

## Körper- und Galoistheorie

### Arbeitsblatt 25

#### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 25.1. Konstruiere zu einem gegebenen Rechteck mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  ein flächengleiches Quadrat, wobei eine Seitenlänge als 1 angesetzt werden soll.

AUFGABE 25.2. Zeige, dass man zu einem gegebenen Parallelogramm mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches Rechteck derart konstruieren kann, dass eine Seite (von Parallelogramm und Rechteck) übereinstimmt.

AUFGABE 25.3. Zeige, dass man zu einem gegebenen Dreieck mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches gleichseitiges Dreieck konstruieren kann.

AUFGABE 25.4. Ist die Zahl, die den „goldenen Schnitt“ beschreibt, eine konstruierbare Zahl?

AUFGABE 25.5. Betrachte ein DinA4-Blatt. Ist das Seitenverhältnis aus langer und kurzer Seitenlänge eine konstruierbare Zahl?

AUFGABE 25.6.\*

Skizziere, wie man zu einer quadratischen Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

mit  $p, q \in \mathbb{R}$  aus den gegebenen Parametern  $p, q$  die reellen Lösungen  $x, y$  der Gleichung mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

AUFGABE 25.7. Es sei  $K \subset K' (\subseteq \mathbb{R})$  eine reell-quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass dann auch  $K[i] \subset K'[i]$  eine quadratische Körpererweiterung ist.

AUFGABE 25.8. Zeige direkt, ohne Bezug auf Koordinaten, dass die Summe von zwei konstruierbaren komplexen Zahlen wieder konstruierbar ist.

AUFGABE 25.9. Betrachte die Tastatur eines Klaviers. Ist das Schwingungsverhältnis von zwei nebeneinander liegenden Tasten (bei „gleichstufiger Stimmung“) eine konstruierbare Zahl?



AUFGABE 25.10.\*

Es seien  $z, w \in \mathbb{C}$  konstruierbare Zahlen. Bestimme, ob die Zahl

$$z^2 - 3z\sqrt{w} + \sqrt{z+w^2} - \frac{5}{7} + 4\sqrt{\sqrt{z+w} + \sqrt{11}}$$

konstruierbar ist.

AUFGABE 25.11. Zeige, dass es Matrizen  $M \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$  derart gibt, dass das charakteristische Polynom aus  $\mathbb{Q}[X]$  ist, dass in  $M$  aber auch transzendente Einträge vorkommen.

AUFGABE 25.12.\*

Zeige, dass zu zwei konstruierbaren positiven reellen Zahlen  $a$  und  $b$  die Potenz  $a^b$  nicht konstruierbar sein muss.

AUFGABE 25.13. Zeige, dass es Geraden gibt, auf denen es keinen konstruierbaren Punkt gibt.

AUFGABE 25.14. Begründe elementargeometrisch, dass der Flächeninhalt eines Kreises zu seinem Umfang im Verhältnis Radius halbe steht.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 25.15. (4 Punkte)

Es sei ein Kreis  $K$  und ein Punkt  $P$  außerhalb des Kreises gegeben. Konstruiere eine der Tangenten an den Kreis, die durch  $P$  läuft.

AUFGABE 25.16. (2 Punkte)

Sei  $Z \in \mathbb{C}$  eine konstruierbare Zahl und  $r$  eine konstruierbare positive reelle Zahl. Zeige, dass dann auch der Kreis mit Mittelpunkt  $Z$  und Radius  $r$  konstruierbar ist.

AUFGABE 25.17. (3 Punkte)

Es seien  $P, Q_1, Q_2$  drei konstruierbare Punkte derart, dass die Abstände  $d(P, Q_1)$  und  $d(P, Q_2)$  gleich 1 sind und dass der Winkel zwischen den dadurch definierten Halbgeraden 90 Grad beträgt. Zeige, dass es dann eine affin-lineare Abbildung

$$\varphi: E = \mathbb{R}^2 \longrightarrow E = \mathbb{R}^2$$

gibt, die 0 auf  $P$ , 1 auf  $Q_1$  und  $i$  auf  $Q_2$  schickt, und die konstruierbare Punkte in konstruierbare Punkte überführt.

AUFGABE 25.18. (3 Punkte)

Beschreibe die Konstruktion einer reellen Zahl  $x$  mit Hilfe von Zirkel und Lineal, deren Abweichung von  $\sqrt{\pi}$  kleiner als 0,00001 ist.

AUFGABE 25.19. (2 Punkte)

Zeige, dass die komplexe Zahl  $re^{i\varphi} = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$  genau dann konstruierbar ist, wenn  $r$  und  $e^{i\varphi}$  konstruierbar sind.

AUFGABE 25.20. (4 Punkte)

Beweise auf zwei verschiedene Arten, dass die komplexe Quadratwurzel einer konstruierbaren komplexen Zahl wieder konstruierbar ist.



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = My Keyboard.jpg , Autor = Paree, Lizenz = CC-by-sa 2.0	2
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <a href="http://commons.wikimedia.org">http://commons.wikimedia.org</a> ) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	5
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	5