Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 1

Wenn der Wind der Veränderung weht, bauen die einen Mauern und die anderen Windmühlen

Chinesische Weisheit

Mengen

Die Mathematik im wissenschaftlichen Sinne wird in der Sprache der Mengen formuliert.

Georg Cantor (1845-1918) ist der Schöpfer der Mengentheorie.

David Hilbert (1862-1943) nannte sie ein *Paradies*, aus dem die Mathematiker nie mehr vertrieben werden dürfen.

Eine *Menge* ist eine Ansammlung von wohlunterschiedenen Objekten, die die *Elemente* der Menge heißen. Mit „wohlunterschieden“ meint man, dass es klar ist, welche Objekte als gleich und welche als verschieden angesehen werden. Die *Zugehörigkeit* eines Elementes x zu einer Menge M wird durch

$$x \in M$$

ausgedrückt, die Nichtzugehörigkeit durch

$$x \notin M .$$

Für jedes Element(symbol) gilt stets genau eine dieser zwei Möglichkeiten.

Für Mengen gilt das *Extensionalitätsprinzip*, d.h. eine Menge ist durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt, darüber hinaus bietet sie keine Information. Insbesondere stimmen zwei Mengen überein, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.

Die Menge, die kein Element besitzt, heißt *leere Menge* und wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element aus N auch zu M gehört. Man schreibt dafür

$$N \subseteq M$$

(manche schreiben dafür $N \subset M$). Man sagt dafür auch, dass eine *Inklusion* $N \subseteq M$ vorliegt. Im Nachweis, dass $N \subseteq M$ ist, muss man zeigen, dass für ein beliebiges Element $x \in N$ ebenfalls die Beziehung $x \in M$ gilt.[1] Dabei darf man lediglich die Eigenschaft $x \in N$ verwenden.

Aufgrund des Extensionalitätsprinzips hat man das folgende wichtige *Gleichheitsprinzip für Mengen*, dass

$$M = N \text{ genau dann, wenn } N \subseteq M \text{ und } M \subseteq N$$

gilt. In der mathematischen Praxis bedeutet dies, dass man die Gleichheit von zwei Mengen dadurch nachweist, dass man (in zwei voneinander unabhängigen Teilargumentationen) die beiden Inklusionen zeigt. Dies hat auch den kognitiven Vorteil, dass das Denken eine Zielrichtung bekommt, dass klar die Voraussetzung, die man verwenden darf, von der gewünschten Schlussfolgerung, die man aufzeigen muss, getrennt wird. Hier spiegelt sich das aussagenlogische Prinzip wieder, dass die Äquivalenz von zwei Aussagen die wechselseitige Implikation bedeutet, und durch den Beweis der beiden einzelnen Implikationen bewiesen wird.

Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Menge anzugeben. Die einfachste ist, die zu der Menge gehörenden Elemente aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt. Bei endlichen Mengen ist dies unproblematisch, bei unendlichen Mengen muss man ein „Bildungsgesetz“ für die Elemente angeben.

Die wichtigste Menge, die man zumeist als eine fortgesetzte Auflistung einführt, ist die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

[1] In der Sprache der Quantorenlogik kann man eine Inklusion verstehen als die Aussage $\forall x(x \in N \to x \in M)$.

Hier wird eine bestimmte Zahlenmenge durch die Anfangsglieder von erlaubten Zifferfolgen angedeutet. Wichtig ist, dass mit $\mathbb{N}$ nicht eine Menge von bestimmten Ziffern gemeint ist, sondern die durch die Ziffern repräsentierten Zahlwerte. Eine natürliche Zahl hat viele Darstellungsarten, die Ziffernrepräsentation im Zehnersystem ist nur eine davon, wenn auch eine besonders übersichtliche.

