Prof. Dr. H. Brenner — Osnabrück SS 2019

Singularitätentheorie

Vorlesung 6

Von binomialen Gleichungen zu Exponentengleichungen

Es seien Variablen $X_1, \ldots, X_n$ und eine Familie von binomialen Gleichungen

$$X^{\mu_j} = X^{\nu_j}$$

zu $j \in J$ gegeben. Zum Ideal

$$(X^{\mu_j} - X^{\nu_j}, j \in J) \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$$

gehören neben anderen Polynomen auch noch viele weitere binomiale Polynome und im Restklassenring, also dem affinen Koordinatenring der durch die binomialen Gleichungen definierten affin-algebraischen Menge gelten noch weitere binomiale Identitäten. Wenn beispielsweise $X^2 - Y^3$ zur definierenden Familie gehört, so gilt auch

$$YX^2 = Y^4$$

und wenn auch noch $X^2 - Z^5$ dazu gehört, so gilt im Restklassenring auch

$$Y^3 = Z^5.$$

Diese Gleichungen haben nichts mit dem gewählten Grundkörper oder Grundring zu tun, sie beruhen vielmehr auf Identitäten in den Exponententupeln $\nu \in \mathbb{N}^n$. Die Gleichheit

$$X^\mu = X_1^{\mu_1} \cdots X_n^{\mu_n} = X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n} = X^\nu,$$

die im Restklassenring gilt, kann man so verstehen, dass auf der Exponentenebene die Gleichung

$$(\mu_1, \ldots, \mu_n) = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$$

gelten soll. Da die Gleichheit $X^\mu = X^\nu$ im Restklassenring auch die Gleichheit $X^\mu X^\lambda = X^\nu X^\lambda$ für alle Exponententupel λ erzwingt, sollte auf der Ebene der Exponenten die Gleichheit

$$\mu + \lambda = \nu + \lambda$$

gelten. Man beachte, dass man diese Gleichheit additiv schreiben muss, da eine Addition der Exponenten der Multiplikation der Monome entspricht. Wir fragen uns, was das richtige Konzept für eine Exponentenmenge ist, und wie man aus ihr bei gegebenem Grundring K eine Algebra konstruieren kann, in der dann genau die durch die in der Exponentenmenge codierten Gleichungen für die Monome gelten.

$$\begin{array}{ccc} \text{Exponententupel} & & \text{Algebra} \\ \mathbb{N}^n & \overset{?}{\mapsto} & K[X_1, \ldots , X_n] \\ ? & \overset{?}{\mapsto} & K[X_1, \ldots , X_n]/ \left(X^{\mu_j} - X^{\nu_j}, j \in J\right) \end{array} .$$

Diese Fragestellung führt zu Monoidringen. Da auf der Algebraseite eine Restklassenbildung (modulo dem binomialen Ideal) vorliegt, kann man sich fragen, wie auf der Exponentenseite eine entsprechende Konstruktion aussehen muss. Zwar ist $\mathbb{N}^n$ keine Gruppe, es ist aber dennoch einfach, ein passendes Konzept zu entwickeln.

Definition 6.1. Man sagt, dass eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einem kommutativen Monoid $(M, 0, +)$ *mit der Verknüpfung verträglich* ist, wenn aus $\mu \sim \nu$ und $\lambda \sim \kappa$ stets $\mu + \lambda \sim \nu + \kappa$ für alle $\mu, \nu, \lambda, \kappa \in M$ gilt.

Es lässt sich direkt zeigen, dass auf der Quotientenmenge $M/\sim$ zu einer mit der Verknüpfung verträglichen Äquivalenzrelation eine eindeutig bestimmte Monoidstruktur derart existiert, dass die kanonische Abbildung $M \to M/\sim$ ein Monoidhomomorphismus ist, siehe Aufgabe 6.5.

Monoidringe

Definition 6.2. Sei M ein kommutatives (additiv geschriebenes) Monoid und R ein kommutativer Ring. Dann wird der *Monoidring* $R[M]$ wie folgt konstruiert. Als R-Modul ist

$$R[M] = \bigoplus_{m \in M} Re_m ,$$

d.h. $R[M]$ ist der freie Modul mit Basis e_m, $m \in M$. Die Multiplikation wird auf den Basiselementen durch

$$e_m \cdot e_k := e_{m+k}$$

definiert und auf ganz $R[M]$ distributiv fortgesetzt. Dabei definiert das neutrale Element $0 \in M$ das neutrale Element $1 = e_0$ der Multiplikation.

