Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 37

Übungsaufgaben

Aufgabe 37.1. Skizziere die Bilder und die Graphen der folgenden Kurven im $\mathbb{R}^2$.

(1) $t \longmapsto (t^2, t^2)$,
(2) $t \longmapsto (t^2, -t^2)$,
(3) $t \longmapsto (t^2, t)$,
(4) $t \longmapsto (2t, 3t)$,
(5) $t \longmapsto (t^2, t^3)$.

Aufgabe 37.2. Man gebe ein Beispiel für verschiedene Kurven $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, deren Bilder (Bahnen) aber übereinstimmen.

Aufgabe 37.3. Zeige, dass der Grenzwert einer Funktion in einem Berührpunkt der Definitionsmenge im Falle der Existenz eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 37.4. Sei (M, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührpunkt von T. Es sei $f \colon T \to V$ eine Abbildung in einen euklidischen Vektorraum V mit den Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_n \colon T \to \mathbb{R}$ bezüglich einer Basis von V. Zeige, dass der Limes

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

genau dann existiert, wenn sämtliche Limiten

$$\lim_{x \to a} f_j(x)$$

existieren.

Aufgabe 37.5. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Es sei $f \colon T \to L$ eine stetige Abbildung in einen weiteren metrischen Raum L und sei $a \in T$ ein Punkt, der ein Berührpunkt von $T \setminus \{a\}$ ist. Zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \in T \setminus \{a\},\, x \to a} f(x)$$

existiert.

Aufgabe 37.6. Es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes, $a \in M$ ein Berührpunkt von T, $g\colon T \to L$ eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum und $b \in L$. Zeige, dass für den Limes

$$\lim_{x \to a} g(x) = b$$

genau dann gilt, wenn

$$\lim_{x \to a} \|g(x) - b\| = 0$$

gilt.

Aufgabe 37.7. Seien D, E, F metrische Räume und sei $h\colon D \to E$ eine stetige Abbildung. Es sei $P \in D$ ein Berührpunkt von $D \setminus \{P\}$ und $h(P) = Q \in E$ ein Berührpunkt von $E \setminus \{Q\}$. Es sei $g\colon E \setminus \{Q\} \to F$ eine Abbildung und es sei vorausgesetzt, dass

$$\lim_{y \to Q} g(y)$$

existiert. Zeige, dass dann auch

$$\lim_{x \to P} g(h(x))$$

existiert und mit $\lim_{y \to Q} g(y)$ übereinstimmt.

Aufgabe 37.8. Bestimme die Ableitung der Kurve

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, t \longmapsto f(t) = \left(t^2 - \sin t, e^{-t} + 2t^3, t \cdot \sinh t + \frac{1}{t^2+1}\right),$$

in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 37.9. Bestimme die Ableitung der Kurve

$$\varphi\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, t \longmapsto \left(\frac{\sin t^2}{t^5}, 4^t, \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right),$$

für jeden Punkt $t \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 37.10. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $v, w \in V$. Zeige, dass die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow V,\, t \longmapsto tv + w,$$

differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(t) = v$.

Aufgabe 37.11. Es sei I ein reelles Intervall und V ein euklidischer Vektorraum. Es seien $f, g\colon I \to V$ zwei in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurven und es sei $h\colon I \to \mathbb{R}$ eine in t_0 differenzierbare Funktion. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

(1) Die Summe

$$f+g\colon I \longrightarrow V,\, t \longmapsto f(t)+g(t),$$

ist in t_0 differenzierbar mit

$$(f+g)'(t_0) = f'(t_0)+g'(t_0)\,.$$

(2) Das Produkt

$$hf\colon I \longrightarrow V,\, t \longmapsto h(t)f(t),$$

ist differenzierbar in t_0 mit

$$(hf)'(t_0) = h(t_0)f'(t_0)+h'(t_0)f(t_0)\,.$$

Insbesondere ist für $c \in \mathbb{R}$ auch cf differenzierbar in t_0 mit

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0)\,.$$

(3) Wenn h nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion

$$\frac{f}{h}\colon I \longrightarrow V,\, t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in t_0 differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0)-h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}\,.$$

