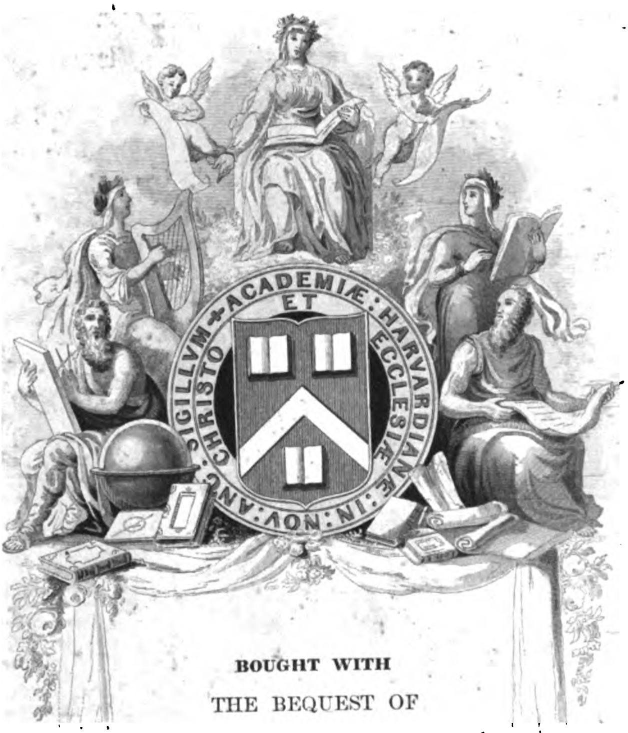

SIGILLVM + ACADEMIÆ : HARVARDIANÆ : IN : NOV : ANG :
CHRISTO ET ECCLESIÆ

# MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

## RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Giessen, Prof. F. KLEIN zu Erlangen,
Prof. A. MAYER zu Leipzig, Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

**Carl Neumann**,

**Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.**

VI. Band. 1. Heft.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1873.

# Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.
## 1872. Juli — December.

**Bachmann,** Dr. **P.,** a. o. Prof. an der Univ. Breslau, die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Akadem. Vorlesungen. [XII u. 300 S. mit Holzschn. im Text u. 1 lith. Taf.] gr. 8. geh. n. 2 Thlr. 10 Ngr.

**Bardey,** Dr. **E.,** methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 7000 Aufgaben enthaltend, über alle Theile der Elementar-Arithmetik, für Gymnasien, Realschulen und polytechn. Lehranstalten. Zweite Aufl. [XII u. 306 S.] gr. 8. Geh. 27 Ngr.

**Fort, O.,** und **O. Schlömilch,** Professoren an d. polytechn. Schule zu Dresden, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zweiter Theil: Analytische Geometrie des Raumes von O. Schlömilch. Dritte Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VIII u. 286 S.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 20 Ngr.

**Frischauf, J.,** Prof. an der Univ. Graz, absolute Raumlehre nach Joh. Bolyai bearbeitet. [LX u. 96 S.] gr. 8. geh. n. 20 Ngr.

**Hesse, Otto,** ordentl. Professor an dem k. Polytechnikum zu München, die Determinanten elementar behandelt. Zweite Auflage. [IV u. 48 S.] gr. 8. geh. n. 12 Ngr.

**Hippauf,** Dr. **H.,** Rector der mittleren Bürgerschule zu Halberstadt, Lösung des Problems der Trisection mittelst der Conchoide auf circularer Basis. Mit zwei lithogr. Tafeln. [42 S.] gr. 8. geh. n. 12 Ngr.

**Joachimsthal, F.,** Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. (Herausgegeben von A. Liersemann.) Mit 4 Figurentafeln. [VIII u. 174 S.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 20 Ngr.

**Klein,** Prof. Dr. **Hermann,** Lehrer der Mathematik und Physik am Vitzthum'schen Gymnasium zu Dresden, die Principien der Mechanik historisch und kritisch dargestellt. Eine von der philosophischen Honoren-Facultät zu Göttingen gekrönte Preisschrift. [VIII u. 120 S.] gr. 8. geh. n. 24 Ngr.

**Schlegel, Victor,** Mathematiker am Gymnasium zu Waren, System der Raumlehre. Nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe dargestellt. I Theil: Geometrie. Die Gebiete des Punktes, der Geraden und der Ebene. [XVI u. 156 S. mit vielen Holzschnitten im Text.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 10 Ngr.

**Sonderhof, A.,** ein Beitrag zur höheren Geodäsie. Separatabdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik. [VIII u. 95 S.] gr. 8. geh. n. 20 Ngr.

**Wüllner,** Dr. **Adolph,** Prof. der Physik an der Kgl. polytechn. Schule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. IV. Band. Die Lehre vom Magnetismus und der Elektricität. [Dritte Ausgabe.] Zweite vielfach umgearbeitete u. verbesserte Aufl. [XII u. 1006 S.] gr. 8. geh. n. 4 Thlr. 10 Ngr.

---

# Zur Theorie der Charakteristiken.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Die Arbeiten von Chasles, Zeuthen, Cayley und Andern in der Theorie der Charakteristiken haben erkennen lassen, dass die Zahl von Kegelschnitten eines Systems, welche eine gegebene Bedingung erfüllen, im Allgemeinen von den Formen $\mu a + \nu b$ wurde, wo die ganzen Zahlen $a$, $b$ nur von der Natur des Kegelschnittsystems, die ganzen Zahlen $\mu$, $\nu$ nur von der Natur der Bedingung abhängen. Diese merkwürdige Beobachtung ist von Chasles auf Curvensysteme von beliebiger Ordnung ausgedehnt worden, für den Fall, dass die jene erfüllende Bedingung darin bestehe, dass Curven des Systems eine beliebige gegebene Curve berühren sollen.

Wenn im letztern Falle das Zustandekommen der einfachen Form $\mu a + \nu b$ eine Folge der Natur der Bedingung ist, so scheint aus der grossen Zahl bisher gemachter Beobachtungen hervorzugehen, dass im erstern Fall die Natur der Curven zweiter Ordnung selbst es ist, welche diese Form hervorruft. Ich werde im Folgenden einen analytischen Beweis dafür geben, welcher einen sehr grossen Kreis von Fällen umfasst. Ich werde nämlich nur voraussetzen, dass die Bedingung, welche zu erfüllen ist, nicht mehr diejenigen Elemente enthält, welche zur Bestimmung der Kegelschnittschaar benutzt werden*). Ein solcher Fall würde z. B. eintreten, wenn das Kegelschnittsystem an sich der Bedingung unterworfen wäre, eine gegebene Curve zu berühren, und wenn die neue Bedingung dahin ginge, dass diese Curve von den gesuchten Kegelschnitten der Schaar noch an einer zweiten Stelle berührt werden sollte.

Der Beweis selbst, welchen ich geben werde, ist eine Anwendung der Principien, welche ich im 17ten Bande der Abh. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, p. 1. folgg. und im 5ten Bande dieser Annalen, p. 423, gegeben habe. Es scheint keinem Zweifel unterworfen, dass

*) Entgegengesetzte Fälle sind nicht immer ausgeschlossen, aber es ist doch besonders zu untersuchen, ob sie dem Beweise unterliegen. Vgl. § 3.

man diesen Beweis auf quadratische Formen mit beliebig vielen Veränderlichen ausdehnen kann, und dass man daher in dem zu erweisenden Satze eine allgemeine Eigenschaft quadratischer Formen vor sich hat. Aber es ist wohl aus der Fassung des Beweises ebenso zu ersehen, dass ein ähnlicher Satz für Gebilde *höherer* Ordnung bei allgemeiner Form der zu erfüllenden Bedingung nicht mehr zu erwarten ist.

## § 1.

### Allgemeinste Form eines algebraischen Kegelschnittsystems.

Jede einfach unendliche algebraische Kegelschnittschaar lässt sich unter folgender Form darstellen*). Die Coefficienten des beweglichen Kegelschnitts der Schaar ($f=0$) sind algebraische Functionen eines Parameters $\lambda$. Aber dann kann man sie bekanntlich immer als rationale Functionen zweier Parameter $\lambda$, $\mu$ darstellen, zwischen denen eine algebraische Gleichung besteht. Führen wir noch einen Homogenitätsfactor $\varkappa$ ein, so können wir demnach die Coefficienten des beweglichen Kegelschnitts als ganze homogene Functionen $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung von $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ auffassen, während zwischen $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ eine homogene Gleichung $\sigma^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(1) \qquad F(\varkappa, \lambda, \mu) = 0$$

besteht.

Wir können $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ als die Coordinaten eines Punktes betrachten; dann ist $F=0$ eine Curve, und zwar entspricht jedem Kegelschnitt der Schaar ein Punkt der Curve, die Schaar der Kegelschnitte ist auf dieser Curve abgebildet. Aber hier entsteht sofort die Frage, ob es immer möglich sei, die Kegelschnittschaar bei passender Wahl der Parameter *eindeutig* auf einer Curve abzubilden, d. h. so, dass jedem Kegelschnitte nur *ein einziges* Werthsystem $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ zugehört; dass umgekehrt zu jedem Werthsystem $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ im Allgemeinen nur *ein* Kegelschnitt gehört, folgt aus der obigen Darstellung von selbst.

Dass in der That eine solche eindeutige Beziehung stets erreicht werden kann, will ich beweisen, indem ich einen einfachen Weg angebe, welcher stets zu einer solchen führt.

Verstehen wir nämlich für den Augenblick unter $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ die Coordinaten des Poles, welchen eine feste Gerade $G$ in Bezug auf den beweglichen Kegelschnitt besitzt. Die Curve $F=0$ ist der Ort dieser Pole. Dass jeder Kegelschnitt des Systems im Allgemeinen nur auf

*) Die Möglichkeit, dass die Coefficienten auch *irrationale* Functionen des Parameters sein können, gab Cayley an (Phil. Tr. 1868, On the Curves, which satisfy given conditions, Annex Nr. 1.).

einen Pol $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ führt, ist hier ohne Weiteres ersichtlich. Aber die Gerade $G$ lässt sich, wie man zeigen kann, immer so wählen, dass jedem Punkte der Polcurve auch nur ein einziger Kegelschnitt zugehört, dass also im Allgemeinen nicht jeder Punkt der Polcurve gemeinsamer Pol zweier Kegelschnitte des Systems in Bezug auf die Gerade $G$ ist.

Nehmen wir an, es sei nicht so. Es müsste dann zu jedem Kegelschnitte $A$ der Schaar einen zweiten $B$ geben, so dass $G$ Seite des gemeinsamen Polardreiecks beider Kegelschnitte würde. Ebendies aber müsste für *jede* Gerade $G$ eintreten; zu jedem Kegelschnitt $A$ müsste, wie auch $G$ gewählt sei, ein derartiger Kegelschnitt $B$ sich finden lassen.

Nun ist die Zahl aller Geraden $G$ eine doppelt unendliche, dagegen giebt es zu jedem Kegelschnitt $A$ nur einfach unendlich viele Kegelschnitte $B$, während doch die Zahl der Seiten gemeinsamer Polardreiecke von $A$ mit dem $B$ der Zahl der Geraden $G$ wenigstens gleich, also doppelt unendlich sein muss. Demnach müsste entweder jeder Verbindung des Kegelschnitts $A$ mit einem $B$ unendlich viele Geraden $G$ als Seiten gemeinsamer Polardreiecke zugehören; oder es müsste zu jedem $A$ eine endliche Zahl von $B$ zugehören, welche mit $A$ alle Geraden der Ebene zu Seiten gemeinsamer Polardreiecke besässen.

Der letzte Fall ist aber sofort auszuschliessen. Denn Kegelschnitte, welche alle Geraden der Ebene zu Seiten gemeinsamer Polardreiecke haben, sind überhaupt identisch. Es bleibt also nur der erste Fall als einzig denkbarer Ausnahmefall übrig: Je zwei Kegelschnitte des Systems haben einfach unendlich viele Gerade zu Seiten gemeinsamer Polardreiecke, und berühren sich daher doppelt.

Aber ein einfach unendliches System von Kegelschnitten, von denen je zwei einander doppelt berühren, ist nur möglich, wenn alle zwei feste Berührungspunkte gemein haben. Man sieht dies leicht ein, indem man einen der Kegelschnitte, $A$, als Umriss der Projection einer Fläche zweiter Ordnung ansieht. Die andern $B$, $C$.. werden dann Projectionen ebener Schnitte $B'$, $C'$... Da nun zwei ebene Schnitte einer Fläche zweiter Ordnung einander nicht doppelt berühren können, so kann die doppelte Berührung zweier andrer Kegelschnitte $B$, $C$ nur davon herrühren, dass die Schnittlinie der Ebenen der entsprechenden Kegelschnitte $B'$, $C'$ im Raum in die Ebene des zu $A$ gehörigen Kegelschnitts $A'$ fällt. Mithin gehen die Ebenen aller Kegelschnitte im Raume, welche durch Projection die Kegelschnitte der Schaar liefern, durch den Schnitt von $A'$ mit $B'$, und alle haben also bei der Projection feste Berührungspunkte, die Projectionen der Punkte, in denen $A'$ und $B'$ sich treffen.

Es bleibt also nur noch das Kegelschnittsystem zu untersuchen, welches aus allen Kegelschnitten besteht, die einen gegebenen in zwei festen Punkten berühren. Aber die Seiten gemeinsamer Polardreiecke zweier Kegelschnitte dieses Systems bestehen aus der Berührungssehne und aus der Geraden, welche durch den für alle Kegelschnitte gemeinsamen Pol derselben gehen. Es giebt daher noch unendlich viele Lagen einer Geraden $G$, für welche wiederum jedem Pole nur ein einziger Kegelschnitt zugehört.

Man kann also den Satz aussprechen:

*Jede einfach unendliche algebraische Kegelschnittschaar kann eindeutig abgebildet gedacht werden auf der Curve der Pole, welche die Kegelschnitte des Systems in Bezug auf eine passend gewählte Gerade besitzen.*

Wir können nach dem Vorhergehenden voraussetzen, dass im Allgemeinen jedem Kegelschnitte der Schaar nur *ein* Punkt der Curve $F=0$ entspricht und umgekehrt. *Einzelne* Punkte von $F=0$ können sich dabei scheinbar anders verhalten. Mehrere Kegelschnitte entsprechen demselben Punkte von $F=0$, wenn man diesen in mehr als einer Richtung auf der Curve fortschreitend verlassen kann, wenn er also ein vielfacher Punkt von $f=0$ ist; aber dies hört auf eine Ausnahme zu sein, wenn man einen vielfachen Punkt als Ueberlagerung so vieler Punkte auffasst, als Zweige durch ihn gehen. In gleicher Weise können Kegelschnitte existiren, welche bei stetigem Durchlaufen der Schaar mehrfach erreicht werden, und demnach ebensovielen Punkten der Curve entsprechen können.

## § 2.

### Eine andere Interpretation der Gleichung des Kegelschnittsystems.

Für das Folgende ist eine zweite Auffassung dieser Verhältnisse von besonderer Wichtigkeit. Die Gleichung $f=0$ wurde als die Gleichung eines veränderlichen Kegelschnitts betrachtet, $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ als dessen Parameter, welche durch die Gleichung $F=0$ verbunden waren, die Ortscurve des Punktes $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ selbst. Aber wir können nunmehr auch in $f=0$ die Grössen $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ als die Coordinaten eines beweglichen Punktes auffassen. Dann ist $f=0$ die Gleichung eines doppelt unendlichen Systems von Curven $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung, in welchem die Verhältnisse der $x_1$, $x_2$, $x_3$ die Stelle von Parametern versehen. Jede dieser Curven $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung hat mit $F=0$ eine Anzahl von Punkten $(\varrho\,.\,\sigma)$ gemein. Aber im Allgemeinen wird es vorkommen, dass nur einige derselben beweglich, d. h. von den Parametern abhängig sind, während andere fest bleiben, wie man die Parameter auch wählen mag. Nur für erstere ist dann $f=0$ mit $F=0$ so erfüllt, dass die Werthsysteme $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ von den $x$ abhängig sind. Nur diese also entsprechen in der andern Interpretation denjenigen Kegelschnitten der Schaar, welche durch einen gegebenen Punkt $x$ gehen, d. h. ihre Zahl ist die *erste Charakteristik* $a$ der Schaar. Dagegen ist für die $\varrho\sigma - a$ festen Schnittpunkte der Curven $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung mit $F = 0$ die Gleichung $f = 0$ unabhängig von den $x$ erfüllt, alle Coefficienten von $f$ verschwinden für solche Werthe von $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$. In diese Punkte fallen also für alle Curven $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung eine gewisse Zahl Schnittpunkte mit $F = 0$, und ein solcher Punkt mag dann ein *Ausnahmepunkt erster Art* genannt werden, und zwar von der $r^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn $r$ Schnittpunkte von ihm absorbirt werden.

In ähnlicher Weise können wir nun verfahren, wenn wir, statt die Kegelschnittschaar $f = 0$ in Punktcoordinaten zu untersuchen, die Gleichung derselben in Liniencoordinaten betrachten. Diese Gleichung $\varphi = 0$, in der gewöhnlichen Weise gebildet, ist in $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ von der Ordnung $2\varrho$, indem $\varphi$ die Coefficienten von $f$ quadratisch enthält. Es ist dabei die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass hierbei ein nur von $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ abhängiger Factor sich absondere; doch wollen wir diesen Fall nicht besonders unterscheiden.

Die Gleichung $\varphi = 0$ können wir in Bezug auf $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ als die Gleichung eines doppelt unendlichen Curvensystems betrachten, in welchem die Liniencoordinaten die Stelle von Parametern versehen. Den Kegelschnitten, welche eine gegebene Gerade berühren, entsprechen dann die beweglichen Schnittpunkte einer Curve $\varphi = 0$ mit $F = 0$, und ihre Anzahl ist die *zweite Charakteristik* $b$ der Kegelschnittschaar. Was die $2\varrho\sigma - b$ festen Schnittpunkte des Systems $\varphi = 0$ mit $F = 0$ angeht, so ist erstlich jeder Ausnahmepunkt erster Art, für welchen alle Coefficienten von $f$ in einer gewissen Art verschwinden, hier offenbar ebenfalls ein Ausnahmepunkt, und zwar absorbirt ein solcher hier, da die Coefficienten von $\varphi$ in denen von $f$ quadratisch sind, zunächst doppelt so viele Schnittpunkte als im vorigen Falle. Aber es können neue feste Schnittpunkte hinzutreten, welche der Function $\varphi$ eigenthümlich sind, und für welche alle Coefficienten von $\varphi$ verschwinden. Sie mögen *Ausnahmepunkte zweiter Art* heissen, und zwar heisse ein Punkt von der $s^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn $s$ feste Schnittpunkte in ihn fallen. Ausnahmspunkte beider Arten können übrigens vereinigt liegen. Wenn ein Ausnahmepunkt $r^{\text{ter}}$ Ordnung der ersten und einer $s^{\text{ter}}$ Ordnung der zweiten Art vereinigt liegen, so absorbirt ein solcher Punkt $2r + s$ Schnittpunkte von $F = 0$ mit jeder der Curven $(2\varrho)^{\text{ter}}$ Ordnung $\varphi = 0$.

## § 3.

### Ueber die Natur der Bedingungsgleichung, welche die gesuchten Kegelschnitte der Schaar zu erfüllen haben.

Die Bedingung dafür, dass ein Kegelschnitt der Schaar einer vorgeschriebenen Forderung genügen solle, kann man im Allgemeinen auf das Verschwinden einer Invariante zurückführen. Es ist hierzu nur nöthig, dass man die etwa in der Natur der Aufgabe liegenden metrischen Elemente in der bekannten Weise auf projectivische zurückführt.

Wenn die Elemente der zu erfüllenden Bedingung von der Natur des Kegelschnittsystems unabhängig sind, so wird diese Invariante die Coefficienten des Kegelschnitts einerseits, andererseits aber Coefficienten andrer gegebener Curven, Coordinaten gegebener Punkte etc. enthalten, wie die Natur der Bedingung sie erfordert.

Dagegen sind jedesmal diejenigen Fälle besonders zu betrachten, in welchen die Bedingung selbst wieder von denjenigen Elementen abhängt, durch welche die Natur der Kegelschnittschaar bestimmt wird. Hierbei kann es geschehen, dass die Invariante, welche die fragliche Bedingung ausdrückt, zunächst identisch verschwindet, und dass man durch einen Grenzübergang zum Verschwinden sämmtlicher Coefficienten einer Covariante etc. übergehen muss, um die Natur der Bedingung ausdrücken zu können. Dies ist z. B. der Fall, wenn das Kegelschnittsystem eine Curve nochmals berühren soll, welche jede Curve des Systems ohnedies schon berührt. Fälle solcher Art, bei welchen die Bedingung nicht mehr durch das Verschwinden einer Invariante ausgedrückt wird, schliesse ich hier aus. Doch trifft dies keineswegs *alle* Fälle, in welchen die Elemente der Bedingung von den bedingenden Elementen der Kegelschnittschaar selbst abhängen.

Ist, wie ich annehme, die Bedingung durch das Verschwinden einer Invariante ausgedrückt, welche einerseits die Coefficienten des Kegelschnitts, andrerseits die Bestimmungselemente anderer gegebener Gebilde enthält, so will ich zunächst noch die weitere Forderung hinzufügen, dass diese Gebilde durch eine Anzahl beliebig zu wählender Punkte rational bestimmbar sein mögen, und werde erst weiterhin zeigen, dass man von dieser Bedingung absehen kann.

Diese Vorstellungen über die Natur der Bedingung lassen die zu erfüllende Gleichung

$$\Pi = 0$$

als das Verschwinden einer Invariante erscheinen, welche ausser den Coefficienten des beweglichen Kegelschnitts nur noch Coordinaten verschiedener willkürlicher Punkte enthält; so dass $\Pi$, wenn man will, eine Covariante mit mehreren cogredienten Reihen ist.

Es sei $\pi$ der Grad von $\Pi$ in den Coefficienten von $f$. Dann kann man $\Pi = 0$ in Bezug auf $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ als Curve $\pi\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung betrachten, und die gesuchten Werthsysteme $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ entspringen aus den Durchschnittspunkten von $\Pi = 0$ mit $F = 0$. Demnach ist ihre Zahl zunächst gleich $\pi\varrho\sigma$.

Aber von dieser Zahl ist wieder eine Anzahl fester Werthsysteme in Abzug zu bringen, welche von den Elementen der Bedingung unabhängig sind. Ordnen wir $\Pi$ nach den Coordinaten der willkürlichen Punkte, so müssen für solche Ausnahmewerthe die sämmtlichen Coefficienten von $\Pi$ verschwinden. Dass zu solchen Ausnahmewerthen die oben als Ausnahmspunkte erster und zweiter Art bezeichneten Punkte führen werden, sieht man sogleich. Aber es ist als ein wichtiges und den Kern der Sache enthaltendes Moment zu betrachten, *dass keine andere Ausnahmswerthe existiren können.* Hierzu führen Untersuchungen aus der Theorie der ternären quadratischen Formen, welche ich im Folgenden gebe.

## § 4.

### Das Formensystem einer ternären quadratischen Form.

Wie ich im 17. Bande der Abhandlungen der Göttinger Societät entwickelt habe (vgl. diese Annalen Bd. 5. p. 423.), besitzt jede ternäre Form mit mehreren Reihen von Veränderlichen ein zugehöriges *eigentlich reducirtes Formensystem.* Dies ist ein System von Formen, welche höchstens je eine Reihe von Punkt- und Liniencoordinaten $(x, u)$ enthalten, und in Bezug auf diese sämmtlich der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial u_3} = 0$$

genügen. Die Coefficienten dieser Formen, soweit sich nicht mit Hülfe dieser Gleichung einige als lineare Functionen der andern ausdrücken, sind den Coefficienten der gegebenen Form an Zahl gleich, und lineare Functionen derselben mit nicht verschwindender Determinante, so dass diese umgekehrt aus jenen in gleicher Weise linear zusammengesetzt werden können.

Ich will nun untersuchen, wie die Formen des reducirten Systems beschaffen sind, wenn die gegebene Form eine Form $\Pi$ ist, welche ausser den Coefficienten einer quadratischen Form nur noch Coordinaten beliebiger Punkte enthält.

Aus der erwähnten Theorie folgt, dass die Formen des zu $\Pi$ gehörigen reducirten Systems sämmtlich wieder vom Grade $\pi$ in den

Coefficienten von $f$ sind. Es entsteht also die Frage, welche aus $f$ entspringenden Bildungen es geben könne, welche höchstens je eine Reihe $u$, $x$ enthalten und von gegebenem Grade in den Coefficienten sind.

Bezeichnen wir $f$ symbolisch durch

$$f = a_x^2 = b_x^2 \ldots,$$

so ist jede solche Bildung ein Aggregat symbolischer Produkte, deren symbolische bez. wirkliche Factoren nur einen der folgenden vier Typen haben können:

$$u_x,\ a_x,\ (abu),\ (abc).$$

Nur der erste dieser Typen giebt einen *wirklichen* Factor; wie die andern ebenso auf solche führen, und also eine einfache Zerlegung jeder reducirten Form in wirkliche Factoren sich ergiebt, soll nun gezeigt werden.

Führen wir ausser $f$ die adjungirte Form

$$\varphi = (abu)^2$$

und die Invariante

$$A = (abc)^2$$

des Kegelschnitts ein, so können wir folgende Sätze aufstellen:

1. *Jedes symbolische Produkt, welches den symbolischen Factor $(abc)$ hat, enthält den wirklichen Factor $A$.*

Jedes solche Produkt nämlich enthält die Symbole $a$, $b$, $c$ nur in den Verbindungen $(abc)\ a_i b_h c_k$; diese aber sind die Coefficienten des Ausdrucks

$$\psi = (abc)\ a_x b_y c_z.$$

Enthält also dieser Ausdruck den Factor $A$, so ist der obige Satz bewiesen. Nur ändert der Ausdruck $\psi$ höchstens sein Vorzeichen, wenn man $a$, $b$, $c$ auf alle Weise vertauscht; daher ist, wenn man die Summe der 6 entstehenden Darstellungen durch 6 dividirt:

$$\psi = \tfrac{1}{6}\,(abc) \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{6}\,(abc)^2\,(xyz) = \frac{A}{6}\,(xyz),$$

w. z. b. w.

2. *Jedes symbolische Produkt, welches einen symbolischen Factor $(abu)$, aber keinen symbolischen Factor des Typus $(abc)$ mehr enthält, zerfällt in Glieder, welche theils den wirklichen Factor $\varphi$, theils den wirklichen Factor $A \cdot u_x$ haben.*

Da $(abu)\ a_x b_x$ identisch Null ist, so können Produkte dieser Art die Symbole $a$, $b$ nur in einer der Verbindungen

$$(abu)\,(acu)\,(bdu)$$
$$(abu)\,(acu)\,b_x$$

enthalten. Vertauscht man aber $a$ mit $b$ und nimmt die halbe Summe des alten und neuen Ausdrucks, so hat man:

$$\begin{aligned}(abu)\,(acu)\,(bdu) &= \tfrac{1}{2}\,(abu)\,\{(acu)\,(bdu) - (adu)\,(bcu)\} \\ &= \tfrac{1}{2}\,(abu)^2\,(cdu) = \tfrac{\varphi}{2}\,(cdu);\\ (abu)\,(acu)\,b_x &= \tfrac{1}{2}\,(abu)\,\{(acu)\,b_x - (bcu)\,a_x\} \\ &= \tfrac{1}{2}\,(abu)\,\{(abu)\,c_x - (abc)\,u_x\} \\ &= \tfrac{1}{2}\,\{\varphi\,.\,c_x - (abu)\,(abc)\,u_x\}\,.\end{aligned}$$

Man sieht, dass hier alle Glieder den Factor $\varphi$ haben, bis auf das letzte; dieses aber hat einen symbolischen Factor $(abc)$, also nach Satz 1. einen wirklichen Factor $A$, womit der Satz bewiesen ist.

Hieraus folgt nun sofort weiter:

3. *Jede Invariante etc. einer quadratischen ternären Form mit höchstens einer Reihe von $x$ und $u$ ist eine ganze Function der Formen*

$$u_x,\ f,\ \varphi,\ A.$$

Betrachten wir nämlich ein symbolisches Produkt, welches nur $x$, $u$ und Symbole $a$, $b$, $c$ ... enthält, so können wir, solange noch symbolische Factoren $(abc)$ oder $(abu)$ vorhanden sind, den Ausdruck in Theile mit den Factoren $A$, $\varphi$ oder $A\,.\,u_x$ zerlegen. Sind aber endlich solche Factoren nicht mehr vorhanden, so können nur noch symbolische Produkte der Form $a_x^2\,.\,b_x^2\,...\,u_x^\alpha$ vorhanden sein, also Produkte einer Potenz von $u_x$ mit einer Potenz von $f$. Die Zurückführung auf die im Satze ausgesprochene Gestalt ist hiermit geleistet.

## § 5.

### Die Bedingungsgleichung $\Pi = 0$ und ihr reducirtes System.

Betrachten wir nun die Formen des reducirten Systems genauer. Factoren $u_x$ können wir übergehen; die Formen des Systems haben also die Gestalt:

$$f^\alpha\,.\,\varphi^\beta\,.\,A^\gamma\,.\,F\,(f,\ \varphi,\ A,\ u_x),$$

wo $F$ keinen Factor $f$, $\varphi$, $A$, $u_x$ mehr enthalten mag. Diese Function aber muss durchaus homogen sein in Bezug auf die $x$, ebenso in Bezug auf die $u$, und endlich in Bezug auf die Coefficienten des Kegelschnitts. Wegen des ersten Umstandes ist sie eine homogene Function von $f$ und $u_x^2$; wegen des zweiten Umstandes aber führt jedes $f$ einen Factor $\varphi$ mit sich, und endlich muss wegen des dritten, da $f\,.\,\varphi$ vom dritten Grade in den Coefficienten ist, jedes $u_x^2$

mit $A$ multiplicirt sein. Es ist also $F$ eine homogene Function von $f.\varphi$ und von $A.u_x^2$, und der Typus der Formen des reducirten Systems ist also:

$$f^\alpha . \varphi^\beta . A^\gamma . F(f.\varphi, A.u_x^2).$$

Es ist hinzuzufügen, dass der Voraussetzung nach der erste und letzte Coefficient in $F$ von Null verschieden ist.

Nennen wir $\delta$ die Ordnung der homogenen Function $F$, und bemerken wir, dass $A$ als bilineare Combination der Coefficienten $a_{ik}$, $\alpha_{ik}$ von $f$ und $\varphi$ aufgefasst werden kann:

$$A = \Sigma\, a_{ik}\alpha_{ik},$$

so sehen wir, dass die Form

$$f^\alpha . \varphi^\beta . A^\gamma . F(f.\varphi, A.u_x^2)$$

als homogene Function von der Ordnung $\alpha + \gamma + \delta$ der Coefficienten von $f$, und zugleich als homogene Function von der Ordnung $\beta + \gamma + \delta$ der Coefficienten von $\varphi$ aufgefasst werden kann. Da die Coefficienten $\alpha$ quadratisch in den $a$ sind, so ist der Gesammtgrad der obigen Form in den Coefficienten von $f$

$$\alpha + 2\beta + 3(\gamma + \delta).$$

Diese Zahl ist für alle Formen des reducirten Systems dieselbe, nämlich gleich dem Grade $\pi$ der Form $\Pi$. Dagegen können die Zahlen $\beta + \gamma + \delta$ und

$$\alpha + \gamma + \delta = \pi - 2(\beta + \gamma + \delta)$$

für verschiedene reducirte Formen verschieden sein. Die Zahl $\beta + \gamma + \delta$ giebt an, wie oft in der betreffenden Form Paare von Coefficientenreihen $a$ in Coefficientenreihen $\alpha$ zusammengezogen werden können, und zwar giebt sie das Maximum an, welches erreichbar ist. Denn auch in $F$ ist eine weitere Zusammenziehung nicht möglich; sie müsste auch für $u_x = 0$ eintreten, und dann verwandelt sich $F$ in $(f.\varphi)^\delta$, was offenbar eine weitere Zusammenziehung nicht gestattet.

Fassen wir nun die Gesammtheit der Formen des reducirten Systems ins Auge, so sehen wir erstlich, dass mindestens in einer derselben $\gamma$ gleich Null sein muss. Denn sonst hätten alle Formen des reducirten Systems den Factor $A$, also auch $\Pi$, und er wäre bei $\Pi = 0$ auszulassen gewesen.

Ferner sehen wir, dass in homogener Weise Paare von Coefficientenreihen $a_{ik}$ in $\Pi$ die Zusammenziehung zu Coefficienten $\alpha$ nur so oft gestatten, als diejenige reducirte Form, für welche dies am wenigsten oft möglich ist. Denn wäre es bei $\Pi$ öfters möglich, so träte dies bei allen Coefficienten von $\Pi$ ein, also auch bei allen reducirten Formen, deren Coefficienten sich aus jenen linear zusammensetzen.

Charakteristisch für $\Pi$ ist also der kleinste vorkommende Werth von $\beta + \gamma + \delta$. Dieser werde durch $\nu$ bezeichnet, der zugehörige (grösste) Werth von $\alpha + \gamma + \delta$ durch

$$\mu = \pi - 2\nu .$$

Man sieht dann, *dass die Form* $\Pi$ *als homogene Function zugleich* $\mu^{\text{ter}}$ *Ordnung in den Coefficienten von* $f$ *und* $\nu^{\text{ter}}$ *Ordnung in den Coefficienten von* $\varphi$ *dargestellt werden kann,* dass aber eine weitere Erniedrigung von $\mu$ nicht mehr möglich ist.

Die Zahlen $\mu$, $\nu$ sind es, welche die *Charakteristiken der Bedingung* genannt werden müssen.

## § 6.

### Beweis des Hauptsatzes.

Die Bedingung $\Pi = 0$ mit den Charakteristiken $\mu$, $\nu$ kann als Gleichung einer Curve in $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ angesehen werden, oder vielmehr als Gleichung eines vielfach unendlichen Systems von Curven, bei welchem die Coordinaten der in $\Pi$ auftretenden willkürlichen Punkte die Stelle der Parameter versehen. Die Ordnung dieser Curven ist $\pi\varrho = \varrho\,(\mu + 2\nu)$. Die Lösungen der vorgelegten Aufgaben sind gegeben durch die beweglichen Schnittpunkte, welche eine Curve dieses Systems mit $F = 0$ hat. Man erhält sie, wenn man von $\varrho\sigma\,(\mu + 2\nu)$ die Anzahl der festen Schnittpunkte abzieht.

Für die festen Schnittpunkte verschwinden alle Coefficienten von $\Pi$; die Zahl von Schnittpunkten, welche von einem solchen festen Schnittpunkt absorbirt werden, ist durch die kleinste der Zahlen gegeben, welche die absorbirten Schnittpunkte von $F = 0$ mit den durch Nullsetzen der Coefficienten von $\Pi$ erhaltenen Curven angiebt. Die Curven, welche durch Nullsetzen der reducirten Formen entstehen, sind von einander unabhängige lineare Verbindungen der letztern; diese Minimalzahl kann also auch aus dem Curvensystem der reducirten Formen gefunden werden.

Aber aus den Entwickelungen des vorigen § folgt dann sofort:

1. *Diese Ausnahmspunkte von* $\Pi$ *können nur Ausnahmspunkte von* $f$ *oder* $\varphi$ *sein.*

2. *Die Ausnahmspunkte erster Art absorbiren genau* $\mu + 2\nu$ *mal soviel Schnittpunkte als bei* $f = 0$, *die Ausnahmspunkte zweiter Art genau* $\nu$ *mal so viel Schnittpunkte als bei* $\varphi = 0$.

Sind also $\alpha$, $\beta$ die Zahlen, welche angeben, wie viel Schnittpunkte von $f = 0$, $F = 0$ durch Ausnahmspunkte erster Art, und bei $\varphi = 0$, $F = 0$ durch Ausnahmspunkte zweiter Art absorbirt werden, so ist die Zahl der beweglichen Schnittpunkte von $\Pi = 0$, $F = 0$:

$$\varrho\sigma(\mu+2\nu)-\alpha(\mu+2\nu)-\beta\nu$$
$$=\mu(\varrho\sigma-\alpha)+\nu(2\varrho\sigma-2\alpha-\beta).$$

Aber es ist $\varrho\sigma-\alpha$ die Zahl der Schnittpunkte von $f=0$ mit $F=0$, vermindert um die Zahl der festen, es ist also

$$\varrho\sigma-\alpha=a$$

die erste Charakteristik der Kegelschnittschaar. Ebenso ist $2\varrho\sigma-2\alpha-\beta$ die Zahl der Schnittpunkte von $\varphi=0$ mit $F=0$, vermindert um die Zahl der festen, es ist also auch

$$2\varrho\sigma-2\alpha-\beta=b$$

die zweite Charakteristik der Kegelschnittschaar. Demnach wird die Zahl der beweglichen Schnittpunkte von $\Pi=0$ mit $F=0$ gleich

$$\mu a+\nu b,$$

und man hat den zu beweisenden Satz vor sich:

*Man erhält die Zahl der Kegelschnitte einer Schaar, welche eine gegebene Bedingung erfüllen, die von den Bedingungen des Systems unabhängig und durch eine Anzahl willkürlicher Punkte rational ausdrückbar ist, wenn man die Charakteristiken der Schaar entsprechend mit denen der Bedingung multiplicirt und die Summeder Produkte bildet.*

## § 7.

### Ausführung eines Beispiels.

Es wird nicht überflüssig sein, diese Betrachtungen an einem einfachen Beispiele zu erläutern. Es sei die Aufgabe gestellt, *diejenigen Kegelschnitte einer Schaar zu finden, welche die Entfernung zweier gegebener Punkte $x$, $y$ nach gegebenem Doppelverhältnisse theilen.*

Der Werth des Doppelverhältnisses sei $\alpha$. Soll ein Punkt der Geraden $x$, $y$ mit den Coordinaten $x_i+\lambda y_i$ auf dem Kegelschnitte $f=0$ liegen, so muss man haben:

$$\begin{aligned}0&=f(x+\lambda y)\\&=P+2\lambda Q+\lambda^2 R.\end{aligned}$$

Die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung seien $\lambda$, $\mu$ alsdann ist die Forderung der Aufgabe durch die Gleichung

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}-\alpha\right)\left(\frac{\mu}{\lambda}-\alpha\right)=0$$

ausgedrückt, oder durch

$$\mu\lambda(\alpha+1)^2-\alpha(\mu+\lambda)^2=0.$$

Da nun

$$\mu\lambda:-(\mu+\lambda):1=P:2Q:R,$$

so verwandelt sich diese Gleichung in:

(1) $$PR(\alpha + 1)^2 - 4Q^2\alpha = 0 .$$

Dieses ist die Gleichung $\Pi = 0$, welche hier zur Verwendung kommt. Nur wenn $\alpha = -1$, hat man dieselbe zu ersetzen durch

(2) $$Q = 0 .$$

Um die Werthe von $\mu$ und $\nu$ zu bestimmen, muss man für die linken Theile von (1) bez. (2) das reducirte System suchen. Unter den Formen des reducirten Systems wird aber eine erhalten, wenn man die $y$ den $x$ gleich setzt. Ist symbolisch $f = a_x{}^2$, so hat man

$$P = a_x{}^2 , \quad Q = a_x a_y , \quad R = a_y{}^2 ;$$

alle werden gleich $f$, wenn man die $y$ den $x$ gleichsetzt. Aus (2) erhält man dann sofort $f$ selbst, und da $Q$ eine Polare von $f$ ist, so umfasst $f$ das ganze reducirte System für diesen Fall. Eine Zusammenziehung von Coefficienten von $f$ zu Coefficienten von

$$\varphi = (a b u)^2$$

kann nicht eintreten, und man hat also $\mu = 1$, $\nu = 0$, und den bekannten Satz:

*In einem System mit den Charakteristiken $a$, $b$ giebt es $a$ Kegelschnitte, welche die Entfernung zweier Punkte harmonisch theilen.*

Ebenso wird aus der linken Seite von (1), wenn man $y = x$ setzt,

$$f^2 . (\alpha - 1)^2 .$$

Schliessen wir also den Fall $\alpha = 1$ aus, so wird $f^2$ eine Form des reducirten Systems, eine Zusammenziehung der Coefficienten zu Coefficienten von $\varphi$ ist nicht möglich, und man hat also $\mu = 2$, $\nu = 0$; demnach folgt das bekannte Resultat:

*In einem System mit den Charakteristiken $a$, $b$ giebt es $2a$ Kegelschnitte, welche die Entfernung zweier Punkte nach einem gegebenen, von 1 und $-1$ verschiedenen Doppelverhältnisse theilen.*

Für $\alpha = 1$ kommt man auf die Berührung der Geraden $x$, $y$ mit einem Kegelschnitte des Systems zurück, und man muss also $b$ Lösungen erhalten. Dies zeigt sich nun hier folgendermassen: Ist $\alpha = 1$, so geht (1) über in

$$PR - Q^2 = 0 .$$

Nun ist symbolisch

$$\begin{aligned} P &= a_x{}^2 = b_x{}^2 \\ Q &= a_x a_y = b_x b_y \\ R &= a_y{}^2 = b_y{}^2 . \end{aligned}$$

Daher hat man

$$\begin{aligned} 2(PR - Q^2) &= a_x{}^2 b_y{}^2 - 2 a_x a_y . b_x b_y + b_x{}^2 a_y{}^2 \\ &= (a_x b_y - b_x a_y)^2 = (a b u)^2 , \end{aligned}$$

wenn die $u$ die aus den $x$, $y$ gebildeten Unterdeterminanten bedeuten, also die Coordinaten der Geraden $x$, $y$. Mithin ist die Bedingungsgleichung hier wirklich

$$\varphi = 0,$$

daher $\mu = 0$, $\nu = 1$ und die Anzahl der Lösungen gleich $b$, wie es sein sollte.

## § 8.

### Ausdehnung des Satzes auf den Fall, wo die Bedingung nicht durch unabhängige Punkte rational gegeben ist.

Ich werde nun zeigen, dass der Satz des § 6. auch noch erfüllt ist, wenn die gegebene Bedingung nicht durch eine Anzahl *willkürlich* zu wählender Punkte rational ausdrückbar ist. In diesem Falle mögen etwa $r$ Punkte zum Ausdrucke der Bedingung nothwendig sein, zwischen den Coordinaten derselben aber $s < 2r$ algebraische Gleichungen eintreten. Um diese zu erfüllen legen wir $s$ der Punkte auf beliebig durch je zwei willkürliche Punkte bestimmte Gerade. Wir haben dann im Ganzen $r + s$ willkürlicher Punkte eingeführt, und in den $s$ algebraischen Gleichungen treten ebensoviel Parameter auf, welche die Lage der $s$ beseitigten Punkte auf den $s$ Geraden ausdrücken. Die Bestimmung dieser Parameter führt auf eine algebraische Gleichung, welche entweder irreducibel ist oder in solche Factoren zerfällt; im letztern Falle genügt die Betrachtung eines Factors. Er sei vom Grade $n$. Multipliciren wir die $n$ Werthe mit einander, welche die linke Seite der Bedingung $\Pi = 0$ für die $n$ Lösungen dieses Factors annimmt, so erhalten wir ein Produkt $\Omega = 0$, dessen Coefficienten jetzt durch die Coordinaten der eingeführten $r + s$ Punkte rational ausdrückbar ist. Die Gleichung $\Omega = 0$ kann also behandelt werden wie $\Pi = 0$ in § 6; sie hat Charakteristiken $\mu$, $\nu$, und die Anzahl der beweglichen Lösungen von $\Omega = 0$ und $F = 0$ ist dann

$$\mu a + \nu b.$$

Diese Lösungen aber müssen sich, da die oben erwähnte Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades irreducibel war, zu gleichen Theilen auf die Factoren von $\Omega$ vertheilen; die Zahl der Lösungen, welche der ursprünglichen Gleichung $\Pi = 0$ entsprechen, ist also

$$\frac{\mu a + \nu b}{n}.$$

Nun ist $n$ ausschliesslich von der Bedingung abhängig, nicht von der Natur der Kegelschnittschaar. Die Coefficienten $\frac{\mu}{n}$, $\frac{\nu}{n}$ müssen also die Eigenschaft haben, mit jedem Paar von Charakteristiken multiplicirt eine ganze Zahl als Summe zu liefern. Es folgt hieraus leicht, dass die Grössen

$$\frac{\mu}{n} = \mu', \quad \frac{\nu}{n} = \nu'$$

selbst ganze Zahlen sein müssen, und dass also auch hier die Zahl der Lösungen von der Form $\mu' a + \nu' b$ ist, wie zu beweisen war.

Bedienen wir uns nämlich zunächst der elementaren Schaaren, welche durch feste Punkte, bez. Tangenten bestimmt sind. Deren Charakteristiken sind bekanntlich 1, 2; 2, 4; 4, 4; 4, 2; 2, 1. Wegen der ersten und der letzten Schaar müssen die Gleichungen stattfinden

$$\mu' + 2\nu' = \alpha, \quad 2\mu' + \nu' = \beta,$$

wo $\alpha$, $\beta$ ganze Zahlen sind; daher wird

$$\mu' = \frac{2\beta - \alpha}{3} = \beta - \frac{\alpha + \beta}{3}$$

$$\nu' = \frac{2\alpha - \beta}{3} = \alpha - \frac{\alpha + \beta}{3}.$$

Wegen der mittlern Schaar hat man ausserdem

$$4(\mu' + \nu') = \frac{4}{3}(\alpha + \beta) = \gamma,$$

wo $\gamma$ abermals eine ganze Zahl ist; also ist auch $\frac{\alpha + \beta}{3}$ eine ganze Zahl, daher auch $\mu'$ und $\nu'$.

Die verlangte Ausdehnung des Satzes ist hiermit geleistet.

Göttingen, den 31. Mai 1872.

# Erweiterte Fassung eines von Clebsch aufgestellten Uebertragungsprincips und deren Anwendung.

Von S. Gundelfinger in Tübingen.

---

In seiner grundlegenden Abhandlung „Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen" (Borchardt's Journal Bd. 59, S. 1 ff.), hat Clebsch unter andern fundamentalen Sätzen auch ein wichtiges Uebertragungsprincip aufgestellt, welches die Invarianten eines simultanen Systems von $r + s$, durch $s$ lineare homogene Gleichungen verknüpften Veränderlichen unmittelbar aus den Invarianten eines Formensystems von $r$ Variabeln finden lehrt (cfr. l. c. pag. 26 sqq.). Bei genauerer Betrachtung der von Clebsch gegebenen Beweisführung sieht man ohne Mühe, dass dieses Uebertragungsprincip in folgender verallgemeinerter Form ausgesprochen werden kann:

*Es seien in symbolischer Darstellung*

$$f' = (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_r X_r)^m = (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots \beta_r X_r)^m = \cdots$$

*und*

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{r+s}\, x_{r+s})^m = a_x^m = b_x^m = \cdots$$

*zwei Formen gleichen Grades von $r$ und $r + s$ Veränderlichen. Bestehen zwischen den Variabeln von $f$ die $s$ linearen Bedingungen*

$$k_1^{(l)} x_1 + k_2^{(l)} x_2 + \cdots k_{r+s}^{(l)} x_{r+s} = 0, \quad l = r + 1,\ r + 2 \ldots r + s,$$

*so lässt sich aus jeder in symbolischer Darstellung gegebenen Relation zwischen den Covarianten und Invarianten der Form $f'$ eine entsprechende für $f$ ableiten, indem man die symbolischen Determinanten $r^{\text{ten}}$ Grades, wie $(\Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \ldots \nu_r) \ldots$, durch symbolische Determinanten $(r + s)^{\text{ten}}$ Grades, wie $(\Sigma \pm a_1 b_2 \ldots n_r\, k_{r+1}^{(r+1)}\, k_{r+2}^{(r+2)} \ldots k_{r+s}^{(r+s)}) \ldots\ldots\ldots$, und die linearen Factoren $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_r X_r$, $\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_r X_r$ etc. durch Ausdrücke $a_x$, $b_x$ etc. ersetzt*).*

---

*) Selbstverständlich gilt die abgeleitete Relation nur für diejenigen $x_i$, welche die $s$ vorgelegten Bedingungen erfüllen.

Der Beweis ist ganz analog demjenigen, den Clebsch für das Theorem VII seiner angeführten Abhandlung (Seite 28) gegeben. Man führe nämlich in $f$ an Stelle der $x_i$ neue Veränderliche $X_i$ durch die linearen Substitutionen ein:

(1) $X_i = k_1^{(i)} x_1 + k_2^{(i)} x_2 + \cdots + k^{i}_{r+s} x_{r+s}, \; i = 1, 2, 3 \ldots . r+s.$

Vermöge dieser Substitutionen ergeben sich, die Determinante $\Sigma \pm k_1^{(1)} k_2^{(2)} \ldots k_{r+s}^{(r+s)}$ mit $K$ und den Coefficienten von $k_l^{(i)}$ in $K$ mit $K_l^{(i)}$ bezeichnet, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{r+s} x_{r+s} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_{r+s} X_{r+s}\\
(2)\;&b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_{r+s} x_{r+s} = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_{r+s} X_{r+s}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned}
&K\alpha_i = a_1 K_1^{(i)} + a_2 K_2^{(i)} + \cdots + a_{r+s} K_{r+s}^{(i)},\\
(3)\qquad &K\beta_i = b_1 K_1^{(i)} + b_2 K_2^{(i)} + \cdots + b_{r+s} K_{r+s}^{(i)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wenn speciell die Veränderlichen $X_{r+1}, X_{r+2} \ldots X_{r+s}$ sämmtlich verschwinden, wird die Form $f$ identisch mit der Form

$f' = (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_r X_r)^m = (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_r X_r)^m = \ldots .,$ deren symbolische Coefficienten $\alpha_i, \beta_i$ .. durch das System (3) definirt sind. Liegt nun irgend eine Relation zwischen den Covarianten und Invarianten von $f'$ in symbolischer Form vor, so ist jeder Term derselben ein Produkt aus linearen Factoren

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots \alpha_r X_r, \; \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots \beta_r X_r, \ldots$$

und symbolischen Determinanten $(\Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \ldots \nu_r) \ldots\ldots.$

Die ersteren (die linearen Factoren) kann man dem System (2) gemäss durch $a_x, b_x \ldots$ ersetzen, während für jede der letzteren nach bekannten Determinantensätzen wegen (3) eine Gleichung von der Form besteht:

$$K \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \ldots \nu_r = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \ldots n_r k_{r+1}^{(r+1)} k_{r+2}^{(r+2)} \ldots k_{r+s}^{(r+s)} \; {}^{*}).$$

Da in einer Beziehung zwischen Covarianten und Invarianten von $f'$ jedes Glied dieselbe Anzahl symbolischer Determinanten als Factoren enthält, so heben sich die hier auftretenden Potenzen von $K$ völlig heraus. Damit ist aber das fragliche Theorem erwiesen**).

---

*) Zur Erweisung dieser Formel kommen der Reihe nach die Sätze zur Anwendung, die in Baltzer's Determinantentheorie (dritte Ausgabe) § 5, 1, § 6, 2 und § 4, 4 entwickelt sind.

**) Um das im Texte gegebene Raisonnement sich völlig klar zu machen, wird man am besten die $a_i, b_i \ldots$ zunächst nicht als symbolische, sondern als wirkliche, völlig willkürliche Grössen betrachten. Auf diese lässt sich alsdann

Dasselbe gilt natürlich auch noch, wenn an Stelle der Formen $f$ und $f'$ beliebige simultane Systeme $f, \varphi, \chi \ldots$ und $f', \varphi', \chi' \ldots$ treten. Man hat nur in dem oben gegebenen Beweise die $b_i, c_i \ldots$ als symbolische Coefficienten von irgend welchen anderen Formen anzusehen. Wofern insbesondere zu $f$ die lineare Function

$$\varphi = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots u_{r+s} x_{r+s}$$

hinzutritt, so werden die simultanen Invarianten und Covarianten von $f$ und $\varphi$ beziehungsweise Contravarianten und Zwischenformen von $f$, und es lässt sich also das Theorem überhaupt auf jede Relation zwischen abgeleiteten Formen von $f$ ausdehnen.

## Anwendungen.

Das Uebertragungsprincip Clebsch's, in der so erweiterten Fassung ausgesprochen, führt alle Probleme, in denen $r+s$, durch $s$ lineare homogene Beziehungen verknüpfte Veränderliche vorkommen, in *symmetrischer* Weise auf entsprechende Aufgaben mit bloss $r$ Variabeln zurück.

Von den vielen hierher gehörigen Beispielen will ich hier nur einige näher behandeln, und zwar die *symmetrische* Auflösung eines Systems von $n-1$ homogenen Gleichungen, von welchen $n-2$ linear in den $n$ Variabeln sind, während die letzte beziehungsweise vom zweiten, dritten und vierten Grade sein kann.

## I.

## Aufgaben dritten Grades.

Man habe eine beliebige Form dritten Grades

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n)^3 = a_x^3 = b_x^3 = \ldots\ldots,$$

zwischen deren $n$ Variabeln die $n-2$ Beziehungen bestehen sollen

$$(4)\qquad \begin{aligned} k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n &= 0 \\ l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots + l_n x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_n x_n &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} \Delta &= (\Sigma \pm a_1 b_2 k_3 l_4 \ldots q_n)^2 a_x b_x = (abkl \ldots q)^2 a_x b_x \\ Q &= (abkl \ldots q)^2 (cbkl \ldots q) a_x c_x^2 \\ R &= (abkl \ldots q)^2 (cdkl \ldots q)^2 (ackl \ldots q)(bdkl \ldots q), \end{aligned}$$

---

das obige Beweisverfahren in aller Strenge anwenden. Wenn aber eine Gleichung für alle Werthe der $a_i$, $b_i \ldots$ giltig ist, so muss sie auch noch bestehen, wenn man in derselben an Stelle der Potenzen und Producte der $a_i$, der $b_i \ldots$ willkürliche Grössen setzt, d. h. wenn man die $a_i$, $b_i \ldots$ als symbolische Coefficienten betrachtet. Eine ähnliche Bemerkung findet überhaupt bei allen symbolischen Rechnungen ihre Anwendung.

so besteht dem Uebertragungsprincipe gemäss für alle dem Systeme (4) genügenden $x_i$ die Relation (vgl. Clebsch, Binäre Formen § 35)

$$\Delta^3 = -2\left(Q^2 + \frac{R}{2} f^2\right).$$

An dieselbe lassen sich ähnliche Folgerungen knüpfen, wie sie bereits in der Theorie der binären cubischen Formen gezogen worden sind (cfr. Clebsch, B. F. § 38). Nennen wir die vollständigen Cuben

$$\tfrac{1}{2}\left(Q + \sqrt{-\frac{R}{2}} f\right) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\left(Q - \sqrt{-\frac{R}{2}} f\right)$$

beziehungsweise $\xi^3$ und $\eta^3$, setzen also

$$(5)\ \xi = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(Q + \sqrt{-\frac{R}{2}} f\right)} \quad \text{und} \quad \eta = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(Q - \sqrt{-\frac{R}{2}} f\right)},$$

so hat man:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \sqrt{-\frac{R}{2}} f &= (\xi - \eta)(\xi - \varepsilon\eta)(\xi - \varepsilon^2\eta) \ ^{*)}, \\ \Delta &= -2\xi\eta. \end{aligned}$$

Die Bedingung, dass in diesen Gleichungen die $x_i$ dem Systeme (4) genügen müssen, lässt sich vollständig eliminiren, indem man die $x_i$ durch die $n$ Determinanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ersetzt, die sich aus den Verticalreihen der Matrix

$$\begin{matrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdot & \cdot & \cdot & k_n \\ l_1 & l_2 & l_3 & \cdot & \cdot & \cdot & l_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdot & \cdot & \cdot & q_n \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdot & \cdot & \cdot & u_n \end{matrix}$$

bilden lassen und in denen die $u_i$ völlig willkürlich bleiben. Es gehen dadurch $f$, $\Delta$ und $Q$ beziehungsweise über in

$$(7) \qquad \begin{aligned} f &= (akl\,.\,.\,qu)^3 \\ \Delta &= (abkl\,.\,.\,q)^2 (akl\,.\,.\,qu)(bkl\,.\,.\,qu) \\ Q &= (abkl\,.\,.\,q)^2 (cbkl\,.\,.\,q)(akl\,.\,.\,qu)(ckl\,.\,.\,qu)^2, \end{aligned}$$

und die Gleichung (6) liefert alsdann die Zerlegung von $(akl\,.\,.\,qu)^3$ in seine drei linearen Factoren, d. h. die Bestimmung der drei Werthsysteme $x_i$, welche die Gleichungen (4) und $f = 0$ befriedigen.

Damit zwei dieser Werthsysteme zusammenfallen oder mit andern Worten, damit ein Doppelsystem existire, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass $R = 0$. Der Kürze wegen

---

*) $\varepsilon$ hat die bekannte Bedeutung:

$$\varepsilon = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

(8) $(abkl\,..\,q)^2\,(akl\,..\,qu)\,(bkl\,..\,qv) = \zeta$ und $(kl\,..\,quv) = \vartheta$
gesetzt, ergiebt sich in diesem Falle die Zerlegung von $(akl\,..\,qv)^3$ mit Einführung willkürlicher Parameter $u_i$ aus der Gleichung (cfr. Clebsch, B. F. § 88, Glchg. 8)

$$\Delta^3\,(akl\,..\,qv)^3 = \zeta^2\,(f\zeta - 3\,Q\vartheta)\ ^{*)}.$$

Fallen endlich die drei Werthsysteme zusammen, so ist

$$(abkl\,..\,q)^2\,(akl\,..\,qu)\,(bkl\,..\,qu) = 0\ ^{**)}$$

für alle Werthe der $u_i$, während der dreifache Factor von $(akl\,..\,qv)^3$ durch die Relation gegeben ist:

$$f^2\,(akl\,..\,qv)^3 = \zeta^3.$$

## II.

## Aufgaben vierten Grades.

Nach ähnlicher Methode lässt sich das Problem lösen, die Werthe der $x_i$ zu berechnen, welche dem Systeme (4) und der Gleichung

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^4 = a_x^4 = b_x^4 = \cdots = 0$$

genügen. Es kommt dasselbe darauf hinaus, den Ausdruck $(akl\,..\,qu)^4$ in vier Factoren aufzulösen, die linear in Bezug auf die $u_i$ sind. Die Cayley'sche Zerlegung einer binären Form vierten Grades giebt unmittelbar folgendes Resultat.

Man setze

$$(9)\quad \begin{cases} f = (akl\,..\,qu)^4 \\ H = (abkl\,..\,q)^2\,(akl\,..\,qu)^2\,(bkl\,..\,qu)^2 \\ T = (abkl\,..\,q)^2\,(cbkl\,..\,q)\,(akl\,..\,qu)^2\,(bkl\,..\,qu)\,(ckl\,..\,qu)^3 \\ i = (abkl\,..\,q)^4 \\ j = (abkl\,..\,q)^2\,(ackl\,..\,q)^2\,(bckl\,..\,q)^2. \end{cases}$$

Bedeuten ferner $m$, $m'$ und $m''$ die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$m^3 - \frac{i}{2}\,m - \frac{j}{3} = 0$$

*) Für $n = 3$ hat man also den Satz: Wenn eine Gerade $k_x = 0$ die Curve dritter Ordnung $a_x^3 = b_x^3 = \cdots 0$ berührt, so ist für beliebige Werthe der $u_i$ die Gleichung des Berührungspunktes in laufenden Coordinaten $v_i$: $(abk)^2(aku)\,(bkv) = 0$ und die Gleichung des einfachen Schnittpunktes:

$$(cku)^3\,.\,(abk)^2\,(aku)\,(bkv) - 3\,(abk)^2\,(ack)\,(bku)\,(cku)^2\,.\,(kuv) = 0.$$

**) Für Curven dritter Ordnung folgt hieraus: Die 9 Wendetangenten der Curve dritter Ordnung $a_x^3 = b_x^3 = \cdots = 0$ berühren ein ganzes System von Curven vierter Classe, deren Gleichungen aus $(abv)^2\,(avu)\,(bvu) = 0$, indem man den willkürlichen Parametern $u_i$ andere und andere Werthe zuertheilt.

so sind

$$(10)\quad \varphi = \sqrt{-\frac{H+mf}{2}} \quad \psi = \sqrt{-\frac{H+m'f}{2}} \quad \chi = \sqrt{-\frac{H+m''f}{2}}$$

quadratische Formen der $u_i$, deren Irrationalität nur an den Coefficienten haftet und welche durch die Beziehung verknüpft sind:

$$(11)\qquad T = -2\varphi\psi\chi.$$

Nach Festsetzung dieser Bezeichnungen bestimmen sich die Factoren von $f$ aus der Gleichung:

$$(12)\quad \begin{aligned} \sqrt{i^3-6j^2}\,.f = &\sqrt{(m'-m'')\varphi + (m''-m)\psi + (m-m')\chi} \\ &\times \sqrt{(m'-m'')\varphi + (m''-m)\psi - (m-m')\chi} \\ &\times \sqrt{(m'-m'')\varphi - (m''-m)\psi + (m-m')\chi} \\ &\times \sqrt{(m'-m'')\varphi - (m''-m)\psi - (m-m')\chi}. \end{aligned}$$

Auch die Entscheidung über die Realität der Werthsysteme sowie die Erledigung der speciellen Fälle lassen sich unmittelbar aus den binären Formen ablesen. Beispielsweise hat man den Satz:

*Wird $f$ in Bezug auf die $u_i$ ein vollständiges Quadrat, d. h. existiren zwei Doppelsysteme, so ist für beliebige Werthe der $u_i$:*

$$iH - jf = 0.$$

*Das Product aus den beiden ungleichen Factoren von $f$ ergiebt sich mit Einführung willkürlicher Parameter $v_i$ aus der Gleichung*):*

$$\begin{gathered} 6i(akl\,..\,qu)^4\,(akl\,..\,qv)^4 \\ = \left\{6(abkl\,..\,q)^2\,(akl\,..\,qu)^2\,(bkl\,..\,qv)^2 - i(kl\,..\,quv)^2\right\}^2. \end{gathered}$$

## III.

## Zweite, zur praktischen Berechnung geeignetere Lösung der Aufgaben zweiten, dritten und vierten Grades.

Die Zerlegungen von $(akl\,..\,qu)^3$ und $(akl\,..\,qu)^4$, die durch die Gleichungen (6) und (12) gegeben sind, lassen zwar nichts an Eleganz zu wünschen übrig, sind aber wie die entsprechenden Zerlegungen der binären cubischen und biquadratischen Formen zur wirklichen Berechnung nicht sonderlich brauchbar. Besser genügen diesem Zwecke

---

*) *Ist nämlich eine binäre biquadratische Form*

$$u(x_1x_2) = (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)^4 = \alpha_x^4 = \beta_x^4 = \cdots$$

*ihrer Hesse'schen Determinante $\Delta = (\alpha\beta)^2\,\alpha_x^2\beta_x^2$ proportional, so genügt sie für beliebige $x_i$ und $y_i$ der Gleichung*

$$24(\alpha\beta)^4\,u(x_1x_2)\cdot u(y_1y_2) = \left\{\frac{\partial^2\Delta}{\partial x_1^2}y_1^2 + 2\frac{\partial^2\Delta}{\partial x_1\partial x_2}y_1y_2 + \frac{\partial^2\Delta}{\partial x_2^2}y_2^2 + 2(\alpha\beta)^4(xy)^2\right\}^2.$$

die Auflösungen der Gleichungen vom zweiten bis vierten Grade, die aus der typischen Darstellung der binären Formen sich ableiten lassen*).

Aus denselben ergiebt sich z. B. zur Zerlegung von $(akl\,..\,qv)^2$ bei völliger Willkürlichkeit der $u_i$:

$$(13)\quad \begin{aligned}(akl..qv)^2(bkl..qu)^2 = &\left\{(akl..qu)(akl..qv)+\sqrt{-\tfrac{1}{2}(abkl..q)^2\vartheta}\right\}\text{**)}\\ &\cdot\left\{(akl..qu)(akl..qv)-\sqrt{-\tfrac{1}{2}(abkl..q)^2\vartheta}\right\},\end{aligned}$$

und zur Bestimmung der linearen Factoren von $(akl\,...\,qv)^3$:

$$(14)\quad f^2(akl..qv)^3 = \{\zeta-(\xi+\eta)\,\vartheta\}\,\{\zeta-(\varepsilon\xi+\varepsilon^2\eta)\,\vartheta\}\,\{\zeta-(\varepsilon^2\xi+\varepsilon\eta)\,\vartheta\},$$

worin $\xi$ und $\eta$, $\zeta$ und $\vartheta$, sowie $f$ durch die Gleichungen (5), (8) und (7) definirt sind.

Haben endlich $f$ und $T$, sowie $\varphi$, $\chi$ und $\psi$ dieselbe Bedeutung wie in (9) und (10), und setzen wir

$$(akl\,..\,qu)^3\,(akl\,..\,qv) = \tau\,,$$

so hat man zur Auflösung von $(akl\,..\,qv)^4$:

$$\begin{aligned}f^3\,(akl\,..\,qv)^4 = &\{\tau-(\varphi+\psi+\chi)\,\vartheta\}\,\{\tau-(\varphi+\psi-\chi)\,\vartheta\}\\ &\{\tau-(\varphi-\psi+\chi)\,\vartheta\}\,\{\tau-(\varphi-\psi-\chi)\,\vartheta\},\end{aligned}$$

in welcher Gleichung die zusammengehörigen Quadratwurzeln durch die Beziehung bestimmt werden:

$$2\varphi\chi\psi = -T.$$

Andere Anwendungen des Uebertragungsprincips gedenke ich später zu geben.

Tübingen, April 1872.

---

*) Vgl. Clebsch, B. F. § 87 und meine Abhandlung in Borchardt's Journal Bd. 74, S. 91.

**) Man erinnere sich an die in (8) gegebene Definition von $\vartheta$:

$$\vartheta = \Sigma \pm k_1 l_2 \ldots q_{n-2}\, u_{n-1}\, v_n\,.$$

# Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Coefficienten.

Von P. Gordan in Giessen.

Die Gleichungen:

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} X_1 = a_{11}\ x_1 + a_{12}x_2 \cdots a_{1,r}x_r = 0 \\ X_2 = a_{21}\ x_1 + a_{22}x_2 \cdots a_{2,r}x_r = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_s = a_{s1}\ x_1 + a_{s2}x_2 \cdots a_{s,r}x_r = 0 \end{cases}$$

bei denen die $a_{ik}$ sämmtlich reell sein sollen, mögen ein System $S$ genannt werden.

Ich will hier untersuchen, unter welchen Umständen ein solches System durch positive Werthe der $x$, von denen einige aber nicht alle 0 sein dürfen, befriedigt werden können; in solchem Falle soll das System *auflösbar* heissen, im entgegengesetzten *unauflösbar*. Das System $S$ ist jedenfalls *unauflösbar, wenn aus den Gleichungen des Systems eine Gleichung:*

$$F = A_1x_1 + A_2x_2 \ldots . A_rx_r = 0$$

*ableitbar ist, in welcher sämmtliche Coefficienten grösser als* 0 *sind.*

Ich stelle die Behauptung auf, dass sich dieser Satz umkehren lasse, dass also der folgende gelte:

*Ist das System S unauflösbar, giebt es also ausser dem selbstverständlichen Werthsysteme:*

$$x_1 = 0;\quad x_2 = 0 \ldots \quad x_r = 0$$

*kein aus positiven Zahlen, die* 0 *inbegriffen, bestehendes Werthsystem der $x$, welches die Formeln* (I) *befriedigt, dann kann man aus denselben eine Gleichung:*

$$(\mathrm{II})\qquad F = A_1x_1 + A_2x_2 \ldots . A_rx_r = 0$$

*ableiten, worin alle $A$ grösser als* 0 *sind.*

## Beweis.

Besteht das System $S$ nur aus einer Gleichung, ist also $s = 1$, dann ist unser Satz selbstverständlich; man kann ihn der Reihe nach für Systeme beweisen, welche aus 2, 3, 4 ... Gleichungen bestehen. Bei dem Beweise für $s$ Gleichungen will ich die Annahme machen, er gelte für Systeme von weniger Gleichungen; beweist man den Satz unter dieser Voraussetzung für ein System von $s$ Gleichungen, so hat er allgemeine Geltung.

Zunächst soll nun gezeigt werden, dass, wenn überhaupt eine Gleichung mit positiven Coefficienten abgeleitet werden kann, in welcher einige $x$ vorkommen, etwa die Gleichung:

$$\text{(III)} \qquad G = \alpha_{\nu+1} x_{\nu+2} + \alpha_{\nu+2} x_{\nu+2} \ldots + \alpha_r x_r = 0,$$

dass man dann auch eine Gleichung $F = 0$ (II) herstellen kann, in welcher alle $x$ auftreten.

Setzt man nämlich in den $s - 1$ ersten Gleichungen

$$X_1 = 0 \ldots X_{s-1} = 0$$

für die Grössen $x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots x_r$ den Werth Null, dann erhält man ein System $U$, welches nur noch die Variabeln $x_1 \ldots x_\nu$ enthält. Dasselbe ist nicht auflösbar, weil sonst auch das System $S$ auflösbar wäre. Da $U$ nur aus $s - 1$ Gleichungen besteht, so lässt sich der Voraussetzung nach aus seinen Gleichungen eine Formel

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \ldots \beta_\nu x_\nu = 0$$

herstellen, in welcher alle $\beta$ grösser als 0 sind. Durch dieselben Operationen, wie diese Gleichung aus dem Systeme $U$, kann man aus den $s - 1$ ersten Formeln des Systems $S$ eine Formel:

$$H = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \ldots \beta_\nu x_\nu + \beta_{\nu+1} x_{\nu+1} \ldots \beta_r x_r = 0$$

ableiten, worin die $\nu$ ersten Coefficienten grösser als 0 sind. Die Gleichung

$$H + p \,.\; G = 0$$

wird aber, wenn man für $p$ eine hinreichend grosse positive Grösse wählt, eine Gleichung $F = 0$, wie sie oben gefordert wurde.

Hiernach genügt es zu zeigen, dass man aus den Gleichungen $X = 0$ eine Gleichung $G = 0$ (III) ableiten könne. Zu diesem Zwecke unterscheide ich zunächst 3 Fälle:

1. *Fall.* Eine Gleichung, etwa $X_s = 0$, ist eine Folge der übrigen.
2. *Fall.* Die $X$ sind von einander unabhängig und $s \geqq r$.
3. *Fall.* Die $X$ sind von einander unabhängig und $r - s = k > 0$.

*Im* 1. *Falle* ist das System $F$, welches aus den Formeln:

$$X_1 = 0 \ldots X_{s-1} = 0$$

besteht, unauflösbar; es existirt also, da es nur $s - 1$ Gleichungen besitzt, nach obiger Voraussetzung eine Gleichung $F = 0$.

*Im* 2. *Falle* kann man aus den $r$ ersten Formeln eine Gleichung:

$$G = \pm x_1 \,.\; \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{rr} = 0$$

ableiten, bei welcher der einzige Coefficient, welchen sie enthält, positiv gewählt werden kann.

Es ist also nur noch der 3. Fall zu behandeln. In demselben verschwinden, da keine Gleichung Folge der übrigen sein soll, die $s$ reihigen Determinanten des Systems:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sr} \end{vmatrix}$$

nicht sämmtlich. Eine solche nicht verschwindende Determinante sei die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{1,r} \\ a_{2,k+1} & a_{2,k+2} & \cdots & a_{2,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s,k+1} & a_{s,k+2} & \cdots & a_{s,r} \end{vmatrix}.$$

Man kann dann die Gleichungen $X = 0$ in Bezug auf die Grössen

$$x_{k+1}\ ,\ x_{k+2}\ ,\ \ldots\ x_r\ ,$$

welche ich durch:

$$y_1\ ,\ y_2\ ,\ \ldots\ y_s$$

bezeichnen will, auflösen. Hierdurch erhält man ein dem System $S$ äquivalentes System $\Sigma$ der Form:

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} Y_1 = y_1 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \quad \cdots \quad b_{1,k}x_k = 0 \\ Y_2 = y_2 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \quad \cdots \quad b_{2,k}x_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_s = y_s + b_{s1}x_1 + b_{s2}x_2 \quad \cdots \quad b_{s,k}x_k = 0. \end{cases}$$

Um unsern Satz für die Systeme $\Sigma$ nachzuweisen, theile ich dieselben in Classen ein, je nach der Anzahl derjenigen in der Gleichung $Y_1 = 0$ auftretenden Coefficienten $b_{1i}$, welche nicht verschwinden.

Zur $0^{\text{ten}}$ Classe nehme ich die Systeme $\Sigma$, bei welcher alle Coefficienten:

$$\text{(V)}\qquad b_{11}\ ,\ b_{12}\ ,\ \ldots\ b_{1,k}$$

verschwinden; zur $1^{\text{ten}}$ diejenigen, bei denen nur einer dieser Coefficienten nicht verschwindet, zur $2^{\text{ten}}$ die, bei welchen 2 nicht verschwinden u. s. w.

Ist $\Sigma$ ein System $0^{\text{ter}}$ Classe, dann ist $y_1 = 0$ und das System der $s - 1$ Gleichungen, welche aus

$$Y_2 = 0 \ldots Y_s = 0$$

hervorgehen, indem man $y_1 = 0$ setzt, ist nothwendig mit $S$ zusammen unauflösbar, demnach existirt eine Gleichung $G = 0$ (III), was zu beweisen.

Man kann nun den Beweis unseres Satzes der Reihe nach für die Systeme 1[ter], 2[ter] ... Classe u. s. w. führen. Betrachten wir ein System $z$ der $g^{ten}$ Classe; bei dem Beweise will ich die Annahme machen, der Satz gelte bereits für Systeme niederer Classe. Hierbei sind folgende 3 Fälle zu unterscheiden:

1. *Fall.* Die (nicht verschwindenden) Coefficienten $b_{1i}$ sind sämmtlich positiv.
2. *Fall.* Diese Coefficienten sind sämmtlich negativ.
3. *Fall.* Sie haben verschiedene Vorzeichen, es ist etwa $b_{11} > 0$ und $b_{12} < 0$.

*Im* 1. *Falle* ist $Y_1 = 0$ eine Gleichung $G$.

*Im* 2. *Falle* sind die Gleichungen:

$$Y_2 = 0 \ldots Y_s = 0$$

nicht auflösbar; denn würden diese Gleichungen durch positive (bez. theilweise verschwindende) Werthe von $y_2, y_3 \ldots, x_1, x_2 \ldots$ erfüllt, so erhielte man aus $Y_1 = 0$ auch für $y_1$ einen positiven Werth, also wäre auch $S$ auflösbar. Aus dem Umstande aber, dass das kleinere System nicht auflösbar ist, folgt wieder, dass nach unserer Voraussetzung eine Gleichung $F = 0$ besteht. Es ist also nur noch der 3. Fall:

$$b_{11} = a > 0 \quad b_{12} = -b < 0$$

zu untersuchen.

In demselben setze ich zuerst:

$$ax_1 - bx_2 = \xi \quad \text{also} \quad x_1 = \frac{\xi + bx_2}{a};$$

ich erhalte dann ein System $\Sigma_1$, welches die Variabeln:

$$y_1 \ldots y_s\, \xi\, x_2\, x_3 \ldots x_k$$

enthält. Dasselbe ist nicht auflösbar; denn würde es durch positive Werthe von $y_1 \ldots y_s$, $\xi$, $x_2$, $x_3 \ldots$ erfüllt, so würde auch $x_1$ positiv, und auch $S$ müsste auflösbar sein. Das neue System ist ausserdem von niederer Classe als $\Sigma$; mithin besteht nach unserer Voraussetzung eine Formel:

$$K = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \ldots \alpha_s y_s + \alpha_{s+1}\xi + \alpha_{s+2}x_2 + \alpha_{s+3}x_3 \ldots \alpha_r x_r = 0$$

in welcher alle $\alpha$ grösser als 0 sind.

Setzt man ferner

$$-\xi = bx_2 - ax_1 = \eta \quad \text{also} \quad x_2 = \frac{\eta + ax_1}{b}$$

dann entsteht abermals ein unauflösbares System $\Sigma_2$ mit den Variabeln:

$$y_1 y_2 \ldots y_s\, x_1\, \eta\, x_3 \ldots x_k.$$

Da dasselbe von niederer Classe als $\Sigma$ ist, so besteht eine Gleichung:

$$L = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \ldots \beta_s y_s + \beta_{s+1}x_1 + \beta_{s+2}\eta + \beta_{s+3}x_3 \ldots \beta_r x_r = 0$$

in welcher alle $\beta$ grösser als 0 sind.

Die Gleichung

$$\beta_{s+2} K + \alpha_{s+1} L = 0$$

ist dann eine Gleichung $F = 0$, wie man sie sucht.

Die Herstellbarkeit einer Gleichung $F = 0$ ist hiermit in allen Fällen bewiesen.

---

## Ganzzahlige Lösungen. Reducibilität.

Sind die Formeln (I) auflösbar und in ihnen die Coefficienten $a_{ik}$ ganzzahlig, dann kann man ihre Auflösung in folgender bekannter Weise bewerkstelligen.

Unter Lösung versteht man hier ein System positiver ganzer Zahlen, welche die Formeln befriedigen. Die Summe zweier Lösungen ist wieder eine Lösung. Solche Lösungen, welche durch Addition anderer entstehen, heissen *reducibel*, die übrigen *irreducibel*. Jede Lösung, deren sämmtliche Zahlenwerthe nicht kleiner als die einer anderen sind, ist reducibel, da die Differenz beider eine Lösung ist.

Sind die irreducibeln Lösungen:

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & \cdot\ \cdot\ \cdot & g_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ g_{\mu 1} & g_{\mu 2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & g_{\mu r} \end{matrix}$$

dann bilden die Ausdrücke:

$$x_i = g_{1i} y_1 + g_{2i} y_2 \cdot \cdot \cdot \cdot g_{\mu i} y_\mu$$

wenn die $y$ beliebige positive ganze Zahlen sind, die allgemeinste Lösung. Es handelt sich um die Aufsuchung der irreducibeln Lösungen, welche ich in der Folge auch Particularlösungen nennen will.

## Auflösung einer Gleichung $X = 0$.

Ist $X = 0$ eine in diesem Sinne auflösbare Gleichung, dann hat es die Form:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 \cdot \cdot \cdot \cdot a_h x_h = b_1 x_{h+1} + b_2 x_{h+2} \cdot \cdot b_{r-h} x_r .$$

Die $a$ und $b$ sind hier positive ganze Zahlen, die grösste derselben sei $p$.

Die Lösungen zerfallen in 3 Classen, je nachdem entweder alle Zahlen $x_1 \cdot \cdot x_h$ nicht grösser als $p$ sind, oder alle Zahlen $x_{h+1} \cdot \cdot x_r$ nicht grösser als $p$ sind, oder endlich aus jeder dieser beiden Zahlenreihen mindestens eine etwa $x_1$ und $x_{h+1}$ grösser als $p$ ist. Die Lösungen der ersten Classe findet man, wenn man für die Grössen $x_1 \cdot \cdot \cdot x_h$ alle Zahlensysteme $\xi_1 \cdot \cdot \xi_h$ setzt, welche kleiner als $p$ sind und die Zahlen $x_{h+1} \cdot \cdot \cdot x_r$ sodann aus den Formeln:

$$a_1 \xi_1 \cdot \cdot \cdot a_h \xi_h = b_1 x_{h+1} \cdot \cdot b_{r-h} x_r$$

berechnet. In derselben Weise ergeben sich die Lösungen der zweiten Classe. Die der dritten Classe sind reducibel, da sie grösser als die Lösung:

$$x_1 = b_1\,; \quad x_{k+1} = a_1 \text{ die übrigen } x = 0$$

ist. Sind:

$$\begin{array}{ccc} g_{11} & \cdots & g_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{\mu 1} & \cdots & g_{\mu r} \end{array}$$

die Particularlösungen von $X = 0$, dann hat die allgemeinste Lösung die Form:

$$x_i = g_{1i} y_1 \cdots\cdots g_{\mu i} y_i\,,$$

worin die $y$ beliebige positive Zahlen bedeuten.

## Auflösung von 2 simultanen Gleichungen.

Sind 2 Gleichungen gegeben, dann trage man die allgemeinste Lösung der ersten in die zweite ein. Es entsteht dann eine Gleichung in den $y$, deren allgemeinste Lösung die $y$ als lineare Functionen neuer Grössen $z_1 \ldots z_r$ ausdrückt.

Durch Eintragung dieser Ausdrücke in die $x$ erhalten wir die allgemeinsten Lösungen der beiden Gleichungen. Die Coefficienten der $z$ in denselben ergeben ein Lösungssystem, welches sämmtliche irreducibeln Lösungen enthält.

In derselben Weise findet man die irreducibeln Lösungen, wenn mehr als 2 Formeln gegeben sind, ihre Anzahl ist stets endlich.

Giessen, April 1872.

# Ueber eine Aufgabe aus der Geometria situs.

Von Chr. Wiener in Carlsruhe.

Die Aufgabe, welche im Folgenden gelöst werden soll, und welche, wie ich glaube, bisher nicht behandelt ist, besteht darin, ein Verfahren anzugeben, *wie man sich aus einem Labyrinthe herausfindet.*

Ein *Labyrinth* ist ein zusammenhängender verschlungener Weg mit unübersteiglichen Rändern, der in einem geschlossenen Raume verläuft, aus dem er mit nur einer oder mit wenigen Mündungen herausführt. Da der Weg immer eine gewisse Breite behauptet, so kann ein Wegrand keinen Doppelpunkt besitzen, auch da nicht, wo sich zwei Wege kreuzen. Ein Wegrand kann daher, abgesehen vom Sinne, nur in einer bestimmten Weise durchlaufen werden; in keinem seiner Punkte findet eine mehrfache Möglichkeit des Weiterschreitens statt.

Ein Wegrand kann nun, wenn man ihn durchläuft, entweder zu einem schon eingenommenen Punkte zurückführen; dann muss er in die frühere Bahn übergehen, da stets nur eine Möglichkeit des Weiterschreitens vorhanden ist; er bildet in diesem Falle eine geschlossene Linie. Oder er führt nicht in sich selbst zurück und kann dann wegen seiner endlichen Länge nicht im Innern der Umgebung eingeschlossen sein, muss vielmehr nach aussen leiten. Dies wird bei jedem der beiden Sinne, in welchem man ihn durchlaufen kann, geschehen, so dass der Rand mit zwei Endigungen nach aussen trifft. Hat das Labyrinth nur einen Ausgang, so bilden die beiden Seiten desselben jene beiden Endigungen, und alle Randlinien ausser jener einen sind geschlossene. Daher die Regel: *Man wähle beim Eintritt in das Labyrinth eine jener beiden nach aussen führenden Randlinien des Weges und verfolge sie nach innen; dieselbe muss auch wieder nach aussen führen.*

*In dem Falle, dass man sich im Innern des Labyrinthes befindet, ohne eine Randlinie von aussen verfolgt zu haben, kann man sich ebenfalls wieder herausfinden* unter der Voraussetzung, dass man den Weg, den man zurücklegt nebst dem Sinne, in welchem man ihn beschreibt, im Gedächtniss zu behalten oder mit Marken zu bezeichnen vermag.

Man verfolgt dabei zweckmässig die Axe des Weges statt seiner Randlinie. Jene Möglichkeit beruht auf der Wahrheit, dass so lange man den Ausgang noch nicht erreicht hat, ein bereits durchlaufenes Stück der Wegeaxe nothwendig von noch nicht beschriebenen Theilen derselben getroffen werden muss, weil sonst jenes Stück in sich abgeschlossen wäre und mit dem Eingangswege nicht zusammenhinge. Man markire sich daher den Weg, den man zurücklegt nebst dem Sinne, in welchem es geschieht. Sobald man auf einen schon markirten Weg stösst, kehre man um und durchschreite den schon beschriebenen Weg in umgekehrtem Sinne. Da man, wenn man nicht ablenkte, denselben hierbei in seiner ganzen Ausdehnung nochmals zurücklegen würde, so muss man nothwendig hierbei auf einen noch nicht markirten einmündenden Weg treffen, den man dann verfolge, bis man wieder auf einen markirten trifft. Hier kehre man wieder um und verfahre wie vorher. Es werden dadurch stets neue Wegtheile zu den beschriebenen zugefügt, so dass man nach einer endlichen Zeit das ganze Labyrinth durchwandern würde und so jedenfalls den Ausgang fände, wenn er nicht schon vorher erreicht worden wäre.

Carlsruhe, December 1871.

---

# Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren.

Von Carl Hierholzer.

Mitgetheilt von Chr. Wiener*).

In einem beliebig verschlungenen Linienzuge mögen *Zweige* eines Punktes diejenigen verschiedenen Theile des Zuges heissen, auf welchen man den fraglichen Punkt verlassen kann. Ein Punkt mit mehreren Zweigen heisse ein *Knotenpunkt*, der so vielfach genannt werde, als

*) Die folgende Untersuchung trug der leider so früh dem Dienste der Wissenschaft durch den Tod entrissene Privatdocent Dr. Hierholzer dahier (gest. 13. Sept. 1871) einem Kreise befreundeter Mathematiker vor. Um sie vor Vergessenheit zu bewahren, musste sie bei dem Mangel jeder schriftlichen Aufzeichnung aus dem Gedächtniss wieder hergestellt werden, was ich unter Beihilfe meines verehrten Collegen Lüroth durch das Folgende möglichst getreu auszuführen suchte.

die Anzahl der Zweige angiebt, und je nach dieser Anzahl als gerad oder ungerad genannt sein soll. Ein gewöhnlicher Doppelpunkt wäre hiernach ein vierfacher Knotenpunkt, ein gewöhnlicher Punkt kann als ein zweifacher und eine freie Endigung als ein einfacher Knotenpunkt bezeichnet werden.

*Wenn ein Linienzug in einem Zuge umfahren werden kann, ohne dass irgend ein Linienstück mehrfach durchlaufen wird, so hat er entweder keinen oder zwei ungerade Knotenpunkte.* Wenn man beim Durchlaufen irgend einen Punkt überschreitet, so sind dadurch zwei Zweige eines Knotenpunktes beschrieben, und da keine Strecke zweimal durchlaufen werden soll, muss ein Punkt, den man im Ganzen $n$ mal überschreitet, ein $2n$ facher Knotenpunkt sein. Ein Punkt kann daher nur dann ein ungerader Knotenpunkt sein, wenn er beim Durchlaufen einmal nicht überschritten wird, d. h. wenn er Anfangs- oder Endpunkt ist. Wenn man daher beim Durchlaufen zu dem Ausgangspunkte bei dem Schlusse zurückkehrt, so können nur gerade Knotenpunkte vorhanden sein; wenn nicht, so sind Ausgangs- und Endpunkt ungerade Knotenpunkte.

Umgekehrt: *Wenn ein zusammenhängender Linienzug keinen oder zwei ungerade Knotenpunkte enthält, so kann er in einem Zuge umfahren werden.*

Denn a) hat man irgend einen Theil des Linienzuges umfahren, so ist jeder Knotenpunkt im noch nicht durchfahrenen Theile gerad oder ungerad, wie er es im ganzen Zuge war; nur der Anfangs- und Endpunkt des durchlaufenen Stücks kehren ihren Charakter um, ausser wenn sie zusammenfallen. Denn durch das Durchlaufen eines Punktes werden zwei Zweige, durch den Anfang und das Ende des Durchlaufens je ein Zweig ausgeschlossen.

b) Hat man einen Linienzug in einem ungeraden Knotenpunkt zu umfahren angefangen, so kann man nur in einem andern ungeraden Knotenpunkte stecken bleiben. Denn in einem geraden Knotenpunkte hat man bei jedesmaligem Durchlaufen zwei Zweige ausgeschlossen, so dass bei erneutem Ankommen in demselben wenigstens noch ein Zweig zum Verlassen übrig bleibt. Der Anfangspunkt ist aber durch den Beginn zu einem geraden Knotenpunkte verwandelt worden, so dass auch in ihm ein Steckenbleiben nicht möglich ist. Fängt man dagegen einen Linienzug in einem geraden Knotenpunkte zu umfahren an, so kann man auch in diesem stecken bleiben, indem er durch den Beginn zu einem ungeraden verwandelt wurde.

c) Hat nun ein Linienzug zwei ungerade Knotenpunkte, so beginne man das Umfahren in einem derselben; man wird dann nothwendig in dem andern stecken bleiben. Der zurückgelegte Linienzug ist in diesem Falle ein offener. Hat der gegebene Linienzug dagegen keine ungeraden Knotenpunkte, so beginne man das Umfahren in einem beliebigen Punkte, der also ein gerader Knotenpunkt ist; man wird dann nothwendig im Ausgangspunkte stecken bleiben. Der zurückgelegte Linienzug ist in diesem Falle ein geschlossener.

d) Bleibt dabei ein Theil *b* undurchlaufen, so kann derselbe nur gerade Knotenpunkte enthalten, weil die zwei etwa vorhandenen ungeraden Knotenpunkte durch das erste Umfahren ausgeschlossen wurden, und die übrigen Knotenpunkte ihren Charakter behielten. Zugleich muss *b* mit dem schon beschriebenen Zuge *a* durch wenigstens einen gemeinsamen Punkt zusammenhängen, weil sonst der Zug in mehrere nicht zusammenhängende zerfallen würde. Geht man beim Umfahren des *a* in einem solchen Punkte *P* des Zusammenhangs auf *b* über, so muss man nothwendig auf *b* in *P* stecken bleiben, und kann von da das Umfahren des *a* so fortsetzen, wie es früher geschehen war. Auf dieselbe Weise hängt man jedes noch nicht umfahrene Stück an die schon umfahrenen an und beschreibt so die ganze Linie in einem Zuge.

Es ergiebt sich noch folgender Satz: *Ein Linienzug kann nur eine gerade Anzahl ungerader Knotenpunkte besitzen.* Denn schaltet man durch Umfahren ein Linienstück aus, indem man in einem ungeraden Knotenpunkte beginnt und so lange weiter geht, bis man stecken bleibt, was wieder in einem ungeraden Knotenpunkte geschehen muss, und entfernt dadurch zwei ungerade Knotenpunkte; so kann man durch Wiederholung die Anzahl der ungeraden Knotenpunkte auf weniger als zwei vermindern. Dieser Rest kann aber nicht Eins, sondern muss Null sein; denn wenn ein Zug nur einen ungeraden Knotenpunkt besässe und man würde in ihm anfangen den Zug zu umfahren, so könnte man nie zu Ende kommen, da dies nur in einem andern ungeraden Knotenpunkte möglich ist. Die Zahl der ungeraden Knotenpunkte des ursprünglichen Linienzuges ist daher eine gerade.

Carlsruhe, im December 1871.

Anm. der Red. Der wesentliche Inhalt des Vorstehenden, nur in kürzerer Darstellung, zum Theil ohne nähere Ausführung der Beweise, findet sich in der leider wenig bekannten Abhandlung von Listing, *Vorstudien zur Topologie*, welche in den Göttinger Studien (Erster Bd., Göttingen 1847) erschienen ist. Vielleicht kann der vorstehende Aufsatz dazu dienen, die Aufmerksamkeit der Geometer auf diese auch in vielen andern Beziehungen inhaltreiche Arbeit wieder hinzulenken.

# Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve.

Von A. Brill in Darmstadt.

Das von Herrn Chasles in die Geometrie eingeführte Princip der Correspondenz von Punkten, welche sich auf einer geraden Linie oder Curve vom Geschlecht Null (unicursalen Curve) wechselweise entsprechen, hat seitdem die mannigfachste Anwendung in allen Zweigen der Geometrie erfahren, so dass der Versuch, dasselbe auf Curven von allgemeinem Geschlecht auszudehnen, keiner weiteren Erklärung bedarf. Herr Cayley*) hat durch Induction diejenige Modification, welche an der Correspondenzformel angebracht werden muss, damit sie auf Punktepaare einer beliebigen algebraischen Curve (ohne Rückkehrpunkte) anwendbar ist, gefunden und durch Verwerthung dieser und einer daraus abgeleiteten Formel in der Theorie der Curven, welche gegebenen Bedingungen genügen**), die Fruchtbarkeit der erwähnten Ausdehnung genugsam dargethan. Ein allgemeiner Beweis derselben ist indess von Hrn. Cayley meines Wissens bis jetzt nicht gegeben worden***) und wohl auch sonst nicht bekannt. Ein solcher ist im nachfolgenden Aufsatz enthalten.

Der erste Theil†) beschäftigt sich zunächst (§§. 1.—8.) mit der Ausdehnung des folgenden Satzes über Punktsysteme einer geraden Linie auf Curven von allgemeinem Geschlecht:

Wenn zwischen zwei Punkten $x$ und $y$ einer Geraden ($x$ und $y$ kann man etwa als Abstände von einem festen Punkt auffassen) eine Relation $\varphi(x, y) = 0$ besteht, vermöge deren irgend einem Punkt $y$ $\varkappa$ Punkte $x$, einem Punkt $x$ $\lambda$ Punkte $y$ entsprechen (Correspondenz $(\varkappa, \lambda)$); wenn ferner vermöge einer zweiten Beziehung $\varphi'(x, y) = 0$ dem $y$ $\varkappa'$ Punkte $x$, dem $x$ $\lambda'$ Punkte $y$ entsprechen (Correspondenz

*) Comptes rendus, T. 62, p. 586.

**) Transactions of the R. Soc. Lond. Vol. 158, p. 145.

***) Der in den Proceed. of the Math. Soc. London 1866 enthaltene Beweis bezieht sich, nach der Angabe des Herrn Verf., auf einen besonderen Fall (Transact. l. c.).

†) Der erste Theil ist aus der Bearbeitung einer in den Gött. Nachrichten vom 4. Oct. 1871 veröffentlichten Note des Verf. entstanden.

$(\varkappa', \lambda'))$, so ist im Allgemeinen die Zahl der jenen beiden Beziehungen genügenden Punktepaare, nach einem bekannten Satz der Algebra:

$$(\varphi\varphi') = \varkappa\lambda' + \lambda\varkappa'.$$

Es wird nun gezeigt, dass für allgemeine algebraische Curven an Stelle dieser Formel die F. (18) des § 8.*) tritt. Gelegentlich des Beweises derselben ergiebt sich derjenige des Correspondenzsatzes für Curven von allgemeinem Geschlecht (§ 9., Formel (19)) gewissermassen von selbst. Sodann wird (§ 11.) eine von Cayley angegebene Erweiterung dieses Satzes bewiesen.

Das Entsprechen der Punkte $x$ und $y$ wird in allen diesen Fällen vermittelt durch eine Relation zwischen den Coordinaten derselben, welche einer doppelten Auffasung fähig ist; welche nämlich: 1) als Gleichung für die Coordinaten des Punktes $x$ eine zu dem Punkt $y$ gehörige Curve darstellt, die häufig in $y$ mehrfach die gegebene Curve schneidet, und deren übrige Schnittpunkte die dem $y$ entsprechenden Punkte $x$ repräsentiren. 2) als Gleichung für die Coordinaten von $y$ eine zu $x$ gehörige Curve darstellt, deren nicht in $x$ fallende Schnittpunkte die dem $x$ entsprechenden Punkte $y$ repräsentiren. Die Anzahl jener in $y$ (bez. der in $x$) vereinigten Schnittpunkte spielt eine wichtige Rolle, weshalb auf deren Bestimmung auch für Relationen, welche nicht unmittelbar gegeben vorliegen, sondern das Resultat der Elimination aus zwei anderen sind, näher eingegangen wird (§ 12.). In dem Anhang zum ersten Theil werden die gewonnenen Resultate auf zwei Probleme aus der Theorie der Curven, welche gegebenen Bedingungen genügen, sowie auf die Ableitung der bekannten Anzahl der vierfach schneidenden Sehnen einer Raumcurve angewendet.

Während es sich im ersten Theil wesentlich um Punktepaare einer Curve handelt, welche zweien Relationen zugleich genügen, beschäftigt sich der zweite Theil mit der Aufstellung der Zahl derjenigen Punktetripel bez. -quadrupel einer algebraischen Curve, welche drei, bez. vier Relationen zwischen ihren Coordinaten zugleich befriedigen, wobei der Fall, dass jene Relationen zum Theil oder alle durch Zusammenfallen je zweier der variabeln Punkte identisch erfüllt werden, dass also die Resultante verschwindet, nicht ausgeschlossen wird. Mit Hilfe der aufgestellten Formeln wird alsdann im Anhang zum zweiten Theil die Zahl derjenigen dreifach unendlichen Curvenschaaren eines sechsfach unendlichen Curvenbüschels ermittelt, deren Curven alle auf einer gegebenen Curve dieselben vier Schnittpunkte (vier Basispunkte) be-

---

*) Eine minder elegante Formel (§ 5, F. 5), welche jene vertreten kann, habe ich bereits früher (diese Annalen Bd. IV, S. 521) auf anderem Wege und unter weniger allgemeinen Voraussetzungen abgeleitet.

sitzen*). Zum Schluss wird für den Fall $p = 8$ der algebraische Beweis für die von **Riemann****) auf analytische Untersuchungen gegründete Behauptung geliefert, dass es möglich sein müsse, eine rationale Function von zwei Variabeln $x$ und $y$ zu finden, welche für nur $\frac{p}{2} + 1$ (bez. $\frac{p+3}{2}$) Punkte einer allgemeinen Curve vom Geschlecht $p$ unendlich wird, und wird gezeigt, wie jene Function zu bestimmen ist***).

## Erste Abtheilung.

### Zwei Beziehungen zwischen Punktepaaren auf einer gegebenen Curve.

1. Gegeben sei eine algebraische Curve $f$ vom Geschlecht $p$, deren Gleichung in homogenen†) Coordinaten:

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0 \quad \text{oder kurz:} \quad f(x) = 0$$

sein möge. Ist ferner eine rationale, ganze Beziehung zwischen den Coordinaten zweier Punkte $x$ und $y$ gegeben:

$$\varphi(x_1 x_2 x_3,\ y_1 y_2 y_3) = 0,$$

welche wir der Kürze wegen durch:

$$\varphi(xy) = 0$$

bezeichnen wollen, und liegen beide Punkte auf der Curve $f$, so dass also:

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad f(y) = 0$$

ist, so entsprechen einem beliebig auf $f$ angenommenen Punkte $y$ eine Anzahl $(k)$ von Schnittpunkten $x$ von $\varphi(xy) = 0$ mit $f(x) = 0$, und einem Punkte $x$ eine Anzahl $(l)$ von Schnittpunkten von $\varphi(xy) = 0$ mit $f(y) = 0$. Besteht nun ebenso eine zweite Beziehung:

$$\varphi'(xy) = 0$$

zwischen den Punkten $x$ und $y$, für welche die Zahl der Schnittpunkte mit $f$ bezüglich durch $k'$ und $l'$ bezeichnet werden mag, und nimmt man zunächst noch an, dass die Beziehungen $\varphi = 0$ und $\varphi' = 0$ durch Zusammenfallen der Punkte $x$ und $y$ nicht identisch erfüllt werden, so erhält man die Anzahl derjenigen Punktepaare $x$, $y$ auf $f$, welche gleichzeitig die beiden Bedingungen $\varphi$ und $\varphi'$ erfüllen, indem man mit

*) Dieses Problem ist den **Abel**'schen Functionen von **Clebsch** und **Gordan** § 61., S. 214 entnommen.

**) Theorie der **Abel**'schen Functionen, §§ 5. 13., Journal **Crelle-Borchardt**, Bd. 54.

***) Den entsprechenden Satz für Werthe von $p < 8$ hat der Verf. in diesen Annalen Bd. I, S. 401, Bd. II, S. 471 bewiesen.

†) Wir werden in der Folge immer *homogene* Coordinaten voraussetzen.

Hilfe von $f(x)=0$ und $f(y)=0$ etwa die Coordinaten $x_3$ und $y_3$ aus $\varphi(xy)=0$ und $\varphi'(xy)=0$. eliminirt, aus den so entstehenden Gleichungen, welche in Bezug auf $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{y_1}{y_2}$ bez. von den Graden $k$ und $l'$, $k'$ und $l'$ sind, noch $\frac{y_1}{y_2}$ eliminirt, und den Grad der Eliminationsgleichung in Bezug auf $\frac{x_1}{x_2}$ bestimmt. Derselbe ist nach einem bekannten Satz der Algebra $=kl'+lk'$. Dies ist die Zahl der gesuchten Paare.

2. Wir nehmen nun an, dass eine der obigen Relationen, etwa $\varphi'(xy)=0$, durch Zusammenfallen der Punkte $x$ und $y$ identisch erfüllt werde. Wenn alsdann $\varphi'(xy)=0$, als Function der Coordinaten des Punktes $x$ betrachtet, eine Curve repräsentirt, für welche $\gamma'$ Schnittpunkte mit $f$ in den Punkt $y$ fallen*), so fallen ebensoviele Schnittpunkte in den Punkt $x$, wenn man $\varphi'(xy)=0$ als Curve in den Coordinaten des Punktes $y$ auffasst. Denn eliminirt man mit Hilfe von $f(x)=0$, $f(y)=0$ etwa die Coordinaten $x_3$, $y_3$, so enthält die so entstehende Gleichung den Factor $\frac{x_1}{x_2}-\frac{y_1}{y_2}$ $\gamma'$mal.

Hat man nun wieder die beiden Relationen $\varphi(xy)=0$, $\varphi'(xy)=0$ wie in § 1. gegeben, nur mit dem Unterschiede, dass $\varphi'(xy)=0$ $\gamma'$ Schnittpunkte mit $f$ in $x=y$ besitzt, so verfahre man bei Bildung der Gleichung für die Verhältnisse der Coordinaten $x$ wie dort. Soll indess die Lösung $x=y$ vermieden werden, verlangt man also bloss die Zahl derjenigen Paare von Punkten $x$, $y$ zu wissen, welche getrennt liegen, so scheide man den Factor $\frac{x_1}{x_2}-\frac{y_1}{y_2}$, welcher in der Gleichung, die durch Elimination von $x_3$ und $y_3$ aus $\varphi'(xy)=0$ entsteht, $\gamma'$mal auftritt, vor Bildung der Schlussgleichung aus; man erhält alsdann als Grad derselben in $\frac{x_1}{x_2}$:

$$k(l'-\gamma')+l(k'-\gamma').$$

Man schliesst hieraus, dass der Factor $\frac{x_1}{x_2}-\frac{y_1}{y_2}$ in der Schlussgleichung $\gamma'(k+l)$ mal auftreten würde, wenn er nicht vorher ausgeschieden worden wäre.

3. Ich wende mich nun zu dem Fall, dass die *beiden* Beziehungen:

$$(1) \qquad \varphi(xy)=0 \qquad \varphi'(xy)=0$$

identisch erfüllt werden, wenn die Punkte $x$ und $y$ zusammenfallen. Ich substituire für eine derselben, etwa für $\varphi(xy)=0$, die folgende:

$$\pi(xy)\equiv\varphi(xy)+\varepsilon\,.\,\delta\varphi(xy)=0,$$

*) Dies kann auf mannigfache Weise: durch Berührung oder einen vielfachen Punkt an der betr. Stelle oder Beides zugleich u. s. w. geschehen.

wo $\varepsilon$ eine gegen Null convergirende Grösse ist, $\delta\varphi(xy)$ irgend ein Ausdruck, welcher in der Coordinaten von $x$ und $y$ von demselben Grad wie $\varphi(xy)$ ist, aber durch Zusammenfallen von $x$ mit $y$ nicht identisch befriedigt wird. Wenn nun einmal für irgend einen Punkt $y$ auf $f$ die Curve $\varphi$, als Function von $x$ betrachtet, mit $\varphi'$ auf $f$ einen weiteren Schnittpunkt ausser $y$ gemeinsam hat, so kann man auf $f$ immer einen dem $y$ unendlich nahe gelegenen Punkt $y + \varepsilon' . dy$ mit den Coordinaten $y_i + \varepsilon' . dy_i (i = 1, 2, 3)$ finden, so beschaffen, dass auch $f$, $\varphi'$ und die (der Curve $\varphi$ selbst sehr nahe liegende) variirte Curve $\pi$, in den Coordinaten dieses Punktes geschrieben, einen dem Punkt $x$ sehr nahe gelegenen Punkt mit den Coordinaten $x_i + \varepsilon'' . dx_i$ gemeinsam haben. Denn: Die Verhältnisse

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 \quad \text{und} \quad dy_1 : dy_2 : dy_3$$

der Zunahmen der Coordinaten sind durch den Lauf der Curve $f$ vorgezeichnet. Man kann nun aber immer die sehr kleinen Grössen $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ (für ein gegebenes $\varepsilon$) so bestimmen, dass gleichzeitig:

$$(2) \qquad \begin{cases} \pi\,(x + \varepsilon'' dx, \quad y + \varepsilon' dy) = 0 \\ \varphi'(x + \varepsilon'' dx, \quad y + \varepsilon' dy) = 0 \end{cases}$$

wie man unter Vernachlässigung der mit höheren Potenzen von $\varepsilon'$ und $\varepsilon''$ behafteten Glieder und unter Berücksichtigung der Gleichungen (1) sofort erkennt. Nur darf nicht $x = y$ sein (d. h. die Punkte $x$ und $y$ dürfen nicht zusammenfallen). Jedem Paar von getrennten Punkten $x$, $y$ auf der Curve $f$, welches den Relationen (1) genügt, ordnet sich also ein Paar von getrennten Punkten, welche den vorigen benachbart liegen, zu, das die Relationen (2) befriedigt. Da man auch von den Relationen (2) hätte ausgehen können, so gilt auch das Umgekehrte.

4. Unter der Zahl der den Relationen (2) § 3. genügenden Paare befinden sich aber ausser denjenigen, welche getrennt fallen, und somit den Relationen (1) § 3. genügen,

a) noch Paare, für welche $x$ in $y$ fällt.

b) noch Paare, für welche $x$ dem $y$ unendlich benachbart ist. Beide bilden vollständige Schnittpunktsysteme auf $f$.

5. Die Zahlen $k$, $l$, $k'$, $l'$ mögen wieder dieselbe Bedeutung wie in § 1. haben. Ferner mögen $\gamma$ Schnittpunkte von $\varphi(xy) = 0$ mit $f$; $\gamma'$ Schnittpunkte von $\varphi'(xy) = 0$ mit $f$ in $x = y$ vereinigt sein.

a) Alsdann erhält man die Zahl der Paare a) unter Anwendung der Bemerkung von § 2. (am Ende) auf die Gleichungen $\pi = 0$ und $\varphi' = 0$:

$$= \gamma'(k + l);$$

und zwar bestimmen sich die einzelnen ($\gamma'$fach zu rechnenden) Punkte aus:

$$\delta\varphi(xx) = 0$$

in Verbindung mit $f(x) = 0$.

b) Setzt man in den Gleichungen:

$$\varphi(xy) + \varepsilon \,.\, \delta\varphi(xy) = 0 \tag{4}$$

$$\varphi'(xy) = 0 \tag{4a}$$

$$y_i = x_i + \varepsilon' \,.\, dx_i \qquad i = 1, 2, 3,$$

wo $dx_1, \ldots$ der Fortgangsrichtung auf $f$ entspricht, und entwickelt in (4a) den Ausdruck links nach $\varepsilon'$, so erhält man, nachdem man den Factor $\varepsilon'$ weggehoben, eine Gleichung, um die Lage des Punktes $x$ zu bestimmen, was auf $P'$ (eine Zahl, die wir weiter unten (§ 7.) bestimmen werden) verschiedene Arten möge geschehen können. Setzt man nun die Coordinaten irgend eines dieser Punkte in (4) ein, nachdem man $y$ durch seinen Werth ersetzt hat, so erhält man eine Gleichung für $\varepsilon'$. Dieselbe muss vom Grad $\gamma$ sein; denn wenn $\gamma$ Schnittpunkte von $\varphi$ mit $f$ in $y = x$ fallen, so fallen auch $\gamma$ Schnittpunkte der variirten Curve $\pi$ mit $f$ in die Nähe von $x$, weil $\pi$ als in $\varphi$ continuirlich überführbar vorausgesetzt wird.

Es kommen somit noch $\gamma \,.\, P'$ Paare in Abzug, und es bleiben also von allen $kl' + lk'$ Schnittpunktpaaren von $\pi$ mit $\varphi'$ noch:

$$(\varphi\varphi') = kl' + lk' - \gamma'(k + l) - \gamma P' \tag{5}$$

Paare von Punkten $x$, $y$ übrig, welche getrennt fallen. Ebenso viele diesen Paaren unendlich benachbarte Punktepaare besitzen (§ 4.) auch $\varphi$ und $\varphi'$ auf $f$.

Anmerkung. In dieser Zahl mit inbegriffen sind übrigens auch diejenigen Paare, für welche $x$ oder $y$ oder beide in singuläre Punkte der Curve $f$ fallen. Die Bestimmung der Zahl dieser Paare erfordert in jedem Fall eine besondere Untersuchung*). Vgl. § 10.

6. Wir betrachten nun den Fall, dass die beiden Relationen von der Form:

$$\varphi(xyz) = 0 \qquad \varphi'(xyz) = 0 \tag{6}$$

---

*) Beispiel zu § 5. $f$ sei vom Grad $m$ und vom Geschlecht $p$. Ferner sei: $\varphi(xy) \equiv p(x) \cdot q(y) - q(x)\,p(y) = 0$ vom Grade $s$ je in den Coordinaten von $x$ und $y$; entsprechend sei $\varphi'(xy)$, je vom Grade $s'$, gebildet. Alsdann ist $\gamma = \gamma' = 1$; $k = l = ms$; $k' = l' = ms'$; ferner ist, wie wir unten (§ 7.) sehen werden,

$$P' = 2ms' + 2p - 2 + 2d + 2r,$$

wenn $f$ $d$ Doppel- und $r$ Rückkehrpunkte besitzt. Daher ist die Zahl der auf $f$ vereinigten Paare der beiden Büschel:

$$(\varphi\varphi')_{xy} = 2(ms - 1)(m's' - 1) - 2p - 2d - 2r.$$

Eine weitere Reduction wegen der Doppel- oder Rückkehrpunkte tritt in diesem Fall nicht ein, wie anderweitige Betrachtungen lehren.

sind, d. h. ausser den Coordinaten der Punkte $x$ und $y$ noch diejenigen eines auf $f$ festliegenden Punktes $z$ enthalten. Der Allgemeinheit wegen nehmen wir an, dass ausser durch Zusammenfallen von $x$ mit $y$ die Relationen (7) auch durch Vereinigung von $x$ mit $z$ sowie von $y$ mit $z$ identisch befriedigt werden können. In $y = z$ seien bez. $\alpha$ und $\alpha'$, in $x = z$ bez. $\beta$ und $\beta'$, in $x = y$ bez. $\gamma$ und $\gamma'$ Schnittpunkte (§ 2.) vereinigt*). $k$, $k'$ bedeutet wieder die Zahl der Schnittpunkte von bez. $\varphi$ und $\varphi'$ mit $f(x) = 0$; $l$, $l'$ mit $f(y) = 0$.

An Stelle der Relation $\varphi = 0$ setze man:

$$\pi(xyz) = \varphi(xyz) + \varepsilon \,.\, \delta\varphi(xyz) = 0\,,$$

wo $\varepsilon$ gegen Null convergirt, $\delta\varphi$ (übrigens von denselben Graden wie $\varphi$, so dass also $k$, $l$ die Zahl der Schnittpunkte von $\delta\varphi = 0$ bez. mit $f(x) = 0$, $f(y) = 0$ angiebt), weder für $x = y$ (durch Zusammenfallen der Punkte $x$ und $y$) noch für $x = z$ oder $y = z$ identisch gleich Null wird. Dasselbe gilt alsdann von $\pi$. Unter der Zahl $kl' + lk'$ sämmtlicher Schnittpunktpaare $x$, $y$, welche die Gleichungen $\pi = 0$ und $\varphi' = 0$ befriedigen, befinden sich alsdann noch Paare, für welche $x$ in $y$ selbst oder dem $y$ benachbart fällt, sowie solche, für welche entweder $x$ oder $y$ in den Punkt $z$ selbst oder ihm unendlich benachbart fällt**). Wir wollen deren Zahl aufstellen und von $kl' + lk'$ abziehen.

a) Die Paare von Punkten $x$, $y$, für welche $x = y$ ist, bestimmen sich wie in § 4. aus:

(7) $$\delta\varphi(xxz) = 0\,.$$

Die diesem Fall entsprechende Zahl beträgt (§ 2. a. Ende):

$$\gamma'(k + l)\,.$$

b) Die Paare, für welche $x$ und $y$ unendlich benachbart sind, ergeben sich aus:

(8) $$\varphi'(x,\, x + \varepsilon' dx,\, z) = 0\,,$$

nachdem man nach $\varepsilon'$ entwickelt. Sei $P'$ die Gesammtzahl der dieser Gleichung genügenden Punkte $x$. Wir werden dieselbe später (§ 7.)

---

*) Bei dieser Definition der Zahlen $\alpha$, $\beta$, ... steht es frei, den Punkt $z$ auch in einen Doppel- oder Rückkehrpunkt von $f$ zu verlegen.

**) Durch $x = y = z$ werden im Allgemeinen die Gleichungen $\pi = 0$, $\varphi' = 0$ nicht befriedigt. Ebensowenig durch den Punkt $z$ benachbarte Punktepaare

$$x = z + \varepsilon' dz\,, \quad y = z + \varepsilon'' dz\,;$$

denn die $\varepsilon'\varepsilon''$, indem sie als Factoren sich aus $\varphi' = 0$ ausscheiden, erhält man gleich Null, hierdurch wird aber wieder die Gleichung $\pi = 0$, welche eine endliche Relation zwischen den $\varepsilon'\varepsilon''$ ergiebt, im Allgemeinen nicht befriedigt. — Die in den Göttinger Nachr. l. c. S. 511 sub 6. aufgestellte Anschauung ist daher in dem Sinn des Obigen zu verbessern.

bestimmen. Jedem derselben entsprechen noch $\gamma$ Werthe von $\varepsilon'$, welche (wie in § 4.) aus:

$$(8^a)\qquad \pi(x,\ x+\varepsilon' dx,\ z)=0$$

zu berechnen sind. Nur denjenigen $\alpha'+\beta'$ Punkten unter den $P'$, welche mit $z$ zusammenfallen, entspricht kein Werth von $\varepsilon'$, weil $\varphi$ für dieselben identisch verschwindet. Daher entsprechen dem vorliegenden Fall im Ganzen:

$$(P'-\alpha'-\beta')\gamma=Q'.\gamma$$

Paare $x$, $y$, wenn man unter $Q'$ die nicht nach $z$ fallenden Schnittpunkte von (8) mit $f(x)=0$ versteht.

c) Die den Paaren, für welche $y$ in $z$ fällt, zugehörigen $k$ Punkte $x$ bestimmen sich aus:

$$(9)\qquad \delta\varphi(xzz)=0.$$

Jedes derselben ist $\alpha'$fach zu rechnen, weil die Gleichung, die durch Elimination von $x_3$, $y_3$, $z_3$ aus $\varphi'=0$ entsteht, den Factor $\frac{y_1}{y_2}-\frac{z_1}{z_2}$ $\alpha'$fach enthält. Dem vorliegenden Fall entsprechen demnach

$$\alpha' k$$

Paare.

d) Zu $y=z+\varepsilon' dz$ bestimmen sich aus:

$$(10)\qquad \varphi'(x,\ z+\varepsilon' dz,\ z)=0$$

$k'$ Punkte $x$, von welchen indess $\beta'+\gamma'$ nach $z$ fallen, denen kein Werth von $\varepsilon'$ mehr entspricht. Daher hat man:

$$(11)\qquad (k'-\beta'-\gamma')\alpha$$

Paare.

e) Für die $\beta'.l$ Paare, für welche $x=z$, bestimmt sich $y$ aus:

$$(12)\qquad \delta\varphi(zyz)=0.$$

f) Für die $\beta(l'-\gamma'-\alpha')$ Paare, für welche $x=z+\varepsilon' dz$, bestimmen sich die $y$ aus:

$$(13)\qquad \varphi'(z+\varepsilon dz,\ y,\ z)=0.$$

Bringt man die in $a, \ldots f$, aufgestellten Zahlen von $kl'+lk'$ in Abzug, so erhält man:

$$(14)\quad \begin{aligned}(\varphi\varphi')&=kl'+lk'-\gamma'(k+l)-\alpha' k-\beta' l-Q'\gamma-(k'-\gamma'-\beta')\alpha-(l'-\gamma'-\alpha')\beta\\ &=(k-\beta)(l'-\alpha'-\gamma')+(l-\alpha)(k'-\beta'-\gamma')-\gamma.Q',\end{aligned}$$

als Anzahl der den Relationen (6) genügenden Paare von Punkten $x$, $y$, welche weder mit $z$ noch mit einander zusammenfallen.

7. Wir wenden uns zur Bestimmung der Zahlen $P'$ und $Q'$ des vorigen §. Man bemerkt, dass die Formel für $(\varphi\varphi')$ am Ende derselben sich den Gleichungen $\varphi$, $\varphi'$ gegenüber nicht symmetrisch verhält. Bedeuten $P$, $Q$ dieselben Zahlen für den Ausdruck $\varphi$, wie $P'$,

$Q'$ für $\varphi'$, so ergiebt das oben eingehaltene Verfahren nach Vertauschung der Rollen von $\varphi$ und $\varphi'$ eine Formel für $(\varphi\varphi')$, welche offenbar aus (14) durch Vertauschung der accentuirten mit nicht accentuirten Buchstaben, und umgekehrt, hervorgeht. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke erhält man:

$$(15)\qquad \frac{Q'-(l'-\alpha'-\gamma')-(k'-\beta'-\gamma')}{\gamma'}=\frac{Q-(l-\alpha-\gamma)-(k-\beta-\gamma)}{\gamma},$$

woraus sich das bemerkenswerthe Resultat ergiebt, *dass dieser Quotient für alle Relationen wie* $\varphi(xyz)=0$ *oder* $\varphi'(xyz)=0$ *denselben constanten Werth besitzt.* Derselbe kann somit bloss noch von dem Charakter der Curve $f$ abhängen. Man bestimmt ihn durch irgend einen speciellen Fall. Wir wählen hierzu eine Relation $\varphi(xy)=0$, in welcher $z$ nicht vorkommt, wo also $\alpha=\beta=0$, und zwar diejenige, welche zwischen den Coordinaten zweier Schnittpunkte $x$ und $y$ einer Geraden, die durch einen beliebigen Punkt $a$ geht, mit der Curve $f=0$ besteht. Dieselbe hat die Form:

$$\varphi(xy)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0.$$

Ist $m$ der Grad, $p$ das Geschlecht von $f$, so entsprechen einem Punkt $y$ $m$ Schnittpunkte $x$, worunter $y$ selbst ist; man hat also $k=m$, $\gamma=1$; ebenso umgekehrt, also $l=m$. Die Zahl $Q$ der vereinigten Paare $x$, $y$ ist gleich der Anzahl der Tangenten, welche sich von $a$ aus an die Curve legen lassen. Dieselbe ist bekanntlich:

$$Q=2m+2p-2\ {}^{*)}.$$

Man hat also:

$$(16)\qquad \frac{Q-(l-\alpha-\gamma)-(k-\beta-\gamma)}{\gamma}=2m+2p-2-(m-1)-(m-1)$$
$$=2p;$$

woraus:

$$(17)\qquad Q=(l-\alpha-\gamma)+(k-\beta-\gamma)+2p\cdot\gamma;$$

und: $$P=(l-\gamma)+(k-\gamma)+2p\gamma.$$

Aus diesen Formeln leitet man durch Vertauschung der nicht accentuirten Buchstaben mit accentuirten die Werthe für $Q'$ und $P'$ ab.

---

*) Besitzt die Curve $f$ $d$ Doppel- und $r$ Rückkehrpunkte, so hat man eigentlich anstatt obiger Zahl $2m+2p-2+2d+2r$ zu schreiben; von diesen Punkten fallen $2d$ in die Doppel-, $3r$ in die Rückkehrpunkte und $2m+2p-2-r$ in sonst nicht weiter ausgezeichnete Punkte von $f$. Da indess eine derartige Berücksichtigung von Gliedern, welche $d$ oder $r$ als Factor besitzen, die weiteren Betrachtungen, welche anzustellen sind, um sämmtliche Glieder zu erhalten, die jene Eigenschaft haben, nicht ersparen, so werden wir in der Folge alle Zahlen *bis auf die mit d und r behafteten Glieder* angeben. Vgl. übrigens § 10.

8. Substituirt man den Werth von $Q'$ in die Formel (14), so erhält man:

$$(\varphi\varphi') = \varkappa\lambda' + \lambda\varkappa' - 2p\gamma\gamma'; \tag{18}$$

wo:

$$\begin{cases} \varkappa = k - \beta - \gamma & \varkappa' = k' - \beta' - \gamma' \\ \lambda = l - \gamma - \alpha & \lambda' = l' - \gamma' - \alpha'. \end{cases} \tag{18a}$$

In dieser wichtigen Formel ist die Ausdehnung des im Eingang erwähnten Satzes auf allgemeine Curven enthalten. Man kann das Resultat folgendermassen in Worte fassen:

Hat man auf einer Curve $f$ vom Geschlecht $p$ einen festen Punkt $z$ gegeben; bestehen ferner zwischen den Coordinaten desselben und denen von zwei auf der Curve beweglichen Punkten $x$ und $y$ zwei Relationen:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \qquad \varphi'(x, y, z) = 0,$$

und stellen dieselben, als Gleichungen in den Coordinaten von $x$ aufgefasst, Curven dar, welche bez. $k$ und $k'$ Schnittpunkte mit $f(x) = 0$ haben, von denen in den Punkt $z$ bez. $\beta$ und $\beta'$, in $y$ bez. $\gamma$ und $\gamma'$ Punkte fallen; als Functionen der Coordinaten von $y$ aufgefasst, Curven, welche bez. $l$ und $l'$ Schnittpunkte mit $f(y) = 0$ haben, von denen bez. $\gamma$ und $\gamma'$ in $x$, bez. $\alpha$ und $\alpha'$ in $z$ fallen, *so giebt die oben aufgestellte Zahl* $(\varphi\varphi')$ *die Anzahl derjenigen Paare von getrennt liegenden und nicht in* $z$ *fallenden Punkten* $x$ *und* $y$ *an, welche gleichzeitig den beiden Relationen* $\varphi = 0$ *und* $\varphi' = 0$ *genügen.*

Sind ausser dem Punkt $z$ auf $f$ noch andere feste Punkte $u, v \ldots$ vorhanden, so hat man wegen eines jeden derselben die nämlichen Betrachtungen, wie für $z$ anzustellen (da eine gegenseitig störende Wirkung nicht vorhanden ist), d. h. entsprechend gebildete Glieder, wie für $z$, in Abzug zu bringen. Die Gleichung (18) besteht alsdann noch immer, nachdem man $\varkappa$, $\lambda$, $\varkappa'$, $\lambda'$ um die von $u$, $v$, ... herstammenden Terme vermindert hat. Mit Rücksicht auf diese Bemerkung kann man dem oben ausgesprochenen Satz folgende rein geometrische Fassung geben*):

*Wenn vermöge einer Beziehung zwischen den Coordinaten zweier auf einer Curve* $f$ *vom Geschlecht* $p$ *beweglichen Punkte jedem Punkt* $y$ *eine Curve entspricht, von deren Schnittpunkten mit* $f$ $\gamma$ *in* $y$ *fallen, eine*

---

*) Beispiel. Ist $f$ von der $m^{\text{ten}}$ Ordnung, Geschlecht $p$, und sind zwei Curvenbüschel: $s^{\text{ter}}$ Ordnung und $s'^{\text{ter}}$ Ordnung (mit je einem Parameter) gegeben, welche $\sigma$ einfache und $\tau$ Doppelpunkte von $f$ als gemeinsame Basispunkte besitzen mögen, so ist die Anzahl derjenigen Punktepaare $x$, $y$, durch welche noch je eine Curve beider Büschel hindurchgeht:

$$(\varphi\varphi') = 2(ms - \sigma - 2\tau)\,(ms' - \sigma - 2\tau) - 2p.$$

*Anzahl in feste Punkte von $f$, und $\varkappa$ in Punkte $x$ (ausserhalb $y$), welche mit $y$ beweglich sind, während umgekehrt einem Punkte $x$ eine Curve mit $\lambda$ (mit $x$ beweglichen und ausserhalb $x$ fallenden) Schnittpunkten $y$ entspricht; wenn ferner zwischen den Coordinaten der Punkte $x$ und $y$ eine zweite ebensolche Beziehung besteht, für welche die entsprechenden Zahlen $\gamma'$, $\varkappa'$, $\lambda'$ sind, so ist die Zahl der jenen beiden Beziehungen genügenden Punktepaare* $= (\varphi\varphi')$ (18).

9. Auch die Formel (17) schliesst einen sehr bemerkenswerthen Satz ein. Unter Einführung der Bezeichnung des § 8. (18[a]) hat man:

$$Q = \varkappa + \lambda + 2p \cdot \gamma \,. \tag{19}$$

Diese Zahl repräsentirt *die Anzahl derjenigen Punkte einer Curve $f$, in welchen zwei Punkte $x$, $y$ zusammenfallen, die sich vermöge der Beziehung:*

$$\varphi(xyz\ldots) = 0\,,$$

*(wo $z$ ...... auf $f$ festliegende Punkte sind) derart entsprechen, dass zu jedem Punkt $y$ auf $f$ ausser $\gamma$ in $y$ und einer Anzahl in $z$ ... fallenden Punkten noch $\varkappa$ im Allgemeinen weder in $y$ noch in $z$ ... fallende Punkte $x$, zu jedem Punkt $x$ noch $\lambda$ nicht in $x$ und $z$ ... fallende Punkte $y$ gehören.*

Die Form von $Q$ ändert sich nicht, wenn in $\varphi$, $\varphi'$ ausser $z$ noch andere auf $f$ festliegende Punkte vorhanden sind; nur sind die Zahlen $\varkappa$, $\lambda$ um die in jene Punkte fallenden zu vermindern.

10. Die Modification, welche die F. (19) im Allgemeinen durch Doppelpunkte von $f$ erfährt, fällt ganz weg, wenn, wie in den Anwendungen (s. unten) in der Regel, $\varphi$ Invariante einer linearen Form $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots$ ist, wo die $\varphi_i$ Functionen der Coordinaten eines Punktes auf $f$ sind (Beisp.: § 5. Note, sowie d. Ann. III, p. 459). Alsdann hängt $Q$ von einer projectivischen Eigenschaft eines mittelst $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ durch eindeutige Substitution aus $f$ darstellbaren Gebildes $F$ ab, und (19) kann somit bloss $M$, $p$ und die Anzahl $\varrho$ der Rückkehrelemente von $F$ enthalten, nicht aber $d$, die Anzahl der Doppelpunkte von $f$, welche für $F$ keine projectivische Bedeutung hat. Die F. (19) für $Q$ schliesst alsdann bereits die in die Doppelpunkte fallenden Paare $x$, $y$ aus und *hat allgemeine Bedeutung, wenn $f$ keine Rückkehrpunkte besitzt* (weil dann im Allg. auch $\varrho = 0$ ist). Eine ähnliche Bemerkung gilt von $(\varphi\varphi')$. Vgl. d. Ann. IV. p. 545.

11. Der in den beiden vorstehenden § ausgesprochene Satz enthält die Ausdehnung des Chasles'schen Correspondenzsatzes auf Punktsysteme von Curven von allgemeinem Geschlecht. Hr. Cayley, der, wie ich mich nach Auffindung desselben überzeugt habe, den Satz des § 9. an der eingangs angeführten Stelle bereits ausgesprochen hat, giebt daselbst eine Verallgemeinerung desselben an, welche ich nicht

unterlassen will hier gleichfalls zu beweisen, da sich die Betrachtungen einfach gestalten und ein Beweis nicht bekannt zu sein scheint.

12. Gegeben sei eine Curve in den Coordinaten $\xi_1 \xi_2 \xi_3$, von höherem oder gleichem Grad wie $f(\xi) = 0$:

$$\varphi(y\xi) = 0,$$

welche einem Punkte $y$ von $f$ entspricht, und mit $f$ einen $K$fachen Schnittpunkt in $\xi = y$ besitzen möge. Wenn diese Curve mit $f(\xi) = 0$ $\varkappa$ $i$fache Schnittpunkte $x$ besitzt (z. B. an $\varkappa$ Stellen $i - 1$ punktig berührt), durch welche sich eine Curve $C = 0$ legen lässt, welche $f$ nur noch in $y$ schneidet, und zwar $\gamma$fach; wenn ausserdem $\varkappa'$ $i'$fache Schnittpunkte $x'$ mit $f$ vorhanden sind, durch welche eine Curve $C' = 0$ sich legen lässt, welche $f$ ebenfalls nur noch in $y$, und zwar $\gamma'$fach schneidet, u. s. w., so besitzt $\varphi$ mit $f$ ausser $y$ dieselben Schnittpunkte wie das Produkt $u$ der Curven $C$:

$$u = C^i . C'^{i'} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = 0 .$$

Wenn nun aber 2 Schnittpunktsysteme auf derselben Curve in allen Punkten übereinstimmen bis auf einen, so müssen sie auch in diesem übereinstimmen. Denn besässe etwa $u = 0$ eine grössere Anzahl von Schnittpunkten mit $f$ in $y$, als $\varphi$, so müsste $u$ unter Adjunction von $f$ zerfällbar sein in $\varphi$ und eine Curve, welche $f$ bloss in $y$ schneidet*). Eine solche giebt es aber im Allgemeinen nicht**). Daher müssen $u$ und $\varphi$ dieselbe Anzahl von Schnittpunkten mit $f$ besitzen, oder es ist:

*) Cremona, ebene Curven, übers. von Kurtze, N. 44.

**) Ist auf $f$ ein Doppelpunkt vorhanden, welcher eine Anzahl (etwa $D$) Schnittpunkte von $\varphi$ mit $f$, und eine Anzahl (etwa $D'$) von $u$ mit $f$ absorbirt, so gestaltet sich der Beweis dafür, dass $D = D'$ und zugleich $K = i\gamma + i'\gamma' + \cdots = K'$ ist, etwas anders. Wäre zugleich $D > D'$ und $K > K'$, so müsste man eine Curve finden können (s. oben), welche $f$ bloss in 2 Punkten, im einen $(K - K')$, im anderen $(D - D')$ fach schneidet, was im Allgemeinen unmöglich. Ebenso wenig kann $D' > D$ und $K' > K$ sein. Es könnte aber noch $D' < D$ und $K' > K$ sein. Dann lege man durch $y$ eine $K' - K$fache Gerade $G$. Diese zusammen mit $u$ besitzt alsdann alle Schnittpunkte von $\varphi$ mit $f$. Das Produkt beider müsste daher zerfällbar sein in $\varphi$ und eine Curve, welche alle $K' - K$fachen Schnittpunkte von $G$ mit $f$ besitzt, ausser $y$, und dann noch in dem singulären Punkt einen $D' - D$ fachen Punkt. Eine solche Curve existirt aber im Allgemeinen nicht. Daher muss $D' = D$, $K' = K$ sein. Ebenso beweist man, dass nicht $D' > D$, $K' < K$ sein kann. Sind mehrere Doppelpunkte von $f$ vorhanden, so schliesst man, dass, wenn $u$ und $\varphi$ in einem Doppelpunkt gleichviel Schnittpunkte besitzen, dies auch in den anderen der Fall sein wird.

Endlich können ausser $y$ noch andere gemeinsame Punkte $z$, $u$, auftreten; wenn sich dieselben nicht anders als $y$ verhalten, so gestaltet sich der Beweis nicht anders, vorausgesetzt, dass sie beliebig auf $f$ angenommen sind (also nicht etwa ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden); nur ist in der Aufstellung der Werthe $Q$, $\varkappa$, $\lambda$, ... auf diese Punkte Bedacht zu nehmen, die Differenzen $Q - \varkappa - \lambda$, etc. ändern sich indess durch das Vorhandensein solcher Punkte nicht.

$$(20) \qquad K = i\gamma + i'\gamma' + \cdots$$

Wenn sich nun zu einem Punkt $\xi$ von $f\lambda$ ausserhalb $\xi$ befindliche Punkte $y$ finden lassen, für welche die zugehörige Curve $\varphi$ in $\xi$ einen Punkt $x$, wie er oben definirt wurde, besitzt, d. h. wenn zu einem Punkt $x$ $\lambda$ Punkte $y$ gehören, wenn ferner zu einem Punkt $x'$ $\lambda'$ Punkte $y$ gehören u. s. w., so ist die Zahl der vereinigten Paare von Punkten $x, y$ nach § 9.:

$$Q = \varkappa + \lambda + 2p\gamma,$$

die Zahl der vereinigten Punktepaare $x', y$:

$$Q' = \varkappa' + \lambda' + 2p\gamma',$$

u. s. w. Hieraus folgt aber in Verbindung mit (20) die erwähnte Formel, für welche die Bemerkungen des § 10. noch immer gelten:

$$(21) \qquad (Q - \varkappa - \lambda)\, i + (Q' - \varkappa' - \lambda')\, i' + \cdots = 2pK \text{ *)}.$$

13. Aus dem Vorstehenden geht die Wichtigkeit der Bestimmung der Vielfachheit der Schnittpunkte von Beziehungen wie $\varphi = 0$ hervor. Dieselbe hat allemal dann keine Schwierigkeit, wenn diese Beziehungen gegeben vorliegen. Sind diese aber selbst erst das Resultat einer Elimination aus zwei Gleichungen, z. B. der Elimination der Coordinaten der Punkte $x$ oder $y$ aus:

$$\varphi(xyz) = 0 \qquad \varphi'(xyz) = 0,$$

so ist es nothwendig, eine Methode zur indirecten Bestimmung der Vielfachheit des Schnittpunktes, der in $z$ fällt, aufzustellen.

Dies geschieht durch nähere Betrachtung der in § 6. aufgestellten Schnittpunktsysteme. Man denke sich durch Elimination der Coordinaten des Punktes $y$ aus den obigen beiden Gleichungen, oder vielmehr aus $\varkappa = 0$ und $\varphi' = 0$ in Verbindung mit $f(y) = 0$ die Gleichung einer Curve in den Coordinaten des Punktes $x$ gebildet. Die Zahl der nach $z$ fallenden Schnittpunkte wird gesucht. Die Zahl sämmtlicher Schnittpunkte ist $kl' + lk'$. Von diesen befinden sich:

a) $k + l$ (je $\gamma'$ fach zu rechnende) Punkte auf der Curve:

$$\delta\varphi(xxz) = 0.$$

b) $P' - \alpha' - \beta' = Q'$ (je $\gamma$ fach zu rechnende) auf:

$$\varphi'(x,\, x + \varepsilon' dx,\, z) = 0,$$

auf welcher Curve ausserdem noch $\alpha' + \beta'$ in $z$ fallende Punkte liegen.

c) Die $k$ ($\alpha'$ fach zu rechnenden) Schnittpunkte auf:

$$\delta\varphi(xzz) = 0.$$

d) $k' - \beta' - \gamma'$, je $\alpha$ fach zu rechnende Schnittpunkte, die auf:

$$\varphi'(x,\, z + \varepsilon' dz,\, z) = 0$$

*) Bezüglich eines Beispiels verweisen wir auf „Anwendungen I" unten.

liegen, auf welcher Curve ausserdem noch $\beta' + \gamma'$ in $z$ fallende Punkte sich befinden.

Die unter e) und f) in § 6. aufgeführten Punkte $x$ fallen in $z$*). Sondert man aus dem ganzen Schnittpunktsystem nur die sub a) bis d) aufgeführten Systeme ab, so bleibt ein System von Punktepaaren, für welche weder $x$ mit $y$ noch $y$ mit $z$, *wohl aber theilweise $x$ mit $z$ zusammenfällt.* Um die Zahl der Letzteren zu finden, zähle man die Zahl $(\varphi\varphi')$ (§ 6.) von jener Gesammtzahl ab, so bleiben:

$$
\begin{aligned}
[xz] &= kl' + lk' - \gamma'(k+l) - \gamma P' - \alpha' k - \alpha k' - (\varphi\varphi') = \\
&= \beta' l + \beta l' - \{\beta'\gamma + \beta\gamma' + \gamma'\alpha + \alpha\gamma' + \alpha'\beta + \alpha\beta'\}, \qquad (22)\\
&= \beta'\lambda + \lambda\beta' - (\alpha'\gamma + \alpha\gamma')
\end{aligned}
$$

Paare, für welche $x$ nach $z$ fällt. *Daher besitzt die Curve $\Phi(xz) = 0$, welche durch Elimination der Coordinaten des Punktes $y$ aus den Gleichungen $\pi = 0$, $\varphi = 0$, $f(y) = 0$ entsteht, in dem festen Punkt $z$ einen $[xz]$ fachen Schnittpunkt.* Man beweist ebenso, dass in den Punkt $z$ der Curve $\Phi'(yz) = 0$, welche durch Elimination der Coordinaten von $x$ entsteht:

$$
\begin{aligned}
[yz] &= \alpha' k + \alpha k' - \{\gamma\beta' + \beta\gamma' + \alpha\gamma' + \gamma\alpha' + \beta\alpha' + \alpha\beta'\} \\
&= \alpha'\varkappa + \alpha\varkappa' - (\gamma\beta' + \gamma'\beta)
\end{aligned}
$$

Schnittpunkte mit $f$ fallen.

---

## Anwendungen.

### I. Berührungscurven zu einer gegebenen Curve.

Hat man ein Büschel von Curven $\varphi$ gegeben, welche alle eine gegebene Curve $f$ in einer Anzahl von Punkten $x$ $i$ punktig, in einer Anzahl von Punkten $x'$ $i'$ punktig, u. s. w. berühren, und ausserdem eine Anzahl beliebiger fester Punkte $y$, $z$, ... auf $f$ gemeinsam haben, so kann man durch die Punkte $x$ eine Curve legen, welche noch durch die singulären Punkte von $f$ und die festen Punkte $y$ (einfach oder mehrfach) hindurchgeht, sonst aber keine Schnittpunkte mit $f$ gemeinsam

---

*) Wenn die Zahl dieser nach $z$ fallenden Schnittpunkte nicht ausreichend gross ist, kann man die sub a) bis d) aufgeführten Schnittpunktsysteme nicht aussondern. So kommt es, dass dann $[xz]$ einen negativen Werth erhält. Beispiel: Die zwei gegebenen Curvengleichungen seien: $\varphi(yz) = 0$, $\varphi'(xy) = 0$. Alsdann wäre aus der Resultante auszuscheiden:

$$[\varphi(xz)]^{\gamma'} \quad \text{und} \quad [\varphi'(xz)]^{\alpha}$$

(unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen). Beides auszusondern ist aber unmöglich.

hat, ebenso kann man durch die Punkte $x'$ eine Curve legen u. s. w. Denn denkt man sich das Problem, diese Punktsysteme $x$, $x'$, .... zu finden, analytisch aufgestellt, so erhält man für jedes derselben eine Gleichung, welche im Allgemeinen durch die anderen Punktsysteme nicht befriedigt wird, sondern bloss noch durch diejenigen Punkte, in welchen 2 Punkte verschiedener Systeme *vereinigt* liegen*). Diese Letzteren sind nun freilich nur dann auszuscheiden, wenn sie wieder ein vollständiges Schnittpunktsystem bilden. Da sie aber Curven zugehören, die an einer Stelle weniger berühren, als diejenigen, für welche der Beweis geführt werden soll, so hat man, indem man so fortfährt, den Beweis, dass je die gleichartigen Berührungspunkte auf einer Curve liegen, bloss noch für solche Büschel zu liefern, deren Curven an einer Stelle $i$ punktig berühren. Für diese habe ich aber an einer anderen Stelle gezeigt, dass sie auf einer Curve von der Ordnung:

$$s(i+1)+\tfrac{1}{2}i(i+1)(m-3)$$

liegen (wenn $m$ der Grad der gegebenen Curve, $s$ der Grad der Curven des Büschels), welche $f$ nur noch in den singulären Punkten und den auf $f$ festen Basispunkten des Büschels, falls solche vorhanden sind, schneidet.

Wir sind hiernach berechtigt, die Formel des § 12. anzuwenden.

Jonquières hat die Anzahl der Curven eines Büschels angegeben**), welche eine gegebene Curve $f$ (ohne Rückkehrpunkte) an verschiedenen Stellen mehrpunktig berühren; einen exacten Beweis dieser Formeln indess nur für den Fall, dass das Geschlecht $p$ von $f$ gleich Null ist, beigefügt, indem er gewisse Recursionsformeln aufstellte, mit deren Hilfe er einen Beweis von der Richtigkeit der Zahl $[i-1,\, i',\, i'', \ldots i^{(\varrho)}]$ auf $[i,\, i',\, i'', \ldots i^{(\varrho)}]$ und von $[i,\, i',\, i'', \ldots i^{(\varrho)}]$ auf $[1,\, i,\, i',\, i'', \ldots\ldots i^{(\varrho)}]$ führte, wenn man unter $[i,\, i',\, i'', \ldots i^{(\varrho)}]$ die Anzahl derjenigen Curven eines Büschels ($s^{\text{ter}}$ Ordnung mit $\sigma$ Basispunkten in einfachen, $\tau$ in Doppelpunkten von $f$) versteht, welche mit $f$ an einer Stelle eine $i$ punktige Berührung ($i+1$ auf einander folgende Schnittpunkte), an einer anderen Stelle eine $i'$ punktige Berührung etc. gemeinsam haben.

Ich will im Folgenden *die entsprechenden Recursionsformeln für den allgemeinen Fall, wo $p$ von Null verschieden ist,* aufstellen. Der leichtern Uebersicht wegen sei es gestattet, die Betrachtung jedesmal an einem besonderen Fall anzustellen, da sie für den allgemeinen Fall im Wesentlichen nicht geändert werden.

Die Zahl der beweglichen Schnittpunkte einer Curve des Büschels ist:

$$M = ms - \sigma - 2\tau\,.$$

---

*) Vgl. diese Annalen Bd. IV, „Ueber zwei Berührungsprobleme" II, § 1. 2.

**) Journal Crelle-Borchardt, Bd. 66.

Wir denken uns das Büschel immer nur mit so vielen bestimmbaren Parametern begabt, als dasselbe Bedingungen zu erfüllen hat.

A) Aus der Anzahl $[i]$ der an einer Stelle $i$ punktig berührenden Curven eines Büschels:

$$[i] = [i]_M = (i+1)(M-i) + i(i+1)p$$

die Anzahl $[1, i]$ der an einer Stelle einfach, an der anderen $i$ punktig berührenden Curven eines Büschels mit einem Parameter mehr zu finden. Unter den Curven eines Büschels mit $i+1$ Parametern, welche durch einen gegebenen Punkt $y$ von $f$ (welcher also zu den bereits angenommenen $\sigma + 2\tau$ festen Punkten noch hinzutritt), giebt es nach obiger Formel:

$$[i]_{M-1} = (i+1)(M-1-i) + i(i+1)p$$

Curven $C$, welche $f$ noch an einer anderen Stelle $x$ $i$ punktig berühren. Der Inbegriff dieser Curven $C$ sei die Curve $\varphi(y\xi) = 0$ des § 12.

Dem Punkt $y$ entsprechen dann $[i]_{M-1}$ Punkte $x$, die im Allgemeinen nicht in $y$ fallen; einem Punkt $x$ entsprechen $M-1-i$ Punkte $y$, von denen im Allgemeinen keiner nach $x$ fällt: nämlich die einfachen Schnittpunkte einer in $x$ $i$ punktig berührenden Curve; wir können demnach sagen: zwischen $x$ und $y$ *besteht die Correspondenz:*

$$([i]_{M-1},\ M-1-i).$$

Die Anzahl der vereinigten Paare $x$, $y$ ist gleich der Zahl der $(i+1)$ punktig berührenden Curven des Büschels:

$$= [i+1]_M.$$

Andererseits besteht zwischen $y$ und einem anderen einfachen Schnittpunkt $x'$ von $\varphi(y\xi) = 0$ mit $f$ die Correspondenz:

$$\big([i]_{M-1}\,.\,(M-2-i),\ [i]_{M-1}\,.\,(M-2-i)\big).$$

Die Zahl $[1, i]_M$ der zusammenfallenden Paare $xx'$ wird gesucht.

Die Vielfachheit des Punktes $y$ ist $= [1, i]_{M-1}$; setzt man diese Werthe in Formel (21) ein, so erhält man die Relation:

$$[1, i]_M - 2\,.\,[i]_{M-1}\,.\,(M-2-i) + (i+1)\,.\,\big\{[i+1]_M - [i]_{M-1} - (M-1-i)\big\} = 2p[i]_{M-1}$$

woraus sich durch Substitution der definitive Werth ergiebt:

$$[1, i]_M = 2(i+1)\left\{\begin{aligned}&(M-i-1)(M-i-2)\\ &\qquad + (M-i-2)(i+1)p\\ &\qquad\qquad + ip(p-1).\end{aligned}\right.$$

Durch ganz analoge Betrachtungen erhält man *die (erste) allgemeine Recursionsformel:*

$$(1)\quad \begin{aligned}&[1ii'\ldots\ldots i^{(\varrho)}]_M = 2[ii'\ldots]_{M-1}\,.\,(M-\Sigma i-\varrho-2) + 2p[ii'\ldots]_{M-1} +\\ &+\Sigma\big[(i+1)[ii'\ldots]_{M-1} + (i+1)(M-\Sigma i-\varrho-1)[ii'\ldots]_{M-i-1} - (i+1)[(i+1)i'\ldots]_{M}\end{aligned}$$

wo die Punkte andeuten, dass bis zu $i^{(\varrho)}$ gegangen werden soll, wo ferner die $\Sigma$ zeichen sich über alle Ausdrücke erstrecken, welche aus den unter dem $\Sigma$ zeichen angeschriebenen durch Vertauschung der Indices $i$, $i'$, ... $i^{(\varrho)}$ abgeleitet werden können.

Um nun weiter von der Zahl $[1 i i' \ldots]$ zu der Zahl $[2 i i' \ldots]$ u. s. w. übergehen zu können, bedarf es noch einer zweiten Recursionsformel. Wir nehmen an, als Curve $\varphi(y\xi) = 0$ sei gegeben der Inbegriff derjenigen Curven $C$ eines Büschels, welche in einem gegebenen Punkt $y$ von $f$ $k-1$ punktig und sonst noch in einem weiteren Punkt $x$ $i$ punktig die Curve $f$ berühren. Durch den Punkt $y$ gehen $[i]_{M-k}$ Zweige; weil aber jeder Zweig in $k$ Punkten schneidet, so fallen in $y$ $k \,.\, [i]_{M-k}$ Schnittpunkte von $\varphi$ mit $f$ zusammen. Einem Punkt $x$ entsprechen ferner $[k]_{M-i-1}$ Punkte $y$, die Zahl der vereinigten Paare $x$, $y$ ist $= [i+k]_M$. Auf jeder Curve $C$ giebt es ferner $M-k-i-1$ einfache Schnittpunkte $x'$, welche nicht nach $y$ oder $x$ fallen; zwischen $x'$ und $y'$ besteht die Correspondenz:

$$\big((M-i-k-1)\,[i]_{M-k}\,,\ [i,\ (k-1)]_{M-1}\big).$$

Die Zahl der vereinigten Paare $y$, $x'$ ist $= [i,\ k]_M$; man hat also zufolge Formel (21):

$$[i,\ k]_M - [i,\ (k-1)]_{M-1} - (M-i-k-1)\,[i]_{M-k} + \\ + (i+1)\,[i+k]_M - (i+1)\,[i]_{M-k} - (i+1)\,[k-1]_{M-i-1} = 2pk[i]_{M-k}.$$

Aus dieser Gleichung bestimmt sich mit Hilfe des Ausdrucks für $[i]_M$ und für $[i,\ k-1]_M$ der Ausdruck für:

$$[i,\ k]_M = (i+1)\,(k+1)\,.\left\{\begin{aligned}&(M-i-k)\,(M-i-k-1)+\\ &\qquad + (M-i-k-1)\,(i+k)\,p+\\ &\qquad\qquad + ikp\,(p-1).\end{aligned}\right.$$

Man erhält durch analoge Betrachtungen die *zweite allgemeine Recursionsformel:*

I)
$$[i i' \ldots i^{(\varrho)}]_M = [(i-1),\ i',\ldots]_{M-1} + (M - \Sigma i - \varrho)[i' i'' ..]_{M-i} + 2p\,.\,i\,[i' i''..]_{M-i} + \\ + \Sigma[-(i'+1)\,[(i+i'),\ i'',..]_M + (i'+1)\,[i' i''..]_{M-i} + (i'+1)\,[i-1,\ i'',\ ..]_{M-i'-1}];$$

wo die Punkte und die $\Sigma$ zeichen die frühere Bedeutung haben.

## II. Curvenbüschel mit drei Parametern.

Die Betrachtungen des 1. Theils lassen sich auf das Studium des Verhaltens eines Büschels von Curven ($s^{\text{ter}}$ Ordnung) mit 3 nicht homogenen Parametern gegenüber einer Curve $f$ $m^{\text{ter}}$ Ordnung vom Geschlecht $p$, auf welcher irgend welche Basispunkte des Büschels: $\sigma$ in einfachen, $\tau$ in Doppelpunkten von $f$, liegen mögen, anwenden. Ein solches Büschel ist darum von Interesse, weil, wie man (d. Annalen, IV, p. 541) zeigen kann, mit den Eigenschaften desselben die projectivischen Eigenschaften einer gewissen *Raumcurve* von demselben Geschlecht wie $f$ und vom Grad $M = ms - \sigma - 2\tau$ in engem Zusammenhang stehen. Jene Raumcurve besitzt keine wirklichen Doppel- noch Rückkehrpunkte, wenn, was wir in der Folge der Einfachheit wegen annehmen wollen, die Zahl $\tau$ sämmtliche Doppel- und Rückkehrpunkte von $f$ umfasst.

Jedem Satz, der sich auf Schnittpunkte von Curven des Büschels mit $f$ bezieht, entspricht ein solcher über Schnittpunkte von Ebenen mit der Raumcurve. Man könnte, auf diese Eigenschaft gestützt, die Theorie der Raumcurven, soweit dieselbe sich mit Schnittpunktabzählungen befasst, vollständig aus der Theorie der ebenen Curvenbüschel entwickeln. Ich will als Beispiel im Nachfolgenden die Zahl der dreifach schneidenden Sehnen einer Raumcurve, welche man von einem gegebenen Punkt derselben ziehen kann, sowie die Zahl der vierfach schneidenden Sehnen bestimmen. Wegen der Ableitung anderer Zahlen aus denselben Grundsätzen sehe man diese Annalen Bd. IV, pag. 522 und Gött. Nachr. 1871, pag. 513.

Einer dreifach schneidenden Sehne durch einen gegebenen Punkt $z$ der Raumcurve entspricht die einfach unendliche Schaar von solchen Curven des ebenen Büschels, welche alle durch den dem Punkt $z$ entsprechenden Punkt von $f$ und noch zwei andere Punkte von $f$ gehen*). Wir wollen beweisen, *dass es:*

$$\nu = \tfrac{1}{2}(M-2)(M-3) - p$$

*solcher einfach unendlichen Schaaren giebt.*

Man nehme in der Ebene einen beliebigen Punkt $a$, ausserdem auf $f$ einen Punkt $z$ an, so geht durch $a$, $y$, $z$ eine Curve des Büschels, welche ausser in $z$ und $y$ noch in $M-2$ Punkten $x$ $f$ schneidet. Die Punkte $x = y$, $x = z$, $y = z$ sind je einfache Schnittpunkte.

Nimmt man statt $a$ einen Punkt $b$ an, so bleiben die Zahlen die nämlichen. Variirt man $y$ auf $f$, so wandert $x$; die Paare $x$, $y$, welche Curven zugehören, die sowohl durch $a$ wie durch $b$ gehen, findet man aus § 8., Formel (18)**):

$$= (M-2)^2 - p.$$

Unter diesen befinden sich solche, welche der durch $z$, $a$ und $b$ gehenden Curve angehören; es sind:

$$\tfrac{1}{2}(M-1)(M-2)$$

*) Eine ähnliche Beziehung ist in den „Abel'schen Functionen" von Clebsch und Gordan § 61. näher betrachtet worden.

**) Man hat nur die Hälfte der der Formel (18) entsprechenden Zahl $(\varphi\varphi')$ zu nehmen, weil die Punkte $x$ und $y$ symmetrisch vorkommen.

Paare; somit bleiben solcher Paare von Punkten $x$, $y$, durch welche zwei, und somit unendlich viele Curven des Büschels gehen:

$$(M-2)^2 - p - \tfrac{1}{2}(M-1)(M-2) = \nu$$

übrig. Diese Punkte liegen auf einer Curve $A$, *welche in dem Punkt $z$ einen:*

$$2(M-2) - 2 - (M-2) = M-4$$

*fachen Punkt besitzt.* Die $(M-2)$ Schnittpunkte, welche wir von den aus § 13., (22) sich ergebenden $2M-6$ abgezogen haben, rühren von der durch $z$ einfach hindurchgehenden aber $(M-2)$ fach zu zählenden Curve her, welche durch $a$, $b$, $z$ geht.

Für besondere Lagen von $z$ kann es sich ereignen, dass ausser den Schnittpunkten $zxy$ noch ein vierter gemeinsamer Schnittpunkt $u$ des Büschels auf $f$ zu liegen kommt. *Die Zahl dieser Punktequadrupel zu ermitteln.*

Man denke sich zu einem Punkt $z$ von $f$ die zugehörigen $\nu$ Paare von Punkten $x$, $y$ gefunden und lege durch jeden dieser Punkte $x$, $y$ die ihm wiederum entsprechende Curve $A$. Das System dieser Curven wollen wir als Curve $\varphi(y\xi) = 0$ im Sinne des § 12. betrachten, und die Correspondenzen aufstellen. Durch $z$ geht die Curve $\nu$ mal. Durch jeden der Punkte $y$, $x$ je $M-4+1$ mal. Ausserdem werden noch einfache Punkte $x'$, an Zahl $\nu(\nu-2)$, ausgeschnitten. Durch $z$ und die Punkte $x$, $y$ legen wir nun die Curve $A$ $M-3$ mal (als Curve $C$ im Sinn des § 12.) und ziehen das Schnittpunktsystem desselben von dem von $\varphi(y\xi) = 0$ ab. Es bleibt dann das einer Curve, welche in den $x'$ je einen einfachen Punkt, in $z$ einen:

$$2\nu - (M-3)(M-4) = 2(M-3) - 2p$$

fachen Punkt besitzt. Die Zahl der vereinigten Paare $x'$, $z$ ist nach § 8. (18):

$$\begin{aligned} Z &= 2\nu(2\nu-2) + 2\nu(2\nu-2) + 2p\left\{2(M-3) - 2p\right\} \\ &= 2(M-1)(M-2)(M-3)(M-4) - 4p(2M^2 - 11M + 13) + 4p^2. \end{aligned}$$

Das Zusammenfallen von $z$ und $x'$ tritt nun aber in zwei Fällen ein:

*a.* Wenn der dem $x'$ zugehörige Punkt $y'$ demjenigen Punkt ($x$ oder $y$), aus welchem beide entstanden sind, unendlich benachbart ist. Fällt alsdann noch $x'$ dem $z$ unendlich nahe, so sind von den zu ($x$ oder $y$) gehörigen Punktepaaren $x'y'$ zwei Paare unendlich benachbart; in Bezug auf die Raumcurve interpretirt sind alsdann zwei von den dreifach schneidenden Sehnen, welche durch den dem Punkt ($x$ oder $y$) entsprechenden Punkt der Raumcurve hindurchgehen, unendlich benachbart. Wir haben (d. Ann. Bd. IV. p. 525) gezeigt, dass die diesem Fall entsprechende Zahl ist:

$$Y = 4\nu(2M + 2p - 2) - 12(M-2)(M-3) - 12p(M-6).$$

*b.* Wenn der dem Punkt $x'$ zugehörige Punkt $y'$ nicht mit einem der anderen Punkte des Schnittpunktsystems zusammenfällt. In diesem Fall gehen alle Curven, welche durch $z$ und einen der Punkte $x$ oder $y$ gehen, noch durch $x'$ und $y'$. Die diesem Fall entsprechende Zahl ist demnach:

$$= \tfrac{1}{24}(Z-Y) = \frac{(M-2)(M-3)^2(M-4)}{12} - \frac{p}{2}\{(M-3)(M-4)-p+1\}$$

Die Division mit 24 ist durch das symmetrische Verhalten der 4 Punkte eines Quadrupels bedingt. *Diese Zahl repräsentirt die Anzahl des Punktequadrupel auf der Curve f, durch welche noch eine einfach unendliche Schaar von Curven aus einem Büschel mit 3 Parametern hindurchgeht*, oder in Bezug auf die Raumcurve gedeutet: *die Anzahl der 4fach schneidenden Sehnen.*

---

## Zweite Abtheilung.

### Drei Beziehungen zwischen Punktetripeln auf einer gegebenen Curve; vier Beziehungen zwischen Punktquadrupeln.

Wir haben uns im Vorstehenden mit der Aufstellung der Zahl von Punktepaaren, welche durch zwei Beziehungen und die Bedingung, dass sie auf einer gegebenen Curve (von allgemeinem Geschlecht) liegen sollen, bestimmt sind, beschäftigt. Die Behandlung der folgenden Fälle, welche, wie wir unten sehen werden, für gewisse geometrische Fragen von Wichtigkeit sind, wird einigermessen erschwert durch die Allgemeinheit unserer Voraussetzungen, die wir doch nicht fallen lassen können, ohne uns des Vortheils einer übersichtlichen Darstellung der Bildungsgesetze der Formeln zu begeben. Ich habe nun gefunden, dass man dieser Schwierigkeit dadurch am einfachsten begegnet, dass man die Variationen der Gleichungen, deren Einführung wegen des identischen Verschwindens der Resultante der ursprünglich gegebenen 3 bez. 4 Gleichungen nicht umgangen werden kann, mit unendlich kleinen Grössen nicht derselben Ordnung, sondern *verschiedener Ordnung, von Null anfangend*, multiplicirt. Durch diese Annahme wird die Zahl der auszuscheidenden speciellen Factoren der Resultante der variirten Gleichungen um ein Beträchtliches vermindert.

14. Gegeben seien die drei Beziehungen zwischen den drei Punkten $x$, $y$, $z$ der Curve $f$:

$$(24) \qquad \varphi(xyz) = 0, \quad \varphi_1(xyz) = 0, \quad \varphi_2(xyz) = 0,$$

welche als Functionen der Coordinaten des Punktes $x$ bez. $k$, $k_1$, $k_2$, als Functionen von $y$ bez. $l$, $l_1$, $l_2$, als Functionen von $z$ bez. $m$, $m_1$,

$m_2$ Schnittpunkte mit der Curve $f$ besitzen mögen. Der Punkt $y = z$ sei bez. ein $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ facher, der Punkt $z = x$ bez. ein $\beta$, $\beta_1$, $\beta_2$ facher, der Punkt $x = y$ bez. ein $\gamma$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ facher Schnittpunkt. Man soll die Zahl der Punktetripel auf $f$ finden, welche gleichzeitig den 3 Relationen (24) genügen. Man ersetze dieselben durch die folgenden:

$$(25)\ \varphi(xyz)=0;\ \varphi_1(xyz)+\varepsilon_1\delta\varphi_1(xyz)=0;\ \varphi_2(xyz)+\varepsilon_2\delta\varphi_2(xyz)=0,$$

wo die Functionen $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ von denselben Graden in $x$, $y$, $z$ sein sollen, wie beziehentlich $\varphi_1$ und $\varphi_2$; $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ gegen Null convergirende Grössen, so indess, *dass der Quotient:*

$$\lim\,[\varepsilon_1{}^q : \varepsilon_2]$$

*für jeden endlichen positiven Werth von $q$ verschwindet.* Man kann alsdann aus jeder der Gleichungen (25) mit Hilfe von $f(x) = 0$, $f(y) = 0$, $f(z) = 0$ die Coordinaten $x_3$, $y_3$, $z_3$ eliminiren und erhält 3 Gleichungen in $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{y_1}{y_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$, deren Resultante sich nach einer an einem anderen Ort*) angegebenen Methode berechnen lässt; ihr Grad ist:

$$k\,(l_1 m_2 + m_1 l_2) + l\,\{m_1 k_2 + k_1 m_2\} + m\,\{k_1 l_2 + l_1 k_2\} = \Sigma k l_1 m_2,$$

wo die abgekürzte Bezeichnung rechts wegen der Aehnlichkeit des Ausdrucks mit der Determinante:

$$\Sigma \pm k l_1 m_2$$

gewählt wurde, aus welcher derselbe durch Verwandlung der negativen Glieder in positive entsteht. Wir werden diese Bezeichnung für derartige Ausdrücke in der Folge öfters anwenden.

Unter der obigen Summe, welche die Anzahl aller die Gleichungen (25) befriedigenden Werthetripel darstellt, befinden sich indess noch solche, für welche:

a. $y = z$; b. $z = x$; c. $x = y$ ist,

ferner solche, für welche, wenn $\varepsilon$ eine gegen Null convergirende Grösse bedeutet:

d. $y = z + \varepsilon dx$ ist, d. h. $y$ in die Nähe von $z$ fällt, ohne dass jedoch $x$ nach $z$ oder in die Nähe von $z$ fällt;

e. $z = x + \varepsilon dx$; f. $x = y + \varepsilon dx$ ist,

wo mutatis mutandis das Gleiche zuzufügen ist. Die Paare a. sind durch das Zusammenbestehen der Gleichungen:

$$\delta\varphi_1\,(xzz) = 0 \qquad \delta\varphi_2\,(xzz) = 0$$

*) Diese Annalen, Bd. V. S. 384.

bestimmt, während $\varphi = 0$ für $y = z$ einen $\alpha$ fachen Schnittpunkt mit $f$ besitzt; dies giebt:

$$\alpha \left\{k_1 (l_2 + m_2) + k_2 (l_1 + m_1)\right\}$$

Paare, welche dem Fall a. entsprechen. Ganz ebenso bestimmen sich die Paare b. und c.

Die Paare d. bestimmen sich aus

$$(26) \quad \begin{cases} \varphi(x, z + \varepsilon\delta z, z) = 0 \\ \varphi_1 (x, z + \varepsilon\delta z, z) + \varepsilon_1 \delta\varphi_1 (xzz) = 0 \\ \varphi_2 (x, z + \varepsilon\delta z, z) + \varepsilon_2 \delta\varphi_2 (xzz) = 0. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen ist von $\varepsilon$ unabhängig (s. § 4, b.) und besitzt, als Function von $x$ betrachtet,

$$k - \beta - \gamma = \varkappa$$

Schnittpunkte auf $f$, welche nicht nach $z$ fallen, als Function von $z$ (§ 9.):

$$(l - \gamma - \alpha) + (m - \alpha - \beta) + 2p\alpha = \lambda + \mu + 2p\alpha$$

Schnittpunkte, welche nicht nach $x$ fallen. Die zweite und dritte Gleichung (26) enthalten $\varepsilon$. Wenn diese Grösse von Null verschieden ist, so muss eine endliche Potenz von $\varepsilon$ entweder von der Ordnung von $\varepsilon_1$ oder von $\varepsilon_2$ sein, wenn nicht die 3 Gleichungen (26) Bestimmungsgleichungen für nur die 2 unbekannten Punkte $x$ und $z$ sein sollen.

I. Im ersten Fall verschwindet durch Einsetzen des Werthes von $\varepsilon$ in die 3. Gleichung der erste Term derselben, der zweite aber ist:

$$\delta\varphi_2 (xzz) = 0,$$

eine Gleichung, die in Verbinduug mit der ersten Gleichung (26):

$$(\lambda + \mu + 2p\alpha) k'' + \varkappa (l'' + m'')$$

Schnittpunktpaare, jedes $\alpha'$ fach gerechnet, giebt (den $\alpha'$ Werthen von $\varepsilon$ entsprechend, welche man aus der zweiten Gleichung findet).

II. Im anderen Fall reducirt sich die zweite Gleichung auf:

$$\varphi_1 (x, z + \varepsilon\delta z, z) = 0.$$

Diese Gleichung, in Verbindung mit:

$$\varphi(x, z + \varepsilon\delta z, z) = 0$$

liefert (§ 8.):

$$\varkappa (\lambda_1 + \mu_1 + 2p\alpha_1) + \varkappa_1 (\lambda + \mu + 2p\alpha) - 2p (\beta + \gamma)(\beta_1 + \gamma_1)$$

Paare, deren Jedes $\alpha_2$ fach zu rechnen ist.

Ganz analog sind die Paare e. und f. zu berechnen.

Man könnte noch fragen, ob nicht gleichzeitig $y = z + \varepsilon\delta z$, $x = z + \eta\delta z$ sein könnte. Dass von den Grössen $\varepsilon$ und $\eta$ nicht die eine der Null benachbart sein kann, während die andere gleich Null ist, übersieht man sofort. Ebenso wenig können beide zugleich Null sein. Sie können aber auch nicht beide der Null benachbart sein. Denn die beiden letzten Gleichungen (26), welche in diesem Fall Bestimmungsgleichungen für $\varepsilon$ und $\eta$ würden, würden die unvereinbaren Forderungen stellen, dass beide von derselben Ordnung wie eine Potenz von $\varepsilon_1$, und zugleich von derselben Ordnung wie eine Potenz von $\varepsilon_2$ wären.

15. Man hat so im Ganzen abzuziehen:

a. $\alpha\left\{k_1(l_2+m_2)+k_2(l_1+m_1)\right\}$

b. $\beta\left\{l_1(m_2+k_2)+l_2(m_1+k_1)\right\}$

c. $\gamma\left\{m_1(k_2+l_2)+m_2(k_1+l_1)\right\}$

d. I. $\alpha_1\left\{\varkappa(l_2+m_2)+k_2(\lambda+\mu)\right\}+2pk_2\alpha\alpha_1$

e. I. $\beta_1\left\{\lambda(m_2+k_2)+l_2(\mu+\varkappa)\right\}+2pl_2\beta\beta_1$

f. I. $\gamma_1\left\{\mu(k_2+l_2)+m_2(\varkappa+\lambda)\right\}+2pm_2\gamma\gamma_1$

d. II. $\alpha_2\left\{\varkappa(\lambda_1+\mu_1)+\varkappa_1(\lambda+\mu)\right\}+2p(\varkappa\alpha_1\alpha_2+\varkappa_1\alpha\alpha_2)-2p\alpha_2(\beta+\gamma)(\beta_1+\gamma_1)$;

e. II. $\beta_2\left\{\lambda(\mu_1+\varkappa_1)+\lambda_1(\mu+\varkappa)\right\}+2p(\lambda\beta_1\beta_2+\lambda_1\beta\beta_2)-2p\beta_2(\gamma+\alpha)(\gamma_1+\alpha_1)$;

f. II. $\gamma_2\left\{\mu(\varkappa_1+\lambda_1)+\mu_1(\varkappa+\lambda)\right\}+2p(\mu\gamma_1\gamma_2+\mu_1\gamma\gamma_2)-2p\gamma_2(\alpha+\beta)(\alpha_1+\beta_1)$;

*Die Anzahl der gesuchten Werthetripel auf der Curve $f$, für welche weder $x$ mit $y$, noch $y$ mit $z$, noch $z$ mit $x$ zusammen oder unendlich benachbart fallen,* erhält man durch Subtraction der obigen Zahlen a. bis f. II. von $\Sigma k l_1 m_2$ in übersichtlicher Anordnung wie folgt:

$$(\varphi\varphi_1\varphi_2)=\Sigma\varkappa\lambda_1\mu_2+2p\,.\,\Sigma\alpha\beta_1\gamma_2-p\left\{\Sigma\varkappa\alpha_1\alpha_2+\Sigma\lambda\beta_1\beta_2+\Sigma\mu\gamma_1\gamma_2\right\}, \tag{27}$$

wo

$$\varkappa=k-\beta-\gamma;\qquad \varkappa'=k'-\beta'-\gamma';$$
$$\lambda=l-\gamma-\alpha;\qquad \text{etc.}$$
$$\mu=m-\alpha-\beta;$$

ist; $\Sigma\varkappa\lambda_1\mu_2$ aus der Determinante $\Sigma\pm\varkappa\lambda_1\mu_2$ durch Verwandlung der 3 negativen Glieder in positive entsteht; ebenso $\Sigma\varkappa\alpha_1\alpha_2$ eine einer Determinante analog gebildete Summe von 6 Gliedern ist, desgl. $\Sigma\lambda\beta_1\beta_2$ u. s. w.

Man kann der rechten Seite noch die folgende Gestalt geben:

$$\begin{aligned}(\varphi\varphi_1\varphi_2)=\varkappa&\left\{\lambda_1\mu_2+\mu_1\lambda_2-2p\,\alpha_1\alpha_2\right\}-2p\alpha(\varkappa_1\alpha_2+\alpha_1\varkappa_2-\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)+\\ +\lambda&\left\{\mu_1\varkappa_2+\varkappa_1\mu_2-2p\beta_1\beta_2\right\}-2p\beta\,(\lambda_1\beta_2+\beta_1\lambda_2-\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)+\\ +\mu&\left\{\varkappa_1\lambda_2+\lambda_1\varkappa_2-2p\gamma_1\gamma_2\right\}-2p\gamma\,(\mu_1\gamma_2+\gamma_1\mu_2-\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2),\end{aligned} \tag{27¹}$$

in welcher die geschwungenen sowie die runden Klammern der rechten Seite einen einfachen geometrischen Sinn besitzen. Bezeichnet man nämlich wie früher mit $(\varphi_1\varphi_2)_{xy}$ die Zahl der bei festliegendem $z$ nicht mit einander oder mit $z$ zusammenfallenden Werthepaare $x$, $y$, welche den beiden Gleichungen $\varphi_1(xyz)=0$, $\varphi_2(xyz)=0$ genügen; mit $[yz]_{12}$ (§ 13.) die Vielfachheit des Punktes $y=z$ in der durch Elimination von $x$ (nach Ausscheidung der uneigentlichen Punktsysteme) aus $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ entstehenden Gleichung etc., so lässt sich der letzte Ausdruck in der Form anschreiben:

$$(27^b)\quad (\varphi\varphi_1\varphi_2)=\varkappa(\varphi_1\varphi_2)_{yz}+\lambda(\varphi_1\varphi_2)_{zx}+\mu(\varphi_1\varphi_2)_{xy}-2p\left\{\alpha[yz]_{12}+\beta[zx]_{12}+\gamma[xy]_{12}\right\}.$$

Durch Vertauschung der Indices lassen sich hieraus noch 2 andere Formen bilden.

*Sind insbesondere die Formen $\varphi$ in Bezug auf die einzelnen Variabeln symmetrisch gebildet, so dass also:*

$$\begin{array}{lll} k=l=m; & \varkappa=\lambda=\mu; & \alpha=\beta=\gamma \\ k_1=l_1=m_1; & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & & \text{etc.} \end{array}$$

*so wird die Zahl der gemeinsamen Werthetripel:*

$$(28)\quad \begin{aligned} \tfrac{1}{6}(\varphi\varphi_1\varphi_2) &= \varkappa\varkappa_1\varkappa_2-p(\varkappa\alpha_1\alpha_2+\varkappa_1\alpha\alpha_2+\varkappa_2\alpha\alpha_1)+2p\alpha\alpha_1\alpha_2= \\ &= \varkappa\left\{\varkappa_1\varkappa_2-p\alpha_1\alpha_2\right\}-p\alpha(\varkappa_1\alpha_2+\varkappa_2\alpha_1-2\alpha_1\alpha_2)= \\ &= \varkappa\cdot\tfrac{1}{2}(\varphi_1\varphi_2)-p\alpha\,[x=y=z]_{12} \end{aligned}$$

wo wir wegen des symmetrischen Vorkommens von $x$, $y$, $z$ mit 1. 2. 3=6 dividirt haben. Die Zahl $\frac{1}{2}(\varphi_1\varphi_2)$ bedeutet dabei die Anzahl der verschiedenen Paare von getrennt liegenden Punkten $x$, $y$, welche den in $x$ und $y$ symmetrischen Gleichungen $\varphi_1=0$ $\varphi_2=0$ einzeln genügen; $[x=y=z]_{12}$ die Vielfachheit des Punktes $x=y$ oder $x=z$, etc. der Eliminationsgleichung aus beiden Gleichungen.

16. Wir betrachten schliesslich den Fall, dass 4 Gleichungen mit den Coordinaten von 4 Punkten $x$, $y$, $z$, $u$:

$$(29)\quad \varphi(xyzu)=0,\ \varphi_1(xyzu)=0,\ \varphi_2(xyzu)=0,\ \varphi_3(xyzu)=0$$

gegeben sind. Die Grade von $\varphi$ in $x$, $y$, $z$, $u$ seien $k$, $l$, $m$, $n$, die von $\varphi_1$: $k_1$, $l_1$, $m_1$, $n_1$ u. s. w. Die Vielfachheit der Schnittpunkte sei in folgender Weise bezeichnet:

$$\begin{array}{l} x=y \text{ durch } 1_i;\ x=z \text{ durch } 2_i;\ x=u \text{ durch } 3_i; \\ y=z \text{ durch } 4_i;\ z=u \text{ durch } 5_i;\ u=y \text{ durch } 6_i, \end{array}$$

wo der Index $i=0, 1, 2, 3$, je nachdem es sich um die Gleichungen: $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ handelt, so dass z. B. $1_0$ die Vielfachheit des Schnittpunktes $x=y$ der Gleichung $\varphi(xyzu)=0$ mit $f(x)=0$ bedeutet. Endlich werde noch die Bezeichnung eingeführt:

$$\begin{array}{l} \varkappa_i=k_i-1_i-2_i-3_i;\ \lambda_i=l_i-4_i-6_i-1_i; \\ \mu_i=m_i-2_i-4_i-5_i;\ \nu_i=n_i-3_i-5_i-6_i. \end{array}$$

Wir substituiren anstatt der obigen Gleichungen die folgenden:

(30) $\varphi = 0;\ \varphi_1 + \varepsilon_1 \delta\varphi_1 = 0;\ \varphi_2 + \varepsilon_2 \delta\varphi_2 = 0\ \varphi_3 + \varepsilon_3 \delta\varphi_3 = 0$

wo $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon$, in der Weise gegen Null convergiren, dass:

$$\lim (\varepsilon_1{}^q : \varepsilon_2) = 0 \ \lim (\varepsilon_2{}^q : \varepsilon_3) = 0$$

für jede positive Grösse $q$.

Die Zahl aller gemeinsamen Werthequadrupel ist:

$$\Sigma k l_1 m_2 n_3 .$$

Unter diesen befinden sich indess:

a. Solche, für welche entweder $x = y$, oder $x = z$; oder etc. oder $z = u$ ist.

b. Solche, für welche $x = y + \varepsilon\delta y$, oder etc. oder $z = u + \varepsilon\delta u$ ist, und $\varepsilon$ eine unendlich kleine Grösse von der Ordnung einer (ganzen oder gebrochenen) Potenz von $\varepsilon_1$ ist.

c. Solche, für welche ebenfalls eine der unter b. aufgestellten Gleichungen gilt, aber $\varepsilon$ von der Ordnung einer Potenz von $\varepsilon_2$ ist.

d. Solche, für welche eine der unter b. aufgestellten Gleichungen gilt, aber $\varepsilon$ von der Ordnung einer Potenz von $\varepsilon_3$ ist.

Dass keine Paare existiren, für welche gleichzeitig mehrere der sub a., d. aufgestellten Gleichungen bestehen, beweist man auf ähnliche Weise wie dies für Punktetripel in § 13. geschehen.

Wir wollen für je einen der unter a., . . . d. aufgestellten 6 Fälle die entsprechende Zahl von Punktquadrupeln angeben uud daraus je die 5 übrigen durch Vertauschung ableiten.

a. Für $x = y$ erhält man die entsprechenden Quadrupel aus:

$$\delta\varphi_1 (yyzu) = 0 \ \delta\varphi_2 (yyzu) = 0 \ \delta\varphi_3 (yyzu) = 0$$

an der Zahl: $\Sigma\,[(k_1 + l_1)\, m_2 n_3]$, und zwar, wegen der Vielfachheit des Schnittpunktes $x = y$ von $\varphi = 0$, $1_0$ fach.

b. Für $x = y + \varepsilon\delta y$, wo $\varepsilon$ von der Ordnung einer Potenz von $\varepsilon_1$ ist, berechnen sich die Coordinaten aus:

$$\varphi\,(y + \varepsilon\delta y,\ y,\ z,\ u) = 0 \ \delta\varphi_2 (yyzu) = 0 \ \delta\varphi_3 (yyzu) = 0$$

an der Zahl (unter Anwendung der Formel (27) in § 14):

$$\left\{ \begin{matrix} \varkappa + \lambda\, 2p1_0 & \mu & \nu \\ k_2 + l_2 & m_2 & n_2 \\ k_3 + l_3 & m_3 & n_3 \end{matrix} \right\},$$

durch welches Symbol wir den determinantenähnlichen Ausdruck bezeichnen, welcher aus der ebenso (nur mit 2 Parallelstrichen) bezeichneten Determinante durch Umkehrung des Vorzeichens der negativen Glieder in positive entsteht. Diese Zahl ist $1_1$ fach zu nehmen.

c. Dem Fall $x = y + \varepsilon \delta y$, wo $\varepsilon$ von der Ordnung einer Potenz von $\varepsilon_2$ ist, entsprechen die Gleichungen:

$$\varphi(y+\varepsilon\delta y, y, z, u) = 0;\ \varphi_1(y+\varepsilon\delta y, y, z, u) = 0;\ \delta\varphi_3(y+\varepsilon\delta y, y, z, u) = 0.$$

Die Zahl der diesen gemeinsamen Werthetripel ist (27):

$$\left\{\begin{matrix} \varkappa + \lambda + 2p1_0 & \mu & \nu \\ \varkappa_1 + \lambda_1 + 2p1_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ k_3 + l_3 & m_3 & n_3 \end{matrix}\right\} - 2p[(k_3+l_3)5_0 5_1 + m_3(3_0+6_0)(3_1+6_1) + n_3(2_0+4_0)(2_1+4_1$$

Diese Zahl ist $1_2$ fach zu nehmen.

d. Für $x = y + \varepsilon\delta y$, wo $\varepsilon$ von der Ordnung einer Potenz von $\varepsilon_3$ ist, hat man:

$$\varphi(y+\varepsilon\delta y, y, z, u) = 0;\ \varphi_1(y+\varepsilon\delta y, y, z, u) = 0;\ \varphi_2(y+\varepsilon\delta y, y, z, u) = 0.$$

Die Zahl der gemeinsamen Werthetripel ist (27):

$$\begin{aligned} &\Sigma[\varkappa + \lambda + 2p1_0,\ \mu,\ \nu] + 2p\,.\,\Sigma[5_0,\ 3_1 + 6_1,\ 2_2 + 4_2] - \\ &- p\,.\,\Sigma[\varkappa + \lambda + 2p1_0,\ 5_1,\ 5_2] - p\,\Sigma[\mu,\ 3_1 + 6_1,\ 3_2 + 6_2] - \\ &\qquad\qquad - p\Sigma[\nu,\ 2_1 + 4_1,\ 2_2 + 4_2]; \end{aligned}$$

Jedes derselben ist $1_3$ fach zu nehmen.

17. Bildet man die entsprechenden Glieder, welche wegen Zusammenfallens der Punkte $x, z$; $x, u$; etc. weiter in Abzug kommen, durch Vertauschung aus a., ... d. und addirt alle, so wird ungeachtet des unsymmetrischen Verfahrens das Resultat symmetrisch, wie zu erwarten war; subtrahirt man dasselbe von $\Sigma k\, l_1 m_2 n_3$, so erhält man, nach einer nicht ganz mühelosen Zusammenziehung, für *die Zahl der gemeinsamen Punktquadrupel, welche den Gleichungen* (29) *genügen, auf $f$ liegen und für welche keine zusammenfallende Punkte $x$, $y$, $z$, $u$ vorkommen:*

$$\begin{aligned} (31)\quad (\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = \Sigma\varkappa\lambda_1\mu_2\nu_3 - p\,\{&\Sigma\varkappa\lambda_1 5_2 5_3 + \Sigma\varkappa\mu_1 6_2 6_3 + \Sigma\varkappa\nu_1 4_2 4_3 + \\ &+ \Sigma\lambda\mu_1 3_2 3_3 + \Sigma\lambda\nu_1 2_2 2_3 + \Sigma\mu\nu_1 1_2 1_3\} + \\ &+ 2p\,\{\Sigma\varkappa 4_1 5_2 6_3 + \Sigma\lambda 2_1 3_2 5_3 + \Sigma\mu 1_1 3_2 6_3 + \Sigma\nu 1_1 2_2 4_3\} - \\ &- 2p\,\{\Sigma 1_0 2_1 5_2 6_3 + \Sigma 1_0 3_1 4_2 5_3 + \Sigma 2_0 3_1 4_2 6_3\} + \\ &+ p^2\,\{\Sigma 1_0 1_1 5_2 5_3 + \Sigma 2_0 2_1 6_2 6_3 + \Sigma 3_0 3_1 4_2 4_3\}. \end{aligned}$$

Die $\Sigma$ bedeuten hier wieder jene schon öfters erwähnten determinanten-ähnlichen Ausdrücke von je 24 Gliedern.

Ordnet man wiederum diesen Ausdruck, wie $(\varphi\varphi_1\varphi_2)$ in ($27^b$), nach den zu der ersten Gleichung $\varphi = 0$ gehörigen Zahlen: $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$; $1_0$, $2_0$, ... $6_0$ an, so ist, wie man sofort übersieht, der Factor von $\varkappa$ gleich der Anzahl $(\varphi_1\varphi_2\varphi_3)_{yzu}$ der Werthetripel $y$, $z$, $u$, welche den 3 letzten Gleichungen bei gegebenem $x$ gemeinsam sind, u. s. w.; ferner ist, wie man durch eine der im § 13. angestellten ähnliche Untersuchung findet, der Coefficient von $1_0$ gleich der Vielfachheit $[xy]_{123}$ des Schnittpunktes $x = y$ für die durch Elimination von $z$ und $u$ aus $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ entstandene Gleichung, u. s. w. Man kann somit die rechte Seite von (31) in folgender Gestalt schreiben:

$$
\begin{aligned}
(31^a)\quad (\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = {} & \varkappa(\varphi_1\varphi_2\varphi_3)_{yzu} + \lambda(\varphi_1\varphi_2\varphi_3)_{zux} + \mu(\varphi_1\varphi_2\varphi_3)_{uxy} + \nu(\varphi_1\varphi_2\varphi_3)_{xyz} \\
& - 1_0[xy]_{123} - 2_0[xz]_{123} - 3_0[xu]_{123} - 4_0[yz]_{123} - 5_0[zu]_{123} - 6_0[uy]_{123};
\end{aligned}
$$

Aus den Gleichungen ($27^b$) und ($31^a$) geht *das Gesetz für die Bildung des allgemeinen Ausdrucks* $(\varphi\varphi_1\ldots\varphi_n)$ *aus* $(\varphi\varphi_1\ldots\varphi_{n-1})$ *und den hierzu gehörigen Grössen* $[xy]$, *etc.* unzweifelhaft hervor. Uebrigens lassen auch schon die Formeln (27) und (31) das Bildungsgesetz für die unmittelbare Darstellung von $(\varphi\varphi_1\ldots\varphi_n)$ erkennen, wenn man auf die Entstehungsweise der einzelnen Glieder Rücksicht nimmt. Wir wollen indess diesen Punkt hier nicht weiter verfolgen.

18. *Sind insbesondere die 4 Formen* $\varphi$ *in Bezug auf die einzelnen Variabeln symmetrisch gebildet, so dass also:*

$$
\begin{array}{lll}
k = l = m = n; & \varkappa = \lambda = \mu = \nu & 1_0 = 2_0 = \ldots = 6_0 = \alpha \\
k_1 = l_1 = m_1 = n_1; & \text{etc.} & 1_1 = 2_1 = \ldots = 6_1 = \alpha, \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}
$$

*so wird die Zahl der gemeinsamen Werthequadrupel:*

$$
\begin{aligned}
(32)\quad \tfrac{1}{24}(\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = {} & \varkappa\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 - p(\varkappa\varkappa_1\alpha_2\alpha_3 + \varkappa\varkappa_2\alpha_3\alpha_1 + \ldots \varkappa_2\varkappa_3\alpha\alpha_1) + \\
& + 2p(\varkappa\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \ldots \varkappa_3\alpha\alpha_1\alpha_2) - 6p\,\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + 3p^2\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3;
\end{aligned}
$$

*oder, in anderer Anordnung:*

$$
\begin{aligned}
& = \varkappa\,\{\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 - p(\varkappa_1\alpha_2\alpha_3 + \varkappa_2\alpha_3\alpha_1 + \varkappa_3\alpha_1\alpha_2) + 2p\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\} - \\
& - p\alpha\,\{\varkappa_2\varkappa_3\alpha_1 + \varkappa_3\varkappa_1\alpha_2 + \varkappa_1\varkappa_2\alpha_3 - 2\varkappa_1\alpha_2\alpha_3 - 2\varkappa_2\alpha_3\alpha_1 - 2\varkappa_3\alpha_1\alpha_2 \\
& \qquad + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 3p\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\} = \\
(32^a)\quad & = \varkappa \cdot \tfrac{1}{6}(\varphi_1\varphi_2\varphi_3) - p\alpha\,[x = y = z = u]_{123}
\end{aligned}
$$

wo $\frac{1}{6}(\varphi_1\varphi_2\varphi_3)$ die Anzahl der den drei letzten Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ gemeinsamen, von einander verschiedenen Tripel von nicht zusammenfallenden Punkten $x$, $y$, $z$, bei festliegendem $u$, bedeutet, $[x = y = z = u]_{123}$ die Vielfachheit des Punktes $x = y$ oder $x = z$ oder etc. in der Eliminationsgleichung aus jenen 3 Gleichungen (vgl. § 17.). Wegen des symmetrischen Verhaltens von $x$, $y$, $z$, $u$ wurde durch 1. 2. 3. 4 = 24 dividirt, um nur verschiedene Quadrupel zu erhalten. Man kann schliesslich die rechte Seite in (32) auch noch in folgender Weise anordnen:

$$
\begin{aligned}
(\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = {} & (\varkappa\varkappa_1 - p\,\alpha\alpha_1)(\varkappa_2\varkappa_3 - p\,\alpha_2\alpha_3) - p(\varkappa\alpha_1 + \varkappa_1\alpha - 2\alpha\alpha_1)(\varkappa_2\alpha_3 + \varkappa_3\alpha_2 - 2\alpha_2\alpha_3) + \\
& + 2p(p-1)\,\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \\
(32^b)\quad = {} & \tfrac{1}{2}(\varphi\varphi_1) \cdot \tfrac{1}{2}(\varphi_2\varphi_3) - p[x=y=z=u]_{01} \cdot [x=y=z=u]_{23} + 2p(p-1)\,a_{01} \cdot a_{23}
\end{aligned}
$$

wo $\frac{1}{2}(\varphi\varphi_1)$, $\frac{1}{2}(\varphi_2\varphi_3)$ die Zahl der den Gleichungen $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$, bez. $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ (bei festliegendem $z$ und $u$) gemeinsamen Punktepaare $x$, $y$ bedeutet, die eckigen Klammern je die Vielfachheit der Punkte $x = y = \ldots$ für die entsprechenden Eliminationsgleichungen bedeuten, endlich $a_{01} . a_{23}$ eine Grösse ist, welche verschwindet, wenn $(\varphi\varphi_1)$ oder $(\varphi_2\varphi_3)$ von $p$ unabhängig ist (wobei für die Grade $\varkappa_1 \ldots$ das Nämliche vorausgesetzt wird).

