遵照部頒課程標準編著
高級工業職業學校

材料強弱學

編著者　楊德隅

正中書局印行

中華民國二十八年十二月初版
中華民國三十七年六月滬二版

高級工業職業學校材料强弱學

全一冊 定價國幣八角
(外埠酌加運費滙費)

編著者 楊德隅
發行人 蔣志澄
印刷所 正中書局
發行所 正中書局
(1152)

本(本)(勁) 3/5

目　次

第一章

緒論

1. 定義 材料強弱學爲力學之一部,所討論者爲彈性體之**應力**(Stress)及**形變**(Deformations),設計各種建築物及機械時須應用此種學問。

自外作用於物體之力,謂之**外力**(External Force).例如對於建築物而言,則風力,水壓力,及荷重等均爲外力.物體受外力之作用,由該物體分子之傳達,因得平衡.此分子間所生之抵抗力,謂之**內力**或**應力**(Internal Force or Stress).

任何建築物或機械上,必受有外力之作用.此作用之外力,必須與其內力平衡,始不至有破壞之虞,換言之,其內部必須有相當之抵抗力,故選定材料時,對於其大小及形狀,須有一定.

2. 擔負(Load) 作用於物體的外力之和,謂之**擔負**.例如(1)負重,如起重機所舉之重;(2)重量甚大之物,速度改變時所生之力,如原動機(Prime Movers)之活

塞;(3)離心力,如轉動之飛輪;(4)摩擦力;(5)由溫度之改變而生之不等膨脹或收縮力.凡此種種,均爲擔負.

擔負可分爲兩類.如懸吊之重或材料自身之重,以及漸漸所加之外力等,謂之**本有擔負**(Dead Load).反之如急劇所加之外力,謂之**活擔負**(Live Load).

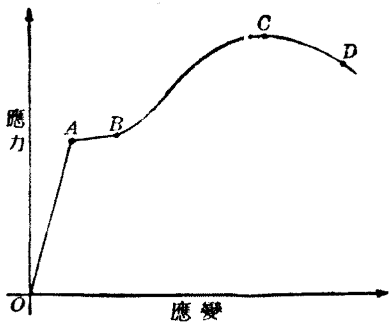
3. 彈性(Elasticity) 任何物體受外力之作用,則其分子間之相互地位,必有變動,由是而整個物體,發生形變.形變之大小,與材料之性質大小及受力點之不同而異.當外力停止作用時,則物體所生之形變,亦可有一部份還原.此種性質,謂之**彈性**.宇宙間之物體,無絕對彈性體;故物體受外力後所生之形變,無完全還原之可能.惟所加之外力,在其限度之內,適可使此物之形變,能完全還原時,則此限度謂之**彈性限度**(Elastic Limit).若作用之外力,大於彈性限度,則物體不能還原部份之形變,謂之**永久形變**(Permanent Deformation).

物體之形變亦謂之**應變**(Strain).

4. 應力與應變 設將一材料之應力及應變,作圖以示其關係,如第1圖.此圖形可分爲數部.OA部成直線,其關係謂之**虎克定律**(Hooke's Law):即應力

與應變成正比例.A點爲彈性限度.

過A點之後,卽不增加擔負(不增加應力)而此材料卽留有永久形變,其量與時間成正比,由B至C,應變之增加,較速於應力之增加.過C點後,應力雖減少而應變仍繼續增加,終至D點而此材料破裂.C點謂之**屈服點**(Yield Point).



第1圖

5. **極限應力**(Ultimate Stress)**及安全因數**(Factor of Safety) 由第一圖觀之,C點之應力爲最大,此應力謂之**極限應力**.使用材料時,使其不發生永久形變,則**資用應力**(Working Stress)須在材料之彈性限度之內.在彈性限度內之資用應力,謂之**可容應力**(Allowable Stress)或**安全資用應力**.生此應力之擔負,謂之**可容擔負**(Allowable Load)或**安全擔負**.

極限應力與資用應力之比,謂之**安全因數**.安全因數,在設計上頗爲重要.例如材料之性質不均勻時,或因週圍狀況易於變質時,或有過量擔負(Overload)

時,則安全因數之值須大,始可使材料能經久而不易破裂.

簡單之應力爲**張應力**(Tensile Stress),**壓縮應力**(Compressive Stress)與**切應力**(Shearing Stress)等數種,當詳述於以後各章.

6. 彈性疲乏(Elastic Fatigue) 材料若受外力作用之時間較長,則其彈性減低.此種情形,謂之材料之**彈性疲乏**.換言之卽去所加之外力,此材料不能回復原形,故彈性疲乏較大之材料,不宜於作支架基礎及其他受有長時間作用外力之用.

7. 物質之機械性質 物體受外力之作用,發生形變,此種變化,謂之**機械的變化**.關於此種變化之性質,謂之**物質之機械性質**.

物質之機械性質之最著者爲**彈性**,**受範性**(Plasticity),**延性**(Ductility)及**脆性**(Brittleness)數種.

彈性爲物質回復原來形狀之性質,祇須所受之外力在彈性限度之內.受範性爲物質絕無回復原來形狀之性質,卽受小許外力作用,亦留有永久形變.此兩種性質,不過爲其彈性限度大小之區別而已,因宇宙內之物體,固無絕對爲彈性者,亦無絕對爲受範性

者也.

物質受張力作用,長度增加而粗度減小或展成板狀,此種性質謂之延性.缺少延性之物質,謂之脆性.如金、銅等富有延性;如玻璃則富脆性.

工程上所用之材料,可約分爲二類,即金屬材料及非金屬材料是.同屬於一類中之物質,均各有其特性,故施用之途,各有不同,學者可參閱工程材料學.

第二章

簡單應力及應變

8. 單位應力及單位應變 設有一棒受一外力P之作用.設P之方向爲沿此棒之軸方向,取垂直於軸之任意一截面,則此截面單位應力,即爲此外力與截面面積之商.以A爲截面之面積,P爲外力,S爲單位應力,則得

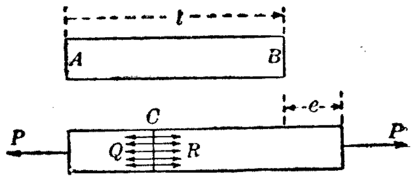
$$S=\frac{P}{A}.$$

在實際上爲方便起見,卽簡稱單位應力爲應力.

此棒受外力P之作用後,其每單位長度所生之形變,謂之單位應變,簡稱應變,以l爲棒長,e爲其長度之伸長(Elongation)或收縮(Contraction),δ爲單位應變,則得

$$\delta=\frac{e}{l}.$$

9. 張力及壓力之應力　第2圖爲長l之棒AB，受張力P，P之作用，則得其伸長爲e．任意取棒上一點C之截面其面積爲A，則



第2圖

內力Q爲平衡B端之力P，R爲平衡A端之力P．此內力平均分配於截面積A上，其作用爲阻止此棒上C點之引伸，故爲**張應力**．若反P，P之方向則R，Q之方向亦反．此時棒AB收縮e．R，Q分配於截面積上，謂之**壓縮應力**．

10. 彈性係數(Modulus of Elasticity)　由虎克定律，應力與應變成正比例，故此律可以下式表之．卽

$$S=E\delta,$$

或

$$\frac{P}{A}=E\frac{e}{l}.$$

上式中之比例常數E，謂之**彈性係數**，或**楊氏係數**(Young's Modulus)．各種材料，其E值均不等．

11 兩種材料拼成一棒之應力　設一棒由兩種彈性係數不同之材料所拼合而成，則當其受張力或壓力作用時棒上任意一點截面之應力，不能以外力

與其截面積之商表之.惟使此棒不破裂,則每種材料之應變,務須相等.

以 δ_1 表 δ_2 表應變, A_1, A_2 表截面上各材料之面積, S_1 及 S_2 表應力, E_1 及 E_2 表彈性係數.則因 $\delta_1=\delta_2$, 及由 $\delta=\frac{S}{E}$,故可得

$$\frac{S_1}{E_1}=\frac{S_2}{E_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

棒所受之總擔負 P 為

$$P=S_1A_1+S_2A_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

由(1)式,得

$$S_2=\frac{E_2}{E_1}S_1=nS_1,$$

代入(2)式,則

$$P=S_1A_1+nS_1A_2=S_1(A_1+nA_2).$$

上式之 nA_2,謂之**面積當量**(Area Equivalent).即第二種材料之截面積,以 n 倍之,則可使其應力,與第一種材料相等.

〔例題〕 厚 $\frac{1}{2}$ 吋,寬 2 吋之生鐵棒,拼置於兩條厚各 0.375 吋,寬 2 吋之鋼棒內.今以張力 20,000 磅加於此拼合之棒,求每種材料之應力及應變.

〔解〕 生鐵之彈性係數 $E_1=15,000,000$ 磅/平方吋.

鋼之彈性係數 $E_2=29{,}000{,}000$ 磅/平方吋.

生鐵之截面積 $A_1=\frac{1}{2}\times 2=1$ 平方吋,

鋼之截面積 $A_2=0.375\times 2\times 2=1.5$ 平方吋.

故
$$n=\frac{E_2}{E_1}=\frac{29}{15}=1.933,$$

$$nA_2=1.933\times 1.5=2.9 \text{ 平方吋.}$$

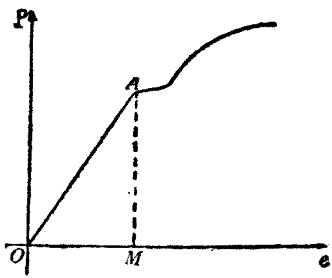
$$A_1+nA_2=1+2.9=3.9 \text{ 平方吋.}$$

由是得
$$S_1=\frac{20{,}000}{3.9}=5{,}128 \text{ 磅/平方吋.}$$

$$S_2=nS_1=9{,}914 \text{ 磅/平方吋.}$$

$$\delta=\frac{S_1}{E_1}=0.000342.$$

12. 應變能(Resilience)**及衝擊**(Shock)　將一棒形變之至其彈性限度所作之功,謂之**應變能**.吾人設作此棒之擔負及應變圖如左,A 點為彈性限度,則形變至彈性限度所作之功,可以三角形 OAM 之面積表之.名應變能為 U,則得



第3圖

$$U=\frac{1}{2}OM\times AM.$$

今因$OM=e$, $AM=P$, 以A爲棒之截面積,S爲單位應力,則上式改爲

$$U=\frac{Pe}{2}=\frac{1}{2}SAe.$$

然因$e=\frac{Sl}{E}$, $Al=V$, 卽棒之體積,故得應變能爲

$$U=\frac{1}{2}\frac{S^2Al}{E}=\frac{VS^2}{2E}.$$

以上所述,均爲漸加外力於一材料.換言之,材料所受之擔負,恰若由O漸增至P,其平均力爲$\frac{P}{2}$,故得應變能如上述.

今以重W之物,置於棒端,若突然取去之,使其伸長或收縮.則重量W之全部,其作用所經之距離爲棒之形變e'.故其所作之功U',如次式所示:

$$U'=We'.$$

若此功毫不消失而全變爲應變能時,則得

$$We'=\frac{Pe'}{2}.$$

由是得

$$P=2W.$$

卽突然所加之擔負或衝擊,爲漸緩所加擔負之二倍.

13. 怕松比 (Poisson's Ratio) 一棒受張力作用,

則長度伸長而粗度減小;受壓力之作用則長度縮短而粗度加大.在彈性限度之內,不但縱應變與應力成正比例,即橫應變亦與應力成正比例.橫應變與縱應變之比,謂之**怕松比**.其值因各材料而異,然恆小於一.

習　題　一

1. 一棒受有7,200磅之張力,其單位應力為10,000磅/平方吋.求此棒之直徑.

2. 長50呎,直徑0.08吋之鎳鋼線,受有112磅之張力.設$E=30,000,000$磅/平方吋,求應力,應變,伸長數及應變能.

3. 長20吋,寬3吋,厚0.25吋之建築鋼棒,置於兩條寬各為2吋,厚0.5吋之熟鐵棒中.設此合成棒伸長0.02吋,求張力及每種材料之應力.

4. 一生鐵管受300,000磅之軸壓力.設其外直徑為8吋,求內直徑.

5. 寬2吋,厚1吋,長12吋之鋼棒,受60,000磅之張力,平行於12吋軸.設怕松比為0.3,求各邊之長度,已知$E=30,000,000$磅/平方吋.

6. 求每邊3吋之生鐵塊,加壓力至其可容應力之應變能.求加張力至其可容應力之應變能.

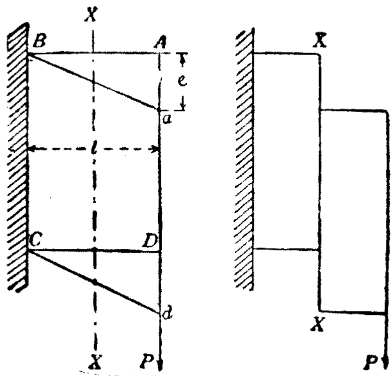
7. 一熟鐵棒共長25呎.其中直徑為2吋者有6呎,直徑為$1\frac{3}{4}$吋者有7呎,直徑為$1\frac{1}{2}$吋者有12呎.此棒受張力之作用,其最細部份之應力為12,000磅/平方吋.若$E=28,000,000$磅/平方吋,問此棒伸長若干?

8. 磚牆之底層,其壓縮應力為3,000磅/平方吋,問牆高幾呎?

9. 直徑1.5吋之建築鋼條,受30,000磅之張力,求其安全因數.

10. 設有建築鋼條受4,000磅之張力,而使其安全因數為5,求其最經濟之直徑,應選用幾吋?

14. 切應力(Shearing Stress)**及切應變**(Shearing Strain) 物體受外力作用,使其鄰接兩面,呈相反方向移動之勢,如第4圖所示.若外力繼續增加,兩面終至分離,則此兩面間之抗力,謂之**切應力.**



第 4 圖

長方塊 $ABCD$ 受 P 力之作用後,則成 $aBCd$ 之狀. Aa 謂之**切形變**(Shearing Deformation).

設此長方塊沿 XX 之截面積為 A,則得其應力及應變如下:

$$S_s=\frac{P}{A},\qquad \delta=\frac{e}{l}.$$

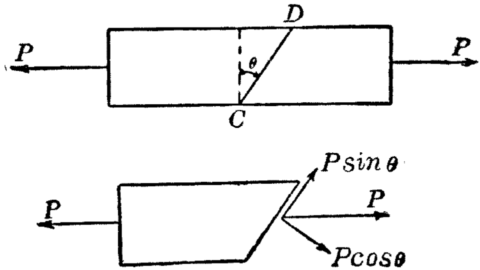
由應力與應變成正比例,此時之比例常數,謂之**切變彈性係數**(Shearing Modulus of Elasticity),記之為 C,則得

$$C=\frac{S_s}{\delta}=\frac{Pl}{Ae}.$$

切變彈性係數亦謂之**橫彈性係數**,以示與縱彈性係

數 E（即楊氏彈性係數）之不同.

15. 由張力或壓力所生之切應力　第5圖所示,爲一受張力之棒.若取截面 CD,則可分 P 力爲沿截面及垂直於截面二分力.



第5圖

設正截面之面積爲 A,則得 CD 處之截面面積爲 $\frac{A}{\cos\theta}$ 故得

$$S_s=\frac{P\sin\theta}{\frac{A}{\cos\theta}}=\frac{P}{A}\sin\theta\ \cos\theta=\frac{P}{2A}\sin 2\theta.$$

θ 爲 45° 時,則所生之切應力爲最大,等於直接應力之半.材料受張力或壓力而斷裂時,常沿 CD 方向.

習　題　二

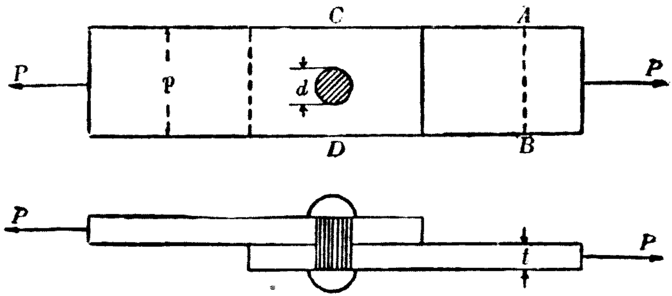
1. 在厚 $\frac{1}{2}$ 吋之鋼板上,衝一直徑 $\frac{7}{8}$ 吋之圓洞.若板之最大切應力爲 40,000 磅/平方吋,求所用之力.

2. 寬厚各爲1吋之鋼棒，受50,000磅之張力.求出此張力所生之切應力.設θ爲30°，40°，45°及50°.

3. 直徑0.506吋之鋼條，受14,120磅之張力而斷裂.求其最大切應力.

4. 設一打眼機(Punch)之最大壓縮應力爲板之切應力之四倍，則所打出於板上之眼，其最小直徑，爲與板厚相等.

16　鉚釘接榫(Riveted Joints)　有兩板以鉚釘連接如下圖：



第6圖

若受張力P之作用，則應力由鉚釘自一板傳至另一板.設板厚爲t，寬爲p，鉚釘之直徑爲d，則板上之應力爲

$$S_t=\frac{P}{pt}.$$

在截面CD處之應力爲

$$S_t'=\frac{P}{(p-d)t}.$$

釘孔側所受之壓縮應力爲

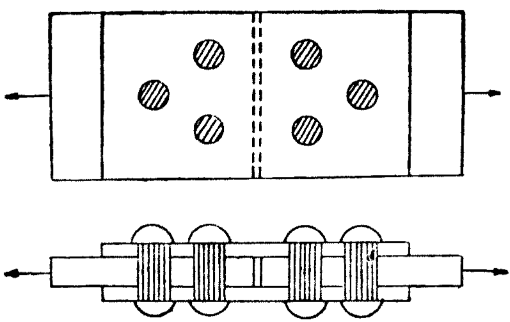
$$S_c=\frac{P}{dt}.$$

又其切應力爲

$$S_s=\frac{4P}{\pi d^2}.$$

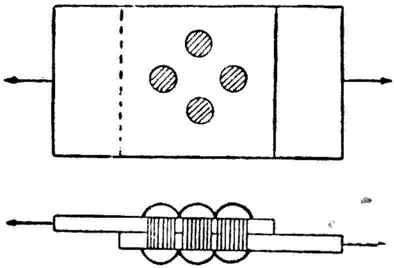
面積 pt 謂之**總面積**(Gross Area),$(p-d)t$ 謂之**有效面積**(Net Area).

上圖之鉚釘接榫,謂之**疊接**(Lap Joint);第7圖所示之狀,謂之**對接**(Butt Joint),即上下各加一蓋板.工程上所用之鉚釘,在市場上能購得者,其直徑各爲 $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ 及1吋.



