近世初等幾何學

下册

大同大學叢書

近世初等幾何學

下　　册

編著者

吳在淵

校訂者

胡敦復　胡明復　華綰言

商務印書館發行

民國二十一年一月二十九日敝公司突遭國難總務處印刷所編譯所書棧房均被炸燬附設之涵芬樓東方圖書館尚公小學亦遭殃及盡付焚如三十五載之經營隳於一旦迭蒙各界慰問督望速圖恢復詞意懇摯銜感何窮敝館雖處境艱困不敢不勉爲其難因將需用較切各書先行覆印其他各書亦將次第出版惟是圖版裝製不能盡如原式事勢所限想荷鑒原謹布下忱統祈垂詧

上海商務印書館謹啓

中華民國十四年五月初版
民國廿一年九月印行國難後第一版

大同大學叢書 近世初等幾何學二冊 (二〇五五)
下冊定價大洋壹元
外埠酌加運費匯費

編著者 吳在淵
校訂者 胡敦復 胡明復 華綰言
發行兼印刷者 上海河南路 商務印書館
發行所 上海及各埠 商務印書館

近　　世
初等幾何學

下冊　目錄

第四編　面積 ……………………………………… 1

第一章　矩形之面積 ……………………………………1

第二章　等積形 ……………………………………… 6

第三章　作圖題及軌跡 ………………………………24

第四章　雜例 …………………………………………32

第五編　比例 ………………………………………40

第一章　基礎性質 ……………………………………40

第二章　中心角 ………………………………………45

第三章　直線形之面積 ………………………………47

第四章　比例線 ………………………………………56

第五章　相似形 ………………………………………64

第六章　相似中心 ……………………………………74

第七章　軌跡及作圖題 ………………………………81

第八章　計算題 ………………………………………90

第九章　方法及雜例 …………………………………103

第六編　正多角形及圓 ………………… 122

第一章　圓內接及外接正多角形及圓 …………………122

第二章　圓周及圓面積 ………………………………… 135

附錄一　雜題 ……………………………………………154

附錄二　三角函數表 ……………………………………172

附錄三　希臘字母 ……………………………………… 173

近　世
初等幾何學

第四編

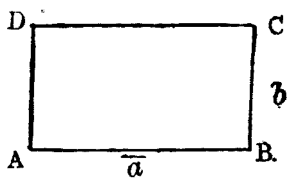
面　積

第一章　矩形之面積

1.　定義一.

多角形可以其任意一邊爲底.

平行四邊形以其一邊爲底,則底與對邊之距離爲高 (Altitude or Height).



梯形以其二底間之距離爲高.

2.　定義二.

矩形 $ABCD$ 之形象大小恃二隣邊 AB, BC 而定,名此矩形爲 AB, BC 所包 (to be contained) 之矩形,略曰二線分之矩形.

一邊爲 AB 之正方形,名之曰線分 AB 上之正方形.

二線分 AB, BC 所包之矩形記之爲 AB, BC 二線分 $\overline{a}, \overline{b}$ 所包之矩形記之爲 $\overline{a.b}$.

線分AB上正方形記之爲$\overline{AB^2}$，或線分a上之正方形記作$\overline{a^2}$.

此種記法不過爲代言語之一種記號,並非代數學中乘法之式.因二線分固不能乘,一線分亦不能平方也.

若AB, CD皆與線分單位爲可通約量,而各爲線分單位之a倍及b倍,則$a \cdot b$可視作a, b二數相乘積,且表矩形中所含面積單位之倍數,此從第一編第七章可知. 惟此仍屬應用方面之事不能以代理論中事也.

3. 定義三.

二個形象不同之圖爲同數之部分所合成,而各雙部分皆合同者,曰二圖面積相等,略曰等積,或徑曰相等.

4. 定義四.

以一平面圖移置他一平面圖旁而有一界線公共,則所得新圖之面積爲原二圖面積之和. 若以一圖疊置他一圖上而有一界線公共,則其不相掩之面積爲原二圖面積之差.

5. 加合二形爲一形. (公理).

以一三角形移置他一三角形旁,二形中一邊之兩端相合而在其一端兩旁之角互爲補,則此二三角形可加合成一三角形.

二個平行四邊形亦然.

二個矩形有一邊相等則必能加合成一個矩形.

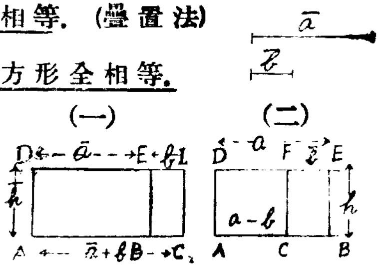
6. 定理一.

二隣邊各相等之矩形全相等. (疊置法)

系一. 一邊相等之二正方形全相等.

系二. 二個等積正方形之邊相等.

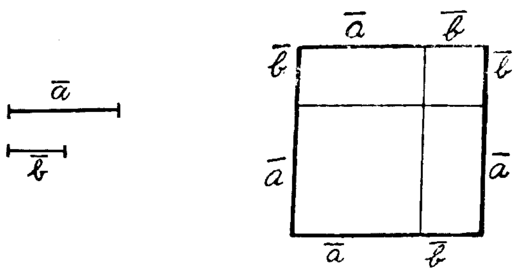
系三. 此一線分與彼二線分和或差所包矩形等於此線分與彼各線分所包矩形之和或差.



如圖, $\square AF = \square AE \pm \square BF$〔圖(一),(二)〕. 即 $\overline{h}(\overline{a}\pm\overline{b}) = \overline{h}.\overline{a}\pm\overline{h}.\overline{b}$.

(定義四).

系四. 二線分和上之正方形,等於各線分上正方形和加其矩形之二倍.

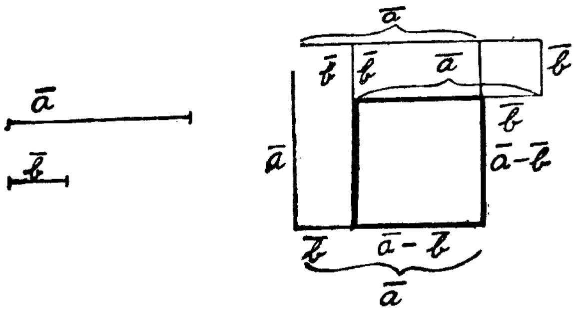


如圖, $\square(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}+\overline{b}) = \square\overline{a}\overline{a} + \square\overline{b}\overline{b} + 2\square\overline{a}\overline{b}$,

即 $$\overline{\overline{a}+\overline{b}}^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2 + 2\overline{a}\overline{b}.$$

系五. 一線分上正方形等於其半線分上正方形之四倍.（系四）

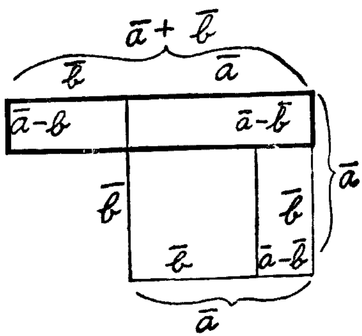
系六. 二線分差上之正方形等於從各線分上正方形和減其所包矩形二倍之差.



如圖，$\square(\bar a-\bar b)(\bar a-\bar b)=\square\bar a\bar a+▭\bar b\bar b-2▭\bar a\bar b$,

即　$\overline{a-b}^2=\bar a^2+\bar b^2-2\bar a\bar b.$

系七. 二線分上正方形之差,等於此二線分和及差所包之矩形.



如圖，$\square\bar a\bar a-\square\bar b\bar b$

$=▭(\bar a-\bar b)\bar a+▭(\bar a-\bar b)\bar b$

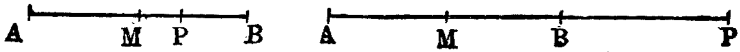
$=▭(\bar a-\bar b)(\bar a+\bar b)$,

即　$\overline{a^2}-\overline{b^2}=\overline{a+b}\cdot\overline{a-b}.$

系八. 二線分和及差所包矩形等於此二線分上正方

形之差.（系七）　即　$(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}-\overline{b})=\overline{a}^2-\overline{b}^2$

△系九. 一點內分或外分一線分為二分,則此二分所包矩形等於半線分上正方形與線分中點及分點間距離上正方形之差.



如上圖,線分 AB 中點為 M, 內分或外分點為 P, 設 $AM=MB=\overline{a}$, $MP=\overline{b}$, 則在內分一類中,

$$AP.PB=(\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}-\overline{b})=\overline{a}^2-\overline{b}^2=\overline{AM}^2-\overline{MP}^2;$$

在外分一類中, $AP.BP=(\overline{b}+\overline{a})(\overline{b}-\overline{a})=\overline{b}^2-\overline{a}^2=\overline{MP}^2-\overline{AM}^2$.（系八）

系十. 等積二矩形之一邊相等,則其隣邊亦相等.（本定理）

例題一　（定理）

(1)　從二線分和上正方形減二線分差上正方形之差等於此二線分所包矩形之四倍.

(2)　述 $\overline{ab}+\overline{b}^2=(\overline{a}+\overline{b})\overline{b}$ 及 $\overline{ab}-\overline{b}^2=(\overline{a}-\overline{b})\overline{b}$ 之幾何學上意義,且證明之.

(3)　以一線分任意分作三分,則此全線分上正方形等於其各分上正方形和加其兩兩所包矩形和之二倍.

(4)　一線分上正方形等於其 n 分之一部分上正方形之 n^2 倍.

(5)　線分 AB 之中點爲 M, 任意分點爲 P, 則

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{MP}^2.$$

(6)　二線分不等,則其上正方形之和比其所包矩形之二倍大.（視系六之圖）.

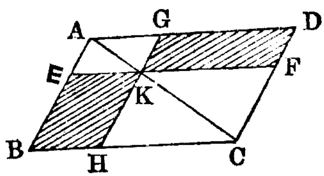
(7)　分一線分爲兩分,令其各分上正方形之和爲最小.〔用(6)〕.

(8)　周圍相等之諸矩形中,正方形之面積爲最大.

〔註〕　證 $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2>ab$, a, b 爲不相等之二線分.

第二章　等積形

7.　定義五



在一平行四邊形 $ABCD$ 中,過其對角線 AC 上任意一點 K 引二隣邊 BC, AB 之平行線 EF, GH. 分原形爲四個小平行四邊形,其中二形 EG, HF 名之曰沿對角線 AC 之平行四邊形(Parallelograms about diagonal), 而二形 EH, GF 爲其餘形 (Complements).

8.　定理二.

以諸三角形或平行四邊形之底置於同一直線上,而諸

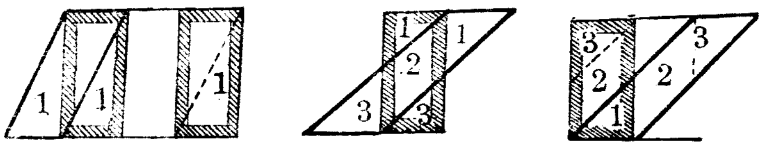
形在底之同旁,

(一) 若此諸形等高,則三角形之頂點或平行四邊形底之對邊在平行於底之直線上;

(二) 若三角形之頂點或平行四邊形底之對邊在底之平行直線上,則此諸形等高. 〔3編, 理17〕

系一. 介於二平行線間等底之矩形相等. (理1及本定理).

系二. 介於二平行線間等底之平行四邊形及矩形相等.



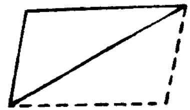
如圖,以一平行四邊形分作諸部分,以此各部分行適當之平行移動,則可合成一矩形,從定義三,知此二者等積.

系三. 平行四邊形等於與其等底等高之矩形 (系二).

系四. 等底等高之平行四邊形等積(系三).

系五. 等積平行四邊形之底相等,則高亦等;又高相等,則底亦等.

系六. 等底二平行四邊形或二矩形中,高大者面積亦大(普通公理七).



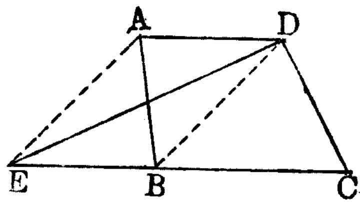
系七. 三角形等於與其等底等高平行四邊形之半〔2編, 理27(四)〕.

系八. 三角形等於與其等底等高矩形之半(系七及系三).

系九. 等底等高之三角形等積(系七及系四).

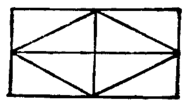
系十. 等積二三角形之底相等,則高亦等;若高相等,則底亦等(系七及系五).

系十一. 梯形等於以其兩底和為底其高為高之三角形.



如圖, $\triangle ABD = EBA = EBD$ (系七及系九)故也.

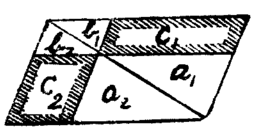
系十二. 梯形等於以其兩底半和為底其高為高之矩形(系十一及系八).



系十三. 菱形等於其二對角線所包矩形之半(系八).

9. 定理三.

從平行四邊形對角線上一點引二隣邊之平行線由此所得對角線旁二餘形等積.

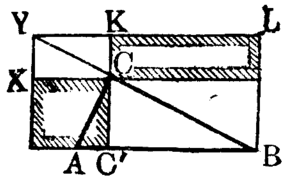


〔證〕　如圖,從第二編定理二十七(四),知:

$a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2$, $a_1=a_2$, 及 $b_1=b_2$,

$\therefore\quad (a_1+b_1+c_1)-a_1-b_1=(a_2+b_2+c_2)-a_2-b_2$, 即 $c_1=c_2$.

系. 直角三角形對斜邊高上正方形等於此高所分斜邊上二分之矩形.



如圖, $CX=CC'$, $CK=C'A$, $KL=C'B$, 則 $\square CL=AC'.C'B$, 而 $\square CL$ 及 $\square CB$ 可加合成一個矩形;

以 $\triangle CC'A$ 繞 C 旋轉至 CXY, 則

$\measuredangle YCX+XCC'+C'CB=ACC'+XCC'+C'CB=2R_\measuredangle$,

故 Y, C, B, 共線; $XY=C'A=CK$, 故 Y, K, L 共線;由是 $\square CL$ 與 $\square XC'$ 為 $\square YB$ 中對角線 YB 旁之二餘形,故等積.

10. 定義六.

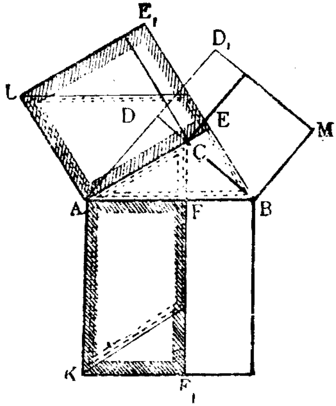
從一點至一直線下垂線,其垂足爲此點在直線上之垂直射影(Orthogonal Projection).

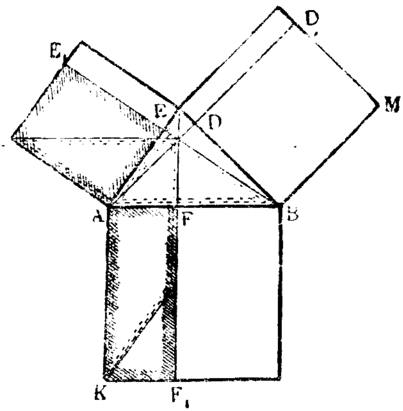
從一線分兩端至一直線下垂線,則其二垂足間之線分爲原線分在直線上之垂直射影.

射影有種種而垂直射影爲最簡,本書中遇此種射影恆單言曰射影.

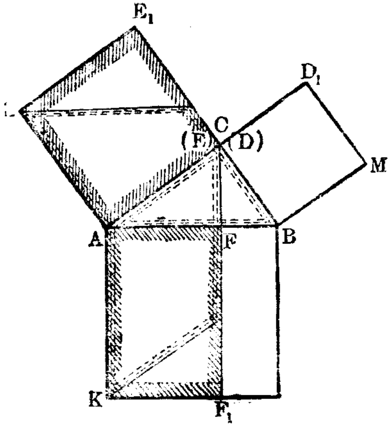
11. 定理四.

三角形第一邊與第二邊在此上射影所包矩形等於第二邊與第一邊在此上射影所包矩形.





〔證〕　在 $\triangle ABC$ 各邊上向形外作正方形 BK, CM, CL. 從各角頂至對邊引垂線延長之至遇正方形之對邊,如 ADD_1, BEE_1, CFF_1, 則 AF, FB; BD, DC; CE, EA; 各爲 AC, CB 在 AB 上之射影; AB, AC 在 BC 上之射影; BC, AB 在 CA 上之射影,由是　$\square AF_1=AB\cdot AF$, $\square BF_1=AB.BF$, $\square BD_1=BC.BD$, $\square CD_1=BC.CD$, $\square CE_1=CA.CE$, $\square AE_1=AC.AE$.



從 L 引 AB 之平行線,成 $\square LB$, 從 K 引 AC 之平行線成 $\square KC$;

由是　$▭AF_1=\square KC$　(定理二系二)

$\cong\square LB$　(以$\square KC$繞A旋轉使C合於L,則K合於B)

$=▭AE_1$. (同底等高,定理二系二)

同理,可證　$▭BF_1=▭BD_1$, $▭CD_1=▭CE_1$. (若$\measuredangle C=R_\measuredangle$, 則 $▭CD_1=▭CF_1=O$)

<u>系一.</u>　<u>鈍角三角形對鈍角邊上正方形等於從他二邊上正方形和加其中一邊與第二邊在此上射影所包矩形之二倍.</u>

從本定理, $\square BK=\square CM+\square CL+2▭CD_1$

$=\square CM+\square CL+2▭CE_1$,

即　<u>$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+2BC.CD=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+2AC.CE.$</u>　故如系言.

<u>系二.</u>　<u>三角形中對銳角一邊上正方形等於從他二邊上正方形和減其中一邊與第二邊在此上射影所包矩形之二倍.</u>

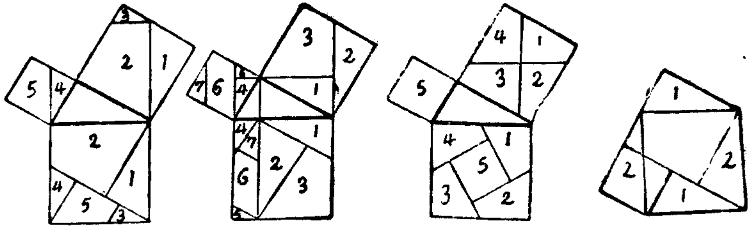
因 $\square BK=\square CM+\square CL-2▭CD_1=\square CM+\square CL-2▭CE_1$.

故　<u>$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-2BC.CD=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-2AC.CE,$</u>

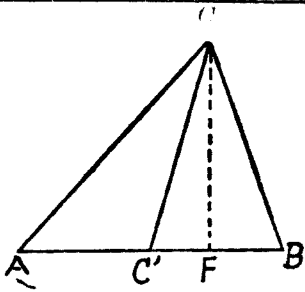
<u>系三.</u>　<u>直角三角形斜邊上正方形等於直角二邊上正方形之和.</u>

如$\measuredangle C=R_\measuredangle$, 則 <u>$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2.$</u>

系三爲著名之 Pythagoras 定理,* 我國先輩曾有證此之圖數十種,名曰青出朱入圖.今略錄數種於下,以增學者之興趣:



系四. 三角形二邊上正方形之和等於半底上正方形與對底中線上正方形和之二倍.



如圖, $\triangle ABC$ 中線 CC' 在 AB 上之射影爲 $C'F$,

則 $\overline{AC}^2=\overline{AC'}^2+\overline{CC'}^2+2AC'.C'F$

(系一),

因 $AC'=C'B$, $\therefore \overline{AC}^2=\overline{C'B}^2+\overline{CC'}^2+2C'B.C'F$, (1)

又從系二, $\overline{BC}^2=\overline{C'B}^2+\overline{CC'}^2-2C'B.C'F$, (2)

$$\therefore \overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{C'B}^2+\overline{CC'}^2)$$

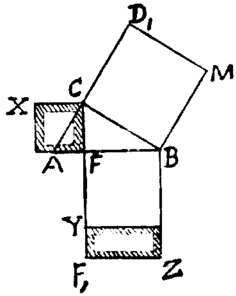
系五. 三角形二邊上正方形之差等於底與對底中線在底上射影所包矩形之二倍.

從系四中(1)及(2),可知 $\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=4C'B.C'F=2AB.C'F$,

* Pythagoras 氏(西曆紀元前 580--501)非發見此定理之人乃證明此定理者也.

系六. 直角三角形對斜邊之高所分斜邊一部分與斜邊所包之矩形等於此部分隣邊上之正方形.（本定理）.

系七. 直角三角形對斜邊高上之正方形等於斜邊上二部分所包之矩形.



如圖, $FF_1=BA$, $FY=BF$, 則

$\sqsubset YZ=AF.BF$, $\square BY=\overline{BF^2}$;

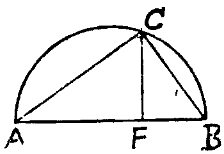
因　$\square CM=\sqsubset BF_1$

$=\square BY+\sqsubset YZ$（本定理）,

$=\square BY+\square FX$（系三）;

$\therefore$　$\square FX=\sqsubset YZ$, 即 $\overline{CF^2}=AF.FB$.

（參觀定理三系）



系八. 從半圓周上任意一點至直徑上引垂線,且聯直徑兩端引弦,則

(1)弦上正方形等於直徑上與此相隣一部分及直徑所包之矩形;即 $\overline{AC^2}=AF.AB$, $\overline{BC^2}=BF.AB$.（系六）

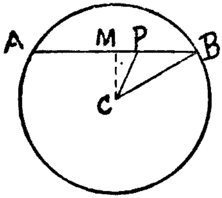
(2)垂線上正方形等於直徑上二部分所包之矩形. 即 $\overline{CF^2}=AF.FB$（系七）.

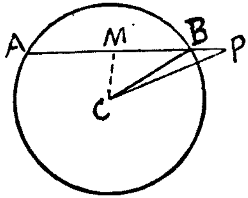
系九. 正方形對角線上之正方形等於二倍本形(系三).

系十. 三角形一邊上之正方形比他二邊上正方形之和較大,或較小,或相等,則此邊對角爲鈍角,或銳角,或直角.

12. 定理五.

內分或外分一圓之弦,則其二部分所包矩形等於半徑上正方形與分點及中心距離上正方形之差.





〔證〕 AB 爲 $\odot C$ 之任意弦,M 爲 AB 之中點,則 $CM \perp AB$;

AB 內分於 P,則	AB 外分於 P,則
$AP \cdot PB = \overline{MB}^2 - \overline{MP}^2$ (理 1 系 9)	$AP \cdot PB = \overline{MP}^2 - \overline{MB}^2$ (理 1 系 9)
$= (\overline{CB}^2 - \overline{CM}^2) - (\overline{CP}^2 - \overline{CM}^2)$	$= (\overline{CP}^2 - \overline{CM}^2) - (\overline{CB}^2 - \overline{CM}^2)$
(理 4 系 3)	(理 4 系 3)
$= \overline{CB}^2 - \overline{CP}^2$.	$= \overline{CP}^2 - \overline{CB}^2$.

故如題言.

系一. 過一定點之諸弦其二部分所包之矩形皆相等.

系二. 交於圓內一點之諸弦其二部分所包矩形等於以交點爲中點之一弦半分上之正方形.

系三. 相交二線分爲交點所分二部分之矩形相等,則此二線分端之四點共圓(用同一法證過三點之圓必過第四點).

系四. **交於圓外一點之諸弦其二部分所包矩形等於從交點所引切線上之正方形.**

系五. **從圓外一點至圓所引線分上之正方形等於過此點之諸弦上二部分所包之矩形,則此線分爲圓之切線.**

例題二　(定理)

(1)　獨立證明定理二系四.

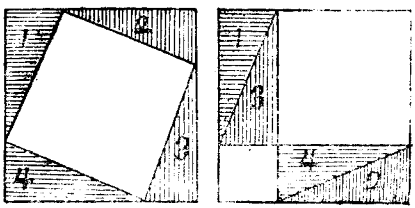
(2)　以梯形之中線爲底作一等高之平行四邊形,則此形與梯形等積.　用此證定理二系十二.

(3)　延長梯形二底令其延線各等於其對底,聯此二延線之端作一平行四邊形,由此證定理二系十二.

(4)　從鈍角三角形中一銳角頂至對邊引垂線,由此用 Pythagoras 定理及定理一系四證定理四系一.

(5)　從任意三角形一角頂至對邊引垂線,由此用 Pythagoras 定理及定理一系六證定理四系二.

(6)　就定理四之圖中,先證 $\triangle ABL \cong AKC$, 由是用定理二系八證定理四.



(7)　比較右之二圖作 Pythagoras 定理之別證

(8)　用 Pythagoras

定理及定理一系四證定理四系七.

(9) 用定理五證定理四系七.

(10) 等積二三角形有同底而在底之同旁,則其頂點在底之平行線上.

(11) 等積二三角形有同底而在底之兩旁,則其頂點之距離爲底所等分.

(12) 聯三角形二邊中點,且從二中點至底引任意二平行線,則所得一平行四邊形等於三角形之半.

(13) 順次聯四角形各邊中點所得平行四邊形等於原形之半.

(14) 四角形之二對角線直交,則其二對角線所包矩形等於原形之二倍.

(15) 以梯形之不平行一邊爲底對邊中點爲頂點所成之三角形等於原形之半.

(16) P 爲平行四邊形 $ABCD$ 對角線 AC 外之任意點,則 $\triangle PAC=\frac{1}{2}(\square PB\sim\square PD)$.

(17) 梯形二對角線之交點等分過此點而平行於二底之線分.

(18) 平行等長二線分在同直線上之射影相等.

(19) 直角三角形之一銳角爲他一銳角之二倍,則直角二邊中大邊上之正方形爲小邊上正方形之三倍.

(20)　四角形 $ABCD$ 之二對角線直交,則

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DA}^2.$$

(21)　從任意一點至矩形各雙對角頂所引二線分上正方形之和相等.

(22)　P 爲二等邊三角形 ABC 底 AB 上之一點,則

$$\overline{AC}^2-\overline{PC}^2=AP.\ BP.$$

(23)　平行四邊形四邊上正方形之和,等於其二對角線上正方形之和.

(24)　在二等邊直角三角形 ABC 斜邊 BC 上取任意一點 D,則 $2\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$.

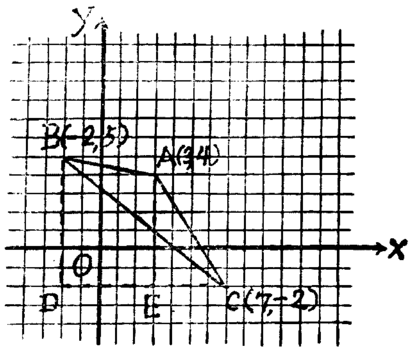
(25)　正三角形一個高上之正方形等於一邊上正方形之 $\frac{3}{4}$.

(26)　三角形三邊上正方形和之三倍,等於三中線上正方形和之四倍.

(27)　從二等邊三角形 ABC 之頂點 A 引一直線,與對邊 BC 交於 P,與外接圓周交於 Q,則 AP, AQ 所包矩形之面積一定.

例題三　(實用)

(1)　學者至此,當已在代數學中學得坐標之用.法取直交於 O 之二直線爲軸,其在水平位置者曰橫軸,或曰



X軸,在直立位置者曰縱軸,或曰Y軸,交點O曰原點. 任意用一線分單位,從各軸起,量度一點與二軸之距離,得數曰點之坐標. 從Y軸起,向右得數爲正,向左得數爲負,所得數以x表之. 從X軸起,向上得數爲正,向下爲負,所得數以y表之. x曰點之横坐標,y曰點之縱坐標,記之爲點(x, y). 例如A $(3, 4)$之意,爲表點A在y軸右三單位,在x軸上四單位之位置.

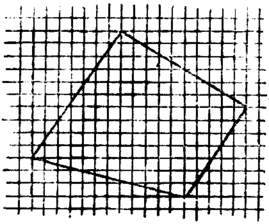
依解析幾何學之規則,已知三角形三個角頂之坐標爲(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),則其面積之數數爲$\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3)$. 今設三角形三個角頂之坐標爲$(3, 4)$, $(-2, 5)$, $(7, -2)$,用此公式求其面積之數數. 再用本篇定理二系十一合之第一篇44款第二之方法求上圖中梯形$BDEA$及直角三角形AEC, BDC面積之數數,用以求出$\triangle ABC$之數數.

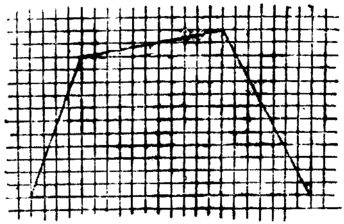
(2) 三角形頂點之坐標如下,求此諸三角形面積之畝數.

(a) $A(3, 6)$, $B(2, 4)$, $C(3, 0)$; (b) $A(5, 1)$, $B(3, 2)$, $C(4, 5)$;

(c) $A(3, 7)$, $B(1, 3)$, $C(4, 0)$; (d) $A(6, 1)$, $B(6, 6)$, $C(5, 7)$.

(3) 希臘歷史家 Thucydides 以沿 Sicily 島航行之時間定此島之大小. 其誤何在,能言之歟?

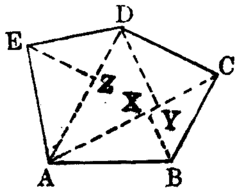


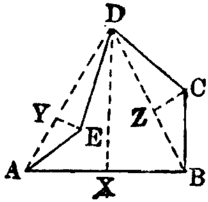


(4) 上圖示用坐標紙求不規則四角形面積畝數之二法: 若形之一邊與紙上一線相合,則可分成矩形及直角三角形而求之;若不合,則過各角頂畫紙上縱橫線之平行線成一外接矩形,於是亦歸於求矩形及直角三角形面積之畝數.

在上二圖中,假定坐標紙之每格為一單位長,求此二個四角形各邊及面積之畝數.

(5) 求直線圖面積畝數之又一法,分形為若干三角形而求之. 此法於量地時用之最便. 如下二圖,已設其中各線分之長,求其面積畝數.

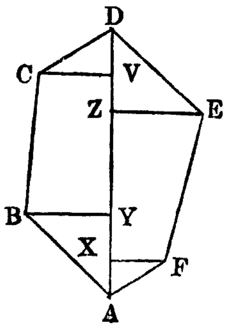




$$\left\{\begin{array}{ll} AC=6\text{ 尺}, & AD=5\text{ 尺}, \\ BX=2\text{ 尺}, & DY=4\text{ 尺}, \\ EZ=3\text{ 尺}. & \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} AB=BD=DA=6\text{ 尺}, \\ EY=CZ=1\text{ 尺}, \\ DX=5.2\text{ 尺}. \end{array}\right\}$$

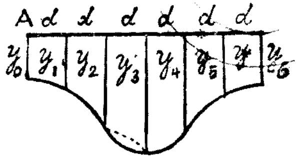
圖中各三角形之底曰底線 (base line), 從圖界各點至底線之距離曰支距 (offsets).

$$\left\{\begin{array}{l} AD=56\text{ 尺}, \\ AV=50\text{ 尺}, \\ AZ=40\text{ 尺}, \\ AY=18\text{ 尺}, \\ AX=10\text{ 尺}, \\ VC=12\text{ 尺}, \\ YB=20\text{ 尺}, \\ ZE=18\text{ 尺}, \\ XF=15\text{ 尺}. \end{array}\right\}$$



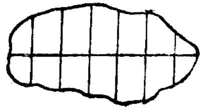
(6)　求面積畝數之又一便法如上圖. 取直線圖中適當之一對角線作底線,由諸支距分原形成諸直角三角形及梯形而求之. 試計算上圖中各邊及面積之畝數.

