Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 44

Übungsaufgaben

Aufgabe 44.1.*

Beweise das folgende *Untergruppenkriterium.*Eine nichtleere Teilmenge $H \subseteq G$ einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe, wenn gilt:

$$\text{für alle } g, h \in H \text{ ist } gh^{-1} \in H\,.$$

Aufgabe 44.2.*

Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element, und seien $m, n \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen. Zeige die folgenden Potenzgesetze.

(1) Es ist $g^0 = e_G$.
(2) Es ist $g^{m+n} = g^m g^n$.

Aufgabe 44.3.*

Zeige, dass die Untergruppen von $\mathbb{Z}$ genau die Teilmengen der Form

$$\mathbb{Z}d = \{kd \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

mit einer eindeutig bestimmten nicht-negativen Zahl d sind.

Aufgabe 44.4. Berechne die Ordnung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{F}_5$.

Aufgabe 44.5. Betrachte die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, 0)$ als kommutative Gruppe. Es sei $G \subseteq \mathbb{Q}$ eine endlich erzeugte Untergruppe. Zeige, dass G zyklisch ist.

Aufgabe 44.6. Beweise Lemma 44.6.

Aufgabe 44.7. Sei G eine (multiplikativ geschriebene) kommutative Gruppe und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Potenzieren

$$G \longrightarrow G,\ x \longmapsto x^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 44.8.*

Es sei G eine kommutative Gruppe und

$$\varphi\colon\ G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass H ebenfalls kommutativ ist.

Aufgabe 44.9. Es sei G eine additiv geschriebene kommutative Gruppe. Zeige, dass die Negation, also die Abbildung

$$G \longrightarrow G,\ x \longmapsto -x,$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 44.10.*

Bestimme, ob die durch die Gaußklammer gegebene Abbildung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z},\ q \longmapsto \lfloor q \rfloor,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist oder nicht.

Aufgabe 44.11. a) Für welche reellen Polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ ist die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0, +),\ x \longmapsto P(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

b) Für welche reellen Polynome $Q \in \mathbb{R}[X]$ ist allenfalls 0 eine Nullstelle und die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}^\times, 1, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^\times, 1, \cdot),\ x \longmapsto Q(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

Aufgabe 44.12. Es sei K ein Körper und sei

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in K,\ ad-bc \neq 0 \right\}$$

die Menge aller invertierbaren 2×2-Matrizen.

a) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass M mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

b) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass die Abbildung

$$M \longrightarrow K^\times,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad-bc,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 44.13. Zeige, dass die Abbildung

$$S_n \longrightarrow \operatorname{GL}_n(\mathbb{R}),\ \pi \longmapsto M_\pi,$$

die einer Permutation π auf $\{1,\ldots,n\}$ ihre Permutationsmatrix M_π zuordnet, ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 44.14.*

Es sei R ein kommutativer Ring und $h \in R$. Zeige, dass die Abbildung

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto hf,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Beschreibe das Bild und den Kern dieser Abbildung.

Mit dem Konzept der Restklassenbildung werden die folgenden Aufgaben bald deutlich einfacher.

Aufgabe 44.15. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und betrachte auf

$$\mathbb{Z}/(n) = \{0,1,\ldots,n-1\}$$

die Verknüpfung

$$a+b := (a+b) \mod n = \begin{cases} a+b, & \text{falls } a+b < n\,, \\ a+b-n, & \text{falls } a+b \geq n\,. \end{cases}$$

Zeige, dass dadurch eine assoziative Verknüpfung auf dieser Menge definiert ist, und dass damit sogar eine Gruppe vorliegt.

Aufgabe 44.16. Sei $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir betrachten

$$\mathbb{Z}/(d) = \{0, 1, \ldots, d-1\}$$

mit der in Aufgabe 44.15 beschriebenen Addition. Zeige, dass die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{Z}/(d) \longrightarrow \mathbb{Z},\ r \longmapsto r,$$

kein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 44.17. Bestimme die Ordnungen sämtlicher Elemente in der Gruppe $\mathbb{Z}/(100)$.

Aufgabe 44.18. Es sei G eine Gruppe und $h \in G$. Zeige, dass die Abbildung

$$G \longrightarrow G,\ g \longmapsto hgh^{-1},$$

eine Gruppenautomorphismus ist.

Aufgabe 44.19.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\\ &\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 8x-4y+14z-7w & -28x+16y-49z+28w \\ 2x-y+4z-2w & -7x+4y-14z+8w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zeige, dass es sich dabei um einen inneren Automorphismus handelt.

Aufgabe 44.20.*

Es seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $ad - bc = 1$. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} &\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\\ &\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} adx-acy+bdz-bcw & -abxa^2y-b^2z++abw \\ cdx-c^2y+d^2z-cdw & -bcx+acy-bdz+adw \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ein innerer Automorphismus ist.

Aufgabe 44.21. Es sei M eine endliche Menge und $T \subseteq M$ eine Teilmenge, und es seien Aut T und Aut M die zugehörigen Automorphismengruppen (also die Menge aller bijektiven Abbildungen auf M, siehe Aufgabe 3.13). Zeige, dass durch

$$\Psi\colon \text{Aut } T \longrightarrow \text{Aut } M,\ \varphi \longmapsto \tilde{\varphi},$$

mit

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), \text{ falls } x \in T, \\ x \text{ sonst}, \end{cases}$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus gegeben ist.

Aufgabe 44.22. Sei G eine Gruppe und sei $g \in G$ ein Element und sei

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow G,\, h \longmapsto hg,$$

die Multiplikation mit g. Zeige, dass φ bijektiv ist, und dass φ genau dann ein Gruppenhomomorphismus ist, wenn $g = e_G$ ist.

Aufgabe 44.23. Gibt es Gruppenhomomorphismen

$$(\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, 0),$$

die nicht $\mathbb{R}$-linear sind?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 44.24. (3 (1+2) Punkte)

Es seien $G_1, \ldots, G_n$ Gruppen.

a) Definiere eine Gruppenstruktur auf dem Produkt

$$G_1 \times \cdots \times G_n\,.$$

b) Es sei H eine weitere Gruppe. Zeige, dass eine Abbildung

$$\varphi\colon\, H \longrightarrow G_1 \times \cdots \times G_n,\, x \longmapsto \varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)),$$

genau dann ein Gruppenhomomorphismus ist, wenn alle Komponenten φ_i Gruppenhomomorphismen sind.

Aufgabe 44.25. (2 Punkte)

Bestimme die Ordnungen sämtlicher Elemente in der Gruppe $\mathbb{Z}/(12)$.

Aufgabe 44.26. (4 Punkte)

Bestimme die Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Q}, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Die folgende Aufgabe knüpft an Aufgabe 3.8 an. Zu einer reellen Zahl x bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Aufgabe 44.27. (3 Punkte)

Wir betrachten

$$M \;=\; \{q \in \mathbb{Q} |\, 0 \leq q < 1\}$$

mit der in Aufgabe 3.7 definierten Verknüpfung, die nach Aufgabe 3.8 eine Gruppe ist. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow M,\, q \longmapsto q - \lfloor q \rfloor,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 44.28. (2 Punkte)

Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Kern des Potenzierens

$$\mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{R}^\times,\ z \longmapsto z^n.$$

Aufgabe 44.29. (1 Punkt)

Zeige, dass es keinen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon\ (\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow G$$

in eine Gruppe G mit der Eigenschaft gibt, dass $r \in \mathbb{R}$ genau dann irrational ist, wenn $\varphi(r) = 0$ ist.