7圖

鉚釘之效率,爲板之有效面強度與總面強度之比.兩釘間之中心距離,謂之**釘距**(Pitch of Rivets).



第8圖

〔例題1〕 求第8圖鉚釘接榫之總面積,及每行鉚釘之有效面積之應力.求釘頂之切應力及孔側之壓縮應力.設P爲6,000磅,板寬5吋,厚$\frac{1}{4}$吋,鉚釘直徑$\frac{1}{2}$吋,釘孔直徑$\frac{9}{16}$吋.

〔解〕 總面積$=5\times 0.25=1.25$平方吋,

故總面積之應力$=\dfrac{6,000}{1.25}=4,800$磅/平方吋.

有效面積(第一行)$=\left(5-\dfrac{9}{16}\right)\times 0.25=1.1094$平方吋,

故其單位應力$=\dfrac{6,000}{1.1094}=5,410$磅/平方吋.

$$有效面積(第二行)=5-\left(\frac{18}{16}\right)\times 0.25=0.969 平方吋,$$

因有 $\frac{1}{4}$ 之擔負,爲第一行鉚釘由一板傳至另一板,故尙有 $\frac{3}{4}$ 之擔負.卽第二行有效面積之

$$單位應力=\frac{6,000}{0.969}\times\frac{3}{4}=4,650 磅/平方吋.$$

第三行有效面積之擔負,祇剩 $\frac{1}{4}$,故得其

$$單位應力=\frac{6,000}{1.1094}\times\frac{1}{4}=1,350 磅/平方吋.$$

$$鉚釘截面積=4\times 0.19635=0.7854 平方吋,$$

故得 $$S_s=\frac{6,000}{0.7854}=7,640 磅/平方吋.$$

$$受壓力之面積=4\times 0.25\times 0.5=0.5 平方吋.$$

故得 $$S_c=\frac{6,000}{0.5}=12,000 磅/平方吋.$$

〔例題2〕 設第7圖主板之寬爲8吋,厚爲 $\frac{1}{2}$ 吋;蓋板之厚爲 $\frac{5}{16}$ 吋,寬亦爲8吋.鉚釘直徑爲 $\frac{3}{4}$ 吋,釘孔之直徑爲 $\frac{13}{16}$ 吋.張力 P 爲40,000磅,求主板在各行鉚釘間之切應力及主板間之壓縮應力.

〔解〕 第一行有效面積$=7.1875\times 0.5=3.59375$ 平方吋,

故得 $$S_t=\frac{40,000}{3.59375}=11,130\text{ 磅/平方吋.}$$

第二行有效面積=6.375×0.5=3.1875平方吋.

故得 $$S_t=\frac{40,000}{3.1875}\times\frac{5}{6}=10,460\text{ 磅/平方吋.}$$

第三行有效面積=5.5625×0.5=2.78125平方吋,

故得 $$S_t=\frac{40,000}{2.78125}\times\frac{3}{6}=7,190\text{ 磅/平方吋.}$$

蓋板第三行有效面積=5.5625×0.625=3.4766平方吋,

故得 $$S_t=\frac{40,000}{3.4766}=11,500\text{ 磅/平方吋.}$$

鉚釘截面積=6×2×0.4418=5.302平方吋.

故得 $$S_s=\frac{40,000}{5.302}=7,550\text{ 磅/平方吋.}$$

受壓力面積=6×0.5×0.75=2.25平方吋,

故得 $$S_c=\frac{40,000}{2.25}=17,780\text{ 磅/平方吋.}$$

習題三

1. 設第6圖鉚釘之直徑為$\frac{3}{4}$吋,其可容切應力為8,00 磅/平方吋,求其可容擔負.

2. 兩板各厚$\frac{1}{2}$吋,寬3吋,以一隻1吋直徑之鉚釘接牢而受10,000磅之張力.設釘孔為$1\frac{1}{16}$吋,求總截面,有效截面之張應力.

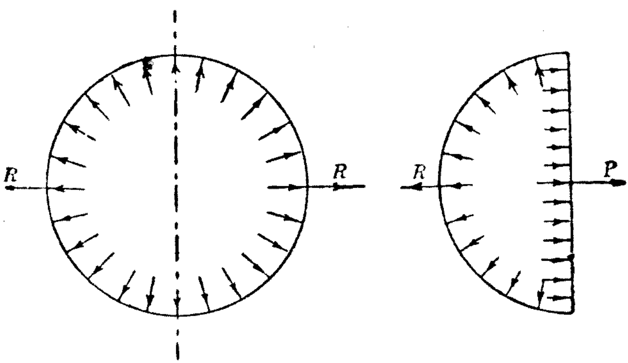
求鉚釘之切應力及孔側之壓縮應力.

3. 兩板各寬4吋,厚$\frac{9}{16}$吋,以1吋直徑之鉚釘一隻接牢.當此板受張力之作用時,得鉚釘之切應力爲8,000磅/平方吋,求板之壓縮應力及有效截面之張應力.

4. 設計一疊接榫之鉚釘,用一隻或兩隻鉚釘時之板之呎吋.用下列之可容數值:$S_t=15,000$磅/平方吋;$S_s=9,000$磅/平方吋;$S_c=20,000$磅/平方吋,板之擔負爲8,000磅.

5. 設計一對接榫鉚釘用板之呎吋,若每邊用鉚釘五隻,前行二隻,後行三隻;其擔負爲38,000磅.用下列可容數值:$S_t=16,000$磅/平方吋;$S_s=10,000$磅/平方吋;$S_c=20,000$磅/平方吋.

17. 圓筒及管之應力　設有一圓筒或管,其內直徑爲d,厚爲t,長爲l,管內流質之壓力強度爲p.



第9圖

將此管沿其軸平分爲二等分,則每部壓力之合力R,與其他一部之形狀無關.今以一平面代其他一部如第9圖,則平面部分之壓力合力爲

$$P=pdl.$$

然因 R 與 P 平衡,故得

$$R=P=pdl.$$

設 S_t 爲管截面處之應力,則得

$$R=pdl=2tlS_t,$$

卽
$$pd=2tS_t.$$

上述之結果,乃本於下列二假定而得.卽一爲截面之應力均勻,此時 t 與 d 相差頗大.二爲 l 非甚短.

管端之壓力爲 $\frac{\pi}{4}d^2p$,而管沿圓周之抗力爲 πdtS_t.

故得
$$\frac{\pi}{4}d^2p=\pi dtS_t,$$

卽
$$pd=4tS_t.$$

上式之所示者,爲管之沿圓周方向之抗力爲沿軸向抗力之二倍.

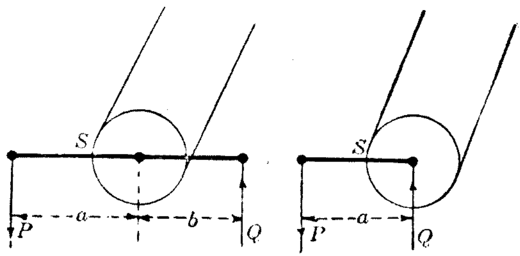
用上述之法,可求得薄球殼之應力公式同上.

〔例題〕 自來水管之直徑爲10吋,厚爲 $\frac{1}{8}$ 吋.其內部之壓力強度爲400磅/平方吋.求管壁之張應力.

〔解〕 由
$$pd=2S_t\cdot t,$$

故得
$$S_t=\frac{400\times 10}{2\times\frac{1}{8}}=16,000\text{ 磅/平方吋}.$$

13. 簡單扭轉(Simple Torsion)　設有大小相等而方向相反之二力 P, Q 作用於釘在軸 S 之端之



第 10 圖

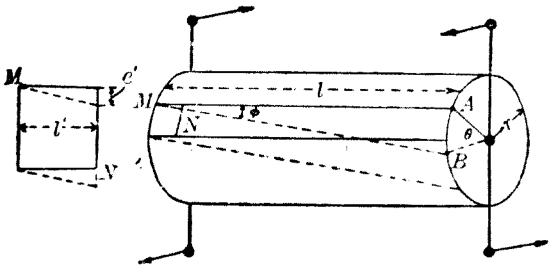
直桿上,則此二力爲**力偶**(Couple),不能用一單獨之力可平衡之.此時 P, Q 二力,祇能使軸 S 發生轉動,其**轉動力矩**(Turning Moment)或**轉矩**(Torque)爲

$$T=Pa+Qb=P(a+b).$$

今設有每分鐘轉動 n 次之軸, T 爲其轉矩, H 爲其所傳達之馬力數, R 爲軸之半徑(吋),則

$$H=\frac{2\pi RPn}{12\times 33{,}000}=\frac{\pi Tn}{6\times 33{,}000}.$$

設有長 l,半徑爲 d 之軸,其端受轉矩 T 之作用,如第 11 圖所示.在未扭轉之前,於軸面上作平行於軸之直線若 AM.當扭轉後,則此直線變爲螺線 MB.其與原線 MA 所夾之角 ϕ,謂之**切變角**(Angle of Shear),



第11圖

而 $\widehat{AB}$ 所對之圓心角θ,謂之**扭轉角**(Angle of Twist).

$\widehat{AB}$之大小,與軸長l成正比.設當軸未扭轉之前,以AM爲邊,於軸面上作一小正方形,則待扭轉之後,此正方形變成一平行四邊形,即發生切應力S_s,而切應變爲

$$\frac{e'}{l'}=\frac{\widehat{AB}}{l}=\frac{S_s}{C},$$

故得
$$\widehat{AB}=\frac{lS_s}{C}.$$

又因
$$\widehat{AB}=\frac{\theta d}{2},$$

故得
$$\theta=\frac{2lS_s}{dC}=\frac{lS_s}{rC}\text{(弧度)},$$

或
$$\theta=\frac{360lS_s}{\pi rC}\text{(度)}.$$

19. 軸扭轉時所生之應力　由軸之扭轉角 $\theta=lS/rC$, 吾人可得 $S_s=\theta\cdot rC/l$. 因 θ, C 及 l 均有定值, 故知 S_s 與軸之半徑 r 或直徑 d 成正比.

設一圓軸受轉矩 T 時, 吾人可假想此圓軸為若干極細之圓柱所合成. 由上述, 任意一圓柱之切應力與其半徑成正比. 今以 r_1 為此等圓柱中之一之半徑, a_1 為其截面積, s_1 為其切應力, 則

$$s_1 : S_s = r_1 : r,$$

即
$$s_1=\frac{r_1}{r}\cdot S_s.$$

此截面上之總切應力為 s_1a_1, 故對於其軸而抵抗扭轉之力矩為

$$s_1a_1r_1=\frac{r_1^2}{r}a_1S_s=\frac{S_s}{r}\cdot r_1^2a_1=\frac{S_s}{r}I_1.$$

上式之 I_1 為此細柱截面之**極轉動慣量**(Polar Moment of Inertia). 故得此軸抵抗扭轉之力矩為細圓柱抵抗扭轉之力矩之和, 即

$$T=\Sigma\frac{S_s}{r}I_1=\frac{S_s}{r}I.$$

I 為軸之全截面之極轉動慣量. 半徑為 r 之圓; 其極轉動慣量為 $\frac{1}{2}\pi r^4$, 故得

$$T=\frac{1}{2}\pi r^3 S_s=\frac{1}{16}\pi d^3 S_s.$$

由是得
$$S_s=\frac{16\,T}{\pi d^3}.$$

每分鐘轉動n次,馬力爲H之軸,其應力爲

$$S_s=\frac{96\times 33,000H}{\pi^2 n d^3}.$$

〔例題〕 長50呎,直徑2吋之鋼軸,受15,000吋磅之轉矩,求其切應力及扭轉角.設每分鐘轉動300次,求其所傳達之馬力.$C=12,000,000$磅/平方吋.

〔解〕 $$S_s=\frac{16\times 15,000}{\pi\times 2^3}=9,550\text{ 磅/平方吋}.$$

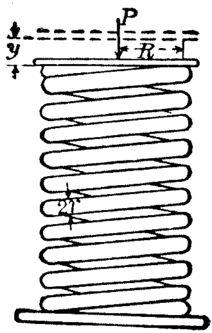
$$\theta=\frac{360\times 50\times 12\times 9,550}{\pi\times r\times 12,000,000}=54°42'.$$

$$H=\frac{\pi\times 15,000\times 300}{6\times 33,000}=71.5\text{ 馬力}.$$

20. 螺旋彈簧(Helical Spring) 將一細圓柱繞於另一圓柱之表面上,則所成之物,謂之螺旋彈簧.設彈簧之每圈密接,則祇能受張力作用.若每圈間留有空隙時,則可受張力或壓力.

第12圖之螺旋彈簧,受有沿軸向之張力或壓力

P,每圈間之直徑為R,則對於此螺旋而言,恰若受一轉矩 PR.此時螺旋彈簧發生二種應力.一為由張力或壓力而生之應力,一為切應力.惟前者因其值頗小故可略去.由上節所述之公式,則得切應力



第 12 圖

$$S_s=\frac{Tr}{I}=\frac{PRr}{I}.$$

彈簧之延長或縮短數f為

$$f=R\theta.$$

若此彈簧有n圈,則其長度l為$2\pi Rn$.

彈簧發生一吋長度變化之力,謂之**彈簧標**(Scales of Spring).例如600磅彈簧,即謂以600磅之力,可使之延長或縮短一吋.

習　題　四

1. 管之直徑為$\frac{1}{2}$吋而其內壓力為800磅/平方吋,設其張應力不能超過16,000磅/平方吋,求此管之厚.

2. 管厚$\frac{1}{3}$吋,其內壓力為200磅/平方吋.設材料之單位應力為12,000磅/平方吋,求其最大直徑.

3. 設可容張應力為10,000磅/平方吋,求直徑8呎之水管之厚.此管連接於水頭600呎之水塔.

4. 直徑8吋之鋼軸，受100,000呎磅之轉矩.求其最大切應力.

5. 一軸受15,000吋磅之轉矩,設其最大切應力爲10,000磅/平方吋,求軸之直徑.

6. 一鋼軸須受400,000吋磅之轉矩，而其扭轉角不能超過每5呎爲1度.求此軸之直徑.

7. 第12圖所示之螺旋彈簧,係以1吋直徑之鋼條,繞於直徑5吋之圓柱上而成.此彈簧共有8圈,每圈間隔$\frac{1}{2}$吋.問用壓力若干磅可壓縮使之密接?計算單位切應力.

8. 以直徑$\frac{1}{2}$吋之鋼絲,繞于直徑3吋之圓柱上而成一螺旋彈簧.若其標爲100磅,求彈簧圈數.

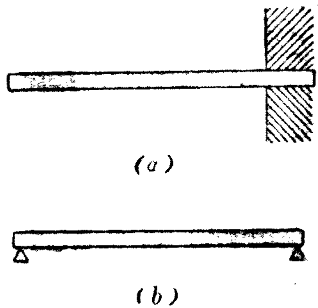
第三章

樑之切力及彎曲力矩

21. 樑之定義及種類　一長棒受有垂直於長度之外力及反作用力,則此棒謂之**樑**(Beams).在建築物上,樑之位置常爲水平方向,而其所受之外力,常爲其所負載之重.在機械上,樑之位置不一定,其所受之外力,常爲機械其他部分所傳來之壓力.

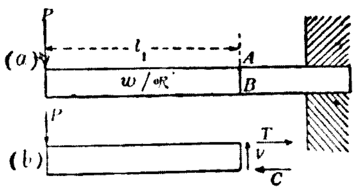
作用於樑之外力,約可分爲二類.一爲**集中擔負**(Concentrated Load),一爲**分佈擔負**(Distributed Load).集中擔負作用於樑上之面積極小,故可視作一點,此點即接觸面之中心點.樑之反應力,亦可視爲作用於一點.分佈擔負,常爲等強度(Uniform Intensity),即樑每單位長度之擔負相等.亦有不爲等強度者,然不常睹.

樑之一端固定,而他端自由者,謂之**肱樑**(Cantilever Beams)，如第13圖(*a*)所示.支於兩端者,謂之**簡單樑**(Simple Beams),如(*b*)圖是也.亦有兩端均固定者,一端固定而支於他端者,支於兩端之內者數種.若樑之支點有三個以上,則謂之**連續樑**(Continuous Beams).



第13圖

22. 樑之切力　作用於樑上之外力及反作用力,有切斷此樑於任意一截面之趨勢,第14圖之肱樑,每呎重 w 磅,其自由端有集中擔負 P.任截取於 AB 處,則作用於自由體之力,如(*b*)圖所示,



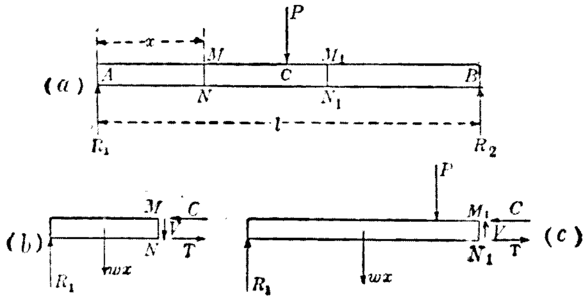
第14圖

作用於樑之外力 P 及樑長 l_1 之重 wl_1,其方向均向下.今欲使此自由體平衡,則截面 AB 上有一向上方向之切力 V,及平衡力偶之上部張力 T 及下部壓力 C.由 $\Sigma F_y=0$,故可得切力 V 爲

$$V=P+wl_1.$$

第15圖之簡單樑,其重爲每呎 w 磅.外力 P 適加

於樑之中點 C. 故 A, B 兩端之反應力爲 $\frac{1}{2}(P+wl)$.



第 15 圖

由是得 MN 處之切力爲

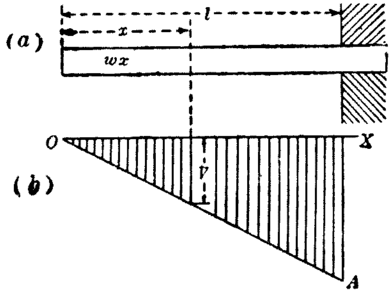
$$V=\frac{1}{2}(P+wl)-wx.$$

同理 M_1N_1 處之切力爲

$$V=\frac{1}{2}(P+wl)-(wx+P).$$

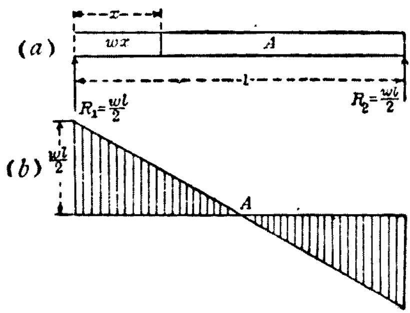
切力向下者爲正,向上者爲負.

