初級中學學生用

開明代數教本

下冊

劉薰宇編

教育部
審定

開明書店出版

下册目次

第十三章

三次以上的式子的因式

一　三次的式子的因式

134. 由乘法可得下列各恆等式:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)\equiv a^3+b^3,$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)\equiv a^3-b^3,$$

$$(a+b)^3\equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a-b)^3\equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$\equiv a^3+b^3+c^3-3abc.$$

將這幾個恆等式的兩邊交換,就得幾個分解因式的式子:

$$a^3+b^3\equiv(a+b)(a^2-ab+b^2) \quad\cdots\cdots\text{(v)},^*$$

$$a^3-b^3\equiv(a-b)(a^2+ab+b^2) \quad\cdots\cdots\text{(vi)},$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\equiv(a+b)^3 \quad\cdots\cdots\text{(vii)},$$

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\equiv(a-b)^3 \quad\cdots\cdots\text{(viii)},$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$\equiv(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\cdots\text{(ix)}.$$

---

* 以前的式子見第九章。

〔例題1〕 分解 $27x^3-8$ 的因式。

$$27x^3-8\equiv(3x)^3-2^3$$
$$\equiv(3x-2)(9x^2+6x+4).$$

〔例題2〕 分解 $(3x-2y)^3+(2x-3y)^3$ 的因式。

$$\text{原式}\equiv\{(3x-2y)+(2x-3y)\}$$
$$\{(3x-2y)^2-(3x-2y)(2x-3y)+(2x-3y)^2\}$$
$$\equiv(5x-5y)\{(9x^2-12xy+4y^2)$$
$$-(6x^2-13xy+6y^2)+(4x^2-12xy+9y^2)\}$$
$$\equiv5(x-y)(7x^2-11xy+7y^2).$$

〔例題3〕 分解 $1-12x^2y^2+48x^4y^4-64x^6y^6$ 的因式。

$$\text{原式}\equiv1-3(4x^2y^2)+3(4x^2y^2)^2-(4x^2y^2)^3$$
$$\equiv(1-4x^2y^2)^3$$
$$\equiv(1+2xy)^3(1-2xy)^3.$$

〔例題4〕 分解 $x^3+a^3-1+3ax$ 的因式。

$$\text{原式}\equiv x^3+a^3+(-1)^3-3xa(-1)$$
$$\equiv(x+a-1)(x^2+a^2+1+a+x-ax).$$

習題一〇三

分解下列各式的因式:

1. a^3+8b^3.
2. $27a^3-b^3$.
3. y^3+1.
4. $1-125z^3$.
5. a^4+ab^3.
6. x^3y-8y^4.
7. $a^{3n}+b^{3n}$.
8. $a^{3n}-b^{3n}$

9. x^3+3x^2+3x+1.　　10. $1-3y+3y^2-y^3$.

11. $p^3+6p^2q+12pq^2+8q^3$.　　12. $27-27x+9x^2-x^3$.

13. $a^6+6a^4b^2+12a^2b^4+8b^6$.

14. $x^4-30x^3y+300x^2y^2-1000xy^3$.

15. $x^3+y^3-z^3-3xyz$.　　16. $x^3-y^3+z^3+3xyz$.

17. $1-x^3-y^3-3xy$.

18. $x^{3n}+y^{3n}+z^{3n}-3x^ny^nz^n$.

19. $(x+2y)^3-(2x+y)^3$.　　20. $(x-2y)^3+(y-2x)^3$.

21. $(x-y)^3+(y-x)^3$.　　22. $(x-y)^3-(y-x)^3$.

二　四次的式子的因式

135. 下面的恆式等也是很有用的:

$$\begin{aligned} a^4+a^2b^2+b^4 &\equiv a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2 \\ &\equiv (a^2+b^2)^2-(ab)^2 \\ &\equiv (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2). \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a^4+a^2b^2+b^4\equiv(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}\cdots\cdots(\mathrm{x}).$$

這也是可注意的,a^2+b^2 不能被分解成實有理因式,而 a^4+b^4 卻能夠這樣;即

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a^4+b^4} &\boldsymbol{\equiv a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2b^2} \\ &\boldsymbol{\equiv (a^2+b^2)^2-(\sqrt{2}\,ab)^2} \\ &\boldsymbol{\equiv (a^2+\sqrt{2}\,ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}\,ab+b^2).} \end{aligned}$$

這兩個因式都是實數,並且是有理數,雖然 ab 的係數是無理數,但在代數上,全式是不作為無理數看的。

習題一〇四

分解下列各式的因式:

1. x^4+x^2+1.
2. $a^4-7a^2b^2+b^4$.
3. $a^4-6a^2b^2+b^4$.
4. p^6-q^6.
5. p^6+q^6.
6. a^4+4.
7. $a^4+2a^2b^2+9b^4$.
8. a^4+16.
9. x^8+x^4+1.
10. x^8+1.
11. $(3a^2-b^2)^2-(a^2-3b^2)^2$.
12. $a^2b^2-a^2-b^2+1$.
13. $x^2(x+y)^2-(x^2+y^2)^2$.
14. $9a^2+6ab-4c^2+4cb$.
15. $a^4-ya^3+z^3a-z^3y$.
16. $(a^2+4a)-(b^2-4b)$.
17. $6x^2+7ax-2x-3a^2-3a$.
18. $a^2-b^2+8bc-16c^2$.
19. $a^2+b^2+2(ab+ac+bc)$
20. $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$.
21. $\{x^2-(y-z)^2\}\{y^2-(z-x)^2\}\{z^2-(x-y)^2\}$.
22. $(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)-(x-1)$.
23. $3ax^4-3ay^4$.
24. $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$.
25. $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$.
26. $(x+y)^2+x+y$.
27. x^2-y^2+x-y.
28. $x-xy+(1-y)^2$.
29. $9(a+b)-(a^3+b^3)$.
30. x^4+x^3+x+1.
31. $(a+1)^4+(a+1)^2(b-1)^2+(b-1)^4$.
32. $(ac-bd)^2-(bc-ad)^2$.
33. $125x^6-64y^6$.

34. $81x^4-16y^4$.

35. $(a+b)^3-(a-b)^3-2b^3$.

36. $12a^2b^3-30a^3b^2+18ab^4-24a^4b$.

37. $3(x-y)^2(x+y)-3(x+y)^2(x-y)$.

38. $15a^2x^2-30a^2x^3+105a^2x^4-75a^2x^5$.

39. $x^{m+n}y^m-x^{2n}y^{m+n}-x^ny^{2m}$.

40. $a^2-b^2+x^2-y^2+2(ax-by)$.

41. $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$.

42. $x^{5m}-9x^{3n}y^{4n}$.

43. $a^3b^3+3a^2b^2xy+3abx^2y^2+x^3y^3$.

44. $3a^2x^3y+6a^2x^2y^2+3a^2xy^3-3a^2xyz^2$.

45. $36a^2x^5y^3-25a^3x^4y^2z+4a^4x^3yz^2$.

46. $4a^7x^5-24a^6x^6+36a^5x^7$.

47. $(x-y)(x^2-z^2)-(x-z)(x^2-y^2)$.

48. $(a-b)^3+3(a+b)(a-b)^2+3(a+b)^2(a-b)+(a+b)^3$.

習題一〇五

應用分解因式的法則,求下列各二式的積:

1. $(a^2+a^4+a^6)(a^2-1)$.

2. $(a+4b-c)(a-4b+c)$.

3. $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$.

4. $(a^4+a^3b+a^2b^2)(a-b)$.

5. $(a^2-b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$.

6. $(1+2a+3b+4c)(1+2a-3b-4c)$.

7. $\{(a+c)+(b-d)\}\{(a-c)+(b+d)\}$.

8. $\{x^2+x(a+b)+ab\}\{x^2-x(a+b)+ab\}$.

9. $(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

第十四章

最高公因式和最低公倍式

136. 因式,公因式,倍式,公倍式這些名詞的意義,和算術中說過的因數,公因數,倍數,公倍數的相似。在算術中,一個數的因數一定不比原數大,如35的因數為1,5,7,35等;而牠的倍數一定不比牠小,如35的倍數為35,70,105等。但在代數上,一個式子的因式只有次數不比原來的高,牠的倍式的次數不比原來的低;至於數值的大小卻不一定;所以在代數中,和最大公約數以及最小公倍數相當的是'最高公因式'和'最低公倍式'。

〔例題1〕 xy, x^2y 是 x^3y 的因式嗎?回答下面的問題。

(i) 各式的次數如何?那一個的最高?

(ii) 若 $x=1, y=2$,那一個式子的值最大?

(iii) 若 $x=2, y=1$,那一個式子的值最大?

(iv) 若 $x=-2, y=1$,那一個式子的值最大?

(v) $x=\frac{1}{2}, y=8$,那一個式子的值最大?

〔例題2〕 x^5 是 x^3, x^2 的倍式嗎?再回答下面的問題。

(i) 各式的次數如何?那一個的最低?

(ii) $x=1,2,-1,\frac{1}{2}$ 時,各式的值怎樣?最小的是那一個?

137. 最高公因式就是幾個式子所公有的次數最高的因式。

如 $a^2x^3y^4$, $a^3x^2y^3$ 的公因式有 $a, a^2, x, x^2, y, y^2, y^3, ax, ay, xy, axy, ax^2y, a^2x^2y, a^2x^2y^2, a^2x^2y^3$……等,其中一次,二次,三次,四次,五次,六次,七次的都有,以七次為最高,所以 $a^2x^2y^3$ 就是牠們的'最高公因式'。

最低公倍式就是幾個式子所公有的次數最低的倍式。

如 $3\,xy^2$, $5\,x^2y$ 的公倍式有 $15\,x^2y^2, 15\,x^3y^2, 15\,x^2y^3$……等,其中 $15\,x^2y^2$ 的次數只有四次,是最低的,所以就是 $3\,xy^2$ 和 $5\,x^2y$ 的'最低公倍式'。

138. 求最高公因式和最低公倍式的法則,和算術中求最大公約數及最小公倍數的完全相同,也是分兩種。

〔例題3〕 求 $9\,a^2bc, 12\,ab^2c, 8\,abc^2$ 的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$*

$\because\quad 9\,a^2bc\equiv 3^2\cdot a^2bc,\ 12\,ab^2c\equiv 2^2\cdot 3\cdot ab^2c,\ 8\,abc^2\equiv 2^3\cdot abc^2.$

$\therefore\quad H.C.F.\equiv abc,$

$\qquad L.C.M.\equiv 2^3.3^2\cdot a^2b^2c^2=72\,a^2b^2c^2.$

〔例題4〕 求 $4(x^2-4\,y^2), 6(x^2+xy-2\,y^2), 9(x^2-xy-2\,y^2)$

*$H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ 就是最高公因式和最低公倍式的英文名詞 Highest Common Factor 和 Lowest Common Multiple 的略寫。

的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$

$$\because\quad 4(x^2-4y^2)\equiv 2^2(x+2y)(x-2y),$$
$$6(x^2+xy-2y^2)\equiv 2\cdot 3(x+2y)(x-y),$$
$$9(x^2-xy-2y^2)\equiv 3^2(x-2y)(x+y).$$

$$\therefore\quad H.C.F.\equiv 1,$$
$$L.C.M.\equiv 2^2\cdot 3^2(x+2y)(x-2y)(x+y)(x-y)$$
$$\equiv 36(x^2-4y^2)(x^2-y^2)$$
$$\equiv 36(x^4-5x^2y^2+4y^4).$$

通常 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ 都留着因式相乘的形式，無須展開。

習題一〇六

求下列各式的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$:

1. $4ab^2c^3, 3a^4c^2, 12ab^4c, 9a^2b^3c.$

2. $20p^4q^2, 15q^4r^2, 5r^4p^2.$　3. $16x^5y^4, 12x^3y^2z^4, 24y^4z^5.$

4. $a^2-ab, (a-b)^2.$　5. $x^2-y^2, x^4-y^4.$

6. $a^2-3ab+2b^2, a^2+2ab-8b^2.$

7. $x^4-9x^2, x^3-5x^2+6x.$　8. $x^2-x-6, x^2-2x-3.$

9. $x^2+x-6, 2x^2+3x-2.$

10. $2x^2-3x-2, 4x^2+8x+3.$

11. $x^2-4, x^2-x-2, x^2+x-2.$

12. $a^2+5ab+6b^2, a^2+ab-2b^2, a^2+2ab-3b^2.$

13. $x^3-3x^2+2x, x^4-x^2, x^2+x-2.$

14. $2a^2(a^2-b^2), 6ab(a^2-3ab+2b^2), 5a^3b^2(a^2-ab-2b^2)$.

15. $9x^2-4, 4x^2-36, 3x^2-7x-6, 3x^2+7x-6$.

139. 遇着兩式不容易分解因式的時候,牠們的最高公因式,可以照算術中輾轉相除的方法去求。在這裏先來證明這個方法一下。

如要求 A, B 兩式的 $H.C.F.$ 而 B 的次數低於 A 的。

則 $B)\ A\ (Q_1$ ……………………第一次的商

$\underline{BQ_1}$

第一次的餘式,牠的次數必低於 B 的……… $R_1)\ B\ (Q_2$ ……………………第二次的商

$\underline{R_1Q_2}$

第二次的餘式,牠的次數必低於 R_1 的…………… $R_2)\ R_1\ (Q_3$ ……………………第三次的商

$\underline{R_2Q_3}$

第三次的餘式,牠的次數必低於 R_2 的…………………… R_3

第 n 次的餘式,牠的次數必低於 R_{n-1} 的 …………………… $R_n)\ R_{n-1}\ (Q_{n+1}$ ……末次的商

$\underline{R_nQ_{n+1}}$

0

由上式可得下列各式:

$R_{n-1}\equiv R_nQ_{n+1}\equiv R_n$ 的倍式。

$R_{n-2}\equiv R_{n-1}Q_n+R_n\equiv R_n$ 的倍式。 爲什麼?

……………………………………

$R_2\equiv R_3Q_4+R_4\equiv R_n$ 的倍式。 爲什麼?

$R_1\equiv R_2Q_3+R_3\equiv R_n$ 的倍式。 爲什麼?

$B\equiv R_1Q_2+R_2\equiv R_n$ 的倍式。 爲什麼?

$A\equiv BQ_1+R_1\equiv R_n$ 的倍式。 爲什麼?

所以R_n是A和B的公因式。

現在,我們來證明R_n就是A和B的$H.C.F.$

設f是A和B的$H.C.F.$

$$\because \quad A\equiv BQ_1+R_1,$$

$$\therefore \quad R_1\equiv A-BQ_1.$$

f既是A和B的公因式,也就是B和R_1的公因式。

又
$$B\equiv R_1Q_2+R_2,$$

$$\therefore \quad R_2\equiv B-R_1Q_2.$$

f既是B和R_1的公因式,也就是R_1和R_2的公因式。

而
$$R_1\equiv R_2Q_3+R_3,$$

$$\therefore \quad R_3\equiv R_1-R_2Q_3.$$

f既是R_1和R_2的公因式,也就是R_2和R_3的公因式

....

照樣繼續推證下去,f也就是R_{n-2}, R_{n-1}的公因式。

而
$$R_{n-2}\equiv R_{n-1}Q_n+R_n,$$

$$\therefore \quad R_n\equiv R_{n-2}-R_{n-1}Q_n.$$

$\therefore$ f是R_n的因式。換句話說,就是R_n包含着A和B的$H.C.F.$;而R_n又是A和B的公因式,所以牠就是A和B的$H.C.F.$

〔例題5〕 求$2x^4-11x-10x^2-x^3+8$和$5-3x^2-9x+2x^3$的$H.C.F.$

第一步必須將兩式同樣照降冪或升冪排列,然後用次數較低的去除次數較高的。

$$
\begin{array}{rl}
\overbrace{2x^3-3x^2-9x+5}^{B}) & \overbrace{2x^4-x^3-10x^2-11x+8}^{A}\,(\overbrace{x+1}^{Q_1} \\
& \underline{2x^4-3x^3-9x^2+5x} \\
& \phantom{2x^4-{}}2x^3-x^2-16x+8 \\
& \phantom{2x^4-{}}\underline{2x^3-3x^2-9x+5} \\
& \phantom{2x^4-2x^3-{}}2x^2-7x+3\cdots\cdots R_1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\overbrace{2x^2-7x+3}^{R_1}) & \overbrace{2x^3-3x^2-9x+5}^{B}\,(\overbrace{x+2}^{Q_2} \\
& \underline{2x^3-7x^2+3x} \\
& \phantom{2x^3-{}}4x^2-12x+5 \\
& \phantom{2x^3-{}}\underline{4x^2-14x+6} \\
& \phantom{2x^3-4x^2-{}}2x-1\cdots\cdots R_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\overbrace{2x-1}^{R_2}) & \overbrace{2x^2-7x+3}^{R_1}\,(\overbrace{x-3}^{Q_3} \\
& \underline{2x^2-x} \\
& -6x+3 \\
& \underline{-6x+3} \\
& \phantom{2x^2-6x+{}}0
\end{array}
$$

$\therefore$ $2x-1$ 是 A 和 B 的 $H.C.F.$

用這種方法來求 $H.C.F.$，若無餘數，則最後的除數，即爲所求的 $H.C.F.$；若除到最後，只剩了不含 x 的項，則兩式沒有含着 x 的 $H.C.F.$

140. 若某因式只一個式子含有牠，而別一個式子沒有牠，則牠旣非兩式的公因式，自然非兩式的 $H.C.F.$ 的一個因式，故爲便利起見，可以先將牠消去，這和兩式的 $H.C.F.$ 是沒有關係的；並且這無論在計算中的那一步都可以。

又爲避去數字的分數起見，可以用一式中所沒有

的因數去乘他一式,因為這也和 $H.C.F.$ 沒有什麼關係的。

〔例題6〕 試求下列兩式的 $H.C.F.$

$$3x^4+5x^3y-7x^2y^2+2xy^3+2y^4,$$

$$2x^4+3x^3y-2x^2y^2+12xy^3+5y^4.$$

用 2 乘第一式,因為 2 不是第二式的因數,所以和 $H.C.F.$ 沒有關係。

$$\begin{array}{r}
2x^4+3x^3y-2x^2y^2+12xy^3+5y^4\;)\;6x^4+10x^3y-14x^2y^2+4xy^3+4y^4\;(3\\
\underline{6x^4+9x^3y-6x^2y^2+36xy^3+15y^4}\\
x^3y-8x^2y^2-32xy^3-11y^4
\end{array}$$

現在我們看,y 是餘式的一個因數,而在第二式中並沒有含着牠,所以我們在計算的時候,竟不妨先將牠消去。

$$\begin{array}{r}
x^3-8x^2y-32xy^2-11y^3\;)\;2x^4+3x^3y-2x^2y^2+12xy^3+5y^4\;(2x+19y\\
\underline{2x^4-16x^3y-64x^2y^2-22xy^3}\\
19x^3y+62x^2y^2+34xy^3+5y^4\\
\underline{19x^3y-152x^2y^2-608xy^3-209y^4}\\
214x^2y^2+642xy^3+214y^4
\end{array}$$

先用 $214y^2$ 除餘式,

$$\begin{array}{r}
x^2+3xy+y^2\;)\;x^3-8x^2y-32xy^2-11y^3\;(x-11y\\
\underline{x^3+3x^2y+xy^2}\\
-11x^2y-33xy^2-11y^3\\
\underline{-11x^2y-33xy^2-11y^3}\\
0
\end{array}$$

$\therefore$ $H.C.F.$ 是 $x^2+3xy+y^2$.

這種計算可以較便利地排列如後,商式無論寫出與否都沒有關係。

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 6x^4+10x^3y & -14x^2y^2 & +\ 4xy^3 & +\ 4y^4 \\
 & 6x^4+\ 9x^3y & -\ 6x^2y^2 & +36xy^3 & +15y^4 \\
\hline
y) & x^3y & -\ 8x^2y^2 & -32xy^3 & -11y^4 \\
 & x^3 & -\ 8x^2y & -32xy^2 & -11y^3 \\
 & x^3 & +\ 3x^2y & +\ xy^2 & \\
\hline
 & & -11x^2y & -33xy^2 & -11y^3 \\
 & & -11x^2y & -33xy^2 & -11y^3 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
2x^4+\ 3x^3y & -\ 2x^2y^2 & +\ 12xy^3 & +\ 5y^4 \\
2x^4-16x^3y & -\ 64x^2y^2 & -\ 22xy^3 & \\
\hline
19x^3y & +\ 62x^2y^2 & +\ 34xy^3 & +\ 5y^4 \\
19x^3y & -152x^2y^2 & -608xy^3 & -209y^4 \\
\hline
214y^2) & 214x^2y^2 & +642xy^3 & +214y^4 \\
 & x^2 & +\ 3xy & +\ y^2
\end{array}
$$

141. 求三個以上的式子的 *H. C. F.*,若牠們的因式不容易分解時,先求兩式的 *H. C. F.*;再用這 *H. C. F.* 來和第三式求;更用所求得的結果和第四式求;這樣到最末一式爲止。

習題一〇七

求下列各對式子的 *H. C. F.*:

1. $4x^2+3x-10$ 和 $4x^3+7x^2-3x-15$.

2. $2x^4-x^3-10x^2-11x+8$ 和 $2x^3-3x^2-9x+5$.

3. x^7+1 和 $x^{12}+x^8$.

4. a^3+a-2 和 a^3-3a+2.

5. a^3-2a+4 和 a^3+a^2+4.

6. $9x^3+21x^2-17x+3$ 和 $3x^3+17x^2+21x-9$.

7. $4x^4-9$ 和 $2x^4+x^2-3-2x^3-3x$.

8. $3x^3-x^2-6x+2$ 和 x^4+x^3-2x-4.

9. $x^4-15x^2+28x-12$ 和 $2x^3-15x+14$.

10. $2x^4+2x^3-11x^2+10x-3$ 和 $2x^4-2x^3-5x^2+11x-6$.

11. $2x^4+x^3-4x^2+51x-4$ 和 $2x^4-7x^3+14x^2-14x+5$.

12. $2x^4-3x^3-2x^2+6x+3$ 和 $2x^4-7x^3-10x^2+x+2$.

13. x^4+4x^2+16 和 $2x^4-x^3+16x-8$.

約下列各分式:

14. $\dfrac{6x^3-5x^2+10x-3}{6x^3+x^2-10x+3}$.

15. $\dfrac{x^4y-8x^3y^2+17x^2y^3-16xy^4+9y^5}{x^5-9x^4y+26x^3y^2-39x^2y^3+27xy^4}$.

16. $\dfrac{x^4y-x^3y^2-15x^2y^3+38xy^4-14y^5}{x^5-7x^4y+21x^3y^2-34x^2y^3+28xy^4}$.

17. $\dfrac{x^3-2ax^2-a^2x+2a^3}{x^3+2ax^2-a^2x-2a^3}$.　　18. $\dfrac{1+x+x^3-x^5}{1-x^4-x^6+x^7}$.

求下列各式的 $H.C.F.$:

19 x^3-7x^2-x+7, x^3+3x^2-x-3, x^3-x^2-5x+5.

20. $2x^3+3x^2-11x-6$, $4x^3-16x^2+11x+10$

和 $4x^3+4x^2-29x-15$.

142. 求兩個或多個不易分解因式的式子的 $L.C.M.$,先照前兩節的方法求出牠們的 $H.C.F.$; $H.C.F.$ 旣求得,用牠去除各式,則各式的因式可以得到,而從此便可求出所求的 $L.C.M.$ 了。

〔例題7〕 求 x^3-4x^2+2x+3 和 x^3+x^2-3x-2 的 $L.C.M.$

兩式的 $H.C.F.$ 爲 x^2-x-1，由除法(或視察)得

$$x^3-4x^2+2x+3\equiv(x^2-x-1)(x-3),$$

$$x^3+x^2-3x-2\equiv(x^2-x-1)(x+2).$$

$$\therefore\quad L.C.M.\equiv(x^2-x-1)(x-3)(x+2).$$

習題一〇八

求下列各組的 $L.C.M.$:

1. $2x^2-5x+3,\ 3x^2-x-2,\ 6x^2-5x-6.$
2. $x^3-3x^2+3x-1,\ x^3-x^2-x+1.$
3. $x^3-15x^2+65x-72,\ x^3-18x^2+91x-88.$
4. $9x^3-x-2,\ 3x^3-10x^2-7x-4.$
5. $x^4-x^3+8x-8,\ x^3+4x^2-8x+24.$
6. $x^3+2x^2y+2xy^2+y^3,\ x^4-x^3y-xy^3+y^4.$
7. $x^3-x^2-4x+4,\ x^3-2x^2-x+2,\ x^3+2x^2-x-2.$
8. $12x^3+8x^2-27x-18,\ 12x^3-8x^2-27x+18,$

   $18x^3+27x^2-8x-12.$

第十五章

分　式

一　分式的性質

143. **定義.** 在代數式中,凡分母中並不含有特別指明的字母的,叫做整式;如 ax^3, $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}y^2$ 等是。

兩整式的商,寫成分數的形式的,叫做'分式';如 $\frac{b+c}{a}$, $\frac{x^2+xy}{7x+y}$ 等是。

〔注意〕 如 $\frac{x^2+y^2}{3}$ 等於 $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2$,所以雖形式是分數,但仍是整式。總之,分式的分母一定要含有字母。而有時,更只有就特別指定的文字說的,如 $\frac{x+y}{a}$,一般地說,當然是個分式,但若專就 x 或 y 或 x, y 說,仍是整式。

144. 照前節所說,這正好像 $\frac{2}{3}$ 是 $2\div 3$ 的意思一樣, $\frac{x^2-1}{x^2+7}$ 就是 $(x^2-1)\div(x^2+7)$ 的意思,分子是 (x^2-1),分母是 (x^2+7).

所以算術上關於分數的一切法則和原理,都可以應用到代數上來;不過下面所說的一點,應當特別地

注意。

初學代數的人,在約分的時候,很多有這種錯誤;將$\frac{x^2-1}{x^2+7}$的分子和分母的x^2對消了去,寫成$\frac{-1}{7}$,這是不合理的;因為x^2只是分子和分母的一項,而不是牠們的一個因式。

〔例題1〕 若(i) $x=1$, (ii) $x=2$, 證$\frac{x^2-1}{x^2+7}=\frac{-1}{7}$對否。

在$\frac{2\times 5}{2\times 6}$中消去2,是用2去除分子和分母,若用$x^2$去除$\frac{x^2-1}{x^2+7}$的分子和分母,不能得$\frac{-1}{7}$,而得的是$\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{7}{x^2}}$.

在$\frac{x^2-1}{x^2+7}$中消去x^2,是等於說分子和分母減去x^2.但從分數的分子和分母減去同樣的數,是要改變牠的值的;——例如從$\frac{3}{4}$的分子和分母減去2,成了$\frac{1}{2}$,分數的值就變小了。

總之,初學代數的,應當特別注意。

約分是將同一因式去除分數的分母和分子,和在算術上一樣。

〔注意〕 $\frac{x+y}{7}$可以寫成$\frac{x}{7}+\frac{y}{7}$,因為$(x+y)\div 7=x\div 7+y\div 7$.

而$\frac{30}{a+b}$不可寫成$\frac{30}{a}+\frac{30}{b}$,因為$30\div(a+b)\neq 30\div a+30\div b$.

145. **定義.** 分式的分母和分子稱為牠的'項',若分母和分子沒有公因式的,稱為'最低項'。

分式的分母,分子不是整式的,叫做'繁分式';分母,分子都是整式,並且已約到最低項,叫做'最簡分式'.

〔例題2〕 化 $\frac{x^6y^2+x^5y^3-6x^4y^4}{10x^2y^6-3x^3y^5-x^4y^4}$ 到最低項.

$$\frac{x^6y^2+x^5y^3-6x^4y^4}{10x^2y^6-3x^3y^5-x^4y^4}=\frac{x^4y^2(x^2+xy-6y^2)}{x^2y^4(10y^2-3xy-x^2)}$$

$$=\frac{x^2(x+3y)(x-2y)}{y^2(2y-x)(5y+x)}$$

$$=-\frac{x^2(x+3y)}{y^2(x+5y)}.$$

習題一〇九

將下列各分式約到最低項:

1. $\frac{x(x-1)^2}{2x^2(x-1)(x+1)}$.
2. $\frac{12x^2y(x+2)(x+3)}{9xy^2(x+3)^2}$.
3. $\frac{2x+2y}{3x+3y}$.
4. $\frac{pa+pb}{qa+qb}$.
5. $\frac{x^2y+xy^2}{axy}$.
6. $\frac{b+b^2}{a+ab}$.
7. $\frac{x-y}{3y-3x}$.
8. $\frac{4a-8b}{2b-a}$.
9. $\frac{(x-y)^2}{y-x}$.
10. $\frac{5x-5y}{(y-x)^2}$.
11. $\frac{(a-b)(c-d)}{(2b-2a)(3d-3c)}$.
12. $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$.
13. $\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$.
14. $\frac{3y^3-3yx^2}{(x-y)^2}$.

15. $\dfrac{(3x-3y)^2}{3y^2-3x^2}$.

16. $\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$.

17. $\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$.

18. $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

19. $\dfrac{(2x-1)^2}{2x^2-5x+2}$.

20. $\dfrac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$.

21. $\dfrac{x^2-14x+13}{x^2-8x-65}$.

22. $\dfrac{y^3-y^2-12y}{ay-4a}$.

23. $\dfrac{42a^2+51ab+15b^2}{6a+3b}$.

24. $\dfrac{5x^3y+5xy^3-10x^2y^2}{x^3y-xy^3}$.

25. $\dfrac{x^4-6x^2y^2-16y^4}{x^4-64y^4}$.

26. $\dfrac{x^4-7x^2y^2-18y^4}{x^4-81y^4}$.

27. $\dfrac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2-b^2}$.

28. $\dfrac{(a+1)^4-(a-1)^4}{(a+1)^3-(a-1)^3}$.

29. $\dfrac{(x^2+y^2-z^2)^2-(x^2-y^2+z^2)^2}{(xy-xz)(xy+xz)}$.

30. $\dfrac{p^2-1}{(1+py)^2-(p+y)^2}$.

31. $\dfrac{10x^4-7x^3+x^3}{4x^4-2x^3-2x+1}$.

32. $\dfrac{x^3-8x^2y+17xy^2-6y^3}{2x^3-9x^2y+10xy^2-3y^3}$.

33. $\dfrac{a^2b^2-a^2-b^2+1}{ab+a+b+1}$.

34. $\dfrac{12a^4-4a^3b-23a^2b^2+9ab^3-9b^4}{8a^4-14a^2b^2-9b^4}$.

35. $\dfrac{(a^2+b^2-d^2-c^2+2ab+2cd)(a^2+b^2-c^2-d^2-2ab-2cd)}{(a^2+c^2-b^2-d^2+2ac+2bd)(a^2+c^2-b^2-d^2-2ac-2bd)}$.

二　分式的乘法和除法

146. 〔例題1〕 簡單下式,

$$\frac{x^2-4xy+4y^2}{x^2-4y^2}\times\frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2-3xy+2y^2}.$$

原式$\equiv\dfrac{(x-2y)^2}{(x+2y)(x-2y)}\times\dfrac{(x+2y)^2}{(x-2y)(x-y)}$

$\equiv\dfrac{x+2y}{x-y}.$

習題一一〇

簡單下列各式:

1. $\dfrac{2x}{x-y}\times\dfrac{x^2-y^2}{8}$.　　2. $\dfrac{x^2-1}{3}\times\dfrac{6a}{x+1}$.

3. $\dfrac{a^2-b^2}{a}\times\dfrac{1}{a+b}\times\dfrac{a}{a-b}$.　　4. $\dfrac{15x-30}{2a}\times\dfrac{3x^2}{5x-10}$.

5. $\dfrac{(x-1)^2}{y^3}\times\dfrac{(x+1)y^2}{x-1}$.　　6. $\dfrac{a^2-x^2}{a}\times\dfrac{a^2+x^2}{ax}$.

7. $\dfrac{a^2x^2}{y^2}\times\dfrac{xy}{a(x+y)}\times\dfrac{x^2-y^2}{axy}$.

8. $\dfrac{a+x}{(m+n)^2}\times\dfrac{x^2-y^2}{12}\times\dfrac{(m+n)^2}{m-n}\times\dfrac{6(m^2-n^2)}{x+y}$.

9. $\dfrac{ax+x^2}{2b-cx}\times\dfrac{2bx-cx^2}{(a+x)^2}$.　　10. $ab\left(1+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{ab}\right)$.

11. $12x^2\left(1+\dfrac{3}{4x}-\dfrac{1}{3x^2}\right)$.

12. $(x^2-y^2)\left(1+\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$.

13. $(x-1)(x-3)\left(2+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{1}{x^2-4x+3}\right)$.

14. $x^2(a-x)\left(3+\dfrac{a}{x}-\dfrac{2a^2}{x^2}-\dfrac{x}{a-x}\right)$.

147. **定義.** 將一個數的分子和分母交換所成的數,稱爲原數的倒數。

如$\dfrac{5}{3}$是$\dfrac{3}{5}$的倒數,又如x原可看成$\dfrac{x}{1}$,所以$\dfrac{1}{x}$就是牠的倒數。

習題一一一(口答)

下列各數的倒數是什麽?

1. 2.	2. 10.	3. $\frac{1}{2}$.
4. $\frac{1}{3}$.	5. $\frac{1}{4}$.	6. $\frac{2}{3}$.
7. $\frac{3}{4}$.	8. $\frac{5}{6}$.	9. a.
10. $\frac{a}{2}$.	11. $\frac{a}{3}$.	12. $\frac{1}{a}$.
13. $\frac{2}{a}$.	14. $\frac{a}{b}$.	15. $\frac{x+y}{x-y}$.
16. $1-x$.	17. $\frac{1}{x-1}$.	18. $\frac{a}{x^2-a^2}$.

19. 一個數和牠的倒數相乘,等於多少?

20. 若y是x的倒數,則y的倒數是什麼?

21. 除數爲分數的除法,是怎樣的?例如$7\div\frac{3}{4}$.

22. 怎樣簡單$7\div\frac{a}{b}$?

148. 除數爲分數的除法. 例如以$\frac{p}{q}$去除$\frac{x}{y}$,就是要簡單這個式子$\dfrac{\frac{x}{y}}{\frac{p}{q}}$.分子和分母都乘以$yq$,則得

$$\frac{\frac{x}{y}\times yq}{\frac{p}{q}\times yq}=\frac{xq}{yp}.$$

但這和$\frac{x}{y}\times\frac{q}{p}$是一樣的.所以

某數除以分數,等於乘以這分數的倒數.

149. 〔例題2〕 簡單下式,

$$\frac{a^2-ab}{b^2+ab}\div\frac{b^2-ab}{a^2+ab}.$$

$$原式=\frac{a(a-b)}{b(b+a)}\times\frac{a(a+b)}{b(b-a)}$$

$$=-\frac{a^2}{b^2}.$$

習題一一二

簡單下列各式:

1. $\frac{a}{2x}\div\frac{b}{3y}$.

2. $\frac{3x}{2x-1}\div\frac{2x}{x-2}$.