(7)　在實用中,恆遇有欲求一曲線及一直線間一部

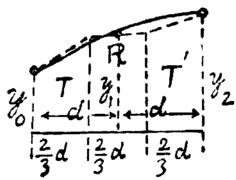


分之面積者,可用一名為梯形律(Trapezoidal Rule)之方法求其近似值.此法乃以每二支距間之梯形代其在曲線下之長條. 其律,以首末二支距(如y_0, y_5)之半和加入中間諸支距之和,以每二支距間公共距離之數乘之. 試用定理二系十二證此律.

(8) 梯形律亦可用以求一曲線所圍面積之近似值. 試言其故.



(9) 又有一求面積近似值之律名曰 Simpson 氏律,比之梯形律較為完善. 其法,分相連二長條為一矩形及二梯形,即分$2d$為三等分,從分點各引垂線為一矩形之二邊,其高等於正中一支距;於是聯兩旁二支距之端至此矩形隣近之角隅得二梯形. 如圖,名二梯形之面積為T及T',矩形之面積為R,則 $T+R+T'=\frac{1}{3}d(y_0+4y_1+y_2)$.

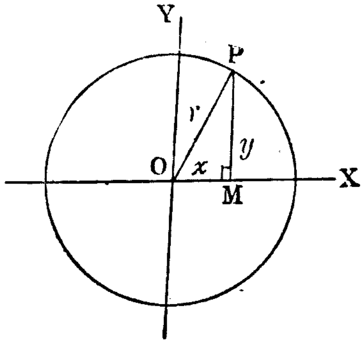


若長條之數為偶數,而諸支距順次以y_0, y_1, y_2, $\cdots$, y_n表之,則總面積之近似值為

$$\frac{1}{3}d\ (y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n).$$

試用已知之定理證第一式,由是再證第二式.

(10) 以坐標之原點爲中心,用 r 單位之長作半徑畫一圓. 如圖,圓周上任意點之坐標爲 (x, y), 則從 Pythagoras 定理,



$$\overline{OP^2}=\overline{OM^2}+\overline{MP^2},$$

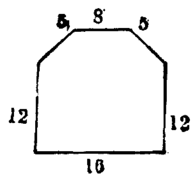
由是,其數數之關係爲

$x^2+y^2=r^2$. 此爲圓之方程式. 今設 $r=5$, $x=3$; $r=13$, $x=5$; $r=17$, $x=8$; 求 y 之值.

(11) 一繫定之汽球直升空中高1000尺.一觀者立於離汽球出發點 4000 尺之處.求此觀者與汽球之距離.

(12) 一梯長25尺.倚一壁上而上端達一高20尺之窗.今梯之上端沿壁滑下一尺,求其下端滑遠之尺數.

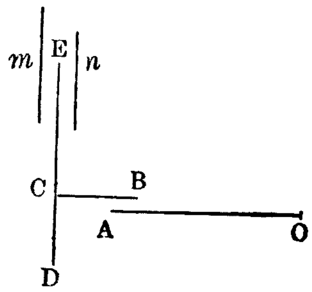
(13) 右圖爲六角形地板一塊,各邊旁所記之數爲其長之寸數. 求此板面積之數數.



(14) 一保護海岸之礮,能擊射10哩之遠近. 一船自遠沿海岸駛來,離岸 8 哩,每時速18哩. 設此船航路不變,則其路入礮線內者幾哩? 在此範圍內需行幾時?

(15) 下圖一槓桿 AO, 長 2 呎,可以 O 爲中心旋轉於一

直立平面中,當 AO 旋轉時,必觸別 橫桿 BC, 而 BC 鑲於一直立桿 DE 上. B 點在 AO 上之射影離 A 4 吋. DE 爲一槽 $m\,n$ 所夾,故僅能作垂直運動. 求 AO 旋轉時 DE 因而舉起之呎數.



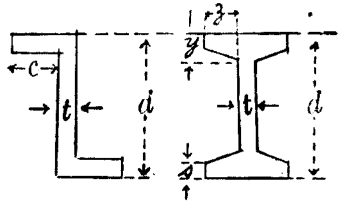
(16)　木工土工作直角之建築物時,恆用木三條各長 6 呎, 8 呎, 10 呎者作一三角形而取對於最大邊之角爲直角之模範,此法傳自埃及之古時,能說明其理歟?

(17)　右二圖在機械工作中有求面積之公式如下:

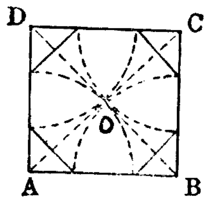
左圖面積 $=(d+2c)t$,

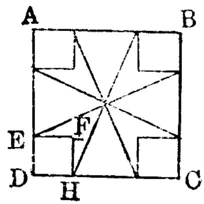
右圖面積 $=dt+(s+y)2z$.

試說明之.



(18)　右圖示一作正八角形之捷法. 法先作一正方形 $ABCD$, 其二對角線交於 O. 乃以正方形之各角頂作中心, AO 之長作半徑,規弧,在各邊上得八個交點,則此八點爲正八角形之角頂. 證之.





(19)　有一正八角形之几面,每邊

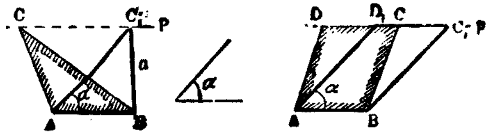
長1尺,求其面積.

(20) 上圖中,AC及EH皆爲正方形. 設$AB=4a$, $DE=a$, 求交截形之面積.

第三章 作圖題及軌跡

13. 問題一.

作一三角形或平行四邊形,令各與一所設三角形或平行四邊形等積,且(a)令其一角等於一所設角α; (b)令其一邊等於一所設長a.



〔解法〕 ABC爲所設三角形,過C引對邊AB之平行線p. $ABCD$爲所設之平行四邊形,延長AB之對邊p.

(a) 從A作線,令與AB成一所設角α, 此線與p之交即爲所求形之第三角頂. 由此可完全作此所求形.

(b) 以B爲中心所設長a爲半徑,規弧,交p,得所求形之第三角頂.

學者宜自證及討論之.

系一. 作一平行四邊形,令與一所設三角形等積,而其一角等於一所設角α.

作圖如上(a),取三角形底之中點作平行四邊形之第二角頂.

系二. 作一矩形令與一所設平行四邊形等積 $(\measuredangle a = R_{\measuredangle})$.

系三. 作一矩形令與一所設三角形等積 (系一中 $\measuredangle a = R_{\measuredangle}$).

系四. 作一矩形令與一所設不平行四邊形等積.

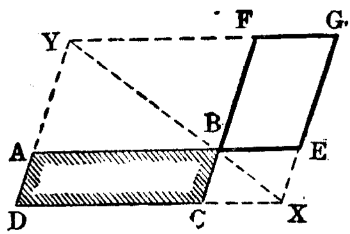
引所設四邊形之一對角線分爲二個共底三角形,用系三解法.

14. 問題二.

作一平行四邊形令與一所設平行四邊形互相等角而等積,且令其一邊爲所設長.

〔解法〕 延長所設平行四邊形 $ABCD$ 一邊 AB 至 E 令 BE 等於所設長;

從 C 及 E 各作 BE, BC 之平行線,交於 X;



聯 XB 延長之,交 DA 之延線於 Y;從 Y 作 AB 之平行線,各交 CB, XE 之延線於 F, G 兩點;則 $BEGF$ 卽爲所求之平行四邊形.

學者自證之.

系一. 作一矩形令與一所設平行四邊形或矩形等積,且一邊爲所設長.

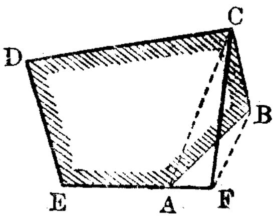
系二. 作一矩形令與一所設三角形等積,且一邊爲所設長.

系三. 作一矩形令與一所設正方形等積且一邊爲所設長.

15. 問題三.

作一多角形令與一所設多角形等積而邊數少一

〔解法〕 作所設多角形 $ABCDE$ 之一對角線 AC, 從 B 引 CA 之平行線,交 EA 之延線於 F, 聯 CF, 得 $FCDE$ 爲所求之多角形.



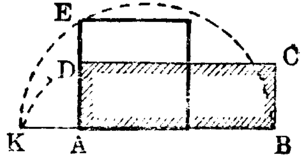
學者自證之.

系一. 作一三角形令與一所設多角形等積(累用上之解法).

系二. 作一矩形令與一所設多角形等積(系一及問題二系二).

16. 問題四.

作一正方形令與一所設矩形等積.

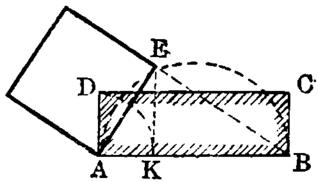


〔解法一〕 以矩形 $ABCD$

二隣邊AB,AD之和爲直徑畫半圓,延長AD遇半圓周於E,則AE爲所求正方形之一邊.

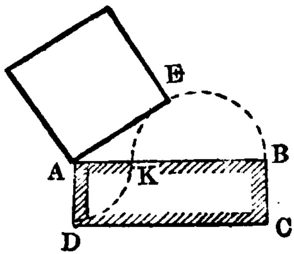
〔證〕　從定理四系七,知$\overline{AE}^2=AK.AB=AD.AB$.

〔解法二〕　以矩形$ABCD$一邊AB爲直徑畫半圓,從AB上取K令$AK=AD$,從K引AB之垂線會半圓周於E,則AE爲所求正方形之一邊.



〔證〕　從定理四系八可知.

〔解法三〕　以矩形$ABCD$二隣邊AB, AD之差KB爲直徑畫半圓,從A作此半圓之切線AE,則AE爲所求正方形之一邊.



〔證〕　從定理五系四可知.

系一. 作一正方形令與一所設三角形等積 (題1系3及本題).

系二. 作一正方形令與一所設多角形等積 (題3系2及本題).

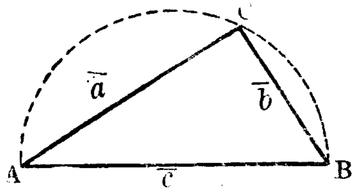
系三. 已知二線分和(KB)及所包矩形之積($\overline{AE}^2$)作此二線分.(視本題解法一之圖).

系四. 已知二線分差(KB)及所包矩形之積($\overline{AE^2}$)作此二線分.(視本題解法三之圖).

17. 問題五.

作一正方形令等於二個所設正方形之和或差.

〔解法〕 (第一) $\overline{a}$, $\overline{b}$ 爲二個所設正方形之邊,欲作一正方形等於此二形之和.



作直交二線從交點 C 起在二線上各取線分 $CA=\overline{a}$, $CB=\overline{b}$, 聯 AB, 卽得所求正方形之一邊.

(第二) $\overline{a}$, $\overline{c}$ 爲二個正方形之一邊,欲作一正方形等於此二形之差.

作一線分 AB 令等於所設較大之一邊 $\overline{c}$; 以此爲直徑,在其上作半圓周;以一端 A 爲中心,又一所設邊 a 爲半徑規弧,交半圓周於 C, 則 BC 卽爲所求正方形之一邊.

〔證〕 視定理四可知. (學者自討論之).

系一. 作一正方形令等於所設正方形之二倍(理4系9)

系二. 作一正方形令等於所設正方形之半.

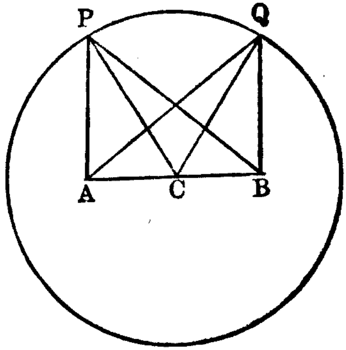
在解法第二中取 AB 之中點爲 K.

18. 定理六.

一動點與二定點距離上正方形之和一定,則此動點之

軌跡爲一圓周.

〔證〕　設 A, B 爲二定點，C 爲 AB 之中點，$AC=CB=\overline{d}$，動點與二點 A, B 距離上正方形之和爲 $\overline{m^2}$.



〔第一〕　P 爲合於所設條件之一點，則 $\overline{PA^2}+\overline{PB^2}=\overline{m^2}$；

然　$\overline{PA^2}+\overline{PB^2}=2(\overline{PC^2}+\overline{d^2})$　(定理四系四)；

故　$2(\overline{PC^2}+\overline{d^2})=\overline{m^2}$，　而　$\overline{PC^2}=\dfrac{\overline{m^2}}{2}-\overline{d^2}$；

由是 PC 之長短一定 (題5系2及題5)，又 C 爲定點，故 P 在以 C 爲中心定長 PC 爲半徑之一圓周上.

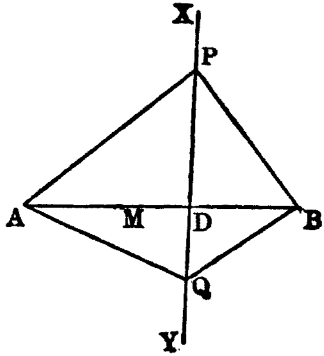
〔第二〕　在此圓周上任意取一點 Q，聯 QA, QB, QC，則

$$\begin{aligned}\overline{QA^2}+\overline{QB^2}&=2(\overline{QC^2}+\overline{d^2}) &&(\text{理 4 系 4})\\&=2(\overline{PC^2}+\overline{d^2}) &&(3\text{ 編, 理 }1)\\&=\overline{m^2}; &&(\text{本題第一})\end{aligned}$$

故 Q 合於所設條件.

故 $\odot C$ 爲所求之軌跡.

19. 定理七.



一動點與二定點距離上正方形之差一定,則此動點之軌跡爲垂直於二定點聯線之一直線.

〔證〕 設二定點 A, B 之距離爲 c, 動點與此二點距離上正方形之差爲 $\overline{m}^2$, 線分 AB 之中點爲 M.

〔第一〕 P 爲合於條件之一動點,從 P 引 AB 之垂線 XY, 交 AB 於 D, 則 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=\overline{m}^2$ (假設);

然 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=\overline{2c}\ MD$ (理 4 系 5); 故 $\overline{2c}.\ MD=\overline{m}^2$;

由是 MD 之長可定(題 2 系 3),卽 D 可定而 XY 之位置一定.

故 P 在垂直於 AB 之定直線 XY 上.

〔第二〕 在 XY 上任意取一點 Q, 聯 QA, QB, 則

$\overline{QA}^2-\overline{QB}^2=2c.\ MD$ (理 4 系 5) $=\overline{m}^2$ (本題第一),

故 Q 合於所設條件.

故 XY 爲合於所設條件之點之軌跡.

例題四　(作圖及軌跡)

(1) 作一三角形令與一所設三角形等積而一角不變,且角之一邊等於一所設長.

(2) 作一三角形令與一所設三角形等積而其二邊各等於所設長.

(3) 變一不等邊三角形爲等積之二等邊三角形.

(4) 作一三角形令與一所設三角形等積,而一個角頂仍在原位置,底在一所設直線上.

(5) 作一平行四邊形令其二邊各爲所設長而與一所設平行四邊形等積.

(6) 作一菱形令其邊爲所設長而與一所設平行四邊形等積.

(7) 作一正方形令等於三個所設正方形之和.

(8) 從三角形一頂點作一直線,分此三角形爲二等分.

(9) 從三角形一邊上之一點作一直線等分此三角形.

(10) 三角形之面積及底皆一定,則其頂點之軌跡爲二個平行於底之直線.

(11) 一動圓恆等分二定圓,則此動圓中心之軌跡爲一直線.

(12) 一動圓恆直交一定圓而過一定點,則其中心之軌跡爲一直線.

第四章 雜例

20. 證題之路徑.

初等幾何學中關於面積之設題,稍複雜者大抵須用比例,在專屬於本篇者皆甚簡,證題能善用定理已足,無藉於方法也.

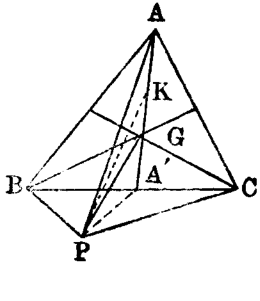
今約而言之,大致題之關於一直線上諸線分所包矩形者恆用定理一(包括其諸系而言以下亦然);關於三角形或四角形及直線者恆用定理二或三;關於三角形邊上正方形或矩形者恆用定理四;關於圓及直線或直線形者恆用定理五;無餘事矣.

關於圓之設題,有時或作補助線,其法不出前篇所舉之範圍.

今略舉一二複雜之例以啟學者之思路.

例一. P 為 $\triangle ABC$ 內或外之任意點,則(用3編,§48之記法) $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$$=3.\overline{PG}^2+\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2.$$



〔證〕 K 為 AG 之中點,聯 PK,及 PA'. 則

$$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2(\overline{PA'}^2+\overline{BA'}^2),$$

(就 $\triangle PBC$ 用理4系4)

$\overline{PA}^2+\overline{PG}^2=2(\overline{PK}^2+\overline{KG}^2)$，(就 $\triangle PAG$ 用理 4 系 4)

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PG}^2=2(\overline{PA'}^2+\overline{PK}^2)+2(\overline{BA'}^2+\overline{KG}^2)$

$=4(\overline{PG}^2+\overline{KG}^2)+2(\overline{BA'}^2+\overline{A'G}^2)$

(就 $\triangle PA'K$ 用理 4 系 4) $(KG=A'G)$

$=4\overline{PG}^2+4\overline{KG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2$

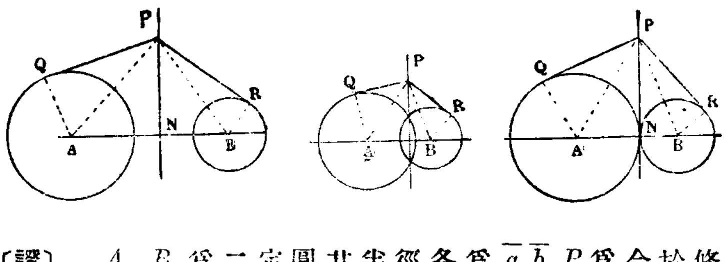
(就 $\triangle GBC$ 用理 4 系 4)

$=4\overline{PG}^2+\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2$;

$(AG=2KG$, 用理 1 系 5)

由是 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=3.\overline{PG}^2+\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2$.

例二. 一動點至二定圓所引之切線恆相等,則此動點之軌跡為垂直於二圓中心線之一直線.



〔證〕 A, B 為二定圓,其半徑各為 $\overline{a}$, $\overline{b}$, P 為合於條件之任意點,即從 P 至 ⓈA, B 各引切線 PQ, PR 時, $PQ=PR$,

$\therefore \overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$;

從 P 至 AB 引垂線 PN, 則因 $\overline{PA}^2-\overline{a}^2=\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2=\overline{PB}^2-\overline{b}^2$, 而 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=\overline{a}^2-\overline{b}^2$; 由是從定理七,知 P 在 PN 直線上.

次,假定 P' 爲 PN 上任意點,則 $\overline{P'A^2}-\overline{P'B^2}=\overline{a^2}-\overline{b^2}$, 而 $\overline{P'A^2}-\overline{a^2}=\overline{P'B^2}-\overline{b^2}$, 即從 P' 至⊙A,B 所引之切線上正方形相等.

故 PN 爲所求之軌跡.

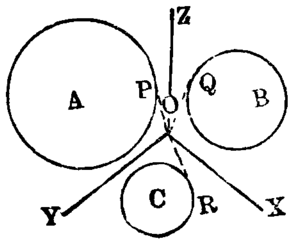
〔注意〕　此軌跡名曰二定圓之根軸(Radical Axis), 共有一根軸之諸圓曰共軸圓(Coaxal Circles).

系一.　相交圓根軸爲其公共弦之延線(定理五)｝同一

系二.　相切圓根軸爲其切點之公切線(定理五)｝證法

系三.　共軸圓之中心在垂直於根軸之同直線上.

例三.　三圓兩兩之根軸共點.



〔證〕　設三圓 A,B,C, ⓈA,B 之根軸 ZO 與ⓈB,C 之根軸 XO 會於 O.

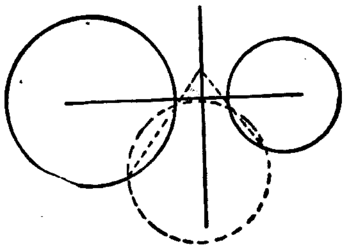
(一)　若 O 在諸圓外,則從 O 至ⓈA,B,C 各引切線 OP, OQ, OR;

因 O 在 OZ 上, $\therefore OP=OQ$; 又 O 在 OX 上, $\therefore OQ=OR$; 由是 $OP=OR$,

即 O 又在ⓈC,A 之根軸 OY 上;故三個根軸共點.

(二)　若 O 在諸圓內,則三個根軸爲相交三圓兩兩之公共弦;由是從定理五系一及系三可知本題之眞確.

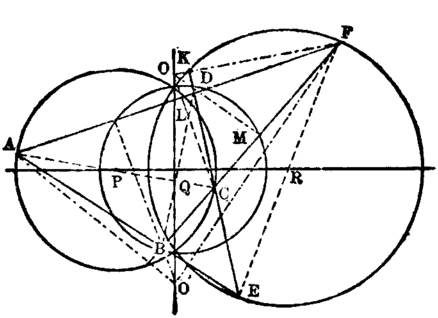
〔注意〕 如此所共之點爲三圓之根心(Radical Centre), 欲作切於定圓之圓時常用之,



有二圓欲作其根軸,用本例作之甚易. 法先畫交二圓之任意圓,作其二個公共弦,得交點,從此交點作二圓中心線之垂線即得根軸.

定義. 四直線中無三個爲共點者,則此四線之一系統曰完全四邊形(Complete Quadrilateral), 此四線兩兩之會爲四邊形之頂點(Vertices); 其不共邊二頂點之聯曰對角線(Diagonal).

例四. 以完全四邊形三個對角線爲直徑作圓,則此三圓共軸.



〔證〕 完全四邊形 $ABCDEF$, 以其三個對角線 AC, BD, EF 爲直徑所作之圓爲 ⓈP, Q, R. $\triangle FCD$ 之三垂線爲 FK, CL, DM, 則 $\measuredangle EKF = ALC = BMD = R_{\measuredangle}$, 故 K, F; L, C; M, D 各在 ⓈR, P, Q 上; 又 K, F, C, L; 及 L, C, M, D 皆共圓 (3編, 理 10 系 10 及 3 編, 理 12), 故此三垂線所共之點爲 O, 則 $OK \cdot OF = OL \cdot OC = OM \cdot OD$ (理 5), 而 O 爲 ⓈR, P, Q 兩兩根軸公共之點(前例);

同理,可證 $\triangle FAB$ 之垂心 O' 亦爲 ⓈR, P, Q 兩兩根軸公共之點;

由是 ⓈR, P, Q 兩兩之根軸不能不共爲 OO', 即此三圓共軸.

〔注意〕 本題爲 Mention 氏定理.

系一. $\triangle\!\!\!\triangle FAB, FCD, EBC, EAD$ 之垂心共線(皆在ⓈP, Q, R 之根軸上).

系二. 完全四邊形三對角線之中點共線(例二系三).

〔注意〕 此所共之線名曰 Newton 線.

例題五 (定理)

(1) G 爲 $\triangle ABC$ 之重心,則 $\triangle GBC = GCA = GAB$.

(2) $\triangle = r . s = r_1(s-\overline{a}) = r_2(s-\overline{b}) = r_3(s-\overline{c})$.

(3) $AB'GC' = \triangle BGC$.

(4) 過平行四邊形 $ABCD$ 角頂 D 引一直線,交 BC 於 E, AB 之延線於 F, 則 $\triangle ABE=\triangle CEF$.

(5) 二三角形 ABC, ABD 共有底 AB, 且 $CD//AB$, 則平行於 AB 之一直線為各形二邊或其延線所截之二部分相等.

(6) 從一正多角形內任意一點至各邊所引垂線之和為定長.

(7) 從一圓內一點引直交二弦,則此二弦四分上正方形之和等於直徑上之正方形.

(8) 一三角形之頂角等於 $\frac{4}{3}R_{\angle}$,則其底上正方形等於二邊上正方形之和加此二邊所包之矩形.

(9) 線分 DE 平行於二等邊三角形 ABC 底 BC 而 D 在 AB 上, E 在 AC 上,則 $\overline{BE}^2=BC\cdot DE+\overline{CE}^2$.

(10) 四角形四邊上正方形之和等於二對角線上正方形和加其中點距離上正方形之四倍.

(11) 四角形對角線上正方形之和等於二雙對邊中點距離上正方形和之二倍.

(12) $3(\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2)=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2$.

(13) 弦 CD 平行於直徑 AB, P 為 AB 上任意一點,則

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{PC}^2+\overline{PD}^2.$$

(14) DE, FG 各為相交二圓 C_1, C_2 之弦,而此二弦交

於二圓公共弦或其延線上之一點,則D, E, F, G共圓.

(15) 從一直徑AB兩端各引弦AD, BE於同半圓內,此二弦交於P,則 $AP.AD+BP.BE=\overline{AB}^2$.

(16) 從三角形各角頂至對邊各引線分,若此三線分會於一點而各線分被此交點所分二部分之矩形相等,則此交點爲三角形之垂心。

例題六 (軌跡及作圖題)

(1) 一動圓恆與二定圓直交,則此動圓中心之軌跡爲二定圓之根軸.

(2) 從$\odot C$內一點A引直交二射線,各與圓周交於D及E,若此二射線同時繞A旋轉,則DE中點之軌跡爲一圓周.

(3) 從一動點至一定矩形各角頂距離上正方形之和一定,則此動點之軌跡爲圓.

(4) 從四角形之一角頂作一直線等分此四角形.

(5) 從四角形一邊上之定點作一直線等分此四角形.

(6) 在三角形中求一點令聯此點至各角頂則可三等分此三角形.

(7) 討論問題四系三. (8) 討論問題四系四.

(9)　在一定線分上求一點,令其分線分所得二分上正方形之和等於一定正方形.

(10)　在一定線分上求一點,令其分線分所得二分上正方形之差等於一定正方形.

(11)　作一圓,令過二定點,且切一定直線(用定理五).

(12)　作一圓,令過一定點,且切二定直線(用前題).

(13)　作一圓,令過二定點,且切一定圓(用根心).

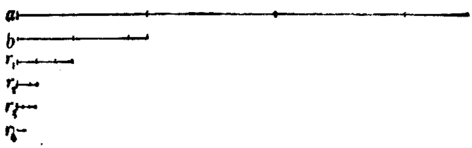
第五編

比例

第一章 基礎性質

1. 問題一.

<u>設二線分,求其比.</u>



〔解法〕 a,b 為所設二線分, $a>b$.

先在 a 中截取 b, 截三回而餘 r_1, 則 $a=3b+r_1$;

次在 b 中截取 r_1, 截二回而餘 r_2, 則 $b=2r_1+r_2$;

再在 r_1 中截取 r_2, 截二回而餘 r_3, 則 $r_1=2r_2+r_3$;

又在 r_2 中截取 r_3, 截一回而餘 r_4, 則 $r_2=r_3+r_4$;

復在 r_3 中截取 r_4, 截三回而適盡,則 $r_3=3r_4$;

由是 $r_2=3r_4+r_4=4r_4$, $r_1=8r_4+3r_4=11r_4$,

$$b=22r_4+4r_4=26r_4,\quad a=78r_4+11r_4=89r_4;$$

$\therefore\ a=89r_4=\frac{89}{26}b$, 而 $a:b=\frac{89}{26}$, 〔1編, §42〕

故得 a 對於 b 之比值為 $\frac{89}{26}$. r_4 為 a 及 b 之公度.

〔注意一〕　$r_1<b$,故$r_1<\frac{1}{2}a$;　$r_2<r_1$,故$r_2<\frac{1}{2}b$;

$r_3<r_2$,故$r_3<\frac{1}{2}r_1$;　$r_4<r_3$,故$r_4<\frac{1}{2}r_2$;….

〔注意二〕　二量a,b行此方法至若干回後終得公度,則a,b為可通約量,已見於前.若行此方法累次不得公度,行至無窮回而仍不得,則終無公度可知,何則,從注意一,知$r_1<\frac{1}{2}a$,$r_3<\frac{1}{2}r_1$即$r_3<\frac{1}{2^2}a$,做此,$r_5<\frac{1}{2^3}a$,……,$r_{2n-1}<\frac{1}{2^n}a$;同理$r_{2n}<\frac{1}{2^n}b$;今a,b皆為有盡量,故n愈大,則$\frac{1}{2^n}a$及$\frac{1}{2^n}b$愈小,而行此法之回數至無窮時,即n為無窮大時$\frac{1}{2^n}a$及$\frac{1}{2^n}b$當至比吾人想像中所能擬議無論若何小之量尚小,而r_{2n-1}及r_{2n}更小,則必無一有盡量能為a,b之公度可知,由是a,b為不可通約量.

由是可得定理如下:

定理A.　行本題之解法而能得公度,則原二量為可通約量.

定理B.　行本題之解法而終不得公度,則原二量為不可通約量.

於是此二定理之倒否定理亦成立,如下:

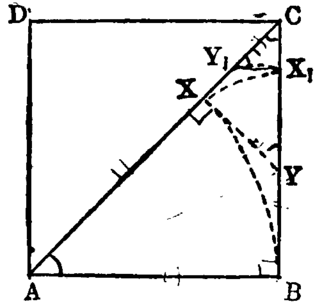
定理C.　二量為可通約量,則行本題之解法必得公度.

定理D.　二量為不可通約量,則行本題之解法不能得公度.

2. 定理一.

正方形之對角線與其一邊為不可通約量.

〔證〕 $ABCD$ 為正方形,則 $\triangle ABC$ 爲二等邊直角三角形, AC 與 BC 爲其底與一邊; 用前款之法,從底 AC 中截去 $AX=AB$, 餘 XC; 由 X 引 CX 之垂線交一邊 BC 於 Y, 則因



$\triangle ABY \cong AXY$, 而 $BY=XY$, 又因 $\measuredangle XYC=R_{\measuredangle}-XCY$ $=R_{\measuredangle}-BCA=BAC=BCA=XCY$, 而 $XC=XY=BY$; 卽於 BC 中截去 $BY=XC$, 所餘 YC 與 XC 仍爲直角二等邊三角形底及一邊之關係; 次,再行前法,在 YC 中截去 $YX_1=YX=XC$, 餘 X_1C, 從 X_1 引 X_1C 之垂線,交 XC 於 Y_1, 則如上可證得 $X_1C=X_1Y_1=XY_1$, 故再從 XC 截去 $XY_1=X_1C$ 後,所餘之 Y_1C 及 X_1C 仍爲二等邊直角三角形底及一邊之關係; 以後循環如此; 故行此法不能得公度可知, 卽 AC 與 BC 爲不可通約量.

3. 不可通約量之比值.

在前款之圖中, $AC, BC, XC, X_1C, \cdots$ 各名之爲 $a, b, r_1, r_2, \cdots$,

則 $a=b+r_1\,(r_1<b)$, $b=2r_1+r_2\,(r_2<r_1)$, $r_1=2r_2+r_3\,(r_3<r_2)$,

$r_2=2r_3+r_4\,(r_4<r_3), \cdots;$

由是　$a:b=1+(r_1:b),\quad b:r_1=2+(r_2:r_1),$

$$r_1:r_2=2+(r_3:r_2);\quad r_2:r_3=2+(r_4:r_3);$$

故　$$a:b=1+\frac{1}{(b:r_1)}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{(r_1:r_2)}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{(r_2:r_3)}}}=\cdots$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

今名此比值爲x,即$a:b=x$,則

$$x-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}=\frac{1}{2+x-1},$$

由是　$x^2-1=1$, 而 $x=\sqrt{2}$,

故可得定理如下:

定理. 不可通約量之比值爲一無理數.

從代數學,已知無理數恆介於二羣有理數之間,故二量a,b若爲不可通約量,則其比值必介於二分數之間,如

$$\frac{m}{n}<a:b<\frac{m+1}{n}.$$

此中m,n皆爲正整數,任意定其一,如n,則必有m之一值

與之相應.