Mengenbeschreibung durch Eigenschaften

Es sei eine Menge M gegeben. In ihr gibt es gewisse Elemente, die gewisse Eigenschaften E (Prädikate) erfüllen können oder aber nicht. Zu einer Eigenschaft E gehört innerhalb von M die Teilmenge bestehend aus allen Elementen aus M, die diese Eigenschaft erfüllen. Man beschreibt eine durch eine Eigenschaft definierte Teilmenge meist als

$$\{x \in M \mid E(x)\} = \{x \in M \mid x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\} \ .$$

Dies geht natürlich nur mit solchen Eigenschaften, für die die Aussage $E(x)$ eine wohldefinierte Bedeutung hat. Wenn man eine solche Teilmenge einführt, so gibt man ihr häufig sofort einen Namen (in dem auf die Eigenschaft E Bezug genommen werden kann, aber nicht muss). Z.B. kann man einführen

$$G = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\} \ ,$$

$$U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist ungerade}\} \ ,$$

$$Q = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Quadratzahl}\} \ ,$$

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine Primzahl}\} \ .$$

Für die Mengen in der Mathematik sind meist eine Vielzahl an mathematischen Eigenschaften relevant und daher gibt es meist auch eine Vielzahl an relevanten Teilmengen. Aber auch bei alltäglichen Mengen, wie etwa die Menge K der Studierenden in einem Kurs, gibt es viele wichtige Eigenschaften, die gewisse Teilmengen festlegen, wie etwa

$$O = \{x \in K \mid x \text{ kommt aus Osnabrück}\} \ ,$$

$$P = \{x \in K \mid x \text{ studiert im Nebenfach Physik}\} \ ,$$

$$D = \{x \in K \mid x \text{ hat im Dezember Geburtstag}\} \ .$$

Die Menge K ist dabei selbst durch eine Eigenschaft festgelegt, es ist ja

$$K = \{x \mid x \text{ ist Studierender in diesem Kurs}\} \ .$$

Das folgende Beispiel einer Menge ist typisch für Mengen, die im Rahmen dieses Kurses vorkommen.

Beispiel 1.1. Wir betrachten die Menge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\, 5x - y + 3z = 0 \right\}.$$

Es handelt sich also um diejenige Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, die alle Punkte mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ enthält, die die Bedingung

$$5x - y + 3z = 0$$

erfüllen. Da diese Bedingung für jeden Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ eine klare Bedeutung besitzt, also wahr oder falsch sein kann, handelt es sich um eine wohldefinierte Teilmenge. Beispielsweise gehören die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -\frac{13}{3} \end{pmatrix}$ dazu, der Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ dagegen nicht. Wenn man für einen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ testen soll, ob er zu E gehört, so überprüft man einfach die Bedingung. In dieser Hinsicht ist also die gegebene Beschreibung von E sehr gut. Wenn man aber beispielsweise eine gute Übersicht über E als Ganzes bekommen möchte, so ist die Beschreibung direkt nicht sehr aussagekräftig. Wir behaupten, dass E mit der Menge

$$E' = \left\{ r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} |\, r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

übereinstimmt. In dieser zweiten Beschreibung wird die Menge als die Menge aller Elemente beschrieben, die auf eine gewisse Art gebaut werden können, nämlich als *Linearkombination* von den zwei Punkten $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit beliebigen reellen Koeffizienten. Der Vorteil dieser Beschreibung ist, dass man sofort einen Überblick über alle Elemente hat und beispielsweise sieht, dass es unendlich viele Elemente darin gibt. Dagegen ist es bei dieser Beschreibung schwieriger zu entscheiden, ob ein gegebener Punkt dazu gehört oder nicht.

Zum Nachweise, dass die beiden Mengen übereinstimmen, müssen wir $E \subseteq E'$ und $E' \subseteq E$ zeigen. Sei hierzu $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{y}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

wobei die Gleichheit in den ersten beiden Komponenten unmittelbar erfüllt ist und die Gleichheit in der dritten Komponenten eine Umformung der Ausgangsgleichung

$$5x - y + 3z = 0$$

ist. Mit $r = \frac{x}{3}$ und $s = \frac{y}{3}$ sieht man, dass $P \in E'$ ist. Sei umgekehrt $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E'$, d.h. es gibt eine Darstellung

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r \\ 3s \\ -5r + s \end{pmatrix}$$

mit gewissen reellen Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$. Um zu zeigen, dass dieser Punkt zu E gehört, müssen wir zeigen, dass er die E definierende Bedingung erfüllt. Dies ist wegen

$$5x - y + 3z = 5(3r) - 3s + 3(-5r + s) = 0$$

der Fall.

Mengenoperationen

So, wie man Aussagen zu neuen Aussagen verknüpfen kann, gibt es Operationen, mit denen aus Mengen neue Mengen entstehen.

