2 A\cos^2 A+(\cos^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A$$

$$=(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A$$

〔$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ニヨル〕

$$=1-2\sin^2 A\cos^2 A.$$ 〔公式 6〕

(*c*) 代數ノ公式 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ニヨリテ分括スレバ

$$\sin^3 A+\cos^3 A=(\sin A+\cos A)(\sin^2 A-\sin A\cos A+\cos^2 A)$$

$$=(\sin A+\cos A)(\sin^2 A+\cos^2 A-\sin A\cos A)$$

$$=(\sin A+\cos A)(1-\sin A\cos A)$$ 〔公式 6〕

(*d*) 前題ト同様ニ證明シ得ラル．故ニ證ヲ畧ス．

(*e*) $\sin^6 A+\cos^6 A=(\sin^2 A)^3+(\cos^2 A)^3$

ソコデ之レヲ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ニヨリテ分括スルトキハ

$(\sin^2 A+\cos^2 A)\{(\sin^2 A)^2-\sin^2 A\cos^2 A+(\cos^2 A)^2\}$ トナルカラ，

$$\sin^6 A+\cos^6 A=(\sin^2 A+\cos^2 A)\{(\sin^2 A)^2-\sin^2 A\cos^2 A+(\cos^2 A)^2\}$$

然ルニ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 〔公式(6)〕

$$\therefore\ \sin^6 A+\cos^6 A=(\sin^2 A)^2-\sin^2 A\cos^2 A+(\cos^2 A)^2$$

$$=(\sin^2 A)^2+2\sin^2 A\cos^2 A+(\cos^2 A)^2-3\sin^2 A\cos^2 A$$

$$=\{\sin^2 A+\cos^2 A\}^2-3\sin^2 A\cos^2 A$$

〔$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ニヨル〕

$$=1-3\sin^2 A\cos^2 A$$

∵〔公式(6)ヨリ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$〕

9. $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2$

〔證〕$(\sin A+\cos A)^2=\sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A$

又 $(\sin A-\cos A)^2=\sin^2 A-2\sin A\cos A+\cos^2 A$

加フルトキハ

$$(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2\sin^2 A+2\cos^2 A$$

$$=2(\sin^2 A+\cos^2 A)=2$$ 〔公式(6)〕

10. $(\tan A-\sin A)^2+(1-\cos A)^2=(\sec A-1)^2.$

〔證〕$(\tan A-\sin A)^2=\tan^2 A-2\tan A\sin A+\sin^2 A$

又 $(1-\cos)^2=1-2\cos A+\cos^2 A$

加フレバ次ノ如シ；但シ右邊ノ項ヲ縱ニ貳個ツヽ加フベシ

$$(\tan A-\sin A)^2+(1-\cos A)^2=1+\tan^2 A-2(\tan A\sin A+\cos A)$$
$$+\sin^2 A+\cos^2 A$$

$$=\sec^2 A-2(\tan A\sin A+\cos A)+1$$

∵〔公式 (6) (7)〕

$$=\sec^2 A-2\left(\frac{\sin A}{\cos A}\times\sin A+\cos A\right)+1$$

$$=\sec^2 A-2\left(\frac{\sin^2 A}{\cos A}+\cos A\right)+1$$

$$=\sec^2A-2\times\frac{\sin^2A+\cos^2A}{\cos A}+1$$

$$=\sec^2A-2\times\frac{1}{\cos A}+1\quad\because〔公式(6)〕$$

$$=\sec^2A-2\sec A+1\quad\because〔公式(2)〕$$

$$=(\sec A-1)^2.$$

11. (*a*) $(1+\tan A)^2+(1+\cot A)^2=(\sec A+\operatorname{cosec}A)^2.$

(*b*) $(1-\tan A)^2+(1-\cot)^2=(\sec A-\operatorname{cosec}A)^2.$

〔證〕 (*a*) $(1+\tan A)^2=1+2\tan A+\tan^2A$

又 $(1+\cot A)^2=1+2\cot A+\cot^2A$

加フレバ次ノ如シ

$$(1+\tan A)^2+(1+\cot A)^2=1+\tan^2A+2(\tan A+\cot A)+1+\cot^2A$$

$$=\sec^2A+2(\tan A+\cot A)+\operatorname{cosec}^2A$$

$\because$ 〔公式 (7) (8)〕

$$=\sec^2A+2\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)+\operatorname{cosec}^2A$$

$$=\sec^2A+2\times\frac{\sin^2A+\cos^2A}{\cos A\sin A}+\operatorname{cosec}^2A$$

$$=\sec^2A+2\times\frac{1}{\cos A\sin A}+\operatorname{cosec}^2A$$

〔公式 (6)〕

$$=\sec^2A+2\times\frac{1}{\cos A}\times\frac{1}{\sin A}+\operatorname{cosec}^2A$$

$$=\sec^2A+2\sec A\operatorname{cosec}A+\operatorname{cosec}^2A$$

〔公式 (1) (2)〕

$$=(\sec A+\operatorname{cosec}A)^2.$$

(*b*) ノ證ハ(*a*)ト同様ナリ、學生諸子ハ(*a*)ノ解ニ倣ツテ之レヲ證明スベシ.

12. $(\sec A+\operatorname{cosec}A)^2-2\sec A\operatorname{cosec}A=(\tan A+\cot A)^2$

〔證〕 $(\sec A+\operatorname{cosec}A)^2-2\sec A\operatorname{cosec}A$

$$=\sec^2A+2\sec A\operatorname{cosec}A+\operatorname{cosec}^2A-2\sec A\operatorname{cosec}A$$

$$=\sec^2A+\operatorname{cosec}^2A$$

$$=1+\tan^2A+1+\cot^2A\quad〔公式(7)〕$$

$$=\tan^2A+2+\cot^2A=\tan^2A+2\times1+\cot^2A$$

$$=\tan^2A+2\tan A\cot A+\cot^2A\quad〔公式(3)〕$$

$$=(\tan A+\cot A)^2$$

13. $\sec^2A+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A+\tan^2A$

〔證〕 $\sec^2A+\cot^2A=1+\tan^2A+\cot^2A$ 〔公式(7)〕

$$=\tan^2A+1+\cot^2A$$

$$=\tan^2A+\operatorname{cosec}^2A\quad〔公式(8)〕$$

或ハ, 公式 (2), (5) ニヨリ左邊ヲ $\sin A$, $\cos A$ ニテ表ハシテ之レヲ段々ニ變化シテ行ツテモ出來ル, 學生諸子宜シク之レヲ試ムベシ.

14. $\dfrac{1+2\tan^2A}{2+\tan^2A}=\dfrac{1+\sin^2A}{2-\sin^2A}$

〔證〕 $\dfrac{1+2\tan^2A}{2+\tan^2A}=\dfrac{2+2\tan^2A-1}{1+\tan^2A+1}=\dfrac{2(1+\tan^2A)-1}{(1+\tan^2A)+1}$

$$=\frac{2\sec^2A-1}{\sec^2A+1}\quad〔公式(7)〕$$

$$=\frac{\dfrac{2}{\cos^2A}-1}{\dfrac{1}{\cos^2A}+1}$$ (分母子ノ双方ニ $\cos^2A$ ヲ乘シテ)

$$=\frac{2-\cos^2A}{1+\cos^2A}=\frac{2-(1-\sin^2A)}{1+(1-\sin^2A)}\quad〔公式(6)〕$$

$$=\frac{1+\sin^2A}{2-\sin^2A}$$

15. $(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}$

〔證〕 $(\tan A+\sec A)^2=\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos A}\right)^2$ 〔公式(4) (2)〕

$$=\left(\frac{1+\sin A}{\cos A}\right)^2=\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}=\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}$$

$$=\frac{(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)(1-\sin A)}=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}$$

16. $\sec^4 A+\tan^4 A=1+2\sec^2 A\tan^2 A$

〔證〕 $\sec^4 A+\tan^4 A=\sec^4 A-2\sec^2 A\tan^2 A+\tan^4 A+2\sec^2 A\tan^2 A$

$$=(\sec^2 A-\tan^2 A)^2+2\sec^2 A\tan^2 A$$

$$=(1+\tan^2 A-\tan^2 A)^2+2\sec^2 A\tan^2 A \quad \text{〔公式(7)〕}$$

$$=1+2\sec^2 A\tan^2 A.$$

17. $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\sec A+\operatorname{cosec} A$

〔證〕 $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)$

$$=\sin A\left(1+\frac{\sin A}{\cos A}\right)+\cos A\left(1+\frac{\cos A}{\sin A}\right) \quad \text{〔公式(4) (5)〕}$$

$$=\sin A\times\frac{\cos A+\sin A}{\cos A}+\cos A\times\frac{\sin A+\cos A}{\sin A}$$

$$=(\sin A+\cos A)\left\{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right\}$$

$$=(\sin A+\cos A)\times\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

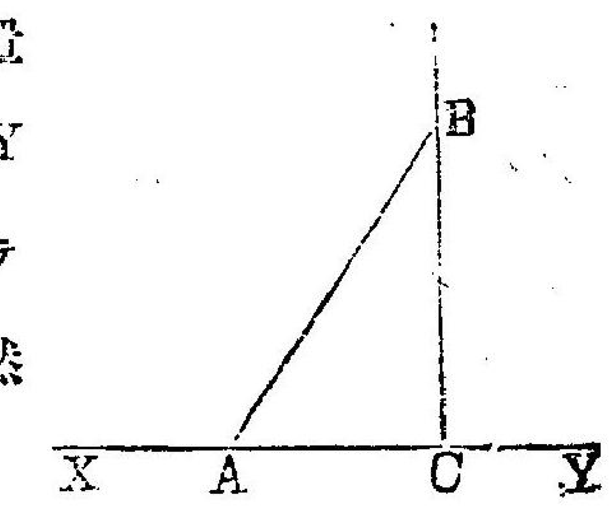
$$=(\sin A+\cos A)\times\frac{1}{\sin A\cos A} \quad \text{〔公式(6)〕}$$

$$=\frac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin A}=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta \quad \text{〔公式(1) (2)〕}$$

18. 次ノ條件ニ適フベキA角ヲ作圖セヨ

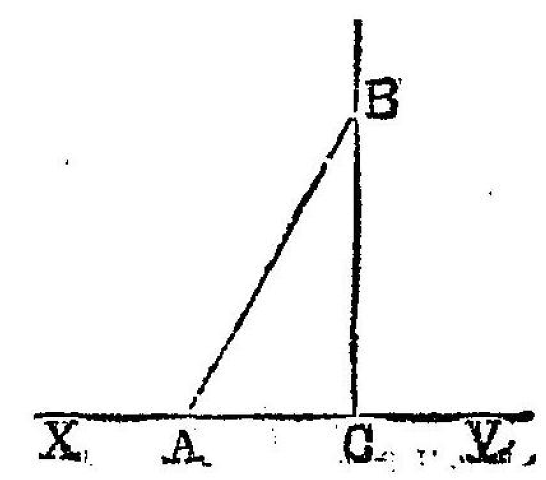
(i) $\tan A=2$, (ii) $\cos A=\sin A\times\dfrac{2}{3}$ (iii) $\cos A=\cot A\times\dfrac{3}{5}$.

〔解〕 (i) (作圖)無限直線XYヲ置キ其ノ上ニ貳點A,Cヲ取リ,Cニ於テXYニ垂線CBヲ作リ,CBノ上ニBヲ取リテBC=2ACナラシメ,直線BAヲ引ク,然ルトキハ∠Aハ所求ノ角デアル.



〔證〕 $\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{2AC}{AC}$(作圖ニヨリ)$=2$ ナレバナリ.

(ii) (作圖) 無限直線XYヲ置キ其上ニ任意ノ壹點Cヲ取リ,Cニ於テXYニ垂線CBヲ作リ,CB上ニ任意ノ點Bヲ取ル,ソコデXYノ上ニ壹點Aヲ取リ$AC=\dfrac{2}{3}BC$ナラシメ直線BAヲ引ク,

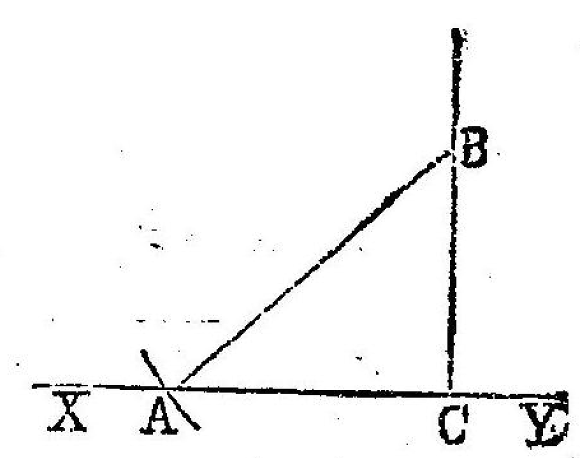


然ルトキハ∠Aハ求ムル所ノモノデアル.

〔證〕 $\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\frac{2}{3}BC}{AB}$ (作圖)$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{2}{3}\sin A$

故ニ∠Aハ求ムル所ノ角デアル

(iii) (作圖) 無限直線XY上ニ任意ノ點Cヲ取リ,CヨリXYニ垂線ヲ引キ,此垂線ノ上ニ任意ノ點Bヲ取ル,



ソコデBヲ中心トシ$\dfrac{5}{3}BC$ヲ半徑トシテ弧ヲ書キXYトノ交點ヲAトシ,直線BAヲ引ク, 然ルトキハ∠Aハ求ムル所ノ角デアル

(證) $\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AC}{\frac{5}{3}BC}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{5}\cot A$ ナレバナリ

9. 壹角ノ圓函數ノ壹個ヲ知リテ他ノ圓函數ヲ求ムル法.

次ノ如キ六個ノ場合ガアル. 但シ角ヲ A トス

〔第壹〕 正弦(sine)ノ値ヲ知リテ他ノ函數ヲ求ムル場合.

$\sin A = a$ トス

$\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A}$〔公式(6)〕$= \sqrt{1-a^2}$

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$〔公式(4)〕$= \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

$\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$〔公式(5)〕$= \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

$\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$〔公式(2)〕$= \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

$\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$〔公式(1)〕$= \dfrac{1}{a}$

(注意) 公式(4)(5)(1)(2)ニヨリ tanA, cotA, secA, cosecA ハ sinA, cosA ニテ表ハサルルカラ, sinA ト cosA トノ値ガ判ツタラ其他ノ圓函數ハ從ツテ判ツテ來ルノデアル.

〔第貳〕 餘弦(cosine)ノ値ヲ知リテ他ノ圓函數ノ値ヲ求ムルトキ.

$\cos A = a$ トス

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$〔公式(6)〕$= \sqrt{1-a^2}$

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$〔公式(4)〕$= \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

$\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$〔公式(5)〕$= \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

$\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$〔公式(2)〕$= \dfrac{1}{a}$

$\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$〔公式(1)〕$= \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

〔第三〕 正切(tan)ノ値ヲ知リテ他ノ圓函數ノ値ヲ求ムルトキ.

$\tan A = a$ トス

$\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$〔公式(3)〕$= \dfrac{1}{a}$

$\sec A = \sqrt{1+\tan^2 A}$〔公式(7)〕$= \sqrt{1+a^2}$

$\operatorname{cosec} A = \sqrt{1+\cot^2 A}$〔公式(8)〕$= \sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2+1}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$

$\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$〔公式(2)〕$= \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$〔公式(6)〕$= \sqrt{1-\dfrac{1}{1+a^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{1+a^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

〔第四〕 餘切(cot)ノ値ヲ知リテ他ノ圓函數ノ値ヲ求ムルトキ.

$\cot A = a$ トス

$\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$〔公式(3)〕$= \dfrac{1}{a}$

$\operatorname{cosec} A = \sqrt{1+\cot^2 A}$〔公式(8)〕$= \sqrt{1+a^2}$

$\sec A = \sqrt{1+\tan^2 A}$〔公式(7)〕$= \sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2+1}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$

$\sin A = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A}$〔公式(1)〕$= \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

$\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$〔公式(2)〕$= 1 \div \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

〔第五〕 正割(sec)ノ値ヲ知リテ他ノ圓函數ノ値ヲ求ムルトキ.

$\sec A = a$ トス

$\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$〔公式(2)〕$= \dfrac{1}{a}$

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$〔公式(6)〕$= \sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{a^2-1}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$

$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$〔公式(4)〕$= \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a} \div \dfrac{1}{a} = \sqrt{a^2-1}.$

$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$〔公式(5)〕$=\frac{1}{a}\div\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$〔公式(1)〕$=1\div\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$

〔第六〕 餘割(coesc)ノ値ヲ知リテ他ノ圓函數ノ値ヲ求ムルヿ.

$\operatorname{cosec} A=a$ トス

$\sin A=\frac{1}{\operatorname{cosec} A}$〔公式(1)〕$=\frac{1}{a}$

$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$〔公式(6)〕$=\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$〔公式(4)〕$=\frac{1}{a}\div\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$〔公式(5)〕$=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\div\frac{1}{a}=\sqrt{a^2-1}$

$\sec A=\frac{1}{\cos A}$〔公式(2)〕$=1\div\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$

第二例題

1. $\cos A=\frac{12}{13}$ ヲ知リテ $\tan A$ 及ビ $\operatorname{cosec} A$ ノ値ヲ求ム

〔解〕 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$〔公式(6)〕$=\sqrt{1-\frac{12^2}{13^2}}=\sqrt{\frac{13^2-12^2}{13^2}}$

$=\sqrt{\frac{169-144}{13^2}}=\sqrt{\frac{25}{13^2}}=\frac{5}{13}$

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$〔公式(4)〕$=\frac{5}{13}\div\frac{12}{13}=\frac{5}{12}$ …答

$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$〔公式(1)〕$=1\div\frac{5}{13}=\frac{13}{5}$ …答

2. $\tan A=\frac{3}{4}$ ヲ知リテ $\cos A$, $\operatorname{cosec} A$ ヲ求ム

〔解〕 $\sec A=\sqrt{1+\tan^2 A}$〔公式(7)〕$=\sqrt{1+\frac{3^2}{4^2}}=\sqrt{\frac{4^2+3^2}{4^2}}$

$=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

$\cos A=\frac{1}{\sec A}$〔公式(2)〕$=1\div\frac{5}{4}=\frac{4}{5}$ …答

又 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$〔公式(6)〕$=\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}=\sqrt{\frac{25-16}{25}}$

$=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$〔公式(1)〕$=1\div\frac{3}{5}=\frac{5}{3}$ …答

3. $\sec A=2$ ヲ知リテ $\cot A$, $\operatorname{cosec} A$ ヲ求ム

〔解〕 $\cos A=\frac{1}{\sec A}$〔公式(2)〕$=\frac{1}{2}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$〔公式(6)〕$=\sqrt{1-\frac{1}{2^2}}=\sqrt{\frac{2^2-1}{2^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$〔公式(5)〕$=\frac{1}{2}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ …答

$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$〔公式(1)〕$=1\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ …答

4. $\operatorname{cosec} A=\frac{p^2+q^2}{2pq}$ ヲ知リテ $\sec A$ ヲ求ム

〔解〕 $\sin A=\frac{1}{\operatorname{cosec} A}$〔公式(1)〕$=1\div\frac{p^2+q^2}{2pq}=\frac{2pq}{p^2+q^2}$

$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$〔公式(6)〕$=\sqrt{1-\left(\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)^2}$

$$=\sqrt{1-\frac{4p^2q^2}{(p^2+q^2)^2}}=\sqrt{\frac{(p^2+q^2)^2-4p^2q^2}{(p^2+q^2)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{p^4+2p^2q^2+q^4-4p^2q^2}}{p^2+q^2}=\frac{\sqrt{p^4-2p^2q^2+q^4}}{p^2+q^2}$$

$$=\frac{\sqrt{(p^2-q^2)^2}}{p^2+q^2}=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}〔公式(2)〕=1\div\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}=\frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}.$$

5. $\cot A=\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{\sqrt{2mn}}$ ノ値ヲ知リテ $\cos A$ ヲ求ム

〔解〕 $\operatorname{cosec}A=\sqrt{1+\cot^2A}$〔公式(8)〕$=\sqrt{1+\dfrac{m^2+n^2}{2mn}}$

$$=\sqrt{\frac{2mn+m^2+n^2}{2mn}}=\sqrt{\frac{(m+n)^2}{2mn}}=\frac{m+n}{\sqrt{2mn}}$$

$$\sin A=\frac{1}{\operatorname{cosec}A}〔公式(1)〕=1\div\frac{m+n}{\sqrt{2mn}}=\frac{\sqrt{2mn}}{m+n}$$

$$\therefore\ \cos A=\sqrt{1-\sin^2A}〔公式(6)〕=\sqrt{1-\frac{2mn}{(m+n)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(m+n)^2-2mn}{(m+n)^2}}=\frac{\sqrt{m^2+2mn+n^2-2mn}}{m+n}$$

$$=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m+n}.$$

6. $\tan A=\dfrac{40}{9}$ ヲ知リテ次式ノ値ヲ求メヨ.

$$\frac{\tan A+\sec A}{\sin A\sec A}$$

〔解〕 所題ノ式ノ中ニ $\sec A$ ト $\sin A$ トヲ含ムデオルカラ,先ヅ $\sec A$ ト $\sin A$ トヲ計算スル必要ガアル, ソコデ

$$\sec A=\sqrt{1+\tan^2A}〔公式(7)〕=\sqrt{1+\frac{40^2}{9^2}}=\sqrt{\frac{9^2+40^2}{9^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1681}}{9}=\frac{41}{9},$$

又 $\cos A=\dfrac{1}{\sec A}=1\div\dfrac{41}{9}=\dfrac{9}{41}$

$$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-\frac{9^2}{41^2}}=\sqrt{\frac{41^2-9^2}{41^2}}=\sqrt{\frac{1600}{41^2}}=\frac{40}{41}$$

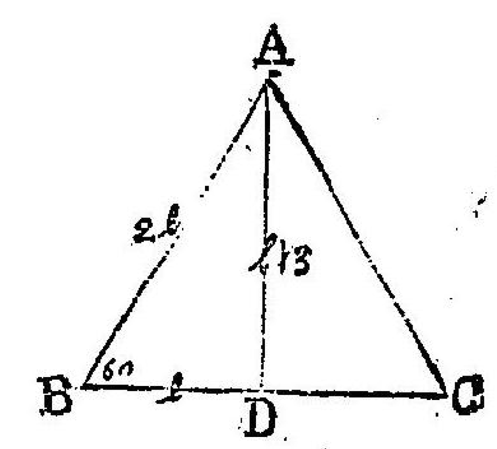
上ノ $\sec A$, $\sin A$ ノ値及ビ $\tan A$ ノ値ヲ所題ノ式ニ代用スレバ

$$\frac{\tan A+\sec A}{\sin A\sec A}=\frac{\frac{40}{9}+\frac{41}{9}}{\frac{40}{41}\times\frac{41}{9}}=\frac{\frac{81}{9}}{\frac{40}{9}}=\frac{81}{9}\times\frac{9}{40}=\frac{81}{40}$$

---

10. 特別之角之圓函數.

〔第壹〕 $\overset{60^\circ}{30^\circ}$ ノ圓函數



正三角形ヲ書キ,之レヲ ABC トス,

然ルキハ ∠B ハ 60° デアル

A ヨリ BC ニ垂線ヲ下シ,之レヲ AD トス,

ソコデ $BD=l$ トスレバ

$AB=BC$ ∵△ABC ハ等邊△

$=2BD$ ∵△ABD≡△ADC ∴BD=DC

$=2l$

又直三角形 ABD ニ於テ $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{4l^2-l^2}=\sqrt{3l^2}=l\sqrt{3}$

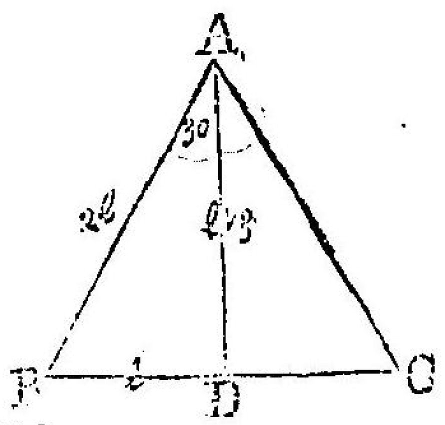
而シテ ∠ABD(即チ 60°)ニ於テ AD ハ對邊, BD ハ底邊, AB ハ斜邊デアル, 故ニ 5. 定義ニヨリ

$\sin60^\circ=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{l\sqrt{3}}{2l}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cot60^\circ=\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{l}{l\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$\cos60^\circ=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{l}{2l}=\dfrac{1}{2}$, $\sec60^\circ=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{2l}{l}=2$,

$\tan60^\circ=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{l\sqrt{3}}{l}=\sqrt{3}$, $\operatorname{cosec}60^\circ=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{2l}{l\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

〔第貳〕 $\overset{30^\circ}{60^\circ}$ ノ圓函數



前ノ如ク正三角形ABCヲ畫キ，AヨリBCニ垂線ADヲ下ス𪜈ハ

∴ △ABD≡△ADC　∴ ∠BAD=∠DAC

∴ ∠BAD=$\frac{1}{2}$∠BAC=30°

而シテ前ノ如ク　BD=l　トスレバ

AB=$2l$　　AD=$l\sqrt{3}$

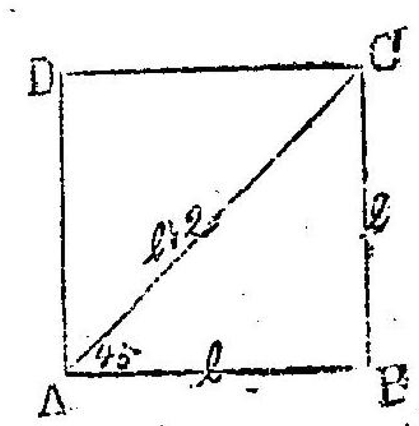
而シテ∠BADニ就テ考フレバBDハ對邊，ADハ底邊，ABハ斜邊デアル，故ニ 5. 定義ニヨリ

$$\sin 30^\circ=\frac{BD}{AB}=\frac{l}{2l}=\frac{1}{2},\qquad \cot 30^\circ=\frac{AD}{BD}=\frac{l\sqrt{3}}{l}=\sqrt{3}$$

$$\cos 30^\circ=\frac{AD}{AB}=\frac{l\sqrt{3}}{2l}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sec 30^\circ=\frac{AB}{AD}=\frac{2l}{l\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30^\circ=\frac{BD}{AD}=\frac{l}{l\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \operatorname{cosec} 30^\circ=\frac{AB}{BD}=\frac{2l}{l}=2,$$

〔第三〕 45° ノ圓函數



正方形ヲ畫キ，之レヲABCDトシ，對角線ACヲ引ク，

然ル𪜈ハ　∠CAB=$\frac{1}{2}$直角=45°　デアル

ソコデ　AB=l　トスレバ

BC=AB　∵ABCDハ正方形

=l

直∠ABCニ於テ　$A\overset{C}{B}=\sqrt{AB^2+BC^2}$

$=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2l^2}=l\sqrt{2}$

而シテ∠BACニ就テ考フレバBCハ對邊，ABハ底邊，ACハ斜邊

デアル，故ニ 5. 定義ニヨリ

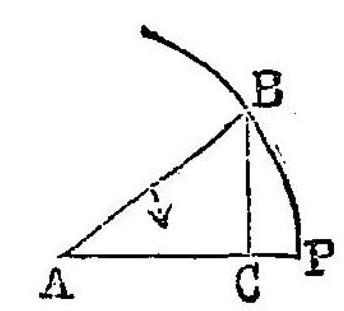
$$\sin 45^\circ=\frac{BC}{AC}=\frac{l}{l\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \cot 45^\circ=\frac{AB}{BC}=\frac{l}{l}=1,$$

$$\cos 45^\circ=\frac{AB}{AC}=\frac{l}{l\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \sec 45^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{l\sqrt{2}}{l}=\sqrt{2},$$

$$\tan 45^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{l}{l}=1,\qquad \operatorname{cosec} 45^\circ=\frac{AC}{BC}=\frac{l\sqrt{2}}{l}=\sqrt{2}.$$

〔注意〕 30°, 60°, 45° ノ圓函數ハ甚ダ必要デアルカラ能ク暗記シテ置クコトヲ要スル，尤モ sin, cos, tan 丈ケデヨロシイ，何故ナレバ　$\cot A=\frac{1}{\tan A}$，$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$，$\sec A=\frac{1}{\cos A}$　デアルカラ tan, sin, cosA ノ暗記ガ出來テ居レバ cot, cosec, sec ハ容易ニ判カルカラデアル.

〔第四〕 0° ノ圓函數



鋭角BACノ壹邊上ニB點ヲ取リBヨリ他ノ壹邊ACヘ垂線BCヲ作ル，

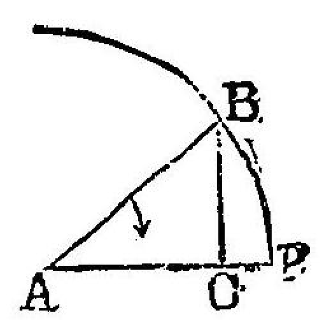
ソコデ A ヲ中心トシABヲ半徑トシテ圓周ヲ畫キ，ACトノ交點ヲPトス，

(i)　$\sin A=\frac{BC}{AB}$

ソコデABヲ，Aヲ心トシテAPノ方ニ旋轉セシム，然ル𪜈ハ B ハBP弧ノ上ニ運動シ漸々Pノ方ニ近ヅクベシ，從ツテ垂線BCハ漸々少サクナル，ソーシテABガ終ニACト壹致スル𪜈即チ∠BAPガ0°トナル𪜈ハBCハ0トナル，

∴ $\sin 0^\circ=\frac{0}{AB}$　　∴ $\sin 0^\circ=0.$

(ii) $\cos A=\frac{AC}{AB}$



ソコデ前ノ如クAヲ心トシテ, AB ヲ AP ノ方ニ旋轉スルトキハCハ漸々Pノ方ニ接近スベシ, AB ガ終ニ AP ト壹致スルトキハ AC ハ AP トナル,

故ニ

$$\cos 0^\circ=\frac{AP}{AB} \qquad \therefore \ \cos 0^\circ=1$$

(iii) $\tan A=\frac{BC}{AC}$

ソコデ前ノ如ク, AB ヲ AP ノ方ニ旋轉セシメ AB ガ終ニ AP ト壹致スルトキハ $AC=AP$, $BC=0$ トナル,

$$\therefore \ \tan 0^\circ=\frac{0}{AP} \qquad \therefore \ \tan 0^\circ=0.$$

(iv) $\cot A=\frac{AC}{BC}$

前ノ如ク AB ヲ AP ノ方ニ旋轉セシメ, AB ガ終ニ AP ト壹致スルトキハ $BC=0$, $AC=AP$ トナル $\therefore \ \cot 0^\circ=\frac{AP}{0}$.

此ノ $\frac{AP}{0}$ ハ無究大ト稱ヘ, 之レヲ ∞ ニテ示スノデアル,

$$\therefore \ \cot 0^\circ=\infty$$

〔註〕今 $\frac{a}{x}$ トイフ分數ガアリテ x ガ非常ニ少サクナルトキハ $\frac{a}{x}$ ハ非常ニ大キクナル, ソコデ x ガ段々小サクナツテ行ツテ終ニ 0 トナルトキハ $\frac{a}{x}$ 即チ $\frac{a}{0}$ ヲ無究大ト稱ヘ, 之レヲ ∞ ナル符號ニテ示スノデアル,

(v) $\sec BAP=\frac{AB}{AC}$

ソコテ AB ガ AP ノ方ニ運動シテ行ツテ終ニ AP ト壹致スルトキハ AC ハ AP トナル

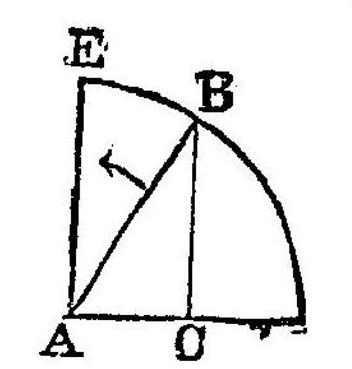
$$\therefore \ \sec 0^\circ=\frac{AB}{AP} \qquad \therefore \ \sec 0^\circ=1.$$

(vi) $\operatorname{cosec} BAP=\frac{AB}{BC}$

AB ガ AP ト壹致スルトキハ $BC=0$ トナル,

$$\therefore \ \operatorname{cosec} 0^\circ=\frac{A}{0} \qquad \therefore \ \operatorname{cosec} 0^\circ=\infty$$

〔第五〕 90° ノ圓函數



銳角 BAC ノ壹邊上ニ B ヲ取リ, B ヨリ他ノ壹ヘ垂線 BC ヲ作ル,

ソコデ A ヲ中心トシ, AB ヲ半徑トシテ圓周ヲ畫キ又 A ニ於テ AC ニ垂線ヲ作リ, 此ノ垂線ト前ノ圓周トノ交點ヲ E トス

(i) $\sin BAC=\frac{BC}{AB}$

ソコデ A ヲ心トシ AB ヲ AE ノ方ニ旋轉セシム, 然ルトキハ B 點ハ BE 弧ノ上ニ運動シ漸々 E ノ方ニ近ツク, 從ツテ BC ハ AE ノ方ニ運動ス, 而シテ AB ガ終ニ AE ト壹致スルトキ即チ $\angle BAC$ ガ 90° トナルトキ BC ハ AE トナル,

$$\therefore \ \sin 90^\circ=\frac{AE}{AB} \qquad \therefore \ \sin 90^\circ=1.$$

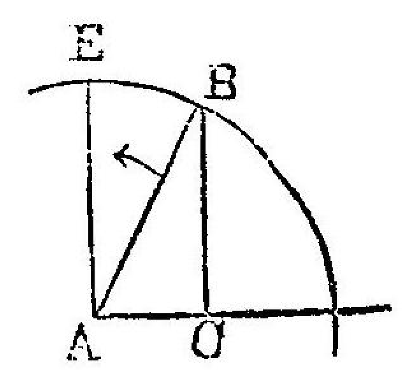
(ii) $\cos BAC=\frac{AC}{AB}$

AB ガ AE ノ方ニ運動スルニ從ツテ C ハ漸々 A ニ近ツク, 而シテ AB ガ終ニ AE ト壹致スルトキ即チ $\angle BAC$ ガ 90° トナルトキハ $AC=0$ トナル

$$\therefore \ \cos 90^\circ=\frac{0}{AB} \qquad \therefore \ \cos 90^\circ=0$$

(iii) $\tan BAC=\frac{BC}{AC}$

AB ガ AE ノ方ニ運動スルニ從ツテ AC ハ漸々減少シ, BC ハ漸々増大シ, AB ガ終ニ AE ト壹致スルキハ $AC=0$,



$BC=AE$ トナル,

$\therefore\ \tan 90^\circ=\frac{AE}{0}$ $\therefore\ \tan 90^\circ=\infty$

(iv) $\cot BAC=\frac{AC}{BC}$

前ノ如ク AB ガ AE ノ方ニ運動シ終ニ AE ト壹致スルトキハ BC ハ AE トナリ $AC=0$ トナル, $\therefore\ \cot 90^\circ=\frac{0}{AE}$ $\therefore\ \cot 90^\circ=0$

(v) $\sec BAC=\frac{AB}{AC}$

前ノ如ク AB ガ AE ノ方ニ運動シ AB ガ終ニ AE ト壹致スルキハ $AC=0$, AB ハ AE トナル $\therefore\ \sec 90^\circ=\frac{AE}{0}$ $\therefore\ \sec 90^\circ=\infty$

(vi) $\operatorname{cosec} BAC=\frac{AB}{BC}$

前ノ如ク AB ガ AE ノ方ニ運動シ終ニ AB ト壹致スルキハ BC ハ AE トナリ, AB モ AE トナル,

$\therefore\ \operatorname{cosec} 90^\circ=\frac{AE}{AE}$ $\therefore\ \operatorname{cosec} 90^\circ=1.$

第 三 例 題

1. $\sin 30^\circ\ \tan 45^\circ\ \sec 60^\circ=\cot 45^\circ$ ナルコヲ証セヨ.

〔証〕 $\sin 30^\circ\ \tan 45^\circ\ \sec 60^\circ=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1,$ 又 $\cot 45^\circ=1,$

$\therefore\ \sin 30^\circ\ \tan 45^\circ\ \sec 60^\circ=\cot 45^\circ.$

2. $\tan 30^\circ \sin 60^\circ=\sin 45^\circ \cos 45^\circ$ ナルコヲ證セヨ

〔證〕 $\tan 30^\circ \sin 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2},$

$\sin 45^\circ \cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2},$ $\therefore\ \tan 30^\circ \sin 60^\circ=\sin 45^\circ \cos 45^\circ.$

3. $\tan 30^\circ \tan 45^\circ \tan 60^\circ$ ノ値如何

〔解〕 $\tan 30^\circ \tan 45^\circ \tan 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 1\times\sqrt{3}=1.$

4. $(\sin 60^\circ+\cos 30^\circ)^2-\tan^2 30^\circ$ ノ値如何

〔解〕 $(\sin 60^\circ+\cos 30^\circ)^2-\tan^2 30^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-(\sqrt{3})^2$

$$=\left(\frac{2\times\sqrt{3}}{2}\right)^2-3=3-3=0$$ 答 $\frac{8}{3}$

5. $\sin^2 0^\circ+\sin^2 30^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 90^\circ$ ノ値如何

〔解〕 $\sin 0^\circ=0,\ \sin 30^\circ=\frac{1}{2},\ \sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ \sin 90^\circ=1$

故ニ $\sin^2 0^\circ+\sin^2 30^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 90^\circ$

$$=0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1^2$$

$$=0+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1$$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=1+\frac{1+3}{4}+\frac{1}{2}$$

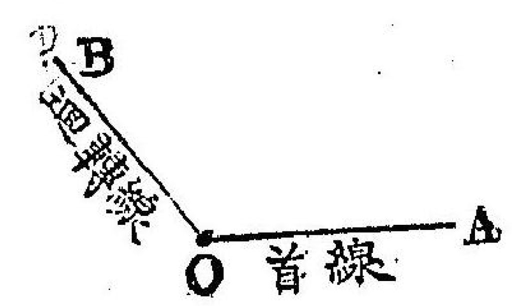
$$=1+1+\frac{1}{2}\quad=2\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

第 三 編

任意之角之三角函數

11. 定義. 原點. 首線. 廻轉線.

一ツノ平面 M ノ上ニ於テ定點 O ヲ置キ, O 點ヨリ定直線 OA ヲ M 平面上ニ引キ, 又 O 點ヨリ運動直線 OB ヲ M 平面上ニ引ク,



ソコデ定點 O ヲ原點, 定直線 OA ヲ首線, 運動線 OB ヲ廻轉線ト稱ヘル,

今廻轉線 OB ガ首線 OA ノ位置ヨリ M 平面上ニ廻轉スル片ハ, 首線 OA ト廻轉線 OB トハ角ヲナスト稱シ, 廻轉線ノ廻轉ノ量ハ即チ角ノ大サデアル, 但シ廻轉線ガ廻轉スル量ハ限リナシ, 從ツテ角ノ大サニ限リナシ,

例ヘバ廻轉線ガ首線 OA ノ位置ヨリ壹周リ廻轉シテ再ビ OA ノ位置ニ到ル片ハ 360° ノ角ヲナシ, 又廻轉線ガ OA ノ位置ヨリ二タ周リ廻轉シテ OA ノ位置ニ到レバ $360^\circ\times2=720^\circ$ ノ角ヲナシ, 又廻轉線ガ OA ノ位置ヨリ二タ周リ廻轉シテ更ニ OP ノ位置ニ到ル片ハ $360^\circ\times2+138^\circ=858^\circ$ ノ角ヲナス, 但シ $\angle AOP$ ヲ 138° トス,

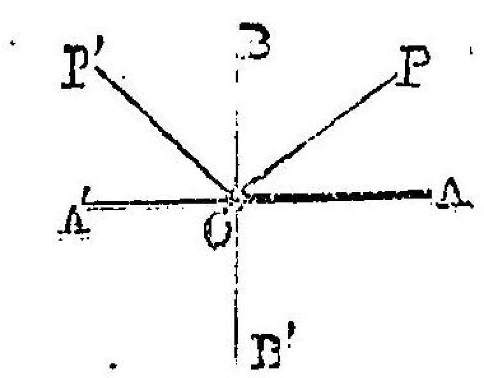
斯樣ニ, 廻轉線ハ OA ノ位置ヨリ如何程ニテモ廻轉シ能フ, 故ニ角ノ大サハ限リナイノデアル,

ソコデ首線 OA, 廻轉線 OB ヲ角ノ邊ト稱ヘ, 原點 O ヲ角ノ頂

ト稱ヘル,

12. 定義 象限.

原點 O ヲ過ギテ首線 OA ニ垂線 OB ヲ引キ, AO, BO ヲ引張ス, 然ルキハ AOA′, BOB′ (但シ A′ ハ AO ノ引張線上ノ點ニシテ, B′ ハ BO ノ引張線上ノ點デアル) ハ平面ヲ四ツノ部分ニ分ツ, ソコデ此ノ四ツノ部分ノ各ヲ象限ト稱ヘル,



而シテ OA, OB ノ間ノ部分ヲ 第壹象限,
OB, OA′ ノ間ノ部分ヲ 第貳象限,
OA′ OB′ ノ間ノ部分ヲ 第三象限,
OB′, OA ノ間ノ部分ヲ 第四象限,

ト稱ヘル,

今廻轉線ガ首線 OA ノ位置ヨリ廻轉シ第壹象限内ニ於テ止マル片ハ, 茲ニ生ジタル角ハ第壹象限ノ角ト稱ヘル,

例ヘバ圖ニ於テ $\angle AOP$ ハ第壹象限ノ角デアル, 又廻轉線ガ OA ノ位置ヨリ廻轉ヲ始メ幾周リカ廻轉シタル后チ OP ノ位置ニ止ル片ハ, 茲ニ生ジタル角モ亦第壹象限ノ角デアル,

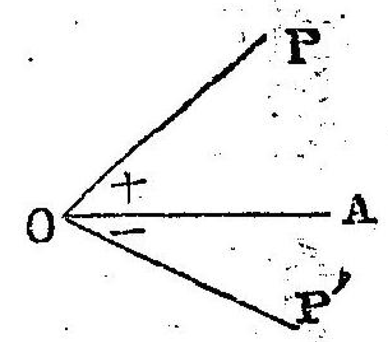
又廻轉線ガ OA ノ位置ヨリ廻轉シテ第貳象限内ニ於テ止マル片ハ茲ニ生ジタル角ハ第貳象限ノ角デアル.

例ヘバ圖ニ於テ AOP′ 角ハ第貳象限ノ角デアル, 又廻轉線ガ首線 OA ノ位置カラ廻轉ヲ始メ幾周リカ廻轉シタル后チ OP′ ノ位置ニ止マル片ハ茲ニ生ジタル角モ亦第貳象限ノ角デアル.

又廻轉線ガ第三象限内ニ於テ止ル片ハ, 茲ニ生ジタル角ハ第三象限ノ角ト稱ヘ, 廻轉線ガ第四象限内ニ止ル片ハ, 茲ニ生ジタル角ヲ第

四象限ノ角ト稱フ.

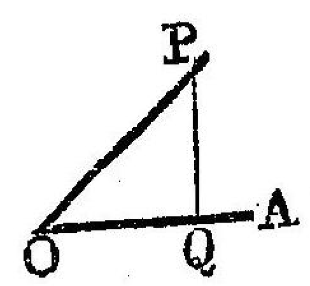
13. 角之正負 O ハ原點, OA ハ首線ナリトス,



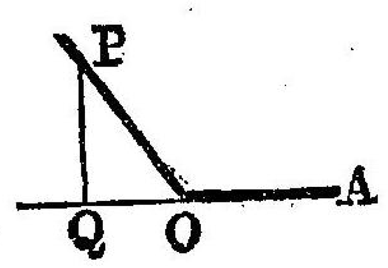
ソコデ廻轉線ガ時計ノ針ト反對ノ方向ニ廻轉シテ生ジタル角, 例ヘバ ∠AOP ヲ正トシ, 又廻轉線ガ時計ノ針ト同方向ニ廻轉シテ生ジタル角例ヘバ ∠AOP′ ヲ負トス

14. 定義　任意之角之三角函數

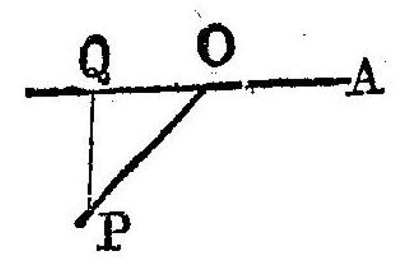
次ノ圖ニ就テ, O ハ原點ニシテ OA ハ首線ナリトス,



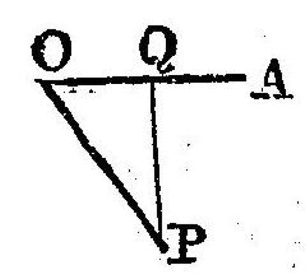
(第一圖)



(第二圖)



(第三圖)



(第四圖)

今首線 OA ト廻轉線 OP トガナス角ヲ θ トスル時ハ, θ ハ第一圖ニ於テハ第一象限ノ角, 第二圖ニ於テハ第二象限ノ角, 第三圖ニ於テハ第三象限ノ角, 第四圖ニ於テハ第四象限ノ角デアル,

ソコデ何レノ場合ニ於テモ廻轉線上ノ壹點ヨリ首線 OA 或ハ其引張線ヘ垂線 PQ ヲ下シ △OPQ ニ就テ 5. ノ如ク比ヲ作リ次ノ如ク名附ク, 之レ即チ θ ノ三角函數デアル,

即チ	
$\sin\theta=\dfrac{PQ}{OP}$	$\cot\theta=\dfrac{OQ}{PQ}$
$\cos\theta=\dfrac{OQ}{OP}$	$\sec\theta=\dfrac{OP}{OQ}$
$\tan\theta=\dfrac{PQ}{OQ}$	$\mathrm{cosec}\,\theta=\dfrac{OP}{PQ}$

[注意] 上ノ圖ニ於テ廻轉線ハ OA ヨリ負ノ方向ニ廻轉シテ

OP ノ位置ニ到リシモノト考ヘテモヨロシイノデアル, 詳言スレバ上ノ定義ニ於テ θ ヲ負角ト見テモヨロシイノデアル.

15. 任意ノ角ノ三角函數ノ相互ノ關係.

7 章ニ於テ示シシタル. (1) ヨリ (8) ニ到ル 8 個ノ關係, 即チ

$\sin\theta\ \mathrm{cosec}\,A=1$ (1)	$\tan\theta=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ (4)	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ (6)
$\cos\theta\ \sec A=1$ (2)		$1+\tan^2\theta=\sec^2 A$ (7)
$\tan\theta\ \cot A=1$ (3)	$\cot\theta=\dfrac{\cos A}{\sin A}$ (5)	$1+\cot^2\theta=\mathrm{cosec}^2 A$ (8)

ハ θ ノ大サ如何ニ拘ラズ恆ニ成立スルノデアル,

次ニ之レヲ證明ショー

〔證〕 前頁ノ第一, 第二, 第三, 第四圖ノ各ニ於テ

$\sin\theta\ \mathrm{cosec}\,\theta=\dfrac{PQ}{OP}\times\dfrac{OP}{PQ}$ 〔14. 定義〕$=1$ 〔(1) ノ證〕

$\cos\theta\ \sec\theta=\dfrac{OQ}{OP}\times\dfrac{OP}{OQ}$ 〔 〃 〕$=1$ 〔(2) ノ證〕

$\tan\theta\ \cot\theta=\dfrac{PQ}{OQ}\times\dfrac{OQ}{PQ}$ 〔 〃 〕$=1$ 〔(3) ノ證〕

$\tan\theta=\dfrac{PQ}{OQ}$〔14, 定義〕$=\dfrac{\frac{PQ}{OP}}{\frac{OQ}{OP}}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 〔14. 定義〕 〔(4) ノ證〕

$\cot\theta=1\div\tan\theta$〔(3) ヨリ〕$=1\div\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ 〔(5) ノ證〕

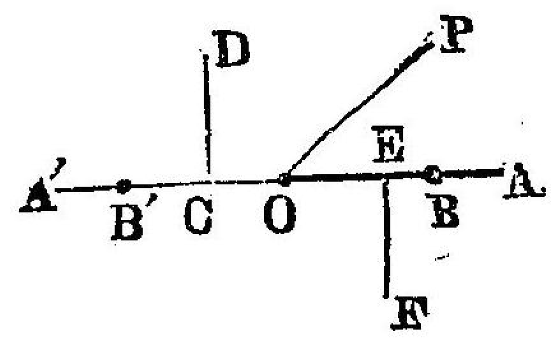
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\dfrac{PQ^2}{OP^2}+\dfrac{OQ^2}{OP^2}=\dfrac{PQ^2+OQ^2}{OP^2}=\dfrac{OP^2}{OP^2}=1.$ 〔(6) ノ證〕

$1+\tan^2\theta=1+\dfrac{PQ^2}{OQ^2}=\dfrac{OQ^2+PQ^2}{OQ^2}=\dfrac{OP^2}{OQ^2}=\sec^2\theta$ 〔(7) ノ證〕

$1+\cot^2\theta=1+\dfrac{OQ^2}{PQ^2}=\dfrac{PQ^2+OQ^2}{PQ^2}=\dfrac{OP^2}{PQ^2}=\mathrm{cosec}^2\theta$ 〔(8) ノ證〕

16. 直線之正負.