*Sind endlich die 4 gegebenen Gleichungen alle von demselben Grad $\varkappa$ und besitzen dieselbe Beschaffenheit bezüglich der Vielfachheit $\alpha$ der Punkte $x = y = \ldots$, so erhält man bei symmetrischem Verhalten der Punkte $x_1 \ldots$:*

$$(33) \qquad \tfrac{1}{24}(\varphi\varphi_1\varphi_2\varphi_3) = \varkappa^4 - p\,[6\varkappa^2\alpha^2 - 8\varkappa\alpha^3 + 6\alpha^4] + 3p^2\alpha^4$$

*als Anzahl der gemeinsamen Werthequadrupel.*

19. Wir haben oben vorausgesetzt, dass ausser den Variabeln $xyz$ für drei, und $xyzu$ für vier Gleichungen andere Solche in den Gleichungen $\varphi$, $\varphi_1 \ldots$ nicht auftreten. Aber die Formeln (27), (28), (31), (32), fahren fort zu gelten, wenn die $\varphi$, $\varphi_1, \ldots$ alle durch die Coordinaten eines oder mehrerer auf $f$ festliegenden Punkte $v \ldots$ identisch befriedigt werden. Man hat in diesem Fall, wenn man z. B. diejenigen Lösungssysteme, unter denen sich der Punkt $v$ befindet, ausschliessen will, von $\varkappa$, $\lambda, \ldots$ noch die Vielfachheit des nach $v$ fallenden Punktes $x$, bez. $y$, u. s. w. abzuzählen. Ist also z. B. der Punkt $x = v$ für $\varphi = 0$ ein $7_0$ facher, so hat man lediglich statt $\varkappa$: $\varkappa - 7_0$ zu substituiren, u. s. w. und im Uebrigen die Formeln unverändert anzuwenden. Der Beweis wird durch Betrachtungen von der Art der in § 6.—8. angestellten geführt.

## Anwendungen.

Eliminirt man aus einem System $S$ von algebraischen Gleichungen, welches eine grössere Anzahl von Unbekannten, als Gleichungen vorhanden sind, *symmetrisch* enthält, soviel Unbekannte als möglich, und bestimmt den Grad $g$ der Endgleichung in Bezug auf eine der nicht eliminirten; verfährt man alsdann ebenso mit einem das obige System ergänzenden System $S'$ von so vielen Gleichungen mit denselben Unbekannten, dass die Gesammtzahl der Gleichungen in $S$ und $S'$ gleich der der Unbekannten ist, so lässt sich*) die Anzahl der beiden Systemen genügenden Lösungssysteme aus jenen beiden Graden $g$ und $g'$ in einfacher Weise zusammensetzen. A. a. O. habe ich nun bemerkt, dass an Stelle von $S$ und $S'_k$ auch übervollständige Gleichungssysteme, welche die Variabeln symmetrisch enthalten, treten können, wenn die-

*) Vgl. einen Aufsatz des Verf. „Ueber ein gewisses System von Gleichungen", diese Ann. Bd. V, S. 386.

selben sovielen Bedingungen äquivalent sind, als die Systeme $S$ und $S'$ enthalten.

Wir wollen nun annehmen, dass an Stelle einer jeden der Unbekannten $x, y, \ldots.$ deren 3: $x_1 x_2 x_3$; $y_1 y_2 y_3$; .... gesetzt werden, welche je *homogen* vorkommen und zwischen denen immer dieselbe homogene Gleichung besteht:

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0\,,\ f(y_1 y_2 y_3) = 0\,, \ldots.$$

Hierdurch wird die Zahl der Bedingungen im Ganzen nicht verändert. Alsdann setzt sich aber, wenn das Geschlecht $p$ der Curve $f = 0$ von Null verschieden ist, die Zahl der für die beiden Systeme $S$ und $S'$ gemeinsamen Lösungen nicht mehr so einfach aus den Zahlen $g$ und $g'$ zusammen, wie im vorigen Fall. In welcher Weise diese Zahl aus $g$ und $g'$ sowie der Vielfachheit der Punkte der jeweiligen Endgleichungen gebildet werden kann, haben wir für die einfachsten Fälle in den §§ 15., 18. gesehn; nämlich: 1) wenn das System $S$ aus zwei Gleichungen, $S'$ aus einer besteht (28); 2) wenn $S$ aus drei, und $S'$ aus einer Gleiehung besteht ($32^a$); 3) wenn $S$ und $S'$ je aus zwei Gleichungen besteht ($32^b$). Für alle diese Fälle gilt, wie man leicht übersieht, und auch für allgemeine Systeme bewiesen werden kann, jene andere Bemerkung, dass an Stelle der Systeme $S$ und $S'$ auch übervollständige Systeme von Gleichungen treten können, ohne dass die betreffenden Formeln sich ändern.

Unter Anwendung dieser Bemerkungen mögen als Illustration zu den im Vorstehenden entwickelten Sätzen zwei Aufgaben aus einer Gattung von Problemen behandelt werden, welche, wie es scheint, in der Theorie der ebenen Curven eine Rolle zu spielen berufen ist. Es handelt sich um das Zusammendrängen einer möglichst grossen Zahl von Basispunkten eines Curvenbüschels auf einer gegebenen Curve.

A) Es soll die Anzahl der gemeinsamen Werthsysteme, welche dem folgenden Gleichungssystem genügen, aufgestellt werden:

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) & \varphi_5(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \varphi_4(y) & \varphi_5(y) \\ \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \varphi_3(z) & \varphi_4(z) & \varphi_5(z) \end{matrix} \right\| = 0\ f(x) = 0\ f(y) = 0\ f(z) = 0,$$

wo die erste Gleichung das übervollständige Gleichungssystem repräsentirt, welches durch Nullsetzen des einzelnen Determinanten von $\Delta$ entsteht; $\varphi(x), f(x), \ldots.$ an Stelle von $\varphi(x_1 x_2 x_3)$, $f(x_1 x_2 x_3), \ldots$ gesetzt ist.

Die $\varphi$ seien alle von demselben Grad $s$, und jedes, gleich Null gesetzt, habe mit $f$ (vom $m$. Grad) $M$ Schnittpunkte gemeinsam, ausser den $\sigma$ einfachen und (allen) $d$ Doppelpunkten von $f$, durch welche die $\varphi$ noch hindurchgehen mögen, so dass also:

$$M = ms - \sigma - 2d.$$

Wir werden die Anzahl jener Lösungen durch $(5)_3$ bezeichnen, **durch** $(4)_3$ die Anzahl der Punktepaare $y, z,$ welche, bei gegebenem Punkt $x$, das Gleichungssystem befriedigen, das durch Nullsetzen eines Rechtecks von 4 Verticalreihen (bei 3 Horizontalr.) entsteht u. s. w. Wir sprechen hier und in der Folge bloss von Paaren etc. *von getrennt liegenden und nicht in x etc.* fallenden Punkten. Wir wollen noch unter:

$$[(i)_3\ (k)_3]$$

die Zahl derjenigen Werthsysteme verstehen, welche den beiden durch Nullsetzen von Rechtecken mit $i$ bez. $k$ Verticalreihen gebildeten Gleichungssystemen zugleich genügen.

Alsdann hat man nach § 2. der citirten Abhandlung:

$$(5)_3 = [(4)_3\ (3)_3] - [(3)_3\ (2)_3] + (1)_3\,.$$

Benutzt man, um $(2)_3$ zu erhalten, die zwei ersten Verticalreihen von $\Delta$, so ist (§ 3. der cit. Abh. Note.) die Eliminationsgleichung in $x$ und $y$:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) \end{vmatrix}^{M-2} = 0\,;$$

daher die Anzahl der nicht nach $x$ fallenden Punkte $y$:

$$\frac{(M-1)(M-2)}{2}\,.$$

$M-2$ ist die Vielfachheit des Punktes $y = x$. Für $(3)_3$ sind die entsprechenden Zahlen $M-2$ und 1. Man hat somit, mit Rücksicht auf die oben über übervollständige Gleichungssysteme gemachte Bemerkung, unter Anwendung von Formel (18):

$$[(2)_3\ (3)_3] = \frac{(M-1)(M-2)}{2} \cdot (M-2) - p.\ 1.\ (M-2)\,.$$

Man findet, nachdem man $(4)_3$ durch $(3)_3$ und $(2)_3$ ausgedrückt und berechnet hat:

$$[(4)_3\ (3)_3] = \left\{\frac{(M-2)(M-3)}{2} - p\right\}(M-2) - p.\ 1.\ (M-4)\,;$$

daher, nach erfolgter Zusammenziehung:

$$(5)_3 = \frac{(M-2)(M-4)(M-3)}{6} - p\,(M-4)\,.$$

Bezüglich der geometrischen Deutung dieses Resultates bemerken wir Folgendes: *Bildet man aus den 5 Curven $\varphi$ ein Büschel mit 4 Parametern, so giebt es $(5)_3$ verschiedene Punkttripel auf der Curve $f$* (welche wir ohne Rückkehrpunkte voraussetzen), *durch welche noch eine doppelt unendliche Schaar von Curven dieses Büschels* (also ein Curvenbüschel mit noch 2 willkürlichen Parametern) *hindurchgeht.*

Fügt man zu $\Delta$ noch eine Verticalreihe und eine etwa in $u$ geschriebene Horizontalreihe zu, so erhält man die Zahl $(6)_4$ der zu einem gegebenen Punkt $u$ gehörigen Werthepaare aus $(5)_3$, wenn man statt $M$ überall $M-1$ setzt. Unter Anwendung eines schon öfters ausgesprochenen Princips erhält man dann den Satz:

*Die Anzahl der Hyperboloide, welche durch eine gegebene Gerade einer windschiefen Fläche vom Grad M und Geschlecht p (ohne Rückkehrerzeugende) hindurchgehen und noch je 3 weitere Gerade der Fläche ganz enthalten, ist:*

$$(6)_4 = \frac{(M-3)\ (M-5)\ (M-4)}{6} - p\,(M-5)\,.$$

B) Es möge noch die Anzahl $(7)_4$ der Werthsysteme bestimmt werden, welche dem folgenden Gleichungssystem genügen:

$$\Delta = \begin{Vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_7(x) \\ \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_7(y) \\ \varphi_1(z) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(u) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix} = 0\quad f(x)=0\ldots f(u)=0\,.$$

Man hat (§ 3. der cit. Abh.):

$$(7)_4 = [(6)_4\,(4)_4] - [(5)_4\,(3)_4] + [(4)_4\,(2)_4] - (1)_4$$

Nun ist, wie man sofort erkennt:

$$(1)_4 = \frac{M\,(M-1)\,(M-2)\,(M-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.}\,.$$

Ferner, unter Benutzung von Formel ($32^a$):

$$[(4)_4\,(2)_4] = \frac{(M-1)\,(M-2)\,(M-3)}{1.\quad 2.\quad 3.}\,.\,(M-3) - p\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,(M-2)\,(M-3).$$

Unter Anwendung ferner von Formel ($32^b$):

$$\Big[[(4)_4\,(4)_4]\,(3)_4\Big] = \left\{(M-3)^2 - p\right\}.\frac{(M-2)(M-3)}{2} - p(M-3)\left\{2(M-3)-2\right\},$$

nachdem man zuvor $[(4)_4\,(4)_4]$ und die Vielfachheit für die entsprechende Eliminationsgleichung bestimmt hat. Auf demselben Weg:

$$[(5)_4\,(3)_4] = \left\{\frac{(M-3)\,(M-4)}{2} - p\right\}\left\{\frac{(M-2)\,(M-3)}{2}\right\} - p\,(M-3)\,(M-5).$$

Nun ist aber: $[(4)\,(6)] = [(4)\,(4)\,(4)\,(4)] - 2\,.\,[(4)\,(4)\,(3)] + [(4)\,(2)]$, und: $[(4)\,(4)\,(4)\,(4)] = (M-2)^4 - p\left\{6(M-2)^2 - 8\,(M-2) + 6\right\} + 3p^2$, nach (38). Setzt man alle diese Werthe ein, so erhält man in übersichtlicher Anordnung:

$$(7)_4 = \frac{(M-3)\,(M-4)\,(M-5)\,(M-6)}{1.\qquad 2.\qquad 3.\qquad 4} - \frac{(M-6)\,(M-5)}{1.\qquad 2}\,.\,p + 3p(p-1)\,.$$

*Diese Zahl repräsentirt die Anzahl derjenigen Punktquadrupel auf der Curve f, durch welche noch eine dreifach unendliche Schaar von Curven eines Büschels mit 6 willkürlichen Parametern:*

$$\alpha_1\varphi_1 + \cdots \alpha_6\varphi_6 + \alpha_7\varphi_7 = 0$$

*hindurch geht, wo die $\varphi$ in den Doppelp. von f verschwinden.*

Ein Zahlenbeispiel von besonderem Interesse ist in der folgenden Aufgabe enthalten:

*Eine allgemeine Curve* $9^{ter}$ *Ordnung mit 20 Doppelpunkten, für welche also $p = 8$ ist, durch eindeutige Transformation auf die von Riemann angegebene Normalform: eine Curve* $10^{ter}$ *Ordnung mit 2 fünffachen und 8 Doppelpunkten zu bringen.*

Nach Riemann (Abel'sche Functionen, Journal Crelle-Borchardt Bd. 54, §§ 5, 13) ist dies immer möglich, wenn man eine rationale Function der Coordinaten finden kann, welche nur für $\frac{p}{2} + 1 = 5$ Punkte von $f$ unendlich wird, deren Nenner und Zähler also, gleich Null gesetzt, Curven repräsentiren, welche alle Schnittpunkte mit $f$, ausser fünf, gemeinschaftlich haben. Mit Hilfe der obigen Betrachtungen nun kann man darthun, dass diese Aufgabe lösbar ist; aus derselben geht sogar die Zahl der verschiedenen Lösungen sowie eine Methode, um jene Punkte zu bestimmen, hervor. Ein Büschel von Curven $6^{ter}$ Ordnung, welches durch die 20 Doppelpunkte und einen willkürlich angenommenen einfachen Punkt von $f$ geht, hat noch 6 Parameter. Für dasselbe ist:

$$M = 9.\,6 - 2.\,20 - 1 = 13$$

Nach dem oben ausgesprochenen Satz lässt sich nun aus diesem Büschel noch auf:

$$(7)_4 = \frac{10.\,9.\,8.\,7}{24} - 7.\,8.\,4 + 3.\,56 = 154$$

verschiedene Arten eine dreifach unendliche Schaar ausscheiden, welche noch 4 weitere gemeinsame Basispunkte auf $f$ besitzt; daher ist nunmehr $M = 13 - 4 = 9$ für irgend eine solche Schaar. Alsdann lassen sich noch auf (siehe Anwendungen zum I. Theil, am Ende):

$$\frac{7.\,6.\,6.\,5}{12} - 4\,\{6.\,5 - 8 + 1\} = 13$$

verschiedene Arten Quadrupel von Punkten finden, durch welche noch eine einfach unendliche Schaar von jenem dreifach unendlichen Büschel hindurchgeht. Die Zahl der noch übrigen Schnittpunkte einer Curve dieses Büschels, welche nicht allen Curven desselben mit $f$ gemeinsam sind, ist $= 9 - 4 = 5$. Sind nun:

$$\psi + \lambda\chi = 0 \quad \psi' + \lambda\chi' = 0$$

irgend zwei solche Büschel, so transformire man $f$ mittelst der Formeln

$$y_1 : y_2 : y_3 = \psi\chi' : \psi'\chi : \chi\chi',$$

um die gesuchte Curve 10ter Ordnung mit 2 fünffachen Punkten (geschrieben in den Coordinaten $y$) zu erhalten.

Es sei noch bemerkt, dass die vorstehende Transformation auf die Riemann'sche Normalform für $p=8$ sich den von Herrn Cremona*) und mir**) behandelten Fällen unmittelbar anschliesst.

Darmstadt, im Mai 1872.

---

*) Rendicont. del Ist. Lombardo Ser. II, Vol. II,

**) Diese Ann. Bd. I, S. 401; Bd. II, S. 471.

Verbesserung: In § 10 füge man hinter den Worten: „auf $f$ sind" hinzu: „welche für die Coordinaten sämmtlicher Doppelpunkte verschwinden."

# Note über die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt.

Von A. Brill in Darmstadt.

In den Zusatzbemerkungen „Observations géometriques" etc. zu einer Note des Herrn **Brioschi** „über die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt"*) leitet Herr **Cremona** aus den algebraischen Resultaten jener Note einige interessante Eigenschaften der „homolog-harmonischen" Curve vierter Ordnung ab, deren Gleichung die Gestalt hat:

$$6z^2v - u = 0$$

wo $v$ eine quadratische, $u$ eine biquadratische binäre Form der Variabeln $x$ und $y$ ist. Diese Curve gehört zu den von mir in einem Aufsatz „über die Anwendung der hyperelliptischen Functionen in der Geometrie"**) gelegentlich eines allgemeineren Berührungsproblems betrachteten Curven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt, auf welche sie indess umgekehrt durch lineare Transformation nicht zurückgeführt werden kann. Ich will im Nachfolgenden zeigen, dass sich jene Eigenschaften aus dem folgenden, a. a. O. aufgestellten Satze ergeben:

„Von den 31 Systemen von Curven 2. Ordnung, welche in 4 Punkten eine Curve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkt je einfach berühren, enthalten 30 (für welche gewisse Periodenzahlen $P$, $Q$, $P'$, $Q'$, durch die sie charakterisirt sind, nicht gleichzeitig Null sind) je 4 Paare von Geraden, also je 8 Doppeltangenten, und diese 30 Systeme gruppiren sich zu Paaren so, dass jedes Paar alle 16 enthält. Somit kann jede Doppeltangente, je nachdem sie mit den anderen gruppirt wird, als 15 Systemen zugehörig betrachtet werden. Und allgemein etc."

Es sei gestattet, bei dieser Gelegenheit den Beweis des vorstehenden Satzes, den ich a. a. Ort nicht geliefert, kurz anzudeuten.

---

*) Diese Annalen, Bd. IV, S. 95.

**) Journal Crelle-Borchardt, Bd. 65, S. 269.

1. Legt man durch den Doppelpunkt einer Curve 4. Ordnung, für welche das Geschlecht $p = 2$ ist, ein Büschel von Geraden, so liegen im Allgemeinen auf jedem Strahl zwei weitere Punkte der Curve; in den sechs Berührungsstrahlen, zu welchen die sechs Parameter $\infty$, $0$, $1$, $\frac{1}{\varkappa^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{\mu^2}$ gehören mögen, je zwei zusammenfallende Punkte. Man kann demnach jeden Punkt der Curve eindeutig bestimmen durch den Parameter $x$ des zu demselben gehörigen Strahls in Verbindung mit dem Vorzeichen des Wurzelausdrucks:

$$\sqrt{X} = \sqrt{x \,.\, 1-x \,.\, 1-\varkappa^2 x \,.\, 1-\lambda^2 x \,.\, 1-\mu^2 x}\,, \tag{2}$$

welches wechselt, wenn $x$ durch einen jener Berührungspunkte durchgeht. Seien nun zwei hyperelliptische Integrale erster Gattung gegeben:

$$u = \int_0^x \frac{B + Cx}{\sqrt{X}}\, dx\,; \qquad u' = \int_0^x \frac{B' + C'x}{\sqrt{X}}\, dx\,. \tag{3}$$

Für die zu den Schnittpunkten $x_1$, $x_2$, .... $x_{mn}$ (je mit dem entsprechenden Wurzelvorzeichen) einer Curve $m$. Ord. mit der gegebenen Curve gehörigen Integrale:

$$\begin{array}{c} u_1\, u_2\, \ldots .\, u_{mn} \\ u_1'\, u_2'\, \ldots .\, u_{mn}' \end{array}$$

bestehen dann nach den Abel'schen Theorem die folgenden Gleichungen, in welchen $a$, $b$ die den Tangenten des Doppelpunktes zugehörigen Werthe des Parameters $x$ sind, $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ die entsprechenden Wurzelausdrücke bedeuten:

$$\begin{gathered} \sum_1^{4m} u_i = \text{const.}; \qquad \sum_1^{4m} u_i' = \text{const.}; \\ \sum_1^{4m} \int_0^{x_i} \left\{ \frac{\sqrt{X} - \sqrt{A}}{(a-x)\sqrt{X}} - \frac{\sqrt{X} - \sqrt{B}}{(b-x)\sqrt{X}} \right\} dx = \text{const.} \end{gathered} \tag{4}$$

(Vgl. Clebsch „Ebene Curven, deren Coord. ellipt. Funct. etc.“ §. 8. Journ. Crelle-Borchardt Bd. 64. Die dort gegebene Herleitung gilt fast wörtlich für den vorliegenden Fall.)

Man kann nun mit Hilfe der von mir a. a. O. gegebenen Ausdehnung des Hermite'schen Satzes bezüglich der Quotienten von elliptischen $\Theta$producten auf hyperelliptische Functionen der letzten der obigen Gleichungen eine bequemere Gestalt geben, wie ich a. a. O. S. 276 gezeigt habe. Bestimmt man noch die Werthe der Constanten rechts (ib. S. 282), so erhält man anstatt der Gleichungen des Abel'schen Theorems die folgenden:

5*

$$(5)\begin{cases}\sum_1^{4m} u_i = m(\alpha+\beta)+k\\ \sum_1^{4m} u_i' = m(\alpha'+\beta')+k'\\ \dfrac{\varphi_{31}(\alpha-u_1)\,\varphi_{31}(\alpha-u_2)\cdots\varphi_{31}(\alpha-u_{4m})}{\varphi_{31}(\beta-u_1)\,\varphi_{31}(\beta-u_2)\cdots\varphi_{31}(\beta-u_{4m})}=\\ \qquad=\left[\dfrac{\varphi_{00}^2(\beta)\,\varphi_{10}^2(\alpha)\,\varphi_{21}^2(\alpha)}{\varphi_{00}^2(\alpha)\,\varphi_{10}^2(\beta)\,\varphi_{21}^2(\beta)}\right]^m\cdot e^{2i\pi\,.\,h+q(\alpha-\beta)+q'(\alpha'-\beta')\;*)},\end{cases}$$

wo
$$k=p\,.\,i\pi+p'\,.\,0+q\,.\,\varepsilon_1+q'\,.\,\varepsilon_2$$
$$k'=p\,.\,0+p'\,.\,i\pi+q\,.\,\varepsilon_1'+q'\,.\,\varepsilon_2'$$
und die Factoren $p,\ p',\ q,\ q',\ h$ ganze Zahlen sind.

$\varphi_{31},\ \varphi_{00},\ \varphi_{10},\ \varphi_{21}$ sind hyperelliptische $\Theta$-Functionen (nach den Bezeichnungen von Rosenhain**)) und der Kürze halber je mit nur einem Argument geschrieben; also z. B. $\varphi_{10}(\alpha)$ statt $\varphi_{10}(\alpha,\ \alpha')$; $i\pi$, $0$; $0$, $i\pi$; $\varepsilon_1$, $\varepsilon_1'$; $\varepsilon_2$, $\varepsilon_2'$ sind die 4 Periodenpaare der hyperelliptischen Functionen***); endlich sind $\alpha$, $\alpha'$ und $\beta$, $\beta'$ die zu den Parametern der zwei Tangenten des Doppelpunkts gehörigen Integrale $u$, $u'$.

2. An Stelle der Curve $m^{ter}$ Ordnung möge nun eine Doppeltangente treten, welche die Curve vierter Ordnung in den Punkten $x_1$ und $x_2$ berührt. Alsdann gehen die Gleichungen (5) in die folgenden über:

$$(6)\qquad u_1+u_2=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{k}{2};\quad u_1'+u_2'=\frac{\alpha'+\beta'}{2}+\frac{k'}{2};$$

$$\frac{\varphi_{31}(\alpha-u_1)\,\varphi_{31}(\alpha-u_2)}{\varphi_{31}(\beta-u_1)\,\varphi_{31}(\beta-u_2)}=\frac{\varphi_{00}(\beta)\,\varphi_{10}(\alpha)\,\varphi_{21}(\alpha)}{\varphi_{00}(\alpha)\,\varphi_{10}(\alpha)\,\varphi_{21}(\beta)}\cdot e^{i\pi h+\frac{q}{2}(\alpha-\beta)+\frac{q'}{2}(\alpha'-\beta')}.$$

Diese 3 Gleichungen mit den beiden Unbekannten $x_1$, $x_2$ können, wie ich a. a. O. bewiesen habe (S. 280), nur neben einander bestehen, wenn von den ganzen Zahlen $p\,q\,p'q'h$ die Gleichung erfüllt wird:

$$(7)\qquad (p'+1)(q'+1)+pq+h\equiv 0\pmod{2},$$

was auf 16 verschiedene Arten erreichbar ist. Es giebt also 16 Doppeltangenten. Man kann dieselben in folgende Tabellen gruppiren:

---

*) In der entsprechenden Formel auf S. 281 der citirten Abhandlung ist $\frac{m}{n-3}$ statt als Factor, als Exponent von $\gamma_x$ anzuschreiben, und $h_x$ mit dem Factor $2i\pi$ zu versehen.

**) Mém. prés. à l'Institut. T. XI.

***) Nach der Bezeichnung von Rosenhain ist:
$$\varepsilon_1=\log p;\quad \varepsilon_2=2A;\quad \varepsilon_1'=2A;\quad \varepsilon_2'=\log q.$$

(8)

$h = 0$

| | $p$ | $q$ | $p'$ | $q'$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2. | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3. | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 4. | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5. | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 6. | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 7. | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 8. | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 9. | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 10. | 0 | 1 | 0 | 0 |

$h = 1$

| | $p$ | $q$ | $p'$ | $q'$ |
|---|---|---|---|---|
| 11. | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12. | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 13. | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 14. | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 15. | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 16. | 0 | 1 | 1 | 1 |

Stellt man nun für irgend ein *Paar* von Doppeltangenten mit den Berührungspunkten $x_1$, $x_2$ und $x_3$, $x_4$ die Gleichungen des Abel'schen Theorems auf, so erhält man:

$$(9)\qquad \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \alpha + \beta + \frac{K}{2} \\ u_1' + u_2' + u_3' + u_1' = \alpha' + \beta' + \frac{K'}{2} \end{cases}$$

$$(9^a)\qquad \frac{\varphi_{31}(\alpha - u_1)\cdots\varphi_{31}(\alpha - u_4)}{\varphi_{31}(\beta - u_1)\cdots\varphi_{31}(\beta - u_4)} = \left[\frac{\varphi_{00}(\beta)\,\varphi_{10}(\alpha)\,\varphi_{21}(\alpha)}{\varphi_{00}(\alpha)\,\varphi_{10}(\beta)\,\varphi_{21}(\beta)}\right]^2 e^{i\pi H + \frac{Q}{2}(\alpha - \beta) + \frac{Q'}{2}(\alpha' - \beta')}$$

wo:

$$K = P \,.\, i\pi + P' \,.\, 0 + Q \,.\, \varepsilon_1 + Q' \,.\, \varepsilon_2$$
$$K' = P \,.\, 0 + P' \,.\, i\pi + Q \,.\, \varepsilon_1' + Q' \,.\, \varepsilon_2'$$

und wo ferner:

$$(10)\qquad \begin{cases} P = p + p_1; \quad P' = p' + p_1'; \quad H = h + h_1 \\ Q = q + q_1; \quad Q' = q' + q_1'; \\ \quad (p+1)(q+1) + p'q' + h = 0 \pmod{2} \\ \quad (p_1+1)(q_1+1) + p_1'q_1' + h_1 = 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (9), ($9^a$) entsprechen dem Schnittpunktsysteme einer allgemeinen Curve zweiter Ordnung, welche die gegebene Curve vierter Ordnung in 4 Punkten berührt, und welche, wenn insbesondere noch die Gleichungen (10) erfüllt werden, in ein Paar von Doppeltangenten degenerirt. Die $PQP'Q'H$ können die Werthe 0, 1 annehmen. Dies giebt $2^5$ Lösungssysteme, deren jedes einer einfach unendlichen Schaar von Kegelschnitten, welche in 4 Punkten berühren, entspricht. Jede derselben, mit Ausnahme der beiden durch 0 0 0 0 0 und 0 0 0 0 1 charakterisirten, enthält, wie man leicht erkennt, 4 Doppeltangentenpaare, welche wieder nach dem Werth von $H$ so einander zugeordnet sind, dass immer zwei alle 16 Doppeltangenten enthalten. Hiermit ist der eingangs erwähnte Satz bewiesen.

Die 15 Systeme, deren jedes alle Doppeltangenten enthält, sind in der folgenden Tabelle, welche mit Hilfe der in Tabelle (8) eingeführten Bezeichnungen vereinfacht worden ist, zusammengestellt. In derselben beziehen sich die römischen Ziffern auf die 15 Werthsysteme $P$, $Q$, $P'$, $Q'$; die arabischen Ziffern auf die Werthsysteme $p$, $q$, $p'$, $q'$, bez. $p_1'$ etc. Die Untereinanderstehenden bilden je ein Paar.

| | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| $H = 1$ | 1 4 7 10 | 2 4 6 8 | 3 9 5 4 | 4 1 2 3 | 5 6 7 3 |
| | 11 12 15 16 | 11 14 15 16 | 11 15 16 13 | 11 12 14 13 | 11 12 14 16 |
| $H = 0$ | 2 5 6 13 | 3 5 7 12 | 1 6 8 12 | 5 6 7 15 | 1 2 4 13 |
| | 3 8 9 14 | 1 10 9 13 | 2 7 10 14 | 9 8 10 16 | 8 10 9 15 |

| | VI | VII | VIII | IX | X |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6 5 2 10 | 7 5 1 8 | 8 9 2 7 | 9 8 10 3 | 10 9 1 6 |
| | 11 12 15 13 | 11 14 15 13 | 11 12 16 13 | 11 12 14 15 | 11 14 16 13 |
| | 1 3 4 14 | 2 3 4 12 | 1 3 4 14 | 1 2 4 13 | 2 3 4 12 |
| | 9 7 8 16 | 9 6 10 16 | 5 10 6 15 | 6 7 5 16 | 5 8 7 15 |

| | XII | XIII | XIV | XV | XVI |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 10 7 3 | 2 5 9 1 | 3 1 8 6 | 10 8 4 5 | 7 6 4 9 |
| | 13 15 16 14 | 12 15 16 14 | 12 13 15 16 | 12 14 16 13 | 12 14 15 13 |
| | 1 5 8 11 | 3 6 7 11 | 2 5 9 11 | 1 2 3 11 | 1 2 3 11 |
| | 4 6 9 12 | 4 10 8 13 | 4 7 10 14 | 7 6 9 15 | 10 8 5 16 |

3. Die Doppelpunktsintegrale $\alpha$, $\beta$ können in besonderen Fällen in halbe Perioden übergehn. Dies geschieht dann, wenn für eine der von dem Doppelpunkt aus an die Curve zu ziehenden Tangenten der Berührungspunkt in den Doppelpunkt selbst hereinrückt *), dieser also zugleich ein Wendepunkt wird. Aus der Gleichung (1) der *homolog-harmonischen Curve* erkennt man sofort, dass für diese beide Doppelpunktstangenten zugleich Wendetangenten sind. Bringt man dieselbe durch lineare Transformation auf die Gestalt:

$$z^2(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x) - x(1-x)(1-\varkappa^2 x) = 0,$$

so entsprechen jenen Tangenten die Werthe $x = \frac{1}{\lambda^2}$; $x = \frac{1}{\mu^2}$.

Dies sind für unsern Fall die oberen Grenzen $a$ und $b$ der Integrale $\alpha$ und $\beta$, während die unteren Null sind. Daher wird nach Rosenhain (bis auf ganze Perioden):

---

*) Die oberen Grenzen für die Doppelpunktsintegrale sind die den Tangenten im Doppelpunkt entsprechenden Parameter des Büschels.

$$\begin{aligned}
\alpha &= \tfrac{1}{2}\cdot i\pi + \tfrac{1}{2}\cdot 0 \;+ \tfrac{1}{2}\cdot \varepsilon_1 + \tfrac{1}{2}\cdot \varepsilon_2 \\
\alpha' &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 \;+ \tfrac{1}{2}\cdot i\pi + \tfrac{1}{2}\cdot \varepsilon_1' + \tfrac{1}{2}\cdot \varepsilon_2' \\
\beta &= \tfrac{1}{2}\cdot i\pi + \tfrac{1}{2}\cdot 0 \;+ \tfrac{1}{2}\cdot \varepsilon_1 \\
\beta' &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 \;+ \tfrac{1}{2}\cdot i\pi + \tfrac{1}{2}\cdot \varepsilon_1'.
\end{aligned}$$

Diese Werthe sind in die Gleichungen (5) des Abel'schen Theorems zu substituiren. Insbesondere erhält man für die Berührungspunkte $x_1 x_2$ einer Doppeltangente (6):

(11) $$u_1 + u_2 = \tfrac{1}{4}\varepsilon_2 + \frac{k}{2}\,; \quad u_1' + u_2' = \tfrac{1}{4}\varepsilon_2' + \frac{k'}{2}\,.$$

Wenn nun für eine andere Doppeltangente mit den Berührungspunkten $x_3, x_4$ sich die Summe $k_1$ um $\frac{1}{2}\varepsilon_2$ von $k$, die Summe $k_1'$ um $\frac{1}{2}\varepsilon_2'$ von $k'$ unterscheidet, so wird $\frac{1}{4}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}k$ bis auf ganze Perioden gleich $-\frac{1}{4}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}k$, daher:

(12) $$u_1 + u_2 = -(u_3 + u_4)\,; \quad u_1' + u_2' = -(u_3' + u_4')$$

bis auf ganze Perioden. Hieraus folgt aber einzeln: $x_1 = x_3$; $x_2 = x_4$, während die entsprechenden Werthe von $\sqrt{X}$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, so dass also:

(12ª) $$u_1 = -u_3\,; \quad u_2 = -u_4\,.$$

Daher liefert die dritte Gleichung (9ª) des Abel'schen Theorems:

(13) $$\frac{\varphi_{31}(\alpha - u_1)\,\varphi_{31}(\alpha - u_2)\,\varphi_{31}(\alpha + u_1)\,\varphi_{31}(\alpha + u_2)}{\varphi_{21}(\beta - u_1)\,\varphi_{21}(\beta - u_2)\,\varphi_{21}(\beta + u_1)\,\varphi_{21}(\beta + u_2)} = e^{i\pi H}\,.\,\text{const.}$$

oder, unter Benutzung des erweiterten Hermite'schen Satzes (S. 274 der cit. Abh. oder ib. S. 276, II.):

(13ª) $$\frac{(1 - \lambda^2 x_1)(1 - \lambda^2 x_2)}{(1 - \mu^2 x_1)(1 - \mu^2 x_2)} = e^{i\pi H}\,.\,\text{const.},$$

wo const. bloss von $\varkappa$, $\lambda$, $\mu$ abhängt. Die Gleichungen (12), (13) charakterisiren (§ 2.) zwei vierfach berührende Kegelschnittsysteme, für welche (F. 9) jede der Zahlen $P$, $P'$, $Q$ gleich Null, $Q'$ gleich Eins und $H$ gleich Null oder Eins ist. Es sind dies die Systeme XIV (§ 2., a. Ende), welche die Doppeltangenten in der a. a. O. aufgestellten Gruppirung enthalten. In dem vorliegenden besonderen Fall, wo noch die Gleichungen (12ª) bestehen, *liegen die Berührungspunkte paarweise auf Geraden*, die durch den Doppelpunkt der Curve 4ter Ordnung gehen, und zwischen deren Parametern die Gleichung (13ª) besteht, welche aussagt, dass das Büschel ein *involutorisches* ist.

Darmstadt, im Mai 1872.

# Einige Betrachtungen über die Gleichungen der Hydrodynamik.

Von D. Bobylew in Petersburg.

Bei allen Betrachtungen über die Wirbelbewegungen der Flüssigkeiten wird die Reibung zwischen den Theilchen derselben unberücksichtigt gelassen, während doch gerade durch diese Bewegungen die Reibung erzeugt wird; es muss daher wünschenswerth erscheinen, bei derartigen Untersuchungen die von der Reibung abhängigen Glieder mit in den Kreis der Betrachtungen zu ziehen. Diese Aufgabe habe ich in vorliegender Abhandlung zu lösen versucht und habe zu dem Zwecke;

1) Einen allgemeinen Ausdruck hergeleitet für die hydrodynamischen Gleichungen in einem beliebigen Coordinatensystem.

2) und 3) zu zeigen versucht, in welcher Weise einige der von Helmholtz gefundenen Gesetze für die Bewegung der Wirbelfäden durch den Einfluss der Reibung modificirt werden und

4) endlich nachgewiesen, dass der sogenannte hydrodynamische Druck nicht explicite von der Reibung abhängt.

## § 1.

Die bekannten hydrodynamischen Gleichungen von Stokes*)

$$(\mathrm{I})\quad \varrho\left(\frac{du_s}{dt}-\frac{\partial V}{\partial x_s}\right)+\frac{\partial p}{\partial x_s}-\mu\Delta_2 u_s-\frac{\mu}{3}\frac{\partial\theta}{\partial x_s}=0=Q_s\quad (s=1,\,2,\,3).$$

$$(\mathrm{II})\qquad \theta=\sum_{s=1}^{s=3}\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\,{}^{**)};\quad \frac{d\varrho}{dt}+\varrho\theta=0$$

für die innere Masse der Flüssigkeit, und:

---

*) Transactions of the Cambridge Philosophical society. Vol. VIII part. III (1847) s. 297 etc.

**) $\sum_{s=1}^{s=3}(A_s)=A_1+A_2+A_3.$

$$\text{(III)}\quad \frac{1}{P}\frac{\partial L}{\partial x_s}(\Pi - p - 2\mu\theta) + \frac{\mu}{P}\left\{\sum_{n=1}^{n=3}\frac{\partial L}{\partial x_n}\frac{\partial u_s}{\partial x_n} + \sum_{n=1}^{n=3}\frac{\partial L}{\partial x_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_s}\right\} + \\ + \nu(u_s - \underline{u_s}) = 0 = S_s;\ (s = 1,\ 2,\ 3)\,.$$

$$P = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial x_3}\right)^2}\ ^{*)},$$

für die Oberfläche ($L = 0$) der Flüssigkeit, lassen sich in einer anderen Gestalt ausdrücken, in der sie allgemeiner werden. Zu diesem Zwecke will ich sie auf ein beliebiges Coordinatensystem ($q_1$, $q_2$, $q_3$) beziehen.

Es ist aber nöthig, erst einige Ausdrücke anzuführen, welche bei diesen Transformationen vorkommen.

a) Wenn $h_k$ ($k = 1,\ 2,\ 3$) der Differentialparameter erster Ordnung der Oberfläche $q_k$, und $\omega_{ij}$ der *cos* des Winkels zwischen den Richtungen der $h_i$ und $h_j$**) sind, so hat man:

$$\text{(4)}\qquad \sum_{s=1}^{s=3}\frac{\partial q_i}{\partial x_s}\frac{\partial q_j}{\partial x_s} = h_i h_j \omega_{ij}' = h_{ij} = h_{ji}\ ^{***)}\,.$$

b) Setzt man:

$$a_k = \frac{\partial \sigma_k}{\partial q_k}\ (k = 1,\ 2,\ 3)\,,$$

wo $\partial\sigma_k$ eine unendlich kleine Verschiebung längs der Coordinatenaxe †) $\alpha_k$ und $\partial q_k$ die ihr entsprechende Aenderung der Coordinate $q_k$ bedeuten, und bemerkt, dass

$$\sum_{s=1}^{s=3}\frac{\partial x_s}{\partial \sigma_i}\frac{\partial x_s}{\partial \sigma_j} = \cos(\alpha_i, \alpha_j)\,,$$

so findet man:

$$\text{(5)}\qquad \sum_{s=1}^{s=3}\frac{\partial x_s}{\partial q_i}\frac{\partial x_s}{\partial q_j} = a_i a_j \lambda_{ij} = a_{ij} = a_{ji}\ ††)\,,$$

---

*) In diesen Gleichungen bedeuten: $x_1$, $x_2$, $x_3$ — die Coordinaten $x$, $y$, $z$; $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$; $V$ — das Potential der äusseren Kräfte; $\varrho$ — die Dichtigkeit der Flüssigkeit; $p$ — den s. g. hydrostatischen Druck; $\mu$ und $\nu$ — die Coefficienten der inneren und äusseren Reibung; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{s=3}\frac{\partial}{\partial x_s}u_s$; $\underline{u_s}$ und andere unterstrichene Zeichen beziehen sich auf die Oberfläche des begrenzenden Körpers.

**) Somoff Moyen d'exprimer directement en coordonnées curvilignes quelconques, orthogonales ou obliques, les paramètres différentiels du premier et du second ordre et la courbure d'une surface. p. 3. (Memoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Petersbourg: VII. Série, Tom. VIII N. 16.)

***) Somoff. l. c. S. 18. ($\omega_{23} = \omega_1$, $\omega_{31} = \omega_2$, $\omega_{12} = \omega_3$).

†) Somoff. l. c. S. 3. ($\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $\alpha_3 = \gamma$).

††) Somoff. l. c. S. 3. ($\lambda_{23} = \lambda$, $\lambda_{31} = \mu$, $\lambda_{12} = \nu$); und S. 25.

wo

$$\lambda_{ij} = \cos(\alpha_i, \alpha_j).$$

c) Macht man

(6) $$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\frac{\partial x_3}{\partial q_3} = \omega,$$

so kann man die Ausdrücke bilden:

(7) $$\Sigma \pm \frac{\partial q_1}{\partial x_1}\frac{\partial q_2}{\partial x_2}\frac{\partial q_3}{\partial x_3} = \frac{1}{\omega}.$$

(8) $$\Sigma \pm h_{11} h_{22} h_{33} = \frac{1}{\omega^2}.$$

(9) $$\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} = \omega^2 = A = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \begin{vmatrix} 1, & \lambda_{12}, & \lambda_{13} \\ \lambda_{21}, & 1, & \lambda_{23} \\ \lambda_{31}, & \lambda_{32}, & 1 \end{vmatrix}^2.$$

Erwägt man, dass

(9 bis) $$h_{ik} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial a_{ik}}\ ^{*)},$$

so hat man

(10) $$\sum_{k=1}^{k=3} h_{ik} a_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i > j \text{ oder } j > i \\ 1, & \text{wenn } i = j. \end{cases}$$

d) Dazu hat man noch

(11) $$\sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i > j \text{ oder } j > i \\ 1, & \text{wenn } i = j. \end{cases}$$

e) Denkt man sich die Gleichungen:

(11 bis) $$\sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_1}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial x_1} = 1, \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_2}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial x_1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_3}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial x_1} = 0$$

respective mit $\frac{\partial x_1}{\partial q_3}, \frac{\partial x_2}{\partial q_3}, \frac{\partial x_3}{\partial q_3}$ multiplicirt und zu einander addirt, so erhält man mit Hilfe von (5):

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_3} = \sum_{k=1}^{k=3} a_{k3} \frac{\partial q_k}{\partial x_1},$$

und auf ähnlichem Wege findet man, dass

(12) $$\frac{\partial x_s}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{k=3} a_{ki} \frac{\partial q_k}{\partial x_s}.$$

Dasselbe System (11 bis), nach $\frac{\partial q_3}{\partial x_1}$ aufgelöst, ergiebt

$$\frac{\partial q_3}{\partial x_1} = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial q_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1}, & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_3}\right)}$$

und

*) Somoff. l. c. S. 28.

$$(13)\qquad \frac{\partial q_i}{\partial x_s} = \frac{1}{\omega}\,\frac{\partial \omega}{\partial\left(\dfrac{\partial x_s}{\partial q_i}\right)}.$$

Wenn man aber ein anderes System, wie z. B.:

$$(11\ \text{tr.})\qquad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_1}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial x_1} = 1,\quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_1}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial x_2} = 0,\quad \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_1}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial x_3} = 0$$

mit $\frac{\partial q_3}{\partial x_1}$, $\frac{\partial q_3}{\partial x_2}$, $\frac{\partial q_3}{\partial x_3}$ multiplicirt und addirt, oder nach $\frac{\partial x_1}{\partial q_3}$ auflöst, so findet man mit Hilfe von (4) und (7):

$$(14)\qquad \frac{\partial q_i}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^{k=3} h_{ki}\,\frac{\partial x_s}{\partial q_k}.$$

$$(15)\qquad \frac{\partial x_s}{\partial q_i} = \omega\,\frac{\partial\left(\dfrac{1}{\omega}\right)}{\partial\left(\dfrac{\partial q_i}{\partial x_s}\right)}.$$

f) Es ergiebt sich leicht, nach (5), dass

$$(16)\qquad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right) = \sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial^2 x_s}{\partial q_i\,\partial q_j}\,\frac{\partial x_s}{\partial q_k} = f_{ij}^{(k)}$$

ist.

g) Es werden, in den Gleichungen (I) und (III), die Grössen

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),\quad \xi_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right),\quad \xi_3 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),$$

d. i. die Rotationsgeschwindigkeiten*) des Flüssigkeitstheilchens nach den drei Coordinatenaxen eingeführt.

Man erhält dann die Ausdrücke:

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x_s} + 2l_s,$$

$$\Delta_2 u_s = \frac{\partial \theta}{\partial x_s} - 4n_s;$$

dabei sind:

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{s=3} u_s^2,$$

$$l_1 = \begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ \xi_2, & \xi_3 \end{vmatrix},\quad l_2 = \begin{vmatrix} u_3, & u_1 \\ \xi_3, & \xi_1 \end{vmatrix},\quad l_3 = \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ \xi_1, & \xi_2 \end{vmatrix},$$

$$n_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}\right),\quad n_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}\right),\quad n_3 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right).$$

Die beabsichtigte Transformation soll in den Summen:

---

*) Helmholtz: Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Crelle's Journal, B. 55, S. 31.

$(\xi_1 = \xi,\ \xi_2 = \eta,\ \xi_3 = \zeta)$.

$$
\text{(IV)}\quad \begin{aligned}\sum_{s=1}^{s=3} Q_s \delta x_s = \sum_{s=1}^{s=3}\left(\varrho \frac{\partial u_s}{\partial t} + 4\mu n_s\right)\delta x_s + 2\varrho \Sigma \pm (\delta x_1) u_2 \xi_3 + \varrho \delta (T - V) \\ + \delta\left(p - \frac{4\mu}{3}\theta\right).\end{aligned}
$$

$$
\text{(V)}\quad \begin{aligned}\sum_{s=1}^{s=3} S_s \delta x_s = (\Pi - p - 2\mu\theta)\frac{\delta L}{P} + \frac{2\mu}{P}\sum_{s=1}^{s=3} \delta x_s \sum_{n=1}^{n=3} \frac{\partial L}{\partial x_n}\frac{\partial u_s}{\partial x_n} \\ - \frac{2\mu}{P}\Sigma \pm (\delta x_1)\cdot \frac{\partial L}{\partial x_2}\cdot \xi_3 + \nu \sum_{s=1}^{s=3}(u_s - \underline{u}_s)\delta x_s\end{aligned}
$$

ausgeführt werden.

Differentiiren wir $x_s = \text{fonct.}\,(q_1, q_2, q_3)$ nach $t$, so erhalten wir.

$$
\text{(17)}\qquad u_s = \frac{\partial x_s}{\partial t} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_i} q_i'
$$

oder nach (12)

$$
\text{(18)}\qquad u_s = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial q_k}{\partial x_s} \sum_{i=1}^{i=3} a_{ki} q_i' = \sum_{k=1}^{k=3} p_k \frac{\partial q_k}{\partial x_s},
$$

wo

$$
\text{(18 bis)}\qquad p_k = \sum_{i=1}^{i=3} a_{ki} q_i' = \frac{\partial T}{\partial q_k'},
$$

$$
T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3} a_{ij} q_i' q_j' = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3} h_{ij} p_i p_j\text{*)}
$$

sind; da weiter

$$
\frac{\partial \frac{\partial q_k}{\partial x_s}}{\partial t} = 0,
$$

so folgt hieraus

$$
\text{(19)}\qquad \sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial u_s}{\partial t}\delta x_s = \sum_{s=1}^{s=3} \delta x_s \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial p_k}{\partial t}\frac{\partial q_k}{\partial x_s} = \sum_{k=1}^{k=3} \delta q_k \frac{\partial p_k}{\partial t}.
$$

Ferner erhält man aus (18)

$$
2\xi_1 = \sum_{k=1}^{k=3} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_k}{\partial x_2}, & \frac{\partial q_k}{\partial x_3} \\ \frac{\partial p_k}{\partial x_2}, & \frac{\partial p_k}{\partial x_3}. \end{vmatrix};
$$

bemerkt man, dass:

$$
\frac{\partial p_k}{\partial x_l} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial p_k}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial x_l}
$$

ist, so findet man:

$$
2\xi_1 = \sum_{k=1}^{k=3}\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial p_k}{\partial q_i}\left(\frac{\partial q_k}{\partial x_2}\frac{\partial q_i}{\partial x_3} - \frac{\partial q_i}{\partial x_2}\frac{\partial q_k}{\partial x_3}\right);
$$

setzt man:

$$
\text{(19 bis)}\quad \Omega_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3} - \frac{\partial p_3}{\partial q_2}\right),\quad \Omega_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial q_3}\right),\quad \Omega_3 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right),
$$

*) Somoff. l. c. S. 3, 4

(20) $$V_k = \sum_{j=1}^{j=3} a_{kj} \frac{\Omega_j}{\omega},$$

so folgt hieraus bei Rücksicht auf den Ausdruck (15)

(21) $$\xi_1 = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} \Omega_j ; \quad \xi_s = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_j} \Omega_j$$

und nach (12)

(22) $$\xi_s = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{j=3} \Omega_j \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial q_k}{\partial x_s} a_{kj} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial q_k}{\partial x_s} V_k .$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich aus: (22)

(23) $$n_s = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial q_k}{\partial x_s} E_k ,$$

wo

(24) $$E_k = \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^{j=3} a_{kj} \theta_j .$$

(25) $$\theta_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial q_3} - \frac{\partial V_3}{\partial q_2}\right), \quad \theta_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V_3}{\partial q_1} - \frac{\partial V_1}{\partial q_3}\right), \quad \theta_3 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial q_2} - \frac{\partial V_2}{\partial q_1}\right)$$

sind.

Erwägt man, dass

(26) $$\delta x_s = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \delta q_i .$$

(27) $$\frac{1}{P} \frac{\partial L}{\partial x_s} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{P} \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_s} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{1}{P} \frac{\partial L}{\partial q_i} \sum_{k=1}^{k=3} h_{ik} \frac{\partial x_s}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_k} h_k \cos(Ph_k) \text{*)}$$

sind, und benutzt man die Ausdrücke (17) und (21), so findet man, dass jede der Determinanten

$$\Sigma \pm (\delta x_1)\, u_2 \xi_3 , \quad \Sigma \pm (\delta x_1) \frac{\partial L}{\partial x_2} \xi_3$$

als ein Produkt von anderen Determinanten

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \Sigma \pm (\delta q_1)\, q_2{}' \frac{\Omega_3}{\omega} ,$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \Sigma \pm (\delta q_1) \left(h_2 \cos(Ph_2)\right) \frac{\Omega_3}{\omega}$$

darstellbar ist, und man erhält:

(28) $$\Sigma \pm (\delta x_1) u_2 \xi_3 = \Sigma \pm (\delta q_1) q_2{}' \Omega_3 ; \quad \Sigma \pm (\delta x_1) \frac{\partial L}{\partial x_2} \xi_3 = \Sigma \pm (\delta q_1) \left(h_2 \cos(Ph_2)\right) \Omega_3 .$$

Man erhält aus (27):

$$\sum_{n=1}^{n=3} \frac{1}{P} \frac{\partial L}{\partial x_n} \frac{\partial u_s}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{j=3} h_j \cos(Ph_j) \sum_{n=1}^{n=3} \frac{\partial u_s}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{j=3} h_j \cos(Ph_j) \frac{\partial u_s}{\partial q_j} ;$$

durch Differentiation von (17) nach $q_j$ folgt:

$$\frac{\partial u_s}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \frac{\partial q_i'}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 x_s}{\partial q_i \partial q_j} q_i'$$

daher, mit Rücksicht auf (26):

*) Somoff. l. c. S. 8 und 7.

$$\sum_{s=1}^{s=3} \delta x_s \sum_{n=1}^{n=3} \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial L}{\partial x_n} \frac{\partial u_s}{\partial x_n}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=3} \delta q_k \sum_{j=1}^{j=3} h_j \cos(Ph_j) \sum_{i=1}^{i=3} \left( \frac{\partial q_i'}{\partial q_j} \sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial x_s}{\partial q_i} \frac{\partial x_s}{\partial q_k} + q_i' \sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial^2 x_s}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial x_s}{\partial q_k} \right);$$

oder, nach (5) und (16)

$$(29) \qquad = \sum_{k=1}^{k=3} \delta q_k \sum_{j=1}^{j=3} h_j \cos(Ph_j) \sum_{i=1}^{i=3} \left( a_{ik} \frac{\partial q_i'}{\partial q_j} + q_i' f_{ij}^{(k)} \right).$$

Endlich ist:

$$(30) \qquad \sum_{s=1}^{s=3} (u_s - \underline{u}_s) \delta x_s = \sum_{k=1}^{k=3} (p_k - \underline{p}_k) \delta q_k .$$

$$(31) \qquad P^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} h_{ij} \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial L}{\partial q_j} \text{ *)}.$$

$$(32) \qquad \theta = \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial(\omega q_k')}{\partial q_k} \text{ **)}.$$

Wir können jetzt die Ausdrücke (19), (23), (28), (29) und (30) in die Summen (IV) und (V) einführen, wobei wegen der Unabhängigkeit der Grössen $q_k$ von einander die Coefficienten der willkürlichen Aenderungen $\delta q_k$ einzeln verschwinden müssen. Dies liefert die transformirten Gleichungen:

$$(\mathrm{VI}) \quad \varrho \frac{\partial p_k}{\partial t} + \varrho \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} + \frac{\partial \left(p - \frac{4\mu}{3} \theta\right)}{\partial q_k} + 4\mu E_k + 2 \varrho A_k = 0.$$

$$(33) \quad A_1 = (q_2' \Omega_3 - q_3' \Omega_2), \; A_2 = (q_3' \Omega_1 - q_1' \Omega_3), \; A_3 = (q_1' \Omega_2 - q_2' \Omega_1).$$

$$(\mathrm{VII}) \quad (\Pi - p - 2\mu\theta) \frac{1}{P} \frac{\partial L}{\partial q_k} + 2\mu \sum_{j=1}^{j=3} h_j \cos(Ph_j) \sum_{i=1}^{i=3} \left( a_{ik} \frac{\partial q_i'}{\partial q_j} + q_i' f_{ij}^{(k)} \right)$$
$$- 2\mu K_k + \nu (p_k - \underline{p}_k) = 0.$$

$$(34) \qquad K_1 = (\Omega_3 h_2 \cos(Ph_2) - \Omega_2 h_3 \cos(Ph_3)) \; .. \text{ etc.}$$

Die Ausdrücke (21) und (22) lassen sich auch so schreiben:

$$\xi_s = \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\Omega_j}{\omega} a_j \frac{\partial x_s}{\partial \sigma_j}; \quad \xi_s = \sum_{j=1}^{j=3} V_j h_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_s};$$

hieraus ersieht man, dass $\frac{\Omega_j}{\omega} a_j$ nichts anders, als die Componente nach der Coordinataxe $\alpha_j$, und $V_j h_j$ die Componente nach dem Differentialparameter $h_j$ der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit $R$ des Elementes der Flüssigkeit sind; folglich:

---

*) Somoff. l. c. S. 7.

**) Somoff. l. c. S. 15, 16.

(34 bis) $R^2 = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\Omega_i}{\omega} \frac{\Omega_j}{\omega} a_{ij} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\Omega_i}{\omega} V_i = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} V_i V_j h_{ij}$.

Ferner folgt aus den Gleichungen (19 bis) und (25), dass die Grössen $\Omega_j$ und $\theta_j$ folgende Gleichungen zu Identitäten machen:

$$\sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_k} = 0 \tag{35}$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial \theta_k}{\partial q_k} = 0 \tag{36}$$

Ich will meine Betrachtungen nur auf tropfbare Flüssigkeiten beschränken, für welche $\theta = 0$, das heisst:

$$\sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial (\partial q'_k \omega)}{\partial q_k} = 0 . \tag{37}$$

Wenn wir die Ausdrücke (18 bis), (19 bis), (25), (35), (36) und (37) betrachten, so bemerken wir, dass $\theta_j$ und $E_j$ ebenso aus $V_j$ und $\Omega_j$, wie diese aus $p_j$ und $q'_j\omega$, gebildet sind; wenn solche Bildungsweise auch umgekehrt für $q'_j\omega$ möglich wäre, so hätten wir:

$$\begin{aligned} q'_j\omega &= D_j + \omega \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial Q}{\partial q_k} h_{kj} \\ D_1 &= \tfrac{1}{2} \left( \frac{\partial N_2}{\partial q_3} - \frac{\partial N_3}{\partial q_2} \right) \cdot\cdot \text{ etc.} \end{aligned} \tag{38}$$

$$N_j = \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^{k=3} M_k a_{kj} \tag{39}$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial M_k}{\partial q_k} = 0 , \quad \Delta_2 Q = 0 . \tag{40}$$

Setzt man diese Ausdrücke für $q'_j\omega$ in die Gleichungen (19 bis), so erhält man ein System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, aus welchen man, wenn die $\Omega_j$ bekannt sind, die Grössen $M_j$ mit Rücksicht auf (40) bestimmen kann.

Bei dem gewöhnlichen, rechtwinkligen Coordinatensystem nehmen die Ausdrücke (38), (39), (40) und (19 bis) die bekannte von Helmholtz gegebene Form an:

$$u_s = D_s + \frac{\partial Q}{\partial x_s}, \ \Delta_2 Q = 0, \ N_j = M_j ,$$

$$\sum_{s=1}^{s=3} \frac{\partial N_s}{\partial x_s} = 0, \ \Omega_s = -\tfrac{1}{2} \Delta_2 N_s .$$

Im Falle des cylindrisch-polaren Systems, wo:

$q_1 = z$, $q_2 = r$, $q_3 = \varphi$, $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = r$, $\lambda_k = 0$, $\omega_k = 0$, $h_1 = h_2 = 1$, $h_3 = \frac{1}{r}$,

$\omega = r$, erhalten die vorigen Gleichungen die Form:

$$z'r = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\frac{M_2}{r}\right)}{\partial\varphi} - \frac{\partial\,(M_3 r)}{\partial r}\right) + r\,\frac{\partial Q}{\partial z},$$

$$r'r = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial(M_3 r)}{\partial z} - \frac{\partial\left(\frac{M_1}{r}\right)}{\partial\varphi}\right) + r\,\frac{\partial Q}{\partial r},$$

$$\varphi' r = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\frac{M_1}{r}\right)}{\partial r} - \frac{\partial\left(\frac{M_2}{r}\right)}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial Q}{\partial\varphi},$$

$$\Delta_2 Q = 0,\ \frac{\partial M_1}{\partial z} + \frac{\partial M_2}{\partial r} + \frac{\partial M_3}{\partial\varphi} = 0$$

$$\Omega_1 = -\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial z^2} + \frac{\partial\left(r\,\frac{\partial\left(\frac{M_1}{r}\right)}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 M_1}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$\Omega_2 = -\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 M_2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial r\,\frac{\partial M_2}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 M_2}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial M_1}{\partial z}\right)$$

$$\Omega_3 = -\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial M_3 r}{\partial z}}{\partial z} + \frac{\partial\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial M_3 r}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 M_3}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r^3}\,\frac{\partial M_2}{\partial\varphi}\right).$$

Wenn $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $Q = 0$ und die Bewegung von $\varphi$ unabhängig ist, so wird:

(41)
$$z'r = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial M_3 r}{\partial r},\quad r'r = \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial M_3 r}{\partial z}$$

$$\Omega_3 = -\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial M_3 r}{\partial r}}{\partial r} + \frac{\partial\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial M_3 r}{\partial z}}{\partial z}\right)$$

Die Gleichungen (41) sind dieselben, welche in der Abhandlung von Helmholtz*) mit (7 b) bezeichnet sind, das dort vorkommende Zeichen $\psi$ ist gleich dem hier gebrauchten: $-\frac{M_3}{2}$.

## §. 2.

Das von Helmholtz gefundene Gesetz: „das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitt ist in der ganzen Länge desselben Wirbelfadens constant"**) welches durch die Gleichung (35) bewiesen wird, verliert durch die Reibung seine Gültigkeit nicht; es müssen demnach die Wirbelfäden geschlossen sein. Um zu zeigen, dass die anderen, die Bewegung der Wirbelfäden betreffenden, Gesetze

*) l. c. §. 50.
**) l. c. §. 36.

ihre Strenge verlieren, wollen wir zu den Gleichungen (VI) zurückkehren.

Indem wir, nach (37), $\varrho = const.$ setzen, lässt sich die obige Formel so schreiben:

$$
\text{(VIII)} \qquad \frac{\partial p_k}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{4\mu}{\varrho} E_k + 2A_k = 0 \; (k = 1,\, 2,\, 3),
$$

$$
U = V - \frac{p}{\varrho} - T;
$$

aus diesen Gleichungen kann man durch entsprechende Differentiationen und Subtractionen $U$ eliminiren, und erhält dann:

$$
(42) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + \frac{\partial A_2}{\partial q_3} - \frac{\partial A_3}{\partial q_2} + \frac{2\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial E_2}{\partial q_3} - \frac{\partial E_3}{\partial q_2}\right) = 0 \\
&\frac{\partial \Omega_2}{\partial t} + \frac{\partial A_3}{\partial q_1} - \frac{\partial A_1}{\partial q_3} + \frac{2\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial E_3}{\partial q_1} - \frac{\partial E_1}{\partial q_3}\right) = 0 \\
&\frac{\partial \Omega_3}{\partial t} + \frac{\partial A_1}{\partial q_2} - \frac{\partial A_2}{\partial q_1} + \frac{2\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial E_1}{\partial q_2} - \frac{\partial E_2}{\partial q_1}\right) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Berücksichtigen wir ferner noch, dass zum Beispiel:

$$
\frac{\partial A_2}{\partial q_3} - \frac{\partial A_3}{\partial q_2} = \frac{\partial \begin{vmatrix} q_3'\omega, & q_1' \\ \Omega_3, & \frac{\Omega_1}{\omega} \end{vmatrix}}{\partial q_3} - \frac{\partial \begin{vmatrix} q_1', & q_2'\omega \\ \frac{\Omega_1}{\omega}, & \Omega_2 \end{vmatrix}}{\partial q_2} =
$$

$$
= \frac{\Omega_1}{\omega} \sum_{k=2}^{k=3} \frac{\partial (q_k'\omega)}{\partial q_k} + \sum_{k=2}^{k=3} \left( q_k'\omega \frac{\partial \left(\frac{\Omega_1}{\omega}\right)}{\partial q_k} - \Omega_k \frac{\partial q_1'}{\partial q_k} \right) - q_1' \sum_{k=2}^{k=3} \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_k} =
$$

$$
\sum_{k=1}^{k=3} \left( \frac{\partial \left(\frac{\Omega_1}{\omega}\right)}{\partial q_k} q_k'\omega - \frac{\partial q_1'}{\partial q_k} \Omega_k \right),
$$

so nehmen die Gleichungen endlich folgende Gestalt an:

$$
(43) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\left(\frac{\Omega_1}{\omega}\right)}{dt} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\Omega_k}{\omega} \frac{\partial q_1'}{\partial q_k} - \frac{2\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial E_2}{\partial q_3} - \frac{\partial E_3}{\partial q_2}\right) \\
&\frac{d\left(\frac{\Omega_2}{\omega}\right)}{dt} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\Omega_k}{\omega} \frac{\partial q_2'}{\partial q_k} - \frac{2\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial E_3}{\partial q_1} - \frac{\partial E_1}{\partial q_3}\right) \\
&\frac{d\left(\frac{\Omega_3}{\omega}\right)}{dt} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\Omega_k}{\omega} \frac{\partial q_3'}{\partial q_k} - \frac{2\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial E_1}{\partial q_2} - \frac{\partial E_2}{\partial q_1}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Hieraus ergiebt sich

1) Wenn für ein Molekül die Anfangswerthe $\frac{\Omega_i}{\omega}$ gleich Null sind, so kann es doch in die Wirbelbewegung eingeschlossen werden, wenn die Glieder $\left(\frac{\partial E_i}{\partial q_j} - \frac{\partial E_j}{\partial q_i}\right)$ nicht $= 0$ sind.

2) Das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit in den Querschnitt eines Wirbelfadens kann nur dann bei der Fortbewegung constant bleiben, wenn $\left(\frac{\partial E_i}{\partial q_j} - \frac{\partial E_j}{\partial q_i}\right)$ gleich Null ist.

## §. 3.

Wenn in einer Flüssigkeit eine oder mehrere Wirbelmassen entstanden sind, so werden sie durch Reibung an der Oberfläche ihre lebendige Kraft allmählig an die umgebende Flüssigkeit abgeben. In einigen Fällen lässt sich nachweisen, dass die ganze lebendige Kraft der Flüssigkeit durch die Grössen $R$ fortwährend vernichtet wird.

Wenn wir die Gleichungen (VIII) nach Multiplication mit $\varrho q_1'$, $\varrho q_2'$, $\varrho q_3'$ summiren und über das ganze Volumen der flüssigen Masse integriren, so erhalten wir

$$(44)\quad \int\int\int \frac{\partial(\varrho T)}{\partial t}\,\omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3 = \int(\varrho V - p - \varrho T)\sum_{k=1}^{k=3} q_k' a_k \cos(P\alpha_k)\,\partial s$$
$$- 4\mu \int\int\int \sum_{k=1}^{k=3} E_k q_k' \omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3,$$

weil:
$$\varrho = \text{const.},\quad \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial p_k}{\partial t}\,q_k'\text{*)}$$

$$\int\int\int \frac{\partial(U\varrho)}{\partial q_1}\,\omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3 = \int\int U\varrho\, q_1'\,\omega\,\partial q_2\,\partial q_3 - \int\int\int U\varrho\,\frac{\partial(q_1'\,\omega)}{\partial q_1}\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3 \text{ etc.}$$

$$\partial q_2\,\partial q_3 = \mp \frac{a_1}{\omega}\,\partial s \cos(P\alpha_1)\text{**) etc.}$$

und $\theta = 0$.

Nach einigen Transformationen und Integration erhält man (nach (24), (25), (19 bis) und (34 bis))

$$\int\int\int \sum_{k=1}^{k=3} E_k q_k' \omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3 = \int\int\int \sum_{i=1}^{i=3} \theta_i p_i\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3 =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int \sum_{i=1}^{i=3} \frac{B_i}{\omega}\,a_i \cos(P\alpha_i)\,\partial s + \int\int\int R^2\omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3,$$

wo

$$B_1 = (p_2 V_3 - p_3 V_2),\quad B_2 = (p_3 V_1 - p_1 V_3),\quad B_3 = (p_1 V_2 - p_2 V_1),$$

sind.

Dann nimmt (44) folgende Form an:

---

*) $T = \Sigma\Sigma h_{ij} p_i p_j$, $\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial T}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial t}$; $\frac{\partial T}{\partial p_k} = q_k'$, Somoff. l. c. S. 4.

**) Somoff. l. c. S. 14.

$$(45)\quad \iiint \frac{\partial(\varrho T)}{\partial t}\,\omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3 = -\int \sum_{i=1}^{i=3} \varrho T q_i' a_i \cos(P\alpha_i)\,\partial s +$$
$$+\int \sum_{i=1}^{i=3}\left((\varrho V - p)\,q_i' - \frac{2\mu B_i}{\omega}\right) a_i \cos(P\alpha_i)\,\partial s$$
$$-4\mu \iiint R^2 \omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3,$$

oder

$$(46)\quad \iiint \frac{d(\varrho T)}{dt}\,\omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3 = \int \sum_{i=1}^{i=3}\left((\varrho V - p)\,q_i' - \frac{2\mu B_i}{\omega}\right) a_i \cos(P\alpha_i)\,\partial s$$
$$-4\mu \iiint R^2 \omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3,$$

wenn $\int \sum_{i=1}^{i=3} \varrho T q_i' a_i \cos(P\alpha_i)\partial s$ umgekehrt in $\iiint \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial(\varrho T)}{\partial q_i} q_i'\omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3$ zurückgeführt wird.

Wenn die Flüssigkeit sich in einem geschlossenen Gefässe befindet, an dessen Wände sie so fest haftet, dass $(q_i')_{\partial s} = 0$ genommen werden kann, so verwandeln sich die Gleichungen (45) und (46) in folgende

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} = -4\mu \iiint R^2 \omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3$$
$$k = \iiint \varrho T \omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3\,;$$

das heisst in Worten: die Flüssigkeit wird zu dem Zustande der Ruhe streben, weil die Bewegungen, bei denen ein Geschwindigkeitspotential existirt, in unserem Falle unmöglich sind*).

Wenn die Flüssigkeit sich nach allen Seiten in's Unendliche erstreckt und ihre unendlich weit liegenden Theilchen im Zustande der Ruhe sich befinden, so wird nach (46):

$$\frac{dk}{dt} = -4\mu \iiint R^2 \omega\,\partial q_1\,\partial q_2\,\partial q_3\,.$$

Es werden sich also die Wirbelbewegungen fortwährend vernichten.

## §. 4.

Suchen wir nun die Gleichung zur Bestimmung von $p$ zu bilden Multipliciren wir die Gleichungen (VIII) respective mit $h_{1k}$ und nehmen wir die Summe dieser Producte, so erhalten wir:

$$\frac{\partial q_1'}{\partial t} - \sum_{k=1}^{k=3} h_{1k}\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{4\mu}{\varrho}\frac{\theta_1}{\omega} + 2\sum_{k=1}^{k=3} A_k h_{1k} = 0\,.$$

*) Helmholtz. l. c. §. 32.

Nun ist aber nach (18 bis), (20), und (9):

$$B_1 = \begin{vmatrix} p_2, & p_3, \\ V_2, & V_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{k=3} q'_k a_{k2}, & \sum_{k=1}^{k=3} q'_k a_{k3} \\ \sum_{k=1}^{k=3} \Omega_k a_{k2}, & \sum_{k=1}^{k=3} \Omega_k a_{k3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\omega}{A}\left(A_1 \frac{\partial A}{\partial a_{11}} + A_2 \frac{\partial A}{\partial a_{21}} + A_3 \frac{\partial A}{\partial a_{31}}\right),$$

oder nach (9 bis)

$$\frac{B_1}{\omega} = \sum_{k=1}^{k=3} A_k h_{k1};$$

und analog für $B_2$ und $B_3$.

Auf diesem Wege erhält man die Gleichungen:

$$\text{(IX)} \qquad \frac{\partial q'_i}{\partial t} - \sum_{k=1}^{k=3} h_{ik} \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{4\mu}{\varrho} \frac{\theta_i}{\omega} + \frac{2B_i}{\omega} = 0 \; (i = 1, 2, 3).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\omega$, nimmt man ihre Derivirte in Bezug auf $q_i$ und summirt sie, so findet man

$$\omega \Delta_2 U = 2 \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial B_i}{\partial q_i}$$

eine Gleichung, in welcher $\mu$ nicht explicite vorkommt; man kann demnach in gewissen Fällen $U$ als eine Potentialfunction einer Masse betrachten, welche im Inneren der Flüssigkeit mit der Dichtigkeit $-\frac{1}{2\pi\omega} \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial B_i}{\partial q_i}$ verbreitet ist, also:

$$U = -\frac{1}{2\pi} \iiint \left(\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial B_i}{\partial q_i}\right) \frac{1}{r} \, \partial q_1 \partial q_2 \partial q_3,$$

wo $r$ — die Entfernung zwischen dem Elemente $\omega \partial q_1 \partial q_2 \partial q_3$ und dem Punkte, für welchen $U$ gesucht wird, bedeutet.

—

# Ueber Curven dritter Ordnung.

(Fortsetzung des Aufsatzes: Math. Ann. Bd. V Seite 50.)

Von H. Schröter in Breslau.

## A. Die Focale mit einem Doppelpunkt.

Herr Durège hat in seinem Aufsatze (Math. Ann. Bd. V Seite 83) den Fall untersucht, wenn die Curve 3. Ord., welche den Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet, zerfällt in eine Gerade und einen Kreis; dies tritt ein, sobald sie zwei Doppelpunkte besitzt oder sobald die beiden erzeugenden Strahlsysteme in solcher projectivischer Beziehung zu einander stehen, dass jeder der beiden Asymptoten des einen hyperbolisch-gleichseitigen Strahlsystems wieder eine Asymptote des andern Strahlsystems entspricht, was im Allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht. Dieser speciellen Annahme geht der dazwischenliegende Fall voraus, wenn nur eine Asymptote des einen Strahlsystems der einen des andern entspricht, während die beiden übrigen Asymptoten zwei nicht entsprechende Strahlenpaare vertreten; in diesem Falle erhält die Brennpunktscurve nur *einen Doppelpunkt* und wird zu der von Quetelet untersuchten sogenannten focale à neud, über welche Herr Em. Weyr kürzlich einige Theoreme zusammengestellt hat*). Dieselben ergeben sich mit allen Eigenschaften dieser speciellen Curve 3. Ord. in einfachster Weise aus der oben angegebenen Entstehung derselben und sollen im Folgenden kurz abgeleitet werden.

1. Seien $(o)$ und $(p)$ zwei hyperbolisch-gleichseitige Strahlsysteme mit den Asymptoten $ss'$ und $tt'$; seien dieselben in eine solche projectivische Beziehung gesetzt, dass einmal in die Verbindungslinie $op$ Theile entsprechender Strahlenpaare hineinfallen (halb-perspectivische Lage) und zweitens die Asymptoten $s$ und $t$ als entsprechende Strahlenpaare auftreten, dann ist zunächst der Schnittpunkt $(s, t) = d$ ein Doppelpunkt des Erzeugnisses der beiden Strahlsysteme; um so-

*) Alcuni teoremi intorno alla „focale à neud" del Dott. Em. Weyr.

dann die projectivische Beziehung derselben vollständig festzustellen, bedienen wir uns (wie früher a. a. O.) der Geraden $\mathfrak{L}$, des perspectivischen Durchschnitts der beiden einfachen Strahlbüschel, auf welche die Strahlsysteme ($o$) und ($p$) sich reduciren lassen. Die Gerade $\mathfrak{L}$ muss offenbar durch $d$ gehen; denn da $s$ zwei zusammenfallende Strahlen des Strahlsystems ($o$) repräsentirt, so wird auch der vierte harmonische zu $op$ zugeordnete Strahl mit $s$ zusammenfallen; ebenso beim Strahlsystem ($p$); also sind $s$ und $t$ zwei entsprechende Strahlen der beiden reducirenden einfachen Strahlbüschel und $d$ ist ein Punkt von $\mathfrak{L}$; ferner steht $\mathfrak{L}$, wie wir wissen, senkrecht auf $op$ in dem dritten Schnittpunkte der Verbindungslinie $op$ mit der Curve $C^{(3)}$; wir erhalten daher die Gerade $\mathfrak{L}$, indem wir aus $d$ ein Perpendikel auf $op$ fällen. Um nun entsprechende Strahlenpaare der erzeugenden Strahlsysteme ($o$) und ($p$) herzustellen, nehmen wir einen beliebigen Punkt $x$ dieser soeben gefundenen Geraden $\mathfrak{L}$ und ziehen $ox$ und $px$; alsdann müssen entsprechende Strahlenpaare in ($o$) und ($p$) einerseits symmetrisch liegen beziehlich zu $s$ und zu $t$, d. h. den gegebenen hyperbolisch gleichseitigen Strahlsystemen angehören und anderseits harmonisch getrennt werden beziehlich durch $op$ und $ox$, wie durch $po$ und $px$. Beide Bedingungen werden erfüllt, wenn wir uns um $d$ einen Kreis geschlagen denken mit solchem Radius $r$, dass $x$ und $op$ Pol und Polare für ihn sind, d. h.

$$r^2 = dx \,.\, dc$$

(wenn $c$ der Fusspunkt des aus $d$ auf $op$ gefällten Perpendikels bedeutet); die Tangentenpaare aus $o$ und $p$ an einen solchen Kreis erfüllen offenbar beide Bedingungen und sind also entsprechende Strahlenpaare beider erzeugenden Systeme ($o$) und ($p$); ihre vier Schnittpunkte daher Punkte unserer $C_d^{(3)}$, die sich jetzt folgendermassen construiren lässt:

*Legt man aus zwei festen Punkten $o$ und $p$ Tangentenpaare an eine Schaar von concentrischen Kreisen mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte $d$, so schneiden sich je zwei an denselben Kreis gelegte Tangentenpaare in vier Punkten, deren gesammter Ort die Curve $C_d^{(3)}$ ist und die beiden übrigen Paare von Gegenecken eines solchen vollständigen Vierseits sind conjugirte Punkte der Curve $C_d^{(3)}$ dritten Grades mit dem Doppelpunkte $d$.*

2. Es ist leicht, auf jedem durch den Doppelpunkt $d$ gehenden Strahl $\mathfrak{G}$ den noch übrigen dritten Schnittpunkt mit der Curve $C_d^{(3)}$ zu finden: wir fällen aus $o$ ein Perpendikel auf $\mathfrak{G}$, verlängern es um sich selbst bis $o'$ und ziehen $po'$, welches $\mathfrak{G}$ in dem gesuchten Punkte $y$ treffen wird; denn da $yo$ und $yp$ gleiche Winkel bilden mit $\mathfrak{G}$, welches durch $d$ geht, so werden sie Tangenten eines gewissen, um

$p$ beschriebenen Kreises sein, also ihr Schnittpunkt $y$ ein Punkt der $C_d^{(3)}$. Wir können hiernach dieselbe auch so definiren:

*Ist ein Dreieck $odp$ gegeben, so ist der Ort eines solchen Punktes $y$, von welchem aus gesehen die beiden zusammenstossenden Seiten $do$ und $dp$ gleich gross (d. h. unter gleichen Winkeln) erscheinen, eine Curve dritten Grades mit dem Doppelpunkt $d$.*

Dies lässt sich auch noch anders auffassen: Der Punkt $y$ auf der Geraden $\mathfrak{G}$ hat die Eigenschaft, dass er unter allen Punkten auf $\mathfrak{G}$ derjenige ist, für welchen, wenn

a) die Gerade $\mathfrak{G}$ zwischen $o$ und $p$ hindurchgeht, die Differenz der Abstände des Punktes $y$ von den beiden festen Punkten $o$ und $p$ ein Maximum ist,

b) wenn die Gerade $\mathfrak{G}$ die Punkte $o$ und $p$ nicht trennt, die Summe der Abstände des Punktes $y$ von den beiden festen Punkten $o$ und $p$ ein Minimum ist;

wir können ihn daher den Maximums-Punkt der Differenz oder Minimums-Punkt der Summe für die Gerade $\mathfrak{G}$ in Bezug auf die Abstände ihrer Punkte von den beiden festen Punkten $o$ und $p$ nennen, je nachdem die Gerade $\mathfrak{G}$ die Punkte $o$ und $p$ von einander trennt oder nicht; auf jeder Geraden $\mathfrak{G}$ giebt es immer einen einzigen bestimmten Punkt dieser Art und dreht sich die Gerade $\mathfrak{G}$ um einen festen Punkt $d$, so beschreibt ihr Maximums- oder Minimums-Punkt die $C_d^{(3)}$.

Dass die Verbindungslinie $yd$ eine Halbirende des Winkels $oyp$ sein muss, erscheint auch als specieller Fall der allgemeinen und fundamentalen Eigenschaft der Brennpunktscurve ohne Doppelpunkt, welche wir früher so ausgesprochen haben:

„Wird irgend ein Punkt der Brennpunktscurve mit allen Paaren conjugirter Punkte derselben verbunden, so erhält man ein hyperbolisch-gleichseitiges Strahlsystem." In unserem speciellen Falle ist nun im Doppelpunkt $d$ ein Paar conjugirter Punkte vereinigt, folglich ist $yd$ allemal eine Asymptote des Strahlsystems ($y$) und halbirt also den Winkel zwischen zwei Strahlen nach irgend zwei conjugirten Punkten $yo$ und $yp$. Eine solche Gleichheit von Winkeln tritt aber auch bei der allgemeinen Brennpunktscurve $C^{(3)}$ auf:

„Zieht man von irgend einem Punkte $a$ der allgemeinen Brennpunktscurve $C^{(3)}$ zwei Strahlen nach zwei beliebigen andern Punkten derselben $b$ und $c$ und nach den conjugirten $\beta$ und $\gamma$, so ist allemal

$$\sphericalangle\, bac = \sphericalangle\, \beta a \gamma .$$

Hieraus folgt eine interessante metrische Eigenschaft der Brennpunktscurve, welche Steiner angegeben hat*) und die hier nachgetragen werden möge.

Wir haben:

$$\frac{ab}{ac}=\frac{\sin(acb)}{\sin(abc)};\quad \frac{\alpha\gamma}{\alpha b}=\frac{\sin(\alpha b\gamma)}{\sin(\alpha\gamma b)};\quad \frac{a\beta}{a\gamma}=\frac{\sin(a\gamma\beta)}{\sin(a\beta\gamma)};\quad \frac{\alpha c}{\alpha\beta}=\frac{\sin(\alpha\beta c)}{\sin(\alpha c\beta)}$$

da nun

$$\begin{aligned}(abc)&=(\alpha b\gamma)\\(\alpha\gamma b)&=(a\gamma\beta)\\(a\beta\gamma)&=(\alpha\beta c)\\(\alpha c\beta)&=(acb)\end{aligned}$$

ist, so folgt

$$\frac{ab\,.\,\alpha\gamma\,.\,a\beta\,.\,\alpha c}{ac\,.\,\alpha b\,.\,a\gamma\,.\,\alpha\beta}=1$$

oder anders gestellt:

$$(r)\ldots\frac{ab\,.\,a\beta}{\alpha b\,.\,\alpha\beta}=\frac{ac\,.\,a\gamma}{\alpha c\,.\,\alpha\gamma}$$

d. h.

*Sind $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ irgend drei Paare conjugirter Punkte einer Brennpunktscurve $C^{(3)}$ oder drei Paar Brennpunkte von Kegelschnitten derselben Schaar, so besteht zwischen den Abständen derselben von einander die involutorische Relation* $(r)$.

Oder halten wir ein Paar conjugirter Punkte $a\alpha$ fest, während wir das andere $x\xi$ verändern, so bleibt

$$\frac{ax\,.\,a\xi}{\alpha x\,.\,\alpha\xi}=\text{const.}$$

3. Die von den Verbindungslinien sämmtlicher Paare conjugirter Punkte der $C^{(3)}$ umhüllte Curve dritter Classe $\mathfrak{K}^{(3)}$ (die Cayley'sche) zerfällt in unserem Falle, weil im Doppelpunkte $d$ zwei conjugirte Punkte vereinigt sind, deren Verbindungslinie also unbestimmt wird, in den Punkt $d$ und eine Curve zweiter Classe; diese muss eine Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ sein, weil $\mathfrak{K}^{(3)}$ die unendlich entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ zur Tangente hat. Die beiden Tangenten aus $d$ an die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ sind die beiden Asymptoten des Strahlsystems, dessen Strahlenpaare von $d$ nach sämmtlichen Paaren conjugirter Punkte der $C^{(3)}$ hinlaufen; da dieses Strahlsystem nothwendig ein hyperbolisch-gleichseitiges ist, so sind die beiden Tangenten aus $d$ an die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ rechtwinklig zu einander, also $d$ ein Punkt der Leitlinie der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$. Diese beiden rechtwinkligen Tangenten der Parabel sind zugleich die Tangenten der $C_d^{(3)}$ im Doppelpunkte; denn suchen wir ihren dritten Schnittpunkt mit $C_d^{(3)}$ auf, so fällt er nach $d$, selbst, weil immer die drei Schnittpunkte auf einer Tangente der $\mathfrak{K}^{(3)}$ mit dem Berührungspunkte derselben vier harmonische Punkte bilden uud da in $d$ zwei conjugirte Punkte zusammenfallen, so wird der zu dem Berührungspunkt mit der Parabel zugeordnete vierte harmonische Punkt auch nach $d$ fallen; also:

*) Crelle's Journal, Bd. 45, Seite 180.

*Die Tangenten der $C_d^{(3)}$ in dem Doppelpunkte an den beiden sich durchkreuzenden Curvenzweigen stehen senkrecht auf einander.*

Da ferner der Fusspunkt des Perpendikels aus $d$ auf die Verbindungslinie zweier conjugirter Punkte $op$ der $C^{(3)}$ der dritte Schnittpunkt dieser Geraden mit der Curve ist und für $op$ jedes beliebige andere Paar conjugirter Punkte substituirt werden kann, so gilt der Satz:

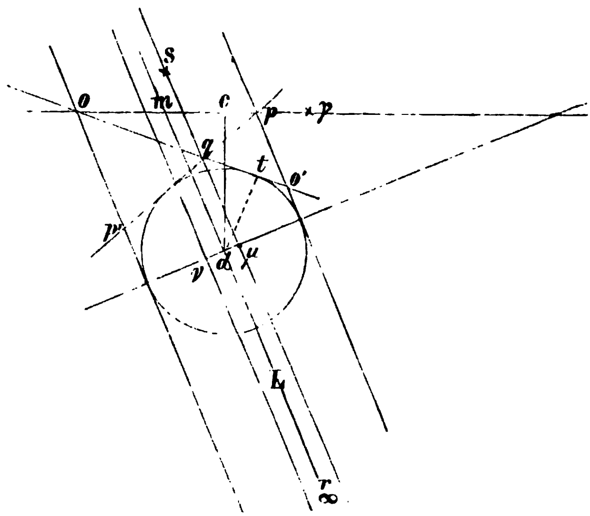
*Fällt man aus irgend einem Punkte $d$ der Leitlinie einer Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ die Perpendikel auf sämmtliche Tangenten derselben, so ist der Ort ihrer Fusspunkte eine Focale mit dem Doppelpunkt $d$* (Fusspunktscurve).

Um die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ noch näher aus den beiden erzeugenden Strahlsystemen $(o)$ und $(p)$ zu bestimmen, haben wir einmal als Tangenten derselben die beiden Halbirenden des Winkels $odp$ und seines Nebenwinkels und ausserdem den Berührungspunkt mit $op$ zu bestimmen; dieser Punkt $\gamma$ wird so gefunden, dass wir aus $d$ das Perpendikel $dc$ auf $op$ fällen und den vierten harmonischen Punkt zu $ocp$, dem $c$ zugeordnet, aufsuchen. Dadurch ist die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ gerade bestimmt, also auch ihre Leitlinie zu finden; diese ergiebt sich auch aus folgender Bemerkung: Die $C_d^{(3)}$ hat ausser den beiden conjugirten unendlich-entfernten imaginären Kreispunkten noch einen unendlich entfernten reellen Punkt; die beiden von $o$ und $p$ nach ihm hinlaufenden Strahlen müssen zwei parallele Tangenten eines gewissen um $d$ beschriebenen Kreises sein, der dadurch erhalten wird, dass wir die Mitte $m$ zwischen $op$ mit $d$ verbinden, durch $o$ und $p$ Parallele zu $dm$ ziehen und den Kreis um $d$ beschreiben, welcher diese beiden Parallelen berührt; der unendlich-entfernte Punkt von $dm$ ist also der reelle dritte Schnittpunkt von $\mathfrak{G}_\infty$ mit $C_d^{(3)}$; der ihm zugeordnete vierte harmonische mit den beiden imaginären Kreispunkten im Unendlichen d. h. der zu der Richtung $dm$ senkrecht liegende, unendlich-entfernte Punkt ist daher der Berührungspunkt der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ mit $\mathfrak{G}_\infty$ oder der unendlich-entfernte Punkt der Parabelaxe, und da die Leitlinie der Parabel durch $d$ gehen muss, so ist sie $dm$ selbst. Wir haben also den Satz:

*Die Mitten zwischen je zwei conjugirten Punkten $(o, p)$ auf jeder Verbindungslinie derselben liegen sämmtlich auf einer Geraden $L$, der Leitlinie der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$.*

4. Der besondere Kreis um $d$, welcher die beiden durch $o$ und $p$ zu $dm$ gezogenen Parallelen berührt, liefert noch zwei andere nicht parallele Tangenten durch $o$ und $p$, welche sich in $q$ schneiden mögen; $q$ ist ein ausgezeichneter Punkt der $C_d^{(3)}$, nämlich der conjugirte zu

dem reellen unendlich-entfernten Punkte $r_\infty$, welches der Schnittpunkt der vorigen beiden parallelen Tangenten dieses Kreises, d. h. der unendlich entfernte Punkt von $dm$ ist; die durch $q$ gezogene Parallele zu $dm$ ist daher eine Tangente der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ und da sie zur Leitlinie $dm$ parallel läuft, so ist sie die Scheiteltangente der Parabel. Der Fusspunkt $\mu$ des Perpendikels aus $d$ auf diese Scheiteltangente ist der dritte Schnittpunkt derselben mit $C_d^{(3)}$, also der vierte harmonische dem $\mu$ zugeordnete Punkt, der Berührungspunkt mit der Pa-




rabel; dieser zu $r_\infty$, $q$ und $\mu$ zugeordnete vierte harmonische Punkt ist leicht zu ermitteln; wir machen $qs = \mu q$ der Richtung und Grösse nach, dann ist $s$ der Scheitel der Parabel und hieraus auch der Brennpunkt $f$ derselben zu finden.

Wollen wir noch die Tangente der $C_d^{(3)}$ in ihrem einzigen reellen unendlich-entfernten Punkte $r_\infty$, d. h. ihre reelle Asymptote ermitteln, so brauchen wir nur in dem Strahlsystem, welches dem Punkte $r_\infty$ zugehört, zu dem Strahle $r_\infty q$, welcher $r_\infty$ mit seinem conjugirten Punkte $q$ verbindet, den zweiten Strahl des Strahlenpaares zu suchen; dieser wird die gesuchte Tangente in $r_\infty$ sein; da nun $r_\infty d$ eine Asymptote dieses besonderen Strahlsystems ist, so erhalten wir die Tangente, indem wir eine Parallele zu $r_\infty q$ ziehen, die nach der entgegengesetzten Seite hin ebensoweit von $r_\infty d$ absteht, wie diese, oder auch der Grösse und Richtung nach $d\nu = \mu d$ gemacht, durch $\nu$ eine Parallele zu $dm$ gezogen, erhalten wir die gesuchte Asymptote der $C_d^{(3)}$; die beiden imaginären Asymptoten haben ihren Schnittpunkt in $q$. Dieser ausgezeichnete Punkt $q$ bietet noch eine andere Eigenschaft unserer Curve $C_d^{r(3)}$ dar. Denken wir uns nämlich das vollständige Vierseit, welches dem obigen besonderen Kreise $d$ umschrieben war und von welchem zwei Paar Gegenecken $o$ und $p$, $r_\infty$ und $q$ sind, so wird das dritte Paar Gegenecken, welches $o'$ und $p'$ heisse, indem die nicht parallelen Tangenten jenes Kreises $oo'$ und $pp'$ sich in $q$ schneiden, auch ein Paar conjugirter Punkte sein müssen und es folgt aus einer elementaren Eigenschaft des Kreises, dass $\sphericalangle odo' = \sphericalangle pdp' = 90^0$ ist; verändern wir also $o$ und $o'$, indem wir den Strahl um den festen Punkt $q$ drehen, so folgt:

*Zieht man durch denjenigen Punkt $q$ der $C_d^{r(3)}$, welcher dem reellen unendlich-entfernten Punkte derselben conjugirt ist, Strahlen, die in den Punktenpaaren $oo'$, $pp'$ . . der Curve begegnen, so erscheinen diese Sehnen, vom Doppelpunkte $d$ aus gesehen, beständig unter einem Winkel von $90^0$.*

Wir erhalten demnach in $d$ ein circulares Strahlsystem, dessen rechtwinklige Strahlenpaare die $C_d^{(3)}$ in Punktenpaaren durchbohren, deren Sehnen durch einen festen Punkt $q$ der Curve laufen. Das circulare Strahlsystem $(do, do')$ ist nun mit dem Strahlbüschel $(q)$ projectivisch; denn fällen wir aus $d$ das Perpendikel $dt$ auf die Sehne $oo'$, so beschreiben $dt$ und $qt$ zwei projectivisch-gleiche und gleichlaufende Strahlbüschel; $dt$ ist aber der vierte harmonische Strahl zu $do$, $do'$ und dem festen Strahl $d\mu$, welcher senkrecht steht auf $qr_\infty$, also nach den Berührungspunkten der zu $qr_\infty$ parallelen Tangenten geht, während $do$ und $do'$ die Halbirenden des Winkels $td\mu$ und seines Nebenwinkels sind. Wir haben demnach in dem circularen Strahlsystem $(do, do')$ zu jedem Strahlenpaar und dem festen Strahl $d\mu$ den vierten harmonischen Strahl $dt$; dieser beschreibt ein einfaches Strahlbüschel, auf welches jenes Strahlsystem reducirt wird behufs projectivischer Beziehung auf irgend ein anderes einfaches Gebilde; hier ist als solches das einfache Strahlbüschel $(q)$ vorhanden, welches mit $dt$ projectivisch ist, also haben wir folgende Erzeugung unserer Curve $C_d^{(3)}$:

*Wird ein circulares Strahlsystem $(d)$ mit einem einfachen Strahlbüschel $(q)$ in projectivische Beziehung gebracht, so trifft jeder Strahl des letzteren das entsprechende Strahlenpaar des ersteren in zwei Punkten $o$ und $o'$, deren gesammter Ort unsere $C_d^{r(3)}$ ist.*

Der Mittelpunkt des Strahlsystems ist der Doppelpunkt der Focale, der Mittelpunkt des Strahlbüschels der dem reellen unendlich-entfernten Punkte der Focale conjugirte Punkt.

Dies ist ein specieller Fall der Erzeugungsweise jeder beliebigen Curve dritten Grades mit einem Doppelpunkt durch ein beliebiges

Strahlsystem und ein mit demselben projectivisches einfaches Strahlbüschel.

5. Verändern wir das Paar conjugirter Punkte $op$ auf der Curve $C_d^{(3)}$, oder nehmen statt $o$ und $p$ irgend ein anderes Paar conjugirter Punkte $a$ und $b$ auf ihr, so ist der Fusspunkt $c$ des aus dem Doppelpunkt $d$ auf $ab$ gefällten Perpendikels allemal der dritte Schnittpunkt dieser Geraden $ab$ mit der $C_d^{(3)}$ und der vierte harmonische Punkt $\gamma$, dem $c$ zugeordnet (so dass $(abc\gamma) = -1$ ist), wird der jedesmalige Berührungspunkt der Tangente $ab$ mit der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ sein. Ein mit $dc$ um $d$ beschriebener Kreis, welcher $ab$ in $c$ berührt, hat noch zwei durch $a$ und $b$ gehende Tangenten; diese schneiden sich in dem zu $c$ conjugirten Punkte der $C_d^{(3)}$. Es kann nun insbesondere der Fall eintreten, dass ein gewisser Kreis um $d$ die Verbindungslinie $ab$ zweier conjugirter Punkte in einem dieser Punkte selbst berührt, z. B. in $b$, also $b$ mit $c$ zusammenfällt; dann muss auch $\gamma$ in diese beiden zusammenfallenden Punkte hineinfallen, d. h. in einem solchen Punkte $b$ berühren sich die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ und die Curve $C_d^{(3)}$, sie haben die gemeinschaftliche Tangente $ba$ und daher die Normale $bd$, also:

*Die Fusspunkte der (drei) aus dem Punkte $d$ an die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ gezogenen Normalen sind diejenigen Punkte, in welchen sich $\mathfrak{P}^{(2)}$ und $C_d^{(3)}$ berühren.*

Die Ermittelung dieser Punkte hängt von dem bekannten Normalenproblem des Kegelschnitts ab; benutzen wir z. B. die elegante Lösung desselben von Chasles (traité des sections coniques p. 222), so gestaltet sich in unserem Falle die Construction der Normalen aus dem Punkte $d$ in der Leitlinie an die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ folgendermassen: Wir construiren diejenige gleichseitige Hyperbel, welche die Parabelaxe zu einer Asymptote und die Verbindungslinie $df$ des Punktes $d$ mit dem Brennpunkte $f$ der Parabel zur Tangente im Punkte $d$ hat, d. h. wir verlängern $fd$ über $d$ hinaus bis $f'$, so dass $fd = df'$ und fällen aus $f'$ ein Perpendikel auf die Parabelaxe; dieses Perpendikel ist dann die andere Asymptote der gleichseitigen Hyperbel, welche durch ihre beiden Asymptoten und den Punkt $d$ vollständig bestimmt ist. Da die gleichseitige Hyperbel mit der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ bereits einen unendlich-entfernten Punkt gemein hat, so schneiden sich diese beiden Curven im Allgemeinen nur noch in drei Punkten, welches die gesuchten Fusspunkte der drei aus $d$ an die Parabel zu legenden Normalen sind; von diesen drei Punkten ist aber nur einer reell, die beiden andern sind imaginär, wie sich aus der Lage der ermittelten gleichseitigen Hyperbel zur Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ ergiebt. Die beiden Asymptoten der Hyperbel theilen den ganzen Raum der Ebene in vier rechtwinklige Räume; die Hyperbel selbst liegt nur in zwei Scheitelräumen von diesen vieren, nämlich in demjenigen, welcher $d$ enthält und in seinem Scheitelraume; der letztere enthält aber keinen Punkt der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, folglich auch keine gemeinschaftlichen Punkte beider Curven, mithin kann nur derjenige Zweig der Hyperbel, welcher $d$ enthält, die Parabel in reellen Punkten treffen; dieser Zweig verläuft aber von dem ausserhalb der Parabel befindlichen Punkte $d$ bis zu dem auf der Parabel liegenden unendlich-entfernten Punkte, an die Axe der Parabel asymptotisch sich anschliessend. Hieraus geht hervor, dass er nothwendig einmal in die Parabel hineintreten und dann ganz innerhalb derselben bis zu ihrem unendlich-entfernten Punkte hin verlaufen muss; es giebt daher nur einen reellen Schnittpunkt der gleichseitigen Hyperbel mit der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$, während die beiden andern imaginär sind; also giebt es aus $d$ auch nur eine reelle Normale an $\mathfrak{P}^{(2)}$ und zwei imaginäre, und ebenso berühren sich die Curven $C_d^{(3)}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}$ nur in einem reellen und in zwei imaginären Punkten.

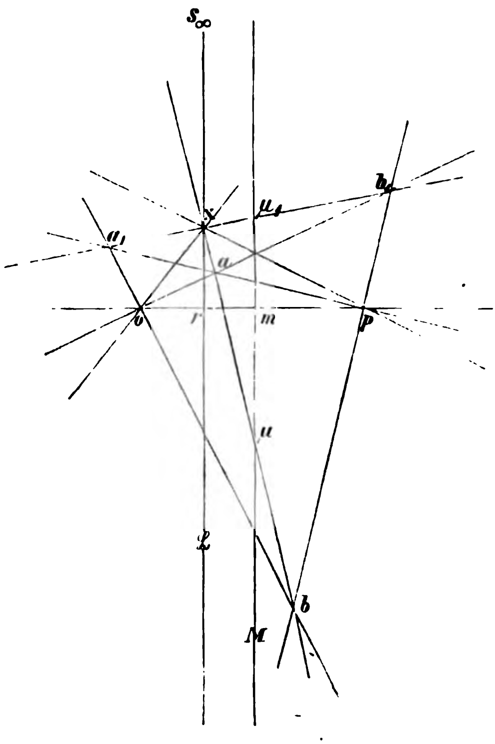
Sehen wir von der Realität dieser Punkte ab und bezeichnen mit $\varpi$ einen der drei Punkte, in welchen sich $C_d^{(3)}$ und $\mathfrak{P}^{(2)}$ berühren, so wird die gemeinschaftliche Tangente in diesem Punkte die Curve $C_d^{(3)}$ in einem dritten Punkte $w$ treffen, welcher nach der allgemeinen Theorie (a. a. O.) ein Wendepunkt von $C_d^{(3)}$ ist. Die Curve $C_d^{(3)}$ hat also einen reellen und zwei imaginäre Wendepunkte. Die Punkte $\varpi$ und $w$ sind conjugirte Punkte der $C_d^{(3)}$, weil ihre Verbindungslinie zugleich Tangente der Parabel ist; folglich sind $d\varpi$ und $dw$ conjugirte Strahlen des Strahlsystems, dessen Asymptoten die beiden rechtwinkligen Tangenten aus $d$ an die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ sind; folglich geht $dw$ durch den Pol von $d\varpi$ in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$; da ferner $\varpi w$ Tangente der Parabel ist, so muss der Pol von $\varpi d$ auf $\varpi w$ liegen; er ist also der Punkt $w$ selbst und daher liegt umgekehrt der Wendepunkt $w$ auf der Polare des Punktes $d$ in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$. Wir haben also den Satz:

*Die drei Wendepunkte der Curve $C_d^{(3)}$ (von denen nur einer reell, die beiden andern imaginär sind) liegen auf der Polare des Doppelpunktes d in Bezug auf die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$.*

## B. Die hyperbolisch-gleichseitige Curve dritter Ordnung.

Eine besondere Curve dritten Grades und die mit ihr zusammenhängende Curve dritter Classe treten auf, wenn man das Erzeugniss zweier circularer Strahlsysteme $(o)$ und $(p)$, welche in projectivische Beziehung und halb-perspectivische Lage versetzt werden, untersucht.

1. Da ein circulares Strahlsystem aus sämmtlichen Paaren rechtwinkliger Strahlen, welche sich durch einen Punkt $o$ legen lassen, besteht, und die halb-perspectivische Lage erfordert, dass in die Verbindungslinie $op$ Theile entsprechender Strahlenpaare hineinfallen, so ist der zur Richtung $op$ rechtwinklig liegende unendlich-entfernte Punkt $s_\infty$ der Tangentialpunkt für das Paar conjugirter Punkte $op$; ziehen wir durch ihn eine beliebige Gerade $\mathfrak{L}$, die also auf $op$ senkrecht steht, so wird jetzt die projectivische Beziehung der beiden circularen Strahlsysteme $(o)$ und $(p)$ durch die Gerade $\mathfrak{L}$ in folgender Weise vermittelt: Man verbinde irgend einen Punkt $x$ der Geraden $\mathfrak{L}$ mit $o$ und $p$, halbire in dem Dreieck $oxp$ die Winkel bei $o$ und $p$ durch zwei rechtwinklige Strahlenpaare, welche sich in den Punktenpaaren $ab$ und $a_1 b_1$ treffen; dann werden diese vier Punkte bei der Veränderung von $x$ auf $\mathfrak{L}$ eine Curve $C^{(3)}$ durchlaufen, die beiden Halbirungslinien des Winkels bei $x$ eine Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ umhüllen; diese beiden Curven, welche in der Beziehung der Hesse'schen und Cayley'schen zu einander stehen, sollen im Folgenden näher untersucht werden.




Die Curve $C^{(3)}$ hat ausser dem schon erwähnten unendlich-entfernten Punkte $s_\infty$ noch zwei reelle unendlich-entfernte Punkte, die in zwei Richtungen unter 45° zu der Richtung von $s_\infty$ gelegen sind; diese beiden Punkte $q_\infty$ und $q'_\infty$, welche also selbst in zwei rechtwinkligen Richtungen zu einander liegen, sind conjugirte Punkte der $C^{(3)}$; folglich hat die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ die unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ zur Tangente.

Die vier Punkte $ab$ $a_1 b_1$ sind die Mittelpunkte der Berührungskreise, welche dem Dreiseit $opx$ einbeschrieben werden können und bilden selbst ein derartiges vollständiges Viereck, dass jeder dieser vier Punkte der Höhenpunkt des von den drei andern gebildeten

Dreiecks ist. Ein Kreis, welcher über $ab$ oder $a_1 b_1$ als Durchmesser beschrieben wird, muss durch $o$ und $p$ gehen; die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier solcher Kreise geht daher durch die Mitte $m$ zwischen $op$ und steht auf $op$ senkrecht; also haben wir die Eigenschaft:

*Die Mitten aller solcher Sehnen der Curve $C^{(3)}$, welche je zwei conjugirte Punkte derselben verbinden, liegen auf einer Geraden, welche in der Mitte $m$ zwischen $op$ senkrecht darauf steht.*

Rückt insbesondere der veränderliche Punkt $x$ der Geraden $\mathfrak{L}$ in den Schnittpunkt $r$ der Geraden $\mathfrak{L}$ mit $op$, so werden $r$ und $s_\infty$ ein besonderes Paar conjugirter Punkte der $C^{(3)}$, und da auf der unendlich-entfernten Geraden $\mathfrak{G}_\infty$ die Punkte $q_\infty$ und $q'_\infty$ zwei conjugirte Punkte der Curve $C^{(3)}$ sind, $s_\infty$ aber der dritte Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie mit der Curve, so ist $r$ ihr gemeinschaftlicher Tangentialpunkt d. h. die beiden Geraden, welche bei $r$ die von $\mathfrak{L}$ und $op$ gebildeten rechten Winkel halbiren, also selbst rechtwinklig zu einander sind, sind die Asymptoten der $C^{(3)}$ in den Punkten $q_\infty$ und $q'_\infty$. Wollen wir die dritte reelle Asymptote der $C^{(3)}$ ermitteln, d. h. die Tangente in $s_\infty$, so brauchen wir nur das dem Punkte $s_\infty$ zugehörige Strahlsystem zu ermitteln und denjenigen Strahl zu nehmen, welcher conjugirt ist zu $s_\infty r$ in diesem Strahlsystem. Das Strahlsystem $(s_\infty)$ ist aber leicht aufzufinden; denn werden in dem vollständigen Vierseit, dessen drei Paar Gegenecken $op$ $ab$ $a_1 b_1$ sind, dieselben mit $s_\infty$ verbunden, so erhalten wir ein hyperbolisch-gleichseitiges Strahlsystem, dessen eine Asymptote $\mathfrak{G}_\infty$ und dessen andere Asymptote diejenige vorhin ermittelte Gerade $M$ ist, auf welcher die Mitten der Sehnen $ab$ $a_1 b_1$ $op$ liegen, die durch $s_\infty$ geht; um also in diesem Strahlsystem den conjugirten Strahl zu $s_\infty r$ (d. h. $\mathfrak{L}$) zu erhalten, haben wir diejenige Gerade zu ziehen, welche parallel zu $\mathfrak{L}$ ist und symmetrisch liegt in Bezug auf die Punkte $o$ und $p$, d. h. ebensoweit von $o$ und $p$ absteht, wie $\mathfrak{L}$ von $p$ und $o$; sei diese dritte Asymptote $\mathfrak{L}'$, so steht also $M$ von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ gleich weit ab und läuft zu beiden parallel. Das dem Punkte $r$ zugehörige Strahlsystem ist, wie aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits folgt, ebenfalls ein hyperbolisch-gleichseitiges, denn die in $r$ sich rechtwinklig kreuzenden Strahlen $rop$ und $rx$ trennen harmonisch sowohl die Strahlen $ra$ und $rb$, als auch $ra_1$ und $rb_1$; folglich sind $\mathfrak{L}$ und $op$ die Asymptoten des hyperbolisch-gleichseitigen Strahlsystems, welches dem Punkte $r$ zugehört. Da also in die Asymptote $\mathfrak{L}$ zwei entsprechende Strahlen dieses Strahlsystems zusammenfallen, so ist $\mathfrak{L}$ zugleich Tangente der $C^{(3)}$ im Punkte $r$ und da $\mathfrak{L}$ auch Tangente von $\mathfrak{R}^{(3)}$ sein muss, weil sie zwei conjugirte Punkte $r$ und $s_\infty$ verbindet, der dritte Schnittpunkt nach $r$ selbst fällt, also der vierte harmonische auch hineinfallen muss, so folgt, dass $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ in $r$ einen gemeinschaftlichen Punkt und dieselbe Tangente $\mathfrak{L}$ in diesem Punkte haben und hieraus ergiebt sich wieder, dass $s_\infty$ ein Wendepunkt der Curve $C^{(3)}$ und die Gerade $op$ eine Rückkehrtangente der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist; die Wendetangente der Curve $C^{(3)}$ im Wendepunkt $s_\infty$ ist die vorhin ermittelte $\mathfrak{L}'$, der Rückkehrpunkt der $\mathfrak{K}^{(3)}$ auf $op$ der vierte harmonische zu $opr$, dem $r$ zugeordnete Punkt*).

Wir haben also folgendes Ergebniss:

*Die hyperbolisch-gleichseitige $C^{(3)}$ hat einen unendlich-entfernten Punkt zum Wendepunkt; die beiden andern unendlich-entfernten Punkte, in Richtungen unter* 45° *zu jenem gelegen, sind conjugirte Punkte der Curve.*

2. Da die Gerade $\mathfrak{L}$ selbst eine Tangente der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist und aus jedem Punkte $x$ derselben zwei andere zu einander rechtwinklige Tangenten $ab$, $a_1b_1$ an dieselbe gezogen werden können, so haben wir folgenden Satz:

*Die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ hat unendlich viele Paare von rechtwinkligen Tangenten, deren Schnittpunkte auf einer Tangente $\mathfrak{L}$ derselben gelegen sind.*

Diese Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$, die Cayley'sche zu der als Hesse'scher aufgefassten hyberbolisch-gleichseitigen $C^{(3)}$ kann in sehr einfacher Weise

*) Anmerkung. Die Ermittelung der Wendepunkte der $C^{(3)}$ und der Rückkehrtangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist ebensowenig in Steiner's Vorlesungen II. Seite 553, wie in der vorhergehenden Abhandlung Math. Ann. Bd. V. S. 76 so durchsichtig und einfach, wie es zu wünschen ist; daher möge folgende Darstellung hier Platz finden: Aus jedem Punkte der $C^{(3)}$ gehen im Allgemeinen drei Tangenten von $\mathfrak{K}^{(3)}$; die eine ist die Verbindungslinie dieses Punktes mit seinem conjugirten Punkte auf $C^{(3)}$; die beiden andern sind die Asymptoten des Strahlsystems, welches dem Punkte in Bezug auf $C^{(3)}$ zugehört und dessen Strahlenpaare nach sämmtlichen Paaren conjugirter Punkte der $C^{(3)}$ hinlaufen. Wir können nun nach solchen Punkten der $C^{(3)}$ fragen, für welche die erste Tangente mit einer der beiden andern zusammenfällt? Wäre dies für einen Punkt $t$ der Fall, so müsste sein conjugirter Punkt auf diesen in eine einzige zusammenfallenden beiden Tangenten liegen; die Tangente in $t$ von $C^{(3)}$ ist aber der vierte harmonische Strahl zu jenen dreien und müsste daher auch in denselben vereinigten Strahl hineinfallen, d. h. die Tangente in $t$ von $C^{(3)}$ müsste durch den zu $t$ conjugirten Punkt gehen oder der Tangentialpunkt zu $t$ müsste zugleich der conjugirte Punkt zu $t$ sein. Da ferner der Berührungspunkt dieses Strahles mit $\mathfrak{K}^{(3)}$ der vierte harmonische zu den drei Schnittpunkten mit $C^{(3)}$ ist und zwei von diesen in $t$ zusammenfallen, so fällt auch er nach $t$. Also $t$ ist ein Schittpunkt beider Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}^{(3)}$ und beide Curven haben in diesem Punkte dieselbe Tangente.

Die Tangente in einem solchen Punkte $t$ treffe die $C^{(3)}$ zum dritten Male in $w$; also sind $t$ und $w$ conjugirte Punkte der $C^{(3)}$, d. h. die Tangenten in $t$ und $w$ schneiden sich auf $C^{(3)}$; die Tangente in $t$ schneidet aber zum dritten Mal in $w$, folglich muss die Tangente in $w$ auch zum dritten Mal in $m$ schneiden, also ist $w$ ein Wendepunkt der $C^{(3)}$ und in ganz analoger Weise leuchtet ein, dass die dritte aus $t$ an $\mathfrak{K}^{(3)}$ zu legende Tangente eine Rückkehrtangente der $\mathfrak{K}^{(3)}$ sein muss.

construirt werden: Die vier Punkte $ab$ $a_1 b_1$ bilden ein vollständiges Viereck, dessen Diagonaldreieck $opx$ ist, und der durch $opx$ gelegte Kreis ist der Feuerbach'sche Kreis für jedes von den vier Dreiecken, welches von dreien dieser vier Punkte $ab$ $a_1 b_1$ gebildet wird, d. h. er geht durch die Mitten der sechs Seiten desselben; ist $\mu$ die Mitte von $ab$ und $\mu_1$ die Mitte von $a_1 b_1$, so wird, da $\sphericalangle\, \mu x \mu_1 = 90^0$ ist, $\mu \mu_1$ ein Durchmesser dieses Kreises, der seinen Mittelpunkt in der Geraden $M$ hat. Durch die Veränderung des Punktes $x$ auf der Geraden $L$ erhalten wir also folgende Construction der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$:

*Eine Kreisschaar mit zwei reellen gemeinschaftlichen Punkten $op$ und eine Gerade $L$, welche zur Centrale der Kreisschaar parallel läuft, sind gegeben; schneidet ein Kreis der Schaar die Centrale in den Punkten $yy'$, die Gerade $L$ in den Punkten $xx'$, so umhüllen die vier Verbindungsstrahlen $xy$, $xy'$, $x'y$, $x'y'$ die Curve dritter Classe $\mathfrak{K}^{(3)}$.*

Diese Erzeugung der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist völlig übereinstimmend mit unserer allgemeinen Construction der Curve dritter Classe: Auf den beiden parallelen Geraden $L$ und $M$ sind zwei projectivische Punktsysteme $xx'$ und $yy'$ gegeben; (projectivisch deshalb, weil sie aus derselben Kreisschaar geschnitten werden) sie befinden sich in halbperspectivischer Lage, weil in dem Schnittpunkt beider Träger $s_\infty$ Theile von entsprechenden Punktenpaaren vereinigt sind; denn der besondere Kreis der Schaar, welcher in die gemeinschaftliche Secante der Kreisschaar ($op$) und die unendlich entfernte Gerade ($\mathfrak{G}_\infty$) zerfällt, geht durch $s_\infty$, worin also entsprechende Punkte auf den Trägern vereinigt sind.

Auf jedem der vier Strahlen $xy$, $x'y$, $xy'$, $x'y'$ wird zugleich ein bestimmtes Punktsystem fixirt, dessen Mittelpunkt $y$ ist und von dem ein Paar conjugirter Punkte, der Punkt $x$ und der Schnittpunkt $z$ des Strahles mit der gemeinschaftlichen Secante der Kreisschaar ($op$) ist; die Asymptotenpunkte $ab$ eines solchen Punktsystems, für welche also

$$ya^2 = yb^2 = yx \,.\, yz \qquad \text{wird,}$$

können auf jedem solchen Strahl $xy$ ermittelt werden und die Gesammtheit aller dieser Asymptotenpunkte erfüllt die Curve $C^{(3)}$, für welche sie immer ein Paar conjugirter Punkte sind. (Doch ist zu bemerken, dass diese Punktsysteme $xx'$ und $yy'$ auf den Trägern $L$ und $M$ nicht coincidiren mit denjenigen Punktsystemen, deren eines auf $L$ die Asymptotenpunkte $r$ und $s_\infty$ hat, das andere auf $M$ die Asymptotenpunkte $h$ und $h'$, die beiden übrigen Gegenecken eines Quadrates, dessen Diagonale $op$ ist und dessen drittes Paar Gegenecken $q_\infty$ und $q'_\infty$ ist.)

Wählen wir diese beiden besonderen Punkte $q_\infty$ und $q'_\infty$ als Mittelpunkte zweier die Curve $C^{(3)}$ erzeugenden Strahlsysteme, d. h. verbinden wir sie mit $a$ und $b$, so erhalten wir ein Rechteck, dessen eines Paar Gegenecken $ab$ und dessen anderes Paar Gegenecken ein neues Paar conjugirter Punkte $a'b'$ ist; auf diese Weise erhalten wir unendlich viele Rechtecke, die der Curve $C^{(3)}$ einbeschrieben sind und deren parallele Seiten alle nach $q_\infty$ und $q_\infty'$ hingehen; die Mittelpunkte dieser Rechtecke liegen alle auf $M$ und die denselben umschriebenen Kreise bilden sämmtlich eine Kreisschaar mit den beiden gemeinschaftlichen Punkten $op$; diese Kreisschaar $[op]$ lässt sich auch anders auffassen: Denken wir uns dem soeben construirten Rechteck $aba'b'$ eine Kegelschnittschaar einbeschrieben, so gehört dieselbe demjenigen Kegelschnittgewebe an, dessen Tripelstrahlencurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist und alle Kegelschnittschaaren, welche den auf diese Weise erhaltenen Rechtecken einbeschrieben sind, erfüllen das ganze Kegelschnittgewebe. Nun gehört bekanntermaassen zu jedem Kegelschnitt ein gewisser Kreis, welcher der Ort des Schnittpunkts aller rechtwinkligen Tangentenpaare des Kegelschnitts ist; nennen wir diesen Kreis kurz den *Orthogonalkreis des Kegelschnitts*, so bilden bekanntlich alle Orthogonalkreise einer Kegelschnittschaar eine Kreisschaar; eine solche Kreisschaar wird bestimmt durch zwei Kreise, welche über den Diagonalen des von den vier gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnittschaar gebildeten Vierseits als Durchmessern beschrieben werden können. Nehmen wir daher irgend zwei Paare conjugirter Punkte der $C^{(3)}$ und beschreiben über ihnen als Durchmessern zwei Kreise, die allemal durch $o$ und $p$ gehen müssen, so erhalten wir immer dieselbe Kreisschaar, also:

*Die Orthogonalkreise sämmtlicher Kegelschnitte des Gewebes, dessen Tripelstrahlencurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist, bilden eine Kreisschaar mit den beiden gemeinschaftlichen Punkten $op$.*

Hiernach muss ein beliebiger aber festgehaltener Kreis dieser Schaar $[op]$ gleichzeitig Orthogonalkreis sein für unendlich viele Kegelschnitte des Gewebes, was in der That der Fall ist; denn ist $ab$ ein beliebiges Paar conjugirter Punkte und wir verbinden sie mit den beiden unendlich-entfernten conjugirten Punkten $q_\infty$ und $q_\infty'$, so schneiden sich diese vier Geraden noch in zwei neuen conjugirten Punkten $a'b'$ und alle dem Rechteck $aba'b'$ einbeschriebenen Kegelschnitte bilden eine Schaar des Gewebes, für welche insgesammt der dem Rechteck umschriebene Kreis Orthogonalkreis ist.

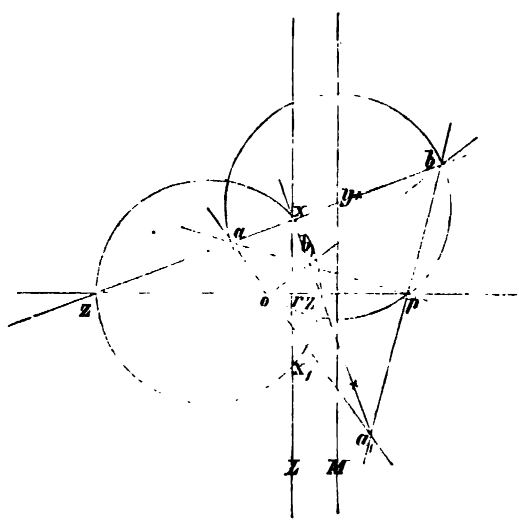
3. Für eine Parabel ist der zugehörige Orthogonalkreis bekanntlich die Leitlinie, oder richtiger, zerfällt in die Leitlinie und $\mathfrak{G}_\infty$. Wir schliessen also unmittelbar, dass alle Parabeln des Gewebes, dessen Tripelstrahlencurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist, dieselbe Leitlinie $op$ haben; nehmen wir nun eine beliebige Parabel des Gewebes heraus, legen aus $o$ das rechtwinklige Tangentenpaar an dieselbe und construiren zugleich durch $o$ den vierten harmonischen Strahl zu diesem Paare und $op$, letzterem

zugeordnet, so muss dieser Strahl $ox$ durch den Brennpunkt der Parabel gehen; legen wir anderseits aus $p$ das rechtwinklige Tangentenpaar an die Parabel und construiren auch zu ihm den vierten harmonischen zu $po$ zugeordneten Strahl $px$, so muss derselbe ebenfalls durch den Brennpunkt der Parabel gehen; der Schnittpunkt $x$ dieser beiden vierten harmonischen Strahlen oder der Brennpunkt unserer Parabel, liegt aber nach der obigen Erzeugung der Curve $C^{(3)}$ auf der Geraden $L$; wir haben daher folgendes Ergebniss:

*Die sämmtlichen Parabeln des Kegelschnittgewebes, dessen Tripelstrahlencurve $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist, haben dieselbe Leitlinie $op$ und ihre Brennpunkte $x$ liegen auf der Geraden $L$, die auf $op$ senkrecht steht.* Diese Parabeln bilden eine Kegelschnittschaar von vier gemeinschaftlichen Tangenten speciellen Charakters; sie berühren nämlich alle die $\mathfrak{G}_\infty$ in demselben unendlich-entfernten Punkte, der auf $L$ liegt und haben daher in $\mathfrak{G}_\infty$ zwei zusammengefallene Tangenten gemeinschaftlich; ausserdem berühren alle diese Parabeln diejenigen beiden Geraden, welche die Winkel zwischen $L$ und $op$ halbiren im Schnittpunkte $r$, die also unter je $45^0$ zu $L$ geneigt sind.

Mit Hilfe dieser Parabelschaar können wir jetzt unsere ursprüngliche Curve $C^{(3)}$ in folgender Weise construiren:

*Es sind zwei zu einander rechtwinklige Gerade $L$ und $D$ gegeben; man denkt sich sämmtliche Parabeln construirt, welche $D$ zur Directrix (Leitlinie) und auf $L$ ihren Brennpunkt haben; aus zwei festen Punkten $o$ und $p$ auf der Geraden $D$ legt man an jede Parabel die beiden rechtwinkligen Tangentenpaare, welche sich in vier Punkten $a\,b\,a_1\,b_1$ schneiden, deren gesammter Ort die Curve $C^{(3)}$ erfüllt, auf welcher diese Punkte allemal zwei Paare conjugirter Punkte bilden.*




Da die zur Construction verwendeten Parabeln, wie wir gesehen haben, eine Kegelschnittschaar bilden, so ist diese Erzeugung nur ein specieller Fall der in der vorigen Abhandlung (No. 15) gegebenen.

4. Aus der oben (2) abgeleiteten Relation:

$$ya^2 = yb^2 = yo^2 = yp^2 = yx \,.\, yz$$

ergiebt sich, dass ein durch $x$ und $z$ gelegter Kreis den um $y$ mit dem Radius $yo$ beschriebenen Kreis rechtwinklig schneiden muss; denken wir uns nun einen solchen Kreis durch $x$ und $z$ gelegt, welcher seinen Mittelpunkt in der Geraden $op$ hat, so gehört er derjenigen Kreisschaar an, welche conjugirt ist zur vorigen Kreisschaar $[op]$, d. h. alle Kreise der letzteren senkrecht schneidet; dieser Kreis schneidet $op$ ausser in $z$ noch in einem zweiten Punkte $z_1$, welcher der vierte harmonische zu $zop$, dem $z$ zugeordnete ist. Es muss daher $z_1$ der Schnittpunkt von $a_1b_1$ mit $op$ sein, während $z$ der Schnittpunkt von $ab$ mit $op$ ist und $x = (ab,\ a_1b_1)$ ist. Verändern wir nun $x$ auf der Geraden $L$, so durchläuft der durch $xzz_1$ gelegte Kreis die ganze zu $[op]$ conjugirte Kreisschaar, deren ideelle gemeinschaftliche Secante die in der Mitte $m$ zwischen $op$ errichtete Senkrechte $M$ ist, während $zz_1$ das Punktsystem beschreibt, dessen Asymptotenpunkte $o$ und $p$ sind. Der durch $xzz_1$ gelegte Kreis schneidet ferner die Gerade $L$ in einem zweiten Punkte $x_1$, der ebensoweit wie $x$ von $op$ absteht, weil der Kreis seinen Mittelpunkt in $op$ hat; die Punkte $x$ und $x_1$ beschreiben also bei der Veränderung von $x$ auch ein Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte $r$ und $s_\infty$ sind (ein hyperbolisch-gleichseitiges). Fassen wir dies zusammen, so erhalten wir jetzt folgende neue Construction der Curven $\mathfrak{K}^{(3)}$ und $C^{(3)}$.

*Hat man eine Kreisschaar mit ideeller gemeinschaftlicher Secante $M$ und den beiden Nullkreisen $o$ und $p$, ausserdem eine beliebige zu $M$ parallele Gerade $L$, so schneidet jeder Kreis dieser Schaar die gemeinschaftliche Centrale $op$ in zwei Punkten $z$ und $z_1$, die Gerade $L$ in $x$ und $x_1$; die vier Verbindungsstrahlen $xz$, $xz_1$, $x_1z$, $x_1z_1$ umhüllen die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$; jeder dieser Strahlen z. B. $xz$ schneidet die Gerade $M$ in $y$ und der um den Mittelpunkt $y$ gelegte Kreis der conjugirten Kreisschaar (d. h. mit dem Radius $yo = yp$) schneidet $xz$ in den beiden Punkten $ab$, deren gesammter Ort die Curve $C^{(3)}$ erfüllt, für welche $a$ und $b$ allemal conjugirte Punkte sind.* $\mathfrak{K}^{(3)}$ und $C^{(3)}$ sind die in dem Zusammenhange der Cayley'schen und Hesse'schen stehenden Curven von der hier betrachteten speciellen Natur.

Aus dieser Construction tritt die Symmetrie sowohl der Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$, als auch der ursprünglichen $C^{(3)}$ in Bezug auf die Gerade $op$ deutlich hervor; die Curve $C^{(3)}$ lässt sich noch einfacher aus der vorigen Construction von $\mathfrak{K}^{(3)}$ ableiten, wenn wir berücksichtigen, dass die Punktsysteme $xx_1$ auf dem Träger $L$ und $zz_1$ auf dem Träger $op$ diejenigen sind, deren Asymptotenpunkte conjugirte Punkte der $C^{(3)}$ sind und dass zugleich die beiden Träger conjugirte Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ genau in demselben Sinne sind, wie die conjugirten Punkte der $C^{(3)}$. (Siehe die vorige Abh.). Hieraus folgt, dass auch die beiden Verbindungslinien:

$$xz \quad \text{und} \quad x_1 z_1$$

conjugirte Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ sein müssen und endlich, dass auch das dritte Seitenpaar:

$$xz_1 \quad \text{und} \quad x_1 z$$

ein Paar conjugirter Tangenten von $\mathfrak{K}^{(3)}$ ist. Hieraus folgt dann wieder, dass die Schnittpunkte

$$(xz,\ x_1 z_1) \quad \text{und} \quad (xz_1,\ x_1 z)$$

auf der Curve $C^{(3)}$ liegen müssen und zwar ist der erstere der dritte Schnittpunkt der Geraden $ab$ mit der Curve $C^{(3)}$, der andere ihr dritter Schnittpunkt mit $a_1 b_1$. Wir können also die Curve $C^{(3)}$ auch in folgender Weise construiren:

*Verändert man das vorhin construirte vollständige Viereck $xx_1zz_1$, dessen eines Seitenpaar $L$ und $op$ ist, so umhüllen nicht allein die beiden andern Seitenpaare $xz$ und $x_1z_1$, $xz_1$ und $x_1z$ die Curve $\mathfrak{K}^{(3)}$ und sind Paare conjugirter Tangenten derselben, sondern auch die beiden übrigen Diagonalpunkte $(xz,\ x_1z_1)$ und $(xz_1,\ x_1z)$ durchlaufen die zugehörige $C^{(3)}$.*

Da die drei Seitenpaare des vollständigen Vierecks $xx_1zz_1$ drei Paare conjugirter Tangenten der $\mathfrak{K}^{(3)}$ sind, so muss das durch die vier Punkte $xx_1zz_1$ bestimmte Kegelschnittbüschel dem Netze angehören, dessen Tripelcurve $C^{(3)}$ ist und wir erhalten sämmtliche Kegelschnitte dieses Netzes, indem wir die Kegelschnittbüschel herstellen, welche allen Vierecken $xx_1zz_1$ umschrieben werden können. Da in jedem dieser Kegelschnittbüschel ein Kreis vorkommt und alle diese Kreise selbst eine Kreisschaar bilden, so schliessen wir:

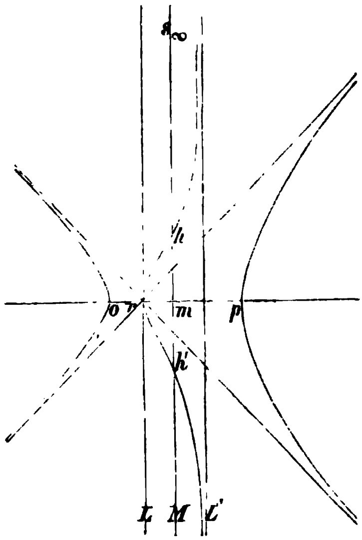
*Das Kegelschnittnetz, dessen Tripelcurve $C^{(3)}$ ist, besitzt eine Kreisschaar mit ideeller gemeinschaftlicher Secante $M$, deren beide Nullkreise $o$ und $p$ sind.*

Dies ist eine besondere Eigenthümlichkeit dieses Netzes, da bekanntlich das Kegelschnittnetz im Allgemeinen nur einen Kreis enthält.

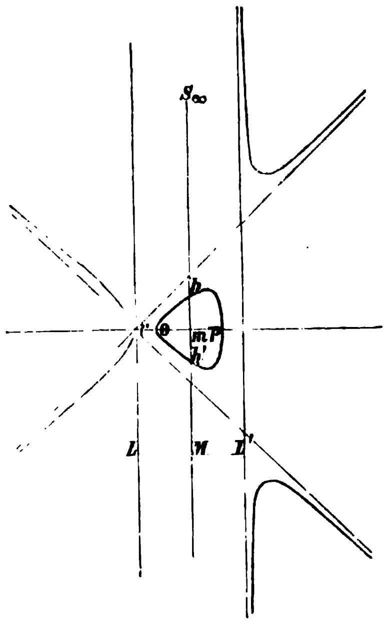
5. Die Curve $C^{(3)}$ nimmt zwei wesentlich verschiedene Gestalten an, je nachdem die Mittelpunkte $o$ und $p$ der beiden erzeugenden circularen Strahlsysteme durch die Gerade $L$, den perspectivischen Durchschnitt der beiden aus den Strahlsystemen abgeleiteten Strahlbüschel, getrennt werden, oder nicht. In dem Falle I, wenn $L$ zwischen $op$ hindurchgeht, besteht die Curve $C^{(3)}$ aus drei bis ins Unendliche verlaufenden Zweigen, deren einer in dem unendlich entfernten Wendepunkt $s_\infty$ sich schliessend gedacht werden kann und von $L$ im Punkte $r$ berührt wird, während die beiden andern Zweige durch die conjugirten unendlich-entfernten Punkte $q_\infty$ und $q_\infty'$ zusammenhängen. In dem Falle II, wenn die Punkte $o$ und $p$ auf derselben Seite von $L$ liegen, besteht die Curve $C^{(3)}$ aus einem geschlossenen Contour innerhalb des von den drei Asymptoten gebildeten (gleichschenkligen und

rechtwinkligen) Dreiecks und aus drei ins Unendliche verlaufenden Zweigen, deren zwei in dem unendlich-entfernten Wendepunkte zusammenhängend gedacht werden können, während sie anderseits mit dem dritten Zweige, welcher in $r$ die Gerade $L$ berührt, durch die beiden unendlich-entfernten conjugirten Punkte $q_\infty$ und $q_\infty'$ zusammenhängen. Die folgenden beiden Figuren mögen annähernd die beiden verschiedenen Gestalten der $C^{(3)}$ veranschaulichen:

(I)




(II)




Verfolgen wir in diesen beiden Fällen die Paare conjugirter Punkte und die Vertheilung derselben auf den verschiedenen Zweigen der Curve, so ergiebt sich Folgendes:

Für die Gestalt (I) wollen wir die drei Zweige der $C^{(3)}$, welche beziehlich die Punkte $o$ $p$ $r$ enthalten, durch $(O)$ $(P)$ $(R)$ bezeichnen, dann hat jeder Punkt auf dem Zweige $(O)$ seinen conjugirten Punkt auf dem Zweige $(P)$ und umgekehrt; der dritte Schnittpunkt solcher Verbindungslinien je zweier conjugirter Punkte $ab$ solcher Art liegt immer zwischen $a$ und $b$, folglich auf dem dritten Zweige $(R)$; besondere Paare dieser Kategorie sind $o$ und $p$ selbst, so wie $q_\infty$ und $q_\infty'$; der zugehörige Tangentialpunkt dieser Paare liegt immer auf dem dritten Zweige $(R)$; je zwei solche conjugirte Punkte liegen endlich immer in derselben Halbebene von der Geraden $op$. Dagegen hat jeder Punkt des dritten Zweiges $(R)$ seinen conjugirten Punkt auf diesem Zweige selbst; besondere Paare dieser Art sind $r$ und $s_\infty$, sowie die beiden gleich weit von $m$ abstehenden Punkte $h$ und $h'$, deren Tangentialpunkt $r$ ist. Je zwei conjugirte Punkte auf diesem Zweige $(R)$ werden getrennt durch die Gerade $op$; wo der dritte Schnittpunkt einer solchen Verbindungslinie zweier conjugirter Punkte zwischen oder ausserhalb derselben liegt, darüber entscheiden die beiden reellen Wendepunkte $w$ und $w'$, welche auf dem Zweige $(R)$ liegen; ausser dem bekannten Wendepunkt $s_\infty$ muss es noch zwei reelle Wendepunkte $w$ und $w'$ auf dem Zweige $(R)$ geben, welche der Symmetrie wegen mit $s_\infty$ in gerader Linie liegen; ihre Ermittelung bleibe der folgenden Nr. vorbehalten; sind sie aber gefunden und sind $\varpi$ und $\varpi'$ ihre conjugirten Punkte d. h. gehen die Tangenten in $\varpi$ und $\varpi'$ durch $w$ und $w'$, so liegt in jedem dieser beiden Fälle der dritte Schnittpunkt mit einem der beiden conjugirten Punkte vereinigt und dies ist der Uebergangsfall zwischen den beiden Fällen, wo der dritte Schnittpunkt zwischen den beiden conjugirten oder ausserhalb derselben liegt. Demgemäss gestaltet sich die Lage folgendermaassen:

1) für diejenigen Punkte des Zweiges $(R)$, welche zwischen $r$ und dem Wendepunkt $w$ liegen, befindet sich der conjugirte Punkt zwischen $s_\infty$ und $\varpi$;

2) für diejenigen Punkte, welche zwischen $w$ und $\varpi'$ liegen, befindet sich der conjugirte Punkt auf dem Theile des Zweiges zwischen $\varpi$ und $w'$;

3) für diejenigen Punkte, welche zwischen $\varpi'$ und $s_\infty$ liegen, befindet sich der conjugirte Punkt zwischen $w'$ und $r$.

Hierdurch ist der ganze Zweig $(R)$ erfüllt; in den Fällen 1) und 3) liegt der dritte Schnittpunkt zwischen den beiden conjugirten, im Falle 2) ausserhalb derselben. Der Tangentialpunkt für je zwei conjugirte Punkte des Zweiges $(R)$ liegt allemal auf demselben Zweige und zwar da die drei reellen Wendepunkte $s_\infty$ $w$ und $w'$ ihre eigenen Tangentialpunkte sind, so durchläuft er das ganze Gebiet des Zweiges $(R)$ doppelt.

Für die Gestalt (II) besteht die Curve $C^{(3)}$ aus vier Zweigen, einem geschlossenen Contour $(\Delta)$ innerhalb des von den drei Asymptoten gebildeten Dreiecks, einem unendlichen Zweige $(R)$, welcher die Gerade $L$ in $r$ berührt und zwei unendlichen Zweigen $(Q)$ und $(Q')$, welche in dem Wendepunkte $s_\infty$ zusammenhängend gedacht werden können und nach den Punkten $q_\infty$ und $q_\infty'$ hinlaufen. Die Paare conjugirter Punkte vertheilen sich auf diesen Zweigen in folgender Weise:

Jeder Punkt des Zweiges $(\Delta)$ hat seinen conjugirten Punkt auf demselben Zweige; besondere Paare dieser Art sind $o$ und $p$, $h$ und $h'$; alle Verbindungslinien solcher je zwei conjugirter Punkte haben ihren dritten Schnittpunkt ausserhalb derselben. Der Zweig $(R)$ wird durch den Punkt $r$ in zwei symmetrische Hälften getheilt, eine obere und eine untere; die Punkte der oberen Hälfte haben ihre conjugirten Punkte auf dem (oberen) Zweige $(Q)$; die Punkte der unteren Hälfte haben ihre conjugirten Punkte auf dem (unteren) Zweige $(Q')$ und dadurch wird die ganze Curve ausgefüllt; besondere Paare dieser Art und zwar Uebergangspaare sind $r$ und $s_\infty$, $q_\infty$ und $q_\infty'$; ob auf den Verbindungslinien der conjugirten Punkte dieser Kategorie der dritte Schnittpunkt zwischen denselben liegt oder ausserhalb, darüber entscheiden wie vorhin die beiden reellen Wendepunkte $w$ und $w'$, welche auf dem Zweige $(R)$ symmetrisch, also mit dem dritten Wendepunkt $s_\infty$ in gerader Linie liegen; die Ermittelung dieser Wendepunkte erfolgt weiter unten; seien ihre conjugirten Punkte $\varpi$ und $\varpi'$, welche resp. auf den Zweigen $(Q)$ und $(Q')$ liegen, so dass also die Tangente in $\varpi$ durch den Punkt $w$ geht, dann findet bei diesen Verbindungslinien $w\varpi$ und $w'\varpi'$ ein Uebergang statt, weil hier der dritte Schnittpunkt in einen der beiden conjugirten selbst hineinfällt. Demgemäss gestaltet sich die Lage der Paare conjugirter Punkte und des dritten Schnittpunkts auf ihrer Verbindungslinie folgendermaassen:

1) Die Punkte des Zweiges $(R)$ zwischen $r$ und dem Wendepunkt $w$ haben ihre conjugirten auf dem Zweige $(Q)$ zwischen $s_\infty$ und $\varpi$; der dritte Schnittpunkt liegt ausserhalb der beiden conjugirten.

2) Die Punkte des Zweiges $(R)$ zwischen $w$ und $q_\infty'$ haben ihre conjugirten auf dem Zweige $(Q)$ zwischen $\varpi$ und $q_\infty$; der dritte Schnittpunkt liegt zwischen den beiden conjugirten.

Ebenso verhält es sich mit der unteren Hälfte des Zweiges $(R)$.

Der Tangentialpunkt für je zwei conjugirte Punkte des Zweiges $(\Delta)$ liegt allemal auf einem der drei übrigen Zweige $(R)$ $(Q)$ und $(Q')$ und diese werden vollständig von ihm erfüllt; für die Paare conjugirter Punkte der zweiten Kategorie, welche sich auf den Zweigen $(R)$ $(Q)$ und $(Q')$ vertheilen, durchläuft der zugehörige Tangentialpunkt diese Zweige selbst, indem er drei Mal für die Wendepunkte $s_\infty$ $w$ und $w'$ in einen Punkt eines Paares conjugirter Punkte hineinfällt*).

5. Da ein Wendepunkt $s_\infty$ der Curve $C^{(3)}$ von vorn herein bekannt ist und wegen der Symmetrie derselben die übrigen acht paarweise symmetrisch liegen müssen, so kann die Ermittelung der vier nicht symmetrisch zu $op$ liegenden nur von einer Gleichung vierten Grades abhängig sein, welche sich hier sehr einfach geometrisch ableiten und interpretiren lässt, sowie über die Realität der Wendepunkte Auskunft giebt.

Erinnern wir uns der letzten Construction (4) der Curve $C^{(3)}$ ver-

---

*) Vergl. Durège: Ueber die Formen der Curven dritter Ordnung, Borchardt's Journal Bd. LXXV S. 153 ff.

mittelst der Kreisschaar, deren Nullkreise $o$ und $p$ sind, so fanden wir Punkte der $C^{(3)}$ auf folgende Art: Irgend ein Kreis der Schaar schnitt $op$ in $z$ und $z_1$, die Gerade $L$ in $x$ und $x_1$; auf einer der vier Verbindungslinien z. B. $xz$, welche die in der Mitte $m$ zwischen $op$ errichtete Senkrechte $M$ in $\mu$ traf, wurden von $\mu$ aus die Strecken

$$\mu a = \mu b = \mu o = \mu p$$

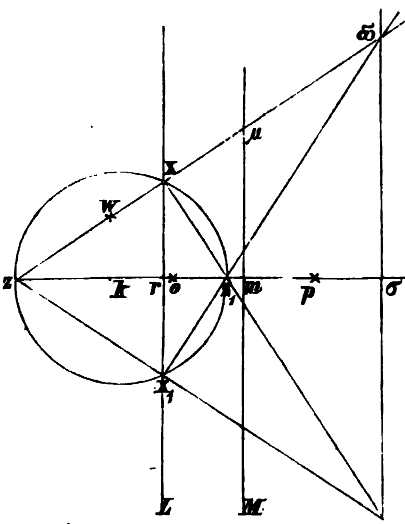
abgeschnitten und der Schnittpunkt $(xz,\ x_1 z_1)$ bestimmt; dieser und $ab$ sind allemal die drei Schnittpunkte mit der Curve $C^{(3)}$ und zwar sind $a$ und $b$ conjugirte Punkte. Wenn es sich nun insbesondere einmal ereignet, dass der dritte Schnittpunkt $(xz,\ x_1 z_1)$ mit einem der beiden conjugirten $ab$ zusammenfällt, dann ist der andere von den letzteren ein Wendepunkt der $C^{(3)}$. Suchen wir also einen solchen Kreis $k$ der Schaar auf, welcher diese Eigenthümlichkeit darbietet.

Sei der in der Figur gezeichnete Kreis $k$ der gesuchte und $xz\ x_1 z_1$ das ihm einbeschriebene symmetrische Viereck, dann können wir entweder die Seite $xz$ oder die Seite $xz_1$ als eine Sehne der $C^{(3)}$ von der verlangten Beschaffenheit auffassen; da in beiden Fällen dieselbe Bedingung resultirt, so nehmen wir den ersten Fall an; der Schnittpunkt $(xz,\ x_1 z_1)$ sei $\varpi$, der zugeordnete vierte harmonische Punkt $w$, also das Doppelverhältniss

$$(x\, z\, \varpi\, w) = -1$$

die Mitte zwischen $\varpi w$ sei $\mu$; das Perpendikel aus $\mu$ auf $zz_1$ treffe in $m$; der Kreis um $\mu$ mit $\mu\varpi = \mu w$ beschrieben treffe $zz_1$ in $o$ und $p$; der Schnittpunkt $(xx_1,\ zz_1)$ ist $r$; das Perpendikel aus $\varpi$ auf $zz_1$ treffe in $\sigma$; letzteres ist die Polare von $r$ in Bezug auf den Kreis $(k)$, folglich sind $zz_1 r\sigma$ vier harmonische Punkte, also das Doppelverhältniss:

$$(zz_1 r\sigma) = -1.$$



Wegen der vier harmonischen Punkte $xz\varpi w$ haben wir:

$$\frac{\mu x}{\mu z} = \left(\frac{\varpi x}{\varpi z}\right)^2 = \left(\frac{\sigma r}{\sigma z}\right)^2.$$

Wegen der vier harmonischen Punkte $zz_1 r\sigma$, bei denen $k$ die Mitte zwischen zwei conjugirten $zz_1$ ist, haben wir $\frac{\sigma r}{\sigma z} = \frac{r z_1}{k z_1}$ und da $\frac{\mu x}{\mu z} = \frac{m r}{m z}$ so folgt:

(I) $$\frac{mr}{mz} = \left(\frac{rz_1}{kz_1}\right)^2.$$

Da ausserdem:

(II) $$mz\ mz_1 = mo^2 \quad \text{ist},$$

so sind dies die beiden Bedingungen, welchen der Kreis $(k)$ oder seine Schnittpunkte $zz_1$ mit der Geraden $op$ genügen müssen, wenn umgekehrt $op$, die Mitte $m$ zwischen ihnen und der Punkt $r$ als gegeben angesehen werden.

Ganz ähnlich lautende Gleichungen wie (I) und (II) würden hervorgegangen sein, wenn wir die andere Sehne $xz_1$ als die den geforderten Bedingungen entsprechende angenommen hätten.

Um aus den beiden Bedingungen (I) und (II) die Lage des Kreises $(k)$, also auch des Wendepunktes $w$ zu finden, führen wir denjenigen Kreis der Schaar, deren Nullkreise $o$ und $p$ sind, ein, welcher die Gerade $L$ in $r$ berührt; ist $k_0$ sein Mittelpunkt und $R_0$ sein Radius, so haben wir:

$$mk_0{}^2 - R_0{}^2 = mo^2$$

und entweder $mk_0 + R_0 = mr$ oder $mk_0 - R_0 = mr$, je nachdem $r$ ausserhalb $op$ liegt oder zwischen $op$; nehmen wir zunächst den ersten Fall an:

$$mk_0 + R_0 = mr.$$

Von allen Kreisen der Schaar werden diejenigen, welche ihre Mittelpunkte zwischen $k_0$ und $o$ haben, die Gerade $\mathfrak{L}$ nicht mehr treffen, ebensowenig diejenigen, welche ihre Mittelpunkte zwischen $p$ und $\infty$ haben; dagegen alle Kreise, die ihre Mittelpunkte von $k_0$ bis $\infty$ haben, müssen $\mathfrak{L}$ in je zwei reellen Punkten $xx_1$ treffen.

Die Bedingung (II) wird nun:

$$mk^2 - R^2 = mk_0{}^2 - R_0{}^2,$$

wo $R$ den Radius, $k$ den Mittelpunkt des gesuchten Kreises bezeichnet; die Bedingung (I) aber

$$\frac{mk + R}{mk_0 + R_0} = \frac{R^2}{(mk_0 + R_0 - mk + R)^2}$$

lässt sich mittelst der vorigen vereinfachen, da

$$\frac{mk + R}{mk_0 + R} = \frac{mk_0 - R_0}{mk - R}$$

ist; also die Summe der beiden Formen:

$$(mk_0 + R_0 + R - mk)^2\,(mk + R) \quad = R^2(mk_0 + R_0)$$
$$(mk_0 + R_0 + R - mk)^2\,(R_0 - mk_0) = R^2(R - mk)$$

giebt

$$(mk_0 + R_0 + R - mk)\,(mk + R + R_0 - mk_0) = R^2 \quad \text{oder:}$$

(III) $$(mk - mk_0)^2 + R^2 = (R + R_0)^2.$$

Im zweiten Falle erhalten wir, wenn wir annehmen, $r$ liege zwischen $op$, also

$$mk_0 - R_0 = mr$$

die Form der Bedingungsgleichung:

$$\text{(III')} \qquad (mk - mk_0)^2 + R^2 = (R - R_0)^2,$$

welche sich von der vorigen nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle von $R$ steht $-R$.

Wenn wir aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} (mk - mk_0)^2 + R^2 = (R \pm R_0)^2 \\ \quad mk^2 - R^2 = mk_0{}^2 - R_0{}^2 \end{cases}$$

entweder $R$ oder $mk$ eliminiren, so erhalten wir jedesmal eine Gleichung vierten Grades für den Abstand des gesuchten Kreises $k$ vom Punkte $m$ und für den Radius $R$ desselben; zweckmässiger erscheint es aber, diese beiden Gleichungen zusammen aufzufassen und geometrisch zu interpretiren, weil dadurch die Frage nach der Realität der Wendepunkte am leichtesten beantwortet wird.

Denken wir uns in dem Mittelpunkte des gesuchten Kreises $(k)$ ein Perpendikel auf dem Durchmesser $kop$ errichtet, welches den Kreis in den beiden Punkten $s$ und $s'$ treffe, so ist

$$(kk_0)^2 + R^2 = (sk_0)^2 = (s'k_0)^2$$

also giebt die erste der beiden letzten Bedingungen:

$$sk_0 = R \pm R_0 .$$

Wenn wir daher dem Kreise $k_0$ zwei mit dem Durchmesser $op$ parallele Tangenten ziehen, die $l$ und $l'$ heissen mögen, so ist der Abstand des Punktes $s$ von $l$ gleich $R + R_0$ und der Abstand des Punktes $s$ von $l'$ gleich $R - R_0$ und der Punkt $s$ ist daher auf einen solchen geometrischen Ort angewiesen, dessen Punkte von dem festen Punkte $k_0$ und einer der beiden festen Geraden $l$ oder $l'$ gleich weit abstehen. Ein solcher Ort ist bekanntlich eine *Parabel;* wir denken uns also die beiden Parabeln construirt, welche den Punkt $k_0$ zum Brennpunkt und eine der beiden Geraden $l$ oder $l'$ zur Leitlinie haben; da dieselben vollkommen symmetrisch liegen in Bezug auf die Gerade $op$, wie die Curve $C^{(3)}$ selbst und ihre Paare von Wendepunkten, so brauchen wir nur eine dieser beiden Parabeln zu fixiren $\mathfrak{P}^{(2)}$, deren Brennpunkt $k_0$ und deren Leitlinie eine der beiden zum Durchmesser $op$ parallelen Tangenten $l$ des Kreises $k_0$ ist.

Die andere Bedingung giebt einen zweiten geometrischen Ort für den Punkt $s$; da nämlich

$$mk^2 - R^2 = mk_0{}^2 - R_0{}^2 = mo^2$$

ist, so folgt $$R^2 = ko \,.\, kp = ks^2 \quad \text{oder}$$

$$ks \,.\, ks' + ko \,.\, kp = 0\,.$$

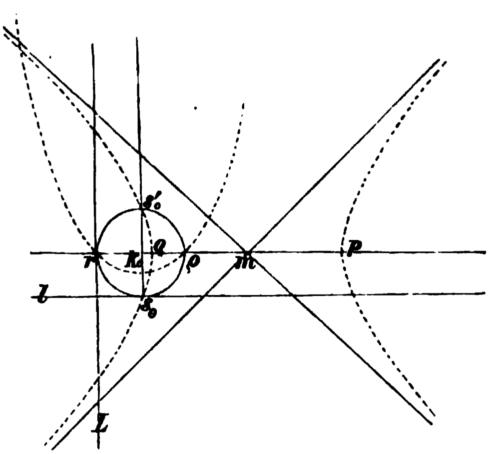
Hierdurch ist den Punkten $s$ und $s'$ als Ort eine *gleichseitige Hyperbel* angewiesen, welche $m$ zum Mittelpunkt und die beiden in $o$ und $p$ errichteten Senkrechten zu Tangenten, also $mo^2$ zur Potenz hat. Dies folgt aus der bekannten Eigenschaft jeder gleichseitigen Hyperbel, wonach die Schenkel eines rechten Winkels ($k$) dieselbe immer in Punktenpaaren $ss'$ und $tt'$ treffen, für welche der Lage und Grösse nach

$$ks \,.\, ks' + kt \,.\, kt' = 0$$

ist.

Wir haben hiernach zwei Orte für den Punkt $s$, die Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ und die eben ermittelte gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$; die gemeinschaftlichen Punkte dieser beiden Kegelschnitte sind vier solche Punkte $s$, dass die aus ihnen auf $op$ herabgelassenen Perpendikel die vier Mittelpunkte $k$ der gesuchten Kreise zu Fusspunkten haben. Es kommt nunmehr darauf an, nachzusehen, ob diese beiden Kegelschnitte reelle Schnittpunkte $s$ haben und ob die ihnen zugehörigen Kreise $k$ das in $r$ errichtete Perpendikel $L$ schneiden oder nicht. Beides ergiebt sich aus der Lage der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ zur Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$:

Gehen wir von den beiden gegebenen Punkten $o$ und $p$, deren Mitte $m$ ist und dem irgendwo auf ihrer Verbindungslinie liegenden Punkte $r$ aus, in welchem das errichtete Perpendikel die gegebene Gerade $L$ ist; bestimmen wir den vierten harmonischen Punkt $\varrho$ zu $rop$, der dem Punkt $r$ zugeordnet ist, so wird, wenn $r$ ausserhalb $op$ liegt, $\varrho$ zwischen $op$ liegen und umgekehrt; die beiden möglichen Fälle können also durch dieselbe Betrachtung erledigt werden, indem nur $r$ und $\varrho$ mit einander zu vertauschen sind; der über $r\varrho$ als Durchmesser beschriebene




Kreis hat $k_0$ zum Mittelpunkt; sei $o$ der zwischen $r\varrho$ liegende Punkt. Wir denken uns nun eine der beiden symmetrischen Parabeln construirt, welche $k_0$ zum Brennpunkt haben und durch die beiden Punkte $r$ und $\varrho$ gehen; das in $k_0$ errichtete Perpendikel schneidet den Kreis $k_0$ in $s_0$ und $s_0'$; dann sind die Tangenten in $s_0$ und $s_0'$ offenbar die Leitlinien der beiden Parabeln und $rs_0$ $\varrho s_0$ sind zwei Tangenten der einen, $rs_0'$ $\varrho s_0'$ zwei Tangenten der andern Parabel. Durch die vier Punkte $s_0$ $s_0'$ $o$ $p$ wird jetzt die gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$ gelegt, welche dadurch bestimmt ist. Nur der durch $o$ gehende Zweig dieser gleichseitigen Hyperbel kann gemeinschaftliche Punkte mit der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ haben, denn die Tangente $\varrho s_0$ (oder $rs_0$) der Parabel läuft parallel zu einer Asymptote der Hyperbel, hat also nothwendig in derselben Halbebene von sich die Parabel und nur einen Theil des einen durch $o$ gehenden Zweiges der Hyperbel. Da nun anderseits der Brennpunkt und auch der Scheitel der Parabel innerhalb dieses $o$-Zweiges der Hyperbel liegt, während der Punkt $\varrho$ (oder $r$) der Parabel ausserhalb der Hyperbel sich befindet, so muss nothwendig die Parabel diesen Hyperbelzweig in zwei und nur in zwei reellen Punkten treffen; jene obige Gleichung vierten Grades für $mk$ muss daher zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln haben, ebenso wie die Gleichung vierten Grades für $R$. Die von den beiden reellen Schnittpunkten der Curven $\mathfrak{P}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ abhängenden Kreise $k$, welche zur Bestimmung der Wendepunkte führen, haben aber einen wesentlich verschiedenen Charakter. Da $s_0 s_0'$ die Axe der Parabel $\mathfrak{P}^{(2)}$ ist und zugleich eine Sehne des $o$-Zweiges der Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$, welche ihrer imaginären Axe parallel läuft, da man ferner bei dem Wege von $s_0$ bis $o$ auf der Hyperbel von dem Gebiete ausserhalb der Parabel in das Gebiet innerhalb derselben eintritt, so muss einer der beiden reellen Schnittpunkte von $\mathfrak{P}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ auf dem Hyperbelstück $s_0 o$ liegen, also der Fusspunkt des aus diesem Schnittpunkte auf $op$ herabgelassenen Perpendikels zwischen $k_0$ und $o$ fallen. Dieser Fusspunkt ist aber der Mittelpunkt des gesuchten Kreises der Schaar und wie wir vorhin gesehen haben, kann ein Kreis der Schaar, welcher seinen Mittelpunkt zwischen $k_0$ und $o$ hat, die Gerade $L$ nicht schneiden; folglich erhalten wir bei diesem ersten reellen Schnittpunkte von $\mathfrak{P}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ doch noch keine reellen Wendepunkte der $C^{(3)}$. Wir müssen uns daher nach dem zweiten Schnittpunkte umsehen. Bei dem Wege vom Punkte $s_0'$ auf der Hyperbel, welcher noch innerhalb der Parabel liegt bis zum unendlich entfernten Punkte $q_\infty'$ der Hyperbel, welcher ausserhalb der Parabel liegt, weil durch ihn eine reelle Tangente derselben $rs_0$ geht, haben wir nothwendig die Grenze des inneren und äusseren Gebietes der Parabel einmal überschritten, folglich den zweiten Schnittpunkt von $\mathfrak{P}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ getroffen; der Fusspunkt $k$ des aus ihm auf $op$ herabgelassenen Perpendikels muss daher zwischen $k_0$ und $\infty$ liegen; also der zugehörige Kreis $k$ wird nach dem Obigen die Gerade $L$ in zwei reellen Punkten $xx_1$ schneiden; er schneidet zugleich die Gerade $op$ in den beiden Punkten $zz_1$, so dass zwei symmetrisch liegende Seiten des Vierecks

$xx_1 zz_1$ die beiden reellen Wendepunkte $ww_1$ der Curve $C^{(3)}$ enthalten. Wir haben also nachgewiesen, dass die Curve $C^{(3)}$ ausser dem unendlich-entfernten Wendepunkt $s_\infty$ immer noch zwei reelle Wendepunkte $w$ und $w_1$ besitzt, welche mit jenem in gerader Linie liegen, wie dies denn auch mit den allgemeinen Eigenschaften der Wendepunkte bei den Curven dritten Grades übereinstimmt; die Ermittelung der beiden reellen Wendepunkte selbst hängt, wie es in der Natur der Sache liegt, von der Bestimmung der Schnittpunkte zweier bestimmter Kegelschnitte $\mathfrak{P}^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ ab und kann nicht weiter reducirt werden.

6. Wir wollen noch einiger specieller Fälle Erwähnung thun, in denen die Curve $C^{(3)}$ zerfällt und welche zugleich Grenzfälle sind der beiden verschiedenen Typen von Gestalten (I) und (II), in denen die Curve $C^{(3)}$ auftritt. Geht nämlich erstens die Gerade $L$, welche auf $op$ senkrecht steht, durch die Mitte $m$ zwischen $o$ und $p$, so zerfällt die Curve $C^{(3)}$ in diese Gerade selbst und eine *gleichseitige Hyperbel,* deren beide Scheitel $o$ und $p$ sind, so dass also der Zweig $(R)$ der Gestalt (I) sich in die Gerade $L$ ausstreckt und die beiden Zweige $(O)$ und $(P)$ in die beiden Theile einer gleichseitigen Hyperbel übergehen, indem sie einander symmetrisch gleich werden. Auch die zugehörige Cayley'sche $\mathfrak{K}^{(3)}$ zerfällt in diesem Falle in den unendlich entfernten Punkt der Geraden $op$ und die Gerade $L$, welche in $m$ senkrecht auf $op$ steht; oder besser gesagt anstatt der Geraden $L$ die beiden imaginären Doppelpunkte desjenigen Punktsystems auf $L$, welches von den circularen Strahlsystemen in $o$ oder $p$ ausgeschnitten wird.

Versetzen wir zweitens die Gerade $L$ in die Unendlichkeit, so zerfällt die Curve $C^{(3)}$ in diese unendlich-entfernte Gerade $\mathfrak{G}_\infty$ und einen *Kreis,* welcher $op$ als Durchmesser hat; die Zweige $(R)$ $(Q)$ und $(Q')$ der Gestalt (II) gehen also sämmtlich in die Unendlichkeit und nur der geschlossene Contour $(\Delta)$ gestaltet sich zu einem Kreise; die zugehörige Cayley'sche $\mathfrak{K}^{(3)}$ zerfällt ebenfalls in den Mittelpunkt des Kreises $m$ und die beiden imaginären unendlich-entfernten Kreispunkte. Von Interesse ist in diesem Falle die specielle Natur des Kegelschnittnetzes, dessen Tripelcurve die in den Kreis $m^{(2)}$ und $\mathfrak{G}_\infty$ zerfallene $C^{(3)}$ ist. Da nämlich je zwei conjugirte Punkte der Curve $C^{(3)}$ auch conjugirte Punkte für alle Kegelschnitte des zugehörigen Netzes sein müssen, so folgt in unserem Falle zuerst, dass je zwei in rechtwinkligen Richtungen gelegene unendlich-entfernte Punkte für alle Kegelschnitte des Netzes conjugirte Punkte sein müssen, dass also alle Kegelschnitte des Netzes durch die beiden imaginären Kreispunkte im Unendlichen gehen, oder Kreise sind; zweitens aber sind je zwei diametral gegenüberstehende Punkte des Kreises $m^{(2)}$ conjugirte Punkte für die Kreise des Netzes, also müssen diese den Kreis $m^{(2)}$ rechtwinklig schneiden; wir haben also in diesem speciellen Falle das Resultat:

*Sämmtliche Kreise, welche einen gegebenen Kreis* $m^{(2)}$ *rechtwinklig schneiden, bilden ein besonderes Kegelschnittnetz, dessen Tripelcurve in diesen Kreis und die unendlich-entfernte Gerade* $\mathfrak{G}_\infty$ *zerfällt.*

Drittens untersuchen wir noch den Fall, wenn die Gerade $L$ durch einen der beiden Punkte $o$ oder $p$ selbst hindurchgeht z. B. durch $o$; die Curve $C^{(3)}$ zerfällt alsdann, wie wir aus einer der oben angegebenen Constructionen erkennen, in *drei gerade Linien*, deren eine die in $p$ errichtete Senkrechte ist, während die beiden andern die durch $o$ gehenden unter je $45^0$ zu $op$ geneigten Strahlen sind oder mit andern Worten: Die Curve $C^{(3)}$ streckt sich in diesem Falle in ihre drei Asymptoten aus. Die zugehörige Cayley'sche $\mathfrak{K}^{(3)}$ reducirt sich auf die drei Eckpunkte dieses Asymptotendreiecks.

Sophienau, den 22. August 1872.

# Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.

(Zweiter Aufsatz.)

Von Felix Klein in Erlangen.

---

Die nachstehenden Auseinandersetzungen schliessen sich an einen früheren Aufsatz über denselben Gegenstand (diese Annalen IV, 4) an und sind bestimmt, einige dort nur angedeutete Punkte weiter auszuführen. Es galt mir damals hauptsächlich, in möglichst anschaulicher Weise darzulegen, wie Cayley's projectivische Massbestimmung in Ebene und Raum ein äquivalentes Bild für die Lehren der Nicht-Euklidischen Geometrie ergiebt. Ich durfte hoffen, letztere dadurch einem allgemeinen Verständnisse zugänglicher gemacht, gleichzeitig aber auch Ausgangspunkte für weitere Untersuchungen gewonnen zu haben. In letzterem Betracht hatte ich nur angedeutet, wie die vorgetragenen geometrischen Ueberlegungen für Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen zu verwerthen seien. Ich hatte ferner die Ansicht entwickelt, dass man in ähnlicher Weise, wie v. Staudt, die projectivische Geometrie aufbauen könne, auch ohne über das Parallelenaxiom etwas festzusetzen. Es sind hauptsächlich diese beiden Punkte, welche im Folgenden im Sinne des damaligen Aufsatzes, aber in der fortentwickelten Form, die sie inzwischen bei mir gewonnen haben, dargelegt werden sollen. Wenn ich dabei oft weiter aushole und gelegentlich vielleicht etwas weitläufig wäre, so trieb mich dazu der Wunsch, möglichst verständlich zu schreiben und dadurch von vorneherein Zweifel an der Richtigkeit der Betrachtung zu beseitigen, welche sich bei so abstracten Gegenständen nur zu leicht aufdrängen. Zugleich mögen denn dadurch die Bedenken entfernt werden, welche mir von verschiedenen Seiten her hinsichtlich meiner früheren Arbeit geäussert worden sind.

Die nachstehenden Untersuchungen sind wie die damaligen rein mathematischen Inhaltes. Es bleiben ihnen also durchaus die Fragen fern, welche Vortheile aus den bezüglichen mathematischen Resultaten für die Raumanschauung oder überhaupt die Naturerkenntniss gewonnen werden können. Aber es ist vielleicht nicht überflüssig, nach dieser Seite hin den Gegenstand hier zu präcisiren, da nur zu vielfach diese mathematischen Betrachtungen mit eventuellen Anwendungen derselben untermischt und verwechselt werden.

Die Untersuchungen der Nicht-Euklidischen Geometrie haben durchaus nicht den Zweck, über die Gültigkeit des Parallelenaxioms zu entscheiden, sondern es handelt sich in denselben nur um die Frage: *ob das Parallelenaxiom eine mathematische Folge der übrigen bei Euklid aufgeführten Axiome ist;* eine Frage, die durch die fraglichen Untersuchungen definitiv mit *Nein* beantwortet wird. Denn sie haben ergeben, dass man ein in sich consequentes Lehrgebäude auf Grund allein der übrigen Axiome aufbauen kann, welches das Lehrgebäude der Euklidischen Geometrie nur als einen speciellen Fall umfasst.

Aehnliche Untersuchungen könnte man und sollte man mit Bezug auf alle anderen Voraussetzungen, die unseren geometrischen Vorstellungen zu Grunde liegen, anstellen. Es ist die Nicht-Euklidische Geometrie ein erster Schritt in einer Richtung, deren allgemeine Möglichkeit durch Riemann's Arbeit*) „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ vorgezeichnet ist. Ein ähnlicher Schritt ist es, wenn man das Axiom von der unendlichen Länge der Geraden fallen lässt, wie ich dies in meinem vorigen Aufsatze im Anschlusse an die Arbeiten von Riemann und Helmholtz gethan habe. Dann ist ausser der Nicht-Euklidischen Geometrie im Sinne von Lobatchefsky, Bolyai, oder, wie ich sie nenne, der hyperbolischen Geometrie, noch eine zweite Geometrie, die elliptische, möglich; zwischen beiden bildet die gewöhnliche, parabolische Geometrie den Uebergangsfall.

Allerdings sind wohl nicht immer und nicht alle Bearbeiter der Nicht-Euklidischen Geometrie oder verwandter Gegenstände der hier entwickelten Ansicht gewesen. Man möchte dieses wenigstens schliessen, wenn z. B. Bolyai die Abhandlung, in der er das Parallelenaxiom fallen lässt, „über die absolut wahre Raumlehre“ betitelt. Auch in der neuesten Zeit scheint diese Auffassung noch nicht ganz verschwunden, so dass es wohl nicht überflüssig ist, hier ausdrücklich auf dieselbe als eine von der hier vorgetragenen abweichende aufmerksam zu machen.

Man kann fragen, ob solche Untersuchungen, wie sie durch die Nicht-Euklidische Geometrie als Beispiel vertreten sind, noch ausser-

*) Bei Riemann ist die rein mathematische Betrachtung nicht überall von den Betrachtungen mehr speculativen Charakters geschieden, die sich auf die Objectivität der Raumanschauung etc. beziehen. Auf diesen Umstand ist die vielfach über die bez. Dinge verbreitete Unklarheit wohl zum grossen Theile zurückzuführen.

halb des speciellen Zweckes, um dessen willen sie entwickelt werden, anderweitigen Nutzen besitzen und in welcher Richtung derselbe zu suchen ist. Mir scheint ein zweifacher Nutzen zu resultiren, ein rein mathematischer und ein, wenn die Ausdrucksweise gestattet ist, physikalischer. In erster Linie erweitern die Untersuchungen den Kreis unserer mathematischen Begriffe. So haben die Betrachtungen über Parallelentheorie, ganz allgemein zu reden, *einen* wesentlich neuen Begriff geliefert, den Begriff einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse. Dann aber — und das ist die physikalische Wichtigkeit solcher Forschungen — gewinnen wir durch dieselben Material, um die uns geläufigen geometrischen Vorstellungen nach ihrer Nothwendigkeit beurtheilen und eine Abänderung derselben, falls eine solche wünschenswerth scheinen sollte, zweckmässig treffen zu können. Ich kann in dieser Beziehung nur (in etwas freier Fassung) die Schlussworte der Riemann'schen Arbeit citiren:

*„Solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können dazu dienen, dass die Umarbeitung der überkommenen räumlich-mechanischen Vorstellungen nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges der Dinge nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird."*

Aber einseitig würde es sein, wollte man, wie dies gelegentlich von physikalischer oder philosophischer Seite geschieht, in einer solchen eventuellen Verwendung der betreffenden Untersuchungen den einzigen Nutzen derselben erblicken; und es ist jedenfalls nur vortheilhaft, wenn man die Fragen trennt, und zunächst die rein mathematischen Betrachtungen, welche die Grundlagen für die sich anschliessenden speculativen sind, durcharbeitet. —

Die folgenden Ausführungen zerfallen in zwei Abschnitte, die unter einander nur lose zusammenhängen und hier nur vereinigt sein mögen, weil sie sich beide an den früheren Aufsatz anlehnen.

Der erste Abschnitt ist durch den Umstand hervorgerufen, dass in meiner früheren Arbeit die Frage nach dem Begriffe einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse, und die Frage, wie unsere räumlichen Anschauungen zu modificiren wären, falls der Raum ein nicht verschwindendes Krümmungsmass besässe, nicht von einander getrennt behandelt sind. Es scheint dies bei dem Verständnisse der Arbeit eine Hauptschwierigkeit zu bilden, und deshalb sollen die dort mit Bezug auf die erste Frage gewonnenen Resultate hier ohne alle Verbindung mit der zweiten Frage noch einmal ausgesprochen und ihrem Sinne und ihrer Tragweite nach deutlich begrenzt werden. Ich stelle mich dabei auf den rein analytischen Standpunkt und handele sofort von Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen: wenn ich dabei gelegentlich von geometrischen Dingen rede, so geschieht es nur, um abstracte Begriffe an einem concreten Bilde zu erläutern. Es wird dabei die gewöhnliche geometrische Anschauung mit ihrem Parallelen-Axiome zu Grunde gelegt, was ja ein durchaus berechtigtes Hülfsmittel ist, auch wenn die objective Gültigkeit des Parallelenaxioms (oder der anderen Axiome) als nicht feststehend betrachtet wird, da diese uns geläufige Anschauung in sich nicht widersprechend ist, also wirkliche mathematische Beziehungen in Evidenz setzt. Der begriffliche Unterschied zwischen einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse und dem, was ich eine projectivische Mannigfaltigkeit nenne — oder, was das geometrische Analogon ist: der Unterschied zwischen metrischer und projectivischer Geometrie wird dabei in möglichst bestimmter Form hervorgehoben, da so erst die Resultate einen durchsichtigen Inhalt erhalten. Ich glaube nicht, dass die Art und Weise, wie ich diesen Unterschied einführe, wesentlich neu ist: vielmehr wird Jeder, der darüber nachgedacht hat, den Unterschied in ähnlicher Weise auffassen; es ist mir aber nicht bekannt, dass diese Auffassung irgendwo dargestellt wäre und ich möchte sie hier um so weniger unerörtert lassen, als sie nach meiner Meinung für mathematische Fragen überhaupt von fundamentaler Bedeutung ist. Dementsprechend haben diese Auseinandersetzungen eine Ausdehnung gewonnen, hinter welcher die Partieen, die sich insbesondere auf das constante Krümmungsmass beziehen, verhältnissmässig zurücktreten.

In dem zweiten Abschnitte begründe ich denn eingehender die bereits genannte Behauptung: dass man in ähnlicher Weise, wie v. Staudt, die projectivische Geometrie entwickeln kann, auch wenn man das Parallelenaxiom nicht zugiebt. Zu dem Zwecke zeige ich, dass nicht nur für die Ebenen und Geraden des Raumes, sondern überhaupt für jedes Flächen- und Curvensystem, das in einem endlichen Raumstücke ähnliche Lagenverhältnisse besitzt, wie man sie bei den Ebenen und Geraden voraussetzt, innerhalb des begrenzten Raumes die projectivische Geometrie gilt. Diese Untersuchung, die hier zum Beweise der genannten Behauptung geführt wird, scheint an und für sich von Interesse. Sie lehrt einmal ein merkwürdiges Theorem der Analysis situs kennen, insofern der oben angedeutete Satz*) nur von solchen räumlichen Dingen handelt, die bei einer stetigen Verzerrung des Raumes ungeändert bleiben, und kann also in diese noch wenig entwickelte geometrische Disciplin eingereiht werden; andererseits

*) Ich habe diesen Satz bereits in den Gött. Nachrichten 1872. Juni 5. mitgetheilt.

kann man sie als einen Schritt in der oben angedeuteten Untersuchungs-Richtung der Axiome der Geometrie betrachten, insofern sie von weniger Annahmen ausgeht, als man den Ebenen und Geraden des Raumes gewöhnlich beilegt, und doch das Vorhandensein einer Reihe denselben sonst zukommender Eigenschaften nachweist.

---

## Erster Abschnitt.

## Die Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse, die projectivische Mannigfaltigkeit und ihr gegenseitiges Verhältniss.

### § 1.

### Begriff einer Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen, wie er im Folgenden zu Grunde gelegt wird.

Wenn $n$ Veränderliche

$$x_1, x_2, \dots x_n$$

gegeben sind, so constituiren die $n$fach unendlich vielen Werthsysteme, die man erhält, wenn man die $x$ unabhängig von einander die reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt, dasjenige, was hier, in Uebereinstimmung mit der gewöhnlichen Bezeichnungsweise, *eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen* genannt werden soll. Das einzelne Werthsystem

$$(x_1, x_2, \dots x_n)$$

werde als ein *Element* derselben bezeichnet.

Für $n = 3$ kann man — und das ist der ursprüngliche Grundgedanke der analytischen Geometrie — die Elemente der bez. Mannigfaltigkeit durch die Punkte des Raumes, die Mannigfaltigkeit selbst also durch den als Punkt-Aggregat gedachten Raum vorgestellt sein lassen. Wir werden hier und im Folgenden diese anschauliche und uns geläufige Interpretation eines einzelnen Falles benutzen, um uns an ihr jedesmal diejenigen Ideen zu bilden, welche auf den allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriff übertragen werden sollen. Den Punktraum denken wir uns dabei, wie bereits in der Einleitung gesagt, mit den Eigenschaften ausgerüstet, die wir ihm gewöhnlich, d. h. in der Euklidischen Geometrie beilegen.

Im Folgenden soll bei Betrachtung der Mannigfaltigkeiten gewöhnlich von algebraischen Gebilden und algebraischen Processen gehandelt werden. In solchen Fällen mögen wir, wie dies in der neueren

Geometrie geschieht, zu den bisherigen Elementen der Mannigfaltigkeit neue, *complexe* hinzufügen, indem wir den $n$ Variabeln

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

fortan gestatten, beliebige complexe Werthe anzunehmen. Dabei wird es, wieder wie in der Geometrie, dennoch gestattet sein, der Ausdrucksweise nach an einer $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit festzuhalten; der Vergleich mit der in der Geometrie üblichen Redeweise wird alle Schwierigkeiten in dieser Richtung fortheben.

## § 2.

## Transformationen und Transformationsgruppen.

Als eine *Transformation* der Mannigfaltigkeit in sich selbst sei der Uebergang verstanden, welcher von jedem Elemente zu einem (oder einigen) zugeordneten führt. Man mag die Transformation durch $n$ Gleichungen bestimmen, nach welchen das zugeordnete Element von dem jedesmaligen ursprünglichen abhängt. Die Art der Gleichungen und ihre gegenseitige Beziehung ist für den Begriff zunächst gleichgültig; im Folgenden werden wir aber immer voraussetzen, dass sie umkehrbar sind. Die umgekehrten Gleichungen repräsentiren, was die *umgekehrte Transformation* heissen soll. Bezeichnet man, wie im Folgenden geschehen soll, eine Transformation durch einen Buchstaben: $A, B, \ldots$, die Zusammensetzung zweier Transformationen $A, B$ durch das Symbol (Produkt) $AB$, so wird die umgekehrte Transformation von $A$ durch $A^{-1}$ darzustellen sein.

Wir bemerken ferner, dass die Transformationen, die weiterhin vorkommen, wesentlich *algebraische* sind, und dass wir in solchen Fällen die Mannigfaltigkeit immer als eine complexe Mannigfaltigkeit und die Transformation als gleichzeitig für die complexen Elemente eintretend ansehen.

Sei nun eine Reihe von Transformationen $A, B, C \ldots$ gegeben. *Wenn diese Reihe die Eigenschaft besitzt, dass je zwei ihrer Transformationen zusammengesetzt eine Transformation ergeben, die selbst wieder der Reihe angehört, so soll sie eine Transformationsgruppe*) heissen.*

---

*) Name wie Definition sind herübergenommen von der analogen Begriffsbildung der Substitutionstheorie, die sich nur dadurch von der hier vorgetragenen unterscheidet, dass die in ihr betrachteten Mannigfaltigkeiten aus einer endlichen Zahl discreter Elemente bestehen. In einem früheren Aufsatze (diese Annalen IV, 1) haben Lie und ich das, was hier Transformationsgruppe heisst, als ein „geschlossenes System von Transformationen" bezeichnet.

Beispiele für diesen Begriff mag man sich an der durch den Punktraum versinnlichten Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen bilden. Eine jede Bewegung, eine jede Collineation ist eine räumliche Transformation. Eine *Gruppe* bilden z. B. die Gesammtheit aller Bewegungen; denn zwei Bewegungen zusammengesetzt ergeben eine neue Bewegung. Eine *Gruppe* bilden ferner etwa die Gesammtheit aller Collineationen, insbesondere diejenigen Collineationen, die ein bestimmtes Gebilde, z. B. eine Fläche zweiten Grades, in sich überführen. Es ist übrigens zum Begriffe der Gruppe durchaus nicht wesentlich, dass die sie constituirenden Transformationen, wie in den genannten Beispielen, an Zahl unendlich sind und sich continuirlich an einander anschliessen, obwohl dies der Charakter derjenigen Gruppen sein wird, die im Folgenden gebraucht werden. Vielmehr bilden z. B. die unendlich vielen ruckweise auf einander folgenden Verschiebungen, welche eine Sinuslinie mit sich selbst zur Deckung bringen, eine Gruppe; ebenso die in endlicher Anzahl vorhandenen Bewegungen, welche einen Würfel mit sich selbst zur Deckung bringen*). Aehnliche Unterscheidungen finden bei den Transformationsgruppen in beliebigen Mannigfaltigkeiten ihre Stelle, doch mag die nähere Erörterung der sich anschliessenden Fragen als für das Folgende unnöthig hier unterbleiben.

Zwei Transformationsgruppen heissen *ähnlich***), wenn man die Transformationen der einen Gruppe so den Transformationen der anderen Gruppe zuordnen kann, dass die Zusammensetzung entsprechender Transformationen entsprechende Transformationen ergiebt. Eine Transformationsgruppe, welche mit einer gegebenen ähnlich ist, erhält man z. B., wenn man mit allen Transformationen $A$ der gegebenen Gruppe eine Transformation $C$ und deren umgekehrte $C^{-1}$ in der Art verbindet, dass die Transformationen $C^{-1}AC$ entstehen. Man kann dies so aussprechen. Die Transformationen $A$ führen die ursprünglichen Elemente der Mannigfaltigkeit bez. in neue über. Auf die ursprünglichen und die neuen wende man gleichzeitig die Transformation $C$ an. So drücken die Transformationen $C^{-1}AC$ die Beziehung aus, welche zwischen den Elementen besteht, die durch $C$ aus den früher zugeordneten hervorgehen.

Man kann unter gewissen Einschränkungen beweisen, dass je zwei ähnliche Gruppen in diesem Sinne aus einander durch Anwendung

---

*) In einem Aufsatze: Sur les groupes de mouvements (Annali di matematica. Ser 2. t. II) hat Camille Jordan alle Gruppen von Bewegungen aufgestellt.

**) Man vergl. immer die analoge Terminologie und Begriffsbildung der Substitutionstheorie.

einer Hülfstransformation $C$ hervorgehen; für das Folgende haben wir die Begründung und die Begrenzung dieses Satzes nicht nöthig, *wir wollen vielmehr unter zwei ähnlichen Transformationsgruppen schlechthin solche zwei verstehen, die durch Anwendung einer Transformation $C$ aus einander entstanden sind.* Dabei braucht $C$ noch durchaus keine eindeutige Transformation zu sein; sie kann recht wohl vieldeutig, selbst unendlich vieldeutig sein*).

## § 3.

## Die Hauptgruppe der räumlichen Transformationen.

Die Geometrie kann sich, unseren gewöhnlichen Vorstellungen nach**), überhaupt nur mit solchen Eigenschaften der räumlichen Gebilde befassen, welche unabhängig sind von der Stelle im Raume, die von den Gebilden eingenommen wird, sowie von der absoluten Grösse der Gebilde. Auch kann sie nicht (immer ohne Zuhülfenahme eines dritten Körpers) zwischen den Eigenschaften eines Körpers und denen seines Spiegelbildes unterscheiden. Durch diese Sätze ist eine Gruppe räumlicher Transformationen charakterisirt — sie mag die *Hauptgruppe* genannt werden —, deren Transformationen die Gesammtheit der geometrischen Eigenschaften eines Gebildes unberührt lassen. Es setzt sich diese Gruppe zusammen aus den sechsfach unendlich vielen Bewegungen, aus den einfach unendlich vielen Aehnlichkeitstransformationen und aus der Transformation durch Spiegelung an einer Ebene.

Hatten wir seither den Punktraum schlechthin als eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit aufgefasst, so können wir jetzt eine nähere Bestimmung hinzufügen, welche durch das Vorhandensein der Hauptgruppe räumlicher Transformationen bedingt wird:

*Der Punktraum ist eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen, bei deren Behandlung man nur auf solche Eigenschaften auftretender Gebilde zu achten hat, die durch die Transformationen der Hauptgruppe ungeändert bleiben****).

---

*) Z. B. sollen, für $n = 2$, noch als ähnlich bezeichnet sein die Gruppen:

$$x_1' = x_1 + a_1, \quad x_2' = x_2 + a_2$$

und

$$y_1' = b_1 y_1, \qquad y_2' = b_2 y_2,$$

weil sie durch die Substitution

$$x_i = \log y_i, \quad x_i' = \log y_i'$$

aus einander hervorgehen.

**) In der Nicht-Euklidischen Geometrie ist dies insofern anders, als die Verwandtschaft der Aehnlichkeit nicht existirt.

***) Dem Raume an und für sich kann man bekanntlich, nach der Plücker'schen Auffassung, beliebig viele Dimensionen zuertheilen, je nach dem Gebilde

Man übersieht bereits hier, wie von einer bestimmten Behandlung einer Mannigfaltigkeit von $n$ Dimensionen erst dann die Rede sein kann, wenn eine Transformationsgruppe gegeben ist, welche die Eigenschaften, auf welche man achten will, charakterisirt als die durch die Transformationen der Gruppe unveränderlichen Relationen. Je umfangreicher die Gruppe ist, um so geringer wird die Zahl der bleibenden Eigenschaften und umgekehrt. Bestände die Gruppe aus der identischen Transformation, d. h. aus derjenigen, die jedes Element sich selbst zuordnet, so würde jedes Element der Mannigfaltigkeit bei deren Behandlung ein individuelles Interesse besitzen.

## § 4.

## Die verschiedenen Methoden der Geometrie sind durch eine zugehörige Transformationsgruppe charakterisirt.

Wenn man von bloss formellen Unterschieden absieht — also etwa davon, ob die Art der Behandlungsweise in fortwährender Verbindung mit der räumlichen Anschauung oder unter Zuhülfenahme eines rechnenden Algorithmus geschieht — so wird man den Unterschied der in der Geometrie üblichen Methoden in der Art der bei der Behandlung adjungirten Transformationsgruppe erblicken müssen. Für alle geometrischen Betrachtungen ist, wie gesagt, von vornherein die Hauptgruppe der Transformationen gegeben. Wollte man nur einen Theil ihrer Transformationen in Betracht ziehen, so erhielte man solche geometrische Eigenschaften der räumlichen Gebilde, welche sich auf fest gedachte gegebene Elemente beziehen, die unter sich natürlich die eigentlichen, nicht von der Annahme fester Elemente abhängigen geometrischen Beziehungen begreifen. Aber es bleibt unbenommen, der allgemeinen geometrischen Betrachtung statt der Hauptgruppe eine weitere, die Hauptgruppe umfassende Gruppe von Transformationen zu Grunde zu legen. Und in der Einführung solcher allgemeinerer Gruppen an Stelle der Hauptgruppe besteht das Wesen der verschiedenen geometrischen Methoden, die sich in der Neuzeit entwickelt haben, insbesondere, worauf es uns hier ankommt, das Wesen *der projectivischen Geometrie.* Sie fasst an den räumlichen Dingen nur das auf, was durch collineare Umformungen nicht geändert wird, *sie adjungirt sich also in dem eben erörterten Sinne die Gruppe aller collinearen Umformungen.* Die Transformationen der

---

welches man als Raumelement zu Grunde legen will. Aber die Hauptgruppe der Transformationen, welche die geometrischen Eigenschaften ungeändert lässt, ist von der Wahl des Raumelementes unabhängig. Der Raum erscheint also als das Bild einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist, bei der jedesmal eine Transformationsgruppe von demselben Charakter adjungirt ist. Vgl. den folgenden Text.

Hauptgruppe sind dann*) dadurch definirt, dass sie diejenigen reellen Collineationen sind, welche ein individuelles Gebilde, den sogenannten unendlich fernen imaginären Kreis ungeändert lassen. Die nicht projectivischen Eigenschaften räumlicher Gebilde erscheinen als covariante Beziehungen der Gebilde zum imaginären Kreise. Ein anderes Beispiel, welches hier, um die Verschiedenartigkeit der möglichen Methoden hervorzuheben, erwähnt sein mag, giebt diejenige Behandlungsweise geometrischer Dinge, wie sie in der sog. *Analysis situs* gehandhabt wird. Hier besteht die Gruppe der adjungirten räumlichen Transformationen aus denjenigen Raumtransformationen, welche man Verzerrungen (Deformationen) des Raumes nennt und die dadurch definirt sind, dass sie sich aus unendlich kleinen reellen Raumtransformationen zusammensetzen lassen. Indem bei ihr der Begriff des Reellen wesentlich, der Begriff der Algebraischen zunächst überhaupt nicht vorhanden ist, so ist bei ihr das Punktgebiet des Raumes nicht durch complexe Punkte zu erweitern.

Eine nähere Durchführung des hier entwickelten Gesichtspunktes zur Classificirung der verschiedenen geometrischen Methoden scheint sehr interessant, es würde eine solche aber hier ausserhalb des eigentlichen Thema's liegen und es mag daher bei den genannten Beispielen, die zur Illustration der allgemeinen Betrachtungen des folgenden Paragraphen ausreichen, sein Bewenden haben**).

## § 5.

### Behandlungsweise der Mannigfaltigkeiten aus $n$ Dimensionen.

Aus den vorigen beiden Paragraphen ist ersichtlich, wie die Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit von $n$ Dimensionen *durch die Transformationsgruppe charakterisirt wird, welche man adjungirt.* Alle diejenigen Behandlungsweisen stimmen dabei im Wesen überein und können durch passende Einführung neuer Variabeln auch in formelle Uebereinstimmung gebracht werden, welche *ähnliche* Transformationsgruppen benutzen. Es ist das bei der in § 3. entwickelten Definition von ähnlichen Gruppen selbstverständlich. Denn eine einmalige Transformation der Mannigfaltigkeit in sich selbst (die wir dort mit dem Buchstaben $C$ bezeichnet hatten) kann auch als eine Einführung

*) Man muss bei der projectivischen Geometrie verschiedene Stadien der Entwickelung unterscheiden. Lange Zeit dachte man bei einer Collineation immer an eine reelle Collineation, und noch immer wohl ist die Anschauung, dass man in der projectivischen Geometrie alle vorkommenden Grössen als unbedingt complex veränderlich auffassen soll, nicht überall durchgedrungen.

