必ず兒童の學習帳に，記載さすやうにせねばなりません．そして我々の時間の許す限り，順次に之を檢閲してやるのです．そして之に色々の評點をつけてやる事が出來るならば，猶更よいと思ひます．時には發表せない兒童の學習帳の中から，良い問題を選定し，教師の補助の下に之を發表させ，教師が其の良い所に力をいれて，之を奬勵する態度をとるならば，それ等の内氣な兒童も，之に力を得て，次第に發表を好むやうになるものです．

又教師は全兒童又は，特殊な兒童の傾向を知つて，之に對して適當な指導法を，考案することも出來るのです．

3. 數量の關係

教室に於ては，主として教師の構成した事實問題(なるべく教師が兒童の境遇になつて，構成せねばなりません) 又は兒童の構成した事實問題の中で，學級問題と選定されたものを，全兒童が解決するやうにするのです．そしてこれ等の問題を解く時には，全兒童が其の問題の示す實際問題に遭遇した如く考へて，其の解決法を考案するやうに，

指導の方法を講せねばなりません．其の事實問題を實際問題の如く．具體的に想像することが出來ない兒童に對して，之が解決法を工夫させることは，機械的に流れるおそれがあります．

從つて我々は兒童の環境を整理することによつて，兒童をしてなるべく種々の實際問題を解決させ，及びこれ等の事實を正しい言葉，又は文章で發表させることによつて，言葉の內容を豐富にして，之によつて，事實問題を實際問題の如く，想像し得る根柢をつくることに，注意せねばならないのです．

事實問題を，實際問題の如く想像することが，出來るならば，其の解き方を工夫することは，容易になると思ひます．從來我々が算術問題の解き方を考へるには，此の問題は如何なる種類のものであるかを見定め，前にならつた範式に從つて，此の解き方を決定せうとしたのです．惡くすると既知の數の間に，何等の意味もなく，加減乘除の計算を施して，書物にのせてある答と，一致する算式を見出さうと，努力したのであります．

併し實際問題になりますと，無意味に計算を行

ふのではなく，そこにある量の間に具體的作業を施して，其の結果を見出すことが出來るのです．兒童に對しては，無意味な抽象的な數量(作業から出發せない場合には，我々が具體的な數量であると思つて居るものが，抽象的な何等の意味のないものと，感ぜられて居る場合が非常に多いものです)の間に，計算を施して，其の結果を見出すことを要求した場合には，殆ど手の下しやうのないものであつても，之を具體的な實際問題とし，且は作業によつても其の答を求めることを許すならば，兒童は案外困難な問題でも，容易に之を解決することが出來るのです．

又他方に於ては，量の分解結合と結びつけして，加減乘除の意味を授ける，換言すれば計算觀念を養成することによつて，作業から出發して，其の解法を算式で表はすことが出來ます．そして兒童の計算力が或る程度に進んだならば，事實問題を算式を用ひて，解決し得るやうになるものです．これが算術的の解法です．

從つて我々は，算術的方法を指導するにあたり，作業を根柢として，其の解法を見出すやうに，指

導の方法を工夫せねばなりません．この事は前に繰返して述べたところです．

數量の關係

併しながら，事實問題の解法は作業を根柢として，其の算式をつくるやうに，指導せねばならないとはいふものゝ，如何なる問題に對しても始終作業を考へて，其の算式をつくるやうにせよといふのではありません．

其の最初は必ず實演作業に訴へ，或る時は其の事實の要所を圖解して，又或る時には，單に其の作業を想像して，其の算式を作るのですが，同じ種類の問題に，何度も何度も遭遇して居ますと，次第に其の作業が簡單になつて參ります．そして面倒な實演作業や，圖解の作業が次第になくなつて，單に頭の中での作業(內觀作業)が多くなり，これも又次第に簡單になるばかりでなく，終には前に學習した數量の關係と，同樣の關係をもつことを知るだけで，其の算式を作るやうになるものです．玆に數量の關係が抽象され，そして此の關係が，特殊な問題の解法に役立つた事になるのです．

從つて我々は兒童をして，數量の關係を抽象す

るやうに，其の指導を進めて行かねばならないのです．例へば兒童が買物をしたときに，多くの同じものを買つた場合の代金を見出すには，其の最初は其の一つづゝの價を，買つた個數だけ累加せねばならない．それで一つの價に其の個數を掛けると，全體の價が出ると考へて，乘法の算式を作つて居るのですが，かゝる事實に何度も遭遇して居るうちには，

(單價)×(個數)=(全體の代金)

の關係を抽象し，そして此の關係が抽象された後に於ては，これは一つの價である，これは買つた品物の數である．それで全體の代金を見出すには，單價に個數を掛けるとよいのであると考へて，乘法の算式をつくるやうになるものです．斯くの如く，乘法は累加を基礎とするからといつて，いつまでも累加せねばならないことを考へて，其の算式をつくるのではありません．

して見ると，我々は數量の關係を抽象するやうに，指導の方法を講ずることの必要が，分つたと思ひます．それならば，之に對する良法は如何といふ事になりますが，私は之に對して，數を含ま

ない問題の解き方を，考へさすやうにして居るのです．即ち

一つの事實問題例へば

【例1】 1本が3錢する鉛筆を5本買ひました．いくらお金を拂つたらよいか．

【例2】 1本が5錢する筆を4本買ひました．お金をいくら拂つたら宜しいか．

の如き事實問題の解き方を，作業を基礎として徹底的に研究した後に於て，それならば

【例3】 筆や鉛筆などを買つたとき，拂ふべきお金を見出すにはどうするとよいか．

の問題を出して，一本の價に，買つた數をかけると，其の代金が出ることを考へさすやうにするのです．さうすると兒童は自然に，單價，個數，總代金の三つの數量の關係を抽象し，今後これに類似の問題を解くときには，この關係を用ひて，其の算式を作るやうになるものです．

前にあげた，買ひ物をしたときに，拂ふべきお金を見出す問題は，其の問題の中に，少しも數がありませんから，之を數を含まない問題といつたのです．

數量の關係を抽象し，之を簡單に發表するためには，其の數量を言ひあらはすべき名辭が必要です．前の問題に於て，3錢とか5錢とかの數量は，之をまとめて，單價とか，一つの價とかいふことを知りますと，兒童の抽象した數量の關係が，益々明瞭になります．なぜならば，これ等の數量をいひ表はすべき，簡單でしかも適當な，名辭を知らないでも，兒童は多くの事實問題を解いて居るうちには，自然，數量の關係を抽象するものですが，併しこれ等の數量を代表すべき，適當な名辭を知らないと，其の關係は甚だ漠然としたもので之を發表することが困難ですから，之を復演することによつて，其の關係を明確にすることも出來ないのです．從つてこれが役にたゝない場合も，多いからであります．

數量の關係を加減乘除冪等の計算の記號と，等號＝を用ひて，簡單に書き表はしたものを公式といふのですから，學年が進むに從つて，抽象された數量の關係を，公式を用ひて發表し得るやうに，指導せねばならないのです．そして兒童が事實問題の解き方を考へるにあたつて，先づ，與へられ

た數量は如何なるものであるかを見，それから抽象された公式によつて，其の算式をつくるやうに，指導を進めて行かねばならないと思ひます．

例へば

【例】1尺24錢の切れを6尺5寸買へば代金はいくらか．

の問題は，

(與へられた數量)	(求める數量)
24錢………1尺の價	總代金
6.5尺………尺數	

そして(1尺の價)×(尺數)=(總代金)の公式がありますから，これから

$$24錢 \times 6.5 = 156錢$$

の結果を得るやうにするのです．

函數觀念

數量の關係は，之を算術の式で言ひ表はすことが出來たからといつて，これで明瞭になつたとはいふ事が出來ないのです．其の中の一つの數量が變化するにつれて，他の數量が如何に變化するかが明らかになつて，始めて其の關係が明瞭になつた，といふことが出來るのです．例へば上にあげ

た公式

$$(1\text{尺の價})\times(\text{尺數})=(\text{總代金})$$

の場合に於て，尺數が變らない場合に，1尺の價が增加するにつれて，總代金は如何に變つて行くか，今少し之を定量的に研究して，1尺の價が元の2倍3倍……と變るにつれて，總代金は元の2倍3倍……になる．同樣に1尺の價が變らない場合に，其の尺數が元の2倍3倍……等となるにつれて，總代金も亦元の2倍3倍……等となることが分り，最後に總代金が變らない場合に，1尺の價が元の2倍3倍……等となるにつれて，尺數は元の$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$……等となることが分りますと，1尺の價，尺數，總代金の三つの數量の關係が，非常に明瞭になるのです．

私は斯くの如き事をも，低學年に於て望むのではありませんが，學年が進むにつれて，この樣に指導を進めて行かねばならない事は，教師として心得ておかねばならないことゝ思ひます．グラフを用ひて數量の關係を表はすことは，前に述べた二つの數量の關係が，之によつて直觀的に明示されるからであります．從つて第五學年頃から，これ等の關係を明瞭ならしめるために，グラフを之に利用するやうにしたいと思ひます．

一つの數量が變化するにつれて，之に關係ある他の數量が如何に變化するかを考へることは，函數思想を養成することです．つまり函數思想を養成するといふことは，他の言葉でいふと，數量の關係を，一層明瞭ならしめることである，といふ事が出來ると思ひます．そして算術の問題はいふ迄もなく，我々が遭遇する實際問題の解決は，數量が如何なる關係を有するものであるかを知ることによつて，數學的に，簡便に，且は正確に解決されるものでありますから，我々は兒童の函數思想の養成に努力せねばならないのです．そして此の事は，數量の關係を，それの作業から抽象する時期から，始まるべきものと見ねばならないのです．低學年だからといつて，之を打ち捨てゝ置くべきものではありません．之に關して學年相當の考察を，加へて行かねばならないのです．

4. 圖　解

事實問題を構成させることによつて，各種の數

量的事實を經驗させて居ますと，事實問題を讀み又はきいたときに，恰も其の數量的事實に遭遇し，そして自分が其の事實に對して，問題示された疑問をおこしたものゝ如く感ずることが出來るのです，即ち事實問題を，丁度實際問題の如く，具體的に考へることが出來るのです．

從つて實際問題はいふ迄もなく，事實問題も之を實際化して，其の問題に關係ある數量の代りに，計數器等を用ひ，其の分解結合によつて，求める結果を正しく見出すことが出來るのです．或場合には計數器であらはされた數量の代りに，○△等の如き符號を用ひて圖解し，之の分解結合した結果を，一々圖解することによつて，面倒ではあるが其の結果を求めることが出來るのです．

斯くの如く單に數量を分解結合することゝ，量を數へ又は測ることゝを併用して，求める結果を見出す方法を作業的方法と名付けたのです．此の事は前に詳しく述べたところです．

量の分解結合を表はすに計算の符號+,−,×,÷をもつてし，量をあらはすに數字の符號を用ひることを指導するならば，量の分解結合と數へること

によつて，求める結果を見出して居た面倒な作業的方法が，計算を用ひる算術的方法に進展するのです．從つて算術的方法へ進展する爲めには，

(1) 量の分解結合を算式で表はし得るやうに，計算觀念を養成すること．

(2) 算式で示された結果を求めるに，數へることを離れて，簡便に求め得るやうに計算に上達させること．

が必要であるのです，

かくして兒童は，實際問題又は事實問題を解くときに，其の最初は實物又は計數器等を用ひる實演作業から，其の問題を解く算式を作るのでありますが，後には其の簡單なものは，其の實演作業を頭に想像して，之から其の算式を作り，之を計算して求める結果を見出し得るやうになるのです．從つて算式を作る基礎となるものは，作業的方法にあるのです．否作業的方法に於て，一々其の量を數へ又は測ることを，簡便な計算をもつて代用したのが，算術的方法であるのです．

勿論作業から出發して，問題を解く算式を作つて居る間には，頭に想像する作業が次第に簡單に

なつて，後には其の作業を內觀せなくとも，算式が作れるやうになるのです．此の場合に我々は，抽象された數量の關係を用ひて，其の算式を作つたといふのです．そして我々は，兒童をして斯くの如く進展するやう，指導の方法を工夫せねばならないことも，前に述べたところです．

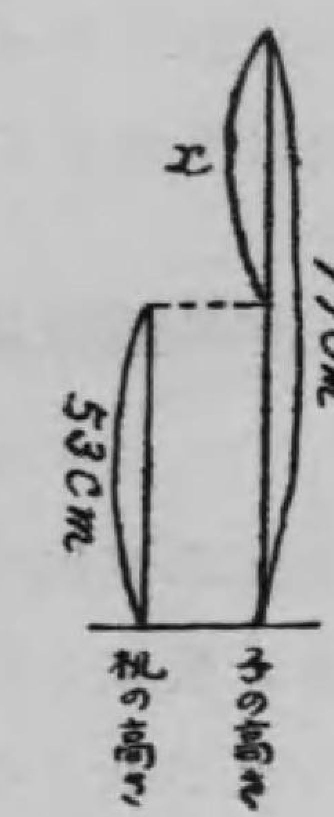
斯くの如く事實問題を具體化して，求める結果を得る爲めには，其の事實に關係ある數量を，如何に分解結合するとよいかを考へて，其の算式を作るのでありますが，此の場合に其の事實を直觀し得る方が，數量の關係を見出すに都合がよいのです．玆に數量の關係とは，一つの數量を得るために，他の幾つかの數量を如何に分解結合するとよいかを表はしたもので．之を計算の記號と等號＝とで表はしますと，之を公式といふのです．

繪畫による圖解

それで事實問題を發表する場合に，其の事實を直觀しやすくする爲めに，其の問題に繪畫をいれることが多いのです．今此の例を示して見ませう．

【例1】この子は算術をして居る．この子のあた

までの高さは，机の高さより何ほど高いか．こしかけは机より何ほど低いか．の問題は，之を右の繪のやうに，其の數量的事實を示しますと，此の子の頭までの高さは，机の高さより何程高いかを見るには，何處の長さを見出すとよいかゞ分り，そして此の長さを見出すには，他の數量を如何に分解結合するとよいかゞ，工夫されるのです．



從つて此の場合の算式を見出すには左圖に示す如く，子の高さと机の高さとを抽象し，Xの量を求めるには，此の二つの數量を如何に分解結合すべきかを考へ，玆にXの量を求めるには，子の高さから机の高さをとればよいことが分ると，此の問題の答を見出すには，

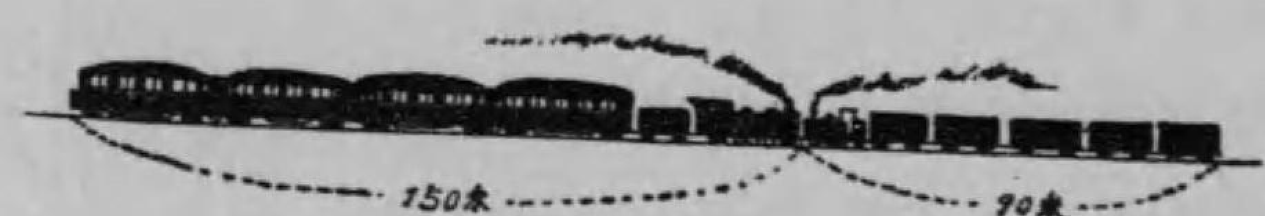
97 cm — 35 cm

の計算を行へばよいと斷定されるのです．

腰掛は机より何程低いかを見るのも，之と同樣です．して見ると此の問題に對して，前に示したやうな繪畫があるために，求める結果を見出すには，之と關係ある他の數量を，如何に分解結合するとよいかを考へる上に，大なる補助をなすものと思ふのです．

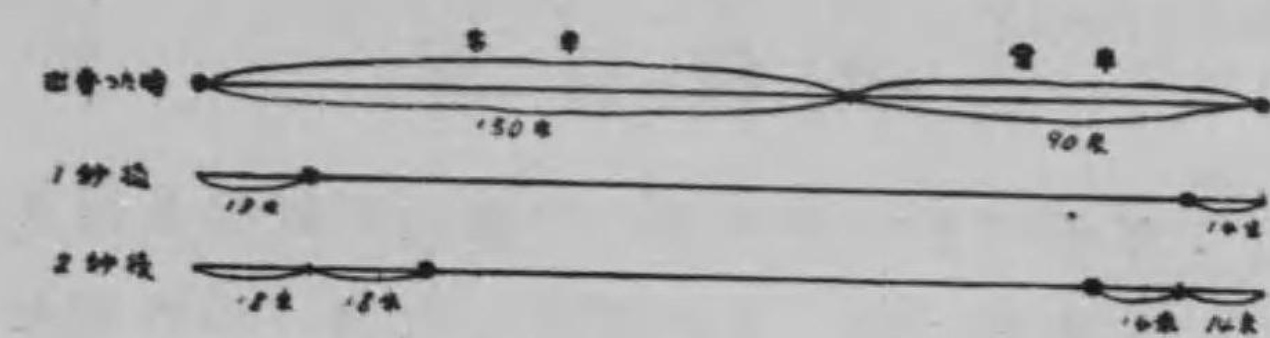
【例2】 長さ 150 米で速さが每秒18米の客車と，長さが90米で速さが每秒14米の貨車とが出會つてから，全く離れるまでには何秒かゝるか．

の問題を次に示すやうに繪畫で表はしますと，此



の兩列車が出會つてから全く離れるまでには，兩列車の最後の點が，繪畫で示された現在の位置から，之が全く相合するところまで近よるに要する時間を求めるとよいことが分り，そして其の時間を求めるには，どうするとよいかを考へるに都合がよいのです．

序ですから，其の時間を求めるにどんなに考へるとよいかを，次に示しておきませう．



上の圖に示すやうに，1秒後には(18米＋14米)だけ，兩列車の最後が近より，2秒後には更に(18米＋14米)だけ近よることが分ります．かくして3秒後4秒後にはどうかを，頭の中に圖を書いて考へて見ますと，(18米＋14米)が求める秒數だけ集まつて，(150米＋90米)になることが分りますから，此の問題の答は

(150米＋90米)÷(19米＋14米)

の算式を計算すればよいことが分るのです．

上の例に示すやうに，事實問題を繪畫であらはすことは，其の事實を明瞭に具體化し，そして數量の分解結合である關係を內觀して，これから算式を作り易くする爲めのものであります．從つて此の繪畫の圖解から，數量の關係を見出す爲めには，必要な數量を分解結合することを想像して，其の算式を作るのであります．

直線圖解

前にも述べましたやうに，數量の關係を作業的に考へる場合には，此の數量を直線の長さで表はすことが，最も便利であるのです．そしてこれは單に長さばかりでなく，金錢とか日數とか人數とか，其の他總ての數量を直線の長さで表はし，此の直線の長さを分解結合することから，其の算式を見出すやうにするのです．

前の例に示したやうに，子の高さ，机の高さ，腰掛の高さ又は列車の長さを，直線の長さであらはすことは，あまり困難もないのでありますが，それでも例へば机の高さといへば，机に含まれて居る他の數量から，特に高さだけを抽象して考へることになりますので，此の點を注意せないと，直に直線の長さを持ち出して，失敗することもあるのです．併し長さを直線の長さで表はすことは，容易です．

總ての數量を直線の長さで表はすこと

次に人數とか金高とかを，直線の長さで表はすことは特に注意して指導せないと，之に困難を感

するものも出來るやうです．今此の指導の順序を示して見ませう．

【例1】 人數を直線の長さで表はすまでの指導．

A． 遊戯其の他の場合に，兒童を一列に整列させ，其の人數を知るには，其の列の長さで知ることが出來ることを歸納させるのです．

從つて第一學年の頃から，遊戯其の他の場合に，兒童を整列さした場合には，其の二組の人數の多少を，其の長さによつて知るやうに，比較させておくことが肝要でせう．

B． 人が一列に整列した繪畫を示し，かくして二つの列の人數の多少を比較させるのです．

それで此の段階に於ては，次に示す如き問題を，繪畫で示すやうにし，それから其の算式を見出すやうに指導するのです，

【例】甲の組の人數は15人で，乙の組の人數は13人です．どの組が何人多いか．

の問題に於て，甲の組の人數から乙の組の人數をとれば，求める結果を得ることは，上の繪畫を見

ることによつて考へられ，それから，

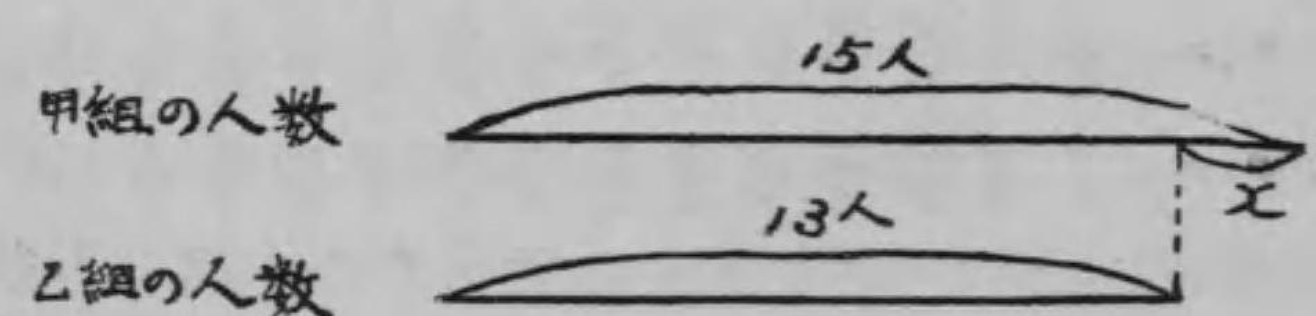
15人−13人

の算式が出來るのです．

そしてかゝる問題を學習する場合には，人數の多少は其の列の長さに比例することを指導しておかねばなりません．詳言すれば列の長さが長くなると人數は多くなり，列の長さが短くなると其の人數は少なくなること，更に進んでは列の長さが2倍になると人數も亦2倍になり，列の長さが3倍になると人數も亦3倍になることを，歸納させることが必要なのです．

C. 人數の多少を直線の長さで表はすこと．

前に示した繪書によつて，人數の多少は其の列の長さに比例することが分りますと，此の一列に整列したものから，列の長さだけ抽象して，人數を列の長さで表はすやうに指導するのです．例へばBに於ての問題は，次の如く圖解し，



さて此の圖解に於けるXを見出すには，15人と13人とをどうするとよいかを考へて，15人−13人の算式を作るやうにするのです．

【例2】 金高を直線の長さで表はすやうに指導する順序．

此の場合も人數の場合のやうに，三つの段階をふむとよいと思ひます．

A. 同じ種類の貨幣を一列に並べ，其の長さによつて金高の多少を比較させること．

B. 同じ種類の貨幣が一列に並んだ繪書によつて，問題の解き方を考へること．

C. 金高を直線の長さで表はし，其の直線の長さを分解結合することを內觀して，問題の解き方を考へるやうにすること．

此のやうに二三種の數量について，其の數量の多少を簡單に表はすには，之を直線の長さで表はし得ることを指導した後は，如何な數量も，直線の長さで表はし得ることを，理解するやうになります．尤も前に示したAの段階は，實演作業に屬するもので，兒童が斯くの如き經驗がある場合には，直にBの段階から指導してもよいと思ひます．

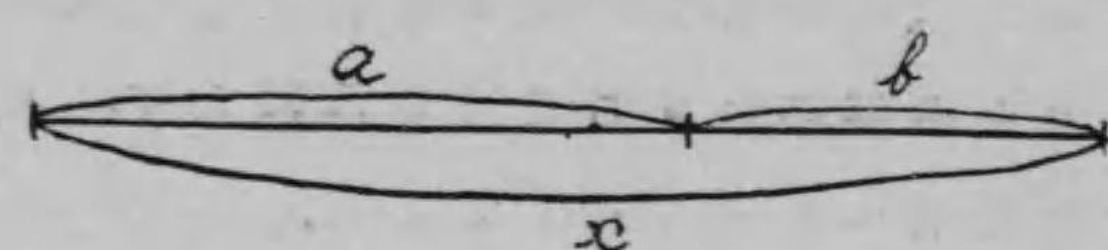
総ての數量を，直線の長さで表はし得ることは，グラフの基礎であるのです．併し此の點に就いては，更にグラフの章に於て述べることにしませう．

直線圖解法．

算式は數量の分解結合を示したものですから，直線の長さで各種の數量を表はした場合にも，やはり其の長さを分解結合したものと考へて，一つの數量を見出す算式を作るのです．從つて其の圖解の基礎となるものは，次の加減乘除を示す四つにあるのです．今之を次に示しておきませう．

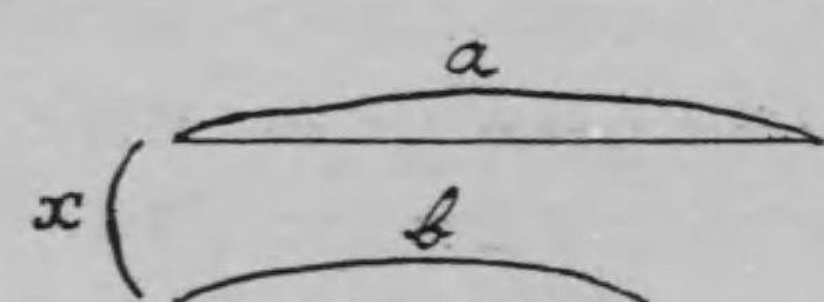
【A】(加法) A＋Bの算式のおこる圖解

(イ)



此の圖解からXを求めるには，A＋Bの計算を行へばよろしい．

(ロ)

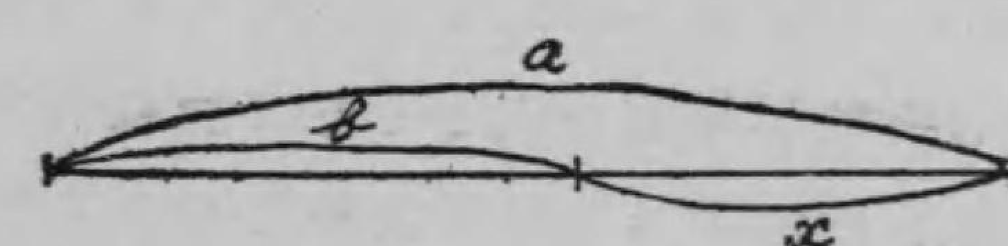


此の圖解に於て，Xを求めるには，A＋Bとす

ればよいことは，頭の中で(イ)に示す如く，AとBとを結合することを，想像させることが必要です．併しA,Bの數量が斯くの如く圖解された場合に，Xを求めるにはA＋Bの算式を用ひることを，幾度も指導して居ますと，此の圖解とA＋Bの式とが結合して，圖解から直にA＋Bの算式を求め得るやうになるのです．尤もXなる文字を記入する場合には，AとBとの量を結合すればよいことを，其の圖解の最初に考へて居るのです．併しこれ等の圖解を用ひるのは，單一關係のものでなく，更に他の關係を見出すことになりますので，他の關係を考へる場合にまで，前に遡つてA,Bの關係を其の分解結合から出發することは，腦力の經濟上から見ても，つまらぬ事と思ひます．

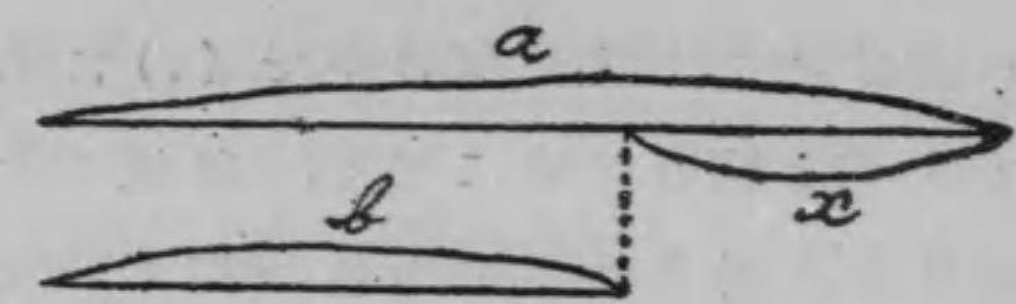
【B】(減法) A―Bの算式のおこる圖解．

(イ)



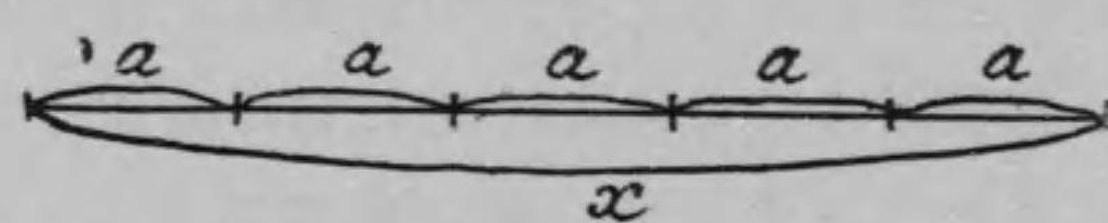
此の圖解から，Xを求めるには，A―Bの計算を行へばよいのです．

(ロ)



二つの數量を比較して其の多少を見ることを，二つの竿の長さ等に於て，十分に指導したのでありますから，此の圖解に於てXの値を見出すには，A—Bの計算を行へばよいことも直に發見するのです．

【C】(乘法) A×5の算式のおこる圖解．



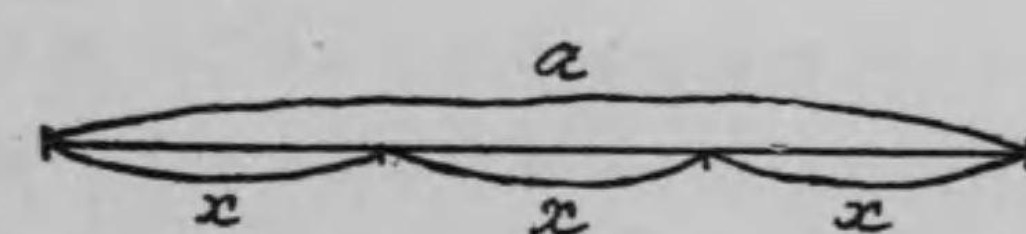
乘法は，加法の特別な場合に於ける簡便法でありますから，其の圖解もやはり加法の特別なものとなるのです．即ち前の圖解に於てXを見出すには，Aを5度加へることが必要ですから，A×5の計算を行へばよいことが分るのです．併し乘數が非常に大きくなつた場合には，其の全部を圖解することが困難ですから，其の一部を圖解して，他は之を想像するより致し方がありません．

又乘數が分數や小數の場合に於ては，之を直線圖解に訴へることは困難であります．そして分數小數の場合に於て，乘法の算式を作るには，之をどうするとよいかは，分數及び小數の章に於て詳細に述べることにします．

【D】(除法) A÷3の算式のおこる圖解．

除法の算式は一つの量を幾つかに等分した場合に，其の量は幾つになるかを見る場合と，一つの量の中に他の量が幾つ含まれて居るかを見る場合との，二つの場合があるのですから，此の圖解も亦次の二つがあるのです．

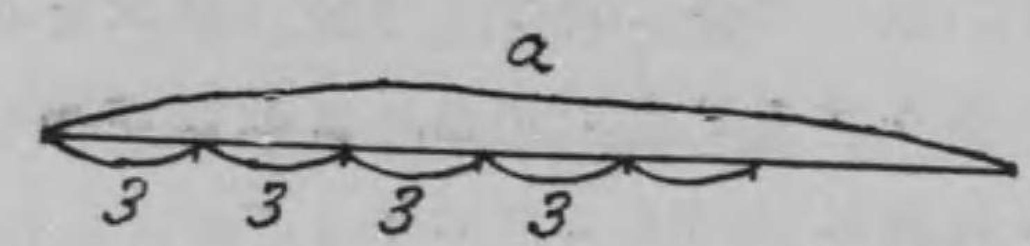
(イ) 等分の場合



此の圖解に於て，Aを三つに等分すれば，Xの値が出ることが考へられると，これからA÷3の算式が發見されるのです．併し此の場合に於ても，乘法の時と同じやうに，除數が大きくなつたときは，其の全部を圖解することが困難です．やはり其の一部を圖解し，等分の作業を考

へて，其の算式を作るやうにするのです．

(ロ) 包含(累減)の場合



此の場合の圖解も，其の答が出ない以上は，之を完全に圖に表はすことが出來ないばかりでなく，Xの値が大きくなりますと，たとへ其の答が分つて居る場合でも，其の圖解が困難でありますから，其の一部を圖解して，累減の作業を頭に考へながら，其の算式を作るやうにするのです．

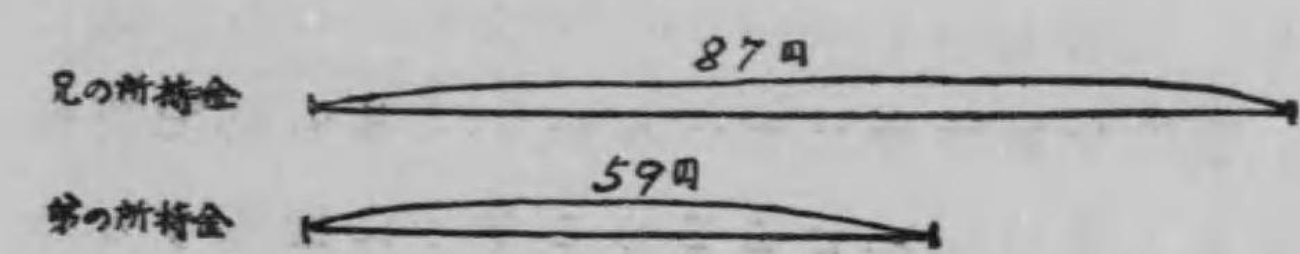
斯くの如く直線圖解を用ひるとき，乘除の多くの問題は，之を完全に圖解することが困難であつて，其の一部を圖解するにとゞめ，之に作業を交へて，算式を考へるより致し方がないのです．併し之を完全に圖解する方法は他にあるのです．即ち次に示す方形圖解と，又小數分數の章で述べるやうに，或る約束の下に，之を圖解する方法であります．