- *Vereinigung*
$$A \cup B := \{x |\, x \in A \text{ oder } x \in B\} ,$$
- *Durchschnitt*
$$A \cap B := \{x |\, x \in A \text{ und } x \in B\} ,$$
- *Differenzmenge*
$$A \setminus B := \{x |\, x \in A \text{ und } x \notin B\} .$$

Diese Operationen ergeben nur dann einen Sinn, wenn die beteiligten Mengen als Teilmengen in einer gemeinsamen Grundmenge gegeben sind. Dies sichert, dass man über die gleichen Elemente spricht. Häufig wird diese Grundmenge nicht explizit angegeben, dann muss man sie aus dem Kontext erschließen.

Ein Spezialfall der Differenzmenge bei einer gegebenen Grundmenge ist das *Komplement* einer Teilmenge $A \subseteq G$, das durch

$$\complement A \,:=\, G \setminus A \,=\, \{x \in G |\, x \notin A\}$$

definiert ist. Wenn zwei Mengen einen leeren Schnitt haben, also $A \cap B = \emptyset$ gilt, so nennen wir sie *disjunkt*. Die Vereinigung von zwei disjunkten Mengen schreibt man auch als $A \uplus B$.

Beispiel 1.2. Wir betrachten die beiden Mengen

$$E \,=\, \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\, 5x - y + 3z = 0 \right\}$$

(aus Beispiel 1.1) und

$$F \,=\, \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\, 4x + 2y - 7z = 0 \right\}$$

und interessieren uns für den Durchschnitt

$$G \,:=\, E \cap F \,=\, \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\, 5x - y + 3z = 0 \text{ und } 4x + 2y - 7z = 0 \right\}.$$

Ein Punkt liegt genau dann im Durchschnitt, wenn er simultan beide Bedingungen, also beide Gleichungen (nennen wir sie I und II), erfüllt. Gibt es eine „einfachere“ Beschreibung dieser Durchschnittsmenge? Ein Punkt, der die beiden Gleichungen erfüllt, erfüllt auch die Gleichung, die entsteht, wenn man die beiden Gleichungen miteinander addiert oder die Gleichungen mit reellen Zahlen multipliziert. Eine solche *Linearkombination* der Gleichungen ist beispielsweise

$$4I - 5II \,=\, -14y + 47z \,=\, 0.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} G \,&=\, \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\, 5x - y + 3z = 0 \text{ und } 4x + 2y - 7z = 0 \right\} \\ &=\, \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\, 5x - y + 3z = 0 \text{ und } -14y + 47z = 0 \right\}, \end{aligned}$$

da man aus der neuen zweiten Gleichung die alte zweite Gleichung zurückkonstruieren kann und daher die Bedingungen links und rechts insgesamt äquivalent sind. Der Vorteil der zweiten Beschreibung ist, dass man die Variable x in der neuen zweiten Gleichung *eliminiert* hat. Daher kann man nach y auflösen und erhält

$$y \,=\, \frac{47}{14} z$$

und für x muss dann

$$x = \frac{1}{5}y - \frac{3}{5}z = \frac{1}{5} \cdot \frac{47}{14}z - \frac{3}{5}z = \frac{47}{70}z - \frac{42}{70}z = \frac{1}{14}z$$

sein. Auch diese zwei aufgelösten Gleichungen sind zusammen äquivalent zu den beiden ersten und somit ist

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{14}z \\ \frac{47}{14}z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diese Beschreibung liefert einen expliziteren Überblick über die Menge G.

Konstruktion von Mengen

Die meisten Mengen in der Mathematik ergeben sich ausgehend von einigen wenigen Mengen wie beispielsweise den endlichen Mengen und $\mathbb{N}$ durch bestimmte Konstruktionen von neuen Mengen aus schon bekannten oder schon zuvor konstruierten Mengen.[2] Wir definieren:[3]

Definition 1.3. Es seien zwei Mengen L und M gegeben. Dann nennt man die Menge

$$L \times M = \{(x, y) | \, x \in L, \, y \in M\}$$

die *Produktmenge*[4] der beiden Mengen.

Die Elemente der Produktmenge nennt man *Paare* und schreibt (x, y). Dabei kommt es wesentlich auf die Reihenfolge an. Die Produktmenge besteht also aus allen Paarkombinationen, wo in der ersten *Komponente* ein Element der ersten Menge und in der zweiten Komponente ein Element der zweiten Menge steht. Zwei Paare sind genau dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten gleich sind.