O ハ原點ニシテ OA ハ首線ナリトス, 然ルトキハ首線 OA ノ上ニ於テ O ヨリ測リタル長サ, 例ヘバ OB ヲ正トス,



又 A ヨリ O ノ方ニ AO ヲ引張シタル直線上ニ於テ O ヨリ測リタル長サ, 例ヘバ OB′ ヲ負トス

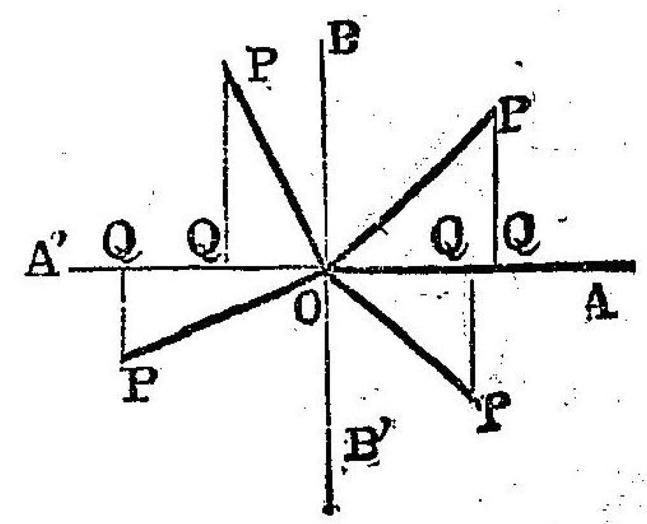
故ニ若シ OB=OB′=3 トスレバ OB ハ +3, OB′ ハ −3 デアル,

又 AA′ ノ上ノ任意ノ點ヨリ AA′ ノ上方ニ引イタ垂線例ヘバ CD ノ長サヲ正トシ, 又 AA′ 上ノ任意ノ點ヨリ AA′ ノ下方ニ引イタ垂線例ヘバ EF ノ長サハ負トス,

又廻轉線 OP ハ何レノ場所ニアルニ拘ラズ恒ニ正トスルノデアル.

17. 任意ノ角ノ三角函數ノ符號ノ變化

O ハ原點, OA ハ首線, OP ハ廻轉線ナリ, O ニ於テ OA ニ垂線ヲ引キ, 之レヲ BOB′ トシ, AO ヲ A′ ニマデ引張ス,



然ルトキハ AOB ハ第一象限, BOA′ ハ第二象限, A′OB′ ハ第三象限, B′OA ハ第四象限デアル,

ソコデ廻轉線 OP ト首線 OA トニテナス角ヲ θ トシ, 廻轉線上ノ壹點 P ヨリ AA′ ニ垂線 PQ ヲ下ス,

θ ガ變化スルニ從ツテ θ ノ三角函數ノ符號ハ如何ニ變化スルカ

ヲ論セントス,

〔第壹〕 $\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ ノ符號ノ變化

今 θ ガ何ノ象限內ニアルニ拘ラズ次ノ如シ, (前頁ノ圖ヲ見ヨ)

$$\sin\theta=\frac{PQ}{OP}\qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{PQ}$$

(i) θ ガ第壹象限內ニアルトキ,

此時ハ OP, PQ ハ共ニ正デアル, ∴ $\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ ハ共ニ正デアル,

(ii) θ ガ第貳象限內ニアルトキ.

此時ハ OP, PQ ハ共ニ正デアル, ∴ $\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ ハ共ニ正デアル.

(iii) θ ガ第三象限內ニアルトキ.

此時ハ OP ハ正, PQ ハ負デアル, ∴ $\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ ハ共ニ負デアル

(iv) θ ガ第四象限內ニナルトキ.

此時ハ OP ハ正, PQ ハ負デアル, ∴ $\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ ハ共ニ負デアル.

〔第貳〕 $\cos\theta$, $\sec\theta$, ノ符號ノ變化

今 θ ガ何ノ象限內ニアルニ拘ラズ, 次ノ如シ, (前頁ノ圖ヲ見ヨ)

$$\cos\theta=\frac{OQ}{OP},\qquad \sec\theta=\frac{OP}{OQ}$$

(i) θ ガ第壹象限內ニアルトキ.

此時ハ OP, OQ ハ共ニ正デアル, ∴ $\cos\theta$, $\sec\theta$ ハ共ニ正デアル,

(ii) θ ガ第貳象限內ニアルトキ.

此時ハ OP, ハ正, OQ ハ負デアル ∴ $\cos\theta$, ssecθ ハ共ニ負デアル.

(iii) θ ガ第三象限內ニアルトキ,

此時ハ OP ハ正, OQ ハ負デアル, ∴ $\cos\theta$, $\sec\theta$ ハ共ニ負デアル.

(iv) θ ガ第四象限內ニアルトキ.

此時ハ OP PQ ハ共ニ正デアル, ∴ $\cos\theta$ $\sec\theta$ ハ共ニ正デアル.

〔第三〕 $\tan\theta$, $\cot\theta$ ノ符號ノ變化

今 θ ガ何ノ象限内ニアルニ拘ラズ,

$$\tan\theta=\frac{PQ}{OQ},\qquad \cot\theta=\frac{OQ}{PQ}$$

デアル, (36 頁ノ圖ヲ見ヨ)

(i) θ ガ第壹象限内ニアル片,

此時ハ PQ,OQ ハ共ニ正デアル, ∴ $\tan\theta, \cot\theta$ ハ共ニ正デアル.

(ii) θ ガ第貳象限内ニアル片.

此時ハ PQ ハ正, OQ ハ負デアル, ∴ $\tan\theta, \cot\theta$ ハ共ニ負デアル

(iii) θ ガ第三象限内ニアル片.

此時ハ PQ,OQ ハ共ニ負デアル, ∴ $\tan\theta, \cot\theta$ ハ共ニ正デアル,

(iv) θ ガ第四象限内ニアル片.

此時ハ OQ ハ正, PQ ハ負デアル, ∴ $\tan\theta, \cot\theta$ ハ共ニ負デアル

上ノ諸結果ヲ表ニ示セバ次ノ如クデアル

	第壹象限	第貳象限	第三象限	第四象限
sin, cosec	+	+	−	−
cos, sec	+	−	−	+
tan, cot	+	−	+	−

18. 三角函數之値之變化

次ノ諸圖ニ於テ O ハ原點, OA ハ首線, OP ハ廻轉線デアル,

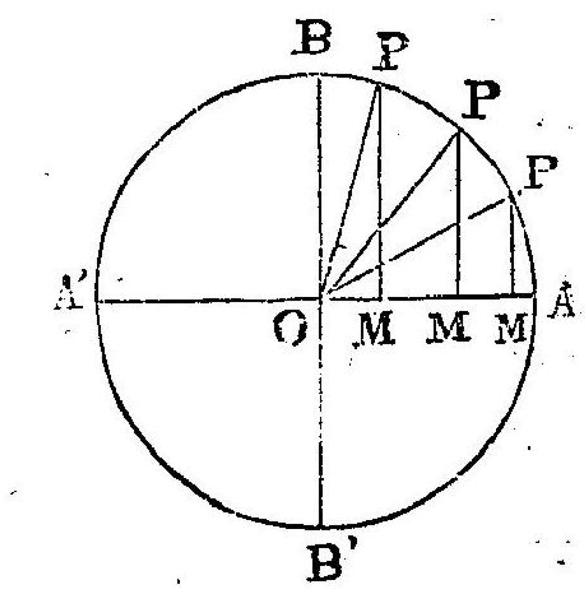
ソコデ O ヲ中心トシ OP ヲ半徑トセル圓周ガ OA ト AO ノ引張線トニ交ル點ヲ A, A′ トシ, 又 O ニ於テ OA ニ直立スル直線ト此ノ圓周トノ交點ヲ B, B′ トス,

然ル片ハ AOB ハ第一象限, BOA′ ハ第二象限, A′OB′ ハ第三象限, B′OA ハ第四象限デアル.

ソコデ廻轉線 OP ト首線 OA トニテナス角ヲ θ トシ, θ ガ變ズルニ從ツテ θ ノ三角函數ハ如何ニ變ズルカヲ論ゼントス,

P ヨリ首線 OA 若クハ其引張線ニ垂線ヲ下ス,

〔第壹〕 $\sin\theta, \operatorname{cosec}\theta$ ノ値ノ變化



(i) θ ガ第壹象限ニアル片,

$$\sin\theta=\frac{PM}{OP},\qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{PM}$$

ソコデ廻轉線 OP ガ首線 OA ノ方ニ廻轉シテ行ツテ終ニ OA ト壹致スル片ハ OP ハ OA トナリ, PM ハ 0 トナル,

$$\therefore\ \sin 0=\frac{0}{OA}=0,\qquad \operatorname{cosec}0=\frac{OA}{0}=\infty.$$

トナル, ソコデ OP ガ OA ノ位置ヨリ正ノ方向ニ廻轉シテ行クニ從ヒ, OP ノ長サハ不變デアルケレ圧, PM ノ長サハ次第ニ増大ス,

故ニ θ ガ第壹象限内ニアリテ, 0 ヨリ次第ニ増ス片ハ $\sin\theta, \operatorname{cosec}\theta$ ハ共ニ正ニシテ (17) ニシテ $\sin\theta$ ハ 0 ヨリ次第ニ増シ $\operatorname{cosec}\theta$ ハ ∞ ヨリ次第ニ減少シテ行ク.

ソーシテ廻轉線 OP ガ終ニ OB ノ位置ニ達スル片ハ OPモ, PM モ共ニ OB トナルノデアル,

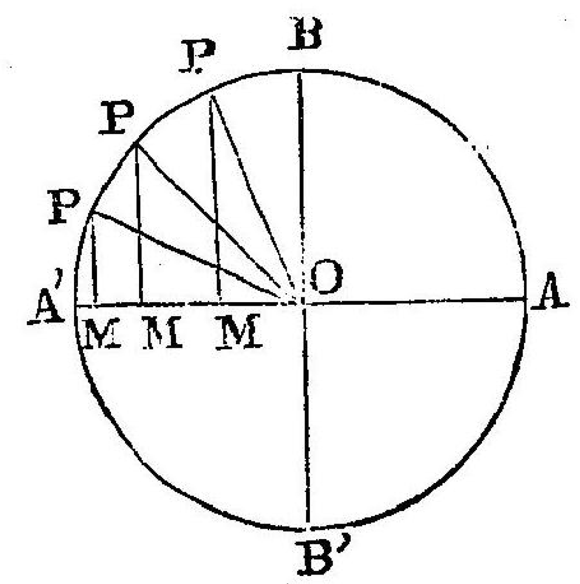
$$\therefore\ \sin 90^\circ=\frac{OB}{OB}=1,\qquad \operatorname{cosec}90^\circ=\frac{OB}{OB}=1.$$

トナル, デアルカラ次ノ通リデアル,

θ ガ第壹象限内ニアリテ 0° ヨリ次第ニ増ス片ハ $\sin\theta$ ハ正ニシテ其數値ハ 0 ヨリ 1 ニマテ増シ, 又 $\operatorname{cosec}\theta$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ ∞ ヨリ 1 ニマテ減少ス.

(ii) θ ガ第貳象限内ニアル片. $\sin\theta=\dfrac{PM}{OP}$, $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{OP}{PM}$

ソコテ OP ガ OB ノ位置ヨリ正ノ方ニ廻轉シテ行クトキハ OP ノ長サハ不變ニシテ, PM ノ長サハ次第ニ減少ス,



故ニ θ ガ 90 ヨリ 180 ニマテ增ストキハ $\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ ハ共ニ正ニシテ (17) $\sin\theta$ ノ數値ハ次第ニ減シ, $\operatorname{cosec}\theta$ ノ數値ハ次第ニ增ス

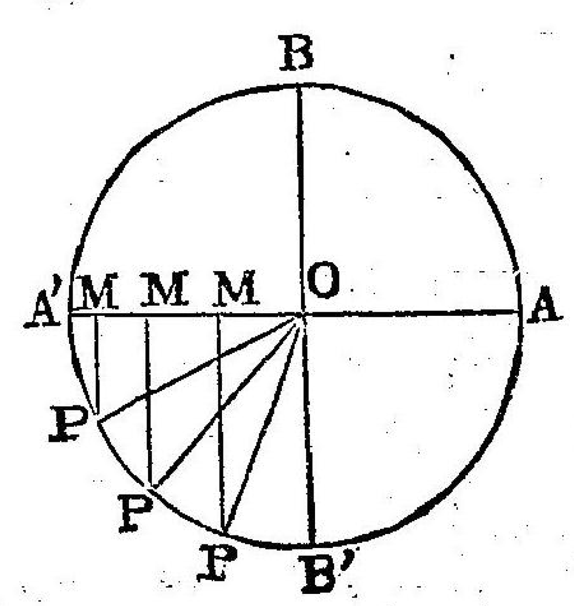
OP ガ終ニ OA′ ト壹致スルトキハ OP ハ OA′ トナリ, PM ハ 0 トナル

$$\therefore\ \sin 180^\circ=\frac{0}{OA'}=0,\qquad \operatorname{cosec}180^\circ=\frac{OA'}{0}=\infty$$

故ニ θ ガ 90° ヨリ 180° マデ增ストキハ $\sin\theta$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ 1 ヨリ 0 ニマテ減ジ, $\operatorname{cosec}\theta$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ 1 ヨリ ∞ ニマテ增ス

(iii) θ ガ第三象限ニアルトキ, $\sin\theta=\dfrac{PM}{OP}$ $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{OP}{PM}$

OP ガ OA′ ノ位置ヨリ OB′ ノ位置ニマテ廻轉スルトキハ OP ノ長サハ不變ナレド PM ノ長サハ次第ニ增大ス, 故ニ θ ガ 180° ヨリ 270° ニマテ增ストキハ $\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ ハ共ニ負ニシテ (17) $\sin\theta$ ノ數値ハ次第ニ增シ, $\operatorname{cosec}\theta$ ノ數値ハ次第ニ減ズ,



OP ガ終ニ OB′ ト壹致スルトキハ OP,PM ハ共ニ OB′ トナル

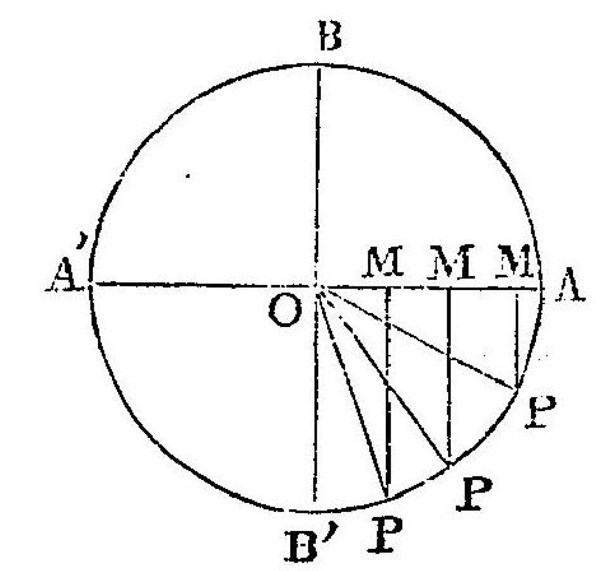
$$\therefore\ \sin 270^\circ=\frac{OB'}{OB'}=-1,\qquad \operatorname{cosec}270^\circ=\frac{OB'}{OB'}=-1.$$

故ニ θ ガ 180° ヨリ 270° ニマテ增ストキハ $\sin\theta$ ハ負ニシテ其數値ハ 0 ヨリ 1 ニ增シ, $\operatorname{cosec}\theta$ ハ負ニシテ其數値ハ ∞ ヨリ 1 ニ

減ズ

(iv) θ ガ第四象限ニ在ルトキ, $\sin\theta=\dfrac{PM}{OP}$ $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{OP}{PM}$

OP ガ OB′ ノ位置ヨリ OA ノ位置ニマテ廻轉スルトキハ OP ノ長サハ不變ニシテ PM ノ長サハ次第ニ減少ス, 故ニ θ ガ 270° ヨリ 360° マデ廻轉スルトキハ $\sin\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ ハ共ニ負ニシテ (17) $\sin\theta$ ノ數値ハ次第ニ減シ, $\operatorname{cosec}\theta$ ノ數値ハ次第ニ增ス,



デ OP ガ OA ト壹致スルトキハ OP ハ OA, PM ハ 0 トナル,

$$\therefore\ \sin 360^\circ=\frac{0}{OA}=0,\qquad \operatorname{cosec}\theta=\frac{OA}{0}=\infty$$

故ニ θ ガ 270° ヨリ 360° マテ增ストキハ $\sin\theta$ ハ正ニシテ其數値ハ 1 ヨリ 0 マテ減シ, $\operatorname{cosec}\theta$ ハ負ニシテ其數値ハ 1 ヨリ ∞ ニマデ增ス.

〔第貳〕 $\cos\theta$, $\sec\theta$ ノ値ノ變化

第壹ト同ジ理由ニテ次ノ如クデアル.

(i) θ ガ 0 ヨリ 90° ニマデ增ストキハ $\cos\theta$, $\sec\theta$ ハ共ニ正(17)ニシテ $\cos\theta$ ノ數値ハ 1 ヨリ 0 ニマテ減シ, $\sec\theta$ ノ數値ハ ∞ ヨリ 1 ニマテ減少ス.

(ii) θ ガ 90° ヨリ 180° ニマテ增ストキハ $\cos\theta$ $\sec\theta$ ハ共ニ負(17)ニシテ $\cos\theta$ ノ數値ハ 0 ヨリ 1 ニマテ增シ, $\operatorname{cosec}\theta$ ノ數値ハ ∞ ヨリ 1 ニ減ズ

(iii) θ ガ 180° ヨリ 270° ニマデ增ストキハ $\cos\theta$, $\sec\theta$ ハ共ニ負(17)ニシテ $\cos\theta$ ノ數値ハ 1 ヨリ 0 ニマテ減シ, $\operatorname{cosec}\theta$ ノ數値ハ 1

ヨリ ∞ ニマデ增ス

(iv) θ ガ 270° ヨリ 360° ニマデ增スㇳキハ, $\cos\theta$,$\sec\theta$ ハ共ニ正(17)ニシテ $\cos\theta$ ノ數値ハ 0 ヨリ 1 ニ增シ, $\sec\theta$ ノ數値ハ ∞ ヨリ 1 ニ減ズ

〔第三〕 **$\tan\theta$, $\cot\theta$ ノ値ノ變化**

第壹ト同シ方法ニテ次ノ通リデアル,

(i) θ ガ 0 ヨリ 90° ニマテ增スㇳキハ $\tan\theta$,$\cot\theta$ ハ共ニ正ニシテ(17) $\tan\theta$ ノ數値ハ 0 ヨリ ∞ ニマテ增シ, $\cot\theta$ ノ數値ハ ∞ ヨリ 0 ニマテ減ズ

(ii) θ ガ 90° ヨリ 180° ニマデ增スㇳキハ, $\tan\theta$,$\cot\theta$ ハ共ニ負(17)ニシテ $\tan\theta$ ノ數値ハ ∞ ヨリ 0 ニマテ減シ, $\cot\theta$ ノ數値ハ 0 ヨリ ∞ ニマデ增ス.

(iii) θ ガ 180° ヨリ 270° ニマデ增スㇳキハ $\tan\theta$,$\cot\theta$ ハ共ニ正(17ニシテ $\tan\theta$ ノ數値ハ 0 ヨリ ∞ ニ增シ, $\cot\theta$ ノ數値ハ ∞ ヨリ 0 ニ減ズ

(iv) θ ガ 270° ヨリ 360° ニマデ增スㇳキハ $\tan\theta$,$\cot\theta$ ハ共ニ負(17)ニシテ $\tan\theta$ ノ數値ハ ∞ ヨリ 0 ニ減シ, $\cot\theta$ ノ數値ハ 0 ヨリ ∞ ニ增ス

以上ノ諸結果ヲ壹目ノ下ニ瞭然タラシメンガ為メニ表ニテ示セバ次ノ通リデアル,

象限 / 數値	第一	第二	第三	第四
sin	0ヨリ1ニ增ス	1ヨリ0ニ減ズ	0ヨリ1ニ增ス	1ヨリ0ニ減ズ
cos	1ヨリ0ニ減ス	0ヨリ1ニ增ス	1ヨリ0ニ減ズ	0ヨリ1ニ增ス
tan	0ヨリ∞ニ增ス	∞ヨリ0ニ減ズ	0ヨリ∞ニ增ス	∞ヨリ0ニ減ズ
cot	∞ヨリ0ニ增ス	0ヨリ∞ニ增ス	∞ヨリ0ニ減ズ	0ヨリ∞ニ增ス
sec	1ヨリ∞ニ增ス	∞ヨリ1ニ減ズ	1ヨリ∞ニ增ス	∞ヨリ1ニ減ズ
cosec	∞ヨリ1ニ減ス	1ヨリ∞ニ增ス	∞ヨリ1ニ減ズ	1ヨリ∞ニ增ス

19. $-\theta$ ト θ トノ三角函數ノ關係

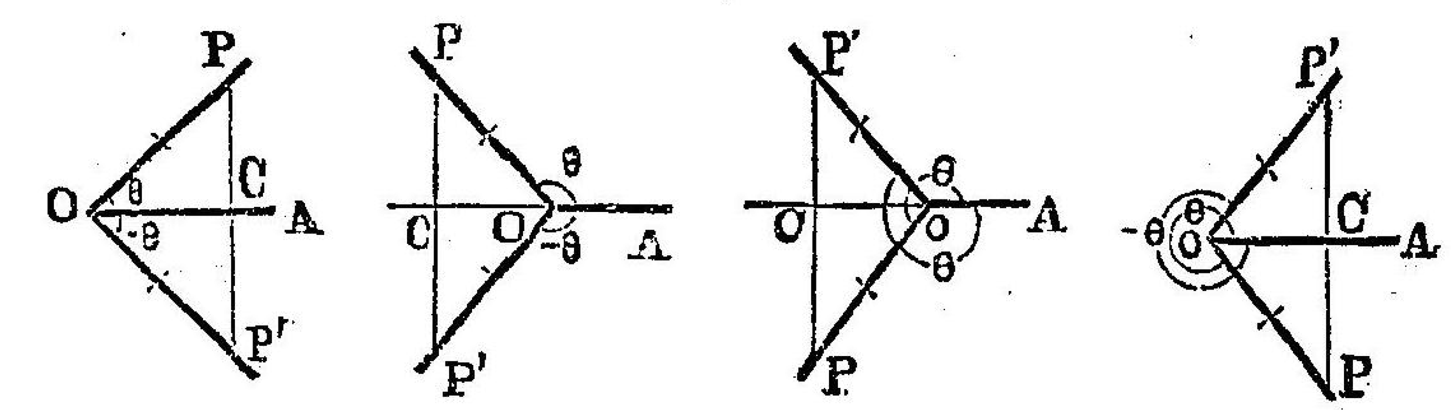
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ · (9)　　$\cos(-\theta) = \cos\theta$ ..... (10)

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ ..(11)　　$\cot(-\theta) = -\cot\theta$ .... (12)

$\sec(-\theta) = \sec\theta$ ....(13)　　$\mathrm{cosec}(-\theta) = -\mathrm{cosec}\,\theta$ ..(14)

(證) 次ノ諸圖ニ於テ O ハ原點, OA ハ首線ナリトシ. 廻轉線 OP ト首線 OA トハ θ 角ヲナシ, 又廻轉線 OP′ ト首線 OA トハ $-\theta$ 角ヲナストス

第一圖 {θ ガ第一象限内ニアル場合}　第二圖 {θ ガ第二象限内ニアル場合}　第三圖 {θ ガ第三象限内ニアル場合}　第四圖 {θ ガ第四象限内ニアル場合}



ソコデ OP 上ノ壹點 P ヨリ OA ニ垂線 PC ヲ下シ, PC ノ引張線ト OP′ トノ交點ヲ P′ トス, 然ルㇳキハ上ノ孰レノ場合ニ於テモ

$$\triangle OPC \equiv \triangle OP'C$$

$$OP = OP' \quad 及 \quad PC = P'C$$

今上ノ孰レノ場合ニ於テモ $\sin\theta = \dfrac{PC}{OP}$　$\sin(-\theta) = \dfrac{P'C}{OP'}$

然ルニ OP, OP′ ハ等長ニシテ共ニ正 PC, P′C ハ等長ニシテ符號相反ス(即チ第一第二圖ニ於テハ PC ハ正, P′C ハ負, 第三第四圖ニ於テハ PC ハ負 P′C ハ正デアル)

$$\therefore \frac{PC}{OP} = -\frac{P'C'}{OP'} \quad \therefore \sin(-\theta) = -\sin\theta \cdot \cdot (9)$$

又前ノ圖ノ孰レノ場合ニ於テモ $\cos(-\theta)=\frac{OC}{OP'}$ $\cos\theta=\frac{OC}{OP}$

然ルニ OP, OP' ハ等長ニシテ共ニ正デアル,

$$\therefore \frac{OC}{OP'}=\frac{OC}{OP} \quad \therefore \cos(-\theta)=\cos\theta \cdots\cdots\cdots \text{〔(10)ノ證〕}$$

又 $\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta \cdots\cdots\cdots\cdots$〔(11)ノ證〕

$$\cot(-\theta)=\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta \cdots \text{〔(12)ノ證〕}$$

$$\sec(-\theta)=\frac{1}{\cos(-\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta \cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔(13)ノ證〕}$$

$$\mathrm{cosec}(-\theta)=\frac{1}{\sin(-\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\mathrm{cosec}\,\theta \cdots\cdots\cdots \text{〔(14)ノ證〕}$$

20. $90°-\theta$ ト θ トノ三角函數ノ關係

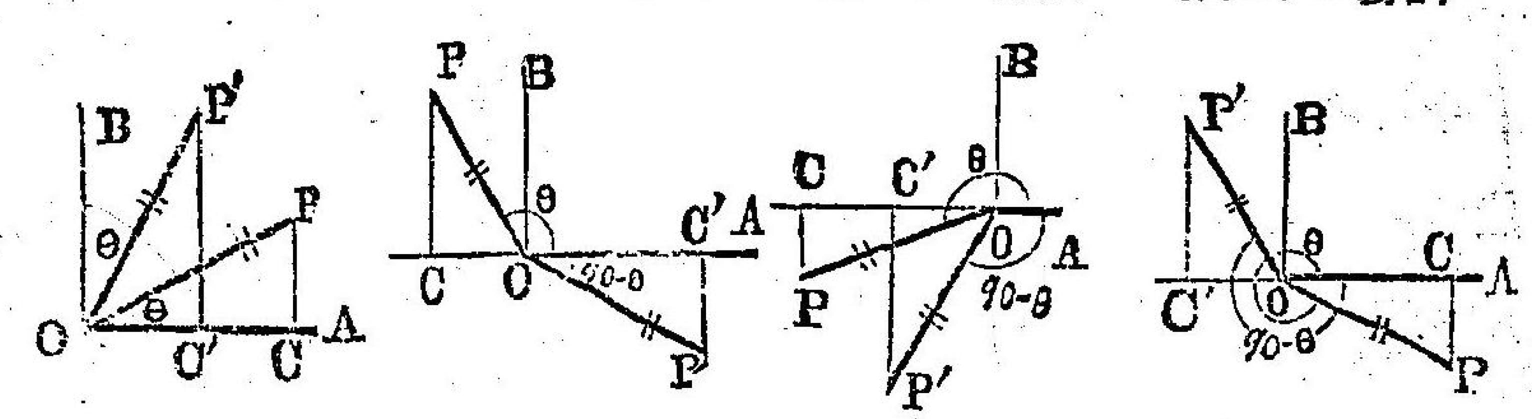
$\sin(90°-\theta)=\cos\theta \cdots\cdots (15)$ $\cos(90°-\theta)=\sin\theta \cdots\cdots (16)$

$\tan(90°-\theta)=\cot\theta \cdots\cdots (17)$ $\cot(90°-\theta)=\tan\theta \cdots\cdots (18)$

$\sec(90°-\theta)=\mathrm{cosec}\,\theta \cdots\cdots (19)$ $\mathrm{cosec}(90°-\theta)=\sec\theta \cdots (20)$

(證) 次ノ諸圖ニ於テ O ハ原點 OA ハ首線デアル, ソーシテOB ハ O ニ於テ OA ニ直立スル直線デアル.

第一圖 {θ ガ第一象限內ニアル場合}　第二圖 {θ ガ第二象限內ニアル場合}　第三圖 {θ ガ第三象限內ニアル場合}　第四圖 {θ ガ第四象限內ニアル場合}



今 $90°-\theta$ トイフ角ハ如何ニシテ出來ルカトイフニ廻轉線 OP' ガ首線 OA ノ位置ヨリ正ノ方向ニ 90° 丈ケ廻轉シテ OB ノ位置ニ

到リ夫レヨリ負ノ方向ニ θ 丈ケ廻轉シテ(即チ θ 度丈ケ逆モドリシテ) $90°-\theta$ トイフ角ガ出來ルノデアル. 夫レデアルカラ θ ノ大サニ依テ上ノ如ク四個ノ場合ガアルノデアル

又 OP ハ OA ヨリ正ノ方向ニ θ 丈ケ廻轉シタル廻轉線デアソコデ OP=OP' トシ P, P' ヨリ OA 若クハ其引長線ニ垂線 PC, 及ビ P'C' ヲ引ク,

然ルトキハ上ノ何ノ場合ニ於テモ

$$\Delta OPC=\Delta OP'C' \quad \therefore PC=OC' \text{ 及ビ } OC=P'C'$$

デアル.

今 $\sin(90°-\theta)=\frac{P'C'}{OP'}$ $\cos\theta=\frac{OC}{OP}$

然ルニ OP, OP' ハ等長ニシテ共ニ正, 又 P'C', OC ハ等長ニシテ同ジ符號デアル, (例ヘバ第一第四圖ニ於テハ P'C, OC ハ共ニ正, 第二第三圖ニ於テハ P'C', OC ハ共ニ負デアル)

$$\therefore \frac{P'C'}{OP'}=\frac{OC}{OP} \quad \therefore \sin(90°-\theta)=\cos\theta \cdots\cdots \text{〔(15)ノ證〕}$$

又 $\cos(90°-\theta)=\frac{OC'}{OP'}$ $\sin\theta=\frac{PC}{OP}$

然ルニ OP', OP ハ等長ニシテ共ニ正デアル, 又 OC', PC ハ等長ニシテ同ジ符號デアル, (即チ第一第貳圖ニ於テハ共ニ正ニシテ第三第四圖ニ於テハ共ニ負デアル)

$$\therefore \frac{OC'}{OP'}=\frac{PC}{OP} \quad \therefore \cos(90°-\theta)=\sin\theta \cdots\cdots \text{〔(16)ノ證〕}$$

又 $\tan(90°-\theta)=\frac{\sin(90°-\theta)}{\cos(90°-\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$〔(15), (16)〕$=\cot\theta \cdots$〔(17)ノ證〕

$$\cot(90^\circ-\theta)=\frac{\cos(90^\circ-\theta)}{\sin(90^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\text{〔(15). (16)〕}=\tan\theta\cdots\text{〔(18) ノ証〕}$$

$$\sec(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\cos(90^\circ-\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}\ (16)=\operatorname{cosec}\theta\cdots\cdots\text{〔(19) ノ証〕}$$

$$\operatorname{cosec}(90-\theta)=\frac{1}{\sin(90^\circ-\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}\ (15)=\sec\theta\cdots\cdots\text{〔(20) ノ証〕}$$

21. $90^\circ+\theta$ ト θ トノ三角函數ノ關係

$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta\cdots\cdots(21)$ $\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta\cdots(22)$

$\tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta\cdots(23)$ $\cot(90^\circ+\theta)=-\tan\theta\cdot(24)$

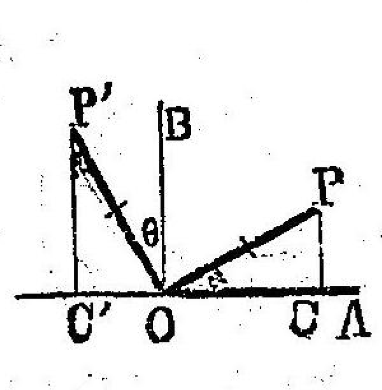
$\sec(90^\circ+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta\cdots(25)$ $\operatorname{cosec}(90^\circ+\theta)=-\sec\theta\cdots(26)$

(證) 本章ニ於テモ，前章ノ如ク四ツノ場合ガアル則チ次ノ通リデアル 但シ O ハ原點 OA ハ首線ニシテ OB⊥OA デアル，ソーシテ（P′ ハ $90^\circ+\theta$ トイフ角ヲ作ル廻轉線デアツテ，OP ハ θ トイフ角ヲナス廻轉線デアル

ソーシテ OP＝OP′ トシ P,P′ ヨリ OA 若クハ其引張線ニ垂線 PC P′C′ ヲ作ル．

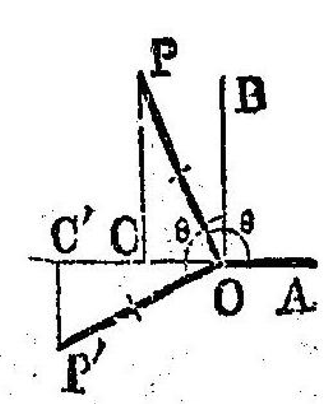
第一圖

{θ ガ第一象限内ニアル場合}



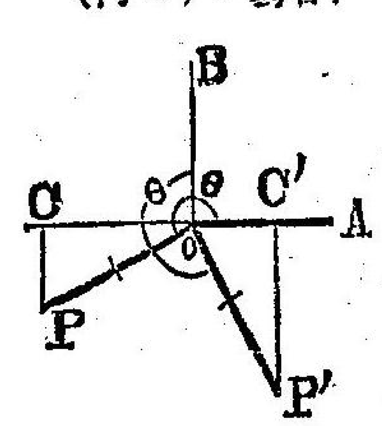
第二圖

{θ ガ第二象限内ニアル場合}



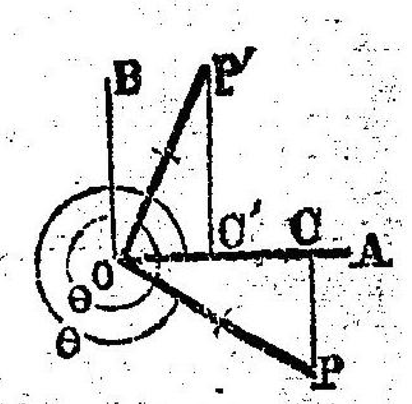
第三圖

{θ ガ第三象限内ニアル場合}



第四圖

{θ ガ第四象限内ニアル場合}



何ノ場合ニ於テモ

OP＝OP′， ∠C＝∠C′＝直角， ∠POC＝∠OP′C′

$$\therefore\ \Delta OPC\equiv\Delta OP'C'$$

$$\therefore\ PC=OC'\ \text{及}\ OC=P'C'$$

今 $\sin(90+\theta)=\dfrac{P'C'}{OP'}$ $\cos\theta=\dfrac{OC}{OP}$

然ルニ OP,OP′ ハ等長(作法)ニシテ共ニ正デアル，又 P′C′,OC ハ等長ニシテ同シ符號デアル (即チ第一第四圖ニ於テハ共ニ正，第二第三圖ニ於テハ共ニ負デアル)

$$\therefore\ \frac{P'C'}{OP'}=\frac{OC}{OP}\qquad\therefore\ \sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta\cdots\cdots\text{〔(21) ノ証〕}$$

又 $\cos(90^\circ+\theta)=\dfrac{OC'}{OP'}$ $\sin\theta=\dfrac{PC}{OP}$

然ルニ OP, OP′ ハ等長ニシテ共ニ正デアル，又 OC′,PC ハ等長デアルケレ圧異符號デアル即チ第一第二圖ニ於テハ OC′ハ負，PC ハ正，第三第四圖ニ於テハ PC ハ負，OC′ ハ正デアル，

$$\therefore\ \frac{OC'}{OP'}=-\frac{PC}{OP}\quad\therefore\ \cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta\cdots\text{〔(22) ノ証〕}$$

又 $$\tan(90^\circ+\theta)=\frac{\sin(90^\circ+\theta)}{\cos(90^\circ+\theta)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta\cdots\cdots\text{〔(23) ノ証〕}$$

$$\cot(90^\circ+\theta)=\frac{\cos(90^\circ+\theta)}{\sin(90^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta\cdots\cdots\text{〔(24) ノ証〕}$$

$$\sec(90^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(90^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\operatorname{cosec}\theta\cdots\cdots\text{〔(25) ノ証〕}$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(90+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta\cdots\cdots\text{〔(26) ノ証〕}$$

22. $180^\circ-\theta$ ト θ トノ三角函數ノ關係

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta\cdots\cdots(27)$ $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta\cdots(28)$

$\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta\cdots(29)$ $\cot(180^\circ-\theta)=-\cot\theta\cdots(30)$

$\sec(180^\circ-\theta)=-\sec\theta\cdots\cdots(31)$ $\operatorname{cosec}(180^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta\cdots(32)$

(證) $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\}=\cos(90^\circ-\theta)$〔公式(21)〕

$=\sin\theta$〔公式(16)〕…………〔(27)ノ証〕

$\cos(180^\circ-\theta)=\cos\{90^\circ+(90^\circ-\theta)\}=-\sin(90^\circ-\theta)$〔公式(22)〕

$=-\cos\theta$〔公式(17)〕…………〔(28)ノ証〕

$\tan(180^\circ-\theta)=\dfrac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$ ‥〔(29)ノ証〕

$\cot(180^\circ-\theta)=\dfrac{\cos(180^\circ-\theta)}{\sin(180^\circ-\theta)}=\dfrac{-\cos\theta}{\sin\theta}=-\cot\theta$ ‥〔(30)ノ証〕

$\sec(180^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\cos(180^\circ-\theta)}=\dfrac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$ ‥〔(31)ノ証〕

$\mathrm{cosec}(180-\theta)=\dfrac{1}{\sin(180^\circ-\theta)}=\dfrac{1}{\sin\theta}=\mathrm{cosec}\,\theta$ ‥‥〔(32)ノ証〕

23. $180^\circ+\theta$ ト θ トノ三角函数ノ關係

$\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta$ ‥ (33) $\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta$ ‥‥ (34)

$\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$ ‥ (35) $\cot(180^\circ+\theta)=\cot\theta$ ‥‥ (36)

$\sec(180^\circ+\theta)=-\sec\theta$ ‥ (37) $\mathrm{cosec}(180^\circ+\theta)=-\mathrm{cosec}\,\theta$ ‥ (38)

(證) $\sin(180^\circ+\theta)=\sin\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}=\cos(90^\circ+\theta)$〔公式(21)〕

$=-\sin\theta$〔公式(22)〕…………〔(33)ノ証〕

$\cos(180^\circ+\theta)=\cos\{90^\circ+(90^\circ+\theta)\}=-\sin(90^\circ+\theta)$〔公式(22)〕

$=-\cos\theta$〔公式21)〕…………〔(34)ノ証〕

$\tan(180^\circ+\theta)=\dfrac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\dfrac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$ ‥〔(35)ノ証〕

$\cot(180^\circ+\theta)=\dfrac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}=\dfrac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$ ‥‥〔(37)ノ証〕

$\sec(180^\circ+\theta)=\dfrac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\dfrac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$ ‥〔(37)ノ証〕

$\mathrm{cosec}(180^\circ+\theta)=\dfrac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\dfrac{1}{-\sin\theta}=-\mathrm{cosec}\,\theta$〔(38)ノ証〕

24. 前諸章ニ於テ説述シタル諸公式ヲ用ヒテ,如何ナル大サノ角デモノ圓函数ヲ,鋭角ノ圓函数ニ改ムルヿガ出來ル,次ノ諸例ニヨリテ其解法ヲ知レ.

例 1. $\sin 1583^\circ$ ヲ鋭角ノ圓函数ニ改メヨ.

〔解〕 先ヅ 1583° ヲ 360° ニテ除スレバ商 4, 殘余 143° ヲ得,

∴ $1583^\circ=360^\circ\times4+143^\circ$ デアル,

∴ $\sin1583^\circ=\sin(360^\circ\times4+143^\circ)=\sin143^\circ$

$=\sin(180^\circ-37^\circ)=\sin37^\circ$ 〔公式 27〕

例 2. $\cos2345^\circ$ ヲ鋭角ノ圓函数ニ改メヨ,

〔解〕 先ヅ 2345° ヲ 360° ニテ除スレバ商 6, 殘余 185° ヲ得,

∴ $2345^\circ=360^\circ\times6+185^\circ$ デアル,

∴ $\cos2345^\circ=\cos(360^\circ\times6+185^\circ)=\cos185^\circ$

$=\cos(180^\circ+5^\circ)=-\cos5^\circ$ 〔公式 34〕

例 3. $\tan1060^\circ$ ヲ鋭角ノ圓函数ニ改メヨ.

〔解〕 1060° ヲ 360° ニテ除スレバ商 2, 殘余 340° ヲ得,

∴ $1060^\circ=360^\circ\times2+340^\circ$

∴ $\tan1060^\circ=\tan(360^\circ\times2+340^\circ)=\tan340^\circ$

$=\mathrm{tsn}(360^\circ-20^\circ)=\tan(-20^\circ)=-\tan20^\circ$ 〔公式 11〕

例 4. $\sin(-256^\circ)$ ヲ鋭角ノ圓函数ニ改メヨ.

〔解〕 $\sin(-256^\circ)=-\sin256^\circ$ 〔公式 9〕

$=-\sin(180^\circ+76^\circ)=-(-\sin76^\circ)$ 〔公式 33〕

$=\sin76^\circ$

例　　題

1. 次ノ諸角ノ圓函數ヲ求メヨ.

(i) 120°　(ii) 135°　(iii) 150°　(iv) 225°

(解) (i) $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60°$〔公式 27〕$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60°$〔公式 28〕$= -\dfrac{1}{2}$

(以下略ス)

(ii) $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45°$〔公式 27〕$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45°$〔公式 28〕$= -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(以下畧ス)

(iii) $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30°$〔公式 27〕$= \dfrac{1}{2}$

$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30°$〔公式 28〕$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(以下略ス)

(iv) $\sin 225° = \sin(180° + 45°) = -\sin 45°$〔公式 33〕$= -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 225° = \cos(180° + 45°) = -\cos 45°$〔公式 34〕$= -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(以下略ス)

[注意] 本題ニ於ケル諸圓函數ノ値ハ **10.** 章ニ於テ示シタルモノト共ニ能ク記臆シテ置クヲ必要トス.

2. 次ノ諸式ヲ簡短ニセヨ.

(i) $(a-b)\cos(90° + \theta) - (a+b)\sin(180° + \theta)$

(ii) $\dfrac{(a^2-b^2)\cot(180° + \theta)}{\tan(90° + \theta)} - \dfrac{(a^2+b^2)\cot(90° - \theta)}{\tan(180° - \theta)}$

(iii) $\dfrac{\cos(180° - \theta)\cos(90° + \theta)}{\cos(90° - \theta)} + \dfrac{\sin(90° - \theta)\sin(180° - \theta)}{\sin(180° + \theta)}$

〔解〕 (i) $(a-b)\cos(90° + \theta) - (a+b)\sin(180° + \theta)$

$= (a-b)(-\sin\theta) - (a+b)(-\sin\theta)$〔公式 21. 33〕

$= -(a-b)\sin\theta + (a+b)\sin\theta = 2b\sin\theta$

(ii) $\dfrac{(a^2-b^2)\cot(180° + \theta)}{\tan(90° + \theta)} - \dfrac{(a^2+b^2)\cot(90° - \theta)}{\tan(180° - \theta)}$

$= \dfrac{(a^2-b^2)(\cot\theta)}{-\cot\theta} - \dfrac{(a^2+b^2)\tan\theta}{-\tan\theta}$

$= a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) = 2a^2$

(iii) $\dfrac{\cos(180° - \theta)\cos(90° + \theta)}{\cos(90° - \theta)} + \dfrac{\sin(90° - \theta)\sin(180° - \theta)}{\sin(180° + \theta)}$

$= \dfrac{-\cos\theta(-\sin\theta)}{\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta\sin\theta}{-\sin\theta} = \cos\theta - \cos\theta = 0$

3. 次ノ諸恒等式ヲ證明セヨ.

(i) $(\cot\theta + \mathrm{cosec}\,\theta)^2 = \dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$

(ii) $1 + 2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) = 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$

(iii) $1 - \cot^2\theta + \cot^4\theta = \sin^2\theta(1 + \cot^6\theta)$

(iv) $(\sin\theta - \sec\theta)^2 + (\cos\theta - \mathrm{cosec}\,\theta)^2 = (1 - \sec\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta)^2$

(v) $(1 + \sin\theta - \cos\theta)^2(1 - \sin\theta + \cos\theta)^2 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

(vi) $(1 + \sin\theta - \cos\theta)^2 + (1 - \sin\theta + \cos\theta)^2 = 4(1 - \sin^2\theta\cos^2\theta)$

(vii) $\sin^2\theta\tan^2\theta + \cos^2\theta\cot^2\theta = \tan^2\theta + \cot^2\theta - 1$

(viii) $\sec^2\theta\,\mathrm{cosec}^2\theta = \sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta$

(ix) $2\sec^2\theta = 1 + \sec^4\theta - \tan^4\theta$

(x) $(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2 = 2(1 - \sin\theta)(1 - \cos\theta)$

〔解〕 (i) $(\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2=\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\right)^2$ 〔公式 5. 1〕

$$=\left(\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2=\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}=\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$$ 〔公式 6〕

$$=\frac{(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

(ii) $1+2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)=1+2\{(\sin^2\theta)^3+(\cos^2\theta)^3\}$

$$=1+2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)$$

〔$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ＝ヨッタノデアル〕

$=1+2(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)$ ∵ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

$$=1+\{2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)-2\sin^2\theta\cos^2\theta\}$$

$$=2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

〔但シ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ナリ〕

$$=2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta$$
$$-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+\sin^4\theta+\cos^4\theta=3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$$

(iii) $1-\cot^2\theta+\cot^4\theta=\frac{1}{1+\cot^2\theta}\times(1+\cot^2\theta)(1-\cot^2\theta+\cot^4\theta)$

$$=\frac{1}{1+\cot^2\theta}\times\{1^3+(\cot^2\theta)^3\}$$

〔$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ＝ヨル〕

$=\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\theta}(1+\cot^6\theta)=\sin^2\theta(1+\cot^6\theta)$ 〔公式 8〕

(iv) $(\sin\theta-\sec\theta)^2+(\cos\theta-\operatorname{cosec}\theta)^2$

$=\left(\sin\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)^2+\left(\cos\theta-\frac{1}{\sin\theta}\right)^2$ 〔公式 2.1〕

$$=\left(\frac{\sin\theta\cos\theta-1}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta}\right)^2$$

$$=\frac{(\sin\theta\cos\theta-1)^2}{\cos^2\theta}+\frac{(\sin\theta\cos\theta-1)^2}{\sin^2\theta}$$

$$=(\sin\theta\cos\theta-1)^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)$$

$$=(\sin\theta\cos\theta-1)^2\times\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

$=(\sin\theta\cos\theta-1)^2\times\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$ 〔公式 6〕

$$=\left(\frac{\sin\theta\cos\theta-1}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2=\left(1-\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2$$

$=\left(1-\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sin\theta}\right)^2=(1-\sec\theta\operatorname{cosec}\theta)^2$ 〔公式 1. 2〕

(v) $(1+\sin\theta-\cos\theta)^2(1-\sin\theta+\cos\theta)^2$

$$=\{(1+\sin\theta-\cos\theta)(1-\sin\theta+\cos\theta)\}^2$$

$$=[\{1+(\sin\theta-\cos\theta)\}\{1-(\sin\theta-\cos\theta)\}]^2$$

$$=[1-(\sin\theta-\cos\theta)^2]^2$$

$$=[1-(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)]^2$$

$=[1-(1-2\sin\theta\cos\theta)]^2$ ∵ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

$$=(2\sin\theta\cos\theta)^2=4\sin^2\theta\cos^2\theta$$

(vi.) $(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(1-\sin\theta+\cos\theta)^2$

$$=1+\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta-2\cos\theta$$
$$+1+\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta+2\cos\theta$$

$=2+2-4\sin\theta\cos\theta$ ∵ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$=4(1-\sin\theta\cos\theta)$$

(vii) $\sin^2\theta\tan^2\theta+\cos^2\theta\cot^2\theta$

$=(1-\cos^2\theta)\tan^2\theta+(1-\sin^2\theta)\cot^2\theta$ 〔公式 6〕

$$=\tan^2\theta-\cos^2\theta\tan^2\theta+\cot^2\theta-\sin^2\theta\cot^2\theta$$

$$=\tan^2\theta+\cot^2\theta-\cos^2\theta\tan^2\theta-\sin^2\theta\cot^2\theta$$

$$=\tan^2\theta+\cot^2\theta-\cos^2\theta\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta\times\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$ 〔公式4, 5〕

$$=\tan^2\theta+\cot^2\theta-\sin^2\theta-\cos^2\theta$$

$$=\tan^2\theta+\cot^2\theta-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\tan^2\theta+\cot^2\theta-1.$$

(viii) $\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\times\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ 〔公式 1. 2〕

$$=\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$$ 〔公式 6〕

$$=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}=\sec^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta$$ 〔公式 1. 2〕

(ix) $2\sec^2\theta=\sec^2\theta+\sec^2\theta$

$$=\sec^2\theta-\sec^2\theta\tan^2\theta+\sec^2\theta+\sec^2\theta\tan^2\theta$$

〔$\sec^2\theta\tan^2\theta$ ヲ加ヘテ減タノデアル〕

$$=\sec^2\theta(1-\tan^2\theta)+\sec^2(1+\tan^2\theta)$$

$$=(1+\tan^2\theta)(1-\tan^2\theta)+\sec^2\theta\times\sec^2\theta$$ 〔公式 7〕

$$=1-\tan^4\theta+\sec^4\theta.$$

(x) $(\sin\theta+\cos\theta-1)^2$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+1+2\sin^2\theta\cos\theta-2\sin\theta-2\cos\theta$$

〔平方シタノデアル〕

$$=1+1+2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta-2\cos\theta$$ 〔$\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$〕

$$=2(1-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)$$

$$=2\{(1-\sin\theta)-\cos\theta(1-\sin\theta)\}$$

$$=2(1-\sin\theta)(1-\cos\theta).$$

第四編

二角ニ關スル公式

25. 貳角之和之正弦及ビ餘弦.

