

Ueber die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für bewegte Körper.

Von

Emil Cohn.

Vorgelegt von E. Riecke in der Sitzung vom 11. Mai 1901.

Ziel und Umfang der folgenden Darlegungen lassen sich am kürzesten aussprechen unter Bezugnahme auf die beiden Aufsätze von Hertz „Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende —“ und „— für bewegte Körper“: Es soll eine Erweiterung der Gleichungen des ersten Aufsatzes gegeben werden, welche für die Darstellung der im engeren Sinne elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern das gleiche leistet, wie der zweite Aufsatz, welche aber von den beiden Mängeln der Hertz'schen Erweiterung frei ist. Diese Mängel bestehen bekanntlich in folgendem: Die Hertz'schen Gleichungen geben erstens keine Rechenschaft von dem beobachteten Einfluß der Bewegung auf die optischen Erscheinungen; sie liefern ferner unter gewissen Umständen Kräfte, „welche den Aether in Bewegung setzen müßten“ — mit anderen Worten: sie führen auf Bewegungen und auf bestimmte diesen Bewegungen entsprechende Energiewerthe an Stellen des Raumes, wo wir ein bewegliches nicht kennen.

Unter den Theorien, welche diese Mängel der Hertz'schen Elektrodynamik zu vermeiden suchen, nimmt die Lorentz'sche die erste Stelle ein: sie ist ausgezeichnet durch consequente Durchführung ihrer einfachen Grundannahmen, und sie hat in ungewöhnlichem Maße befruchtend gewirkt auf die experimentelle wie theoretische Forschung der letzten Jahre. Aber auch in der Lorentz'schen Theorie gehen die Erfahrungsthatfachen der Optik nicht ohne Rest auf: unerklärt bleibt, daß der Unterschied der Zeiten,

deren ein Lichtstrahl zum Durchlaufen zweier verschiedener Wege zwischen den gleichen Endpunkten bedarf, von der Bewegung der Erde nicht abhängt, — auch nicht in den „Größen zweiter Ordnung“.

Eine Umformung der Lorentz'schen Theorie, und zugleich eine Discussion anderer ähnlicher Formen der elektrodynamischen Grundgleichungen findet sich bei Walker: *Aberration and the electromagnetic field* (Cambridge 1900).

Eine große Anzahl möglicher Modificationen der Grundgleichungen hat ferner Heaviside kritisch durchmustert (*Electrician*, 45, pag. 636 u. 881; 1900). Alle diese Versuche begnügen sich hinsichtlich der optischen Erscheinungen damit, die Aberration und den Fresnel'schen „Mitführungscoefficienten“ theoretisch zu begründen. Sie führen nicht über Lorentz hinaus.

Wie Maxwell und Hertz behandeln wir ein chemisch und physikalisch homogenes Medium als ein Gebilde, welches auch elektromagnetisch in allen Punkten durch die gleichen Werthe einiger Constanten vollständig charakterisirt ist. Ein solches Medium erfüllt jedes Element unseres Raumes; es kann eine bestimmte ponderable Substanz oder auch das Vacuum sein. Daneben noch von einem „Aether“ zu sprechen, werden wir vermeiden. — Wir schließen nach dem gesagten jede mechanische oder elektrische Molekularhypothese ebenso, wie jede mechanische Deutung elektromagnetischer Vorgänge aus, und verzichten damit auf alle Folgerungen, welche nur aus solchen Hypothesen fließen können. Unsere Absicht bei diesem Vorgehen ist, zu untersuchen, wie weit man den Thatsachen der Erfahrung mit einem Mindestmaß theoretischer Annahmen gerecht werden kann. Falls sich herausstellen sollte, daß in dieser Hinsicht die folgende Darstellung gegenüber den älteren einen Fortschritt bedeutet, so wird man vermuthen dürfen, daß auch speciellere Vorstellungen — sei es über den Bau der Körper, sei es über die Eigenschaften des „Aethers“ — zweckmäßig an unsere Gleichungen anknüpfen werden.

§ 1. Die Grundgleichungen.

Die Maxwell'schen Grundgleichungen für ruhende Körper können wir in folgender Form schreiben ¹⁾:

1) Die Bezeichnungen stimmen überein mit denjenigen in meinem Lehrbuch „Das elektromagnetische Feld“, Leipzig 1900, auf welches ich mir im folgenden gestatten werde, durch „elm. Feld“ hinzuweisen. Die Uebereinstimmung erleidet eine Ausnahme: Die Gleichungen des Lehrbuchs enthalten eine universelle Constante V , durch deren Einführung es möglich wird, specialisirend in einfacher

Die elektromagnetische Energie des Feldes ist

$$W = \int_{\infty} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathfrak{E} + \mathbf{M} \cdot \mathfrak{M}) d\tau, \quad (A_0)$$

und es hestehen zwischen den vier Vektoren \mathbf{E} , \mathbf{M} , \mathfrak{E} , \mathfrak{M} die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} - \int_{\circ} \mathbf{E}_n ds &= \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathfrak{M}_n dS \\ \int_{\circ} \mathbf{M}_n ds &= \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathfrak{E}_n dS + \int_S \Lambda_n dS \end{aligned} \right\} \quad (B_0)$$

oder in der Form von Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} -P(\mathbf{E}) &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} \\ P(\mathbf{M}) &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \Lambda \end{aligned} \right\} \quad (B'_0)$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= \lambda (\mathbf{E} - \mathbf{K}) \\ \mathfrak{E} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathfrak{M} &= \mu \mathbf{M} \end{aligned} \right\} \quad (C_0)$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{\omega_0^2} \quad (D_0)$$

Hierin bedeutet:

- t die Zeit,
 $d\tau$ ein Volumelement,
 dS ein Flächenelement,
 ds ein Curvenelement,
 N eine der Normalen von dS , (für geschlossene Flächen die äußere Normale)
 \circ den, bezüglich N positiven, vollständigen Umlauf um S ,
 ε Dielektricitätsconstante,
 μ magnetische Permeabilität,
 λ Leitungsvermögen, } scalare Körperconstanten,

Weise zu einem beliebigen der „absoluten“ Maßsysteme überzugehen (s. dort pag. 279 f.). Diese Constante ist hier gleich Eins gesetzt. Es entsteht so das „rationelle“ Maßsystem Heaviside's, welches die „absoluten“ Systeme nicht mehr als Specialfälle einschließt. Auch nach meiner Ueberzeugung bildet es das einzige „rationelle“ System für die theoretische Physik und zweifellos das System der Zukunft. Gegenüber der Zwangslage, in welche uns geschichtliche Entwicklung und internationale Vereinbarung versetzt haben, mag das allgemeinere Maßsystem des genannten Lehrbuchs einstweilen vermittelnd und vorbereitend wirken.

— K innere elektromotorische Intensität, einen in inhomogenen Leitern vorhandenen, constanten Vector,

E elektrische Feldintensität,

M magnetische Feldintensität,

\mathcal{E} elektrische Polarisation,

\mathcal{M} magnetische Polarisation,

Λ elektrische Strömung,

ε_0, μ_0 elektrische und magnetische Constante des Vacuums,

$\omega_0 = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum.

Es bezeichnet ferner, bzw. soll im folgenden bezeichnen:

$+$, $-$, $\frac{\partial}{\partial t}$ vor Vektoren: Vector-Addition, -Subtraction, -Differentiation,

$A \cdot B$ das scalare (geometrische) Product } der Vektoren A und B ,
 $[AB]$ oder $[A \cdot B]$ das Vector-Product }

$\Gamma(A)$ die Divergenz } des Vectors A ,
 $P(A)$ die Rotation (curl) }

$\nabla \alpha$ den Gradienten des Scalars α ,

$A \nabla$ den Operator $A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$.

Hieraus ergeben sich unter anderem die folgenden später zu benutzenden Rechnungsregeln:

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (a)$$

$$[AB] = -[BA] \quad (b)$$

$$A \cdot [BC] = B \cdot [CA] = C \cdot [AB] \quad (c)$$

$$A \cdot [AB] = 0 \quad (d)$$

$$[A[BC]] = (C \cdot A) B - (A \cdot B) C \quad (e)$$

$$\Gamma[AB] = B \cdot P(A) - A \cdot P(B) \quad (f)$$

$$P[AB] = \Gamma(B) \cdot A - \Gamma(A) \cdot B + B \nabla \cdot A - A \nabla \cdot B. \quad (g)$$

Aus den Maxwell'schen Grundgleichungen folgt bekanntlich, daß wir dem Volumenelement $d\tau$ den Energiebetrag $\frac{1}{2}(E \cdot \mathcal{E} + M \cdot \mathcal{M}) d\tau$ zuschreiben können, wenn wir annehmen, daß eine Strömung der Energie stattfindet, welche nach Größe und Richtung gegeben ist durch

$$\Sigma = [EM]. \quad (E)$$

Dieser Vector Σ ist identisch mit demjenigen, welcher in der Optik als Strahlung bezeichnet wird.