直線圖解の例

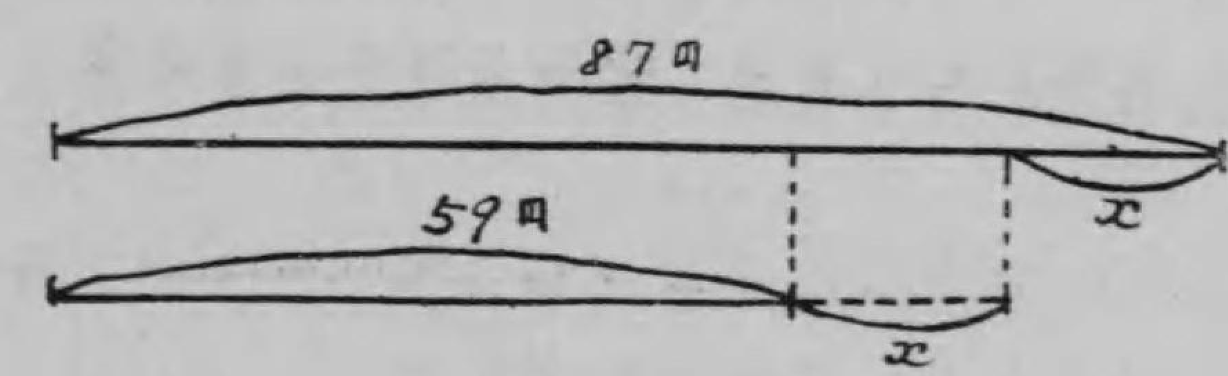
次に直線圖解の例を示しておきませう．

【例1】 兄の所持金は87圓で弟の所持金は59圓である．今二人の所持金を等しくするには，兄より弟に何程の金を與へるとよいか．

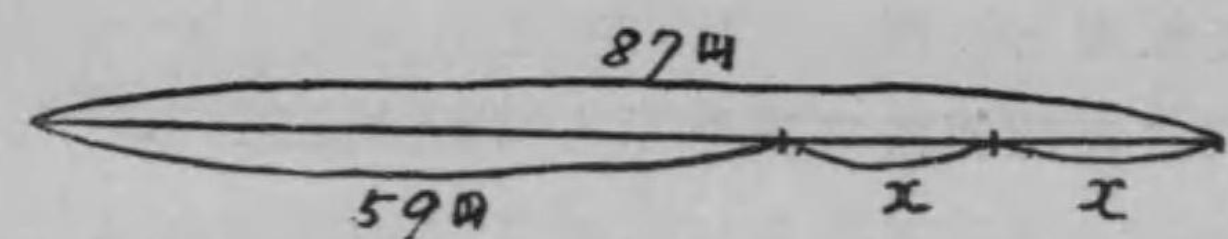
の問題は，先づ兄と弟との所持金を次のやうにならべて圖解するのです．



そして兄弟の所持金を等しくするには，これ等の量をどう處分するとよいかを工夫させて，



それには兄の所持金の中からX圓をとつて，之を弟の所持金の中に加へるとよいことに氣がつきますと，更に此の圖解から，Xと87圓と59圓の間には，次の圖に示す如き關係があることを考へて，



87圓－59圓＝28圓

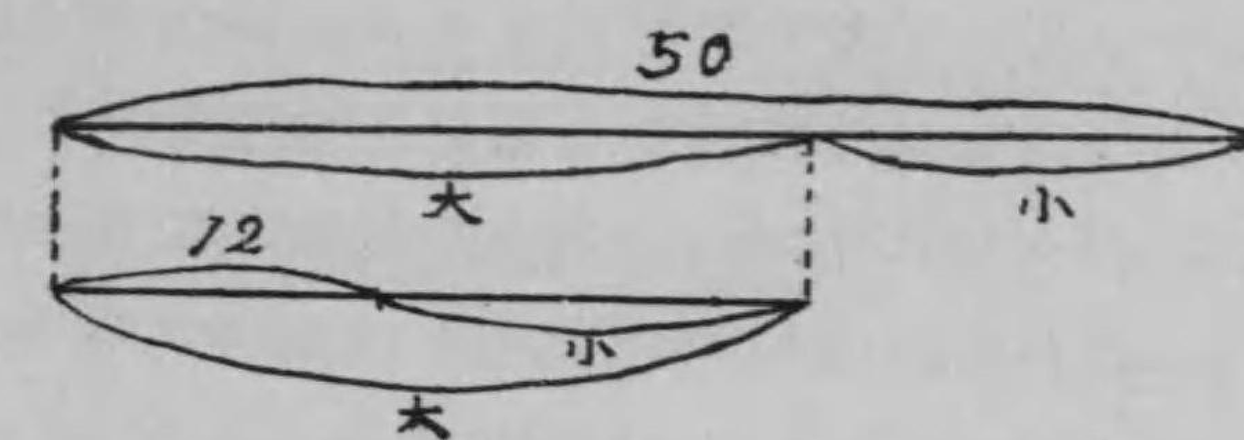
28圓÷2＝14圓

の算式を發見するのです．

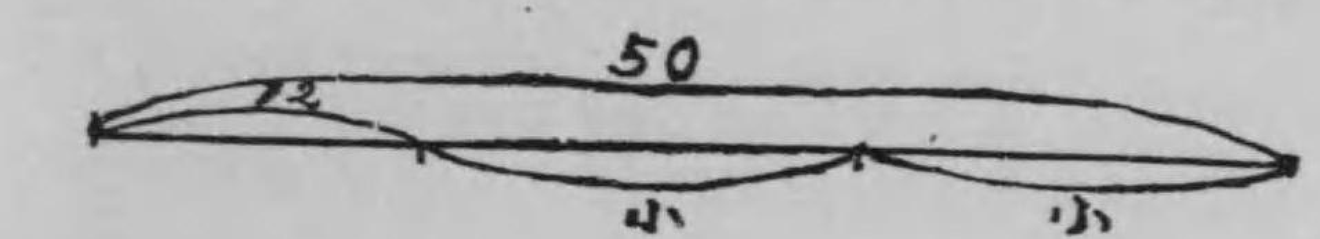
此の例に示すやうに，圖は其の最初から完成したものを書くのではなく，やはり其の各段階に於て，量の分解結合を考へながら，其の要所要所を圖解し，最後に之をまとめるやうに指導するのです．即ち圖解は靜的のものではなく，動的な作業を代表するものと考へねばなりません．從つて圖解は完成したものを作らせるよりも，思考の各段毎に圖解させる方が，指導上便利な事が多いのです．

【例2】 大小二數があつて，其の和は50で其の差は12である．二數は各幾らか．

の圖解も，先づ問題の意味から始めるのです．即ち次の圖の最初のものは，二數の和が50であることを示し，次のものは，二數の差が12であることを示して居るのです．



そして此の圖から，50と12と小との關係が，次の圖に示すやうであることを考へますと，これから，



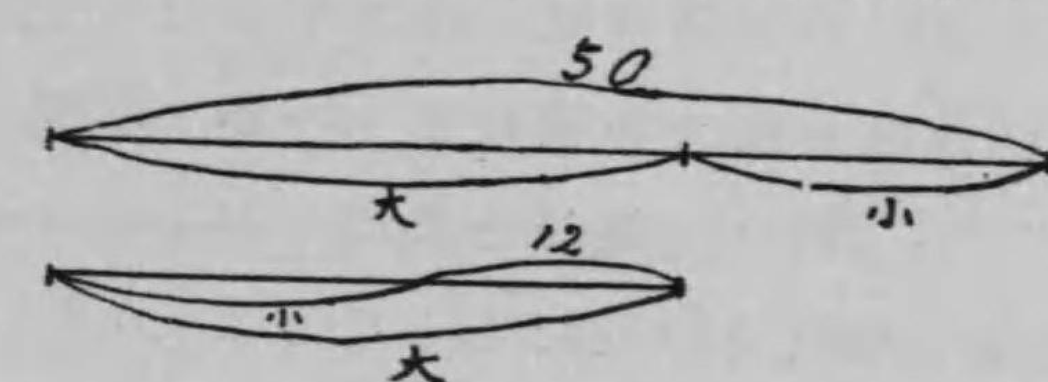
50－12＝38　小の2倍

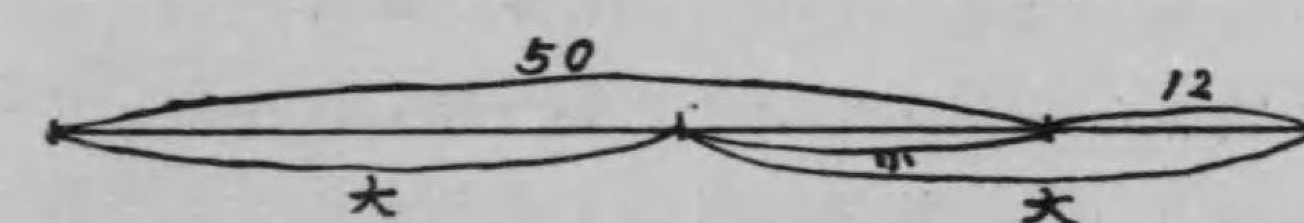
38÷2＝19　小

19＋12＝31　大

なる解法が發見されるのです．

又問題の意味を下圖の如く圖解した場合には，





小に12を足すと大の數が出ることに氣づき，更に小の上に12を足して大なる數を作つたものとしますと，50＋12は大が二つ集まつた數になりますから，これから次の解法が發見されるのです．

50＋12＝62　　大の2倍

62÷2＝31　　大

31－12＝19　　小

方形圖解

乘法及び除法を完全に圖解するには，方形圖解を用ひるとよいのです．併しこれは一つの約束であつて，直線圖解のやうに，數量の分解結合を圖に表はしたものではありません．

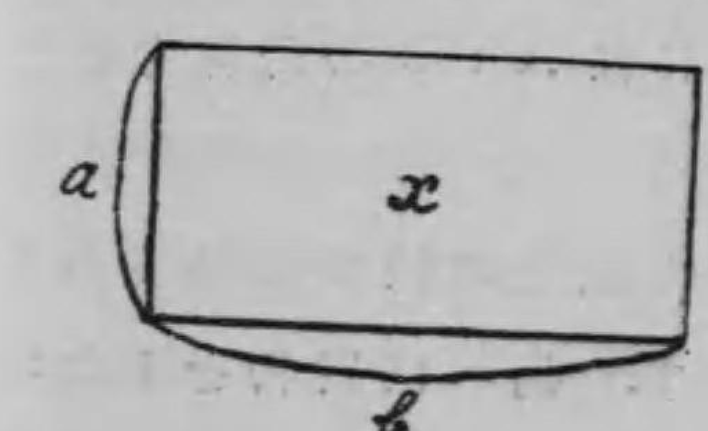
然らば方形圖解は，如何なるものであるかといふに，矩形の面積は縱の長さを表はす數と，横の長さを表はす數との積に等しいから，そして直線の長さで，總ての數量を表はし得るものであるから，二つの數量の積であらはさるゝ一つの數量は，是等の數量を二邊にもつ矩形の面積として，完全に圖解し得らるゝものです．斯くの如く，矩形の面積で一つの數量を圖解することを，方形圖解と

いふのです．

一つの數量が，二つの數量の積であることを知るのは，それ等の數量の關係が，抽象された後の事でありますから，此の圖解を用ひて問題を解くのは，高學年の仕事でなければなりません．併し高學年に於ては，方程式を指導し，之を用ひて困難な問題をも平易に解き得るのでありますから，わざわざ困難な方形圖解を，指導せなくともよいものとも考へられますが，後章に於て述べるやうに，代數的取扱や，方程式を用ひる代數解法を指導する上には，方形圖解の原理を指導しておくことが，便利でありますから，第四學年頃から其の簡單なものを，指導しておくのがよいと思ひます．

今此の圖解の基礎となるものを示しておきませう．

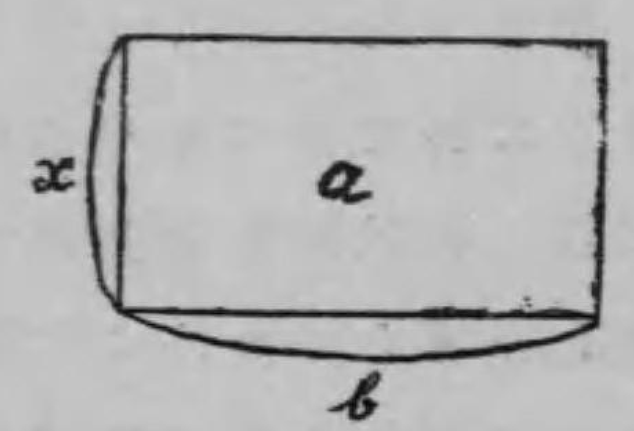
【A】（乘法）A×Bの算式のおこる圖解．



左の圖解に於て，Xは矩形の面積に相當する數量でありますから，A×Bの計算を行へば，見出し得ることが分る

のです. そして矩形は其の縱と横とを交換しても, 少しも變らないのでありますから, Xの値を見出すには, B×A の算式を作つても差支はないのです. 而してA×Bと, B×Aの何れの算式を選ぶべきかは, Xの値を考へてこれから決定するのです.

【B】 **(除法)** A÷B の算式のおこる圖解.



矩形の面積がAで, 其の一邊がBであるときは, 他の一邊は A÷B で表はされるものでありますから, 左圖に於てXの値を求めるには, A÷B の計算をするとよい事は明瞭でせう. そして矩形の面積は, 其の縱と横とを交換しても變らないものですから, 上の圖に於てBのところがXで, XのところがBであつても, Xの値を見出すには A÷B の計算を行へばよいのです.

一つの數量が他の二つの數量の積で表はされる場合は, 非常に多いのです. 例へば買物をした場合に其の代金を求めるには, 單價と其の物の數

を掛けたらよいし, 賃金を計算する場合には, 一日の賃金に働いた日數を掛けるとよいのです. このやうに一つの數量が, 他の二數の積であるものが, 非常に多いのですから, かゝる數量の關係を含む問題は, 之を方形圖解に訴へることが出來るのです. 今之を用ひての問題の解き方を例示しませう.

方形圖解の例.

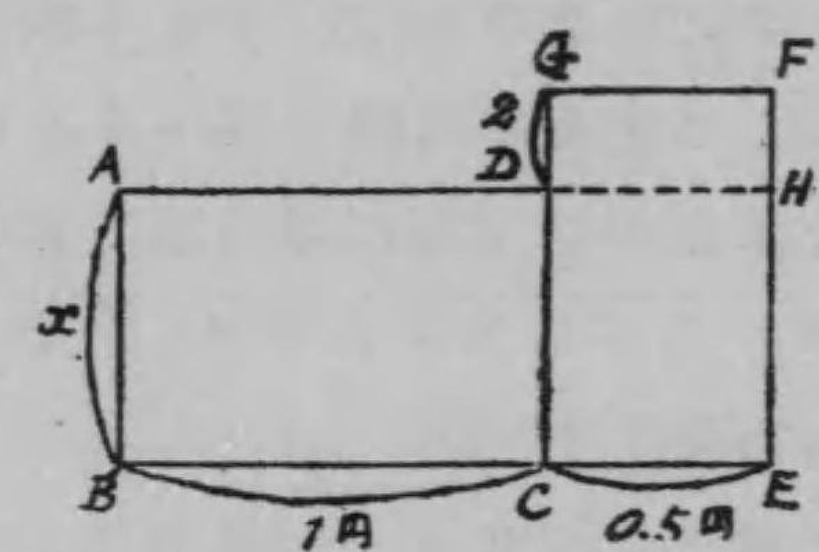
【例1】 10圓札を1圓札と50錢銀貨とに兩替したが, 50錢銀貨の數は1圓札の數より2枚多かつた. 1圓札と50錢銀貨の數は各いくらか.

の問題に於て, 金高は, 貨幣1枚の金高と其の貨幣の數を掛けたものでありますから, 金高は, 貨幣1枚の金高と貨幣の數とを縱横にもつ, 矩形の面積で表はすことが出來るのです.

今縱に貨幣の枚數をとり, 横に貨幣1枚の金高をとつて圖解しますと, 次のやうになります.

1圓札の數をXとすると, BCは1圓で, ABはXでありますから, ABCDの面積は, 1圓札の金高であります. 又CEは0.5圓で, CGは1圓札の數より2枚だけ多いのですから, CEFGは

50錢銀貨の金高です．それでＡＢＥＦＧＤの面積は，１圓札と50錢銀貨との金高の和であつて，これが10圓に等しいことが分るのです．



さて上の圖からＸを見出すには，ＡＢＥＨの面積が，いくらの金高になるかゞ分ればよいのです．そしてＧＤＨＦの面積に相當する金高は，ＤＨが0.5圓でＧＤが２ですから，0.5圓 × 2 = 1 圓であることが分るのです．それでＡＢＥＨの面積に相當する金高は，

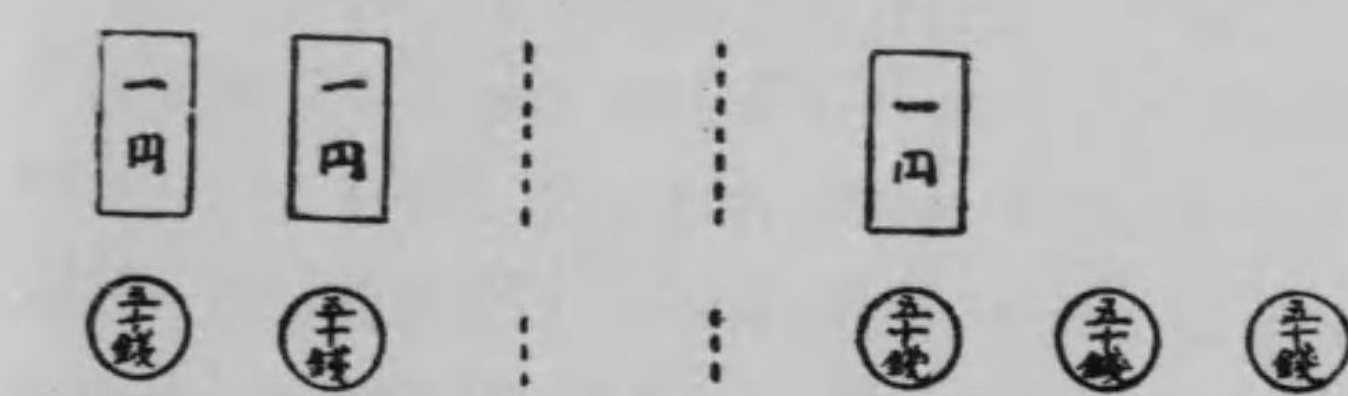
ＡＢＥＦＧＤ－ＧＤＨＦ＝10圓－１圓＝９圓

であることが分ります．そしてＢＥはＢＣ＋ＣＥですから，１圓＋0.5圓＝1.5圓であります．それでＡＢの長さは，９圓÷1.5圓＝６となりますから，１圓札の數は６枚であることが分るのです．從つて50錢銀貨の數は，６＋２＝８となることが分る

のです．

方形圖解になれない人は，上の說明を見てむづかしいものと思はれるかも知れませんが，少しく此の圖解になれますと，上のやうにして，困難な問題を，容易に解くことが出來るのです．

又之を繪書の圖解にしますと，次の通りになります．



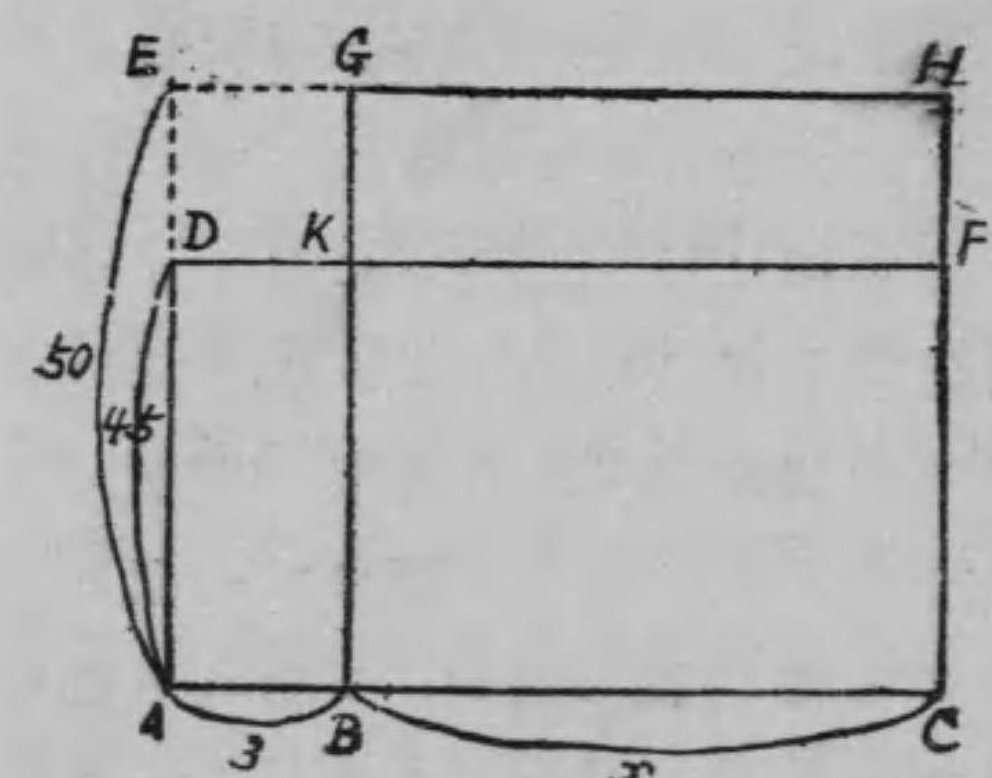
即ち１圓札をあるだけ一列にならべ，其の下に50錢銀貨をならべますと，50錢銀貨の數が１圓札の數より２枚だけ多いのですから，其のならべたところは，上の圖に示したやうになりませう．そして其の全體の金高は10圓ですから，此の中から右の端にある50錢銀貨２枚の金高 0.5圓 × 2 ＝ 1 圓，をとり去りますと，殘り９圓は，一圓札と50錢銀貨を１組とした1.5圓の組が，１圓札の數だけ集まつたものであることが分ります．それで

9圓÷1.5圓＝6は1圓札の數であり，6＋2＝8は50錢銀貨の數であるのです．

此の繪書による圖解と，前にあげた方形圖解とを比較して見ますと，其の間に一致したところがあることに，氣付かれると思ひます．

【例2】 甲の速さは毎分50間で，乙の速さは毎分45間である．今乙が出發してから3分後に，甲が之を追ふと何分後に追付くか．

の問題に於て，速さと時間との積は歩いた距離になりますから，其の距離は面積で表はすことが出來るのです．それで直角をなす二直線を引き，縦に速さ，横に時間をとることにしますと，其の圖解は次のやうになります．



此の圖に於て，乙の歩いた距離は矩形ＡＤＦＣとなるし，甲の歩いた距離は矩形ＢＧＨＣとなります．そして甲が乙に追付いたときは，此の距離即ち二つの矩形の面積が等しくなりますから，此の二つの矩形ＡＤＦＣとＢＧＨＣとから，矩形ＢＫＦＣを取去つた殘りの，矩形ＡＤＫＢとＫＧＨＦで表はされる，二つの距離は等しくなります．

そして矩形ＡＤＫＢの面積は，乙が3分間に歩いた距離ですから，其の面積をあらはす距離は，45間×3＝135間に等しく，それが矩形ＫＧＨＦの面積に等しい距離になるのです．

然るに矩形ＫＧＨＦの一邊 ＫＧは， ＤＥに等しく，これが50間－45間＝5間に等しいから，ＫＦ即ちＢＣに相當する求める時間數は，135間÷5間＝27即ち27分であることが分ります．

それで此の問題は，次のやうに解けばよろしい．

45間×3＝135間　乙が3分間に歩いた距離

50間－45間＝5間　甲乙1分間の速さの差

136間÷5間＝27　甲が乙に追くまでの時間

概　括

以上述べた通り，圖解の指導は

(1) 繪畫による圖解

(2) 直線圖解

(3) 方形圖解

の順序に發展さゝねばならないと思ひます．併し此の順序は，極めて大體を示したもので，之を學年によつて決定すべきものではありません．

なぜならば，圖解は之によつて實物又は事實を具體化し，これによつて恰も實事實物を直觀して居るやうに，數量の關係を抽象し易からしめるものであるからです．そして數量の關係を用ひる場合に，それに關係せない部分をはぶきますと，其の量は次第に單一化されて，直線の長さ又は矩形の面積で表はされるやうになるのです．併し單一化されただけそれだけ，實事實物と遠ざかつて，其の實際問題を想像することが困難になるのです．

事實問題の解法は，實際問題を離れては全く機械的であります．よしやそれによつて正しい答が出たとしても，それがあまりに價値のないものです．從つて圖解も實際問題を離れない程度に於て，之を簡單にするやうに，注意せねばならないと思

ひます．それで何れの圖解によるべきかは，兒童の程度と數量的事實の如何によつて定めねばならないのです．

圖解は數量の關係を抽象する爲めのものであります．そして數量の關係は，其の多くは數量の分解結合にあるのです．一つの數量は他の幾つかの數量を，如何に分解結合して生ずるものであるかを考へるところに，それ等の數量の關係が分るのです．尤も既に抽象された關係を，其の根柢をなす數量の分解結合から離れて，其の儘圖解に表はす場合もありますから(方形圖解によくあります)數量の關係は其の多くは，數量の分解結合にあるといつたのです．

而して數量の分解結合は，動的の作業を意味します．此の量を此の量の上に足すとか，此の量を他の量から取り去るとかの，動的作業を意味するのです．從つて此の動的作業を離れて，數量の關係を發見することは，出來ないものと思ひます．

圖解そのものを見ますと固定的のもので，其の間に數量の分解結合を直觀し得ないのでありますが，圖解から數量の關係を抽象するには，之を基

として，數量の分解結合を，想像せねばならないのです．靜的な圖解を基として，動的な作業が行はれなければならないのです．

從つて圖解をなす場合には，頭に想像した動的の作業の要所要所を圖に表はして，動的作業が如何に行はれたか，そしてこれから如何なる關係が發見されたかを，順序正しく書くやうに指導せねばならないのてす．其の最初から完成した圖解を要求することは，無理な注文であると思ひます．併し，數量の關係を發見する爲めに，或は其の圖解を簡單にする爲めに，最後に一つに纏めることは，獎勵せねばならないと思ひます．

5. 計算觀念の擴張

加減乘除の意味は，量の分解結合の上に，建設せねばならないのです．數學者の考へて居るやうに，加法を基として，之に簡便法又は逆の意味をつけて，抽象的に定めることの非敎育的である事は，前に述べたところであります．

從つて低學年に於ては，主として作業を基礎として，事實問題の解き方即ち算式を發見する様に

指導することが大切でありますが，併し旣に抽象された數量の關係がある場合には，此の關係即ち公式を用ひて，簡便に其の算式を發見し，之に計算を施して，求める結果を見出すことも多いのです．

併し第何學年までは作業を基礎とし，第何學年からは公式によるものと，之を一般的に定めることが出來ないのです．低學年に於ても，旣に抽象された公式によることもあれば，高學年に於ても，新しい數量的事實に對しては，作業を基礎とし，具體的に算式を發見するやうに，指導せねばならないのです．要は數量の關係が抽象されて居るか否かによつて定まるのです．

併しながら，低學年の事實問題は，兒童に對して新しい數量的事實である場合が多く，且は數量の關係が，まだ十分に抽象されてない場合が多いのですから，作業から出發せねばならない場合が，比較的多いのです．そして高學年になるに從つて，旣に抽象された數量の關係を用ひる場合が，次第に多くなつてくるのです．併し數量の關係が抽象されたものであつても，之を複合した場合には，

更に作業から出發せねばならないものも多いのです．圖解は此の作業の重なものです．

計算觀念擴張の必要

數量の關係である公式を用ひて，問題の解き方を考へるやうになりますと，加減乘除の意味は，之を擴張する必要がおこつて來るのです．之を說明する便宜上一つの例に就いて述べませう．

【例】いくらかのお金をもつて買物に行き，1圓30錢の書物を買つたら，殘金が2圓45錢になつた．最初持つて居たお金はいくらか．

の解き方を考へる場合に，最初は作業的に，初め所持して居た金高を分解して，之を支拂つた金と殘金とに分け，そして此の金を支拂つた場合に，これだけの金が殘つたのであるから，最初の所持金は，此の二つの金高を加へたものであると考へて

245錢＋130錢＝375錢

の算式を見出すのでありますが，こんな事實の問題を，幾度も幾度も經驗して居る中には，

(最初の所持金)－(使つた金)＝(殘金)

の關係が抽象され，後には此の關係を表はす上の

公式によつて，其の算式をつくるやうになるのです．

併し前の問題を，上の公式によつて，算式を作らうとしても，最初の所持金が分つてないから，之を作ることが出來ないのです．そしてあくまで之を公式によらうとしますと，玆に同じ數量の關係を，他の方面から眺めた．

(殘金)＋(使つた金)＝(最初の所持金)

の公式を用ひる必要がおこつて來ます．

いふ迄もなく，最初の所持金と使つた金と殘金との關係は，之を三つの方面から眺めることが出來ませう．即ち殘金の側から眺めますと，前にあげた

(最初の所持金)－(使つた金)＝(殘金)

となるし，最初の所持金の側から眺めますと

(殘金)＋(使つた金)＝(最初の所持金)

となるし，又使つた金の側から眺めますと

(最初の所持金)－(殘金)＝(使つた金)

となるのです．

併しながら，我々は同じ數量の關係を，別々の方面から眺めた，總ての公式を抽象することは，

之を記憶する上から考へても，不經濟至極の事です．その中の最も普通な一つの公式を基本とし，他の公式は，之から容易に誘導されるやうに，指導しておくことが，腦力經濟の上からみても，最良の方法であると思ひます．

然らば上にあげた三つの公式の中で，これを基本とするのがよいかといひますと，理論上は其の何れをとつても，少しも差支ないものでせうが，之を指導する上から眺めますと，我々の日常生活に最も多く遭遇するものを，基本にとらねばならないと思ひます．それで此の場合には，殘金の側から眺めた公式を，基本にとるのが，穩當であると思ひます．兒童も此の公式を記憶し，之を運用する場合が多いやうです．

さて前にあげた問題を，基本とする公式

(最初の所持金)−(使つた金)＝(殘金)

を用ひて解かうとしますと，最初の所持金が分らないのですから，之を何等かの符號を用ひて，表はすやうにせねばなりません．そして此の符號を用ひて書き表はされた式から，其の符號の値を容易に見出すやうに指導せねばならないのです．

かゝる場合に，其の未知數を表はす符號としては，習慣上X,Y,Z等の文字が，多く用ひられて居るのですから，○△□◎等の符號を用ひることをやめて，最初からX,Y等の文字を用ひることを指導することが肝要と思ひます．

今最初の所持金をX錢として，前にあげた問題の解き方を考へるに，先づ與へられた數量と求める數量とを次のやうに分類します．

(求める數量)

最初の所持金…X錢

(與へられた數量)

使つた金……130錢

殘金…………245錢

そして上の公式に，夫れ夫れの數を代入しますと

X錢−130錢＝245錢

の關係式が出來，この式からXの値を見出せば，問題の答が分ることになるのです．それで上にあげた關係式からXの値を見出すには，どうするとよいかを考へる必要があるのですが，此の場合に若し

$X - A = B$

の如き式から，Xの値を求めるにB＋Aの算式が容易に見つかるやうに指導して居ますと，前の問題の解は何等の困難もないのです．茲にB＋A等の意味を，量の分解結合を基礎としないで指導することが必要になつて來るのです，計算觀念の擴張は茲に必要があるのです．

加減乘除の意味の擴張

加法と減法とは互に逆の計算であります．從つて二つの數の加法を行つた結果と，其の二つの數の中で何れか一つが知れて居るときに，他の一數を見出すには，減法を行へばよいし，

或る數から一つの數を引いた結果と引いた數とが知れて居る場合に，或る數を見出すには加法を行へばよいのです．これ等の關係は作業的に算式を見出して居る場合に於ても，直觀的に取扱はれて居るのでありますが，第四學年の始め頃から，抽象的に逆の意味を用ひて，其の算式を作り得るやうに，練習せねばならないのです．

乘法と除法とは，丁度加法と減法との關係のやうに，互に逆算であるのです．即ち

二つの數の積と，一數を知つて他の一數を見出すには除法を用ひるとよいし，

或數を他の數で割つた場合に，除數と商とが知れて居つて被除數を見出すには，乘法を用ひるとよいのです．

そして第四學年の始めから，これ等の關係が具體的な量を離れて，抽象的に取扱ひ得るやうに，練習せねばならない事も，加法減法の場合と同樣です．

併し加法と減法，乘法と除法とが，前に述べた逆の關係を有することを抽象させるには，具體的な作業から出發せねばなりません．否低學年に於て，多くの事實問題の解き方を，作業を基礎として考へる時代から，加減及び乘除は，それぞれ逆の關係であることを發見する樣に，指導せねばならないのです．加減乘除の計算を練習したときに，第一二學年の頃から

$3 + X = 9,\quad X + 3 = 6,\quad X \times 3 = 12,\quad 4 \times X = 8$

の如き式のXを求めることから，減法又は除法の計算に這入つた事は，減法又は除法が，夫々加法又は乘法の逆の計算であることを，徹底さす基礎

になると思ひます. 又

【例1】 いくらかの所持金をもつて買物に行き, 1圓30錢の書物を買つたら, 殘金が2圓35錢あつた. 最初の所持金はいくらか.