4. 關於比例之普偏定理.

從上款,則在第一編43款中所證諸定理就可通約量及不可通約量皆能成立,僅須以證中之 r 表任意實數可矣.今以此諸定理更述之於下以備取用:

定理(一). $A:B=mA:mB$.

定理(二). $P:Q=A:B$, $X:Y=A:B$, 則 $P:Q=X:Y$.

定理(三). $A:B=P:Q$, 則 $B:A=Q:P$(反比定理).

定理(四). $A=B$, 則 $A:C=B:C$, 又 $C:B=C:A$.

定理(五). $A\gtrless B$, 則 $A:C\gtrless B:C$, 又 $C:B\gtrless C:A$.

定理(六). 比例中三項一定,則第四比例項有一無二.

定理(七). 連比例中二項一定,則其餘一項有一無二.

定理(八). $A:B=P:Q$, 則 $A:P=B:Q$(更比定理).

定理(九). $A:B=C:D=E:F=\cdots$, 則

$(A+C+E+\cdots):(B+D+F+\cdots)=A:B$(加比定理).

定理(十). $A:B=P:Q$, 則$(A+B):B=(P+Q):Q$(合比定理).

定理(十一). $A:B=P:Q$, 則 $(A\sim B):B=(P\sim Q):Q$ (分比定理).

定理(十二). $A:B=P:Q$, 則

$(A+B):(A\sim B)=(P+Q):(P\sim Q)$ (合分比定理).

定理(十三). $A:B=P:Q$, $B:C=Q:R$, 則 $A:C=P:R$.

系一．$A:C=(A:B)(B:C)$.

系二．$A:B=Q:R$, $B:C=P:Q$, 則 $A:C=P:Q$.

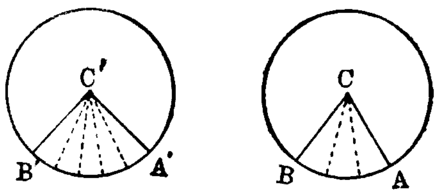
定理(十四)． $A:B=P:Q$, 則 $(A:B)^2=(P:Q)^2$.

系．$(A:B)^2=(P:Q)^2$, 則 $A:B=P:Q$.

第二章　中心角

5. 定理二．

在同圓或等圓中,二中心角之比等於其所截弧之比.



〔證〕　照問題一之解法求所設二等圓 C 及 C' 中心角 ACB, $A'C'B'$ 之比.

(第一)　若二角爲可通約量而 $\measuredangle A'C'B':ACB=\frac{m}{n}$,

則以 $\measuredangle A'C'B'$, ACB 各分作 m, n 等分時,此分角之諸半徑亦以 $\frown A'B'$, AB 各分作 m, n 等分(3 編, 理 5.);

故　$\frown A'B':AB=\frac{m}{n}$,　而　$\measuredangle A'C'B':ACB=\frown A'B':AB$.

(第二)　若二角爲不可通約量,則以 $\measuredangle ACB$ 分作任意等分,如 n 分,以此所得一分量度 $\measuredangle A'C'B'$ 時,必不能度盡,而在

m分及$m+1$分之間,即 $\frac{m}{n} < \measuredangle A'C'B' : ACB < \frac{m+1}{n}$ (§3);
此時分角之諸半徑亦以$\frown AB$分成n等分,以$\frown A'B'$分成m分有餘,而 $\frac{m}{n} < \frown A'B' : AB < \frac{m+1}{n}$ (3編.理5.):

由是 $(\measuredangle A'C'B' : ACB) \sim (\frown A'B' : AB) < \frac{1}{n}$;

從§3所言,知n爲無論何數所得情形必皆如此,故n爲無窮大時亦然.

然n爲無窮大時,$\frac{1}{n}$小至比吾人思想中所能想像無論如何小之數尚小,而 $(\measuredangle A'C'B' : ACB) \sim (\frown A'B' : AB)$ 尚比此小,故極其致,不能不 $(\measuredangle A'C'B' : ACB) \sim (\frown A'B' : AB) = 0$,

即 $$\measuredangle A'C'B' : ACB = \frown A'B' : AB.$$

系一. 取圓心單位角所截之弧爲單位弧,則中心角與其弧有同一之度數.

〔注意〕 以是,在實用方面,角及弧用同一之六十分法

系二. 圓周角與其所立弧之半有同一度數.

系三. 切線角與其所夾弧之半有同一度數.

例題一 (實用)

(1) 二弦交於圓內,則其一雙對頂角各與其所夾二弧之半和有同一度數.

(2) 二割線交於圓外,則其交角與其二邊所夾二弧

之半差有同一敭數.

(3)　從圓外一點所引二切線之夾角與其所分得相屬二弧之半差有同一敭數.

若其一爲割線則如何?

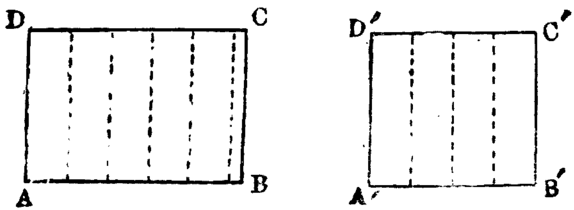
(4)　一弧等於全圓 $\frac{1}{n}$, 以立此弧上中心角及圓周角之度數表作公式.

(5)　圓內接一正 n 角形其一邊所張中心角之度數若何? 又其一內角所立圓弧之度數若何?

第三章　直線形之面積

6.　定理三.

等高二矩形之比等於其底之比.



〔證〕　$\square ABCD, A'B'C'D'$ 中高 $AD=A'D'$.

求二底 $AB, A'B'$ 之比.

(第一)　若 $AB, A'B'$ 爲可通約量,

而　　$AB : A'B' = \frac{m}{n}$,

則以$A'B'$分作n等分,以AB分作m等分,於各分點引底之垂線,則分二矩形各成n及m個小矩形而各小矩形皆等積(4編,理1);

由是 $\square AC:\square A'C'=\frac{m}{n}$, 而 $\square AC:\square A'C'=AB:A'B'$.

(第二) 若AB, $A'B'$爲不可通約量,則以$A'B'$任意分作n等分時AB中所含同大小之分數必在m及$m+1$之間(§3),

而 $$\frac{m}{n}<AB:A'B'<\frac{m+1}{n};$$

從底上各分點作底之垂線,則$\square A'C'$可分成n個等積小矩形而$\square AC$中則含如此小矩形之數在m及$m+1$之間,卽

$$\frac{m}{n}<\square AC:\square A'C'<\frac{m+1}{n};$$

由是 $$(AB:A'B')\sim(\square AC:\square A'C')<\frac{1}{n};$$

吾人使n(卽等分$A'B'$之分數)逐漸增加,則$\frac{1}{n}$逐漸減少,n無窮增加時$\frac{1}{n}$小至不可思議,此時比$\frac{1}{n}$更小之

$$(AB:A'B')\sim(\square AC:\square A'C')$$

極其致當等於O; 由是

$$AB:A'B'=\square AC:\square A'C'.$$

系一. 等底矩形之比等於其高之比.

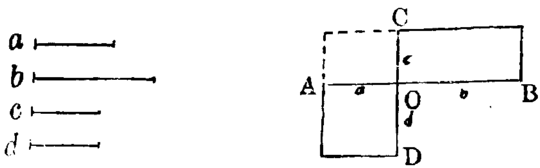
系二. 等高平行四邊形之比等於其底之比;等底平行四邊形之比等於其高之比.

系三. 等高三角形之比等於其底之比;等底三角形之比等於其高之比.

7. **定理四.**

(a)四線分成比例,則其外項所包矩形等於內項所包矩形.

(b)二矩形等積,則包此二矩形之四線分成比例,而包一矩形之二線分爲兩內項,他二線分爲兩外項.



〔證〕　在直交於 O 之二直線上截取 $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $OD=d$, 如圖,作成矩形 BC, CA, AD, 則從前款,

$$\square AC:\square CB=AO:OB=a:b,$$

$$\square AC:\square AD=CO:OD=c:d;\quad 由是:$$

(a)　$a:b=c:d$, 則 $\square AC:\square CB=\square AC:\square AD$ 〔§4,理(二)〕,

故　$\square CB=\square AD$, 即　$b.c=a.d$;

(b)　$b.c=a.d$, 即 $\square CB=\square AD$, 則 $\square AC:\square CB=\square AC:\square AD$

〔理(四)〕,

$$\therefore\quad a:b=c:d.$$

〔注意〕　算術及代數學中比例式兩外項之積等於兩

內項之積,幾何學中此一定理與之相當,所宜注意者,四項必皆爲線分,且意義亦不相同也.

系一. 二個矩形或三角形等積,則其高之比等於底之反比.

系二. (a)三線分成比例,則其外項所包矩形等於中項上之正方形;(b)一正方形與一矩形等積,則正方形之邊爲矩形二隣邊間之比例中項.

系三. 一圓內相交二弦爲交點所分四部分成比例,而一弦上之二分爲二內項,他弦上之二分爲二外項.

系四. 圓之諸弦交於一點,則以交點作中點之半弦爲他弦二分間之比例中項.

系五. 圓之共點二割線全線分與圓外部分成反比.

系六. 從一點所引圓之切線爲從此點所引割線及其圓外部分之比例中項.

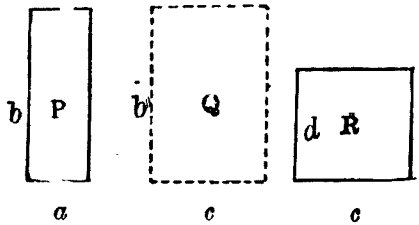
系七. 直角三角形對斜邊之高爲其所分斜邊二分間之比例中項.

系八. 直角三角形一直角邊爲其在斜邊上之射影及斜邊間之比例中項.

系九. 三角形各邊之比等於其所對高之反比.

8. 定理五.

二矩形之比等於其底之比及高之比之複比.



〔證〕 二矩形 P 及 R 中底各為 a, c, 高各為 b, d; 作一矩形 Q, 令其底為 c, 高為 b;

於是 $\square P : \square Q = a : c,\ \square Q : \square R = b : d$;

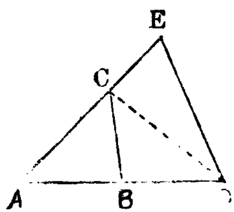
故 $\square P : \square R = (\square P : \square Q).(\square Q : \square R) = (a : c)(b : d)$,

〔§4 理(十三)系 1〕

即 $a.b : c.d = (a : c)(b : d)$.

系一. 二個線分比之複比等於其二前項之矩形對於二後項之矩形之比。

系二. 二三角形有一角相等,則二形之比等於此角二邊所包矩形之比。



如圖, $\triangle ABC : \triangle ADC = AB : AD$,

$\triangle ADC : \triangle ADE = AC : AE$,

$\therefore \triangle ABC : \triangle ADE = (AB : AD)(AC : AE) = AB.AC : AD.AE$.

系三. 三角形之一角與他一三角形之一角互為補,則二形之比等於夾此等角二邊所包矩形之比。(證法與系二同)。

系四. 二平行四邊形有一角相等或互爲補,則二形之比等於夾此等角二邊所包矩形之比.

系五. 二個三角形或平行四邊形之比等於底之比及高之比之複比.

系六. 二個正方形之比等於一邊之比之第二羃比.

系七. 矩形面積之數數等於二隣邊數數之相乘積.

如在定理之圖中,c, d 若皆爲線分單位,則 R 爲面積單位,而 $a:c$, $b:d$ 爲 a 及 b 之數數, $\square P:\square R$ 爲 $\square P$ 面積之數數,故本系云然. 於是第一編45款所言之事,至此在理論上始完全成立.

系八. 正方形面積之數數等於其一邊數數之第二羃.

〔注意〕 以是一數之第二羃名之曰平方.

系九. 正方形一邊之數數爲 a, 則對角線之數數爲 $a\sqrt{2}$,

系十. 平行四邊形面積之數數,等於其底及高二數數之相乘積.

系十一. 三角形面積之數數等於其底及高二數數相乘積之半.

系十二. 梯形面積之數數等於二底數數和與高之數數相乘積之半.

系十三. 菱形面積之數數等於二對角線數數相乘積

之半.

系十四. 直角三角形斜邊敲數之平方等於他二邊敲數平方之和.

〔注意〕　線分及面積於此已皆能求其敲數.由是在實用上,恒以一線分視爲其敲數而行代數方法,所得結果再以幾何意義解釋之. 如此方法,在純正幾何學方面觀之固非正軌,而於理論方面無損者,吾人自不妨容納,藉是可得旁面之觀察. 解釋之事略舉一二如下:

ab 爲二線分所包矩形; $\sqrt{ab}$ 爲二線分之比例中項;

$\frac{abc}{de}$ 爲以比$(b:d)$及$(c:e)$倍線分 a;

$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q^2}$ 爲直角三角形斜邊,其二個直角邊爲 $\frac{p}{2}$ 及 q;

$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-ab}$ 爲直角三角形之一直角邊,其斜邊爲 $\frac{p}{2}$ 他一直角邊爲二線分 a, b 之比例中項.

9　問題二.

求直角三角形三邊敲數之公式.

〔解〕　從前款系十四,知本題爲求三數,令其二數平方和等於第三數之平方. 今從代數學乘法公式,知

$$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2,$$

故 m^2+n^2 可作直角三角形斜邊之敲數,其餘二邊之敲數

各為 m^2-n^2 及 $2mn$.

例一. 任意取一偶數 12, 從此作直角三角形三邊之啟數.

〔解〕　(一) $12=2\times2\times3$, 故命 $m=3, n=2$, 則得所求三數為 $m^2+n^2=13$, $m^2-n^2=5$, $2mn=12$.

(二)　$12=2\times1\times6$, 故命 $m=6, n=1$, 則得所求三數為 $m^2+n^2=37$, $m^2-n^2=35$, $2mn=12$.

例二. 任意取一奇數 13, 從此作直角三角形三邊之啟數.

〔解〕　命 $m+n=13$, $m-n=1$, 則 $m=7$, $n=6$, 由是所求三數為 $m^2+n^2=85$, $m^2-n^2=13$, $2mn=84$.

例題二　(實用)

(1)　正三角形之一邊為 a, 則其高之啟數為 $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, 而其面積之啟數為 $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

(2)　直角三角形斜邊及一邊之啟數各為 c, a, 則其第三邊之啟數為 $\sqrt{(c+a)(c-a)}$.

(3)　直角三角形直角二邊上正方形之比等於此二邊在斜邊上射影之比.

(4)　直角三角形斜邊之啟數為 c, 一直角邊在斜邊

上射影之敼數為 d,則此直角邊之敼數為 $\sqrt{cd}$.

(5)　一圓之半徑為 r,一點與圓之距離為 d,則從此點至圓所引切線之敼數為 $\sqrt{d(2r+d)}$.

(6)　證 $\triangle=\sqrt{rr_1r_2r_3}$.

(7)　三角形三個高為 h_a, h_b, h_c,內接圓半徑為 r,則

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c},\text{ 證之.}$$

(8)　證 $2R=r_1+r_2+r_3-r$.

(9)　直角三角形一邊之敼數為18,則其餘二邊之敼數若何?

(10)　直角三角形一邊之敼數為17,則其餘二邊之敼數若何?

例題三　(定理)

(1)　等積三角形或等積平行四邊形有一角相等,則夾此角之一邊比等於他一邊之反比.

(2)　$\triangle\!\!\!\triangle ABC, ABD$ 中 $\angle CAB=DAB$,則

$$\triangle ABC:\triangle ABD=AC:AD.$$

(3)　$\triangle\!\!\!\triangle ABC, ABD$ 立於同底 AB 之同旁,CD 之中點為 E,則 $\triangle ABE=\frac{1}{2}(\triangle ABC+\triangle ABD)$.

(4)　$\triangle\!\!\!\triangle ABC, ABD$ 立於同底 AB 之兩旁,CD 之中點為 E,則 $\triangle ABE=\frac{1}{2}(\triangle ABC\sim\triangle ABD)$.

(5) 分線分AB於C,令$\overline{AC^2}=2.\overline{CB^2}$,則

$$\overline{AB^2}+\overline{BC^2}=2AB.AC.$$

(6) 圓內直交二弦上正方形之和等於從半徑上正方形之8倍減去中心及交點距離正方形之4倍.

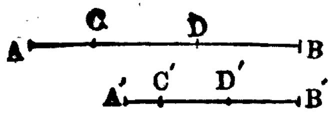
(7) 圓內接矩形中面積最大者爲正方形.

(8) O爲$\triangle ABC$形內或外之任意一點,AO或其延線交BC於D,則$\triangle AOB:AOC=BD:CD$.

第四章 比例線

10. 定義一.

一直線上諸部分之比等於他一直線上各對應部分之比則曰此二線分於相似 (to be divided similarly). 一雙對應線分之比值曰相似比(Ratio of Similitude).



例如$AC:CB=A'C':C'D'$, $CD:DB=C'D':D'B'$時二線分AB, $A'B'$爲分於相似. 從更比定理,

$AC:A'C'=CD:C'D'=DB:D'B'$(=相似比),此式又可記作

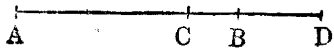
$AC:CD:DB=A'C':C'D':D'B'$; 從合比定理,又可得

$AB:A'B'=AC:A'C'=AD:A'D'$.

11. 定義二.

二點以同比內分及外分一線分,則曰線分爲此二點分於調和(to be divided harmonially). 此二點互爲調和相屬點(Conjugate harmonical points). 線分二端及此二點成一點列曰調和點列(Harmonic Range).

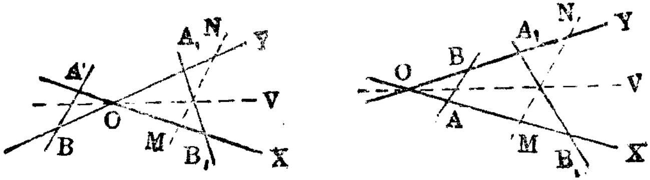
如圖,設 $AC:CB=AD:DB=m:n$*



則 AB 爲 C 及 D 分於調和,而 C, D 關於 A,B 爲調和相屬點.

由上式用更比定理,則又可得 $CB:BD=CA:AD$, 故同時 CD 亦爲 A,B 分於調和,而 A,B 關於 C,D 亦爲調和相屬點.

今 $AC:CB=AD:DB$ 可記作 $AC:AB-AC=AD:AD-AB$, 由更比定理, $AD-AB:AB-AC=AD:AC$; 從代數學,知 AD, AB, AC 成調和級數,此調和之名所由來也.



12. 定義三.

二射線 OX, OY 之一線束割以二平行線 AB, MN, 以其一

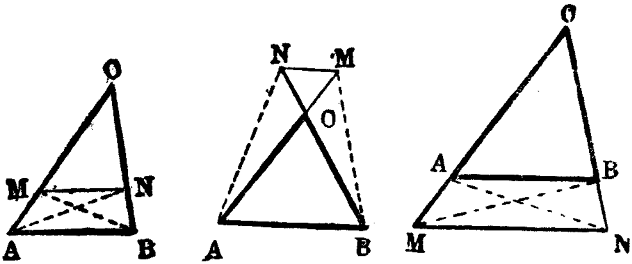
*若線分分別方向,則當爲 $AC:CB=-(AD:DB)=m:n$,

線 MN 繞 $\measuredangle XOY$ 之等分線 OV 行半軸轉而至軸對稱之位置 A_1B_1，則 AB 及 A_1B_1 謂之為倒平行(to be antiparallel)。OA 及 OA_1，OB 及 OB_1 為束之對應線分 (Corresponding segments)。A 及 A_1，B 及 B_1 為對應點 (Corresponding points)。

從此定義，可知如上圖中若先知 $\measuredangle OAB=OA_1B_1$，則 AB 及 A_1B_1 必互相倒平行。

13　定理六.

三角形底之平行線以二邊分於相似.



〔證〕　設直線 MN 平行於 $\triangle OAB$ 之底 AB。聯 AN, BM，

則 $\triangle NOM : NMA = OM : MA$，$\triangle MON : MNB = ON : NB$(理 3 系 3)，

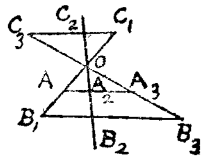
然
$$\triangle NMA = MNB \text{(IV. 理 2 系 9)},$$
$$\therefore OM : MA = ON : NB \text{〔§4,理(二)〕}.$$

由是，
$$OM : ON = MA : NB = OA : OB.$$

系一.　一線分內分於一定比之點有一無二；外分於一定比之點，若比值不為1，則亦有一無二。

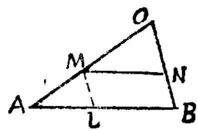
例如欲以線分 OA 內分或外分於定比 $p:q$. 由 O 引一直線,在其上取 $ON=p$, $NB=q$, 聯 BA, 從 N 引 $NM//BA$, 則從本定理,知 $OM:MA=ON:NB=m:n$, 故必有一分點.
次,由合分比定理, $m\pm n:n=OM\pm MA:MA$ (內分用 $+$, 外分用 $-$),故從§4定理(六),知此分點 M 僅有一個. (左一圖爲內分,右二圖爲外分)

系二. 以三角形二邊內分或外分於相似之線平行於底(同一證法).



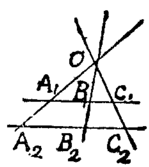
系三. 諸平行線以一線束之諸射線分於相似.

系四 二平行線截二射線之線束,則此二截線上部分之比等於各射線上相應射線分之比.



如圖, $MN//AB$. 從 M 引 $ML//OB$, 則 $AB:LB=AO:MO$, 即

$$AB:MN=OA:OM=OB:ON.$$



系五. 平行二直線爲一線束分於相似.

如圖, $A_2B_2:A_1B_1=OB_2:OB_1=B_2C_2:B_1C_1$,

$$\therefore\quad A_2B_2:B_2C_2=A_1B_1:B_1C_1.$$

系六. 平行二直線分於相似,則其各雙對應點之聯成

一線束,卽或平行或共點.

如上系五之圖,$A_1B_1C_1//A_2B_2C_2$,而$A_2B_2:B_2C_2=A_1B_1:B_1C_1$.

(一) 若 $A_2B_2=A_1B_1$,則 $B_2C_2=B_1C_1$;由是 $A_2A_1//B_2B_1//C_2C_1$.

(二) 若 $A_2B_2\neq A_1B_1$,則 A_2A_1, B_2B_1,交於 O,而

$$OB_2:OB_1=A_2B_2:A_1B_1=B_2C_2:B_1C_1;$$

於此 $B_2C_2\neq B_1C_1$,故 B_2B_1, C_2C_1 亦相交;設其交於 O',則

$$O'B_2:O'B_1=B_2C_2:B_1C_1;$$

故 O 及 O' 爲以同比分 B_2B_1 之點,而不得不合(系一),卽

$$A_2A_1,\ B_2B_1,\ C_2C_1 \text{ 共點.}$$

系七. 二射線之線束割以一雙倒平行線,所得對應線分成比例. (§12定義及本定理)

系八. 二射線之線束割以一雙倒平行線,則在各射線上所得二射線分所包之矩形等積. 卽在§12圖中

$$OA.OB=OA_1.OB_1,$$

此從系七及定理四可知.

系九. 二射線之線束割以一雙倒平行線所得二雙對應點共圓. (系八及四編定理五系三).

14. 定理七.

三角形一角之內外等分線以二隣邊之比內分及外分對邊.

〔證〕 $\triangle OAB$ 角 AOB 之內等分線 OC,外等分線 OD 各

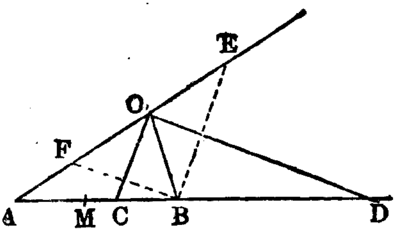
交 AB 於 C, D. 從 B 引 OC, OD 之平行線各交 OA 於 E, F, 則

$$\measuredangle OEB = AOC = COB = OBE, \ \therefore OE = OB;$$

由是　$AC : CB = AO : OE = AO : OB$.

次,　$\measuredangle OFB = EOD = DOB = OBF, \ \therefore OF = OB;$

由是 $AD : DB = AO : OF = AO : OB$.



<u>系一.</u> <u>三角形一角之內外等分線以對邊分於調和.</u>

<u>系二.</u> <u>若 AB 之中點為 M, 則 MB 為 MC 及 MD 之比例中項.</u>

何則, $AD : DB = AC : CB$ 可書作

$$(MD + MB) : (MD - MB) = (MB + MC) : (MB - MC),$$

從合分比定理,可得 $2MD : 2MB = 2MB : 2MC$, 即

$$MD : MB = MB : MC.$$

15.　定義四.

<u>OA, OB, OC, OD 四射線之線束以一截線 $ACBD$ 分於調和者名之曰調和線束</u> (Harmonic pencil). <u>OC, OD 曰關於 OA, OB 之調和相屬線.</u>　如此四射線之一線束恆記之為

$\{O-ABCD\}$,而點列 A, B, C, D,恆記之爲 $\{ABCD\}$.

〔注意〕 在前款之圖中,若 $OA=OB$,則 $OD//AB$,卽在有盡地位不能得 D 點,由是可知若所設比值爲1,則以此比(1:1)外分一線分不能在有盡位置求得外分點.易一語言之,如此外分點當在無窮遠.

例題四 (定理)

(1) 用定理二及三之證法證定理六系三.

(2) 一線分 AB 以比 $m:n$ 內分於 C,外分於 D.今以 a 表 AB,則

$$AC=\frac{m}{m+n}a,\quad CB=\frac{n}{m+n}a,$$

$$AD=\frac{m}{m\sim n}a,\quad BD=\frac{n}{m\sim n}a.$$

(3) 以比 $m:n$ 分一線分於點 P 而用正負號記 AP 及 PB 之方向,則 $(a)\,m:n=0$ 時,P 之位置若何? $(b)\,m:n=1$ 時 P 之位置若何? $(c)\,m:n=$ 無窮大時 P 之位置若何? $(d)\,m:n$ 爲負值時 P 之位置若何? $(e)\,-1<m:n<0$ 時 P 之位置若何? $(f)\,0<m:n<1$ 時 P 之位置若何? $(g)\,1<m:n<\infty$ * 時 P 之位置若何? $(h)\,-\infty<m:n<-1$ 時 P 之位置若何? $(i)\,m:n=-1$ 時 P 之位置若何?

(4) $\triangle XYZ$ 之邊 YZ, ZX, XY 各名之爲 x, y, z. 設

---

*∞ 爲無窮大之記號

XYZ 之角各在 $\triangle ABC$ 之各邊上,而 $x//a, y//b, z//c$, 則 Y, Z 必各爲 a, b, c 之中點.

(5)　任意三角形中對二邊之垂線關於此二邊爲倒行線.

(6)　圓內接四邊形一雙對邊關於他雙對邊爲倒平線,又二對角線關於任意一雙對邊爲倒平行線.

(7)　一直線與共點二射線成等角,則其倒平行線若?

(8)　一雙倒平行線在一射線上之二交點合一,則過在二射線上三個交點之圓切於前一射線.

(9)　直角三角形一直角邊及對底之垂線關於又一角邊及斜邊爲倒平行線.

(10)　$\triangle ABC$ 中 $\measuredangle C = R\measuredangle$. $\measuredangle B$ 之內外等分線各交於 P_1 及 P_2, 過 B, P_1, P_2 畫圓,則 AB 切於此圓.

(11)　從直角三角形直角頂任意引二線與一直角邊相等二銳角,則此二線以斜邊分於調和.

(12)　以任意比內分及外分一直角三角形之斜邊於和,則聯此二點至直角頂之二直線與其間一直角邊成角.

(13)　二點 C, D 各在線分 AB 及其延線上, M 爲 AB 之點. 若 MB 爲 MC 及 MD 之比例中項,則 A, C, B, D 爲調和

點列.

(14) AP等分$\triangle ABC$之頂角A, I為其內心,則

$$AB+AC:BC=AI:IP.$$

(15) P, Q調和分圓之一直徑, P', Q'調和分又一直徑,則P, P', Q, Q'共圓.

(16) $\triangle ABC$內接圓在BC, CA, AB上之切點各為X, Y, Z, YZ之延線交BC之延線於X',則B, X, C, X'為調和點列.

(17) 就$\triangle ABC$證 (a) $r_1:r_2=s-b:s-a$; (b) $r:r_2=s-b:s$.

(18) $\triangle ABC\angle A$之等分線交BC於P,則A, I, P, I_1為調和點列.

(19) P如上題,則D, X, P, X_1為調和點列.

(20) P如上題,則$A'X$為$A'D, A'P$之比例中項.

第五章 相似形

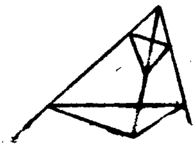
16. 定義五.*

互相等角之直線圖中各雙相等之角曰對應角,二雙對

*相似形之定義普通如定義五,此定義甚不圓滿,因其僅顧直線形而圓及曲線皆拋荒也;即如定義八,實不成為定義,然既用定義五,則圓之相似舍此竟無法可定. 在理,宜以定義七作相似形之定義,以定義五改作定理,則無論直線圖曲線圖皆可通用,而定理十三,十四皆已包含此定義中,更不必另證,惟如是則取徑太高,世俗或羣相駭怪,故本書姑仍舊貫.

角所夾之邊曰對應邊.

二個同邊數互相等角直線圖中各雙對應邊之比皆相等者曰相似直線圖 (Similar rectilineal figures), 或曰相似多角形,略曰相似形(Similar polygons),此各雙對應邊之比曰其相似比.



17.　定義六.

有二圖及一線束,若線束中各射線交一圖於一點者亦必交他圖於一點,則二圖中各圖爲他圖之中心射影 (Central projection), 線束之中心爲射影中心 (Centre of projection), 各射線曰發射線(Projecting rays), 二圖中在同射線上之一雙點曰對應點,二雙對應點之聯線曰對應線. 互爲中心射影之二圖亦可曰在透視位置 (In perspective position).

18.　定義七.

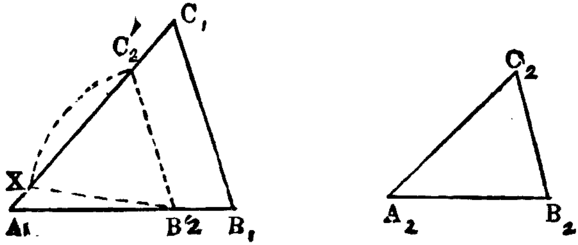
在透視位置中之二圖若各雙對應線皆平行,則謂此二圖爲相似而置於相似 (Similar and similarly placed), 或略曰應位相似(homothetic),此時射影中心曰相似中心(Centre of similarity, 或 homothetic centre).

應位相似二圖中各雙對應邊排列於同一次序中者曰同向 (same sense), 排列於反對次序中者曰對向 (opposite senses).

19. 定義八.*

任意二圓可視作相似形;視作同向相似,則其相似中心謂爲相似外心;視作對向相似,則其相似中心謂爲相似內心.

20. 定理八.



在二個三角形中,

(一) 二雙角各相等;

(二) 二雙邊之比相等,其所夾之角亦等;

(三) 三雙邊之比相等:

(四) 二雙邊之比相等,對此中一雙邊之角相等,對他雙邊之角或皆爲銳角,或皆爲鈍角;

則此二個三角形爲相似形.

〔證〕 (一)已知△$A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$中∡$A_2=A_1$, ∡$B_2=B_1$;在A_1B_1上取B'_2,令$A_1B'_2=A_2B_2$從B_2引$B_2'C_2' \parallel B_1C_1$,則

∡$B_2'C_2'A_1=C_1$(2編,理19,系6),

$A_1B'_2 : A_1B_1=B_2'C_2' : B_1C_1=C'_2A_1 : C_1A_1$(理6系4),

$\therefore\quad \triangle A_1B'_2C'_2 \sim A_1B_1C_1$ (§16)；

又因　$\triangle A_1B_2'C_2' \cong A_2B_2C_2$〔2 編. 理 22(一)〕，

$\therefore\quad \triangle A_2B_2C_2 \sim A_1B_1C_1$.

