Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 3

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 3.1. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und es sei $a \in L$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi \colon K[X] \longrightarrow L, \, P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P + Q)(a) = P(a) + Q(a)$,
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$,
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 3.2. Es sei K ein Körper, $\varphi \colon V \to V$ ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum und

$$K[X] \longrightarrow \operatorname{End}(V), \, P \longmapsto P(\varphi),$$

der zugehörige Einsetzungshomomorphismus. Vergleiche diese Situation mit dem durch ein Element $a \in L$ zu einer Körpererweiterung $K \subseteq L$ gegebenen Einsetzungshomomorphismus $P \mapsto P(a)$.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass ein Unterring eines Körpers ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 3.4. Es sei R ein kommutativer Ring und seien f, g Nichtnullteiler in R. Zeige, dass das Produkt fg ebenfalls ein Nichtnullteiler ist.

Aufgabe 3.5.*

Es sei R ein kommutativer Ring. Zu jedem $f \in R$ sei

$$\mu_f \colon R \longrightarrow R, \, g \longmapsto fg,$$

die Multiplikation mit f. Zeige, dass μ_f genau dann bijektiv ist, wenn es surjektiv ist.

Man zeige durch ein Beispiel, dass in dieser Situation aus der Injektivität nicht die Bijektivität folgt.

Aufgabe 3.6.*

Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$. Charakterisiere mit Hilfe der Multiplikationsabbildung

$$\mu_f \colon R \longrightarrow R,\ g \longmapsto fg,$$

wann f ein Nichtnullteiler und wann f eine Einheit ist.

Aufgabe 3.7. Bestimme die Einheiten von $\mathbb{Z}$ und von $K[X]$, wobei K ein Körper sei.

Aufgabe 3.8. Zeige, dass $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ eine Untergruppe, aber kein Ideal ist.

Aufgabe 3.9.*

Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann ein Körper ist, wenn er genau zwei Ideale enthält.

Aufgabe 3.10. Sei R ein kommutativer Ring und sei f_j, $j \in J$, eine Familie von Elementen in R. Es sei angenommen, dass die f_j zusammen das Einheitsideal erzeugen. Zeige, dass es eine endliche Teilfamilie f_j, $j \in J_0 \subseteq J$ gibt, die ebenfalls das Einheitsideal erzeugt.

Aufgabe 3.11. Sei R ein kommutativer Ring und sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen. Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n$ ebenfalls ein Ideal ist. Zeige durch ein einfaches Beispiel, dass die Vereinigung von Idealen im Allgemeinen kein Ideal sein muss.

Aufgabe 3.12. Sei R ein Integritätsbereich und $p \in R$, $p \neq 0$. Zeige, dass p genau dann irreduzibel ist, wenn es genau zwei Hauptideale oberhalb von (p) gibt, nämlich (p) selbst und $(1) = R$.

Aufgabe 3.13. Beweise die Formel

$$X^u + 1 \;=\; (X+1)\left(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \cdots + X^2 - X + 1\right)$$

für u ungerade.

Aufgabe 3.14. Zeige, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad nicht irreduzibel ist.

Aufgabe 3.15. Es sei $F \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3. Zeige, dass F entweder eine oder drei reelle Nullstellen besitzt.

Aufgabe 3.16.*

Zeige, dass das Polynom
$$X^3 - 3X + 1$$
über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.

Aufgabe 3.17.*

Zeige, dass das Polynom
$$X^3 - 3X - 1$$
über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist.

Aufgabe 3.18. Es sei K ein Körper und sei $F \in K[X]$ ein von 0 verschiedenes Polynom. Zeige, dass es eine (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutige Produktdarstellung
$$F = aF_1 \cdots F_r$$
mit $a \in K^\times$ und irreduziblen normierten Polynomen F_i, $i = 1, \ldots, r$, gibt.

Aufgabe 3.19. Zeige, dass $\mathbb{Z}[X]$ und der Polynomring in zwei Variablen $K[X, Y]$ über einem Körper K keine Hauptidealbereiche sind.

Aufgabe 3.20.*

Es sei R ein kommutativer Ring und sei $p \in R$ ein Primelement. Zeige, dass p auch im Polynomring $R[X]$ prim ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.21. (2 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Bestimme in $K[X]$ die irreduziblen Polynome.

Aufgabe 3.22. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass es unendlich viele normierte irreduzible Polynome in $K[X]$ gibt.

Aufgabe 3.23. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

In der folgenden Aufgabe wird der *Quotientenkörper* zu einem Integritätsbereich definiert.

Aufgabe 3.24. (6 Punkte)

Es sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass man auf folgende Weise einen Körper K konstruieren kann, der R enthält.

Wir betrachten auf

$$M = R \times (R \setminus \{0\})$$

die durch

$$(a,b) \sim (c,d), \text{ falls } ad = bc\,,$$

definierte Relation.

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Definiere auf der Quotientenmenge $Q(R)$ Verknüpfungen derart, dass $Q(R)$ zu einem Körper wird und dass

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow Q(R),\ r \longmapsto [(r,1)],$$

mit Addition und Multiplikation verträglich ist und $\varphi(1) = 1$ gilt.

Abbildungsverzeichnis