Bemerkung 6.3. Ein Element in einem Monoidring lässt sich eindeutig als

$$f = \sum_{m \in \tilde{M}} a_m e_m ,$$

schreiben, wobei $\tilde{M} \subseteq M$ eine endliche Teilmenge ist und $a_m \in R$. Addiert wird komponentenweise und die Multiplikation ist explizit durch

$$f \cdot g = \left(\sum_{m \in \tilde{M}} a_m e_m \right) \left(\sum_{k \in \bar{M}} b_k e_k \right) = \sum_{\ell \in M} \left(\sum_{m+k=\ell, m \in \tilde{M}, k \in \bar{M}} a_m b_k \right) e_\ell$$

gegeben. Dies ist mit distributiver Fortsetzung gemeint. Die Menge der ℓ, über die hier summiert wird, ist endlich, und auch die inneren Summen sind jeweils endlich.

Es ist üblich, statt e_m suggestiver X^m zu schreiben, wobei X ein Symbol ist, das an eine Variable erinnern soll. Die Multiplikationsregel $X^m X^k = X^{m+k}$ erinnert dann an die entsprechende Regel für Polynomringe. In der Tat sind Polynomringe Spezialfälle von Monoidringen, und diese Notation stammt von dort. Auch ein exakter Beweis, dass in der Tat ein Ring mit assoziativer und distributiver Multiplikation vorliegt, funktioniert wie im Fall von Polynomringen. Meistens schreibt man ein Element einfach als $\sum_{m \in M} a_m X^m$, wobei fast alle $a_m = 0$ sind. Elemente der Form X^m nennt man *Monome*. Die Abbildung $M \to R[M]$, $m \mapsto X^m$, ist ein Monoidhomomorphismus, wobei rechts die multiplikative Monoidstruktur des Monoidringes genommen wird.

Ein Monoidring ist in natürlicher Weise eine R-Algebra, und zwar sind die Elemente f aus R aufgefasst in $R[M]$ gleich

$$f = f \cdot 1 = f X^0.$$

Man nennt daher auch R den *Grundring* des Monoidringes. Monoidringe sind bereits für Grundkörper interessant.

Beispiel 6.4. Sei n eine natürliche Zahl und $M = \mathbb{N}^n$ das n-fache direkte Produkt der natürlichen Zahlen. Ein Element $k \in \mathbb{N}^n$ ist also ein n-Tupel $(k_1, \ldots, k_n)$ mit $k_i \in \mathbb{N}$. Dies kann man auch als

$$(k_1, \ldots, k_n) = k_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + k_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + k_n(0, 0, 0, \ldots, 1)$$

schreiben. Damit lässt sich das zugehörige Monom X^k eindeutig als

$$X^k = X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n}$$

schreiben, wobei wir $X_i = X^{e_i} = X^{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}$ für das Monom zum i-ten Basiselement geschrieben haben. Das bedeutet aber, dass der Monoidring zum Monoid $\mathbb{N}^n$ über R genau der Polynomring in n Variablen ist. Insbesondere ist $R[\mathbb{N}] = R[X]$. Der Monoidring zum trivialen Monoid $\{0\}$ ist der Grundring selbst.

Beispiel 6.5. Sei n eine natürliche Zahl und $M = \mathbb{Z}^n$ das n-fache direkte Produkt der ganzen Zahlen. M ist also die freie kommutative Gruppe vom Rang n. Jedes Element $k \in \mathbb{Z}^n$ ist ein n-Tupel $(k_1, \ldots, k_n)$ mit $k_i \in \mathbb{Z}$. Dies kann man auch als

$$(k_1, \ldots, k_n) = k_1(1, 0, 0, \ldots, 0) + k_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + k_n(0, 0, 0, \ldots, 1)$$

schreiben und das zugehörige Monom X^k kann man eindeutig als

$$X^k = X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n}$$

mit $k_i \in \mathbb{Z}$ schreiben, wobei wir wieder $X_i = X^{e_i}$ geschrieben haben. Für diesen Monoidring schreibt man auch

$$R[M] = R[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_n^{-1}],$$

und dieser ist isomorph zur Nenneraufnahme des Polynomringes am Produkt der Variablen, also

$$R[M] = R[X_1, \ldots, X_n, X_1^{-1}, \ldots, X_n^{-1}] = R[X_1, \ldots, X_n]_{X_1 \cdots X_n},$$

Diesen Ring nennt man auch den *Laurent-Ring* in n Variablen über R.