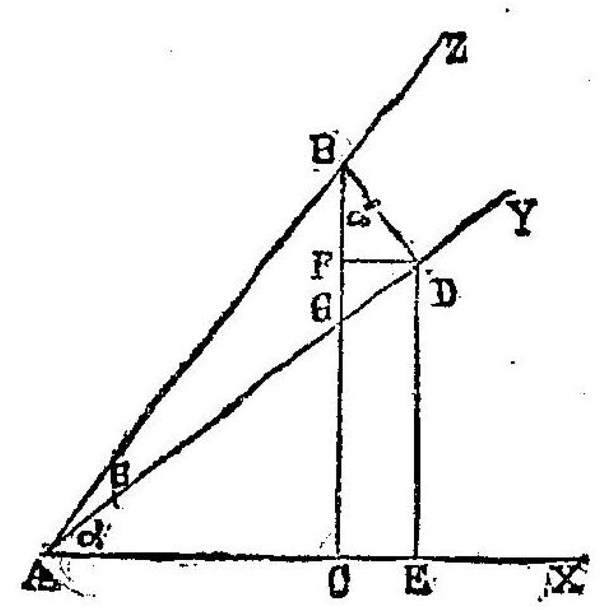
α,β ハ任意ノ貳角ナリトスル片ハ

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (39)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (40)$$

〔證〕 次ノ如キ三ツノ場合アリ

(第壹) α,β ハ共ニ正ニシテ $\alpha+\beta$ ハ 90° ヨリ小ナルトキ



$\angle XAY=\alpha$, $\angle YAZ=\beta$ ナラシム, 然ル片ハ $\angle XAZ=\alpha+\beta$ トナル, ソコデ AZ ノ上ニ壹點 B ヲ取リ B ヨリ AX, AY ニ下セル垂線ノ趾ヲ夫々 C,D トシ, D ヨリ BC,AX ニ下セル垂線ノ趾ヲ夫々 F, E トス

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{BC}{AB}=\frac{FC+BF}{AB}=\frac{DE+BF}{AB}$$ ($\because$ DECF ハ矩形)

$$=\frac{DE}{AB}+\frac{BF}{AB}=\frac{DE}{AD}\times\frac{AD}{AB}+\frac{BF}{BD}\times\frac{BD}{AB}$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos DBF\sin\beta$$

今 BC, AD ノ交點ヲ G トスレバ ΔBGD, ΔAGC ニ於テ $\angle BDG=\angle GCA$,＝直角, $\angle BGD=\angle AGC$

$$\therefore\ \angle GBD=\angle GAC=\alpha$$ (平面幾何)

$$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

又 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AE-CE}{AB}$ (前頁ノ圖ヲ見ヨ)

$$=\frac{AE-DF}{AB}=\frac{AE}{AB}-\frac{DF}{AB}$$

$$=\frac{AE}{AD}\times\frac{AD}{AB}-\frac{DF}{BD}\times\frac{BD}{AB}$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

(第貳) $\alpha\ \beta$ ハ共ニ正ノ鋭角ニシテ $\alpha+\beta$ ハ $90°$ ヨリ大ナル場合.

今 $\alpha+\beta>90°$ デアルカラ $90°-\alpha, 90°-\beta$ トイフ二角ノ和ハ $90°$ ヨリ小デアル 故ニ(第一)ノ場合ニヨリ

$$\sin\{(90-\alpha)+(90-\beta)\}=\sin(90°-\alpha)\cos(90°-\beta)$$
$$+\cos(90°-\alpha)\sin(90°-\beta)$$
$$=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta \quad \text{〔公式 15.16〕}$$

但シ $\sin\{90-\alpha)+(90-\beta)\}=\sin\{180°-(\alpha+\beta)\}=\sin(\alpha+\beta)$〔公式27〕

$$\therefore \quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

又第一ノ場合ヨリシテ

$$\cos\{(90°-\alpha)+(90°-\beta)\}=\cos(90°-\alpha)\cos(90°-\beta)$$
$$-\sin(90°-\alpha)\sin(90°-\beta)$$
$$=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta \quad \text{〔公式 15.16〕}$$

然ルニ $\cos\{(90-\alpha)+(90-\beta)\}=\cos\{180°-(\alpha+\beta)\}=-\cos(\alpha+\beta)$
〔公式 27〕

$$\therefore \quad -\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta$$

$$\therefore \quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

(第三) $\alpha\ \beta$ ハ正ニシテ任意ノ大サナル場合.

先ヅ(39)(40)トイフ公式ハ $\alpha\ \beta$ ガ或ル角度ナル時眞ナレバ α, 或

ハ β ガ $90°$ 增シタル時モ亦眞ナルコヲ證明ショー:

今 $\beta+90°=\beta'$ トスレバ

$$\sin(\alpha+\beta')=\sin(\alpha+\beta+90)$$
$$=\cos(\alpha+\beta) \quad \text{〔公式21〕}$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

但シ $\cos\beta=\sin(90+\beta)$〔公式 21〕$=\sin\beta'$

又 $\sin\beta=-\cos(90+\beta)$〔公式 22〕$=-\cos\beta'$

$$\therefore \quad \sin(\alpha+\beta')=\cos\alpha\sin\beta'-\sin\alpha(-\cos\beta')$$
$$=\cos\alpha\sin\beta'+\sin\alpha\cos\beta'$$
$$=\sin\alpha\cos\beta'+\cos\alpha\sin\beta'$$

同樣ニ $\cos(\alpha+\beta')=\cos\alpha\cos\beta'-\sin\alpha\sin\beta'$

斯クノ如ク(39)(40)ハ α, β ガ或ル角度ノ時眞ナレバ β ガ $90°$ 增シタ時モ眞デアルトイフコヲ證明シ得タ.

同樣ニ(39)(40)ハ α, β ガ或ル角度ノ時眞ナレバ α ガ $90°$ 增シタ時及ビ α. β 共ニ $90°$ 增シタ時モ眞デアルトイフコヲ證明シ能フノデアル.

然ルニ(39)(40)ハ α, β ガ $0°$ ト $90°$ トノ間ニアル時眞ナルコヲ第一第二ニヨリテ證明シ得タ.

故ニ α, β ガ $0°$ ト $180°$ トノ間ニアル時(39)(40)眞デアル,

α, β ガ $0°$ ト $180°$ トノ間ニアル時(39)(40)ハ眞デアルトイフコガ判カレバ α, β ガ各 $90°$ ツヽ增シテ $0°$ ト $270°$ トノ間ニアル時モ(39)(40)ハ眞デアルトイフコガ判ル,

逐テ斯クノ如クスレバ α, β ガ如何ナル大サノ時デモ(39)(40)ハ眞デアルトイフコガ判ルノデル

(第四) α, β ノ一ツ若クハ雙方ガ負トナル場合

今 α ハ負角ナリトス.

然ルトキハ $n\times360°+\alpha$ ガ正トナル様ニ n ヲ定ムルコヲ得ル,

ソコデ $360°\times n+\alpha$ ハ正デアルカラ(第三)ヨリ次ノ如クナル

$$\sin\{(360°\times n+\alpha)+\beta\}=\sin(360°\times n+\alpha)\cos\beta+\cos(360°\times n+\alpha)\sin\beta \quad (a)$$

然ルニ $\sin\{(360°\times n+\alpha)+\beta\}=\sin\{360°\times n+\alpha+\beta\}=\sin(\alpha+\beta)$

又 $\sin(360°\times n+\alpha)=\sin\alpha$

$\cos\{360°\times n+\alpha\}=\cos\alpha$

故ニ (a)式ハ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ トナル,

即チ α ガ負トナッテモ (39) ハ眞デアル.

同様ニ α,β ノ壹ツ若クハ双方ガ負トナッテモ (39) (40) ハ眞デアルトイフコヲ証明シ能フノデアル

是ニ於テ (39) (40) ハ α,β ガ如何ナル角度ノトキデモ眞デアルトイフコノ証明ガ出來タノデアル

26. 二角之差之正弦.餘弦

α,β ハ任意ノ二角ナリトス然ルトキハ

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad (41)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad (42)$$

(證) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\{\alpha+(-\beta)\}$

$=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$ 〔25 第四ヨリ〕

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$ 〔公式 9.10〕

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

又 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\{\alpha+(-\beta)\}$

$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$ 〔25第四ヨリ〕

$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha(-\sin\beta)$ 〔公式 9.10〕

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

27. 二角之和及差之正切.

α,β ヲ任意ノ二角トスレバ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad (43)$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad (44)$$

〔證〕 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$

$=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$ 〔(39)及ビ(40)〕

分母子ヲ $\cos\alpha\cos\beta$ ニテ除スレバ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

同様ニ $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

例題

1. $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$ ナルトキ $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ ヲ求メヨ.

〔解〕 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\therefore\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{5^2}{13^2}}=\frac{12}{13}$

又 $\cos\beta=\frac{4}{5}$ $\therefore\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}=\sqrt{\frac{25-16}{25}}=\frac{3}{5}$

ソコデ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{20}{65}+\frac{36}{65}=\frac{56}{65}$$

同様ニ $\cos(\alpha+\beta)=\frac{63}{65}$ 〔學者自ラ之ヲ計算セヨ〕

2. $\cos\alpha=\frac{40}{41}$, $\cos\beta=\frac{60}{61}$ ナルトキ $\cos(\alpha+\beta)$; $\cos(\alpha-\beta)$ ヲ求ム

〔解〕 省略,〔學生諸子前題ニ傚ツテ自ラ之レヲ解セヨ〕

$$\text{答}\quad \sin(\alpha+\beta)=\frac{980}{2501}$$

3. $\tan\alpha=\frac{1}{2}$　$\tan\beta=\frac{1}{3}$ ナルトキ $\alpha+\beta=45^\circ$ ナルコトヲ証セヨ

但シ α,β ハ共ニ鋭角ナリトス,

〔解〕 $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1.$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=45^\circ$$

4. 15° ノ圓函數ヲ求メヨ.

〔解〕 $$\sin15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)$$
$$=\sin60^\circ\cos45^\circ-\cos60^\circ\sin45^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos15^\circ=\cos(60^\circ-45^\circ)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$ 〔上ト同様ニ〕

$$\tan15^\circ=\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\div\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$
$$=2-\sqrt{3}.$$

以下省略ス

5. 75° ノ圓函數ヲ求ム

〔解〕 $$\sin75^\circ=\sin(90^\circ-15^\circ)=\cos15^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$
$$\cos75^\circ=\cos(90^\circ-15^\circ)=\sin15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$ 以下略ス.

6. 次ノ二式ヲ證明セヨ

(a) $\sin\beta=\sin\alpha\cos(\beta-\alpha)+\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)$.

(b) $\cos\beta=\cos\alpha\cos(\beta-\alpha)-\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)$.

〔解〕 (a) $\beta=\alpha+(\beta-\alpha)$ トシテ差支ナイノデアル,

$$\therefore\quad \sin\beta=\sin\{\alpha+(\beta-\alpha)\}$$
$$=\sin\alpha\cos(\beta-\alpha)+\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)$$ 〔公式 (39)〕

(b) $$\cos\beta=\cos\{\alpha+(\beta-\alpha)\}$$
$$=\cos\alpha\cos(\beta-\alpha)-\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)$$ 〔公式 (40)〕

7. 次ノ二式ヲ證明セヨ

(a) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$
$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

(b) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$
$=\cos^2\beta-\sin^2\alpha.$

〔解〕 $$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta \qquad (a)$$

〔但シ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ニヨル〕

偖テ之ヲ $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ ニ直ソートスルノデアルガ,此ノ $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ ハ sin バカリデアツテ cos ヲ含ムデ居ラヌカラ前ノ(a)式ノ中ノ $\cos^2\beta$, $\cos^2\alpha$ ヲ sin ニ直サネバナラヌノデアル.即チ

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta$$
$$=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta$$
$$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

又 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ ヲ $\cos^2\beta-\cos^2\alpha$ ニ直スニハ前ノ(a)式ノ中ノ

sin ヲ cos ニ直セバヨロシイノデアル即チ

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=(1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta-\cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)$$
$$=\cos^2\beta-\cos^2\beta\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cos^2\beta$$
$$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$$

(b) 前ノ様ナ考ヲ以テ出來ルノデアル,即チ

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$$
$$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$$
$$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$$

又 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$
$$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$$
$$=(1-\sin^2\beta)\cos^2\beta-\sin^2\alpha(1-\cos^2\beta)$$
$$=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$$

8. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}$ ヲ簡短ニセヨ

〔解〕 本式$=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\dfrac{\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$

$+\dfrac{\sin\gamma\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}$ 〔公式(41)〕

然ルニ $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}$ デアルカラ上ノ各分數ヲ變ズレバ

本式$=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\gamma}{\sin\gamma}-\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$

$=\cot\beta-\cot\alpha+\cot\gamma-\cot\beta+\cot\alpha-\cot\gamma=0.$

9. $\tan\alpha\pm\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ ヲ證セヨ 〔公式( )〕

〔解〕 $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$ 〔公式(7)〕

$=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ 〔公式(39)〕

同樣ニ $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

10. $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ ヲ證セヨ

〔解〕 左邊ノ分母子ノ $\tan\alpha$ ヲ $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ トシ, $\tan\beta$ ヲ $\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$ トシテ簡短ニスレバ公式(39)(41)ニヨリ右邊ノ通リニナルノデアル

11. 次ノ二式ヲ證明セヨ,

(a) $\tan(\alpha+45^\circ)=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ (b) $\tan(\alpha-45^\circ)=\dfrac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}$

〔解〕 (a) $\tan(\alpha+45^\circ)=\dfrac{\tan\alpha+\tan45^\circ}{1-\tan\alpha\tan45^\circ}$ 〔公式(43)〕

$=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}$ ∵ $\tan45^\circ=1.$

(b) (a) ト同樣ニシテ出來ル, 學者自ラ解セヨ

12. $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$ ヲ證セヨ

〔解〕 $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

此ノ分數ノ分母子ヲ $\sin\alpha\sin\beta$ ニテ除スレバ

本式 $=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$

同樣ニ $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$

13. $\cos(m+n)\alpha\times\cos(m-n)\alpha+\sin^2 m\alpha=\cos^2 n\alpha$ ヲ證セヨ

〔解〕 $\cos(m+n)\alpha\times\cos(m-n)\alpha+\sin^2 m\alpha$

$=\cos(m\alpha+n\alpha)\times\cos(m\alpha-n\alpha)+\sin^2 m\alpha.$

$$=(\cos m\alpha\cos n\alpha-\sin m\alpha\sin n\alpha)(\cos m\alpha\cos n\alpha+\sin m\alpha\sin n\alpha)+\sin^2 m\alpha.$$

$$=\cos^2 m\alpha\cos^2 n\alpha-\sin^2 m\alpha\sin^2 n\alpha+\sin^2 m\alpha.$$

$$=\cos^2 m\alpha\cos^2 n\alpha-\sin^2 m\alpha(1-\cos^2 n\alpha)+\sin^2 m\alpha.$$

$$=\cos^2 m\alpha\cos^2 n\alpha-\sin^2 m\alpha+\sin^2 m\alpha\cos^2 n\alpha+\sin^2 m\alpha.$$

$$=\cos^2 m\alpha\cos^2 n\alpha+\sin^2 m\alpha\cos^2 n\alpha-\sin^2 m\alpha+\sin^2 m\alpha.$$

$$=\cos^2 n\alpha(\cos^2 m\alpha+\sin^2 m\alpha)$$

$$=\cos^2 n\alpha.$$

14. 次ノ二式ヲ証セヨ

(a) $\sin(\alpha+45^\circ)=\sin 45^\circ(\sin\alpha+\cos\alpha)$

(b) $\cos(\alpha+45^\circ)=\cos 45^\circ(\cos\alpha-\sin\alpha)$

〔解〕 $\sin(\alpha+45^\circ)=\sin\alpha\cos 45^\circ+\cos\alpha\sin 45^\circ.$

$$=\sin\alpha\sin 45^\circ+\cos\alpha\sin 45^\circ \quad \because \cos 45^\circ=\sin 45^\circ$$

$$=\sin 45^\circ(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

同様ニ $\cos(\alpha+45^\circ)=\cos 45^\circ(\cos\alpha-\sin\alpha)$

28. 倍角之圓函數

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \quad (45)$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \quad (46)$$

$$=1-2\sin^2\alpha \quad (47)$$

$$=2\cos^2\alpha-1 \quad (48)$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \quad (49)$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \quad (50)$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha \quad (51)$$

〔證〕 $\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha.$

$=2\sin\alpha\cos\alpha$ 〔(45)ノ證〕

$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 〔(46)ノ證〕

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=1-2\sin^2\alpha$ 〔(47)ノ證〕

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$

$=2\cos^2\alpha-1.$ 〔(48)ノ證〕

$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$

$=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 〔(49)ノ證〕

$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha.$ 〔公式(9)〕

$=2\sin\alpha\cos\alpha\times\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$ 〔公式(45),(47)〕

$=2\sin\alpha\times\cos^2\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha.$

$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha.$

$=2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha.$

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$ 〔(50) ノ證〕

$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha$ 〔公式 (40)〕

$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\times\sin\alpha$ 〔公式 (18), (45)〕

$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha$

$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$ 〔(51) ノ證〕

例 題

1. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ ヲ證セヨ

〔解〕 $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha-1)}$ 〔公式 (45) (48)〕

$=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

〔注意〕 $\cos 2\alpha$ ハ $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ トモナリ, $1-2\sin^2\alpha$ トモナリ又ハ $2\cos^2\alpha-1$ トモナル, デ問題ニヨリテ都合ノヨキモノヲ撰定シナクテハナラナイノデアル, 本題ニ於テハ $\cos 2\alpha$ ヲ $2\cos^2\alpha-1$ トシタ1ガ都合ガヨイノデアル 何ントナレバ斯クスレバ分母ノ始メニアル1ガ減去サルヽカラデアル.

2. $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\tan\alpha$ ヲ證セヨ.

〔證〕 $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\dfrac{1-(1-2\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}$ 〔公式 (47) (45)〕

$=\dfrac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

3. $\dfrac{\sec 2\alpha-1}{\sec 2\alpha+1}=\tan^2\alpha$ ヲ證セヨ.

〔證〕 $\dfrac{\sec 2\alpha-1}{\sec 2\alpha+1}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos 2\alpha}-1}{\dfrac{1}{\cos 2\alpha}+1}$ 〔公式 (2)〕

$=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ {前ノ分數ノ分母子ニ $\cos 2\alpha$ ヲ乘ジタノデアル

$=\dfrac{1-(1-2\sin^2\alpha)}{1+(2\cos^2\alpha-1)}$ 〔公式 (47) (48)〕

$=\dfrac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha.$

4. 次ノ二式ヲ證明セヨ.

(a) $\operatorname{cosec}2\alpha-\cot 2\alpha=\tan\alpha.$ (b) $\operatorname{cosec}2\alpha+\cot 2\alpha=\cot\alpha$

〔證〕 (a) (b) 共 左邊ヲ $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ニ化スレバ (a) ハ 2 題ノ通リニナリ, (b) ハ 1 題ノ通リニナル, 學者自ラ之レヲ試ミヨ.

5. $2\cot 2\alpha=\cot\alpha-\tan\alpha$ ヲ證セヨ

〔解〕 $2\cot 2\alpha=\dfrac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\dfrac{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}$ 〔公式 (46) (45)〕

$=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$

$=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\cot\alpha-\tan\alpha$

6. 次ノ諸式ヲ證セヨ.

(a) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$　(b) $\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$

〔證〕 (a) 分母 $\sin(\alpha+\beta)$ ニ於テ $\alpha+\beta$ ヲ $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ ノ 2 倍ト考フルトキハ公式 **45** ニヨリ $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ トナル，又分子ハ公式ニヨリ積ノ形チニ變スルトキハ次ノ通リデアル.

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$

(b) モ (a) ト同様デアル

7. 次ノ二式ヲ證セヨ.

(a) $\sec 2\alpha=\dfrac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.　(b) $\operatorname{cosec} 2\alpha=\dfrac{1+\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$.

〔證〕 (a) $\sec 2\alpha=\dfrac{1}{\cos 2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$　〔公式 **46**〕

$$=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$ 〔前ノ分數ノ分母子ヲ $\cos^2\alpha$ ニテ除シタノデアル〕

$$=\frac{\sec^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{1+\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$ 〔公式(7)〕.

(b) $\operatorname{cosec} 2\alpha=\dfrac{1}{\sin 2\alpha}=\dfrac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$　〔公式 (45)〕.

$$=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$ 〔前ノ分數ノ分母子ヲ $\cos^2\alpha$ ニテ除シタノデアル〕

$$=\frac{\sec^2\alpha}{2\tan\alpha}=\frac{1+\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$$ 〔公式(7)〕

8. $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\sec 2\alpha-\tan 2\alpha$ ヲ証セヨ.

〔證〕 右邊ノ $\sec 2\alpha$ ハ $\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$ ニシテ，$\tan 2\alpha$ ハ $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ トナリ共ニ $\cos 2\alpha$ トイフ分母ヲ有ツテ居ル，ソレダカラ左邊ノ分母ヲ $\cos 2\alpha$ ニスル工夫ヲシナクテハナラナイ． ソコデ左邊ノ分母ヲ $\cos 2\alpha$ ニスルニハ分母子ニ $\cos\alpha-\sin\alpha$ ヲ乘ジタラヨロシイノデアル，何トナレバ斯クスルトキハ左邊ノ分母ハ $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ トナリ公式 **46** ニヨリ $\cos 2\alpha$ トナルカラデアル〔凡ヘテ斯クノ如ク，ヨク右邊ノ狀況ヲ觀察シテ演算シナクテハイケナイノデアル〕

$$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{(\cos\alpha\mp\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$=\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\ 〔公式(6)〕=\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}〔公式(45)〕$$

$$=\frac{1}{\cos 2\alpha}-\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\sec 2\alpha-\tan 2\alpha.$$

9. 次ノ式ヲ證セヨ

(a) $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\cos 2\alpha\left(1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right)$

(b) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha$.

〔證〕 (a) $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=(\cos^4\alpha)^2-(\sin^4\alpha)^2$

$=(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)$

$=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)$

$=\cos 2\alpha(\cos^4\alpha+\sin^4\alpha)$　〔公式(6)及(46)〕.

$=\cos 2\alpha\{\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\}$

$=\cos 2\alpha\{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\}$

$=\cos 2\alpha\{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\}$　〔公式(6)〕

$=\cos 2\alpha\{1-\dfrac{1}{2}\times 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\}=\cos 2\alpha\{1-\dfrac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2\}$

$=\cos 2\alpha\{1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\}.$ 〔公式 (45)〕

(b) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=(\cos^2\alpha)^3+(\sin^2\alpha)^3.$

$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha)$

(但シ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ =ヨツタノデアル)

$=\cos^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha$ $\because$ $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

$=\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\cos^4\alpha-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha$

$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-3\cos^2\alpha\sin^2\alpha=1-\frac{3}{4}\times 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$=1-\frac{3}{4}\times(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$ 〔公式 (45)〕

10. 次式ヲ證セヨ

(a) $\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha-8\sin^3\alpha\cos\alpha.$

(b) $\cos 4\alpha=1-8\cos^2\alpha+8\cos^4\alpha.$

(c) $\sin 5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha.$

(d) $\cos 5\alpha=5\cos\alpha-20\cos^3\alpha+16\cos^5\alpha.$

(e) $\sin 6\alpha=\cos\alpha(6\sin\alpha-32\sin^3\alpha+32\sin^5\alpha).$

(f) $\cos 6\alpha=-1+18\cos^2\alpha-48\cos^4\alpha+32\cos^6\alpha.$

〔證〕 (a) $\sin 4\alpha=\sin(2\alpha\times 2)=2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$ 〔公式 (45)〕

$=2\times 2\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)$ 〔公式 (45) 及 (47)〕

$=4\sin\alpha\cos\alpha-8\sin^3\alpha\cos\alpha$

(b) $\cos 4\alpha=\cos(2\alpha\times 2)=1-2\sin^2 2\alpha.$ 〔公式 (47)〕

$=1-2(2\sin\alpha\cos\alpha)^2$ 〔公式 (45)〕

$=1-2\times 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-8(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha$ 〔公式 (6)〕

$=1-8\cos^2\alpha+8\cos^4\alpha.$

(c) $\sin 5\alpha=\sin(\alpha+4\alpha)=\sin\alpha\cos 4\alpha+\cos\alpha\sin 4\alpha$ 〔公式 39〕

$=\sin\alpha\cos(2\alpha\times 2)+\cos\alpha\sin(2\alpha\times 2)$

$=\sin\alpha(1-2\sin^2 2\alpha)+\cos\alpha\times 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$ 〔公式 (45) (47)〕

$=\sin\alpha\{1-2(2\sin\alpha\cos\alpha)^2\}+2\cos\alpha\times 2\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)$

〔公式 (45) (47)〕

$=\sin\alpha\{1-2\times 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\}+4\sin\alpha\cos^2\alpha(1-2\sin^2\alpha)$

$=\sin\alpha-8\sin^3\alpha\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos^2\alpha-8\sin^3\alpha\cos^2\alpha$

$=\sin\alpha-16\sin^3\alpha\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos^2\alpha$

$=\sin\alpha-16\sin^3\alpha(1-\sin^2\alpha)+4\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$

$=\sin\alpha-16\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha+4\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$ 〔前式ノ同類項ヲ集メタノデアル〕

(d) $\cos(\alpha+4\alpha)$ トシテ前ノ通リニスレバイヽノデアル，學生各自試ミニ之レヲ解セヨ．

(e) $\sin 6\alpha=\sin(2\alpha\times 3)=3\sin 2\alpha-4\sin^3 2\alpha$ 〔公式 (50)〕

$=3\times 2\sin\alpha\cos\alpha-4(2\sin\alpha\cos\alpha)^3$ 〔公式 (45)〕

$=6\sin\alpha\cos\alpha-4\times 8\sin^3\alpha\cos^3\alpha$

$=\cos\alpha\{6\sin\alpha-32\sin^3\alpha\cos^2\alpha\}$

$=\cos\alpha\{6\sin\alpha-32\sin^3\alpha(1-\sin^2\alpha)\}$

$=\cos\alpha\{6\sin\alpha-32\sin^3\alpha+32\sin^5\alpha\}.$

(f) $\cos 6\alpha=\cos(3\alpha\times 2)=2\cos^2 3\alpha-1$ 〔公式 (48)〕

$=2(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)^2-1$ 〔公式 (51)〕

$=2\{16\cos^6\alpha-24\cos^4\alpha+9\cos^2\alpha\}-1$

$=32\cos^6\alpha-48\cos^4\alpha+18\cos^2\alpha-1=$ 右邊

11. 次式ヲ證明セヨ

(a) $4\sin^3\alpha\cos^3\alpha+4\cos^3\alpha\sin^3\alpha=3\sin 4\alpha$

(b) [illegible] $+\cos\alpha\cos^2\alpha=\cos^3 2\alpha.$

〔證〕 (a) $4\sin3\alpha\cos^3\alpha+4\cos3\alpha\sin^3\alpha$

$=4(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)\cos^3\alpha+4(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)\sin^3\alpha$ 〔公式(50),(51)〕

$=12\sin\alpha\cos^3\alpha-16\sin^3\alpha\cos^3\alpha+16\sin^3\alpha\cos^3\alpha-12\cos\alpha\sin^3\alpha$

$=12\sin\alpha\cos^3\alpha-12\cos\alpha\sin^3\alpha$

$=12\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=6\times2\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha$ 〔公式(46)〕

$=6\sin2\alpha\cos2\alpha$ 〔公式(45)〕

$=3\times2\sin2\alpha\cos2\alpha=3\sin(2\alpha\times2)=3\sin4\alpha$ 〔公式(45)〕

(b) $\sin3\alpha\sin^3\alpha+\cos3\alpha\cos^3\alpha$

$=(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)\sin^3\alpha+(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)\cos^3\alpha$ 〔公式(50),(51)〕

$=3\sin^4\alpha-4\sin^6\alpha+4\cos^6\alpha-3\cos^4\alpha$

$=4(\cos^6\alpha-\sin^6\alpha)-3(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha)$

$=4[(\cos^2\alpha)^3-(\sin^2\alpha)^3]-3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$=4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)-3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$ 〔公式(6)〕

$=4\cos2\alpha[\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha]-3\cos2\alpha$ 〔公式(46)〕

$=\cos2\alpha[4(\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)-3]$

$=\cos2\alpha[4(\cos^4\alpha+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\alpha)-3]$

$=\cos2\alpha[4\{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2-\cos^2\alpha\sin^2\alpha\}-3]$

$=\cos2\alpha[4(1-\cos^2\alpha\sin^2\alpha)-3]$

$=\cos2\alpha[1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha]=\cos2\alpha[1-(2\sin\alpha\cos\alpha)^2]$

$=\cos2\alpha[1-\sin^22\alpha]$ 〔公式(45)〕

$=\cos2\alpha\times\cos^22\alpha=\cos^32\alpha$

12. $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot2\alpha$ ナルコトヲ證セヨ,

〔證〕 $\cot\alpha-\tan\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{2\cos2\alpha}{\sin2\alpha}$ 〔公式(45)(46)〕$=2\cot2\alpha$

13. $1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha=2\cos\alpha(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1)$ ヲ證セヨ

〔證〕 $1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha$

$=1+\cos\alpha+(2\cos^2\alpha-1)+4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ 〔公式(48),(51)〕

$=4\cos^3\alpha+2\cos^2\alpha-2\cos\alpha=2\cos\alpha(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1).$

14. $\tan(45-\alpha)=\dfrac{1-\sin2\alpha}{\cos2\alpha}$ ナルコトヲ證セヨ.

〔證〕 $\tan(45-\alpha)=\dfrac{\tan45-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan45}=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ $(\because\ \tan45=1).$

$=\dfrac{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ 〔此ノ式ノ分母子ヲ $\cos\alpha$ ヲ乘ズレバ、次ノ如シ〕

$=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$ 〔分母子ニ $\cos\alpha-\sin\alpha$ ヲ乘ズレバ次ノ如シ〕

$=\dfrac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$=\dfrac{1-\sin2\alpha}{\cos2\alpha}$ 〔公式(6)(45)(46)〕

15. $\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}\left(1+\cot\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$ ナルコトヲ證セヨ.

〔證〕 $\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{1-\left(1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}$ 〔α ヲ $\frac{1}{2}\alpha$ ノ2倍ト考ヘ公式(45)(47)ニヨツタノデアル〕 此式ハ公式トシテ用フルヲ可トス

$=\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$ $\left(\because\ \sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1\right)$

$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$=\dfrac{\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\cot\dfrac{\alpha}{2}\right)^2.$

16. 18° ノ圓函數ヲ求ム.

〔解〕 $18°\times2+18°\times3=36°+54°=90°$

$\therefore\ \sin18°\times2=\cos18°\times3$ 〔公式(15)〕

$\therefore\ 2\sin18°\cos18°=4\cos^3 18°-3\cos18°$ 〔公式(45)(51)〕

$\therefore\ 2\sin18°=4\cos^2 18°-3$ 〔cos18 ニテ除シタノデアル〕

$\therefore\ 2\sin18°=4(1-\sin^2 18°)-3$

$\therefore\ 2\sin18°=4-4\sin^2 18°-3$

$\therefore\ 4\sin^2 18°+2\sin18°-1=0$

故ニ代數學二次方程式ノ公式ニヨリ sin18° ハ次ノ通リデアル，但シ sin18° ヲ x ト考ヘテ計算スルノデアル.

$$\sin18°=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times4\times(-1)}}{2\times4}=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{8}$$

$$=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

然ルニ sin18 ハ正デアル，故ニ上ノ「±」ノ中ノ「−」ハ捨ツルノデアル

即 $\mathbf{\sin18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$.

又 $\cos18°=\sqrt{1-\sin^2 18}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}}$

$$=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$$

$\therefore\ \cos18°=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ 以下略ス

17. 36° ノ圓函數ヲ求ム.

〔解〕 $\cos36=\cos(18°\times2)=1-2\sin^2 18°$ 〔公式(47)〕

$=1-2\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$ 〔前題ニヨル〕

$=1-2\times\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}=1-\frac{6-2\sqrt{5}}{8}=\frac{2+2\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. (以下略ス)

29. 正弦餘弦之乘積之公式

$$\mathbf{2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)} \quad (52)$$

$$\mathbf{2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)} \quad (53)$$

$$\mathbf{2\cos A\cos B=\cos(A-B)+\cos(A+B)} \quad (54)$$

$$\mathbf{2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)} \quad (55)$$

〔證〕 今公式 (39) (40) ニヨリ次ノ二式ヲ得

$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$

$\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$

ソコデ (a) (b) 貳式ヲ加フレバ

$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)\cdots\cdots$ 〔(52) ノ證〕

$(a)-(b)$ $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$ 〔(53) ノ證〕

又公式 (41) (42) ヨリ次ノ二式ヲ得

$\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$

$\cos A\cos B+\sin A\sin B=\cos(A-B)\cdots\cdots\cdots\cdots(d)$

ソコデ (c) ニ (d) ヲ加フル時ハ

$2\cos A\cos B=\cos(A-B)+\cos(A+B)\cdots\cdots$ 〔(54) ノ證〕

又 $(d)-(c)$ $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$ 〔(55) ノ證〕

30. 正弦餘弦之和差之公式

$$\mathbf{\sin S+\sin T=2\sin\frac{S+T}{2}\cos\frac{S-T}{2}}\cdots\cdots\cdots(56)$$

$$\mathbf{\sin S-\sin T=2\cos\frac{S+T}{2}\sin\frac{S-T}{2}}\cdots\cdots\cdots(57)$$

$$\mathbf{\cos T+\cos S=2\cos\frac{S+T}{2}\cos\frac{S-T}{2}}\cdots\cdots\cdots(58)$$

$$\mathbf{\cos T-\cos S=2\sin\frac{S+T}{2}\sin\frac{S-T}{2}}\cdots\cdots\cdots(59)$$

〔證〕 今 $A+B=S \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$A-B=T \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

トス (1)ニ(2)ヲ加ヘ $2A=S+T \quad \therefore A=\dfrac{S+T}{2} \cdots\cdots (3)$

又(1)ヨリ(2)ヲ減ジ $2B=S-T \quad \therefore B=\dfrac{S-T}{2} \cdots\cdots (4)$

又公式(52)ヨリ $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$

此式ニ(1)(2)(3)(4)ヲ代用シテ

$$\sin S+\sin T=2\sin\frac{S+T}{2}\cos\frac{S-T}{2} \qquad \text{〔56ノ證〕}$$

又公式(53)ヨリ $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$

此式ニ(1)(2)(3)(4)ヲ代用スル時ハ

$$\sin S-\sin T=2\cos\frac{S+T}{2}\sin\frac{S-T}{2} \cdot\cdot \qquad \text{〔(57)ノ證〕}$$

之レト同様ニ (1)(2)(3)(4)ヲ公式(54)(55)ニ代用シテ公式(58)及ビ公式(59)ヲ得

例　題

1. 次ノ二式ヲ証セヨ

(a) $\sin(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

(b) $\cos(60^\circ-\alpha)+\cos(60^\circ+\alpha)=\cos\alpha$

〔證〕 (a) $\sin(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}\{(30^\circ+\alpha)+(30^\circ-\alpha)\}\cos\tfrac{1}{2}\{(30^\circ+\alpha)-(30^\circ-\alpha)\}$$

〔公式 56〕

$=2\sin 30\cos\alpha$

$=2\times\frac{1}{2}\times\cos\alpha=\cos\alpha$

(b) ハ公式 58 ヲ用ヒテ(a)ト同様ニシテ出來ルノデアル

2. 次ノ二式ヲ證明セヨ

(a) $\sin 42^\circ+\sin 18^\circ=\cos 12^\circ$

(b) $\cos 10^\circ-\cos 50^\circ=\sin 20$

〔證〕 (a) $\sin 42^\circ+\sin 18^\circ=2\sin\dfrac{42^\circ+18^\circ}{2}\cos\dfrac{42^\circ-18^\circ}{2}$〔公式 56〕

$$=2\sin 30^\circ\cos 12^\circ=2\times\tfrac{1}{2}\times\cos 12^\circ=\cos 12^\circ$$

(b) ハ公式 59)ニヨリ(a)ノ如クニシテ出來ル.

3. 次式ヲ證セヨ

(a) $\cos 3A+\cos 5A=2\cos 4A\cos A$

(b) $\sin 6A-\sin 2A=2\cos 4A\sin 2A$

〔證〕 (a) $\cos 3A+\cos 5A=2\cos\dfrac{5A+3A}{2}\cos\dfrac{5A-3A}{2}$ 〔公式 53〕

$$=2\cos 4A\cos A$$

(b) 公式 57)ニヨリ(a)ノ如クニシテ出來ル

4. $\cos(120^\circ+A)+\cos(120^\circ-A)+\cos A=0$ ナルコヲ証セヨ.

〔證〕 左邊ノ初ノ二項ヲ公式 58)ニヨリ積ニ化スル時ハ

$$左邊=2\cos\tfrac{1}{2}\{(120^\circ+A)+(120^\circ-A)\}\cos\tfrac{1}{2}\{(120^\circ+A)-(120^\circ-A)\}$$
$$+\cos A$$

$=2\cos 120^\circ\cos A+\cos A$

$=2\times(-\frac{1}{2})\cos A+\cos A$

$(\because \cos 120^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2})$

$=-\cos A+\cos A=0$

5. $\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 140^\circ=0$ ナルヲ証セヨ

〔證〕 $左邊=2\cos\dfrac{80^\circ+40^\circ}{2}\cos\dfrac{80^\circ-40^\circ}{2}+\cos 140^\circ$ 〔公式 53〕

$=2\cos 60^\circ\cos 20^\circ+\cos(180^\circ-20^\circ)$

$$=2\times\tfrac{1}{2}\times\cos20^\circ-\cos20^\circ \qquad (\because\ \cos60^\circ=\tfrac{1}{2})$$

$$=\cos20^\circ-\cos20^\circ=0$$

6. 次式ヲ証セヨ

(a) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$ (b) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

〔證〕 (a) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$ 〔公式 56, 57〕

$=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cot\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 〔公式 4, 5〕

$=\dfrac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}$ 〔公式 3〕

(b) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\dfrac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$ 〔公式 57, 59〕

$=\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

7. 次ノ二式ヲ證セヨ

(a) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$ (b) $\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$

〔證〕 (a) 左邊ノ分母 $\sin(\alpha+\beta)$ ニ於テ $\alpha+\beta$ ヲ $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ノ2倍ト考フルトキハ公式 45 ニヨリ $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ トナル. 又分子ハ公式 56 ニヨリ積ニ化スルトキハ次ノ通リデアル

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

(b) モ (a) ト同樣ニスレバヨロシイノデアル 即チ分母ハ公式45ニヨリテ變化シ, 分母ハ公式59ニヨリ變化スレバ宜シイノデアル.

8. 次ノ貳式ヲ證セヨ.

(a) $\sin\alpha+\cos\beta=2\cos\{45^\circ-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\cos\{45^\circ-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\}$

$=2\sin\{45^\circ+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\sin\{45^\circ+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\}$

(b) $\sin\alpha-\cos\beta=2\sin\{45^\circ-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\sin\{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-45^\circ\}$

$=-2\cos\{45^\circ+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\cos\{45^\circ+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\}$

〔證〕 (a) $\sin\alpha+\cos\beta=\cos(90^\circ-\alpha)+\cos\beta$

$=2\cos\frac{1}{2}(90-\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(90-\alpha-\beta)$ 〔公式

$=2\cos\frac{1}{2}\{90^\circ-(\alpha-\beta)\}\cos\frac{1}{2}\{90-(\alpha+\beta)\}$

$=2\cos\{45^\circ-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\cos\{45^\circ-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\}$

…………………………(1),

又 $\sin\alpha+\cos\beta=2\cos\{45^\circ-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\cos\{45^\circ-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\}$ 〔(1)ニヨル〕

$=2\sin[90-\{45-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}]\sin[90^\circ-\{45^\circ-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\}]$

$=2\sin[90^\circ-45^\circ+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)]\sin[90^\circ-45^\circ+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)]$

$=2\sin\{45^\circ+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\}\sin\{45^\circ+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\}$

(1)及ビ(2)ハ(a)ヲ證スルモノデアル.

(b) ハ (a) ト同樣ニシテ出來ル,

9. $\dfrac{\sin\alpha+\sin5\alpha+\sin9\alpha}{\cos\alpha+\cos5\alpha+\cos9\alpha}=\tan5\alpha$ ナルコトヲ證セヨ

〔證〕 $\dfrac{\sin\alpha+\sin5\alpha+\sin9\alpha}{\cos\alpha+\cos5\alpha+\cos9\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\sin9\alpha+\sin5\alpha}{\cos\alpha+\cos9\alpha+\cos5\alpha}$

$$=\frac{2\sin\frac{9\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{9\alpha-\alpha}{2}+\sin5\alpha}{2\cos\frac{9\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{9\alpha-\alpha}{2}+\cos5\alpha}$$

$$=\frac{2\sin5\alpha\cos4\alpha+\sin5\alpha}{2\cos5\alpha\cos4\alpha+\cos5\alpha}=\frac{\sin5\alpha(2\cos4\alpha+1)}{\cos5\alpha(2\cos4\alpha+1)}=\frac{\sin5\alpha}{\cos5\alpha}=\tan5\alpha.$$

10. 次ノ二式ヲ證セヨ

(a) $\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos6\alpha=\dfrac{\sin7\alpha-\sin\alpha}{2\sin\alpha}$

(b) $\sin2\alpha+\sin4\alpha+\sin6\alpha=\dfrac{\cos\alpha-\cos7\alpha}{2\sin\alpha}$

〔證〕 a) 右邊ハ $2\sin\alpha$ トイフ分母ヲ有シテ居ル，此ノ分母ヲ作ル爲メニ右邊ニ $2\sin\alpha$ ヲ乘除スルノデアル，即チ

$$\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos6\alpha=\frac{2\sin\alpha(\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos6\alpha)}{2\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cos2\alpha+2\sin\alpha\cos4\alpha+2\sin\alpha\cos6\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$=\frac{(\sin3\alpha-\sin\alpha)+(\sin5\alpha-\sin3\alpha)+(\sin7\alpha-\sin5\alpha)}{2\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin7\alpha-\sin\alpha}{2\sin\alpha}$$

(b) ハ (a) ト同様デアル.

第四編 雜例題

1. $A+B+C=180°$ ナレバ次式ヲ證セヨ，

(a) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

(b) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

(c) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

(d) $\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}-1$

(e) $\sin2A+\sin2B+\sin2C=4\sin A\sin B\sin C.$

(f) $\cos2A+\cos2B+\cos2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$

(g) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2+2\cos A\cos B\cos C$

(h) $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C.$

(i) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

〔證〕 (a) $\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+\sin C$

但シ $A+B+C=180°$, $\therefore\ \dfrac{A+B}{2}+\dfrac{C}{2}=90°$,

$$\therefore\ \sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}\ \text{〔公式 22〕}$$

$$\therefore\ \sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin C$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right.$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right\}\quad \therefore \frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\times 2\cos\tfrac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)\cos\tfrac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\times 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

(*b*) $\cos A+\cos B+\cos C=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\cos C\quad \therefore \frac{C}{2}+\frac{A+B}{2}=90^\circ$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}\qquad \text{〔公式 47〕}$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right\}+1.$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right\}+1\quad \therefore \frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\times 2\sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)\sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.+1$$

(*c*) $\sin A+\sin B-\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin C$ 〔公式 56〕

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\sin C\quad \therefore \frac{C}{2}+\frac{A+B}{2}=90^\circ$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\qquad \text{〔公式 45〕}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\times 2\sin\tfrac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\times 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

(*d*) ハ(*c*)及ビ(*b*)ト同樣ニシテ出來ル.

(*e*) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2C$

但シ $A+B+C=180^\circ$ $\therefore$ $\sin(A+B)=\sin C$ 〔公式 27〕

$\therefore$ $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin C\cos(A-B)+\sin 2C$

$$=2\sin C\{\cos(A-B)+\cos C\}\qquad \text{〔公式 45〕}$$

$$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$$

$\therefore$ $[C+(A+B)=180^\circ]$

$$=2\sin C\times 2\sin A\sin B=4\sin A\sin B\sin C$$

(*f*) ハ(*e*)ニ倣ヘ

(*g*) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{1}{2}\{2\sin 2A+2\sin 2B+2\sin 2C\}$

但シ $\cos 2A=1-2\sin^2 A$ $\therefore$ $2\sin^2 A=1-\cos 2A$

同樣ニ $2\sin^2 B=1-\cos 2B$ 及ビ $2\sin^2 C=1-\cos 2C$

$\therefore$ $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=\frac{1}{2}\{1-\cos 2B+1-\cos 2B+1-\cos 2C\}$

$$=\tfrac{1}{2}\{3-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{3-(-1-4\cos A\cos B\cos C)\}\qquad \text{〔(}f\text{) ニヨル〕}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{2+4\cos A\cos B\cos C\}$$

$$=1+2\cos A\cos B\cos C.$$

(*h*) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=\frac{1}{2}\{2\cos 2A+2\cos 2B+2\cos 2C\}$

但シ $\cos 2A=2\cos^2 A-1$ $\therefore$ $2\cos^2 A=1+\cos 2A$

同樣ニ $2\cos^2 B=1+\cos 2B$, $2\cos^2 C=1+\cos 2C$

$\therefore \quad \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=\frac{1}{2}\{1+\cos^2 A+1+\cos^2 B+1+\cos^2 C\}$

$=\frac{1}{2}\{3+\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\}$

$=\frac{1}{2}\{3+(-1-4\cos A\cos B\cos C)\}$ 〔(e)ニヨル〕

$=\frac{1}{2}\{2-4\cos A\cos B\cos C\}=1-2\cos A\cos B\cos C.$

(i) $\tan A+\tan B+\tan C=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}$

$=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}$

$=\dfrac{\sin C}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}$ 〔$\because$ $A+B+C=180^\circ$ $\because$ $\sin(A+B)=\sin C$〕

$=\sin C\left\{\dfrac{1}{\cos A\cos B}+\dfrac{1}{\cos C}\right\}=\sin C\times\dfrac{\cos C+\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}$

$=\sin C\times\dfrac{-\cos(A+B)+\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}$ $\therefore$ $A+B+C=180^\circ$

$\therefore$ $\cos C=-\cos(A+B)$

$=\sin C\times\dfrac{-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)+\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}$

$=\sin C\times\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B\cos C}=\dfrac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}$

K $=\dfrac{\sin A}{\cos A}\times\dfrac{\sin B}{\cos B}\times\dfrac{\sin C}{\cos C}=\tan A\tan B\tan C.$

2. $\alpha+\beta+\gamma=2\theta$ ナレバ次式ヲ證セヨ.

$\cos 2\theta+\cos 2(\theta-\alpha)+\cos 2(\theta-\beta)+\cos 2(\theta-\gamma)$

$=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

〔證〕 先ツ左邊ノ第壹ト第貳項,及ビ第三,第四項ヲ別々ニ公式ヨリ積ニ化スベシ,即チ

$\cos 2\theta+\cos 2(\theta-\alpha)+\cos 2(\theta-\beta)+\cos 2(\theta-\gamma)$

$=2\cos\frac{1}{2}\{2\theta+2(\theta-\alpha)\}\cos\frac{1}{2}\{2\theta-2(\theta-\alpha)\}+$

$+2\cos\frac{1}{2}\{2(\theta-\beta)+2(\theta-\gamma)\}\cos\frac{1}{2}\{2(\theta-\beta)-2(\theta-\gamma)\}$

$=2\cos(2\theta-\alpha)\cos\alpha+2\cos(2\theta-\beta-\gamma)\cos(\gamma-\beta)$

$=2\cos(2\theta-\alpha)\cos\alpha+2\cos\alpha\cos(\gamma-\beta)$ $\therefore$ $2\theta-\beta-\gamma=\alpha$

$=2\cos\alpha\{\cos(2\theta-\alpha)+\cos(\gamma-\beta)\}$

$=2\cos\alpha\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma-\beta)\}$ $\therefore$ $2\theta-\alpha=\beta+\gamma$ (題意)

$=2\cos\alpha\times 2\cos\gamma\cos\beta$

$=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

3. 次式ヲ證明セヨ,

(a) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha$

(b) $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha$

(c) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$=4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$

(d) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$=4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2}.$

(e) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma-\sin 2(\alpha+\beta+\gamma)$

$=4\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)$

(f) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+\cos 2(\alpha+\beta+\gamma)$

$=4\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)$

〔證〕 (a) 前題ノ如ク先ヅ左邊ノ第壹項ト第貳項,及ビ第三項ト第四項ヲ別々ニ公式 56 ニヨリテ積ニ化スルノデアル,即チ,

$\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha$

$=2\sin\dfrac{3\alpha+\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha-\alpha}{2}+2\sin\dfrac{7\alpha+5\alpha}{2}\cos\dfrac{7\alpha-5\alpha}{2}$ 〔公式 56〕

$=2\sin 2\alpha\cos\alpha+2\sin 6\alpha\cos\alpha$

$$=2\cos\alpha(\sin 2\alpha+\sin 6\alpha)=2\cos\alpha\times 2\sin\frac{6\alpha+2\alpha}{2}\cos\frac{6\alpha-2\alpha}{2}$$

$$=2\cos\alpha\times 2\sin 4\alpha\cos 2\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha.$$

(*b*) (*a*)ノ如クスレバ出來ル.

(*c*) 前題ノ如ク，第壹項ト第貳項，及ビ第三項ト第四項ヲ別々ニ積ニ化スヘシ，即チ，

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$=\sin\alpha+\sin\beta-\{\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin\gamma\}$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\gamma}{2}$$

〔公式 56, 57〕

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left\{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right\}$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\times 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\times 2\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\alpha+2\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\beta+2\gamma}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$$

(*d*) (*e*) (*f*) ハ前ノ諸題ト同樣ニシテ出來ル.

4. $\sec\alpha\pm\tan\alpha=\tan(45\pm\frac{1}{2}\alpha)$ ナルコヲ證セヨ

〔證〕 $\sec\alpha+\tan\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$=\frac{\sin 90^\circ+\sin\alpha}{\cos 90^\circ+\cos\alpha}\qquad〔\because\ \cos 90^\circ=0\ \ \sin 90^\circ=1〕$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(90^\circ+\alpha)\cos\frac{1}{2}(90^\circ-\alpha)}{2\cos\frac{1}{2}(90^\circ+\alpha)\cos\frac{1}{2}(90^\circ-\alpha)}\qquad〔公式 56〕$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(90^\circ+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(90^\circ+\alpha)}=\frac{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}{\cos(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}=\tan(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)$$

同樣ニ $\sec\alpha-\tan\alpha=\tan(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)$.