Wir stellen nunmehr den Maxwell'schen Grundgleichungen für ruhende Körper die Gleichungen gegenüber, welche wir für den Fall beliebiger Bewegung als gültig ansehen wollen¹⁾. Sie lauten, wenn u die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte bezeichnet:

$$W = \int_{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathfrak{E} + \mathbf{M} \cdot \mathfrak{M}) + \varepsilon_0 \mu_0 u \cdot [\mathbf{E} \mathbf{M}] \right\} d\tau \quad (A)$$

$$\left. \begin{aligned} - \int_{\circ} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{d}{dt} \int_S \mathfrak{M}_N dS \\ \int_{\circ} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{d}{dt} \int_S \mathfrak{E}_N dS + \int_S \Lambda_N dS \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= \lambda (\mathbf{E} - \mathbf{K}) \\ \mathfrak{E} &= \varepsilon \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 [u \mathbf{M}] \\ \mathfrak{M} &= \mu \mathbf{M} + \varepsilon_0 \mu_0 [u \mathbf{E}] \end{aligned} \right\} \quad (C)$$

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{\omega_0^2} \quad (D)$$

Die Differentialquotienten der Flächenintegrale nach der Zeit in (B) sind so zu verstehen, daß während dt die Fläche S dauernd durch dieselben materiellen Theilchen führt.

Die Geschwindigkeiten u sollen bezogen sein auf ein räumliches System, welches durch die Fixsterne festgelegt ist, genauer: durch jene Fixsterne, deren „Eigenbewegung“ die Astronomie gleich Null setzt. Die Frage, ob diese Fixsterne — und somit unser Bezugssystem — absolut ruhen, hat keinen Inhalt. Ob wir sie im Sinne unserer Gleichungen dauernd als ruhend werden betrachten dürfen, ist eine Frage künftiger Erfahrung. Behauptet wird lediglich, daß wir zur Darstellung irgend welcher bisher beobachteter Erscheinungen eine gleichförmige gemeinsame so wenig, wie eine relative Bewegung dieser Himmelskörper heranzuziehen brauchen.

Der Werth von u ist überall dort, wo wir Materie vorfinden, unmittelbar durch die Bewegung dieser Materie gegeben. Hierunter verstehen wir ausschließlich die beobachtbare Bewegung aus-

1) Für den speciellen Fall der optischen Erscheinungen in gleichförmig bewegten Medien habe ich die Gleichungen bereits in Archives Néerlandaises (2) 5 (Lorentz-Jubiläum) pag. 516 aufgestellt und discutirt. Dort habe ich auch den Weg angegeben, auf welchem ich zu den Gleichungen gelangt bin. Die hier folgenden Gleichungen sind nichts anderes, als die einfachste mögliche Verallgemeinerung der dortigen.

gedehnter Massen. Wo keine Materie vorhanden ist, da setzen wir $u = 0$.

Diese Festsetzungen lassen theoretisch eine Lücke: Denken wir uns ein sehr verdünntes Gas auf stetigem Wege in ein Vacuum übergeführt. Für jede Gasdichte $\rho = \rho_1$, bei welcher noch von einer bestimmten Strömungsgeschwindigkeit q des Gases in jedem Punkte gesprochen werden kann, haben wir $u = q$ zu setzen. Für $\rho = 0$ aber soll der Werth $u = 0$ gelten. Es fehlt eine Vorschrift, welche den Werth von u stetig von q zu 0 überführt, während der Werth von ρ stetig von ρ_1 zu 0 übergeht. Praktisch aber bedürfen wir dieser Vorschrift nicht. Zwei Fälle kommen in Betracht: Wir können experimentell den Werth $\rho = 0$ nicht erreichen. Ob für die äußersten Verdünnungen, welche wir herstellen können, in jeder physikalischen Beziehung noch ein einheitlicher Werth q angenommen werden darf, steht nicht in Frage. In dem Gebiet unserer Untersuchungen aber reichen wir mit einer solchen Annahme aus. Insbesondere — und das allein hat praktische Bedeutung — dürfen wir stets $u = q$ setzen für den beliebig verdünnten Gasinhalt eines Gefäßes, welches eine constante Translationsgeschwindigkeit q besitzt. (Dies kommt zur Geltung in § 4.) — Ein absolutes Vacuum zum mindesten als möglich zuzulassen, sind wir lediglich genöthigt außerhalb der Atmosphären der Himmelskörper. Unsere Festsetzungen versagen für jene Schichten, welche den Uebergang aus der Atmosphäre in das Vacuum vermitteln. Aber um die Beobachtungen mit unserer Theorie zu vergleichen, brauchen wir das u dieser Schichten nicht zu kennen (s. § 2).

Der letzte Theil unserer Festsetzungen: „ $u = 0$ im Vacuum“ würde ferner unzulässig sein oder zum mindesten einer Rechtfertigung durch Nebenannahmen bedürfen, wenn aus unseren Gleichungen folgte, daß auf ein Raumtheilchen im Vacuum, für welches $u = 0$ ist, unter irgend welchen Umständen mechanische Kräfte wirken könnten; denn diese Kräfte würden den Werth $u = 0$ aufzuheben suchen. Es wird sich aber zeigen, daß sie niemals auftreten.

Zu den Grundannahmen, welche in den Gleichungen (A) bis (D) ausgesprochen sind, fügen wir noch die weitere hinzu, daß auch in bewegten Körpern die Strahlung Σ normal zu E wie zu M sein soll. D. h. wir setzen

$$\Sigma = c \cdot [EM], \quad (E)$$

wo c eine unbenannte Zahl bedeutet, deren Werth zunächst unbestimmt bleiben mag (vgl. § 7).

Aus den Gleichungen (B) ziehen wir sogleich eine Folgerung, indem wir sie auf eine geschlossene Fläche (\circ) anwenden. Es werden dann die linken Seiten gleich Null und somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\circ} \mathfrak{M}_N dS &= 0 \\ -\frac{d}{dt} \int_{\circ} \mathfrak{E}_N dS &= \int_{\circ} \Lambda_N dS \end{aligned}$$

Wir nennen $\int_{\circ} \mathfrak{M}_N dS$ und $\int_{\circ} \mathfrak{E}_N dS$ die von der Fläche S eingeschlossene magnetische, bzw. elektrische Menge, und entsprechend $\Gamma(\mathfrak{M})$ und $\Gamma(\mathfrak{E})$ die magnetische, bzw. elektrische Dichte. Unsere Gleichungen sprechen dann die Continuitätseigenschaften aus, die wir mit diesen Begriffen zu verknüpfen gewöhnt sind.

Weiter geben wir, indem wir für S ein Flächenelement wählen, den Grundgleichungen (B) die Form von Differentialgleichungen. Sie lauten:

$$\left. \begin{aligned} -P(E - [u\mathfrak{M}]) &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + \Gamma(\mathfrak{M}) \cdot u \\ P(M + [u\mathfrak{E}]) &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \Gamma(\mathfrak{E}) \cdot u + \Lambda \end{aligned} \right\} \quad (B')$$

wo $\frac{\partial}{\partial t}$ die zeitliche Aenderung in einem festen Raumpunkt bezeichnet. (Die Ableitung findet man z. B. „elm. Feld“ pag. 535 ff., die Gleichungen (B') in cartesischen Coordinaten unter (L')(M').)

Die Gleichungen (B') bilden nicht nur eine Folgerung, sondern zugleich einen vollständigen Ersatz der Gleichungen (B): die „Stetigkeitsbedingungen“ für Unstetigkeitsflächen, welche man neben ihnen noch einzuführen pflegt, drücken lediglich aus, daß sie allgemein gelten sollen. Wir können daher sachlich nichts verlieren, wenn wir alle Größen unserer Gleichungen als stetig veränderlich betrachten.

Endlich wollen wir noch eine Bezeichnung einführen: Alle bekannten Körpergeschwindigkeiten u sind sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ω_0 ; wir wollen eine Größe, welche den Faktor $\left(\frac{u}{\omega_0}\right)^n$ enthält, eine Größe n^{ter} Ordnung nennen.

Im folgenden soll nun ein Abriß der Elektrodynamik gegeben werden, welche aus unseren Gleichungen (A) bis (E) entwickelt werden kann. Wir betrachten zunächst in §§ 2—5 die räumlich-zeitlichen Verhältnisse des elektromagnetischen Feldes an sich; sodann in §§ 6—7 die mechanischen Kräfte elektromagnetischen

Ursprungs. Erst in diesem letzten Abschnitt bedürfen wir des Energieausdrucks in (A).