Bei einer Produktmenge können natürlich auch beide Mengen gleich sein, beispielsweise ist $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die reelle Ebene. In diesem Fall ist es verlockend, die Reihenfolge zu verwechseln, und also besonders wichtig, darauf zu achten,

[2] Darunter fallen auch der Schnitt und die Vereinigung, doch bleiben diese innerhalb einer vorgegebenen Grundmenge, während es hier um Konstruktionen geht, die darüber hinaus gehen.

[3] Definitionen werden in der Mathematik zumeist als solche deutlich herausgestellt und bekommen eine Nummer, damit man auf sie einfach Bezug nehmen kann. Es wird eine Situation beschrieben, bei der die verwendeten Begriffe schon zuvor definiert worden sein mussten, und in dieser Situation wird einem neuen Konzept ein Name (eine Bezeichnung) gegeben. Dieser Name wird *kursiv* gesetzt. Man beachte, dass das Konzept auch ohne den neuen Namen formulierbar ist, der neue Name ist nur eine Abkürzung für das Konzept. Sehr häufig hängen die Begriffe von Eingaben ab, wie den beiden Mengen in dieser Definition. Bei der Namensgebung herrscht eine gewisse Willkür, so dass die Bedeutung der Bezeichnung im mathematischen Kontext sich allein aus der expliziten Definition, aber nicht aus der alltäglichen Wortbedeutung erschließen lässt.

[4] Man spricht auch vom *kartesischen Produkt* der beiden Mengen.

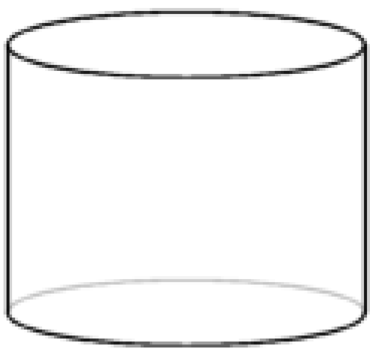
dies nicht zu tun. Wenn es in der ersten Menge n Elemente[5] und in der zweiten Menge k Elemente gibt, so gibt es in der Produktmenge $n \cdot k$ Elemente. Wenn eine der beiden Mengen leer ist, so ist auch die Produktmenge leer. Man kann auch für mehr als nur zwei Mengen die Produktmenge bilden, worauf wir bald zurückkommen werden.

Beispiel 1.4. Es sei V die Menge aller Vornamen (sagen wir der Vornamen, die in einer bestimmten Grundmenge an Personen wirklich vorkommen) und N die Menge aller Nachnamen. Dann ist

$$V \times N$$

die Menge aller Namen. Elemente davon sind in Paarschreibweise beispielsweise (Heinz, Müller), (Petra, Müller) und (Lucy, Sonnenschein). Aus einem Namen lässt sich einfach der Vorname und der Nachname herauslesen, indem man entweder auf die erste oder auf die zweite Komponente des Namens schaut. Auch wenn alle Vornamen und Nachnamen für sich genommen vorkommen, so muss natürlich nicht jeder daraus gebastelte mögliche Name wirklich vorkommen. Bei der Produktmenge werden eben alle Kombinationsmöglichkeiten aus den beiden beteiligten Mengen genommen.

Wenn zwei geometrische Punktmengen A und B gegeben sind, beispielsweise als Teilmengen einer Ebene E, so kann man die Produktmenge $A \times B$ als Teilmenge von $E \times E$ auffassen. Dadurch entsteht ein neues geometrisches Gebilde, das man manchmal auch in einer kleineren Dimension realisieren kann.



Ein Zylindermantel ist die Produktmenge aus einem Kreis und einer Strecke.

Beispiel 1.5. Es sei S ein Kreis, worunter wir die Kreislinie verstehen, und I eine Strecke. Der Kreis ist eine Teilmenge einer Ebene E und die Strecke ist

[5] Dass es in einer Menge n Elemente gibt, bedeutet, dass man die Elemente der Menge mit den natürlichen Zahlen von 1 bis n durchnummerieren kann. Anders formuliert, dass es eine bijektive Abbildung zwischen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ und der gegebenen Menge gibt.

eine Teilmenge einer Geraden G, so dass für die Produktmenge die Beziehung

$$S \times I \subseteq E \times G$$

gilt. Die Produktmenge $E \times G$ stellt man sich als einen dreidimensionalen Raum vor, und darin ist die Produktmenge $S \times I$ ein Zylindermantel.