5. $\cos 2\alpha=2\cos(45^\circ-\alpha)\cos(45^\circ+\alpha)$ ナルコヲ證セヨ

〔證〕 $\cos 2\alpha=\cos 90^\circ+\cos 2\alpha\quad\because\ \cos 90^\circ=0$

$$=2\cos\tfrac{1}{2}(90^\circ+2\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(90^\circ-2\alpha)\qquad〔公式 58〕$$

$$=2\cos(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)$$

6. $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\tan^2(45^\circ+\frac{\alpha}{2})$ ナルコヲ證セヨ.

〔證〕 $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{\sin 90^\circ+\sin\alpha}{\sin 90^\circ-\sin\alpha}$ ($\because\ \sin 90^\circ=1.$)

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(90^\circ+\alpha)\cos\frac{1}{2}(90^\circ-\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}(90^\circ-\alpha)\cos\frac{1}{2}(90^\circ+\alpha)}\qquad〔公式 56 57〕$$

$$=\frac{\sin(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)\cos(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}{\sin(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)\cos(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}$$

$$=\tan(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)\cot(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$=\tan(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)\tan\{90^\circ-(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha)\}\qquad〔公式 18〕$$

$$=\tan(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)\tan(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)=\tan^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)$$

〔注意〕 前ノ三題ノ如ク，左邊ニ 1 ヲ含ムデ居ルトキハ大概右邊ニ $\sin 90^\circ=1$, $\cos 90^\circ=0$ ヲ用ユルト出來ルノデアル，尤モ次ノ 7 題ノ如キハ例外デアル.

7. $\frac{\sin 3\alpha+\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha-\cos 3\alpha}=\tan(\alpha-45^\circ)\frac{1+2\sin 2\alpha}{1-2\sin 2\alpha}$ ナルコヲ證セヨ.

〔證〕 $\frac{\sin 3\alpha+\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha-\cos 3\alpha}=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha+4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha-(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)}$ 〔公式 50 51〕

$$=\frac{3\sin\alpha-3\cos\alpha-4\sin^3\alpha+4\cos^3\alpha}{3\sin\alpha+3\cos\alpha-4\sin^3\alpha-4\cos^3\alpha}$$

$$=\frac{3(\sin\alpha-\cos\alpha)-4(\sin^3\alpha-\cos^3\alpha)}{3(\sin\alpha+\cos\alpha)-4(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha)}$$

$$=\frac{3(\sin\alpha-\cos\alpha)-4(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{3(\sin\alpha+\cos\alpha)-4(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}$$

$$=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)\{3-4(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)\}}{(\sin\alpha+\cos\alpha)\{3-4(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)\}}$$

$$=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\times\frac{3-4(1+\sin\alpha\cos\alpha)}{3-4(1-\sin\alpha\cos\alpha)}\quad\because\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

$$=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\times\frac{-1-4\sin\alpha\cos\alpha}{-1+4\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}\times\frac{-1-4\sin\alpha\cos\alpha}{-1+4\sin\alpha\cos\alpha}\quad\left\{\begin{array}{l}\text{初ノ分數ノ分母子ヲ}\cos\alpha\\\text{ニテ除シタノデアル}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan45^\circ}{1+\tan\alpha\tan45^\circ}\times\frac{1+4\sin\alpha\cos\alpha}{1-4\sin\alpha\cos\alpha}\quad\because\ \tan45^\circ=1.$$

$$=\tan(\alpha-45^\circ)\times\frac{1+2\sin2\alpha}{1-2\sin2\alpha}\qquad\text{〔公式 43, 45〕}$$

8. 次式ヲ證セヨ.

(*a*) $\tan(\alpha+60)\tan(\alpha-60)=\dfrac{1+2\cos2\alpha}{1-2\cos2\alpha}$

(*b*) $\tan(30+\alpha)\tan(30-\alpha)=\dfrac{2\cos2\alpha-1}{2\cos2\alpha+1}$

〔證〕 (*a*) $\tan(\alpha+60^\circ)\tan(\alpha-60^\circ)=\dfrac{\sin(\alpha+60^\circ)}{\cos(\alpha+60^\circ)}\times\dfrac{\sin(\alpha-60^\circ)}{\cos(\alpha-60^\circ)}$

$$=\frac{2\sin(\alpha+60^\circ)\sin(\alpha-60^\circ)}{2\cos(\alpha+60^\circ)\cos(\alpha-60^\circ)}\quad\left\{\begin{array}{l}\text{分數ノ乘法ヲ施シ, 且ツ分}\\\text{母子ニ2ヲ乘シタノデアル}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{\cos\{(\alpha+60^\circ)-(\alpha-60^\circ)\}-\cos\{(\alpha+60^\circ)+(\alpha-60^\circ)\}}{\cos\{(\alpha+60^\circ)-(\alpha-60^\circ)\}+\cos\{(\alpha+60^\circ)+(\alpha-60^\circ)\}}\text{〔公式 55, 54〕}$$

$$=\frac{\cos120^\circ-\cos2\alpha}{\cos120^\circ+\cos2\alpha}=\frac{-\frac{1}{2}-\cos2\alpha}{-\frac{1}{2}+\cos2\alpha}\quad\because\ \cos120^\circ=-\tfrac{1}{2}$$

$$=\frac{1+2\cos2\alpha}{1-2\cos2\alpha}\quad\left\{\begin{array}{l}\text{前ノ分數ノ分母子ニ}\ -2\\\text{ヲ乘シタノデアル}\end{array}\right\}$$

(*b*) ハ (*a*) ト同樣デアル

9. $2\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos2\alpha+\cos2\beta$ ナルコトヲ證セヨ.

〔證〕 $2\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta=2(\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta)$

$=2\{(\cos\alpha\cos\beta)^2-(\sin\alpha\sin\beta)^2\}$

$=2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$=2\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$ 〔公式 42, 43〕

$=\cos\{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\}+\cos\{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\}$ 〔公式 54〕

$=\cos2\beta+\cos2\alpha.$

〔別解〕 $2\cos^2\alpha\cos^2\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=2(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)-2\sin^2\alpha\sin^2\beta.$

$=2(1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta)-2\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=2-2\sin^2\alpha-2\sin^2\beta+2\sin^2\alpha\sin^2\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=1-2\sin^2\alpha+1-2\sin^2\beta=\cos2\alpha+\cos2\beta$ 〔公式 47〕

10. $\cos(n+1)\alpha\cos(n-1)\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2n\alpha$ ナルコトヲ證セヨ.

〔證〕 $\cos(n+1)\alpha\cos(n-1)\alpha+\sin^2\alpha$

$=\cos(n\alpha+\alpha)\cos(n\alpha-\alpha)+\sin^2\alpha$

$=\frac{1}{2}\times2\cos(n\alpha+\alpha)\cos(n\alpha-\alpha)+\sin^2\alpha$

$=\frac{1}{2}[\cos\{n\alpha+\alpha-(n\alpha-\alpha)\}+\cos\{(n\alpha+\alpha)+(n\alpha-\alpha)\}]$
$+\sin^2\alpha$

$=\frac{1}{2}[\cos2\alpha+\cos2n\alpha]+\sin^2\alpha$

$=\frac{1}{2}[1-2\sin^2\alpha+2\cos^2n\alpha-1]+\sin^2\alpha$ 〔公式 47, 48〕

$=\frac{1}{2}[-2\sin^2\alpha+2\cos^2n\alpha]+\sin^2\alpha$

$=-\sin^2\alpha+\cos^2n\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2n\alpha$

11. $\sin(A+B)\sin3(A-B)=\sin^2(2A-B)-\sin^2(2B-A)$

〔證〕 $\sin(A+B)\sin3(A-B)=\frac{1}{2}\times2\sin(A+B)\sin3(A-B)$

$=\frac{1}{2}[\cos\{A+B-3(A-B)\}-\cos\{A+B+3(A-B)\}]$ 〔公式 55〕

$=\frac{1}{2}[\cos(4B-2A)-\cos(4A-2B)]$

$=\frac{1}{2}[1-2\sin^2(2B-A)-\{1-2\sin^2(2A-B)\}]$ 〔公式 47〕

$=\frac{1}{2}[-2\sin^2(2B-A)+2\sin^2(2A-B)]$

$=\sin^2(2A-B)-\sin^2(2B-A)$.

12. 次式ヲ證セヨ.

(a) $\sin3\alpha=4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)$

(b) $\cos3\alpha=4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)$

〔證〕 (a) $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$=2\sin\alpha\left\{\frac{3}{2}-2\sin^2\alpha\right\}=2\sin\alpha\{1+\frac{1}{2}-2\sin^2\alpha\}$

$=2\sin\alpha\{\frac{1}{2}+1-2\sin^2\alpha\}=2\sin\alpha\{\frac{1}{2}+\cos2\alpha\}$ 〔公式 47〕

$=2\sin\alpha\{\cos2\alpha-\cos120^\circ\}$ $\because \cos120^\circ=-\frac{1}{2}$

$=2\sin\alpha\times2\sin\frac{120^\circ+2\alpha}{2}\sin\frac{120^\circ-2\alpha}{2}$ 〔公式 53〕

$=2\sin\alpha\times2\sin(60+\alpha)\sin(60-\alpha)$

$=4\sin\alpha\sin(60+\alpha)\sin(60-\alpha)$.

(b) (a) ト同様ニシテ出來ル.

13. 次ノ貳式ヲ證明セヨ

(a) $\cos A-\cos(60+A)-\cos(60-A)=0$.

(b) $\sin A+\sin(60-A)-\sin(60+A)=0$.

〔證〕 (a) $\cos A-\cos(60+A)-\cos(60-A)$

$=\cos A-\{\cos(60+A)+\cos(60-A)\}$

$=\cos A-2\cos\frac{1}{2}\{(60+A)+(60-A)\}\cos\frac{1}{2}\{(60+A)-(60-A)\}$

$=\cos A-2\cos60\cos A=\cos A-2\times\frac{1}{2}\cos A=0$

(b) ハ (a) ト同様ニシテ出來ル.

14. 次ノ貳式ヲ證明セヨ

(a) $\cos^3A-\cos^3(60^\circ+A)-\cos^3(60^\circ-A)=\frac{3}{4}\cos3A$

(b) $\sin^3A+\sin^3(60^\circ-A)-\sin^3(60^\circ+A)=-\frac{3}{4}\sin3A$

〔證〕 (a) $\cos^3A-\cos^3(60^\circ+A)-\cos^3(60^\circ-A)$

$=\cos^3A-[\cos^3(60^\circ+A)+\cos^3(60^\circ-A)]$

$=\cos^3A-[\cos(60^\circ+A)+\cos(60^\circ-A)][\cos^2(60^\circ+A)$

$-\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)+\cos^2(60^\circ-A)]$

但シ前題(a)ノ解ニ於テ示ス如ク $\cos(60^\circ+A)+\cos(60^\circ-A)=\cos A$

$\therefore$ $\cos^3A-\cos^3(60^\circ+A)-\cos^3(60^\circ-A)$

$=\cos^3A-\cos A[\cos^2(60^\circ+A)-\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)$

$+\cos^2(60^\circ-A)]$

$=\cos^3A-\cos A[\cos^2(60^\circ+A)+2\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)$

$+\cos^2(60^\circ+A)-3\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)]$

$=\cos^3A-\cos A[\{\cos(60^\circ+A)+\cos(60^\circ-A)\}^2$

$-3\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)]$

$=\cos^3A-\cos A[\cos^2A-3\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)]$ 〔前題 a〕

$=\cos^3A-\cos^3A+3\cos A\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)$

$=3\cos A\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)$

$=\frac{3}{2}\cos A\times2\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)$

$=\frac{3}{2}\cos A\times[\cos\{(60^\circ+A)-(60^\circ-A)\}$

$+\cos\{(60^\circ+A)+(60^\circ-A)\}]$ 〔公式 56〕

$=\frac{3}{2}\cos A\times[\cos2A+\cos120^\circ]=\frac{3}{2}\cos A[2\cos^2A-\frac{3}{2}]$

$$=\frac{3}{2}\cos A\times\frac{4\cos^2 A-3}{2}=\frac{3\cos A(4\cos^2 A-3)}{4}$$

$$=\frac{3}{4}(4\cos^3 A-3\cos A)=\frac{3}{4}\cos 3A.$$

(*b*) (*a*)ト同樣ニシテ出來ル.

15. (*a*) $\tan^2\alpha=1+2\tan^2\beta$ ナレバ $\cos^2\beta=1+\cos 2\alpha$ ヲ證セヨ

(*b*) $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$ ナレバ $\cos 2\beta=2\cos^2\alpha+1$ ヲ證セヨ.

〔證〕 (*a*) $\tan^2\alpha=1+2\tan^2\beta$

双方ヘ1ヲ加フレバ $1+\tan^2\alpha=2(1+\tan^2\beta)$

$\therefore\quad \sec^2\alpha=2\sec^2\beta$ 〔公式 7〕

$\therefore\quad \frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{2}{\cos^2\beta}$ 〔公式 2〕

$\therefore\quad \cos^2\beta=2\cos^2\alpha.$

$\therefore\quad \cos^2\beta=2\cos^2\alpha-1+1$

$=\cos 2\alpha+1.$ 〔公式 48〕

(*b*) (*a*)ト同樣ニシテ出來ル.

16. $\alpha+\beta=45^\circ$ ナレバ $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2.$ ナルヿヲ證セヨ.

〔證〕 $\alpha+\beta=45^\circ$ $\therefore$ $\tan(\alpha+\beta)=1.$ $\because$ $\tan 45^\circ=1.$

$\therefore\quad \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1.\quad \therefore\quad \tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$ (1)

今 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta$

$=1+1-\tan\alpha\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta$ 〔(1)ニヨル〕

$=2.$

17. 次ノ諸題ヲ證明セヨ.

(*a*) $\cos\theta=\frac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}$ ナレバ $\tan^2\frac{1}{2}\theta=\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{\alpha}{2}$ ナルヿヲ證セヨ.

(*b*) $\cos\theta=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ ナレバ $\tan^2\frac{\theta}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$ ヲ證セヨ.

(*c*) $\cos\theta=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$ ナレバ $\tan^2\frac{\theta}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\cot^2\frac{\beta}{2}$ ヲ證セヨ.

〔證〕 $\cos\theta=\frac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}$ (1)

今 $\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$ 〔公式 47〕 $\therefore$ (1)ヨリ

$$1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}$$

$$\therefore\quad 2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\frac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}=\frac{1-e\cos\alpha-\cos\alpha+e}{1-e\cos\alpha}\qquad(2)$$

又 $\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$ 〔公式 48〕 $\therefore$ (1)ヨリ

$$1-2\sin^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}$$

$$\therefore\quad 2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\frac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}=\frac{1-e\cos\alpha+\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}\qquad(3)$$

(2)式ヲ(3)式ニテ除スレバ

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-e\cos\alpha-\cos\alpha+e}{1-e\cos\alpha+\cos\alpha-e}=\frac{1+e-\cos\alpha-e\cos\alpha}{1-e+\cos\alpha-e\cos\alpha}$$

$$=\frac{1+e-\cos\alpha(1+e)}{1-e+\cos\alpha(1-e)}=\frac{(1+e)(1-\cos\alpha)}{(1-e)(1+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{(1+e)\{1-(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2})\}}{(1-e)\{1+(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1)\}}=\frac{(1+e)\times 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{(1-e)\times 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{\alpha}{2}$$

(*b*) $\cos\theta=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ (1)

今 $\cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ ∴ (1)ヨリ $1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$

$$\therefore\ 2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}\quad(2)$$

又 $\cancel{2\cos\theta}\ \cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1$ ∴ (1)ヨリ $2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$

$$\therefore\ 2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}\quad(3)$$

(2)式ヲ(3)式ニテ除スレバ

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{1-\cos\alpha-\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta}$$

$$=\frac{1-\cos\alpha-\cos\beta(1-\cos\alpha)}{1+\cos\alpha+\cos\beta(1+\cos\alpha)}=\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}$$

$$=\frac{\{1-(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2})\}\{1-(1-2\sin^2\frac{\beta}{2})\}}{\{1+(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1)\}\{1+(2\cos^2\frac{\beta}{2}-1)\}}\quad\text{〔公式 47, 48〕}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\times2\sin^2\frac{\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\times2\cos^2\frac{\beta}{2}}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}.$$

(c) ハ(b)ノ通リニシテ出來ルカラ解ヲ略ス

第五編

三角形ノ性質

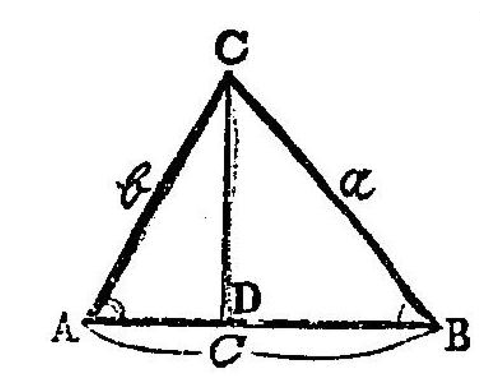
三角形ノ邊, 角ノ關係

31. 三角形 ABC ニ於テ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\quad(59)$$

但シ A, B, C ハ各角ノ大サヲ表示シ, a, b, c ハ夫々 A 角, B 角, C 角ノ對邊ノ長サヲ表示スルモノトス, 以下凡ベテ之レニ倣ヘ.

〔證〕(第一) 鋭角三角形ノ場合



Cヨリ對邊 AB ニ垂線 CD ヲ下ス時ハ

$$\frac{CD}{b}=\sin A,\qquad \frac{CD}{a}=\sin B$$

初メノ式ヲ後ノ式ニテ除スル時ハ

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}\qquad\therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

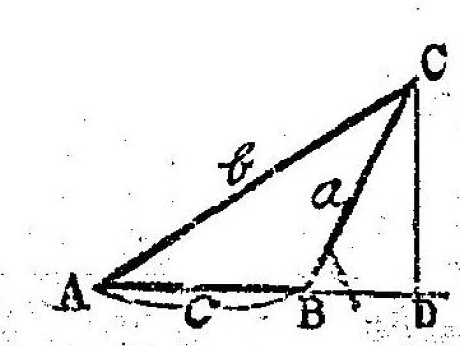
同樣ニ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

(第二) 鈍角三角形ノ場合.

B ヲ鈍角トス

C ヨリ AB ニ垂線 CD ヲ下ス時ハ

$$\frac{CD}{b}=\sin A,\qquad \frac{CD}{a}=\sin CBD$$



初メノ式ヲ後ノ式ニテ除スルトキハ $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin CBD}$

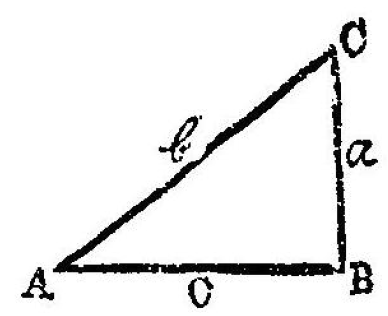
然ルニ $\angle CBD+\angle B=180^\circ$ $\therefore$ $\sin CBD=\sin B$

$\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$ $\therefore$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

之レト同様ニ $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ $\therefore$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

第三 直角三角形ノ場合

$\angle B$ ヲ直角トス



$\frac{a}{b}=\sin A$

然ルニ $\sin B=\sin 90^\circ=1$

故ニ $\sin A=\frac{\sin A}{1}=\frac{\sin A}{\sin B}$ ト考フルヲ得

$\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$ $\therefore$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

同様ニ $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$ $\therefore$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

32. $\triangle ABC$ ニ於テ

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)},\quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)},\quad \frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(C+A)}{\tan\frac{1}{2}(C-A)}, \quad \cdots\cdots\cdots(60)$$

〔證〕 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 〔公式 59〕 $\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$

$\therefore$ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}$ 〔公式 56, 57〕

$=\tan\frac{1}{2}(A+B)\cot\frac{1}{2}(A-B)$

$=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$ $\because$ $\cot\frac{1}{2}(A-B)=\frac{1}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$

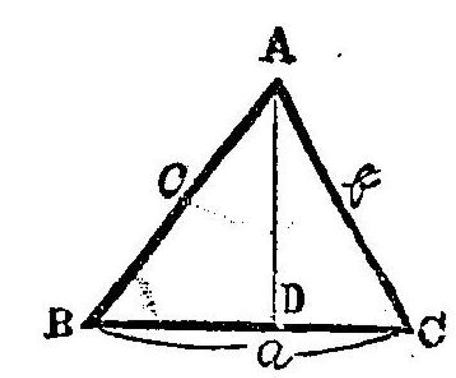
以下證ヲ略ス

33. 三角形 ABC ニ於テ

$$\left.\begin{aligned} a&=b.\cos C+c.\cos B\\ b&=a.\cos C+c.\cos A\\ c&=a.\cos B+b.\cos A\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

〔證〕 先ヅ $a=b.\cos C+c.\cos B$ ヲ證センニ次ノ如キ三ツノ場合ガアル

(第一) 鋭角三角形ノ場合



A ヨリ BC ニ垂線 AD ヲ下ス.

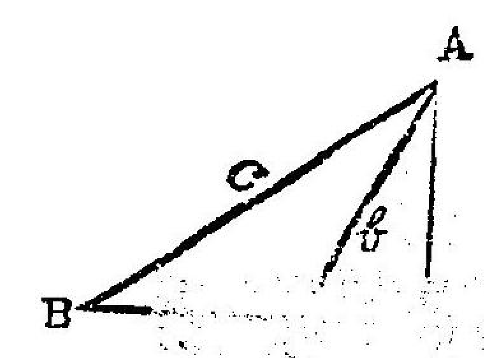
$\frac{BD}{c}=\cos B$ $\therefore$ $BD=c.\cos B$

$\frac{CD}{b}=\cos C$ $\therefore$ $CD=b.\cos C$

加フルトキハ $a=b.\cos C+c.\cos B$

(第二) 鈍角三角形ノ場合. C ヲ鈍角トス

A ヨリ BC ニ垂線 AD ヲ下ス,



$\frac{BD}{c}=\cos B$ $\therefore$ $BD=c.\cos B$

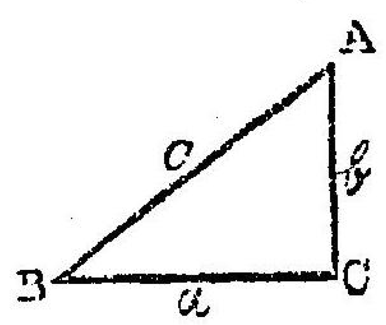
$\frac{CD}{b}=\cos ACD$ $\therefore$ $CD=b.\cos ACD$

減ズレバ $a=c.\cos B-b.\cos ACD$

然ルニ $\angle ACD+\angle C=180^\circ$ $\therefore$ $-\cos ACD=\cos C$

$\therefore$ $a=b.\cos B+b.\cos C$

(第三) 直角三角形ノ場合.



C ヲ直角トス

$\frac{a}{c}=\cos B$ ∴ $a=c.\cos B$

然ルニ $\cos C=\cos 90°=0$ ∴ $a.\cos C=0$

∴ $a=c.\cos B+a.\cos C$ トシテ差支ナイ.

同樣ニ $b=c.\cos A+a.\cos C$, $c=a.\cos B+b.\cos A$ ナルヲ知ル

34. △ABC ニ於テ

$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc.\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca.\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab.\cos C\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (62)$$

〔證〕 公式 61 ヨリ

$a=b.\cos C+c.\cos B$, a ヲ乘シ $a^2=ab\cos C+ca.\cos B$ (1)

又 $b=c.\cos A+a.\cos C$, b ヲ乘シ $b^2=bc.\cos A+ab.\cos C$ (2)

又 $c=a.\cos B+b.\cos A$, c ヲ乘シ $c^2=ac.\cos B+bc.\cos A$ (3)

(1) ヨリ (2), (3) ヲ減ズル時ハ

$a^2-b^2-c^2=-2bc.\cos A$ ∴ $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$

又 (2) ヨリ (1) (3) ヲ減ズレバ 同樣ニ $b^2=c^2+a^2-2ca.\cos B$

(3) ヨリ (1) (2) ヲ減ズレバ 同樣ニ $c^2=a^2+b^2-2ab.\cos C$.

35. △ABC ニ於テ $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ トスレバ

(第一) $$\left.\begin{aligned} \sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (60)$$

(第二) $$\left.\begin{aligned} \cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (64)$$

(第三) $$\left.\begin{aligned} \tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (65)$$

〔證〕 (第一) $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ 〔公式 62〕

$=b^2+c^2-2bc(1-2\sin^2\frac{A}{2})$ 〔公式 47〕

$=b^2+c^2-2bc+4bc.\sin^2\frac{A}{2}$

$=(b-c)^2+4bc.\sin^2\frac{A}{2}$

∴ $4bc.\sin^2\frac{A}{2}=a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$

$=(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)$

$=(2s-2c)(2s-2b)$ ∵ $a+b+c=2s$

$=4(s-c)(s-b)$

∴ $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$ ∴ $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

以下同樣ニ証明シ得ラルヽヲ以テ証ヲ略ス

(第二) $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ 〔公式 62〕

$=b^2+c^2-2bc(2\cos^2\frac{A}{2}-1)$ 〔公式 48〕

$=b^2+c^2+2bc-4bc.\cos^2\frac{A}{2}$

$=(b+c)^2-4bc.\cos^2\frac{A}{2}$

$$\therefore\quad 4bc.\cos^2\frac{A}{2}=(b+c)^2-a^2=(b+c+a)\,(b+c-a)$$

$$=(a+b+c)\,(a+b+c-2a)$$

$$=2s\,(2s-2a)\qquad \because\ a+b+c=2s$$

$$=4s\,(s-a)$$

$$\therefore\quad \cos^2\frac{A}{2}=\frac{s\,(s-a)}{bc}\qquad \therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}$$

以下証明ヲ略ス

(第三) $\tan\frac{A}{2}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\dfrac{\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}}$ 〔公式 63. 64〕

$$=\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}$$

以下同様ニ証明シ得ラルヽニ付キ証ヲ略ス

36. ΔABC ノ面積ヲ S トスルキハ

(第一) $S=\frac{1}{2}bc.\sin A=\frac{1}{2}ca.\sin B=\frac{1}{2}ab.\sin C$ **(66)**

(第二) $S=\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ **(67)**

〔證〕 (第一) 先ヅ $S=\frac{1}{2}bc.\sin A$ ナルヿヲ証明センニ, 次ノ如キ三ツノ場合ガアル

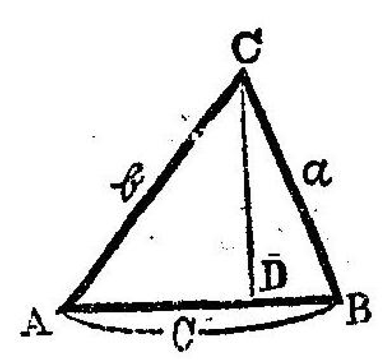
(甲) A ガ鋭角ナル場合

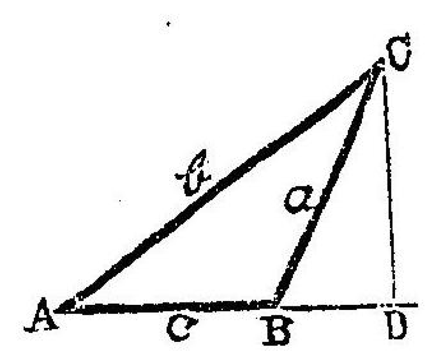
C ヨリ AB ニ垂線 CD ヲ下スキハ

$S=\frac{1}{2}c\times CD$ (平面幾何)

然ルニ $\frac{CD}{b}=\sin A$ $\therefore$ $CD=b.\sin A$

$\therefore$ $S=\frac{1}{2}c\times b.\sin A=\frac{1}{2}bc.\sin A$





(乙) A ガ鈍角ナル場合

C ヨリ AB ヘ垂線 CD ヲ下ス

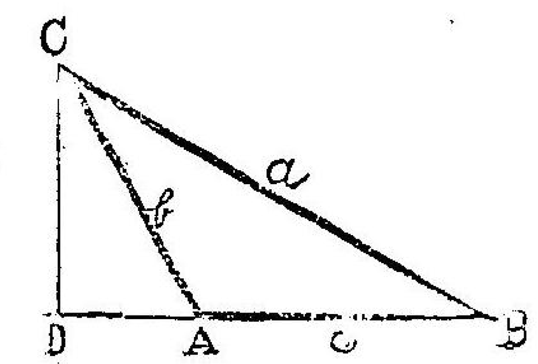
$S=\frac{1}{2}c\times CD$ (平面幾何)

然ルニ $\frac{CD}{b}=\sin CAD$ $\therefore$ $CD=b.\sin CAD$

$\therefore$ $S=\frac{1}{2}c\times b.\sin CAD$

然ルニ $\angle CAD+\angle A=180^\circ$ $\therefore$ $\sin CAD=\sin A$

$\therefore$ $S=\frac{1}{2}bc.\sin A$

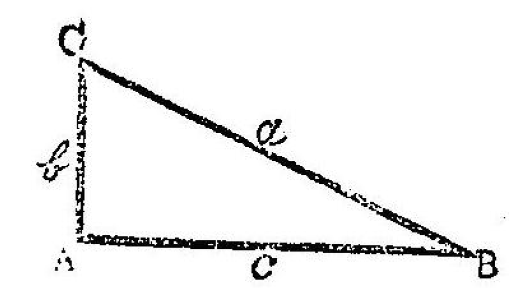


(丙) A ガ直角ナル場合

$CA\perp AB$ $\therefore$ $S=\frac{1}{2}bc.$ (平面幾何)

然ルニ $\sin A=\sin 90^\circ=1$

$\therefore$ $S=\frac{1}{2}bc.\sin A$



上ノ証明ト全法ニヨリテ $S=\frac{1}{2}ca.\sin B=\frac{1}{2}ab.\sin C$ ヲ証明スルヿヲ得ルノデアル

(第二) $S=\frac{1}{2}bc.\sin A$ 〔公式 66〕

$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ 〔公式 45〕

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}bc\times 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=bc.\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

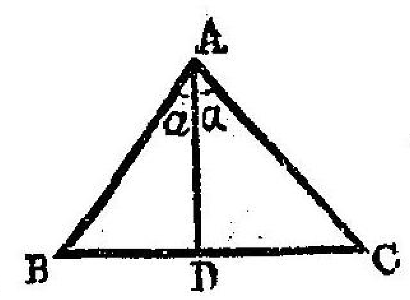
$=bc\sqrt{\dfrac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}\sqrt{\dfrac{s\,(s-a)}{bc}}$ 〔公式 33. 64〕

$$=bc\times\frac{\sqrt{s(s-a)(s-c)(s-b)}}{bc}=\sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

第五編 例題

(1.) △ABC ニ於テ A 角ノ等分線ト BC トノ交點ヲ D トスレバ

$$BD:CD=\sin C : \sin B$$



〔證〕 便利ノ爲メ $\angle BAD=\angle DAC=\alpha$ トス

△ABD ニ於テ $\dfrac{BD}{\sin\alpha}=\dfrac{AD}{\sin B}$ 〔公式 59〕

△ADC ニ於テ $\dfrac{DC}{\sin\alpha}=\dfrac{AD}{\sin C}$ 〔公式 59〕

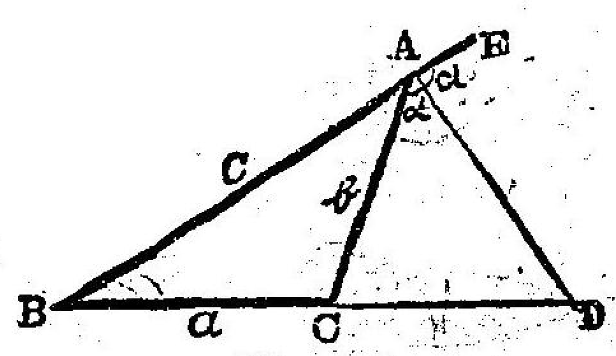
初ノ式ヲ後ノ式ニテ除スレバ $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{\sin C}{\sin B}$

(2.) △ABC ノ A ノ外角ノ等分線ト BC トノ交點ヲ D トスレバ

$$BD:CD=\sin C:\sin B$$

〔證〕 BA ノ引長線上ニ E 點ヲ取ル, ソコデ便利ノ爲メニ $\angle CAD=\angle EAD=\alpha$ トス

△ABD ニ於テ $\dfrac{BD}{\sin BAD}=\dfrac{AD}{\sin B}$ (1)



但シ $\angle BAD+\alpha=180$

$\therefore \quad \sin BAD=\sin\alpha$

$\therefore \quad \dfrac{BD}{\sin\alpha}=\dfrac{AD}{\sin B}$

又 △ACD ニ於テ $\dfrac{CD}{\sin\alpha}=\dfrac{AD}{\sin ACD}=\dfrac{AD}{\sin C}$ (2)

$\because \quad \angle ACD+\angle C=180°$

(1)式ヲ(2)式ニテ除スレバ $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{\sin C}{\sin B}$

(3) △ABC ノ A 角ノ等分線ヲ AD トセバ $AD=\dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

〔證〕 (1)題ノ圖ヲ用ユ 〔初學者ハ本題ヲ後廻ニスベシ〕

△ADC ニ於テ $\dfrac{AD}{\sin C}=\dfrac{DC}{\sin\alpha}$ $\therefore AD=\dfrac{DC\sin C}{\sin\alpha}$ (1)

然ルニ (1)題ヨリ $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{\sin C}{\sin B}$

又公式 59 ヨリ $\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}$ $\Bigg\}$ $\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{c}{b}$

$\therefore \dfrac{BD+DC}{DC}=\dfrac{c+b}{b}$ $\therefore \dfrac{BC}{DC}=\dfrac{b+c}{b}$ $\therefore \dfrac{a}{DC}=\dfrac{b+c}{b}$ $\therefore DC=\dfrac{ab}{b+c}$

故ニ(1)式ヨリ $AD=\dfrac{ab\sin C}{(b+c)\sin\alpha}$

$$=\frac{bc.\sin A}{(b+c)\sin\alpha} \quad \because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

$$=\frac{bc\times 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{(b+c)\sin\alpha} \quad 〔公式 45〕$$

$$=\frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c} \quad \because \sin\alpha=\sin\frac{A}{2}$$

(4) △ABC ノ A ノ外角ノ二等分線ヲ AD トスレバ

$$AD=\frac{2bc.\sin\frac{A}{2}}{b-c}$$

〔證〕 (2)題ヲ用ヒ前題ト同様ニシテ出來ル故ニ證ヲ略ス

(5) 三角形 ABC ニ於テ A ヲ過グル中線ヲ AD トスレバ

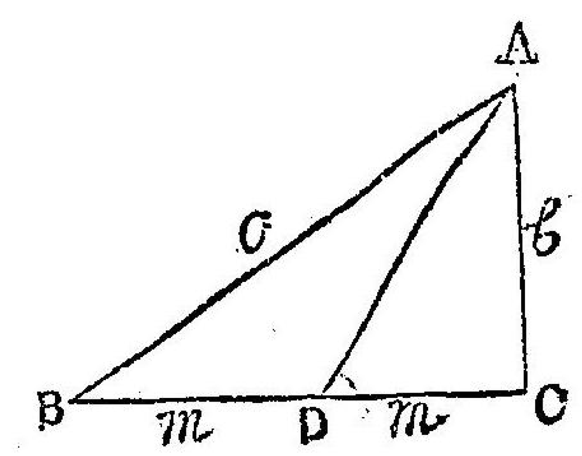
$$\frac{\sin BAD}{\sin DAC}=\frac{b}{c}$$

〔證〕 言表ハシヲ簡便ニスル爲メニ BD=DC=m トス.

△ABD ニ於テ $\dfrac{m}{\sin BAD}=\dfrac{AD}{\sin B}$ (1)

△ADC ニ於テ $\dfrac{m}{\sin DAC}=\dfrac{AD}{\sin C}$ (2)

(2)÷(1) ∴ $\dfrac{\sin BAD}{\sin DAC}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$



公式 59 ヨリ $\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{b}{c}$ ∴ $\dfrac{\sin BAD}{\sin DAC}=\dfrac{b}{c}$

(6) △ABC ニ於テ次式ヲ證セヨ

(a) $\dfrac{2b-3c}{2\sin B-3\sin C}=\dfrac{a+2b-3c}{\sin A+2\sin B-3\sin C}$

(b) $\dfrac{a^2-2b^2-3c^2}{\sin^2 A-2\sin^2 B-3\sin^2 C}=\left(\dfrac{a}{\sin A}\right)^2$

〔證〕 (a) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ ……… (1) 〔公式 59〕

故ニ代數分數ノ定理ニヨリ $\dfrac{2b-3c}{2\sin B-3\sin C}$ 及ビ $\dfrac{a+2b-3c}{\sin A+2\sin B-3\sin C}$ ハ共ニ(1)ノ各ニ等シ

∴ $\dfrac{2b-3c}{2\sin B-3\sin C}=\dfrac{a+2b-3c}{\sin A+2\sin B-3\sin C}$

(b) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 〔公式 59〕

∴ $\dfrac{a^2}{\sin^2 A}=\dfrac{b^2}{\sin^2 B}=\dfrac{c^2}{\sin^2 C}$ (1)

故ニ代數學分數定理ヨリ $\dfrac{a^2-2b^2-3c^2}{\sin^2 A-2\sin^2 B-3\sin^2 C}$ ハ(1)ノ各ニ等シ

∴ $\dfrac{a^2-2b^2-3c^2}{\sin^2 A-2\sin^2 B-3\sin^2 C}=\dfrac{a^2}{\sin^2 A}=\left(\dfrac{a}{\sin A}\right)^2$

(7) △ABC ニ於テ $a=6, b=5, c=4$ ナル𪜈 $\cos A=\dfrac{1}{8}$ ナリ

〔證〕 $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ 〔公式 62〕

上ノ式ニ於テ與ヘラレタル數値ヲ當嵌メル𪜈ハ

$$6^2=5^2+4^2-2\times 5\times 4\times \cos A$$

∴ $36=25+16-40\cos A$

∴ $40\cos A=25+16-35$ ∴ $40\cos A=5$ ∴ $\cos A=\dfrac{5}{40}=\dfrac{1}{8}$

(8) △ABC ニ於 C=120° ナル𪜈ハ $c^2=a^2+b^2+ab$ ナルヿヲ證セヨ

〔證〕 $c^2=a^2+b^2-2ab.\cos A$ 〔公式 62〕

∴ $c^2=a^2+b^2-2ab.\cos 120°$

然ルニ $\cos 120°=\cos(180-60)=-\cos 60$ 〔公式〕 $=-\dfrac{1}{2}$

∴ $c^2=a^2+b^2-2ab(-\frac{1}{2})$ ∴ $c^2=a^2+b^2+ab$

〔注意〕 $\cos 120°=-\frac{1}{2}$ ハ屢々用ヒラルヽモノデアル,故ニ學生ハ能ク諳記シテ置クヲ要スル.

(9) △ABC ニ於テ $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{a+2b}{3a-c}=5$ ナル𪜈ハ次ノ如クナルヿヲ證セヨ

(a) $\sin A : \sin B : \sin C=1:2:2$

(b) $\cos A : \cos B : \cos C=7:2:2$

〔證〕 $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{3}{4}$ ∴ $4(a+b)=3(b+c)$

∴ $4a+b-3c=0$ ………. (1)

又 $\dfrac{a+2b}{3a-c}=5$ ∴ $a+2b=5(3a-c)$

∴ $-14a+2b+5c=0$ ….. (2)

ソコデ(1)(2)ヨリ c ヲ消去シテ a,b ノ關係ヲ求メンニ

$(1)\times5 \quad \therefore \quad 20a+5b-15c=0$

$(2)\times3 \quad \therefore -42a+6b+15c=0$

加フレバ $\quad -22a+11b=0$

$\therefore \quad 11b=22a \quad \therefore \quad b=2a \qquad (3)$

又(1)(2)ヨリ b ヲ消去シテ a,c ノ關係ヲ求メンニ

$(1)\times2 \qquad 8a+2b-6c=0$

(2)ヨリ $\qquad -14a+2b+5c=0$

減ジテ $\qquad 22a-11c=0$

$\therefore \qquad 11c=22a \quad \therefore \quad c=2a \qquad (4)$

ソコデ(3)(4)ヲ用ヒテ(a)及ビ(b)ヲ證明スルコトガ出來ル

即チ次ギノ如クデアル

(a) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 〔公式 59〕

上ノ式ニ於テ(3)(4)ヲ代用スレバ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{2a}{\sin B}=\frac{2a}{\sin C}$$

a ヲ約シテ

$$\frac{1}{\sin A}=\frac{2}{\sin B}=\frac{2}{\sin C}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin A}{1}=\frac{\sin B}{2}=\frac{\sin C}{2}$$

$$\therefore \quad \sin A:\sin B:\sin C=1:2:2$$

(b) $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ 〔公式 62〕

$\therefore \quad 2bc.\cos A=b^2+c^2-a^2 \quad \therefore \quad \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

(3)及ビ(4)ヲ此式ニ代用スレバ次ノ如シ

$$\cos A=\frac{(2a)^2+(2a)^2-a^2}{2\times2a\times2a}=\frac{4a^2+4a^2-a^2}{8a^2}=\frac{7a^2}{8a^2}=\frac{7}{8}$$

又 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ 〔公式 62〕

$$=\frac{a^2+(2a)^2-(2a)^2}{2a\times2a}\text{〔(3)(4)ヨリ〕}=\frac{a^2}{4a^2}=\frac{1}{4}$$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 〔公式 62〕

$$=\frac{a^2+(2a)^2-(2a)^2}{2\times a\times2a}\text{〔(3)(4)ヨリ〕}=\frac{a^2}{4a^2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore \quad \cos A:\cos B:\cos C=\dfrac{7}{8}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{4}$

此ノ各項ニ同ジ數ヲ乘ジテモ差支ナイカラ右邊ニ 8 ヲ乘ズレバ

$$\cos A:\cos B:\cos C=7:2:2$$

(10) $\triangle ABC$ ニ於テ $a:b:c=m:n:\sqrt{m^2+mn+n^2}$ ナルトキ最大角如何。

〔解〕 $m, n, \sqrt{m^2+mn+n^2}$ ノ中デ $\sqrt{m^2+mn+n^2}$ ハ最大デアル

故ニ $a, b, c,$ ノ中デ c ハ最大デアル

故ニ C ハ最大角デアル，〔平面幾何 定理〕

故ニ C ノ大サヲ求ムレバイヽノデアル，デ次ニ之レヲ求メン

$$a:b:c=m:n:\sqrt{m^2+mn+n^2}$$

$\therefore \quad \dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{\sqrt{m^2+mn+n^2}}=K$ トス

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} a&=mK \\ b&=nK \\ c&=\sqrt{m^2+mn+n^2}K \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots (1)$$

今 $c^2=a^2+b^2-2ab.\cos C$ 〔公式 62〕

$\therefore\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(1) ノ値ヲ此式ニ代用スレバ

$$\cos C=\frac{(mK)^2+(nK)^2-(m^2+mn+n^2)K^2}{2\times mK\times nK}$$

$$=\frac{(m^2+n^2-m^2-mn-n^2)K^2}{2mnK^2}=\frac{-mn}{2mn}=-\frac{1}{2}$$

但シ 180° 以内ニ於テ $-\dfrac{1}{2}$ ヲ cos トスル角ハ 120° ノミニ限ル

$\therefore\ C=120^\circ$

(11) △ABC ニ於テ次ギノ不等式ヲ證セヨ.

(a) $\sin A+\sin B>\sin C$

(b) $(a+b)\cos C+c(\cos A+\cos B)>a.\cos B+b.\cos A$

〔證〕 (a) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 〔公式 59〕

$\therefore\ \dfrac{a+b}{\sin A+\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 〔代數分數定理〕

$\therefore\ \dfrac{\sin C}{\sin A+\sin B}=\dfrac{c}{a+b}$

然ルニ $a+b>c$ 〔平面幾何定理〕

$\sin A+\sin B>\sin C$

(b) $(a+b)\cos C+c(\cos A+\cos B)$

$=a.\cos C+b.\cos C+c.\cos A+c.\cos B$

$=b.\cos C+c.\cos B+a.\cos C+c.\cos A=a+b$ 〔公式 61〕

然ルニ △ABC ニ於テ $a+b>c$

$\therefore\ (a+b)\cos C+c(\cos A+\cos B)>c$

但シ $c=a\cos B+b\cos A$ 〔公式 61〕

$\therefore\ (a+b)\cos C+c(\cos A+\cos B)>a.\cos B+b.\cos A$

(12) △ABC ニ於テ次式ヲ證セヨ.

(a) $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$

(b) $(a+b+c)(\cos A+\cos B+\cos C)=2\left(\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}\right)$

〔證〕 (a) $b.\cos C+c.\cos B=a$ 〔公式 61〕

$c.\cos A+a.\cos B=b$

$a.\cos B+b.\cos A=c$

上ノ三式ヲ加ヘ $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$

(b) (a)ヨリ $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$

上式ノ各邊ヘ $a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C$, ヲ加ヘ, 左邊ノ方ハ $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ ニテ括リ, 右邊ノ方ハ a, b, c ニテ括レバ

$(a+b+c)\cos A+(a+b+c)\cos B+(a+b+c)\cos C$

$=a(1+\cos A)+b(1+\cos B)+c(1+\cos C)$

$\therefore\ (a+b+c)(\cos A+\cos B+\cos C)$

$=a(1+\cos A)+b(1+\cos B)+c(1+\cos C)$

然ルニ $1+\cos A=1+\left(2\cos^2\dfrac{A}{2}-1\right)=2\cos^2\dfrac{A}{2}$ 〔公式 48〕

同樣ニ $1+\cos B=2\cos^2\dfrac{B}{2}$

$1+\cos C=2\cos^2\dfrac{C}{2}$

$\therefore\ (a+b+c)(\cos A+\cos B+\cos C)=2a.\cos^2\dfrac{A}{2}+2b.\cos^2\dfrac{B}{2}+2c.\cos^2\dfrac{C}{2}$

$=2\left(a.\cos^2\dfrac{A}{2}+b.\cos^2\dfrac{B}{2}+c.\cos^2\dfrac{C}{2}\right)$

(13) △ABC ニ於テ次式ヲ證セヨ

$$a.\sin B\sin C=b.\sin C\sin A=c.\sin B\sin A$$

〔證〕 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ ∴ $a.\sin B=b.\sin A$

∴ $a.\sin B\sin C=b.\sin B\sin C.$ (1)

又 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ ∴ $b.\sin C=c.\sin B$

∴ $b.\sin C\sin A=c.\sin B\sin A$ (2)

(1) (2) ヨリ $a.\sin B\sin C=b.\sin C\sin A=c.\sin B\sin A$

(14) △ABC ニ於テ次ノ貳式ヲ證明セヨ

(a) $a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C=2c\sin B\sin C$

(b) $\dfrac{a}{\cos A}+\dfrac{b}{\cos B}+\dfrac{c}{\cos C}=\dfrac{a.\tan B\tan C}{\cos A}$

〔證〕 (a) $B+(C+A)=180°$ ∴ $\cos B=-\cos(C+B)$ 〔公式28〕

同樣＝ $\cos C=-\cos(A+B)$

∴ $a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C=a.\cos A-b.\cos(C+A)-c.\cos(A+B)$

$=a.\cos A-b\{\cos C\cos A-\sin C\sin A\}-c\{\cos A\cos B-\sin A\sin B\}$

$=a.\cos A-b.\cos C\cos A+b.\sin C\sin A-c.\cos A\cos B+c.\sin A\sin B$

$=a.\cos A-b.\cos C\cos A-c.\cos A\cos B+b.\sin C\sin A+c.\sin A\sin B$

〔前式ノ第參項ト第四項トヲ交換シタノダ〕

$=a.\cos A-(b.\cos C+c.\cos B)\cos A+b.\sin C\sin A+c.\sin A\sin B$

〔前式ノ第貳第三項ヲ cosA デ括ツタノデアル〕

$=a.\cos A-a.\cos A+b.\sin C\sin A+c.\sin A\sin B$ 〔公式 61〕

$=b.\sin C\sin A+c.\sin C\sin A=c.\sin C\sin B+c.\sin C\sin B$ 〔前題〕

$=2c.\sin B\sin C.$

(b) $\dfrac{a}{\cos A}+\dfrac{b}{\cos B}+\dfrac{c}{\cos C}$

$=\dfrac{a.\cos B.\cos C+b.\cos A.\cos C+c.\cos A.\cos B}{\cos A.\cos B.\cos C}$

$=\dfrac{a.\cos B.\cos C+(b.\cos C+c.\cos B)\cos A}{\cos A.\cos B.\cos C}$

$=\dfrac{a.\cos B.\cos C+a.\cos A}{\cos A.\cos B.\cos C}$ 〔公式 61〕

$=\dfrac{a.\cos B\cos C-a.\cos(B+C)}{\cos A\cos B\cos C}$ ∵ $A+(B+C)=180°$

$=\dfrac{a.\cos B\cos C-a(\cos B\cos C-\sin B\sin C)}{\cos A\cos B\cos C}$

$=\dfrac{a.\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}=\dfrac{a.\tan B\tan C}{\cos A}$

(c) $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$ ∴ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

∴ $\dfrac{\cos A}{a}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$

同樣＝ $\dfrac{\cos B}{b}=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2abc}$ 及ビ $\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$

∴ $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2abc}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$

$=\dfrac{b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2abc}$

$=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

(15) ΔABC ニ於テ $a^2\sin 2B+b^2\sin 2A=2ab\sin C$ ナルコヲ證セヨ.