3. $\frac{4a}{2a-2}\div\frac{2a}{a-1}$.

4. $\frac{4a+2}{3a}\div\frac{2a+1}{5a}$.

5. $\frac{(x+y)^2}{x-y}\div\frac{y+x}{(y-x)^2}$.

6. $\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}\div\frac{b-a}{c+d}$.

7. $\frac{a^2-x^2}{4ax}\div\frac{x-a}{3x}$.

8. $\frac{x^2-x}{x-3}\div\frac{x^2-5x}{3-x}$.

9. $\frac{x^4-a^4}{(x-a)^2}\div\frac{x^2+ax}{x-a}$.

10. $\frac{8-2a^4}{2ab}\div(2+a^2)$.

11. $4m^2p^2\div\frac{2m^3x}{p^2-px}$.

12. $\frac{x^2-3ax+2a^2}{x^2-9ax+20a^2}\div\frac{x^2-5ax+6a^2}{x^2-7ax+12a^2}$.

三　分式的加法和減法

150. 〔例題1〕 將$+\frac{x}{4a^2b}$，$-\frac{y}{6ab^2}$，$+\frac{3z}{a^3}$加攏來。

第一步必須要將這三個分式變成同分母的。$4a^2b$，$6ab^2$，a^3的 *L.C.M.* 是 $12a^3b^2$，就用牠來做公分母。

$$\frac{x}{4a^2b}-\frac{y}{6ab^2}+\frac{3z}{a^3}\equiv\frac{3abx}{12a^3b^2}-\frac{2a^2y}{12a^3b^2}+\frac{36b^2z}{12a^3b^2}$$

$$\equiv\frac{3abx-2a^2y+36b^2z}{12a^3b^2}.$$

習題一一三（口答）

求下列各式的 *L.C.M.*：

1. $2^2\cdot3^3\cdot5$；$2\cdot3\cdot5^2$；$2^2\cdot5^2$.

2. a^2b^3c; abc^2; a^2b^2.

3. $6a^2b^3c$; $8abc^2$; $12a^2c^2$.

4. $12(x+y)(x-y)^2$; $9(x^2-y^2)$; $6(x+y)^2$.

習題一一四

通分:

1. $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}$, 用 24 做公分母。

2. $\frac{x}{10}, \frac{y}{15}, \frac{3z}{4}$, 用 60 做公分母。

3. $\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}$, 用 xyz 做公分母。

4. $\frac{x}{4p}, \frac{y}{3q}, \frac{z}{6r}$, 用 $12pqr$ 做公分母。

5. $\frac{4a}{3b^2c}, \frac{-5b}{4c^2a}, \frac{7c}{6a^2b}$, 用 $12a^2b^2c^2$ 做公分母。

6. $\frac{x+y}{2x-2y}, \frac{x-y}{3x+3y}$, 用 $6(x^2-y^2)$ 做公分母。

7. $\frac{2x}{(x-y)^2(x+y)}, \frac{3y}{(x-y)(x+y)^2}$, 用 $(x^2-y^2)^2$ 做公分母。

習題一一五

將下列各式化成簡單分式:

1. $\frac{3}{a}+\frac{4}{b}$.

2. $\frac{x}{3y}-\frac{y}{4x}$.

3. $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$.

4. $\frac{5p}{3a}-\frac{3p}{4a}-\frac{p}{6a}-\frac{7p}{12a}$.

5. $2+\frac{3}{x}$.

6. $1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}$.

7. $\frac{x+y}{10a}+\frac{a-y}{15a}$.

8. $\frac{a+2b}{6a}-\frac{2a+b}{4b}$.

9. $\frac{2(p-q)}{3pq^2}-\frac{p-2q}{4p^2q}$.

10. $1-\frac{x-y}{y}$.

11. $1-\frac{x-y}{x}$.

12. $2+\frac{3(x+y)}{x}-\frac{4(x+y)^2}{x^2}$.

13. $3-\frac{x-y}{y}+\frac{(x-y)^2}{y^2}$.

14. $\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}$.

15. $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$.

16. $\frac{y-z}{yz}+\frac{z-x}{zx}+\frac{x-y}{xy}$.

17. $-\frac{x^2-yz}{yz}-\frac{y^2-zx}{zx}-\frac{z^2-xy}{xy}$.

18. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{x^2+y^2}{xy}$.

習題一一六

將下列各式化成最簡單的分式(公分母就用因式相乘的形式):

1. $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x+3}$.

2. $\frac{2}{2x+3}-\frac{3}{3x+2}$.

3. $\frac{3x}{2y-5x}-\frac{2x}{5y-2x}$.

4. $\frac{7}{2x-2y}-\frac{5}{3x-3y}$.

5. $\frac{4}{5a-5b}-\frac{3}{2b-2a}$.

6. $\frac{p}{p-q}-\frac{q}{p+q}$.

7. $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{a}{b-a}$.

8. $\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}$.

9. $n+\dfrac{1}{1+n}+\dfrac{1+n^2}{1-n}$.

10. $\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+2}$.

11. $\dfrac{3(x-2)}{x+1}-\dfrac{2(x+1)}{x-2}$.

12. $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

13. $\dfrac{a^2}{x^2-a^2}-\dfrac{a+x}{a-x}$.

14. $\dfrac{2x^2-2x+1}{x^2-x}-\dfrac{x}{1-x}$.

15. $\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{1}{(y+a)^2}$.

16. $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{3a^2-2ab}{a^2-b^2}$.

17. $\dfrac{a-b}{a^2+ab}-\dfrac{a}{a^2-b^2}$.

18. $\dfrac{1}{a(a+b)}-\dfrac{1}{b(a-b)}$.

19. $\dfrac{x}{x^2-3x-4}-\dfrac{1}{x-4}$.

20. $\dfrac{1}{(a-x)^2}+\dfrac{1}{a^2+ax-2x^2}$.

21 $\dfrac{1}{x^2-5x+4}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

22. $\dfrac{1+3y}{1-y-2y^2}-\dfrac{1-2y}{1+4y+3y^2}$.

23. $\dfrac{a^3}{(a+b)^3}-\dfrac{ab}{(a+b)^2}+\dfrac{b}{a+b}$.

24. $\dfrac{3a}{(a-2x)^2}+\dfrac{2a+x}{(a+x)(a-2x)}+\dfrac{5}{a+x}$.

25. $\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{1+a}{1-a}-\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$.

26. $\dfrac{30a}{9a^2-1}+\dfrac{4}{3a-1}-\dfrac{5}{3a+1}$.

27. $\dfrac{5}{1+5a}-\dfrac{3}{1-5a}+\dfrac{10(5a^2+2a)}{1-25a^2}$.

28. $\dfrac{3a-6b}{a+b}-\dfrac{5a-6b}{a-b}-\dfrac{4a-5b}{a+b}-\dfrac{7a-8b}{b-a}$.

29. $\dfrac{1}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(c-a)}$.

30. $\dfrac{1}{(c+a)(a+b)}+\dfrac{1}{(a+b)(b+c)}+\dfrac{1}{(b+c)(c+a)}$.

31. $\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}$.

32. $\dfrac{a^2(b-c)}{(c+a)(a+b)}+\dfrac{b^2(c-a)}{(a+b)(b+c)}+\dfrac{c^2(a-b)}{(b+c)(c+a)}$.

33. $\dfrac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{2b-c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{2c-a-b}{(c-a)(c-b)}$.

34. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

35. $\dfrac{1}{x(x-y)(x-z)}+\dfrac{1}{y(y-z)(y-x)}+\dfrac{1}{z(z-x)(z-y)}$.

36. $\dfrac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{c+a}{b^2-(c+a)^2}+\dfrac{a+b}{(a+b)^2-c^2}$.

37. $\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{x}$.

38. $\dfrac{4}{a}-\dfrac{3}{a-\frac{1}{2}}$.

39. $\dfrac{a-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}-\dfrac{\frac{1}{3}}{a-\frac{2}{3}}$.

40. $\dfrac{1}{5}\left(2b-3\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{b-1\frac{1}{2}}$.

151. 〔例題 2〕 化下繁分式爲簡單分式。

$$\left(\frac{2x+5y}{3x+y}-\frac{5x+2y}{x+3y}\right)\div\left(\frac{2x-3y}{2x}+\frac{7x-3y}{2x+6y}\right).$$

$$原式=\frac{(2x+5y)(x+3y)-(5x+2y)(3x+y)}{(3x+y)(x+3y)}$$

$$\div\frac{(2x-3y)(x+3y)+(7x-3y)x}{2x(x+3y)}$$

$$=\frac{-13(x^2-y^2)}{(3x+y)(x+3y)}\div\frac{9(x^2-y^2)}{2x(x+3y)}$$

$$=\frac{-13(x^2-y^2)}{(3x+y)(x+3y)}\times\frac{2x(x+3y)}{9(x^2-y^2)}$$

$$=-\frac{26x}{9(3x+y)}.$$

〔例題 3〕 將 $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$ 化簡單。

$$原式=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\div\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}\div\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}\div\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}$$

$$=\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}\times\frac{(a-b)(a+b)}{4ab}$$

$$=\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

〔例題 4〕 化 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$ 爲簡單分式。

$$原式\equiv\frac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{x-1}{x}}}$$

$$\equiv\frac{1}{1-\cfrac{x}{x-1}}$$

$$\equiv\frac{1}{\cfrac{-1}{x-1}}$$

$$\equiv 1-x.$$

習題一一七

將下列各式化到最簡單的形式:

1. $\left(1-\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{1-10x^2}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{x-1}{4x-1}\right)$.

2. $\left(\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}-\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}\right)\left(\dfrac{x^6-y^6}{x^4-y^4}\right)$.

3. $\left(\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{a-1}{a}\right)\div\left(\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{a-1}{a}\right)$.

4. $\left(y-\dfrac{a^2-xy}{y-x}\right)\left(x+\dfrac{a^2-xy}{y-x}\right)+\left(\dfrac{a^2-xy}{y-x}\right)^2$.

5. $\dfrac{a}{1+\dfrac{a}{b}}+\dfrac{b}{1+\dfrac{b}{a}}-\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$.

6. $\dfrac{\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x}{y}+1}{\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{x}{y}+1}\times\dfrac{\dfrac{x^3}{y}+y^3}{x^2-\dfrac{y^3}{x}}\div\dfrac{x^2-xy}{y^2+xy}$.

7. $\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$.

8. $\frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}$.

9. $\frac{(a-b)^2-(b-c)^2}{a^2+ab-bc-c^2}+\frac{(b-c)^2-(c-a)^2}{b^2+bc-ca-a^2}+\frac{(c-a)^2-(a-b)^2}{c^2+ca-ab-b^2}$.

10. $\frac{1}{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{a}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{a}{c}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)}$.

11. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2(a-b)(b-c)(c-a)}$.

12. $\dfrac{\frac{a+2}{2a+3}-\frac{4a+5}{5a+6}}{\frac{2a+3}{3a+4}-\frac{3a+4}{4a+5}}$.

13. $\dfrac{\frac{1+x}{1+x^2}-\frac{1+x^2}{1+x^3}}{\frac{1+x^2}{1+x^3}-\frac{1+x^3}{1+x^4}}$.

14. $\frac{x}{(x+y)(x+2y)}+\frac{2y}{(x+y)(x+3y)}+\frac{x}{(x+2y)(x+3y)}-\frac{2}{x+3y}$.

15. $\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x+1}}}$.

16. $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}}\div\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}}$.

第十六章

分式方程式

一　分式方程式的解法

152. 前幾章所講過的方程式,都沒有含分式(即分母含有未知數的分式),所以統叫做'整式方程式'.方程式中若含有分式,就稱爲'分式方程式',這種方程式的解法,先將分式消去,變成整式方程式,然後依一般的方法計算.

〔例題1〕 解方程式$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x+1}$.

先消去分式,兩邊乘以 x, $x-1$ 和 $x+1$ 的 *L. C. M.* $x(x-1)(x+1)$, 則

$$x(x+1)+(x-1)(x+1)=2x(x-1).$$

$$\therefore\quad x^2+x+x^2-1=2x^2-2x.$$

$$\therefore\quad 3x=1.\qquad\qquad \therefore\quad x=\tfrac{1}{3}.$$

〔覆證〕 左邊$=\dfrac{1}{\frac{1}{3}-1}+\dfrac{1}{\frac{1}{3}}=-\dfrac{3}{2}+3=1\frac{1}{2}$,

右邊$=\dfrac{2}{\frac{1}{3}+1}=\dfrac{6}{4}=1\frac{1}{2}$.

〔例題2〕 解$\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}-\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}=0$.

分解各分母的因式,得

$$\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}-\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}=0.$$

兩邊乘以各分母的 $L.C.M.$ $(x-1)(x-2)(x-3)$,

$$(x-2)^2-(x+3)(x-3)=0.$$

$$\therefore\quad (x^2-4x+4)-(x^2-9)=0.$$

$$\therefore\quad -4x+13=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{13}{4}.$$

〔覆證〕 $$\frac{\frac{13}{4}-2}{\frac{169}{16}-13+3}-\frac{\frac{13}{4}+3}{\frac{169}{16}-\frac{39}{4}+2}=\frac{20}{9}-\frac{20}{9}=0.$$

153. 〔例題 3〕 解 $\dfrac{2x-5}{x-3}+\dfrac{2(1-x)}{2x+1}=\dfrac{x-2}{x-3}.$

兩邊乘以 $(x-3)(2x+1)$,

$$(2x-5)(2x+1)+2(1-x)(x-3)=(x-2)(2x+1).$$

$$\therefore\quad 4x^2-8x-5-2x^2+8x-6=2x^2-3x-2.$$

$$\therefore\quad 3x=9.\qquad \therefore\quad x=3.$$

〔覆證〕 左邊 $=\dfrac{6-5}{3-3}+\dfrac{2(-2)}{7}=\dfrac{1}{0}-\dfrac{4}{7},$

右邊 $=\dfrac{3-2}{3-3}=\dfrac{1}{0}.$

$\dfrac{1}{0}$ 是沒有意義的,從此可知 3 不是原方程式的根。

3 既不是原方程式的根,那末解方程式時怎樣會得出來呢?

我們仔細檢查我們的演算,第一步,便是用方程式中各分母的 L.C.M. 去乘方程式的兩邊,以消去分式。這裏用來乘的是 $(x-3)(2x+1)$,而我們求得的 3 正是方程式 $(x-3)(2x+1)=0$ 的根。這種不合於原方程式的根,是由用一個式子來乘方程式時加進去的,所以叫做'增根'。

因此,解分式方程式時所得的根,若代入原方程式中的各分母的 L.C.M. 恰得 0 的,便是'增根'。

因為解分式方程式所得的根不一定就是原方程式的根,所以對於所得的解答必須加以覆證。

習題一一八

解下列各方程式:

1. $\frac{3}{x}=\frac{1}{5}$.
2. $\frac{2}{x}=\frac{7}{1}$.
3. $2=\frac{1}{x}$.
4. $\frac{2.5}{x}=3.75$.
5. $\frac{1}{3.2}=\frac{0.5}{x}$.
6. $\frac{0.7}{x}=\frac{21}{32}$.
7. $\frac{2.4}{x}-\frac{4.2}{3.5}=0$.
8. $x+\frac{4}{x}=4$.
9. $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$.
10. $12x-\frac{6}{x}=21$.
11. $\frac{5}{4}(6-x)-\frac{4}{3-x}=1$.
12. $x+2=\frac{9}{x+2}$.
13. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{3}{x+2}$.
14. $\frac{x-2}{x-1}=\frac{3x+1}{3x-2}$.

15. $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{2-x}=\frac{3}{x-3}$. 16. $\frac{5}{x-5}-\frac{3}{x+5}=\frac{2}{x}$.

17. $\frac{x+3}{x-2}+\frac{3x-3}{x+2}=4$. 18. $\frac{x+3}{x-1}-\frac{x+1}{3-x}=2$.

19. $\frac{5}{x-1}-\frac{4}{x+1}=\frac{3}{x+7}$. 20. $\frac{x-5}{4}-\frac{4}{5-x}=\frac{3x-1}{4}$.

21. $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2-x}=\frac{6}{x}$.

22. $7-\frac{2}{x+4}+\frac{4}{(x+6)(x+4)}=0$.

23. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-1}+\frac{3}{2}=0$.

24. $1+\frac{2}{(x-7)(x-3)}=\frac{7}{x-3}$.

25. $1-\frac{4}{x-3}=\frac{3}{(x-3)(x-5)}$.

26. $\frac{2(x-3)}{x+1}+\frac{24}{x^2-1}=\frac{x+2}{x-1}$.

27. $\frac{2}{x-1}-\frac{x-1}{2}=\frac{2}{x-6}-\frac{x-6}{2}$.

28. $3-\frac{1}{x+2}=\frac{5}{(x+2)(2x-3)}+\frac{3}{4x-6}$.

29. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$.

30. 若$\frac{3}{a}-\frac{4}{c}=\frac{5}{c}-\frac{6}{b}$,用含 a 和 b 的項來表示 c.

31. 若$\frac{P}{Q}=\frac{a-xb}{a+xb}$,求 x 的值.

32. 求 n 的值:

(i) $\frac{1}{n}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\left(\frac{1}{n}-1\right)$;

(ii) $\frac{1}{n-2}=\frac{1}{a(n-2)}+\frac{1}{b}$.

33. $\frac{x-1}{x+1}=\frac{a-b}{a+b}$, 求 x.

34. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{b}{c}=\frac{b+1}{c}$, 求 c.

35. $t=\frac{pd}{p+2f}$, 求 p. 若 $d=17.5$, $t=0.5$, $f=4000$, p 是多少?

二 聯立分式方程式

154. 〔例題1〕 解 $\begin{cases}\frac{5}{x+2y}=\frac{7}{2x+y} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)},\\ \frac{7}{3x-2}=\frac{5}{6-y}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}.\end{cases}$

先消去兩式的分式,

$$\therefore\quad 5(2x+y)=7(x+2y)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)},$$

$$7(6-y)=5(3x-2)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iv)}.$$

將兩式化簡單,

$$x=3y\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(v)},$$

$$15x+7y=52\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(vi)}.$$

將(v)中的 x 的值代入(vi),

$$\therefore\quad 45y+7y=52.$$

$$\therefore\quad 52y=52.$$

$$\therefore \quad y=1.$$

將 y 的值代入 (v)，　$\therefore \quad x=3\times1=3.$

〔例題 2〕 解 $\begin{cases} \dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{y}=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i}), \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{y}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii}). \end{cases}$

這一類的方程式，可不必消去分式，而先求 $\dfrac{1}{x}$ 或 $\dfrac{1}{y}$ 的值。

(i) 乘以 5, (ii) 乘以 7,

$$\therefore \quad \frac{15}{x}-\frac{35}{y}=25,$$

$$\frac{14}{x}-\frac{35}{y}=21.$$

兩式相減，　$\therefore \quad \dfrac{1}{x}=4,$

$$\therefore \quad x=\tfrac{1}{4}.$$

代入 (i)，　$\dfrac{3}{\frac{1}{4}}-\dfrac{7}{y}=5,$

$$\therefore \quad 12-\frac{7}{y}=5.$$

$$\therefore \quad -\frac{7}{y}=-7.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y}=1.$$

$$\therefore \quad y=1.$$

習題一一九

解下列各方程式:

1. $\begin{cases}\dfrac{3x+5y}{20}+\dfrac{5x-3y}{8}=3,\\ \dfrac{x+1}{y+2}=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dfrac{x+1}{y}=7,\\ \dfrac{x}{1+y}=6.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{2}{y}=\dfrac{7}{5(x-2)}.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{x-1}{y-2}-\dfrac{x+7}{y+2}=0,\\ \dfrac{x-1}{x}+\dfrac{1}{y}=1+\dfrac{1}{xy}.\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{3x+1}{4-2y}=\dfrac{4}{3},\\ x+y=1.\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{1}{3x+1}=\dfrac{1}{5y-4},\\ \dfrac{1}{4x-3}=\dfrac{1}{7y-6}.\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{8}{15},\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{15}.\end{cases}$

8. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12},\\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=0.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\dfrac{10}{x}-\dfrac{9}{y}=\dfrac{1}{20},\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{1}{6}.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{6}{x}-\dfrac{5}{y}=2,\\ \dfrac{12}{x}-\dfrac{25}{y}=3.\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=5,\\ -\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=-17.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{11}{30},\\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{6}{y}=-\dfrac{3}{28}.\end{cases}$

155. 〔例題3〕 兩艘巡洋艦，A 和 B，在靜水中的速度，每小時是 16 海里和 20 海里，奉令同時到達距 A 45 海里，距 B 27 海里的某地。潮水由 A 向 B. A 於午後 3 時動身，打電通知 B，B 就於午後 4 時動身，結果同時到某地；求潮水的速度。(某地在 A，B 中間。)

設潮水從 A 向 B，每小時行 x 海里。

則 A 每小時行 $(16+x)$ 海里，B 每小時行 $(20-x)$ 海里。

而 A 到某地行 $\frac{45}{16+x}$ 小時，B 到某地行 $\frac{27}{20-x}$ 小時，但 A 比 B 多行 1 小時。

$$\therefore \quad \frac{45}{16+x}=\frac{27}{20-x}+1.$$

兩邊乘以 $(16+x)(20-x)$，

$$45(20-x)=27(16+x)+(16+x)(20-x).$$

$$\therefore \quad 900-45x=432+27x+320+4x-x^2.$$

$$\therefore \quad x^2-76x+148=0.$$

$$\therefore \quad (x-2)(x-74)=0.$$

$$\therefore \quad x=2 \text{ 或 } 74.$$

但 74 海里不合題的(爲什麼?)，所以潮水的速度是每小時 2 海里。

〔覆證〕 A 每小時實能行 18 海里，$2\frac{1}{2}$ 小時可到某地；

B 每小時實能行 18 海里，$1\frac{1}{2}$ 小時可到某地。

〔例題4〕 有一個分數，牠的分子加 2，則成 $\frac{1}{3}$. 若從分母減去 2，則爲 $\frac{1}{6}$. 求原分數。

設原分數的分子爲x,分母爲y,則原分數爲$\frac{x}{y}$.

$$\therefore\quad \frac{x+2}{y}=\frac{1}{5}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i}),$$

$$\frac{x}{y-2}=\frac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii}).$$

消去兩式的分式,

$$5(x+2)=y\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iii}),$$

$$6x=y-2\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iv}).$$

將(iii)中的y的值代入(iv),

$$\therefore\quad 6x=5(x+2)-2.$$

$$\therefore\quad 6x=5x+10-2.$$

$$\therefore\quad x=8.$$

代入(iii), $y=5(8+2)=50.$

所以原分數爲$\frac{8}{50}$.

〔覆證〕

$$\frac{8+2}{50}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5},$$

$$\frac{8}{50-2}=\frac{8}{48}=\frac{1}{6}.$$

習題一二〇

1. 什麼數去除96,所得的商比除數大4?

2. 自行車兩輛同時到達相距90公里的市鎮,只知一車比他車每小時快1公里,並且後一小時出發;

求兩車的速度。

3. 某人用50元買羊若干頭,三月後死去3頭,將其餘的賣去,每頭多賣2元,還損失1元;問原來買羊多少頭?

4. 十五個人,合出資旅行;男子共出36元,女子也共出36元;但男子一人比女子一人多出2元;問男女各若干人?

5. 某人買磁器若干件,共用去8元,損壞了4件,每件比原價多賣1角,則沒有盈虧;求原來所買的件數。

6. 一汽車比一自行車每小時快$37\frac{1}{2}$里,走45里的距離要少50分鐘。求這汽車的速度。

7. 一船來往於$10\frac{1}{2}$里的河,要100分鐘。若河水的速度每小時6里;求船在靜水中的速度。

8. 一個人用400元買物若干件;若每件的價低2元,則可多買10件。問他原買多少件?

9. 兩車同行108里。其中的一車比他一車每小時快45里,而可少走12分鐘。求兩車的速度。

10. A, B兩汽船同游420里的河。A比B每小時快半里,而少走2小時;求A和B的速度。

11. 一船在靜水中,每小時可行9里。若來往9里的河一次,共需$2\frac{1}{4}$小時,問這河水的速度怎樣?

12. A均分180元給若干人。B用同數的款也均

分給若干人,每人較 A 多給 6 元,所給的人卻少 40 個。問 A 每人給多少?

13. A,B 兩地的面積同爲 210 方丈;A 較 B 長 6 尺狹 4 尺;問 A 的長和闊各幾尺?

14. 有一分數,分母,分子各加 1,則等於 $\frac{4}{5}$;若分子減去 1,分母加上 1,則爲 $\frac{1}{2}$;求原分數。

15. 有一分數,2 倍分子再加上 2,則爲 $\frac{1}{2}$;若分子加上 2,分母減去 3,則爲 $\frac{1}{3}$. 問原分數是什麼?

16. 一工程,A,B 合作 15 日完,若兩人合作 6 日後,由 B 再獨作,則尚需 24 日纔能完。問 A,B 各一人獨作需多少日?

17. 一個男子和一個小孩同作一工程 18 日可完。若 5 個男子和 9 個小孩合作,則 3 日可成。問一個男子或一個小孩獨作,各要多少日纔能完?

18. 一水漕有 A,B,C 三水管。若同時開三管,則 1 小時可注滿水漕的 $\frac{7}{8}$. 只開 A,B 兩管,則 $1\frac{1}{3}$ 小時可注滿。若開 B,C 兩管,則 2 小時 40 分注滿。問只開一管,則各需時若干纔能注滿?

19. 有二位數,用牠的兩個數字的和去除牠,則得 6 剩 3. 若用這數字的和去除這數的數字位置交換的數,則得 4 剩 9. 求原數。

20. 兩人體重的比爲 5:8. 若各加 5 斤,則體重的比爲 16:25. 求兩人的體重。

21. 現在父年與子年的比爲3:1,5年前則父年與子年的比爲4:1,問現在各年若干?

22. 甲所有錢與乙所有錢的比爲1:5;若乙給甲5元,則他們所有錢的比爲1:2,問原來各有若干元?

第十七章

指數和對數

一 分數指數

156. x 爲正整數,試畫 $y=2^x$ 的圖線。用二大方格的長爲 x 的單位,一大方格的長爲 y 的單位。

所畫的各點用曲線相連。$2^{\frac{1}{2}}$ 或 $2^{1.3}$ 有什麼意義或數值嗎?

在回答這問題以前,我們先想想 a^n 的定義。第五章第58節說過,a^4 是表示 $a\times a\times a\times a$ 的意思;我們能夠將同樣的意義應用到 $2^{\frac{1}{2}}$ 或 $2^{1.3}$ 上嗎?

這是容易明白的,除了 x 是正整數,2^x 的意義很不容易說明。但是,讓我們從所畫的曲線上一看,牠就可以指出 x 的相應於 2^x 的値。從 $x=1$ 到 $x=4$,試畫這曲線。

從所畫的圖線上,指出 $2^{1.3}$, $2^{2.7}$, $2^{3.3}$ 的値來。

157. 再從另外的觀點來考查這個問題。第五章第60節曾經證明過下面的指數定則:

(i) 同字母的乘方相乘,將指數相加;

(ii) 同字母的乘方相除,從被除數的指數中減去除數的指數。

若用符號表示,就是

$$a^m \times a^n \equiv a^{m+n};$$

$$a^m \div a^n \equiv a^{m-n}. \quad (\text{若 } a \neq 0.)$$

在這裏 m 和 n 都是正整數,而在後式中 $m>n$.

158. 前節中 a^m 和 a^n 的指數 m 和 n 都限於正整數。現在姑且假定牠們不限於正整數,看可以推論出什麼結果來,並試求 $2^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{3}}, 2^{-3}, 3^0$ 等的意義。

依照假定,得 $\quad 9^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 9^1 = 9.$

什麼數自乘可以得 9 呢?這種數在算術中稱爲什麼?牠是 9* 的什麼?

同樣地, $\quad 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1 = 2.$

$$\therefore 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.414\cdots\cdots.$$

這個結果和曲線上指示的相同嗎?

同樣的方法, $\quad a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} \equiv a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \equiv a^1 \equiv a.$

$$\therefore \quad a^{\frac{1}{2}} \equiv \sqrt{a}.$$

一般地, $\quad a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \cdots\cdots \times a^{\frac{1}{n}}$

(n 是正整數,一共 n 個因數。)

$$\equiv a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}(n\text{ 項})}$$

$$\equiv a.$$

*在這章裏只用正的實數根。

$$\therefore\quad a^{\frac{1}{n}}\equiv\sqrt[n]{a}.$$

又　$a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\equiv a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}\equiv a^{\frac{2}{3}\times 3}=a^2.$

兩邊開立方,則　$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}.$

一般地,　$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots\cdots\times a^{\frac{m}{n}}$

(m, n 都是正整數,一共 n 個因數.)

$$\equiv a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots\cdots+\frac{m}{n}(n\text{ 項})}$$

$$\equiv a^m.$$

$$\therefore\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

又　$a^3\div a^5\equiv a^{3-5}\equiv a^{-2}.$

但　$a^3\div a^5\equiv\dfrac{a^3}{a^5}\equiv\dfrac{1}{a^2},$

$$\therefore\quad a^{-2}\equiv\frac{1}{a^2}.$$

一般地,若 m, n 都是正數,而 $m-n=p$,則

$$a^n\div a^m\equiv a^{n-m}=a^{-p}.$$

但　$a^n\div a^m\equiv\dfrac{a^n}{a^m}\equiv\dfrac{1}{a^p}.$

$$\therefore\quad a^{-p}\equiv\frac{1}{a^p}.$$

〔練習 1〕　求 $a^{\frac{4}{5}}, a^{\frac{3}{10}}, 10^{0.7}, 10^{1.2}$ 的意義.

二　10^0 的意義

159.　10^0 的意義怎樣?

〔注意〕　$10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3.162\cdots\cdots,$

$$10^{\frac{1}{4}}=\sqrt{10^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{3.162}=1.779\cdots\cdots,$$

$$10^{\frac{1}{8}}=\sqrt{10^{\frac{1}{4}}}=\sqrt{1.779}=1.333\cdots\cdots.$$

照這樣計算下去,可以算出 x 的值極小的時候的 10^x 的值來; x 漸漸地減小, 10^x 的變化怎樣?能得出比 1 小的值嗎?

設想這裏,
$$10^3=1000,$$
$$10^2=100,$$
$$10^1=10,$$
$$10^0=?$$

再設想下面的關係:

$$10^2\times10^0=10^{2+0}=10^2.$$

兩邊除以 10^2, 則得

$$10^0=\frac{10^2}{10^2}=1.$$

一般地, $a\div a=a^{1-1}=a^0,$

而 $a\div a=1,$

$$\therefore\quad a^0=1.$$

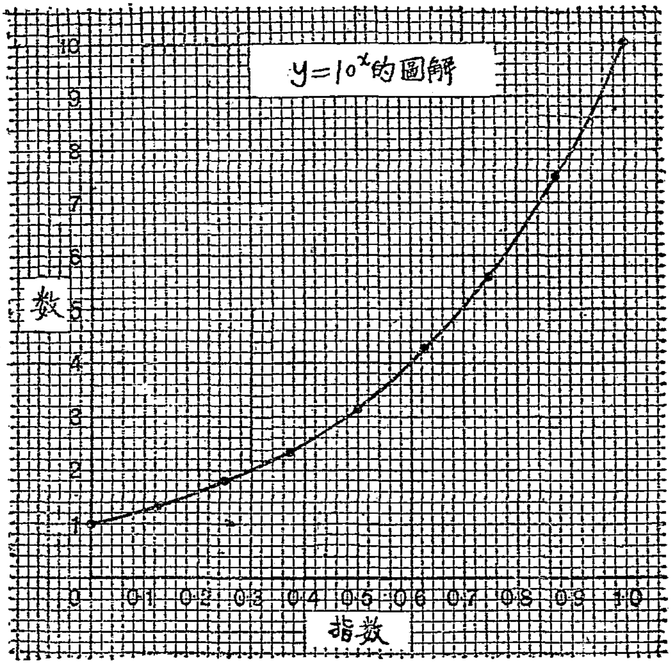
160. 由平方根表和乘法,求下列各數:

$$10^{\frac{1}{8}},10^{\frac{1}{4}},10^{\frac{3}{8}},10^{\frac{1}{2}},10^{\frac{5}{8}},10^{\frac{3}{4}},10^{\frac{7}{8}}.$$

作 $y=10^x$ 的表:

x	0	.125	.25	.375	.5	
y	1				3.162	

從 $x=0$ 到 $x=1$，畫 $y=10^x$ 的圖線，用 10 公分爲 x 的單位，1 公分爲 y 的單位。順着 X 坐標軸表指數 x，順着 Y 坐標軸表數 y。第 18 圖就是表示這圖線的縮圖。



第 18 圖

習題一二一

每題由全班討論，用 $y=10^x$ 的圖線。

1. 指出 $10^{0.1}$, $10^{0.15}$, $10^{0.2}$, $10^{0.25}$,……的值。

2. 用 10 的乘方表示下數：

$1, 1.5, 2, 2.5$……[例如 $6.5=10^{0.813}$.]

3. 從 $y=10^x$ 的圖線上求 $10^{0.3}$, $10^{0.4}$ 的值。用乘法求

$10^{0.3}\times10^{0.4}$ 的值。將所得的結果和 $10^{0.3+0.4}$ 即 $10^{0.7}$ 比較。

4. 試求 a 和 b 的值,若 $2=10^a$, $3=10^b$; 又設 $2\times3=10^a\times10^b=10^{a+b}$, 從圖線上求 10^{a+b} 的值;這和你預想的相同嗎?

5. 將下式中所空的數填上,可用圖線做參考。

$$\begin{aligned}2.65\times1.7&=10^{\cdots}\times10^{\cdots}\\&=10^{\cdots+\cdots}\\&=10^{\cdots}\\&=\cdots\cdots.\end{aligned}$$

用乘法來覆證所得的結果。

用圖線來求下列各乘積:

6. 3.75×2.　　7. $(2.5)^2$.

8. $1.45\times5.25\times1.15$.　　9. $1.6\times2.7\times1.9$.

10. 求 a 和 b, 若 $9=10^a$, $2=10^b$; 又 $9\div2=10^a\div10^b=10^{a-b}$, 從圖線上求 10^{a-b} 的值;這個值正確嗎?

11. 將下式中所空的數填上,

$$\begin{aligned}2.65\div1.7&=10^{\cdots}\div10^{\cdots}\\&=10^{\cdots-\cdots}\\&=10^{\cdots}\\&=\cdots\cdots.\end{aligned}$$

用除法來覆證所得的結果。

由圖線簡單下式:

12. $9.75\div4$.　　13. $5.25\div4.85$.

14. $3.75\times5.9\div2.7$.　　15. $8.65\times6.75\div7.85$.

三　對　數

161. 由算術中和前面的圖上,我們知道:

$$10^3=1000,$$

$$10^2=100,$$

$$10^1=10,$$

$$10^0=1,$$

$$10^{0.813}=6.5,$$

$$10^{0.335}=2.16,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般地,若　　$a^x=N$.