**) Ich habe seitdem versucht, diese Verhältnisse in einem Programme: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen 1872, Bei A. Dichert) allgemein zu entwickeln (Dec. 72.).

neuer Variabeln zur Behandlung der Mannigfaltigkeit, als eine Coordinatentransformation, angesehen werden, wobei denn die Gruppe der Aenderungen, welche man als nicht in Betracht kommend ansieht, unberührt dieselbe bleibt.

Als einfachste Transformationsgruppe erscheint die Gruppe aller *linearen* Transformationen, hierunter diejenigen verstanden, welche statt der ursprünglichen Variabeln gebrochene lineare Functionen derselben mit gemeinsamem Nenner einführen. Die auf sie gegründete Behandlungsweise*) der Mannigfaltigkeit — ich will sie die *projectivische* nennen — ist es, deren sich die *neuere Algebra* bedient (wobei es nur als ein Mittel zur übersichtlicheren Darstellung, allerdings als ein sehr wesentliches und der Natur der Sache durchaus entsprechendes Mittel erscheint, wenn man statt der $n$ Veränderlichen, durch die ursprünglich das Element der Mannigfaltigkeit bestimmt wurde, $(n+1)$ homogene einführt). Der Namen „*Invariantentheorie*", den man der neueren Algebra beilegt, bezeichnet recht gut das Wesen, welches nach der hier dargelegten Auffassung überhaupt jeder Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit zukommt; es handelt sich immer darum bei gegebenem Umfange der Aenderungen, die invarianten Beziehungen zu entdecken.

Zu einer anderen Behandlung der Mannigfaltigkeiten, die aber in der vorangeführten projectivischen Behandlung enthalten ist, insofern ihre Transformationsgruppe aus einem Theile der Gruppe aller linearen Transformationen besteht, wird man geführt, wenn man die Betrachtungen der gewöhnlichen metrischen Geometrie, bei denen die Hauptgruppe räumlicher Transformationen zu Grunde gelegt ist, auf beliebig viele Veränderliche verallgemeinert**). Die bezüglichen Transformationen erscheinen vom Standpunkte der projectivischen Betrachtung als diejenigen reellen linearen Transformationen, welche ein individuelles Gebilde, das durch eine lineare und eine quadratische Gleichung vorgestellt wird, ungeändert lassen. Es mag die hier anknüpfende Behandlungsweise der Mannigfaltigkeit als die *gewöhnliche metrische* bezeichnet sein.

Man könnte sich ferner eine Behandlungsweise denken, welche der *Analysis situs* entspräche etc. etc.

Besonders betont sei noch einmal, dass *ähnliche* Transformations-

---

*) Eine der frühesten Behandlungen des allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriffs findet sich in Grassmann's linearer Ausdehnungslehre von 1844. Seine Methode ist wenigstens in vielfacher Hinsicht eben die hier gemeinte projectivische, was hier Element der Mannigaltigkeit heisst, heisst bei ihm extensive Grösse.

**) Hierher sind beispielsweise alle derartigen Betrachtungen zu rechnen, welche die gew. Krümmungstheorie auf $n$ Dimensionen übertragen etc.

gruppen zu identischen Behandlungsweisen Anlass geben. Projectivisch mag deshalb geradezu jede Behandlungsweise heissen, welche eine Gruppe adjungirt, die durch passende Einführung neuer Veränderlichen auf die Gesammtheit der linearen Transformationen umgeformt werden kann etc.

Sodann sei noch auf einen Umstand aufmerksam gemacht, der zwar nicht im Nächstfolgenden hervortritt, der aber für den zweiten Abschnitt dieses Aufsatzes von Bedeutung wird. Es ist, dass beliebige Transformationen einer Mannigfaltigkeit, sofern sie die implicite immer vorausgesetzten Stetigkeitseigenschaften haben, *für unendlich kleine Particen der Mannigfaltigkeit durch lineare Transformationen ersetzt werden können.* Welcher Art also auch die Behandlungsweise ist, der man eine Mannigfaltigkeit von $n$ Dimensionen unterwerfen mag, *für die* $(n-1)$ *fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche von den von einem Elemente aus möglichen Fortschreitungsrichtungen zu benachbarten Elementen gebildet wird, ist sie in der projectivischen Behandlungsweise enthalten.*

## § 6.

## Die Mannigfaltigkeit von constantem nicht verschwindendem Krümmungsmasse.

Die vorhergehenden Paragraphen enthalten die nothwendigen Auseinandersetzungen, um nunmehr den Begriff einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse einführen und sein Verhältniss zu dem Begriffe der projectivischen Mannigfaltigkeit erörtern zu können.

Wenn man einer Mannigfaltigkeit ein bestimmtes constantes, nicht verschwindendes Krümmungsmass beilegt*), so hat man dem blossen Begriffe einer $n$ fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ganz so, wie in den im vorigen Paragraphen aufgeführten Beispielen, als nähere Bestimmung eine Transformationsgruppe zugefügt, die durch die Forderung freier Beweglichkeit starrer Körper in bekannter Weise construirt wird**). Der Werth des dann nothwendig constanten Krümmungsmasses kann noch durch bestimmte weitere Forderungen näher umgrenzt und endlich durch Einführung der Längeneinheit numerisch festgelegt werden (vgl. § 7.).

Man kann nun die Frage aufwerfen, ob die so eingeführte Be-

*) Man vergl. hierzu ausser der Riemann'schen Schrift namentlich Beltrami's: Teoria generale degli spazii di curvatura costante. (Annali di Matematica. Serie 3, t. II.). Dieselbe ist von Hoüel übersetzt im Journal de l'Ecole Normale Supérieure t. IV.

**) Vergl. die Arbeiten von Riemann und Helmholtz, auf welche sich auch die im Texte gebrauchte geometrische Redeweise bezieht.

handlungsweise zu der projectivischen Behandlung der Mannigfaltigkeit in einer ähnlichen Beziehung steht, wie nach der bez. Bemerkung des vorigen Paragraphen die gewöhnliche metrische Methode; anders ausgedrückt; Die bei der gewöhnlichen metrischen Methode zu Grunde gelegte Gruppe war bei passender Coordinatenbestimmung in der Gruppe der linearen Transformationen, allgemein zu reden also in einer mit dieser Gruppe ähnlichen Gruppe enthalten: trifft das bei der nun vorliegenden Behandlungsweise auch zu?

Die so gestellte Frage findet ihre Beantwortung in den Arbeiten Beltrami's*). Derselbe zeigt nämlich: *dass man in einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse die Variabeln so wählen kann, dass die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt sind; dass ferner bei dieser Coordinatenbestimmung die Transformationen, welche die Massverhältnisse ungeändert lassen, durch lineare Gleichungen dargestellt werden.* Von dem hier vorliegenden Gesichtspunkte aus wird man das dahin aussprechen: *dass die Transformationsgruppe, welche bei einer Mannigfaltigkeit adjungirt wird, wenn man ihr constantes Krümmungsmass beilegt, bei passender Coordinatenbestimmung in der Gruppe der linearen Transformationen enthalten ist,* woraus man sofort schliessen wird: *dass die Behandlung einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse in der projectivischen Behandlung enthalten ist.*

Ich habe in meiner früheren Arbeit namentlich noch gezeigt, dass die Massbestimmung, wie man sie unter Annahme eines constanten Krümmungsmasses erhält, mit der projectivischen zusammenfällt, welche man nach Cayley's Vorgange unter Zugrundelegung einer quadratischen Gleichung aufbauen kann, und dieses ist nach der analytischen Seite hin das wesentliche Resultat meiner Arbeit. Ich hatte damals dem Resultate unter blossem Hinweis auf die Theorie mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten die geometrische Einkleidung gegeben: dass die auf einen passenden Kegelschnitt, bez. eine passende Fläche zweiten Grades gegründete Cayley'sche Massbestimmung ein äquivalentes Bild für die Massbestimmung in Mannigfaltigkeiten constanter Krümmung bez. von zwei und drei Dimensionen abgiebt. Und im Zusammenhange mit dem Vorhergehenden wird man das Resultat so formuliren: *Die Gruppe von Transformationen, welche die Massbestimmung in einer Mannigfaltigkeit constanter Krümmung ungeändert lassen, besteht bei passender Coordinatenbestimmung aus der Gruppe derjenigen linearen Transformationen, welche eine quadratische Gleichung in sich überführen.*

*) Vgl. besonders wieder die Teoria generale etc.

Ich muss hier einen Unterschied erwähnen, der zwischen der von Beltrami eingeschlagenen Darstellungsweise und der meinigen Statt hat. Bei Beltrami wird immer nur von reellen Werthen der Veränderlichen gesprochen, wenigstens die complexe Variabilität der Argumente nicht principiell eingeführt. In meiner vorigen Arbeit dagegen fasse ich, wie auch hier, zunächst die Veränderlichen als complexe Veränderliche auf, und führe erst hinterher die Beschränkung auf das reelle Werthgebiet ein. Dadurch ist es möglich den Aussagen, wie die vorstehenden sind, eine vollkommen allgemeine Form zu geben; achtet man nur auf reelle Werthe der Variabeln, so treten eine Reihe Beschränkungen hinzu, über welche man meinen früheren Aufsatz und die §§ 8, 9 dieses Abschnittes vergleichen mag.

Sodann erscheint bei Beltrami die Mannigfaltigkeit constanter Krümmung als durch eine quadratische Gleichung aus einer gewöhnlich metrischen Mannigfaltigkeit von einer Dimension mehr ausgeschieden; während in meiner früheren Arbeit und auch hier von einer solchen umfassenderen Mannigfaltigkeit nicht die Rede ist. Hiermit hängt eine nachm einer Auffassung zu ändernde Behauptung bei Beltrami zusammen, auf die ich hier kurz eingehen will, um den Gegenstand wenigstens berührt zu haben, wenn er auch den Gang der allgemeinen Betrachtung unterbricht. Es heisst dort: in der Mannigfaltigkeit von constantem positiven Krümmungsmasse gelte nicht allgemein das Axiom von der Geraden, d. h. die Forderung, dass die geodätische Linie durch zwei ihrer Punkte vollkommen bestimmt sei. Beltrami's Ueberlegung ist dabei etwa folgende: Man betrachte eine Kugel als Bild einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von constantem positiven Krümmungsmasse; ihre grössten Kreise repräsentiren die geodätischen Linien. Ein grösster Kreis ist nun im Allgemeinen durch zwei seiner Punkte bestimmt, nicht aber, wenn diese Punkte einander diametral gegenüber stehen. Aehnlich wird es, so schliesst Beltrami, überhaupt bei Mannigfaltigkeiten auch von mehr Dimensionen sein, die positives Krümmungsmass besitzen. — Aber die Kugel ist nach den Auseinandersetzungen meines vorigen Aufsatzes (§ 10.) nicht das einfachste Bild für eine Mannigfaltigkeit von positivem constantem Krümmungsmasse, sondern dies wird durch die Strahlen eines Strahlenbündels vorgestellt, wobei die von den Strahlen gebildeten Ebenen die geodätischen Curven vertreten. Eine solche Ebene ist vollständig durch zwei der Strahlen bestimmt. Wenn es auf der Kugel nicht so ist, so liegt das daran, weil sie vermöge einer *zweideutigen* Verwandtschaft auf ihr centrales Strahlenbündel bezogen ist. Wollte man ein Strahlenbündel auf eine beliebig gelegene Fläche $n^{\text{ten}}$ Grades in gleicher Weise beziehen, so dass als Abstand zweier Punkte der Fläche der Winkel erscheint, den ihre Verbindungsgeraden mit dem Centrum des Bündels einschliessen, so würden gelegentlich $n$ Punkte nicht ausreichen, um eine geodätische Curve eindeutig zu bestimmen. Aber das würde in ganz ähnlicher Weise bei anderen Massbestimmungen, auch der Massbestimmung von constantem negativem Krümmungsmasse der Fall sein können und hängt mit dem positiven constanten Krümmungsmasse als solchem gar nicht zusammen*).

Endlich mag auch noch die folgende Bemerkung hier ihre Stelle finden, die bestimmt ist, die Fruchtbarkeit der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten constanten Krümmungsmasses auch für andere Fragen, als diejenigen, welche man gewöhnlich mit ihr in Verbindung bringt, hervorzuheben, und die zugleich die Aussage, dass ähnliche Transformationsgruppen identische Behandlungsweisen nach sich ziehen, illustrirt. Jede Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit, welche die linearen Transformationen in Betracht zieht, die eine quadratische Gleichung ungeändert lassen, muss nach dieser Behauptung mit der Behandlung der Mannigfaltigkeit als einer solchen von constanter Krümmung übereinstimmen. Nun aber habe ich bei einer früheren Gelegenheit gezeigt (diese Annalen V, 2), dass die Theorie der binären Formen eine Transformationsgruppe benutzt, die mit der Gruppe der linearen Transformationen eines Kegelschnittes in sich selbst ähnlich ist, dass ein Gleiches ferner stattfindet mit den collinearen und dualistischen Umformungen des Raumes und den linearen Transformationen einer quadratischen Gleichung zwischen fünf (sechs homogenen) Variabeln in sich selbst. Man muss zu diesem Zwecke als Element der geraden Linie nur das Punktepaar, als Element des Raumes den linearen Linien-Complex betrachten. Wir werden dieses Resultat jetzt so aussprechen können: *Die Theorie der binären und quaternären Formen ist bez. identisch mit der Theorie einer Mannigfaltigkeit constanten Krümmungsmasses von zwei und von fünf Dimensionen.* Jede Eigenschaft binärer Formen also ist auch eine Eigenschaft der Nicht-Euklidischen Geometrie in der Ebene, und umgekehrt. Die hiermit angedeutete interessante Analogie weiter auszuführen, ist hier nicht der Ort. Aber es sei noch einmal betont, dass so schlechthin ausgesprochen, wie vorstehend geschehen, die Analogie nur gilt, sowie von dem Unterschiede von Reell und Imaginär abstrahirt wird; auch sind, was nicht ausdrücklich erwähnt wurde, die vorkommenden quadratischen Gleichungen als allgemeine ihrer Art d. h. als Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante vorausgesetzt.

---

*) Wenn es im Raume vom Krümmungsmasse Null keine geschlossene Fläche giebt von constantem positivem Krümmungsmasse, auf der sich die geodätischen Linien in weniger als zwei Punkten schneiden, so hat man darin vielmehr eine Eigenschaft der dem Raume beigelegten Massbestimmung zu erblicken.

§ 7.

## Ableitung des Begriffs einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse aus demjenigen der projectivischen Mannigfaltigkeit.

Die Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen begründen nun die folgende Methode, um zu der Vorstellung einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung zu gelangen:

1) Man entwickele die projectivische Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen, im Anschluss daran den Begriff algebraischer Gebilde und complexer Elemente.

2) Man gründe auf ein Gebilde, welches durch eine quadratische Gleichung (von nicht verschwindender Determinante) zwischen den projectivischen Coordinaten dargestellt wird, zunächst ohne auf den Unterschied von Reell und Imaginär zu achten, die Cayley'sche Massbestimmung.

3) Man beschränke sich auf die Betrachtung quadratischer Gleichungen mit reellen Coefficienten, und untersuche, welche besonderen Eigenschaften die auf eine solche Gleichung gegründete Massbestimmung für die reellen Elemente besitzt je nach der *Art* der gegebenen Gleichung. Unter der Eintheilung der quadratischen Gleichungen mit reellen Coefficienten in *Arten* ist dabei die Unterscheidung derselben nach ihrem Verhalten gegenüber reellen Umformungen in die Summe von Quadraten gemeint. Bei jeder solchen Umformung ist bekanntlich der Unterschied in der Zahl der resultirenden positiven und negativen Quadraten ein constanter, und hierauf gründet sich die fragliche Eintheilung.

Hat die zu Grunde gelegte und auf die Summe von Quadraten transformirte Gleichung lauter übereinstimmende Zeichen, so ergiebt die auf sie gegründete Cayley'sche Massbestimmung die Vorstellung der Mannigfaltigkeit von constanter *positiver* Krümmung. Die constante *negative* Krümmung resultirt, wenn nur ein Zeichen von den übrigen verschieden vorausgesetzt wird. Die auf quadratische Gleichungen der übrigen Arten gegründeten Massbestimmungen finden in der Theorie der Mannigfaltigkeiten von constanter Krümmung, wie sie gewöhnlich vorgetragen wird, keine Stelle. Denn bei der letzteren setzt man von vorneherein voraus, dass die Entfernung reeller consecutiver Elemente reell sei, man nimmt entsprechend das Bogenelement als eine *definite* quadratische Form der Coordinaten-Differentiale an, und diese Annahme passt nicht auf die noch übrigen Arten von quadratischen Gleichungen. Um diese Verhältnisse deutlich zu übersehen, denke man an die Cayley'sche Massbestimmung, die man im Raume auf eine Fläche zweiten Grades gründen kann. Ist die Fläche eine imaginäre, so hat man die positive Krümmung, ist sie ein Ellipsoid oder zweischaliges Hyperboloid, so herrscht im Innern die negative Krümmung. Ist aber die Fläche ein einschaliges Hyperboloid, so giebt es keine Partie des Raumes, von deren Punkten aus nicht reelle Kegel an die Fläche gingen; diese Kegel bezeichnen Fortschreitungsrichtungen von der Länge Null; das Bogenelement wird nicht mehr durch eine definite Form der Differentiale dargestellt (vergl. hierzu die §§ 11., 12., 16., 18. meines früheren Aufsatzes).

Auf diese Weise ist der Begriff einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmasse gewonnen. Man mag hinterher die Untersuchung durchführen, welche Verhältnisse in einer Mannigfaltigkeit durch die blosse Forderung der freien Beweglichkeit starrer Körper definirt werden. Es ist diese freie Beweglichkeit eine Eigenschaft der Cayley'schen Massbestimmung; die Untersuchung zeigt, dass ihre Annahme auch nothwendig zur Cayley'schen Massbestimmung hinführt*). Dabei erhält man zunächst *alle* Fälle der Cayley'schen Massbestimmung und die beiden, gewöhnlich allein betrachteten, erscheinen erst als die einzig möglichen, wenn man die Forderung hinzufügt, dass das Bogenelement durch eine definite Form der Differentiale dargestellt wird (oder eine äquivalente Forderung).

---

In den nun folgenden beiden Paragraphen mögen einige Bemerkungen ihre Stelle finden, welche mit dem Vorhergehenden wenig zusammenhängen, die aber einmal als eine Ergänzung meines vorigen Aufsatzes in einzelnen Punkten zu betrachten sind, andererseits auch bei dem zweiten hier folgenden Abschnitte vorausgesetzt werden müssen.

## § 8.

## Ableitung der projectivischen Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung.

Der vorhin skizzirte Weg, vermöge dessen man von den projectivischen Vorstellungen zu der Vorstellung eines constanten Krümmungsmasses gelangt, zeichnet vor, wie das Umgekehrte zu leisten ist und es mag hier nur kurz die hauptsächliche dabei zu benutzende Formel hingestellt werden. Dabei sei es gestattet, den Ausdruck so zu wählen, dass er sich an das für zwei oder drei Dimensionen in meinem früheren Aufsatze in der Ebene und im Raume aufgestellte

---

*) Man kann diesen Beweis sehr einfach stellen, worauf ich gelegentlich zurückzukommen gedenke.

Bild anschliesst. Wir denken uns also in der Ebene oder im Raume Massverhältnisse gegeben, wie sie sich unter der Annahme constanter Krümmung gestalten; die gerade Linie sei als kürzeste Linie zwischen zwei Punkten definirt. Wie bestimmt man diejenigen Coordinaten, in welchen die Gerade durch lineare Gleichungen ausgedrückt wird? Aus der projectivischen Geometrie ist bekannt, dass die bez. Coordinaten die relativen Werthe gewisser Doppelverhältnisse vorstellen und die Frage kommt also auf die folgende zurück: *Welche Function der gegenseitigen Entfernungen von vier Punkten einer Geraden ist deren Doppelverhältniss?*

Seien vier Punkte einer Geraden: $x, y, z, t$ gegeben. Auf der Geraden befinden sich gemäss der Cayley'schen Vorstellung zwei unendlich ferne Punkte $o, o'$ und es ist die Entfernung etwa von $x$ und $y$:

$$(x, y) = c \,.\, \log\,[x, y, o, o'],$$

wo $c$ eine charakteristische Constante*) und $[x, y, o, o']$ das Doppelverhältniss von $x, y$ zu $o, o'$ bedeutet. Hieraus:

$$[x, y, o, o'] = e^{\frac{(x y)}{c}}.$$

Nun ist aber:

$$[x, y, o, o'] = 1 - [x, o, y, o'];$$

ferner:

$$[x, y, z, t] = \frac{[x, o, z, o']\,[y, o, t, o']}{[x, o, t, o']\,[y, o, z, o']}.$$

Also:

$$[x, y, z, t] = \frac{\left(e^{\frac{(x, z)}{c}} - 1\right) . \left(e^{\frac{(y, t)}{c}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{(x, t)}{c}} - 1\right) . \left(e^{\frac{(y, z)}{c}} - 1\right)}.$$

und als diese Function der Entfernungen vier in gerader Linie befindlicher Punkte ist also das Doppelverhältniss zu definiren, — womit der Uebergang zur projectivischen Geometrie vermittelt ist**). Das

---

*) $-\frac{1}{4c^2}$ ist das Krümmungsmass.

**) Man kann, da für 4 in gerader Linie liegende Punkte offenbar

$$\frac{e^{\frac{(x, z)}{2c}} . e^{\frac{(y, t)}{2c}}}{e^{\frac{(x, t)}{2c}} . e^{\frac{(y, z)}{2c}}} = 1,$$

die Formel des Textes auch so schreiben:

$$[x, y, z, t] = \frac{\left(e^{\frac{(x, z)}{2c}} - e^{-\frac{(x, z)}{2c}}\right) . \left(e^{\frac{(y, t)}{2c}} - e^{-\frac{(y, t)}{2c}}\right)}{\left(e^{\frac{(x, t)}{2c}} - e^{-\frac{(x, t)}{2c}}\right) . \left(e^{\frac{(y, z)}{2c}} - e^{-\frac{(y, z)}{2c}}\right)}$$

heisst: hat man unter Voraussetzung constanten Krümmungsmasses irgend ein Formelsystem, welches gestattet, die Entfernung zweier Punkte zn bestimmen, nennt dann die aus den Entfernungen von vier Punkten einer kürzesten Linie nach der vorstehenden Formel gebildete Function ein Doppelverhältniss, führt endlich eine auf derartige Doppelverhältnisse gegründete Coordinatenbestimmung ein, so wird die Gleichung der kürzesten Linie linear, und die projectivische Behandlung kann beginnen.

## § 9.

## Besondere Betrachtung der reellen Elemente. Einführung idealer Elemente.

Sei wieder in der Ebene, die uns die Mannigfaltigkeiten constanter Krümmung überhaupt vertreten soll, eine auf einen Kegelschnitt gegründete projectivische Massbestimmung gegeben, so mögen wir zuerst eine metrische Coordinatenbestimmung treffen, etwa indem wir den Puukt durch seine Abstände von zwei festen Geraden definiren, sodann eine zweite, projectivische Coordinatenbestimmung, nach Anleitung des vorigen Paragraphen.

Ist das constante Krümmungsmass positiv, so werden den reellen Coordinatenwerthen der einen Art immer reelle Coordinatenwerthe der anderen entsprechen, und zwar in der Weise, dass zu jedem Paare metrischer Coordinaten ein Paar projectivischer zugehört, umgekehrt aber zu jedem Paare projectivischer unendlich viele Paare metrischer, da der Abstand zweier Punkte eine reelle Periode hat, die man beliebig oft zufügen kann (vergl. § 11. des früheren Aufsatzes).

Ist dagegen das Krümmungsmass negativ, so entsprechen reellen metrischen Coordinaten immer auch reelle projectivische, nicht aber umgekehrt. Die Punkte nämlich, welche ausserhalb des dann reellen Fundamental-Kegelschnittes liegen, bilden mit den Punkten innerhalb reelle Doppelverhältnisse, haben aber von ihnen imaginäre Abstände.

Unter rein analytischem Gesichtspunkte hat dieser Umstand durchaus nichts Merkwürdiges; aber man kann die Frage etwas anders stellen und dann verlangt sie eine besondere Erledigung, die denn hier gegeben werden soll, weil sie im folgenden Abschnitte benutzt wird.

---

und setzt man nun, wie bei der gewöhnlichen Winkelbestimmung (vergl. meinen früheren Aufsatz), $c = \frac{2}{\sqrt{-1}}$, so kommt die bekannte Formel:

$$[x, y, z, t] = \frac{\sin(x, z) \cdot \sin(y, t)}{\sin(x, t) \cdot \sin(y, z)}.$$

Gesetzt, man befände sich auf der Ebene von constanter, negativer Krümmung und man könne sich auf derselben frei bewegen; wie wird man geometrisch die Punkte, welche reelle Doppelverhältnisse aber imaginäre Abstände besitzen, definiren können? Oder in etwas anderer Form: Giebt es geometrische Eigenschaften des durch Bewegung zugänglichen Gebietes der Ebene, die man in übersichtlicher Weise ausdrückt, wenn man solche *ideale* Punkte — deren Zulässigkeit aus ihrer analytischen Definition erhellt — adjungirt?

Erinnern wir zum Zwecke der Beantwortung an die Art und Weise, wie in der gewöhnlichen (parabolischen) Geometrie die uneigentlichen Elemente, d. h. die unendlich fernen und die complexen Elemente definirt werden. Der unendlich ferne Punkt ist nur der Repräsentant des durch ihn gehenden Parallelstrahlenbüschels: weil dieser Büschel alle wesentlichen projectivischen Eigenschaften besitzt, die einem Büschel von Geraden zukommen, welche durch einen wirklichen Punkt gehen, ist die Ausdrucksweise: „ein unendlich ferner Punkt" gestattet und brauchbar. Ganz ähnlich ist es mit den Ausdrucksweisen: unendlich ferne Gerade, complexer Punkt, complexe Gerade etc., wie ja hier wohl nicht weiter erörtert zu werden braucht.

Durch einen Process derselben Art kann man nun die in Rede stehenden idealen Punkte, ideale Gerade etc. einführen. Durch den idealen Punkt geht ein Büschel wirklicher Geraden hindurch, allerdings kein geschlossenes, sondern ein begrenztes. Aber diesem Büschel kommen alle projectivischen Eigenschaften zu, welche einem begrenzten Theile eines wirklichen Büschels eigenthümlich sind. Wenn man z. B. ein Vierseit construirt, von welchem vier Ecken auf zwei festen Geraden des Büschels liegen, während sich die fünfte Ecke über eine dritte Gerade des Büschels bewegt, so findet mit der sechsten Ecke (falls diese überhaupt existirt, d. h. nicht schon in das ideale Gebiet fällt) dasselbe mit Bezug auf eine vierte Gerade des Büschels statt etc. Hier anknüpfend kann man rein geometrisch ideale Gerade, ideale Curven etc. definiren, wobei nur Uebung dazu gehört, um sich gerade so sicher in diesen idealen Gebilden wie in den gleichbenannten wirklichen Gebilden zurecht zu finden.

## Zweiter Abschnitt.

## Ueber die Möglichkeit, auch ohne Voraussetzung des Parallelenaxioms nach dem Vorgange v. Staudt's die projectivische Geometrie aufzubauen.

### § 1.

### Formulirung des Problems.

Der Aufbau der projectivischen Geometrie geschieht bei Staudt*), wie bekannt, durch blosses Betrachten des Ineinanderliegens von Ebenen, Geraden und Punkten. Es werden die verschiedenen Grundgebilde, mit denen die projectivische Geometrie operirt: die gerade Punktreihe, das Ebenenbüschel etc. aufgestellt; dieselben erscheinen vermöge ihres Ineinanderliegens auf einander bezogen, und die Beziehung ist der Art, dass man ohne Weiteres zu dem Begriffe der harmonischen Theilung, weiterhin des Doppelverhältnisses gelangt, womit alle Grundlagen zur Behandlung, namentlich auch zur analytischen**) Behandlung der projectivischen Geometrie gegeben sind. Bei all diesen Entwickelungen wird von Maassbestimmung nicht geredet, aber allerdings wird das Parallelenaxiom vorausgesetzt, weil sonst z. B. zwischen einer geraden Punktreihe und einem Ebenenbüschel kein vollständiges Entsprechen stattzufinden brauchte, sondern das Ebenenbüschel eine ganze Reihe von Ebenen enthalten könnte, welche der Punktreihe gar nicht begegnen.

---

*) Die Geometrie der Lage. 1847. Man vergl. auch Reye's Geometrie der Lage, in welcher die Staudt'schen Betrachtungen in übersichtlicher Form reproducirt sind.

**) Von analytischer Seite hat man die Staudt'schen Untersuchungen nur zu wenig berücksichtigt, wozu die vielfach verbreitete Auffassung beigetragen haben mag, als sei die synthetische Form, nicht die projectivische Auffassungsweise das Wesentliche an der Staudt'schen Geometrie. —

Die Betrachtungen von Staudt's haben eine Lücke, welche nur durch ein bez. Axiom zu überbrücken scheint, wie dies im Texte noch weiter auseinander gesetzt werden soll. Dieselbe Lücke findet sich bei der Ausdehnung der Staudt'schen Methode, wie sie hier beabsichtigt wird, an der entsprechenden Stelle wieder; sie betreffen aber nicht die Ausdehnung, sondern das zu Grunde liegende Original. Geht man, wie im Texte zum Schlusse geschehen soll, von der rein räumlichen Auffassung ab und sucht den analytischen Inhalt der Staudt'schen Betrachtungen, so verschwinden die Schwierigkeiten, und man kann dieselben hierdurch in der Forderung zusammenfassen: *dass man den Punktraum unter dem Bilde einer dreifach ausgedehnten Zahlenmannigfaltigkeit soll auffassen können,* eine Voraussetzung, die allen unseren räumlichen Speculationen auch sonst zu Grunde liegt.

Nun hat sich aber ergeben, worüber man den voraufgehenden Abschnitt dieser Arbeit vergleichen mag, dass die projectivische Geometrie auch gilt, wenn man das Parallelenaxiom nicht zugiebt, wenn man vielmehr den Raum als eine Punkt-Mannigfaltigkeit von constantem nicht verschwindendem Krümmungsmasse betrachtet. Nimmt man das Krümmungsmass positiv — die Annahme der elliptischen Geometrie — so gilt die projectivische Geometrie unbeschränkt, während in der gewöhnlichen parabolischen Geometrie, die eine verschwindende Krümmung voraussetzt, zur vollen Geltung der projectivischen Beziehung die Adjunction uneigentlicher Elemente, der unendlich fernen, nothwendig wird. Ist das Krümmungsmass negativ, so müssen ausser den unendlich fernen Elementen noch weitere „ideale" Elemente adjungirt werden, die aber, nach dem letzten Paragraphen des vorigen Abschnittes dieser Arbeit, eine vollkommen bestimmte rein geometrische Bedeutung haben, so gut wie die unendlich fernen Elemente der parabolischen Geometrie.

Ist in dem durch diese Bemerkungen beschränkten Sinne die projectivische Geometrie unabhängig von dem Parallelenaxiome giltig, so muss es möglich sein, dieselbe ohne vorherige Entscheidung über dieses Axiom aufzubauen; und wenn bei v. Staudt das Axiom mit in die Prämissen aufgenommen wird, so kann dasselbe nur eine beiläufige, keine wesentliche Rolle spielen. Immerhin wäre es möglich, dass der durch Staudt eingeschlagene Gang das Axiom wesentlich benutzte, aber es müsste sich dann der Gang so abändern lassen, dass das nicht mehr geschieht. Im Nachfolgenden soll nun gezeigt werden, dass man bei Nichtannahme des Parallelenaxioms den von Staudt eingehaltenen Gang *nicht* wesentlich zu modificiren braucht, eine Behauptung, die durch die vorhergehenden Auseinandersetzungen so wahrscheinlich gemacht wird, dass ich eine ausgeführte Begründung derselben für kaum nöthig erachten würde, hätten sich nicht gerade dieser Behauptung gegenüber, die ich in meinem früheren Aufsatze aussprach (§ 17.), von verschiedenen Seiten her Zweifel geltend gemacht.

Ein Aufbau der projectivischen Geometrie vor Entscheidung über das Parallelenaxiom ist aber desshalb für die theoretische Speculation von Werth, weil man dann beim Raume in ähnlicher Weise die Massbestimmung einführen könnte, wie dies in § 7. des vorhergehenden Abschnittes für Zahlenmannigfaltigkeiten geschah: man würde den Raum zunächst als eine projectivische Mannigfaltigkeit, sodann erst als eine Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung bezeichnen, und endlich durch Einführung des Parallelenaxioms den Werth des Krümmungsmasses auf Null festsetzen. Man vergleiche hierzu den letzten Paragraphen (§ 18.) meines früheren Aufsatzes, wo ich diese Art, die

Axiome der Geometrie einzuführen, etwas näher auseinandersetze; eine ausführlichere Darlegung werde ich vielleicht bei einer anderen Gelegenheit geben können. Ich will übrigens ausdrücklich bemerken, um Missverständnissen vorzubeugen, dass dieser theoretisch mögliche Weg nach meiner Meinung durchaus nicht theoretisch nothwendig ist, dass er unter vielen möglichen Wegen eben nur einen constituirt.

Um mich zu überzeugen, dass Staudt's Betrachtungen das Parallelenaxiom nicht wesentlich benutzen, wie ich vermuthete, und zugleich, um allen Beschränkungen, die aus der Nicht-Annahme des Parallelenaxioms hervorgehen können (wie z. B. in der hyperbolischen Geometrie), aus dem Wege zu gehen, stellte ich mir die Frage, ob man nicht Alles, was Staudt braucht, leisten kann, wenn man sich bei den erforderlichen Constructionen das Gesetz auferlegt, nicht aus einem *gegebenen begrenzten* Raume hinauszutreten. Man denke sich also innerhalb eines begrenzten Raumes die Punkte, Geraden und Ebenen in ihrer gegenseitigen Lagenbeziehung gegeben. Ob ausserhalb des gegebenen Raumstückes diese Gebilde überhaupt noch vorhanden sind, bleibe dahin gestellt; um so mehr, welche Beziehungen sie eventuell zu einander haben. Wird es dann noch möglich sein, im Anschlusse an von Staudt's Betrachtungsweisen innerhalb dieses Raumes die Geltung der projectivischen Beziehungen zu erschliessen?

In dieser Form, die ich bereits in § 17. meiner vorigen Arbeit bezeichnete, soll im Folgenden die Frage über die Unabhängigkeit der projectivischen Betrachtung von der Parallelentheorie untersucht werden.

## § 2.

## Erweiterung des Problems. Aufstellung eines allgemeinen der Analysis situs-angehörigen Satzes.

Das im vorigen Paragraphen aufgestellte Problem mag vorerst noch verallgemeinert werden. Der Ausgangspunkt der Staudt'schen Betrachtung ist die Voraussetzung der Ebenen und Geraden, aber von deren Eigenschaften kommen, sofern man von dem hinzutretenden Parallelenaxiome absieht, wesentlich nur in Betracht, dass durch drei beliebig angenommene Punkte eine und nur eine Ebene geht, und dass durch zwei Punkte ein Ebenenbüschel geht, dessen Ebenen alle dieselbe Durchschnittsgerade besitzen. Ist dem so, so wird man, die Richtigkeit der im vorigen Paragraphen vorgetragenen Behauptung zugegeben, die Staudt'schen Ueberlegungen auf jedes System von Flächen und Curven übertragen können, welches, schlechthin ausgesprochen, dieselben Lagenbeziehungen in einem gegebenen begrenzten Raume besitzt; mit anderen Worten, man wird den folgenden Satz aufstellen können:

„In einem begrenzten Raume sei eine unendliche Zahl überall stetig gekrümmter, nur durch die Begränzung des Raumes geendigter Flächen gegeben, welche die folgende Gruppirung besitzen:

1) Durch drei beliebig angenommene Punkte des gegebenen Raumes geht eine und nur eine Fläche des Systems hindurch.

2) Die Durchschnittscurve, welche zwei Flächen des Systems gemein haben können, gehört allen Flächen an, die zwei Punkte der Curve enthalten.“

„*Für ein solches System von Flächen und Curven gilt die projectivische Geometrie in demselben Sinne wie gemäss den gewöhnlichen Vorstellungen für das System der Ebenen und Geraden in einem beliebig begrenzten Raume.* Anders ausgesprochen: *Man wird den Punkten des gegebenen Raumes in der Art Zahlen zuordnen* (*Coordinaten ertheilen*) *können, dass die Flächen des Systems durch lineare Gleichungen dargestellt werden.*“

Die hiermit formulirte Behauptung muss, falls sie richtig ist, vor allen Definitionen von Ebene, Gerade u. s. w. bewiesen werden können, denn sie benutzt nur die Begriffe der stetig gekrümmten Fläche, der continuirlich verlaufenden Curve, die den Begriffen von Ebene und Gerade vorausgehen. Bei dem Beweise, wie er in den nächsten Paragraphen vorgetragen werden soll, sind dann auch die Ebenen und Geraden des Raumes nicht vorausgesetzt.

Dass es überhaupt Flächensysteme der hier gemeinten Art giebt, zeigt das Beispiel der Ebenen der gewöhnlichen Geometrie. Unbegrenzt viele solcher Flächensysteme erzeugt man, indem man sich die Ebenen in einem beliebig begrenzten Raume construirt denkt, und dann das Raumstück einer durch stetige Processe herbeiführbaren Deformation unterwirft. Und die vorgetragene Behauptung kann geradezu dahin ausgesprochen werden: dass jedes den Vorraussetzungen des Satzes entsprechende Flächensystem aus dem Systeme der Ebenen in dieser Weise erzeugt werden kann.

Was diesen Satz sehr merkwürdig macht, ist, dass ein analoger Satz, den man für die Ebene formuliren möchte, nicht existirt. Ist nämlich in einem begrenzten Theile der Ebene ein Curvensystem von der Eigenschaft gegeben, dass durch je zwei Punkte eine und nur eine Curve hindurchgeht, so bedarf es noch weiterer Bedingungen, ehe die Curven durch lineare Gleichungen zwischen Punkt-Coordinaten dargestellt werden können. Diesen negativen Satz mag man aus einem Theoreme von *Beltrami* ableiten. Ein Curvensystem der gemeinten Art erhält man nämlich z. B., wenn man auf einer begrenzten einfach zusammenhängenden Fläche die geodätischen Curven zieht und dann die Fläche auf einen Theil der Ebene beliebig ausbreitet. Aber

Beltrami zeigt*), dass nur den Flächen von constantem Krümmungsmasse die Eigenschaft zukommt, sich so auf die Ebene übertragen zu lassen, dass sich alle geodätischen Curven mit geraden Linien decken. Man darf es daher auch nicht, wie seither wohl geschehen, als einen *Kunstgriff* von Staudt's auffassen, wenn er behufs Begründung der projectivischen Geometrie auch der Ebene die stereometrischen Verhältnisse in Betracht zog; es entspricht sein Ausgangspunkt durchaus dem Wesen der Sache: es gilt für die geraden Linien der Ebene, falls man im Anschluss an Staudt die Betrachtung der Massverhältnisse ausschliesst, nur desshalb die projectivische Geometrie, weil Ebene und Gerade als Glieder eines räumlichen Systems aufgefasst werden können.

Ich werde nun den aufgestellten Satz unter engstem Anschlusse an die Staudt'schen Betrachtungen rein geometrisch erweisen, wobei, wie bereits angedeutet, an einer Stelle (§ 5) eine Schwierigkeit auftritt, die sich auch bei Staudt findet und die nur durch ein Axiom zu beseitigen scheint: durch das Axiom, *dass man einen Punkt, der durch einen convergenten unendlichen Process erzeugt werden soll, als wirklich existirend annehmen darf.* Sodann gebe ich in den letzten Paragraphen einen analytischen Beweis des in Rede stehenden Satzes, der diese Lücke nicht mehr hat, insofern bei ihm der Raum als von vornherein unter dem Bilde einer Zahlenmannigfaltigkeit gegeben erscheint. Dieser analytische Beweis deckt zugleich den Grund auf, wesshalb der Satz für den Raum, das Gebilde von drei Dimensionen, gilt, nicht aber mehr für die Ebene, das Gebilde von zwei Dimensionen.

Der Einfachheit wegen denke ich im Folgenden den Raum, in welchem die Flächen gegeben sind, sowie die Flächen selbst als einfach zusammenhängend; die Fälle, in denen ein mehrfacher Zusammenhang stattfindet, können auf diese Annahme zurückgeführt werden, indem man aus dem gegebenen Raume zunächst ein einfach zusammenhängendes Stück ausschneidet, innerhalb dessen die gegebenen Flächen einfach zusammenhängend sind.

## § 3.

### Die Grundgebilde. Beziehung derselben aufeinander.

Das vorhin eingeführte Flächensystem heisse das System der Flächen $F$. Die Durchschnittscurve zweier $F$, falls eine solche existirt, heisse $K$.

Aus den Punkten des gegebenen Raumes, den Curven $K$ und den Flächen $F$ setzen sich eine Reihe von Grundgebilden zusammen. Grund-

*) In den Annali di Matematica. Serie 1. t. VII. p. 185.

gebilde erster Stufe giebt es drei: die Curve $K$, als Ort für Punkte aufgefasst; das Büschel der Curven $K$, welche innerhalb einer $F$ durch einen Punkt gehen; das Büschel der $F$, welche eine $K$ enthalten. Man hat ferner vier Grundgebilde zweiter Stufe: die $F$, aufgefasst als Punktgebilde oder als Aggregat von Curven $K$, und die Gesammtheit der $F$, wie die Gesammtheit der $K$, die durch einen Punkt gehen: Alles, wie in der gewöhnlichen projectivischen Geometrie.

Aber ein Unterschied tritt hinzu wegen der Begrenztheit des gegebenen Raumes. Unter den Grundgebilden finden sich *begrenzte und unbegrenzte*. Begrenzt ist z. B. die Reihe der auf einer $K$ befindlichen Punkte, unbegrenzt das Büschel von $F$, die durch eine $K$ hindurchgehen.

Zwei Grundgebilde heissen aufeinander *bezogen*, wenn das eine ein Schnitt des anderen ist, oder wenn beide auf ein anderes als Schnitte bezogen sind. Es heisst z. B. das Bündel der durch einen Punkt gehenden $K$ auf eine $F$ als Punktgebilde bezogen, wenn man jedem Punkte der $F$ diejenige $K$ zuordnet, welche durch ihn hindurchgeht etc. Diese Beziehung ist ausserdem, was man *unvollständig* nennen mag, insofern allerdings zu jedem Punkte der $F$ eine $K$ des Bündels gehört, nicht aber umgekehrt. Unmittelbar vollständig aufeinander bezogen sind nur das Büschel der durch eine $K$ gehenden $F$ und das Büschel der durch einen Punkt gehenden $K$, die in einer durch den Punkt hindurchgehenden $F$ verlaufen.

## § 4.

## Definition harmonischer Elemente.

Zu drei Elementen $A$, $B$, $C$ eines unbegrenzten Grundgebildes erster Stufe kann man vermöge einer Construction, die der in der gewöhnlichen projectivischen Geometrie angewandten Vierseits-Construction analog ist, ein bestimmtes viertes Element $D$ construiren, welches das *vierte harmonische* zu $A$, $B$, $C$ genannt werden soll.

Um sich hiervon zu überzeugen, wollen wir den folgenden beschränkteren Satz für die Punktreihe $K$ beweisen, deren Anschauung uns geläufiger ist als die Anschauung der unbegrenzten Grundgebilde erster Stufe:

Sind $A$, $B$, $C$ Punkte einer $K$, *welche in der alphabetischen Reihenfolge einander auf der $K$ folgen*, so führt die Vierseitsconstruction zu einem bestimmten vierten Elemente $D$, welches zu $A$, $B$, $C$ harmonisch heisst. Die Reihenfolge von $A$, $B$, $C$ muss hier desswegen besonders festgesetzt werden, weil sonst der gesuchte Punkt $D$ gelegentlich über die Begrenzung des gegebenen Raumes hinausfallen, d. h. gar nicht vorhanden sein könnte. Zum Zwecke des für unbegrenzte Grundgebilde aufgestellten Satzes genügt es aber auch, den nun vorliegenden Satz mit seiner Beschränkung zu beweisen; denn man überzeugt sich leicht: Wenn $A$, $B$, $C$ drei Elemente eines $F$-Büschels sind, so kann man eine $K$ immer so legen, dass die Schnittpunkte mit $A$, $B$, $C$ beliebige Reihenfolge haben. Wenn drei Elemente $A$, $B$, $C$ eines $K$-Büschels gegeben, so würde man dasselbe zunächst auf ein $F$-Büschel beziehen und dann dieses durch eine $K$ in gehöriger Weise schneiden.

Den nun mit Bezug auf die Punktreihe $K$ aufgestellten Satz beweist man genau im Anschlusse an das gewöhnliche Verfahren der geometrischen Lage. Es darf an dasselbe hier kurz erinnert werden:

Sind $A$, $B$, $C$ Punkte einer Geraden, so lege man durch $A$ eine neue Gerade. Durch zwei Punkte $\beta$, $\gamma$ derselben und $B$ und $C$ lege man die beiden Geradenpaare $\beta B$, $\gamma C$ und $\beta C$, $\gamma B$, welche bezüglich die beiden Schnittpunkte $\alpha$ und $\delta$ besitzen. Dann schneidet die Verbindungsgerade $\alpha\delta$ die ursprünglich gegebene Gerade in einem *festen* Punkte $D$, dem sogenannten vierten harmonischen Punkte zu $A$, $B$, $C$.

Der Beweis, dass der Punkt $D$ von den bei der Construction willkürlichen Elementen unabhängig ist, ist folgender. Construirt man aus $A$, $B$, $C$ in einer anderen durch die gegebene Gerade hindurchgelegten Ebene ein neues Viereck $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$, so werden die Verbindungsgeraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ sich in einem Punkte treffen; die beiden Vierecke müssen desshalb Schnitte des nämlichen Vierkants sein; es muss daher auch der Punkt $D$ in beiden übereinstimmen. Wäre das zweite Viereck in derselben durch die gegebene Gerade hindurchgelegten Ebene construirt, wie das erste, so übertrage man es durch Projection auf eine zweite durch die gegebene Gerade gehende Ebene*) und man hat den vorigen Fall.

Genau dieselben Betrachtungen können nun angestellt werden, wenn statt des Systems der Geraden und Ebenen das System der $K$ und $F$ gegeben ist. Die Annahme über die Reihenfolge von $A$, $B$, $C$ sichert die Möglichkeit, trotz der Begrenzung unseres Raumes, die nöthige Construction ausführen zu können. Hat man dann zwei Vierecke $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ und $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ in verschiedenen durch $K$ hindurchgehenden $F$, so ziehe man die $K$ $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$. Dann folgt ohne Weiteres: Schneiden sich zwei dieser $K$ in einem Punkte, so gehen auch die anderen durch denselben. Aber der Schnittpunkt kann gelegentlich über den gegebenen begrenzten Raum hinausfallen, d. h.

*) Statt dessen wird gelegentlich gesagt: so drehe man das Viereck sammt seiner Ebene um die gegebene Gerade in eine neue Lage; aber diese Operation würde man bei dem Systeme der $K$ und $F$ nicht wiederholen können, da zunächst noch nicht bekannt ist (was allerdings später erschlossen wird. § 7.), dass dieses System Transformationen in sich selbst zulässt.

gar nicht vorhanden sein. In dem Falle wird man eins der beiden Vierecke durch Projection auf eine neüe durch $K$ gehende $F$ übertragen, und mit diesem Verfahren so lange fortfahren, bis die Verbindungs-Curven $K$ der Ecken des ursprünglichen und des neu construirten Vierecks sich treffen. Es ist das ein Process, der immer zu leisten ist, wie man sich sofort überzeugt, so wie man zwei Vierecke in den bewussten Lagenverhältnissen gezeichnet denkt. Eine ausgeführte Discussion würde nur mit dem Begriffe des Grösser oder Kleiner, nicht aber mit einem Masse eines solchen Unterschiedes zu thun haben. Von zwei Strecken $AB$, $AC$ einer $K$ heisst $AB$ kleiner als $AC$, sofern man, um von $A$ nach $C$ zu gelangen, $B$ überschreiten muss.

Man beweist ferner, dass vier harmonischen Elementen eines Grundgebildes bei einer vollständigen Beziehung wieder vier harmonische Elemente entsprechen. Bei einer unvollständigen Beziehung ist das Entsprechende wahr, sofern den vier Elementen des einen Gebildes wirklich vier Elemente des anderen zugeordnet sind.

## § 5.

### Projectivische Beziehungen.

Zwei Grundgebilde heissen aufeinander *projectivisch bezogen*, wenn je vier harmonischen Elementen des einen, sofern überhaupt vier entsprechende Elemente im anderen Gebilde vorhanden sind, vier harmonische Elemente des letzteren entsprechen.

Aus dieser Definition schliesst man nun nach Staudt, dass das projectivische Entsprechen zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe durch drei einander entsprechende Elemente $A$, $B$, $C$ und $A'$, $B'$, $C'$ festgelegt ist*). Da dieser Schluss, wie bereits angedeütet wurde, in seinem Beweise eine Lücke hat, die nur durch ein Axiom zu überbrücken scheint, so möge es gestattet sein, hier etwas ausführlicher bei demselben zu verweilen. Die bez. Auseinandersetzungen und Forderungen gelten gleichmässig für das System der Ebenen und Geraden, wie für das System der $F$ und $K$.

Staudt's Schlussweise ist etwa die folgende. Entsprechen einander $A$, $B$, $C$ und $A'$, $B'$, $C'$ so auch $D$ und $D'$ die bez. vierten harmonischen Punkte zu $A$, $B$, $C$ und $A'$, $B'$, $C'$; ferner $E$ und $E'$, die vierten harmonischen Punkte zu irgend drei der vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ bez. $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, etc. etc. Die Art der Zuordnung ist hiernach durch die Zuordnung der drei Elemente $A$, $B$, $C$ und $A'$, $B'$, $C'$ vollständig gegeben, so wie man zeigen kann, dass man zu jedem

*) Geometrie der Lage. p. 50. Vergl. p. 44 des Reye'schen Buches.

Punkte einer Geraden hingelangen kann, indem man zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen aufsucht, zu irgend drei der so bestimmten vier Punkte wieder den vierten harmonischen u. s. w. Es kann diese Behauptung nur den Sinn haben, dass man jedem Punkte der Geraden durch die wiederholte Construction des vierten harmonischen Punktes beliebig nahe kommen kann, d. h. dass man immer einen entsprechenden Punkt finden kann, der zwischen dem zu bestimmenden Punkte und einem beliebig von ihm verschieden angenommenen inne liegt. Staudt beweist dies, indem er die Absurdität der Annahme zeigt, ein gewisser Punkt sei der letzte, über den die Construction nicht mehr hinausführe. Aber die Annahme, dass es einen letzten durch die Construction erreichbaren Punkt gebe, ist noch willkürlich. Es wäre denkbar, dass der fortgesetzte Process der Aufsuchung des vierten harmonischen Punktes über eine bestimmte Grenze nicht hinausführte, ohne doch eine letzte Lage für den Punkt zu erreichen. Ueber diese Möglichkeit hilft, soviel ich sehe, nur das Axiom hinweg, *dass es gestattet sein soll, den Grenzpunkt, auch wenn er in dieser Weise durch einen unendlichen Process definirt ist, als fertig vorhanden aufzufassen.* Bei dieser Annahme tritt der Staudt'sche Beweis wieder in Kraft und zeigt die Unmöglichkeit der Existenz von Grenzpunkten.

Dieselben Erwägungen, die hier für die Gerade vorgetragen worden sind, übertragen sich auf die Grundgebilde erster Dimension aus dem Systeme der $K$ und $F$, wobei man zunächst auf die unbegrenzten Grundgebilde achten wird. Auch bei ihnen wird man ein dem vorhergehenden analoges Axiom hinzuzufügen haben, *was dann als eine Forderung aufgefasst werden kann, der das System der $K$ und $F$ genügen soll.* Diese Forderung ist mit den dem Systeme sonst auferlegten verträglich — das zeigt das Beispiel der gewöhnlichen Geraden und Ebenen —, ob sie aus den früheren zum Theile folgt, bleibe dahin gestellt. Die Definition der projectivischen Beziehung, die so für unbegrenzte Grundgebilde erster Stufe aufgestellt ist, überträgt sich ohne Weiteres auf begrenzte, indem man begrenzte Gebilde projectivisch sein lässt, wenn sie Schnitte projectivischer unbegrenzter Gebilde sind.

## § 6.

### Die Geometrie im Grundgebilde zweiter Stufe und im Raume.

Die aufgestellten Principien genügen, um für die unbegrenzten Grundgebilde zweiter Stufe, d. h. für das Bündel der durch einen Punkt gehenden $K$ und das Bündel der durch einen Punkt gehenden $F$ die projectivische Geometrie aufzubauen. Man vergleiche hierzu nur etwa die Partieen des Reye'schen Buches (p. 45 ff.), in denen für die als unbegrenztes Grundgebilde gedachte Ebene das Entsprechende durchgeführt wird. Es ist dies wohl der einzige Gedanke, der bei den hier vorgetragenen Dingen nicht ohne Weiteres gegeben war, nämlich der Gedanke, darauf zu achten, dass, auch wenn der Punktraum, der gegeben ist, begrenzt ist, darum doch noch unbegrenzte Grundgebilde erster und zweiter Stufe vorhanden sind, und dass man für *sie* die Betrachtungen durchführen kann, die man sonst in Bezug auf die unbegrenzt angenommene Ebene anstellt.

Namentlich wird man für die unbegrenzten Grundgebilde zweiter Stufe nun auch das Gesetz der *Dualität* entwickeln können, welches jetzt dahin auszusprechen ist, dass man in allen Sätzen, die sich auf $K$ und $F$ beziehen, welche durch einen Punkt gehen, statt $K$ und $F$ auch $F$ und $K$ setzen kann.

Durch Uebertragung vom unbegrenzten Grundgebilde zweiter Stufe, dem Punkte (als Bündel von $K$ und $F$ gedacht), gewinnt man die Geometrie auf dem begrenzten Grundgebilde zweiter Stufe der (als Punktaggregat oder als Ort für Curven $K$ gedachten) $F$. Aber die projectivischen Beziehungen und die dualistischen gelten auf der $F$ nur dann uneingeschränkt, wenn man der $F$ *ideale* Punkte und Curven $K$ adjungirt, entsprechend denjenigen Curven $K$ und Flächen $F$ des angenommenen Bündels, von dem aus man die projectivisch dualistischen Beziehungen auf die $F$ überträgt, welche die $F$ nicht treffen. Es ist ersichtlich, wie diese idealen Elemente der $F$, die ihrem Wesen nach durchaus mit den idealen Elementen übereinstimmen, von denen im letzten Paragraphen des vorigen Abschnittes die Rede war, unabhängig sind von dem Bündel, von dem man gerade ausging. Der Grund liegt darin, dass nach Voraussetzung die $F$ von allen anderen $F$ in denselben $K$, d. h. von jedem Bündel von $F$ in demselben Curvensystem $K$ geschnitten wird. Der ideale Punkt der gegebenen $F$ z. B. ist zunächst definirt durch eine irgend einem Bündel angehörige Curve $K$, welche die $F$ nicht trifft. Aber durch die $K$ geht ein Büschel von $F$ und ein begrenzter Theil des Büschels begegnet der gegebenen $F$. Auf der letzteren erhalten wir also eine Schaar von Curven $K$, welche dieselben Eigenschaften haben, besonders hinsichtlich der Construction des vierten harmonischen Elementes, wie ein begrenzter Theil eines durch einen Punkt gehenden Büschels von Curven $K$. Legt man jetzt durch irgend einen Punkt und diese Curven $K$ die bezüglichen $F$, so werden diese sich nach einer $K$ schneiden. Der ideale Punkt, den das erst angenommene Bündel lieferte, stimmt also mit dem idealen Punkte, den ein beliebiges anderes Bündel ergiebt, überein.

Es ist hiernach auch ersichtlich, wie der ideale Punkt der gegebenen $F$, der hierdurch definirt ist, nicht bloss als dieser $F$ angehörig, sondern als *idealer Raumpunkt* gedacht werden muss. Damit ist dann alles Material gegeben, um die projectivische Geometrie auch des Raumes zu entwickeln, und es ist der Beweis des oben aufgestellten Hauptsatzes:

*dass für das bez. Flächen- und Curvensystem die projectivische Geometrie gilt*

geleistet.

## § 7.

### Einführung der Doppelverhältnisse und homogenen Coordinaten.

In diesem Paragraphen mag noch kurz angegeben werden, wie man an den bisher auseinandergesetzten synthetischen Aufbau der projectivischen Geometrie die analytische Behandlung derselben zu knüpfen hat. Es enthält dieser Paragraph also nichts mehr, was sich specifisch auf das System der $K$ und $F$ bezieht; und er soll hier nur seine Stelle finden, weil die betreffenden Ueberlegungen, die man wesentlich alle den Staudt'schen *Beiträgen zur Geometrie der Lage* entnehmen kann, nur zu wenig bekannt zu sein scheinen.

Die Definition der Projectivität zweier Grundgebilde erster Stufe ergiebt, dass zwischen je vier Elementen eines solchen Gebildes eine constante Beziehung obwaltet. Drei Elemente sind noch von einander unabhängig; die Beziehung zwischen vier Elementen kann man daher unter dem Bilde einer reellen *Zahl* auffassen*). Man bezeichne drei Elemente $A$, $B$, $C$ als Grundelemente des Gebildes, auf die übrigen Elemente $D$ des unbegrenzt gedachten Gebildes vertheile man nach einem willkürlichen Gesetze die reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, so ist jeder Combination $ABCD$ eine Zahl zugeordnet, welche sie charakterisirt; man hat einen Massstab, um die Beziehung $ABCD$ zu messen. Hat man bei *einem* Grundgebilde erster Stufe diese Bestimmung getroffen, so überträgt sie sich durch Projection auf alle anderen.

Man wird darnach streben, diese willkürliche Scala durch eine gesetzmässig erzeugte zu ersetzen, und dies hat Staudt in den Paragraphen 19, 20 seiner Beiträge zur Geometrie der Lage geleistet. Er ordnet dort den Beziehungen $ABCD$, oder, wie er sagt, den *Würfen* $ABCD$ dieselben Zahlen zu, welche man ihnen in der auf metrischen Definitionen fussenden gewöhnlichen Behandlungsweise beilegt, wo sie als *Doppelverhältnisse* aufgefasst werden**). Es genügt zu diesem Zwecke, die Würfe $ABCA$, $ABCB$, $ABCC$ bez. durch 0, 1, $\infty$ zu bezeichnen und dann eine Operation anzugeben, vermöge deren man

---

*) Hier kehrt unter einer etwas anderen Form das Axiom des § 5. wieder.

**) Dasselbe kann man durch die von Möbius in seinem barycentrischem Calcul vorgetragene Theorie der geometrischen Netze erreichen.

zwei Würfe $ABCD$ und $ABCD'$ addirt. Dabei wird der harmonische Wurf gleich $-1$, und es finden Relationen statt, wie

$$(ABCD) \,.\, (ADCB) = 1 \quad \text{etc.}$$

Von den Doppelverhältnissen steige man zu den homogenen Coordinaten auf, die nichts sind als die relativen Werthe gewisser Doppelverhältnisse. Es handelt sich dann besonders darum, einzusehen, dass durch eine lineare Gleichung zwischen den homogenen Coordinaten in der Ebene eine Gerade, im Raume eine Ebene dargestellt wird. Diese Aufgabe hat Fiedler neuerdings in sehr einfacher und übersichtlicher Weise erledigt, indem er von vornherein neben den homogenen Punktcoordinaten auch die homogenen Liniencoordinaten, bez. Ebenencoordinaten einführte*). Die lineo-lineare Gleichung zwischen den Coordinaten vereinigt gelegener Punkte und Geraden (Ebenen) ist nur der Ausdruck für gewisse Beziehungen, die zwischen den in der Figur (die durch Hinzufügen eines Coordinaten-Dreiecks bez. -Tetraeders entsteht) auftretenden Doppelverhältnissen stattfinden**).

Die hiermit angedeuteten Ueberlegungen kann man alle, statt für das System der Geraden und Ebenen, für das System der $K$ und $F$ entwickeln, da für das letztere ebenso die projectivische Geometrie gilt. Und damit ist also die zweite Form erwiesen, welche wir in § 2 unserem Satze ertheilt hatten, die wir hier noch einmal wiederholen:

*Man kann den Punkten des ursprünglich gegebenen begrenzten Raumes in der Weise Zahlen zuordnen, dass die Flächen $F$ (die Curven $K$) durch lineare Gleichungen dargestellt werden.*

Als Folgerungen, die sich von selbst aufdrängen, seien erwähnt, dass man nun in Bezug auf die Flächen $F$ von algebraischen Gebilden, von imaginären Elementen, von collinearen und dualistischen Transformationen reden kann.

## § 8.

## Analytischer Beweis des Hauptsatzes.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, wie sich der in § 2. aufgestellte Hauptsatz viel einfacher und ohne Zuhülfenahme besonderer Axiome beweisen lässt, wenn man die Voraussetzung macht, dass es gestattet sei, *den Punktraum unter dem Bilde einer dreifach ausge-*

---

*) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. XV, 2. (1871). — Die darstellende Geometrie. Leipzig. 1871. — Bei Fiedler sind die Würfe als Doppelverhältnisse definirt; es ist das aber für seine weiteren Auseinandersetzungen ohne principielle Bedeutung, da er nur solche Relationen zwischen Würfen benutzt, welche man, nach der im Texte gemachten Andeutung, auch bei Staudt begründet findet.

**) Vergl. hierzu auch Hamilton's Elements of Quaternions. p. 24—32.

*dehnten Zahlen-Mannigfaltigkeit aufzufassen.* Ein an diese Voraussetzung anknüpfender Beweis enthält die Erweiterung unseres Satzes auf Zahlen-Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen in sich; zugleich lässt er übersehen, warum für zwei Dimensionen, wie in § 2. hervorgehoben wurde, ein entsprechender Satz noch nicht gilt.

Den Vortheil, den man durch die Annahme, man könne den Punktraum als eine Zahlen-Mannigfaltigkeit auffassen, in den Beweis des Satzes einführt, ist der, dass man nun über den Begriff des Unendlich-Kleinen verfügt. Für die Fortschreitungsrichtungen von einem Punkte aus gilt bei beliebiger Coordinatenbestimmung die projectivische Geometrie in demselben Sinne, wie für die Geraden eines Strahlenbündels. Hat man aber ein System von Flächen $F$ und Curven $K$, wie es in dem Satze des § 2. vorausgesetzt wird, so bezeichnet jede der von einem Punkte aus möglichen Fortschreitungsrichtungen eine der durch den Punkt hindurchgehenden $K$. *Für das Bündel der durch einen Punkt gehenden $K$, und, vermöge dualistischer Uebertragung, das Bündel der durch einen Punkt gehenden $F$ gilt also ohne Weiteres die projectivische Geometrie.* Wir haben also von vornherein den Standpunkt gewonnen, der sich bei der rein geometrischen Untersuchung erst in § 6. ergab, noch mehr: es ist auch von vornherein wenigstens für das Bündel von $K$ und $F$ die projectivische Coordinatenbestimmung gegeben, die bei rein geometrischer Betrachtung erst durch besondere Operationen in § 7. entworfen werden musste.

Von der Geometrie im Bündel von $F$ oder $K$ steigt man ähnlich wie in § 6. geschildert wurde, zur Geometrie auf den $F$ und zur Geometrie im Raume auf. Durch eine beliebige $F$, — sie heisse $F'$ — werden je zwei Bündel von $F$ aufeinander projectivisch bezogen. Denn die Bündel schneiden die $F'$ laut Voraussetzung in dem nämlichen Curvensysteme $K$. Dabei überträgt sich von dem einen Bündel so gut wie vom anderen auf die $F'$ die Vierseits-Construction; die beiden Bündel, und also überhaupt alle vorhandenen Bündel sind hiernach durch die $F'$ aufeinander projectivisch bezogen w. z. b. Da aber projectivische Beziehung innerhalb eines Bündels bei Anwendung der projectivischen Coordinaten durch lineare Gleichungen bezeichnet wird, so ist ersichtlich, dass man die $F'$ durch lineare Gleichungen zwischen den für zwei Bündel geltenden projectivischen Coordinaten darstellen kann etc. etc.

Betrachtungen derselben Art kann man für Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen anstellen; ist aber die Zahl der Dimensionen auf 2 gesunken, so haben die Betrachtungen nicht mehr denselben Erfolg. Es sei eine Fläche und auf einem Theile derselben ein Curvensystem $K$ gegeben, von der Eigenschaft, dass durch je zwei Punkte des Flächentheils eine und nur eine $K$ geht. Die Fläche, oder vielmehr ihre Punkte sollen unter dem Bilde einer zweifach ausgedehnten Zahlenmannigfaltigkeit gefasst werden können. Dann gilt für die Fortschreitungsrichtungen von einem Punkte aus die projectivische Geometrie, d. h. vier Fortschreitungsrichtungen haben ein bestimmtes Doppelverhältniss, welches bei keiner stetigen Verzerrung der Fläche geändert wird. Es überträgt sich diese Beziehung auf das durch den Punkt gehende Büschel von Curven $K$. Man schneide dasselbe durch eine ihm nicht angehörige Curve $K'$ und ziehe nach den Schnittpunkten die einem zweiten Büschel angehörigen $K$. Jetzt sind die beiden Büschel durch die $K'$ auch eindeutig aufeinander bezogen, aber es ist gar kein Grund vorhanden, warum diese Beziehung eine projectivische sein soll, warum z. B. vier harmonischen Curven des einen Büschels vier harmonische des andern entsprechen sollen. Denn ein Analogon zu der Vierseitsconstruction, die sich im Raume übertrug, existirt nicht mehr, weil eine Dimension zu wenig vorhanden ist.

Göttingen, 8. Juni 1872.

---

### Verbesserung.

Auf p. 112, Zeile 12 v. u. lese man „werde“ statt „wäre“.

# Ueber eine Darstellung willkürlicher Functionen durch Bessel'sche Functionen.

Von H. Weber in Zürich.

---

Die Lösung vieler physikalischer Probleme verlangt die Darstellung willkürlicher Functionen zweier Argumente durch Bessel'sche und trigonometrische Functionen. Eine solche Darstellung von fundamentaler Bedeutung für eine Function, die (geometrisch ausgedrückt) für alle Punkte einer Ebene willkürlich gegeben ist, wurde zuerst von Herrn C. Neumann entdeckt. In der vorliegenden Arbeit soll nun eine verwandte Darstellungsweise entwickelt werden für eine Function, die in der ganzen Ebene, soweit sie ausserhalb eines gegebenen Kreises liegt, willkürlich gegeben ist. Die Anwendbarkeit dieser Darstellungsweise soll endlich an dem Beispiel der Green'schen Function für das Aeussere eines unbegrenzten Cylinders dargethan werden.

Es scheint zweckmässig, einige Betrachtungen über die als Bessel'sche *Functionen* zu definirenden Functionen voranzuschicken.

Jede Function, welche der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{1}$$

möge als Bessel'sche Function der $n^{\text{ten}}$ Ordnung im weiteren Sinn des Worts bezeichnet sein. Alle diese Functionen lassen sich aber linear zusammensetzen aus zwei particularen Functionen der gleichen Art, von denen die eine für endliche Werthe von $x$ endlich bleibt, während die andere für $x = 0$ unendlich gross wird. Diese beiden im engeren Sinne als Bessel'sche zu bezeichnenden particularen Functionen sollen nun zunächst zweckmässig ausgewählt und einige ihrer Eigenschaften untersucht werden. Es werde dabei $n$ als ganze positive Zahl vorausgesetzt.

Der Differentialgleichung (1) genügt die Function:

$$y = x^n \int_1^\infty e^{ix\xi} (\xi^2 - 1)^{\frac{2n-1}{2}} d\xi,$$

welche jedoch durch das Integral nur erklärt ist, so lange der imaginäre Theil von $x$ positiv ist.

Für den gegenwärtigen Zweck ist aber gerade der Fall eines reellen positiven $x$ von besonderer Wichtigkeit. Wir setzen daher:

$$(2)\qquad \frac{-2i(-x)^n}{1.3\ldots(2n-1)\pi}\int_1^\infty e^{ix\xi}\,(\xi^2-1)^{\frac{2n-1}{2}}\,d\xi = J_n(x)+iK_n(x)$$

und verstehen unter dem Ausdruck links den Grenzwerth, den man erhält, wenn man von Werthen von $x$ mit positiv imaginärem Theil zu positiv reellen Werthen von $x$ übergeht. Der reelle und imaginäre Theil dieses Grenzwerths sollen als Bessel'sche Functionen im engeren Sinne erklärt werden, die durch die stetige Fortsetzung dadurch auch für complexe Werthe des Arguments definirt sind. Um analytische Ausdrücke für diese beiden Functionen zu erhalten, muss auf der linken Seite von (2) der Integrationsweg geändert werden, was auf mehrfache Weise geschehen kann. Integrirt man von 1 bis 0 und von 0 bis $i\infty$, so wird dadurch der Werth des Integrals nicht geändert. In dem so veränderten Ausdruck darf dann $x$ positiv reell genommen werden, wodurch sich ergiebt:

$$(3)\qquad J_n(x) = \frac{2x^n}{1.3..(2n-1)\pi}\int_0^1 \cos(x\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{2n-1}{2}}\,d\xi,$$

$$(4)\qquad K_n(x) = \frac{2x^n}{1.3..(2n-1)\pi}\left\{\int_0^1 \sin(x\xi)\,(1-\xi^2)^{\frac{2n-1}{2}}\,d\xi - \int_0^\infty e^{-x\xi}\,(1+\xi^2)^{\frac{2n-1}{2}}\,d\xi\right\}.$$

Die Function $J_n(x)$ stimmt also überein mit der gewöhnlich durch $J^{(n)}_{(x)}$ bezeichneten Bessel'schen Function erster Art. Ich ziehe hier vor, den Index unten anzufügen, um die Differentialquotienten der Bessel'schen Functionen bequemer durch $J'_n(x)$ $K'_n(x)$ bezeichnen zu können. Ein anderer Weg, das Integral (2) in eine Form zu bringen, in der $x$ ohne Weiteres reell genommen werden darf, ist folgender: Substituirt man unter dem Integralzeichen

$$\xi = 1+\frac{i\eta}{x}$$

so darf man in dem transformirten Integral, wenn der Integrationsweg in (2) passend gewählt wird, $\eta$ auf reellem Wege von 0 bis $\infty$ gehen lassen und es ergiebt sich:

$$(5)\quad J_n(x)+iK_n(x) = \frac{2^{n+1}\,e^{i\left(x-\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)}}{1.3..(2n-1)\,\pi\sqrt{2x}}\int_0^\infty e^{-\eta}\,\eta^{\frac{2n-1}{2}}\left(1+\frac{i\eta}{2x}\right)^{\frac{2n-1}{2}}d\eta.$$

Man überzeugt sich nachträglich leicht, dass diese Function der Differentialgleichung (1) genügt, ohne dass die Veränderlichkeit von $x$ beschränkt ist, so dass sich daraus allgemein gültige Darstellungen der Functionen $J_n(x)$, $K_n(x)$ ergeben, dadurch dass man den Ausdruck rechts formal, d. h. ohne Rücksicht auf das in $x$ enthaltene $i$ in seinen reellen und imaginären Theil zerlegt. Man darf daher auch in (5) $x$ ohne Weiteres reell und positiv annehmen.

Aus dieser Form erhält man nun leicht die halbconvergenten Reihen für die beiden Functionen $J_n(x)$, $K_n(x)$, indem man unter dem Integralzeichen $\left(1+\frac{i\eta}{x}\right)^{\frac{2n-1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatz entwickelt. Es ergiebt sich auf diese Weise:

$$(6) \qquad J_n(x) + iK_n(x) =$$
$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)} \sum_h \left(\frac{i}{8x}\right)^h \frac{((2n)^2-1^2)((2n)^2-3^2)\ldots((2n)^2-(2h-1)^2)}{1.2.3\ldots h}.$$

Die Trennung des Reellen vom Imaginären liefert für $J_n(x)$ ein bekanntes Resultat.

Die Untersuchung des Restes, welche zu einer strengen Begründung der Formel (6) nothwendig wäre, glaube ich hier unterdrücken zu dürfen. Ich verweise hierüber auf die Arbeiten der Herren Lipschitz*), Lommel**), Hankel***).

Diese Entwicklung nach fallenden Potenzen von $x$ liefert nun zunächst unmittelbar die Grenzwerthe der Functionen $J_n(x)$, $K_n(x)$ für äusserst grosse Werthe von $x$. Diese nehmen hier eine sehr elegante Form an:

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{Lim} J_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right) \\ \operatorname{Lim} K_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right) \end{aligned}\right. \text{ für } x=\infty,$$

das will sagen, es lässt sich eine bestimmte, endliche Zahl $c^2$ angeben von der Beschaffenheit, dass der Unterschied der Werthe von $J_n(x)$, $K_n(x)$ und der auf der rechten Seite von (7) stehenden Ausdrücke absolut kleiner ist als $\frac{c}{x^{3/2}}$, wenigstens von einem gewissen Werthe von $x$ an.

Um unsern Functionen $J_n(x)$, $K_n(x)$ vollständig mit irgend welchen anderen Formen der Bessel'schen Functionen vergleichen zu

*) Lipschitz. Die Bessel'sche Transcendente $J$, Borchardt's Journal Bd. 56.

**) Lommel. Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig 1868.

***) Hankel. Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. Diese Annalen Bd. 1 pag. 467.

können, ist es hinreichend, noch die Grenzwerthe dieser Functionen für ein verschwindend kleines $x$ zu kennen. Man erhält leicht aus (5)

$$(8)\qquad \left.\begin{aligned} \operatorname{Lim} K_n(x) &= -2\,\frac{2.4\,..\,(2n-2)}{\pi x^n}\quad (n>0) \\ \operatorname{Lim} K_0(x) &= \frac{2\log x}{\pi} \end{aligned}\right\}\; x=0$$

und aus (3)

$$(9)\qquad \left.\begin{aligned} \operatorname{Lim} J_n(x) &= \frac{x^n}{2.4\,..\,2n}\quad (n>0) \\ \operatorname{Lim} J_0(x) &= 1-\frac{x^2}{4} \end{aligned}\right\}\; x=0\,.$$

Darnach lassen sich z. B. die immer convergenten Entwicklungen, die für die Bessel'schen Functionen von den Herren Kirchhoff*), C. Neumann**), Hankel***) aufgestellt sind, leicht auf unsere Functionen übertragen.

Aus den Differentialgleichungen für die Functionen $J_n(x)$, $K_n(x)$:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{dx\,\dfrac{dJ_n(x)}{dx}}{x\,dx} &= -\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) \\ \frac{dx\,\dfrac{dK_n(x)}{dx}}{x\,dx} &= -\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right) K_n(x) \end{aligned}$$

ergiebt sich:

$$K_n(x)\,J_n'(x) - J_n(x)\,K_n'(x) = \frac{c}{x},$$

worin $c$ eine Constante bedeutet, die aus den Grenzwerthen (7) oder (8), (9) bestimmt werden kann. Es folgt auf diese Weise:

$$(11)\qquad K_n(x)J_n'(x) - J_n(x)\,K_n'(x) = -\frac{2}{\pi x},$$

eine Formel, die für alle Werthe von $x$ gültig ist.

---

Es lässt sich nach einer von Herrn C. Neumann entdeckten†) später von Herrn P. du Bois Reymond streng bewiesenen††) For-

---

*) Kirchhoff: Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen. Crelle's Journal, Bd. 48.

**) Neumann: Theorie der Bessel'schen Functionen. Leipzig 1867.

***) Hankel l. c.

†) C. Neumann: Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines Körpers, der von zwei nicht concentrischen Kugelschalen begrenzt wird. Halle 1862.

††) Du Bois Reymond: Die Theorie der Fourier'schen Integrale und Formeln. Diese Annalen. Bd. 4 pag. 367.

mel eine Function der zwei Veränderlichen $r, \varphi, f(r, \varphi)$, die zwischen den Grenzen $0 < r < \infty$; $0 < \varphi < 2\pi$ willkürlich gegeben ist, mit Hülfe der Function $J_0$ durch ein dreifaches Integral darstellen in folgender Weise:

$$(12) \qquad 2\pi f(r, \varphi) = \int_0^\infty z\,dz \int_0^\infty r_1\,dr_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 f(r_1, \varphi_1)\, J_0(zR)$$

wenn zur Abkürzung gesetzt ist:

$$R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}.$$

Nimmt man die Function $f$ nach dem Cosinus der Vielfachen von $\varphi$ entwickelt an, in der Form:

$$f(r, \varphi) = F_0(r) + F_1(r) \cos\varphi + F_2(r) \cos 2\varphi + \cdots$$

worin die Functionen $F_0, F_1, F_2 ..$ zwischen den Grenzen $0 < r < \infty$ als willkürlich gegeben zu betrachten sind, und setzt nach einer gleichfalls von Herrn Neumann aufgestellten Formel*):

$$J_0(zR) = J_0(zr)\, J_0(zr_1) +$$
$$2J_1(zr)\, J_1(zr_1) \cos(\varphi - \varphi_1) + 2J_2(zr)\, J_2(zr_1) \cos 2(\varphi - \varphi_1) + \cdots$$

so ergiebt sich aus (12):

$$(13) \qquad F_n(r) = \int_0^\infty z\,dz \int_0^\infty r_1\,dr_1 J_n(zr)\, J_n(zr_1)\, F_n(r_1),$$

so dass eine Function, die für alle positiven Werthe des Arguments willkürlich gegeben ist, durch Fourier'sche Integrale unter Vermittlung von Bessel'schen Functionen beliebiger Ordnung dargestellt werden kann.

Der Zweck des Folgenden ist nun, analoge Darstellungen zu finden für Functionen, die nur für Argumentwerthe $> 1$ willkürlich gegeben sind, durch Bessel'sche Functionen, welche für den Werth 1 des Arguments verschwinden. Der hier mitzutheilende Satz entbehrt freilich bis jetzt eines allgemeinen Beweises. Die Möglichkeit der betreffenden Darstellung ist vorausgesetzt und die Form wird unter dieser Voraussetzung gesucht.

Zu diesem Ende aber soll hier zunächst als Hülfsmittel eine anderweitige Darstellung willkürlicher Functionen mitgetheilt werden, deren Richtigkeit sich nach den Principien des Herrn du Bois Reymond**) streng beweisen lässt.

*) Theorie der Bessel'schen Functionen. Leipzig, 1867.

**) Du Bois Reymond. Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Classe von Doppelintegralen, zu welchen das Fourier'sche Doppelintegral gehört. Borchardt's Journal Bd. 69 und l. c.

Wir setzen zunächst zur Abkürzung:

(14) $$f_n(\alpha,r) = K_n(\alpha)\,J_n(\alpha r) - J_n(\alpha)\,K_n(\alpha r),$$

so dass die Function $f_n$ der Differentialgleichung genügt:

(15) $$\frac{d r \dfrac{d f_n}{d r}}{r d r} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) f_n = 0$$

und für $r = 1$ verschwindet.

Aus der Differentialgleichung (15) und der analog gebildeten für eine zweite Function $f_n(\beta, r)$ ergiebt sich in bekannter Weise:

(16) $$r\left(f_n(\alpha,r)\frac{d f_n(\beta,r)}{d r} - f_n(\beta,r)\frac{d f_n(\alpha,r)}{d r}\right) = (\alpha^2-\beta^2)\int_1^r r\,dr\,f_n(\alpha,r) f_n(\beta,r).$$

Wir suchen nun den Werth des folgenden Doppelintegrals zu ermitteln:

(17) $$\int_1^\infty r\,dr \int_a^b \psi(\alpha)\, f_n(\alpha,r)\, f_n(\beta,r)\, d\alpha,$$

werin $a$ und $b$ beliebige positive Zahlen sind ($a < b$) und $\psi(\alpha)$ eine zwischen den Grenzen $a$ und $b$ beliebig gegebene endliche Function. Dieses Doppelintegral kann in folgender Weise aufgefasst werden:

$$\lim_{r=\infty} \int_a^b \psi(\alpha)\, d\alpha \int_1^r f_n(\alpha,r)\, f_n(\beta,r)\, r\,dr$$

oder mit Anwendung von (16):

(18) $$\lim_{r=\infty} \int_a^b \frac{\psi(\alpha)\,d\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\, r\left(f_n(\alpha,r)\frac{d f_n(\beta,r)}{d r} - f_n(\beta,r)\frac{d f_n(\alpha,r)}{d r}\right).$$

Um diesen Grenzwerth zu finden, kann man sich, da $\alpha$ und $\beta$ positiv sind, in den Functionen $f_n(\alpha,r)\,f_n(\beta,r)$ der Grenzwerthe (7) bedienen. Diese ergeben für äusserst grosse Werthe von $r$:

$$\pi r\left(f_n(\alpha,r)\frac{d f_n(\beta,r)}{d r} - f_n(\beta,r)\frac{d f_n(\alpha,r)}{d r}\right) =$$

$$(-1)^n \sin(\alpha+\beta) r\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\left(J_n(\alpha)K_n(\beta) + J_n(\beta)K_n(\alpha)\right)$$

$$+ \cos(\alpha-\beta) r\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\left(J_n(\alpha)K_n(\beta) - J_n(\beta)K_n(\alpha)\right)$$

$$+ (-1)^n \cos(\alpha+\beta) r\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\left(J_n(\alpha)J_n(\beta) - K_n(\alpha)K_n(\beta)\right)$$

$$+ \sin(\alpha-\beta) r\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\left(J_n(\alpha)J_n(\beta) + K_n(\alpha)K_n(\beta)\right).$$

Setzt man nun dies in den Ausdruck (18) ein, so zerfällt derselbe in vier Bestandtheile, die sich nach der Dirichlet'schen Methode oder nach dem Mittelwerthsatz des Herrn du Bois Reymond*) behandeln lassen. Die drei ersten Bestandtheile verschwinden aber in der Grenze $r = \infty$, denn man kann dieselben durch passende Substitutionen und Zerlegungen darstellen als ein Aggregat von Integralen der beiden Formen:

$$\int_M^N \chi(\xi) \cos(r\xi)\, d\xi, \quad \int_M^N \chi(\xi) \sin(r\xi)\, d\xi$$

worin $\chi(\xi)$ Functionen bedeuten, die zwischen den Grenzen endlich und stetig sind, und von denen überdies angenommen werden kann, dass sie zwischen den Grenzen nicht wachsen oder nicht abnehmen.

Ist nun $M < \mu < N$, so erhält man nach dem erwähnten Mittelwerthsatze:

$$\int_M^N \chi(\xi) \cos(r\xi)\, d\xi = \chi(M) \frac{\sin(r\mu) - \sin(rM)}{r} + \chi(N) \frac{\cos(rN) - \sin(r\mu)}{r}$$

$$\int_M^N \chi(\xi) \sin(r\xi)\, d\xi = \chi(M) \frac{\cos(rM) - \cos(r\mu)}{r} + \chi(N) \frac{\cos(r\mu) - \cos(rN)}{r},$$

Ausdrücke, welche beide für unendlich grosse Werthe von $r$ verschwinden.

Demnach bleibt nur der letzte Bestandtheil übrig, welcher ergiebt:

$$\lim_{r=\infty} \int_a^b \frac{\psi(\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2}\, r \left( f_n(\alpha, r) \frac{d f_n(\beta, r)}{dr} - f_n(\beta, r) \frac{d f_n(\alpha, r)}{dr} \right)$$

$$= \lim_{r=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\psi(\alpha)}{\sqrt{\alpha\beta}} \left(J_n(\alpha) J_n(\beta) + K_n(\alpha) K_n(\beta)\right) \frac{\sin(\alpha-\beta) r}{\alpha - \beta}\, d\alpha.$$

Das Integral rechts hat nun geradezu die Form des Dirichlet'schen, und man schliesst daraus zunächst, dass es verschwindet, wenn nicht $\beta$ zwischen $a$ und $b$ liegt. Ist dagegen $a < \beta < b$, so ergiebt sich:

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\psi(\alpha)}{\sqrt{\alpha\beta}} \left(J_n(\alpha) J_n(\beta) + K_n(\alpha) K_n(\beta)\right) \frac{\sin(\alpha-\beta) r}{\alpha - \beta}\, d\alpha$$

$$= \frac{\psi(\beta)}{\beta} \left\{ (J_n(\beta))^2 + (K_n(\beta))^2 \right\},$$

wo, wie bei den gewöhnlichen Fourier'schen Integralen für einen Werth $\beta$, bei dem $\psi(\beta)$ unstetig ist, statt $\psi(\beta)$ rechts das arithmetische Mittel zwischen den beiden dort zusammenstossenden Werthen

*) Borchardt's Journal l. c.

zu nehmen ist; ebenso ist für $\beta = a$ und $\beta = b$ statt $\psi\ (\beta)$ zu setzen $\frac{1}{2}\psi\ (a)$; $\frac{1}{2}\psi\ (b)$. Setzt man noch

$$\frac{\psi(\beta)}{\beta}\left\{(J_n(\beta))^2 + (K_n(\beta))^2\right\} = \Psi(\beta)$$

so ergiebt sich aus diesen Formeln:

$$(19) \qquad \int_1^\infty r\,(dr)\, f_n(\beta, r) \int_a^b \frac{\alpha \Psi(\alpha) f_n(\alpha, r)\, d\alpha}{(J_n(\alpha))^2 + (K_n(\alpha))^2} = \Psi(\beta) \text{ oder } = 0$$

je nachdem die positiv vorausgesetzte Grösse $\beta$ in dem Intervall $a$ bis $b$ liegt oder ausserhalb desselben.

Es hindert nun nichts, $a = 0$ und $b = \infty$ werden zu lassen, vorausgesetzt, dass die Function $\Psi\ (\alpha)$ so beschaffen ist, dass das Integral (19) dann noch convergent bleibt und man erhält so eine Darstellung einer Function, die für alle positiven Werthe des Arguments willkürlich gegeben ist:

$$(20) \qquad \Psi(\beta) = \int_1^\infty r\,dr f_n(\beta, r) \int_0^\infty \frac{\alpha \Psi(\alpha) f_n(\alpha, r)\, d\alpha}{(J_n(\alpha))^2 + (K_n(\alpha))^2}.$$

Diese Darstellung einer willkürlichen Function ist aber, wie erwähnt, nicht das Ziel der gegenwärtigen Untersuchung. Dieselbe gewährt, wie es scheint, keinen unmittelbaren Nutzen bei der Integration linearer partieller Differentialgleichungen.

Wir nehmen an, es sei eine Function $F(r)$ zwischen den Grenzen $1 < r < \infty$ gegeben, setzen voraus, dieselbe sei darstellbar in der Form:

$$(21) \qquad F(r) = \int_0^\infty f_n(\alpha, r)\, \vartheta(\alpha)\, d\alpha$$

und stellen uns die Aufgabe, unter dieser Voraussetzung die Function $\vartheta\ (\alpha)$ zu bestimmen.

Es bedeute $\beta$ eine beliebige positive Grösse; wir multipliciren (21) mit $f_n\ (\beta, r)\ r\,dr$ und integriren zwischen den Grenzen 1 und $\infty$. Dadurch ergiebt sich:

$$\int_1^\infty F(r) f_n(\beta, r)\, r\,dr = \int_1^\infty f_n(\beta, r)\, r\,dr \int_0^\infty f_n(\alpha, r)\, \vartheta(\alpha)\, d\alpha.$$

Das Integral rechts lässt sich nach der Formel (20) bestimmen, woraus folgt:

$$\int_1^\infty F(r) f_n(\beta, r)\, r\,dr = \frac{\vartheta(\beta)}{\beta}\left\{(J_n(\beta))^2 + (K_n(\beta))^2\right\}.$$

Damit ist die Function $\vartheta$ bestimmt, und aus (21) folgt die gesuchte Darstellung, ihre Möglichkeit vorausgesetzt:

$$(22)\ F(r) = \int_0^\infty \frac{\alpha f_n(\alpha, r)\, d\alpha}{(J_n(\alpha))^2 + K_n(\alpha))^2} \int_1^\infty F(\varrho) f_n(\alpha, \varrho)\, \varrho\, d\varrho \quad (1 < r < \infty).$$

---

Die zuletzt aufgestellte Formel verhält sich zu den in der Physik vorkommenden Reihenentwicklungen nach Bessel'schen Functionen ähnlich wie die Fourier'schen Integrale zu den Fourier'schen Reihen, und auch sie kann zur Lösung mancher physikalischen Aufgabe dienen, z. B. zur Bestimmung des stationären Temperaturzustandes in einer von zwei unendlichen parallelen Ebenen begrenzten Platte, welche eine cylindrische Durchbohrung besitzt, wenn die Temperatur der Oberfläche dieses Körpers beliebig gegeben ist.

Ich will hier nur auf eine dieser Aufgaben näher eingehen, der eine gewisse allgemeine Bedeutung zukommt, nämlich auf die Ermittelung der Green'schen Function für das Aeussere eines unbegrenzten Cylinders mit kreisförmigem Querschnitt.

Es soll also eine Function bestimmt werden, welche für alle Punkte ausserhalb eines solchen Cylinders der Differentialgleichung genügt:

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

die an der Cylinderoberfläche und für Punkte im Unendlichen verschwindet und im ganzen Raume ausserhalb des Cylinders mit ihren ersten Ableitungen stetig ist, mit Ausnahme eines einzigen aber beliebigen Punktes, in welchem sie unstetig werden soll wie die mit einem constanten Factor multiplicirte reciproke Entfernung von diesem Punkte. Dieser Function kann in doppelter Weise eine selbständige physikalische Bedeutung beigelegt werden:

Man kann sie betrachten als das Potential der durch einen einzelnen elektrischen Massenpunkt auf dem zur Erde abgeleiteten Cylinder inducirten statischen Elektricität: oder aber sie stellt die Spannung dar im Fall der stationären Strömung, wenn der Eintritt der Elektricität in einem Punkt eines unbegrenzten Leiters stattfindet, in welchem der Cylinder eingetaucht ist, vorausgesetzt, dass der Cylinder, der mit dem andern Pol der Kette verbunden ist, ein sehr viel höheres Leitungsvermögen besitzt, als die umgebende Substanz.

Geht man von dieser letzteren Vorstellung aus, so erkennt man leicht, dass sich die Unstetigkeitsbedingung erfüllen lässt durch einen Grenzübergang in folgender Weise:

Man sucht zunächst eine im ganzen Gebiete endliche und stetige Function $u$, im Uebrigen von den verlangten Eigenschaften, deren

Ableitungen gleichfalls stetig sind, mit Ausnahme einer kleinen begrenzten Fläche $\delta$, in welcher die nach der Normale genommenen Ableitungen zu beiden Seiten $= \frac{c}{\delta}$ sind, wenn $c$ eine gegebene Constante bedeutet. Lässt man in der so gefundenen Function $\delta$ unendlich klein werden, so erhält man als Grenzfall eine Function $u$, welche an der Stelle dieser unendlich kleinen Fläche in der verlangten Weise unendlich wird.

Legt man nämlich eine beliebige, die Fläche $\delta$ umschliessende Fläche $s$, welche ihrer ganzen Ausdehnung nach in das Gebiet der Function $u$ fällt, bezeichnet mit $\varrho$ die Entfernung eines beliebigen inneren Punktes $o$ von einem veränderlichen Punkt dieser Fläche, mit $R$ die Entfernung desselben inneren Punktes von einem Punkt der Fläche $\delta$, mit $u_0$ den Werth von $u$ im Punkt $o$, mit $ds$, $d\delta$ die Elemente der Flächen $s$ und $\delta$, endlich mit $dn$, $d\nu$ die Elemente der Normalen an die Flächen $s$ und $\delta$, in das Innere des von $s$ umschlossenen Raumes positiv gerechnet, so erhält man nach dem Green'schen Satze:

$$u_0 = \frac{1}{4\pi}\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial u} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds + \frac{1}{4\pi}\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial \nu} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)d\delta.$$

Nun ist, da die Integration in Bezug auf $d\delta$ über beide Seiten der Fläche $\delta$ zu erstrecken ist, und $u$ an dieser Fläche stetig vorausgesetzt wird:

$$\int u\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial\nu}d\delta = 0;\quad \int\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\nu}d\delta = \frac{c}{\delta}\int\frac{d\delta}{R}$$

und man erhält:

$$u_0 = \frac{1}{4\pi}\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial n} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds - \frac{c}{4\pi\delta}\int\frac{d\delta}{R}.$$

Lässt man nun $\delta$ unendlich klein werden, so ergiebt sich hieraus sofort:

$u_0 = \frac{-c}{2\pi R} +$ einer im ganzen Inneren von $s$ stetigen Function,

was die verlangte Eigenschaft ausdrückt.

Um also unsere Aufgabe zu lösen, legen wir die $z$ Axe in die Cylinderaxe und führen in der Ebene $z = 0$ Polarcoordinaten ein. Dadurch wird die Gleichung (23) in folgende transformirt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{24}$$

Die gesuchte Function $u$ wird eine gerade Function von $z$ sein, wenn wir den Unstetigkeitspunkt in die Ebene $z = 0$ verlegen, und wir können uns daher auf positive Werthe von $z$ beschränken.

Wir setzen den Radius des Cylinders $= 1$ und suchen zunächst eine Lösung von (24), welche für positive Werthe von $z$ mit ihren ersten Ableitungen endlich und stetig ist, im Unendlichen und für $r = 1$ verschwindet und die Eigenschaft hat, dass für $z = 0$ $\frac{\partial u}{\partial z}$ gleich einer beliebig gegebenen Function von $r$ und $\varphi$, $\Phi(r, \varphi)$ werde, von welcher der Einfachheit halber vorausgesetzt sein mag, dass sie in Bezug auf $\varphi$ gerade sei.

Eine hier brauchbare particulare Lösung von (24), welche an der Cylinderfläche und im Unendlichen verschwindet, ist:

$$e^{-\alpha z} f_n(\alpha, r) \cos(n\varphi),$$

worin $n$ eine ganze Zahl, $\alpha$ eine beliebige positive Grösse ist, und $f_n$ die Bedeutung (14) hat. Man erhält also ein allgemeineres Integral:

$$u = \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos n\varphi \int_0^\infty e^{-\alpha z} f_n(\alpha, r)\, \psi_n(\alpha)\, d\alpha \tag{25}$$

wenn $\psi_n$ eine willkürliche Function bedeutet. Hieraus ergiebt sich für $z = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \cos n\varphi \int_0^\infty f_n(\alpha, r)\, \psi_n(\alpha)\, \alpha\, d\alpha, \tag{26}$$

was mit der gegebenen Function $\Phi$ übereinstimmen soll. Denken wir uns diese in die Form gesetzt:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \cos(n\varphi)\, \Phi_n$$

wo:

$$\Phi_n = \frac{\varepsilon_n}{\pi} \int_0^\pi \Phi \cos(n\varphi)\, d\varphi; \quad \varepsilon_0 = 1; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 2,$$

so verlangt unsere Bedingung:

$$\Phi_n = -\int_0^\infty f_n(\alpha, r)\, \psi_n(\alpha)\, \alpha\, d\alpha,$$

woraus sich nach der Formel (22) ergiebt:

$$\psi_n(\alpha) = -\frac{1}{(J_n(\alpha))^2 + (K_n(\alpha))^2} \int_1^\infty \Phi_n(\varrho)\, f_n(\alpha, \varrho)\, \varrho\, d\varrho$$

und sonach wird die Function $u$:

$$u = -\frac{1}{\pi} \Sigma_n \varepsilon_n \cos(n\varphi) \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z} f_n(\alpha, r)\, d\alpha}{(J_n(\alpha))^2 + (K_n(\alpha))^2} \int_1^\infty f_n(\alpha, \varrho)\, \varrho\, d\varrho \int_0^\pi \Phi(\varrho, \vartheta) \cos(n\vartheta)\, d\vartheta.$$

Um nun die gesuchte Green'sche Function zu erhalten, haben wir, dem oben Bemerkten gemäss, nur anzunehmen, die Function $\Phi$ sei überall $= 0$ mit Ausnahme der kleinen Fläche $\delta$, welche an der Stelle $r = r'$, $\varphi = 0$ sich befindet, wo dieselbe den Werth $\frac{c}{\delta}$ hat, und dann $\delta$ unendlich klein werden zu lassen. Dieser Grenzübergang, der für jedes positive $z$ ohne Weiteres geschehen kann, liefert:

$$(27) \qquad u = -\frac{c}{2\pi} \Sigma_n \varepsilon_n \cos(n\varphi) \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z} f_n(\alpha, r) f_n(\alpha, r')\, d\alpha}{(J_n(\alpha))^2 + (K_n(\alpha))^2}.$$

Für $z = 0$ ist dieser Ausdruck nicht mehr convergent, wohl aber für positive Werthe von $z$, und zwar wächst seine Convergenz sehr rasch mit $z$. Für negative Werthe von $z$ bilden wir die Werthe der Function $u$ nach der Gleichung $u(z) = u(-z)$, so dass die Function $u$ selbst bei $z = 0$ stetig ist, mit Ausnahme des Punktes $r = r'$ $\varphi = 0$. Da die Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial z}$ für $z = 0$ verschwinden (mit Ausnahme desselben Punktes), so sind auch die Ableitungen stetig und die Function hat alle verlangten Eigenschaften.

---

Es giebt einen zweiten Weg, die Green'sche Function für das Aeussere eines Cylinders zu bestimmen, der dieselbe in einer ganz anderen Form liefert, und es ist von Interesse, die beiden Formen in einander überzuführen.

Dieser zweite Weg beruht auf folgendem Gedanken:

Man bezeichne mit $R$ den Abstand eines veränderlichen Punktes von dem Unstetigkeitspunkt, also wenn die Coordinaten des letzteren $z = 0$, $r = r'$, $\varphi = 0$ sind:

$$(28) \qquad R = \sqrt{z^2 + \varrho^2}, \qquad \varrho = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi}$$

und setze:

$$(29) \qquad u = \frac{1}{R} - v,$$

dann hat man für $v$ eine Lösung der Gleichung (24) zu suchen, die ausserhalb des Cylinders mit ihren Ableitungen endlich und stetig ist, im Unendlichen verschwindet und an der Cylinderoberfläche mit $\frac{1}{R}$ übereinstimmt. Um diese Function zu finden, hat man $\frac{1}{R}$ an der Cylinderoberfläche darzustellen durch eine gewöhnliche Fourier'sche Reihe, deren Coefficienten Fourier'sche Integrale sind. Es treten dann in den Particularlösungen, die zur Darstellung der Function $v$ verwandt werden, die Bessel'schen Functionen mit rein imaginärem

Argument auf, über welche daher zunächst einige Sätze hier angeführt werden sollen.

Diese Functionen genügen der Differentialgleichung:

$$(30)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Als particulare Lösungen dieser Gleichung, aus welchen alle anderen linear zusammengesetzt werden können, wollen wir folgende betrachten:

$$(31)\qquad \begin{cases} \varphi_n(x) = \dfrac{x^n}{1.3\ldots(2n-1)}\displaystyle\int_{-1}^{+1} e^{-x\xi}(1-\xi^2)^{\frac{2n-1}{2}}\,d\xi \\[2ex] \psi_n(x) = \dfrac{x^n}{1.3\ldots(2n-1)}\displaystyle\int_{1}^{\infty} e^{-x\xi}(\xi^2-1)^{\frac{2n-1}{2}}\,d\xi \end{cases}$$

$$(32)\qquad \begin{cases} \varphi_0(x) = \displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{e^{-x\xi}\,d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\[2ex] \psi_0(x) = \displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-x\xi}\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}. \end{cases}$$

Die Functionen $\varphi_n$ bleiben endlich für endliche Werthe von $x$ und werden unendlich für unendlich grosse Werthe von $x$; die Functionen $\psi_n$ verschwinden für unendlich grosse Werthe von $x$ und werden unendlich für $x = 0$.

Aus den Ausdrücken (31) (32) ergeben sich leicht durch partielle Integration die Relationen:

$$(33)\qquad \begin{aligned} \varphi_n(x) &= (2x)^n \frac{d^n \varphi_0(x)}{(dx^2)^n} \\ \psi_n(x) &= (-2x)^n \frac{d^n \psi_0(x)}{(dx^2)^n}; \end{aligned}$$

ferner folgt durch dieselbe Schlussweise, durch die oben die Gleichung (11) gefunden wurde:

$$(34)\qquad \varphi_n'(x)\,\psi_n(x) - \psi_n'(x)\,\varphi_n(x) = \frac{\pi}{x}.$$

Ist nun $\varrho = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi}$, so lässt sich die Function $\psi_0(\varrho)$ in eine Reihe entwickeln, die nach $\cos(n\varphi)$ fortschreitet, genau in derselben Weise wie von Herrn C. Neumann die von ihm mit $J^{(0)}$ und $Y^{(0)}$ bezeichneten Functionen für dasselbe Argument entwickelt worden sind*). Man erhält durch ganz analoge Betrachtungen:

---

*) Theorie der Bessel'schen Functionen.

$$(35)\qquad \psi_0(\varrho) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \cos(n\varphi)\, \varphi_n(r)\, \psi_n(r') \qquad (r < r')$$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \cos(n\varphi)\, \varphi_n(r')\, \psi_n(r) \qquad (r > r').$$

Ferner geht das bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty \cos(\alpha z)\, \psi_0(\alpha\varrho)\, d\alpha$$

durch Substitution von (32) und Umkehrung der Integrationsfolge über in folgendes:

$$\int_1^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}} \int_0^\infty \cos(\alpha z)\, e^{-\alpha\varrho\xi}\, d\alpha\,.$$

Führt man diese Integrationen aus, so erhält man:

$$(36)\qquad \int_0^\infty \cos(\alpha z)\, \psi_0(\alpha\varrho)\, d\alpha = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{z^2+\varrho^2}} = \frac{\pi}{2R}\,.$$

Mit Benutzung von (35) ergiebt sich hieraus endlich:

$$(37)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \cos(n\varphi) \int_0^\infty \cos(\alpha z)\, \varphi_n(\alpha r)\, \psi_n(\alpha r')\, d\alpha \qquad (r < r') \\ \frac{1}{R} &= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \cos(n\varphi) \int_0^\infty \cos(\alpha z)\, \varphi_n(\alpha r')\, \psi_n(\alpha r)\, d\alpha \qquad (r > r'). \end{aligned}$$

Diese Entwickelung der reciproken Entfernung zweier Punkte kann nun zur Lösung unseres Problems angewandt werden.

Es ist nämlich ein particulares Integral der Gleichung (24):

$$\cos(n\varphi)\cos(\alpha z)\, \psi_n(\alpha r)$$

und man wird daher $v$, welches für unendliche Werthe von $r$ verschwinden muss, in der Form annehmen können:

$$v = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \cos(n\varphi) \int_0^\infty \cos(\alpha z)\, \psi_n(\alpha r)\, \Phi_n(\alpha)\, d\alpha\,,$$

wenn die Functionen $\Phi_n(\alpha)$ dadurch bestimmt werden, dass für $r = 1$ $v$ mit $\frac{1}{R}$ übereinstimmen soll.

Die Vergleichung mit der ersten Entwickelung (37) ergiebt aber sofort:

$$\Phi_n(\alpha) = \frac{\varphi_n(\alpha)}{\psi_n(\alpha)}\, \psi_n(\alpha r')$$

und demnach wird:

$$(38)\quad v = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^\infty \cos(\alpha z)\,\frac{\varphi_n(\alpha)}{\psi_n(\alpha)}\,\psi_n(\alpha r)\,\psi_n(\alpha r')\,d\alpha\,.$$

Setzt man in $u = \frac{1}{R} - v$ die Entwickelungen (37), (38) ein und schreibt zur Abkürzung:

$$\lambda_n(\alpha, r) = \psi_n(\alpha)\,\varphi_n(\alpha r) - \varphi_n(\alpha)\,\psi_n(\alpha r)\,,$$

so ergiebt sich schliesslich:

$$(39)\quad \begin{aligned} u &= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^\infty \cos(\alpha z)\,\frac{\psi_n(\alpha r')\,\lambda_n(\alpha_1 r)\,d\alpha}{\psi_n(\alpha)} \qquad (r < r') \\ u &= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^\infty \cos(\alpha z)\,\frac{\psi_n(\alpha r)\,\lambda_n(\alpha_1 r')\,d\alpha}{\psi_n(\alpha)} \qquad (r > r')\,. \end{aligned}$$

Um nun die Ausdrücke (39) direct in die Form (27) überzuführen, stellen wir uns die Aufgabe, die Function

$$(40)\quad \begin{aligned} F(z, r) &= \int_0^\infty \cos(\alpha z)\,\frac{\psi_n(\alpha r')\,\lambda_n(\alpha, r)\,d\alpha}{\psi_n(\alpha)} \qquad (r < r') \\ &= \int_0^\infty \cos(\alpha z)\,\frac{\psi_n(\alpha r)\,\lambda_n(\alpha, r')\,d\alpha}{\psi_n(\alpha)} \qquad (r > r') \end{aligned}$$

darzustellen durch ein Integral von der Form:

$$(41)\quad \int_0^\infty f_n(\xi, r)\,\Psi(\xi, z)\,d\xi$$

durch passende Bestimmung der Function $\Psi$. Diese Bestimmung der Function $\Psi$ ergiebt sich aus (22):

$$(42)\quad \Psi(\xi, z) = \frac{\xi}{(J_n(\xi))^2 + (K_n(\xi))^2}\int_1^\infty F(z, r)\,f_n(\xi, r)\,r\,dr\,.$$

Beachtet man nun, dass sowohl $\lambda_n(\alpha, r)$ als $\psi_n(\alpha r)$ der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d r \frac{dy}{dr}}{dr} = \left(\alpha^2 + \frac{n^2}{r^2}\right) r y\,,$$

dagegen $f_n(\xi, r)$ der Differentialgleichung:

$$\frac{d r \frac{dy}{dr}}{dr} = -\left(\xi^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) r y\,,$$

so erhält man die unbestimmten Integrale:

$$
(43)\quad \begin{aligned}
(\alpha^2+\xi^2)\int \lambda_n(\alpha,r) f_n(\xi,r)\,r\,dr &= r\left(f_n(\xi,r)\frac{d\lambda_n(\alpha,r)}{dr} - \lambda_n(\alpha,r)\frac{df_n(\xi,r)}{dr}\right)\\
(\alpha^2+\xi^2)\int \psi_n(\alpha r) f_n(\xi,r)\,r\,dr &= r\left(f_n(\xi,r)\frac{d\psi_n(\alpha r)}{dr} - \psi_n(\alpha r)\frac{df_n(\xi,r)}{dr}\right).
\end{aligned}
$$

Setzt man also in (42) für $F(\xi, r)$ die Ausdrücke (40), kehrt die Integrationsfolge um und benutzt (43), so folgt:

$$
\int_1^\infty F(z,r) f_n(\xi,r)\,r\,dr = \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha z)\,d\alpha}{(\xi^2+\alpha^2)\psi_n(\alpha)}\left\{\psi_n(\alpha r')\left[r\left(f_n(\xi,r)\frac{d\lambda_n(\alpha,r)}{dr} - \lambda_n(\alpha,r)\frac{df_n(\xi,r)}{dr}\right]_1^{r'}\right.\right.
$$

$$
\left.+\lambda_n(\alpha,r')\left[r\left(f_n(\xi,r)\frac{d\psi_n(\alpha r)}{dr} - \psi_n(\alpha r)\frac{df_n(\xi,r)}{dr}\right)\right]_{r'}^\infty\right\}.
$$

Setzt man die Ganzen ein, berücksichtigt die Bedeutung von $\lambda_n(\alpha, r)$, benutzt die Relation (34) und ein sehr bekanntes, bestimmtes Integral, so folgt:

$$
\int_1^\infty F(z,r)\, f_n(\xi,r)\,r\,dr = \pi f_n(\xi,r')\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha z)\,d\alpha}{\xi^2+\alpha^2} = \frac{\pi^2}{2\xi}\, e^{-\xi z} f_n(\xi,r').
$$

Mit Rücksicht auf diese letztere Formel ergiebt sich sonach aus (39), (40), (41), (42):

$$
u = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_0^\infty \frac{f_n(\xi,r)\, f_n(\xi,r')\, e^{-\xi z}\, d\xi}{(J_n(\xi))^2 + (K_n(\xi))^2},
$$

eine Formel, die mit (27) übereinstimmt, wenn dort $c = -2\pi$ gesetzt wird.

Zürich, im October 1872.

# Die Lie'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von A. Mayer in Leipzig.

Die hauptsächlichsten Resultate des nachfolgenden Aufsatzes sind bereits veröffentlicht worden in den Göttinger Nachrichteu vom 9. October 1872. Derselbe bezweckt eine rein analytische Ableitung der neuen Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, auf deren Existenz Herr Lie durch geometrische Betrachtungen, angestellt an Räumen von $n$ Dimensionen, geführt worden ist*). Diese Methode, welche die zur Ermittelung der vollständigen Lösung einer gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung erforderlichen Integrationen genau um dieselbe Anzahl verringert, wie dasjenige Verfahren, welches ich in diesen Annalen Bd. V p. 466 auseinandergesetzt habe, ist in der That eine *neue* Integrationsmethode. Denn während alle Fortschritte, die bisher in der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gemacht wurden, im Grunde immer nur auf Vereinfachungen der Jacobi'schen neuen Methode hinauslaufen, benutzt die Lie'sche Methode von dieser gewissermassen nur den allerersten Gedanken, ohne aber irgendwie der weiteren Details zu bedürfen. Es erschien daher wünschenswerth, dieselbe auch ganz unabhängig von jener darzustellen, und dies ist der Grund, weshalb man im Folgenden unter etwas veränderter Form auch manches Bekannte wiederfinden wird.

## § 1.

### Angabe des Problems und Specialisirung desselben.

Das allgemeinste Problem, das in Bezug auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung gestellt werden kann, so lange man sich auf eine einzige unbekannte Function beschränkt, ist folgendes:

---

*) Vgl. die der Akademie zu Christiania am 10. Mai 1872 vorgelegte Note: „Neue Integrationsmethode partieller Gleichungen erster Ordnung zwischen $n$ Variabeln," sowie die Mittheilung: „Ueber eine neue Integrationsmethode partieller Differentialgleichungen erster Ordnung," Göttinger Nachrichten 1872, Nr. 19.

Man soll eine Function $V$ der $n$ unabhängigen Variabeln $q_1, q_2, \dots q_n$ finden, die definirt ist durch $\mu$ gegebene, von einander unabhängige Gleichungen zwischen diesen Variabeln und den partiellen Differentialquotienten:

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \; p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots p_n = \frac{\partial V}{\partial q_n}.$$

Wenn nämlich in den gegebenen partiellen Differentialgleichungen die unbekannte Function $V$ selbst vorkäme, so brauchte man nur an Stelle von $V$ eine neue unbekannte Function $W$ von $V, q_1, q_2, \dots q_n$ in der Art einzuführen, dass man sich $V$ durch die Gleichung

$$W = \text{const.}$$

bestimmt denkt, um hierdurch sofort die gegebenen Gleichungen zu verwandeln in solche, die zwar eine unabhängige Variable ($V$) mehr besitzen, dafür aber von der neuen unbekannten Function $W$ nur die partiellen Differentialquotienten enthalten. Wir brauchen daher immer nur partielle Differentialgleichungen von der oben genannten Form zu betrachten, und wenn im Folgenden von partiellen Differentialgleichungen mit einer bestimmten Anzahl unabhängiger Variabeln die Rede sein wird, so werden darunter immer nur solche verstanden, in denen die unbekannte Function selbst nicht vorkommt.

Jenes allgemeinste Problem lässt sich nun aber, unbeschadet der Allgemeinheit, seinerseits wieder weiter specialisiren und auf eine bestimmte, einfachere Form zurückführen, wenn man von vornherein die Fälle ausscheidet, in welchen eine Lösung nicht existiren kann.

In der That, zunächst ist klar, dass, wenn es überhaupt, ohne die Unabhängigkeit der Variabeln $q$ aufzuheben, möglich sein soll, den gegebenen Gleichungen durch eine und dieselbe Function $V$ Genüge zu leisten, sich aus diesen Gleichungen die Differentialquotienten $p_1, p_2, \dots p_n$ nicht sämmtlich dürfen eliminiren lassen. Es muss folglich die Anzahl $\mu$ der Gleichungen $\leqq n$ sein und es müssen sich aus ihnen $\mu$ von den Grössen $p$ bestimmen lassen durch die übrigen und durch die $q$.

Simultane partielle Differentialgleichungen der ersten Ordnung, die eine gemeinsame Lösung $V$ zulassen, müssen sich demnach immer auf die Form bringen lassen:

$$(1) \qquad p_1 = F_1, \; p_2 = F_2 \dots, \; p_\mu = F_\mu,$$

wo $F_1, F_2, \dots F_\mu$ Functionen von $q_1, \dots q_n, p_{\mu+1}, \dots p_n$, aber frei von $p_1, \dots p_\mu$ sind.

Betrachten wir ferner irgend zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$F(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n) = 0$$
$$\Phi(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n) = 0.$$

Jede Lösung $V$ der ersten Gleichung muss zugleich den Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial F}{\partial q_h} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_h} = 0,$$

die aus der ersten Gleichung durch Differentiation nach den Variabeln $q_h$ entstehen. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich aber durch Multiplication mit $\frac{\partial \Phi}{\partial p_h}$ und Summation

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial F}{\partial q_h} \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} + \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_h} = 0.$$

Ist daher die betrachtete Lösung $V$ der ersten Gleichung gleichzeitig eine Lösung der zweiten, so muss sie auch derjenigen Gleichung genügen, die aus der vorhergehenden durch Vertauschung von $F$ und $\Phi$ entspringt. Diese Gleichung aber stellt sich, wenn man zugleich in der Doppelsumme die beiden Indices $h$ und $k$ vertauscht, also dar:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \Phi}{\partial q_h} \frac{\partial F}{\partial p_h} + \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial q_k} = 0.$$

Indem man nun beide Gleichungen von einander abzieht und die Bedingungen:

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_h} = \frac{\partial p_h}{\partial q_k}$$

berücksichtigt, sieht man, dass die beiden Gleichungen $F = 0$ und $\Phi = 0$ keine gemeinsame Lösung besitzen können, für die nicht gleichzeitig auch

$$(F, \Phi) = 0$$

würde. Unter dem Zeichen $(F, \Phi)$ verstehe ich immer den Ausdruck:

$$(F, \Phi) = \sum_{h=1}^{h=n} \left( \frac{\partial F}{\partial q_h} \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} - \frac{\partial F}{\partial p_h} \frac{\partial \Phi}{\partial q_h} \right).$$

Sollen daher die $\mu$ partiellen Differentialgleichungen (1) eine gemeinsame Lösung zulassen, so muss diese auch eine Lösung aller der Gleichungen:

$$(2) \qquad (F_i - p_i, \; F_k - p_k) = 0$$

sein, in denen $i$ und $k$ irgend zwei der Zahlen $1, 2, \ldots \mu$ sind.

Führen diese letzteren Gleichungen, aus denen sich $p_1, p_2, \ldots p_\mu$ ganz wegheben, durch Elimination von $p_{\mu+1}, \ldots . p_n$ auf eine nicht identische Relation zwischen den unabhängigen Variabeln $q$ allein, so ist man folglich sicher, dass für die Gleichungen (1) eine gemeinsame Lösung nicht existirt. Ist dies nicht der Fall, so müssen sich aus den Gleichungen (2), falls dieselben nicht sämmtlich identisch sind, immer noch eine oder mehrere der Grössen $p_{\mu+1}, \ldots p_n$ bestimmen lassen durch die übrigen und die $q$, und das System (1) wird dann durch Substitution dieser Werthe zurückgeführt auf eins von der Form:

$$p_1 = \Phi_1, \; p_2 = \Phi_2, \ldots p_\mu = \Phi_\mu$$
$$p_{\mu+1} = \Phi_{\mu+1}, \ldots p_{\mu+h} = \Phi_{\mu+h},$$

in welchem $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{\mu+h}$ jetzt nur noch Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_n, p_{\mu+h+1}, \ldots p_n$ sind. Indem sich nun aber an diesem System dieselben Betrachtungen wiederholen, erhellt, dass, wenn mehrere partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit derselben unbekannten Function $V$ und denselben unabhängigen Variabeln $q_1, q_2, \ldots q_n$ eine gemeinsame Lösung besitzen sollen, diese Gleichungen sich nothwendig immer auf die Form bringen lassen müssen:

(3) $$p_1 = F_1, \; p_2 = F_2, \ldots p_{m-1} = F_{m-1},$$

worin $m - 1 \leqq n$ und $F_1, F_2, \ldots F_{m-1}$ frei von $p_1, \ldots p_{m-1}$ und solche Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_n, p_m, \ldots p_n$ sind, zwischen denen die $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ Relationen:

(4) $$(F_i - p_i, \; F_k - p_k) = 0$$

identisch stattfinden.

Wir werden uns daher im Folgenden auch nur mit simultanen partiellen Differentialgleichungen von dieser Form und Beschaffenheit zu beschäftigen brauchen.

## § 2.

### Jacobi'sche Systeme.

Wenn ein System Gleichungen zwischen $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$, unabhängig von einander bezüglich der $p$, die Eigenschaft besitzt, dass allen seinen Gleichungen genügt werden kann durch eine solche Function $V$ von $q_1, \ldots q_n$ und von willkürlichen Constanten, die keinen anderen von diesen willkürlichen Constanten freien partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen denselben Variabeln Genüge leistet, ausser solchen, die eine blosse algebraische Folge der Gleichungen des Systems sind, so will ich das System ein *Jacobi'sches* System und jede Functien $V$ von der angegebenen Beschaffenheit eine *vollständige Lösung* desselben, oder eine *gemeinsame vollständige Lösung* seiner Gleichungen nennen. Man sieht unmittelbar, dass für ein Jacobi'sches System von $m - 1$ Gleichungen jede vollständige Lösung $n - m + 1$ willkürliche Constanten enthalten muss ausser einer bloss additiven. Von der letztern werde ich im Folgenden immer absehen.

Beschränken wir uns im Besonderen auf ein System von der Form (3), so können wir diese Definition auch so fassen:

Wenn die $m-1$ partiellen Differentialgleichungen (2) eine gemeinsame Lösung $V$ zulassen, die $n-m+1$ willkürliche Constante in der Art enthält, dass die partiellen Differentialquotienten von $V$ nach $q_m, \ldots q_n$ unabhängige Functionen dieser Constanten sind, so bilden diese Gleichungen ein Jacobi'sches System, von dem jede solche gemeinsame Lösung eine vollständige Lösung ist. Man sieht zugleich, dass die vollständige Lösung eines Jacobi'schen Systems von der Formel (3) gleichzeitig auch von jeder einzelnen Gleichung des Systems eine vollständige Lösung ist. Durch eine gegebene vollständige Lösung ist das zugehörige Jacobi'sche System vollständig bestimmt und wir werden daher dasselbe vollständig integrirt haben, sobald es gelungen ist, eine vollständige Lösung desselben zu finden.

Aus der ersten Definition eines Jacobi'schen Systems und dem Umstande, dass die Bedingungen (4) $p_1, \ldots p_{m-1}$ gar nicht enthalten, ergiebt sich unmittelbar, *dass, wenn die Gleichungen* (3) *ein Jacobi'sches System bilden sollen, nothwendig die Functionen $F_1, F_2, \ldots F_{m-1}$ den Gleichungen* (4) *identisch genügen müssen.* Bei der Frage nach der Integration eines Jacobi'schen Systemes von der Form (3) werden wir daher von der Voraussetzung der Identitäten (4) ausgehen können. Die Mittel, diese Integration zu bewirken, bieten die beiden Sätze, die ich im folgenden § voranschicke. Diese Sätze werden dort unmittelbar in der besonderen Form ausgesprochen, die für die späteren Anwendungen die bequemste ist; ich bemerke aber, dass dieselben im Grunde nur specielle, dem hier verfolgten Zweck angepasste Fassungen sind zweier Sätze (1) und (4) aus der, in den Göttinger Nachrichten, 1872, Nr. 21 veröffentlichten Mittheilung „Zur Theorie der vollständigen Lösungen und der Transformation der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung". Die unten folgenden Beweise geben gleichzeitig ein so deutliches Beispiel der Betrachtungen, die mich überhaupt zu den Sätzen dieser Note geführt haben, dass eine besondere Begründung derselben wohl überflüssig sein dürfte.

## § 3.

## Ueber die Ableitung bestimmter vollständiger Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und die Transformation eines Jacobi'schen Systems.

*Satz I. Es sei:*

$$V = \psi(q_1, q_2, \ldots q_n, b_m, \ldots b_n)$$

*irgend eine in Bezug auf $q_m, \ldots q_n$ vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung:*

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = F_1\left(q_1, q_2, \ldots q_n \frac{\partial V}{\partial q_m}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right).$$

*in der* $q_2, \ldots q_{m-1}$ *nur wie Constanten auftreten, und* $a_1$ *irgend eine* (von $b_m, \ldots b_n$ unabhängige) *Constante von der Beschaffenheit, dass die partiellen Differentialquotienten von* $\psi$ *nach* $q_m, \ldots q_n$ *auch nach der Substitution* $q_1 = a_1$ *noch unabhängige Functionen der Integrationsconstanten* $b_m, \ldots b_n$ *bleiben. Wählt man dann willkürlich eine* (von $q_1, q_m, \ldots q_n, b_m, \ldots b_n$ freie) *Function:*

$$\varphi_a = \varphi(a_1, a_m, \ldots a_n, c_m, \ldots c_n),$$

*deren partielle Differentialquotienten nach* $a_m, \ldots a_n$ *unabhängige Functionen von* $c_m, \ldots c_n$ *sind, und bezeichnet mit* $\psi_a$ *den Werth, den die Function* $\psi$ *durch die Substitutionen:*

$$q_1 = a_1, \; q_m = a_m, \ldots q_n = a_n$$

*annimmt, so bestimmen die* $2(n - m + 1)$ *Gleichungen:*

$$(2) \qquad \frac{\partial \psi_a}{\partial b_k} = \frac{\partial \psi}{\partial b_k} \qquad\qquad (3) \qquad \frac{\partial \psi_a}{\partial a_k} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial a_k}$$

*stets die* $2(n - m + 1)$ *Grössen*

$$a_m, \ldots a_n, b_m, \ldots b_n$$

*als Functionen von*

$$q_1, q_2, \ldots q_n, c_m, \ldots c_n$$

*und man erhält durch Substitution ihrer Werthe in*

$$(4) \qquad V = \psi - \psi_a + \varphi_a$$

*eine neue, in Bezug auf* $q_m, \ldots q_n$ *vollständige Lösung der Gleichung* (1). *Diese neue Lösung, deren willkürliche Constanten* $c_m, \ldots c_n$ *sind, erhält für* $q_1 = a_1$ *den gegebenen Werth:*

$$V = \varphi(a_1, q_m, \ldots q_n, c_m, \ldots c_n).$$

*Beweis.* Bezüglich der in diesem Satze gebrauchten Ausdrucksweise bemerke ich zunächst, dass ich unter einer in Bezug auf $q_m, \ldots q_n$ vollständigen Lösung der Gleichung (1) eine solche Lösung verstehe, die $n - m + 1$ willkürliche Constanten enthält und deren partielle Differentialquotienten nach $q_m, \ldots q_n$ unabhängige Functionen dieser Constanten sind. Fehlt in der Function $F_1$ keiner der Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial q_m}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}$, so erfüllt bekanntlich jede vollständige Lösung der Gleichung (1) diese Forderung. Wenn dagegen $F_1$ etwa $\frac{\partial V}{\partial q_m}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_{m+i}}$ gar nicht enthält — und solche Fälle dürfen nicht übersehen werden, wenn man, wie im Folgenden, die Gleichung (1) nicht an sich, sondern im Zusammenhange mit anderen partiellen Differentialgleichungen betrachtet —, so sind, da alsdann in der Gleichung (1) auch $q_m, \dots q_{m+i}$ die Rolle von Constanten spielen, die vollständigen Lösungen dieser Gleichung zunächst nur von der Form:

$$V = \chi(q_1, q_2, \dots q_n, b_{m+i+1}, \dots b_m) + \text{Const.}$$

Da man aber dann die additive Const. einer beliebigen Function von $q_m, \dots q_{m+i}$ gleich setzen darf, so erhellt sofort, dass man in diesem Falle nur etwa:

$$\psi = \chi + b_m q_m + \cdots b_{m+i} q_{m+i}$$

zu nehmen braucht, um der an die Lösung $\psi$ gestellten Forderung gerecht zu werden.

Was nun den Beweis selbst anbetrifft, so sieht man zunächst, dass den Gleichungen (2), aus denen sich bei den gemachten Voraussetzungen $a_m, \dots a_n$ nicht eliminiren lassen*), für $q_1 = a_1$ genügt wird durch

$$a_m = q_m, \dots a_n = q_n$$

und dass, wenn man diese Substitutionen in den Gleichungen (3) macht, diese nun ihrerseits $b_m, \dots b_n$ bestimmen durch $q_m, \dots q_n$, $c_m, \dots c_n$ und zwar als unabhängige Functionen von $c_m, \dots c_n$, da die Gleichungen (3) umgekehrt auch nach den letzteren Grössen auflösbar sind.

Die Gleichungen (2) und (3), indem sie somit für den speciellen Werth $a_1$ von $q_1$ sämmtliche Unbekannte $a_m, \dots a_n$, $b_m, \dots b_n$ vollständig und als unabhängige Functionen von $q_m, \dots q_n$, $c_m, \dots c_n$ definiren, müssen diese Eigenschaft umsomehr bei unbestimmten $q_1$ besitzen.

Substituirt man nun die aus (2) und (3) folgenden Werthe von $a_m, \dots a_n$, $b_m, \dots b_n$ in die Gleichung (4), so liefert diese $V$ als Function von $q_1, q_2, \dots q_n$, $c_m \dots c_n$. Durch partielle Differentiation dieser Function nach irgend einer der unabhängigen Variabeln $q_i$ der Gleichung (1) erhält man:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial \psi}{\partial q_i} + \sum_{k=m}^{k=n} \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial b_k} - \frac{\partial \psi_a}{\partial b_k} \right) \frac{\partial b_k}{\partial q_i} + \left( \frac{\partial \varphi_a}{\partial a_k} - \frac{\partial \psi_a}{\partial a_k} \right) \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \right\},$$

oder in Folge der Identitäten (2) und (3) einfach:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial \psi}{\partial q_i}.$$

---

*) Denn so oft $\frac{\partial \psi_a}{\partial a_m}, \dots \frac{\partial \psi_a}{\partial a_n}$ unabhängige Functionen von $b_m, \dots b_n$ sind, sind bekanntlich immer auch umgekehrt $\frac{\partial \psi_a}{\partial b_m}, \dots \frac{\partial \psi_a}{\partial b_n}$ unabhängige Functionen von $a_m, \dots a_n$.

Wenn man daher $c_m, \ldots c_n$ als willkürliche Constanten betrachtet, so ist diese Function $V$ wiederum eine Lösung der Gleichung (1). Man erkennt überdies aus dem Vorhergehenden, dass die Werthe von $a_m, \ldots a_n$, die man durch Auflösung der Gleichungen (2) und (3) nach den $a_k$ und $b_k$ erhält, für $q_1 = a_1$ sich resp. auf $q_m, \ldots q_n$ reduciren müssen. Nach (4) nimmt daher diese neue Lösung $V$ für $q_1 = a_1$ den gegebenen Werth an:

$$V = \varphi\,(a_1, q_m, \ldots q_n, c_m, \ldots c_n),$$

woraus nach der über $\varphi$ gemachten Voraussetzung zugleich erhellt, dass auch die partiellen Differentialquotienten dieser neuen Lösung nach $q_m, \ldots q_n$ unabhängige Functionen der willkürlichen Constanten $c_m, \ldots c_n$ sind.

*Satz II. Es sei:*

$$\varphi = \varphi\,(q_1, q_2, \ldots q_n, c_m, \ldots c_n)$$

*eine willkürlich gewählte Function, deren partielle Differentialquotienten nach $c_m, \ldots c_n$ unabhängige Functionen von $q_m, \ldots q_n$ sind, so dass die $n - m + 1$ Substitutionen:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_k} = \frac{\partial W}{\partial c_k}$$

*die $n - m + 1$ Unbekannten $q_m, \ldots q_n$ als Functionen von*

$$q_1, \ldots q_{m-1}, c_m, \ldots c_n, \frac{\partial W}{\partial c_m}, \ldots \frac{\partial W}{\partial c_n}$$

*vollständig definiren, und es werde durch diese Substitutionen allgemein:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - F_i\left(q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial q_n}\right)$$
$$= \Phi_i\left(q_1, \ldots q_{m-1}, c_m, \ldots c_n, \frac{\partial W}{\partial c_m}, \ldots \frac{\partial W}{\partial c_n}\right).$$

*Wenn dann die $m - 1$ partiellen Differentialgleichungen:*

(1) $$\frac{\partial V}{\partial q_i} = F_i\left(q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{\partial V}{\partial q_m}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}\right),$$

*in denen $i = 1, 2, \ldots m - 1$ ist, ein Jacobi'sches System bilden, so gilt dasselbe auch von den $m - 1$ Gleichungen:*

(2) $$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \Phi_i\left(q_1, \ldots q_{m-1}, c_m, \ldots c_n, \frac{\partial W}{\partial c_m}, \ldots \frac{\partial W}{\partial c_n}\right),$$

*und umgekehrt, und beide Systeme lassen sich gegenseitig in folgender Art aufeinander zurückführen:*

*Aus einer vollständigen Lösung*

$$V = \theta\,(q_1, q_2, \ldots q_n, \alpha_m, \ldots \alpha_n)$$

*des Systems* (1) *erhält man eine vollständige Lösung W des Systems* (2) *durch die Formel:*

$$W = \theta_a - \theta + \varphi, \tag{3}$$

*wenn man in dieser* $q_m, \ldots q_n$, *sowie die Integrationsconstanten* $\alpha_m, \ldots \alpha_n$ *mittelst der* $2(n-m+1)$ *Gleichungen:*

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_k} = \frac{\partial\theta_a}{\partial\alpha_k}, \tag{4}$$ $$\frac{\partial\theta}{\partial q_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial q_k} \tag{5}$$

*durch* $q_1, \ldots q_{m-1}, c_m, \ldots c_n$ *und die willkürlichen Constanten* $a_m, \ldots a_n$ *ausdrückt.*

*Umgekehrt geht aus einer beliebigen vollständigen Lösung*

$$W = \vartheta(q_1, \ldots q_{m-1}, c_m, \ldots c_n, \beta_m, \ldots \beta_n)$$

*des Systems* (2) *eine vollständige Lösung V des Systems* (1) *dadurch vorher, dass man den Ausdruck*

$$V = \vartheta_a - \vartheta + \varphi \tag{6}$$

*mit Hülfe der* $2(n-m+1)$ *Gleichungen*

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\beta_k} = \frac{\partial\vartheta_a}{\partial\beta_k}, \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial c_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial c_k} \tag{7}$$

*als Function von* $q_1, q_2, \ldots q_n$ *und von den willkürlichen Constanten* $a_m, \ldots a_n$ *darstellt. Hierbei entsteht* $\theta_a$ *aus* $\theta$, *und* $\vartheta_a$ *aus* $\vartheta$ *durch die Substitutionen:*

$$q_1 = a_1, \ldots\ldots q_{m-1} = a_{m-1}, \; q_m = a_m, \ldots q_n = a_n$$

$$\text{und } q_1 = a_1, \ldots, \ldots q_{m-1} = a_{m-1}, \; c_m = a_m, \ldots c_n = a_n'$$

*und* $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$ *sind Constanten* (d. h. von den Argumenten der Functionen $\varphi$ und $\theta$, resp. $\vartheta$ unabhängige Grössen), *die willkürliche Werthe erhalten können, mit der Beschränkung jedoch, dass auch für*

$$q_1 = a_1, \; q_2 = a_2, \ldots q_{m-1} = a_{m-1}$$

*die Ausdrücke*

$$\frac{\partial\theta}{\partial q_m}, \ldots \frac{\partial\theta}{\partial q_n} \text{ und } \frac{\partial\varphi}{\partial c_m}, \ldots \frac{\partial\varphi}{\partial c_n}$$

*resp.*

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial c_m}, \ldots \frac{\partial\vartheta}{\partial c_n} \text{ und } \frac{\partial\varphi}{\partial q_m}, \ldots \frac{\partial\varphi}{\partial q_n}$$

*noch unabhängige Functionen bleiben müssen von*

$$\alpha_m, \ldots \alpha_n \text{ und } q_m, \ldots q_n$$

*resp.*

$$\beta_m, \ldots \beta_n \text{ und } c_m, \ldots c_n.$$

*Beweis.* Ganz analog wie im vorigen Satze kommt es auch hier wieder zuerst darauf an, sich zu überzeugen, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichungen (4) und (5) sämmtliche $2(n-m+1)$ Unbekannte $q_m, \ldots q_n, \alpha_m, \ldots \alpha_n$ vollständig und auf bestimmte endliche Weise definiren als Functionen von

$$q_1, \ldots q_{m-1}, c_m, \ldots c_n, a_m, \ldots a_n.$$

Die Gleichungen (4) nun sind unabhängig von einander in Bezug auf $q_m, \ldots q_n$. Dies gilt auch dann noch, wenn man

$$q_1 = a_1, q_2 = a_2, \ldots q_{m-1} = a_{m-1}$$

setzt. Giebt man aber in den Gleichungen (4) den Variabeln $q_1$, $q_2, \ldots q_{m-1}$ diese Werthe, so werden diese Gleichungen erfüllt durch

$$q_m = a_m, \ldots q_n = a_n,$$

und wenn man hiernach in den Gleichungen (5) allgemein $q_k = a_k$ setzt, so bestimmen diese in Bezug auf $\alpha_m, \ldots \alpha_n$ unabhängigen Gleichungen nun ihrerseits die letzteren Grössen als Functionen von $a_m, \ldots a_n, c_m, \ldots c_n$ und zwar als unabhängige Functionen von $c_m, \ldots c_n$.

Für die besonderen Werthe $a_1, \ldots a_{m-1}$ der Grössen $q_1, \ldots q_{m-1}$ definiren also die Gleichungen (4) und (5) sämmtliche Unbekannte vollständig und als unabhängige Functionen von $a_m, \ldots a_n, c_m, \ldots c_n$. Sie müssen daher dieselbe Eigenschaft umsomehr bei unbestimmten $q_1, \ldots q_{m-1}$ behalten.

Setzt man nun die aus (4) und (5) folgenden Werthe dieser Unbekannten in die Formel (3) ein, so erhält man aus dieser $W$ als Function von $q_1, \ldots q_{m-1}, c_m, \ldots c_n, a_m, \ldots a_n$ und durch partielle Differentiation von $W$ nach $c_\lambda$ und $q_i$:

$$\frac{\partial W}{\partial c_\lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial c_\lambda} + \sum_{k=m}^{k=n} \left[ \left( \frac{\partial \theta_a}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_k} \right) \frac{\partial \alpha_k}{\partial c_\lambda} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} - \frac{\partial \theta}{\partial q_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial c_\lambda} \right],$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{\partial \theta}{\partial q_i} + \sum_{k=m}^{k=n} \left[ \left( \frac{\partial \theta_a}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_k} \right) \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} - \frac{\partial \theta}{\partial q_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \right].$$

Wegen der Identitäten (4) und (5) reduciren sich diese Formeln aber auf

$$\frac{\partial W}{\partial c_\lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial c_\lambda}$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{\partial \theta}{\partial q_i}.$$

Nun ist nach Voraussetzung identisch:

$$\frac{\partial \theta}{\partial q_i} = F_i \left( q_1, q_2 \ldots q_n, \frac{\partial \theta}{\partial q_m}, \ldots \frac{\partial \theta}{\partial q_n} \right),$$

also nach Substitution der aus (4) und (5) folgenden Werthe von $q_m, \ldots q_n, \alpha_m, \ldots \alpha_n$

$$\frac{\partial \theta}{\partial q_i} = F_i \left( q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} \right).$$

Die Function $W$ genügt daher identisch den Gleichungen:

$$(8) \qquad \frac{\partial W}{\partial c_\lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial c_\lambda}$$

$$(9) \qquad \frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - F_i\left(q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial q_n}\right).$$

in denen rechter Hand für $q_m, \ldots q_n$ die Werthe zu setzen sind, die sich durch Auflösung der Gleichungen (4) und (5) nach $q_m, \ldots q_n$. $\alpha_m, \ldots \alpha_n$ ergeben.

Aber die $n - m + 1$ Gleichungen (8) bestimmen ihrerseits $q_m, \ldots q_n$ durch

$$q_1, \ldots q_{m-1}, c_m, \ldots c_n, \frac{\partial W}{\partial c_m}, \ldots \frac{\partial W}{\partial c_n}.$$

Wenn daher durch diese Gleichungen identisch wird:

$$(10) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - F_i\left(q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial q_n}\right)$$
$$= \Phi_i\left(q_1, \ldots q_{m-1}, c_m, \ldots c_n, \frac{\partial W}{\partial c_m}, \ldots \frac{\partial W}{\partial c_n}\right)$$

so genügt die Function $W$ identisch den $m - 1$ Gleichungen (2). Sie erhält überdies für $q_1 = a_1$, $q_2 = a_2, \ldots q_{m-1} = a_{m-1}$ nach (3) den Werth:

$$W = \varphi\,(a_1, a_2, \ldots a_n, c_m, \ldots c_n),$$

woraus hervorgeht, dass $W$ eine vollständige Lösung des Systems (2) und dieses demnach wiederum ein Jacobi'sches System ist.

Hiermit ist der erste Theil des Satzes bewiesen.

Indem man die erhaltenen Resultate nun umgekehrt auf eine beliebige vollständige Lösung

$$W = \vartheta\,(q_1, \ldots q_{m-1}, c_m, \ldots c_n, \beta_m, \ldots \beta_n)$$

des Jacobi'schen Systems (2) anwendet, ergiebt sich, dass diejenige Function $V$ von $q_1, q_2, \ldots q_m, a_m, \ldots a_n$, die man aus der Formel (6) erhält, wenn man darin für $c_m, \ldots c_n, \beta_m, \ldots \beta_n$ ihre Werthe aus den Gleichungen (7) einsetzt, eine vollständige Lösung des Systems partieller Differentialgleichungen ist, das aus den $m - 1$ Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \Phi_i\left(q_1, \ldots q_{m-1}, c_m, \ldots c_n, \frac{\partial \varphi}{\partial c_m}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial c_n}\right)$$

durch die Substitutionen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} = \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

hervorgeht. Da aber nach (8) und (10) identisch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \Phi_i\left(q_1, \ldots q_{m-1}, c_m, \ldots c_n, \frac{\partial \varphi}{\partial c_m}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial c_n}\right)$$
$$= F_i\left(q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial q_n}\right)$$

ist, so sieht man, dass dieses System nichts anderes ist als das ursprüngliche (1) und dass somit umgekehrt auch die Gleichungen (1) ein Jacobi'sches System bilden, so oft dasselbe von den Gleichungen (2) gilt.

## § 4.

## Zurückführung eines Jacobi'schen Systems von zwei Gleichungen auf zwei partielle Differentialgleichungen, die jede für sich zu integriren sind.

Man kann mit Hülfe der beiden vorhergehenden Sätze direct für ein Jacobi'sches System von beliebig vielen partiellen Differentialgleichungen die Lie'sche Integrationsmethode entwickeln. Ja, wenn es nicht wünschenswerth erschiene, sich Schritt für Schritt von den Operationen Rechenschaft zu geben, die man unternimmt, mit andern Worten, wenn es sich nicht sowohl um eine Ableitung als vielmehr nur um eine nachträgliche Verification der Lie'schen Methode handelte, so würde hierzu schon der erste Satz des vorigen § ausreichen, verbunden mit der selbstverständlichen Bemerkung, die übrigens im Grunde auch im Folgenden zur Abkürzung der Rechnung benutzt wird, dass, sobald man im Satze II eine Function $\varphi$ finden kann, für welche die Ausdrücke $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_{m-1}$ nachweislich sämmtlich den Werth Null erhalten, das gegebene System (1) ein Jacobi'sches und $V = \varphi$ eine vollständige Lösung desselben ist.

Die ganze Darstellung wird aber, wie ich glaube, an Klarheit und Uebersichlichkeitt bedeutend gewinnen, wenn wir uns fürs Erste beschränken auf Jacobi'sche Systeme, die nur aus zwei Gleichungen bestehen. Dieser besondere Fall verdient schon deshalb eine eingehendere Behandlung, weil derselbe bei der wichtigsten Aufgabe, bei der Integration einer einzelnen, beliebig gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung allein in Betracht kommt. Durch directe Anwendung der für diesen Specialfall gewonnenen Endresultate auf den allgemeinen Fall eines Jacobi'schen Systems von $m - 1$ Gleichungen werden wir dann leicht zum allgemeinen Ausdruck der Lie'schen Methode gelangen.

Betrachten wir jetzt also irgend zwei Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} p_1 = F_1(q_1, q_2, \ldots q_n, p_3, \ldots p_n) \\ p_2 = F_2(q_1, q_2, \ldots q_n, p_3, \ldots p_n), \end{cases}$$

die ein Jacobi'sches System bilden.

Es sei:

$$V = f(q_1, q_2, \ldots q_n, c_3, \ldots c_n)$$

eine beliebige, in Bezug auf $q_3, \ldots q_n$ vollständige Lösung der Gleichung:

(2) $$p_1 = F_1.$$

Die Function $f$ erfüllt dann die Forderung, die für $m = 3$ unser Satz II an die Function $\varphi$ stellt. Wir können daher in diesem Satze $\varphi = f$ nehmen. Da aber hierdurch:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} - F_1\left(q_1, q_2, \ldots q_n\,\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}, \ldots \frac{\partial\varphi}{\partial q_n}\right) = 0$$

wird, so sehen wir, dass nach Auffindung einer vollständigen Lösung $f$ der Gleichung (2) das Jacobi'sche System (1) sich zurückführen lässt auf das folgende:

(3) $$\frac{\partial W}{\partial q_1} = 0,\ \frac{\partial W}{\partial q_2} = \Phi_2,$$

worin $\Phi_2$ diejenige Function von

$$q_1, q_2, c_3, \ldots c_n, \frac{\partial W}{\partial c_3}, \ldots \frac{\partial W}{\partial c_n}$$

bezeichnet, die aus der Formel

(4) $$\Phi_2 = \frac{\partial f}{\partial q_2} - F_2\left(q_1, q_2, \ldots q_n, \frac{\partial f}{\partial q_3}, \ldots \frac{\partial f}{\partial q_n}\right)$$

durch die $n - 2$ Substitutionen hervorgeht:

(5) $$\frac{\partial f}{\partial c_k} = \frac{\partial W}{\partial c_k},$$

und dass umgekehrt die Gleichungen (1) ein Jacobi'sches System bilden, sobald dasselbe von den Gleichungen (3) gilt.

Die Form der Gleichungen (3) zeigt aber unmittelbar, dass dieselben dann und nur dann ein Jacobi'sches System bilden, wenn $\Phi_2$ frei von $q_1$ ist.

Soll demnach die Bedingung

(6) $$(F_1 - p_1, F_2 - p_2) = 0,$$

die nach dem Früheren nothwendig ist, wenn die Gleichungen (1) ein Jacobi'sches System bilden sollen, hierfür auch hinreichend sein, so muss sich zeigen lassen, dass unter Voraussetzung der Identität (6) der Ausdruck $\Phi_2$ unabhängig von $q_2$ wird.

Dies ist nun in der That auch der Fall. Die Identität (6) lehrt nämlich, dass

$$F = F_2 - p_2$$

eine Lösung der linearen Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} + \sum_{h=2}^{h=n}\left(\frac{\partial F_1}{\partial p_h}\frac{\partial F}{\partial q_h} - \frac{\partial F_1}{\partial q_h}\frac{\partial F}{\partial p_h}\right) = 0,$$

oder $F_2 - p_2 =$ const. ein Integral des Systems von $2(n - 1)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen ist:

$$\frac{dq_h}{dq_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial p_h}, \frac{dp_h}{dq_1} = \frac{\partial F_1}{\partial q_h}.$$

Von diesem Systeme sind aber die $2(n-1)$ Gleichungen;

(7) $$\frac{\partial \chi}{\partial c_h} = \gamma_h, \frac{\partial \chi}{\partial q_h} = p_h,$$

in denen

(8) $$\chi = f + c_2 q_2$$

und $\gamma_2, \ldots \gamma_n$ neue willkürliche Constante sind, die vollständigen Integralgleichungen*).

Wenn man daher aus den Gl. (7) $q_2, \ldots q_n, p_2, \ldots q_n$ ausdrückt durch:

$$q_1, c_2, \ldots c_n, \gamma_2, \ldots \gamma_n$$

und diese Werthe in $p_2 - F_2$ substituirt, so wird dieses frei von $q_1$ und eine blosse Function von $c_2, \ldots c_n, \gamma_2, \ldots \gamma_n$.

Da aber nach (8) die Gleichungen (7) sich also darstellen:

$$q_2 = \gamma_2, \frac{\partial f}{\partial q_2} + c_2 = p_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_k} = \gamma_k, \frac{\partial f}{\partial q_k} = p_k, k = 3, 4, \ldots n,$$

so kann man dies auch so aussprechen, dass, wenn man für $q_3, \ldots q_n$ die Werthe einsetzt, die sich aus den $n-2$ Gleichungen (5) ergeben, hierdurch der Ausdruck (4) übergeht in eine blosse Function von

$$q_2, c_3, \ldots c_n, \frac{\partial W}{\partial c_3}, \ldots \frac{\partial W}{\partial c_n},$$

die $q_1$ nicht mehr enthält.

---

*) Wenn nämlich

$$V = \chi(q_1, q_2, \ldots q_n, c_2, \ldots c_n)$$

eine in Bezug auf $q_2, \ldots q_n$ vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$p_1 = \mathsf{H}_1(q_1, q_2, \ldots q_n, p_2, \ldots p_n)$$

ist, so bilden nach dem bekannten Jacobi'schen Satze (20. Vorlesung über Dynamik) dis $2(n-1)$ Gleichungen

$$\frac{\partial \chi}{\partial c_h} = \gamma_h, \frac{\partial \chi}{\partial q_h} = p_h$$

ein vollständiges System Integralgleichungen der $2(n-1)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dq_h}{dq_1} = -\frac{\partial \mathsf{H}_1}{\partial p_h}, \frac{dp_h}{dq_1} = \frac{\partial \mathsf{H}_1}{\partial q_h}.$$

Von der partiellen Differentialgleichnng (2) aber ist $V = f + c_2 q_2$ eine solche Lösung.

Nach dem Vorhergehenden hat man also den

*Satz III. Sobald die Functionen $F_1$ und $F_2$ der Bedingung* (6) *identisch genügen, ist das System* (1) *ein Jacobi'sches System und es lässt sich dasselbe alsdann nach Ermittelung einer vollständigen Lösung $V = f$ der Gleichung* (2) *zurückführen auf die partielle Differentialgleichung zwischen $W$ und den unabhängigen Variabeln $q_2, c_3, \ldots c_n$*

$$\frac{\partial W}{\partial q_2} = \Phi_2, \tag{9}$$

*in der $q_1$ gar nicht mehr vorkommt.*

Hiermit ist die Integration des Jacobi'schen Systems (1) zurückgeführt auf die gesonderte Integration zweier partieller Differentialgleichungen, von denen aber die zweite zunächst nur nach vollständiger Integration der ersten aufgestellt werden kann.

Nun sieht man aber leicht ein, dass es zur Bildung der Gleichung (9) oder der Function $\Phi_2$ gar nicht nöthig ist, die Lösung $f$ selbst zu kennen, dass es vielmehr schon hinreicht, wenn man nur weiss, welchen Werth diese Lösung für einen gegebenen constanten Werth von $q_1$ annimmt.

Denn wir erhalten die Function $\Phi_2$ aus dem Ausdrucke (4), indem wir darin für $q_3, \ldots q_n$ die Werthe substituiren, die sich aus den Gleichungen (5) ergeben. Da aber durch diese Substitutionen der genannte Ausdruck frei von $q_1$ wird, so muss es auch gestattet sein, in den Gleichungen (4) und (5) der Variabeln $q_1$ irgend einen solchen, von $q_3, \ldots q_n$ unabhängigen Werth $a_1$ beizulegen, für welchen die Gleichungen (5) noch sämmtliche Unbekannte $q_3, \ldots q_n$ bestimmen. Deuten wir daher durch das Zeichen $[\,]_{a_1}$ die Substitution $q_1 = a_1$ an, so können wir die Function $\Phi_2$ auch definiren durch die $n-1$ Gleichungen:

$$\tag{10} \left\{ \begin{aligned} &\Phi_2 = \left[\frac{\partial f}{\partial q_2}\right]_{a_1} - F_2\left(a_1, q_2, \ldots q_n, \left[\frac{\partial f}{\partial q_3}\right]_{a_1}, \ldots \left[\frac{\partial f}{\partial q_n}\right]_{a_1}\right), \\ &\left[\frac{\partial f}{\partial c_k}\right]_{a_1} = \frac{\partial W}{\partial c_k}. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir aber $a_1$ als unabhängig nicht bloss von $q_3, \ldots q_n$, sondern auch von $q_2, c_3, \ldots c_n$ voraus, so ist:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial c_k}\right]_{a_1} = \frac{\partial [f]_{a_1}}{\partial c_k} \quad \text{und für } h > 1$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial q_h}\right]_{a_1} = \frac{\partial [f]_{a_1}}{\partial q_h}.$$

Mit dem Werthe, den die Function $f$ für $q_1 = a_1$ erhält, sind also dann zugleich auch die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial c_3}, \ldots \frac{\partial f}{\partial c_n}, \frac{\partial f}{\partial q_2}, \frac{\partial f}{\partial q_3}, \ldots \frac{\partial f}{\partial q_n}$$

für $q_1 = a_1$ gegeben und wir können die Gleichungen (10) oder die Function $\Phi_2$ bilden, ohne die Lösung $f$ selbst zu kennen.

Nehmen wir z. B. an, dass für $q_1 = a_1$

$$f = c_3 q_3 + c_4 q_4 + \cdots c_n q_n$$

werde, so haben wir für $q_1 = a_1$

$$\frac{\partial f}{\partial q_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial q_3} = c_3, \cdots \frac{\partial f}{\partial q_n} = c_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_3} = q_3, \cdots, \frac{\partial f}{\partial c_n} = q_n$$

und erhalten daher aus (10) einfach:

$$(11) \qquad \Phi_2 = - F_2\left(a_1, q_2, \frac{\partial W}{\partial c_3}, \cdots \frac{\partial W}{\partial c_n}, c_3, \ldots c_n\right), \quad \text{d. h.}$$

*Satz IV. Sobald man diejenige Lösung der Gleichung* (2) *kennt, die sich für* $q_1 = a_1$ *auf*

$$V = c_3 q_3 + c_4 q_4 + \cdots c_n q_n$$

*reducirt, so hängt die Integration des Jacobi'schen Systems* (1) *nur noch ab von der vollständigen Integration der partiellen Differentialgleichung:*

$$(12) \qquad \frac{\partial W}{\partial q_2} + F_2\left(a_1, q_2, \frac{\partial W}{\partial c_3}, \cdots \frac{\partial W}{\partial c_n}, c_3, \ldots c_n\right) = 0.$$

Nun kann man aber mittelst des Satzes I. aus einer beliebigen vollständigen Lösung der Gleichung (2) andere Lösungen derselben Gleichung ableiten, die für $q_1 = a_1$ vorgeschriebene Werthe annehmen, wobei nur die Constante $a_1$ so gewählt sein muss, dass die partiellen Differentialquotienten der betrachteten vollständigen Lösung nach $q_3, \ldots q_n$ auch für $q_1 = a_1$ noch unabhängige Functionen der Integrationsconstanten bleiben. Um im Besonderen die in IV. verlangte Lösung zu erhalten, hat man in I. nur $m = 3$ und

$$\varphi_a = c_3 a_3 + c_4 a_4 + \cdots c_n a_n$$

zu nehmen.

Durch Satz IV. ist demnach die vollständige Integration des Jacobi'schen Systems (1) jetzt zurückgeführt auf die Integration zweier partieller Differentialgleichungen, die unabhängig von einander aufgestellt und behandelt werden können.

Man sieht aber zugleich, dass diese Zurückführung nicht bloss auf eine, sondern auf unendlich viele Arten bewirkt werden kann. Denn, abgesehen von blossen Rechnungsschwierigkeiten, hindert uns nichts, statt der in IV. gewählten Lösung der Gleichung (2) diejenige zu Grunde zu legen, die für $q_1 = a_1$ den allgemeinen Werth

$$V = \varphi(a_1, q_2, q_3, \ldots q_n, c_3, \ldots c_n)$$

erhält. wo die Function $\varphi$ lediglich der Beschränkung unterliegt, dass ihre partiellen Differentialquotienten nach $q_3, \ldots q_n$ unabhängige Functionen von $c_3, \ldots c_n$ sein müssen. Wir würden dann nur gleichzeitig auch der Gleichung (12) diejenige partielle Differentialgleichung zwischen $W, q_2, c_3, \ldots c_n$ zu substituiren haben, die aus der Gleichung

$$(13) \qquad \frac{\partial W}{\partial q_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} - F_2\left(a_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial q_n}\right)$$

durch die Substitutionen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_k} = \frac{\partial W}{\partial c_k}$$

hervorgeht*). Dem entsprechend giebt es auch nicht bloss einen, sondern unendlich viele analytische Ausdrücke der Lie'schen Integrationsmethode selbst. Um aber nicht durch überflüssige Complication das Verständniss unnöthig zu erschweren, habe ich überall nicht sowohl die allgemeinste, als vielmehr gerade die einfachste Form der Sätze zu erstreben gesucht. Man wird überdies auch ohne nähere Erörterungen leicht erkennen, dass zwischen der einfachen Ausdrucksweise des Lie'schen Fundamentaltheorems im folgenden § und der allgemeinsten Fassung, die man diesem Satze geben kann, hauptsächlich nur der Unterschied stattfindet, dass die erstere zu einer bestimmten einfachen Lösung des Jacobi'schen Systems führt, während die andere auf die Ermittelung der allgemeinen Lösung ausgeht, sodass also zwischen beiden ein ganz ähnliches Verhältniss besteht, wie, für den Fall einer einzigen partiellen Differentialgleichung, zwischen der Jacobi-Hamilton'schen und der Cauchy'schen Integrationsmethode**). Die unendliche Mannigfaltigkeit der betreffenden Zurückführungen rührt eben im Grunde davon her, dass auch jedes Jacobi'sche System nicht bloss eine einzige, sondern unendlich viele vollständige Lösungen besitzt, die man aber durch ein dem Satze I. analoges Verfahren sämmtlich aus einer beliebigen vollständigen Lösung ableiten kann.

---

*) Hieraus erhellt, beiläufig bemerkt, dass man das Jacobi'sche System (1) auch direct auf die beiden Gleichungen (1) selbst zurückführen, d. h. eine vollständige Lösung desselben auch geradezu dadurch erhalten kann, dass man jede seiner beiden Gleichungen für sich vollständig integrirt. Denn wenn

$$V = \chi(q_1, q_2, \ldots, q_n, c_3, \ldots c_n)$$

eine beliebige, in Bezug auf $q_3, \ldots q_n$ vollständige Lösung der zweiten Gleichung (1) ist, so können wir in den obigen Formeln $\varphi = [\chi]_{a_1}$ nehmen. Hierdurch aber reducirt sich die Gleichung (13) auf $\frac{\partial W}{\partial q_2} = 0$.

**) Vgl. hierüber dieses Journal Bd. III. p. 435.

## § 5.

**Das Lie'sche Fundamentaltheorem: Zurückführung eines Jacobi'schen Systems von zwei Gleichungen mit $n$ unabhängigen Variabeln auf eine einzige partielle Differentialgleichung mit $n-1$ unabhängigen Variabeln.**

Den Uebergang von dem letzten Satze zu dem Haupttheorem der Lie'schen Methode vermittelt die einfache Bemerkung, dass, wenn die Function $F_2$ die Eigenschaft besässe, für $q_1 = a_1$ zu verschwinden, schon die vollständige Integration der Gleichung (2) allein ausreichen würde zur Ermittelung einer vollständigen Lösung des Jacobi'schen Systems (1). Es wäre dann, wie sich aus den Entwickelungen des vorigen § (vgl. namentlich die Formeln (4) und (11)) ohne Weiteres ergiebt, die in IV. geforderte Lösung der Gleichung (2) geradezu auch eine vollständige Lösung des Jacobi'schen Systems (1).

Dieser Fall nämlich, der auf den ersten Anblick als ein ganz vereinzelter und noch dazu sehr fraglicher Ausnahmefall erscheint, lässt sich immer durch eine vorgängige Transformation der beiden Gleichungen (1) herbeiführen. Diese Transformation ist nicht bloss auf eine, sondern auf unendlich viele Arten möglich, von denen hier aber wieder nur die einfachste betrachtet werden soll.

Ich führe an Stelle von $q_2$ eine neue Variable $x_2$ durch die Gleichung ein:

$$(\alpha) \qquad q_2 = a_2 + (q_1 - a_1)\, x_2 ,$$

in der $a_1$ und $a_2$ unbestimmte Constanten sind. Hierdurch verwandelt sich die Function $V$ von $q_1, q_2, \ldots q_n$ in eine Function $U$ von $q_1$, $x_2, q_3, \ldots q_n$, für welche:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_1} &= \frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_2} x_2 \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= \frac{\partial V}{\partial q_2}(q_1 - a_1) \text{ und für } i > 2 \\ \frac{\partial U}{\partial q_i} &= \frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \end{aligned}$$

wird. Die beiden Gleichungen:

$$(\beta) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = F_1 , \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = F_2$$

gehen somit über in die folgenden:

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial U}{\partial q_1} = f_1 , \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = f_2 ,$$

worin $f_1$ und $f_2$ diejenigen Functionen von $q_1, x_2, q_3, \ldots q_n, p_3, \ldots p_n$ sind, die durch die Substitution $(\alpha)$ aus den Ausdrücken

$$f_1 = F_1 + x_2 F_2, \quad f_2 = (q_1 - a_1) F_2$$

entstehen.

Wenn daher die Gleichungen ($\beta$) ein Jacobi'sches System bilden, so gilt dies auch von den Gleichungen ($\gamma$) und man kann dann auf diese den Satz IV. anwenden. Da aber nunmehr $f_2 = 0$ wird für $q_1 = a_1$, so ergiebt sich nach dem Vorhergehenden der

*Satz V.* Wenn die beiden Gleichungen ($\beta$) ein Jacobi'sches System bilden, so ist diejenige Lösung der Gleichung

$$(\delta) \qquad \frac{\partial U}{\partial q_1} = f_1,$$

die für $q_1 = a_1$ den Werth

$$U = c_3 q_3 + c_4 q_4 + \cdots c_n q_n$$

erhält, zugleich eine gemeinsame vollständige Lösung der beiden Gleichungen ($\gamma$).

Indem man nun aber den Satz I. anwendet auf die Aufgabe, aus einer beliebigen vollständigen Lösung der Gleichung ($\delta$) die in V. geforderte bestimmte Lösung abzuleiten, und sich aus III. erinnert, unter welcher Bedingung die Gleichungen ($\beta$) ein Jacobi'sches System bilden, erhält man hieraus sofort

*Das Lie'sche Fundamentaltheorem.*

*Satz VI. Wenn $F_1$ und $F_2$ irgend zwei Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_n, p_3, \ldots p_n$ sind, zwischen denen die identische Relation besteht:*

$$(1) \quad (F_1 - p_1, F_2 - p_2) = \frac{\partial F_2}{\partial q_1} - \frac{\partial F_1}{\partial q_2} + \sum_{h=3}^{h=n} \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_h} \frac{\partial F_2}{\partial p_h} - \frac{\partial F_1}{\partial p_h} \frac{\partial F_2}{\partial q_h} \right) = 0,$$

*so besitzen die beiden partiellen Differentialgleichungen mit zusammen $n$ unabhängigen Variabeln:*

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = F_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = F_2$$

*eine gemeinsame vollständige Lösung mit $n - 2$ willkürlichen Constanten, die durch vollständige Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit nur noch $n - 1$ unabhängigen Variabeln folgendermassen gefunden werden kann:*

*Man führt statt $q_2$ eine neue Variable $x_2$ durch die Gleichung ein:*

$$(3) \qquad q_2 = a_2 + (q_1 - a_1) x_2,$$

*in der $a_1$ und $a_2$ unbestimmte, in den Gleichungen (2) nicht vorkommende Constanten sind, und integrirt sodann die partielle Differentialgleichung*

$$(4) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = F_1 + x_2 F_2,$$

*in der $x_2$ nur als Constante erscheint, vollständig. Ist:*

$$V = \psi(q_1, x_2, q_3, \ldots q_n, b_3, \ldots b_n)$$

*eine beliebige vollständige Lösung derselben, so setze man:*

$$V = \psi - \psi_a + c_3 a_3 + c_4 a_4 + \cdots c_n a_n,$$

*worin*

$$\psi_a = \psi(a_1, x_2, a_3, \ldots a_n, b_3, \ldots b_n)$$

*ist und für* $a_3, \ldots a_n, b_3, \ldots b_n$ *ihre Werthe aus den* $2(n-2)$ *Gleichungen:*

$$\frac{\partial \psi_a}{\partial b_k} = \frac{\partial \psi}{\partial b_k}, \quad \frac{\partial \psi_a}{\partial a_k} = c_k$$

*zu substituiren sind. Man erhält hierdurch eine Function* $V$ *von* $q_1, x_2, q_3, \ldots q_n$ *und den* $n-2$ *willkürlichen Constanten* $c_3, \ldots c_n$, *die eine gemeinsame vollständige Lösung der beiden partiellen Differentialgleichungen zwischen* $V$ *und den unabhängigen Variabeln* $q_1, x_2, q_3, \ldots q_n$:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = F_1 + x_2 F_2, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = (q_1 - a_1) F_2 \tag{5}$$

*ist und die daher, wenn man in derselben rückwärts*

$$x_2 = \frac{q_2 - a_2}{q_1 - a_1}$$

*setzt, übergeht in eine gemeinsame vollständige Lösung der beiden gegebenen Gleichungen* (2).

Bevor wir jedoch diesen Satz als vollständig bewiesen zugeben können, müssen wir noch ein Bedenken beseitigen, das sich bei näherer Verfolgung der vorhergehenden Ableitung nothwendig aufdrängen muss und das einer genaueren Untersuchung mir um so mehr bedürftig erscheint, als auch meiner früheren Zurückführung eines unbeschränkt integrablen Systems totaler Differentialgleichungen auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen*) ein ganz ähnlicher Einwurf gemacht werden kann und dieser Einwurf dort nicht ausdrücklich hervorgehoben, sondern nur stillschweigend durch die Betrachtungen des letzten § entkräftet worden ist.

Nach Satz I. nämlich, durch dessen Anwendung auf eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (4) das Lie'sche Theorem aus V. hervorging, ist die Wahl der Constanten $a_1$ nicht vollkommen willkürlich, vielmehr ganz wesentlich an die Bedingung gebunden, dass die partiellen Differentialquotienten dieser Lösung nach $q_3, \ldots q_n$ auch für $q_1 = a_1$ noch unabhängige Functionen der Integrationsconstanten bleiben müssen. Die Gleichung (4) enthält aber

*) Dieses Journal Bd. V p. 455.

in Folge der Substitution (3) selbst schon die Constante $a_1$. Es bleibt daher noch nachzuweisen, dass, wenn

$$V = \psi(q_1, x_2, q_3, \ldots q_n, b_3, \ldots b_n)$$

eine beliebige vollständige Lösung der Gleichung (4) ist, die Ausdrücke

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_3}, \ldots \frac{\partial \psi}{\partial q_n}$$

auch für $q_1 = a_1$ noch unabhängige Functionen der willkürlichen Constanten $b_3, \ldots b_n$ bleiben.

Um dies einzusehen, gehe ich zurück auf den Satz III. Dieser lehrt, dass unter Voraussetzung der Identität (1) die beiden Gleichungen (2) stets eine gemeinsame vollständige Lösung besitzen, die $n-2$ willkürliche Constanten enthält und deren partielle Differentialquotienten nach $q_3, \ldots q_n$ unabhängige Functionen dieser Constanten sind. Aus einer jeden solchen Lösung erhält man eine vollständige Lösung der Gleichung (4) durch die Substitution (3). Daraus folgt unmittelbar, da in den Gleichungen (2) die Constanten $a_1$ und $a_2$ nicht vorkommen, dass es unter der Voraussetzung (1) jedenfalls immer gewisse vollständige Lösungen

$$V = f(q_1, x_2, q_3, \ldots q_n, c_3, \ldots c_n)$$

der Gleichung (4) giebt, von der Beschaffenheit, dass $\frac{\partial f}{\partial q_3}, \ldots \frac{\partial f}{\partial q_n}$ auch für $q_1 = a_1$ noch unabhängige Functionen der Integrationsconstanten $c_3, \ldots c_n$ bleiben.

Sei andererseits

$$V = \psi(q_1, x_2, q_3, \ldots q_n, b_3, \ldots b_n)$$

irgend eine beliebige vollständige Lösung der Gleichung (4). Dann bilden nach dem schon einmal benutzten Jacobi'schen Satze sowohl die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial q_k} = p_k, \quad \frac{\partial f}{\partial c_k} = \gamma_k \tag{6}$$

als auch die Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_k} = p_k, \quad \frac{\partial \psi}{\partial b_k} = \beta_k \tag{7}$$

ein vollständiges System Integralgleichungen der $2(n-2)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dq_k}{dq_1} = -\frac{\partial(F_1 + x_2 F_2)}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dq_1} = \frac{\partial(F_1 + x_2 F_2)}{\partial q_k},$$

in denen $k = 3, 4, \ldots n$ ist und $x_2$ nur als Constante auftritt.

Nach dem Vorhergehenden lassen sich nun aus den Gleichungen (6) auch für $q_1 = a_1$ die Integrationsconstanten $c_3, \ldots c_n, \gamma_3, \ldots \gamma_n$ bestimmen durch $q_3, \ldots q_n, p_3, \ldots p_n$ und umgekehrt. Wenn daher nach der Substitution $q_1 = a_1$ aus den Gleichungen (7) sich die Constanten $b_3, \ldots b_n, \beta_3, \ldots \beta_n$ sämmtlich eliminiren liessen, so läge der offenbare Widerspruch vor, dass in einem und demselben System gewöhnlicher Differentialgleichungen und für ein und denselben Anfangswerth der unabhängigen Variabeln die Anfangswerthe der abhängigen Variabeln unabhängig und doch wieder abhängig von einander wären. Es müssen folglich auch die Gleichungen (7) für $q_1 = a_1$ noch sämmtliche Constanten $b_3, \ldots b_n, \beta_3, \ldots \beta_n$ bestimmen, oder es müssen nothwendig auch für $q_1 = a_1$ die Ausdrücke

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_3}, \ldots \frac{\partial \psi}{\partial q_n}$$

noch unabhängige Functionen von $b_3, \ldots b_n$ bleiben, was eben zu beweisen war.

## § 6.

## Die Lie'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Der Gedanke, welcher der Lie'schen Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu Grunde liegt, ist der, dass man zu der gegebenen partiellen Differentialgleichung zunächst eine zweite partielle Differentialgleichung sucht, die mit jener ein Jacobi'sches System bildet und hierdurch die Aufgabe, die gegebene Gleichung zu integriren, direct zurückführt auf die vollständige Integration des erhaltenen Jacobi'schen Systems*).

Ist nämlich:

(1) $$p_1 = \mathsf{H}_1 (q_1, q_2, \ldots q_n, p_2, \ldots p_n)$$

die gegebene partielle Differentialgleichung und kann man eine Gleichung von der Form finden:

(2) $$f (q_1, q_2, \ldots q_n, p_2, \ldots p_n) = \text{const.}$$

die mit (1) ein Jacobi'sches System bildet, so sieht man unmittelbar, dass jede gemeinsame vollständige Lösung der Gleichung (1) und (2) zugleich auch eine vollständige Lösung der gegebenen Gleichung (1) ist.

Sollen aber die Gleichungen (1) und (2) ein Jacobi'sches System bilden, so muss $f$ eine Lösung der linearen Gleichung sein:

---

*) Die Art, wie diese zweite partielle Differentialgleichung gefunden wird, ist das Einzige, was die Lie'sche Methode der Jacobi'schen entnimmt.

$$(3)\qquad (H_1 - p_1, f) = \frac{\partial f}{\partial q_1} + \sum_{h=2}^{h=n} \left( \frac{\partial H_1}{\partial q_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} - \frac{\partial H_1}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial q_h} \right) = 0,$$

und umgekehrt, sobald die Function $f$ der Gleichung (3) genügt und nicht gerade frei ist von sämmtlichen Variabeln $p$, so bilden die Gleichungen (1) und (2) ein Jacobi'sches System.

In der That, sei $f$ eine beliebige Lösung der Gleichung (3) und $p_2$ irgend eine der Variabeln $p$, die in $f$ vorkommen. Ergiebt dann die Gleichung (2) durch Auflösung nach $p_2$

$$(4)\qquad p_2 = F_2\,(q_1, q_2, \ldots q_n, p_3, \ldots p_n)$$

und wird durch Substitution dieses Werthes:

$$(5)\qquad H_1 = F_1\,(q_1, q_2, \ldots q_n, p_3, \ldots p_n),$$

so kann man die Gleichungen (1) und (2) ersetzen durch die beiden

$$(6)\qquad p_1 = F_1,\ p_2 = F_2.$$

Diese aber bilden nach III. ein Jacobi'sches System. Denn versteht man unter $u$ irgend eine der Variabeln $q_1, q_2 \ldots q_n, p_3, \ldots p_n$, so erfüllt die Substitution (4) mit den Gleichungen (2) und (5) zugleich auch die folgenden:

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial p_2} \frac{\partial F_2}{\partial u} = 0 \text{ und } \frac{\partial F_1}{\partial u} = \frac{\partial H_1}{\partial u} + \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \frac{\partial F_2}{\partial u}.$$

Bildet man aber mit diesen Werthen der Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial u}$ und $\frac{\partial H_1}{\partial u}$ den Ausdruck (3), so findet man:

$$(H_1 - p_1, f) = -\frac{\partial f}{\partial p_2} (F_1 - p_1, F_2 - p_2),$$

woraus sich wegen der Identität (3) ergiebt, dass die Functionen $F_1$ und $F_2$ identisch der Bedingung:

$$(F_1 - p_1, F_2 - p_2) = 0$$

genügen.

Durch Auffindung einer beliebigen Lösung der Gleichung (3) oder eines beliebigen Integrales der $2(n-1)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dq_h}{dq_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial p_h},\ \frac{dp_h}{dq_1} = \frac{\partial H_1}{\partial q_h}$$

wird also die Aufgabe, die Gleichung (1) zu integriren, zurückgeführt auf die vollständige Integration des Jacobi'schen Systems (6). Da aber nach dem Lie'schen Fundamentaltheorem die Lösung dieser letzteren Aufgabe selbst wieder nur abhängt von der vollständigen Integration der einen partiellen Differentialgleichung mit nur noch $n-1$ unabhängigen Variabeln:

$$(7) \qquad p_1 = F_1 + x_2 F_2, \quad (q_2 = a_2 + (q_1 - a_1) x_2)$$

so erhält man den

*Satz VII. Die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit n unabhängigen Variabeln lässt sich nach Ermittelung eines beliebigen Integrales von einem System von* $2(n-1)$ *gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung derselben Ordnung mit nur noch* $n-1$ *unabhängigen Variabeln.*

Indem man nun die partielle Differentialgleichung (7) ihrerseits wieder mittelst eines Integrales von $2(n-2)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen in derselben Weise zurückführen kann auf eine partielle Differentialgleichung mit nur noch $n-2$ unabhängigen Variabeln u. s. f., ergiebt sich, *dass man zur vollständigen Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit n unabhängigen Variabeln nur bedarf der Kenntniss eines Integrales von je einem Systeme von*

$$2(n-1),\ 2(n-2), \ldots 2$$

*gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.*

## §. 7.

## Integration eines Jacobi'schen Systems von $m-1$ partiellen Differentialgleichungen.

Um aus den Resultaten des § 5. eine Methode zur gemeinsamen Integration der $m-1$ partiellen Differentialgleichungen abzuleiten:

$$(a) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = F_1, \ \frac{\partial V}{\partial q_2} = F_2, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_{m-1}} = F_{m-1},$$

in denen $F_1, F_2, \ldots F_{m-1}$ solche Functionen der $2n-m+1$ Variabeln $q_1, q_2, \ldots q_n, p_m, \ldots p_n$ sind, welche den Bedingungen:

$$(b)\ (F_i - p_i, F_k - p_k) = \frac{\partial F_k}{\partial q_i} - \frac{\partial F_i}{\partial q_k} + \sum_{h=m}^{h=n} \left( \frac{\partial F_i}{\partial q_h} \frac{\partial F_k}{\partial p_h} - \frac{\partial F_i}{\partial p_h} \frac{\partial F_k}{\partial q_h} \right) = 0$$

identisch genügen, gehen wir am Bequemsten auf den Satz V. zurück.

Nehmen wir an, dass in den Functionen $F_1$ und $F_2$, die in § 5. betrachtet wurden, $p_3, \ldots p_{m-1}$ gar nicht vorkommen und somit in den Gleichungen ($\beta$) jenes § $q_3, \ldots q_{m-1}$ nur wie Constanten auftreten, so ergiebt sich durch Anwendung des Satzes III. und wenn wir den Index 2 ersetzen durch den Index $k$, dass man für diesen Fall dem Satze V. die folgende Fassung geben kann:

*Satz VIII.* Es seien $F_1$ und $F_k$ zwei gegebene Functionen von $q_1, q_k, q_m, \dots q_n, p_m, \dots p_n$, und indem man $q_k$ durch die Substitution

$$q_k = a_k + (q_1 - a_1)\, x_k$$

eliminirt, werde:

$$F_1 + x_k F_k = f_1\,, \quad (q_1 - a_1)\, F_k = f_k\,.$$

Wenn dann zwischen $f_1$ und $f_k$ die identische Relation besteht

$$\frac{\partial f_k}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{h=m}^{h=n} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_h} \frac{\partial f_k}{\partial p_h} - \frac{\partial f_1}{\partial p_h} \frac{\partial f_k}{\partial q_h} \right) = 0\,,$$

so ist diejenige Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = f_1\,, \quad \left( p_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} \right)$$

die für $q_1 = a_1$ den Werth

$$U = c_m q_m + c_{m+1} q_{m+1} + \cdots c_n q_n$$

erhält, zugleich eine gemeinsame vollständige Lösung der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = f_1\,, \quad \frac{\partial U}{\partial x_k} = f_k\,.$$

Dies vorausgeschickt führe man durch die Substitutionen:

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} q_2 = a_2 + (q_1 - a_1)\, x_2 \\ q_3 = a_3 + (q_1 - a_1)\, x_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ q_{m-1} = a_{m-1} + (q_1 - a_1)\, x_{m-1}\,, \end{cases}$$

in denen $a_1, a_2, \dots a_{m-1}$ unbestimmte Constanten sind, an Stelle von $q_2, q_3, \dots q_{m-1}$ die Grössen $x_2, x_3, \dots x_{m-1}$ als neue Variable ein. Die Function $V$ von $q_1, q_2, \dots q_n$ verwandelt sich dann in eine Function $U$ von $q_1, x_2, \dots x_{m-1}; q_m, \dots q_n$ und man erhält:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_2} x_2 + \cdots \frac{\partial V}{\partial q_{m-1}} x_{m-1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{\partial V}{\partial q_k} (q_1 - a_1)\,,$$

während für $h > m - 1$ ungeändert bleibt:

$$\frac{\partial U}{\partial q_h} = \frac{\partial V}{\partial q_h} = p_h\,.$$

Durch Einführung der neuen Variabeln $x$ gehen daher die Gleichungen (a) über in die folgenden:

$$\text{(d)} \qquad \frac{\partial U}{\partial q_1} = f_1\,, \frac{\partial U}{\partial x_2} = f_2\,, \cdots \frac{\partial U}{\partial x_{m-1}} = f_{m-1}\,,$$

in denen:

$$\text{(e)} \qquad \begin{cases} f_1 = F_1 + x_2 F_2 + \cdots x_{m-1} F_{m-1} \\ \quad \text{und für } k = 2, 3, \ldots m-1 \\ f_k = (q_1 - a_1) F_k \end{cases}$$

ist, und umgekehrt verwandeln sich die Gleichungen (d) wieder in die ursprünglichen (a), sobald man durch die Substitutionen (c) statt der $x$ wieder die alten Variabeln $q$ einführt.

Wenn sich nun zeigen liesse, dass $f_1$ und $f_k$ solche Functionen von $q_1, x_k, q_m, \ldots q_n, p_m, \ldots p_n$ sind, für welche der Ausdruck:

$$M_k = \frac{\partial f_k}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{h=m}^{h=n} \left( \frac{\partial f_1}{\partial q_h} \frac{\partial f_k}{\partial p_h} - \frac{\partial f_1}{\partial p_h} \frac{\partial f_k}{\partial p_h} \right)$$

identisch verschwindet, so würde nach VIII. diejenige vollständige Lösung der Gleichung:

$$\text{(f)} \qquad \frac{\partial U}{\partial q_1} = f_1,$$

die für $q_1 = a_1$ sich auf

$$U = c_m q_m + c_{m+1} q_{m+1} + \cdots c_n q_n$$

reducirt, gleichzeitig eine gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen sein

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = f_1, \quad \frac{\partial U}{\partial x_k} = f_k.$$

Hieraus aber würde folgen, da die Function $f_1$ für jedes $k$ denselben Werth behält, dass die genannte Lösung der Gleichung (f) überhaupt eine gemeinsame Lösung aller $m-1$ Gleichungen (d) ist, vorausgesetzt natürlich, dass für alle Werthe des Index $k$ die Identität $M_k = 0$ gilt.

Dies ist nun aber in der That der Fall. Denn nach (c) und (e) hat man:

$$\frac{\partial f_k}{\partial q_1} = F_k + (q_1 - a_1) \left\{ \frac{\partial F_k}{\partial q_1} + \frac{\partial F_k}{\partial q_2} x_2 + \cdots \frac{\partial F_k}{\partial q_{m-1}} x_{m-1} \right\}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k} = F_k + \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial q_k} + x_2 \frac{\partial F_2}{\partial q_k} + \cdots x_{m-1} \frac{\partial F_{m-1}}{\partial q_k} \right\} (q_1 - a_1)$$

und wenn $u$ irgend eine der Variabeln $q_m, \ldots q_n, p_m, \ldots p_n$ bezeichnet:

$$\frac{\partial f_k}{\partial u} = (q_1 - a_1) \frac{\partial F_k}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial F_1}{\partial u} + x_2 \frac{\partial F_2}{\partial u} + \cdots x_{m-1} \frac{\partial F_{m-1}}{\partial u}.$$

Bildet man aber hiermit den Ausdruck $M_k$, so findet man:

$$M_k = (q_1 - a_1)\left\{(F_1 - p_1, F_k - p_k)\right.$$
$$\left.+ x_2 (F_2 - p_2, F_k - p_k) + \cdots x_{m-1} (F_{m-1} - p_{m-1}, F_k - p_k)\right\},$$

also ist in Folge der Identitäten (b) jedes

$$M_k = 0.$$

Die vollständige Integration des Systems (4) hängt somit nur ab von der Ermittelung jener bestimmten Lösung der Gleichung (f). Diese aber lässt sich nach I. finden, sobald man nur überhaupt eine vollständige Lösung dieser Gleichung kennt. Auf diese Weise ergiebt sich der

*Satz IX. Wenn* $F_1, F_2, \ldots F_{m-1}$ *solche Functionen von* $q_1, q_2, \ldots q_n, p_m, \ldots p_n$ *sind, welche den* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ *Bedingungen*

$$(1)\ (F_i - p_i, F_k - p_k) = \frac{\partial F_k}{\partial q_i} - \frac{\partial F_i}{\partial q_k} + \sum_{h=m}^{h=n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial q_h}\frac{\partial F_k}{\partial p_h} - \frac{\partial F_i}{\partial p_h}\frac{\partial F_k}{\partial q_h}\right) = 0$$

*identisch genügen, so besitzen die* $m-1$ *partiellen Differentialgleichungen mit zusammen* $n$ *unabhängigen Variabeln:*

$$(2)\qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} = F_1,\ \frac{\partial V}{\partial q_2} = F_2, \cdots \frac{\partial V}{\partial q_{m-1}} = F_{m-1}$$

*eine gemeinsame vollständige Lösung mit* $n - m + 1$ *willkürlichen Constanten und diese Lösung lässt sich durch vollständige Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit nur noch* $n - m + 2$ *unabhängigen Variabeln in folgender Weise finden:*

*Man führe an Stelle von* $q_2, \ldots q_{m-1}$ *die Grössen* $x_2, \ldots x_{m-1}$ *als neue Variabeln durch die Gleichungen ein:*

$$(3)\qquad \begin{cases} q_2 = a_2 + (q_1 - a_1)\, x_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ q_{m-1} = a_{m-1} + (q_1 - a_1)\, x_{m-1}, \end{cases}$$

*in denen* $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$ *unbestimmte, in den Gleichungen* (2) *nicht vorkommende Constanten sind. Hierdurch verwandeln sich die Gleichungen* (1) *in die folgenden:*

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial q_1} = F_1 + x_2 F_2 + \cdots x_{m-1} F_{m-1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} = (q_1 - a_1)\, F_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial V}{\partial x_{m-1}} = (q_1 - a_1)\, F_{m-1}. \end{cases}$$

*Ist nun:*

$$V = \psi(q_1, x_2, \ldots x_{m-1}, q_m, \ldots q_n, b_m, \ldots b_n)$$

*eine beliebige vollständige Lösung der ersten Gleichung* (4), *in der* $x_2, \ldots x_{m-1}$ *nur als Constante erscheinen, so setze man:*

$$V = \psi - \psi_a + c_m a_m + c_{m+1} a_{m+1} + \cdots c_n a_n,$$

*worin* $\psi_a$ *durch die Substitutionen:*

$$q_1 = a_1, q_m = a_m, \ldots q_n = a_n$$

*aus* $\psi$ *entsteht, und substituire für* $a_m, \ldots a_n, b_m, \ldots b_n$ *ihre Werthe aus den* $2(n - m + 1)$ *Gleichungen:*

$$(5) \qquad \frac{\partial \psi_a}{\partial b_k} = \frac{\partial \psi}{\partial b_k}, \frac{\partial \psi_a}{\partial a_k} = c_k.$$

*Man erhält hierdurch eine Function* $V$ *von* $q_1, x_2, \ldots x_{m-1}, q_m, \ldots q_n$ *und den willkürlichen Constanten* $c_m, \ldots c_n$, *die eine gemeinsame vollständige Lösung der* $m - 1$ *Gleichungen* (4) *ist, und die daher, wenn man in derselben für* $x_2, \ldots x_{m-1}$ *ihre Werthe aus den Gleichungen* (3) *einsetzt, übergeht in eine gemeinsame vollständige Lösung der gegebenen Gleichungen* (2).

Das Bedenken, ob nicht möglicher Weise die Unabhängigkeit der Differentialquotienten $\frac{\partial \psi}{\partial q_m}, \cdots \frac{\partial \psi}{\partial q_n}$ in Betreff der Integrationsconstanten $b_m, \ldots b_n$ durch die Substitution $q_1 = a_1$ zerstört und daher die Bestimmung der Unbekannten $a_m, \ldots a_n, b_m, \ldots b_n$ aus den Gleichungen (5) unmöglich werden könnte, würde sich durch eine ganz ähnliche Betrachtung wie in § 5. heben lassen, wozu aber allerdings nöthig wäre, sich vorher auf irgend eine Weise davon zu überzeugen, dass unter Voraussetzung der Identitäten (1) die Gleichungen (2) auch wirklich ein Jacobi'sches System bilden. Die Mittel, dies zu beweisen, wenn man es nicht geradezu als Thatsache der Jacobi'schen Methode entlehnen will, bieten die Sätze II. und I.

## § 8.

### Anwendung der Lie'schen Methode auf lineare homogene partielle Differentialgleichungen.

Die Zurückführung einer gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit $n$ unabhängigen Variabeln auf je ein System von

$$2(n-1), 2(n-2), \ldots 2$$

gewöhnlichen Differentialgleichungen, von denen man immer nur ein Integral zu finden braucht, wird in der Lie'schen Methode direct erreicht durch die in VI. enthaltene Lösung der fundamentalen Aufgabe, ein Jacobi'sches System von zwei beliebigen partiellen Differentialgleichungen vollständig zu integriren Zu demselben Resultate gelangt das Verfahren, welches ich in dem Aufsatze „Ueber unbeschränkt integrable Systeme von totalen Differentialgleichungen etc.", diese Annalen Bd. V. p. 448—470 angegeben habe, indem es den Umweg durch die Jacobi'schen Systeme von linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen nimmt, auf welche Jacobi das allgemeine Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt hat. Es wird daher nicht uninteressant sein, schliesslich noch zuzusehen, wie sich die Lie'sche Methode für den speciellen Fall eines solchen Jacobi'schen Systems gestaltet.

Sind in Satz IX. $F_1, F_2, \ldots F_{m-1}$ lineare homogene Functionen von $p_m, \ldots p_n$, so ist auch die Gleichung mit $n-m+2$ unabhängigen Variabeln:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = F_1 + x_2 F_2 + \cdots x_{m-1} F_{m-1}, \tag{6}$$

auf welche durch diesen Satz die vollständige Integration des Jacobi'schen Systems (2) oder zunächst des durch die Substitutionen (3) transformirten Systems (4) zurückgeführt wird, eine lineare homogene Differentialgleichung. Sie besitzt also $n-m+1$ verschiedene Lösungen, die unabhängige Functionen von $q_m, \ldots q_n$ sind, und wenn man diese Lösungen durch $V_m, V_{m+1}, \ldots V_n$ bezeichnet, so ist:

$$V = b_m V_m + b_{m+1} V_{m+1} + \cdots b_n V_n$$

eine vollständige Lösung der Gleichung (6). Um daher die gemeinsame vollständige Lösung der $m-1$ Gleichungen (4) zu erhalten, haben wir nach der Lie'schen Methode

$$V = b_m (V_m - V_m^a) + b_{m+1} (V_{m+1} - V_{m+1}^a) + \cdots b_n (V_n - V_n^a) \tag{7}$$
$$+ c_m a_m + c_{m+1} a_{m+1} + \cdots c_n a_n$$

zu setzen, wo allgemeine $V_k^a$ aus $V_k$ durch die Substitutionen

$$q_1 = a_1, q_m = a_m, \ldots q_n = a_n$$

hervorgeht, und hieraus die Grössen

$$a_m, \dots a_n, b_m, \dots b_n$$

mit Hülfe der $2(n-m+1)$ Gleichungen

$$(8) \qquad V_k^a = V_k\,, \quad \sum_{h=m}^{h=n} b_h \frac{\partial V_h^a}{\partial a_k} = c_k$$

zu eliminiren. Da aber in Folge der $n-m+1$ ersten Gleichungen (8) die Grössen $b_m, \dots b_n$ aus dem Ausdrucke (7) ganz von selbst herausgehen, so sieht man, dass man in dem betrachteten speciellen Falle zu der gesuchten vollständigen Lösung des Jacobi'schen Systems (4) einfach dadurch gelangt, dass man die $n-m+1$ Gleichungen

$$V_k^a = V_k$$

nach $a_m, \dots a_n$ auflöst und die erhaltenen Werthe in

$$V = c_m a_m + c_{m+1} a_{m+1} + \cdots c_n a_n$$

substituirt.