〔證〕 $a^2\sin 2B+b^2\sin 2A$

$=2a^2\sin B.\cos B+2b^2\sin A.\cos A$ 〔公式 45〕

然ルニ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 〔公式 59〕 $\therefore\ a.\sin B=b.\sin A$

之レニ由テ前式ハ次ノ如クニナル

原式 $=2ab.\sin A\cos B+2ba.\sin B\cos A$

$=2ab(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$

$=2ab.\sin(A+B)$ 〔公式 39〕

$=2ab.\sin C$ 〔公式 27〕 $\because\ (A+B)+C=180°$

(16) ΔABC ニ於テ次ノ式ヲ證明セヨ

(a) $a.\sin A-b.\sin B=c.\sin(A-B)$

(b) $a.\cos A-b.\cos B=\cos C(b.\cos A-a.\cos B)$

(c) $a.\cos B-b.\cos A=\dfrac{a^2-b^2}{c}$

〔證〕 (a) 公式 61 ヨリ

$a=b.\cos C+c.\cos B \quad \therefore\ a.\sin A=b.\sin A\cos C+c.\sin A\cos B$ (1)

$b=a.\cos C+c.\cos A \quad \therefore\ b.\sin B=a.\sin B\cos C+c.\sin B\cos A$ (2)

然ルニ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 〔公式 59〕 $\therefore\ b.\sin A=a.\sin B$

故ニ(1)式右邊ノ第壹項ト(2)式右邊ノ第壹項トハ相等シ

故ニ(1)式ヨリ(2)式ヲ減スレバ次ノ如シ

$a.\sin A-b.\sin B=c.\sin A\cos B-c.\sin B\cos A$

$=c(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=c\sin(A-B)$

(b) $a=b.\cos C+c\cos B \quad \therefore\ a.\cos A=b.\cos C\cos A+c.\cos B\cos A$

$b=a\cos C+c.\cos A \quad \therefore\ b.\cos B=a.\cos C\cos B+c.\cos A\cos B$

初メノ式ヨリ後ノ式ヲ減ズレバ

$a.\cos A-b.\cos B=b.\cos C\cos A-a.\cos C\cos B$

$=\cos C(b.\cos A-a.\cos B)$

(c) $a.\cos C+c.\cos A=b \quad \therefore\ ab.\cos C+bc.\cos A=b^2$

$a.\cos B+b.\cos A=c \quad \therefore\ ac.\cos B+bc.\cos A=c^2$

初メノ式ヨリ後ノ式ヲ減ズレバ

$ab.\cos C-ac.\cos B=b^2-c^2$

$\therefore\ a(b.\cos C-c.\cos B)=b^2-c^2$

$\therefore\ b.\cos C-c.\cos B=\dfrac{b^2-c^2}{a}$

(17) ΔABC ニ於テ次ノ式ヲ證明セヨ

(a) $\sin A(b.\cos B-c.\cos C)=a.\cos(B+C)\sin(B-C)$

(b) $\sin A(b.\sin B+c.\sin C)=a(\sin^2 B+\sin^2 C)$

〔證〕 (a) $\sin A(b.\cos B-c.\cos C)$

$=b.\sin A\cos B-c.\sin A\cos C$ (1)

然ルニ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 〔公式 59〕 $\therefore\ b.\sin A=a.\sin B$

又 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ 〔 〃 〕 $\therefore\ c.\sin A=a.\sin C$

此ノ二式ヲ(1)式ニ代用スレバ次ノ如シ

原式 $=a.\sin B\cos B-a.\sin C\cos C$

$=a(\sin B\cos B-\sin C\cos C)$

$=a\times\dfrac{1}{2}\times(2\sin B\cos B-2\sin C\cos C)$

$$=a\times\frac{1}{2}\times(\sin 2B-\sin 2C)$$

$$=a\times\frac{1}{2}\times 2\cos\frac{2B+2C}{2}\sin\frac{2B-2C}{2}$$

$$=a.\cos(B+C)\sin(B-C)$$

(b) $\sin A\,(b\sin B+c.\sin C)=b.\sin A\sin B+c.\sin A\sin C$

然ルニ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\therefore$ $b.\sin A=a.\sin B$ 及ビ $c\sin A=a.\sin C$

$\therefore$ 原式 $=a.\sin B\sin B+a.\sin C\sin C$

$$=a.\sin^2 B+a\sin^2 C=a(\sin^2 B+\sin^2 C)$$

(18) ΔABC ニ於テ次式ヲ證明セヨ

(i) $a.\sin(B-C)+b.\sin(C-A)+c.\sin(A-B)=0$

(ii) $a.\cos(B-C)+b.\cos(C-A)+c.\cos(A-B)+a.\cos A+b.\cos B$
$+c.\cos=6c.\sin A\sin B$

〔證〕 (i) $a.\sin(B-C)+b.\sin(C-A)+c.\sin(A-B)$

$$=a(\sin B\cos C-\cos B\sin C)+b(\sin C\cos A-\cos C\sin A)$$
$$+c(\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$=a.\sin B\cos C-a.\cos B\sin C+b.\sin C\cos A-b.\cos C\sin A$$
$$+c.\sin A\cos B-c.\cos A\sin B\quad(a)$$

然ルニ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 〔公式 59〕

$\therefore$ $a.\sin B=b.\sin A$　$c.\sin B=b.\sin C$　$c.\sin A=a.\sin C$

故ニ (a) 式ノ第壹, 第四項ハ相等シク又第貳, 第五項ハ相等シク又第三項, 第六項ハ相等シ卽チ (a) 式ノ正項ト負項トハ相等シ故ニ (a) 式ハ零ナリ

$\therefore$ $a.\sin(B-C)+b.\sin(C-A)+c.\sin(A-B)=0$

(ii) 左邊ノ第壹項ト第四項トヲ a ニテ括リ又第貳項ト第五項トヲ b ニテ括リ第三項ト第六項トヲ c ニテ括レバ

左邊 $=a\{\cos(B-C)+\cos A\}+b\{\cos(C-A)+\cos B\}+c\{\cos(A-B)+\cos C\}$

$$=a\{\cos(B-C)-\cos(B+C)\}$$
$$+b\{\cos(C-A)-\cos(C+A)\}$$
$$+C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$$ 〔公式28〕 $\because A+B+C=180^\circ$

上ノ式ニ於テ各括弧內ノ式ヲ公式ニヨリ積ノ形ニ化スレバ

左邊 $=a\times 2\sin B\sin C+b\times 2\sin C\sin A+c\times 2\sin A\sin B$

$$=2a.\sin B\sin C+2b.\sin C\sin A+2c.\sin A\sin B$$

然ルニ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ $\therefore$ $a.\sin C=c.\sin A$ $\therefore$ 上式第壹項ハ $2c.\sin B\sin A$ トナル

又 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ $\therefore$ $b.\sin C=c.\sin B$ $\therefore$ 第貳項ハ $2c.\sin B\sin A$ トナル

$\therefore$ 左邊 $=2c.\sin B\sin A+2c.\sin B\sin A+2c\sin A\sin B=6c.\sin A\sin B$,

(19) ΔABC ニ於テ次式ヲ證明セヨ

(a) $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos B+\cos A}{1-\cos C}$　　(b) $\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{\cos A-\cos B}{1+\cos C}$

〔證〕 (a) $a=b.\cos C+c.\cos B\cdots\cdots(1)$

$b=a.\cos C+c.\cos A\cdots\cdots(2)$

$\therefore$ (1)+(2) $a+b=(a+b)\cos C+c(\cos A+\cos B)$

$\therefore$ $(a+b)-(a+b)\cos C=c(\cos A+\cos B)$

$\therefore$ $(a+b)(1-\cos C)=c(\cos A+\cos B)$ $\therefore$ $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos A+\cos B}{1-\cos C}$

(b) (a) ニ於ケル (2) ヨリ (1) ヲ減スレバ容易ニ出來ル

(20) △ABC ニ於テ次式ヲ證明セヨ

$$a^2+b^2+c^2=2(ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B)$$

〔證〕 $a=b\cos C+c.\cos B \quad \therefore \quad a^2=ab.\cos C+ac.\cos B \qquad (1)$

$b=a.\cos C+c.\cos A \quad \therefore \quad b^2=ab.\cos C+bc.\cos A \qquad (2)$

$c=a.\cos B+b.\cos A \quad \therefore \quad c^2=ac.\cos B+bc.\cos A \qquad (3)$

(1) (2) (3) ノ三式ヲ加フレバ

$$a^2+b^2+c^2=2ab.\cos C+2b.c\cos A+2ca.\cos B$$

$$=2(ab.\cos C+bc.\cos A+ca.\cos B)$$

(21) △ABC ニ於テ次式ヲ證明セヨ

$$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{a^2-b^2+c^2}{-a^2+b^2+c^2}$$

〔證〕 前題ニ於ケル (1) (3) ノ和ヨリ (2) 式ヲ減ズレバ

$$2ac.\cos B=a^2-b^2+c^2 \qquad (a)$$

又前題ニ於テ (2) (3) ノ和ヨリ (1) 式ヲ減ズレバ

$$2bc.\cos A=-a^2+b^2+c^2 \qquad (b)$$

(a)式ヲ(b)式ニテ除スレバ

$$\frac{a}{b}\times\frac{\cos B}{\cos A}=\frac{a^2-b^2+c^2}{-a^2+b^2+c^2}$$

$$\frac{\sin A}{\sin B}\times\frac{\cos B}{\cos A}=\frac{a^2-b^2+c^2}{-a^2+b^2+c^2} \qquad 〔公式53.〕$$

$$\tan A\cot B=\frac{a^2-b^2+c^2}{-a^2+b^2+c^2} \qquad 〔公式4.5.〕$$

$$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{a^2-b^2+c^2}{-a^2+b^2+c^2} \qquad 〔公式3.〕$$

(22) △ABC ニ於テ次式ヲ證明セヨ

$$a(b^2+c^2)\cos A+b(c^2+a^2)\cos B+c(a^2+b^2)\cos C=3abc$$

〔證〕 左邊ヲ相乘スレバ

$$左邊=ab^2\cos A+ac^2\cos A+bc^2\cos B+ba^2\cos B$$
$$+ca^2\cos C+cb^2\cos C$$

ソコデ第壹項,第四項ヲ ab ニテ括リ 第貳項ト第五項トヲ ac ニテ括リ 第三項ト第六項トヲ bc ニテ括レバ次ノ如シ

$$左邊=ab(b.\cos A+a.\cos B)+ac(c.\cos A+a.\cos C)$$
$$+bc(c.\cos B+b.\cos C)$$

$$=abc+acb+bca \qquad 〔公式61〕$$

$$=3abc$$

(23) △ABC ニ於テ $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$ ナルヿヲ證セヨ

〔證〕 $b^2+c^2-2bc.\cos A=a^2$ 〔公式62〕

$$\therefore \quad c^2-2bc.\cos A=a^2-b^2$$

兩邊ヲ c^2 ニテ除スレバ

$$1-\frac{2b.\cos A}{c}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$$

$$\therefore \quad 1-\frac{2\sin B\cos A}{\sin C}=\frac{a^2-b^2}{c^2} \qquad \because \quad \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C} \quad 〔公式59〕$$

$$\therefore \quad 1-\frac{2\sin B\cos A}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2} \qquad \because \begin{cases} C+(A+B)=180^\circ \text{ナル故} \\ \sin(A+B)=\sin C \quad 〔公式〕\end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin(A+B)-2\sin B\cos A}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B-2\sin B\cos A}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$$

$$\therefore\ \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$$ 〔公式41〕

(24) ΔABC ニ於テ $\dfrac{\sin^2\frac{C}{2}}{c}+\dfrac{\sin^2\frac{B}{2}}{b}=\dfrac{s-a}{bc}$ ナルヿヲ證セヨ

〔證〕 $$\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{c}+\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{b}=\frac{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}{c}+\frac{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}{b}$$

$$=\frac{(s-a)(s-b)}{abc}+\frac{(s-a)(s-c)}{abc}$$

$$=\frac{(s-a)(s-b)+(s-a)(s-c)}{abc}$$

$$=\frac{(s-a)\{(s-b)+(s-c)\}}{abc}=\frac{(s-a)\{2s-b-c\}}{abc}$$

$$=\frac{(s-a)\times a}{abc}\qquad \because\ 2s=a+b+c$$

$$=\frac{s-a}{bc}$$

(25) ΔABC ニ於テ次式ヲ證明セヨ

$$(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}=0$$

〔證〕 左邊$$=\frac{b-c}{\tan\frac{A}{2}}+\frac{c-a}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{a-b}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{b-c}{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}}+\frac{c-a}{\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}}+\frac{a-b}{\sqrt{\frac{(s-a)(s-a)}{s(s-c)}}}$$

$$=\frac{(b-c)\sqrt{s(s-a)}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}+\frac{(c-a)\sqrt{s(s-b)}}{\sqrt{(s-c)(s-a)}}+\frac{(a-b)\sqrt{s(s-c)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}$$

$$=\frac{(b-c)(s-a)\sqrt{s}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}+\frac{(c-a)(s-b)\sqrt{s}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}+\frac{(a-b)(s-c)\sqrt{s}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{\sqrt{s}\{(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)\}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{\sqrt{s}[\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}s-ab+ac-bc+ab-ac+bc]}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{\sqrt{S}\times 0}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}=0$$

(26) ΔABC ニ於テ次式ヲ證明セヨ

(a) $\dfrac{\cot\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}=\dfrac{a+b}{c}$ (b) $\dfrac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}=\dfrac{c}{a-b}$

〔證〕 (a) $$\frac{\cot\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}\qquad \because\ \cot\frac{A}{2}=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\times\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{(s-c)^2}{s^2}}}=\frac{1}{\frac{s-c}{s}}=\frac{s}{s-c}$$

故ニ「$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナレバ $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$ トナル」トイヘル代數ノ定理ニヨリテ

$$\frac{\cot\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}=\frac{s+(s-c)}{s-(s-c)}$$

∴ $\dfrac{\cot\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}=\dfrac{2s-c}{c}=\dfrac{a+b}{c}$ ∵ $2s=a+b+c$

(b) 先ヅ $\dfrac{\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}$ ヲ求メ然ル后チ(a)ノ樣ニシテ容易ニ證明スルヿヲ得ル.

(27) △ABC ニ於テ次式ヲ證明セヨ

$$\frac{s-a}{\cot\frac{A}{2}}=\frac{s-b}{\cot\frac{B}{2}}=\frac{s-b}{\cot\frac{C}{2}}$$

〔證〕 $\dfrac{s-a}{\cot\frac{A}{2}}=(s-a)\tan\dfrac{A}{2}$ 〔公式 3〕

$$=(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(s-a)^2(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

之レト同樣ニ $\dfrac{s-b}{\cot\frac{B}{2}}$, $\dfrac{s-c}{\cot\frac{C}{2}}$ ハ何レモ $\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ ニ等シキヿヲ證明シ得ルノデアル

$$\therefore\ \frac{s-a}{\cot\frac{A}{2}}=\frac{s-b}{\cot\frac{B}{2}}=\frac{s-c}{\cot\frac{C}{2}}$$

(28) △ABC ニ於テ次ノ如クナルヿヲ證セヨ.

(i) $\cos(B-C)=1-\cos A-\cos 2A$ ナレバ $a^2=bc$ トナル

(ii) $A=2B$ ナレバ $a^2-b^2=bc$ トナルカ或ハ $b=c$

〔證〕 (i) $\cos(B-C)=1-\cos A-\cos 2A$

∴ $\cos(B-C)=1-\cos A-(1-2\sin^2 A)$ 〔公式 47〕

∴ $\cos(B-C)=-\cos A+2\sin^2 A$

∴ $\cos(B-C)+\cos A=2\sin^2 A$

∴ $\cos(B-C)-\cos(B+C)=2\sin^2 A$ 〔公式 28〕

∴ $2\sin B.\sin C=2\sin^2 A$. ∴ $\sin B.\sin C=\sin^2 A$ (a)

然ルニ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

∴ $\dfrac{a^2}{\sin^2 A}=\dfrac{b}{\sin B}\times\dfrac{c}{\sin C}$ 即 $\dfrac{a^2}{\sin^2 A}=\dfrac{bc}{\sin B.\sin C}$

∴ $\dfrac{a^2}{bc}=\dfrac{\sin^2 A}{\sin B.\sin C}$ 然ルニ $\sin B\sin C=\sin^2 A$

∴ $a^2=bc$

(ii) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 〔公式 59〕

∴ $\dfrac{a}{\sin 2B}=\dfrac{b}{\sin B}$ ∵ 題意ニヨリ $A=2B$

∴ $\dfrac{a}{2\sin B.\cos B}=\dfrac{b}{\sin B}$ 〔公式 45〕 ∴ $\dfrac{a}{2\cos B}=b$ ∴ $\cos B=\dfrac{a}{2b}$

今 $b^2=a^2+c^2-2ac.\cos B$ 〔公式 62〕

∴ $b^2=a^2+c^2-2ac\times\dfrac{a}{2b}$

∴ $b^3=a^2b+bc^2-a^2c$ ∴ $b^3-bc^2-a^2b+a^2c=0$

∴ $b(b^2-c^2)-a^2(b-c)=0$

∴ $(b-c)\{b(b+c)-a^2\}=0$

∴ $b-c=0$ ∴ $b=c$

或 $b(b+c)-a^2=0$ ∴ $b^2+bc-a^2=0$ ∴ $a^2-b^2=bc$

(29) △ABC ニ於テ

(i) 若シ $\sin C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$ ナレバ此三角形ハ直三角形ナリ

(ii) 若シ $a.\cos A=b.\cos B$ ナレバ此三角形ハ直三角形カ或ハ等脚

三角形ナリ.

〔證〕 (i) $\sin C=\frac{\sin A\overset{+}{}\sin B}{\cos A+\cos B}$ $\therefore$ $\sin C=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$

$$\therefore\quad \sin C=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ $A+B+C=180^\circ$ $\therefore$ $\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ$

$\therefore$ $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$ 及ビ $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$ 〔公式 20〕

$\therefore$ (1) ハ $\sin C=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$ $\therefore$ $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$ 〔公式 45〕

$\therefore$ $2\sin^2\frac{C}{2}=1$ $\therefore$ $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

然ルニ $\frac{C}{2}$ ハ鋭角 $\therefore$ $\frac{C}{2}=45^\circ$ $\therefore$ $C=90^\circ$

故ニ $\triangle ABC$ ハ直三角形デアル.

(ii) $a.\cos A=b.\cos B$ (題意) $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1)

然ルニ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ 〔公式 62〕

$\therefore$ (1) ヨリ $\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2bc}=\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac}$

$$\therefore\quad \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{b}=\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{a}$$

$$\therefore\quad a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2)$$

$$\therefore\quad a^2b^2+a^2c^2-a^4=b^2a^2+b^2c^2-b^4$$

$$\therefore\quad b^4-a^4-b^2c^2+a^2c^2=0$$

$\therefore$ $(b^2+a^2)(b^2-a^2)-c^2(b^2-a^2)=0$

$\therefore$ $(b^2-a^2)(b^2+a^2-c^2)=0$

$\therefore$ $b^2-a^2=0$ $\therefore$ $a=b$ $\therefore$ 等脚△ ナリ.

或ハ $b^2+a^2-c^2=0$ $\therefore$ $a^2+b^2=c^2$ $\therefore$ 直角△ ナリ.

(30) $\triangle ABC$ ニ於テ $\cos\theta=\frac{c}{b}$ ナレバ $\tan^2\frac{\theta}{2}=\tan\frac{B-C}{2}$ ナルコトヲ證セヨ 但シ $b>c$ トス

〔證〕 $\cos\theta=\frac{c}{b}$ $\therefore 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{c}{b}$ $\therefore 2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\frac{c}{b}=\frac{b-c}{b}$ (1)

又 $\cos\theta=\frac{c}{b}$ $\therefore 2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{c}{b}$ $\therefore 2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\frac{c}{b}=\frac{b+c}{b}$ (2)

(1) ヲ (2) ニテ除シ $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{b-c}{b+c}$ 故ニ公式 60 ニヨリ

$$\therefore\quad \tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}\quad \because\ \frac{B+C}{2}+\frac{A}{2}=90^\circ$$

$$=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2}$$

(31) $\triangle ABC$ ニ於テ次ノコトヲ證明セヨ

(i) $\tan^2\theta=\frac{4bc.\sin^2\frac{A}{2}}{(b-c)^2}$ ナレバ $a=(b-c)\overset{\sec}{\sin}\theta$ 但 $b>c$

(ii) $\cos^2\theta=\frac{4bc\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}$ ナレバ $a=(b+c)\sin\theta$

〔證〕 (i) $\tan^2\theta=\frac{4bc.\sin^2\frac{A}{2}}{(b-c)^2}$

双方ニ 1 ヲ加フルキハ

$$1+\tan^2\theta=1+\frac{4bc.\sin^2\frac{A}{2}}{(b-c)^2}\quad \therefore\ \sec^2\theta=\frac{(b-c)^2+4bc.\sin^2\frac{A}{2}}{(b-c)^2}$$

$\therefore$ $(b-c)^2+4bc.\sin^2\frac{A}{2}=(b-c)^2\sec^2\theta$

$\therefore$ $b^2+c^2-2bc+4bc\sin^2\frac{A}{2}=(b-c)^2\sec^2\theta$

$\therefore\quad b^2+c^2-2bc\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)=(b-c)^2\sec^2\theta$

$\therefore\quad b^2+c^2-2bc\cos A=(b-c)^2\sec^2\theta$ 〔公式 47〕

$\therefore\quad a^2=(b-c)^2\sec^2\theta$ 〔公式 2〕

$\therefore\quad a=(b-c)\sec\theta$

(ii) $\cos^2\theta=\dfrac{4bc\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}$ (題意)

$\therefore\quad 1-\cos^2\theta=1-\dfrac{4bc\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}$ $\quad\therefore\quad \sin^2\theta=\dfrac{(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}$

$\therefore\quad (b+c)^2-4bc\cos^2\frac{A}{2}=(b+c)^2\sin^2\theta$

$\therefore\quad b^2+c^2+2bc-4bc\cos^2\frac{A}{2}=(b+c)^2\sin^2\theta$

$\therefore\quad b^2+c^2-2bc\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)=(b+c)^2\sin^2\theta$

$\therefore\quad b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2\sin^2\theta$ 〔公式 48〕

$\therefore\quad a^2=(b+c)^2\sin^2\theta$ $\quad\therefore\quad a=(b+c)\sin\theta$

(32) △ABC ニ於テ若シ a, b, c ガ A.P ヲナセバ

$$3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1$$

ナルヿヲ證セヨ

〔證〕 $3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=3\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

$$=3\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)^2(s-c)}{s^2(s-a)(s-c)}}=\frac{3(s-b)}{s}$$

$$=\frac{3(2s-2b)}{2s}=\frac{3(a-b+c)}{a+b+c}\qquad(1)$$

然ルニ a, b, c ハ AP $\quad\therefore\quad b-a=c-b$

$\therefore\quad a+c=2b$

之レヲ(1)式ニ代用スルトキハ

$$3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{3(2b-b)}{2b+b}=\frac{3b}{3b}=1$$

(33) △ABC ニ於テ $\dfrac{\cos A}{a}, \dfrac{\cos B}{b}, \dfrac{\cos C}{c}$ ガ A.P ヲナセバ a^2, b^2, c^2 ハ A.P ヲナスヿヲ證セヨ

〔證〕 $\dfrac{\cos A}{a}, \dfrac{\cos B}{b}, \dfrac{\cos C}{c}$ ハ AP ヲナス

$\therefore\quad \dfrac{\cos B}{b}-\dfrac{\cos A}{a}=\dfrac{\cos C}{c}-\dfrac{\cos B}{b}$

$\therefore\quad \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2abc}-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2abc}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2abc}-\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2abc}$ 〔公式 62〕

$\therefore\quad a^2+c^2-b^2-(b^2+c^2-a^2)=a^2+b^2-c^2-(a^2+c^2-b^2)$

$\therefore\quad 2a^2-2b^2=2b^2-2c^2$

$\therefore\quad a^2-b^2=b^2-c^2$

$\therefore\quad a^2, b^2, c^2$ ハ A.P

(34) △ABC ニ於テ $s^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=S$ ナルヿヲ證セヨ

〔證〕 $s^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

$$=s^2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$=s^2\sqrt{\frac{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}{s^3(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=s^2\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}}$$

$$=\sqrt{\frac{s^4(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=S$$

(35) 四角形 ABCD ニ於テ對角線 AC, BD, ノ長サヲ夫々

m,n トシ又 AC, BD ノ交角ヲ α トセバ此四角形ノ面積ハ次ノ如シ

$$\frac{1}{2}mn\sin\alpha$$

〔證〕 AC, BD ノ交點ヲ O トシ

DE⊥AC, BF⊥AC トス

$$\triangle ABC \text{ ノ面積} = \frac{1}{2}AC \times BF = \frac{1}{2}m.BF$$

然ルニ $\dfrac{BF}{BO} = \sin\alpha$　　$\therefore$ $BF = BO\sin\alpha$

$$\therefore \quad \triangle ABC \text{ ノ面積} = \frac{1}{2}m.BO\sin\alpha$$

同樣ニ　$\triangle ADC$ ノ面積 $= \dfrac{1}{2}m.DO\sin\alpha$

加ヘテ　$\square ABCD$ ノ面積 $= \dfrac{1}{2}m(BO+DO)\sin\alpha$

$$= \frac{1}{2}m.n.\sin\alpha$$

第六編

對數

36. 定義　對數 (Logarithm)　今 $a^x=b$ トイフ代數式ガアル時, 指數 x ヲ「a ヲ底トスル b ノ對數」トイフ.

而シテ對數トイフ言葉ト區別スル爲メニ b ヲ眞數トイフ.

記法. 「a ヲ底トスル b ノ對數」トイフヿヲ示ス符號トシテ $\log_a b$ ヲ用ユ.

之レニ由テ, a ヲ底トスル b ノ對數ハ x デアル, トイフヿヲ符號的ニ示ス時ハ次ノ通リデアル,

$$x = \log_a b$$

例ヘバ $2^4=16$,　故ニ 4 ハ, 2 ヲ底トスル 16 ノ對數ニシテ 16 ハ眞數デアル, 之レヲ式ニテ示セバ　$4=\log_2 16$.

又 $4^2=16$,　故ニ 2 ハ, 4 ヲ底トスル 16 ノ對數ニシテ 16 ハ眞數デアル, 之レヲ式ニテ示セバ

$$2=\log_4 16.$$

37. 對數之性質　對數ヲ實際ニ用ユル爲メニ極メテ必要ナル性質ハ次ノ如シ

$$\log_a m \times n = \log_a m + \log_a n \qquad (68)$$

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n \qquad (69)$$

$$\cancel{\log m^n = n\log_a m.} \qquad (70)$$

$\log_a m^n = n\log_a m$

〔證〕 $\log_a m=x$ トス，　$\therefore\ m=a^x$　〔36, 定義〕

$\log_a n=y$ トス，　$\therefore\ n=a^y$　〔　〃　〕

上ノ二式ヲ相乘スル片ハ　$m\times n=a^x\times a^y$

$\therefore\ m\times n=a^{x+y}$

故ニ 36 定義ニヨリ　$\log_a m\times n=x+y$

然ルニ $x=\log_a m$,　$y=\log_a n$ デアル，

$\therefore\ \log_a m\times n=\log_a m+\log_a n$　〔(68) ノ證〕

又 $\log_a m=x$ トス　$\therefore\ m=a^x$

$\log_a n=y$ トス　$\therefore\ n=a^y$

下式ニテ上式ヲ除ル片ハ

$$\frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

故ニ 36 定義ニヨリ　$\log_a\frac{m}{n}=x-y$

然ルニ　$x=\log_a m$,　$y=\log_a n$　デアル

$\therefore\ \log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$　〔(69) ノ證〕

又 $\log_a m=x$ トス，$\therefore\ m=a^x$

双方ヲ n 方スレバ　$m^n=(a^x)^n=a^{nx}$

故ニ 36 定義ヨリ　$\log_a m^n=nx$

然ルニ $x=\log_a m$ デアル.

$\therefore\ \log_a m^n=n\log_a m$　〔(70) ノ證〕

〔注意〕 上ノ公式 70 ハ n ガ分數若クハ負數トシテモ成立スルノデアル．即チ

$\log_a m^{\frac{q}{p}}=\frac{q}{p}\log_a m$,　及ビ $\log_a m^{-p}=-p\log_x m$ デアル，

但シ代數デ知ル如ク $m^{\frac{q}{p}}=\sqrt[p]{m^q}$,　$m^{-p}=\frac{1}{m^p}$ トイフ意味デアル．

38. 對數之種類　實際用ヒラルヽ對數ハ次ノ二種デアル．

〔第壹〕 **自然對數**. $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\cdots\cdots$ トイフ不盡數ヲ底トスル對數ヲ自然對數トイフ．之レハ理論數學ニ必要ナルモノデアル，

ソコデ $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\cdots\cdots$ トイフ不盡數ヲ計算スル片ハ 2,78728 ……トナリ，之レヲ e ニテ表ハスヲ通例トス．

〔注意〕 自然對數ハ「ネピール」ノ對數トモイフ．

〔第貳〕 **通常對數**. 10 ヲ底トスル對數ヲ通常對數トイフ．之レハ實地ノ計算ニ用ヒラルヽノデアル．

以下單ニ對數トイフ片ハ通常對數ノコヲイフノダト知ルベシ．

又 $\log a$ ト記シ，底ノ何タルヲ明記セザル片ハ，底ハ 10 ナリト知ルベシ，詳シク云ヘバ $\log_{10} a$ ト書クベキヲ略シテ $\log a$ ト書クノデアル．

39. 定義　指標　假數.　通常對數ニ於テハ或ル數ノ對數ノ整數分ヲ指標トイヒ，又其對數ノ小數分ヲ假數トイフ．

例ヘバ若シモ，$\log a=2{\cdot}83$ ナル片ハ整數分 2，ハ此ノ對數ノ指標ニシテ，小數分 ·83 ハ假數デアル．

假令ヘハ茲ニ N トイフ數ガアリテ若シ $N=10^{-2\cdot3}$ ナルトキハ $\log_{10}N=-2\cdot3$ トナル，然レドモ此ノ $-2\cdot3$ 即チ $-2-.03$ ノ小數分ヲ正ナラシムル爲メニ 1 ヲ加減スルトキハ $-2-1+1-0\cdot3=-3+0\cdot7$ トナル，∴ $\log N=-3+0\cdot7$ 而シテ之レハ $\bar{3}\cdot7$ ト書ク，即チ整數 3 ハ負ニシテ小數 7 ハ正デアル，　∴ $\log N=\bar{3}\cdot7$

此ノ如ク凡ヘテ對數ノ假數ハ正ナル樣ニ書キ，指標負ナレバ其ノ上方ニ負號「－」ヲ置クノデアル．

40. 通常對數之性質

〔第壹〕 1 ニ若干個ノ零ヲ附シタル數ノ對數ハ其ノ零ノ個數丈ケノ整數デアル．

例ヘバ $\log1000=3$ デアル．

〔證〕 $10^3=1000$，∴ $\log_{10}1000=3$，即 $\log1000=3$

〔第貳〕 1 ノ對數ハ 0 デアル．

〔證〕 $10^0=1$．∴ $\log_{10}1=0$　即チ $\log1=0$．

〔第參〕 1ヨリ大ナル或ル數 N ノ整數部ガ n 位アルトキハ N ノ對數ノ指標ハ $n-1$ デアル．

〔註〕 例ヘバ $567\cdot3$ ノ整數部ハ 3 位デアル，∴ $\log567\cdot3$ ノ指標ハ 2，デアル

又 $56\cdot73$ ノ整數部ハ 2 位デアル，∴ $\log56\cdot73$ ノ指標ハ 1 デアル．

此ノ如ク，1 ヨリ大ナル數ノ對數ノ指標ハ，其ノ數ノ整數部ノ桁數ヨリモ常ニ 1 個少ナイノデアル．

〔證〕 10^n ハ $n+1$ 位ノ最小ナルモノニシテ 10^{n-1} ハ n 位ノ最小ナル數デアル，而シテ N ノ整數部ハ n 位デアル

$$\therefore\quad 10^n > N > 10^{n-1}$$

$$\therefore\quad \log10^n > \log N > \log10^{n-1}$$

但シ $\log10^n=n\log10$〔公式68〕$=n$．　∵ $\log10=1$．

又 $\log10^{n-1}=(n-1)\log10=n-1$．

$$\therefore\quad n > \log N > n-1$$

故ニ $\log N$ ハ n ト $n-1$ トノ間ニアリテ即チ $\log N$ ハ整數 $n-1$ ト，或ル小數トノ和デアル，即チ $\log N=n-1+$(小數)

故ニ $\log N$ ノ指標ハ $n-1$ デアル．

〔第四〕 1 ヨリ小ナル或ル數ニ於テハ，小數點ヨリ，有効數字〔但シ有効數字トハ 0 デナキ數字ノコトデアル〕ニ到ル迄ノ 0 ノ個數ガ n アルトキハ，其指數ハ $-(n+1)$ デアル．

〔註〕 例ヘバ $\log\cdot00045$ ノ指標ハ -4，$\log\cdot0045$ ノ指標ハ -3 ノ如ク，凡ヘテ 1 ヨリ小ナル數ノ對數ノ指標ハ小數點ヨリ以下，引ク續ク 0 ノ個數ヨリ 1 個多キ負數デアル．

〔證〕 1 ヨリ小ナル或ル數ヲ N トス，但シ此ノ數ノ小數點ヨリ有効數字ニ到ル 0 ノ個數ハ n 個アリトス．

今 $\dfrac{1}{10^n}=.000\cdots\cdots1$　(此ノ 1 ノ前ノ 0 ノ個數ハ n 個アリ)

又 $\dfrac{1}{10^{n+1}}=.000\cdots\cdot1$　(此ノ 1 ノ前ノ 0 ノ個數ハ $n+1$ 個アリ)

$$\therefore\quad \frac{1}{10^n} < N < \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$\therefore\quad 10^{-n} < N < 10^{-(n+1)}$$

$$\therefore\quad \log10^{-n} < \log N < \log10^{-(n+1)}$$

然ルニ $\log10^{-n}=-n\log10$〔公式70〕$=-n$　∵ $\log10=1$．

又 $\log10^{-(n+1)}=-(n+1)\log10$〔公式70〕$=-(n+1)$．

∴ $-n<\log N<-(n+1)$

故ニ logN ハ負數ニシテ $-n$ ト $-(n+1)$ トノ間ニアリ，故ニ logN ハ $-n$ ト，負ノ小數トヲ加ヘタルモノナリ。然レ𪜈對數ニ於テ假數即チ小數部ハ正トスベキヲ以テ logN ハ $-(n+1)$ ト，正ノ小數トヲ加ヘタルモノトナル．〔例ヘバ logN ガ -2 ト -3 トノ間ニアレバ logN$=-3+$(正小數) トナルガ如シ〕

∴ logN ノ指標$=-(n+1)$.

〔第五〕二個ノ數アリ，夫々同ジ數字ヲ同ジ順ニ列シ唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル𪜊ハ此ノ二數ノ對數ノ假數ハ相等シ

例ヘバ 2673.4, 26.734 ノ如ク唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル𪜊ハ此二數ノ對數ノ假數ハ同ジデアル.

〔證〕 $2673{\cdot}4=26{\cdot}734\times100$

∴ $\log2673{\cdot}4=\log(26{\cdot}734\times100)$

$=\log26{\cdot}734+\log100$ 〔公式 68〕

$=\log26{\cdot}734+2$ 〔本章 第壹〕

∴ $\log2673{\cdot}4-\log26{\cdot}734=2$

斯クノ如ク $\log2673{\cdot}4$ $\log26{\cdot}734$ ノ差ハ整數 2 デアル，故ニ log2673.4 ノ假數ト，$\log26{\cdot}734$ ノ假數トハ相等シ.

41. 對數表

1ヨリ或ル數迄ノ數ノ對數ハ一々詳密ニ計算シテ，表トシテアルノデアル，之レヲ對數表トイフ. 而シテ現今世ニ行ハルヽ對數表ハ假數四位，五位，六位，七位等ノモノアレ𪜈五位ノモノニテ充分ナリ，次ニ雛形ヲ示ス

對數表雛形

眞數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17 609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
151	898	926	955	984	$\overline{013}$	$\overline{041}$	$\overline{070}$	$\overline{099}$	$\overline{127}$	$\overline{156}$
152	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
153	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
154	752	780	808	837	865	893	921	949	977	$\overline{005}$
155	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
156	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562
157	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
158	866	893	921	948	976	$\overline{003}$	$\overline{030}$	$\overline{058}$	$\overline{085}$	$\overline{112}$
159	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	385
160	412	439	466	493	520	548	575	602	629	656
161	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925
162	952	978	$\overline{005}$	$\overline{032}$	$\overline{095}$	$\overline{085}$	$\overline{112}$	$\overline{139}$	$\overline{155}$	$\overline{192}$
163	21 219	245	272	299	325	352	378	405	431	458
164	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
165	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985
166	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
167	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505
168	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
169	789	814	840	866	891	917	943	968	994	$\overline{019}$
170	23 04g	070	096	121	147	172	198	223	219	274
171	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
172	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
173	805	830	855	880	905	930	955	980	$\overline{005}$	$\overline{030}$
174	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279
175	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
176	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
177	797	822	846	871	895	920	944	969	993	$\overline{018}$
178	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
179	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
181	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
182	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221
183	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458
184	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
185	717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
186	951	975	998	$\overline{021}$	$\overline{045}$	$\overline{068}$	$\overline{091}$	$\overline{114}$	$\overline{138}$	$\overline{161}$
187	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
188	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
189	646	669	692	715	138	761	784	807	830	852
190	875	898	921	944	967	989	$\overline{012}$	$\overline{035}$	$\overline{058}$	$\overline{081}$
191	28 103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
192	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
193	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
194	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
195	29 003	026	043	070	092	115	137	159	181	203
196	226	248	270	292	314	336	358	380	403	425
197	447	469	491	513	535	557	579	601	623	645
198	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
199	885	907	929	951	973	994	$\overline{016}$	$\overline{038}$	$\overline{060}$	$\overline{081}$

對 數 表 雛 形

眞數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
101	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
102	860	903	945	988	$\overline{030}$	$\overline{072}$	$\overline{115}$	$\overline{157}$	$\overline{199}$	$\overline{242}$
103	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
104	703	745	787	828	870	912	953	995	$\overline{036}$	$\overline{078}$
105	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
107	938	979	$\overline{019}$	$\overline{060}$	$\overline{100}$	$\overline{141}$	$\overline{181}$	$\overline{222}$	$\overline{262}$	$\overline{302}$
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
109	743	782	822	862	902	941	981	$\overline{021}$	$\overline{060}$	$\overline{100}$
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
111	253	571	610	650	689	727	766	805	844	883
112	922	961	999	$\overline{038}$	$\overline{077}$	$\overline{115}$	$\overline{154}$	$\overline{192}$	$\overline{231}$	$\overline{269}$
113	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
114	690	729	767	805	843	881	918	956	994	$\overline{032}$
115	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
116	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
117	819	856	893	930	967	$\overline{004}$	$\overline{041}$	$\overline{078}$	$\overline{115}$	$\overline{151}$
118	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
119	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120	918	954	990	$\overline{027}$	$\overline{063}$	$\overline{099}$	$\overline{135}$	$\overline{171}$	$\overline{207}$	$\overline{243}$
121	08 279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
122	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
123	991	$\overline{026}$	$\overline{061}$	$\overline{096}$	$\overline{132}$	$\overline{167}$	$\overline{202}$	$\overline{237}$	$\overline{272}$	$\overline{307}$
124	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
125	691	726	760	795	830	864	899	934	968	$\overline{003}$
126	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
127	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
128	721	755	789	823	857	890	924	958	992	$\overline{025}$
129	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130	394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	$\overline{024}$
132	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
134	710	743	775	808	840	872	905	937	969	$\overline{001}$
135	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
136	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
137	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
138	988	$\overline{019}$	$\overline{051}$	$\overline{082}$	$\overline{114}$	$\overline{145}$	$\overline{176}$	$\overline{208}$	$\overline{239}$	$\overline{270}$
139	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582
140	613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
141	922	953	983	$\overline{014}$	$\overline{045}$	$\overline{076}$	$\overline{106}$	$\overline{137}$	$\overline{168}$	$\overline{198}$
142	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
143	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806
144	836	866	897	927	957	987	$\overline{017}$	$\overline{047}$	$\overline{077}$	$\overline{107}$
145	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406
146	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702
147	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997
148	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289
149	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580

或ル數ノ對數ノ指標ハ凡ヘテ前章第四,第五ニヨリテ求メラル,故ニ指標ヲ表ニ記載スル必要ガナイノデアル,故ニ對數表ニ於テハ唯假數ノミヲ記載シテアルノデアル. 而シテ對數表ノ第貳縱列(左ヨリ右ノ方ヘ算ヘテ)中ニ於テ左ノ方ヘ出張ッテ居ル數ガ若干個アル,此ノ數ハ其前ノ横列中ニ於テ横線一ヲ附シテアル數ノ前ニ附ケ加ヘラルヽノデアル. 且ツ此ノ出張リテ居ル數ノ次ニアル多クノ數ノ前ニモ附ケ加ヘラルヽノデアル.

例ヘバ上ノ表ノ中ノ第二縱列ニ於テ第五番目ノ出張リタル數即チ 04 ニ就テ言ヘバ此ノ 04 ガアル横列ノ前ニアル横列ニ於テ横線一ヲ附スル數即チ 021, 060, 100 ノ各ノ前ニ此ノ 04 ヲ附ケ加ヘテ 04021, 04060, 04100 トスルノデアル,且ツ此ノ出張リタル數 04 ノ次ギニアル數即チ 139, 179····493, 253,571····883, 922, 961, 999 ノ各ノ前ニモ附ケ加ラルノデアル.

42. 對數表用法 次ニ例題ヲ設ケテ對數表ノ用ヒ方ヲ示ソー. 但シ説明ヲ簡短ニスル爲メニ次ノ如ク規約ス,

横列ヲ指シ示スニハ左傍ニアル數ヲ以テス,即チ 103 ノ横列トイヘバ 103 ヲ左ノ端ニ置ク横列即チ上ヨリ第五番目ノ横列ヲ指シ示スノデアッテ,又 105 ノ横列トイヘバ 105 ヲ左ノ端ニ置ク横列即チ上ヨリ第七番目ノ横列ヲ指シ示スノデアル.

又縱列ヲ示スニハ上方ニアル數若クハ文字ヲ以テス,即チ「4」ノ縱列トイヘバ 4 ヲ上方ニ置ク縱列即チ左ヨリ右ノ方ヘ第六番目ノ縱列ヲ指シ示スノデアッテ,0 ノ縱列トイヘバ 0 ヲ上方ニ置ク縱列即チ左ヨリ右ノ方ヘ第貳番目ノ縱列ヲ指シ示スノデアル,又「數ノ縱列」トイヘバ上ノ方ニ「眞數」ノ字ヲ置ク縱列即チ左ノ方ヨリ第壹番

目ノ縱列ヲ指シ示スノデアル.

例 1. log10·34 ヲ求ム

〔解〕 10·34 ハ小數以上ニ於テ二桁ヲ有ス, 故ニ log10·34 ノ指標ハ 1 デアル (40. 第三)

又 log10·34 ノ假數ヲ求ムルニハ次ノ如シ.

先ツ 134 ページノ表ニ於テ「數ノ縱列」(即チ左ヨリ第壹番目)ニ於テ 103 ヲ索メ, 又「數ノ横列」(即チ最モ上ノ横列)ニ於テ 4 ヲ索ム,

ソコデ上ニ索メタル 103 ノ横列ト 4 ノ縱列トガ交叉セル場所ニ於テ 452 ヲ求メ, 且ツ「0 ノ縱列」ニ於テ出張リタル數 01 ヲ前ノ 452 ニ前置シ 01452 ヲ得, 之レハ log10·34 ノ假數デアル.

$$\therefore \log 10{\cdot}34 = 1{\cdot}01452$$

例 2. log0·001078 ヲ求ム.

〔解〕 0·001078 ニ於テ小數點以下引續ク所ノ 0 ノ個數ハ 2 デアル,(勿論 1 ト 87 トノ間ニアル 0 ハ數ニ入レヌ),
故ニ log0·001078 ノ指標ハ $\bar{3}$ デアル. (40. 第四).

ソコデ log0·001078 ノ假數ヲ求メンニ, 先ツ 134 ページノ對數表ニ於テ107 ヲ索メ, 又數ノ横列ニ於テ 8 ヲ求ム, ソコデ今索メタル 107ノ横列ト 8 ノ縱列トガ交叉セル場所ニ於テ 262 ヲ得, 而シテ 0 ノ縱列ニ於テ出張リタル數 03 ヲ前ノ 262 ノ前ニ置キ 03262 ヲ得,(但シ 262 ノ上ニ横線一ヲ附ケテアルカラ 0 ノ縱列ノ 02 ヲ前置シナイデ, 03 ヲ前置シタノデアル)
此ノ 03262 ハ即チ log0·001078 ノ假數デアル.

$$\therefore \log 0{\cdot}001078 = \bar{3}.03262$$

例 3. log113·26 ヲ求メヨ.

〔解〕 前二例ノ如ク四桁ノ數ノ對數ハ容易ニ表ヨリ求メ得ラルヽガ, 本例ノ如ク 5 桁ノ數ノ對數ハ直チニ表ヨリ求メ得ラレヌ, 之レヲ索ムルニハ次ノ如クスル,

先ヅ 113·2 ト 113·3 トノ對數ヲ表ヨリ索メ(前二例ノ樣ニ)其ノ差ヲ取ル即チ

$$\begin{array}{rl} & \log 113{\cdot}3 = 2{\cdot}05423 \\ -) & \log 113{\cdot}2 = 2{\cdot}05385 \\ \hline & \cdot1 \quad \cdot00038 \end{array}$$

即チ眞數 113·3 ト 113·2 トノ差 ·1 ニ對シテ, 對數ニ於テ ·00038 ノ差ヲ生ズ,

又 113·26 ト 113·2 トノ差即チ ·06 ニ對スル對數ノ差ヲ x トスレバ, 此ノ x ハ次ノ比例式ヨリ求メラルヽ,

$$\cdot1 : \cdot06 = \cdot00038 : x$$

$$x = \frac{\cdot06 \times \cdot00038}{\cdot1} = \cdot000228$$

即チ眞數ガ 113·2 ヨリモ ·06 増シテ 113·26 トナル時ハ其對數ハ ·00228 増ス,

$$\therefore \log 113{\cdot}26 = 2{\cdot}05385 + \cdot00228 = 2{\cdot}05613.$$

〔注意〕 元來對數ハ其眞數ト比例スルモノデハナイ, 然レ氏微小ナル數ニ就テハ眞數ト其對數トガ比例スルモノトシテ, 大ナル誤差ヲ生ジナイノデアル.

例 4. $\log x = 2{\cdot}10415$ ヨリ x ヲ求ム.

〔解〕 先ヅ假數 10415 ノ初メノ二桁即チ 10 ヲ 134 ページノ表ニ於ケル 0 ノ縱列 (即チ左ヨリ第貳番目ノ縱列) ニ於テ索メ 126 ノ横列 (即チ上ヨリ第廿八番目ノ横列) ニ於テ之レヲ得タリ, 而シテ此ノ 126 ノ横列ノ前後ノ横列ニ於テ 415 ヲ索メ 1 ノ縱列 即チ左

ヨリ第三番目ノ縱列）ニ於テ之レヲ得タリ，即チ此ノ 415 ハ 127 ノ横列ト 1 ノ縱列トノ交叉セル場所ニアル，故ニ假數 10415 ニ對スル眞數ハ 1271 デアル，

而シテ與ヘラレタル對數ノ指標ハ 2 ナルヲ以テ眞數ノ整數部ノ桁數ハ 3 ナリ．〔4．第三〕．

故ニ對數 2·10415 ニ對スル眞數即チ x ハ 127·2 ナリ．

例 6. $\log x = 2{\cdot}10428$ ヨリ x ヲ求ム．

〔解〕 前例ノ如ク假數 10428 ノ初ノ 2 桁即 10 ヲ對數表 10 ノ縱列ニ於テ索ムルニ 126 ノ横列 (134 ページ) ニ於テ之レヲ得タリ，而シテ假數 10428 ノ終リノ三桁 428 ヲ 126 ノ横列ノ前後ノ横列中ニ於テ索ムルニ全ク適合スルモノナク，1 ノ縱列ニ於ケル 415 ト 2 ノ縱列ニ於ケル 449 トノ間ニアルコヲ知ル，

即チ $\log x = 2{\cdot}10428$ ハ $\log 127{\cdot}2 = 2{\cdot}10449$ ト $\log 127{\cdot}1 = 2{\cdot}10415$ トノ間ニアルコヲ知ル，

而シテ $\log 127{\cdot}2$ ト $\log 127{\cdot}1$ トノ差，及ビ $\log x$ ト $\log 127{\cdot}1$ トノ差ヲ取レバ次ノ如シ，

$$\begin{array}{rl} \log 127{\cdot}2 = 2{\cdot}10449 & \\ \log 127{\cdot}1 = 2{\cdot}10415 & (- \\ \hline {\cdot}1 \quad {\cdot}00034 & \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{rl} \log x \quad = 2{\cdot}10428 & \\ \log 127{\cdot}1 = 2{\cdot}10415 & (- \\ \hline {\cdot}00013 & \end{array}$$

即チ $\log 127{\cdot}1$ ヨリモ ·00034 増セバ眞數ニ於テ ·1 増ス，今 $\log 127{\cdot}1$ ヨリモ ·00013 増セバ眞數ガ幾何増スカヲ次ノ比例式ヨリ求メ得ラルヽ，

$${\cdot}00034 : {\cdot}00013 = {\cdot}1 : x \qquad x = {\cdot}04 \ \text{(4捨5入シテ)}$$

即チ x ハ 127·2 ヨリモ ·04 多シ．

$$\therefore \quad x = 127{\cdot}24$$

43. 對數之諸施術

次ニ例題數個ヲ設ケテ對數ノ諸施術ヲ示ソー．

例 1. $10{\cdot}12 \times 1{\cdot}284$ ノ對數ヲ求ム．

〔解〕 公式 68 ニヨリ

$$\log 10{\cdot}12 \times 1{\cdot}284 = \log 10{\cdot}12 + \log 1{\cdot}284 \qquad (a)$$

然ルニ 表ヨリ

$$\begin{array}{rl} \log 10{\cdot}12 = 1{\cdot}00518 & \\ \log 1{\cdot}284 = 0{\cdot}10857 & (+ \\ \hline 1{\cdot}11375 & \end{array}$$

之レヲ加フレバ

(a) ニヨリ上ノ和ハ所求ノ對數デアル，即チ

$$\log(10{\cdot}12 \times 1{\cdot}284) = 1{\cdot}11375.$$

例 2. $0{\cdot}00121 \times 1289,$ ノ對數ヲ求ム

〔解〕 公式 68

$$\log(0{\cdot}00121 \times 0{\cdot}1289) = \log 0{\cdot}00121 + \log 0{\cdot}1289. \qquad (a)$$

然ルニ 0·00121 ハ 0·001210 ト見做シ 134 ページ表ヨリ其對數ヲ索メラルヽ，即チ

$$\begin{array}{rl} \log 0{\cdot}00121 = \bar{3}{\cdot}08279 & \\ \log 0{\cdot}1289 = \bar{1}{\cdot}11025 & (+ \\ \hline \bar{4}{\cdot}19304 & \end{array}$$

加フレバ

之レハ (a) ニヨリ所求ノ對數デアル，

即チ $\log 0{\cdot}00121 \times \log 0{\cdot}1289 = \bar{4}{\cdot}19304.$

例 3. $\log 9343 = 3{\cdot}97049$, $\log 7421 = 3{\cdot}87046$ ヲ知リテ $0{,}0007421 \times {\cdot}9343$ ノ對數ヲ求ム．

〔解〕 7421，ト ·007421 トハ唯小數點ノ位置ヲ異ニスルノミデア

ル，故ニ此ノ二數ノ對數ノ假數ハ同ジデアル〔40. 第五〕

故ニ $\log\cdot007421$ ノ假數ハ $\cdot87046$ 又其ノ指標ハ $\bar{3}$.