Aufgabe 37.12. Es seien $f,g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zwei differenzierbare Kurven. Berechne die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto \langle f(t), g(t)\rangle\,.$$

Aufgabe 37.13.*

Wir betrachten die Funktionen

$$B_0(t) = (1-t)^2,\ B_1(t) = 2t(1-t) \text{ und } B_2(t) = t^2\,.$$

Es seien $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Wir definieren die Kurve

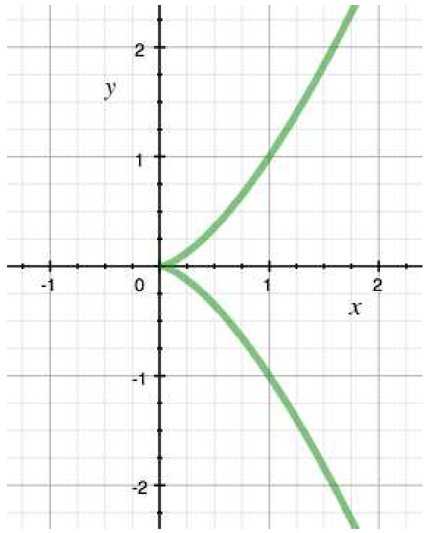
$$f(t) \,:=\, B_0(t)v_0 + B_1(t)v_1 + B_2(t)v_2.$$

a) Berechne $f(0)$ und $f(1)$.

b) Berechne $f'(t)$.

c) Zeige, dass $f'(0)$ ein Vielfaches von $v_1 - v_0$ und $f'(1)$ ein Vielfaches von $v_2 - v_1$ ist.

d) Skizziere für $v_0 = (0,1)$, $v_1 = (1,1)$ und $v_2 = (2,0)$ das Bild der Kurve $f(t)$ für $0 \le t \le 1$.



Aufgabe 37.14. Das Bild der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \left(t^2,\ t^3\right),$$

definierten Kurve heißt *Neilsche Parabel*. Zeige, dass ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann zu diesem Bild gehört, wenn er die Gleichung $x^3 = y^2$ erfüllt.

Aufgabe 37.15. Sei

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \left(t^2,\ t^3\right).$$

Bestimme die Punkte $t_0 \in \mathbb{R}$, für die der Abstand der zugehörigen Kurvenpunkte $f(t) = (t^2,\ t^3)$ zum Punkt $(1, 0)$ minimal wird.

Aufgabe 37.16. Wir betrachten die Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^2 - 1, t^3 - t).$$

a) Zeige, dass die Bildpunkte (x, y) der Kurve die Gleichung

$$y^2 = x^2 + x^3$$

erfüllen.

b) Zeige, dass jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y^2 = x^2 + x^3$ zum Bild der Kurve gehört.

c) Zeige, dass es genau zwei Punkte t_1 und t_2 mit identischem Bildpunkt gibt, und dass ansonsten die Abbildung injektiv ist.

Aufgabe 37.17. Es sei $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve und $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Es sei $t_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass der Abstand $d(P, f(t))$ (zwischen P und einem Kurvenpunkt) in t_0 minimal werde. Zeige, dass $P - f(t_0)$ senkrecht zu $f'(t_0)$ ist.

Aufgabe 37.18. Es sei $G = \{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ der Graph der reellen Betragsfunktion. Man gebe eine differenzierbare Kurve $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ an, deren Bild genau G ist.

Die folgende Aufgabe setzt das Konzept Äquivalenzrelation voraus.

Aufgabe 37.19. Sei $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und sei $I = \,]-1, 1[$. Wir betrachten die Menge

$$M = \{f : I \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ differenzierbar}, \ f(0) = P\}\,.$$

Wir nennen zwei Kurven $f, g \in M$ *tangential äquivalent*, wenn $f'(0) = g'(0)$ ist.