設這個式子表示 a 的 x 乘方是 N, x 叫'方指數', N 叫'方數';是知道 a 和 x 求 N, 用乘法計算。

但若知道的是 N 和 x 而求 a, 那就得寫成

$$\sqrt[x]{N}=a.$$

x 叫'根指數', a 叫 N 的 x 次方根,用開方法計算。

像前幾節的例,是知道一個數,要求牠的10的若干次乘方;一般地說,便是知道了 N 和 a, 而 a 爲 1 以外的正數,要求 x. 這時 a 叫'底數', x 叫做' a 爲底 N 的對數',而寫成

$$\log_a N=x.$$

由此看來,乘方,開方,求對數,所含有的 a, x, N 三個數間的關係是相同的,所以照理論說,對數的底數無

論什麼數都可以,不過,在運用上我們常常只指定一個數做底數。

所以一個數(N)對於某數做底(a)的對數(x),就是N等於a^x時a的指數。

$$\therefore\quad \log_a a=1.$$

又a^0總是等於1,

$$\therefore\quad \log_a 1=0.$$

〔例題1〕 求2做底,8的對數。

因為 $$2^3=8.$$

$$\therefore\quad \log_2 8=3.$$

〔例題2〕 49對於什麼數做底的對數是2?

因為 $$7^2=49,$$

$$\therefore\quad \log_7 49=2.$$

即底數是7.

〔例題3〕 什麼數對於6做底的對數是3?

因為 $$6^3=216,$$

$$\therefore\quad \log_6 216=3.$$

即216對於6做底的對數是3.

習題一二二

將下列各式的未知數求出:

1. $\log_4 16=x.$ 2. $\log_5 25=y.$

3. $\log_3 27=x.$ 4. $\log_3 81=y.$

5. $\log_5 125=x$.　　6. $\log_9 3=x$.

7. $\log_x 64=2$.　　8. $\log_y 121=2$.

9. $\log_x 625=4$.　　10. $\log_y 81=4$.

11. $\log_x 36=2$.　　12. $\log_y 64=6$.

13. $\log_4 x=0$.　　14. $\log_5 y=1$.

15. $\log_6 z=4$.　　16. $\log_5 x=3$.

17. $\log_7 y=3$.　　18. $\log_2 y=9$.

四　常用對數

162. 用10作底的對數,叫做'常用對數'。我們先就整數考查:

$$\because\ 10^0=1,\qquad \therefore\ \log_{10} 1=0,$$
$$10^1=10,\qquad \log_{10} 10=1,$$
$$10^2=100,\qquad \log_{10} 100=2,$$
$$10^3=1000,\qquad \log_{10} 1000=3,$$
$$10^4=10000,\qquad \log_{10} 10000=4.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

其次一位整數的數,從1到9,牠們都在1和10中間,即

$$1\leqq \text{一位整數}<10.$$

二位整數的數,從10到99,牠們都在10和100中間,即

$$10\leqq \text{二位整數}<100.$$

同樣,

$$100 \leqq \text{三位整數} < 1000,$$

$$1000 \leqq \text{四位整數} < 10000,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad 0 \leqq \log_{10}(\text{一位整數}) < 1,$$

$$1 \leqq \log_{10}(\text{二位整數}) < 2.$$

$$2 \leqq \log_{10}(\text{三位整數}) < 3,$$

$$3 \leqq \log_{10}(\text{四位整數}) < 4.$$

換句話說,便是:

$$\left.\begin{array}{l} \text{一位整數的對數} = 0 + \text{小數}, \\ \text{二位整數的對數} = 1 + \text{小數}, \\ \text{三位整數的對數} = 2 + \text{小數}, \\ \text{四位整數的對數} = 3 + \text{小數}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (1)$$

再來考查小數:

$$\begin{array}{lll} \because & 10^0 = 1, & \therefore \quad \log_{10} 1 = 0, \\ & 10^{-1} = 0.1, & \log_{10} 0.1 = -1, \\ & 10^{-2} = 0.01, & \log_{10} 0.01 = -2, \\ & 10^{-3} = 0.001, & \log_{10} 0.001 = -3, \\ & 10^{-4} = 0.0001, & \log_{10} 0.0001 = -4. \\ & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

爲了說起來簡便些,我們先約定小數中,從某一位起有1,……9數字的,就叫做第某位小數,如0.3, 0.25等

叫第一位小數,0.04, 0.0531等叫第二位小數。

由此,便得

$$0.1 \leqq \text{第一位小數} < 1,$$
$$0.01 \leqq \text{第二位小數} < 0.1,$$
$$0.001 \leqq \text{第三位小數} < 0.01,$$
$$0.0001 \leqq \text{第四位小數} < 0.001,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

所以:

$$-1 \leqq \log_{10}\text{第一位小數} < 0,$$
$$-2 \leqq \log_{10}\text{第二位小數} < -1,$$
$$-3 \leqq \log_{10}\text{第三位小數} < -2,$$
$$-4 \leqq \log_{10}\text{第四位小數} < -3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

換句話說,便是:

$$\left.\begin{array}{l}\text{第一位小數的對數}=-1+\text{小數},\\ \text{第二位小數的對數}=-2+\text{小數},\\ \text{第三位小數的對數}=-3+\text{小數},\\ \text{第四位小數的對數}=-4+\text{小數},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\quad(2)$$

由(1)和(2)看起來,一個數的常用對數,總含有整數(正的或負的)和小數(正的)兩部分。這整數部分,叫做'對數的指標';而小數部分,叫做'對數的假數'。

如 320, 32, 3.2, 0.32, 和 0.032 的對數依次爲 2.5051, 1.5051, 0.5051, $-1+0.5051$, $-2+0.5051$; 整數 2, 1, 0, -1, -2

都是指標,而小數 0.5051 爲假數。

163. 由前節(1)看起來,一位整數的對數的指標是什麼?二位整數的呢?三位整數的呢?

所以:

N 位整數的對數的指標等於 $N-1$.

例如 5430, 543, 54.3 的整數各爲 4, 3, 2 位,牠們的對數 3.7348, 2.7348, 1.7348 的指標爲 3, 2, 1.

又由前節的(2)看起來:第一位小數的對數的指標是什麼?第二位小數的呢?第三位小數的呢?

小數點到第一位小數,中間有幾個 0?

小數點到第二位小數,中間有幾個 0?

小數點到第三位小數,中間有幾個 0?

所以:

小數點到小數有 1……9 數字的位數中間,若有 N 個 0, 則這小數的對數的指標是 $-(N+1)$.

例如 0.317, 0.0317, 0.00317 小數點到第一位數字間各有 0, 1, 2 個 0, 牠們的對數, $-1+0.5011$, $-2+0.5011$, $-3+0.5011$ 的指標爲 -1, -2, -3.

〔練習 2〕 說明下列各數的常用對數的指標 7, 18, 23.4, 150.007, 0.9, 0.0074, 0.00032, 3.1416.

164. 由記數法我們知道:

$$55700=10^4\times5.57,$$
$$5570=10^3\times5.57,$$
$$557=10^2\times5.57,$$
$$55.7=10^1\times5.57,$$
$$5.57=5.57,$$
$$0.557=10^{-1}\times5.57,$$
$$0.0557=10^{-2}\times5.57,$$
$$0.00557=10^{-3}\times5.57.$$

上列各式的左邊數的對數*的指標各是什麼?

右邊各數的前一因數的對數是什麼?

若後一因數的對數(注意,只有假數)是 0.7459, 則上列左邊各數的對數是什麼?各對數的假數是什麼?

所以:

數字的排列相同(整數除去右端的0,淨小數除去左端的0)的數的對數的假數是相同的。

對數的假數都載在對數表內,可以一查就得。

例如 79000, 7900, 0.079, 0.0079 各數的對數的假數都是 0.8976, 而牠們的對數爲 4.8976, 3.8976, $-2+0.8976$, $-3+0.8976$.

---

*注意: 以後除了特別提出而外,對數都指常用對數,而 $\log x$ 也就是 $\log_{10}x$.

五 表的用法

165. 下表是書末所載的表的一部分。*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
56	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
57	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
58	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7604	.7701
59	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
60	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
61	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
62	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
63	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055

表中最左一行和第一排,都是數,其餘的就是相應於這些數的對數的假數。

用時注意下列各點:——

求一個數的相應的對數:

(i) 表中的數只是對數的假數部分,而沒有指標。

(ii) 數的小數的位置,只能決定對數的指標,而無關於假數。指標從視察得出。

求相應於一個對數的數:

(iii) 假數只決定那數的數字的排列。

(iv) 指標決定那數的小數點的位置。

〔例題 1〕 求 58.2 的對數。

---

*書末的表是數較多的,不過小數點卻省略了去;所以用時必須在最左加上小數點。

這數有兩位整數,所以對數的指標是 1.

再由表的第一行查得58,橫過去到頂上有 2 的一行,得 0.7649,

$$\therefore \quad \log 58.2=1.7649.$$

〔例題2〕 $\log x=2.7832$, 求 x.

由表查得0.7832在60的一排,7的一行,所以 x 的數字列是 607.

指標是 2,應當是三位整數. $\therefore \quad x=607$.

習題一二三(口答)

查書末的表說出下列各數的對數:

1.	3.14.	2.	1.41.	3.	6.7.
4.	9.	5.	8.88.	6.	1.03.

從表中查出相應於下列各對數的三位數字,若表中的指數不完全一樣時,可取最相近的一個:

7.	0.6628.	8.	0.6990.	9.	0.7284.
10.	0.8471.	11.	0.9140.	12.	0.9820.

166. 現在假設要查一個四位數的相應的對數,例如5.543的,表中找出 5.54 的對數是 0.7435,而在右邊的差數行中,頭上3的一行和0.7435一排的數是 2;所以5.543的對數是在0.7435末一位加上2;就是0.7437.

習題一二四(口答)

查出各數的對數:

1. 6.789.　　2. 9.876.　　3. 2.056.

查出相應於下列各假數的四位數字:

4. 0.4396.　　5. 0.4878.　　6. 0.6617.

7. 0.6932.　　8. 0.4261.　　9. 0.2689.

查出各數的對數:

10. 27.27.　　11. 451.5.　　12. 1728.

13. 625.　　14. 60000.　　15. 75.79.

查出相應於下列各對數的四位數字:

16. 2.8657.　　17. 4.9515.　　18. 3.9562.

19. 1.9031.　　20. 2.4419.　　21. 5.5555.

六　對數的性質

167. (1)　$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y.$

設　$\log_a x=m,\quad \log_a y=n,$

則　$x=a^m,\quad y=a^n.$

$$\therefore\quad xy=a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

$$\therefore\quad \log_a(xy)=m+n=\log_a x+\log_a y.$$

這自然,可以推到一般去,

$$\log_a(xyz\cdots\cdots)=\log_a x+\log_a y+\log_a z+\cdots\cdots.$$

即,幾個因數的積的對數,等於各因數的對數的和.

(2)　$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y.$

設　　$\log_a x=m,\quad \log_a y=n,$

則　　$x=a^m,\quad y=a^n.$

$$\therefore\quad \frac{x}{y}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},$$

$$\therefore\quad \log\left(\frac{x}{y}\right)=m-n=\log_a x-\log_a y.$$

卽,兩數商的對數,等於被除數的對數減去除數的對數。

(3)　$\log_a x^p=p\log_a x.$

設　　$\log_a x=m,$ 則 $x=a^m.$

$$\therefore\quad x^p=(a^m)^p=a^{pm}.$$

$$\therefore\quad \log_a x^p=pm=p\log_a x.$$

卽,一個數的 p 乘方的對數,等於牠的對數的 p 倍。

(4)　$\log_a\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\log_a x.$

設　　$\log_a x=m,$ 則 $x=a^m.$

$$\therefore\quad \sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

$$\therefore\quad \log_a\sqrt[n]{x}=\frac{m}{n}=\frac{1}{n}\log_a x.$$

卽,一個數的 n 次方根的對數,等於牠的對數的 $\frac{1}{n}$.

〔例題 1〕　求 $\log_2\sqrt{8}+\log_3\left(\frac{1}{3}\right)^2$ 的值.

$$\log_2\sqrt{8}+\log_3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\log_2 2^{\frac{3}{2}}+\log_3\frac{1}{3^2}$$
$$=\frac{3}{2}\log_2 2+\log_3 1-\log_3 3^2$$
$$=\frac{3}{2}\log_2 2+\log_3 1-2\log_3 3$$
$$=\frac{3}{2}+0-2=-\frac{1}{2}.$$

〔例題 2〕　將 $\log_b\sqrt[5]{\frac{a^3(c+d)^{\frac{1}{2}}}{c^2}}$ 展開。

$$\log_b\sqrt[5]{\frac{a^3(c+d)^{\frac{1}{2}}}{c^2}}=\frac{1}{5}\log_b\frac{a^3(c+d)^{\frac{1}{2}}}{c^2}$$
$$=\frac{1}{5}\{\log_b a^3+\log_b(c+d)^{\frac{1}{2}}-\log_b c^2\}$$
$$=\frac{1}{5}\left\{3\log_b a+\frac{1}{2}\log_b(c+d)-2\log_b c\right\}.$$

習題一二五

求下列各式的值:

1. $\log\sqrt{1000}+\log\sqrt{0.01}$.
2. $\log(0.1)^4-\log\sqrt[3]{0.001}$.
3. $\log\sqrt{\frac{1}{10}}+\log 10$.
4. $\log\sqrt[3]{100}-\log(0.01)^2$.
5. $\log_2(0.5)^3-\log_4\sqrt[3]{16}$.
6. $\log_5\sqrt{125}+\log_8 2^5+\log_7\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{3}}$.

展開下列各式:

7. $\log\sqrt{\dfrac{x(x^2-1)^6}{(x^2+1)^4}}$.

8. $\log\sqrt{\dfrac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$.

9. $\log\{p(1+r)^n\}$.

10. $\log\dfrac{a^3b^2c^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt[3]{d}}$.

11. $\log\sqrt[3]{\dfrac{x(x-y)}{z(z+x)}}$.

12. $\log\dfrac{\sqrt[5]{p^2(1-q)}}{\sqrt{p(1+q)}}$.

七 對數的應用

168. 〔例題 1〕 求 $3.142\times25.37\times457.6$ 的值。

取對數,則

$$\log(3.142\times25.37\times457.6)$$
$$=\log 3.142+\log 25.37+\log 457.6$$
$$=0.4972+1.4043+2.6605=4.5620.$$

而 $$4.5620=\log 36470.$$

$$\therefore\quad 3.142\times25.37\times457.6=36470.^*$$

這個演算可列式如下:

	NO	Log
	3.142	0.4972
	25.37	1.4043
	457.6	2.6605
所求的值	36470	4.5620

〔例題 2〕 求下式的值。

* 注意: 用對數計算出來的只是近似值。

$$73.35\times\frac{273}{273+21.3}\times\frac{760-18.5}{760}.$$

設 $$x=73.35\times\frac{273}{273+21.3}\times\frac{760-18.5}{760}$$

$$=73.35\times\frac{273}{294.3}\times\frac{741.5}{760}.$$

$\therefore$ $\log x=\log 73.35+\log 273+\log 741.5$

$-\log 294.3-\log 760$

$=1.8654+2.4362+2.8701-2.4687-2.8808$

$=1.8222=\log 66.40.$

$\therefore\quad x=66.40.$

這個演算可列式如下:

NO	Log	
73.35	1.8654	
273	2.4362	
741.5	2.8701	
分子		7.1717
294.3	2.4687	
760	2.8808	
分母		5.3495
x: 66.40		1.8222

習題一二六

求下列各式的值:

1. $3.142\times 88.86.$　　2. $283.7\times 5943.$

3. $256.5\div 43.47.$　　4. $6562\div 3.142.$

5. 143.7×12.05.

6. $63.28\div 25.52$.

7. $(273.3)^2$.

8. $(8.517)^3$.

9. $(4020)^3$.

10. $(3.142)^2$

11. $16.1\times(2.72)^2$.

12. $3.142\times(1.315)^2$.

13. $\dfrac{15.73}{8.621}$.

14. $\dfrac{8.754\times 9.361}{12.07}$.

15. $\dfrac{756.3\times 40.04}{1500}$.

16. $\dfrac{474700\times 21.25}{6774}$.

169. 0.035 的對數的指標爲 -2, 而 3.5 的對數爲 0.5441,

$$\therefore\quad \log 0.035 = -2+0.5441.$$

因爲假數是正的,指標是負的,所以不能直寫爲

$$\log 0.035 = -2.5441,$$

而改寫爲 $$\log 0.035 = \bar{2}.5441.$$

指標上面的負號其效力只及於指標。這是在演算時,須特別留意的。

〔例題 3〕 $x=\dfrac{0.7361\times 0.03715}{2.165\times 0.8717}$, 求 x.

	NO	Log	
	0.7361	$\bar{1}.8670$	
	0.03715	$\bar{2}.5700$	
	分 子		$\bar{2}.4370^{(1)}$
	2.165	0.3355	
	0.8717	$\bar{1}.9404$	
	分 母		$0.2759^{(2)}$
x:	0.01449		$\bar{2}.1611$

〔注意〕 (1) 指標 $\bar{1}$ 加 $\bar{2}$ 再加進值的正 1 得 $\bar{2}$.

(2) 指標 0 加 $\bar{1}$ 再加進值的正 1 得 0.

〔例題 4〕 求 $\sqrt{\dfrac{1}{0.0717}}$ 的值。

設
$$x=\sqrt{\frac{1}{0.0717}},$$

則
$$\log x=\log\sqrt{\frac{1}{0.0717}}$$
$$=\tfrac{1}{2}(\log 1-\log 0.0717)$$
$$=\tfrac{1}{2}(0-\bar{2}.8555)$$
$$=\tfrac{1}{2}(2-0.8555)$$
$$=1-0.4278=0.5722.$$
$$\therefore\quad x=3.734.$$

〔例題 5〕 $y=\sqrt{\dfrac{666.6\times0.7317}{0.0861\times2.654}}$, 求 y.

NO	Log	
666.6	2.8239	
0.7317	$\bar{1}$.8643	
分子		2.6882
0.0861	$\bar{2}$.9350	
2.654	0 4939	
分母		$\bar{1}$.4289
	2	3.2593(
y: 42.63		1.6297

〔例題 6〕 $p=3750,\ v=12.6$, 求 $pv^{1.71}$.

設 $$x=pv^{1.71},$$

則 $$\begin{aligned}\log x&=\log p+\log v^{1.71}\\&=\log p+1.71\log v\\&=\log 3750+1.71\log 12.6\\&=3.5740+1.71\times 1.1004\\&=3.5740+1.8817\\&=5.4557.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad pv^{1.71}=285600=286000$$ 到三位數字。

〔例題7〕 解方程式$(0.55)^x=2.718$.

$$\log(0.55)^x=\log 2.718.$$

$$\therefore\quad x\log 0.55=\log 2.718.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x&=\frac{\log 2.718}{\log 0.55}\\&=\frac{0.4343}{\bar{1}.7404}\\&=-\frac{0.4343}{0.2596}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \log(-x)&=\log 0.4343-\log 0.2596\\&=\bar{1}.6378-\bar{1}.4143\\&=0.2235.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad -x=1.673.$$

$$\therefore\quad x=-1.67$$ 到三位數字。

習題一二七

用對數計算下列各式:

1. $\sqrt{323.7}$. 2. $\sqrt{32.37}$. 3. $\sqrt{3.237}$.

4. $\sqrt[3]{5275}$. 5. $\sqrt[3]{527.5}$. 6. $\sqrt[3]{52.75}$.

7. $\sqrt[3]{5.275}$. 8. $\sqrt[4]{52750}$. 9. $\sqrt[4]{5.275}$,

10. $\sqrt{3}$. 11. $\sqrt{2}$. 12. $\sqrt{20}$.

13. $\sqrt[3]{10}$. 14. $\sqrt{\dfrac{570.2}{3.142}}$. 15. $\sqrt[3]{\dfrac{3\times 762.8}{4\times 3.142}}$.

16. $\sqrt{\dfrac{276.3\times 37.2}{5.437\times 17.81}}$. 17. $\sqrt[3]{\dfrac{20.07\times 51.37}{14.72\times 2.854}}$.

18. $\sqrt[3]{\dfrac{98.77\times 2.452}{10.79\times 20.09}}$. 19. $2\times 3.142\times\sqrt{\dfrac{35}{32.2}}$.

20. $70.4\times\dfrac{764.3-14.6}{760}\times\dfrac{273}{273+17.2}=?$

21. 簡單 $\dfrac{2.873\times 35.97\times 273500}{59.7+12.03\times 80.5}$.

22. $s=\frac{1}{2}gt^2$, 若 $g=32.2$, $t=20.5$, 求 s.

23. $M=pr^n$, (i) $p=80$, $r=1.025$, $n=2$, (ii) $p=93.75$, $r=1.03$, $n=4$; 求 M.

24. 球的體積等於$\frac{4}{3}\pi r^3$立方寸,若半徑爲r寸。設$r=5.875$寸, $\pi=3.142$, 求這個球的體積。

25. 3^{20} 有幾位數?

26. $V=\dfrac{(t+461)\times v}{T+461}$,

(i) $t=700$, $T=1100$, $v=1050$; 求 V.

(ii) $V=770$, $v=1000$, $T=1200$, 求 t.

27. $f=\frac{w+10}{2240W}\times\frac{V^2}{2S}$, $w=120$, $W=7.5$, $V=2400$, $S=19.8$; 求 f.

28. $V=\pi(R^2-r^2)l$, $R=74.35\,m.$, $r=42.63\,m.$, $l=132.8\,m.$, $\pi=3.142$; 求 V.

29. $\Delta=\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$,

$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, $a=3.56$, $b=4.75$, $c=5.33$; 求 Δ.

30. $V=\pi l(x^2-y^2)$, (i) 求 x. (ii) $y=13$, $l=3.6$, $V=610$, $x=?$

習題一二八

簡單下列各式:

1. 0.3594×25.82.　　2. 0.0587×2.078.

3. 0.7836×4.774.　　4. $0.8532\div 9.761$.

5. $0.08532\div 97.61$.　　6. $9761\div 0.08532$.

7. $(0.0227)^2$.　　8. $(0.6015)^2$.　　9. $(0.03714)^3$.

10. $\sqrt{0.03571}$.　　11. $\sqrt{0.3571}$.　　12. $\sqrt[3]{0.3571}$.

13. $\frac{1}{72.64}$.　　14. $\frac{1}{3.142}$.　　15. $\frac{1}{0.7071}$.

16. $\sqrt[3]{\frac{1}{85.77}}$.　　17. $\sqrt{\frac{1}{0.2544}}$.　　18. $\sqrt[3]{\frac{1}{0.0017}}$.

19. $0.5712\times 763.28\times 0.0715$.

20. $42.73\times 0.70562\times 0.0086$.

21. $\dfrac{0.0361\times0.05715}{2.265\times0.0777}$.　　22. $\dfrac{53.84\times70.34}{827.1\times256.2}$.

23. $\sqrt{\dfrac{886.6\times0.7819}{0.0061\times0.654}}$.　　24. $\sqrt[3]{\dfrac{0.07624}{3.142\times27.05}}$.

25. 擺動的時間 t 秒和擺長 l 的關係如下公式:

$$t=2\times3.142\times\sqrt{\frac{l}{980}}.$$

若擺長是 3 米,求 t.

26. $A=2\pi r^2+2\pi rh$, $r=0.36$, $h=19.75$, 求 A. (先將右邊分解因式。)

27. $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,若 $V=1$, 求 r.

28. $c^2=3082-2abx$, $a=36.2$, $b=42.1$, $x=0.7135$, 求 c.

29. 三角形的三邊的長爲 a, b, c, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, 則牠的面積 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, 若 a, b, c 爲下面的各數時,求 Δ:

(i) 3, 4, 4.5 寸,　　(ii) 6, 8, 9 公分,

(iii) 76.9, 93.1, 53.3 尺,　(iv) 0.927, 1.135, 0.675 公尺.

30. $a=25.7$, $b=33.5$, $c=30.4$, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$; 求 $\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$ 和 $\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}$ 的值。(到二位數字。)

八　複利息

170. 對數在計算複利息的時候,非常有用。

若本金 P 元,年利 4% 的複利,則第一年終的利息爲

$$P\text{ 元}\times 4\% = P\text{ 元}\times 0.04.$$

∴ 第一年終的本利和是

$$P\text{ 元}+P\text{ 元}\times 0.04 = P\text{ 元}\times 1.04.$$

因此,本金 730 元,年利 4% 的複利,第一年終的本利和爲 730 元 ×1.04.

設 $$P = 730\times 1.04.$$

則 730 元 ×1.04, 年利 4% 的複利, 第二年終的本利和爲 $$730\text{ 元}\times 1.04\times 1.04 = 730\text{ 元}\times(1.04)^2.$$

所以, 730 元,年利 4% 的複利,第二年終的本利和爲

$$730\text{ 元}\times(1.04)^2.$$

同樣地, 730 元,年利 4% 的複利,第三年終的本利和爲 $$730\text{ 元}\times(1.04)^3.$$

而 730 元,年利 4% 的複利,在 n 年終的本利和爲

$$730\text{ 元}\times(1.04)^n.$$

同樣地, p 元, 年利 $r\%$ 的複利, n 年的本利和爲

$$P\text{ 元}\times\left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

〔例題〕 求本金 260 元,年利 $2\frac{1}{2}\%$ 的複利, 14 年的本利和。

本利和 $$Q\text{ 元} = 260\text{ 元}\times\left(1+\frac{2\frac{1}{2}}{100}\right)^{14}$$

$$= 260\text{ 元}\times(1.025)^{14},$$

$$\therefore\ \log Q = \log 260 + \log(1.025)^{14}$$

$$= \log 260 + 14\log 1.025$$

$$=2.4150+14\times0.01072^{*}$$

$$=2.4150+0.1501$$

$$=2.5651.$$

$$\therefore\quad Q=367.4.$$

∴ 本利和約 367.4 元。

171。 這是很要注意的，若對數只用四位小數，而用 10 和 100 中間的數去乘牠，結果最多只能有三位不錯，所以相應的數最多也只能有三位數字是對的。

要得到四位數字正確的結果，對數必須用小數四位以上的，習題中需用的幾個數的七位對數，附在本書的後面。

習題一二九

1. 本金 375 元，年利 $2\frac{1}{2}\%$ 的複利，20 年的本利和是若干？(求相近的值。)

2. 求 1250 元，年利 4%，6 年的複利。

3. 某人存款 3500 元，年利 $3\frac{1}{2}\%$，照複利計算，3 年的本利是多少？

4. 年利 4% 的複利，要多少年本利恰好相等？

5. 年利 $3\frac{1}{2}\%$，11 年複利的本利和爲 3500；問本金多少？

* 注意：這個對數是用五位小數，參看下節。

6. 30年,年利$3\frac{1}{2}\%$的複利,須本金多少,然後本利和爲1600元?

7. 求3200元,年利3%,4年的複利。

又求年利4%的。

兩項的差和年利1%的複利相等嗎?

8. 某城居民每年增加年初的總數的百分之1.2. 25年後一共增加百分之幾?

$$\log 1.012=0.0051805.$$

9. 計算$\frac{25}{27}\times(14.4)^{\frac{1}{5}}$的數值。

10. $K=0.74$, $t_1=69.4$, $t_2=82.3$, $r_1=1.25$, $r_2=1.55$, 求

$$\frac{2\pi K(t_2-t_1)}{\log r_2-\log r_1}.$$

解下列各方程式:

11. $24.9x^5=2.84$.

12. $10^x=6^{20}$.

13. $7^x=31$.

14. $4^x=2^{x+b}$.

15. $9(9^{x-1}+3)=28\times 3^x$.

16. $27^x=9^y$, $81^y/3^x=243$.

17. $2^x+2^y=17$, $2^{x+2}-2^{y+1}=5$.

18. 證明$x=2\frac{1}{4}$適合於$x^{x\sqrt{x}}=(x\sqrt{x})^x$.

19. 求$3.168\times\left(\frac{3}{1.831}\right)^{1.404}$的值。

20. 若$xy^{1.37}=25$, $x=4$, 求y.

21. $d^{5.1}=0.35\left(\frac{154.7}{\pi/4}\right)^2$, 求$d$.

22. $n=53.25H^{1.25}P^{-0.5}$, $H=20$, $P=75$, 求n.

23. $A=\pi R^2$, 若 $R=9.795$ 公分,求 A.

24. $V=\frac{4\pi R^3}{3}$, 若 $R=2.97$ 尺,求 V.

25. $S=4\pi R^2$, 若 $S=452$ 平方尺,求 R.

26. $x=\sqrt{(h+b)(h-b)}$, 若 $h=25.97$, $b=17.8$, 求 x.

第十八章

高次方程式

172. 含三次式的方程式，叫做'三次方程式'；如 $3x^3+4x^2+7x+9=0$，$11x^3+6x+5=0$ 等。含四次式的方程式，叫做'四次方程式'；如 $x^4+9=0$，$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 等。三次以上的方程式，統叫'高次方程式'。

高次方程式一般的解法，不屬於本書的範圍。以下所講的，只是可以用我們已講過的方法可以解的特殊的高次方程式.

173. 高次方程式所含的代數式，可以分解成一次和二次式的因式的，則用分解因式解.

〔例題 1〕 解 $2x^3-x^2-6x=0$.

分解因式， $x(x-2)(2x+3)=0$.

$\therefore\quad x=0,\ x-2=0$ 或 $2x+3=0$.

而 $x=0,\ 2,\ -\dfrac{3}{2}$.

〔例題 2〕 解 $x^3+x^2-11x+10=0$.

$$\because\quad x^3+x^2-11x+10=x^3-2x^2+3x^2-6x-5x+10$$
$$=x^2(x-2)+3x(x-2)-5(x-2)$$
$$=(x-2)(x^2+3x-5).$$

∴原方程式可寫成

$$(x-2)(x^2+3x-5)=0.$$

而 $$x-2=0 \qquad (1),$$

或 $$x^2+3x-5=0 \qquad (2).$$

由 (1), $$x=2.$$

由 (2), $$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}=\frac{-3\pm5.385}{2}$$

$$=1.193 \text{ 或 } -4.193.$$

習題一三〇

解下列各方程式:

1. $(x+1)(x-2)(x^2+x-2)=0.$

2. $(x^2-3x+2)(x^2-x-12)=0.$

3. $(x^2-x-6)(x^2-x-20)=0.$

4. $x^3+x^2-4x-4=0.$

5. $x^3-2x^2-11x+12=0.$

6 $2x^3+4x^2-70x=0.$

7. $x^3-x^2-x+1=0.$　　8. $x(x-a)(x^2-b^2)=0.$

9. $x^4-16=0.$　　10. $x^6-1=0.$

174. 解 $x^3=1.$

若照通常的方法,兩邊開方法,則得

$$x=1.$$

但若先移項,則得

$$x^3-1=0.$$

分解因式, $(x-1)(x^2+x+1)=0.$

$$\therefore\quad x-1=0 \qquad (1),$$

或 $x^2+x+1=0 \qquad (2).$

由 (1), $x=1.$

由 (2), $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}.$

$$\therefore\quad x=\frac{-1+3i}{2},$$

或 $x=\frac{-1-3i}{2}.$

$\therefore\quad 1,\ \frac{-1+3i}{2},\ \frac{-1-3i}{2}$ 的立方都等於1.

在算術上,一數的立方根只有一個,在代數上便有三個,不過有兩個是虛數。推到一般去,一個數的立方根也有三個,其中兩個是虛數。這正和一個數的平方根,在算術上只有一個,在代數上卻有兩個,而一個是負的一樣。

習題一三一

解下列各方程式:

1. $x^3+1=0.$
2. $x^3=8.$
3. $x^3-27=0.$
4. $8x^3-1=0.$
5. $8x^3+1=0.$
6. $27x^3-64=0.$

7. $x^4+x^2y^2+1=0$. 8. $x^4=1$.

9. $x^4+1=0$. 10. $x^6-1=0$.

11. 將1到6所得的根和1的立方根比較,牠們有什麼關係?

12. 由11所得的關係,回答$x^3=343$的根。

175. 有些高次方程式,是可以變成二次方程來解的,這叫做'二次形的高次方程式'.

〔例題3〕 解$x^4-4x^2+3=0$.

設 $x^2=y$, 則 $x^4=y^2$, 而原方程式變爲

$$y^2-4y+3=0.$$

分解因式, $(y-1)(y-3)=0$.

$$\therefore \quad y-1=0, \text{或 } y-3=0.$$

而 $y=1$ 或 3,

卽 $x^2=1$ 或 3.

$$\therefore \quad x=\pm 1, \ \pm\sqrt{3}.$$

〔例題4〕 解$(x^2+2x-3)^2+3(x^2+2x+2)-13=0$.

設 $x^2+2x=y$, 則原方程式變爲

$$(y-3)^2+3(y+2)-13=0.$$

卽 $y^2-3y+2=0$.

分解因式, $(y-1)(y-2)=0$.

$$\therefore \quad y-1=0, \text{或 } y-2=0.$$

卽 $x^2+2x-1=0$ (1),

$x^2+2x-2=0$ (2).

由(1), $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2+4}}{2}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}.$

由(2), $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2+8}}{2}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}.$

〔例題5〕 解 $\dfrac{2(x^2+1)}{x+1}+\dfrac{6(x+1)}{x^2+1}=7.$

因第一分式正好是第二分式的倒式,故設 $\dfrac{x^2+1}{x+1}=y$,

則 $\dfrac{x+1}{x^2+1}=\dfrac{1}{y}$,而原方程式為

$$2y+\frac{6}{y}=7.$$

去分母, $2y^2-7y+6=0.$

分解因式, $(2y-3)(y-2)=0.$

$$\therefore\quad 2y-3=0,\text{或}\ y-2=0.$$

$$\therefore\quad 2\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)-3=0 \qquad (1),$$

$$\frac{x^2+1}{x+1}-2=0 \qquad (2).$$

由(1), $2(x^2+1)-3(x+1)=0,$

$$\therefore\quad 2x^2-3x-1=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}.$$

由(2), $x^2+1-2(x+1)=0,$

$$\therefore\quad x^2-2x-1=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}.$$

習題一三二

解下列各方程式:

1. $x+\frac{5}{x}=6.$
2. $x^4=13x^2-36.$
3. $x^4-x^2-20=0.$
4. $9x^4-32x^2-16=0.$
5. $x^6+10=7x^3.$
6. $(x^2-2)^2=14(x^2-2)+31.$
7. $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0.$
8. $x^3-5x^2+5x-1=0.$
9. $(x^2-7x+6)^2+12(x^2-7x+4)=40.$
10. $\frac{x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=2.$
11. $\frac{4-x}{3+x}+\frac{4(3+x)}{4-x}=5.$
12. $x^2+x+1=\frac{42}{x^2+x}.$

第十九章

聯立二次方程式

一 兩方程式有一個是一次的

176. 〔例題1〕 解 $x^2+y^2=25$ ··························(i),

$x-y=1$ ························ (ii).

先用圖解法.