$\therefore \quad \log\cdot007421=\bar{3}\cdot87046$

同樣ニ $\log\cdot9343=\bar{1}\cdot97049$

ソコデ $\log(\cdot007421\times\cdot9343)=\log\cdot007421+\log\cdot9343$ 〔公式63〕

$$=\bar{3}\cdot87046+\bar{1}\cdot97049$$

之レヲ計算スルコ次ノ如シ

$$\begin{array}{rl} \log\cdot007421= & \bar{3}\cdot87046 \\ \log\cdot9343= & \bar{1}\cdot97049 \\ \hline & \bar{3}\cdot84095 \end{array} (+ \quad \cdots\cdots\text{所求ノ對數.}$$

上ノ運算ニ於テ假數 $\cdot87046$, $\cdot97049$ ヲ加フレバ $1\cdot84095$ ヲ得，此ノ整數部 1 ハ勿論 $+1$ デアル，而シテ此ノ $+1$ ト，指標 $\bar{3}$ 即チ -3, 及ビ $\bar{1}$ 即チ -1 トヲ加ヘテ -3 即チ $\bar{3}$ トナルノデアル.

例 **4.** $0\cdot0001271\div11\cdot5$ ノ對數ヲ求ム

〔解〕 134 ページ對數表ヨリ

$\log0\cdot0001271=\bar{4}\cdot10415$ 及ビ $\log11\cdot5=1\cdot06070$

ソコデ $\log\dfrac{0\cdot0001271}{11\cdot5}=\log0\cdot0001271-\log11\cdot5$ 〔公式 69〕

$$=\bar{4}\cdot10415-1\cdot06070$$

之レヲ計算スレバ

$$\begin{array}{r} \bar{4}\cdot10415 \\ 1\cdot06070 \\ \hline \bar{5}\cdot04345 \end{array} (- \quad \cdots\cdots\text{所求ノ對數.}$$

上ノ運算ニ於テ上ノ指標 $\bar{4}$ ヨリ下ノ指標 1 ヲ減シ $\bar{5}$ トナル.

例 **5.** $\cdot0001029\div129\cdot5$ ノ對數ヲ求ム

〔解〕 表ヨリ $\log\cdot0001029=\bar{4}\cdot01242$ $\log129\cdot5=2\cdot11227$

ソコデ $\log\dfrac{\cdot0001029}{129\cdot5}=\log\cdot0001029-\log129\cdot5$

$$=\bar{4}\cdot01242-2\cdot11227$$

之レヲ計算セバ

$$\begin{array}{rl} \log\cdot0001029= & \bar{4}\cdot01242 \\ \log129\cdot5= & 2\cdot11227 \\ \hline & \bar{7}\cdot90015 \end{array} (-$$

上ノ運算ニ於テ被減數ハ減數ヨリ大ニシテ減法ヲ行フコヲ得ズ，

此ノ𪜈ハ被減數ノ指標ニ -1 ヲ加ヘ，假數ニ $+1$ ヲ加ヘテ $1\cdot01242$ トナシ然ル后チ減法ヲ行フノデアル，即チ次ノ如クスルノデアル.

$$\begin{array}{rl} \bar{4}\cdot01242= & \bar{5}+1\cdot01242 \\ 2\cdot11227= & 2+\ \cdot11227 \\ \hline & \bar{7}+\ \cdot90015 \end{array} (- \;=\bar{7}\cdot90015.$$

例 **6.** $11\cdot22^3$ ノ對數ヲ求ム

〔解〕 $\log11\cdot22=1\cdot04999$

ソコデ $\log11\cdot22^3=3\times\log11\cdot22$ 〔37. 第參〕

$$=3\times1\cdot04999=3\cdot14997\cdots\cdot\text{所求ノ對數.}$$

例 **7.** $\log7421=3\cdot87046$ ヲ知リテ $\log\cdot007421^4$ ヲ求ム

〔解〕 例 3 ノ如クシテ $\log\cdot007421=\bar{3}\cdot87046$,

ソコデ $\log\cdot007421^4=4\times\log\cdot007421=4\times\bar{3}\cdot87046$

之レヲ計算スレバ

$$\begin{array}{r} \bar{3}\cdot87046 \\ 4 \\ \hline \bar{9}\cdot48184 \end{array}$$

上ノ運算ニ於テ假數ノ初メノ數字 8 ト法數 4 トヲ乘シテ得タル 32 ノ 3 ハ勿論 $+3$ デアル.

又指標 $\bar{3}$ ト法數 4 トヲ乘シテ得タル 12 ハ勿論 -12 デアル，

此ノ -12 ト前ノ 3 トヲ加ヘテ -9 即チ $\bar{9}$ トナルノデアル.

例 8. $\sqrt[3]{12{\cdot}79}$ ノ對數ヲ求ム

〔解〕 $\log 12{\cdot}79 = 1{\cdot}10687$ 〔表ヨリ〕

ソコデ $\log\sqrt[3]{12{\cdot}79} = \log(12{\cdot}79)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log 12{\cdot}79$ 〔公式 70〕

$= \frac{1}{3} \times 1{\cdot}10687 = {\cdot}36896$ 〔4 捨 5 入ヨリ〕

例 9. $\log\sqrt[4]{{\cdot}001279}$ ヲ求ム

〔解〕 $\log{\cdot}001279 = \bar{3}{\cdot}10687$

ソコデ $\log\sqrt[4]{{\cdot}001279} = \log{\cdot}001279^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log{\cdot}001279$

$= \frac{1}{4} \times \bar{3}{\cdot}10687 = \bar{3}{\cdot}10687 \div 4$

$\bar{3}$ 即チ -3 ハ 4 ニテ整除スルコト能ハズ 此ノ時ハ $\bar{3}$ ヲ $\bar{4}$ トシ, 其ノ代リニ假數 ${\cdot}10687$ ニ 1 ヲ加ヘテ $1{\cdot}10687$ トシテ除法ヲ施スノデアル, 即チ下ノ如シ

$$-3{\cdot}10687 \div 4 = (\bar{4} + 1{\cdot}10687) \div 4$$
$$= \bar{4} \div 4 + 1{\cdot}10687 \div 4$$
$$= \bar{1} + {\cdot}27672 \text{ (4 捨 5 入シテ)} = \bar{1}{\cdot}27672$$

此レ即チ所要ノ對數デアル.

例 題

1. (i) $\log_3 81$ (ii) $\log_4 64$ (iii) $\log_{27} 3$ ヲ求ム

〔解〕 (i) $81 = 3^4$ $\therefore \log_3 81 = 4$

(ii) $64 = 4^3$ $\therefore \log_4 64 = 3.$

(iii) $3 = \sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$ $\therefore \log_{27} 3 = \frac{1}{3}$

2. $\log_{10} 0{\cdot}00001$ ヲ求ム

〔解〕 $0{\cdot}00001 = \frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5} = 10^{\bar{5}}$ $\therefore \log_{10} 0{\cdot}00001 = -5.$

3. $\log_2 0{\cdot}125$ ヲ求ム.

〔解〕 $0{\cdot}125 = \frac{125}{1000} = \frac{5^3}{10^3} = \left(\frac{5}{10}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$\therefore \log_2 0{\cdot}125 = -3.$

4. $\log 2 = 0{\cdot}30103$, $\log 3 = 0{\cdot}47712$ ヲ知リテ次ノ値ヲ求ム.

(i) $\log 0{\cdot}00225$ (ii) $\log\sqrt[3]{0{\cdot}000675}$

〔解〕 $\log 0{\cdot}00225 = \log\frac{225}{100000} = \log\frac{5^2 \times 3^2}{100000} = \log\frac{10^2 \times 3^2}{2^2 \times 100000}$

$= \log\frac{100 \times 3^2}{2^2 \times 100000} = \log\frac{3^2}{2^2 \times 1000}$

$= \log 3^2 - \log 2^2 - \log 1000$ 〔公式 68. 69〕

$= 2\log 3 - 2\log 2 - \log 1000$ 〔公式 70〕

$= 2 \times 0{\cdot}47712 - 2 \times 0{\cdot}30103 - 3$

$= 0{\cdot}95424 - 0{\cdot}60206 - 3$

$= 0{\cdot}35218 - 3 = \bar{3}{\cdot}35218.$

(ii) $\log\sqrt[3]{{\cdot}000675} = \log(0{\cdot}000675)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log 0{\cdot}000675$ 〔公式 70〕

$= \frac{1}{3}\log\frac{675}{1000000} = \frac{1}{3}\log\frac{5^2 \times 3^3}{1000000}$

$= \frac{1}{3}\log\frac{10^2 \times 3^3}{2^2 \times 1000000} = \frac{1}{3}\log\frac{3^3}{2^2 \times 10000}$

$= \frac{1}{3}(\log 3^3 - \log 2^2 - \log 10000)$ 〔公式 68. 69〕

$= \frac{1}{3}(3\log 3 - 2\log 2 - 4)$ 〔公式 70〕

$= \frac{1}{3}\{3 \times 0{\cdot}47712 - 2 \times 0{\cdot}30103 - 4\}$

$$=\frac{1}{3}\{1{\cdot}43136-{\cdot}60206-4\}=\frac{1}{3}\{{\cdot}82930-4\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\bar{4}{\cdot}82930=\frac{1}{3}\{\bar{6}+2{\cdot}82930\}$$

$$=\bar{2}+{\cdot}94312=\bar{2}{\cdot}94314$$

5. $\log 5={\cdot}6589 \quad \log 7={\cdot}8451$ ヲ知リテ次ノ値ヲ求ム.

(i) $\log 28$. (ii) $\log 196$.

〔解〕 (i) $\log 28=\log 2^2\times 7=\log\left(\frac{10^2}{5^2}\times 7\right)=\log\frac{10^2\times 7}{5^2}$

$$=\log\frac{100\times 7}{5^2}=\log 100+\log 7-\log 5^2$$ 〔公式 68, 69〕

$$=\log 100+\log 7-2\log 5$$ 〔公式 70〕

$$=2+{\cdot}8451-2\times{\cdot}6589$$ 〔40. 第壹〕

$$=2{\cdot}8451-1{\cdot}3178=1{\cdot}5273.$$

(ii) $\log 196=\log 2^2\times 7^2=\log\frac{10^2}{5^2}\times 7^2$

$$=\log\frac{100\times 7^2}{5^2}=\log 100+\log 7^2-\log 5^2$$

$$=2+2\log 7-2\log 5=4+2\times{\cdot}8451-2\times{\cdot}6589$$

$$=2+1{\cdot}6902-1{\cdot}3178=2{\cdot}3724.$$

6. $\log 2={\cdot}30103$, $\log 3={\cdot}47712$ ヲ知リテ次ノ方程式ヲ解ケ.

(i) $5^{2-3x}=3^{x+1}$ (ii) $5^{2x-3}\times 3^{x+1}=2^{4x}$

〔解〕 (i) $5^{2-3x}=3^{x+1}$ $\therefore\ \log 5^{2-3x}=\log 3^{x+1}$

$\therefore\ (2-3x)\log 5=(x+1)\log 3.$ 〔公式 70〕

$\therefore\ 2\log 5-3x\log 5=x\log 3+\log 3$

$\therefore\ -3x\log 5-x\log 3=\log 3-2\log 5$

$\therefore\ -x\{3\log 5+\log 3\}=\log 3-2\log 5$

$$x=\frac{2\log 5-\log 3}{3\log 5+\log 3}$$

但シ $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-{\cdot}30103={\cdot}69897$

$$\therefore\quad x=\frac{2\times{\cdot}69897-{\cdot}47712}{3\times{\cdot}69897+{\cdot}47712}=\frac{{\cdot}92082}{2{\cdot}57403}$$

(ii) (i) ノ如ク双方ノ對數ヲ取リテ x ヲ求ムルノデアル.

〔注意〕 本題ノ如ク指數ニ未知數ヲ帶ブル時, 之レヲ指數方程式トイフ.

7. $\log 2={\cdot}30103$ ヲ知リテ $\log 5^2$ ヲ求ム.

〔解〕 $\log_5 2=x$ トス $\therefore\ 5^x=2$

双方ノ對數ヲ取リ $\log 5^x=\log 2$

$\therefore\ x\log 5=\log 2 \qquad \therefore\ x=\frac{\log 2}{\log 5}$

然ルニ $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-{\cdot}30103={\cdot}69897$

$$\therefore\quad x=\frac{{\cdot}30103}{{\cdot}69897}$$

8. $\log\sqrt{2x-1}+\frac{1}{2}\log(x-2)=\log 1400-2$ ヨリ x ヲ求ム.

〔解〕 $\frac{1}{2}\log(x-2)=\log(x-2)^{\frac{1}{2}}=\log\sqrt{x-2}.$ 又 $2=\log 100$

故ニ原方程式ハ $\log\sqrt{2x-1}+\log\sqrt{x-2}=\log 1400-\log 100$

$\therefore\ \log(\sqrt{2x-1}\times\sqrt{x-2})=\log\frac{1400}{100}$ 〔公式 68. 69〕

$$\therefore\quad \sqrt{2x-1}\times\sqrt{x-2}=\frac{1400}{100}$$

平方スレバ $(2x-1)(x-2)=14^2$

$\therefore\ 2x^2-5x-194=0 \qquad \therefore\ x=\frac{1}{4}(5\pm\sqrt{1577})$

9. $\log x-\log y=1$, $x+y=22$ ヨリ x, y ヲ求ム.

〔解〕 $\log x-\log y=1$ $\therefore\ \log\frac{x}{y}=\log 10$ $\because\ 1=\log 10$

$$\therefore\quad \frac{x}{y}=10 \qquad \therefore\ x=10y$$

之レヲ $x+y=22$ ニ代用スレバ

$$10y+y=22 \quad \therefore \quad y=2$$

$$\therefore \quad x=10y=10\times 2=20$$

10. $\log x+\log y=2.$ $\quad x-y=21$ ヨリ x, y ヲ求ム

〔解〕 前題ニナラヘ.

11. 2^{100} ハ幾桁カ. 但シ $\log 2=0\cdot 30103$

〔解〕 $2^{100}=x$ トス, 此式ノ對數ヲ取レバ

$$\log x=2^{100}=100\log 2=100\times 0\cdot 30103=30\cdot 103$$

故ニ 40 章第三ニヨリ x ハ 31 桁ナリ.

12. 年利 2 分ノ複利ヲ以テ 100 圓ヲ 5 年間貸スヶ其ノ元利合計如何.

〔解〕 複利法ニ於テハ, 元利合計ハ 元金×(1+利率)$^{\text{年數}}$ナリ,

故ニ今所求ノ元利合計ヲ A トスレバ

$$A=100\times(1+0\cdot 02)^5=100\times 1\cdot 02^5$$

對數ヲ取レバ $\quad \log A=\log(100\times 1\cdot 02^5)=\log 100+\log 1\cdot 02^5$

$$\therefore \quad \log A=\log 100+5\times\log 1\cdot 02 \qquad \text{〔公式 70〕}$$

$$=2+5\times 0\cdot 01880 \qquad \text{〔134 頁表ヨリ〕}$$

$$=2+0\cdot 0940=2\cdot 0940.$$

ソコデ 138 ページ第 6 例ノ様ニシテ A ヲ求メラルヽ,

即チ $\log A$ 即チ 2·0940 ヲ表ニ於テ求ムルニ適合スルモノナク,

即チ $\log A$ ハ $\log 124\cdot 1=2\cdot 09377$ ト $\log 124\cdot 2=2\cdot 09412$ トノ間ニアルヿヲ知ル 〔134 ページノ表ヲ見ヨ〕

ソコテ

$$\begin{array}{rr} \log 124\cdot 2=2\cdot 09412 & \\ \log 124\cdot 1=2\cdot 09377 & (- \\ \hline 0\cdot 1 \quad 0\cdot 00035 & \end{array} \qquad\Bigg|\qquad \begin{array}{rr} \log A \;=2\cdot 0940 & \\ \log 124\cdot 1=2\cdot 09377 & (- \\ \hline 0\cdot 00023 & \end{array}$$

$$\cdot 00035 : \cdot 00023=\cdot 1 : x \qquad x=\cdot 07$$

$$\therefore \quad A=124\cdot 1+\cdot 07=124\cdot 17. \quad \text{答} \quad 124\text{圓}17\text{錢}$$

〔尙 132 ページ第 6 例ヲ見ヨ〕

13. 次式ヲ証明セヨ.

$$\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=1.$$

〔證〕 $\log_a b=x$ トス $\quad \therefore \quad b=a^x \qquad (1)$

$\log_b c=y$ トス $\quad \therefore \quad c=b^y \qquad (2)$

$\log_c a=z$ トス $\quad \therefore \quad a=c^z \qquad (3)$

(3)式ニ(2)ヲ代用スレハ $\quad a=c^z=(b^y)^z=b^{yz}$

此ノ式ニ(1)ヲ代用スレハ $\quad a=(a^x)^{yz}=a^{xyz}$

斯樣ニ $\quad a^1$ ガ a^{xyz} ト等シクナル $\therefore$

$$\therefore \quad xyz=1.$$

即チ $\quad \log_a b\times\log_b c\times\log_c a=1.$

14. $\log_a m=\log_a b\times\log_b c\times\log_c m$ ナルヿヲ証セヨ

〔解〕 $\log_a b=x$ トス $\quad \therefore \quad b=a^x \qquad (1)$

$\log_b c=y$ トス $\quad \therefore \quad c=b^y \qquad (2)$

$\log_c m=z$ トス $\quad \therefore \quad m=c^z \qquad (3)$

$\therefore \quad m=c^z=(b^y)^z$ 〔(2)ヲ代用シタノデアル〕

$=b^{yz}=(a^x)^{yz}$ 〔(1)ヲ代用シタノデアル〕

$=a^{xyz}$

$$\therefore \quad \log_a m=xyz$$

$\therefore$ (1) (2) (3) ヨリ $\quad \log_a m=\log_a b\times\log_b c\times\log_c m$

15. $\log_b m=\log_a m\times\log_b a$ ヲ証セヨ.

〔證〕 $\log_b m=x$ トス $\quad \therefore \quad m=b^x$

又 $\log_a m=y$ トス　∴ $m=a^y$

∴ $a^y=b^x$

双方ヲ y 開方スレハ　$a=\sqrt[y]{b^x}$

即　$a=b^{\frac{x}{y}}$

∴ $\log_b a=\dfrac{x}{y}$

∴ $x=y\log_b a$

然ルニ $x=\log_b m$, $y=\log_a m$

∴ $\log_b m=\log_a m\times\log_b a$

16. x, y, z ガ GP ノ第 p 項, 第 q 項, 第 r 項ナレハ次式ヲ証セヨ

$$(q-r)\log x+(r-p)\log y+(p-q)\log z=o.$$

〔證〕G.P ノ初項ヲ A, 通比ヲ R トス　然ルトキハ

x=第 p 項　∴ $x=AR^{p-1}$　∴ $\log x=\log A+(p-1)\log R$　(1)

y=第 q 項　∴ $y=AR^{q-1}$　∴ $\log y=\log A+(q-1)\log R$　(2)

z=第 r 項　∴ $z=AR^{r-1}$　∴ $\log z=\log A+(r-1)\log R$　(3)

(1) ヨリ $(q-r)\log x=(q-r)\log A+(q-r)(p-1)\log R$　(1)

(2) ヨリ $(r-p)\log y=(r-p)\log A+(r-p)(q-1)\log R$　(2)

(3) ヨリ $(p-q)\log z=(p-q)\log A+(p-q)(r-1)\log R$

上ノ式ヲ加フレハ

$$\begin{aligned}&(q-r)\log x+(r-p)\log y+(p-q)\log z\\&=\{(q-r)+(r-p)+(p-q)\}\log A\\&\qquad+\{(q-r)(p-1)+(r-p)(q-1)+(p-q)(r-1)\}\log R\\&=o\times\log A+o\times\log R=o\end{aligned}$$

但シ　$(q-r)(p-1)+(r-p)(q-1)+(p-q)(r-1)$

$$=pq-rp-q+r+rq-pq-r+p+pq-qr-p+q=o.$$

第七編

三角函數之眞數表及ビ對數表

44. 三角函數眞數表　0° ヨリ 90° ニ到ル角ノ正弦, 余弦, 正切, 余切ノ値ヲ計算シテ, 之レヲ一ツノ表トシテアル,

而シテ此ノ表ヲ三角函數眞數表トイフノデアル.

今或ル角ノ正弦, 余弦, 正切, 余切ノ値ヲ此ノ表ニヨリテ求ムルニハ, 其角ガ 45° ヨリ小ナルトキハ其角ノ度數ハ欄外上方ノ左端ニ於テ索メ, 分數ハ最モ左ノ縦列ニ於テ索メ, 又正弦, 余弦, 正切, 余切ハ最モ上ノ横列ニ於テ索ムルノデアル.

又其角ガ 45° 以上ノトキハ其度數ハ欄外下方ノ右端ニ於テ之レヲ索メ, 其分數ハ最モ右ノ縦列ニ於テ之レヲ索メ, 正弦, 余弦, 正切, 余切ハ最モ下ノ横列ニ於テ索ムルノデアル,

之レヲ要スルニ, 此ノ表ノ最モ左ニアル分數ト, 最モ上ノ横列ニアル正弦, 余弦, 正切, 余切ハ欄外上方ノ左端ニアル度數ニ屬シ, 又最モ右ノ縦列ニアル分數ト最モ下ノ横列ニアル正弦 余弦, 正切, 余切ハ欄外下方ノ右端ニアル度數ニ屬スルノデアル.

〔注意〕世ニ用ヒラルヽ三角函數眞數表ハ種々アリテ各其組立テヲ異ニスレド, 重モニ次ノ雛形ノ樣ナノガ多イノデアル.

sin cos tan cot

31°

′	正弦	余弦	正切	余切	
0	0.51504	0.85717	0.60086	1.66428	60
1	0.51529	0.85702	0.60126	1.66318	59
2	0.51554	0.85687	0.60165	1.66209	58
3	0.51579	0.85672	0.60205	1.66099	57
4	0.51604	0.85657	0.60245	1.65990	56
5	0.51628	0.85642	0.60284	1.65881	55
6	0.51653	0.85627	0.60324	1.65772	54
7	0.51678	0.85612	0.60364	1.65663	53
8	0.51703	0.85597	0.60403	1.65554	52
9	0.51728	0.85582	0.60443	1.65445	51
10	0.51753	0.85567	0.60483	1.65337	50
11	0.51778	0.85551	0.60523	1.65228	49
12	0.51803	0.85536	0.60562	1.65120	48
13	0.51828	0.85521	0.60602	1.65011	47
14	0.51852	0.85506	0.60642	1.64903	46
15	0.51877	0.85491	0.60682	1.64795	45
16	0.51902	0.85476	0.60721	1.64687	44
17	0.51927	0.85461	0.60761	1.64579	43
18	0.51952	0.85446	0.60801	1.64471	42
19	0.51977	0.85431	0.60841	1.64363	41
20	0.52002	0.85416	0.60881	1.64256	40
21	0.52026	0.85401	0.60921	1.64148	39
22	0.52051	0.85385	0.60960	1.64041	38
23	0.52076	0.85370	0.61000	1.63934	37
24	0.52101	0.85355	0.61040	1.63826	36
25	0.52126	0.85340	0.61080	1.63719	35
26	0.52151	0.85325	0.61120	1.63612	34
27	0.52175	0.85310	0.61160	1.63505	33
28	0.52200	0.85294	0.61200	1.63398	32
29	0.52225	0.85279	0.61240	1.63292	31
30	0.52250	0.85264	0.61280	1.63185	30
31	0.52275	0.85249	0.61320	1.63079	29
32	0.52299	0.85234	0.61360	1.62972	28
33	0.52324	0.85218	0.61400	1.62866	27
34	0.52349	0.85203	0.61440	1.62760	26
35	0.52374	0.85188	0.61480	1.62654	25
36	0.52399	0.85173	0.61520	1.62548	24
37	0.52423	0.85157	0.61561	1.62442	23
38	0.52448	0.85142	0.61601	1.62336	22
39	0.52473	0.85127	0.61641	1.62230	21
40	0.52498	0.85112	0.61681	1.62125	20
41	0.52522	0.85096	0.61721	1.62019	19
42	0.52547	0.85081	0.61761	1.61914	18
43	0.52572	0.85066	0.61801	1.61809	17
44	0.52597	0.85051	0.61842	1.61703	16
45	0.52621	0.85035	0.61882	1.61598	15
46	0.52646	0.85020	0.61922	1.61493	14
47	0.52671	0.85005	0.61962	1.61388	13
48	0.52693	0.84989	0.62003	1.61283	12
49	0.52702	0.84974	0.62043	1.61179	11
50	0.52745	0.84959	0.62083	1.61074	10
51	0.52770	0.84943	0.62124	1.60970	9
52	0.52794	0.84928	0.62164	1.60865	8
53	0.52819	0.84913	0.62204	1.60761	7
54	0.52844	0.84897	0.62245	1.60657	6
55	0.52869	0.84882	0.62285	1.60553	5
56	0.52893	0.84866	0.62325	1.60449	4
57	0.52918	0.84851	0.62366	1.60345	3
58	0.52943	0.84836	0.62406	1.60241	2
59	0.52967	0.84820	0.62446	1.60137	1
60	0.52992	0.84805	0.62487	1.60033	0
	余弦	正弦	余切	正切	

58°

sin cos tan cot

32°

′	正弦	余弦	正切	余切	
0	0.52992	0.84805	0.62487	1.60033	60
1	0.53017	0.84789	0.62527	1.59930	59
2	0.53041	0.84774	0.62568	1.59826	58
3	0.53066	0.84759	0.62608	1.59723	57
4	0.53091	0.84743	0.62649	1.59620	56
5	0.53115	0.84728	0.62689	1.59517	55
6	0.53140	0.84712	0.62730	1.59414	54
7	0.53164	0.84697	0.62770	1.59311	53
8	0.53189	0.84681	0.62811	1.59208	52
9	0.53214	0.84666	0.62852	1.59105	51
10	0.53238	0.84650	0.62892	1.59002	50
11	0.53263	0.84635	0.62933	1.58900	49
12	0.53288	0.84619	0.62973	1.58797	48
13	0.53312	0.84604	0.63014	1.58695	47
14	0.53337	0.84588	0.63055	1.58593	46
15	0.53361	0.84573	0.63095	1.58490	45
16	0.53386	0.84557	0.63136	1.58388	44
17	0.53411	0.84542	0.63177	1.58286	43
18	0.53435	0.84526	0.63217	1.58184	42
19	0.53460	0.84511	0.63258	1.58083	41
20	0.53484	0.84495	0.63299	1.57981	40
21	0.53509	0.84480	0.63340	1.57879	39
22	0.53534	0.84464	0.63380	1.57778	38
23	0.53558	0.84448	0.63421	1.57676	37
24	0.53583	0.84433	0.63462	1.57575	36
25	0.53607	0.84417	0.63503	1.57474	35
26	0.53632	0.84402	0.63544	1.57372	34
27	0.53656	0.84386	0.63584	1.57271	33
28	0.53681	0.84370	0.63625	1.57170	32
29	0.53705	0.84355	0.63666	1.57069	31
30	0.53730	0.84330	0.63707	1.56969	30
31	0.53754	0.84324	0.63748	1.56868	29
32	0.53779	0.84308	0.63789	1.56767	28
33	0.53804	0.84292	0.63830	1.56667	27
34	0.53828	0.84277	0.63871	1.56566	26
35	0.53853	0.84261	0.63912	1.56466	25
36	0.53877	0.84245	0.63953	1.56366	24
37	0.53902	0.84230	0.63994	1.56265	23
38	0.53926	0.84214	0.64035	1.56165	22
39	0.53951	0.84198	0.64076	1.56065	21
40	0.53978	0.84182	0.64117	1.55966	20
41	0.54000	0.84167	0.64158	1.55866	19
42	0.54024	0.84151	0.64199	1.55766	18
43	0.54049	0.84135	0.64240	1.55666	17
44	0.54073	0.84120	0.64281	1.55567	16
45	0.54097	0.84104	0.64322	1.55467	15
46	0.54122	0.84088	0.64363	1.55368	14
47	0.54146	0.84072	0.64404	1.55269	13
48	0.54171	0.84057	0.64446	1.55170	12
49	0.54195	0.84041	0.64487	1.55071	11
50	0.54220	0.84025	0.64528	1.54972	10
51	0.54244	0.84009	0.64569	1.54873	9
52	0.54269	0.83994	0.64610	1.54774	8
53	0.54293	0.83978	0.64652	1.54675	7
54	0.54317	0.83962	0.64693	1.54576	6
55	0.54342	0.83946	0.64734	1.54478	5
56	0.54366	0.83930	0.64775	1.54379	4
57	0.54391	0.83914	0.64817	1.54281	3
58	0.54415	0.83899	0.64858	1.54183	2
59	0.54440	0.83883	0.64899	1.54085	1
60	0.54464	0.83867	0.64941	1.53987	0
	余弦	正弦	余切	正切	

57°

44. 三角函數眞數表用法 ヲ例題ニ就テ之レヲ說明セン.

例 **1.** sin32°13′ ヲ求ム

〔解〕 與ヘラレタル角ハ 45° ヨリ小デアルカラ, 34° ハ欄外ノ上方ニ於テ索メ, 分ハ左ノ縦列ニ於テ索メ sin 即チ正弦ハ最モ上ノ横列ニ於テ索ムルノデアル, 即チ先ヅ欄外ノ上方ニ於テ 32° ト記セルページ (151ページ) ヲ索メ, 此ノページノ最モ左ノ縦列ニ於テ 13′ ヲ索メ, 此ノ 13′ ヲ過グル横列 (即チ上ヨリ第 15 番目ノ横列) ト, 上方ニ正弦ト記セル縦列 (即チ左ヨリ右ノ方ヘ第 2 番目ノ縦列) トガ交叉セル場所ニ於テ記セル數即チ 0·53312 ハ所要ノ數デアル,

$$\therefore \quad \sin 32°13' = 0·53312$$

例 **2.** cos58°17′ ヲ求ム.

〔解〕 58° ハ 45 度以上デアル, 故ニ 58° ハ表ノ欄外下方ニ於テ索メ 17′ ハ表ノ最モ右ノ縦列ニ於テ捜索シ cos 即チ余弦ハ最モ下ノ横列ニ於テ捜索スルノデアル,

即チ先ヅ欄外ノ下方ニ於テ 58° ト記セルページ (150 ページ) ヲ捜索シ此ノページノ最モ右ニアル縦列ニ於テ 17′ ヲ捜索シ, 此ノ 17 ノ横列 (即チ下ヨリ上ノ方ヘ第 19 番目ノ横列) ト, 最モ下ノ方ニ於テ余弦ト記セル縦列 (即チ右ヨリ左ノ方ヘ第 5 番目ノ縦列) トガ交叉セル場所ニ於テ記セル數即チ 0·52572 ハ所要ノ數デアル

$$\therefore \quad \cos 58°\ 17' = 0·52572$$

例 **3.** sin 57° 7′ 15″ ヲ求ム

〔解〕 與ヘラレタル角ガ秒ヲ含ム𪜈ハ前例ノ如ク直チニ表ヨリ其角ノ三角函數ヲ求ムルヿヲ得ズ, 此ノ𪜈ハ次ノ如クスルノデアル,

57° 7′ 15″ ハ 57°7′ ト 57°8′ トノ間ニ夾マツテ居ル. ソコデ先ヅ 57°7′ ト 57°8′ トノ sin ヲ表ヨリ索メ (前例ノ樣ニシテ) 其ノ差ヲ取ル 即チ

$$\begin{array}{r} \sin 57°\ 8' = 0·83994 \\ \sin 57°\ 7' = 0·83978 \\ \hline 1' \quad 0·00016 \end{array} (-$$

即チ角度ガ 56° 7′ ヨリモ 1 分即チ 60 秒増ストキハ其角ノ sin ハ 0·00016 増ス,

今與ヘラレタル角 57° 7′ 15″ ハ 57° 7′ ヨリモ 15″ 増ス

故ニ角度ガ 57° 7′ ヨリモ 60″ 増ス𪜈ハ其 sin ハ 0·00016 増ス割合デ, 角度ガ 57° 7′ ヨリモ 15″ 増ス𪜈ハ其ノ sin ハ幾何増スカヲ次ノ比例式ニテ求メラル.

$$60'' : 15'' = 0·00016 : x \quad \therefore \quad x = 0·00004$$

$$\therefore \quad \sin 57°7'15'' = \sin 57°7' + 0·00004$$

$$= 0·83978 + 0·00004 = 0·83982.$$

〔注意〕 角ノ三角函數ト其角トハ比例スルモノデハナイ, 然シナガラ微小ナル角ニ就テハ比例スルモノトシテ大ナル誤リヲ生ジナイノデアル

例 **4.** cos31°7′ 15″ ヲ求ム.

〔解〕 表ヨリ cos31°7′ = 0·85612

$$\begin{array}{rr} " & \cos 31°8' = 0·85597 \\ \hline & 0·00015 \end{array} (-$$

度ガ 31°7′ ヨリ 1 分即チ 60 秒増ス𪜈ハ其角ノ余弦ハ 0·00015 減ズ,

今角度ガ 31°7′ ヨリ 15″ 増スキハ其角ノ余弦ハ幾何減ズルカヲ次ノ比例式ニヨリテ求ム

$$60'':15''=0.00015:x,\quad x=0.00004 \quad (4\ 捨\ 5\ 入)$$

$$\therefore\quad \cos 31^\circ 7' 15''=\cos 31^\circ 7'-0.00004$$
$$=0.85612-0.00004=0.85608.$$

〔注意〕 0° ト 90° トノ間ニ於テハ正弦,正切,正割ハ角度ガ増スニ従ツテ増シ,余弦,余切,余割ハ角度ガ増スニ従ツテ減ズルノデアル.

例 5. $\tan A=0.60324$ ヨリ A ノ大サヲ求ム

〔解〕 表ノ上方若クハ下方ニ於テ正切ト記セル縦列中ニ於テ 0.60324 ヲ捜索スルニ丁度 150 ページノ上ヨリ第八番目ノ横列ニ於テ之レヲ得タリ,之レハ 31°6′ ノ正切ニ當ル,

$$\therefore\quad A=31^\circ 6'$$

例 6. $\tan A=0.60350$ ヨリ A ノ大サヲ求ム

〔解〕 前例ノ如ク 0.60350 ヲ表ノ正切ノ縦列ノ中ニテ求ムルニ適合スルモノナク,0.60324 ト 0.60364 トノ間ニアルコトヲ見ル,而シテ此ノ 0.60324 ハ tan31°6′ ニシテ 0.60364 ハ tan31°7′ デアル, 故ニ A ハ 31°6′ ト 31°7′ トノ間ニアルコトヲ知ル.

而シテ此ノ A ヲ求ムルニハ例 2 ノ如ク比例式ニヨリ求ムルノデアル,即チ次ノ如シ

$$\begin{array}{rl|rl} \tan 31^\circ 7'=0.60364 & & \tan A=0.60350 & \\ \tan 31^\circ 6'=0.60324 & (- & \tan 31^\circ 6'=0.60324 & (- \\ \hline 1' \quad 0.00040 & & 0.00026 & \end{array}$$

即チ角度ガ 31°6′ ヨリモ 1′=60″ 増スキハ其ノ正切ハ 0.00040 増

ス,

此ノ割合ニテ角度ガ 31°6′ ヨリ何秒増セバ其ノ正切ハ 0.00026 増スカヲ次ノ比例式ニヨリテ求ム,

$$0.00040:0.00026=60'':x \quad \therefore\quad x=39''$$

$$\therefore\quad A=31^\circ 6' 39''$$

例 7. $\cos A=0.52957$ ヨリ A ヲ求ム.

〔解〕 0.52957 ヲ表中 cos ノ縦列中ニ於テ求ムルニ丁度適合スルモノナシ,而シテ 0.52943 ト 0.52967 トノ間ニアルコトヲ見ル,而シテ 0.52943 ハ cos58°2′ ニシテ 0.52967 ハ cos58°1′ デアル (150ページ表ヲ見ヨ) 是ニ於テ前例ノ如クニシテ A ヲ求メラルヽ. 即チ

$$\begin{array}{rl|rl} \cos 58^\circ 1'=0.52967 & & \cos 58^\circ 1'=0.52967 & \\ \cos 58^\circ 2'=0.52943 & (- & \cos A=0.52957 & (- \\ \hline 1' \quad 0.00024 & & 0.00010 & \end{array}$$

角度ガ 58°1′ ヨリモ 1′=60″ 増スキハ其余弦ハ 0.00024 減ズ,

此ノ割合ニテ角度ガ 58°1′ ヨリ何秒増セバ其餘弦ハ 0.00010 減ズルカヲ求ムルニ,次ノ比例式ニヨル.

$$0.00024:0.00010=60'':x \quad x=25$$

$$\therefore\quad A=58^\circ 1' 25''.$$

47. 三角函數對數表

次ノ二ページニ記載シテアルノハ三角函數對數表ノ雛形デアル,

此ノ表ニ就テノ説明ハ 158 ページニアル.

32°

′	正弦	餘弦	正切	餘切	
0	9.72421	9.92842	9.79579	0.20421	60
1	9.72441	9.92834	9.79607	0.20393	59
2	9.72461	9.92826	9.79635	0.20365	58
3	9.72482	9.92818	9.79663	0.20337	57
4	9.72502	9.92810	9.79691	0.20309	56
5	9.72522	9.92803	9.79719	0.20281	55
6	9.72542	9.92795	9.79747	0.20253	54
7	9.72562	9.92787	9.79776	0.20224	53
8	9.72582	9.92779	9.79804	0.20196	52
9	9.72602	9.92771	9.79832	0.20168	51
10	9.72622	9.92763	9.79860	0.20140	50
11	9.72643	9.92755	9.79888	0.20112	49
12	9.72663	9.92747	9.79916	0.20084	48
13	9.72683	9.92739	9.79944	0.20056	47
14	9.72703	9.92731	9.79972	0.20028	46
15	9.72723	9.92723	9.80000	0.20000	45
16	9.72743	9.92715	9.80028	0.19972	44
17	9.72763	9.92707	9.80056	0.19944	43
18	9.72783	9.92699	9.80084	0.19916	42
19	9.72803	9.92691	9.80112	0.19888	41
20	9.72823	9.92683	9.80140	0.19860	40
21	9.72843	9.92675	9.80168	0.19832	39
22	9.72863	9.92667	9.80195	0.19805	38
23	9.72883	9.92659	9.80223	0.19777	37
24	9.72902	9.92651	9.80251	0.19749	36
25	9.72922	9.92643	9.80279	0.19721	35
26	9.72942	9.92635	9.80307	0.19693	34
27	9.72962	9.92627	9.80335	0.19665	33
28	9.72982	9.92619	9.80363	0.19637	32
29	9.73002	9.92611	9.80391	0.19609	31
30	9.73022	9.92603	9.80419	0.19581	30
31	9.73041	9.92595	9.80447	0.19553	29
32	9.73061	9.92587	9.80474	0.19526	28
33	9.73081	9.92579	5.80502	0.19498	27
34	9.73101	9.92571	9.80530	0.19470	26
35	9.73121	9.92563	9.80558	0.19442	25
36	9.73140	9.92555	9.80586	0.19414	24
37	9.73160	9.92546	9.80614	0.19386	23
38	9.73180	9.92538	9.80642	0.19358	22
39	9.73200	9.92530	9.80669	0.19331	21
40	9.73219	9.92522	9.80697	0.19303	20
41	9.73239	9.92514	9.80725	0.19275	19
42	9.73259	9.92506	9.80753	0.19247	18
43	9.73278	9.92498	9.80781	0.19219	17
44	9.73298	9.92490	9.80808	0.19192	16
45	9.73318	9.92482	9.80836	0.19164	15
46	9.73337	9.92473	9.80864	0.19136	14
47	9.73357	9.92465	9.80892	0.19108	13
48	9.73377	9.92457	9.80919	0.19081	12
49	9.73396	9.92449	9.80947	0.19053	11
50	9.73416	9.92441	9.80975	0.19025	10
51	9.73435	9.92433	9.81003	0.18997	9
52	9.73455	9.92425	9.81030	0.18970	8
53	9.73474	9.92416	9.81058	0.18942	7
54	9.73494	9.92408	9.81086	0.18914	6
55	9.73513	9.92400	9.81113	0.18887	5
56	9.73533	9.92392	9.81141	0.18859	4
57	9.73552	9.92384	9.81169	0.18831	3
58	9.73572	9.92376	9.81196	0.18804	2
59	9.73591	9.92367	9.81224	0.18776	1
60	9.73611	9.92359	9.81252	0.18748	0
	餘弦	正弦	餘切	正切	′

57°

33°

′	正弦	餘弦	正切	餘	
0	9.73611	9.92359	9.81252	0.18748	60
1	9.73630	9.92351	9.81279	0.18721	59
2	9.73650	9.92343	9.81307	0.18693	58
3	9.73669	9.92335	9.81335	0.18665	57
4	9.73689	9.92326	9.81362	0.18638	56
5	9.73708	9.92318	9.81390	0.18610	55
6	9.73727	9.92310	9.81418	0.18582	54
7	9.73747	9.92302	9.81445	0.18555	53
8	9.73766	9.92293	9.81473	0.18527	52
9	9.73785	9.92285	9.81500	0.18500	51
10	9.73805	9.92277	9.81528	0.18472	50
11	9.73824	9.92269	9.81556	0.18444	49
12	9.73843	9.92260	9.81583	0.18417	48
13	9.73863	9.92252	9.81611	0.18389	47
14	9.73882	9.92244	9.81638	0.18362	46
15	9.73901	9.92235	9.81666	0.18334	45
16	9.73921	9.92227	9.81693	0.18307	44
17	9.73940	9.92219	9.81721	0.18279	43
18	9.73959	9.92211	9.81748	0.18252	42
19	9.73978	9.92202	9.81776	0.18224	41
20	9.73997	9.92194	9.81803	0.18197	40
21	9.74017	9.92186	9.81831	0.18169	39
22	9.74036	9.92177	9.81858	0.18142	38
23	9.74055	9.92169	9.81886	0.18114	37
24	9.74074	9.92161	9.81913	0.18087	36
25	9.74093	9.92152	9.81941	0.18059	35
26	9.74113	9.92144	9.81968	0.18032	34
27	9.74132	9.92136	9.81996	0.18004	33
28	9.74151	9.92127	9.82023	0.17977	32
29	9.74170	9.92119	9.82051	0.17949	31
30	9.74189	9.92111	9.82078	0.17922	30
31	9.74208	9.92102	9.82106	0.17894	29
32	9.74227	9.92094	9.82133	0.17867	28
33	9.74246	9.92086	9.82161	0.17839	27
34	9.74265	9.92077	9.82188	0.17812	26
35	9.74284	9.92069	9.82215	0.17785	25
36	9.74303	9.92060	9.82243	0.17757	24
37	9.74322	9.92052	9.82270	0.17730	23
38	9.74341	9.92044	9.82298	0.17702	22
39	9.74360	9.92035	9.82325	0.17675	21
40	9.74379	9.92027	9.82352	0.17648	20
41	9.74398	9.92018	9.82380	0.17620	19
42	9.74417	9.92010	9.82407	0.17593	18
43	9.74436	9.92002	9.82435	0.17565	17
44	9.74455	9.91993	9.82462	0.17538	16
45	9.74474	9.91985	9.82489	0.17511	15
46	9.74493	9.91976	9.82517	0.17483	14
47	9.74512	9.91968	9.82544	0.17456	13
48	9.74531	9.91959	9.82571	0.17429	12
49	9.74549	9.91951	9.82599	0.17401	11
50	9.74568	9.91942	9.82626	0.17374	10
51	9.74587	9.91934	9.82653	0.17347	9
52	9.74606	9.91925	9.82681	0.17319	8
53	9.74625	9.91917	9.82708	0.17292	7
54	9.74644	9.91908	9.82735	0.17265	6
55	9.74662	9.91900	9.82762	0.17238	5
56	9.74681	9.91891	9.82790	0.17210	4
57	9.74700	9.91883	9.82817	0.17183	3
58	9.74719	9.91874	9.82844	0.17156	2
59	9.74737	9.91866	9.82871	0.17129	1
60	9.74756	9.91857	9.82899	0.17101	0
	餘弦	正弦	餘切	正切	′

56°

壹體三函數ノ對角トハ如何ナルモノカト言フニ,例ヘバ $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ デアルカラ, $\log\frac{1}{2}$ ハ即チ $\cos 60^\circ$ ノ對數デアル而シテ之レヲ $\log\cos 60^\circ$ ト書ク

$$\therefore \quad \log\cos 60^\circ=\log\tfrac{1}{2}=\log 0{\cdot}5=\bar{1}{\cdot}69897 \text{ デアル.}$$

ソコデ 0° ヨリ 90° マデノ三角函數ノ對數ヲ計算シテ之レヲ壹ツノ表トシテアル. 之レヲ三角函數對數表トイフ. 但シ正弦トカ,餘弦トカイフモノヽ値ハ 1 ヨリ小デアルカラ正弦ノ對數ダノ,餘弦ノ對數ダノヽ指標ハ負デアル, 而シテ表ノ中ニ負ノ指標ヲ載スルノハ不便デアル, ソコデ此ノ不便ヲ避ケンガ爲メ三角函數ノ對數ニ 10 ヲ加ヘタルモノヲ表ニ載セテアルノデアル,

例ヘバ $\log\cos 60^\circ=\bar{1}{\cdot}69897$ デアルガ對數表ニハ之レニ 10 ヲ加ヘテ 9·69897 ト書イテアルノデアル,

ソコデ此ノ $\log\cos 60^\circ+10$ 即チ 9·69897 ヲ指シ示スニハ $L\cos 60^\circ$ ヲ以テスルノデアル,

之レト同様ニ $L\sin 60^\circ$ ハ $\sin 60^\circ$ ノ對數ニ 10 ヲ加ヘタモノ即チ $\log\sin 60^\circ+10$ ヲ示シ, 又 $L\tan A$ ハ $\tan A$ ノ對數ニ 10 ヲ加ヘタモノ即チ $\log\tan A+10$ ヲ示スノデアル.

又三角函數對數表モ三角函數眞數表ノ如ク, 角ガ 45° 以上ノ時ハ欄外ノ上方ニ於テ索メ, 分數(フン)ハ最モ左ノ縦列ニ於テ之レヲ索メ,正弦,餘弦等ハ最モ上ノ横列ニ於テ索メルノデアル,

又角ガ 45° ヨリ大ナル時ハ, 度數ハ欄外ノ下方ニ於テ索メ, 分數(フン)ハ最モ右ノ縦列ニ於テ索メ,正弦,餘弦等ハ最モ上ノ横列ニ於テ索捜スルノデアル.

之レヲ要スルニ最モ上ノ横列ト, 最モ左ノ縦列トハ欄外上方ノ度

數ニ屬シ, 又最モ下ノ横列ト最モ右ノ縦列トハ欄外ノ下方ノ度數ニ屬スルノデアル.

46. 三角函數對數表用法

次ニ例題ヲ設ケテ三角函數對數表ノ用法ヲ示ソー.

例 1. $L\sin 32^\circ 15'$ ヲ求ム.

〔解〕 32° ハ 45° ヨリ大キイ, 故ニ此ノ 32° ヲ表ノ欄外ノ上方ニ於テ捜索シ 156 ページニ於テ之レヲ得, ソコデ 15′ ハ最右ノ縦列ニ於テ之レヲ捜索シ上ヨリ下ノ方ヘ第 17 番目ニ於テ之レヲ得タリ此ノ 15′ ノ横列(即チ上ヨリ下ノ方ヘ第 17 番目ノ横列)ト, 上ノ方ニ正弦ト記セル縦列(即チ左ヨリ右ノ方ヘ第 2 番目ノ縦列)トガ交叉セル場所ニ於テ記シテアル數即チ 9·72723 ハ所要ノ對數デアル,

$$\therefore \quad L\sin 32^\circ 15'=9{\cdot}72723$$

例 2. $L\sin 32^\circ 15' 20''$ ヲ求ム

〔解〕 先ツ前例ノ如クニシテ $L\sin 32^\circ 16'$ ト $L\sin 32^\circ 15'$ トヲ求ム

$$\begin{array}{r} L\sin 32^\circ 16'=9{\cdot}72743 \\ L\sin 32^\circ 15'=9{\cdot}72723 \\ \hline 1' \quad {\cdot}00020 \end{array} (-$$

即チ 32°15′ ヨリ 1′=60″ 増ス時ハ Lsin ハ ·00020 増ス,

今 32°15′ ヨリ 20″ 増ス時ハ Lsin ハ幾何増スカヲ次ノ比例式ニヨリテ求ム,

$$60'':20''={\cdot}00020:x \qquad x={\cdot}00007 \quad \text{(4捨5入シテ)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad L\sin 32^\circ 15' 20'' &= L\sin 32^\circ 15' + {\cdot}00007 \\ &= 9{\cdot}72723 + {\cdot}00007 = 9{\cdot}72730. \end{aligned}$$

例 3. $L\cos 57^\circ 4' 15''$ ヲ求ム.