23. 切力圖 (Shearing Force Diagram)　由上節所述,若樑之本身無重量時,則其任意一截面之切力不變.否則此切力自左端至右端,發生定量之變化,直至外力之作用點或樑之支點爲止.第 16 圖之肱樑,其切力 $V=-wx$, 設以圖表之如 (b), 以 OX 爲**切力零軸** (Zero Shear Axis), 其長即爲樑長.由此線向下作縱線,代表樑上各同位點之切力,連接 O, A, 若以 V 爲縱



第16圖

座標,則得直線OA之方程式為$V=-wx$.此圖卽為樑之切力圖,簡記為S.F.D. OA謂之**切力線**或**切力曲線**.



第17圖

同理,第17圖之簡單樑,若每單位長度重w磅,則其任意一點上截面之切力為$V=\dfrac{wl}{2}-wx$.其切力圖為(b). A點卽樑之中點,其切力為零.

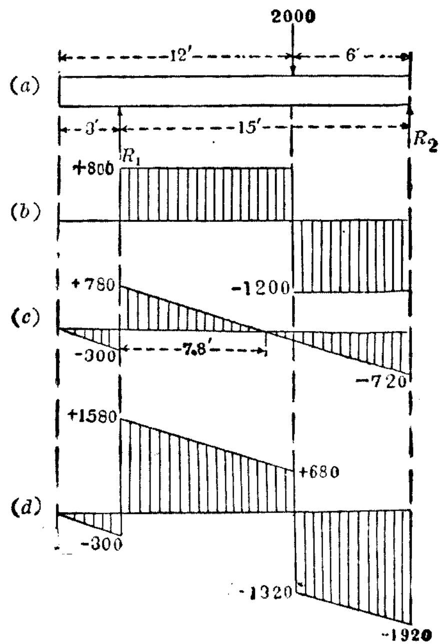
因樑之擔負及其支點之狀況不同,故其切力方

程式不能以一簡單之算式表之.而其切力之求法,可分類求之,而後再求其和卽得.例如簡單樑之有兩種擔負時,先求其第一種擔負之切力,次求第二擔負之切力,再求其和卽得.可以下例爲證.

〔例題〕　求第18圖樑之切力線方程式,作切力圖.

〔解〕　由　　$\Sigma F_y=0,\ \Sigma M=0,$

得　　$R_1+R_2=2{,}000+1{,}800=3{,}800,$



第18圖

又　$$15R_1=2{,}000\times6+1{,}800\times9.$$

故　$$R_1=1{,}880\text{ 磅,}$$

同理　$$R_2=1{,}920\text{ 磅.}$$

先作 2,000 磅擔負之切力圖如 (b). 次作樑重之切力圖如 (c).再相加得其結果之切力圖如 (d).

樑之切力方程式,可分作三段求得之如下:

$$x=0\text{ 至 }x=3\text{ 呎,}$$

$$V=-100x.$$

$$x=3\text{ 至 }x=12\text{ 呎,}$$

$$V=1{,}880-100x.$$

$$x=12\text{ 至 }x=18\text{ 呎,}$$

$$V=1{,}880-2{,}000-100x=-120-100x.$$

習題五

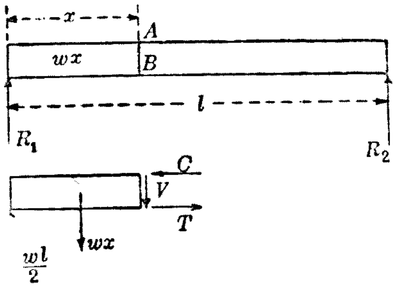
1. 長 10 呎之肱樑,固定於右端.其上載有每呎 100 磅之分佈擔負.另自固定端至樑之中點,載每呎 400 磅之分佈擔負.求切力方程式,作切力圖.

2. 上題若每呎 400 磅之分佈擔負,加於樑之左半段,則結果如何?

3. 長 20 呎之簡單樑,支於兩端.其上載有每呎 500 磅之分佈擔負.距左端 15 呎,另有一集中擔負 2,400 磅 求切力方程式及作切力圖

4. 支於兩端之簡單樑,其上之擔負與樑長成正比例,自左端起由零增至右端而爲 1,000 磅.作此樑之切力圖.已知樑長爲 12 呎.求切力零點.

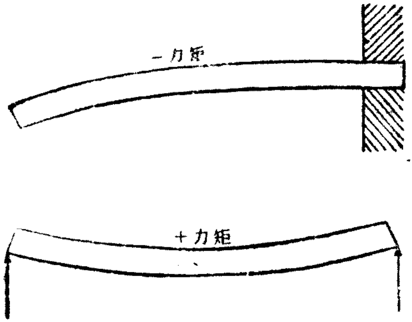
21. 樑之力矩　樑受其擔負及反作用力之作用,除發生切力之外,尚發生一**彎曲**(Bending)**作用**.第19圖之簡單樑,設每單位長度重 w 磅,任取 AB 處之截面,而取其左為自由體,則反作用力 $\frac{wl}{2}$ 向上作用,該段樑重 wx 向下作用.此二力將使自由體轉動,其轉動之力矩為



第19圖

$$\frac{wlx}{2}-\frac{wx^2}{2}$$

此力矩謂之外力在 AB 處之力矩,名為**彎曲力矩**(Bending Moment).欲使此自由體平衡,除切力 V 外,尚有張力 T 及壓力 C,由 $\Sigma F_x=0$,故知 $C=T$.此相等而反向之二力,即為力偶,其力矩等於外力之力矩,而方向相反,謂之 AB 處之**內力力矩**.故吾人指樑之任意一截部之內力矩時,其量之大小,可由外力矩定之.當樑之左端外力矩為順時針方向,則內力矩為正.逆時針方向,則為負.由是可知樑彎曲時成上凹向,則力矩為正,下凹向則為負.



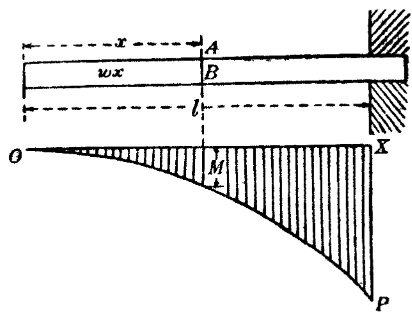
第20圖

25. 彎曲力矩圖（Bending Moment Diagram）

由上節所述,彎曲力矩之量,與所取截面距左端距離之大小有關.例如第21圖之肱樑,若每呎載重 w 磅,共長 l 呎,則其在 AB 處之彎曲力矩爲

$$M=-\frac{wx^2}{2}$$

作一與樑等長而平行之線爲橫軸,因力矩爲負,故向下作直線代各該相當點之力矩.因 x 最大不能過 l,故最大彎曲力矩當爲 $x=l$ 時,卽



第21圖

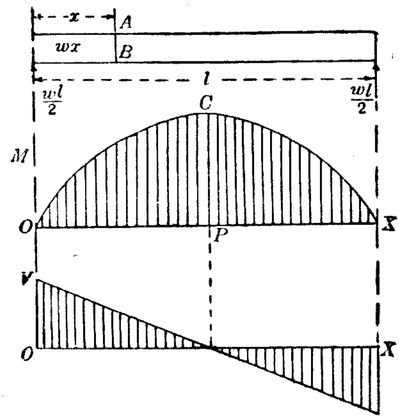
$$M_{(max)}=-\frac{wl^2}{2}=-\frac{Wl}{2}.$$

W 爲總擔負,曲線 OP 爲**彎曲力矩曲線**,面積 OPX 謂之**彎曲力矩圖**,簡記作 B. M. D.

第 22 圖爲支於兩端之簡單樑.設樑重每呎爲 w 磅,則其在 AB 處之彎曲力矩

$$M=\frac{wlx}{2}-\frac{wx^2}{2}.$$

作一與樑等長而平行之直線爲橫軸.因力矩爲正,故向上作直線代表各該相當點之力矩.連結其端,得曲線 OCX 爲彎曲力矩曲線.由此圖,知最大力矩爲 CP,此處爲樑之中點.欲知最大力矩之處,吾人可作樑之切力圖.切力零點卽爲力矩最大之點.設彎曲力矩之方程式爲簡單時,則亦可由代數法求得之.例如由



第 22 圖

$$M=\frac{wlx}{2}-\frac{wx^2}{2},$$

卽
$$M=\frac{wl^2}{4}-\frac{w}{2}\left(x^2-lx+\frac{l^2}{4}\right)$$

$$=\frac{wl^2}{4}-\frac{w}{2}\left(x-\frac{l}{2}\right)^2.$$

若M爲極大時,則上式右邊之第二項非零不可,即當$x=\frac{l}{2}$時,則得

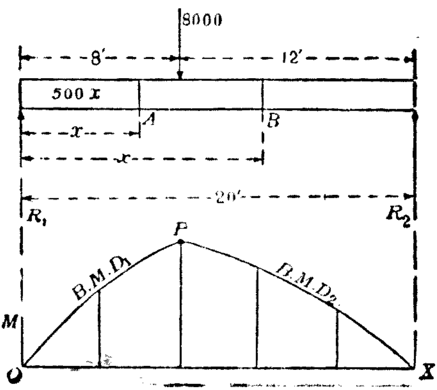
$$M_{(max)}=\frac{wl^2}{4}=\frac{Wl}{4}\cdot\ (W=wl=\text{總重})$$

〔例題〕 長20呎之簡單樑,每呎載重500磅.於距左端8呎處,另有一集中擔負8,000磅.求彎曲力矩之方程式並作圖.求每隔4呎之力矩.

〔解〕 反作用力R可求得如下:

$$20R_1=500\times20\times10+8,000\times12,$$

故 $$R_1=9,800\text{磅},$$



第23圖

又 $$R_2=18,000-9,800$$

$$=8,200\text{ 磅.}$$

設x在0與8呎之間,則得A左之力矩為

$$M_A=9,800x-250x^2\text{ 磅.}$$

再取x在8與20呎之間,則得B左之力矩為

$$M_B=9,800x-250x^2-8,000(x-8)$$

$$=64,000+1,800x-250x^2.$$

故得其彎曲力矩為交於P之兩曲線.

求每隔4呎之力矩如下:

$M_4=9,800\times4-250(4)^2=35,200$ 呎磅.

$M_8=9,800\times8-250(8)^2=62,400$ 呎磅.

$M_{12}=64,000+1,800\times12-250(12)^2=49,600$ 呎磅.

$M_{16}=64,000+1,800\times16-250(16)^2=28,800$ 呎磅.

習　題　六

1. 長6呎之肱樑,載有每800磅之分佈擔負.求其中點及固定點之力矩.作彎曲力矩圖.

2. 長8呎之肱樑,其自由端受有2,000磅之集中擔負,距自由端3呎,另有集中擔負4,000磅.求固定點之力矩.求彎曲力矩方程式及作圖.

3. 長24呎之簡單樑,距其右端4呎處,有集中擔負10,000磅.求其中點及擔負點之力矩.作彎曲力矩圖.

4. 長14呎之樑,每呎重150磅,支於兩端之內2呎處.其中點有

一集中擔負1,200磅.求中點之力矩.作彎曲力矩圖.

5. 一樑長24呎,每呎重100磅.支於左端及右端內4呎處.距左端5呎,有一集中擔負1,000磅.在右端亦有一集中擔負1,000磅.求其自左端至第一擔負,由第一擔負至右邊支點,自右邊支點至右端之彎曲力矩式.作彎曲力矩圖.計算自左端起,相隔每5呎處之力矩.

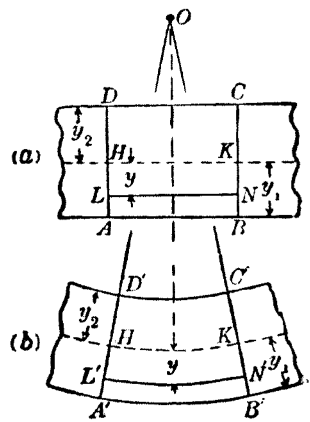
6. 長10呎之肱樑,每呎重20磅.從自由端起至距固定點4呎處止,載有每呎45磅之分佈擔負.求其最大彎曲力矩.作彎曲力矩圖.

7. 長50呎之簡單樑,載有每呎1,200磅之分佈擔負,及一集中擔負6,000磅於其中點.求最大彎曲力矩,並作彎曲力矩圖.

8. 長40呎之簡單樑,距其左端4呎起至距其右端6呎止,載有每呎100磅之分佈擔負.求此樑三段間之彎曲力矩方程式.求最大之力矩及作彎曲力矩圖.

9. 求習題五第4題之樑彎曲力矩方程式,並作彎曲力矩圖.

26. 由彎曲所生之應力 第24圖(*a*)爲未經彎曲之樑,(*b*)爲原樑彎成圓弧形.由(*b*),可知此樑發生彎曲時,其上邊CD,壓縮成$C'D'$.下邊AB伸長爲$A'B'$.故知在樑中,必有一面分此二部.此面謂之**中性面**(Neutral Surface),其與縱截面(即紙面)相交之曲線,謂之**中性軸**(Neutral Axis).AD處之截面與BC



第24圖

處之截面,本爲平行,今則互側而相交於 O 點. 自 O 點至中性軸之距離 R, 謂之**曲率半徑** (Radius of Curvature).

樑內設有平行於中性面之一絕薄平面 LN, 而距中性面爲 y,則在彎曲之前, $LN=HK$. 然在彎曲之後, LN 變爲 $L'N'$.由

$$\frac{L'N'}{HK}=\frac{R+y}{R},$$

得
$$L'N'=\left(\frac{R+y}{R}\right)HK.$$

故 LN 之單位應變爲

$$\delta=\frac{L'N'-LN}{LN},$$

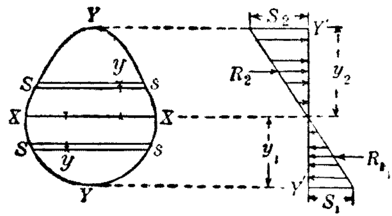
即
$$\delta=\frac{\left(\frac{R+y}{R}\right)HK-HK}{HK}=\frac{y}{R}.$$

然因 $\delta=\frac{S}{E}$,代入上式,則得樑內平行於中性面之任意一平面上之應力爲

$$S=\frac{Ey}{R}.$$

最大之應力爲上部表面之壓縮應力及下部表面之張應力,因此時 y 爲最大故也.

27. 中性軸之位置 作用於樑之外力,祇使樑發生彎曲,故爲力偶.此力偶爲樑之內力矩所平衡,故樑之內力合力,亦爲力偶,卽上部之壓力及下部之張力(指簡單樑而言)是也.下圖爲樑之截面正面圖.設 XX 爲其中性軸,$Y'Y'$ 爲其側面圖.取此截面上一狹條 ss 平行於中性軸而距之爲 y.以 a 爲此狹



第 25 圖

條之面積,則 ss 上之應力 S,必合乎下列之條件,卽

$$\frac{S}{y}=\frac{S_1}{y_1},$$

故
$$S=\frac{yS_1}{y_1}.$$

此狹條上之應力合力爲 $Sa=\frac{S_1 ay}{y_1}$,故在中性軸下方截面之合力爲

$$R_1=\Sigma\frac{S_1 ay}{y_1}=\frac{S_1}{y_1}\Sigma ay.$$

同理,中性軸上方截面之合力爲

$$R_2=\Sigma\frac{S_2 ay}{y_2}=\frac{S_2}{y_2}\Sigma ay.$$

由上節,知 $\frac{S_1}{y_1}=\frac{S_2}{y_2}$, 又因 $R_1=R_2$, 故中性軸上之 Σay 與中性軸下之 Σay 相等.即中性軸經過截面之重心點.

內力合力之力矩爲 $\Sigma\frac{S_1 ay}{y_1}y=\frac{S_1}{y_1}\Sigma ay^2$. 或爲 $\frac{S_2}{y_2}\Sigma ay^2$. 惟 $\Sigma ay^2=I$, 即截面以中性軸爲軸之轉動慣量,故得內力合力之力矩爲 $\frac{S_1}{y_1}I$, 此力矩與外力之力矩平衡,故得

$$M=\frac{S_1}{y_1}I=\frac{S_2}{y_2}I.$$

然
$$\frac{S_1}{y_1}=\frac{S_2}{y_2}=\frac{S}{y}=\frac{E}{R},$$

故得
$$M=\frac{S}{y}I=\frac{IE}{R}.$$

設命
$$\frac{I}{y_1}=Z_1, \quad \frac{I}{y_2}=Z_2,$$

則可得
$$M=S_1Z_1=S_2Z_2,$$

Z_1, Z_2 謂之**截面係數**(Section Modulus),乃以中性軸之距離除轉動慣量而得.

各種形狀之截面,其轉動慣量及上下兩部表皮之截面係數,可參閱附錄.至於轉動慣量之求法,已詳述於拙著應用力學中,茲不復贅.

28. 經濟截面(Economic Sections) 由第26節所

述,知樑上任意一處之截面,其應力自中性軸起,由零而增至表皮爲最大.故若此截面爲一圓形或長方形時,其中間部份之應力甚小.今設將中間部份之材料,移至其表皮之上,而使之懸離中性軸,則截面係數增大,由是而樑之截面強度亦增加.故工程上所用之各種材料,其截面(垂直於其軸)之形狀,常爲中空之圓,中空之長方形,L字形,T字形或I字形等等,即爲此故.

各種形狀之截面,其 I, Z, y 等值,亦各不同.在選定材料之前,吾人須先知材料之可容應力及彎曲力矩,由 $S=M/Z$, 即可求得 Z 值,則應用若干大之材料,自能決定.

〔例題1〕 長20呎之鋼管,以之作簡單樑之用.其外直徑爲5吋,內直徑爲4.5吋.中點加一集中擔負1,000磅.求其截面之最大應力.

〔解〕 最大之彎曲力矩在樑之中點,其量爲

$$M=\frac{Pl}{4}=\frac{1{,}000\times20\times12}{4}=60{,}000\text{ 吋磅.}$$

最大應力在管之外表皮上,故得

$$Z=\frac{\pi}{4r}(r^4-r_1^4)=\frac{\pi}{10}(39.06-25.62)=4.224\ (\text{吋})^3.$$

故得　$S=\frac{M}{Z}=\frac{60,000}{4.224}=14,200$ 磅/方吋.

〔例題2〕　一生鐵之T字樑,其截面如第26圖所示.此樑伸出於牆外5呎,而作肱樑之用.連樑重計算在內每呎載有分佈擔負400磅.求其最大之壓縮應力及張應力.

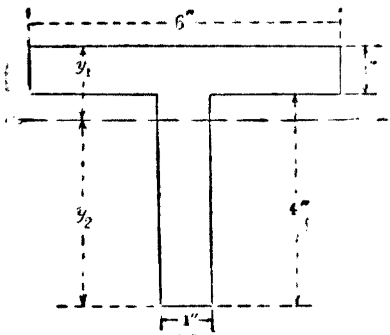
〔解〕　自其中性軸至上下兩面之距離,求之如下:

$10y_1=6\times\frac{1}{2}+4(2+1)$,

故得　$y_1=1.5$ 吋,

從而 $y_2=5-1.5=3.5$ 吋.