の如き事實問題の解き方を, 作業的に考へる場合には, 書物代を引いた殘りが知れて居るのであるから, 之に書物代を加へると, 最初の所持金が出ると, 此のやうに考へるのです. それで減法を後に戻すには, 加法の計算が必要であることが分るだらうし, 又

【例2】 幾個かの蜜柑を4人に等分したら, 1人に3個づゝ當つた. 蜜柑の數は幾個であつたか.

【例3】 幾らかのお金で1本5錢する筆を買つたら4本買へた. 其の金は幾らであつたか.

の如き事實問題を, 作業的に考へる場合には, 除法の結果を後に戻すには, 乘法が必要であることを作業的に了解させることが出來るのです. 斯くして我々は低學年から, 加減は互に逆の計算であるし, 乘除も亦互に逆の計算であることを, 指導せねばならないのです.

代數的取扱

第四學年になりますと其の最初から,

$X+A=B \quad A+X=B \quad X-A=B \quad A-X=B$

$X\times A=B \quad A\times X=B \quad X\div A=B \quad A\div X=B$

の八つの式から, Xを見出すには如何すべきかの, 抽象的取扱ひに這入らねばなりません. 斯くの如く未知數Xを含んだ式から, Xを見出すことを指導し, 之を用ひて事實問題の解き方を簡明にすることを, 代數的取扱ひといつて居ます. 私は此の學年頃には, 代數的取扱ひよりも, 寧ろ代數的考へ方でありたいと思つてゐるのです. (もし代數的考へ方の言葉を使用することが出來るならば) 此の點に關しては後に述べることにします.

前にも述べた樣に, 加法と減法とが互に逆の計算であり, 又乘法と除法とが互に逆の計算であることが, 作業を基礎とする低學年から常に指導して居ますと, $X+A=B$, $A+X=B$ の如き式からXの値を見出すには, $B-A$ の計算が必要で, $X-A=B$の式からXの値を見出すには, $B+A$ の計算が必要であることを, 容易に理解さすことが出來るのです. 乘除も亦之と同樣で$X\times A=B$の如き式から, Xの値を求めるには $B\div A$ の計算

が必要で，X÷A＝Bの式からXの値を求めるには，B×A又はA×Bの計算が必要であることを，理解さすことが出來るのです．

併しA－X＝BとA÷X＝Bとの式から，Xの値を見出すことは，前の六つの式から，Xの値を見出すやうには，たやすく參りません．なぜならば之を逆の意味から導き出さうとすると，之を二段に考へることが必要であるからです．即ち

A－X＝Bは，AからXを引いた結果がBですから，BとXを加へたものがAとなるのです．即ちA＝B＋Xです．それでBとXとを加へたものがAですから，XはAからBを引いたもの，即ちA－Bとなるのです．之を簡明に書き表はせば

A－X＝B　∴ A＝B＋X　∴ X＝A－B.

A÷X＝Bの場合も之と同様で，之を式で表はしますと

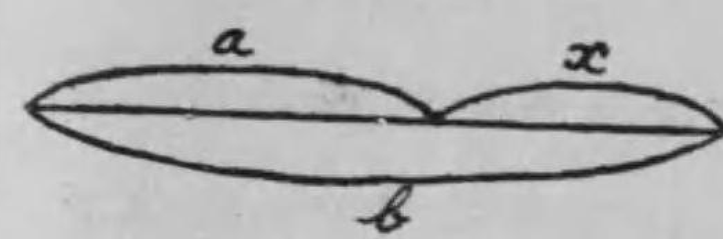
A÷X＝B　∴ A＝B×X　∴ X＝A÷B

となつて，之を二段に考へて，Xの値を見出さねばならない事が分りませう．

併し上の指導法は低學年に於て，逆の意味が作業的取扱ひから，徹底して居る場合であつて，之

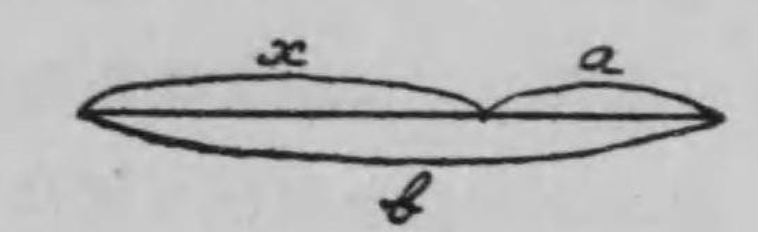
が十分でなければ，之を次の如き圖解の作業から，Xの値を見出す算式を，發見するやうに指導せねばなりません．今其の圖解を示しますと，次の通りになります．

1. A＋X＝B



∴ X＝B－A

2. X÷A＝B

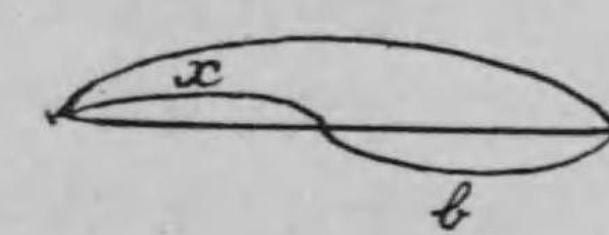


∴ X＝B－A

3. X－A＝B

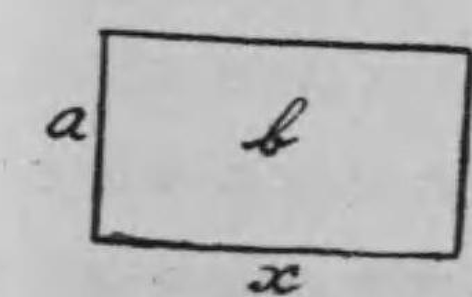
∴ X＝A＋B

4. A－X＝B



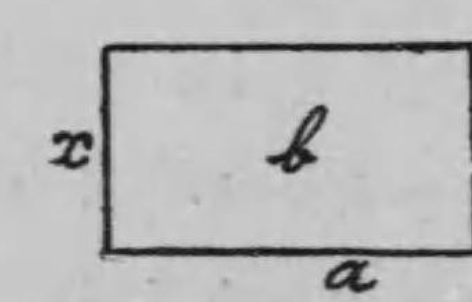
∴ X＝A－B

5. A×X＝B



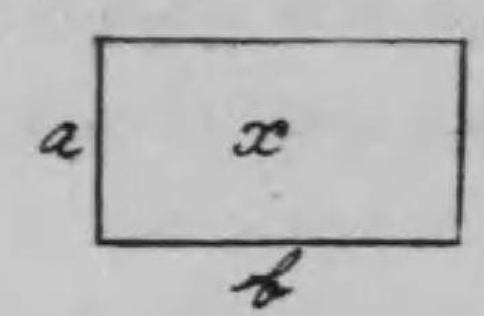
∴ X＝B＝A

6. X×A＝B



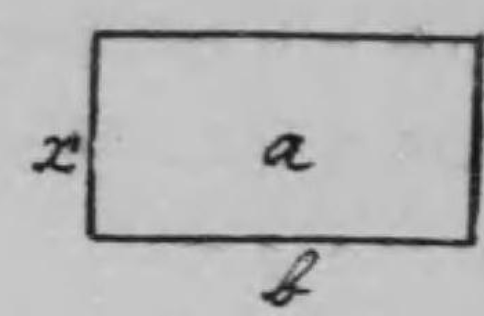
∴ X＝B÷A

7. X÷A＝B



∴ X＝A×B

8. A÷X＝B



∴ X＝A÷B

上に示す圖解は乘法及び除法を，矩形の縱，橫，面積の關係を用ひて表はしたものですから，之が最も合理的な方法でありますが，まだ縱，橫，面積の關係が十分に分つてない，第四學年の兒童には少し困難であると思ひます．

こんな場合には形式不易の法則を用ひて，歸納的に其の算式を見出すより，外に良法はないのです．形式不易の法則は，或る關係は如何なる數の間にも，同一であるといふ事ですから，(前にも此の點に就いて述べましたからそれを參照して下さい) 例へば

A÷X＝B

の如き式から，Xの値を求めるにはどうするとよいかを考へるには，小さな數の間に計算を施して12÷3＝4，10÷5＝2の如き式から，3又は5

を見出す方法を見付けるのです．そしてこれの計算法が分ると，此の形式を用ひてA÷Bの計算を施せば，Xの値が見出せることを發見するのです．

6. 代數的考へ方

事實問題には，其の問題の事實そのものが，量の分解結合を表はし居るものが多くあります．例へば

【例1】 倉に米が58俵入れてありましたが，そこへ又16俵入れました．皆で何俵になりましたか．

【例2】 太郎さんの家では鷄を32羽飼つて居ましたが，今日13羽賣りました．あとに何羽居ますか．

の問題を見ますと，最初の問題では58俵と16俵の二つの量を足す事實が，明らかに發表されて居り，後の問題では，32羽から13羽だけ取り去る事實が，明らかに發表されて居るのです．

このやうに加減の式で計算される事實問題の多くは，量の分解結合の事實が，明示されて居るのですから，問題に示された量の分解結合其の儘を，式で表はすことが出來ませう．此のやうに問題に

示された事實其の儘を，直に式に表はすことを，問題の意味を式で表はすといふのです．

乘法の問題は，累加の事實から出發する場合には，やはり，問題の意味から算式を作るといつてよいでせう．例へば

【例3】 春子さんは1冊12錢のノートを4冊買ひました．何錢拂へばよいですか．

の問題は，12錢を4度加へると，拂ふべき金が出るのであるが，12錢を4度加へることは，12錢×4の符號であらはすのであると考へて，其の式を作るときは，これは又問題の意味から算式を作つたと見てよいでせう

併し數量の關係が抽象されて，單價に冊數を掛けると代金が出ると考へて，其の算式を作つたものとしますと，數量の關係から，其の式を作つたものといはねばなりません．

除法の問題も之と同樣で，等分又は累減の作業から出發して，其の算式を作つた場合には，問題の意味から，其の算式を作つたものと，いふべきでありますが，公式から其の算式を作つた場合には，數量の關係から，算式を作つたものといはね

ばなりません．

前に加減の問題は，問題の意味から算式を作ることが多いといひましたが，これは比較上のことで，やはり公式即ち數量の關係から，其の算式を作る場合も多いのです．例へば物品を賣買した場合に，利益又は損失を見出す場合とか，品物を買つた場合に，釣錢をとるやうな場合には，公式によつて算式を作る場合が多いのです．

併しながら，問題の意味から算式を作るとか，數量の關係から算式を作るといつたからとて，其の二つの間には嚴格な區別があるものでありません．只公式から出發したときは，數量の關係，量の分解結合の作業から出發した場合には，問題の意味から，算式を作つたものと區別したまでの事で，何れの場合に於ても，數量の關係を式に表はしたものには相違ないのです．なぜならば作業による場合でも，これを抽象したときは公式として發表されるもので，其の二つの間には何等の區別がないからであります．

此のやうに，事實問題の解き方を考へる場合には，問題の意味から或は數量の關係から，式を作

るものでありますが，或る種類の問題になりますと，未知の數量を何等かの符號（通例X,Y,Z等の如き文字で之を表はすことは前に述べた通りです）で表はさないと，其の問題の意味又は問題に含まれて居る數量の關係を，式で表はすことが出來ないものがあるのです．例へば

【例】いくらかの金で1圓30錢の書物を買つたところが，殘金は2圓45錢となつた．最初の所持金はいくらか．

の問題は，其の問題の意味から（或は數量の關係から）式を作らうとしても，最初の所持金をX錢の符號で表はさなければ，作ることが出來ないのです．

併し最初の所持金である未知の數量を，X錢で表はしますと，此の問題の意味は

X錢－130錢＝245錢

の式であらはされますから，若し我々がこゝに書き下した式から，Xの値を定める算式を，容易に書き下すことが出來る場合には，此の式を基として問題の解き方を，比較的容易に發見することができるのです．

このやうに問題の意味又は數量の關係から，未知の數量Xを用ひて，之を式であらはし，此の式を基として，問題の解き方を考へて行くことを，代數的考へ方といふのです，そしてXを用ひて問題の意味又は數量の關係を，式であらはさねばならぬやうな問題は，普通に逆思考の問題といつて居ます．

それ故に代數的考へ方の基本となるものは，

(1) 問題の意味又は數量の關係を，Xの未知數を用ひて，式で表はし得ること．

(2) Xを用ひて書き表はされた式から，機械的に或は直覺的に，Xの値を求め得ること．

の二つで，之が容易に出來るやうに指導せねばならないのです．そして此の考へ方に習熟した後は最初から解き方の算式を考へる場合に比べて，はるかに容易であるのです．代數的考へ方を主張する根據は，主としてこゝにあるのです．

未知數をあらはすにXを用ひ，問題の意味又は數量の關係を等式であらはし，これからXの値を求めるには，如何なる計算を行へばよいかを考へて，與へられた問題を解くことは，之を代數的考

へ方といふ事を述べました．そしてXを含む等式を作ることは，Xを求める算式を作る方便となるもので，算術的解法に於ける圖解に相當するものです．

圖解も問題を解く爲めの方便でありますから，之を實際に書かなくとも，單に其の作業を想像しながら，解き方の算式を作ることが出來れば，これにこした事がないやうに，代數的考へ方に於ても，Xを含む等式を書き下すことなく，直に解き方の算式を作ることが出來る事を希望するのです．

併し機械的であつてはなりません．其の等式を豫想しながら，之を逆に考へて解法の算式を作るやうに指導するのです．代數的の考へ方と名づけた理由はこゝにあるのです．なぜならば，必ず其の等式を書き下し，そしてこれから順々に，Xの値を求める計算を逆に考へて行き，最後にXの値を求めるやうにすることにしますと，之は代數的取扱といつた方が，適當と思ふからです．從つて代數的の考へ方は，代數的取扱より少し意味が廣いものと思へばよろしい．

代數的考へ方による例題

【例1】或數を8倍したら200になつた．元の數は幾らか．

の問題は，或數をXとしますと，問題の意味は

$$X \times 2 = 200$$

となりますから，此の等式から考へて，或數を見出すには

$$200 \div 8 =$$

の計算を行へばよい事を發見するのです．

【例2】面積が120平方糎で長さが15糎の矩形の幅は何程か．

の問題は，幅をX糎とし，そして長さと幅との積が面積である關係を，式で表はしますと

$$15 \times X = 120$$

となりますから，之から考へて，幅の長さは

$$120 \div 15 =$$

の計算を行へばよい事が分るのです．

【例3】1リットル入の桝に直徑8.5糎の圓筒形のものがある．此の桝の深さは幾糎か．

の問題は，此の桝の深さをX糎としますと，此の桝の容積は

6.6 × 8.6 × 0.785 × X立方糎

であつて，これが1リツツトルの體積1000立方糎に等しいのですから，此の關係を式で表はしますと

8.6 × 8.6 × 0.785 × X = 1000

となります．それで此の等式から考へて，此の桝の深さは

1000 ÷ (8.6 × 8.6 × 0.785) =

の式を計算すればよい事が分るのです．

【例4】 或人毎月28圓の家賃を拂ふが，それは月給の$\frac{7}{40}$である．此の人の月給は幾らであるか．

の問題は，此の人の月給をX圓とすると，家賃の28圓はX圓の$\frac{7}{40}$であることが分りますから，此の關係を式で表はしますと

X圓 × $\frac{7}{40}$ = 28圓

となります．それで此の等式から考へて，此の人の月給は

28圓 ÷ $\frac{7}{40}$ =

の式で計算されることが分るのです．

【例5】 モスリン大幅1丈3尺6寸で14圓36錢のものは1尺幾らか．

の問題は，1尺の價をX錢としますと，代金は1尺の價に尺數を掛けたものでありますから，1丈3尺6寸即ち13.9尺の價は，X錢 × 13.6で，これが14圓36錢ですから，此の關係を式で表はしますと，

X錢 × 13.6 = 1436錢

となります．それで此の等式から考へますと，1尺の價は

1436錢 ÷ 13.6 =

の式を計算するとよいことが分るのです．

こゝに注意しますことは，13圓36錢の如き十進諸等數は，之を單名數として式に書き表はすやうに，最初から指導せねばならないことです．よく式を書くときに，14圓36錢の如く，單位の名を二つ以上も用ひることもあるやうですが，單位の名を二つ以上も用ひるのは，不十進諸等數の場合に限つて，十進諸等數は1436錢又は14.36圓のやうに，必ず單名數にするやうに，注意せねばならないのです．

【例6】 或人日本郵船株50株から125圓の配當金を得たが，之は買價に對して利廻0.0526餘に當

つて居る. 1株の買價は何程か. 但し1株の拂込高は50圓で半年毎に決算するのである.

の問題は, 1株の買價をX圓とすると, 配當金は其の買價X圓に對して 0.0526 に當るのでありますから, 1株に對する配當金は

X圓 × 0.0526

になります. そして此の配當金は, 1株に對する半季の配當金

125圓 ÷ 50 = 25圓

の2倍(1株に對する1ヶ年の配當金)でありますから此の關係を等式に表はしますと

X圓 × 0.0526 = 25圓 × 2

となります. それで1株の買價は

25圓 × 2 ÷ 0.0526 =

の式を計算すればよい事が分ります.

此の問題のやうに, 1株に對する1ヶ年の配當金を, 二通りの方法で見出し, それを等しいとおいた等式から, 未知數を見出す式を發見する場合もあるのです.

7. 事題問題の考へ方

算術教育の目的は, 實際問題の構成と, 其の解決力を發展さすにあるのです. そして實際問題の解決力は, 事實問題の學習によつて, 伸ばされることが, 殆ど其の全部でありますから, 事實問題の學習は, 算術教育の大部分を, 占めねばならないのです.

事實問題の解き方は, 之を具體化し恰も實際問題の如く考へることによつて, 一層容易になるのです. 或る場合には, それよりも模式問題にならつて解く方が, 極めて容易な場合もありませうが, かくては實際問題の解決に, あまり關係のないものとなるのです. 我々が從來教授して居たやうに, 模式問題から這入る方法は, たとひそれによつて事實問題を解く力が伸びたとしても, 兒童の數量生活には關係の少ないものとなるのです. 是非共之を實際化し, 實際問題と關係をたもちつゝ, 其の解き方を考へるやうに, 指導せねばなりません.

事實問題の解き方に關する指導は, これまでに大體述べ盡しました. 今之をまとめて見ますと,

次のやうになります.

事實問題の解き方を考へるには,

(1) 實演作業によつて,

實物又は其の代表物を用ひ, 問題の示す事實を實際に行つて見て, そこにあらはるゝ數量の關係を見つけ, これより算式を作るやうにするのです.

(2) 圖解の作業によつて.

實際の數量の代りに, 繪畫又は直線の長さ等を用ひ, そして問題の示す事實の圖解から, 與へられた數量と, 求める數量との關係を發見し, これによつて, 其の解法を見出すやうにするのです.

(3) 既に抽象された數量の關係を用ひることによつて.

實演作業又は圖解の作業に於ては, 求める數量を得る爲めに, 與へられた數量又は既に發見された數量を, 如何に分解結合すべきかを考へ, 其の分解結合を數の分解結合たる算式に飜譯して, 其の解法を發見するのでありますが, 此の場合に於ては, 既に抽象された公式(例へば矩形の面積＝縱×横, 圓周＝直徑×圓周率の如きもの)又は法則によつて, 其の算式を作るやうにするのです,

(4) 代數的の考へ方によつて

事實問題の事實又は數量の關係を, 一つの等式をもつて表はし, 此の等式に於けるXの値を見出すには, 如何なる計算を行へばよいかを, 順々に考へて行き, かくして其の解法を得るのです.

(5) 形式不易の法則を用ひることによつて.

數學は其の形式の一般化を極度に尊重するものです. 從つて小さな整數の場合に得られた公式や法則が, 大きな整數の場合又は新しい分數や小數の場合にも, 例外なく當てはまるやうに定められて居るのです.

此の點に就いては, 分數及び小數の章を見て頂くと, 御了解下さることゝ思ひますが, 兎に角我々の經驗し得らるゝ小さな整數の間に於て行はるゝ數量の關係が, 一層大なる整數又は分數小數の間に於ても, 同樣の關係が成り立つのでありますから, 此の事を利用し, 與へられた事

實問題の數量的事實を，小さな整數の間に實演させ，かくして發見された解法から，與へられた問題の解法を考へることを，形式不易の法則を用ひるといつたのです．更に此の點に就いて，詳細に說明することにします．

事實問題解法の根柢となるものは，以上に述べました五つにあると思ひますから，我々は學級により兒童によつて，適當な方法を指導せねばならないのです．

茲に一言しますことは，事實問題の解法は，あくまで兒童をして，自ら發見させるやうにせねばならない事です．兒童が困難を感じて居る場合には，個別的に此の考へ方を指導するのはよろしいが，此の場合に於ても，出來るだけ指導を少なくせねばなりません．兒童が苦心して其の解法を發見するところに，無限の價値があるのです．

形式不易の法則を用ひる考へ方

今形式不易の法則を用ひる考へ方を例示しておきませう．

【例1】 大正三年に生れた子は，大正十六年には數へ歲幾つになるか．

の問題は，輕卒な兒童の間には

16年－3年＝13年　答13歲

のやうに解くものが多いのですが，之を大正十六年に生れた子は幾つか，大正十五年に生れた子は幾つか，大正十四年に生れた子は幾つか…………といふやうに，我々の考へ易い年に生れた子供に就いて，其の年齡と其の年齡を見出す算式とを考へて見ますと，大正三年に生れた兒童は

16年－2年＝14年　答14歲

であることが分るのです．

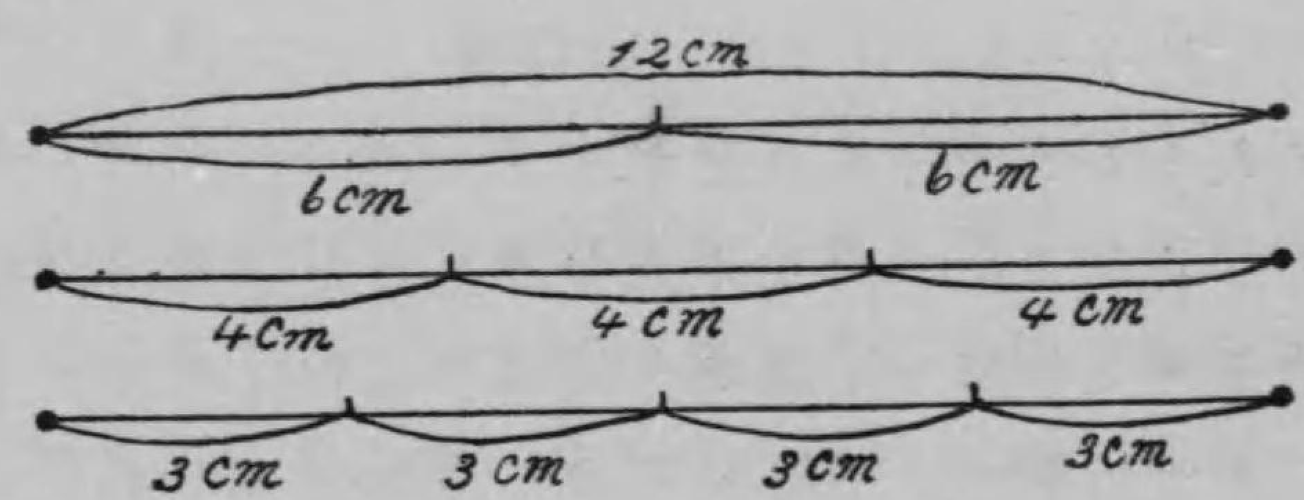
なぜならば，大正十六年に生れた子は，16年－15年＝1年即ち1歲で，大正十五年に生れた子は，16年－14年＝2年即ち2歲であるからです．

日數を計算したり，月數又は年數を計算する場合は，我々の經驗し易い，然も答の分つて居るものに就いて，其の答を見出すには如何にすべきかを考へ，其の法則から演繹して，問題を解くやうに指導せないと，誤謬を來たす場合が非常に多いのです．

【例2】 2912米を距てゝ2本の電信柱がある．今其の間に27本の電信柱を立て，柱と柱との間隔

を同じやうにするには，幾米づゝ隔てゝ立てたらよいか．

の問題を考へるに，最初2本の柱が12糎隔てゝ立つて居るものとし，此の間に1本の柱を立てると，柱と柱との間隔は，圖に示す通り6糎となり，2本の柱を立てると，柱と柱との間隔は4糎となり，3本の柱を立てると，柱と柱との間隔は3糎となります．



そしてこれ等の答は

1本の場合　12糎÷2＝6糎

2本の場合　12糎÷3＝4糎

3本の場合　12糎÷4＝3糎

となるのですから，これから歸納した法則を，問題の場合にあてはめて，

2912米÷(27＋1)

の算式を作り，之を計算して其の答を見出すやう

にするのです．

此のやうに，與へられた問題の解き方が分らない場合には，數を簡單にして，それと數量的事實の全く等しい問題を作り，そして其の解法を發見することによつて得られた法則を，與へられた問題に適用するのです．

従つて困難な問題が與へられたとき，之と全く數量的事實の等しい問題が，容易に作り出され，且は斯くして作られた問題の答は，作業によつて見出されるか，又は問題を作る場合に，分つて居るのですから，此の答を得る爲めに，與へられた數の間に如何なる計算を行へばよいかを考へ，其の法則(數量の關係)を抽象し得るやうに，指導せねばならないのです．

こゝに述べた事柄を，明瞭にする爲めに，今一つの例題を示しておきませう．

【例3】 2錢切手と3錢切手と合はせて35枚あつて，この價は合はせて92錢である．各幾枚づゝあるか．

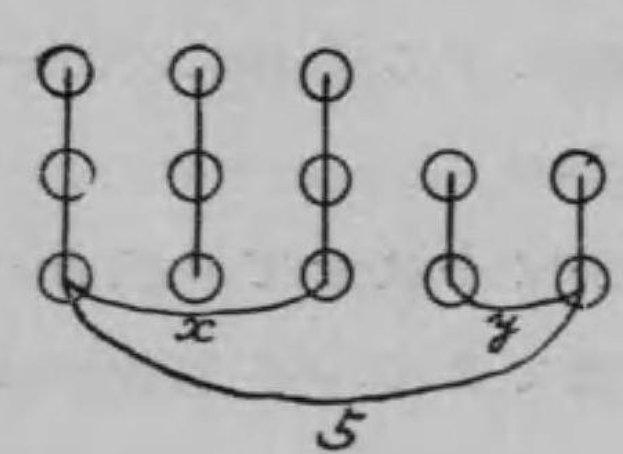
の問題が與へられたとき，容易に其の解法が發見し得なかつた場合には．これと全く數量的事實の

等しい問題を作つて，最初から分つて居る答を，どうして見出すとよいかを，考へて見るのです，即ち

2錢切手を2枚，3錢切手を3枚あるものとすると，其の枚數の合計は5枚で，其の價の和は13錢であります．それで5枚と13錢とから，答2錢切手が2枚，3錢切手が3枚を見出すには，どうするとよいかを考へるのです．

此の考へ方も色々ありませう．2錢，3錢，5枚，13錢與へられた數の間に，色々と計算を行つて見て，2枚,3枚の答を見出すやうにし(試行錯誤)そして後から其の計算の理由を考へるものもあるでせう．

又下圖に示すやうな圖解の作業から，3錢切手又は2錢切手の數X,Yを見出す方法を工夫するものもありませう．



兎に角色々な方法を用ひて，其の結果を見出し得た場合は，更に之を他の同樣な問題（勿論答の分つて居る)に，其の方法を適用して見て，正しく

其の結果が出ることが分つたならば，玆に其の方法を與へられた問題に適用して，其解法を得るやうにするのです．

算術の困難な問題を考へるには，此の方法に限るのです．そして與へられた問題と全く等しい多くの問題を作り，其の一つ一つの問題に就いて，其の解法を自ら學習することゝなりますので，算術の力は非常に伸びることになるのです．從つて我々は，低學年から，斯くの如き考へ方の態度を養成せねばならないと思ひます．

數を簡單にして，與へられた問題と全く同一の問題を作り，其の解法を考へることになりますと，之を實際問題としたときに，我々が十分に直觀し得るやうになるのです．そして斯くの如き問題の解法から得た智識が，確實なものであり眞に役立つものであることは，いふまでもない事でせう．
私は事實問題の指導に，形式不易の法則をなるべく用ひられることを希望してやまないのです．

8. 其の他の方法

事實問題の解き方を考へるに，五つの方法があ

ることを，前節で述べました．そして其の五つの方法の如何なるものであるかに就いても，夫々詳細に說明しましたが，猶之に就いて述べねばならない，多くの事柄を殘して居るのです．

實演の作業又は圖解の作業に於ては，量の分解結合を考へて，求める數量を得るのでありますが，量の分解結合を，數の分解結合即ち計算に結合する爲めに，其の作業的方法を代表せるものとして，算式の意味を定め，之によつて作業的方法が，簡便な計算を用ひる算術的方法に進展するやうに，指導を進めて行くのです．そして算式即ち計算の意味を定めることを，私は計算觀念を養成すると述べたのです．從つて計算觀念の基礎は，作業的方法にあるのです．換言すれば量の分解結合にあるのです．

かくして始めて，實演の作業又は圖解の作業から，問題の解法が發見されるのです．少くとも量の分解結合を考へて，算式を作り得るやうになるのです．

併し算式の意味は，作業的方法のみにあるのではありません．我々は多くの問題を解いて居る間

には，それ等の問題から，數量の關係を抽象し，後には其の關係を用ひて，算式を作り得るやうになるのです．そしてかゝる場合に於て，其の關係を與へられた問題に適用する場合に，未知數と旣知數の間に，或る種類の計算を行つた結果が，與へられた數になるやうな場合があるのです．

又問題の意味其の儘を式にあらはした場合に，やはり未知數を用ひねばならないことが多いのです．そして斯くの如き場合に於ては，それ等の未知數を含む等式から，其の未知數を見出す算式を作ることが，問題の解き方を考へる上に於て，非常に便利になるのです．

從つてかゝる場合に於ては，計算の意味を他の計算の逆と考へることを，指導せねばならないのです．即ち作業的の意味をもつて居た加減乘除が，其の意味の上に，更に逆の意味をもつやうに，指導して行かねばならないのです．私は之を計算觀念の擴張と申しました．而して代數的考へ方の根據は，こゝにあるのです．(單にこればかりでないことは，前にも述べた通りであります)

新しい數に對して計算觀念を擴張すること

數が整數の場合には，加減乘除の意味は，前に述べただけでよいのでありますが，數が小數分數と擴張されるに從つて，これ等の數の間には，整數の場合に得た計算の意味が，通用せなくなる場合があるのです．今此の點に就いて述べて見ませう．

小數分數が整數と同じやうに，或る量を表はして居る場合には，加法及び減法の意味は，作業的の意味で少しも差支ないのです．例へば $2.3+0.8$ の意味は，2.3で代表される量と，0.8で代表される量とを結合した場合に，其の結果は如何程の量となるかを求めることを意味し．$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$ の意味は，$\frac{2}{3}$ で代表される量から，$\frac{1}{4}$ で代表される量を取り去つた場合に，後に殘つた量は幾らになるか，之を求めることを意味して居るのです．

併しながら分數小數を乘除することの意味は，全く作業的の意味を失ふのです．例へば $25\times\frac{2}{3}$ の意味は，25なる量を $\frac{2}{3}$ だけ寄せ集めた結果は，いくらになるかを求めることである，と見ることが出來ないのです．なぜならば，幾つだけ寄せ集めるといふ事は，2つだけ寄せ集める，3つだけ寄

せ集める…………といつたときに，作業的の意味をもつて居ますが，上の例の如く，$\frac{2}{3}$ だけ寄せ集めるといつたのでは，如何なることを意味するか，全く不明であるからです．小數を掛ける場合も同樣です．

又除法には，等分と包含（累減）の二つの作業的の意味をもつて居ますが，併し此の意味を，分數や小數で或る數を割ることに，適用することが出來ないのです．例へば25錢 $\div\frac{5}{7}$ は，名數を不名數で割るのであるから，等分の意味があると思ひ，之を25錢を $\frac{5}{7}$ だけに等分したとき，其の一つは幾つになるかを見ることを意味して居るものと，見ることが出來ないのです．小數の場合でも同樣です．

包含除法の場合は，分數小數が量を代表して居る以上，作業的の意味と解して，何等の不都合はないのでありますが，併し此の場合に於ても，他の意味を之につけておくことが，便利であるのです．

斯くの如く，分數小數の如き新しい數が，數の仲間入りした場合には，整數の場合に得た作業的

の意味が，通用せない場合も出て來るのですから，其の計算の意味を，別に定めておくことが大切になるのです．即ち新しい數の間には，從來の計算觀念を擴張することが，必要になつて來るのです．

然らば，これを如何やうに指導し，如何やうに擴張するかは，分數小數の章に於て，詳細に述べることにします．

高等第二學年になつて，負數を學習することになりますと，負數も新しい數でありますから，若し負數の計算を必要とする場合には，これ等の計算の意味をも定めねばならないのです．

かくして我々は，新しい數を含む事實問題の解き方は，之を如何に指導するとよいかに就いて，研究することが大切になつて來るのです．此の點に就いても，夫々の章に於て述べることにします．

代數的解法．

事實問題の意味又は數量の關係が，複雜になつて來ますと，これ等の意味又は關係を等式に表はしたものから，逆の意味を重用することによつて，Xの値を見出すことは困難になつて參ります．從つてXを含む等式から，Xの値を求めることが，

發展せない以上は，代數的の考へ方は行きつまりを來たすのです

而して代數的の考へ方による解き方は，前にも述べた通り，計算の逆を用ひるのでありますから，數量の關係を表はした等式が，複雜なものになりますと，これから，Xの値を求めることが困難になつて來ます．そして或るものは最早其の等式から，Xの値を求めることが出來ないやうになるのです．

未知數Xを含む等式を方程式といひ，Xの値を求めることを，方程式を解くといふのですから，茲に方程式を解く方法を指導し，方程式が容易に解けるやうになりますと，此の方程式を用ひて，一層複雜で困難な問題であつても，普通の方法に比較して，一層容易に其の答を求めることが出來るのです．

方程式を解く方法は

1. 方程式の兩邊に同じ數又は式を加へても，
2. 方程式の兩邊から同じ數又は式を引いても，
3. 方程式の兩邊に同じ數を掛けても，
4. 方程式の兩邊を同じ數（零にあらざる）で割

つても,
元の方程式と,全く同値の方程式が得られること を,其の根本原理として居るのです.移項の法則 も,兩邊の符號をかへることも,皆これ等の原理 から誘導されたものです.