第二個方程式$x-y=1$,畫出來是一條直線,第一個方程式,畫出來是一個圓。照下面的兩個表就可以畫:

$x-y=1$

x	y	點
0	-1	A
1	0	B

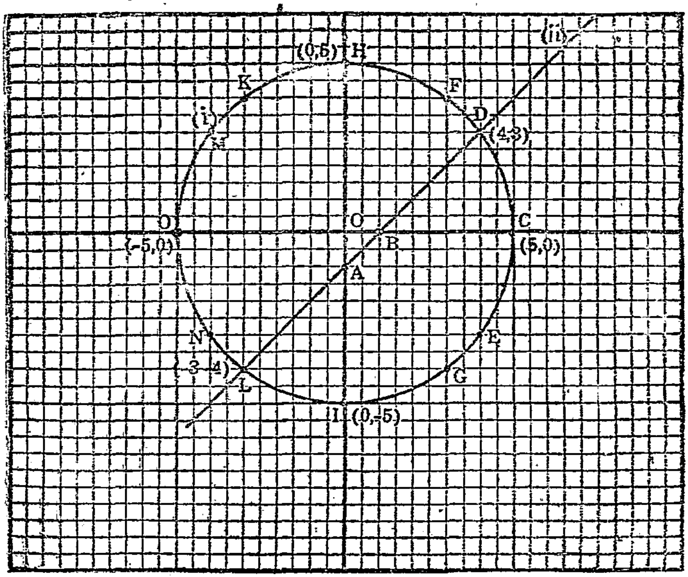
$x^2+y^2=25$

x	y	點
5	0	C
4	±3	D,E
3	±4	F,G
0	±5	H,I
-3	±4	K,L
-4	±3	M,N
-5	0	0

由第 19 圖可以看出 $x^2+y^2=25$ (i), 和 $x-y=1$ (ii) 兩

線有兩個交點,牠們的坐標是 $(-3,-4)$ 和 $(4,3)$. 這兩點既在 $x^2+y^2=25$ 的線上面,又在 $x-y=1$ 的線上面,所以牠們的坐標同時適合於這兩個方程式。

$\therefore$ $x=4$, $y=3$; 和 $x=-3$, $y=-4$; 就是這兩個方程式的解答。



第 19 圖

177. 前節的例,也可以用代數的方法解牠,結果還是一樣。

代數的解法:

$$x^2+y^2=25 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)},$$

$$x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}.$$

從(ii), $$x=1+y.$$

代入(i), $$1+2y+y^2+y^2=25.$$

因此, $$y^2+y-12=0.$$

$$\therefore\quad (y-3)(y+4)=0.$$

$$\therefore\quad y=3 \text{ 或 } -4.$$

代入(ii), $$x=4 \text{ 或 } -3.$$

$\therefore$ $x=4, y=3$; 和 $x=-3, y=-4$; 就是這兩個方程式的解答。

若要覆證,必須將各值代進兩個方程式去檢查。

178. 〔例題2〕 解 $x^2+y^2=25$ ……………………(i),

$x-y=10$ ……………………(ii).

先用代數的解法。

從(ii), $$x=10+y.$$

代入(i), $$100+20y+y^2+y^2=25.$$

$$\therefore\quad 2y^2+20y+75=0.$$

$$\therefore\quad y=\frac{-20\pm\sqrt{400-600}}{4}$$

$$=\frac{-20\pm\sqrt{-200}}{4}$$

$$=\frac{-10\pm5\sqrt{-2}}{2}.$$

代入(ii), $$x=\frac{10\pm5\sqrt{-2}}{2}.$$

所以這兩個方程式的根是虛數。

若用圖解法,則可以看出來直線 $x-y=10$ 和圓 $x^2+y^2=25$ 不能相交。試畫這個圖。

179. 〔例題3〕 解 $x^2-y^2=5$ ……………………… (i),

$x-y=-5$ ……………………… (ii).

前節的例,用代數的方法解時,所用的是代入法,但並非只有代入法可用;現在就用這個題目來做例。

用(ii)去除(i),得　$x+y=-1$ ……………………… (iii).

$x-y=-5$ ……………………… (ii).

(ii)和(iii)相加,　$2x\ \ =-6.$

$\therefore\quad x=-3.$

代入(ii),　$\therefore\quad y=2.$

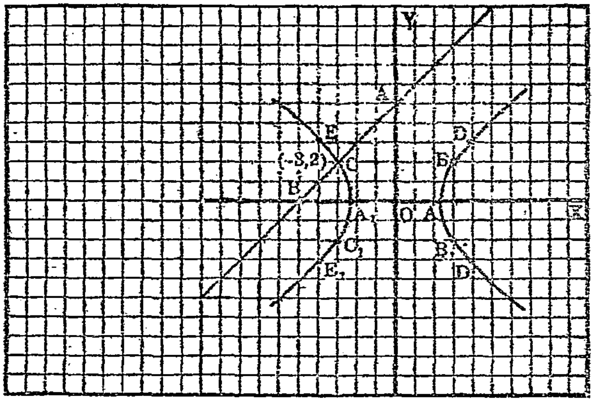
180. 前例一樣地可用圖解法,依下兩表就可畫成第20圖。

$x-y=-5$

x	y	點
0	5	A
-5	0	B

$x^2-y^2=5$

x	y	點
$\pm 2.2^+$	0	A, A_1
3	± 2	B, B_1
-3	± 2	C, C_1
4	$\pm 3.3^+$	D, D_1
-4	$\pm 3.3^+$	E, E_1



第 20 圖

181. 〔例題 4〕 解 $x-y=6$ ………………………… (i),

$xy=-5$ ………………………… (ii).

將 (i) 平方， $x^2-2xy+y^2=36$ ………………………… (iii).

(ii) 乘以 (4)， $4xy=-20$ ………………………… (iv).

(iii) 和 (iv) 相加， $x^2+2xy+y^2=16$

開平方， $x+y=\pm 4$ ………………………… (v).

(i) 加 (v)， $2x=10$ 或 2.

$\therefore\ x=5$ 或 1.

從 (v) 減 (i)， $2y=-2$ 或 -10.

$\therefore\ y=-1$ 或 -5.

所以兩方程式的根爲 $x=5, y=-1$; $x=1, y=-5$.

習題一三三

解下列各方程式：(1–6 並用圖解法.)

1. $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=85. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y=10, \\ x^2+y^2=65. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=58, \\ 2x-y=11. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x^2-3xy=5, \\ x-y=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} y^2=16x, \\ y=3x-4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} xy=45, \\ x+y=14. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ 2x-3y=0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x^2+y=3xy, \\ 2x-y=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x-y=5, \\ xy-x=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} xy=4, \\ x+2y=6. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y=a, \\ 4xy-a^2=-b^2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x-y=2n, \\ x^2-y^2=4mn. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=52, \\ x+y=8. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y^2=7x+8y-14, \\ 7x+6y=13. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 7xy+3x-4y=43. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x+y=2, \\ 2x^2+3xy+y^2+3x+2y=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2+2xy-y^2=7(x-y), \\ 2x-y=5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2+2xy+3y^2+2x-2y=3, \\ x+2y=-1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x+3y=1, \\ 3x^2-xy+2y^2=16. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x+3y=12, \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x(y+7)+y(x+5)=5, \\ 7y+4x=1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ x+y=5. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{15}{4}, \\ x-y=3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{y+5}+\dfrac{y}{x}=2, \\ x-y=4. \end{cases}$

二 兩方程式都是二次的

182. 〔例題1〕 解 $x^2+y^2=20$ ……………………(i),

$xy=8$ ……………………(ii).

代數的解法:

(ii) 乘以 2, $2xy=16$ ……………………(iii).

(i) 和 (iii) 相加, $x^2+2xy+y^2=36$ ……………………(iv).

從 (i) 減去 (iii), $x^2-2xy+y^2=4$ ……………………(v).

將 (iv),(v) 開方, $x+y=\pm 6$ ……………………(vi),

$x-y=\pm 2$ ……………………(vii).

(vi) 和 (vii) 相加, $2x=\pm 8, \pm 4.$

$\therefore\ x=\pm 4, \pm 2.$

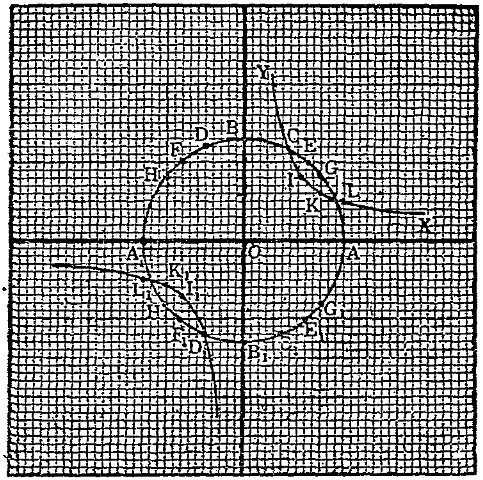
從 (vi) 減去 (vii), $2y=\pm 4, \pm 8.$

$\therefore\ y=\pm 2, \pm 4.$

所以兩方程式的根爲$x=\pm 4, y=\pm 2$; $x=\pm 2, y=\pm 4$.

圖解法:

依下面的兩個表可以畫出第21圖。



第 21 圖

$x^2+y^2=20$

x	y	點
± 4.47	0	A, A_1
0	± 4.47	B, B_1
2	± 4	C, C_1
-2	± 4	D, D_1
3	$\pm 3.3^+$	E, E_1
-3	$\pm 3.3^+$	F, F_1
4	± 2	G, G_1
-4	± 2	H, H_1

$xy=8$

x	y	點
± 2	± 4	C, D_1
± 3	$\pm 2\frac{2}{3}$	I, I_1
± 4	± 2	K, K_1
± 5	$\pm 1\frac{3}{5}$	L, L_1

183. 〔例題 2〕 解 $x^3-y^3=91$ ……………………(i),

$x-y=7$ ……………………(ii).

(i) 除以 (ii), $x^2+xy+y^2=13$ ……………………(iii).

將 (ii) 平方, $x^2-2xy+y^2=49$ ……………………(iv).

從 (iii) 減去 (iv), $3xy=-36$.

$\therefore$ $xy=-12$ ……………………(v).

(iii) 和 (v) 相加, $x^2+2xy+y^2=1$.

開平方, $x+y=\pm 1$ ……………………(vi).

$x-y=7$ ……………………(ii).

(ii) 和 (vi) 相加, $2x=8, 6$.

$\therefore$ $x=4, 3$.

從 (vi) 減去 (ii), $2y=-6, -8$.

$\therefore$ $y=-3, -4$.

所以兩方程式的根為 $x=4, y=-3$; $x=3, y=-4$.

184. 〔例題 3〕 解 $x^4+y^4=97$ ……………………(i),

$x+y=5$ ……………………(ii).

設 $x=u+v, y=u-v$. 以之代入 (i) 和 (ii),

$$u^4+4u^3v+6u^2v^2+4uv^3+v^4+u^4-4u^3v+6u^2v^2-4uv^3+v^4=97.$$

因此, $2u^4+12u^2v^2+2v^4=97$ ……………………(iii).

而 $u+v+u-v=5$.

即 $2u=5$.

$\therefore$ $u=\frac{5}{2}$.

將 $u=\frac{5}{2}$ 代入 (iii)，　$\frac{625}{8}+75v^2+2v^4=97.$

因此，　$$16v^4+600v^2=151.$$

完成平方，　$16v^4+600v^2+5625=5776,$

$$\therefore\quad 4v^2+75=\pm 76,$$

$$\therefore\quad 4v^2=1,\ -151,$$

$$\therefore\quad v^2=\frac{1}{4},\ -\frac{151}{4},$$

$$\therefore\quad v=\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{-151}.$$

但　$$u=\frac{5}{2}.$$

$$\therefore\quad x=3,\ 2,\ \frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-151};$$

$$y=2,\ 3,\ \frac{5}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{-151}.$$

所以兩方程式的根爲

$x=3, y=2$; $x=2, y=3$; $x=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-151}, y=\frac{5}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{-151}.$

覆證虛根如下：

$$(1)\ \frac{625}{16}\pm\frac{125}{4}\sqrt{-151}-\frac{11325}{8}\mp\frac{755}{4}\sqrt{-151}+\frac{22801}{16}+\frac{625}{16}$$

$$\mp\frac{125}{4}\sqrt{-151}-\frac{11325}{8}\pm\frac{755}{4}\sqrt{-151}+\frac{22801}{16}=\frac{1552}{16}$$

$$=97.$$

(2) $$\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-151}+\frac{5}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{-151}=5.$$

185. 對稱式,對稱方程式. 如 $x+y$, x^2+y^2, x^2+xy+y^2, x^3+y^3 和 x^4+y^4 等,將式中的字母 x 和 y 互相交換,式子仍然不變,這樣的式子稱爲'關於 x, y 的對稱式'。同樣的,$a+b+c$, $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$, 就是'關於 a, b, c 的對稱式'。

如 $x+y=5$, $x^2+xy+y^2=13$, $x^4+y^4=97$ 等方程式。

牠所含的式子關於 x, y 是對稱的,就稱爲對稱方程式.

兩個方程式,若都是對稱的,或除了符號就是對稱的,都可以照前節的例題,設 $x=u+v$ 和 $y=u-v$ 代進去解牠.

所謂關於 x, y 除了符號,就是對稱的方程式,如 $x^4-y^4=a$, $x-y=b$ 等就是。

186. 〔例題 4〕 解 $x^2+xy=-1$ ……………………(i),

$y^2-2xy=8$ ……………………(ii).

設 $y=vx$, 代入 (i) 和 (ii); 則

$x^2+vx^2=-1$ ……………………(iii),

$v^2x^2-2vx^2=8$ ……………………(iv).

從 (iii), 得 $(1+v)x^2=-1$, 和 $x^2=-\frac{1}{1+v}$ ……………(v).

從(iv),得　$(v^2-2v)x^2=8$, 和 $x^2=\dfrac{8}{v^2-2v}$ ……… (vi).

由(v)和(vi),　$$\frac{-1}{1+v}=\frac{8}{v^2-2v}.$$

因此,　$$-v^2+2v=8+8v.$$

即　$$v^2+6v+8=0.$$

即　$$(v+4)(v+2)=0.$$

$$\therefore\ v=-4,\ -2.$$

代入(v),　$$x^2=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}, \text{和 } x^2=\frac{-1}{-1}=1.$$

$$\therefore\ x=\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3},\ \pm1.$$

而　$$y=(-4)(\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3})=\mp\tfrac{4}{3}\sqrt{3},$$

和　$$y=(-2)(\pm1)=\mp2.$$

所以兩方程式的根爲

$$x=\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{3},\ y=\mp\tfrac{4}{3}\sqrt{3};$$

和　$$x=\pm1, y=\mp2.$$

這裏應當注意的,就是 $x=\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 的值,是用 $v=-4$ 代入(v)計算出來的,所以用 $y=vx$ 計算 y 的值的時候,一定只能用 $v=-4$ 的值代進去;還有 $\pm$ 和 $\mp$ 中正負號的順序也要弄清楚。

187. 前節的例題,兩個方程式都是 x, y 二次齊次式,這類的式子都可用同樣的方法去解。所以無論是 $ax^2+by^2=c$, 或 $ax^2+bxy=c$, 或 $ax^2+bxy+cy^2=d$, 這三種

方程式中的那兩種在一起,都可設 $y=vx$ 代進去,先決定 v 的值,再求 x 和 y 的。

188. 前兩節所說的是一般的方法,但有特別的情形的時候,卻不一定要用牠。最常見的,就是可以從原來的兩個方程式變化出一個比牠們更簡單的方程式的時候。

例如　解 $x^2-3xy=-143$ ……………………………(i),

$y^2+xy=168$ ……………………………(ii).

將兩個方程式相加,就可得出一個比較簡單的方程式,

$$x^2-2xy+y^2=25.$$

開平方,　　$x-y=\pm 5$ ……………………(iii).

這個式子是一個一次式,由牠可以知道 $x=\pm 5+y$。

代入(ii),　$y^2\pm 5y+y^2=168.$

$$\therefore\quad 2y^2\pm 5y-168=0.$$

取 $+5y$,得　$y=\dfrac{-5\pm\sqrt{1369}}{4}=\dfrac{-5\pm 37}{4}.$

取 $-5y$,得　$y=\dfrac{+5\pm 37}{4}.$

因此,　$y=8,-8,\dfrac{21}{2},-\dfrac{21}{2}.$

代入(ii),　$x=13,-13,\dfrac{11}{2},-\dfrac{11}{2}.$

所以兩方程式的根爲

$$x=\pm 13,\ y=\pm 8;$$

$$x=\pm\frac{11}{2},\ y=\pm\frac{21}{2}.$$

習題一三四

解下列聯立方程式：(1-3 並用圖解法。)

1. $\begin{cases}4x^2+9y^2=36,\\4x^2+4y^2=25.\end{cases}$

2. $\begin{cases}y^2=x,\\xy=10.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x^2+y^2-2x=0,\\x^2+y^2+4x+3=0.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x^2+xy=24,\\xy+y^2=40.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x^2+xy=84,\\x^2-y^2=24.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x^2-y^2=10,\\2x^2+5xy+3y^2=14.\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=-\dfrac{8}{15},\\\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{34}{225}.\end{cases}$

8. $\begin{cases}x^3+y^3=28,\\x+y=-2.\end{cases}$

9. $\begin{cases}x^2+3xy=-5,\\2xy+y^2=-16.\end{cases}$

10. $\begin{cases}x^4-y^4=2401,\\x^2+y^2=49.\end{cases}$

11. $\begin{cases}x^2+7xy=-104,\\5xy-y^2=-129.\end{cases}$

12. $\begin{cases}x^5+y^5=33,\\x+y=3.\end{cases}$

13. $\begin{cases}x-y=1,\\\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\dfrac{1}{20}.\end{cases}$

14. $\begin{cases}x^3+y^3=109,\\x^2y+xy^2=-36.\end{cases}$

15. $\begin{cases} x^3-y^3=m^3, \\ x-y=m. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x^2-3y^2=9, \\ 2x^2-xy-6y^2=4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=78, \\ xy+x+y=39. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2-7x+y^2=7y, \\ 3(x+y)=-2xy. \end{cases}$

習題一三五

1. 甲從 A 到 B,乙從 B 到 A,二小時後兩人在距 A 20里的地方相遇。而乙到 A 的時候,甲距 B 還有 $13\frac{5}{7}$ 里。求 AB 的距離。

2. 兩數的差爲12,牠們的立方的差爲7488;這兩數是多少?

3. 兩數的和等於牠們的積,也等於牠們的平方的差;求這兩數。

4. 兩數的和等於牠們的平方的和,又等於牠們的積的二倍;這兩數是多少?

5 兩個數的和爲8,牠們的積爲25,求這兩個數。

6. 求三個數;前兩個的平方的和,等於第一數的平方的三倍減去第二數的平方;又等於第一數減去第二數加上第三數的二倍,又等於這三個數的和。

7. 證明,兩個實數的和同着牠們的倒數的和相乘的積,不能比4小。

設兩個實數爲 x 和 y,乘積爲 p;將 $\frac{x}{y}$ 當一個未知數,

解方程式.

8　在 $ax^2+bx+c=0$ 中,若 $a+b=2$ 和 $a=2c$, 並且 8 是這方程式的一個根, a 必須等於多少?

第二十章

不盡根數

一　無理數和不盡根數

189. 像$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$這些數,我們只有用很多(無論多少)位的小數來表示和牠們相近的值,至於正確的值,是沒有恰好的整數或分數可以表示的,這種數,稱爲'無理數';這在從前已經說到過了。

又如圓周率π也是一個無理數,平常我們雖是假定牠等於$\frac{22}{7}$或3.1416,但這些值並不是恰好和牠相等的。

凡算術的數的平方根,只能找出牠的相近的值的時候,就叫'不盡根數'。

在這裏應當注意,如$\sqrt{2}$和$\sqrt{9}$的方根在代數上雖有一個正的和一個負的,但通常爲了便利起見,卻只用正的一個。

同樣的情形,若$x+7$含有'有理平方根'的時候,則$\sqrt{x+7}$也是表示正的一個。

習題一三六

下列的各對式子,那幾對是相等的?用幾個數,如

$a=16, b=9$，或 $a=16, b=4$ 等代進去證明一下：

1. $\sqrt{ab}, \sqrt{a}\sqrt{b}$.　　2. $\sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3. $\sqrt{a+b}, \sqrt{a}+\sqrt{b}$.　　4. $\sqrt{a-b}, \sqrt{a}-\sqrt{b}$.

5. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2, a+b$.　　6. $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2, a\times b$.

7. $a\sqrt{a}, \sqrt{a^3}$.　　8. $a\sqrt{b}, \sqrt{a^2b}$.

190. 用根號的形式計算不盡根的時候，常將根號裏的數所含的完全方數的因子分出來。

例如：

$$\sqrt{32}=\sqrt{4^2\times 2}=4\sqrt{2},$$
$$\sqrt{27}=\sqrt{3^2\times 3}=3\sqrt{3},$$
$$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^3\times 2}=2\sqrt[3]{2},$$
$$\sqrt[3]{(a+b)^2(a^2-b^2)}=\sqrt[3]{(a+b)^3(a-b)}$$
$$=(a+b)\sqrt[3]{a-b}.$$

191. 無理數的次數，在能夠消低的時候，總須將牠消下來。

例如：

$$\sqrt[6]{8}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2},$$
$$\sqrt[6]{x^4}=x^{\frac{4}{6}}=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2},$$
$$\sqrt[9]{64}=(2^6)^{\frac{1}{9}}=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}.$$

習題一三七

求下列各式的值(各平方根的值可由書末表中檢出，如 $3\sqrt{10}=\sqrt{90}=9.487$)：

1. $2\sqrt{2}$.　　2. $2\sqrt{3}$.　　3. $3\sqrt{3}$.

4. $7\sqrt{10}$. 5. $2\sqrt{5}$. 6. $5\sqrt{5}$.

簡化下列各式:

7. $\sqrt{8}$. 8. $\sqrt{12}$. 9. $\sqrt{18}$.

10. $\sqrt{24}$. 11. $\sqrt{27}$. 12. $\sqrt{48}$.

13. $\sqrt[3]{54}$. 14. $\sqrt[3]{128}$. 15. $\sqrt[4]{32}$.

16. $\sqrt[6]{49}$. 17. $\sqrt[6]{125\,a^3b^3}$. 18. $\sqrt[12]{64}$.

19. $\sqrt[10]{243}$. 20. $\sqrt[8]{16\,a^{12}}$. 21. $\sqrt[5]{32\,a^{10}}$.

二 同類根式和同次根式

192. 定義 根號部分完全相同的兩根式,叫做'同類根式';如 $3\sqrt{a}$ 和 $-5\sqrt{a}$, $a^2\sqrt[3]{4\,x^2y}$ 和 $2\,ab\sqrt[3]{4\,x^2y}$, 各爲同類根式。

〔例題1〕 簡單 $15\sqrt{2}+7\sqrt{2}-(11\sqrt{2}+\overline{9\sqrt{2}-6\sqrt{2}})$.

$$15\sqrt{2}+7\sqrt{2}-(11\sqrt{2}+\overline{9\sqrt{2}-6\sqrt{2}})=22\sqrt{2}-(11\sqrt{2}+3\sqrt{2})$$
$$=22\sqrt{2}-14\sqrt{2}=8\sqrt{2}.$$

〔例題2〕 簡化 $\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{147}$.

$$\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{147}=\sqrt{3^3}+\sqrt{2^4\cdot 3}+\sqrt{7^2\cdot 3}$$
$$=3\sqrt{3}+4\sqrt{3}+7\sqrt{3}$$
$$=(3+4+7)\sqrt{3}$$
$$=14\sqrt{3}.$$

習題一三八

簡化下列各式:

1. $2\sqrt[3]{320}-3\sqrt[3]{40}$.

2. $\sqrt{27}+2\sqrt{48}+3\sqrt{108}$.

3. $3\sqrt{1000}+4\sqrt{50}+12\sqrt{288}$.

4. $12\sqrt{72}-3\sqrt{128}$.

5. $7\sqrt[3]{81}-3\sqrt[3]{1029}$.

6. $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{686}+\sqrt[3]{16}$.

7. $7\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{432}$.

8. $\sqrt{4a^3b}+\sqrt{25ab^3}-(a-5b)\sqrt{ab}$.

9. $c\sqrt[5]{a^6b^7c^3}-a\sqrt[5]{ab^7c^8}+b\sqrt[5]{a^6b^2c^8}$.

10. $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{320}-2\sqrt[3]{1372}$.

193. 兩根式的根指數相同的,叫做'同次根式'。不同次的根式可以化成同次的根式。因爲

$$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}=a^{\frac{pn}{pm}}=\sqrt[pm]{a^{pn}},$$

就是以一數同時乘某數的根指數和方指數,其值不變。

所以化幾個根式爲同次根式的方法,就是將各根式的根指數的最小公倍數作根指數,而相應地改變各式的方指數,使牠們的值不變。

〔例題3〕 比較$\frac{2}{3}\sqrt{7}$和$\frac{2}{5}\sqrt{10}$的大小。

$$\because\quad \frac{2}{3}\sqrt{7}=\sqrt{\frac{28}{9}},\ \frac{2}{5}\sqrt{10}=\sqrt{\frac{8}{5}},$$

而

$$\sqrt{\frac{28}{9}}=\sqrt{\frac{140}{45}},\ \sqrt{\frac{8}{5}}=\sqrt{\frac{72}{45}}.$$

$$\sqrt{\frac{140}{45}}>\sqrt{\frac{72}{45}}$$

$$\therefore\quad \tfrac{2}{3}\sqrt{7}>\tfrac{2}{5}\sqrt{10}.$$

〔例題4〕 化$\sqrt{ab}$,$\sqrt[3]{a^2b}$,$\sqrt[4]{a^2b^3}$爲同次根式。

∵ 根指數爲2,3,4,牠們的最小公倍數爲12,

$$\therefore\quad \sqrt{ab}=\sqrt[6\times2]{a^6b^6}=\sqrt[12]{a^6b^6},$$

$$\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[4\times3]{a^{2\times4}b^4}=\sqrt[12]{a^8b^4},$$

$$\sqrt[4]{a^2b^3}=\sqrt[3\times4]{a^{2\times3}b^{3\times3}}=\sqrt[12]{a^6b^9}.$$

194. 因爲

$$\sqrt[m]{a^n}\cdot\sqrt[m]{b^p}=a^{\frac{n}{m}}\cdot b^{\frac{p}{m}}=(a^n\cdot b^p)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{a^nb^p},$$

和
$$\sqrt[m]{a^n}\div\sqrt[m]{b^p}=a^{\frac{n}{m}}\div b^{\frac{p}{m}}=(a^n\div b^p)^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{\frac{a^n}{b^p}}.$$

所以同次根式可以相乘除,而不同次根式化爲同次根式後,也可以相乘除。

〔例題5〕 求$\sqrt[3]{4a}$和$\sqrt{6x}$的積.

$$\sqrt[3]{4a}\cdot\sqrt{6x}=\sqrt[6]{4^2a^2}\cdot\sqrt[6]{6^3x^3}\text{ (爲什麼?)}$$

$$=\sqrt[6]{4^2a^2\cdot6^3x^3}=\sqrt[6]{2^7\cdot3^3a^2x^3}=2\sqrt[6]{54a^2x^3}$$

〔例題2〕 求$\sqrt[3]{3a}\div\sqrt{6b}$的值。

$$\sqrt[3]{3a}\div\sqrt{6b}=\sqrt[6]{9a^2}\div\sqrt[6]{216b^3}\text{ (爲什麼?)}$$

$$=\sqrt[6]{\frac{9a^2}{216b^3}}=\sqrt[6]{\frac{9\cdot216a^2b^3}{216^2b^6}}=\frac{1}{6b}\sqrt[6]{1944a^2b^3}.$$

習題一三九

求下列各式的值(結果是分數時,須將分母化成有

理數)：

1. $2\sqrt{ax}\times\sqrt[3]{3a^2b}\times\sqrt{2bx}$.

2. $\sqrt[4]{a^3xy^3}\times\sqrt[5]{a^2xy}$.　　3. $3(4ab^2)^{\frac{1}{3}}\div(2a^3b)^{\frac{1}{2}}$.

4. $(2a^3b^2)^{\frac{1}{4}}\times(a^5b^3)^{\frac{1}{3}}\div(a^3b^5)^{\frac{1}{2}}$.

5. $\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[3]{3ab^2}/\sqrt[6]{5ab^3}$.　　6. $4\sqrt{12}\div2\sqrt{3}$.

7. $\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^7}\cdot\sqrt{\left(\frac{25}{64}\right)^6}$.　　8. $\sqrt[3]{(4ab^2)^x}\cdot\sqrt[3]{(2a^2b)^x}$.

9. $(\sqrt[7]{a^3b})^3\cdot(\sqrt[7]{a^3b^{12}})^4$.

10. $(7\sqrt{2}-5\sqrt{6}-3\sqrt{8}+4\sqrt{20})\times3\sqrt{2}$.

11. $(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

12. $(3+\sqrt{6}+\sqrt{15})(3+\sqrt{6}-\sqrt{15})$.

13. $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})$.　　14. $(3+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$.

15. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.　　16. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$.

17. $(1+2\sqrt{2})^2$.　　18. $(10-3\sqrt{2})^2$.

三　共軛式

195. $\sqrt[3]{ab^2}$ 和 $\sqrt[3]{a^2b}$, $a-\sqrt{b}$ 和 $a+\sqrt{b}$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 和 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 等兩式相乘的積爲 ab, a^2-b, $x-y$ 都是有理式。兩個無理式相乘得有理式時，互稱爲‘共軛式’。故 $\sqrt[3]{ab^2}$, $a-\sqrt{b}$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的共軛式相應地是 $\sqrt[3]{a^2b}$, $a+\sqrt{b}$, $\sqrt{x}-\sqrt{y}$；反過來後面這三式的共軛式相應地也就是前面的三個式子。

計算無理式時,總將分母化成有理式;化分母成有理式的方法,就是用分母的共軛式去乘分母和分子。

〔例題1〕 $\frac{5}{\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{3^2\cdot 2}}=\frac{5}{3\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$

〔例題2〕 $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})}$

$$=\frac{7+2+2\sqrt{7\cdot 2}}{7-2}=\frac{9+2\sqrt{14}}{5}.$$

〔例題3〕 $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{12}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}$

$$=\frac{12\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}}$$

$$=\frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=\frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}$$

$$=\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{2}+\sqrt{6}\sqrt{3}+\sqrt{6}\sqrt{5}$$

$$=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}.$$

習題一四〇

化下列各式的分母爲有理式:

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 2. $\frac{3}{\sqrt{8}}$. 3. $\frac{6}{\sqrt{12}}$.

4. $4\sqrt{\frac{3}{4}}$. 5. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. 6. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

7. $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$. 8. $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$. 9. $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

10. $\dfrac{7}{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}$.　　11. $\dfrac{6}{5-2\sqrt{6}}$.

12. $\dfrac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$.　　13. $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

14. $\dfrac{4-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.　　15. $\dfrac{a+b}{a-\sqrt{b}}$.

16. $\dfrac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$.　　17. $\dfrac{7+2\sqrt{10}}{7-2\sqrt{10}}$.

18. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

習題一四一

簡單下列各式:

1. $6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\frac{3}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{6}$.
3. $2\sqrt{8}+5\sqrt{72}-7\sqrt{18}-\sqrt{50}$.
4. $6\sqrt{12}+3\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48}$.
5. $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}$.
6. $8\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{12}+4\sqrt{27}$.
7. $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{8}}$.
8. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{18}-\sqrt{27}$.
9. $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\sqrt{12}$.
10. $4\sqrt{1+a^2}-\sqrt{9+9a^2}-2\sqrt{b^2+ab^2}$.
11. $\sqrt[3]{9x^2}\cdot\sqrt{15x}$.

12. $(\sqrt{8}-2)(\sqrt{2}+1)$.

13. $(7+2\sqrt{6})(9-5\sqrt{6})$.

14. $(7-2\sqrt{3})(7+2\sqrt{3})$.

15. $\dfrac{7}{\sqrt{8}+2}$.

16. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

17. $\dfrac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

18. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

19. $\dfrac{5+3\sqrt{3}}{5-3\sqrt{3}}$.

20. $\dfrac{5-3\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}$.

21. $\dfrac{3\sqrt{5}-4}{2\sqrt{5}+3}$.

22. $\left(\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}{2\sqrt{3}+\sqrt{10}}\right)^2$.

23. $\dfrac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

24. $\dfrac{2-\sqrt{6}}{3+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

25. $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

26. $\dfrac{1}{\sqrt{x+5}-2}$.

27. $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$.

28. $\dfrac{1}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{3x+8}}$.

29. $\dfrac{\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x+3}}$.

30. 證明下列方程式,那幾個所給的 x 的值是對的:

(i) $x^2-4x+1=0$, $x=2+\sqrt{3}$.

(ii) $x^2-10x+13=0$, $x=5-2\sqrt{3}$.

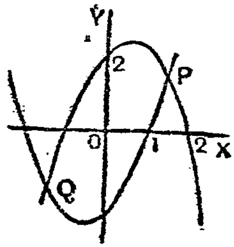
(iii) $x^3-9x^2+21x-13=0$, $x=4-\sqrt{3}$.

(iv) $2x^3+3x^2-4x+1=0$, $x=\sqrt{2}-1$.

(v)　$x^4-18x^2+1=0$,　　　$x=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

(vi)　$x^4+4x^3+6=5x^2+8x$, $x=\sqrt{7}-2$.

31.　$(2-x)(x+1)$ 和 $(x+2)(x-1)$ 的曲線,如第22圖所示,試用代數的方法求兩曲線的交點 P, Q 的坐標。



第 22 圖

第二十一章

無理方程式

一　無理式和有理式

196. 〔問題〕一直角三角形的周圍長15寸,有一直邊長3寸,求他一直邊的長。

設他一直邊的長為x寸。

依Pythagoras的定理,則斜邊的長為$\sqrt{x^2+3^2}$寸。

$\therefore$ 周圍的長為$3+x+\sqrt{x^2+3^2}$(寸)。

$$\therefore\quad 3+x+\sqrt{x^2+3^2}=15 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}.$$

一個像這樣的方程式,其中有一個或幾個代數式的根數的,就稱為'無理方程式'。

這方程式的左邊的式子,稱為'無理式'。

這裏應當注意的,就是像$\sqrt{2}(x+7)+\sqrt{3}(x-5)$這樣的式子,因為只含有數字根數,並不含有代數式的根數,還是稱為'有理式'的。

197. 若無理方程式中,只含有一個平方根數,這很容易化去;只要單將根數列在一邊,然後兩邊都平方起來,就可以了。

∴從(i)，　$\sqrt{x^2+3^2}=12-x.$

兩邊平方，　$x^2+9=144-24x+x^2.$

$$\therefore\quad 24x=135.$$

$$\therefore\quad x=5\tfrac{5}{8}.$$

∴他一邊的長是$5\frac{5}{8}$寸。

〔覆證〕兩直邊爲$5\frac{5}{8}$寸和3寸，

$$\therefore\quad 斜邊=\sqrt{\left(\frac{45}{8}\right)^2+9}=\sqrt{\frac{2025+576}{64}}$$

$$=\sqrt{\frac{2601}{64}}=\frac{51}{8}=6\frac{3}{8}\ (寸)。$$

$$\therefore\quad 周圍=(6\tfrac{3}{8}+5\tfrac{5}{8}+3)\ 寸=15\ 寸。$$

198. 倘若一個方程式中含有兩個像$\sqrt{2x-4}$和$\sqrt{x+5}$這類的無理式，那就不能同上例一樣一次便可化成有理式；舉一個例如下：

〔例題〕解$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$……………………(i).