Alle elektromagnetischen Vorgänge, welche wir experimentell beherrschen, spielen sich in der Nähe der Erdoberfläche ab. Daneben kommt für uns nur noch in Betracht die Ausbreitung des Lichts von den Sternen bis zur Erde. Die beiden Gruppen von Erscheinungen verlangen eine verschiedene Behandlung; wir beginnen mit der zweiten.

§ 2. Aberration. Doppler'sches Princip.

Wir betrachten an dieser Stelle die Ausbreitung des Lichts von den Sternen bis in die Nähe unserer optischen Instrumente. In diesem ganzen Gebiet handelt es sich um Isolatoren, deren Constanten von denen des Vacuums nicht merklich verschieden sind. Wir haben also

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_0, \quad \Lambda = \Gamma(\mathcal{E}) = \Gamma(\mathcal{M}) = 0.$$

Ferner sind die in Betracht kommenden Erscheinungen nur bekannt bis zu den Größen erster Ordnung, sofern für u die Geschwindigkeit eines Punktes der Erdoberfläche gesetzt wird. Wir wollen annehmen, daß nirgends die u solche Werthe erreichen, welche eine Berücksichtigung der Größen zweiter Ordnung nothwendig machen würden. Dann erhalten wir aus (C):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathcal{E}}{\varepsilon_0} &= \mathbf{E} - [u \mathcal{M}] \\ \frac{\mathcal{M}}{\mu_0} &= \mathbf{M} + [u \mathcal{E}] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und somit aus (B'):

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{P} \left(\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon_0} \right) &= \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} \\ \mathbf{P} \left(\frac{\mathcal{M}}{\mu_0} \right) &= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Die Gleichungen (2) sind identisch mit den Maxwell'schen Grundgleichungen der Lichtausbreitung in ruhenden Isolatoren, sofern man in diese die Polarisationen einführt. Sie sagen also, wie diese, aus, daß die Werthe der beiden Polarisationen sich in transversalen Wellen fortpflanzen. Aber die Feldintensitäten sind nicht mehr den Polarisationen gleichgerichtet. — Betrachten wir insbesondere ein System ebener Wellen, deren

Fortpflanzungsrichtung wir zur ξ -Axe wählen in einem ruhenden Coordinatensystem der (ξ, η, ζ) . Eine entsprechende Lösung von (2) ist:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{E}_\xi = 0, \quad \mathfrak{E}_\eta = \sqrt{\varepsilon_0} \cdot F, \quad \mathfrak{E}_\zeta = 0 \\ \mathfrak{M}_\xi = 0, \quad \mathfrak{M}_\eta = 0, \quad \mathfrak{M}_\zeta = \sqrt{\mu_0} \cdot F \end{array} \right\} \begin{array}{l} F = F(\xi - \omega_0 t) \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \end{array} \quad (3)$$

Die Gleichungen (1) und (E) ergeben dann weiter

$$\begin{aligned} \Sigma_\xi &= (\omega_0 - u_\xi)^2 \frac{c \cdot F^2}{\omega_0} \\ \Sigma_\eta &= -u_\eta (\omega_0 - u_\xi) \frac{c \cdot F^2}{\omega_0} \\ \Sigma_\zeta &= -u_\zeta (\omega_0 - u_\xi) \frac{c \cdot F^2}{\omega_0}, \end{aligned}$$

folglich

$$\Sigma_\xi : \Sigma_\eta : \Sigma_\zeta = (\omega_0 - u_\xi) : (-u_\eta) : (-u_\zeta). \quad (4)$$

Also: in jedem Punkte P des Raumes weist die Wellennormale N von dem Orte her, an welchem sich der Stern zur Zeit der Lichtaussendung befand; die Strahlrichtung Σ in P aber erhalten wir, indem wir einen Vector von der Größe ω_0 und der Richtung N mit dem Vector $(-u)$ zusammensetzen. In diesen Sätzen ist das Gesetz der Aberration sowohl für die Fixsterne, wie für die beweglichen Sterne vollständig enthalten, sofern wir uns die Beobachtung ohne Hülfe optischer Instrumente ausgeführt denken. Bei den wirklichen Beobachtungen verläuft ein letztes Stück des Strahlenwegs in Körpern, für welche ε und μ von ε_0 und μ_0 verschieden sind. Dafür aber ist hier u constant nach Größe und Richtung. (S. unten § 4 c.) Hervorzuheben ist, daß — in den Größen erster Ordnung — die Aberration lediglich abhängt von Größe und Richtung der Geschwindigkeit u am Beobachtungsorte P .

Die Gleichungen (3) und (4) beziehen sich auf ein ruhendes Coordinatensystem. Wir führen zwei neue Systeme ein: eines der $\xi_0 \dots$, welches die Geschwindigkeit u_0 des Sternes zur Zeit der Lichtaussendung theilt, eines der $\xi_1 \dots$, welches die Geschwindigkeit u_1 des Beobachters zur Zeit der Beobachtung besitzt. Wir haben dann:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + u_{0\xi} \cdot t \\ \xi &= \xi_1 + u_{1\xi} \cdot t, \end{aligned}$$

und die Feldgrößen werden proportional mit

$$F \{ \xi_0 - (\omega_0 - u_{0\xi}) t \}$$

bzw.

$$F \{ \xi_1 - (\omega_0 - u_{1\xi}) t \}.$$

Handle es sich um monochromatisches Licht; dann ist

$$F(\alpha) = \sin\left(\frac{N}{\omega_0} \alpha\right),$$

wo $\frac{N}{2\pi}$ die Schwingungszahl für einen ruhenden Beobachter bedeutet. Bezeichnet nun $\frac{N_0}{2\pi}$ die Schwingungszahl für einen im System der $\xi_0 \dots$ festen Punkt, also die wahre Schwingungszahl, und $\frac{N_1}{2\pi}$ die scheinbare Schwingungszahl für den mit der Geschwindigkeit u_1 bewegten Beobachter, so folgt

$$N_0 = (\omega_0 - u_{0\xi}) \frac{N}{\omega_0}$$

$$N_1 = (\omega_0 - u_{1\xi}) \frac{N}{\omega_0},$$

also, in den Größen erster Ordnung genau,

$$\frac{N_1 - N_0}{N_0} = \frac{u_{0\xi} - u_{1\xi}}{\omega_0}. \quad (5)$$

Man kann $u_{0\xi} - u_{1\xi}$ als Annäherungsgeschwindigkeit des Sternes gegen den Beobachter bezeichnen, muß aber beachten, daß es sich um Lage und Geschwindigkeit des Beobachters zur Beobachtungszeit, dagegen um Lage und Geschwindigkeit des Sternes zur Zeit der Lichtaussendung handelt. Gleichung (5) spricht das Doppler'sche Princip aus.

§ 3. Bewegung der Erde. Umformung der Grundgleichungen.

Gegenstand unserer Experimente sind ausschließlich Körper in unmittelbarer Nähe der Erdoberfläche. Die Geschwindigkeit u eines solchen Körpers setzt sich zusammen aus seiner relativen Geschwindigkeit v gegen die Erde und der Geschwindigkeit p , welche er bei starrer Verbindung mit der Erde besitzen würde. Dem Vector p dürfen wir für die räumliche und zeitliche Ausdehnung jedes einzelnen Versuchs constante Größe und Richtung zu-

schreiben. Den Hauptbeitrag zu p liefert die Bewegung der Erde in ihrer Bahn um die Sonne; sein Zahlwerth ist sehr nahe $10^{-4} \cdot \omega_0$.

Wir beziehen von jetzt an unsere Gleichungen auf ein Coordinatensystem, welches starr mit der Erde verbunden ist. Ruhe, Bewegung, Geschwindigkeit etc., bezogen auf dieses System, sollen im folgenden relative Ruhe, . . . heißen. Eine Differentiation nach der Zeit, bei welcher die relativen Coordinaten des betrachteten Punktes als unverändert vorausgesetzt werden, soll durch $\frac{\delta}{\delta t}$ bezeichnet werden. Es ist dann

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + p \nabla.$$

$$u = p + v, \quad \text{wo } p = \text{const.},$$

und folglich nach (g):

$$\begin{aligned} P[u \mathfrak{E}] &= P[v \mathfrak{E}] + P[p \mathfrak{E}] \\ &= P[v \mathfrak{E}] + \Gamma(\mathfrak{E}) \cdot p - p \nabla \cdot \mathfrak{E}. \end{aligned}$$

Somit wird aus (B') und (C):

$$\left. \begin{aligned} -P(\mathfrak{E} - [v \mathfrak{M}]) &= \frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta t} + \Gamma(\mathfrak{M}) \cdot v \\ P(\mathfrak{M} + [v \mathfrak{E}]) &= \frac{\delta \mathfrak{E}}{\delta t} + \Gamma(\mathfrak{E}) \cdot v + \Lambda \end{aligned} \right\} \quad (B_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= \lambda(\mathfrak{E} - \mathfrak{K}) \\ \mathfrak{E} &= \varepsilon \mathfrak{E} - \varepsilon_0 \mu_0 [(p + v) \mathfrak{M}] \\ \mathfrak{M} &= \mu \mathfrak{M} + \varepsilon_0 \mu_0 [(p + v) \mathfrak{E}] \end{aligned} \right\} \quad (C_1)$$

§ 4. Relativ ruhende Körper.