玆に同値の方程式といふのは,二つの方程式が, 全く同一の未知數の値によつて,滿足されるもの を指して居るのです.

方程式を解く方法は,前述の通り算術と異なつ た原理の上に,建設されたものでありますから, 方程式の解法は其の儘,算術的解法に關聯さすこ とは困難であるのです.從つて方程式を用ひて問 題を解く方法(之を代數的解法といひます)は,之 を算術的解法に其の儘結びつけることが,出來な いものと思ひます.

併しながら,我々の算術を學習する目的は,實 際問題の構成と其解決にあるのですから,其の解 決の方法が,算術だらうが代數だらうが,之には あまりかゝはりがないもので,兎に角合理的に簡 便に,其の結果が見出せたらよいのです.玆に算 術的方法を離れて,代數的解法を指導する必要が

あるのです.

そして代數的解法による爲めに,方程式を解く ことが必要であり,これが又特別なる習熟を必要 とするのですから,我々は方程式の解法は,如何 に指導すべきかを,研究することが大切です.此 の點に就いては,後章に於て詳細に述べることに します.

方程式の解法は,問題を解く上の一種の器械で す.我々は此の器械を用ひて,困難な問題も平易 に解くことが出來るのでありますが,併し問題か ら方程式を作ることが出來ないと,折角の器械も 用ひることが出來ないものになります.玆に方程 式への指導に就いて,述べる必要があるのです.

方程式への指導

方程式は與へられた問題の意味,又は數量の關 係を式であらはした等式をいふのです.數量の中 には與へられたものと,求めるものとの二つがあ つて,求める數量はX,Y等の文字で,代表されて 居ることは,いふまでもない事です.

而して我々は代數的考へ方による解法に於て, 低學年から方程式を作ることを指導して來たので

ありますから，玆に方程式の解法を利用するやうになつたからといつて，取り立てゝ方程式への指導をいふ程の事もないのです．唯前者の場合は方程式が簡單であり，後者の場合は比較的複雜であるだけの，差異があるのです．

併し方程式の解法を問題の解法に利用しますと，恰も方程式の解法其のものが．目的であるかのやうな事になつて，肝心の方程式への指導が，看過され勝ちになる場合が多いやうです．

而して實際問題であつても，又事實問題であつても，是を解決するには數量の關係を用ひるのです．そして數量の關係は，方程式を作る事によつて，著しく明瞭になるものでありますから，代數解法に於て，この點を一層重視したいと思ふのであります．

今例に就いて．此の點を述べて見ませう．

【例1】 果物を子供に分けるのに，5箇づつやれば8箇餘り，8箇づつやるには13箇足らない．

子供は幾人か．又果物は幾箇か．

の問題に於て，子供の數をX人としますと，1人に5箇づつ與へると，子供全體に與へた果物の數

は5X箇となり，其の上に8箇餘つたのであるから，果物全體の數は(5X＋8)箇であります．

又一方から考へますと，X人の子供に8箇づゝ與へやうとすると，果物は8X箇だけ必要で，此の數だけ與へやうとすると，果物が13箇不足するのですから，果物の數は(8X－13)箇であることが分ります．

そして果物の數は，兩方の場合に於て同一でありますから，此の關係を式であらはしますと，次の方程式が出來るのです．

$$5\times+8=8\times-13.$$

それで此の方程式を解けば，X即ち子供の人數が分り，それから又果物の數も，計算することが出來るのであります．

今此の解にある通り，子供に與へた人數，果物の數といふやうに，夫々關係を用ひて，これ等の數量を如何に求むべきかを，具體的な數量を離れて，抽象的に思考して行くのですから，斯くの如き方程式を作ることによつて，是等の數量の關係が，次第に明瞭になつて來るのです．

【例2】 甲乙2個の水桶がある．甲の中には水9

石6斗乙の中には9斗ある．今甲から乙に1時間に6斗づつ流れ込むやうにすれば，今から幾時間の後，乙の中の水が甲の中の水の3倍となるか．

の問題に於て，今からX時間の後に，乙の中の水が甲の中の水の3倍になつたものとしますと，此の時乙の中の水は幾らになつたか，又甲の中の水が幾らになつたかを考へて見る必要があります．

そして1時間に6斗づゝ甲から乙へ流れ込むのですから，X時間に幾ら甲から乙へ流れ込んだかを考へて見ますと，6X斗だけ流れ込んだことが分りますから，此の時に乙の中の水は(9+6X)斗となり，甲の中の水は(96−6X)斗になつたと考へられます．

それで此の時の乙の中の水が，甲の中の水の3倍であることを式で書きますと，

$$9+6X=3(96-6X)$$

の方程式が出來，此の方解式を解きますと，X即ち幾時間後であるかが分るのです．

今此の解法を見ますと，甲から乙へ流れ込んだ水の量はいくらか．此の時の甲及び乙の中の水は

いくらか，といふやうに，これ等の數量と他の數量との關係を一々抽象的に考へて，之を見出し，最後に乙の中の水が，甲の中の水の3倍であることの關係を式に書いて，方程式を作つたのです．

斯くの如く，問題から方程式を作るには，一々數量の關係を考へて，他の數量を見出し，更に是等の數量から關係を考へて，他の數量を見出し，斯くの如くにして次第に他の數量を求め，そして又數量の關係から方程式を作るのでありますから，方程式を用ひる問題解法に於て，數量の關係が一層明瞭に，抽象されることになるのです．我々は斯くの如く，指導するやうに注意せねばならないのです．

方程式を用ひる問題解法に於て，數量の關係が明瞭に抽象され，そして是等の關係が，事實問題や實際問題の他の解法に，役立つことはいふ迄もないでせう．代數的解法の價値を玆に認めることが，極めて重要な事と思ひます．

なぜならば，方程式の解法はあまりに機械的で，それだけ便利であるのですが，あまりに機械的である爲めに，少しく之に手をつけない事になりま

すこ，忘却し易いものです．然るに數量の關係は簡單であり，そして此の關係は，我々の日常生活にも，用ひられる場合が多いのですから，方程式解法の如く忘却し去ることは少なく，これが我々の數量生活の向上發展に資すること，多大であるからです．

それ故に，方程式を用ひる問題解法を指導する上には，方程式への指導を，大に重視せねばならないと思ふのであります．

グラフによる解法

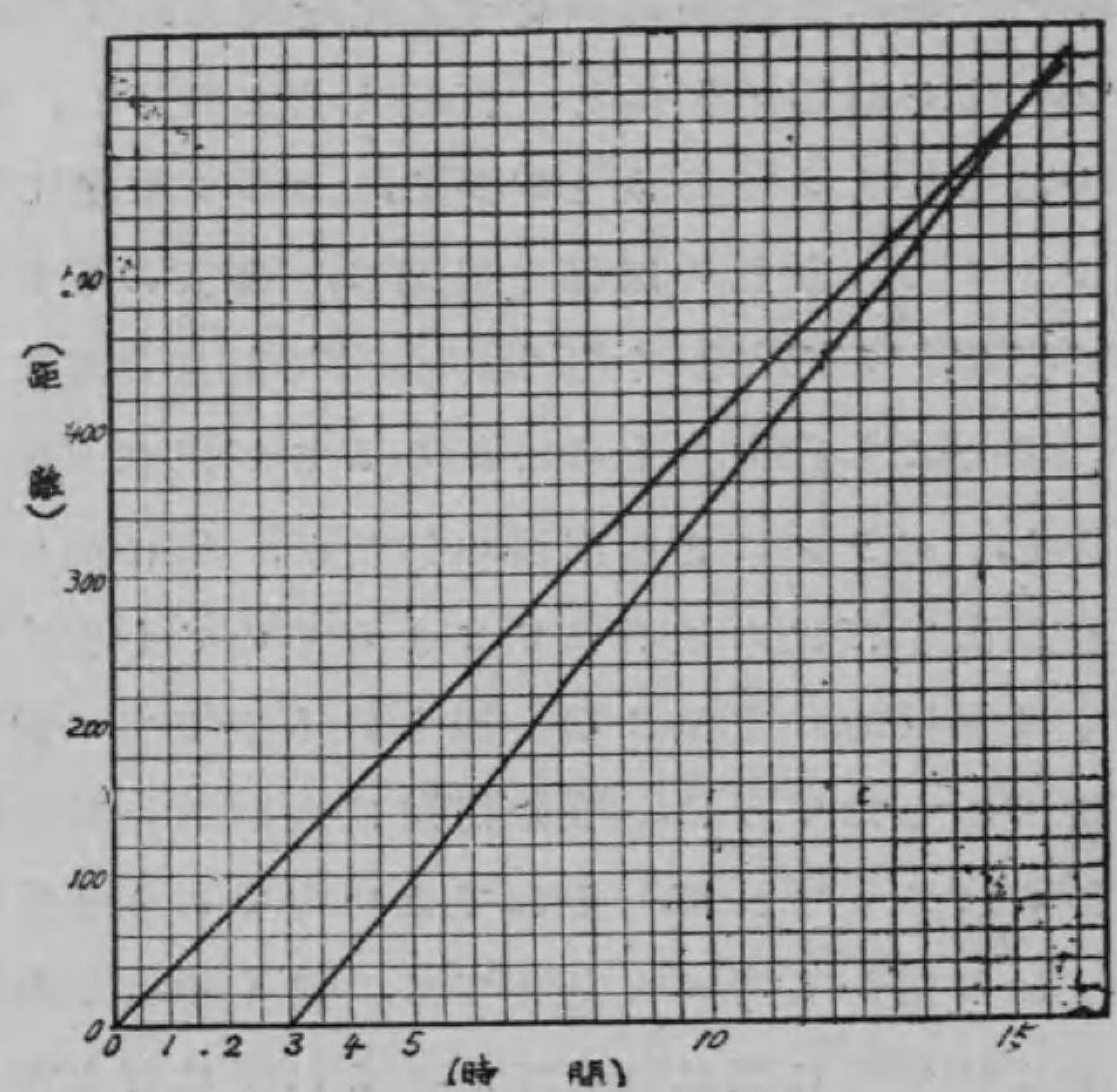
グラフは後章に於て述べるやうに，數量の關係を圖に表はしたものであります．そして實際問題や事實問題の解法は，數量の關係を用ひるのでありますから，是等の問題はグラフを利用することによつて，計算を用ひることなく，平易に解決されるものです．

グラフによつて問題を解くには，どんな方法によるものであるか，そして之を指導するにはどうするとよいかは，グラフの章に於て詳細に述べることにし，玆ではグラフによる解法もあることゝ，之に關して注意すべき點を，少しく述べておきませう．

問題解法に重視すべき點は，前にも述べましたやうに數量の關係を明瞭にすることです．そしてグラフはそれ等の關係を，直觀し得るやうに，圖に表はしたものでありますから，グラフによる解法によつて，數量の關係を明瞭に，確實にすることが出來，そしてかくして得られた數量の關係が，他の場合にも役立つものと見ることが出來ます．

併し，グラフによる問題の解法が，單に其の結果を見出すだけの指導にとゞまるものとしますと，多くは機械的な方法になり勝ちのものです．前にも述べましたやうに，實際問題は合理的に其の答が得られさへすれば，それでよいのでありますから，此の點から考へて見ますと，斯くの如き指導でもよいやうに思はれますが，これでは行きつまりを生ずる基となるのです．是非共其の解法を一層深く研究して，各數量間の關係を明らかにし，且は之を他の解法にも比較してグラフによる解法が，効果あるものとせねばならないのです．そしてかくの如き指導が，グラフによる解法其のものをも，發展さすことはいふまでもありません．

今此の點を詳細に述べる爲めに，次の例をとりませう．



【例】甲の速さは毎分50間で乙の速さは毎分40間である．今乙が出發してから3分後に，甲がこれを追ふと何分後に追付くか．

今此の問題をグラフによつて解くには，横に時間をとり縦に距離をとつて，甲と乙とが進行した距離と時間との關係をあらはすグラフを，別々に

作りますと，其のグラフの交る點は，前の圖に示すやうに，乙が出發してから15分後，從つて甲が出發してから．15−3=12 即ち12分後に，甲は乙に追付くことが分ります．

猶此グラフによる解法を精査しますと，甲が乙に追付く地點は，甲乙兩人が出發した地點から，600 間離れたところであることが分るばかりでなく，1分後には甲と乙とはいくら距つて居るか，2分後にはどうか，3分後にはどうか…………といふやうに，時間が變るにつれて，甲乙兩人の距りはいかに變つて居るかも，直觀的に研究することが出來るのです．

此のやうに，グラフによる解法をした場合に於ては，單に其の答が正しく求まつただけで滿足することなく，時間と距離との關係は，甲乙兩人の場合に於て，どうなつて居るかを直觀的に研究さすやうに，數量の關係を明瞭にすることを，忘れてはならないのです．

そして甲乙兩人の距りが，甲が出發せんとするときには120間であつたのが，それから1分たつと即ち乙が出發してから4分後には110間となり，更

に1分たつて乙が出發してから5分後には100間となるやうに，1分毎に10間づゝ甲は乙に追付いて居ることが，直觀的に分るならば，此の解法からもつと簡便な算術解法を，誘導することが出來るのです．

斯くの如く，グラフによる解法から，數量の關係を明瞭にし，更に之を他の解法と比較し，或は之に關聯させるやうにして，始めて其の効果をあらはすものと思ふのです．

第七章 小 數

1. 十退法による缺陷

數を擴張するには，一の十倍が十，十の十倍が百，百の十倍が千…………といふやうにして，十百千…………等の大きな數の觀念を與へ，更にこれ等の一十百千等が幾つかづゝ集まつたものとして，一般の數の觀念を與へたのです．

いふまでもなく，數を擴張するには，單に言葉又は文章の上で，十百千等の觀念を與へ，更にこれ等の單位が，幾つづつか集まつたものとして，一般の數の觀念を與へるのではありません．十を一團とし，及び十を一團としたものを，更に十だけ一團として，十百の觀念を與へるといふやうに十百千位までは，計數器を用ひて直觀的に，其の觀念を養成することが必要であるのです．更にこれ等の十百千を代表する爲めに，同じ計數器であつても，其の計數器の置き場所によつて，是等の異なつた數を代表するものと約束し，算盤式の計數器を用ひて，一萬未滿の計算を作業的に取扱ひ，

これから計算の方法をも抽象させるのであります.

斯くの如くにして兒童が,作業的に十百千の觀念を得,更に一般の數の觀念をも確立したならばそれより以上は類推によつて,萬,十萬,百萬,億等の觀念を與へ,これ等の單位が,幾つづゝか集まつたものとして,一般の數の觀念を得させるのであります.

次に之を逆に考へて見ますと,千の十分の一は百,百の十分の一は十,十の十分の一は一といふやうに,次第に或る單位の十分の一を考へることによつて,或る單位より一桁小さい單位を考へることが出來ます.斯くの如く大きな單位から,次第に其の十分の一の單位を考へて行くことを,十進に對して十退といふことがあります.

十退法によつて,或る單位例へば千から始めて次第に其の十分の一の單位を考へて行きますと,百十一となります.そればかりでなく,我々は一の十分の一を考へて,此の單位を分と名付け,尚一分の十分の一を考へて,此の單位を厘と名付けるやうに,次第に或る單位の十分の一の單位を考へて行くことが出來ます.そしてこれ等の單位に

一々新しい名をつけて,分厘毛…………等の觀念を與へ,更にこれ等の新しい單位が幾つづゝか集まつたものとして,一般の小數の觀念を與へることが出來るのです.

これまで我々が小數を敎授した方法は,たしかに十退法に基礎を置いて居たのです.國定敎科書を見ても,一の十分の一を何といふか.一分の十分の一(即ち一の百分の一)を何といふか,に始まつて分厘毛等の小數の單位を授け,これから出發して一般の小數觀念を與へ,此の記數法と計算法とを練習してから,小數の應用に這入るやうに編纂されて居るのです.

併しながら,斯くの如き抽象的指導によつて,小數觀念を與へることの困難は,我々の經驗し來たところです.一の十分の一を分といひ,一分の十分の一を厘といふことを,正しく發表することの出來る兒童であつても,一分とか一厘はどんなものを表はすか,之を生活上の實際問題にあてはめることになると,之の分らない兒童が可なり澤山にあると思ひます.之は小數觀念が明確でない何よりの證據です.小數が我々の實際生活に這入

らないのも，無理ではないのです.

2. 小數の觀念

然らば小數の觀念を明確にするために，どのやうに指導するのがよいかといふに，之に關して次の二つの說があります.

(1) **分數の特別なものとして，小數の觀念を與へやうとするもの.**

小數は分數と異なつた數ではありません．分數の分母が十百千…………等の特別なものを，新しい記法を用ひて表しただけのものです．例へば $\frac{3}{10}+\frac{5}{100}$ 即ち $\frac{35}{100}$ を0.35と書いて，之を3分5厘と讀むことにしたものが小數でありますから，0.35は $\frac{35}{100}$ と全く同じ數であるのです.

それ故に分數の觀念が，何等かの方法によつて十分に養はれたならば，そして分數を或程度まで學習した後に於て，小數を學習することにしますと，小數の觀念を與へることは，何も特別な方法を講ずるまでもなく，容易であるのです．從つて小數に就いて指導する事は，分數の後に於てせねばならない．と主張するのです.

併し，之も一理ある事ですが，分數を或る程度まで學習するまで小數の指導をのばすことにしますと，簡易な分數の計算が出來るまで，小數の學習が出來ない事になります．然るに實際問題從つて事實問題の中には，小數を用ひると都合のよいものが多いにかゝはらず，かくては小數を之に應用することが出來ない不便があるのです.

それのみでなく，小數は理論の上から見ますと分數の特別なものでありますが，其の計算の方法から見ますと，分數の計算よりも，整數の計算に近いものでありますから，何等かの方法によつて小數の觀念を與へることが出來るならば，小數の計算を，分數計算の前に學習するのが便利であるのです.

斯くの如き理由から小數の計算を，分數の計算に先んじて指導することに定め，そして小數の觀念を與へるには，之を如何するとよいかに就いて，第二の方法が生れたのです．それは次の方法をとるのです.

(2) **十進諸等數の小數的取扱ひから出發せうとするもの.**

我々は第二學年のときから，金錢や長さに關する實際問題，又は事實問題を指導することになつて居ります．更に第三學年になりますと，重さ桝目の問題を指導するのです．從つて十進諸等數に就いては，第二學年の時代から指導して居り，そしてこれ等の指導には，單に其の符號的取扱ひに止めないで，實測によつて實際問題を解決させて居るのです．

併し第二學年や第三學年に於て，これ等の十進諸等數を取扱ふに，其の最初に於ては，各數字の上に一々單位の名を記して，例へば金錢でありますと，左に示すやうな形式を用ひて其の計算をする必要がありませうが後には最も下の單位の單名數として算式を作り，又之を計算するやうに指導するのです．此のやうに十進諸等數を，最も下の位の單名數として式を作り，之を計算をさせますと，其の方法は全く整數の計算と同一であるのです．

$$\begin{array}{r} \text{圓}\ \ \text{錢} \\ 2\ 1\ 8 \\ 5\ 3\ 6 \\ +\ 4\ 4\ 7 \\ \hline \end{array}$$

斯くの如くにして，十進諸等數を最も下の位の單名數として表はし，之を讀む場合には普通に讀んで居るやうに讀ませることにしますと，其の數

の各の位が，どんな單位であるかが明瞭になりませう，なぜならば此の單名數を諸等數のやうに讀むには，之を位取りすることが必要であるからです．

又度量衡法が改正になつた結果，メートル法を用ひることになりますと，此の方法に於ては，二つの單位の名を用ひる事は殆どありません．多くは單名數として表はすばかりでなく，之を讀むときにも單名數の讀み方をするのです．

併し，いくら單名數の記し方，讀み方をしたからといつて，此の數字はいくらの量を表はして居るか，此の數字は如何程の量を表はして居るかといふやうに，其の各の數字があらはして居る量を具體的に考へることが出來るやうになつて居る，從つて單名數全體が如何程の量を表はして居るかを，內觀することが出來る筈です．なぜならば，これまで我々が諸等數を敎授して居つたやうに，單に其の單位の關係を知らせた後に於て，其の計算を敎授するやうな，符號的取扱ひに止めないで實測を基礎とした取扱ひから，出發せねばならないし，又斯の如く指導して居るからであります．

それ故に第三學年の頃から，必要に應じて，これ等の諸等數を，上の位の單名數としてあらはすことを授けるのです．例へば 325cm を 3.25m と書くことを指導し，そして點のすぐ左側の位が，最後に記された單位であることを教授しますと，小數的に記された諸等數を用ひて，實際問題又は事實問題の解決もすれば，小數的に記された諸等數を其の儘で計算することも容易に出來るやうになるのです．尤もそれには計算が機械的でなく，十分な理解をもつて居ねばならないのですが…………

斯くの如く實測を基礎として，十進諸等數を取扱ひ，其の上，計算の意味が十分に理解されて居るならば，これ等の諸等數を小數的に表はしても加法と減法はいふ迄もなく，乘法と除法に於ても整數倍し又は整數除する計算は，容易に行ひ得るものです．

此のやうにして，十進諸等數を小數的に表はしたものを，具體的に其の量を考へながら，之を取扱つて居るうちに，これから抽象して，小數の觀念を得るやうになるのです．茲に始めて，小數の抽象的取扱ひに這らうとする主張が，今日最も多

く行はれて居るのであります．

3. 小數的記法

前節に示した二つの方法の中で，分數の指導が或程度まで進んだのち，之と關聯して小數の指導に這入らうとすることは，理論的では，正しい方法であると思ひますが，實際問題としては，あまり宜しくないことは前にも述べました．

第二の方法は，之を始めてきいた人には，少し困難であらうと，思はれるかもしれませんが，實測から這入つた指導で，十進諸等數の觀念が十分に出來た兒童には，第二學年頃の兒童であつても別に困難を感じないやうであります．況して之を第四學年の初め頃から指導することにしますと，少しも困難はないのです．

それのみでなく，少數を實際問題に利用する第一歩は，こゝに述べた十進諸等數の小數による表示であつて，國定教科書を見ても，此の應用が，小數計算の後に，第一に出て居る程でありますから，我々は第二の方法をとつて，小數觀念を與へる基礎とせねばならないと思ひます．又之が最も

心理にかなつた方法であらうと思ひます。

併しいくら十進諸等數を，小數的に表はす方法を指導したからといつて，之はやはり小數的のもので，純然たる小數ではありません．我々は之を指導して，これ等の表はし方から共通な點を抽象して，小數の觀念を與へるやうにせねばならないのです。

然らば，之に對して，如何なる指導が必要であるかといふに，小數的に表はされた單位を基本として，他の位の數が如何なる量を表はして居るかを作業的に取扱ふことです．例へば $2.35m$ の諸等數を取扱ふときに，m を基本とすると，3 は m の十分の一の量が 3 つあること，即ち 3 デシメートルを表はして居り，5 は更にデシメートルの十分の一が 5 つあること，即ち $5cm$ を表はして居ることを，作業的に知らせるやうな事です．

分數の觀念は，如何なる段階をへて明確になるものであるか，そして分數の觀念は，入學前の幼兒であつても，十分に指導することが出來ることは，分數の章で詳述する事に致しますが，兎に角分數の觀念を養成する各段階に於て，二つの量を

比較して，一つの量は他の量の幾分の幾つであるかを，直觀的に求め得るやうに指導せねばならないのです．

このやうに低學年から，分數觀念の養成に注意され，そして二つの量を，比の意味で比較する指導が行はれて居るものとしますと，前にあげた如き $2.35m$ の 3 は m を基本とした場合にこれの幾分の幾つの量を表はすか，5 はデシメートルを基本としたとき，或は m を基本としたとき，これ等の幾分の幾つの量をあらはすか，を正しく比較させることが出來るのです．そしてこれ等の比較が，又分數の觀念を確實にする上に，役立つものであることは明らかでせう．

かくして我々が，種々の十進諸等數の，小數的記法を指導するときに，前に述べた如き比較が行はれて居ると，兒童はこれ等から抽象して，基本となる一つのものゝ十分の一を單位とし，又それの十分の一を單位とすることが，分つて來るのです．こゝに始めて小數の抽象的意義に這入るのです．

4. 小數の意義

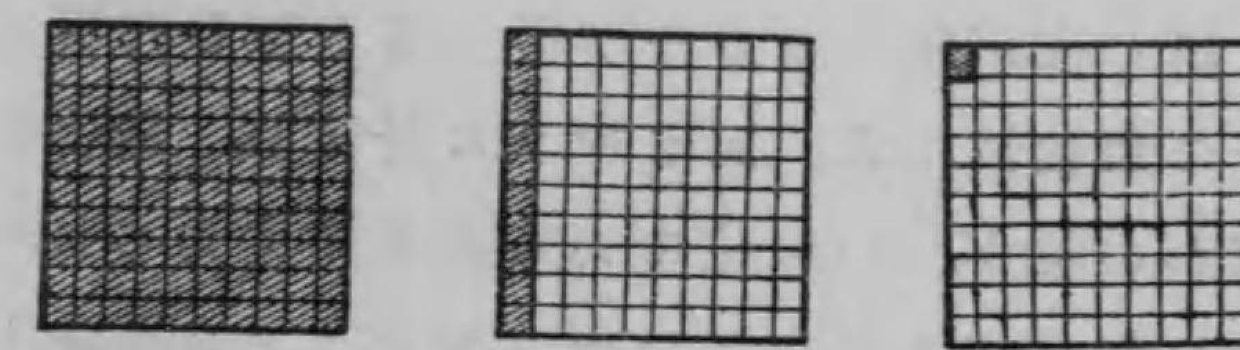
十進諸等數の，小數的記法を指導するには，具體的の量を實測し，玆に得た數を，小數的に表はすことと，これと反對に小數的に表はされた十進諸等數を，實測によつて其の量を示し，或は之を内觀することが必要であります．換言すれば，小數的に表はされた，十進諸等數を取扱ふ場合には，其の量を離れてはならないのです．

そして，これ等の數の間に計算を行ふ場合にも一々，其の數が如何なる量をあらはして居るかを具體的に考へながら，其の計算を行ふのでありますから，兒童は，今少しく簡便に，これ等の計算が出來るやうにと，切望するに相違ないのです．玆に抽象された數の取扱ひに移るのです．

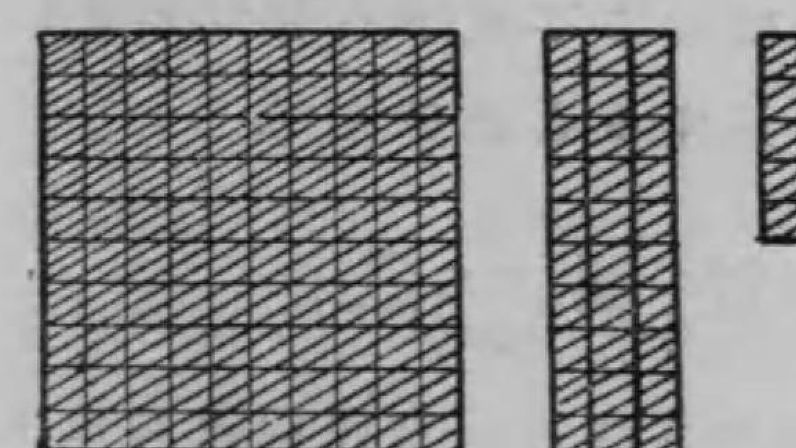
然るに，我々は小數的に表はされた，十進諸等數に就いて，其の各の數字は，基本とされた單位の幾分の幾つを表はすものであるかの，比較を行つて來たのですから，其の單位の名を取去つた，抽象數を取扱ふ場合に於ても，其の各の數字は，基本である一の，如何なる分數の量を表はすもの

であるかを，十分に知らせることが出來るのです．そして此の時に一の十分の一を分，分の十分の一を厘，厘の十分の一を毛といふことを授け，例へば1.35は，一と，一分が三つと，一厘が五つ集まつた數であることを，十分に理解させるのです．

猶，小數を直觀させる爲めには，方眼紙を用ひて，一，分，厘は，次の圖に示す如き量を表はすことを知らせ，



其の上に例へば1.35は，1が一つと，一分が三つと，一厘が五つと集まつた，次の圖に示す如き量を表はすことを理解させ，更らに進んで



0.36，2.752，0.048…………の如く記された小數を讀むこと，及び之と反對に2個7分5厘，3分6厘，7厘5毛の如き小數を，小數に書き表はすことを練

習するのです．そして此の間に方眼紙によつて，小數が如何なる量をあらはすものかを發表させ，及び其の各數字は一の如何なる分數の量であるかを，方眼紙を用ひて發表させますと，玆に小數の觀念が確立するのです．

斯くの如くにして，小數の觀念が確立した後に於ては，小數の加法と減法の計算は，何等の困難はないと思ひます．なぜならば．小數の加法減法は，同じ位が縱に並ぶやうに，書き下した後は，整數の加法減法と，同じやうに計算し，最後に其の何れの位が，一の位であるかを示す爲めに，小數點を打てばそれでよいからであります．そして此の最後に打つべき小數點も，別に工夫する迄もなく，小數點が並んで居る丁度下に打つとよいことも，兒童は直に發見すると思ひます．

5- 小數を掛ける意味

加法及び減法で解決される，實際問題又は事實問題を取扱ふときには，抽象的な小數を取扱ふ必要は殆どないのです．小數的に表はされた十進諸等數の計算が，容易に出來るものとしますと，强

いて小數を持ち出さなくとも，よい事になるのですが，其の計算を簡便にする爲めに，抽象された小數について，其の計算の方法を機械化し，更に實際問題又は事實問題の解法に歸りますと，其の解法が一層容易に，且は正確になるのです．

從つてこれ等の問題を學習するときには，加減の計算觀念を，別に擴張する必要はおこらないのです．即ち作業を基礎とする計算の意味と，加減が之に順逆の關係にある，計算の意味とだけで，これ等の實際問題又は事實問題の算式は，正しく作ることが出來るのです．

併し乘法になりますと，小數を整數倍することには，何等の差支もおこらないのですが，小數を掛けることの意味は，玆に新に指導する必要があるのです．何となれば，例へば或數を 3 倍することは，其の數を 3 度加へ合はすことですから，これまでの意味で別に差支ないのですが，0.3 を掛けることになりますと，それが如何なる意味をもつて居るか，今迄の知識では，之を判斷することが出來ないからであります．

併し國定敎科書の如く，何等の根據もなく，0.3

を掛けることは，其の數を十等分したものを3倍することである，と單に其の意味だけを授け，之によつて小數を掛ける計算の法則を導指し，それからこれの練習を行ふやうな事では，兒童にとつて，之が不思議に思はれるばかりでなく，其の應用も十分に行かないと思ひます.

然らば，之を如何に指導するかといふに，やはり事實問題から，這入らねばならないと思ひます例へば次の如き，事實問題の解き方を考へるとしませう.

【例】1升1圓80錢の酒を3合買へば，其の代金はいくらか.

の問題を，作業的に解きますと.

180錢÷10＝18錢…………酒1合の價

18錢×3＝54錢……………3合の代金

答 54錢

のやうになるのです．今此の式を一つにまとめますと

180錢÷10×3＝54錢

となりませう.

上の方法は，作業的に考へて，其の算式をつく

つた解き方でありますが．兒童はいつも作業的に考へて，其の算式を作るものではなく，

【例1】1升180錢の酒を3升買ふと代金はいくらか．又3斗買ふと代金はいくらか.

の如き問題の，作業的解決から，數量の關係を發見し，それから

(1升の價)×(升の數)＝(代金)

の公式を抽象し，其の後は，此の公式が確かに記憶されて居る限り，此の公式を用ひて，上にあげた如き問題は

180錢×3＝540錢……………3升の價

180錢×30＝5400錢………3斗の價

の如く解くのであります.