(二)　已知 $A_2B_2 : A_1B_1 = A_2C_2 : A_1C_1$，及 $\measuredangle A_2 = A_1$；

在 A_1B_1, A_1C_1 上各取 B_2', C_2'，令 $A_1B_2' = A_2B_2$，$A_1C'_2 = A_2C_2$，則

從假設，知 $A_1B'_2 : A_1B_1 = A_1C'_2 : A_1C_1$，故 $B_2'C'_2 // B_1C_1$ (理 6 系 2)，

而 $\measuredangle A_1B_2'C_2' = B_1$；

由是 $\triangle A_2B_2C_2 \cong A_1B_2'C_2'$〔2 編，理 22(二)〕$\sim A_1B_1C_1$ (本題一).

(三)　已知 $A_2B_2 : A_1B_1 = B_2C_2 : B_1C_1 = C_2B_2 : C_1A_1$；

在 A_1B_1，A_1C_1 上各取 B_2'，C_2' 令 $A_1B'_2 = A_2B_2$，$A_1C'_2 = A_2C_2$，

則如 (二)，知 $B_2'C_2' // B_1C_1$，故 $\triangle A_1B_2'C_2' \sim A_1B_1C_1$；

由是 $A_1B'_2 : A_1B_1 = B_2'C_2' : B_1C_1 = C_2'A_1 : C_1A_1$；

$\therefore\quad B'_2C'_2 : B_1C_1 = B_2C_2 : B_1C_1$，而 $B_2'C_2' = B_2C_2$；

故　$\triangle A_2B_2C_2 \cong A_1B_2'C_2'$〔2 編，理 22(三)〕，而 $\triangle A_2B_2C_2 \sim A_1B_1C_1$.

(四)　已知 $A_2B_2 : A_1B_1 = B_2C_2 : B_1C_1$，及 $\measuredangle A_2 = A_1$，且 $\measuredangle C_2, C_1$ 或同爲銳角，或同爲鈍角.

取 $A_1B'_2 = A_2B_2$，引 $B_2'C_2' // B_1C_1$，則 $\measuredangle B_2'C_2'A_1 = C_1$，而

$$B'_2C'_2 : B_1C_1 = A_1B'_2 : A_1B_1 \text{(一)};$$

由是 $B'_2C'_2 : B_1C_1 = B_2C_2 : B_1C_1$，而 $B_2'C'_2 = B_2C_2$；

以 B'_2 爲中心 B_2C_2 之長爲半徑規圓，則此圓必會 C_1A_1 於 C_2' (3 編. 理 3 系 1)，

其又一交點名爲 X;因 $B'_2X=B_2'C_2'$, 而 $\measuredangle B_2'XC_2'=B_2'C_2'A_1$,
故 $\measuredangle B_2'XA_1=2R_{\measuredangle}-B_2'C_2'A_1=2R_{\measuredangle}-C_1$, 而
$\measuredangle B'_2XA_1$ 與 C_1 一銳一鈍,亦卽與 C_2 一銳一鈍, 故 $\triangle A_1B'_2C'_2$ 與 $A_2B_2C_2$ 全等〔2編.理22(四)〕而 $\triangle A_1B_2'X$ 則否;
於是因 $\triangle A_1B_2'C_2'\sim\triangle A_1B_1C_1$ (本題一),而

$$\triangle A_2B_2C_2\sim\triangle A_1B_1C_1.$$

系一. 一直線與三角形一邊平行,則與他二邊所成之三角形與原形相似(本題一之證).

系二. 互相等角之三角形相似(本題一).

系三. 二個三角形之邊雙雙平行,則二形相似(本題一).

系四. 二個三角形之邊雙雙直交,則二形相似(本題一).

系五. 二個三角形中,二雙邊之比相等,對此中一雙邊之角亦相等,且 (a) 此所對一雙邊較大; (b)已知二形皆爲銳角三角形,或皆爲直角三角形,或皆爲鈍角三角形;則此二形相似(本題四).

系六. 二個直角三角形中二雙對應邊之比相等,則兩形相似(二及系五).

系七. 二個直角三角形中,一雙銳角相等,則二形相似(一).

系八. 二個相似三角形中二雙對應點距離之比等於相似比.

系九. 在二個相似三角形中,(一)對應高之比,(二)對應中線之比,(三)對應角等分線之比,(四)外接圓半徑之比,(五)內接圓半徑之比,皆等於相似比(系八).

系十. 二射線之一線束,其各射線皆割圓,則兩兩聯其四交點可得二個相似三角形(本題一).

系十一. 二射線之一線束,一射線切圓而一射線割之,則聯切點與二交點可得二個相似三角形(本題一).

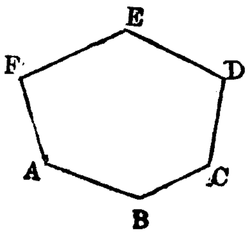
系十二. 直角三角形對斜邊之高分原形爲二三角形而二形各與原形相似.

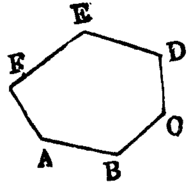
系十三. 二個相似三角形之比等於對應邊上正方形之比(理5系2及§16),以是又等於相似比之第二冪比.

系十四. 直角三角形之一個銳角一定,則三邊兩兩之比皆一定.

21. 定理九.

相似多角形周之比等於其相似比.



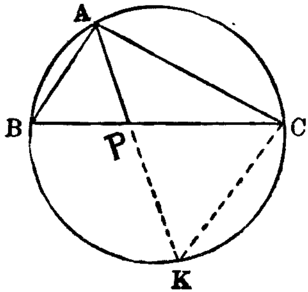


〔證〕 $ABC\cdots F$ 及 $A'B'C'\cdots F'$ 爲相似多角形,則

$AB:A'B'=BC:B'C'=\cdots=FA:F'A'$(定義)

$=AB+BC+\cdots+FA:A'B'+B'C'+\cdots+F'A'$(加比定理)

22. 定理十.



<u>三角形一角等分線上之正方形等於從此角二邊所包矩形減去第三邊上二分所包矩形之差.</u>

〔證〕 AP 爲 $\triangle ABC\measuredangle A$ 等分線. 延長 AP 會外接圓於 K, 聯 CK,

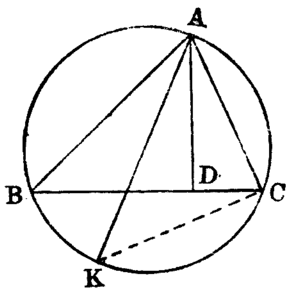
則因 $\measuredangle BAP=KAC$, $\measuredangle PBA=K$, $\therefore \triangle BAP\sim\triangle KAC$;

由是 $BA:AK=AP:AC$, 而

$$AB.AC=AP.AK(\text{理 }4)=\overline{AP}^2+AP.PK;$$

然 $AP.PK=BP.PC$, $\therefore \overline{AP}^2=AB.AC-AP.PK.$

23. 定理十一.



<u>三角形二邊所包矩形等於對第三邊之高與外接圓直徑所包矩形.</u>

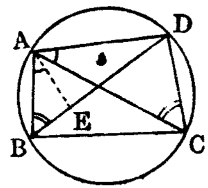
〔證〕 AK 爲 $\triangle ABC$ 外接圓之直徑, AD 爲對 BC 之高.

因 $\measuredangle ABD=AKC$, $\measuredangle BDA=KCA=R\measuredangle$, $\therefore \triangle ABD\sim AKC$;

由是 $AB : AK = AD : AC$, 而 $AB.AC = AD.AK$.

24 **定理十二** (Ptolemy 定理).

<u>圓內接四邊形二雙對邊所包矩形之和等於二對角線所包矩形.</u>



〔證〕　如圖引 AE 令 $\measuredangle BAE = CAD$, E 在 BD 上,

因　$\measuredangle ABE = ACD$, 故 $\triangle ABE \sim ACD$,

而　$AB : AC = BE : CD$;

由是　$AB.CD = AC.BE$;

次,　$\measuredangle BAC = EAD$, $\therefore \triangle ABC \sim AED$, 而 $BC : ED = AC : AD$;

由是　$AD.BC = AC.ED$;

故　$AB.CD + AD.BC = AC(BE + ED) = AC.BD$.

例題五　(定理)

(1)　用定理八系十證第四編定理五系一.

(2)　用定理八證第四編定理五系三.

(3)　用定理八系十一證第四編定理五系四.

(4)　用定理八證第四編定理五系五.

(5)　用定理八系十二證第四編定理四系六及系七.

(6)　用前題證 Pythagoras 定理.

(7)　從 $\triangle ABC$ 一角頂 A 至 BC 引垂線 AD, 若 AD 在形

內且爲 BD 及 DC 之比例中項,則 $\measuredangle BAC=R_\times$.

(8)　二三角形二雙邊之比相等,對於此中一雙邊之角亦相等,則對此中第二雙邊之角或相等,或互爲補.

(9)　四點 M, N, P, Q 各在四邊形 $ABCD$ 邊 AB, BC, CD, DA 上,而 $AM:MB=AQ:QD$, 及 $BN:NC=DP:PC$, 則 $MQ//NP$.

(10)　在 $\triangle ABC$ 邊 AB 上取二點 D 及 E, 令 $AD=BE$. 過 D 引 BC 之平行線會 AC 於 F, 過 E 引 AC 之平行線會 BC 於 G, 則 $FG//AB$.

(11)　$\triangle ABC$ 之二個高 AD 及 BE 交於 F, 則

$$\triangle AFE \sim BFD.$$

(12)　梯形之二對角線互分成比例四項.

(13)　二個三角形中二雙邊及對於此中一雙邊之中線成等比,則此二形相似.

(14)　二個三角形中,二雙邊及對於第三雙邊之中線成等比,則此二形相似.

(15)　二個三角形二雙邊及其外接圓半徑成等比,則二形相似.

(16)　二個三角形二雙邊及其內接圓半徑成等比,則二形相似.

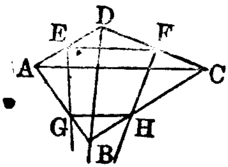
(17)　O 爲 $\triangle ABC$ 內或外之任意一點,聯 OA, OB, OC. 在

此三線分上各取點 A',B',C' 令 $OA':OA=OB':OB=OC':OC$，則 $\triangle A'B'C'\sim ABC$.

(18)　$ABCD$ 爲一平行四邊形，從 A 引一直線，交 BD 於 E，交 DC 之延線於 G，則 $EA:EG=EB:ED$.

(19)　OC' 爲 $\triangle ABC$ 邊 AB 之中點，從 D 引一直線會 BC 於 E，會 AC 之延線於 G，從 C 引 AB 之平行線會 $C'G$ 於 F，則 $C'E:FE=C'G:FG$.

(20)　如右圖，$ABCD$ 爲一四角形，AB 及 BC 間之線分 GH，CD 及 DA 間之線分 EF 皆平行於 AC，則 DB, EG, FH 成一線束，卽或平行，或共點.



(21)　$\triangle ABC$ 之二中線 AA', BB' 交於 G，則

$$\triangle AGB : A'GB' = 4.$$

(22)　在 $\triangle ABC$ 底 BC 延線上取一點 P，則 $\triangle ABP, ACP$ 外接圓直徑之比等於 $AB:AC$.

(23)　圓內接四角形之二對角線直交，則二雙對邊所包矩形之和等於四角形面積之二倍.

(24)　一四角形不能內接於圓，則其二雙對邊所包矩形之和比二對角線所包之矩形大.

(25)　直角三角形斜邊爲對此之高所分二分之比等

於他二邊之第二羃比.

(26)　切圓於 A 之一切線交他二個平行切線於 P, Q, 則圓之半徑爲 AP, AQ 之比例中項.

(27)　從 $\triangle ABC$ 之角頂 A 引外接圓之切線與 BC 之延線交於 K, 則 $\triangle$s ABK, ACK 外接圓直徑之比等於 $AK : CK$.

(28)　$\triangle ABC$ 中 $\angle C = R\angle$. 從 C 引 $\angle C$ 之等分線, 與 AB 交於 R, 與外接圓周交於 S, 則 $CR.CS = 2\triangle ABC$.

(29)　$\triangle ABC$ $\angle A$ 之外等分線交 BC 之延線於 P', 則

$$\overline{AP'}^2 = PB.PC - AB.AC.$$

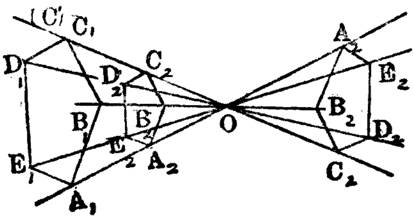
(30)　BC 爲一圓之任意弦, 直線 EAF 切圓於 A. 從 A 至 BC 引垂線 AD, 從 B 及 C 各至 EAF 引垂線 BE, CF, 則

$$\overline{AD}^2 = BE.CF.$$

第六章　相似中心

25. 定理十三.

置二個相似多角形使其一雙對應邊平行, 則其餘各雙對應邊皆平行, 而各雙對應角頂之聯共點.



〔證〕 $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim A_2B_2C_2D_2E_2$,

則各雙對應角各相等,故一雙對應邊平行時,其餘各雙對應邊皆平行(2編,理15系9).

次,A_1A_2, B_1B_2 交於 O. 聯 C_2O 交 B_1C_1 於 C',則因 $B_1C'//B_2C_2$

而 $B_1C' : B_2C_2 = OB_1 : OB_2 = A_1B_1 : A_2B_2 = B_1C_1 : B_2C_2$;

∴ $B_1C' = B_1C_1$ 而 C' 與 C_1 合,即 C_1 在 OC_2 上,亦即 C_1C_2 過 O;

同理,可證 D_1D_2, E_1E_2 等皆過 O.

〔注意〕 本定理亦可更端述之曰凡相似多角形必能應位相似. 如圖,二形皆在 O 之同旁,即同向相似者,O 爲其相似外心;二形分居 O 之兩旁,即反向相似者,O 爲其相似內心.

系一. 以各雙對應邊分於相似之點與相似中心共線;由此爲各雙對應點(理6系6).

系二. 各射線上二個對應射線分之比等於相似比;即相似中心以相似比外分或內分各雙對應點之距離(理6系4).

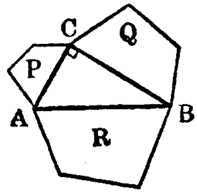
系三. 一形中二點距離對於他形中二對應點距離之比等於相似比;即二對應線分之比等於相似比(理6系4).

系四. 相似多角形可分成同數之相似三角形.

例如從二形中一雙對應角頂作諸對角線即可得此系(理8).

系五. 同數應位相似之三角形可合成應位相似之二多角形.

系六. 相似多角形之比等於對應邊上正方形之比(系4,5,理8系13及加比定理).



系七. 以直角三角形各邊爲對應邊在其上作相似多角形,則直角二邊上兩形之和等於斜邊上之形.

如右圖,$\measuredangle C=R_{\measuredangle}$,從系六,$P:Q:R=\overline{CA}^2:\overline{BC}^2:\overline{AB}^2$;

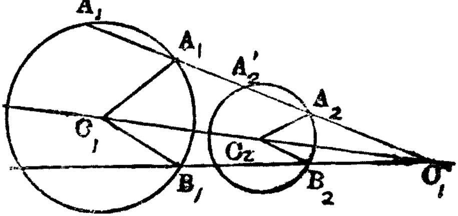
由是 $P+Q:R=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2:\overline{AB}^2$; 然 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$,

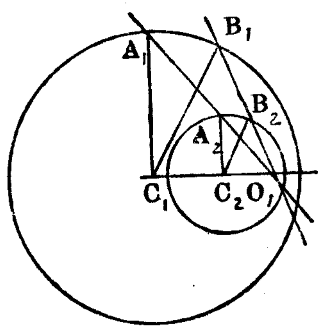
$\therefore P+Q=R$.

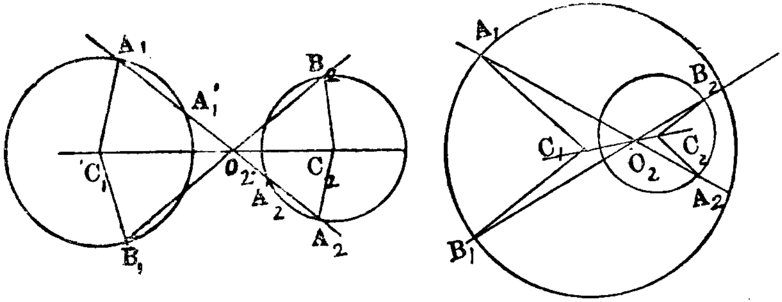
系八. 二個應位相似多角形之位置一定,則相似中心有一無二(系2及理6系1).

26. 定理十四.

二圓中各雙同向半徑端之聯共點;各雙異向半徑端之聯亦共點.







〔證〕　C_1A_1, C_2A_2 爲 Ⓢ C_1, C_2 之一雙平行半徑 A_1A_2 與 C_1C_2 交於 O, 則 $C_1O : OC_2 = C_1A_1 : C_2A_2$, 卽 O 爲以二圓半徑比分二中心距離之點(理 8);

倣此,若 C_1B_1, C_2B_2 爲第二雙平行半徑,則 B_1B_2 與 C_1C_2 之交點亦爲以二圓半徑之比分二中心距離之點,而二雙平行半徑皆同向時此二分點皆爲外分點,異向時皆爲內分點;

故第二次之分點不能不合於 O (理 6 系 1); 故如題言.

系一.　二圓有二個相似中心,其同向半徑之端在過相似外心之同射線上,異向半徑之端在過相似內心之同射線上.

系二.　相似中心以二圓半徑之比外分或內分二圓中心距離.

系三.　過相似中心而割圓之一射線必過平行二半徑之端;此平行二半徑爲同向或異向,視相似中心爲外心或

內心而定(同一證法).

系四. 相離二圓之相似外心爲二圓外公切線之交點;相似內心爲二圓內公切線之交點(系二).

系五. 聯二圓中二雙平行半徑端之弦平行而其比等於二圓半徑之比;卽二雙對應點之聯線分爲對應線分.

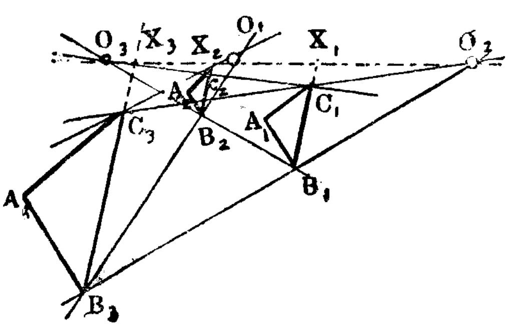
〔注意〕 二圓恆爲應位相似,而其相似比爲二半徑之比.

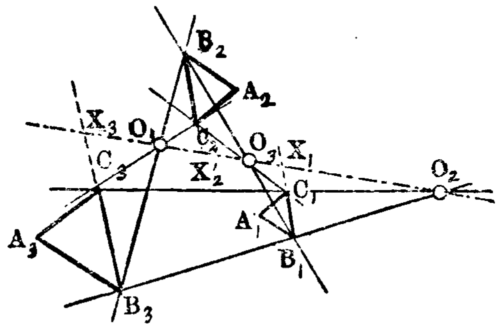
27. 定義九.

從二圓相似中心發射一割線,割二圓於四點 A_1, A_1', A_2, A_2' 其 A_1 及 A_2, A_1' 及 A_2' 爲二雙對應點,則 A_1 及 A_2', A_2 及 A_1' 爲二雙非對應點(Non-corresponding points).

28. 定理十五.

三個應位相似形兩兩之相似中心凡三點共線,此三個共線之點或皆爲相似外心,或一爲相似外心而他二爲相似內心.





〔證〕　$A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ 爲三個應位相似形, B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 爲各形中之對應邊. 設 B_3C_3 及 B_1C_1 之相似中心爲 O_2, B_2C_2 及 B_3C_3 之相似中心爲 O_1, B_1C_1 及 B_2C_2 之相似中心爲 O_3(因平行於同直線之直線平行,故二形各與第三形爲應位相似,則二形亦互相應位相似).

聯 O_1O_2, 交 B_1C_1 於 X_1, B_2C_2 於 X_2, B_3C_3 於 X_3, 則就線束 O_2, 有

$$B_1C_1 : C_1X_1 = B_3C_3 : C_3X_3; \qquad \text{(理 6 系 5)}$$

就線束 O_1, 有

$$B_2C_2 : C_2X_2 = B_3C_3 : C_3X_3; \qquad \text{(理 6 系 5)}$$

由是 $B_1C_1 : C_1X_1 = B_2C_2 : C_2X_2$, 而三直線 B_1B_2, C_1C_2, X_1X_2 共點;　　(理 6 系 6)

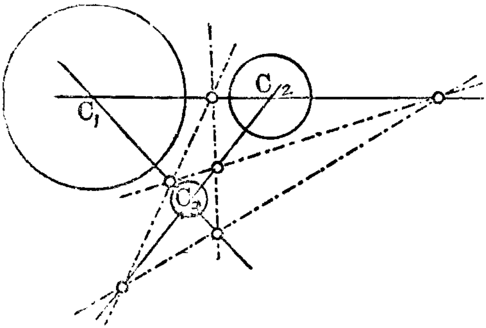
故 X_1X_2 過 B_1B_2, C_1C_2 之交點 O_3, 即 O_1, O_2, O_3 共線.

系一.　二形各與第三形相似,則二形互相似.

系二.　三圓兩兩之相似中心凡六點,其中三個相似外心共一線,一個相似外心及不與此相屬之二個相似內心

共一線,凡共四線.

引三圓之平行半徑,則證法可與定理之證全同.



29.　定義十.

三個應位相似形兩兩之相似中心所共之線曰相似軸(Similar Axis).

例題六　(定理)

(1)　二個相似形中二雙對應線之交角相等.

(2)　二個全等形視作相似形,則其相似比若何?　又其二種相似中心若何?

(3)　中心對稱之二圖爲應位相似之特例.　何故?

(4)　二圓之中心及其二個相似中心爲調和點列.

(5)　從二圓一雙相似對應點所引各圓之切線平行;即相似射線與二圓之交角相等.

(6)　二圓公切線與二圓之切點爲應位相似中之一雙對應點,同時又爲一雙非對應點.

(7)　一圓上二點與應於此之他圓上二個非對應點聯成一四角形,則其一雙邊關於他雙邊互爲倒平行線.

(8)　一圓上二點與應於此之他圓上二個非對應點共圓.　此圓爲原二圓之直交圓.

(9)　同時切二圓之一圓其二個切點爲原二圓之一雙非對應點;卽過此二點之直線必過原二圓之一個相似中心.

(10)　二圓外切,則其切點爲二圓之相似內心.

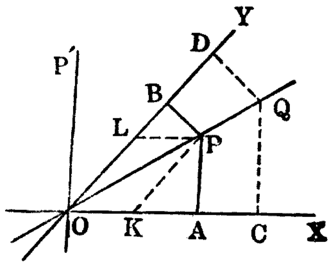
(11)　二圓內切,則其切點爲二圓之相似外心.

(12)　三角形之外接圓及九點圓之相似外心爲三角形之垂心,相似內心爲三角形之重心.

第七章　軌跡及作圖題

30.　定理十六.

一動點與相交二直線距離之比一定,則此動點之軌跡爲過二定直線交點之二直線.



〔證〕　OX, OY 爲相交二定直線,定比爲 $m:n$.

(第一)　P 爲 $\measuredangle XOY$ 內合於所設條件之一動點,卽 PA, PB

各為從 P 至 OX, OY 之距離,則 $PA : PB = m : n$;

從 P 引 OY, OX 之平行線 PK, PL, 則 $\measuredangle PKA = YOX = PLB$, 而 $\triangle PKA \sim \triangle PLB$;

由是 $PK : PL = PA : PB = m : n$, 即 $PK : KO = m : n$;

又因 $\measuredangle PKO = 2R_{\measuredangle} - PKA = 2R_{\measuredangle} - YOX$ 為定角,而 $\triangle OPK$ 之形象一定;

即 $\measuredangle POX$ 為定角,而 OP 之位置一定;

故合於所設條件之點 P 在過 O 之定直線 OP 上.

(第二) 在 OP 上取任意點 Q, 從 Q 至 OX, OY 各引垂線 QC, QD,

則 $QC : PA = OQ : OP = QD : PB$, 而 $QC : QD = PA : PB = m : n$;

故 OP 上任意點合於所設條件.

由是 OP 為合於所設條件之點之軌跡.

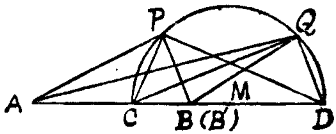
倣此,可證在 $\measuredangle YOX$ 外角中尚有軌跡之一直線如 OP'.

〔注意〕 P 與 OX 之距離為定長 m, 則 P 在 OX 之平行線上(3編,理 17), 又 P 與 OY 之距離為定長 n, 則 P 又在 OY 之平行線上;由是 P 點可以作出(軌跡之交). 同理,可作出 P' 點.

31. 定理十七.

<u>一動點與二定點距離之比一定,則此動點之軌跡為一圓周.</u>

〔證〕 A, B 為二定點,定比為 $m : n$.



(第一)　P爲合於所設條件之一點,

即$PA:PB=m:n$.

$\measuredangle APB$之內外等分線交AB於C及D,則

$AC:CB=AD:DB=PA:PB=m:n$,(理7),

故C, D皆爲定點(理6系1),而$\measuredangle CPD=R_{\measuredangle}$;

由是P在以CD作直徑之圓周上.

(第二)　在此圓周上任意取一點Q,聯QA, QC, QD,再作QB'令$\measuredangle CQB'=AOC$,即令QC爲$\measuredangle AQB'$之等分線;

由是因$\measuredangle CQD=R_{\measuredangle}$,而$QD$當爲$\measuredangle AQB'$之外等分線:

故A, C, B', D爲調和點列,故M爲CD之中點則

$$\overline{MC^2}=MA.MB';$$

然A, C, B, D亦爲調和點列,而$\overline{MC^2}=MA.MB$;

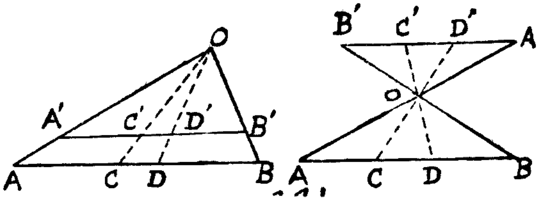
故$MB'=MB$而B'不得不與B合,即QB'合於QB;

由是$QA:QB=AC:CB=PA:PB=m:n$,即Q合於所設條件. 故所求之軌跡,爲以CD作直徑之圓周.

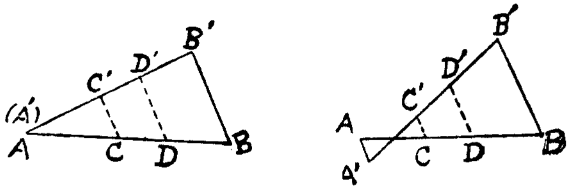
32. 問題三.

<u>分一定線分令與他一定線分上已分諸分相似.</u>

〔解法一〕　應用定理六系五,以定線分AB及他一定線分$A'B'$置於平行位置,聯AA', BB'得交點O,再聯OC', OD',得分點C, D.



〔解法二〕　應用定理六系三,以欲分線分 AB 及已分線分 $A'B'$ 置於相交位置,而令 A', B' 各在從 A 及 B 所引平行二直線上,從 C', D' 引 AA', BB' 之平行線,得分點 C, D.



33.　**問題四.**

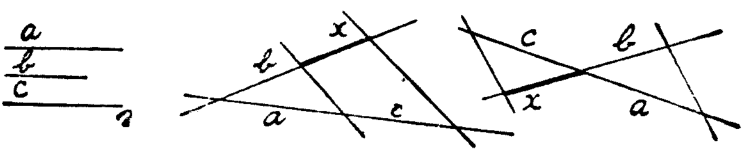
<u>以一所設比內分或外分一定線分.</u>

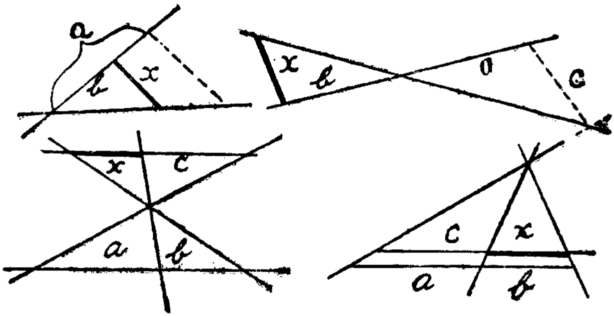
〔解法一〕　視定理六之圖及系一.（學者自證之).

〔解法二〕　視定理七.（學者宜詳述解法及證).

34.　**問題五.**

<u>作出三個定線分之第四比例項.</u>





設三個線分 a, b, c, 求其第四比例項 x.

第一解法,可應用定理六系三,如最上二圖.

第二解法,可應用定理六系四,如中間二圖.

第三解法,可應用定理六系五,如最下二圖.

學者可敍述各解法而證之.

35. 問題六.

設二線分,作其比例中項.

〔解法〕　視第四編問題四.

〔證〕　視本編定理四之系六,系七,系八.

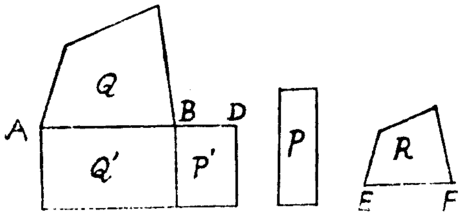
36. 問題七.

在一定直線上作一多角形,令與一定多角形爲應位相似.

〔解法〕　學者可應用定理十三或其系四以作之.

37. 問題八.

作一多角形,令與第一定多角形等積而與第二定多角形相似.



設二個定多角形 P 及 Q, 欲作一多角形令與 P 等積而與 Q 相似.

〔解法〕　在 Q 之一邊 AB 上作 Q 之等積矩形 Q' (4 編,題 3 系 2, 題 2);

在 Q' 之又一邊上作 P 之等積矩形 P', 其又一邊爲 BD (同上);

作 AB, BD 之比例中項 EF (題 6);

在 EF 上作一多角形 R 與 Q 應位相似(題 7);則 R 爲所求之多角形.

〔證〕　$AB : EF = EF : BD$ (解法),

$\therefore AB : BD = \overline{AB^2} : \overline{EF^2}$ 〔§4(十三)系 1〕;

然　$Q : P = \square Q' : \square P' = AB : BD$ (理 3);

$Q : R = \overline{AB^2} : \overline{EF^2}$ (理 13 系 6);

$\therefore Q : P = Q : R$, 而 $R = P$.

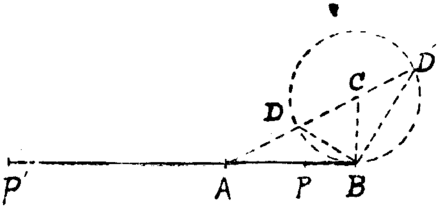
38. 代數解析法.

凡作圖題之解法歸於決定一點者,可以 x 表所求點與一定點之距離,而以 $a, b,$ 等表已知線分之長,從題之所設條件作代數方程式,求其根,用 8 款中注意所言解釋此根在幾何學上之意義而作之,是曰代數解析法. 因解析不過推想吾人應取如何之路徑進行,故行此無損幾何學之嚴密.

惟由此所得之解法,必須以純粹幾何學之智識證之:否則法雖合而在幾何學一方面不能承認其爲眞確也.

39. 問題九.