Für den Fall relativer Ruhe aller Körper gegen die Erde gehen diese Gleichungen über in:

$$\left. \begin{aligned} -P(\mathfrak{E}) &= \frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta t} \\ P(\mathfrak{M}) &= \frac{\delta \mathfrak{E}}{\delta t} + \Lambda \end{aligned} \right\} \quad (B_2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= \lambda(\mathfrak{E} - \mathfrak{K}) \\ \mathfrak{E} &= \varepsilon \mathfrak{E} - \varepsilon_0 \mu_0 [p \mathfrak{M}] \\ \mathfrak{M} &= \mu \mathfrak{M} + \varepsilon_0 \mu_0 [p \mathfrak{E}] \end{aligned} \right\} \quad (C_2)$$

Nun werden, soweit unsere bisherigen Erfahrungen reichen, sowohl die im engeren Sinne elektromagnetischen, wie die optischen Erscheinungen in relativ ruhenden Körpern vollständig dargestellt durch die Maxwell'schen Gleichungen (B'_0) (C_0) . Wir haben also zu untersuchen, inwiefern sich die Folgerungen aus (B_2) (C_2) von den Folgerungen aus (B'_0) (C_0) unterscheiden.

a. Stationäre Felder.

Stationäre Erscheinungen — genauer: Erscheinungen, welche stationär bleiben für den mitbewegten Beobachter — sind dadurch charakterisirt, daß $\frac{\delta}{\delta t} = 0$ ist. Für sie gilt also:

$$\left. \begin{aligned} -P(\mathbf{E}) &= 0 \\ P(\mathbf{M}) &= \Lambda \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt:

$$\Gamma(\Lambda) = 0. \quad (7)$$

Die Gleichungen (6) stimmen überein mit den Gleichungen der Maxwell'schen Theorie für stationäre Felder. Durch sie ist das Feld eindeutig bestimmt, sobald noch die Werthe $\Gamma(\mu \mathbf{M})$ überall, die Werthe $\Gamma(\varepsilon \mathbf{E})$ durchweg im Dielektricum, und die Werthe $\int \varepsilon \mathbf{E}_x dS$ für die Gesamtoberfläche jedes Leiters vorgeschrieben sind (vgl. „elm. Feld“ p. 375 f.). Diese Werthe bedeuten in der Maxwell'schen Theorie bzw. die magnetische Dichte, die elektrische Dichte, die gesammte Elektrizitätsmenge eines Leiters. Die gleichen Größen sind in unserer Theorie dargestellt durch die Werthe $\Gamma(\mathfrak{M})$, $\Gamma(\mathfrak{E})$, $\int \mathfrak{E}_x dS$ (s. oben p. 80). Wir wollen zeigen, daß sie in Folge der Gleichungen (C_2) und (6) den obigen bzw. gleich sind. Es ist nach (C_2) und (f)

$$\Gamma(\mathfrak{M}) = \Gamma(\mu \mathbf{M}) - \varepsilon_0 \mu_0 p \cdot P(\mathbf{E}),$$

also nach (6)

$$\Gamma(\mathfrak{M}) = \Gamma(\mu \mathbf{M}). \quad (8a)$$

Ebenso

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathfrak{E}) &= \Gamma(\varepsilon \mathbf{E}) + \varepsilon_0 \mu_0 p \cdot P(\mathbf{M}) \\ &= \Gamma(\varepsilon \mathbf{E}) + \varepsilon_0 \mu_0 p \cdot \Lambda. \end{aligned} \quad (8b)$$

Daher im Dielektricum:

$$\Gamma(\mathfrak{E}) = \Gamma(\varepsilon \mathbf{E}); \quad (8c)$$

und für einen Leiter von der Oberfläche S und dem Volumen τ :

$$\int \mathfrak{E}_x dS = \int \Gamma(\mathfrak{E}) d\tau = \int \varepsilon \mathbf{E}_x dS + \varepsilon_0 \mu_0 \int p \cdot \Lambda d\tau.$$

Das letzte Integral können wir schreiben, indem wir etwa $p // x$ wählen:

$$p \int dx \iint \Lambda_x dy dz.$$

Aber wegen (7) ist

$$\iint \Lambda_x dy dz = 0,$$

da jeder zu x normale Querschnitt durch den Leiter mittels eines in Isolatoren verlaufenden Flächenstücks zu einer geschlossenen Fläche ergänzt werden kann. Somit

$$\int \mathfrak{E}_x dS = \int \varepsilon \mathbf{E}_x dS. \quad (8d)$$

Die Gleichungen (6) und (8a, c, d) sagen zusammen aus: das stationäre Feld ist bei gleicher elektrischer und magnetischer Vertheilung das gleiche, welches auch die Maxwell'sche Theorie ergibt.

b. Quasistationäre Felder.

Als „quasistationär“ bezeichnen wir veränderliche Felder, welche ausreichend dargestellt werden durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} -P(\mathbf{E}) &= \frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta t} \\ P(\mathbf{M}) &= \Lambda \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(vgl. „elm. Feld“ p. 306 ff. u. p. 379 ff.).

Aus der zweiten Gleichung folgt wieder (7):

$$\Gamma(\Lambda) = 0.$$

Die betrachteten Vorgänge sind also dadurch charakterisirt, daß erstens die Strömung in geschlossenen Stromfäden verläuft, in deren jedem sie in einheitlichem Rythmus pulsirt, und daß zweitens das magnetische Feld in jedem Moment mit ausreichender Genauigkeit aus der jeweiligen Strömung berechnet werden kann in der gleichen Weise, wie wenn diese stationär wäre.

Die erste der Gleichungen (9) enthält das Gesetz der inducirten elektromotorischen Kräfte. Sie hat die Form des Faraday'schen Inductionsgesetzes; aber \mathfrak{M} bedeutet nicht mehr die Größe μM , sondern den in (C_2) gegebenen Werth. Es tritt also in einer Curve s , welche die Fläche S umspannt, neben der Faraday'schen elektromotorischen Kraft

$$E = - \frac{\delta}{\delta t} \int \mu M_x dS$$

eine neue auf:

$$E' = -\frac{\delta}{\delta t} \int \epsilon_0 \mu_0 [p E]_x dS.$$

Sie ist selbst für die stärksten herstellbaren E sehr klein, und könnte nur erkannt werden durch den Stromstoß in einem Leiter, der in der Curve s verläuft. Es sei etwa $p \parallel x$, $E \parallel y$, $N \parallel z$; dann ist

$$\int_{t_0}^{t_1} E' \delta t = -\epsilon_0 \mu_0 p \cdot \left\{ \iint E_y dx dy \right\}_{t_0}^{t_1}. \quad (10)$$

Vor wie nach dem Inductionsstoß ist aber das Linienintegral von E zwischen zwei beliebigen Punkten des Leiters gleich Null. D. h. in (10) ist $\int E_y dy = 0$ sowohl für $t = t_0$ wie für $t = t_1$, und daher ist die rechte Seite selbst gleich Null. Die Correction am Faraday'schen Inductionsgesetz ergibt somit keine wahrnehmbaren Folgen.

c. Strahlungsvorgänge.

Es bleiben noch die Vorgänge zu besprechen, bei welchen die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Feldes zur Geltung kommt. Auf diesem Gebiet geben bisher nur optische Methoden die Möglichkeit, über das Vorhandensein selbst der Größen erster Ordnung zu entscheiden.

Nach dem Vorgange von Lorentz ¹⁾ transformiren wir die Gleichungen (B_2) durch Einführung der „Ortszeit“

$$t' = t - \epsilon_0 \mu_0 p \cdot r \quad (11)$$

an Stelle der allgemeinen Zeit t . Hier bedeutet r den Radius vector des betrachteten Punktes P . In cartesianischen Coordinaten also: statt der bisherigen unabhängigen Veränderlichen x, y, z, t führen wir ein

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t - \epsilon_0 \mu_0 (p_x \cdot x + p_y \cdot y + p_z \cdot z). \quad (11')$$

Bezeichnen wir Rotation und Divergenz im neuen System durch P' und Γ' , so lautet das Resultat der Umformung:

$$\left. \begin{aligned} -P'(E) &= \frac{\delta(\mu M)}{\delta t'} \\ P'(M) &= \frac{\delta(\epsilon E)}{\delta t'} + \Lambda \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

wo

$$\Lambda = \lambda(E - K).$$

1) Lorentz, Versuch einer Theorie etc., Leiden 1895.