兩邊平方，

$$2x-4+x+5-2\sqrt{(2x-4)(x+5)}=1 \cdots\cdots (ii).$$

$$\therefore\quad 3x=2\sqrt{(2x-4)(x+5)} \cdots\cdots (iii).$$

再兩邊平方，　$9x^2=4(2x-4)(x+5)$ ……………(iv).

$$\therefore\quad x^2-24x+80=0 \cdots\cdots (v).$$

卽　$(x-20)(x-4)=0$ ……………(vi).

$$\therefore\quad x=20\ 或\ 4.$$

〔又可照下面的方法計算：

任移一個根數到右邊,

$$\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}.$$

兩邊平方, $2x-4=1+x+5+2\sqrt{x+5}.$

$$\therefore\quad x-10=2\sqrt{x+5}.$$

再兩邊平方, $x^2-20x+100=4(x+5).$

$$\therefore\quad x^2-24x+80=0.$$

以下同上法一樣。]

但,就是計算的方法一點沒有錯誤,也不能決定20和4一定是原方程式的根,非加以覆證不可;這是必須要注意的。

〔覆證〕 $x=20$, 左邊 $=\sqrt{36}-\sqrt{25}=6-5=1=$ 右邊。

$x=4$, 左邊 $=\sqrt{4}-\sqrt{9}=2-3=-1\neq$ 右邊。

$\therefore$ 只有 $x=20$ 是適合於原方程式的。

二 增根

199. 依前章第189節所述 $\sqrt{}$ 只表示正的有理數,所以4不是原方程式的根,而是'增根'。在第十六章第153節,我們曾經講過解分式方程式得出'增根'的原因。這裏怎樣也會生出增根來呢?讓我們來搜尋發生這新的根的步驟吧。

從末了倒起檢查上去,就可看出來 $x=4$ 從 (vi) 到 (ii) 都適合的,只是不適合於 (i). 所以第一步就得注

意,這是表明將方程式兩邊平方是一個不安全的方法。

200. 在更明晰地研究上節的問題以前,我們來注意下面的有趣味的謬誤。

設　$a=b$,

於兩邊乘以a,　　$a^2=ab$.

兩邊減去b^2,　$\therefore\quad a^2-b^2=ab-b^2$.

$$\therefore\quad (a-b)(a+b)=b(a-b).$$

$$\therefore\quad a+b=b.$$

$$\therefore\quad 2b=b.$$

$$\therefore\quad 2=1.$$

這個謬誤是在那裏呢?

三　可逆的步驟

201. 首先還得重來審察我們已經用過的解方程式的方法。

第一步,考察覆證一個方程式的根的結果,這根是適合於原方程式嗎?倘若適合的,就是一個根,不然,無論我們是用什麼方法得來的,就都不是根。

第二,若從x等於假定的根起,能夠毫無疑義地回證到原方程式,這假定的根一定適合於原方程式。

202. 現在來審察我們所用以解方程式的各種

步驟,那些是可以倒回去的,那些是不定的。

各種步驟如下:

(*a*) 方程式的兩邊加上(或減去)同一的(或相等的)數;

(*b*) 方程式的兩邊乘以(或除以)同一的(或相等的)數;

(*c*) 方程式的兩邊平方;

(*d*) 方程式的兩邊開方。

(*a*) 是很明白地可以倒回的。

(*b*) 一看好像是可以倒回的,但我們必須要研究乘數是0的這種情況。

即如 $3\times0=5\times0$, 但這不能跟着就得 $3=5$; 更一般地, $x\times0=a\times0$, 不能跟着就得 $x=a$.

在我們用 0 以外算術的數去乘或除的時候,這種困難是不會有的;但若用的是代數的式子,就必須留意牠有等於0的可能性了。

設有一個方程式 $x=a$, 並且用 $x-b$ 去乘兩邊;則

$$x(x-b)=a(x-b);\quad \therefore\ (x-b)(x-a)=0,\quad \therefore\ x=b \text{ 或 } x=a.$$

所以,倘若一個方程式的兩邊乘以同一的代數式,可以生出新的根來;即是使乘式等於0得出來的。

因此,消去一個方程式的分母的時候,必須留意到

生出新的根。

再,設 $x(x-b)=a(x-b)$; 我們就能說 $x=a$ 嗎?不,我們應當說 $x=a$ 或 $x-b=0$.

所以,倘若一個方程式的兩邊除以同一的代數式,可以失去些原方程式的根,卽是使除式等於0得出來的。

(c)　若將方程式 $x=a$ 的兩邊平方,則得 $x^2=a^2$,這個倒回去便得 $x=\pm a$;所以平方也要生出新的根來。

這是很有興味的,我們注意一下,這不過屬於 (b) 的特殊情況; $x=a$ 實卽是 $x-a=0$, 而 $x^2-a^2=0$ 卽是 $(x-a)(x+a)=0$.

所以我們知道,將方程式的兩邊平方,總可產生新的根。

(d)　若將方程式 $x^2=a^2$ 兩邊開平方,則得 $x=\pm a$,就是 $x-a=0$ 和 $x+a=0$,牠可以倒回到 $x^2-a^2=0$,卽 $x^2=a^2$. 所以將方程式的兩邊開平方是一個妥當的方法,平方根可以是正的或負的。

203.　在這裏,有好許多情形都可有新的根加進去,所以必須將所得的根代入原方程式去覆證。我們再從分式方程式說起。

〔例題1〕　解 $\dfrac{1}{(x-3)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{3}{x-3}$.

用$(x-3)(x-2)(x-1)$乘兩邊,

$$x-1+x-3=3(x-2)(x-1).$$

[注意在這一步,可以生出新的根 3, 2, 1 中的一個或更多的來。]

$$\therefore\quad 2x-4=3x^2-9x+6.$$

$$\therefore\quad 3x^2-11x+10=0.$$

$$\therefore\quad (x-2)(3x-5)=0.$$

$$\therefore\quad x=2\text{ 或 }\tfrac{5}{3}.$$

這個根$\frac{5}{3}$是不能由各步中加進去的,可以不必覆證;但必須覆證這個根2.

右邊$=-3$, 左邊$=\frac{1}{0}+\frac{1}{0}$,這是不能理會的。

$\therefore$唯一的解答是$x=\frac{5}{3}$.

〔例題2〕 解$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+1}$.

兩邊平方, $x+x+1+2\sqrt{x^2+x}=2x+1$.

$$\therefore\quad 2\sqrt{x^2+x}=0.$$

$$\therefore\quad \sqrt{x^2+x}=0.$$

兩邊平方, $$x^2+x=0.$$

$$\therefore\quad x(x+1)=0.$$

$$\therefore\quad x=0\text{ 或 }-1.$$

〔覆證〕 $x=0$, $\sqrt{0}+\sqrt{0+1}=\sqrt{2\times0+1}$, $1=1$.

$x=-1$, $\sqrt{-1}+\sqrt{-1+1}=\sqrt{2(-1)+1}$, $\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$.

所以$x=0$, -1都是原方程式的根。

習題一四二

解下列各方程式:

1. $x+\sqrt{3x-14}=6.$　　2. $x+1+3\sqrt{x-1}=0.$

3. $3x-\sqrt{x^2-24}=16.$　　4. $\sqrt{x^2-3x-1}+7=2x.$

5. $\sqrt{12+x}=2+\sqrt{x}.$　　6. $\sqrt{7x}-\sqrt{3x+1}=1.$

7. $\sqrt{8x+5}-2\sqrt{2x-1}=1.$

8. $\sqrt{\frac{1+x}{2}}+\sqrt{\frac{1-x}{2}}=5x.$

9. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}.$

10. $\sqrt{x+7}+\sqrt{9x+7}=4\sqrt{2x}.$

11. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\sqrt{5}.$

12. $2\sqrt{6+x}-\sqrt{28-x}=\sqrt{4-x}.$

13. $\sqrt{14x+9}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}=0.$

14. $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-11}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}.$

15. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{10}{3}.$

16. 解 $\sqrt{3+x}\pm\sqrt{x}\pm\sqrt{4-3x}=0$, 並決定相應於所得的根的符號。

17. 直角三角形的斜邊比二直邊中的一邊長一寸,而周圍長56寸。求各邊的長。

18. 直角三角形的二直邊的長相差7寸,周圍長30寸。求各邊的長。

四　二次形的無理方程式

204. 像 $x^{\frac{2}{3}}+5x^{\frac{1}{3}}+6=0$ 這樣的方程式,因為只含兩個 x 的乘方的項,並且一個的指數恰是他一個的指數的二倍,所以稱為'二次形的無理方程式'。

若設 $x^{\frac{1}{3}}=y$, 則 $x^{\frac{2}{3}}=y^2$, 並且得一個二次方程式,

$$y^2+5y+6=0.$$

解這個方程式,　$y=-2$, 和 $y=-3$.

$$\therefore\quad x^{\frac{1}{3}}=-2,\text{ 和 }x^{\frac{1}{3}}=-3.$$

兩邊三乘方,　$x=-8$, 和 $x=-27$.

〔覆證〕 將 $x=-8$ 代入原方程式,

$$(-8)^{\frac{2}{3}}+5(-8)^{\frac{1}{3}}+6=0.$$

即
$$(-2)^2+5(-2)+6=0,$$
$$4-10+6=0.$$

$\therefore x=-8$ 是原方程式的根。

將 $x=-27$ 代入原方程式,

$$(-27)^{\frac{2}{3}}+5(-27)^{\frac{1}{3}}+6=0.$$

即
$$(-3)^2+5(-3)+6=0,$$
$$9-15+6=0.$$

$\therefore x=-27$ 也是原方程式的根。

〔例題〕 解$x^{\frac{3}{2}}-7x^{\frac{3}{4}}=8.$

因指數$\frac{3}{2}$是指數$\frac{3}{4}$的二倍;所以這個方程式是二次形的。

設 $$x^{\frac{3}{4}}=y,\ 則\ x^{\frac{3}{2}}=y^2.$$

解 $$y^2-7y=8,$$

$$y=8,\ y=-1.$$

故 $$x^{\frac{3}{4}}=8\ 和\ x^{\frac{3}{4}}=-1\ \cdots\cdots\cdots\cdots(i).$$

兩邊開立方, $$x^{\frac{1}{4}}=2\ 和\ x^{\frac{1}{4}}=-1.$$

兩邊四乘方, $$x=16\ 和\ x=1.$$

〔覆證〕 將$x=16$代入原方程式,

$$(16)^{\frac{3}{2}}-7(16)^{\frac{3}{4}}=8.$$

$$(4)^3-7(2)^3=8.$$

$$64-56=8.$$

$\therefore x=16$是原方程式的根。

將$x=1$代入原方程式,

$$(1)^{\frac{3}{2}}-7(1)^{\frac{3}{4}}=8.$$

$$1-7\neq 8.$$

$\therefore x=1$不是原方程式的根。

習題一四三

解下列各方程式:

1. $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}+10=0.$

2. $8x^{\frac{3}{2}}-65x^{\frac{3}{4}}+8=0.$

3. $z^{\frac{2}{5}}-3z^{\frac{1}{5}}+2=0.$

4. $(x+1)^{\frac{2}{3}}-11(x+1)^{\frac{1}{3}}+30=0.$

5. $x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{8}}+132=0.$

6. $y^{\frac{3}{5}}+19y^{\frac{3}{10}}-216=0.$

7. $(x+1)^3-60(x+1)^{\frac{3}{2}}=256.$

8. $x^{\frac{4}{5}}+6x^{\frac{2}{5}}-55=0.$

五 $a\pm2\sqrt{b}$的平方根

205. 因爲$(\sqrt{3}\pm\sqrt{2})^2=3\pm2\sqrt{6}+2=5\pm2\sqrt{6}$, 隨着就得$\sqrt{5\pm2\sqrt{6}}=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$.

首先注意, 5是2同3的和, 6是牠們的積。這就暗示出下面的求$a\pm2\sqrt{b}$的平方根的法則:

找出兩個牠們的和等於a, 並且積等於b的數。這兩個數的平方根的和(或差)就是所求的平方根。

〔例題1〕 求$8+\sqrt{60}$的平方根。

將原式寫成$a+2\sqrt{b}$的形式,得$8+2\sqrt{15}$.

5同3的和等於8, 並且牠們的積等於15.

$$\therefore\quad \sqrt{8+\sqrt{60}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

〔例題2〕 求$\sqrt{6-4\sqrt{2}}$的值。

將原式寫成$a-2\sqrt{b}$的形式,得$6-2\sqrt{8}$.

4同2的和等於6,並且牠們的積等於8.

$$\therefore\quad \sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{4}-\sqrt{2}=2-\sqrt{2}.$$

習題一四四(口答)

求下列各式的平方根:

1. $3+2\sqrt{2}$.　2. $4-2\sqrt{3}$.　3. $7+2\sqrt{10}$.

4. $8-2\sqrt{7}$.　5. $9-2\sqrt{14}$.　6. $7-4\sqrt{3}$.

7. $9+2\sqrt{20}$.　8. $9+6\sqrt{2}$.　9. $4-\sqrt{12}$.

10. $7+\sqrt{48}$.　11. $2a+2\sqrt{a^2-b^2}$.　12. $14+6\sqrt{5}$.

206. 前節的方法,全仗觀察,若遇到較複雜的數,有時就很困難,現在再來講一般的方法。

〔例題3〕 求$7+4\sqrt{3}$的平方根。

設　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

則　$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

兩式相乘,　$x-y=\sqrt{49-48}$.

$$\therefore\quad x-y=1.$$

但　$x+y=7$.

$$\therefore\quad x=4,\ y=3.$$

$$\therefore\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

習題一四五

求下列各式的平方根:

1. $15+6\sqrt{6}$.
2. $17+4\sqrt{13}$.
3. $10+2\sqrt{21}$.
4. $16+2\sqrt{55}$.
5. $20-8\sqrt{6}$.
6. $98-42\sqrt{5}$.
7. $13-2\sqrt{30}$.
8. $11-6\sqrt{2}$.
9. $14-4\sqrt{6}$.
10. $38-12\sqrt{10}$.
11. $103-12\sqrt{11}$.
12. $57-12\sqrt{15}$.
13. $78-12\sqrt{48}$.
14. $3\frac{1}{2}-\sqrt{10}$.
15. $x-\sqrt{x^2-1}$.
16. $a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}$.
17. $(a+b)^2-4(a-b)\sqrt{ab}$.
18. $a^2+4b-4a\sqrt{b}$.
19. $x+2y+2\sqrt{2xy}$.
20. 證明 $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

第二十二章

比和比例

一　比

207. 單位和量數. 一個人的高,可以說成5.1尺或1.53公尺;但無論怎樣的說法,必須要選擇一個'單位'(尺或公尺);就是和被量的量同類的一個標準量;並且必須有一個數(5.1, 1.53),即被量的量所含的單位的數;這個數稱為'量數'。所以,一定的量都可用一個單位和一個量數來說明牠。

208. 比. '比'這個詞,可以說是我們每天都用得到的。通常所說的,這間房子的大有那間的三倍,或這個人的年紀有那個人的年紀的二倍;就是說這兩間房子的比為3比1,這兩個人的年紀的比為2比1.我們用慣了的布長幾尺,米重幾斤,根本地說也是一尺布或一斤米的若干倍的意思,所以還是一種比。不過平日為實用的便利,總把比的後一個量作為標準的1,比的形式較簡單些,久而久之,成了習慣,便連比的

形式,也不明顯罷了。

照算術上的方法,三斤鹽和兩斤鹽的重量的比爲3比2,寫作 3:2. 但算術地說法,這種關係也可說是,第一種鹽的重量是第二種的 $\frac{3}{2}$. 這兩種說法,意義雖是截然不同,在計算上卻毫無差別;因此,常常可用分數的計算去代比的計算。

所以,a 斤米和 b 斤米的比,這個值可用 $\frac{a}{b}$ 去表示;而 b 斤米和 a 斤米的比就是 $\frac{b}{a}$, 恰是前一個比的倒數。

〔注意〕 (a) **非同類量不能相比。**

例如,三尺布和五斤米是不能成比的。

(b) **在用分數表示比值以前,兩個相比的量必須用同樣的單位表示。**

例如,3丈和4尺的比,是30尺和4尺的比,就是 $\frac{15}{2}$.

209. 比的前後項用相等的數去乘,比值不變。

因此,$a:b$ 等於 $ma:mb$; 因爲 $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$. 若 a, b 代的是 4, 5, 那末 $4:5$ 就等於 $4x:5x$.

〔例題〕 弟兄兩人年齡的比爲 $2:3$, 8年以後的比爲 $3:4$. 他們各人現年多少?

設他們的現年爲 $2x$, $3x$.

則8年以後,他們的年齡爲 $2x+8$, $3x+8$,

$$\therefore \quad \frac{2x+8}{3x+8}=\frac{3}{4}.$$

兩邊乘以 $4(3x+8)$,

$$4(2x+8)=3(3x+8).$$

$$\therefore \quad 8x+32=9x+24.$$

$$\therefore \quad 8=x.$$

而他們的現年爲 16, 24.

〔覆證〕 8年以後牠們倆的年齡將爲 24, 32, 而 $\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$.

習題一四六

1. 某次試驗,某班及格的人數和不及格的人數的比爲 3:2. 若及格標準降低12名,則他們的比變成 21:10. 原來有多少人及格?

2. 甲所有錢與乙所有錢的比爲 5:4, 若甲給乙 7元,則兩人所有的比爲 2:3. 兩人原有各多少元?

3. 兩列火車速度的比爲 5:3; 同走75里路,若較快的車遲半小時開,則可早到半小時。求兩車的速度。

4. 兩數的比爲 10:3. 若兩數都加 10, 則牠們的比爲 1:2. 求這兩個數。

5. 若 $x:y=3:7$, 並且 $4x+2y=6$, 求 x 和 y.

二　齊次式和齊次方程式

210. 齊次式. 如 $5x-4y$, $3x^2-2xy-y^2$; $x^3+3x^2y-5xy^2-y^3$ 等,各項對於 x, y 說,次數相等的式子,叫做'齊次式'。因了次數的不同,如第一式,叫'一次齊次式';第二式,叫'二次齊次式';第三式,叫'三次齊次式'等。

齊次式又可變形爲:

$$5x-4y \equiv x\left\{5-4\frac{y}{x}\right\}$$

$$\equiv x\left\{5-4\left(\frac{y}{x}\right)\right\}.$$

$$3x^2-2xy-y^2 \equiv x^2\left\{3-2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right\}$$

$$\equiv x^2\left\{3-2\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}.$$

$$x^3+3x^2y-5xy^2-y^3 \equiv x^3\left\{1+3\frac{y}{x}-5\frac{y^2}{x^2}-\frac{y^3}{x^3}\right\}$$

$$\equiv x^3\left\{1+3\left(\frac{y}{x}\right)-5\left(\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{y}{x}\right)^3\right\}.$$

就是 x, y 的齊次式可變成 x 的乘方和 $y:x$ 的函數的積。

〔練習〕 將前三式變成 y 的乘方和 $x:y$ 的函數的積。

211. 齊次方程式. 由一個齊次式等於零所成的方程式,稱爲'齊次方程式'。而一個方程式,可以變成這種形式的,也一樣地屬於這一類。

例如 $x^2+xy+y^2=0$ 是二次齊次方程

而 $x^3+3xy^2=3x^2y+y^3$ 是三次齊次方程式,因爲牠可以變成 $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=0$.

但 $x^2+y^2=x^3+y^3$ 雖兩邊各是齊次式,卻不是齊次方程式。

212. 像這樣的方程式,

$$x^2+xy-2y^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}.$$

不能由牠求出 x 和 y 的值來。

設將牠寫成這樣的形式,

$$x^2\left\{1+\frac{y}{x}-2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}.$$

結果　$$x^2=0,$$

或　$$1+\frac{y}{x}-2\left(\frac{y}{x}\right)^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iii)}.$$

現在,若 $x=0$, 雖適合於 $x^2=0$ 這個方程式,在(iii)中卻沒有意義;但假定 $x\neq 0$, 那末又不適於方程式 $x^2=0$ 了。所以,由原來的方程式是求不出 x 和 y 的值的,但是可以求出 $\frac{y}{x}$ 這個比的值。

任何二個變數的齊次方程式,可成爲求這兩個變數的比的方程式。

在現在的例, $\left\{1+2\left(\frac{y}{x}\right)\right\}\left\{1-\left(\frac{y}{x}\right)\right\}=0.$

$$\therefore\quad \frac{y}{x}=-\frac{1}{2}\text{ 或 }1.$$

這個結果也可由下面的方法得出來:

$$\because\quad x^2+xy-2y^2=0.$$

$$\therefore\quad (x+2y)(x-y)=0.$$

$$\therefore\quad x=-2y\text{ 或 }y.$$

$$\therefore\quad \frac{y}{x}=-\frac{1}{2}\text{ 或 }1.$$

習題一四七

從下列齊次方程式求 $\frac{y}{x}$ 的值:

1. $x+5y=0.$　　2. $2x-y=y-3x.$

3. $y^2-3xy+2x^2=0.$

4. $(x-2y)(x-y)=(x-y)(2y-3x).$

5. $(x+3y)^2=(y-2x)^2.$

6. $(5x-4y):(3x-2y)=4:1.$

7. $\frac{3x^2-33y^2}{x-4y}=x+7y.$　　8. $\frac{2}{x^2}-\frac{5}{xy}-\frac{7}{y^2}=0.$

9. $\frac{1}{3x-5y}+\frac{1}{2x+3y}=0.$

10. 從下面的兩個齊次方程式求 $x:z$ 和 $y:z$ 的值:

$$x-2y+3z=0,$$

$$2x+3y-z=0.$$

11. 從下面的兩個齊次方程式求 $z:x$ 和 $y:x$ 的值：

$$2x-5y+z=0,$$

$$x-2y-2z=0.$$

213. 同次的兩個齊次式的比. 若是已經知道 $x:y$ 的值,我們就能夠求出同次的 x 和 y 的兩個齊次式的比值來。

例如 $x:y=5:3$, 求 $(5x-y)^2:(3x+2y)(x-3y)$ 的比。

設 $x=5a$, $y=3a$; 則

$$\frac{(5x-y)^2}{(3x+2y)(x-3y)}=\frac{(25a-3a)^2}{(15a+6a)(5a-9a)}$$

$$=\frac{22^2a^2}{21\times(-4)a^2}$$

$$=-\frac{121}{21}. \qquad [a\text{已消去。}]$$

這裏消去 a 並不是偶然的,因爲分子和分母既是同次的齊次式,所以總可消去。

習題一四八

1. 若 $a:b=4:7$, 求下列兩比的值:

 (i) $ab:(b^2-a^2)$. (ii) $\sqrt{7ab}:(3b-2a)$.

2. 若 $x:y:z=2:3:4$, 求下列兩比的值:

(i) $(x^3+y^3+z^3-3xyz):(x+y+z)^3$.

(ii) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}:\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3-3xyz}$.

三 比例

214. 若四個量 A, B, X, Y 有這樣的關係, $A:B=X:Y$, 就說牠們成'比例'或牠們是'比例的'.

A, Y 叫做外項; B, X 叫做內項。

這裏應當注意, A, B 必須是同類量, X, Y 也必須是同類量;但 A, X 卻可以不是同類量。因此,

$$3\text{尺}:5\text{尺}=6\text{斤}:10\text{斤}$$

是可以的;但

$$3\text{尺}:6\text{斤}=5\text{尺}:10\text{斤}$$

就不可以。因爲這已經沒有'比'的意思了。

215. 因爲 $a:b$ 和 $c:d$ 可用 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 表示,所以 $a:b=c:d$ 也可用 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 表示。由此可以證明下列各比例的性質。

(a) **比例的兩個內項的積,等於牠的兩個外項的積。***

$$\because \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

*這幾個性質是限於 a, b, c, d 都是數而說的,若是量那就不能這樣說了,爲什麼?

兩邊乘以 bd, $\therefore\ ad=bc.$

由此,無論知道那三項,其餘的一項都可以求出來。

(b) 比例的兩個內項或兩個外項或內項和外項都可以交換。

$$\because\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}.$$

兩邊乘以 bd, $\therefore\ ad=bc\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}.$

(ii) 的兩邊除以 cd,

$$\therefore\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}. \qquad \text{[內項交換。]}$$

(ii) 的兩邊除以 ab,

$$\therefore\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a}. \qquad \text{[外項交換。]}$$

用 (i) 除 $1=1$,

$$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}. \qquad \text{[內外項交換。]}$$

(c) 若 $a:b=c:d$, 則 $a+c:b+d=a:b=c:d.$

因為,若設 $a:b=c:d=k,$

則 $a=bk,\ c=dk.$

而 $a+c=bk+dk=(b+d)k.$

$$\therefore\ a+c:b+d=(b+d)k:(b+d)=k.$$

$$\therefore\ a+c:b+d=a:b=c:d.$$

更一般地,若 $a:b=c:d=e:f=\cdots\cdots$, 則

$$a:b=c:d=e:f=\cdots\cdots=\frac{\lambda a+\mu c+\nu e+\cdots\cdots}{\lambda b+\mu d+\nu f+\cdots\cdots}.$$

習題一四九

1. 若 $\frac{x}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$ 和 $2x-3y+4z=10$, 求 x, y 和 z.

2. 若 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, 證明

$$\sqrt{\frac{2x^2+3y^2}{2a^2+3b^2}}=\frac{x+y}{a+b}.$$

3. 若 $x:a=y:b$, 證明

$$\sqrt[3]{\frac{5x^3+7y^3}{5a^3+7b^3}}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}.$$

4. 若 a, b, c, d 是四個成比例的數,證明下列各式:*

(i) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$

(ii) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$

(iii) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$

5. 若 a, b, c, d 表示量,前題的關係還能成立嗎?

6. 若 $a:b=c:d$, 證明下列各式:

---

* 本題所證明的,也是比例的重要性質。

(i) $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{c}{c+d}$.　　(ii) $\dfrac{a}{a-b}=\dfrac{c}{c-d}$.

(iii) $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{c^2}{d^2}$.　　(iv) $\dfrac{a^3}{b^3}=\dfrac{c^3}{d^3}$.

(v) $\dfrac{a^n}{b^n}=\dfrac{c^n}{d^n}$.　　(vi) $\dfrac{b^4}{a^2b^2}=\dfrac{c^2d^2}{d^4}$.

(vii) $b(a+b-c-d)=(a+b)(b-d)$.

7. 3, 5, 7, 10 各加上一個什麼同樣的數,就成比例?

8. 若 $a:b=b:c=c:d$, 證明 $ad^2=c^3$.

9. 若 $p:q:r=(a+2b+2c):(b+2c+2a):(c+2a+2b)$; 證明 $a:b:c=(2q+2r-3p):(2r+2p-3q):(2p+2q-3r)$.

第二十三章

變數法

一 正變

216. 〔例題〕 某甲一分鐘能寫十個字,試求他十分鐘以內,每分鐘的末尾一共寫了多少字?

這很容易明白,第一分鐘的末尾,只寫了10個字。

第二分鐘的末尾,他已寫過兩分鐘,所以一共寫了20個字。

第三分鐘的末尾,他已寫過三分鐘,所以一共寫了30個字。

第四分鐘的末尾,他已寫過四分鐘,所以一共寫了40個字。

照樣推下去,十分鐘以內,每分鐘的末尾一共寫了的字數都很容易求得;試將下表中空着的地方塡好。

時　　間	1 分	2 分	3 分	4 分	5 分	6 分	7 分	8 分	9 分	10分
寫了的字數	10	20	30	40						

217. 觀察前節的表,回答下面的問題:

(i) 時間加多,字數加多嗎?

(ii) 時間減少呢?

(iii) 每分鐘末尾所寫過的字數和所寫過的時間的分數的比是什麼?這些比都相等嗎?

218. 由前兩節,我們知道這樣的事實,某甲每分鐘的末尾所寫過的字數是隨了他寫字的時間變的;而且,(i) 時間加多,字數跟着加多,時間減少,字數跟着減少;(ii) 每分鐘末尾所寫過的字數和所寫過的時間的比都是10,換句話說,就是各個比全是相等的。

這種情形,我們又可以這樣說,某甲每分鐘末尾所寫過的字數是依一定的比 (10) 跟着他所寫過的時間變的;這叫做所寫過的字數跟了所寫過的時間'正變'。一般地說,便是:

設有 A 和 B 兩個量,A 總是依照一定的比跟着 B 變,這就叫 A 跟了 B 正變;我們用下面的式子表示。

$$A \propto B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

因為 A 比 B 是一個定數,假如用 K 代這個定數,那末上面的式子又可以寫成下面的形式,

$$A = KB \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

在這式子中,A 和 B 是兩個變數,K 是一個定數,

所以我們叫K為'常數'。(2)的兩邊若都用B去除,便得

$$K=\frac{A}{B} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

由此可知,A跟着B正變的時候,只要知道了A和B的一對值,這個常數K就可以由(3)求出來了。求出了K,代進(2)去,A和B的關係更非常明白,因而知道了B就可以求A,知道了A也就可以求B.

219. 〔例題1〕 若$y \propto x$, $x=3$,則$y=9$; $x=7$, $y=?$

$$\because \quad y \propto x, \quad \therefore \quad y=kx.$$

將3代x, 9代y,則得 $9=3k$, $\therefore$ $k=3$.

而 $y=3x$.

故若 $x=7$, 則 $y=3\times7=21$.

〔例題2〕 A由家出發,每小時所走的里數相等,若三小時走了二十七里,則走五十四里,要多少時間?

設A所走的時數為t, t時所走的里數為d,則

$d \propto t$, 即 $d=kt$.

因 $t=3$, $d=27$, 故 $27=3k$,

$\therefore$ $k=9$, 而 $d=9t$.

故若 $d=54$, 則 $9t=54$,

$\therefore$ $t=6$. 即A走五十四里要六小時.

習題一五〇

1. 若$y \propto x$, $x=2$, 則$y=3$; $x=10$, $y=?$ $y=\frac{1}{2}$, $x=?$
2. 若$y \propto x$, $x=2$, 則$y=5$; $x=5$, $y=?$, $y=6$, $x=?$

3. 若 $u\propto v$, $u=7$, 則 $v=5$; $v=3$, $u=?$ $v=\frac{1}{2}$, $u=?$ $u=6$, $v=?$ $u=\frac{1}{3}$, $v=?$

4. 若 A 的平方跟着 B 的立方正變,而 $B=4$, 則 $A=3$; $B=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $A=?$

5. 圓的面積是跟着圓的半徑的平方正變的;若半徑 14 寸的圓的面積爲 616 方寸;半徑 $3\frac{1}{2}$ 寸的圓的面積多少方寸?

6. 前題面積 $1\frac{3}{11}$ 方尺的圓的半徑是幾寸?

7. 甲以相等的速度從 A 走向 B, 4 小時走了 32 里, AB 相距 72 里,幾小時甲可走到?若他是上午八時動身的,什麼時候他走到 B?

8. 行星繞太陽一周所需的時間的平方跟着牠距太陽的距離的立方正變。地球距太陽 149 百萬公里,繞太陽一周約需 365 日;金星距太陽 108 百萬公里,牠繞太陽一周約需多少日?

二　反變

220. 〔例題 1〕 A, B, C, D 四人同行 120 里, A 每小時行 15 里, B 每小時行 12 里, C 每小時行 10 里. D 每小時行 8 里;各需若干小時可以到達?

A 每小時行 15 里,走 120 里的路程所需的時間爲

$$(120\div15)\text{小時}=8\text{小時}$$

B所需的時間是多少?C所需的時間是多少?D所需的時間是多少?假如還有E每小時只能行6里,他要若干小時纔可到達?

221. 就前節例題中各人的速度和所需的時間仔細比較,回答下面的問題:

(i) 速度大的比速度小的,那一個所需的時間大?

(ii) 那末速度和時間是不是一同變大,一同變小的?

(iii) A, B, C, D, E各人每小時所行的里數的倒數是什麼?

(iv) A, B, C, D, E各人所需的小時數和各人每小時所行的里數的倒數的比是什麼?都相等嗎?

222. 由前兩節可知A, B, C, D, E,各人所需的小時數是依一定的比(120)跟着牠們每小時所走的里數的倒數變的;這種變法,叫做'反變'。一般地說,便是:

設有A和B兩個量,A總是依照一定的比跟着B的倒數變,這就叫A跟了B反變。我們用下面的式子表示:

$$A \propto \frac{1}{B} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

因爲A比$\frac{1}{B}$是一個定數,假如用K代這定數,那末

(1)就可寫成下面的形式,

$$A=\frac{K}{B} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

這式的 K 也是個常數,若用 B 乘(2)的兩邊,便得

$$K=AB \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

由此可知,A 跟着 B 反變的時候,知道了 A 和 B 的一對值,這常數 K 的值,就可以由(3)求出來了。求出了 K,代進(2)去,A 和 B 的關係更非常明白,因而知道了 A,B 中的一個,就可以求出他一個來。

223. 〔例題 2〕 若 $y\propto\frac{1}{x}$, $x=4$, 則 $y=30$; $x=6$, $y=?$ $y=13\frac{1}{3}$, $x=?$

因　$y\propto\frac{1}{x}$,　所以　$y=\frac{k}{x}$,

將 4 代 x, 30 代 y, 則得　$30=\frac{k}{4}$,　$\therefore\quad k=120.$

而
$$y=\frac{120}{x}.$$

故若　$x=6$,　　則　$y=\frac{120}{6}=20.$

又若　$y=13\frac{1}{3}$,　　則　$13\frac{1}{3}=\frac{120}{x}$,

卽　$13\frac{1}{3}x=120.$　　$\therefore\quad x=120\div13\frac{1}{3}=9.$

〔例題 3〕 有一工程每日作工 6 小時, 12 日可作完;若要 9 日作完,每日需作工幾小時?

設完工的日數爲 y, 每日作工的時數爲 x, 則

$$y \propto \frac{1}{x}, \qquad 即\quad y=\frac{k}{x}.$$

因 $x=6,\ y=12,$ 故 $12=\frac{k}{6},$

$\therefore\ k=72,$ 而 $y=\frac{72}{x}.$

故若 $y=9,$ 則 $\frac{72}{x}=9,$

$\therefore\ x=\frac{72}{9}=8.$ 即每日需作工8小時。

習題一五一

1. 若 $y \propto \frac{1}{x}$, $x=3$, 則 $y=7$; $x=2\frac{1}{3}$, $y=?$ $y=3$, $x=?$

2. 若 $A \propto \frac{1}{B}$, $B=5$, $A=7$; $B=4$, $A=?$ $A=10$, $B=?$

3. 若 $T \propto \frac{1}{u}$, $u=6$, $T=10$; $u=2$, $T=?$ $u=7$, $T=?$ $T=12.5$, $u=?$ $T=7.5$, $u=?$

4. 若 M 跟着 N 的平方根反變,而 $N=4$, 則 $M=5$; $M=?$ $N=\frac{3}{5}$.