Nach meiner Methode dagegen (a. a. O. p. 462) hat man sämmtliche Lösungen $V_m, V_{m+1}, \dots V_n$ der Gleichung (6) aufzusuchen, und indem man hierauf $a_m, \dots a_n$ aus den $n-m+1$ Gleichungen

$$V_k^a = V_k$$

bestimmt, erhält man in den also gefundenen Werthen dieser Grössen die $n-m+1$ gemeinsamen Lösungen der $m-1$ linearen Gleichungen (4).

Man sieht also, dass für lineare homogene partielle Differentialgleichungen beide Methoden genau zu demselben Resultate führen.

Während nun aber, wenn man die Integration eines Jacobi'schen Systems von linearen homogenen Gleichungen nur als Hülfsproblem zur Lösung derjenigen allgemeinen Aufgaben betrachtet, die sich auf diese zurückführen lassen, nicht die *vollständige* Integration, sondern die Auffindung *überhaupt irgend einer* gemeinsamen Lösung die fundamentale Aufgabe bildet und daher dort nothwendig die Frage sich aufdrängen musste, ob für das System (4) hierzu nicht schon die Kenntniss einer beliebigen particulären Lösung der Gleichung (6) ausreichend sei, eine Frage, durch deren Bejahung dann gleichzeitig für alle jenen allgemeineren Aufgaben eine beträchtliche Reduction in der Anzahl der zur Lösung erforderlichen Integrationen erlangt wird, kann ihrer ganzen Anlage nach die Lie'sche Methode sich diese Frage schon deshalb nicht stellen, weil sie, von vornherein auf eine bestimmte jener Aufgaben sich beschränkend und diese nun aber auch ohne Umschweife angreifend, nothwendiger Weise gerade die *vollständige* Integration eines Jacobi'schen Systems von beliebigen partiellen Differentialgleichungen als ihr Fundamentalproblem betrachten muss. Eben dadurch aber, dass sie ihre Aufgabe von vornherein ganz bestimmt abgrenzt, wird es ihr auch möglich, für ihr besonderes Problem die einfachsten und schönsten Resultate zu erzielen.

Leipzig, October 1872.

---

## Nachtrag.

### Directe Ableitung des Lie'schen Fundamentaltheorems durch die Methode von Cauchy.

In seiner letzten Mittheilung über partielle Differentialgleichungen*) macht Herr Lie die wichtige Bemerkung, dass sich die Cauchy'sche Methode zur Integration *einer* partiellen Differentialgleichung ausdehnen lässt auf ein Jacobi'sches System solcher Gleichungen, woraus dann folgt, dass, ebenso wie bei der Combination der Methoden von Lie und von Jacobi, auch bei meiner Methode der scheinbar ungünstigste Fall in Wirklichkeit der allergünstigste ist.

Diese Bemerkung hat mich auf eine neue und wie ich glaube einfachste Art geführt, auf analytischem Wege zu dem allgemeinen Lie'schen Theorem IX zu gelangen, eine Art der Ableitung oder des Beweises, an die ich, obgleich sie sich aus der Form dieses Satzes eigentlich ganz von selbst ergiebt, doch früher nicht gedacht hatte.

Nach dem Satze IX kommt es nämlich, um eine vollständige Lösung des transformirten Jacobi'schen Systems (4) zu erhalten, nur darauf an, diejenige Lösung der ersten Gleichung (4) zu finden, die sich für $q_1 = a_1$ auf

$$V = c_m q_m + \ldots c_n q_n$$

reducirt. Nun erhält man aber, wenn man die Cauchy'sche Methode in ihrer einfachsten Form, wie ich sie in diesem Journal Bd. III. p. 444 auseinandergesetzt habe, auf jene Gleichung anwendet, und dabei $a_1$ zum Anfangswerth von $q_1$ wählt, gerade diese besondere Lösung. Es ist daher von vornherein klar, dass diese Anwendung der Cauchy'schen Methode auf die erste Gleichung (4) zu einer gemeinsamen Lösung aller $m-1$ Gleichungen (4) führen muss, und es kommt, um unabhängig von dem Früheren zu einer Integrationsmethode

---

*) Göttinger Nachrichten vom 30. Oct. 1872 p. 488.

der Jacobi'schen Systeme zu gelangen, nur noch darauf an, direct nachzuweisen, dass wirklich diese Cauchy'sche Lösung der ersten Gleichung auch den übrigen Gleichungen (4) genügt. Dieser Beweis aber lässt sich sehr einfach führen und man erhält auf diese Weise die folgende neue Ableitung des Satzes IX.

Es handelt sich um die simultane Integration der $m-1$ partiellen Differentialgleichungen

$$\text{(1)}\qquad \frac{\partial V}{\partial q_1}=F_1,\ \frac{\partial V}{\partial q_2}=F_2,\ \ldots \frac{\partial V}{\partial q_{m-1}}=F_{m-1},$$

in denen $F_1, F_2, \ldots F_{m-1}$ irgend solche gegebene Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_n, p_m, \ldots p_n$ sind, welche paarweise die Bedingungen erfüllen

$$\text{(2)}\qquad (F_i-p_i,\ F_k-p_k)=0.$$

Wir führen diese Gleichungen zunächst wieder durch die Substitutionen

$$\text{(3)}\qquad q_i=a_i+(q_1-a_1)\,x_i,$$

in denen $i=2, 3, \ldots m-1$ und $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$ unbestimmte Constanten sind, zurück auf die Gleichungen:

$$\text{(4)}\qquad \frac{\partial V}{\partial q_1}=f_1,\ \frac{\partial V}{\partial x_2}=f_2,\ \ldots \frac{\partial V}{\partial x_{m-1}}=f_{m-1},$$

deren rechte Seiten diejenigen Functionen der Variabeln

$$q_1,\ x_2,\ \ldots x_{m-1},\ q_m,\ \ldots q_n,\ p_m,\ \ldots p_n$$

sind, die durch die Substitutionen (3) aus den Formeln

$$\text{(5)}\qquad \begin{cases} f_1=F_1+x_2F_2+\ldots x_{m-1}F_{m-1}, \\ f_i=(q_1-a_1)\,F_i,\ i=2, 3, \ldots m-1 \end{cases}$$

hervorgehen. Zwischen diesen Functionen bestehen in Folge der Identitäten (2) u. A. die identischen Relationen:

$$\text{(6)}\qquad \frac{\partial f_i}{\partial q_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\sum_{h=m}^{h=n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_h}\frac{\partial f_i}{\partial p_h}-\frac{\partial f_1}{\partial p_h}\frac{\partial f_i}{\partial q_h}\right)=0.$$

Von der ersten Gleichung (4) erhalten wir nun nach der genannten Methode die geforderte Lösung auf folgendem Wege.

Wir bilden die $2(n-m+1)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\text{(7)}\qquad \frac{\partial q_h}{\partial q_1}=-\frac{\partial f_1}{\partial p_h},\ \frac{\partial p_h}{\partial q_1}=\frac{\partial f_1}{\partial q_h},$$

in denen $x_2, \ldots x_{m-1}$ nur als Constanten auftreten, integriren dieselben vollständig und drücken die $2(n-m+1)$ Integrationsconstanten durch die für $q_1=a_1$ genommenen Anfangswerthe

$$a_m,\ \ldots a_n,\ c_m,\ \ldots c_n$$

der Variabeln

$$q_m,\ \ldots q_n,\ p_m,\ \ldots p_n$$

aus. Diese Anfangswerthe können und sollen im Folgenden als willkürliche, auch von $x_2, \dots x_{m-1}$ unabhängige Constanten betrachtet werden*).

Es mögen:

(8) $$q_h = [q_h]\,, \quad p_h = [p_h]$$

die also erhaltenen vollständigen Lösungen der Gleichungen (7) bezeichnen. Die $[q_h]$ und $[p_h]$ sind dann bestimmte Functionen der Grössen:

$$q_1, x_2, \dots x_{m-1}, a_m, \dots a_n, c_m, \dots c_n,$$

die sich für $q_1 = a_1$ resp. auf $a_h$ und $c_h$ reduciren, und durch die Substitutionen (8), deren Ausführung in der Folge stets durch Einschliessung in eckige Klammern angezeigt werden soll, werden die Gleichungen (7) identisch.

Berechnet man schliesslich vermöge einfacher Quadratur:

(9) $$V = \sum_{h=m}^{h=n} c_h a_h + \int_{a_1}^{q_1} \left[ f_1 - \sum_{h=m}^{h=n} p_h \frac{\partial f_1}{\partial p_h} \right] \partial q_1$$

als Function derselben Grössen und setzt in dieser Function für $a_m, \dots a_n$ die Werthe ein, die sich aus den $n - m + 1$ Gleichungen ergeben

(10) $$[q_h] = q_h,$$

so ist der resultirende Werth $W$ von $V$ die gesuchte vollständige Lösung der ersten Gleichung (4) und zugleich hat man identisch:

(11) $$\left[\frac{\partial W}{\partial q_h}\right] = [p_h].$$

Um nun zu zeigen, dass dieser Werth von $V$ gleichzeitig auch den übrigen Gleichungen (4) Genüge leistet, brauchen wir nur den partiellen Differentialquotienten der Function $V$ nach $x_i$ einmal direct aus der Definitionsgleichung (9) und dann indirect aus der Formel $V = [W]$ zu berechnen und beide Werthe mit einander zu vergleichen.

Aus (9) ergiebt sich zunächst

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \int_{a_1}^{q_1} \left\{ \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right] + \sum_{h=m}^{h=n} \left( \left[\frac{\partial f_1}{\partial q_h}\right] \frac{\partial [q_h]}{\partial x_i} - [p_h] \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial f_1}{\partial p_h}\right] \right) \right\} \partial q_1,$$

---

*) Dass diese Anfangswerthe in der That stets ein System unabhängiger Integrationsconstanten der Gleichungen (7) bilden, erkennt man leicht, wenn man bedenkt, dass unter unseren Voraussetzungen die $m - 1$ linearen Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial q_k} + \sum_{h=m}^{h=n} \left( \frac{\partial F_k}{\partial q_h} \frac{\partial f}{\partial p_h} - \frac{\partial F_k}{\partial p_h} \frac{\partial f}{\partial q_h} \right) = 0,$$

in denen die unbestimmten Constanten $a_1, a_2, \dots a_{m-1}$ gar nicht vorkommen, $2(n - m + 1)$ gemeinsame Lösungen besitzen, die unabhängige Functionen von $q_m, \dots q_n, p_m, \dots p_n$ sind, und dass jede dieser Lösungen, einer willkürlichen Constanten gleich gesetzt, durch die Substitutionen (3) übergeht in ein Integral der Gleichungen (7).

oder, wenn man den Ausdruck unter dem Summenzeichen mit Hülfe der Gleichungen (7) in einen exakten Differentialquotienten nach $q_1$ umwandelt,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \int_{a_1}^{q_1} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right] \partial q_1 + \sum_{h=m}^{h=n} [p_h] \frac{\partial [q_h]}{\partial x_i}.$$

Durch die Substitutionen (8) geht aber wiederum in Folge der Gleichungen (7) die Identität (6) über in die:

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial [f_i]}{\partial q_1}$$

und man erhält daher, da nach (5) $f_i = 0$ wird für $q_1 = a_1$, auf diesem Wege schliesslich:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = [f_i] + \sum_{h=m}^{h=n} [p_h] \frac{\partial [q_h]}{\partial x_i}.$$

Aus der Identität $V = [W]$ dagegen folgt:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right] + \sum_{h=m}^{h=n} \left[\frac{\partial W}{\partial q_h}\right] \frac{\partial [q_h]}{\partial x_i}.$$

Die Subtraction beider Werthe liefert daher nach (11):

$$\left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right] = [f_i].$$

Diese Formel enthält den verlangten Beweis. Verbindet man sie nämlich mit den Formeln (11), so zeigt sich, dass die Gleichung:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = f_i, \tag{12}$$

nachdem man in $f_i$ allgemein $\frac{\partial W}{\partial q_h}$ statt $p_h$ gesetzt hat, identisch werden muss durch die Substitutionen $q_h = [q_h]$. Diese Substitutionen werden aber wieder aufgehoben, wenn man für $a_m, \ldots a_n$ ihre Werthe aus den Gleichungen (10) einsetzt; also muss nach der angegebenen Ersetzung die Gleichung (12) an und für sich identisch sein.

Unsere Lösung $V = W$ der ersten Gleichung (4) ist also in der That eine gemeinsame vollständige Lösung aller $m - 1$ Gleichungen (4) und wir brauchen nur noch in derselben rückwärts für $x_2, \ldots x_{m-1}$ ihre Werthe aus den Substitutionen (3) einzusetzen, um eine vollständige Lösung des gegebenen Jacobi'schen Systems (1) zu erhalten.

Man sieht, dass diese Ausdehnung der Cauchy'schen Methode auf die Integration eines Jacobi'schen Systemes genau dasselbe leistet, wie das Theorem IX. Um dieses selbst aus ihr abzuleiten, bedarf es nur der Bemerkung, dass, wenn:

$$V = \psi(q_1, x_2, \ldots x_{m-1}, q_m, \ldots q_n, b_m, \ldots b_n)$$

eine vollständige Lösung der ersten Gleichung (4) ist, die $2(n - m + 1)$ Gleichungen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_h} = p_h, \quad \frac{\partial \psi}{\partial b_h} = \beta_h$$

ein vollständiges System Integralgleichungen der Gleichungen (4) bilden.

Um nämlich aus diesen Integralgleichungen unsere gemeinsame Lösung $V = W$ der $m - 1$ Gleichungen (4) zu erhalten, haben wir nach dem Vorhergehenden aus den $3(n - m + 1)$ Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_h} = p_h, \quad \frac{\partial \psi_a}{\partial a_h} = c_h, \quad \frac{\partial \psi}{\partial b_h} = \frac{\partial \psi_a}{\partial b_h},$$

in denen $\psi_a$ den Werth bezeichnet, den $\psi$ durch die Substitutionen

$$q_1 = a_1, \; q_m = a_m, \; \ldots \; q_n = a_n$$

annimmt, nach Elimination von $b_m, \ldots b_n$ die Werthe von $q_m, \ldots q_n$, $p_m, \ldots p_n$ zu berechnen und dieselben in die Formel (9) zu substituiren. Nach Ausführung der Quadratur sind dann schliesslich noch $a_m, \ldots a_n$ mit Hülfe der Gleichungen zu eliminiren, welche $q_m, \ldots q_n$ durch $q_1, x_2, \ldots x_{m-1}, a_m, \ldots a_n, c_m, \ldots c_n$ ausdrücken.

Dieses Verfahren vereinfacht sich aber beträchtlich, da sich die Quadratur sofort ausführen lässt. Denn da jetzt

$$[f_1] = \left[\frac{\partial \psi}{\partial q_1}\right], \quad [p_h] = \left[\frac{\partial \psi}{\partial q_h}\right]$$

ist, so reducirt sich bei Anwendung der Identität:

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial p_h}\right] = -\left[\frac{\partial [q_h]}{\partial q_1}\right]$$

die Formel (9) auf:

$$V - \sum_{h=m}^{h=n} c_h a_h = \int_{a_1}^{q_1} \frac{\partial [\psi]}{\partial q_1} \partial q_1 = [\psi] - \psi_a.$$

Hiernach erhellt, dass man aus irgend einer bekannten vollständigen Lösung $V = \psi$ der ersten Gleichung (4) die gemeinsame vollständige Lösung $V = W$ aller $m - 1$ Gleichungen (4) einfacher dadurch erhalten kann, dass man mit Hülfe der $2(n - m + 1)$ Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial b_h} = \frac{\partial \psi_a}{\partial b_h}, \quad \frac{\partial \psi_a}{\partial a_h} = c_h$$

die Grössen $a_m, \ldots a_n, b_m, \ldots b_n$ aus dem Ausdrucke

$$V = \psi - \psi_a + c_m a_m + \ldots c_n a_n$$

eliminirt. Dies ist aber eben das Theorem IX.

---

# Zum Andenken an Rudolf Friedrich Alfred Clebsch*).

Rudolf Friedrich Alfred Clebsch wurde am 19. Januar 1833 zu Königsberg in Pr. geboren, wo sein Vater Regimentsarzt war. Auf dem Altstädt'schen Gymnasium daselbst empfing er neben der ersten wissenschaftlichen insbesondere auch die erste mathematische Anregung. Clebsch gedachte noch im späteren Leben mit besonderer Vorliebe und Dankbarkeit seiner damaligen mathematischen Lehrer: Müttrich und Schumann, die nun ebenfalls im Grabe ruhen. Eben 17 Jahre alt (Ostern 1850) bezog Clebsch die Universität seiner Vaterstadt, wo er später (1854) das Doctor- und das Staats-Examen für Mathematik und Physik absolvirte.

In Königsberg war damals durch die Vereinigung von Neumann, Richelot, Hesse zur gründlichen und umfassenden Ausbildung in den mathematisch-physikalischen Disciplinen eine selten günstige Gelegenheit geboten. Während Clebsch unter Richelot's Anleitung die Hauptwerke von Euler und Jacobi mit rastlosem Eifer studirte, und in solcher Weise den Grund legte für seine späteren Arbeiten über partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung, wurde er gleichzeitig durch Hesse's meisterhafte Vorträge über analytische Geometrie zu zahlreichen eigenen Versuchen angeregt, und mit besonderer Vorliebe für diejenigen Methoden der Forschung erfüllt, in deren Vervollkommnung er später so Ausserordentliches geleistet hat.

Von grösstem Einflusse auf Clebsch war Neumann, in dessen befreundetem Hause er anregenden Verkehr fand, und mit dessen gleichaltrigem Sohne ihn seit dem Gymnasium gleiches Streben und dauernde Freundschaft verband. Von den Vorlesungen Neumann's auf's Lebhafteste angezogen, beschäftigte Clebsch sich in eingehender Weise mit Problemen der mathematischen Physik, namentlich mit Optik und Hydrodynamik. Letzterem Gebiete gehörten seine ersten Publicationen an, sowohl seine Inauguraldissertation (Bewegung eines Ellipsoids in einer Flüssigkeit, eine Aufgabe, deren einfachster Fall schon von Dirichlet behandelt war), als auch mehrere andere Arbeiten, die im Crelle'schen Journal erschienen sind.

Im Jahre 1854 begab sich Clebsch nach Berlin, um zunächst in das mit dem Friedrich-Wilhelmstädtischen Gymnasium verbundene, unter Schellbach's Leitung stehende Lehrer-Seminar einzutreten, und sodann mehrere Jahre hindurch als Lehrer der Mathematik an verschiedenen Schulen Berlins thätig zu sein. Hier begann sich sein

*) Mit unbedeutenden Aenderungen wiederholt aus den Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Eine ausführlichere Darstellung von Clebsch' wissenschaftlichen Arbeiten wird in einiger Zeit erscheinen.

pädagogisches Talent zu entwickeln, das ihn später in so hervorragender Weise ausgezeichnet hat. Der mathematische Unterricht, so wollte Clebsch, sollte nicht mit einer Reihe schwerverständlicher abstracter Definitionen beginnen, sondern von der Anschauung ausgehen, und durch die Anschauung Interesse erwecken. Das eben war auch bei seinen späteren Universitäts-Vorträgen das Charakteristische: der Gegenstand des Vortrages erwuchs vor den Zuhörern in organischem Aufbau. Und das in in seinem ganzen Wesen und Denken zu Tage tretende, selbst in seinen einzelnen Abhandlungen erkennbare Streben nach plastischer Darstellung und künstlerischer Abrundung gab seinen Vorträgen eine seltene Vollendung und Anziehungskraft, und verwandelte den Gegenstand des Vortrags in ein Bild von wahrhaft idealer Schönheit. Es war, im höchsten Sinne des Wortes, ein ästhetischer Genuss, seinem Vortrage zu folgen.

Ende 1858 habilitirte sich Clebsch als Privatdocent an der Berliner Universität. Aber er hat als solcher merkwürdiger Weise nur eine Stunde gelesen; denn an demselben Tage, an dem er begonnen hatte, erhielt er einen Ruf an das Polytechnicum zu Carlsruhe für theoretische Mechanik.

Clebsch ist (ebenso wie später in Giessen) fünf Jahre in Carlsruhe gewesen. Bedenkt man, wie er während seines dortigen Aufenthaltes mit Vorlesungen, die einem unmittelbar praktischen Zwecke dienen sollten, überhäuft war, so wird man die zu jener Zeit von ihm ausgeführten wissenschaftlichen Arbeiten sowohl ihrem Inhalt wie ihrer Zahl nach gleich bewunderungswürdig finden. Auch gelang es ihm, einige Schüler des Polytechnicums näher zu sich heranzuziehen und dieselben dauernd für rein mathematische Studien zu gewinnen. Was seine Schüler damals und später mit so unwiderstehlicher Gewalt an seine Persönlichkeit fesselte, war nicht nur die wissenschaftliche Anregung, die von ihm ausging; es war vor Allem auch der herzliche Antheil, den er allen ihren Bestrebungen entgegentrug. Er war nicht nur der Lehrer, er war auch der väterliche Freund seiner Schüler.

Clebsch fand in Carlsruhe bei mehreren seiner Collegen, namentlich bei Wiener und Schell, lebhaftes Interesse für mathematische Bestrebungen; noch jetzt besteht das mathematische Kränzchen, in welchem sie allwöchentlich zusammen kamen, und von ihren wissenschaftlichen Bestrebungen einander erzählten; hier wurde Clebsch durch Schell in die eigenthümlichen Methoden der neueren Geometrie zum ersten Male eingeführt. Solcher Beziehungen zu gedenken erscheint keineswegs unwesentlich; denn für Clebsch war der persönliche Gedankenaustausch, den er sehr liebte, das lebendige Mittel, um seinen Gesichtskreis zu erweitern, und neue ihm noch unbekannte wissenschaftliche Gebiete seiner Herrschaft zu unterwerfen.

Clebsch hat stets das wärmste Interesse für die wissenschaftlichen Forschungen Anderer an den Tag gelegt. Er hielt seine eigenen Anschauungen selbst in solchen Gebieten, in denen er Meister war, niemals für abgeschlossen. Jede wissenschaftliche Unterhaltung erweckte in seinem selten beweglichen Geiste neue Reflexe; häufig die Ausgangspunkte neuer Gedankenreihen und wichtiger Arbeiten. In vorurtheilsloser und freudiger Anerkennung fremder Gedanken empfing er ebenso gerne, als er gab.

Bald nach seiner Niederlassung in Carlsruhe verheirathete sich Clebsch mit Fräulein Elise Heinel aus Königsberg. Seine Eltern waren auch zu ihm gezogen, so dass er eine behagliche Häuslichkeit um sich entstehen sah. Sie sollte nicht von langer Dauer sein. Bald nach seiner Uebersiedelung nach Giessen starben seine Eltern, nicht lange danach seine Frau, die ihm vier Knaben im zarten Kindesalter hinterliess.

Die Uebersiedelung nach Giessen erfolgte 1863. Erst hier in der freieren akademischen Luft vermochte die doppelte Begabung von Clebsch als wissenschaftlicher Forscher und Lehrer zur vollen Geltung zu gelangen. Seine wissenschaftliche Production steigert sich von Jahr zu Jahr, und gleichzeitig umgiebt ihn ein mehr und mehr anwachsender Kreis von Schülern. In erster Beziehung war für Clebsch von höchster Bedeutung, dass sich damals Gordan in Giessen für Mathematik habilitirte. Clebsch hatte kurz zuvor aus Aronhold's Arbeiten die neuere Algebra kennen gelernt; er hatte dieselbe in Verbindung gebracht mit Hesse's und Cayley's analytisch-geometrischen Untersuchungen, und in solcher Weise begonnen, dasjenige Feld der Wissenschaft sich zu eröffnen, in welchem er fortan der Meister war, und in welchem seine Bedeutung für die Wissenschaft vielleicht ihre stärksten Wurzeln hat. Gordan führte er in diese neue Speculationen ein, während umgekehrt jener ihn mit Riemann's Arbeiten über Abel'sche Functionen bekannt machte. Beide haben seitdem zusammen gearbeitet, wie es selten geschehen mag. Als erste Frucht erschien Clebsch's Anwendung der Abel'schen Functionen auf Geometrie; und bald darauf (1866) die von beiden gemeinsam verfasste „Theorie der Abel'schen Functionen.“ Sodann concentrirte sich ihr Interesse auf die neuere Algebra; und die „Theorie der binären Formen“, welche Clebsch später (1871) publicirte, ist als der Ausdruck der gemeinsam in dieser Richtung gewonnenen neuen Anschauungen anzusehen. Unabhängig hievon beschäftigte sich Clebsch in eifriger Weise mit mehr geometrischen Arbeiten, besonders mit der Theorie der Abbildung algebraischer Flächen auf der Ebene, zu der ihm Betrachtungen von Chasles die Anregung gegeben hatten. Erst einer späteren Zeit wird es beschieden sein, alle diese Arbeiten ihrer ganzen Tragweite nach zu erkennen und ihren Zusammenhang mit den gleichzeitigen Bestrebungen Anderer zu übersehen.

Im Herbste 1868 siedelte Clebsch nach Göttingen über. Einige Zeit vorher hatte er in Fräulein Minna Raiss aus Giessen zum zweiten Male eine Gefährtin seines Lebens und die Begründerin einer anmuthenden Häuslichkeit gefunden. Bald wurde das Haus Clebsch für die jüngeren Glieder der Universität ein Mittelpunkt, wo sie neben wissenschaftlicher Anregung gemüthlichen Anhalt fanden. Die Zuneigung und das Vertrauen seiner Göttinger Collegen erwarb sich Clebsch in so hohem Grade, dass schon nach vierjähriger Anwesenheit das Prorectorat ihm übertragen wurde; er sollte es nicht länger als zwei Monate führen. Clebsch starb am 7. November dieses Jahres in der Blüthe seines Lebens, in wenigen Tagen von der Diphtheritis hinweggerafft.

Für seine wissenschaftliche Wirksamkeit hatte Clebsch 1868 mit C. Neumann zusammen in den „Mathematischen Annalen“ ein neues Organ geschaffen, von dem zur Zeit die fünf ersten Bände vollendet vorliegen. Aber gleichzeitig wusste er die Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften mit grösseren Arbeiten zu schmücken und die gelehrten Nachrichten durch seine vielfältigen Verbindungen in eine Zeitschrift zu verwandeln, welche für den Mathematiker fast unentbehrlich war. Ungemindert blieb darum seine Thätigkeit als Lehrer. Geometrie in erster Linie, neuere Algebra, elliptische und Abel'sche Functionen, Hamilion'sche Theorie sind diejenigen Gegenstände, über die er wiederholt gelesen hat, und die er als ständige Vorlesungsthemata beizubehalten gedachte. Clebsch pflegte in seinen Vorlesungen rasch fortzuschreiten; er brachte die neuesten und schwierigsten Untersuchungen, die er durch seine Gabe, überall die leichtesten und naturgemässesten Wege zu finden, sowie überhaupt durch sein eminentes Darstellungstalent dennoch verständlich zu machen wusste. Kein Wunder, wenn die Anzahl der Zuhörer von Semester zu Semester sich hob.

Obwohl im Reiche der mathematischen Wissenschaft die Wege des weiteren Vordringens nicht weniger verschieden und mannigfaltig sind als die einzelnen Gebiete selber, so kann man dennoch von einem gewissen Gesichtspunkte aus die ganze Mannigfaltigkeit dieser verschiedenenen Wege in zwei Gruppen bringen, auf zwei Hauptrichtungen vertheilen. Clebsch selber in seiner Gedächtnissrede auf Plücker (in der er überhaupt mehr als sonst Gelegenheit genommen, über allgemeine wissenschaftliche Gesichtspunkte sich auszusprechen) hat diese beiderlei Richtungen mit folgenden Worten charakterisirt:

„Es kann die Forschung von bestimmten Problemen ausgehen, deren Wichtigkeit sie anerkannt hat, deren Lösung mit allen Kräften mehr oder weniger direct angestrebt wird. — Aber ebenso berechtigt ist die andere Art der Forschung, welche sich nur das Gebiet der Thätigkeit wählt, in diesem aber freie Umschau hält, und, entgegengesetzt der ersten, nach Problemen späht, deren Lösung sich ermögliche.“

„Ueber den relativen Werth dieser Forschungsmethoden werden verschiedene Individualitäten immer verschiedener Ansicht sein. Wenn die erstere zu grösserer Vertiefung führen kann, so ist sie auch der Unfruchtbarkeit nur zu leicht ausgesetzt. Der andern schuldet man Dank für die Erwerbung grosser und neuer Gebiete; wobei dann im Einzelnen Vieles der ersten Methode zu ergründen und zu begrenzen verbleiben mag.“

Was die Arbeiten von Clebsch betrifft, so werden seine Epoche machenden Untersuchungen über analytische Geometrie, über Algebra und Flächentheorie, ähnlich etwa wie die Arbeiten von Plücker und Möbius, als Repräsentanten der *zweiten* Richtung zu bezeichnen sein.

Nicht weniger entschieden aber sind andererseits seine Arbeiten über partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung als Repräsentanten der *ersten* Richtung anzuführen; sie stehen in engster Beziehung zu den Untersuchungen Jacobi's. Der geistige Nachlass dieses gewaltigen Mannes bestand nicht nur in schon erschlossenen Schätzen des Wissens und Denkens, sondern (was nicht minder schätzbar) auch in einer grossen Anzahl neuer, noch ungelöster Probleme, welche er der Nachwelt vererbte. Clebsch, der die Werke Jacobi's mit besonderer Vorliebe studirt hatte, und demgemäss auch gerne als einen Schüler Jacobi's sich zu bezeichnen pflegte, richtete die ganze Kraft seines Nachdenkens und alle Mittel seines erfindungsreichen Geistes auf die Ueberwindung derjenigen Classe von Problemen, welche durch die Untersuchungen des grossen Meisters zu Tage getreten waren im Gebiete der partiellen Differentialgleichungen und der Variationsrechnung; und dass er aus diesem Kampfe, der schon vor ihm von höchst namhaften Mathematikern, aber nur mit theilweisem Erfolge aufgenommen war, in allen Punkten als Sieger hervorging, zeigen seine betreffenden Abhandlungen.

Clebsch hat also in *beiden* Richtungen Ausserordentliches geleistet. Seine hiedurch documentirte Vielseitigkeit tritt vielleicht noch deutlicher hervor, wenn man die verschiedenen Gebiete seiner wissenschaftlichen Thätigkeit, der Zeitfolge nach, sich vergegenwärtigt. Er beschäftigt sich zu Anfang mit Problemen der mathematischen Physik; er wendet sodann eine Zeitlang denjenigen Problemen sich zu, welche die Theorie der partiellen Differentialgleichungen betreffen; es folgen die bahnbrechenden Untersuchungen über analytische Geometrie; er wendet sich zu den Abel'schen Functionen; dann wieder theilt er sein Interesse zwischen neuerer Algebra und Flächentheorie.

Gerade vermöge seiner Vielseitigkeit war Clebsch zu Entdeckungen befähigt, welche andernfalls unmöglich gewesen wären, nämlich zur Auffindung von Uebergängen zwischen solchen Gebieten der Wissenschaft, die bis dahin als völlig getrennt, als heterogen betrachtet waren. Als eines glänzenden Beispiels in dieser Beziehung ist namentlich seiner Anwendung der Abel'schen Functionen auf Geometrie und der Entdeckung zu gedenken, dass von einem gewissen Standpunkte aus das Abel'sche Theorem identisch erscheint mit den Sätzen über die Schnittpunktsysteme algebraischer Curven. Ferner ist in dieser Beziehung zu erwähnen, wie er auf Hesse's Behandlung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung fussend, die Gleichungen höheren Grades, zu denen geometrisch-algebraische Probleme Anlass gaben, mit der Theorie der Abel'schen Functionen und der allgemeinen Theorie algebraischer Gleichungen, die durch Galois geschaffen, von Kronecker und Camille Jordan weiter entwickelt war, in Verbindung zu setzen wusste.

An Anerkennung in Nähe und Ferne, namentlich auch im Auslande, hat es Clebsch nicht gefehlt. Er war correspondirendes Mitglied der Akademien in Berlin und München, in Mailand und Bologna, sowie in Cambridge; er was eines der wenigen Mitglieder der London Mathematical Society. Aber nicht nur in der äusserlichen Beziehung solcher Ehrenbezeugungen hat er zu seinen Fachgenossen gestanden; aufrichtige Freundschaft hat ihn mit den Gleichstrebenden verbunden. Denn so muss man die Beziehung nennen, die ihn (um von der grossen Anzahl der Einheimischen zu schweigen) z. B. mit Cremona in Mailand, mit Camille Jordan in Paris, mit Cayley in Cambridge verband. — Er ist vom Tode dahingerafft, zu früh für seine Familie, zu früh für seine Freunde, zu früh für die Wissenschaft!

Bei der fast unermesslichen Ausdehnung, welche die mathematische Wissenschaft allmählich erlangt hat, und bei der hiedurch hervergerufenen Zersplitterung in viele einzeine Disciplinen, ist der Verlust, den die Wissenschaft durch seinen Tod erlitten hat, doppelt schmerzlich. Schien er doch berufen, die Vertreter jener verschiedenen Disciplinen mit einander zu versöhnen, — berufen, dereinst einzutreten in die Zahl jener grossen weit über das gewöhnliche Niveau hervorragenden Meister der Wissenschaft, deren Urtheil von Allen anerkannt, deren Rath und Leitung von Allen ersehnt war.

# Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene.*)

Von A. Clebsch †.

In einem Aufsatze, welcher im 17. Bande der Abh. der K. Ges. d. Wss. zu Göttingen gedruckt ist**), habe ich es versucht, die Grundgebilde zu kennzeichnen, welche für die Invariantentheorie zu studiren sind. Für die analytische Geometrie der Ebene (Algebra der ternären Formen) ergab sich hiebei die Nothwendigkeit, ein Gebilde zu untersuchen, welches die algebraische Curve als sehr besondern Fall einschliesst und welches zugleich das umfassendste ist, dessen Studium durch die Invariantentheorie bei ternären Formen gefordert werden kann. Dieses Gebilde, dessen Untersuchung so zu sagen die ganze analytische Geometrie der Ebene in sich schliesst, in einigen seiner wesentlichen Beziehungen darzulegen, ist der Zweck der gegenwärtigen Mittheilung, während ich eine eingehendere Ausführung einer weitern Publication vorbehalte.

## § 1.

## Definition des Connexes.

Das Gebilde, um welches es sich hier handelt, wird gegeben durch eine Gleichung, welche die Coordinaten eines beweglichen Punktes $(x)$ und einer beweglichen Geraden $(u)$ jede in homogener Weise enthält,

$$f(x, u) = 0. \tag{1.}$$

Es sind also Formen von der Art derjenigen, die in der neuern Algebra als *Zwischenformen* bezeichnet werden, welche als selbstständige Grundformen betrachtet durch ihr Verschwinden zu den hier zu untersuchenden Gebilden Veranlassung geben. In der Form $f$ mögen die $x$ zur Ordnung $m$, die $u$ zur Ordnung $n$ vorkommen. Ich bezeichne dann das durch die Gleichung (1.) dargestellte Gebilde als *Connex $m^{ter}$ Ordnung und $n^{ter}$ Classe*, oder kürzer als *Connex* $(m, n)$.

Man kann ein solches Gebilde mit Hülfe eines Mechanismus in ähnlicher Weise construiren, wie Grassmann dies für algebraische

*) Aus den Nachr. der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen vom 18. Sept. 1872.

**) Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie.

Gebilde überhaupt und für algebraische Curven insbesondere gelehrt hat. Dabei entsprechen jeder Geraden $u$ im Allgemeinen unendlich viele Punkte $x$, welche eine Curve $C_m$ der $m$ten Ordnung bilden; jedem Punkte $x$ unendlich viele Gerade $u$, welche eine Curve $K_n$ der $n$ten Classe umhüllen.

Um diese Verhältnisse einfach aufzufassen, ist es zweckmässig, weder den Punkt noch die Gerade an und für sich als Grundelement der Ebene zu betrachten; vielmehr bezeichne ich als *Element die Combination eines Punktes mit einer Geraden.* Die gesammten Elemente $(x, u)$ der Ebene bilden dann nach der gewöhnlichen Bezeichnung ein vierfach unendliches System*). Aus diesem hebt die Gleichung eines Connexes die dreifach unendliche Schaar der Elemente heraus, welche derselben genügen. Das Obige kann man dann auch so aussprechen: Die Punkte, welche mit einer gegebenen Geraden Elemente des Connexes $(m, n)$ sind, bilden eine Curve $C_m$ $m$ter Ordnung; die Geraden, welche mit einem gegebenen Punkte Elemente eines solchen Connexes sind, umhüllen eine Curve $K_n$ $n$ter Classe.

Nur in besondern Fällen tritt es ein, dass jeder Punkt der Ebene mit einer bestimmten Geraden, oder jede Gerade der Ebene mit einem bestimmten Punkte Elemente des Connexes bildet. Solcher ausgezeichneter Punkte und Geraden kann es bei besondern Connexen beliebig viele geben; ja ihre Zahl kann unendlich gross werden. Dies letztere tritt bei irreducibeln Connexen ein, wenn die Gleichung $f=0$ die $x$ oder die $u$ gar nicht enthält. Enthält sie die $u$ nicht, so hat man die Gleichung einer Curve in Punktcoordinaten vor sich; sie ist als Connex so aufzufassen, dass jeder Punkt der Curve mit jeder beliebigen Geraden ein Element des Connexes bilden kann, dass aber andre Punkte sich mit Geraden zu Elementen überhaupt nicht vereinigen können. Das Entsprechende tritt ein, wenn $f=0$ die $x$ nicht enthält und also die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten darstellt.

Die Connexe (1, 1) führen auf die Collineation, aber in solcher Weise, dass auch diejenigen Ausartungen hier noch einen Sinn behalten, welche als Collineationen bedeutungslos werden. Die Behandlung der Collineation durch Untersuchung eines Ausdrucks, welcher die $x$ und die $u$ linear enthält, haben Hr. Gordan und ich im 1. Bande der math. Annalen (p. 359 folgd.) bereits gegeben. Geht man vom Begriff

*) Diese Bezeichnung ist zunächst der Vorstellung reeller Veränderlicher entnommen, dann aber so übertragen, dass man unter einer einfachen Unendlichkeit die Gesammtheit der Werthe einer unbeschränkt veränderlichen Grösse versteht, wiewohl die Anzahl der complexen Werthe, welche eine solche annehmen kann, eigentlich doppelt unendlich ist.

des Connexes aus, so gehört zu jedem Punkte $x$ der Ebene ein Punkt $y$, welcher der Träger eines Strahlbüschels (Curve 1. Classe) ist; alle Geraden durch $y$ bilden mit $x$ Elemente des Connexes, und zugleich ist $y$ der in der Collineation dem Punkte $x$ entsprechende Punkt. Ebenso gehört zu jeder Geraden $u$ eine andere, $v$ (Curve 1. Ordnung), deren Punkte mit $u$ Elemente bilden, und zugleich ist $u$ die Gerade, welche der Geraden $v$ in der Collineation entspricht. Man wird bei dieser Auffassung auch bezüglich der Collineation auf interessante Sätze und Aufgaben geführt. Ich erwähne nur die Construction collinearer Figuren, wenn nicht 4 Paare entsprechender Punkte gegeben sind, sondern 8 Punkte und 8 Gerade, auf denen die entsprechenden Punkte liegen sollen; sowie den Satz:

*Bei allen Collineationen, bei welchen die zu gegebenen fünf Punkten gehörigen Punkte auf fünf gegebenen Geraden liegen, existirt immer noch ein sechster Punkt, dessen entsprechende Punkte sämmtlich auf einer Geraden liegen, und zwar wird der sechste Punkt und diese Gerade linear construirt.*

## § 2.

## Coincidenzen und Curvenpaare.

Wie aus den algebraischen Flächen algebraische Raumcurven abgeleitet werden, so ergeben sich hier aus dem Connex neue Gebilde, welche das mehreren Connexen Gemeinsame umfassen.

Die Gesammtheit der Elemente, welche *zwei* Connexen gemeinsam sind, — oder wenn diese Gesammtheit in rational trennbare Theile zerfällt, jeden solchen Theil — bezeichne ich als *Coincidenz.*

Innerhalb einer Coincidenz gehört zu jeder Geraden im Allgemeinen nur eine endliche Anzahl ($\mu$) von Punkten, welche mit ihr ein Element bilden können; ebenso gehört zu jedem Punkte eine endliche Anzahl ($\nu$) von Geraden. Man kann dann $\mu$ die Ordnung, $\nu$ die Classe der Coincidenz nennen, diese selbst aber als eine Coincidenz ($\mu$, $\nu$) bezeichnen.

Die Coincidenz deckt sich mit dem allgemeinsten Begriffe der reciproken Verwandtschaft, d. h. einer solchen, bei welcher bei zwei auf einander liegenden ebenen Systemen $A$, $B$ jedem Punkte von $A$ eine Anzahl von Geraden in $B$, jeder Geraden in $B$ eine Anzahl von Punkten in $A$ entspricht. Das Umgekehrte ist dabei im Allgemeinen keineswegs der Fall; den Punkten einer Geraden in $A$ entsprechen im Allgemeinen in $B$ die Tangenten einer Curve, und umgekehrt entsprechen einem Punkte in $B$, d. h. den Geraden des durch ihn gehenden Strahlbüschels, Punkte von $A$, welche eine Curve beschreiben. So sind besondere Bedingungen zu erfüllen, damit aus der zwei Connexen (1, 1) gemeinsamen Coincidenz die lineare reciproke Verwandtschaft im gewöhnlichen Sinne hervorgehe; welche dann freilich bei geeigneter Wahl der Connexe in allgemeinster Weise hierdurch erzeugt wird.

Die Gesammtheit aller Elemente, welche *drei* Connexen gemeinsam sind — oder ein rational darstellbarer Theil einer solchen Gesammtheit — bildet ein *Curvenpaar.* Es sind vermöge der Gleichungen dieser Connexe im Allgemeinen sowohl die $u$ durch die $x$ als die $x$ durch die $u$ rational ausdrückbar, während zugleich durch Elimination der $x$ eine Gleichung zwischen den $u$, durch Elimination der $u$ eine Gleichung zwischen den $x$ erhalten wird. Man hat also eine Curve in Punktcoordinaten und eine Curve in Liniencoordinaten vor sich, und die Punkte der einen sind auf die Tangenten der andern eindeutig bezogen.

Es ist nicht ohne Interesse, das eindeutige Entsprechen zweier Curven gerade in der Weise zu betrachten, wie es hier auftritt. Denn gerade die nicht aufgelöste Form der Gleichungen, wie sie hier sich theoretisch darbietet, ist es, auf welche man in den meisten derartigen Untersuchungen unmittelbar geführt wird.

## § 3.

## Covariante Gebilde und ihr Zusammenhang mit doppelt binären Formen.

Jeder Connex führt eine Anzahl covarianter Connexe, Coincidenzen, Curvenpaare unmittelbar mit sich, wie andrerseits auch Gebilde der letztern Arten wiederum covariante Gebilde aller drei Stufen im Gefolge haben. So erhält man eine einem gegebenen Connexe covariante Coincidenz, wenn man jede Gerade der Ebene nicht mit allen Punkten der zugehörigen $C_m$, sondern nur mit deren Wendepunkten, bez. Berührungspunkten von Doppeltangenten, zu Elementen verbindet: oder wenn man jeden Punkt der Ebene nicht mit allen Tangenten der zugehörigen $K_n$ zusammenstellt, sondern nur mit den Tangenten ihrer Rückkehr- bez. Wendepunkte. Ein Curvenpaar wird gebildet durch die im Systeme der $C_m$ auftretenden Doppel- und Rückkehrpunkte und die zugehörigen Geraden, so wie durch die im Systeme der $K_n$ auftretenden Doppel- und Wendetangenten und die zugehörigen Punkte.

Vom Standpunkte der Invariantentheorie ist zunächst von besonderem Interesse eine Classe aus einem gegebenen Connexe abzuleitender covarianter Connexe (Zwischenformen), welche in folgender Weise entstehen.

Betrachten wir ein beliebiges, nicht dem gegebenen Connexe angehöriges Element $(y, v)$. Der Punkt $y$ ist Scheitel eines Büschels von Strahlen $u$, die Gerade $v$ Träger einer Reihe von Punkten $x$. Soll $(x, u)$ Element des gegebenen Connexes sein, so wird jedem $x$ eine Gruppe $\Gamma_n$ von $n$ Strahlen $u$, jedem $u$ eine Gruppe $G_m$ von $m$ Punkten

$x$ zugeordnet. Betrachten wir ein solches dem gegebenen Connex angehöriges Element $(x, u)$, und die zu $x$ gehörige $\Gamma_n$ (welche $u$ enthält), sowie die zu $u$ gehörige $G_m$ (welche $x$ enthält). Man stelle nun die Forderung, dass die Gruppe $\Gamma_n$ eine binäre Invarianteneigenschaft besitze, und dass ebenso $G_m$ dieselbe oder eine andre habe. Dann resultirt daraus eine Bedingung für $(y, v)$, und dieses Element gehört einem covarianten Connexe an.

Es ist eine charakteristische Eigenschaft der so gebildeten covarianten Connexe, dass die Gleichungen derselben aus der Theorie *binärer* Formen abgeleitet werden. Die binären Formen, welche hier zu betrachten sind, enthalten zwei Reihen von Veränderlichen; und die Invarianten, welche bei der obigen Darstellung zu untersuchen sind, haben die Invarianteneigenschaft auch dann noch, wenn die eine Reihe von Veränderlichen einer, die andre einer beliebigen andern linearen Transformation unterworfen wird. Stellt man eine solche doppelt binäre Form symbolisch durch

$$\varphi = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^m (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2)^n$$

dar, so haben die Invarianten der in Rede stehenden Art den symboischen Ausdruck

$$J = \Sigma c. \ \Pi (ab) \, \Pi (\alpha\beta),$$

wo die $c$ Zahlencoefficienten, die $a, b \dots$ Symbole der einen, die $\alpha, \beta \dots$ Symbole der andern Art bedeuten, diese beiden Classen von Symbolen ber niemals vereinigt auftreten.

Ist nun symbolisch

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^m (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3)^n = 0$$

ie Gleichung des gegebenen Connexes, so findet man als die Gleichung es covarianten Connexes, welcher auf die oben angegebene Weise aus er Invariante $J$ entsteht:

$$0 = \Sigma c. \ \Pi (abv) \, \Pi (\alpha\beta y).$$

Diese Classe covarianter Connexe ist also ebenso auf das Studium er Invarianten jener doppelt binären Formen zurückgeführt, wie die iniengleichung einer in Punktcoordinaten gegebenen Curve auf das tudium der Discriminante einer binären Form mit einer Reihe von eränderlichen.

## § 4.

### Conjugirte Connexe.

Unter den Invarianten einer doppelt binären Form $\varphi = \varphi(x_1, x_2; u_1, u_2)$ ebt es eine, welche den oben angegebenen Forderungen entspricht, ıd welche der Discriminante einer gewöhnlichen binären Form in gewissem Sinne analog ist. Geben wir in $\varphi$ den $x$ beliebige feste Werthe, mögen die aus $\varphi = 0$ entspringenden Werthsysteme der $u$ eine

Gruppe $\Gamma_n$ bilden; ebenso sollen, wenn wir den $u$ beliebige feste Werthsysteme beilegen, die zugehörigen Werthsysteme der $x$ eine Gruppe $C_n$ ausmachen. Das Verschwinden der in Rede stehenden Invariante drückt dann aus, es existire ein solches Werthsystem $x_1$, $x_2$, $u_1$, $u_2$, dass sowohl die zu $x$ gehörige Gruppe $\Gamma_n$ die $u$ als Doppellösung enthalte, wie umgekehrt in der zu den $u$ gehörigen Gruppe $C_m$ die $x$ eine Doppellösung bilden sollen. Man erhält diese Invariante, gleich Null gesetzt, indem man die $x$ und $u$ aus den vier Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \; \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \; \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = 0, \; \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = 0$$

eliminirt, Gleichungen, welche nur die Stelle von dreien versehen, und daher nur auf *eine* Resultirende führen. Diese ist in Bezug auf die Coefficienten von $\varphi$ im Allgemeinen vom Grade $2[mn+2(m-1)(n-1)]$. Aus ihr entsteht ein in Bezug auf den gegebenen besonders merkwürdiger covarianter Connex von der Ordnung $n[mn+2(m-1)(n-1)]$ und der Classe $m[mn+2(m-1)(n-1)]$, welchen ich den zu dem gegebenen *conjugirten* nenne. Er steht zu dem gegebenen in einem Reciprocitätsverhältnisse; *der conjugirte des conjugirten ist wieder der ursprüngliche*; und diese ganze Beziehung ist durchaus derjenigen analog, welche zwischen einer Curve als Punktgebilde und derselben Curve als Liniengebilde stattfindet.

Geometrisch definirt man den conjugirten Connex in folgender Weise. Gehen wir von einem Elemente $(x, u)$ des gegebenen Connexes aus, so ist $x$ ein Punkt der zu $u$ gehörigen $C_m$, $u$ eine Tangente der zu $x$ gehörigen $K_n$. Sei nun $y$ der Berührungspunkt von $u$ mit dieser $K_n$, $v$ die Tangente jener $C_m$ in $x$. Alsdann ist $(y, v)$ ein Element des conjugirten Connexes, und man erhält den ganzen conjugirten Connex, indem man das Element $(x, u)$ den ganzen gegebenen Connex durchwandern lässt. Man erhält demnach auch die Gleichung des conjugirten Connexes, indem man aus den Gleichungen

$$\varrho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f = 0$$

die $x$ und die $u$ eliminirt.

Der gegebene und der conjugirte Connex sind eindeutig auf einander bezogen. Aber Ordnung und Classe des conjugirten Connexes übertreffen, so lange der gegebene allgemeine Coefficienten besitzt, bei weitem die des letzteren. Soll also der conjugirte Connex des conjugirten wieder der ursprüngliche sein, so muss der conjugirte gewisse Eigenschaften besitzen, welche die Ordnung und Classe des ihm conjugirten reduciren. Man findet diese in dem Auftreten der *nothwendigen Singularitäten*.

Unter den nothwendigen Singularitäten verstehe ich eine Classe von Singularitäten, welche sich bei jedem Connexe selbst oder doch bei seinem conjugirten finden. Bezeichnet man als *allgemein* einen Connex auch dann noch, wenn er zwar nicht ganz willkürliche Coefficienten besitzt, aber die Willkürlichkeit seiner Coefficienten nur durch das Auftreten dieser Art von Singularitäten beschränkt ist, so tritt bei dem conjugirten dasselbe ein. Die nur mit solchen Singularitäten behafteten Connexe bilden daher ein in sich geschlossenes System, welchem auch ihre conjugirten angehören. Dieser Begriff ist zunächst an den algebraischen Curven der Ebene gebildet; wo denn jeder Curve in Punktcoordinaten sie selbst in Liniencoordinaten in ähnlicher Weise gegenübersteht, wie oben der conjugirte Connex dem ursprünglichen. Die nothwendigen Singularitäten sind hier diejenigen, welche in den Plücker'schen Formeln vorkommen — Doppelpunkte und Rückkehrpunkte einerseits, Doppeltangenten und Wendetangenten andrerseits. Geht man von einer Curve aus, welche bei übrigens willkürlichen Coefficienten Doppel- und Rückkehrpunkte von willkürlicher Lage besitzt, so wird zwar die *Zahl* der Doppel- und Wendetangenten dadurch modificirt werden können, dieselben werden aber sich nicht etwa zu höhern Singularitäten zusammenziehen. Die Curve als Ordnungscurve betrachtet kann demnach nothwendige Singularitäten aller Arten enthalten, ohne dass dieselbe Curve, als Classencurve betrachtet, andre als ebenfalls nothwendige Singularitäten enthält. In gleicher Weise kann man den Begriff der nothwendigen Singularitäten bei allen algebraischen Gebilden charakterisiren.

Wie bei den algebraischen Curven in der Ebene es die Doppelpunkte und Doppeltangenten (incl. Rückkehrpunkte und Wendetangenten) sind, welche die nothwendigen Singularitäten ausmachen, bei den Flächen Doppelcurven und Doppel- bez. dreifache Punkte, so treten hier doppelte, dreifache, vierfache Gebilde auf, welche die nothwendigen Singularitäten bilden. Und zwar erheben sich die Doppelgebilde bis zur zweifachen Mannigfaltigkeit, also bis zur Coincidenz, die dreifachen bis zum Curvenpaar, während vierfache Elemente als nothwendige Singularitäten nur discret auftreten.

## § 5.

## Die Hauptcoincidenz und die algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Als *identischen Connex* bezeichne ich den Connex (1, 1), welcher durch die Gleichung

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

gegeben ist. In diesem Connex gehört zu jedem Punkte die Gesammtheit der durch ihn gehenden Geraden, zu jeder Geraden die Gesammtheit der auf ihr liegenden Punkte, Element des Connexes ist überhaupt jede Combination von Punkt und Gerader in vereinigter Lage.

Durch die Gesammtheit der Elemente, welche einem beliebig gegebenen Connexe $f = 0$ und dem identischen Connexe gemeinsam sind, ist eine für das Studium des Connexes $f = 0$ besonders wichtige covariante Coincidenz gegeben; ich nenne sie die *Hauptcoincidenz des Connexes.* In dieser Coincidenz entsprechen jedem Punkte $n$ durch ihn gehende Strahlen, die von ihm an die zugehörige $K_n$ gelegten Tangenten; und jeder Geraden entsprechen $m$ Punkte, ihre Schnittpunkte mit der zugehörigen $C_m$.

*Die Untersuchung der Hauptcoincidenz ist identisch mit der Untersuchung der allgemeinsten algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung.* Betrachten wir in jedem Punkte der Ebene die $n$ unendlich kleinen Elemente, welche von ihm in der Richtung der zugehörigen $n$ Strahlen ausgehen, so setzt sich aus diesen Elementen ein Curvensystem zusammen, welches die Eigenschaft hat, dass durch jeden Punkt der Ebene $n$ Zweige des Systems gehen, und dass jede Gerade von $m$ Zweigen des Systems berührt wird. Ich nenne diese Curven, die zu $f = 0$ gehörigen *Connexcurven.* Sie sind das Integral einer algebraischen Differentialgleichung, welche durch den Connex gegeben ist und welche allgemeine Coefficienten besitzt, sobald dem Connexe solche beigelegt werden. Man hat also eine geometrische Darstellung dieses Integrals unmittelbar vor sich, und zwar in einer Weise, dass der dualistische Charakter der Integrale sofort hervortritt. Denn die Differentialgleichung selbst kann unmittelbar in doppelter Weise gebildet werden, einmal, indem man die $x$, das andre Mal, indem man die $u$ als Veränderliche einführt. Das erstere geschieht, indem man die $u$ durch die Grössen

$$x_2 dx_3 - x_3 dx_2, \quad x_3 dx_1 - x_1 dx_3, \quad x_1 dx_2 - x_2 dx_1$$

ersetzt, das zweite, indem man an Stelle der $x$ die Grössen

$$u_2 du_3 - u_3 du_2, \quad u_3 du_1 - u_1 du_3, \quad u_1 du_2 - u_2 du_1$$

in die Gleichung des Connexes einführt.

*Jede Differentialgleichung erster Ordnung mit algebraischen Coefficienten kann auf diese Weise erhalten werden.* Man kann den Zusammenhang einer gegebenen algebraischen Differentialgleichung mit der Hauptcoincidenz eines Connexes folgendermassen darlegen.

Zu einer gegebenen Hauptcoincidenz gehören noch unendlich viele Connexe. Sie sind, wenn $f = 0$ einer derselben ist, durch die Gleichung $f + M \cdot u_x = 0$ gegeben, wo $M$ eine beliebig zu wählende ganze Function der $x$, $u$ von den entsprechenden Dimensionen ist.

*Es sei nun eine algebraische Gleichung zwischen* $\xi$, $\eta$, $\frac{d\eta}{d\xi} = p$ *ge-*

*gegeben*, $\varphi(\xi, \eta, p) = 0$. *Man bringe die Gleichung* $\varphi = 0$ *in die Form*

$$f(\xi, \eta; -p, \xi p - \eta) = 0,$$

*was auf unendlich viele Weisen geschehen kann. Dann ist immer*

$$f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}; \frac{u_1}{u_2}, \frac{u_3}{u_2}\right) = 0$$

*die Gleichung eines Connexes, dessen Connexcurven durch die Gleichung* $\varphi = 0$ *gegeben werden.*

So lange über die Coefficienten des Connexes besondre Festsetzungen nicht gemacht werden, hat die Differentialgleichung kein singuläres Integral. Es ist aber leicht diejenigen Curven aufzustellen, von welchen eine der Ort der Rückkehrpunkte der Integralcurven ist, während die andre von den Wendetangenten derselben umhüllt wird. In das singuläre Integral der einen oder andern Form der Differentialgleichung verwandeln sich diese Curven, sobald die Richtung der Rückkehrtangente überall mit der Tangente der Curve der Rückkehrpunkte zusammenfällt, bez. der von den Wendetangenten umhüllte Ort mit dem Orte der Wendepunkte selbst identisch wird.

## § 6.

### Satz über algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die hier entwickelten Vorstellungen führen auf eine interessante Anwendung der angedeuteten Theorie, indem sie eine *Classification der algebraischen Differentialgleichungen* erster Ordnung liefern, welche der Riemann'schen Classification der Abel'schen Integrale durchaus analog ist.

Diese Untersuchungen knüpfen sich an die Erweiterung, welche ich dem Riemann'schen Satze über die Erhaltung der Zahl $p$ bei eindeutigen Transformationen, oder, geometrisch ausgedrückt, über die Erhaltung des Curvengeschlechtes, in den Comptes Rendus vom Jahre 1868 in Bezug auf algebraische Flächen gegeben habe, und welche Hr. Nöther im zweiten Bande dieser Annalen auf algebraische Gebilde von beliebig vielen Dimensionen ausgedehnt hat.

Wir bezeichnen durch $(x, u)$ ein Element des Connexes $f = 0$, durch $d'x$ eine Fortschreitung der $x$ innerhalb des Connexes, bei welcher die $u$ ungeändert bleiben, ebenso durch $d''u$ eine Fortschreitung der $u$ innerhalb des Connexes, bei welchen die $x$ ungeändert bleiben, endlich durch $dx$, $du$ irgend eine andre innerhalb des Connexes zulässige Fortschreitung. Es seien ferner $\alpha$, $\beta$ beliebige Grössen, $\Theta$ eine ganze Function, welche für die $x$ und $u$ bez. zu den Ordnungen $m - 3$ und $n - 3$ aufsteigt. Dann ist

$$dJ = \frac{\Theta\cdot(x\,\alpha\,d'x)\,(u\,du\,d''u)}{\Sigma\,\alpha_i\,f'\,x_i} = -\frac{\Theta\cdot(x\,dx\,d'x)\,(u\,\beta\,d''u)}{\Sigma\,\beta_i\,f'\,u_i}$$

das Element eines dreifachen Integrals. Bestimmt man die Constanten in $\Theta$ so, dass dieses Integral niemals unstetig wird, so giebt die Zahl der übrigbleibenden Constanten von $\Theta$ das *Geschlecht des Connexes* an, d. h. eine Zahl, welche unverändert bleibt, wie man auch den Connex eindeutig transformirt. — In ähnlicher Weise kann man von dem Geschlecht einer Coincidenz und eines Curvenpaars sprechen. Das letztere ist identisch mit dem Geschlecht, welches nach der Theorie der Abel'schen Functionen jeder der beiden Curven zukommt. Zur Definition des *Geschlechts einer Coincidenz* bezeichne ich durch $f = 0$, $\varphi = 0$ die Gleichung der Connexe, deren ganzer oder theilweiser Durchschnitt die Coincidenz ist, durch $m$, $n$ und $m'$, $n'$ Ordnung und Classe derselben. Es seien sodann $dx$, $du$ und $d'x$, $d'u$ zwei verschiedene Fortschreitungsrichtungen innerhalb der Coincidenz, es mögen die $a$, $\alpha$, $b$, $\beta$ beliebige Grössen bedeuten, und $\Theta$ eine ganze Function, welche die $x$ zur Ordnung $m + m' - 3$, die $u$ zur Ordnung $n + n' - 3$ enthält. Dann ist

$$\begin{aligned} dJ &= \frac{\Theta\cdot(dx\,d'x\,x)\,(u\,b\,\beta)}{\Sigma b_i f' u_i.\ \Sigma\beta_i\varphi' u_i - \Sigma b_i\varphi' u_i.\ \Sigma\beta_i f' u_i} \\ &= \frac{\Theta\cdot(du\,d'u\,u)\,(x\,a\,\alpha)}{\Sigma a_i f' x_i.\ \Sigma\alpha_i\varphi' x_i - \Sigma\alpha_i f' x_i.\ \Sigma a_i\varphi' x_i} \end{aligned}$$

Element eines Doppelintegrals. Bestimmt man nun die Constanten in $\Theta$, nachdem man ihre Anzahl durch die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ möglichst reducirt hat, so dass das Doppelintegral niemals unendlich wird, so giebt die Zahl der übrigbleibenden willkürlichen Constanten das Geschlecht der Coincidenz an; eine Zahl, welche sich bei eindeutigen Transformationen der Coincidenz nicht ändert.

Wenden wir dies insbesondre auf die Hauptcoincidenz eines Connexes an. Nicht jede eindeutige Transformation führt die Hauptcoincidenz eines Connexes wieder in eine solche über. Aber unter allen eindeutigen Transformationen, deren eine Hauptcoincidenz fähig ist, giebt es insbesondere eine Gruppe von solchen, welche sie wieder in eine Hauptcoincidenz überführen; und auch für diese muss also die Erhaltung des Geschlechts stattfinden. Es zeigt sich nun, dass diese Transformationen genau die eindeutigen Transformationen der zugehörigen Differentialgleichung erster Ordnung sind. Ist diese, in der gewöhnlichen Bezeichnung, durch

$$(1.)\ \ldots f\left(x,\,y,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

dargestellt, wo $f$ eine ganze Function ist, so besteht diese eindeutige algebraische Transformation allgemeinster Art darin, dass man

$$(2.) \ldots \quad \begin{aligned} \xi &= \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \\ \eta &= \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \end{aligned}$$

setzt. Dabei sollen $\varphi$, $\psi$ übrigens beliebige rationale Functionen sein; vorausgesetzt wird, dass man aus (1.), (2.), und der Gleichung, die sich ergiebt, indem man $\frac{d\eta}{d\xi}$ auch durch $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$ ausdrückt, im Stande sei, auch $x$, $y$, $\frac{dy}{dx}$ durch $\xi$, $\eta$, $\frac{d\eta}{d\xi}$ eindeutig auszudrücken. Die Endgleichung in $\xi$, $\eta$, $\frac{d\eta}{d\xi}$ ist dann eine transformirte Differentialgleichung, für welche jene Zahl denselben Werth hat, wie für die ursprüngliche. Man kann daher diese Zahl auch füglich das *Geschlecht der Differentialgleichung* nennen, es ergiebt sich so eine Classification der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die Differentialgleichungen von gleichem Geschlechte zu einer Gruppe vereinigt, unter dieser aber als identisch alle diejenigen betrachtet, welche durch eindeutige Transformation aus einander hervorgehen. Ich bemerke insbesondre, dass das Geschlecht immer gleich Null wird, sobald die Differentialgleichung sich dadurch integriren lässt, dass $y$ gleich einem nach $x$ genommenen Abel'schen Integrale wird; wenn also die Differentialgleichung aus Gleichungen der Form

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\zeta, \xi), \quad f(\zeta, \xi) = 0$$

durch Elimination von $\zeta$ entstanden ist, wobei $\varphi$, $f$ rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten.

## § 7.

### Zusammenhang mit der Liniengeometrie.

Ich will zum Schluss dieser Note noch auf eine Beziehung hinweisen, welche zwischen den Connexen und den Complexen Plücker's eintritt und welche zeigt, dass diese Gebilde wesentlich nur als verschiedene Interpretationen desselben algebraischen Begriffes aufzufassen sind.

Denken wir uns zunächst das System der Geraden $u$, welche in der Ebene eines gegebenen Connexes liegen, durch die Punkte $y$ einer zweiten Ebene collinear abgebildet. Jedem Elemente $(x, u)$ der ersten Ebene entspricht dann eine Gerade, welche den Punkt $x$ mit dem zu $u$ gehörigen $y$ verbindet. Den sämmtlichen Elementen $(x, u)$ sind die Geraden des Raums auf diese Art eindeutig zugeordnet.

Wird zwischen den Elementen der Ebene eine Gleichung (die des Connexes) festgesetzt, so führt dies auch eine Beziehung mit sich, welcher die entsprechenden Geraden des Raums genügen müssen. Dem Connexe entspricht also ein Complex; ebenso, wenn zwei Gleichungen gegeben sind, der Coincidenz eine Congruenz, endlich bei drei gegebenen Gleichungen einem Curvenpaar eine Linienfläche.

Man kann in ähnlicher Weise analytisch die Gleichung des Connexes sofort in die Gleichung eines Complexes überführen. Es seien $\xi$, $\eta$ Coordinaten von Raumpunkten,

$$p_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i$$

die Coordinaten einer Geraden. Man setze in der Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) = 0$$

des Connexes etwa

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= p_{14}, & \sigma u_1 &= p_{13}, \\ \varrho x_2 &= p_{24}, & \sigma u_2 &= p_{23}, \\ \varrho x_3 &= p_{34}, & \sigma u_3 &= p_{43}. \end{aligned}$$

Die Gleichung des Connexes geht dann in die Form über

$$(1.) \quad \ldots \varphi(p_{13}, p_{23}, p_{14}, p_{24}, p_{34}) = 0.$$

Die Grösse $p_{12}$ kommt nicht vor, so dass die Identität nicht zur Anwendung kommt. Der Complex (1.) ist vom Grade $m+n$, enthält aber dem Complexe $(m+n)$ten Grades mit allgemeinen Coefficienten gegenüber charakteristische Besonderheiten. Denn da seine Gleichung für $p_{14}, p_{24}, p_{34}$ homogen vom $m$ten, für $p_{13}, p_{23}, p_{43}$ homogen vom $n$ten Grade ist, so enthält der Complex eine $m$fache und eine $n$fache singuläre Ebene; jede in diesen Ebenen liegende Gerade ist $m$fache, bez. $n$fache Gerade des Complexes, und diese Ebenen sind keine anderen als die Ebenen der $x$ und $y$ der oben gegebenen Construction.

Will man umgekehrt von einem gegebenen Complexe zu einem ihm eindeutig entsprechenden Connexe in der obigen Weise übergehen, so geschieht dies, indem man mit Hülfe der Identität $p_{12}$ eliminirt. Ist der Complex als Complex $r$ten Grades mit willkürlichen Coefficienten gegeben, so muss man hierzu seine Gleichung mit $p_{34}^r$ multipliciren, d. h. man muss dem Complexe eine Gerade (die Durchschnittsgerade der singulären Ebenen), oder was dasselbe ist, den durch sie dargestellten speciellen linearen Complex $r$fach hinzufügen.

Indem man das Studium dieser Gebilde also einmal von Seite der Connexe, einmal von Seite der Complexe entnimmt, liegt der Unterschied wesentlich in dem, was man das eine und das andre Mal allgemein nennt. Bei der einen Behandlungsweise ist ein Complex $r$ten Grades allgemein zu nennen, wenn seine Gleichung mit allen 6 $p$ angeschrieben, allgemeine Coefficienten zeigt; das Auftreten einer $m$fachen und einer $n$fachen singulären Ebene $(m+n=r)$ ist eine Ausartung. Bei der andern Behandlungsart ist umgekehrt letzteres das Allgemeine, der im vorigen Sinne allgemein genannte Complex entsteht hier aus diesem durch $r$fache Absonderung eines speciellen linearen Complexes. Für die Connexe ist der Unterschied der beiden Behandlungsweisen ein ganz ähnlicher, der, nur in entgegengesetztem Sinne, die beiden Fälle charakterisirt.

Ein solcher Unterschied der Behandlungsweise, motivirt durch verschiedene Definition dessen, was man *allgemein* nennt, tritt in der Auffassung von Theorien nicht nur bei geometrischen Gebilden sehr häufig auf, und wird nicht immer hinlänglich beachtet. So sind die allgemeinen Eigenschaften der Differentialgleichungen verschiedene, je nachdem man die *Differentialgleichungen* oder die *Integralgleichungen* sich durch allgemeine Functionen gegeben denkt. Ein anderer bekannter Fall dieser Art, der dem oben behandelten nahe steht, wird durch die Normalform der algebraischen Gleichungen gebildet, die in der Theorie der Abel'schen Functionen auftreten, wenn man diese einmal wie Riemann, das andre Mal aber in solcher Weise annimmt, wie Hr. Gordan und ich sie in unserer Theorie der Abel'schen Functionen zu Grunde gelegt haben.

# Zur Theorie der Riemann'schen Fläche *).

Von A. Clebsch †.

Im vierten Bande der Annalen hat Hr. Lüroth einen Satz gegeben, welcher für die Theorie der algebraischen Functionen von grosser Wichtigkeit ist. Er zeigt, dass für die einer Gleichung $f(s, z) = 0$ entsprechende Riemann'sche Fläche eine typische Darstellung existirt, in welcher die Verzweigungspunkte eine einfache und übersichtliche Lage besitzen. Da in dem angeführten Aufsatz die Sache nur kurz angedeutet, die Beweise grossentheils nicht gegeben sind, mag es nicht überflüssig erscheinen, wenn ich hier den Gegenstand nochmals darlege, wie ich ihn in meinen Vorlesungen behandle, um zugleich einige Erweiterungen und Bemerkungen daran zu knüpfen. Es wird sich dabei insbesondre der volle Umfang von Möglichkeiten zeigen, welche die Lüroth'sche Umformung der Riemann'schen Fläche noch einschliesst, auch wird sich zeigen, wie eine Anzahl von Betrachtungen, welche für die Abel'schen Functionen nicht ohne Schwierigkeit sind, auf das einfachere Schema der hyperelliptischen Functionen zurückgeführt werden können.

## § 1.

### Blätter und Schleifen.

Denken wir uns eine Gleichung $f(s, z) = 0$ gegeben, welche vom $n$ten Grade in $s$ sein mag. Der Darstellung von $s$ als Function von $z$ entspricht eine über die $z$-Ebene ausgebreitete $n$-blättrige Riemann'sche Fläche. Um sie zu construiren, wählt man in der $z$-Ebene einen beliebigen Punkt $z$, der nur kein Verzweigungspunkt sein darf, und ordnet die ihm entsprechenden Werthe von $s$ (etwa $s_1, s_2 \ldots s_n$) in beliebiger Folge; sie bezeichnen die Blätter der Riemann'schen Fläche. Sodann markiren wir in der $z$-Ebene die sich nicht aufhebenden Verzweigungspunkte, von denen vorausgesetzt werden soll, dass in jedem nur *zwei* Werthe von $s$ gleich werden und dass keiner im Unendlichen liege; wir ordnen diese Verzweigungspunkte in beliebiger Weise an und ziehen eine sich nicht durchkreuzende Curve $C$, welche, vom ersten beginnend, die Verzweigungspunkte der festgesetzten Reihenfolge nach durchläuft und bei dem letzten endigt.

*) Unmittelbarer Abdruck eines nachgelassenen, für diese Annalen bestimmten Manuscriptes.

Setzen wir nun die Function $s$, von einem Werthe $s_i$ bei $z_0$ ausgehend, (im $i^{ten}$ Blatte) continuirlich fort, jedoch ohne dabei je die Curve $C$ zu überschreiten, so erhalten wir vollkommen alle Werthe, welche $s$ im $i^{ten}$ Blatte annimmt, und zwar eindeutig, und — abgesehen von den Punkten der Curve $C$ — stetig.

Führen wir eben dies für alle Blätter, d. h. der Reihe nach mit allen $s_i$ beginnend, aus, so erhalten wir die Ausbreitung der ganzen Function $s$. Sie verläuft in jedem Blatte eindeutig und stetig; nur längs der Curve $C$ gelangt man aus einem Blatte ins andere.

Von dem Punkte $z_0$ ziehen wir nun Curven $k$, welche sich selbst und einander nicht kreuzen, nach den Verzweigungspunkten auf C, und zwar so, dass die Folge der Tangenten, welche diese Curven in $z_0$ besitzen, der Folge der Verzweigungspunkte entspricht, nach welchen sie gehen. Wir können dies auch so ausdrücken, dass wir die Curve $C$ durch eine zweite Curve $C'$ zu einer geschlossenen, sich nicht schneidenden Curve ergänzen, in deren Innerem $z_0$ liegt, und die Curven $k$ sämmtlich im Innern des von $C$, $C'$ umschlossenen Flächenstücks ziehen. Uebrigens kann man, da die Curven $C$, $C'$ nur ohne Ueberschreitung von Verzweigungspunkten und ohne gegenseitige Durchkreuzung verschiebbar sind, insbesondere diese Curven auch durch das System der Curven $k$ ersetzt denken. Von diesen ist dann nur jede doppelt zu rechnen; die erste und die letzte, jede einfach gerechnet, ersetzt die Curve $C'$, alles Uebrige zusammen die Curve $C$.

Unter einer Schleife soll nun ein Weg verstanden werden, welcher vom Punkte $z_0$ beginnend auf einer der Curven $k$ bis zu dem entsprechenden Verzweigungspunkte verläuft, in unendlich kleinem Kreise um diesen herumgeht und auf der Curve $k$ selbst zu $z_0$ wieder zurückkehrt. Diese Schleife kann in $n$ verschiedenen Weisen durchlaufen werden, indem man mit jedem der $n$ Anfangswerthe von $s$ beginnen kann. In $n-2$ Fällen wird man nach dem Durchlaufen der Schleife zu dem Ausgangswerthe von $s$ zurückkehren. Dagegen wird ein Anfangswerth $s_p$ existiren, der nach Durchlaufen der Schleife zu einem andern Werthe $s_q$ führt, während umgekehrt der Ausgangswerth $s_q$ zu $s_p$ als Endwerth zurückführt. Wir sagen dann, der betreffende Verzweigungspunkt verbinde das $p^{te}$ und das $q^{te}$ Blatt, und bezeichnen ihn als einen Verzweigungspunkt $(p, q)$.

Die Nummern $p$ und $q$ der Blätter, welche bei der getroffenen Anordnung durch einen gewissen Verzweigungspunkt verbunden werden, sind nicht an und für sich durch diesen Verzweigungspunkt bestimmt, sondern sie hängen von der Reihenfolge ab, in welcher man durch die Curve $C$ die Verzweigungspunkte verbunden hat. Die Aenderung dieser Reihenfolge bedingt eine andere Lage der Curve $C$ und führt im Allgemeinen eine Aenderung in den Nummern der Blätter herbei, welche durch die einzelnen Verzweigungspunkte verbunden werden. Es entsteht die Frage, ob man durch Aenderung der Reihenfolge der Verzweigungspunkte eine einfache Gesetzmässigkeit in diesen Verbindungen, eine typische Anordnung der Riemann'schen Fläche zu erreichen im Stande sei.

## § 2.

## Anordnung der Verzweigungspunkte.

Wir wollen die Verzweigungspunkte der Reihe nach durch

$$w_1, w_2 \ldots w_r$$

bezeichnen. Es soll jetzt die Reihenfolge geändert werden. Dies kann immer dadurch geschehen, dass man hinreichend oft zwei auf einander folgende Punkte vertauscht. Es ist also nur die Wirkung zu untersuchen, welche die Vertauschung zweier auf einander folgender Punkte in Bezug auf die Verbindung der Blätter hervorruft.

Indessen kann man diese Vertauschung von $w_i$ und $w_{i+1}$ noch in doppelter Weise vornehmen. Erstlich kann man von $w_{i-1}$ zu $w_{i+1}$ auf einem Wege gehen, welcher innerhalb des von $C$, $C'$ umschlossenen Raumes liegt, dann von $w_{i+1}$ zu $w_i$ (ob im äussern oder im innern Raume ist hier gleichgültig), und von $w_i$ zu $w_{i+2}$ im äussern Raume gehen. Oder man kann von $w_{i-1}$ zu $w_{i+1}$ durch den äussern Raum gehen, dagegen von $w_i$ zu $w_{i+2}$ durch den innern. Offenbar ist der Unterschied beider Verfahrungsarten derselbe, als ob man die Reihenfolge aller Verzweigungspunkte umgekehrt hätte. Ich werde mich nur der ersten Verfahrungsweise bedienen, welche, wie man sehen wird, ausreicht.

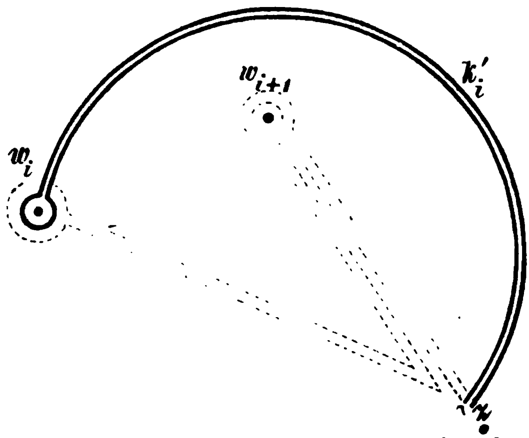
Der neue Weg

$$w_1, w_2 \ldots w_{i-1}, w_{i+1}, w_i, w_{i+2} \ldots w_r$$

mag so gezogen sein, dass $z_0$ noch innerhalb des von der neuen Curve $C$ und von $C'$ umschlossenen Raumes liegt. Es ist nun ersichtlich, dass die Punkte $w_1, w_2 \ldots w_{i-1}, w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots w_r$ bei der neuen Anordnung dieselben Blätter verbinden wie früher; nur bei $w_i$ hat sich die Sache geändert. Betrachten wir nämlich das alte System der Curven $k$, so sehen wir, dass alle übrigen Curven dieses Systems, abgesehen von $k_i$, auch noch als Curven $k$ für die neue Curve $C$ benutzt werden können. Nur die alte Curve $k_i$ verläuft jetzt weder in einer Weise, wie die Definition der entsprechenden Curven bei der neuen Anordnung es verlangt, noch lässt sie sich durch unwesentliche Deformationen in eine solche Lage bringen. Denn es war wesentlich, dass nach der ursprünglichen Anlage die Curve $k_i$, wenn wir uns in einem kleinen Kreise, den Nummern $1, 2 \ldots r$ der Curven $k$ folgend, um $z_0$

bewegen, *vor* $k_{i+1}$ kam, während bei der neuen Anordnung an Stelle von $k_i$ eine Curve $k_i'$ gesetzt werden muss, welche *nach* $k_{i+1}$ kommt. Diese Curve muss, um im Innern der neuen Begrenzung zu verlaufen, den Punkt $w_i$ erreichen, indem sie zwischen $w_{i+1}$ und $w_{i+2}$ die alte Begrenzung überschreitet.

Es ist nun die Frage, welche der Wurzeln $s_1, s_2 \ldots s_n$ durch die neue Schleife $k_i'$ verbunden werden. Um dies einzusehen, muss man die Schleife $k_i'$ in ein Aggregat von Schleifen $k$ durch erlaubte, d. h. keinen Verzweigungspunkt überschreitende Schleifen überführen. Dies geschieht, indem man zunächst die Schleife $k_{i+1}$, dann die Schleife $k_i$ und endlich nochmals die Schleife $k_{i+1}$ durchläuft.




Verbindet nun $w_i$ in der ersten Anordnung zwei ganz andre Blätter wie $w_{i+1}$, so können bei diesem Umgange niemals die Schleifen $k_i$ und $k_{i+1}$ gleichzeitig zur Wirkung kommen. Fängt man in einem Blatte an, dessen Wurzel $k_{i+1}$ zugeordnet ist, so endigt man beim ersten Durchlaufen von $k_{i+1}$ auch mit einer solchen, das Durchlaufen von $k_i$ ändert demnach nichts, das zweite Durchlaufen von $k_{i+1}$ führt zur Ausgangswurzel zurück. Fängt man in einem Blatte an, dessen Wurzel $k_i$ zugeordnet ist, so ist die Schleife $k_{i+1}$ jedesmal wirkungslos, und der Erfolg des durchlaufenen Weges ist derselbe, als wenn man die Schleife $k_i$ allein durchlaufen hätte.

Die Vertauschung von $w_{i+1}$ mit $w_i$ ändert also nichts, wenn die durch diese Punkte verbundenen Blätter sämmtlich verschieden sind. Ebenso ist es, wenn beide Punkte dieselben Blätter, etwa $p$ und $q$, verbinden. Denn gehen wir von der Wurzel $s_p$ aus, so führt $k_{i+1}$ zu $s_q$, sodann $k_i$ zu $s_p$, endlich $k_{i+1}$ zu $s_q$. Der ganze Umgang, also die Schleife $k_i'$, führt also von $s_p$ zu $s_q$, wie $k_i$.

Wenn dagegen $w_{i+1}$ die Blätter $p$ und $q$, $w_i$ die Blätter $p$ und $m$ verbindet, wo $m$ von $q$ verschieden ist, so führt, indem man von $s_q$ ausgeht, die Schleife $k_{i+1}$ zu $s_p$, dann $k_i$ zu $s_m$, das letzte Durchlaufen von $k_{i+1}$ aber ändert nun nichts mehr. Daher verbindet $k_i'$ nunmehr die Wurzeln $s_q$ und $s_m$, also die Blätter $q$, $m$, während $k_i$ die Blätter $p$, $m$ verband.

Man kann diese 3 verschiedenen Fälle in der einen Regel zusammenfassen:

I. *Vertauscht man in der angegebenen Weise zwei auf einander folgende Verzweigungspunkte, so vertauschen diejenigen Blätter, welche der vorantretende Punkt verband, in Bezug auf den zurücktretenden ihre Rolle, während alles übrige ungeändert bleibt.*

In der That bleibt nach dieser Regel alles ungeändert, sobald die zu $w_i$ gehörigen Blätter beide mit den zu $w_{i+1}$ gehörigen übereinstimmen oder beide davon verschieden sind. Haben die beiden Punkte aber ein Blatt gemein, so dass $w_{i+1}$ die Blätter $p$, $q$, $w_i$ die Blätter $p$, $m$ verbindet, so verbindet $w_i$ später, indem $p$, $q$ ihre Rolle tauschen, die Blätter $q$, $m$, wie oben.

Stellt man einen Punkt $w_{i+1}$ nicht bloss, wie oben, um eine, sondern um mehrere Stellen voran, also etwa vor $w_{i-\alpha}$, so ist nur der obige Schritt wiederholt auszuführen, und man hat die Regel:

II. *Stellt man in der oben angegebenen Weise einen spätern Verzweigungspunkt an eine frühere Stelle, so vertauschen sich in Bezug auf alle übersprungenen Punkte die beiden Blätter, welche durch den vorgeschobenen Punkt verbunden waren.*

## § 3.

### Schematische Anordnung der Verzweigungspunkte. Gruppen.

Es muss nun gezeigt werden, wie man mit Hülfe dieses Satzes zu einer Anordnung der Verzweigungspunkte, bez. einer Curve $C$, gelangen kann, bei welcher die Verbindung der Blätter nach einem einfach auszudrückenden und übersichtlichen Gesetze erfolgt.

Diese übersichtliche Anordnung soll darin bestehen, dass Verzweigungspunkte, welche dieselben Blätter verbinden, auch immer zusammenstehen und eine *Gruppe* bilden, derart, dass dieselben Blätter durch weitere Verzweigungspunkte nicht mehr verbunden erscheinen. Eine solche Gruppe mag dann durch $G_{hk}$ bezeichnet werden, wenn alle ihre Verzweigungspunkte die Blätter $h$, $k$ verbinden. Ferner aber *sollen diese Gruppen sich in folgender Anordnung befinden:*

$$G_{12},\ G_{13}\ \ldots\ G_{1n},\ G_{23},\ G_{24}\ \ldots\ G_{2n},\ \ldots\ G_{n-1,n},$$

wobei nicht ausgeschlossen ist, dass einige dieser Gruppen fehlen, d. h. keine Verzweigungspunkte enthalten können.

Es ist zu zeigen, dass durch Anwendung des Satzes II. eine solche Anordnung sich erreichen lässt. Dabei genügt es zu zeigen, dass man Gruppen $G_{12}$, $G_{13}$ ... $G_{1n}$ vorziehen kann, so dass hinter diesen kein Verzweigungspunkt mit dem Index 1 mehr erscheint. Denn auf dieselbe Weise kann man diesen Rest dann behandeln, und erhält Gruppen $G_{23}$, $G_{23}$ ..., auf welche dann Verzweigungspunkte folgen, die auch den Index 2 nicht mehr enthalten u. s. w.

Das erstere aber sieht man folgendermassen ein. Ich stelle zunächst eine vorläufige Anordnung her, bei welcher die ersten Verzweigungspunkte, bis zu einem gewissen hin, immer das Blatt 1 mit einem andern verbinden, während die darauf folgenden immer Blätter verbinden sollen, welche von 1 verschieden sind. Um diese vorläufige Anordnung zu erreichen, bemerke ich, dass, wenn bei irgend einer Anordnung im Anfange Verzweigungspunkte, welche sich auf das erste Blatt beziehen, am Ende aber auf andere Blätter bezügliche, stehen, diese bereits der Anforderung genügen, und also nur die zwischen ihnen befindliche Reihe von Punkten noch umzuordnen ist. Kann man also ein Verfahren angeben, wodurch die Zahl dieser noch umzuordnenden Punkte vermindert wird, so muss eine endliche Reihe von Schritten zu der gesuchten vorläufigen Anordnung führen. Ein solches Verfahren besteht aber darin, dass man in der noch zu betrachtenden Reihe den letzten noch dem Blatte 1 zugeordneten Verzweigungspunkt vor alle andern Punkte der Reihe zieht. Dieser Punkt scheidet dann aus der Zahl der noch umzuordnenden Punkte aus, und die Zahl derselben ist also wenigstens um 1 vermindert.

So sehen wir, dass die vorläufige Anordnung erreichbar ist. Die in dem ersten Theil der Anordnung verbundenen Blätter seien der Reihe nach

$$1, h;\ 1, i;\ 1, k \ldots\ldots$$

Von den Zahlen $h, i, k \ldots$ sei $\mu$ die kleinste; und die Verbindung $1, \mu$ komme $\alpha$ mal vor. Man ziehe nun der obigen Regel nach diese $\alpha$ Punkte vor. Man hat dann in der neuen Anordnung erstlich eine Anzahl von Punkten, welche die Blätter $1, \mu$ verbinden. In der darauf folgenden Reihe, die aus den übrigen Punkten $1, h;\ 1, i \ldots$ hervorgegangen sind, kommen dann ausser 1 nur Zahlen vor, welche mindestens gleich $\mu$ sind. Behandeln wir diese Reihe ebenso, wie oben die ganze Reihe der Verzweigungspunkte — theilen wir sie also wieder in frühere Punkte, welche dem Blatt 1, und in spätere, welche andern Blättern zugehören, so ist die Reihe der jetzt mit 1 verbundenen Punkte jedenfalls wenigstens um $\alpha$ kleiner als vorhin. Ist nun $\nu$ ($> \mu$) die kleinste mit 1 hier verbundene Zahl, so ziehen wir wieder alle die Blätter $1, \nu$ verbindenden Verzweigungspunkte vor u. s. w. Man erhält auf diese Weise eine Anordnung der Verzweigungspunkte in Gruppen

$$G_{1\mu},\ G_{1\nu},\ G_{1\varrho} \ldots \qquad (\mu \overline{\overline{<}}\ \nu \overline{\overline{<}}\ \varrho \ldots),$$

auf welche dann Punkte folgen, die mit dem Blatte 1 nicht mehr verbunden sind. Dies aber war zu beweisen.

Die Herstellbarkeit der Anordnung

$$G_{12},\ G_{13} \ldots G_{1n},\ G_{23},\ G_{24} \ldots G_{2n},\ \ldots G_{n-1,n}$$

ist hiermit dargethan. Hr. Lüroth hat bewiesen, *dass die Zahl der in* *jeder Gruppe vereinigten Verzweigungspunkte eine gerade sein muss.* Man kann diesen Beweis folgendermassen führen. Nehmen wir an, der Satz wäre bewiesen für die ersten Gruppen der Anordnung bis zu der Gruppe $G_{ik}$ $(i < k)$. Es ist zu zeigen, dass er dann auch für diese gilt. Nun weiss man aber, dass, wenn man alle Schleifen sich cyclisch geordnet denkt, so dass auf die letzten die ersten wieder folgen, und wenn man nun mit irgend einer Wurzel $s_i$ beginnend, von irgend einer Stelle aus den ganzen Schleifencyclus durchläuft, man immer zu der Ausgangswurzel zurückkehrt. Beginnen wir nun mit $s_i$ und bei der ersten Schleife der Gruppe $G_{ik}$. Enthielte diese Gruppe eine ungerade Anzahl von Verzweigungspunkten, so würde das Durchlaufen der Gruppe zur Wurzel $s_k$ führen; diese aber findet sich als Index erst wieder bei Gruppen, welche grössere Indices als $i$ enthalten. Beim Fortgange der Operation würde man also durch die spätern Gruppen nie mehr zur Wurzel $s_i$ zurückgeführt werden können, das Ende der letzten Gruppe würde etwa auf eine Wurzel $s_m$ führen, wo $m > i$. Jetzt würde man zu den ersten Gruppen übergehen. Aber diese enthalten der Voraussetzung nach jede eine gerade Anzahl von Verzweigungspunkten; das Durchlaufen einer solchen Gruppe kann also nur immer zu der Wurzel zurückführen, mit welcher man begonnen hat. Also auch diese Gruppen können nicht zu $s_i$ zurückführen, mithin auch nicht der ganze Umgang. Demnach ist die Voraussetzung unmöglich, dass $G_{ik}$ aus einer ungeraden Anzahl von Verzweigungspunkten bestehe. Dass die erste Gruppe $G_{12}$ aus einer geraden Anzahl besteht, findet man durch dasselbe Verfahren, indem man das Gegentheil annimmt und zeigt, dass man, mit der Wurzel $s_1$ beginnend, nie wieder zu ihr zurückkehren könne. Demnach müssen überhaupt alle Gruppen aus einer geraden Anzahl von Verzweigungspunkten bestehen.

Hieraus folgt, dass wir die Gruppen $G_{ik}$ nach Belieben umordnen können, ohne dass ihre Indices zu verändern sind. Denn ziehen wir gleichzeitig eine gerade Anzahl neben einander stehender und gleichartiger Verzweigungspunkte vor eine beliebig grosse Anzahl voranstehender Punkte, so werden bei diesen nur die Blätter, welche durch jene vorgeschobenen Punkte verbunden werden, eine gerade Anzahl von Malen zu vertauschen sein, d. h. diese Blätter behalten genau ihre ursprüngliche Rolle bei, es wird überhaupt nichts geändert.

## § 4.

### Zusammenziehung von Gruppen. Zurückführung auf die geringste Zahl.

Die Vertauschung der Gruppen entspricht also gewissen Abänderungen der Curve $C$, welche die Art des Zusammenhanges der Blätter durchaus ungeändert lässt.

Dagegen giebt es, wie ebenfalls Hr. Lüroth gezeigt hat, eine einfache Art, *die Curve $C$ so abzuändern, dass an Stelle zweier Gruppen $G_{ik}$, $G_{im}$ die Gruppen $G_{ik}$, $G_{km}$ treten*, und zwar enthalten diese neuen Gruppen einzeln genau dieselben Verzweigungspunkte wie die vorigen. Das Verfahren ist folgendes. Die Gruppe $G_{ik}$ mag aus $2\alpha$ Punkten bestehen. Man theilt diese in $2\alpha - 1$ erste, und einen letzten. Zwischen die $2\alpha - 1$ und diesen einen schiebt man die Gruppe $G_{im}$, was ohne Aenderung des Blätterzusammenhanges geschieht; denn man kann immer die Gruppe $G_{im}$ unmittelbar hinter $G_{ik}$ stellen und sie dann vor den einen Punkt von $G_{ik}$ ziehen. Sodann aber zieht man zweitens diesen einen Punkt wieder vor die ganze Gruppe $G_{im}$. Die Gruppe $G_{ik}$ ist dann wieder vollständig; in der Gruppe $G_{im}$ aber sind die Blätter $i$, $k$ zu vertauschen, d. h. sie geht in eine Gruppe $G_{km}$ über, was zu beweisen war.

Wenden wir diesen Satz nun auf eine Anzahl von Gruppen an, deren Indices von einem Blatte $\alpha$ zu einem Blatte $\mu$ überführen:

$$G_{\alpha\beta},\ G_{\beta\gamma}\ \ldots\ G_{\varkappa\lambda},\ G_{\lambda\mu},$$

so sehen wir, dass wir die Curve $C$ immer so abändern können, dass zunächst die Gruppe $G_{\lambda\mu}$ in eine Gruppe $G_{\varkappa\mu}$ übergeht, dass dann in dieser $\varkappa$ wieder durch den nächst vorhergehenden Buchstaben ersetzt werden kann u. s. w.; und dass also endlich an Stelle von $G_{\lambda\mu}$ eine Gruppe $G_{\alpha\mu}$ tritt. Dies ist immer der Fall, sobald nur die Blätter $\alpha$, $\mu$ durch eine Reihe von Gruppen verbunden erscheinen.

Hieraus kann man nun leicht den folgenden Satz ableiten:

*An Stelle der Gruppen*

$$G_{12},\ G_{13}\ \ldots\ G_{1n},\ G_{23},\ G_{24}\ \ldots\ G_{2n},\ \ldots\ldots\ G_{n-1,n}$$

*kann man immer $n-1$ Gruppen setzen, welche zusammen alle Verzweigungspunkte umfassen und welche gerade ausreichen, um alle Blätter unter einander zu verbinden. Die Art aber, in welcher die Blätter unter einander verbunden werden, ist ganz willkürlich und kann durch Aenderung der Curve $C$ in jeder beliebigen Weise abgeändert werden.*

Um diesen Satz zu beweisen, genügen folgende Betrachtungen.

In irgend einer beliebigen Anordnung seien die Blätter

$$i_1,\ i_2,\ i_3\ \ldots\ i_n.$$

Durch die Gruppen $G$ ist jedenfalls eine Verbindung zwischen allen Blättern hergestellt, da sonst die Fläche zerfallen würde. Daher ist auch zunächst eine Verbindung zwischen den Blättern $i_1$ und $i_2$; und irgend eine Gruppe, welche den Index $i_2$ enthält, kann daher in $G_{i_1 i_2}$ übergeführt werden. Sodann besteht zweitens eine Verbindung dieser Blätter mit $i_3$; daher können wir irgend eine Gruppe, welche $i_3$ enthält, in eine Gruppe $G_{i_1 i_3}$ oder $G_{i_2 i_3}$ überführen, und zwar ist es ganz in unser Belieben gestellt, was von beiden eintreten soll. Indem wir so fortfahren, erzeugen wir ein System von Fundamentalgruppen. Sie verbinden die Blätter so, dass $i_2$ mit $i_1$, $i_3$ mit $i_1$ oder $i_2$, $i_4$ mit $i_1$, $i_2$ oder $i_3$ etc. zusammenhängt. Wir wollen diese $n-1$ Gruppen daher durch

$$\Gamma_1 = (i_1\, i_2),\ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} i_1 & \\ i_2 & i_3 \end{pmatrix},\ \Gamma_3 = \begin{pmatrix} i_1 & \\ i_2 & i_4 \\ i_3 & \end{pmatrix},\ \ldots\ \Gamma_{n-1} = \begin{pmatrix} i_1 & \\ i_2 & \\ \vdots & i_n \\ i_{n-1} & \end{pmatrix}$$

bezeichnen.

Ausser diesen sind nun noch andre Gruppen vorhanden. Eine solche sei etwa $G_{\alpha\beta}$. Dabei ist $\beta$ eine der Zahlen $i_1, i_2 \ldots i_n$, $\alpha$ eine andre. Kommen $\alpha, \beta$ in den Gruppen $\Gamma$ vereinigt vor, so vereinigt sich $G_{\alpha\beta}$ nur mit der betreffenden Gruppe $\Gamma$. Kommt aber in den $\Gamma$ $\beta$ nicht mit $\alpha$, sondern mit $\gamma$ vereinigt vor, so kann man dem Obigen zufolge die Curve $C$ immer so abändern, dass die Gruppe $G_{\alpha\beta}$ in eine Gruppe $G_{\gamma\beta}$ übergeht und dann sich mit einer der Gruppen $\Gamma$ vereinigt. Die so erweiterten Gruppen $\Gamma$ bleiben also allein übrig; sie umfassen alle Verzweigungspunkte, die Art und Weise aber, in welcher sie die Blätter verbinden, ist ganz willkürlich gewählt, wie der Satz es aussagt.

## § 5.

## Kreis der möglichen Abänderungen bei Herstellung der typischen Gruppen.

Nach dem Bisherigen können also die Verzweigungspunkte in $n-1$ Gruppen $\Gamma$ von solchen geordnet werden, welche nur immer dieselben zwei Blätter der Fläche verbinden; die Curve $C$ ist dann so gelegen, dass sie zuerst alle Punkte der ersten, dann alle der zweiten Gruppe trifft etc. Auch ergab sich schon eine Mannigfaltigkeit von Möglichkeiten, indem man die Curve $C$ so abändern konnte, dass dieselben Gruppen immer andre Blätter verbanden, und dass auf solche Weise alle möglichen Combinationen hergestellt wurden, welche nur die Eigenschaft hatten, *alle* Blätter unter einander in Verbindung zu setzen.

Hierbei aber waren noch die in jeder Gruppe befindlichen Punkte und ihre Anzahlen immer dieselben. Um den eigentlichen Inhalt dieser Untersuchungen aber zu ergründen, muss man auch noch fragen, in wie weit diese Elemente wesentlich und unveränderlich sind. Bei näherer Betrachtung zeigt sich beides als ganz unwesentlich und durchaus veränderlich. Man kann nämlich folgenden Satz beweisen:

*Theilt man die $r$ Verzweigungspunkte ganz beliebig in*

$$2r_1 + 2r_2 \ldots + 2r_{n-1} = r$$

*Gruppen, wo $r_1, r_2 \ldots$ beliebig gewählte, dieser Gleichung genügende* *positive Zahlen sind, und in jede Gruppe beliebig gewählte Punkte fallen, so kann man immer eine Curve C so wählen, dass diese $r_1$, $r_2 \ldots r_{n-1}$ Punkte Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_{n-1}$ bilden, welche eine beliebig festgesetzte Verbindung zwischen den n Blättern herstellen.*

Um diesen Satz, der den Sachverhalt in seiner allgemeinsten Weise darlegt, zu beweisen, muss man erstlich zeigen, dass man, ohne die Verbindung der Blätter zu ändern, die Anzahlen der in den Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_{n-1}$ bez. enthaltenen Punkte um gerade Zahlen beliebig ändern kann; zweitens, dass man, wenn die Anzahlen $2r_1, 2r_2 \ldots 2r_{n-1}$ der in den Gruppen enthaltenen Verzweigungspunkte festgehalten werden, diese selbst noch beliebig unter einander zu permutiren im Stande ist; endlich, dass bei gleichem Inhalt der Gruppen die Verbindung der Blätter noch beliebig abgeändert werden kann.

Ich werde zunächst zeigen, dass man, ohne den Inhalt der Gruppen zu ändern, die Verbindung der Blätter in beliebiger Weise modificiren kann:

Gehen wir von den Gruppen

$$\Gamma_1 = (i_1 i_2),\ \Gamma_2 = \left(\begin{smallmatrix} i_1 \\ i_2 \end{smallmatrix}\ i_3\right),\ \Gamma_3 = \left(\begin{smallmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{smallmatrix}\ i_4\right), \ldots\ldots$$

aus, welche einer gewissen Folge

$$i_1, i_2 \ldots i_n$$

entsprechen, in welcher die Blätter verbunden werden. Die unter einander stehenden Indices können nach den oben entwickelten Sätzen durch Abänderung der Curve $C$ beliebig für einander substituirt werden. Es genügt daher als Typus dieser Verbindung etwa die folgende zu studiren:

$$\Gamma_1 = (i_1 i_2),\ \Gamma_2 = (i_2 i_3),\ \Gamma_3 = (i_3 i_4), \ldots\ldots,$$

und es ist nur zu zeigen, dass in dieser durch Abänderung der Curve $C$ die Zahlen $i$ beliebig permutirt werden können, ohne dass man den Inhalt der Gruppen ändert. Hierzu aber genügt, dass die Vertauschbarkeit zweier neben einander stehender Zahlen $i$ nachgewiesen werde, da durch wiederholte Vertauschungen dieser Art jede Anordnung hervorgerufen werden kann. Seien also

$$h\ k\ l\ m$$

vier aufeinanderfolgende der Zahlen $i$; man hat die Gruppen

$$(hk),\ (kl),\ (lm);$$

und $k, l$ komme nur in diesen vor. Nach den Sätzen von S. 223 kann man statt $(hk)$, $(kl)$ setzen $(hl)$, $(kl)$; ebenso statt $(kl)$, $(lm)$ setzen $(kl)$, $(km)$. Dann werden diese Gruppen also

$$(hl),\ (lk),\ (km),$$

d. h. $k$ und $l$ sind vertauscht, was zu beweisen war.

Es soll nun die Verbindung der Blätter in einer bestimmten Weise festgehalten und gezeigt werden, dass die Anzahlen der in jeder Gruppe enthaltenen Punkte beliebig um gerade Zahlen geändert werden kann. Es genügt hiezu, wenn man zeigt, wie, indem man den Typus

$$\Gamma_1 = (12),\ \Gamma_2 = (23), \ldots$$

annimmt, zwei Punkte der einen Gruppe entnommen und der nächsten hinzugefügt werden können und umgekehrt. Man theilt also etwa $\Gamma_1$ in eine Gruppe $\Gamma_1'$ und in ein Paar, welches eine Gruppe $G_{12}$ bildet. Für diese kann man nach den Betrachtungen von S. 223 zunächst $G_{13}$ setzen, da Punkte folgen, welche die Blätter 2, 3 verbinden, sodann aber $G_{23}$, da Punkte vorhergehen, welche 1, 2 verbinden. Die neue Gruppe $G_{23}$ vereinigt sich also mit $\Gamma_2$ und erhöht die Zahl der Punkte dieser Gruppe. Umgekehrt kann man genau ebenso die Gruppe $\Gamma_2$ vermindern und $\Gamma_1$ vermehren. In beiden Fällen ist nur erforderlich, dass die verminderte Gruppe überhaupt noch bestehen bleibt, also mindestens noch 2 Punkte enthält.

Hierdurch ist also bewiesen, dass man wirklich die Zahlen der Verzweigungspunkte in den Gruppen abändern kann, nur so, dass sie immer gerade bleiben und dass keine von ihnen auf Null herabsinkt.

Halten wir endlich diese Zahlen fest und zeigen, dass die Verzweigungspunkte noch permutirt werden können. Dazu ist nur nachzuweisen, dass irgend ein Punkt $b$ aus einer Gruppe $\Gamma$ mit einem Punkte $c$ der folgenden vertauscht werden könne. Denn die Punkte einer Gruppe sind, da sie dieselben Blätter verbinden, beliebig vertauschbar; tritt also Obiges noch hinzu, so ist jede Anordnung der Punkte möglich. Es seien also etwa $a, b$ Punkte einer Gruppe $\Gamma$, $c, d$ Punkte der folgenden; $b$ und $c$ sollen vertauscht werden. Man führt wie im Vorigen das Paar $ab$ in diese folgende Gruppe ein, wodurch die Zahl ihrer Punkte um 2 erhöht wird, und führt sodann rückwärts das Paar $ac$ in die vorhergehende Gruppe ein. Die Anzahlen sind dann wieder die alten, aber $b, c$ sind vertauscht.

Hiermit ist das oben ausgesprochene Theorem vollständig bewiesen.

Fassen wir nun die Resultate der Untersuchung nochmals zusammen, so sehen wir, dass weder in der Anordnung der Verzweigungspunkte, noch in der Folge, in der die Blätter verbunden werden, etwas Specifisches liegt, noch endlich in der Zahl der Punkte, die bei gegebener Anordnung zu jeder einzelnen Verbindung gebraucht werden. Alle die Dinge kann man beliebig vorher bestimmen und dann doch noch immer eine Curve $C$ angeben, welche, wenn alles dieses gegeben ist, die typische Verbindung herstellt. Um sie zu finden geht man nach dem Vorigen von einer beliebigen Anordnung aus und stellt die geforderte allmälig her. Die Curve $C$ ist dann schliesslich nicht völlig der Lage nach bestimmt; aber zwei Curven $C$, welche denselben Bedingungen genügen, müssen dann immer so liegen, dass zwei entsprechende Curventheile sich zu *cyklischen Wegen* ergänzen, d. h. zu solchen geschlossenen Curven, deren einmalige Durchlaufung von einem beliebigen Werthsysteme $s, z$ immer zu demselben wieder zurückführt.

## § 6.

## Anwendung auf die linearen Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln eines Integrals erster Gattung.

Die im Vorigen entwickelten Verhältnisse dienen dazu, die Untertersuchungen aufs Aeusserste zu vereinfachen, welche Hr. Gordan und ich im vierten Abschnitte unserer „Theorie der Abel'schen Functionen" gegeben haben. Ich werde zeigen, wie mit Zugrundelegung der oben hergestellten typischen Anordnung jene Untersuchungen sich gestalten.

Seien also die Gruppen $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots \Gamma_{n-1}$ in irgend einer Weise gebildet. Als Fundamentalschleifen, d. h. solche, welche gerade ausreichen, um alle Blätter mit einander zu verbinden, können wir je eine, etwa die erste aus jeder Gruppe betrachten. Die cyklischen Wege, aus denen alle andern sich zusammensetzen, erhalten wir, wenn wir jede andre Schleife mit der betreffenden Fundamentalschleife so combiniren, dass ein Durchlaufen beider immer zum Ausgangssysteme $s, z$ zurückführt. Daher muss man alle Schleifen der ersten Gruppe mit der Fundamentalschleife der ersten Gruppe, alle der zweiten mit der Fundamentalschleife der zweiten verbinden etc.

Ein Integral erster Gattung giebt, wenn man es über einen cyklischen Weg integrirt, seinen entsprechenden Periodicitätsmodulus. Aus einer Gruppe $\Gamma$ von $2\varrho$ Punkten erhält man also $2\varrho - 1$ Periodicitätsmoduln eines Integrals, indem man die als Fundamentalschleife ausgezeichnete Schleife der Gruppe mit den $2\varrho - 1$ übrigen combinirt.

Sind, wie oben, die Zahlen der in den einzelnen Gruppen auftretenden Verzweigungspunkte $2r_1, 2r_2 \ldots$, und also

$$2r_1 + 2r_2 \ldots + 2r_{n-1} = r,$$

so erhält man auf diese Weise

$$2r_1 + 2r_2 \ldots + 2r_{n-1} - (n-1) = r - (n-1)$$

Periodicitätsmoduln. Von diesen lassen sich noch $n - 1$ durch die übrigen ausdrücken, und zwar wie folgt.

Man erhält im Allgemeinen diese Relationen, wenn man der Reihe nach mit $s_1, s_2 \ldots s_n$, beim Punkte $z_0$ beginnend, über alle Schleifen integrirt. Dies giebt $n$ Relationen der über die Schleifen genommenen

Integrale; Relationen, welche sich in ebenso viele für Periodicitätsmoduln überführen lassen, von welchen aber immer eine die Folge der übrigen ist.

Nun kommen bei der gegenwärtigen Anordnung nur $n-1$ Arten von Schleifen vor, deren jede zwei Blätter verbindet. Daher muss von den Indices $1, 2 \ldots n$ der Blätter nothwendig mindestens *einer* nur bei einer Gruppe $\Gamma$ vorkommen. Beginnen wir mit dem entsprechenden $s_i$ und integriren über alle Schleifen, so können nur die etwas von Null Verschiedenes geben, welche der betreffenden Gruppe zugehören; denn $s_i$ kommt weder bei einer frühern, noch bei einer spätern Gruppe vor, die Integration aber über alle Schleifen dieser einen Gruppe geführt, beginnt und endigt mit $s_i$. Daher muss die Summe der über diese Schleifen genommenen Integrale gleich Null sein.

Bei allen andern Umgängen tritt diese Gruppe entweder gar nicht auf, oder mit der Summe eben dieser Integrale; da diese Summe aber Null ist, so hat diese Gruppe auf alle andern Umgänge überhaupt keinen Einfluss.

Wir können sie also im Uebrigen auslassen und haben dann noch $n-2$ Gruppen, deren keine mehr sich auf das $i^{te}$ Blatt bezieht, die also zusammen $n-1$ Indices haben, unter denen $i$ nicht vorkommt. Unter den von $i$ verschiedenen Zahlen muss also wieder mindestens eine sein, die nur bei *einer* Gruppe vorkommt. An diese eine Gruppe lassen sich dann genau dieselben Betrachtungen wieder knüpfen.

Man gelangt, so fortfahrend, endlich zu folgendem Satze:

*Ein Integral erster Gattung, über alle Schleifen einer Gruppe geführt, giebt jederzeit Null.*

Dies ist die einfache Art, wie die Beziehungen zwischen den über die Schleifen geführten Integrale sich hier ausdrücken.

Bezeichnen wir die Werthe eines Integrals erster Gattung, über die Schleifen einer Gruppe geführt, durch $a_1, a_2 \ldots a_{2\varrho}$, und zwar so, dass jedes dieser Integrale mit demselben Werthe $s_i$ beginne. Dann ist die dieser Gruppe entsprechende Gleichung:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots + a_{2\varrho-1} - a_{2\varrho} = 0.$$

Die entsprechenden Periodicitätsmoduln erhält man, wenn man eines dieser Integrale, etwa $a_{2\varrho}$, von allen andern abzieht. Zwischen den Periodicitätsmoduln

$$\begin{gathered} b_1 = a_1 - a_{2\varrho}, \\ b_2 = a_2 - a_{2\varrho}, \\ \cdots \\ b_{2\varrho-1} = a_{2\varrho-1} - a_{2\varrho} \end{gathered}$$

erhält man also aus obiger Gleichung die Beziehung:

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 \cdots + b_{2\varrho-1} = 0.$$

Die Gleichung repräsentirt die $n-1$ gesuchten Beziehungen; vermöge derselben wird immer *ein* Periodicitätsmodul jeder Gruppe durch die übrigen linear und ganzzahlig ausgedrückt.

## § 7.

## Anwendung auf die bilinearen Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln zweier Integrale erster Gattung. Zurückführung auf das Schema der hyperelliptischen Functionen.

Es handelt sich nun ferner um die Ermittelung *der bilinearen Beziehung, welche zwischen den Periodicitätsmoduln zweier verschiedener Integrale erster Gattung besteht.* Seien $u$, $v$ diese Integrale, von $z_0$ aus mit einem der Werthe $s_i$ beginnend, bis zu einem unbestimmten Werthsysteme $s, z$ ausgedehnt. Zerschneiden wir die Blätter der Riemann'schen Fläche durch die Curven $k$, welche den beliebig gewählten Ausgangspunkt mit den Verzweigungspunkten verbinden, und betrachten wir die äussern und innern Ränder dieser Curve als Begrenzungen, so ist $\int u\,dv$ endlich, stetig und eindeutig in jedem einzelnen der Blätter, die Verzweigungspunkte (also Punkte der Begrenzung) ausgenommen. Integrirt man also $\int u\,dv$ in irgend einem der Blätter auf einem Wege, welcher neben der ganzen Begrenzung hinläuft, also über alle Schleifen, so erhält man Null. Die gesuchte Beziehung ergiebt sich, wenn man dasselbe für alle Blätter ausführt und die Summe aller so gebildeten Integrale gleich Null setzt:

$$(1) \;\ldots\; \Sigma \int u\,dv = 0,$$

wo die Summe sich auf die $n$ Blätter beziehen mag. Man kann andrerseits die linke Seite der Gleichung (1) aus den $n \cdot r$ Theilen zusammensetzen, welche den einzelnen Schleifen in den verschiedenen Blättern entsprechen; dabei ist dann jede Schleife fortzulassen, wo sie nicht wirklich von einem Werthe $s_i$ zu einem andern führt, und jede Schleife wird also nur zweimal, und zwar in entgegengesetztem Sinne, so durchlaufen, dass sie zu berücksichtigen ist.

Nun ist aber der Werth von $u$, nachdem man alle Schleifen einer Gruppe durchlaufen hat, nach dem Vorigen gleich Null. Beim Durchlaufen der Schleife einer spätern Gruppe hat also das Durchlaufen der frühern Gruppen auf den Werth keinen Einfluss. Man kann also die linke Seite von (1) so bilden, dass jede Gruppe unabhängig von der andern durchlaufen wird, d. h. man zerlegt sie in $n-1$ den Gruppen entsprechende Theile und behandelt jeden Theil so, als wären überhaupt nur die beiden entsprechend verbundenen Blätter vorhanden — mit andern Worten, als wären es *hyperelliptische* Functionen, mit denen man zu thun hat.

Die gesuchte Gleichung geht daher über in

$$P_1 + P_2 + \cdots P_{n-1} = 0,$$

wo die einzelnen Ausdrücke $P_i$ gebildet sind, als wären die zu der entsprechenden Gruppe gehörigen Punkte $w$ die Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals.

Insbesondre führt dies darauf, unter den möglichen Gruppenbildungen *eine* zu bevorzugen, bei welcher die erste Gruppe aus $r - 2(n-2)$ Verzweigungspunkten besteht, alle übrigen nur aus zweien derselben. In diesem Falle zeigt das Vorige, dass die Periodicitätsmoduln, welche den letztern Gruppen entsprechen, durch die einfache Bedingung $b_1 = 0$ gegeben sind, also verschwinden. Mithin haben wir es überhaupt nur noch mit den $r - 2(n-1) = 2p$ Periodicitätsmoduln zu thun, welche von der Verbindung der ersten beiden Blätter herrühren, und die ganze Untersuchung ist auf die längst bekannte Behandlung der hyperelliptischen Functionen zurückgeführt.

Ich bemerke noch, dass durch die vorliegende Betrachtung auch die volle Berechtigung des Beispiels nachgewiesen ist, von welchem Hr. Gordan und ich als Schema im vierten Abschnitte unserer Theorie der Abel'schen Functionen Gebrauch gemacht haben. Denn jenes Schema (es bezieht sich auf eine vierblättrige Fläche mit 12 Verzweigungspunkten, der Gleichung einer allgemeinen Curve vierter O. entsprechend) lässt sich auf den oben entwickelten Normaltypus für die Gruppen einer vierblättrigen Fläche zurückführen, mithin lässt sich auch umgekehrt immer jenes Schema aus diesem Typus erzeugen.

Göttingen, 8. September 1872.

# Ueber trigonometrische Reihen.

Von Giulio Ascoli in Mailand.

---

In einer Abhandlung über trigonometrische Reihen (Borchardt's Journal, Bd. 71) hat Herr Heine folgenden Satz bewiesen:

Eine im allgemeinen stetige, nicht nothwendig endliche Function $f(x)$ lässt sich höchstens auf eine Art in eine trigonometrische Reihe von der Form

$$(1.) \quad \sum_{0} (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

entwickeln, wenn die Reihe der Bedingung unterworfen ist, im allgemeinen in gleichem Grade zu convergiren.

Einige Zeit darauf zeigte Herr Cantor (dasselbe Journal Bd. 72 und 73), wie eine Function, die durch eine trigonometrische, für jeden Werth von $x$ allgemein zu reden convergente Reihe gegeben ist, sich nicht durch eine andere Reihe derselben Form darstellen lasse. Hieraus dürfte zu folgern sein, dass die in Heine's Satze gemachten Voraussetzungen, sowohl über die Stetigkeit der Function, als auch über die Art der Convergenz der Reihe, unnöthig sind.

Auch scheint mir, dass, wenn eine nach dem Intervall $2\pi$ periodisch sich wiederholende Function, die im allgemeinen continuirlich und so beschaffen ist, dass die $2\tau$ Hauptintegrale

$$\int_{x_{\sigma-1}-\eta}^{x_{\sigma-1}-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_{\sigma-1}+\eta} f(x)\,dx, \quad \int_{x_{\sigma-1}-\eta}^{x_{\sigma-1}-\varepsilon} f(x)(x_{\sigma-1}-x)\,dx + \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_{\sigma-1}+\eta} f(x)(x_{\sigma-1}-x)\,dx$$

$$(\sigma = 1, 2, \ldots, \tau),$$

wo die Punkte $x_0\,(=0)$, $x_1, \ldots x_{\tau-1}$ nicht nothwendigerweise alle singuläre Punkte der gegebenen Function sind, bei unendlichem Abnehmen der Grösse $\varepsilon$ convergiren, allgemein zu reden, d. h. ohne eine Ausnahme für einzelne Punkte auszuschliessen, durch eine trigonometrische Reihe der Form (1) darstellbar ist, die Entwickelung nicht nur einzig, sondern gerade die Fourier'sche sein muss.

Diesen Satz versuche ich in der vorliegenden Abhandlung nach der Methode Riemann's (siehe dessen Arbeit: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe) zu beweisen.

Es sei also die Function $f(x)$ durch eine Reihe von der Form (1) darstellbar, und sie genüge den soeben genannten Bedingungen. Da der Voraussetzung nach $f(x)$ im allgemeinen continuirlich ist, so wird man das Intervall zwischen Null und $2\pi$ in eine endliche Anzahl Intervalle theilen können, die zwischen $x_0 (= 0)\, x_1$, $x_1 x_2, \ldots,$ $x_{\sigma-1} x_\sigma, \ldots, x_{\tau-1} x_\tau \, (= 2\pi)$ liegen und die so beschaffen sind, dass für jeden Zwischenwerth derselben die Function stetig ist. Betrachten wir insbesondere die Entfernung zwischen $x_{\sigma-1}$ und $x_\sigma$ und untersuchen wir, welche Werthe die gegebene Function durchläuft, wenn man sich einem Grenzwerthe ($x_{\sigma-1}$ z. B.) ins Unendliche nähert. Lässt sich eine Grösse angeben, wie gross sie auch sei, deren Werth nie vom absolutem Werthe der Function übertroffen wird bei unendlichem Annähern an den Werth $x_{\sigma-1}$, so sagt man, die Function sei endlich für $x = x_{\sigma-1} + 0$, entweder convergirend, was z. B. bei der Function $\operatorname{arctg} \frac{1}{x - x_{\sigma-1}}$, für welche $f(x_{\sigma-1} + 0) = \frac{\pi}{2}$, der Fall ist, oder keinem Werthe zustrebend, wie dies bei der Function $\sin \frac{1}{x - x_{\sigma-1}}$ eintritt. Wenn aber bei unendlichem Abnehmen von $\varepsilon$, $f(x_{\sigma-1} + \varepsilon)$ zuletzt jede beliebig gegebene Grösse überschreitet, so sagt man die Function werde unendlich für $x = x_{\sigma-1} + 0$. Es ist nützlich, zwei Arten von Unendlichwerden der Functionen zu unterscheiden: je nachdem nämlich die Function in der äussersten Nähe von $x_{\sigma-1} + 0$ dem absoluten Werthe nach nie abnimmt, wie z. B. $\pm \frac{1}{x - x_{\sigma-1}}$, oder unendlich viele Maxima und Minima hat, wie z. B. $\frac{1}{x - x_{\sigma-1}} \sin \frac{1}{x - x_{\sigma-1}}$. In den Punkten $x_0$, $x_1$, .. kann $f(x)$ ohne Bedeutung sein, wie z. B. $\frac{1}{x - x_0}$, $\sin \frac{1}{x - x_1}$, oder auch einen Werth besitzen, wie z. B. die Reihe $\psi(x) = \sum\limits_0 \frac{\sin nx}{n}$, welche für $x = 0$ gleich Null ist, während doch $\psi(+0) = \frac{\pi}{2}$ und $\psi(-0) = -\frac{\pi}{2}$ ist. Wir nehmen ferner an, dass unter den Punkten $x_0$, $x_1$, ... sich auch solche befinden, für welche $f(x)$ stetig ist.

Von der Function $f(x)$ wird also vorausgesetzt

1) dass sie, allgemein zu reden, stetig sei.
2) dass die $2\tau$ Hauptintegrale

$$\int\limits_{x_{\sigma-1}-\eta}^{x_{\sigma-1}-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_{\sigma-1}+\eta} f(x)\,dx\,, \quad \int\limits_{x_{\sigma-1}-\eta}^{x_{\sigma-1}-\varepsilon} f(x)\,(x_{\sigma-1}-x)\,dx + \int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_{\sigma-1}+\eta} f(x)\,(x_{\sigma-1}-x)\,dx$$

$$(\sigma = 1, 2, \ldots, \tau)$$

bei unendlichem Abnehmen der Grösse $\varepsilon$ convergiren.

Diese Bedingung beschränkt offenbar die Arten des Unendlichwerdens der gegebenen Function.

3) dass sie für jeden Werth von $x$ durch eine trigonometrische Reihe der Form (1) darstellbar sei, ausgenommen für die Werthe $x_0$, $x_1, \ldots, x_\tau$, für welche *nichts über die Bedeutnng der Reihe vorausgesetzt wird.*

Für jeden Zwischenwerth im Intervalle $x_{\sigma-1}x_\sigma$ ist nun wegen der Convergenz der Reihe (1)

$$\lim\,(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0 \quad (n = \infty),$$

mithin einem bekannten Satze gemäss (s. diese Annalen Bd. IV. Seite 139)

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad (n = \infty).$$

Folglich hat die Function

$$F(x) = b_0\,\frac{x^2}{2} - \sum_0 \frac{a_n \sin nx + b_n \cos nx}{n^2}$$

(s. Riemannn S. 25 und fg.) diese Eigenschaften:

1) Ihr Werth $F(x)$ ändert sich mit $x$ stetig.

2) Es ist

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha^2} = \sum_0 (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

für alle Werthe von $x$, für welche die Reihe (1) convergirt.

3) $$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

wird stets mit $\alpha$ unendlich klein.

4) Die Reihe, welcher $F(x)$ gleich ist, convergirt in gleichem Grade. (S. die Abhandlung von Heine S. 356.) Der letzten Eigenschaft gemäss haben wir also

$$-\frac{A_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(F(t) - b_0\,\frac{t^2}{2}\right)\cos n\,(t-x)\,dt\,.$$

Es sei $a_{\sigma-1}$ eine zwischen $x_{\sigma-1}$ und $x_\sigma$ liegende Grösse, und es werde das Integral betrachtet:

$$\varphi_{\sigma-1}(x) = \int\limits_{a_{\sigma-1}}^{x} f(x)\,dx \quad (\sigma = 1, \cdots, \tau)\,,$$

welches eine continuirliche Function von $x$ für alle Werthe im Intervalle $x_{\sigma-1}\, x_\sigma$ (die Grenzen ausgenommen) ist. Es soll nun das Verhalten der Function $\varphi_{\sigma-1}(x)$ für den Fall untersucht werden, dass man einem Grenzwerthe, z. B. $x_{\sigma-1}$, sich unendlich nähert. Setzt man der Einfachheit halber $\sigma = 1$, so wird das Integral

$$\int_{a_0}^{x} f(x)\, dx,$$

wenn die Function $f(x)$ für $x = +0$ endlich bleibt, offenbar convergiren, ähnlich wie z. B. die Integrale:

$$\int_{a_0}^{x} d\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right) = \int_{a_0}^{x} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) dx = x^2 \sin \frac{1}{x} - a_0{}^2 \sin \frac{1}{a_0},$$

$$\int_{a_0}^{x} \sum_1 \frac{\sin nx}{n} = \int_{a_0}^{x} \frac{\pi - x}{2}\, dx = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} - \left(\frac{\pi a_0}{2} - \frac{a_0{}^2}{4}\right).$$

Wenn aber für $x = +0$ die Function $f(x)$ unendlich gross wird, und dabei dem absoluten Werthe nach niemals abnimmt, so kann das Integral convergiren oder nicht, ähnlich wie die Integrale:

$$\int_{a_0}^{x} \frac{dx}{x^\nu} = \frac{x^{1-\nu}}{1-\nu} - \frac{a_0{}^{1-\nu}}{1-\nu} \,(0 < \nu < 1), \quad \int_{a_0}^{x} \frac{dx}{x} = lx - la_0.$$

Hat endlich $f(x)$ für $x = +0$ unendlich viele Maxima und Minima, und wird dabei unendlich gross, so kann das Integral einer bestimmten Grenze zustreben, wie z. B.

$$\int_{a_0}^{x} d\left(x \cos \frac{1}{x}\right) = \int_{a_0}^{x} \left(\cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\right) dx = x \cos \frac{1}{x} - a_0 \cos \frac{1}{a_0},$$

oder auch unbestimmt sein, wie

$$\int_{a_0}^{x} d \sin \frac{1}{x} = \int_{a_0}^{x} \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}\right) dx = \sin \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{a_0},$$

u. s. w.

Auch das Integral

$$F_{\sigma-1}(x) = \int_{a_{\sigma-1}}^{x} \varphi_{\sigma-1}(x)\, dx \qquad (\sigma = 1, \cdots, \tau)$$

stellt eine Function, die *zwischen* $x_{\sigma-1}\, x_\sigma$ stetig ist, dar, und welche in diesem Intervalle $f(x)$ als zweiten Differentialquotient hat. Die zwei Functionen $F(x)$ und $F_{\sigma-1}(x)$ sind also continuirlich, wenn $x_{\sigma-1} < x < x_\sigma$ ist, die erste auch an den Grenzen, und haben $f(x)$ als zweiten Differentialquotienten.

Von der Function

$$\Theta_{\sigma-1}(x) = F(x) - F_{\sigma-1}(x) \qquad (\sigma = 1, \cdots, \tau)$$

wird man daher sagen können

1) dass sie stetig für jeden Zwischenwerth im Intervalle $x_{\sigma-1}x_\sigma$,

2) dass ihr zweiter Differentialquotient Null ist in demselben Intervalle.

Wenn man nun statt $x_{\sigma-1}$, $x_\sigma$ die etwas engeren Grenzen $x_{\sigma-1}+\varepsilon$, $x_\sigma-\varepsilon$ einführt, wobei $\varepsilon$ beliebig klein ist, so wird $\Theta_{\sigma-1}(x)$ continuirlich auch an den Grenzen sein, und folglich gleich einem Ausdrucke von der Form $c_{\sigma-1}x + c'_{\sigma-1}$ (wo $c_{\sigma-1}$, $c'_{\sigma-1}$ Constanten sind) für jeden Werth im Intervalle und für die Grenzwerthe $x_{\sigma-1}+\varepsilon$, $x_\sigma - \varepsilon$ sein. Dass dies stattfindet, wurde von Herrn Schwarz aus Zürich bewiesen (s. Borchardt's Journal Bd. 72, S. 141). Da nun $F(x)$ überall stetig ist, so wird die vorige Gleichung für jeden Werth von $x$ im Intervalle $x_{\sigma-1}x_\sigma$ gelten und folglich

$$F(x_{\sigma-1}) = F_{\sigma-1}(x_{\sigma-1}+0) + c_{\sigma-1}x_{\sigma-1} + c'_{\sigma-1},$$
$$F(x_\sigma) = F_{\sigma-1}(x_\sigma - 0) + c_{\sigma-1}x_\sigma + c'_{\sigma-1}$$

sein; das Integral

$$\int\limits_{a_{\sigma-1}}^{x} \varphi_{\sigma-1}(x)\,dx \qquad (\sigma = 1, \cdots, \tau)$$

convergirt also für $x = x_{\sigma-1}+0, = x_\sigma - 0$.

Betrachten wir jetzt die Relation

$$-\frac{A_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(F(t) - b_0\frac{t^2}{2}\right)\cos n(t-x)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon=0}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau}\int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}\left(F(t) - b_0\frac{t^2}{2}\right)\cos n(t-x)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon=0}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau}\int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}\left(F_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1}t + c'_{\sigma-1} - b_0\frac{t^2}{2}\right)\cos n(t-x)\,dt.$$

Offenbar ist:

$$\int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}\left(F_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1}t + c'_{\sigma-1} - b_0\frac{t^2}{2}\right)\cos n(t-x)\,dt$$

$$= \left[\left(F_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1}t + c'_{\sigma-1} - b_0\frac{t^2}{2}\right)\frac{\sin n(t-x)}{n}\right]_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}$$

$$-\frac{1}{n}\int\limits_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}\left(\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\right)\sin n(t-x)\,dt,$$

folglich wird:

$$\frac{A_n}{n} = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} \left(\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\right) \sin n(t-x)\, dt.$$

Andrerseits ist:

$$\int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} \left(\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\right) \sin n(t-x)\, dt$$

$$= - \left[\left(\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\right) \frac{\cos n(t-x)}{n}\right]_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}$$

$$+ \frac{1}{n} \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} \left(f(t) - b_0\right) \cos n(t-x)\, dt,$$

also

$$\frac{A_n}{n} = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \left[\left(\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\right) \frac{\cos n(t-x)}{n}\right]_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} \left(f(t) - b_0\right) \cos n(t-x)\, dt,$$

welche Zerlegung möglich ist, da das Hauptintegral

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} f(t) \cos n(t-x)\, dt$$

convergirt. Es ist nun leicht zu zeigen, dass unter den für die Function $f(x)$ gemachten Voraussetzungen

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \left[\left(\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\right) \frac{\cos n(t-x)}{n}\right]_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon} = 0$$

ist. In der That erhält man:

$$\left(\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - \varepsilon) + c_{\sigma-1} - b_0(x_\sigma - \varepsilon)\right) \frac{\cos n(x_\sigma - \varepsilon - x)}{n}$$

$$- \left(\varphi_\sigma(x_\sigma + \varepsilon) + c_\sigma - b_0(x_\sigma + \varepsilon)\right) \frac{\cos n(x_\sigma + \varepsilon - x)}{n}$$

$$= \left(\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - \varepsilon) + c_{\sigma-1} - \varphi_\sigma(x_\sigma + \varepsilon) - c_\sigma + 2 b_0 \varepsilon\right) \frac{\cos n(x_\sigma - x) \cos n\varepsilon}{n}$$

$$+ \left(\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - \varepsilon) + c_{\sigma-1} + \varphi_\sigma(x_\sigma + \varepsilon) + c_\sigma - 2 b_0 x_\sigma\right) \frac{\sin n(x_\sigma - x) \sin n\varepsilon}{n};$$

nun ist aber

$$\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma-\varepsilon)=\int\limits_{a_{\sigma-1}}^{x_\sigma-\varepsilon}f(x)\,dx,\qquad \varphi_\sigma(x_\sigma+\varepsilon)=\int\limits_{a_\sigma}^{x_\sigma+\varepsilon}f(x)\,dx,$$

folglich

$$\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma-\varepsilon)-\varphi_\sigma(x_\sigma+\varepsilon)=\int\limits_{a_{\sigma-1}}^{x_\sigma-\varepsilon}f(x)\,dx+\int\limits_{x_\sigma+\varepsilon}^{a_\sigma}f(x)\,dx,$$

und da das Hauptintegral der gegebenen Function convergirt, so strebt die Grösse

$$\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma-\varepsilon)-\varphi_\sigma(x_\sigma+\varepsilon)$$

einer Grenze zu für $\varepsilon=+0$.

Um diese Grenze zu finden erinnern wir, dass

$$\frac{F(x_\sigma+\alpha)-2F(x_\sigma)+F(x_\sigma-\alpha)}{\alpha}$$

oder

$$\frac{F_\sigma(x_\sigma+\alpha)+c_\sigma\alpha-F_\sigma(x_\sigma+0)+F_{\sigma-1}(x_\sigma-\alpha)-c_{\sigma-1}\alpha-F_{\sigma-1}(x_\sigma-0)}{\alpha}$$

mit $\alpha$ unendlich klein wird; nun ist

$$F_\sigma(x_\sigma+\alpha)=\int\limits_{a_\sigma}^{x_\sigma+\alpha}\varphi_\sigma(x)\,dx,\qquad F_\sigma(x_\sigma+0)=\int\limits_{a_\sigma}^{x_\sigma+0}\varphi_\sigma(x)\,dx,$$

$$F_{\sigma-1}(x_\sigma-\alpha)=\int\limits_{a_{\sigma-1}}^{x_\sigma-\alpha}\varphi_{\sigma-1}(x)\,dx,\qquad F_{\sigma-1}(x_\sigma-0)=\int\limits_{a_{\sigma-1}}^{x_\sigma-0}\varphi_{\sigma-1}(x)\,dx,$$

also

$$F_\sigma(x_\sigma+\alpha)-F_\sigma(x_\sigma+0)=\int\limits_{+0}^{+\alpha}\varphi_\sigma(x_\sigma+x)\,dx,$$

$$F_{\sigma-1}(x_\sigma-\alpha)-F_{\sigma-1}(x_\sigma-0)=-\int\limits_{+0}^{+\alpha}\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma-x)\,dx,$$

folglich

$$\lim_{\alpha=0}\frac{1}{\alpha}\int\limits_{+0}^{+\alpha}\Big(\varphi_\sigma(x_\sigma+x)-\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma-x)\Big)\,dx+c_\sigma-c_{\sigma-1}$$

$$=\varphi_\sigma(x_\sigma+0)-\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma-0)+c_\sigma-c_{\sigma-1}=0.$$

Keinem Zweifel unterliegt es, dass die Grösse

$$\Big(\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma-\varepsilon)+\varphi_\sigma(x_\sigma+\varepsilon)\Big)\sin n\varepsilon$$

$$=n\Big(\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma-\varepsilon)+\varphi_\sigma(x_\sigma+\varepsilon)\Big)\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\cdot\varepsilon$$

für $\varepsilon=+0$ einer Grenze zustreben muss; aber die beiden Integrale

$$F_{\sigma-1}(x) = \int_{a_{\sigma-1}}^{x} \varphi_{\sigma-1}(x)\,dx\,, \qquad F_\sigma(x) = \int_{a_\sigma}^{x} \varphi_\sigma(x)\,dx$$

convergiren für $x = x_\sigma - 0, = x_\sigma + 0$, folglich ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \big(\varphi_{\sigma-1}(x_\sigma - \varepsilon) + \varphi_\sigma(x_\sigma + \varepsilon)\big)\,\varepsilon = 0,$$

denn andernfalls hätte man

$$F_{\sigma-1}(x_\sigma - 0) - F_\sigma(x_\sigma + 0) = \pm\infty.$$

Sehr leicht ist es zu beweisen, dass auch die Grösse

$$[\varphi_{\tau-1}(2\pi - \varepsilon) - \varphi_0(\varepsilon) + c_{\tau-1} - c_0 - b_0 2\pi + 2b_0\varepsilon] \cos n(2\pi - x) \cos n\varepsilon$$
$$+ [\varphi_{\tau-1}(2\pi - \varepsilon) + \varphi_0(\varepsilon) + c_{\tau-1} + c_0 - b_0 2\pi] \sin n(2\pi - x) \sin n\varepsilon$$

für $\varepsilon = +0$ der Null zustrebt.

In der That, $a_\tau = 2\pi + a_0$ gesetzt, haben wir

$$\lim_{\varepsilon=0} \big(\varphi_{\tau-1}(2\pi - \varepsilon) - \varphi_\tau(2\pi + \varepsilon) + c_{\tau-1} - c_\tau\big) = 0,$$

aber für hinlänglich kleine Werthe von $x$ ist

$$\varphi_\tau(2\pi + x) = \int_{a_\tau}^{2\pi + x} f(x)\,dx = \int_{a_0}^{x} f(x)\,dx = \varphi_0(x)\,,$$

und da

$$F(x) - b_0 \frac{x^2}{2} = F(2\pi + x) - b_0 \frac{(2\pi + x)^2}{2}\,,$$

so hat man durch Differentiation

$$\varphi_0(x) - b_0 x + c_0 = \varphi_\tau(2\pi + x) + c_\tau - b_0(2\pi + x),$$

daher

$$c_\tau = c_0 + b_0 \cdot 2\pi\,,$$

und

$$\lim_{\varepsilon=0} \big(\varphi_{\tau-1}(2\pi - \varepsilon) - \varphi_0(\varepsilon) + c_{\tau-1} - c_0 - b_0 2\pi\big) = 0.$$

Wir haben also das Resultat gewonnen, dass

$$A_n = \frac{1}{\pi} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma - \varepsilon} f(t) \cos n(t - x)\,dt$$

für $\varepsilon = +0$ ist.

Die Gleichung

$$F(x) = b_0 \frac{x^2}{2} - \sum_1 \frac{a_n \sin nx + b_n \cos nx}{n^2}$$

giebt durch zweimalige Differentiation

$$f(x) = b_0 - \frac{d^2}{dx^2} \sum_1 \frac{a_n \sin nx + b_n \cos nx}{n^2},$$

also

$$\lim_{\epsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \int_{x_{\sigma-1}+\epsilon}^{x_\sigma-\epsilon} f(x)\,dx = b_0 2\pi + \lim_{\epsilon=0} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\tau} \Big[\varphi_{\sigma-1}(t) + c_{\sigma-1} - b_0 t\Big]_{x_{\sigma-1}+\epsilon}^{x_\sigma-\epsilon} = b_0 \cdot 2\pi.$$

Betreffs der Bedeutung der Reihe in den Punkten $x_0, x_1, \ldots$ wurde anfangs keine Voraussetzung gemacht; was aber bemerkenswerth scheint, ist, dass, wenn die Reihe für einen Unstetigkeitspunkt $x = x_\nu$ z. B. convergirt, und wenn die Function $f(x_\nu + \varepsilon) + f(x_\nu - \varepsilon)$ bei unendlichem Abnehmen der Grösse $\varepsilon$ einer Grenze sich nähert, man alsdann hat

$$\tfrac{1}{2}\Big(f(x_\nu + 0) + f(x_\nu - 0)\Big) = \sum_0 (a_n \sin nx_\nu + b_n \cos nx_\nu).$$

In der That ist:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x_\nu + \alpha) - 2F(x_\nu) + F(x_\nu - \alpha)}{\alpha^2} = \sum_0 (a_n \sin nx_\nu + b_n \cos nx_\nu),$$

während andrerseits für hinlänglich kleine $\alpha$ (solche nämlich, dass $x_\nu + \alpha < x_{\nu+1}$, $x_\nu - \alpha > x_{\nu-1}$) sich ergiebt:

$$F(x_\nu + \alpha) + F(x_\nu - \alpha) = 2F(x_\nu) + \frac{\alpha}{1}\Big(F'(x_\nu + 0) - F'(x_\nu - 0)\Big)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{1.2}\Big(F''(x_\nu + \theta\alpha) + F''(x_\nu - \theta\alpha)\Big),$$

folglich wird:

$$F(x_\nu + \alpha) + F(x_\nu - \alpha) - 2F(x_\nu)$$
$$= \frac{\alpha}{1}\Big(\varphi_\nu(x_\nu + 0) + c_\nu - \varphi_{\nu-1}(x_\nu - 0) - c_{\nu-1}\Big)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{1.2}\Big(f(x_\nu + \theta\alpha) + f(x_\nu - \theta\alpha)\Big) \qquad (0 < \theta < 1);$$

man hat aber, wie wir vorher gesehen haben,

$$\varphi_\nu(x_\nu + 0) - \varphi_{\nu-1}(x_\nu - 0) + c_\nu - c_{\nu-1} = 0,$$

somit folgt:

$$\frac{F(x_\nu + \alpha) - 2F(x_\nu) + F(x_\nu - \alpha)}{\alpha^2} = \tfrac{1}{2} f(x_\nu + \theta\alpha) + \tfrac{1}{2} f(x_\nu - \theta\alpha),$$

und endlich

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x_\nu + \alpha) - 2F(x_\nu) + F(x_\nu - \alpha)}{\alpha^2} = \tfrac{1}{2}\Big(f(x_\nu + 0) + f(x_\nu - 0)\Big)$$
$$= \Sigma (a_n \sin nx_\nu + b_n \cos nx_\nu).$$

Es scheint noch der Mühe werth zu bemerken, dass die Convergenz der Grösse

$$\tfrac{1}{2}\Big(f(x_\nu + \varepsilon) + f(x_\nu - \varepsilon)\Big)$$

nicht zur nöthigen Folge hat, dass jeder der beiden Ausdrücke

$$f(x_\nu + \varepsilon), \qquad f(x_\nu - \varepsilon)$$

einer Grenze zustrebt, was sowohl eintreten kann wie auch nicht; denn es genügt, dass der ganze Ausdruck

$$f(x_\nu + \varepsilon) + f(x_\nu - \varepsilon)$$

für $\varepsilon = 0$ convergire, was z. B. geschieht, wenn die Function $f(x)$ rechts von $x_\nu$ gleich

$$\sin \frac{1}{x - x_\nu},$$

links dagegen gleich

$$\sin \frac{1}{x - x_\nu} + \psi(x)$$

ist, falls nur $\psi(x_\nu - 0)$ einen bestimmten Sinn hat; oder $f(x)$ könnte sich rechts von $x_\nu$ wie

$$\log(x - x_\nu),$$

links wie

$$-\log(x_\nu - x) + \varphi(x)$$

verhalten, falls nur wiederum $\varphi(x_\nu - 0)$ einen bestimmten Sinn hat.

Im April 1872.

# INHALT.



---

*Der erst seit Kurzem beendigte Streik der Buchdruckergehilfen in Leipzig hat mich genöthigt, den Satz aller Bücher und der in Monatslieferungen oder noch längeren Zwischenräumen erscheinenden Zeitschriften vollständig zu suspendiren. Es konnten deshalb die Fortsetzungen der Jahrbücher für Philologie, der Zeitschrift für Mathematik, der mathematischen Annalen und andrer Zeitschriften meines Verlages nicht erscheinen. Ich werde aber bemüht sein, die rückständigen Hefte nunmehr so schnell als nur immer möglich nachzuliefern und hoffe, dass mir unter den obwaltenden Verhältnissen die Nachsicht der verehrl. Abonnenten nicht versagt werden wird.*

**B. G. Teubner.**

Verantwortliche Redaction: C. Neumann.

# MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

## RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. Gordan zu Giessen, Prof. F. Klein zu Erlangen,
Prof. A. Mayer zu Leipzig, Prof. K. VonderMühll zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

**Carl Neumann,**
Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.

VI. Band. 3. Heft.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1873.

# Ueber Fusspunkts-Curven und -Flächen, Normalen und Normalebenen.

Von R. Sturm in Darmstadt.

1. Es sei $C$ *eine ebene Curve* $\nu^{ter}$ *Ordnung und* $\varrho^{ter}$ *Classe;* $O$ *ein Punkt in der Ebene von* $C$; $F$ *die Fusspunktscurve von* $O$ *in Bezug auf* $C$. Dieselbe ist bekanntlich *von der Ordnung* $\nu' = 2\varrho$; denn bewegt sich der Scheitel eines rechten Winkels auf einer Geraden $l$, während der eine Schenkel stets durch $O$ geht, so hüllt der andere eine Parabel ein, für welche $O$ Brennpunkt, $l$ Scheiteltangente ist und die mit $C$ diejenigen $2\varrho$ Tangenten gemein hat, deren Fusspunkte auf $l$ liegen. Auf $F$ sind $O$ und die beiden unendlich fernen Kreispunkte $\omega$, $\varpi$ $\varrho$-fache Punkte; ferner hat $F$ noch so viele Doppel- und Rückkehrpunkte, als $C$ Doppel-, resp. Wendetangenten hat. Daraus ergiebt sich leicht, dass *die Classe* $\varrho'$ *von* $F$ *gleich* $\nu + 2\varrho$ *ist*, was auch auf folgende Weise zu ersehen ist: Dreht sich $l$ um einen Punkt $P$, so erzeugen die entsprechenden Parabeln eine Schaar, deren Grundtangenten $G_\infty$, die beiden Geraden $O(\omega, \varpi)$ und das Loth auf $OP$ in $P$ sind; eine Curve $\nu^{ter}$ Ordnung und $\varrho^{ter}$ Classe wird aber stets von $\nu + 2\varrho$ Kegelschnitten einer Schaar berührt*); also so oft wird $l$ Tangente von $F$.

2. Wenn die beiden Geraden $O(\omega, \varpi)$ $p$-fache Tangenten von $C$ sind, so wird dadurch die Ordnung von $F$ und die Vielfachheit von $O$ um $2p$, die von $\omega$ und $\varpi$ je um $p$ und die Classe von $F$ um $4p$ reducirt. Wird die unendlich ferne Gerade $G_\infty$ eine $t$-fache Tangente von $C$, so vermindert sich die Ordnung von $F$ und die Vielfachheit von $\omega$ und $\varpi$ je um $t$, die Classe um $2t$. Fällt der Pol $O$ in einen $k$-fachen Punkt von $C$, so haben $k$-mal je zwei von den $\varrho$ Aesten, welche durch $O$ gehen, eine gemeinsame Tangente, so dass $O$ $k$ Rückkehrpunkte und $\frac{1}{2}\varrho(\varrho - 1) - k$ Doppelpunkte vertritt, die Classe demnach um $k$ kleiner ist als im allgemeinen Falle.

*) Cremona, Curve piane N. 87.

3. Die Fusspunktscurve eines Punktes $O$, der nicht in der Ebene der Curve $C$ liegt, ist identisch mit der seiner orthogonalen Projection $O'$ auf die Ebene, welche dann, an Stelle von $O$ selbst, $\varrho$-facher Punkt von $F$ wird.

4. Betrachten wir nun *eine doppeltgekrümmte Curve $C$ $\nu^{ter}$ Ordnung und $\varrho^{ter}$ Classe; ihre developpable Tangentenfläche $D$*, welche also $\varrho^{ter}$ Ordnung ist*), *habe die Classe $\mu$*; das Geschlecht von $C$ und $D$ sei $p$. Die Lothe von $O$ auf die Tangenten von $C$ gefällt erzeugen einen Kegel $K$, der ersichtlich vom Geschlechte $p$ ist. Jedes dieser Lothe ist die Schnittgerade der Ebene, welche $O$ mit der betreffenden Tangente verbindet, und derjenigen, welche aus $O$ normal zu derselben geführt ist. Jene Ebenen hüllen bekanntlich einen Kegel $K_1$ $\nu^{ter}$ Ordnung, $\varrho^{ter}$ Classe eine, diese hingegen einen Kegel $K_2$, dessen Schnitt mit $E_\infty$ in Bezug auf den imaginären Kreis $C_\infty^2$ der unendlich fernen Schnittcurve von $D$ polar ist; demnach ist derselbe, weil $O$ nicht in $E_\infty$ liegt, $\mu^{ter}$ Ordnung und $\varrho^{ter}$ Classe. Diese Kegel, also beide $\varrho^{ter}$ Classe und offenbar auch beide $p^{ten}$ Geschlechts, sind projectivisch auf einander bezogen und das Erzeugniss der Schnittgeraden entsprechenden Berührungsebenen, der Kegel $K$, ist $2\varrho^{ter}$ Ordnung. Sei $\theta$ die Zahl der etwaigen Wendetangenten von $C$ (oder Cuspidalgeneratricen von $D$), so giebt jeder Kegel, welcher $C$ projicirt, oder jede Schnittebene von $D$:

$$2(\varrho-1)=\nu+\mu+\theta-2p;$$

die Lothe auf die Wendetangenten sind Cuspidalkanten des Kegels $K$; demnach liefert derselbe, wenn $\varrho'$ seine Classe und $\nu'$ $(=2\varrho)$ seine Ordnung ist:

$$2(\nu'-1)=\varrho'+\theta-2p;$$

daraus geht hervor, dass

$$\varrho'=2\varrho+\mu+\nu.$$

Ersichtlich stimmt aber der Kegel $K$ mit der Fusspunktscurve $F$ von $O$ in Bezug auf $C$, welche durch ihn aus $O$ projicirt wird, in Ordnung, Classe und Geschlecht überein. Folglich *ist die Fusspunktscurve eines Punktes in Bezug auf eine Raumcurve von der Ordnung $2\varrho$ und der Classe $2\varrho+\mu+\nu$.*

Da bei einer ebenen Curve $\mu=0$ ist, so erweist sich das früher gefundene Resultat als speciellen Fall.

5. *Es sei $\mu'$ die Classe der Tangentenfläche $D'$ von $F$*, so ist leicht einzusehen, dass Wendetangenten von $F$ durch die Wendeberührungs-

*) Ich halte es mit Herrn Cremona für vortheilhafter, die Ordnung der Tangentenfläche die *Classe* der Raumcurve zu nennen, weil dann sich die Sätze sehr oft ohne Aenderung des Wortlautes auf die ebenen Curven übertragen lassen.

ebenen von $D$ und nur durch diese veranlasst werden; sei $\alpha$ die Zahl derselben, dann ist, wenn $h'$ noch die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte von $F$ und $\lambda$ die der etwaigen wirklichen Doppelpunkte von $F$ oder Doppeltangenten von $C$ ist, $x$ endlich die Ordnung der Knotencurve von $D$ bezeichnet,

$$2\varrho(2\varrho-1) = 2\varrho + \mu + \nu + 2(h'+\lambda) + 3\theta,$$
$$\mu' + \alpha = 3.2\varrho(2\varrho-2) - 6(h'+\lambda) - 8\theta,$$
$$\alpha = 3\varrho(\varrho-2) - 6(x+\lambda) - 8(\nu+\theta),$$
$$\varrho(\varrho-1) = \mu + 2(x+\lambda) + 3(\nu+\theta);$$

aus den beiden ersten Formeln folgt:

$$\mu' = 3\mu + 3\nu + \theta - \alpha,$$

aus den beiden andern:

$$\alpha = 3\mu - 3\varrho + \nu + \theta,$$

also:

$$\mu' = 2\nu + 3\varrho.$$

Auf ebene Curven lässt sich dieses Resultat nicht übertragen, da für dieselben die obigen Formeln theilweise illusorisch werden; $\mu'$ ist dann ersichtlich 0.

Wird noch die Zahl der scheinbaren Doppeltangenten von $C$ mit $l$ bezeichnet, so haben wir:

$$\varrho(\varrho-1) = \nu + 2(l+\lambda) + 3(\theta+\mu),$$

woraus sich mit Hülfe der ersten der obigen Formeln ergiebt:

$$h' = \tfrac{3}{2}\varrho(\varrho-1) + \mu + l.$$

Dies ist also auch die Zahl der Lothe aus $O$, die zugleich auf zwei verschiedenen Tangenten von $C$ senkrecht stehen.

Ist die Curve $C$ eben, so ist $\mu = l = 0$, und die $\frac{3}{2}\varrho(\varrho-1)$ scheinbaren Doppelpunkte von $F$ sind drei $\varrho$-fache Punkte geworden, von denen zwei auf $C^2_\infty$ liegen; die unebenen Fusspunktscurven haben $2\varrho$ einfache Punkte auf $C^2_\infty$.

6. Die eben betrachtete Curve kann auch *die Generatricen-Fusspunktscurve der abwickelbaren Fläche $D$* genannt werden. Die Tangentenebenen von $D$ geben noch zu einer zweiten Fusspunktscurve $f$ Veranlassung. Der Kegel der aus $O$ auf diese Tangentenebenen gefällten Normalen ist ersichtlich die Enveloppe der durch $O$ gehenden Ebenen, welche auf den Erzeugenden von $D$ senkrecht sind, also der obige Kegel $K_2$ $p^{\text{ten}}$ Geschlechts, $\mu^{\text{ter}}$ Ordnung und $\varrho^{\text{ter}}$ Classe. Der Punkt $O$ enthält $\mu$ Fusspunkte; folglich *ist die Ordnung $\nu''$ und die Classe $\varrho''$ der Tangentenebenen-Fusspunktscurve der abwickelbaren Fläche $D$ gegeben durch:*

$$\nu'' = 2\mu, \qquad \varrho'' = \varrho + 2\mu.$$

Alle $2\mu$ Punkte, die in $E_\infty$ liegen, befinden sich auf $C^2_\infty$; es sind die Berührungspunkte der Tangenten, welche $C^2_\infty$ mit $D$ gemein hat.

Der Kegel $K_2$ hat so viele Wendeberührungsebenen, als $C$ Punkte in $E_\infty$ hat, demnach $\nu$; da im Allgemeinen keine Wendetangenten von $f$ anzunehmen sind, so sind dies $\nu$ Osculationsebenen von $f$ durch $O$, zu denen noch die $3\mu$ des $\mu$-fachen Punktes kommen; *die Classe $\mu''$ der Tangentenfläche $D''$ von $f$ ist* mithin

$$\mu'' = \nu + 3\mu.$$

Rückkehrpunkte hat $f$ offenbar $\alpha$ und wirkliche Doppelpunkte so viele als $D$ wirkliche doppelte Berührungsebenen hat; sei deren Zahl $\gamma$ und $g$ die Zahl der scheinbaren doppelten Berührungsebenen, d. h. der nicht von wirklichen doppelten Berührungsebenen herrührenden Doppeltangenten eines ebenen Schnitts von $D$, endlich $h''$ die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte von $f$, so hat man:

$$2\mu(2\mu - 1) = \varrho + 2\mu + \mu(\mu - 1) + 2(h'' + \gamma) + 3\alpha,$$

$$\mu(\mu - 1) = \varrho + 2(g + \gamma) + 3\alpha,$$

demnach:

$$h'' = \mu(\mu - 1) + g.$$

In $g$ haben wir ersichtlich auch die Zahl der Linien aus $O$, die die Curve $f$ noch zweimal treffen, also der Lothe, die auf zwei verschiedenen Ebenen von $D$ normal sind.

7. *Die Kegel* gehören auch zu den abwickelbaren Flächen; die Cuspidalcurve ist in einen Punkt zusammengeschrumpft, so dass $\nu = 0$, die Classe dieser Curve ist aber immerhin noch gleich der Ordnung $\varrho$ des Kegels; Doppel- und Wendetangenten der Curve sind die Doppel- und Rückkehrkanten des Kegels; dagegen ist ersichtlich $l = g = x = 0$. *Für die Kanten-Fusspunktscurve eines Kegels $\varrho^{ter}$ Ordnung und $\mu^{ter}$ Classe erhalten wir demnach* aus Nr. 4. und 5.:

$$\nu' = 2\varrho, \quad \varrho' = 2\varrho + \mu, \quad \mu' = 3\varrho, \quad h' = \tfrac{3}{2}\varrho(\varrho - 1);$$

aber von diesen $h'$ scheinbaren Doppelpunkten haben sich $\frac{1}{2}\varrho(\varrho - 1)$ zu einem wirklichen $\varrho$-fachen Punkt vereinigt, nämlich der Kegelspitze; es bleiben also nur $\varrho(\varrho - 1)$ scheinbare Doppelpunkte; es scheint danach, als gingen von $O$ so viele Doppellothe aus, was mit der Convergenz aller Kegelkanten nicht vereinbar wäre. Die Fusspunktscurve ist aber ersichtlich der Schnitt des Kegels mit der Kugel, welche die Verbindungsgerade von $O$ mit dem Kegelscheitel zum Durchmesser hat; die beiden imaginären Geraden dieser Kugel, die sich in $O$ kreuzen (und $C^2_\infty$ treffen), begegnen der Fusspunktscurve je $\varrho$-mal, so dass dieselbe von $O$ aus gesehen zwei imaginäre scheinbare $\varrho$-fache Punkte hat.

*Für die Tangentenebenen-Fusspunktscurve,* die auch auf der erwähnten Kugel liegt, *erhalten wir* durch Nr. 6.:

$$\nu'' = 2\mu, \quad \varrho'' = \varrho + 2\mu, \quad \mu'' = 3\mu, \quad h'' = \mu(\mu - 1);$$

die scheinbaren Doppelpunkte gehen wiederum für den Punkt $O$ in zwei imaginäre scheinbare $\mu$-fache Punkte über. Reelle Doppellothe kann es nicht geben.

8. Für *die Cylinder* artet die Kugel in die durch $O$ senkrecht zu den Mantellinien gefällte Ebene (und $E_\infty$) aus; beide Curven werden eben und zwar ist die Kanten-Fusspunktscurve der Schnitt $N$ dieser Ebene selbst, die Tangentenebenen-Fusspunktscurve die Fusspunktscurve von $O$ in Bezug auf $N$; $\mu'$ und $\mu''$ sind Null geworden und die scheinbaren Doppelpunkte haben sich in wirkliche verwandelt. Zur vollständigen Curve wird die erstere erst durch die $\varrho$ in $E_\infty$ gelegenen Cylinderkanten ergänzt, die sich auf die Curve $N$ stützen und auch den $\varrho$-fachen Punkt enthalten, wodurch $\nu'$, $\varrho'$, $\mu'$ resp. um $\varrho$, $2\varrho$, $3\varrho$, also auf $\varrho$, $\mu$, 0 reducirt werden. Auch dass $\mu'' = 3\mu$ in $\mu'' = 0$ übergeht, erklärt sich leicht, weil die $3\mu$ Osculationsebenen von dem $\mu$-fachen Punkte $O$ herrührten, von dem sie bei einer ebenen Curve nicht abgeleitet werden können.

9. Wir wenden uns nun zur Betrachtung *der Fläche $\Sigma$ der Fusspunkte der aus $O$ auf die Tangentenebenen einer eigentlichen Fläche $S$ gefällten Lothe. Die Ordnung von $S$ sei $n$, der Rang* — d. i. die Ordnung des aus einem beliebigen Punkte ihr umschriebenen Kegels und seiner Berührungscurve oder die Classe eines beliebigen ebenen Schnitts und der längs desselben umschriebenen Developpable, oder auch, um beides zusammenzufassen, der Grad des Complexes der Tangenten der Fläche — *sei $r$, die Classe von $S$ sei $m$*; besitze ferner $S$ eine doppelt umschriebene Torse*) $D_\tau$ (node couple torse) $\tau^{\text{ter}}$ Classe und eine stationär umschriebene $D_\sigma$ (spinode torse) $\sigma^{\text{ter}}$ Classe, so dass $r = m(m-1) - 2\tau - 3\sigma$. *Ordnung, Rang und Classe von $\Sigma$ mögen mit $n'$, $r'$, $m'$ bezeichnet werden.*

Wenn $L$ eine beliebige Gerade ist, so enthalten die $2m$ Ebenen, welche $S$ mit dem parabolischen Cylinder gemein hat, dessen Focallinie auf der Ebene $(O, L)$ in $O$ und dessen Scheitelkanten-Berührungsebene auf derselben Ebene in $L$ senkrecht steht, die auf $L$ befindlichen Punkte von $\Sigma$, folglich ist

$$n' = 2m.$$

Da eine durch $O$ gehende Gerade die Fläche $\Sigma$ ausser in $O$, welcher wegen des aus ihm an $S$ gelegten Berührungskegels ersichtlich auf $\Sigma$ liegt, nur in den Fusspunkten der $m$ zu der Geraden normalen Berührungsebenen von $S$ trifft, so *ist $O$ ein $m$-facher Punkt von $\Sigma$.*

---

*) Ich erlaube mir, dieses von Herrn Cayley gebrauchte kurze Wort in die deutsche Sprache überzutragen.

Durch jede Tangente ferner von $C^2_\infty$ gehen $m$ Berührungsebenen von $S$; die Fusspunkte derselben fallen in den Berührungspunkt der Tangente mit $C^2_\infty$; demnach *ist* $C^2_\infty$ *eine* $m$-*fache Curve auf* $\Sigma$. Die beiden Developpablen $\tau^{\text{ter}}$ und $\sigma^{\text{ter}}$ Classe veranlassen auf $\Sigma$ eine Doppelcurve $2\,\tau^{\text{ter}}$ Ordnung $d_{2\tau}$ und eine Rückkehrcurve $2\,\sigma^{\text{ter}}$ Ordnung $d_{2\sigma}$, welche $\tau$-mal, resp. $\sigma$-mal durch $O$ gehen. Aus der Zahl der scheinbaren Doppeltangentenebenen $g_\tau$ und $g_\sigma$ von $D_\tau$ und $D_\sigma$ ergiebt sich leicht nach Nr. 6. die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte dieser beiden Curven, nämlich $\tau\,(\tau - 1) + g_\tau$, resp. $\sigma\,(\sigma - 1) + g_\sigma$. Einzelne singuläre Ebenen von $S$ werden natürlich entsprechende singuläre Punkte auf $\Sigma$ bewirken.

Die $2\,m$ Berührungsebenen, welche der Kegel $(O,\ C^2_\infty)$ mit $S$ gemein hat, liefern so viele (imaginäre) auf $\Sigma$ befindliche Geraden. Ist der Kegel der Fläche ganz umschrieben, wie dies z. B. bei einer Kugel der Fall ist, die in $O$ ihr Centrum hat, so zweigt er sich von der Fläche $\Sigma$ ganz ab, so dass sich die Ordnung derselben vermindert; im erwähnten Falle ist die Kugel ihre eigene Fusspunktsfläche. Eine Reduction der Ordnung findet ferner statt, wenn die Originalfläche von $E_\infty$ berührt wird, weil dann $S$ ausser $E_\infty$, in Bezug auf welche der Fusspunkt, da sie als auf allen Geraden normal anzusehen ist, unbestimmt wird und sich über die ganze Ebene ausbreitet, nicht mehr $2\,m$ Ebenen mit dem parabolischen Cylinder gemein hat. Die Fusspunktscurven in Bezug auf die der Fläche $S$ umschriebenen Kegel sind je die Schnittcurve von $\Sigma$ mit der Kugel, die den Pol $O$ und den Kegelscheitel zu Endpunkten eines Durchmessers hat.

10. Eine beliebige Ebene $E$ schneidet $\Sigma$ in einer Curve $C$ $2\,m^{\text{ter}}$ Ordnung; sei $x$ ein Punkt von $C$, $X$ die Spur der Berührungsebene $T$ von $S$, in welcher $x$ der Fusspunkt ist, $O'$ die orthogonale Projection von $O$ auf $E$; so ist $O'x$ normal auf $X$, also ist die Curve $C = (E, \Sigma)$ die Fusspunktscurve von $O'$ (oder auch von $O$) in Bezug auf die Enveloppe $E'$ der Spuren derjenigen Berührungsebenen von $S$, welche ihren Fusspunkt in Bezug auf $O$ in $E$ haben. Diese Enveloppe ist $2\,m^{\text{ter}}$ Classe; denn wenn $P$ ein Punkt von $E$ ist, so liefert die Fusspunktscurve von $O$ in Bezug auf den aus $P$ der Fläche $S$ umschriebenen Kegel ($m^{\text{ter}}$ Classe), welche $2\,m^{\text{ter}}$ Ordnung ist, in $E$ $2\,m$ Punkte, die mit $P$ verbunden die Tangenten aus $P$ an $E'$ sind. Danach müsste $C$, als Fusspunktscurve in Bezug auf $E'$, $4\,m^{\text{ter}}$ Ordnung sein und $2\,m$-mal durch $O'$ gehen, was nicht der Fall ist. Die Enveloppe $E'$ kann aber noch auf andere Weise erzeugt werden; est ist bekannt, dass alle Ebenen des Raumes, welche die Fusspunkte der aus $O$ auf sie gefällten Lothe in $E$ haben, ein Rotationsparaboloid $\Pi$ einhüllen, welches $O$ zum Brennpunkte und die Ebene $E$ zur Scheitelberührungsebene, also $O'$ zum Scheitel hat. Die Torse, welche $\Pi$ und $S$ gemeinsam

ist und die Classe $2m$ hat, schneidet die Enveloppe $E'$ in $E$ ein. Diese Ebene hat mit $\Pi$ die beiden Geraden gemein, welche $O'$ mit den Punkten $\omega$ und $\varpi$ von $E$ verbinden. Die $m$ Ebenen, welche jede dieser beiden Geraden an $S$ sendet, werden alle von $E$ in $O'\omega$ oder $O'\varpi$ geschnitten; folglich sind $O'\omega$ und $O'\varpi$ $m$-fache Tangenten von $E'$; daraus geht nach Nr. 2. hervor, dass die Ordnung der Fusspunktscurve $C$ um $2m$ reducirt wird, desgleichen die Vielfachheit von $O'$, so dass jene $2m$ ist und dieser Punkt nicht auf $C$ liegt. Berührt hingegen $E$ die Fläche $S$, in welchem Falle $O'$ ja der Fusspunkt ist und also der Curve $C$ angehören muss, so ist $E$ selbst eine gemeinsame Ebene von $\Pi$ und $S$ und liefert keine Spur; demnach ist die Enveloppe $E'$ von der Classe $2m-1$ und jede der Geraden $O'(\omega, \varpi)$ nur noch $(m-1)$-fach; die Ordnung von $C$ demnach $2(2m-1)-2(m-1)=2m$, wie oben, die Vielfachheit von $O'$ hingegen $2m-1-2(m-1)=1$.

11. Ermitteln wir nun noch die Classe der Curve $C$ in einer beliebigen Ebene, also den Rang $r'$ der Fläche $\Sigma$. Die Curve $E'$, welche, wie eben gefunden, $2m^{\text{ter}}$ Classe ist und zwei $m$-fache Tangenten besitzt, hat ausserdem $2\tau$ Doppeltangenten und $2\sigma$ Wendetangenten, weil $\Pi$ $2\tau$ resp. $2\sigma$ Ebenen mit $D_\tau$ resp. $D_\sigma$ gemein hat, folglich ist die Ordnung von $E'$ gleich $2m(2m-1)-4\tau-3\sigma-2m(m-1)$ $=2(m+r)$; die Classe der Fusspunktscurve $C$ ist demnach in Folge von Nr. 1. und 2. gleich $2m+2r+2.2m-4m=2m+2r$. Also *ist auch der Rang der Fusspunktsfläche* $\Sigma$

$$r'=2m+2r;$$

dies Resultat konnte freilich auch leicht aus der Ordnung $2m$ der Fläche $\Sigma$ und der schon bekannten Existenz der vielfachen Curven $C_\infty^2$, $d_{2\tau}$ und $d_{2\sigma}$ abgeleitet werden.

12. Der Kegel $(O, C_\infty^2)$, welchen ersichtlich die beiden durch den Brennpunkt gehenden Tangenten der Meridianparabel von $\Pi$ bei der Rotation beschreiben, ist dem Paraboloide umschrieben; alle Paraboloide also, die den Ebenen eines Büschels um die Gerade $L$ entsprechen, sind demnach diesem Kegel und dem parabolischen Cylinder, welcher der Geraden $L$ zugehört (Nr. 9), eingeschrieben und bilden in Folge dessen eine Flächenschaar zweiter Classe.

Sei $T'$ nun eine durch $L$ gehende Berührungsebene von $\Sigma$; ihr Berührungspunkt $t'$ muss ein Doppelpunkt von $C'=(T', \Sigma)$ sein, der nicht von einem singulären Punkte von $\Sigma$, also nicht von einer singulären Ebene von $S$ herrührt. Die Spur der Ebene von $S$, die ihn veranlasst, muss eine Doppeltangente der Enveloppe $E'$ sein, also entweder von zwei sich auf $T'$ schneidenden Berührungsebenen der Torse, welche dem zu $T'$ gehörigen Paraboloide $\Pi$ und $S$ gemeinsam ist, oder von einer Doppelebene $T$ dieser Torse herrühren, welche nicht zugleich singuläre Ebene von $S$ ist ($\Pi$ hat überhaupt keine singulären Ebenen); aber da durch jede Gerade auf $T'$ ausser $T'$ selbst nur noch eine Ebene von $\Pi$ möglich ist, so kann ersteres nicht der Fall sein (oder einfacher: auf $Ot'$ können in $t'$ nicht zwei Ebenen normal sein); also tritt das letztere ein; folglich berühren sich die beiden Flächen $S$ und $\Pi$ in dem Punkte, in welchem $S$ von $T$ berührt wird.

*Die Classe der Fusspunktsfläche ist demnach gleich der Anzahl der Rotationsparaboloide, welche dem Kegel ($O$, $C^2_\infty$) und einem parabolischen Cylinder, dessen Focallinie durch $O$ geht, einbeschrieben sind und die Originalfläche berühren.*

Diejenigen Ebenen nun, die in Bezug auf eine Fläche $m^{\text{ter}}$ Classe und eine Fläche einer Schaar zweiter Classe den nämlichen Pol haben, hüllen eine Torse von der Classe $m^2+2$ ein, welche sowohl alle singulären Ebenen der Fläche wie der Schaar enthält*). In unserm Falle gehört jedenfalls zur Schaar ein ganzes Büschel Doppelebenen, dessen Axe die Scheitel der beiden der ganzen Schaar umschriebenen Kegel verbindet; dadurch reducirt sich die Classe der Torse auf $m^2+1$. Eine weitere Reduction wird durch die Torsen $D_\tau$ und $D_\sigma$ bewirkt; die gemeinsamen Ebenen der übrig bleibenden Developpable und der Fläche $S$, welche nicht zu $D_\tau$ und $D_\sigma$ gehören, geben die Zahl der Berührungen zwischen $S$ und Flächen der Schaar.

Ist an $S$ keine Torse $D_\tau$ oder $D_\sigma$ vorhanden, so wird $S$ von $m(m^2+1)$ Rotationsparaboloiden berührt.

*Die Classe der Fusspunktsfläche einer Fläche $m^{\text{ter}}$ Classe, welche keine doppelt oder stationär umschriebene Torse und überhaupt keine singuläre Tangentenebene hat, ist $m(m^2+1)$.*

13. Dies Resultat lässt sich auch aus der Ordnung $2m$ von $\Sigma$ und der Existenz der $m$-fachen Curve $C^2_\infty$ und des $m$-fachen Punktes $O$ ableiten. Denken wir uns durch $C^2_\infty$ eine Fläche 2. Grades, also eine Kugel $A$ gelegt. Die erste Polarfläche eines beliebigen Punktes $P$ in Bezug auf $\Sigma$ schneidet $\Sigma$ ausser in $C^2_\infty$ noch in einer Curve $T$ von der Ordnung $2m^2$, der Berührungscurve des Kegels aus $P$ an $\Sigma$, und die Kugel $A$ in einer Curve $V$ $2m^{\text{ter}}$ Ordnung; $\Sigma$ und $A$ haben eine Curve $U$ $2m^{\text{ter}}$ Ordnung gemein; $U$ sowohl wie $V$, beide auf $A$ gelegen, begegnen den (imaginären) Geraden beider Schaaren von $A$ in $m$ Punkten, demnach einander in $2m^2$ Punkten; dies sind die ausserhalb $C^2_\infty$ gelegenen Begegnungspunkte von $T$ mit $A$, mithin trifft $T$ die Curve $C^2_\infty$ in $2m^2$ Punkten.

Der Kegel ($P$, $C^2_\infty$) schneidet $\Sigma$ ausser in $C^2_\infty$ noch in einer Curve $Q$ von der Ordnung $2m$ und $A$ noch in einem Kreise $W$; $U$ und $W$,

*) Cremona, Teoria delle superficie no. 113, wo der allgemeine reciproke Satz sich befindet.

beide auf $A$ gelegen, treffen sich in $2m$ Punkten, in denen zugleich $Q$ der Kugel $A$ ausserhalb $C_\infty^2$ begegnet; folglich liegen auf $C_\infty^2$ $2m$ Punkte von $Q$. Diese Punkte sind die mit $P$ veränderlichen Begegnungspunkte von $T$ mit $C_\infty^2$ und $2m$ ist somit auch die Classe der längs $C_\infty^2$ der Fläche $\Sigma$ umschriebenen (imaginären) Torse; die $2m(m-1)$ übrigen Begegnungspunkte $(T, C_\infty^2)$ sind fest: es sind die Cuspidalpunkte der vielfachen Curve $C_\infty^2$, in denen alle ersten Polarflächen einander und die Fläche $\Sigma$ berühren.

Die erste Polarfläche eines zweiten Punktes $P_1$ hat mit der des ersten ausser $C_\infty^2$ eine Curve $R$ gemein von der Ordnung $m(3m-2)$; der Kugel $A$ begegnet sie noch in einer Curve $V_1$, die ähnlich beschaffen ist wie $V$; $V$ und $V_1$ treffen sich in $2m^2$ Punkten; so viele Punkte hat demnach $R$ mit $A$ ausserhalb $C_\infty^2$ gemein; folglich begegnen sich $R$ und $C_\infty^2$ in $4m(m-1)$ Punkten; unter diesen sind die $2m(m-1)$ festen Cuspidalpunkte und also $2m(m-1)$ mit den beiden Polen $P$ und $P_1$ sich ändernde. In den ersteren berührt $R$ die Fläche $\Sigma$, hat also mit ihr je $m+1$ Punkte gemein, in den andern nur $m$; der $m$-fache Punkt $O$ liegt auf jeder ersten Polarfläche $(m-1)$-fach, folglich ist er ein $m(m-1)^2$-facher Begegnungspunkt von $R$ und $\Sigma$; ausser diesen auf $C_\infty^2$ oder in $O$ befindlichen Punkten haben $R$ und $\Sigma$ noch

$$2m \cdot m(3m-2) - 2m(m-1)(m+1) - 2m(m-1) \cdot m - m(m-1)^2 = m(m^2+1)$$

gemeinsame Punkte: die Berührungspunkte der von $PP_1$ an $\Sigma$ gelegten Tangentialebenen.

14. Die Classe der Fusspunktsfläche allgemein zu ermitteln, ist mir noch nicht gelungen; für die Benutzung der von Herrn Cayley in seiner Abhandlung on reciprocal surfaces*) gegebenen Formel fehlt mir die Art und Weise, wie die Begegnungspunkte von $d_{2\sigma}$ und $d_{2\tau}$ mit $C_\infty^2$, die in $O$ befindlichen vielfachen Punkte dieser beiden Curven und die aus dem Systeme $(d_{2\tau}, C_\infty^2)$ sich ergebenden scheinbaren Doppelpunkte zu verrechnen sind.

*Es ist nun aber überaus wahrscheinlich, dass die Classe $m'$ von $\Sigma$, ebenso wie die Ordnung und der Rang, sich sehr einfach durch $m$, $r$, $n$ ausdrücken lässt, nämlich*

$$m' = 2m + 2r + n.$$

Hat die Originalfläche $S$ keine singuläre Ebene, so ist

$$r = m(m-1), \quad n = m(m-1)^2,$$

also

$$2m + 2r + n = m(m^2+1) = m',$$

*) Philosophical Transactions, Jan. 1869, S. 203.

wie oben gefunden. Einzelne singuläre Ebenen von $S$ bringen auf $\Sigma$ die reciproken singulären Punkte hervor und denselben Einfluss, welchen jene auf die Ordnung von $S$, haben diese auf die Classe von $\Sigma$, was mit der Formel übereinstimmt. Ferner, sehen wir eine Developpable $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung, $\mu^{\text{ter}}$ Classe als eine eigentliche Fläche $(n, r, m)$ an, so ist

$$n = \varrho, \quad r = \mu, \quad m = 0;$$

für die Fusspunktsfläche ist demnach

$$n' = 0, \quad r' = 2\mu, \quad m' = 2\mu + \varrho;$$

aus $n' = 0$ geht hervor, dass die Fusspunktsfläche zu einer Curve degenerirt, wie wir das ja auch schon wissen; wird nun eine Curve $\nu''^{\text{ter}}$ Ordnung, $\varrho''^{\text{ter}}$ Classe als Fläche $(n', r', m')$ aufgefasst (eingehüllt durch sämmtliche Berührungsebenen der Curve), so ist ausser $n' = 0$ noch

$$r' = \nu'', \quad m' = \varrho'',$$

also

$$\nu'' = 2\mu, \quad \varrho'' = 2\mu + \varrho,$$

wie wir oben (Nr. 6) gefunden haben. Eine weitere Bestätigung werden die windschiefen Regelflächen geben (Nr. 16.).

15. Es sei $t$ ein Punkt der Originalfläche $S$, $T$ seine Berührungsebene, $t'$ der Fusspunkt der Normalen aus $O$ auf $T$, also ein Punkt von $\Sigma$, $T'$ die Berührungsebene von $\Sigma$ in $t'$; so berührt nach Nr. 12 das Rotationsparabaloid $\Pi$, welches $O$ zum Brennpunkt und $T'$ zur Scheitelberührungsebene hat, die Fläche $S$ in $t$. $T'$ tangirt ferner die Kugel über $Ot$ als Durchmesser in $t'$, denn der Kegel aus $t$ an $S$ hat $T$ zur Doppelebene, also die Fusspunktscurve von $O$ in Bezug auf diesen Kegel, welche den Schnitt der Kugel $(Ot)$ mit $\Sigma$ (ausser $C_\infty^2$) bildet, in $t'$ einen Doppelpunkt; die Normale auf $\Sigma$ in $t'$ halbirt also die Strecke $Ot$. Der Scheitel des Rotationsparaboloids ist ersichtlich ein Punkt der zweiten Fusspunktsfläche.

Die Meridianparabel von $\Pi$, welche durch $t$ geht, berührt dort die Fläche $S$ und ihre Ebene steht auf der gemeinsamen Berührungsebene $T$ von $S$ und $\Pi$ normal.

Wenn also $t$ ein Punkt der Originalfläche und $T$ seine Berührungsebene ist und man legt die Ebene durch $Ot$ normal zu $T$ und construirt in derselben die Parabel, welche $O$ zum Brennpunkte hat und $T$ in $t$ berührt, so tangirt die Ebene, welche auf der Parabel-Axe im Scheitel senkrecht steht, die Fusspunktsfläche in dem Punkte $t'$, welchen die Ebene $T$ geliefert hat; der Parabel-Scheitel selbst ist der zugehörige Punkt der zweiten Fusspunktsfläche. Fällt $t'$ mit $t$ zusammen, haben wir es also mit einer der aus $O$ an die Fläche $S$ gezogenen Normalen zu thun, so sind auch $T$ und $T'$ identisch, weil dann $S$ und $\Sigma$ die Kugel $(Ot)$ tangiren; aber auch der Punkt der zweiten und ebenso jeder weitern Fusspunktsfläche fällt dann nach $t$. *In den Fusspunkten der aus einem Punkte auf eine Fläche gefällten Normalen berühren sich diese Fläche und alle ihre Fusspunktsflächen in Bezug auf den Punkt.* Ist $N$ ein $\varrho$-facher Punkt von $S$, so berührt die Kugel $(ON)$ die Fläche $\Sigma$ längs der Fusspunktscurve in Bezug auf den Anschmiegungskegel des $\varrho$-fachen Punktes.

16. Ein besonderes Interesse bietet *die Fusspunktsfläche einer windschiefen Regelfläche*; bei einer solchen Fläche ist bekanntlich Ordnung und Classe gleich $(m = n)$ und werden beide gemeinschaftlich Grad genannt; stationär berührende Ebenen giebt es nur in endlicher Zahl, nämlich die längs der Torsallinien (Nr. 20.) der Fläche berührenden; also existirt auf der Fusspunktsfläche $\Sigma$ keine Curve $d_{2\sigma}$. *Diese Fläche $\Sigma$ wird offenbar erhalten, wenn man aus $O$ auf alle Erzeugenden sowohl normale Ebenen als normale Geraden fällt und in jenen über diesen als Durchmessern je die Kreise* — die wir $B$ nennen wollen — *construirt.* Die Tangenten an diese Kreise in $O$ erzeugen ersichtlich den Anschmiegungskegel $n^{\text{ter}}$ Ordnung des $n$-fachen Punktes $O$ der Fläche $\Sigma$. Es ist leicht einzusehen, dass dieser Kegel $K_0$ der Polar- oder Supplementarkegel ist zu dem von $O$ an die Originalfläche $S$ geführten Kegel $K_1$ ($r^{\text{ter}}$ Ordnung, $n^{\text{ter}}$ Classe); also ist seine Classe $r$, wenn $r$ wiederum der Rang von $S$ ist. An dem ganzen von $O$ an $\Sigma$ gelegten Tangentialkegel participirt der Anschmiegungskegel seiner Classe nach zweifach, ebenso wie die Berührungscurve einer vielfachen Berührungsebene ihrer Ordnung nach bei dem Totalschnitt der Ebene zweifach zu zählen ist. Zu dem Tangentialkegel gehört ferner der von den Ebenen der Kreise $B$ eingehüllte Kegel $K_2$; da diese Ebenen auf den Generatricen normal sind, so ist $K_2$ $r^{\text{ter}}$ Ordnung und $n^{\text{ter}}$ Classe. Eine solche Kreisebene ist im Allgemeinen eine einfache Berührungsebene von $\Sigma$; zunächst ist ersichtlich, dass jeder Kreis der Curve $d_{2\tau}$ $(n-2)$-mal begegnet, denn durch jede Generatrix von $S$ gehen $n-2$ doppelte Berührungsebenen dieser Fläche; der Kegel nämlich, der von einem Punkte der Generatrix an $S$ gelegt ist, zerfällt in das Büschel um dieselbe und einen Kegel $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe; diese haben ausser der Berührungsebene des Punktes noch $n-2$ andere Ebenen gemein, welche demnach zweifach berührende Ebenen von $S$ sind, also zu $D_\tau$ gehören. In jedem Punkte von $d_{2\tau}$ schneiden sich die beiden Kreise, welche den Generatricen zugehören, auf denen die beiden Berührungspunkte der Ebene liegen, welche den Punkt von $d_{2\tau}$ geliefert hat. Ferner trifft jeder der Kreise die Curve $C_\infty^2$ zweimal; der fernere Schnitt der Ebene eines Kreises $B$, welcher $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, geht also $(n-1)$-mal durch den Punkt $O$, durch jeden der beiden Punkte $(B, C_\infty^2)$ und einmal durch jeden der $n-2$ Punkte $(B, d_{2\tau})$, folglich hat er mit $B$ nur noch $4(n-1) - 3(n-1) - (n-2)$,

d. i. einen Begegnungspunkt, in welchem die Ebene die Fläche berührt.

Endlich giebt es auf $\Sigma$, wie Nr. 9 gefunden, $2n$ (imaginäre) Gerade $G$, welche durch $O$ gehen. Die Ebenen durch eine solche Gerade sind im Allgemeinen ebenfalls einfache Tangentialebenen von $\Sigma$; denn jede dieser Geraden stützt sich auf $C^2_\infty$, aber nicht auf $d_{2r}$, da die Berührungsebene von $S$, welche die Gerade geliefert hat, im Allgemeinen nicht zu $D_r$ gehört; also begegnet $G$ der sie in der Ebene ergänzenden Curve $(2n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung je in einem $(n-1)$-fachen Punkte auf $C^2_\infty$ und in $O$ und noch in dem Berührungspunkte der Ebene. Damit ist aber der Tangentialkegel aus $O$ erschöpft; denn wenn $t'$ der Berührungspunkt einer von $O$ an $\Sigma$ gelegten Tangente ist, so berührt die Ebene des durch $t'$ gehenden Kreises $B$, in der sich ersichtlich die Tangente befindet (weil sie zwei Punkte $t'$ und $O$ derselben verbindet), in $t'$, da die Tangente von $B$ in $t'$ eine zweite Flächentangente in dieser Ebene ist; also alle nicht in $O$ oder auf den $G$ tangirenden Berührungsebenen aus $O$ an $\Sigma$ sind Ebenen von Kreisen $B$. Daraus geht hervor, dass die Classe des vollständigen Kegels aus $O$, mithin auch die der Fläche $\Sigma$ gleich $2n+n+2r=2m+n+2r$ ist; der erste Summand nämlich, die Zahl der Geraden $G$, rührt von der Classe $m=n$ der Fläche $S$ her, der zweite Summand aber, die Classe des Kegels $K_2$, von der Ordnung von $S$; somit *finden wir bei den windschiefen Regelflächen die Behauptung von Nr. 13. bestätigt.*

17. *Eine windschiefe Regelfläche giebt durch ihre Generatricen noch Veranlassung zu einer Fusspunktscurve* $\varphi$. Die Fusspunkte der aus $O$ auf die Erzeugenden gefällten Lothe sind Punkte der Kreise $B$ (Gegenpunkte von $O$), also liegt $\varphi$ auf $\Sigma$; die Lothe sind die Schnittlinien der Ebenen, welche $O$ mit den Generatricen von $S$ verbinden, und derer, die aus $O$ auf sie normal geführt sind; da jene den Kegel $K_1$, diese den Kegel $K_2$ einhüllen, welche beide $r^{\text{ter}}$ Ordnung, $n^{\text{ter}}$ Classe sind, so ist die Ordnung des Kegels $K_3$ der Lothe $2n$, also *auch die Ordnung* $\nu_1$ *der Fusspunktscurve* $\varphi$. Folglich

$$\nu_1 = 2n.$$

Das Geschlecht von $\varphi$ muss mit dem $(p)$ von $S$ übereinstimmen und Rückkehrpunkte hat $\varphi$ so viele, wie $S$ Cuspidalgeneratricen besitzt; seien deren $\theta$ und sei $\varrho_1$ *die Classe der Fusspunktscurve*, so giebt die Fläche $S$:

$$2(n-1) = r - 2p + \theta,$$

die Curve $\varphi$:

$$2(\nu_1 - 1) = \varrho_1 - 2p + \theta,$$

demnach

$$\varrho_1 = r + 2n.$$

Ist die Doppelcurve von $S$ von der Ordnung $\delta$, so hat die Fusspunktscurve

$$h_1 = \frac{3}{2} n (n-1) + \delta$$

scheinbare Doppelpunkte; so viele Lothe aus $O$ stehen also zugleich auf 2 Generatricen senkrecht. Die Classe endlich der Tangentenfläche von $\varphi$ ist

$$\mu_1 = 3r + \theta.$$

Alle $2n$ unendlich fernen Punkte von $\varphi$ liegen auf $C_\infty^2$.

Die Flächen 2. Grades $S^2$ haben wegen ihrer zwei Schaaren von Geraden je zwei solche Fusspunktscurven (Curven vierter Ordnung zweiter Species); dieselben bilden den vollen Schnitt der $S^2$ mit ihrer Fusspunktsfläche; jede begegnet den Geraden der zugehörigen Schaar einmal, denen der andern dreimal, also begegnen sie sich zehnmal. Von diesen Punkten liegen 4 auf $C_\infty^2$, die andern 6 sind die Fusspunkte der aus $O$ auf $S^2$ herabgelassenen Normalen.

18. Jedes Loth aus $O$ auf eine Generatrix von $S$ steht auch normal auf einer durch dieselbe gehenden Ebene; sei $f$ der Fusspunkt des Lothes, $b$ der Berührungspunkt dieser Ebene, so fragt es sich, wie oft fällt $f$ mit $b$ zusammen; d. h. wie viele Normalen gehen aus dem Punkte $O$ an die Fläche? Denken wir uns durch $O$ eine beliebige Gerade $l$ und durch dieselbe und je den Punkt $f$, sowie den Punkt $b$ auf jeder Generatrix eine Ebene $E_f$, resp. $E_b$ gelegt, so stehen die beiden coaxialen Büschel um $l$ in folgender Beziehung:

In jeder Ebene $E_f$ befinden sich, weil die Curve $\varphi$ $2n^{\text{ter}}$ Ordnung ist, $2n$ Punkte $f$, also entsprechen ihr $2n$ Ebenen $E_b$. Die Torse $D'$, welche der Fläche $S$ längs des Schnitts einer Ebene $E_b$ umschrieben ist, ist $r^{\text{ter}}$ Classe, folglich auch ihr Schnitt $D'_\infty$ mit $E_\infty$; dessen Polarcurve $D''_\infty$ in Bezug auf $C_\infty^2$ ist demnach $r^{\text{ter}}$ Ordnung und projectivisch auf die Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung $(S, E_\infty)$ bezogen; die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte umhüllen deshalb eine Curve $(n+r)^{\text{ter}}$ Classe, welche in $E_\infty$ die Spur derjenigen Developpable $D''$ ist, die von den zu den Ebenen von $D$ normalen und je durch die nämliche Generatrix gehenden Ebenen eingehüllt wird; da $E_\infty$ im Allgemeinen nicht $S$ berührt, so ist die Classe von $D''$ ebenfalls $n+r$; man kann sich die Developpable $D''$ auch als Enveloppe der Verbindungsebenen je einer Generatrix der Fläche $S$ $n^{\text{ten}}$ Grades und des entsprechenden Punktes der Curve $D''_\infty$ denken, welche $r^{\text{ter}}$ Ordnung ist; einer Generatrix $g$ entspricht nämlich der Pol (in Bezug auf $C_\infty^2$) der Spur der auf $g$ berührenden Ebene von $D'$ in $E_\infty$. Also gehen auch durch $O$ $n+r$ Ebenen von $D''$; folglich enthält jede Ebene $E_b$ $n+r$ Berührungspunkte von Ebenen, für welche die längs der Generatrix normale Ebene durch $O$ geht, also auf denen das Loth, welches auf die durch den Berührungspunkt gehende Generatrix aus $O$ gefällt ist, auch normal ist;

jeder Ebene $E_b$ entsprechen demnach $n+r$ Ebenen $E_f$. Daraus geht hervor, dass es $3n+r$ Coincidenz-Ebenen giebt; unter diesen befinden sich die $n$ Berührungsebenen, welche von $l$ an $S$ gehen; die $2n+r$ übrigen markiren auf den Erzeugenden, denen sie zugehören, einen Punkt $f$, der mit seinem entsprechenden Punkte $b$ zusammenfällt.