分一定線分,令其大分爲小分及全線分之比例中項.



〔解析〕　AB 爲定線分, P 爲所求分點.

設 AB, AP 之長數各爲 $a, x,$ 則 PB 之長數爲 $a-x$;

從所設條件, $\overline{AP}^2=AB.PB,$

$\therefore$　$x^2=a(a-x)$, 即 $x^2+ax-a^2=0$;

由是　$x=-\dfrac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+a^2}.$　故得解法如下:

〔解法〕　作 AB 之垂線 BC, 令 $BC=\frac{1}{2}AB$;

$\left(BC\text{ 之數數爲 }\frac{a}{2}\right)$

以 C 爲中心 CB 爲半徑作圓,

$$\left[(AC)=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2},\quad (DC)=(CD')=\frac{a}{2}\right]$$

AC 交此圓周於 D 及 D';

$$\left[(AD)=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2},\ (AD')=-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}\right]$$

在 AB 及 BA 之延線上截取 $AP=AD$, $AP'=AD'$, 則 P 及 P' 爲所求分點。

〔證〕　$\because$ $\triangle ADB\sim\triangle ABD'$ (理 8 系 2),

$\therefore$ $AD':AB=AB:AD=AB:AP$,

而 $AD'-AB:AB=AB-AP:AP$ (分比定理);

然 $AD'-AB=AD'-DD'=AD=AP$,　$AB-AP=PB$,

$\therefore$ $AP:AB=PB:AP$, 即 $PB:AP=AP:AB$.

同理,可證 $P'B:AP'=AP':AB$.

〔注意〕　(一) (AC), (DC) 等表示線分 AC, DC 等之數數.從解法,知 $(AP)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a$,　$(AP')=-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a$, 線分之方向對應於記號之正負.

(二)　如此分一線分爲二分名曰黃金分割 (Goldon Section). 我國昔時名之曰理分中末線或曰中末分割(Median Section).

例題七（軌跡及作圖題）

(1)　一動線分,一端在一定點,第二端在一定直線上運動,求以一定比分此線分所得分點之軌跡.

(2)　一動線分,一端在一定點,第二端沿一定多角形周圍運動,求以一定比分此線分所得分點之軌跡.

(3)　一動線分,一端在一定點,第二端沿一定圓周運動,求以一定比分此線分所得分點之軌跡.

(4)　一動點與平行二直線距離之比恆等於一定比,求此動點之軌跡.

(5)　定理十六中二定直線及二軌跡成一調和線束.（任意作一截線,證其為此線束分於調和）.

(6)　有一定角及角內一定點,過定點作一線分,令其兩端在角之二邊上而為此定點所分兩分之比等於一定比.

(7)　設二線 a, b, 求其第三比例項.

(8)　設三角形底,頂角,及餘二邊之比,作此三角形.

(9)　設三角形底,頂角,及頂角等分線之長,作此三角形.

(10)　變一定三角形為等積二等邊三角形而其一角不變.

(11) 在一定圓周上求一點,令與二個定直線距離之比等於定比.

(12) 設一三角形之底,他二邊之比,及他二邊上正方形之和,作此三角形.

(13) 設三角形之底,頂角之等分線,及九點圓半徑,作此三角形.

(14) 用比例方法作一圓,令過二定點,且切一定直線.

(15) 作一正方形,令與一定正方形之比等於二個定線分之比.

(16) 作一圓,令過二定點,且切一定圓.

第八章 計算題

40. 計算題之目的.

計算題之目的在實用,在求諸幾何量之數數:故不妨應用代數方法,惟立式之事,最善多從幾何方面入手而不全恃代數,庶免踰閑之譏.

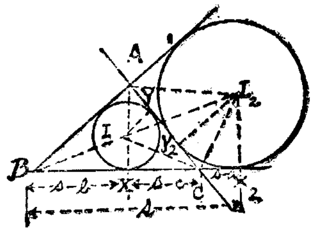
41. 問題十. (用3編,§48之記號)

設$\triangle ABC$三邊數數a, b, c.求其面積之數數.*

---

*本題之公式始發見者爲亞歷山大之戲劇家Heron氏(西曆紀元前120)

〔解法〕　如圖，作$\triangle ABC$之內接圓I及$\measuredangle B$內旁接圓I_2.



則　$\because \triangle ICX \sim \triangle CI_2X_2$,

而　$IX : CX_2 = XC : X_2I_2$

(理 8 系 2),

即 $r : s-a = s-c : r_2$ (3 編,理 11 系 7), $\therefore\ rr_2=(s-a)(s-c)$;……(1)

又 $\because\ \triangle BIX \sim \triangle BI_2X_2$, 而 $XI : X_2I_2 = BX : BX_2$　(理 8 系 2),

即　$r : r_2 = s-b : s$ (3 編,理 11 系 7);……………………………(2)

由是 $rr_2 : r_2{}^2 = s(s-b) : s^2$ (理 3);

從更比定理及(1), $(s-a)(s-c) : s(s-b) = r_2{}^2 : s^2$;

$\therefore\ \sqrt{(s-a)(s-c)} : \sqrt{s(s-b)} = r_2 : s$ (§4 理(14)系)

$= r_2(s-b) : s(s-b)$ (理 3);

$\therefore\ \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} : s(s-b) = r_2(s-b) : s(s-b)$ (理 3);

由是 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = r_2(s-b)$ ……………………………… (3)

$=\frac{1}{2}r_2(c+a-b)=\frac{1}{2}r_2c+\frac{1}{2}r_2a-\frac{1}{2}r_2b$ (4 編,理 1 系 3)

$=\triangle I_2AB+\triangle I_2BC-\triangle ICA$ (4 編,理 2 系 8) $=\triangle ABC$.

故得　$\underline{\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.}$　(可參觀一編§44之例).

系一. $r=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$,　$r_2=\sqrt{\dfrac{s(s-c)(s-a)}{s-b}}$,

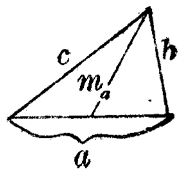
$r_1=\sqrt{\dfrac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$,　$r_3=\sqrt{\dfrac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$.

從上(3),可得此中第二式,倣此,可得其餘三式.

系二.　$h_a=\dfrac{2\triangle}{a},\quad h_b=\dfrac{2\triangle}{b},\quad h_c=\dfrac{2\triangle}{c}.$

因 $h_a a=h_b b=h_c c=2\triangle$ 故也.

42.　問題十一.



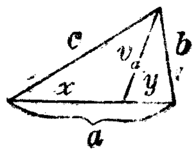
設 $\triangle ABC$ 三邊皷數 a, b, c. 求 m_a, m_b, m_c.

〔解法〕　從四編定理四系四,可得

$$m_a=\sqrt{\tfrac{1}{2}(b^2+c^2)-\tfrac{1}{4}a^2}.$$

同理,可得　$m_b=\sqrt{\tfrac{1}{2}(c^2+a^2)-\tfrac{1}{4}b^2},\qquad m_c=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)-\tfrac{1}{4}c^2}.$

43.　問題十二.



設 $\triangle ABC$ 三邊皷數 a, b, c, 求 v_a, v_b, v_c.

〔解法〕　名 v_a 所分 a 上之二分爲 x, y. 從定理十,知　$v_a^2=bc-xy$;

然從定理七,知 $x:y=c:b$, $\therefore x+y:y=c+b:b$ (合比定理);

$$\therefore\ y=\frac{ab}{b+c};$$

倣此,可得　$$x=\frac{ac}{b+c};$$

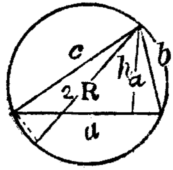
故　$v_a^2=\dfrac{bc}{(b+c)^2}\Big[(b+c)^2-a^2\Big]=\dfrac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}$, 而 $v_a=\dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}.$

同理,可得　$v_b=\dfrac{2}{c+a}\sqrt{cas(s-b)},\qquad v_c=\dfrac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$

44.　問題十三.

設 $\triangle ABC$ 三邊皷數 a, b, c. 求其外接圓半徑 R.

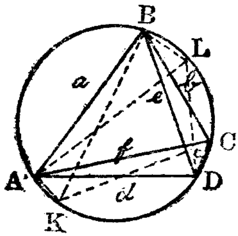
〔解法〕　從定理十一,知 $bc=2h_aR$,



$\therefore\quad R=\frac{bc}{2h_a}=\frac{abc}{2h_a a}$;而$R=\frac{abc}{4\triangle}$.

45.　問題十四.

設圓內接四角形四邊之廠數爲 a,b,c,d. 求其二對角線 e,f 之廠數.



〔解法〕　先從 Ptolemy 定理,知

$$ef=ac+bd;\quad (1)$$

從 B 作 BK, 令 $\measuredangle ABK=CBD$, 則 $AK=CD$, $CK=AD$(3 編,理 10 系 4),

由是從圓內接四角形 $ABCK$, $f.BK=ad+bc$;

又從 A 作 AL, 令 $\measuredangle BAL=DAC$, 則 $BL=CD$, $LD=BC$, $AL=BK$

(3 編,理 10 系 4)

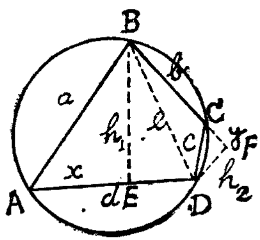
由是從圓內接四角形 $ABLD$, $e.BK=e.AL=ab+cd$;

$$\therefore\ e:f=ab+cd:ad+bc;$$

由此式及(1),得　$e^2=\frac{ab+cd}{ad+bc}(ac+bd)$, $f^2=\frac{ad+bc}{ab+cd}(ac+bd)$.

46.　問題十五.

設圓內接四角形四邊廠數 a,b,c,d. 求其面積之廠數.



〔解法〕　從 B, D 至 AD, BC 各引垂線 BE, DF;

設 $(AB)=a,(BC)=b,(CD)=c,(DA)=d$,

$(BD)=e$, $(BE)=h_1$, $(DF)=h_2$, $(AE)=x$, $(CF)=y$, 此中 h_1, h_2, x, y 皆未知;

今因 $\triangle BAE \sim \triangle DCF$ (理 8 (一)) 而 $ay=cx$, $\therefore\ y=\frac{cx}{a}$;

又從 $e^2=a^2+d^2-2dx=b^2+c^2+2by$ (4 編,理 4 系 1, 2), 而

$$(a^2+d^2)-(b^2+c^2)=\frac{2x}{a}(ad+bc);$$

由是 $$x=\frac{a}{2(ad+bc)}\left\{(a^2+d^2)-(b^2+c^2)\right\};$$

$$\therefore\quad a+x=\frac{a}{2(ad+bc)}\left[(a+d)^2-(b-c)^2\right],$$

$$a-x=\frac{a}{2(ad+bc)}\left[(b+c)^2-(a-d)^2\right],$$

而 $$h_1=\sqrt{(a+x)(a-x)}$$

$$=\frac{a}{2(ad+bc)}\sqrt{[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]};$$

由是四角形 $ABCD$ 面積之度數為 δ, 則 $\delta=\frac{d.h_1}{2}+\frac{b.h_2}{2}$;

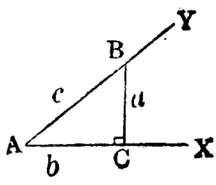
$\because\quad \triangle BAE \sim \triangle DCF$, 而 $h_2=\frac{ch_1}{a}$,

$$\therefore\quad \delta=\frac{ad+bc}{2}\cdot\frac{h_1}{a}=\tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)};$$

命 $a+b+c+d=2s$. 則 $\delta=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

47. 定義十一.



$\angle XAY$ 為一定角,從任意一邊 AY 上任意點 B 至他一邊 AX 上引垂線 BC, 則 $\triangle ABC$ 三邊中任意二邊之比

皆一定(理 8 系 14). 今名:

$\frac{CB}{AB}$ 曰 ∡A 之正弦(sine),　$\frac{AC}{AB}$ 曰 ∡A 之餘弦(cosine),

$\frac{CB}{AC}$ 曰 ∡A 之正切(tangent), $\frac{AC}{CB}$ 曰 ∡A 之餘切(cotangent),

$\frac{AB}{AC}$ 曰 ∡　之正割(secant),　$\frac{AB}{CB}$ 曰 ∡A 之餘割(cosecant).

省略記之爲:

$$sin A = \frac{a}{c},\ cos A = \frac{b}{c},\ tan A = \frac{a}{b},\ cot A = \frac{b}{a},\ sec A = \frac{c}{b},\ csc A = \frac{c}{a}.$$

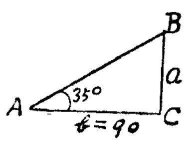
總稱此六者曰三角函數(Trigonometrical Function).

從上,已知若角 A 一定,則此六函數之值皆定;反之,六函數之任意一值一定,則角 A 之大小亦一定.

各角度三角函數之數值,前人已經求得,列成一表以備取用.是曰三角表,附錄於後.

由是,在直角三角形中,已知各邊,即可從三角函數求其角;已知一銳角及一邊,即可求其餘之角及邊. 前者至平面三角中詳論之,後者略舉其最簡之例於下:

例一. 一禮拜堂之尖頂,在平地上離此90尺之遠張一35°之角. 求此尖頂之高.



〔解〕　從 $\frac{a}{b} = tan\ A$, 得 $a = b\ tan A$;

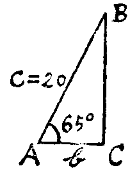
從表,知 $tan A = tan\ 35° = \cdot 7$, 又 $b = 90$,

$$\therefore a = 90 \times \cdot 7 = 63.$$

故知禮拜堂尖頂之高為63尺.

例二. 梯長2丈,靠一直立牆,與地成角65°.求梯脚離牆脚之遠.

〔解〕　從 $\frac{b}{c}=\cos A$, 得 $b=c\cos A$;



從表,知 $\cos A=\cos 65°=.423$, $c=20$,

$\therefore\ b=20\times .423=8.46$; 卽梯脚離牆脚八尺四寸六分.

48. 三角函數之關係.

從前款, $\sin A\csc A=\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}=1$;

同理, $\cos A\sec A=1$, $\tan A\cot A=1$;

又 $\sin^2 A+\cos^2 A^{*}=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=1\quad(\because a^2+b^2=c^2)$,

同理, $\sec^2 A-\tan^2 A=1$, $\csc^2 A-\cot^2 A=1$;

再, $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{c}\div\frac{b}{c}=\frac{a}{b}=\tan A$, 同理, $\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A$.

由是,得 $\underline{\sin A\csc A=1,\quad \cos A\sec A=1,\quad \tan A\cot A=1,}$

$\underline{\sin^2 A+\cos^2 A=1,\quad \tan^2 A+1=\sec^2 A,\quad \cot^2 A+1=\csc^2 A,}$

$\underline{\tan A=\frac{\sin A}{\cos A},\quad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.}$

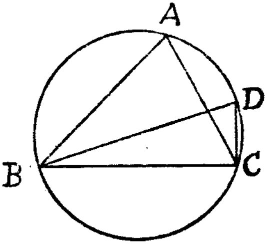
49. 三角形邊及角之關係.

定理. $\underline{2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$.

---

*$\sin^2 A$ 即 $(\sin A)^2$ 之略記法,餘倣此.

〔證〕　ABC為任意三角形,從B引其外接圓之直徑BD,



聯CD,則$\measuredangle D=A$,$\measuredangle BCD=R_{\measuredangle}$,$(BD)=2R$;

$\therefore \quad \dfrac{a}{2R}=sinD=sinA$, 即 $2R=\dfrac{a}{sinA}$;

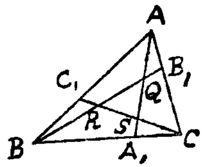
同理,可證　$2R=\dfrac{b}{sinB}$, 及　$2R=\dfrac{c}{sinC}$;

$$\therefore \quad 2R=\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}.$$

<u>系.</u>　<u>三角形二邊之比如其對角正弦之比.</u>

例題八　(定理及計算)

(1)　立於同底上二三角形,其頂點之聯線與底相交,則二形面積之比等於此交點至各形頂點距離之比.



(2)　從三角形各角頂A, B, C至對邊引線分AA_1, BB_1, CC_1,令$BA_1 : A_1C=CB_1 : B_1A=AC_1 : C_1B=n-1 : 1$, 此三線分之交點順次為$Q, R, S$,則$\triangle AB_1Q=\triangle BC_1R=\triangle CA_1S$.

(3)　二等邊直角三角形中立於斜邊上內接正方形*之面積等於斜邊上正方形面積之$\frac{1}{9}$.

*內接正方形謂一正方形在三角形內,其一邊重於三角形之一邊上,他二角頂在三角形之他二邊上者.

(4)　在 $\triangle ABC$ 中 $\measuredangle C=2\measuredangle B$, 則 $c^2-b^2=ab$.

(5)　就圓內接四角形一對角線一旁二邊所包矩形加他旁二邊所包矩形之和以此對角線與圓之直徑之比乘之,可得此四角形之面積.

(6)　$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$.

(7)　$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}$.

(8)　$\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_1}=\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}$.

(9)　$\triangle=\sqrt{rr_1r_2r_3}$

(10)　羅馬測量家以正三角形之面積爲 $\frac{1}{3}a^2$, 或以爲 $\dfrac{a^2}{3}+\dfrac{a^2}{10}$. 其錯誤若何?

(11)　用三角形之三個高計算面積,求其公式.

(12)　用梯形之四邊計算面積,求其公式.

(13)　圓內接四角形四邊之數數爲 a, b, c, d. 求圓之半徑.

(14)　就圓內接四角形一對角線所分二個三角形求面積加之,就又一對角線亦如是; 比較此二回所得四角形之面積以求二對角線之比.

(15)　延長圓內接四角形一雙對邊至相交,得二個相似三角形,於是計算圓外部分以求二對角線之比.

(16)　一線分在一直線上之垂直射影,等於此線分之

長以二線交角之餘弦倍之.

(17)　假定垂直射影落於二線交角之外角中者其射影爲負,則前題化成若何? 試繪圖以說明之.

(18)　在任意三角形中 $b\sin C=c\sin B=h_a$. 試繪圖說明之. 從此引導49款之系.

(19)　根據(16),(17)兩題,則第四編定理四之系一及系二皆可表作 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. 試說明之.

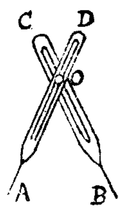
(20)　$\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A$. 試繪圖以說明之.

(21)　在任意三角形中 $b\cos C+c\cos B=a$. 根據(16),(17)兩題說明之.

(22)　圓內一弦長 $2a$, 半徑長 R, 弦所張之中心角爲 $2A$, 則 (a) 中心與弦之距離 $=a\cot A$; (b) $a=R\sin A$. 試說明之.

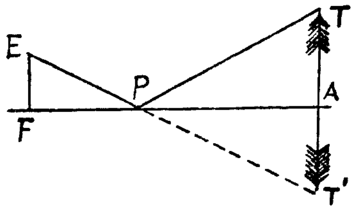
例題九　(實用)

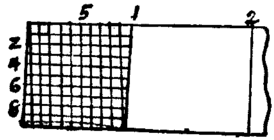
(1)　右圖表一比例尺用以晝線 CD 等於定線分 AB 之一分數者. 吾人可以此器移動使 OC, OD 之長各爲 B, OA 之 $\frac{m}{n}$. 若 $OC=\frac{m}{n}OB$, $OD=\frac{m}{n}OA$, 則 $CD=\frac{m}{n}AB$. 證之.



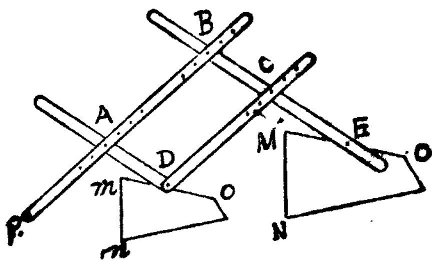
(2)　一地圖,其上一寸抵實際 100 里. 今圖上二地相距 $3\frac{1}{3}$ 寸,則其實幾何?

(3)　一測量家在 ET' 方向見一樹頂於池塘中之倒影. 若 FPA 爲水平直線, EF 及 TA 皆垂直於 FPA, EF 長 5 尺, EP 長 8 尺, PA 長 30 尺; 求樹之高.



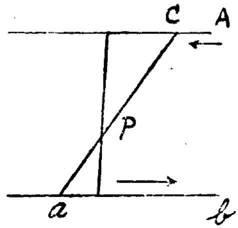


(4)　右圖中一分微尺之每邊長一單位,欲量 ·1, ·2, ·65, ·34 等,當若何量之?

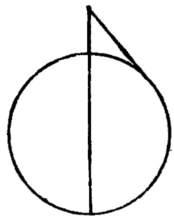


(5)　一放縮圖器 (pantograph) 用以畫已知圖 mno 之相似圖 MNO 者,收放圖畫或地圖時用之. 其器聯四桿於 A, B, C, D, 且令 $ABCD$ 爲一平行四邊形. P 爲一樞,裝鉛筆於 D 及 E, PA 及 CE 之長合於 $PA:AD=DC:CE$. (a) 證 P, D, E 共線; (b) 證 $PD:PE$ 等於 $PA:PB$; (c) 證任意直線 MN 平行於 mn 而 $MN:mn=PA:PB$; (d) 證用此器所畫任意三角形 MNO 與所設三角形 mno 相似.

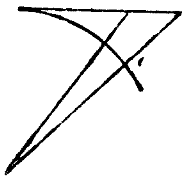
(6)　一人行於一直路 ab 上,每時速 3 哩. 此路與一鐵路軌道 AC 平行,軌上有一車 C 正在行駛. 在二路間有一點 P, 視車 C 及人 a 恆在一直線上. 已知二路相距 100 呎,而 P 與 ab 相距 10 呎. 求車 C 每時之速率.



(7)　設地球直徑爲 8000 哩, (a) 從高 96 呎之燈塔上,(b) 從高 2400 呎之山上,各可望遠至幾哩?

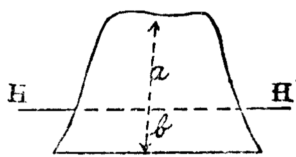


(8)　一游泳者眼出水面恰見一 4 哩外帆船之桅頂. 求此帆船桅頂高出水面之長.



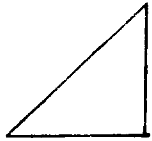
(9)　在一高出水面 54 呎之汽船甲板上見一帆船之桅頂在一水平線中. 若二船相距 2 哩;求此帆船桅頂之高.

(10)　從一高出水面 54 呎之汽船甲板上見一冰山,其能見部分之高爲水平線 HH' 分成 a 及 b 二部分,而 $a=3b$. 若冰山離汽船 3 哩;求此冰山之高.

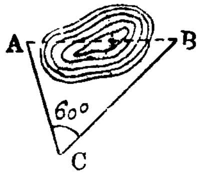


(11)　從高出水平面 6 呎之處得見地平面之面積爲

半徑3哩之一圓．求地球之直徑．

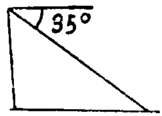


(12) 一種花筒炸裂成一45°之仰角．若在未炸前$\frac{3}{4}$秒鐘見其火焰,而音響每秒速330公尺．求此花筒炸裂時之高．



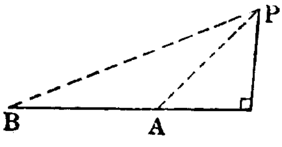
(13) 二點A, B在一山之兩旁.已知AC, BC之長各為20鏈及32鏈,$\angle C=60^\circ$. 用前例題(19)所得之公式求A及B之距離．

(14) 在一水平面上一直立桿,當日之仰角為30°時射一長50尺之影．求此桿之高．

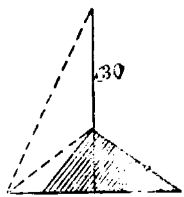


(15) 從一高300呎之山頂上測一船,得俯角35°.求此船離山麓之遠．但假定山壁為直立者．

(16) 一進行之船,為風以每時10浬之速吹向東,同時河流以每時8浬之速推向北東．求此船之眞速．



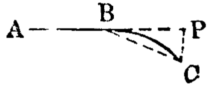
(17) 一不能達到之點P,在A測之得仰角45°.從更遠500尺之一點B測之得仰角30°.若AB為水平線,求P之高．



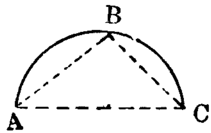
(18) 一旗竿高3丈,立一邱頂上,其

底及頂之仰角各爲60°及30°.求邱之高.

(19)　軌道 ABC 從一直線 AB 及一圓弧 BC 所成.　若 BC 長50碼,而從 C 至 AB 延線所引垂線之長爲 4 碼.求⌒BC 之半徑.



(20)　一圓路過三點 A, B, C.　已知 AB, BC, AC 各長 50, 30, 70 碼;求此弧之半徑.



(21)　一弧形之橋,其所張弦長280尺,弧上與弦最遠之點距弦80尺.　求此弧形之半徑.

第九章　方法及雜例

50.　證題法,作補助線法,及雜例

證比例題之法(第一)在覓得比例線分;(第二)比例線分不能直接覓到,則宜覓出介紹二比相等之第三比,此時大都宜作某線之平行補助線;(第三)注意能否從複比達到所欲證之事;(第四)注意線分之比能否有二形或數形面積之比與之相等,於是宜活用第三章中定理及系;(第五)有圓之關係,則察其相似中心,非對應點,等性質如何可以利用;(第六)若圖中僅有一圓,則就倒平行線及其對應點觀察比例線分;尋常之比例題,有此數方面足矣.　所最宜

注意者,證比例題時,圖外宜時時注意式之變化,二者相需,不可缺其一.

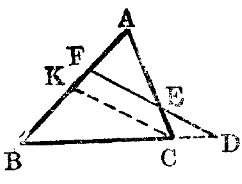
比例題之範圍至大,本章所敘述者不過其開端之至簡者耳,其餘非此區區之教科書所能詳論,學者宜多閱參考書始能見其百官之富.

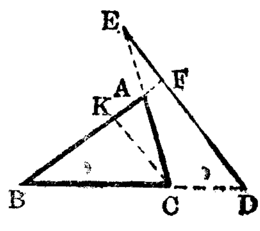
作補助線之法大都不出第二第三兩編所舉,惟前此惟患學者不知作補助線之路徑,至此則路徑已不患不知,所宜注意者當慎加選擇,使證法簡而易耳.

例一. 一截線截$\triangle ABC$邊BC, CA, AB於D, E, F,則

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

次,$\triangle ABC$邊BC, CA, AB上各有點D, E, F而有(1)之關係,則D, E, F共線(但異向之線分以正負號區別之)





〔證〕 (第一) 從C引$CK//DEF$,

則 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BF}{FK}=-\dfrac{BF}{KF}$, $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{KF}{FA}$ (理6);

$\therefore\ \dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=-\dfrac{BF}{FA}$ (§4, 理(14)系),

而 $\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=-\dfrac{FB}{AF}\cdot\dfrac{AF}{FB}=-1.$

(第二) 聯 DE, 交 AB 於 F', 則從上, $\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=-\dfrac{BF'}{F'A}$;

然從假設 $\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=-1$, 可得 $\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=-\dfrac{BF}{FA}$;

由是, $\dfrac{BF'}{F'A}=\dfrac{BF}{FA}$, 卽 F' 及 F 以同比分線分 BA;

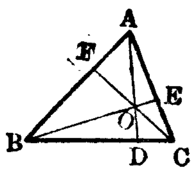
故此二點不能不合一,而 D, E, F 共線(理 6 系 2).

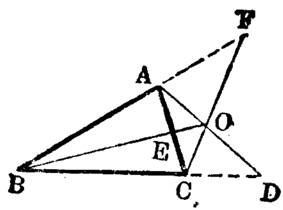
〔注意〕 例一曰 Menelaus 定理. 凡三點共線之題大都可用本定理證之.

例二. 過 $\triangle ABC$ 各角頂引共點三線,各交對邊於 D, E, F, 則

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=+1. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

次, $\triangle ABC$ 邊 BC, CA, AB 上各有點 D, E, F 而具 (2)之關係, 則 AD, BE, CF 共線.





〔證〕 (一)設 AD, BE, CF 所共之點爲 O.

COF 爲 $\triangle ABD$ 之截線, $\therefore \dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{DO}{OA}=-1$;

BOE 爲 $\triangle ADC$ 之截線, $\therefore \dfrac{DB}{BC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AO}{OD}=-1$; (前例)

$\because CD=-DC,\ DB=-BD,\ DO=-OD,\ OA=-AO$, 故以前二式相乘,以此代入,

即得
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=+1.$$

(二)　AD, BE 交於 O, 聯 CO, 交 AB 或其延線於 F', 則從上,
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1;$$

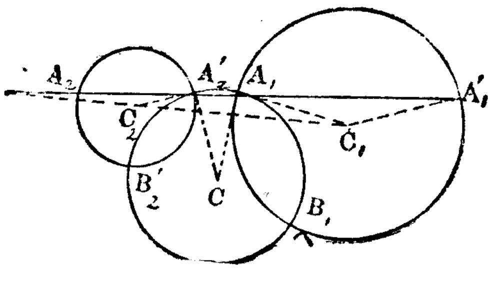
又從假設,
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1;$$

$\therefore\quad \dfrac{AF'}{F'B}:\dfrac{AF}{FB}=1$, 即 $\dfrac{AF'}{F'B}=\dfrac{AF}{FB}$, 即 F' 及 F 以同比分線分 AB;

由是 F' 當與 F 合,而 AD, BE, CF 共點.

〔注意〕　例二名曰 Ceva 定理. 凡共點諸題十有八九可用此定理證之.

<u>例三.</u>　<u>一圓與他二圓直交,則其各雙交點爲彼二圓之非對應點.</u>



〔證〕　⊙C 與 ⓢC_1, C_2 直交,其一雙交點為 A_1, A'_2 聯 A_1A_2' 與 ⓢC_1, C_2 再交於 A'_1A_2, 則

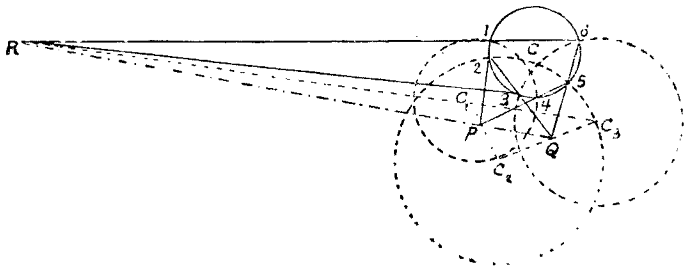
$\measuredangle C_2A'_2A_2 = 2R_\measuredangle - C_2A'_2A_1 = 2R_\measuredangle - A'_2A_1C_1 = C_1A_1A'_1 = C_1A'_1A_1$;

$\therefore$ $C_1A'_1 // C_2A'_2$, 而 A'_1, A'_2 為應位相似中之一雙對應點;

由是 A_1, A'_2 為一雙非對應點.

同理,可證他雙交點 B_1, B'_2 亦為非對應點.

例四. 圓內接六角形三雙對邊之交點共線.



〔證〕　123456 為 ⊙C 內接任意六角形. 12 及 45 交於 P, 23 及 56 交於 Q, 34 及 61 交於 R.

過 1 及 4 作 ⊙C 之直交圓 C_1 (從 1 及 4 引 ⊙C 之切線,二切線交於 C_1), 過 2 及 5 作 ⊙C 之直交圓 C_2, 過 3 及 6 作 ⊙C 之直交圓 C_3;

從上一例,知 12 及 45 皆過 ⓢC_1, C_2 之相似中心,故其交點 P 卽為 ⓢC_1 及 C_2 之相似中心;

倣此可證 Q 為 ⓢC_2 及 C_3 之相似中心, R 為 ⓢC_3 及 C_1 之相似中心;

因六點 1, 2, 3, 4, 5, 6 之位置不同,而 P, Q, R 爲 ⓈC_1, C_2, C_3 之三個相似外心,或爲二個相似內心一個相似外心;

故 P, Q, R 共線(理 15 系 2).