5. 矩形的面積一定,則牠的長跟着闊反變,長6尺的時候,闊12尺;長18尺的時候闊幾尺?

6. 前題的矩形,什麽時候只有3寸闊?

7. 一册書,甲每頁抄500字,20頁抄完;乙每頁多抄100字,幾頁抄完?

8. 一工程6人作24日完,加幾人去作28日可以作完?

三　合變

224. 前面所講的,無論是正變或反變,A都只是跟着一個量B變;實際上有些時候,一個量A是同時跟着幾個量B, C, D等變的,這就叫做'合變'。比如火車所走的距離跟着牠的速度正變,也跟着牠所走的時間正變,這距離對於速度和時間說,便是合變;但這火車開行所需的時間,常是跟着所要走的距離正變,而跟着牠的速度反變,這所需的時間對於距離和速度也是合變。

一般地說,若B一定時,A跟着C正變;C一定時,A跟着B正變;則B, C都不定時,A就跟着B和C的積正變。

若B一定時,A跟着C正變;C一定時,A跟着B反變;則B, C都不定時,A就跟着$\frac{C}{B}$正變.

225. 〔例題1〕 若P跟着Q正變,而跟着R反變;$Q=\frac{3}{7}$和$R=\frac{9}{14}$,則$P=\frac{2}{3}$;那末,$P=\sqrt{48}$,和$R=\sqrt{75}$,$Q=$?

因　$P\propto\frac{Q}{R}$,　　即　$P=K\cdot\frac{Q}{R}$.

將$\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{9}{14}$分別代$P, Q, R$;則

$$\frac{2}{3}=k\cdot\frac{\frac{3}{7}}{\frac{9}{14}}=k\cdot\frac{2}{3}.$$

$\therefore\quad k=1,$　　　　而　$P=\frac{Q}{R}.$

故 $P=\sqrt{48}$, $R=\sqrt{75}$,　　　則　$\frac{Q}{\sqrt{75}}=\sqrt{48}$,

$$\therefore\quad Q=\sqrt{48\times75}=60.$$

〔例題2〕　若 z 跟着 x 和 y^2 正變,而 $x=3$, $y=4$, 則 $z=144$; $x=5$, $y=2$, 則 $z=?$

因　$z\propto xy^2$,　　　　　　即　$z=kxy^2$.

將 3, 4, 144 分別代 x, y, z; 則

$$144=k\cdot3\cdot4^2=48\,k.$$

$\therefore\quad k=3,$　　　　而　$z=3\,xy^2$.

故若　$x=5$, $y=2$,　　　　則　$z=3\cdot5\cdot2^2=60$.

習題一五二

1.　若 z 跟着 x 正變,跟着 y 反變,而 $x=28$, $y=2$, 則 $z=7$; $x=15$, $y=5$, $z=?$

2.　若 z 跟着 x 的平方正變,跟着 y 的平方根反變, $x=3$, $y=1$, 則 $z=4$; $x=4$, $y=1$, $z=?$ $x=4$, $y=16$, $z=?$ $y=9$, $z=2$, $x=?$

3.　若 A 跟着 B 和 C 正變, $B=\frac{3}{5}$, $C=\frac{10}{27}$, 則 $A=2$; $A=54$, $B=3$, $C=?$

4. 若 y 跟着 x^2 正變,跟着 z^3 反變,而 $x=-1$, $z=2$, 則 $y=1$; $x=3$, $z=-1$, $y=$?

5. 若 $A\propto B$, $B\propto C$, 證明 $A\propto C$.

6. 若 A 跟着 B, C 正變,證明 B 跟着 $\frac{C}{A}$ 反變。

7. 物體從空中自由地落下來,牠從起點所落下的距離跟着牠所落的時間的秒數的平方正變; 5 秒鐘一共落下 $128\frac{1}{8}$ 公尺, 10 秒鐘牠一共落下多少?第十秒鐘這一秒鐘牠落下多少?

8. 地心作用於地球以外的物體的引力跟着地心到這物體的距離的平方反變。若一物體在地球表面重 9 公斤,這物體離地面多少高就只有 4 公斤重?(地球的半徑算是 6440 公里。)

第二十四章

級　數

一　何謂級數

226. **定義.** 依照一定的法則排列的一羣數,叫做'級數'。如

1, 2, 3, 4, 5, 次第大1;

11, 9, 7, 5, 3, 1, 次第小2;

2, 4, 8, 16, 32, 次第大1倍;

2, 5, 11, 23, 次第加倍多1;

都是級數。

級數中的一個數,叫一'項'。

第一數,叫'首項'。

末一數,叫'末項'。

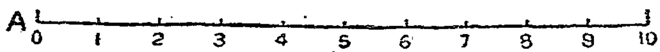
級數所含的項的個數,叫'項數'。

級數各項相加得的總數,叫'級數的和',或簡稱'和'。

二　算術級數

227. 〔例題〕 十個球,在地上排成一直線,每兩

球相距5尺。有一個小孩,站在這條直線的一端,距第一個球5尺,他一次一個地順着將球取到所站的地方,共要走多少尺路?



第 23 圖

這個小孩站在A點,他取第一球回到A,要走10尺路;取第二球要走20尺;取第三球要走30尺……。所以一共要走的路是

$$(10+20+30+40+50+60+70+80+90+100)\text{ 尺。}$$

這個括弧裏的級數,牠的每項和兩鄰的各一項相差都一樣地是10.這樣的級數就叫'算術級數';有些人又叫牠爲'等差級數',因爲每相鄰兩項的差總是相等的。這個每相鄰兩項中,任一項減去牠的前一項的差,稱爲'公差'。

再舉一個算術級數的例,如

$$6+3+0-3-6\cdots\cdots.$$

這級數的公差就是-3.

三 算術級數的和

228. 這種級數,若是牠的項數不多,要求牠的和只須將各項逐一地加攏來就可以了。但是,假如項數比較的多,那就非常困難,因爲這樣,我們就得找出一

個一般的簡便的方法來。下面的幾個問題,就暗示着這個方法。

第一項和末一項的和是什麼?第二項和倒數第二項的和呢?第三項和倒數第三項的和呢?牠們的和相等嗎?

這個計算可以較簡明地表示如下:

設S是這級數的和,則

$$S=10+20+30+\cdots\cdots+80+90+100.$$

將這級數的順序倒過來寫,則

$$S=100+90+80+\cdots\cdots+30+20+10.$$

兩式相加,

$$2S=110+110+110+\cdots\cdots+110+110+110$$
$$=110\times10=1100.$$

$$\therefore\quad S=550.$$

所以,這個小孩一共要走550尺路。

229. 讓我們來研究算術級數的末項和首項的關係,設首項爲a,公差爲d,項數爲n,末項爲l,依算術級數的定義,得

第二項 $-a=d$,

第三項 $-$ 第二項 $=d$,

第四項 $-$ 第三項 $=d$,

…………………………

$\therefore$ 第二項 $=a+d$,

第三項＝第二項$+d$

$=a+2d,$

第四項＝第三項$+d$

$=a+3d,$

…………………………………

這樣看起來,公差的個數和項數的位次有什麼關係?

所以: $l=a+(n-1)d.$

〔例題〕 求$5+9+13+\cdots\cdots$的第12項。

這裏: $a=5,\ d=9-5=4,\ n=12.$

$\therefore\quad l=5+(12-1)4=49.$

習題一五三

下列各級數中,那幾個是算術級數?將牠們的和求出來:

1. $2+6+10+14+\cdots\cdots$到20項。
2. $4+7+10+7+4\cdots\cdots$到16項。
3. $-3+2+7+12+\cdots\cdots$到12項。
4. $1+2+4+8+\cdots\cdots$到18項。
5. $12+6+0-6-12-\cdots\cdots$到14項。
6. $15+11+7+3+\cdots\cdots$到10項。
7. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$到22項。
8. $2+2.4+2.8+3.2+\cdots\cdots$到12項。

9. $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots$到 8 項。

10. $10.6+8.2+5.8+3.4+\cdots\cdots$到 14 項。

11. $4\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+2+\frac{3}{4}+\cdots\cdots$到 16 項。

12. $1+1.1+1.11+1.111+\cdots\cdots$到 15 項。

13. 在算術級數中,正數和倒數,數目相同的項的平均數怎樣?

四 算術級數的和的一般形式

230. 求首項為 a, 公差為 d 的算術級數的 n 項的和。

這第 n 項 l 是 $a+\overline{n-1}\,d$, 則

$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-2d)+(l-d)+l.$

將級數的順序倒過來,

$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a.$

兩式相加,

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots$$
$$+(a+l)+(a+l)+(a+l)=n(a+l).$$

$$\therefore\quad S=\frac{n(a+l)}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}.$$

但 $\quad a+l=a+(a+\overline{n-1}\,d)=2a+\overline{n-1}\,d.$

$$\therefore\quad S=\frac{n}{2}(2a+\overline{n-1}\,d)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}.$$

若用 $n=1$ 來試驗這兩個求和的公式,則 $S=\frac{1}{2}\cdot 2a=a,$

這是沒有錯的。

這兩個公式為了求算術級數的和,務須記好。

習題一五四

用公式求下列各算術級數的和:

1. $1+2+\cdots\cdots$到 100 項。
2. $1+3+\cdots\cdots$到 50 項。
3. $-6-1+\cdots\cdots$到 13 項。
4. $7+0+\cdots\cdots$到 15 項。
5. $2.3-1.1-\cdots\cdots$到 10 項。
6. $2\frac{1}{3}-1-\cdots\cdots$到 12 項。
7. $a+(-b)+\cdots\cdots$到 6 項。

下列各二數都是 14 項的算術級數的第一項和末項,求各級數的和:

8. 3 和 97.
9. -1 和 16.
10. 3.6 和 6.4.
11. $x+y$ 和 $y-y$.
12. 自鳴鐘一晝夜共響多少下?

五 算術中數和算術中項

231. 定義. 若三個數成為一個算術級數,則中間的一數稱為其他兩個數的算術中數。

〔練習 1〕 求下列各二數的算術中數: (i) 4 和 6, (ii) 2 和 8, (iii) 2 和 7, (iv) 3 和 10, (v) 4 和 -1, (vi) 0 和 -3, (vii)

0和a, (viii) x和y.

若a, b, c三個數成為一個算術級數,則

$$b-a=c-b.$$

$$\therefore \quad 2b=a+c.$$

$$\therefore \quad b=\frac{a+c}{2}.$$

所以,兩個數的算術中數就是牠們的和的一半。實際就是兩個數的平均數。

232. **定義.** 若干數成一個算術級數,則首,末二項外的各項,稱為首,末二項的算術中項。

若在a, b二數間要插入m個算術中項,就是將a作首項,b作末項,把m個數排進去,恰成一個算術級數的意思。

這個算術級數有多少項?

因為 $$b=a+(m+2-1)d$$
$$=a+(m+1)d.$$

而 $$d=\frac{b-a}{m+1}.$$

故所插進的數為:

$$a+\left(\frac{b-a}{m+1}\right),\ a+2\left(\frac{b-a}{m+1}\right),\cdots\cdots a+m\left(\frac{b-a}{m+1}\right).$$

〔例題〕 求在64和38間插入12個算術中項。

這裏: $$a=64,\ b=38,\ m=12.$$

$$\therefore\quad d=\frac{38-64}{12+1}=-2.$$

所插進的數爲:

62, 60, 58, 56, 54, 52, 50, 48, 46, 44, 42, 40.

習題一五五

1. 求下列各算術級數中所缺的各項:

(i) 3, ?, 6, ?, ?. (ii) 2, ?, ?, 10, ?.

(iii) ?, 12, ?, ?, ?, 1. (iv) ?, ?, 14, ?, ?, -2.

2. $a+b$ 和 $a-b$ 的算術中數是什麽?

3. 證明算術級數的第一項和末一項的算術中數,就等於第二項和倒數第二項的。

4. 證明算術級數 n 項的和,等於第一項和末一項的算術中數的 n 倍。

5. 4621 是算術級數 4, 7, 10……的一項嗎?

6. -373 是算術級數 5, -7, -19……的一項嗎?

7. 算術級數的第三項是 7,第九項是 18;求牠的第一項和第六項。

8. 算術級數的第二項是 12, 而第七項是 -5,求牠的第五項和第八項。

9. 用同樣的數乘算術級數的各項,所得的結果還是算術級數嗎?(先舉一個例做來看。)用同樣的數加入算術級數的各項,結果還是算術級數嗎?

10. 求從 1 到 $2n-1$ 各奇數的和。

11. 從51到100各整數的和,牠比從1到50各整數的和大多少?

12. 用公式 $S=\frac{n}{2}(2a+\overline{n-1}d)$,

(i) 將 S, n 和 d 的項表出 a: 因而求牠的和爲100, 公差是 $1\frac{1}{2}$ 的20項的算術級數的第一項。

(ii) 將 S, n 和 a 的項表出 d: 因而求牠的和爲1331, 首項是3的11項的算術級數的公差。

(iii) 若一個算術級數的第一項是2, 公差是3, 和是100, 牠有多少項?

13. 某人第一年存150元,以後逐年都比先一年多存10元。問到25年末共存多少元?

14. 有一人乘馬,第一小時的速率爲每小時12里,以後每小時的速率比前一小時的加 $\frac{1}{2}$ 里。問15小時他一共走了多少里?

15. 一架樓梯共有24級,第一級闊1尺, 以後每一級比上級闊半寸, 求樓梯各級闊的和。

16. 求於8和20中間插入6個算術中數。(就是插進6個數去,使8個數恰好成一個算術級數。)

17. 求於50和80中間插入8個算術中數。

18. 求於 $a-5b$ 和 $b-5a$ 中間插入8個算術中數。

19. 證明算術級數的各奇數項也成算術級數。

20. 算術級數的各相鄰兩項間都插入算術中數,結果還是算術級數,試證明牠。

六 幾何級數

233. 〔例題1〕 某人第一年存1元,以後每年所存的照前一年的加倍;問在十年中共存多少元?

第一年存1元,則第二年存2元,第三年存4元;十年中所存的總數是

$$(1+2+4+8+16+\cdots\cdots+512)\text{ 元。}$$

這級數的特性,就是相鄰兩項的比都是相等的;例如 $2:1=4:2=8:4=\cdots=2$, 這樣的級數稱爲'幾何級數',有些人又叫牠是'等比級數'。其中任一項對於牠的前一項的比稱爲'公比'。

再舉一個幾何級數的例,如

$$12+4+1\tfrac{1}{3}+\tfrac{4}{9}+\cdots\cdots.$$

這級數的公比就是$\frac{1}{3}$.

又 $$8-4+2-1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+\cdots\cdots$$

也是幾何級數,牠的公比是$-\frac{1}{2}$.

234. 求幾何級數的和S的方法如下:

$$S=1+2+4+8+16+\cdots\cdots+512.$$

這級數又可寫成

$$S=1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots+2^9.$$

用公比2乘牠,

$$2S=2+2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots\cdots+2^{10}.$$

從這一個式子減去前一個,

$$S=-1+2^{10}.$$

2^{10}為1024,所以這個和是1023;就是某人十年共存1023元。

235. 〔例題2〕 求幾何級數$3-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\cdots\cdots$十項的和。

這裏的公比是$-\frac{1}{3}$,所以這個級數的和可寫成

$$S=3+3(-\tfrac{1}{3})+3(-\tfrac{1}{3})^2+3(-\tfrac{1}{3})^3+\cdots\cdots$$
$$+3(-\tfrac{1}{3})^8+3(-\tfrac{1}{3})^9.$$

〔注意〕 第十項所含的公比的指數是9而不是10.

用公比$-\frac{1}{3}$去乘,

$$-\frac{S}{3}=3(-\tfrac{1}{3})+3(-\tfrac{1}{3})^2+3(-\tfrac{1}{3})^3+\cdots\cdots$$
$$+3(-\tfrac{1}{3})^8+3(-\tfrac{1}{3})^9+3(-\tfrac{1}{3})^{10}.$$

兩式相減, $$\frac{4S}{3}=3-3\left(-\frac{1}{3}\right)^{10},$$

$$\therefore\quad S=\frac{3}{4}\left\{3-3\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}.$$

但 $$\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}=(-1)^{10}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$=\frac{1}{3^{10}},$$ 因-1的偶數方等於$+1$.

$$\therefore\quad S=\frac{3}{4}\left\{3-3\times\frac{1}{3^{10}}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{9-\frac{1}{3^8}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(9-\frac{1}{6561}\right).$$

習題一五六

1. 下列各級數中,那幾個是幾何級數?求牠們的公比:

(i) $2,\ 4,\ 8,\cdots\cdots$.　(ii) $2^2,\ 4^2,\ 8^2,\cdots\cdots$.

(iii) $\frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\cdots\cdots$.　(iv) $1\frac{1}{3},\ 1\frac{1}{6},\ 1\frac{1}{12},\cdots\cdots$.

(v) $9,\ -3,\ 1,\cdots\cdots$.　(vi) $10,\ -5,\ -2\frac{1}{2},\cdots\cdots$.

(vii) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{9},\cdots\cdots$.　(viii) $x,\ x^2,\ x^4,\ x^8,\cdots\cdots$.

(ix) $1,\ -1,\ 1,-1,\cdots\cdots$.　(x) $1,\ 0,\ 1,\ 0,\cdots\cdots$.

2. 簡單下列各數,不必將乘方展開:

$3(\frac{1}{3})^8,\ 9(\frac{1}{3})^9,\ 7^3(\frac{1}{7})^{10},\ 8(\frac{1}{2})^7,\ 28(\frac{1}{7})^{12},\ 5^6(\frac{1}{5})^6,$

$130(\frac{1}{10})^8,\ (-\frac{1}{2})^{12},\ (-\frac{1}{2})^{13},\ (-\frac{1}{2})^{14},\ 3(-\frac{1}{3})^8,$

$7^2(-\frac{1}{7})^9,\ (-5)^6\times(-\frac{1}{5})^{10},\ 6(-\frac{1}{3})^{11},\ 10(-\frac{1}{5})^9.$

3. 若 n 是整數,證明

(i) $(-1)^{2n}=1$,　(ii) $(-1)^{2n+1}=(-1)^{2n-1}=-1$,

(iii) $(-1)^{n+1}=(-1)^{n-1}$.

4. 求第一題中各幾何級數的第八項和第九項;但不必展開。

5. 求第一題中各幾何級數的第 n 項。[若不知道 n 是偶數或奇數,不能將 $(-1)^n,(-1)^{n-1}$ 這樣的式子化簡單。]

6. 求下列各幾何級數的和;不必將乘方展開:

(i) $2+6+\cdots\cdots$到 10 項。

(ii) $5-15+\cdots\cdots$到 10 項。

(iii) $5-15+\cdots\cdots$到 11 項。

(iv) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$到 6 項。

(v) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$到 7 項。

七 幾何級數的和的一般形式

236. 求首項爲a,公比爲r的幾何級數的n項的和。

這級數是 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots.$

在'第二項'裏,r 的指數是 1,

在'第三項'裏,r 的指數是 2,

……………………………………

在'第 n 項'裏,r 的指數是 $n-1$.

因而 $l=ar^{n-1}$,

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}.$$

用公比 r 去乘,

$$rS=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n.$$

兩式相減, $S-rS=a-ar^n$. $\therefore\ S(1-r)=a(1-r^n)$.

$$\therefore\ S=a\frac{1-r^n}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}.$$

上式須 $r<1$ 的時候纔可用,若 $r>1$, 則

$$S=a\frac{r^n-1}{r-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}.$$

又 $S-rS=a-ar^n=a-rl.$

$$\therefore\quad (1-r)S=a-rl.$$

而
$$S=\frac{a-rl}{1-r}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{(iii)}.$$

若 $1-r^n$ 除以 $1-r$, 照通常的除法除下去,原來的幾何級數就可以得出:

$$\begin{array}{l}
1-r)\,1-r^n\,(1+r+\cdots\cdots+r^{n-1}\\
\quad\underline{1-r}\\
\qquad r-r^n\\
\qquad\underline{r-r^2}\\
\qquad\quad r^2-r^n\\
\qquad\quad\underline{\cdots\cdots}\\
\qquad\quad\ \cdots\cdots\\
\qquad\quad\underline{\cdots\cdots}\\
\qquad\quad r^{n-1}-r^n\\
\qquad\quad\underline{r^{n-1}-r^n}
\end{array}$$

$$\therefore\quad a\frac{1-r^n}{1-r}\equiv a(1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1})$$
$$\equiv a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}.$$

習題一五七

用公式求下列各幾何級數的末項及和;乘方不必展開:

1. $32+48+\cdots\cdots$ 到 6 項。　2. $\frac{7}{45}+\frac{1}{9}+\cdots\cdots$ 到 4 項.

3. $\frac{21}{4}-\frac{9}{2}+\cdots\cdots$ 到 6 項。　4. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$ 到 8 項。

5. $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\cdots\cdots$ 到 7 項。　6. $-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots$ 到 6 項。

7. $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+\cdots\cdots$到12項。 8. $1-1.2+\cdots\cdots$到 9 項。

9. $108+72\cdots\cdots$到5項。 10. $1+\sqrt{2}+\cdots\cdots$到 6 項。

求下列各幾何級數的和:

11. $3+6+\cdots\cdots+192$. 12. $1-3+\cdots+6261$.

13. $8+4+\cdots\cdots+\frac{1}{8}$. 14. $0.1+0.5+\cdots+312.5$.

八 幾何中數和幾何中項

237. **定義.** 若三個數恰成一個幾何級數,那中間的一個便稱爲其他兩個數的'幾何中數'。

〔練習2〕 求下列各兩數的幾何中數:

(i) 1和9, (ii) 2和18,

(iii) 1和25, (iv) 3和75,

(v) 1和$\frac{1}{4}$, (vi) 3和$\frac{3}{4}$,

(vii) 1和x^2; (viii) a和ax.

若a, b, c三個數成一個幾何級數,則

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}.$$

$$\therefore\quad b^2=ac.$$

$$\therefore\quad b=\pm\sqrt{ac}.$$

所以,兩個數的幾何中數,就是牠們的積的平方根。

這個中數,有時候也叫做那兩數的'比例中項'。牠的

值我們通常只用正的一個。

〔練習 3〕　證明正方形的一邊的長,爲等面積的矩形的兩邊的長的幾何中數。

〔練習 4〕　兩個數的算術中數和幾何中數,那一個大? 用下面的幾對數來證明牠: 2 和 8, 3 和 48, $\frac{1}{4}$ 和 100, 27 和 $\frac{1}{3}$.

238. 定義. 若干數成一個幾何級數,則首,末二項外的各項,稱爲首,末二項的幾何中項。

若在 a, b 二數間要插入 m 個幾何中項,就是將 a 作首項, b 作末項,把 m 個數排進去,恰成一個幾何級數的意思。

這個幾何級數有多少項?

$$\therefore \quad b=ar^{m+2-1}=ar^{m+1},$$

而
$$r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

因爲求 r 須求 $\frac{b}{a}$ 的 $m+1$ 次方根,所以,只有 a, b, m 有特殊的關係時,我們纔求得有理數的解答來,而插進去的數爲:

$$a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right),\ a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^2,\ \cdots\cdots\ a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^m$$

〔例題〕　求於 3 和 48 間插入 3 個幾何中項。

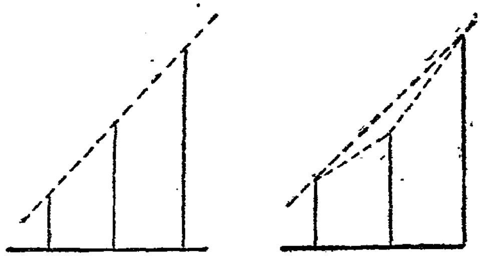
這裏:　　$a=3,\quad b=48,\quad m=3.$

$$\therefore \quad r=\sqrt[4]{\frac{48}{3}}=\sqrt[4]{16}=2.$$

所插進的數為:　6, 12, 24.

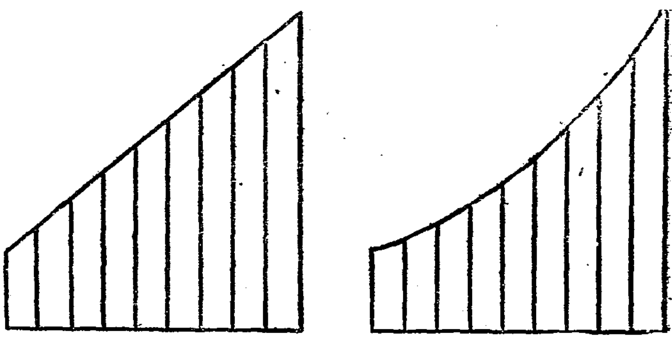
九　兩種級數的比較

239. 算術級數和幾何級數各項的關係,用下圖線就可表明;就是 a, b 兩數的算術中數大於牠們的幾何中數;而同數目的算術中項和幾何中項,順次比較,也是前者大於後者。



算術中數　　幾何中數

第 24 圖



算術級數　　幾何級數

第 25 圖

習題一五八

1. 填出下列各幾何級數所缺的各項:

(i) $2, ?, 50, ?$.　　(ii) $?, 1, ?, \frac{1}{4}$.

(iii) $27, ?, 48$.　　(iv) $1, ?, ?, 27$.

2. 求下列各二數的幾何中數:

(i) 4和9的。　　(ii) a^3b和ab^3的。

(iii) 12和$\frac{3}{4}$中的三個。　(iv) $\frac{2}{3}$和$\frac{81}{16}$中的四個。

3. 一個數和牠的倒數的幾何中數是什麼?

4. 證明幾何級數的第一項和末項的幾何中數,等於牠的第二項和倒數第二項的。

5. 證明幾何級數的各項的倒數,仍然成爲一個幾何級數。算術級數也有同樣的性質嗎?

6. 幾何級數的奇數項或偶數項,也是幾何級數,試證明牠。

7. 幾何級數各項的對數成爲一個算術級數,試證明牠。

8. 證明幾個正方形的邊若成幾何級數,則牠們的面積也成爲幾何級數。

9. 管裏的空氣,用抽氣機每次可以抽出一半,問7次共抽出多少?

10. 一幾何級數共100項,牠的公比爲r;試證明牠各偶數項的和等於各奇數項的和的r倍。

11. 一幾何級數的項數是偶數;若將公比 r 的符號改變;則這兩個級數的和的比爲 $1+r:1-r$. 試證明牠。

12. 證明複利息每年年終的本利和,成爲一個幾何級數。單利息的怎樣?

十 用對數計算幾何級數

240. 〔例題1〕 某人每年年終儲蓄80元,年利百分之 $2\frac{1}{2}$ 的複利;30年的年終,他一共儲蓄了多少元?

讓我們將這個問題的一般的形式討論於下:

每年年終所付的存款	$=P$ 元;
年利率	$=r$;
年數	$=n$;
n 年的年終一共儲蓄的	$=A$ 元。

第一年年終所付的存款 P 元,有 $(n-1)$ 年的利息;假定最末一年的利息恰好算淸,而第 n 次的存款 P 元就付了進去。

第一個 P 元到第二年年終變成 $P\left(1+\frac{r}{100}\right)$ 元;到第三年年終變成 $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ 元;照樣下去,到第 n 年年終變成 $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}$ 元。

第二個 P 元到第 n 年年終變成 $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-2}$ 元;照

樣可以再推下去。

最末一個 P 元沒有利息。

一共儲蓄的元數是

$$P+P\left(1+\frac{r}{100}\right)+P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2+\cdots\cdots+P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}$$

$$=P\frac{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1}{\left(1+\frac{r}{100}\right)-1}=\frac{100\,P}{r}\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right\}.$$

$$\therefore\quad A=\frac{100\,P}{r}\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right\}.$$

若 $P=80$ 元, $r=2\frac{1}{2}$, $n=30$; 則

$$A=\frac{100\times 80}{2\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{2\frac{1}{2}}{100}\right)^{30}-1\right\}$$

$$=3200\{1.025^{30}-1\}.$$

$(1.025)^{30}$ 必須用對數來計算,由 4 位對數表上,得

$$\log 1.025=0.0107.$$

$$\therefore\quad \log\,(1.025)^{30}=0.0107\times 30=0.321.$$

這最後一個數,只能有兩位小數是正確的,就是說 $(1.025)^{30}$ 的値,由四位對數表只能得出兩位數字正確的數來。所以要用 30 這末大的數去乘對數,須用5位或 5 位以上的對數表。這個題可用書末附的 7 位對數計算。

用這個表:

$A=3200(1.025^{30}-1)$

$=3200(2.097-1)$

$=3200\times 1.097$

$=3510$，有三位數字正確。

No.	Log
1.025	0.0107239
$(1.025)^{30}$	0.321717

這人一共儲蓄的是3510元，但他實在付過的是2400元；所以他得了1110元的利息。

241. 〔例題2〕 年利率$2\frac{1}{2}\%$的複利，20年的年終要共存1000元，一年應當存多少？

這裏$r=2.5$，$n=20$，$A=1000$；P是多少？

用前節的公式，

$$1000=\frac{100P}{2.5}(1.025^{20}-1).$$

$$\therefore \quad P=\frac{25}{1.025^{20}-1}$$

$$=\frac{25}{1.639-1}$$

$$=\frac{25}{0.639}$$

$$=39.12.$$

NO	Log
1.025	0.01072
$(1.025)^{20}$	0.2144
25	1.3979
0.639	$\bar{1}.8055$
39.12	1.5924

每年約須存39元1角2分。若不算利息，20年要存1000元，每年就必須存50元。

〔例題3〕 年利率$2\frac{1}{2}\%$的複利，每年存80元，多少年可共存4000元？

這裏是：$P=80$，$A=4000$，$r=2.5$，求n是什麼？

由公式, $4000=\frac{8000}{2.5}(1.025^n-1)$.

$\therefore\quad 1.025^n-1=1.25.$

$\therefore\quad 1.025^n=2.25.$

$\therefore\quad n\log 1.025=\log 2.25.$

$\therefore\quad n=\frac{\log 2.25}{\log 1.025}=\frac{0.3522}{0.0107}$

$=32.9.$

NO	Log
0.3522	$\bar{1}.5467$
0.0107	$\bar{2}.0294$
32.91	1.5173

∴ 在33年可得4000元稍多一點。若不算利息,那就須50年。

習題一五九

1. 若一個玻璃球跳在大理石的地面上,每次回跳的高,爲先一次的十分之九。有一個球從6尺高垂直的落下。求牠第十二次落到地面上,一共大約經過多少尺的距離?

2. 某處每年人口的增加爲本年一月一日的百分之3,若1890年的一月一日有53000人,求到1909年一月一日,那裏共有多少人?

3. 有一個人,一連十年,每年初存100元到銀行,說明年利率百分之$3\frac{1}{2}$的複利。求他到第十年年末本利共存了多少元?

4. A現年25歲,預定60歲時退隱,並且想在退隱時有3000元的存款。年利率百分之3,照複利計算,每

年的年終應存款多少元?

5. 某甲每年存50元,年利率百分之3,依複利計算,到了剛超過2000元的時候取回,問他已付了多少年?

6. 若在第25圖中,最短的縱線長$\frac{1}{2}$公分,而最長的爲4公分。求這個幾何級數的公比,和那十個縱線的和。

十一 無窮級數

242. 有一水漕,盛水2尺深,漕底有一孔漏水。若第一小時漏去1尺,則還剩1尺深。照通常的想法,可以假定第二小時就漏盡,但實驗的結果卻不是這樣;水漏出的速率實在是逐漸減小的;也許第二小時,只漏出$\frac{1}{2}$尺;第三小時,只漏出$\frac{1}{4}$尺;第四小時,只漏出$\frac{1}{8}$尺;這樣繼續下去。

現在先研究各小時後,有多少水剩在漕裏面。第一小時,漏出1尺,還剩1尺;第二小時,漏出$\frac{1}{2}$尺,剩$\frac{1}{2}$尺;第三小時,漏出$\frac{1}{4}$尺,剩$\frac{1}{4}$尺。由此可以看出來,每小時末所剩的水,就是每小時起初漕裏所有的水的一半;也就是每小時的末了所剩的水,恰是那一小時中漏出的。

於是,我們可以得出下面的表來:

時數	漏出的水的總數	剩的水
1	1	1
2	$1+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$
4	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$
…	…………………	…
…	…………………	…
10	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^9}$	$\frac{1}{2^9}$

但$\frac{1}{2^9}=\frac{1}{512}$；所以10小時後只剩$\frac{1}{512}$尺水。在事實上，水到這樣淺的時候，漏出的速率不免又要受別的影響，如氣化和漕底的孔的不規則等，發生其他的變化。這裏爲算學上的討論便利起見，假定這些影響都不存在。

243. 這裏我們來研究這幾何級數，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots.$$

當所取的項數漸漸地多起來的時候，牠的這增加的情形怎樣?

這是非常明白的，無論等到多少小時，漕裏面所漏出的水的和，總是不會比2尺多的。若等到10小時，則

漏出的水等於 2 尺'減去'所剩的。

$$\therefore\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^9}=2-\frac{1}{2^9}.$$

若照通常的方法求這個級數的和,所得的結果自然也是一樣。

同樣地, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{10}}=2-\frac{1}{2^{10}}$, 可以照樣推下去。

實際是這樣,這個級數的項數取得越多,牠的和同 2 越相近。這個數同 2 能怎樣地相近呢?

假定我們要使這個級數的和同 2 的差小於 $\frac{1}{10000}$.

若我們取 $n+1$ 項,則

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}.$$

現在這個和是比 2 小 $\frac{1}{2^n}$. n 必須要多大, $\frac{1}{2^n}$ 纔能等於或小於 $\frac{1}{10000}$ 呢?我們很容易試出這個答案來。我們求得

$$\frac{1}{2^{13}}=\frac{1}{8192}\text{ 和 }\frac{1}{2^{14}}=\frac{1}{16384}<\frac{1}{10000}.$$

所以,若是我們取 15 項這個和同 2 的差就小於 $\frac{1}{10000}$ 了。

我們要取多少項,纔能使這個和同 2 的差小於 $\frac{1}{50000}$, 小於 $\frac{1}{100000}$ 呢?