玆に於て，兒童の注意を喚起することが必要です．即ち酒の量が升の單位であらはされた場合は勿論，斗の單位，又は石の單位であらはされた場合であつても，これ等の量をすべて，升の單位に直して，其の升の數を1升の價1圓80錢に掛けますと，其の代金を得るのでありますが，合の場合に限つて，3合を升の單位であらはして0.3升とし，此の0.3を1圓80錢に掛けることにしますと，

其の意味がなくなりますから，此の場合には公式を用ひることが，できなくなるのです．これはどうも不都合であります．斗といひ，石といひ，合といひ，何れも桝目の單位であるにかゝはらず，1升の價が知れて居るとき，合の單位で表はされた場合に限つて，其の計算の意味がないから，折角前に抽象した算式が用ひられないとは，不公平の沙汰といはねばなりません．それで，こんな場合にも，やはり同様の公式が用ひられることにして，酒3合の代金を見出す場合にも

180錢×0.3

の算式を用ひることに約束するのです．

併し唯此の算式を用ひることにするだけでは，其の答を見出すことが出來ませんから，こゝに小數を掛ける意味を，前に作業によつて得た算式

180錢÷10×3

に比較して，之と同じ結果を得るやうに，定めるのです．それで或數に0.3を掛けることは其數を10等分したものを3倍することであると定めて置きますと，

∴ 180錢×0.3

の意味は，180錢÷10×3(即ち180錢を10等分し之を3倍すること）となつて，作業的に3合の代金を見出したものと全く同様になり，そして酒3合の價を見出すときに，此の算式を用ひて，同じ結果を得ることになるのです．

斯くして例へば180錢×0.7の意味はどうか，そして此の算式は，どんな事實問題を解決するときに，用ひられるものかを，發表させるやうにしますと，小數を掛けることの意味が明瞭になり，そしてこれが事實問題を解くときに，應用されるやうになるのです．

つまり小數を掛ける必要は，これまでに我々が抽象した數量の關係式(即ち公式)を用ひて，如何なる數を含む問題であつても，之と同様に解かうとすることからおこるのです．從つて其の算式の意味は，其の算式の結果が，作業的に考へた結果と，全く一致するやうに定めねばならないのです．かくして數學に於ける形式不易の法則が保持されることになりますから，事實問題が如何なる數を含んで居ても，全く同様の關係式から，其の算式を作つて之を解くことが出來るのです．

今一つ帶小數を掛ける例を示しておきませう

【例2】1升の價1圓80錢の酒4升2合の代金はいくらか.

の問題は，前に抽象した數量の關係式（1升の價）×(升の數)＝(總代價)を用ひ，1升の價は180錢で，升の數は4.2(4.2升の4.2)でありますから，此の問題の算式は

180錢×4.2

とせねばならないのです.

併し，こゝに4.2を掛けることの意味が分らないと，之をどう計算してよいかが分りませんから，別に作業的の方法によつて，此の問題の解き方を考へて見ますと，4升2合は4.2合でありますから，1合の價が分りますと，總代價を見出すことが出來るのです．然るに180錢は，1升即ち10合の價ですから，之を10等分すると1合の價が出ることが分ります．それで量の分解結合を基礎として，換言すると作業的に，其の算式を作りますと，

180錢÷10＝18錢……………1合の價

18錢×42＝756錢……………4升2合の價

となり，之を一つの式に纒めますと

180錢÷10×42＝756錢

のやうになることが分るのです.

そこで數量の關係を用ひて，前に作つた算式

180錢×4.2

と，作業を基礎とした算式

180錢÷10×42

とを比較して見ますと，或數に4.2を掛けることは，其數を10等分して，其の結果を42倍するとよいことが分るのです.

同樣にして或數に5.7を掛けることは，其の數を10等分して，其の結果を57倍することであり．又或數に3.28を掛けることは，其の數を100等分して，其の結果を328倍するとよいことが分ります.

斯くの如くにして，小數を掛けることが，事實問題を解くときに必要であり，そして小數を掛けることの意味を，どう定めるとよいかが分りますと，それから小數を掛ける計算の練習に這入るのです.

今此の計算に就いて述べる前に，事實問題の指導の例をあげておきませう.

【例3】1石が43圓の白米5石6斗の代は何程か.

又0.65石の代は何程か．

の問題は，1石が43圓でありますと，2石の代はいくらか．3石の代はいくらか．と考へて見ますと作業的に，1石の價に石の數を掛けると，其の代金が出ることが分りますから．5石6斗の代を見出すときにも，之を石の單位で表はし，5.6石の石の數を，43圓に掛けるとよい事が分るのです．それで5石6斗の代は

43圓×5.6＝

の算式を計算するとよい事が分ります．

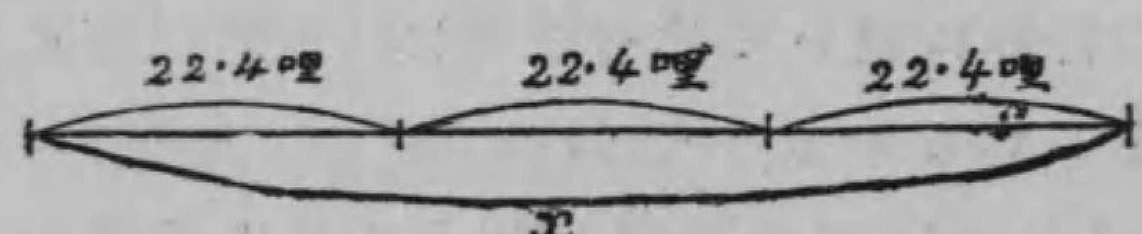
同じやうにして，0.65石の價は

43圓×0.65＝

の式を計算するとよい事が分ります．

【例4】1時間に22.4哩走る汽車は2時間半に幾哩走るか．

の問題は，1時間に22.4哩走ると，2時間にはいくら走るか，3時間にいくら走るかと，時間と距離の關係を，次の如く圖解し或は之を內觀して．さて，1時間に走る距離



に時間の數を掛けますと，其の時間中に走つた距離がでることを歸納し，そして2時間半は2.5時間で，時間の數は2.5でありますから，求める哩數は

22.4哩×2.5＝

の式を計算するとよいと，斷定するのです．

以上の例に示したやうに，數量の關係が明瞭でない場合は，極めて小さい整數の場合の二三の例に就いて，作業的に數量の關係を歸納し，此の關係を本問題の算式を作る上に適用するのです．我々は兒童をして斯くの如き，考へ方をするやうに指導せねばならないと思ひます．

極めて小さい整數のときに，作業的に決定された數量の關係が，本問題の數量の間にも成立するものとして，其の算式を作ることは，前に事實問題の章で述べました，形式不易の法則を用ひる，問題の考へ方であります．小數や分數の問題に於ては，よく此の方法が用ひられることを，注意せねばなりません．

6. 小數を掛ける計算

小數を掛ける計算の方法を理解さすには.

(1) 或る數を10倍100倍1000倍する場合の簡單な計算の方法.

(2) (1)と反對に或る數を10, 100, 1000の數で割る簡單な計算の方法.

の, 二つが十分に分つて居ることが必要です. 今是等の計算は, 之を如何に指導して來たかを, 調べて見ませう.

第二學年の頃から, 或數を10倍すると, 元の數の右に零を一つ附け加へた數になることを注意し, そして或數を10倍するには, 一々計算を行はなくとも, 其の數の右端に零を一つ附け加へて, 其の結果を見出すことを指導したのです. 又之と反對に10で割る場合には, 其の右端の零を一つ取り去ると, 其の結果が簡便に出ることを注意し, それからは10で割る場合に, 被除數の一の位が零であるときは, 此の方法を用ひるやうに, 我々は指導して來たのです. 例へば

$23 \times 10 = 230$　　　$540 \div 10 = 54$

第三學年以上になつて, 100, 1000の如き數に於ても, 10の場合と同様の事を指導し,

100倍するときには. 其の數の右に零を二つ附け加へ, 100で割るときには, 其の數の右の零を二つ取り去るとよろしい.

又1000倍するときには, 其の數の右に零三つ附け加へ, 1000で割るときには, 其の數の右にある零を三つ取り去るとよろしい.

ことを理解させ, それからは, 此の方法によつて其の結果を見出すやうにしたのです.

次に十進諸等數を小數的に表はし, 此の記法を用ひた數を用ひて, 事實問題を解かせる指導をする場合にも, 實際の量を直觀させて例へば

$25.8m \div 10$

の如き結果を見出すには, 25.8mとなるから, 10倍するときには, 點(小數點といはない方がよろしい)を一桁だけ右へ移すとよいことと, 反對に

$25.8m \div 10$

の如き結果を見出すには, 點を一桁だけ左の方へ移して, 2.58mとすればよいことを發見させたのです.

100倍する場合と100で割る場合に就いても, 作業的に直觀的に其の結果を見出し, これによつ

て100倍又は100等分する場合には，點をどうかへるとよいかの法則を發見させますと，これから類推によつて1000倍又は1000等分する場合の計算の法則をも發見するのです．又我々は斯くの如く指導せねばならないのです．

此のやうに，十進諸等數を小數的に表はした，具體的の量を基礎とし，此の量を分解結合した結果と對照して，符號の上に於て，簡便に其の結果を見出すには，之をどうするとよいかを抽象させ，これが發展して，抽象的の小數に於ても，10, 100, 1000 等の數を掛ける場合は，其の小數點を如何に變へるとよいか，反對に10, 100, 1000等の數で割る場合には，其の小數點を如何に變へるとよいかを十分に理解さすばかりでなく，其の計算の上にも此の法則が，いつも應用されるやうに，指導しておかねばならないのです．

小數を掛ける計算に，今一つ必要なものは

(3) 小數を整數倍する計算の方法．

であります．そして此の計算の方法も，十進諸等數を，小數的に表はした記法を用ひた場合に，具體的の量を作業的に取扱つて，例へば

5.4*m* × 3　　　2.35圓 × 4

の如き計算は

$$\begin{array}{r} m \\ 5.4 \\ \times\ 3 \\ \hline 16.2 \end{array}\ \text{答}16.2m \qquad \begin{array}{r} \text{圓} \\ 2.35 \\ \times\ \ 4 \\ \hline 9.20 \end{array}\ \text{答}9.2\text{圓}$$

のやうにするとよい事が分り，これを抽象して小數計算の場合にも，小數を整數倍する方法を發見させ，これによつて，其の計算を正確に求めさすことが出來るのです．

前に述べた(1)(2)(3)の計算が，十分に理解されたならば，小數を掛ける計算を發見さすことは困難ではないのです．今之を例に就いて說明しませう．

【例1】 371×0.28 を計算せよ．

の問題に於て，0.28を掛けることは，100等分(即ち100で割る)した結果を，28倍することでありますから，先づ371を100等分して，其の答3.71を見出し，更に其の答3.71を28倍して，最後の答を見出すのです．今其の運算を示しますと，次の通りになります．

$$\begin{array}{l} 371 \div 100 \\ = 3.71 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.71 \\ \times\ 28 \\ \hline 2968 \\ 742 \\ \hline 103.88 \end{array} \quad \text{答}\ 103.88$$

そして此の計算の結果を次に示す普通の計算に比べて，小數の乘法は整數として計算した最後の答に於て，小數點の位置を定めるとよいことを歸納し，それから小數點の位置を定める法則を發見さすのであります.

$$\begin{array}{r} 371 \\ \times\ 0.28 \\ \hline 2968 \\ 742 \\ \hline 103.88 \end{array}$$

いふ迄もなく，例(1)のやうに抽象數に就いての計算から，這入るのでなく，前章に示した如き事實問題に於て，小數を掛ける必要と其の意味を知らせた後に於て，此の意味を用ひて其の結果を求めさせ，それから抽象數に就いて計算を指導し，かくして計算の方法を發見さすのであります.

【例2】 9.76×2.7を計算せよ.

2.7 を掛けることは，10等分して27倍することでありますから，これから考へて，次の如く計算させるのです.

$$9.76 \div 10 = 0.976 \qquad \begin{array}{r} 0.976 \\ \times\ \ 27 \\ \hline 6832 \\ 1952 \\ \hline 26.352 \end{array} \qquad 答\ 26.352$$

そして此の結果と，左の通り小數點のない數とを

$$\begin{array}{r} 9.76 \\ \times\ 2.7 \\ \hline 6832 \\ 1952 \\ \hline 26.352 \end{array}$$

考へて，整數の掛け算をした場合の答26352とを比較して，小數點を打つべき場所を見出す法則を發見さすのです.

斯くの如くにして，小數に整數を掛けること，及び小數を掛ける方法が，同一の法則によつて求められることが抽象された後に於ては，此の方法を用ひて，計算の練習に移るべきであります.

又例(2)の如き計算も，例へば

【例】 1尺の價が1.32圓の切れを5.3尺買つた場合に，いくらの金を拂つたらよいか.

の如き事實問題から，

1.23圓×5.3

のやうに，小數に小數を掛ける計算の必要と，其の計算の意味とを，作業的方法を基礎として理解させた後，其の計算の方法を指導し，更に抽象數の計算を指導して，小數計算の方法を理解さゝねばならないと思ひます.

【例3】 23×0.78を計算せよ.

23に0.78を掛けることの意味は，23を100等分した結果を，78倍することですから，此の意味の

通りに計算しますと，次のやうになります．

```
23÷100          0.23
=0.23          ×78
              ----
               184
              161
              ----
              17.94      答 17.94
```

此の計算によつて得た答と，次のやうに，小數點のない整數の掛算と見て，計算して得た答1794とを比べて，小數點は下から2桁上つたところに，打つとよいことが分るのです．

```
   23
×0.78
-----
  184
 161
-----
17.94
```

それで23×0.78を計算するには，上の通りに被乘數と乘數とを縦にならべて書き下し，そして小數點のない只の數と見て，計算を行つた結果に，被乘數と乘數との小數點以下の桁數の合計だけ，下から上つたところに小數點を打つと，簡便に其の結果を見出し得られることを，發見するやうに指導するのです．

【例4】　60.7×0.532 を計算せよ．

60.7に0.532を掛けることは，60.7を100等分した答を，532倍することでありますから，先づ此の意味の通り計算しますと，次のやうになります


```
60.7÷1000        0.0607
=0.0607        ×   532
              --------
                 1214
                1821
               3035
              --------
               32.2924     答 32.2924
```

今此の答と，小數點がないものと思つて，計算した答322924とを比べて，唯此の結果に就いて下から4桁だけ上つたところに，小數點を打てばそれで正しい答が得られることが分るのです．

そして小數點を打つときに下から上るべき桁數の4は，例題3に於て考へたと同じやうに，被乘數と乘數との，小數點以下の桁數の和に等しいことが分りますと，此の計算は左に示すやうにして，簡便に求め得られることを，理解さすことが出來るのです．

```
    60.7
× 0.538
--------
   1214
  1821
 3035
--------
32.2924
```

此のやうにして，小數掛算の方法が，十分に理解された後には，歸納された法則を用ひて，小數乘法の結果を，簡便に見出す練習をするのです．併し之を事實問題の解法に，應用さすことを忘れてはなりません．

7. 小數で割る意味

小數を整數で割ることの意味は，十進諸等數を小數的に表はした數を，作業的に取扱ふときから指導せねばならないのですが，これには作業を基礎とする，換言すれば量の分解結合を意味するものとしての除法の意味で十分であります．即ち例へば2.5圓÷2の意味は，2.5圓を二つに等分した場合に，其の一つは幾らになるか，之を求めることを意味して居るのです．

併し小數で割ることになりますと．例へば

2.5圓÷0.5は2.5圓0.5をだけに等分すると，其の一つは幾つであるか，之を求めよ

といふ事であると，整數で割るときと同じやうに之を定めることは，全く意味のない事を，意味があるかのやうに述べた迄であります．なぜならば，等分といふ事は，整數だけに等分することを意味するからであります．

又2.5圓÷0.5圓は，2.5圓の中に0.5圓が何度含まれて居るか，其の度數を求めることでありますといへば，其の意味が明瞭で，立派な意味をもつて

居るのでありますが，さて整數の答が出で割り切れない場合，例へば2.5圓÷0.3圓の如き場合に於ては，其の度數の意味を，小數にまで擴張する必要があるのです．從つて

小數で割ることの意味は，乘法の逆として定めることが，最も簡單であると思ひます．今次の如き事實問題を考へて見ませう．

【例1】 酒3合の價が45錢であると，1升の價はいくらか．の問題は，次に示すやうに，與へられた數量と，求める數量とを明瞭にし，さてこれ等の數量の關係を考へますと，

(求)1升の價　x錢

(與) 買つた酒の量…3合即ち0.3升
　　 代金　45錢

(1升の價)×(升の數)=(總代金)

の公式がありますから，これ等の數量に，それぞれの數を代入して

x錢×0.3=54錢

の關係式があることが分ります．

そして第四學年の最初から，計算の逆の意味を指導し，代數的取扱に及んだのでありますから，

上の關係式から，x 即ち1升の價を求めるには，

54錢÷0.3

の計算をするとよいことが分りませう．

今此の計算を如何にするとよいかを考へるには此の式の出來た前の關係式に於て，0.3を掛けることは，どんな意味であるかを考へますと，

x錢÷10×3＝45錢

となりますから，これから逆に考へて，54錢÷3はx錢÷10の値に等しく，更に54錢÷3×10は，xの値に等しいことが分るのです．それで

0.3で割るには3等分した結果を10倍すればよいことが分るのですが，之を小數を整數で割る方法と一致さす爲めには，其の計算の順序を變更して，

0.3で割るには，10倍した結果を3で割ればよい．

ことを理解さして置くことが必要です．

かくして兒童は0.5で割ることは，10倍して5で割るとよいことが分り，又0.27で割るには，100倍して27で割ればよい事が分るのです．

又次の如き事實問題を考へて見ませう．

【例2】 1升の價が1圓80錢のの酒を何升か買つて，6圓66錢の金を拂つた．何升買つたのか．

の問題に於て，次に示す如く求める數量と，與へられた數量とを明瞭にし，且つそれ等の數量の關係式

(求) 買つた酒の升數…x

(與) $\begin{cases} \text{1升の價……108錢} \\ \text{總代金………666錢} \end{cases}$

(1升の價)×(升の數)＝(總代金)

を用ひると，

180錢×x＝666錢

の關係式が出來ます．それでxの値は

666錢÷180錢＝

の示す計算を施せばよいのです．

今此の計算を行ひますと，次に示す通り3.7となることが分り，買つた酒の分量は，3升7合であることが分ります．

```
      3.7
180)666
    450
    1260
    1260
       0
```

今666錢÷180錢の意味を，作業的に考へて見ますと，6圓66錢の中に1圓80錢が幾度含まれて居るか，其の度數を見出すことであり，そして其の度數が3度あるときは，酒の分量は3升であることが分るのです．若し又上の計算のやうに3.7だけ含まれて居る場合には，3度と一度の十分の七だけ含まれて居るのですから，酒

の分量は3升と，一升の十分の七即ち7合だけ含まれて居ることになるのです．

それ故に6圓66錢を1圓80錢で割る場合には，3度と餘りが1圓26錢と答へないで，其の度數にも小數を考へて，3.7度含まれて居ると考へてもよいのです．併し，其の度數を小數にまで擴張する必要がある場合は，其の事實問題の性質によつて定まるので，例へば机の如きものゝ數を求める場合には，其の割り算の結果としての度數は，必ず整數であり，餘りは必ず餘りとせねばならないのです．例へば

【例3】机1脚の價が3圓50錢の場合に，15圓のお金では，これと同じ机を何脚買ふことが出來るか．

の如き問題は，

15圓÷3.5圓＝

の結果を，小數の位まで，求めてはならないのです．

例2に於けるやうに割り算の結果を，小數の位まで，求めることの必要な場合が，多いのですから，必要ならば小數の或る位まで，割り算をさせ

る樣に指導せねばならないのです．そして此の場合には例へば23.5÷7.5は，23.5を10倍した結果，235を7.5で割ればよいのですから，之を235.00……÷75の如く考へて，計算させるとよいのです．

此のやうに割り算を作業的に考へて，或る量の中に，他の之と同じ種類の量が，何度含まれて居るか，其の度數を見出すことであり，そして其の度數として，小數をも考へることの必要が分つたならば，小數除法の計算法を，此の累減法(又包含法ともいひます)から，建設することが出來ます．例へば

【例4】一個0.7錢の柿は25.2錢で幾つ買へるか．

の如き，25.2錢÷0.7錢の結果が，整數の答を得て割り切れる場合は勿論，前に示しました

1升の價1.8圓の酒は，6.66圓で幾升買へるか．

の如き，6.66圓÷1.8圓の除法の結果が，整數の答だけで割り切れないものまでも，作業的の累減の意味から，其の計算の方法を，考へてもよいのです．

之を要するに，小數で割る場合は，等分の意味はなくなるばかりでなく，累減の場合でも，其の

答が小數となる場合には，度數を小數にまで擴張せない限り，其の意味を失ふものですから，事實問題の算式を考へる場合には，之を乘法の逆として，これから其の算式を作らすやうに，指導せねばなりません，併し，斯くの如くにして，除法の計算を建設した後に於ては，形式不易の法則によつて，小數で割る場合にも，等分又は累減(包含)の意味を擴張して，これ等の作業的の意味から，其の算式を作つてもよいのです.

8. 小數で割る計算

前節に述べたやうにして，小數で割ることの意味を定めた後には，小數で割るにはどのやうに計算するとよいか，其の方法を發見さすことは，困難ではありません．今此の例をあげておきませう.

【例1】 25.2 ÷ 0.7 を計算せよ.

0.7で割ることの意味は，10倍して7で割ることですから，先づ23.2を10倍して，其の結果252を7で割ればよいのです．即ち

25.2 × 10 = 252　　7)252 36　　そして之を　　0、7)25、2 36

と結合すればよいのです.

又25.2 ÷ 0.7を25.2の中に0.7が何度含まれて居るかの意味に考へるときは，25.2は252分で，0.7は7分でありますから，このやうに被除數と除數とを，同じ單位の整數として，上のやうに計算するとよい事が分るのです.

又之と同じやうにして

0.8)59.3　　0.2)9.36　　0.5)42

の如き問題は，被除數と除數の兩方を，分の單位で表はし，

0.03)2.45　　0.06)241.5　　0.05)0.7625

の如き問題は，被除數と除數の兩方を，厘の單位で表はして，計算するとよいことを，知らせることが出來ます．勿論其の中の二三のものに就いては，小數を方眼紙で表はしたものを用ひ．整數の場合に比較して，其の除法計算の意味を，十分に理解さゝねばならないのです.

此のやうにして，小數を方眼紙を用ひて具體化し，之によつて，例へば 241.5 ÷ 0.06 の如き計算法が，作業的に理解されたならば，67.16 ÷ 0.008 の如き計算は，被除數と除數の兩方を厘の單位で

表はして，計算を行へばよいことを，知らせることが出來ます．

以上除法計算の建設法を，二通りの方法で述べましたが，我々が兒童を指導する上に於ては，其の何れかを主とせねばならないと思ひます．私は第五學年或は第四學年の終に於て，此の小數での除法を指導するならば，そして小數での除法を抽象數に就いて建設するのではなく，事實問題と關係をつけて，之を解決する必要の上から，小數での除法を指導するやうにするのですから，其の何れの方法を主とすべきかといへば，逆の意味から其の方法を指導するのがよいと思ひます．なぜならば事實問題と關聯して，其の計算法を指導するには，前にも述べました通り，等分除法の意味が全く失はれて，之と連絡をとることが，出來ないからであります．

併し何れを主とするも，他の意味も考へさして置くことは必要でせう．

9. 小數を用ひる事實問題

前に述べました通り，小數の觀念を作り，これ

等の計算の意味即ち計算觀念を事實問題に關聯して，指導した後に於ては，小數を用ひる事實問題の解き方は，非常に容易になるのです．今其の解き方の指導法の例によつて示しませう．

【例1】 1升58錢の醬油がある．此の醬油7升6合の代はいくらか．

先づ與へられた問題に就いて，求める數量は何か，與へられた數量は何かを，次のやうに摘記させます．

(求)　醬油の代金…………x錢

(與) 1の價………………58錢
　　　買つた醬油の分量…7升6合

そしてこれ等の數量の關係を考へさすのでありますが，兒童が其の關係式を確實に記憶して居る場合は，何も問題はありませんが，若し其の記憶が曖昧なときは，1升の價と醬油の分量とを，小さな整數として，假に1升の價が5錢のものを2升買つたときは，どうすると其の代金が出るか，3升の時はどうかと考へさせて見て，これから歸納して，1升の價に買つた醬油の升の數を掛けると，其の代金が出ることを發見させ，此の關係を本問題にも適用して，

58錢×7.6

の算式を見出させるのです．こゝに7.6は，7升6合の升の數を表はすものです．

かくの如く指導しても考へつかない兒童があるならば，

1升58錢の醬油がある．此の醬油4升の代は幾らか．

の問題を作業的に指導し，これによつて，

1升の價が知れて居り，又買つた醬油の分量が知れて居るときに，其の代金を見出すにはどうするとよいか．

の如き，數を含まない問題に就いて，1升の價に買つた醬油の升數を掛けると，其の代金が出ます．の答を得るやうに，換言すれば數量の關係を抽象するやうに，指導するのです．そして此の抽象された公式が

又此の醬油0.8升の代は幾らか．

の問題に適用されることを指導し，0.8升は8合であるが，58錢が1升の價であるから，之を升の單位で表はし，そして0.8を掛けるのであることを，十分に指導した後

又此の醬油7升6合の代は幾らか．

の問題の解き方を指導するのです．そうすると兒童は，1升の價に升の數を掛けることが，十分に徹底して居るのですから，此の場合に7升6合を升の單位で表はし，7.6升の7.6を掛けると，其の代金を見出し得ることが分るのです．

【例2】 木綿1丈7尺5寸の代が1圓20錢であると1尺の價は幾らか．

例(1)のときのやうに，先づ求める數量と，與へられた數量とを，次の通り摘記させます．そしてこれ等の數量の關係式を考へさすのです．

(求) 1尺の價……………… x 錢

(與) 買つた木綿の長さ…1丈7尺5寸

(與) 總代金……………… 1圓12錢

若し兒童の記憶が確實でない場合には，數を小さくして，例へば假に木綿を3尺買つて，12錢の代を拂つた場合には，1尺はいくらか．4尺の代が8錢のときはどうかと，考へさすやうにして，作業的に，總代金を買つた尺數で割るとよいことを歸納させ，それから

112錢÷17.5＝

の算式を作るやうに指導するのです.

併し此の問題のやうな, 買物をした場合に, 其の代金を見出す如き問題には, 兒童はいつも觸れて居るのですから, 1尺の價に, 買つた尺數を掛けると, 代金が出る位のことは, 兒童全體が抽象して居ることゝ思ひます. それで此の場合には, 先づ此の關係式を用ひ

x錢×17.5＝112錢

の式を作り, これから考へて

112錢÷17.5＝

の算式を發見するやうに, 指導するのです.

【例3】 白米相場が1圓につき6.4立のとき, 56立の價は何程か. 又1人が1日に0.6立の米を食べるとすれば1人1日の米代はいくらか.

の問題は, 先づ1圓で6.4立であると, 2圓ではどうか. 3圓ではどうか. といふやうに, 二三の場合に就いて考へて見ますと, 或る金高の圓の數を6.4立に掛けたものが, 其の金高で買へる米の分量であることが分ります.

それで求める價をx圓としますと,

6.4立×x＝56立

の關係式がありますから, 此の等式から考へて, 求める價の圓の數は

56立÷6.4立＝

の式で計算することが出來ると, このやうに指導するのがよいやうです.

或は等分の作業から考へて, 56立の中に6.4立が幾つあるかを見て, 56立から6.4立づゝを順次にとつて, 之を一列にならべたものと考へますと, 其の一つの量の價は何れも1圓ですから, 56立の中に6.4立が幾つあるかを見ますと, 其の數が求める圓の數になることが分ります. それで求める價の圓の數は

56立÷6.4立＝

であることが分るのです.

又第二の問題は, 次のやうに指導するのです.

1人1日の米代は, 0.6立の價を見たらよいのです. そして前の問題で考へた通り, 求める價をx圓としますと,

6.4立×x＝0.6立

の關係式が出來ますから, これから考へて

0.6立÷6.4立＝

の計算をしますと，求める價の圓の數が出ることが分ります．

又等分の作業から考へてもよろしいが，此の場合は0.6立の中に6.4立が1度も含まれないので，其の度數は小數になりますから，兒童にとつて異樣に感じられるやうです．それで前の代數的考へ方を，指導する方がよいのです．

第八章　分　數

1. 抽象的意義

分數には二つの意義があります．今$\frac{2}{3}$を例にとつて，其の意義を述べて見ますと次の通りです．

1. 三分の二とは，1を3等分したものを2つ寄せ集めたものであります．
2. 三分の二とは，2を3等分したもの(即ち3で割つたもの)であります．

今此の第二の意義を，他の言葉でいひ表はしますと，

三分の二とは，之を3倍したものが2になる數であります．

といふことが出來ます．なせならば，乘除は互に順逆の計算でありますから，3倍すると2になる數といふ事は，2を3で割つた數であるといふのと，全く同じ關係を表裏から眺めただけの，ちがひであるからです．

さてこれまで，我々が分數を敎授して來た方法は，先づこれ等の二つの意義のうち，何れか一つ

の意義を明らかにして，それから分數の性質や計算の法則を，誘導せうと努力したのであります．其の最初にあたつて，簡單な圖解等を用ひることはありましたが，之は單に其の性質や，計算の法則の理由を說明する爲めのもので，之が一度理解された後には，これ等の作業から離れて，單に法則による計算の練習を，課したのであります．

國定敎科書を見ても，計算は次の諸例に示す如き順序で考へしむべし，と注意されて

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1}{7}\times2+\frac{1}{7}\times3=\frac{1}{7}\times(2+3)=\frac{1}{7}\times5=\frac{5}{7}$$

$$1-\frac{3}{5}=\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}\times(5-3)=\frac{1}{5}\times2=\frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{7}\times3=\frac{1}{7}\times2\times3=\frac{1}{7}\times(2\times3)=\frac{1}{7}\times6=\frac{6}{7}$$

$$\frac{4}{9}\div2=\frac{1}{9}\times4\div2=\frac{1}{9}\times(4\div2)=\frac{1}{9}\times2=\frac{2}{9}$$

の如き例が示されて居ります．いふまでもなく，これ等の計算の順序は，分數の觀念の十分に出來た兒童で，しかも計算の意味が，十分に理解されて居るものでありますと，敎師の示すまでもなく，作業的に其の結果を求めるものであり，そして其の思考の順序も，全く其の通りになるものです．

併し敎師が圖解等の作業によつて，其の計算の順序を說明し，そして是等の計算の法則を授け，之によつて諸種の計算を練習しただけでありますと，兒童は計算の法則を混同して，思はざる誤算をなすのみか，たとひ其の計算が出來たとしても，之を應用して事實問題を解く上にも，困難を感ずるものであります．

斯くの如き敎授の方法は，從來我々が何度も經驗したところで，其の成績があがらないことは，玆にいふまでもない事です．併し我々は，敎材の論理的發展を强く考へて居て，分數の敎授は必ず，其の意義から出發せねばならないものゝやうに，思つて居た爲めに，其の指導の方法が，變るべくして變らなかつたのです．

分數敎授を其の意義から出發せうとしますと，其の取扱ひが抽象に流れるのは，無理もないことです．よしや其の說明に圖解を用ひたとしても，其の觀念が確實にならないうちに，分數の性質や計算の法則を授けたものですから，そして其の敎授も前に示した例の如く，論理的の順序を，單に圖解等を用ひて說明するだけに，とゞめたもので

すから，諸種の法則を敎授する每に，兒童は前の法則ミ混同するやうな事が，おこつたものミ思ひます

從つて分數の指導は，先づ分數の觀念を養成し，これから諸種の法則が，自然に抽象されるやうに，指導せねばならないミ思ひます．玆に分數の觀念は如何にして養成されるものであるか，に就いて，述べる必要があるのです．

2. 分數の觀念

前節にも述べましたやうに，分數の指導は，其の觀念から出發せねばならないものミしますミ，今日の國定敎科書のやうに，低學年から其の觀念を養成するここをつミめないで，第六學年になつて，一時にこれの指導をなすこミは，ごんなものでせうか．

いふまでもなく，第四學年に於て，或數の分數を求めるここを授け，これから第五學年を終るまで，かゝる意味に於て，分數を指導するやうになつて居るのですが，かゝる意義は分數の觀念を養成するミいふよりも，寧ろ割り算ミいふ方が近い

のです．分數の觀念は，分數を或る量をあらはす言葉又は符號ミして導入し，これ等の言葉又は符號が，其の量ミ結合したミきに生ずるものミ思ひます．

我々ばかりでなく，兒童の生活に於ても，1より小さい數量を取扱はねばならない時が，非常に多いのです．例へばこゝに梨子が2個ある場合に，之を3人の子供に分配せねばならないやうな實際問題には，兒童は絕えず遭遇して居るこミゝ思ひます．又こゝに蜜柑が7個あるミき，之を3人の間に等分せうミしますミ，先づ2個づゝ分配したミきに1個餘ります．算術では1個づゝミ1個餘るミ答へて平氣でありませうが，之が實際問題でありますミ，此の餘りを如何に處分するミよいか，の問題がこゝに起つて來るのです．そして結局此の餘りの1個を3等分し，其の一つづゝを3人の間に分配するミ，損得がなくてよい事が分ります．勿論餘りの處分法ミしては，其の中で2人が棄權して，此の1個を殘りのものに與へるこミもありますが，正しく等分せうミしますミ，この樣に餘りの1個を等分して，之を3人の間に分配するの