〔解〕 先ツ $L\cos 57°4'$ 及ヒ $L\cos 57°5'$ ヲ求ム

$$\begin{array}{rl} L\cos 57°4' = 9{\cdot}73533 & \\ L\cos 57°5' = 9{\cdot}73513 & (- \\ \hline 1' \quad 0{\cdot}00020 & \end{array}$$

即チ角度ガ $57°4'$ ヨリ $1'=60''$ 増ス片ハ $L\cos$ ハ $0{\cdot}00020$ 減ズ，若シ角度ガ $57°4'$ ヨリ $15''$ 増ス片ハ $L\cos$ ハ幾何減ズルカヲ次ノ比例式ニヨリテ求ム，

$$60'' : 15'' = 0{\cdot}00020 : x \qquad x = 0{\cdot}00005$$

$$\therefore \quad L\cos 57°4'15'' = L\cos 57°4' - 0{\cdot}00005$$
$$= 9{\cdot}73533 - 0{\cdot}00005 = 9{\cdot}73528.$$

例 **4.** $\tan A = 9{\cdot}81299$ ヨリ A 角ノ大サヲ求ム

〔解〕 $9{\cdot}81299$ ヲ表中ノ tan ノ縱列中ニ於テ索ムルニ丁度適合スルモノガナイ，ソコデ此ノ $9{\cdot}81299$ ハ 157 ページノ正切ノ縱列中ニ於テ上ヨリ第三番目即チ $9{\cdot}81279$ ト第四番目即チ $9{\cdot}81307$ トノ間ニアルヿヲ見ル，而シテ此ノ $9{\cdot}81279$ ハ $L\tan 33°1'$ ニシテ $9{\cdot}81307$ ハ $L\tan 33°2'$ デアル，即チ

$$\begin{array}{rl|rl} L\tan 33°2' = 9{\cdot}81207 & & L\tan A \quad = 9{\cdot}81299 & \\ L\tan 33°1' = 9{\cdot}81279 & (- & L\tan 33°1' = 9{\cdot}81279 & (- \\ \hline 1' \quad 0{\cdot}00028 & & 0{\cdot}00020 & \end{array}$$

即チ $33°1'$ ヨリ $1'=60''$ 増ス片ハ $L\tan$ ハ $0{\cdot}00028$ 増ス，此ノ割合ニテ $33°1'$ ヨリ何秒増セバ $L\tan$ ハ $0{\cdot}00020$ 増スカヲ求ムルニ，次ノ比例式ニヨル

$$0{\cdot}00028 : 0{\cdot}00020 = 60'' : x \qquad x = 43'' \quad (4捨5入シテ)$$

$$\therefore \quad A = 33°1'43''$$

例 **5.** $L\cos A = 9{\cdot}74670$ ヨリ A ヲ求ム.

〔解〕 $9{\cdot}74670$ ヲ表ニ於テ索ムルニ丁度適合スルモノガナイ，ソコテ此ノ $9{\cdot}74670$ ハ $L\cos 56°5' = 9{\cdot}74662$ ト $L\cos 56°4' = 9{\cdot}74681$ トノ間ニアルヿヲ知ル，(157 ページノ表ヲ見ヨ)

$$\begin{array}{rl|rl} L\cos 56°4' = 9{\cdot}74681 & & L\cos 56°4' = 9{\cdot}74681 & \\ L\cos 56°5' = 9{\cdot}74662 & (- & L\cos A \quad = 9{\cdot}74670 & (- \\ \hline 1' \quad 0{\cdot}00019 & & 0{\cdot}00011 & \end{array}$$

角度ガ $56°4'$ ヨリ $1'=60''$ 増ス片ハ $L\cos$ ハ $0{\cdot}00019$ 減ズ

此ノ割合ニテ角度ガ $56°4'$ ヨリ何秒増ス片ハ $L\cos$ ハ $0{\cdot}00011$ 減ズルカヲ次ノ比例式ニヨリテ求ム.

$$0{\cdot}00019 : 0{\cdot}00011 = 60'' : x \qquad x = 35'' \quad (4捨5入シテ)$$

$$\therefore \quad A = 56°4'35'',$$

例　　題

次ノ諸題ノ中デ 1 ヨリ 2 マデハ 44 ノ諸例ニ倣ヒ，又 3 ヨリ 4 マデハ 46 ノ諸例ノ解ニ倣ヒテ學者自ラ之レヲ解クヿヲ得ベシ，故ニ解ヲ略シ唯答ダケ附記シテ置ク

1. $\sin 31°2'15''$ ヲ求メヨ　(答　$0{\cdot}51585$)
2. $\cot 31°1'7''$ ヲ求メヨ　(答　$1{\cdot}66317$)
3. $L\cot 56°56'3''$ ヲ求メヨ　(答　$9{\cdot}81361$)
4. $L\sin 32°59'14''$ ヲ求メヨ　(答　$9{\cdot}73600$)
5. $\log 5\tan 60°$ ヲ求ム　但シ $\log 2 = 0{\cdot}30103$, $\log 3 = 0{\cdot}47712$

〔解〕 $\log 5\tan 60° = \log 5 + \log\tan 60° = \log\frac{10}{2} + \log\sqrt{3}$

$= \log 10 - \log 2 + \log\sqrt{3} = \log 10 - \log 2 + \frac{1}{2}\log 3$　(以下略ス)

第八編

三角形之解法

47. 三角形解法 三角形ハ三ツノ邊ト三ツノ角，即チ六ツノ部分ヨリ成立ツテ居ル，ソコデ此ノ六ツノ部分ノ中ノ或ル三ツヲ知リテ他ノ三ツヲ求ムルコヲ「三角形之解法」トイフ．但シ三ツノ角ヲ知リテ三ツノ邊ヲ求ムルトイフコハ不可能的ノコトデアルカラ之レハ省ク．

而シテ已知ノ種類ニ從ツテ之レヲ區別スレバ次ノ如シ

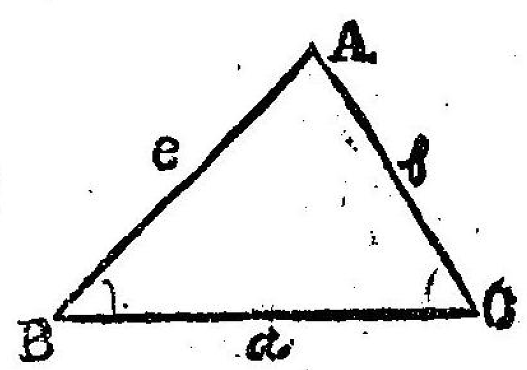
〔第一〕 貳角，壹邊ヲ知ル場合．

〔第二〕 二邊，其夾角ヲ知ル場合．

〔第三〕 二邊ト其二邊中ノ壹個ノ對角ヲ知ル場合．

〔第四〕 三邊ヲ知ル場合．

ソコデ上ノ各場合ヲ順次ニ説明セン



48. 第壹ノ場合． 貳角 B,C ト壹邊 a ヲ已知スルモノト假定ス．

〔解〕 $A+B+C=180^{\circ}$

$\therefore \quad A=180^{\circ}-B-C$

此レヨリ A ヲ求ムルコヲ得，

又 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A} \quad \therefore \quad b=\dfrac{a\sin B}{\sin A} \qquad (1)$

$\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A} \quad \therefore \quad c=\dfrac{a\sin C}{\sin A} \qquad (2)$

(1) (2) ヨリ三角函數眞數表ヲ用ヒテ b,c ヲ求メ得ル，

然レモ a, sinB, sinA, sinC ガ複雜ノ數ナルトキハ對數ヲ用ヒテ計算スル方ガ便利デアル，ソコデ對數ヲ用ヒテ (1) ヨリ b ヲ計算スルニハ次ノ如クス．

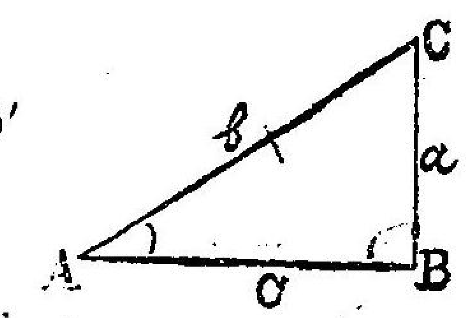
(1) ノ對數ヲ取レバ

$$\log b=\log\frac{a\sin B}{\sin A}=\log a+L\sin B-L\sin A.$$

之レヨリ $\log b$ ヲ得，從ツテ b ヲ求メ得ラルヽ．

同樣ニ對數ヲ用ヒテ (2) ヨリ c ヲ求ムルコヲ得．

例 1． △ABC ニ於テ $A=31^{\circ}15'$, $B=90^{\circ}$, $b=10$, ヲ知リテ a, c ヲ求ム．



〔解〕 $C=180-A-B=180-31^{\circ}15'-90^{\circ}=68^{\circ}45'$

ソコデ B ガ直角デアルカラ

$\dfrac{a}{b}=\sin A \quad \therefore \quad a=b\sin A=10\times\sin 31^{\circ}15'$

$=10\times{\cdot}51877$ (150ページ表ヨリ) $=5{\cdot}1877$

$\dfrac{c}{b}=\cos A \quad \therefore \quad c=b\cos A=10\times\cos 31^{\circ}15'$

$=10\times 0{\cdot}85491=8{\cdot}5491.$

本題ノ如キハ眞數表ニヨル方ガ宜シイ．

例 2． △ABC ニ於テ $b=11{\cdot}32$ $B=32^{\circ}2'$ $C=114^{\circ}8'$ ヲ知リ a ヲ求ム

〔解〕 $A=180-B-C=180^{\circ}-32^{\circ}2'-114^{\circ}8'=33^{\circ}50'$

ソコデ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B} \quad \therefore \quad a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{11{\cdot}32\times\sin 33^{\circ}50'}{\sin 32^{\circ}2'}$

對數ヲ取レバ $\log a=\log 11{\cdot}32+L\sin 33^{\circ}50'-L\sin 32^{\circ}2'$

$$\begin{array}{rl} \log 11{\cdot}32 = 1{\cdot}05385 & \text{〔134 ページノ表ヨリ〕} \\ \text{L}\sin 33^{\circ}30' = 9{\cdot}74568 & \text{〔157 ページノ表ヨリ〕} \\ \hline 10{\cdot}79953 & (+ \\ \text{L}\sin 32^{\circ}2' = 9{\cdot}72461 & \text{〔156 ページノ表ヨリ〕} \\ \hline \log a = 1{\cdot}07492 & (- \end{array}$$

之レヨリ 42 章第4例(137 ページ)ノ如クシテ a ヲ求ム. 即チ

$$\begin{array}{rl} \log 11{\cdot}89 = 1{\cdot}07518 & \\ \log 11{\cdot}88 = 1{\cdot}07482 & \\ \hline {\cdot}01 \quad {\cdot}00036 & (- \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = 1{\cdot}07492 & \\ \log 11{\cdot}88 = 1{\cdot}07482 & \\ \hline {\cdot}00010 & (- \end{array}$$

${\cdot}0036 : {\cdot}00010 = {\cdot}01 : x \qquad x = {\cdot}003$ 〔4捨5入〕

$\therefore \quad a = 11{\cdot}88 + {\cdot}003 = 11{\cdot}883.$

本題ノ如キハ計數ヲ用ヒテ計算スル方ガ便利デアル.

49. 第貳之場合 例ヘバ二邊 b, c ト其夾角 A ヲ已知スルモノトス,

〔解〕 $\mathrm{B+C} = 180 - \mathrm{A}$ $\qquad$ (1)

又 $\dfrac{b-c}{b+c} = \dfrac{\tan\frac{\mathrm{B-C}}{2}}{\tan\frac{\mathrm{B+C}}{2}} \qquad \therefore \quad \tan\dfrac{\mathrm{B-C}}{2} = \dfrac{(b-c)\tan\frac{\mathrm{B+C}}{2}}{b+c}$ $\qquad$ (2)

(1) ヨリ B+C ヲ求メ得ラルヽヲ以テ $\dfrac{\mathrm{B+C}}{2}$ ハ已知ナリ,

故ニ(2)ヨリ $\dfrac{\mathrm{B-C}}{2}$ ヲ求メ得ラル, 從ツテ B−C ヲ求ムルヿヲ得,

然ルドハ B+C ト B−C トヲ知リ得タルヲ以テ B, C ヲ求ムルヿヲ得.

對數ヲ用ヒテ(2)ヨリ $\dfrac{\mathrm{B-C}}{2}$ ヲ求ムルニハ次ノ如シ.

(2)ノ對數ヲ取レバ

$$\mathrm{L}\tan\frac{\mathrm{B-C}}{2} = \log(b-c) + \mathrm{L}\tan\frac{\mathrm{B+C}}{2} - \log(b+c)$$

之レヨリ $\mathrm{L}\tan\dfrac{\mathrm{B-C}}{2}$ ヲ得ラルベク, 從ツテ $\dfrac{\mathrm{B-C}}{2}$ ガ得ラルヽ.

上ノ如クニシテ B, C ヲ得レバ, 第一ノ場合ニ依リテ他ノ未知數ヲ求ムルヿヲ得ル.

例 △ABC ニ於テ $b=8$, $c=3$, $\mathrm{A}=62^{\circ}$ ヲ知リ B, C ヲ求ム.

但シ $\mathrm{L}\tan 59^{\circ} = 10{\cdot}22122$, $\log 11 = 1{\cdot}04139$ $\log 2 = {\cdot}30103$

$\mathrm{L}\tan 37^{\circ}6' = 9{\cdot}87869 \qquad \mathrm{L}\tan 37^{\circ}7' = 9{\cdot}87895$

〔解〕 $\mathrm{B+C} = 180^{\circ} - \mathrm{A} = 180^{\circ} - 62^{\circ} = 118^{\circ}$ $\qquad$ (1)

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{\mathrm{B-C}}{2}}{\tan\frac{\mathrm{B+C}}{2}}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{\mathrm{B-C}}{2} = \frac{(b-c)\tan\frac{\mathrm{B+C}}{2}}{b+c} = \frac{(8-3)\tan\frac{118^{\circ}}{2}}{8+3} = \frac{5\tan 59^{\circ}}{11} = \frac{10\tan 59}{2\times 11}$$

$$\therefore \quad \mathrm{L}\tan\frac{\mathrm{B-C}}{2} = \log 10 + \mathrm{L}\tan 59^{\circ} - \log 2 - \log 11$$

ソコデ

$$\begin{array}{rl} \log 10 = 1. & \\ \mathrm{L}\tan 59^{\circ} = 10{\cdot}22122 & \\ \hline 11{\cdot}22122 & (+ \\ \log 2 = {\cdot}30103 & \\ \hline 10{\cdot}92019 & (- \\ \log 11 = 1{\cdot}04139 & \\ \hline \mathrm{L}\tan\frac{\mathrm{B-C}}{2} = 9{\cdot}87880 & (- \end{array}$$

然ルニ $\text{Ltan}37^\circ7' = 9{\cdot}87895$ ｜ $\text{Ltan}\frac{B-C}{2} = 9{\cdot}87881$

$$\begin{array}{rl} \text{Ltan}37^\circ6' = 9{\cdot}87869 & \\ \hline 1' \quad {\cdot}00026 & (- \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{Ltan}37^\circ6' = 9{\cdot}87869 & \\ \hline {\cdot}00012 & (- \end{array}$$

${\cdot}00026 : {\cdot}00011 = 60'' : x \qquad x = 25''$ 〔4捨5入〕

$$\therefore \ \frac{B-C}{2} = 37^\circ6'25'' \qquad \therefore \ B-C = 74^\circ12'50''$$

(1)ヨリ $\left.\begin{array}{l} B+C=118^\circ \\ B-C=74^\circ12'50'' \end{array}\right\} \ \therefore \ B=96^\circ6'25'' \quad C=21^\circ53'35''$.

50. 第三之場合.

即チ二邊ト其二邊中ノ壹個ノ對角ヲ知ル場合. 例ヘバ二邊 b, c ト B 角ヲ知ルモノトス.

〔解〕 $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B} \quad \therefore \ \sin C = \dfrac{c\sin B}{b} \qquad (1)$

之レヨリ C ヲ求メ得ラル丶

又對數表ヲ用ヒテ(1)ヨリ C ヲ求ムルニハ

$$\text{L}\sin C = \log c + \text{L}\sin B - \log b. \qquad (2)$$

上ノ如クニシテ C ヲ求メ得ラル丶トキハ第一ノ場合ニヨリテ他ノ未知ノ部分ヲ求ムルヿヲ得.

上ノ (1) ニ適合スル C ノ値ハ時トシテ貳個アルヿアリ (例ヘバ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ノトキハ $\theta = 30^\circ$ 及ビ $\theta = 150^\circ$ トナル如ク, 二個ノ値ヲ有シ, 且ツ此ノ二個ノ値ハ補角ヲナス)

ソコデ此レニ就テ詳説スルヿ次ノ如シ.

〔甲〕 $b < c\sin B$ (即チ $\log c + \log\sin B - \log b > 0$) ナルトキ

此ノトキハ $\dfrac{c\sin B}{b} > 1$ (即チ $\log c + \log\sin B - \log b > 0$)

$\therefore \ \sin C > 1$ 即チ ($\log\sin C > 0$) 是レ不合理ナリ.

故ニ此ノトキハ C ノ値ナシ, 故ニ △ABC ハ成立セズ.

〔乙〕 $b = c\sin B$ (即チ $\log c + \log\sin B - \log b = 0$) ナルトキ

此ノトキハ $\dfrac{c\sin B}{b} = 1$ (即チ $\log c + \log\sin B - \log b = 0$)

$\therefore \ \sin C = 1$ (即チ $\log\sin C = 0$) $\quad \therefore \ C = 90^\circ$

故ニ此ノトキハ C ノ値ハ唯壹個アルノミ.

従ツテ △ABC ハ唯壹個成立スルノミデアル,

〔丙〕 $b > c\sin B$ (即チ $\log c + \log\sin C\sin B - \log b < 0$) ニシテ且ツ $b < c$ ナルトキ.

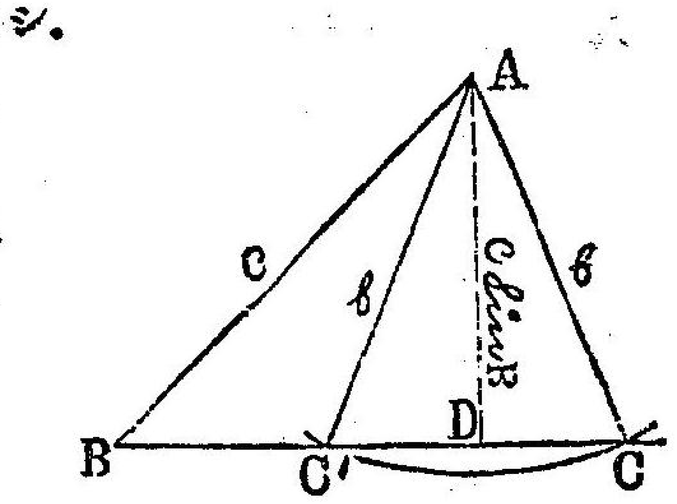
此ノトキハ $\dfrac{c\sin B}{b} < 1$ (即チ $\log c + \log\sin B - \log b < 0$)

$\therefore \quad \sin C < 1$ (即チ $\log\sin C < 0$) $\qquad (a)$

又 $\quad b < c \quad \therefore$ C ハ鈍角或ハ鋭角 $\qquad (b)$

(a) (b) ヨリ C ノ値ハ貳個アリ, 而カモ此ノ貳個ノ値ハ補角ヲナス, 従ツテ △ABC ハ貳個成立ス,

之レヲ幾何學的ニ解釋スレバ次ノ如シ.



先ツ與ヘラレタル角 B ヲ置キ, 其ノ一邊上ニ c ニ等シク BA ヲ置キ, A ヨリ他ノ一邊ニ垂線 AD ヲ下ス,

然ルトキハ $AD = c\sin B$.

今 $\left.\begin{array}{ll} b > c\sin B & \text{即チ } b > AD \\ \text{且ツ} & b < c \end{array}\right\}$ 故ニ A ヲ中心トシ b ノ半徑ヲ以テ畫キタル弧ハ B, C 二點ニ於テ交リ, 此ノ交點ヲ C, C' トス, 然ルトキハ △ABC 及 △ABC' ハ與ヘラレタル二邊 b, c ヲ有シ, 且ツ與ヘラレタル B 角ヲ有スル三角形ニシテ ∠C, 及ビ ∠AC'B ハ互ニ補角ヲナスノデアル.

〔此ノ場合ヲ兩意ノ場合トイフ〕

〔丁〕 $b>c\sin B$ (即チ $\log c+\log\sin B-\log b<0$) ニシテ且ツ $b>c$ ナル時.

此ノ時ハ $\dfrac{c\sin B}{b}<1$ (即チ $\log c+\log\sin B-\log b<0$)

$\therefore$ 　　$\sin C<1$ (即チ $\log\sin C<0$) 　　(a)

又 　　$b>c$ 　$\therefore$ 　C ハ鋭角ニ限ル 　　(b)

(a) (b) ヨリ C ノ値ハ唯壹個ニ限ル,

從ツテ △ABC ハ唯壹個成立スルノミデアル,

例 $b=32$, $c=40$ $B=52°32'$ ナル時 A ノ値ヲ求ム.

但シ $L\sin 52°32'=9{\cdot}89966$, $\log 2={\cdot}30103$.

$L\sin 82°48'=9{\cdot}99657$.

〔解〕 先ツ C ヲ求メントス $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$

$$\therefore \quad \sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{40\sin 52°32'}{32}=\frac{5\sin 52°32'}{4}$$

$$=\frac{10\sin 52°32'}{2\times 4}=\frac{10\sin 52°32'}{2^3}$$

$$\therefore \quad L\sin C=\log 10+L\sin 52°32'-\log 2^3$$

$$=\log 10+L\sin 32°32'-3\log 2$$

$$=1+9{\cdot}89966-3\times{\cdot}30103=9{\cdot}99657.$$

題意ニヨリ 　$L\sin 82°47'=9{\cdot}99657$

$\therefore$ 　$C=82°48'$ 　　(1)

然ルニ 　$\log\sin C=L\sin C-10=9{\cdot}99657-10=\bar{1}{\cdot}99657<0$

又 　$b<c$

故ニ (丙) ニヨリ C ノ値ハ貳個アリテ其貳個ノ値ハ補角ヲナス,

而シテ (1) ヨリ C ノ壹個ノ値ハ $82°48'$

故ニ 　C ノ他ノ壹個ノ値ハ $180°-82°48'=97°12'$

〔第壹〕 $C=82°48'$ ノ時

$A=180-B-C=180°-52°32'-82°48'=44°40'$

〔第貳〕 $C=97°12'$ ノ時

$A=180-B-C=180°-52°32'-97°12'=30°16'$

51. 第四之場合. 三邊ヲ已知スル時,

已知ノ三邊ヲ a b c トス, 然ル時ハ

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \qquad (1)$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \qquad (2)$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-a)}{s(s-c)}} \qquad (3)$$

(1) (2) (3) ヨリ A, B, C ヲ求ムルヿヲ得,

對數ヲ用ヒテ計算スレバ

$$L\tan\frac{A}{2}=\log\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}+10=\log\left\{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\right\}^{\frac{1}{2}}+10$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}+10$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\log(s-b)+\log(s-c)-\log s-\log(s-a)\}+10$$

之レヨリ $\frac{1}{2}A$ ヲ得, 從ツテ A ヲ得.

同様ニ對數ヲ用ヒテ (2) (3) ヨリ B, C ヲ得.

〔注意〕 公式 60 及ビ 64 ヲ用ヒテモ A, B, C ヲ求ムルヿヲ得レ𪜈前例ノ如ク公式 65 ヲ用ユルノガ最モ便利ナノデアル.

例 △ABC ニ於テ $a=183$, $b=195$, $c=214$ ヲ知リテ最大ノ角ヲ求メヨ 但シ $\log 82=1{\cdot}91381$ $\log 296=2{\cdot}47129$

$\log 101 = 2{\cdot}00432$. $\log 113 = 2{\cdot}05308$

$\mathrm{Ltan}\,34^\circ 26' = 9{\cdot}83605$, $\mathrm{Ltan}\,34^\circ 27' = 9{\cdot}83632$

〔解〕 $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(183+195+214) = 296$

$s-a = 296-183 = 113$

$s-b = 296-195 = 101$

$s-c = 296-214 = 82$.

ソコデ c ガ最モ長イカラ, C ガ最大角デアル, 故ニ C ヲ求ムレバ宜シイノデアル.

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \left\{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \mathrm{Ltan}\frac{C}{2} = \log\left\{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}\right\}^{\frac{1}{2}} + 10$$

$$= \frac{1}{2}\log\left\{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}\right\} + 10$$

$$= \frac{1}{2}\{\log(s-a) + \log(s-b) - \log s - \log(s-c)\} + 10$$

ソコデ $\log(s-a) = \log 113 = 2{\cdot}05308$

$\log(s-b) = \log 101 = 2{\cdot}00432$ (+

$4{\cdot}05740$

$\log s = \log 296 = 2{\cdot}47129$ (−

$1{\cdot}58611$

$\log(s-c) = \log 82 = 1{\cdot}91381$ (−

$\bar{1}{\cdot}67230$

2) $\bar{1}{\cdot}83615$

10 (+

$\mathrm{Ltan}\frac{C}{2} = 9{\cdot}83615$

今 $\mathrm{Ltan}\,34^\circ 27' = 9{\cdot}83632$

$\mathrm{Ltan}\,34^\circ 26' = 9{\cdot}83605$ (−

$1'$ $\cdot 00027$

$\mathrm{Ltan}\frac{C}{2} = 9{\cdot}83615$

$\mathrm{Ltan}\,34^\circ 26' = 9{\cdot}83605$ (−

$\cdot 00010$

$\cdot 00027 : \cdot 00010 = 60'' : x$ $x = 22''$ 〔4捨5入〕

$\therefore\ \frac{C}{2} = 34^\circ\ 26'\ 22''$ $\therefore\ C = 68^\circ\ 52'\ 44''$ (答)

例題

次ニ掲グル例題ハ凡ヘテ本編ニ掲グル例解ニ倣ツテ學者自ラ之レヲ解スルヿガ出來ル, 故ニ解ヲ與ヘズシテ唯答ノミヲ掲ゲテ置ク

1. $a=479$ $A=82^\circ 20'$ $C=54^\circ 20'$ ヲ與ヘ b ヲ求メヨ

但シ $\log 479 = 2{\cdot}68034$, $\mathrm{Lsin}\,82^\circ 20' = 9{\cdot}99610$

$\mathrm{Lsin}\,43^\circ 20' = 9{\cdot}83648$, $\log 3316 = 3{\cdot}52061$ $\log 3317 = 3{\cdot}52075$

〔第一ノ場合〕 答 331·65

2. $b=345$ $a=695$ $B=21^\circ 14'$ ヨリ C ヲ求ム

但シ $\log 139 = 2{\cdot}14301$ $\log 69 = 1{\cdot}83885$ $\mathrm{Lsin}\,21^\circ 14' = 9{\cdot}55891$

$\mathrm{Lsin}\,46^\circ 52' = 9{\cdot}86318$, $\mathrm{Lsin}\,46^\circ 51' = 9{\cdot}86306$

〔第三ノ場合〕 答 $46^\circ 51' 5''$ 及 $133^\circ 8' 55''$

3. $b=21$, $c=10{\cdot}5$ $A=36^\circ 52' 12''$ ヨリ B, C ヲ求ム

但シ $\mathrm{Ltan}\,71^\circ 33' 54'' = 10{\cdot}47712$ $\log 3 = {\cdot}47712$,

〔第二ノ場合〕 答 $116^\circ 33' 54''$ $26^\circ 33' 54''$

4. $a=7$, $b=20$ $c=25$ ヲ知リ最小角ヲ求ム

但シ $\log 13 = 1{\cdot}11394$ $\log 19 = 1{\cdot}27875$ $\log 3 = {\cdot}47712$

$\mathrm{Ltan}\,6^\circ 17' = 9{\cdot}04181$ $\mathrm{Ltan}\,6^\circ 18' = 9{\cdot}04297$

〔第四ノ場合〕 答 $12^\circ 34' 41''$ 〔4捨5入〕

第九編

距離及高サ

52. 三角形ノ計算ヲ應用シテ直接ニ測リ難キ距離及ビ高サヲ計算スルコヲ得ル.

此ノ方法ノ話シヲナス前ニ先ヅ茲ニ必要ナル術語ヲ示サン.

垂直線　錘ヲ糸ニ附シテ下グルキ, 其ノ糸ノ太サヲ取リ去テ得タル直線ヲ垂直線トイフ.

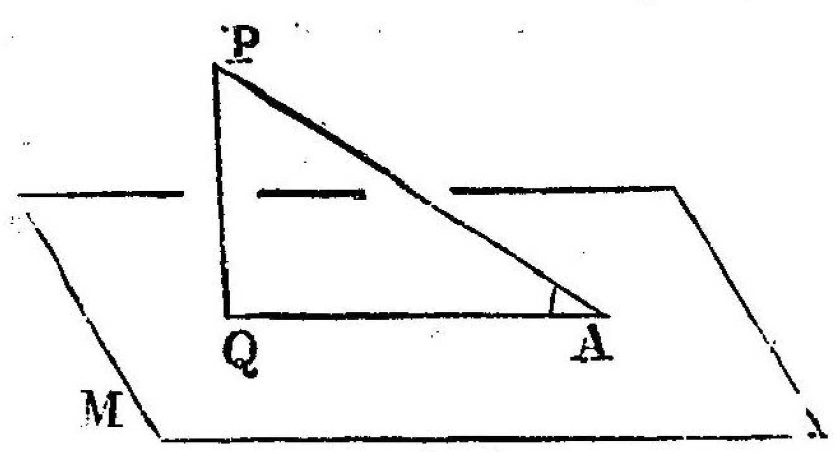
垂直面　垂直線ヲ含ム平面ヲ垂直線トイフ.

水平線　垂直線ニ直立スル直線ヲイフ.

水平面　垂直線ニ直立スル平面ヲイフ.

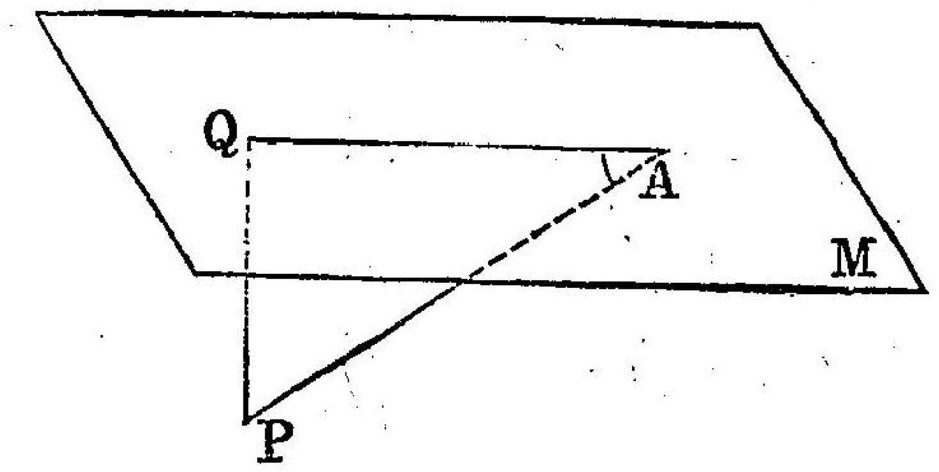
基　線　或ル距離又ハ或ル高サ等ヲ計ラントスル爲メニ設ケタル定直線ヲ基線トイフ.

仰　角　或ル物體ヲ觀測セントスルキ, 其物體ガ測者ノ目ノ上方ニアルキ, 其物體ト測者ノ眼トヲ連ヌル直線ガ其水平面トナス所ノ角ヲイフ.



例ヘバ測者ノ眼Aノ上方ニアル或ル物體ヲPトシ, 測者ノ眼ヲ過グル水平面ヲMトシPヨリMニ垂線PQヲ下シQAヲ結ブキハPAQ角ハ即チPAトMトニテナス角ニシテ即チ此ノPAQ角ハAニ於ケルPノ仰角ナリ

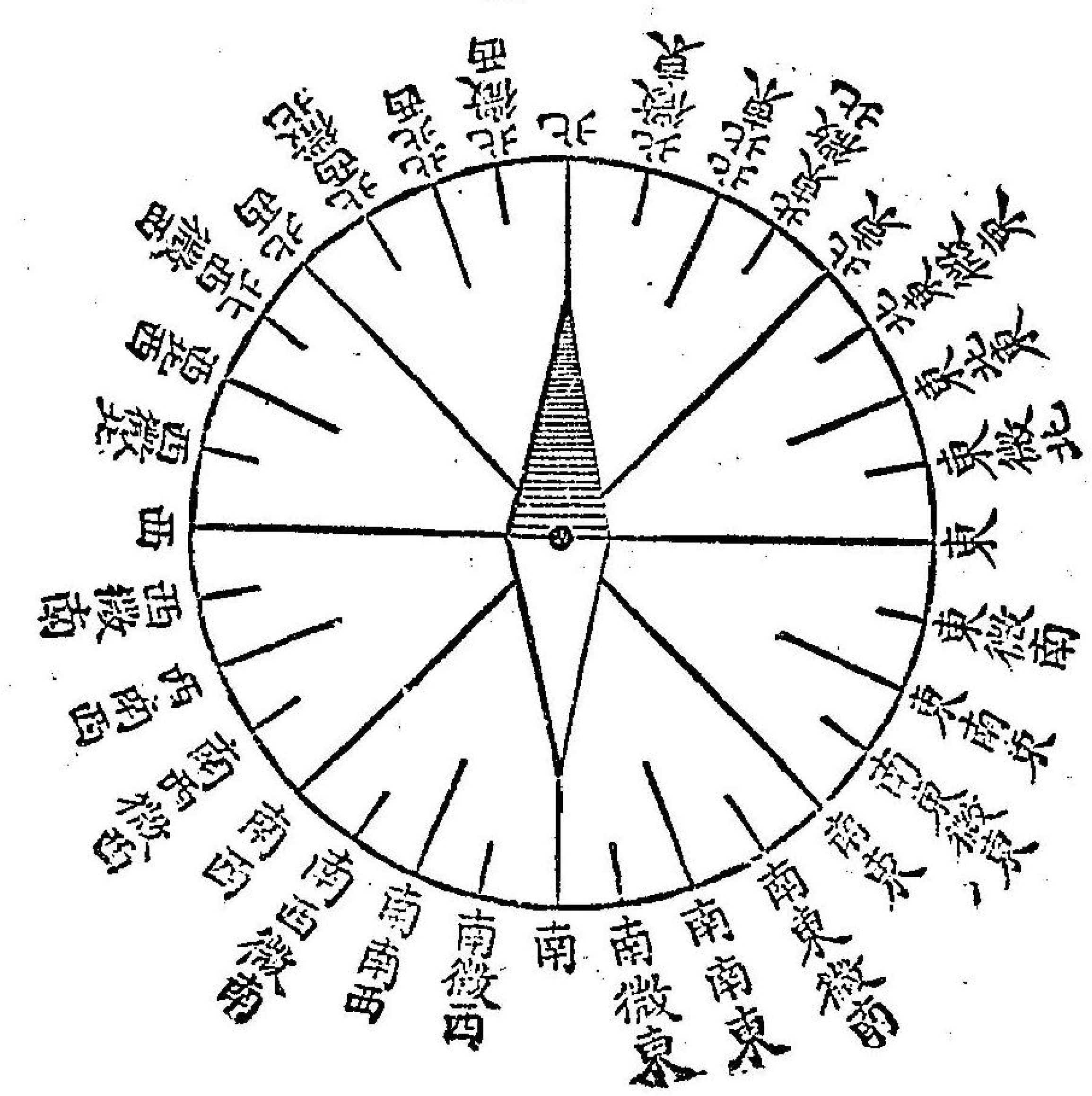
俯　角　或ル物體ガ其測者ノ眼ヲ過グル水平面ノ下方ニアレバ, 其ノ物體ト測者ノ眼トヲ連ヌル直線ガ其水平面トナス所ノ角ヲ俯角トイフ.



例ヘバ測者ノ眼Aノ下方ニアル物體ヲPトシ, Aヲ過グル水平面ヲMトシPヨリMニ垂線PQヲ下シAP, AQヲ結ブ, 然ルキハ∠PAQハAPトM平面トガナス角ニシテ此ノ∠PAQハAニ於ケルPノ俯角デアル.

〔注意〕　測者ノ眼ヨリ引キタル二ツノ直線ノナス角ハ經緯儀, 六分儀等ノ器械ヲ以テ之レヲ測ルコヲ得ルノデアル,

53. 方位ノ呼ヒ方　方位ヲ示スニハ通例羅針盤ヲ用ユ羅針盤ハ圓形ノ測器ニシテ中央ニ磁針ヲ有シ東西南北ノ各ノ間ヲ32等分シ之レニ次ノ如キ名稱ヲ附ス

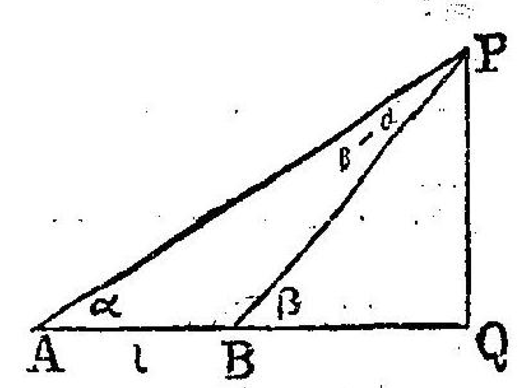


56. 直立セル物體ノ基底ニ接近シ能ハザル時，此ノ物體ノ高サヲ測ル法．

物體ヲ PQ トシ其頂キ P ヲ望見シ得ベキ二點 A, B ヲ水平面上ニ求ム，ソコデ次ノ如キ貳個ノ場合ガアル，

〔第壹〕 A, B, Q ガ壹直線ニアル時，

此ノ時ハ A, B ニ於テ P ノ仰角ヲ測リ(器械ニテ)之レヲ α, β トシ, AB ノ長ヲ測リ之レヲ l トス



△ABP ニ於テ $\dfrac{AP}{\sin ABP}=\dfrac{AB}{\sin APB}$

然ルニ $\sin ABP=\sin\beta$ $\because$ $ABP+\beta=180°$

且ツ $APB=\beta-\alpha$ 又 $AB=l$

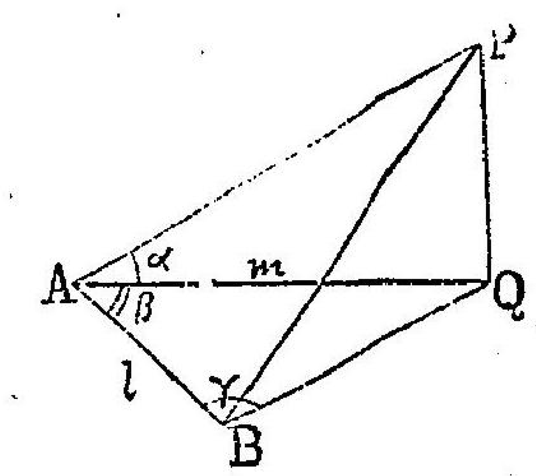
$$\therefore \quad \frac{AP}{\sin\beta}=\frac{l}{\sin(\beta-\alpha)} \qquad \therefore \quad AP=\frac{l\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\frac{PQ}{AP}=\sin\alpha \qquad \therefore \quad PQ=AP\sin\alpha=\frac{l\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

即チ PQ ヲ得タリ

〔第貳〕 A, B, Q ガ壹直線上ニアラザル場合

此ノ時ハ A ニ於テ P ノ仰角ヲ測リ(器械ニテ)之レヲ α トシ，又 ∠BAQ ∠ABQ ヲ測リ(器械ニテ)之レヲ β, γ トシ, $AB=l$ トセバ



△ABQ ニ於テ 50 第壹ノ場合ニヨリ AQ ヲ求メ得，ソコデ AQ ヲ m トス，

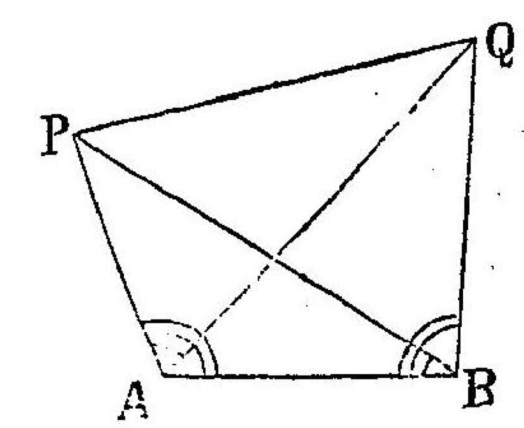
△APQ ニ於テ $\dfrac{PQ}{m}=\tan\alpha$ $\therefore$ $PQ=m\tan\alpha$.

即チ PQ ヲ得タリ

55. 達シ得ベカラザル二點間ノ距離ヲ求ムル法．

近ツキ難キ二點ヲ P, Q トス

ソコデ互ニ到達シ得ベク，且ツ P, Q ヲ望ミ得ベキ二點 A, B ヲ定メ AB ノ長サ，及ビ ∠PAB ∠PBA ∠QAB, ∠QBA ヲ測ル，



然ル時ハ △PAB ニ於テ ∠PAB, ∠PBA ナル二角及ビ一邊 AB ノ長サヲ知ルヲ以テ 48 第一ノ場合ヨリ PB ヲ計算シ得ル

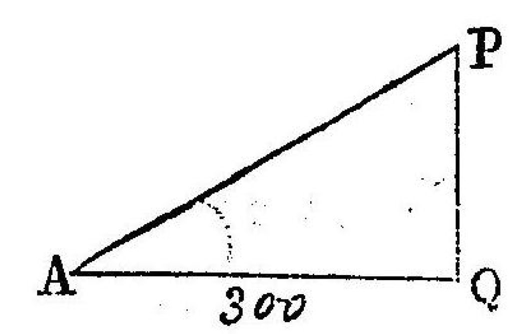
又 △QAB ニ於テ二角 QAB, QBA ノ大サ及ビ一邊 AB ノ長サヲ知ルヲ以テ 48 第一ノ場合ニヨリ QB ヲ計算スルヿヲ得．

ソコデ △PBQ ニ於テ二邊 PB, QB 及ビ ∠PBQ ヲ知リ得タリ依テ 49 第貳ノ場合ヨリ PQ ヲ計算シ得ルノデアル．

例　題

1. 幅 300 尺ノ河アリ其岸ノ壹點ニ於テ其對岸ニ直立スル塔ノ仰角ヲ測リ 22°20′ ヲ得タリ塔ノ高サ如何

但シ $\tan 22°20'=0{\cdot}41$



〔解〕 A ヲ測點, PQ ヲ塔, AQ ヲ河巾トス，然ル時ハ $\angle PAQ=22°20'$

$$\frac{PQ}{AQ}=\tan 22°20'$$

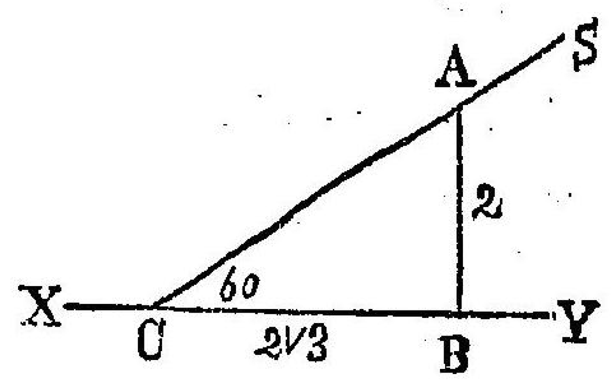
$\therefore$ $PQ=AQ\tan 22°20'=300\times{\cdot}41=123$尺

2. 長サ 2 尺ノ杖ヲ地面ニ直立セシムル時 $2\sqrt{3}$ 尺ノ影ヲ地上

=投セリ，太陽ノ高度如何．但シ太陽ノ高度トハ太陽ノ光線ト地面トニテナス角ヲイフノデアル．

又此ノ時ニ杖ヲ地面ニ何度傾ケレバ最モ長キ影ヲ得ルカ．

〔解〕 AB ハ地面ニ直立セル杖ニシテ S ハ太陽ノ位置，AB ガ地面 XY ニ投セル影ヲ BC トス，

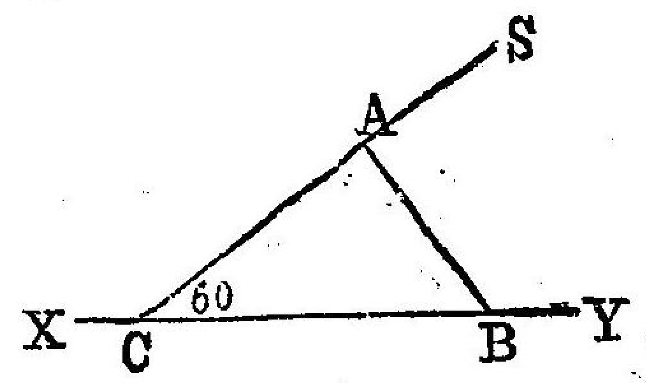


∴ AB=2尺　BC=$2\sqrt{3}$尺

ソコデ　$\tan C=\frac{AB}{BC}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $C=60^\circ$　即チ　太陽ノ高度ハ 60°

又杖 AB ヲ光線 SC ニ直立セシムルトキ AB ノ影ハ最モ長シ．



而シテ　$\angle ACB=60^\circ$　$\angle CAB=90^\circ$

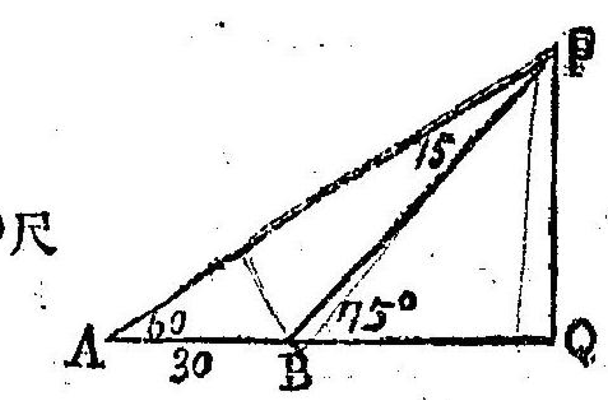
∴ $\angle ABC=180-\angle CAB-\angle ACB$

$=180^\circ-90^\circ-60^\circ=30^\circ$

即チ杖ヲ地面ニ 30° 傾ケレバ最モ長キ影ヲ得．

3. 壹塔 PQ アリ，壹地 A ニ於テ塔頂 P ノ仰角ヲ測リ 60° ヲ得，又 A ヨリ塔ニ向ツテ 30 尺進ミ此ノ處ニ於テ塔頂ノ仰角ヲ測リシニ 75° ヲ得タリ，塔ノ高如何

但シ $\cot 15=2+\sqrt{3}$



〔解〕第二ノ測點ヲ B トス ∴ AB=30尺

又　$\angle A=60^\circ$　$\angle PBQ=75^\circ$

△ABP ニ於テ　$\angle APB=\angle PBQ-\angle A=75^\circ-60^\circ=15^\circ$

△ABP ニ於テ　$\frac{PB}{\sin A}=\frac{AB}{\sin APB}$ ∴ $PB=\frac{AB\sin A}{\sin APB}=\frac{30\sin 60^\circ}{\sin 15}$

$PQ\perp AQ$　∴ $\frac{PQ}{PB}=\sin PBQ=\sin 75^\circ=\cos 15^\circ$　∵ $75^\circ+15^\circ=90^\circ$

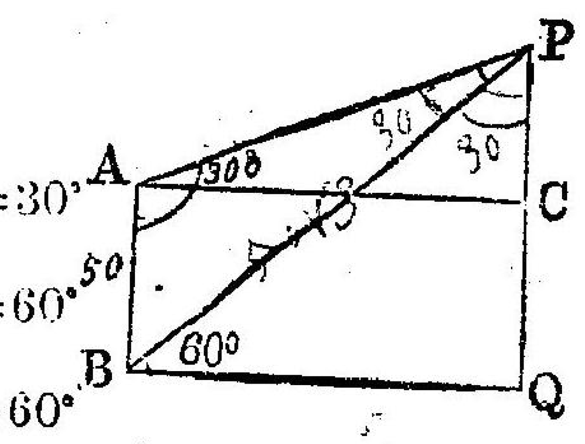
∴ $PQ=PB\cos 15^\circ=\frac{30\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ}\times\cos 15^\circ=30\sin 60^\circ\cot 15^\circ$

$=30\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(2+\sqrt{3})$

$=15\sqrt{3}(2+\sqrt{3})=15(2\sqrt{3}+3)$

4. 高サ 50 尺ノ墻壁ノ上ニ於テ壹塔ノ頂ノ仰角ヲ測リ 30° ヲ得，又其墻ヲ下リテ塔頂ノ仰角ヲ測リ 60° ヲ得タリ，塔ノ高サ如何．

〔解〕 AB ヲ墻壁トシ PQ ヲ塔トス，AC ハ A ヲ過グル水平線トスレバ



A ニ於ケル P ノ仰角ハ ∠PAC ∴ $\angle PAC=30^\circ$

B ニ於ケル P ノ仰角ハ ∠PBQ ∴ $\angle PBQ=60^\circ$

直△APC ニ於テ $\angle PAC=30^\circ$ ∴ $\angle APC=60^\circ$

直△PBQ ニ於テ $\angle PBQ=60^\circ$ ∴ $\angle BPQ=30^\circ$

上ノ式ヨリ下ノ式ヲ減ズレバ　$\angle APB=30^\circ$．

△ABP ニ於テ $\frac{PB}{\sin BAP}=\frac{AB}{\sin APB}$　∴ $PB=\frac{AB\sin BAP}{\sin APB}$

∴ $PB=\frac{AB\sin BAP}{\sin APB}=\frac{50尺\times\sin(90^\circ+30^\circ)}{\sin 30^\circ}=\frac{50尺\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$

$=\frac{50尺\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=50尺\sqrt{3}$.