*An eine windschiefe Regelfläche vom Grade $n$ und vom Range $r$ gehen von einem Punkte aus stets $2n+r$ Normalen.*

19. So viel mir bekannt, ist *die Zahl der Normalen aus einem Punkte an eine beliebige Fläche* noch nicht ermittelt. *Es ist sehr wahrscheinlich, dass diese Zahl jederzeit gleich der Summe $n+r+m$ ist*).* Bei einer Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung ohne singuläre Punkte ist $r=n(n-1)$, $m=n(n-1)^2$; die Summe dieser 3 Grössen sowohl, als auch die für diesen Fall längst bekannte Zahl der Normalen ist $n(n^2-n+1)$. Bei den windschiefen Regelflächen ist $m=n$, folglich $n+r+m=2n+r$, also gleich der oben gefundenen Zahl. Bei einer Curve $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung $\varrho^{\text{ter}}$ Classe ergiebt sich, wenn dieselbe wiederum wie oben als Fläche $(n, r, m)$ aufgefasst wird, so dass $n=0$, $r=\nu$, $m=\varrho$ ist, $n+r+m=\nu+\varrho$, d. i. der bekannten Zahl der Normalen an die Curve aus einem Punkte, der übrigens auch bei ebenen Curven ersichtlich nicht nothwendig in der Ebene der Curve zu liegen braucht. Die Zahl der Normalen endlich aus einem Punkte auf eine Developpable $D$ $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung, $\mu^{\text{ter}}$ Classe ist gleich der Classe der Developpablen $\Delta$, welche von den Ebenen eingehüllt, die auf den Berührungsebenen senkrecht stehen und durch die Berührungs-Generatrix gehen, also der sogenannten rectificirenden Fläche der Developpablen $D$, durch deren Abwickelung die Cuspidalcurve von $D$ eine Gerade wird. $\Delta$ ist die Enveloppe der Ebenen, welche die Generatricen der Fläche $D$ $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung (oder die Tangenten ihrer Cuspidalcurve $C$ $\varrho^{\text{ter}}$ Classe) mit den entsprechenden Punkten der Curve $\mu^{\text{ter}}$ Ordnung verbinden, welche der Curve $(D, E_\infty)$ in Bezug auf $C_\infty^2$ polar ist, also ist $\Delta$ von der Classe $\varrho+\mu$. Die beiden Torsen $D'$ und $D''$, die wir zu jedem ebenen Schnitte einer windschiefen Regelfläche fanden, sind hier bei der developpablen Regelfläche $D$, welches auch der ebene Schnitt sei, stets $D$ selbst und die rectificirende Fläche $\Delta$, welche letztere freilich nicht $D$ tangential umschrieben ist, wie $D''$ der windschiefen Regelfläche. Also die Zahl der Normalen aus einem Punkte auf eine Developpable $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung, $\mu^{\text{ter}}$ Classe ist $\varrho+\mu$. Wird die Developpable als eigentliche Fläche $(n, r, m)$ aufgefasst, so ist $n=\varrho$, $r=\mu$, $m=0$, also $n+r+m=\varrho+\mu$, womit die Richtigkeit des oben vermuthungsweise ausgesprochenen Gesetzes auch für diesen Fall bestätigt ist.

---

*) Dass die Zahl der Normalen in einer Ebene stets $r$ ist, bedarf kaum eines Beweises.

An einen allgemeinen Kegel $n^{\text{ter}}$ Ordnung (also von der Classe $n(n-1)$) gehen demnach von einem Punkte $n^2$ Normalen, an eine allgemeine Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung $n(n^2-n+1)$; der $n$-fache Punkt hat folglich eine Verminderung um $n(n-1)^2$ herbeigeführt, was auch aus der Zahl $n+r+m$ zu entnehmen sein würde, da durch einen $n$-fachen Punkt nur die Classe afficirt und zwar um $n(n-1)^2$ vermindert wird.

*Ist diese Zahl $n+r+m$ richtig, so würde sich auch das interessante Resultat ergeben, dass für zwei polare Flächen die Zahl der Normalen aus einem Punkte (wie auch die in einer Ebene) dieselbe ist.*

20. Gehen wir zur windschiefen Regelfläche $S$ zurück.

Die beiden längs zweier ebenen Schnitte $C_1$ und $C_2$ umschriebenen Torsen $D_1'$ und $D_2'$ $r^{\text{ter}}$ Classe schneiden in eine beliebige Ebene $E$ zwei Curven $r^{\text{ter}}$ Classe ein, welche ersichtlich projectivisch auf einander bezogen sind, indem sich solche Tangenten entsprechen, welche Spuren von auf derselben Generatrix berührenden Ebenen sind. Das Erzeugniss der Schnittpunkte entsprechender Tangenten müsste $2\,r^{\text{ter}}$ Ordnung sein, ist aber nur von der Ordnung $n$, nämlich der ebene Schnitt $(E, S)$; dies weist auf $2r-n$ coincidirende entsprechende Tangenten hin: $n$ von denselben sind die Spuren der Tangentenebenen in den $n$ Punkten $(C_1, C_2)$, die $2r-2n$ übrigen sind Spuren von Berührungsebenen, die längs einer ganzen Generatrix berühren; dies geschieht, sobald eine Generatrix von der ihr unendlich nahen getroffen wird. Die Regelfläche nimmt längs einer solchen Generatrix den Charakter einer Torse an; Herr Cayley nennt derartige Geraden deshalb Torsallinien. Diese Torsallinien bilden die Wendecurve (spinode curve) der Regelfläche; die Berührungsebenen längs derselben ersetzen die stationär berührende Torse. *Eine windschiefe Regelfläche $n^{\text{ten}}$ Grades und $r^{\text{ten}}$ Ranges hat demnach $2(r-n)$ Torsallinien*).* Die Begegnungspunkte einer Torsallinie mit ihrer unendlich nahen Generatrix nennen wir mit Herrn de la Gournerie eine Spitze der Regelfläche (sommet); während die Regelfläche in allen andern Punkten der Torsallinie immer von derselben Ebene (die durch die beiden auf einander folgenden Generatricen geht) berührt wird, berühren alle übrigen Ebenen durch die Torsallinie, also auch unter andern die zu jener senkrechte in der Spitze. Die Berührungscurven aller Flächen $D''$ gehen demnach stets durch alle $2(r-n)$ Spitzen.

21. Zu der Betrachtung dieser Berührungscurven $C''$ wollen wir uns nun wenden; ist die ebene Curve $C'$, längs deren die Fläche $D'$ umschrieben ist, die unendlich ferne Curve $C_\infty$ von $S$, so ist $C''$ —

*) Aus Nr. 17 ist zu entnehmen: $r = 2(n+p-1) - \theta$; folglich ist die oben ermittelte Zahl der Torsallinien gleich $2n + 4(p-1) - 2\theta$; also wenn $\theta = 0$, ist sie $2n + 4(p-1)$, wie Herr Lüroth, Borchardt's Journ. Bd. 67 S. 139, gefunden hat.

dann $C_0$ genannt — die Strictionslinie der Regelfläche: die Curve der Centralpunkte der Generatricen, d. i. der Punkte, welche je der Nachbargeneratrix am nächsten sind.

Die Paare der zu einander normalen Ebenen durch jede Generatrix bilden bekanntlich eine im Allgemeinen elliptische Involution; desgleichen die Paare der zugehörigen Berührungspunkte ebenfalls eine elliptische Involution. Die Coincidenzebenen der Ebenen-Involution berühren den Kreis $C^2_\infty$; die (imaginäre) Developpable $D_i$ sämmtlicher Coincidenzebenen ist deshalb $2n^{\text{ter}}$ Classe. Die Berührungscurve $B_i$ von $D_i$, also die Curve der Coincidenzpunkte der Punkt-Involutionen ist von der Ordnung $2r$, da jede Torse $D'$ mit $C^2_\infty$ $2r$ Tangenten gemein hat. Auf den Torsallinien ist die Involution parabolisch; die Spitze ist allen andern Punkten zugeordnet und vereinigt beide Coincidenzpunkte, liegt demnach auf $B_i$; auf den $2n$ Generatricen ferner, welche $C^2_\infty$ treffen, ist die Involution gleichfalls parabolisch; alle andern Punkte einer solchen Generatrix $g_i$ sind dem Punkte $b_i$ zugeordnet, in dem diejenige Ebene durch $g_i$ berührt, welche $C^2_\infty$ tangirt; denn diese ist zu allen andern Ebenen durch $g_i$ normal. Liegt eine Generatrix $(g_\infty)$ von $S$ in $E_\infty$, so ist die Involution derselben auch parabolisch, alle endlichen Ebenen durch $g_\infty$ sind normal zu $E_\infty$, diese also die Coincidenzebene; sei $b_\infty$ ihr Berührungspunkt. $B_i$ und $D_i$ behalten ihre Ordnung, resp. Classe. Die Curve $C''$ kann $C'$ nur dort begegnen, wo letztere von $B_i$ getroffen wird; also ist $C''$ von der $2r^{\text{ten}}$ Ordnung.

*Die Curve also der Punkte, welche in den Involutionen der Generatricen einer windschiefen Regelfläche $n^{\text{ten}}$ Grades, $r^{\text{ten}}$ Ranges den Punkten einer ebenen Schnittcurve zugeordnet sind, ist $2r^{\text{ter}}$ Ordnung und geht durch alle Spitzen der Regelfläche; dies gilt auch im speciellen Falle von der Strictionslinie. Die längs beider Curven umschriebenen Torsen sind von der Classe $r$, resp. $n+r$.*

Enthält $E_\infty$ $q$ Generatricen $(g_\infty)$ von $S$, so zerfällt $C'_\infty$ in $q$ Gerade und eine Curve $(n-q)^{\text{ter}}$ Ordnung, die Torse $D'$ in $q$ Büschel und eine eigentliche Torse $(r-q)^{\text{ter}}$ Classe; die Curve $B_i$ berührt jede dieser Geraden $g_\infty$ in dem Punkte $b_\infty$ und trifft $E_\infty$ in $2r-2q$ andern Punkten. Jeder der Punkte $b_\infty$ ist allen andern Punkten seiner Geraden $g_\infty$ zugeordnet. Die $2(r-q)$ übrigen Punkte sind die Begegnungspunkte der eigentlichen Strictionslinie $C_0$ mit $E_\infty$; also ist die Strictionslinie in diesem Falle von der Ordnung $2(r-q)$; die längs derselben umschriebene Torse $D''_0$, deren Ebenen auf denen der asymptotisch berührenden Torse $D'_\infty$ normal sind, hat die Classe $n+r-2q$.

22. Bei den Regelflächen 2. Grades gehören wegen der zwei Schaaren zu jedem ebenen Schnitte $C'$ *zwei Curven* $C''$; *bei den Hy-*

*perboloiden sind dieselben* 4. *Ordnung;* dies erhellt in diesem einfachen Falle auch daraus, dass von dem Pole einer beliebigen Ebene $E$ an die betreffende Torse $D''$, welche 4ter Classe ist, 4 Ebenen gehen, deren Berührungspunkte — Punkte von $C''$ — also auf $E$ liegen. In Folge der projectivischen Beziehung, in der die beiden $C''$ zu dem Kegelschnitte $C'$ stehen, ist ihr Geschlecht 0; da ein Doppelpunkt unmöglich ist, so *sind sie zweiter Species.* Jede trifft die Geraden der zugehörigen Schaar in einem Punkte, dem sie erzeugenden, also begegnen beide $C''$ einander in 10 Punkten; von diesen liegen 4 imaginäre auf der Curve $C'$: es sind dies die Berührungspunkte der 4 Ebenen des längs $C'$ umschriebenen Kegels, welche $C_\infty^2$ tangiren, und durch sie gehen beide Curven $B_i$. Die Tangentenebene der $S^2$ in jedem der 6 andern Punkte ist zu der Geraden normal, welche den Punkt mit dem Pole der Ebene von $C'$ verbindet. Haben wir es mit den beiden Strictionslinien $C_0$ zu thun, so ist dieser Pol der Mittelpunkt von $S^2$; wir sehen also, dass *die beiden Strictionslinien eines allgemeinen Hyperboloids sich im Endlichen in den Scheiteln der Fläche (Axen-Endpunkten), von denen zwei freilich auch imaginär sind, treffen.* Aus der normal symmetrischen Lage der beiden Schaaren gegen jede der 3 Hauptebenen folgt selbstverständlich auch die der beiden Strictionslinien und in Folge dessen die Identität ihrer orthogonalen Projectionen auf eine Hauptebene oder eine ihr parallele Ebene.

23. Wenn das Hyperboloid ein Rotationshyperboloid ist, so degenerirt jede der beiden Strictionslinien. $C_\infty$ berührt in diesem Falle den Kreis $C_\infty^2$ doppelt; die reelle Berührungssehne $p_\infty$ ist allen Parallelkreis-Ebenen gemeinsam, und ihr Pol $A_\infty$ in Bezug auf $C_\infty^2$ liegt auf der Rotationsaxe. Die beiden (imaginären) Berührungspunkte seien $t_\infty$. Wir unterscheiden die beiden Schaaren $g$ und $l$, und beschäftigen uns zunächst blos mit den $g$; die beiden Geraden $g$, welche nach den $t_\infty$ gehen, seien $g_i$; die Ebene, welche $S^2$ in einem $t_\infty$ tangirt, ist, weil sie $C_\infty^2$ berührt, zu allen Ebenen durch die betreffende $g_i$ normal. Also nehmen diese beiden Geraden an der Strictionslinie der Geraden $g$ theil; der übrige Bestandtheil, die eigentliche Strictionslinie $C_0^g$, ist, weil die volle Curve zweiter Species ist, ein Kegelschnitt. Die Polarcurve von $C_\infty$ in Bezug auf $C_\infty^2$ berührt auch beide Curven in den $t_\infty$; und die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden polaren Curven gehen, wie leicht einzusehen ist, alle durch $A_\infty$; diese Geraden sind aber die Spuren der Ebenen des längs $C_0^g$ umschriebenen Kegels; derselbe hat mithin seine Spitze in $A_\infty$. Folglich ist $C_0^g$ der Kehlkreis. Dasselbe gilt aber ersichtlich für $C_0^l$. *Der Kehlkreis ist also gemeinsame Strictionslinie der beiden Schaaren eines Rotationshyperboloids:* ein bekanntes und auf anderem Wege sehr leicht zu beweisendes Resultat; hier kam es uns vorzüglich darauf an, es aus dem allgemeinen

Resultate abzuleiten und besonders die Art und Weise der Degeneration zu erkennen.

24. Das hyperbolische Paraboloid enthält in jeder Schaar eine unendlich entfernte Gerade $g_\infty$, resp. $l_\infty$; die Strictionslinie ist deshalb für jede der beiden Schaaren nach Nr. 21. nur noch ein Kegelschnitt. Wenn $a^g_\infty$ der Pol der Geraden $l_\infty$ in Bezug auf $C^2_\infty$ ist, also der unendlich ferne Normalpunkt der Leitebenen der Schaar $g$, so ist dieser Punkt oder besser sein Strahlbüschel in $E_\infty$ als die Polarfigur von $l_\infty$, dem Schnitt von $E_\infty$ mit dem Paraboloide ausser $g_\infty$, zu betrachten, demnach auch als die Spur der längs der Strictionslinie $C^g_0$ der Schaar $g$ umschriebenen Torse $D''$; da die Strictionslinie ein Kegelschnitt ist, so ist diese Torse ein Kegel 2. Grades, $a^g_\infty$ also sein Scheitel, folglich ist die Ebene von $C^g_0$ diejenige Diametralebene, welche den zur Leitebene der $g$ senkrechten Sehnen conjugirt ist, $C^g_0$ selbst eine Parabel. Aehnliches gilt für die andere Strictionslinie $C^l_0$. Ausser im Berührungspunkte $(g_\infty, l_\infty)$ der Ebene $E_\infty$ treffen sich diese beiden Parabeln noch in einem endlichen Punkte, dessen Berührungsebene, wie beim Hyperboloide, auf dem nach ihm gehenden Durchmesser normal ist, also im Scheitel des Paraboloids, und beide Parabelebenen gehen mithin durch die Axe. *Die Strictionslinien der beiden Schaaren eines hyperbolischen Paraboloids sind zwei sich im Scheitel begegnende Parabeln, deren Ebenen je die zur Leitebene der betreffenden Schaar senkrechten Sehnen halbiren.*

25. Wenn das Paraboloid gleichseitig ist, also die beiden Leitebenen zueinander normal sind, so sind $g_\infty$ und $l_\infty$ in Bezug auf $C^2_\infty$ conjugirt; $a^g_\infty$ liegt auf $g_\infty$, der Kegel, welcher längs der Strictionslinie $C^g_0$ umschrieben ist, zerfällt in zwei Ebenenbüschel, die Berührungscurve in die Gerade $g_\infty$ und die durch $a^g_\infty$ gehende Gerade $l$, welche die eigentliche Strictionslinie ist.

*Die Strictionslinie* also *jeder der beiden Schaaren eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids ist diejenige Gerade der andern Schaar, welche auf der Leitebene der betreffenden Schaar senkrecht steht. Beide Strictionsgeraden begegnen sich im Scheitel des Paraboloids.* Dieses bekannte Resultat ist natürlich leicht auch auf andere Weise zu erreichen*).

26. Wir wenden uns nochmals *zu den Raumcurven* zurück, *um die von den Normalebenen einer solchen Curve $C$ eingehüllte Developpable* $N$ zu betrachten; $\nu$, $\varrho$, $\mu$ haben für $C$ dieselbe Bedeutung wie oben (Nr. 4). *$N$ ist ersichtlich von der Classe*

---

*) Man vergleiche Herrn de la Gournerie's Traité de géométrie descriptive, Livre VII.

$$\mu' = \varrho + \nu,$$

denn die Normalebenen verbinden die Punkte der Curve $C$ $\nu^{\text{ter}}$ Ordnung mit den ihnen projectivisch entsprechenden Tangenten der Curve $n_\infty$ $\varrho^{\text{ter}}$ Classe und $\mu^{\text{ter}}$ Ordnung, welche dem Schnitt $D_\infty$ der Ebene $E_\infty$ mit der Tangentenfläche $D$ von $C$ in Bezug auf $C_\infty^2$ polar ist.

*Durch jeden Punkt gehen demnach stets* $\varrho + \nu$ *Normalebenen und auch, was daraus folgt, so viele Normalen an eine Curve* $C$ $\nu^{\text{ter}}$ *Ordnung* $\varrho^{\text{ter}}$ *Classe;* so dass der nämliche Satz wie für die ebenen Curven gilt (Nr. 19). *Hat die Curve* $C$ $\theta$ *Wendetangenten* $W$, so resultiren daraus $\theta$ Generatricen $W'$ von $N$ in $E_\infty$, welche, da $E_\infty$ für diese nicht Berührungsebene ist, an dem fernern Schnitt $n_\infty$ Wendetangenten sind*); sie sind ja auch reciprok zu den Rückkehrpunkten, welche durch die Geraden $W$ auf $D_\infty$ veranlasst werden.

Für die $\nu$ Punkte $R_\infty = (E_\infty, C)$ ist $E_\infty$ die Normalebene, so dass diese Ebene eine $\nu$-fache Berührungsebene von $N$ ist; da die Classe der Developpable $N$ $\nu + \varrho$ und die von $n_\infty$ $\varrho$ ist, so muss jede der $\nu$ Berührungen eine gewöhnliche sein; bei einer solchen ist im Allgemeinen die Berührungsgeneratrix eine einfache Tangente des fernern Schnitts*); in unserem Falle aber sind die $\nu$ Generatricen, längs deren $E_\infty$ berührt, ersichtlich Wendetangenten von $n_\infty$, da sie den $\nu$ Rückkehrpunkten $R_\infty$ von $D_\infty$ polar sind. Nimmt man nun an, dass diese Generatricen — wir wollen sie $\Gamma'$ nennen — Cuspidalgeneratricen von $N$ sind, so ergiebt sich zunächst, dass die Ordnung von $N$ ist,

$$\varrho' = \mu + 3\nu + \theta;$$

vergleichen wir einen beliebigen vollständigen ebenen Schnitt $n$ von $N$ mit dem unvollständigen Schnitte $n_\infty$, so zeigt sich, da jener von der Ordnung $\mu + 3\nu + \theta$, der Classe $\nu + \varrho$ ist und $\nu' + \nu + \theta'$ Rückkehrpunkte hat (wobei $\nu'$ die Ordnung der Cuspidalcurve $K'$ von $N$ und $\theta'$ die Zahl der Cuspidalgeneratricen von $N$ ausser den $\Gamma'$ ist), während $n_\infty$ $\mu^{\text{ter}}$ Ordnung, $\varrho^{\text{ter}}$ Classe ist und $\nu' - 4\nu - 2\theta + \theta'$ Rückkehrpunkte hat, dass $n_\infty$ $\nu + \theta$ Wendetangenten mehr hat als $n$: die Geraden $W'$ und $\Gamma'$. Also sind die $\Gamma'$ in der That Cuspidalgeneratricen.

*Die Normalebenen einer Raumcurve* $(\nu, \varrho, \mu)$ *mit* $\theta$ *Wendetangenten hüllen also eine abwickelbare Fläche von der Classe* $\nu + \varrho$, *der Ordnung* $\mu + 3\nu + \theta$ *ein, welche in* $E_\infty$ $\nu$ *Cuspidalgeneratricen hat, längs deren sie von dieser Ebene berührt wird***).

---

*) Cremona, Teoria delle superficie Nr. 13.

**) Ist die Curve $C$ rational, ihr Geschlecht also 0, und hat sie $\beta$ Rückkehrpunkte, so ist $\varrho = 2(\nu - 1) - \beta$, $\mu + \theta = 3(\nu - 2) - 2\beta$; folglich $\mu' = 3\nu - 2 - \beta$, $\varrho' = 6(\nu - 1) - 2\beta$; was für $\beta = 0$ mit Herrn Em. Weyr's Angabe stimmt. Journ. f. Math. Bd. 74 S. 277.

Man überzeugt sich leicht, dass, ceteris paribus, die Summe $\mu + \theta$ constant bleibt, also hängt die Ordnung der Normalebenen-Torse nur scheinbar von der Anzahl der Wendetangenten der ursprünglichen Curve ab; $\theta$ ist am grössten, wenn die Curve eben ist, weil dann $\mu = 0$ ist.

Die Curve $n_\infty$ hat offenbar nur $\nu + \theta$ Wendetangenten, also $n$ keine: die Torse $N$ hat demnach keine Wendeberührungsebene. Auch aus dem gleichzeitigen Bestehen der beiden Gleichungen

$$2(\varrho + \nu - 1) = \mu + 3\nu + \theta + \alpha' - 2p$$

und

$$2(\varrho - 1) = \nu + \mu + \theta - 2p,$$

in denen $\alpha'$ die Zahl der Wendeberührungsebenen von $N$ und $p$ das Geschlecht von $C$ und von $N$ ist und von denen die erstere für einen ebenen Schnitt von $N$, die andere für einen Projectionskegel von $C$ gilt, lässt sich folgern, dass $\alpha' = 0$; was übrigens auch a priori zu erwarten war.

27. *Die Ordnung $\nu'$ der Cuspidalcurve $K'$ von $N$ ist*, weil jede der $\alpha = 3(\mu - \varrho) + \nu + \theta$ Wendeebenen von $D$ einen unendlich fernen Punkt von $K'$ liefert,

$$\nu' = 4\nu + \alpha + 2\theta = 3(\mu - \varrho + \theta) + 5\nu,$$

worin wiederum nur die Summe $\mu + \theta$ auftritt.

Da $N$ ausser den $\nu$ Cuspidalgeneratricen $\Gamma'$ in $E_\infty$ angenommenermassen noch $\theta'$ andere hat, so liefert ein ebener Schnitt von $N$, weil er $\nu' + \nu + \theta' = 3(\mu + \theta - \varrho) + 6\nu + \theta'$ Rückkehrpunkte hat,

$$2(\mu + 3\nu + \theta - 1) = \varrho + \nu + 3(\mu + \theta - \varrho) + 6\nu + \theta' - 2p;$$

dies in Verbindung mit

$$2(\varrho - 1) = \nu + \mu + \theta - 2p$$

giebt:

$$\theta' = 0:$$

also *existiren ausser den unendlich entfernten $\Gamma'$ keine Cuspidalgeneratricen auf $N$.*

$K'$ ist die Curve der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln von $C$, die Rückkehrpunkte auf $K'$ sind Centra von Kugeln mit Maximal- oder Minimalradien; sei deren Zahl $\beta'$, so ist wegen

$$\alpha' - \beta' = 2(\mu' - \nu') \text{ und } \alpha' = 0:$$

$$\beta' = 6(\mu + \theta) - 8(\varrho - \nu).$$

Die Formeln für die übrigen Singularitäten von $N$ sind von minder einfacher Gestalt.

Wenn die Curve $C$ eben ist, so degenerirt die Developpable $D$ in die $\varrho$-fache Ebene $E$ der Curve, die Curve $n_\infty$ demnach zu dem $\varrho$-fachen

Strahlbüschel um den unendlich fernen Normalpunkt der Ebene $E$. *Die Normalebenenfläche einer ebenen Curve $\nu^{ter}$ Ordnung, $\varrho^{ter}$ Classe mit $\theta$ Wendetangenten ist also ein auf der Ebene der Curve normaler Cylinder von der Classe $\nu + \varrho$, der Ordnung $3\nu + \theta$, welcher in $E_\infty$ $\nu$ Cuspidalmantellinien hat, längs deren er von dieser Ebene berührt wird. Sein Schnitt mit der Ebene $E$ ist die Evolute der Curve.* Die Formeln für die Cuspidalcurve sind natürlich, weil dieselbe sich auf einen Punkt reducirt, illusorisch. — Als einziges Beispiel möge die cubische Raumcurve dienen; bei derselben ist: $\nu = \mu = 3$, $\varrho = 4$, $\theta = 0$; also:

$$\mu' = 7,\ \varrho' = \nu' = 12,\ \beta' = 10.$$

28. Wenn man weiss, dass eine Raumcurve der totale oder partielle Schnitt zweier Flächen ist, und in wie vielen Punkten sie im letzteren Falle dem weitern Schnitt begegnet, so kann man auch leicht die Classe der Developpable der Normalebenen ermitteln. Um nicht die Betrachtung zu sehr zu compliciren, nehmen wir die beiden sich durchschneidenden Flächen ohne singuläre Curven an. Zunächst betrachten wir blos eine derselben, $F$, welche $n^{ter}$ Ordnung sei. Die längs der Curve $C^\nu$ der Fläche $F^n$ umschriebene Torse ist von der Classe $(n-1)\nu$ [und von der Classe $(n-1)\nu - s_b - 2s_c$, falls $F^n$ mit einer Doppelcurve $b^{ter}$ Ordnung und einer Cuspidalcurve $c^{ter}$ Ordnung behaftet wäre, denen die Curve $C^\nu$ in $s_b$ resp. $s_c$ Punkten begegnete]. Die Polarcurve $N_\infty$ der unendlich fernen Curve dieser Torse in Bezug auf $C^2_\infty$ ist demnach von der Ordnung $(n-1)\nu$; *die Flächennormalen von $F^n$ längs $C^\nu$* verbinden nun die Punkte von $C^\nu$ mit den projectivisch entsprechenden Punkten von $N_\infty$, folglich *erzeugen sie eine Fläche (Normalie) vom Grade $(n-1)\nu + \nu = n\nu$ und vom selben Geschlechte $p$ wie $C^\nu$*; die Normalen in den Doppel- und Rückkehrpunkten, deren $C^\nu$ $\delta$ resp. $\beta$ habe, sind Doppel- und Cuspidalgeneratricen der Normalie. Hat $C^\nu$ die Classe $\varrho$, so ist der Rang $r$ der Normalie gleich $\varrho + 2\nu(n-1)$, weil sowohl $2(n\nu - 1) - r$, als auch $2(\nu - 1) - \varrho = \beta - 2p$ ist. Die Normalie hat demnach $2(n\nu + \varrho - 2)$ Torsallinien (Nr. 20), also an so vielen Stellen ist ein Element von $C^\nu$ Krümmungslinie.

29. Die zweite Fläche, auf welcher $C^\nu$ liegt, sei $F^{n_1}$ $n_1^{ter}$ Ordnung. Dieselbe liefert eine Normalie vom Grade $\nu n_1$. Beide Normalien sind ersichtlich projectivisch auf einander bezogen, indem sich die in dem nämlichen Punkte von $C^\nu$ errichteten Normalen beider Flächen entsprechen. Die Verbindungsebenen entsprechender Normalen, also die Normalebenen von $C^\nu$, hüllen eine abwickelbare Fläche ein, deren Classe durch die eines ebenen Schnitts am besten ermittelt wird. Die Schnittcurven einer Ebene mit den beiden Normalien würden durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve von der

Classe $\nu(n+n_1)$ erzeugen, wenn nicht Coincidenzen entsprechender Punkte stattfänden. Solche kommen aber vor und zwar erstens in den $\nu$ Spuren der Curve $C^\nu$, ferner in den Spuren der Normalen in den $s$ Begegnungspunkten von $C^\nu$ mit dem ferneren Schnitte der beiden Flächen $F^n$ und $F^{n_1}$, endlich in den Spuren der Normalen in den Doppel- und Rückkehrpunkten der $C^\nu$; denn in den beiden letzten Fällen haben die Flächen wegen der Berührung gemeinsame Normalen; in den Rückkehrpunkten sogar haben beide Flächen eine gemeinsame Berührungsebene in zwei unendlich nahen Punkten (in der Richtung der Rückkehrtangente), also die Normalien nicht blos die Cuspidalgeneratricen, sondern auch noch je die Nachbargeneratrix gemein. Daraus geht hervor, dass, während jeder Coincidenzpunkt der beiden ersten Arten die Classe der Normalebenen-Fläche um 1 und jede durch einen Doppelpunkt bewirkte Coincidenz um 2 vermindert, jeder der durch die Rückkehrpunkte hervorgerufenen Coincidenzpunkte eine Reduction um 3 veranlasst.

*Die Classe der Developpable der Normalebenen einer Curve $\nu^{ter}$ Ordnung, in der sich 2 allgemeine Flächen $n^{ter}$ und $n_1{}^{ter}$ Ordnung durchschneiden und welche $\delta$ Doppel- und $\beta$ Rückkehrpunkte hat und dem etwaigen ferneren Schnitte der beiden Flächen in s Punkten begegnet, ist* folglich

$$\mu' = \nu(n+n_1-1) - 2\delta - 3\beta - s.$$

Stellen wir dies mit dem früheren Resultat zusammen:

$$\mu' = \nu + \varrho,$$

so ergiebt sich die bekannte Formel:

$$\varrho + s = \nu(n+n_1-2) - 2\delta - 3\beta \text{*)}.$$

Treffen sich 2 andere Flächen von den Ordnungen $n_2$ und $n_3$ ebenfalls in der Curve $C^\nu$ und begegnet dieselbe in diesem Falle dem fernen Schnitt in $s'$ Punkten, so ist ersichtlich

$$s' - s = \nu(n_2+n_3-n-n_1),$$

welche Formel ein Mittel liefert, das eine $s$ zu finden, wenn das andere bekannt ist.

30. Befindet sich unter den ferneren Schnittcurven von $F^n$ und $F^{n_1}$ z. B. eine, welche auf $F^n$ $\sigma$-fach, auf $F^{n_1}$ $\sigma_1$-fach ist, und begegnet $C^\nu$ dieser Curve in $s'$ Punkten [von denen auch mehrere zusammenfallen können, so dass dann die beiden $F$ statt an verschiedenen Stellen mit je einem Mantel sich an derselben Stelle mit meh-

*) Salmon-Fiedler, anal. Geom. des Raumes II S. 108; Cremona, Teoria delle superficie Nr. 96.

reren Mänteln tangiren], so sind die beiden Normalien vom Grade $n\nu - s'(\sigma - 1)$ resp. $n_1\nu - s'(\sigma_1 - 1)$, also die Normalebenen-Torse von der Classe

$$\mu' = \nu(n + n_1 - 1) - s'(\sigma + \sigma_1 - 1) - 2\delta - 3\beta - s'',$$

wobei $s''$ die Zahl der Begegnungspunkte von $C^\nu$ mit dem einfachen Theile des ferneren Schnitts ist. Aehnlich sind andere Fälle zu behandeln; sie alle in einer Formel zu vereinigen, würde diese zu sehr compliciren, abgesehen davon, dass es überhaupt nicht leicht sein möchte, alle zu übersehen. Auch die obige Formel dürfte, wenn $\mu'$ und das eine $s$ bekannt sind, oft ein Mittel bieten, das andere $s$ zu ermitteln.

Darmstadt, Anfang October 1872.

# Ueber Systeme von Kegelschnitten.

Von Rosanes in Breslau.

Die Untersuchung eines Systems von vier in einer Ebene gelegenen Kegelschnitten ist für die Theorie der nach Steiner benannten Fläche vierter Ordnung wegen der von Herrn Weierstrass entdeckten fundamentalen Eigenschaft derselben, dass die Coordinaten ihrer Punkte sich durch drei Parameter als homogene ganze Functionen zweiten Grades darstellen lassen, von Wichtigkeit geworden. Clebsch hat in seiner der erwähnten Fläche gewidmeten Abhandlung*) auf diese Darstellung die algebraische Untersuchung der Fläche gegründet und ihre charakteristischen Eigenschaften durch das Studium des Systems von Kegelschnitten, welche aus vier gegebenen durch lineare Verbindung hervorgehen, entwickelt. Es kam hierbei hauptsächlich darauf an, diejenigen Elemente, welche für das Kegelschnitt-System charakteristisch sind, und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen zu ermitteln.

Die von Clebsch gewonnenen Resultate veranlassten mich, den genauen Zusammenhang näher zu verfolgen, welcher zwischen dem aus vier Curven zweiter Ordnung constituirten Systeme und einer gewissen Schaar von Curven zweiter Classe besteht. Beide Gruppen werden durch einander vollständig und eindeutig definirt. Ein beliebiger Kegelschnitt jenes Systems und ein beliebiger Kegelschnitt der zugeordneten Schaar stehen in einer einfachen algebraischen Beziehung. Ersetzt man nämlich in der linken Seite der Gleichung des erstern in Punktcoordinaten die Quadrate und Producte der Veränderlichen durch die entsprechenden Coefficienten aus der Glei-

*) „Ueber die Steiner'sche Fläche" Borchardt's Journal Bd. 67. p. 1.

chung des letztern in Liniencoordinaten, so verschwindet der entstehende Ausdruck*).

Die geometrische Bedeutung einer solchen Beziehung ist bekannt. Der in Punktcoordinaten vorgelegte Kegelschnitt ist einem sich selbst conjugirten Dreiecke (und somit unendlich vielen) des in Liniencoordinaten gegebenen umschrieben, woraus zugleich folgt, dass der letztere unendlich vielen sich selbst conjugirten Dreiecken des erstern eingeschrieben ist. Die dadurch bedingte Zuordnungsweise fasste ich als ein Princip auf, durch welches jeder Curve zweiter Ordnung ein vierfach unendliches System von Curven zweiter Classe, welches ich das zur gegebenen „conjugirte" nenne, und überhaupt jeder Gruppe von Kegeschnitten eine andere, die ihr „conjugirte," derart gegenübergestellt wird, dass die Eigenschaften der einen mit denen der andern in einem einfachen Zusammenhange stehen. Die Entwicklung und Anwendung dieses Princips, welches sowohl für die geometrische als die algebraische Theorie der Kegelschnitt-Gruppen sich fruchtbar erweist, soll den Gegenstand des vorliegenden Aufsatzes bilden**).

Einem derartigen Zusammenhange zwischen zwei Kegelschnitt-Gruppen, nämlich demjenigen Falle, wo jede der beiden Gruppen durch drei Elemente bestimmt wird, begegnet man auch in den neuerdings von Herrn Schröter publicirten Untersuchungen über die Curven dritter Ordnung***). Durch rein geometrische Betrachtungen gelangt Herr Schröter von einem Kegelschnittgewebe zu einem Kegelschnittnetz, für welches die Enveloppe der Verbindungslinien conjugirter Pole identisch ist mit der Tripelstrahlencurve des Gewebes. Aus irgend drei Kegelschnitten des Gewebes werden die Kegelschnitte zur Bestimmung des Netzes construirt, indem man zu den drei ersteren paarweise die gemeinschaftlichen Tripel conjugirter Punkte aufsucht und je zweien

---

*) Vgl. das System (33) in der citirten Abh. S. 12.

**) Aus einer Note „observatio geometrica" Annali di Mat. Ser. II. T. II. p. 528 habe ich inzwischen entnommen, dass Herr H. J. Stephen Smith dasselbe Zuordnungsprincip aufgestellt und seine Untersuchungen in der London Math. Soc. gelesen hat. Auf mein Ersuchen hatte Hr. Smith die Freundlichkeit, mir seine auf diesen Gegenstand bezügliche, an Resultaten reiche Abhandlung (Proc. of the London Math. Soc. 28. Mai 1868) vor wenigen Tagen zuzuschicken. Ich ersehe daraus, dass Herr Smith die an das Zuordnungsprincip sich anschliessenden allgemeinen Folgerungen grossentheils durch rein geometrische Methoden erlangt. Ich werde ausserdem diese Arbeit noch an einigen späteren Stellen besonders anführen. Breslau, 2. Januar 1873.

***) „Ueber eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve dritter Ordnung", Math. Ann. Bd. V. S. 50.

dieser drei Dreiecke einen Kegelschnitt umschreibt*). Offenbar ist das Netz dem Gewebe in dem oben bezeichneten Sinne „conjugirt."

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit ist folgendermassen angeordnet. Nach Erörterung des Zuordnung-Principes und der an seinen algebraischen Ausdruck sich unmittelbar anknüpfenden Folgerungen (§ 1.) werden die verschiedenen möglichen Fälle conjugirter Gruppen aufgestellt und ihre Beziehungen im Allgemeinen entwickelt (§ 2.). In § 3. wird das Netz und das conjugirte Gewebe näher studirt und namentlich der Zusammenhang der Combinanten jener Gebilde dargestellt; daran schliesst sich eine Herleitung der Curve dritter Ordnung, deren Polaren das gegebene Netz bilden. Bezüglich der fünfgliedrigen Gruppe habe ich nur eine bemerkenswerthe algebraische Identität nachgewiesen.

Der übrige Theil ist der Betrachtung des Systems von vier Kegelschnitten in Verbindung mit der conjugirten Schaar gewidmet. Mit Benutzung gewisser in § 4. auseinandergesetzter Operationen gebe ich in § 5. die Ausdrücke der wichtigsten Combinanten von vier Kegelschnitten durch die Combinanten der conjugirten Schaar und einige interessante Zusammenhänge zwischen den ersteren. Darauf folgt die Entwicklung geometrischer Eigenschaften und die Interpretation der aufgestellten algebraischen Formen (§ 6.), wobei ich mehrere von Clebsch mitgetheilten Resultate in die Darstellung aufgenommen habe, sowie die algebraischen Ausdrücke der für das System wichtigen Elemente (§ 7.). Anwendungen auf die Darstellung der Steiner'schen Fläche werden in § 8. gegeben. Den Schluss bildet die Darstellung von ternären quadratischen Formen durch vier Quadrate, insbesondere von vier Formen durch dieselben vier Quadrate (§ 9.), in Analogie mit den Methoden, welche Herr Gordan**) zur Verwandlung der cubischen quaternären Form in die Summe von fünf Cuben angewendet hat, und Folgerungen aus den erhaltenen Ausdrücken (§ 10.).

## § 1.

### Ueber eine gewisse Zuordnung von Kegelschnitten.

1. In diesem Aufsatze werde ich mich, wie üblich, folgender Bezeichnungen bedienen. Unter $x_1$, $x_2$, $x_3$; $y_1$, $y_2$, $y_3$ u. s. f. sollen die Coordinaten von Punkten $x$, $y$ u. s. f., unter $u_1$, $u_2$, $u_3$; $v_1$, $v_2$, $v_3$ u. s. f. die Coordinaten von Geraden $u$, $v$ u. s. f., unter $a_x$, $u_\alpha$ die Ausdrücke

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3\,, \qquad u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3$$

*) Vgl. S. 72 und 82 der Abhandlung.

**) „Ueber das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung" Math. Ann. Bd. V. S. 341.

verstanden werden. Ferner bedeuten $(ab)_1$, $(ab)_2$, $(ab)_3$ die Determinanten

$$(ab)_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2\,, \quad (ab)_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3\,, \quad (ab)_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

und $(abc)$ die Determinante dritten Grades

$$(abc) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \Sigma a_i (bc)_i = \Sigma b_i (ca)_i = \Sigma c_i (ab)_i\,, \quad i = 1, 2, 3,$$

demnach sind $(xy)_1$, $(xy)_2$, $(xy)_3$ die Coordinaten der Geraden $(x, y)$, $(uv)_1$, $(uv)_2$, $(uv)_3$ die des Punktes $(u, v)$, und

$$\Sigma (uv)_i (xy)_i = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}.$$

2. Eine quadratische Form wird symbolisch als ein Quadrat dargestellt:

$$\Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda = a_x^2 = a_x'^2 = a_x''^2\,; \quad \varkappa, \lambda = 1, 2, 3.$$

Die einfachsten damit in Verbindung stehenden Formen sind bekanntlich folgende. Die Determinante der quadratischen Form $a_x^2$ wird symbolisch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_1 a_2' a_3'' (a a' a'') = - a_1 a_2'' a_3' (a a' a'') = \cdots = \tfrac{1}{6} (a a' a'')^2.$$

Die Bedingung, unter welcher die Punkte $x$, $\xi$ in Bezug auf den Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ einander conjugirt sind, wird

$$0 = \Sigma a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa \xi_\lambda = a_x a_\xi\,;$$

endlich die Gleichung desselben in Liniencoordinaten oder die Bedingung dafür, dass die Gerade $u = (x, y)$ ihn berührt:

$$0 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x a_1 & a_x a_2 & a_x a_3 \\ a_y' a_1' & a_y' a_2' & a_y' a_3' \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_x a_y' (a a' u) = - a_x' a_y (a a' u) = \tfrac{1}{2} (a a' u)(a_x a_y' - a_y a_x') = \tfrac{1}{2} (a a' u)^2.$$

Aus zwei Kegelschnitten

$$a_x^2 = a_x'^2 = a_x''^2 = 0\,, \quad b_x^2 = b_x'^2 = b_x''^2 = 0$$

entsteht die *zweigliedrige Gruppe* (Büschel)

$$\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 = 0.$$

Die drei in ihr vorkommenden Geradenpaare entsprechen den Werthen $\varkappa : \lambda$, für welche

$$\varkappa^3 (a a' a'')^2 + 3 \varkappa^2 \lambda (a a' b)^2 + 3 \varkappa \lambda^2 (a b b')^2 + \lambda^3 (b b' b'')^2 = 0 \quad (1)$$

ist. Die Bedeutung der beiden mittleren Coefficienten wird im Folgenden in Betracht gezogen werden.

3. Ist der in Punktcoordinaten gegebene Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ gegen den in Liniencoordinaten gegebenen $u_\alpha^2 = 0$ derart gelegen, dass

$$a_\alpha^2 = a_{11}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{33} + 2a_{23}\alpha_{23} + 2a_{31}\alpha_{31} + 2a_{12}\alpha_{12}$$

verschwindet, so werde ich die beiden Curven einander *conjugirt* nennen. — Wird der erste Kegelschnitt in Liniencoordinaten durch $u_\beta^2 = u_{\beta_1}^2 = 0$, der zweite in Punktcoordinaten durch $b_x^2 = b_x'^2 = 0$ dargestellt, so dass $a_x^2 = (\beta\beta' x)^2$, $u_\alpha^2 = (bb'u)^2$, so erhält man:

$$a_\alpha^2 = (abb')^2 = (\alpha\beta\beta')^2,$$

d. i. gleich den Coefficienten von $3\varkappa\lambda^2$ in der Gleichung (1).

Wenn $u_\alpha^2 = 0$ in ein Punktepaar $y, z$ ausartet: $u_\alpha^2 = u_y \cdot u_z$, so wird

$$a_\alpha^2 = a_y \cdot a_z,$$

d. h. zwei in Bezug auf $a_x^2$ conjugirte Punkte, als Ort zweiter Classe betrachtet, bilden einen mit $a_x^2$ conjugirten Ort. *Dadurch wird die angewandte Bezeichnung gerechtfertigt erscheinen.*

Ebenso bilden zwei in Bezug auf $u_\alpha^2$ conjugirte Geraden, als Curve zweiter Ordnung betrachtet, eine mit $u_\alpha^2$ conjugirte Curve.

Wird $u_\alpha^2$ das Quadrat von $u_y$, so wird $a_\alpha^2 = a_y^2$. Ein auf $a_x^2$ gelegener (in Bezug auf $a_x^2$ sich selbst conjugirter) Punkt giebt, doppelt gerechnet, einen mit $a_x^2$ conjugirten Ort zweiter Classe; ebenso eine Tangente von $u_\alpha^2$, doppelt gerechnet, einen mit $u_\alpha^2$ conjugirten Ort zweiter Ordnung.

Der Kegelschnitt $a_x^2$ ist sich selbst — d. i. der Curve zweiter Classe $(aa'u)^2$ — conjugirt, sobald seine Determinante $(aa'a'')^2$ verschwindet (also wenn er in ein Geradenpaar ausartet).

4. Der Ausdruck $a_\alpha^2$ ist in den Coefficienten jeder der beiden Formen $a_x^2$, $u_\alpha^2$ linear. Sind demnach die Kegelschnitte $a_x^2$, $b_x^2$ .... zu $u_\alpha^2$ conjugirt, so ist es auch jeder Kegelschnitt der durch $a_x^2$, $b_x^2$, ... definirten Gruppe $\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \cdots$ — Ebenso ist jeder Kegelschnitt der Gruppe $\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \cdots$ jedem der Gruppe $\varkappa' u_\alpha^2 + \lambda' u_\beta^2 + \cdots$ conjugirt, sobald $a_x^2$, $b_x^2$, ... sowohl $u_\alpha^2$, als $u_\beta^2$ u. s. f. conjugirt sind.

Sind z. B. $u_y \cdot u_z$ und $u_\eta \cdot u_\zeta$ conjugirt zu $a_x^2$, d. h. $y, z$ und $\eta, \zeta$ conjugirte Punktepaare in Bezug auf $a_x^2$, so ist jeder Kegelschnitt der Gruppe $\varkappa u_y \cdot u_z + \lambda u_\eta \cdot u_\zeta$ conjugirt zu $a_x^2$. In dieser Gruppe ist aber noch ein drittes Punktepaar vorhanden, welches mit $y, z$ und $\eta, \zeta$ die Gegenecken-Paare eines vollständigen Vierseits bildet; und dieses ist also ebenfalls zu $a_x^2$ conjugirt, wie von Hesse zuerst ausgesprochen worden ist*).

*) Vgl. meine Note in der Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. XVII. 1872. S. 174.

Die Kegelschnitte, welche $\varrho$ linearunabhängigen Kegelschnitten $u_\alpha^2$, $u_\beta^2$, $\cdots$ und somit der $\varrho$-gliedrigen Gruppe $\varkappa u_\alpha^2 + \lambda u_\beta^2 + \cdots$ conjugirt sind, lassen sich durch $6 - \varrho$ Formen $a_x^2$, $b_x^2$, $\cdots$ ausdrücken und bilden so die $(6-\varrho)$-gliedrige Gruppe $\varkappa' a_x^2 + \lambda' b_x^2 + \cdots$.

Daraus folgt: Wenn jeder der $\varrho$ Kegelschnitte $u_\alpha^2$, $u_\beta^2$, $\cdots$ jedem der $\sigma$ Kegelschnitte $a_x^2$, $b_x^2$, $\cdots$ conjugirt und die Summe $\varrho + \sigma > 6$ ist, so stehen entweder die Formen $u_\alpha^2$, $u_\beta^2$, $\cdots$ oder $a_x^2$, $b_x^2$, $\cdots$ in linearer Abhängigkeit von einander.

Berühren z. B. vier Geraden $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$, $g_4 = 0$ zwei Kegelschnitte, welchen $a_x^2$ conjugirt ist, so sind

$$a_x^2,\ g_1{}^2,\ g_2{}^2,\ g_3{}^2,\ g_4{}^2$$

den beiden Kegelschnitten conjugirt und mithin $a_x^2$ von der Form

$$a_x^2 = A_1 g_1{}^2 + A_2 g_2{}^2 + A_3 g_3{}^2 + A_4 g_4{}^2. \tag{2}$$

Es tritt dies ein, wenn zwei (und folglich alle drei) Paar Gegenecken des Vierseits $g_1$, $g_2$, $g_3$, $g_4$ zu $a_x^2$ conjugirt sind*).

5. Die geometrische Bedeutung der Bedingung $a_u^2 = 0$ ist bekanntlich die**), dass $u_\alpha^2$ einem Tripel conjugirter Geraden von $a_x^2$ (und mithin unendlich vielen) eingeschrieben oder $a_x^2$ einem Tripel conjugirter Punkte von $u_\alpha^2$ (und mithin unendlich vielen) umschrieben ist, was wegen der Symmetrie der Bedingung auf Eins hinausläuft.

Um dies mit Benutzung der vorangeschickten Bemerkungen, ohne specielle Formen der Kegelschnittsgleichungen zu beweisen, seien $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Ecken eines um $u_\alpha^2$ beschriebenen Dreiecks, und $\xi$ der Pol der Gegenseite $(\eta, \zeta)$ in Bezug auf $a_x^2$ ist. Dann sind die dreigliedrigen Gruppen

$$\varkappa (x\eta\zeta)^2 + \lambda (x\zeta\xi)^2 + \mu (x\xi\eta)^2, \quad \varkappa' u_\eta u_\zeta + \lambda' u_\zeta u_\xi + \mu' u_\xi u_\eta$$

einander conjugirt, $u_\alpha^2$ gehört der zweiten an, und $a_x^2$ ist zu $u_\zeta u_\xi$, $u_\xi u_\eta$ conjugirt. Wenn also auch $\eta$, $\zeta$ conjugirte Punkte in Bezug auf $a_x^2$ sind, so ist $a_x^2$ der zweiten Gruppe und mithin zu $u_\alpha^2$ conjugirt, d. h. $a_\alpha^2 = 0$. Umgekehrt: Wenn $a_\alpha^2$ verschwindet, so ist $a_x^2$ conjugirt zu $u_\alpha^2$, $u_\zeta \cdot u_\xi$, $u_\xi \cdot u_\eta$, mithin auch zu $u_\eta \cdot u_\zeta$, d. h. $\xi$, $\eta$, $\zeta$ bilden ein Tripel conjugirter Punkte in Bezug auf $a_x^2$.

Mit Hülfe einer Identität kann der Beweis, um das in dem Resultate scheinbar liegende Paradoxon zu heben, folgendermassen geführt werden. Es sei $b_x^2 = b'_x{}^2 = 0$ die Gleichung des Kegelschnitts $u_\alpha^2 = 0$ in Punktcoordinaten. Dann umhüllen bekanntlich die Geraden, welche die Curven $a_x^2$, $b_x^2$ in harmonischen Punktepaaren schneiden***), den

*) Salmon's Analytische Geom. d. Kegelschnitte, übers. v. Fiedler, 2. Aufl. S. 337.

**) Ebendaselbst, S. 445.

***) Ebendaselbst, S. 454.

Kegelschnitt $(a b u)^2 = 0$. Von diesem erhält man die reciproke Polare in Bezug auf $b_x^2$, indem man setzt: $u_1 = b_x b_1$, $u_2 = b_x b_2$, $u_3 = b_x b_3$ und es resultirt die Gleichung

$$f_x^2 = (a b b')^2 (a b'' b) b_x' b_x'' = 0.$$

Erhebt man aber beide Seiten der Identität

$$a_x (b b' b'') = b_x (a b' b'') + b_x' (a b'' b) + b_x'' (a b b')$$

ins Quadrat und berücksichtigt, dass die Symbole $b$, $b'$, $b''$ eine und dieselbe Form darstellen, so ergiebt sich:

$$a_x^2 (b b' b'')^2 = 3 b_x^2 (a b' b'')^2 + 6 \cdot b_x' b_x'' (a b b') (a b'' b),$$

d. h.

$$6 \cdot f = a_x^2 (b b' b'')^2 - 3 b_x^2 (a b' b'')^2.$$

Dass ein auf $a_x^2$ gelegener Punkt $x$ eine Ecke eines dem Kegelschnitt $a_x^2$ eingeschriebenen, in Bezug auf $b_x^2$ sich selbst conjugirten Dreiecks ist, hat man dahin aufzufassen, dass die Polare von $x$ in Bezug auf $b_x^2$ die Curven $a_x^2$, $b_x^2$ in harmonischen Punktepaaren schneidet, also zugleich:

$$a_x^2 = 0, \qquad f_x^2 = 0;$$

die Schnittpunkte von $a_x^2$, $b_x^2$ sind als Lösungen nicht brauchbar. Demnach ergiebt sich aus der für $f_x^2$ gefundenen Form die Bedingung $(a b' b'')^2 = 0$, welche ausdrückt, dass $(a b u)^2$ mit der reciproken Polare von $a_x^2$ in Bezug auf $b_x^2$ zusammenfällt. Es giebt dann unendlich viele $a_x^2$ eingeschriebene und in Bezug auf $b_x^2$ sich selbst conjugirte Dreiecke, und diese sind der Curve $(a b u)^2$ umschrieben. — Eine analoge Betrachtung knüpft sich an die Gleichungen von $a_x^2$, $b_x^2$ in Liniencoordinaten.

## § 2.

## Allgemeine Untersuchung der conjugirten Gruppen.

6. Vermittelst der Bedingungen

$$a_u^2 = 0, \quad b_u^2 = 0, \quad c_u^2 = 0, \quad d_u^2 = 0, \quad e_u^2 = 0$$

werden ein Kegelschnitt $u_u^2$ und eine fünfgliedrige Gruppe

$$\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 + \nu d_x^2 + \varrho e_x^2$$

vollständig durch einander bestimmt, und zwar ist

$$u_u^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2 a_3 & a_3 a_1 & a_1 a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2 b_3 & b_3 b_1 & b_1 b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_2 c_3 & c_3 c_1 & c_1 c_2 \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 & d_2 d_3 & d_3 d_1 & d_1 d_2 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 & e_2 e_3 & e_3 e_1 & e_1 e_2 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_2 u_3 & u_3 u_1 & u_1 u_2 \end{vmatrix},$$

welche Determinante mit $(a b c d e u)$ bezeichnet werden mag.

Die conjugirten Geradenpaare des Kegelschnitts $u_\alpha^2$ sind mit den in der conjugirten Gruppe vorkommenden zerfallenden Kegelschnitten identisch. *Diese Geradenpaare bilden somit eine dreifache Mannigfaltigkeit; jeder Punkt der Ebene ist Doppelpunkt für eine einfache Mannigfaltigkeit derselben. Diejenigen der fünfgliedrigen Gruppe angehörigen Geradenpaare, welche denselben Doppelpunkt besitzen, liegen stets in Involntion; die Doppelstrahlen der Involution sind die beiden Tangenten, welche vom Doppelpunkt aus an $u_\alpha^2$ gelegt werden können.*

Die Tangenten des Kegelschnitts $u_\alpha^2$ sind mit den Geraden identisch, welche doppelt gerechnet als Kegelschnitte der Gruppe aufzufassen sind. *In der fünfgliedrigen Gruppe giebt es somit eine einfache Mannigfaltigkeit von doppelten Geraden; der conjugirte Kegelschnitt $u_\alpha^2$ ist ihre Enveloppe.*

Zu fünf Kegelschnitten giebt es im Allgemeinen kein Punktenpaar, welches allen conjugirt ist. Die Existenz eines solchen $(y, z)$ erfordert, dass $u_\alpha^2$ sich in zwei Factoren $u_y \cdot u_z$ zerlegen lasse. Wird $u_\alpha^2$ ein Quadrat $= u_y^2$, so haben alle Kegelschnitte der Gruppe einen Punkt $(y)$ gemeinsam.

7. In gleicher Weise werden zwei conjugirte Gruppen

$$\varrho u_\alpha^2 + \sigma u_\beta^2\,, \qquad \varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 + \nu d_x^2$$

von zwei, resp. vier Gliedern einander gegenübergestellt. Nach der im vorigen Art. angeführten Bezeichnung ist, wenn die eine Gruppe gegeben ist, die allgemeine Form für die andere resp.

$$(\alpha\beta\xi\eta\zeta x)\,, \qquad (abcduv)$$

wenn die $\xi$, $\eta$, $\cancel{\mu}$ $\zeta$, $v$ beliebige Grössen (oder Symbole von solchen) bedeuten.

Durch die Gruppe $\varrho u_\alpha^2 + \sigma u_\beta^2$ wird jeder Geraden der Ebene eine andere zugeordnet als der Ort ihrer Pole in Bezug auf die Kegelschnitte der Gruppe; der letztern ist somit eine doppelte Mannigfaltigkeit von Geradenpaaren conjugirt. *Die in der viergliedrigen Gruppe vorkommenden zerfallenden Kegelschnitte bilden demnach die Gesammtheit aller conjugirten Geradenpaare einer Kegelschnittschaar mit vier festen Tangenten.* Die Pole einer Geraden $v$ in Bezug auf $u_\alpha^2$, $u_\beta^2$ liefern die Linie

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} v_\alpha \cdot \alpha_1 & v_\alpha \alpha_2 & v_\alpha \alpha_3 \\ v_\beta \cdot \beta_1 & v_\beta \beta_2 & v_\beta \beta_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = v_\alpha v_\beta (\alpha\beta x) = 0.$$

Dies ist also die Gleichung derjenigen Geraden, durch welche $v$ zu einem zerfallenden Kegelschnitt der Gruppe $(abcd)$ ergänzt wird; als die Gleichung eines solchen ergiebt sich:

$$(3^a) \qquad v_x \cdot v_\alpha v_\beta (\alpha\beta x) = 0.$$

Bewegt sich die Gerade $v$ um einen Punkt $y$, so umhüllen die entsprechenden Geraden einen Ort zweiter Classe:

$$u_\alpha u_\beta (\alpha\beta y) = 0,$$

welcher auch als die Enveloppe der Polaren von $y$ in Bezug auf die Gruppe $(\alpha\beta)$ aufzufassen ist, und welcher drei festen Tangenten besitzt, nämlich die drei Seiten des in Bezug auf $u_\alpha^2$ und $u_\beta^2$ sich selbst conjugirten Dreiecks. Hieraus bestimmt sich dasjenige der Gruppe $(\alpha\beta)$ conjugirte Geradenpaar, welches den Punkt $y$ zum Doppelpunkt hat, als das Paar der von $y$ an $u_\alpha u_\beta (\alpha\beta y)$ gehenden Tangenten und wird demnach durch die Gleichung

$$(3^b) \qquad (\alpha\beta y)(\alpha x y)(\beta x y) = 0$$

repräsentirt. Es ist dies eine neue Darstellung der in der Gruppe $(abcd)$ enthaltenen zerfallenden Curven, diesmal ausgedrückt durch ihren Doppelpunkt $y$, wie sie oben durch einen ihrer Theile $(v)$ ausgedrückt waren.

Es giebt vier Geraden, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen, die vier gemeinschaftlichen Tangenten der Gruppe $(\alpha\beta)$. *Sie sind mit denjenigen vier Geraden identisch, welche doppelt gerechnet als Kegelschnitte der Gruppe* $(abcd)$ *aufzufassen sind.* Das Product ihrer vier Gleichungen erhält man leicht aus der Form $u_\alpha u_\beta (\alpha\beta x)$, denn wenn $x$ auf einer der vier Geraden liegt, so fallen die von $x$ an $u_\alpha u_\beta (\alpha\beta x)$ gehenden Tangenten in dieselbe Gerade zusammen, und $x$ ist auf dem Kegelschnitt $u_\alpha u_\beta (\alpha\beta x)$ gelegen. Man hat also nur nöthig, diesen letztern in Punktcoordinaten darzustellen und die laufenden Coordinaten mit $x$ gleichzusetzen. Endlich existiren drei Punktepaare, welche zerfallende Kegelschnitte der Gruppe $(\alpha\beta)$ darstellen und folglich conjugirte Punktepaare für die Gruppe $(abcd)$; d. h.: *alle Kegelschnitte der viergliedrigen Gruppe haben drei conjugirte Punktepaare gemein; diese sind die drei Paare Gegenecken des Vierseits der in der Gruppe vorkommenden doppelten Geraden**). Man erhält bekanntlich das Product der Gleichungen der sechs Punkte in Liniencoordinaten $u$, indem man die Discriminante des die Gerade $u$ berührenden Kegelschnitts der Gruppe $(\alpha\beta)$, d. i. die Discriminante von

$$u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\beta^2 v_\alpha^2$$

als Form in $v$, der Null gleichsetzt.

Das Auftreten eines für $(abcd)$ sich selbst conjugirten, d. h. der Gruppe gemeinschaftlichen Punktes bedingt eine doppelte Berührung von $u_\alpha^2$, $u_\beta^2$. Sollen zwei derartige Punkte existiren, so müssen die

*) Clebsch, „über die Steiner'sche Fläche“ Borch. Journ. Bd. 67.

Kegelschnitte $\varrho u_\alpha^2 + \sigma u_\beta^2$ in die Punkte der Involution übergehen, deren Doppelpunkte jene beiden sind.

8. Es bleibt noch der Fall zu betrachten, wo beide conjugirten Gruppen dreigliedrig sind, also ein „Netz" und ein „Gewebe" *):

$$\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2, \qquad \nu u_\alpha^2 + \varrho u_\beta^2 + \sigma u_\gamma^2.$$

Wenn die eine Gruppe gegeben ist, so ist die allgemeine Form für die andere resp.:

$$(\alpha\beta\gamma\xi\eta x), \qquad (abcvwu),$$

wo die $\xi$, $\eta$, $v$, $w$ beliebige Grössen (oder Symbole von solchen) bedeuten.

Die Punktepaare, welche in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes $(abc)$ conjugirt sind, bilden eine Curve dritter Ordnung, die Jacobi'sche Curve des Netzes. Auf demselben Orte liegen bekanntlich die Doppelpunkte der in Geradenpaare zerfallenden Kegelschnitte, welche dem Netze $(abc)$ angehören. Seine Gleichung, d. i. die Bedingung, dass die Polaren eines Punktes $x$ sich in einem Punkte schneiden, oder dass $x$ Doppelpunkt einer Curve der Form $\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2$ ist, ergiebt sich symbolisch:

$$(4) \qquad J(abc) = \begin{vmatrix} a_x a_1 & a_x a_2 & a_x a_3 \\ b_x b_1 & b_x b_2 & b_x b_3 \\ b_x c_1 & c_x c_2 & c_x c_3 \end{vmatrix} = a_x b_x c_x (abc) = 0.$$

Fasst man irgend zwei Curven des Netzes auf, etwa $a_x^2$ und $b_x^2$, so wird durch ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden eine Involution erzeugt, deren Doppelpunkte einander in Bezug auf $a_x^2$ und $b_x^2$ conjugirt sind. Lässt sich die Gerade durch eine andere zu einem Kegelschnitt des Netzes ergänzen, so sind die Doppelpunkte der Involution auch in Bezug auf den zerfallenden Kegelschnitt, also überhaupt in Bezug auf das Netz einander conjugirt. Umgekehrt, die Verbindungslinie zweier in Bezug auf das Netz einander conjugirter Punkte enthält noch einen dritten Punkt der Jacobi'schen Curve, den Doppelpunkt eines bestimmten, dem Netze angehörigen Linienpaares, und ist in Bezug auf dieses Linienpaar sich selbst conjugirt, d. h. eine Linie des Paares. Die Geraden, welche Kegelschnitten des Netzes als Theile angehören, sind demnach mit denjenigen Geraden identisch, welche die in Bezug auf das Netz conjugirten Punktepaare verbinden. Der von ihnen eingehüllte Ort wird durch die zugehörige Form dritten Grades dargestellt, welche Hermite aufgestellt und untersucht hat **). Sind $x$, $y$ Punkte einer Geraden, welche zwei har-

*) Schröter, Mathem. Annalen, Bd. V. S. 62.

**) Borchardt's Journal, Bd. 57. S. 371.

monische Pole des Netzes verbindet, welche also den Kegelschnitten des Netzes in Punktepaaren der durch jene beiden Pole erzeugten Involution begegnet, so findet man die Schnittpunkte der Geraden $(x, y)$ mit $a_x^2$, $b_x^2$, $c_x^2$ aus den in $\lambda$ quadratischen Gleichungen:

$$(a_x + \lambda a_y)^2 = 0, \qquad (b_x + \lambda b_y)^2 = 0, \qquad (c_x + \lambda c_y)^2 = 0,$$

und es muss daher die aus den Coefficienten der Gleichungen gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_y^2 \\ b_x^2 & b_x b_y & b_y^2 \\ c_x^2 & c_x c_y & c_y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma (ab)_i (xy)_i \cdot \Sigma (ac)_i (xy)_i \cdot \Sigma (bc)_i (xy)_i$$

verschwinden. Führt man daher $u_1$, $u_2$, $u_3$ als Coordinaten der Linie $(x, y)$ ein, so ergiebt sich die Gleichung der Hermite'schen Curve

(5) $$H(abc) = (abu)(acu)(bcu) = 0.$$

Die am Netz angestellte Betrachtung überträgt sich leicht auf das conjugirte Gewebe. Je zwei Linien, welche einen Kegelschnitt des Netzes zusammensetzen, sind einander in Bezug auf alle Kegelschnitte des Gewebes conjugirt; ihr Ort ist demnach die Jacobi'sche Curve des Gewebes, dargestellt durch die Gleichung:

$$J(\alpha\beta\gamma) = u_\alpha u_\beta u_\gamma (\alpha\beta\gamma) = 0.$$

Denselben Ort umhüllen die Verbindungslinien solcher Punktepaare, welche als reductible Oerter dem Gewebe angehören; *diese Punktepaare sind aber zugleich allen Kegelschnitten des Netzes conjugirt.* Daraus folgt *die Identität der durch die Gleichungen*

$$H(abc) = 0, \qquad J(\alpha\beta\gamma) = 0$$

*dargestellten Oerter, also der Hermite'schen Curve des Netzes mit der Jacobi'schen des conjugirten Gewebes**), und zugleich die doppelte Bedeutung der erstern, welche oben angegeben und direct nachgewiesen ist.

Auch das Gewebe besitzt eine Hermite'sche Curve:

$$H(\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta x)(\alpha\gamma x)(\beta\gamma x) = 0,$$

erzeugt durch die Schnittpunkte je zweier in Bezug auf das Gewebe conjugirter Geraden; die von einem solchen Punkte an die Kegelschnitte des Gewebes gehenden Tangentenpaare liegen in Involution; jeder dieser Punkte wird durch den in Bezug auf das Netz ihr conjugirten Pol zu einem Punktepaar des Gewebes ergänzt. *Die Hermite'sche Curve des Gewebes ist mit der Jacobi'schen des conjugirten Netzes identisch.*

---

*) Vgl. Smith a. a. O. S. 93, Schröter a. a. O. S. 82.

## § 3.

### Kegelschnitt-Netz und -Gewebe.

9. Ich gehe nun dazu über, die algebraischen Beziehungen aufzusuchen, welche zwischen den Covarianten, zugehörigen Formen etc. einer jeden Gruppe und denen ihrer conjugirten stattfinden. Diese Beziehungen bieten dann weiter einfache Mittel, um in den Zusammenhang der bei einer jeden Gruppe auftretenden Formen unter einander Einblick zu gewinnen. Die Formen, um die es sich handelt, sind sämmtlich *Combinanten* der Gruppen, welchen sie entstammen, d. h. sie ändern sich nur um einen unwesentlichen Factor, wenn in ihnen an Stelle der zur Constituirung der Gruppe gegebenen Elemente lineare Verbindungen derselben eingeführt werden.

Der Natur der Sache nach geschieht mit den dreigliedrigen Gruppen der Anfang. Ich werde mich dann — nach kurzer Berücksichtigung der fünfgliedrigen Gruppe — zur ausführlichen Behandlung des Systems von vier Kegelschnitten in Verbindung mit dem conjugirten wenden.

Für die Theorie des Kegelschnittnetzes

$$\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2$$

ist von wesentlicher Bedeutung die mit $(abcuvw)$ bezeichnete Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2 a_3 & a_3 a_1 & a_1 a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2 b_3 & b_3 b_1 & b_1 b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_2 c_3 & c_3 c_1 & c_1 c_2 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_2 u_3 & u_3 u_1 & u_1 u_2 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & v_2 v_3 & v_3 v_1 & v_1 v_2 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 & w_2 w_3 & w_3 w_1 & w_1 w_2 \end{vmatrix}.$$

Wenn die $u$ als laufende Coordinaten, die $v$ und $w$ als beliebige Grössen (oder Symbole von solchen) aufgefasst werden, so repräsentirt sie den allgemeinsten Ort zweiter Classe, welcher dem Netz conjugirt ist, also einen Kegelschnitt des conjugirten Gewebes:

$$\nu u_\alpha^2 + \varrho u_\beta^2 + \sigma u_\gamma^2,$$

und zwar denjenigen, welcher die Geraden $v$ und $w$ berührt (oder noch zwei Curven $v_x^2$, $w_x^2$ conjugirt ist). Es ist daher möglich, die (von $u$ unabhängigen) Grössen $\nu$, $\varrho$, $\sigma$ so zu bestimmen, dass

$$\begin{aligned} \nu u_\alpha^2 + \varrho u_\beta^2 + \sigma u_\gamma^2 &= (abcuvw), \\ \nu v_\alpha^2 + \varrho v_\beta^2 + \sigma v_\gamma^2 &= 0 \quad , \\ \nu w_\alpha^2 + \varrho w_\beta^2 + \sigma w_\gamma^2 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Folglich ist $(abcuvw)$ von der Determinante

$$\begin{vmatrix} u_\alpha^2 & u_\beta^2 & u_\gamma^2 \\ v_\alpha^2 & v_\beta^2 & v_\gamma^2 \\ w_\alpha^2 & w_\beta^2 & w_\gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_2u_3 & u_3u_1 & u_1u_2 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & v_2v_3 & v_3v_1 & v_1v_2 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 & w_2w_3 & w_3w_1 & w_1w_2 \end{vmatrix} \times$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & 2\alpha_2\alpha_3 & 2\alpha_3\alpha_1 & 2\alpha_1\alpha_2 \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \beta_3^2 & 2\beta_2\beta_3 & 2\beta_3\beta_1 & 2\beta_1\beta_2 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & 2\gamma_2\gamma_3 & 2\beta_3\gamma_1 & 2\gamma_1\gamma_2 \end{vmatrix}$$

nur um einen von $u$, $v$, $w$ unabhängigen Factor verschieden. Wir können bewirken, dass dieser Factor der Einheit gleich wird, und haben dann

$$(6) \qquad (abcuvw) = \begin{vmatrix} u_\alpha^2 & u_\beta^2 & u_\gamma^2 \\ v_\alpha^2 & v_\beta^2 & v_\gamma^2 \\ w_\alpha^2 & w_\beta^2 & w_\gamma^2 \end{vmatrix}.$$

Ebenso wird bewiesen, dass

$$(7) \qquad -8(\alpha\beta\gamma xyz) = \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix}.$$

10. Die Jacobi'sche Determinante des Netzes

$$(8) \quad J(abc) = a_xb_xc_x(abc) = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2a_3 & a_3a_1 & a_1a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2b_3 & b_3b_1 & b_1b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_2c_3 & c_3c_1 & c_1c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 & x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_3 & x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix}$$

kann noch in einer andern Form aufgestellt werden. Die Linienpaare, welche einen gemeinschaftlichen Doppelpunkt $x$ besitzen, bilden nämlich ein besonderes Netz von Curven zweiter Ordnung, dessen conjugirtes Gewebe aus allen Punktepaaren besteht, in welchen der Punkt $x$ als ein Bestandtheil vorkommt. Die Forderung, dass der Durchschnittspunkt $x$ zweier Geraden $u$, $v$ einem in Bezug auf $a_x^2$, $b_x^2$, $c_x^2$ conjugirten Punktepaar angehören soll, lässt sich also dahin aussprechen, dass ein Kegelschnitt existiren soll, welcher den sechs Formen

$$a_x^2, \; b_x^2, \; c_x^2, \; u_x^2, \; u_xv_x, \; v_x^2$$

zugleich conjugirt ist; ist ein solcher vorhanden, so löst er sich auch nothwendigerweise in ein Punktepaar auf. Daraus entspringt eine zweite Darstellung der Jacobi'schen Form:

$$(8^a) \quad J(abc) = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2a_3 & a_3a_1 & a_1a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2b_3 & b_3b_1 & b_1b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_2c_3 & c_3c_1 & c_1c_2 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_2u_3 & u_3u_1 & u_1u_2 \\ 2u_1v_1 & 2u_2v_2 & 2u_3v_3 & u_2v_3+u_3v_2 & u_3v_1+u_1v_3 & u_1v_2+u_2v_1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & v_2v_3 & v_3v_1 & v_1v_2 \end{vmatrix},$$

deren Identität mit der ersten auch aus der vorangegangenen Betrachtung folgt. Ein Factor ist nicht mehr hinzuzufügen, da z. B.

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ 2u_1v_1 & 2u_2v_2 & 2u_3v_3 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= -2x_1x_2x_3 = -\begin{vmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Auch die Hermite'sche Form lässt zwei Darstellungen zu*), nämlich wenn $(xy)_1 = u_1$, $(xy)_2 = u_2$, $(xy)_3 = u_3$:

$$H(abc) = (abu)(acu)(bcu)$$

$$= \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & 2a_2a_3 & 2a_3a_1 & 2a_1a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & 2b_2b_3 & 2b_3b_1 & 2b_1b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & 2c_2c_3 & 2c_3c_1 & 2c_1c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_2x_3 & x_3x_1 & x_1x_2 \\ 2x_1y_1 & 2x_2y_2 & 2x_3y_3 & x_2y_3+x_3y_2 & x_3y_1+x_1y_3 & x_1y_2+x_2y_1 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_2y_3 & y_3y_1 & y_1y_2 \end{vmatrix}$$

$$(9) \qquad = -\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & 2a_2a_3 & 2a_3a_1 & 2a_1a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & 2b_2b_3 & 2b_3b_1 & 2b_1b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & 2c_2c_3 & 2c_3c_1 & 2c_1c_2 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

In gleicher Weise sind die bei dem Gewebe auftretenden Formen

$$J(\alpha\beta\gamma) = u_\alpha u_\beta u_\gamma (\alpha\beta\gamma), \quad H(\alpha\beta\gamma) = (\alpha\beta x)(\alpha\gamma x)(\beta\gamma x)$$

zu behandeln. Wendet man dann die Formeln (6) und (7) an, so ergeben sich die Identitäten:

$$(10) \qquad J(abc) = 2H(\alpha\beta\gamma), \qquad H(abc) = -4J(\alpha\beta\gamma),$$

in Uebereinstimmung mit dem im vorigen Paragraphen gefundenen Resultate.

11. Zu je zweien verbunden, liefern die Formen $a_x^2$, $b_x^2$, $c_x^2$ die Zwischenformen:

$$b_x c_x (bcu), \qquad c_x a_x (cau), \qquad a_x b_x (abu),$$

welche mit den Combinanten des Netzes, der Jacobi'schen und Hermite'schen Form dadurch in Beziehung gebracht werden, dass man das Büschel der durch einen Punkt $y$ gelegten Kegelschnitte des Netzes betrachtet. Dieses Büschel wird durch die Gleichung

---

*) Vgl. die Darstellung in Determinantenform, welche Aronhold für $S_f$ gegeben hat, Borchardt's Journal, Bd. 55. S. 189.

$$\begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix} = -8(\alpha\beta\gamma xyz) = 0$$

dargestellt, wo $z$ als Parameter auftritt. Eine allgemeinere Auffassung ist die, dass man die $y$ als Symbole eines Kegelschnittes $u_y^2$ betrachtet; das Büschel wäre dann ausser $u_\alpha^2$, $u_\beta^2$, $u_\gamma^2$ auch noch $u_y^2$ conjugirt. — Die drei zu $y$ noch hinzutretenden Basispunkte des Büschels sind geometrisch leicht zu finden. Vom Punkte $y$ gehen drei Tangenten an die Hermite'sche Curve; jede von ihnen wird durch eine bestimmte Gerade (ebenfalls Tangente der Curve) zu einem Kegelschnitt des Netzes und somit auch jenes Büschels ergänzt. Die drei Geradenpaare sind daher die Gegenseitenpaare des vollständigen Vierseits der Basispunkte des durch $y$ gelegten Büschels. — Fasst man zwei Punkte $y$, $z$ und die entsprechenden Büschel auf und beachtet, dass der durch $y$ und $z$ gehende Kegelschnitt des Netzes beiden Büscheln gemeinschaftlich ist, so ergiebt sich der bekannte Satz: *Sind die Gegenseitenpaare von zwei vollständigen Vierecken in Bezug auf ein Gewebe conjugirt, so liegen die acht Ecken auf einem Kegelschnitt* (des conjugirten Netzes).

Wenn man die Gleichung des Kegelschnitts aufsucht, auf welchem die Pole einer Geraden $u$ in Bezug auf das durch $y$ bestimmte Büschel liegen, so treten die erwähnten drei Zwischenformen auf. Man erhält nämlich:

$$a_y^2 \cdot b_x c_x (bcu) + b_y^2 \cdot c_x a_x (cau) + c_y^2 \cdot a_x b_x (abu) = 0 \text{*)}.$$

Die linke Seite ist eine Combinante, welche die beiden dreigliedrigen Gruppen vollständig bestimmt; sie kann aber ihrerseits auf die Formen $J(abc)$, $H(abc)$ zurückgeführt werden. Zu diesem Zwecke führe ich die symbolische Bezeichnung:

$$(11)\quad \left.\begin{aligned} J(abc) &= 2H(\alpha\beta\gamma) = a_x b_x c_x (abc) = D_x^3 = D_x'^3 = D_x''^3, \\ H(abc) &= -4J(\alpha\beta\gamma) = (abu)(acu)(bcu) = u_\Delta^3 = u_{\Delta'}^3 = u_{\Delta''}^3 \end{aligned}\right\}$$

ein und bilde die Polaren:

$$3 D_x^2 D_y = (abc)\left\{a_y b_x c_x + b_y c_x a_x + c_y a_x b_x\right\},$$
$$3 v_\Delta^2 u_\Delta = (abv)(acv)(bcu) + (abv)(acu)(bcv) + (abu)(acv)(bcv).$$

Wird $v = (xy)$ gesetzt, so folgt wegen der Identitäten

---

*) Als Form in $y$ stellt diese Gleichung denjenigen Kegelschnitt des Netzes dar, in Bezug auf welchen $x$ und $u$ in der Beziehung von Pol und Polare zu einander stehen. *In dem Falle, wo $x$ auf der Jacobi'schen Curve liegt, repräsentirt* $a_y^2 b_x c_x (bcu) + b_y^2 c_x a_x (cau) + c_y^2 a_x b_x (abu) = 0$ *denjenigen zerfallenden Kegelschnitt des Netzes, der in $x$ seinen Doppelpunkt hat, und ist also die Gleichung alsdann von den Grössen $u$ nur scheinbar abhängig.*

$u_y(abc) = a_y(bcu) + b_y(cau) + c_y(abu)\,, \quad (abv) = a_x b_y - a_y b_x$ u. s. f.:

$$
\begin{aligned}
& 3u_y D_x^2 D_y + 3(xy\Delta)^2 u_\Delta \\
= & \{a_y(bcu) + b_y(cau) + cy(abu)\} \cdot \{a_y b_x c_x + b_y c_x a_x + c_y a_x b_x\} \\
& -(bcu)(a_x b_y - a_y b_x)(c_x a_y - c_y a_x) - (cau)(a_x b_y - a_y b_x)(b_x c_y - b_y c_x) \\
& \qquad - (abu)(c_x a_y - c_y a_x)(b_x c_y - b_y c_x) \\
= & (bcu)\{2 a_y^2 b_x c_x + a_x^2 b_y c_y\} + (cau)\{2 b_y^2 c_x a_x + b_x^2 c_y a_y\} \\
& + (abu)\{2 c_y^2 a_x b_x + c_x^2 a_y b_y\}
\end{aligned}
$$

und durch Vertauschung von $x$ und $y$:

$$
\begin{aligned}
& 3u_x D_y^2 D_x + 3(xy\Delta)^2 u_\Delta \\
= & (bcu)\{2 a_x^2 b_y c_y + a_y^2 b_x c_x\} + (cau)\{2 b_x^2 c_y a_y + b_y^2 c_x a_x\} \\
& + (abu)\{2 c_x^2 a_y b_y + c_y^2 a_x b_x\}.
\end{aligned}
$$

Aus den beiden letzten Relationen ergiebt sich sofort:

$$
\begin{aligned}
(12) \quad & a_y^2 \cdot b_x c_x (bcu) + b_y^2 \cdot c_x a_x (cau) + c_y^2 \cdot a_x b_x (abu) \\
& = 2 \cdot u_y D_x^2 D_y - u_x D_y^2 D_x + (xy\Delta)^2 u_\Delta\,,
\end{aligned}
$$

also durch die Coefficienten von $D_x^3$ und $u_\Delta^3$ ausgedrückt. — Analog ist:

$$
\begin{aligned}
(13) \quad & v_\alpha^2 u_\beta u_\gamma (\beta\gamma x) + v_\beta^2 u_\gamma u_\alpha (\gamma\alpha x) + v_\gamma^2 u_\alpha u_\beta (\alpha\beta x) \\
& = -\tfrac{1}{2} v_x u_\Delta^2 v_\Delta + \tfrac{1}{4} u_x v_\Delta^2 u_\Delta + \tfrac{1}{2}(uvD)^2 D_x.
\end{aligned}
$$

Schliesslich erhält man den allgemeinen Kegelschnitt des Netzes durch die Symbole von $J(abc)$ und $H(abc)$ ausgedrückt, wenn man in (12) in Bezug auf $x$ die Polaren mit Einführung von $z$ bildet und $(zx)$ für $u$ setzt, wodurch z. B. $b_x c_x (bcu)$ sich in $b_x^2 c_z^2 - b_z^2 c_x^2$ verwandelt. Es wird nämlich:

$$
(14) \quad -8(\alpha\beta\gamma xyz) = \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix} = 4(xyz) D_x D_y D_z - 2(yz\Delta)(zx\Delta)(xy\Delta),
$$

und analog aus (13) für den allgemeinen Kegelschnitt des conjugirten Gewebes:

$$
(15) \quad (abcuvw) = \begin{vmatrix} u_\alpha^2 & u_\beta^2 & u_\gamma^2 \\ v_\alpha^2 & v_\beta^2 & v_\gamma^2 \\ w_\alpha^2 & w_\beta^2 & w_\gamma^2 \end{vmatrix} = -(uvw) u_\Delta v_\Delta w_\Delta - (vwD)(wuD)(uvD)\ {}^{*)}.
$$

12. Der Zusammenhang zwischen den conjugirten dreigliedrigen Gruppen und den dabei auftretenden Linien dritten Grades wird noch

*) Dass umgekehrt sämmtliche Combinanten des Netzes, also auch die Jacobi'sche und Hermite'sche Form, Invarianten und Covarianten der Determinante $(abcuvw)$ oder $(\alpha\beta\gamma xyz)$ sind, hat Gordan bewiesen: Math. Annalen Bd. V. S. 116.

weiter durch den Umstand veranschaulicht, dass jene Gruppen aufgefasst werden können als die Gruppen von Polarkegelschnitten zweier conjugirter Curven dritter Ordnung resp. dritter Classe. Hermite*) hat das Dreieck, von dessen Ecken die gegebenen Kegelschnitte die Polaren in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung sind, und diese Curve selbst angegeben. Es mag gestattet sein, eine Herleitung der Curve im Anschluss an das Vorangegangene hier einzufügen.

Eine Curve dritter Ordnung mit der symbolischen Gleichung

$$p_x^3 = q_x^3 = r_x^3 = s_x^3 = 0$$

ist eindeutig bestimmt, wenn das Netz ihrer Polaren $p_x^2 p_y$ mit dem Netz $(abc)$ identisch, also dem Gewebe $(\alpha\beta\gamma)$ conjugirt, d. h. für alle $y$

$$p_\alpha^2 p_y = 0\,, \qquad p_\beta^2 p_y = 0\,, \qquad p_\gamma^2 p_y = 0$$

sein soll. Es ist dann $J(abc)$ die Hesse'sche, $H(abc)$ die Cayley'sche Curve ($S_I$ bei Aronhold) von $p_x^3$, so dass

$$D_x^3 = p_x q_x r_x (pqr)^2\,, \qquad u_\Delta^3 = (pqu)(pru)(qru)(pqr)\,.$$

Zwischen $p_x^3$ und $u_\Delta^3$ besteht nun, da

$$\begin{aligned} s_\Delta^2 v_\Delta s_y &= \tfrac{1}{3}(pqr)\, s_y \left\{(pqv)(prs)(qrs) + (prv)(pqs)(qrs) + (qrv)(pqs)(prs)\right\} \\ &= \tfrac{1}{3}(pqr)\,(prs)\,(qrs) \left\{s_y\,(pqv) + p_y\,(qsv) + q_y\,(spv)\right\} \\ &= \tfrac{1}{3}(pqr)\,(prs)\,(qrs)\,(pqs)\cdot v_y\,, \end{aligned}$$

die Beziehung**):

$$3\, p_\Delta^2\, v_\Delta\, p_y = S \cdot v_y\,,$$

worin

$$S = (pqr)\,(pqs)\,(prs)\,(qrs)\,,$$

d. h. *die Polare eines Punktes $y$ in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung ist der Polaren einer Geraden $v$ in Bezug auf die Cayley'sche Curve conjugirt, sobald $y$ auf $v$ liegt.* Die Polare von $y$ ist somit als der Kegelschnitt definirt, welcher dem Gewebe $(\alpha\beta\gamma)$ und zugleich der zweigliedrigen Gruppe der Polaren der durch $y$ gehenden Geraden in Bezug auf $u_\Delta^3$ conjugirt ist***), und man erhält also wegen (14) ihre Gleichung, wenn man in

$$4\,(xyz)\,D_x D_y D_z - 2\,(yz\Delta)\,(zx\Delta)\,(xy\Delta)$$

die $y$ und $z$ als Symbole der Formen $u_\Delta^2 v$, $u_\Delta^2 w_\Delta$ auffasst, wo $v$, $w$ zwei durch $y$ gehende Geraden sind. Es ergiebt sich:

$$4\,(\Delta\Delta' x)\, v_\Delta w_{\Delta'} D\; D_\Delta D_{\Delta'} - 2\,(\Delta\Delta'\Delta'')\,(x\Delta''\Delta)\,(x\Delta\Delta')\, v_{\Delta'} w_{\Delta''}\,,$$

*) Borchardt's Journal, Bd. 57. S. 371.

**) Es ist dies das Aronhold'sche Theorem 8., Borchardt's Journal Bd. 55. S. 132.

***) Vgl. Smith S. 98.

d. i. wenn man berücksichtigt, dass $\Delta$, $\Delta'$ Symbole derselben Form bedeuten,

$$2D_\Delta D_{\Delta'} D_x(\Delta\Delta' x)(v_\Delta w_{\Delta'} - v_{\Delta'} w_\Delta) - (\Delta\Delta'\Delta'')(x\Delta''\Delta)(x\Delta\Delta')(v_{\Delta'} w_{\Delta''} - v_\Delta w_{\Delta'})$$

und wenn man $y_i$ für $(vw)_i$ einträgt:

$$2D_\Delta D_{\Delta'} D_x(\Delta\Delta' x)(\Delta\Delta' y) - (\Delta\Delta'\Delta'')(\Delta''\Delta x)(\Delta\Delta' x)(\Delta'\Delta'' y).$$

Mithin ergiebt sich die Gleichung der gesuchten Curve dritter Ordnung durch Gleichsetzung von $y$ und $x$ in der Form:

$$(16)\quad 2D_\Delta D_{\Delta'} D_x(\Delta\Delta' x)^2 - (\Delta\Delta'\Delta'')(\Delta'\Delta'' x)(\Delta''\Delta x)(\Delta\Delta' x) = 0.$$

In gleicher Weise wird eine Curve dritter Classe $u_\pi^3 = 0$ gefunden, deren Polarkegelschnitte das Gewebe $(\alpha\beta\gamma)$ bilden, für welche also $H(abc)$ die Hesse'sche, $J(abc)$ die Cayley'sche Curve ist, nämlich:

$$(17)\quad u_\pi^3 = D_\Delta D'_\Delta u_\Delta (DD'u)^3 + (DD'D'')(D'D''u)(D''Du)(DD'u) = 0.$$

*Die Polare eines beliebigen Punktes $y$ in Bezug auf $p_x^3$ und die Polare einer beliebigen Geraden $v$ in Bezug auf $u_\pi^3$ sind conjugirt*; d. h. für alle $y$, $v$ ist:

$$p_\pi^2 p_y v_\pi = 0.$$

Durch diese Gleichung bestimmen die beiden Curven sich gegenseitig in derselben Weise, wie bei Aronhold (a. a. O. S. 164) die einander „conjugirten" Formen $f$ und $P_f$.

13. Unter den Kegelschnitten des Netzes $(abc)$ kommt eine doppelte Gerade im Allgemeinen nicht vor. Ist eine solche Gerade $(v)$ vorhanden, kann man also als constituirende Formen der Gruppe $a_x^2$, $b_x^2$, $v_x^2$ annehmen, so wird:

$$J(abc) = D_x^3 = v_x \cdot a_x b_x (abv), \quad H(abc) = u_\Delta^3 = (auv)(buv)(abu);$$

die Gerade $v$ ist also ein Theil der Jacobi'schen und Doppeltangente der Hermite'schen Curve. In dem Netze giebt es dann eine allen Polarkegelschnitten von $H(abc)$ conjugirte Form $(v_x^2)$. Die erforderliche Bedingung erhält man daher durch Elimination der $v$ aus den Gleichungen:

$$v_\alpha^2 = 0, \quad v_\beta^2 = 0, \quad v_\gamma^2 = 0, \quad v_\Delta^2 \Delta_1 = 0, \quad v_\Delta^2 \Delta_2 = 0, \quad v_\Delta^2 \Delta_3 = 0,$$

d. h. indem man in der Gleichung

$$(\alpha\beta\gamma xyz) = 0$$

die $x$, $y$, $z$ als Symbole der Formen $u_\Delta^2 \Delta_1$, $u_\Delta^2 \Delta_2$, $u_\Delta^2 \Delta_3$ auffasst, also wegen (14):

$$4\Delta_1\Delta_2'\Delta_3''(\Delta\Delta'\Delta'')D_\Delta D_{\Delta'} D_{\Delta''} - 2\Delta_1\Delta_2'\Delta_3''(\Delta'\Delta''\Delta''')(\Delta''\Delta\Delta''')(\Delta\Delta'\Delta''') = 0$$

oder durch Vertauschung der Symbole $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$:

(18) $2(\Delta\Delta'\Delta'')^2 D_{\Delta} D_{\Delta'} D_{\Delta''} + (\Delta\Delta'\Delta'')(\Delta\Delta'\Delta''')(\Delta\Delta''\Delta''')(\Delta'\Delta''\Delta''') = 0.$

Die linke Seite unterscheidet sich nur um einen numerischen Factor von der Combinante, welche Hermite (a. a. O. S. 373) mit $\Sigma$ bezeichet.

In dem eben betrachteten Falle hatten die Kegelschnitte des Gewebes eine Tangente gemein. — Wenn dagegen die Kegelschnitte des Netzes $(abc)$ einen Punkt $y$ gemein haben, wenn also im Gewebe $(\alpha\beta\gamma)$ ein doppelter Punkt $u_y^2$ auftritt, so wird:

$$J(abc) = 2(\alpha xy)(\beta xy)(\alpha\beta x), \quad H(abc) = -4 \cdot u_y \cdot u_\alpha u_\beta (\alpha\beta y),$$

und es verschwindet identisch der Ausdruck:

(19) $(DD'D'')(DD'D''')(DD''D''')(D'D''D''') - DD'D'')^2 D_{\Delta} D'_{\Delta} D''_{\Delta}.$

Auch diess ist also eine Darstellung der Resultante der Formen $a_x^2$, $b_x^2$, $c_x^2$ durch die Symbole der Formen $J(abc)$ und $H(abc)$.

Sind zwei doppelte Geraden $v$, $w$ im Netze $(abc)$ vorhanden, so haben die Linien des Gewebes $(\alpha\beta\gamma)$ zwei Tangenten gemein; es wird dann:

$$D_x^3 = v_x \cdot w_x \cdot a_x (avw), \qquad u_\Delta^3 = (uvw)(avu)(awu).$$

Gehen die Kegelschnitte des Netzes durch zwei feste Punkte, so sind sie, doppelt gerechnet, Kegelschnitte des conjugirten Gewebes.

Wenn endlich im Netze $(abc)$ drei doppelte Geraden $v$, $v'$, $v''$ vorkommen, wenn also drei Kegelschnitte des Gewebes dem Dreieck $vv'v''$ eingeschrieben sind, so stellen die Curven $D_x^3$, $u_\Delta^3$ die drei Seiten resp. Ecken des Dreiecks dar:

$$D_x^3 = v_x v'_x v''_x (vv'v''), \qquad u_\Delta^3 = (vv'u)\, vv''u)(v'v''u),$$

und $vv'v''$ bilden ein Tripel conjugirter Strahlen für alle Kegelschnitte des Netzes. Der reciproke Fall ist der, wo alle Curven des Netzes einem Dreieck umschrieben sind, welches dann in Bezug auf alle Curven des Gewebes sich selbst conjugirt ist.

### Fünfgliedrige Gruppe.

14. In Betreff der fünfgliedrigen Gruppe

$$\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2 + \nu d_x^2 + \varrho e_x^2,$$

welcher ein conjugirter Kegelschnitt $u_\alpha^2$ gegenübersteht, soll hier nur eine Bemerkung Platz finden, die sich an den Fall anknüpft, wo $u_\alpha^2$ zerlegbar ist: $u_\alpha^2 = u_y \cdot u_z$. Es giebt dann zwei Punkte $y$ und $z$, welche einander in Bezug auf alle Kegelschnitte der Gruppe conjugirt sind. Nun bestimmen die fünf gegebenen Formen, zu je dreien verbunden, zehn Jacobi'sche Curven:

$$a_x b_x c_x (abc) = 0\,, \quad a_x b_x d_x (abd) = 0\,, \text{ u. s. f.}$$

welche sämmtlich die Punkte $y$ und $z$ enthalten müssen. Folglich verschwindet in diesem Falle die Determinante zehnter Ordnung $\Delta$ aus den Coefficienten der zehn cubischen Formen und zugleich ihre sämmtlichen Unterdeterminanten neunten Grades. Es bestehen ferner die zehn Gleichungen

$$(abu)(acu)(bcu) = 0\,, \quad (abu)(adu)(bdu) = 0 \text{ u. s. f.}$$

für die Verbindungen der Punkte $y$ und $z$. Folglich verschwindet auch die Determinante $\Delta'$ aus den Coefficienten dieser zehn Formen. Mit der Discriminante von $u_\alpha^2$ (d. i. von $(abcdeu)$), welche in Bezug auf die Coefficienten der fünf gegebenen Formen vom 15ten Grade ist, verschwindet also zugleich $\Delta$ und $\Delta'$, welche vom 30ten Grade sind, sowie auch die Unterdeterminante von $\Delta$. Man folgert, *dass $\Delta$ und $\Delta'$ bis auf numerische Factoren dem Quadrate der Discriminante von $u_\alpha^2$ gleich*) und dass sämmtliche Unterdeterminanten 9ten Grades von $\Delta$ durch die Discriminante von $u_\alpha^2$ theilbar sein müssen.*

## § 4.

### Ueber gewisse algebraische Operationen.

15. Vor dem Uebergange zur viergliedrigen Kegelschnittgruppe sind einige Formenbildungen aus einander zu setzen, welche in der Folge angewendet werden sollen und zum Theil schon vorgekommen sind.

Hat man eine Function $f$ der Variabeln $x_1 x_2 x_3$ und $y_1 y_2 y_3$, so entsteht aus ihr durch die Operation**)

$$u_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_2}\right) + u_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial y_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_3}\right) + u_3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial y_1}\right)$$

eine Zwischenform, welche mit

$$\underset{x,y}{\Omega}(f)_u$$

bezeichnet werden soll, so dass, wenn wir symbolisch

$$f = a_x^p b_y^q$$

setzen, die Zwischenform

$$\underset{x,y}{\Omega}(f)_u = pq \cdot a_x^{p-1} b_y^{q-1} (abu) \tag{20}$$

wird. Bei fortgesetzter Anwendung der Operation, welche durch $\Omega^2$, $\Omega^3$ . . . angedeutet wird, resultirt:

---

*) Es geht diess schon daraus hervor, dass $\Delta$, $\Delta'$ auch Invarianten der Form $u_\alpha^2$ und somit Potenzen ihrer Discriminante sein müssen.

**) Vgl. Clebsch, Theorie der binären Formen S. 14.

$$\underset{x,y}{\Omega^\lambda}(f)_{u,v,w\ldots}$$
$$= p(p-1)\cdots(p-\lambda+1)\cdot q(q-1)\cdots(q-\lambda+1)\,a_x^{p-\lambda}b_y^{q-\lambda}(abu)(abv)(abw)\cdots.$$

Ist $f=\varphi+\psi+\chi+\cdots$, so erhält man:

$$\Omega(f)=\Omega(\varphi)+\Omega(\psi)+\Omega(\chi)+\cdots.$$

Ist $f=\varphi\cdot\psi\cdot\chi\cdots$ ein Product von mehreren Functionen, so kommen bei Ausführung des Processes $\Omega(f)$ wegen der zweimaligen Differentiation nur einer oder höchstens zwei der Factoren zugleich in Betracht. Es genügt somit, das Resultat bei zwei Factoren zu kennen. Nehmen wir an, dass

$$f=\varphi\cdot\psi$$

ist, so ergiebt die Rechnung:

$$(21)\quad \underset{x,y}{\Omega}(f)_u=\varphi\cdot\Omega(\psi)+\psi\cdot\Omega(\varphi)+\begin{vmatrix} u_1 & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial y_1}\\ u_2 & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi}{\partial y_2}\\ u_3 & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial\psi}{\partial y_3}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u_1 & \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\\ u_2 & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}\\ u_3 & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} & \frac{\partial\varphi}{\partial y_3}\end{vmatrix}.$$

Daraus ergeben sich als besondere Fälle die Formeln:

$$(22)\quad \underset{x,y}{\Omega}(\varrho xy)_u=2u_\varrho,\quad \underset{x,y}{\Omega}(\varrho xy)_u^2=6u_\varrho(\varrho xy),\quad \underset{x,y}{\Omega^2}(\varrho xy)_u^2=12u_\varrho^2.$$

Um die Wirkung auf $(\varrho xy)^p$ allgemein zu erkennen, beachte man die über Producte von mehr als zwei Factoren gemachte Bemerkung; durch die Formeln (22) findet man dann:

$$(23)\quad \underset{x,y}{\Omega}(\varrho xy)_u^p=(p+1)p\cdot u_\varrho(\varrho xy)^{p-1}$$

und bei Wiederholung der Operation:

$$\underset{x,y}{\Omega^2}(\varrho xy)_u^p=(p+1)p^2(p-1)\cdot u_\varrho^2(\varrho xy)^{p-2},\ \cdots$$
$$\underset{x,y}{\Omega^\lambda}(\varrho xy)_u^p=(p+1)p^2(p-1)^2\cdots(p-\lambda+2)^2(p-\lambda+1)\cdot u_\varrho^\lambda(\varrho xy)^{p-\lambda}.$$

16. Enthält eine Form $f$ eines der beiden Variabelnsysteme, und zwar etwa $y$, nur in den Verbindungen $(xy)_1$, $(xy)_2$, $(xy)_3$, so kann man symbolisch

$$f=(\varrho xy)^q r_x^\lambda$$

setzen und erhält unter Anwendung der allgemeinen Formel (21):

$$\underset{x,y}{\Omega}(f)_u=q(\varrho xy)^{q-1}r_x^{\lambda-1}\left\{(q+\lambda+1)u_\varrho r_x-\lambda u_x r_\varrho\right\}=f_1(u).$$

Ersetzt man hierin die $u_i$ durch die Grössen $(xy)_i$, so ergiebt sich

$$(24)\quad f_1((xy))=\Omega(f)_{u=(xy)}=q(q+\lambda+1)\cdot f,$$

d. h.: Bildet man unter der über die Form $f$ gemachten Voraussetzung die Form $\Omega(f)$ und ersetzt dann die $u$ durch die Determinanten $(xy)$, so erhält man bis auf einen numerischen Factor wieder $f$ selbst.

Die Gestalt von $f_1(u)$ zeigt aber, dass als Form in $x$ und $y$ wieder

$$f_1 = (\varrho x y)^{q-1} r_{1,x}^{\lambda}$$

gesetzt werden kann, indem neue Symbole $r_{11}\ r_{12}\ r_{13}$ eingeführt werden. Bezeichnet man daher weiter

$$\underset{x,y}{\Omega}(f_1)_v \text{ mit } f_2(u, v),$$

so gilt nach Analogie von (24) die Gleichung:

$$f_2(u, (xy)) = \underset{x,y}{\Omega}(f_1)_{v=(xy)} = (q-1)(q+\lambda) f_1(u),$$

und es ist folglich:

$$f_2((xy), (xy)) = \underset{x,y}{\Omega^2}(f)_{u=(xy)} = q(q-1)\cdot(q+\lambda+1)(q+\lambda)\cdot f.$$

Diese Betrachtung setzt sich fort, bis man schliesslich erhält:

$$\underset{x,y}{\Omega^q}(f)_{u=(xy)} = \frac{q!\,(q+\lambda+1)!}{(\lambda+1)!} f. \tag{25}$$

Da $\Omega^q(f)$ die Veränderlichen $y$ nicht enthält, mithin diese nach Gleichsetzung der $u_i$ mit den $(xy)_i$ nur in den Verbindungen $(xy)_i$ sichtbar werden, so gilt der Satz:

*Wenn von einer Function $f$ der Veränderlichen $x$ und $y$, vom Grade $q$ in den $y$, bekannt ist, dass sie die $y$ nur in den Verbindungen $(xy)_1$, $(xy)_2$, $(xy)_3$ enthält, so kann man durch Anwendung des $\Omega$-Processes für $f$ eine Gestalt finden, bei welcher diese Verbindungen als solche zum Vorschein kommen. Wendet man nämlich jenen Process $q$-mal an und setzt dann die den $x, y$ contragredienten Variabeln $(u, v \cdots)$ den $(xy)$ gleich, so unterscheidet sich der entstehende Ausdruck von $f$ nur um einen Zahlenfactor.*

Von Wichtigkeit sind häufig die Zwischenformen, welche man erhält, indem man nach ein- oder mehrmaliger Ausführung des $\Omega$-Processes die Variabeln $x, y$ einander gleichsetzt, wofür die Bezeichnung

$$\underset{x=y}{\Omega}(f)_u$$

benutzt werden mag. Die Resultate vereinfachen sich dabei oft erheblich. Ist $f$ symmetrisch in Bezug auf $x$ und $y$, so ist offenbar

$$\underset{x=y}{\Omega}(f)_u = 0.$$

Ist $f$ eine alternirende Function von $x$ und $y$, also symbolisch durch die Form

$$f = (\varrho x y)\,\psi(x, y)$$

darstellbar, wo $\psi$ eine symmetrische Form ist, etwa vom Grade $\lambda$ sowohl in $x$ als in $y$, so ergiebt sich durch eine einfache Rechnung:

(26) $$\underset{x=y}{\Omega}(f)_u = 2(\lambda+1)u_\varrho\psi(x,x) - 2u_x\left(\varrho_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\varrho_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\varrho_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)_{y=x}.$$

17. Die eben erläuterte Operation ist es, durch welche die für die Kegelschnittschaar $\varrho u_\alpha^2 + \sigma u_\beta^2$ besonders wichtige Combinante

$$u_\alpha u_\beta(\alpha\beta x)$$

(siehe Gl. (3) in Art. 7.) aus dem Product $u_\alpha^2 v_\beta^2$ oder aus der Determinante $u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\beta^2 v_\alpha^2$, welche als die fundamentale Combinante der Schaar angesehen werden kann, hergeleitet wird. Denn man hat nach (20):

(27) $$\underset{u=v}{\Omega}(u_\alpha^2 v_\beta^2)_x = 4u_\alpha u_\beta(\alpha\beta x), \quad \underset{u=v}{\Omega}(u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\beta^2 v_\alpha^2) = 8u_\alpha u_\beta(\alpha\beta x).$$

Von der gleichen Bedeutung sind für das Kegelschnittnetz $\varkappa a_x^2 + \lambda b_x^2 + \mu c_x^2$ die beiden Combinanten

$$H(abc) = (abu)(acu)(bcu) \text{ und } J(abc) = a_x b_x c_x (abc).$$

Auch diese können als Ergebnisse allgemeiner Operationen erklärt werden, welche diesmal an Ausdrücken mit dreierlei Veränderlichen zu vollziehen sind. Man denke sich unter

$$f = a_x^2 b_y^2 c_z^2$$

eine Function von drei Systemen Veränderlicher, in Bezug auf jedes quadratisch, und wende nach einander die Operationen

$$\underset{x,y}{\Omega},\ \underset{x,z}{\Omega},\ \underset{y,z}{\Omega}$$

an, was durch das Zeichen $\underset{xyz}{\varpi}$ angedeutet werden mag; dann erhält man:

$$\underset{xyz}{\varpi}(f)_u = 8(abu)(acu)(bcu).$$

Auf diesem Wege wird also im Falle des Kegelschnittnetzes die Hermite'sche Form aus dem Producte $a_x^2 \cdot b_y^2 \cdot c_z^2$ hergeleitet; aus der fundamentalen Combinante des Netzes

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix}$$

geschieht dasselbe durch die Formel:

(28) $$\underset{xyz}{\varpi}(\varphi)_u = 48(abu)(acu)(bcu) = 48\,H(abc).$$

Zur Herstellung der Jacobi'schen Form auf $f = a_x^2 b_y^2 c_z^2$ (oder aus $\varphi$) dient der folgende Process:

$$\underset{xyz}{\Theta}(f)_x = \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial y_2 \partial z_3} - \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial y_3 \partial z_2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial y_3 \partial z_1} - \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial y_1 \partial z_3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial y_1 \partial z_2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial y_2 \partial z_1}\right]_{y=x,\ z=x},$$

durch welchen wir erhalten:

$$(29)\quad \Theta(f) = 8\, a_x b_x c_x\, (abc), \quad \Theta(\varphi) = 48\, a_x b_x c_x\, (abc) = 48\, J(abc).$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (7) können aus den Identitäten (10) nunmehr leicht die folgenden Formeln entnommen werden:

$$(30)\quad \begin{cases} \underset{xyz}{\Theta}(\alpha\beta\gamma xyz)_x = -12\,(\alpha\beta x)\,(\alpha\gamma x)\,(\beta\gamma x)\,, \\ \underset{xyz}{\varpi}(\alpha\beta\gamma xyz)_u = 24\, u_\alpha u_\beta u_\gamma\,(\alpha\beta\gamma). \end{cases}$$

## § 5.

### Algebraische Behandlung der viergliedrigen Gruppe und der ihr conjugirten zweigliedrigen.

18. Unter Anwendung der im vorigen Paragraphen erörterten algebraischen Operationen können die in § 3. für die Combinanten eines Kegelschnittnetzes und des conjugirten Gewebes gegebenen Relationen zur Aufsuchung der analogen Beziehungen für die viergliedrige Gruppe

$$\varkappa\, a_x^2 + \lambda\, b_x^2 + \mu\, c_x^2 + \nu\, d_x^2$$

und die conjugirte Kegelschnittschaar

$$\varrho\, u_\alpha^2 + \sigma\, u_\beta^2$$

verwerthet werden.

Zunächst ist wieder zu bemerken, dass die Combinante

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2a_3 & a_3a_1 & a_1a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2b_3 & b_3b_1 & b_1b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_2c_3 & c_3c_1 & c_1c_2 \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 & d_2d_3 & d_3d_1 & d_1d_2 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_2u_3 & u_3u_1 & u_1u_2 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & v_2v_3 & v_3v_1 & v_1v_2 \end{vmatrix} = (abcduv)$$

den allgemeinen Kegelschnitt der Schaar $\varrho u_\alpha^2 + \sigma u_\beta^2$ repräsentirt, wenn die $v$ als Parameter aufgefasst werden, so dass man setzen kann:

$$(abcduv) = \varrho\, u_\alpha^2 + \sigma\, u_\beta^2\,, \qquad o = \varrho\, v_\alpha^2 + \sigma\, v_\beta^2\,.$$

Durch passende Bestimmung eines Factors kann man daher bewirken, dass identisch

$$(31)\quad (abcduv) = \begin{vmatrix} u_\alpha^2 & u_\beta^2 \\ v_\alpha^2 & v_\beta^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} u_1{}^2 & u_2{}^2 & u_3{}^2 & u_2u_3 & u_3u_1 & u_1u_2 \\ v_1{}^2 & v_2{}^2 & v_3{}^2 & v_2v_3 & v_3v_1 & v_1v_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1{}^2 & \alpha_2{}^2 & \alpha_3{}^2 & 2\alpha_2\alpha_3 & 2\alpha_3\alpha_1 & 2\alpha_1\alpha_2 \\ \beta_1{}^2 & \beta_2{}^2 & \beta_3{}^2 & 2\beta_2\beta_3 & 2\beta_3\beta_1 & 2\beta_1\beta_2 \end{vmatrix};$$

und die Zurückführung der Symbole $abcd$ und $\alpha\beta$ wird vervollständigt durch die Formel:

$$(32)\qquad 8\,(\alpha\beta xyzt) = \begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 & d_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 & d_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 & d_z^2 \\ a_t^2 & b_t^2 & c_t^2 & d_t^2 \end{vmatrix},$$

deren beide Seiten den allgemeinen Kegelschnitt der Gruppe $(abcd)$ repräsentiren, wenn man $y, z, t$ als Parameter auffasst.

19. Zu je dreien verbunden, liefern die Formen $a_x^2$, $b_x^2$, $c_x^2$, $d_x^2$ vier Jacobi'sche Formen, welche ich (im Einklang mit (11)) folgendermassen symbolisch bezeichne:

$$-\,b_xc_xd_x\,(bcd) = A_x^3,\quad a_xc_xd_x\,(acd) = B_x^3,$$
$$-\,a_xb_xd_x\,(abd) = C_x^3,\quad a_xb_xc_x\,(abc) = D_x^3,$$

und ebenso vier Hermite'sche Formen:

$$-\,(bcu)\,(bdu)\,(cdu) = u_A^3\,,\qquad (acu)\,(adu)\,(cdu) = u_B^3$$
$$-\,(abu)\,(adu)\,(bdu) = u_\Gamma^3\,,\qquad (abu)\,(acu)\,(bcu) = u_\Delta^3\,,$$

Die ersteren treten gleichzeitig auf, wenn man das Netz derjenigen der Gruppe $(abcd)$ angehörigen Kegelschnitte, welche durch einen festen Punkt $y$ hindurchgehen (allgemeiner: welche noch einer Curve $u_y^2$ conjugirt sind), betrachtet. Zur Repräsentation dieses Netzes dienen die beiden in (32) einander gleichgesetzten Ausdrücke, wenn die Grössen $z$, $t$ als Parameter angesehen werden. Um zur Jacobi'schen Curve des Netzes zu gelangen, bediene ich mich des in Art. 17. eingeführten $\Theta$-Processes und erhalte aus (32), indem ich die rechte Seite nach den Elementen der zweiten Zeile ordne, nach (29):

$$8\,\underset{xzt}{\Theta}\,(\alpha\beta xyzt)_x = -\,8\,\underset{xzt}{\Theta}\,(\alpha\beta yxzt)_x$$
$$= -\,a_y^2\cdot 48\,J\,(bcd) + b_y^2\cdot 48\,J\,(acd) - c_y^2\cdot 48\,J\,(abd) + d_y^2\cdot 48\,J\,(abc),$$

mithin wegen (30):

$$(33)\qquad a_y^2A_x^3 + b_y^2B_x^3 + c_y^2C_x^3 + d_y^2D_x^3 = 2\,(\alpha\beta x)\,(\alpha yx)\,(\beta yx).$$

Zur Hermite'schen Curve des Netzes führt der in Art. 17. definirte $\varpi$-Process, in analoger Weise auf die Ausdrücke (32) angewandt, wie eben der $\Theta$-Process. Es ergiebt sich nach (28):

$$8 \underset{xzt}{\varpi} (\alpha\beta xyzt)_u = -8 \underset{xzt}{\varpi} (\alpha\beta yxzt)_u$$

$$= -a_y^2 \cdot 48 H(bcd) + b_y^2 \cdot 48 H(acd) - c_y^2 \cdot 48 H(abd) + d_y^2 \cdot 48 H(abc),$$

mithin wegen (30):

$$(34) \qquad a_y^2 u_A^3 + b_y^2 u_B^3 + c_y^2 u_\Gamma^3 + d_y^2 u_\Delta^3 = - u_y \cdot u_\alpha u_\beta (\alpha\beta y).$$

Auf der rechten Seite von (33) und (34) tritt die wichtige Zwischenform der zweigliedrigen Gruppe $(\alpha\beta)$ auf, welche in Art. 7. eingeführt wurde, und für welche wir folgende symbolische Bezeichnung wählen:

$$(35) \qquad 2\, u_\alpha u_\beta (\alpha\beta x) = u_\varrho^2 r_x.$$

Diese Form hat eine charakteristische Eigenschaft. Wendet man auf beide Seiten von (35) den Process*)

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial u_3 d x_3} = \delta$$

an, so kommt links Null, so dass identisch:

$$(36) \qquad u_r r_\varrho = 0,$$

d. h.: Jede Form mit dem symbolischen Factor $r_\varrho$ verschwindet.

In der neuen Bezeichnung schreiben sich die Gleichungen (33) und (34):

$$(37) \quad \begin{cases} a_y^2 A_x^3 + b_y^2 B_x^3 + c_y^2 C_x^3 + d_y^2 D_x^3 = (\varrho xy)^2 r_x, \\ a_y^2 u_A^3 + b_y^2 u_B^3 + c_y^2 u_\Gamma^3 + d_y^2 u_\Delta^3 = -2\, u_y \cdot u_\varrho^2 r_y. \end{cases}$$

20. Von den beiden voranstehenden Gleichungen enthält die erste auf der rechten Seite die Veränderlichen $y$ nur in den Verbindungen $(xy)_1$ etc.; um daher diese Verbindungen auch links hervortreten zu lassen, wende ich nach Art. 16. den $\Omega$-Process zweimal an. Nun ist wegen (36):

$$\underset{x,y}{\Omega} \left((\varrho xy)^2 r_x\right)_u = 2\,(\varrho xy) \cdot 4\, u_\varrho r_x, \quad \underset{x,y}{\Omega^2} \left((\varrho xy)^2 r_x\right)_u = 8\, u_\varrho \cdot 3\, u_\varrho r_x,$$

$$\underset{x,y}{\Omega} (a_y^2 A_x^3)_u = 6\, a_y A_x^2 (Aau), \qquad \underset{x,y}{\Omega^2} (a_y^2 A_x^3)_u = 12\, A_x (Aau)^2.$$

Also wird:

$$(38) \quad 2 u_\varrho^2 r_x = 4 u_\alpha u_\beta (\alpha\beta x) = A_x (aAu)^2 + B_x (bBu)^2 + C_x (cCu)^2 + D_x (dDu)^2.$$

In der zweiten Gleichung (37) ist die rechte Seite durch $u_y$

*) Ueber diesen Process vergl. Gordan „Ueber Combinanten" Mathem. Ann. Bd. V. S. 102, und Clebsch: „Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie" Abh. d. Gött. Ges. Bd. XVII. 1872. § 15. und Mathem. Ann. Bd. V. S. 433.

theilbar; es gelingt beide Seiten vom Factor $u_y$ zu befreien, wenn man die Operation

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial y_2} + \frac{\partial^2}{\partial u_3 \partial y_3}$$

ausführt. Man erhält unter Beachtung von (36):

$$(39) \quad \begin{aligned} -4\, u_\varrho^2 r_y &= -8\, u_\alpha u_\beta (\alpha\beta y) \\ &= 3\left\{a_y u_A^2 a_A + b_y u_B^2 b_B + c_y u_\Gamma^2 c_\Gamma + d_y u_\Delta^2 d_\Delta\right\}. \end{aligned}$$

Aus (37), (39) folgt sofort:

$$(39^a) \quad \begin{aligned} & a_x^2 u_A^3 + b_x^2 u_B^3 + c_x^2 u_\Gamma^3 + d_x^2 u_\Delta^3 \\ &= \tfrac{3}{2}\, u_x \left\{a_x u_A^2 a_A + b_x u_B^2 b_B + c_x u_\Gamma^2 c_\Gamma + d_x u_\Delta^2 d_\Delta\right\}; \end{aligned}$$

und aus (38), (39):

$$(40) \quad \begin{aligned} & A_x (aAu)^2 + B_x (bBu)^2 + C_x (cCu)^2 + D_x (dDu)^2 \\ &= -\tfrac{3}{2}\left\{a_x u_A^2 a_A + b_x u_B^2 b_B + c_x u_\Gamma^2 c_\Gamma + d_x u_\Delta^2 d_\Delta\right\}, \end{aligned}$$

eine merkwürdige Beziehung zwischen den Jacobi'schen und den Hermite'schen Formen, welche aus $a_x^2 \cdots d_x^2$ entstehen. Bei Anwendung des Processes $\delta$ verschwindet in (40) die linke Seite identisch und es ist daher:

$$u_A a_A^2 + u_B b_B^2 + u_\Gamma c_\Gamma^2 + u_\Delta d_\Delta^2 = 0.$$

21. Aus der Zwischenform $u_\varrho^2 r_x$ lassen sich alle Combinanten der Gruppe $(\alpha\beta)$ und der conjugirten $(abcd)$ herleiten. Zunächst ergiebt sich aus (35):

$$(u_\alpha v_\beta + u_\beta v_\alpha)(\alpha\beta x) = u_\varrho v_\varrho r_x, \quad (u_\alpha v_\beta + u_\beta v_\alpha)(u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) = u_\varrho v_\varrho (ruv),$$

also

$$\begin{vmatrix} u_\alpha^2 & u_\beta^2 \\ v_\alpha^2 & v_\beta^2 \end{vmatrix} = (abcduv) = u_\varrho v_\varrho (uvr).$$

Demnach wird der Uebergang von den Symbolen $\alpha$, $\beta$ zu den Symbolen $\varrho$, $r$ bei einer beliebigen Combinante $f$ dadurch bewirkt, dass man $\frac{1}{8} \underset{\alpha,\beta}{\Omega} (f)_r$ bildet und darin $\varrho$ für $\alpha$, $\beta$ setzt. In der That geht dadurch $u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\beta^2 v_\alpha^2$ in $u_\varrho v_\varrho (uvr)$ über.

Um dies nun auf die Combinante $(\alpha\beta xyzt)$ anzuwenden, hat man die Gleichung (38) zu benutzen, nach welcher

$$\underset{u=v}{\Omega} (u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\beta^2 v_\alpha^2)_x = 2\left\{A_x (aAu)^2 + \cdots\right\}$$

oder wegen (31):

$$\underset{u=v}{\Omega} (uvabcd)_x = 2\left\{A_x (aAu)^2 + \cdots\right\}.$$

Schreibt man in dieser Identität $\alpha\beta xyzt$ an Stelle von $uvabcd$ und $r$ für $x$, wodurch

$$A_x^3,\ B_x^3,\ C_x^3,\ D_x^3 \text{ resp. in } r_\xi^3,\ r_\eta^3,\ r_\zeta^3,\ r_\theta^3$$

übergehen mögen, so folgt:

$$\underset{\alpha=\beta}{\Omega}(\alpha\beta xyzt)_r = 2\left\{r_\xi\,(x\xi\alpha)^2 + \cdots\right\}$$

und demnach als der gesuchte Ausdruck für $(\alpha\beta xyzt)$ in $\varrho$, $r$:

$$\tfrac{1}{4}\left\{r_\xi\,(\varrho\xi x)^2 + \cdots\right\}$$

oder vollständig:

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} 8\,(\alpha\beta xyzt) &= \Sigma \pm a_x^2 b_y^2 c_z^2 d_t^2 \\ = \tfrac{2}{3}\{&-(yzt)\,(r_y\,(\varrho xz)\,(\varrho xt) + r_z\,(\varrho xy)\,(\varrho xt) + r_t\,(\varrho xy)\,(\varrho xz)) \\ &+ (xzt)\,(r_x\,(\varrho yz)\,(\varrho yt) + r_z\,(\varrho yx)\,(\varrho yt) + r_t\,(\varrho yx)\,(\varrho yz)) \\ &- (xyt)\,(r_x\,(\varrho zy)\,(\varrho zt) + r_y\,(\varrho zx)\,(\varrho zt) + r_t\,(\varrho zx)\,(\varrho zy)) \\ &+ (xyz)\,(r_x\,(\varrho ty)\,(\varrho tz) + r_y\,(\varrho tx)\,(\varrho tz) + r_z\,(\varrho tx)\,(\varrho ty))\}. \end{aligned}\right.$$

22. Aus der eben erlangten Formel lassen sich durch den $\Omega$-Process Zusammenhänge der sechs Zwischenformen, welche durch Combination der Formen $a_x^2 \cdots d_x^2$ zu je zweien entstehen:

$$a_x b_x (abu),\ a_x c_x (acu),\ a_x d_x (adu),\ c_x d_x (cdu),\ d_x b_x (dbu),\ b_x c_x (bcu),$$

mit der Zwischenform $u_\varrho^2 r_x$ der Gruppe $(\alpha\beta)$ herstellen. Es ist jedoch einfacher, zu diesem Zweck auf die Formel (13) zu recurriren, welche die drei bei einem Netze auftretenden Zwischenformen mit dessen Jacobi'scher und Hermite'scher Form verknüpft. Aus ihr folgen nämlich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} b_y^2 \cdot c_x d_x (cdu) + c_y^2 \cdot d_x b_x (dbu) + d_y^2 \cdot b_x c_x (bcu) \\ = -2\,u_y A_x^2 A_y + u_x A_y^2 A_x - u_A\,(xy\mathsf{A})^2, \\ a_y^2 \cdot c_x d_x (cdu) + c_y^2 \cdot d_x a_x (dau) + d_y^2 \cdot a_x c_x (acu) \\ = +2\,u_y B_x^2 B_y - u_x B_y^2 B_x + u_B\,(xy\mathsf{B})^2, \\ a_y^2 \cdot b_x d_x (bdu) + b_y^2 \cdot d_x a_x (dau) + d_y^2 \cdot a_x b_x (abu) \\ = -2\,u_y C_x^2 C_y + u_x C_y^2 C_x - u_\Gamma\,(xy\Gamma)^2, \\ a_y^2 \cdot b_x c_x (bcu) + b_y^2 \cdot c_x a_x (cau) + c_x^2 \cdot a_x b_x (abu) \\ = +2\,u_y D_x^2 D_y - u_x D_y^2 D_x + u_\Delta\,(xy\Delta)^2. \end{aligned}$$

Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit $-a_z^2$, $b_z^2$, $-c_z^2$, $d_z^2$ und addirt sie, so ergiebt sich:

$$(42)\quad\left\{\begin{aligned}&a_x b_x (abu)\begin{vmatrix} c_y^2 & d_y^2 \\ c_z^2 & d_z^2 \end{vmatrix} + a_x c_x (acu)\begin{vmatrix} d_y^2 & b_y^2 \\ d_z^2 & b_z^2 \end{vmatrix} + a_x d_x (adu)\begin{vmatrix} b_y^2 & c_y^2 \\ b_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix}\\ &+ c_x d_x (cdu)\begin{vmatrix} a_y^2 & b_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 \end{vmatrix} + d_x b_x (dbu)\begin{vmatrix} a_y^2 & c_y^2 \\ a_z^2 & c_z^2 \end{vmatrix} + b_x c_x (bcu)\begin{vmatrix} a_y^2 & d_y^2 \\ a_z^2 & d_z^2 \end{vmatrix}\\ &= 2\, u_y\, \Sigma a_z^2 A_x^2 A_y - u_z\, \Sigma a_z^2 A_y^2 A_x + \Sigma a_z^2 u_A (xy\mathsf{A})^2.\end{aligned}\right.$$

Rechts*) treten Polaren der Summen $\Sigma a_z^2 A_x^3$ und $\Sigma a_z^2 u_A^3$ auf, welche wir mit Hülfe der Formeln (37) durch die Symbole von $u_\varrho^2 r_x$ ausdrücken können. Der auf diesem Wege entstehende Ausdruck

$$\tfrac{2}{3}\, u_y (\varrho x z) \{(\varrho x z) r_y + 2\, (\varrho y z) r_x\} - \tfrac{1}{3}\, u_x (\varrho y z) \{(\varrho y z) r_x + 2\, (\varrho x z) r_y\} \\ - \tfrac{2}{3}\, r_z (x y \varrho) \{(x y \varrho) u_z + 2 (x y z) u_\varrho\}$$

besitzt jedoch in Bezug auf $y$, $z$ noch keine Symmetrie, während die linke Seite bei Vertauschung dieser Variabeln nur das Zeichen wechselt. Wir schreiben daher die Gleichung noch einmal, mit Vertauschung von $y$ und $z$, und subtrahiren sie von der vorigen; dies giebt:

$$(43)\quad\left\{\begin{aligned}&a_x b_x (abu)\begin{vmatrix} c_y^2 & d_y^2 \\ c_z^2 & d_z^2 \end{vmatrix} + \text{etc.} = \tfrac{1}{8}\, \underset{x=t}{\Omega}\, (\Sigma \pm a_x^2 b_y^2 c_z^2 d_t^2)_u = \underset{x=t}{\Omega}\, (\alpha\beta x y z t)_u \\ &= \tfrac{2}{3}\, \{u_y r_y (\varrho x z)^2 - u_z r_z (\varrho x y)^2\} + \tfrac{2}{3}\, r_x (\varrho y z) \{u_y (\varrho x z) + u_z (\varrho x y)\} \\ &- \tfrac{1}{3} u_x (\varrho y z) \{r_y (\varrho x z) + r_z (\varrho x y)\} \\ &- \tfrac{2}{3} u_\varrho (x y z) \{r_z (\varrho x y) + r_y (\varrho x z)\}\,.\end{aligned}\right.$$

Hieraus**) erhält man endlich eine weit einfachere Beziehung, in welcher links an die Stelle der Determinante $c_y^2 d_z^2 - c_z^2 d_y^2$ etc. die Zwischenformen $c_y d_y (cdu)$ etc. treten. Unter Berücksichtigung der Formel (26) findet man nämlich:

$$\underset{y=z}{\Omega} \{u_y r_y (\varrho x z)^2 - u_z r_z (\varrho x y)^2\}_u = 4\, u_y (\varrho x y) (u_\varrho r_x - u_x r_\varrho)\,,$$

$$\underset{y=z}{\Omega} [(\varrho y z) \{u_y (\varrho x z) + u_z (\varrho x y)\}]_u = 6\, u_y u_\varrho (\varrho x y)\,,$$

$$\underset{y=z}{\Omega} [(\varrho y z) \{r_y (\varrho x z) + r_z (\varrho x y)\}]_u = 2\, (\varrho x y)\, (4\, u_\varrho r_y - u_y r_\varrho)\,,$$

$$\underset{y=z}{\Omega} [(x y z) \{r_z (\varrho x y) + r_y (\varrho x z)\}]_u = 2\, (\varrho x y)\, (4\, u_x r_y - u_y r_x)\,.$$

Nun fallen aber wegen (36) alle Glieder mit dem symbolischen Factor

---

*) Die Summenzeichen beziehen sich jedesmal auf die vier gleichgebildeten Glieder.

**) Aus (43) kann man übrigens zur Darstellung der Determinante $\Sigma \pm a_x^2 b_y^2 c_z^2 d_t^2$ durch die Symbole $\varrho$, $r$, welche in (41) bereits gegeben ist, durch dieselbe Rechnung gelangen, wie von der Formel (12) zu (14).

$r_\varrho$ weg, und es bleibt daher bei der Bildung von $\underset{y=z}{\Omega}$ in Gleichung (43) für die rechte Seite:

$$24\, u_\varrho\, (\varrho x y)\, (u_y r_x - u_x r_y)\,, \text{ d. i. } 24\, \{u_\alpha^2 (xy\beta)^2 - u_\beta^2\, (xy\alpha)^2\}\,,$$

also:

$$(44) \begin{cases} a_x b_x (abu) \cdot c_y d_y (cdu) + a_x c_x (acu) \cdot d_y b_y (dbu) + a_x d_x (adu) \cdot b_y c_y (bcu) \\ + c_x d_x (cdu) \cdot a_y b_y (abu) + d_x b_x (dbu) \cdot a_y c_y (acu) + b_x c_x (bcu) \cdot a_y d_y (adu) \\ = u_\varrho (\varrho x y) (u_y r_x - u_x r_y) = u_\alpha^2 (xy\beta)^2 - u_\beta^2 (xy\alpha)^2, \end{cases}$$

oder als Endergebniss die wichtige Identität:

$$(abcduv)_{v=(xy)} = a_x b_x (abu) \cdot c_y d_y (cdu) + a_x c_x (acu) \cdot a_y c_y (acu) + \cdots\cdots$$

23. Für diese merkwürdige Beziehung zwischen den sechs Zwischenformen $a_x b_x (abu)$ etc. und der Combinante $(abcduv)$ lässt sich auch auf directem Wege ein Beweis führen, welcher hier ebenfalls Platz finden mag. Die linke Seite der Gleichung (44) kann leicht in Form einer Determinante dargestellt werden; sie ist nämlich gleich

$$\begin{vmatrix} a_x a_1 & b_x b_1 & c_x c_1 & d_x d_1 & u_1 & 0 \\ a_x a_2 & b_x b_2 & c_x c_2 & d_x d_2 & u_2 & 0 \\ a_x a_3 & b_x b_3 & c_x c_3 & d_x d_3 & u_3 & 0 \\ a_y a_1 & b_y b_1 & c_y c_1 & d_y d_1 & 0 & u_1 \\ a_y a_2 & b_y b_2 & c_y c_2 & d_y d_2 & 0 & u_2 \\ a_y a_3 & b_y b_3 & c_y c_3 & d_y d_3 & 0 & u_3 \end{vmatrix},$$

da z. B. die Partialdeterminante

$$\begin{vmatrix} a_x a_1 & b_x b_1 & u_1 \\ a_x a_2 & b_x b_2 & u_2 \\ a_x a_3 & b_x b_3 & u_3 \end{vmatrix} = a_x b_x (abu)$$

u. s. w. Andererseits gestattet die Determinante $(abcduv)$ unter der Annahme $v = (xy)$ folgende Umformung:

$$(abcduv)_{v=(xy)} = \frac{1}{x_3} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2 a_3 & a_3 a_1 & a_1 a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2 b_3 & b_3 b_1 & b_1 b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_2 c_3 & c_3 c_1 & c_1 c_2 \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 & d_2 d_3 & d_3 d_1 & d_1 d_2 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_2 u_3 & u_3 u_1 & u_1 u_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & x_3 & x_2 \\ 0 & x_2 & 0 & x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_3 & x_2 & x_1 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 & 0 & y_3 & y_2 \\ 0 & y_2 & 0 & y_3 & 0 & y_1 \end{vmatrix}.$$

In der That haben die sechs Determinanten fünften Grades aus dem zweiten Rechteck die Werthe

$$x_3 (xy)_1^2,\; x_3 (xy)_2^2,\; x_3 (xy)_3^2,\; x_3 (xy)_2 (xy)_3,\; x_3 (xy)_3 (xy)_1,\; x_3 (xy)_1 (xy)_2;$$

denn wenn man eine sechste Zeile:

$$z_1^2,\; z_2^2,\; z_3^2,\; 2\, z_2 z_3,\; 2\, z_3 z_1,\; 2\, z_1 z_2$$

hinzufügt, so ist die entstehende Determinante nach (9) die doppelte Hermite'sche Form der drei Kegelschnitte $u_y u_1$, $u_y u_2$, $u_z^2$, d. i. $= x_3(xyz)^2$. Also hat man:

$$(abcduv)_{v=(xy)} = \frac{1}{x_3 u_x} \begin{vmatrix} a_x a_1 & b_x b_1 & c_x c_1 & d_x d_1 & u_x u_1 & 0 \\ a_x a_2 & b_x b_2 & c_x c_2 & d_x d_2 & u_x u_2 & 0 \\ a_x a_3 & b_x b_3 & c_x c_3 & d_x d_3 & u_x u_3 & 0 \\ a_y a_1 & b_y b_1 & c_y c_1 & d_y d_1 & u_y u_1 & u_1 \\ a_y a_2 & b_y b_2 & c_y c_2 & d_y d_2 & u_y u_2 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_x \end{vmatrix},$$

oder wenn man die 5 ersten Zeilen, mit resp. $y_1$, $y_2$, $y_3$, $-x_1$, $-x_2$ multiplicirt, zur letzten addirt:

$$= \frac{1}{u_x} \begin{vmatrix} a_x a_1 & b_x b_1 & c_x c_1 & d_x d_1 & u_x u_1 & 0 \\ a_x a_2 & b_x b_2 & c_x c_2 & d_x d_2 & u_x u_2 & 0 \\ a_x a_3 & b_x b_3 & c_x c_3 & d_x d_3 & u_x u_3 & 0 \\ a_y a_1 & b_y b_1 & c_y c_1 & d_y d_1 & u_y u_1 & u_1 \\ a_y a_2 & b_y b_2 & c_y c_2 & d_y d_2 & u_y u_2 & u_2 \\ a_y a_3 & b_y b_3 & c_y c_3 & d_y d_3 & u_y u_3 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x a_1 & b_x b_1 & c_x c_1 & d_x d_1 & u_1 & 0 \\ a_x a_2 & b_x b_2 & c_x c_2 & d_x d_2 & u_2 & 0 \\ a_x a_3 & b_x b_3 & c_x c_3 & d_x d_3 & u_3 & 0 \\ a_y a_1 & b_y b_1 & c_y c_1 & d_y d_1 & 0 & u_1 \\ a_y a_2 & b_y b_2 & c_y c_2 & d_y d_2 & 0 & u_2 \\ a_y a_3 & b_y b_3 & c_y c_3 & d_y d_3 & 0 & u_3 \end{vmatrix},$$

was zu beweisen war.

## § 6.

### Geometrische Eigenschaften der viergliedrigen Gruppe.

24. Das Studium der geometrischen Eigenschaften des aus vier Kegelschnitten gebildeten Systems $(abcd)$ wird wesentlich vereinfacht durch Hinzuziehung der conjugirten Schaar $(\alpha\beta)$, deren hauptsächlichsten Eigenschaften als bekannt angenommen werden können. Aus dem in dem Art. 7. auseinandergesetzten allgemeinen Princip wurde bald an genannter Stelle gefolgert, dass die Gruppe $(abcd)$ drei conjugirte Punktepaare besitzt und vier Geraden, welche doppelt gezählt als besondere Kegelschnitte der Gruppe angehören. Jene bilden die drei Paare von Gegenecken des von diesen gebildeten Vierseits*). Für die Folge sollen die vier Geraden durch

$$g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4$$

die drei Paare von Gegenecken

$$(g_1, g_2),\ (g_3, g_4);\quad (g_1, g_3),\ (g_2, g_4);\quad (g_1, g_4),\ (g_2, g_3)$$

resp. durch

$$P_1,\ P_4;\quad P_2,\ P_5;\quad P_3,\ P_6$$

---

*) Vgl. Smith, S. 92.

bezeichnet werden. Die Gruppe $(\alpha\beta)$ hat die Geraden $g$ zu gemeinsamen Tangenten, die Punktepaare $(P_1, P_4)$, $(P_2, P_5)$, $(P_3, P_6)$ zu zerfallenden Elementen und ist hierdurch vollkommen bestimmt.

25. Da jeder uneigentliche Kegelschnitt der Gruppe $(abcd)$ ein conjugirtes Geradenpaar der Schaar $(\alpha\beta)$ vorstellt, so folgt daraus, dass zu jeder Geraden $u$ eine und nur eine zweite Gerade $v$ existirt, welche sie zu einem Kegelschnitt der Gruppe $(abcd)$ ergänzt*). Ich werde solche zwei Geraden einander „entsprechend" nennen. Damit ist aber auch zugleich jeder Geraden $u$ ein Punkt $x$ zugeordnet, nämlich derjenige, in welchem sie von ihrer entsprechenden getroffen wird; der Punkt $x$ mag der „Doppelpunkt" der Geraden $u$ heissen. Es ist somit $x$ zugleich Doppelpunkt für $u$ und $v$.

Aus der geometrischen Bedeutung der Zwischenform $u_\alpha u_\beta(\alpha\beta x)$ für die Schaar $(\alpha\beta)$ ergeben sich mit Berücksichtigung der Formeln (38) und (39) für die der Geraden $u$ entsprechenden Geraden die äquivalenten Gleichungsformen (vgl. Art. 7.):

$$(45) \quad u_\alpha u_\beta(\alpha\beta x) = 0, \quad \Sigma A_x(aAu)^2 = 0, \quad \Sigma a_x a_{\mathsf{A}} u_{\mathsf{A}}^2 = 0 \text{ **)}.$$

Die Discussion dieser Beziehung zwischen $u$ und $v$ ist ohne Schwierigkeit, da sie mit der durch die Schaar $(\alpha\beta)$ definirten symmetrischen quadratischen Transformation identisch ist. Es giebt vier Geraden $(g_1, g_2, g_3, g_4)$, welche die Eigenschaft haben, je mit der entsprechenden zusammenzufallen. Eine Ausnahme in der Eindeutigkeit findet nur bei den drei Seiten des Diagonaldreiecks $P_1P_4$, $P_2P_5$, $P_3P_6$ statt. Der Geraden $P_1P_4$ z. B. entsprechen alle Geraden, welche durch die Gegenecke $(P_2P_5, P_3P_6)$ hindurchgehen u. s. f.

Versteht man unter $x$ irgend einen Punkt, unter $u$ irgend eine Gerade, so drückt jede der Gleichungen (45) die Bedingung dafür aus, dass $x$ auf der zu $u$ entsprechenden Geraden liegt, oder auch es ist in (45) die Beziehung zwischen einer Geraden $u$ und einem Punkte ihrer entsprechenden Geraden gegeben. Halten wir daher $x$ fest, so stellt (45) die Enveloppe derjenigen Geraden $u$ dar, welche allen Geraden durch den Punkt $x$ entsprechen. Für *sämmtliche Punkte $x$ der Ebene* stellt sonach die Gleichung

$$\Sigma A_x(aAu)^2 = 0,$$

ein Gewebe von Kegelschnitten dar, welches drei feste Tangenten hat, nämlich das Diagonaldreieck $P_1P_4$, $P_2P_5$, $P_3P_6$ als das conjugirte Tripel der Schaar $(\alpha\beta)$.

---

*) Clebsch, „Ueber die Steiner'sche Fläche" S. 5.

**) Mit dieser stimmt die Gleichung (31) bei Clebsch überein.

26. Den Doppelpunkt $x$ einer Geraden $u$ finden wir nach dem Gesagten aus den beiden Gleichungen

$$(46) \qquad u_x = 0, \quad \Sigma A_x (aAu)^2 = 0.$$

Bedeuten daher $w$ laufende Liniencoordinaten, so erhalten wir

$$(47) \quad \Sigma (Auw)(aAu)^2 = 0 \text{ oder } \Sigma (auw) a_A u_A^2 = u_\alpha u_\beta (u_\alpha w_\beta - u_\beta w_\alpha) = 0$$

als die Gleichung des Doppelpunktes der Geraden $u$.

Es drückt somit die Gleichung (47) die Beziehung aus zwischen einer Geraden $w$ und einer Geraden $u$, welche auf $w$ ihren Doppelpunkt hat. Lassen wir $w$ beliebig variiren, so stellt (47) eine zweifache Mannigfaltigkeit von Curven dritter Classe dar. Man kann leicht zeigen, *dass es sieben Tangenten giebt, welche allen gemeinsam sind.* Da nämlich jede Gerade $g_i$ mit ihrer entsprechenden identisch ist, so trifft sie auch mit ihr auf der Geraden $w$ zusammen, wie immer auch $w$ gewählt sein mag. Die vier Tangenten $g_1$, $g_2$, $g_3$, $g_4$ sind daher sämmtlichen Curven (47) gemeinsam. Ausserdem haben wir oben bemerkt, dass jeder Seite des Diagonaldreiecks z. B. $P_1 P_4$ ein ganzes Büschel von Geraden entspricht; es wird daher $P_1 P_4$ in jedem ihrer Punkte von einer ihr entsprechenden Geraden getroffen, folglich auch in ihrem Schnittpunkte mit $w$. Auch die Geraden $P_1 P_4$, $P_2 P_5$, $P_3 P_6$ sind daher Tangenten der Curven (47). (Eine andere Auffassung dieser Curven dritter Classe wird im Folgenden sich ergeben.)

27. Fassen wir jetzt umgekehrt einen Punkt $x$ in der Ebene auf und fragen wir nach denjenigen Geraden, welche in $x$ ihren Doppelpunkt haben. Da je zwei entsprechender Geraden ein conjugirtes Geradenpaar der Gruppe $(\alpha\beta)$ bilden, so ergiebt sich:

Durch jeden Punkt $x$ der Ebene geht ein Geradenpaar, welches ein Kegelschnitt der Gruppe $(abcd)$ ist, es sind dies die beiden Tangenten, welche von $x$ aus an die Curven zweiter Classe

$$\Sigma A_x (aAu)^2 = 0$$

gehen *).

Sie mögen die dem Punkte „zugehörigen" Geraden heissen**). Aus ihrer Bedeutung für die Schaar $(\alpha\beta)$ folgt, dass sie die Doppelstrahlen der Involution sind, welche von den drei Geradenpaaren $xP_1$, $xP_4$; $xP_2$, $xP_5$; $xP_3$, $xP_6$ gebildet wird***). Durchläuft $x$ die Ge-

*) Clebsch a. a. O. S. 5 und 14.

**) Bei dieser Zuordnung machen die sechs Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$, $P_6$ eine Ausnahme, indem jedem nicht ein, sondern unendlich viele Geradenpaare zugehören. Sie bilden die Strahlenpaare der Involution, deren Doppelstrahlen die beiden durch die betreffende Ecke gehenden Seiten $g$ sind.

***) Mit Benutzung der zugehörigen Geradenpaare kann man rein geometrisch die Kegelschnitte der der Gruppe $(abcd)$ conjugirten Schaar $(\alpha\beta)$ definiren. Durch einen beliebigen Punkt $x$ geht ein Paar ihm zugehöriger Geraden, deren eine $u$

rade $w$, so umhüllen die zugehörigen Geraden $u$ eine Curve dritter Classe, deren Gleichung in (47) gegeben ist. Die Gleichung der zu $x$ zugehörigen Geraden ergiebt sich, indem man in die Gleichung des Kegelschnitts

$$u_\alpha u_\beta (\alpha \beta x) = 0 \tag{48}$$

$(xy)_i$ an Stelle von $u_i$ setzt, wobei $y$ laufende Coordinaten eines Punktes des zerfallenden Kegelschnitts bedeuten. Man erhält auf diese Weise (vgl. Art. 7.)

$$(xy\alpha)\,(xy\beta)\,(\alpha\beta x) = 0$$

oder mit Berücksichtigung der Formel (33)

$$a_y^2 A_x^3 + b_y^2 B_x^3 + c_y^2 C_x^3 + d_y^2 D_x^3 = 0 \text{*)} \tag{49}$$

als die Gleichung desjenigen zerfallenden Kegelschnitts der Gruppe $(abcd)$, welcher in $x$ seinen Doppelpunkt hat oder indem $x$ willkührlich gelassen wird, die Gesammtheit der zerfallenden Kegelschnitte der Gruppe $(abcd)$.

Die Gleichung (49) stellt die Relation dar zwischen einem Punkt $x$ und einem beliebigen Punkte $y$ seines zugehörigen Geradenpaares, oder auch zwischen einem Punkte $y$ und dem Doppelpunkte $x$ einer durch $y$ gehenden Geraden. Als Gleichung in $x$ repräsentirt somit Gleichung (49) den Ort der Doppelpunkte aller durch $y$ gehenden Geraden. Aus Art. 19. wissen wir, dass dieselbe Gleichung die Jacobi'sche Curve desjenigen Netzes aus der Gruppe $(abcd)$ darstellt, dessen Kegelschnitte sämmtlich durch den Punkt $y$ hindurchgehen. Beide Definitionen lassen sich aus der einfachen geometrischen Bedeutung der Jacobi'schen Form leicht identificiren. Aus beiden übersieht man sogleich, dass die Curve dritter Ordnung (49) im Punkte $y$ einen Doppelpunkt hat.

Eine zweite Darstellung sämmtlicher zerfallender Curven der viergliedrigen Gruppe $(abcd)$ ist neben der durch die Jacobi'schen Formen (49) auch durch die vier Hermite'schen $u_A^3$, $u_B^3$, $u_\Gamma^3$, $u_\Delta^3$ möglich. Da nämlich der beliebigen Geraden $u$ als Ergänzende die Gerade $\Sigma a_y a_A u_A^2 = 0$ entspricht, so giebt das Product

---

heissen mag. Geht man auf $u$ von $x$ zu dem unendlich nahen Punkte über, so ist eine der beiden ihm zugehörigen Geraden der Geraden $u$ unendlich nahe, auf dieser wählt man wieder einen unendlich nahen Punkt und die zugehörige Gerade u. s. f. Auf diese Art erhält man eine Enveloppe, welche ein Kegelschnitt der Schaar $(\alpha\beta)$ ist. Die Richtigkeit des Gesagten ergiebt sich aus dem Umstande, dass derjenige Kegelschnitt der Schaar $(\alpha\beta)$, welcher $u$ berührt, den Punkt $x$ zum Berührungspunkte hat.

*) In Uebereinstimmung mit Gleichung (13) bei Clebsch.

$$u_y \cdot \Sigma a_y \cdot a_A u_A^2 = 0$$

die doppelte Mannigfaltigkeit entsprechender Geradenpaare, und man kann somit mit Zuhülfenahme der Relationen (39[a]) den Satz aussprechen:

*Die beiden Gleichungen*

$$(50) \qquad \Sigma a_y^2 A_x^3 = 0, \quad \Sigma a_y^2 u_A^3 = 0$$

*repräsentiren in y mit variirendem u und x dieselbe doppelte Mannigfaltigkeit von Geradenpaaren, nämlich die zerfallenden Kegelschnitte der Gruppe* ($abcd$).

28. Um einen vollen Einblick in den Zusammenhang zu gewinnen, welcher zwischen den Jacobi'schen und Hermite'schen Curven der Gruppe ($abcd$) und den zerfallenden Kegelschnitten derselben besteht, wollen wir die schon im Art. 8. angegebenen Eigenschaften dieser beiden Curven eines Netzes ins Gedächtniss zurückrufen. Denkt man sich nämlich aus der viergliedrigen Gruppe ($abcd$) auf alle möglichen Arten Netze hergestellt, so entspricht jedem eine Jacobi'sche Curve. Die Gesammtheit aller dieser bildet eine dreifache Mannigfaltigkeit, deren Gleichungen in der allgemeinen Form

$$(51) \qquad \varkappa A_x^3 + \lambda B_x^3 + \mu C_x^3 + \nu D_x^3 = 0$$

enthalten sind. Da die Punktepaare $P_1 P_4$, $P_2 P_5$, $P_3 P_6$ allen Netzen conjugirt sind, *so gehen alle Jacobi'schen Curven* (51) *durch die genannten sechs Punkte*). Umgekehrt ist jede durch die sechs Punkte $P_i$ gehende Curve dritter Ordnung die Jacobi'sche Curve eines Netzes aus der Gruppe* ($abcd$). Ganz analog kann man die dreifache Mannigfaltigkeit der Hermite'schen Curven bilden, deren Gleichung in der Form

$$(52) \qquad \varkappa u_A^3 + \lambda u_B^3 + \mu u_\Gamma^3 + \nu u_\Delta^3 = 0$$

enthalten ist. Jede derselben ist bekanntlich die Enveloppe der Geraden, welche das zugehörige Netz in Punkten einer Involution treffen. Da aber jede der drei Diagonalen $P_1 P_4$, $P_2 P_5$, $P_3 P_6$ ein allen Netzen gemeinsames Punktepaar enthält, so hat man den

*Satz. — Alle Hermite'schen Curven der viergliedrigen Gruppe* ($abcd$) *haben die drei Diagonalen $P_1 P_4$, $P_2 P_5$, $P_3 P_6$ zu gemeinsamen Tangenten.*

Betrachtet man einen der sechs Punkte $P_i$, so gehen von ihm aus an jede der Hermite'schen drei Tangenten; eine derselben (die betreffende Diagonale) ist allen gemeinsam, die übrigbleibenden Paare

*) Dieser Satz ist von Herrn Siebeck ausgesprochen worden: Annali di Matem. Ser. II. t. II. p. 65.

von Tangenten sind mit entsprechenden Geradenpaaren identisch, welche sich in $P_i$ treffen; man hat daher den

*Satz. — Die Paare variabler Tangenten, welche von einem der Punkte $P_i$ an alle Hermite'schen Curven der Gruppe $(abcd)$ gezogen werden können, bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen die beiden durch $P_i$ gehenden Geraden $g$ sind. Jedes Strahlenpaar der Involution wird durch eine einfache Mannigfaltigkeit von Curven berührt.*

Wir kehren jetzt zu den in der Gruppe $(abcd)$ enthaltenen Netzen zurück. Je zwei derselben haben ein Büschel gemeinschaftlich. Alle Netze, welche ein bestimmtes Büschel gemeinsam haben, bilden eine einfache Mannigfaltigkeit, denen ein Büschel von Jacobi'schen Curven mit neun festen Punkten entspricht. (Ebenso haben die entsprechenden Hermite'schen Curven neun feste Tangenten.) Irgend drei Netze der Gruppe haben im Allgemeinen einen Kegelschnitt gemeinsam. In dem Falle, wo dieser zerfällt, gehen die entsprechenden Jacobi'schen Curven durch einen und denselben Punkt, den Doppelpunkt jenes zerfallenden Kegelschnitts. Umgekehrt, durch jeden Punkt $x$ der Ebene geht eine zweifache Mannigfaltigkeit von Jacobi'schen Curven; die ihnen entsprechenden Netze haben einen zerfallenden Kegelschnitt gemeinschaftlich; welcher mit dem dem Punkte $x$ zugehörigen Geradenpaar identisch ist. *Es ist daher dieses Letztere schon durch eine der durch $x$ gehenden Jacobi'schen Curven oder das ihr entsprechende Netz vollkommen bestimmt.* (Vgl. die Fussnote in Art. 11.)

29. Die geometrische Beziehung, welche einem Punkte $x$ der Ebene zwei Geraden $u$ zuordnet und umgekehrt jeder Geraden $u$ einen Punkt $x$ (ihren Doppelpunkt), die in den Gleichungen (46) und (47) ihren algebraischen Ausdruck findet, liefert eine Transformation der Ebene, vermöge deren, allgemein zu reden, jeder Curve $n^{ter}$ Ordnung eine Curve $3n^{ter}$ Classe und umgekehrt einer Curve $p^{ter}$ Classe eine Curve $3p^{ter}$ Ordnung entspricht. Es durchlaufe nun im Besondern $x$ eine der durch (51) definirten Curven, d. h. die Jacobi'sche Curve irgend eines Netzes der Gruppe $(abcd)$; dann wissen wir, dass die zugehörigen Geradenpaare die Hermite'sche desselben Netzes umhüllen, d. h. eine Jacobi'sche Curve geht durch die betrachtete Transformation in die entsprechende Hermite'sche über. Da aber allgemein einer Curve dritter Ordnung eine Curve neunter Classe entspricht, so muss überdies noch ein Factor sechsten Grades in $u$ auftreten, dessen geometrische Interpretation sich leicht findet. Jedem der Punkte $P_1, P_2, \cdots P_6$ nämlich ist nicht ein Paar von Geraden, sondern das ganze durch den betreffenden Punkt gehende Büschel zugehörig. Geht daher eine Curve in $x$ $\varrho_k$-mal durch den Punkt $P_k$, so enthält die ihr entsprechende Curve in $u$ den Ort erster Classe $P_k$ ebenfalls $\varrho_k$-fach. Da nun jede Jacobi'sche Curve durch alle sechs Punkte $P$ geht, so

muss die Transformation derselben ausser der bereits gefundenen Hermite'schen Curve noch den Factor sechsten Grades ergeben, welcher die sechs Punkte $P_1 \ldots P_6$ darstellt. Dieser Factor kann als uneigentlicher betrachtet werden, insofern er bei allen Jacobi'schen Curven gleichzeitig auftritt. Fassen wir insbesondere die vier Curven $A_x^3$, $B_x^3$, $C_x^3$, $D_x^3$ auf, so werden sie in die vier Hermite'schen $u_A^3$, $u_B^3$, $u_\Gamma^3$, $u_\Delta^3$ übergehen, daraus ergiebt sich der bemerkenswerthe

*Satz. — Durch die Transformationsgleichungen*

$$(53)\quad x_1 = \Sigma(Au)_1(aAu)^2, \quad x_2 = \Sigma(Au)_2(aAu)^2, \quad x_3 = \Sigma(Au)_3(aAu)^2$$

*gehen die vier Jacobi'schen Formen*

$$A_x^3,\ B_x^3,\ C_x^3,\ D_x^3$$

*gleichzeitig über in die entsprechenden Hermite'schen*

$$u_A^3,\ u_B^3,\ u_\Gamma^3,\ u_\Delta^3,$$

*während ein Factor vom sechsten Grade in $u$ heraustritt, der, gleich Null gesetzt, die Punkte $P_1, \cdot\cdot P_6$ darstellt.*

Das algebraische Interesse, welches diese Transformation besitzt, liegt nicht so sehr darin, dass sie vier Formen gleichzeitig in vier nahe verwandte überführt, als vielmehr in einem andern Umstande, auf den wir durch Vergleichung der transformirten Curven mit den Transformationsrelationen geführt werden. Betrachtet man z. B. die Form $A_x^3$ und ihre Transformation $u_A^3$, so sind beide Curven nur von den Coefficienten der Kegelschnitte $b_x^2$, $c_x^2$, $d_x^2$ abhängig. Die Transformationsrelationen (53) enthalten aber ausserdem noch die Coefficienten der vierten Form $a_x^2$. Sieht man daher von dem unwesentlichen Factor sechsten Grades ab, so kann man sagen, die in den Gleichungen (53) vorkommenden Coefficienten $a$ spielen bei der Transformation der beiden Curven

$$A_x^3 = 0, \qquad u_A^3 = 0$$

in einander die Rolle gleichgültiger Grössen, deren Werthe wir nach Belieben annehmen dürfen. (Es hängt dies mit der Fussnote Art. 11. zusammen.)

## § 7.

### Darstellung gewisser durch die viergliedrige Gruppe bestimmter Elemente.

30. Zur Vervollständigung der Auseinandersetzung sollen in diesem Paragraphen die symmetrischen Ausdrücke derjenigen Elemente gegeben werden, welche für die viergliedrige Gruppe charakteristisch sind. Es werden nämlich die Gleichungen aufgestellt werden, welche

die vier Geraden $g_1$, $g_2$, $g_3$, $g_4$, ferner die Diagonalen $P_1P_4$, $P_2P_5$, $P_3P_6$ und zuletzt die sechs Punkte $P_1$, $P_2$, $\cdots$ $P_6$ darstellen.

### I. Darstellung der vier Doppelgeraden.

Es ist aus der Begriffsdefinition ohne Weiteres klar, dass die vier Geraden $g$ der Ort derjenigen Punkte sind, welche die Eigenschaft haben, dass die beiden ihnen zugehörigen Geraden zusammenfallen. Wir haben daher nur die Bedingung dafür aufzustellen, dass die beiden vom Punkte $x$ an den Kegelschnitt

$$\Sigma A_x (aAu)^2 = 0$$

gehenden Tangenten zusammenfallen, d. h. dessen Gleichung in Punktcoordinaten zu bilden und diese durch $x$ zu ersetzen (vgl. Art. 7.). Wenn wir daher in Uebereinstimmung mit Formel (38)

$$\Sigma A_x (aAu)^2 = 2 \cdot u_\varrho^2 r_x$$

setzen, so ergiebt sich

$$(\varrho\varrho' x)^2 r_x r'_x = 0 \tag{54}$$

als Gleichung der vier Geraden*).

### II. Darstellung des Diagonaldreiecks.

Im Art. 25. ist besonders hervorgehoben worden, dass die Gleichung

$$\Sigma A_x (aAu)^2 = 2\, u_\varrho^2 r_x = 0$$

mit variablem $x$ ein Gewebe von Kegelschnitten repräsentirt, welches die drei Diagonalen $P_1P_4$, $P_2P_5$, $P_3P_6$ zu gemeinsamen Tangenten hat. Wählt man irgend drei Individuen des Gewebes

$$u_\varrho^2 r_y, \qquad u_\varrho^2 r_z, \qquad u_\varrho^2 r_t,$$

so muss nach dem am Schlusse des Art. 13. Gesagten die Jacobi'sche Form die drei Ecken, die Hermite'sche die drei Seiten des Diagonaldreiecks ergeben. Unter Fortlassung des unwesentlichen Factors $(yzt)$ erhält man somit

$$u_\varrho u_{\varrho'} u_{\varrho''} (\varrho\varrho'\varrho'')(rr'r'') = 0 \tag{55}$$

als die Gleichung der Ecken und

$$(\varrho\varrho' x)(\varrho\varrho'' x)(\varrho'\varrho'' x)(rr'r'') = 0 \tag{56}$$

als die der drei Seiten des Dreiecks $P_1P_4$, $P_2P_5$, $P_3P_6$.

---

*) Vgl. Clebsch a. a. O. S. 14. Damit im Zusammenhange steht der von Clebsch herrührende Satz über Functionaldeterminanten, Borchardt's Journ. Bd. 69, S. 355 und Bd. 70, S. 175.

Eine elegantere Form für die Letztere erhält man, indem man die Discriminante der quadratischen Form $u_\varrho^2 r_x$ bildet, in der Gleichung

$$(57)\qquad (\varrho\varrho'\varrho'')^2 r_x r'_x r''_x = 0.$$

Es beruht dies darauf, dass der dem Punkte $x$ entsprechende Kegelschnitt $u_\varrho^2 r_x = 0$ immer und nur dann zerfällt, wenn $x$ auf einer der drei Diagonalen liegt.

### III. Darstellung der sechs Ecken $P_1, P_2, \cdot\cdot P_6$.

Für die symmetrische Darstellung der sechs Ecken $P_1, P_2, \cdot\cdot P_6$ sind die sechs Zwischenformen von Wichtigkeit, welche bereits in Art. 22. aufgetreten sind. Es sei in symbolischer Bezeichnung

$$(58)\qquad \begin{cases} a_x b_x (abu) = \varphi_{1x}^2 u_{\psi_1}, & a_x c_x (acu) = \varphi_{2x}^2 u_{\psi_2}, & a_x d_x (adu) = \varphi_{3x}^2 u_{\psi_3}, \\ b_x c_x (bcu) = \varphi_{6x}^2 u_{\psi_6}, & b_x d_x (dbu) = \varphi_{5x}^2 u_{\psi_5}, & c_x d_x (cdu) = \varphi_{4x}^2 u_{\psi_4}. \end{cases}$$

Alsdann sagt bekanntlich die Gleichung $\varphi_{1x}^2 u_{\psi_1} = 0$ z. B. aus, dass der Punkt $x$ einem Punkte der Geraden $u$ in Bezug auf $a_x^2$ und $b_x^2$ zugleich conjugirt ist. Wenn nun eine Gerade $u$ durch eine der sechs Ecken $P_i$ hindurchgeht, so giebt es einen Punkt (nämlich den Gegenpunkt $P_{i+3}$), welcher dem auf ihr liegenden Punkte $P_i$ in Bezug auf alle Kegelschnitte, somit auch in Bezug auf alle Büschel der Gruppe $(abcd)$ conjugirt ist; d. h. es giebt dann einen Punkt $\mathbf{x}$, dessen Coordinaten die sechs Gleichungen

$$\varphi_{1x}^2 u_{\psi_1} = 0, \quad \varphi_{2x}^2 u_{\psi_2} = 0, \quad \cdots, \quad \varphi_{6x}^2 u_{\psi_6} = 0$$

zugleich befriedigen. Eliminirt man daher aus ihnen die sechs Grössen $x_1^2, x_2^2, x_3^2, 2x_2x_3, 2x_3x_1, 2x_1x_2$ linear, so ergiebt sich *für die sechs Ecken $P_1, P_2, \cdot\cdot P_6$ die Gleichung:*

$$(59)\qquad u_{\psi_1} u_{\psi_2} u_{\psi_3} u_{\psi_4} u_{\psi_5} u_{\psi_6} \begin{vmatrix} \varphi_{11}^2 & \varphi_{12}^2 & \varphi_{13}^2 & \varphi_{12}\varphi_{13} & \varphi_{13}\varphi_{11} & \varphi_{11}\varphi_{12} \\ \varphi_{21}^2 & \varphi_{22}^2 & \varphi_{23}^2 & \varphi_{22}\varphi_{23} & \varphi_{23}\varphi_{21} & \varphi_{21}\varphi_{22} \\ \varphi_{31}^2 & \varphi_{32}^2 & \varphi_{33}^2 & \varphi_{32}\varphi_{33} & \varphi_{33}\varphi_{31} & \varphi_{31}\varphi_{32} \\ \varphi_{41}^2 & \varphi_{42}^2 & \varphi_{43}^2 & \varphi_{42}\varphi_{43} & \varphi_{43}\varphi_{41} & \varphi_{41}\varphi_{42} \\ \varphi_{51}^2 & \varphi_{52}^2 & \varphi_{53}^2 & \varphi_{52}\varphi_{53} & \varphi_{53}\varphi_{51} & \varphi_{51}\varphi_{52} \\ \varphi_{61}^2 & \varphi_{62}^2 & \varphi_{63}^2 & \varphi_{62}\varphi_{63} & \varphi_{63}\varphi_{61} & \varphi_{61}\varphi_{62} \end{vmatrix} = 0.$$

Einen andern Ausdruck in den Combinanten-Symbolen $\alpha, \beta$ kann man aus der Form $u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\beta^2 v_\alpha^2$ herleiten. Sobald nämlich ein Kegelschnitt der Gruppe $(\alpha\beta)$ in Punktepaare $(P_i P_{i+3})$ zerfällt, geht jede seiner Tangenten entweder durch $P_i$ oder durch $P_{i+3}$, also stets durch einen der Punkte $P$. Da nun $u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\beta^2 v_\alpha^2 = 0$ denjenigen Kegelschnitt der Gruppe $(\alpha\beta)$ bedeutet, welcher die Gerade $v$ repräsentirt, so bedeutet seine Discriminante

$$v_\beta^2 v_{\beta'}^2 v_{\beta''}^2 (\alpha\alpha'\alpha'')^2 - 3\, v_\beta^2 v_{\beta'}^2 v_\alpha^2 (\beta''\alpha'\alpha'')^2 + 3\, v_\beta^2 v_\alpha^2 v_{\alpha'}^2 (\beta'\beta''\alpha'')^2 - v_\alpha^2 v_{\alpha'}^2 v_{\alpha''}^2 (\beta\beta'\beta'')^2 = 0$$

die Enveloppe der Tangenten der zerfallenden Kegelschnitte der Gruppe $(\alpha\beta)$, d. h. die sechs Ecken $P$.

## § 8.

### Ueber den Zusammenhang der viergliedrigen Gruppe mit der Steiner'schen Fläche.

31. Unmittelbar im Anschlusse an die allgemein durchgeführten Methoden lassen sich einige Eliminationen ausführen, welche dann in einfache Beziehung zur Steiner'schen Fläche gesetzt werden. In dem Art. 27. wurde von dem Satze Gebrauch gemacht, dass die in $y$ quadratische Form

$$a_y^2 A_x^3 + b_y^2 B_x^3 + c_y^2 C_x^3 + d_y^2 D_x^3$$

einen zerfallenden Kegelschnitt darstellt; ihre Discriminante muss daher identisch verschwinden. Setzt man daher

$$A_x^3 = \vartheta_1\,, \quad B_x^3 = \vartheta_2\,, \quad C_x^3 = \vartheta_3\,, \quad D_x^3 = \vartheta_4\,, \tag{60}$$

so ergiebt sich die Gleichung

$$o = \begin{vmatrix} a_{11}\vartheta_1 + b_{11}\vartheta_2 + c_{11}\vartheta_3 + d_{11}\vartheta_4, & a_{12}\vartheta_1 + b_{12}\vartheta_2 + c_{12}\vartheta_3 + d_{12}\vartheta_4, & a_{13}\vartheta_1 + b_{13}\vartheta_2 + c_{13}\vartheta_3 + d_{13}\vartheta_4 \\ a_{21}\vartheta_1 + b_{21}\vartheta_2 + c_{21}\vartheta_3 + d_{21}\vartheta_4, & a_{22}\vartheta_1 + b_{22}\vartheta_2 + c_{22}\vartheta_3 + d_{22}\vartheta_4, & a_{23}\vartheta_1 + b_{23}\vartheta_2 + c_{23}\vartheta_3 + d_{23}\vartheta_4 \\ a_{31}\vartheta_1 + b_{31}\vartheta_2 + c_{31}\vartheta_3 + d_{31}\vartheta_4, & a_{32}\vartheta_1 + b_{32}\vartheta_2 + c_{32}\vartheta_3 + d_{32}\vartheta_4, & a_{33}\vartheta_1 + b_{33}\vartheta_3 + c_{33}\vartheta_2 + d_{33}\vartheta_4 \end{vmatrix} \tag{61}$$

welche durch die Gleichung (60) identisch befriedigt wird. Die Gleichung (61)*) ist somit das Resultat der Elimination der Grössen $x_1$, $x_2$, $x_3$ aus den vier Gleichungen (60).

In ganz gleicher Weise kann man mit den Hermite'schen Formen verfahren, da wir aus dem bereits angezogenen Art. 27. wissen, dass auch die Form

$$a_y^2 u_A^3 + b_y^2 u_B^3 + c_y^2 u_\Gamma^3 + d_y^2 u_\Delta^3$$

eine zerfallende (in $y$), folglich auch deren Discriminante identisch Null ist. Indem man daher

---

*) Ihre symbolische Form ist:

$$\vartheta_1^3(aa'a'')^2 + \vartheta_2^3(bb'b'')^2 + \cdots + 3\,\vartheta_1^2\vartheta_2(aa'b)^2 + 3\,\vartheta_1^2\vartheta_3(aa'c)^2 + \cdots + 6\,\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3(abc)^2 + \cdots = 0. \tag{62}$$

(63) $$u_A^3 = \pi_1\,,\quad u_B^3 = \pi_2\,,\quad u_\Gamma^3 = \pi_3\,,\quad u_\Delta^3 = \pi_4$$

setzt, erhält man als Eliminationsresultat der $u$ aus ihnen eine mit (61) völlig übereinstimmende Gleichung, welche aus jener durch Vertauschung von $\vartheta$ mit $\pi$ hervorgeht. Es ergiebt sich somit der

*Satz. — Das Resultat der Elimination der Variabeln aus den vier Jacobi'schen Formen von vier Kegelschnitten ist identisch mit dem aus den vier Hermite'schen Formen,* was mit dem im Art. 29. ausgesprochenen Satze übereinstimmt.

Um auch aus den vier Gleichungen

(65) $$a_x^2 = \xi_1\,.\quad b_x^2 = \xi_2\,,\quad c_x^2 = \xi_3\,,\quad d_x^2 = \xi_4$$

die Variabeln $x$ zu eliminiren, könnte man von der bereits oben benutzten Form

(66) $$a_x^2 A_y^3 + b_x^2 B_y^3 + c_x^2 C_y^3 + d_x^2 D_y^3$$

ausgehen, von der wir wissen, dass sie als Form in $y$, gleich Null gesetzt, eine Curve mit einem Doppelpunkte repräsentirt. Die Discriminante von (66) muss daher verschwinden, und es wird folglich die Discriminante der Form

$$\xi_1 A_y^3 + \xi_2 B_y^3 + \xi_3 C_y^3 + \xi_4 D_y^3$$

eine Gleichung in $\xi$ liefern, welche durch die Gleichungen (65) identisch befriedigt wird, d. h. ein Eliminationsresultat aus (65). Es würde jedoch von zu hohem (zwölftem) Grade sein.

32. Um überflüssige Factoren zu vermeiden, kehren wir zu der allgemeinen Gleichung eines Kegelschnitts der Gruppe $(abcd)$

(67) $$\begin{vmatrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 & d_x^2 \\ a_y^2 & b_y^2 & c_y^2 & d_y^2 \\ a_z^2 & b_z^2 & c_z^2 & d_z^2 \\ a_t^2 & b_t^2 & c_t^2 & d_t^2 \end{vmatrix} = 0$$

zurück. Unter $z, t$ willkürliche Parameter verstanden, stellt sie in den laufenden Coordinaten $y$ dasjenige Netz der Gruppe dar, dessen Kegelschnitte sämmtlich durch den Punkt $x$ hindurchgehen. Die Gleichungen der Jacobi'schen und Hermite'schen Form sind (Art. 19.)

(68) $$a_x^2 A_y^3 + b_x^2 B_y^3 + c_x^2 C_y^3 + d_x^2 D_y^3 = 0,\quad a_x^2 u_A^3 + b_x^2 u_B^3 + c_x^2 u_\Gamma^3 + d_x^2 u_\Delta^3 = 0.$$

Da alle Kegelschnitte des Netzes einen Punkt $(x)$ gemein haben, so muss die Resultante desselben identisch Null werden; ihr Ausdruck für die dreigliedrige Gruppe ist in Formel (19) gegeben. Indem man daher in (68) die $\xi$ einführt und kurz

(68ᵃ) $\xi_1 A_x^3 + \xi_2 B_x^3 + \cdots = f_y^3 = f'^3_y = \cdots, \quad \xi_1 u_A^2 + \xi_2 u_B^3 + \cdots = u_\varphi^3 = u_{\varphi_1}^3 = \cdots$

setzt, erhält man die Gleichung

(69) $$(ff'f'')(ff'f''')(ff''f''')(f'f''f''') - (ff'f'')^2 f_\varphi f_\varphi' f_\varphi'' = 0.$$

welche das Eliminationsresultat der $x$ aus (65) ist.

Verfolgt man den Gedankengang, welcher in Art. 13. zu der Form (19) der Resultante geführt hat, so kann man auch direct das Resultat in Determinantenform erhalten. Zugleich mit dem Netze (67) bilden nämlich auch die Polaren der Jacobi'schen Form:

(70) $$f_y^2 \cdot f_1 = 0, \quad f_y^2 \cdot f_2 = 0, \quad f_y^2 \cdot f_3 = 0$$

ein Netz mit dem gemeinsamen Punkte $x$ (Hesse). Es giebt somit einen Ort zweiter Classe ($u_x^2$), welcher beiden Netzen zugleich conjugirt ist. Um die Bedingung dafür zu erhalten, bilden wir die Gleichung des dem Netze (67) conjugirten Gewebes. Da wir drei Curven desselben, nämlich

$$u_\alpha^2, \quad u_\beta^2, \quad u_x^2$$

kennen, so ist die allgemeine Gleichung, unter $v, w$ willkürliche Parameter verstanden,

$$\begin{vmatrix} u_\alpha^2 & u_\beta^2 & u_x^2 \\ v_\alpha^2 & v_\beta^2 & v_x^2 \\ w_\alpha^2 & w_\beta^2 & w_x^2 \end{vmatrix} = u_x^2(v_\alpha^2 w_\beta^2 - v_\beta^2 w_\alpha^2) + v_x^2(w_\alpha^2 u_\beta^2 - w_\beta^2 u_\alpha^2) + w_x^2(u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\beta^2 v_\alpha^2) = 0,$$

oder wenn man die Factoren von $u_x^2$, $v_x^2$, $w_x^2$ aus der Gleichung (31) ersetzt:

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2 a_3 & a_3 a_1 & a_1 a_2 & 0 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2 b_3 & b_3 b_1 & b_1 b_2 & 0 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_2 c_3 & c_3 c_1 & c_1 c_2 & 0 \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 & d_2 d_3 & d_3 d_1 & d_1 d_2 & 0 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_2 u_3 & u_3 u_1 & u_1 u_2 & u_x^2 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & v_2 v_3 & v_3 v_1 & v_1 v_2 & v_x^2 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 & w_2 w_3 & w_3 w_1 & w_1 w_2 & w_x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass ein dem Netze conjugirter Kegelschnitt zugleich den drei Kegelschnitten $u_x^2$, $v_x^2$, $w_x^2$ conjugirt ist. Ziehen wir daher die ersten 6 Verticalen, resp. mit $x_1^2$, $x_2^2$, $x_3^2$, $2\,x_2 x_3$, $2\,x_3 x_1$, $2\,x_1 x_2$ multiplicirt, von der letzten ab und ersetzen alsdann die $u$, $v$, $w$ durch die Symbole von resp. $f_y^2 f_1$, $f_y^2 f_2$, $f_y^2 f_3$, so ergiebt sich mit Benutzung der Gleichungen (65)

$$
(71) \quad \begin{vmatrix}
a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2 a_3 & a_3 a_1 & a_1 a_2 & \xi_1 \\
b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2 b_3 & b_3 b_1 & b_1 b_1 & \xi_2 \\
c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_2 c_3 & c_3 c_1 & c_1 c_2 & \xi_3 \\
d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 & d_2 d_3 & d_3 d_1 & d_1 d_2 & \xi_4 \\
f_1^3 & f_2^2 f_1 & f_3^2 f_1 & f_2 f_3 f_1 & f_3 f_1 f_1 & f_1 f_2 f_1 & 0 \\
f_1'^2 f_2' & f_2'^2 f_2' & f_3'^2 f_2 & f_2' f_3' f_2' & f_3' f_1' f_2' & f_1' f_2 f_2' & 0 \\
f_1''^2 f_3'' & f_2''^2 f_3'' & f_3''^2 f_3'' & f_2'' f_3'' f_3'' & f_3'' f_1'' f_3'' & f_1'' f_2'' f_3'' & 0
\end{vmatrix} = 0 \text{*)}
$$

als das Resultat der Elimination der Grössen $x$ aus den vier Gleichungen (65).

33. Um die in den Gleichungen (61), (64), (71) erlangten Eliminationsresultate geometrisch interpretiren zu können, ist der Uebergang zu Gebilden von drei Dimensionen erforderlich. Versteht man nämlich in (65) unter $\xi$ allgemeine homogene Coordinaten eines Punktes im Raume, unter $x$ die eines Punktes in einer Ebene, so stellen die vier Gleichungen (65) bekanntlich eine Abbildung der Steiner'schen Fläche auf die Ebene dar. Die beiden Gleichungen (69) und (71) stellen somit die Gleichung dieser Fläche in Punktcoordinaten dar.

Die vier Functionaldeterminanten (Jacobi'schen Formen), welche wir mit $\vartheta_1$, $\vartheta_2$, $\vartheta_3$, $\vartheta_4$ bezeichnet haben (60), bedeuten die Coordinaten der Tangentialebene in demjenigen Punkte der Fläche, der $x$ zur Abbildung hat. Es repräsentirt somit die Gleichung (61), das Eliminationsresultat aus (60), nichts anderes, als die Gleichung der Steiner'schen Fläche in Tangentialcoordinaten.

Betrachtet man die vier Hermite'schen Formen $u_A^3$, $u_B^3$, $u_\Gamma^3$, $u_\Delta^3$, die wir gleich $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$, $\pi_4$ gesetzt haben, ebenfalls als Tangentialebenen einer Fläche, so ergiebt die Uebereinstimmung der Eliminationsresultate, wie sie im Satze des Art. 31 ausgesprochen ist, den

*Satz. — Die vier Hermite'schen Formen lassen sich, ebenso wie die vier Jacobi'schen Formen, als Coordinaten der Tangentialebenen der Steiner'schen Fläche* (65) *ansehen*, was schon aus der in Art. 29. gegebenen Transformation der einen Formen in die anderen hervorgeht. Bedeuten $x$ und $u$ den Punkt und die Gerade, welche resp. vermöge der Gleichungen (60) und (63) ein und derselben Tangentialebene entsprechen, so ist $x$ der Doppelpunkt der Geraden $u$ (vgl. Art. 25.).

---

*) Als besonderen Fall einer allgemeinen Methode hat diese Gleichung bereits Herr Brill (Math. Ann. Bd. 5, S. 403) mitgetheilt.

## § 9.

## Transformation von ternären Formen zweiten Grades in Summen von vier Quadraten.

34. Die ersten Folgerungen aus dem Begriffe der conjugirten Gruppen haben ergeben, dass eine viergliedrige Gruppe vier Doppelgeraden hat, deren sechs Ecken drei Paare conjugirter Punkte bilden. Diese Voraussetzung genügt um zu schliessen, dass alle Kegelschnitte der Gruppe durch die Quadrate der vier Geraden linear darstellbar sind (vgl. Art. 4.).

Um die Ueberführung in diese Gestalt zu bewirken, setzen wir die Gleichungen von vier Geraden

(72) $$g_{1x}=0\,,\quad g_{2x}=0\,,\quad g_{3x}=0\,,\quad g_{4x}=0\,,$$

wo allgemein

$$g_{ix}=g_{i1}\,x_1+g_{i2}\,x_2+g_{i3}\,x_3$$

*und beschränken zunächst die Voraussetzung darauf, dass die sechs Ecken dieses Vierseits drei conjugirte Punktepaare eines Kegelschnitts* $a_x^2=0$ *seien.* Wenn wir nun der Kürze wegen

$$\begin{vmatrix} g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} \\ g_{\varkappa 1} & g_{\varkappa 2} & g_{\varkappa 3} \\ g_{\lambda 1} & g_{\lambda 2} & g_{\lambda 3} \end{vmatrix} = (i\varkappa\lambda) \text{ und } \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ g_{\varkappa 1} & g_{\varkappa 2} & g_{\varkappa 3} \\ g_{\lambda 1} & g_{\lambda 2} & g_{\lambda 3} \end{vmatrix} = (u\varkappa\lambda)$$

schreiben, so werden die drei Paare der Gegenecken durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(u12)=0\\(u34)=0\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}(u13)=0\\(u24)=0\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}(u14)=0\\(u23)=0\end{array}$$

dargestellt. Die Voraussetzung, dass sie conjugirte Punktepaare von $a_x^2=0$ seien, liefert die drei Gleichungen

(73) $$(a12)\,(a34)=0\,,\quad (a13)\,(a24)=0\,,\quad (a14)\,(a23)=0.$$

Zwischen vier linearen Formen $g_{1x}$, $g_{2x}$, $g_{3x}$, $g_{4x}$ besteht bekanntlich die identische Gleichung:

(73ª) $$\begin{vmatrix} g_{1x} & g_{2x} & g_{3x} & g_{4x} \\ g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} \end{vmatrix} = g_{1x}(234)+g_{2x}(314)+g_{3x}(124)+g_{4x}(213)=0,$$

welche durch Einsetzung der Symbole $a$ für $g_{41}$, $g_{42}$, $g_{43}$ übergeht in:

(74) $$a_x\,(123)=g_{1x}\,(a\,23)+g_{2x}\,(a\,31)+g_{3x}\,(a\,12).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dem Ausdruck $(a\,34)$ und berücksichtigt die Relationen (73), so erhält man:

(75) $$a_x\,(a\,34)\,(123) = g_{1x}\,(a\,23)\,(a\,34) + g_{2x}\,(a\,31)\,(a\,34)\,,$$

welche durch Einführung der Unterdeterminanten $(uv)_1$, $(uv)_2$, $(uv)_3$ für $x_1$, $x_2$, $x_3$ ergiebt:

$$(a\,uv)\,(a\,34)\,(123) = (1\,uv)\,(a\,23)\,(a\,34) + (2\,uv)\,(a\,31)\,(a\,34).$$

Für den besondern Werth $v_x = g_{2x}$ verschwindet das zweite Glied rechts und es wird:

$$(a\,2\,u)\,(a\,34)\,(123) = (12\,u)\,(a\,23)\,(a\,34)\,,$$

oder auch

(76) $$\frac{(a\,2\,u)\,(a\,34)}{(12\,u)\,(134)} = \frac{(a\,23)\,(a\,34)}{(123)\,(134)}\,,$$

d. h. der Ausdruck $\frac{(a\,2\,u)\,(a\,34)}{(12\,u)\,(134)}$ enthält die Grössen $u$ nur scheinbar und ist in Wirklichkeit eine von $u$ unabhängige Constante.

Da keine der vier Geraden $g$ und keines der drei Punktepaare in den in (73) gemachten Voraussetzungen vor den anderen bevorzugt ist, so kann man in allen aus ihnen gefolgerten Identitäten die Indices beliebig unter einander vertauschen. Vertauscht man in (76) die Indices 2 und 4, so bleibt die rechte Seite unberührt, d. h. es ist

$$\frac{(a\,2\,u)\,(a\,34)}{(12\,u)\,(134)} = \frac{(a\,4\,u)\,(a\,23)}{(14\,u)\,(123)}\,.$$

Ebenso folgt durch Vertauschung von 3 und 4

$$\frac{(a\,23)\,(a\,34)}{(123)\,(134)} = \frac{(a\,24)\,(a\,34)}{(124)\,(134)}\,.$$

Fasst man diess zusammen, so zeigt sich, dass der in (76) rechts stehende Ausdruck durch irgendwelche Permutirung der Indices 2, 3, 4 ungeändert bleibt. Wir dürfen somit die Constante

$$\frac{(a\,23)\,(a\,34)}{(123)\,(134)} = \frac{(a\,24)\,(a\,23)}{(124)\,(123)} = \frac{(a\,24)\,(a\,34)}{(124)\,(134)} = \cdots\cdots = A_1$$

setzen *). Aus diesem Ausdrucke kann man drei andere erhalten, indem man den hier bevorzugten Index 1 nach und nach durch 2, 3, 4 ersetzt, während die anderen drei Indices in beliebiger Permutation

*) Die Gleichheit zweier solcher Ausdrücke, z. B. $\frac{(a\,24)\,(a\,23)}{(124)\,(134)}$ und $\frac{(a\,23)\,(a\,34)}{(123)\,(134)}$ lässt sich auch direct beweisen. Bildet man nämlich die Differenz, so ergiebt sie sich $= \frac{a\,23}{123 \cdot 124 \cdot 134}\left\{a\,24 \cdot 134 - a\,34 \cdot 124\right\} = \frac{a\,23 \cdot a\,14 \cdot 234}{123 \cdot 124 \cdot 134}$, was in Folge von (73) verschwindet.

auftreten können. Auf diese Weise ergeben sich vier Grössen $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ durch die Gleichungen:

$$(77)\quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{(a\,24)\,(a\,34)}{(124)\,(134)} = \dfrac{(a\,24)\,(a\,23)}{(124)\,(123)} = \dfrac{(a\,23)\,(a\,34)}{(123)\,(134)} \\ A_2 = \dfrac{(a\,13)\,(a\,14)}{(213)\,(214)} = \dfrac{(a\,13)\,(a\,34)}{(213)\,(234)} = \dfrac{(a\,14)\,(a\,34)}{(214)\,(234)} \\ A_3 = \dfrac{(a\,12)\,(a\,24)}{(312)\,(324)} = \dfrac{(a\,14)\,(a\,24)}{(314)\,(324)} = \dfrac{(a\,12)\,(a\,14)}{(312)\,(314)} \\ A_4 = \dfrac{(a\,13)\,(a\,23)}{(413)\,(423)} = \dfrac{(a\,12)\,(a\,13)}{(412)\,(413)} = \dfrac{(a\,12)\,(a\,23)}{(412)\,(423)} \end{cases},$$

welche wir in die Gleichung (75) einführen, nachdem wir durch (123) dividirt haben. Dadurch geht dieselbe über in

$$(78)\qquad a_x\,(a34) = A_1 g_{1x}\,(134) + A_2 g_{2x}\,(234),$$

aus welcher fünf andere durch Vertauschung der Indices hervorgehen; es genügen folgende:

$$(79)\quad \begin{cases} a_x\,(a\,23) = A_1\,g_{1x}\,(123) + A_4\,g_{4x}\,(423), \\ a_x\,(a\,31) = A_2\,g_{2x}\,(231) + A_4\,g_{4x}\,(431), \\ a_x\,(a\,12) = A_3\,g_{3x}\,(312) + A_4\,g_{4x}\,(412), \end{cases}$$

welche die Herstellung der gesuchten kanonischen Form gestatten. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (74) mit $a_x$ und ersetzt die rechts auftretenden Ausdrücke $a_x\,(a\,23)$, $a_x\,(a31)$, $a_x\,(a12)$ aus (79), so erhält man:

$$a_x^2\,(123) = g_{1x}\left\{A_1 g_{1x}(123) + A_4 g_{4x}(423)\right\}$$
$$+ g_{2x}\left\{A_2\,g_{2x}\,(231) + A_4\,g_{4x}\,(431)\right\} + g_{3x}\left\{A_3 g_{3x}\,(312) + A_4 g_{4x}\,(412)\right\}$$

und mit Benutzung von (73^a) die identische Gleichung:

$$(80)\qquad a_x^2 = A_1\,g_{1x}^2 + A_2\,g_{2x}^2 + A_3\,g_{3x}^2 + A_4\,g_{4x}^2\ ^{*)}.$$

35. Treten jetzt zu $a_x^2$ noch die andern Kegelschnitte $b_x^2$, $c_x^2$, $d_x^2$ hinzu und verstehen wir unter den in der Rechnung des Art. 34. benutzten Geraden $g$ die vier Doppelgeraden, so gelten die für $a_x^2$ gemachten Voraussetzungen ebenso für $b_x^2$, $c_x^2$, $d_x^2$. Setzt man daher analog mit (77)

$$(81)\quad \begin{cases} B_1 = \dfrac{(b24)\,(b34)}{(124)\,(134)} = \text{etc.}, & B_2 = \dfrac{(b\,13)\,(b\,14)}{(213)\,(214)}, & B_3 = \dfrac{(b\,12)\,(b24)}{(312)\,(324)}, & B_4 = \dfrac{(b\,13)\,(b\,23)}{(413)\,(423)}, \\ C_1 = \dfrac{(c24)\,(c\,34)}{(124)\,(134)}, & C_2 = \dfrac{(c\,13)\,(c\,14)}{(213)\,(214)}, & C_3 = \dfrac{(c\,12)\,(c24)}{(312)\,(324)}, & C_4 = \dfrac{(c13)\,(c23)}{(413)\,(423)}, \\ D_1 = \dfrac{(d24)\,(d34)}{(124)\,(134)}, & D_2 = \dfrac{(d\,13)\,(d\,14)}{(213)\,(214)}, & D_3 = \dfrac{(d12)\,(d24)}{(312)\,(324)}, & D_4 = \dfrac{(d\,13)\,(d23)}{(413)\,(423)}, \end{cases}$$

---

*) Vgl. Gordan, „das Pentaeder der Fläche dritter Ordnung," Math. Ann. Bd. V. S. 364.

so ergeben sich die Gleichungen:

(82) $a_x^2 = \Sigma A_i g_{ix}^2$, $b_x^2 = \Sigma B_i g_{ix}^2$, $c_x^2 = \Sigma C_i g_{ix}^2$, $d_x^2 = \Sigma D_i g_{ix}^2$, $i = 1,2,3,4$.