が合理的です．こゝに1より小さい量を取扱ふ必要があるのです．

このやうに我々のみでなく，兒童の生活にも，1より小さい量を取扱はねばならない場合が，可なり澤山あることに氣づきませう．それでこんな場合に於て，此の1個より小さい量を表はす言葉と，それから少しおくれて其の符號とを指導し，これ等の言葉及び符號を，是等の量に結合するやうにして居ますと，こゝに分數の觀念が出來るのです．そしてこれらの指導は別に困難なことではないのですから，之を第一學年のときから機會をつくつて指導する方がよいのです．若し適當な指導者があるならば，家庭に於て入學前の幼兒にも，之を指導すべきであると思ひます．

單一物を等分して

それ故に分數觀念を指導する第一步は

梨子，柿，密柑，饅頭等の如き，單一物を等分して，之によつて分子が1なる分數（之を單位分數といつて分數の單位となるものです）の言葉を，これ等の量と結合することです．

詳しくいひますと，兒童の生活に於て，梨子とか林檎とかを．2つ或は3つ等に等分して，其の1つの量を取扱はねばならない，實際問題に遭遇した場合には，この量と結合して2分の1，3分の1 4分の1等の言葉を授けるのです．此のやうにして居ますと，兒童はその一つのものが，梨子であらうが，林檎であらうが，其の一つを二等分した一つのものを，二分の一といふことが分り，これから抽象して，二分の一とは一つのものを二等分したものであることを知るのです．三分の一四分の一に就いても同様です．

併し是等の抽象的意義は，作業から出發したものでありますから，抽象的意義から出發したものと，其の結果は同一であつても，其の背後には，具體的の背景即ち觀念がある强味があるのです．換言すれば觀念化し得る强味があるのです．

斯くの如くにして，單位分數の觀念が出來た後には，第二段の普通の分數（分子が1でない眞分數を指して居るのです）の指導に進むのです．そしてこれにも前に述べた通り，單一物を等分したものを，2つ或は3つ寄せ集めた量と結合して，是等の言葉を用ひるのです．

例へば林檎が一個ある場合に，子供と母親が，之を分けて食べるものと考へて下さい．母親は此の梨を三等分して，其の一つを取り，子供には其の二つを與へるときに，「お母さんは三分の一でよろしいから，おまへには三分の二だけあげませう」と實際の量とこれ等の言葉とを結合して居ますと，子供は自然に，普通の分數の觀念をも得るものです．そして一から三分の一をとると三分の二が殘り，三分の一と三分の二とを合はせると一になる如き，簡單な計算が出來るばかりでなく，實際の量を比較して，三分の二は三分の一より大きいといふ樣な，大小の比較も出來るやうになるのです．

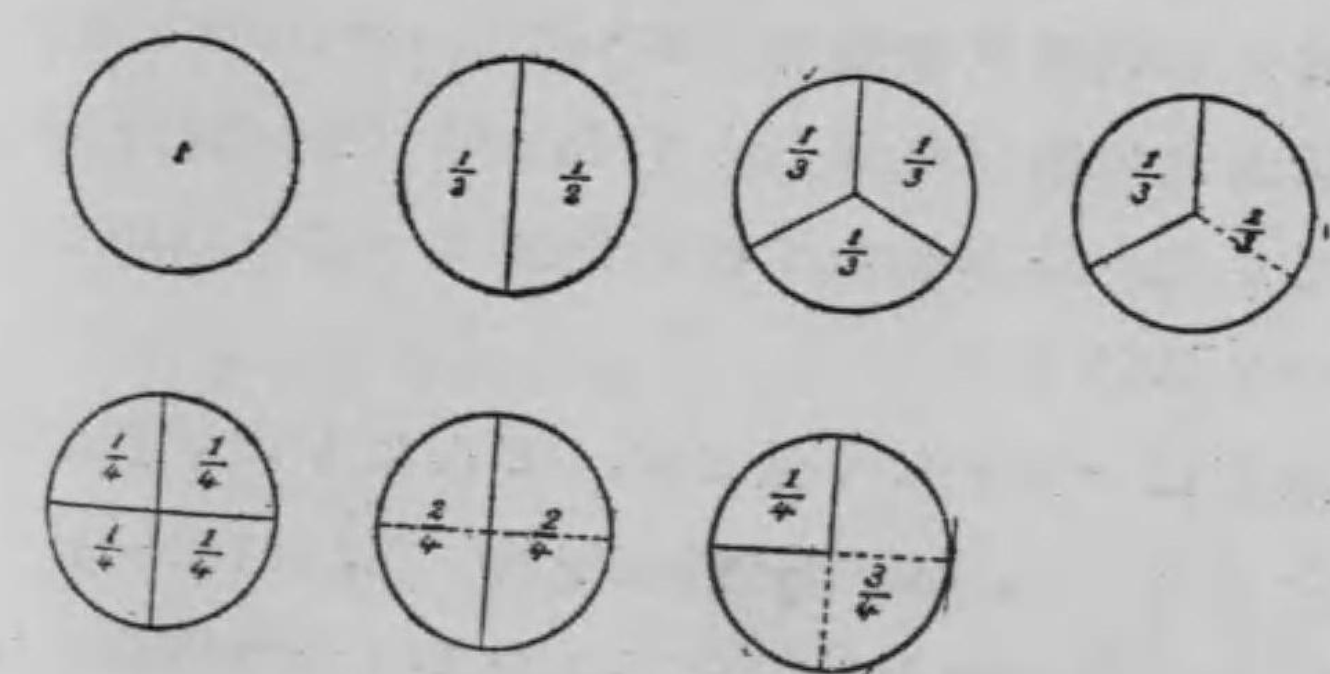
又梨子を四等分した種々の量を取扱ふときに，之によつて單位分數ばかりでなく，普通の分數をも指導して居ますと，前にあげたやうな簡單な計算のみでなく，四分の二と二分の一とは，同じ量をあらはすことが分り，そして分數の重要な性質

分數の分母と分子とに同じ數を掛けても，或は分子と分母とを同じ數で割つても，其の値は變らない．

ことを抽象する基礎となるのです．

尤も第一二學年に於ては，分子分母の如き實際にはあまり必要でない言葉を，知らせるのではありませんから，これ等の學年頃の兒童に，上にあげたやうな分數の性質を發表さすことは，これは無理な注文であります．併し同じ量であつても，之を等分した數によつて，其の言ひあらはし方が澤山にあつて，之をあらはす場合には，例へば四分の二といふよりも，二分の一といつた方が，分りよい位の事は，考へさすことが出來ると思ひます．

今單一物を等分して，單位分數又は普通の分數の觀念を作る作業を，圖解して見ると次のやうになります．



一群の量を等分して

分數の觀念は，上に圖解したやうに，單一物を等分した量，或は之を幾つか寄せ集めた量について，指導するだけでは十分でありません．これ等の觀念が少し出來た後には，次の一群の量を等分した量について，單位分數及び普通の分數の觀念を與へるやうに，其の指導を進めて行かねばならないのです．

尤も單一物を等分して，單位分數と普通の分數の觀念が確立してから，其の次に一群をなす量を等分しての指導に，移るといふやうな嚴格な順序が，きまつて居るのではありません．これ等の指導は，機會ある每にするのですから，單一物を等分しての觀念が，十分に確立せない前であつても機會があれば次の指導に移つてよいのです．

只大體の順序を示しますと，單一物を等分する作業から，一群をなす物の作業に，移らねばならないと思ひます．

然らば一群をなす量とは，どんなものを指すかといひますと，菓子一箱，半紙一帖，鉛筆一打のやうに，單一物が幾つか集まつて，一つの群をなすことが明瞭なものはいふ迄もなく，私の持つて

居る鉛筆，私の摘んだ花，私の拾つた栗といふやうに，そこにある物の集りを，一團として考へる場合をも，指して居るのです．

「お隣からお菓子を一箱もらつた．今日はおそいから三分の一だけ食べて，あとは明日まで殘しておきませう」といつて，もらつた一群の菓子を三等分して，其の一つ分だけを食べることにしますと，兒童はこんな量をも，三分の一といふのであることが分るのです．今之を圖解して見ますと，

$$\underbrace{\circ\ \circ\ \circ}_{\frac{1}{3}}\quad \underbrace{\circ\ \circ\ \circ}\quad \underbrace{\circ\ \circ\ \circ}$$

又前にあげたやうな實際の場合に，「三分の二だけ殘しておきませう」といつて，一群の菓子を三等分して，其の二つだけを後に殘しておきますと，こんな量をも，三分の二といふ事が分りませう．之を圖解しますと次のやうになります．

$$\underbrace{\circ\ \circ\ \circ\quad \circ\ \circ\ \circ}_{\frac{1}{3}}\quad \circ\ \circ\ \circ$$

此のやうに，一群をなす菓子のやうなものを等分する作業によつて，そこに出來た實際の量と結合して，單位分數又は普通分數の言葉を，使用し

て居ますと，單一物を等分したときのやうに，分數の觀念を與へることが出來るのです．そして分數の大小や，簡單な計算はいふ迄もなく，或る場合には，前にあげた分數の性質をも抽象するやうになるのです．

そればかりではありません．

【例1】お隣からお菓子を9つもらひました．そして其の晩には三分の一だけ食べたのです．幾つ食べましたか．後には幾つ殘つて居ますか．

之を分數でいへば何といつたらよいでせうか．

の如き事實問題や，もつと進みますと之を反對にした

【例2】お母さんが鉛筆を買つて來て，「今日は三分の一だけあげておきませう」といはれて，僕に4本の鉛筆を下さいました．お母さんは，鉛筆を何本買つて來られたのでせうか．

の如き事實問題をも解くことが出來るのです．

國定教科書によりますと，第四學年に於て，分數の言葉及び符號を，始めて授けることになつて居ますが，其の取扱ひ方は，丁度一群をなす量を等分して，分數の觀念を養成するのと，同じやう

な形になつて居るのです．併し前にも述べましたやうに，實際問題の作業的解決を基礎とするやうな事はないのですから，其の方法は寧ろ割算に近いものであります．又第五學年に於ける分數の指導もこれと同樣です．そして第六學年になつて，單一物を等分する如き，簡易な圖解の作業から，諸種の法則を說明的に授けるやうになつて居るのです．

假分數の觀念

分數は單一物又は一群をなす量を等分して，其の幾つかをとつた量をあらはすのですから，例へば，

【例】蜜柑7個を3人に等分すると，1人に幾らづゝとればよいか．

の如き事實問題を解決する場合に，之を2個と$\frac{1}{3}$と答へることは，兒童にとつて，少しも不思議なことではないのです．從つて帶分數の觀念を與へることは困難でないやうですが，之と同じ量であつても，假分數の觀念を與へることは，少し困難のやうに思はれます．なぜならば，兒童の普通の生活に於ては，實際問題として，假分數を取扱ふ

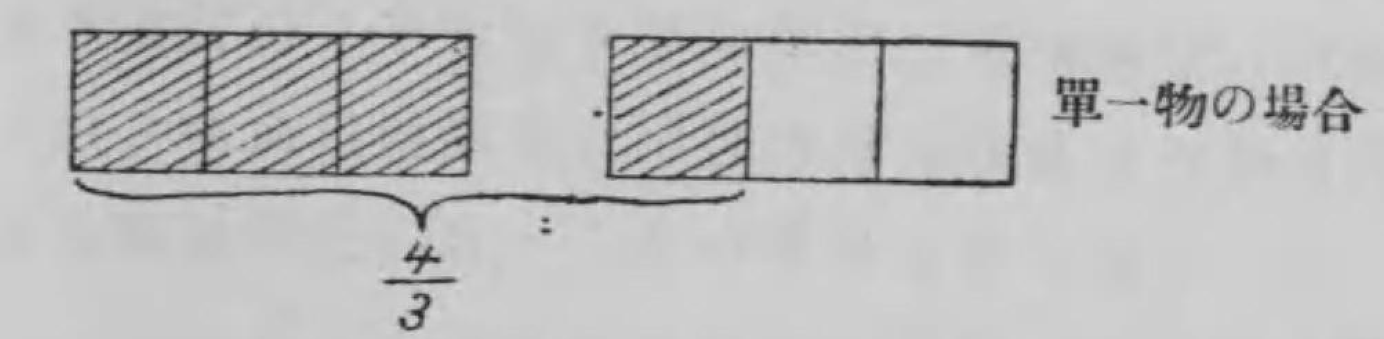
ことが，殆どないからであります．よし假分數を取扱ふやうな機會があつても，兒童は之を帶分數の方面から，之を觀察するものであります．例へば

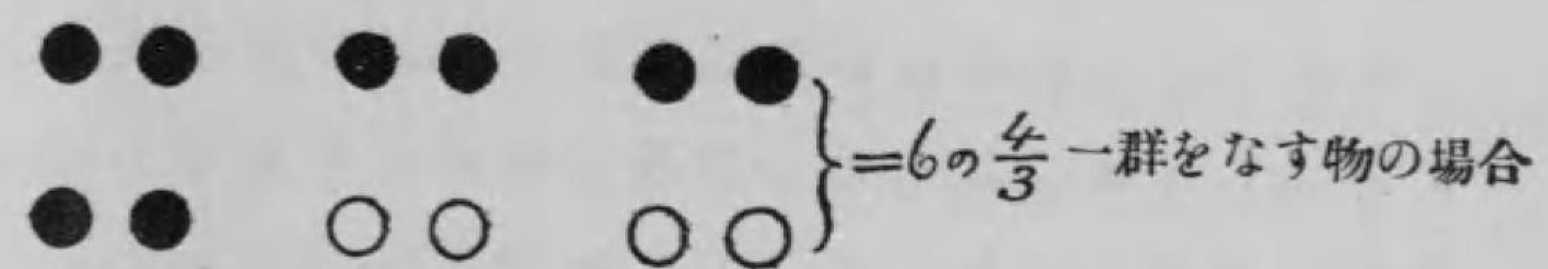
お母さんと子供とが，柿2個を食べる場合に，お母さんが其の柿の皮をむいて，それから其の二つとも四等分し，其の中でお母さんが$\frac{3}{4}$を食べて，子供が殘りを食べるやうな場合がありませう．此の時子供は1つと$\frac{1}{4}$を食べたと思つて居るのであつて，四分の五食べたとは考へて居ないのです．

併し兒童が分數の觀念を得て，例へば四分の三といふときの四(即ち分母)は，等分する數で，三(即ち分子)は等分したものを，幾つとつたかを表はす數であることが，十分に分つた後に於ては，前に述べた如き實際の事實があるときに，之を四分の五といつて，差支ない事を指導することが出來るのです．又

子供が梨子を食べるとき，母親が皮をむいてから，之を四等分して，其の全部を子供に與へるやうな事がありますが，こんな場合にも子供は，梨子を一つ食べたと思つて居るのであつて，四分の

四食べたとは考へて居ないのです．併し分數の分母分子(これ等の言葉は知らなくとも)は，如何なるものを表はして居るかが十分に分つた後に於て，之が四分の四といふことを指導しますと，兒童は次第に假分數の觀念を得ることになるのです．之を圖解しますと次のやうになります．





此のやうに，假分數の觀念は眞分數や，帶分數の觀念を與へる場合に比べて，少しく困難でありますから，是等の觀念よりおくれて指導せねばならないのです．

分數の第二意義

前に述べました，分數の觀念を養成する方法は，單一物を等分する場合であつても，又一群をなす量を等分する場合であつても，何れも一つの物或

（ロ） 普通分數の觀念を養成する.

(2) 一群をなす量を等分することによつて

（イ） 單位分數の觀念を養成する.

（ロ） 普通分數の觀念を養成する.

(3) 單一物又は一群をなす量に就いて，假分數の觀念を養成する.

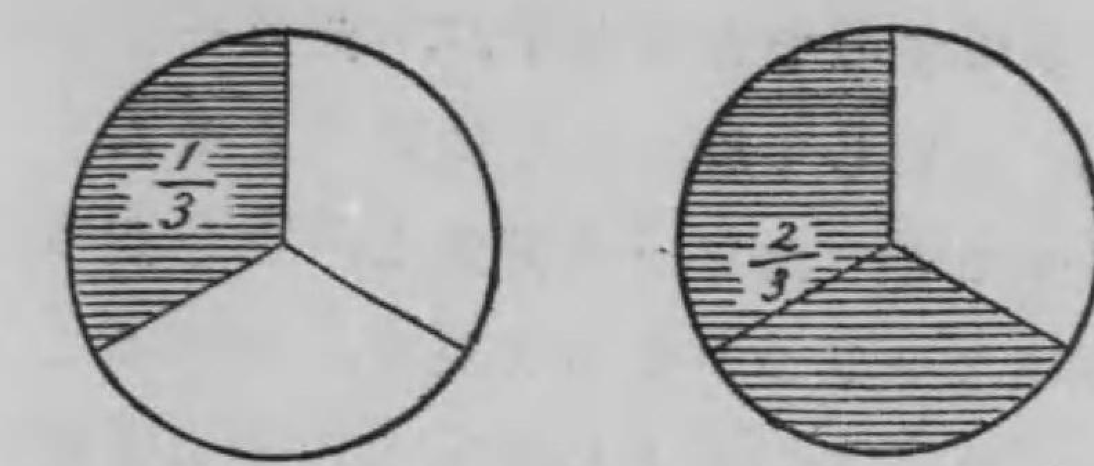
(4) 分子だけの物を，分母だけに等分した結果として，第二意義の觀念を養成する

ことの，四段階の具體的指導を經て，それから抽象的意義に這入らねばならないと思ひます.

二つの分數の比較

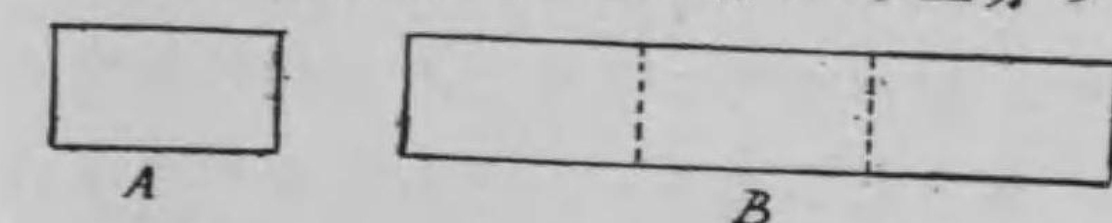
猶，これ等の各段階を指導するに當つて，我々の特別に注意せねばならないことは，二つの量を比較さす事であります. 二つの量の比較には，いふまでもなく，差の意味の比較と，比の意味の比較とがありますが，分數の觀念を養成するには，比の意味の比較が大切であるのです.

例へば單一物を等分した量に就いて，二分の一，三分の一，三分の二等の觀念を養成するのでありますが，進んでは三分の二と三分の一とを比較して，次の圖に示された通り，三分の一は三分の二



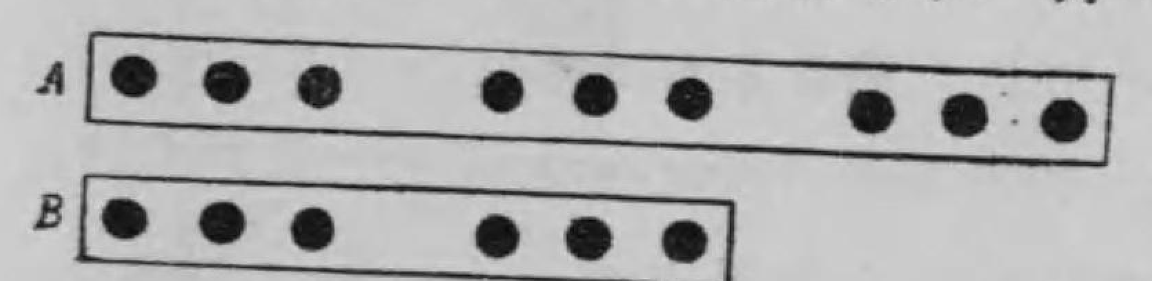
の二分の一である. また三分の二は三分の一の二倍であることを，具體的に指導するやうなものです.

斯くの如くにして，兒童は 50 cm の物指と 1m の物指とを比較して，50cm は 1m の二分の一であることが分り，



次の如き二つの矩形の面積を比較して，AはBの三分の一であることを知るのであります.

そして，比の意味の比較は，一群をなす量に就いても，指導することが大切です. 例へば次の圖に示す如き，一群をなすA，Bの量を比較して，BはAの三分の二であることを，指導するやうなものです.



つまり分數は，單一物又は一群をなす量を一と見て，これを幾つかに等分したものを，幾つか集

は一つと見做したものを，幾つかに等分して，其の一つ或は幾つかをとつた量と結合して，分數の言葉又は其の符號を授けるものでありますから，之を抽象した場合には，

　分數は1を分母だけに等分したものを，分子だけ寄せ集めたものである．

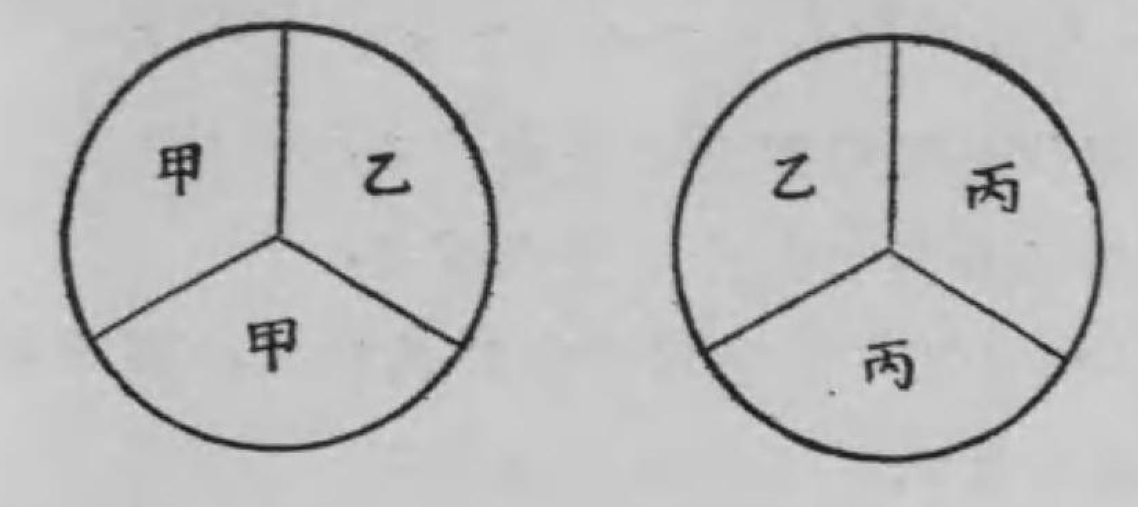
との，分數の第一意義になるのです．換言すれば，前に述べた如き，實際問題の作業的解決から這入つて，分數の觀念を與へることは，分數の第一意義を指導する基礎となるものであります．

　それ故にこれ等の作業的解決から，分數の觀念が確立した後には，第二意義の基礎を作るやうに，指導を進めて行かねばならないのです．そしてこれの指導も，次に述べるやうな實際問題から，這入らねばならないのです．

【例】お母さんが子供3人に梨2つを，同じやうに分けて下さいました．一人は何程づゝもらつたでせうか．

の如き問題に就いて，どうすると，梨2つを3人の子供に，同じやうに分けることが出來るかを，兒童に工夫させますと，我々は其の作業を指導す

ることによつて，結局次の圖の如く，一人は三分の二づゝされればよいことを，知らせることが出來ます．



そして2個を3つに等分することは，除法の計算觀念によつて，2÷3の式で表はすことが分つて居ますから，

$$2 \div 3 = \frac{2}{3}$$

となつて，$\frac{2}{3}$とは2を3で割つた數であることを知らせることが出來ます．他の場合に就いても之と同じやうに指導することが出來ませう．我々はかくの如くにして，

　分數は分子を分母で割つた數である．

ことを抽象さすことが出來るのです．

概括

　分數の觀念を養成するために，以上に述べた事をまとめて見ますと，

(1) 單一物を等分することによつて

　(イ) 單位分數の觀念を養成する

(ロ) 普通分數の觀念を養成する.

(2) 一群をなす量を等分することによつて

(イ) 單位分數の觀念を養成する.

(ロ) 普通分數の觀念を養成する.

(3) 單一物又は一群をなす量に就いて, 假分數の觀念を養成する.

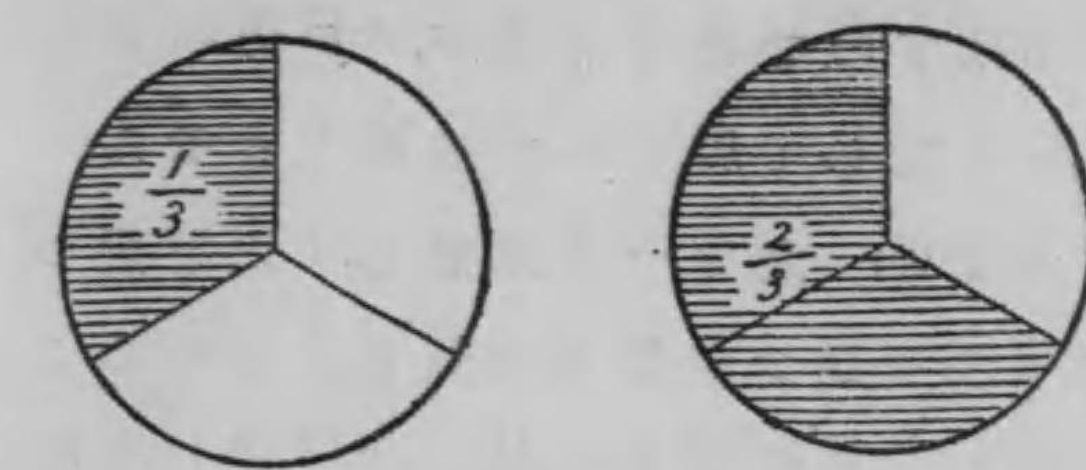
(4) 分子だけの物を, 分母だけに等分した結果として, 第二意義の觀念を養成する

ことの, 四段階の具體的指導を經て, それから抽象的意義に這入らねばならないと思ひます.

二つの分數の比較

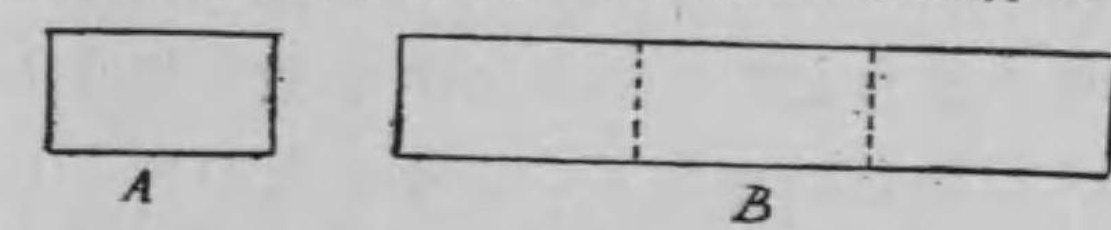
猶, これ等の各段階を指導するに當つて, 我々の特別に注意せねばならないことは, 二つの量を比較さす事であります. 二つの量の比較には, いふまでもなく, 差の意味の比較と, 比の意味の比較とがありますが, 分數の觀念を養成するには, 比の意味の比較が大切であるのです.

例へば單一物を等分した量に就いて, 二分の一, 三分の一, 三分の二等の觀念を養成するのでありますが, 進んでは三分の二と三分の一とを比較して, 次の圖に示された通り, 三分の一は三分の二



の二分の一である. また三分の二は三分の一の二倍であることを, 具體的に指導するやうなものです.

斯くの如くにして, 兒童は 50 cm の物指と 1m の物指とを比較して, 50cm は 1m の二分の一であることが分り, 次の如き



二つの矩形の面積を比較して, A は B の三分の一であることを知るのであります.

そして, 比の意味の比較は, 一群をなす量に就いても, 指導することが大切です. 例へば次の圖に示す如き,

一群をなす A, B の量を比較して, B は A の三分の二であることを, 指導するやうなものです.

つまり分數は, 單一物又は一群をなす量を一と見て, これを幾つかに等分したものを, 幾つか集

めたものをあらはすのでありますが，此の一となるべきものは，一定して居るのではありません．分數の量であつても，之を一と見做し，之を幾つかに等分して，之を幾つか集めた量を，考へることが出來るのです．此の場合に於ても，やはり何分の何の言葉，又は符號を用ひることを，二つの量を比較することによつて，十分に徹底さして置かねばならないのです．一となるべき量が固定して居るものと，思ひ込むことから，分數に關する事實問題の，解けない場合が，非常に多いことは注意せねばなりません．

3. 低學年に於ける分數の指導

分數は抽象的意義から，出發してはよくありません．低學年から機會をつくつて，

(1) 單一物を等分することによつて

(2) 一群をなす量を等分することによつて

作業的に，單位分數と普通分數の觀念を養成し，それを基礎として，分數計算や事實問題の指導に，這入らねばならないのです．

第一學年

從つて我々は第一學年のときから，次に例示するやうな事實問題を，作業的に指導することが必要なのです．

【例1】 太郎さんと次郎さんが學校から歸りますと，お母さんは大きな林檎一つを，二人に同じやうに分けて下さいました．太郎さんはいくらたべたのですか．

【例2】 もしお友達と三人に一つの林檎を同じやうに分けて下さると，一人はいくらづゝ食べることになりますか．四人に分けるとどうですか．

【例3】 お花さんの兄弟は，お父さんから貰つた大きな瓦煎餅1枚を，同じやうに分けて食べました．皆はいくらづゝ食べましたか．

【例4】 此の梨を分けてあげますが，三分の一と四分の一とはどちらが大きいですか．二分の一と三分の一とはどちらが大きいですか．

【例5】 二分の一と二分の一とを寄せると，いくらになりますか．

【例6】 柿1つを太郎さんと次郎さんとに分けるに，太郎さんには其の二分の一を與へました．次郎さんに殘りを與へたのです．次郎さんのも

らつたのはいくらですか. それでは1から二分の一をとるといくら殘りますか.

つまり第一學年に於ては,

單一物を等分することによつて

(1) 二分の一, 三分の一, 四分の一等の意味

(2) これ等の分數の大小比較

(3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\ 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1,$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1,$ 等を, 實際問題として作業的に指導するとよろしいのです.

第二學年

第二學年になりますと,

單一物を等分することによつて, 三分の二, 四分の二, 四分の三の意味を授けるのです. いふまでもなく, これには次に示すやうな, 實際問題によらねばなりません.

【例1】 お母さんと太郎さんは, 林檎一つを分けて食べました. そして之を三つに切つて, 其の一つをお母さんが食べて, 殘りを皆太郎さんが食べたのです. お母さんはいくら食べましたか. 太郎さんはいくら食べましたか.

【例2】 お隣からもらつたお祝の饅頭1つを, 四つに等分して, 其の三つを太郎さんが食べて, お母さんは其の殘りを食べました. 太郎さんとお母さんの食べたお饅頭は各幾らですか.

更に第二學期から第三學期になりますと, 整數の乘除法を練習するのですから, 一群をなして居る量を等分することによつて, 單位分數又は普通分數の觀念を養ふやうにせねばなりません. 勿論, 實際問題を作業的に解決することに關聯さすのであります.

【例3】 お花さんはお母さんに鉛筆一打を買つてもらつて, 其の三分の一だけ學校にもつて行きました. 學校には何本もつて行きましたか. 家には何本殘つて居ますか. 家にある鉛筆は一打の幾分の幾つといへばよいですか.

【例4】 10錢の二分の一で筆を買ひました. 筆の價は何程ですか.

斯くの如くにして

(1) 分母が2, 3, 4等の分數の觀念を養成する.

(2) 以上の分數の大小を比較する.

(3) $\frac{2}{2}=1,\frac{3}{3}=1,\frac{4}{4}=1,\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ なることを知らせる.