$I=20.83$ (吋)^4.



第26圖

最大彎曲力矩在其固定點,其量爲

$$M=\frac{wl^2}{2}=\frac{400\times5\times5\times12}{2}=60,000 \text{ 吋磅}.$$

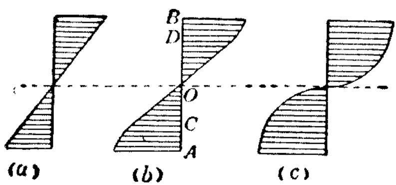
最大張應力在上邊,爲

$$S_t=\frac{60,000\times1.5}{20.83}=4,320 \text{ 磅/平方吋}.$$

最大壓縮應力在下邊,爲

$$S_c=\frac{60,000\times 3.5}{20.83}=10,080\text{ 磅/平方吋.}$$

29. 破裂係數 (Modulus of Rupture) 上述樑之應力為 $S=\frac{My}{I}$，其意為在彈性限度之內，截面上各點之應力，與該點離中性軸之距離成正比例.設樑之擔負，增至截面之最大應力超過彈性限度，則應力不能與應變成直接正比例.在此種情形之下，設樑之截面，對稱於其中性軸，又設張應力與壓縮應力相等，則應力之分佈於截面上之情形，可以下圖表之:



第 27 圖

(a)表示未發生永久形變之應力分佈狀況.

(b)表示已發生永久形變之應力分佈狀況，AC 與 BD 為彈性限度之外，然 OC 與 OD 間，仍合於虎克定律.

(c)整個材料發生彈性限度外之應變.

設吾人仍用 $S=\frac{My}{I}$，則 M 表示破裂時之彎曲力矩，而此時之 S，謂之破裂係數.

習　題　七

1. 樑之截面爲寬6吋厚10吋之長方形.其某點上之力矩爲8,000呎磅,求該點之應力.

2. 木製肱樑之截面,爲寬2吋厚6吋之長方形.若樑長3呎,而其自由端載有集中擔負400磅,求其最大應力.

3. 長4呎,直徑$\frac{1}{2}$吋之鋼棒,作簡單樑之用.其中點載有集中担負20磅,求其最大應力.

4. 寬3吋,厚15吋,長18呎之木樑,支於兩端.其上載有每吋200磅之分佈擔負.求其最大應力.若其最大應力爲1,200磅/平方吋,問於其中點應另加擔負若干磅?

5. 長12呎之簡單木樑,其截面爲一長方形.此樑載有每呎300磅之分佈擔負(樑重計算在內).其可容應力爲1,200磅/平方吋.設厚爲寬之兩倍,求樑之截面.

6. 長3呎之肱樑,其自由端載有集中擔負2,000磅.設其可容應力爲1,300磅/平方吋,而其截面爲長方形.求樑之呎吋,設厚爲寬之四倍.

7. 一實體圓柱樑之截面直徑爲6吋.今欲改用外直徑爲8吋之圓柱,設其截面積不變,求內直徑及力矩之比.

8. 一木料之T字樑,乃由兩條各爲2吋×6吋之木板所拼成.求其截面係數.

9. 長8吋,寬1.6吋,厚1.2吋之生鐵條,作簡單樑之用.受5,460磅之集中擔負於其中點後,即行破裂.求其破裂係數.

10. 長24吋,寬1.8吋,厚2吋之木樑,支於兩端.設此樑之中點受1,240磅之集中擔負而破裂,求其破裂係數.

11. 一肱樑長爲8呎,每邊爲8吋.用上題之材料製成.求其自由端能加之最大集中擔負.

12. 長12呎,寬8.4吋,厚1.5吋之木樑,支於兩端.此樑載有兩個集中擔負於其長三分之一處.若每擔負爲26,000磅時而樑破裂,求其破裂係數.

30. 等強度(Constant Strength)**之樑** 若樑之任意一截面之單位應力均相等,則此樑謂之**等強度之樑**.由單位應力

$$S=\frac{My}{I}=\frac{M}{Z},$$

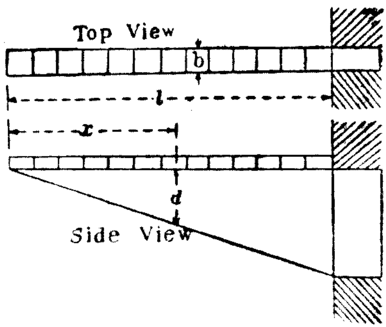
設S不變,則M與Z成正比例,此時M與Z均爲變值.換言之,即樑之大小必非均勻.例如長l之肱樑,載有每呎w磅之分佈擔負,則其截面係數爲

$$Z=\frac{I}{y}=\frac{bd^2}{6}.$$

故bd^2必與其長l成正比例.設b爲不變,則由

$$M=\frac{wx^2}{2},\ S=\frac{M}{Z},$$

得 $$S=\frac{6M}{bd^2}=\frac{3wx^2}{bd^2}.$$



第28圖

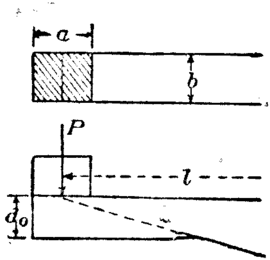
即 $$d=x\sqrt{\frac{3w}{Sb}}.$$

此種肱樑,在建築上常用之.惟其自由端,若再加以集中擔負時,因$x=0$, $d=0$,決不能加於點或線上,故必須將樑端之形狀,略加改正(如第29圖),使其能載

負.設增加部份之可容壓縮及切應力各爲 S_c, S_s, 則由方程式

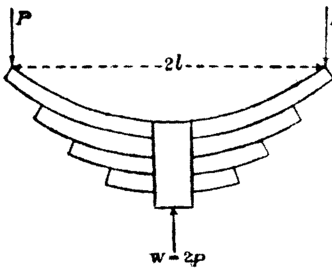
$$P=S_c ab \text{ 及 } P=\frac{2}{3}S_s bd_0$$

可求得 a 及 d_0 值.由是而樑之實在長度爲 $l+\dfrac{a}{2}$.



第 29 圖

31. 疊板彈簧(Leaf Spring)　各種車輛之車臺下減少振動用之彈簧,多用鋼板疊合而成弓形,如第30圖所示,適爲兩個肱樑.每樑受一集中擔負於自由端之後,則成平直.其原理可求得之如下.



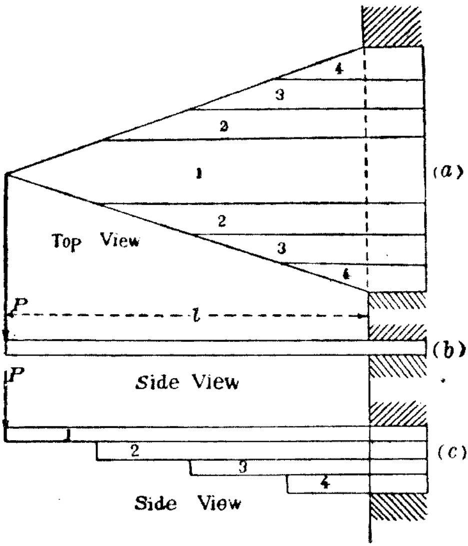
第 30 圖

自由端有集中擔負之肱樑,若其厚及強度均爲不變時,則由其強度

$$S=\frac{6P}{bd^2}x,$$

得
$$b=\frac{6Px}{Sd^2}$$

即寬與長成正比例,如第31圖(a)所示.今分之爲若干



第31圖

條,以短者置於其較強者之下,如同圖(c)所示,即成一疊板彈簧.今設樑長爲l,而用n條拼成,每條厚均爲d,則得

$$S=\frac{6Pl}{Bd^2}=\frac{6Pl}{bnd^2}.$$

B爲固定點之寬,b爲每條之寬.

習　題　八

1. 等強度之肱樑,其厚常爲2吋,而其截面常爲長方形.設其可容單位應力爲1,200磅/平方吋,其擔負爲每呎120磅之分佈擔負,求其距自由端20吋及40吋處之寬度.

2. 長4呎之肱樑,其截面爲一長方形而其寬度常爲3吋.設此樑爲等強度,其可容應力爲1,200磅/平方吋,其上載有每呎100磅之分佈擔負,求其中點及固定點之厚.

3. 等強度之肱樑,其長爲50吋,寬爲2吋.自由端之集中擔負爲1,000磅.設可容應力爲1,500磅/平方吋,求其距自由端10吋及固定點之厚.

4. 長30吋之疊板彈簧,乃由8條寬2吋,厚$\frac{1}{4}$吋之板疊合而成.設其自由端之擔負爲500磅,求其單位應力.

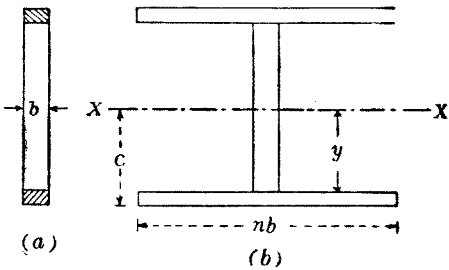
5. 長30吋之疊板彈簧,乃由每條厚$\frac{3}{8}$吋之板12條疊合而成.設其自由端之擔負爲6,000磅,而其可容應力爲160,000磅/平方吋,求板寬.

6. 長2吋之生鐵樑,支於兩端.其擔負爲每呎200磅.設此樑之強度不變,其截面爲一平方形,而其可容應力爲3,000磅/平方吋,求其距支點3吋,6吋,9吋及其中點之呎吋.

32. 兩種材料所組成之樑　第11節所述,用彈性係數不同之兩種材料,拼成一棒,則其受張力或壓力之作用後,每種材料之單位應變相等.即各材料之單位應力,與其彈性係數成正比例,

$$\delta=\frac{S_1}{E_1}=\frac{S_2}{E_2}.$$

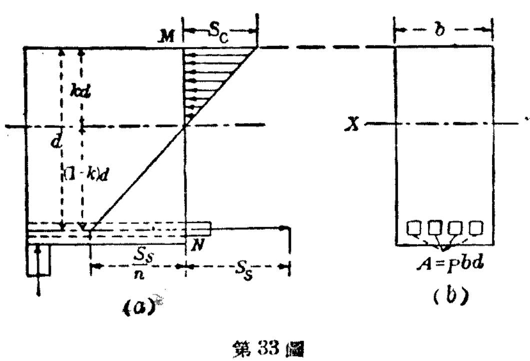
此理亦可適用於兩種材料所做成之樑.例如截面爲長方形之木樑,其上下兩面,再釘以鋼板,如第32圖(a)



第 32 圖

所示.設鋼與木之彈性係數之比爲 n,則鋼板中任意一點之應力爲以木代替鋼時之 n 倍.故鋼之面積若以木代之須爲 n 倍,如(b)圖所示.今則此樑相當於一木製之工字樑.求此工字樑之轉動慣量 I, 則 $S=\dfrac{My}{I}$ 爲木表皮之最大應力而 $S=\dfrac{MC}{I}$ 爲鋼之木面積當量表皮之最大應力.此值以 n 倍之,卽爲鋼表皮之最大應力.

建築物之樑,常有用**鋼骨混凝土** (Re-enforced Concrete Beams) 者,其作用與上述略有不同.在此樑



第 33 圖

中鋼條乃置於受張力之處.

第33圖,常用以表鋼骨混凝土樑.(a)表示支於其端之樑之側面圖. MN 爲沿樑之任意截面.(b)爲其截面圖.寬等於 b,自頂面至鋼條中心之距離爲厚 d(鋼條下之混凝土面積可略去).

以 p 爲鋼之加強百分率,即鋼面積與混凝土面積 bd 之比. kd 爲自頂面至中性軸之距離, n 爲鋼及混凝土彈性係數之比. S_c 爲混凝土之最大應力, S_s 爲鋼骨之最大應力.

設 XX 爲中性軸,則面積 bkd 之面矩,應等於面積 $npbd$ 之面矩,即

$$bkd\times\frac{kd}{2}=npbd\times d(1-k),$$

得
$$k^2+2pnk-2pn=0,$$

故
$$k=\sqrt{2pn+(pn)^2}-pn.$$

既得 k 值,則面積當量之轉動慣量爲

$$I=\frac{bk^3d^3}{3}+npbd^3(1-k)^2.$$

由是得
$$S_c=\frac{Mkd}{I},$$

$$S_s=\frac{nM(1-k)d}{I}.$$

〔例題〕 長20呎之鋼骨混凝土樑,其寬爲10吋,厚爲17吋.用直徑$\frac{5}{8}$吋之鋼條五條,置於樑中,使其底面距鋼骨之中心爲1吋,設$n=15$,而此樑除其重量外,再受有每呎350磅之分佈擔負,求其應力.

〔解〕 鋼骨面積

$$A=5\times 0.3068=1.534 \text{ 平方吋}.$$

$$d=17-1=16 \text{ 吋}.$$

$$p=\frac{A}{bd}=\frac{1.534}{10\times 16}=0.0096.$$

$$pn=0.0096\times 15=0.144,$$

$$k=\sqrt{0.288+(0.144)^2}-0.144=0.412,$$

$$kd=0.412\times 16=6.59 \text{ 吋}.$$

$$(1-k)d=16-6.59=9.41 \text{ 吋}.$$

$$I=\frac{10\times(6.59)^3}{3}+15\times 1.534\times(9.41)^2$$

$$=2{,}991(\text{吋})^4.$$

$$W=\frac{20\times 10\times 17\times 150}{144}+20\times 350=10{,}540 \text{ 磅}.$$

$$M=\frac{Wl}{8}=\frac{10,540\times20\times12}{8}=316,200\text{ 吋磅.}$$

故
$$S_c=\frac{316,200\times6.59}{2,991}=693\text{ 磅/平方吋.}$$

$$S=\frac{15\times316,200\times9.41}{2,991}=14,920\text{ 磅/平方吋.}$$

習　題　九

1. 長10呎,寬4吋,厚8吋之簡單木樑,於其底面再釘以厚$\frac{1}{4}$吋之鋼板.設木之彈性係數為1 500,00)磅/平方吋,鋼之彈性係數為30,000,000磅/平方吋,求由其中點之擔負2,400磅所生之最大應力.

2. 長20呎,寬6吋,厚8吋之簡單木樑,其前後兩面再加釘寬$\frac{1}{4}$吋厚8吋之鋼板.結果此樑之截面寬為$6\frac{1}{2}$吋.其中點加有集中擔負2,000磅.求其最大應力.

3. 設$E_s=30,000,000$磅/平方吋,$E_c=2,000,000$磅/平方吋,鋼之加強率為1%,0.9%,0.8%時之k值各為若干?

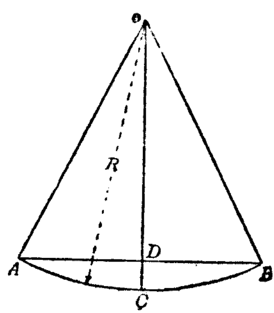
4. 長4呎,寬4吋,厚6吋之鋼骨混凝土樑,支於其兩端.用$\frac{1}{4}$吋力鋼棒三條,置於樑中,距底面為$\frac{3}{4}$吋.若$N=15$,求由樑自身之重所生之應力.欲使混凝土之應力增至800磅/平方吋,問於樑之中點可加集中擔負若干磅?

第四章

樑之彎曲度

33. 定義 由第27節所述 $R=\frac{EI}{M}$ 及 $\frac{M}{I}=\frac{E}{R}=\frac{S}{y}$ 兩方程式之意,謂當 $\frac{S}{y}$ 或 $\frac{M}{I}$ 爲常數時,則樑彎曲後,常成圓弧形.反之,設 M 爲變量,則樑彎曲成圓弧時,M 與 I 成正比例.彎曲數量,謂之**彎曲度**.

上述之意,亦可用之於樑彎曲後不成圓弧形者.蓋取樑之極短一段,則 R 即爲該段上任意一點之曲率半徑,M 爲該點之彎曲力矩.此時 S, y 及 I,均係對於該點之截面而言.惟以樑之全部而言,則 R 此時爲變量.



第34圖

34. 圓弧形之彎曲度(Deflection) 支於 A, B 兩端之樑,其長爲 l.彎曲後,此樑成圓弧形 ACB(第34圖).以 O 爲曲率中心,D 爲 AB 之中點,DC 爲最

大彎曲度u.在三角形OAD中,得

$$\overline{OA}^2=\overline{AD}^2+\overline{OD}^2,$$

即
$$R^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2+(R-u)^2.$$

化簡上式,得

$$2uR=\frac{l^2}{4}+u^2.$$

然因u與l及R之相比爲甚小,故可略去u^2而得

$$u=\frac{l^2}{8R}=\frac{Ml^2}{8EI}.$$

設長爲l之肱樑,則彎曲後若成圓弧時,可由上式求得其彎曲度爲

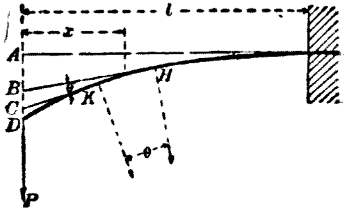
$$u=\frac{Ml^2}{2EI}.$$

曲線ACB,即樑彎曲後之形狀,謂之**彈性曲線**(Elastic Curve).

35. 載有集中擔負於自由端之肱樑彎曲度

設肱樑之截面爲均勻,可將此樑分爲n段,其中第p段爲HK,如第35圖所示,則得

$$HK=\frac{l}{n},\quad x=p\times\frac{l}{n}.$$



第35圖

HB切於H點,KC切於K點.