Denkt man sich in (12) die Veränderliche t' durch t ersetzt, so hat man die Maxwell'schen Gleichungen (B'_0) (C_0) vor sich. Es folgt also — und zwar in aller Strenge — der Satz:

Jedem im ruhenden System möglichen Vorgang entspricht ein möglicher Vorgang im bewegten System, bei welchem die gleichen Werthe E, M , welche im Punkte P zur Zeit t stattfanden, jetzt zur Zeit t' eintreten. Der Zeitunterschied $t' - t$ ist eindeutige Function der Lage von P .

Richtung des Strahles ist die gemeinsame Normale von E und M . Sie wird nach dem vorstehenden durch die Erdbewegung nicht beeinflußt. Also:

Der relative Strahlengang ist unabhängig von der Erdbewegung. Oder: die gesammte geometrische Optik bleibt von unserer Correction der Maxwell'schen Gleichungen unberührt.

Daraus folgt speciell: wenn uns der Weg der Lichtstrahlen von einem Stern bis in die Nähe der Erdoberfläche (in das Gebiet $u = p$ hinein) erst bekannt ist, so brauchen wir bei der Behandlung des weiteren relativen Verlaufs auf die Bewegung der Erde keine Rücksicht mehr zu nehmen. Oder: die beobachtete Aberration ist unabhängig von der Form und physikalischen Beschaffenheit der brechenden Körper in unseren Fernrohren (Linsen, Füllung mit Wasser).

Weiter: die Zeit, welche das Licht braucht, um von P_1 nach P_2 zu gelangen, wird zwar durch die gemeinsame Geschwindigkeit von P_1 und P_2 geändert, aber für jeden Weg, der von P_1 nach P_2 führt, um denselben Betrag. Also: die Erdbewegung bringt in keinem Interferenzbild eine Veränderung hervor.

Alle Bestimmungen von Wellenlängen beruhen auf Ausmessung von Interferenzbildern; also: was wir als Wellenlänge messen, das ist der bereits vom Einfluß der Erdbewegung befreite „normale“ Werth dieser Größe.

Könnten und würden wir aber die Wellenlänge direct entsprechend ihrer Definition bestimmen als die Strecke, um welche eine bestimmte Phase einer Sinuswelle während der Zeit einer Periode fortschreitet, so müßten wir verschiedene Werthe erhalten je nach dem Winkel, welchen die Fortpflanzungsrichtung mit der Richtung der Erdbewegung einschließt.

Wir wollen die Rechnung durchführen für ebene Wellen in einem isolirenden Medium. Wir setzen also an: alle Feldcomponenten sollen proportional sein ein und derselben Function des Arguments

$$\alpha = v_x \cdot x' + v_y \cdot y' + v_z \cdot z' - t'.$$

Damit dieser Ansatz den Gleichungen (12), mit $\Lambda = 0$, genüge, muß

$$\left. \begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 &= \varepsilon\mu \\ \text{und } \mathbf{E}, \text{ wie } \mathbf{M} \text{ normal zu } \boldsymbol{\nu} \text{ sein.} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Es ist aber nach (11'):

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z - t, \\ \text{wo } n_x &= v_x + \varepsilon_0 \mu_0 p_x, \quad n_y = v_y + \varepsilon_0 \mu_0 p_y, \quad n_z = v_z + \varepsilon_0 \mu_0 p_z \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Lösung stellt also eine ebene Welle dar, deren Normale die Richtung von \mathbf{n} hat, während der Strahl parallel zu $\boldsymbol{\nu}$ ist.

Die „Strahlgeschwindigkeit“ U ist ein Vector, der die Richtung des Strahles hat, und dessen Größe durch die Länge des Strahls zwischen den Ebenen $\alpha(t) = 0$ und $\alpha(t+1) = 0$ dargestellt ist. D. h. U ist bestimmt durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} n_x \cdot U_x + n_y \cdot U_y + n_z \cdot U_z &= 1 \\ U_x &= \kappa \cdot v_x, \quad U_y = \kappa \cdot v_y, \quad U_z = \kappa \cdot v_z. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Daraus folgt als Zahlwerth von U :

$$U = \frac{v}{v_x \cdot n_x + v_y \cdot n_y + v_z \cdot n_z},$$

oder

$$\frac{1}{U} = \sqrt{\varepsilon\mu} + \varepsilon_0 \mu_0 p_v, \quad (16)$$

wo p_v die Componente von p nach der Richtung des Strahles bedeutet.

Wenn wir noch durch

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ruhenden Medium und den Brechungsexponenten bezeichnen, so erhalten wir aus (16) für die Fortpflanzungszeit t , welche der Strahllänge s entspricht:

$$t = \frac{s}{\omega} + \frac{p \cdot s_p}{\omega^2}, \quad (17)$$

und zwar in aller Strenge. Genähert, d. h. richtig in den Größen erster Ordnung, erhalten wir:

$$U = \omega - \frac{p_v}{\beta^2}. \quad (18)$$

In (17) bedeutet s_p die Projection der Strahllänge auf die Richtung von p . Der Faktor von s_p ist unabhängig von dem Medium, in welchem die Strecke s zurückgelegt wird; das von p abhängige Glied giebt daher denselben Gesamtbeitrag zur Fortpflanzungszeit, wenn mittels beliebiger Reflexionen und Brechungen eine gegebene anfängliche Wellenebene auf verschiedenen Wegen in eine ebenfalls gegebene Endlage übergeführt wird. Dies ist nochmals in speciellerer Form der Satz von der Unveränderlichkeit der Interferenzbilder; er ist als richtig — auch in den Größen zweiter Ordnung — erwiesen durch die Versuche von Michelson und Morley.

Abhängig von der Erdbewegung muß nach (18) die Geschwindigkeit U sein. Die sogenannten „terrestrischen Methoden“ bestimmen aber die Lichtgeschwindigkeit aus der zum Durchlaufen einer geschlossenen Bahn verbrauchten Zeit. Sie müßten daher selbst bei beliebig gesteigerter Genauigkeit einen von der Erdbewegung unabhängigen Werth liefern.

Indem wir die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammenfassen, können wir die am Anfang desselben gestellte Frage dahin beantworten: Von allen bisher beobachteten elektrischen und optischen Erscheinungen in relativ ruhenden Körpern geben unsere Grundgleichungen ebensowohl Rechenschaft wie die Maxwell'schen.

§ 5. Relative Bewegungen.

Indem wir uns jetzt der Betrachtung des Feldes in relativ zur Erde bewegten Körpern zuwenden — und zwar zunächst unter Ausschluß der optischen Erscheinungen —, müssen wir auf die Gleichungen (B_1) (C_1) des § 3 zurückgreifen. Da wir nicht von den hypothetischen Bewegungen kleinster Theilchen, sondern ausschließlich von den wahrnehmbaren Bewegungen ausgedehnter Massen handeln, so dürfen wir alle Geschwindigkeiten v als verschwindend klein gegen p und a fortiori gegen ω_0 annehmen. Wir vernachlässigen daher die Glieder, welche $v \cdot (p+v) \varepsilon_0 \mu_0$ als Factor enthalten, und haben so zunächst:

$$\left. \begin{aligned} -P(E - [v \cdot \mu M]) &= \frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta t} + \Gamma(\mu M) \cdot v \\ P(M + [v \cdot \varepsilon E]) &= \frac{\delta \mathfrak{E}}{\delta t} + \Gamma(\varepsilon E) \cdot v + \Lambda \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Ferner aber durften wir, wie in § 4 gezeigt wurde, unter dem

Zeichen $\frac{\delta}{\delta t}$ die mit dem Factor $\varepsilon_0 \mu_0 p$ behafteten Glieder fortlassen, ohne dadurch Ungenauigkeiten hervorzurufen, welche für elektromagnetische Methoden erkennbar sind. Um so mehr gilt dies für die Glieder mit $\varepsilon_0 \mu_0 v$. Vernachlässigen wir die einen, wie die anderen, so haben wir in (19) für \mathfrak{E} und \mathfrak{M} an Stelle der in (C₁) gegebenen Werthe zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \varepsilon E \\ \mathfrak{M} &= \mu M \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Aus den Gleichungen (19) (20) ist die gemeinsame Geschwindigkeit p vollständig verschwunden. Sie enthalten nur noch die relativen Geschwindigkeiten v , und stimmen völlig überein mit den Hertz'schen „Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper“. Daß sie „die elektromagnetischen Erscheinungen im engeren Sinn in dem Umfange darstellen, in welchem dieselben bisher mit Sicherheit untersucht worden sind“, hat Hertz gezeigt. (S. die Hertz'sche Abhandlung oder etwa „elm. Feld“ pag. 541 ff.)