(4) 次に示す如き簡單な計算を，事實問題として作業的に取扱ふ．

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$　$\frac{1}{2}\times 2=1.$　$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1.$　$\frac{1}{3}\times 3=1.$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1.$　$\frac{1}{4}\times 4=1.$　$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$　$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

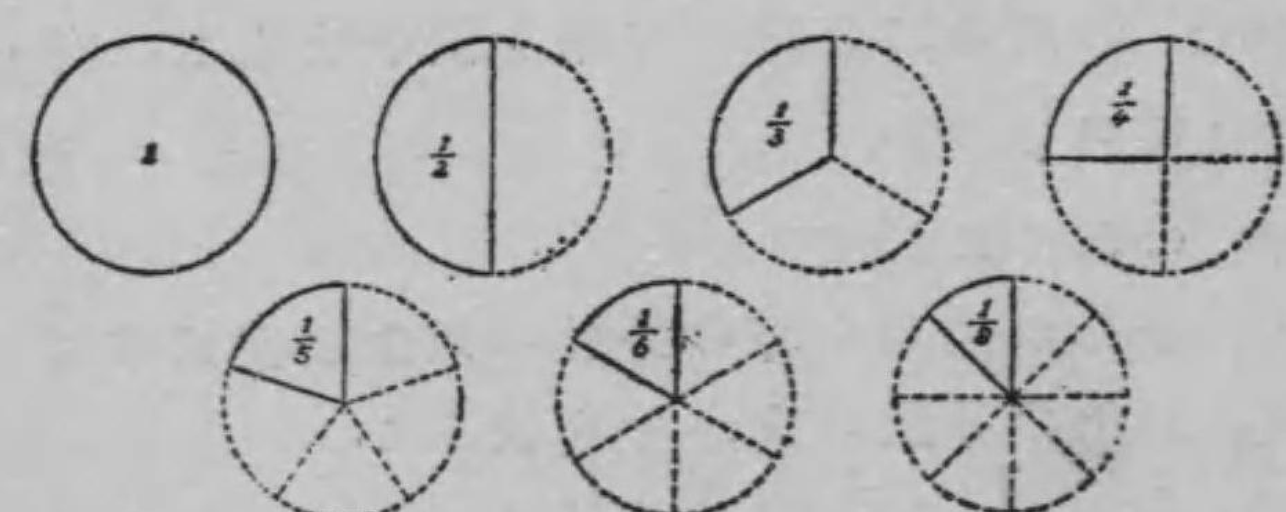
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$　$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$　$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$　$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$　$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$　$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.$　$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1.$

$\frac{1}{2}\div 2=\frac{1}{4}$

第三四學年

第三四學年頃には，第一二學年に準じて，分母が 5, 6, 8 の分數を，之に附加するのです．之を作業に訴へる場合には，實物を用ひるよりも，ボール紙でつくつた，次に示す如き分數板を用ひるとよろしい．



今これ等の分數板を用ひて，分數をあらはすには，單位分數を幾つか集めて之をあらはすやうにするのです．例へば三分の二を表はすには，三分の一を二つ寄せ集めて，之を表はすやうなものです．そして次に示す如き形式の問題を，事實問題として作業的に解決さすのです．今其の形式問題を列擧しますと，次の通りになります．

(1) 簡單な同分母分數の加減．

(2) $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$　$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ の如き分數の形を變へること．

(3) 公分母が暗示された異分母分數の加減，例へば

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$　$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$　$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$　$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$　$\frac{3}{4}+\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$　$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$　$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$　$\frac{5}{8}+\frac{1}{4}$　$1-\frac{1}{2}$

$1-\frac{1}{3}$　$1-\frac{1}{4}$　$1-\frac{2}{3}$　$1-\frac{3}{4}$　$1-\frac{1}{8}$

$1-\frac{5}{8}$　$1-\frac{3}{8}$　$1-\frac{7}{8}$　$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$　$\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}$　$\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$　$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$　$\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$　$\frac{3}{4}-\frac{3}{8}$

$\frac{1}{2}-\frac{3}{8}$　$\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$　$\frac{7}{8}-\frac{1}{2}$　$\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$　$\frac{7}{8}-\frac{1}{4}$

$\frac{5}{8}-\frac{1}{2}$　$\frac{5}{8}-\frac{1}{4}$　$\frac{3}{8}-\frac{1}{4}$

(4) $\frac{1}{2}$の$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2}$の$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{3}$の$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2}$の$\frac{1}{3}$　の如き作業,

(5) 簡單な整數での乘除, 例へば

$\frac{1}{8}\times 3$　$\frac{1}{6}\times 2$　$\frac{1}{8}\times 4$　$\frac{1}{4}\times 3$　$\frac{3}{8}\times 2$

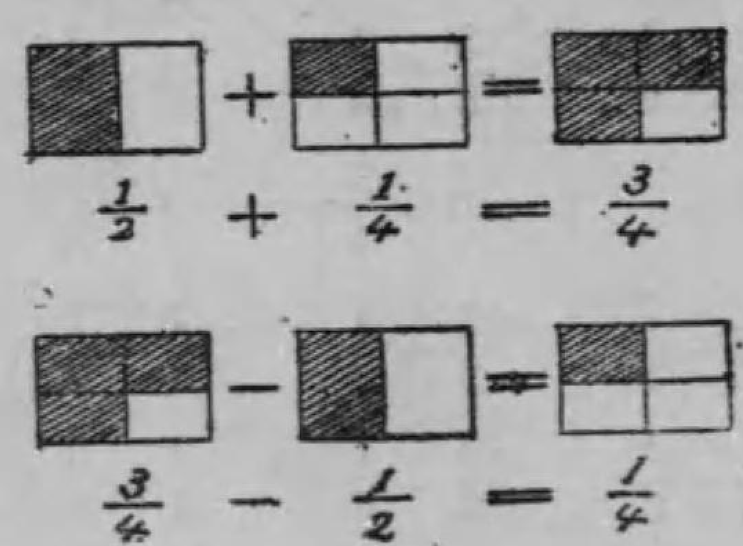
$\frac{1}{2}\div 2$　$\frac{1}{2}\div 3$　$\frac{1}{2}\div 4$　$\frac{1}{3}\div 2$　$\frac{1}{4}\div 2$

$\frac{2}{3}\div 2$　$\frac{3}{4}\div 3$　$\frac{3}{8}\div 3$

(5) 12の$\frac{1}{2}$　18の$\frac{2}{3}$　10の$\frac{3}{5}$　24の$\frac{5}{8}$　の如き一群をなすものゝ, 分數の値を求めるもの, 及び之の抽象.

第五學年

第五學年に於ては, 引き續き簡易な計算を事實問題として, 作業的に取扱ふのですが, 其の作業には方眼紙を用ひて, 次に示す如き圖解を用ひるとよろしい.



敎科書にある如き, 或數の分數の値を求める計算は, 之を抽象的に求め得るやうにせねばならないのです.

4. 意義と種類の指導

分數の觀念から出發し, 次第に抽象に導く爲めに, 事實問題を解決するには, 或は分數板を用ひる作業に訴へ, 或は方形圖解の作業を用ひたのでありますから, 國定敎科書第六學年の最初に示された, 分數の意義と暗算による簡易な計算は, これ等の作業を離れても, 容易に通過することが出來るのです.

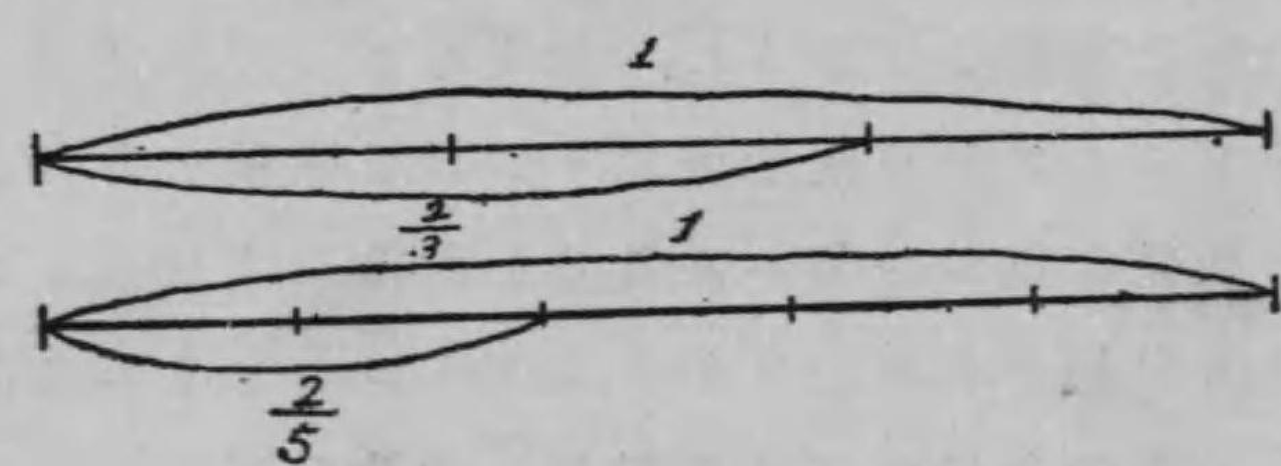
併し, 低學年からこれ等の過程をふまないで, 直に第六學年の指導に這入るものとしますと, 其の進度は少しおくれますが, 前に述べたやうな作業的取扱ひを, 一通り簡略に通過して, それから敎科書の學習に移らねばならないのです. そして敎科書に示された, 分數の意義と其の計算とは, 作業的に理解さすやうに, 注意せねばなりません. 等分することを符號で表はすには, 除號÷を用ひ, 同じ數量を幾つか集めることを符號で表はすには, 乘號×を用ひるのですから, 例へば一を七つに等分したものを二つ集めた數を, 七分の二といひ, 之を$\frac{2}{7}$と書くことが分つたならば, 例へば$1\div 12\times 7$の如き數を分數で答へることは, 困難ではないと思ひます. 何となれば $1\div 12\times 7$ の符號は, 1を12

に等分したものを，7つ集めた數をあらはすからであります．

分數の大小の比較は，分數の觀念が確實に養成された兒童には，それの法則を抽象することは，別に困難ではないのです．併し其の法則を抽象する爲めに，或は其の理由を發表さすときには，圖解によらねばならないのです．そして其の最初の圖解は方形圖解によらねばなりませんが，此の圖解によつて，分數の觀念が確實になつた後は，直線圖解を用ひる方が簡便です．例へば

【例】 $\frac{2}{3}$と$\frac{2}{5}$とはどちらが大きいか．

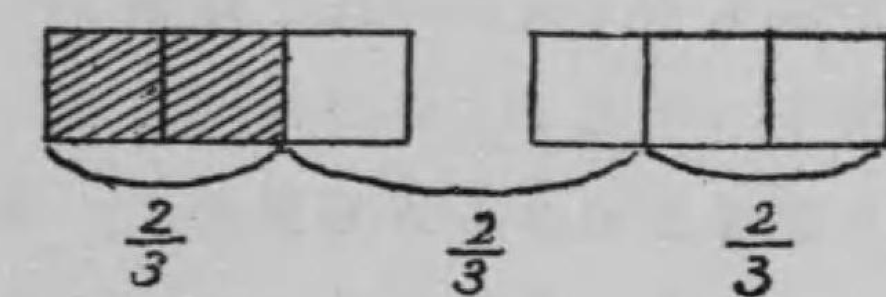
の問題は，次の圖解によつて，$\frac{2}{3}$の方が$\frac{2}{5}$より大きいことを理解さすのです．



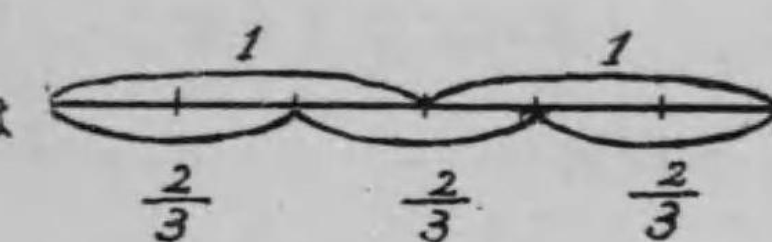
併し圖解によつて，其の結果が正しく分つただけでは，其の法則の理由が分りませんから，$\frac{2}{3}$は$\frac{1}{3}$が2つ集まつたもの，$\frac{2}{5}$は$\frac{1}{2}$が2つ集つたもので，

何れも2つ集まつたものであるが，$\frac{1}{3}$は$\frac{1}{5}$より大きいから，大きなものが集まつた方が大きいと，考へるやうに，指導せねばならないのです．

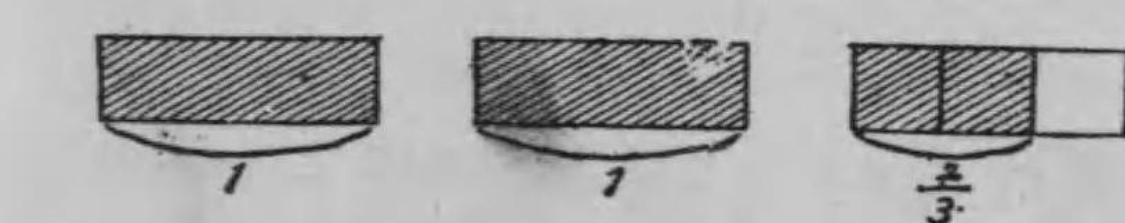
分數の第二意義である，分子を分母で割つた數を分數でいはせるには，分數の觀念のところで述べたやうに，圖解の作業から出發するのです．例へば2を3等分したもの即ち2÷3の結果が$\frac{2}{3}$であることを圖解すると，次の通りになります．

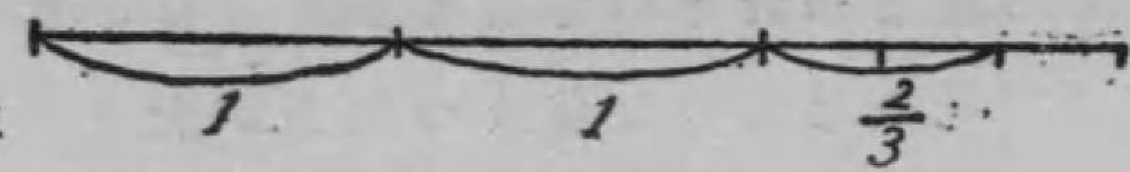


又は

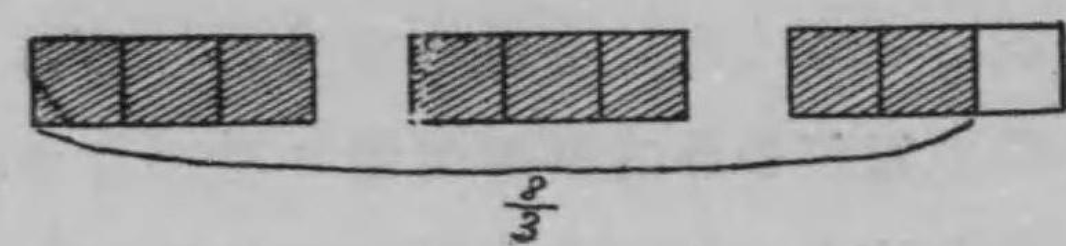


假分數又は帶分數の圖解は，次のやうにするのです．例へば$2\frac{2}{3}$を圖解するには，次の通りにし



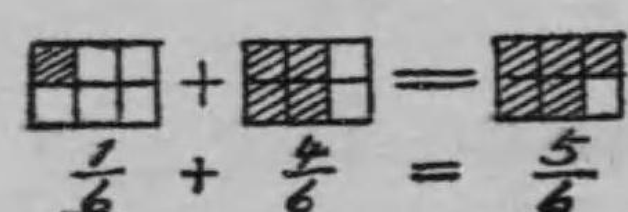
又は 

$\frac{8}{3}$を圖解するには，次のやうにするのです．

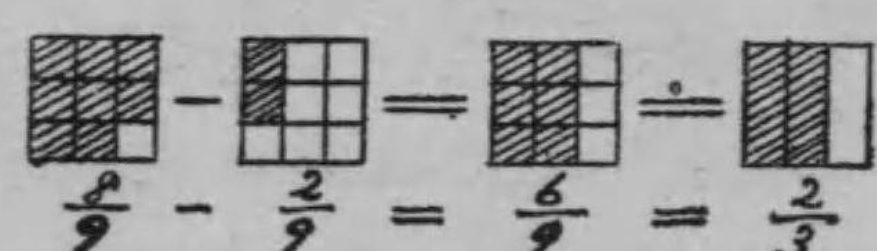


分數の簡單な計算は，前に示したやうな分數板を用ひての作業から，其の方法を歸納するやうに指導するのです．そしてこれが出來た後には，計算の理由を方眼紙を用ひる方形圖解で，發表させるとよろしい．今其の圖解の方法を示しますと次の通りです．

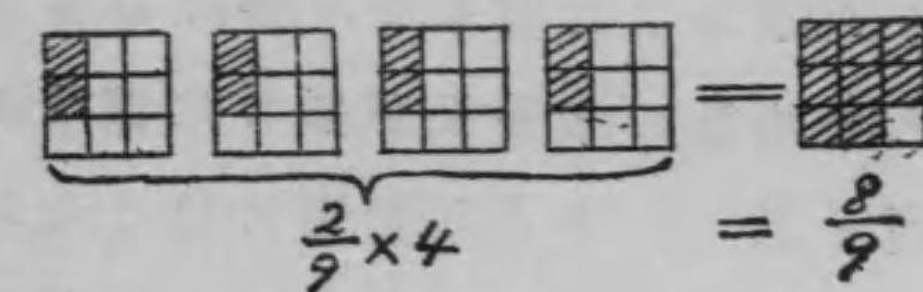
【例1】 $\frac{1}{6}+\frac{4}{6}$の圖解



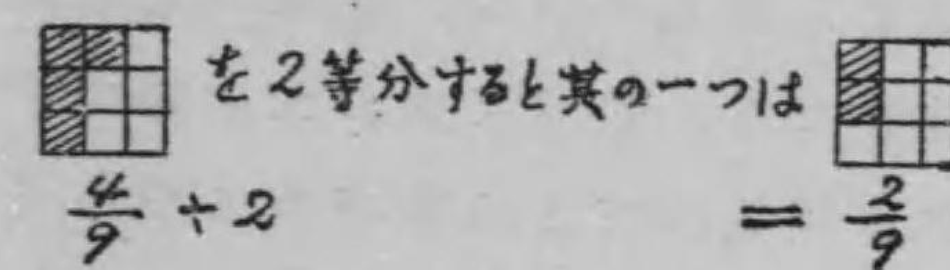
【例2】 $\frac{8}{9}-\frac{2}{9}$の圖解



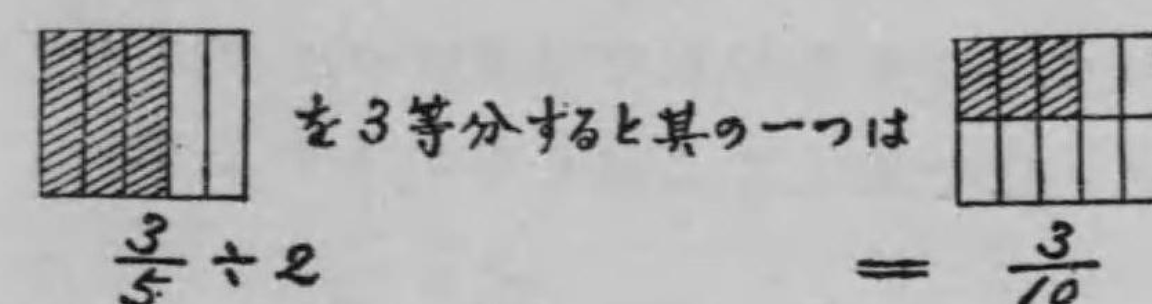
【例3】 $\frac{2}{9}\times 4$の圖解



【例4】 $\frac{3}{9}\div 2$の圖解



【例5】 $\frac{3}{5}\div 2$



5. 最大公約數と最小公倍數

最大公約數と最小公倍數とは，數學の一分科である整數論の，極めて初歩を取扱ふもので，純正數學としては面白い部分でありますが，あまり實用にならないものですから，小學校に於ては，其の極めて簡易な場合のみを取扱つて，其の一般的

のものは，之を省略する方がよいのです．

併し我々が學習した算術が，多くは傳統的のもので，最大公約數と最小公倍數とに關する事柄は，整數の性質として，あまり實用にならない，一般的のものまでも學習して居り，そして從來の國定教科書には，極めて大なる數の，最大公約數や最小公倍數を求める問題があつて，且は之を求める一般的の方法までも，のせてあつたものですから，稍もすると之に深入りすることがあるやうですが，之は出來るだけ避けたいものと思ひます．新教科書にもはぶかれて居ますが，除法を反覆することによつて，最大公約數を見出すユークリッド法の如きは，之を課してはならないものです．

倍數約數

第六學年に於て公倍數に這入るには，之は單に分數計算の準備に過ぎないのですから，之と關聯して指導することを，忘れてはならないのです．即ち分數を作業的に取扱ふ場合に，分數の分子と分母とに同じ數を掛けても，又同じ數で割つても，其の値は變らないことを發見させ，これによつて

分數計算の結果は，或る場合には約分して，簡單な分數とする必要のあることから出發して，二數の公約數を見出す練習の必要なことをさとらせ，

又分數の加減の計算は，教科書に示された如き，同分母のものばかりに滿足せないで，前にも示したやうな例へば

$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$　$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$　$\frac{3}{4}-\frac{5}{8}$　$\frac{1}{2}-\frac{3}{8}$

の如き，公分母となるべきものが暗示された，異分母の場合をも作業的に指導し，此のやうな計算をするには，與へられた分數の分母を同一にする，即ち通分する必要がありますから，二つ或は三つの數の，公倍數を見出すことの練習が必要であることをさとらせ，それから倍數約數の練習に這入るのがよいと思ひます．

公倍數を求めるには，次の方法を指導するのです．

【例1】 3と4と12との公倍數を求めよ．

先づ與へられた數の中で最大なもの12を，殘りの3と4とで割つて見るのです．そして此の場合には割り切れますから，此の12を公倍數とするのです．

【例2】 4と6と9との公倍數を求めよ.

4, 6, 9の中の最大數9を4,6で割つて見ますと割り切れないから, 次に9の2倍である18を4と6で割つて見ますと, 6では割り切れるが, 4では割り切れません. それで更に9の3倍である27を4と6で割つて見るのです. 此のやうにして9の4倍の36は, 4でも6でも割り切れますから, 36は4,6,9の公倍數であることが分ります. なぜならば36は9の倍數で, 9でも割り切れるからであります.

例(1)(2)のやうにして, 公倍數を求めて居るうちには, 最大數の倍數を順次に割つて見なくても, 大體の目標を立てゝ(勿論最大數の倍數を), 此の數を殘りの數で割つて見て, 其の公倍數が容易に求まるやうになるものです. いふ迄もなく, 此のやうにして公倍數を容易に求め得るやうになるには, 公倍數を求める問題をなるべく多く練習することが必要なのです. それ故に我々は, 次に示す如き公倍數を求める問題を, 一つの表につくつておき, 此の練習表に就いて, 公倍數を求める練習を幾度も幾度もやらせることが肝要です.

練習表

次の各組の公倍數を求め

(2, 3)	(5, 4)	(9, 12)	(18, 12)
(6, 2, 3)	(4, 6, 8)	(9, 4, 6)	(9, 6, 8)

公約數を見出すには, 第六學年に於ては, 推測によつて見出す方がよいと思ひます. 併したゞ推測によつて, 自分が見當をつけた數で割つて見て求めることにしますと, どうもたよりないと思ひますから, 與へられた數の中で, 一番約數のよく分つて居る數(通例は最小數です)を見て, 此の約數で殘りの數を割つて見, そして全部が割り切れた場合に, 之を公約數と決定する方法を指導するのです. 例で此の方法を説明しませう.

【例1】 6, 8, 12の公約數を見出せ.

與へられた數の中で最小數6をとつて, 先づ此の約數の中で最大なものゝ6で, 殘りの數8, 12を割つて見ると, 8は割り切れません. それで6の約數の中で, 次に大きなもの3で, 8と12とを割つて見るのです. 此の場合にも8は割り切れませんから, 更に6の約數の中で次に大きなもの2を

とつて，之で8と12を割つて見ます．そして此の場合には割り切れますから，2は與へられた數6, 8, 12の公約數と斷定するのです．

【例2】 12,20,32の公約數を求めよ．

與へられた數の中の最小數12をとつて，此の約數で殘りの20と32を割つて見ます．

先づ12で割りますと，20が割り切れませんから，32を割つて見るまでもなく，12は公約數ではないのです．

次に大きな約數6で割りますと，この場合も20が割れませんから，6は公約數ではないのです．

次に4で割つて見ます．此の場合は20も32も割り切れますから，4が12,20,32の公約數であると決定するのです．

約分する場合でも，此の方法で公約數を見出し，此の公約數で分母分子を割るのですが，此の場合には，何も最も大きい公約數を見出す必要はないのです．分母分子の中で小さい數(何も小さい數と限つた事はないのです．約數のよく知れて居るものをとればよいのですが，普通には小さい數の方が，大きい數より，約數がよく知れて居ますから，

小さい數といつたのです)の約數を見つけ，之で大きい數を割つて見て，公約數を見つけるのです．

そして此の公約數で約分した結果の分數に就いて，更に同じやうにして，公約數を見つけて約分するのです．併し大きい公約數が，最初から見付かつた場合は，何度も約分する手數をはぶきますから，なるべく大きな公約數を見つけるやうに，練習せねばなりません．

それで公約數を見出すことも，なるべく多く練習することが肝要ですから，公倍數を見出すときのやうに，次に示す如き練習表を用ひるとよろしい．

練　習　表

次の各の組の最も大きい公約數を求めよ．

(4, 8)	(6, 9)	(9, 18)	(8, 24)
(6, 8)	8, 12)	(6, 8, 12)	(4, 6, 12)

次の分數の分母と分子のなるべく大きい公約數を求めよ．

$\frac{9}{12}$　$\frac{25}{45}$　$\frac{36}{72}$　$\frac{7}{21}$　$\frac{26}{65}$　$\frac{15}{90}$

5. 最大公約數と最小公倍數

大きな數の最大公約數と，最小公倍數を見出すことは，實際問題にはあまり必要のないことでありますが，併し分數計算其の他の場合に於て，必要な場合もおこりますから，高等小學校に於ては，因數による求め方を，指導することになつて居るのです．

此の方法を指導するには，或數を素數の積として表はす練習が必要です．

$$\begin{array}{r|l} 2 & 420 \\ \hline 2 & 210 \\ \hline 3 & 105 \\ \hline 3 & 35 \\ \hline & 7 \end{array} \qquad 420=2\times2\times3\times3\times7$$

或數を素數の積として表はすには，次の例に示す如く，與へられた數を，なるべく小さい素數の約數で割り，次に其の商を，其の場合のなるべく小さい素數の約數で割り，次第に此のやうにして，商が素數となるまで割つて行くのですから，20以下の素數2,3,5,7,11,13,17,19だけは記憶さして置く方がよいと思ひます．そして斯くの如き練習が，或數の約數を見出す練習にもなつて，約分することが容易になるものです．

$$\begin{array}{r|rrr} 4 & 72 & 144 & 180 \\ \hline 9 & 18 & 36 & 45 \\ \hline & 2 & 4 & 5 \end{array} \qquad 4\times9=36$$

最大公約數を求めるには，前の例に示すやうに與へられた數を一列に記し，是等の數を其の公約數で割り，其の商を下に書き，是等の商を更に其の公約數で割り，次第に此のやうにして，商の間に公約數がないやうになるまで割つて行くのです．そして公約數は素數であつても，非素數であつても差支ないのですが，最小公倍數を求める場合には，必ず素數でないと，其の結果が正しくない場合もあるのですから，最大公約數を求める場合にも，素數の公約數を見つけ，之で割ることに約束しておく方が，普通兒以下のものに誤算(最小公倍數を見出すときに)が少なくてよいやうです．併しこのやうにしますと，最大公約數を見出すに，手數を要する場合が多いのですから，必ずしも此のやうに指導しなくともよいでせう．

最小公倍數を見出すことに就いては，別に注意すべきことはありません．

前にも述べましたやうに，最小公約數最大公約

數を，此の一般な方法によつて求めることは，あまり必要がなくて，それよりも暗算で其の結果を求めることが，分數計算には大切でありますから，高等科になつても，前に示したやうな練習表を用ひ，そして最大公約數，最小公倍數を暗算により，若しくは少しの計算を用ひて，なるべくはやく見出す練習を，させることが大切であります．

6. 異分母分數の加減

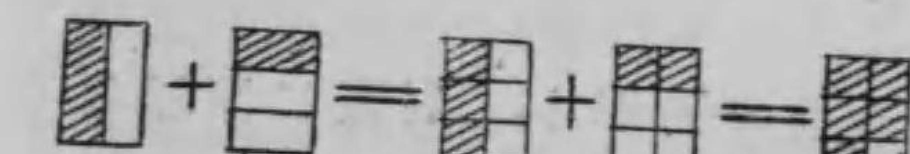
同分母分數の加減法を，其の作業的取扱から抽象し，此の法則を用ひて，其の計算を練習し，且は異分母分數の加減法も，其の最も平易なる公分母が暗示されたものに就いて，其の計算の方法を發見させ，異分母の場合には，先づ之を通分して同分母の分數に直し，之を計算するとよいことを指導したのです．

それで公分母の暗示されてない，異分母分數の加減も，之を同分母の分數に直して，計算するとよい事が，分るのです．そして異分母分數を通分するには，其の公分母となる數は，其の公倍數(出來るならば最小公倍數)とするとよい事も分ると思

ひますから，約數倍數を練習した後に於ては，少しの指導で其の計算の方法を發見さすことが出來るのです．

併し此の場合に於ても，其の計算の理由を，作業的に理解し，之を發表することが出來るやうに，指導せねばならないと思ひます．今其の作業を圖解して見ますと次の通りです．

【例1】 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ を計算せよ．

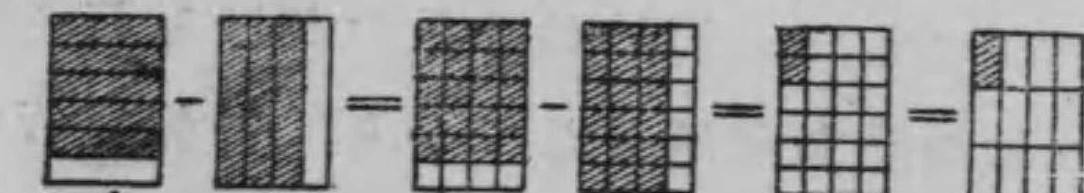


$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

此のやうに一方の分數は縱に，他の分數は横に等分して圖解するのです．

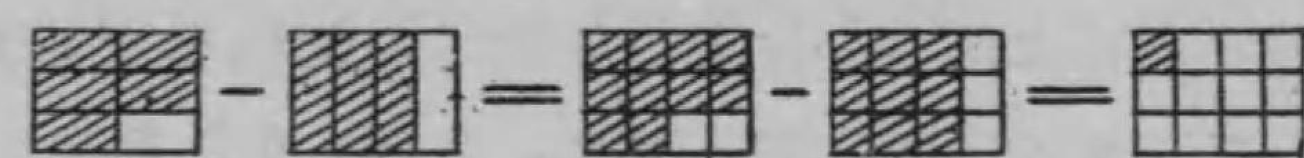
【例2】 $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}$ を計算せよ．

此の場合も，例(1)のやうに，一つの分數は矩形を縱に等分し，他の分數は横に等分し，それから之を同分母に直したものにして，減法を行つてもよいのです．即ち



$$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{20}{24}-\frac{18}{24}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

のやうに計算してもよいのですが，公分母となるべき數を，分母である6と4との最小公倍數12とする方が，計算が簡便に出來ることが分つた後は，其の計算の理由を圖解するには，少しく工夫を要することになります．今其の圖解法を示しますと

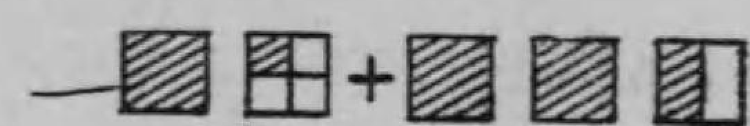


$$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{1}{12}$$

のやうになるのです．

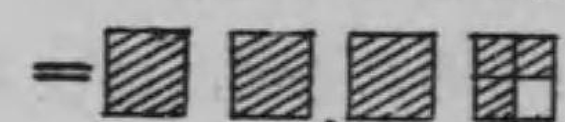
帶分數がある場合の圖解も，別段に困難な事はないと思ひます．例へば

【例3】 $1\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}$ を計算せよ．



$$1\frac{1}{4}\ +\ 2\frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{4}\ +\ 2\frac{2}{4}$$



$$3\frac{3}{4}$$

此のやうにして，異分母分數の加減を行ふには，先づこれ等の分數を通分してから，計算を行へばよいことが分るのです．そして通分するには，分

母の最小公倍數を求め，それから與へられた分數の分母が，此の公倍數になるやうに，變化するとよいことが分つたならば，それから抽象的練習に這入るのです．

7. 分數を掛けること

或數に整數を掛けることは，其の整數の數だけ，或數を寄せることですから，分數に整數を掛けることの意味も明らかであります．それで分數の觀念を養成する爲めに，實物又は分數板を用ひて，作業的に其の結果を見出す時から，分數に整數を掛ける計算の簡單なものは，之を指導して來たのであります．

從つて兒童は少しの圖解作業と，累加の計算を用ひることによつて，

分數に整數を掛けるには，分母は其の儘にして置いて，分子に其の整數を掛けるとよい．

ことを發見するのであります．

例へば $\frac{2}{9}\times 4$ は $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}$ を簡單に表はしたものでありますから，之を圖解に訴へるなり，或は既に加法計算に習熟した場合でありますと，

$$\frac{2}{9}\times 4=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2+2+2+2}{9}=\frac{2\times 4}{9}=\frac{8}{9}$$

と計算すればよい事が分り，そして前にあげた計算の法則を發見するやうに，指導することが出來るのです．

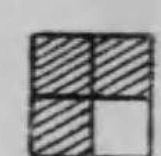
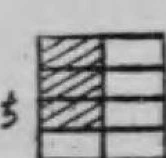
又之と反對に，或數を整數で割ることは，或數を其の整數だけに等分することである，と見ることが出來ますから，分數を整數で割ることも