以 R 爲 HK 之曲率半徑,則 BC 爲 HK 一段之彎曲度, θ 爲 HB, KC 兩切線相夾之角,亦爲 H, K 兩點曲率半徑所夾之角,則

$$\theta=\frac{HK}{R}=\frac{BC}{x},$$

即
$$\frac{l}{nR}=\frac{BC}{p\times\frac{l}{n}}.$$

故
$$BC=p\times\left(\frac{l}{n}\right)^2\times\frac{1}{R}=p\times\left(\frac{l}{n}\right)^2\times\frac{M}{EI}.$$

又
$$M=Px=Pp\times\frac{l}{n}.$$

故得
$$BC=P\times\left(\frac{l}{n}\right)^3\times p^2\times\frac{1}{EI}.$$

最大彎曲度爲 BC 之總和,即

$$u=\Sigma BC=\frac{P}{EI}\left(\frac{l}{n}\right)^3\Sigma p^2$$

$$=\frac{P}{EI}\left(\frac{l}{n}\right)^3(1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{P}{EI}\left(\frac{l}{n}\right)^3\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

$$=\frac{Pl^3}{EI}\times\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{6}.$$

設 n 增至無窮大時,即將此樑分成 n 段極微之小段時,則得 $\frac{1}{n}$ 之極限爲零.故得肱樑之最大彎曲度爲

$$u=\frac{Pl^3}{3EI}.$$

36. 載有平均分佈擔負於全樑之肱樑彎曲度

設樑上每呎載重 w 磅,則同上節,可得

$$\frac{l}{nR}=\frac{BC}{p\times\frac{l}{n}}.$$

惟
$$M=\frac{wx^2}{2}=\frac{w}{2}\times p^2\times\left(\frac{l}{n}\right)^2,$$

故
$$BC=p\times\left(\frac{l}{n}\right)^2\times\frac{1}{R}=p\times\left(\frac{l}{n}\right)^2\times\frac{M}{EI}.$$

即
$$BC=\frac{w}{2EI}\times\left(\frac{l}{n}\right)^4\times p^3.$$

最大彎曲度爲 BC 之總和,故得

$$u=\Sigma BC=\frac{w}{2EI}\left(\frac{l}{n}\right)^4\Sigma p^3$$

$$=\frac{w}{2EI}\left(\frac{l}{n}\right)^4(1^3+2^3+3^3+\cdots+p^3+\cdots+n^3)$$

$$=\frac{w}{2EI}\left(\frac{l}{n}\right)^4\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

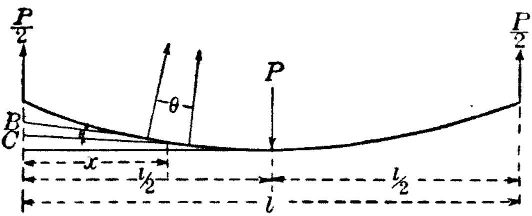
$$=\frac{wl^4}{8EI}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

設 n 增至無窮大時,卽將此樑分成 n 個極微之小段時,則得 $\frac{2}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ 之極限爲零.故得肱樑之最大彎曲度爲

$$u=\frac{wl^4}{8EI}=\frac{Wl^3}{8EI}. \quad (W=wl=\text{總擔負})$$

37. 載有集中擔負於中點之簡單樑彎曲度

設樑長 l, 其中點之集中擔負爲 P. 吾人可視此樑爲長 $\frac{l}{2}$ 之兩個肱樑接成,其固定點爲中點,支點爲自由



第 36 圖

端,每樑載有集中擔負 $\frac{P}{2}$ 於其自由端.故以 $\frac{P}{2}$ 及 $\frac{l}{2}$ 代入第 35 節之式,則可得此簡單樑之最大彎曲度爲

$$u=\frac{\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI}=\frac{Pl^3}{48EI}.$$

38. 載有分佈擔負於全樑之簡單樑彎曲度

設樑長爲 l, 每呎載重 w 磅.可用上節所述之法,分此樑爲兩個肱樑.每個肱樑,又可分爲兩種情形而論.第

一種,其上載有平均分佈擔負,第二種,其自由端載有集中擔負$\frac{wl}{2}$(卽支點之反作用力).惟此兩種之彎曲方向相反,故此樑之彎曲度,爲此兩種彎曲度之差.

由集中擔負所生之彎曲度$u_1=\frac{wl\,(l)^3}{48EI}=\frac{wl^4}{48EI}$,

由分佈擔負所生之彎曲度$u_2=\frac{w\left(\frac{l}{2}\right)^4}{8EI}=\frac{wl^4}{128\,EI}$.

故得此簡單樑之最大彎曲度爲

$$u=u_1-u_2=\frac{wl^4}{48EI}-\frac{wl^4}{128\,EI}.$$

卽
$$u=\frac{5wl^4}{384\,EI}=\frac{5Wl^3}{384\,EI}.\ (W=wl=\text{總擔負})$$

習　題　十

1. 長6吋,寬2吋,厚4吋之木製胋樑,其自由端載有集中擔負80磅.若$E=1,800,000$磅/平方吋.求自由端之彎曲度及固定點之曲率半徑.

2. 長2呎直徑1吋之鋼製胋樑,其自由端之彎曲度爲0.3吋.設$E=30\ 000,000$磅/平方吋,求其自由端之集中擔負.

3. 長5呎,寬2吋,厚12吋之胋樑,每呎連其自身之重,載重300磅.設$E=1,200,000$磅/平方吋,求其最大彎曲度.

4. 長12呎,直徑1吋之鋼棒,用作胋樑.設$E=20,000,000$磅/平方吋,求其由重量所生之彎曲度.

5. 長12呎,寬4吋,厚2吋之木樑,支於兩端.其中點載有集中擔負100磅.設$E=1,600,000$磅/平方吋,求其最大彎曲度.

6. 設E爲15,000,000磅/平方吋,求支於兩端而長爲15呎,外

直徑6吋,內直徑5吋之生鐵管,當其中點受1,000磅擔負時所生之彎曲度.

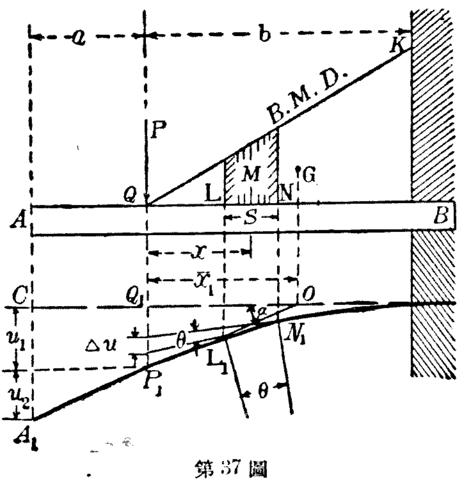
7. 設 E 爲30,000,000磅/平方吋,求直徑3吋之鋼軸,在20呎跨度(Span)內,由其自身之重量所生之彎曲度.

8. 支於兩端,長20呎,寬8吋,厚10吋之木樑,其中點之彎曲度爲 $\frac{1}{2}$ 吋.若 E 爲1,500,000磅/平方吋,求其上之分佈擔負.

39. 由彎曲力矩圖以求樑之彎曲度法

用算學方法,以求樑之彎曲度,祇可在樑及其擔負均在簡單情形之下,始能求得其結果.若樑之負重情形,不爲簡單者,則可作此樑之彎曲力矩圖,然後以求此力矩與彎曲度之關係,頗爲簡易.下節卽爲所述之法,對於任何簡單樑之彎曲力矩,均可適用.

40. 集中擔負不在自由端時之肱樑彎曲度



第37圖

設肱樑上之集中擔負距其固定點爲b,距其自由端爲a.作彎曲力矩圖$ACQKB$.任取樑上甚爲接近之兩點L及N,其相距爲S.設S爲極小,則L及N點之力矩可視之爲相等.以R爲L_1, N_1兩點間之曲率半徑,則得

$$\theta=\frac{S}{R}=\frac{MS}{EI}=\frac{a}{EI}.$$

a爲彎曲力矩曲線與其兩縱線所界之面積.

L_1, N_1兩點間之彎曲度爲Δu,此兩點切線相夾之角θ,卽表示樑彎曲後,自L_1至N_1點之斜率差.故由上式,可知樑上任意兩點間之斜率差,等於以EI除該兩點間彎曲力矩曲線與該兩點縱線相界之面積.(此理對於一切擔負均同.)

作P_1點之切線,與水平線相夾之角爲α,則α卽爲此樑彎曲後,自B至Q兩點之斜率差.故由上述得

$$\alpha=\frac{BQ\text{ 段彎曲力矩曲線所界面積}}{EI}=\frac{A_1}{EI}.$$

今由
$$\Delta u=x\cdot\theta=\frac{ax}{EI},$$

故得Q點之彎曲度u_1爲

$$u_1=\Sigma\Delta u=\Sigma\frac{ax}{EI}=\frac{A_1\bar{x}_1}{EI}.$$（見應用力學）

然 $$u_1=P_1Q_1=OQ_1\times\tan\alpha.$$

設α爲甚小,則得α與$\tan\alpha$幾相等.故得

$$OQ_1\times\alpha=OQ_1\times\frac{A_1}{EI},$$

卽 $$OQ=\bar{x}_1.$$

卽P_1點之切線,交水平線於面積A_1重心點下.

故得 $$u_1=\frac{\frac{Pb^2}{2}\times\frac{2b}{3}}{EI}=\frac{Pb^3}{3EI}.$$

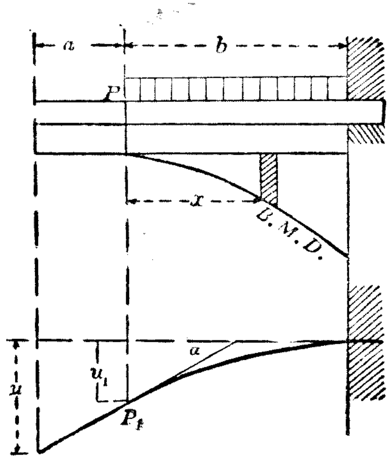
此與第35節求得之結果相同.今因集中擔負加於Q點,故Q點以後之彎曲,卽爲切於P_1點之直線.總彎曲度u爲

$$u=u_1+a\cdot\tan\alpha$$
$$=u_1+a\cdot\alpha$$
$$=\frac{Pb^3}{3EI}+a\times\frac{\frac{Pb^2}{2}}{EI}.$$
$$=\frac{Pb^3}{3EI}+\frac{Pab^2}{2EI}.$$

41. 分佈擔負不至其自由端時之肱樑彎曲度

第38圖所示之肱樑,載有每呎w磅之分佈擔負,自其

固定點至P點爲止.則此樑之彎曲亦至P點爲止.至P點之後,則係切於P_1點之直線.作P點之右之彎曲力矩圖,爲一半拋物線.名此彎曲力矩所界之面積爲A,則可求得A如下法.



第38圖

將b段分成n份.若n爲極大時,則每段之長$\frac{b}{n}$爲甚小,而可視每份左右兩端之力矩無變化.設x爲其第p段之長,則得

$$x = p \times \frac{b}{n}.$$

今將此面積A分爲若干個長方形,其任意一個長方形之面積爲

$$a = \frac{b}{n} \times \frac{wx^2}{2} = \frac{w}{2} \times p^2 \times \left(\frac{b}{n}\right)^3.$$

總面積A爲各長方形面積之和,即

$$A = \Sigma a = \frac{w}{2}\left(\frac{b}{n}\right)^3 \Sigma p^2$$

$$=\frac{w}{2}\left(\frac{b}{n}\right)^3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+p^2+\cdots\cdots+n^2)$$

$$=\frac{w}{2}\left(\frac{b}{n}\right)^3\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

設 n 增至無窮大時,即將 b 段分成 n 個輕微之小段,則得

$$A=\frac{wb^3}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{wb^3}{6}.$$

總彎曲度爲

$$u=u_1+a\cdot\alpha.$$

由第36節,得

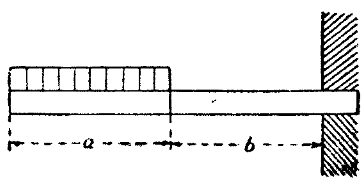
$$u_1=\frac{wb^4}{8EI}=\frac{Wb^3}{8EI},\quad (W=wb=\text{總擔負})$$

由第40節,得

$$a\alpha=\frac{aA}{EI}=\frac{wab^3}{6EI}=\frac{Wab^2}{6EI},$$

故得
$$u=\frac{Wb^3}{8EI}+\frac{Wab^2}{6EI}.$$

42. 分佈擔負不至其固定點時之肱樑彎曲度 第39圖之肱樑,自其自由端起至長



第39圖

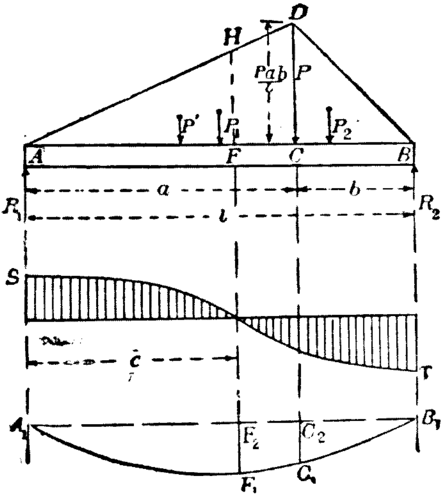
度 a 止載有每呎 w 磅之分佈擔負.則此樑之最大彎曲度可由第36及41兩節之法求得之.

先假定此樑全長度載有分佈擔負,再假定此樑祇有 b 段載有分佈擔負,則此兩種擔負變曲度之差,即爲所求樑之自由端彎曲度,即

$$u=\frac{w(a+b)^4}{8EI}-\left(\frac{wb^4}{8EI}+\frac{wab^3}{6EI}\right)$$

$$=\frac{w}{EI}\left(\frac{a^4}{8}+\frac{a^3b}{2}+\frac{3a^2b^2}{4}+\frac{ab^3}{3}\right)$$

$$=\frac{W}{EI}\left(\frac{a^3}{8}+\frac{a^2b}{2}+\frac{3ab^2}{4}+\frac{b^3}{3}\right).\quad (W=wa=\text{總擔負})$$



第40圖

43. 支於兩端之簡單樑 一簡單樑之兩端支住,而求其集中擔負不在中點時之彎曲度.設樑 AB 之長爲 l,而集中擔負 P 加於距 A, B 兩端各爲 a 及 b 之處,即加於 C 點.故 C 點之彎曲力矩爲 $\frac{Pab}{l}$. 作彎曲力矩圖 ADB.

今假定 ADB 爲樑上之分佈擔負,則吾人可得下述之關係.

由第40節,知 $\theta=\frac{MS}{EI}$. 此 MS 係擔負爲 P 時之彎曲力矩.今以 ADB 爲擔負,則 MS 即爲擔負 ADB 之彎曲力矩.吾人求得此彎曲力矩之值,即可求得樑各相當點之彎曲度.

由三角形 ADC 所表示之擔負,其合力爲 P_1 $\left(=\frac{Pa^2b}{2l}\right)$,經過三角形 ADC 之重心. 由三角形 BDC 所表示之擔負,其合力爲 P^2 $\left(=\frac{Pab^2}{2l}\right)$, 經過三角形 BDC 之重心.以 R_1 及 R_2 爲擔負 ADB 之反應力,則得

$$R_1=\frac{Pab(a+2b)}{6l},\qquad R_2=\frac{Pab(2a+b)}{6l}.$$

作擔負 ADB 之彎曲力矩曲線,則由上述,此曲線之縱線,除以 EI,即爲樑之彎曲度.最大之彎曲度爲當切力

等於零時.設F點之切力爲零,以$AF=c$,則由三角形AHF所表示之擔負,其合力$P'\left(=\frac{Pa^2b}{2l}\times\frac{c^2}{a^2}\right)$經過三角形$AHF$之重心點.由切力等於零時,知

$$R_1=P';$$

即
$$\frac{Pab(a+2b)}{6l}=\frac{Pb^2c}{2l},$$

故解得
$$c=\sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}}.$$

F點之彎曲力矩爲

$$R_1c-\frac{P'c}{3}=\frac{2P'c}{3}=\frac{Pbc^3}{3l}=\frac{Pb}{3l}\left\{\frac{a(a+2b)}{3}\right\}^{\frac{3}{2}},$$

故得最大彎曲度爲

$$u_{(max)}=\frac{Pb}{3lEI}\left\{\frac{a(a+2b)}{3}\right\}^{\frac{3}{2}};$$

C點之彎曲力矩爲

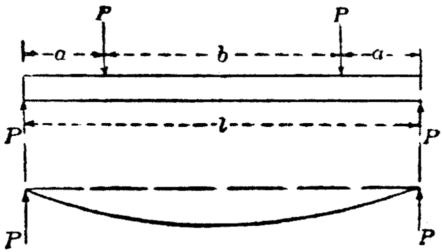
$$R_1a-\frac{P_1a}{3}=\frac{Pa^2b(a+2b)}{6l}-\frac{Pa^3b}{6l}=\frac{Pa^2b^2}{3l},$$

故得擔負點之彎曲度爲

$$u=\frac{Pa^2b^2}{3lEI}.$$

44. 載有兩個成對稱之集中擔負時之簡單樑彎曲度 設此樑載有兩個集中擔負P,距其支點各

爲 a,如第41圖所示,則由樑之對稱,可知其最大彎曲度爲在中點.今可視此樑爲兩個長各爲$\left(a+\frac{b}{2}\right)$之肱



第41圖

樑,每個又可分其擔負爲兩種.一爲自由端有集中擔負P,一爲距自由端a有集中擔負P.名其前者所生之彎曲度爲u_1,後者所生之彎曲度爲u_2,此兩種彎曲之方向相反,其差卽爲樑之中點最大彎曲度.卽

$$u=u_1-u_2.$$

惟
$$u_1=\frac{P\left(a+\frac{b}{2}\right)^3}{3EI}$$

$$u_2=\frac{P\left(\frac{b}{2}\right)^3}{3EI}+\frac{Pa\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2EI}$$

故得
$$u=\frac{P\left(a+\frac{b}{2}\right)^3}{3EI}-\left(\frac{Pb^3}{24EI}+\frac{Pab^2}{8EI}\right),$$

即
$$u=\frac{P}{EI}\left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^2b}{2}+\frac{ab^2}{8}\right).$$

設 $a=\frac{l}{4}$, $b=\frac{l}{2}$, l 為樑之跨度,則可得其中點之最大彎曲度為

$$u=\frac{11Pl^3}{384EI}.$$

習題十一

1. 長10呎,寬2吋,厚4吋之木製肱樑,在其自由端之內4呎處,載有集中擔負100磅.設知 E 為1,800,000磅/平方吋,求自由端之彎曲度.

2. 長8吋,直徑為 $\frac{1}{2}$ 吋之鋼棒,作肱樑之用.在其自由端之內2吋處,有一集中擔負80磅.設 E 為30,000,000磅/平方吋,求自由端之彎曲度.

3. 長10呎,寬6吋,厚8吋之肱樑,自其固定點起至長6呎處止,每呎載有分佈擔負100磅.設 E 為1,500,000磅/平方吋,求自由端之彎曲度.

4. 上題,設此6呎之分佈擔負,自其自由端開始,求其最大彎曲度.

5. 長12呎,寬4吋,厚6吋之簡單樑,距其右端3呎處,有集中擔負1,000磅.若 $E=1,500,000$ 磅/平方吋,求其最大彎曲度.

6. 長10呎,直徑3吋之鋼軸,支於兩端內 $2\frac{1}{2}$ 呎處,而其兩端載有集中擔負各為 P.設此樑之最大應力為10,000磅/平方吋,E 為30,000,000磅/平方吋,求其中點之彎曲度.