Es bleibt uns also nur zu untersuchen, was unsere Gleichungen über die Optik bewegter Medien aussagen. Die wenigen vorliegenden Versuche (angestellt an strömendem Wasser von Fizeau, wiederholt von Michelson und Morley) lassen sich ausreichend discutieren, sofern man das Gesetz der Ausbreitung ebener Wellen in gleichförmig bewegten Medien kennt; der gleichförmigen Geschwindigkeit sind lediglich für die verschiedenen Theile des Apparates verschiedene Werthe beizulegen. Diesen Fall haben wir bereits in § 4, c behandelt, und zwar ohne alle Vernachlässigung auf Grundlage unserer Fundamentalgleichungen. Wir haben nur das p des § 4 jetzt durch $p+v$ zu ersetzen, und zu beachten, daß die so entstehenden Gleichungen für ein Coordinatensystem gelten, welches die Geschwindigkeit $p+v$ theilt. Die so verstandene Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist nach (18):

$$\omega - \frac{p_v + v_v}{\beta^2}.$$

Zur Beobachtung gelangt ausschließlich die Veränderung eines Interferenzbildes, welche durch Veränderung der v hervorgerufen wird. Diese ist unabhängig vom Werthe des p ; es verhält sich daher für die Beobachtung alles so, als ob $p = 0$ und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, bezogen auf das bewegte Medium,

$$\omega - \frac{v_v}{\beta^2}$$

wäre. Dies bedeutet für den Beobachter, welcher an der Bewegung des Mediums nicht theilnimmt, eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\omega + \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) v_v. \quad (21)$$

Diesen Werth bestätigen die Versuche; über die Größen zweiter Ordnung, welche in (18) bereits vernachlässigt sind, geben sie keine Auskunft.

§ 6. Mechanische Kräfte.

Soweit es sich um die Kräfte handelt, welche bei unseren Versuchen zur Geltung kommen, bilden die Grundgleichungen in der Form (B_1) (C_1) den geeignetsten Ausgangspunkt. In allen anderen Fällen aber können wir von den aus (B_1) (C_1) gezogenen Folgerungen leicht zu den Folgerungen übergehen, welche wir aus (B') und (C) gewonnen haben würden, indem wir in unseren Resultaten

$$p = 0, \quad v = u, \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \quad (22)$$

setzen.

Wir multipliciren die erste der Gleichungen (B_1) mit $M + [v \mathfrak{E}]$, die zweite mit $E - [v \mathfrak{M}]$ und addiren; dann entsteht nach (f):

$$-\Gamma[(E - [v \mathfrak{M}])(M + [v \mathfrak{E}])] = \\ \left(\frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta t} + \Gamma(\mathfrak{M}) \cdot v\right) \cdot (M + [v \mathfrak{E}]) + \left(\frac{\delta \mathfrak{E}}{\delta t} + \Gamma(\mathfrak{E}) \cdot v + \Lambda\right) \cdot (E - [v \mathfrak{M}]).$$

Nun folgt aus (C_1) unter Benutzung von (c):

$$M \cdot \frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta t} + E \cdot \frac{\delta \mathfrak{E}}{\delta t} = \\ M \cdot \frac{\delta(\mu M)}{\delta t} + E \cdot \frac{\delta(\varepsilon E)}{\delta t} + \varepsilon_0 \mu_0 (p + v) \cdot \frac{\delta[EM]}{\delta t} + 2\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\delta(p + v)}{\delta t} \cdot [EM],$$

und somit

$$-\Gamma[(E - [v \mathfrak{M}])(M + [v \mathfrak{E}])] = \\ E \cdot \frac{\delta(\varepsilon E)}{\delta t} + M \cdot \frac{\delta(\mu M)}{\delta t} + \varepsilon_0 \mu_0 (p + v) \cdot \frac{\delta[EM]}{\delta t} + 2\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\delta(p + v)}{\delta t} \cdot [EM] + E \cdot \Lambda \left. \vphantom{\frac{\delta(\varepsilon E)}{\delta t}} \right\} (23) \\ + v \cdot \left\{ \Gamma(\mathfrak{E}) E + \Gamma(\mathfrak{M}) M + \frac{\delta}{\delta t} [\mathfrak{E} \mathfrak{M}] + [\Lambda \mathfrak{M}] + [\Gamma(\mathfrak{E}) v \cdot \mathfrak{M}] - [\Gamma(\mathfrak{M}) v \cdot \mathfrak{E}] \right\}$$

Andererseits haben wir aus (A):

$$W = \int_{\infty} w d\tau,$$

wo

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathfrak{E} + \mathbf{M} \cdot \mathfrak{M}) + \varepsilon_0 \mu_0 (p + v) \cdot [\mathbf{E} \mathbf{M}],$$

oder nach (C₁) auch

$$w = \frac{1}{2} (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{M}^2) + 2 \varepsilon_0 \mu_0 (p + v) \cdot [\mathbf{E} \mathbf{M}]. \quad (24)$$

Wir bilden $\frac{\delta w}{\delta t}$, und beachten dabei, daß die Werthe von ε und μ an der bewegten Materie haften, daß also

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta t} = -v \cdot \nabla \varepsilon, \quad \frac{\delta \mu}{\delta t} = -v \cdot \nabla \mu$$

ist. So ergibt sich aus (24):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta w}{\delta t} = & \mathbf{E} \cdot \frac{\delta(\varepsilon \mathbf{E})}{\delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 v \cdot \nabla \varepsilon + \mathbf{M} \cdot \frac{\delta(\mu \mathbf{M})}{\delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{M}^2 v \cdot \nabla \mu \\ & + 2 \varepsilon_0 \mu_0 (p + v) \cdot \frac{\delta[\mathbf{E} \mathbf{M}]}{\delta t} + 2 \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\delta(p + v)}{\delta t} \cdot [\mathbf{E} \mathbf{M}] \end{aligned} \right\} (25)$$

Aus (23) und (25) folgt:

$$-\Gamma[(\mathbf{E} - [v \mathfrak{M}])(\mathbf{M} + [v \mathfrak{E}])] = \frac{\delta w}{\delta t} + \mathbf{E} \cdot \Lambda - p \cdot \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\delta[\mathbf{E} \mathbf{M}]}{\delta t} + v \cdot f, \quad (26)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} f = & \Gamma(\mathfrak{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \nabla \varepsilon + \Gamma(\mathfrak{M}) \mathbf{M} - \frac{1}{2} \mathbf{M}^2 \nabla \mu + [\Lambda' \mathfrak{M}] \\ & + \frac{\delta}{\delta t} \{ [\mathfrak{E} \mathfrak{M}] - \varepsilon_0 \mu_0 [\mathbf{E} \mathbf{M}] \} + [\Gamma(\mathfrak{E}) v \cdot \mathfrak{M}] - [\Gamma(\mathfrak{M}) v \cdot \mathfrak{E}]. \end{aligned} \right\} (27)$$

Wir multipliciren die Gleichung (26) mit $d\tau$ und integriren über das ganze Feld. Dann bildet sich links ein Oberflächen-Integral, dessen Integrand überall Null ist. Rechts entsteht aus dem ersten Glied: $\frac{\delta W}{\delta t} = \frac{\partial W}{\partial t}$. Also:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_{\infty} \mathbf{E} \cdot \Lambda d\tau - p \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{\infty} \varepsilon_0 \mu_0 [\mathbf{E} \mathbf{M}] d\tau + \int_{\infty} v \cdot f d\tau. \quad (28)$$

Zunächst fassen wir die Partialgeschwindigkeiten gemäß (22) in eine zusammen, indem wir $p = 0$, $v = u$ setzen. Wir erhalten so:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_{\infty} \mathbf{E} \cdot \Lambda d\tau + \int_{\infty} u \cdot f_0 d\tau, \quad (29)$$

wo

$$\begin{aligned}
 f_0 = & \Gamma(\mathfrak{E})\mathbf{E} - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2\nabla\varepsilon + \Gamma(\mathfrak{M})\mathbf{M} - \frac{1}{2}\mathbf{M}^2\nabla\mu + [\Lambda\mathfrak{M}] \\
 & + \frac{\partial}{\partial t} \{ [\mathfrak{E}\mathfrak{M}] - \varepsilon_0\mu_0[\mathbf{E}\mathbf{M}] \} + [\Gamma(\mathfrak{E})u \cdot \mathfrak{M}] - [\Gamma(\mathfrak{M})u \cdot \mathfrak{E}].
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{f_0} \right\} (30)$$

Nun ist erfahrungsmäßig $\int_{\infty} \mathbf{E} \cdot \Lambda d\tau$ der Energiebetrag, welcher per Zeiteinheit in den Leitern in der Form von Wärme und chemischer Energie abgegeben wird. Die Gleichung (29) lehrt also, daß das Energieprincip gewahrt ist, sofern wir W als die elektromagnetische Energie des Feldes und $\int_{\infty} u \cdot f_0 d\tau$ als die in der Zeiteinheit geleistete mechanische Arbeit betrachten dürfen. Als Energie dürfen wir jede eindeutige Function von \mathbf{E} , \mathbf{M} und u ansprechen; den von Gleichung (29) geforderten Werth haben wir bereits in (A) vorweggenommen. Der Arbeit dürfen wir den angegebenen Werth zuschreiben, wenn wir ohne Widerspruch erstens mit unseren Grundannahmen und zweitens mit der Erfahrung f_0 als die auf den Inhalt der Volumeinheit wirkende Kraft ansehen dürfen.