*wodurch die vier ternären Formen als Summen von vier Quadraten dargestellt sind**). Die Herstellung derjenigen Elemente der viergliedrigen Gruppe, von welchen diese Transformation abhängt, setzt die Auflösung der Gleichung vierten Grades ab, auf welche die Gleichung der vier Geraden $g$ (54) führt.

Unter Benutzung der kanonischen Form nehmen manche Combinanten eine sehr einfache Gestalt an und lassen gewisse Zusammenhänge beim blossen Ansehen sofort erkennen. Wir bilden zunächst die Zwischenformen $\varphi_{ix}^2 u_{\psi_i}$ (58), von denen es genügt eine hinzuschreiben. Es ist z. B.

$$(83)\quad \begin{aligned}\varphi_{1x}^2 u_{\psi_1} = {} & (A_1B_2 - A_2B_1) g_{1x} g_{2x} (12u) + (A_1B_3 - A_3B_1) g_{1x} g_{3x} (12u) \\ & + (A_1B_4 - A_4B_1) g_{1x} g_{4x} (14u) + (A_3B_4 - A_4B_3) g_{3x} g_{4x} (34u) \\ & + (A_4B_2 - A_2B_4) g_{2x} g_{4x} (42u) + (A_2B_3 - A_3B_2) g_{2x} g_{3x} (23u),\end{aligned}$$

und analog sind auch die anderen fünf aus den sechs Formen $g_{ix}\, g_{kx}$ $(iku)$ linear zusammengesetzt. Auch von den Jacobi'schen und Hermite'schen Formen setzen wir je eine hin:

$$(84)\quad \begin{aligned} D_x^3 = {} & (123) g_{1x} g_{2x} g_{3x} \Sigma \pm A_1B_2C_3 + (124) g_{1x} g_{2x} g_{4x} \Sigma \pm A_1 B_2 C_4 \\ & + (134) g_{1x} g_{3x} g_{4x} \Sigma \pm A_1 B_3 C_4 + (234) g_{2x} g_{3x} g_{4x} \Sigma \pm A_2 B_3 C_4,\end{aligned}$$

$$(85)\quad \begin{aligned} u_\Delta^3 = {} & (u12)\,(u13)\,(u23)\; \Sigma \pm A_1B_2C_3 \\ & + (u12)\,(u14)\,(u24)\; \Sigma \pm A_1B_2C_4 \\ & + (u13)\,(u14)\,(u34)\; \Sigma \pm A_1B_3C_4 \\ & + (u23)\,(u24)\,(u34)\; \Sigma \pm A_2B_3C_4 \end{aligned}$$

Ebenso wird die Combinante

$$(86)\quad \begin{aligned} (abcduv) = (u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\beta^2 v_\alpha^2) = \Sigma \pm A_1B_2C_3D_4 \cdot \\ \cdot \left\{(u12)\,(u34)\,(v13)\,(v24) - (u13)\,(u24)\,(v12)\,(v34)\right\},\end{aligned}$$

woraus man sogleich erkennt, dass die Jacobi'schen Formen sechs Punkte, die Hermite'schen drei Tangenten und die Schaar $(abcduv)$ die Geraden $g$ als Tangenten gemein hat.

## § 10.

### Darstellung gewisser Theile des Vierseits durch die übrigen.

36. Ohne die Frage principiell durchzuführen, sollen jetzt noch in Kürze mit theilweiser Zuhülfenahme der kanonischen Form gewisse Theile

*) Vgl. die Arbeit „über diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen," Borchardt's Journal, Bd. 73, S. 110.

des Vierseits $(g)$ und von ihm abhängige Elemente durch die übrigen (als bekannt vorausgesetzten) dargestellt werden.

I. Ist eine Ecke des Vierseits, etwa $(g_1, g_2)$, gegeben, so drückt sich die Gegenecke vermittelst einer der sechs Zwischenformen $\varphi_{ix}^2 u_{\psi_i}$ leicht aus. Es bedeutet nämlich offenbar

$$(\varphi_i\, 12)^2\, u_{\psi_i} = 0$$

die Gleichung der Gegenecke $(g_3, g_4)$.

II. Ist eine der Geraden $g$, etwa $g_1$, gegeben, so kann man die auf ihr liegenden drei Eckpunkte, $(g_1 g_2)$, $(g_1 g_3)$, $(g_1 g_4)$, durch irgend eine der vier Jacobi'schen Formen darstellen. Da nämlich z. B. $D_x^3 = 0$ die Gerade $g_1$ in diesen drei Eckpunkten trifft, so stellt

$$(D\, 1\, u)^3 = 0$$

die Gleichung derselben dar. In der That liefert die Gleichung (84)

$$(D\, 1\, u)^3 = (234)\,(u21)\,(u31)\,(u41)\,\Sigma \pm A_2 B_3 C_4\,.$$

III. Um aus einer der sechs Ecken, z. B. $(g_1, g_2)$, die Gleichung der durch sie gehenden zwei Seiten des Vierseits $g_{1x} \cdot g_{2x} = 0$ zu erhalten, hat man, wie aus der Bedeutung der Form $u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\beta^2 v_\alpha^2$ hervorgeht, nur die Gleichung der beiden von $(g_1, g_2)$ an die Schaar $(\alpha\beta)$ gehenden Tangenten zu bilden, was durch die Substitution $v_i = (xy)_i$, $y_k = (12)_k$ geschieht. Als Resultat ergiebt sich die Gleichung

$$u_\beta^2 \begin{vmatrix} g_{1x} & g_{2x} \\ g_{1\alpha} & g_{2\alpha} \end{vmatrix}^2 - u_\alpha^2 \begin{vmatrix} g_{1x} & g_{2x} \\ g_{1\beta} & g_{2\beta} \end{vmatrix}^2 = 0\,,$$

deren linke Seite vermöge (86) mit

$$(123)\,(124)\,\Sigma \pm A_1 B_2 C_3 D_4 \cdot (u\,12)\,(u34)\, g_{1x} \cdot g_{2x}$$

identisch. Dieselbe Gleichung repräsentirt also in $u$ die beiden Gegenecken (1, 2) und (3, 4).

IV. Etwas schwieriger ist die Darstellung dreier der Geraden $g_{2x} \cdot g_{3x} \,.\, g_{4x} = 0$, unter der Annahme, dass die vierte $g_{1x}$ gegeben ist. Wir bezeichnen zu diesem Zwecke mit

$$p_1, p_2, \cdots p_6\,; \quad q_1, q_2, \cdots q_6\,; \quad r_1, r_2, \cdots r_6$$

drei Systeme von sechs willkürlichen Constanten und bilden die linearen Verbindungen aus den sechs Zwischenformen $\varphi_x^2 u_\psi$:

$$(87) \qquad \Sigma p_i \varphi_{ix}^2 u_{\psi_i} = 0\,, \quad \Sigma q_i \varphi_{ix}^2 u_{\psi_i} = 0\,, \quad \Sigma r_i \varphi_{ix}^2 u_{\psi_i} = 0\,.$$

Jede dieser Gleichungen kann in Analogie mit den einzelnen Formen $\varphi_{ix}^2 u_{\psi_i}$ als die Gleichung eines Kegelschnittes angesehen werden, dessen Punkte denen der Geraden $u$ in Bezug auf ein gewisses Büschel der viergliedrigen Gruppe $(abcd)$ conjugirt sind. Die Bestimmung der Büschel hängt natürlich von den Constanten $p$, $q$, $r$ ab. So lange nun $u$ eine willkürliche Gerade bezeichnet, haben die drei Kegelschnitte (17) keinen Punkt gemein (wofern die $p$, $q$, $r$ willkürlich bleiben). Verstehen wir jedoch unter $u_x$ eine der vier Geraden $g$, z. B. $u_x = g_{1x}$, dann enthält sie drei Punkte (die drei auf ihr liegenden Eckpunkte), welchen drei andere Punkte (die drei Gegenecken) in Bezug auf die ganze Gruppe $(abcd)$, folglich auch in Bezug auf jedes in ihr vorkommende Büschel bezüglich conjugirt sind, d. h. jeder der drei Kegelschnitte, welche aus (87) durch die Specialisirung $u = g_1$ hervorgehen,

$$K_1 = \Sigma p_i \varphi_{ix}^2 g_{1\psi_i} = 0, \quad K_2 = \Sigma q_i \varphi_{ix}^2 g_{1\psi_i} = 0, \quad K_3 = \Sigma r_i \varphi_{ix}^2 g_{1\psi_i} = 0$$

enthält die drei Ecken $(g_2, g_3)$, $(g_2, g_4)$, $(g_3, g_4)$; sie bilden somit ein Netz mit drei festen Punkten. Bezeichnet man daher die Jacobi'sche und Hermite'sche Form durch Vorsetzen der Buchstaben $J$, $H$, so stellen

$$J(K_1, K_2, K_3) = 0, \qquad H(K_1, K_2, K_3) = 0$$

die Gleichungen resp. der drei Geraden $g_2$, $g_3$, $g_4$ und der drei Ecken $(g_3, g_4)$ $(g_4, g_2)$, $(g_2, g_3)$, vermittelst der Coordinaten von $g_1$ allein (welche in den $K$ vorkommen) dar.

Die kanonische Form verificirt dieses Resultat.

Breslau, im October 1872.

# Bemerkungen über den Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatz.

Von G. F. Meyer in München.

## §. 1.

### Historisches.

In seiner Abhandlung über die Fourier'schen Doppelintegrale*) hat Du Bois-Reymond einen interessanten und nicht unwichtigen Mittelwerthsatz aufgestellt, der sich folgendermassen aussprechen lässt:

*Bezeichnen $f(x)$ und $\varphi(x)$ innerhalb der endlichen Grenzen $a$ und $b$ niemals unendlich werdende Functionen von $x$, von denen die eine, $f(x)$, entweder nicht wächst, oder nie abnimmt, und ist endlich $\theta$ eine Mittelgrösse zwischen dem Maximum und Minimum von $\int_u^b \varphi(x)\,dx$ innerhalb des Intervalles $u = a$ bis $u = b$; so gilt die Formel:*

$$(1)\qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + [f(b) - f(a)]\,\theta;$$

*diese Formel kann, falls $\int_u^b \varphi(x)\,dx$ eine stetige Function von $u$ darstellt, auch so geschrieben werden:*

$$(2)\qquad \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + [f(b) - f(a)]\int_\mu^b \varphi(x)dx$$

$$= f(a)\int_a^\mu \varphi(x)dx + f(b)\int_\mu^b \varphi(x)\,dx,$$

*wo $\mu$ einen unbekannten Mittelwerth zwischen $a$ und $b$ vorstellt.*

Von diesem Satze hat Du Bois-Reymond zwei Beweise mitgetheilt, deren erster auf einer wiederholten Anwendung der identischen Gleichung

*) Du Bois-Reymond. Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Classe von Doppelintegralen, zu welcher das Fourier'sche Doppelintegral gehört. Borchardt's Journal Bd. 69, S. 65 ff.

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b [f(x) - f(a)]\,\varphi(x)\,dx$$

beruht, und deren zweiter unter Voraussetzung einer innerhalb des Intervalles $a \cdots b$ *stetigen* Function $f(x)$ auf die Methode der theilweisen Integration sich stützt.

Ein anderer Beweis für jenen Satz ist später von Hankel*) gegeben worden. Die Erörterungen Hankel's, auf welche hier in Kürze eingegangen werden mag, haben zu ihrer Basis den bekannten Satz:

*Wenn* $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ *Grössen von einerlei Zeichen sind, so ist immer*

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n = (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)\, M(\alpha), \tag{3}$$

*wo* $M(\alpha)$ *einen Mittelwerth zwischen den Coefficienten* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ *vorstellt:*

Bilden die Grössen

$$f_0, f_1, \cdots \cdot f_n \tag{4}$$

entweder eine immer steigende oder immer fallende Reihe, und setzt man

$$\begin{aligned} f_0 &= f_0, \\ f_1 &= f_0 + \beta_1, \\ f_2 &= f_0 + \beta_1 + \beta_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n &= f_0 + \beta_1 + \beta_2 \cdots + \beta_n, \end{aligned} \tag{5}$$

so werden die $\beta$ im erstern Fall durchweg positiv, im letztern durchweg negativ sein. Multiplicirt man nun die Formeln (5) der Reihe nach mit beliebigen Factoren $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_n$, und addirt, so erhält man:

$$f_0\varphi_0 + f_1\varphi_1 \cdots + f_n\varphi_n = \Phi_0 f_0 + \Phi_1\beta_1 + \Phi_2\beta_2 \cdots + \Phi_n\beta_n, \tag{6}$$

wo unter $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_n$ folgende Summen zu verstehen sind:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n, \\ \Phi_1 &= \qquad \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n, \\ \Phi_2 &= \qquad\qquad \varphi_2 + \cdots + \varphi_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_n &= \qquad\qquad\qquad\quad + \varphi_n. \end{aligned} \tag{7.}$$

Die Formel (6) kann auf Grund des Satzes (3) auch so geschrieben werden:

---

*) Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Ph. Jahrgang 1869. S. 436.

$$(8) \qquad \varphi_0 f_0 + \varphi_1 f_1 \cdots + \varphi_n f_n = \Phi_0 f_0 + (\beta_1 + \beta_2 \cdots + \beta_n) M(\Phi),$$

also mit Rücksicht auf die letzte der Relationen (5.) auch so:

$$(9) \qquad \varphi_0 f_0 + \varphi_1 f_1 \cdots + \varphi_n f_n = \Phi_0 f_0 + (f_n - f_0) \cdot M(\Phi).$$

Von dieser Formel (9) aus gelangt **Hankel** zur **Du Bois-Reymond**'schen Formel (2), indem er den beliebig zu wählenden Factoren $\varphi$ unendlich kleine Werthe zuertheilt.

Im Folgenden soll nun eine Ableitung der Formel (2) mitgetheilt werden, welche der soeben angedeuteten einigermassen ähnlich, jedoch von grösserer Strenge sein dürfte.

## § 2.

### Ableitung des Du Bois-Reymond'schen Satzes.

Um die Vorstellung zu fixiren, sei angenommen, dass $f(x)$ innerhalb des gegebenen Intervalles $a \cdots b$ *fortwährend wächst* (oder wenigstens *niemals abnimmt*); andererseits sei in Betreff der Function $\varphi(x)$ nur vorausgesetzt, dass sie innerhalb $a \cdots b$ *überall endlich* ist. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$(10) \qquad f(x) - f(a) = F(x) = F, \qquad \varphi(x) = \varphi.$$

Auf dem Intervall $a \cdots b$ mögen nun zunächst alle diejenigen Punkte $c_1, c_2, \cdots c_{n-1}$ markirt werden, in denen $\varphi$ einen Zeichenwechsel erleidet:


Alsdann hat $\varphi$ z. B. innerhalb des Intervalles $a \cdots c_1$ überall einerlei Vorzeichen; somit folgt:

$$\int_a^{c_1} F \varphi \, dx = R_1 \int_a^{c_1} \varphi \, dx,$$

wo $R_1$ einen gewissen Mittelwerth der diesem Intervall entsprechenden Werthe von $F$ repräsentirt. Analoge Formeln gelten für die folgenden Intervalle $c_1 c_2$, $c_2 c_3$, u. s. w.; und durch Addition all' dieser Formeln erhält man:

$$(11) \qquad \int_a^{b'} F \varphi \, dx = R_1 \int_a^{c_1} \varphi \, dx + R_2 \int_{c_1}^{c_2} \varphi \, dx \cdots + R_n' \int_{c_{n-1}}^{b} \varphi \, dx.$$

Hiefür kann geschrieben werden:

$$(12) \qquad \int_a^b F \varphi \, dx = R_1 [\Phi_0 - \Phi_1] + R_2 [\Phi_1 - \Phi_2] \cdots + R_n [\Phi_{n-1} - \Phi_n],$$

oder anders geordnet:

$$(13)\qquad \int_a^b F\varphi\,dx = R_1\Phi_0 + [R_2 - R_1]\,\Phi_1 + [R_3 - R_2]\,\Phi_2 + \cdots \cdots + [R_n - R_{n-1}]\,\Phi_{n-1} + [F(b) - R_n]\,\Phi_n,$$

wo*) die $\Phi$ folgende Bedeutung haben:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \Phi_0 &= \int_a^b \varphi\,dx, \\ \Phi_1 &= \int_{c_1}^b \varphi\,dx, \\ \Phi_2 &= \int_{c_2}^b \varphi\,dx, \\ &\cdots\cdots \\ \Phi_{n-1} &= \int_{c_{n-1}}^b \varphi\,dx, \\ \Phi_n &= \int_b^b \varphi\,dx = \text{Null}. \end{aligned}$$

Da $f$ und $F$ innerhalb des Intervalles $a \cdots b$ fortwährend wachsen, so bilden auch die Mittelwerthe $R_1, R_2, R_3, \cdots R_{n-1}, R_n$ eine durchweg steigende Reihe; so dass also die in (13) enthaltenen Factoren

$$R_1,\ [R_2 - R_1],\ \cdots\ [R_n - R_{n-1}],\ [F(b) - R_n]$$

sämmtlich positiv sind. Bringt man daher den Satz (3.) in Anwendung, indem man die vorstehenden Factoren an Stelle der $\beta$ nimmt, und beachtet man, dass die Summe dieser gegenwärtigen $\beta$ gleich $F(b)$ ist, so folgt aus (13):

$$(15)\qquad \int_a^b F\varphi\,dx = F(b)\cdot M(\Phi).$$

$M(\Phi)$ bezeichnet hier einen Mittelwerth der Ausdrücke (14), und kann daher in folgender Weise dargestellt werden:

$$(16)\qquad M(\Phi) = \int_\mu^b \varphi\,dx,$$

falls man nämlich unter $\mu$ einen Mittelwerth zwischen $a$ und $b$ versteht.

Aus (15), (16) folgt:

$$(17)\qquad \int_a^b F\varphi\,dx = F(b)\cdot\int_\mu^b \varphi\,dx,$$

oder, falls man für $\varphi$, $F$, $F(b)$ ihre Bedeutungen (10) substituirt:

$$(18)\qquad \int_a^b [f(x) - f(a)]\,\varphi(x)\,dx = [f(b) - f(a)]\int_\mu^b \varphi(x)\,dx;$$

dies aber ist der zu beweisende Satz (2).

---

*) Die Formel (13) ist in der That *identisch* mit der Formel (12); denn nach (14) ist $\Phi_n = $ *Null*.

Wenn eine Function $f(x)$ gegeben sein sollte, welche innerhalb $a \cdots b$ *fortwährend abnimmt*, so wird die vorstehende Formel (18) gelten für $-f(x)$, also auch für $f(x)$ selber.

## § 3.

## Eine Anwendung des bewiesenen Satzes.

Im Vorstehenden haben wir zwar die Grössen $a$ und $b$ als endlich vorausgesetzt, indessen behält die Formel (2) auch dann noch Geltung, wenn eine oder beide der Grenzen ins Unendliche wachsen, sofern alsdann nur jedes der Integrale

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \text{ und } \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

nicht ohne Bedeutung ist und die Factoren $f(a)$ und $f(b) - f(a)$ ebenfalls zu den endlichen Grössen gehören. Auch darf unter ganz analogen Bedingungen die Function $\varphi(x)$ für gewisse Werthe von $x$ durch das Unendliche schreiten.

Gestützt auf Bemerkungen dieser Art lässt sich, wie mich dünkt, augenblicklich die Wahrheit des folgenden für die Theorie der bestimmten Integrale nicht unwichtigen Theoremes beweisen*).

Bezeichnet $k$ eine positive Constante, besitzt ferner für $k = 0$ das Integral $\int_0^\infty e^{-kx}\varphi(x)\,dx$, das für irgend ein von Null verschiedenes $k$ die Grösse $w$ darstellt, einen wirklichen Werth $\int_0^\infty \varphi(x)\,dx = m$; so nähert sich mit ins Unendliche abnehmendem $k$ die Grösse $w$ der Grenze $m$.

In der That, man hat, wenn $p$ eine beliebige zwischen 0 und $\infty$ liegende Grösse ausdrückt, zunächst für $k > 0$ die Beziehung

$$w = \int_0^\infty e^{-kx}\varphi(x)\,dx = \int_0^p e^{-kx}\varphi(x)\,dx + \int_p^\infty e^{-kx}\varphi(x)\,dx.$$

Hieraus aber folgt, weil $e^{-kx}$ innerhalb des Intervalles $(0, \infty)$ von 1 bis Null abnimmt, nach dem oben bewiesenen Satze

$$\int_0^\infty e^{-kx}\varphi(x)\,dx = \int_0^p \varphi(x)\,dx + (e^{-kp} - 1)\int_\mu^p \varphi(x)\,dx$$
$$+ e^{-kp}\int_p^\infty \varphi(x)\,dx - e^{-kp}\int_{\mu'}^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Da nun $p$ ganz nach Willkür gewählt werden kann, so lässt sich offenbar die Annahme machen, dass mit abnehmendem $k$ die Grösse

*) Man sehe meine Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen (Leipzig b. Teubner, 1871), daselbst § 67.

$p$ ohne Aufhören zwar wächst, das Product $kp$ aber der Null sich nähert, was z. B. im einfachsten Falle für $p = \frac{1}{\sqrt{k}}$ Statt findet. Geschieht demnach die Wahl des $p$ in der angedeuteten Weise, so muss nothwendig mit ins Unendliche abnehmendem $k$ der zwischen $p$ und $\infty$ befindliche Werth $\mu'$ unendlich gross werden, also nicht nur das Integral $\int\limits_p^\infty \varphi(x)dx$, sondern auch $\int\limits_{\mu'}^\infty \varphi(x)dx$ verschwinden. Das Integral $\int\limits_0^p \varphi(x)dx$ hingegen nähert sich alsdann dem Werthe $m$, und $\int\limits_\mu^p \varphi(x)dx$ bleibt, wenn auch $\mu$ nicht über jede Grenze hinaus wächst, doch wenigstens endlich und liefert folglich in Verbindung mit dem Factor $(e^{-kp} - 1)$ für $k = 0$ ebenfalls den Werth Null. Alles dies aber heisst in anderer Ausdruckweise, wenn das Zeichen lim auf die unendliche Abnahme des positiven $k$ sich bezieht,

$$\lim \int\limits_0^\infty e^{-kx} \varphi(x)\,dx = \lim w = m.$$

München, im November 1872.

# Bemerkung über gleichmässige Stetigkeit.

Von J. Lüroth in Carlsruhe.

---

In neuester Zeit hat Herr Heine besonders die Nothwendigkeit hervorgehoben, den Begriff der gleichmässigen Stetigkeit in die Analysis einzuführen oder zu untersuchen, wann eine Function gleichmässig stetig ist.

Neben den schon bekannten Untersuchungen hierüber*) ist vielleicht der folgende Beweis, dass jede stetige Function reeller Variabeln gleichmässig stetig ist, nicht ohne Interesse. Er ist für Functionen von zwei Variabeln geführt, lässt sich aber auch auf solche von beliebig vielen Veränderlichen anwenden.

Eine Function $f(x, y)$ der beiden Variabeln $x, y$, welche durch einen Punkt einer Ebene repräsentirt werden sollen, heisst in einem Punkte stetig, wenn man um ihn als Centrum einen Kreis legen kann, in dessen Innerem die Schwankung der Functionswerthe [d. h. der Unterschied zwischen dem kleinsten Werthe, den sie nicht über-, und dem grössten, den sie nicht unterschreiten] $\leqq \varepsilon$ ist, wo $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine vorgegebene Grösse. Existirt überhaupt ein solcher Kreis, so wird es eine Grösse $\varrho$ geben, die ein Kreisradius nicht überschreiten darf, wenn die obige Bedingung erfüllt sein soll. Diese Grösse $\varrho$ wird ausser von $\varepsilon$ noch abhängen von $x$ und $y$ und soll als Function dieser durch $\varrho(x, y)$ bezeichnet werden.

Diese Definition der Stetigkeit stimmt offenbar überein mit der gewöhnlichen, nach welcher eine Function im Punkte $x, y$ stetig heisst, wenn zu jeder gegebenen Zahl $\zeta > 0$ ein Kreis mit dem Centrum in jenem Punkte existirt, so dass für jeden Punkt $\xi, \eta$ in seinem Inneren der Zahlenwerth von $f(\xi, \eta) - f(x, y) \leqq \zeta$ ist. Auch für Punkte in der Nähe oder auf der Grenze des Bereiches, für welches die Function definirt ist, lässt sich die Definition anwenden, wenn man nur diejenigen Theile eines Kreises betrachtet, welche in das Bereich fallen.

---

*) Thomae, Abriss einer Theorie der complexen Functionen. S. 13. Anmerk. Heine, Crelle Bd. 74, Seite 188.

Es sei nun die Function $f(x,y)$ in jedem Punkte des Innern und der Grenze stetig, also in allen Punkten die Function $\varrho$ von Null verschieden. In dem um den Punkt $x, y$ mit dem Radius $\varrho(x,y)$ beschriebenen Kreise nehmen wir einen Punkt $x', y'$ an, dessen Entfernung von $x, y$ gleich $d$ sei. Dann ist $\varrho(x',y') > \varrho(x,y) - d$. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde der Kreis um $x', y'$ mit dem Radius $\varrho(x',y')$ ganz in den Kreis um den Punkt $x, y$ fallen und sein Radius könnte vergrössert werden, ohne dass die Schwankung $> \varepsilon$ würde. Andererseits kann aber $\varrho(x',y')$ auch nicht $> \varrho(x,y) + d$ sein, weil sonst der Radius $\varrho(x,y)$ noch vergrössert werden könnte. *Die Function $\varrho(x,y)$ ist also eine in allen Punkten des Innern und der Grenze des Bereiches stetige,* denn damit $\varrho(x',y') - \varrho(x,y)$ seinem Zahlenwerthe nach $< \zeta$ sei, braucht nur die Entfernung der beiden Punkte $(x',y')$ und $(x,y)$ kleiner als die kleinere der beiden Zahlen $\varrho(x,y)$ und $\zeta$ zu sein. Wäre nun die untere Grenze $R$ der Werthe der Function $\varrho(x,y)$ gleich Null, so müsste nach einem Satze von Herrn Weierstrass*) im Innern oder auf der Grenze des Bereiches der Function mindestens ein Punkt existiren, für welche die Function $\varrho(x,y)$ gleich Null wäre. Dann wäre aber die Function $f(x,y)$ in diesem Punkte unstetig, gegen die Voraussetzung: Ein Kreis, dessen Radius $\overline{\overline{<}} R$, hat also, wo er auch liegen mag, die Eigenschaft, dass die Schwankung in seinem Innern $\overline{\overline{<}} \varepsilon$ ist, d. h. *jede in obigem Sinne stetige Function ist gleichmässig stetig.*

Carlsruhe, April 1872.

*) Siehe Crelle's Journal, Bd. 72, Seite 141, Note.

# Ueber die mechanische Erzeugung von Curven.

Von Victor Schlegel zu Waren in Mecklenburg.

---

Auf S. 422 in Bd. V. dieser Annalen hat Clebsch die von Hrn. Schröter angegebene Erzeugungsweise der Curven dritter Ordnung der Grassmann'schen gegenübergestellt. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass beide Erzeugungsarten nur Anwendungen eines und desselben allgemeinen Principes sind. Die für die Grassmann'sche Erzeugungsart massgebende, speciellere Form dieses Principes ist in der „Ausdehnungslehre", (1844) S. 226 mit den Worten gegeben: „Wenn die Lage eines Punktes ($p$) in der Ebene dadurch beschränkt wird, dass 3 Punkte, welche durch Constructionen vermittelst des Lineals aus jenem Punkte ($p$) und aus einer gegebenen Reihe *fester gerader Linien oder Punkte* hervorgehen, in Einer geraden Linie liegen (oder drei solche Geraden durch Einen Punkt gehen), so ist der Ort jenes Punktes ($p$) eine algebraische Curve, deren Ordnung man durch blosses Nachzählen findet. Nämlich man hat nur nachzuzählen, wie oft bei den angenommenen Constructionen auf den beweglichen Punkt $p$ zurückgegangen wird, ohne dass man auf einen andern beweglichen Punkt zurückgeht; die so erhaltene Zahl ($m$) ist dann die Ordnungszahl der Curve."

Dieses Princip ist um so bequemer, als es in dem sog. planimetrischen Producte die einfachste Formulirung erhält. So wird z. B. der Satz, dass der Durchschnitt zweier projectivischen Strahlenbüschel ein Kegelschnitt ist, durch die Formel $(XAbCdEX) = 0$ ausgedrückt, in welcher $A$, $C$, $E$ feste Punkte und $b$, $d$ feste Geraden bedeuten, und welche einer sofortigen Umwandlung in eine auf ein beliebiges Coordinatensystem bezügliche Gleichung fähig ist. — Es ist aber klar, dass man der Construction einer Curve nicht nur feste gerade Linien und Punkte, sondern auch feste Curven zu Grunde legen kann. Je nachdem man sich auf jene beschränkt oder auch diese anwendet, wird man für dieselbe Curve verschiedene mechanische Erzeugungsarten erhalten, welche sich alle durch planimetrische Producte werden darstellen lassen. Voraussichtlich aber wird die Erzeugung einer Curve um so einfacher ausfallen, je mehr der Grad einer der festen Hülfscurven sich demjenigen der zu erzeugenden nähert, weil jede Curve $n^{ten}$ Grades hinsichtlich der Schnittpunkte mit einer variablen Geraden ebensoviel leistet wie $n$ Geraden. — Unter diesem Gesichtspunkte ist nun auch die von Hrn. Schröter (Annalen Bd. V. S. 65) angegebene Construction der Curven dritter Ordnung im Wesentlichen eine mechanische. Sie unterscheidet sich von der Grassmann'schen hauptsächlich durch Einführung eines festen Kegelschnittes, lässt sich aber in ganz analoger Weise formuliren wie jene.

Man kann zu dieser Formulirung auf doppelte Weise gelangen: entweder, indem man die Curve als Bahn eines bewegten Punktes, oder, indem man sie als den Durchschnitt gewisser Strahlenbüschel betrachtet. (Vgl. die Grassmann'schen Arbeiten in Crelle's Journal Bd. 36 und Bd. 42, S. 193.) Ich will nachstehend diese beiden Wege verfolgen, sodann das erhaltene planimetrische Product näher untersuchen und die gewonnenen Resultate zu einer Verallgemeinerung des im Eingange angeführten Princips benutzen. Ich werde dabei die von Hrn. Schröter a. a. O. gebrauchten Buchstaben beibehalten.

## 1.

Die Gerade, welche von dem beweglichen Punkte $X_1$ nach dem festen Punkte $O$ gezogen ist, wird dargestellt durch das Product

$$(X_1 O).$$

Die beiden Durchschnittspunkte dieser Geraden mit dem Kegelschnitte $K$, nämlich $\alpha$ und $O$, sind dargestellt durch das Product

$$(X_1 O K).$$

Da aber der Durchschnittspunkt $O$ für alle Punkte $X$ in der Ebene der nämliche ist, so kann man festsetzen, dass mit $(XOK)$ nur $\alpha$ bezeichnet sei. Die Gerade, welche durch $\alpha$ und $p$ gezogen ist, ist ferner ausgedrückt durch

$$(X_1 O K p).$$

In gleicher Weise erhält man als Ausdruck für die durch $b$ und $o$ gezogene Gerade das Product

$$(X_1 P K o).$$

Und der Durchschnittspunkt der durch $O, o$ und $P, p$ gezogenen Geraden ist dargestellt durch

$$[(O o)(P p)].$$

Bezeichnet man noch einen beliebigen Punkt der Ebene mit $A$, so ist die Gerade $\mathfrak{G}$ ausgedrückt durch das Product:

$$[(Oo)(Pp)A].$$

Da nun die drei Geraden $(\alpha p)$, $(bo)$, $\mathfrak{G}$ stets durch denselben Punkt gehen sollen, so ist nach den Gesetzen der Ausdehnungslehre

$$(X_1 OKp)(X_1 PKo)[(Oo)(Pp)A] = 0.$$

Da die Gerade $(\alpha p)$ den Kegelschnitt noch in einem zweiten Punkte $a$ schneidet, desgleichen $(bo)$ in einem zweiten Punkte $\beta$, so kann man auf der Geraden $(X_1 P)$ einen zweiten Punkt $X_2$ so bestimmen, dass seine Verbindungslinien mit $O$ und $P$ nunmehr durch $a$ und $b$ gehen, ebenso auf $(X_1 O)$ einen Punkt $X_3$, dessen Verbindungslinien mit $O$ und $P$ durch $\alpha$ und $\beta$ gehen; endlich wird der Durchschnitt der Linien $(OX_2)$ und $(PX_3)$ einen Punkt $(X_4)$ liefern, dessen Verbindungslinien mit $O$ und $P$ durch $a$ und $\beta$ gehen. Da die drei in einem Punkte sich schneidenden Geraden von diesen Aenderungen nicht berührt worden sind, so werden, wenn $X_1$ ein Punkt der durch das planimetrische Product dargestellten Curve ist, auch $X_2$, $X_3$, $X_4$ solche sein. Und wenn $X$ das gemeinsame Symbol der vier Punkte ist, hat man

(1) $$[XOKp]\cdot[XPKo]\cdot[(Oo)(Pp)A] = 0.$$

Sei *zweitens* $X$ ein vorläufig beliebiger und $O$ ein fester Punkt der Ebene, dann stellt das Product $(XO)$ jeden durch $O$ gezogenen Strahl dar, d. h. den ganzen durch $O$ gelegten Strahlenbüschel. Ferner ist durch $(XOK)$ der Durchschnitt dieses Strahlenbüschels mit dem Kegelschnitt $K$ gegeben, d. h. der Inbegriff sämmtlicher Punkte des Kegelschnitts. Ferner durch $(XOKp)$ der durch $p$ gelegte Strahlenbüschel, welcher sämmtliche Punkte von $K$ trifft; durch $(XOKp\mathfrak{G})$ der Durchschnitt dieses Büschels mit der Geraden $\mathfrak{G}$; durch $(XOKp\mathfrak{G}o)$ ein durch $o$ gelegter Büschel (welcher sämmtliche Punkte von $\mathfrak{G}$ trifft); durch $(XOKp\mathfrak{G}oK)$ die Durchschnittspunkte desselben mit dem Kegelschnitt. Und da diese Durchschnittspunkte mit $P$ und $X$ in gerader Linie liegen sollen, so ist nach den Gesetzen der Ausdehnungslehre

(2) $$[XOKp\mathfrak{G}oKPX] = 0.$$

Diese Gleichung ist nur eine andere Form von (1). Jede dieser beiden planimetrischen Gleichungen lässt sich nach Aufstellung irgend eines Coordinatensystems in eine Zahlengleichung verwandeln, wie es Grassmann in der Ausdehnungslehre II. S. 189 gezeigt hat. Da jedoch das hier zu befolgende Verfahren von dem dortigen in einer Beziehung abweicht, so mag es gestattet sein, dasselbe für die Gleichung (1) in Kürze mitzutheilen.

Wenn $e_1$ der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems ist, und $e_2$ und $e_3$ zwei der Längeneinheit gleiche, auf den positiven Axen von $e_1$ aus abgetragene Strecken, so stellt man zunächst die fünf Punkte $X$, $O$, $P$, $o$, $p$ dar durch Gleichungen von der Form

$$X = e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

worin z. B. $x_2$ und $x_3$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $x$, gemessen durch die Längeneinheit, bedeuten. In derselben Weise drückt man auch die Punkte $\alpha$ $(\alpha_2, \alpha_3)$ und $b$ $(b_2, b_3)$ aus. Darauf bestimmt man das Product $(XO)$, setzt

$$(XO\alpha) = 0,$$

und bestimmt aus dieser Gleichung und aus der Gleichung der festen Curve

$$F_2 = 0,$$

in welche man $\alpha_1$ und $\alpha_2$ eingesetzt hat, diese letzteren Grössen. In analoger Weise bestimmt man auch die Coordinaten von $b$. Nun handelt es sich nur noch um die Ausrechnung des Productes

$$(\alpha p)(bo)\,[(Oo)(Pp)A] = 0, \tag{3}$$

die keine Schwierigkeiten mehr bietet.

Wenn das gegebene planimetrische Product nur feste Geraden und Punkte enthielte, so würde die resultirende Gleichung vom zweiten Grade sein, da das Product den Factor $X$ nur zweimal enthält. Aus der Art und Weise aber, wie die Grössen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ bestimmt wurden, ist ersichtlich, dass der Factor $\alpha$ in Bezug auf $x_1$ und $x_2$ vom zweiten Grade ist. Es ist nämlich die Gleichung $(XO\alpha) = 0$ in Bezug auf $x_1$, $x_2$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ vom ersten, und $F_2 = 0$ in Bezug auf $\alpha_1$ und $\alpha_2$ vom zweiten Grade. Die Werthe von $\alpha_1$ und $\alpha_2$ enthalten daher zweite Potenzen von $x_1$ und $x_2$. Man kann also sagen, dass in dem Producte $(XOKp)$ der Grad von $X$ durch Einführung des Kegelschnittes $K$ verdoppelt wird. Dasselbe gilt für das Product $(XPKo)$; mithin ist die resultirende Gleichung vom *vierten* Grade. — Hieraus folgt aber, dass auch der Ort der Punkte $X$ ein Gebilde vierten Grades ist. Es ist nun leicht zu sehen, dass dieses Gebilde in eine Gerade und eine Curve dritter Ordnung zerfällt. Das Product (3) wird nämlich identisch gleich Null, wenn man $\alpha = P$ und $b = O$ setzt, d. h. wenn $(XOP) = 0$ ist. Diese Gleichung sagt aber nichts weiter, als dass $X$ mit $O$ und $P$ auf einer Geraden liegt; also ist auch die Gerade $OP$ ein Ort von $X$. Die gefundene Gleichung vierten Grades lässt sich also stets in zwei Factoren vom ersten resp. dritten Grade zerlegen, deren erster die Gerade $OP$, deren zweiter eine Curve dritter Ordnung repräsentirt. Diese Zerlegung vollzieht sich am einfachsten, wenn man das Coordinatensystem so wählt, dass $OP$ mit einer Axe (z. B. $x_2$) zusammenfällt. Dann enthalten nämlich alle Glieder der Gleichung den gemeinsamen Factor $x_3$.

## 2.

Bei Vergleichung der Grassmann'schen und der Schröter'schen Erzeugungsart der Curven dritter Ordnung fällt noch der Unterschied auf, dass bei jener die gegebenen sechs Elemente von einander unabhängig sind, bei dieser dagegen gewisse Bedingungen erfüllen müssen. Durch successive Aufhebung dieser Bedingungen werden wir nun allgemeinere Resultate erhalten.

*Erstens* sollte die Gerade 𝔊 durch den Punkt $[(Oo)(Pp)]$ gehen. Es ist schon beim Anblick des Productes (1) klar, dass der Grad der resultirenden Zahlengleichung durch Aufhebung dieser Bedingung keine Aenderung erleidet. Wohl aber zeigt die Form (3), dass die Gerade $(OP)$ der Gleichung nunmehr nicht genügt. Dass das durch die Gleichung (1) dargestellte Gebilde in eine Curve dritten Grades und eine Gerade zerfiel, war also eine Folge jener speciellen Annahme. Wir erhalten daher sogleich folgenden Satz über die *mechanische Erzeugung einer speciellen Art von Curven vierter Ordnung:*

*Wenn in der Ebene ein Kegelschnitt $K$, auf demselben zwei Punkte $O$ und $P$, ausserdem zwei beliebige Punkte $o$, $p$ und eine beliebige Gerade 𝔊 gegeben sind, so beschreibt ein Punkt $X$, welcher der Gleichung*

$$[XOKp\mathfrak{G}oKPX] = 0$$

*genügt, eine Curve vierter Ordnung.*

Wir wollen nun *zweitens* die Bedingung aufheben, dass die Punkte $O$ und $P$ auf der Curve $K$ liegen. Es war oben bei der Bestimmung von $\alpha_1$ und $\alpha_2$ aus den Gleichungen $(XO\alpha) = 0$ und $F_2 = 0$ eine Folge dieser Bedingung, dass wir $\alpha_1$ und $\alpha_2$ als *rationale* Functionen von $x_1$ und $x_2$ erhielten. Denn da das eine Werthpaar $(\alpha_1, \alpha_2)$ mit den Coordinaten des Punktes $O$ $(o_1, o_2)$ zusammenfiel, so fielen aus den gemischt quadratischen Gleichungen für $\alpha_1$ und $\alpha_2$ resp. die Factoren $(\alpha_1 - o_1)$ und $(\alpha_2 - o_2)$ heraus, und die übrig bleibenden linearen Gleichungen gaben für $\alpha_1$ und $\alpha_2$ rationale eindeutige Werthe. Nach Aufhebung obiger Bedingung haben wir nunmehr beide Schnittpunkte, welche die Gerade $XO$ mit der Curve $K$ liefert, in Betracht zu ziehen. Wir bezeichnen dieselben durch $\alpha$ und $\alpha'$, ebenso diejenigen, welche $XP$ liefert, mit $b$ und $b'$. — Bisher hatte die Gleichung unserer Curve die Form

$$(4) \qquad (\alpha p)(b\,o)\mathfrak{G} = 0.$$

Jeder Punkt $X$ bestimmte eindeutig einen Punkt $\alpha$, einen Punkt $b$, mithin auch einen Punkt $Y = (\alpha p)(b o)$, welcher auf einer Geraden fortrückte, während $X$ sich auf der Curve bewegte. Umgekehrt jedoch entsprachen einem Punkte $Y$ vier Punkte $X$, welche gleichzeitig vier verschiedene Theile der Curve beschrieben. Das letztere ist auch jetzt der Fall. Dagegen erhält man, von einem beliebigen Punkte $X$ der Curve ausgehend, vier verschiedene Punkte $Y$, nämlich $(\alpha p)(b o)$, $(\alpha' p)(b o)$, $(\alpha p)(b' o)$, $(\alpha' p)(b' o)$. Nur der erste davon bewegt sich auf der gegebenen Geraden $(\mathfrak{G}_{00})$. Es giebt aber drei andere, aus $K, O, P, o, p$ abgeleitete Curven, für welche resp. die Punkte $(\alpha' p)(b o)$, $(\alpha p)(b' o)$, $(\alpha' p)(b' o)$ jeder auf einer Geraden sich bewegen. Diese Geraden werden wir mit $\mathfrak{G}_{10}$, $\mathfrak{G}_{01}$, $\mathfrak{G}_{11}$ bezeichnen. Liegt ein Punkt $X$ so, dass $XO$ Tangente an den Kegelschnitt ist, so fallen die Punkte $\alpha$ und $\alpha'$ zusammen, und dem Punkte $X$ entsprechen als $Y$ die beiden Doppelpunkte $(\mathfrak{G}_{00}\mathfrak{G}_{10})$ und $(\mathfrak{G}_{01}\mathfrak{G}_{11})$. Liegt $X$ so, dass $XP$ Tangente an den Kegelschnitt ist, so fallen die Punkte $b$ und $b'$ zusammen, und dem Punkte $X$ entsprechen als $Y$ die beiden Doppelpunkte $(\mathfrak{G}_{00}\mathfrak{G}_{01})$ und $(\mathfrak{G}_{10}\mathfrak{G}_{11})$. Ist $Y$ ein Doppelpunkt der ersten Art, so sind die zugehörigen $X$ Schnittpunkte der Curven (00) und (10), resp. (01) und (11). Ist $Y$ ein Doppelpunkt der zweiten Art, so sind die zugehörigen $X$ Schnittpunkte der Curven (00) und (01), resp. (10) und (11).

Die Gleichung unserer Curve lässt sich nun in folgenden vier Formen schreiben:

$$(5) \qquad \begin{cases} (\alpha p)(b o)\,\mathfrak{G}_{00} = 0, \\ (\alpha' p)(b o)\,\mathfrak{G}_{10} = 0. \\ (\alpha p)(b' o)\,\mathfrak{G}_{01} = 0. \\ (\alpha' p)(b' o)\,\mathfrak{G}_{11} = 0. \end{cases}$$

Und jede dieser vier Formen stellt eine besondere Curve dar.

Es ist klar, dass zwischen den Geraden $\mathfrak{G}$ und den übrigen gegebenen Stücken ($K$, $P$, $O$, $p$, $o$) der Zusammenhang besteht, dass, wenn *eine* der ersteren mit den übrigen Stücken zusammen gegeben ist, auch die anderen drei Geraden bestimmt sind.

Wir lassen die näheren Beziehungen zwischen den vier gefundenen Curven und die weitere Mannigfaltigkeit von Beziehungen, welche dadurch entsteht, dass auch die Geraden $\mathfrak{G}_{10}$, $\mathfrak{G}_{01}$, $\mathfrak{G}_{11}$ noch in mehrdeutiger Weise bestimmbar sind, an dieser Stelle ausser Acht und kehren zu der nunmehr eindeutig bestimmten Curve $(\alpha p)(b o)\,\mathfrak{G} = 0$ zurück, indem wir die Durchschnittspunkte $\alpha'$ und $b'$ von der Betrachtung ausschliessen. Die Grössen $\alpha_1$ und $\alpha_2$ sind jetzt irrationale Functionen von $x_2$ und $x_3$ und enthalten eindeutige Quadratwurzeln.

Die Gleichung wird jetzt überhaupt drei verschiedene Quadratwurzeln enthalten, nämlich eine, in $\alpha_1$ und $\alpha_2$ enthaltene, in denjenigen Gliedern, in welchen weder $b_1$ noch $b_2$ vorkommt, eine andere, in $b_1$ und $b_2$ enthaltene, in denjenigen Gliedern, in welchen weder $\alpha_1$ noch $\alpha_2$ vorkommt; endlich das Product beider Wurzeln in den Gliedern, welche das Product einer Grösse $\alpha$ und einer Grösse $b$ enthalten. Zur Wegschaffung dieser Wurzeln werden zwei Quadrirungen erforderlich sein, wodurch der Grad der Gleichung vom vierten auf den sechzehnten steigt. — Durch geeignete specielle Annahmen für die gegebenen Stücke kann man indessen den Grad dieser Gleichung in mannigfacher Weise erniedrigen, wie bereits die Beispiele lehren, von denen wir ausgingen. Ist die gegebene feste Curve nebst $O$ und $P$ in Bezug auf $x_2$ und $x_3$ symmetrisch, so werden, da man nun $x_2$ und $x_3$ vertauschen kann, die in den Grössen $\alpha$ und $b$ enthaltenen Wurzelgrössen identisch. Zu ihrer Wegschaffung genügt *eine* Quadrirung, und die erhaltene Gleichung hat nur den achten Grad.

## 3.

Besondere Beachtung verdient noch der Fall, wo die feste Curve in zwei Geraden zerfällt, die sich in einem Punkte $S$ schneiden, und auf denen resp. die Punkte $o$ und $p$ liegen. Wählen wir die Durchschnittspunkte $\alpha$ und $b$ so, dass in der Gleichung (1) der Factor $K$ das erstemal die Gerade $(Sp)$, das zweitemal die Gerade $(So)$ vorstellt. Während nun in der Gleichung (1) der Factor $[XOKp]$ einen durch $p$ gelegten und alle Punkte von $K$ treffenden Strahlenbüschel vorstellte, reducirt sich dieser Strahlenbüschel im gegenwärtigen Falle auf die Gerade $(Sp)$. Diese Gerade, als Punktreihe betrachtet, wird aber schon durch das Product $[(XO)(Sp)]$ dargestellt, indem der Durchschnitt des Strahlenbüschels $(XO)$ mit der Geraden $(Sp)$ diese Gerade selbst ist. Ebenso geht der Factor $[XPKo]$ in unserem Falle über in $[(XP)(So)]$. Während endlich Gleichung (1) aussagte, dass der Durchschnitt der beiden Strahlenbüschel $[XOKp]$ und $[XPKo]$ die Gerade $[(Oo)(Pp)A]$ sei, oder, anders ausgedrückt, dass die drei Geraden $[XOKp]$, $[XPKo]$, $[(Oo)(Pp)A]$ sich in *einem Punkte* schnitten; so sagt dieselbe Gleichung jetzt, dass die Punktreihen (oder auch die einzelnen Punkte) $[(XO)(Sp)]$ und $[(XP)(So)]$ mit $[(Oo)(Pp)]$ auf *derselben Geraden* liegen. Demnach kann man auch den letzten Factor von (1), nämlich $[(Oo)(Pp)A]$ durch $[(Oo)(Pp)]$ ersetzen, und erhält die Gleichung:

$$[(XO)(Sp)] \cdot [(XP)(So)] \cdot [(Oo)(Pp)] = 0,$$

welche sich leicht auf die Form

$$(XAbCdEX) = 0$$

bringen lässt und einen Kegelschnitt als Durchschnitt zweier projectivischen Strahlenbüschel darstellt.

Da die im Vorstehenden durchgeführten Specialisirungen des Productes $(XOKp\mathfrak{G}oKPX)$ auf die einfachsten linearen Constructionen der Curven zweiter, dritter und vierter Ordnung geführt haben, so erscheint die Vermuthung gerechtfertigt, dass durch andere specielle Annahmen auch für andere Curven, deren Grad den $16^{\text{ten}}$ nicht übersteigt, aus obigem Producte die einfachsten linearen Constructionen hervorgehen mögen.

4.

Es bleibt noch übrig, die Leistungsfähigkeit dieses Productes für den Fall zu untersuchen, dass $K$ statt einer Curve vom zweiten eine Curve vom $n^{\text{ten}}$ Grade vorstellt. Wir wollen zu diesem Zweck, der Bequemlichkeit wegen, wieder auf die Form

$$(XOKp)(XPKo)\mathfrak{G} = 0$$

zurückgehen. Die Gerade $(XO)$ wird jetzt die Curve $K$ in $n$ Punkten treffen, desgleichen die Gerade $(XP)$. Aus der Combination dieser Schnittpunkte werden $n^2$ Curven hervorgehen, zu deren jeder eine besondere Gerade $\mathfrak{G}$ gehören wird. Ist

$$\alpha = e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

der Ausdruck für irgend einen der Durchschnittspunkte $(XOK)$, so werden $\alpha_2$ und $\alpha_3$ zu bestimmen sein aus der Gleichung

$$(XO\alpha) = 0,$$

in Verbindung mit der Gleichung von $K$, nämlich

$$F_n = 0,$$

worin die Coordinaten eines Curvenpunktes durch $\alpha_2$ und $\alpha_3$ zu ersetzen sind. Wenn nun $x_2$ und $x_3$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes auf irgend einer der durch das Product dargestellten Curven sind, so werden $\alpha_1$ und $\alpha_2$ $n$-deutige Functionen von $x_1$ und $x_2$ sein, und $x_1$ und $x_2$ selbst werden in der $n^{\text{ten}}$ Potenz darin vorkommen. Analoge Resultate wird man für den zweiten Factor $(XPKo)$ erhalten. Das Vorkommen der $n^{\text{ten}}$ Potenzen von $x_1$ und $x_2$ wird den Grad der Gleichung der Curve auf $2n$ heben. Die weitere Steigerung wird von der Zahl der Potenzirungen abhängen, denen man die Gleichung unterwerfen muss, um alle Wurzelzeichen zu entfernen.

Ist speciell $n = 1$, also $K$ eine Gerade, so liefert das Product eine Gleichung zweiten Grades, die einen Kegelschnitt darstellt. Die auf dieses Product sich gründende Construction ist etwas weniger einfach als die in Nr. 3. erwähnte, was damit zusammenhängt, dass $K$ dort ein System von zwei Geraden, hier aber nur eine einzige Gerade vorstellt.

Hiermit wäre denn die Bedeutung des Productes (2) für die lineare Construction der Curven charakterisirt und das im Eingang erwähnte Princip, welches nur für feste Punkte und Geraden galt, auf den Fall fester Curven erweitert, jedoch mit der Modification, dass zur Feststellung des Grades der Curvengleichung eine umständlichere Betrachtung erforderlich ist. — Es muss übrigens dahingestellt bleiben, ob durch eine so einfache Construction, wie das Product (2) sie ausdrückt, bei welcher durch jeden Punkt der Curve nur *zwei* variable Geraden $(XO)$ und $(XP)$ gehen, wirklich alle algebraischen Curven erzeugt werden können, oder ob nicht verschiedene Formen von planimetrischen Producten, die sich namentlich durch die Anzahl der in ihnen enthaltenen $X$ unterscheiden würden, sich in diese Aufgabe theilen.

Schliesslich bemerke ich noch, dass, wie mir erst nach Vollendung dieses Aufsatzes bekannt geworden, Hr. Grassmann selbst schon früher die hier durchgeführte Verallgemeinerung des von ihm aufgestellten Principes in Erwägung gezogen hat. Vgl. Crelle's Journ. Bd. 31, S. 131.

Waren, im November 1872.

# Ueber die theoretische Behandlung der sogenannten constanten Magnete*).

Von Carl Neumann in Leipzig.

---

Bei gegenseitiger Einwirkung zwischen magnetischen Körpern und galvanischen Strömen werden im Allgemeinen *sämmtliche* Ströme sich ändern, nicht nur die galvanischen Ströme selber, sondern auch die in jenen Körpern enthaltenen Molecularströme. Doch existiren gewisse Körper — die sogenannten constanten oder permanenten Stahlmagnete —, bei denen man von der Aenderung der Molecularströme zu abstrahiren für zulässig erachtet. Denn man ist der Ansicht, dass die Molecularströme eines solchen Stahlmagneten approximativ als *constant***) zu betrachten seien, hinsichtlich ihrer Stärke wie hinsichtlich ihrer Bahnen.

Ich werde dieser Ansicht mich vorläufig anschliessen. Demgemäss werde ich, um die gegenseitige (ponderomotorische und elektromotorische) Einwirkung zwischen galvanischen Strömen und sogenannten constanten Magneten durch bestimmte Formeln auszudrücken, einerseits von den bekannten beiden Integralgesetzen, andrerseits von der Annahme *constanter* Molecularströme ausgehen; die in solcher Weise sich ergebenden Formeln mögen kurzweg bezeichnet sein als die *gewöhnlichen Formeln* oder als die Formeln der *gewöhnlichen Theorie*. Sodann werde ich zeigen, dass diese Formeln zu Widersprüchen führen, und hieraus den Schluss ziehen, dass jene Annahme *constanter* Molecularströme theoretisch unzulässig sei.

---

*) Die mit der Jahrzahl 1871 versehenen Citate, welche im Laufe dieses Aufsatzes vorkommen, beziehen sich auf meine Schrift: *Elektrodynamische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf das Princip der Energie.* Berichte d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., October 1871, S. 386—449.

**) Ich unterscheide zwischen *constant*, *gleichförmig* und *ungleichförmig*. Ein elektrischer Strom soll nämlich *ungleichförmig* heissen, wenn seine Stärke eine Function von Zeit und Bogenlänge ist; er soll *gleichförmig* genannt werden, wenn seine Stärke *nur* eine Function der *Zeit* ist, und er soll endlich *constant* genannt werden, wenn seine Stärke weder von der Zeit, noch auch von der Bogenlänge abhängt.

## § 1.

## Die F. Neumann'schen Integralgesetze.

Es können diese Gesetze, welche in meinem bei Teubner erschienenem Werk: „*Die elektrischen Kräfte*" ausführlich erörtert worden sind, ihrem Hauptinhalte nach folgendermassen charakterisirt werden:

*Das ponderomotorische Integralgesetz sagt aus, dass die von zwei gleichförmigen Stromringen während der Zeit $dt$ auf einander ausgeübte ponderomotorische Arbeit*

$$(1) \qquad = -JJ_1 dQ$$

*ist, wo $J$, $J_1$ die beiden Stromintensitäten bezeichnen, während $Q$ [das sogenannte Potential, bezogen auf die Stromeinheit] einen Ausdruck vorstellt, der lediglich abhängt von der augenblicklichen Lage und Gestalt der beiden Ringe.* — Vgl. „Die elektrischen Kräfte", S. 55.

*Das elektromotorische Integralgesetz bezieht sich ebenfalls auf zwei gleichförmige Stromringe, und sagt aus, dass die Summe der von dem einen Ringe während der Zeit $dt$ im andern inducirten elektromotorischen Kräfte*

$$(2) \qquad = +d(J_1 Q)$$

*ist, wo $J_1$ die Stromintensität des inducirenden Ringes bezeichnet, während $Q$ dieselbe Bedeutung hat wie vorhin.* — Vgl. „Die elektrischen Kräfte", S. 107.

## § 2.

## Darstellung der gewöhnlichen Theorie.

Wir betrachten zunächst ein System $(M, M_1)$, bestehend aus zwei *constanten* Stahlmagneten $M$ und $M_1$, welche sich bewegen unter ihrer gegenseitigen Einwirkung, sowie unter der Einwirkung beliebig gegebener äusserer Kräfte; dabei sei vorausgesetzt, dass diese äusseren Kräfte durchweg ordinärer (nichtelektrischer) Natur sind.

Bezeichnet man mit $jj_1Q$ das Potential eines Molecularstromes $j$ des Magneten $M$ auf einen Molecularstrom $j_1$ des Magneten $M_1$, so wird das Potential der beiden Magneten auf einander den Werth haben:

$$\Sigma\Sigma(jj_1Q),$$

die Summation ausgedehnt über alle $j$ und alle $j_1$. *Das Potential $V$ des Systems $(M, M_1)$ auf sich selber* wird daher dargestellt sein durch:

$$(3) \qquad V = \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}C_1 + \Sigma\Sigma(jj_1Q),$$

wo $\frac{1}{2}C$ und $\frac{1}{2}C_1$ zwei Constante sind, von denen die erstere das Potential von $M$ auf sich selber, die letztere das Potential von $M_1$ auf sich selber vorstellt.

Die ponderomotorische Arbeit, welche die Ströme $j$ und $j_1$ während der Zeit $dt$ auf einander ausüben, ist $= -jj_1 dQ$, zufolge (1); und es wird daher die von den beiden Magneten auf einander ausgeübte Arbeit $= -\Sigma\Sigma(jj_1 dQ)$ sein. Andrerseits mag die während der Zeit $dt$ von den *äussern* (ordinären) Kräften auf das System ausgeübte Arbeit benannt sein mit $dS$.

Bezeichnet nun $T$ die lebendige Kraft der ponderablen Massen des Systems, so ist bekanntlich der dem Zeitelement $dt$ entsprechende Zuwachs $dT$ gleich der Summe sämmtlicher Arbeiten, welche während jenes Zeitelementes auf das System ausgeübt werden; somit erhält man:

$$dT = -\Sigma\Sigma(jj_1 dQ) + dS. \tag{4}$$

Nun folgt aber aus (3), weil die $j$, $j_1$ constant und nur die $Q$ veränderlich sind, sofort: $dV = \Sigma\Sigma(jj_1 dQ)$, so dass also die Formel (4) auch so geschrieben werden kann:

$$dT = -dV + dS, \tag{5}$$

in Worten ausgedrückt: *Die während eines Zeitelementes erzeugte Quantität von lebendiger Kraft ist gleich dem negativen Zuwachs des Potentiales $V$, dazu gelegt die von den äussern Kräften ausgeübte Arbeit.*

Wir gehen über zur Betrachtung zweier *anderer* Systeme, die wir kurzweg mit $(J, M_1)$ und $(J, J_1)$ benennen wollen.

Das System $(J, M_1)$ bestehe aus einem starren Ringe*), der von einem galvanischen Strome $J$ durchflossen ist, und aus einem *constanten* Stahlmagneten $M_1$. Die in dem Ringe von Hause aus vorhandene elektromotorische Kraft mag mit $A$, sein Widerstand mit $w$ bezeichnet sein, so dass also, wenn der Ring sich selber überlassen wäre, nach dem Ohm'schen Gesetz $J = \frac{A}{w}$ sein würde.

Ferner sei $j_1$ irgend einer der in $M_1$ enthaltenen Molecularströme und $Jj_1Q$ das Potential von $J$ auf $j_1$, mithin

$$J \cdot \Sigma(j_1 Q)$$

das Potential von $J$ auf $M_1$.

*Das Potential $V$ des Systemes $(J, M_1)$ auf sich selber* lautet alsdann:

$$V = \tfrac{1}{2} qJ^2 + \tfrac{1}{2} C_1 + J \cdot \Sigma(j_1 Q). \tag{6}$$

Das System $(J, J_1)$ bestehe aus zwei starren Ringen, die respective von den galvanischen Strömen $J$ und $J_1$ durchflossen sind. Die in diesen Ringen von Hause aus vorhandenen elektromotorischen Kräfte mögen mit $A$ und $A_1$, ihre Widerstände mit $w$ und $w_1$ bezeichnet sein.

Ferner sei

$$JJ_1Q$$

das Potential der beiden Ringe auf einander.

*Das Potential $V$ des Systemes $(J, J_1)$ auf sich selber* lautet alsdann:

$$V = \tfrac{1}{2} qJ^2 + \tfrac{1}{2} q_1 J_1^2 + JJ_1 Q.$$

*) Unter einem starren Ringe ist überall ein in sich zurücklaufender *linearer* Leiter von unveränderlicher Gestalt zu verstehen.

Hier sind unter $\frac{1}{2}qJ^2$, $\frac{1}{2}q_1J_1^2$ und $\frac{1}{2}C_1$ das Potential von $J$ auf sich selber, dasjenige von $J_1$ auf sich selber, und endlich dasjenige von $M_1$ auf sich selber zu verstehen, so dass also $q$, $q_1$ und $C_1$ gewisse den beiden Ringen und dem Magneten eigenthümlich zugehörige *Constanten* repräsentiren.

Haben nun $dT$ und $dS$ analoge Bedeutungen wie vorhin [bei dem Systeme $(M, M_1)$], so erhalten wir unter Anwendung des ponderomotorischen Integralgesetzes (1) die Formeln:

| | |
|---|---|
| (7) $dT = -J\cdot\Sigma(j_1 dQ) + dS,$ <br> $= -J\cdot d\Sigma(j_1 Q) + dS;$ <br> es ist nämlich zu beachten, dass die $j_1$ zufolge unserer Annahme *constant* sind. | $dT = -JJ_1 dQ + dS.$ |

Andrerseits ergeben sich unter Benutzung des elektromotorischen Integralgesetzes (2) die Formeln:

| | |
|---|---|
| (8) $wJdt = Adt + d[Jq + \Sigma(j_1 Q)],$ | $wJdt = Adt + d(Jq + J_1 Q),$ <br> $w_1 J_1 dt = A_1 dt + d(J_1 q_1 + JQ);$ |

und hieraus folgt durch Multiplication mit $J$ und $J_1$ sofort:

| | |
|---|---|
| (9) $wJ^2 dt = AJdt + J\cdot d\Sigma(j_1 Q)$ <br> $+ d(\frac{1}{2}qJ^2),$ | $(wJ^2 + w_1 J_1^2)dt = (AJ + A_1 J_1)dt + JJ_1 dQ$ <br> $+ d(\frac{1}{2}qJ^2 + \frac{1}{2}q_1 J_1^2 + QJJ_1).$ |

Endlich folgt durch Addition der Formeln (7) und (9) und mit Rücksicht auf (6):

| | |
|---|---|
| (10) $dT + wJ^2 dt =$ <br> $= AJdt + d(\frac{1}{2}qJ^2) + dS,$ | $dT + (wJ^2 + w_1 J_1^2)dt$ <br> $= (AJ + A_1 J_1)dt + dV + dS.$ |

## § 3.

### Der in der gewöhnlichen Theorie enthaltene Widerspruch.

Die in (5) und (10) für die drei Systeme $(M, M_1)$, $(J, M_1)$ und $(J, J_1)$ erhaltenen Resultate sind *von grosser Verschiedenheit*, was besonders deutlich hervortritt, sobald man die Kräfte $A$, $A_1$ gleich Null annimmt. Denn alsdann nehmen jene Formeln (5) und (10) der Reihe nach folgende Gestalten an:

$$(11)\qquad \begin{aligned} [dT] &= dS - dV, \\ [dT + wJ^2 dt] &= dS + d(\tfrac{1}{2}qJ^2), \\ [dT + wJ^2 dt + w_1 J_1^2 dt] &= dS + dV, \end{aligned}$$

wo die in eckige Klammern [ ] eingeschlossenen Ausdrücke dasjenige Quantum von lebendiger Kraft und Wärme repräsentiren, welches in jedem der drei Systeme während der Zeit $dt$ erzeugt wird. Die Formeln sagen also aus, dass dieses Quantum für jene drei Systeme *sehr verschiedene* Werthe hat, dass z. B. dasselbe $= dS - dV$ oder

$= dS + dV$ ist, je nachdem man das erste oder letzte System betrachtet. — *Die entwickelte Theorie steht also mit sich selber in Widerspruch.*

Dieser Widerspruch ist ein sehr bedeutender; folglich sind die Prämissen der Theorie nicht nur im exacten, sondern auch im approximativen Sinne unzulässig. Jene Prämissen bestehen aber einerseits in den beiden Integralgesetzen (1), (2), andrerseits in der Annahme *constanter* Molecularströme; und man gelangt daher, falls man nicht etwa die beiden Integralgesetze in Frage stellen will, zu folgendem Resultat:

(12. $\alpha$) *Die Annahme wirklich constanter Magnete oder wirklich constanter Molecularströme ist theoretisch unzulässig, nicht nur im exacten, sondern auch im approximativen Sinne.*

Demgemäss sind die mit dieser Annahme liirten Formeln (3, 4, 5) und (6, 7, · · 10) linker Hand für *unrichtig oder fraglich*, hingegen die Formeln (6, 7, · · 10) rechter Hand, welche von einer solchen Annahme frei sind, für *zuverlässig* zu halten.

Ist also irgend ein System gegeben, welches theils aus sogenannten *constanten Magneten*, theils aus *galvanischen Strömen* besteht, und handelt es sich um eine nähere Untersuchung der in diesem System stattfindenden Wirkungen und Bewegungen, so wird eine solche Untersuchung, wie aus dem Satze (12. $\alpha$) unmittelbar folgt, als ein *Problem höherer Ordnung* zu bezeichnen sein, bei dessen sachgemässer Behandlung die Einführung irgend welcher Hypothesen über die innere Mechanik magnetischer Körper nicht zu umgehen ist.

So wird man z. B. bei einem derartigen System für das Princip der Erhaltung der Energie, bei sachgemässer Behandlung, eine Formel erhalten, die noch behaftet ist mit einer völlig unbekannten, von der innern Mechanik magnetischer Körper abhängenden Function; zur nähern Bestimmung dieser Function*) wird aber die Einführung irgend welcher Hypothesen über jene innere Mechanik unumgänglich erforderlich sein.

(12. $\beta$) *Aus* (12. $\alpha$) *folgt also, dass das Gesetz der Erhaltung der Energie für solche Systeme, die aus elektrischen Strömen und sogenannten constanten Magneten bestehen, seiner eigentlichen Form nach einstweilen noch unbekannt ist.*

Der Satz (12. $\alpha$) steht nicht isolirt da; es mag mir gestattet sein, auf verwandte Fälle aus bekannteren Regionen aufmerksam zu machen.

---

*) Der von mir (1871, S. 440 sq.) zur ungefähren Bestimmung dieser Function gemachte Versuch ist, wie schon damals betont wurde, nur provisorisch und durchaus unzureichend.

*Erster Fall.* — Die Differentialgleichungen für einen frei beweglichen Massenpunkt $m$, auf welchen gegebene Kräfte $X$, $Y$, $Z$ einwirken, sind:

$$(\alpha) \qquad mx'' = X, \qquad my'' = Y, \qquad mz'' = Z.$$

Wollte man die Beweglichkeit des Punktes nachträglich noch durch eine gegebene Bedingung

$$(\beta) \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

beschränken, so würde man vier Gleichungen ($\alpha$), ($\beta$) haben, die mit einander in Widerspruch stehen. — In der That wird die Annahme oder Bedingung $\varphi(x, y, z) = 0$ immer *unzulässig* sein, falls man nicht gleichzeitig auch gewisse Kräfte *) hinzufügt, welche für Aufrechterhaltung jener Bedingung Sorge tragen.

*Zweiter Fall.* — Bewegen sich zwei Massenpunkte $m$, $M$ unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Anziehungs- oder Abstossungskraft längs einer gegebenen geraden Linie, und bezeichnet man ihre augenblicklichen Geschwindigkeiten mit $u$, $U$, so ergeben sich durch das Princip des Schwerpunkts und durch das Princip der lebendigen Kraft die Formeln:

$$(\gamma) \qquad mu + MU = K,$$

$$(\delta) \qquad mu^2 + MU^2 = F(r),$$

wo $K$ eine Constante, hingegen $F(r)$ eine Function der gegenseitigen Entfernung $r$ der beiden Punkte vorstellt Wollte man zu diesen Formeln noch die Bedingung hinzutreten lassen:

$$(\varepsilon) \qquad U = \text{Const.},$$

so würde ein Widerspruch eintreten; denn die Formel ($\gamma$) würde alsdann aussagen, dass $u$ *constant*, die Formel ($\delta$) hingegen, dass $u$ *variabel* sei. — Jene Annahme oder Bedingung $U = \text{Const.}$ ist also *unzulässig.*

*Dritter Fall.* — Die Massen $m$ und $M$ der soeben betrachteten Punkte mögen sich zu einander verhalten, wie die *Masse eines Staubkorns* zur *Sonnenmasse.* Offenbar wird alsdann die Sonnenmasse $M$ (durch jenes Staubkorn $m$ so gut wie gar nicht afficirt) mit *constanter* oder wenigstens *nahezu constanter* Geschwindigkeit dahinfahren; so dass also die Annahme ($\varepsilon$) wenigstens approximativ als zulässig erscheint. — Aber der Schein trügt; denn durch Combinirung von ($\varepsilon$) und ($\gamma$), ($\delta$) würde man wiederum zu dem schon genannten Widerspruch, nämlich zu dem Resultat geführt werden, dass die Geschwindigkeit $u$ des Staubkornes *gleichzeitig constant und variabel* sei. — Jene Annahme

*) Nämlich die bekannten Druckkräfte $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

$U =$ Const. wird also im Allgemeinen *unzulässig* bleiben, wie gross auch $M$ gegen $m$ sein mag.

Aus diesen Betrachtungen*) dürfte sich die allgemeine Regel ergeben:

(13) *Soll die Bewegung gegebener Massen einer bestimmten Bedingungsgleichung unterworfen gedacht werden, so ist (falls innere Widersprüche vermieden werden sollen) die Einführung von Kräften erforderlich, welche für die Aufrechterhaltung jener Bedingungsgleichung Sorge tragen.*

Will man also die elektrischen Molecularströme im Innern eines gegebenen Magneten als *constant* sich vorstellen, so ist man genöthigt, gleichzeitig auch gewisse Kräfte sich vorzustellen, welche für die Aufrechterhaltung dieser *Constans* Sorge tragen.

Will man ferner (um ein anderes Beispiel anzuführen) die Vorstellung adoptiren, dass in einem elektrischen Strom jederzeit *gleich grosse* Quantitäten der beiden Fluida in entgegengesetzten Richtungen durch den Querschnitt gehen, so wird man gezwungen sein, gleichzeitig auch gewisse Kräfte zu adoptiren, welche für ein solches *Gleichsein* Sorge tragen.

## § 4.

### Zusammenstellung einiger Formeln der gewöhnlichen Theorie.

Wir beschränken uns auf die beiden Systeme

$$(J, M_1), \qquad \| \qquad (J, J_1).$$

Das Potential $V$ (6) eines solchen Systemes auf sich selber besitzt den Werth:

(14) $V = \frac{1}{2} q J^2 + \frac{1}{2} C_1 + J \cdot \Sigma(j_1 Q)$, $\quad \| \quad$ $V = \frac{1}{2} q J^2 + \frac{1}{2} q_1 J_1^2 + Q J J_1$.

Die Formeln für die *ponderomotorischen* Wirkungen (7) lauten:

(15) $dT = - J \cdot d\Sigma(j_1 Q) + dS$, $\quad \| \quad$ $dT = - J J_1 dQ + dS$;

diesen Formeln zufolge zerfällt die während der Zeit $dt$ im Systeme erzeugte lebendige Kraft $dT$ in zwei Theile, nämlich in *einen* Theil

(A) $\qquad - J \cdot d\Sigma(j_1 Q), \quad \| \quad - J J_1 dQ,$

welcher speciell durch die *elektrodynamischen*, und in einen *andern* Theil

(B) $\qquad dS, \quad \| \quad dS,$

welcher speciell durch die *ordinären* Kräfte hervorgebracht wird.

Endlich sind für die *elektromotorischen oder inducirenden* Wirkungen entweder anzugeben die Formeln (9):

---

*) Aehnliche und zum Theil weiter ausgeführte Betrachtungen findet man in meiner Abhandlung (1871, S. 440—446).

$$(16)\quad AJdt = wJ^2dt - J\cdot d\Sigma(j_1Q) - d(\tfrac{1}{2}qJ^2). \quad \Big\| \quad (AJ+A_1J_1)dt = (wJ^2+w_1J_1^2)dt - JJ_1dQ - d(\tfrac{1}{2}qJ^2+\tfrac{1}{2}q_1J_1^2+QJJ_1).$$

oder auch die (diesen als Grundlage dienenden) detaillirteren Formeln (8):

$$(16^{\text{bis}})\quad wJdt = Adt + d[Jq+\Sigma(j_1Q)], \quad \Big\| \quad \begin{aligned} wJdt &= Adt + d[Jq+J_1Q], \\ w_1J_1dt &= A_1dt + d[J_1q_1+JQ]. \end{aligned}$$

Diese Formeln (16, $16^{\text{bis}}$) werden kurzweg zu bezeichnen sein als die Repräsentanten des *gewöhnlichen Inductionsgesetzes.*

Von Neuem mag, was schon bei Gelegenheit des Satzes (12. $\alpha$) bemerkt ist, wiederholt werden, dass die mit der Annahme constanter Molecularströme liirten Formeln $(14, 15, 16, 16^{\text{bis}})_{\text{linker Hand}}$ als *unzuverlässig*, hingegen die Formeln $(14, 15, 16, 16^{\text{bis}})_{\text{rechter Hand}}$ als *zuverlässig* anzusehen sind.

## § 5.

## Das Princip der lebendigen Kraft.

Ausgehend vom Weber'schen Grundgesetz und von einer gewissen unitarischen Vorstellungsweise, bin ich in meiner Abhandlung von 1871 zu dem Resultat gelangt, dass das *Princip der lebendigen Kraft* im Gebiet der elektrischen Vorgänge repräsentirt ist durch zwei wohl von einander zu unterscheidende Sätze*), welche ich das *Energiegesetz* und das *Potentialgesetz* benannte. Es mag mir gestattet sein, diese Sätze in etwas erweiterter Fassung kurz mitzutheilen**), sodann aber dieselben in Anwendung zu bringen auf die im Vorhergehenden betrachteten Systeme $(J, M_1)$ und $(J, J_1)$.

Ein System (linearer oder körperlicher) Conductoren sei in beliebiger Bewegung begriffen, während gleichzeitig im Innern eines jeden solchen Conductors irgend welche elektrische Vorgänge stattfinden; dabei mag vorausgesetzt sein, dass die auf das System von *Aussen* her einwirkenden Kräfte durchweg ordinärer (nicht elektrischer) Natur sind. Ferner sei $T$ die actuelle und $F$ die potentielle Energie des Systemes; mit andern Worten: es sei $T$ die lebendige Kraft aller in dem Systeme enthaltenen ponderablen Massen und es repräsentire $F$ den Ausdruck

$$(17)\qquad F = U^o + U - V,$$

*) Das *Energiegesetz* findet sich daselbst angegeben auf S. 408 und S. 414; andererseits das *Potentialgesetz* auf S. 430. Letzterer Name dürfte unzweckmässig gewählt sein; ich habe daher später (z. B. in meinem Werk: *„Die elektrischen Kräfte“*) dieses letztere als *ponderomotorisches Integralgesetz* bezeichnet.

**) Eine ausführlichere Mittheilung der betreffenden Untersuchungen behalte ich mir vor. Hiebei wird sich alsdann Gelegenheit bieten zu erörtern, ob die von Herrn Helmholtz in seinem Aufsatz (1872, S. 55, Note) ausgesprochene Behauptung, *jene Untersuchungen seien mit einem mathematischen Fehler behaftet*, begründet ist oder nicht.

wo $U^o$ das ordinäre, $U$ das elektrostatische und $V$ das elektrodynamische Potential des Systemes auf sich selber bezeichnet. — *Das Princip der lebendigen Kraft ist alsdann repräsentirt durch folgende zwei Sätze:*

*Das Energiegesetz. Für jedes Zeitelement $dt$ ist*

(18. E) $$d(T + F) = dS - dQ^*, \text{ oder}$$
$$dT + d(U^o + U - V) = dS - dQ^*,$$

*wo $dS$ die während der Zeit $dt$ von den äusseren Kräften verrichtete Arbeit, und $dQ^*$ die während dieser Zeit (durch die elektrischen Vorgänge) im System entwickelte Wärme vorstellt*).*

*Das Potentialgesetz. Für jedes Zeitelement $dt$ ist:*

(18. P) $$dT + \delta(U^o + U + V) = dS,$$

*wo $dS$ die schon genannte Bedeutung hat. Dabei ist unter $\delta(U^o + U + V)$ derjenige virtuelle Zuwachs zu verstehen, welchen die Grösse $(U^o + U + V)$ während der Zeit $dt$ erlitten haben würde, falls während dieser Zeit die elektrischen Verhältnisse im Innern eines jeden Conductors ungeändert geblieben wären. — Zu bemerken ist, dass dieses Potentialgesetz nur dann gilt, wenn die elektrischen Strömungen im Innern der einzelnen Conductoren als gleichförmig und an ihren Oberflächen als tangential betrachtet werden dürfen.*

Vernachlässigt man die durch $U^o$ und $U$ repräsentirten ordinären und elektrostatischen Kräfte gegenüber den durch $V$ repräsentirten elektrodynamischen Kräften, so können die Formeln (17) und (18. E, P) folgendermassen dargestellt werden:

(19) $$F = -V,$$

(20. E) $$dT + dF = dS - dQ^*,$$

(20. P) $$dT - \delta F = dS;$$

woraus durch Subtraction folgt:

(20. E—P) $$dF + \delta F = -dQ^*.$$

In meiner erwähnten Abhandlung ist der Werth der entwickelten Wärmemenge $dQ^*$ näher zu bestimmen versucht worden für den speciellen Fall *linearer* in sich zurücklaufender Conductoren; dabei ergab sich folgender Ausdruck**):

---

*) Ich bezeichne die entwickelte Wärmemenge mit $dQ^*$, um in solcher Weise Verwechselungen zu vermeiden. Denn der Buchstabe $Q$ (ohne Sternchen) ist bereits in anderer Bedeutung [vgl. z. B. Formel (1)] verwendet worden, und soll in dieser Bedeutung auch weiterhin beibehalten werden.

**) 1871, S. 415.

$$(21)\qquad dQ^* = (wJ^2 + w_1 J_1^2 + \cdots)\,dt - (AJ + A_1 J_1 + \cdots)\,dt,$$

wo $w, w_1, \cdots$ die Widerstände der einzelnen linearen Ringe, $J, J_1, \cdots$ die augenblicklich in ihnen vorhandenen Stromintensitäten, und $A$, $A_1, \cdots$ die in denselben von Hause aus vorhandenen elektromotorischen Kräfte vorstellen.

Wir wollen nun diese Formeln in Anwendung bringen auf die in den vorhergehenden Paragraphen betrachteten Systeme

$$(J,\ M_1), \qquad\qquad (J,\ J_1).$$

Für die potentielle Energie $F$ (19) eines solchen Systemes ergiebt sich, mit Rücksicht auf (14), folgender Werth:

$$(22)\qquad F = -V,$$
$$= -[\tfrac{1}{2} qJ^2 + \tfrac{1}{2} C_1 + J\cdot\Sigma(j_1 Q)],$$

hieraus folgt:

$$\delta F = -J\cdot\Sigma(j_1\,dQ),$$

oder weil die $j_1$ unveränderlich sind:

$$(23)\qquad \delta F = -J\cdot d\Sigma(j_1 Q).$$

$$F = -V,$$
$$= -[\tfrac{1}{2} qJ^2 + \tfrac{1}{2} q_1 J_1^2 + QJJ_1],$$

hieraus folgt:

$$\delta F = -JJ_1\,dQ.$$

Ferner nimmt der Ausdruck der entwickelten Wärmemenge $dQ^*$ (21) für die betrachteten beiden Systeme folgende Gestalten an:

$$(24)\qquad dQ^* = wJ^2 dt - AJdt, \qquad\Big\|\qquad dQ^* = (wJ^2 + w_1 J_1^2)dt - (AJ + A_1 J_1)dt.$$

Substituirt man nun die Werthe (23) und (24) in die allgemeine Formel (20. E—P), so folgt:

$$(25)\qquad dF - J\cdot d\Sigma(j_1 Q) =$$
$$= AJdt - wJ^2 dt;$$

hiefür kann geschrieben werden:

$$(26)\qquad AJdt = wJ^2 dt - J\cdot d\Sigma(j_1 Q) + dF,$$

oder, falls man für $F$ seine eigentliche Bedeutung (22) substituirt und durch $J$ dividirt:

$$(26^{\text{bis}})\qquad wJdt = Adt + d[qJ + 2\Sigma(j_1 Q)] + (d\log J)\cdot\Sigma(j_1 Q).$$

Diese Formel (26, $26^{\text{bis}}$) ist eine *wildfremde Formel, welche von dem gewöhnlichen Inductionsgesetz* (16, $16^{\text{bis}}$) *in greller Weise sich unterscheidet.*

$$dF - JJ_1\,dQ =$$
$$= (AJ + A_1 J_1)dt - (wJ^2 + w_1 J_1^2)dt;$$

hiefür kann geschrieben werden:

$$(AJ + A_1 J_1)dt = (wJ^2 + w_1 J_1^2)dt - JJ_1 dQ + dF.$$

Diese Formel steht, falls man für $F$ seine eigentliche Bedeutung (23) substituirt, *in vollem Einklang mit dem gewöhnlichen Inductionsgesetz* (16, $16^{\text{bis}}$).

Die Formeln *linker* Hand sind also mit denen der gewöhnlichen Theorie in *Widerspruch*, während die *rechter* Hand mit denen der gewöhnlichen Theorie in *Einklang* stehen. Der Grund jenes Widerspruchs kann nur darin zu suchen sein,

(27) dass constante Magnete *nicht existiren* und nicht existiren *können*; ebenso wenig etwa, wie ein Weltkörper gedacht werden kann, der trotz der Einwirkung der übrigen Weltkörper in geradliniger Bahn dahinfährt. Ein sogenannter constanter Magnet wird, falls er auf einen elektrischen Strom einwirkt, auch seinerseits von diesem Strome her eine gewisse Einwirkung und in seinem Zustande eine gewisse Aenderung erleiden. Diese Zustandsänderung aber ist in unsern Formeln *unberücksichtigt* gelassen.

In dieser Weise habe ich bereits in meiner Abhandlung von 1871 (daselbst S. 440) mich ausgedrückt*). Schon damals also war ich zu denjenigen Vorstellungen hingeleitet worden, die ich in den vorhergehenden Paragraphen des gegenwärtigen Aufsatzes von einer etwas *anderen* Seite her zu entwickeln und in (12. $\alpha$, $\beta$) möglichst präcise auszusprechen mich bemüht habe.

In seiner bekannten Schrift über die Erhaltung der Kraft (Berlin 1847) hat Helmholtz die Formeln**) gegeben:

(28) $A J dt = w J^2 dt - J \cdot d\Sigma(j_1 Q)$, $\Vert$ $(AJ + A_1 J_1) dt = (w J^2 + w_1 J_1^2) dt - J J_1 dQ$.

Diese Helmholtz'schen Formeln habe ich in meiner Abhandlung (1871, S. 436, Note und S. 439, Note) für unzulässig erklärt, d. h. für unzulässig erklärt *im Sinne der von mir entwickelten Theorie.* In der That zeigt sich, dass den Helmholtz'schen Formeln (28) *im Sinne meiner Theorie* die Correctionen:

(29. $\alpha$) $dF$, $\Vert$ $dF$,

oder, falls man für $F$ seinen Werth (22) substituirt, die Correctionen:

(29. $\beta$) $d[-\frac{1}{2} q J^2 - \frac{1}{2} C_1 - J \cdot \Sigma(j_1 Q)]$, $\Vert$ $d[-\frac{1}{2} q J^2 - \frac{1}{2} q_1 J_1^2 - Q J J_1]$

zuzuertheilen sind. Mit andern Worten: Es zeigt sich, dass den Helmholtz'schen Formeln (28) die genannten Correctionen (29. $\alpha$, $\beta$) beizufügen sein *würden*, falls meine eigenen Formeln (26) die richtigen wären. Dass letzteres unwahrscheinlich ist, dass nämlich jene von mir selber gegebenen Formeln (26), wenigstens in soweit sie den Fall der *Magneto*induction betreffen, in grellem Widerspruch stehen

---

*) In jener Abhandlung sind übrigens auch die Formeln (26, 26[bis]) in genau derselben Weise angegeben. Man findet die Formeln (26) linker Hand und (26) rechter Hand respective auf S. 439, Nr. (V.) und auf S. 436, Nr. (II.). Ferner findet man die Formel (26[bis]) auf S. 440, Nr. (75).

**) Dass die Formeln der Helmholtz'schen Theorie von 1847 in der That durch (28) dargestellt sind, wird aus meinem unmittelbar folgenden Aufsatz (S. 342) deutlich werden.

mit dem gewöhnlichen Inductionsgesetz, ist vor wenig Augenblicken betont worden.

(30) Demgemäss sind also die in meiner Abhandlung von 1871 für die Helmholtz'schen Formeln von 1847 angemerkten Correctionen (29 $\alpha, \beta$) nur von *relativer* Bedeutung, nämlich von solcher Beschaffenheit, dass sie jene Formeln allerdings in Einklang bringen würden mit der von mir daselbst entwickelten Theorie, andererseits aber dieselben in Widerspruch versetzen würden mit dem gewöhnlichen Inductionsgesetz.

Diesen nur *relativen* Charakter meiner Correctionen glaubte ich in meiner Abhandlung (1871) nicht besonders betonen zu dürfen, da derselbe unmittelbar aus dem Zusammenhange sich ergiebt. Denn der Gang meiner dortigen Erörterungen ist (um die Hauptsache zusammenzufassen) folgender:

*Gestützt auf bestimmte Suppositionen, nämlich auf das Princip der lebendigen Kraft und auf die Annahme constanter Magnete, gelange ich für die Magneto- und Volta-Induction zu den beiden Formeln* (26), *welche verschieden sind von den Helmholtz'schen Formeln* (28), *und notire im Vorübergehen die hieraus für die letztern sich ergebenden Correctionen* (29. $\alpha, \beta$).

*Sodann aber stellt sich heraus, dass meine eignen Formeln* (26) *mit den gewöhnlichen und für richtig geltenden Gesetzen* (16, 16[bis]) *theilweise in Widerspruch stehen; ein solcher Widerspruch zeigt sich bei der Magneto-Induction, während allerdings Einklang vorhanden ist bei der Volta-Induction.*

*Durch diesen Widerspruch sehe ich mich schliesslich in die Nothwendigkeit versetzt, einen gewissen Bestandtheil der zu Grunde gelegten Suppositionen fallen zu lassen, nämlich die Vorstellung constanter Magnete für unzulässig zu erklären; und gelange in solcher Weise zu den in* (27) *und* (12. $\alpha, \beta$) *genannten Sätzen.*

# Ueber gewisse von Helmholtz für die Magnetoinduction und Voltainduction gegebene Formeln*).

Von Carl Neumann in Leipzig.

---

In meinen Untersuchungen von 1871 habe ich diejenige allgemeine Form des Gesetzes der Erhaltung der Energie zu entwickeln versucht, welche demselben für die elektrodynamischen Kräfte unter Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes zuzuertheilen ist. Dass die hiebei resultirenden Formeln (26) gegenüber den betreffenden von Herrn Helmholtz in seiner bekannten Schrift über die Erhaltung der Kraft (1847) aufgestellten Formeln gewisse Differenzen zeigten, glaubte ich nicht verschweigen zu dürfen, vielmehr diese Differenzen mit möglichster Genauigkeit angeben zu müssen.

---

*) Ich werde im vorliegenden Aufsatz die in Betracht kommenden Publicationen von Helmholtz, nämlich:

1847. *Ueber die Erhaltung der Kraft*, Berlin 1847;

1851. *Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten elektrischen Ströme.* Pogg. Ann. 83, S. 505;

1854. *Erwiederung auf die Bemerkungen von Herrn Clausius.* Pogg. Ann. 91, S. 241;

1870. *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper.* Borch. J. 72, S. 57;

1872. *Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Kritisches.* Borch. J. 75, S. 35

kurzweg nach den Jahreszahlen benennen. In gleicher Weise werde ich verfahren bei meinen eigenen Abhandlungen:

1871. *Elektrodynamische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf das Princip der Energie*, und: *Ueber die von Helmholtz in die Theorie der elektrischen Vorgänge eingeführten Prämissen.* Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. Wss., October 1871, S. 386—478;

1872. *Ueber das Elementargesetz derjenigen elektromotorischen Kräfte u. s. w.* Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., August 1872, S. 144—164.

Ferner sei bemerkt, dass ich in diesem Aufsatz die Bezeichnungen des vorhergehenden Aufsatzes beibehalten und auch bei den Formeln die fortlaufenden Nummern anwenden werde.

Mit Bezug hierauf hat Herr Helmholtz in einem seiner letzten Aufsätze (1872, S. 61) folgende Bemerkungen gemacht.

. . . . . „in Betreff der Kritik, in welcher sich Herr C. Neumann dabei gegen meine vor 25 Jahren erschienene Schrift von der „Erhaltung der Kraft ergeht, will ich mir zu bemerken erlauben, dass „ich selbst schon längst in allen wesentlichen Punkten diese Kritik „ausgeübt hatte*). Die Darstellung in der „Erhaltung der Kraft“ „leidet, wie ich ausdrücklich auf S. 69 schon in dem Büchlein selbst „hervorgehoben habe, an dem Mangel, dass man damals den Verlauf „der durch plötzliche Stromesschwankung inducirten Ströme noch nicht „kannte, und also die davon herrührende Wärmeentwicklung nicht be„rechnen konnte. Dann bin ich selbst es zuerst gewesen, welcher im „Jahre 1851 (Pogg. Ann. Bd. 83, S. 505—540) diese Lücke durch „neue Versuchsreihen ausgefüllt hat, indem ich zeigte, dass der Ver„lauf auch dieser Ströme durch F. Neumann's, des Vaters, und „Ohm's Gesetz bestimmt wird. Welche Aenderungen dem entspre„chend in der Anwendung des Gesetzes von der Constanz der Energie „auf die inducirten Ströme zu machen sind, habe ich 1854 in einer „Antwort gegen Herrn Clausius (Pogg. Ann. Bd. 91, S. 258—260) „kurz, aber in den wesentlichen Punkten vollständig angegeben. Dort „wird vorangestellt der Satz, dass ein galvanischer Strom von der In„tensität $J$ durch sein Bestehen ein Arbeitsäquivalent von der Form „$\frac{1}{2} pJ^2$ repräsentire, und habe weiter hinzugefügt:

„„*Für einen einzelnen Stromkreis ist mir noch nicht gelungen* „„*zu beweisen*““ (nämlich vom Gesetze der Energie ausgehend), „„*dass die mit p bezeichnete Constante gleich dem doppelten Poten*„„*tiale*““ (des Stromes auf sich selbst) „„*sein müsse, so wahrschein*„„*lich dies auch nach der Analogie der übrigen Fälle sein mag.*““

„In der That kommt hierbei die Frage nach der Trägheit der Elektri„cität in Betracht, die durch blos theoretische Schlüsse ohne That„sachen nicht zu entscheiden ist.“

„Die Anwendung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie auf „die elektrischen Ströme modificirte sich in der That nur dadurch, „dass zu den übrigen schon sonst bekannt gewesenen Arbeitsäquiva„lenten auch noch jenes $\frac{1}{2} pJ^2$ für die bestehenden elektrischen Ströme „hinzugenommen werden musste.“

*) Im ersten Augenblick brachten mich diese Worte von Helmholtz zu der Vermuthung, dass meine Erörterungen von 1871 vielleicht wirklich überflüssig gewesen wären und auf Irrthum oder vielmehr auf mangelhafter Kenntniss der einschlagenden Literatur beruhten. In der That habe ich in diesem Sinne zu einer Zeit mich ausgesprochen, als jene Helmholtz'sche Abhandlung von 1854 mir *nicht zugänglich* war. (Diese Annalen Bd. 5, S. 622, Note.)

„Wenn aber Herr C. Neumann, der doch die Streitschriften von „Clausius gegen mich citirt, meine Antwort darauf nicht gekannt „haben sollte, so hätte er billiger Weise nicht übersehen sollen, dass „diese selbe Bedeutung des Potentials elektrischer Ströme, deren feh- „lende Kenntniss den wesentlichen Mangel des betreffenden Capitels „meiner Schrift von der Erhaltung der Kraft bildet, von mir in meiner „letzten Arbeit im 72. Bande dieses (des Borchardt'schen) Journals „geradezu zum Fundament der ganzen Betrachtung gemacht ist, aus „welcher die auch von ihm in seiner letzten Arbeit benutzten Hypo- „thesen hergeleitet sind."

Ich könnte zunächst darauf hinweisen, dass von den *beiden* Clausius'schen Abhandlungen, welche Herr Helmholtz als *Streitschriften* bezeichnet*), nur die *erste* auf den hier erörterten Gegenstand Bezug hat, dass ich aber auf diese bei Gelegenheit meiner damaligen Publication (1871) nicht aufmerksam geworden war, und dass in der That die von mir citirte Abhandlung die *zweite* jener Abhandlungen ist, die hier gar nicht in Betracht kommen kann; ich könnte ferner bemerken, dass ich zur Zeit meiner damaligen Publication über die Helmholtz'sche letzte Arbeit (im 72. Bande des Borchardt'schen Journals) immer nur mit der grössten Reserve mich auszudrücken pflegte, indem ich bei gelegentlichen Gesprächen darüber fast regelmässig hinzufügte: *falls ich den Aufsatz wirklich verstanden*, oder: *soweit ich denselben verstanden habe***), und dass ich damals also wirklich nicht in der Lage war, die Helmholtz'sche Schrift über die Erhaltung der Kraft nach Massgabe jenes letzten Aufsatzes mit irgendwelcher Sicherheit interpretiren oder emendiren zu können. —

---

*) Es sind das wohl ohne Zweifel die Abhandlungen:

*Bemerkungen zu einigen Stellen der Schrift von Helmholtz über die Erhaltung der Kraft.* Pogg. Annal. Bd. 89, S. 568, und

*Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die thermo-elektrischen Erscheinungen.* Pogg. Annal. Bd. 90, S. 513.

**) Aehnliche Vorsicht habe ich in meinen betreffenden Publicationen beobachtet. So sage ich z. B. (1871, S. 457), nachdem ich die Helmholtz'sche Theorie zu reproduciren versucht habe, absichtlich:

„Hiemit *dürften*, wie ich *glaube*, die Helmholtz'schen Prämissen und ebenso „auch diejenigen Ueberlegungen, welche zu denselben hingeleitet haben, in cor- „recter Weise dargelegt sein."

Ebenso spreche ich (1872, S. 155) von den *Andeutungen*, welche Helmholtz über seine *neue* Theorie gemacht habe, und füge dann hinzu:

*„So gut als es mit Hülfe dieser Andeutungen möglich war, habe ich in jene „neue Theorie mich hinein zu versetzen gesucht."*

Ausdrücklich wird sodann (l. c., S. 157) noch hinzugesetzt:

*„Immerhin ist es möglich, dass jene Andeutungen von mir in fehlerhafter „Weise aufgefasst worden sind."*

Ohne mich indessen mit derartigen (mehr oder weniger persönlichen) Bemerkungen weiter aufzuhalten, will ich sofort zur Hauptsache gehen.

Helmholtz behauptet — das ist offenbar der eigentliche Kern seiner Worte —, die von mir ausgeübte „Kritik" sei überflüssig, denn dieselbe sei in allen wesentlichen Punkten schon vor langer Zeit von ihm selber ausgeübt.

Ich werde nachweisen, *dass diese Behauptung von Helmholtz auf einem Irrthum beruht*, nämlich nachweisen, *dass die von ihm angedeuteten Correctionen von den von mir proponirten sehr wesentlich verschieden sind.*

## § 1.

## Ueber einige Stellen der Helmholtz'schen Schrift vom Jahre 1847.

Versucht man die Betrachtungen, welche Helmholtz in seiner Schrift über die Erhaltung der Kraft (1847, S. 64—69) angestellt hat, soweit dieselben auf Magnete und elektrische Ströme Bezug haben, ihrem Hauptinhalte nach zu reproduciren, so wird man sich etwa folgendermassen auszudrücken haben.

„*Für einen sich selbst überlassenen Stromring ist nach dem Ohm'schen Gesetz:* $J = \frac{A}{w}$, *oder anders geschrieben:*

(31) $$AJdt = wJ^2dt;$$

*in Worten ausgedrückt: Die während der Zeit $dt$ im Strome verbrauchte Spannkraft*) $AJdt$ ist gleich gross mit der während dieser Zeit in der Strombahn erzeugten Wärmemenge $wJ^2dt$.*

*Dieser Satz bedarf einer Modification, sobald der gegebene Stromring $J$, wie solches z. B. bei den Systemen $(J, M_1)$ und $(J, J_1)$ der Fall ist, in Wechselwirkung tritt mit einem constanten Magnet $M_1$ oder mit einem andern Stromringe $J_1$. Es verhält sich alsdann so:*

| | |
|---|---|
| *Die im Systeme $(J, M_1)$ während der Zeit $dt$ verbrauchte Spannkraft $AJdt$ zerfällt in zwei Theile; der eine verwandelt sich in die elektrodynamisch erzeugte Wärme $wJ^2dt$, der andere in die elektrodynamisch erzeugte* | *Die im Systeme $(J, J_1)$ während der Zeit $dt$ verbrauchte Spannkraft $(AJ + A_1J_1)dt$ zerfällt in zwei Theile; der eine verwandelt sich in die elektrodynamisch erzeugte Wärme $(wJ^2 + w_1J_1^2)dt$, der andere in die elektrodynamisch er-* |

*) Da wir über die Natur der Kräfte $A$ (der sogenannten Contactkräfte) bestimmte Vorstellungen vorläufig noch nicht besitzen, so ist es einerlei, ob das Product $AJdt$ mit diesem oder jenem Namen bezeichnet wird. Der Bequemlichkeit willen habe ich hier festgehalten an der Helmholtz'schen Benennung (von 1847), nämlich das Wort „*Spannkraft*" gebraucht.

*lebendige Kraft**) — $J \cdot d\Sigma(j_1 Q)$. *Demnach ist***):

$$(32)\qquad AJdt = wJ^2dt - J\cdot d\Sigma(j_1Q);$$

*zeugte lebendige Kraft**) — $J J_1\, d\, Q$. *Demnach ist***):

$$(AJ + A_1J_1)dt = (wJ^2 + w_1J_1^2)dt - JJ_1dQ.$$

Hiermit dürfte die ursprüngliche Helmholtz'sche Theorie vom Jahre 1847 in correcter Weise dargelegt sein.

## § 2.

## Ueber die von Helmholtz theils angedeuteten, theils vielleicht beabsichtigten Correctionen.

In seiner Antwort an Clausius (1854, S. 257 ff.), deren Inhalt später (1872, S. 61) von Neuem wiederholt wurde, bemerkt Helmholtz,

dass seine Formeln (32) gewisser Correctionen bedürften. Ein elektrischer Strom von der Stärke $J$ repräsentire nämlich durch sein blosses Bestehen ein *eigenthümliches Arbeitsäquivalent* vom Werthe $[-\frac{1}{2}\, qJ^2]$ ***) und jene Correctionen beständen *lediglich* darin, dass daselbst die diesen Arbeitsäquivalenten entsprechenden Glieder noch hinzuzufügen seien.

Auch geht aus seinen Worten (1854, S. 258) deutlich hervor,

dass eine *Steigerung* des Arbeitsäquivalentes $[-\frac{1}{2}\, qJ^2]$ als eine durch den Strom *geleistete* Arbeit aufzufassen, also in gleiche Linie zu stellen sei z. B. mit der durch den Strom erzeugten Wärme.

Diesen Andeutungen zufolge würde die ursprüngliche Helmholtz'sche Theorie (31), (32) folgendermassen abzuändern sein:

---

*) Unter der *elektrodynamisch* erzeugten lebendigen Kraft ist derjenige *Theil* von lebendiger Kraft zu verstehen, welcher speciell durch die *elektrodynamischen* Kräfte hervorgebracht wird. Dieser Theil aber besitzt in der That [vgl. die Formeln (15, A, B)] den Werth:

$$-J\cdot d\Sigma(j_1Q), \qquad\Big\|\qquad -JJ_1dQ.$$

**) Die betreffenden Formeln in der Helmholtz'schen Schrift (1847, S. 64 und 67) lauten:

$$AJdt = wJ^2dt + \frac{1}{a}JdV, \qquad\Big|\qquad (AJ + A_1J_1)dt = (wJ^2 + w_1J_1^2)dt + \frac{1}{a}JJ_1dV;$$

dass dieselben mit den obigen Formeln (32) identisch sind, ergiebt sich augenblicklich, falls man nur beachtet, *erstens* dass das von Helmholtz mit

$$V \qquad\Big\|\qquad V$$

bezeichnete Potential dasselbe ist, welches von mir mit

$$-\Sigma(j_1Q) \qquad\Big\|\qquad -Q$$

benannt worden ist, und *zweitens*, dass die Helmholtz'sche Constante $a$ bei den von mir zu Grunde gelegten Maasseinheiten den Werth *Eins* besitzt.

***) Helmholtz schreibt $[\frac{1}{2}\, pJ^2]$. Doch geht aus jener Stelle unzweifelhaft hervor, dass das Helmholtz'sche $p$ identisch ist mit meinem $-q$.

*Die in dem Systeme* $(J, M_1)$ *verbrauchte Spannkraft* $AJdt$ *zerfällt nicht in zwei, sondern in drei Theile, von denen die beiden ersten die schon angegebenen Verwandlungen erfahren, während der dritte zur Steigerung des eigenthümlichen Arbeitsäquivalentes* $[-\frac{1}{2}qJ^2]$ *verbraucht wird, so dass man also an Stelle der Formel* (32) *erhält:*

(33) $$AJdt = wJ^2dt - J \cdot d\Sigma(j_1 Q) + d[-\tfrac{1}{2}qJ^2].$$

*Die im Systeme* $(J, J_1)$ *verbrauchte Spannkraft* $(AJ + A_1J_1)dt$ *zerfällt ebenfalls in drei Theile, von denen wiederum die beiden ersten die schon genannten Verwandlungen erfahren, während der dritte zur Steigerung des eigenthümlichen Arbeitsäquivalentes* $[-\frac{1}{2}qJ^2 - \frac{1}{2}q_1J_1^2]$ *verbraucht wird, so dass man also statt der Formel* (32) *folgende erhält:*

$$(AJ+A_1J_1)dt = (wJ^2+w_1J_1^2)dt - JJ_1dQ + d[-\tfrac{1}{2}qJ^2 - \tfrac{1}{2}q_1J_1^2].$$

Die von Helmholtz im Jahre 1854 für seine ursprüngliche Theorie angedeutete Correction besteht also darin, dass den rechten Seiten der Formeln (32) die Glieder zuzufügen sind:

(34) $$d[-\tfrac{1}{2}qJ^2], \qquad \| \qquad d[-\tfrac{1}{2}qJ^2 - \tfrac{1}{2}q_1J_1^2],$$

Correctionen, welche von den von mir (1871) proponirten sehr stark verschieden sind*).

Uebrigens könnte aus dem Inhalt des Helmholtz'schen Aufsatzes von 1870, namentlich aus einer gewissen Stelle desselben (S. 70, 71), wo es heisst

> jedes System elektrischer Ströme repräsentire durch sein blosses Bestehen ein Arbeitsäquivalent, welches identisch sei mit dem negativen Potential des Systemes auf sich selber,

gefolgert werden, dass Helmholtz (wenigstens zu jener späteren Zeit) nicht mehr die Correctionen (34), sondern vielmehr *folgende* für nothwendig erachtet habe:

(35) $$d[-\tfrac{1}{2}qJ^2 - \tfrac{1}{2}C_1 - J\cdot\Sigma(j_1Q)], \qquad \| \qquad d[-\tfrac{1}{2}qJ^2 - \tfrac{1}{2}q_1J_1^2 - QJJ_1].$$

Noch andere Möglichkeiten liegen vor. Denn es wäre denkbar, dass Helmholtz die Ampère'sche Vorstellung, derzufolge der magnetische Zustand eines Körpers auf elektrischen Molecularströmen beruht, *nicht* anerkenne, und

> dass also nach seiner Ansicht jenes soeben erwähnte Arbeitsäquivalent für ein aus elektrischen Strömen $J, J_1, \cdots$ und magnetischen Körpern $M, M_1, \cdots$ bestehendes System nicht mehr durch das negative Potential des *ganzen* Systemes, sondern vielmehr durch das negative Potential des *partiellen* Systemes $(J, J_1, \cdots)$ ausgedrückt sei.

---

*) Die von mir (1871) proponirten Correctionen sind nämlich nach (29. $\alpha, \beta$) folgende:

$$d[-\tfrac{1}{2}qJ^2 - \tfrac{1}{2}C_1 - J\cdot\Sigma(j_1Q)], \qquad \| \qquad d[-\tfrac{1}{2}qJ^2 - \tfrac{1}{2}q_1J_1^2 - QJJ_1],$$

wo übrigens $C_1$ (als Constante) auch fortgelassen werden darf.

Bei solcher Ansicht würden die Correctionen (35) zu ersetzen sein durch folgende:

(36) $d[-\frac{1}{2}qJ^2]$, ‖ $d[-\frac{1}{2}qJ^2-\frac{1}{2}q_1J_1^2-QJJ_1]$,

und beiläufig bemerkt, würden diese letztern Correctionen (36), die allerdings auf einer ziemlich unwahrscheinlichen Conjectur beruhen, *die einzigen**) *sein, durch welche die ursprünglichen Helmholtz'schen Formeln* (32) *mit dem gewöhnlichen Inductionsgesetz* (16, 16[bis]) *in Einklang gesetzt werden könnten.*

Dass die Correctionen (34) diejenigen sind, welche Helmholtz *durch seine Andeutungen von 1854* beabsichtigte, ist wohl kaum zweifelhaft; aber entscheiden zu wollen, welche von den Correctionen (34), (35), (36) *im Sinne seines spätern Aufsatzes von 1870* die richtigen sind, dürfte schwierig sein.

Wie dem auch sei — trotzdem ist die Verschiedenheit der von Helmholtz beabsichtigten Correctionen gegenüber den von *mir* selber (1871) proponirten nachweisbar, wie sogleich gezeigt werden soll.

Die Suppositionen, auf denen die von Helmholtz im Jahre 1847 für die Magneto- und Volta-Induction aufgestellten Formeln, sowie die später von ihm angedeuteten Correctionen dieser Formeln, basirt sind, dürften der Hauptsache nach bestehen in dem *Princip der lebendigen Kraft* und in der *Vorstellung constanter Magnete*; und auf *denselben* Suppositionen beruhen andrerseits auch die von *mir*, im Jahre 1871, angegebenen Correctionen. Die trotzdem zwischen den beiderlei Correctionen stattfindende Differenz dürfte dadurch erklärbar sein, dass die Helmholtz'sche Anschauung vom Princip der lebendigen Kraft wahrscheinlich eine etwas andere ist als die meinige. — Doch es handelt sich hier nicht um die *Erklärung*, sondern um die *Constatirung* jener Differenz. Zu diesem Zweck erlaube ich mir auf folgende Umstände aufmerksam zu machen:

Helmholtz bemerkt in seiner ursprünglichen Schrift (1847, S. 65 sq.), dass die von ihm daselbst für die Magneto- und Volta-Induction aufgestellten Formeln in *Einklang* ständen mit den gewöhnlichen und für richtig geltenden Gesetzen; Analoges bemerkt er später (1854, S. 259) mit noch grösserem Nachdruck hinsichtlich der von ihm inzwischen *corrigirten* Formeln; und dieselbe Bemerkung wiederholt sich auch in seinen Aufsätzen neuester Zeit (1870, S. 69) und (1872, S. 62). Die von Helmholtz theils angedeuteten, theils vielleicht

*) Nur *deswegen* erwähne ich dieser sonderbaren Conjectur. Denn es geht daraus hervor, wie sehr schwierig es ist, irgend ein bestimmtes *Princip* zu finden, vermöge dessen für die ursprünglichen Helmholtz'schen Formeln (32) Correctionen sich ergeben, durch welche die zwischen ihnen und zwischen den Formeln des gewöhnlichen Inductionsgesetzes vorhandene Kluft ausgefüllt wird.

auch nur beabsichtigten Correctionen sind also stets von solcher Art gewesen, dass sie seine ursprünglichen Formeln in *Einklang* liessen, respective in *Einklang* brachten mit den für richtig geltenden Gesetzen.

Von wesentlich *anderem* Charakter sind diejenigen Correctionen, zu denen ich meinerseits, im Jahre 1871, auf Grund der schon genannten Suppositionen mich hingedrängt sah. Denn dass diese von mir gegebenen Correctionen zu Formeln führen, welche mit den für richtig geltenden Gesetzen theilweise in *Widerspruch* stehen, und dass eben in Folge dieses Widerspruchs für mich die Nothwendigkeit erwuchs, einen gewissen Bestandtheil jener Suppositionen, nämlich die Vorstellung constanter Magnete, für unzulässig zu erklären, — ist im vorhergehenden Aufsatz dargelegt worden.

Obwohl also die von Helmholtz theils angedeuteten, theils vielleicht beabsichtigten Correctionen mehr oder weniger unbekannt sind, so geht dennoch aus den darüber von Helmholtz selber gemachten Angaben deutlich hervor, dass dieselben wesentlich verschieden sind von den von *mir* (1871) für nothwendig befundenen Correctionen.

*Das Ergebniss der von Helmholtz selber gegen seine Schrift von 1847 theils geübten, theils vielleicht beabsichtigten Kritik besteht, wie aus seinen eigenen Angaben* (1847, S. 65 sq.), (1854, S. 259), (1870, S. 69), (1872, S. 62) *hervorgeht, in der Behauptung, dass die genannten Suppositionen (das Princip der lebendigen Kraft und die Annahme constanter Magnete) mit den gewöhnlichen und für richtig geltenden Gesetzen in Einklang gebracht werden können. Das Ergebniss der von mir selber* (1871) *geübten „Kritik“ hingegen besteht in der Behauptung, dass die Herstellung eines solchen Einklanges unmöglich und folglich die eine jener beiden Suppositionen unhaltbar sei.*

Hieraus folgt, dass *die von mir gegen die Helmholtz'sche Schrift von* 1847 *geübte „Kritik“ in hohem Grade verschieden ist von der von Helmholtz selber ausgeübten, und dass also die diesen Unterschied in Abrede stellende Bemerkung von Helmholtz auf Irrthum beruht.*

# Notiz zu dem Aufsatz: Ueber die Elementargesetze der Kräfte elektrodynamischen Ursprungs, Bd. 5, Seite 602.

Von Carl Neumann in Leipzig.

---

Der in jenem Aufsatz S. 606 angegebene (mit schrägen Lettern gedruckte) Satz ist *unrichtig.* Bei der erforderlichen Berichtigung erlangt der Text jener Seite eine etwas *andere* und zugleich auch *einfachere* Gestaltung, nämlich folgende:

„In höchstem Grade bedenklich müsste es sein, irgend ein Ele-„mentargesetz zu adoptiren, welches in Widerspruch steht mit dem „allgemeinen Princip der Action und Reaction. Zu untersuchen ist „daher, ob die durch das Elementargesetz (7) zwischen zwei elektri-„schen Stromelementen $Ds_0$, $Ds_1$ indicirten Promoventen und Revol-„venten den Anforderungen dieses Princips Genüge leisten."

„*Dass solches in der That und zwar für jeden beliebigen Werth „der Constanten k der Fall ist, ergiebt sich augenblicklich, falls man „nur beachtet, dass der in* (7) *enthaltene Ausdruck p lediglich abhängt „von der relativen Lage der beiden Elemente.*"

„Von dieser Seite her steht also der Annahme des Gesetzes (7) „kein Bedenken entgegen."

„Da traten plötzlich, vor etwa drei bis vier Monaten, Hindernisse „anderer Art mir in den Weg, welche ich für unübersteigbar halte, „und welche . . . . . . . . ."

(Weiterhin bleibt Alles ungeändert.)

Ich verdanke diese Berichtigung einer gelegentlichen Bemerkung von Helmholtz (Monatsberichte der Berliner Akad. d. Wss., Februar 1873, S. 94).

---

# Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen*).

Von M. Nöther in Heidelberg.

In einer Reihe von geometrischen und functionentheoretischen Arbeiten findet sich eine Lücke, die das Folgende auszufüllen bestimmt ist. Das Theorem:

„dass sich die Gleichung einer algebraischen Curve $f = 0$, die durch den vollständigen Schnitt zweier solcher Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ hindurchgeht, in die Form setzen lässt

$$0 = f \equiv A\varphi + B\psi,$$

wo $A = 0$, $B = 0$ ebenfalls Gleichungen von Curven sind;"

mit andern Worten, der Satz:

„dass eine rationale Function $\frac{f}{\varphi}$ zweier Variabeln $s$, $z$, zwischen denen eine algebraische Gleichung $\psi = 0$ besteht, eine *ganze* Function $A$ von $s$ und $z$ ist, wenn sie nur für $s = \infty$ oder $z = \infty$ unendlich wird,"

ist nur so lange richtig, als kein Theil des gemeinschaftlichen Werthsystems von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ aus vielfachen Punkten von $\varphi = 0$ oder $\psi = 0$ besteht. Aber auch von dem erweiterten Satze für diesen letzten Fall, für welchen die hierbei nothwendigen Bedingungen der Gültigkeit noch nicht aufgestellt worden sind, hat man schon vielfache Anwendung gemacht; wie z. B. beim Beweis der Anzahl $p$ der endlichen Integrale in der Theorie der Abel'schen Functionen**) der Herren Clebsch und Gordan, in meinem analogen Beweis der Erhaltung der Zahl $p$ bei eindeutigen Transformationen algebraischer Gebilde von mehreren Dimensionen***), ebenso von Herrn Fuchs in Borchardt's Journal, Bd. 73†), etc.

---

*) Abgedruckt, mit Ausführungen, aus den Gött. Nachrichten, 1872, pag. 490.

**) §§ 5, 14.

***) Math. Annal. II, p. 293.

†) S. 308, 309, 332.

Die Kenntniss der nähern Bedingungen des Satzes wird in denjenigen Fällen nicht nothwendig, in welchen sich die Anzahl der in $\frac{f}{\varphi}$ noch vorhandenen willkürlichen Constanten im Voraus genau bestimmen und mit der einer ganzen Function $A$ vergleichen lässt, da die Gleichheit dieser Zahlen die Identität $f \equiv A\varphi + B\psi$ nothwendig mit sich führt. Ohne diese Bestimmung dagegen kann man über das vollständige Schnittpunktsystem von $f = 0$ und $\psi = 0$ keine Schlüsse ziehen.

Auch die schon von Roch erwähnte*) Bedingung für die angegebene Darstellung von $f$, dass in einem Doppelpunkt von $\psi = 0$ die rationale Function $\frac{f}{\varphi}$ von $s, z$ nur *einen* Werth besitzen darf, ist im allgemeinen Falle noch nicht hinreichend. Die hier folgende Untersuchung ist eine Erweiterung des in diesen Annalen, Bd. II, p. 314, gegebenen und für den einfachen Fall gültigen Beweises.

## I.

Ich werde zunächst das Verhalten einer Curve $f = 0$ in einem singulären Punkte $P$ von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, in dessen *Nähe* sie die Gleichungsform

$$A'\varphi + B'\psi = 0$$

besitzen soll, feststellen.

Im Punkte $P$ ($z = 0$, $s = 0$) besitze $\varphi$ einen $q$-fachen, $\psi$ einen $r$-fachen Punkt, und es sei $r \geq q$. Man kann zeigen, dass eine Reihe von Relationen für die Coefficienten von $f = 0$, und zwar für die Glieder $0^{\text{ter}}$ Ordnung *bis incl.* $(r + q - 2)^{\text{ter}}$ *Ordnung* in Bezug auf $s$ und $z$, bestehen muss.

Einmal verschwinden die Glieder $0^{\text{ter}}$, $1^{\text{ter}}$, $\cdots$, $(q - 1)^{\text{ter}}$ Dimension in $f$, was $\frac{q(q+1)}{2}$ Bedingungen abgiebt.

Sodann erhält man durch Vergleichung der Glieder $(q + i)^{\text{ter}}$ Dimension $i = 0, 1, \cdots, r - q - 1)$ auf beiden Seiten der identischen Gleichung

$$f \equiv A'\varphi + B'\psi,$$

wo $A'$, $B'$ unbestimmte ganze Functionen von $s, z$ sind, $q + i + 1$ lineare Gleichungen zwischen den

$q + i + 1$ Coefficienten der Glieder $(q + i)^{\text{ter}}$ Ordnung von $f$,
und $i + 1$ „ „ „ $i^{\text{ter}}$ „ „ $A'$.

Eliminirt man aus diesen und den vorhergehenden Gleichungen die Coefficienten von $A'$, so folgen $q$ lineare homogene Relationen für die

*) Borchardt's Journal, Bd. 66, S. 100.

Coefficienten der Glieder $q^{\text{ter}}$ bis $(q+i)^{\text{ter}}$ Ordnung von $f$ (Berührungsrelationen für $f=0$, $\varphi=0$).

Endlich erhält man durch Vergleichung der Glieder $(r+i)^{\text{ter}}$ Dimension $(i=0, 1, \cdots, q-2)$ $r+i+1$ lineare Gleichungen zwischen den

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r+i+1$ | Coefficienten der Glieder | $(r+i)^{\text{ter}}$ | Ordnung von $f$, |
| $r-q+i+1$ | " " " | $(r-q+i)^{\text{ter}}$ | " " $A'$, |
| und $i+1$ | " " " | $i^{\text{ter}}$ | " " $B'$. |

Und eliminirt man aus diesen und den vorhergehenden Gleichungen die Coefficienten von $A'$ und $B'$, so folgen $q-i-1$ lineare homogene Relationen für die Coefficienten der Glieder $q^{\text{ter}}$ bis $(r+i)^{\text{ter}}$ Ordnung von $f$ (von denen die für $i=0$ als Bedingungen einer höhern Involution zwischen den Tangentensystemen von $f$, $\varphi$, $\psi$ im Punkte $P$ aufgefasst werden können).

Im Ganzen ergeben sich so

$$\frac{q(q+1)}{2}+(r-q)\,q+\frac{q(q-1)}{2}=r\cdot q$$

Bedingungen für die Coefficienten von $f$, in den Gliedern $0^{\text{ter}}$ bis $(r+q-2)^{\text{ter}}$ Dimension in Bezug auf $s$ und $z$. Die Glieder $(r+q-1)^{\text{ter}}$ und höherer Ordnung sind dagegen ganz willkürlich. Nur in den speciellen Fällen, in welchen im Punkte $P$ mehr als $r\cdot q$ Schnittpunkte der beiden Curven $\varphi, \psi$ zusammenfallen, wird sich die Zahl dieser Relationen erhöhen und auch auf Glieder von höherer, als $(r+q-2)^{\text{ter}}$ Ordnung erstrecken.

Dabei ist noch zu bemerken, dass, wenn $f$ in $P$ einen $m$-fachen Punkt $(m>q)$ besitzt, einem Theil dieser Relationen dadurch identisch genügt wird, dass man auch $A'$ einen $(m-q)$-fachen Punkt, und (für $m>r$) auch $B'$ einen $(m-r)$-fachen Punkt in $P$ giebt. Für die Glieder $m^{\text{ter}}$ Ordnung etc. bleiben dann noch immer die oben angegebenen Relationen bestehen. Für $m=r+q-1$ wird der $m$-fache Punkt von $f$ willkürlich.

Nach Erfüllung dieser Bedingungen in jedem singulären Punkte von $\psi=0$ kann man sagen, dass in allen Punkten der Fläche, welche die Verzweigung der durch die Gleichung $\psi=0$ definirten algebraischen Function $s$ von $z$ darstellt, die wie $s$ verzweigte Function $\frac{f}{\varphi}$ den *Charakter einer ganzen Function von s und z* besitzt.

Ich definire dieses Verhalten noch näher.

Eine ganze Function $A$ unterscheidet sich in ihrem Verhalten von einer rationalen Function $\frac{f}{\varphi}$ von $s, z$, die nur für $s=\infty$ oder $z=\infty$ unendlich wird, nur in den zusammenfallenden und sich, ganz oder theilweise, aufhebenden Verzweigungspunkten. Während man in einem solchen Punkte $P$ ($z = a$, $s = b$) die verschiedenen Entwicklungen einer rationalen Function von $s$, $z$ nach aufsteigenden Potenzen von $(z - a)$ als von einander unabhängig annehmen und nicht nur den späteren, sondern auch den ersteren Gliedern dieser Entwicklungen beliebige Werthe geben kann*), besteht zwischen solchen Entwicklungen einer ganzen Function $A$ in $P$:

$$a_0 + [a_1(s-b) + b_1(z-a)] + [a_2(s-b)^2 + b_2(s-b)(z-a) + c_2(z-a)^2] + \cdots,$$

wo für s die verschiedenen Entwicklungen nach Potenzen von $(z - a)$ aus der Gleichung $\psi = 0$ einzusetzen sind, eine Reihe von Beziehungen für die Coefficienten der ersteren Potenzen von $(z - a)$, da die Grössen $a_0$, $a_1$, $b_1$, $a_2$ etc. dieselben sind für die verschiedenen Entwicklungen. Wenn z. B. in $P$ $r$ Werthe von $s$ in $s = b$ zusammenfallen, ohne dass hierbei Verzweigung eintritt, so findet man zwischen den Coefficienten von $(z - a)^0$ in den $r$ Entwicklungen $r - 1$, zwischen den von $(z - a)$ $r - 2$, zwischen den von $(z - a)$ und $(z - a)^2$ $r - 3$ Bedingungen etc.

Wenn die Entwicklungen einer Function $\frac{f}{\varphi}$ diesen Bedingungen genügen, so hat sie in $P$ den angegebenen Charakter, und die hier gefundenen Gleichungen sind identisch mit denjenigen, welche durch Elimination der Coefficienten von $B'$ aus den auf dem ersten Wege gegebenen Gleichungen folgen. Die Bedingungen können dadurch identisch erfüllt werden, dass $\frac{f}{\varphi}$ in $P$, wenn dort $r$ Werthe von $s$ zusammenfallen, $(r - 1)$-fach verschwindet.

## II.

Es soll nun nachgewiesen werden, dass eine rationale Function $\frac{f}{\varphi}$ von $s$, $z$, welche für alle Werthsysteme von $s$, $z$, für welche $\psi = 0$ ist, den Charakter einer ganzen Function von $s$, $z$ hat, eine *ganze* Function $A$ von $s$, $z$ ist; d. h. dass $f$ dann von der Form ist:

$$f = A\varphi + B\psi.$$

Zunächst mögen durch eine lineare Transformation, indem man $z + \alpha s$ für $z$ setzt, $f$, $\varphi$ und $\psi$ so umgeformt werden, dass das Glied höchster Dimension in $s$ von $\psi$ eine Constante als Coefficienten habe; und sei alsdann $n$ diese Dimension. Wenn $\Phi$ die durch Elimination von $s$ gebildete Resultante von $\varphi$ und $\psi$ bezeichnet, so hat man:

(1) $$\Phi = \lambda\varphi + \mu\psi,$$

wo $\lambda$ und $\mu$ ganze Functionen von $s$, $z$ sind. Ferner erhalte man, indem

*) Vgl. Riemann, Abel'sche Functionen, § 8 Anmerkung.

man $\lambda f$ durch $\psi$ dividirt und den Rest auf die $(n-1)^{te}$ Dimension in Bezug auf $s$ erniedrigt:

(2) $$\lambda f = \nu\psi + X,$$

wo $$X = \Phi_1 s^{n-1} + \Phi_2 s^{n-2} + \cdots + \Phi_n,$$

und wo $\nu$ eine ganze Function von $s, z$, die $\Phi_i$, wie $\Phi$, ganze Functionen von $z$ allein werden.

$\Phi$ besitze nun den Factor $(z-a)^k$; man kann zeigen, dass alsdann dieser Factor auch in allen $\Phi_i$ enthalten ist.

Für $z = a$ mögen von den $n$ Werthen von $s$, für welche auch $\psi = 0$ wird, $r$ $(r < k)$ zusammenfallen in $s = b$; die übrigen $n-r$ Werthe seien $c_1, c_2, \cdot\cdot, c_{n-r}$. In einem solchen Punkte $c_i$ $(s = c_i$, $z = a)$ berührt, wie aus den Gleichungen (1) und (2) folgt, die Curve $\lambda = 0$, folglich auch die Curve $X = 0$ die gegebene Curve $\psi = 0$ in der $(k-1)^{ten}$ Ordnung. Für diesen Punkt hat man also $k$ Bedingungen, welche aus den Gleichungen

$$X = 0,\ \frac{dX}{dz} = 0,\ \ldots,\ \frac{d^{k-1}X}{dz^{k-1}} = 0$$

hervorgehen, indem man die Grössen $\frac{d^i s}{dz^i}$ aus den Gleichungen

$$\frac{d\psi}{dz} = 0,\ \ldots,\ \frac{d^{k-1}\psi}{dz^{k-1}} = 0$$

bestimmt und sodann für $s, z$ das Werthsystem $c_i, a$ einsetzt. Seien mit

$$\Phi_i^0,\ \frac{d\Phi_i^0}{dz},\ \ldots,\ \frac{d^{k-1}\Phi_i^0}{dz^{k-1}}$$

die Werthe der $\Phi_i$ und deren Differentialquotienten nach $z$ für $z = a$ bezeichnet.

Für die $n-r$ Punkte $c_\ell$ erhält man auf diese Weise $k$ Systeme von je $n-r$ Gleichungen, von welchen das $h^{te}$ System aus $n-r$ Gleichungen besteht, die linear und homogen sind in Bezug auf die Grössen

$$\Phi_i^0,\ \frac{d\Phi_i^0}{dz},\ \ldots,\ \frac{d^{h-1}\Phi_i^0}{dz^{h-1}}\quad (i = 1, 2, \cdots n).$$

Ich werde nun zeigen, dass man nach der in I. geführten Untersuchung durch die Betrachtung des Verhaltens der Curve $X = 0$ im Punkte $P$ $(s = b,\ z = a)$ noch weitere $k$ Systeme erhält, deren $h^{tes}$ aus $r$ Gleichungen besteht, die ebenfalls in Bezug auf die eben genannten Grössen linear und homogen sind.

Nach der Annahme ist *in der Nähe* des Punktes $P$, wenn man nach aufsteigenden Potenzen von $(z-a)$ und $(s-b)$ ordnet, die Function $f$ identisch mit einer Entwicklung von $A'\varphi + B'\psi$; also

$$X = \lambda f - \nu\psi = \lambda A'\varphi + (\lambda B' - \nu)\psi = A'\Phi + (\lambda B' - \mu A' - \nu)\psi,$$

d. h. $X$ ist von der Form:

$$(3) \qquad X = [(z - a)^k + a_1 (z - a)^{k+1} + \cdots] A' + C\psi,$$

wo $A'$ und $C$ ganze Functionen von $z - a$, $s - b$ sind.

Wegen des $r$-fachen Punktes $P$ von $X$ verschwinden nun zunächst $X$ und die sämmtlichen partiellen Differentialquotienten dieser Grösse, nach $z$ und $s$ genommen, bis zu den $(r-1)^{\text{ten}}$ incl., für $z = a$, $s = b$.

Die darunter enthaltenen $r$ Gleichungen

$$\frac{\partial^i X}{\partial s^i} = 0, \text{ für } z = a, s = b, (i = 0, 1, \cdots, r-1),$$

bilden $r$ homogene lineare Relationen für die $\Phi_i^0$, welche in Verbindung mit dem ersten der für die Punkte $c$ aufgestellten Systeme, bewirken, dass sämmtliche $\Phi_i^0$ verschwinden; denn die Determinante der $n$ Gleichungen, von der Form $\Sigma \pm c_1^{n-1} c_2^{n-2} \cdots$, verschwindet nicht, wenn nicht von den $n - r + 1$ Punkten $c$ und $P$ zwei zusammenfallen, was bei einer allgemeinen Lage des Coordinatensystems nicht geschieht.

Ich nehme nun an, dass die Curve $o = C$ in $P$ einen $\varrho$-fachen Punkt besitzt; man kann dann, für $\varrho < k - 1$, zeigen, dass $C$ in $P$ einen $(\varrho + 1)$-fachen Punkt haben muss.

Sei zuerst $\varrho < k - r$. Wegen des $\varrho$-fachen Punktes von $C$ hat dann nach (3) die Curve $X = 0$ einen $(\varrho + r)$-fachen Punkt in $P$. Man hat daher die $\varrho$ Systeme von je $r$ Gleichungen, gültig für $s = b$, $z = a$:

$$\frac{\partial^i X}{\partial z\, \partial s^{i-1}} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

$$\frac{\partial^{i+1} X}{\partial z^2\, \partial s^{i-1}} = 0, \qquad \text{"} \qquad ,$$

$$\frac{\partial^{i+\varrho-1} X}{\partial z^\varrho\, \partial s^{i-1}} = 0, \qquad \text{"} \qquad .$$

Verbindet man diese Systeme je mit den entsprechenden der für die Punkte $c$ gegebenen, so folgt successive, da das Verschwinden der Determinante eines Systems immer die oben angegebene Bedeutung hätte, dass nicht nur sämmtliche

$$\Phi_i^0 = 0,$$

sondern dass auch sämmtliche

$$\frac{d\Phi_i^0}{dz} = 0, \quad \frac{d^2\Phi_i^0}{dz^2} = 0, \quad \cdots \quad \frac{d^\varrho \Phi_i^0}{dz^\varrho} = 0.$$

Vergleicht man nun weiter die Glieder $(r+\varrho)^{\text{tes}}$ Ordnung in $(s-b)$ und $(z-a)$, auf beiden Seiten der Gleichung (3), so verschwinden auf der linken Seite die Coefficienten von $(s-b)^{r+\varrho}$, von $(s-b)^{r+\varrho-1}(z-a)$, $\cdots\cdots$, und von $(s-b)^r(z-a)^\varrho$, da diese Coefficienten lineare homogene Functionen der Grössen $\Phi_i^0$, $\cdots\cdot$, $\frac{d^\varrho\Phi_i^0}{dz^\varrho}$ sind; daher verschwinden auch die Coefficienten dieser Producte auf der rechten Seite, das sind die Coefficienten der Glieder $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung von $C$; und man hat auch

$$\frac{d^{\varrho+1}\Phi_i^0}{dz^{\varrho+1}}=0.$$

Genau dieselbe Schlussweise wendet man auch für $\varrho \gtreqless k-r$ an, indem man nur durch Vergleichung derjenigen Glieder $(r+\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $(z-a)$ zu einer niedrigeren als der $k^{\text{ten}}$ Potenz enthalten, welche also auf der rechten Seite von (3) nur in $C\psi$ vorkommen, die Relationen aufstellt:

$$\frac{\partial^{j+h-1}X}{\partial z^h\partial s^{j-1}}=0,\quad (j=1,2,\cdots r;\ h=k-r,\ k-r+1,\cdots\varrho),$$

woraus

$$\frac{\partial^h\Phi_i^0}{\partial z^h}=0$$

folgt, sodann aber, wie vorher, durch Vergleichung der Glieder $(r+\varrho)^{\text{ter}}$ Ordnung von (3) das Verschwinden der Glieder $\varrho^{\text{ter}}$ Ordnung von $C$ nachweist.

Das hier nachgewiesene Gleichungssystem für $s=b$, $z=a$:

$$\frac{\partial^{h+j-1}X}{\partial z^h\partial s^{j-1}}=0\quad (h=0,1,\cdots k-1;\ j=1,2,\cdots r),$$

stellt die $r\cdot k$ nach der allgemeinen Theorie für $P$ existirenden Bedingungen dar. Aus ihnen, in Verbindung mit den $(n-r)k$ für die Punkte $c$ gefundenen Gleichungen, folgt, dass die $\Phi_i$ und deren $1^{\text{te}}$, $2^{\text{te}}$, $\cdots(k-1)^{\text{te}}$ Differentialquotienten nach $z$ für $z=a$ sämmtlich verschwinden.

Daher haben alle $\Phi_i$ die Grösse $(z-a)^k$ zum Factor; und da nach unserer Annahme dasselbe auch für die übrigen Factoren von $\Phi$ eintreten muss, so ist $\Phi$ selbst ein Factor aller $\Phi_i$. Und man hat die Darstellung:

$$\lambda f=\nu\psi+A\Phi=\lambda A\varphi+(A\mu+\nu)\psi.$$

Da nun $f$ und $A\varphi$ ganze Functionen von $s, z$ sind und $\lambda$ und $\psi$ keinen Factor gemein haben, muss $\lambda$ in $A\mu+\nu$ theilbar sein und $f$ ist folglich von der Form

$$f\equiv A\varphi+B\psi.$$

Für die Punkte, in welchen $s = \infty$ oder $z = \infty$ wird, haben sich bei dieser Darstellung keine weitern Bedingungen für die Function $\frac{f}{\varphi}$ ergeben. Geometrisch aufgefasst, existiren aber bei der hier angenommenen Gleichungsform im Allgemeinen vielfache Punkte von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ in dem Schnitt der unendlich fernen Geraden $t = 0$ mit zwei Geraden $z + \alpha s = 0$, $z + \beta s = 0$; und somit lässt sich alsdann nur $f$, mit einer gewissen Potenz von $t$ multiplicirt, auf die Form $A\varphi + B\psi$ bringen.

## III.

Auch zur Erweiterung des in II. für algebraische Curven gegebenen Satzes auf *Flächen* und *höhere algebraische Gebilde* reichen die in I. und II. angestellten Betrachtungen vollständig aus.

Seien nämlich $f$, $\varphi$, $\psi$ ganze Functionen von $s$ und $z_1, z_2, \cdots z_m$. Man kann dann wieder, indem man wie in II. verfährt, die Gleichungen (1) und (2) aufstellen und hat nur wieder nachzuweisen, dass, wenn $\Phi$ die $k^{\text{te}}$ Potenz einer irreductibeln ganzen Function $R$ von $z_1, \cdots z_m$ als Factor enthält, diese Grösse $R^k$ auch Factor sämmtlicher $\Phi_i$ in $X$ wird.

Ich behandle zunächst den Fall der *Flächen*, für $m = 2$. Sei $X = 0$ eine Fläche $\sigma^{\text{ter}}$, $R = 0$ ein Kegel $\tau^{\text{ter}}$ Ordnung. Damit $X = 0$ theilweise zerfalle in $R^k = 0$, genügt es offenbar, dass $X = 0$ eine *endliche* Zahl (höchstens $\sigma\tau + 1$) von Kanten des Kegels zu $k$-fachen Geraden habe. Die Bedingungen aber, unter welchen eine solche Kante $k$-fache Gerade von $X = 0$ wird, sind in II. gegeben worden. Danach muss sich nur in dem Punkte der vielfachen Schnittcurve von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, nach welchem diese Gerade geht, und zwar in *einer* beliebigen von ihm ausgehenden Richtung auf der Fläche $\psi = 0$, welche durch den Parameter $z$ bezeichnet sei, $\frac{f}{\varphi}$ verhalten wie eine ganze Function $A'$ von $s$, $z$.

Damit also die Darstellung

$$f \equiv A\varphi + B\psi$$

möglich sei, ist nothwendig und hinreichend, dass sich in einer *endlichen* (aber genügend grossen) Anzahl von Punkten der Schnittcurven von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, und zwar je in *einer* durch einen solchen Punkt hindurchgelegten Ebene, $f$ verhalte wie $A'\varphi + B'\psi$, wo $A'$, $B'$ ganze Functionen von $s$, $z_1$, $z_2$ sind, die für die verschiedenen Punkte willkürlich angenommen werden können.

Auf das Verhalten von $f$ in einzelnen singulären Punkten der Schnittcurven von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ hat man folglich beim Beweise dieser Darstellung nicht einzugehen.

Auch für höhere, $m$-fach unendliche Gebilde gilt dieser Satz in analoger Weise; denn, obwohl hier $X = 0$ und $R = 0$ eine unendliche Menge von Kanten gemein haben können, ohne dass $R$ in $X$ enthalten ist, so ist doch klar, dass bei einer genügend grossen *endlichen* Menge derselben, die eine *allgemeine* Lage auf $R = 0$ haben und zugleich auf $X = 0$ liegen sollen, $R$ nothwendig Factor von $X$ wird. Auch hier genügt die in I. festgestellte Angabe des Verhaltens von $f$ in einer endlichen Menge von Punkten des $(m - 1)$-fach unendlichen Schnittsystems von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, und in einem jeden dieser Punkte nur innerhalb *eines* durch ihn gelegten 2-fach unendlichen ebenen Gebildes.

Wenn $\varphi$ $q$-fach, $\psi$ *r-fach* längs eines $(m - 1)$-fach unendlichen Schnittsystems verschwindet, so sind die hierbei für $f$ auftretenden Bedingungen auch hier dadurch identisch zu erfüllen, dass $f$ noch $(q + r - 1)$-fach längs desselben verschwindet. Dieser Fall tritt z. B. bei den in der Einleitung erwähnten Beweisen für die Erhaltung der Zahl $p$ auf.

Heidelberg, den 17. October 1872.

---

# Ueber ein bestimmtes Integral.

Von A. Enneper in Göttingen.

Nach dem Vorgang von Gauss sei $i = \sqrt{-1}$, ferner werde zur Vereinfachung gesetzt $z = x + yi$, wo $y$ eine wesentlich positive, reelle Quantität ist, welche nicht verschwindet. Ist $n$ reell und von Null verschieden, so dass $n > 0$, so ist das zu betrachtende Integral:

$$(1) \quad . \qquad r = \int_0^\infty \frac{e^{-tzu}}{(1+u^2)^{n+1}} \partial u,$$

wo nach der Transformation $t = 1$ zu nehmen ist. Die Gleichung (1) nach $t$ differentiirt und mit $2n$ multiplicirt giebt:

$$2n \frac{\partial r}{\partial t} = -2nz \int_0^\infty \frac{e^{-tzu} u}{(1+u^2)^{n+1}} \partial u,$$

oder auch:

$$2n \frac{\partial r}{\partial t} = z \int_0^\infty e^{-tzu} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{(1+u^2)^n} \partial u.$$

Durch partielle Integration lässt sich die rechte Seite dieser Gleichung auf die Form bringen:

$$-z + tz^2 \int_0^\infty \frac{e^{-tzu}}{(1+u^2)^n} \partial u,$$

d. i. nach (1):

$$-z + t\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + rz^2\right).$$

Es genügt also $r$ der folgenden Differentialgleichung:

$$(2) \qquad t\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - 2n\frac{\partial r}{\partial t} + trz^2 = z.$$

Diese Gleichung geht mittelst der Substitution:

$$(3) \qquad r = st^{2n+1} z^{2n+1}$$

über in:

$$(4) \qquad t\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + 2(n+1)\frac{\partial s}{\partial t} + tsz^2 = \frac{1}{z^{2n}t^{2n+1}}.$$

Zur Integration dieser Gleichung betrachte man die beiden folgenden Integrale:

$$(5) \qquad \begin{cases} p = \int_1^\infty e^{-t(y-xi)u}(u^2-1)^n \partial u = \int_1^\infty e^{tzui}(u^2-1)^n \partial u, \\ q = \int_{-1}^1 e^{t(y-xi)u}(1-u^2)^n \partial u = \int_{-1}^1 e^{-tzui}(1-u^2)^n \partial u. \end{cases}$$

In den Ausdrücken für $p$ und $\frac{\partial p}{\partial t}$ setze man $tu = v$, dann folgt:

$$pt^{2n+1} = \int_t^\infty e^{-(y-xi)v}(v^2-t^2)^n \partial v,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}t^{2n+2} = -(y-xi)\int_t^\infty e^{-(y-xi)v}v(v^2-t^2)^n \partial v.$$

Für $t=0$ geben diese Gleichungen:

$$(6) \qquad \begin{cases} (pt^{2n+1})_0 = \frac{\Pi(2n)}{(y-xi)^{2n+1}}, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial t}t^{2n+2}\right)_0 = -\frac{\Pi(2n+1)}{(y-xi)^{2n+1}}, \end{cases}$$

wo allgemein:

$$\Pi(m) = \int_0^\infty e^{-u}u^m \partial u.$$

Die Gleichungen (5) sind nur zulässig, wenn $y > 0$. Aus der zweiten Gleichung (5) findet man leicht für $t=0$:

$$(7) \qquad q_0 = \int_{-1}^1 (1-u^2)^n \partial u = 2^{2n+1}\frac{\Pi(n)^2}{\Pi(2n+1)}.$$

Setzt man wieder $x + yi = z$, so leitet man aus den Gleichungen (5) durch Differentiation und nachherige partielle Integration die folgenden Gleichungen ab:

$$-2(n+1)\frac{\partial p}{\partial t} = (y-xi)\int_1^\infty e^{-t(y-xi)u}\frac{\partial (u^2-1)^{n+1}}{\partial u}\partial u$$

$$= (y-xi)^2 t\int_1^\infty e^{-t(y-xi)u}(u^2-1)^{n+1}\partial u,$$

$$2(n+1)\frac{\partial q}{\partial t} = -(y-xi)\int_{-1}^1 e^{t(y-xi)u}\frac{\partial (1-u^2)^{n+1}}{\partial u}\partial u$$

$$= (y-xi)^2 t\int_{-1}^1 e^{t(y-xi)u}(1-u^2)^{n+1}\partial u\,.$$

In Folge der Bedeutungen von $p$, $q$ und $z$ geben diese Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} t\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2(n+1)\dfrac{\partial p}{\partial t} + tpz^2 = 0\,, \\ t\dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2} + 2(n+1)\dfrac{\partial q}{\partial t} + tqz^2 = 0\,. \end{cases}$$

Durch Elimination von $z^2$ folgt:

$$t\left(p\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - q\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right) + 2(n+1)\left(p\frac{\partial q}{\partial t} - q\frac{\partial p}{\partial t}\right) = 0\,,$$

Durch Integration nach $t$ erhält man hieraus:

$$(9)\qquad \left(p\frac{\partial q}{\partial t} - q\frac{\partial p}{\partial t}\right)t^{2n+2} = a\,,$$

wo $a$ eine Constante bedeutet. Nimmt man zu deren Bestimmung $t=0$, so erhält man mittelst der Gleichungen (6) und (7):

$$(10)\qquad a = \frac{\Pi(n)^2\, 2^{2n+1}}{(y-xi)^{2n+1}}\,.$$

Wegen der Gleichungen (8) ist das allgemeine Integral der Gleichung (4):

$$(11)\qquad s = pP + qQ\,,$$

wo $P$ und $Q$ durch die Gleichungen:

$$p\frac{\partial P}{\partial t} + q\frac{\partial Q}{\partial t} = 0\,,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{z^{2n}t^{2n+2}}\,,$$

bestimmt sind. Mit Rücksicht auf die Gleichung (9) folgt:

$$(12)\qquad a z^{2n} \frac{\partial P}{\partial t} = -q = -\int_{-1}^{1} e^{t(y-xi)u}(1-u^2)^n\, du,$$

$$(13)\qquad a z^{2n} \frac{\partial Q}{\partial t} = p = \int_{1}^{\infty} e^{-t(y-xi)u}(u^2-1)^n\, \partial u.$$

Setzt man in der Gleichung (11) und in der Gleichung:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = P\frac{\partial p}{\partial t} + Q\frac{\partial q}{\partial t}$$

für $s$ seinen Werth aus (3), so erhält man die Gleichungen:

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{r}{z^{2n+1}t^{2n+1}} &= pP + qQ, \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{r}{z^{2n+1}t^{2n+1}} &= \frac{\partial p}{\partial t}P + \frac{\partial q}{\partial t}Q. \end{aligned}\right.$$

Mit Rücksicht auf (9) geben diese Gleichungen:

$$(15)\qquad a z^{2n+1} P = \left(r\frac{\partial q}{\partial t} - q\frac{\partial r}{\partial t}\right)t + (2n+1)\,qr.$$

$$(16)\qquad a z^{2n+1} Q = \left(p\frac{\partial r}{\partial t} - r\frac{\partial p}{\partial t}\right)t - (2n+1)\,pr.$$

Für $t = 0$ giebt die Gleichung (1):

$$r_0 = \frac{\Pi(-\frac{1}{2})\,\Pi(n-\frac{1}{2})}{\Pi(n)} = \frac{\pi\,\Pi(2n)}{2^{2n+1}\,\Pi(n)^2}.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung (7) folgt:

$$q_0 r_0 = \frac{\pi}{2n+1}.$$

Nimmt man also in der Gleichung (15) $t = 0$, so ist:

$$a z^{2n+1} P_0 = \pi.$$

Integrirt man in der Gleichung (12) nach $t$ zwischen den Grenzen 0 und $t$, so folgt, wegen $z = x + yi$,:

$$(17)\qquad a z^{2n+1} P = \pi - i\int_{-1}^{1} \frac{e^{t(y-xi)u}-1}{u}(1-u^2)^n\,\partial u.$$

Für einen unbegrenzt zunehmenden Werth von $t$ verschwinden $p$ und $\frac{\partial p}{\partial t}$, die Gleichung (16) zeigt dann, dass $Q$ für $t = \infty$ verschwindet. Es ist nämlich:

$$t\frac{\partial p}{\partial t}=\int_1^\infty u(u^2-1)^n\frac{\partial e^{-t(y-xi)u}}{\partial u}\partial u=$$

$$=-(2n+1)p-2n\int_1^\infty e^{-t(y-xi)u}(u^2-1)^{n-1}\partial u,$$

$$t\frac{\partial r}{\partial t}=\int_0^\infty\frac{u}{(1+u^2)^{n+1}}\frac{\partial e^{-t(x+yi)u}}{\partial u}\partial u=$$

$$=(2n+1)r-2(n+1)\int_0^\infty\frac{e^{-t(x+yi)u}}{(1+u^2)^{n+2}}\partial u.$$

Integrirt man in der Gleichung (13) nach $t$ zwischen den Grenzen $t$ und $\infty$, so folgt:

$$(18)\qquad az^{2n+1}Q=-i\int_1^\infty\frac{e^{-t(y-xi)u}}{u}(u^2-1)^n\partial u.$$

In die erste Gleichung (14) setze man für $r$, $p$, $q$, $P$ und $Q$ ihre Werthe aus (1), (5), (17) und (18) ein und nehme darauf $t=1$. Ferner führe man für $a$ seinen Werth aus (10) ein und setze $z=x+yi$. Es ist dann:

$$(19)\qquad \frac{\Pi(n)^2 2^{2n+1}}{(y-xi)^{2n+1}}\int_0^\infty\frac{e^{-(x+yi)u}}{(1+u^2)^{n+1}}\partial u=$$

$$=\pi\int_1^\infty e^{-(y-xi)u}(u^2-1)^n\partial u$$

$$-i\int_1^\infty e^{-(y-xi)u}(u^2-1)^n\partial u\int_{-1}^1\frac{e^{(y-xi)u}-1}{u}(1-u^2)^n\partial u$$

$$-i\int_1^\infty\frac{e^{-(y-xi)u}}{u}(u^2-1)^n\partial u\int_{-1}^1 e^{(y-xi)u}(1-u^2)^n\partial u.$$

In Folge der obigen Entwicklungen kann $x$ verschwinden, aber nicht $y$. Nimmt man in der Gleichung (19) $x=0$, trennt die reellen und imaginären Theile der resultirenden Gleichung, so erhält man die folgenden Relationen, in denen $n$ eine beliebige, positive Quantität ist:

$$\frac{\Pi(n)^2 2^{2n+1}}{y^{2n+1}}\int_0^\infty\frac{\cos yu}{(1+u^2)^{n+1}}\partial u=\pi\int_1^\infty e^{-yu}(u^2-1)^n\partial u.$$

$$\frac{\Pi(n)^2\, 2^{2n+1}}{y^{2n+1}} \int_0^\infty \frac{\sin yu}{(1+u^2)^{n+1}} \partial u$$

$$= \int_1^\infty e^{-yu} (u^2 - 1)^n \partial u \int_{-1}^1 \frac{e^{yu} - 1}{u} (1 - u^2)^n \partial u$$

$$+ \int_1^\infty \frac{e^{-yu}}{u} (u^2 - 1)^n \partial u \int_{-1}^1 e^{yu} (1 - u^2)^n \partial u.$$

Es lässt sich direct nachweisen, dass die beiden vorstehenden Gleichungen auch für $n = 0$ gelten, da diese Nachweisung auf bekannte Resultate basirt ist, so möge dieselbe hier der Kürze halber übergangen werden.

# Sur les formes quadratiques.

Par A. Korkine et G. Zolotareff à St. Petersbourg.

Dans la théorie arithmétique des formes on attribue aux variables des valeurs entières arbitraires. Quant à leurs coëfficients on les suppose ordinairement aussi entiers, mais quelques recherches arithmétiques et en particulier celles dont nous nous occupons dans ce Mémoire demandent la considération des formes à coëfficients réels quelconques. Ne considérant d'abord que les formes quadratiques positives et faisant abstraction de la valeur zéro qu'elles obtiennent quand toutes les variables s'annulent, on voit facilement que de toutes les autres valeurs d'une telle forme il existe la plus petite.

Ce minimum est complêtement déterminé lorsque les coëfficients de la forme sont donnés; par conséquent il en est une fonction.

Considérons l'ensemble de toutes les formes positives à $n$ variables de déterminant $-D$. On les obtient toutes en faisant varier d'une manière continue les coëfficients de l'une d'elles. Le minimum de cette forme, comme fonctions des coëfficients variera aussi d'une manière continue, et reviendra aux mêmes valeurs pour toutes les formes équivalents. Il est évident, qu'il peut avoir des valeurs aussi petites qu'on voudra.

Il atteindra en variant un ou plusieurs maxima, qui correspondent aux formes non équivalents et dont le nombre dépend essentiellement de $n$. Pour démontrer leur existence nous en donnons ici quelques-uns. Les quantités

$$\text{(a)} \qquad 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}, \quad \sqrt[n]{2^{n-2}D}, \quad 2\sqrt[n]{D}, \quad 2\sqrt[6]{\frac{D}{3}}, \quad \sqrt[7]{64\,D},$$

sont en effet des maxima du minimum de la forme consideré comme fonction des coëfficients, si dans la première on suppose $n \geqq 2$, dans la deuxième $n \geqq 3$, dans la troisième $n > 8$; la quatrième n'est le maximum que pour $n = 6$, et le cinquième que pour $n = 7$.

On peut se rendre compte de l'existence de ces maxima en considérant les formes suivantes de déterminant $-D$.

$$U_n = 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}\left[\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 + \sum_{j,k} x_j x_k\right]^{*)},$$

$$V_n = \sqrt[n]{2^{n-2} D}\left[\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 + \sum_{j,k} x_j x_k - x_1 x_2\right],$$

$$W_n = 2\sqrt[n]{D}\left[\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 + \sum_{j,k} x_j x_k - x_1 x_2 - x_2 x_n + \frac{n-8}{8} x_n^2\right],$$

$$T_n = 2\sqrt[n]{D}\left[\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 + \sum_{j,k} x_j x_k - x_1 x_2 - x_2 x_n - \tfrac{1}{2} x_{n-1} x_n + \frac{n-9}{8} x_n^2\right],$$

$$X = 2\sqrt[6]{\frac{D}{3}}\left[\left(x_1 + \frac{x_3+x_4+x_5+x_6}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{x_3+x_4+x_5}{2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}\left(x_3 + \frac{x_6}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(x_4 + \frac{x_6}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(x_5 + \frac{x_6}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{8} x_6^2\right],$$

$$Y = \sqrt[7]{64 D}\left[\left(x_1 + \frac{x_3+x_4+x_5+x_6+x_7}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{x_3+x_4+x_5+x_6}{2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}\left(x_3 + \frac{x_7}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(x_4 + \frac{x_7}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(x_5 + \frac{x_7}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(x_6 + \frac{x_7}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4} x_7^2\right].$$

La somme

$$\sum_{j,k} x_j x_k$$

s'étend à toutes les valeurs 1, 2, 3, $\cdots n$ des entiers $j$ et $k$ differents entre eux.

Pour que les minima de $W_n$ et $T_n$ aient la valeur

$$2\sqrt[n]{D}$$

il faut que $n$ soit pair et supérieure à 7 dans $W_n$ et impair et supérieur à 8 dans $T_n$.

On peut vérifier immédiatement le déterminant de $U_n$, $V_n$, $W_n$, $T_n$ en les représentant par les sommes

$$U_n = 2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}\left[\left(x_1 + \frac{x_2+x_3+\cdots+x_n}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\left(x_2 + \frac{x_3+\cdots+x_n}{3}\right)^2 + \cdots\right.$$
$$\left. + \frac{i+1}{2i}\left(x_i + \frac{x_{i+1}+\cdots+x_n}{i+1}\right)^2 + \cdots + \frac{n+1}{2n} x_n^2\right],$$

$$V_n = \sqrt[n]{2^{n-2} D}\left[\left(x_1 + \frac{x_3+x_4+\cdots+x_n}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{x_3+x_4+\cdots+x_n}{2}\right)^2\right.$$
$$\left. + \frac{x_3^2}{2} + \frac{x_4^2}{2} + \cdots\cdots + \frac{x_n^2}{2}\right],$$

*) La forme $U_n$ a été donnée pour la première fois dans un Mémoire intitulé: „Sur une certaine équation indéterminée du troisième dégré“ (en russe) par Zolotareff.

$$W_n = 2\sqrt[n]{D}\Big[\Big(x_1 + \frac{x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{2}\Big)^2 + \Big(x_2 + \frac{x_3 + x_4 + \cdots x_{n-1}}{2}\Big)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Big(x_3 + \frac{x_n}{2}\Big)^2 + \tfrac{1}{2}\Big(x_4 + \frac{x_n}{2}\Big)^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}\Big(x_{n-1} + \frac{x_n}{2}\Big)^2$$
$$+ \tfrac{1}{8} x_n^2\Big],$$

$$T_n = 2\sqrt[n]{D}\Big[\Big(x_1 + \frac{x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{2}\Big)^2 + \Big(x_2 + \frac{x_3 + x_4 + \cdots x_{n-1}}{2}\Big)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Big(x_3 + \frac{x_n}{2}\Big)^2 + \tfrac{1}{2}\Big(x_4 + \frac{x_n}{2}\Big)^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}\Big(x_{n-2} + \frac{x_n}{2}\Big)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2} x_{n-1}^2 + \tfrac{1}{8} x_n^2\Big].$$

Le nombre $n$ étant assujettie aux restrictions dont nous avons dit, les formes
$$U_n,\ V_n,\ W_n,\ T_n,\ X,\ Y,$$
ont une propriété commune fondamentale: leurs minima diminuent nécessairement quelques variations infiniments petites que subissent leurs coëfficients, pourvue qu'elles laissent leur déterminant invariable.

Nous nommerons *forme extrême* toute forme qui jouit de cette propriété. Les quantités $(a)$, étant des minima des formes extrêmes, sont effectivement des maxima comme il a été dit.

La limite
$$2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}$$
a été donnée pour la première fois par M. Hermite. Dans une lettre de l'illustre auteur à Jacobi on trouve une conjecture énoncée en ces termes: „Mes premières recherches dans le cas d'une forme à $n$ variables de déterminant $D$ m'avaient donné la limite $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{D}$, je suis porté à présumer, mais sans pouvoir le démontrer que le coëfficient numérique $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ doit être remplacé par $\frac{2}{\sqrt[n]{n+1}}$."

En essayant de verifier cette conjecture nous sommes parvenus à démontrer que la quantité $2\sqrt[n]{\frac{D}{n+1}}$ est effectivement le minimum de la forme extrême ou, ce qui revient au même, la limite précise pour un certain groupe de formes. Mais on voit de ce qui précède qu'il y a des minima qui la surpassent et, par conséquent, elle ne s'étend pas à toutes les formes à $n$ variables de déterminant — $D$. La limite précise pour l'ensemble de ces formes est le plus grand des minima des formes extrêmes, qui y sont contenues.

Le nombre de représentations de ces minima par des formes correspondantes est surtout à remarquer: Convenons de compter comme une seule les deux représentations, qui s'obtiennent l'une de l'autre en changeant les signes de toutes les variables. Cela posé, le minimum de $U_n$ aura $\frac{n(n+1)}{2}$ représentations; ceux de $V_n$, $W_n$ et $T_n$ en auront chacun $n(n-1)$, $n$ étant supérieur à 8 dans $W_n$ et à 9 dans $T_n$; quant aux formes $W_8$, $T_9$, $X$ et $Y$, leur correspondent respectivement les nombres 120, 136, 36, 63.

En général la propriété caractéristique de la forme extrême à $n$ variables est d'avoir au moins $\frac{n(n+1)}{2}$ représentations de son minimum.

Les limites que nous avons considérées ci-dessus sont encore utiles dans la théorie des formes indéterminées.

En effet, soit $\Omega$ une quantité quelconque non inférieure à la limite précise du minimum de toute forme positive à $n$ variables de déterminant $-D$; il est facile de démontrer qu'on peut assigner aux variables d'une forme indéterminée, dont $n$ est le nombre de variables et $\pm D$ le déterminant, des valeurs telle que celle de la forme ne surpassera pas $\Omega$. Soit

$$f = \pm A_1 X_1^2 \pm A_2 X_2^2 + \cdots \pm A_n X_n^2$$

cette forme, $A_1$, $A_2$, $\cdots A_n$ étant des quantités positives et $X_1$, $X_2$, $\cdots X_n$ des fonctions linéaires homogènes à coëfficients réels.

Considérons la forme positive

$$\varphi = A_1 X_1^2 + A_2 X_2^2 + \cdots + A_n X_n^2$$

dont le déterminant est évidemment $-D$, c'est à dire égal à celui de $f$ en valeur absolue.

En attribuant aux variables des valeurs pour lesquelles $\varphi$ est minimum, on aura immédiatement la valeur absolue de

$$f \leq \varphi \leq \Omega.$$

On peut de cette manière obtenir plusieurs limites pour des valeurs des formes indéterminées, mais ici comme dans la théorie des formes positives, il est à rechercher des limites précises.

Ainsi pour les formes binaires de déterminant positif $D$ une telle limite est

$$\sqrt{\frac{4}{5} D}.$$

Or relativement à ces limites se manifeste encore une grande différence entre les formes indéterminées et déterminées. Pour la faire voir en ce qui concerne les formes binaires et la limite $\sqrt{\frac{4}{5} D}$ nous ajoutons que si l'on exclue la forme

$$\sqrt{\tfrac{4}{5}D}\ (x^2 + xy - y^2)$$

et ses équivalentes, la limite précise pour les autres formes de même déterminant est $\sqrt{\frac{D}{2}}$.

En nous bornant dans ce Mémoire aux formes positives, nous nous servons d'une méthode particulière de reduction que nous appelons le développement des formes suivant les minima.

En préferant de nous restreindre à ce qui nous est strictement nécessaire, nous n'entrons point ici dans toutes les détails de cette reduction. Nous considérons en particulier les formes ternaires et les conséquences qu'on peut tirer de leur théorie pour des formes à un nombre plus grand de variables.

Comme application des formes binaires nous donnons une nouvelle démonstration du théorème important de M. Hermite concernant la limite $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt[n]{D}$ des minima des formes positives.

De la théorie des formes ternaires nous déduisons une nouvelle limite pour ces minima plus approchée à la précise que celle de M. Hermite.

Pour les formes binaires, ternaires et quaternaires elle est effectivement précise*).

A partir des formes à cinq variables il en diffère ce que nous démontrons au moyen d'une certaine proposition relative à ces formes.

---

n° 1. Dans ses lettres à Jacobi, M. Hermite en considérant les formes quadratiques à coëfficients entiers de déterminant donné a démontré qu'elles se laissent distribuer en un nombre fini de classes. Cela se tire de la possibilité de choisir de toutes les formes équivalentes une forme dont les coëfficients sont limités, leurs limites s'exprimant en fonction du déterminant commun.

La recherche des telles formes constitue la théorie de réduction.

Quant aux formes quadratiques positives, il existe une méthode de réduction d'après laquelle les limitations des coëfficients des formes à un nombre quelconque de variables s'obtiennent immédiatement de la théorie des formes binaires.

Cette méthode consiste en ce qui suit: Etant donnée une forme $f$ quadratique positives à $n$ variables, on trouvera une forme équiva-

---

*) Nous avons donné une autre démonstration pour la limite précise des minima des formes quaternaires dans une Note „Sur les formes quadratiques positives quaternaires“ Mathematische Annalen, Band V., Seite 581.

lente à $f$ dans laquelle le coëfficient du carré de la première variable sera le minimum de la forme.

Soit

$$Ax_1^2+By^2+Cz^2+\cdots\cdots+Et^2+2kxy+2lxz+\cdots+2myz+\cdots\cdots$$

cette forme et $A$ son minimum. En la représentant ainsi:

$$A\left(x_1+\frac{k}{A}y+\frac{l}{A}z+\cdots\cdots\right)^2+\varphi(y,z,\cdots\cdots t)$$

considérons la forme $\varphi(y,z,\cdots\cdots t)$ à $n-1$ variables $y,z,\cdots\cdots t$. Soit $A'$ son minimum et

$$A'(x_2+\lambda z'+\mu u'+\cdots\cdots+\varrho t')^2+\psi(z',u',\cdots\cdots t')$$

une forme à $n-1$ variables $x_2, z', u', \cdots t'$ équivalente à $\varphi$, $\psi(z',u',\cdots t')$ étant une forme à $n-2$ variables $z', u'\cdots\cdots t'$. Nous pouvons opérer avec la forme $\psi$ comme nous avons fait avec $f$ et $\varphi$. En continuant la même marche, nous aurons en definitive une forme

$$(1)\quad A(x_1+\alpha x_2+\beta x_3+\cdots\cdots+\gamma x_n)^2+A'(x_2+\delta x_3+\cdots+\zeta x_n)^2$$
$$+\cdots\cdots+A^{(n-2)}(x_{n-1}+\sigma x_n)^2+A^{(n-1)}x_n^2$$

équivalente à $f$, $A$ étant son minimum; $A'$ le minimum de la forme

$$A'(x_2+\delta x_3+\cdots\cdots+\zeta x_n)^2+\cdots\cdots+A^{(n-2)}(x_{n-1}+\sigma x_n)^2+A^{(n-1)}x_n^2$$

et ainsi de suite; enfin $A^{(n-2)}$ le minimum de la forme binaire

$$A^{(n-2)}(x_{n-1}+\sigma x_n)^2+A^{(n-1)}x_n^2.$$

Quant aux coëfficients

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \cdots\cdots\zeta\cdots\cdots\sigma,$$

on peut supposer leurs valeurs numériques être non supérieures à $\frac{1}{2}$. Car, si quelques-uns d'eux surpassent $\frac{1}{2}$, on les rabaissera en faisant la substitution

$$\begin{aligned}
x_1 &= X_1+lX_2+mX_3+\cdots\cdots+pX_n,\\
x_2 &= \qquad\quad X_2+qX_3+\cdots\cdots+rX_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{n-1} &= \qquad\qquad\qquad\qquad X_{n-1}+sX_n,\\
x_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad X_n
\end{aligned}$$

où les entiers $l, m, n, p, q\cdots\cdots r\cdots\cdots s$ ont des valeurs convenables.

Ce mode de représentation de $f$ par une forme (1) à elle équivalente nous nommerons le développement de $f$ suivant les minima.

Nous ne déterminons pas complêtement la forme (1), quoiqu'on pût fixer les signes de quelques coëfficients

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\cdots\cdots\zeta\cdots\cdots\sigma.$$

Il existera ainsi plusieurs développements suivant les minima pour une forme donnée.

Dans quelques cas il existe même plusieurs systèmes des coëfficients devant les carrés. Mais pour la démonstration des propositions que nous donnons dans ce Mémoire il sera indifférent lequelle de plusieurs développements suivant les minima nous aurons à considérer.

Pour abreger le discours nous nommerons $A$ — le premier coëfficient, $A'$ le deuxième et ainsi de suite.

Le développement de la forme suivant les minima jouit de cette propriété remarquable qu'en retranchant de la forme développée la somme de quelques carrés consécutifs à partir du premier, le reste sera aussi développé suivant les minima. De même en supposant dans ce reste toutes les variables $x_\lambda$, $x_{\lambda+1}$ $\cdots\cdots$ $x_n$ à partir d'une variable quelconque $x_\lambda$ jusqu'à $x_n$ égales à zéro, on obtient une nouvelle forme développée suivant les minima.

n° 2. Considérons maintenant une forme binaire

$$f = k\,(x + \lambda y)^2 + l y^2,$$

$k$ étant son minimum.

Le nombre $k\lambda^2 + l$ représenté par la forme $f$, si l'on y fait $x = 0$, $y = 1$, ne sera pas moindre que le minimum $k$ de $f$. Cela nous donne l'inégalité

$$k\lambda^2 + l > k$$

ou

$$l \geqq k\,(1 - \lambda^2).$$

Il suit de là, en vertu de ce que $\lambda^2$ ne surpasse pas $\frac{1}{4}$, l'inégalité

$$l \geqq \tfrac{3}{4}\,k$$

qui nous donne la limite inférieure précise du second coëfficient dans le développement des formes binaires.

n° 3. Cette limite de $l$ étant connue, on obtient facilement des limitations des coëfficients dans le développement des formes suivant les minima. En effet, soit

$$f = A\,(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \cdots + \gamma x_n)^2 + A'\,(x_2 + \delta x_3 + \cdots + \zeta x_n)^2 + \cdots\cdots + A^{(n-2)}(x_{n-1} + \sigma x_n)^2 + A^{(n-1)} x_n{}^2$$

ce développement pour une forme $f$ de déterminant $-D$. Il en résulte, que $A$, $A'$ $\cdots\cdots$ $A^{(n-2)}$ sont les minima des formes binaires

$$\begin{gathered} A\,(x_1 + \alpha x_2)^2 + A' x_2{}^2 \\ A'\,(x_2 + \delta x_3)^2 + A'' x_3{}^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A^{(n-2)}(x_{n-1} + \sigma x_n)^3 + A^{(n-1)} x_n{}^2 \end{gathered}$$

et, par conséquent, on aura

$$A' \geqq \tfrac{3}{4}\,A,\quad A'' \geqq \tfrac{3}{4}\,A' \geqq (\tfrac{3}{4})^2 A,\quad \cdots\cdots\ A^{(n-1)} \geqq \tfrac{3}{4}\,A^{(n-2)} \geqq (\tfrac{3}{4})^{n-1} A.$$

D'où en vertu de l'équation

$$AA'A'' \cdots\cdots A^{(n-1)} = D$$

il viendra

$$A \leqq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{D}.$$

Cette limite de minima a été donnée pour la première fois par M. Hermite*).

nº 4. Considérons une forme ternaire $f$ au minimum $A$; soit

$$\frac{f}{A} = (x + \lambda y + \mu z)^2 + k(y + \sigma z)^2 + lz^2$$

le développement suivant les minima du rapport $\frac{f}{A}$ qui est une forme dont le minimum est égal à l'unité.

En changeant s'il est nécessaire le signe de $y$ et de $z$ on peut faire $\lambda$ et $\mu$ positifs.

Quant au signe de $\sigma$, il est à distinguer deux cas:

$$\sigma < 0 \text{ et } \sigma > 0.$$

Dans le premier nous aurons les inégalités

(1) $$k + \lambda^2 \geqq 1$$

(2) $$l + k\sigma^2 + \mu^2 \geqq 1$$

$$l + k(1 + \sigma)^2 + (1 - \lambda - \mu)^2 \geqq 1$$

qui expriment que les valeurs de $\frac{f}{A}$ pour

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= 1, & z &= 0 \\ x &= 0, & y &= 0, & z &= 1 \\ x &= -1, & y &= 1, & z &= 1 \end{aligned}$$

ne sont pas moindre que son minimum. Ajoutons-y l'inégalité

(3) $$l + k\sigma^2 \geqq k$$

exprimant que la valeur de la forme binaire

$$k(y + \sigma z)^2 + lz^2$$

pour

$$y = 1, \quad z = 1$$

n'est pas inférieur à son minimum. Les inégalités (1) et (3) nous donne d'abord

$$k \geqq 1 - \lambda^2 \geqq \tfrac{3}{4}$$

et ensuite

$$k \leqq \frac{l}{1 - \sigma^2}$$

$$l \geqq k(1 - \sigma^2) \geqq (1 - \lambda^2)(1 - \sigma^2)$$

*) Hermite „Première lettre sur la théorie des nombres" Mathematische Werke von Jacobi Band II.

$$1 - \lambda^2 \leqq \frac{l}{1-\sigma^2}$$

(4) $$\lambda^2 \geqq 1 - \frac{l}{1-\sigma^2}.$$

De l'inégalité (2) nous aurons

$$l \geqq 1 - k\sigma^2 - \mu^2 \geqq 1 - \mu^2 - \frac{l\sigma^2}{1-\sigma^2}$$

(5) $$\mu^2 \geqq 1 - \frac{l}{1-\sigma^2}.$$

Ayant en vue de démontrer que $l$ n'est pas moindre que $\frac{2}{3}$, nous pouvons supposer

$$\frac{l}{1-\sigma^2} < 1.$$

Car dans le cas contraire on aurait

$$l \geqq 1 - \sigma^2 \geqq \tfrac{3}{4}$$

et la proposition aurait lieu d'elle même. Par la même raison on peut supposer

$$-\sigma \geqq \tfrac{1}{3}.$$

En effet, si l'on avait $-\sigma < \frac{1}{3}$, l'inégalité

$$l \geqq k\,(1-\sigma^2)$$

donnerait

$$l > \tfrac{8}{9} k \cdot \geqq \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{2}{3}.$$

Cela posé, nous aurons en vertu de (4) et (5)

$$\lambda \geqq \sqrt{1 - \frac{l}{1-\sigma^2}}$$

$$\mu \geqq \sqrt{1 - \frac{l}{1-\sigma^2}}.$$

Maintenant dans l'inégalité

$$l + k\,(1+\sigma)^2 + (1 - \lambda - \mu)^2 \geqq 1$$

on peut substituer au lieu de $k$ la valeur

$$\frac{l}{1-\sigma^2}$$

qui n'est pas moindre que $k$, et au lieu de $\lambda$ et $\mu$ la quantité

$$\sqrt{1 - \frac{l}{1-\sigma^2}}$$

qui ne surpasse pas $\lambda$ et $\mu$.

Il suit de la sorte

$$l + \frac{1+\sigma}{1-\sigma}\, l + \left(1 - 2\sqrt{1 - \frac{l}{1-\sigma^2}}\right)^2 \geqq 1$$

ou en réduisant

$$2 - \frac{l}{1+\sigma} \geqq 2\sqrt{1 - \frac{l}{1-\sigma^2}}.$$

De là on tire

$$\frac{l}{1+\sigma}\left(\frac{l}{1+\sigma}+\frac{4\sigma}{1-\sigma}\right)\geq 0$$

et enfin

(6) $$l\geq -\frac{4\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma}.$$

Cette inégalité donne la limite inférieure précise du coëfficient $l$ en fonction de $\sigma$. En faisant varier $\sigma$ de $-\frac{1}{3}$ jusqu'à $-\frac{1}{2}$ on voit, que le minimum de la fonction

$$-\frac{4\sigma(1+\sigma)}{1-\sigma}$$

est égal à $\frac{2}{3}$ et correspond aux valeurs $\sigma=-\frac{1}{3}$ et $\sigma=-\frac{1}{2}$. Ainsi nous aurons

$$l>\tfrac{2}{3}.$$

Supposons maintenant $\sigma>0$.

Nous aurons les inégalités

(7) $$\begin{cases} k+\lambda^2\geq 1, \quad l+k\sigma^2\geq k \\ l+k\sigma^2+\mu^2\geq 1. \end{cases}$$

Comme dans le cas précédent et encore

(8) $$l+k(1-\sigma)^2+(\lambda-\mu)^2\geq 1.$$

De trois inégalités (7) il viendra comme précédemment

$$k\leq\frac{l}{1-\sigma^2}, \quad \lambda\geq\sqrt{1-\frac{l}{1-\sigma^2}}, \quad \mu\geq\sqrt{1-\frac{l}{1-\sigma^2}}.$$

En remplaçant dans (8) $k$ par $\frac{l}{1-\sigma^2}$, $\lambda$ par $\frac{1}{2}$ et $\mu$ par $\sqrt{1-\frac{l}{1-\sigma^2}}$, ce qui est permis, nous aurons

$$l+\frac{1-\sigma}{1+\sigma}l+\left(\tfrac{1}{2}-\sqrt{1-\frac{l}{1-\sigma^2}}\right)^2\geqq 1,$$

ou en réduisant

$$\tfrac{1}{4}+\frac{1-2\sigma}{1-\sigma^2}l\geqq\sqrt{1-\frac{l}{1-\sigma^2}}.$$

En faisant maintenant pour abréger

$$u=\frac{1-2\sigma}{1-\sigma^2}\cdot l$$

l'inégalité précédente donnera

$$u^2+\frac{3-2\sigma}{2(1-2\sigma)}u\geqq\frac{15}{16}.$$

On voit de là que $u$ ne doit pas être inférieur à la racine positive de l'équation

$$u^2+\frac{3-2\sigma}{2(1-2\sigma)}u-\frac{15}{16}=0$$

et, par conséquent, on aura

$$u\geqq\frac{-3+2\sigma+2\sqrt{2}\sqrt{3-9\sigma+8\sigma^2}}{4(1-2\sigma)}.$$

Cela nous donne la limite inférieure précise pour $l$ en fonction de $\sigma$. Nous aurons en effet

(9) $$l \geq \frac{1-\sigma^2}{4(1-2\sigma)^2}\left[-3+2\sigma+2\sqrt{2}\sqrt{3-9\sigma+8\sigma^2}\right].$$

La quantité $\sigma$ variant de $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{2}$, le minimum du second terme de cette inégalité correspondra à $\sigma=\frac{1}{3}$ et sera égal à $\frac{2}{3}$. Ainsi dans le cas actuel on a aussi $l \geq \frac{2}{3}$.

Nous obtenons donc le théorème suivant: *Dans le développement du rapport d'une forme quadratique positive à son minimum le second coëfficient n'est pas inférieur à $\frac{3}{4}$ et le troisième à $\frac{2}{3}$.*

n° 5. Cherchons maintenant quelles sont les formes ternaires $\frac{f}{A}$, dont le dernier coëfficient dans leurs développements suivant les minima

$$\frac{f}{A}=(x+\lambda y+\mu z)^2+k(y+\sigma z)^2+lz^2$$

est égal à $\frac{2}{3}$.

Les inégalités (6) et (9) du n° 4. montrent que cela n'est possible que dans les deux cas $\sigma=+\frac{1}{3}$ et $\sigma=-\frac{1}{2}$.

Supposons, en premier lieu, $\sigma=+\frac{1}{3}$, $l=\frac{2}{3}$. Les inégalités

$$\lambda \geq \sqrt{1-\frac{l}{1-\sigma^2}},\quad \mu \geq \sqrt{1-\frac{l}{1-\sigma^2}},$$
$$k \geq 1-\lambda^2,\quad k \leq \frac{l}{1-\sigma^2}$$

du même $n^0$ donnent d'abord

$$\lambda \geq \tfrac{1}{2},\quad \mu \geq \tfrac{1}{2}$$

et comme $\lambda$ et $\mu$ ne surpassent pas $\frac{1}{2}$ nous aurons $\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{1}{2}$.

Elles donnent ensuite

$$k \geq \tfrac{3}{4},\quad k \leq \frac{\frac{2}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\tfrac{3}{4}$$

d'où il viendra $k=\frac{3}{4}$.

On a donc deux formes

$$\frac{f}{A}=(x+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}z)^2+\tfrac{3}{4}(y+\tfrac{1}{3}z)^2+\tfrac{2}{3}z^2$$
$$\frac{f}{A}=(x+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}z)^2+\tfrac{3}{4}(y-\tfrac{1}{3}z)^2+\tfrac{2}{3}z^2.$$

Elles sont évidemment équivalentes, la première se transformant dans la seconde si l'on substitue dans elle $x+y$ au lieu de $x$ et $-y$ au lieu de $y$. En désignant par $-D$ le déterminant de la forme $f$, celui de $\frac{f}{A}$ sera $-\frac{D}{A^3}$ et comme il est égal à $-\frac{1}{2}$, nous aurrons $\frac{D}{A^3}=\frac{1}{2}$, $A=\sqrt[3]{2}\,D$. Soient, en second lieu, $\sigma=-\frac{1}{2}$ et $l=\frac{2}{3}$.

Les inégalités

$$\lambda \geq \sqrt{1-\frac{l}{1-\sigma^2}},\quad \mu \geq \sqrt{1-\frac{l}{1-\sigma^2}},\quad k \leq \frac{l}{1-\sigma^2}$$

deviennent

$$\lambda \geq \tfrac{1}{3},\quad \mu \geq \tfrac{1}{3},\quad k \leq \tfrac{8}{9}.$$

D'ailleurs la valeur de la forme $\frac{f}{A}$ pour $x = -1$, $y = 1$, $z = 1$ n'est pas inférieure à l'unité, c'est à dire on a

$$(1 - \lambda - \mu)^2 + \tfrac{1}{4} k + \tfrac{2}{3} \geq 1.$$

Dans cette inégalité on peut faire $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{1}{3}$, ces valeurs étant des minima des coëfficients $\lambda$ et $\mu$. On obtient de cette manière

$$\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{4} k + \tfrac{2}{3} \geq 1$$

et de là

$$k \geq \tfrac{8}{9}.$$

Les inégalités $k \geq \frac{8}{9}$ et $k \leq \frac{8}{9}$ donnent $k = \frac{8}{9}$. Cette valeur n'est possible que si l'on suppose $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\mu = \frac{1}{3}$.

Ainsi nous obtenons une autre forme $\frac{f}{A}$, dont le dernier coëfficient est $\frac{2}{3}$:

$$\frac{f}{A} = (x + \tfrac{1}{3} y + \tfrac{1}{3} z)^2 + \tfrac{8}{9} (y - \tfrac{1}{2} z)^2 + \tfrac{2}{3} z^2.$$

En désignant par $-D$ le déterminant de $f$, nous aurons aisément $A = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{D}{2}}$.

On obtient donc le théorème suivant: *Les formes quadratiques positives ternaires de déterminant $-D$, dont le dernier coëfficient dans le développement suivant les minima du rapport de la forme à son minimum est égal à $\frac{2}{3}$ constituent deux classes représentées par les formes*

$$\sqrt[3]{2D} \left[(x + \tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{2} z)^2 + \tfrac{3}{4} (y + \tfrac{1}{3} z)^2 + \tfrac{2}{3} z^2\right]$$

$$\tfrac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{D}{2}} \left[(x + \tfrac{1}{3} y + \tfrac{1}{3} z)^2 + \tfrac{8}{9} (y - \tfrac{1}{2} z)^2 + \tfrac{2}{3} z^2\right].$$

nº 6. Nous avons vu dans le nº 3. comment le théorème de M. Hermite concernant une limite $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{D}$ se déduit du développement des formes suivant les minima. Nous allons maintenant démontrer qu'au moyen du même développement on obtient une autre limite plus approchée à la limite précise.

Soit, en effet, ce développement

$$A X_1^2 + A' X_2^2 + \cdots + A^{(n-1)} X_n^2$$

pour une forme $f$ á $n$ variables $x_1, x_2, \cdots x_n$ où

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \cdots + \gamma x_n \\ X_2 &= \phantom{x_1 + \alpha} x_2 + \delta x_3 + \cdots + \zeta x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n &= \phantom{x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \cdots + \gamma} x_n. \end{aligned}$$

Cela posé, nous allons appliquer le théorème du nº 4. aux formes ternaires qui se déduisent de $f$ et des formes

$$(10) \qquad A'X_2^2 + A''X_3^2 + \cdots\cdots + A^{(n-1)}X_n^2$$

$$(11) \qquad A''X_3^2 + \cdots\cdots + A^{(n-1)}X_n^2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

en posant dans $f$

$$x_4 = 0, \ \cdots\cdots \ x_n = 0,$$

dans la forme (10)

$$x_5 = 0, \ \cdots\cdots \ x_n = 0,$$

dans la forme (11)

$$x_6 = 0, \ \cdots\cdots \ x_n = 0$$

et ainsi de suite.

Ces formes ternaires nous donnent les inégalités

$$A' \geq \tfrac{3}{4} A,$$
$$A'' \geq \tfrac{2}{3} A,$$
$$A''' \geq \tfrac{2}{3} A' \geq \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} A,$$
$$A^{IV} \geq \tfrac{2}{3} A'' \geq (\tfrac{2}{3})^2 A.$$

Il en résulte

$$(12) \qquad \begin{cases} A^{(2i-1)} \geq \tfrac{3}{4} (\tfrac{2}{3})^{i-1} A \\ A^{2i} \geq (\tfrac{2}{3})^i A. \end{cases}$$

Au moyen de ces inégalités on obtient la limite de $A$ en fonction de déterminant $-D$ de la forme. En effet, on a

$$AA' \cdots\cdot A^{(n-1)} = D.$$

Si $n$ est pair $= 2m$, nous aurons en ayant égard aux inégalités (12)

$$A \leq \frac{3^{\frac{m-2}{2}}}{2^{\frac{m-3}{2}}} \sqrt[n]{D}$$

et, si $n$ est impair $= 2m+1$, il viendra

$$A < \sqrt[n]{\frac{3^{m(m-1)}}{2^{m(m-2)}} D}$$

c. a. d.

*Dans le développement suivant les minima d'une forme positive*

$$f = AX_1^2 + A'X_2^2 + \cdots\cdots + A^{(n-1)}X_n^2$$

*de déterminant $-D$, les limites inférieures des coëfficients*

$$A', A''; \cdots\cdot A^{(n-1)}$$

*en fonction de $A$ sont données par les inégalités*

$$A^{(2i-1)} \geq \tfrac{3}{4} (\tfrac{2}{3})^{i-1} A, \quad A^{2i} \geq (\tfrac{2}{3})^i A.$$

*Quant au minimum $A$ de $f$, il ne surpasse pas la limite*

$$(13) \qquad \frac{3^{\frac{m-2}{2}}}{2^{\frac{m-3}{2}}} \sqrt[n]{D}$$

*$n$ étant pair $= 2m$, et la limite*

(14) $$\sqrt[n]{\frac{3^{m(m-1)}}{2^{m(m-2)}}D}$$

*si n est impair* $= 2m+1$.

n° 7. Il suit de ce théorème que le dernier coëfficient dans le développement d'une forme quaternaire suivant les minima ne peut pas surpasser $\frac{1}{2}$ de son minimum.

Soit $f$ cette forme et $A$ son minimum. Soit aussi

$$\frac{f}{A} = (x+\alpha y+\beta z+\gamma t)^2 + k(y+\delta z+\varepsilon t)^2 + l(z+\zeta t)^2 + mt^2$$

le développement de $\frac{f}{A}$ suivant les minima.

Supposons $m = \frac{1}{2}$ et cherchons les formes $\frac{f}{A}$ qui ont cette quantité pour leur dernier coëfficient. D'abord, $l$ étant le minimum de la forme binaire

$$l(z+\zeta t)^2 + mt^2,$$

on a

$$m \geqq \tfrac{3}{4}l, \quad l \leqq \tfrac{4}{3}m = \tfrac{2}{3}.$$

Or $l$ ne peut pas être inférieur à $\frac{2}{3}$ — par conséquent $l = \frac{2}{3}$.

Pour cette valeur de $l$ en vertu du théorème du n° 5. on a $k = \frac{8}{9}$ ou $k = \frac{3}{4}$.

Or on ne peut pas supposer $k = \frac{8}{9}$, car on a dans ce cas

$$m \geqq \tfrac{2}{3}k, \quad k \leqq \tfrac{3}{2}m,$$

c'est à dire

$$\tfrac{8}{9} \leqq \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4}$$

ce qui est absurde.

Ainsi $k = \frac{3}{4}$. Maintenant la forme

$$(y+\delta z+\varepsilon t)^2 + \frac{l}{k}(z+\zeta t)^2 + \frac{m}{k}t^2$$

a les coëfficients

$$1,\ \frac{l}{k} = \frac{8}{9},\quad \frac{m}{k} = \frac{2}{3}$$

devant les carrés, par conséquent en supposant $\delta$ et $\varepsilon$ positifs, ce qui est toujours possible de faire en disposant convenablement des signes de $z$ et de $t$, on aura d'après le théorème précédent

$$\delta = \tfrac{1}{3},\quad \varepsilon = \tfrac{1}{3},\quad \zeta = -\tfrac{1}{2}.$$

La forme ternaire

$$(x+\alpha y+\beta z)^2 + k(y+\delta z)^2 + lz^2$$

qu'on obtient de $\frac{f}{A}$ en supposant $t = 0$, a pour les coëfficients des carrés les nombres

$$1,\quad k = \tfrac{3}{4},\quad l = \tfrac{2}{3};$$

on a d'ailleurs $\delta = \frac{1}{3}$; par suite, en vertu du théorème mentionné, on doit avoir

$$\alpha = \pm \tfrac{1}{2}, \quad \beta = \pm \tfrac{1}{2}.$$

On peut supposer

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \beta = \tfrac{1}{2},$$

car dans les autres cas

$$\begin{array}{ll} \alpha = \phantom{-}\tfrac{1}{2}, & \beta = -\tfrac{1}{2} \\ \alpha = -\tfrac{1}{2}, & \beta = \phantom{-}\tfrac{1}{2} \\ \alpha = -\tfrac{1}{2}, & \beta = -\tfrac{1}{2} \end{array}$$

on substituerait au lieu de $x$ dans le premier cas $x + z$, dans le second $x + y$ et dans le troisième $x + y + z$ et on aura toujours $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$. La valeur de $\frac{f}{A}$ pour

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 1$$

ne doit pas être inférieure à l'unité, par conséquent, on a

$$\gamma^2 + \tfrac{3}{4} \geq 1, \quad \gamma^2 \geq \tfrac{1}{4}.$$

Or la valeur numérique de $\gamma$ ne pouvant surpasser $\frac{1}{2}$, il viendra

$$\gamma^2 = \tfrac{1}{4}, \quad \gamma = \pm \tfrac{1}{2}.$$

On peut supposer $\gamma = \frac{1}{2}$, car dans le cas contraire on substituera $x + t$ au lieu de $x$ et on aura $\gamma = \frac{1}{2}$. Maintenant tous les coëfficients de la forme $\frac{f}{A}$ sont déterminées.