7. 長12呎之木樑,其寬為6吋,厚為8吋,而支於兩端.集中擔

負2,000磅,加於各端內4呎處.若E爲1,500,000磅/平方吋,求其最大彎曲度.

8. 長16呎,寬6吋,厚10吋之木樑,支於兩端.在其長度距每端$\frac{1}{4}$點上,有集中擔負3,000磅.設E爲1,500,000磅/平方吋,求其中點之彎曲度.

第五章

固定樑及連續樑

45. 定義 凡樑之一端或兩端均固定者,謂之**固定樑**(Fixed Beams).肱樑卽爲最簡單之固定樑.支於三點以上之樑,謂之**連續樑**.樑端若爲固定者,則當其受擔負而彎曲時,其固定點之斜率爲零.

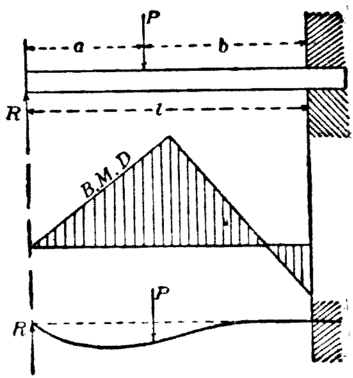
46. 一端固定,支於他端而載有集中擔負之樑

第42圖所示,爲集中擔負距其固定點爲b之情形.

設此樑之他端,不加以支持,則卽成一肱樑.故由其擔負所生之彎曲度爲

$$u_P=\frac{P}{EI}\left(\frac{b^3}{3}+\frac{ab^2}{2}\right).$$

設無集中擔負P,則由反作用力R可使其發生彎曲度爲



第42圖

$$u_R=\frac{Rl^3}{3EI}.$$

今因支點與固定點,仍在同水平線上故此兩種彎曲度必相等.即

$$\frac{P}{EI}\left(\frac{b^3}{3}+\frac{ab^2}{2}\right)=\frac{Rl^3}{3EI}.$$

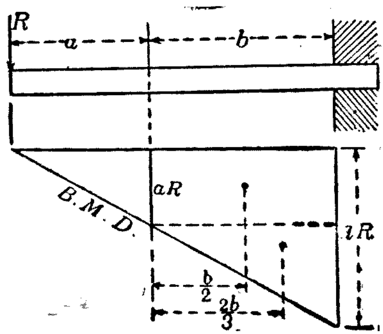
故得 $$R=\frac{Pb^2}{l^3}(b+1.5a).$$

注意由此求得之R,與用力學求得者不同.因在力學中,視一切物體均爲剛體而不能發生彎曲故也.此樑上任意一點之彎曲度卽爲上述兩種彎曲度之差.例如求擔負點之彎曲度可用下式.

$$u=u_1-u_2.$$

惟由第35節, $$u_1=\frac{Pb^3}{3EI}.$$

求u_2可如下法,設一肱樑其自由端有集中擔負R,而



第43圖

求其距自由端 a 處之彎曲度,如第43圖所示,作彎曲力矩圖.由第40節,知

$$u_2=\frac{A_1\bar{x}_1}{EI}.$$

$$A_1=\frac{b}{2}(aR+lR)$$

$$=\frac{bR}{2}(a+l).$$

$$\bar{x}_1=\frac{aR\times b\times\frac{b}{2}+\frac{lR-aR}{2}\times b\times\frac{2b}{3}}{\frac{bR}{2}(a+l)}=\frac{b(a+2l)}{3(a+l)}.$$

故 $$u_2=\frac{1}{EI}\left\{\frac{bR(a+l)}{2}\times\frac{b(a+2l)}{3(a+l)}\right\}=\frac{Rb^2(a+2l)}{6EI}.$$

由是得 $$u=\frac{Pb^3}{3EI}-\frac{Rb^2(a+2l)}{6EI}.$$

設 $a=b=\frac{l}{2}$, 則得 $R=\frac{5}{16}P,\quad M_B=\frac{-3}{16}Pl,\quad M_P=\frac{5}{32}Pl.$

又當 $x=\frac{8}{11}l$ 時, $M=0$, 而擔負點之彎曲度爲

$$u=\frac{7Pl^3}{768EI}$$

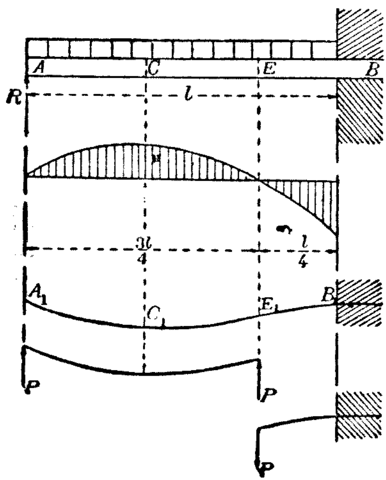
其最大之彎曲度,可用第43節之法求得之.卽以

此樑之彎曲力矩曲線為其分佈擔負,然後求此擔負之切力零點,此點之彎曲度為最大.設 $a=b=\frac{l}{2}$, 則得自支點至最大彎曲度點之距離為 $\frac{l}{\sqrt{5}}$, 而

$$u_{(max)}=\frac{Pl^3}{107EI} \quad (\text{約值})$$

47. 一端固定,支於他端而載有分佈擔負之樑

此樑共長 l 呎,每呎載重 w 磅,如第44圖所示.



第44圖

若此樑不支於其一端,則由擔負所生之彎曲度為

$$u_w=\frac{wl^4}{8EI}.$$

由其反作用力R所生之自由端彎曲度為

$$u_R=\frac{Rl^3}{3EI}$$

今因支點與固定點仍在同一水平線上,故上述之兩種彎曲度相等,即

$$\frac{wl^4}{8EI}=\frac{Rl^3}{3EI}.$$

故得　　$R=\dfrac{3wl}{8}=\dfrac{3W}{8}$.($W=wl=$總擔負)

任取樑上一點,距A為x,則得此點之彎曲力矩為

$$\frac{3wlx}{8}-\frac{wx^2}{2}.$$

此彎曲力矩,當$x=\dfrac{3l}{4}$時為零.在AE之間,最大力矩為當$x=\dfrac{3l}{8}$時,其值為$M_c=\dfrac{9wl^2}{128}$.今可將此樑分為兩種樑,一為固定於B_1點之肱樑B_1E_1,其長為$\dfrac{l}{4}$,一為簡單樑,支於A_1及E_1兩端.B_1E_1上之擔負為一集中擔負$P=\dfrac{3wl}{8}$,及一分佈擔負每呎w磅.故得

E_1點之彎曲度

$$=\frac{\frac{3}{8}wl\left(\frac{l}{4}\right)^3}{3EI}+\frac{\frac{1}{4}wl\left(\frac{l}{4}\right)^3}{8EI}=\frac{5wl^4}{2048EI},$$

C_1在E_1A_1下之彎曲度

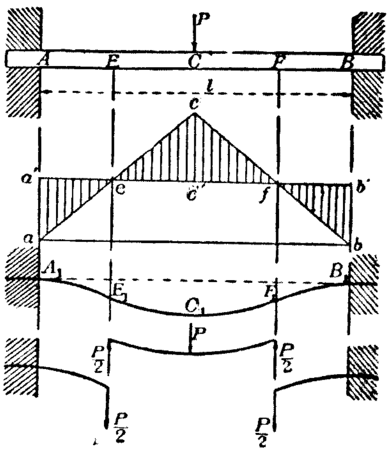
$$=\frac{5\times\frac{3}{4}wl\left(\frac{3l}{4}\right)^3}{384EI}=\frac{135wl^4}{32768EI},$$

故C_1點之總彎曲度

$$=\frac{5wl^4}{2048EI}+\frac{135wl^4}{32768EI}=\frac{Wl^3}{187EI}.\quad（約值）$$

距A點$0.4215\,l$處之彎曲度爲最大,其值爲$\frac{Wl^3}{185EI}$.

48. 固定於兩端,而載有集中擔負於中點之樑



第45圖

作此樑之彎曲力矩圖acb.因樑之固定點斜率爲零,卽仍保持其水平狀態,故此樑之彎曲情形有二種.其中部爲向上彎曲,而其接近固定點部份爲向下彎曲.因此固定點之彎曲力矩不爲零.設aa'爲固定點之彎曲力矩,作$a'b'$交ac及bc於e及f.則第45圖之蔭影面.卽爲樑之實際彎曲力矩圖.

因此樑接近固定端部份爲向下彎曲,故AE爲肱樑,又EF爲支於兩端E,F之簡單樑.

肱樑AE之自由端E之斜率,與簡單樑EF之E端斜率相同,故由第40節,得三角形aea'及cec'爲等面積.又因其爲相似三角形,故得$a'e=c'e$.因全樑爲對稱故此樑分爲四等段,即

$$AE=BF=\frac{l}{4},\quad EF=2EC=\frac{l}{2}.$$

肱樑A_1E_1之長爲$\frac{l}{4}$,其擔負爲$\frac{P}{2}$,故得

$$E_1\text{點之彎曲度}=\frac{\frac{P}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^3}{3EI}=\frac{Pl^3}{348EI}.$$

簡單樑E_1F_1之長爲$\frac{l}{2}$,故得

$$C_1\text{點在}E_1\text{點下之彎曲度}=\frac{P\left(\frac{l}{2}\right)^3}{48EI}=\frac{Pl^3}{384EI}.$$

故此樑中點之彎曲度爲

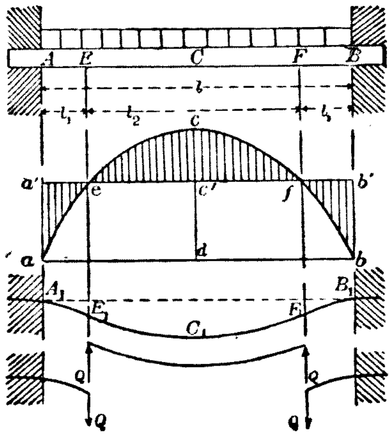
$$u=\frac{Pl^3}{192EI}.$$

固定端之彎曲力矩與中點之彎曲力矩相等,其值爲$M=\frac{Pl}{8}$.較之用一等長之簡單樑時,其力矩祇爲$\frac{1}{2}$.故兩端固定之樑,其強度大於簡單樑者一倍

49. 固定於兩端而載有平均分佈擔負之樑

設長爲l,每呎載重w磅.假定此樑爲支於兩端之簡

單樑,則作其彎曲力矩圖爲一拋物線形 acb(第46圖)其中點 C 之彎曲力矩爲 $dc=\frac{wl^2}{8}$.



第 46 圖

同上節,因此樑之彎曲情形有二,故得此樑之實際彎曲力矩,爲蔭影部份表之.因

$$面積\ a'ae = 面積\ c'ce,$$

故長方形 $adc'a'$ 之面積等於半拋物線形 $aecd$ 之面積.然由第41節,知

$$面積\ aecd = \frac{2}{3}ad \times cd,$$

故得

$$aa' \times ad = \frac{2}{3}ad \times cd.$$

即
$$aa'=\frac{2}{3}cd.$$

$$cc'=cd-aa'=\frac{1}{3}cd.$$

因 $cd=\frac{wl^2}{8}$,故得梁之中點 C 之彎曲力矩爲 $cc'=\frac{wl^2}{24}$. 今視 EF 爲支於 E,F 兩端之簡單梁,其長爲 l_2,則得其中點之力矩爲 $cc'=\frac{wl_2^2}{8}$,故得

$$l_2^2=\frac{l^2}{3},$$

即得 $l_2=\frac{l}{\sqrt{3}}=0.577\,l;\quad l_1=\frac{1}{2}(l-l_2)=\frac{l}{6}(3-\sqrt{3})=0.211\,l.$

肱梁 A_1E_1 之長爲 l_1,其擔負爲 E_1 點之集中擔負 P,而 $P=\frac{1}{2}wl_2=\frac{wl\sqrt{3}}{6}$,及每呎 w 磅之分佈擔負.故得肱梁 A_1E_1 之 E_1 端由集中擔負所生之彎曲度爲

$$\frac{\frac{wl\sqrt{3}}{6}\times l_1^3}{3EI}=\frac{wl^4(9\sqrt{3}-15)}{648\,EI},$$

肱梁 A_1E_1 之 E_1 端由分佈擔負而生之彎曲度爲

$$\frac{w\,l_1^4}{8EI}=\frac{wl^4(7-4\sqrt{3})}{288EI},$$

故肱梁 A_1E_1 之 E_1 端總彎曲度爲

$$\frac{wl^4(9\sqrt{3}-15)}{348EI}+\frac{wl^4(7-4\sqrt{3})}{288EI}=\frac{wl^4}{864EI}.$$

簡單樑E_1F_1之長爲$l_2=\frac{l\sqrt{3}}{3}$,載有每呎w磅之平均分佈擔負,故其中點之彎曲度爲

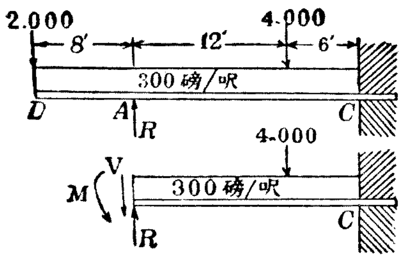
$$\frac{5wl_2^4}{384EI}=\frac{5wl^4}{3456EI}.$$

故全樑中點C之彎曲度爲

$$u=\frac{wl^4}{864EI}+\frac{5wl^4}{3456EI}=\frac{Wl^3}{384EI}\quad(W=wl=\text{總擔負})$$

此樑之強度,較用簡單樑時,可大三倍,因其最大彎曲力矩,祇爲簡單樑之三分之一.

〔例題〕 求第47圖之樑之支持力R.



第47圖

〔解〕 假設以AC爲一肱樑,固定於C端.DA部代以相等之切力4,400磅,及一逆時針方向之彎曲力矩M=25,600呎磅,則由R所生之彎曲度,等於由切力,力

矩,集中擔負4,000磅及分佈擔負所生之彎曲度之和.即

$$\frac{R\times 18^3}{3EI}=\frac{4,400\times 18^3}{3EI}+\frac{25,600\times 18^2}{2EI}$$
$$+\frac{4,000\times 36\times 16}{2EI}+\frac{300\times 18^4}{8EI}.$$

故得
$$R=9151\text{ 磅}.$$

習題十二

1. 長10呎,寬2吋,厚12吋之木樑,一端固定而支於他端.設其載有每呎400磅之分佈擔負.若$E=1,500,000$磅/平方吋,求其最大彎曲度.

2. 長20呎,直徑3吋之鋼軸,固定於兩端.設$E=30,000,000$磅/平方吋,求由其重量所生之最大應力及其中點之彎曲度.

3. 長20呎,寬6吋,厚10吋之木樑,其兩端固定而其中點載有集中擔負1,500磅.求由其擔負所生之最大應力及其中點之彎曲度.

4. 長18呎之樑,一端固定而支於另一端.距支點3呎及10呎處,各有集中擔負2,000磅及3,000磅.設全樑再載有平均分佈擔負每呎240磅,求支點之反應力.

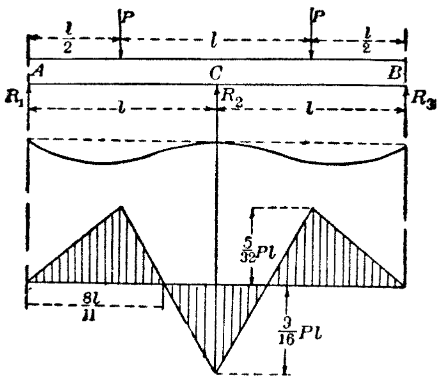
5. 解上述之例題,設支點向左移動2呎.

6. 作載有平均分佈擔負而固定於兩端之樑之彎曲力矩公式.

50. 支於兩端及中點而載有相等之集中擔負於跨度中點之樑　第48圖即為此樑.跨度為l,集中擔負P加於跨度之中點,距其支點為$\frac{l}{2}$.

設此樑不支於中點,則由第44節,可得其中點之彎曲度爲

$$\frac{11Pl^3}{48EI}.$$



第48圖

設將其擔負撤去,而於其中點C加一向上之集中擔負R_2,此時命二端之支持方向向下,則得此樑之向上彎曲度爲

$$\frac{R_2(2l)^3}{4\cdot EI}=\frac{R_2l^3}{6EI}.$$

今因此樑支於中點,故其中點無彎曲度.即上述之兩種彎曲度相等,故得

$$\frac{11Pl^3}{48EI}=\frac{R_2l^3}{6EI}.$$

由是得　　$R_2=\frac{11P}{8},\ R_1=R_3=\frac{5P}{16}.$

此樑在 $x=0$ 至 $x=\frac{l}{2}$ 時之彎曲力矩方程式爲

$$M=\frac{5Px}{32}.$$

又 $x=\frac{l}{2}$ 至 $x=l$ 時之彎曲力矩方程式爲

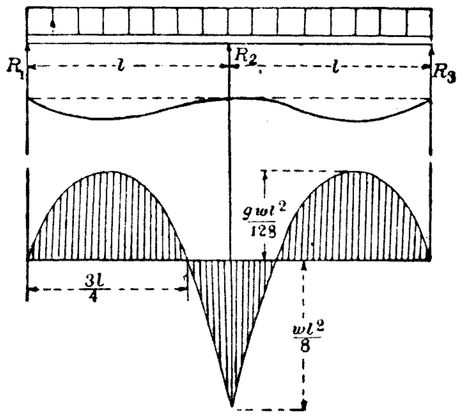
$$M=\frac{5Px}{32}-P\left(x-\frac{l}{2}\right).$$

故得此樑之中點彎曲力矩爲 $-\frac{3Pl}{16}$，當 $x=\frac{8l}{11}$ 時，則力矩爲零.由彎曲力矩圖及彈性曲線圖，可知此樑實無異於相背之二肱樑，支於 A,B 兩端而固定於 C 點.故每跨度之任意點力矩，應力及彎曲度等，可應用第46節之樑，以解決之.

51. 支於兩端及中點而載有平均分佈擔負之樑　第49圖卽示此樑.其跨度各爲 l，分佈擔負爲每單位長度 w 磅.