分數を整數で割るには，分子は其の儘にしておいて，分母に其の整數を掛けるとよろしい．

若し分子が其の整數で割り切れる場合は，分母は元の儘にしておいて，分子を其の整數で割つてもよろしい．

ことを，作業的に理解さすことが出來るのです．

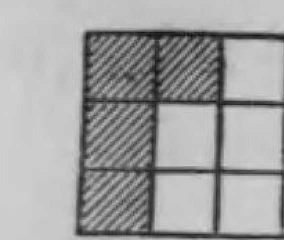
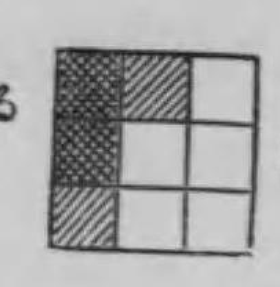
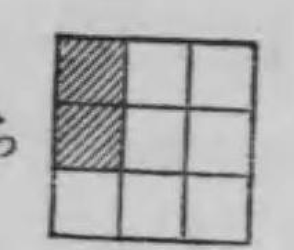
例へば $\frac{3}{4}\div 2$ の結果を求めるには

 を二つに等分すると，其の一つは  即ち 

となることが分りますから

$$\frac{3}{4}\div 2=\frac{3}{4\times 2}=\frac{3}{8}$$

となりますし，又 $\frac{4}{9}\div 2$ の結果を求めるには

 を二つに等分すると，其の一つは  即ち 

となりますから

$$\frac{4}{9}\div 2=\frac{4\div 2}{9}=\frac{2}{9}$$

となる事も分るのです．是等のことは既に前に述べたところです．

分數を掛ける意味

併し，或數に分數を掛けることの意味は，今迄に學習したことでは，意味がないのでありますから，小數を掛ける場合と同樣に，茲に之を定める必要があるのです．或數に分數を掛けることの意味は，教科書に示された通り，

或數に分數を掛けることは，或る數の分數を求めること，即ち其の數を分數の分母で割り，之に分子を掛けることである．

と，何等の斷りもなく，唯無理やりに此の規則を押しつけて，これによつて計算さしてもよいやうでありますが，此のやうにしますと，分數を掛ける計算が，事實問題を解く上に，直に應用することが出來ないと思ひます．又兒童も何故に此の規

則がおこつて來たかに就いて，多少の不審をいだくものと思ひます．

それ故に私は，分數を掛ける規則を，事實問題を解く上に，是非共斯くの如く定めねばならないことを指導し，それから計算の練習に這入るばかりでなく，今自分の計算して居る算式は，如何なる事實問題を解く場合に應用されるか，を考へさす爲めに，算式を與へて，事實問題を作らせるやうにせねばならないと思ひます．

分數を掛ける規則を，事實問題を解くことの上に建設するには，次の例題のやうに指導するのです．

【例1】 一升60錢の醬油を$\frac{2}{3}$升買つたとき，其の代金はいくらか．

此の問題に於て，60錢は1升の價であり，$\frac{2}{3}$升は升の數でありますから，其の代金はさきに抽象された公式

(1升の價)×(升數)=(代金)

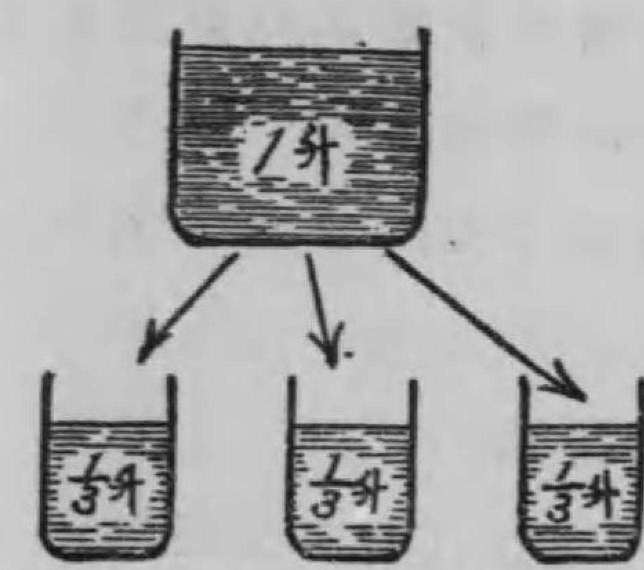
を用ひますと，

60錢×$\frac{2}{3}$=

の算式で，其の代金を見出せばよいのです．併し

此の式の$\frac{2}{3}$を掛ける意味が，不明でありますから，之を如何に解釋するとよいかを，此の問題の作業的解決の上に定めるのです．

さて次の圖に示すやうに，1升の醬油を小さな三つの器に，三等分したものとしますと，其の器の中の醬油は皆$\frac{1}{3}$升づゝになります．それで$\frac{2}{3}$升の醬油を買ふことは，此の器の中に入つて居る醬油を，二つだけとることです．



然るに醬油1升の價が60錢でありますから，之を三等分した場合に小さな器の中にある醬油の價は，皆60錢÷3=20錢づゝになるのです．それで此の器中にある醬油二つ分の價は，20錢×2=40錢になるのです．

今此の二つの式を一つに纏めますと，醬油$\frac{2}{3}$升の代金は

60錢÷3×2=40錢

になることが，作業的に理解され，そして二つの式

$60\text{錢}\times\frac{2}{3}=$

$60\text{錢}\div3\times2=$

が同じ結果になればよい事が分りますから，60錢に$\frac{2}{3}$を掛けることは，60錢を3等分した結果を2倍すること，換言すれば60錢の$\frac{2}{3}$を求めることであると，解釋すればよい事が分ります．

【例2】　1時間に$5\frac{3}{5}$粁の速さで，$\frac{2}{3}$時間進むと，いくらの距離を行くか．

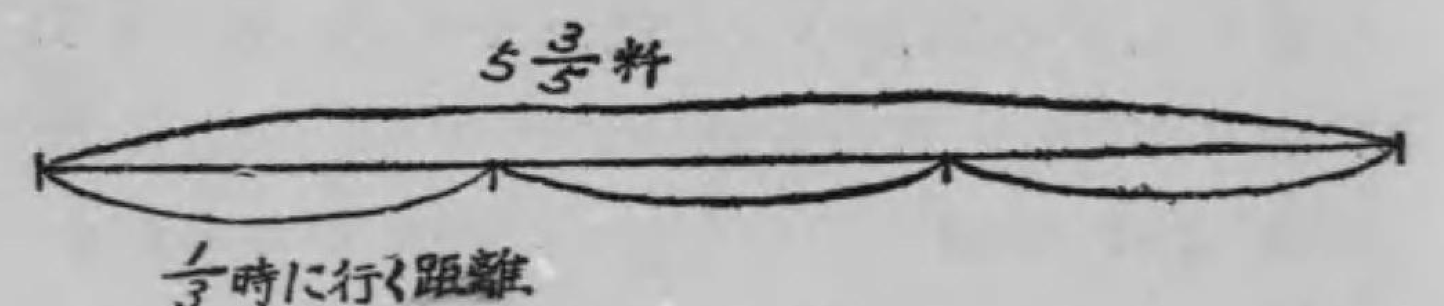
の問題は，前に抽象された公式

（1時間に行く距離）×（時間數）＝（進んだ距離）

を用ひますと

$5\frac{3}{5}\text{粁}\times\frac{2}{3}=$

の式を用ひるとよい事が分ります．併し玆に$\frac{2}{3}$を掛けることは，之を如何に解釋するとよいかが分らない場合には，此の問題の作業的解決の上に，之を定めるのです．即ち$\frac{2}{3}$時間は1時間を等分し



た，$\frac{1}{3}$時間の2倍であつて，1時間には$5\frac{3}{5}$粁を

行くのですから，$\frac{1}{3}$時間には$5\frac{3}{5}$粁を3等分した，$5\frac{3}{5}\text{粁}\div3$だけ進むことが分ります．それで$\frac{2}{3}$時間には，之を2倍した

$5\frac{3}{5}\text{粁}\div3\times2=$

だけ進むことが分るのです．

今$5\frac{3}{5}\text{粁}\times\frac{2}{3}$の式と，$5\frac{3}{5}\text{粁}\div3\times2$の式とを比較して見ますと，$5\frac{3}{5}$粁に$\frac{2}{3}$を掛けることの意味を，$5\frac{3}{5}$粁を3等分したものを2つ取ること，即ち$5\frac{3}{5}$粁の$\frac{2}{3}$を求めることであると，解釋すればよい事が分りませう．

此のやうにして事實問題を解くことの必要の上に，分數を掛けることが必要であり，そして分數を掛けることの意味を，其の作業的解決の上に定めた後は，數量の關係式は，分數の場合にも適用して，何等の差支へがない事が分りませう．

それ故に與へられた事實問題の解き方が分らない場合には，其の分數を小さな整數に直した問題に就いて，數量の關係を具體的に考へ，そして其の解き方が分つたならば，此の方法を分數の場合にも適用して，與へられた問題の算式を，作つてよい事が分つて來るのです．

數が整數から分數小數と擴張されても，其の形式が全く變らないやうにすることは，數學を建設する上の根本法則となるもので，之を形式不易の法則といふことは，前にも度々述べたところです．我々は形式不易の法則によつて，問題の解き方を考へるやうにいつも指導して行かねばならないと思ひます．

分數を掛ける計算

分數を掛ける意味が分つたならば，其の計算の法則を發見させることは容易です．

【例3】 3に$\frac{4}{5}$を掛けよ．

3に$\frac{4}{5}$を掛けることは，3の$\frac{4}{5}$を求めることで，3を5で割つて，其の結果を4倍すればよいのですから，

$$3\times\frac{4}{5}=3\div5\times4=\frac{3}{5}\times4=\frac{3\times4}{5}$$

のやうに考へて計算すればよろしい．又

【例4】 $\frac{2}{3}$に$\frac{5}{7}$を掛けよ

の問題は，

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\div7\times5=\frac{2}{3\times7}\times5=\frac{2\times5}{3\times7}$$

のやうにすればよい事が分ります．

そして整數は何れも，分母が1なる分數と考へ

ることが出來ます．例へば3は$\frac{3}{1}$，5は$\frac{5}{1}$と見て差支ないのですから，整數に分數を掛ける場合であつても，又分數に分數を掛ける場合であつても，

分數(整數も分數と考へて)に分數を掛けるには，分子に分子を，分母に分母を掛けるとよろしい．

ことを歸納さすることが出來るのです．但し整數の場合は，分母の1を書かないで，こゝに1があるものと思つて，計算するやうに注意するのです．

8. 分數で割ること

分數で割ることの意味は，分數を掛けることの逆と考へたらよいのです．此の事は整數で割ることの意味が，乘法の逆であることを，新しい分數の場合にも適用するのであつて，形式不易の法則によることは，いふ迄もないのです．

併しながら，此の分數で割ることも，單に計算の方法を指導するばかりでなく，之を事實問題に結合することが肝要です．今事實問題から這入つて，分數で割る方法を指導する例を示しませう．

【例1】 或學校の男生徒の數は324人で，これは全體の數の$\frac{3}{5}$である．全體の生徒數は何人か．

の問題は．全體の生徒數を x 人であらはしますと，
問題の意味が

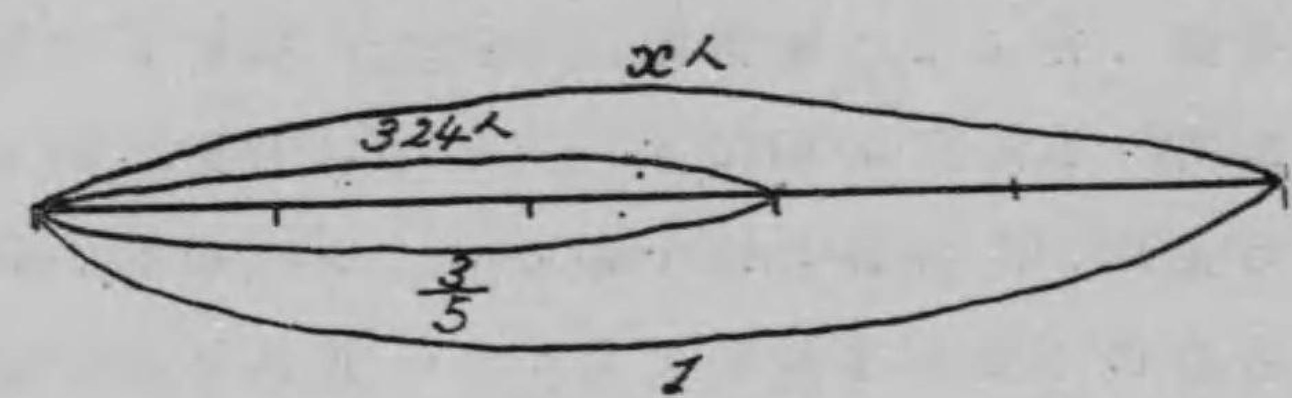
$$x\text{人}\times\frac{3}{5}=324\text{人}$$

の關係があることを，示して居るのです．それで形式不易の法則によつて，乗法の逆は除法でありますから，此の場合でも x 人を見出すには，

$$324\text{人}\div\frac{3}{5}=$$

とすればよい事が分ります．

併し其の計算の方法がまだ分らないのですから，之を次の如き作業と，逆の意味を用ひて，其の計



算の方法を指導すればよいのです．即ち

$x\text{人}\times\frac{3}{5}=324\text{人}$ の關係は， $x\text{人}\div5\times3=324\text{人}$

を表はして居ることは，分數を掛けることの意味から明瞭であります．上の圖は x 人を 1 と見て，之を 5 等分したものを 3 つ寄せた結果が，324人であることを示して居るのです．

それで x 人を見出すには，之を反對に考へて，

$$324\text{人}\div3\times5=$$

とするとよい事が分ります．圖を見ますと324人÷3は，x 人を5等分した一つを表はし，之を5倍すると x 人が出ることが分りませう．それ故に324人$\div\frac{3}{5}$を計算するには，324人÷3×5とすればよいので，これは324人の$\frac{5}{3}$を求めることでありますから，324人$\times\frac{5}{3}$の計算を行へばよい事が分りませう．それで

$$324\text{人}\div\frac{3}{5}=324\text{人}\times\frac{5}{3}$$

となることが分ります．

今一つ形式算に就いて，説明して見ませう．

【例2】 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$ を計算せよ．

の問題は，除法計算の意味(乗法の逆)から考へて，どんな數に$\frac{2}{5}$を掛けると，其の結果が$\frac{3}{4}$になるか，其の數を求めることでありますから，今其の答を x であらはしますと

$$x\times\frac{2}{5}=\frac{3}{4}$$

の x の値を求めたらよいのです．

そして分數を掛ける意味から考へますと，
上の關係式は，

$$x\div5\times2=\frac{3}{4}$$

を示して居ることが分りますから，此の關係式から逆に考へて，xの値を求めるには

$$x \div 5 = \frac{3}{4} \div 2$$

$$x = \frac{3}{4} \div 2 \times 5$$

とすればよい事が分ります．

ところが$\frac{3}{4} \div 2 \times 5$は，$\frac{3}{4}$を2等分した結果を，5倍することを示して居ますから，$\frac{3}{4}$の$\frac{2}{5}$を求めることであるのです．それで$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$を計算するには，$\frac{3}{4}$の$\frac{5}{2}$を求めること，即ち$\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$を行へばよいのです．

かくして$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$を計算するには

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

とするとよい事が分るのです．

それで

或數を分數で割るには，其の數に分數の分母と分子とを取換へた分數を掛けるとよろしい．

ことを，歸納さすことが出來るのです．

前に述べた方法は，除法は乘法の逆であることから考へて，計算の意味(方法)を歸納したのでありますが，今一つは包含除法の方から，此の計算法を建設することも出來るのです．今其の方法を示

して見ませう．

【例3】 砂糖$22\frac{1}{2}$斤を1袋に$1\frac{1}{4}$斤づゝ入れると幾袋になるか．

の問題を解くに，$22\frac{1}{2}$斤は$\frac{45}{2}$斤で，これが又$\frac{180}{8}$斤ですから，$22\frac{1}{2}$斤の砂糖を$\frac{1}{8}$斤づゝの袋に分けますと，こんな袋が180袋出來ることが分ります．

そして$1\frac{1}{4}$斤は，$\frac{5}{4}$斤即ち$\frac{10}{8}$斤で$\frac{1}{8}$斤が10よつたものでありますから，$1\frac{1}{4}$斤入の袋をつくるには，$\frac{1}{8}$斤づゝ入れた袋を10袋だけ集めて，之を大きな袋に入れるとよいことが考へられませう．それで求める袋の數は，$180 \div 10 = 18$であることが分ります．

今此の事を式で說明しますと

$$22\frac{1}{2}\text{斤} \div 1\frac{1}{4}\text{斤} = \frac{45}{2}\text{斤} \div \frac{5}{4}\text{斤}$$

$$= (45 \times 4)(\frac{1}{8}\text{斤}) \div (2 \times 5)(\frac{1}{8}\text{斤})$$

$$= (45 \times 4) \div (2 \times 5) = \frac{45 \times 4}{2 \times 5}$$

$$= \frac{45}{2} \times \frac{4}{5} = 18$$

となりませう．それで途中の考へ方を略しますと，

$$22\frac{1}{2}\text{斤} \div 1\frac{1}{4}\text{斤} = \frac{45}{2} \times \frac{4}{5} = 18$$

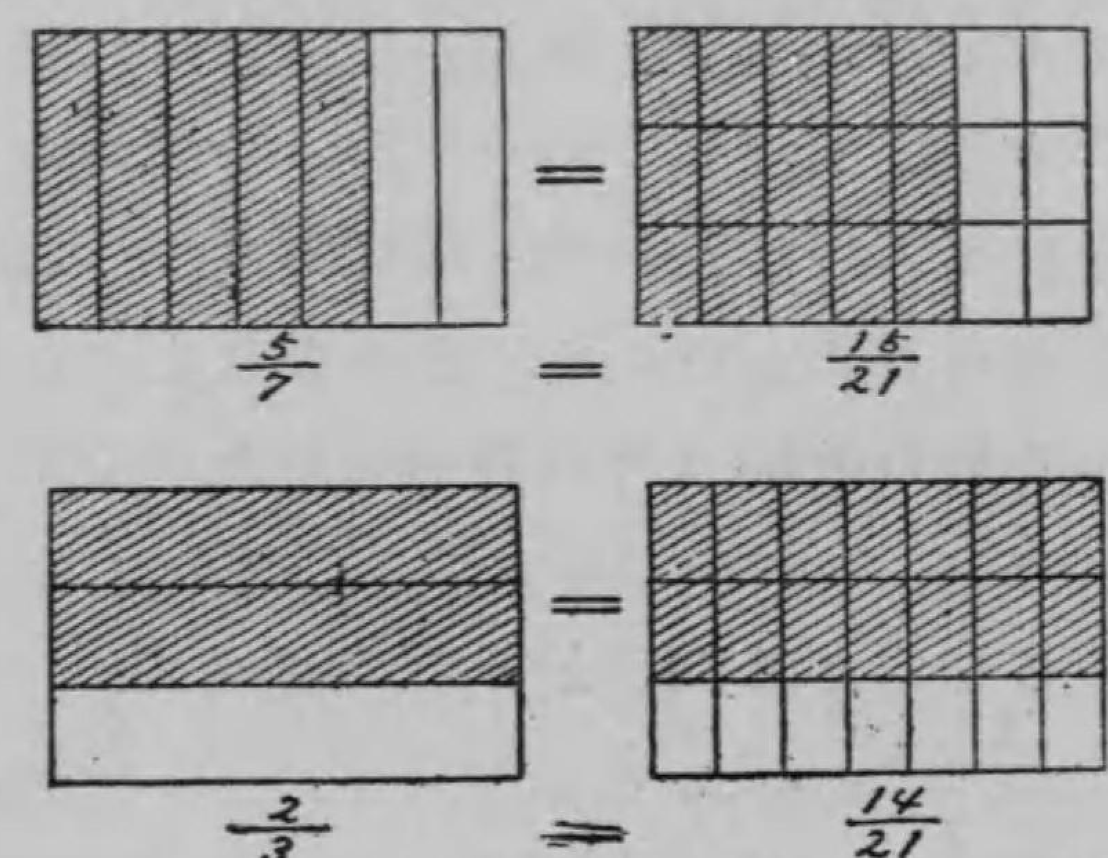
となつて，或數を分數(帶分數は假分數に直して)で割るには，前に述べたやうに，分數の分母と分子

とを取換へた分數を掛けたらよい事が分るのです.

今一つ抽象數に就いて說明して見ませう.

【例1】 $\frac{5}{7}\div\frac{2}{3}$ を計算せよ.

の問題を計算するには, $\frac{5}{7}$の中に$\frac{2}{3}$が幾つあるかを見ることであると考へて, 先づ$\frac{5}{7}$と$\frac{2}{3}$とを通分して, 二つの分數を同じ單位に直すのです.



それで左圖に示すやうに$\frac{5}{7}$を$\frac{15}{21}$に直しますと, $\frac{5}{7}$の中には$\frac{1}{21}$が15含まれて居ることが分り, $\frac{2}{3}$は$\frac{14}{21}$ですから, $\frac{2}{3}$の中には$\frac{1}{21}$が14含まれて居ることが分るのです.

それで$\frac{5}{7}$の中に$\frac{2}{3}$が幾つ含まれて居るかを見るには, 15($\frac{1}{21}$を單位とした)の中に, 14($\frac{1}{21}$を單位にした) が幾つ含まれて居るかを見ればよいことが分り, 之を次のやうに計算したらよいことが歸納されるのです. 即ち

$$15\div14=(5\times3)\div(7\times2)=\frac{5\times3}{7\times2}=\frac{5}{7}\times\frac{3}{2}$$

前に說明したことを, 式で表はして見ると, 次のやうになります.

$$\begin{aligned}\frac{5}{7}\div\frac{2}{3}&=(5\times3)(\tfrac{1}{21})\div(7\times2)(\tfrac{1}{21})\\&=5\times3\div(7\times2)=\frac{5\times3}{7\times2}\\&=\frac{5}{7}\times\frac{3}{2}\end{aligned}$$

これから歸納しても, 分數除法の意味を得ることが出來るのです.

併し此の包含除法を基礎として, 分數で割る計算を建設する方法は, 作業的ではありますが, 其の方法があまりに面倒です. そして此の學年位になりますと, 代數的取扱ひも十分に指導してあることですから, 簡便な逆の意味から, 建設する方が, よいと思ふのであります.

分數で割る計算が分數を掛ける計算に, 歸着されることが分った以上, 其の計算の指導は困難ではないのです. 只これ等の計算を, 事實問題の解法と離さないやうに指導することは, いつも心に

とゝめておかねばならないのです.

9. 分數計算に對する注意

二數の間に加減乘除の計算を行ふことは，別段に注意することもありませんが，三數以上の計算を行ふことになりますと，

若し其の計算が加減のみでありますと，之を一度に計算し，

又其の計算が乘除のみの計算である場合も，之を一度に計算する．

ことを，指導することが肝要であります．よく最初の二數の計算を行ひ，それから其の結果と次の數との計算を行ふやうに，順次に二數づゝの計算を行ふものもありますが，かくては計算の能率があがらないのです．今此の例を示しておきませう

【例1】 $7\frac{1}{11}+2\frac{3}{22}-1\frac{1}{2}$ を計算せよ．

【解】 $7\frac{1}{11}+2\frac{3}{22}-1\frac{1}{2}=7\frac{2}{22}+2\frac{3}{22}-1\frac{11}{22}$

$$=8\frac{2+3-11}{22}$$

$$=7\frac{27-11}{22}=7\frac{16}{22}=\underline{7\frac{8}{11}}\text{（答）}$$

【例2】 $4\frac{1}{6}\times 2\frac{1}{2}\div 1\frac{1}{3}$ を計算せよ．

【解】 $4\frac{1}{6}\times 2\frac{1}{2}\div 1\frac{1}{3}=\frac{25}{6}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{125}{16}$

$$=\underline{7\frac{13}{16}}\text{（答）}$$

加減乘除の計算が混合して居る場合には，其の計算の順序を考へて，一々之を運算して行けばよいので，必ずしも等號で其の全部の計算を，結びつける必要はないのです．例へば

【例3】 $\frac{7}{8}-\frac{2}{13}\div\frac{1}{4}+1\frac{1}{4}$ を計算せよ．

【解】 $\frac{2}{13}\div\frac{1}{4}=\frac{2}{13}\times\frac{4}{1}=\frac{8}{13}$

$$\frac{7}{8}-\frac{8}{13}+1\frac{1}{4}=\frac{91}{104}-\frac{64}{104}+1\frac{26}{102}$$

$$=\underline{1\frac{53}{104}}\text{（答）}$$

【例4】 $(1-\frac{1}{2})\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})\times(\frac{1}{4}-\frac{1}{8})$ を計算せよ．

【解】 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

故に　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\underline{\frac{1}{64}}$（答）

【例5】 $7\frac{1}{2}-3.6\times\frac{2}{7}\div\frac{3}{14}$ を分數にて求めよ．

【解】 $3.6\times\frac{2}{7}\div\frac{3}{14}=\frac{36}{10}\times\frac{2}{7}\times\frac{14}{3}=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$

$$7\frac{1}{2}-4\frac{4}{5}=7\frac{5}{10}-4\frac{8}{10}=6\frac{15}{10}-4\frac{8}{10}=\underline{2\frac{7}{10}}\ \text{(答)}$$

整數を整數で割ることは，分數の第二意義に從ひますと，之を分數として取扱ふことが出來，そして分數は約分することによつて，其の計算を簡便にすることが出來る場合が多いのですから，分數を學習した後は，之を整數又は小數の割算に利用することを，指導せねばならないのです.

歸一法の問題の解き方には，之を利用する最もよい例であります．例へば

【例6】 人夫７人の賃錢が９圓３錢であると，15人の賃錢は何程か.

の問題は，之を次の如く考へて行き，最後に之を計算するのです．即ち

７人の賃錢は　903錢

１人の賃錢は　$\frac{903}{7}$錢

15人の賃錢は　$\frac{903}{7}\times 15$錢

と考へて，最後に $\frac{903}{7}\times 15$ を計算して，其の答を得るのです.

【例7】 231×147×210÷64827 を計算せよ.

の問題は，乘除ばかりの計算でありますから，之に分數計算を利用して，次の如く計算するのがよいのです.

$$\frac{231\times147\times210}{94827}=\underline{110}\ \text{(答)}$$

勿論此の結果を得るには，約分を行つて居るのです.

併しいくら，約分する方がよいからといつて，之を次の如き計算に用ひると，却て其の計算が複雜になることを注意せねばなりません．例へば

【例8】 或人24000圓の金を出して，某公債を買つたところが，１ヶ年間に利子の收入が1500圓ありました．利廻りは何程か.

の問題は，いふまでもなく

1500圓÷24000圓＝

の計算を行へばよいのです．そして此の計算に分數の計算を利用して

$$\frac{1500}{24000}=\frac{1}{16}$$

$$\begin{array}{r@{\,}l} & 0.0625 \\ 16\,) & \overline{100} \\ & \underline{96} \\ & 40 \\ & \underline{32} \\ & 80 \\ & \underline{80} \\ & 0 \end{array}$$

答$\underline{0.0625}$

のやうにしますと，折角５で約分したり又３で約分しても，其の結果はやはり，分母の有效數字が

2個からなる數となつて，其の最初から除法を行つた場合に比較して，却て面倒な事となるのです.

それで此の計算は，先づ3だけで約分して，分子の5を分母の80で割るのが，最良の方法なのです.

【例9】 元金1300圓利率年7分期間1年9ヶ月の元利合計は何程になるか.

の問題は，之を次のやうに計算するのです.

【解】 $1300\text{圓}\times(1+0.07\times1\frac{3}{4})=1459.25\text{圓}$

（計 算）

$$0.07\times\frac{7}{4}=\frac{0.49}{4} \qquad 1+\frac{0.49}{4}=\frac{4.49}{4}$$

$$1300\times\frac{4.49}{4}=\frac{5837}{4}$$

$$=1459.25$$

$$\begin{array}{r} 4.49 \\ \times\ 1300 \\ \hline 1347 \\ 449 \\ \hline 5837.00 \end{array}$$

答1459圓25錢

此の計算に於て，1300と4とを約することは，計算を簡便にせないことを注意せねばなりません.

10. 分數の應用問題

分數の應用問題を解くときに，我々の主として指導せねばならない事は，此の分數は何を基本に

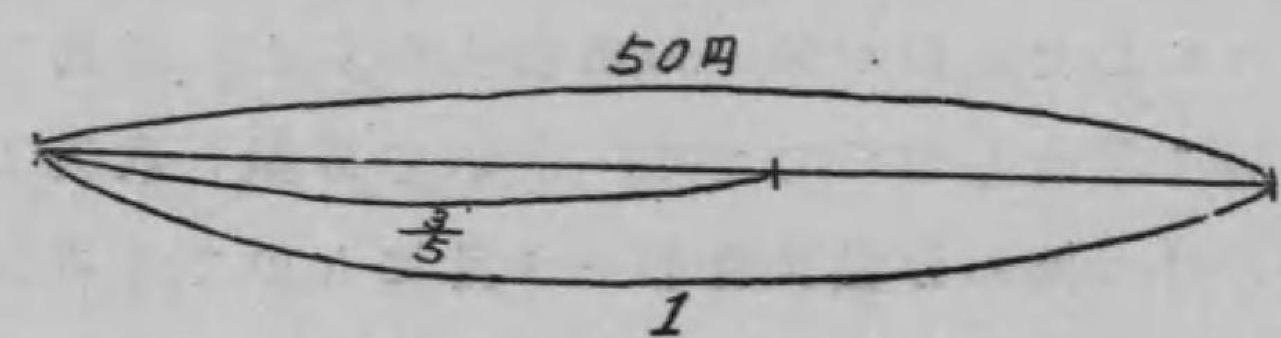
して居るかを，常に心に留めて置くやうにすることです．換言すれば分數は必ず，或る量又は一群をなす物の集りを一つと考へ，之を幾等分かしたものを幾つか集めたものでありますから，或る分數があるときは，必ず一と見たものがあるのです．そして多くの分數が與へられたとき，是等の分數が皆一としたものが同一の場合もあるし，又異なつて居る場合もあるのです．それで分數を取扱ふ場合には，此の分數は何を一と見たものであるかを，常に心にかけるやう，指導して置かねばならないのです.

分數の問題を解くには，其の最初は必ず圖解に訴へることが必要です．數量の關係が明らかになつた後は，其の簡單なものは，必ずしも圖解さすことの必要はなくなりますが，それにしても其の複雜なものは，圖解さすことが必要です．尤も代數的取扱ひによつて，xを見出す式がこれから明瞭に作り得る場合には，圖解の代りにxを用ひた關係式が使はれたのですから，圖解の必要はないのです.

分數を圖解するに，計算の方法を作業的に指導

する上には，方形の圖解がよい事を，前に述べましたが，應用問題を解くには，直線圖解による方が便利です．そして直線の下側には1と分數即ち割合を記し，上側には其の實數を記すことに約束するのです．

例へば50圓の$\frac{3}{5}$を圖解するには，次に示すやう



にするのです．即ち50圓は1と見たものゝ實數で．$\frac{3}{5}$は50圓を1と見たものゝ$\frac{3}{5}$であることを示して居るのです．從つて$\frac{3}{5}$に對する實數もあるのですが，之は$\frac{3}{5}$の上側に當るもので，前の圖解には示してないのです．

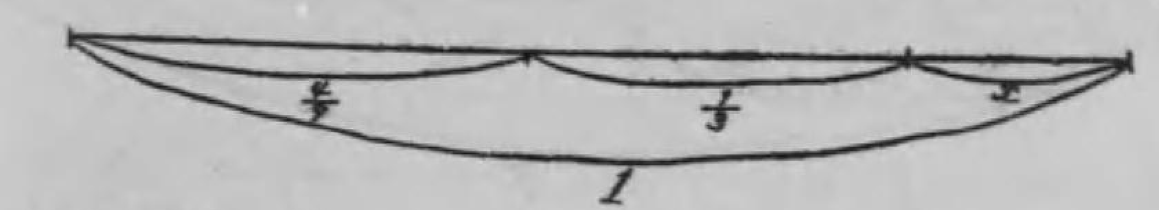
加減の問題

加減の問題は圖解に訴へるにも簡單であるし，其の解き方も困難ではないのです．

【例1】 或人が3人の子供に密柑を分けてやつた．年上の子に全體の$\frac{4}{9}$，次の子に$\frac{1}{3}$，末の子に殘りをやつた．末の子は全體の幾分の幾つもらつ

たか．

の問題は，密柑全體を1と見て，其の$\frac{4}{9}$と$\frac{1}{3}$とを，年上の子と次の子とに與へたのであり，末の子のもらつたものは，實數ではなく割合で出すやう要求されて居るのですから，今此の割合をxで表はしますと，其の圖解は次のやうになります．



上の圖解に於て，1に相當する實數は密柑全體であり，又$\frac{4}{9}$，$\frac{1}{3}$，xに相當する實數もあるべき筈なのですが，之を書く必要がないのですから，之を略したのであります．

【例2】 或仕事をするに甲一人では4時間かゝり，乙一人では5時間かゝる．甲乙二人では1時間に此の仕事の幾分だけ出來るか．

の問題は，仕事全體を基本にとり，之を1としますと，甲は仕事全體を4時間でするのですから，1時間には其の$\frac{1}{4}$をする事になるし，乙は仕事全體を5時間でするのですから，1時間には其の$\frac{1}{5}$をする事になります．それで甲乙二人では，左圖に示すやうに，全體の仕事の$\frac{1}{4}$と$\frac{1}{5}$とを加へたも