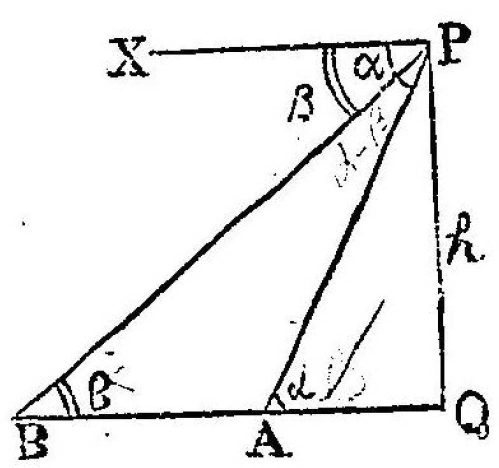
$PQ\perp BQ$　∴ $\frac{PQ}{PB}=\sin 60^\circ$

∴ $PQ=PB\sin 60^\circ=50尺\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=25尺\times 3=\underline{\underline{75尺}}$

5. 高サ h 尺ノ塔ノ頂ニ於テ水平面上ニアル二點 A, B ノ俯角ヲ測リ夫々 α, β ヲ得タリ　然ルキハ $AB=\dfrac{h\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

但シ A, B ハ塔ノ同側ニアリテ且ツ A, B 及ヒ塔頂ハ同一ノ垂直面上ニアリトス

〔解〕 PQ ハ塔, PX ハ P ヲ過グル水平線トス, 故ニ



P ニ於ケル A ノ俯角ハ $APX=\alpha$,

P ニ於ケル B ノ俯角ハ $BPX=\beta$,

$$\therefore\ \angle APB=\angle APX-\angle BPX=\alpha-\beta,$$

又 $PX /\!/ BQ$　$\therefore$　$\angle QAP=\angle APX=\alpha$,　$\angle B=\angle BPX=\beta$

△APB ニ於テ　$\dfrac{AB}{\sin APB}=\dfrac{AP}{\sin B}$

$$\therefore\quad AB=\frac{AP\sin APB}{\sin B}=\frac{AP\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}$$

然ルニ　$\dfrac{PQ}{AP}=\sin\alpha$　$\therefore$　$AP=\dfrac{PQ}{\sin\alpha}=\dfrac{h}{\sin\alpha}$

$$\therefore\quad AB=\frac{h}{\sin\alpha}\times\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}=\frac{h\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

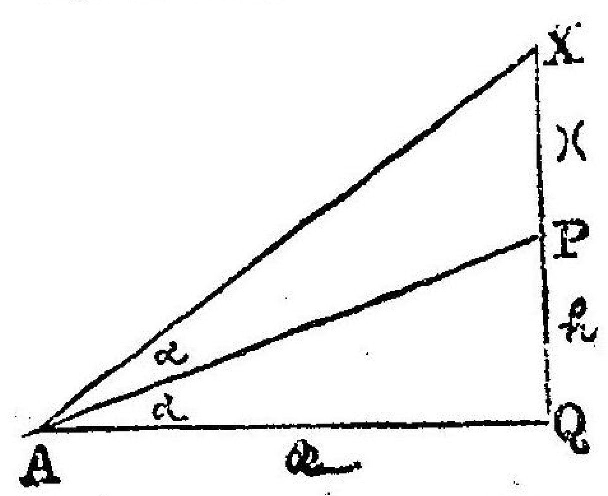
6. 高サ h 尺ノ塔ノ頂ニ避雷針アリ, 今塔底ヲ距ル a 尺ノ場所ニ於テ塔身ト避雷針トヲ夾ム角ヲ測リシニ其大サ相等シカリシトイフ, 塔身ヲ h 尺トスレバ針ノ長サハ

$\dfrac{a^2+h^2}{a^2-h^2}h$ 尺ナルコヲ證セヨ

〔解〕 PQ ハ塔身, PX ハ避雷針,

A ハ測點ナリトス,

故ニ　$AQ=a$,　$PQ=h$



而シテ　$XP=x$ トス

又題意ニヨリ　$\angle PAQ=\angle PAX=\alpha$　トス

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\qquad(1)$$

然ルニ　$\tan 2\alpha=\tan XAQ=\dfrac{XQ}{AQ}=\dfrac{x+h}{a}$　又　$\tan\alpha=\tan PAQ=\dfrac{h}{a}$

故ニ(1)ハ　$\dfrac{x+h}{a}=\dfrac{2\times\dfrac{h}{a}}{1-\dfrac{h^2}{a^2}}$　　$\therefore$　$\dfrac{x+h}{a}=\dfrac{2ah}{a^2-h^2}$

分母ヲ拂ヘバ　$x(a^2-h^2)+h(a^2-h^2)=2a^2h$,

$$\therefore\quad x(a^2-h^2)=a^2h+h^3\qquad\therefore\quad x=\frac{(a^2+h^2)h}{a^2-h^2}$$

7. 山頂ニ於テ同シ方向ニアル二家屋ノ俯角ヲ測リ $23^\circ20'$ 及ビ $18^\circ10'$ ヲ得タリ, 又家屋ノ距離ハ 440 間ナリ山ノ高サ如何

但シ　$\log\sin 23^\circ20'=\bar{1}\cdot59778$　　$\log\sin 18^\circ10'=\bar{2}\cdot49385$

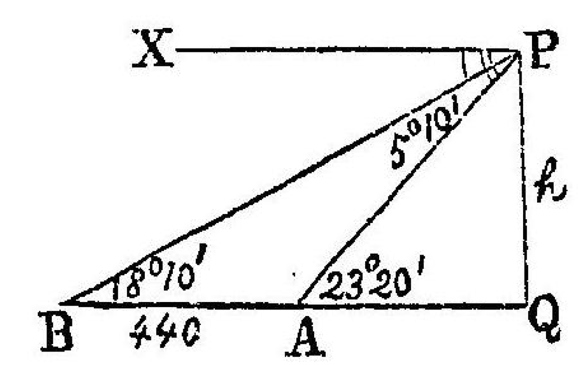
$\log\sin 5^\circ10'=\bar{2}\cdot75450$　　$\log 44=1\cdot64345$

$\log 6033=3\cdot98653$　　$\log 6034=3\cdot98661$

〔解〕 PQ ハ山ノ高サ, 之レヲ h トス

A, B ハ二ツノ家屋, 故ニ　$AB=440$.

PX ハ P ヲ過グル水平線, 故ニ



P ニ於ケル B ノ俯角ハ $\angle XPB=18^\circ10'$

P ニ於ケル A ノ俯角ハ $\angle APX=23^\circ20'$

$PX /\!/ BQ$　$\therefore$　$\angle B=\angle XPB=18^\circ10'$ 及 $\angle PAQ=\angle XPA=23^\circ20'$

又　$\angle BPA=\angle XPA-\angle XPB=23^\circ20'-18^\circ10'=5^\circ10'$

△PBA ニ於テ　$\dfrac{PA}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin APB}$　$\therefore$　$PA=\dfrac{AB\sin B}{\sin APB}=\dfrac{440\sin 18^\circ10'}{\sin 5^\circ10'}$

$\therefore$　$\dfrac{h}{PA}=\sin 23^\circ20'$　　$\therefore$　$h=PA\sin 23^\circ20'=\dfrac{440\sin 18^\circ10'\sin 23^\circ20'}{\sin 5^\circ10'}$

∴ $\log h=\log 440+\log\sin 18°10'+\log\sin 23°20'-\log\sin 5°10'$

$$\begin{aligned}\log 440&=2{\cdot}64345\\ \log\sin 18°10'&=\bar{2}{\cdot}49385\\ \log\sin 23°20'&=\bar{1}{\cdot}59778\\ \hline &\ \ 0{\cdot}73508\\ \log\sin 5°10'&=\bar{2}{\cdot}75450\quad(-\\ \hline \log h&=1{\cdot}98058\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll|l} \log 60{\cdot}34=1{\cdot}98661 & & \log h\ \ =1{\cdot}98058\\ \log 60{\cdot}33=1{\cdot}98653 & & \log 60{\cdot}33=1{\cdot}98053\\ \hline {\cdot}01 & {\cdot}00008 & {\cdot}00005 \end{array}$$

$00008:{\cdot}00005={\cdot}01:x$　　$x={\cdot}005$　〔4捨5入シテ〕

∴　$h=60{\cdot}33+{\cdot}005=60{\cdot}335$　　答　60·335

8. 或ル軍艦ノ甲板ト同シ水平面上ニアル海岸ノ壹點ヨリ其檣頭ノ仰角ヲ測リ $2°4'37''$ ヲ得タリ，今檣ノ高サ 150 尺ナルトキ其點ヨリ檣ニ到ル水平距離ヲ次ニ與ヘタル對數ヲ用ヒテ計算セヨ.

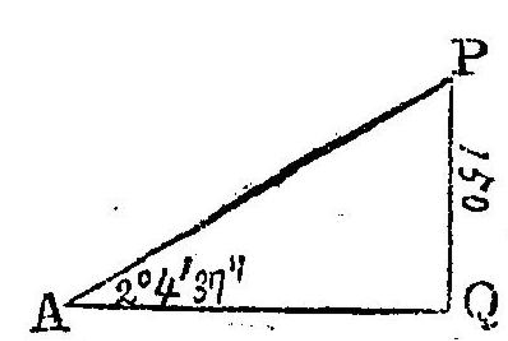
$\log 2={\cdot}30103$　$\log 3={\cdot}47712$　$L.\cot 2°4'30''=11{\cdot}44092$

$L\cot 2°4'40''=11{\cdot}44030$　$\log 4{\cdot}136={\cdot}61658$

〔解〕 PQ ハ檣ノ高サ，∴ PQ=150尺

A ハ海岸ノ壹點　∴　$\angle PAQ=2°4'37''$

今 $\frac{AQ}{PQ}=\cot 2°4'37''$ ナル故ニ



$\cot 2°4'37''$ ヲ求ムレバ AQ ヲ得ベシ

故ニ　$\cot 2°4'37''$ ヲ求ムレバ可ナリ

$$\begin{array}{rr|rr} L.\cot 2°4'30''=11{\cdot}44092 & & 2°\,4'\,37'' & \\ L.\cot 2°4'40''=11{\cdot}44030 & (- & 2°\,4'\,30 & (-\\ \hline 10''\quad {\cdot}00062 & & 7'' & \end{array}$$

$10'':7''={\cdot}00062:x$　　$x={\cdot}00043$　〔4捨5入〕

∴　$L.\cot 2°4'37''=L.\cot 2°4'30''-{\cdot}00043$

$=11{\cdot}44092-{\cdot}00043=11{\cdot}44049.$

ソコデ　$\frac{AQ}{PQ}=\cot 2°4'37''$

∴　$AQ=PQ\cot 2°4'37''=150\cot 2°4'37''=3\times 50\times\cot 2°4'37''$

∴　$\log AQ=\log 3+\log 50+L.\cot 2°4'37''-10$

$=\log 3+\log\frac{100}{2}+11{\cdot}44049-10$

$=\log 3+\log 100-\log 2+1{\cdot}44099$

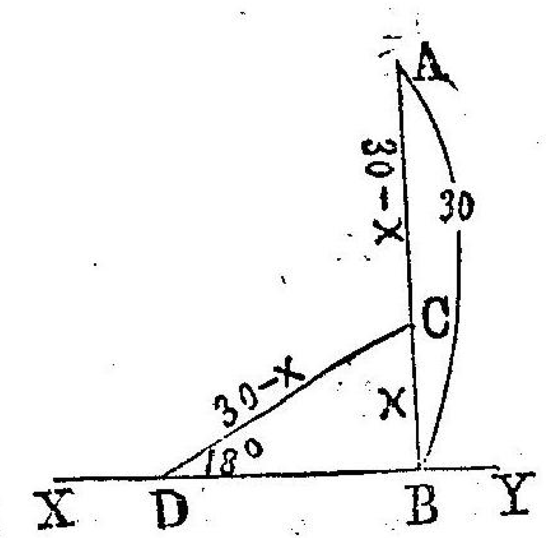
$$\begin{aligned}\log 3&={\cdot}47712\\ \log 100&=2.\\ &\ \ 1{\cdot}44049\\ \hline &\ \ 3{\cdot}91761\quad(+\\ \log 2&=0{\cdot}30103\\ \hline \log AQ&=3{\cdot}61658\quad(-\end{aligned}$$

丁度　$\log 413{\cdot}6=3{\cdot}61658$　　∴　$AQ=413{\cdot}6$

9. 長サ 30 間ノ樹ガ暴風ノ為メニ折ラレ，其樹ノ頂ハ地面ニ觸レ地面ト 18° ヲナセリ根ヨリ何間上ニ於テ折レシカ.

但シ　$\sin 18=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

〔解〕 XY ヲ地面トシ，AB ヲ樹トシ，C ヲ折レタ點トス，CD ハ折レタ部分ニシテ此ノ CD ト XY トガナス角ハ 18° デアル，BC ヲ x トスレバ　$DC=AC=30-x$



ソコデ　$\frac{BC}{DC}=\sin 18$　∴　$\frac{x}{30-x}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

分母ヲ拂ヘバ　$4x=30(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{5}-1)x$

∴　$4x+(\sqrt{5}-1)x=30(\sqrt{5}-1)$

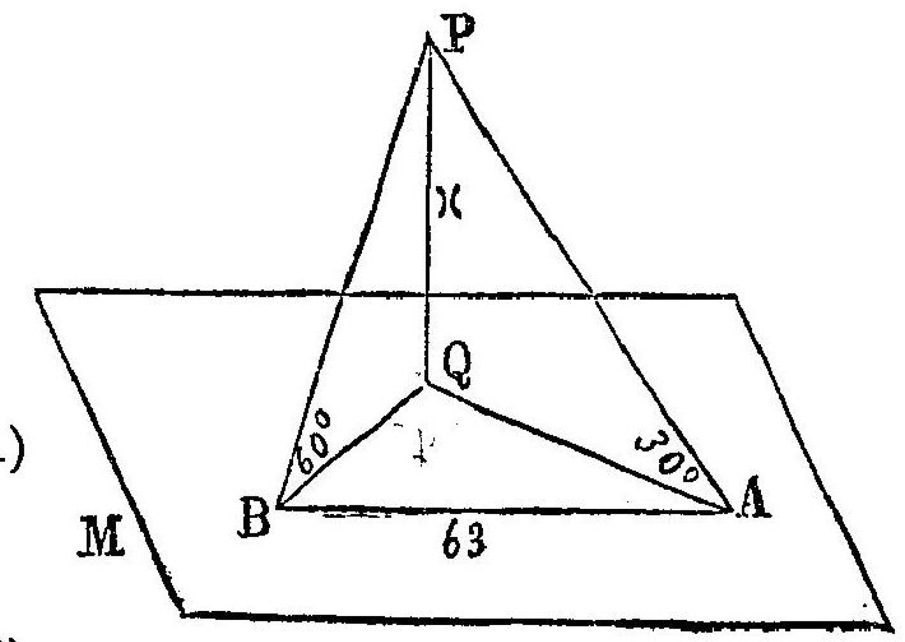
∴　$(3+\sqrt{5})x=30(\sqrt{5}-1)$

∴　$x=\frac{30(\sqrt{5}-1)}{3+\sqrt{5}}=\frac{30(\sqrt{5}-1)(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{30(4\sqrt{5}-8)}{9-5}$

$=30(\sqrt{5}-2)$.

10. 壹塔ノ正東ニ當ル壹地 A ニ於テ其塔頂ノ仰角ヲ測リ 30° ヲ得, 又其塔ノ正南ニ當ル壹地 B ニ於テ其塔頂ノ仰角ヲ測リ 60° ヲ得タリ塔ノ高サ如何. 但シ AB ハ 63 間.

〔解〕 M ハ地面, PQ ハ塔デアル, PQ ヲ x トスレバ



$\frac{BQ}{x}=\cot 60$

∴ $BQ=x\cot 60$　(1)

$\frac{AQ}{x}=\cot 30$

∴ $AQ=x\cot 30$　(2)

然ルニ B ハ Q ノ正南ニアリ. A ハ Q ノ正東ニアリ

∴ ∠BQA＝直角　∴ $AQ^2+BQ^2=AB^2$　(3)

(1)(2) ヲ (3) ニ代用スレバ

$x^2\cot^2 60+x^2\cot^2 30=63^2$

∴　$\frac{1}{3}x^2+3x^2=63^2$　∵ $\cot 60=\frac{1}{\sqrt{3}}$　$\cot 30=\sqrt{3}$

∴　$10x^2=63^2\times 3$

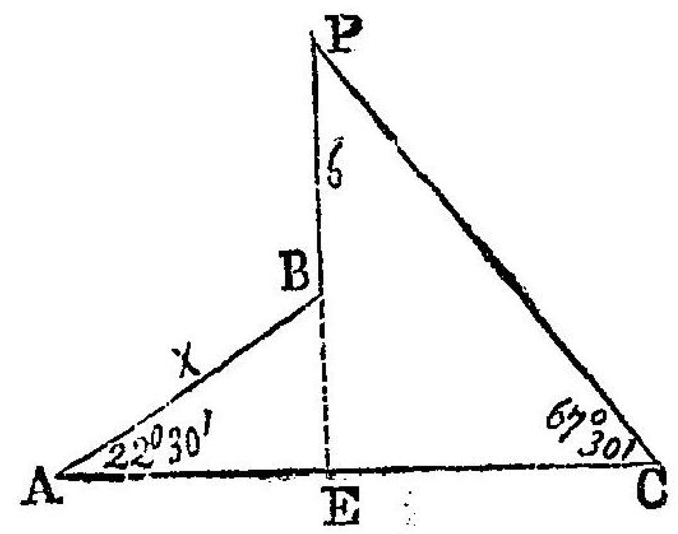
$x=\sqrt{\frac{63^2\times 3}{10}}=\sqrt{\frac{63^2\times 30}{100}}=\frac{63}{10}\sqrt{30}$.

11. 甲乙ノ滊車アリ, 甲ハ A 地ニ, 乙ハ B 地ニアリ, 但シ B

ハ A ノ東北東ニ當ル, 今甲ハ正東ニ乙ハ正北ニ走リ, 甲ガ C ニ到着セシ時乙ハ P ニ在リ 而シテ P ハ C ノ北北西ニ當レリトイフ, AB ノ距離ヲ求ム 但シ AC ハ 8 里 BP ハ 6 里ナリ.

但シ $\sin 22°30'=0{\cdot}38$　$\cos 22°30'=0{\cdot}92$,　$\tan 67°30'=2{\cdot}41$.

〔解〕 PB ヲ引長シテ AC トノ交點ヲ E トシ, AB ヲ x 里トス,



C ハ A ノ正東, B ハ A ノ東北東ニ當ル, ∴ ∠A＝22°30′　(羅針盤)

又 A ハ C ノ正西, P ハ C ノ北北西ニ當ル　∴ ∠C＝67°30′

$\frac{BE}{x}=\sin 22°30'=0{\cdot}38$　∴ $BE=0{\cdot}38\times x$　∴ $PE=6+0{\cdot}38\times x$

$\frac{AE}{x}=\cos 22°30'=0{\cdot}92$　∴ $AE=0{\cdot}92\times x$　∴ $EC=8-029{\cdot}\times x$

然ルニ $\frac{PE}{EC}=\tan 67°30'=2{\cdot}41$

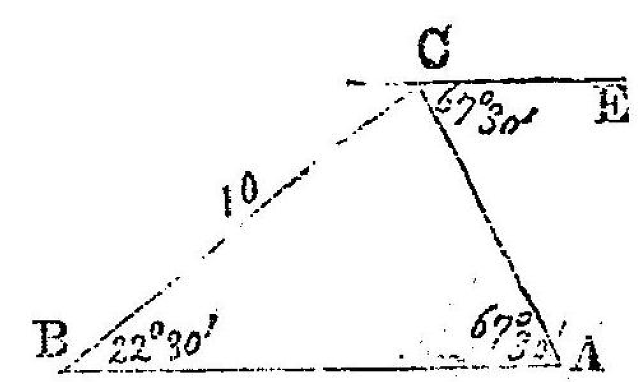
∴ $\frac{6+0{\cdot}38\times x}{8-0{\cdot}92\times x}=2{\cdot}41$　∴ $6+0{\cdot}38x=19{\cdot}28-2{\cdot}2172\times x$

∴ $2{\cdot}5972\times x=13{\cdot}28$　∴ $x=\frac{13{\cdot}28}{2{\cdot}5972}=5{\cdot}11$ 里　〔4捨5入〕

12. 滊船ガ B ニ於テ燈臺 A ヲ正東ニ望ミ, 夫レヨリ東北東ノ方向ニ 10 海里進ミタル時燈臺 A ヲ南々東ニ望ミタリ CA ノ距離如何. 但シ $\sin 22°30'=0{\cdot}38$　$\sin 67°30'=0{\cdot}92$

〔解〕 A ハ B ノ正東ニシテ, C ハ B ノ東北東ニ當ル,

∴ ∠B＝22″30′



今 C ヨリ正東ノ方向ヲ E トスレバ

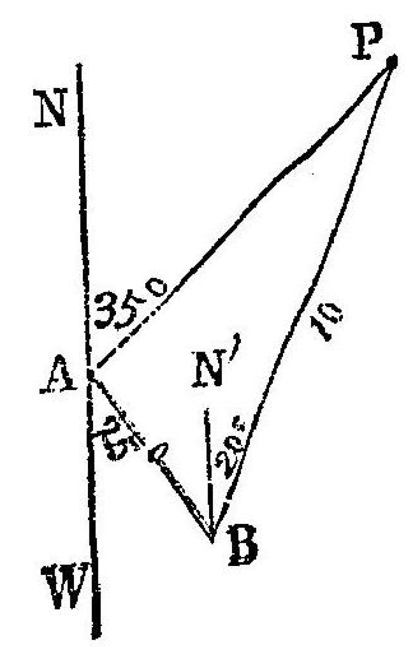
A ハ C ノ南々東ニ當ルヲ以テ　　$\angle ECA=67^\circ 30'$

而シテ　$AB /\!/ CE$　$\therefore$　$\angle A=\angle ECA=67^\circ 30'$

今　$\triangle ACB$ ニ於テ　$\frac{CA}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$　$\therefore$　$CA=\frac{BC\sin B}{\sin A}$

$$\therefore\quad CA=\frac{10\times\sin 22^\circ 30'}{\sin 67^\circ 30'}=\frac{10\times\cdot 38}{\cdot 92}=4\cdot 13$$ 〔4捨5入〕

13. 船アリ海上ノ一點 A ニ於テ燈臺 P ヲ正北ヨリ 35° 東ノ方ニ望ミ夫レヨリ, 正南ヨリ 25° 東ノ方ニ航シ B 港ニ着シ此ノ處ニテ燈臺 P ヲ見シニ正北ヨリ 20 東ニ當レリ, 但シ B 港ト燈臺トノ距離ハ 10 海里ナリ, AP ヲ求ム



〔解〕 N ハ A ヨリ正北ノ方向ニシテ, W ハ A ヨリ正南ノ方向ナリトス,

$\therefore$　$\angle NAP=35^\circ$,　$\angle WAB=25^\circ$

今 N' ヲ B ヨリ正北ノ方向トスレバ

題意ニヨリ　$\angle N'BP=20^\circ$

$\triangle PAB$ ニ於テ　$\frac{AP}{\sin ABP}=\frac{BP}{\sin PAB}$

$$\therefore\quad AP=\frac{BP\sin ABP}{\sin PAB}\quad (1)$$

然ルニ　$\angle PAB=180^\circ-\angle PAN-\angle BAW=180^\circ-35^\circ-25^\circ=120^\circ$

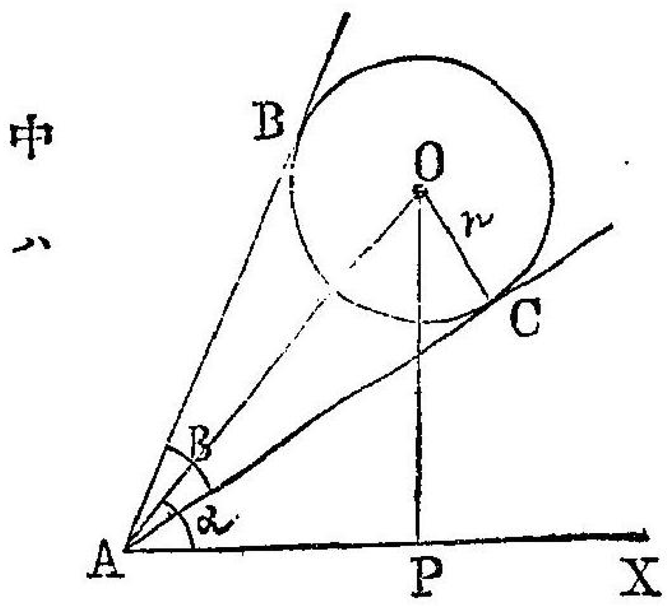
$\angle ABP=\angle PBN'+\angle N'BA=20+\angle WAB=20+25=45^\circ$

$\therefore$　(1) ヨリ　$AP=\frac{10\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}=\frac{10\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}$　$\because 120+60=120^\circ$

$$=\frac{10\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{20}{\sqrt{6}}=\frac{20\times\sqrt{6}}{6}=\frac{10\times\sqrt{6}}{3}.$$

14. 地上ノ壹點 A ニ於テ空中ニ靜止セル輕氣球(其半徑 r 尺)

トノ中心ノ仰角ヲ測リ α° ヲ得, 又其地ニ於テ輕氣球ヲ夾ム角ヲ測リ β° ヲ得タリ, 然ルトキハ輕氣球ノ中心ノ高サハ $\frac{r\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ ナルコヲ證セヨ.



〔證〕 AX ハ地平面, O ハ輕氣球ノ中心, AB, AC ハ切線ニシテ即チ BAC ハ A ニ於テ輕氣球ヲ夾ム角デアル

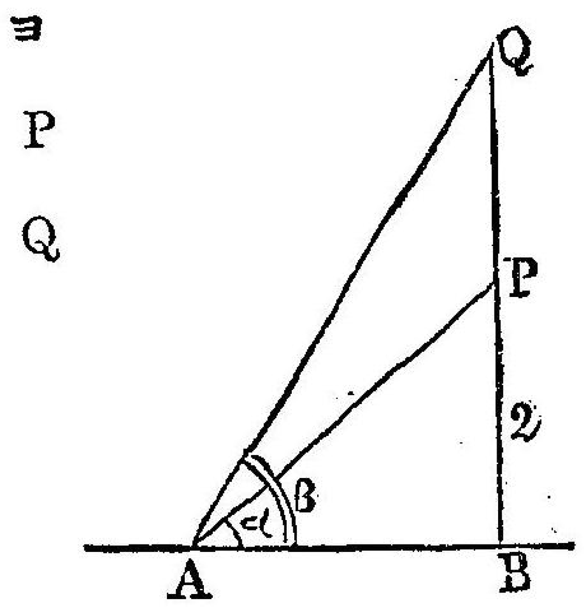
$\therefore$　$\angle BAC=\beta$.

OC ヲ結ブトキハ $OC\perp AC$ 且ツ $OC=r$

$\frac{OC}{AO}=\sin\angle OAC$　$\therefore$　$\frac{r}{AO}=\sin\frac{1}{2}\beta$　$\therefore$　$AO=\frac{r}{\sin\frac{1}{2}\beta}$

今 $OP\perp AX$ トスルトキハ　$\frac{OP}{AO}=\sin\alpha$　$\therefore$　$OP=AO\sin\alpha=\frac{r\sin\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta}$

15. 等速ニテ垂直ニ昇騰スル輕氣アリ 2 哩昇リシ時地上ノ壹點 A ニ於テ球ノ仰角ヲ測リ α° ヲ得, 其後 45 分ヲ經テ A ニ於テ球ノ仰角ヲ測シニ β° ヲ得タリトイフ. 輕氣球每時ノ速度如何.



〔解〕 B ハ球ガ昇リ始メシ點, P ハ B ヨリ 2 哩昇リシ輕氣球ノ位置, 又輕氣球ガ P ヲ發シテヨリ 45 時間後ノ輕氣球ノ位置ヲ Q トス

$PB\perp AB$　$\therefore$　$\frac{AB}{PB}=\cot\alpha$

$\therefore$　$AB=PB\cot\alpha=2\cot\alpha.$

而シテ　$\frac{BQ}{AB}=\tan\beta$　$\therefore$　$BQ=AB\tan\beta=2\cot\alpha\tan\beta$

$\therefore$　$PQ=QB-PB=2\cot\alpha\tan\beta-2=2(\cot\alpha\tan\beta-1)$

之レハ輕氣球ガ 45′ 即チ $\frac{3}{4}$ 時間ノ速サデアル

$\therefore$　輕氣球每時ノ速サハ $2(\cot\alpha\tan\alpha-1)\div\frac{3}{4}=\frac{8(\cot\alpha\tan\alpha-1)}{3}$

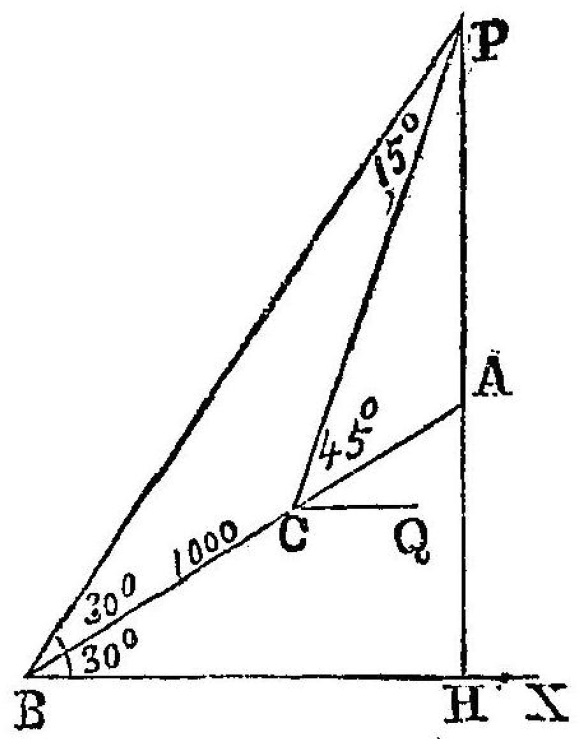
16. 坂路 BA ノ底 B ニ於テ坂上ニ屹立セル壹塔 PA ノ頂 P ノ仰角ヲ測リ 60° ヲ得, B ヨリ塔ニ向ツテ 1000 尺昇リテ C ニ到リ C ニ於テ P ノ仰角ヲ測リ 75° ヲ得タリ P ハ B ヲ過グル水平面ヨリ幾何高キカ

但シ坂路 AB ハ水平面ト 30° ノ角ヲナス

〔解〕 CQ ハ C ヲ過グル水平面トス, $\therefore\ \angle PCQ=75^\circ$

又 $\angle ACQ$ ハ BA ト水平面トノ角 $\therefore\ \angle ACQ=30^\circ$

減ズレバ $\angle PCA=45^\circ$ $\therefore\ \angle PCB=135^\circ$



又 BX ハ B ヲ過グル水平面,

$\therefore\ \angle PBX=60^\circ,\quad \angle ABX=30^\circ$

故ニ減ズレバ $\angle PBC=30^\circ$

$$\therefore\ \angle BPC=\angle PCA-\angle PBC$$
$$=45^\circ-30^\circ=15^\circ$$

△PBC ニ於テ $\dfrac{PB}{\sin PCB}=\dfrac{BC}{\sin BPC}$

$$\therefore\ PB=\frac{BC\sin PCB}{\sin BPC}=\frac{1000\sin 135^\circ}{\sin 15^\circ}=\frac{1000\sin 45}{\sin 15}$$

$$=\frac{1000\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}\times 1000}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\times 1000}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{2000\times(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2000\times(\sqrt{3}+1)}{3-1}=1000\times(\sqrt{3}+1)$$

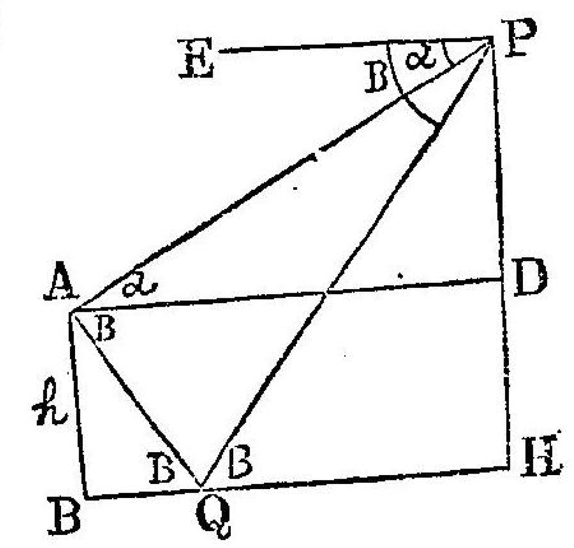
今 PA ト BX トノ交點ヲ H トスレバ $\dfrac{PH}{BP}=\sin 60$

$$\therefore\ PH=BP\sin 60=1000\times(\sqrt{3}+1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=500\times(3+\sqrt{3}).$$

17. 湖水面ヨリ h 尺高キ場所 A ニ於テ浮雲 P ノ仰角ヲ測リ

α ヲ得, 又湖水面上ニ反射セル雲影ノ俯角ヲ A ニ於テ測リ β° ヲ得, 然ルトキハ雲ノ高サハ $h\sin(\beta+\alpha)\,\mathrm{cosec}(\beta-\alpha)$ ナルコトヲ證セヨ.

〔證〕 湖水面 BH ニ反射セル浮雲ノ影ヲ Q トス, AD ハ A ヲ過グル水平面トス,



$\therefore\ \angle PAD=\alpha,\quad \angle DAQ=\beta$

今 Q ハ湖水面ニ反射セル P ノ影,

故ニ $\angle PQH=\angle AQB=\beta$ $\because$ AD∥BH.

又 P ヲ過グル水平面ヲ PE トスレバ

PE∥BH $\therefore\ \angle EPQ=\angle PQH=\beta$

PE∥AD $\therefore\ \angle EPA=\angle PAD=\alpha$

減ズレバ $\angle APQ=\beta-\alpha.$

今 △APQ ニ於テ $\dfrac{PQ}{\sin PAQ}=\dfrac{AQ}{\sin APQ}$

$$\therefore\ PQ=\frac{AQ\sin PAQ}{\sin APQ}=\frac{AQ\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$$

然ルニ $\dfrac{h}{AQ}=\sin\beta$ $\therefore\ AQ=\dfrac{h}{\sin\beta}$

$$\therefore\ PQ=\frac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\sin(\beta-\alpha)}\qquad(1)$$

而シテ $\dfrac{PH}{PQ}=\sin\beta$ $\therefore\ PH=PQ\sin\beta.$

故ニ (1) ヨリ $PH=\dfrac{h\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{\sin\beta\sin(\beta-\alpha)}=\dfrac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}$

$$=h\sin(\alpha+\beta)\,\mathrm{cosec}(\beta-\alpha).$$

(完 了)

明治四十年一月二日五版印刷
明治四拾年一月五日五版發行

平面三角法講義奥付

正價金壹圓

著述者　奥平浪太郎

東京市神田區表神保町七番地
發行者　辻本末吉

大阪南久太郎町四丁目
發賣所　藤谷崇文館

東京市本郷區湯嶋一丁目二番地
印刷者　椿市太郎

東京市本郷區湯嶋一丁目二番地
印刷所　株式會社葆光社

發行所　東京市神田表神保町　電話本局一七五三　振替口座番號三二八　修學堂書店

(明治卅七年十一月三十日初版發行)

東京市神田區
表神保町七番地

修學堂出版圖書目錄

◎總目錄御入用の御方は郵券四錢御送附あれば進呈仕候

○はしがき○

夫れ出版の事たる社會事業中最も重要の地位を占むるものにして此れが盛衰は文化の隆替は國運の消長に影響を及ぼすものなり、今や我が國出版社會の趨勢を通覽するに著者の出づる實に汗牛充棟も啻ならざるなり、豈又喜ぶべき現象にあらずや、然りと雖世往々にして其の社會に對する貢獻事業たるを打ち忘れ營利此れ事とし著者其の人を選まず徒に奇巧なる題目の下に發行して私利を逞しくするものあるは社會一般の認むる所にして國家の爲め又悲むべき所なり、弊堂の初めて足を出版社會に投ずるや、其の事業の社會的にして敢て營利にのみ走るべきものにあらざるを自覺し一たび書を發行せんとするや、必ず先づ著者の學識經驗品性等を採知し常に愼重の態度を以てせり、聊か又社會に對して誇示するに足らむか。左に列擧する書籍の如きは前段述ぶる所の趣旨に基き著者の選擇に留意し校正を嚴密にし印刷其の他體裁に注意して發行せるものなれば出版以來非常の好評を博し何れも幾多の版を重ぬるに至れり、大方の諸賢弊堂の微意を諒とし請ふ續々採用の榮を垂れ給はむことを

修學堂主謹告

文學博士南條文雄、林幸行著

國語辭典　全一冊

正價八十錢　郵稅八錢
洋裝美本千參百頁

國語國文に關する辭典の世に行はるゝや汗牛充棟も啻ならず然れども其の繁なるは冗長に過ぎ簡なるは粗略に陷る弊堂此に見るあり當代知名の南條、林兩先生に乞ひ本書を發行す記事精確材料豐富繁簡亦其の宜しきを得眞に空前の良著と云ふを憚らざるなり弊堂敢て誇張的の言を弄せず本書の一たび世に出づるや數多の辭典其れ顏色なけむ

橫濱　高島嘉右衛門
東京　柳田幾作　先生合著

通俗詳解　周易活斷　全一冊

大判洋裝千頁　正價參圓　小包料拾五錢

世間易學の書、汗牛充棟も啻ならずと雖も、其學理を主とするものは、實際に遠く、通俗を旨とするものは、杜撰に陷るの弊なきこと能

はず、是れ常に遺憾とする所なり、古今斯道に名ある高島先生は、往きに高島易斷を著はし、又之を漢文に譯述して、遠く清國知名の士に贈られしに、大に其稱賛する所と爲り、各謝辭を贈られしは、夙に世人の知る所なり、然れども該易斷は、單に六十四卦及び彖象に止まり繫辭說卦文言等の諸傳を說くを以て、今回更に本書を著し、易上下經より十翼に至るまで、一に經文を以て主と爲し、其多年研究せられて所を漉らさず、通俗的を以て、叮嚀親切に高尙の易理を敘述し、末に六十四卦占斷の一班を揭げ、以て人民日用の應用することを得せしむ世間易學の書多しと雖も、一冊を以て、此くの如く一切を網羅せしものあらざるべし、故に人苟も本書を一讀せば、親く先生の口授を受くるに異ならず、自ら易學の限りなき趣味を感得するに至るへし、然らば則ち今日に當り、心を易學に留むる者、蓋し本書を措きて、他に之を求む可らず、本書の一たび世に出づるや、易學に一大活氣を與へ、占筮に一大改良を促し、夫の易を玩ふ者をして、本書に依り、小は一身一家の幸福を得、大は天下國家の安寧を保つべき唯一の指南車たらしむべく、且此れに由りて漢學者は易理の蘊奧を了悟すべく、占筮家は活斷の的中を得べく、其他實業家政治家等に於けるも、物を開き務めを成すの裨益を生ずべく、教育家辯護士醫學家投機商を問はず、一たび此書を繙き深く之を研鑽せば、平素の業務に於て其實益を得ること、蓋し鮮なからざるべし、

高島先生の易學、多く先哲眞勢中洲氏に出つ、眞勢氏周易釋故の如き者に寫本ありと雖も、卷帙浩瀚、其價亦貴し、然るに本書述ぶる所、釋故の說に從ふもの多ければ、此一事を以てするも、本書の價値あることを信すべきなり、

國語漢文研究會編纂

國語漢文獨習自在

全一冊

紙數二百八十頁　語數二千餘　正價金三十錢　郵稅六錢

右は著者が多年和漢學研鑽の結果、蒐積して成りたるものなれば、其の內容の有實なる、其の中の一語も諳じ一事を記すも、一として讀者の實力とならざるはなく、閱者の裨益とならざるはなし。方今辭典の冗者の多々益々辨すべく、汗牛充棟も啻ならずと雖、其の體裁は多岐冗雜に涉り、或は偏狹簡略に陷るの弊なき能はず。本書は務めて其の冗雜を去り、其偏狹を防ぎ、苟も和漢學を研究するもの一覽博通、欣然該會するの便あらしめたり。いで本書の特色を左に示さんか。

一本書の編輯は、素、營利的にあらず。實用的にあり。故に其の收むる所一として親切穩篤ならざるはなく、實益便利ならざるはなし。是其の他書の及ばざる所以なり。

一他の書、多くは偏狹にして、或は地理に偏し、或は歷史に傾き、或は故實有識に流れ、或は之を兼ぬるも、浩濫繁冗に失するの嫌あるものあり。之に似ず本書は、苟も和漢兩學の故事熟語に關するものは、地理と云はず、歷史と云はず、人名と云はず、動植と云はず、故實有識を問はず、古言今語を論ぜず、一切網羅せざるはなし。故に一卷を備ふるものは、あらゆる故事熟語に於ては、多々の典籍を繙くの煩なかるべし。

一索引に便ならしめんため、書中の語を「イロハ」別に分類收集して、一目瞭然已が欲するを見出すに利あらしむ。其他の特色の如きは、姑く世評に聞はんのみ。

右の如き輕便[illegible]なる珍書なるを以て、其の需要も亦頗る廣かるべし。先づ小學校準高等教員檢定受驗者、全上教員準備場入學者、中學校、男女師範學校、高等女學校、各種學校、男女高等師範學校入學試驗者等に、無二の良師友たるべきは勿論、右各學校教員の上の參考書なり、更に文部省教員檢定受驗者にも、唯一の伴侶たるべきは決して溢言にあらず。請ふ、大方の諸子、一卷を備へて其の眞なるを了し給はんことを。

●東京英語學會各講師編纂

●マスターオブアーツ 國民英學會講師 高野稔太郎主任

英語學自修全書

全十六冊

正價壹冊金廿五錢宛　郵稅一冊四錢宛

日英同盟後我國に於て英語の研究は最も其の必要を感ずるに至れり、政治に文學に實業に交通に將た日常の談話に苟しくも志ある者誰れか英語の必要を感ぜざる者あらんや、然れども世間修學の書に乏しく、其の會々刊行せらるゝ者を見るに多くは片々たる斷篇のみにして眞に英語學全科を大成せし者あるを見ず是れ實に英學研究者にとりて一大遺憾なりとす、本會此の遺憾を補はんがため專門諸大家の贊助を得て本書を發行し篇を重ぬる十六、今や既に全部完成を告ぐるに至れり、本書收むる所皆な斯學必須の學科にして各專門大家の親しく執筆せられたる者なれば注意周到簡易平明を主とし加ふるに實地活用に迂ならず實に近時稀に見る一大良書なり、研學の士、本書を讀了せば英語全科に通ずるを得るのみならず本書は各篇皆な各科の蘊奧を說きたる者なれば一篇を繙くも其科の學に通ずるを得ん、冀くば研學の士本書を繙て斯學研究の便に供せられなば幸甚、

本書各篇目次

●第一編　和英對譯實用作文法　全
●第二編　英和對譯尺牘軌範　全
●第三編　英和實用會話篇　全
●第四編　新式英文法軌範　正
●第五編　新式英文法軌範　續
●第六編　英和實用單語篇　全
●第七編　新式和文英譯秘訣　全
●第八編　新編英和熟語詳解　全
●第九編　受驗必携英和難句詳解　全
●第十編　新式英文和譯秘訣　全
●第十一編　和譯詳註英人傑作詳集　全
●第十二編　受驗必携英語類語詳解　全
●第十三編　前置詞活用法　全
●第十四編　英和對譯時事文例　全
●第十五編　英和俗語詳解　全
●第十六編　英和對譯美文麗句集　全

東京中學校專任講師高塚二男三郎著

獨逸語三ヶ月自修書

全一冊

正價五十錢　郵稅六錢　紙數二百卅頁

獨逸語獨修書ノ類尠ラス然レドモ多ハ讀本ノ直譯ニシテ只字句ニノミ譯ヲ付シタルモノニシテ讀者ニ對シ甚不親切ナルモノヽミナリキ弊堂之ヲ慨シ高塚先生ニ乞フテ本書ヲ世ニ公ニシ聊カ斯學ノ爲ニ盡ス處アラントス本書ハ先生カ多年ノ經驗上一種新案ノ教授法ニ則リ初學者ヲシテ三ヶ月ヲ期シテ發音字ヨリ進テ譯讀文法會話等ニ至ルマテ自修セシムルノ方法ナリ加フルニ一々ニ丁寧親切ナル解譯ノ加ヘアレハ邦文ヲ解スルモノハ何人ト雖モ容易ニ獨逸語學ノ眞味ヲ瞭解スルニ至リ是レ本書ノ特別ナリ請フ愛讀アレ

佐藤喜久松著

最近實用英和會話

寸珍 全一冊

正價二十錢　郵税四錢　紙數百七十頁

日英一たび同盟の約を結びてより英語を學ぶの必要頓に多きを加へ而して之に關する會話の書續々として發行せらる然れども概ね材料踈腐發音不完全殆ど實用に適せず本書は即ち此の欠を補はむが爲に佐藤先生が深遠なる學識と熟練なる經驗とを以て著はされたるものなれば眞に最近實用會話の名に背かず加ふるに寸珍なれば携帯にも便なり希くは高評を垂れ給はむことを

余仁吉先生校訂　同文學會講師鈴木雲峰編

英

日清會話獨修

新形 全一冊

正價廿五錢　郵税四錢　紙數三百頁

本書は實用的也、速成的也、學生官吏商人初學の士と否とを問はず其最好の書は本書を措て他に得べからず今は有事の日也軍人實業家は宜しく本書を供へて事を計れ附するに單語雜辭等を以てし原音には余大先生の嚴正なる校訂を經て我か假名を傍附したれば獨修に最も便也而して内容の豊富適なるは勿論印刷紙質製本の佳良は市上未だ見ざる處也有爲の士幸ひに一本を供へ給へ

博言博士イーストレーキ著

改訂增補第參拾版

英和實用

會話獨修

全一冊 三百五十頁

洋裝　正價卅五錢　郵税四錢

特製　金文字入　正價五拾錢

博言博士イーストレーキ先生の學殖豊富にしてしかも我か學界に多大の貢獻を爲されつゝあることは茲に喋々を要せざる所にして世既に定評あり本書は即ち博士が多年各學校に於て教授せられし熟練なる手腕を以て實用を主とし著はされたるものなれば獨修者には勿論假令師に就けるものに對しても無二の良師たるは敢て疑を容るべからざる所なりされはこそ發刊以來非常の好評を博し版を重ぬること既に廿九版今や改訂增補して第參拾版を發行するに至れり江湖の士幸に一本を座右に備へられむことを終に本書の内容を照介せんに第一編には數目反意の語商用語第二編には商業會語用熟語及び簡易の問答を揭げ第三編は商用會話及び單語と題し日常取引に必須のものを以てし附錄として商用書式一斑廣告書式其の他略語記號等を揭ぐ以て本書が如何に實業家其の他學生諸君に歡迎せらるゝかを知るに足らむ

研數學館外國語科編輯

英語學獨修講義

合本壹冊 二百三十餘頁

洋裝大判美本金文字入　正價金七十錢小包料十錢

日露の國交破裂してより將に十ヶ月を超えむとす此の間

修學堂書店發行書目

に於て皇軍は破竹の勢を以て南山を擊破し遼陽を占領し今や旅順を陷落せしめ此に於てか列國は何れも視線を我が國に注ぎ我が國を目して世界の最強國と叫ぶに至れり此の環象に圍繞せられつゝある吾人帝國臣民たるものは政治家にまれ文學家にまれ將た實業家にまれ今や世界語の名を以てせらるゝ英語の研究は一日も忽にすべからざる所なり然れども世其の良書に乏しく會々刊行せらるゝものありと雖も何れも不備不完にして殊に獨修者の爲めに良師ともなるべき書一としてあるなし此れ豈に現今における一大缺點にあらずや弊堂此に見る所あり敢て自ら此の欠缺を補はむことを圖り研數學館外國語科知名の士に囑して一書を公にし名けて英語學獨修講義と云ふ讀者諸君若し本書に對はゞ恰も航海に磁針を得たるの感あるべく容易に彼岸に到達することを得べけむ乞ふ益々愛讀の榮を垂れ賜はむことを

法典研究會編纂　（新刊）

文官普通及裁判所書記

試驗問題解答

全一冊

正價金七拾五錢　郵税金六錢

駸々乎タル文明ノ潮流ハ社會全般ノ事業ヲシテ複雜ナラシメタリ故ニ其局ニ當ルモノ益々其需用ヲ增シ官廳ノ始キモ其登用ヲ爲ンコト年々歳々其多キヲ加フ而シテ又之ニ應スルモノ少ナキニ非サレトモ就中文官普通試驗ノ如キ頻年各所ニ行フ志望者之ニ伴フモ其合格スルモノ亦稀ナリ之畢竟試驗ノ困難ナルニ非スシテ受驗者ノ侶伴トナルヘキ好著書ナキニ因ス弊店大ニ之レヲ憂ヒ法典研究會ニ於テ之レカ指南車タル良書ヲ編纂セラルヽト聞キ致テ會ニ請ヒ之レカ出版ヲ爲シ世ニ公ニスルコトトナレリ本書ハ最近數年間ノ各地ニ於ケル文官普通試驗問題ヲ網羅シ之ニ親切丁寧ナル答案ヲ附シ其文章ノ平易簡明ニシテ一般判任官タルヘキ試驗ノ答案トシテハ竊聞竊ク所ノモノ恐ラク本書ノ右ニ出ツルモノナカランヽ特ニ受驗者ノ心得ヲ附シタル等萬事ニ於テ遺憾ナキ近來ノ好著書ナリ請フ志望ノ諸氏ハ一本ヲ繙キ其眞價ヲ判セラレヨ

京北中學校教頭理學士杉谷佐五郎先生

外 八學士 講述

數學 理化學 測量 英語

獨修講義錄

全部 廿四冊

一冊正價金廿八錢　郵税不要

專門家諸先生ガ多年ノ經驗ト豊富ノ學力トヲ以テ普通教育ノ程度ニヨリ最モ丁寧綿密ニ講述セラレタルモノニシテ居ナガラ諸先生ノ講義ヲ聽クト大差ナシ然レバ獨修用及ビ諸實業學校尋常中學校生徒諸君及ビ教員檢定受驗者ノ補習用トシテ比類ナキ良書ナリ

卅一年 卅二年 卅三年

官立學校

入學試驗問題

全三冊

正價各十五錢宛　郵税二錢宛

卅四年 卅五年 卅六年 卅七年 卅八年 卅九年 四十年

官立學校

入學試驗問題

全七冊

正價各十五錢　郵税二錢宛