設此樑不支於中點，則得其向下之彎曲度爲

$$\frac{5w(2l)^4}{384EI}=\frac{5wl^4}{24EI}.$$



第49圖

今設將其擔負撤去,而於其中點加一向上之集中擔負R_2,此時假定兩端之支持方向向下,則得此樑之向上彎曲度爲

$$\frac{R_2(2l)^3}{48EI}=\frac{R_2l^3}{6EI}.$$

今因此樑支於中點,故其中點無彎曲度,卽上述之兩種彎曲度相等.故得

$$\frac{5wl^4}{24EI}=\frac{R_2l^3}{6EI}.$$

由是得 $$R_2=\frac{5wl}{4},\quad R_1=R_3=\frac{3wl}{8}.$$

此樑每跨度之彎曲力矩方程式爲

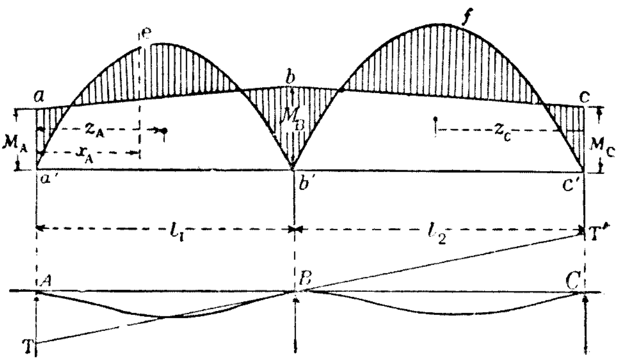
$$M=\frac{3wlx}{8}-\frac{wx^2}{2}.$$

故得其中點之力矩爲$-\frac{wl^2}{8}$. 當 $x=\frac{3l}{4}$時, 力矩爲零.

由彎曲力矩圖及彈性曲線圖,可知此樑實無異於相背之二肱樑,支於A,B兩端,而固定於中點C. 故每跨度上任意一點之彎曲力矩,應力及彎曲度等,均可用第47節所述之樑以解決之.

上述二種樑,即爲最簡單之連續樑.

52. 連續樑之三力矩定理　支於三點或三點以上之樑,謂之連續樑.除上述二節之簡單連續樑外,吾人今更就其較繁複者而討論之.



第50圖

第50圖所示,爲連續中間相鄰接之二跨度.跨度

l_1 上,載有平均分佈擔負每呎 w_1 磅.跨度 l_2 上,載有平均分佈擔負每呎 w_2 磅.

以 $a'eb'$ 及 $b'fc'$ 爲當 AB 及 BC 爲二簡單樑而支於其端時之彎曲力矩.然因此樑爲連續樑之一部,故各支點上有彎曲力矩 M_A, M_B, M_C, 惟其量爲未知.今假定其爲已知,使 $a'a=M_A$, $b'b=M_B$, $c'c=M_C$. 更假定跨度 AB 之彎曲力矩,由 A 點之左增至 B 點之右,故跨度 AB 上各點之彎曲力矩,以蔭影面 $a'eb'ba$ 表之,而以 ab 爲此圖之底線.

以 a_1=彎曲力矩 $a'eb'$ 之面積,

z_A 爲面積 $a'eb'$ 之重心點,距 A 之水平距離,

x_A 爲面積 $a'eb'ba$ 之重心點距 A 之水平距離.

又以 a_2=彎曲力矩 $b'fc'$ 之面積,

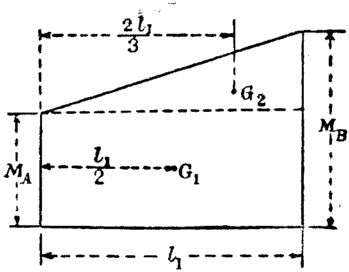
z_C 爲面積 $b'fc'$ 之重心點距 C 之水平距離,

x_C 爲面積 $b'fcc'b$ 之重心點距 C 之水平距離.

蔭影面積在底線上者爲正,在底線下者爲負.再以 S_1 爲第一跨度之彎曲力矩有效面積,即上述底線上下之正負面積之代數和,今設以各蔭影面積爲各跨度上之分佈擔負圖,作樑彎曲後 B 點之切線,而交 A, C 之垂直引長線於 T 及 T', 則得

$AT=S_1x_A \div EI.$

將 $a'b'ba$ 分為長方形及三角形如第51圖所示,G_1為長方形之重心點,G_2為三角形之重心點,則得



第51圖

$$S_1x_A=a_1z_A+l_1M_A\times\frac{l_1}{2}+\frac{l_1}{2}(M_B-M_A)\times\frac{2l_1}{3}$$

$$=a_1z_A+\frac{1}{6}l_1^2M_A+\frac{1}{3}l_1^2M_B,$$

注意上式之a_1,與M_A,M_B之符號相反.故得

$$AT=\frac{1}{EI}\left(a_1z_A+\frac{1}{6}l_1^2M_A+\frac{1}{3}l_1^2M_B\right).$$

同理　$$CT'=\frac{1}{EI}\left(a_2z_C+\frac{1}{6}l_2^2M_C+\frac{1}{3}l_2^2M_B\right).$$

今因A,B,C三點仍在同一水平面上,則

$$\frac{AT}{l_1}=\frac{CT'}{l_2}.$$

故得 $$\frac{a_1z_A}{l_1}+\frac{a_2z_C}{l_2}+\frac{1}{6}l_1M_A+\frac{1}{3}(l_1+l_2)M_B+\frac{1}{6}l_2M_C=0.$$

此式卽為連續之三力矩定理,表示各鄰接三支點上之力矩關係.惟

$$a_1=\frac{2}{3}\times\frac{w_1 l_1^2}{8}\times l_1=\frac{w_1 l_1^3}{12},\quad z_A=\frac{l_1}{2},$$

$$a_2=\frac{2}{3}\times\frac{w_2 l_2^2}{8}\times l_2=\frac{w_2 l_2^3}{12},\quad z_C=\frac{l_2}{2},$$

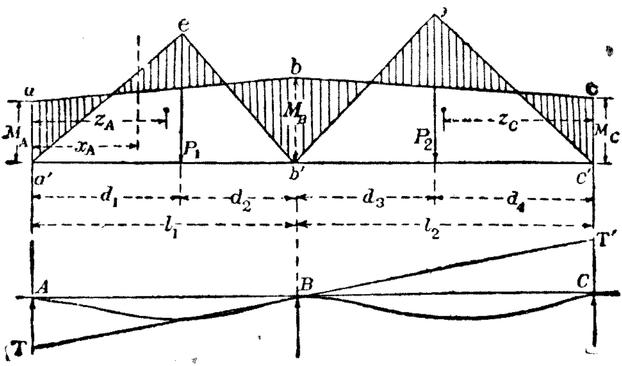
代入上式,則得三力矩定理之式爲

$$\frac{w_1 l_1^3}{4}+\frac{w_2 l_2^3}{4}+l_1 M_A+2(l_1+l_2)M_B+l_2 M_C=0.$$

設此連續樑之跨度長相等,每跨度之分佈擔負亦等,則上式更可簡化爲

$$M_A+4M_B+M_C=\frac{-wl^2}{2}.$$

設連續樑之擔負爲集中擔負如下圖,則亦可得三力矩定理.用上述之各種記號,以代其相當之數量,則得



第52圖

$$a_1=\frac{l_1}{2}\times\frac{P_1d_1d_2}{l_1}=\frac{P_1d_1d_2}{2},\qquad z_A=\frac{l_1}{2}.$$

又 $$a_2=\frac{l_2}{2}\times\frac{P_2d_3d_4}{l_2}=\frac{P_2d_3d_4}{2},\qquad z_C=\frac{l_2}{2}.$$

以之代入三力矩定理之方程式中,則得

$$\frac{P_1d_1d_2}{4}+\frac{P_2d_3d_4}{4}+\frac{1}{6}l_1M_A+\frac{1}{3}(l_1+l_2)M_B+\frac{1}{6}l_2M_C=0.$$

設此連續樑之各跨度長爲相等,其集中擔負亦相等,且加於各跨度之中點,則上式可簡化如下:

$$M_A+4M_B+M_C=\frac{-3Pl}{4}.$$

53. 支點之力矩及反應力 由上節所述之三力矩定理,吾人可易於求得各支點之彎曲力矩.如連續樑之支點有 n 個,則可得 $(n-2)$ 個方程式.此 $(n-2)$ 個方程式,雖祇能解得 $(n-2)$ 個之値,然其餘兩値,亦易求得.設末端亦爲支持,則此兩端之力矩爲零.設支於其端之內,則以該支點外部份爲自由體,可由靜力學求得該支點之力矩.設兩端爲固定,則可用兩端固定之樑之解法,以求得此兩端之力矩.由是可知雖吾人由三力矩定理所得之結果少於所求之結果數爲二,此二個結果亦能求得之.

以任意一端之跨度爲自由體,可求得第一支點

之反應力,然後以兩個跨度爲自由體,可求得第二支點之反應力………照此類推,可得各支點之反應力.

〔例題1〕 長30呎之連續樑,支於兩端及每長10呎處.此樑每跨度載有平均分佈擔負每呎200磅.求支點之力矩及反應力.

〔解〕 $$M_1=M_4=0,$$

$$4M_2+M_3=-\frac{200\times10^2}{2}=-10,000,$$

$$M_2+4M_3=-\frac{200\times10^2}{2}=-10,000.$$

故解得 $$M_2=-2,000\text{ 呎磅},$$

$$M_3=-2,000\text{ 呎磅}.$$

因此樑成對稱,故得

$$R_1=R_4,\quad R_2=R_3.$$

取左邊第一跨度爲自由體,截面適在R_2之左,則由$\Sigma M=0$,得

$$10R_1+2,000=2,000\times5,$$

故得 $$R_1=800\text{ 磅},$$

又 $$R_4=800\text{ 磅}.$$

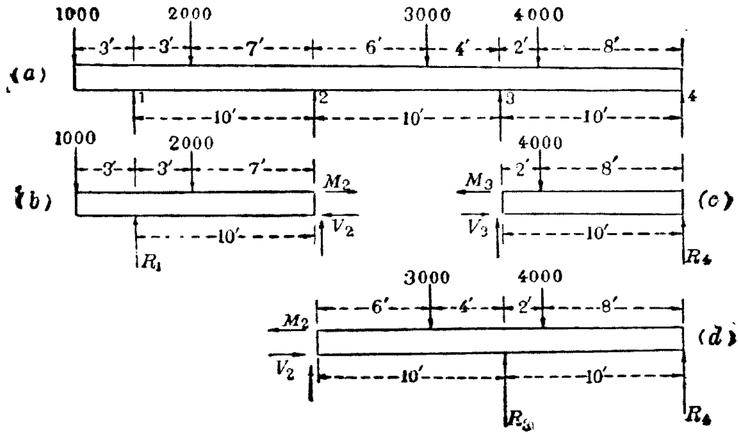
由$\Sigma F_y=0$,即

$$R_2+R_3+1600=6,000.$$

故得　　$R_2=2,200$ 磅,

$R_3=2,200$ 磅.

〔例題2〕　求第53圖梁之支點力矩及反應力.



第53圖

〔解〕　　$M_1=-3,000$ 呎磅.　$M_2=0$.

$$-3,000+4M_2+M_3=-20(1,400-1,470+343)$$
$$-30(1,200-1,080+216),$$

$$M_2+4M_3=-30(800-480+64)-40(400-120+8).$$

解上列之聯立方程式,得

$M_2=-1,808$ 呎磅;　$M_3=-5,308$ 呎磅.

以第一跨度及伸出部爲自由體〔第53圖 (b)〕,得

$$10R_1+1,808=13,000+14,000,$$

故 $$R_1=2,519\text{ 磅}.$$

取右端跨度爲自由體〔第53(c)圖〕,則得

$$10R_4+5,308=8,000,$$

故 $$R_4=269\text{ 磅}.$$

取第二及第三兩跨度爲自由體〔第53圖(d)〕,則得

$$10R_3+5,380+1,808=18,000+48,000.$$

故 $$R_3=5,881\text{ 磅}.$$

由 $\Sigma F_y=0$, $$R_2=1,331\text{ 磅}.$$

習題十三

1. 長30呎,截面7吋之木樑,支於中點及兩端.此樑距其兩端10呎處,各有一集中擔負1,200磅.求其由擔負所生之最大應力.

2. 長40呎之連續樑,支於兩端及每長10呎處.各跨度載有每呎200磅之分佈擔負,求其支點之力矩及反應力.

3. 長100呎之木樑,其五個跨度各爲20呎.設此樑所載之分佈擔負爲每呎1,000磅,求其支點之力矩及反應力.

4. 上題,設樑之兩端固定,求支點之力矩.

5. 長36呎之木樑,支於兩端及每長12呎處.每跨度中點有一集中擔負1,000磅,求支點之力矩及反應力.

6. 長20呎之樑,支於兩端及中點,距左端4呎,有一集中擔負8,000磅.距右端8呎,有一集中擔負3,000磅.求支點之反應力.

第 六 章

柱

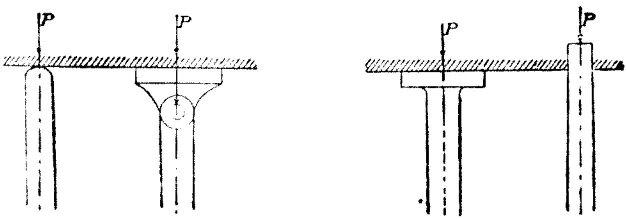
54. 柱(Columns)　一棒受張力之作用時,則除發生引長以外,並無其他應變.若受壓力作用,則當棒之截面積,與其長度相差太大時,同時亦發生彎曲現象.故其應力,不能以P/A之比表之.受壓力之長棒,亦謂之**撐**(Struts).

設l為柱長,r為其截面之**最小迴轉半徑**(Least radius of Gyration),則l/r之比,謂之柱之**徑長比**(Slenderness Ratio).

柱之徑長比在30以下,不謂之柱,惟在柱之分類上,簡稱曰**短柱**(Short Block or Peir).徑長比在30與150之間之柱,常用之於房屋,橋樑及其他建築物上.徑長比在150以上之長柱,祇有用之於機械部份者.

55. 柱端狀況　柱之強度,由其彎曲而定.除徑長比影響強度之外,其兩端之狀況如何,足以影響其

彎曲度之大小.由是其強度之大小,與其端之狀況,亦有重大關係.

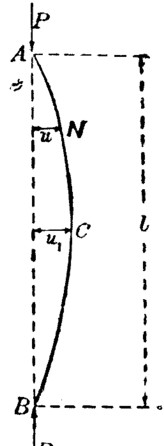


第54圖

柱端之狀況,可分爲三類:(1)兩端可滑動者,(此時柱之軸線,對於此端可自由傾斜.)此類柱端,謂之**附着端**(Rounded or Hinged Ends),如54圖(a)所示;(2)兩端固定者,則謂之**固着端**(Fixed or Flat Ends),如(b)圖是;(3)一端附着一端固着者.

故對於徑長比有定值之柱,使其兩端附着,則易於發生彎曲,若兩端爲固着則不易發生彎曲.

56. 長柱之近似理論 設有徑長比甚大之長柱 ACB(第55圖),當其不載擔負時爲完全豎直.此柱之徑長比及彈性爲均勻.若其兩端爲附着,則擔負 P 之作用線,合於柱未受擔負時之軸.



第55圖

在柱上任意一點N,其彎曲度爲u,則此點之彎曲力矩爲Pu.曲線ACB即爲柱之彎曲力矩圖.此曲線不能爲一圓弧,因其彎曲力矩不爲常數故也.若吾人假定ACB爲一拋物線,則柱之彎曲度適與第38節之樑之彎曲度同.即

$$u_1=\frac{5Wl^3}{384EI}.$$

樑中點之彎曲力矩爲 $M=\dfrac{Wl}{8}$,代入上式,則得

$$u_1=\frac{5Ml^2}{48EI}.$$

惟就柱而論,$M=Pu_1$,故代入上式,可得

$$u_1=\frac{5Pu_1l^2}{48EI},$$

即
$$P=\frac{48EI}{5l^2}=\frac{9.6EI}{l^2}.$$

此與理論上著名之瓦勒(Euler's)* 柱式相近似,其值爲

$$P=\frac{\pi^2EI}{l^2}=\frac{9.87EI}{l^2}.$$

57. 各種柱端之推論　瓦勒柱式

* 瓦勒柱式,須用微分方程求得,本書不贅述.

$$P=\frac{\pi^2EI}{l^2}$$

乃限於柱之兩端可自由傾側者,即兩端均為附着.擔負P,謂之**彎曲擔頁**(Buckling Load),設I以Ar^2表之,則得

$$\frac{P}{A}=\frac{\pi^2E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}.$$

上式之$\frac{P}{A}$非單位應力,而名為**單位擔頁**(Unit Load).若將擔負略為增加,則柱之彎曲度增加甚大.柱表皮之應力,隨彎曲度之增加而增加,故當其增至柱料之屈服點時,即不增加擔負,而柱亦為之壓折.故彎曲擔負,為柱之最大可容擔負,亦稱**壓折擔頁**.

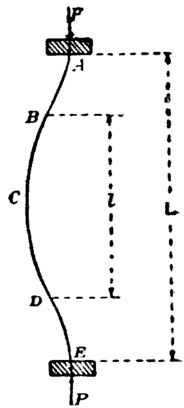
普通柱之安全因數,約為2至3.因柱料表皮之最大應力,為當其達屈服點之時,故其安全因數較其受張力時為小

設柱之兩端為固定,如第56圖所示,則當其受擔負P之作用而發生彎曲後,其固定端,即A,E兩端之切線,仍為垂直.由柱之對稱,知其中點C之切線,亦為垂直.

由A端至B,柱凹向左而彎曲,其曲率由A起漸

減至B而爲零.由B至C,柱凹向右而彎曲,其曲率由B起漸增而至C爲最大,與A點爲同值,惟方向相反.自E至D,與自A至B同.由是知$l=\frac{1}{2}L$.

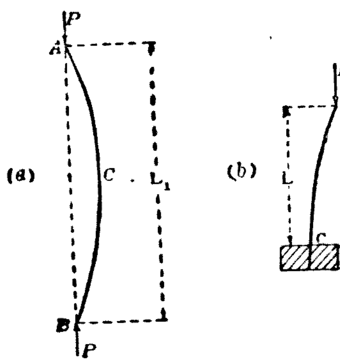
因B,D兩點之彎曲力矩爲零,故祇長l之柱BD爲與附着端之柱同,其彎曲擔負爲



第56圖

$$P=\frac{\pi^2EI}{l^2}=\frac{4\pi^2EI}{L^2}.$$

設柱之一端附着,一端固着,如第57圖(b).(a)爲兩端附着之柱,彎曲後,其中點C之切線爲垂直.(b)圖固着點之切線亦爲垂直,此兩柱之彎曲度相同,故可知$L=\frac{1}{2}L_1$,故得其彎曲擔負爲



第57圖

$$P=\frac{\pi^2EI}{L_1{}^2}=\frac{\pi^2EI}{4L^2}.$$

〔例題1〕　長12呎,其截面爲2吋×4吋之木柱,兩端爲附着.設E爲1,500,000磅/平方吋,求其彎曲擔

負.