〔注意〕 例四名曰 Pascal 定理,爲近世幾何學基本定理之一.

51. 非調和比.

定義. A, B, C, D 爲四點之點列,則 $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ 爲此列之非調和比 (Anharmonic Ratio). OA, OB, OC, OD 爲一四線之線束,則比 $\frac{\sin AOC}{\sin COB} : \frac{\sin AOD}{\sin DOB}$ 爲此束之非調和比.

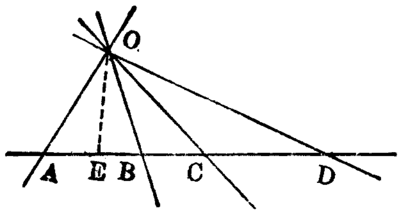
點列之非調和比記爲 $\{AB, CD\}$, 線束之非調和比記爲 $O\{AB, CD\}$.

從列外一點作射線束過列之各點,是曰射影(中心射影), 以一直線截一線束之各射線得點列曰截斷 (Section).

射影及截斷爲幾何學之二大運算,以前所舉諸運算皆包含於其中:惟蔚爲大部且亦較難,本書雖欲論之,爲體裁所不許,今僅舉一重要之例於下:

例. 一線束以任意直線截之,其非調和比恆不變.

〔證〕 線束 $O-ABCD$ 爲任意直線截於 A, B, C, D, 則從 §49 系,



$$\frac{AC}{CO}=\frac{\sin AOC}{\sin CAO},\quad \frac{CO}{CB}=\frac{\sin OBC}{\sin COB},$$

$$\frac{AD}{DO}=\frac{\sin AOD}{\sin DAO},\quad \frac{DO}{DB}=\frac{\sin OBD}{\sin DOB};$$

乘前二式及後二式,得

$$\frac{AC}{CB}=\frac{\sin AOC}{\sin CAO}\cdot\frac{\sin OBC}{\sin COB}=\frac{\sin AOC}{\sin COB}\cdot\frac{\sin OBC}{\sin CAO}$$

$$\frac{AD}{DB}=\frac{\sin AOD}{\sin DOB}\cdot\frac{\sin OBD}{\sin DAO};$$

引 $OE\perp AD$, 則　　$\sin CAO=\dfrac{OE}{AO}=\sin DAO,$

$$\sin OBC=\frac{OE}{BO}=\sin OBD;$$

$\therefore\quad \dfrac{\sin OBC}{\sin CAO}=\dfrac{\sin OBD}{\sin DAO}$, 而 $\dfrac{AC}{CB}:\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{\sin AOC}{\sin COB}:\dfrac{\sin AOD}{\sin DOB}.$

由是可知點列 $ABCD$ 之非調和比恃線束 $O\{ABCD\}$ 之非調和比而定,線束不變,則直線之位置無論如何,其非調和比恆不變.

<u>系一.</u>　<u>從任意中心射影一點列,所得線束之非調和比恆不變.</u>

系二. 互爲透視之二圖,其非調和比恆相同.

〔注意〕 非調和比之値等於 -1, 卽爲調和比.

何則, $\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=-1$, 則 $\frac{AC}{CB}=-\frac{AD}{DB}$; 若不問線分之方向,則此式可記作 $AC:CB=AD:DB$, 故 A, C, B, D 爲調和點列可知.

52. 作圖方法二. 倒作法.

以前已述過之作圖方法,學者可自行擴充至面積比例之範圍中,不復贅述. 今略舉數種在此可講之方法於下:

有一位置一定之圖,欲就之作一具有定性質之新圖,乃倒其次序,先定新圖之位置,次以定圖中之性質加於新圖之上,後再移置定圖上,是爲倒作圖法.

例. 有一位置及大小皆定之三角形,欲作一三角形,令其角頂各在前一三角形之各邊上,而與又一定三角形合同.

〔解法〕 $\triangle DEF$ 爲欲作之三角形,其角頂 D, E, F 各在 $\triangle ABC$ 邊 BC, CA, AB 上,而與 $\triangle D'E'F'$ 合同.

先在 $E'F'$, $F'D'$ 上各作弓形,令其所含之弓形角各等於 $\measuredangle A$ 及 $\measuredangle B$ (3 編,題 7);過 F' 引線分,令兩端 A', B' 各在所作二弓形弧上而其長等於 AB(3 編, §47, 例三圖中, C_1C' 一定, $\measuredangle F=R_{\measuredangle}$, C_1F 爲定長之半);聯 $A'E'$, $B'D'$, 二線交於 C'.

次,在 $\triangle ABC$ 上截取 $AE=A'E'$, $AF=A'F'$ $BD=B'D'$ 作 $\triangle DEF$.

〔證〕　略.

〔討論〕　$A'B'$ 可得二個解答,故如此位置之 $\triangle DEF$ 有二個解答.

又 $\triangle DEF$ 各角頂可任意位置於 $\triangle ABC$ 之各邊上,故共有十二個解答.

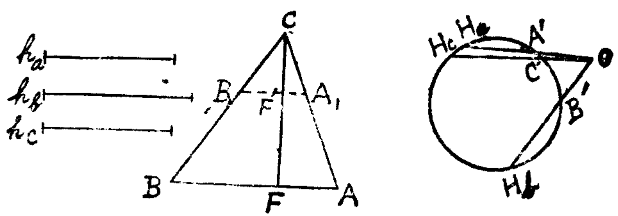
53.　作圖方法二.　相似法.

就某種作圖題,先作所求圖之相似形,以此爲基礎以作所求圖,是曰相似法.

例.　設三角形之三個高 h_a, h_b, h_c. 作此三角形.

〔解析〕　因 $h_aa=h_bb=h_cc$.

$\therefore\ h_a : h_b : h_c=\dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b} : \dfrac{1}{c}$.



〔解法〕 作任意圓,在圓外任取一點O,以為中心,各以h_a, h_b, h_c,為半徑規弧,交圓於H_a, H_b, H_c; OH_a, OH_b, OH_c再交圓於A', B', C',名OA', OB', OC'之長各為a', b', c'. 以a', b', c'為三邊作$\triangle A_1B_1C$,延長高CF'至F,令$CF=h_c$,過F作A_1B_1之平行線,得$\triangle ABC$為所求.

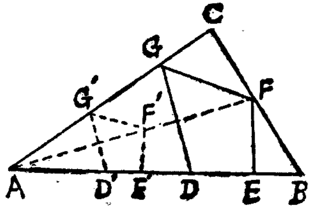
證及討論學者自為之.

54. 作圖方法三. 應位相似法.

若欲作之圖對於所設點,線等須在一定位置,則可省去題中一條件而作所求圖之應位相似形;於是再作圖,令與已作者相似而合於前所省去之條件.

初時所省一條件恆為有定長之一線分,在一定直線上之一點,及過定點之一直線等.

例一. 作一四角形,令內接於一定三角形而與一定四角形相似.



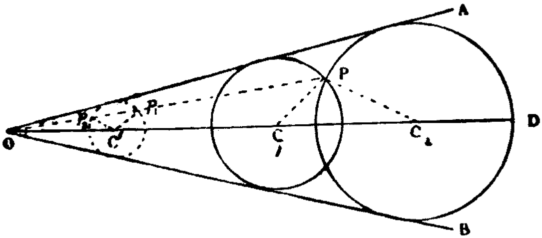
〔解法〕 在定三角形ABC邊AB上任意取一點D',從D'至AC引$D'G'$,令$\angle BD'G'$等於定四角形之一角; 在$D'G'$上作一四角形$D'G'F'E'$,與定四形角相似(題7);

聯AF',交BC於F; 從F引FE, FG各平行於$F'E'$, $F'G'$,從G

引 GD 平行於 $D'G'$,得內接四角形 $DEFG$ 爲所求.(學者自證之)

〔註〕　初時省去一角頂在 BC 上之一條件.

例二. 作一圓,令切二定直線且過一定點.



〔解法〕　先作二定直線交角 AOB 之等分線 OD, 在其上任意取一點 C' 作中心,畫切此二直線之圓; OP(P 爲定點) 交 $\odot C'$ 於 P_1 及 P_2, 引 PC_1, PC_2,
令各平行於 P_1C',P_2C';在 OD 上得 C_1 及 C_2,爲所求圓之中心.

(學者自證之)

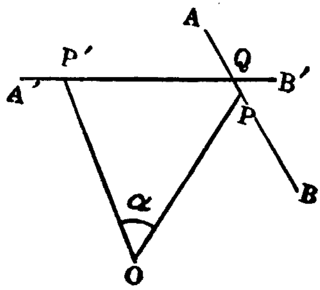
55.　旋轉法.

定理 A.　以一圖繞一定點旋轉,轉過任意角 a, 則圖中任意線所轉過之角皆爲 a.

〔證〕　O 爲定點, AB 爲一直線圖中之任意一直線. AB 繞 O 轉過一角 a 而至 $A'B'$, 其中任意一點 P 至 P', 則

$$\measuredangle POP'=a,\ \measuredangle OPB=OP'B';$$

由是AB, $A'B'$若交於Q,則O, P, Q, P'共圓(3編,理12系7);



$\therefore \measuredangle BQB'=POP'=\alpha$　(3編,理12系6).

次,就曲線觀之: 一曲線上任意一點之方向以此點切線之方向表之,則以一曲線繞定點O轉過一角α時,其任意點之方向亦轉過一角α,證法全與上同.

定理B. 在一圖之平面中,設一定點O及任意點P. 若一點Q合於二個條件$OQ:OP=m:n$(定比及$\measuredangle POQ=\alpha$(定)角),則$P$描寫一任意圖形時,$Q$當描寫一相似圖形.

〔證〕　在OP中取一點Q',令$OQ':OP=m:n$,則Q'當描寫一P之應位相似形. 再以Q'之軌跡繞O轉過一角α,則此形當與Q所描之形合. 故定理云然.

定義. $OQ:OP=m:n$,簡言之曰以$\dfrac{m}{n}$倍OP成OQ.

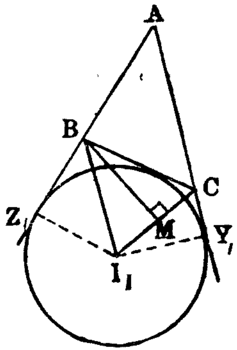
定義. 以一圖繞一定點轉過一定角α,同時以一定數$\dfrac{m}{n}$倍之,則曰以此圖繞定點旋轉,定點爲旋轉之中心.

若$m=n$而$\alpha=2R_\measuredangle$,則此旋轉卽爲二編所言之半旋轉;若$\alpha=0$, $m\neq n$,則此旋轉化成應位相似.

旋轉爲幾何運算之一,學者皆已深知.然其完全之理論,

頗涉深奧,此書不能論之,所可言者僅此而已.

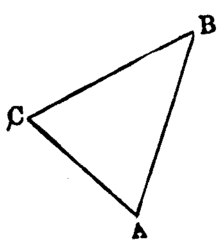
<u>例一.</u> 在 $\triangle ABC$ 中 $\measuredangle A$ 之大小及位置皆一定,周長亦一定. 從 B 至 $\measuredangle C$ 之外等分線引垂線;求其垂足 M 之軌跡.

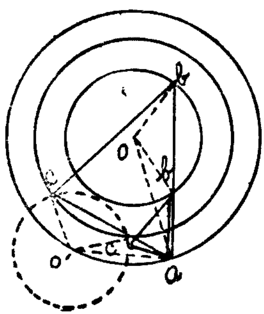


〔解析〕 作旁接圓 I_1 其切點爲 Y_1, Z_1, 則 $AY_1=AZ_1=s$ 爲定長,故 $\odot I$ 一定; 今 $\measuredangle BI_1M=R_\angle-\frac{1}{2}A$ 爲定角, 又 $\measuredangle BMI_1=R_\angle$, $\therefore\triangle BI_1M$ 之形式一定,而 $I_1M : I_1B$ 爲定比. 又因 I_1一定, 而 B 沿 AZ 運動,故從定理 B, 知 M 之軌跡爲一直線而與 AB 之交角等於 $R_\angle-\frac{1}{2}A$, 故其軌跡爲垂直於 AI_1 之一直線.

<u>例二.</u> 作一三角形,令其與一定三角形 ABC 相似而三個角頂各在三個同心圓周上.

〔解法〕 同心圓之中心爲 O, 定三角形爲 ABC.





在外圓周上任意取一點 a. 以內圓繞 a 轉過一角 BAC 而以 $\frac{AC}{AB}$ 倍之,得 $\odot o'$ (即作 $o'a$ 令 $\measuredangle o'ao=BAC$, 以 o' 爲中心由 $o'c:ob=AC:AB$ 所得之 $o'c$ 爲半徑作圓);此 $\odot o'$ 與中一圓,交於 c; 由是作 ab, cb, 令 $\measuredangle a, \measuredangle c$ 各等於 $\measuredangle A, C$, 得 $\triangle abc$ 爲所求之三角形.

〔證〕 從解法,以 $\measuredangle ABC$ 及比 $\frac{AB}{AC}$ 旋轉 $\odot o'$ 時, $\odot o'$ 當合於內圓,而 ac 當合於 ab, 故內圓及 ab 之公共點當爲 c 旋轉以後之位置,故 b 在內圓上.

例題十 (雜題)

(1) 以二等邊三角形 ABC 底 BC 爲半徑, B 爲中心畫圓,交邊 AC 於 D, 則 BC 爲 AC, CD 之比例中項.

(2) AB 爲 $\odot C$ 之一直徑, N 爲 CB 上任意一點. 延長 AB 至 T, 令 $CT:AC=AC:CN$, 從 T 引切線切圓於 P, 則 $\measuredangle CNP=R$.

(3) 從 $\triangle ABC$ 頂點 A 引其外接圓之切線 AT, 從 B 引 AT 之平行線,交 AC 於 D, 則 AB 爲 AC 及 AD 之比例中項.

(4) CA, CB 爲 $\odot C$ 互相垂直之二半徑, DE 爲任意弦. BD, BE 各交 AC 於 F 及 G, 則 $\triangle BFG\sim\triangle BDE$.

(5) 在 $\triangle ABC$ 邊 AC, AB 上各取點 D 及 E, BD 及 CE 交於 F 而 $BF:FD=CF:FE=4:1$, 則 $CD:DA=BE:EA=3:1$.

(6)　AB 爲一圓之直徑,從 A 引圓之切線,在此切線上任意取一點 C,從 C 引圓之第二切線,切圓於 D,引 DE 垂直於 AB,聯 CB,則 CB 等分 DE.

(7)　二圓外切,則其外公切線之長爲二圓直徑間之比例中項.

(8)　D 爲 $\triangle ABC$ 底 BC 上任意一點,則 $\triangle\!\!\triangle ABD, ACD$ 外接圓直徑之比等於 $AB : AC$.

(9)　從 $\triangle ABC$ 頂點 A 引外接圓之切線,交底 BC 於 D,則 $\triangle\!\!\triangle ABD$ 及 ACD 外接圓直徑之比等於 $AD : CD$.

(10)　AA', BB', CC' 爲三平行線,二直線各截之於 A, B, C 及 A', B', C',而 $AB : BC = m : n$,則 $(m+n)BB' = nAA' + mCC'$.

(11)　平行四邊形一對角線及此線兩旁二餘形之對角線共點.

(12)　在 §50 例四圖中作 $\triangle 63Q$ 之外接圓,交 61 於 M,交 34 之延線於 L,證 $\triangle\!\!\triangle LMQ, 41P$ 爲應位相似以證 Pascal 定理.

(13)　$\triangle ABC$ 邊 BC 之中點爲 A',$\measuredangle A$ 等分線與此邊之交點爲 P,則 $BA' : A'P = AB + AC : AB \sim AC$.

(14)　$\triangle ABC$ $\measuredangle A$ 等分線交 BC 於 P,$\measuredangle APB, APC$ 之等分線各交 AB, AC 於 E, F,則 $\triangle BEF : \triangle CEF = AB : AC$.

(15)　$\triangle ABC$ $\measuredangle A$ 外等分線交 BC 之延線於 P',交外接圓於 E,則 $AP'.AE = AB.AC$.

(16)　$\triangle ABC$ 爲正三角形,在其外接圓劣弧 BC 上任意取一點 P, 則 $\overline{PA}^2=PB.PC+\overline{BC}^2$.

(17)　I 爲 $\triangle ABC$ 之內心, AI 會外接圓周於 D, 則

$$r.R=AI.ID.$$

(18)　AB 爲 $\odot C$ 之任意弦, P 爲劣弧 AB 上之任意點,從 P 至 AB 引垂線 PL, 再至從 A 及 B 所引之切線各引垂線 PM, PN, 則

$$\overline{PL}^2=PM.PN.$$

(19)　從圓周上任意一點至內接四角形各雙對邊所引垂線之矩形相等.

(20)　若從一點至圓內接四角形各雙對邊所引垂線之矩形相等,則此點在外接圓周上.

(21)　過相交二圓公共弦上一點 P 引一直線,交一圓周於 A 及 D, 交又一圓周於 B 及 E, 則 $AB:BP=ED:DP$.

(22)　從圓外一點 P 至圓引切線 PA 及割線 PBC, 又從 P 引任意線分 PD, 令 $PD=PA$, DB 及 DC 再交圓周於 E, F, 則 $EF \parallel PD$.

(23)　以銳角三角形 ABC 邊 BC 爲直徑畫圓,從 A 引圓之切線 AF, 在 AB 上取點 D 令 $AD=AF$, 從 D 引 AB 之垂線交 AC 之延線於 E, 則 $\triangle ABC=\triangle ADE$.

(24)　延長正六角形各邊至兩兩相交,順次聯其交點,又得一六角形,則 (a) 新形亦爲正六角形; (b) 原形與新形之

比等於 $1:3$.

(25) 從 $\triangle ABC$ 邊 BC, CA, AB 上各取點 D, E, F, 令

$$BD:DC=CE:EA=AF:FB=1:n,$$

則 $\triangle ABC:\triangle DEF$ 若何?

(26) 以 $\odot C$ 周上任意一點 P 爲中心用任意半徑畫一圓. 在 $\odot C$ 中引切於 $\odot P$ 之弦 MN, 則 MN 之位置變更時, 矩形 $PM.PN$ 之積不變.

(27) $ABCD$ 爲一圓內接四角形, 其二對角線 AC 及 BD 交於 F, 則

$$AD.AB:CB.CD=AF:FC.$$

(28) 以三角形三中線爲三邊作一三角形, 求原形與新形之比.

(29) $O-ACBD$ 爲一調和線束, 一線分兩端各在第一第三兩射線上而平行於第四射線, 則此線分爲前三個射線所等分.

(30) 一線分兩端各在一調和線束之第一第三兩射線上而爲三個射線所等分, 則此線分必平行於第四射線.

(31) 一線分兩端各在一線束中第一第三兩射線上而爲三個射線所等分, 且平行於第四射線, 則此線束爲調和線束.

(32) 從圓外一點 P 引圓之任意割線 PAB, 在 AB 上取

一點 G, 令 P, A, G, B 成一調和點列.則當此割線繞 P 旋轉時,(不以一比倍之), G 之軌跡爲一直線.

(33) O 爲定直線 AB 外之一定點,過 O 之一動直線交 AB 於 P, 在 OP 上取 Q 點,令 $OP.OQ=$ 定積 k^2, 則 Q 之軌跡爲一圓周.

(34) O 爲定圓 C 外一定點,過 O 之一動直線割 $\odot C$ 於 P, 在 OP 上取 Q 點,令 $OP.OQ=$ 定積 k^2, 則 Q 之軌跡爲一圓周,而 O 爲原圓及軌跡之相似中心.

(35) O 爲定圓 C 上一定點,過 O 之一動直線割 $\odot C$ 於 P, 在 OP 上取 Q 點,令 $OP.OQ=$ 定積 k^2, 則 Q 之軌跡爲一直線.

(36) $\triangle ABC$ 三角之大小各一定,頂點 A 之位置一定, B 在一直線上運動,則 C 之軌跡若何?

(37) 在前題中若 B 在一圓周上運動,則 C 之軌跡若何?

(38) 求一點,令與三個定直線距離之比等於定比 $l:m:n$.

(39) 求一點,令與三個定點距離之比等於定比 $l:m:n$.

(40) 求一點,令三個定圓在此點張相等之角.

(41) 過二定圓之一交點 A 作弦 BAC, 令 $BA:AC=$ 定比 $m:n$.

(42) 在一定圓周上有二定點,各過一點作平行弦,令

此二弦之比等於一定比 $m:n$.

(43)　作一平行四邊形,令其內接於一定三角形而與一定平行四邊形相似.

(44)　作一正方形,令內接於一定半圓.

(45)　在一半圓內作一矩形,令其周爲定長.

(46)　作一多角形,令與一定多角形相似而周爲定長.

(47)　作一矩形,令內接於一定圓而其面積一定.

(48)　已知 $\triangle ABC$ 之 $\angle A, a, \triangle$;作此三角形.

(49)　有一定三角形,在其形內或外求一點,令此點與三個角頂之聯所分成三個三角形之比等於定比 $l:m:n$.

(50)　作一矩形,令與一定正方形等積而其二隣邊之比一定.

(51)　作一直線,令平行於定三角形之一邊而等分三角形.

(52)　作一圓,令切一定圓,一直線及過一點.

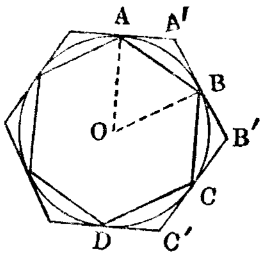
第六編

正多角形及圓

第一章 圓內接及外接正多角形

1. 定理一.

<u>分圓周為若干等分,(一)順次聯諸分點,可得一內接正多角形;(二)作各分點之切線,可得一外接正多角形.</u>



〔證〕 (一)以圓周等分為 n 分,其分點為 $A, B, C, \cdots$;則 $ABC\cdots$ 之各邊為張等弧之弦,故相等;又各角皆為立於 $\dfrac{n-2}{n}$ 圓周上之圓周角,故相等;故 $ABCD\cdots$ 為正多角形.

(二)作 $A, B, C, D, \cdots$ 切線,成外接多角形 $A'B'C'\cdots$;在 $\triangle$s $A'AB, B'BC, C'CD, \cdots$ 中,各切線角所夾之弧皆為圓周 $\dfrac{1}{n}$,故 $\measuredangle A'AB=A'BA=B'BC=B'CB=C'CD=C'DC=\cdots$,

又 $AB=BC=CD=\cdots$,

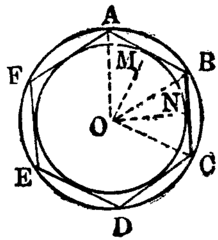
由是 $\triangle A'AB\cong B'BC\cong C'CD\cong\cdots$, 而 $\measuredangle A'=B'=C'=\cdots$,

且因 $A'A=A'B=B'B=B'C=C'C=C'D=\cdots$, 而 $A'B'=B'C'=\cdots$;

故 $A'B'C'\cdots$ 亦為正多角形.

系. 正 n 角形各邊在中心所張之角爲$\frac{4}{n}R_{\angle}$

2. 定理二.



正多角形可內接於圓及外接於圓

〔證〕 $ABCD\cdots F$ 爲正多角形.

引 $\angle A, B, C, \cdots$ 之等分線;

因 $\angle A, B$ 皆比 $2R_{\angle}$ 小,故其等分線會於 O;

以 OB 爲對稱軸,則 $BA \wedge BC, AF \wedge CD$, 故 $\angle C$ 之等分線亦過 O;

更以 OC 爲對稱軸,可證 $\angle D$ 之等分線亦過 O;

依此類推,知各角之等分線會於一點 O;

由是 $OM, ON, \cdots$ 爲從 O 至 $AB, BC, \cdots$ 之距離,則 $OM=ON=\cdots$ (3 編,理 20);

故 $ABCD\cdots F$ 外接於以 O 爲中心 OM 爲半徑之圓.

次,因 $\angle OAB=OBA=OBC=OCB=\cdots$,

而 $OA=OB=OC\cdots$;

故 $ABC\cdots F$ 內接於以 O 爲中心 OA 爲半徑之圓.

系一. 正多角形各角之等分線及各邊之垂直等分線皆爲其對稱軸.

系二. 正多角形有一對稱中心.

3. 定義一.

正多角形內接圓及外接圓之公共中心名曰正多角形之中心 (center), 其外接圓之半徑名之曰多角形之半徑 (radius), 內接圓之半徑曰邊心距 (apothem), 一邊在中心所張之角爲多角形之中心角 (center angle).

4. 定理三.

同邊數正多角形周之比等於其半徑或邊心距之比;面積之比等於半徑或邊心距之第二冪比(4 編,理 9,理 13 系 6).

5. 定理四.

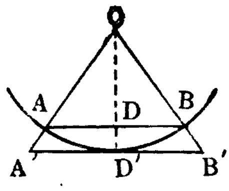
正多角形面積之數等於其周與邊心距二數之半積.

因其爲諸三角形 $OAB, OBC, \cdots$ 面積數之和故也.

6. 記號.

自此以後圓內接正 n 角形一邊之數以 s_n 表之,圓外接正 n 角形一邊之數以 S_n 表之,圓半徑之數以 r 表之,圓周之數以 C 表之,圓面積之數以 A 表之.

7. 問題一.



(一)已知 s_n, 求 S_n; (二)已知 S_n, 求 s_n,

〔解法〕　AB 爲圓內接正 n 角形之一邊; 從 $\frown AB$ 中點 D' 引切線與 CA, CB 二半徑之延線各會於 A', B', 則 $A'B'$ 爲外接正 n 角形之一邊可知;

因 $\triangle ACB \sim \triangle A'CB'$, $\therefore S_n : s_n = r : (CD)$;

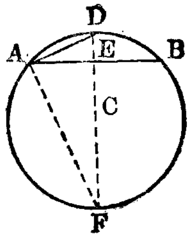
從直角三角形 CAD,得

$$(CD)=\sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}},\quad \therefore S_n=\frac{rs_n}{\sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}}}. \quad (1)$$

同理,可得

$$s_n=\frac{rS_n}{\sqrt{r^2+\frac{S_n^2}{4}}}. \quad (2)$$

8. 問題二.



(一)已知 s_n, 求 s_{2n}; (二)已知 s_{2n}, 求 s_n.

〔解法〕 AB 爲 $\odot C$ 內接正 n 角形之一邊; 垂直於 AB 引直徑 DEF, 則 AD 爲內接正 $2n$ 角形之一邊;

因 $(CE)=\sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}}$, $(ED)=r-\sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}}$,

而 $\overline{AD}^2=DF.DE$,

故 $$s_{2n}=\sqrt{2r\left(r-\sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}}\right)}. \quad (3)$$

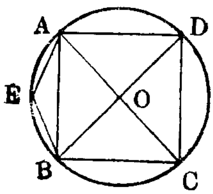
次,因 $AD\cdot AF=\frac{1}{2}AB.DF$, 即 $s_{2n}\sqrt{4r^2-s_{2n}^2}=rs_n$,

故 $$s_n=\frac{s_{2n}}{r}\sqrt{4r^2-s_{2n}^2}. \quad (4)$$

系. $$S_{2n}=\frac{2r}{S_n}\left\{\sqrt{4r^2+S_n^2}-2r\right\}. \quad (5)$$

此式可從(1)及(3),(4)得之,或別從幾何關係亦可求得.

9. 問題三.



作圓內接正方形.

〔**解法**〕 作互相垂直二直徑,分圓周於 A, B, C, D. 則 $ABCD$ 卽爲圓內接正方形.

系一. 作圓內接正 2^n 角形.

E 爲 $\frown AB$ 之中點,則 AE 爲正8角形一邊. 倣此,可作內接正 $16, 32, 64, \cdots, 2^n$ 角形之各邊.

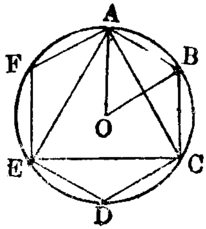
系二. 作圓外接正 2^n 角形.

從內接正 2^n 角形各角頂作切線,卽得外接正 2^n 角形.

系三. $s_4=r\sqrt{2}$, $s_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $s_{16}=r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $s_{32}=r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ ……

系四. $S_4=2r$, $S_8=2r(\sqrt{2}-1)$, $S_{16}=2r(\sqrt{2(2+\sqrt{2})}-\sqrt{2}-1)$ ………

10. 問題四.



作圓內接正六角形.

〔**解法**〕 在 $\odot O$ 一半徑 OA 上作正三角形 OAB, 得 AB 爲正六角形之一邊.

因 $\measuredangle AOB=\frac{2}{3}R_{\measuredangle}=\frac{4}{6}R_{\measuredangle}$ 故也(理 1).

系一. 作圓內接正三角形.

系二. 作圓內接正3×2^n角形(視前款系1作法).

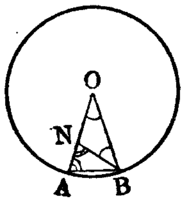
系三. 作圓外接正3×2^n角形(視前款系2作法).

系四. $s_3=r\sqrt{3}$, $s_6=r$, $s_{12}=r\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $s_{24}=r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, $s_{48}=r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$, ………

系五. $S_3=2r\sqrt{3}$, $S_6=\frac{2}{3}r\sqrt{3}$, $S_{12}=2r(2-\sqrt{3})$,………

11. 問題五.

作圓內接正十角形.



〔解析〕 $\measuredangle AOB=\frac{4}{10}R_{\measuredangle}=\frac{2}{5}R_{\measuredangle}$, 則$AB$爲$\odot O$內接正十角形之一邊. 於是

$\measuredangle OAB=OBA=\frac{1}{2}(2R_{\measuredangle}-\frac{2}{5}R_{\measuredangle})=\frac{4}{5}R_{\measuredangle}=2\measuredangle AOB$;

引$\measuredangle OBA$之等分線BN, 則$ON=NB=AB$, 而$\triangle OAB\sim\triangle BAN$;

$\therefore NA:AB=AB:OA$, 卽$NA:ON=ON:OA$, 卽ON爲中末分割OA所得之中項.

〔解法〕 中末分割半徑OA (5編,題9), 得中項ON; 以A爲中心ON之長爲半徑規弧,交圓周於B,則AB爲所求正十角形之一邊.

〔證〕 從解法,$OA:ON=ON:NA$, 卽$OA:AB=AB:AN$, 又$\measuredangle OAB=BAN$, $\therefore\triangle OAB\sim\triangle BAN$, 而$\measuredangle BNA=OBA=OAB$;

由是$BN=BA=ON$,

而$\measuredangle AOB=2(R_{\measuredangle}-A)=2(R_{\measuredangle}-BNA)=2(R_{\measuredangle}-2AOB)$;

故 $\measuredangle AOB=\frac{2}{5}R_{\measuredangle}=\frac{4}{10}R_{\measuredangle}$, 而 AB 爲正十角形之一邊.

系一. 作圓內接正五角形.

系二. 作圓內接正 5×2^n 角形.

系三. 作圓外接正 5×2^n 角形.

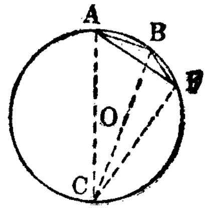
系四. $s_5=\frac{1}{2}r\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $s_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$,

$s_{20}=\frac{1}{2}r\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$, ……

系五. $S_5=2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}$, $S_{10}=\frac{2}{5}r\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}$,

$S_{20}=2r\left\{\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right\}$, ……

12. 問題六.



作圓內正十五角形.

〔解法〕 從圓周上一點 A 作內接正六角形之一邊 AF, 再作內接正十角形之一邊 AB, 則 BF 卽爲內接正十五角形之一邊.

〔證〕 $\measuredangle BOF=AOF-AOB=\frac{4}{6}R_{\measuredangle}-\frac{4}{10}R_{\measuredangle}=\frac{4}{15}R_{\measuredangle}$, 故 BF 爲內接正十五角形之一邊.