BEISPIEL 6.6. Wie in Beispiel 5.1 (auf der Ebene der Nullstellenmengen) beschrieben gibt es einen K-Algebraisomorphismus

$$K[X_1, \ldots, X_n]/ (X_1 \cdots X_n - 1) \longrightarrow K[X_1, \ldots, X_{n-1}, X_1^{-1}, \ldots, X_{n-1}^{-1}] \cong K[\mathbb{Z}^{n-1}].$$

Universelle Eigenschaft der Monoidringe

SATZ 6.7. *Sei R ein kommutativer Ring und sei M ein kommutatives Monoid. Sei B eine kommutative R-Algebra und*

$$\varphi \colon M \longrightarrow B$$

ein Monoidhomomorphismus (bezüglich der multiplikativen Struktur von B). Dann gibt es einen eindeutig bestimmten R-Algebrahomomorphismus

$$\tilde{\varphi} \colon R[M] \longrightarrow B$$

derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[dr] & R[M] \arrow[d] \\ & B \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Ein R-Modulhomomorphismus $\tilde{\varphi} \colon R[M] \to B$ ist festgelegt durch die Bilder der Basiselemente X^m, $m \in M$. Das Diagramm kommutiert genau dann, wenn $\tilde{\varphi}(X^m) = \varphi(m)$ ist. Durch diese Bedingung ist die Abbildung also eindeutig festgelegt und ist bereits ein R-Modulhomomorphismus. Es ist zu zeigen, dass dieser Homomorphismus auch die Multiplikation respektiert. Es ist $\tilde{\varphi}(1) = \tilde{\varphi}(X^0) = \varphi(0) = 1$. Ferner ist

$$\tilde{\varphi}\left(X^m X^k\right) = \tilde{\varphi}\left(X^{m+k}\right) = \varphi(m+k) = \varphi(m) \cdot \varphi(k) = \tilde{\varphi}\left(X^m\right) \cdot \tilde{\varphi}\left(X^k\right).$$

Auf der Ebene der Monome respektiert die Abbildung also die Multiplikation. Daraus folgen für Elemente $f = \sum_{m \in M} a_m X^m$ und $g = \sum_{k \in M} b_k X^k$ die Identitäten

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}\left(\left(\sum_{m \in M} a_m X^m\right)\left(\sum_{k \in M} b_k X^k\right)\right) &= \tilde{\varphi}\left(\sum_{\ell \in M}\left(\sum_{m+k=\ell} a_m b_k\right) X^{\ell}\right) \\ &= \sum_{\ell \in M}\left(\sum_{m+k=\ell} a_m b_k\right) \varphi(\ell) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m,k \in M} a_m b_k \varphi(m)\varphi(k) \\ &= \left(\sum_{m \in M} a_m \varphi(m) \right) \left(\sum_{k \in M} b_k \varphi(k) \right) \\ &= \tilde{\varphi} \left(\sum_{m \in M} a_m X^m \right) \tilde{\varphi} \left(\sum_{k \in M} b_k X^k \right), \end{aligned}$$

so dass die Abbildung ein Ringhomomorphismus ist. □

Die folgende Aussage bedeutet, in Zusammenhang mit Aufgabe 6.18, dass bei fixiertem Grundring R die Zuordnung, die einem Monoid M den Monoidring $R[M]$ zuordnet, ein *Funktor* ist.

KOROLLAR 6.8. *Sei R ein kommutativer Ring. Seien M und N kommutative Monoide und sei*

$$\varphi\colon\, M \longrightarrow N$$

ein Monoidhomomorphismus. Dann induziert dies einen R-Algebrahomomorphismus zwischen den zugehörigen Monoidringen

$$\tilde{\varphi}\colon\, R[M] \longrightarrow R[N],\, X^m \longmapsto X^{\varphi(m)}.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 6.7 angewandt auf die R-Algebra $B = R[N]$ und den zusammengesetzten Monoidhomomorphismus $M \stackrel{\varphi}{\to} N \to R[N]$. □

BEMERKUNG 6.9. Eine Familie von Elementen $m_i \in M$, $i \in I$, in einem Monoid M ergibt einen Monoidhomomorphismus $\mathbb{N}^{(I)} \to M$, indem das i-te Basiselement e_i auf m_i geschickt wird. Dies ist insbesondere für endliche Indexmengen $I = \{1, \ldots, n\}$ relevant. Der Monoidhomomorphismus induziert dann nach Korollar 6.8 einen R-Algebrahomomorphismus $R[\mathbb{N}^n] = R[X_1, \ldots, X_n] \to R[M]$ von der Polynomalgebra in den Monoidring. Diese Abbildung ist der Einsetzungshomomorphismus, der durch $X_i \mapsto X^{m_i}$ gegeben ist.