〔解〕 $$I=\frac{1}{12}\times 4\times 2^3=\frac{8}{3}(\text{吋})^4,$$

故 $$P=\frac{\pi^2\times 1{,}500{,}000\times\frac{8}{3}}{(12\times 12)^2}=1{,}900\text{磅}.$$

〔例題2〕 長16呎,截面4吋平方之木柱,其安全因數爲2.5.若$E=1{,}500{,}000$磅/平方吋,求其擔負.

〔解〕 $$I=\frac{1}{12}\times 4\times 4^3=\frac{64}{3}(\text{吋})^4,$$

故 $$P=\frac{\pi^2\times 1{,}500{,}000\times\frac{64}{3}}{2.5\times(16\times 12)^2}=7{,}430\text{磅}.$$

習題十四

1. 長5呎,直徑1吋之鋼柱,其兩端爲附着.設$E=29{,}000{,}000$磅/平方吋,求其彎曲擔負.

2. 長50吋,截面爲0.34吋×0.62吋之木柱,其兩端爲附着.設$E=2{,}100{,}000$磅/平方吋,求彎曲擔負.

3. 長4吋,直徑$\frac{1}{2}$吋,兩端固着之鋼柱,若E爲30,000,000磅/平方吋,求其最大擔負.

4. 外直徑1吋,內直徑$\frac{3}{4}$吋,長8呎之鋼管,用作一柱時,其安全因數爲2.25.若$E=29{,}000{,}000$磅/平方吋,求其安全擔負.

5. 長6呎,直徑1吋之鋼柱,其安全因數爲2.25.設$E=29{,}000{,}000$磅/平方吋,求其安全擔負.

6. 長3呎,兩端附着之鋼柱,當其載有500磅擔負時之安全

因數爲2.5. 設$E=29,000,000$磅/平方吋,求其直徑.

7. 長30呎,兩端附着之木柱,當其載有2,000磅擔負時之安全因數爲3. 設$E=1,200,000$磅/平方吋,求柱之直徑.

8. 長40吋,寬1吋,厚$\frac{1}{10}$吋之鋼條,用繩將其端彎成弓狀.若弓中點之彎曲度爲2吋,而E爲29,000,000磅/平方吋時,求繩之張力.

58. 朗金-哥爾同之柱式 柱之徑長比在150以下,則瓦勒公式,不能合用.各種實際上使用之柱,其徑長比常在50至150之間,故計算柱之強度,須另用方法.朗金-哥爾同(Rankine-Gordon)柱式,爲計算柱強度之式,雖此式不能與理論一致,然合於各種材料之試驗,故廣被採用.

設有兩端附着之柱,其中點之彎曲度爲u,則得柱之單位應力,應以下式表之,卽直接應力與由彎曲所生之應力之和.

$$S=\frac{P}{A}+\frac{My}{I}=\frac{P}{A}+\frac{Puy}{I}.$$

因$I=Ar^2$,故代入上式,其結果爲

$$S=\frac{P}{A}\left(1+\frac{uy}{r^2}\right).$$

因柱與樑爲同類,所不同者爲擔負而已,故得uy與柱長l之平方成正比例,卽以

$$uy = al^2,$$

則得
$$S = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{al^2}{r^2}\right).$$

即
$$\frac{P}{A} = \frac{S}{1 + a\left(\frac{l}{r}\right)^2}.$$

上式之S爲最大壓縮應力,P爲彎曲擔負.S及a值,因不同之材料及不同之柱端狀況而異.下表示用各種材料爲柱時之S及a值.

材料	S 磅/(吋)^2	a		
		兩端固着	兩端附着	一端附着
生鐵	80,000	$\frac{1}{6,400}$	$\frac{1}{1,600}$	$\frac{1}{3,600}$
熟鐵	36,000	$\frac{1}{36,000}$	$\frac{1}{9,000}$	$\frac{1}{20,250}$
軟鋼	47,000	$\frac{1}{30,000}$	$\frac{1}{7,500}$	$\frac{1}{16,875}$
硬鋼	70,000	$\frac{1}{20,000}$	$\frac{1}{5,000}$	$\frac{1}{8,890}$
乾燥木材	7,200	$\frac{1}{3,000}$	$\frac{1}{750}$	$\frac{1}{1,687}$

〔例題〕 長9呎,截面爲8吋×6吋之木柱,其兩端爲活動附着.若其安全單位應力爲900磅/平方吋,求

安全擔負.

〔解〕 最小轉動慣量 $I=\frac{1}{12}\times 8\times 6^3=144$ (吋)^4.

柱之截面積 $A=8\times 6=48$ 平方吋.

故得 $$r^2=\frac{I}{A}=\frac{144}{48}=3\ (\text{吋})^2.$$

由是 $$P=\frac{900\times 48}{1+\frac{1\times(9\times 12)^2}{750\times 3}}=7{,}000\ \text{磅}.$$

習題十五

1. 長 20 呎,外直徑 8 吋,內直徑 6 吋之生鐵柱,其兩端為附着.求其彎曲擔負.

2. 由朗金-哥爾同公式,若生鐵柱及軟鋼柱之截面積及強度均為相等,兩柱之端均為附着,求其徑長比.

3. 釘於兩端之鋼撐,若其長為 120 吋,擔負為 20 噸,安全因數為 7, S 為 30 噸/平方吋時,求此撐之直徑.

4. 長 18 呎之鋼柱,其截面為圓形.設其擔負為 1 0,000 磅, S 為 18,000 磅/平方吋, $a=\frac{1}{18,000}$, 求此柱之直徑.

5. 長 20 呎之生鐵空圓柱,兩端固定,其安全擔負為 50 噸,而安全因數為 6.若外直徑為 8 吋,求其內直徑.

附　錄

一　材料重量（單位磅/立方呎）及比重表

材料名稱	重量	比重	材料名稱	重量	比重
木材	36	0.58	生鐵	450	7.20
磚	125	2.00	熟鐵	480	7.68
沙石	140	2.24	鋼	490	7.84
混凝土	150	2.40	銅	556	8.90
石灰石	160	2.56	黃銅	535	8.55
花岡石	165	2.64	鋁	165	2.64

二　材料最大應力表（磅/立方吋）

材料名稱	張力	壓力	切力
松木	8,200	7,300	1,170
杉木	6,400	5,700	800
混凝土	……	2,500	……
鋁	25,000	……	13,500
黃銅	28,000	11,000	22,400
銅	35,000	……	……
生鐵	20,000	80,000	27,000
熟鐵	50,000	50,000	40,000
建築鋼	65,000	65,000	55,000
硬鋼	150,000	150,000	……

三 彈性係數表(磅/立方吋)

材料名稱	縱彈性係數 E	橫彈性係數 C
松木	1,400,000	550,000
杉木	1,000,000	500,000
混凝土	2,000,000	....
鋁	11,000,000	4,000,000
黄銅	14,000,000	4,800,000
銅	15,000,000	6,400,000
生鐵	15,000,000	6,000,000
熟鐵	27,000,000	10,000,000
建築鋼	29,000,000	12,000,000
硬鋼	30,000,000	12,000,000

四 單位換算表

1. 由英制化米制:

1 吋 = 2.54 厘米

1 平方吋 = 6.4514 平方厘米

1 立方吋 = 16.386 立方厘米

1 呎 = 0.305 米

1 平方呎 = 0.0929 平方米

1 立方呎 = 0.0283 立方米

1 磅 = 0.454 仟克

1 磅/呎 = 1.4882 仟克/米

1 磅/立方呎 = 16.0196 仟克/立方米

1 磅/平方吋 = 0.0703 仟克/平方厘米.

2. 由米制化英制:

1 厘米 = 0.3937 吋.

1 平方厘米 = 0.155 平方吋

1 立方厘米 = 0.061 立方吋

1 米 = 3.2809 呎

1 平方米 = 10.7643 平方呎

1 立方米 = 35.3166 立方呎

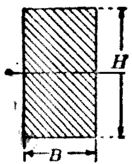
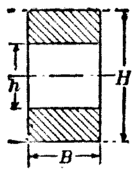
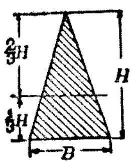
1 仟克 = 2.205 磅

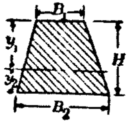
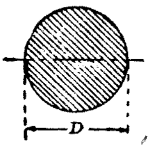
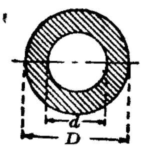
1 仟克/米 = 0.672 磅/呎.

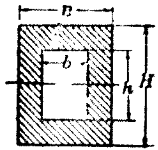
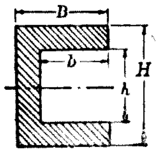
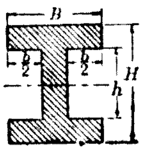
1 仟克/立方米 = 0.0624 磅/立方呎.

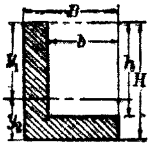
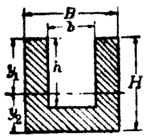
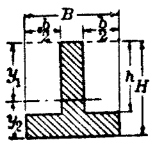
1 仟克/平方厘米 = 14.223 磅/平方吋

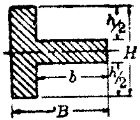
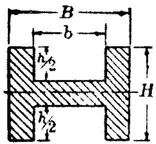
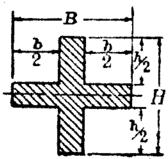
五. 轉動慣量及截面係數表

截面形狀	截面積	轉動慣量 I.	截面係數 Z
	BH	$\dfrac{BH^3}{12}$	$\dfrac{BH^2}{6}$
	$B(H-h)$	$\dfrac{B(H^3-h^3)}{12}$	$\dfrac{B(H^3-h^3)}{6H}$
	$\dfrac{BH}{2}$	$\dfrac{BH^3}{36}$	$\dfrac{I}{y_1}=\dfrac{BH^2}{24}$, $\dfrac{I}{y_2}=\dfrac{BH^2}{12}$

	$\frac{(B_1+B_2)H}{2}$	$\frac{(B_1^2+4B_1B_2+B_2^2)H^3}{36(B_1+B_2)}$	$\frac{I}{y_1}=\frac{(B_1^2+4B_1B_2+B_2^2)H^2}{12(2B_1+B_2)}$ $\frac{I}{y_2}=\frac{(B_1^2+4B_1B_2+B_2^2)H^2}{12(B_1+2B_2)}$
	$\frac{\pi D^2}{4}$	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^3}{32}$
	$\frac{\pi(D^2-d^2)}{4}$	$\frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$	$\frac{\pi(D^4-d^4)}{32D}$

			
	$BH-bh$	$\frac{BH^3-bh^3}{12}$	$\frac{BH^3-bh^3}{6H}$
			

<table>
<tr><td>
</td><td rowspan="3">$BH-bh$</td><td rowspan="3">$$\frac{(BH^2-bh^2)^2-4BHbh(H-h)^2}{12(BH-bh)}$$</td><td rowspan="3">$$\frac{I}{y_1}=\frac{(BH^2-bh^2)^2-4BHdh(H-h)^2}{6(BH^2-bh^2)}$$ $$\frac{I}{y_2}=\frac{(BH^2-bh^2)^2-4BHbh(H-h)^2}{6(BH^2-2bhH+bh^2)}$$</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

	$BH-bh$	$\dfrac{(B-b)H^3+b(H-h)^3}{12}$	$\dfrac{(B-b)H^3+b(H-h)^3}{6H}$
			
			

習題答案

習 題 一

1. $d=0.958$ 吋.

2. $S=22,282$ 磅/平方吋; $e=0.4456$ 吋; $\delta=0.000743$; $U=24.95$ 吋磅.

3. $P=75,750$ 磅; $S_1=29,000$ 磅/平方吋; $S_2=27,000$ 磅/平方吋.

4. $d=6.33$ 吋.

5. 1.9994 吋 ×0.9997 吋 ×12.012 吋.

6. $U=230.5$ 吋磅; $U=8.1$ 吋磅.

7. $e=0.1055$ 吋.

8. 3600 呎.

9. 3.82.

10. $\frac{5}{8}$ 吋.

習 題 二

1. $P=55,000$ 磅.

2. 21,650 磅/平方吋; 24,620 磅/平方吋; 25,000 磅/平方吋; 24,620 磅/平方吋.

3. $S=35,110$ 磅/平方吋.

習 題 三

1. $P=3,530$ 磅.

2. $S_t=6,670$ 磅/平方吋; $S_t=10,310$ 磅/平方吋; $S_s=$ [illegible] 000 磅/平方吋; $S_c=12,730$ 磅/平方吋.

3. $S_c=11,170$ 磅/平方吋; $S_t=3,810$ 磅/平方吋.

4. 用壹隻鉚釘時,釘之直徑用 $1\frac{1}{8}$ 吋;板厚用 $\frac{3}{8}$ 吋,板寬用 $2\frac{5}{8}$ 吋
用兩隻鉚釘時,釘之直徑用 $\frac{3}{4}$ 吋;板厚用 $\frac{9}{32}$ 吋;板寬用 $2\frac{3}{4}$ 吋

5. 釘之直徑爲 $\frac{4}{3}$ 吋;板寬 $5\frac{1}{2}$ 吋,厚 $\frac{11}{16}$ 吋;蓋板厚 $\frac{7}{16}$ 吋.

習 題 四

1. $t=0.0125$ 吋。 2. $d=15$ 吋。

3. $t=1.25$ 吋。 4. $S=11,940$ 磅/平方吋。

5. $d=1.97$ 吋。 6. $d=5.84$ 吋。

7. $P=3040$ 磅; $S_s=46,500$ 磅/平方吋。

8. 20 圈。

習 題 五

1. $x=0$ 至 $x=5$ 呎， $V=-100x$.

   $x=5$ 至 $x=10$ 呎， $V=2000-500x$.

2. $x=0$ 至 $x=5$ 呎， $V=-500x$.

   $x=5$ 至 $x=10$ 呎， $V=-2000-100x$.

3. $x=0$ 至 $x=15$ 呎， $V=5600-500x$

   $x=15$ 至 $x=20$ 呎， $V=3200-500x$.

   $x=11.2$ 呎， $V=0$.

4. $x=4\sqrt{2}$ 呎，$V=0$. $V=2\,00-\frac{1000x^2}{24}$.

習 題 六

1. $M_3=-3600$ 呎磅； $M_6=-14,400$ 呎磅。

2. $M_8=-36,000$ 呎磅.

   $x=0$ 至 $x=3$ 呎， $M=-2000x$.

   $x=3$ 至 $x=8$ 呎， $M=12,000-6000x$.

3. $M_{12}=20,000$ 呎磅； $M_{20}=33,333$ 呎磅.

4. $M=4575$ 呎磅.

5. $x=0$ 至 $x=5$ 呎， $M=1510x-50x^2$

   $x=5$ 至 $x=20$ 呎， $M=5000+510x-50x^2$.

   $x=20$ 至 $x=24$ 呎， $M=-52,800+3400x-50x^2$

6. $M=-2890$ 呎磅. 7. $M=450,000$ 呎磅.

8. $x=0$ 至 $x=4$ 呎， $M=1575x$.

   $x=4$ 至 $x=34$ 呎. $M=1575x-50(x-4)^2$

   $x=34$ 至 $x=40$ 呎， $M=3000\times19-1425x$.

$M_{(max)}=18073$ 呎磅.

習 題 七

1. $S=960$ 磅/平方吋.　　2. $S=1200$ 磅/平方吋.

3. $S=19550$ 磅/平方吋.

4. $S=864$ 磅/平方吋; $P=700$ 磅.

5. 4.325 吋 ×8.65 吋.　　6. 2.75 吋 ×11 吋.

7. 5.29 吋; 1 : 1.92.　　8. 27.2 (吋)^3; 45.33 (吋)^3.

9. 28,440 磅/平方吋.　　10. 6,200 磅/平方吋.

11. 5,500 磅.　　12. 3,960 磅/平方吋.

習 題 八

1. 2.5 吋; 10 吋,　　2. 2 吋; 4 吋.

3. 4.47 吋; 10 吋.　　4. 90,000 磅/平方吋.

5. 4 吋.　　6. 2.33 吋; 2.78 吋, 3 吋; 3.07 吋.

習 題 九

1. $S_w=1,055$ 磅/平方吋;　$S_s=10,070$ 磅/平方吋.

2. $S_w=703$ 磅/平方吋.　$S_s=14,060$ 磅/平方吋.

3. 0.418; 0.402; 0.384.

4. $S_c=31.4$ 磅/平方吋;　$S_s=705$ 磅/平方吋; $P=1,220$ 磅.

習 題 十

1. $u=0.518$ 吋; $R=278$ 呎.　　2. $P=96$ 磅.

3. $u=0.117$ 吋.　　4. $u=8.41$ 吋.

5. $u=1.458$ 吋.　　6. $u=0.246$ 吋.

7. $u=0.725$ 吋.　　8. $w=139$ 磅/呎.

習 題 十 一

1. $u=1.296$ 吋.　　2. $u=0.094$ 吋

3. $u=0.1377$ 吋.　　4. $u=0.5193$ 吋.

5. $u_{(max)}=0.5193$ 吋.　　6. $u=0.367$ 吋.

7. $u=0.552$ 吋．　8. $u=0.811$ 吋．

習題十二

1. $u=0.087$ 吋．
2. $S=3,620$ 磅/平方吋；　$u=0.145$ 吋．
3. $S=450$ 磅/平方吋；　$u=0.18$ 吋．
4. $R=3882$ 磅．　5. $R=7841$ 磅．
6. $M=\frac{wlx}{2}-\frac{wl^2}{12}-\frac{wx^2}{2}$．

習題十三

1. $S=700$ 磅/平方吋．
2. $M_1=M_5=0$; $M_2=M_4=-2143$ 呎磅; $M_3=-1429$ 呎磅．
$R_1=R_5=786$ 磅; $R_2=R_4=2286$ 磅; $R_3=1857$ 磅．
3. $M_1=M_6=0$; $M_2=M_5=-42100$ 呎磅;
$M_3=M_4=-31600$ 呎磅. $R_1=R_6=7895$ 磅．
$R_2=R_5=22630$ 磅; $R_3=R_4=19475$ 磅．
4. $M=-33,330$ 呎磅．
5. $M_1=M_4=0$; $M_2=M_3=-1800$ 呎磅．
$R_1=R_4=350$ 磅; $R_2=R_3=1150$ 磅．
6. $R_1=3912$ 磅; $R_2=7376$ 磅; $R_3=-288$ 磅（向下）．

習題十四

1. $P=3900$ 磅．　2. $P=16.8$ 磅．
3. $P=1570$ 磅．　4. $P=463$ 磅．
5. $P=1200$ 磅．　6. $d=0.582$ 吋．
7. $d=6.04$ 吋．　8. $T=14.9$ 磅．

習題十五

1. $P=324.5$ 噸．　2. 42.4．
3. $d=4.1$ 吋．　4. $d=5.5$ 吋．
5. $d=6.2$ 吋．

0.80