Eine andere wichtige Konstruktion, um aus einer Menge eine neue Menge zu erhalten, ist die Potenzmenge.

Definition 1.6. Zu einer Menge M nennt man die Menge aller Teilmengen von M die *Potenzmenge* von M. Sie wird mit

$$\mathfrak{P}\,(M)$$

bezeichnet.

Es ist also

$$\mathfrak{P}\,(M) \;=\; \{T|\, T \text{ ist Teilmenge von } M\}\,.$$

Wenn M die Menge der Kursteilnehmer ist, so kann man sich jede Teilmenge als eine kursinterne Party vorstellen, zu der eine gewisse Auswahl an Leuten hingeht (es werden also die Parties mit den anwesenden Leuten identifiziert). Die Potenzmenge ist dann die Menge aller möglichen Parties. Wenn eine Menge n Elemente besitzt, so besitzt ihre Potenzmenge 2^n Elemente.

Tupel, Vektoren, Matrizen

Wichtige Produktmengen sind beispielsweise $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Bei den Elementen darin kommt es wesentlich auf die Reihenfolge an. Generell schreibt man zu einer Menge M und einem $n \in \mathbb{N}$ die n-fache Produktmenge von M mit sich selbst als

$$M^n \;=\; \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n-\text{mal}}\,.$$

Die Elemente darin haben die Gestalt

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

wobei alle x_i aus M sind. Eine solche geordnete endliche Folge von n Elementen nennt man auch ein *n-Tupel* über M. Bei $n = 2$ spricht man von einem *Paar*, bei $n = 3$ von einem *Tripel*. Zu

$$x \;=\; (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

nennt man x_i die i-te Komponente oder den i-ten Eintrag des Tupel. Das tiefgestellte i heißt in diesem Zusammenhang der *Index* des Tupels und $\{1, 2, \ldots, n\}$ die *Indexmenge* des Tupels.

Generell gibt es auch zu komplizierteren Indexmengen I sogenannte *I-Tupel*. Bei einem I-Tupel wird jedem $i \in I$ ein mathematisches Objekt zugeordnet, das Tupel wird als x_i, $i \in I$, geschrieben. Wenn sämtliche x_i aus einer gemeinsamen Menge M stammen, spricht man auch von einem I-Tupel aus M. Bei $I = \mathbb{N}$ spricht man von *Folgen* in M.

Eine endliche Indexmenge kann man stets durch eine Menge der Form $\{1, \ldots, n\}$ ersetzen (diesen Vorgang kann man eine Nummerierung der Indexmenge nennen), doch ist das nicht immer sinnvoll. Wenn man z.B. mit einer Indexmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ startet und sich dann für gewisse Teilindexmengen $J \subseteq I$ interessiert, so ist es natürlich, die von I ererbten Bezeichnungen beizubehalten, anstatt J mit einer neuen Nummerierung $\{1, \ldots, m\}$ zu versehen. Häufig gibt es für ein bestimmtes Problem „natürliche“ Indexmengen, die (allein schon mnemotechnisch) einen Teil des strukturellen Gehalts des Problems widerspiegeln.

Spezieller nennt man ein n-Tupel über einer Menge M der Form

$$(a_1, \ldots, a_n)$$

ein *Zeilentupel* (der Länge n) und eines der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ein *Spaltentupel*. Im Allgemeinen sind das nur zwei unterschiedliche Darstellungsweisen; wenn die Tupel aber zusätzliche Strukturen repräsentieren (beispielsweise Vektoren, auf die eine Matrix (s.u.) angewendet werden soll), so ist der Unterschied bedeutsam.

Wenn I und J zwei Mengen sind und $I \times J$ ihre Produktmenge, so kann man ein $I \times J$-Tupel in M als eine „Tabelle“ auffassen, bei der jedem Paar (i, j) ein Element $a_{ij} \in M$ zugeordnet wird. Insbesondere bei $I = \{1, \ldots, m\}$ und $J = \{1, \ldots, n\}$ nennt man ein $I \times J$-Tupel auch eine *Matrix* und schreibt sie als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Das Zeilentupel

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

heißt dann die i-te *Zeile der Matrix* und entsprechend

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

die j-te *Spalte der Matrix*.