LEMMA 6.10. *Sei R ein von 0 verschiedener kommutativer Ring. Seien M und N kommutative Monoide und sei $\varphi\colon M \to N$ ein Monoidhomomorphismus. Dann ist φ genau dann injektiv (surjektiv), wenn der zugehörige R-Algebrahomomorphismus $\tilde{\varphi}\colon R[M] \to R[N]$ injektiv (surjektiv) ist.*

Beweis. Sei φ injektiv, und angenommen, dass

$$\tilde{\varphi} \left(\sum_{m \in M} a_m X^m \right) = \sum_{m \in M} a_m X^{\varphi(m)} = 0.$$

Da die $\varphi(m)$, $m \in M$, alle verschieden sind, folgt daraus $a_m = 0$. Ist umgekehrt φ nicht injektiv, sagen wir $\varphi(m) = \varphi(k)$, $m \neq k$, so ist auch $\tilde{\varphi}(X^m) = \tilde{\varphi}(X^k)$, obwohl $X^m \neq X^k$ ist.

Ist φ surjektiv, so kann man für ein beliebiges Element $\sum_{n\in N} a_n X^n$ aus $R[N]$ sofort ein Urbild angeben, nämlich $\sum_{n\in N} a_n X^{m_n}$, wobei m_n ein beliebiges Urbild von n sei. Ist hingegen φ nicht surjektiv, so sei $n \in N$ ein Element, das nicht zum Bild gehört. Dann ist das Monom X^n von 0 verschieden und kann nicht im Bild des Algebrahomomorphismus liegen. □

KOROLLAR 6.11. *Sei R ein von 0 verschiedener kommutativer Ring. Sei M ein kommutatives Monoid und $m_i \in M$, $i \in I$, eine Familie von Elementen aus M. Dann bilden die m_i genau dann ein Monoid-Erzeugendensystem für M, wenn die X^{m_i}, $i \in I$, ein R-Algebra-Erzeugendensystem für den Monoidring $R[M]$ bilden.*

Beweis. Die m_i, $i \in I$, bilden genau dann ein Monoid-Erzeugendensystem für M, wenn der Monoidhomomorphismus $\mathbb{N}^{(I)} \to M$ surjektiv ist. Dies ist nach Lemma 6.10 genau dann der Fall, wenn der zugehörige Homomorphismus

$$R[X_i, i \in I] \longrightarrow R[M],\ X_i \longmapsto X^{m_i},$$

surjektiv ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn die X^{m_i} ein R-Algebra-Erzeugendensystem bilden. □

Monoidring und binomiales Ideal

LEMMA 6.12. *Es sei M ein endlich erzeugtes kommutatives Monoid mit einer Darstellung $M = \mathbb{N}^n/\sim$ und es sei R ein kommutativer Ring. Dann ist*

$$R[M] \,=\, R[X_1, \ldots, X_n]/\left(X^\mu - X^\nu | \mu \sim \nu\right).$$

Ein Monoidring besitzt also eine Darstellung als Restklassenring zu einem von binomialen Polynomen erzeugten Ideal.

Beweis. Der surjektive Monoidhomomorphismus

$$\mathbb{N}^n \longrightarrow M = \mathbb{N}^n/\sim$$

induziert nach Korollar 6.8 und Lemma 6.10 einen surjektiven R-Algebrahomomorphismus

$$\varphi\colon\ R[\mathbb{N}^n] = R[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow R[M].$$

Wir müssen zeigen, dass der Kern dieser Abbildung gleich dem von den binomialen Polynomen $X^\mu - X^\nu$ zu $\mu \sim \nu$ in $\mathbb{N}^n$ erzeugten Ideal ist. Diese werden auf 0 abgebildet und gehören somit zum Kern.