Bezüglich der ersten Forderung bemerken wir, das für ein Volumelement im Vacuum gilt:

$$\Gamma(\mathfrak{E}) = \Gamma(\mathfrak{M}) = \nabla\varepsilon = \nabla\mu = \Lambda = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_0,$$

und ferner nach unserer Festsetzung (s. pag. 79):

$$u = 0, \quad \text{also} \quad \mathfrak{E} = \varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathfrak{M} = \mu_0\mathbf{M}.$$

Es wird also in f_0 jedes einzelne Glied gleich Null. Daher bleibt $u = 0$, wenn es einmal $= 0$ war. Unsere Festsetzung kann somit nicht zu einem inneren Widerspruch führen.

Unsere Erfahrungen über die mechanischen Kräfte elektromagnetischen Ursprungs entspringen ausschließlich der Beobachtung der relativen Bewegungen der Körper. Wir benutzen daher die Gleichung (28). In dieser erscheint die geleistete Arbeit in zwei Theile zerlegt: Der erste Theilbetrag entspricht einer Bewegung, welche alle Körper des Feldes gemeinsam als starres System ausführen, und bedeutet, daß eine solche Bewegung durch eine Kraft

$$F = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\infty} \varepsilon_0\mu_0[\mathbf{E}\mathbf{M}] d\tau$$

unterstützt wird.

Der zweite Theilbetrag $\int_{\infty} v \cdot f d\tau$ entspricht den relativen Bewegungen der im Felde vorhandenen Körper; er bedeutet, daß diese Bewegungen durch die Kräfte f beherrscht sind. Es fragt

sich also, ob die f in (27) thatsächlich die von uns beobachteten Kräfte sind.

Aus dem Ausdruck von f können wir zunächst die beiden letzten Glieder ausscheiden. Das erste dieser Glieder bedeutet eine Kraft auf ein bewegtes elektrisch geladenes Theilchen, welche dasselbe normal zur magnetischen Polarisation und normal zu seiner Bewegungsrichtung fortzutreiben sucht. An ausgedehnten Massen wird sie wegen der Kleinheit des Factors v kaum nachzuweisen sein. (Sie ist herbeigezogen worden zur Deutung der an den Kathodenstrahlen beobachteten Erscheinungen und des Zeeman-Effects.) Aber wie dem auch sein mag: die Arbeit einer solchen Kraft ist Null; ihre Existenz oder Nichtexistenz ändert also nichts bezüglich der Energiegleichung. Das gleiche gilt für die Kraft auf ein im elektrischen Felde bewegtes magnetisches Theilchen, welche durch das zweite der in Frage stehenden Glieder dargestellt wird. In Zeichen: nach (d) ist $v \cdot [v\mathfrak{M}] = 0$, $v \cdot [v\mathfrak{E}] = 0$; wir hätten also in (23) sogleich die beiden letzten Terme unterdrücken können.

Weiter: Der Term $\frac{\delta}{\delta t} \{[\mathfrak{E}\mathfrak{M}] - \varepsilon_0 \mu_0 [EM]\}$ bezeichnet zwei Partialkräfte, welche stets so klein bleiben, daß jede einzelne von ihnen höchstens in äußerst verdünnten Gasen zu wahrnehmbaren Bewegungen führen könnte (vgl. Hertz, Ausbreitung der elektrischen Kraft, pag. 284; Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. 3, pag. 531 f.). In diesem Fall aber ist $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$; die beiden Kräfte compensiren sich daher in den Größen niedrigster Ordnung; es bleiben nur Glieder der Form $\frac{p+v}{\omega_0^2} \frac{\delta}{\delta t}$ übrig, welche unter keinen Umständen zu merkbaren Bewegungen Anlaß geben können.

Die wahrnehmbaren Kräfte werden somit dargestellt durch die fünf ersten Terme in f . Diese bezeichnen in strenger Vollständigkeit die Kräfte im relativ ruhenden, stationären Felde. Diese Kräfte sind es zugleich, welche das Object aller genauen Messungen bilden. Um sie als Functionen von E und M auszudrücken, haben wir die Werthe von \mathfrak{M} , $\Gamma(\mathfrak{E})$, $\Gamma(\mathfrak{M})$ aus (C₂) und (8) zu entnehmen. Aus (8b) folgt:

$$\Gamma(\mathfrak{E})E = \Gamma(\varepsilon E)E + \varepsilon_0 \mu_0 (p \cdot \Lambda)E,$$

oder nach (e):

$$= \Gamma(\varepsilon E)E + \varepsilon_0 \mu_0 \{(\Lambda \cdot E)p - [\Lambda [pE]]\}.$$

Den letzten Term vereinigen wir mit dem Term $[\Lambda\mathfrak{M}]$ in f , und

erhalten so:

$$f = \Gamma(\varepsilon E)E - \frac{1}{2}E^2 \nabla \varepsilon + \Gamma(\mu M)M - \frac{1}{2}M^2 \nabla \mu + [\Lambda \cdot \mu M] + \varepsilon_0 \mu_0 (\Lambda \cdot E)p. \quad (31)$$

Die fünf ersten Terme dieses Ausdrucks stellen die bekannten Kräfte des stationären Feldes vollständig dar: die Kräfte auf die Träger von Elektrizitätsmengen, auf ungeladene Dielektrica, auf die Theilchen permanenter Magnete, auf temporär magnetisirte Körper, auf durchströmte Leiter. Zu diesen bekannten Kräften gesellt sich nach unserer Theorie eine weitere Kraft auf durchströmte Leiter, welche bisher nicht beobachtet ist: $\varepsilon_0 \mu_0 (\Lambda \cdot E)p$. Sie hat die Richtung der Erdbewegung, und würde für ein Stück Kupfer bei der Stromdichte $1 \frac{\text{Ampère}}{\text{mm}^2}$ den 10^{13} ten Theil des Kupfergewichts betragen.

§ 7. Localisirung der Energie.

Der in § 6 discutierte Werth der mechanischen Kräfte leistet gemäß seiner Ableitung der Bedingung Genüge, daß für das gesammte Feld das Princip von der Erhaltung der Energie gewahrt sein muß. Wir haben noch zu untersuchen, ob wir die Energie localisiren können unter Aufrechterhaltung unserer Annahme (E), daß

$$\Sigma = c[EM]$$

die Strahlung sei.