系一. 作圓內接正 15×2^n 角形.

系二. 作圓外接正 15×2^n 角形.

〔注意〕 初等幾何學之作圖僅許用圓及直線作之,否

則謂爲不能作圖. 自歐几里得以來,等分圓周之問題,僅能分成以上各種. 至 Gauss 氏始證明所分分數若能表成 $2^{2^m}+1$ 而爲素數者必能作圖,否則不能. 今 $m=0$, 則 $2^{2^m}+1=3$; $m=1$, 則 $2^{2^m}+1=5$; 其作圖方法已見於問題四及五中. 而分數爲此分數之 2^n 倍者必能作圖,已見前諸問題之各系中. 分數爲如此可作圖數之相乘積者亦能作圖,問題六卽其一例. 又若 $m=2$, 則 $2^{2^m}+1=17$; 此數亦爲素數,故圓內接正十七角形亦可作圖,惟其解法須藉三角方程式之助始能得之,已出本書之範圍. 又 $m=3$, 則 $2^{2^m}+1=257$, 此亦爲素數,故圓內接正二百五十七角形亦可作圖,惟現時數學家尙未有人能實行作出也.

研究幾何作圖題之能作與否,須略具整數論之智識,本書不能論之.

初等幾何學中有三大問題,起於歐几里得之前,延及二千數百年無人能解,至百年前始能證明其不能作圖,今舉之於下:

(1) 等分一任意角爲三分;

(2) 作一正方形等於一定圓之面積;

(3) 作一線分,令在其上所作正立方體等於在一定線分上所作正立方體體積之二倍.

此等問題,用高次曲線皆有十餘種解法,然出於初等幾

何學範圍之外,故在純正幾何學中不承認其能作也.

13. 問題七.

用圓半徑之數數求其內接正十五角形一邊之數數.

〔解法〕　用前款之圖,引直徑 AC, 聯 BC, FC, 則 AC 之數數爲 $2r$; 從前,已知 AF, AB 之數數各爲 r, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}r$;

從直角三角形 ACF, ACB, 可知 CF 及 CB 之數數各爲

$$r\sqrt{3},\quad \tfrac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

由是從 Ptolemy 定理,

$$2r\times s_{15}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\times r\sqrt{3}=r\times\tfrac{1}{2}r\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

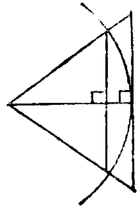
$$\therefore\quad s_{15}=\tfrac{1}{4}r\left\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\,(\sqrt{5}-1)\right\}.$$

14. 圓內接及外接正多角形周之數數($r=\frac{1}{2}$).

已知 s_n 及 S_n 則其周之數數各爲 $n\cdot s_n$ 及 $n\cdot S_n$ 可知. 今令 $r=\frac{1}{2}$, 從圓內接及外接正方形算起,計算正 2^n 角形周之數數如下:

邊　數	內接形周	外接形周
4	2.8284271	4.0000000
8	3.0614675	3.3137085
16	3.1214452	3.1825979
32	3.1365485	3.1517249
64	3.1403312	3.1441184
128	3.1412773	3.1422236
256	3.1415138	3.1417504
512	3.1415729	3.1416321
1024	3.1415877	3.1416025
2048	3.1415914	3.1415951

15. 特別角之三角函數.



定理. 圓內接正n多角形半邊對於圓半徑之比爲角$\frac{2}{n}R_{\angle}$之正弦; 外接正n多角形半邊對於半徑之比爲角$\frac{2}{n}R_{\angle}$之正切(從圖及正弦,正切之定義可知).

即 $\sin\frac{2}{n}R_{\angle}=\frac{s_n}{2r}$, $\tan\frac{2}{n}R_{\angle}=\frac{S_n}{2r}$.

由是,從以前諸款,可得特別角之三角函數如下:

$\sin 60^0=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tan 60^0=\sqrt{3}$,

(從內外接正三角形得之)

$\sin 45^0=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\tan 45^0=1$,

(從內外接正方角形得之)

$\sin 36^0=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\tan 36^0=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$,

(從內外接正五角形得之)

$\sin 30^0=\frac{1}{2}$, $\tan 30^0=\frac{1}{3}\sqrt{3}$,

(從內外接正六角形得之)

$\sin 22\frac{1}{2}^0=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\tan 22\frac{1}{2}^0=\sqrt{2}-1$,

(從內外接正八角形得之)

$\sin 18^0=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$, $\tan 18^0=\frac{1}{5}\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}$,

(從內外接正十角形得之)

$\sin 15^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, $\tan 15^0 = 2-\sqrt{3}$,

(從內外接正十二角形得之)

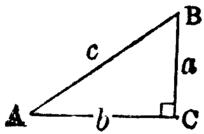
$\sin 9^0 = \frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$, $\tan 9^0 = \sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$,

(從內外接正二十角形得之)

$$\sin 12^0 = \frac{1}{8}\left\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right\}.$$

(從內接正十五角形得之)

〔注意〕 從 $\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a}$, 則已知一角之正弦時卽可求此角之餘弦.



又如右圖, $\sin B = \frac{b}{c} = \cos A$,(5編, §47, 定義)

$\because\ B = 90^0 - A$, $\therefore\ \sin(90^0-A) = \cos A$,

倣此可證 $\cos(90^0-A) = \sin A$, $\tan(90^0-A) = \cot A$,

$\cot(90^0-A) = \tan A$ $\sec(90^0-A) = \csc A$, $\csc(90^0-A) = \sec A$;

從此各式,則已知一角之三角函數時,卽可求其餘角之函數.

例題一 (定理及計算)

(1) 圓內接等邊多角形必為正多角形.

(2) 正多角形一內角與其一中心角互為補.

(3)　一多角形之外心及內心合一,則此形爲正多角形.

(4)　過圓內接正多角形各邊所張弧之中點作圓之切線,則得外接正多角形.

(5)　圓外接等角多角形必爲正多角形.

(6)　正三角形外接圓之直徑等於其內接圓直徑之二倍.

(7)　設正八角形之一邊,求其面積.

(8)　設正六角形之一邊,求其面積.

(9)　以一定線分爲邊,在其上作一正十二角形.

(10)　正三角形之邊心距等於其半徑之半.

(11)　同圓內接正三角形面積等於正六角形面積之半.

(12)　二個任意三角形內接於同圓,則其面積之比等於三邊比之複比.

(13)　正十二角形之面積等於其半徑上正方形之三倍.

(14)　作一正多角形令與一定正多角形相似而面積倍之.

(15)　作一 36^0 之角.

(16)　作一 18^0 之角.

(17) 正五角形之二對角線互分爲中末比.

(18) 圓內接正六角形之面積爲同圓內接及外接正三角形面積之比例中項.

(19) 圓內接正六角形之面積等於外接正六角形面積之$\frac{3}{4}$.

(20) 同邊數內接及外接正多角形之面積各爲P及P',二倍邊數內接正多角形之面積爲Q,則Q爲P及P'之比例中項.

(21) $\odot O$中半徑OC垂直於直徑AB,M爲OB中點,在AB上取D點令$MD=MC$,則CD爲此圓內接正五角形之一邊,OD爲此圓內接正十角形之一邊.

(22) 求 $\cos 60^0$, $\cos 45^0$, $\cos 30^0$.

(23) 求 $\cos 36^0$, $\cos 18^0$, $\cos 15^0$.

(24) 求 $\cos 12^0$, $\cos 9^0$.

(25) 求 $\sin 81^0$, $\cos 81$, $\tan 81^0$.

(26) 求 $\sin 75^0$, $\cos 75^0$, $\tan 75^0$.

(27) 求 $\sin 72^0$, $\cos 72^0$, $\tan 72^0$.

(28) 求 $\sin 54^0$, $\cos 54^0$, $\tan 54^0$.

(29) 以$\cos\frac{2}{n}R_{\neq}$倍一圓半徑,卽得此圓內接正n角形之邊心距.

(30) 圓內接正n角形面積之函數爲

$$2nr^2\sin\frac{2}{n}R_{\times}\cos\frac{2}{n}R_{\times}.$$

第二章　圓周及圓面積

16. 定義二.

某量在一條件之下有一定不變之值者曰定量(constant),可取種種之值者曰變量(variable).

例如三角形之周爲變量而其三角之和爲定量.

17. 定義三.

一變量逐漸增加或減少,而其與一定量之差逐漸減少.且永遠減少而不增加,以至比吾人想像中所能視爲至小之量尙小而決不爲O,則此定量爲變量之極限.

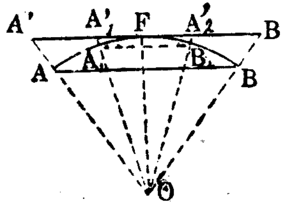
例如正多角形之一角當邊數增加時此角逐漸增加,而其與直線角之差逐漸減少正多角形邊數無窮增加,則其一內角與直線角之差永遠減小,可小至比吾人所能指定無論如何小之角尙小,然決不爲O,卽正多角形角之極限爲一直線角.

18. 定理五.

圓內接正多角形及外接正多角形邊數二倍二倍逐漸增加,則

(一)內接形及外接形周之極限爲圓周;

(二)內接形及外接形面積之極限爲圓面積.



〔證〕　設圓內接正 n 角形之周爲 p_n, 面積爲 k_n, 外接正 n 角形之周爲 P_n, 面積爲 K_n.

第一事,從幾何公理六,知 $P_n>p_n$;

第二事,圓周在外接形之內而在內接形之外,故名圓周爲 C, 則

$p_n<C<P_n$;(公理六)

第三事,如圖,設 AB, $A'B'$ 爲⊙O 內接及外接正 n 角形之一邊,而 F 爲 $A'B'$ 之切點,則

$$P_n : p_n=OA' : OA=OA' : OF,$$

由分比定理, $P_n-p_n : p_n=OA'-OF : OF$,

$$\therefore P_n-p_n=\frac{OA'-OF}{OF}\cdot p_n$$

然從第二編定理二十三系六, $OA'-OF<A'F$,

$$\therefore P_n-p_n<\frac{A'F}{OF}\cdot p_n;$$

今作 $\angle AOF$ 及 FOB 之等分線,交 AB 於 A_1, B_1, 交 $A'B'$ 於 A'_1, B'_1, 則 A_1B_1 及 $A'_1B'_1$ 各爲⊙ 內接及外接正 $2n$ 角形之一邊,從上,可知 $P_{2n}-p_{2n}<\frac{A'_1F}{OF}\cdot p_{2n}$;

倣此,內接形及外接形之邊數增至 $2^m n$ 時,

$$P_{2^m n}-p_{2^m n}<\frac{A_m'F}{OF}\cdot p_{2^m n};$$

令 m 無窮增加時，OF 不變，$p_{2^m n}$ 恆比 C 小，又因

$$A'_m F<A'_{m-1}F<\cdots\cdots<A'_1 F<AF,$$

而 $A'_m F$ 無窮減少，且永遠減少而不增加，可小至比吾人所能指定無論如何小之線分尚小，故 $\frac{A'_m F}{OF}\cdot p_{2^m n}$ 亦然，此時無窮接近於 0 而以 0 作極限，(然決不徑等於 0)，故

$$P_{2^m n}-p_{2^m n}\doteq 0,\qquad 即\quad P_{2^m n}\doteq p_{2^m n};$$

即圓內接及外接正多角形之周當邊數二倍二倍無窮增加時有同一之極限；

第四事，因 $P_{2^m n}>C>p_{2^m n}$（第二事），$\therefore P_{2^m n}-C<P_{2^m n}-p_{2^m n}$，及 $C-p_{2^m n}<P_{2^m n}-P_{2^m n}$，

由是從第三事，$P_{2^m n}-C\doteq 0$，　$C-p_{2^m n}\doteq 0$；

故從定義三，知 $P_{2^m n}$ 及 $p_{2^m n}$ 之極限同爲圓周。

又從定理三，$K_n : k_n=\overline{OA'^2} : \overline{OA^2}=\overline{OA'^2} : \overline{OF^2}$，

而
$$K_n-k_n=\frac{\overline{OA'^2}-\overline{OF^2}}{\overline{OF^2}}\cdot k_n=\frac{\overline{A'F^2}}{\overline{OF^2}}\cdot k_n,$$

故與前同一理由，可知 K_n，k_n 當 n 無窮增加時其極限皆爲圓面積 A.

<u>系一.</u>　<u>二圓周之比等於其半徑之比(理 3 及本定理).</u>

*$\doteq$ 讀曰無限接近而幾等於。

例如二圓周為C, C',其半徑為r, r',則$C:C'=r:r'$.

系二. 圓周對於其直徑之比一定不變.

因$C:C'=r:r'=2r:2r'$, $\therefore C:2r=C':2r'$也.

〔注意〕 此比為無理數,慣例以π表之.

系三. 圓面積之數數等於圓周與半徑二數數之半積(理4及本定理).

系四. 二圓面積之比等於其半徑上正方形之比(理3及本定理).

19. 定義四.

圓周對於其直徑之比名曰圓周率.

20. 問題八.

求圓周率之近似值.

〔解法〕 從§18系二,$C=2\pi r$,今若$r=\frac{1}{2}$,則$C=\pi$; 從定理五,知圓周為其內接正多角形及外接正多角形周之極限;故從§14,知 $3.1415914<\pi<3.1415951$;

由是圓周率之近似值精密至小數第五位者當為3.14159,尋常慣用者用略過之近似值為3.14159,或$\frac{22}{7}$,或$\frac{355}{113}$.又$\frac{1}{\pi}$之近似值為0.3183

〔注意〕 π之研究,我國先輩曾有甚多之供獻: 周髀經解中周公與商高問答已言及$\pi=3$,其書雖未必眞出於周公之時而要為秦漢間人所作;至後漢張衡,則謂

$\pi=\sqrt{10}=3.1623$; 三國時魏劉徽得 $\pi=3.1416$ 後人名之曰徽率;漢劉歆得 $\pi=\frac{3927}{1250}$; 晉王蕃得 $\pi=\frac{142}{45}$; 至六朝宋齊之間,祖冲之推至小數十三位,定疏率爲 $\frac{22}{7}$,密率爲 $\frac{355}{113}$,其法以綴術推之,蓋不特圓周率出於是中,即代數亦孕育於其間矣.

在彼歐洲,耶穌聖經所載 $\pi=3$,蓋得之於巴比倫者;希臘 Archimedes 則謂 π 介於 $3\frac{1}{7}=3.1428$ 及 $3\frac{10}{71}=3.1408$ 之間; Ptolemy 得 $\pi=3\frac{17}{120}$; Hindus 則用 $\pi=\sqrt{10}$,亦用 $\pi=\frac{3927}{1250}$; 至西曆 1625 年 Metius 始得 $\pi=\frac{355}{113}=3.1415929$ 精密至小數六位.

近世代數既興,π 之值用級數求之,其難易與古時不可同日而語(近時 π 之值已推得小數 707 位);故古人所得雖微其功實較後人爲鉅. 尤有足念者,我國先哲推得圓周密率遠出於歐人之前;可知科學之不競,實子姓失墜其緒而然,在我先民,固有光榮之歷史足以焜耀於世界也.

系一. 圓周數 $C=2\pi r$, $\frac{1}{2}C=\pi r$.

系二. 圓面積數 $K=\pi r^2$.

21. 問題九.

求與半徑等長之弧所張中心角之度數.

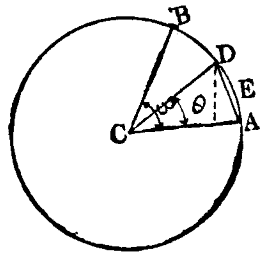
〔解法〕 設所求之角爲ω,從第五編定理二,

$$\omega : 180^0 = r : \pi r;$$

$$\therefore \omega = 180^0 \times \frac{1}{\pi} = 57^0 17' 45''.$$

〔注意〕 角ω在理論數學中恆用爲量角之單位,宜熟識之. 尋常量角之法,所得角之度數與線分之度數各自獨立,毫不相關,惟用如此之角作角之單位,則因弧之媒介而二者間乃發生密接之關係,此其所以可貴也.

定義. 角ω名曰半徑角(Radian),如此量角之法曰弧度法(Circular Method).



系一. 在半徑爲r之圓中,一中心角ACD以半徑角ω爲單位度之得度數爲θ,則其AD弧之度數爲$r\theta$.

因 $\measuredangle ACB : ACD = \frown AB : AD$, 卽 $1 : \theta = r : (AD)$

$$(\measuredangle ACB = \omega = 1)$$

故$\frown AD$之度數名爲a,則$a = r\theta$也.

系二. 一扇形角在弧度法中之度數爲θ,則扇形面積之度數爲$s = \frac{1}{2}r^2\theta$.

因 $2\pi : \theta = \pi r^2 : s$ 故也(5編,理2).

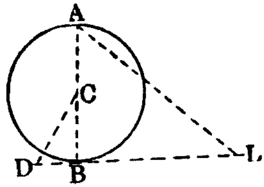
系三. 弓形AED所張中心角在弧度法中之度數爲θ,則此弓形面積之度數爲$\frac{1}{2}r^2(\theta - sin\theta)$.

弓形 AED= 扇形 $ACD-\triangle ACD$. 今扇形 ACD 面數之數數為 $\frac{1}{2}r^2\theta$; $\triangle ACD$ 中底 CA 之數數為 r, 高之數數為 $r\sin\theta$, 故其面積之數數為 $\frac{1}{2}r^2\sin\theta$; 由是弓形 AED 面積之數數為

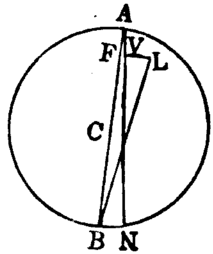
$$\frac{1}{2}r^2\theta-\frac{1}{2}r^2\sin\theta=\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$$ 可知.

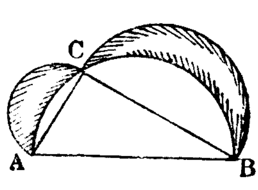
例題二　(實用)

(1)　右圖為西曆 1685 年 Kochansky 氏所發表:先就 ⊙C 引直徑 AB, 從中心 C 作 CD 令 $\measuredangle BCD=30^0$; 次過 B 引切線 DBL, 從 D 起在此切線上截取 $3r$ 之長,得 L; 則 AL 約等於半圓周之長. 證之. 又其錯誤之百分如何?



(2)　右圖為西曆 1880 年 Baader 氏所發表:先就 ⊙C 引直徑 AB, 在 AB 上取點 F, 令 $AF=\frac{1}{8}AB$; 從 B 引 AB 之垂線 BN, 令其長等於 AF, 聯 AN; 次從 F 引 AB 之垂線,交 AN 於 V; 於是延長 FV 至 L, 令 $VL=AF$; 則 BL 上正方形殆等於圓面積. 試驗其近似值精密至幾位小數.





(3)　西曆紀元前 430 年時

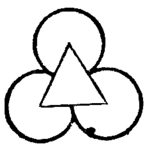
Hippocrates 氏發見下之定理:以直角三角形各邊爲直徑作半圓於同向,則在直角二邊外所得二個新月形面積之和等於直角三角形之面積. 證之.

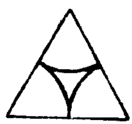
(4)　Archimedes 曾言圓面積等於以圓周爲底半徑爲高所作三角形之面積. 試應用(1)題作此三角形.

(5)　埃及求圓面積之古法,從圓之直徑取其 $\frac{8}{9}$ 而在此所取線分上作正方形卽得之. 如此,則其圓周率當爲何值?

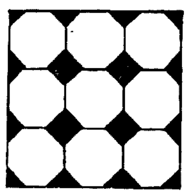
(6)　美術家言凡矩形之物若其高與底之比如一線分之中末比,則此矩形最爲悅目. 今一窗之高與廣比如一線分之中末比,而窗廣4尺,則其高爲幾尺?

(7)　下二圖,皆以一正三角形各角頂爲中心半邊之長爲半徑作弧而成. 求三弧所圍花形之周及面積. (假定三角形邊長 $2a$).



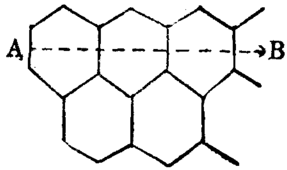


(8)　右圖從諸正八角形及諸正方形所成,諸正方形之邊長 a, 則正八角形二對邊之距離及面積各若何?

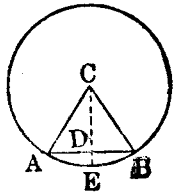


(9)　室廣 AB, 以六角形之練磚

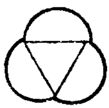
鋪之. 設六角形每邊之長爲2寸, AB 長1丈,而磚之鋪法如右圖,則一排可鋪幾塊.

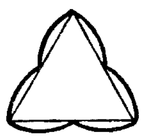


(10)　歐洲木匠求圓周之法,在一半徑上作正三角形,延長其邊心距 CD 至 E, 乃以 $6AC+DE$ 之長作爲圓周之長. 試以 $\pi=3.1416$ 求此法所生之錯誤.

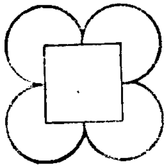


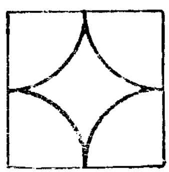
(11)　下二圖,皆以一正三角形三邊中點爲中心作弧. 求諸弧所圍曲線圖之面積及周圍（假定正三角形每邊長 $2a$).



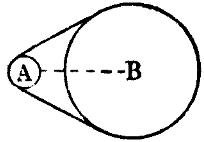


(12)　正方形每邊之長爲 $2a$. 如下圖以各角頂爲中心半邊之長爲半徑畫各弧,求諸弧所圍曲線圖之面積及中心.



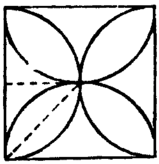


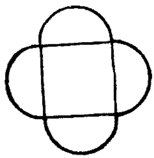
(13)　二輪 A, B 直徑各爲2尺及9尺, A 及 B 相距14尺,以革帶聯之,帶長幾何? 又大輪每分鐘轉40次,則小輪每分鐘轉幾次?



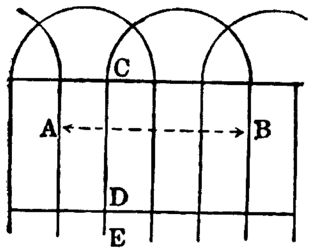
(14)　赤道周圍約長25000哩. 設有一同心圓,其周圍比赤道長1哩,則此二圓半徑之差幾何?

(15)　正方形每邊長 $2a$, 以各邊中點爲中心半邊之長爲半徑畫諸弧. 求其所成曲線圖之面積及周圍.

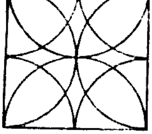


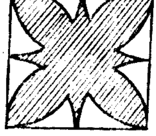


(16)　右圖表一金屬線所成之籬,用以保護花牀等物者. 若 $AB, CD\ \ DE$ 之長各爲1尺, 9寸, 3寸, 則一尺之籬須用金屬線幾何?



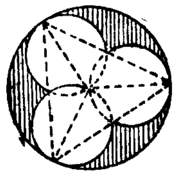
(17)　如下圖,左一圖所以表示右一圖之構造方法,求右圖中曲線圖之面積及周圍(設正方形每邊長 $2a$).



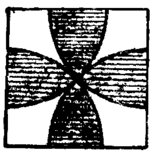


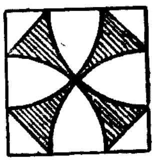
(18)　二街之交角爲120^0,一車自此街轉入彼街,車之二輪相距5尺,則在外之輪較他輪多行幾尺?

(19)　一正三角形內接於一圓,以三角形之三個半徑爲直徑各作小圓,已知外圓之半徑長$2a$,求內外圓間曲線圖之周圍及面積.

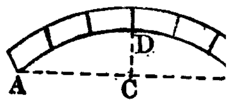


(20)　下二圖,皆以正方形之角頂爲中心對角線之半爲半徑畫圓而成.若對角線之長爲$2a$;求其中有影圖之周圍及面積.

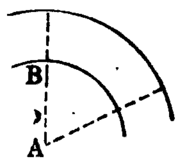




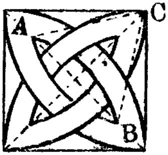
(21)　一圓穹,其廣AB長1丈,其高CD長2尺,求此穹之半徑.

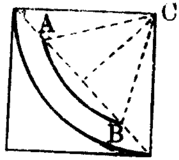


(22)　一五尺寬之路如圖轉一彎.若半徑AB長8尺,$\angle A$爲60^0.求路彎處之面積.

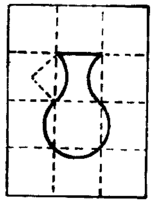


(23)　如下圖,右爲左之構造方法,正方形每邊之長爲$2a$,以其各角頂爲中心畫同心圓可得之.圖中ABC爲正三角形,其高爲正方形之對角線,故其長可知.求二環之面積,二環相重處不必減去.

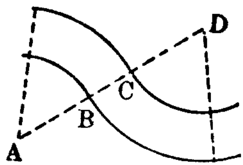




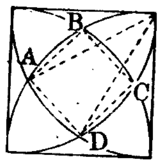
(24)　在每邊爲 a 之等方格形紙上畫如圖之花瓶形,各弧之中心皆爲一正方形之中心. 求花瓶之周圍及面積.



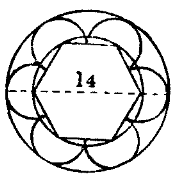
(25)　如圖, AB 長 9 丈, BC 長 5 丈, CD 長 9 丈, $\measuredangle A$ 及 $\measuredangle D$ 各爲 45^0 及 60^0. 求路中彎處之面積.



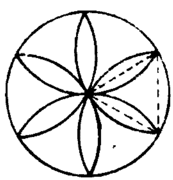
(26)　如圖,四弧之中心皆爲正方形之角頂. 大正方形每邊長 $2a$; 求曲線圖之面積. 次證 $\frown AB$, BC, CD, DA 各爲 30^0, 由此求曲線圖 $ABCD$ 之面積及周圍.



(27)　欲以一六瓣之玫瑰花窗嵌入一直徑 14 尺之圓洞中,其狀如圖中所示. 求內接六角形之半徑,六葉花式之周圍及面積.

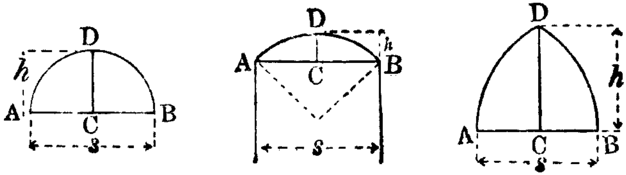


(28)　以一內接正六角形之各角頂爲中心以其外接圓半徑 a 爲



半徑,在圓內作弧. 求所成六葉花式之周圍及面積.

建築學中,穹形甚爲重要,最普通者爲半圓形,弓形,及尖形.



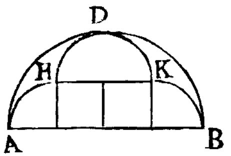
如圖,AB爲穹形之廣,CD爲高. 因穹形爲軸對稱形,故其數值計算皆甚簡易. 在以下問題中,令

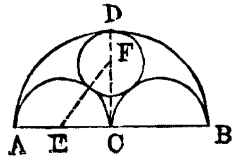
$s=$ 廣 $=AB$,　　　　$h=$ 高 $=CD$,

$p=$ 穹之周 $=\frown AD+\frown BD$,　$A=$ 穹之面積 $=p$ 及 s 所圍面積.

(29)　作一半圓穹,令 $s=a$ 求 h, p, A.

(30)　如下左圖,AB 長 $4a$, ADB, HDK 皆爲半圓, AH, KB 皆爲象限. 求各弧之長及圖中各部分之面積.

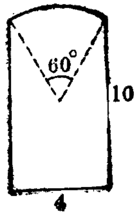




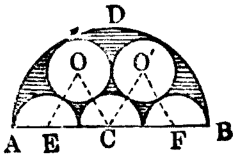
(31)　上右圖中,已知 AB 之長爲 $4a$. 求上一圓之半徑 FD,及諸圓間之面積.

〔暗示〕 FD 之長爲 x, 則

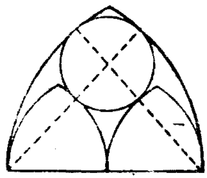
$$(a+x)^2=a^2+(2a-n)^2.$$



(32)　一門上之弓形穹張一 60^0 之中心角. 門長 10 尺,廣 4 尺. 求 h, p, A.

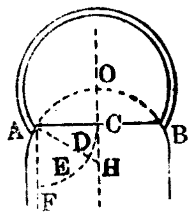


(33)　右圖中 AB 長 $6a$. O 及 O' 爲在 CE, CF 上所作正三角形之頂點. 求二圓 O, O' 之面積及諸圓周間有影部分之面積.



(34)　右圖爲一等邊俄特式穹. 若 $s=4a$, 求其面積.

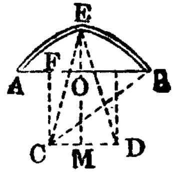
(35)　在前圖中,求夾於三個等邊俄特式穹間圓之面積.



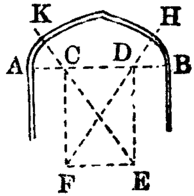
(36)　馬蹄鐵穹在摩亞建築中用之甚多,法以 $AC\left(=\frac{s}{2}\right)$ 爲半徑, A 爲中心,作一象限弧 CF, 三等分 $\frown CF$ 於 D, E, 聯 AD 延長之,交 AB 之垂直等分線於 H, 以 H 爲中心 HA 爲半徑規弧交 HC 之延線於 O. 於是 O 爲穹形之中心(半徑爲 OA). 若 $s=2a$, 求 h, p, A.

〔暗示〕 先證 $OA=HA$.

(37)　弓形尖穹之中心在其廣之下．右圖中，$CM=\frac{1}{2}OA$，C 及 D 各爲 $\frown BE$ 及 AE 之中心．若設 $s=4a$，OM 之長爲 b，求 ME 之長．

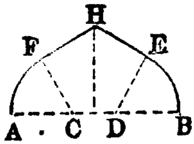


〔暗示〕　從直角三角形 CBF 可求 $CB=CE$ 之長．



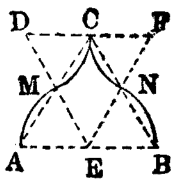
(38)　右圖爲一四心穹，其作法如下：C 及 D 爲廣 AB 之二個四等分點，在 CD 上作一矩形令 $CF=\frac{3}{4}AB$；作 FH 及 EK；以 C 及 D 爲小弧之中心，E 及 F 爲大弧之中心．

設 $s=4a$．求 EK 之長．

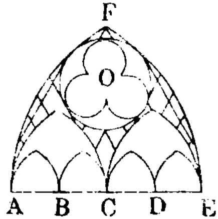


(39)　Brescia 穹之作法如右圖．分 $AB=s$ 爲 8 等分，取 AC 及 BD 皆含 3 部分，在 AC 及 BD 上各作正三角形；$\frown AF$，EB 之中心各在 C，D．從 F 及 E 作此二弧之切線，交於 H．設 $s=8a$，求 h，p，A．

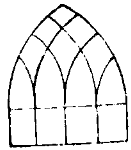
(40)　右圖表一波斯穹．$\triangle ABC$，DEF 爲合同之正三角形，$\frown MC$，NC 之中心各爲 D，F；$\frown MA$，NB 之中心皆爲 E．證此穹之面積等於 $\triangle ABC$ 之面積．



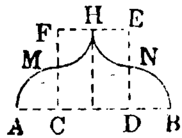
(41) 右圖爲一俄特式窗,窗中 $AB=BC=CD=DE$. 穹皆等邊,O 爲以 AD, EB 爲半徑所畫二弧之交點. 設 $AB=a$, 求圖中各部分之面積.