Die andere Inklusion beweisen wir mittels einer Wohlordnung auf $\mathbb{N}^n$, z.B. der gradlexikographischen Ordnung. Zunächst besitzt jedes Element aus M einen eindeutig bestimmten minimalem Repräsentanten aus $\mathbb{N}^n$. Wir beweisen die Inklusion

$$\operatorname{kern}\varphi \,\subseteq\, (X^\mu - X^\nu | \mu \sim \nu)$$

durch Induktion über die Wohlordnung, bezogen auf das Leitmonom zu einem Polynom $F \in \operatorname{kern} \varphi$. Der Induktionsanfang ist klar, da Monome und erst recht einzelne Variablen im Monoidring nicht 0 sind. Sei

$$F = a_\mu X^\mu + \text{ Summe kleinerer Monome.}$$

Wenn μ der kleinste Vertreter in seiner Äquivalenzklasse wäre, so könnte sich $a_\mu X^\mu$ nicht mit anderen Termen in $R[M]$ wegheben. Also ist $\mu \sim \nu$ mit einem kleineren Monom ν und somit kann man

$$F = a_\mu (X^\mu - X^\nu) + (F - a_\mu (X^\mu - X^\nu))$$

schreiben. Der linke Summand gehört zum binomialen Ideal, der rechte Summand gehört zum Kern und gehört somit aufgrund der Induktionsvoraussetzung ebenfalls zum binomialen Ideal. □

Die folgende Aussage knüpft an Lemma 5.3 an.

Lemma 6.13. *Es sei K ein Körper, seien $a, b \in \mathbb{N}$ teilerfremde Zahlen und sei $X^a - Y^b \in K[X,Y]$ das zugehörige binomiale Polynom. Es sei $M = \langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{N}$ das von a und b erzeugte Untermonoid. Dann ist*

$$K[M] \cong K[X,Y] / \left(X^a - Y^b \right).$$

Beweis. Wir gehen vom Monoidhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(e_1) = b$ und $\varphi(e_2) = a$ aus. Das Bild ist das von a und b erzeugte Untermonoid M von $\mathbb{N}$. Unter dieser Abbildung werden ae_1 und be_2 auf das gleiche Element ab abgebildet. Wenn unter φ die beiden Paare (r, s) und (u, v) auf das gleiche Element abgebildet werden, so gilt $rb + sa = ub + va$ und somit $(r - u)b = (v - s)a$, wobei wir annehmen dürfen, dass die beiden Differenzen nichtnegativ sind. Wegen der Teilerfremdheit muss $r - u = \ell a$ ein Vielfaches von a und entsprechend $v - s = \ell b$ sein. Doch dann ist

$$(r, s) = (u + \ell a, v - \ell b) = (u, v) + \ell (a, -b)$$

bzw.

$$(r, s) + \ell(0, b) = (u, v) + \ell(a, 0).$$

Das bedeutet, dass die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}^2$, die zu φ gehört, allein durch die eine Bedingung $a(1, 0) \sim b(0, 1)$ erzwungen wird. Es ist also

$$\mathbb{N}^2 / ae_1 \sim be_2 \cong M.$$

Das zugehörige binomiale Ideal ist $\left(X^a - Y^b \right)$ und nach Lemma 6.12 ist

$$K[X,Y] / \left(X^a - Y^b \right) \cong K[M].$$

□

Das K-Spektrum eines Monoidringes

DEFINITION 6.14. Zu einem kommutativen Monoid M und einem kommutativen Ring R nennt man einen Monoidhomomorphismus

$$M \longrightarrow (R, \cdot, 1)$$

auch einen R- *wertigen Punkt* von M.

BEMERKUNG 6.15. Ein R-wertiger Punkt ist nach Satz 6.7 äquivalent zu einem R-Algebrahomomorphismus von $R[M]$ nach R. Diese Sprechweise ist insbesondere im Fall eines Grundkörpers K üblich. Dann haben wir also

$$\begin{aligned} K-\text{Spek}\,(K[M]) &= \text{Hom}_K^{\text{alg}}\,(K[M], K) \\ &= \text{Mor}_{\text{mon}}\,(M, K) \\ &= \{K - \text{wertige Punkte von } M\}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass hier das K-Spektrum bereits auf der Ebene des Monoids eine einfache Beschreibung besitzt, die rein multiplikativ ist. Das impliziert, wie wir sehen werden, dass es für die K-Spektren der Monoidringe im Allgemeinen eine viel übersichtlichere Beschreibung gibt als sonst. Man beachte allerdings, dass zur Definition der Zariski-Topologie und der Garbe der algebraischen Funktionen auf $K-$Spek $(K[M])$ der Monoidring unverzichtbar ist.

Abbildungsverzeichnis