Mengenfamilien

Es können nicht nur Elemente, sondern auch Mengen durch eine Indexmenge indiziert werden. Dann spricht man von einer Mengenfamilie.

Definition 1.7. Es sei I eine Menge und zu jedem $i \in I$ sei eine Menge M_i gegeben. Eine solche Situation nennt man eine *Familie von Mengen*

$$M_i \ , \ i \in I .$$

Die Menge I heißt dabei die *Indexmenge* der Mengenfamilie.

Dabei können die Mengen völlig unabhängig voneinander sein, es kann aber auch sein, dass sie alle Teilmengen einer bestimmten Grundmenge sind.

Definition 1.8. Es sei M_i, $i \in I$, eine Familie von Teilmengen einer Grundmenge G. Dann heißt

$$\bigcap_{i \in I} M_i \, = \, \{x \in G |\, x \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

der *Durchschnitt der Mengen* und

$$\bigcup_{i \in I} M_i \, = \, \{x \in G |\, \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in M_i\}$$

die *Vereinigung der Mengen*.

Man beachte, dass dabei der Durchschnitt und die Vereinigung auf den All- bzw. den Existenzquantor zurückgeführt wird.

Definition 1.9. Es sei I eine Menge und zu jedem $i \in I$ sei eine Menge M_i gegeben. Dann nennt man die Menge

$$M \, = \, \prod_{i \in I} M_i \, = \, \{(x_i)_{i \in I} : \, x_i \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$

die *Produktmenge* der M_i.

Sobald eine der beteiligten Mengen M_i leer ist, ist auch das Produkt leer, da es dann für die i-te Komponente keinen möglichen Wert gibt. Wenn aber umgekehrt alle Mengen M_i nicht leer sind, so ist auch ihr Produkt nicht leer, da man für jeden Index i dann ein Element $x_i \in M_i$ wählen kann. Bei einem formalen axiomatischen Aufbau der Mengentheorie muss man übrigens fordern, dass dieses Wählen möglich ist. Dies ist der Inhalt des *Auswahlaxioms*.

Beispiel 1.10. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$N_n = \{x \in \mathbb{N} |\, x \geq n\}$$

die Menge aller natürlichen Zahlen, die mindestens so groß wie n sind. Diese ist eine durch die natürlichen Zahlen indizierte Familie von Teilmengen von $\mathbb{N}$. Es gelten die Inklusionen

$$N_n \subseteq N_m \text{ für } n \geq m \, .$$

Der Durchschnitt
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n$$
ist leer, da es keine natürliche Zahl gibt, die größer/gleich jeder anderen natürlichen Zahl ist.

Beispiel 1.11. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei
$$\mathbb{N}n = \{x \in \mathbb{N}_+ |\, x \text{ ist ein Vielfaches von } n\}$$
die Menge aller positiven natürlichen Zahlen, die Vielfache von n sind. Dies ist eine durch die positiven natürlichen Zahlen indizierte Familie von Teilmengen von $\mathbb{N}$. Es gelten die Inklusionen
$$\mathbb{N}n \subseteq \mathbb{N}m \text{ für } m \text{ teilt } n\,.$$
Der Durchschnitt
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \mathbb{N}n$$
ist leer, da es keine positive natürliche Zahl gibt, die ein Vielfaches von jeder positiven natürlichen Zahl ist (die 0 ist ein solches Vielfaches).

Beispiel 1.12. Es sei x eine reelle Zahl[6] und es sei x_n diejenige rationale Zahl, die sich aus allen Vorkommaziffern und den ersten n Nachkommaziffern von x im Dezimalsystem ergibt. Wir definieren die Intervalle
$$M_n = \left[x_n, x_n + \left(\frac{1}{10}\right)^n\right] \subset \mathbb{R}\,.$$
Dies sind Intervalle der Länge $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ und es ist
$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\,.$$
Die Familie M_n, $n \in \mathbb{N}$, ist also eine *Intervallschachtelung* für x.

[6]Die reellen Zahlen werden in der Analysis axiomatisch eingeführt; Intervallschachtelungen repräsentieren ein wichtiges Existenzprinzip für reelle Zahlen.

Abbildungsverzeichnis