這好像十分明白,這個可以推到無窮。實際,假設有一個人,任意說出一個極小的數,並且問要取多少項,這個和同 2 的差比牠小;別一人總可求出這必須要取的項數來。

雖是這樣,要取足了項數,使這個和'等於' 2, 這卻是不可能的。$\frac{1}{2^n}$ 的差無論怎樣總是有的,而且無論 n 怎樣的大, $\frac{1}{2^n}$ 總常常有'一些'决不等於零。

但是,這個級數的 n 項的和,由 n 取得夠大的時候,可以使牠照我們所想的,和 2 相近。

這個話,簡單地說,就是,當 n '近於'無窮大的時候,這個 n 項的和近於'極限' 2. 算學的記號是

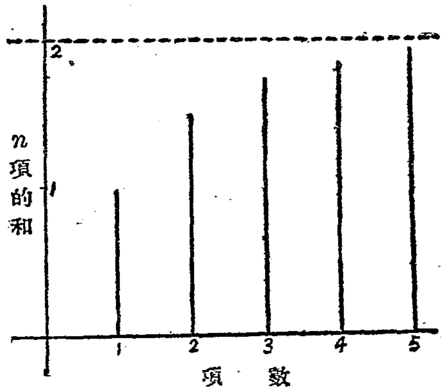
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\to 2,\ 當\ n\to\infty.$$

244. 這是應當注意的,這個和永不能等於 2, 項數也永不能到無窮大。'近於無窮大'的意思就是'無限增加'。

第 26 圖 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots$的 n 項的和怎樣近於牠的'極限值'* 2?

---

* 極限值就是和牠無論如何相近都可以, 但總不能等於牠,這樣的一個值。



第 26 圖

245. 〔例題 1〕 設 $n\to\infty$,求下面的級數的 n 項的和的極限值:

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots\cdots+\frac{3}{10^n}.$$

這個級數是和 0.3333……到 n 位一樣。

用 S 表示 n 項的和,照常用的方法寫出這個級數的 n 項的和,則

$$S_n=\frac{3}{10}\cdot\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1-\frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right).$$

但 當 $n\to\infty$ 時,則 $\dfrac{1}{10^n}\to 0$.

$\therefore$ 當 $n\to\infty$ 時, $S_n\to\frac{1}{3}$.

$\therefore$ 0.333……到 n 位 $\to\frac{1}{3}$, 當 $n\to\infty$ 的時侯;這等於說 $0.\dot{3}=\frac{1}{3}$.

〔練習5〕 上面的級數,要取多少項,則其和同極限值的差小於 $\dfrac{1}{1000000}$?

〔例題2〕 $n\to\infty$,求下面的級數的n項的和的極限值:

$$4-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots.$$

第27圖指示出這級數的1,2,3,4等項的和。

這圖線指示我們,這個級數的n項的和因了n的增大而不同,但總是一個在極限之上,一個在極限之下,牠從兩邊漸近於極限。

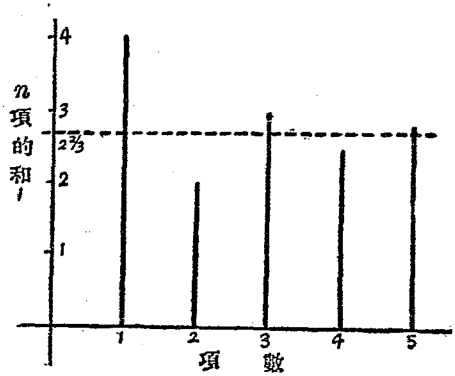
公比是 $-\frac{1}{2}$,並且

$$S_n=4\cdot\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})}=4\cdot\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{8}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}.$$

現在 $(-\frac{1}{2})^n$ 因n是偶數或奇數,便是正的或負的。

$\therefore$ $S_n\lesseqgtr\frac{8}{3}$,就看n是偶數或奇數。



第 27 圖

$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 的絕對值爲 $\frac{1}{2^n}$, 當 $n\to\infty$ 時, 牠 $\to 0$.

但

$$S_n=\frac{8}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\therefore\quad S_n\to\frac{8}{3}, \text{當 } n\to\infty.$$

圖中高於水平虛線的各點, n 越大越近於虛線; 而低於虛線的各點, 也是這樣,所以 $\frac{8}{3}$ 就是牠們的極限。

246. 前面纔研究過的各幾何級數, 當項數無限制增加的時候,牠的和就近於極限。這些幾何級數是遞降的, 每項的數值總比前一項的小。

若是一個遞升的幾何級數, 例如

$$3+6+12+24+48+\cdots\cdots,$$

那就很明白的，項數 n 增多而沒有限制，則各項也就逐漸大起來沒有極限。同樣地，n 沒有限制的增多，n 項的和也增大而沒有極限。這類級數的和是沒有極限的。

再設想這樣的級數，

$$2+1\tfrac{1}{2}+1\tfrac{1}{4}+1\tfrac{1}{8}+1\tfrac{1}{16}\cdots\cdots.$$

這個旣不是算術級數，也不是幾何級數。(為什麼不是?)他雖是一個遞降級數，但是，當 n 增大的時候，第 n 項卻不會變成無限小。無論 n 大到怎樣的程度，第 n 項常是大於 1. 這是很明白的，所以 n 項的和總大於 n；而取夠了項數，這個和總能夠變得比我們所指出的數大。例如，我們要使這和大於 1000000，我們可取 $n=1000000$.

這級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots$，因為 $n\to\infty$，$S_n\to2$，就是項數無限增大時，牠的和有一定的極限值。這叫做'收斂級數'。同樣地，$4-2+1-\frac{1}{2}+\cdots\cdots$ 因為 $n\to\infty$，$S_n\to\frac{8}{3}$，也是一個'收斂級數'。

這級數 $2+1\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{8}+\cdots\cdots$，牠的 n 項的和，只須將項數取足，可以被弄成照我們所要的一般大；就是項數無限增大時，牠的和沒有一個極限值；這叫做'發散級數'的例。凡正項遞升的級數都是'發散級數'。

247. 有的級數，雖牠的各項無限地減小，只要 n 取得夠大，牠的第 n 項可以被弄成照我們所想的數

一般樣小,但牠可以還是'發散級數';這是很重要的。設想這樣的級數,

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\cdots\cdots.$$

這既不是算術級數,也不是幾何級數。但有一點應當特別注意:

在一級數中,其各項的倒數恰成一個算術級數的,稱爲調和級數。

牠的第n項是$\dfrac{1}{n}$,n的值取得夠大的時候,可以被弄成任何小,但牠仍是發散級數。

這級數可寫成

$$1+\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+\tfrac{1}{9}\cdots\cdots.$$

而 $$\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}>\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4},$$

$$\therefore\quad \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}>\tfrac{1}{2}.$$

又 $$\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}>\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8},$$

$$\therefore\quad \tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}>\tfrac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

設若一共取若干項,而最後一項爲 2 的乘方的倒數$\dfrac{1}{2^n}$.這些項可以照上面一樣分成許多組,連起首的 1 和 $\tfrac{1}{2}$ 共有 $n+1$ 組。

這些項的和$>1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\tfrac{1}{2}$,共有$n$個。

就是 $$>1+\frac{n}{2}.$$

$\frac{n}{2}$ 的值，只要 n 取得夠大，是可以照我們的意思弄得很大的。所以這個級數是'發散級數'。

248. 幾何級數的一般的形式是

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots.$$

我們已經知道，若 r 的數值大於 1，則各項的數值無限地增加，並且這級數是不能收斂的。這裏來研究：r 的數值小於 1 時，這個級數的 n 項的和的極限。

$$S_n=a\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

這兩項中，$\frac{a}{1-r}$ 的值和所取的項數的多少是沒有關係的；$\frac{ar^n}{1-r}$ 卻隨了 n 的數值變化。因爲 r 的數值小於 1，當 n 變大起來的時候，r^n 的數值就變小起來。若要取 n，使 $\frac{ar^n}{1-r}$ 的數值小於一定的數，即如 $\frac{1}{1000000}$，則 r^n 的數值須小於

$$\frac{1}{1000000}\div\frac{a}{1-r} \text{ 或 } \frac{1-r}{1000000a}.$$

n 常常是可以取得夠大。使 r^n 的數值小於一個數的。

$$\therefore\quad S_n\to\frac{a}{1-r}, \text{ 當 } n\to\infty \text{ 的時候。}$$

這個極限通常稱為'到無窮的和';但這個說法,卻不只限於這樣的例纔可用。

習題一六〇

1. 求下列各幾何級數$n\to\infty$時的n項的和的極限:

(i) $3+1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$, (ii) $8-4+2-\cdots\cdots$,

(iii) $\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots\cdots$, (iv) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots$,

(v) $a-ar+ar^2-\cdots\cdots$(r的數值小於1).

2. 用通常的分數表示下列各循環小數:

(i) $0.\dot{6}$, (ii) $0.\dot{1}\dot{2}$, (iii) $0.\dot{1}4285\dot{7}$, (iv) $0.\dot{9}$.

3. 化$0.\dot{2}9\dot{6}$為一個無窮幾何級數,而求牠的和的極限,證明牠是等於$(0.\dot{6})^3$.

4. 求下列各幾何級數的無窮項的和(到四位數字:

(i) $1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$,

(ii) $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots\cdots$.

5. 某地的租金,第一年須付100元,第二年付50元,第三年付25元;以後每年所付的都是上一年的一半。證明各年所付的租金的總數不能超過某一個一定的值。這個值是什麼?要若干年,所付的租金的總數和這個值的差纔小於1角?

6. 甲所得的獎金第一年 100 元，以後每年所得的都是先一年的百分之 90. 求最初 6 年間共得多少，又最多他一共有得多少的可能？

7. 一金鑛，每年所能開採的數是比先一年的減少百分之 13；第一年採出 260000 磅。求這鑛最多一共可採出多少？[$\log 0.87=\bar{1}.93952.$]

8. 某種樹每年可高長的數量爲先一年的 $\frac{9}{10}$, 1901 年一月牠有 10 尺高。求 (i) 那一年後，每年所長的比 1 寸小；(ii) 最多牠能長多少高？

習題一六一

1. 求幾何級數 $a^3x-a^2x^3+ax^5-\cdots\cdots$ 的 79 項。

2. 一幾何級數的第五項是 61，第十一項是 1647；求牠的第七項。

3. 一算術級數的初二項爲 a, b；求牠的第 n 項及 n 項的和。若 $\dfrac{a}{a-b}$ 是正整數，則那一項等於 0？

4. 若 x, y, z 是幾何級數，證明

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)(x-y+z).$$

5. 求下列算術級數的 $3k-1$ 項的和，

$$12a+10b,\ 13a+6b,\ 14a+2b\cdots\cdots.$$

6. 求下列算術級數的第 $3k+1$ 項，並求這些項的和，

$$4b+2c,\ 4b+5c,\ 4b+8c\cdots\cdots.$$

7. 求 100 到 200 間所有3的倍數的奇數的和。由此,又求 100 到 200 間各非3的倍數的奇數的和。

8. 求下列幾何級數的8項的和,

$$2\sqrt{5}-5\sqrt{6}+15\sqrt{5}-\cdots\cdots.$$

9. 證明任何數若以算術級數的各項作指數,則成一個幾何級數。

10. 證明任幾何級數中,第四,五,六三項的和,是第一,二,三三項的和及第七,八,九三項的和的幾何中數。

11. 分 76 為一幾何級數的三項,並且第一,第三兩項對於第二項的比為 13 : 6.

12. 一幾何級數的第一項比第二項大 8, 而第二與第三項的和為12.求這一個級數。

13. 分100為一個算術級數的5項,其最小的兩項的和為其他三項的和的十七分之三。

14. 連一正方形邊的中點,則又成一個正方形;同樣地,繼續連下去,得第三,第四等正方形。若無限制地做下去,這些正方形的面積的和的極限是什麼?

第二十五章

不等式

一　何謂不等式

249. 八尺布剪去了三尺,還剩五尺,我們就說八尺布比三尺布長。十元錢用去了七元,還剩三元,我們就說十元錢比七元錢多。十二斤棉花少去了九斤,還剩三斤,我們就說十二斤棉花比九斤棉花重。十五立方寸的木塊截去了十二立方寸,還剩三立方寸,我們就說前一塊木頭比後一塊大。一般地說來,A 和 B 兩個量若 $A-B$ 剩一個正數,我們就說 A 大於 B.

反過來說,若 $A-B$ 剩的是一個負數,如 3 尺$-$8 尺, 7 元$-$10 元, 9 斤$-$12 斤和 12 立方寸$-$15 立方寸等,我們就說, B 小於 A.

用記號表示, A 大於 B 寫成 $A>B$. A 大於 B, B 就小於 A, 用記號表示,寫成 $B<A$.

這兩個式子, $A>B$ 和 $B<A$ 就叫'不等式'。

〔練習1〕 將下面各數,從左邊起,依大小的次序排成一排:

$6, -3, 7, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, -14, 5, -6, -2.8.$

250. 由前節的練習看起來,正數總比負數大,這,我們可以一般地證明如下:

設 a 和 b 都代表任意一個數的絕對值,則 $+a$ 是正的, $-b$ 便是負的, $(+a)-(-b)=?$

$+(a+b)$ 是正的,所以 $+a$ 大於 $-b$. a 和 b 既然都是代表任意一個數的絕對值,這就證明了正數總比負數大。

絕對值大的正數比絕對值小的正數那一個大?

絕對值大的負數比絕對值小的負數那一個大?

a 代表任意一個數的絕對值, $(+a)-0=?$

所以正數都大於 0, 用式子表示便是 $+a>0$, 由此可知,若 $b>0$, b 就是正的。

$(-a)-0=?$

所以負數都小於 0, 用式子表示便是 $-a<0$. 由此可知,若 $b<0$, b 就是負的。

二　不等式的諸性質

251. 和等式相似的,不等式有下面的諸性質:

(i)　不等式的兩邊,加上或減去同樣的數,仍是不等式,而且大小的順序不變。

就是,若 $a>b$, 則 $a+c>b+c$, 和 $a-c>b-c$.

$$\because\ a>b, \qquad \therefore\ a-b>0,$$

而 $$(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b,$$

$$\therefore\quad (a+c)-(b+c)>0,$$

$$\therefore\quad a+c>b+c.$$

試證明 $a>b$, 則 $a-c>b-c$.

(ii) 兩個不等式的順序相同,則左邊和左邊相加,右邊和右邊相加,仍是順序相同的不等式。

就是,若 $a>b$, $c>d$; 則 $a+c>b+d$,

$$\because\quad a>b,\qquad \therefore\quad a-b>0,$$

又 $$c>d,\qquad \therefore\quad c-d>0,$$

而 $$(a+c)-(b+d)=a+c-b-d=(a-b)+(c-d),$$

$$\therefore\quad (a+c)-(b+d)>0,$$

$$\therefore\quad a+c>b+d.$$

若 a, b, c, d 都是正的,且 $a>b$, $c>d$; 試證明 $ac>bd$.

〔注意〕 這個性質不限於只是兩個不等式。

(iii) 不等式的兩邊若乘以或除以同樣的正數,仍是不等式,而且大小的順序不變;若乘以或除以同樣的負數,則大小的順序相反。

$$\because\quad a>b,\qquad \therefore\quad a-b>0;$$

而 $$(a-b)c=ac-bc.$$

若 c 是正的,則 $ac-bc>0$, $\quad\therefore\quad ac>bc.$

若c是負的,則$ac-bc<0$, $\therefore$ $ac<bc$.

試證明關於除的。

三 不等式的解法

252. 〔例題1〕 x的值怎樣,則$x^2+5x-16$大於x^2+3x+8?

依題意, $x^2+5x-16>x^2+3x+8$.

兩邊減去x^2和$3x$,得

$$2x-16>8.$$

兩邊加上16,得 $2x>24$.

兩邊除以2,得 $x>12$.

由這例題看起來,不等式的解法完全和方程式的解法一樣;不過解方程式所得出來的數,是方程式中的未知數的值,而解不等式得出來的,只是不等式成立時未知數所應有的限制。

習題一六二

1—8口答。

1. 34, 52, -7, -6大小的順序怎樣?
2. 0, -1.5, 0.02大小的順序怎樣?
3. 怎樣將下列各式中的未知項移到左旁?

 (i) $8x+13>3x+2$.

 (ii) $6x-11<13-2x$.

(iii) $4x^2-5x>5-6x^2+17x$.

(iv) $3<-2x^2+5x$.

4. 怎樣將3題中各式的已知項移到右邊?

5. x的值怎樣,則$7x-2$大於$2x+8$?

6. y的值怎樣,則$5y+3$小於$3y+7$?

7. a的值怎樣,則$8a+5$大於$3a+5$?

8. b的值怎樣,則$12b+3$小於$5b-4$?

解下列不等式:

9. $x^2+11x-15>x^2+6x+5$.

10. $5x^2-3x+14>5x^2-8x-1$.

11. $7x^2+16x+15<7x^2-16x+15$.

12. $(3x+14)+(2x-11)>(2x+7)-(8x-13)$.

253. **定義**。像前節的例題和習題的各不等式,所含的未知數的值須有一種限制,那式子纔能成立的,這稱為'條件不等式';反過來,若不等式中所含未知數的值無論怎樣,那式子都能成立的;這稱為'絕對不等式'。

254. 〔例題2〕 證明a和b兩個數的算術中數大於牠們的幾何中數。

因為實數的平方總是正的,所以

$$(a-b)^2>0.$$

$$\therefore\quad a^2-2ab+b^2>0.$$

兩邊加上$4ab$,得

$$a^2+2ab+b^2>4ab,$$

即 $$(a+b)^2>4ab.$$

兩邊開平方,得

$$a+b>2\sqrt{ab}.$$

兩邊除以2,得

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

這個式子的左邊就是a和b的算術中數,右邊就是a和b的幾何中數,這就證明了例題上所說的。

〔注意〕 這個例中的a和b是沒有限制的,所以

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

是一個絕對不等式。

〔練習2〕 若a和b是正數,證明下面的關係,

$$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca.$$

〔練習3〕 若a和b不相等,並且都是正的,$\frac{a+b}{2}$和$\frac{2ab}{a+b}$那一個大?

255. 〔例題3〕 $3x^2+bx+12=0$中,b的值怎樣,這個方程式的兩個根纔不是虛數,而且不相等?

因為要原方程式的兩個根不是虛數而且不相等,牠的判別式b^2-4ac應當是正的。現在$a=3$, $c=12$, 故必須

$$b^2-4\cdot3\cdot12>0.$$

即 $$b^2-144>0.$$

$$\therefore\quad b^2>144,$$

$$\therefore \quad b>12.$$

我們將$b^2>144$的兩邊開方的時候,本來144的平方根應當有一個$+12$和一個-12,但這裏只用$+12$這一個。這是因爲$b>-12$,不合用的緣故。因爲b若是正的總大於-12,但牠必須還大於$+12$.若b是負的,而大於-12,則牠的絕對值必小於12,牠的平方必小於144,而b^2-4ac是負的,這和題目所要求的不合。

若$b=-13$,則前例中的b^2-4ac等於什麼?

-13比-12那一個大?

那末,前題中的b若小於-12,同着題中所要求的合不合?

256. 依前節所討論的看來,第255節例題的解答只是$+12$,是不完全的,怎樣纔可以得出這完全的解答來呢?我們試另用一個方法來解這不等式,

$$b^2-144>0.$$

將左邊分解因式,得

$$(b-12)(b+12)>0.$$

這式子表明左邊的兩個因式相乘的積是正的。但兩個因式的乘積爲正,則牠們的符號非相同不可,由此得出下面的兩種情形:

(i) $b-12>0$, 和 $b+12>0$;

(ii) $b-12<0$, 和 $b+12<0$.

再仔細考察(i)和(ii).

就(i)說,第一式成立,則第二式當然成立,因爲由

$$b-12>0,\ 得\ b>12,$$

兩邊各加上12,便得$b+12>24$,故$b+12>0$.

就(ii)說,第二式成立,則第一式當然成立,因爲由

$$b+12<0,\ 得\ b<-12,$$

兩邊各減去12,便得$b-12<-24$,故$b-12<0$.

所以(i)和(ii)都只須有一式成立就可以了。

由(i), $b-12>0$, 得 $b>12$.

由(ii), $b+12<0$, 得 $b<-12$.

這就是第255節的例題的完全解答,這個解答表明白b的值若在-12和$+12$當中,則方程式$3x^2+bx+12=0$不能有兩個不相等的實根。

$b=12$或-12的時候,這方程式的根怎樣?

257. 〔例題4〕 解下列不等式,

$$5x-\frac{x}{2}-\frac{1}{3}>3x-\frac{1}{6}+\frac{x}{3}.$$

去分數,得(用各分母的最小公倍數6乘兩邊)

$$30x-3x-2>18x-1+2x.$$

移項,得 $30x-3x-18x-2x>-1+2,$

即 $$7x>1,$$

$$\therefore\ x>\tfrac{1}{7}.$$

〔例題5〕 解下面的不等式,

$$x^2-2x-3<0.$$

分解因式, $(x+1)(x-3)<0.$

因爲左邊兩個因式的積是負的,所以牠們的符號應當不同;這有下面的兩種情形:

(i) $x+1>0, x-3<0;$

(ii) $x+1<0, x-3>0.$

但(ii)是不能成的,因爲$x-3$既是正的,則$x+1$不能是負的;反過來,$x+1$是負的,$x-3$就不能是正的。

由(i), $x+1>0$, 則 $x>-1$;

$x-3<0$, 則 $x<3$.

合起來,便是 $-1<x<3$.

就是x的值要在-1和$+3$的中間。

$x=-1$或3怎樣?

習題一六三

解下列不等式:

1. $x+7>\frac{3}{2}x+8$.
2. $2x^2+4x>x^2+6x+8$.
3. $x^2-6x>10x-5-2x^2$.
4. $2x^2+9x>2x-6$.
5. $x^2(x^2-8)>-9(x+2)$.
6. $x^2+2x+5>0$.

x, a, b, c, d都是正的,決定下列各題中的兩數那一個大:

7. x^2和x^2+x+2.

8. a^2+a 和 a^3+1.

9. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 和 $(ac+bd)^2$.

10. a^3+b^3 和 a^2b+ab^2.

證明下列各絕對不等式:

11. $a^2+3b^2>2b(a+b)$.

12. $a^3b+ab^3>2a^2b^2$.

13. $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

14. $a^3b+ab^3<a^4+b^4$.

15. $(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2$.

16. 證明一個數和牠的倒數的和總大於2,即

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$$

第二十六章

$(a+x)$ 的乘方

一　$(a+x)^n$ 的展開

258. 先注意下列的兩個恆等式:

$$(a+x)^2 \equiv a^2+2\,ax+x^2,$$

$$(a+x)^3 \equiv a^3+3\,a^2x+3\,ax^2+x^3.$$

若用 b 去代 a, 則得

$$(b+x)^2 \equiv b^2+2\,bx+x^2,$$

$$(b+x)^3 \equiv b^3+3\,b^2x+3\,bx^2+x^3.$$

由這四個式子,可以看出來,只要二項式的二乘方或三乘方,牠們各自的展開式的各項的數係數是一樣的。這個法則實際可以運用到一切的乘方。所以,若已知 $(a+x)^{10}$ 的展開式,我們就能很容易地將 $(b+x)^{10}$ 的展開式寫出來。

用 $(a+x)$ 做基礎,牠的各種乘方雖可以連續地由乘法計算得到;但還有一個更簡便的法則來求牠。且來研究各項的數係數看罷。

$$\begin{array}{rl}
(a+x)^3 \equiv & a^3+3a^2x+3ax^2+x^3 \\
& a+x \\ \hline
& a^4+3a^3x+3a^2x^2+\ \ ax^3 \\
& \qquad\quad a^3x+3a^2x^2+3ax^3+x^4 \\ \hline
(a+x)^4 \equiv & a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4.
\end{array}$$

任意取 $(a+x)^4$ 的展開式的一項的數係數,即如 a^2x^2 的 6,牠恰是 $(a+x)^3$ 的展開式的 a^2x 和 ax^2 兩項的數係數 3 同 3 的和。由 $(a+x)^3$ 的展開式的各項的數係數做成 $(a+x)^4$ 的展開式的各項的數係數的法則,如下所示:

$$\begin{array}{ccccccccc}
& 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

卽 $1+3=4$, $3+3=6$, $3+1=4$, 同着兩端各有一個 1。

照同樣的法則,又可以求出 $(a+x)^5$ 的展開式的各項的數係數,並且還可以順着推下去。

從 $(a+x)^1$ 的展開式的各項的數係數起,有下列的組織:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
& & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
& & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
& & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
& & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
& 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

....

這個組織稱爲'巴士卡兒的三角形',可以用來順次推算出 $(a+x)$ 的各正整數乘方的展開式的各項的係數。

習題一六四(口答)

求下列各式的展開式:

1. $(x+y)^2$.	2. $(a+b)^3$.	3. $(m+n)^3$.
4. $(x+y)^4$.	5. $(p+q)^5$.	6. $(m+p)^5$.
7. $(c+d)^6$.	8. $(l+f)^6$.	9. $(x+y)^7$.
10. $(a+x)^7$.	11. $(a+x)^8$.	12. $(1+x)^5$.
13. $(1+x)^7$.	14. $(1+x)^4$.	15. $(1-x)^7$.

二 $(1+x)^n$ 的近似值

259. 在 $(a+x)^n$ 中,用 1 去代 a,則得 $(1+x)^n$,所以

$$(1+x)^2 \equiv 1+2x+x^2,$$

$$(1+x)^3 \equiv 1+3x+3x^2+x^3,$$

$$(1+x)^4 \equiv 1+4x+6x^2+4x^3+x^4,$$

$$(1+x)^5 \equiv 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5,$$

$$(1+x)^6 \equiv 1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6.$$

由各展開式的第一,第二兩項可以得出一個一般的規則;就是,若 n 是正整數, $(1+x)^n$ 的展開式的第一,第二兩項是 $1+nx$. 所以,若 n 是正整數,則

$$(1+x)^n = 1+nx+ \text{含有 } x \text{ 的較高的乘方的項。}$$

這個情形,在計算某種近似值的時候特別地有用。例如,假定要求 $(1.001)^6$ 的近似值。

若在 $(1+x)^6$ 中,設 $x=0.001$,則得 $(1.001)^6=(1+0.001)^6$.

所以 $(1.001)^6=(1+0.001)^6$

$=1+6\times0.001+$ 含有 0.001 的較高的乘方的項。

而 $(0.001)^2=0.000001,$

$(0.001)^3=0.000000001.$

假如只求 $(1.001)^6$ 的 4 位數字正確的數;在現在的情形,就是只求 3 位小數正確。在 6×0.001 的下一項是 0.000001 乘一些係數;這係數明明白白不是很大而可使這個乘積得到第三位小數的有效數字的;因爲假如要這樣,最少牠得大於 500,而實際的係數卻不過是 15. 至於以後的各項比較牠的前一項更加小得厲害,對於第三位小數自然毫無影響了。一般的情形,若這些項很多,牠們的和相當的大,也可以影響前面,那是省略不來的,不過在這裏,6×0.001 以後不過 5 項,所以可無須計算,已知道牠們的和是影響不到第三位小數的。

所以 $(1.001)^6=1+6\times0.001$ 到 3 位小數

$=1.006.$

[到 10 位數字,$(1.001)^6=1.006015020\cdots\cdots$]

260. 前節的例是可以略去第二項以後的各項的,但在別的例卻不一定全可以這樣。例如求 $(1.1)^6$ 到

小數1位。

$$(1.1)^6=1+6\times0.1+15\times0.01+\cdots\cdots$$
$$=1+0.6+0.15+\cdots\cdots.$$

這裏第三項的大就夠影響到所得的結果了。

所以,要 $(1+x)^n=1+nx$ 這公式求近似值的時候,這兩點是應當注意:(i) x 的值是否眞小,而可用牠,(ii) n 的值是否只大得不能影響到所得的結果?若這些必要的條件不完全,則用别的方法更好一點。

261. 更推廣一點,$(1+x)^n$ 的展開式,n 不是正整數的時候究竟怎樣?雖是在這本書內,還研究不到。但實際 n 無論是正整數,負整數或分數,近似值的公式

$$(1+x)^n=1+nx.$$

只要 x 和 nx 的數值比起1來很小,都可以用。

nx 所以必須要小,可由下例知道。

例如　$(1.001)^{1000}$, $x=0.001$ 雖小,但 $nx=1$.

而　$(1.001)^{1000}=2.717\cdots\cdots$.

但　$1+1000\times0.001=2$.

262. 〔例題1〕 $\sqrt[3]{1728}=12$; 求 $\sqrt[3]{1729}$ 比 $\sqrt[3]{1728}$ 大百分之幾?

$$\sqrt[3]{1729}=(1728+1)^{\frac{1}{3}}$$
$$=(1728)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{1728}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$=12\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{1728}\right)\text{約}.$$

因$\frac{1}{1728}$和$\frac{1}{3}\times\frac{1}{1728}$是很小,所以第三項以下可略去,

$$\therefore\ \text{實際所大的}=12\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{1728},$$

而所大的百分數$=\frac{100}{3\times1728}$.

〔注意〕 1729比1728所大的是百分之$\frac{100}{1728}$,而立方根所大的是這個數的$\frac{1}{3}$.

〔例題2〕 當溫度增高$1^\circ C.$的時候,玻璃每邊的長度膨脹原長的$0.0000088(=g)$,求溫度增高$1^\circ C.$時,玻璃體積的增大的比。

設x公分爲玻璃器的長度,v立方公分是體積。

玻璃器的膨脹是比例於牠的各方向的,所以總和牠的原形相似,而$v=kx^3$.

在溫度增高$1^\circ C.$後,x變成$x(1+g)$.

$$\therefore\ kx^3\text{變成}kx^3(1+g)^3,\text{這算是}v'.$$

$$\therefore\ v'=kx^3(1+g)^3=kx^3(1+3g)\text{約}.$$

$$\therefore\ \frac{v'}{v}=1+3g.$$

所以,增加的是原容量的$3g$倍。

每攝氏1度,長度的變化對於原長的比,稱爲'線脹係數'。這在特定的物質是近於常數的。

用面積或體積來代替這長度,所得的相應的比,稱爲'面或體脹係數'。

由上例,就證明體脹係數是線脹係數的3倍。

〔例題3〕 若 $x=2$, $x^5=16x$, 則方程式 $x^5=16x+0.2$ 有一個和2相近的根。

現在來求這個根的近似值的限度,設 $x=2+h$ 是 $x^5=16x+0.2$ 的一個根,h 的值很小;則

$$(2+h)^5=16(2+h)+0.2.$$

因爲 h 很小, $(2+h)^5=2^5\left(1+\frac{h}{2}\right)^5$

$$=32\left(1+\frac{5h}{2}\right) \text{約}$$

$$=32+80h.$$

$$\therefore \quad 32+80h=32+16h+0.2.$$

$$\therefore \quad 64h=0.2$$

$$\therefore \quad h=\frac{0.2}{64}=0.003 \text{ 約}.$$

所以,2.003是這個根的近似值的限度。

習題一六五

1. 求下列各近似值:

(i) $(1.0003)^5$, (ii) $(0.991)^3$,

(iii) $(1.004)^{\frac{1}{2}}$, (iv) $(1.0006)^{-2}$,

(v) $\frac{1}{0.995}$, (vi) $(0.99994)^{-\frac{1}{3}}$,

(vii) $\sqrt[3]{1.012}$, (viii) $\sqrt{0.9996}$,

(ix) $\sqrt{4.0016}$, (x) $(144.0288)^{\frac{1}{2}}$,

(xi) $(32.01)^{\frac{2}{5}}$, (xii) $\sqrt{24.9975}$,

(xiii) $\sqrt{342}$, (xiv) $\sqrt{100+x}$, x 是很小的,

(xv) $(a+x)^7$, $\frac{x}{a}$ 是很小的,

(xvi) $\frac{1}{5.00002}$, (xvii) $\frac{1}{(2.00004)^3}$.

2. 因爲 $x=3$ 適合於方程式 $x^3-9x=0$, 方程式 $x^3-9x=0.01$ 很明白地有一個根和 3 相差不大。求這個根的限度。

3. $x^5-5x^4=1$, 有一個根和 5 相差不大。用 $x=5+h$ 代入去求這個根的限度。

4. 證明面脹係數是線脹係數的二倍。

5. 設 $y=x^n$, 並且設 x 增加 h 的時候, y 增加 k. 證明當 h 和 k 都是極小的時候, $\frac{k}{h}=nx^{n-1}$ 約.

6. 求 $\frac{(1+0.001)^7-1^7}{0.001}$ 和 $\frac{(1-0.001)^7-1^7}{-0.001}$ 的近似值.

7. 若 x 極小, 用 $1+nx$ 的形式表示 $\frac{\sqrt{1-3x}}{1+4x}$ 的近似值。若 $x=\frac{1}{100}$, 用對數求到 3 位數字的值。

8. 用 $1+nx$ 的形式表示 $\frac{\sqrt{1-3x}}{(1+2x)^2}$ 的近似值, x 是極小的數,牠的平方是可以略去的, n 是數係數。

9. 若 x, y 和 z 都是極小的, 證明

$$\frac{(1+x)^m(1+y)^n}{(1+z)^p}=1+mx+ny-pz \text{ 約}.$$

10. 用 $(1+3x)$ 去代 $(1+x)^3$,在 $x=0.05$ 的時候,牠的誤差的百分數是多少?

11. 長度的測量的誤差爲百分之0.4,用這個長度計算出來的面積的誤差的百分數是多少?

12. 擺動周期 $t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. 有一鐘的擺長,恰能使 $t=1$. 若牠增加原長的 $\frac{1}{2000}$; 則一晝夜這鐘所走的時刻相差多少?

第二十七章

開　方

一　完全平方

263. 在解二次方程式的時候,一般的方法是要做成一個完全平方的二次函數,而求出這函數的平方根。

一個函數,若牠恰好是一個有理函數的平方,便說牠是'完全平方'。所以,完全平方牠自己也就是一個有理函數。又 n 次的函數的平方一定是一個 $2n$ 次的函數,所以,完全平方一定是偶數次的函數。

264. 在研究怎樣決定一個函數是否完全平方以前,須知道怎樣可以寫出一個函數的平方。

由乘法, $(a+b+c)^2\equiv a^2+b^2+c^2+2\,bc+2\,ca+2\,ab$. 就是一個式子的平方式,含有牠的各項的平方的和,再加上這些項每兩個的積的二倍。這個法則是無論多少項都一樣的。

習題一六六

寫出下列各式的平方:

(寫每兩項的積的時候,最好是從第二項起,順次取一項而用後面的一項去乘牠。)

1. $2x+3y+4z.$　　2. $3x^2-2x+1.$

3. $x^2-4x-5.$　　4. $x^3+3x^2+3x+1.$

5. $x^3-2x^2+3x-1.$　　6. $2x^2-3xy+y^2.$

7. $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$

265. 〔例題〕 決定

$$9x^4-12x^3+28x^2+16x+16,$$

是否完全平方;倘若是的,並求牠的平方根。

這個式子是 4 次;若牠是完全平方,牠的平方根必定是2次式;設為 $ax^2+bx+c.$

$9x^4$ 的項必是 ax^2 的平方, $\therefore\ a^2x^4=9x^4,$

$$\therefore\ a^2=9,\quad \therefore\ a=\pm 3.$$

現在取 $a=+3.$

絕對項 $+16$ 必是 c 的平方,

$$\therefore\ c^2=16,\quad \therefore\ c=\pm 4.$$

$-12x^3$ 這一項只能夠由二倍 ax^2 和 bx 的積得出來,

$$\therefore\ 2ab=-12,$$

$$\therefore\ b=-\frac{6}{a}=-2,$$

所以,我們大體可以決定原式的平方根是

$$3x^2-2x\pm4.$$

但 $-16x$ 這一項,又只能夠由二倍 $-2x$ 和 ±4 的積得出來,所以絕對項應當用 $+4$.