Wir gehen aus von der Gleichung (26), verstehen aber wiederum unter v die Gesamt-Geschwindigkeit, setzen also

$$p = 0, \quad v = u, \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t},$$

und damit

$$f = f_0 \quad (\text{s. Gl. (30)}).$$

Auf der linken Seite sondern wir

$$\Gamma[[u \mathcal{M}][u \mathcal{E}]]$$

ab, und denken es in seiner ursprünglichen Form:

$$[u \mathcal{E}] \cdot P[u \mathcal{M}] - [u \mathcal{M}] \cdot P[u \mathcal{E}] = u \cdot [\mathcal{E} \cdot \underline{P}[u \mathcal{M}]] - u \cdot [\mathcal{M} \cdot P[u \mathcal{E}]]$$

auf die rechte Seite gebracht. Es entsteht so:

$$-\Gamma(T) = \frac{\partial w}{\partial t} + E \cdot \Lambda + u \cdot (f_0 + f_1), \quad (32)$$

wo

$$\begin{aligned} T &= [EM] + [E[u\mathfrak{E}]] + [M[u\mathfrak{M}]] \\ f_1 &= -[\mathfrak{E} \cdot P[u\mathfrak{M}]] + [\mathfrak{M} \cdot P[u\mathfrak{E}]] \\ w &= \frac{1}{2}(E \cdot \mathfrak{E} + M \cdot \mathfrak{M}) + \varepsilon_0 \mu_0 u \cdot [EM]. \end{aligned} \quad (33)$$

Den Ausdruck für T müssen wir umformen. Es ist nach (e):

$$\begin{aligned} [E[u\mathfrak{E}]] + [M[u\mathfrak{M}]] &= (E \cdot \mathfrak{E} + M \cdot \mathfrak{M})u - (u \cdot E)\mathfrak{E} - (u \cdot M)\mathfrak{M} \\ &= (E \cdot \mathfrak{E} + M \cdot \mathfrak{M})u - (u \cdot E)\varepsilon E - (u \cdot M)\mu M \\ &\quad - \varepsilon_0 \mu_0 \{ - (u \cdot E)[uM] + (u \cdot M)[uE] \}. \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} \{ \} &= [u\{E(u \cdot M) - M(u \cdot E)\}] = [u[u[EM]]] \\ &= (u \cdot [EM])u - u^2[EM] \end{aligned}$$

und

$$E \cdot \mathfrak{E} + M \cdot \mathfrak{M} = \varepsilon E^2 + \mu M^2 + 2\varepsilon_0 \mu_0 u \cdot [EM].$$

Also

$$T = (1 + \varepsilon_0 \mu_0 u^2)[EM] + \frac{1}{2}(E \cdot \mathfrak{E} + M \cdot \mathfrak{M})u + \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu M^2)u - (u \cdot E)\varepsilon E - (u \cdot M)\mu M.$$

Wir können daher (32) in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} -\Gamma(\Sigma + w_1 u) - \Gamma(Y) &= \frac{\partial w}{\partial t} + E \cdot \Lambda + u \cdot (f_0 + f_1) \\ \text{oder} & \\ \int(\Sigma_n + w_1 u_n) dS + \int Y_n dS &= \frac{\partial}{\partial t} \int w d\tau + \int E \cdot \Lambda d\tau + \int u \cdot (f_0 + f_1) d\tau, \end{aligned} \quad (34)$$

wo S die Oberfläche von τ , n die innere Normale von dS ,

$$\Sigma = (1 + \varepsilon_0 \mu_0 u^2)[EM] \quad (35)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2}(E \cdot \mathfrak{E} + M \cdot \mathfrak{M}) \\ w &= \frac{1}{2}(E \cdot \mathfrak{E} + M \cdot \mathfrak{M}) + \varepsilon_0 \mu_0 u \cdot [EM] \end{aligned} \quad (36)$$

$$Y_n = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu M^2)u_n - (u \cdot E)\varepsilon E_n - (u \cdot M)\mu M_n \quad (37)$$

oder

$$\begin{aligned} Y_n &= -u \cdot \pi^n, \text{ wo } \pi^n \text{ ein Vector mit den Componenten } \pi_x^n, \pi_y^n, \pi_z^n; \\ \pi_x^n &= \pi_x^n \cos(nx) + \pi_y^n \cos(ny) + \pi_z^n \cos(nz); \\ \pi_x^n &= -\frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu M^2) + \varepsilon E_x E_x + \mu M_x M_x \\ \pi_y^n &= \pi_y^n = \varepsilon E_x E_y + \mu M_x M_y \text{ etc.} \end{aligned} \quad (37')$$

f_0 und f_1 aus (30) und (33).

Die Gleichung (34) können wir folgendermaßen interpretieren: Die Energie der Volumeinheit ist w ; hiervon haftet der Antheil w_1 an der Materie derart, daß er ihre Bewegungen theilt. Abgesehen von dieser Fortführung der Energie findet eine Strömung derselben durch Strahlung im Betrage Σ statt. Zu den bereits betrachteten Kräften f_0 treten neue Volumkräfte f_1 ; diese enthalten ebenso, wie die letzten Partialkräfte in f_0 die Geschwindigkeit als Factor; ihre Existenz ändert nichts an den in § 6 gezogenen Schlüssen. Endlich erhalten wir neben diesen Volumkräften noch Oberflächen-Spannungen π ; sie sind identisch mit den Spannungen der Maxwell'schen und der Hertz'schen Theorie.

Diese Interpretation der Gleichung (34) giebt der Strahlung Σ den in (E) geforderten und in §§ 2—5 benutzten Ausdruck. Sie ist also eine für uns zulässige Interpretation — aber keineswegs die einzige. In der That ist willkürlich zunächst die Art, wie wir die in die Richtung von u fallende Componente von T in zwei Theile zerlegt haben. Ferner aber hätten wir die Größe $\Gamma[[uM][uE]]$, welche wir in die Form $-u \cdot f_1$ brachten, auch als $-\Gamma\{(u \cdot [EM])u\}$ mit $-\Gamma(T)$ vereinigt lassen können. Das heißt zusammen: wir dürfen die mitgeführte Energie w_1 um einen willkürlichen Betrag vergrößern, sofern wir nur um den gleichen Betrag auch die Normalcomponente π_n der Oberflächenspannungen vermehren, und wir dürfen ferner, unter Aufgabe der Kräfte f_1 , noch den Betrag $u \cdot [EM]$ zu w_1 hinzufügen. Die oben gewählte Darstellung ergibt den möglichst engen Anschluß an die Deutung, welche Hertz seinen Gleichungen gegeben hat.

A n h a n g.

In dem vorstehenden Abriß der Elektrodynamik haben wir uns darauf beschränkt, zu zeigen, daß sich alle Beobachtungen, welche die Abhängigkeit der elektromagnetischen Vorgänge von den wahrnehmbaren Bewegungen der Körper betreffen, in ein einfaches Gesetz zusammenfassen lassen. Dieses Gesetz, in Gleichungen formulirt, stellten wir an die Spitze unserer Betrachtungen. Aus ihm deducirten wir, was vorgehen müsse; und wir fanden unsere Deductionen durch die Erfahrung bestätigt. In dieser Darstellung ergab sich nirgends ein Anlaß, neben den ponderablen Körpern einen „Aether“ einzuführen; es genügte, anzunehmen, daß sich auch in einem von Materie freien Raum elektromagnetische Energie ausbreiten könne.

Wir wollen nun nachträglich unsere Grundannahmen der Anschauung näher zu bringen suchen durch Einführung eines überall vorhandenen, die Materie durchdringenden Etwas, das wir „Aether“ nennen wollen, ohne uns damit irgend eine der Vorstellungen zu eigen zu machen, welche im Lauf der Zeit mit diesem Wort verknüpft worden sind. Es ist nicht unsere Meinung, daß durch solche Bildersprache das geringste gewonnen werde bezüglich der oben abgehandelten Theorie. Aber möglicherweise kann sie einen heuristischen Werth gewinnen bei dem weiteren Ausbau dieser Theorie. Wir geben also demjenigen Theil unserer Grundannahmen, welcher sie von den Maxwell-Hertz'schen unterscheidet, nunmehr die folgende Fassung:

Ueberall ist Aether vorhanden, und überall ist er in absoluter Ruhe. Alle Geschwindigkeiten, von denen wir sprechen, sind Geschwindigkeiten relativ zum Aether. Unseren bisherigen Erfahrungen gegenüber genügt es, die Fixsterne ohne „Eigenbewegung“ als ruhend gegen den Aether anzusehen. — Die Polarisationen \mathcal{E} und \mathcal{M} gehören zum Theil dem Aether, zum Theil der Materie an. Jeder der beiden Antheile ist das Product aus Feldintensität und elektrischer, bezw. magnetischer Constante. Dem Aether kommen die Constanten ε_0 , μ_0 zu, der Materie die Constanten

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_0, \quad \mu_1 = \mu - \mu_0. \quad (C^1)$$

Die Feldintensitäten sind in der Materie die Größen E , M , welche auf der linken Seite der Gleichungen (B) auftreten, — dieselben, welche auch für den Fall der Ruhe gelten würden; denn die in (B) auftretenden Flächen und Curven liegen fest in der Materie. Die Feldintensitäten sind im Aether Größen E_0 , M_0 , welche sich von E , M durch „inducirte“ Antheile unterscheiden; denn der Aether hat gegen das Bezugssystem der Gleichungen (B) die Geschwindigkeit $-u$. Es ist

$$E_0 = E - [u \cdot \mu_0 M]; \quad M_0 = M + [u \cdot \varepsilon_0 E] \quad (C^2)$$

und die Polarisationen sind

$$\mathcal{E} = \varepsilon_1 E + \varepsilon_0 E_0; \quad \mathcal{M} = \mu_1 M + \mu_0 M_0. \quad (C^3)$$

Straßburg i. E., im Mai 1901.