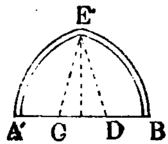
(42) 以定長 $4a$ 爲廣作右圖之窗花. 穹爲等邊,弧皆等半徑. 求大穹內各尖穹之高.



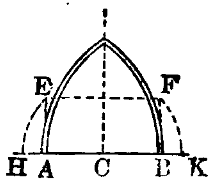
(43) 右圖爲波斯穹之彎形,四弧皆爲相等之象限. 設 $s=4a$, 證穹之面積爲 $4a^2$.



(44) 滴點穹爲半徑小於廣之二弧所成. 如右圖, AB 三等分於 C 及 D, 以 C, D 各爲中心, CB, DA 各爲半徑而畫二弧. 設 $s=6a$, 求 h.



(45) 古英國穹或名披針形穹,爲半徑大於廣之二弧所成. 如右圖, C 爲廣 AB 之中點,作正方形 CE, CF, 令 $CH=CE$, $CK=CF$, 以 H, K 爲中心 HB, KA 各爲半徑可作二弧,設 $AB=2a$; 求 h.



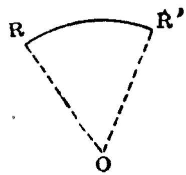
(46) 假定地球之直徑爲 8000 哩,地球自轉一周之時間爲 23 時 56 分,則地球自轉 P 周時,在北緯 45^0 之一點共

轉過若干哩?

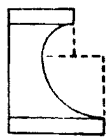
(47) 一直徑爲2寸之水管可供給一屋中所需水之半. 今欲易一水管能足供此屋中所需之水,則水管之直徑當爲幾寸?

(48) 有三個水管,假定除大小不同外其餘情形一切皆同,已知其中二管之直徑各爲8寸及6寸;欲第三水管供給之水量等於前二水管所供水量之和,則此第三水管之直徑當若何?

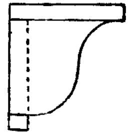
(49) 以一50尺長之鐵條RR',彎之作一車軌. 已知曲軌之半徑長360尺,求此鐵條彎曲之度數 (求$\measuredangle ROR'$)



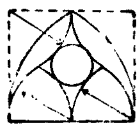
(50) 一長55尺之鐵軌,其彎曲之度數爲$17°30'$. 求曲軌之半徑.



(51) 右圖爲一凹剜形,其曲線爲內切之二個象限弧所成,此二弧之半徑各長1寸及2寸,求此曲線之長.

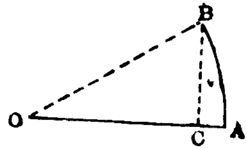


(52) 右圖中剜形之曲線,由二個等半徑之外切象限弧所成. 已知其半徑爲a,求曲線之長.



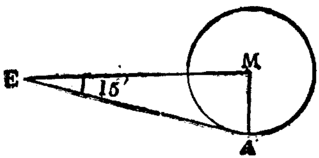
(53) 右一窗花之圖,其中諸穹爲等邊. 設其外穹底廣爲$2a$,求其內接圓之半徑.

(54) O 爲 $\frown AB$ 之中心,

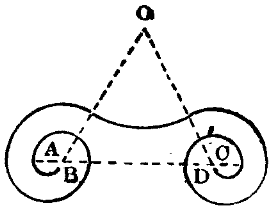


$BC \perp OA$, $\measuredangle O$ 甚小則 AB 及 BC 之差必甚小,故在如此情形中欲求 BC 之值,可以 $\frown AB$ 之長代之. 若 $\measuredangle O=4^0$, 則此法所生錯誤爲結果之 $\frac{1}{2000}$, 角愈小則誤亦愈小. 若 BC 爲立於水平面 OA 上之一塔, BO 長2000尺, $\measuredangle O=2^0$, 求塔之高.

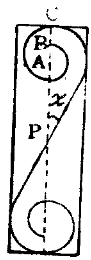
(55) 月之視直徑,爲月在吾人眼中所張之一角,今已知地球與月之距離爲243000哩,月之視直徑爲30′; 求月之半徑.



(56) 右圖中之旋渦形從二螺線及一聯弧所成,螺線有二個中心,續繼用之;聯弧之中心 O 爲正三角形 BOD 之頂點. 若 AB 長5公釐, BD 長7公分,求此旋渦曲線之長.



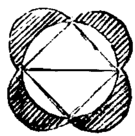
(57) 一欄杆,以直鐵條作成諸矩形部分,在每一部分中作一如圖之鐵旋渦形.矩形高36吋,廣12吋,其旋渦形之作法:最小半圓之中心爲 A, 半徑 AB 長3吋; AB



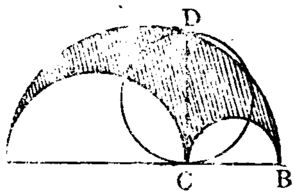
之中點O爲第二半圓之中心,此圓之半徑長$4\frac{1}{2}$吋;再以A爲中心AC爲半徑作弧,從矩形之中心P引此弧之切線.設AP長12吋,求從P所引切線與PA所成之角.

又如此20個矩形中旋渦形之鐵條共長幾何?

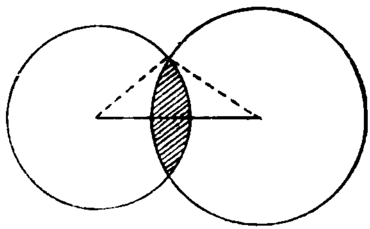
(58)　以圓內接正方形各邊爲直徑作諸半圓,則此四個半圓周與原圓周所成四個新月形之面積和等於原圓之面積.



(59)　AB爲一半圓之直徑,從此半圓周上任意一點D至AB引垂線DC;以AC,CB各爲直徑畫半圓,CD爲直徑畫全圓,則三個半圓周間所圍之面積等於一個全圓之面積.



(60)　二馬各繫一樹,二樹相距一丈四尺,繫馬之繩一長八尺,一長一丈,則此二馬能公共食草地面之面積幾何?



附 錄 一

雜 題

(1) 二個四角形中之三邊各順次相等,而其諸角亦各順次相等,則此二形為合同圖.

(2) 從正三角形各角頂起順次在各邊上截取等長,而聯其三個截點,則亦得一正三角形.

(3) 在$\triangle ABC$邊AB或延線上截取AD等於AC,又在邊AC或延線上截取AE等於AB;聯DE,與BC交於點F;則AF等分$\measuredangle BAC$.

(4) 四角形中一雙對邊平行而他一雙對邊相等;則其各雙對角或相等,或互為補角.

(5) 四角形關於其各對角線為對稱,則此形為菱形.

(6) 二個三角形中二雙邊及一雙對應中線各相等;則此兩形為全等形.

(7) 在$\triangle ABC$三邊BC, CA, AB上各向外作正三角形$A'BC, B'CA, C'AB$;則$AA'=BB'=CC'$.

(8) $\triangle ABC$ $\measuredangle B$之外二等分線與邊AC之延線交於D;則$\measuredangle ADB=A\sim C$.

(9) $\triangle ABC$中BE, CD為二中線;平行於BE引DF,平行於AB引EF,二線會於F;聯CF;則$\triangle CDF$之三邊各等於

$\triangle ABC$之三中線.

(10) 四角形中四個角之二等分線共點,則其一雙對邊之和等於他一雙對邊之和.

(11) 在凸四角形中:〔I〕二隣角等分線之交角等於他二角之半和;〔II〕二對角等分線之交角等於他二角之半差.

(12) 順次聯矩形或二等邊梯形四邊之中點,可成一菱形.

(13) 夾於矩形任意二邊間之線分恆比對角線小.

(14) 四角形二雙對邊中點之聯線與二對角線中點之聯線共點.

(15) 平行四邊形 $ABCD$ 周圍爲定長,角頂 A 之位置一定,一雙隣邊 AB, AD 之方向亦一定. 求角頂 C 之軌跡.

(16) 同底等高諸三角形中,以二等邊三角形之周圍爲最小.

(17) 設不平行亦不相交之二定線分,不許延長至相交. 求作一直線,通過前二線之交點,且二等分其交角.

(18) 作一正方形,令與一所設正方形合同而內接於又一所設正方形.

(19) 在一矩形之彈子臺上有彈子二枚. 欲打其一枚令與臺之四邊擊撞而至他一球之位置. 求打第一彈

子時所取之方向.

(20) 設奇邊數凸多角形各邊中點之位置. 作此多角形.

(21) 作一直線令通過一定點及二定直線之交點. 但作圖時不許用此交點.

(22) 從直線外一點 A 至此直線引垂線 AB 及斜線 $AC, AD, AE, \cdots\cdots$, 令此諸斜線皆在垂線之同旁,而

$$\measuredangle BAC = CAD = DAE = \cdots\cdots;$$

則

$$BC < CD < DE < \cdots\cdots.$$

(23) 不許用規而僅用矩等分一所設角.

(24) 用矩及三角板求一線分之中點.

(25) 若過一圖中一點所引任意直線恆爲此圖之對稱軸;則此圖爲一圓.

(26) AB 爲 $\odot C$ 之一弦;從圓周上任意一點 D 至 AB 引垂線 DE, 則 $\measuredangle ADE = BDC$.

(27) 以菱形之各邊爲直徑所畫之四圓共點.

(28) 圓內接四邊形一雙對邊相等,則他一雙對邊平行.

(29) E 爲 $\triangle ABC$ 之垂心, BD 爲其外接圓之直徑;則 AC, DE 互相二等分.

(30) P 爲 $\frown APB$ 上之任意點;延長 AP, 在其上截取

PQ 令其等於 PB; 則 Q 點之軌跡為一圓弧.

(31)　從一點至四個所設直線所引垂線之足皆在同一直線上.求此點之位置.

(32)　四點中任意一點皆為以他三點作角頂所成三角形之垂心;則過此四點中任意三點之圓周皆相等.

(33)　在一三角形三邊上各向形外作正三角形;則此三個正三角形之外接圓共點.

(34)　$\triangle ABC$ 中 $\measuredangle A$ 為直角; $AD\perp BC$, $DE\perp AB$, $DF\perp AC$, 則 B, E, F, C 四點共圓.

(35)　二個大小一定之等圓恆相切,且各切於直交二直線之一而運動;求前二圓切點之軌跡.

(36)　AB 為 $\odot C$ 內之一定弦, PQ 為同圓內長短一定而位置不定之弦; AP, BQ 之交點為 R; 則 R 點之軌跡為一圓周.

(37)　以直角三角形一直角邊為直徑畫圓,得其與斜邊之一交點;從此交點所引圓之切線等分又一直角邊.

(38)　二等邊三角形二個相等旁接圓之半徑等於從其頂點至底所引之垂線.

(39)　正多角形之邊數若為偶數,則有對稱中心;若為奇數,則無對稱中心.

(40)　O 為在定角 BAC 內之一定點;過 O 作線分 BOC

令 $BO=2.CO$.

(41) O 爲在定角 BAC 外之一定點;過 O 作線分 OBC,令 $OB=2.BC$.

(42) 有三個射線之一線束. 作一直線,令其在三個射線間之二個部分相等.

(43) 設二平行線及其間之一點;在二線上各求一點令與所設點成一二等邊直角三角形之角頂而以所設點爲直角頂點.

(44) 在一正方形內作一正三角形: 〔I〕令三角形一角頂在正方形一邊之中點; 〔II〕令三角形一角頂合於正方形之一角頂.

(45) 作一線分,令其兩端及二個三等分點各在二個所設相切相等之圓周上.

(46) 過二圓交點之一引一線分,令其兩端各在一圓周上而爲最長.

(47) 設一圓周;不求其中心而作其周上一點之切線.

(48) 設三點;過其一點作一直線,令從他二點至此線之距離相等,

(49) A, B, C, A', B', C', 順次爲在同圓周上之諸點, 而弦 AB, AC' 各與 $A'B', A'C$ 平行; 則 BC 平行於 $B'C'$.

(50) 一直線與圓內接四角形之一雙對邊成等角,則

與他一雙對邊亦成等角.

(51) 圓內接四角形二雙對邊夾角之等分線互相垂直.

(52) ABC 爲正三角形, P 爲形外一點而 $PA=PB+PC$; 則 P 在三角形外接圓之劣弧 BC 上.

(53) M 爲 $\frown BC$ 之中點;引二弦 MA, MD, 各與弦 BC 交於 E, F; 則四點 A, D, F, E 共圓.

(54) $ABCD$ 爲圓內接四角形;則以四個三角形 ABC, BCD, CDA, DAB 垂心作角頂之四角形與原四角形合同.

(55) 過圓內接四角形二對角線交點引一直線垂直於一雙對邊交角之等分線;則此所引之線等分二對角線之交角.

(56) 三角形底邊之位置及大小皆一定,他二邊之差亦一定;則從底邊兩端至頂角內等分線所引垂線足之軌跡爲一圓周.

(57) 三角形底邊之位置及大小皆一定,他二邊之和亦一定;求從底邊兩端至頂角外等分線所引垂線足之軌跡.

(58) 過二圓周之交點 A 引二割線 MN, $M'N'$, 與二圓周交於 M, M', N, N', 則 MM' 及 NN' 交角之大小一定.

又不問割線 MAN 之位置若何,在 M 及 N 引各圓之切線,

則此二切線交角之大小一定。

(59) 三角形底邊之大小及位置皆一定,從底之一端至對邊所引中線之長亦一定;求頂點之軌跡.

(60) 設一弓形:作其內接圓.

(61) 過定點作一直線,令截一定角之二邊使所成三角形之周圍等於所設長.

(62) 在所設弓形弧上求一點,令從此點至弦兩端距離之和或差等於一定長之線分.

(63) 在三角形內求一點,令三邊在此點所張之角相等. 又討論其特例,

(64) 以所設圓外一定點爲中心作又一圓,令其與所設圓之公共弦等於一所設之長.

(65) 作一圓周,令其與四個定點之距離相等.

(66) 作一正三角形,令其三個角頂各在三個所設平行直線之一上。

(67) 在一定直線上求一點,令從此點至二定圓所引之切線與此定直線成等角.

(68) 在所設弓形弧上求一點,令從此點至弓形弦兩端距離之和爲最大.

(69) 設一四角形,作其外接正方形.

(70) 在定角 BAC 二邊上各取點 B 及 C, 令 AB 及 AC

之和或差爲定長,則$\triangle ABC$外心之軌跡爲一直線.

(71)　作一三角形令合於如下之所設條件:

〔I〕　設三垂線之足;

〔II〕　設一角,及從此角頂至對邊之中線及垂線;

〔III〕　設底邊,二邊之和或差,及內接圓半徑.

(72)　在定角之一邊上有一定點A;在他一邊上求二點B, C,令BC等於定長,且$\angle BAC$爲直角.

(73)　作一線分,令其兩端止於二個定圓周上,且有一定之方向.

(74)　設一定直線XY及其同旁之二點A, B;在此線上求一點C,令$\angle ACX=2.BCY$.

(75)　以所設線分內分爲二分,此二分所包矩形以二分相等時爲最大.

(76)　以所設線分內分爲二分,此二分上正方形之和以二分相等時爲最小.

(77)　四角形二對角線上正方形之和等於聯其二雙對邊中點所得線分上正方形和之二倍.

(78)　從三角形重心至各角頂距離上正方形和之三倍等於三邊上正方形之和.

(79)　P爲$\triangle ABC$邊BC上之點,而$CP=2.BP$;則

$$2.\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=6.\overline{BP}^2+3.\overline{AP}^2$$

(80)　G 爲 $\triangle ABC$ 之重心，P 爲其平面中之任意一點；則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3.\overline{PG}^2$.

(81)　同底等高二個三角形居底之同旁，則底邊之平行線介於各三角形二邊間之部分等長.

(82)　O 爲 $\odot C$ 外之一點，OA, OB 爲從 O 至圓所引之二切線，D 爲弦 AB 之中點；過 D 引任意弦 PDQ，則 OC 等分 $\measuredangle POQ$.

(83)　在前題中若過 O 引弦 ORS，則 AB 等分 $\measuredangle RDS$.

(84)　從 $\triangle ABC$ 各角頂至對邊各引線分 AP, BQ, CR，若此三線分共有一點 H，而 $AH.HP=BH.HQ=CH.HR$，則 H 爲 $\triangle ABC$ 之垂心.

(85)　以一所設線分內分或外分爲兩分，令其二分所包矩形等於所設正方形，則此所設正方形之大小有若何之限制？

(86)　內分或外分一所設線分，令其二分上正方形之差等於一所設正方形.

(87)　在一所設直線上求一點，令從此點至二個所設點距離上正方形之和爲最小.

(88)　二個三角形有同一底邊，且居此底邊之同旁；則聯此兩形他二邊之中點時可得一平行四邊形；而此四邊形之面積等於兩三角形面積之半差.

(89)　四角形 $ABCD$ 二雙對邊之交點爲 P, Q, 二對角線 AC, BD 之中點爲 G, H, 則 $\triangle PGH = QGH = \frac{1}{4}$ 四角形 $ABCD$.

(90)　完全四邊形三個對角線之中點共線.（應用前題之結果證之）

(91)　過所設角內一定點作直線,令與角之二邊所成三角形之面積爲最小.

(92)　同底等積諸三角形中以二等邊三角形之面積爲最小.

(93)　四角形四邊上正方形之和等於其二對角線上正方形之和加二對角線中點聯線上正方形之四倍.

(94)　A, B, C, D 四點共線,則

$$AB.CD + BC.AD = AC.BD.$$

(95)　$\triangle ABC$ 中若 $\measuredangle C = 60°$, 則 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - AC.BC$. 又若 $\measuredangle C = 120°$ 則若何?

(96)　諸等積之平行四邊形中以正方形之周圍爲最小.

(97)　諸等角等周之平行四邊形中以菱形之面積爲最大.

(98)　四角形之一對角線若不能等分他一對角線;則決不能在形內求得一點,從此點至四個角頂之聯線可分四角形爲四個等積三角形.

(99) AB爲圓之直徑，CD 爲與此平行之弦，P 爲 AB 中之一點，則 $\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$.

(100) DE 爲平行於直角三角形 ABC 斜邊 BC 而介於二直角邊間之線分，則 $\overline{CD}^2+\overline{BE}^2=\overline{DE}^2+\overline{BC}^2$.

(101) 一變動之矩形，一角頂之位置一定，與此相隣之二角頂沿一定圓周運動；求其第四角頂之軌跡.

(102) $ABCD$ 爲矩形，O 爲 $\triangle ABC$ 之內心；從 O 至 AD, DC 引垂線 OE, OF，則 $\square OEDF=\frac{1}{2}\square ABCD$.

(103) 作三角形，令適合下設之條件：

〔I〕 設頂角，對其一邊之中線，及面積；

〔II〕 設面積，內接圓半徑，及一個旁接圓半徑.

(104) 從一動點至三個定點距離上正方形之和一定，求此動點之軌跡.

(105) 二等邊梯形中二底邊所包矩形與一邊上正方形之和等於對角線上之正方形.

(106) 在比例 $a:b=c:d$ 中，a 爲最大量，則 $a+d>b+c$.

(107) $A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$，則

$$A:B=mA+nC+pE+\cdots\cdots:mB+nD+pF+\cdots\cdots.$$

(108) $A:B>P:Q$，則 $A+B:B>P+Q:Q$.

(109) $A:C=P:R$, $B:C=Q:R$，則 $A+B:C=P+Q:R$.

(110) 過 $\triangle ABC$ 內一點 O 引直線 AO, BO, CO，各與對邊

交於X, Y, Z,則　$\triangle AOB : AOC = BX : CX$

(111)　AB為半圓之直徑,C為中心,N為CB上之任意點;延長AB至T,令　$CT : AC = AC : CN$;
從T引半圓之切線切半圓周於P,則$\measuredangle CNP = R_\measuredangle$。

(112)　直線DEF與$\triangle ABC$邊BC, CA, AB各交於D, E, F而與AB及AC所成之角相等,則$BD : CD = BF : CE$.

(113)　D為$\triangle ABC$邊AC上之點,E為邊AB上之點;BD, CE之交點以比$4:1$分此各線分;則D, E各以比$3:1$分邊CA, AB.

(114)　AD為$\triangle ABC$中$\measuredangle A$之等分線,交邊BC於D;DE, DF各為$\measuredangle ADB, ADC$之等分線,各交AB, AC於E, F;則

$$\triangle BEF : CEF = BA : AC.$$

(115)　圓內接六邊形三雙對邊延長線之交點共線。
(用圓之關係證之)

(116)　一三角形外接圓直徑及其內接圓半徑所包矩形等於過內圓中心之外圓弦為內心所分二分之矩形。

(117)　從$\odot C$外一點P引圓之切線PT及割線PAB, A及B皆在圓周上;又從P向任意方向引線分PQ,令$PQ = PT$; QA及QB各與$\odot C$再交於R及S,則$RS \parallel PQ$.

(118)　ABC為正三角形,P為其外接圓劣弧BC上之任意點,則　$\overline{PA}^2 = PB.PC + \overline{BC}^2$.

(119) ABC爲銳角三角形;以邊BC爲直徑畫圓,在AB上取AD,令AD之長等於從A至圓所引之切線,從D引AB之垂線,與AC之延長線交於E;則$\triangle ADE=ABC$。

(120) 在$\triangle ABC$邊BC, CA, AB上各取點D, E, F,令

$$BD:DC=CE:EA=AF:FB=1:2;$$

求$\triangle ABC:DEF$之比值。

(121) 從一動點至二等邊三角形二等邊所引垂線之矩形等於從此動點至底邊所引垂線上之正方形. 求此動點之軌跡。

(122) 從圓周上一點至其內接四角形各邊引垂線,則至各雙對邊之二垂線所包矩形相等。

又此題之倒定理亦成立。

(123) 從圓周上二個所設點引一雙平行弦,令其長之比等於所設比。

(124) 設三個射線之一線束;作一直線,令其爲三射線所截二線分之長各等於所設長。

(125) A, B, C, D爲共線點,此線與他一線XY交於O,而$AX//BY, XC//YD$; 取一長OE,令其上之正方形等於矩形$OA.OD$;以O爲中心OE爲半徑畫圓,在其周上取任意點P,則 $\angle APB=CPD$。

(126) X, Y, Z爲$\triangle ABC$邊BC, CA, AB上之點,而AX

BY, CZ 爲共點,且 YZ 遇 BC 於 X',則 $\{BC, XX'\}$ 爲調和點列.

(127) 若 A', B', C', 各位於 $\triangle ABC$ 邊 BC, CA, AB 上,而 AA', BB', 及 CC' 爲共點;且 A'' 爲 A' 關於 B, C 之調和相屬點 B'' 爲 B' 關於 C, A 之調和相屬點, C'' 爲 C' 關於 A, B 之調和相屬點,(卽 B, A', C, A''; C, B', A, B''; A, C', B, C'' 皆爲調和點列)則 A'', B'', C'' 爲共線.

(128) 三角形各角之外等分線與對邊之交點共線.

(129) 二個三角形 $ABC, A'B'C'$ 中,三雙對應角頂之聯線 AA', BB', CC' 共點;則三雙對應邊之交點 P, Q, R 共線.

(130) 二個三角形 $ABC, A'B'C'$ 中三雙對應邊之交點 P, Q, R 共線,則三雙對應角頂之聯線 AA', BB', CC', 共點.

(131) OA, OB 爲 $\odot C$ 之二切線, OPQ 爲任意割線,此割線與圓周交於 P 及 Q, 與弦 AB 交於 R; OC 與 AB 交於 N, 則 NR 等分 $\measuredangle PNQ$; 由此,線分 PQ 爲二點 O 及 R 分於調和.

(132) 圓之直徑爲任意切線及過切點之垂線分於調和.

(133) 從 $\odot C$ 外一點 O 引一圓之任意割線 OPQ, 關於 OC 取 Q 之對稱點 Q'; 聯 PQ', 此線與 OC 交於 D; OC 與圓周交於 A; 則 O, A, D, C 爲調和點列.

(134) 三角形底邊及頂角之大小皆一定,則從二底角頂至對邊所引垂線足之距離不變.

(135) 從定圓周上一定點作互相垂直之二弦,令其和等於所設長.

(136) 圓內接諸矩形中何者爲最大?

(137) 設三角形之底邊,高及他二邊之和;作此三角形.

(138) 過相交二圓公共弦上一點 C 引一直線 $ABCDE$, 與一圓周交於 A, D, 與他一圓周交於 B, E, 則

$$AB : BC = ED : DC.$$

(139) 一直角二等邊三角形與一正三角形等積,則其底邊之比若何?

(140) 在 $\triangle ABC$ 中邊 $AC > BC$; 從 A 及 B 至對邊引垂線 AD, BE, 則 $$AC + BE > BC + AD.$$

(141) 在直角三角形 ABC 中,直角邊 $AB > AC$; 在斜邊 BC 上截取 BD, 令 $BD = BA$; 從 D 引等分此三角形面積之直線與 AB 交於 E, 則 $BE = DE = \frac{1}{2}BC$.

(142) 從直角三角形 ABC 斜邊 BC 之中點 D 引垂線,與他二邊各交於 E 及 F, 則 $\overline{AD}^2 = DE.DF$.

(143) 延長平行四邊形 $ABCD$ 之一邊 BC 至 Q; 聯 AQ, 與對角線 BD 交於 E, 與邊 CD 交於 P, 則 $\overline{AE}^2 = PE.EQ$.

(144) 從圓周上一點 P 引弦 PA, PB, PC; 更引一直線,令與 P 點之切線平行而與前三線交於 H, K, L, 則

$$PA.PH = PB.PK = PC.PL.$$

(145)　內分線分 AB 於 C,令 $CA:CB=m:n$,過 A,B,C 引平行線 AA',CC',BB',各與不交 AB 之一直線會於 A',B',C',則

$$(m+n)CC'=mBB'+nAA'.$$

又 $A'B'C'$ 與 AB 交則若何?

(146)　二定圓在一動點恆張相等之角;求此動點之軌跡.

(147)　作一三角形,令與一所設三角形相似而外接於他一所設三角形,且其面積爲最大.

(148)　二定點 A,B 在定直線之同旁,AB 之延線與定直線交於 O;　在定直線上於 C 之兩旁各求一點,令線分 AB 在此點張最大之角.

(149)　二定點 A,B 在定圓 C 之外;在此圓周上求二點,令線分 AB 於此二點各張一最大角及最小角.

(150)　在定直線中求二點,令從此所求點至線外二定點距離之和或差等於所設線分之長.

(151)　線分 DE 平行於 $\triangle ABC$ 之底邊 BC 而介於他二邊之間;BE,CD 交於 F;AF 與 DE,BC 各交於 H,K,則 A,H,F,K 爲調和點列.

(152)　在一直線外有一點 A,而在線之又一旁有一平行線,其上有一點 B;今從 A 作一直線,令與二平行線各交於 M,N,而 $BM=CN$.

(153) 從$\triangle ABC$各角頂至對邊引共點三線AA', BB', CC', 則$(BA':A'C)(CB':B'A)(AC':C'B)=1$. (Ceva氏定理)

(154) 證前題之倒定理.

(155) $\triangle ABC$內接圓與邊BC, CA, AB各切於X, Y, Z, 則AX, BY, CZ共點.

(156) 內分線分AB於C, D, 令$AC:CD=CD:DB=$所設比$m:n$.

(157) 從$\triangle ABC$各角頂至對邊引共點三線AA', BB', CC', 其所共之點為O, 則

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1.$$

又O在形外,則題當若何變更?

(158) $\triangle ABC$之外接圓及內接圓半徑各為R, r, 內心為I, AI交外接圓於E, 則 $AI.IE=2Rr$.

(159) 作一直線,令與所設梯形之二底平行而分之為二個相似梯形.

(160) 作一直線,令與所設梯形之二底平行而等分其面積.

(161) 作一直線,令與所設三角形之底平行而以其面積分成所設比.

(162) 過所設三角形外一所設點作一直線,等分此三

角形之面積.

(163)　作一正方形,令其四邊各通過共線四點之一.

(164)　圓外接等邊多角形之邊數爲奇數者必爲正多角形.

(165)　圓內接等角多角形之邊數爲奇數者必爲正多角形.

(166)　圓外接等角多角形必爲正多角形.

(167)　半圓內接正方形與全圓內接正方形面積之比如 2:5.

(168)　三角形中二角之內等分線相等,則此形爲二等邊三角形.

(169)　圓內接正十角形一邊上正方形與半徑上正方形之和等於此圓內接正五邊形一邊上正方形.(證時須用圖形之關係,不許用長短之數值.)

(170)　AOB, COD 爲一圓之二弦,相交於 O. 在 A 及 D 之二切線會於 P, 在 B 及 C 之二切線會於 Q, 則 P, O, Q 爲共線

附　錄　二

三　角　函　數　表

角	sin	cos	tan	角	sin	cos	tan
1°	·017	·9998	·017	46°	·719	·695	1·036
2°	·035	·9994	·035	47°	·731	·682	1·072
3°	·052	·9986	·052	48°	·743	·669	1·111
4°	·070	·9976	·070	49°	·755	·656	1·150
5°	·087	·996	·087	50°	·766	·643	1·192
6°	·105	·995	·105	51°	·777	·629	1·235
7°	·122	·893	·123	52°	·788	·616	1·280
8°	·135	·990	·141	53°	·799	·602	1·327
9°	·156	·988	·158	54°	·809	·588	1·376
10°	·174	·985	·176	55°	·819	·574	1·428
11°	·191	·982	·194	56°	·829	·559	1·483
12°	·208	·978	·213	57°	·839	·545	1·540
13°	·228	·974	·231	58°	·848	·530	1·600
14°	·242	·970	·249	59°	·857	·515	1·664
15°	·259	·966	·268	60°	·866	·500	1·732
16°	·276	·961	·287	61°	·875	·485	1·804
17°	·292	·956	·306	62°	·883	·469	1·881
18°	·309	·951	·325	63°	·891	·454	1·903
19°	·326	·946	·344	64°	·899	·438	2·050
20°	·342	·940	·364	65°	·906	·423	2·144
21°	·358	·934	·384	66°	·914	·407	2·246
22°	·375	·927	·404	67°	·921	·391	2·356
23°	·391	·921	·424	68°	·927	·375	2·475
24°	·407	·914	·445	69°	·934	·358	2·605
25°	·423	·906	·466	70°	·940	·342	2·747
26°	·438	·899	·488	71°	·946	·526	2·904
27°	·454	·891	·510	72°	·951	·309	3·078
28°	·469	·883	·532	73°	·956	·292	3·271
29°	·485	·875	·554	74°	·961	·276	3·487
30°	·500	·866	·577	75°	·966	·259	3·732
31°	·515	·857	·601	76°	·970	·242	4·011
32°	·530	·848	·625	77°	·974	·225	4·331
33°	·545	·839	·649	78°	·978	·208	4·705
34°	·559	·829	·675	79°	·982	·191	5·145
35°	·574	·819	·700	80°	·985	·174	5·671
36°	·588	·809	·727	81°	·988	·156	6·314
37°	·602	·799	·754	82°	·990	·139	7·115
38°	·616	·788	·781	83°	·993	·122	8·144
39°	·629	·777	·810	84°	·995	·105	9·514
40°	·643	·766	·839	85°	·996	·087	11·43
41°	·656	·755	·889	86°	·9976	·070	14·30
42°	·669	·743	·900	87°	·9986	·052	19·08
43°	·682	·731	·933	88°	·9994	·035	28·64
44°	·695	·719	·966	89°	·9998	·017	57·29
45°	·707	·707	1·000	90°	1·0000	·000	——

附 錄 三

希 臘 字 母

希臘字母及讀音					
Α	α	Alpha	Ν	ν	Nu
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	τ	Gamma	Ο	ο	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ε	Epsilon	Ρ	ρ	Rho
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ,ς	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
Ι	ι	Jota	Φ	φ	Phi
Κ	κ	Kappa	Χ	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	Mu	Ω	ω	Omega

能精此書者無一書不可精
好學此書者無一事不可學

明徐光啓