En désignant le déterminant de $f$ par $-D$, on trouve

$$A = \sqrt[4]{4\,D}.$$

Nous avons donc le théorème suivant: *Les formes quadratiques positives quaternaires de déterminant $-D$, dont le dernier coëfficient dans le développement suivant les minima est égal à $\frac{1}{2}$ de leur minima constituent une seule classe représentée par la forme*

$$\sqrt[4]{4\,D}\left[(x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}t)^2 + \tfrac{3}{4}(y + \tfrac{1}{3}z + \tfrac{1}{3}t)^2 + \tfrac{2}{3}(z - \tfrac{1}{2}t)^2 + \tfrac{1}{2}t^2\right].$$

n° 8. Le théorème connu de M. Seeber concernant les limites du produit des coëfficients des carrés des variables dans la forme ternaire réduite d'après sa méthode est lié intimement à notre développement des formes suivant les minima. Cette liaison ressortira évidemment de la démonstration de ce théorème que nous allons donner.

Convenons de représenter désormais par $(u)$ la valeur numérique de la quantité $u$.

Cela posé, nous aurons le théorème: *Si dans la forme*

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,\lambda yz + 2\,\lambda' zx + 2\,\lambda'' xy$$

*réduite à la manière de M. Seeber on a*

$$(\lambda) \leq (\lambda') \leq (\lambda'') \tag{15}$$

*la représentation de $\varphi$ par la somme*

$$\varphi=(x+\lambda''y+\lambda'z)^2+(1-\lambda''^2)(y+\frac{\lambda-\lambda'\lambda''}{1-\lambda''^2}z)^2+\frac{1-\lambda^2-\lambda'^2-\lambda''^2+2\lambda\lambda'\lambda''}{1-\lambda''^2}z^2$$

*sera son développement suivant les minima.*

Les conditions de M. Seeber pour que la forme $\varphi$ soit réduite consistent en ce que les coëfficients $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$ satisfont aux inégalités

$$(16) \qquad (\lambda)\leq \tfrac{1}{2}, \quad (\lambda')<\tfrac{1}{2}, \quad (\lambda'')<\tfrac{1}{2}$$

et, s'ils sont tous négatifs, outre les inégalités (16) on aura encore

$$(17) \qquad (\lambda)+(\lambda')+(\lambda'')<1.$$

Pour démontrer le théorème énoncé nous n'avons qu'à faire voir que $1-\lambda''^2$ est le minimum de la forme binaire

$$(1-\lambda''^2)(y+\frac{\lambda-\lambda'\lambda''}{1-\lambda''^2}z)^2+\frac{1-\lambda^2-\lambda'^2-\lambda''^2+2\lambda\lambda'\lambda''}{1-\lambda''^2}z^2$$
$$=(1-\lambda''^2)y^2+2(\lambda-\lambda'\lambda'')yz+(1-\lambda'^2)z^2.$$

Or cela sera évident si nous démontrons que la valeur absolue du coëfficient

$$\frac{\lambda-\lambda'\lambda''}{1-\lambda''^2}$$

ne surpasse pas $\frac{1}{2}$.

Pour abréger les raisonements nous nous servirons des identités, qui résultent de l'analyse detaillée de nos minima où les variables satisfont à quelques inégalités de condition.

Considérons d'abord le premier cas

$$\lambda>0, \quad \lambda'>0, \quad \lambda''>0.$$

On verifiera sans difficulté les identités

$$(18) \qquad \tfrac{1}{3}-\frac{\lambda-\lambda'\lambda''}{1-\lambda''^2}=\frac{\lambda'-\lambda}{1-\lambda''^2}+\frac{\lambda''-\lambda'}{1+\lambda''}+\frac{1-2\lambda''}{3(1+\lambda'')}$$

$$(19) \qquad \tfrac{1}{3}+\frac{\lambda-\lambda'\lambda''}{1-\lambda''^2}=\frac{3\lambda+3\lambda''(\lambda''-\lambda')+(1-2\lambda'')(1+2\lambda'')}{3(1-\lambda''^2)}.$$

Les seconds membres de ces égalités se composant des termes positifs, comme on voit par les conditions (15) et (16), la valeur absolue du coëfficient

$$\frac{\lambda-\lambda'\lambda''}{1-\lambda''^2}$$

ne surpasse pas $\frac{1}{3}$ et à fortiori $\frac{1}{2}$.

Passons au second cas

$$\lambda<0, \quad \lambda'<0, \quad \lambda''<0.$$

On aura l'identité

$$\tfrac{1}{2}-\frac{\lambda'\lambda''-\lambda}{1-\lambda''^2}=\frac{1+\lambda+\lambda'+\lambda''}{2(1+\lambda'')}+\frac{\lambda-\lambda'}{2(1-\lambda'')}$$

d'où l'on voit que le coëfficient mentionné ne surpasse pas $\frac{1}{2}$.

Le théorème proposé est donc démontré. Il resulte du théorème du n° 4. que le coëfficient

$$\frac{1 - \lambda^2 - \lambda'^2 - \lambda''^2 + 2\lambda\lambda'\lambda''}{1 - \lambda''^2}$$

que nous désignerons par $p$ ne sera pas inférieur à $\frac{2}{3}$. Cela se vérifie d'ailleurs par les inégalités que nous allons donner. Dans le premier cas

$$\lambda > 0, \quad \lambda' > 0, \quad \lambda'' > 0,$$

$$p = (1 - \lambda''^2)\left[1 - \left(\frac{\lambda - \lambda'\lambda''}{1 - \lambda''^2}\right)^2\right] + \lambda''^2 - \lambda'^2.$$

Or des identités (18) et (19) il vient

$$\left(\frac{\lambda - \lambda'\lambda''}{1 - \lambda''^2}\right)^2 \leqq \tfrac{1}{9}$$

et par conséquent l'équation précédente nous donne

$$p \geqq \tfrac{8}{9}(1 - \lambda''^2) \geqq \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{2}{3}.$$

Dans le second cas

$$\lambda < 0, \quad \lambda' < 0, \quad \lambda'' < 0$$

nous aurons

$$p - \tfrac{2}{3} = -\frac{(\lambda + \lambda')(1 + \lambda + \lambda' + \lambda'')}{1 - \lambda''^2} +$$
$$+ \frac{\lambda' - \lambda'' + (1 + 2\lambda')[1 + \lambda + \lambda' + \lambda'' + (\lambda - \lambda') + (\lambda - \lambda'')]}{3(1 - \lambda'')}.$$

D'après les inégalités (15), (16) et (17) on voit que la différence

$$p - \tfrac{2}{3}$$

est positive ou zéro et par conséquent

$$p \geqq \tfrac{2}{3}.$$

Maintenant nous allons démontrer le théorème:

*Si la forme positive*

$$f = \xi^2 x^2 + \eta^2 y^2 + \zeta^2 z^2 + 2\lambda\eta\zeta yz + 2\lambda'\xi\zeta zx + 2\lambda''\xi\eta xy$$

*aux variables $x$, $y$, $z$ est réduite à la manière de M. Seeber, la forme*

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda yz + 2\lambda' xz + 2\lambda'' xy$$

*est également réduite.*

Les conditions pour les coëfficients de $f$ sont

$$\xi \leqq \eta \leqq \zeta \tag{20}$$

$$(2\lambda) \leqq \frac{\eta}{\zeta}, \quad (2\lambda') \leqq \frac{\xi}{\zeta}, \quad (2\lambda'') \leqq \frac{\xi}{\eta} \tag{21}$$

dans le cas $\lambda > 0$, $\lambda' > 0$, $\lambda'' > 0$.

Il faut y aujouter encore la condition

$$\xi^2 + \eta^2 + 2\lambda\eta\zeta + 2\lambda'\zeta\xi + 2\lambda''\xi\eta \geqq 0 \tag{22}$$

dans le cas de

$$\lambda \leqq 0, \quad \lambda' \leqq 0, \quad \lambda'' \leqq 0.$$

Des inégalités (20) et (21) il résulte immediatement

(23) $$(\lambda) \leqq \tfrac{1}{2}, \quad (\lambda') \leqq \tfrac{1}{2}, \quad (\lambda'') \leqq \tfrac{1}{2}$$

ce qui constitue les conditions de réduction pour la forme $\varphi$ dans le premier cas.

L'identité

$$2\,\eta\zeta\,(1 + \lambda + \lambda' + \lambda'') = (\eta - \xi)\,(\xi + 2\lambda'\zeta) + (\zeta - \xi)\,(\xi + 2\lambda''\eta)$$
$$+ \xi^2 + \eta^2 + 2\lambda\eta\zeta + 2\lambda'\zeta\xi + 2\lambda''\xi\eta$$
$$+ (\zeta - \eta)\,\eta + (\eta - \xi)\,(\zeta - \xi)$$

fait voir que dans le second cas outre les conditions (23) on aura encore

$$(\lambda) + (\lambda') + (\lambda'') \leqq 1$$

d'où il suit le théorème énoncé.

En supposant que $(\lambda)$ est le plus petit des coëfficients $(\lambda)$, $(\lambda')$, $(\lambda'')$ et $(\lambda'')$ le plus grand, représentons $f$ par la somme

$$f = \xi^2\,(x + \lambda''\,\frac{\eta}{\xi}\,y + \frac{\lambda'\zeta}{\xi}\,z)^2 + \eta^2\,(1 - \lambda''^2)\,(\eta + \frac{\lambda - \lambda'\lambda''}{1 - \lambda''^2}\,\frac{\xi}{\eta}\,z)^2$$
$$+ \frac{1 - \lambda^2 - \lambda'^2 - \lambda''^2 + 2\lambda\lambda'\lambda''}{1 - \lambda''^2}\,\zeta^2 z^2.$$

D'après le premier théorème de ce $n^o$ nous avons

$$1 - \lambda''^2 \geqq \tfrac{3}{4}, \quad \frac{1 - \lambda^2 - \lambda'^2 - \lambda''^2 + 2\lambda\lambda'\lambda''}{1 - \lambda''^2} \geqq \tfrac{2}{3}.$$

Ensuite en désignant par $-D$ le déterminant de $f$, il viendra

$$D \geqq \tfrac{1}{2}\,\xi^2\eta^2\zeta^2$$

où ce qui revient au même

(24) $$\xi^2\eta^2\zeta^2 \leqq 2\,D.$$

On a évidemment encore

$$1 - \lambda''^2 \leqq 1, \quad \frac{1 - \lambda^2 - \lambda'^2 - \lambda''^2 - 2\lambda\lambda'\lambda''}{1 - \lambda''^2} \leqq 1.$$

Il en résultera

$$\xi^2\eta^2\zeta^2 \geqq D.$$

L'inégalité (24) constitue le théorème de M. Seeber.

n° 9. Soit proposée une forme à cinq variables au minimum $A$. Supposons que le développement de $\frac{f}{A}$ suivant les minima s'exprime comme il suit

$$\frac{f}{A} = (x + \alpha y + \beta z + \gamma t + \delta u)^2 + k\,(y + \varepsilon z + \zeta t + \theta u)^2$$
$$+ l\,(z + \xi t + \eta u)^2 + m(t + \sigma u)^2 + n u^2.$$

Il résulte du théorème du n° 6. que le nombre $n$ n'est pas infèrieur à $\frac{1}{8}$.

Nous allons maintenant faire voir que $n$ ne peut pas être égal à $\frac{4}{9}$. Supposons $n = \frac{4}{9}$ et démontrons que cela est impossible.

Comme nous avons $n \geqq \frac{2}{3} l$, il vient

$$l \leqq \tfrac{3}{2} n = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{4}{9} = \tfrac{2}{3}.$$

Or $l$ n'est pas inférieur à $\frac{2}{3}$; par conséquent on aura

$$l = \tfrac{2}{3}.$$

D'après le théorème du n° 5. dans la forme

$$l\,(z + \xi t + \eta u)^2 + m\,(t + \sigma u)^2 + n u^2$$

dont le dernier coëfficient est égal à $\frac{2}{3}\,l = \frac{4}{9}$, le coëfficient $m$ doit être égal à $\frac{3}{4}\,l = \frac{1}{2}$ ou encore à $\frac{8}{9}\,l = \frac{16}{27}$. D'après la même proposition dans la forme

$$(x + \alpha y + \beta z)^2 + k\,(y + \varepsilon z)^2 + l z^2$$

$l$ étant égal à $\frac{2}{3}$, on a

$$k = \tfrac{3}{4}, \text{ ou encore } k = \tfrac{8}{9}.$$

Il résulte ainsi les quatre combinaisons

$$\begin{array}{lllll}
1) & k = \frac{8}{9}, & l = \frac{2}{3}, & m = \frac{1}{2}, & n = \frac{4}{9} \\
2) & k = \frac{8}{9}, & l = \frac{2}{3}, & m = \frac{16}{27}, & n = \frac{4}{9} \\
3) & k = \frac{3}{4}, & l = \frac{2}{3}, & m = \frac{1}{2}, & n = \frac{4}{9} \\
4) & k = \frac{3}{4}, & l = \frac{2}{3}, & m = \frac{16}{27}, & n = \frac{4}{9}.
\end{array}$$

Quant à la première combinaison, elle est évidemment impossible. En effet il doit être $m \geqq \frac{2}{3}\,k$ ou $\frac{1}{2} \geqq \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$, ce qui est absurde.

Passons à la seconde. Dans le cas actuel la forme quaternaire

$$(25) \qquad \frac{f}{A} - (x + \alpha y + \beta z + \gamma t + \delta u)^2$$

est d'après le théorème du n° 7. équivalente à celle-ci

$$(26) \quad \tfrac{8}{9}\left[(y + \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{2} t + \tfrac{1}{2} u)^2 + \tfrac{3}{4}\,(z + \tfrac{1}{3} t + \tfrac{1}{3} u)^2 + \tfrac{2}{3}\,(t - \tfrac{1}{2} u)^2 + \tfrac{1}{2} u^2\right].$$

Si la forme (25) n'est pas identique à (26), on peut les faire identiques en changeant $y$, $z$, $t$, $u$ en d'autres variables au moyen de la transformation du module *un*.

On peut par conséquent faire

$$\frac{f}{A} = (x + \alpha y + \beta z + \gamma t + \delta u)^2 + \tfrac{8}{9}\,(y + \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{2} t + \tfrac{1}{2} u)^2 \\ + \tfrac{2}{3}\,(z + \tfrac{1}{3} t + \tfrac{1}{3} u)^2 + \tfrac{16}{27}\,(t - \tfrac{1}{2} u)^2 + \tfrac{4}{9} u^2.$$

Pour déterminer $\alpha$ et $\beta$ considérons la forme

$$(x + \alpha y + \beta z)^2 + \tfrac{8}{9}\,(y + \tfrac{1}{2} z)^2 + \tfrac{2}{3} z^2.$$

En vertu du théorème du n° 5. il vient

$$\alpha = \pm \tfrac{1}{3}, \quad \beta = \mp \tfrac{1}{3}$$

où l'on doit prendre ensemble les signes supérieurs ou inférieurs. On peut supposer

$$\alpha = \tfrac{1}{3}, \quad \beta = -\tfrac{1}{3}$$

car dans le cas contraire on pourrait changer les signes des variables, $y$, $z$, $t$, $u$, ce qui ne change pas la forme (25).

La valeur de $\frac{f}{A}$ pour

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad t = 0, \quad u = 0$$

n'est pas inférieure à l'unité c'est à dire

$$\gamma^2 + \tfrac{8}{9} \geqq 1$$

d'où

$$(\gamma) \geqq \tfrac{1}{3}.$$

Les valeurs de $\frac{f}{A}$ pour

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad t = -1, \quad u = 0$$

et pour

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 1, \quad t = -1, \quad u = 0$$

nous donnent comme précédemment

$$(\gamma - \tfrac{1}{3})^2 \geqq \tfrac{1}{9}, \quad (\gamma + \tfrac{1}{3})^2 \geqq \tfrac{1}{9}.$$

Quelque soit $\gamma$ positif ou négatif, l'une de ces inégalités ne peut pas être satisfaite, puisque $(\gamma)$ est comprise être $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

Ainsi il n'existe pas de valeur convenable de $\gamma$ et la seconde combinaison est impossible. Dans la troisième combinaison on a

$$k = \tfrac{3}{4}, \quad l = \tfrac{2}{3}, \quad m = \tfrac{1}{2}, \quad n = \tfrac{4}{9}$$

et, par conséquent en vertu du théorème du n° 7., la forme à quatre variables qu'on obtient de $\frac{f}{A}$, en supposant $u = 0$ est équivalente à la suivante

$$(x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}t)^2 + \tfrac{3}{4}(y + \tfrac{1}{3}z + \tfrac{1}{3}t)^2 + \tfrac{2}{3}(z - \tfrac{1}{2}t)^2 + \tfrac{1}{2}t^2.$$

En transformant s'il est nécessaire les variables $x$, $y$, $z$, $t$ on peut faire

$$\frac{f}{A} = (x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}t + \delta u)^2 + \tfrac{3}{4}(y + \tfrac{1}{3}z + \tfrac{1}{3}t + \theta u)^2$$
$$+ \tfrac{2}{3}(z - \tfrac{1}{2}t + \eta u)^2 + \tfrac{1}{2}(t + \sigma u)^2 + \tfrac{4}{9}u^2.$$

Dans la forme ternaire

$$\tfrac{2}{3}(z - \tfrac{1}{2}t + \eta u)^2 + \tfrac{1}{2}(t + \sigma u)^2 + \tfrac{4}{9}u^2 = \tfrac{2}{3}[(z - \tfrac{1}{2}t + \eta u)^2 + \tfrac{3}{4}(t + \sigma u)^2 + \tfrac{2}{3}u^2]$$

l'après le théorème du n° 5. doit être

$$\sigma = \pm \tfrac{1}{3}, \quad \eta = \pm \tfrac{1}{2}.$$

On peut faire $\sigma = \frac{1}{3}$ en disposant de signe de $u$. De même on peut toujours supposer $\eta = \frac{1}{2}$, car le cas $\eta = -\frac{1}{2}$, se reduirait à celui-la en changeant $x$ en $x + pu$, $y$ en $y + qu$, $z$ en $z + u$ et en déterminant les entiers $p$ et $q$ de sorte que les coëfficients de $u$ sous le premier et le second carré ne soient pas supérieurs à $\frac{1}{2}$ en valeur absolue. De la valeur de la forme

$$\frac{f}{A} - (x + \tfrac{1}{2}\, y + \tfrac{1}{2}\, z + \tfrac{1}{2}\, t + \delta u)^2 \tag{27}$$

pour $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$, $u = 1$, il vient

$$\tfrac{3}{4}\, \theta^2 + \tfrac{2}{3} \geqq \tfrac{3}{4}$$

d'où il résulte

$$(\theta) \geqq \tfrac{1}{3}.$$

Maintenant les valeurs de la forme (27) pour

$$y = 0, \quad z = -1, \quad t = 0, \quad u = 1,$$
$$y = 1, \quad z = -1, \quad t = -1, \quad u = 1,$$

ne sont pas inférieures au minimum $\frac{3}{4}$ de la forme (27); ainsi on aura

$$(\theta - \tfrac{1}{3})^2 \geqq \tfrac{1}{9}, \quad (\theta + \tfrac{1}{3})^2 \geqq \tfrac{1}{9}.$$

Quelque soit le signe de $\theta$, l'une de ces inégalités n'est pas satisfaite, car on a

$$(\theta) \geqq \tfrac{1}{3}, \quad (\theta) \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Ainsi la troisième combinaison est impossible. Passons à la dernière combinaison:

$$k = \tfrac{3}{4}, \quad l = \tfrac{2}{3}, \quad m = \tfrac{16}{27}, \quad n = \tfrac{4}{9}.$$

Dans le cas actuel la forme ternaire

$$l\,(z + \xi t + \eta u)^2 + m\,(t + \sigma u)^2 + n u^2$$

avec les coëfficients

$$l = \tfrac{2}{3}, \quad m = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{8}{9}, \quad n = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3}$$

est équivalente à la forme

$$\tfrac{2}{3}\,[(z + \tfrac{1}{3}\, t + \tfrac{1}{3}\, u)^2 + \tfrac{8}{9}\,(t - \tfrac{1}{2}\, u)^2 + \tfrac{2}{3}\, u^2] \tag{28}$$

et l'on peut les faire identiques en transformant les variables $z$, $t$, $u$.

Ainsi nous aurons

$$\xi = \tfrac{1}{3}, \quad \eta = \tfrac{1}{3}, \quad \sigma = -\tfrac{1}{2}.$$

De même la forme

$$(x + \alpha y + \beta z)^2 + \tfrac{3}{4}\,(y + \varepsilon z)^2 + \tfrac{2}{3}\, z^2$$

est équivalente à la forme

$$(x + \tfrac{1}{2}\, y + \tfrac{1}{2}\, z)^2 + \tfrac{3}{4}\,(y \pm \tfrac{1}{3}\, z)^2 + \tfrac{2}{3}\, z^2.$$

Comme on peut changer les signes de $z$, $t$, $u$ sans changer par cela la forme (28) nous en profiterons pour faire $\varepsilon$ positif.

En vertu du n° 5. nous aurons

$$\alpha = \pm \tfrac{1}{2}, \quad \beta = \pm \tfrac{1}{2}, \quad \varepsilon = \tfrac{1}{3}.$$

On peut faire

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \beta = \tfrac{1}{2},$$

car les autres combinaisons des signes se réduisent à celle-ci.

En exprimant que les valeurs de la forme

$$\frac{f}{A} - (x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z + \gamma t + \delta u)^2$$

pour

$$y = 0, \quad z = 0, \quad t = 1, \quad u = 0$$

et pour

$$y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0, \quad u = 1$$

ne sont pas inférieures à $\frac{3}{4}$, nous aurons

$$\zeta^2 \geqq \tfrac{1}{9}, \quad \theta^2 \geqq \tfrac{1}{9}$$

et par conséquent

(29) $$(\zeta) \geqq \tfrac{1}{3}, \quad (\theta) \geqq \tfrac{1}{3}.$$

De même les valeurs de $\frac{f}{A}$ pour

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 1, \quad u = 0$$

et pour

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0, \quad u = 1$$

donnent

$$\gamma^2 + \tfrac{3}{4}\zeta^2 + \tfrac{2}{3} \geqq 1, \quad \delta^2 + \tfrac{3}{4}\theta^2 + \tfrac{2}{3} \geqq 1$$

c'est à dire

(30) $$(\gamma) \geqq \sqrt{\tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4}\zeta^2}, \quad (\delta) \geqq \sqrt{\tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4}\theta^2}.$$

Faisons voir maintenant que $\zeta$ et $\theta$ ne peuvent pas être positifs. Soit d'abord

$$\gamma > 0.$$

La valeur de $\frac{f}{A}$ pour

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -1, \quad t = 1, \quad u = 0$$

nous donne l'inégalité

(31) $$(\tfrac{1}{2} - \gamma)^2 + \tfrac{3}{4}(\zeta - \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{8}{9} \geqq 1$$

qui sera satisfaite si au lieu de $\gamma$ on y substitue son minimum $\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\zeta^2}$, puisque $\gamma \leqq \frac{1}{2}$. Nous aurons donc

$$(\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4}\zeta^2})^2 + \tfrac{3}{4}(\zeta - \tfrac{1}{3})^2 \geqq \tfrac{1}{9}.$$

De là nous obtenons

$$\zeta^2 - \tfrac{5}{9}\zeta - \tfrac{2}{81} \geqq 0.$$

Cette inégalité fait voir que $\zeta$ doit être supérieur à la racine positive

$$\frac{5 + \sqrt{33}}{18} > \tfrac{1}{2}$$

de l'équation

$$\zeta^2 - \tfrac{5}{9}\zeta - \tfrac{2}{81} = 0,$$

ce qui est impossible, ou être supérieur en valeur absolue à sa racine négative. Ainsi $\zeta$ ne peut être positif.

Répétant la même analyse et considérant la valeur de $\frac{f}{A}$ pour

$$x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad z = -1\,, \quad t = 0\,, \quad u = 1$$

nous n'avons qu'à changer dans ce qui précéde $\gamma$ en $\delta$ et $\zeta$ en $\theta$ et nous verrons que $\theta$ ne peut pas être positif pour $\delta > 0$.

Soit maintenant

$$\gamma < 0.$$

De la valeur de $\frac{f}{A}$ pour

$$x = 1\,, \quad y = 0\,, \quad z = -1\,, \quad t = 1\,, \quad u = 0$$

il viendra

$$(\tfrac{1}{2} - (\gamma))^2 + \tfrac{3}{4}(\zeta - \tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{2}{9} \geq 1.$$

Or cette inégalité est identique à (31) et il en résulte que $\zeta$ n'est pas positif. Si $\delta < 0$, la valeur de $\frac{f}{A}$ pour

$$x = 1\,, \quad y = 0\,, \quad z = -1\,, \quad t = 0\,, \quad u = 1$$

fait voir de la même manière que $\theta$ n'est pas positif. Ainsi il est démontré que $\zeta$ et $\theta$ ne peuvent avoir que valeurs négatives.

Cela posé, nous allons fair voir que les valeurs négatives $\zeta$ et $\theta$ sont également impossibles. Considérons deux cas:

1) $\gamma$ et $\delta$ — sont de mêmes signes,

2) $\gamma$ et $\delta$ — sont des signes différents.

Soient, en premier lieu,

$$\gamma > 0\,, \quad \delta > 0.$$

De la valeur de la forme $\frac{f}{A}$ pour

$$x = -1\,, \quad y = 1\,, \quad z = -1\,, \quad t = 1\,, \quad u = 1$$

on déduit

(32) $$(\gamma + \delta - 1)^2 + \tfrac{3}{4}(\tfrac{2}{3} + \zeta + \theta)^2 \geq \tfrac{1}{3}.$$

Or en vertu de (30) il vient

$$\gamma + \delta \geq 2\sqrt{\tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4}\tfrac{1}{2^2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{7}{3}}$$

par conséquent

$$1 - \gamma - \delta \leq 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{7}{3}}.$$

De même en vertu de (29) on aura

$$-(\tfrac{2}{3} + \zeta + \theta) \leq \tfrac{1}{3}$$

et parsuite de l'inégalité (32) il vient

$$(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{7}{3}})^2 + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{9} > \tfrac{1}{3}$$

ce qui est impossible et, par conséquent, l'inégalité (32) est impossible.

Soient, en second lieu,

$$\gamma < 0\,, \quad \delta < 0\,.$$

La valeur de $\frac{f}{A}$ pour

$$x = 1\,, \quad y = 1\,, \quad z = -1\,, \quad t = 1\,, \quad u = 1$$

donnera

$$[(\gamma) + (\delta) - 1]^2 + \tfrac{3}{4}(\tfrac{2}{3} + \zeta + \theta)^2 \geq \tfrac{1}{3}\,.$$

Cette inégalité coincide avec (31) et est également impossible.

Considérons maintenant le second cas où $\gamma$ et $\delta$ sont de signes différents. Prenons la valeur de $\frac{f}{A}$ pour

$$x = 0\,, \quad y = 1\,, \quad z = -1\,, \quad t = 1\,, \quad u = 1\,.$$

Nous aurons

(33) $$(\gamma + \delta)^2 + \tfrac{3}{4}(\tfrac{2}{3} + \zeta + \theta)^2 \geq \tfrac{1}{3}\,.$$

Or nous avons vu que

$$-(\tfrac{2}{3} + \zeta + \theta) < \tfrac{1}{3}$$

et en vertu de (30)

$$(\gamma + \delta)^2 \leq (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{7}{3}})^2$$

par conséquent l'inégalité (33) donne

$$(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{7}{3}})^2 + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{9} \geq \tfrac{1}{3}$$

ce qui est impossible.

Ainsi $\zeta$ et $\theta$ ne peuvent pas être négatifs.

Nous avons donc le théorème suivant.

*Dans le développement d'une forme quadratique positive suivant les minima le cinquième coëfficient surpasse toujours $\frac{1}{9}$ du minimum de la forme et leur différence est une quantité finie.*

n° 10. Il suit de ce théorème que la limite donnée au n° 6. n'est précise que pour $n = 2, 3, 4$. A partir de $n = 5$ elle n'est plus précise.

En effet, les formules du n° 6. donnent pour $n = 5$ la limite $\sqrt[4]{9}\,D$. Or elle n'est possible qu'en supposant le cinquième coëfficient égal à $\frac{1}{9}$ du minimum de la forme et les autres coëfficients devant les carrés égaux à leurs valeurs minima. Cela est impossible en vertu du théorème du *n°* précédent. Il est évident à fortiori que les formules du n° 6. donnent pour $n > 5$ des limites qui ne sont pas précises.

# Ueber die Beziehungen zwischen den bei Centralbewegungen vorkommenden charakteristischen Grössen*).

Von R. Clausius in Bonn.

---

In einer Abhandlung vom vorigen Jahre**) habe ich für die Bewegung eines materiellen Punktes um ein festes Anziehungscentrum und für die Bewegung zweier materieller Punkte um einander einige neue Beziehungen zwischen Umlaufszeit, lebendiger Kraft, Ergal und Energie abgeleitet, welche an die Bedingung geknüpft sind, dass die Bewegungen in geschlossenen Bahnen stattfinden. Da nun aber diese Bedingung nur bei besonderen Arten von Anziehungskräften allgemein erfüllt ist, so schien es mir von Interesse zu sein, dieselbe Behandlungsart des Gegenstandes auch auf den Fall auszudehnen, wo die Bahnen keine geschlossenen Curven bilden, und ich erlaube mir, das Resultat dieser Untersuchung im Folgenden mitzutheilen.

1) Als Grundlage der Untersuchung dienen zwei von mir für stationäre Bewegungen aufgestellte neue Gleichungen. Ich will daher zunächst diese Gleichungen anführen, und da in neuester Zeit von verschiedenen Seiten der Zusammenhang derselben mit Gleichungen, die schon früher bekannt waren, zur Sprache gebracht ist, so wird es vielleicht zweckmässig sein, auch diesen Punkt kurz zu erörtern, um einerseits den Zusammenhang und andererseits den Unterschied erkennen zu lassen.

Sei ein frei beweglicher Punkt mit der Masse $m$ gegeben, welcher zur Zeit $t$ die Coordinaten $x$, $y$, $z$ hat, und auf den eine Kraft wirkt, deren nach den Coordinatenrichtungen genommene Componenten $X$, $Y$, $Z$ heissen, dann lässt sich aus der Differentialgleichung der Bewegung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

sehr leicht folgende Gleichung ableiten:

---

*) Aus den Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen vom December 1872.

**) Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. vom 24. Mai 1871 und Math. Ann. von Clebsch und Neumann Bd. IV, S. 231.

$$(1) \qquad \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2}Xx + \frac{m}{4}\frac{d^2(x^2)}{dt^2}.$$

Diese Gleichung habe ich auf den Fall angewandt*), wo die Bewegung stationär ist, d. h. wo die Coordinaten und Geschwindigkeiten sich nicht fortdauernd in gleichem Sinne ändern, sondern nur innerhalb gewisser Grenzen variiren. In diesem Falle ist der auf eine Bewegungsperiode oder auf eine sehr lange Zeit bezogene Mittelwerth des Differentialcoefficienten zweiter Ordnung $\frac{d^2(x^2)}{dt^2}$ gleich Null. Wenn wir daher die Mittelwerthe der beiden anderen in der Gleichung vorkommenden Grössen dadurch andeuten, dass wir über die betreffenden Formeln horizontale Striche setzen, so geht die Gleichung über in:

$$(2) \qquad \frac{m}{2}\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = -\frac{1}{2}\overline{Xx}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) gelten natürlich in derselben Form auch für die beiden anderen Coordinaten. Wenn wir ferner statt eines einzelnen frei beweglichen Punktes ein ganzes System von frei beweglichen Punkten haben, so gelten für jeden Punkt dieses Systemes dieselben Gleichungen. Man kann die letzteren daher auch sofort dahin erweitern, dass sie sich auf alle drei Coordinaten und das ganze System von Punkten beziehen. Wenden wir nämlich für den Radius vector eines Punktes den Buchstaben $r$ und für seine Geschwindigkeit den Buchstaben $v$ an, welche Buchstaben für die verschiedenen Punkte mit verschiedenen Indices versehen werden können, so gehen die beiden Gleichungen über in:

$$(1\text{a}) \qquad \Sigma\frac{m}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\Sigma(Xx + Yy + Zz) + \frac{1}{4}\frac{d^2(\Sigma mr^2)}{dt^2}$$

$$(2\text{a}) \qquad \Sigma\frac{m}{2}\overline{v^2} = -\frac{1}{2}\Sigma\overline{(Xx + Yy + Zz)}.$$

Die unter (2) und in erweiterter Form unter (2a) angeführte Gleichung ist die *erste* meiner beiden oben erwähnten Gleichungen. Ich habe die Grösse, welche sich in (2a) auf der rechten Seite befindet, das *Virial* des Systemes genannt, und habe dann den Sinn der Gleichung (2a) in folgendem Satze ausgesprochen: *die mittlere lebendige Kraft des Systemes ist gleich seinem Virial.* Dabei habe ich aber bemerkt, dass der Satz nicht blos für das ganze Punktsystem und für die drei Coordinaten zusammen gilt, sondern auch für jeden Punkt und jede Coordinate einzeln. Wenn man die Grösse $\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ die auf die $x$-Richtung bezügliche lebendige Kraft des Punktes und ebenso die

*) Sitzungsberichte der niederrhein. Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1870, S. 114 und Pogg. Ann. Bd. 141, S. 124.

Grösse $-\frac{1}{2}\overline{Xx}$ das auf die $x$-Richtung bezügliche Virial nennt, und bedenkt, dass die $x$-Richtung ganz beliebig gewählt werden kann, so lässt sich der Satz folgendermassen aussprechen: *für jeden Punkt ist die auf eine beliebige Richtung bezügliche mittlere lebendige Kraft gleich dem auf dieselbe Richtung bezüglichen Virial.*

Ich bin nun darauf aufmerksam gemacht worden, dass eine von Jacobi und eine von Lipschitz aufgestellte Gleichung mit den von mir angestellten Betrachtungen im Zusammenhange stehe.

Die Gleichung von Jacobi befindet sich in Crelle's Journal Bd. 17, S. 121 und in Jacobi's „Vorlesungen über Dynamik" S. 22, wo sie unter (2) angeführt ist. Es ist dort angenommen, dass die in dem Systeme wirkenden Kräfte eine Kräftefunction haben, und noch specieller, dass diese Kräftefunction $U$ eine homogene Function der $k^{\text{ten}}$ Dimension sei, und die betreffende Gleichung lautet:

$$\frac{d^2(\Sigma m_i r_i^2)}{dt^2} = (2k+4)\,U + 4h\,,$$

worin $h$ die zur Kräftefunction gehörende additive Constante ist. Diese Gleichung kann offenbar nur mit der Gleichung (1a), aber nicht mit (2a) verglichen werden, und auch von (1a) unterscheidet sie sich einerseits durch eine sehr abweichende Form, indem sie die lebendige Kraft gar nicht enthält, und andererseits noch wesentlich dadurch, dass sie nur für Kräfte von einer ziemlich beschränkten Art gilt, während (1a) für alle Kräfte gültig ist.

Viel allgemeiner ist die von Lipschitz aufgestellte Gleichung, welche sich in seiner Abhandlung „über einen algebraischen Typus der Bedingungen eines bewegten Massensystems" *) befindet. Lipschitz betrachtet ebenfalls ein System bewegter materieller Punkte $P_1, P_2 \cdots\cdots P_n$, welche aber nicht frei zu sein brauchen, sondern Bedingungen unterworfen sein können, die durch Gleichungen von einer dort näher bestimmten Form ausgedrückt werden. Für jeden Punkt nimmt er eine gewisse ausgezeichnete Lage an, und bezeichnet die Coordinaten derselben für den Punkt $P_\alpha$ mit $a_\alpha$, $b_\alpha$, $c_\alpha$, während $P_\alpha$ selbst zur Zeit $t$ die Coordinaten $x_\alpha$, $y_\alpha$, $z_\alpha$ hat. Ferner führt er ausser der Kräftefunction $U$ und der lebendigen Kraft $T$ des ganzen Systemes noch eine Grösse $G$ ein, welche durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$\sum_\alpha m_\alpha\left[(x_\alpha-a_\alpha)^2+(y_\alpha-b_\alpha)^2+(z_\alpha-c_\alpha)^2\right]=2\,G\,,$$

und mit Hülfe dieser Grösse bildet er folgende Gleichung:

---

*) Borchardt's Journ. für reine u. angew. Math. Bd. 66.

$$\frac{d^2G}{dt^2} - 2T = \sum_{\alpha} \left[(x_\alpha - a_\alpha)\frac{dU}{dx_\alpha} + (y_\alpha - b_\alpha)\frac{dU}{dy_\alpha} + (z_\alpha - c_\alpha)\frac{dU}{dz_\alpha}\right].$$

Diese Gleichung ist der Gleichung (1a) sehr ähnlich. In einigen Beziehungen ist sie noch allgemeiner. Erstens hat Lipschitz ihr noch eine allgemeinere Bedeutung gegeben, indem er sie nicht blos für freie Systeme aufgestellt hat, sondern auch für solche Systeme, die gewissen Bedingungen unterworfen sind, und zweitens ist in ihr für jeden Punkt eine besondere ausgezeichnete Lage angenommen, über die noch verfügt werden kann, während in (1a) die entsprechende ausgezeichnete Lage für alle Punkte der Anfangspunkt der Coordinaten ist. In anderer Beziehung dagegen ist sie beschränkter, indem in ihr die in (1a) nicht vorkommende Voraussetzung gemacht ist, dass die Kräfte eine Kräftefunction haben.

Weiter als bis zu dieser in seiner Abhandlung unter (6) angeführten Gleichung reicht aber die Uebereinstimmung der Betrachtungen von Lipschitz mit meinen Betrachtungen nicht, indem Lipschitz von hier an der Untersuchung eine ganz andere Wendung giebt. Während ich schon die Gleichung (1), welche allgemeiner ist als (1a), auf stationäre Bewegungen angewandt und für diese die Gleichung (2) abgeleitet habe, verfährt Lipschitz folgendermassen. Zunächst giebt er seiner Gleichung noch eine andere Gestalt, indem er mit Hülfe der Beziehung, welche zwischen der Kräftefunction und der lebendigen Kraft besteht, die letztere aus seiner Gleichung eliminirt. Sodann geht er dazu über, seine Gleichung dadurch weiter zu specialisiren, dass er über die Natur der Kräftefunction bestimmte Voraussetzungen macht, wohin insbesondere die gehört, dass die Kräftefunction eine algebraische homogene Function der Elemente $x_\alpha - a_\alpha$, $y_\alpha - b_\alpha$, $z_\alpha - c_\alpha$ sei. Für die durch diese Voraussetzungen beschränkten Fälle untersucht er dann, welche Bedingung nothwendig und hinreichend ist, damit die Bewegung stabil sei. Diese Untersuchung ist sowohl durch den Gegenstand, den sie behandelt, als auch durch die Behandlung selbst von hohem Interesse, aber von meinen Betrachtungen ist sie ganz verschieden, und demgemäss kommt auch das Resultat, welches ich abgeleitet und durch den Satz vom Virial ausgedrückt habe, in ihr nicht vor.

Den Umstand, dass Niemand vor mir diesen Satz ausgesprochen hat, obwohl die betreffende Gleichung (2) sich so leicht aus den Grundgleichungen der Bewegung ergiebt, glaube ich mir daraus erklären zu müssen, dass man bisher weniger Veranlassung hatte, den stationären Bewegungen als solchen seine Aufmerksamkeit zuzuwenden. Seit aber die neuere Ansicht über das Wesen der Wärme zur Geltung gekommen ist, haben wir es in der Wärmelehre mit einer stationären Bewegung der kleinsten Bestandtheile der Körper zu thun, und da wir über die Natur dieser Bewegung noch sehr wenig wissen, so lag es nahe, wenigstens die Folgerung zu ziehen, welche sich schon aus der Bedingung, dass die Bewegung stationär ist, ziehen liess; und in der That ist der so gewonnene Satz für die Wärmelehre von besonderer Wichtigkeit.

2) Was nun meine *zweite* Gleichung anbetrifft, so will ich dieselbe hier nur in der Form anführen, welche sie für einen einzelnen beweglichen Punkt hat, da diese Form für das Folgende ausreichend ist, und die Ausdehnung auf ein System von beliebig vielen Punkten Auseinandersetzungen erfordern würde, die hier zu weitläufig wären.

Diese Gleichung steht im Zusammenhange mit denjenigen, welche den Satz von der kleinsten Wirkung und die von Hamilton gegebene Erweiterung dieses Satzes ausdrücken, ist aber doch in einem wesentlichen Punkte von ihnen verschieden, was man sofort ersehen wird, wenn ich auch die letzteren beiden Gleichungen hierher setze, so dass man alle drei Gleichungen neben einander vor Augen hat.

Ein materieller Punkt bewege sich unter dem Einflusse einer Kraft in freier Weise von einem gegebenen Anfangspunkte zu einem gegebenen Endpunkte. Sodann denke man sich statt dieser Bewegung eine andere Bewegung des materiellen Punktes, welche zwischen denselben beiden Grenzpunkten in einer unendlich wenig veränderten Bahn stattfindet. Wenn nun die auf den Punkt wirkende Kraft eine Kräftefunction oder (nach einer von mir vorgeschlagenen Benennungsweise) ein *Ergal* hat, und wenn ferner angenommen wird, dass bei beiden Bewegungen das Ergal durch eine und dieselbe Function der Raumcoordinaten dargestellt werde, und die Energie (die Summe aus Ergal und lebendiger Kraft) einen und denselben Werth habe, so gilt folgende, als Ausdruck des Satzes von der kleinsten Wirkung bekannte Gleichung:

$$\delta \int^{i} v^2 dt = 0. \tag{3}$$

Wenn man die Zeit, welche der Punkt zu seiner Bewegung bedarf, mit $i$ bezeichnet, so kann man diese Gleichung auch so schreiben:

$$\delta\, (\overline{v^2}\, i) = 0. \tag{3a}$$

Eben diese Gleichung gilt auch, wenn die Grenzpunkte, zwischen denen die veränderte Bewegung stattfindet, nicht dieselben sind, wie bei der ursprünglichen Bewegung, aber doch die Bedingung erfüllen, dass die Grösse

$$\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z$$

zu Ende der Bewegung denselben Werth hat wie zu Anfang. Diese letztere Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn beide Bewegungen in geschlossenen Bahnen stattfinden, und man bei jeder Bewegung einen ganzen Umlauf betrachtet, so dass ihr Endpunkt mit ihrem Anfangspunkte zusammenfällt.

Sollte dagegen diese auf die Grenzpunkte bezügliche Bedingung nicht erfüllt sein, so würde an die Stelle der Gleichung (3a) die folgende treten müssen:

$$\delta(\overline{v^2 i}) = \left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)_1 - \left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)_0, \tag{3b}$$

worin die Indices $_0$ und $_1$ den Anfangs- und Endwerth der in Klammern geschlossenen Grösse andeuten. Der Einfachheit wegen wollen wir aber im Folgenden jene Bedingung immer als erfüllt ansehen, und demgemäss die an der rechten Seite der vorigen Gleichung stehende Differenz gleich Null setzen, so dass die Gleichung die Form (3a) behält.

Die von Hamilton eingeführte Erweiterung besteht nun darin, dass der Energie nicht bei beiden Bewegungen derselbe Werth zugeschrieben, sondern eine Veränderung der Energie als zulässig betrachtet wird, während jedoch das Ergal bei der veränderten Bewegung noch dieselbe Function der Raumcoordinaten sein muss, wie bei der ursprünglichen Bewegung. Die für diesen Fall von Hamilton aufgestellte Gleichung ist folgende*), worin $E$ die Energie bedeutet:

$$m\delta(\overline{v^2 i}) = i\delta E. \tag{4}$$

Die von mir aufgestellte Gleichung**) lautet in ihrer ursprünglichsten Form:

$$-(\overline{X\delta x + Y\delta y + Z\delta z}) = \frac{m}{2}\delta\overline{v^2} + m\overline{v^2}\delta\log i. \tag{5}$$

Hierin ist die auf den Punkt wirkende Kraft durch keine Bedingung beschränkt. Machen wir, wie vorher, die Voraussetzung, dass die Kraft ein Ergal habe, und bezeichnen dasselbe mit $U$, indem wir dabei den positiven und negativen Sinn des Ergals in der Weise festsetzen, dass die Summe aus lebendiger Kraft und Ergal bei der Bewegung constant ist, so geht die Gleichung über in:

$$\overline{\frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z} = \frac{m}{2}\delta\overline{v^2} + m\overline{v^2}\delta\log i; \tag{5a}$$

---

*) Thomson and Tait: Treatise of Natural Philosophy, p. 235; Deutsche Uebersetzung von Helmholtz und Wertheim S. 263.

**) Sitzungsberichte der Niederrhein. Gesellsch. für Natur- und Heilkunde 1872, S. 174; diese Ann. Bd. 142, S. 442.

aber es ist hierin nicht wie in der Hamilton'schen Gleichung, vorausgesetzt dass die durch $U$ bezeichnete Function der Raumcoordinaten, welche das Ergal darstellt, unveränderlich sei, sondern diese Function kann beim Uebergange aus der einen Bewegung in die andere eine von der Veränderung der Coordinaten unabhängige Veränderung erleiden. Denken wir uns z. B., die Function enthalte irgend welche von den Coordinaten unabhängige und somit während der Bewegung constante Grössen, so müssen diese Constanten, damit die Hamilton'sche Gleichung gültig sei, auch bei der veränderten Bewegung dieselben Werthe haben, wie bei der ursprünglichen Bewegung. Für die Gültigkeit meiner Gleichung dagegen ist das nicht nöthig, sondern die Constanten können beim Uebergange aus der einen Bewegung in die andere ihre Werthe ändern.

Dadurch erhält die Summe

$$\frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z,$$

deren Mittelwerth in meiner Gleichung (5a) vorkommt, eine eigenthümliche Bedeutung. Man darf sie nicht durch das Zeichen $\delta U$ ersetzen, wenn man unter diesem Zeichen die vollständige Variation des Ergals versteht. Die vollständige Variation muss nämlich nicht blos den Unterschied enthalten, welcher durch die Verschiedenheit der Coordinaten bedingt ist, sondern auch denjenigen Unterschied, welcher von der Veränderung der Functionsform, also z. B. von der Veränderung gewisser in der Function vorkommender Constanten herrührt. Bezeichnen wir diese Constanten mit $c$, $c_1$ etc. und ihre veränderten Werthe mit $c + \delta c$, $c_1 + \delta c_1$ etc., so müssen wir meine Gleichung, wenn wir das allgemeine Variationszeichen $\delta U$ in ihr anwenden wollen, so schreiben:

$$\text{(5b)}\qquad \delta\overline{U} - \frac{d\overline{U}}{dc}\delta c - \frac{d\overline{U}}{dc_1}\delta c_1 - \text{etc.} = \frac{m}{2}\delta\overline{v^2} + m\overline{v^2}\delta\log i.$$

Um eine bequemere Schreibweise für die Gleichung zu gewinnen, wird es vielleicht zweckmässig sein, für den Theil der Variation, welcher sich nur auf die Veränderung der Coordinaten bezieht, ein besonderes Zeichen einzuführen, z. B. ein mit einem Index versehenes $\delta$ anzuwenden, indem man setzt:

$$\delta_1 U = \frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z.$$

Dann lautet meine Gleichung:

$$\text{(5c)}\qquad \delta_1\overline{U} = \frac{m}{2}\delta\overline{v^2} + m\overline{v^2}\delta\log i\ ^{*}).$$

*) In meiner ersten auf diesen Gegenstand bezüglichen Abhandlung habe ich allerdings die an der linken Seite meiner Gleichung stehende Summe durch das

3) Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun zur Behandlung der Centralbewegungen schreiten.

Wenn wir die Bewegung eines Punktes um ein festes Anziehungscentrum auf Polarcoordinaten beziehen, deren Mittelpunkt mit dem Anziehungscentrum zusammenfällt, so bieten sich uns zwei verschiedene Vorgänge zur Betrachtung dar, die Winkelbewegung des Radius vector und die Bewegung des Punktes im Radius vector. Die letztere besteht, sofern die ganze Bewegung überhaupt stationär ist, in abwechselnder Annäherung an das Centrum und Entfernung von demselben.

Wenn die zu einer Annäherung und Entfernung gebrauchte Zeit gleich der Umdrehungszeit des Radius vector ist, so kommt der bewegliche Punkt nach jeder Umdrehung wieder an dieselbe Stelle des Raumes, und beginnt von hier aus einen neuen Umlauf in derselben Bahn, und wir erhalten somit eine fortdauernde Bewegung in geschlossener Bahn. Dasselbe ist der Fall, wenn sich während einer Umdrehung irgend eine ganze Anzahl von Annäherungen und Entfernungen vollzieht. Finden ferner während einer Annäherung und Entfernung mehrere Umdrehungen statt, oder ist auch nur überhaupt die Zeit einer Annäherung und Entfernung mit der Umdrehungszeit commensurabel, so wird der Punkt zwar nicht nach jeder Umdrehung, aber doch nach einer gewissen Anzahl von Umdrehungen wieder an dieselbe Stelle des Raumes kommen, und dann die eben vollendete Bewegung in gleicher Weise wiederholen, so dass eine geschlossene Bahn von mehreren Umläufen entsteht. Wenn dagegen, was der allgemeinste Fall ist, die Zeit der Annäherung und Entfernung mit der Umdrehungszeit des Radius vector incommensurabel ist, so wird jeder folgende Umlauf in anderer Bahn stattfinden als die vorhergegangenen, und wir haben es dann nicht mehr mit einer geschlossenen Bahn zu thun.

Um nun meine *erste* Gleichung auf die Centralbewegung eines Punktes anzuwenden, können wir zunächst dem Virial eine einfachere Form geben. Wenn die auf den Punkt wirkende Kraft eine vom Anfangspunkte der Coordinaten ausgehende Anziehung oder Abstossung ist, deren Stärke durch die Function $F'(r)$ dargestellt wird, wobei ein

---

einfache Zeichen $\delta \overline{U}$ ersetzt, dort habe ich aber auch dem Buchstaben $U$ ausdrücklich eine andere Bedeutung beigelegt, als es hier geschehen ist. Ich habe nämlich dort gesagt, mit $U$ solle das Ergal *für die ursprüngliche Bewegung* bezeichnet werden. Die Veränderung in der Form des Ergals, welche beim Uebergange aus der einen Bewegung in die andere eintritt, habe ich dann dadurch ausgedrückt, dass ich bei der veränderten Bewegung das Ergal mit $U + \mu V$ bezeichnet habe, worin $V$ eine zweite Function der Coordinaten und $\mu$ eine unendlich kleine Constante bedeutet.

positiver Werth der Function Anziehung und ein negativer Werth Abstossung bedeuten soll, so ist

$$-\frac{1}{2}(Xx + Yy + Zz) = \frac{1}{2} r F'(r),$$

und die Gleichung (2a) geht daher über in:

$$(6) \qquad \frac{m}{2}\overline{v^2} = \frac{1}{2}\overline{rF'(r)}.$$

Bei dieser Gleichung ist der Unterschied, ob die Bahn geschlossen ist oder nicht, ohne Belang. Für ihre Anwendbarkeit ist es nur nöthig, dass die Bewegung *stationär* ist, so dass die Grössen $v^2$ und $rF'(r)$ sich nicht fortdauernd in gleichem Sinne ändern, sondern nur innerhalb gewisser Grenzen schwanken und daher bestimmte Mittelwerthe haben.

Anders ist es mit meiner *zweiten* Gleichung. In dieser kommt die Zeitdauer $i$ der betrachteten Bewegung vor. Wenn nun die Bewegung in geschlossener Bahn stattfindet und sich daher in ganz gleicher Weise regelmässig wiederholt, so können wir die Betrachtung auf die einmalige Durchlaufung dieser Bahn beschränken und die dazu nöthige Zeit als die Grösse $i$ annehmen. Diesen Fall habe ich in meinem vorigen Aufsatze behandelt. Wenn aber die Bewegung nicht in geschlossener Bahn stattfindet, und daher keine sich in gleicher Weise wiederholende Perioden darbietet, so lässt die Betrachtung sich nicht so einfach auf eine bestimmte Zeit beschränken, und es bedarf einer weiteren Untersuchung, um zu erkennen, ob und in welcher Weise meine zweite Gleichung auch auf einen solchen Fall angewandt werden kann.

4) Zu dem Zwecke wollen wir die schon oben angedeutete Trennung der ganzen Bewegung in zwei Vorgänge, die Winkelbewegung des Radius vector und die Hin- und Herbewegung des Punktes innerhalb des Radius vector, noch etwas weiter durchführen.

Die Winkelbewegung des Radius vector wollen wir *Drehungsbewegung* nennen und unter *Umdrehungszeit* diejenige Zeit verstehen, während welcher der Radius vector den ganzen Winkelraum $2\pi$ durchläuft. Die Bewegung des Punktes innerhalb des Radius vector wollen wir *radiale Schwingungsbewegung* oder auch kurzweg *Schwingungsbewegung* nennen, und für die Zeit, während welcher eine Hin- und Herschwingung stattfindet, den Namen *Schwingungszeit* wählen. Die Umdrehungszeit möge mit $i$ und die Schwingungszeit mit $i_1$ bezeichnet werden.

Die Schwingungsbewegung kann als eine von der Umdrehungsbewegung ganz unabhängige Bewegung behandelt werden, wenn man die Centrifugalkraft als eine besondere Kraft einführt. Sei der Winkel, welchen der Radius vector mit einer in der Drehungsebene festen Geraden zur Zeit $t$ bildet, mit $\vartheta$ bezeichnet, so dass $\frac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit des Radius vector bedeutet, dann wird die durch die Drehung entstehende Centrifugalkraft durch das Product

$$mr\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$

dargestellt. Da nun für die Bewegung eines Punktes um ein festes Anziehungscentrum der Satz gilt, dass der Radius vector in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreibt, so haben wir die Gleichung

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = c, \tag{7}$$

worin $c$ eine Constante ist, und hieraus ergiebt sich sofort weiter:

$$mr\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = mc^2\frac{1}{r^3}. \tag{7a}$$

Die durch diesen Ausdruck dargestellte Centrifugalkraft betrachten wir nun als eine vom Centrum ausgeübte Abstossungskraft, welche zu der vom Centrum wirklich ausgeübten und durch $F'(r)$ dargestellten Kraft hinzukommt. Dann erhalten wir für die Schwingungsbewegung folgende Differentialgleichung:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -F'(r) + mc^2\frac{1}{r^3}, \tag{8}$$

mit Hülfe deren wir die Schwingungsbewegung als eine für sich allein bestehende Bewegung behandeln können. Auf diese so betrachtete Bewegung finden meine beiden Gleichungen ohne Weiteres Anwendung.

Die Gleichung (2) giebt, wenn wir $x$ durch $r$ und $X$ durch $-F'(r) + mc^2\frac{1}{r^3}$ ersetzen:

$$\frac{m}{2}\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{rF'(r)} - \frac{m}{2}c^2\overline{\frac{1}{r^2}}. \tag{9}$$

Die zweite Gleichung lautete in der unter (5c) gegebenen Form:

$$\delta_1\overline{U} = \frac{m}{2}\delta\overline{v^2} + m\overline{v^2}\delta\log i.$$

Um diese Gleichung anzuwenden, haben wir zunächst den Ausdruck des Ergals $U$ für die Schwingungsbewegung zu bilden. Gemäss der Gleichung (8) ist zu setzen:

$$U = \int\left(F'(r) - mc^2\frac{1}{r^3}\right)dr,$$

woraus durch Ausführung der Integration, wenn wir das Integral von $F'(r)$ mit $F(r)$ bezeichnen, folgt:

$$U = F(r) + \frac{m}{2} c^2 \frac{1}{r^2} \cdot$$

Dieses ist eine solche Function, wie sie oben erwähnt wurde, welche eine Grösse $c$ enthält, die während jeder Bewegung constant ist, aber beim Uebergange aus einer Bewegung in die andere ihren Werth ändern kann. Diese Grösse muss bei der Bildung der Variation $\delta_1 U$ als constant angesehen werden, und es kommt somit:

$$\delta_1 U = \delta \overline{F(r)} + \frac{m}{2} c^2 \delta \overline{\frac{1}{r^2}} \cdot$$

Wenn wir diesen Ausdruck in die Gleichung (5c) einführen und zugleich $v^2$ durch $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ ersetzen und statt $i$ das für die Schwingungszeit gewählte Zeichen $i_1$ benutzen, so geht die Gleichung über in:

$$\delta \overline{F(r)} + \frac{m}{2} c^2 \delta \overline{\frac{1}{r^2}} = \frac{m}{2} \delta \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} + m \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \delta \log i_1 . \tag{10}$$

Aus den so gewonnenen beiden Gleichungen (9) und (10) können wir die Grösse $\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}$ eliminiren. Wir wollen aber für jetzt nur in der Variation von $\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}$ den in (9) gegebenen Ausdruck anwenden. Dabei ist zu beachten, dass *diese* Variation eine vollständige ist, bei der auch die Veränderung der Grösse $c$ mit berücksichtigt werden muss. Wir erhalten demnach:

$$\frac{m}{2} \delta \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = \frac{1}{2} \delta \overline{r F'(r)} - \frac{m}{2} c^2 \delta \overline{\frac{1}{r^2}} - m \overline{\frac{1}{r^2}} c \delta c . \tag{11}$$

Dieses in (10) eingesetzt, giebt:

$$\delta \overline{F(r)} + \frac{m}{2} c^2 \delta \overline{\frac{1}{r^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \delta \overline{r F'(r)} - \frac{m}{2} c^2 \delta \overline{\frac{1}{r^2}} - m \overline{\frac{1}{r^2}} c \delta c + m \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \delta \log i_1$$

oder anders geordnet:

$$\delta \overline{F(r)} - \frac{1}{2} \delta \overline{r F'(r)} = - m c^2 \delta \overline{\frac{1}{r^2}} - m \overline{\frac{1}{r^2}} c \delta c + m \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \delta \log i_1 ,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\delta \left[\overline{F(r)} - \frac{1}{2} \overline{r F'(r)}\right] = - m c \delta \left(c \overline{\frac{1}{r^2}}\right) + m \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \delta \log i_1 . \tag{12}$$

5) Wir wenden uns nun zur Drehungsbewegung.

Bei einer solchen Bewegung, bei der der bewegliche Punkt am Ende einer Umdrehung nicht dieselbe Entfernung vom Centrum zu haben braucht, wie am Anfange, braucht auch die Umdrehungszeit des Radius vector für mehrere auf einander folgende Umdrehungen nicht ganz gleich zu sein; aber jedenfalls werden wir für eine grössere Reihe von Umdrehungen einen bestimmten Mittelwerth der Umdrehungszeit erhalten. Auf diesen wollen wir das Zeichen $i$ beziehen. Nun können wir zufolge der Gleichung (7) schreiben:

$$d\vartheta = c\frac{1}{r^2}dt,$$

und wenn wir diese Gleichung für eine ganze Anzahl $n$ von Umdrehungen, also zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = n \cdot 2\pi$ integriren, so kommt:

$$n \cdot 2\pi = c\int_0^{ni}\frac{1}{r^2}dt = c\overline{\frac{1}{r^2}}ni$$

und somit:

$$c\overline{\frac{1}{r^2}} = \frac{2\pi}{i}. \tag{13}$$

Wenn wir den hier gefundenen Werth von $c\overline{\frac{1}{r^2}}$ in die Gleichung (12) einsetzen, so kommt:

$$\delta\left[\overline{F(r)} - \tfrac{1}{2}\overline{rF'(r)}\right] = -2\pi mc\delta\frac{1}{i} + m\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\delta\log i_1. \tag{14}$$

Dieser Gleichung können wir noch eine etwas mehr symmetrische Form geben. Das erste Glied an der rechten Seite kann nämlich unter Berücksichtigung der Gleichung (13) so umgeformt werden:

$$-2\pi mc\delta\frac{1}{i} = -mc^2\overline{\frac{1}{r^2}}\,i\delta\frac{1}{i} = mc^2\overline{\frac{1}{r^2}}\delta\log i.$$

Dadurch geht die vorige Gleichung über in:

$$\delta\left[\overline{F(r)} - \tfrac{1}{2}\overline{rF'(r)}\right] = mc^2\overline{\frac{1}{r^2}}\delta\log i + m\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\delta\log i_1. \tag{15}$$

Die Hälfte des Factors $mc^2\overline{\frac{1}{r^2}}$ ist die mittlere lebendige Kraft der Drehungsbewegung, denn die durch die Drehung entstehende Geschwindigkeitscomponente ist $r\frac{d\vartheta}{dt}$, und der dieser Geschwindigkeitscomponente entsprechende Theil der lebendigen Kraft ist $\frac{m}{2}r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$, wofür man nach (7) auch setzen kann $\frac{m}{2}c^2\frac{1}{r^2}$. Ebenso ist die Hälfte des Factors $m\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}$ die mittlere lebendige Kraft der Schwingungsbewegung. Demnach ist die Gleichung in Bezug auf Drehungs- und Schwingungsbewegung symmetrisch*).

---

*) Man kann in Folge der Gleichung (13) auch nachstehende Gleichung bilden:

$$-\frac{m}{2}c^2\delta\overline{\frac{1}{r^2}} = \frac{m}{2}\delta\left(c^2\overline{\frac{1}{r^2}}\right) + mc^2\overline{\frac{1}{r^2}}\delta\log i.$$

Da nach (9) die Summe der beiden Factoren $mc^2 \overline{\frac{1}{r^2}}$ und $m \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}$ gleich $\overline{rF'(r)}$ ist, so können wir der vorigen Gleichung auch folgende für manche Anwendungen bequemere Formen geben

$$(16) \quad \delta\,[\overline{F(r)} - \tfrac{1}{2}\,\overline{rF'(r)}] = \overline{rF'(r)}\,\delta \log i - m \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\,\delta \log \frac{i}{i_1}\,.$$

$$(17) \quad \delta\,[\overline{F(r)} - \tfrac{1}{2}\,\overline{rF'(r)}] = \overline{rF'(r)}\,\delta \log i_1 + mc^2 \overline{\frac{1}{r^2}}\,\delta \log \frac{i}{i_1}\,.$$

Diese unter (14), (15), (16) und (17) in verschiedenen Formen gegebene Gleichung ist der Ausdruck einer neuen, für Bewegungen um ein festes Anziehungscentrum allgemein gültigen Beziehung.

Wenn die Centralbewegung von der Art ist, dass zwischen der Umdrehungs- und Schwingungszeit ein constantes Verhältniss besteht, so ist der Bruch $\frac{i}{i_1}$ unveränderlich, und es wird daher $\delta \log \frac{i}{i_1} = 0$. Dadurch werden die beiden vorigen Gleichungen übereinstimmend und gehen über in

$$\delta\,[\overline{F(r)} - \tfrac{1}{2}\,\overline{rF'(r)}] = \overline{rF'(r)}\,\delta \log i\,,$$

wofür man, da $\overline{rF'(r)} = m\overline{v^2}$ ist, auch schreiben kann:

$$\delta\,\overline{F(r)} = \frac{m}{2}\,\delta\,\overline{v^2} + m\overline{v^2}\,\delta \log i\,.$$

Dieses ist die Gleichung, welche für Centralbewegungen in geschlossenen Bahnen gilt, und welche hier als specieller Fall allgemeinerer Gleichungen erscheint.

6) Nachdem wir die Gleichungen in der Weise aufgestellt haben, dass sie für jedes beliebige Kraftgesetz gelten, wollen wir sie auf eine specielle Gruppe von Kraftgesetzen anwenden, nämlich auf die, wo die Kraft *irgend einer Potenz der Entfernung proportional ist.* Dabei wollen wir indessen die minus erste Potenz ausschliessen, weil sie bei der Integration zum Logarithmus führt und daher einige besondere Erörterungen erfordert, welche die Uebersichtlichkeit der Auseinandersetzung beeinträchtigen würden.

---

Da nun der Ausdruck $mc^2 \frac{1}{r^3}$ eine der Centrifugalkraft gleiche Anziehungskraft repräsentirt, so kann man die durch Integration dieses Ausdruckes entstehende Grösse $-\frac{m}{2} c^2 \frac{1}{r^2}$ als das auf die Drehungsbewegung bezügliche Ergal betrachten. Bedenkt man ferner, dass $\frac{m}{2} c^2 \frac{1}{r^2}$ die lebendige Kraft der Drehungsbewegung darstellt, so sieht man, dass die vorstehende Gleichung für die Drehungsbewegung ganz dieselbe Bedeutung hat, wie (10) für die Schwingungsbewegung. Die Summe beider Gleichungen giebt unter Berücksichtigung von (9) die oben stehende Gleichung (15).

Wir wollen demnach, indem wir mit $k$ und $n$ zwei Constanten bezeichnen, deren letztere von $-1$ verschieden ist, setzen:

$$(18 \qquad F'(r) = kr^n,$$

woraus folgt:

$$(19) \qquad F(r) = \frac{k}{n+1} r^{n+1}.$$

Diese Formeln haben wir in den obigen Gleichungen für $F(r)$ und und $F'(r)$ zu substituiren. Es möge dazu die Gleichung (16) ausgewählt werden, welche durch die Substitution übergeht in:

$$(20) \qquad \frac{1-n}{2(n+1)} k \delta \overline{r^{n+1}} = k\overline{r^{n+1}} \, \delta \log i - m\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \delta \log \frac{i}{i_1}.$$

Des bequemeren Ausdruckes wegen werde nun die Grösse $\varrho$ eingeführt mit der Bedeutung

$$(21) \qquad \varrho^{n+1} = \overline{r^{n+1}}.$$

Diese Grösse lässt sich sofort bestimmen, wenn die *Energie* (die Summe aus Ergal und lebendiger Kraft) bekannt ist, also wenn man für irgend eine Lage des beweglichen Punktes seine Geschwindigkeit kennt. Da nämlich die mittlere lebendige Kraft gleich dem Virial ist, so haben wir, wenn die Energie mit $E$ bezeichnet wird, allgemein

$$E = \overline{F(r)} + \tfrac{1}{2} \overline{rF'(r)}$$

und für unser specielles Kraftgesetz

$$E = \frac{k}{n+1} \overline{r^{n+1}} + \frac{k}{2} \overline{r^{n+1}} = k \frac{n+3}{2(n+1)} \overline{r^{n+1}}$$

und somit unter Anwendung der Grösse $\varrho$

$$E = k \frac{n+3}{2(n+1)} \varrho^{n+1},$$

woraus folgt:

$$(22) \qquad \varrho = \left[\frac{2(n+1)}{k(n+3)} E\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

Nachdem mit Hülfe dieser Grösse $\varrho$ der durch $\overline{r^{n+1}}$ dargestellte Mittelwerth einer Potenz durch eine einfache Potenz $\varrho^{n+1}$ ersetzt ist, können wir auch die Variation derselben sofort ausführen und schreiben:

$$\delta \overline{r^{n+1}} = (n+1) \varrho^n \delta \varrho.$$

Die Gleichung (20) geht demnach durch Einführung der Grösse $\varrho$ über in:

$$(23) \qquad \frac{1-n}{2} k \varrho^n \delta \varrho = k \varrho^{n+1} \delta \log i - m\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \delta \log \frac{i}{i_1}.$$

In diese Gleichung wollen wir noch eine zweite vereinfachende Grösse $p$ einführen. Da nämlich die mittlere lebendige Kraft der

Drehungsbewegung und die mittlere lebendige Kraft der radialen Schwingungsbewegung zusammen die ganze mittlere lebendige Kraft ausmachen, so können wir die beiden ersteren als Bruchtheile der letzteren darstellen, welche Bruchtheile wir mit $p$ und $1 - p$ bezeichnen wollen. Es ist dann also:

$$(24) \qquad \begin{cases} \frac{m}{2} c^2 \overline{\frac{1}{r^2}} = p \frac{k}{2} \varrho^{n+1} \\ \frac{m}{2} \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = (1-p) \frac{k}{2} \varrho^{n+1} \end{cases}$$

Der Werth dieser Grösse $p$ kann zwischen 0 und 1 variiren, und von ihm hängt es ab, welche Form die Bahn unter allen bei einem gegebenen Werthe von $n$ möglichen Formen annimmt. Wenn $p = 0$ ist, so bewegt sich der Punkt geradlinig dem Centrum zu und vom Centrum fort, und wenn $p = 1$ ist, so bewegt er sich in einem Kreise um das Centrum. Zwischen diesen beiden Grenzformen liegen alle anderen möglichen Formen.

Durch Einführung der Grösse $p$ in die Gleichung (23) erhalten wir zunächst:

$$\frac{1-n}{2} k \varrho^n \delta \varrho = k \varrho^{n+1} \delta \log i - (1-p) k \varrho^{n+1} \delta \log \frac{i}{i_1}$$

und wenn wir diese Gleichung noch durch $k \varrho^{n+1}$ dividiren, so kommt:

$$(25) \qquad \frac{1-n}{2} \delta \log \varrho = \delta \log i - (1-p) \delta \log \frac{i}{i_1} \cdot$$

Da zwei Glieder dieser Gleichung vollständige Variationen sind, so muss das dritte Glied

$$(1-p) \delta \log \frac{i}{i_1}$$

ebenfalls eine solche sein, woraus folgt, dass $p$ eine Function $\frac{i}{i_1}$ allein oder auch umgekehrt $\frac{i}{i_1}$ eine Function von $p$ allein ist. Indem wir dem Letzteren gemäss $\frac{i}{i_1}$ als Function von $p$ behandeln, können wir aus dieser Function auch andere Functionen ableiten, und wir wollen eine durch $J$ zu bezeichnende Function von $p$ einführen, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(26) \qquad \log J = \int (1-p) \frac{d \log \frac{i}{i_1}}{dp} dp \,.$$

Dann ist

$$(1-p) \delta \log \frac{i}{i_1} = \delta \log J \,,$$

und die Gleichung (25) geht somit über in:

$$(27) \qquad \frac{1-n}{2} \delta \log \varrho = \delta \log i - \delta \log J \,.$$

Durch Umstellung und Integration dieser Gleichung erhalten wir:

$$\log i = \frac{1-n}{2} \log \varrho + \log J + \text{Const.}$$

Welchen Werth wir der Integrationsconstanten beilegen, ist gleichgültig, da wir uns gemäss (26) jede beliebige additive Constante in $\log J$ mit einbegriffen denken können. Der für das Folgende zweckmässigste Werth ist $\log 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$. Wenn wir diese Grösse für die Constante einsetzen und dann die drei Logarithmen der rechten Seite vereinigen, so kommt:

$$\log i = \log \left(2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}\, \varrho^{\frac{1-n}{2}} J\right)$$

und wir erhalten daher für die Umdrehungszeit $i$ folgenden einfachen Ausdruck:

$$(28) \qquad i = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}\, \varrho^{\frac{1-n}{2}} J.$$

Einen entsprechenden Ausdruck können wir auch für die Schwingungszeit $i_1$ ableiten. Die Gleichung (25) lässt sich nämlich auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{1-n}{2} \delta \log \varrho = \delta \log i_1 + p \delta \log \frac{i}{i_1}.$$

Führen wir hierin die Function $J_1$ ein, welche durch nachstehende Gleichung bestimmt wird:

$$(29) \qquad \log J_1 = -\int p \frac{d \log \frac{i}{i_1}}{dp} dp,$$

so ergiebt sich in gleicher Weise wie vorher:

$$(30) \qquad i_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}\, \varrho^{\frac{1-n}{2}} J_1$$

Dabei besteht zwischen den in diesen beiden Ausdrücken vorkommenden Functionen $J$ und $J_1$ gemäss den Gleichungen (26) und (29) folgende Beziehung:

$$(31) \qquad p \frac{d \log J}{dp} = (p-1) \frac{d \log J_1}{dp}.$$

Da sich mit Hülfe dieser Gleichung eine der beiden Functionen aus der anderen ableiten lässt, so kann man sagen, dass in den beiden Ausdrücken von $i$ und $i_1$ nur Eine unbestimmte Function von $p$ vorkommt.

7) In den Gleichungen (28) und (30) sind die Zeiten $i$ und $i_1$ durch die beiden Grössen $\varrho$ und $p$ ausgedrückt. Die Grösse $\varrho$ ist nach Gleichung (22) eine einfache Function der Energie $E$, welche während

der ganzen Bewegung unveränderlich bleibt, und daher als bekannt angenommen werden kann. Anders ist es mit der Grösse $p$. Diese hat zwar eine einfache Bedeutung (die mittlere lebendige Kraft der Drehungsbewegung als Bruchtheil der ganzen mittleren lebendigen Kraft), aber ihr Werth lässt sich nicht so einfach angeben, weil man zur Berechnung des Mittelwerthes einer veränderlichen Grösse den ganzen Verlauf der Bewegung in Betracht ziehen muss. Es ist daher zweckmässig, statt der Grösse $p$ eine andere Grösse einzuführen, deren Werth sich unmittelbar aus den Datis ergiebt, welche man zur Bestimmung der Bewegung anzuwenden pflegt.

Diese Data sind die vorher erwähnte Energie $E$ und die schon oben besprochene Grösse $c$, deren Hälfte den vom Radius vector während der Zeiteinheit beschriebenen Flächenraum darstellt, und welche ebenso, wie die Energie, während der ganzen Bewegung constant bleibt. Wir wollen nun eine Grösse $q$ einführen, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird:

(32) $$q = m^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{n+1}} c \left[\frac{2(n+1)}{n+3} E\right]^{-\frac{n+3}{2(n+1)}},$$

und sich also in einfacher Weise aus $E$ und $c$ berechnen lässt.

Um den Zusammenhang dieser neuen Grösse $q$ mit der Grösse $p$ zu finden, können wir zunächst den Ausdruck von $q$ mit Hülfe der Gleichung (22) in folgenden umgestalten:

(33) $$q = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{c}{\varrho^{\frac{n+3}{2}}}.$$

Ferner gelten die schon unter (13) und (24) angeführten Gleichungen

$$c \overline{\frac{1}{r^2}} = \frac{2\pi}{i}$$

$$\frac{m}{2} c^2 \overline{\frac{1}{r^2}} = p \frac{k}{2} \varrho^{n+1},$$

woraus durch Elimination von $\overline{\frac{1}{r^2}}$ folgt:

(34) $$i = 2\pi \frac{m}{k} \frac{c}{p\varrho^{n+1}}.$$

Setzt man hierin für $i$ seinen Werth aus (28) ein, so erhält man:

(35) $$J = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{c}{p\varrho^{\frac{n+3}{2}}}$$

und aus der Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung (33) ergiebt sich:

(36) $$q = pJ.$$

Die Grösse $q$ steht also zu $p$ in sehr einfacher Beziehung.

Auch ist ihr Verhalten demjenigen von $p$ sehr ähnlich. Sie kann ebenfalls nur zwischen den Grenzen 0 und 1 variiren, und nimmt diese Grenzwerthe mit $p$ zugleich an. Wenn $c = 0$ ist, so ist nach (32) auch $q = 0$, und ebenso hat dann auch die lebendige Kraft der Drehungsbewegung und somit die Grösse $p$ den Werth Null. Wächst nun $c$, so wachsen gleichzeitig $p$ und $q$. Wenn $p$ den Werth 1 erreicht hat, so ist die Bahn kreisförmig geworden. Für diesen Fall haben wir in der für die Schwingungsbewegung geltenden Differentialgleichung

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr^n + mc^2\frac{1}{r^3}$$

den Differentialcoëfficienten $\frac{d^2r}{dt^2}$ gleich Null zu setzen, und die dadurch entstehende Gleichung lässt sich in folgende Form bringen:

$$\frac{m}{k}\frac{c^2}{r^{n+3}} = 1.$$

Ferner kann man in dem Falle, wo $r$ constant ist, die Grössen $r$ und $\varrho$ als gleichbedeutend betrachten, und die vorige Gleichung lässt sich daher auch so schreiben:

$$\frac{m}{k}\frac{c^2}{\varrho^{n+3}} = 1$$

und hieraus ergiebt sich gemäss (33) für $q$ der Werth 1.

Da nach (36) $q$ durch das Product $pJ$ dargestellt wird, worin $J$ eine Function von $p$ allein bedeutet, so ist $q$ selbst ebenfalls eine Function von $p$ allein, und demgemäss kann man auch umgekehrt $p$ als Function von $q$ allein betrachten. Daraus folgt weiter, dass $J$ und $J_1$, welche wir bisher als Functionen von $p$ bezeichneten, auch ebenso gut als Functionen von $q$ angesehen werden können, und es kommt nur noch darauf an, die in (31) ausgedrückte Beziehung zwischen $J$ und $J_1$ so umzugestalten, dass nicht $p$, sondern $q$ darin vorkommt.

Die Gleichung (31) lässt sich in folgender Form schreiben:

$$\text{(37)} \qquad \frac{d\log J_1}{dp} = p\frac{d}{dp}\left(\log\frac{J_1}{J}\right).$$

Führen wir die Differentiation der Logarithmen aus, so kommt:

$$\frac{1}{J_1}\frac{dJ_1}{dp} = p\frac{J}{J_1}\frac{d}{dp}\left(\frac{J_1}{J}\right).$$

Hierin hebt sich $J_1$ aus den beiden Nennern fort, und das Product $pJ$ können wir nach (36) durch $q$ ersetzen. Ferner können wir die beiden Differentialcoëfficienten nach $p$ in solche nach $q$ umwandeln durch Anwendung der allgemeinen Gleichung

$$\frac{dZ}{dp} = \frac{dZ}{dq}\frac{dq}{dp},$$

wobei sich der Differentialcoëfficient $\frac{dq}{dp}$, welcher an beiden Seiten vorkommt, forthebt. Wir erhalten also:

$$\frac{dJ_1}{dq} = q\,\frac{d}{dq}\left(\frac{J_1}{J}\right). \tag{38}$$

Dieses ist die gesuchte Beziehung zwischen $J$ und $J_1$. Man sieht, dass die neue Gleichung in Bezug auf $J_1$, $\frac{J_1}{J}$ und $q$ dieselbe Form hat, wie (37) in Bezug auf $\log J_1$, $\log \frac{J_1}{J}$ und $p$.

8) Es sind im Vorigen für Centralbewegungen, bei denen die Anziehungskraft irgend einer Potenz der Entfernung proportional ist, eine Reihe von Formeln aufgestellt, welche die den Bewegungsperioden entsprechenden Zeiten und verschiedene Mittelwerthe als Functionen zweier leicht bestimmbarer Grössen darstellen. Da diese Formeln unter den zu ihrer Ableitung angewandten Gleichungen etwas zerstreut sind, so wird es der bequemeren Uebersicht wegen zweckmässig sein, sie hier noch einmal kurz neben einander anzuführen.

Wenn $E$ die Energie des bewegten Punktes und $c$ den doppelten Werth des vom Radius vector während der Zeiteinheit beschriebenen Flächenraums bedeutet, so bilden wir zunächst folgende zwei Grössen:

$$\varrho = \left[\frac{2(n+1)}{k(n+3)}E\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

$$q = m^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{n+1}} c \left[\frac{2(n+1)}{n+3}E\right]^{-\frac{n+3}{2(n+1)}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,\frac{c}{\varrho^{\frac{n+3}{2}}}.$$

Ferner führen wir zwei mit $J$ und $J_1$ bezeichnete Functionen von $q$ ein, welche unter einander durch folgende Gleichung zusammenhängen:

$$\frac{dJ_1}{dq} = q\,\frac{d}{dq}\left(\frac{J_1}{J}\right).$$

Dann gelten für die nachstehend angeführten Grössen die beigeschriebenen Gleichungen:

1) Das mittlere Ergal:

$$\frac{k}{n+1}\,\overline{r^{n+1}} = \frac{k}{n+1}\,\varrho^{n+1}.$$

2) Die mittlere lebendige Kraft:

$$\frac{m}{2}\,\overline{v^2} = \frac{k}{2}\,\varrho^{n+1}.$$

3) Die mittlere lebendige Kraft der Drehungsbewegung (gemäss (24), wenn darin $p$ durch $\frac{q}{J}$ ersetzt wird):

$$\frac{m}{2}\,c^2\,\overline{\frac{1}{r^2}} = \frac{k}{2}\,\varrho^{n+1}\,\frac{q}{J}.$$

4) Die mittlere lebendige Kraft der radialen Schwingungsbewegung:

$$\frac{m}{2}\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = \frac{k}{2}\varrho^{n+1}\left(1-\frac{q}{J}\right).$$

5) Die Umdrehungszeit:

$$i = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,\varrho^{\frac{1-n}{2}} J.$$

6) Die Schwingungszeit:

$$i_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,\varrho^{\frac{1-n}{2}} J_1.$$

Ausser den hier angeführten Grössen kann man nach den obigen Entwickelungen leicht auch noch andere Grössen ausdrücken, wie z. B. das mittlere Ergal der Umdrehungsbewegung und der Schwingungsbewegung; indessen mögen die vorstehenden Ausdrücke genügen.

9) In allen diesen Ausdrücken kommt nur Eine unbestimmte Function von $q$ vor, da sich die beiden mit $J$ und $J_1$ bezeichneten Functionen durch die zwischen ihnen bestehende Beziehung auf Eine zurückführen lassen. Auch diese Function noch zu bestimmen, lag ursprünglich nicht im Plane meiner Untersuchung, da ich nur diejenigen Folgerungen ableiten wollte, welche sich unmittelbar aus meinen neuen mechanischen Gleichungen ergeben. Nachdem ich aber die obigen Formeln aufgestellt hatte, schien es mir der Vollständigkeit wegen doch zweckmässig zu sein, wenigstens eine angenäherte Bestimmung jener Function vorzunehmen. Ich habe daher die Function $J_1$ in eine Reihe entwickelt und einige Glieder dieser Reihe berechnet.

Aus der schon oben angeführten Differentialgleichung

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr^n + mc^2\frac{1}{r^3}$$

erhält man durch erste Integration:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{n+1}r^{n+1} - \frac{m}{2}c^2\frac{1}{r^2} + E,$$

worin $E$, wie bisher, die Energie der Bewegung bedeutet. Hieraus ergiebt sich zur Bestimmung der Zeit die Differentialgleichung:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}E - c^2\frac{1}{r^2} - \frac{k}{m}\frac{2}{n+1}r^{n+1}}},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit $r$ multiplicirt:

$$(39)\qquad dt = \frac{\frac{1}{2}d(r^2)}{\sqrt{-c^2 + \frac{2}{m}Er^2 - \frac{k}{m}\frac{2}{n+1}r^{n+3}}},$$

Hierin wollen wir statt der Constanten $E$ und $c$ die Constanten $\varrho$ und $q$ einführen, indem wir nach den Gleichungen (22) und (33) setzen:

$$E = k \frac{n+3}{2(n+1)} \varrho^{n+1} \text{ und } c^2 = \frac{k}{m} q^2 \varrho^{n+3}.$$

Dann kommt:

$$dt = \frac{\frac{1}{2} d(r^2)}{\sqrt{-\frac{k}{m} q^2 \varrho^{n+3} + \frac{k}{m} \frac{n+3}{n+1} \varrho^{n+1} r^2 - \frac{k}{m} \frac{2}{n+1} r^{n+3}}}.$$

Nehmen wir den Factor $\frac{k}{m} \varrho^{n+3}$ aus dem Wurzelzeichen, so erhalten wir:

$$dt = \frac{\frac{1}{2} d(r^2)}{\sqrt{\frac{k}{m}} \varrho^{\frac{n+3}{2}} \sqrt{-q^2 + \frac{n+3}{n+1}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 - \frac{2}{n+1}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+3}}}$$

oder anders geschrieben:

$$(40) \qquad dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \varrho^{\frac{1-n}{2}} \frac{d\left(\frac{r^2}{\varrho^2}\right)}{\sqrt{-q^2 + \frac{n+3}{n+1}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 - \frac{2}{n+1}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+3}}}.$$

Hierin wollen wir der Bequemlichkeit wegen für den Bruch $\frac{r}{\varrho}$ den Buchstaben $x$ setzen, also:

$$(41) \qquad dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} \varrho^{\frac{1-n}{2}} \frac{d(x^2)}{\sqrt{-q^2 + \frac{n+3}{n+1} x^2 - \frac{2}{n+1} x^{n+3}}}.$$

Diese Gleichung muss integrirt werden, um die Schwingungszeit zu erhalten. Dabei sind als Grenzen zwei Werthe von $x$ zu nehmen, für welche der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck und demgemäss die radiale Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ gleich Null wird. Diese Werthe mögen mit $x_0$ und $x_1$ bezeichnet werden. Das Integral von dem einen Grenzwerthe zum anderen giebt die Zeit, welche der bewegliche Punkt gebraucht, um vom kleinsten Werthe von $r$ zum grössten zu gelangen; da wir nun aber unter der Schwingungszeit die Zeit verstehen, welche der Punkt gebraucht, um vom kleinsten Werthe zum grössten und dann wieder zum kleinsten zu gelangen, so müssen wir das vorher erwähnte Integral doppelt nehmen. Wir erhalten also:

$$(42) \qquad i_1 = \sqrt{\frac{m}{k}} \varrho^{\frac{1-n}{2}} \int_{x=x_0}^{x=x_1} \frac{d(x^2)}{\sqrt{-q^2 + \frac{n+3}{n+1} x^2 - \frac{2}{n+1} x^{n+3}}}.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck von $i_1$ mit dem in (30) gegebenen, so erhalten wir für die Function $J_1$ die Gleichung:

$$(43) \qquad J_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{x=x_0}^{x=x_1} \frac{d(x^2)}{\sqrt{-q^2 + \frac{n+3}{n+1} x^2 - \frac{2}{n+1} x^{n+3}}}.$$

10) Um diese Integration auszuführen, wollen wir die Gleichung zuerst so schreiben:

$$(44) \qquad J_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{x=x_0}^{x=x_1} \frac{d\,(x^2)}{\sqrt{1-q^2-\left(1-\frac{n+3}{n+1}x^2+\frac{2}{n+1}x^{n+3}\right)}}.$$

Hierin wollen wir nun eine neue Veränderliche $z$ einführen, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(45) \qquad 1-\frac{n+3}{n+1}x^2+\frac{2}{n+1}x^{n+3}=z^2.$$

Wenn wir uns dann die Grösse $x^2$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen von $z$ entwickelt denken, indem wir setzen:

$$(46) \qquad x^2 = a + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \text{etc.}$$

und die Coëfficienten dieser Reihe so bestimmen, dass dadurch der vorstehenden Gleichung genügt wird, so erhalten wir folgende Werthe, worin zur Abkürzung noch der Buchstabe $\mu$ mit der Bedeutung

$$(47) \qquad \mu = \frac{(n+2)(n-1)}{n+3}$$

eingeführt ist:

$$(48) \qquad \begin{cases} a = 1 \\ a_1 = \pm\frac{2}{\sqrt{n+3}} \\ a_2 = -\frac{n-1}{n+3}\cdot\frac{1}{3} \\ a_3 = \pm\frac{\mu}{\sqrt{n+3}}\cdot\frac{1}{2\cdot 3^2} \\ a_4 = -\mu\frac{n+5}{n+3}\cdot\frac{1}{3^3\cdot 5} \\ a_5 = \pm\frac{\mu}{\sqrt{n+3}}\cdot\frac{2^3\cdot 3+\mu}{2^4\cdot 3^3\cdot 5} \\ a_6 = -\mu\frac{n+5}{n+3}\cdot\frac{2\cdot 3^2-\mu}{3^5\cdot 5\cdot 7} \\ a_7 = \pm\frac{\mu}{\sqrt{n+3}}\cdot\frac{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2-2^6\cdot 3^2\mu-139\mu^2}{2^6\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7}. \end{cases}$$

Unter Anwendung der neuen Veränderlichen $z$ geht die Gleichung (44) in folgende über, in welcher die Grenzen der Integration bestimmt angegeben sind:

$$(49) \qquad J_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{z=-\sqrt{1-q^2}}^{z=\sqrt{1-q^2}} \frac{d\,(a+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3+\text{etc.})}{\sqrt{1-q^2-z^2}}.$$

Das hierin angedeutete Integral zerfällt nach den Gliedern der Reihe in unendlich viele Integrale, deren Werthe sich leicht angeben lassen. Jedes Glied, welches eine gerade Potenz von $z$ enthält, giebt als Integral den Werth Null. Für die Glieder mit ungeraden Potenzen gilt folgende allgemeine Gleichung, worin $\nu$ eine ungerade ganze Zahl sein soll:

$$\int\limits_{z=-\sqrt{1-q^2}}^{z=\sqrt{1-q^2}} \frac{d(z^\nu)}{\sqrt{1-q^2-z^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots\nu}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots \nu-1}(1-q^2)^{\frac{\nu-1}{2}}\pi.$$

Wenden wir diese Formel auf die ungeraden Glieder der vorstehenden Gleichung an, so erhalten wir zunächst:

$$(50)\qquad J_1 = \tfrac{1}{2}\left[a_1 + \tfrac{3}{2}a_3(1-q^2) + \tfrac{3\cdot 5}{2\cdot 4}a_5(1-q^2)^2 + \text{etc.}\right].$$

In diese Gleichung haben wir für die Coëfficienten $a_1$, $a_3$ etc. ihre Werthe aus (48) einzusetzen, wobei wir von den beiden Vorzeichen, welche vor den Wurzeln stehen, nur das obere zu berücksichtigen brauchen, indem das untere eine negative Zeit geben würde. Dadurch erhalten wir:

$$(51)\qquad J_1 = \frac{1}{\sqrt{n+3}}\left[1 + \frac{\mu}{2^3\cdot 3}(1-q^2) + \mu\frac{2^3\cdot 3+\mu}{2^4\cdot 3^2}(1-q^2)^2 \right.$$
$$\left. + \mu\frac{2^4\cdot 3^3\cdot 5^2 - 2^6\cdot 3^2\mu - 139\mu^2}{2^{11}\cdot 3^3\cdot 5}(1-q^2)^3 + \text{etc.}\right].$$

Hierdurch ist die Grösse $J_1$ als Function von $q$ soweit bestimmt, dass man sie für Werthe von $q$, die nicht zu weit von 1 abweichen, mit ziemlicher Annäherung berechnen kann.

Aus dieser Reihe lässt sich mit Hülfe von (38) auch die entsprechende Reihe für $J$ ableiten.

11) Diese Ableitung und andere Rechnungen werden etwas bequemer, wenn man die Reihe nach steigenden Potenzen von $1-q$ entwickelt. Wir wollen dabei für die letztere Differenz einen besonderen Buchstaben einführen, indem wir setzen:

$$(52)\qquad s = 1 - q.$$

Dann ist:

$$1 - q^2 = 1 - (1-s)^2 = 2s - s^2,$$

und durch Einsetzung dieses Werthes geht die obige Reihe über in:

$$(53)\qquad J_1 = \frac{1}{\sqrt{n+3}}\left[1 + \frac{\mu}{2^2\cdot 3}s + \frac{\mu^2}{2^6\cdot 3^2}s^2\right.$$
$$\left. - \mu\frac{2^4\cdot 3^3\cdot 5 + 2^2\cdot 3^2\cdot 31\mu + 139\mu^2}{2^8\cdot 3^5\cdot 5}s^3 + \text{etc.}\right].$$

Um hieraus $J$ zu berechnen, können wir die Gleichung (38) in folgender Form schreiben:

$$(54) \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{J_1}{J}\right) = \frac{1}{1-s}\,\frac{dJ_1}{ds}.$$

Setzen wir hierin rechts für $J_1$ den vorstehenden Ausdruck, so erhalten wir zunächst den Differentialcoëfficienten von $\frac{J_1}{J}$ und dann durch Integration $\frac{J_1}{J}$ selbst. Die dabei hinzukommende Integrationsconstante kann leicht bestimmt werden, weil sich für $s = 0$, also für die Kreisbewegung, die Umdrehungszeit $i$ und demgemäss der Werth der Function $J$ direct bestimmen lässt. Es ergiebt sich nämlich, dass für diesen Fall $J = 1$ zu setzen ist, woraus folgt: $\frac{J_1}{J} = \frac{1}{\sqrt{n+3}}$. Unter Berücksichtigung dieses Werthes erhalten wir für den Bruch $\frac{J_1}{J}$ folgende Reihe:

$$(55) \qquad \frac{J_1}{J} = \frac{1}{\sqrt{n+3}}\left[1 + \frac{\mu}{2^2 \cdot 3}\,s + \mu\,\frac{2^3 \cdot 3 + \mu}{2^6 \cdot 3^2}\,s^2 \right.$$
$$\left. + \mu\,\frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 - 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7\,\mu - 139\,\mu^2}{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5}\,s^3 + \text{etc.}\right].$$

Da der Bruch $\frac{J_1}{J}$ gleich dem Bruche $\frac{i_1}{i}$ ist, so stellt der vorstehende Ausdruck das Verhältniss zwischen der Schwingungszeit und der Umdrehungszeit dar.

Man könnte nun, um $J$ zu bestimmen, einfach mit der Gleichung (55) in die Gleichung (53) dividiren. Dadurch würde man aber $J$ nur bis zur dritten Potenz von $s$ entwickelt erhalten, während noch das Glied mit der vierten Potenz erhältlich ist. Schreibt man nämlich die vorher angewandte Gleichung (54) in der Form

$$(56) \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{J_1}{J} - J_1\right) = s\,\frac{d}{ds}\left(\frac{J_1}{J}\right),$$

so kann man hieraus wegen des an der rechten Seite befindlichen Factors $s$ die Differenz $\frac{J_1}{J} - J_1$, welche kein constantes Glied enthält, sondern gleich mit der zweiten Potenz von $s$ beginnt, bis zur vierten Potenz von $s$ bestimmen, obwohl $\frac{J_1}{J}$ nur bis zur dritten Potenz bekannt ist. Bilden wir dann weiter die identische Gleichung:

$$J = 1 - \frac{\frac{J_1}{J} - J_1}{\frac{J_1}{J}},$$

und wenden an der rechten Seite derselben für die im Zähler des zweiten Gliedes befindliche Differenz den bis zur vierten Potenz entwickelten Ausdruck an, so erhalten wir:

$$(57)\qquad J = 1 - \frac{\mu}{2^3 \cdot 3} s^2 + \mu \frac{-2^2 \cdot 3 + \mu}{2^5 \cdot 3^3} s^3$$
$$+ \mu \frac{-2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 + 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 29\mu + 89\mu^2}{2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5} s^4 + \text{etc.}$$

12) Wir haben somit für die Functionen $J$ und $J_1$ Ausdrücke gewonnen, aus welchen sich ihre Werthe angenähert bestimmen lassen, und zwar um so genauer, je kleiner $s$ ist, je weniger also die Bahn von der Kreisform abweicht. Sie gewähren in mancher Beziehung einen leichten Einblick in das Verhalten dieser Functionen.

Der in dem Ausdrucke von $J_1$ vor der Reihe stehende Factor $\frac{1}{\sqrt{n+3}}$, welcher für $n = -3$ unendlich gross, und für Werthe von $n$, die unter $-3$ liegen, imaginär wird, zeigt recht augenfällig, dass für Anziehungskräfte, welche einer negativen Potenz der Entfernung proportional sind, die minus dritte Potenz die Grenze bildet, bis wohin überhaupt noch stationäre Bewegungen möglich sind.

Ferner ist es an den beiden Ausdrücken charakteristisch, dass sämmtliche Glieder, welche $s$ enthalten, mit dem gemeinsamen Factor $\mu$ versehen sind. Daraus folgt, dass für $\mu = 0$ beide Ausdrücke von der Grösse $s$ unabhängig werden, indem die Gleichungen (53) und (57) in

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{n+3}} \text{ und } J = 1$$

übergehen. Da nun nach (47)

$$\mu = \frac{(n+2)(n-1)}{n+3}$$

ist, so tritt dieses einfache Verhalten in den beiden Fällen ein, wo $n$ die Werthe $-2$ und $1$ hat.

Diese beiden Werthe von $n$ sind die einzigen, bei welchen die Bewegungen allgemein, d. h. für alle Werthe von $s$, in geschlossenen Bahnen stattfinden. Dieses kann nämlich nur dann der Fall sein, wenn das Verhältniss zwischen der Schwingungszeit und der Umdrehungszeit unveränderlich ist, und es muss daher der Bruch $\frac{i_1}{i}$, welcher mit $\frac{J_1}{J}$ identisch ist, von $s$ unabhängig sein. Daraus folgt weiter, dass in der unter (55) mitgetheilten Reihe die Coëfficienten aller Potenzen von $s$, von der ersten an, gleich Null sein müssen, so dass das constante Glied allein übrig bleibt, was nur eintritt, wenn $\mu = 0$ und somit $n$ entweder gleich $-2$ oder $= 1$ ist.

Der vorher erwähnte Bruch $\frac{i_1}{i}$ wird für $\mu = 0$ durch die Formel $\frac{1}{\sqrt{n+3}}$ dargestellt, welche, je nachdem $n = -2$ oder $n = 1$ ist, den Werth 1 oder $\frac{1}{2}$ annimmt. Dadurch wird ausgedrückt, dass während einer Umdrehung im ersteren Falle Eine radiale Schwingung stattfindet, so dass der Radius vector Ein Maximum und Ein Minimum hat, im letzteren Falle dagegen zwei radiale Schwingungen stattfinden, so dass der Radius vector zwei Maxima und zwei Minima hat.

Alle vorstehenden Betrachtungen beziehen sich auf die Bewegungen eines materiellen Punktes um ein festes Centrum. Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich anstellen in Bezug auf die Bewegungen zweier materieller Punkte um einander, und führen zu entsprechenden Resultaten. Da ich diese Erweiterung für den Fall, wo die Bewegungen in geschlossenen Bahnen stattfinden, schon in meinem vorigen Aufsatze durchgeführt habe, und bei Bewegungen in ungeschlossenen Bahnen die Erweiterung im Wesentlichen auf gleiche Art geschehen kann, so wird es nicht nöthig sein, hier wieder darauf einzugehen.

# Sätze aus dem Grenzgebiet der Mechanik und der Geometrie.

Von R. Lipschitz in Bonn.

---

Weil die Mechanik die Körper im Zustande der Bewegung betrachtet, so muss sie die Geometrie zur Feststellung ihrer Grundlagen in Anspruch nehmen, und hat dieselbe auch von jeher für die Erreichung ihrer Ziele verwerthet.

Aber erst durch die fortschreitende Ausbildung der Mechanik und der Geometrie hat sich die Aufmerksamkeit auf Fragen gerichtet, an deren Erforschung beide Wissenschaften ein gleiches Interesse haben, und die, analytisch ausgedrückt, von genau denselben Algorithmen abhängen. Die Entwickelung eines Begriffes, der in das Grenzgebiet der Mechanik und der Geometrie einschlägt, findet sich in der Abhandlung: *über einen algebraischen Typus der Bedingungsgleichungen eines bewegten Massensystems*, *Borchardt's Journal für Mathematik*, Bd. 66, S. 363. Man denkt sich ein System von materiellen Punkten, deren Massen der Reihe nach $m_1, m_2, \cdots m_q$ heissen mögen; der Ort jeder einzelnen Masse $m_e$ wird auf die rechtwinkligen Coordinaten $x_e, y_e, z_e$ bezogen; bei einer gewissen Anordnung des Systems erhalten die Coordinaten der einzelnen Punkte die bestimmten Werthe $x_e = a_e$, $y_e = b_e$, $z_e = c_e$. Dann ist der in Rede stehende Begriff als *die über die sämmtlichen $q$ Punkte ausgedehnte Summe aus den Producten jeder Masse $m_e$ in das Quadrat der Entfernung des Ortes $(x_e, y_e, z_e)$ von dem Orte $(a_e, b_e, c_e)$*

$$(1) \qquad 2G = \sum_e m_e \left((x_e - a_e)^2 + (y_e - b_e)^2 + (z_e - c_e)^2\right)$$

definirt.

Zu einer neuen Definition dieses Begriffs führt die Vorstellung, dass das System der materiellen Punkte $m_e$ frei von dem Einfluss beschleunigender Kräfte und ohne einschränkende Bedingung sich im Raume bewege. Hier folgt das gleichförmige Fortschreiten eines jeden Punktes in gerader Linie mit Nothwendigkeit aus der Forderung, dass die erste Variation des zugeordneten *Integrales der kleinsten Wirkung*

$$(2) \qquad R = \int \sqrt{\sum_e m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)}$$

für feste Anfangs- und Endlagen der einzelnen Punkte verschwinde.

Wenn nun die Coordinaten $(a_e, b_e, c_e)$ die Anfangslage, die Coordinaten $(x_e, y_e, z_e)$ die betreffende Endlage der Masse $m_e$ bestimmen, ergiebt sich leicht die Gleichung

$$R^2 = 2G. \tag{3}$$

*Die Function $2G$ ist also bei einer durch das Trägheitsgesetz gegebenen Bewegung des Systems, für den Punkt $m_e$ beziehungsweise von dem Orte $(a_e, b_e, c_e)$ nach dem Orte $(x_e, y_e, z_e)$, gleich dem Quadrate des zugeordneten Integrales der kleinsten Wirkung.* Hingegen fällt die Darstellung des Integrales der kleinsten Wirkung durch die Gleichung $R = \sqrt{2G}$ mit der Darstellung der von Hamilton eingeführten *charakteristischen Function des betreffenden mechanischen Problems* zusammen.

Um die Beziehung der Function $2G$ zu einer allgemeineren Bewegung des Systems von Punkten $m_e$ abzuleiten, wird angenommen, dass das System unter der Einwirkung von beschleunigenden Kräften stehe, für welche eine Kräftefunction $U$ vorhanden ist, und dass dasselbe einer Reihe von Bedingungsgleichungen

$$\Phi_1 = \text{Const.}, \quad \Phi_2 = \text{Const.}, \quad \cdots \Phi_l = \text{Const.} \tag{4}$$

unterworfen sei, wo die $l$ Functionen $\Phi_\gamma$ nur die Coordinaten der einzelnen $q$ Punkte, und nicht die Zeit $t$ enthalten. Das von Hamilton herrührende Princip schreibt in diesem Falle vor, dass die erste Variation des Integrales

$$\int \left(\tfrac{1}{2} \sum_e m_e \left(\left(\frac{dx_e}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_e}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_e}{dt}\right)^2\right) + U + \lambda_1 \Phi_1 \cdots + \lambda_l \Phi_l\right) dt \tag{5}$$

unter Zuziehung der $l$ Gleichungen (4), bei festen Anfangs- und Endwerthen der $3q$ Coordinaten, zu Null gemacht werde. Die zu bestimmenden Multiplicatoren $\lambda_1, \cdots \lambda_l$ gelten als reine Functionen der Zeit $t$. Diese Aufgabe bringt vermöge der Regeln der Variationsrechnung die Gleichung

$$\sum_e m_e \left(\frac{d^2x_e}{dt^2}\,\delta x_e + \frac{d^2y_e}{dt^2}\,\delta y_e + \frac{d^2z_e}{dt^2}\,\delta z_e\right) = \delta U + \lambda_1 \delta\Phi_1 + \lambda_2 \delta\Phi_2 + \cdots + \lambda_l \delta\Phi_l \tag{6}$$

hervor, welche unabhängig von den $3q$ Variationen $\delta x_e$, $\delta y_e$, $\delta z_e$ erfüllt werden muss, und dadurch das System der Differentialgleichungen des mechanischen Problems in sich schliesst. In der Gleichung (6) können die Variationen $\delta x_e$, $\delta y_e$, $\delta z_e$ beziehungsweise durch die endlichen Differenzen $x_e - a_e$, $y_e - b_e$, $z_e - c_e$ ersetzt werden.*) Dann geht die linke Seite in einen Ausdruck über, der mit der Function $G$ durch *die charakteristische Relation*

*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, 4te Vorlesung, S. 21.

$$(7)\qquad \sum_e m_e\left(\frac{d^2x_e}{dt^2}(x_e-a_e)+\frac{d^2y_e}{dt^2}(y_e-b_e)+\frac{d^2z_e}{dt^2}(z_e-c_e)\right)$$
$$=\frac{d^2G}{dt^2}-\sum_e m_e\left(\left(\frac{dx_e}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_e}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_e}{dt}\right)\right)$$

zusammenhängt, und auf der rechten Seite verwandelt sich die Variation $\delta U$ in den Ausdruck

$$(8)\qquad \sum_e\left(\frac{\partial U}{\partial x_e}(x_e-a_e)+\frac{\partial U}{\partial y_e}(y_e-b_e)+\frac{\partial U}{\partial z_e}(z_e-c_e)\right),$$

die Variation $\delta\Phi\gamma$ in einen entsprechend gebildeten Ausdruck. So entsteht die Gleichung

$$(9)\qquad \frac{d^2G}{dt^2}-\sum_e m_e\left(\left(\frac{dx_e}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_e}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_e}{dt}\right)^2\right)$$
$$=\sum_e\left(\frac{\partial U}{\partial x_e}(x_e-a_e)+\frac{\partial U}{\partial y_e}(y_e-b_e)+\frac{\partial U}{\partial z_e}(z_e-c_e)\right)$$
$$+\sum_\gamma\sum_e\lambda_\gamma\left(\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial x_e}(x_e-a_e)+\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial y_e}(y_e-b_e)+\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial z_e}(z_e-c_e)\right).$$

*Bei der Voraussetzung, dass $\Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_l$ homogene Functionen der Verbindungen $x_e-a_e$, $y_e-b_e$, $z_e-c_e$ sind und dass die in* (4) *vorgeschriebenen constanten Werthe sämmtlich gleich Null sind, verschwindet die Doppelsumme auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung*, und diese Gleichung wird mit der Gleichung (6) der angeführten Abhandlung identisch.

Will man die Bewegung eines Systems von materiellen Punkten für solche Fälle in Rücksicht ziehen, bei denen die Bedingungsgleichungen (4) gelten, dagegen die nach den Axen der $x$, $y$, $z$ genommenen Componenten der auf die einzelnen Massenpunkte $m_e$ wirkenden Kräfte, $X_e$, $Y_e$, $Z_e$, nicht auf eine Kräftefunction zurückführbar sind, so lassen sich bekanntlich die Differentialgleichungen des mechanischen Problems in die *eine Gleichung* zusammenfassen, welche durch die Substitution des Ausdruckes

$$(10)\qquad \sum_e(X_e\delta x_e+Y_e\delta y_e+Z_e\delta z_e)$$

statt der Variation $\delta U$ aus der obigen Gleichung (6) hervorgeht.*) Deshalb bleiben alle von uns gezogenen Schlüsse in voller Kraft, wofern nur statt des obigen Ausdruckes (8) der Ausdruck

$$(8^*)\qquad \sum_e\left(X_e(x_e-a_e)+Y_e(y_e-b_e)+Z_e(z_e-c_e)\right)$$

gesetzt wird.

Die Existenz einer Kräftefunction für die wirkenden Kräfte ist nicht angenommen in der Abhandlung des Herrn Clausius: *über*

*) Lagrange, *mécanique analytique*, Seconde partie, Section IV, art. 10 et 11.

*einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz* (Sitzungsbericht der Niederrheinischen Gesellschaft in Bonn, Juni 1870, und Compte rendu der Pariser Akademie, Tome LXX, 20. Juni 1870), und in der Abhandlung des Herrn Ivan Villarceaux: *sur un nouveau théorème de mécanique générale* (compte rendu, Tome LXXV, No. 5, 29. Juli 1872). Die Beziehungen dieser beiden Abhandlungen, die von rein mechanischen Betrachtungen ausgehen und die gefundenen Resultate auf *die mechanische Theorie der Wärme* anwenden, zu der vorhin angeführten Arbeit und zu den betreffenden früheren Arbeiten von Jacobi, Crelle's Journal, Bd. 17, S. 97, und Vorlesungen über Dynamik, S. 21, sind in dem *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques,* rédigé par M. M. G. Darboux et J. Houel, Tome III, November 1872, S. 349 erörtert. Ferner gehört hierher eine Mittheilung des Herrn Clausius: *über die Beziehungen zwischen den bei Centralbewegungen vorkommenden charakteristischen Grössen*, Nachrichten v. d. K. G. d. Wiss. zu Göttingen, 25. December 1872, S. 600. Anwendungen der vorhin mit $2\,G$ bezeichneten Function auf die *Theorie der Anziehung* haben gegeben Herr de Gasparis: *Lettre sur un nouveau théorème de mécanique, communiquée par M. Ivan Villarceaux* (compte rendu, Tome LXXV, No. 9, 26. August 1872), und Herr S. Newcomb: *Note sur un théorème de mécanique céleste* (compte rendu, Tome LXXV, No. 26, 23. December 1872); Anwendungen auf die *Theorie der kleinen Schwingungen* Herr F. Lucas: *théorèmes généraux sur l'équilibre et le mouvement des systèmes matériels,* Bericht von Herrn de Saint-Venant (compte rendu, Tome LXXV, No. 23, 2. December 1872), und Herr de Saint Venant: *Partage de la force vive, due à un mouvement vibratoire composé, en celles qui seraient dues aux mouvements pendulaires simples et isochrones composants, de diverses périodes et amplitudes. Partage du travail dû au même mouvement composé, entre deux instants quelconques, en ceux qui seraient dus aux mouvements composants* (*compte rendu, an derselben Stelle*).

Der mehrfach erwähnte Aufsatz: *über einen algebraischen Typus der Bedingungsgleichungen eines bewegten Massensystems* enthält Anwendungen auf zwei Gattungen von mechanischen Problemen, von denen die eine Gattung *die kleinen Schwingungen eines Systems materieller Punkte*, die andere Gattung *die Anziehung eines materiellen Punktes gegen ein festes Centrum* in sich begreift. Fernere Anwendungen der Function $2\,G$ auf Probleme der theoretischen Physik gedenke ich bei einer künftigen Gelegenheit zu behandeln.

Die gegenwärtige Untersuchung hat es hauptsächlich mit der Voraussetzung zu thun, dass das System der Punkte $m_\epsilon$ von keinen beschleunigenden Kräften getrieben werde und nur *einer Bedingungsgleichung* unterworfen sei. Demgemäss ist in dem vorhin bezeichneten Problem die Kräftefunction $U$ gleich Null, und die $l$ Bedingungen (4) reduciren sich auf die *eine*

$$(4^*) \qquad \Phi_1 = \text{Const.}$$

Sobald nur *ein einziger Massenpunkt* $m_1$ vorhanden ist, so bedeutet diese Bedingung, dass derselbe die *Oberfläche* $\Phi_1 = \text{Const.}$ nicht verlassen darf, und die Function $2\,G$ wird gleich dem Product der Masse $m_1$ in das Quadrat des Abstandes des Ortes $(x_1, y_1, z_1)$ von dem Orte $(a_1, b_1, c_1)$. Denkt man sich nun den Ort $(x_1, y_1, z_1)$ auf der Oberfläche $\Phi_1 = \text{Const.}$ für eine gewisse Zeit $t$, und das Fortschreiten des Punktes auf der Oberfläche während des nächsten Zeitelements $dt$ beliebig gegeben, so gehört zu dem betreffenden Elemente der Bahn des Punktes ein bestimmter Normalschnitt der Oberfläche, und der Punkt $(a_1, b_1, c_1)$ kann als *Krümmungsmittelpunkt für diesen Normalschnitt* determinirt werden. In Folge dessen hängt die Function $2\,G$ mit dem zugehörigen *Krümmungsradius* $\varrho$ durch die Gleichung

$$(11) \qquad 2\,G = m_1\,\varrho^2$$

zusammen. Wenn die obige Gleichung (6) der in Rede stehenden einfachen Annahme entspricht, so repräsentirt der auf der rechten Seite auftretende Ausdruck $\lambda_1\,\delta\Phi_1$ *das Moment des Druckes, der bei der Bewegung des Punktes* $m_1$ *auf die Oberfläche* $\Phi_1 = \text{Const.}$ *ausgeübt wird.* Die bekannte Beziehung zwischen dem Werthe des Druckes und dem Krümmungsradius $\varrho$ lässt sich dann vermöge der Relation (11) folgendermassen ausdrücken

$$(12) \qquad \frac{-1}{\sqrt{2\,G}} = \frac{\lambda_1 \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1}\right)^2}}{\sqrt{m_1^3}\left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right)}.$$

Es wird nun gezeigt werden, wie man bei dem System der $q$ Punkte $(x_e, y_e, z_e)$ ein System von $q$ zugeordneten Punkten $(a_e, b_e, c_e)$ durch die Forderung bestimmen kann, dass das erste und das zweite vollständige Differential der betreffenden Function $G$ respective von dem ersten und dem zweiten vollständigen Differential der gegebenen Function $\Phi_1$ nur um einen endlichen Factor verschieden sei. Das so definirte System der $q$ Punkte bildet eine Verallgemeinerung von dem Begriffe des Krümmungsmittelpunktes einer Oberfläche. Zwischen dem entsprechenden Werthe der Function $2\,G$ und dem in der Gleichung (6) vorkommenden Werthe $\lambda_1$, wobei die Function $U$ gleich Null und die Zahl $l$ gleich der Einheit vorausgesetzt ist, folgt dann eine der obigen Gleichung (12) völlig analoge Gleichung. Durch dieselbe wird der schon angedeutete Satz verallgemeinert, dass, wenn sich ein Punkt, frei von dem Einfluss einer beschleunigenden Kraft, auf einer gegebenen Oberfläche bewegt, der reciproke Werth des Krümmungsradius dem auf die Oberfläche wirkenden Drucke proportional ist.

Nach der Begründung dieser Thatsachen werde ich die Stellung erörtern, welche die zugehörigen Begriffe der Mechanik und der Geometrie von dem Gesichtspunkte aus einnehmen, unter dem die in *Borchardt's Journal für Mathematik* publicirten Untersuchungen geführt sind, welche den Titel haben: *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen*, Bd. 70, S. 71—102, und Bd. 72, S. 1—56, *Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen*, Bd. 71, S. 274—295, *Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist*, Bd. 74, S. 116—149. Durch diese Betrachtung werden sich Theile der Theorie, welche bis dahin getrennt waren, an einander schliessen, und wird die Wahrnehmung eine neue Bestätigung erfahren, dass die Voraussetzungen der thatsächlich geltenden Mechanik und Geometrie vor anderen nahe stehenden Voraussetzungen auf charakteristische Weise ausgezeichnet sind.

1.

Wenn man das erste vollständige Differential der Function $G$ und der Function $\Phi_1$ einander gegenüberstellt

$$(13)\qquad dG = \sum_e m_e \big((x_e - a_e)\, dx_e + (y_e - b_e)\, dy_e + (z_e - c_e)\, dz_e\big),$$

$$(14)\qquad d\Phi_1 = \sum_e \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e}\, dx_e + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e}\, dy_e + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e}\, dz_e\right),$$

und verlangt, dass bei gegebenen Werthen der $3q$ Variabelen $x_e, y_e, z_e$, *unabhängig von den Werthen der Differentiale* $dx_e, dy_e, dz_e$, das Differential $dG$ dem Differential $d\Phi_1$ bis auf einen endlichen Factor gleich werden soll, so ergiebt sich für die $3q$ Grössen $a_e, b_e, c_e$ die Bestimmung, dass die Verbindungen

$$m_e(x_e - a_e),\quad m_e(y_e - b_e),\quad m_e(z_e - c_e)$$

den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e},\quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e},\quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e}$$

bis auf einen durchgehends übereinstimmenden Factor respective gleich sein müssen. Dieses Sachverhältniss kann vermittelst des Ausdruckes

$$(15)\qquad (1,1) = \sum_e \frac{1}{m_e}\left(\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e}\right)^2\right)$$

durch die Gleichungen

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{m_e(x_e - a_e)}{\sqrt{2G}} = \dfrac{\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_e}}{\sqrt{(1,1)}} \\ \dfrac{m_e(y_e - b_e)}{\sqrt{2G}} = \dfrac{\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_e}}{\sqrt{(1,1)}} \\ \dfrac{m_e(z_e - c_e)}{\sqrt{2G}} = \dfrac{\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z_e}}{\sqrt{(1,1)}} \end{cases}$$

dargestellt werden. Gleichzeitig gilt zwischen den Differentialen $dG$ und $d\Phi_1$ die Relation ven der vorgeschriebenen Beschaffenheit

$$(17)\quad \frac{dG}{\sqrt{2G}} = \frac{d\Phi_1}{\sqrt{(1,1)}}.$$

Wir bilden nun das zweite vollständige Differential der Function $G$ und der Function $\Phi_1$

$$(18)\quad d^2G = \sum_e m_e\left((x_e - a_e)\, d^2x_e + (y_e - b_e)\, d^2y_e + (z_e - c_e)\, d^2z_e\right) + \sum_e m_e\,(dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2),$$

$$(19)\quad d^2\Phi_1 = \sum_e \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e}\, d^2x_e + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_e}\, d^2y_e + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_e}\, d^2z_e\right) + \sum_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_e \partial x_e'}\, dx_e dx_e' + \sum_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_e \partial y_e'}\, dx_e dy_e' + \cdots + \sum_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_e \partial z_e'}\, dz_e dz_e',$$

und sprechen die Forderung aus, dass, *für beliebig veränderliche Werthe der zweiten Differentiale $d^2x_e$, $d^2y_e$, $d^2z_e$ und beliebig aber fest gegebene Werthe der ersten Differentiale $dx_e$, $dy_e$, $dz_e$* das Differential $d^2G$ dem Differential $d^2\Phi_1$ bis auf einen endlichen Factor gleich werde. Die Gleichung (18) verwandelt sich durch die Division mit $dt^2$ in *die charakteristische Relation* (7). Die bestehenden Gleichungen (16) haben zur Folge, dass der erste Bestandtheil von $d^2G$ und der erste Bestandtheil von $d^2\Phi_1$, welche die zweite Differentiale enthalten, die gewünschte Beschaffenheit besitzen, und dass der erstgenannte zu dem zweitgenannten in demselben Verhältnisse steht, wie der Ausdruck $\sqrt{2G}$ zu dem Ausdrucke $\sqrt{(1,1)}$. Deshalb muss die Gleichung gelten

$$(20)\quad \frac{d^2G}{\sqrt{2G}} = \frac{d^2\Phi_1}{\sqrt{(1,1)}}.$$

Damit unsere Forderung vollständig erfüllt sei, ist es darum nothwendig und hinreichend, dass der zweite Bestandtheil von $d^2G$ und der zweite Bestandtheil von $d^2\Phi_1$, welche gleich quadratischen Formen der $3q$ Differentiale $dx_e$, $dy_e$, $dz_e$ sind, ebenfalls dieses Verhältniss zu einander haben. So entspringt die Gleichung

$$\frac{\sum\limits_e m_e\,(dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)}{\sqrt{2G}} \tag{21}$$

$$= \frac{\sum\limits_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_e \partial x_{e'}}\, dx_e dx_{e'} + \sum\limits_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_e \partial y_{e'}}\, dx_e dy_{e'} + \cdots + \sum\limits_{e,e'} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z_e \partial z_{e'}}\, dz_e dz_{e'}}{\sqrt{(1,1)}}.$$

*Durch diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen* (16) *werden die* $3q$ *Grössen* $a_e$, $b_e$, $c_e$, *für gegebene Werthe der Variabelen* $x_e$, $y_e$, $z_e$ *und der Differentiale* $dx_e$, $dy_e$, $dz_e$, *vollständig bestimmt, und das hervorgehende Werthsystem* $(a_e, b_e, c_e)$ *repräsentirt eine Verallgemeinerung des Krümmungsmittelpunktes.*

Bei dem mechanischen Problem, für welches die Kräftefunction $U$ verschwindet, und nur *eine* Bedingungsgleichung (4*) gegeben ist, wird die obige Gleichung (6) zu der folgenden

$$\sum_e m_e \left(\frac{d^2 x_e}{dt^2}\,\delta x_e + \frac{d^2 y_e}{dt^2}\,\delta y_e + \frac{d^2 z_e}{dt^2}\,\delta z_e\right) = \lambda_1\,\delta\Phi_1. \tag{22}$$

Mithin repräsentirt der Ausdruck $\lambda_1 \delta\Phi_1$ *die Summe der Momente aller Drucke*, welche durch die Bedingungsgleichung (4*) hervorgerufen werden. Aus dieser Gleichung sind die Folgerungen zu ziehen

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\Phi_1}{dt^2} = 0. \tag{23}$$

Durch die erste derselben wird die Wahl der Differentialquotienten $\frac{dx_e}{dt}$, $\frac{dy_e}{dt}$, $\frac{dz_e}{dt}$ beschränkt. Die zweite benutzen wir zu der Darstellung des Ausdruckes $\lambda_1$. Wenn man das in (19) explicite hingeschriebene zweite Differential $d^2\Phi_1$ durch die Grösse $dt^2$ dividirt, so erhalten die Grössen $\frac{d^2 x_e}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_e}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_e}{dt^2}$ respective die Factoren $\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_e}$, $\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_e}$, $\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_e}$, während die entsprechenden Grössen auf der linken Seite von (22) die Factoren $m_e\delta x_e$, $m_e\delta y_e$, $m_e\delta z_e$ aufweisen. Sobald daher in (22) statt dieser Ausdrücke die Ausdrücke $\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_e}$, $\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_e}$, $\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_e}$ substituirt werden, so stimmen die betreffenden Bestandtheile überein, und zugleich verwandelt sich der Ausdruck

$$\delta\Phi_1 = \sum_e \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_e}\,\delta x_e + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_e}\,\delta y_e + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z_e}\,\delta z_e\right)$$

in den Ausdruck

$$\sum_e \frac{1}{m_e}\left(\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_e}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_e}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_e}\right)^2\right) = (1,1).$$

Auf diese Weise folgt aus (19) und (22) für die Grösse $\lambda_1$ die Bestimmung

$$(24)\qquad \lambda_1(1,1) = \Sigma\left(\frac{d^2x_e}{dt^2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_e} + \frac{d^2y_e}{dt_2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_e} + \frac{d^2z_e}{dt^2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_e}\right) - \frac{d^2\Phi_1}{dt^2},$$

welcher man durch eine fernere Anwendung von (19) auch die Gestalt geben kann

$$(24^*)\quad \lambda_1(1,1) = -\sum_{e,e'}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_e \partial x_{e'}}\frac{dx_e}{dt}\frac{dx_{e'}}{dt} - \sum_{e,e'}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_e \partial y_{e'}}\frac{dx_e}{dt}\frac{dy_{e'}}{dt} - \cdots$$
$$- \sum_{e,e'}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z_e \partial z_{e'}}\frac{dz_e}{dt}\frac{dz_{e'}}{dt}.$$

Die Vergleichung dieses Resultats mit dem in (21) enthaltenen bringt alsdann die Gleichung hervor

$$(25)\qquad \frac{-1}{\sqrt{2G}} = \frac{\lambda_1\sqrt{(1,1)}}{\sum\limits_e m_e\left(\left(\frac{dx_e}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_e}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_e}{dt}\right)^2\right)}.$$

*Dieselbe schliesst die Gleichung* (12) *in sich, und bezeichnet den Zusammenhang der Function* $\sqrt{2G}$ *mit der Function* $\lambda_1\sqrt{(1,1)}$, *von denen die erstere eine Verallgemeinerung des Krümmungshalbmessers, und die zweite eine Verallgemeinerung von dem Begriffe des Druckes darstellt.*

Beiläufig kann bemerkt werden, dass, wenn man in dem zu der Gleichung (22) führenden Variationsproblem statt der Function $\Phi_1$ die Function $G$ selbst wählt, das bezügliche System von Differentialgleichungen zu der Kategorie gehört, welche Journal f. M., Bd. 72, S. 38 vollständig integrirt ist. Zugleich folgt aus den dortigen Ausführungen, dass die aus $3q = n$ positiven Quadraten bestehende Form

$$\Sigma m_e(dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2),$$

sobald durch die an die Stelle von (4*) tretende Gleichung $G = \frac{1}{2\alpha}$ eine Variabele eliminirt wird, in eine Form von $(n-1)$ Differentialen übergeht, welche für die Mannigfaltigkeit der $(n-1)$ zurückbleibenden Variabelen, und von dem constanten positiven Krümmungsmasse $\alpha$, das Quadrat des Linearelements darstellt.

## 2.

Nach den früher dargelegten Anschauungen können die so eben zur Sprache gebrachten Begriffe der Mechanik und der Geometrie folgendermassen ausgedehnt werden. Es sei $x_\mathfrak{a}$ ein System von $n$ veränderlichen Grössen, wo der Buchstabe $\mathfrak{a}$, wie auch später $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \cdots$ die Reihe der Zahlen $1, 2, \cdots n$ durchläuft, $f(dx)$ bedeute eine wesentlich positive Form des $p^{\text{ten}}$ Grades von den Differentialen $dx_\mathfrak{a}$, bei der die Coefficienten von den Variabelen $x_\mathfrak{a}$ beliebig abhängen, die Determinante aus den zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_\mathfrak{a}\,\partial dx_\mathfrak{b}}$ sei nicht identisch gleich

Null, $U$ und $\Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_l$ seien reine Functionen der Variabelen $x_a$. Man verlangt nun, dass die Variabelen $x_a$ von einer independenten Variabele $t$ so abhängig gemacht werden sollen, dass die erste Variation des Integrals

$$(26) \qquad \int\left(f\left(\frac{dx}{dt}\right) + U + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \cdots + \lambda_l\Phi_l\right) dt$$

bei festen Anfangswerthen und Endwerthen der Variabelen $x_a$ verschwinde, während die $l$ Gleichungen

$$(27) \qquad \Phi_a = \text{Const.}$$

erfüllt sind. Dieses Problem verwandelt sich in das Variationsproblem des Integrals (5), wenn die $n$ Variabelen $x_a$ in die $3q$ Coordinaten $x_e, y_e, z_e$ übergehen, und die Form $f(dx)$ in die Form $\frac{1}{2}\Sigma m_e(dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)$ übergeht. Die Functionen $U, \Phi_1, \cdots \Phi_l$, und die zu bestimmenden Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_l$ sind beide Male in gleicher Weise notirt.

Wir betrachten das Integral (26) zunächst unter der Annahme, dass keine Bedingungen (27) vorhanden sind, und dass die Function $U$ gleich Null ist. Dann fällt die ausgesprochene Forderung mit der anderen Forderung zusammen, dass die erste Variation des Integrales

$$(28) \qquad R = \int \sqrt[p]{f(dx)}$$

zu Null werde.*) Die Integrationswerthe $x_a$, welche dieser Forderung genügen, und durch die Bedingungen bestimmt sind, für einen Werth $t = t_0$ die Gleichungen $x_a = x_a(0)$ und $x_a' = x_a'(0)$ zu befriedigen, wo die Hinzufügung eines Striches die Differentiation nach der Variabele $t$ andeutet und die Constanten $x_a(0)$ und $x_a'(0)$ beliebig gegeben sind, werden in dem vorliegenden Falle *reine Functionen der Grössen* $x_a(0)$ *und der Verbindungen***)

$$(29) \qquad x'_a(0)\,(t - t_0) = u_a\,.$$

Indem die Grössen $x_a(0)$ als constant, die Verbindungen $u_a$ als veränderlich gelten, stellen die letzteren *ein System von Normalvariabelen für die Form* $f(dx)$ dar.***) Der zugehörige Werth des Integrals $R$, von dem System $x_a(0)$ bis zu dem System $x_a$ ausgedehnt, wird dann durch die Gleichung

$$(30) \qquad R^p = pf_0(u)$$

ausgedrückt†); $f_0(u)$ geht aus der Form $f(dx)$ hervor, indem für die

*) Journal f. Mathematik, Bd. 74, S. 120 u. ff.
**) Journal f. Mathematik, Bd. 70, S. 86 u. ff.
***) Journal f. Mathematik, Bd. 72, S. 1 u. ff.
†) Journal f. Mathematik, Bd. 74, S. 126.

Variabelen $x_a$ die betreffenden Werthe $x_a(0)$, für die Differentiale $dx_b$ die betreffenden Werthe $u_b$ substituirt werden. Durch die Einführung der Variabelen $u_b$ in die Form $f(dx)$ entsteht die Transformationsgleichung

$$(31) \qquad f(dx) = \varphi(du);$$

die resultirende Form des $p^{ten}$ Grades von den Differentialen $du_a$, $\varphi(du)$, wird ein *Normaltypus* für die Form $f(dx)$ genannt.

Durch die Einführung der Normalvariabelen $u_a$ in die Functionen $U$, $\Phi_1, \cdots \Phi_l$ verwandelt sich das allgemeinere zu variirende Integral (26) in das Integral

$$(26^*) \qquad \int\left(\varphi\left(\frac{du}{dt}\right) + U + \lambda_1\Phi_1 + \cdots + \lambda_l\Phi_l\right)dt.$$

Bei der erwähnten speciellen Voraussetzung, wo statt der Variabelen $x_a$ die Coordinaten $x_e$, $y_e$, $z_e$ eintreten, statt $f(dx)$ die Form

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma m_e\,(dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)$$

erscheint, denken wir uns an Stelle der Initialwerthe $x_a(0)$ die Coordinaten $a_e$, $b_e$, $z_e$. Weil nun das Variationsproblem des Integrales (2) für das Variationsproblem des Integrals (28) eintritt, und weil das Variationsproblem des Integrals (2) durch das Fortschreiten jedes Massenpunktes $m_e$ in gerader Linie und mit gleichförmiger Geschwindigkeit, mithin durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_e &= a_e + x'_e(0)\,(t - t_0) \\ y_e &= b_e + y'_e(0)\,(t - t_0) \\ z_e &= c_e + z'_e(0)\,(t - t_0) \end{aligned}$$

aufgelöst wird, so *sind unter den obwaltenden Verhältnissen die Normalvariabelen $u_a$ nichts anderes als die Coordinatendifferenzen*

$$x_e - a_e, \quad y_e - b_e, \quad z_e - c_e.$$

*Deshalb wird der Normaltypus $\varphi(du)$ mit der gegebenen Form*

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma m_e\,(dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)$$

*identisch gleich, und die Function $2f_0(u)$ fällt mit der Function*

$$2G = \Sigma m_e\left((x_e - a_e)^2 + (y_e - b_e)^2 + (z_e - c_e)^2\right)$$

*zusammen.*

Das Variationsproblem des Integrals (26*) zieht allgemein die Gleichung nach sich

$$(32) \qquad \sum_a \left( \frac{d\,\frac{\partial\varphi(u')}{\partial u'_a}}{dt} - \frac{\partial\varphi(u')}{\partial u_a} \right)\delta u_a = \delta U + \lambda_1\delta\Phi_1 + \cdots + \lambda_l\delta\Phi_l,$$

die unabhängig von den Werthen der Variationen $\delta u_a$ befriedigt werden muss. *Wir ersetzen die Variationen $\delta u_\alpha$ beziehungsweise durch die Normalvariabelen $u_\alpha$ selber, und erhalten die Gleichung*

$$(33)\qquad \sum_\alpha \left( \frac{d \frac{\partial \varphi(u')}{\partial u'_\alpha}}{dt} - \frac{\partial \varphi(u')}{\partial u_\alpha} \right) u_\alpha = \sum_\alpha \frac{\partial U}{\partial u_\alpha} u_\alpha + \sum_{\alpha,\gamma} \lambda_\gamma \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial u_\alpha} u_\alpha .$$

Es kommt jetzt darauf an, nachzuweisen, wie der auf der linken Seite dieser Gleichung befindliche Ausdruck mit der Function $f_0(u)$ zusammenhängt. Indem wir in dem Normaltypus $\varphi(u')$ statt der Differentialquotienten $u'_\alpha$ die Differentiale $du_\alpha$ wieder einführen, bilden wir die für alle Systeme $du_\alpha$ und $\delta u_\alpha$ gültige identische Relation

$$(34)\qquad \sum_\alpha d \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_\alpha} \delta u_\alpha = d \sum_\alpha \left( \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_\alpha} \delta u_\alpha - \frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial \delta u_\alpha} du_\alpha \right) + d \sum_\alpha \frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial \delta u_\alpha} du_\alpha - \sum_\alpha \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_\alpha} d\delta u_\alpha .$$

Das vollständige Differential $df_0(u)$ kann nun in der folgenden Weise dargestellt werden, wofern die Substitution der Grösse $u_\alpha$ an Stelle von $\delta u_\alpha$ durch Einschliessung des betreffenden Ausdruckes in eine eckige Klammer angedeutet wird,*)

$$(35)\qquad df_0(u) = \sum_\alpha \left[ \frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial \delta u_\alpha} \right] du_\alpha .$$

Ferner folgt aus dem Umstande, dass $\varphi(du)$ eine homogene Function des $p^{\text{ten}}$ Grades von den Differentialen $du_\alpha$ ist, die Gleichung

$$(36)\qquad p\varphi(du) = \sum_\alpha \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_b} du_\alpha .$$

Wenn man daher in (34) statt $\delta u_\alpha$ das bezügliche $u_\alpha$ substituirt, so entsteht die Gleichung

$$(37)\qquad \sum_\alpha d \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_\alpha} u_\alpha = d \left[ \sum_\alpha \left( \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_\alpha} \delta u_\alpha - \frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial \delta u_\alpha} du_\alpha \right) \right] + d^2 f_0(u) - p\varphi(du),$$

welche den gesuchten Zusammenhang vollständig aufdeckt. Sobald die Zahl $p = 2$ ist, wird der Ausdruck

$$\sum_\alpha \left( \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_\alpha} \delta u_\alpha - \frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial \delta u_\alpha} du_\alpha \right)$$

nach einer Grundeigenschaft der quadratischen Formen gleich Null. *Für die Voraussetzung $p = 2$ gilt daher die charakteristische Relation*

$$(38)\qquad \sum_\alpha d \frac{\partial \varphi(du)}{\partial du_\alpha} u_\alpha = d^2 f_0(u) - 2\varphi(du) .$$

*) Journal f. Mathematik, Bd. 72, S. 8.

Wir werden von jetzt ab annehmen, dass diese Voraussetzung besteht. *Durch die Anwendung von (38) erhält somit die Gleichung (33) die definitive Gestalt*

$$(39)\qquad \frac{\partial^2 f_0(u)}{dt^2}-2\varphi\left(\frac{du}{dt}\right)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{\partial\left(\varphi\left(\frac{du}{dt}\right)+U\right)}{\partial u_{\mathfrak{a}}}u_{\mathfrak{a}}+\sum_{\mathfrak{a},\gamma}\lambda_\gamma\frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial u_{\mathfrak{a}}}u_{\mathfrak{a}}.$$

*In dieser Gleichung ist die obige Gleichung* (9) *als specielles Resultat eingeschlossen,* und es können an dieselbe ähnliche Betrachtungen angeknüpft werden, wie dort geschehen ist.

## 3.

In dem Falle, dass die Function $U$ gleich Null, und wieder die Zahl $p=2$ ist, wird das Variationsproblem des Integrals (26) zu demjenigen, welches Journal f. Mathematik Bd. 71, S. 275 aufgestellt ist, Mit den dortigen Bezeichnungen übereinstimmend sei

$$(40)\qquad f(dx)=\tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,dx_{\mathfrak{a}}\,dx_{\mathfrak{b}},$$

ferner

$$(41)\qquad |a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}|=\Delta,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}=A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Den Functionen $y_1, y_2, \cdots y_l$, welche dort gleich Constanten zu setzen sind, entsprechen gegenwärtig die Functionen $\Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_l$. Die Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_l$ sind mit denselben Zeichen notirt. Wir erwägen nun die Voraussetzung, dass nur *eine* Function $\Phi_1$ vorhanden sei. Alsdann liefert das Verschwinden der ersten Variation des gegebenen Integrals (26) die Gleichung

$$(42)\qquad \sum_{\mathfrak{a}}\left(\frac{d\frac{\partial f(x')}{\partial x'_{\mathfrak{a}}}}{dt}-\frac{\partial f(x')}{\partial x_{\mathfrak{a}}}\right)\delta x_{\mathfrak{a}}=\lambda_1\delta\Phi_1.$$

Um den Ausdruck $\lambda_1$ vermittelst der nunmehr geltenden Gleichungen

$$(43)\qquad \begin{cases}\dfrac{d\Phi_1}{dt}=\sum_{\mathfrak{c}}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\dfrac{dx_{\mathfrak{c}}}{dt}=0\\[2ex] \dfrac{d^2\Phi_1}{dt^2}=\sum_{\mathfrak{c}}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\dfrac{d^2x_{\mathfrak{c}}}{dt^2}+\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial x_{\mathfrak{a}}\partial x_{\mathfrak{b}}}\dfrac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt}\dfrac{dx_{\mathfrak{b}}}{dt}=0\end{cases}$$

zu bestimmen, kann man in (42) statt der Variationen $\delta x_{\mathfrak{a}}$ solche Ausdrücke einführen, dass der Factor von $\frac{d^2x_{\mathfrak{c}}}{dt^2}$ auf der linken Seite dieser Gleichung mit $\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{\mathfrak{c}}}$, dem betreffenden Factor in dem Ausdrucke $\frac{d^2\Phi_1}{dt^2}$, übereinstimmt. Da auf der linken Seite von (42) als Factor der Verbindung $\frac{d^2x_{\mathfrak{c}}}{dt^2}\delta x_{\mathfrak{a}}$ der Coefficient $a_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}$ der Form $2f(dx)$ erscheint, so ist für den angegebenen Behuf die Variation $\delta x_a$ durch den Ausdruck

$$\sum_e \frac{A_{a,e}}{\Delta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e} \tag{44}$$

zu ersetzen. Durch diese Substitution geht die vollständige Variation $\delta \Phi_1 = \sum_a \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_a} \delta x_a$ in den Ausdruck

$$\sum_{a,e} \frac{A_{a,e}}{\Delta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_a} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_e} = (1,1) \tag{45}$$

über, und es entsteht für $\lambda_1$ die Darstellung

$$\lambda_1 (1,1) = \sum_a \left( \frac{d \frac{\partial f(x')}{\partial x'_a}}{dt} - \frac{\partial f(x')}{\partial x_a} \right) \sum_e \frac{A_{a,e}}{\Delta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_a} - \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2}, \tag{46}$$

welche mit der an dem angeführten Orte gegebenen Darstellung übereinstimmt. Bei dieser Gelegenheit ist hervorgehoben worden, dass, wenn in dem betreffenden Variationsproblem statt des Systems der Variabelen $x_a$ ein beliebiges System von neuen unabhängigen Variabelen eingeführt wird, sowohl der Ausdruck (1,1), wie auch der Ausdruck $\lambda_1$ in die aus den neuen Elementen entsprechend gebildeten Ausdrücke übergehen.*) Wird daher das vorhin definirte System der *Normalvariabelen* $u_a$ eingeführt, und bedient man sich für den *Normaltypus* $\varphi\ (du)$ der Bezeichnungen

$$\begin{cases} \varphi(du) = \frac{1}{2} \Sigma_{a,b}\, p_{a,b}\, du_a\, du_b \\ |p_{a,b}| = \Pi, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial p_{a,b}} = P_{a,b} \end{cases} \tag{47}$$

so entstehen aus (45) und (46) respective die neuen Gleichungen

$$\sum_{a,e} \frac{P_{a,e}}{\Pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_a} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_e} = (1,1), \tag{48}$$

$$\lambda_1 (1,1) = \sum_a \left( \frac{d \frac{\partial \varphi(u')}{\partial u'_a}}{dt} - \frac{\partial \varphi(u')}{\partial u_a} \right) \sum_e \frac{P_{a\,e}}{\Pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_a} - \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2}. \tag{49}$$

Für das System von Normalvariabelen $u_a$ ist das zugehörige System von Grössen $x_a\ (0)$ von entscheidender Bedeutung. Nach der in (29) aufgestellten Definition verschwinden die sämmtlichen Normalvariabelen $u_a$, sobald das Werthsystem $x_a$ die Gleichungen $x_a = x_a(0)$ befriedigt; ferner genügt eine Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung

---

*) Wenn statt der constant zu setzenden Function $\Phi_1$ eine constant zu setzende Function dieser Function eingeführt wird, so bleibt noch das Product $\lambda_1 \sqrt{(1,1)}$ invariant, welches die Verallgemeinerung von dem Begriffe des Druckes repräsentirt.

welche von dem Werthsystem $u_\alpha = 0$ ausgeht, und bei der die Verhältnisse der Variabelen $u_\alpha$ zu einander ungeändert bleiben, dem Variationsproblem des Integrals (28). Dass diese Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung unter den Voraussetzungen des Artikels 1. nichts anderes bedeutet, als das Fortschreiten jedes Massenpunktes $m_e$ in gerader Linie und mit gleichförmiger Geschwindigkeit vom Orte $(a_e, b_e, c_e)$ aus, ist mehrfach erwähnt worden. Wie früher das Werthsystem $a_e, b_e, c_e$ determinirt ist, so werden wir jetzt das Werthsystem $x_\alpha(0)$ durch gewisse Forderungen determiniren; und zwar ist hiezu der explicite Ausdruck der Variabelen $x_\alpha$ durch die Variabelen $u_\alpha$ und die festen Werthe $x_\alpha(0)$ nicht erforderlich.

Die erste dieser Forderungen ist darauf gerichtet, dass das Differential $df_0(u)$ dem Differential $d\Phi_1$ für beliebige Werthe der Differentiale $du_\alpha$ bis auf einen endlichen Factor gleich werde. Wegen der Relation (35) müssen daher die Grössen $\left[\frac{\partial\varphi(\delta u)}{\partial\delta u_\alpha}\right]$ zu den bezüglichen Grössen $\frac{\partial\Phi_1}{\partial u_\alpha}$ in einem und demselben Verhältniss stehen. Das gleiche Verhältniss muss, da nach (47)

$$\frac{\partial\varphi(\delta u)}{\partial\delta u_\alpha} = p_{\alpha,1}\,\delta u_1 + p_{\alpha,2}\,\delta u_2 + \cdots p_{\alpha,n}\,\delta u_n$$

ist, die Grösse $[\delta u_\alpha] = u_\alpha$ zu der Verbindung $\sum_e \frac{P_{\alpha,e}}{\Pi}\frac{\partial\Phi_1}{\partial u_e}$ haben, und auch der Ausdruck $\sqrt{[2\varphi(\delta u)]}$, der dem Ausdrucke $\sqrt{2f_0(u)}$ gleich ist,*) zu dem Ausdrucke $\sqrt{(1,1)}$, der durch die Gleichung (48) definirt wird. Aus diesen Gründen gelten die Gleichungen

$$(50)\qquad \frac{u_\alpha}{\sqrt{2f_0(u)}} = \frac{\sum_e \frac{P_{\alpha,e}}{\Pi}\frac{\partial\Phi_1}{\partial u_e}}{\sqrt{(1,1)}},$$

und die Gleichung

$$(51)\qquad \frac{df_0(u)}{\sqrt{2f_0(u)}} = \frac{d\Phi_1}{\sqrt{(1,1)}}.$$

Die zweite Forderung, bei der die zweiten Differentiale $d^2u_\alpha$ als unabhängig veränderlich, die ersten Differentiale als beliebig aber fest gewählt angesehen werden, wird durch die Gleichung dargestellt,

$$(52)\qquad \frac{d^2f_0(u) - \sum_\alpha \frac{\partial\varphi(du)}{\partial u_\alpha}u_\alpha}{\sqrt{2f_0(u)}} = \frac{d^2\Phi_1}{\sqrt{(1,1)}};$$

dieselbe ist in Ansehung der zweiten Differentiale befriedigt, weil die

*) Journal f. Mathematik, Bd. 72, S. 7, Formel (13).

Gleichung (51) besteht. *Die charakteristische Relation* (38), *welche zu der beabsichtigten Umformung von* (33) *in* (39) *gedient hat, bewirkt auch die beabsichtigte Umformung von* (52) *in die Gleichung*

$$(53)\qquad \frac{\sum\limits_{\mathfrak{a}} d\,\frac{\partial\varphi(du)}{\partial du_{\mathfrak{a}}}\,u_{\mathfrak{a}} - \sum\limits_{\mathfrak{a}}\frac{\partial\varphi(du)}{\partial u_{\mathfrak{a}}}\,u_{\mathfrak{a}} + 2\varphi(du)}{\sqrt{2f_0(u)}} = \frac{d^2\Phi_1}{\sqrt{(1,1)}}.$$

Die Anwendung von (50) führt zu der Darstellung

$$(54)\qquad \frac{2\varphi(du)}{\sqrt{2f_0(u)}} = -\sum_{\mathfrak{a}}\left(d\,\frac{\partial\varphi(du)}{\partial du_{\mathfrak{a}}} - \frac{\partial\varphi(du)}{\partial u_{\mathfrak{a}}}\right)\frac{\sum\limits_{\mathfrak{e}}\frac{P_{\mathfrak{a},\mathfrak{e}}}{\Pi}\frac{\partial\Phi_1}{\partial u_{\mathfrak{e}}}}{\sqrt{(1,1)}} + \frac{d^2\Phi_1}{\sqrt{(1,1)}}.$$

*Da nun die rechte Seite dieser Gleichung, durch* $dt^2$ *dividirt, bis auf das Vorzeichen mit der rechten Seite von* (49) *übereinstimmt, so ergiebt sich das Resultat*

$$(55)\qquad \frac{-1}{\sqrt{2f_0(u)}} = \frac{\lambda_1\sqrt{(1,1)}}{2\varphi(u')},$$

*welches die Gleichung* (25) *als besonderen Fall umfasst.*

4.

Durch die Gleichung (51), welche vermöge der Unabhängigkeit der Differentiale $du_{\mathfrak{a}}$ ein System von $(n-1)$ unabhängigen Gleichungen vertritt, und durch die zuletzt gewonnene Gleichung (55) sind die $n$ Grössen $x_{\mathfrak{a}}(0)$, welche dem System der Normalvariabelen zugehören, indirect bestimmt. Um eine directe Bestimmung zu erhalten, fassen wir die schon erwähnte Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung ins Auge, die das Variationsproblem des Integrals (28) auflöst, und sich von dem Werthsystem $u_{\mathfrak{a}} = 0$ bis zu dem gegebenen die Gleichung $\Phi_1 = \text{Const.}$ befriedigenden Werthsysteme $u_{\mathfrak{a}}$ erstreckt. Diese Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, auf die Variabelen $x_{\mathfrak{a}}$ bezogen, dehnt sich von dem Werthsystem $x_{\mathfrak{a}}(0)$ bis zu dem die Gleichung $\Phi_1 = \text{Const.}$ befriedigenden Werthsystem $x_{\mathfrak{a}}$ aus, welches dem Werthsystem $u_{\mathfrak{a}}$ correspondirt. Der zugeordnete Werth des Integrals $R$ wird in den Normalvariabelen $u_{\mathfrak{a}}$ nach (30), da $p = 2$ ist, durch die Gleichung

$$(56)\qquad R = \sqrt{2f_0(u)}$$

ausgedrückt. Wenn bei der Fortsetzung der in Rede stehenden Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung die Variabelen $x_{\mathfrak{a}}$ die Incremente $Dx_{\mathfrak{a}}$ erhalten, so erlaubt der Ausdruck $\frac{df_0(u)}{\sqrt{2f_0(u)}}$ in den Variabelen $x_{\mathfrak{a}}$ die Darstellung*)

*) Journal f. Mathematik, Bd. 74, S. 128.

$$(57)\qquad \frac{d f_0(u)}{\sqrt{2 f_0(u)}} = \frac{\sum\limits_{\mathfrak{a}} \frac{\partial f(Dx)}{\partial D x_{\mathfrak{a}}} d x_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{2 f(Dx)}}.$$

Durch die Gleichung (45) ist die Verbindung (1,1) in den Variabelen $x_{\mathfrak{a}}$ ausgedrückt. *Wir dürfen daher an die Stelle von* (51) *die Gleichung setzen*

$$(58)\qquad \frac{\sum\limits_{\mathfrak{a}} \frac{\partial f(Dx)}{\partial D x_{\mathfrak{a}}} d x_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{2 f(Dx)}} = \frac{d\Phi_1}{\sqrt{(1,1)}}.$$

Vermöge derselben werden die Verhältnisse der Differentiale $Dx_{\mathfrak{a}}$, das heisst, es wird *das Endelement der bezeichneten Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung* in derjenigen Weise bestimmt, für welche J. f. M., Bd. 74, S. 144 der Ausdruck gebraucht ist, *dass das Endelement $Dx_{\mathfrak{a}}$ gegen die Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{ten}$ Ordnung $\Phi_1 =$* Const. *mit Rücksicht auf die Form $2f(Dx)$ normal sei.*

In der Gleichung (55) kann man vermöge (31) die Form $2\varphi(u')$ durch die Form $2f(x')$ ersetzen, und mittelst der Gleichungen (45) und (46) die Verbindung $\lambda_1 \sqrt{(1,1)}$ in den Werthsystemen $x_{\mathfrak{a}}$ und $\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt}$ darstellen. *So entsteht die Gleichung*

$$(59)\qquad \frac{-1}{R} = \frac{\lambda_1 \sqrt{(1,1)}}{2f(x')},$$

*welche den Werth des Integrals $R$ in den Werthsystemen $x_{\mathfrak{a}}$ und $\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt}$ angibt.*

Die Gleichungen (58) und (59) bestimmen also das Werthsystem $x_{\mathfrak{a}}(0)$ durch die Bedingungen, dass die von demselben ausgehende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung, welche die erste Variation des Integrals (28) zum Verschwinden bringt, auf ein gegebenes, der Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{ten}$ Ordnung angehörendes Werthsystem $x_{\mathfrak{a}}$ hinauskomme, während das betreffende Endelement $Dx_{\mathfrak{a}}$ gegen diese Mannigfaltigkeit der $(n-1)^{ten}$ Ordnung mit Rücksicht auf die Form $2f(Dx)$ normal ist, und das zugehörige Integral $R$ den vorgeschriebenen Werth annimmt. Denkt man sich umgekehrt die in Rede stehende Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung von dem Werthsysteme $x_{\mathfrak{a}}$ ausgehend, so wird der Verlauf derselben durch dieses System und durch das Element $Dx_{\mathfrak{a}}$ vollständig bestimmt, und der vorgeschriebene Werth des Integrals $R$ determinirt schliesslich das betreffende Werthsystem $x_{\mathfrak{a}}(0)$.*) Die Möglichkeit dieser Bestimmung ist dabei vorausgesetzt. Dass die Gleichungen (58) und (59) die Eigenschaft haben, wenn statt der Variabelen $x_{\mathfrak{a}}$ ein neues System von unabhängigen

*) Journal f. Mathematik, Bd. 74, S. 130 u. ff.

Variabelen eingeführt wird, und auch wenn die constant zu setzende Function $\Phi_1$ durch eine constant zu setzende Function dieser Function ersetzt wird, in *die aus den neuen Elementen entsprechend gebildeten Gleichungen* überzugehen, erkennt man leicht. *Die gegebene Bestimmung ist also von der Wahl des Systems von Variabelen und von der Wahl der Gestalt der Function $\Phi_1$ vollkommen unabhängig.* Sobald in den Betrachtungen des Artikels 1 nur ein einziger Massenpunkt angenommen wird, so ist die bezeichnete Mannigfaltigkeit der ersten Ordnung die von dem Punkte $(x_1, y_1, z_1)$, normal gegen die Oberfläche $\Phi_1 = \text{Const.}$ gerichtete gerade Linie, und das Abschneiden der Länge des Krümmungshalbmessers von dem Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ aus bestimmt den Krümmungsmittelpunkt $(a_1, b, c_1)$.

Wenn man die Grössen $x_\alpha$ als fest, die Grössen $\frac{dx_\alpha}{dt}$ als veränderlich, und nur durch die Gleichung aus (43)

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0$$

beschränkt ansieht, und wenn man die Frage aufwirft, *für welche Werthsysteme* $\frac{dx_\alpha}{dt}$ *das erste Differential des in* (59) *definirten Ausdruckes* $\frac{1}{R}$ *verschwindet*, so hat man *ein Problem de maximis et minimis* ausgesprochen, welches aus *dem allgemeineren Problem de maximis et minimis*, das Journal f. M. Bd. 71, S. 277 aufgestellt und erörtert ist, bei der Annahme $l = 1$ hervorgeht. Die für dieses Problem an jenem Orte mitgetheilten Resultate sind daher auf das gegenwärtig vorliegende Problem ohne Weiteres anwendbar. Es leuchtet ein, dass das bezeichnete Problem in dem so eben erwähnten einfachsten Falle des Artikels 1 zu dem *Problem des grössesten und kleinsten Krümmungshalbmessers* wird.

Bei der Vergleichung der allgemeineren zuletzt gefundenen Resultate mit den specielleren früher aufgestellten muss es auffallen, dass die Gleichungen (39) und (52) beziehungsweise einen der Ausdrücke

$$\sum_\alpha \frac{\partial \varphi\left(\frac{du}{dt}\right)}{\partial u_\alpha} u_\alpha \quad \text{und} \quad \sum_\alpha \frac{\partial \varphi\,(du)}{\partial u_\alpha} u_\alpha$$

enthalten, der in den entsprechenden Gleichungen (9) und (20) nicht vorkommt. Wie hervorgehoben ist, erscheint in den letzteren Gleichungen statt der Form $f(dx)$ *die Form mit constanten Coefficienten* $\frac{1}{2}\sum_e m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)$, *die Normalvariabelen* $u_\alpha$ gehen in *die Differenzen* $(x_e - a_e)$, $(y_e - b_e)$, $(z_e - c_e)$ über, *der Normaltypus* $\varphi(du)$ fällt mit *der Form* $\frac{1}{2}\sum_e m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)$ *selbst* zusammen, und *die Function* $f_0(u)$ wird zu *der Function G*. Unter diesen Umständen ist der *Normaltypus* $\varphi(du)$ *eine Form mit constanten Coefficienten*, und sobald $\varphi(du)$ eine Form mit constanten Coefficienten wird, muss der Ausdruck $\sum_a \frac{\partial \varphi(du)}{\partial u_a} u_a$ offenbar verschwinden. Es ist aber Journal f. M., Bd. 70, S. 92 u. ff. auch nachgewiesen, *dass, wenn die Form* $f(dx)$ *in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann, der Normaltypus* $\varphi(du)$ *eine solche Form darstellt, und dass der Ausdruck* $\sum_a \frac{\partial \varphi(du)}{\partial u_a} u_a$ *nur dann verschwinden kann, wenn die Form* $f(dx)$ *in eine Form mit constanten Coefficienten transformirbar ist.* Die linke Seite der auf S. 94 mit (59) bezeichneten Gleichung geht nämlich mit $(t - t_0)$ multiplicirt, in den Ausdruck $\sum_a \frac{\partial \varphi(\delta u)}{\partial u_a} u_a$ über. *Die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden des Ausdruckes* $\sum_a \frac{\partial \varphi(du)}{\partial u_a} u_a$ *besteht also darin, dass die Form* $f(dx)$ *in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann.**) *Da ferner im Eingange verlangt worden ist, dass die quadratische Form* $f(dx)$ *wesentlich positiv und von nicht verschwindender Determinante sei, so muss der Normaltypus* $\varphi(du)$ *dieselben Eigenschaften haben, und ist daher, wenn die Form* $f(dx)$ *in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann, nothwendig gleich dem Aggregat der Quadrate von n Differentialen.* Aus diesen Ursachen repräsentiren die Voraussetzungen der thatsächlich geltenden Mechanik, welche dem Artikel 1 zu Grunde liegen, der Sache nach die grösseste Allgemeinheit, welche bei einer wesentlich positiven quadratischen Form $f(dx)$ mit dem Verschwinden des Ausdruckes $\sum_a \frac{\partial \varphi(du)}{\partial u_a}$ vereinbar ist.

Wenn man die Variabelen $x_a$ mit den Verbindungen $\sqrt{m_e}(x_e - a_e)$, $\sqrt{m_e}(y_e - b_e)$, $\sqrt{m_e}(z_e - c_e)$ übereinstimmen lässt, so fällt die Form $\frac{1}{2} \sum_e m_e (dx_e^2 + dy_e^2 + dz_e^2)$ mit der Form $\frac{1}{2} \sum_a dx_a^2$ zusammen. Es ist schon Journal f. M., Bd. 71, S. 284 auseinandergesetzt worden, wie bei der Voraussetzung $f(dx) = \frac{1}{2} \sum_a dx_a^2$ die Theorie der Function $\lambda_1 \sqrt{(1,1)}$ mit der von Herrn Kronecker gegebenen *Ausdehnung der Theorie der Krümmung* (Monatsbericht der Berliner Akademie, August 1869) auf das genaueste zusammenhängt. In der That coincidirt die Grösse, welche Herr Kronecker $\varrho$ genannt hat, mit derjenigen, welche oben $\sqrt{2G}$ oder $R$ genannt worden ist, und die in dem Artikel 1 von uns gegebene Ausdehnung des Begriffes des Krümmungsmittelpunktes

---

*) Ein *directes Criterium* für diese Beschaffenheit der quadratischen Form $f(dx)$ ist Journal f. M., Bd. 70, S. 94 u. ff. aufgestellt und bewiesen.

unterscheidet sich von der durch Herrn Kronecker entwickelten nur durch die Anknüpfung an die Vorstellungen der Mechanik und durch die Wahl der zum Ziele führenden Schritte. Auch das angedeutete *Problem de maximis et minimis* entspricht genau demjenigen, das Herr Kronecker an der erwähnten Stelle behandelt hat. Um aber zu erklären, *weshalb der Zugang zu diesen Untersuchungen von der Mechanik und von der Geometrie aus möglich ist, weshalb die Resultate der Mechanik, die in den Gleichungen* (9) *und* (39) *enthalten sind, und die Resultate der Geometrie, welche sich auf die Gleichungen* (20) und (52) *stützen, von denselben Algorithmen abhängen können,* möchte ich an ein Wort erinnern, das Gauss in der Schrift: *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen* in Bezug auf die Beweisführung des Fundamentaltheorems der algebraischen Gleichungen ausgesprochen hat, das jedoch in einem viel weiteren Sinne gilt. Es lautet so: „Im Grunde gehört aber der eigentliche Inhalt der ganzen Argumentation einem höheren von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstracten Grössenlehre an, dessen Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Grössencombinationen sind, einem Gebiete, welches zur Zeit noch wenig angebauet ist, und in welchem man sich auch nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache.“

Bonn, den 16. Februar 1873.

# Ueber cubische ternäre Formen.

Von Clebsch und Gordan.

Wenn wir es im Folgenden unternehmen, eine Darstellung der Theorie der cubischen ternären Formen zu entwickeln, so ist dabei unsere Absicht nicht sowohl, Neues zu geben, als das bisher Bekannte in systematischer Weise zusammenzufassen, und damit auch denjenigen, welche mit den Resultaten der neuern Algebra noch weniger vertraut sind, einen Eingang in diese merkwürdige Theorie zu bahnen, wie er unserer gegenwärtigen Auffassung entsprechend erscheint.

Die Theorie der ternären cubischen Formen ist für die allgemeine Entwicklung der neuern Algebra von besonderer Wichtigkeit geworden. In den Arbeiten von Hesse über die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung kann man die Anfänge dieser Disciplin überhaupt erblicken. Die Anwendung der sehr einfachen kanonischen Form, welche diese Formen zulassen, gestattete, später für dieselben eine gewisse Anzahl von Bildungen auszuführen, und namentlich ihren Zusammenhang zu erforschen. So wurden, nachdem Aronhold im 39. Bande des Crelle'schen Journals (1849) unter anderm die Invarianten dieser Formen zuerst angegeben, diese, sowie die Covarianten und zugehörigen Formen dritter und sechster Ordnung, welche aus einer cubischen ternären Form entspringen, von Cayley im dritten „Memoir upon Quantics" (1856) entwickelt, und bereits die betreffenden Bildungen auch mit Zugrundelegung einer der cubischen Covarianten oder cubischen zugehörigen Formen ausgeführt.

Die classische Arbeit, in welcher Aronhold (Crelle Bd. 55, 1858) die Resultate von 1849 begründete, im Zusammenhange darlegte und erweiterte, muss als die Grundlage einer einheitlichen Ausführung dieser Theorie betrachtet werden, und giebt zugleich das erste Beispiel einer Anwendung seiner Methode symbolischer Bezeichnung.

Hier finden sich ferner ausser den schon erwähnten Bildungen die Zwischenformen mit besonderer Betonung behandelt, deren eine schon in der Arbeit von 1849 erwähnt war. Aber die Betonung dieser Zwischenformen lässt Aronhold den Weg der reinen Anwendung früher verlassen, als in mancher Beziehung zweckmässig scheint, und statt ihrer sodann eine eigenthümlich durchgeführte Rechnung mit den Coefficienten der ersten Zwischenform setzen.

Die principielle Ausbildung der Methode symbolischer Rechnung, welche wir an mehreren Orten verfolgt haben, ist, soweit sie binäre Formen betrifft, kürzlich von einem von uns in einem Lehrbuche*) dargelegt worden. Dass ein Gleiches zunächst für ternäre Formen nicht möglich ist, liegt wesentlich in dem Mangel gewisser nothwendig zu führender Beweise, welcher einen auch nur vorläufigen Abschluss dieser Theorie noch nicht gestattet. Aber bei *cubischen* ternären Formen ist der Beweis der Existenz eines endlichen Formensystems durch einen von uns geliefert und das System aufgestellt worden**). Man sieht daraus, dass der Kreis der von Aronhold betrachteten Formen nur um Weniges zu erweitern war. Abgesehen von Functionaldeterminanten, deren einige schon von Brioschi und Hermite als wesentlich hervorgehoben waren***), sind es nur noch fünf Zwischenformen, welche den von Aronhold betrachteten Bildungen hinzugefügt werden müssen, und zwar sind diese keine andern als die, welche wir bereits bei einer frühern Gelegenheit eingeführt und im Zusammenhange mit andern Bildungen untersucht haben†).

Wir dürfen es nun wohl als Zweck der vorliegenden Arbeit betrachten, *den Formenzusammenhang aller für die Theorie der ternären cubischen Formen nothwendigen Bildungen, gestützt auf die Methode der symbolischen Rechnung, elementar und vollständig darzulegen.* Auf solche Weise hoffen wir es zu erreichen, dass für weitere Arbeiten eine allgemein zugängliche Grundlage existirt, auf welche man bei spätern Untersuchungen sich beziehen kann.

Wir beschränken uns dabei durchaus auf den Formenzusammenhang und behandeln keineswegs die Anwendung dieser Theorie, wie insbesondere etwa die in Bezug auf die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung gemacht zu werden pflegen. Seitdem die Endlichkeit der Formensysteme bemerkt ist, gewinnt das Studium des Formenzusammenhanges an sich ein erhöhtes Interesse, und darf wohl ganz abgelöst werden von der gleichzeitigen Betrachtung der geometrischen Probleme, denen es ursprünglich seine Entstehung verdankt. Oder vielmehr, es tritt nunmehr eine umgekehrte Wirkung in den Vordergrund. Es handelte sich zunächst darum, die Probleme der projectivischen Geometrie zu formuliren und zu behandeln; dieses gab der Invariantentheorie ihren Ursprung. Aber diese selbst hat nun umgekehrt seit

*) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872.
**) Gordan, Bd. I. der Math. Ann., S. 90.
***) Comptes Rendus 1863, 1. Sem., S. 304. Borchardt's Journal Bd. 63, S. 30.
†) Bd. I. der Math. Ann., S. 56.

langer Zeit Bildungen untersucht, deren geometrische Bedeutung nicht vollkommen erfasst ist, und deren Begriffe sich anzueignen, nunmehr Aufgabe der Geometrie wird. Auf einem solchen Wege hat sich der Gesichtskreis der Geometrie schon mannigfach erweitert, wie durch Aufnahme der Begriffe der Polaren etc. Eine durchgreifende Vervollständigung der hier einschlagenden geometrischen Begriffe ist aber, wie es scheint, erst möglich durch ein umfassendes Studium der den Zwischenformen entsprechenden Gebilde, welche einer von uns unter dem Namen der Connexe zum Gegenstande der Untersuchung zu machen begonnen hat. Erst wenn nach dieser Richtung die Begriffe vollständig entwickelt sind, darf man hoffen, die Entwicklungen der ternären Algebra in jeder ihrer Stufen auch geometrisch interpretiren zu können.

Die Abhandlung zerfällt in vier Abschnitte. Im ersten derselben werden die ersten Bildungen ausgeführt, wie dieselben aus der Theorie der binären Formen und der ternären quadratischen entspringen. Im zweiten Theile werden die Bildungen untersucht, die einer aus der gegebenen und ihrer cubischen Covariante linear zusammengesetzten Grundform entspringen. Diese beiden Abtheilungen sind zum Theil durch Gesichtspunkt und Methode, nicht aber durch den Stoff, von der grossen Arbeit Aronhold's unterschieden. Der dritte Abschnitt behandelt eine Classe von Bildungen, welche wir, einer von Sylvester eingeführten Bezeichnung analog, Combinanten nennen, und auf deren Bedeutung zum Theil schon Hermite und Brioschi aufmerksam gemacht haben. Der vierte Theil endlich behandelt die eigenthümliche Dualität, welche zwischen den cubischen Covarianten und zugehörigen Formen dieser Theorie besteht und der Verknüpfung eines Systems von Curven dritter Ordnung mit einem System von Curven dritter Classe entspricht. Die hier bewiesenen Zusammenhänge gaben der Hauptsache nach Cayley (1856) und Aronhold (1858) in den angeführten Arbeiten, Ableitungen derselben Gundelfingen im vierten Bande der Math. Annalen (S. 144).

Wir haben noch ein Wort über die Bezeichnungen zu sagen. Was man als eine gewisse Invariante etc. zu bezeichnen hat, ist im Allgemeinen von vorn herein gegeben bis auf einen Zahlenfactor; dieser aber kann noch beliebig gewählt werden. Cayley pflegt die Zahlenfactoren so zu wählen, dass bei der wirklichen Ausrechnung kein überflüssiger Zahlenfactor sich einstellt. Aronhold wählt sie so, dass in den hauptsächlichsten Endformen keine Nenner auftreten. Bei der consequenten Durchführung der Methode symbolischer Bezeichnung macht sich ein drittes Princip mit ausschliesslicher Nothwendigkeit geltend. Die Formen sind immer so zu definiren, dass die sie darstellenden symbolischen Producte keine Zahlenfactoren erhalten.

Hiebei sind dann die Bezeichnungen von den bei Aronhold und Cayley angewandten um Zahlenfactoren verschieden. Wir geben unter dem Text eine Zusammenstellung der Bezeichnungen für äquivalente Gebilde, um die Vergleichung der Resultate zu erleichtern*).

## § 1.

## Bildungen, welche aus den binären cubischen und den ternären quadratischen Formen übernommen sind.

In der Theorie der *ternären cubischen* Formen hat man zunächst zwei Gruppen von Bildungen zu betrachten, welche herübergenommen sind, die einen aus der Theorie der *binären cubischen*, die andern aus der Theorie der *ternären quadratischen* Formen.

Bezeichnet man eine binäre cubische Form symbolisch durch

$$f = a_x^3,$$

so besteht bekanntlich (vgl. Clebsch, Theorie der binären Form, § 37) das Formensystem von $f$ aus den Bildungen

$$(1)\quad \begin{cases} \tau = (ab)^2 a_x b_x = \tau_x^2, \quad Q = (c\tau) c_x^2 \tau_x = (ab)^2 (ca) c_x^2 b_x, \\ \qquad B = (\tau\tau')^2 = (ab)^2 (cd)^2 (ac)(bd). \end{cases}$$

Aus diesen Formen ergeben sich sofort solche, welche dem System einer ternären cubischen Form

$$(2)\qquad f = a_x^3$$

angehören, wenn man unter $a_x b_x$ etc. immer lineare *ternäre* Symbole versteht, die zweireihigen Determinanten $(ab)$ etc. aber durch Zufügung einer Reihe $u$ von Liniencoordinaten zu dreireihigen ergänzt**). Man erhält auf diese Weise folgende Formen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \Theta = (abu)^2 a_x b_x \\ Q = (abu)^2 (cau) c_x^2 b_x \\ F = (abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu). \end{cases}$$

Von diesen Formen werden wir die zweite, eine für die $x$ wie für die $u$ cubische Zwischenform, hier nicht benutzen. Von besonderer

---

*) Identisch sind die in Folgendem vertikal unter einander stehenden Ausdrücke:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aronhold: | $f$, | $\Delta$, | $6S$, | $6T$, | $S_f$, | $T_f$, | $-6P_f$, | $6R_f$, | $36R$, | $\Theta$, | H, | $F$, |
| Cayley: | $U$, | $-6HU$, | $24S$, | $-6F$, | $6PU$, | $-2QU$, | —, | —, | $-36R$, | —, | —, | $-\frac{1}{2}FU$, |
| Clebsch u. Gordan: | $f$, | $\Delta$, | $S$, | $T$, | $\Sigma$, | T, | $\Pi$, | P, | $R$, | $\Theta$, | H, | $F$. |

**) Vgl. Clebsch, Borchardt's Journal Bd. 59, S. 30, § 9 u. folgende.

Wichtigkeit ist hier dagegen die erste Form. Bezeichnen wir dieselbe symbolisch durch

(4) $$\Theta = \Theta_x^2 u_\vartheta^2 ,$$

so lässt sich $Q$ sowie $F$ einfacher ausdrücken, indem wir von den durch Einführung des Symbols $\tau$ verkürzten Formeln (1) ausgehen. Denn in diesen Formeln ist dann beim Uebergange von den binären zu den ternären Formen nur $\tau$ durch $\Theta$ zu ersetzen, und ein Factor $u_\vartheta^2$ jedem Symbole $\tau$ entsprechend hinzuzufügen. Man hat also aus den binären Darstellungen

$$Q = (c\tau)\, c_x^2 \tau_x , \quad R = (\tau\tau')^2$$

die beiden ternären:

(5) $$\begin{cases} Q = (c\Theta u)\, c_x^2 \Theta_x u_\vartheta^2 \\ F = (\Theta\Theta' u)^2 u_\vartheta^2 u_{\vartheta'}^2 . \end{cases}$$

Die andere Gruppe zunächst zu betrachtender Formen entspringt aus der ternären quadratischen. Das System einer quadratischen ternären Form $f = a_x^2$ besteht aus den Bildungen:

$$\varphi = (abu)^2 , \quad A = (abc)^2 .$$

Beim Uebergange zu ternären Formen hat man nur jedem Symbol entsprechend einen linearen symbolischen Factor $a_x$ etc. hinzuzufügen*), und erhält demnach die beiden Bildungen:

(6) $$\begin{cases} \Theta = (abu)^2 a_x b_x \\ \Delta = (abc)^2 a_x b_x c_x , \end{cases}$$

von denen die erstere mit der oben so bezeichneten Form übereinstimmt. Die zweite entsteht auch aus $\Theta$, wenn man die $u$ durch $c$ ersetzt und mit $c_x$ multiplicirt; sie kann demnach mit Einführung der symbolischen Bezeichnung (4) durch

(7) $$\Delta = \Theta_x^2 c_\vartheta^2 c_x$$

dargestellt werden.

Man kann die Form $\Delta$ auch ableiten, indem man die Functionaldeterminante dreier ternärer quadratischer Formen betrachtet, welche man mit den ersten Differentialquotienten der ternären cubischen Form $f$ identificirt. Sind

$$\varphi = \varphi_x^2 , \quad \psi = \psi_x^2 , \quad \chi = \chi_x^2$$

drei quadratische ternäre Formen, so ist die Determinante ihrer durch $Q$ dividirten Differentialquotienten die Form

*) Vgl. Clebsch, binäre Formen, § 67.

$$\begin{vmatrix} \varphi_1\varphi_x & \psi_1\psi_x & \chi_1\chi_x \\ \varphi_2\varphi_x & \psi_2\psi_x & \chi_2\chi_x \\ \varphi_3\varphi_x & \psi_3\psi_x & \chi_3\chi_x \end{vmatrix} = (\varphi\psi\chi)\,\varphi_x\psi_x\chi_x .$$

Sind nun insbesondre $\varphi$, $\psi$, $\chi$ die Differentialquotienten von $f$, dividirt durch 3:

$$\varphi = a_x^2 a_1 , \quad \psi = b_x^2 b_2 , \quad \chi = c_x^2 c_3 ,$$

so erhält man die obige Bildung in Symbolen $a$, $b$, $c$ ausgedrückt, wenn man die Symbole $\varphi$, $\psi$, $\chi$ durch $a$, $b$, $c$ ersetzt und mit $a_1 b_2 c_3$ multiplicirt. Es entsteht also die Bildung

$$(abc)\,a_x b_x c_x \cdot a_1 b_2 c_3 .$$

Vertauscht man nun hierin die äquivalenten Symbole $a$, $b$, $c$ auf alle Weise und addirt alle entstehenden Ausdrücke, so erhält man das Vorige nur sechsfach, und zwar bleibt immer ein Factor $a_x b_x c_x (abc)$ vorhanden, dagegen treten an Stelle von $a_1 b_2 c_3$ die Ausdrücke $a_i b_k c_h$, welche zusammen die Determinante $(abc)$ ausmachen. Der obige Ausdruck hat daher auch den Werth

$$\tfrac{1}{6}(abc)^2 a_x b_x c_x = \tfrac{1}{6}\Delta .$$

Man sieht hieraus, dass $\Delta$ nichts anderes ist als das sechsfache der Determinante der Grössen

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k},$$

also die *Hesse'sche Determinante des zweiten Differentialquotienten von* $f$, dividirt durch 3. 6.

Von der nicht-symbolischen Darstellung

$$(8) \qquad \Delta = \frac{1}{36}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}.$$

ausgehend, erhält man eine entsprechende auch für $\Theta$. Ersetzen wir nämlich in

$$\Delta = (abc)^2 a_x b_x c_x$$

die Ausdrücke $a_i a_k a_x$, $b_i b_k b_x$, $c_i c_k c_x$ der Reihe nach durch $u_i u_k$ und addiren die Resultate, so erhalten wir $3\,\Theta$. Es entspricht diesem aber in der nicht-symbolischen Darstellung (8) der Process, dass man der Reihe nach jede der Vertikalreihen durch $6\,u_i u_k$ ersetzt und die Summe der entstehenden drei Ausdrücke bildet. Alsdann erhält man die Summe der Producte $u_i u_k$ mit den betreffenden, aus zweiten Differentialquotienten von $f$ gebildeten Unterdeterminanten $\Delta_{ik}$ multiplicirt, und dividirt durch 6; jedes Glied, für welches $i$, $k$ einander gleich sind, kommt einfach, die übrigen kommen doppelt vor. Es ist also

$$(9) \qquad \Theta = \tfrac{1}{18}\, \Sigma\, \Delta_{ik} u_i u_k\,,$$

oder, wenn man dies wieder als Determinante schreibt:

$$(10) \qquad \Theta = -\tfrac{1}{18} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & u_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & u_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

## § 2.

### Ternäre Bildungen, welche aus binären Combinanten entstehen.

Es knüpft sich an diese Erzeugungsweisen von $\Delta$ und $\Theta$ eine Betrachtung, welche auf eine weitere Fundamentalform von $f$ führt, die gleichfalls, aber in ganz anderer Weise als die früheren, aus der Theorie binärer Formen abgeleitet werden kann.

Drei binäre quadratische Formen

$$\varphi = \varphi_x^2, \quad \psi = \psi_x^2, \quad \chi = \chi_x^2$$

besitzen eine Invariante, welche zugleich Combinante ist, d. h. welche sich nur um die Determinante der Transformation ändert, wenn man $\varphi$, $\psi$, $\chi$ durch lineare Verbindungen derselben ersetzt. Diese Combinante ist die Determinante von $\varphi$, $\psi$, $\chi$:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1^2 & \varphi_1\varphi_2 & \varphi_2^2 \\ \psi_1^2 & \psi_1\psi_2 & \psi_2^2 \\ \chi_1^2 & \chi_1\chi_2 & \chi_2^2 \end{vmatrix} = (\varphi\psi)\,(\varphi\chi)\,(\psi\chi)\,.$$

Eine solche Combinante führt immer auf eine invariante Bildung der nächsthöheren ternären Form, wie folgender Satz lehrt:

I. *Sei $\pi$ eine Combinante dreier binärer Formen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, $\varphi$, $\psi$, $\chi$; bildet man aus ihr, wie oben, eine Combinante der entsprechenden ternären Formen, indem man ihre symbolischen Determinantenfactoren durch eine Reihe $u$ in dreireihige überführt; ersetzt man endlich diese ternären Formen $\varphi$, $\psi$, $\chi$ durch die ersten Differentialquotienten einer ternären Form $f$ der Ordnung $n$, so entsteht eine Form, welche in Bezug auf $f$ die Invarianteneigenschaft hat.*

Man beweist diesen Satz in folgender Art. Es ist gezeigt worden*),

---

*) Gordan, diese Annalen Bd. V, S. 121.

dass die Combinante der binären Formen $\varphi$, $\psi$, $\chi$ stets eine Invariante (bez. Covariante etc.) der Form

$$P = (\varphi\psi)(\varphi\chi)(\psi\chi)\cdot\varphi_{x'}\varphi_{x''}\cdots\varphi_{x^{(n-3)}}\psi_{x'}\psi_{x''}\cdots\psi_{x^{(n-3)}}\chi_{x'}\chi_{x''}\cdots\chi_{x^{(n-3)}}$$

ist. Bildet man hieraus die Combinante der entsprechenden ternären Formen, so hat man statt $P$ nur die Form

$$P' = (\varphi\psi u)\,(\varphi\chi u)\,(\psi\chi u)\cdot\varphi_{x'}\cdots\psi_{x'}\cdots\chi_{x'}\cdots$$

zu Grunde zu legen und in allen bei der Ausführung übrigens entstehenden symbolischen Determinanten eine Reihe $u$ hinzuzufügen. Setzt man nun an Stelle von $\varphi$, $\psi$, $\chi$ die Differentialquotienten (durch $n$ dividirt)

$$a_x^{n-1}a_1\,,\quad a_x^{n-1}a_2\,,\quad a_x^{n-1}a_3$$

einer Form $f$ der Ordnung $n$, so hat man nur in $P'$ statt $\varphi$, $\psi$, $\chi$ beziehungsweise $a$, $b$, $c$ zu setzen und mit $a_1 b_2 c_3$ zu multipliciren. Es entsteht also

$$P'' = a_1 b_2 c_3\cdot(abu)\,(acu)\,(bcu)\cdot a_x\cdots b_{x'}\cdots c_{x'}\cdots.$$

Vertauscht man nun die gleichwerthigen Symbole $abc$ auf alle Weise und addirt die Resultate, so erhält man $P''$ sechsfach, und an Stelle von $a_1 b_2 c_3$ tritt nur die Determinante $(abc)$, nun ist also auch

$$P'' = \tfrac{1}{6}\,(abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu)\,a_{x'}\cdots b_{x'}\ldots c_{x'}\cdots.$$

Dieser Ausdruck besitzt die Invarianteneigenschaft in Bezug auf $f$, und daher auch alle aus ihm gebildeten Formen, was zu beweisen war.

In dem vorliegenden Falle sind $\varphi$, $\psi$, $\chi$ quadratisch, und die Invariante

$$(\varphi\psi)\,(\varphi\chi)\,(\psi\chi)$$

ist für diesen Fall genau die durch $P$ bezeichnete Form. Aus ihr entsteht also der Ausdruck

$$6\,P'' = (abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu)\,,$$

und dieser ist eine zugehörige Form, welche wir im Folgenden zu betrachten haben werden. Sie soll durch

(11) $$\Sigma = (abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu)$$

oder symbolisch durch diese Form

(12) $$\Sigma = u_s^3$$

bezeichnet werden. (Bei Aronhold $S_f$.)

## § 3.

## Die Form $\Theta$ und die erste Invariante.

Mit den Formen $\Theta$, $\Delta$, $S_f$ sind alle Fundamentalformen gegeben, welche in dieser Theorie auftreten. Alle übrigen Formen, welche dem Systeme von $f$ angehören, werden durch einfache Processe aus diesen gebildet.

Aus der Form
$$\Theta = (abu)^2 a_x b_x = \Theta_x^2 u_\vartheta^2$$
kann man $\Sigma$ dadurch ableiten, dass man zunächst nach den $u$ differenzirt und mit neuen Liniencoordinaten $v$ multiplicirt, in der so entstandenen Form
$$\Theta_x^2 u_\vartheta v_\vartheta = (abu)(abv) a_x b_x$$
aber die $v$ durch $c$, die $x$ durch die aus den $c$ und den $u$ gebildeten Unterdeterminanten ersetzt. Rechts hat man dann
$$(abu)(abc)(acu)(bcu) = \Sigma\,,$$
und es ist also auch

(13) $$\Sigma = (\Theta cu)^2 c_\vartheta u_\vartheta\,.$$

Unter den bisher betrachteten Formen ist $\Theta$ in sofern die einfachste, als sie die Coefficienten von $f$ nur quadratisch enthält. Einige Eigenschaften dieser Form sollen nun zunächst angegeben werden.

Wenn $\varphi$ eine Form $m^{\text{ter}}$ Ordnung und $n^{\text{ter}}$ Classe ist, so soll immer durch $\varphi'$ die Form
$$\varphi' = \frac{1}{mn}\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3 \partial u_3}\right\}$$
bezeichnet werden; ebenso durch $\varphi''$ die Form, welche aus $\varphi'$ entsteht, wie $\varphi'$ aus $\varphi$ u. s. w. Die Formen $\varphi'$, $\varphi'' \cdot\cdot$ besitzen immer die Invarianteneigenschaft in Bezug auf $\varphi$; denn ist symbolisch
$$\varphi = r_x^m u_\varrho^n\,,$$
so hat man
$$\varphi' = r_\varrho r_x^{m-1} u_\varrho^{n-1}\,, \quad \varphi'' = r_\varrho^2 r_x^{m-2} u_\varrho^{n-2} \cdots.$$

Für $\Theta$ gilt nun der Satz:

II. *Die aus $\Theta$ abgeleitete Form $\Theta'$ verschwindet identisch.*

Es ist nämlich
$$\Theta = \Theta_x^2 u_\vartheta^2 = (abu)^2 a_x b_x\,,$$
daher, wenn wir diese Form der Operation
$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial u_3}$$
unterwerfen:

$$4\,\Theta' = 4\,\Theta_x u_\vartheta \Theta_\vartheta = 2\,(abu)\,\{(aba)\,b_x + (abb)\,a_x\},$$

was identisch verschwindet, wie zu beweisen war.

Da nun die Form

$$\Theta' = \Theta_\vartheta \Theta_x u_\vartheta$$

identisch verschwindet, so sieht man, dass alle Coefficienten $\Theta_\vartheta \Theta_i \vartheta_k$ verschwinden müssen, d. h. dass überhaupt jeder Ausdruck, welcher den symbolischen Factor $\Theta_\vartheta$ hat, identisch Null ist. Und so hat man den Satz:

III. *Jeder Ausdruck, welcher den symbolischen Factor $\Theta_\vartheta$ hat, verschwindet identisch.*

Es verschwindet um so mehr die Form $\Theta''$, welche eine Invariante sein würde. Es ist überhaupt leicht zu sehen, dass eine Invariante von $f$ mindestens biquadratisch in den Coefficienten von $f$ sein muss. Denn aus zwei Symbolen $a$, $b$ lässt sich überhaupt noch kein nicht verschwindender symbolischer Factor zusammensetzen, aus dreien, $a$, $b$, $c$, nur der eine $(abc)$, und eine Invariante dritten Grades könnte also nur $(abc)^3$ sein; dieses aber verschwindet, weil durch die gleichgültige Vertauschung von $a$, $b$, $c$ das Zeichen ändert.

Die niedrigste Invariante von $f$ muss also mindestens biquadratisch sein. Eine solche aber ergiebt sich wirklich, wenn man aus

$$\Theta = \Theta_x^2 u_\vartheta^2 = \Theta_x'^2 u_{\vartheta'}^2$$

den Ausdruck bildet

(14) $$S = \Theta_{\vartheta'}^2 \Theta_\vartheta'^2 .$$

Derselbe Ausdruck ergiebt sich auch, wenn man in $\Sigma$ für die $u$ ein Symbol $d$ von $f$ einführt. Man erhält dann aus $\Sigma$

$$(\Theta c d)^2\, c_\vartheta\, d_\vartheta\,,$$

ein Ausdruck, welcher aus

$$\Theta_x'^2 u_{\vartheta'}^2 = (cdu)^2 c_x d_x$$

abgeleitet werden kann, indem man die $x$ durch $\vartheta$, die $u$ durch $\Theta$ ersetzt, und welcher daher von

$$\Theta_\vartheta'^2 \Theta_{\vartheta'}^2 = S$$

nicht verschieden ist. Es ist also auch

(15) $$S = a_s^3 .$$

Diese Darstellung aber führt zugleich darauf, wie $S$ in den ursprünglichen Symbolen sich ausdrückt. Denn da $S$ entsteht, indem man in $\Sigma$ die $u$ durch $d$ ersetzt, so braucht man nur von der Form

$$\Sigma = (abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu)$$

auszugehen, und erhält sofort:

(16) $$S = (abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcd).$$

Im Folgenden kommt es nun oft darauf an, zu erkennen, in welchen Fällen sich bei verwickelteren Bildungen die Invariante $S$ als Factor absondert. Um den hierauf bezüglichen Satz geben zu können, gehen wir zunächst von der aus $\Theta$ abgeleiteten Bildung

$$P = \Theta_{\vartheta}^{2}.\Theta_{x}'^{2} u_{\vartheta}^{2} = \tfrac{1}{4}\,\Sigma \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_k}\,\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u_i \partial u_k}$$

aus und entwickelt den einfachen Werth, auf welchen dieser Ausdruck zurückkommt.

Es entsteht $P$, wenn man in

$$\Theta = \Theta_{x}'^{2} u_{\vartheta}^{2} = (abu)^2 a_x b_x$$

an Stelle der $u$ die $\Theta$ setzt und mit $u_{\vartheta}^{2}$ multiplicirt. Daher ist zunächst

$$P = (ab\Theta)^2 a_x b_x u_{\vartheta}^{2}.$$

Aber dieser Ausdruck wieder ergiebt sich aus

$$\Theta = \Theta_{x}^{2} u_{\vartheta}^{2} = (cdu)^2 c_x d_x,$$

indem man statt der $x$ die aus den $a$, $b$ gebildeten Unterdeterminanten setzt und mit $a_x b_x$ multiplicirt. Der Ausdruck von $P$ in den ursprünglichen Symbolen ist daher

$$P = (abc)\,(abd)\,(cdu)^2 a_x b_x.$$

Um diesen Ausdruck umzuformen, schlagen wir folgenden Weg ein. Für $(cdu)\,b_x$ setzen wir vermöge einer bekannten Identität

$$(cdu)\,b_x = (bcd)\,u_x + (bdu)\,c_x - (bcu)\,d_x.$$

Es wird dann

$$P = (abc)\,(abd)\,(cdu)\,a_x\,[(bcd)\,u_x + (bdu)\,c_x - (bcu)\,d_x].$$

Hier hat rechts der erste Theil den wirklichen Factor $u_x$; der zweite aber ist mit dem dritten identisch, da diese Theile durch Vertauschung der Symbole $c$, $d$ in einander übergehen. Es ist also

$$P = Mu_x + 2\,Q,$$

wo

$$M = (abc)\,(abd)\,(bcd)\,(cdu)\,a_x$$
$$Q = (abc)\,(abd)\,(cdu)\,(bdu)\,a_x c_x.$$

Vertauschen wir in $Q$ die Symbole $a$ und $c$, und addiren den so entstehenden Ausdruck von $Q$ mit dem obigen, so erhält man

$$2\,Q = (abc)\,(bdu)\,a_x c_x \left\{(abd)\,(cdu) - (cbd)\,(adu)\right\}.$$

Der in der Klammer enthaltene Theil ist nach einer bekannten Identität gleich

$$(acd)\,(bdu)\,,$$

und daher wird

$$2\,Q = (abc)\,(acd)\,(bdu)^2\,a_x c_x\,.$$

Dies geht aber in $-P$ über, wenn man $b$ mit $c$ vertauscht. Daher ist $2\,Q = -P$ und also

$$P = \tfrac{1}{2}\,M \cdot u_x\,.$$

In dem Ausdrucke

(17) $$M = (abc)\,(abd)\,(bcd)\,(cdu)\,a_x$$

vertauschen wir nun $a$ mit $c$ und $d$, und addiren die entstehenden Ausdrücke zu ersteren. Man erhält dann

$$3\,M = (abc)\,(abd)\,(bcd)\,\{(cdu)a_x - (adu)c_x - (cau)d_x\}\,.$$

Hier ist nach der bekannten Identität der eingeklammerte Theil gleich

$$(acd)\,u_x;$$

daher wird

(18) $$3\,M = (abc)\,(abd)\,(bcd)\,(acd) \cdot u_x = S \cdot u_x\,,$$

und also ist

$$P = \tfrac{1}{6}\,S \cdot u_x^2\,.$$

Sprechen wir also den Satz aus:

IV. *Die aus $\Theta$ abgeleitete Form*

$$\Theta_{\vartheta'}^2 \cdot \Theta_x'^2 \cdot u_\vartheta^2 = (abc)\,(abd)\,(cdu)^2\,a_x b_x$$

*hat den Werth* $\frac{1}{6}\,S \cdot u_x^2$.

