Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 5

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 5.1. Es sei $\mathrm{GL}_n(K)$ die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper K. Zeige, dass für zueinander konjugierte Matrizen M und N aus $\mathrm{GL}_n(K)$ die folgenden Eigenschaften bzw. Invarianten übereinstimmen: Die Determinante, die Eigenwerte, die Dimension der Eigenräume zu einem Eigenwert, die Diagonalisierbarkeit, die Trigonalisierbarkeit.

Aufgabe 5.2. Sei G eine Gruppe. Betrachte die Relation R auf G, wobei xRy bedeutet, dass es einen inneren Automorphismus κ_g mit $x = \kappa_g(y)$ gibt. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation bekommen einen eigenen Namen:

Zu einer Gruppe G nennt man die Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation, bei der zwei Elemente als äquivalent (oder *konjugiert*) gelten, wenn sie durch einen inneren Automorphismus ineinander überführt werden können, die *Konjugationsklassen*.

Aufgabe 5.3.
(1) Bestimme die Konjugationsklassen auf der Drehgruppe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
(2) Bestimme die Konjugationsklassen der Elemente $\varphi \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ innerhalb von $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.
(3) Bestimme die Konjugationsklassen der Elemente $\varphi \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ innerhalb von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.
(4) Bestimme die Konjugationsklassen der Elemente $\varphi \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ innerhalb von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 5.4. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Unterkörper. Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus

$$S_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)\,,\ \pi \longmapsto M_\pi,$$

der jeder Permutation π die zugehörige Permutationsmatrix zuordnet. Zeige, dass zwei Permutationen π, ρ genau dann konjugiert in S_n sind, wenn ihre zugehörigen Permutationsmatrizen M_π, M_ρ ähnlich sind.

Aufgabe 5.5.*

Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq H$ ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 5.6. Zeige, dass der Durchschnitt von Normalteilern N_i, $i \in I$, in einer Gruppe G ein Normalteiler ist.

Aufgabe 5.7. Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Ist das Bild von φ ein Normalteiler in H?

Zu $n \in \mathbb{N}$ heißt die Untergruppe

$$A_n := \{\sigma \in S_n |\ \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$$

der geraden Permutationen die *alternierende Gruppe*.

Aufgabe 5.8. Bestimme, ob die alternierende Gruppe A_n ein Normalteiler in der Permutationsgruppe S_n ist.

Aufgabe 5.9. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_+$, $\operatorname{GL}_n(K)$ die allgemeine lineare Gruppe der invertierbaren Matrizen und

$$\operatorname{SL}_n(K) \subseteq \operatorname{GL}_n(K)$$

die Untergruppe der Matrizen mit Determinante 1. Zeige, dass die Linksnebenklasse (und auch die Rechtsnebenklasse) zu $M \in \operatorname{GL}_n(K)$ gleich der Menge aller Matrizen ist, deren Determinante mit $\det M$ übereinstimmt.

Zeige auf möglichst viele Weisen, dass $\operatorname{SL}_n(K)$ ein Normalteiler in $\operatorname{GL}_n(K)$ ist.

Aufgabe 5.10. Man gebe ein Beispiel von drei Untergruppen $F \subseteq G \subseteq H$ an derart, dass F ein Normalteiler in G und G ein Normalteiler in H, aber F kein Normalteiler in H ist.

In der folgenden Aufgabe wird das *Zentrum* einer Gruppe verwendet.

Sei G eine Gruppe. Das *Zentrum* $Z = Z(G)$ von G ist die Teilmenge

$$Z = \{g \in G |\ gx = xg \text{ für alle } x \in G\}.$$

Aufgabe 5.11.*

Sei G eine Gruppe und sei $H \subseteq Z$ eine Untergruppe des Zentrums von G. Zeige, dass H ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 5.12. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass das Zentrum $Z \subseteq G$ ein Normalteiler in G ist. Man bringe das Zentrum in Zusammenhang mit dem Gruppenhomomorphismus

$$\kappa\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(G),\; g \longmapsto \kappa_g .$$

Was ist das Bild von diesem Homomorphismus, und was besagen die Homomorphiesätze in dieser Situation?

Aufgabe 5.13. Sei G eine Gruppe und sei M eine Menge mit einer Verknüpfung. Es sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow M$$

eine surjektive Abbildung mit $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ für alle $g, h \in G$. Zeige, dass M eine Gruppe und φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 5.14. Es seien G und H Gruppen mit der Produktgruppe $G \times H$. Zeige, dass die Gruppe $G \times \{e_H\}$ ein Normalteiler in $G \times H$ ist, und dass die Restklassengruppe $(G \times H)/G \times \{e_H\}$ kanonisch isomorph zu H ist.

Aufgabe 5.15. Es seien G_1 und G_2 Gruppen und seien $N_1 \subseteq G_1$ und $N_2 \subseteq G_2$ Normalteiler. Zeige, dass $N_1 \times N_2$ ein Normalteiler in $G_1 \times G_2$ ist und dass eine Isomorphie

$$(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$$

vorliegt.

Aufgabe 5.16. Zeige, dass für jede reelle Zahl $a \neq 0$ die Restklassengruppen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}a$ untereinander isomorph sind.

Aufgabe 5.17. Bestimme die Restklassengruppe zu $\{1, -1\} \subset \mathbb{R}^\times$.

Aufgabe 5.18.*

Zeige, dass es in der Restklassengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ Elemente gibt, deren Ordnung gleich n ist.

Aufgabe 5.19. Zeige, dass es keine Untergruppe $F \subseteq (\mathbb{Q}, 0, +)$ derart gibt, dass
$$F \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 5.20. Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element mit dem (nach Lemma 4.4) zugehörigen Gruppenhomomorphismus
$$\varphi\colon\ \mathbb{Z} \longrightarrow G,\ n \longmapsto g^n.$$
Beschreibe die kanonische Faktorisierung von φ gemäß Satz 5.12.

Aufgabe 5.21. Zeige mit Hilfe der Homomorphiesätze, dass zyklische Gruppen mit der gleichen Ordnung isomorph sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.22. (2 Punkte)

Es sei S_3 die Gruppe der bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, 3\}$ in sich selbst. Bestimme die Konjugationsklassen dieser Gruppe.

Aufgabe 5.23. (5 Punkte)

Es sei p eine Primzahl und $\mathbb{Z}/(p)$ die zyklische Gruppe mit p Elementen. Finde eine Gruppe G derart, dass $\mathbb{Z}/(p) \subseteq G$ eine Untergruppe ist und dass in G je zwei von 0 verschiedene Elemente aus $\mathbb{Z}/(p)$ zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 5.24. (3 Punkte)

Bestimme die Konjugationsklassen der (eigentlichen) Würfelgruppe.

Aufgabe 5.25. (2 Punkte)

Seien G und H Gruppen und sei
$$\varphi\colon\ G \longrightarrow H$$
ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild $\varphi(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq G$ ein Normalteiler in H ist.

Aufgabe 5.26. (2 Punkte)

Zeige, dass jede Untergruppe vom Index zwei in einer Gruppe G ein Normalteiler in G ist.

Abbildungsverzeichnis