原式的各項除了 $28x^2$ 這一項,都已用來推算過了。

在 $(3x^2-2x+4)^2$ 中 x^2 的係數是

$$(-2)^2+2\times3\times4=4+24=28.$$

所以 $9x^4-12x^3+28x^2-16x+16\equiv(3x^2-2x+4)^2.$

將這式子的符號掉過,平方出來還是一樣的;因此所求的平方根是

$$\pm(3x^2-2x+4).$$

習題一六七

下列各式中有是完全平方的,就求牠的平方根:

1. $25x^2-120x+144.$
2. $9x^2+49-25x.$
3. $x^2+4x^3-8x+4.$
4. $x^4-8x^3+24x+10x^2+9.$
5. $4x^4-12x^3+45x^2-54x+81.$
6. $4x^4-4x^3+3x^2-x+\frac{1}{4}.$
7. $36x^4-36x^3+17x^2-4x+\frac{4}{9}.$
8. $4a^4+9(1-2a)+3a^2(7-4a).$
9. $9x^6-12x^4+30x^3+4x^2-20x+25.$

10. $4+12x+x^2+22x^4-12x^5+9x^6$.

11. $9x^4-12x^3y+10x^2y^2-4xy^3+y^4$.

12. $a^6+3a^4b^2-10a^5b-3a^3b^3+2a^2b^4$.

13. 某完全平方式的頭兩項爲 $49x^4-28x^3$，末兩項爲 $6x+\frac{9}{4}$. 求這個式子和牠的平方根.

二　一般的開平方法

266. 前節所講的法則，是很特殊的，通常用起來極不方便，這裏要講和算術中所用的一樣的方法。

設要求 $x^4+16-24x+6x^3+x^2$ 的平方根(若牠是完全平方)。

第一步，必須將這個式子照 x 的降冪(或升冪)排列，即

$$x^4+6x^3+x^2-24x+16.$$

設 E 表這個式子，k_1，k_2……表平方根的相連的各項。

這個方法完全和算術裏的一樣，照下例計算。

因爲 $(a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2\equiv a^2+(2a+b)b$. 所以第一次是求第一項的平方根；以後便 2 倍已得的平方根的各項的和，而用牠去試除所餘的數，再將所得的商加進去，更用這所得的商去乘這所得的和，最後從除式中減去這個積。下式中括弧裏的部分就是計算的說明。

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & \sqrt{}=x^2+3x-4 & \\
\hline
 & x^4+6x^3+\ \ x^2-24x+16 & [=E] \\
 & x^4 & [=k_1^2] \\
\hline
2x^2+3x & 6x^3+\ \ x^2-24x+16 & [=E-k_1^2] \\
[=2k_1+k_2] & 6x^3+9x^2 & [=(2k_1+k_2)k_2] \\
\hline
2x^2+6x-4 & -8x^2-24x+16 & [=E-(k_1+k_2)^2] \\
[=2(k_1+k_2)+k_3] & -8x^2-24x+16 & [=\{2(k_1+k_2)+k_3\}k_3] \\
\hline
 & \qquad\qquad 0 & [=E-(k_1+k_2+k_3)^2]
\end{array}
$$

∴ E 是一個完全平方,而牠的平方根是

$$\pm(x^2+3x-4).$$

習題一六八

求下列各式的平方根:

1. $x^4+2x^3+7x^2+6x+9.$
2. $4x^4+37x^2+9-12x^3-42x.$
3. $9x^2y^4-12x^3y^3+34x^4y^2-20x^5y+25x^6.$
4. $16x^4+25y^4-24x^3y-30xy^3+49x^2y^2.$
5. $25x^6-20x^4-30x^3+4x^2+12x+9.$
6. $9x^6-12x^5-74x^4+28x^3+185x^2+104x+16.$
7. $x^8+x^6+2x^5(x^2-2)-4x^2(3x^2-1)-8(x^3-2x-2).$
8. $x^4-2x^3+7x^2+\dfrac{4}{x^2}-10x-\dfrac{12}{x}+13.$
9. $4x^2+\dfrac{1}{a^2}-6a-\dfrac{3}{a}+6\dfrac{1}{4}.$
10. $9x^6-6x^5+25x^4-50x^3+30x^2+ax+39$ 為一完全平方,求牠的平方根和 a 的值。並且照第255節例題逐步寫出來。

11. 若 $A-24y+10y^2+8y^3+y^4$ 是一個完全平方，A 的值是多少？

12. 照方法求 $36x^4+48x^3-20x^2-39$ 的平方根的前三項。並求使這式子成一完全平方的一個 x 的整數值。

三　一般的開立方法

267. 一個式子若是完全立方，也可用和第255節同樣的法則求牠的立方根；但是計算起來更加繁難，所以這裏只講一般的開立方法。這個方法是根據下面的恆等式得來的，和算術中的一樣。

$$(a+b^3)\equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\equiv a^3+(3a^2+3ab+b^2)b.$$

例如要求 $5x^3-3x^5+x^6-1-3x$ 的立方根。

第一步，也是必須將這個式子照 x 的降冪（或升冪）排列，即　$x^6-3x^5\quad+5x^3\quad-3x-1.$

設 E 表這個式子，k_1，k_2，……表立方根的相連的各項。算草中所注的❶……❾，就是計算的說明。

$$
\begin{array}{r|llll}
 & \sqrt[3]{}=x^2-x-1 & & & \\
\hline
 & x^6-3x^5 & +5x^3 & -3x-1 & ❶ \\
 & x^6 & & & ❷ \\
\hline
❹\ 3x^4-3x^3+x^2 & -3x^5 & +5x^3 & -3x-1 & ❸ \\
 & -3x^5+3x^4-x^3 & & & ❺ \\
\hline
❼\ 3x^4-6x^3\quad+3x+1 & -3x^4+6x^3 & & -3x-1 & ❻ \\
 & -3x^4+6x^3 & & -3x-1 & ❽ \\
\hline
 & & 0 & & ❾
\end{array}
$$

❶ $=E$；❷ $=k_1^3$；❸ $=E-k_1^3$；❹ $=3k_1^2+3k_1k_2+k_2^2$；

❺ $=(3k_1^2+3k_1k_2+k_2^2)k_2$；❻ $=E-(k_1+k_2)^3$；

❼ $=3(k_1+k_2)^2+3k_1+k_2)k_3+k_3^2$；

⑧ $=\{3(k_1+k_2)^2+3(k_1+k_2)k_3+k_3^2\}k_3$;

⑨ $=E-(k_1+k_2+k_3)^3$.

$\therefore$ E的立方根是x^2-x-1.

習題一六九

求下列各式的立方根:

1. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$.

2. $x^3+12x^2+48x+64$.

3. $27a-9a^2+a^3-27$.

4. $x^6-3ax(x^4+a^4)+5a^3x^3-a^6$.

5. $x^6+6x^4+7x^3+3x^5+3x+6x^2+1$.

6. $1-9x+39x^2-99x^3+156x^4-144x^5+64x^6$.

7. $1-3x+6x^2-10x^3+12x^4-12x^5+10x^6-6x^7+3x^8-x^9$.

運用$a^{\frac{1}{nm}}\equiv(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}$的原理和開平方,開立方的法則求下列各方根:

8. $(81a^4-540a^3b+1350a^2b^2-1500ab^3+625b^4)^{\frac{1}{4}}$.

9. $(1-4x+10x^2-16x^3+19x^4-16x^5+10x^6-4x^7+x^8)^{\frac{1}{4}}$.

10. $(64-192x+240x^2-160x^3+60x^4-12x^5+x^6)^{\frac{1}{6}}$.

11. $(729x^6-1458x^5+1215x^4-540x^3+135x^2-18x+1)^{\frac{1}{6}}$.

12. $(1-8y+28y^2-56y^3+70y^4-56y^5+28y^6-8y^7+y^8)^{\frac{1}{8}}$.

平 方 根 表

平方根表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1000 3162	1005 3178	1010 3194	1015 3209	1020 3225	1025 3240	1030 3256	1034 3271	1039 3286	1044 3302	0 2	1 3	1 5	2 6	2 8	3 9	3 11	4 12	4 13
11	1049 3317	1054 3332	1058 3347	1063 3362	1068 3376	1072 3391	1077 3406	1082 3421	1086 3435	1091 3450	0 1	1 3	1 4	2 6	2 7	3 9	3 10	4 12	4 13
12	1095 3464	1100 3479	1105 3493	1109 3507	1114 3521	1118 3536	1122 3550	1127 3564	1131 3578	1136 3592	0 1	1 3	1 4	2 6	2 7	3 8	3 10	4 11	4 13
13	1140 3606	1145 3619	1149 3633	1153 3647	1158 3661	1162 3674	1166 3688	1170 3701	1175 3715	1179 3728	0 1	1 3	1 4	2 5	2 7	3 8	3 10	3 11	4 12
14	1183 3742	1187 3755	1192 3768	1196 3782	1200 3795	1204 3808	1208 3821	1212 3834	1217 3847	1221 3860	0 1	1 3	1 4	2 5	2 7	3 8	3 9	3 11	4 12
15	1225 3873	1229 3886	1233 3899	1237 3912	1241 3924	1245 3937	1249 3950	1253 3962	1257 3975	1261 3987	0 1	1 3	1 4	2 5	2 6	3 8	3 9	3 10	4 11
16	1265 4000	1269 4012	1273 4025	1277 4037	1281 4050	1285 4062	1288 4074	1292 4087	1296 4099	1300 4111	0 1	1 2	1 4	2 5	2 6	3 7	3 9	3 10	4 11
17	1304 4123	1308 4135	1311 4147	1315 4159	1319 4171	1323 4183	1327 4195	1330 4207	1334 4219	1338 4231	0 1	1 2	1 4	2 5	2 6	2 7	3 8	3 10	3 11
18	1342 4243	1345 4254	1349 4266	1353 4278	1356 4290	1360 4301	1364 4313	1367 4324	1371 4336	1375 4347	0 1	1 2	1 3	1 5	2 6	2 7	3 8	3 9	3 10
19	1378 4359	1382 4370	1386 4382	1389 4393	1393 4405	1396 4416	1400 4427	1404 4438	1407 4450	1411 4461	0 1	1 2	1 3	1 5	2 6	2 7	3 8	3 9	3 10
20	1414 4472	1418 4483	1421 4494	1425 4506	1428 4517	1432 4528	1435 4539	1439 4550	1442 4561	1446 4572	0 1	1 2	1 3	1 4	2 5	2 7	2 8	3 9	3 10
21	1449 4583	1453 4593	1456 4604	1459 4615	1463 4626	1466 4637	1470 4648	1473 4658	1476 4669	1480 4680	0 1	1 2	1 3	1 4	2 5	2 6	2 8	3 9	3 10

22	1483 4690	1487 4701	1490 4712	1493 4722	1497 4733	1500 4743	1503 4754	1507 4764	1510 4775	1513 4785	0 1	1 2	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	3 8	3 9
23	1517 4796	1520 4806	1523 4817	1526 4827	1530 4837	1533 4848	1536 4858	1539 4868	1543 4879	1546 4889	0 1	1 2	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	3 8	3 9
24	1549 4899	1552 4909	1556 4919	1559 4930	1562 4940	1565 4950	1568 4960	1572 4970	1575 4980	1578 4990	0 1	1 2	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	3 8	3 9
25	1581 5000	1584 5010	1587 5020	1591 5030	1594 5040	1597 5050	1600 5060	1603 5070	1606 5079	1609 5089	0 1	1 2	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	3 8	3 9
26	1612 5099	1616 5109	1619 5119	1622 5128	1625 5138	1628 5148	1631 5158	1634 5167	1637 5177	1640 5187	0 1	1 2	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	2 8	3 9
27	1643 5196	1646 5206	1649 5215	1652 5225	1655 5235	1658 5244	1661 5254	1664 5263	1667 5273	1670 5282	0 1	1 2	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	2 8	3 9
28	1673 5292	1676 5301	1679 5310	1682 5320	1685 5329	1688 5339	1691 5348	1694 5357	1697 5367	1700 5376	0 1	1 2	1 3	1 4	1 5	2 6	2 7	2 7	3 8
29	1703 5385	1706 5394	1709 5404	1712 5413	1715 5422	1718 5431	1720 5441	1723 5450	1726 5459	1729 5468	0 1	1 2	1 3	1 4	1 5	2 5	2 6	2 7	3 8
30	1732 5477	1735 5486	1738 5495	1741 5505	1744 5514	1746 5523	1749 5532	1752 5541	1755 5550	1758 5559	0 1	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6	2 7	3 8
31	1761 5568	1764 5577	1766 5586	1769 5595	1772 5604	1775 5612	1778 5621	1780 5630	1783 5639	1786 5648	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	3 8
32	1789 5657	1792 5666	1794 5675	1797 5683	1800 5692	1803 5701	1806 5710	1808 5718	1811 5727	1814 5736	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	2 8
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

平方根表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
33	1817 5745	1819 5753	1822 5762	1825 5771	1828 5779	1830 5788	1833 5797	1836 5805	1838 5814	1841 5822	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	2 8
34	1844 5831	1847 5840	1849 5848	1852 5857	1855 5865	1857 5874	1860 5882	1863 5891	1865 5899	1868 5908	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	2 8
35	1871 5916	1873 5925	1876 5933	1879 5941	1881 5950	1884 5958	1887 5967	1889 5975	1892 5983	1895 5992	0 1	1 2	1 2	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	2 8
36	1897 6000	1900 6008	1903 6017	1905 6025	1908 6033	1910 6042	1913 6050	1916 6058	1918 6066	1921 6075	0 1	1 2	1 2	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	2 7
37	1924 6083	1926 6091	1929 6099	1931 6107	1934 6116	1936 6124	1939 6132	1942 6140	1944 6148	1947 6156	0 1	1 2	1 2	1 3	1 4	2 5	2 6	2 7	2 7
38	1949 6164	1952 6173	1954 6181	1957 6189	1960 6197	1962 6205	1965 6213	1967 6221	1970 6229	1972 6237	0 1	1 2	1 2	1 3	1 4	2 5	2 6	2 6	2 7
39	1975 6245	1977 6253	1980 6261	1982 6269	1985 6277	1987 6285	1990 6293	1992 6301	1995 6309	1997 6317	0 1	1 2	1 2	1 3	1 4	2 5	2 6	2 6	2 7
40	2000 6325	2002 6332	2005 6340	2007 6348	2010 6356	2012 6364	2015 6372	2017 6380	2020 6387	2022 6395	0 1	0 2	1 2	1 3	1 4	1 5	2 6	2 6	2 7
41	2025 6403	2027 6411	2030 6419	2032 6427	2035 6434	2037 6442	2040 6450	2042 6458	2045 6465	2047 6473	0 1	0 2	1 2	1 3	1 4	1 5	2 5	2 6	2 7
42	2049 6481	2052 6488	2054 6496	2057 6504	2059 6512	2062 6519	2064 6527	2066 6535	2069 6542	2071 6550	0 1	0 2	1 2	1 3	1 4	1 5	2 5	2 6	2 7
43	2074 6557	2076 6565	2078 6573	2081 6580	2083 6588	2086 6595	2088 6603	2090 6611	2093 6618	2095 6626	0 1	0 2	1 2	1 3	1 4	1 5	2 5	2 6	2 7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	2098 6633	2100 6641	2102 6648	2105 6656	2107 6663	2110 6671	2112 6678	2114 6686	2117 6693	2119 6701	0 1	0 2	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6	2 7
45	2121 6708	2124 6716	2126 6723	2128 6731	2131 6738	2133 6745	2135 6753	2138 6760	2140 6768	2142 6775	0 1	0 1	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6	2 7
46	2145 6782	2147 6790	2149 6797	2152 6804	2154 6812	2156 6819	2159 6826	2161 6834	2163 6841	2166 6848	0 1	0 1	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6	2 7
47	2168 6856	2170 6863	2173 6870	2175 6877	2177 6885	2179 6892	2182 6899	2184 6907	2186 6914	2189 6921	0 1	0 1	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6	2 7
48	2191 6928	2193 6935	2195 6943	2198 6950	2200 6957	2202 6964	2205 6971	2207 6979	2209 6986	2211 6993	0 1	0 1	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6	2 6
49	2214 7000	2216 7007	2218 7014	2220 7021	2223 7029	2225 7036	2227 7043	2229 7050	2232 7057	2234 7064	0 1	0 1	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6	2 6
50	2236 7071	2238 7078	2241 7085	2243 7092	2245 7099	2247 7106	2249 7113	2252 7120	2254 7127	2256 7134	0 1	0 1	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6	2 6
51	2258 7141	2261 7148	2263 7155	2265 7162	2267 7169	2269 7176	2272 7183	2274 7190	2276 7197	2278 7204	0 1	0 1	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6	2 6
52	2280 7211	2283 7218	2285 7225	2287 7232	2289 7239	2291 7246	2293 7253	2296 7259	2298 7266	2300 7273	0 1	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	2 5	2 6	2 6
53	2302 7280	2304 7287	2307 7294	2309 7301	2311 7308	2313 7314	2315 7321	2317 7328	2319 7335	2322 7342	0 1	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	2 5	2 5	2 6
54	2324 7348	2326 7355	2328 7362	2330 7369	2332 7376	2335 7382	2337 7389	2339 7396	2341 7403	2343 7409	0 1	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	1 5	2 5	2 6

平方根表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	2345 7416	2347 7423	2349 7430	2352 7436	2354 7443	2356 7450	2358 7457	2360 7463	2362 7470	2364 7477	0 1	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	1 5	2 5	2 6
56	2366 7483	2369 7490	2371 7497	2373 7503	2375 7510	2377 7517	2379 7523	2381 7530	2383 7537	2385 7543	0 1	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	1 5	2 5	2 6
57	2387 7550	2390 7556	2392 7563	2394 7570	2396 7576	2398 7583	2400 7589	2402 7596	2404 7603	2406 7609	0 1	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	1 5	2 5	2 6
58	2408 7616	2410 7622	2412 7629	2415 7635	2417 7642	2419 7649	2421 7655	2423 7662	2425 7668	2427 7675	0 1	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	1 5	2 5	2 6
59	2429 7681	2431 7688	2433 7694	2435 7701	2437 7707	2439 7714	2441 7720	2443 7727	2445 7733	2447 7740	0 1	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	1 5	2 5	2 6
60	2449 7746	2452 7752	2454 7759	2456 7765	2458 7772	2460 7778	2462 7785	2464 7791	2466 7797	2468 7804	0 1	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6
61	2470 7810	2472 7817	2474 7823	2476 7829	2478 7836	2480 7842	2482 7849	2484 7855	2486 7861	2488 7868	0 1	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6
62	2490 7874	2492 7880	2494 7887	2496 7893	2498 7899	2500 7906	2502 7912	2504 7918	2506 7925	2508 7931	0 1	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6
63	2510 7937	2512 7944	2514 7950	2516 7956	2518 7962	2520 7969	2522 7975	2524 7981	2526 7987	2528 7994	0 1	0 1	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6
64	2530 8000	2532 8006	2534 8012	2536 8019	2538 8025	2540 8031	2542 8037	2544 8044	2546 8050	2548 8056	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 6
65	2550 8062	2551 8068	2553 8075	2555 8081	2557 8087	2559 8093	2561 8099	2563 8106	2565 8112	2567 8118	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 5
66	2569 8124	2571 8130	2573 8136	2575 8142	2577 8149	2579 8155	2581 8161	2583 8167	2585 8173	2587 8179	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 5

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
67	2588 8185	2590 8191	2592 8198	2594 8204	2596 8210	2598 8216	2600 8222	2602 8228	2604 8234	2606 8240	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 5
68	2608 8246	2610 8252	2612 8258	2613 8264	2615 8270	2617 8276	2619 8283	2621 8289	2623 8295	2625 8301	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 5
69	2627 8307	2629 8313	2631 8319	2632 8325	2634 8331	2636 8337	2638 8343	2640 8349	2642 8355	2644 8361	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 5
70	2646 8367	2648 8373	2650 8379	2651 8385	2653 8390	2655 8396	2657 8402	2659 8408	2661 8414	2663 8420	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 4	1 4	2 5	2 5
71	2665 8426	2666 8432	2668 8438	2670 8444	2672 8450	2674 8456	2676 8462	2678 8468	2680 8473	2681 8479	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 5	2 5
72	2683 8485	2685 8491	2687 8497	2689 8503	2691 8509	2693 8515	2694 8521	2696 8526	2698 8532	2700 8538	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 5	2 5
73	2702 8544	2704 8550	2706 8556	2707 8562	2709 8567	2711 8573	2713 8579	2715 8585	2717 8591	2718 8597	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 5	2 5
74	2720 8602	2722 8608	2724 8614	2726 8620	2728 8626	2729 8631	2731 8637	2733 8643	2735 8649	2737 8654	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 5	2 5
75	2739 8660	2740 8666	2742 8672	2744 8678	2746 8683	2748 8689	2750 8695	2751 8701	2753 8706	2755 8712	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 5	2 5
76	2757 8718	2759 8724	2760 8729	2762 8735	2764 8741	2766 8746	2768 8752	2769 8758	2771 8764	2773 8769	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 5	2 5
77	2775 8775	2777 8781	2778 8786	2780 8792	2782 8798	2784 8803	2786 8809	2787 8815	2789 8820	2791 8826	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5

平方根表

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
78	2793 8832	2795 8837	2796 8843	2798 8849	2800 8854	2802 8860	2804 8866	2805 8871	2807 8877	2809 8883	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5
79	2811 8888	2812 8894	2814 8899	2816 8905	2818 8911	2820 8916	2821 8922	2823 8927	2825 8933	2827 8939	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5
80	2828 8944	2830 8950	2832 8955	2834 8961	2835 8967	2837 8972	2839 8978	2841 8983	2843 8989	2844 8994	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5
81	2846 9000	2848 9006	2850 9011	2851 9017	2853 9022	2855 9028	2857 9033	2858 9039	2860 9044	2862 9050	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5
82	2864 9055	2865 9061	2867 9066	2869 9072	2871 9077	2872 9083	2874 9088	2876 9094	2877 9099	2879 9105	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5
83	2881 9110	2883 9116	2884 9121	2886 9127	2888 9132	2890 9138	2891 9143	2893 9149	2895 9154	2897 9160	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5
84	2898 9165	2900 9171	2902 9176	2903 9182	2905 9187	2907 9192	2909 9198	2910 9203	2912 9209	2914 9214	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5
85	2915 9220	2917 9225	2919 9230	2921 9236	2922 9241	2924 9247	2926 9252	2927 9257	2929 9263	2931 9268	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5
86	2933 9274	2934 9279	2936 9284	2938 9290	2939 9295	2941 9301	2943 9306	2944 9311	2946 9317	2948 9322	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5
87	2950 9327	2951 9333	2953 9338	2955 9343	2956 9349	2958 9354	2960 9359	2961 9365	2963 9370	2965 9375	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5
88	2966 9381	2968 9386	2970 9391	2972 9397	2973 9402	2975 9407	2977 9413	2978 9418	2980 9423	2982 9429	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
89	2983 9434	2985 9439	2987 9445	2988 9450	2990 9455	2992 9460	2993 9466	2995 9471	2997 9476	2998 9482	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	2 5
90	3000 9487	3002 9492	3003 9497	3005 9503	3007 9508	3008 9513	3010 9518	3012 9524	3013 9529	3015 9534	0 1	0 1	0 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	1 5
91	3017 9539	3018 9545	3020 9550	3022 9555	3023 9560	3025 9566	3027 9571	3028 9576	3030 9581	3032 9586	0 1	0 1	0 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	1 5
92	3033 9592	3035 9597	3036 9602	3038 9607	3040 9612	3041 9618	3043 9623	3045 9628	3046 9633	3048 9638	0 1	0 1	0 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	1 5
93	3050 9644	3051 9649	3053 9654	3055 9659	3056 9664	3058 9670	3059 9675	3061 9680	3063 9685	3064 9690	0 1	0 1	0 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	1 5
94	3066 9695	3068 9701	3069 9706	3071 9711	3072 9716	3074 9721	3076 9726	3077 9731	3079 9737	3081 9742	0 1	0 1	0 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	1 5
95	3082 9747	3084 9752	3085 9757	3087 9762	3089 9767	3090 9772	3092 9778	3094 9783	3095 9788	3097 9793	0 1	0 1	0 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	1 5
96	3098 9798	3100 9803	3102 9808	3103 9813	3105 9818	3106 9823	3108 9829	3110 9834	3111 9839	3113 9844	0 1	0 1	0 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	1 5
97	3114 9849	3116 9854	3118 9859	3119 9864	3121 9869	3122 9874	3124 9879	3126 9884	3127 9889	3129 9894	0 1	0 1	0 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4	1 5
98	3130 9899	3132 9905	3134 9910	3135 9915	3137 9920	3138 9925	3140 9930	3142 9935	3143 9940	3145 9945	0 0	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4
99	3146 9950	3148 9955	3150 9960	3151 9965	3153 9970	3154 9975	3156 9980	3158 9985	3159 9990	3161 9995	0 0	0 1	0 1	1 2	1 2	1 3	1 3	1 4	1 4

平方根表用法

本表第一行和第一排第末排,爲平方數,其餘爲相應於各平方數的平方根,平方根數兩兩上下併排,上一數是平方數整數位數爲奇數的,下一數是平方數整數位爲偶數的。平方根的整數位數等於平方數的整數位數加 1 的一半(在平方數的整數位數爲奇數時),或等於平方數的整數位數的一半(在平方數的整數位數爲偶數時)。

〔例 1〕 求 21340 的平方根。

先於表的第一行查到 21,橫着查到頂上有 3 的一行,因 21340 的整數位是奇數,用上一數 1459,再橫着查到末九行中頂上有 4 的一行,上一數爲 1,因得 $1459+1=1460$ 而 21340 有 5 位整數,故牠的方根應有 $\frac{5+1}{2}=3$ 位整數。

$$\therefore\quad \sqrt{21340}=146.0.$$

〔例 2〕 求 21.34 的平方根。

查法和例 1 的相同,但 21.34 的整數位是偶數 2,所以應當用下一數 $4615+4=4619$,而方根的整數位數爲 1。

$$\therefore\quad \sqrt{21.34}=4.619.$$

對 數 表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4 8 12	17 21 25	29 33 37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4 8 11	15 19 23	26 30 34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3 7 10	14 17 21	24 28 31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3 6 10	13 16 19	23 26 29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3 6 9	12 15 18	21 24 27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3 6 8	11 14 17	20 22 25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3 5 8	11 13 16	18 21 24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2 5 7	10 12 15	17 20 22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2 5 7	9 12 14	16 19 21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2 4 7	9 11 13	16 18 20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2 4 6	8 10 12	14 16 17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2 4 5	7 9 10	12 14 16
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2 3 5	6 8 9	11 12 14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1 3 4	6 7 9	10 11 13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1 3 4	5 7 8	10 11 12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1 3 4	5 7 8	9 11 12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1 3 4	5 7 8	9 11 12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1 2 4	5 6 8	9 10 11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1 2 4	5 6 7	9 10 11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1 2 4	5 6 7	8 10 11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1 2 4	5 6 7	8 9 11
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1 2 3	4 5 7	8 9 10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1 2 3	4 5 6	8 9 10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1 2 3	4 5 6	7 8 9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1 2 3	4 5 6	7 8 9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1 2 3	4 5 6	7 8 9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1 2 3	4 5 6	7 8 9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1 2 3	4 5 6	7 8 9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1 2 3	4 5 6	7 7 8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1 2 3	4 5 6	7 7 8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1 2 3	4 5 6	7 7 8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1 2 3	3 4 5	6 7 8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1 2 3	3 4 5	6 7 8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1 2 3	3 4 5	6 7 7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	1	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	3	1	2	3	3	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	5	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8139	8445	1	1	2	3	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	3	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	3	3	4	4	5	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	3	3	4	4	5	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	4	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	3	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

七位對數表

數	對數
1.01	.0043214
1.025	.0107239
1.03	.0128372
1.035	.0149403
1.04	.0170333
1.045	.0191163
1.05	.0211893

本書所用符號表

1. 運算符號:

加 $+$ (plus)

減 $-$ (minus)

差 $\sim$ (difference of)

乘 $\times, \cdot$ (multiplied by)

除 $\div$, — (divided by)

根號 $\sqrt[n]{}$ (n th root of)

2. 關係符號:

等於 $=$ (equal to)

大於 $>$ (greater than)

小於 $<$ (less than)

3. 結合符號:

括線 —— (bar, vinculum)

括弧 ( ) (parenthesis)

括弓 〔 〕 (bracket)

括帶 { } (brace)

4. 略語符號:

故 $\therefore$ (hence, therefore)

因 $\because$ (since, because)

虛數單位 i (the unit of imaginary number)

譯名對照表

一　畫

一次式　Linear expression
一次方程式　Equation of the first degree
一元一次方程式　Simple equation

二　畫

二次式　Quadratic expression
二次方程式　Quadratic equation
二次齊次式　Quadratic homogeneous
二項式　Binomial expression
二項根式　Binomial surd

三　畫

三項式　Trinomial
三次方程式　Cubic equation

四　畫

不等式　Inequality
不盡根式　Surd
內項　Mean
公比　Common ratio
公式　Formula
公因數(式)　Common factor
公差　Common difference
公倍數(式)　Common multiple
公約數(式)　Common measure
元　Element
分子　Numerator
分母　Denominator
分數(式)　Fraction
分式方程式　Fractional equation
分解因式　Factorization
升冪　Ascending powers
反變　To vary inversely as
巴士卡兒三角形　Pascal's triangle
方程式　Equation, The equation of condition
方程式之邊　Side (member) of the equation
方程式之根　Root of the equation
方指數　Index

比 Ratio
比例 Proportion
比例的 Proportional
比例中項 Proportional mean
比較消去法 Elimination by comparison
文字方程式 Literal equation

五畫

代入消去法 Elimination by substitution
代數 Algebra
代數式 Algebraical expression
代數記號 Algebraical sign
代數數 Algebraical number
代數函數 Algebraical function
加法 Addition
加減消去法 Elimination by addition and subtraction
四次方程式 Biquadratic equation
平方 Square
平方根 Square root
平均值 Mean value
外項 Extreme
未知項 Unknown term
未知數 Unknown number
末項 Last term
本金 Principal
本利和 Amount
正項 Positive term
正號 Positive sign
正根 Positive root
正數 Positive number
正變 To vary as
矛盾方程式 Inconsistent equations
立方 Cube
立方根 Cube root

六畫

交點 Point of intersection
共軛式 Conjugate expressions
共軛複數 Conjugate complex numbers
合變 To vary jointly as
同次根式 Surd of the same order
同值方程式 Equivalent equations
同類項 Like term
同類根式 Similar surd
因數(式) Factor
年金 Annuity
多項式 Polynomial compound expression
有理化 Rationalization
有理方程式 Rational equation
有理式 Rational expression
有理根 Rational root
有理數 Rational number
次 Degree, Order
收斂級數 Convergent series
行列式 Determinant

七畫

判別式 Discriminant

利息 Interest
利率 Rate
底 Base
完全平方 Perfect square
坐標 Coördinates
坐標軸 Axes of coördinates

八 畫

函數 Function
和 Sum
定義 Definition
定則 Law, Rule
奇數 Odd number
性質符號 Symbols(signs) of property
法則 Rule
直線方程式 Linear equation
直線式 Linear expression
近似值 Approximate value

九 畫

係數 Coefficient
前項 Antecedent
後項 Consequent
括弧 Parenthesis
指數 Index, Exponent
指數定則 Law of index
恆等式 Identity, Identical equation
表 Table
負項 Negative term
負號 Negative sign
負數 Negative number
降冪 Descending powers
首項 First term

十 畫

乘方 Involution
乘式(數) Multiplier
乘法 Multiplication
乘積 Product
倍數(式) Multiple
倒數(式) Reciprocals
值 Value
原點 Origin
展開式 Expansion
差 Difference
消去 Elimination
根 Root
根指數 Index of root
根式 Radical
級數 Progression, Series
被減數(式) Minuend
被乘數(式) Multiplicand
被除數(式) Dividend
記號 Sign, Symbol
配平方 Completing the square
除法 Division
除數(式) Divisor

十一畫

假數 Mantissa

偶數 Even number
商數(式) Quotient
問題 Problem
常用對數 Common logarithm
常數 Constant
常數項 Constant term
既約分數 Reduced fraction
條件 Condition
條件不等式 Conditional inequality
移項 Transpose
連比例 Continued proportion
連分數 Continued fraction

十二畫

單位 Unit
單利息 Simple interest
幾何 Geometry
幾何中數(項) Geometric mean
幾何級數 Geometric progression (series)
最小公倍數 Least common multiple
最低公倍式 Lowest common multiple
最大公約數 Greatest common measure
最高公因式 Highest common factor
最低公分母 Lowest common divisor
最簡分式 Irreducible fraction
無理式 Irrational expression
無理根 Irrational root
無理數 Irrational number
無理方程式 Irrational equation
無窮級數 Infinite series
無限大 Infinity
減法 Subtraction
減數 Subtrahend
發散級數 Divergent series
虛根 Imaginary root
虛數 Imaginary number
等式 Equality, Equation
等比級數(見幾何級數)
等差級數(見算術級數)
絕對項 Absolute term
絕對值 Absolute value
絕對不等式 Absolute inequality
軸 Axis
量 Quantity
開方 Evolution
項 Term
項數 Number of terms

十三畫

極限 Limit
極限值 Limiting value
解 Solution
運算 Operation
運算符號 Symbols (signs) of operation
較低項 Lower term
零 Zero

十四畫

圖 Figure
圖解方程式 Graphical solution of an equation
實根 Real root
實數 Real number
對數 Logarithm
算術 Arithmetic
算術級數 Arithmetic (arithmetical) progression (series)
算術中數(項) Arithmetic mean
複數 Complex number
齊次式 Homogeneous expression
齊次方程式 Homogeneous equation

十五畫

增根 Additional root, Extraneous root
數 Number
數字方程式 Numerical equation
數值 Numerical value
數學 Mathematics
數係數 Numerical coefficient
調和中數(項) Harmonic mean
調和級數 Harmonic progression (series)

十六畫

冪 Power
整式 Integral expression
整式方程式 Integral equation
整數 Integer, Integral number
獨立變數 Independent variable
獨項式 Monomial
獨項因式 Monomial factor
積 Product
餘數(式) Remainder

十七畫

簡根式 Simple radical
繁分數(式) Complex fraction
聯立方程式 Simultaneous equation
聯立一次方程式 Simultaneous equation of the first degree
聯立二次方程式 Simultaneous quadratic equation

十八畫

覆證 Check

十九畫

關係符號 Symbols (signs) of relation

二十三畫

變數 Variable
變數法 Variation

開明代數教本 下册 每册定價一元二角

民國十八年七月初版 三十五年六月八版

編著者 劉薰宇

發行者 開明書店
代表人范洗人

印刷者 開明書店

(113P.) W B

B 開代數下