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Finde den einfachsten Vertreter für die Äquivalenzklassen.

c) Man gebe für jede Klasse einen weiteren Vertreter an.

d) Beschreibe die Menge der Äquivalenzklassen (also die Quotientenmenge).

Aufgabe 37.20. Es seien $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ endlich viele Punkte und sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$. Zeige, dass es zu je zwei Punkten $P, Q \in M$ eine differenzierbare Kurve $\varphi\colon [0, 1] \to M$ mit $\varphi(0) = P$ und $\varphi(1) = Q$ gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 37.21. (5 (1+2+2) Punkte)

Betrachte die Kurve

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ x \longmapsto \left(x^2 - x,\ x^3 + \sinh x,\ \sin(x^2)\right).$$

a) Bestimme die Ableitung von f in jedem Punkt x.

b) Bestimme die Komponentenfunktionen von f bezüglich der neuen Basis

$$(1, 0, 3), (2, 4, 6), (1, -1, 0)$$

von $\mathbb{R}^3$.

c) Berechne die Ableitung in der neuen Basis direkt und mit Hilfe von Lemma 37.10.

Aufgabe 37.22. (3 Punkte)

Für welche Punkte $t \in \mathbb{R}$ ist der Abstand der Bildpunkte der Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (2 \sin t, 3 \cos t),$$

zum Nullpunkt $(0, 0)$ maximal, für welche minimal?

Aufgabe 37.23. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, die einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den eindeutigen Schnittpunkt $\neq (0,-1)$ der durch die beiden Punkte $(t,1)$ und $(0,-1)$ gegebenen Geraden G_t mit dem Einheitskreis

$$S^1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1 \right\}$$

zuordnet. Zeige, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und bestimme die funktionalen Ausdrücke, die diese Abbildung beschreiben. Zeige, dass f differenzierbar ist. Ist f injektiv, ist f surjektiv?

Aufgabe 37.24. (4 (2+1+1) Punkte)

Auf einem Jahrmarkt befindet sich ein „Doppel-Karussell“, bei dem sich ein Sitz alle 2 Sekunden um einen kleinen Kreis mit Radius 3 Meter dreht, wobei sich der Mittelpunkt dieses Kreises seinerseits alle 8 Sekunden um einen großen Kreis mit Radius 10 Meter dreht. Beide Drehungen sind im Uhrzeigersinn. Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzt der Sitz zum Mittelpunkt den Abstand 13 Meter.

a) Beschreibe diesen Bewegungsvorgang (in einem geeigneten Koordinatensystem) als eine differenzierbare Kurve.[1]

b) Berechne den Geschwindigkeitsvektor dieser Bewegung zu jedem Zeitpunkt.

c) Berechne die Geschwindigkeit (den Betrag des Geschwindigkeitsvektors) dieser Bewegung zu jedem Zeitpunkt.

Aufgabe 37.25. (6 Punkte)

Bestimme in der Situation von Aufgabe 37.24 die Zeitpunkte, an denen die Geschwindigkeit maximal oder minimal wird.

Aufgabe 37.26. (5 Punkte)

Man gebe eine differenzierbare Kurve $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ an, deren Bild genau das Achsenkreuz ist.

[1] Gefragt ist hier nach der mathematischen Überlagerung der beiden Bewegungen, d.h. die große Bewegung verdreht nicht das Koordinatensystem der kleinen Bewegung. Eine volle Umdrehung des kleinen Kreises liegt vor, wenn der Verbindungspfeil aus dem äußeren Drehmittelpunkt und dem Sitz wieder in die gleiche Himmelsrichtung zeigt. Bei der mechanischen Überlagerung, die vorliegt, wenn die Umdrehungsgeschwindigkeit des äußeren montierten Motors feststeht, sieht dies anders aus.

Abbildungsverzeichnis