Um diese Betrachtungen nun für die Anwendung nutzbar zu machen, knüpfen wir daran folgende Bemerkungen.

Zunächst folgt aus den Gleichungen (17), (18), dass wenn aus den 4 symbolischen Factoren, aus welchen $S$ besteht, drei in einem gegebenen Ausdrucke vorkommen, etwa

$$(abc)\,(abd)\,(bcd)\,,$$

und ausserdem noch $cd$ in einer Determinante vereinigt auftreten, die Form durch $S$ theilbar sein muss, denn sie enthält dann nur die Coefficienten von $M = \frac{1}{3}\,S \cdot u_x$. Aber die Beschränkung, dass $c, d$ in der gedachten Weise noch vereinigt auftreten sollen, ist unnöthig. Man kann in der That folgenden Satz aussprechen:

V. *Jede Form, deren symbolischer Ausdruck drei der symbolischen Factoren von $S$ enthält, hat $S$ zum Factor.*

In einer solchen Form nämlich müssen nothwendigerweise die Ausdrücke

$$(abc)\,(abd)\,(bcd)\,c_i d_k a_h$$

in homogener Weise vorkommen, d. h. die Coefficienten der Form

$$K = (abc)\,(abd)\,(bcd)\,c_x d_y a_z\,.$$

Es ist also nur zu beweisen, dass die Form $K$ den Factor $S$ enthält. Vertauschen wir nun auf alle Weise die Symbole $a$, $c$, $d$ unter einander und addiren die entstehenden Ausdrücke von $K$ zu dem obigen, so erhalten wir $K$ sechsfach, und zwar wird

$$6K = (abc)(abd)(bcd)\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (abc)(abd)(bcd)(cda)\cdot(xyz).$$

Es ist also

$$K = \tfrac{1}{6} S \cdot (xyz),$$

was zu beweisen war. Der obige Satz kann also noch insbesondere dadurch ausgedrückt werden, dass die Formel gilt:

$$(19) \qquad (abc)(abd)(bcd)\,c_x d_y a_z = \tfrac{1}{6} S \cdot (xyz).$$

Man kann aber ferner den folgenden Satz aussprechen, welcher den vorigen umfasst:

VI. *Enthält die symbolische Darstellung einer Form zwei Factoren von $S$, etwa*

$$(abc)(abd),$$

*und ausserdem die Reihen $c$, $d$ in einem symbolischen Determinantenfactor vereinigt, so ist die Form durch $S$ theilbar.*

Jeder derartige Ausdruck nämlich enthält in homogener Weise die Coefficienten des Ausdrucks

$$L = (abc)(abd)(cdu)\,a_x b_y c_z d_t\,;$$

und es ist also nur zu zeigen, dass $L$ den Factor $S$ enthält. Nun entsteht zunächst $2L$ aus dem Ausdruck

$$L' = (abc)(abd)(cdu)\,a_x b_x c_z d_t\,,$$

indem man nach den $x$ differenzirt und die Differentialquotienten mit den entsprechenden $y$ multiplicirt; es entstehen dabei zunächst zwei Glieder, die sich aber nur durch Vertauschung von $a$ mit $b$ unterscheiden, und deren einer unmittelbar gleich $L$ ist. Es ist hinreichend, wenn man zeigt, dass $L'$ den Factor $S$ besitzt.

Vertauschen wir nun in $L'$ die Symbole $c$, $d$ und fügen den entstehenden Ausdruck zu dem obigen hinzu, so haben wir

$$2L' = (abc)(abd)(cdu)\,a_x b_x \left\{c_z d_t - c_t d_z\right\}.$$

Hier enthält nun die letzte Klammer nur die aus den $z$ und $t$ gebildeten Determinanten und geht in $(cdv)$ über, wenn wir diese Determinanten durch $v$ bezeichnen. Es ist also einfacher

$$L' = \tfrac{1}{2}(abc)(abd)(cdu)(cdv)\,a_x b_x\,.$$

Nun entsteht aber dieser Ausdruck wieder aus

$$L'' = \tfrac{1}{2}(abc)(abd)(cdu)^2 a_x b_x\,,$$

wenn wir nach den $u$ differenziren, die Differentialquotienten mit den $v$ multipliciren und die Summe dieser Producte durch 2 dividiren. Da-

# INHALT.



Verantwortliche Redaction: C. Neumann.

1874, Jan. 8

# MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

## RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Giessen, Prof. F. KLEIN zu Erlangen,
Prof. A. MAYER zu Leipzig, Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

**Carl Neumann**,
Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.

VI. Band. 4. Heft.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1873.

# Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig. 1873.

**Bardey, Dr. E., methodisch geordnete Aufgabensammlung,** mehr als 7000 Aufgaben enthaltend, über alle Theile der Elementar-Arithmetik, für Gymnasien, Realschulen und polytechnische Lehranstalten. Zweite Auflage. [XII und 306 S.] gr. 8. geh. 27 Ngr.

— — besonderer Abdruck der in der zweiten Auflage neu hinzugekommenen Aufgaben. [XVI S.] gr. 8. geh. 3 Ngr.

Die „Resultate" sind durch den Buchhandel nicht zu beziehen, sondern werden von der Verlagshandlung nur an Lehrer direkt geliefert.

**Clebsch, Alfred.** Versuch einer Darlegung u. Würdigung seiner wissenschaftl. Leistungen von einigen seiner Freunde. [55 S.] gr. 8. geh. n. 12 Ngr.

**Durège, Dr. H.,** Professor an der Universität zu Prag, **Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse,** mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemann's bearbeitet. Zweite zum Theil umgearbeitete Auflage. gr. 8. geh. 1 Thlr. 22 Ngr.

**Helmert, Fr., die Ausgleichungsrechnung** nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Messinstrumente. [XI u. 348 S.] gr. 8. geh. n. 2 Thlr. 10 Ngr.

**Hesse, Dr. Otto,** ord. Prof. an d. königl. Polytechnikum zu München, **die vier Species.** [35 S.] gr. 8. geh. n. 10 Ngr.

— — **Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie,** des Punktes und des Kreises in der Ebene. Zweite verbess. u. vermehrte Aufl. gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 22 Ngr.

— — **die Determinanten** elementar behandelt. Zweite Auflage. [IV u. 48 S.] gr. 8. geh. n. 12 Ngr.

**Neumann, Dr. Carl,** Professor an der Universität zu Leipzig, **Theorie der elektrischen Kräfte.** Darlegung und Erweiterung der von A. Ampère, F. Neumann, W. Weber, G. Kirchhoff entwickelten mathematischen Theorien. I. Theil. gr. 8. geh. n. 2 Thlr. 12 Ngr.

**Salmon, Georg, analytische Geometrie der Kegelschnitte** mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Deutsch bearbeitet von Dr. W. Fiedler, Professor am eidgen. Polytechnikum zu Zürich. Dritte Auflage. [XXXV u. 609 S.] gr. 8. geh. n. 4 Thlr. 24 Ngr.

— — **analytische Geometrie der höheren ebenen Curven.** Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich. [XVI u. 472 S.] gr. 8. geh. n. 3 Thlr. 10 Ngr.

**Schlömilch, Dr. Oskar,** Kgl. Sächs. Geh. Hofrath, Professor an der polytechnischen Schule in Dresden, **Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis.** Erster Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. Mit Holzschnitten im Texte. [VII u. 287 S.] gr. 8. geh. n. 2 Thlr.

**Schröder, Dr. E.,** Professor am Pro- und Realgymnasium in Baden-Baden, **Lehrbuch der Arithmetik und Algebra** für Lehrer und Studirende. Erster Band. Die sieben algebraischen Operationen. [X. u. 360 S.] gr. 8. geh. n. 2 Thlr. 20 Ngr.

**Schüler, Wilhelm Friedrich,** Docent am königlichen Polytechnikum zu München, **die Arithmetik und Algebra in philosophischer Begründung.** Vorlesungen. I. Theil. gr. 8 geh. 1 Thlr. 10 Ngr.

**Weyrauch, Dr. Jacob, allgemeine Theorie** und Berechnung der kontinuirlichen und einfachen Träger. Für den akademischen Unterricht und zum Gebrauch der Ingenieure. Mit vielen Holzschnitten und 4 lithographirten Tafeln. gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 22 Ngr.

her ist endlich $L$ durch $S$ theilbar, sowie $L''$ es ist, und diese Form hat nach dem Früheren den Werth

$$L'' = \tfrac{1}{12} S \cdot u_x^2 .$$

Hierdurch ist der vorgelegte Satz bewiesen. Es ist ausserdem leicht, den Ausdruck von $L$ selbst anzugeben. Denn man hat zunächst

$$L' = \tfrac{1}{12} S \cdot u_x v_x = \tfrac{1}{12} S \cdot u_x (xzt) ,$$

und also endlich:

$$L = \tfrac{1}{24} S \cdot \{u_x (yzt) + u_y (xzt)\} = abc\ abd\ cdu\ a_x b_y c_z d_t ,$$

daher auch:

$$abc\ abd\ cdu\ a_x b_x c_y d_t = \tfrac{1}{12} S\, u_x (xzt) .$$

## § 4.

### Der Process $\delta$. Anwendung desselben auf $\Delta$.

Aus den bisher gebildeten Formen erhält man neue, indem man den Umstand beachtet, dass eine der Formen, die Covariante $\Delta$, von derselben Ordnung wie $f$ ist. Wir erhalten deswegen nach bekannten Principien aus jeder Form $\Pi$ eine neue, indem wir ihr Differential in Bezug auf die Coefficienten von $f$ bilden und statt der Differentiale die Coefficienten von $\Delta$ substituiren. Die Form, welche hiedurch aus $\Pi$ hervorgeht, soll durch $\delta\Pi$, der Process, durch welchen $\delta\Pi$ entsteht, der Process $\delta$ genannt werden. Bezeichnet man also die Coefficienten von $f$ durch $a_{ikh}$, die von $\Delta$ durch $\alpha_{ikh}$, so ist der Ausdruck $\delta\Pi$ durch die Gleichung

$$\delta\Pi = \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial a_{ikh}}\, \alpha_{ikh}$$

definirt, wo die Summe sich auf alle Combinationen der Indices $ikh$ bezieht.

Bei der hier befolgten Methode ist es wesentlicher zu zeigen, wie man den Process $\delta$ auszuführen hat, wenn $\Pi$ *in symbolischer Darstellung* gegeben ist. Bemerken wir, dass jede in $\Pi$ enthaltene Symbolreihe ein lineares homogenes Vorkommen der Coefficienten $a_{ikh}$ in $\Pi$ anzeigt, so sieht man, dass der Process der Differentiation auf die Summe der Ausdrücke führt, welche entstehen, wenn man nur bezüglich *einer* solchen Reihe differenzirt. Dann aber heisst das nichts anderes, als dass diese Reihe zunächst durch die Differentiale der $a$, dann aber durch die Coefficienten von $\Delta$ ersetzt wird. Mithin haben wir das Resultat:

VII. *Aus einer Form $\Pi$ entsteht die Form $\delta\Pi$, wenn man in der symbolischen Form von $\Pi$ der Reihe nach jede Symbolreihe durch die Symbolreihe von $\Delta$ ersetzt und die Summe der erhaltenen Ausdrücke bildet.*

Dabei ist es klar, dass eine Anzahl von Symbolreihen, welche in $\Pi$ gleichartig und symmetrisch vorkommen, auch auf völlig identische Glieder von $\delta\Pi$ führen muss. Sind also in $\Pi$ von solchen Reihen $\varkappa$ vorhanden, so hat man in $\delta\Pi$ nur einen der entsprechenden Ausdrücke zu bilden und dieselben mit $\varkappa$ zu multipliciren.

Sowie wir $f$ symbolisch durch

$$f = a_x^3 = b_x^3 \cdots$$

bezeichnet haben, wollen wir $\Delta$ symbolisch durch

$$\Delta = \alpha_x^3 = \beta_x^3 \cdots$$

bezeichnen.

Die Symbole $\alpha, \beta \cdots$ sind also definirt durch die symbolische Gleichung

$$\Delta = \alpha_x^3 = (abc)^2 a_x b_x c_x .$$

Um die Art der Einführung dieser Symbole deutlich zu machen, bemerken wir Folgendes. Bilden wir zweimal hinter einander das Differential von $\Delta$ in Bezug auf die $x$ und ersetzen die Differentiale das erste Mal durch $y$, das zweite Mal durch $z$, so erhalten wir links $6\,\alpha_x\alpha_y\alpha_z$, rechts aber die Summe von 6 Termen, welche nur durch Vertauschung der $a, b, c$ verschieden sind. Man kann also statt ihrer Summe das Sechsfache des einen setzen, und erhält dann die symbolische Gleichung

$$(\alpha) \qquad \alpha_x\alpha_y\alpha_z = (abc)^2 a_x b_y c_z ,$$

welche in die einzelnen symbolischen Gleichungen

$$\alpha_i\alpha_k\alpha_h = (abc)^2 a_i b_k c_h$$

zerfällt. Dies heisst nichts anderes, als dass man in jeder Form, welche den symbolischen Factor $(abc)^2$ enthält, statt der $a, b, c$ die $\alpha$ einführen kann, und zwar einfach dadurch, dass man den Factor $(abc)^2$ auslässt und für die übrigbleibenden $a, b, c$ überall die $\alpha$ setzt. Man kann also folgenden Satz aussprechen:

VIII. *In jede Form, welche einen symbolischen Factor $(abc)^2$ enthält, kann man die Symbole $\alpha$ von $\Delta$ einführen und zwar dadurch, dass man den Factor $(abc)^2$ aurslässt und statt der noch übrigen $abc$ jedesmal $\alpha$ setzt.*

Die Anwendung des Processes $\delta$ auf die Formen $\Theta$, $\Delta$, $\Sigma$, $S$ ergiebt nun sofort folgende Bildungen:

$$\delta\Theta = \delta\left\{(abu)^2 a_x b_x \right\} = 2\,(a\alpha u)^2 a_x \alpha_x$$

$$\delta\Delta = \delta\left\{(abc)^2 a_x b_x c_x\right\} = 3\,(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x$$

$$\delta\Sigma = \delta\left\{(abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu)\right\} = 3\,(ab\alpha)\,(abu)\,(a\alpha u)\,(b\alpha u)$$

$$\delta S = \delta\left\{(abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcd)\right\} = 4\,(abc)\,(ab\alpha)\,(ac\alpha)\,(bc\alpha).$$

Von diesen Ausdrücken führen drei auf neue Formen, nämlich auf die Bildungen:

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathsf{H} = (a\alpha u)^2 a_x \alpha_x \\ \mathsf{T} = (ab\alpha)(abu)(a\alpha u)(b\alpha u) \\ T = (abc)(ab\alpha)(ac\alpha)(bc\alpha)\,. \end{cases}$$

Dagegen ist $\delta\Delta$ keine neue Form, sondern lässt sich auf $S$ und f zurückführen, wie jetzt gezeigt werden soll.

Um den Ausdruck

$$\delta\Delta = 3\,(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x$$

auf einen einfachsten Werth zurückzuführen, ist es nur nöthig, statt des Symboles $\alpha$ in dieser Form Symbole von $f$ selbst einzuführen. Dies geschieht in folgender Weise. Es sei

$$\Delta = \alpha_x^3 = (cde)^2 c_x d_x e_x$$

nach der obigen Formel ($\alpha$) ist dann:

$$\alpha_x a_y^2 = (cde)^2 c_y d_y c_x\,,$$

setzt man hierin für die $y$ die aus den $a$, $b$ gebildeten Determinanten und multiplicirt mit $a_x b_x$, dann entsteht links $(ab\alpha)^2 a_x b_x \alpha_x$, also $\frac{1}{3}\delta\Delta$, und man hat daher:

$$\tfrac{1}{3}\,\delta\Delta = (cde)^2 (abc)(abd)\, a_x b_x e_x\,.$$

Die rechte Seite aber entsteht aus dem Ausdruck

$$(abc)(abd)(cdu)^2 a_x b_x$$

dadurch, dass man $u$ durch $e$ ersetzt und mit $e_x$ multiplicirt. Da nun nach Satz IV. dieser Ausdruck den Werth $\frac{1}{6}\,S\cdot u_x^2$ hat, so entsteht auf solche Weise

$$\tfrac{1}{6}\,S\cdot e_x^3 = \tfrac{1}{6}\,S\cdot f\,,$$

und man hat also

$$\delta\Delta = \tfrac{1}{2}\,S\cdot f\,.$$

IX. *Die Anwendung des Processes $\delta$ auf die Covariante $\Delta$ führt auf die Form $f$ zurück, multiplicirt mit $\frac{1}{2}\,S$.*

Da die Anwendung des Processes $\delta$ auf $f$ selbst $\Delta$ liefert, so geht hieraus hervor, dass auch die wiederholte Anwendung des Processes $\delta$ auf $\Delta$ zu keinen neuen Covarianten führen kann; alle dadurch entstehenden Covarianten müssen lineare Functionen von $f$ und $\Delta$ sein; die Coefficienten derselben sind Invarianten, welche durch wiederholte Anwendung des Processes $\delta$ auf $S$ hervorgehen.

Für die folgenden Anwendungen ist es wichtig, auch den Ausdruck auf seine einfachste Form zurückzuführen, welcher entsteht, wenn man aus $\delta\Delta$ den Ausdruck

$$\Sigma\,\frac{\partial\,\delta\Delta}{\partial x_i}\,y_i = 3\,(ab\alpha)^2 (a_x b_x \alpha_y + a_x b_y \alpha_x + a_y b_x \alpha_x)$$

bildet. Von den drei Termen, die hier auf der rechten Seite stehen, sind die beiden letzten identisch, denn sie gehen durch Vertauschung von $a$ und $b$ in einander über. Aber es lässt sich zeigen, dass beide Terme auch mit dem ersten identisch sind, und dass man also für den fraglichen Ausdruck die doppelte symbolische Darstellung hat:

$$(21)\qquad \frac{1}{3}\,\Sigma\,\frac{\partial\delta\Delta}{\partial x_i}\,y_i=(ab\alpha)^2a_xb_x\alpha_y=(ab\alpha)^2a_xb_y\alpha_x\,.$$

Um dies einzusehen, zeigen wir, dass die Differenz der beiden Ausdrücke rechts verschwindet. Es ist nämlich diese Differenz gleich

$$(ab\alpha)^2a_x\left\{b_x\alpha_y-\alpha_xb_y\right\}.$$

Setzt man an Stelle der aus den $x$ und $y$ gebildeten Determinanten Liniencoordinaten $u$, so wird dies:

$$(ab\alpha)^2\,(b\alpha u)\,\alpha_x.$$

Dieser Ausdruck aber entsteht aus der cubischen zugehörigen Form

$$M=(b\alpha u)^3,$$

wenn man in Bezug auf die $u$ das Differential bildet, die $u$ sodann durch die $a$, ihre Differentiale durch die $u$ ersetzt und mit $\alpha_x$ multiplicirt. Da nun, wie leicht gezeigt werden kann, die Form $M$ identisch verschwindet, so verschwindet auch der obige Ausdruck, und die Zulässigkeit der doppelten Darstellung (21) ist damit erwiesen.

Das Verschwinden von $M$ aber sieht man folgendermassen ein. Es entsteht $M$ aus $\Delta=\alpha_x^3$, wenn man die $\alpha$ durch die aus den $u$ und $b$ gebildeten Determinanten ersetzt. Da nun

$$\Delta=(cde)^2c_xd_xe_x\,,$$

so folgt

$$M=(cde)^2\,(cub)\,(dub)\,(eub)\,.$$

Nun ist nach einer bekannten Identität:

$$(cde)\,(cub)=(cue)\,(cdb)-(cud)\,(ceb).$$

Führen wir dies in $M$ ein, so wird

$$M=(cde)\,(dub)\,(eub)\,\left\{(cue)\,(cdb)-(cud)\,(ceb)\right\},$$

oder, da beide Theile durch Vertauschung von $d$ und $e$ in einander übergehen, also identisch sind:

$$M=2\,(cde)\,(cdb)\,(eub)\,(dub)\,(cue)\,.$$

Dieser Ausdruck enthält nach Satz VI. den Factor $S$, denn er hat den symbolischen Factor $(cde)\,(cdb)$, und die Symbole $e$, $b$ kommen noch in einer Determinante $(eub)$ vereinigt vor. Aber der nach Absonderung von $S$ übrig bleibende Factor von $M$ kann dann keine Symbole mehr erhalten, sondern nur noch die $u$, und muss, da aus diesen nicht verschwindende Determinanten nicht mehr gebildet werden können, nothwendig gleich Null sein.

Dieses Resultat scheint wichtig genug, um es in einem besondern Satze auszudrücken:

X. *Die cubische zugehörige Form*

$$M = (a \alpha u)^3$$

*verschwindet identisch.*

Differenzirt man diese Formel nach den $u$ und ersetzt dann die Differentiale der $u$ durch die aus den Reihen $x$ und $y$ gebildeten Determinanten, so erhält man die Gleichung:

$$(a \alpha u)^2 (a_x \alpha_y - \alpha_x a_y) = 0 .$$

Die hierdurch identisch werdenden Ausdrücke $(a \alpha u)^2 a_x \alpha_y$ und $(a \alpha u)^2 \alpha_x a_y$ entstehen aber aus der Formel (20):

$$(a \alpha u)^2 a_x \alpha_x = \mathsf{H}_x^2 u_q^2$$

dadurch, dass man nach den $x$ differentiirt und in dem Differential die $dx$ durch $y$ ersetzt. Es wird dann:

$$\mathsf{H}_x \mathsf{H}_y u_\eta^2 = \tfrac{1}{2} (a \alpha u)^2 (a_x \alpha_y + \alpha_x a_y) = (a \alpha u)^2 a_x \alpha_y = (a \alpha u)^2 a_y \alpha_x .$$

Wir kehren jetzt zu der Formel (21) zurück. Setzen wir in derselben links für $\delta \Delta$ seinen Werth, so haben wir

$$\tfrac{1}{6} S \cdot a_x^2 a_y = (a b \alpha)^2 a_x b_x \alpha_y = (a b \alpha)^2 a_x b_y \alpha_x .$$

Differenziren wir nun nochmals nach den $x$ und multipliciren mit neuen Veränderlichen $z$, indem wir uns rechts der ersten Darstellung bedienen, so entstehen rechts zwei Ausdrücke, welche durch Vertauschung von $a$ und $b$ in einander übergehen und also identisch sind, und wir können für sie das Doppelte des einen setzen. Daher wird endlich

$$\tfrac{1}{6} S \cdot a_x a_z a_y = (a b \alpha)^2 a_x b_z \alpha_y ,$$

und wenn wir den Coefficienten derselben Producte der $x\, y\, z$ auf beiden Seiten vergleichen:

$$\tfrac{1}{6} S \cdot a_i a_k a_l = (a b \alpha)^2 a_i b_k \alpha_l .$$

Man sieht also, dass überhaupt jeder Ausdruck, welcher den symbolischen Factor $(a b \alpha)^2$ besitzt, den wirklichen Factor $\frac{1}{6} S$ hat, und den übrigbleibenden Factor erhält man, wenn man statt $a, b, \alpha$ überall $a$ setzt. Man kann also folgenden oft zu benutzenden Satz aussprechen:

XI. *Wenn eine Form den symbolischen Factor* $(a b \alpha)^2$ *hat, so zerfällt sie in das Product von* $\frac{1}{6} S$ *mit einer andern Form, und zwar erhält man letztere, indem man in der ersten den Factor* $(a b \alpha)^2$ *auslässt und für die noch übrigen Symbole* $a, b, \alpha$ *überall* $a$ *setzt.*

## §. 5.

### Anwendung des Processes $\delta$ auf $\Theta$, $\mathsf{H}$, $\mathsf{K}$.

Wenn oben gezeigt wurde, dass aus $f$ durch den Process $\delta$ ausser $\Delta$ keine Covarianten entstehen, so kann man zunächst für $\Theta$ einen ganz analogen Satz aufstellen. Aus $\Theta$ entsprang zunächst die Form

$$\mathsf{H} = \tfrac{1}{2}\,\delta\Theta = (a\alpha u)^2\, a_x \alpha_x\,.$$

Wendet man nun auf $\mathsf{H}$ abermals den Process $\delta$ an, so entstehen zwei Glieder, deren eines durch Anwendung der Operation auf die durch die Symbole $a$ vertretenen Coefficienten von $f$ erhalten wird, während das zweite aus der Anwendung derselben auf die durch die $\alpha$ vertretenen Coefficienten von $\Delta$ entspringt. Der erste Theil giebt eine neue Zwischenform

$$\mathsf{K} = (\beta\alpha u)^2\, \beta_x \alpha_x\,. \tag{22^a}$$

Der zweite aber führt auf $\Theta$ zurück. Denn nach dem Vorigen ist $\delta\Delta = \frac{1}{2} S \cdot f$; wenn man also den Process $\delta$ auf Coefficienten von $\Delta$ anwendet, so heisst dies, man schreibt statt der Coefficienten von $\Delta$ wieder die von $f$ und multiplicirt das Ganze mit $\frac{1}{2} S$. Dieser zweite Theil ist also

$$\tfrac{1}{2} S \cdot (abu)^2 a_x b_x = \tfrac{1}{2}\, S \cdot \Theta\,,$$

und man hat also

$$\delta\mathsf{H} = \mathsf{K} + \tfrac{1}{2} S \cdot \Theta\,. \tag{22^b}$$

Aber mit der Form $\mathsf{K}$ ist auch diese Reihe von Bildungen abgeschlossen. Denn man erhält mit Hülfe derselben Betrachtung sofort

$$\delta\mathsf{K} = S \cdot (a\alpha u)^2 a_x \alpha_x = S \cdot \mathsf{H}\,.$$

Fortgesetzte Anwendung des Processes $\delta$ auf $\Theta$, $\mathsf{H}$ und $\mathsf{K}$ führt daher immer wieder nur auf lineare Combinationen von $\Theta$, $\mathsf{H}$, $\mathsf{K}$ zurück, deren Coefficienten allerdings verwickeltere Invarianten von $f$ sein können.

Die Form $\mathsf{H}$ besitzt eine Eigenschaft, ähnlich derjenigen, welche oben für $\delta\Delta$ nachgewiesen wurde. Im § 4. ist nämlich die Formel

$$\mathsf{H}_x \mathsf{H}_y u_\eta^2 = (a\alpha u)^2 a_x \alpha_y = (a\alpha u)^2 a_y \alpha_x$$

bewiesen worden. Man kann sie durch die einzelnen symbolischen Gleichungen

$$\mathsf{H}_i \mathsf{H}_k u_\eta^2 = (a\alpha u)^2 a_i \alpha_k$$

ersetzen, und diese lehren, dass in jedem symbolischen Producte, welches den Factor $(a\alpha u)^2$ enthält, die Coefficienten von $\mathsf{H}$ auftreten. Um die Symbole von $\mathsf{H}$ einzuführen, hat man nur $(a\alpha u)^2$ durch $u_\eta^2$, die übrigbleibenden $a$, $\alpha$ durch $\mathsf{H}$ zu ersetzen. Man hat also den Satz:

XII. *Jede Form, welche den symbolischen Factor* $(a\alpha u)^2$ *hat, enthält auch die Coefficienten von* H, *und man führt die Symbole von* H *ein, indem man* $(a\alpha u)^2$ *durch* $u_\eta^2$, *die übrigbleibenden* $a$, $\alpha$ *aber durch* H *ersetzt.*

## § 6.

## Anwendung des Processes $\delta$ auf S und T.

Die Formen T und $T$ (vgl. Formel 20) führen zu ähnlichen Gruppen, welche die erste mit $\Sigma$, die zweite mit $S$ bildet. Um die Eigenschaften von T und $T$ aber genauer zu untersuchen, werden wir zunächst die symbolischen Ausdrücke geben, welche sie in den ursprünglichen Symbolen annehmen. Es gehört hierzu nur, dass man die in ihnen (20) vorkommenden $\alpha$ ersetzt, und zwar geschieht dies so, dass man (vgl. Satz VIII.) die $\alpha$ einzeln durch $d$, $e$, $f$ ersetzt und mit $(def)^2$ multiplicirt. Man hat dann aus (20):

$$(22^c) \quad \begin{cases} \mathsf{T} = (abd)\,(abu)\,(aeu)\,(bfu)\,(def)^2 \\ T = (abc)\,(abd)\,(ace)\,(bcf)\,(def)^2. \end{cases}$$

Einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Formen erkennt man darin, dass T aus $T$ hervorgeht, wenn man die $c$ durch $u$ ersetzt. Bildet man aber den Ausdruck

$$\Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h\,,$$

so erhält man im Ganzen 6 Terme, welche dadurch entstehen, dass der Reihe nach jede der 6 in $T$ auftretenden Symbolreihen durch die $u$ ersetzt wird. Nun kommen in $T$ die drei Symbolreihen $a$, $b$, $c$ symmetrisch vor; der Ausdruck T ändert sich nicht, wenn man etwa $a$, $b$ vertauscht, sobald nur gleichzeitig die Reihen $e$, $f$ vertauscht werden. Die Reihen $a$, $b$, $c$ liefern also drei gleiche Terme, welche nach dem Vorigen sämmtlich gleich T sind. Ebenso liefern die Reihen $d$, $e$, $f$ drei gleiche Terme, denn auch die Reihen $d$, $e$, $f$ kommen in sofern symmetrisch vor, als T sich nicht ändert, wenn man etwa $d$ und $e$ und zugleich $b$ mit $c$ vertauscht. Die drei von den Reihen $d$, $e$, $f$ herrührenden Terme mögen durch T′ bezeichnet sein. Man hat demnach

$$\Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h = 3\,(\mathsf{T} + \mathsf{T}')\,.$$

*Es ist nun leicht zu zeigen, dass die Formen* T *und* T′ *einander gleich sind, dass man also*

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{6}\, \Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}} u_i u_k u_h$$

*hat.* Dies ergiebt sich auf folgende Weise.

Wir haben, wenn wir T′ durch Ersetzung der Reihe $f$ bilden:

$$T' = (abc)\,(abd)\,(ace)\,(bcu)\,(deu)^2.$$

Dagegen wird der obige Ausdruck von T, wenn man darin $c$ für $f$ schreibt und ausserdem $a$ mit $d$ vertauscht:

$$T = (abd)\,(bdu)\,(deu)\,(bcu)\,(ace)^2.$$

Daher ist

$$T' - T = (abd)\,(ace)\,(bcu)\,(deu)\left\{(deu)\,(abc) - (bdu)\,(ace)\right\}.$$

Nach der immer angewandten Identität ist aber

$$(deu)\,(abc) - (bdu)\,(ace) = (dau)\,(ebc) + (dcu)\,(abe),$$

und daher auch:

$$T' - T = (abd)\,(ace)\,(bcu)\,(deu)\left\{(dau)\,(ebc) + (dcu)\,(abe)\right\}.$$

Diese Form zeigt nach Satz VI., dass T′ — T durch $S$ theilbar ist; denn der erste Theil enthält $(ebc)\,(ace)$ und $ab$ noch vereinigt, der zweite enthält $(abe)\,(abd)$ und $de$ noch vereinigt. Es ist also

$$T' - T = S \cdot N;$$

aber der Factor $N$ kann nur noch, ausser drei Reihen $u$, eine Symbolreihe enthalten, und da hieraus ein nicht verschwindender symbolischer Determinantenfactor nicht zu bilden ist, so muss nothwendig $N$ verschwinden. Man hat also

$$T' = T,$$

was zu beweisen war.

Es folgt hieraus mit Leichtigkeit die Bestimmung von $\delta T$. Denn der Definition nach ist

$$\delta T = \Sigma \frac{\partial T}{\partial a_{ikh}}\, \alpha_{ikh}.$$

Es entsteht also $\delta T$, wenn wir in 6 T oder in 6 T′ für die $u$ die Symbole $\alpha$ von $\Delta$ setzen. Wir wählen das letztere und erhalten also

$$\delta T = 6\,(abc)\,(abd)\,(ace)\,(bc\alpha)\,(de\alpha)^2.$$

Nach Satz XI. ist aber dies gleich $\frac{1}{6}\,S$, multiplicirt mit dem Ausdrucke, den man erhält, wenn man $(de\alpha)^2$ auslässt, und statt $d$, $e$, $\alpha$ übrigens ein Symbol von $f$, etwa $d$, setzt. Dann ergiebt sich also

$$\delta T = S \cdot (abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcd)$$

oder endlich

$$\delta T = S^2. \tag{23}$$

Die Anwendung von $\delta$ auf $T$ führt also wieder auf $S$ zurück. Mithin kann die wiederholte Anwendung des Processes $\delta$ auf $S$ und $T$ überhaupt nur wieder immer auf Combinationen von $S$ und $T$ führen.

## § 7.

### Anwendung des Processes $\delta$ auf $\Sigma$ und T.

Es bleibt übrig zu zeigen, dass die Anwendung von $\delta$ auf $\Sigma$ und T immer auf lineare Combinationen von $\Sigma$ und T führen, deren Coefficienten dann, wie die entsprechenden bei $f$, $\Delta$ oder bei $\Theta$, H, K, dem eben Bewiesenen zufolge nur Combinationen von $S$ und $T$ sind.

Um diesen Beweis zu führen, entwickeln wir zunächst eine Formel, welche man als eine andre Darstellung von H betrachten kann. Es war

$$\mathsf{H} = (a\alpha u)^2 a_x \alpha_x .$$

Führen wir hier statt der $\alpha$ die Symbole $b$, $c$, $d$ von $f$ ein, so ist, dem Satze VIII. entsprechend,

$$\mathsf{H} = (abu)\,(acu)\,bcd)^2 a_x d_x .$$

Nach der bekannten Identität kann man

$$a_x\,(bcd) = b_x\,(acd) + c_x\,(bad) + d_x\,(abc)$$

setzen, und hat also

$$\mathsf{H} = (abu)\,(acu)\,(bcd)\,d_x\,\{b_x\,(acd) + c_x\,(bad) + d_x\,(abc)\} .$$

Von den drei Theilen, in welche H hier zerfällt, sind die beiden ersten identisch, indem sie durch Vertauschung von $b$ und $c$ in einander übergehen; sie sind aber auch nach Satz VI. durch $S$ theilbar, und zwar entsteht der Ausdruck

$$(abu)\,(acu)\,(bcd)\,(acd)\,b_x d_x ,$$

oder (durch Vertauschung von $a$ mit $c$ und $b$ mit $d$)

$$-\,(abc)\,(abd)\,(acu)\,(cdu)\,b_x d_x$$

aus dem in § 3. durch $L$ bezeichneten, indem man $y$ und $t$ durch $x$, $x$ durch $y$ ersetzt, sodann $y$ mit $z$ vertauscht und die Differenz beider Ausdrücke bildet. Man hat dann

$$(abc)\,(abd)\,(cdu)\,b_x d_x\,\{a_z c_y - a_y c_z\} ,$$

und dies giebt den gesuchten Ausdruck, wenn man darin die Determinanten der $y$ und $z$ durch $u$ ersetzt. Nach der letzten Formel des § 3. ist dies aber gleich

$$-\tfrac{1}{12}\,S\cdot u_x\,(yzx) = -\tfrac{1}{12}\,S\cdot u_x^2 .$$

Die obige Formel für H ist also:

$$\mathsf{H} = -\tfrac{1}{6}\,S\cdot u_x^2 + (abu)\,(acu)\,(bcd)\,(abc)\,d_x^2 .$$

Führen wir nun, um den letzten Theil einfach zu gestalten, das Symbol von $\Sigma$:

$$\Sigma = u_z^3 = (abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu)$$

ein. Bilden wir das Differential in Bezug auf die $u$ und ersetzen die

Differentiale durch $v$, so ergiebt sich links $3\,u_s^2 v_s$, rechts aber die Summe dreier Theile, welche nur durch die Bezeichnung verschieden sind. Indem man also für sie das Dreifache des einen setzt, hat man

$$u_s^2 v_s = (abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcv)\,,$$

und daher sofort, wenn man $v$ durch $d$ ersetzt und mit $d_x^2$ multiplicirt:

$$u_s^2 d_s d_x^2 = (abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcd)\,d_x^2\,.$$

Rechts steht der gesuchte Ausdruck; die Formel für $\mathsf{H}$ also wird nunmehr:

$$\mathsf{H} = -\tfrac{1}{6}\,S\cdot u_x^2 + u_s^2 d_s d_x^2\,. \tag{24}$$

Die Form, auf welche hier $\mathsf{H}$ zurückgeführt ist, kann man auch leicht ohne Symbole definiren; denn da

$$u_s^2 s_i = \tfrac{1}{3}\,\frac{\partial\Sigma}{\partial u_i}\,, \quad d_x^2 d_i = \tfrac{1}{3}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,,$$

so hat man

$$u_s^2 d_s d_x^2 = \tfrac{1}{9}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\frac{\partial\Sigma}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\frac{\partial\Sigma}{\partial u_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,\frac{\partial\Sigma}{\partial u_3}\right\}.$$

Um nun den Ausdruck von $\delta\mathsf{T}$ abzuleiten, gehen wir von der oben (S. 456) durch $\mathsf{T}'$ bezeichneten Form aus:

$$\mathsf{T} = (abc)\,(abd)\,(ace)\,(bcu)\,(deu)^2\,.$$

Man kann diese Darstellung durch eine Combination von $\Theta$ und $\Sigma$ erzeugen. Denn da

$$\Theta = \Theta_x^2 u_\vartheta^2 = (deu)^2 d_x e_x\,,$$

so folgt, indem man nach den $x$ differenzirt und mit $y$ multiplicirt $2\,\Theta_x\Theta_y u_\vartheta^2$ gleich der Summe zweier Terme, welche durch Vertauschung von $d$ und $e$ in einander übergehen und also gleich sind; man kann daher setzen

$$\Theta_x\Theta_y u_\vartheta^2 = (deu)^2\,d_x e_y\,.$$

Ersetzt man nun die $x$ durch Determinanten der $a, b$, die $y$ durch Determinanten der $a, c$, und multiplicirt mit $(abc)\,(bcu)$, so erhält man rechts die obige Form von $\mathsf{T}$, und es ist also

$$\mathsf{T} = (\Theta ab)\,(\Theta ac)\,(abc)\,(bcu)\,u_\vartheta^2\,.$$

Wir erhalten aber aus der symbolischen Darstellung

$$\Sigma = u_s^3 = (abc)\,(abu)\,(\Theta cu)\,(bcu)\,,$$

wenn wir das Differential nach den $u$ bilden und dann die $u$ durch $v$, die $du$ durch $u$ ersetzen, $3\,v_s^2 u_s$ gleich der Summe dreier identischer Glieder, und also, wenn wir $v_s^2 u_s$ einem derselben gleich setzen:

$$v_s^2 u_s = (abc)\,(abv)\,(acv)\,(bcu),$$

und demnach endlich, wenn wir $v$ durch $\Theta$ ersetzen und mit $u_\vartheta^2$ multipliciren:

(25) $$\mathsf{T} = u_t^3 = \Theta_s^2 u_s u_\vartheta^2 .$$

Dies ist die gesuchte Darstellung von $\mathsf{T}$ durch $\Theta$ und $\Sigma$. Unterwerfen wir sie dem Processe $\delta$, so entstehen rechts zwei Glieder, deren eines gebildet wird, wenn man statt der Coefficienten von $\Theta$ die von $\delta\Theta = 2\,\mathsf{H}$ setzt, während das andre daraus hervorgeht, dass die Coefficienten von $\Sigma$ durch die von $\delta\Sigma = 3\,\mathsf{T}$ (F. 20) ersetzt werden. Demnach ist

(26) $$\delta\mathsf{T} = 2\,\mathsf{H}_s^2 u_s u_\varrho^2 + 3\,\Theta_t^2 u_t u_\vartheta^2 .$$

Benutzen wir, um das Glied $\mathsf{H}_s^2 u_s u_\eta^2$ auszudrücken, $\mathsf{H}$ in der Form (24), so erhalten wir:

$$\mathsf{H}_s^2 u_s u_\eta^2 = -\tfrac{1}{6} S \cdot u_s^3 + u_s^2 d_s d_{s'}^2 u_{s'} .$$

Der erste Theil rechts kommt unmittelbar auf $\Sigma$ zurück; der andre wird reducirt, indem man zunächst den Ausdruck

$$d_{s'}^2 u_{s'} d_x$$

betrachtet. Geht man von dem oben entwickelten Ausdrucke von $v_s^2 u_s$ aus, setzt $d$ statt $v$ und multiplicirt mit $d_x$, so wird

$$d_{s'}^2 u_{s'} d_x = (abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcu)\,d_x ,$$

was nach § 3., 17., 18. gleich $\frac{1}{3} S \cdot u_x$ ist. Setzt man aber $s$ für $x$ und multiplicirt mit $u_s^2$, so ergiebt sich der zweite Theil der obigen Formel:

$$u_s^2 d_s d_{s'}^2 u_{s'} = \tfrac{1}{3} S \cdot u_s^3 = \tfrac{1}{3} S\Sigma ,$$

und demnach

(27) $$\mathsf{H}_s^2 u_s u_\eta^2 = \tfrac{1}{6} S\Sigma .$$

Der zweite Theil von $\delta\mathsf{T}$, der Ausdruck $\Theta_t^2 u_t u_\vartheta^2$, wird dadurch behandelt, dass man zunächst die folgende Eigenschaft der Form $\mathsf{T}$ nachweist:

XIII. *Die aus* $\mathsf{T} = u_t^3 = \Theta_s^2 u_s u_\vartheta^2$ *durch Differentiation hervorgehende Form* $u_t^2 v_t$ *lässt die doppelte Darstellung zu:*

$$\begin{aligned} u_t^2 v_t &= \Theta_s^2 v_s u_\vartheta^2 \\ &= \Theta_s^2 u_\vartheta v_\vartheta u_s . \end{aligned}$$

Es ist nämlich unmittelbar $3\,u_s^2 v_s$ gleich der Summe der ersten Darstellung und der doppelten zweiten. Es ist also nur zu zeigen, dass die Werthe der beiden Darstellungen identisch sind, d. h. dass die Differenz

$$\Theta_s^2 u_\vartheta\,(v_s u_\vartheta - u_s v_\vartheta)$$

identisch verschwindet. Führt man aber für $\Theta$, $\vartheta$ ihre symbolischen Ausdrücke in $a$, $b$ ein, so hat man diese gleich

$$a_s b_s\,(abu)\,\{v_s\,(abu) - u_s\,(abv)\} ,$$

oder nach der immer benutzten Identität:

$$a_s b_s (abu) \left\{a_s (buv) - b_s (auv)\right\} .$$

Die beiden Theile dieses Ausdrucks sind identisch, weil sie durch Vertauschung von $a$ und $b$ in einander übergehen; nach dem Vorigen aber ist $a_s^2 u_s \Theta_x = \frac{1}{3} S u_x$, und also

$$a_s^2 b_s (abu) (buv) = \frac{1}{3} S \cdot (bbu) (buv) = 0 ,$$

was zu beweisen war.

In Folge dieses Satzes hat man nun, wenn man die erste Darstellung von $u_s^2 v_s$ benutzt und $u$ durch $\Theta'$, $v$ durch $u$ ersetzt, für den zweiten Theil von $\delta \mathrm{T}$ den Ausdruck:

$$\Theta'^2_t u_t u^2_{\vartheta'} = \Theta^2_s u_s \Theta'^2_{\vartheta} u^2_{\vartheta'} .$$

Nach Satz IV. aber war

$$\Theta'^2_{\vartheta} \Theta^2_x u^2_{\vartheta'} = \frac{1}{6} S \cdot u_x^2 ;$$

setzt man also $s$ für $x$ und multiplicirt mit $u_s$, so findet man

$$\Theta'^2_t u_t u^2_{\vartheta'} = \frac{1}{6} S \cdot u_s^3 = \frac{1}{6} S \cdot \Sigma . \tag{28}$$

Fassen wir nun alles zusammen, so folgt aus (26), (27), (28):

$$\delta \mathrm{T} = \frac{5}{6} S \cdot \Sigma . \tag{29}$$

Diese Formel lehrt nun in der That, dass $\delta \mathrm{T}$ wieder auf $\Sigma$ zurückkommt, dass also fortgesetzte Anwendung des Processes $\delta$, wie sie aus $f$ und $\Delta$ nur auf lineare Combinationen dieser beiden, auch aus $\Sigma$, $\mathrm{T}$ nur auf lineare Combinationen von $\Sigma$, $\mathrm{T}$ führen kann, deren Coefficienten ganze Functionen von $S$ und $T$ sind.

## § 8.

### Invarianten, Covarianten etc. von $\varkappa f + \lambda \Delta$.

Es handelt sich nun darum, die oben für $f$ gebildeten Formen für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda \Delta$ zu bilden. Wir werden zunächst den allgemeinen Charakter dieser Bildungen entwickeln, sodann aber sie zuerst bezüglich der einfachsten unserer Formen $\Theta$, $\Delta$, $\Sigma$, wirklich ausführen.

Wenn wir irgend eine aus $f$ entstandene Form $\varphi$ vor uns haben, welche etwa vom Grade $n$ in den Coefficienten von $f$ ist, und wenn wir diese Form für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda \Delta$ bilden, so haben wir nur die Coefficienten von $\varkappa f + \lambda \Delta$ an Stelle der Coefficienten von $f$ zu setzen und wir erhalten also eine Form, welche für $\varkappa$, $\lambda$ homogen von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Bezeichnen wir diese neue Bildung mit $\varphi_{\varkappa\lambda}$, so kann man also setzen:

$$\varphi_{\varkappa\lambda} = \varphi \cdot \varkappa^n + \frac{n}{1} \varphi_1 \cdot \varkappa^{n-1} \lambda + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \varphi_2 \cdot \varkappa^{n-2} \lambda^2 \cdots + \varphi_n \lambda^n , \tag{30}$$

wo die $\varphi$ von $\varkappa$, $\lambda$ unabhängige Formen sind. Der erste Coefficient ist $\varphi$ selbst, denn $\varphi_{\varkappa\lambda}$ geht in $\varphi$ über, wenn $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$ gesetzt wird.

Ist $\varphi$ als symbolisches Product gegeben, so erhält man die verschiedenen Terme, welche in der rechten Seite der Gleichung (30) vorkommen, indem man eine oder mehrere Reihen von Symbolen von $f$ durch Symbole von $\Delta$ ersetzt; und zwar ist $\frac{n}{1}\varphi_1$ das Aggregat derjenigen Terme, bei denen nur *ein* Symbol von $f$ durch eines von $\Delta$ ersetzt ist, $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}\varphi_2$ das Aggregat der Terme, bei welchen *zwei* Reihen ersetzt sind u. s. w.

Die Bildung der Formen $\varphi_1, \varphi_2 \cdots$, auf welche es hier ankommt, wird durch die Kenntniss der Formen $\delta\varphi$, $\delta\delta\varphi \cdots$ geleistet, wie man leicht übersieht. Wir werden jetzt eine Reihe von Gleichungen entwickeln, welche unmittelbar zur successiven Bestimmung dieser Coefficienten führen.

Unterwerfen wir die Gleichung (30) dem Processe $\delta$. Die linke Seite hängt nur von den Verbindungen $\varkappa a_{ikh} + \lambda \alpha_{ikh}$ ab, und indem wir diese der Kürze wegen durch $m_{ikh}$ bezeichnen, erhalten wir links

$$\delta\varphi_{\varkappa\lambda} = \Sigma \frac{\partial \varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial m_{ikh}} \delta m_{ikh},$$

wo die Summe sich auf alle Combinationen $ikh$ der Zahlen 1, 2, 3 mit Wiederholungen bezieht. Nun ist der Definition nach

$$\delta a_{ikh} = \alpha_{ikh},$$

und ferner nach § 4., da $\delta\Delta = \frac{1}{2} Sf$ ist:

$$\delta \alpha_{ikh} = \tfrac{1}{2} S \cdot a_{ikh}.$$

Der obige Ausdruck verwandelt sich also in:

$$\Sigma \frac{\partial \varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial m_{ikh}} (\varkappa \alpha_{ikh} + \tfrac{1}{2} S \lambda a_{ikh}),$$

oder, was dasselbe ist, in

$$\delta\varphi_{\varkappa\lambda} = \varkappa \frac{\partial\varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} + \tfrac{1}{2} S\lambda \frac{\partial\varphi_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}.$$

Setzen wir hier links und rechts für $\varphi_{\varkappa\lambda}$ seinen entwickelten Ausdruck (30), so haben wir die Gleichung

$$\begin{aligned}\delta\varphi \cdot \varkappa^n + \frac{n}{1}\delta\varphi_1 \cdot \varkappa^{n-1}\lambda + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}\delta\varphi_2 \cdot \varkappa^{n-2}\lambda^2 \cdots + \delta\varphi_n \cdot \lambda^n \\ = n\varkappa \left\{\varphi_1 \varkappa^{n-1} + \frac{n-1}{1}\varphi_2 \varkappa^{n-2}\lambda \cdots + \varphi_n \lambda^{n-1}\right\} \\ + \frac{n}{2} S\lambda \left\{\varphi \varkappa^{n-1} + \frac{n-1}{1}\varphi_1 \varkappa^{n-2}\lambda \cdots + \varphi_{n-1}\lambda^{n-1}\right\}.\end{aligned}$$

Vergleichen wir hier die Coefficienten gleich hoher Potenzen von

$\varkappa$ und $\lambda$, so erhalten wir das folgende System von Gleichungen, welches die Berechnung der $\varphi$ auf wiederholte Anwendung des Processes $\delta$ zurückführt:

$$(31)\qquad \begin{aligned}
\delta\varphi &= n\varphi_1\\
\delta\varphi_1 &= (n-1)\,\varphi_2 + \frac{S}{2}\cdot\varphi\\
\delta\varphi_2 &= (n-2)\,\varphi_3 + \frac{S}{2}\cdot 2\,\varphi_1\\
\delta\varphi_3 &= (n-3)\,\varphi_4 + \frac{S}{2}\cdot 3\,\varphi_2\\
&\;\;\cdots\\
\delta\varphi_{n-1} &= \qquad\qquad \varphi_n + \frac{S}{2}\cdot(n-1)\,\varphi_{n-2}\\
\delta\varphi_n &= \qquad\qquad\qquad \frac{S}{2}\cdot n\,\varphi_{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen giebt $\varphi_1$, die zweite $\varphi_2$ u. s. w., die vorletzte giebt $\varphi_n$; die letzte Gleichung giebt nichts neues mehr, dient aber zur Controle der Rechnung.

Bei der Form $\Theta_{\varkappa\lambda}$ ist die Anwendung dieser Formeln noch unnöthig. Man erhält ohne Weiteres

$$\Theta_{\varkappa\lambda} = (abu)^2\,a_x b_x\cdot\varkappa^2 + 2\,(a\alpha u)^2\,a_x\alpha_x\cdot\varkappa\lambda + (\alpha\beta u)^2\,\alpha_x\beta_x\cdot\lambda^2,$$

d. h. man hat

$$(32)\qquad \Theta_{\varkappa\lambda} = \varkappa^2\Theta + 2\,\varkappa\lambda\mathrm{H} + \lambda^2\mathrm{K}\,.$$

Dagegen für die Entwicklungen

$$\begin{aligned}
\Delta_{\varkappa\lambda} &= \Delta\varkappa^3 + 3\,\Delta_1\varkappa^2\lambda + 3\,\Delta_2\varkappa\lambda^2 + \Delta_3\lambda^3\\
\Sigma_{\varkappa\lambda} &= \Sigma\varkappa^3 + 3\,\Sigma_1\varkappa^2\lambda + 3\,\Sigma_2\varkappa\lambda^2 + \Sigma_3\lambda^3
\end{aligned}$$

erhält man mit Benutzung der oben abgeleiteten Gleichungen

$$\delta\Delta = \tfrac{1}{2}Sf,\quad \delta\Sigma = 3\,\mathrm{T},\quad \delta\mathrm{T} = \tfrac{5}{6}S\Sigma,$$
$$\delta S = 4\,T,\quad \delta T = S^2$$

aus dem Systeme (31) sofort:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \tfrac{1}{6}Sf & \Sigma_1 &= \mathrm{T}\\
\Delta_2 &= \frac{2\,Tf - S\Delta}{6} & \Sigma_2 &= \tfrac{1}{6}\,S\Sigma\\
\Delta_3 &= \frac{-4\,T\Delta + S^2 f}{12} & \Sigma_3 &= \frac{4\,T\Sigma - 3\,S\mathrm{T}}{6}\,.
\end{aligned}$$

Da aber nur die Operation $\delta$ angewendet wurde, so folgt von selbst, dass $\Delta_{\varkappa\lambda}$ sich aus $f$ und $\Delta$, $\Sigma_{\varkappa\lambda}$ sich aus $\Sigma$ und $\mathrm{T}$ linear zusammensetzt. Die Formeln für diese Zusammensetzung aber sind nun:

$$(33)\quad \begin{cases} \Delta_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{T}{3}\lambda^3\right)\Delta + \left(\frac{S}{2}\varkappa^2\lambda + T\varkappa\lambda^2 + \frac{S^2}{12}\lambda^3\right)f \\ \Sigma_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^3 + \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 + \frac{2T}{3}\lambda^3\right)\Sigma + \left(3\varkappa^2\lambda - \frac{S}{2}\lambda^3\right)\mathsf{T}\,. \end{cases}$$

Man bemerkt hier leicht, dass die Coefficienten von $f$ und $\Delta$ im Ausdrucke von $\Delta_{\varkappa\lambda}$ die nach $\varkappa$ und $\lambda$ genommenen Differentialquotienten einer biquadratischen Function $G(\varkappa, \lambda) = G$ sind, welche den Ausdruck hat:

$$(34)\qquad G = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \frac{4T}{3}\varkappa\lambda^3 - \frac{S^2}{12}\lambda^4\,.$$

Legt man diese zu Grunde und führt die Bezeichnungen ein

$$(35)\quad \begin{cases} G_1 = \frac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial \varkappa} = \varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{T}{3}\lambda^3 \\ G_2 = \frac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial \lambda} = -\frac{S}{2}\varkappa^2\lambda - T\varkappa\lambda^2 - \frac{S^2}{12}\lambda^3\,, \end{cases}$$

so nimmt $\Delta_{\varkappa\lambda}$ die einfache Gestalt an:

$$(36)\qquad \Delta_{\varkappa\lambda} = G_1\Delta - G_2 f\,.$$

## § 9.

### Die Bildungen $\mathsf{H}_{\varkappa\lambda}$, $\mathsf{T}_{\varkappa\lambda}$, $S_{\varkappa,\lambda}$, $T_{\varkappa,\lambda}$ und $\mathsf{K}_{\varkappa\lambda}$.

Zur Aufstellung weiterer Bildungen für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda\Delta$ dient folgende Betrachtung. Es sei $\Pi$ irgend eine aus $f$ entspringende Form, welche wir, in sofern sie die Coefficienten $a_{ikh}$ von $f$ enthält, durch $\Pi(a)$ bezeichnen. Aus ihr entsteht durch den Process $\delta$ die Form

$$\delta\Pi = \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial a_{ikh}}\alpha_{ikh}\,.$$

Nun betrachten wir die beiden Formen

$$\Pi_{\varkappa\lambda} \text{ und } (\delta\Pi)_{\varkappa\lambda}\,,$$

welche entstehen, wenn man in $\Pi$ und $\delta\Pi$ die Coefficienten von $f$ durch die von $\varkappa f + \lambda\Delta$ ersetzt. Dabei sind nach (36) die $\alpha_{ikh}$ durch

$$G_1\alpha_{ikh} - G_2 a_{ikh}$$

zu ersetzen. Es wird also

$$(\delta\Pi)_{\varkappa\lambda} = \Sigma \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial\cdot \varkappa a_{ikh} + \lambda\alpha_{ikh}}(G_1\alpha_{ikh} - G_2 a_{ikh}) = G_1\frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2\frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\,.$$

Man hat also den Satz:

*Ist $\Pi$ eine aus $f$ entstandene Form, so ist die für die zusammengesetzte Form $\varkappa f + \lambda\Delta$ gebildete Form $(\delta\Pi)_{\varkappa\lambda}$ gleich der Functionaldeterminante von $G$ und $\Pi_{\varkappa\lambda}$:*

(37) $$(\delta\Pi)_{\varkappa\lambda} = G_1\frac{\partial\Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2\frac{\partial\Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}.$$

Mit Hülfe dieser Formel führen wir nun folgende Bildungen aus:

1. Aus
$$\Theta_{\varkappa\lambda} = \varkappa^2\Theta + 2\varkappa\lambda H + \lambda^2 K$$
folgt, da $H = \frac{1}{2}\delta\Theta$ ist:

(38) $$H_{\varkappa\lambda} = G_1(\varkappa H + \lambda K) - G_2(\varkappa\Theta + \lambda H).$$

2. Aus
$$\Sigma_{\varkappa\lambda} = \left(\varkappa^3 + \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 + \frac{2T}{3}\lambda^3\right)\Sigma + \left(3\varkappa^2\lambda - \frac{S}{2}\lambda^3\right)T$$
folgt, da $T = \frac{1}{3}\delta\Sigma$:

(39) $$\begin{aligned} T_{\varkappa\lambda} = G_1 &\left[\left(\frac{S}{3}\varkappa\lambda + \frac{2T}{3}\lambda^2\right)\Sigma + \left(\varkappa^2 - \frac{S}{2}\lambda^2\right)T\right] \\ - G_2 &\left[\left(\varkappa^2 + \frac{S}{6}\lambda^2\right)\Sigma + 2\varkappa\lambda T\right]. \end{aligned}$$

3. Aus
$$\Delta_{\varkappa\lambda} = G_1\Delta - G_2 f$$
folgt, da $\delta\Delta = \frac{S}{2}f$:
$$S_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) = 2\left[G_1\left(\frac{\partial G_1}{\partial\lambda}\Delta - \frac{\partial G_2}{\partial\lambda}f\right) - G_2\left(\frac{\partial G_1}{\partial\varkappa}\Delta - \frac{\partial G_2}{\partial\varkappa}f\right)\right].$$

Nun seien die zweiten Differentialquotienten von G, dividirt durch 12, die Ausdrücke

(40) $$\begin{cases} G_{11} = \frac{1}{12}\frac{\partial^2 G}{\partial\varkappa^2} = \varkappa^2 - \frac{S}{6}\lambda^2 \\ G_{12} = \frac{1}{12}\frac{\partial^2 G}{\partial\varkappa\,\partial\lambda} = -\frac{S}{3}\varkappa\lambda - \frac{T}{3}\lambda^2 \\ G_{22} = \frac{1}{12}\frac{\partial^2 G}{\partial\lambda^2} = -\frac{S}{6}\varkappa^2 - \frac{2T}{3}\varkappa\lambda - \frac{S^2}{12}\lambda^2. \end{cases}$$

Die obige Formel kann dann zunächst so geschrieben werden:
$$S_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) = 6\begin{vmatrix} G_1 & G_{11}\Delta - G_{12}f \\ G_2 & G_{12}\Delta - G_{22}f \end{vmatrix},$$
oder auch, nach den bekannten Eigenschaften der homogenen Functionen:
$$\begin{aligned} S_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) &= 6\begin{vmatrix} G_{11}\varkappa + G_{12}\lambda & G_{11}\Delta - G_{12}f \\ G_{21}\varkappa + G_{12}\lambda & G_{21}\Delta - G_{22}f \end{vmatrix} \\ &= 6\cdot\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ \Delta & -f \end{vmatrix}, \end{aligned}$$
und, indem man durch $\varkappa f + \lambda\Delta$ dividirt, bleibt also:

(41) $$\begin{aligned} S_{\varkappa\lambda} = -6(G_{11}G_{22} - G_{12}{}^2) = S\varkappa^4 + 4T\varkappa^3\lambda + S^2\varkappa^2\lambda^2 + \tfrac{2}{3}ST\varkappa\lambda^3 \\ + \left(\tfrac{2}{3}T^2 - \tfrac{1}{12}S^3\right)\lambda^3. \end{aligned}$$

4. Hieraus folgt weiter, da

$$\delta S = 4\,T$$

ist, die Formel für $T_{\varkappa\lambda}$:

(42) $$T_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{4}\left(G_1\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\right).$$

5. Endlich ergiebt sich noch aus (38) die Formel für $\mathsf{K}_{\varkappa\lambda}$. Denn es war

$$\delta\mathsf{H} = \mathsf{K} + \frac{S}{2}\,\Theta\,.$$

Daher hat man

(42) $$\mathsf{K}_{\varkappa\lambda} = -\frac{S_{\varkappa\lambda}}{2}\,\Theta_{\varkappa\lambda} + G_1\frac{\partial\mathsf{H}_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2\frac{\partial\mathsf{H}_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}.$$

Einen einfacheren Ausdruck finden wir für $\mathsf{K}_{\varkappa\lambda}$ aus der Bemerkung, dass die Zwischenform $\mathsf{K}$ entsteht, wenn man die Bildung $\Theta$ an der Form $\Delta$ vornimmt.

Es ergiebt sich hieraus, dass $\mathsf{K}_{\varkappa\lambda}$ die Zwischenform $\Theta$, gebildet von der Form:

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = G_1\Delta - G_2 f,$$

ist, also durch die Formel:

(42ª) $$\mathsf{K}_{\varkappa\lambda} = G_1^2\mathsf{K} - 2\,G_1G_2\mathsf{H} + G_2^2\,\Theta$$

ausgedrückt werden kann.

## § 10.

## Anwendung der § 9. gegebenen Formeln, um gewisse verwickelte Bildungen durch einfachere auszudrücken.

Die vorstehenden Bildungen geben zu einer Reihe von Formeln Veranlassung, welche für das Folgende von Wichtigkeit sind.

Wir hatten den Vorigen (§ 7., 24.) die Form $\mathsf{H}$ in Zusammenhang gebracht mit einer Bildung, welche aus $f$ und $\Sigma$ entstand, und die wir jetzt durch

(43) $$f_\Sigma = \tfrac{1}{9}\,\Sigma\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{\partial\Sigma}{\partial u_i}$$

bezeichnen wollen. Die angegebene Formel war

(44) $$f_\Sigma = \mathsf{H} + \tfrac{1}{6}\,S u_x^2\,.$$

Indem wir diese Gleichung für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda\Delta$ bilden, erhalten wir analoge Gleichungen für die ähnlich gebildeten Ausdrücke:

(45) $$\begin{cases} f_T = \tfrac{1}{9}\,\Sigma\,\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_i} \\[2ex] \Delta_\Sigma = \tfrac{1}{9}\,\Sigma\,\dfrac{\partial \Delta}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial\Sigma}{\partial u_i} \\[2ex] \Delta_T = \tfrac{1}{9}\,\Sigma\,\dfrac{\partial \Delta}{\partial x_i}\,\dfrac{\partial T}{\partial u_i}\,. \end{cases}$$

Mit Hülfe der Formeln (38), (39), (41) ergiebt sich sofort:

$$\left(\varkappa^3 + \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 + \frac{2T}{3}\lambda^3\right)\left(\varkappa f_\Sigma + \lambda\Delta_\Sigma\right)$$

$$+\left(3\varkappa^2\lambda - \frac{S}{2}\lambda^3\right)\left(\varkappa f_T + \lambda\Delta_T\right)$$

$$=\left(\varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{T}{3}\lambda^3\right)\left(\varkappa \mathsf{H} + \lambda\mathsf{K}\right) + \left(\frac{S}{2}\varkappa^2\lambda + T\varkappa\lambda^2 + \frac{S^2}{12}\lambda^3\right)\left(\varkappa\Theta + \lambda\mathsf{H}\right)$$

$$+\frac{1}{6}u_x^2\left\{S\varkappa^4 + 4T\varkappa^3\lambda + S^2\varkappa^2\lambda^2 + \frac{2}{3}ST\varkappa\lambda^3 + \left(\frac{2}{3}T^2 - \frac{S^3}{12}\right)\lambda^4\right\}.$$

Indem wir hier beiderseits die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $\varkappa$ und $\lambda$ vergleichen, erhalten wir das folgende Formelsystem:

$$\begin{aligned}
f_\Sigma &= \mathsf{H} && + \frac{S}{6}u_x^2\\
\Delta_\Sigma + 3f_T &= \mathsf{K} + \frac{S}{2}\Theta && + \frac{2T}{3}u_x^2\\
\frac{S}{2}f_\Sigma + 3\Delta_T &= T\Theta && + \frac{S^2}{6}u_x^2\\
\frac{S}{2}\Delta_\Sigma + \frac{2T}{3}f_\Sigma - \frac{S}{2}f_T &= -\frac{S\mathsf{K}}{2} + \frac{2}{3}T\mathsf{H} + \frac{S^2}{12}\Theta && + \frac{ST}{9}u_x^2\\
\frac{2T}{3}\Delta_\Sigma - \frac{S}{2}\Delta_T &= -\frac{T\mathsf{K}}{3} + \frac{S^2}{12}\mathsf{H} && + \left(\frac{T^2}{9} - \frac{S^3}{72}\right)u_x^2,
\end{aligned}$$

und es ergiebt sich daraus:

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned}
f_\Sigma &= \mathsf{H} + \frac{S}{6}u_x^2\\
\Delta_\Sigma &= -\frac{\mathsf{K}}{2} + \frac{S\Theta}{4} + \frac{T}{6}u_x^2\\
f_T &= \frac{\mathsf{K}}{2} + \frac{S\Theta}{12} + \frac{T}{6}u_x^2\\
\Delta_T &= -\frac{S\mathsf{H}}{6} + \frac{T\Theta}{3} + \frac{S^2}{36}u_x^2.
\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Gleichungen leitet man ein anderes wichtiges System ab, indem man dieselben dem Processe

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial u_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3\partial u_3}\right)$$

unterwirft. Die linken Seiten, welche die symbolischen Ausdrücke haben:

$$a_s a_x^2 u_s^2,\quad \alpha_s\alpha_x^2 u_s^2,\quad a_t a_x^2 u_t^2,\quad \alpha_t\alpha_x^2 u_t^2,$$

geben alsdann

$$a_s^2 a_x u_s,\quad \alpha_s^2\alpha_x u_s,\quad a_t^2 a_x u_t,\quad \alpha_t^2\alpha_x u_t,$$

d. h. sie geben die Bildungen

$$\frac{1}{16}\,\Sigma\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial u_i\,\partial u_k}$$

für $\varphi = f$, $\Delta$ und $\psi = \Sigma$, $\mathsf{T}$. Die Formen

$$\Theta = (abu)^2 a_x b_x, \quad \mathsf{H} = (a\alpha u)^2 a_x \alpha_x, \quad \mathsf{K} = (\alpha\beta u)^2 \alpha_x \beta_x$$

geben, dem obigen Processe unterworfen, immer Null; endlich $u_x^2$ giebt $2\,u_x$. Daher hat man die Formeln:

$$a_s^2 a_x u_s = \frac{S}{3} u_x$$

$$\alpha_s^2 \alpha_x u_s = \frac{T}{3} u_x$$

$$a_t^2 a_x u_t = \frac{T}{3} u_x$$

$$\alpha_t^2 \alpha_x u_t = \frac{S^2}{18} u_x.$$

Eine nochmalige Anwendung des Processes

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial u_3}$$

führt endlich zu den Gleichungen:

$$a_s^3 = S, \quad \alpha_s^3 = T, \quad a_t^3 = T, \quad \alpha_t^3 = \frac{S^2}{6}.$$

Eine andere Anwendung der Formeln des vorigen §. ergiebt sich in Bezug auf die ähnlich gebildeten Ausdrücke

$$\Theta_\Theta, \ \Theta_H, \ \mathsf{H}_\Theta, \ \mathsf{H}_H, \ \Theta_K, \ \mathsf{K}_\Theta, \ \mathsf{H}_K, \ \mathsf{K}_H, \ \mathsf{K}_K,$$

deren Bezeichnungen ganz wie vorige Bezeichnung gewählt sind; es ist nämlich, wenn $\varphi$ die $x$ zur Ordnung $n$, $\psi$ die $y$ zur Ordnung $m$ enthält:

$$\varphi_\psi = \frac{1}{mn} \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_i}$$

gesetzt. Durch das folgende Verfahren findet man die obigen 9 Ausdrücke nicht sämmtlich, aber gewisse Combinationen derselben, welche im Folgenden benutzt werden sollen.

Den Ausdruck $\Theta_\Theta$ müssen wir wirklich bilden. Es ist

$$\Theta_\Theta = \tfrac{1}{4} \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \frac{\partial \Theta}{\partial u_i}.$$

Da nun symbolisch

$$\Theta = (abu)^2 a_x b_x = (cdu)^2 c_x d_x,$$

so hat man

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = (abu)^2 a_x b_i$$

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} = (cdu)\, c_x d_x \frac{\partial \cdot (cdu)}{\partial u_i},$$

und also

$$\Theta_\Theta = (abu)^2 (cdu)(cdb)\, a_x c_x d_x.$$

Um diese Bildung durch andre Formen auszudrücken, setzt man für $(abu)(cdu)$ den damit identischen Ausdruck

$$(acu)(bdu) - (adu)(bcu).$$

Führt man dies ein, so hat man zwei Ausdrücke, die durch Vertauschung von $c$ und $d$ in einander übergehen; man kann also dafür das Doppelte des einen setzen, und hat demnach:

$$\Theta_\Theta = 2(abu)(acu)(bcd)(bdu)a_x c_x d_x .$$

Vertauschen wir nun $b$ mit $c$ und setzen für $\Theta_\Theta$ die halbe Summe des obigen und des neuen Ausdrucks. Dann wird:

$$\begin{aligned}\Theta_\Theta &= (abu)(acu)(bcd)a_x d_x \left\{(bdu)c_x - (cdu)b_x\right\}\\ &= (abu)(acu)(bcd)a_x d_x \left\{(bcu)d_x - (bcd)u_x\right\} .\end{aligned}$$

Vertauschen wir im ersten Theile die Buchstaben $a$ mit $b$ und $a$ mit $c$, und bilden $\frac{1}{3}$ der Summe, so wird der erste Theil von $\Theta_\Theta$:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}(abu)(acu)(bcu)d_x^2\left\{(bcd)a_x - (acd)b_x + (abd)c_x\right\}\\ &= \tfrac{1}{3}(abu)(acu)(bcu)(abc)\cdot d_x^3 = \tfrac{1}{3}f\cdot\Sigma .\end{aligned}$$

Dagegen im zweiten Theile von $\Theta_\Theta$ lässt man nach Satz VIII den Factor $(bcd)^2$ aus und ersetzt die übrigen $b, c, d$ durch $\alpha$; daher wird der Factor von $-u_x$ im zweiten Theile gleich

$$(a\alpha u)^2 a_x \alpha_x = \mathsf{H} ,$$

und demnach ist endlich:

$$\Theta_\Theta = \tfrac{1}{3}f\Sigma - \mathsf{H}\cdot u_x . \tag{47}$$

Bilden wir nun diese Formel für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda\Delta$, so erhalten wir nach (32), (33), (38):

$$\begin{aligned}&\varkappa^4\Theta_\Theta + 2\varkappa^3\lambda(\Theta_H + \mathsf{H}_\Theta) + \varkappa^2\lambda^2(\Theta_K + \mathsf{K}_\Theta + 4\mathsf{H}_H) + 2\varkappa\lambda^3(\mathsf{K}_H + \mathsf{H}_K)\\ &+ \lambda^4\mathsf{K}_K = \tfrac{1}{3}(\varkappa f + \lambda\Delta)\left\{\left(\varkappa^3 + \tfrac{S}{2}\varkappa\lambda^2 + \tfrac{2T}{3}\lambda^3\right)\Sigma + \left(3\varkappa^2\lambda - \tfrac{S}{2}\lambda^3\right)\mathsf{T}\right\}\\ &- u_x\cdot\left\{\left(\varkappa^3 - \tfrac{S}{2}\varkappa\lambda^2 - \tfrac{T}{3}\lambda^3\right)(\varkappa\mathsf{H} + \lambda\mathsf{K}) + \left(\tfrac{S}{2}\varkappa^2\lambda + T\varkappa\lambda^2 + \tfrac{S^2}{12}\lambda^3\right)(\varkappa\Theta + \lambda\mathsf{H})\right\} .\end{aligned}$$

Die Vergleichung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von $\varkappa, \lambda$ giebt dann das Formelsystem:

$$(47)\quad\left\{\begin{array}{lll}\Theta_\Theta & = \tfrac{1}{3}f\Sigma & - u_x\cdot\mathsf{H}\\ \Theta_H + \mathsf{H}_\Theta & = \tfrac{1}{6}\Delta\Sigma + \tfrac{1}{2}f\mathsf{T} & - u_x\left(\tfrac{\mathsf{K}}{2} + \tfrac{S}{4}\Theta\right)\\ \Theta_K + \mathsf{K}_\Theta + 4\mathsf{H}_H & = \tfrac{1}{6}Sf\Sigma + \Delta\mathsf{T} & - u_x\cdot T\Theta\\ \mathsf{H}_K + \mathsf{K}_H & = \tfrac{1}{9}Tf\Sigma + \tfrac{1}{12}S\Delta\Sigma - \tfrac{1}{12}Sf\mathsf{T} & + u_x\left\{\tfrac{1}{4}S\mathsf{K} - \tfrac{1}{24}S^2\Theta - \tfrac{1}{3}T\mathsf{H}\right\}\\ \mathsf{K}_K & = \tfrac{2}{9}T\Delta\Sigma - \tfrac{1}{6}S\Delta\mathsf{T} & + u_x\left\{\tfrac{1}{3}T\mathsf{K} - \tfrac{1}{12}S^2\mathsf{H}\right\} .\end{array}\right.$$

## § 11.

### Definition und wesentliche Eigenschaften der Combinanten.

Unter den aus der Form $f$ entstehenden Bildungen giebt es eine Classe, welche ein besonderes Interesse besitzt, sowohl durch ihre Eigenschaften, als durch ihren Nutzen für die Theorie.

Es sind dies solche, die, wenn man sie für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda \Delta$ bildet, dasselbe Resultat geben wie für $f$ gebildet, bis auf einen Factor, welcher eine ganze Function der Coefficienten und der Grössen $\varkappa$, $\lambda$ ist. Diese Bildungen wollen wir als *Combinanten von $f$* bezeichnen, anknüpfend an den bekannten Begriff einer Combinante zweier gleich hoher Formen $f$, $\varphi$, welche die Eigenschaft hat, sich nur um einen Factor zu ändern, wenn man $f$, $\varphi$ durch lineare Combinationen von $f$, $\varphi$ ersetzt.

Die Combinanten von $f$ sind nach dem Obigen durch die Gleichung

$$\Pi(\varkappa a + \lambda \alpha) = M \cdot \Pi(a) \tag{48}$$

definirt. Wir wollen nun zwei Sätze angeben, welche zu einer andern Definition derselben Bildungen führen, und welche zugleich die Natur des Factors $M$ erkennen lassen.

*Für jede Combinante $\Pi$ ist identisch $\delta\Pi = 0$.*

Ist nämlich in (48), nach $\varkappa$, $\lambda$ geordnet:

$$M = M_0 \varkappa^\nu + M_1 \varkappa^{\nu-1}\lambda \cdots,$$

so hat man zunächst für $\lambda = 0$, $\varkappa = 1$:

$$\Pi(a) = M_0 \Pi(a),$$

also $M_0 = 1$. Vergleicht man aber beiderseits die Coefficienten von $\varkappa^{\nu-1}\lambda$, so erhält man nach dem Taylor'schen Satze:

$$\Sigma \frac{\partial \Pi(a)}{\partial a_{ikh}} \alpha_{ikh} = M_1 \Pi(a),$$

oder

$$\delta\Pi = M_1 \cdot \Pi.$$

Nun ist $\delta\Pi$ nur um zwei Grade höher in den Coefficienten von $f$ als $\Pi$, daher muss $M_1$ eine Invariante von $f$ sein, welche vom zweiten Grade in den Coefficienten ist, und da es nach § 3. eine solche nicht giebt, so hat man $M_1 = 0$, daher auch $\delta\Pi = 0$, was zu beweisen war.

*Jede Form $\Pi$, für welche die Form $\delta\Pi$ verschwindet, ist eine Combinante.*

Ist nämlich $\delta\Pi = 0$, so verschwindet auch die entsprechende Bildung $(\delta\Pi)_{\varkappa\lambda}$ von $\varkappa f + \lambda\Delta$. Diese aber hat nach § 9. den Werth

$$G_1 \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial \lambda} - G_2 \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa},$$

und man hat also für $\Pi_{\varkappa\lambda}$ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial G}{\partial \varkappa} \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial \lambda} - \frac{\partial G}{\partial \lambda} \frac{\partial \Pi_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa} = 0.$$

Dieselbe giebt integrirt

$$\Pi_{\varkappa\lambda} = F(G),$$

wo $F$ eine willkürliche Function ist. Da aber $\Pi_{\varkappa\lambda}$ eine ganze homogene rationale Function von $\varkappa$, $\lambda$ ist, so kann man nur haben

$$\Pi_{\varkappa\lambda} = C \cdot G^{\varrho},$$

wo $\varrho$ eine ganze Zahl, $C$ eine von $\varkappa$, $\lambda$ unabhängige Grösse ist. Setzt man nun $\lambda = 0$, $\varkappa = 1$, so wird $G = 1$, also

$$C = \Pi,$$

und die obige Gleichung verwandelt sich also in

$$\Pi_{\varkappa\lambda} = G^{\varrho} \cdot \Pi,$$

d. h. $\Pi$ ist eine Combinante.

Zugleich sieht man hieraus, dass $M$ stets eine Potenz des Ausdrucks

$$G = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \tfrac{1}{3} T\varkappa\lambda^3 - \frac{S^2}{12} \lambda^4$$

ist. Der Umstand, dass nach dem Vorigen das zweite Glied in der Entwicklung von $M$ fehlen muss, wird hier dadurch bestätigt, dass in $G$ das zweite Glied fehlt, mithin auch in jeder seiner Potenzen.

Ein allgemeines Princip zur Bildung von Combinanten erhält man durch den folgenden Satz:

*Bildet man eine Reihe von Formen, welche aus $f$ entstehen, etwa $\varphi$, $\psi \cdots$, für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda \Delta$, und betrachtet die entstehenden Bildungen*

$$\varphi_{\varkappa\lambda}, \quad \psi_{\varkappa\lambda} \cdots$$

*als binäre Formen in $\varkappa$, $\lambda$, so ist jede simultane Invariante dieses Systems binärer Formen eine Combinante von $f$.*

Bezeichnen wir, um diesen Satz zu beweisen, eine simultane Invariante der Formen

$$\varphi_{\varkappa\lambda}, \quad \psi_{\varkappa\lambda} \cdots$$

durch

$$\Omega(\varphi_{\varkappa\lambda}, \psi_{\varkappa\lambda}, \cdots).$$

Statt $\varkappa$, $\lambda$ führen wir nun die linearen Combinationen derselben ein

$$\varkappa'\varkappa + \varkappa''\lambda, \quad \lambda'\varkappa + \lambda''\lambda.$$

Die Invarianteneigenschaft von $\Omega$ wird dann ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\Omega\,(\varphi_{\varkappa'\varkappa+\varkappa''\lambda,\,\lambda'\varkappa+\lambda''\lambda},\quad \psi_{\varkappa'\varkappa+\varkappa''\lambda,\,\lambda'\varkappa+\lambda''\lambda},\cdots)$$
$$=(\varkappa'\lambda''-\lambda'\varkappa'')^\varrho\,.\,\Omega\,(\varphi_{\varkappa\lambda},\quad \psi_{\varkappa\lambda},\cdots).$$

Bezeichnen wir nun insbesondere durch $G'$, was aus $G$ wird, wenn man darin $\varkappa$, $\lambda$ durch $\varkappa'$, $\lambda'$ ersetzt, und setzen

$$\varkappa''=-G_2',\quad \lambda''=G_1'.$$

Dann ist

$$(\varkappa'\varkappa+\varkappa''\lambda)\,f+(\lambda'\varkappa+\lambda''\lambda)\,\Delta$$

gleich

$$\varkappa\,(\varkappa' f+\lambda'\Delta)+\lambda\,\Delta_{\varkappa'\lambda'}\,.$$

Es entsteht also jede Form

$$\varphi_{\varkappa'\varkappa+\varkappa''\lambda,\,\lambda'\varkappa+\lambda''\lambda}$$

aus $\varphi_{\varkappa\lambda}$, wenn man darin $f$ durch $\varkappa' f+\lambda'\Delta$ ersetzt. Bezeichnen wir also nunmehr die Function $\Omega\,(\varphi_{\varkappa\lambda},\ \psi_{\varkappa\lambda},\cdots)$, sofern dieselbe von den Coefficienten von $f$ abhängt, durch $\Upsilon$, so wird

$$\Omega\,(\varphi_{\varkappa'\varkappa+\varkappa''\lambda,\,\lambda'\varkappa+\lambda''\lambda},\quad \psi_{\varkappa'\varkappa+\varkappa''\lambda,\,\lambda'\varkappa+\lambda''\lambda},\cdots)=\Upsilon_{\varkappa'\lambda'}\,;$$

zugleich ist

$$\varkappa'\lambda''-\lambda'\varkappa''=G'\,,$$

und die Gleichung welche die Invarianteneigenschaft von $\Omega$ definirte, verwandelt sich in

$$\Upsilon_{\varkappa'\lambda'}=G'^{\varrho}\cdot\Upsilon\,,$$

d. h. $\Upsilon$ ist eine Combinante, was zu beweisen war.

Um also Combinanten zu bilden, kann man von den bisher abgeleiteten Formeln für

(49) $\varkappa f+\lambda\Delta,\quad \Delta_{\varkappa\lambda},\quad \Theta_{\varkappa\lambda},\quad \mathsf{H}_{\varkappa\lambda},\quad \mathsf{K}_{\varkappa\lambda},\quad \Sigma_{\varkappa\lambda},\quad \mathsf{T}_{\varkappa\lambda},\quad S_{\varkappa\lambda},\quad T_{\varkappa\lambda}$

ausgehen, und, indem man sie als binäre Formen in $\varkappa$, $\lambda$ auffasst, simultane Invarianten derselben bilden. Aber es ist von grosser Wichtigkeit, *dass man diesen Formen die Form $G$ selbst hinzufügen kann*, um auch sie bei der Bildung simultaner Invarianten zu benutzen.

Um dieses einzusehen, braucht man nur folgende Betrachtung anzustellen. Bilden wir die Form $\varkappa f+\lambda\Delta$ für zwei verschiedene Werthsysteme $x$, $y$. Die Determinante der für $\varkappa$, $\lambda$ linearen Functionen

$$\varkappa f(x)+\lambda\Delta(x)$$
$$\varkappa f(y)+\lambda\Delta(y),$$

d. h. die Form

$$f(x)\,\Delta(y)-\Delta(x)\,f(y)\,,$$

ist nach dem Vorigen eine Combinante. In der That ist dieselbe, für $\varkappa f+\lambda\Delta$ gebildet:

$$\begin{vmatrix}\varkappa f(x)+\lambda\Delta(x) & G_1\Delta(x)-G_2 f(x)\\ \varkappa f(y)+\lambda\Delta(y) & G_1\Delta(y)-G_2 f(y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varkappa & \lambda\\ -G_2 & G_1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}f(x) & \Delta(x)\\ f(y) & \Delta(y)\end{vmatrix}$$
$$=G.\,\{f(x)\,\Delta(y)-\Delta(x)\,f(y)\}\,.$$

Den Formen (49) kann man aber die Form

$$\{f(x)\,\Delta(y) - \Delta(x)\,f(y)\}_{\varkappa\lambda}$$

anschliessen; und diese ist, wie wir oben gesehen haben, gleich

$$G.\ \{f(x)\,\Delta(y) - \Delta(x)\,f(y)\}\,.$$

Zieht man aber diese Form in das System (49) hinein, und benutzt sie um Combinanten zu bilden, so wird dabei wesentlich nur der Factor $G$ wirklich benutzt, während der Factor $f(x)\,\Delta(y) - \Delta(x)\,f(y)$ im Endresultat nur durch eine Potenz als Factor vertreten ist. Da nun dieser Factor selbst eine Combinante ist, so muss auch der andre es sein, d. h. man erhält auch noch Combinanten, wenn man die Function $G$ selbst mit den Formen (49) combinirt.

## § 12.

## Einige Combinantenbildungen.

Wir wollen von diesen Principien nun einige Anwendungen geben.

1. Die Form $G$ war

$$G = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \tfrac{4}{3}\,T\varkappa\lambda^3 - \frac{S^2}{12}\lambda^4.$$

Combinanten von $f$ sind also zunächst die Invarianten von $G$ selbst. Von diesen ist die erste

$$i = 2\left\{-\frac{S^2}{12} + 3\,.\,\frac{S^2}{36}\right\} = 0.$$

*Die erste Invariante der Form G verschwindet identisch.*

Die zweite aber ist:

$$j = 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{S}{6} \\ 0 & -\frac{S}{6} & -\frac{T}{3} \\ -\frac{S}{6} & -\frac{T}{3} & -\frac{S^2}{12} \end{vmatrix} = \tfrac{2}{3}\left(\frac{S^3}{6} - T^2\right).$$

Die Verbindung

$$(50) \qquad \ldots\ R = T^2 - \frac{S^3}{6}$$

ist also eine Combinante von $f$.

2. Man hatte

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = G_1\Delta - G_2 f\,;$$

man erhält also eine Combinante von $f$, indem man aus den Gleichungen

$$\varkappa f + \lambda\Delta = 0$$
$$G_1\Delta - G_2 f = 0$$

die Grössen $\varkappa$, $\lambda$ eliminirt. Aber dies kann dadurch geschehen, dass man zuerst $\Delta$, $f$ eliminirt, und dann $\varkappa$ durch $\Delta$, $\lambda$ durch $-f$ ersetzt, um die erste der obigen Gleichungen zu erfüllen. Die Elimination von $\Delta, f$ führt auf $G$; die gesuchte Combinante ist also $G(\Delta, -f)$, sie entsteht aus $G$, wenn man $\varkappa$ durch $\Delta$, $\lambda$ durch $-f$ ersetzt. Aber dasselbe erhält man, wenn man in $G_1\Delta - G_2 f$ für $\varkappa$ die Form $\Delta$, für $\lambda$ die Form $-f$ einführt. Daher entsteht $G(\Delta, -f)$ auch aus $\Delta_{\varkappa\lambda}$, wenn man $\varkappa$ durch $\Delta$, $\lambda$ durch $-f$ ersetzt.

In gleicher Weise entsteht überhaupt aus einer für $\varkappa f + \lambda\Delta$ gebildeten Form $\Pi_{\varkappa\lambda}$ immer eine Combinante

$$\Pi_{\Delta,-f}\,.$$

Man kann diese Classe von Combinanten als die aus der Form

$$f(x)\,\Delta(y) - \Delta(x)\,f(y)$$

hervorgehenden Bildungen bezeichnen, wenn bei den Bildungen immer die $x$ als die Veränderlichen, die $y$ wie Constante behandelt werden.

3. Aus der Form

$$\Theta_{\varkappa\lambda} = \Theta\varkappa^2 + 2\mathrm{H}\varkappa\lambda + \mathrm{K}\lambda^2$$

entsteht zunächst eine Combinante, welche eine quadratische Function von $\Theta$, $\mathrm{H}$, $\mathrm{K}$ ist, aus der Discriminante von $\Theta_{\varkappa\lambda}$, d. h. aus der Form

$$\Theta\mathrm{K} - \mathrm{H}^2.$$

Eine zweite in $\Theta$, $\mathrm{H}$, $\mathrm{K}$ quadratische Combinante ergiebt sich, wenn man $\Theta^2_{\varkappa\lambda}$ viermal über $G$ schiebt; es ist dies die Bildung

$$\mathrm{K}^2 - \frac{S}{6}(2\Theta\mathrm{K} + 4\mathrm{H}^2) + \frac{4T}{3}\Theta\mathrm{H} - \frac{S^2}{12}\Theta^2.$$

4. Wenn wir die für $\varkappa$, $\lambda$ cubischen Formen

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = \Delta\varkappa^3 + \frac{S}{2}f\varkappa^2\lambda + \left(Tf - \frac{S\Delta}{2}\right)\varkappa\lambda^2 + \left(\frac{S^2}{12}f - \frac{T}{3}\Delta\right)\lambda^3$$

$$\Sigma_{\varkappa\lambda} = \Sigma\varkappa^3 + 3\mathrm{T}\varkappa^2\lambda + \frac{S}{2}\Sigma\varkappa\lambda^2 + \left(\frac{2}{3}T\Sigma - \frac{S}{2}\mathrm{T}\right)\lambda^3$$

dreimal über einander schieben, so erhalten wir die Combinante

$$\Delta\left\{T\Sigma - S\mathrm{T}\right\} + f\left\{T\mathrm{T} - \frac{S^2}{6}\Sigma\right\}.$$

Dieser Ausdruck führt darauf, die bisher noch nicht erklärten Bildungsgesetze der Coefficienten von $\Sigma_{\varkappa\lambda}$ und $\mathrm{T}_{\varkappa\lambda}$ dadurch aufzustellen, dass man an Stelle von $\Sigma$ und $\mathrm{T}$ die beiden linearen Combinationen derselben

$$\begin{aligned}\Pi &= S\mathrm{T} - T\Sigma\\ \mathrm{P} &= T\mathrm{T} - \frac{S^2}{6}\Sigma\end{aligned}\tag{51}$$

einführt, und diese für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda\Delta$ untersucht. Denn nach dem Vorigen ist

$$\Delta\Pi - f\mathrm{P}$$

eine Combinante, also

$$\Delta_{\varkappa\lambda}\Pi_{\varkappa\lambda} - (\varkappa f + \lambda\Delta)\,\mathsf{P}_{\varkappa\lambda} = G^3.\,(\Delta\Pi - f\mathsf{P}),$$

wobei der Exponent von $G$ durch Abzählung der Dimensionen bestimmt wird. Ersetzt man in dieser Gleichung $\Delta$ durch $\varkappa$ und $f$ durch $-\lambda$, so verschwindet $\varkappa f + \lambda\Delta$, $\Delta_{\varkappa\lambda}$ wird gleich $G$, und es bleibt also

$$(52)\qquad \Pi_{\varkappa\lambda} = G^2.\,(\varkappa\Pi + \lambda\mathsf{P}).$$

Ersetzt man dagegen $\Delta$ durch $G_2$, $f$ durch $G_1$, so verschwindet $\Delta_{\varkappa\lambda}$, und $\varkappa f + \lambda\Delta$ verwandelt sich in $G$; es bleibt also

$$(53)\qquad \mathsf{P}_{\varkappa\lambda} = G^2.\,(G_1\mathsf{P} - G_2\Pi).$$

Insbesondere folgt noch, wenn man beiderseits in (52) (53) die Coefficienten von $\varkappa\lambda$ vergleicht:

$$(54)\qquad \delta\Pi = \mathsf{P}, \quad \delta\mathsf{P} = \frac{S}{2}\Pi,$$

sodass $\Pi$ und $\mathsf{P}$ sich in Bezug auf den Process $\delta$ ganz ähnlich wie $f$ und $\Delta$ zu einander verhalten.

Um nun hieraus die Formeln für $\Sigma_{\varkappa\lambda}$, $\mathsf{T}_{\varkappa\lambda}$ in einer solchen Gestalt zu erhalten, dass auch in ihnen $\varkappa\lambda$ nur in ihrem Zusammenhange mit $G$ auftreten, lösen wir zuerst die Gleichungen (51) nach $\mathsf{T}$, $\Sigma$ auf und erhalten (vgl. Gl. 50):

$$(55)\qquad \begin{aligned} R\Sigma &= S\mathsf{P} - T\Pi \\ R\mathsf{T} &= T\mathsf{P} - \frac{S^2}{6}\Pi. \end{aligned}$$

Beide Gleichungen haben das Gemeinsame, dass der Coefficient von $\mathsf{P}$, dem Process $\delta$ unterworfen und durch seinen Grad in den Coefficienten von $f$ dividirt, den negativen Coefficienten von $\Pi$ giebt. Daher gilt die folgende, an die erste Gleichung geknüpfte Betrachtung, sofort auch für die zweite. Schreiben wir die erste Gleichung in der Form

$$R\Sigma = S\mathsf{P} - \tfrac{1}{4}\delta S\cdot\Pi,$$

und bilden nun diese Gleichung für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda\Delta$. Da $\varkappa$ eine Combinante ist, so hat man (mit Abzählung der Dimensionen):

$$(56)\qquad R_{\varkappa\lambda} = G^3\cdot R.$$

Benutzt man also ausserdem die Gleichungen (52) (53), so hat man:

$$GR\cdot\Sigma_{\varkappa\lambda} = S_{\varkappa\lambda}\cdot(G_1\mathsf{P} - G_2\Pi) - \tfrac{1}{4}(\delta S)_{\varkappa\lambda}(\varkappa\Pi + \lambda\mathsf{P}).$$

Aber nach § 9. ist

$$(\delta S)_{\varkappa\lambda} = G_1\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda} - G_2\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}.$$

Setzt man zugleich für $S_{\varkappa\lambda}$ den Ausdruck

$$\tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\varkappa + \frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda}\lambda\right),$$

so wird die obige Gleichung durch

$$\varkappa G_1 + \lambda G_2 = G$$

theilbar, und es bleibt die gesuchte Darstellung übrig:

$$R\Sigma_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{4}\left\{\mathrm{P}\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} - \Pi\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda}\right\}. \tag{57}$$

Genau ebenso giebt die zweite Gleichung (55):

$$R\mathrm{T}_{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{6}\left\{\mathrm{P}\frac{\partial T_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa} - \Pi\frac{\partial T_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda}\right\}. \tag{58}$$

## § 13.

### Bildungen, welche aus der Combinante $H$ entstehen.

Unter den Combinanten kann man die Form

$$H = f(x)\,\Delta(y) - \Delta(x)\,f(y) \tag{58a}$$

gewissermassen als grundlegend betrachten. Jede Combinante $\Pi$, für $\varkappa f + \lambda\Delta$ gebildet, hat nämlich den Werth

$$\Pi_{\varkappa\lambda} = G^{\varrho}\cdot\Pi.$$

Setzen wir nun $\Delta(y)$ für $\varkappa$, $-f(y)$ für $\lambda$, so ist die linke Seite die Combinante $\Pi$, gebildet für $H$, insofern in $H$ die $x$ als die Veränderlichen betrachtet werden; ebenso geht aber nach dem Vorigen $G$ in die für $H$ in demselben Sinne gebildete Form $\Delta$ über. Beide Bildungen also enthalten ausschliesslich die Coefficienten von $H$; und wenn wir also nach der soeben entwickelten Gleichung

$$\Pi = \frac{\Pi_{\Delta,-f}}{\Delta^{\varrho}_{\Delta,-f}}$$

setzen, so haben wir den Satz:

*Jede Combinante lässt sich als Quotient zweier Formen darstellen, deren jede nur die Coefficienten von $H$ enthält.*

Da andrerseits $\Pi_{\Delta,-f}$ immer eine Combinante ist, so hat man den Satz:

*Alle Combinanten sind entweder Formen, welche zu der in Bezug auf die $y$ cubischen Form $\Delta f(y) - f\Delta(y)$ gehören, oder entstehen aus solchen durch Auslassung einer Potenz von $\Delta_{\Delta,-f}$.*

Es lässt sich zeigen, dass man die oben gebildeten Combinanten sogar ohne Nenner so darstellen kann, dass sie nur die Coefficienten von $H$ enthalten. Darstellungen dieser Art sollen im Folgenden ausgeführt werden.

Die Form $H$ steht mit einer sogleich anzuführenden Zwischenform $N$ in dem engsten Zusammenhange, so dass die Coefficienten der einen lineare Combinationen von den Coefficienten der andern (mit numerischen Coefficienten) sind und umgekehrt. Es ist nämlich symbolisch

$$H = a_x^3 \alpha_y^3 - a_y^3 \alpha_x^3$$
$$= (a_x \alpha_y - a_y \alpha_x) \left\{ a_x^2 \alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 + a_x \alpha_x a_y \alpha_y \right\}.$$

Nun ist aber identisch

$$0 = (a_x \alpha_y - a_y \alpha_x) \left\{ a_x^2 \alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 - 2 a_x \alpha_x a_y \alpha_y \right\}$$
$$= (a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)^3;$$

denn dieser Ausdruck entsteht aus der verschwindenden Form $(a\alpha u)^3$ (§ 4.), wenn man die $u$ durch Determinanten aus den $x$, $y$ ersetzt. Daher kann man der Function $H$ die Formen geben:

$$H = 3 (a_x \alpha_y - a_y \alpha_x) a_x \alpha_x a_y \alpha_y$$
$$= \tfrac{3}{2} (a_x \alpha_y - a_y \alpha_x) (a_x^2 \alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2)$$
$$= \tfrac{1}{2} (a_x \alpha_y - a_y \alpha_x) (a_x^2 \alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 + 4 a_x \alpha_x a_y \alpha_y).$$

Die letzte Form entsteht aus

(59) $$N = (a \alpha u) a_x^2 \alpha_x^2,$$

indem man wiederholt nach den $x$ differenzirt, mit den $y$ multiplicirt, und schliesslich für die $u$ Determinanten der $x$, $y$ setzt. Es ist also $H$ eine aus $N$ entstandene Form und zwar entstanden durch lineare Operationen. Ebenso entsteht aber auch $N$ aus $H$. Denn für $N$ kann man den Werth setzen, welchen der Ausdruck

$$\frac{1}{18} \left\{ u_1 \left( \frac{\partial H}{\partial x_2 \partial y_3} - \frac{\partial H}{\partial x_3 \partial y_2} \right) + u_2 \left( \frac{\partial H}{\partial x_3 \partial y_1} - \frac{\partial H}{\partial x_1 \partial y_3} \right) + u_3 \left( \frac{\partial H}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2 \partial y_1} \right) \right\}$$

annimmt, indem man die $y$ den $x$ gleich setzt. Hiedurch ist der oben ausgesprochene Zusammenhang bewiesen.

Da $N$ Covariante von $H$, sowie $H$ von $N$ ist, so kann man nun auch die Form

$$N = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} & u_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} & u_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x^3} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} & u_3 \end{vmatrix} = (a \alpha u) a_x^2 \alpha_x^2$$

zur Erzeugung von Combinanten benutzen. Zu diesem Zwecke schicken wir einige Untersuchungen voraus, welche sich auf die Eigenschaften von $N$ beziehen.

Setzen wir, indem wir für die Zwischenform $N$ auch ihr eigenthümliche Symbole einführen:

$$N = N_x^4 u_n = a_x^2 \alpha_x^2 (a \alpha u).$$

Indem wir auf diese Form die Operation

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial u_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial u_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial u_3}$$

anwenden, erhalten wir aus $a_x^2 \alpha_x^2 (a \alpha u)$ identisch Null; daher ist auch

$$0 = N_x^3 N_n ,$$

d. h.: *Jede Form, welche den symbolischen Factor $N_n$ hat, verschwindet identisch.*

Differenziren wir ferner die Form $N$ nach den $x$ und multipliciren mit den $y$. Wir erhalten dann zunächst

$$N_x^3 N_y u_n = \tfrac{1}{4} (a \alpha u)\, a_x \alpha_x \,(a_x \alpha_y + \alpha_x a_y), \tag{60}$$

sodann aber:

$$N_x^2 N_y^2 u_n = \tfrac{1}{6} (a \alpha u) \left\{ a_x^2 \alpha_y^2 + a_y^2 \alpha_x^2 + 4 a_x \alpha_x a_y \alpha_y \right\} .$$

Da nun der Ausdruck

$$(a \alpha u) \left\{ a_x^2 \alpha_y^2 + a_y^2 \alpha_x^2 - 2 a_x \alpha_x a_y \alpha_y \right\} = (a \alpha u)\,(a_x \alpha_y - a_y \alpha_x)^2$$

als durch Differentiation aus der verschwindenden Form $(a \alpha u)^3$ entstanden, identisch Null ist, so kann man dem Ausdruck $N_x^2 N_y^2 u_n$ die doppelte Form geben:

$$N_x^2 N_y^2 u_n = \tfrac{1}{2} (a \alpha u) \left\{ a_x^2 \alpha_y^2 + \alpha_x^2 a_y^2 \right\} = (a \alpha u)\, a_x \alpha_x a_y \alpha_y . \tag{60}$$

Aus $N$ lassen sich nun folgende (und wie man leicht sieht, nur diese) Formen bilden, welche die Coefficienten von $N$ quadratisch, also je zwei Symbole $N$, $N'$, $n$, $n'$ enthalten.

1) $N_{n'} N'_n N_x^3 N_x'^3$, 2) $N_{n'} N'_n (N N' u)^2 N_x N'_x$,

3) $N_{n'} u_n N_x^3 N_x'^4$, 4) $N_{n'} u_n N_x^2 N_x'^3 (N N' u)$,

5) $N_{n'} u_n N_x N_x'^2 (N N' u)^2$, 6) $N_{n'} u_n N'_x (N N' u)^3$,

7) $(N N' u)^2 N_x^2 N_x'^2 u_n u_{n'}$, 8) $(N N' u)^4 u_n u_{n'} = 0$.

Man kann nun zunächst zeigen, dass die unter 2), 4), 5), 8) aufgeführten Formen identisch verschwinden. Alle andern führen auf Bildungen, welche für die Theorie der cubischen ternären Formen von fundamentaler Bedeutung sind.

Wir beweisen zuerst, dass die genannten vier Formen verschwinden.

ad 2). Diese Form entsteht, wenn man den zweiten Ausdruck (61) nach den $x$ differenzirt und mit $z$ multiplicirt, sodann aber die $z$ durch $n$, die $y$ durch Determinanten aus den $N$ und den $u$ ersetzt, und mit $N_x$ multiplicirt. Man erhält dann:

$$\tfrac{1}{2} N_x (a \alpha N)\,(a N u)\,(\alpha N u) \left\{ a_x \alpha_n + \alpha_x a_n \right\} .$$

Nun kann man zeigen, dass folgende beide Ausdrücke verschwinden, aus denen der obige Ausdruck sich erzeugen lässt:

$$(a N u)^2 N_x^2 a_n , \qquad (\alpha N u)^2 N_x^2 \alpha_n ;$$

und zwar ist es nur für einen dieser beiden Ausdrücke zu beweisen, da der andre durch den Process $\delta$ aus ihm entsteht. Der Ausdruck aber $(bNu)^2 N_x^2 b_n$ entsteht aus der ersten Form (61), wenn man darin die $y$ durch Determinanten der $b, u$, die $u$ durch $b$ ersetzt; es ist also

$$(bNu)^2 N_x^2 b_n = \tfrac{1}{2}(a\alpha b)\left\{a_x^2(\alpha b u)^2 + \alpha_x^2(abu)^2\right\}.$$

Von den beiden Theilen dieses Ausdrucks verschwindet der erste, weil er durch Differentiation aus dem verschwindenden Ausdrucke $(a\alpha u)^3$ entsteht, der zweite weil er durch Vertauschung von $a$ und $b$ das Zeichen ändert. Daher ist, indem man $a$ für $b$ setzt:

(62) $$(aNu)^2 N_x^2 a_n = 0;$$

daher auch, wenn man darauf den Process $\delta$ anwendet, und bemerkt, dass $\delta N = 0$:

(63) $$(\alpha Nu)^2 N_x^2 \alpha_n = 0.$$

Nun differenziren wir die Ausdrücke (62) (63) nach den $x$ und multipliciren mit $y$, nach den $u$ und multipliciren mit $v$, und ersetzen dann in dem aus (62) entstandenen Ausdrucke $v$ durch $\alpha$, $y$ durch die Determinanten der $\alpha, u$ und multipliciren mit $a_x$; in dem aus (63) entstandenen Ausdrucke ersetzen wir die $v$ durch $a$, die $y$ durch Determinanten der $u$ und $a$, und multipliciren mit $a_x$. Dann entstehen die beiden Glieder des gesuchten Ausdrucks, und diese verschwinden also beide, weil die Ausdrücke (62) (63) verschwinden.

ad 4). Diese Form kann man bestimmen, indem man zunächst die zweite Form (61) nach den $y$ differenzirt und mit $z$ multiplicirt, dann $y$ durch Determinanten aus $N, u, z$ durch $n$ ersetzt und mit $N_x^3$ multiplicirt. Man hat dann

$$\tfrac{1}{2}(a\alpha u)a_x\alpha_x N_x^3\left\{a_n(\alpha Nu) + \alpha_n(aNu)\right\}.$$

Hiervon entsteht der erste Theil aus (60), indem man darin $a, \alpha$ in $b, \beta$ verändert, sodann aber statt der $y$ die Determinanten der $u, \alpha$, statt $u$ die $a$ setzt und mit $(a\alpha u)a_x\alpha_x$ multiplicirt; der zweite Theil entsteht ebenso, indem man die $y$ durch Determinanten der $u, a$, die $u$ durch $\alpha$ ersetzt, und mit $(a\alpha u)a_x\alpha_x$ multiplicirt. Es ist also der gesuchte Ausdruck gleich:

$$\tfrac{1}{4}(a\alpha u)a_x\alpha_x b_x \beta_x$$
$$\left\{b_x[(ab\beta)(\alpha\beta u) + (\alpha b\beta)(a\beta u)] + \beta_x[(ab\beta)(\alpha bu) + (\alpha b\beta)(abu)]\right\}.$$

Von den hier auftretenden vier Termen verschwindet der zweite, weil er durch Vertauschung der $\alpha, \beta$, der dritte, weil er durch Vertauschung der $a, b$ das Zeichen ändert. Für den ersten Theil setzen wir sodann die halbe Summe desselben mit dem, was durch Vertauschung von $\alpha, \beta$ entsteht, beim vierten verfahren wir ebenso bezüglich $a, b$. Dann haben wir:

$$\frac{1}{8} a_x \alpha_x b_x \beta_x \left\{ \begin{array}{l} b_x(\alpha\beta u)\,[(a\alpha u)(ab\beta) - (a\beta u)(ab\alpha)] \\ + \beta_x(abu)\,[(a\alpha u)(\alpha b\beta) - (b\alpha u)(\alpha a\beta)] \end{array} \right\},$$

oder mit Anwendung der Identitäten auf die in den eckigen Klammern enthaltenen Ausdrücke:

$$\frac{1}{8} a_x \alpha_x b_x \beta_x (abu)(\alpha\beta u) \left\{ b_x(a\alpha\beta) - \beta_x(a\alpha b) \right\}$$
$$= \frac{1}{8} a_x \alpha_x b_x \beta_x (abu)(\alpha\beta u) \left\{ a_x(b\alpha\beta) - \alpha_x(ba\beta) \right\}.$$

Aber die beiden Seiten dieser Gleichung gehen durch Vertauschung von $a$ mit $b$ und $\alpha$ mit $\beta$ in einander mit entgegengesetztem Vorzeichen über. Daher müssen sie identisch Null sein, was zu beweisen war.

ad 5). Die Form lässt sich aus der ersten Form (61) berechnen, indem man nach den $x$ differenzirt und mit $z$ multiplicirt, dann aber $z$ durch $n$, die $y$ durch Determinanten der $N$, $u$ ersetzt und mit $N_x^2$ multiplicirt. Man hat dann:

$$\frac{1}{2}(a\alpha u) N_x^2 \left\{ (\alpha N u)^2 a_x a_n + (a N u)^2 \alpha_x \alpha_n \right\}.$$

Um diesen Ausdruck zu erzeugen, wenden wir die zweite Form (61) an. In dieser werden um das erste Glied zu bilden zuerst die Symbole $a\alpha$ durch $b\beta$ ersetzt, dann wird $y$ durch die Determinanten der $a$, $u$, und $u$ durch $\alpha$ ersetzt, und mit $a_x(a\alpha u)$ multiplicirt; um den zweiten Theil zu bilden, setzt man $\alpha$ für $u$, die Determinanten der $a$, $u$ für $y$ und multiplicirt mit $(a\alpha u)a_x$. Man hat dann:

$$\frac{1}{2}(a\alpha u) b_x \beta_x \left\{ (abu)(a\beta u)\alpha_x(b\beta\alpha) + (\alpha bu)(\alpha\beta u)a_x(b\beta a) \right\}.$$

Der erste Theil verschwindet, weil er durch Vertauschung von $\alpha\beta$, der zweite, weil er durch Vertauschung von $a$, $b$ das Zeichen ändert.

ad 8). In $N_x'^4 u_{n'} = (a\alpha u) a_x^2 \alpha_x^2$ setzt man die Determinanten der $N$, $u$ für die $x$, und multiplicirt mit $u_n$. Man hat dann für die fragliche Form den Ausdruck:

$$(a\alpha u)(aNu)^2(\alpha Nu)^2 u_n.$$

Dies wieder entsteht aus der zweiten Form (61), indem man erstens die Symbole $a$, $\alpha$ durch $b\beta$ und sodann die $x$ durch Determinanten der $\alpha$, $u$, die $y$ durch Determinanten der $\alpha$, $u$ ersetzt und mit $(a\alpha u)$ multiplicirt. Dann kommt:

$$(a\alpha u)(b\beta u)(bau)(\beta\alpha u)(b\alpha u)(\beta a u).$$

Da dieser Ausdruck durch Vertauschung von $a$ mit $b$ sein Zeichen ändert, so verschwindet er identisch. —

Wir kommen nun zu denjenigen unter den obigen Formen, welche nicht identisch verschwinden.

Die unter 1) gegebene Form

(62) $$\psi = N_{n'} N'_n N_x^3 N_x'^3$$

ist die Covariante 6. Grades und 6. Ordnung, welche Herr Brioschi im 63. Bande von Borchardt's Journal S. 33 angegeben hat. Sie zeichnet sich unter den verschiedenen anderen Formen 6. Ordnung, welche man statt ihrer wählen kann, durch die Combinanteneigenschaft aus, vermöge deren die für die zusammengesetzte Form $\varkappa f + \lambda\Delta$ gebildete Form $\psi_{\varkappa\lambda}$ den Ausdruck hat:

$$\psi_{\varkappa\lambda} = G^2 \cdot \psi. \tag{63}$$

Wir wollen diese Form durch Symbole $a, \alpha$ ausdrücken, und daher dann zugleich zeigen, welcher Zusammenhang zwischen ihr und gewissen andern Covarianten 6. Ordnung besteht.

Es entsteht $\psi$ zunächst aus (60), wenn man darin $y$ durch $n$, $u$ durch $N$ ersetzt und mit $N_x^3$ multiplicirt. Daher ist

$$\psi = \tfrac{1}{2}(a\alpha N)\left\{a_n\alpha_x + \alpha_n a_x\right\} a_x\alpha_x N_x^3.$$

Hier aber entstehen beide Glieder wieder aus (60) ($b, \beta$ für $a, \alpha$ geschrieben), der erste Theil, indem man $u$ durch $a$, $y$ durch Determinanten der $a, \alpha$, der zweite indem man $y$ durch Determinanten der $a, \alpha, u$ durch $\alpha$ ersetzt. Daher ist:

$$\psi = \tfrac{1}{4} a_x\alpha_x b_x\beta_x \left\{a_x(b\beta\alpha) + \alpha_x(b\beta a)\right\} \left\{b_x(\beta a\alpha) + \beta_x(b a\alpha)\right\}.$$

Multiplicirt man aus, so entstehen 4 Glieder, von denen aber zwei durch Vertauschung von Buchstaben in einander übergehen; und es wird also

$$\psi = -\tfrac{1}{4}(\varphi + 2\varphi' + \varphi'') \tag{64}$$

wo

$$\begin{aligned}
\varphi &= (ab\beta)(ab\alpha)a_x b_x \alpha_x^2\beta_x^2 \\
\varphi' &= -(ab\beta)(\alpha\beta a)a_x\beta_x\alpha_x^2 b_x^2 \\
\varphi'' &= (\alpha\beta a)(\alpha\beta b)\alpha_x\beta_x a_x^2 b_x^2.
\end{aligned} \tag{65}$$

Da sich nun $2\varphi'$ sowohl auf $\varphi$ als auf $\varphi''$ zurückführen lässt, so kann man alle $\varphi$ durch $\psi$ ausdrücken. Es ist ($a, b$ vertauscht)

$$\begin{aligned}
2\varphi' &= (ab\beta)a_x b_x\alpha_x^2\beta_x \left\{-b_x(\alpha\beta a) + a_x(\alpha\beta b)\right\} \\
&= (ab\beta)a_x b_x\alpha_x^2\beta_x \left\{\beta_x(ab\alpha) - \alpha_x(ab\beta)\right\} \\
&= \varphi - \Delta\cdot(ab\beta)^2 a_x b_x\beta_x \\
&= \varphi - \frac{S\Delta}{6} f; \qquad \text{(vgl. § 4. Satz XI)}
\end{aligned}$$

aber auch ($\alpha$ mit $\beta$ vertauscht):

$$\begin{aligned}
2\varphi' &= (\alpha\beta a)\alpha_x\beta_x a_x b_x^2 \left\{-\alpha_x(ab\beta) + \beta_x(ab\alpha)\right\} \\
&= (\alpha\beta a)\alpha_x\beta_x a_x b_x^2 \left\{a_x(\alpha\beta b) - b_x(\alpha\beta a)\right\} \\
&= \varphi'' - f\cdot(\alpha\beta a)^2\alpha_x\beta_x a_x \\
&= \varphi'' - f\cdot\frac{2Tf - S\Delta}{6}. \qquad \text{(§ 8. F. 33)}
\end{aligned}$$

Trägt man diese Ausdrücke von $\varphi$, $\varphi''$ in die Formel

$$\psi = -\tfrac{1}{4}(\varphi + 2\varphi' + \varphi'')$$

ein, so erhält man:

$$\varphi = -\tfrac{4}{3}\psi - \frac{Tf^2}{9} + \frac{S\Delta f}{6}$$

$$(66) \qquad \varphi' = -\tfrac{2}{3}\psi - \frac{Tf^2}{18}$$

$$\varphi'' = -\tfrac{4}{3}\psi - \frac{2Tf^2}{9} - \frac{S\Delta f}{6}.$$

Die Form 3) entsteht aus

$$N'^4_x u_{n'} = (a\alpha u)a_x^2\alpha_x^2,$$

wenn man $u$ durch $N$ ersetzt und mit $N_x^3 u_n$ multiplicirt. Daher ist unsre Form gleich

$$(a\alpha N)a_x^2\alpha_x^2 N_x^3 u_n.$$

Dieser Ausdruck aber entsteht aus (60) ($a\alpha$ durch $b\beta$ ersetzt), wenn man $y$ durch die Determinanten der $a$, $\alpha$ ersetzt. Demnach wird der Ausdruck gleich

$$\tfrac{1}{2}a_x^2\alpha_x^2 b_x\beta_x(b\beta u)\left\{b_x(a\alpha\beta) + \beta_x(a\alpha b)\right\}.$$

Vertauscht man im ersten Theile $\alpha$, $\beta$, im zweiten $a$, $b$, und nimmt jedesmal die halbe Summe des alten und neuen Ausdrucks, so kommt:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}a_x^2b_x^2\alpha_x\beta_x(a\alpha\beta)\left\{\alpha_x(b\beta u) - \beta_x(b\alpha u)\right\}\\
&+\tfrac{1}{4}a_xb_x\alpha_x^2\beta_x^2(a\alpha b)\left\{a_x(b\beta u) - b_x(a\beta u)\right\}\\
&= \tfrac{1}{4}a_x^2b_x^2\alpha_x\beta_x(a\alpha\beta)\left\{b_x(\alpha\beta u) - u_x(\alpha\beta b)\right\}\\
&+\tfrac{1}{4}a_xb_x\alpha_x^2\beta_x^2(a\alpha b)\left\{\beta_x(bau) - u_x(ba\beta)\right\}.
\end{aligned}$$

Hier heben sich zum Theil Factoren $f$ und $\Delta$ hervor, zum Theil sind die Glieder durch die Formen $\varphi$ (66) direct darstellbar. Es nimmt dann der obige Ausdruck folgende Gestalt an:

$$\tfrac{1}{4}f\cdot(\alpha\beta a)(\alpha\beta u)\alpha_x\beta_x a_x^2 + \tfrac{1}{4}\Delta\cdot(abu)(ab\alpha)a_xb_x\alpha_x^2 - \tfrac{1}{4}u_x(\varphi + \varphi'').$$

Führt man nun für $\varphi$, $\varphi''$ ihre Ausdrücke in $\psi$ ein, so erhält man:

$$\tfrac{1}{4}f\cdot\left\{(\alpha\beta a)(\alpha\beta u)\alpha_x\beta_x a_x^2 - \frac{Tf}{9}\right\} + \tfrac{1}{4}\Delta\cdot(abu)(ab\alpha)a_xb_x\alpha_x^2 + \tfrac{2}{3}\psi\cdot u_x.$$

Da $\psi$ eine Combinante ist, so muss die Summe der beiden ersten Glieder allein für sich eine Combinante sein. Man wird also hier auf die Betrachtung zweier Zwischenformen geführt, welche von der vierten Ordnung und der ersten Classe sind; auf dieselben haben wir bereits bei einer früheren Gelegenheit (Annalen, Bd. I, S. 59) aufmerksam gemacht. Um sie zweckmässig zu definiren, gehen wir von den folgenden Definitionen aus: es sei.

$$
(67) \qquad \begin{aligned} L &= b_n N_x^3 b_x (b N u) \\ M &= \beta_n N_x^3 \beta_x (\beta N u) . \end{aligned}
$$

Diese Formen vierter Ordnung und erster Classe, welche aus der Combinante $N$ und bez. $f$ und $\Delta$ gebildet sind, stehen offenbar in der Beziehung zu einander, dass

$$
(68) \qquad \delta L = M, \quad \delta M = \frac{S}{2} \cdot L .
$$

Drücken wir nun $L$ und $M$ in Symbolen von $f$ und $\Delta$ aus. Es entsteht $L$ aus der Formel (60), wenn wir die $y$ durch die Determinanten der $u$ und $b$, $u$ aber durch $b$ ersetzen, und mit $b_x$ multipliciren. Demnach ist

$$
L = \tfrac{1}{2} (a \alpha b) a_x \alpha_x b_x \left\{ a_x (b \alpha u) + \alpha_x (b a u) \right\} .
$$

Von den beiden Theilen rechts ist der zweite einer der in der obigen Combinante auftretenden Ausdrücke. Der erste kommt auf ihn zurück, wenn man $a$, $b$ vertauscht und die halbe Summe des alten und neuen Ausdrucks bildet. Dann ist

$$
\begin{aligned}
(a \alpha b)(b \alpha u) a_x^2 \alpha_x b_x &= \tfrac{1}{2} (a \alpha b) a_x \alpha_x b_x \left\{ a_x (b \alpha u) - b_x (a \alpha u) \right\} \\
&= \tfrac{1}{2} (a \alpha b) a_x \alpha_x b_x \left\{ \alpha_x (b a u) - u_x (a \alpha b) \right\} \\
&= \tfrac{1}{2} (a b \alpha)(a b u) \alpha_x^2 a_x b_x - \tfrac{1}{12} u_x \cdot S f . \qquad (\S\ 4.)
\end{aligned}
$$

Tragen wir dies in den obigen Ausdruck von $L$ ein, so ist

$$
(69) \qquad \begin{aligned} L &= \tfrac{3}{4} (a b u)(a b \alpha) a_x b_x \alpha_x^2 - \tfrac{1}{24} S f \cdot u_x \\ &= \tfrac{3}{2} (a \alpha b)(b \alpha u) a_x^2 b_x \alpha_x + \tfrac{1}{12} S f \cdot u_x . \end{aligned}
$$

Ganz ebenso ist

$$
M = \tfrac{1}{2} (a \alpha \beta) a_x \alpha_x \beta_x \left\{ a_x (\beta \alpha u) + \alpha_x (\beta a u) \right\} ;
$$

aber, wenn man hier mit dem zweiten Gliede ähnlich verfährt, wie oben mit dem ersten, so hat man

$$
(a \alpha \beta)(\beta a u) a_x \alpha_x^2 \beta_x = - \tfrac{1}{2} (a \alpha \beta)(u \alpha \beta) a_x^2 \alpha_x \beta_x + \tfrac{1}{2} u_x (a \alpha \beta)^2 a_x \alpha_x \beta_x .
$$

Der Factor von $\frac{1}{2} u_x$ ist der bei der Entwicklung von $\Delta_{\varkappa\lambda}$ (§ 8. F. 33) durch $\Delta_2$ bezeichnete Term, und hat also den Werth $\frac{1}{6}(2Tf - S\Delta)$. Trägt man alles in den Ausdruck von $M$ ein, so hat man demnach:

$$
(70) \qquad \begin{aligned} M &= - \tfrac{3}{4} (\alpha \beta a)(\alpha \beta u) a_x^2 \alpha_x \beta_x + \tfrac{1}{24} u_x (2Tf - S\Delta) \\ &= \tfrac{3}{2} (a \alpha \beta)(\beta a u) \alpha_x^2 a_x \beta_x - \tfrac{1}{12} u_x (2Tf - S\Delta) . \end{aligned}
$$

Aus den Formeln (69), (70) ergiebt sich umgekehrt:

$$
\begin{aligned}
(a b u)(a b \alpha) a_x b_x \alpha_x^2 &= \tfrac{4}{3} L + \tfrac{1}{18} S f u_x \\
(\alpha \beta u)(\alpha \beta a) \alpha_x \beta_x a_x^2 &= - \tfrac{4}{3} M + \tfrac{1}{18} (2Tf - S\Delta) \cdot u_x .
\end{aligned}
$$

Setzt man dies in den oben gefundenen Ausdruck unsrer Combinante ein, so erhält man die Gleichung:

$$(71) \qquad N_{n'} u_n N_x^3 N_x'^4 = \tfrac{1}{3}(L\Delta - Mf) + \tfrac{2}{3}\psi \cdot u_x .$$

Aus dem Umstande, dass $\Delta L - fM$ eine Combinante ist, folgt nun, dass die für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda\Delta$ gebildeten Formen $L_{\varkappa\lambda}$, $M_{\varkappa\lambda}$ sich ähnlich verhalten wie $\varkappa f + \lambda\Delta$ und $\Delta_{\varkappa\lambda}$ selbst, bez. wie $\Sigma_{\varkappa\lambda}$ und $\mathrm{T}_{\varkappa\lambda}$. Denn aus der Combinanteneigenschaft folgt, indem man den Exponenten von $G$ durch Abzählung der Dimensionen bestimmt:

$$L_{\varkappa\lambda}\Delta_{\varkappa\lambda} - M_{\varkappa\lambda}(\varkappa f + \lambda\Delta) = G^2 \cdot (L\Delta - Mf) .$$

Setzt man nun für $\Delta_{\varkappa\lambda}$ seinen Werth

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = G_1\Delta - G_2 f ,$$

so ergiebt sich:

$$\Delta\left\{L_{\varkappa\lambda}G_1 - M_{\varkappa\lambda}\cdot\lambda - G^2L\right\} = f\left\{L_{\varkappa\lambda}G_2 + M_{\varkappa\lambda}\cdot\varkappa - G^2M\right\} .$$

Da nun $\Delta, f$ keinen gemeinsamen Factor haben, so müssen die eingeklammerten Factoren bezüglich durch $f$ und $\Delta$ theilbar sein. Man muss also setzen

$$\begin{aligned} L_{\varkappa\lambda}G_1 - M_{\varkappa\lambda}\cdot\lambda &= G^2L + K\cdot f \\ L_{\varkappa\lambda}G_2 + M_{\varkappa\lambda}\cdot\varkappa &= G^2M + K\cdot\Delta , \end{aligned}$$

wo $K$ eine ganze Function der $\varkappa, \lambda, u, x$ ist. Multiplicirt man mit $\varkappa$, $\lambda$ oder auch mit $-G_2$ und $G_1$ und addirt, so wird jedesmal alles übrige durch $G = G_1\varkappa + G_2\lambda$ theilbar, also muss auch $K$ durch $G$ theilbar sein, $K = GK'$, und man hat dann:

$$\begin{aligned} L_{\varkappa\lambda} &= G(\varkappa L + \lambda M) + K'(\varkappa f + \lambda\Delta) \\ M_{\varkappa\lambda} &= G(G_1M - G_2L) + K'(G_1\Delta - G_2f). \end{aligned}$$

Aber man kann zeigen, dass $K' = 0$, indem man unmittelbar von den Formeln (67) ausgeht, welche $L, M$ definiren. Denn bildet man aus diesen $L_{\varkappa\lambda}$, $M_{\varkappa\lambda}$, und beachtet dass sie die Coefficienten von $f$, bez. $\Delta$ nur linear, ausserdem aber auch die von $N$ linear enthalten, und dass $N_{\varkappa\lambda} = G\cdot N$, so ergiebt sich sofort

$$(72) \qquad \begin{aligned} L_{\varkappa\lambda} &= G\cdot(\varkappa L + \lambda M) \\ M_{\varkappa\lambda} &= G\cdot(G_1M - G_2L), \end{aligned}$$

und der Factor $K'$ in den obigen Formeln muss also gleich Null sein.

Wir kommen nunmehr zur Betrachtung der Form (7):

$$u_n u_{n'} N_x^2 N_x'^2 (NN'u)^2 .$$

Die Behandlung dieser Form bietet ein hervorragendes Interesse nicht nur dadurch, dass dieselbe auf zwei neue Zwischenformen führt, welche den Formen $L, M$ dualistisch gegenüberstehen, sondern auch dadurch, dass eine doppelte Darstellung dieser Combinante zu einer merkwürdigen Identität führt, welche zwischen einer Anzahl der aus $f$ entsprungenen Formen stattfindet.

Die fragliche Form entsteht aus

$$N_x'^2 N_y'^2 u_{n'} = (a\alpha u)\, a_x \alpha_x a_y \alpha_y\,, \tag{61}$$

wenn man die $y$ durch die Determinanten der $N, u$ ersetzt und mit $N_x^2 u_n$ multiplicirt. Sie ist also gleich

$$(a\alpha u)(aNu)(\alpha Nu)\, a_x \alpha_x N_x^2 u_n\,.$$

Aber diese Form wieder entsteht aus der Form (60)

$$N_x^2 N_y^2 u_n = (b\beta u)\, b_x \beta_x b_y \beta_y\,,$$

wenn man zuerst nach den $y$ differenzirt und mit $z$ multiplicirt:

$$N_x^2 N_y N_z u_n = \tfrac{1}{2}(b\beta u)\, b_x \beta_x (b_y \beta_z + \beta_y b_z)\,,$$

und nun die $y$ durch die Determinanten der $a, u$, die $z$ durch die der $\alpha, u$ ersetzt und mit $a_x \alpha_x (a\alpha u)$ multiplicirt. Man erhält dann

$$\tfrac{1}{2}(a\alpha u)(b\beta u)\, a_x b_x \alpha_x \beta_x \left\{(bau)(\beta\alpha u) + (\beta au)(b\alpha u)\right\}\,.$$

Für die Klammer können wir

$$\begin{aligned} &2(bau)(\beta\alpha u) + \left\{(\beta au)(b\alpha u) - (bau)(\beta\alpha u)\right\} \\ =\ &2(bau)(\beta\alpha u) - (b\beta u)(a\alpha u) \end{aligned}$$

setzen. Man hat dann sofort für unsre Combinante den Ausdruck

$$(a\alpha u)(b\beta u)(bau)(\beta\alpha u)\, a_x b_x \alpha_x \beta_x - \tfrac{1}{2}\,\mathsf{H}^2\,.$$

Den ersten Theil aber reducirt man, indem man für ihn die halbe Summe desselben mit dem daraus durch Vertauschung von $a, b$ hervorgehenden Ausdruck einführt. Man hat dann:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(bau)(\beta\alpha u)\, a_x b_x \alpha_x \beta_x \left\{(a\alpha u)(b\beta u) - (b\alpha u)(a\beta u)\right\} \\ =\ &\tfrac{1}{2}(bau)^2(\beta\alpha u)^2\, a_x b_x \alpha_x \beta_x = \tfrac{1}{2}\,\Theta\mathsf{K}\,. \end{aligned}$$

Die gesuchte Combinante hat also den Ausdruck:

$$u_n u_{n'} N_x^2 N_x'^2 (NN'u)^2 = \tfrac{1}{2}(\Theta\mathsf{K} - \mathsf{H}^2)\,. \tag{73}$$

Die rechte Seite haben wir schon früher (§ 12.) als Combinante kennen gelernt.

Die zweite Darstellung dieser Combinante, von welcher oben die Rede war, erhält man, wenn man ausser dem oben benutzten Ausdruck

$$(a\alpha u)(aNu)(\alpha Nu)\, a_x \alpha_x N_x^2 u_n$$

auch noch denjenigen benutzt, welcher ebenso aus der ersten Form

(61) abgeleitet wird, wie dieser aus der zweiten. Man hat dann für dieselbe Form die Darstellung

$$\tfrac{1}{2}(a\alpha u)N_x u_n \left\{(aNu)^2\alpha_x^2 + (\alpha N u)^2 a_x^2\right\}.$$

Statt beider Darstellungen nehmen wir nur diejenige, welche entsteht, wenn wir das Doppelte der letzten zu der ersten addiren und dann durch 3 dividiren. Formen wir die erste dabei um mittelst der Gleichung

$$(a\alpha u)N_x = (aNu)\alpha_x + (N\alpha u)a_x + (a\alpha N)u_x,$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}(aNu)^2\alpha_x^2 N_x u_n \left\{(a\alpha u)N_x + (\alpha N u)a_x\right\}\\ &+\tfrac{1}{3}(\alpha N u)^2 a_x^2 N_x u_n \left\{(a\alpha u)N_x - (aNu)\alpha_x\right\}\\ &+\tfrac{1}{3}u_x\cdot(aNu)(\alpha N u)(a\alpha N)a_x\alpha_x N_x u_n.\end{aligned}$$

Benutzt man für die eingeklammerten Ausdrücke die gewöhnliche Identität, so tritt an Stelle des ersten

$$(aNu)\alpha_x - (aN\alpha)u_x,$$

an Stelle des zweiten

$$(N\alpha u)a_x - (N\alpha a)u_x.$$

Der ganze Ausdruck zerfällt daher in Theile mit den Factoren $f$, $\Delta$, $u_x$, und zwar geht er über in

$$-\tfrac{1}{3}\left\{f\mathsf{M} - \Delta\Lambda\right\} + \tfrac{1}{3}K\cdot u_x,$$

wo

$$(74)\qquad \begin{aligned}\Lambda &= (aNu)^3 u_n N_x\\ \mathsf{M} &= (\alpha N u)^3 u_n N_x\end{aligned}$$

während

$$K = \cdot\, N_x u_n (a\alpha N)\left\{(aNu)^2\alpha_x^2 + (\alpha N u)^2 a_x^2 + (aNu)(\alpha N u)a_x\alpha_x\right\}.$$

Dieser letzte Ausdruck ist nichts als ein Aggregat der beiden Gestalten, welche die unter (5) behandelte Form

$$N_{n'} u_n N_x N_x'^2 (NN'u)^2$$

nach den Gleichungen (61) annimmt. Daher verschwindet $K$, und man hat endlich

$$(75)\qquad u_n u_{n'} N_x^2 N_x'^2 (NN'u)^2 = -\tfrac{1}{3}\left\{f\mathsf{M} - \Delta\Lambda\right\}.$$

Die Vergleichung mit (73) aber führt auf die merkwürdige Identität:

$$(76)\qquad \tfrac{1}{2}(K\Theta - \mathsf{M}^2) = -\tfrac{1}{3}(f\mathsf{M} - \Delta\Lambda).$$

Aus den Gleichungen (74) folgt ähnlich, wie dies oben bezüglich der Formen $L$, $M$ geschah, die Wechselbeziehung

$$(77)\qquad \delta\Lambda = \mathsf{M}, \quad \delta\mathsf{M} = \frac{S}{2}\Lambda.$$

Sodann aber ergiebt sich aus der Eigenschaft des Ausdruckes $f\mathsf{M} - \Lambda\Delta$, Combinante zu sein:

$$(\varkappa f + \lambda\Delta)\mathsf{M}_{\varkappa\lambda} - \Delta_{\varkappa\lambda}\Lambda_{\varkappa\lambda} = G^2 \cdot (f\mathsf{M} - \Delta\Lambda),$$

daher wenn wir $\Delta_{\varkappa\lambda}$ durch seinen Werth

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = G_1\,\Delta - G_2 f$$

ersetzen

$$f\left\{\varkappa\mathsf{M}_{\varkappa\lambda} + G_2\,\Lambda_{\varkappa\lambda} - G^2\cdot\mathsf{M}\right\} = \Delta\left\{-\lambda\mathsf{M}_{\varkappa\lambda} + G_1\,\Lambda_{\varkappa\lambda} - G^2\Lambda\right\}.$$

Da hier die Klammergrössen durch $f$, $\Delta$ nicht theilbar sein können, so müssen sie verschwinden. Man hat also

$$\begin{aligned} \varkappa\mathsf{M}_{\varkappa\lambda} + G_2\,\Lambda_{\varkappa\lambda} &= G^2\mathsf{M} \\ -\lambda\mathsf{M}_{\varkappa\lambda} + G_1\,\Lambda_{\varkappa\lambda} &= G^2\Lambda, \end{aligned}$$

und hieraus durch Auflösung, wie oben:

$$(78)\qquad \begin{aligned} \Lambda_{\varkappa\lambda} &= G\cdot(\varkappa\Lambda + \lambda\mathsf{M}) \\ \mathsf{M}_{\varkappa\lambda} &= G\cdot(G_1\mathsf{M} - G_2\Lambda). \end{aligned}$$

Auch diese Formeln hätte man, wie oben bei $L$, $M$, unmittelbar aus den Definitionen (74) bilden können.

Um die durch (74) definirten Formen $\Lambda$, $\mathsf{M}$ in Symbolen von $f$ und $\Delta$ auszudrücken, braucht man nur die Formel (60) in Anwendung zu bringen, und erhält dann sofort, indem man $y$ in $x$ verwandelt und die $x$ durch Determinanten der $a$, $u$, bez. $\alpha$, $u$ ersetzt:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \tfrac{1}{2}(a\alpha u)(abu)(b\alpha u)\left\{a_x(\alpha bu) + \alpha_x(abu)\right\} \\ \mathsf{M} &= \tfrac{1}{2}(a\alpha u)(a\beta u)(\beta\alpha u)\left\{a_x(\alpha\beta u) + \alpha_x(a\beta u)\right\}. \end{aligned}$$

Zwischen den zwei Termen, in welche $\Lambda$ zerfällt, besteht eine einfache Beziehung, ebenso bei $\mathsf{M}$. Denn man hat, durch Vertauschung von $a$, $b$ bez. $\alpha$, $\beta$, und Einführung der halben Summe des alten und neuen Ausdrucks:

$$\begin{aligned} &2(a\alpha u)(abu)(b\alpha u)(\alpha bu)a_x \\ &\qquad = (a\alpha u)(abu)(b\alpha u)\left\{a_x(\alpha bu) - b_x(\alpha au)\right\} \\ &\qquad = (a\alpha u)(abu)(b\alpha u)\left\{a_x(abu) - u_x(ab\alpha)\right\} \\ &2(a\alpha u)(a\beta u)(\beta\alpha u)(a\beta u)\alpha_x \\ &\qquad = (a\alpha u)(a\beta u)(\beta\alpha u)\left\{\alpha_x(a\beta u) - \beta_x(a\alpha u)\right\} \\ &\qquad = (a\alpha u)(a\beta u)(\beta\alpha u)\left\{a_x(\alpha\beta u) - u_x(\alpha\beta a)\right\}. \end{aligned}$$

Rechts und links stehen hier die Theile von $\Lambda$ und $\mathsf{M}$; die Coefficienten von $u_x$ aber sind die Coefficienten von $\varkappa^2\lambda$ und von $\varkappa\lambda^2$ in der Entwicklung von $\Sigma_{\varkappa\lambda}$, haben also die Werthe $\mathsf{T}$ und $\frac{S}{6}\Sigma$. Indem man also $\Lambda$, $\mathsf{M}$ durch je eines der symbolischen Producte und ein Glied mit $u_x$ ausdrückt, erhält man folgende Darstellungen:

$$(78^a)\quad \begin{aligned} \Lambda &= -\tfrac{3}{2}(a\alpha u)(abu)(\alpha b u)^2 a_x + \tfrac{1}{2}\mathsf{T}\cdot u_x \\ &= -\tfrac{3}{4}(a\alpha u)(b\alpha u)(abu)^2\alpha_x - \tfrac{1}{4}\mathsf{T}\cdot u_x \\ \mathsf{M} &= -\tfrac{3}{4}(a\alpha u)(a\beta u)(\alpha\beta u)^2 a_x + \tfrac{1}{24}S\Sigma\cdot u_x \\ &= \tfrac{3}{2}(a\alpha u)(\beta\alpha u)(a\beta u)^2\alpha_x - \tfrac{1}{12}S\Sigma\cdot u_x\,. \end{aligned}$$

Wir kommen endlich zu der Form (6), welche den symbolischen Ausdruck hatte

$$N_{n'}u_n N'_x(NN'u)^3\,.$$

Diese Form entsteht aus der Formel (60), indem man die $y$ durch $x$, die $x$ durch die Determinanten der $N, u$ und $u$ durch $N$ ersetzt und mit $u_n$ multiplicirt. Demnach erhält man:

$$-\tfrac{1}{2}(Na\alpha)u_n(aNu)(\alpha Nu)\left\{a_x(\alpha Nu) + \alpha_x(aNu)\right\}.$$

Dies aber entsteht aus der zweiten Formel (61), indem man aus dieser zunächst die Gleichung

$$N_x^2 N_y N_z u_n = \tfrac{1}{2}(b\beta u)b_x\beta_x\left\{b_y\beta_z + b_z\beta_y\right\}$$

ableitet, und dann, um den ersten Theil zu bilden, $x$ durch die Determinanten der $\alpha, u$, $y$ durch die der $a, u$, $z$ durch die der $a, \alpha$ ersetzt und mit $a_x$ multiplicirt, dagegen um den zweiten zu bilden, $x$ durch die Determinanten der $a, u$, $y$ durch die der $\alpha, u$, $z$ durch die der $a, \alpha$ ersetzt, und mit $\alpha_x$ multiplicirt. So erhält man:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{4}a_x(b\alpha u)(\beta\alpha u)(b\beta u)\left\{(ba\alpha)(\beta a u) + (\beta a\alpha)(bau)\right\} \\ &+ \tfrac{1}{4}\alpha_x(bau)(\beta au)(b\beta u)\left\{(ba\alpha)(\beta\alpha u) + (\beta a\alpha)(b\alpha u)\right\}. \end{aligned}$$

Im ersten und vierten Theile vertauschen wir hier $\alpha$ mit $\beta$, und setzen die Summe der neuen und alten Ausdrücke. Diese Theile werden dann der Reihe nach (abgesehen von dem Factor $\tfrac{1}{4}$):

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}a_x(b\alpha u)(\beta\alpha u)(b\beta u)\left\{(ba\alpha)(\beta au) - (ba\beta)(\alpha au)\right\} \\ &\qquad = \tfrac{1}{2}a_x(b\alpha u)(\beta\alpha u)(b\beta u)(bau)(\beta a\alpha)\,, \\ &\tfrac{1}{2}(bau)(\beta a\alpha)(b\alpha u)(b\beta u)\left\{\alpha_x(\beta au) - \beta_x(\alpha au)\right\} \\ &\qquad = \tfrac{1}{2}(bau)(\beta a\alpha)(b\alpha u)(b\beta u)\left\{u_x(\beta a\alpha) - a_x(\beta u\alpha)\right\}. \end{aligned}$$

Im dritten Theile ersetzen wir nach der Identität $\alpha_x(bau)$ durch den Werth

$$b_x(\alpha au) - a_x(\alpha bu) + u_x(ba\alpha)\,.$$

Die ersten Glieder des dritten Theils werden dann einander gleich, indem sie sich nur durch Vertauschung von $a$ mit $b$ unterscheiden, und dieser Theil wird also:

$$(\beta au)(b\beta u)(ba\alpha)(\beta\alpha u)\cdot\left\{2a_x(b\alpha u) + u_x(ba\alpha)\right\}$$

Hier kann man nun das erste Glied, wie oben den ersten und vierten Theil behandeln, und erhält dann

$$a_x(b\alpha u)(b\beta u)(\beta\alpha u)\,\{(\beta a u)(b a \alpha) - (\alpha a u)(b a \beta)\}$$
$$= a_x(b\alpha u)(b\beta u)(\beta\alpha u)(b a u)(\beta a \alpha).$$

Demnach ist nun unser Ausdruck, indem alle nicht mit $u_x$ multiplicirten Glieder bis auf Zahlencoefficienten gleich sind:

$$-\tfrac{3}{4}(a b u)(b\alpha u)(\beta\alpha u)(b\beta u)(\beta a\alpha)\,a_x + \tfrac{1}{8}K\cdot u_x\,,$$

wo

$$K = (b\alpha u)(\beta a\alpha)^2(b a u)(b\beta u) + 2\,(\beta a u)(b\beta u)(b a\alpha)^2(\beta\alpha u)\,.$$

Beide Theile von $K$ verschwinden. Der zweite hat den Factor $(b a\alpha)^2$, besteht demnach aus $\frac{S}{6}$, multiplicirt mit dem, was entsteht, wenn man $(b a\alpha)^2$ auslässt, und $b, a, \alpha$ übrigens durch $a$ ersetzt; dann aber erhält man $(\beta a u)^3$, was (§ 4. X) verschwindet. Ebenso enthält der erste Theil den Factor $(\beta a\alpha)^2$, demnach die Coefficienten von $\Delta_2$ (§ 8. F. 33); er zerfällt in $T$ und $S$, multiplicirt mit Formen, welche aus dem ersten Theile von $K$ entstehen, wenn man $(\beta a\alpha)^2$ auslässt, und $\beta, a, \alpha$ übrigens durch $a$, bez. durch $\alpha$ ersetzt; in jedem Falle erhält man Null. So ist denn unsere Bildung auf ein einziges Glied zurückgeführt:

$$N_{n'}u_n N'_x (N N' u)^3 = -\tfrac{3}{4}(a b u)(b\alpha u)(\beta\alpha u)(b\beta u)(\beta a\alpha)a_x\,.$$

In den rechten Theil dieses Ausdrucks können wir nun die Symbole von $\mathsf{K}$ einführen. Da

$$(\alpha\beta u)^2\alpha_x\beta_x = \mathsf{K}_x^2 u_\varkappa^2\,,$$

so ist auch

$$(\alpha\beta u)(\alpha\beta v)\alpha_x\beta_x = \mathsf{K}_x^2 u_\varkappa v_\varkappa\,,$$

und ersetzen wir also $v$ durch $a$, $x$ durch die Determinanten der $b, u$, und multipliciren mit $-\frac{1}{2}(a b u)a_x$, so erhalten wir für unsern Ausdruck die Form:

$$-\tfrac{3}{4}(a b u)a_x(\mathsf{K} b u^2)u_\varkappa a_\varkappa\,.$$

Für $\mathsf{K}$ aber haben wir nach (46) den Ausdruck:

$$\mathsf{K} = 2 f_T - \frac{S}{6}\,\Theta - \frac{T}{3}u_x^2$$
$$= 2 c_t c_x^2 u_t^2 - \frac{S}{6}\,\Theta - \frac{T}{3}u_x^2\,.$$

Führen wir dies oben ein, so entstehen drei Theile. Der erste entsteht, wenn man $\mathsf{K}$ durch $c$, $\varkappa$ durch $t$ ersetzt, und mit $2c_t$ multiplicirt; er wird also:

$$-\tfrac{3}{2}(a b u)(c b u)^2 u_t a_t c_t a_x\,.$$

r zweite Theil ist $-\frac{S}{6}$ multiplicirt mit dem, was aus dem obigen

Ausdruck entsteht, wenn $K$ durch $\Theta$, also in der ursprünglichen Darstellung $\alpha, \beta$ durch $c, d$ ersetzt wird. Dies giebt also:

$$\tfrac{1}{8}(abu)(bcu)(dcu)(bdu)(dac)a_x .$$

Vertauschen wir hier erst $a$ mit $c$, dann $a$ mit $d$, und addiren das Entstandene zum Vorigen. An die Stelle des vorigen Ausdrucks tritt dann:

$$\tfrac{1}{8}(abu)(bcu)(bdu)(dac)\left\{a_x(dcu) - d_x(acu) + c_x(adu)\right\}$$
$$= -\tfrac{1}{8}(abu)(bcu)(bdu)(dac)^2 \cdot u_x = +\tfrac{1}{8}(bau)^3 \cdot u_x ,$$

was identisch Null ist.

Endlich entsteht oben ein dritter Theil, der den Factor $-\frac{T}{3}$ hat, und dessen anderer Factor entsteht, indem man an Stelle von $K$ die Function $u_x^2$ einführt. Bezeichnen wir für den Augenblick $u_x^2$ symbolisch durch

$$u_x^2 = \varphi_x^2 u_\psi^2 .$$

Dann folgt sofort die symbolische Gleichung

$$u_x v_x = \varphi_x^2 u_\psi v_\psi ,$$

und also, wenn wir nun für $x$ die Unterdeterminanten aus den $b, u$ setzen:

$$0 = (\varphi b u)^2 u_\psi v_\psi ;$$

daher auch

$$0 = (abu)a_x(\varphi b u)^2 u_\psi a_\psi ,$$

welches der Ausdruck ist, den wir suchen.

Es bleibt also endlich

$$N_{n'} u_n N'_x (NN'u)^3 = -\tfrac{3}{2}(abu)(cbu)^2 u_t a_t c_t a_x .$$

Setzen wir für $(cbu)a_t$ den damit identischen Ausdruck

$$(abu)c_t + (cau)b_t + (cba)u_t ,$$

so entstehen drei Glieder. Das erste verschwindet, weil es den Factor $c_t^2$, also nach F. 46 den Factor $T$ hat, und aus den übrigen Buchstaben eine nicht verschwindende Form nicht mehr gebildet werden kann. Das zweite ist Null, weil es durch Vertauschung von $b$ und $c$ das Zeichen ändert. Demnach bleibt

$$N_{n'} u_n N'_x (NN'u)^3 = \tfrac{3}{2}(abc)(abu)(cbu)a_x c_t u_t^2 .$$

Vertauscht man nun $a$ und $c$ und nimmt die halbe Summe des obigen und des neuen Ausdrucks, so hat man

$$\tfrac{3}{4}(abc)(abu)(cbu)u_t^2\left\{a_x c_t - c_x a_t\right\} .$$

Dies aber geht aus der Formel 11 (§ 2.)

$$u_s^2 v_s = (abc)(abu)(bcu)(acv)$$

hervor, indem man $v$ durch die Determinanten der $s, t$ ersetzt und mit $\frac{3}{4} u_t^2$ multiplicirt. Daher hat man nun:

$$N_{n'} u_n N'_x (NN'u)^3 = -\tfrac{3}{4} u_s^2 u_t^2 (stx)$$

$$= -\tfrac{1}{12} \begin{vmatrix} \frac{\partial \Sigma}{\partial u_1} & \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_1} & x_1 \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial u_2} & \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_2} & x_2 \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial u_3} & \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_3} & x_3 \end{vmatrix} .$$

Diese Combinante ist der Form $N$ in gewissem Sinne dualistisch entgegengesetzt; wie jene die Functionaldeterminante von $f, \Delta, u_x$, ist diese die Functionaldeterminante von $\Sigma, \mathrm{T}, u_x$. Wir bezeichnen sie durch

(79) $$\mathsf{N} = \mathsf{N}_x u_v^4 = u_s^2 u_t^2 (stx) .$$

## § 14.

### Simultane Bildungen aus den Combinanten $N$ und $\mathsf{N}$.

Bei weitern Bildungen von Combinanten aus $N$ können wir uns nun der Form $\mathsf{N}$ bedienen, welche eben als aus $N$ entstanden nachgewiesen wurde.

Wir gehen hierbei von der Form aus:

$$\mathsf{N}_n N_x^4 u_v^4 = \Sigma \frac{\partial N}{\partial u_i} \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial x_i} .$$

Nehmen wir $N$, $\mathsf{N}$ in den Formen

$$N = a_x^2 \alpha_x^2 (a\alpha u) , \quad \mathsf{N} = u_s^2 u_t^2 (stx) ,$$

so wird dies gleich

$$a_x^2 \alpha_x^2 u_s^2 u_t^2 \, \Sigma \frac{\partial (a\alpha u)}{\partial u_i} \frac{\partial (stx)}{\partial x_i} = a_x^2 \alpha_x^2 u_s^2 u_t^2 \left\{ a_s \alpha_t - \alpha_s a_t \right\} .$$

Daher zerfällt der Ausdruck sofort, und verwandelt sich mit Hülfe früher eingeführter Bezeichnungen in:

(80) $$\mathsf{N}_n N_x^4 u_v^4 = f_\Sigma \cdot \Delta_T - f_T \cdot \Delta_\Sigma ;$$

setzen wir aber für $f_\Sigma$, $\Delta_T$, $f_T$, $\Delta_\Sigma$ ihre Werthe aus § 10., F. 46 und § 12., F. 50, so finden wir:

(81) $$\mathsf{N}_n N_x^4 u_v^4 = \tfrac{1}{4} \left\{ \mathsf{K}^2 - \frac{S}{3} (\mathsf{K\Theta} + 2\mathsf{H}^2) + \frac{4T\mathsf{H\Theta}}{3} - \frac{S^2\Theta^2}{12} \right\} - \tfrac{1}{36} R u_x^4 ,$$

also eine Verbindung zweier schon oben gefundener Combinanten. Es wird sich zeigen, dass nicht nur diese Verbindung, sondern auch jede einzelne aus $N$ entsteht.

Auf die Gleichung (81) wenden wir nun den Process

$$\tfrac{1}{16}\,\Sigma\,\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial u_i}$$

an. Links entsteht dann $\mathsf{N}_n N_\nu N_x^3 u_\nu^3$. Rechts giebt die Anwendung des Processes auf ein Product, etwa auf $\mathsf{KH}$, Null so weit die Operation sich nur auf einen der Factoren bezieht; man hat also:

$$\tfrac{1}{16}\,\Sigma\frac{\partial^2 \mathsf{KH}}{\partial x_i \partial u_i} = \tfrac{1}{16}\left\{\Sigma\frac{\partial \mathsf{K}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial u_i} + \Sigma\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathsf{K}}{\partial u_i}\right\} = \tfrac{1}{4}(\mathsf{K}_H + \mathsf{H}_K).$$

Endlich die Anwendung des Processes auf $u_x^4$ giebt $\frac{3}{2}u_x^3$. Es kommt also

$$(82)\quad \mathsf{N}_n N_\nu N_x^3 u_\nu^3 = \tfrac{1}{16}\left\{2\mathsf{K}_K - \frac{S}{3}[\mathsf{K}_\Theta + \Theta_K + 4\mathsf{H}_H] + \frac{4T}{3}(\mathsf{H}_\Theta + \Theta_H) - \frac{S^2}{6}\Theta_\Theta\right\} - \tfrac{1}{24}R\cdot u_x^3.$$

In diesen Ausdruck führen wir nun für $\mathsf{K}_K$ etc. die in (47) (§ 10.) gegebenen Werthe ein. Dann haben wir: (§ 12., 51)

$$(83)\qquad \mathsf{N}_n N_\nu N_x^3 u_\nu^3 = \tfrac{1}{24}(f\mathsf{P} - \Delta\Pi) - \tfrac{1}{24}Ru_x^3.$$

Auch diese Combinante erscheint als Verbindung zweier uns schon bekannten. Auch hier wird sich zeigen, dass jeder Theil einzeln aus $N$ entsteht; es ist dazu, wie oben, nur nöthig, dass $R$ sich als aus $N$ ableitbar erweise.

Unterwerfen wir die Gleichung (83) abermals einem ähnlichen Processe:

$$\tfrac{1}{9}\,\Sigma\,\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial u_i},$$

so entsteht links $\mathsf{N}_n N_\nu^2 N_x^2 u_\nu^2$; rechts geht aus $u_x^3$ hervor $\frac{5}{3}u_x^2$: endlich aus

$$f\mathsf{P} - \Delta\Pi = f(T\mathrm{T} - \frac{S^2}{6}\,\Sigma) - \Delta(S\mathrm{T} - T\Sigma)$$

ergiebt sich

$$Tf_T - \frac{S^2}{6}f_\Sigma - S\Delta_T + T\Delta_\Sigma,$$

und man hat also, wenn man für $f_T$ etc. aus (46) ihre Werthe setzt:

$$(84)\qquad \mathsf{N}_n N_\nu^2 N_x^2 u_\nu^2 = -\tfrac{1}{18}Ru_x^2.$$

Hier erscheint schon $R$ mit dem Factor $u_x^2$ aus $N$ gebildet. Wenden wir nun den Process $\Sigma\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial u_i}$ noch zweimal hinter einander an, so findet man

$$(85)\qquad \begin{aligned} \mathsf{N}_n N_\nu^3 N_x u_\nu &= -\tfrac{1}{9}R\cdot u_x \\ \mathsf{N}_n N_\nu^4 &= -\tfrac{1}{3}R, \end{aligned}$$

also $R$ aus $N$ entstanden, wie zu beweisen war. Für $R$ gilt daher auch die Gleichung:

$$(85^a)\qquad R_{\varkappa\lambda} = G^3 \cdot R,$$

oder es findet die Beziehung statt

$$(85^b)\qquad T^2_{\varkappa\lambda} - \tfrac{1}{6} S^3_{\varkappa\lambda} = G^3 \left\{T^2 - \tfrac{1}{6} S^3\right\},$$

was auch aus der Theorie der binären quadratischen Formen leicht nachweisbar ist.

Diesen Bildungen fügen wir nur noch eine hier an, um zu zeigen dass auch sie aus $N$ entsteht. Es ist die aus $f, \Delta, \psi$ gebildete Functionaldeterminante

$$(86)\qquad \Omega = \frac{1}{54} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix},$$

oder symbolisch, wenn $\psi = \psi_x^6$ gesetzt wird:

$$(87)\qquad \Omega = a_x^2 \alpha_x^2 \psi_x^5 (a\alpha\psi).$$

Da

$$N = a_x^2 \alpha_x^2 (a\alpha u) = N_x^4 u_n$$

$$\psi = N_{n'} N'_n N_x^3 N'^3_x, \qquad (\S\ 13.,\ F.\ 62)$$

so ist die Entstehung von $\Omega$ aus $N$ schon nachgewiesen, wenn man nur in $N$ statt $u$ das Symbol $\psi$ einführt und mit $\psi_x^5$ multiplicirt; es wird dann

$$(88)\qquad \Omega = N_x^4 \psi_n \psi_x^5 = N_{n'} N'_n N_x^3 N'^2_x N''^4_x N'_{n''}.$$

## § 15.

### Bildungen, welche aus den Formen Π und P entstehen.

Wir kommen jetzt dazu, das System von Bildungen zu entwickeln, welches sich an die Formen Π, P dritter Classe ebenso anschliesst, wie die in Bezug auf die zusammengesetzte Form $\varkappa f + \lambda\Delta$ angestellten Bildungen an die Formen dritter Ordnung $f, \Delta$.

Wir beginnen zu diesem Zwecke mit der Bildung von $\Theta, \Delta, \Sigma$ für $\Sigma$ als Grundform. Da

$$\Theta = (abu)^2 a_x b_x$$

war, so ist die aus $\Sigma$ ähnlich gebildete Form

$$\Theta^{(\Sigma)} = (ss'x)^2 u_s u_{s'}.$$

Diese Form entsteht, indem wir in der Gleichung

$$u_s v_s^2 = (abc)(abv)(acv)(bcu)$$

für $v$ die Determinanten der $s, x$ eintragen und mit $u_s$ multipliciren. Man hat dann

$$\Theta^{(\Sigma)} = (abc)(bcu)u_s \left\{a_s b_x - b_s a_x\right\} \left\{a_s c_x - c_s a_x\right\}.$$

Der Ausdruck rechts besteht aus vier Theilen, von denen zwei sich nur durch Vertauschung von $b$ mit $c$ unterscheiden, und indem man diese zusammenzieht, hat man:

(89) $$\Theta^{(\Sigma)} = (abc)(bcu)u_s \left\{a_s^2 b_x c_x - 2a_s c_s a_x b_x + b_s c_s a_x^2\right\}.$$

Der erste Theil ist unmittelbar ausdrückbar. Denn da er den Factor $a_s^2$ hat, so enthält er nach § 10. den wirklichen Factor $\frac{1}{3}S$, und seinen andern Factor erhält man, wenn man $a_s^2$ auslässt, und $(abc)u_s$ durch $(ubc)$ ersetzt. Dieser andere Factor ist also $(bcu)^2 b_x c_x = \Theta$, und der erste Theil von $\Theta^{(\Sigma)}$ ist somit gleich $\frac{S}{3}\Theta$.

Im dritten Theile ersetzt man $(bcu)\,a_x$ durch den damit identischen Ausdruck:

$$(acu)b_x - (abu)c_x + (abc)u_x.$$

Der mit $u_x$ multiplicirte Theil ist demnach

$$(abc)^2 u_s b_s c_s a_x = u_s \alpha_s^2 \alpha_x$$

oder nach § 10., F. 46 $= \frac{T}{3} u_x$.

Die beiden andern Theile vereinigen sich mit dem zweiten Theile von $\Theta^{(\Sigma)}$, in welchen sie durch Buchstabenvertauschung übergehen. Man hat also

$$\Theta^{(\Sigma)} = \tfrac{1}{3}S\Theta + \tfrac{1}{3}Tu_x^2 - 4(abc)(bcu)u_s a_s c_s a_x b_x.$$

In dem nun noch übrigen symbolischen Ausdrucke vertauschen wir $b$ mit $a$, und setzen für den letzten Theil von $\Theta^{(\Sigma)}$ die halbe Summe des alten und neuen Ausdrucks. Dann haben wir

$$\begin{aligned}-4(abc)(bcu)u_s a_s c_s a_x b_x &= -2(abc)u_s c_s a_x b_x \left\{(bcu)a_s - (acu)b_s\right\}\\ &= -2(abc)u_s c_s a_x b_x \left\{(abc)u_s - (abu)c_s\right\}.\end{aligned}$$

Der letzte Theil hat den Factor $c_s^2$, und giebt, wie der betreffende Theil oben, nach § 10., F. 46 $\frac{2}{3}S\Theta$. Der erste Theil aber hat den Factor $(abc)^2$, und giebt daher $-2\alpha_s u_s^2 \alpha_x^2 = -2\Delta_\Sigma$, was nach (46) den Werth hat

$$\mathsf{K} - \frac{S\Theta}{2} - \frac{T}{3}u_x^2.$$

Und so wird dann endlich

(90) $$\Theta^{(\Sigma)} = \mathsf{K} + \tfrac{1}{2}S\Theta.$$

Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$(ss'x)^2 u_s u_{s'} = \mathsf{K} + \frac{S}{2}\Theta\,,$$

und unterwerfen sie nun dem Processe $\delta$, so erhalten wir zuerst (§ 8., F. 33)

$$(stx)^2 u_s u_t = \tfrac{1}{3}(S\mathsf{H} + T\Theta)\,,$$

sodann aber

$$(tt'x)^2 u_t u_{t'} = \tfrac{2}{3}T\mathsf{H} - \tfrac{1}{6}S\mathsf{K} + \tfrac{1}{36}S^2\Theta\,.$$

Es folgt daraus

$$\Theta^{(\mu\Sigma+\nu T)} = \mu^2\cdot(ss'x)^2u_su_{s'} + 2\mu\nu(stx)^2u_su_t + \nu^2(tt'x)^2u_tu_{t'}$$

$$= \mu^2\left(\mathsf{K} + \frac{S}{2}\Theta\right) + \tfrac{2}{3}\mu\nu(S\mathsf{H}+T\Theta) + \nu^2\left(\tfrac{2}{3}T\mathsf{H} - \tfrac{1}{6}S\mathsf{K} + \tfrac{1}{36}S^2\Theta\right).$$

Hierin setzen wir nun

$$\mu = -\varkappa T - \lambda\frac{S^2}{6}\,,\qquad \nu = \varkappa S + \lambda T\,.$$

Dann geht $\mu\Sigma + \nu\mathsf{T}$ in $\varkappa\Pi + \lambda\mathsf{P}$ über, und mit Hülfe einer Ausführung der rechten Seite erhält man: (F. 40)

$$\text{(91)}\qquad \Theta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = R\cdot\left\{G_{11}\mathsf{K} - 2G_{12}\mathsf{H} + G_{22}\Theta\right\}\,.$$

Es ist leicht hieraus auch $\Delta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$ zu bilden. Die zu $f = a_x^3$ gehörige Form $\Delta$ entsteht aus $\Theta = (abu)^2a_xb_x$, wenn man $u$ in $c$ verwandelt und mit $c_x$ multiplicirt. Ebenso entsteht also $\Delta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$ aus $\Theta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$, wenn man aus jedem Gliede die Summe zweier bildet, die bez. mit $\varkappa$ und $\lambda$ multiplicirt werden, und welche entstehen, wenn man die $u$ durch die Symbole bez. von

$$\Pi = u_p^3\,,\qquad \mathsf{P} = u_r^3$$

ersetzt, und mit $u_p$, bez. $u_r$ multiplicirt.

Erinnern wir jetzt daran, dass wir in Formel (25) (§ 7.)

$$\Theta_s^2\,u_s\,u_t^2 = \mathsf{T}$$

fanden. Bilden wir diese Gleichung für die zusammengesetzte Function $\varkappa f + \lambda\Delta$, und setzen wir für $\Theta_{\varkappa\lambda}$, $\Sigma_{\varkappa\lambda}$, $\mathsf{T}_{\varkappa\lambda}$ ihre Werthe aus § 8., F. 32 und § 9., F. 39, so erhalten wir

$$\left\{\varkappa^2\Theta_s^2u_\vartheta^2u_s + 2\varkappa\lambda\mathsf{H}_s^2u_\eta^2u_s + \lambda^2\mathsf{K}_s^2u_x^2u_s\right\}\left(\varkappa^3 + \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 + \frac{2T}{3}\lambda^3\right)$$

$$+\left\{\varkappa^2\Theta_t^2u_\vartheta^2u_t + 2\varkappa\lambda\mathsf{H}_t^2u_\eta^2u_t + \lambda^2\mathsf{K}_t^2u_x^2u_t\right\}\left(3\varkappa^2\lambda - \frac{S}{2}\lambda^3\right)$$

$$= \left(\varkappa^3 - \frac{S}{2}\varkappa\lambda^2 - \frac{T}{3}\lambda^3\right)\left[\left(\frac{S}{3}\varkappa\lambda + \frac{2T}{3}\lambda^2\right)\Sigma + \left(\varkappa^2 - \frac{S}{2}\lambda^2\right)\mathsf{T}\right]$$

$$+\left(\frac{S}{2}\varkappa^2\lambda + T\varkappa\lambda^2 + \frac{S^2}{12}\lambda^3\right)\left[\left(\varkappa^2 + \frac{S}{6}\lambda^2\right)\Sigma + 2\varkappa\lambda\mathsf{T}\right].$$

Vergleicht man nunmehr hier auf beiden Seiten die Coefficienten gleich hoher Potenzen von $\varkappa$, $\lambda$, so erhält man das folgende System linearer Gleichungen:

$$\begin{array}{llll}
\Theta_s^2 u_\vartheta^2 u_s & & & = \mathrm{T} \\
2\mathrm{H}_s^2 u_\eta^2 u_s & & +3\Theta_t^2 u_\vartheta^2 u_t & = \frac{5}{6} S\Sigma \\
\mathrm{K}_s^2 u_\varkappa^2 u_s & +\frac{S}{2}\cdot\Theta_s^2 u_\vartheta^2 u_s & +6\mathrm{H}_t^2 u_\eta^2 u_t & = \frac{5}{3} T\Sigma \\
S\cdot\mathrm{H}_s^2 u_\eta^2 u_s + \frac{2T}{3}\cdot\Theta_s^2 u_\vartheta^2 u_s + 3\mathrm{K}_t^2 u_\varkappa^2 u_t - \frac{S}{2}\cdot\Theta_t^2 u_\vartheta^2 u_t & & & = \frac{5}{3} T\mathrm{T} \\
\frac{S}{2}\cdot\mathrm{K}_s^2 u_\eta^2 u_s + \frac{4T}{3}\cdot\mathrm{H}_s^2 u_\eta^2 u_s - S\cdot\mathrm{H}_t^2 u_\eta^2 u_t & & & = -\frac{5}{18} ST\Sigma + \frac{5}{12} S^2\mathrm{T} \\
\frac{2T}{3}\mathrm{K}_s^2 u_\varkappa^2 u_s & & -\frac{S}{2}\cdot\mathrm{K}_t^2 u_\varkappa^2 u_t & = -\frac{2}{9} T^2\Sigma + \frac{S^3}{72}\Sigma + \frac{ST}{6}\mathrm{T},
\end{array}$$

aus welchem sich durch Auflösung ergiebt*):

$$(92)\quad \begin{array}{ll}
\Theta_s^2 u_\vartheta^2 u_s = \mathrm{T} & \Theta_t^2 u_\vartheta^2 u_t = \frac{1}{6} S\Sigma \\
\mathrm{H}_s^2 u_\eta^2 u_s = \frac{1}{6} S\Sigma & \mathrm{H}_t^2 u_\eta^2 u_t = \frac{1}{3} T\Sigma - \frac{1}{6} S\mathrm{T} \\
\mathrm{K}_s^2 u_\varkappa^2 u_s = -\frac{1}{3} T\Sigma + \frac{1}{2} S\mathrm{T} & \mathrm{K}_t^2 u_\varkappa^2 u_t = -\frac{1}{36} S^2\Sigma + \frac{1}{3} T\mathrm{T}.
\end{array}$$

Mit Anwendung dieser Formeln liefert nun (90) unmittelbar:

$$(92^a)\qquad \Delta^{(\Sigma)} = -\frac{1}{3} T\Sigma + S\mathrm{T}.$$

Die Combination dieser Gleichungen führt nun zu den entsprechenden Bildungen für $\Theta$, $\mathrm{H}$, $\mathrm{K}$ einerseits und $\Pi$, $\mathrm{P}$ andrerseits, nämlich:

$$(93)\quad \begin{array}{ll}
\Theta_p^2 u_\vartheta^2 u_p = -\mathrm{P} & \Theta_r^2 u_\vartheta^2 u_r = -\frac{S}{6}\Pi \\
\mathrm{H}_p^2 u_\eta^2 u_p = -\frac{S}{6}\Pi & \mathrm{H}_r^2 u_\eta^2 u_r = \frac{S}{6}\mathrm{P} - \frac{T}{3}\Pi \\
\mathrm{K}_r^2 u_\varkappa^2 u_p = \frac{S}{6}\mathrm{P} - \frac{T}{3}\Pi & \mathrm{K}_r^2 u_\varkappa^2 u_r = -\frac{1}{12} S^2\Pi + \frac{T}{3}\mathrm{P}.
\end{array}$$

Hieraus nun ergiebt sich der Werth von $\Delta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$:

$$\Delta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = R\{A\Pi - B\mathrm{P}\},$$

wo

$$A = G_{11}G_{222} - 2G_{12}G_{122} + G_{22}G_{112}$$
$$B = G_{11}G_{122} - 2G_{12}G_{112} + G_{22}G_{111},$$

wenn $G_{111}$ etc. die dritten Differentialquotienten von $G$, dividirt durch 12, bedeuten:

$$(94)\quad \begin{aligned}
G_{111} &= \frac{1}{12}\frac{\partial^3 G}{\partial\varkappa^3} = \varkappa \\
G_{112} &= \frac{1}{12}\frac{\partial^3 G}{\partial\varkappa^2\partial\lambda} = -\frac{S}{6}\lambda \\
G_{122} &= \frac{1}{12}\frac{\partial^3 G}{\partial\varkappa\partial\lambda^2} = -\frac{S}{6}\varkappa - \frac{T}{3}\lambda \\
G_{222} &= \frac{1}{12}\frac{\partial^3 G}{\partial\lambda^3} + -\frac{T}{3}\varkappa - \frac{S^2}{12}\lambda.
\end{aligned}$$

---

*) Man kann auch direct $\mathrm{H}_s^2 u_\eta^2 u_s$ aus den Formeln des § 7. (27) entnehmen und durch den Process $\delta$ die übrigen Grössen finden.

Es folgt hieraus, dass $A$ und $B$ die Differentialquotienten nach $\varkappa$ und $\lambda$ von

$$G_{11}G_{22} - G_{12}^2 = -\tfrac{1}{6} S_{\varkappa\lambda}$$

sind, dividirt durch 2. Setzt man also

$$(95)\qquad S_1 = \tfrac{1}{4}\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial \varkappa}, \quad S_2 = \tfrac{1}{4}\frac{\partial S_{\varkappa\lambda}}{\partial \lambda},$$

so ist

$$A = -\tfrac{1}{3} S_2, \quad B = -\tfrac{1}{3} S_1,$$

also

$$(96)\qquad \Delta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{R}{3}\{S_1 \mathrm{P} - S_2 \Pi\},$$

oder auch, nach (57):

$$\Delta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{R^2}{3}\Sigma_{\varkappa\lambda}.$$

Auch die Formel für $\Sigma^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$ lässt sich aus der Formel für $\Theta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$ ableiten. Nach (13) ist

$$\Sigma = (\Theta c u)^2 c_\vartheta u_\vartheta;$$

es entsteht also $\Sigma$ für $f$ aus $\Theta_x{}^2 u_\vartheta v_\vartheta$, wenn $v$ durch $c$, $x$ durch die Determinanten der $c$, $u$ ersetzt wird. Ebenso entsteht also $\Sigma^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$ aus $\Theta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$, indem man zunächst

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\partial\Theta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}}{\partial x_i} y_i$$

bildet und zwei Glieder entstehen lässt, welche bezüglich in $\varkappa$ und $\lambda$ multiplicirt sind. Bei dem einen werden die $y$ durch die $p$, die $u$ durch Determinanten der $p$, $x$, bei dem andern die $y$ durch $r$, die $u$ durch Determinanten $r$, $x$ ersetzt.

Da $\Theta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$ nach $\Theta$, $\mathrm{H}$, $\mathrm{K}$ geordnet ist, so entstehen hierbei die folgenden sechs Bildungen:

$$\begin{gathered}(\vartheta p x)^2\Theta_x\Theta_p, \quad (\eta p x)^2 \mathrm{H}_x\mathrm{H}_p, \quad (\varkappa p x)^2 \mathrm{K}_x\mathrm{K}_p, \\ (\vartheta r x)^2\Theta_x\Theta_r, \quad (\eta r x)^2 \mathrm{H}_x\mathrm{H}_r, \quad (\varkappa r x)^2 \mathrm{K}_x\mathrm{K}_r.\end{gathered}$$

Um diese zu bilden, berechnen wir zunächst die 6 Ausdrücke:

$$\begin{gathered}(\vartheta s x)^2\Theta_x\Theta_s, \quad (\eta s x)^2 \mathrm{H}_x\mathrm{H}_s, \quad (\varkappa s x)^2 \mathrm{K}_x\mathrm{K}_s, \\ (\vartheta t x)^2\Theta_x\Theta_t, \quad (\eta t x)^2 \mathrm{H}_x\mathrm{H}_t, \quad (\varkappa t x)^2 \mathrm{K}_x\mathrm{K}_t.\end{gathered}$$

Da

$$\Theta_x\Theta_y u_\vartheta^2 = (abu)^2 a_x b_y,$$

so wird

$$\Theta_x\Theta_s(\vartheta s x)^2 = (a_s b_x - b_s a_x)^2 a_s b_x,$$

oder, wenn man Terme zusammenzieht, welche durch Vertauschung von Buchstaben in einander übergehen:

$$\Theta_x\Theta_s(\vartheta s x)^2 = a_s^3 \cdot b_x^3 - a_s^2 a_x \cdot b_s b_x^2,$$

Hier ist nach § 10. Formel (46) der erste Theil gleich $Sf$; der zweite entsteht aus

$$a_s^2 a_x u_s = \frac{S}{3} u_x ,$$

indem man $u$ durch $b$ ersetzt und mit $b_x^2$ multiplicirt; er hat also den Werth $\frac{1}{3} Sf$, und demnach ist

$$(\vartheta s x)^2 \Theta_x \Theta_s = \tfrac{2}{3} Sf.$$

Ganz ebenso erhält man die übrigen Formeln der folgenden Tafel:

$$(97) \quad \begin{cases} (\vartheta s x)^2 \Theta_x \Theta_s = \frac{2}{3} Sf & (\vartheta t x)^2 \Theta_x \Theta_t = \frac{2}{3} Tf \\ (\eta s x)^2 \mathsf{H}_x \mathsf{H}_s = \frac{1}{3} (S\Delta + Tf) & (\eta t x)^2 \mathsf{H}_x \mathsf{H}_t = \frac{1}{3} \left(T\Delta + \frac{S^2 f}{6}\right) \\ (\varkappa s x)^2 \mathsf{K}_x \mathsf{K}_s = \frac{2}{3} T\Delta & (\varkappa t x)^2 \mathsf{K}_x \mathsf{K}_t = \frac{1}{9} S^2 \Delta . \end{cases}$$

Durch Combination dieser Gleichungen ergiebt sich sofort:

$$(98) \quad \begin{cases} (\vartheta p x)^2 \Theta_x \Theta_p = 0 & (\vartheta r x)^2 \Theta_x \Theta_r = \frac{2}{3} Rf \\ (\eta p x)^2 \mathsf{H}_x \mathsf{H}_p = -\frac{Rf}{3} & (\eta r x)^2 \mathsf{H}_x \mathsf{H}_r = \frac{1}{3} R\Delta \\ (\varkappa p x)^2 \mathsf{K}_x \mathsf{K}_p = -\frac{2}{3} R\Delta & (\varkappa r x)^2 \mathsf{K}_x \mathsf{K}_r = 0 , \end{cases}$$

und daher, was gesucht wurde:

$$\Sigma^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = R^2 \cdot \left\{ G_{22} \cdot \frac{2\lambda f}{3} + 2\, G_{12} \left(\frac{\varkappa f}{3} - \frac{\lambda\Delta}{3}\right) - G_{11} \cdot \frac{2\varkappa\Delta}{3} \right\},$$

oder

$$(99) \qquad \Sigma^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \tfrac{2}{3} R^2 (G_2 f - G_1 \Delta) = -\tfrac{2}{3} R^2 \Delta_{\varkappa\lambda} .$$

## § 16.

### Weitere Bildungen aus der Form $\varkappa\Pi + \lambda P$.

Aus den im vorigen §. abgeleiteten Bildungen kann man die übrigen zu $\varkappa\Pi + \lambda P$ gehörigen Formen in ähnlicher Weise ableiten, wie dies in § 8. und 9. mit den betreffenden Formen von $\varkappa f + \lambda\Delta$ geschah. Es sei $\varphi$ irgend eine Bildung in Bezug auf $f$; durch den Process $\delta$ entsteht daraus $\delta\varphi$. Die entsprechenden Bildungen für $\varkappa\Pi + \lambda P$ seien

$$\varphi^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} \text{ und } (\delta\varphi)^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} .$$

Nun ist seiner Definition nach

$$\delta\varphi = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial a_{ikh}} \alpha_{ikh} .$$

Für $\varkappa\Pi + \lambda P$ tritt an Stelle von $a_{ikh}$ der Coefficient $\varkappa p_{ikh} + \lambda r_{ikh}$; an Stelle von $\alpha_{ikh}$ aber tritt der betreffende Coefficient von $\Delta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$, d. h. der Ausdruck

$$\frac{R}{3} \left\{ S_1 r_{ikh} - S_2 p_{ikh} \right\} .$$

Daher ist

$$(\delta\varphi)^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{R}{3}\,\Sigma\,\frac{\partial\varphi^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}}{\partial(\varkappa p_{ikh}+\lambda r_{ikh})}\,(S_1 r_{ikh} - S_2 p_{ikh}),$$

oder

$$(100)\qquad (\delta\varphi)^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{R}{3}\left(S_1\,\frac{\partial\varphi^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}}{\partial\lambda} - S_2\,\frac{\partial\varphi^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}}{\partial\varkappa}\right).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung entwickeln wir nun die folgenden Bildungen wie in § 8.

1. Aus

$$\Theta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = R\cdot\left\{G_{11}\mathsf{K} - 2\,G_{12}\mathsf{H} + G_{22}\Theta\right\}$$

folgt, da $\mathsf{H} = \frac{1}{2}\,\delta\Theta$:

$$\mathsf{H}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{R^2}{3}\left\{(S_1G_{112}-S_2G_{111})\,\mathsf{K} - 2(S_1G_{122}-S_2G_{112})\,\mathsf{H} + (S_1G_{222}-S_2G_{122})\,\Theta\right\}.$$

Um diese Formel auf ihre einfachste Gestalt zurückzuführen, muss man folgende Betrachtungen einschalten.

Setzen wir in der binären biquadratischen Form $G$ für den Augenblick $x_1$, $x_2$ für $\varkappa$, $\lambda$ und schreiben symbolisch

$$G = g_x^4 = g_x'^4 \cdots.$$

Dann ist (vgl. Clebsch, Theorie der binären Formen, § 40.):

$$S_{\varkappa\lambda} = -6\,(G_{11}G_{22} - G_{12}{}^2) = -3\,(gg')^2 g_x^2 g_x'^2,$$

und wenn wir symbolisch

$$(gg')^2 g_x^2 g_x'^2 = h = h_x^4 = h_x'^4 \cdots$$

setzen, haben wir

$$(S_1G_{112}-S_2G_{111})y_1{}^2 - 2(S_1G_{122}-S_2G_{112})y_1y_2 + (S_1G_{222}-S_2G_{111})y_2{}^2$$
$$= -3\,h_x^3\,(hg)\,g_x g_y^3\,.$$

Nach § 42. des angeführten Werks ist dies, weil die Invariante $i$ von $G$ verschwindet, unmittelbar aus der Form

$$t_x^6 = (gh)\,h_x^3 g_x^3\,,$$

der Covariante sechster Ordnung von $g$, ableitbar, nämlich gleich $3\,t_x^4\,t_y^2$.

Andrerseits ist nach (42)

$$t_x^6 = -\tfrac{1}{3}\,T_{\varkappa\lambda}\,,$$

und unser Ausdruck hat also auch den Werth:

$$-\tfrac{1}{30}\left\{\frac{\partial^2 T_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa^2}\,y_1{}^2 + 2\,\frac{\partial^2 T_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa\,\partial\lambda}\,y_1y_2 + \frac{\partial^2 T_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda^2}\,y_2{}^2\right\}.$$

Hieraus aber entsteht $\mathsf{H}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$, indem man $y_1{}^2$, $y_1y_2$, $y_2{}^2$ durch $\mathsf{K}$, $-\mathsf{H}$, $\Theta$ ersetzt und mit $\frac{R^2}{3}$ multiplicirt; es ist also

(101) $$\mathsf{H}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\frac{R^2}{90}\left\{\frac{\partial^2 T_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa^2}\,\mathsf{K} - 2\frac{\partial^2 T_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa\,\partial\lambda}\,\mathsf{H} + \frac{\partial^2 T_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda^2}\,\Theta\right\}.$$

2. Aus
$$\Sigma^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \tfrac{1}{3}R^2(G_2 f - G_1\Delta)$$
folgt, da $\delta\Sigma = 3\,\mathsf{T}$:
$$\mathsf{T}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{2R^3}{9}\left\{(S_1G_{22} - S_2G_{12})f - (S_1G_{12} - S_2G_{11})\Delta\right\}.$$

Betrachten wir nun wieder, ähnlich wie oben, den binären Ausdruck
$$(S_1G_{22} - S_2G_{12})\,y_2 + (S_1G_{12} - S_2G_{11})\,y_1 = -3\,(hg)\,h_x^3 g_x^2 g_y.$$
Dies ist ebenso wie oben aus $t_x^6$ ableitbar, nämlich gleich $3\,t_x^5 t_y$, oder gleich
$$-\tfrac{1}{6}\left(\frac{\partial T_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\,y_1 + \frac{\partial T_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda}\,y_2\right).$$

Der gesuchte Ausdruck entsteht hieraus, indem man $y_2$ durch $+f$, $y_1$ durch $-\Delta$ ersetzt, und man hat also:

(102) $$\mathsf{T}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{R^3}{27}\left\{\frac{\partial T_{\varkappa\lambda}}{\partial\varkappa}\,\Delta - \frac{\partial T_{\varkappa\lambda}}{\partial\lambda}\,f\right\}.$$

3. Aus
$$\Delta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{R}{3}\,(S_1\mathsf{P} - S_2\Pi)$$
folgt, da $\delta\Delta = \frac{S}{2}f$ ist:
$$S^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}\cdot(\varkappa\Pi+\lambda\mathsf{P}) = \tfrac{2}{3}R^2\left[(S_1S_{12} - S_2S_{11})\,\mathsf{P} - (S_1S_{22} - S_2S_{12})\,\Pi\right],$$
wo, analog den bei $G$ gebrauchten Bezeichnungen, die $S$ mit doppeltem Index die zweiten Differentialquotienten von $S$, dividirt durch 12, bedeuten. Setzt man $S_{11}\varkappa + S_{12}\lambda$ für $S_1$, $S_{21}\varkappa + S_{22}\lambda$ für $S_2$, so wird die obige Gleichung durch $\varkappa\Pi + \lambda\mathsf{P}$ theilbar und es bleibt
$$S^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\tfrac{2}{3}R^2\cdot(S_{11}S_{22} - S_{12}{}^2).$$

Nun ist nach den oben eingeführten Bezeichnungen und nach den citirten Formeln:
$$S_{11}S_{22} - S_{12}{}^2 = \tfrac{2}{3}\,(hh')^2 h_x^2 h_x'^2 = \tfrac{2}{3}\left(\frac{jG}{3} - \frac{ih}{6}\right),$$
oder, da $i = 0$, $j = -\frac{3}{2}R$ ist (§ 12.):

(103) $$S_{11}S_{22} - S_{12}{}^2 = -R\cdot G,$$

und daher

(104) $$S^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \tfrac{2}{3}R^3\cdot G.$$

4. Hieraus ergiebt sich weiter, da $\delta S = 4\,T$ ist:

(105) $$T^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \tfrac{2}{3}R^4(S_1G_2 - G_1S_2) = -\tfrac{1}{3}R^4 T_{\varkappa\lambda}.$$

5. Den Ausdruck für $\mathsf{K}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$ kann man aus $\mathsf{H}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$ bilden,

analog den Betrachtungen des § 9., Formel (42). Es ist aber etwas bequemer, in folgender Art zu verfahren. Die Form $\mathsf{K}$ entsteht aus $\Theta$, wenn man darin $f$ durch $\Delta$ ersetzt; da nun

$$\Delta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{R}{3}\,(S_1\mathsf{P} - S_2\Pi)\,,$$

so ist

$$\mathsf{K}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{R^2}{9}\cdot\Theta^{(S_1P-S_2\Pi)}.$$

Es ist also nur der zweite Factor rechts noch zu bilden. Nun war

$$\Theta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = R\cdot\left\{G_{11}\mathsf{K} - 2\,G_{12}\mathsf{H} + G_{22}\Theta\right\}.$$

Hierin ist $\varkappa$ durch $-S_2$, $\lambda$ durch $S_1$ zu ersetzen. Die Klammergrösse aber entstand aus $g_x^2 g_y^2$, wenn man die Quadrate und Producte der $y$ durch $\mathsf{K}$, $-\mathsf{H}$, $\Theta$ ersetzte; zu betrachten ist also der Ausdruck, welcher aus $g_x^2 g_y^2$ hervorgeht, wenn man darin die $x$ durch

$$-S_2 = 3\,h_2 h_x^3\,,\qquad S_1 = -3\,h_1' h_x'^3$$

ersetzt. Dann hat man den Ausdruck vor sich:

$$9\,(gh)\,(gh')\,h_x^3\,h_x'^3\,g_y^2\,.$$

Dieser geht durch die Identität

$$(gh)\,(gh')\,h_x h_x' = \tfrac{1}{2}\left\{(gh)^2 h_x'^2 + (gh')^2 h_x^2 - (hh')^2 g_x^2\right\}$$

in

$$9\,g_y^2 h_x^2 h_x'^2\left\{(gh)^2 h_x'^2 - \tfrac{1}{2}\,(hh')^2 g_x^2\right\}$$

über, oder da nach dem Frühern

$$(hh')^2 h_x^2 h_x'^2 = \frac{j}{3}\cdot G$$

war, in:

$$9\,h\cdot(gh)^2 g_y^2 h_x^2 - \tfrac{3}{2}\,jG\cdot g_x^2 g_y^2\,.$$

Für das Glied $(gh)^2 g_y^2 h_x^2$ aber kann man identisch setzen (Bin. Form. § 8.):

$$(gh)^2 g_y^2 h_x^2 = \varphi_x^2\varphi_y^2 + (xy)\cdot\psi_x\psi_y + \tfrac{1}{3}\,(xy)^2\cdot\chi\,,$$

wo $\varphi_x^4$, $\psi_x^2$, $\chi$ die Formen bedeuten:

$$\varphi_x^4 = (gh)^2 g_x^2 h_x^2$$
$$\psi_x^2 = (gh)^3 g_x h_x$$
$$\chi\;\; = (gh)^4.$$

Nach B. F. § 40. aber folgt, wenn, wie hier, $i = 0$ ist, $\varphi_x^4 = 0$, $\psi_x^2 = 0$, $\chi = j$. Also ist

$$(gh)^2 g_y^2 h_x^2 = \tfrac{1}{3}\,j\cdot(xy)^2,$$

so dass unser Ausdruck gleich

$$3j\left[h\cdot(xy)^2-\frac{G}{2}\cdot g_x^2 g_y^2\right]$$

wird. Da nun

$$j=-\tfrac{2}{3}R,\quad h=-\tfrac{1}{3}S_{\varkappa\lambda}$$

ist, und ferner $\mathsf{K}$, $-\mathsf{H}$, $\Theta$ für $y_1^2$, $y_1y_2$, $y_2^2$ und $\varkappa$, $\lambda$ für $x_1$, $x_2$ zu setzen ist, so hat man:

$$\Theta^{(S_1P-S_2\Pi)}=\frac{R^2}{3}\left\{2S_{\varkappa\lambda}(\varkappa^2\Theta+2\varkappa\lambda\mathsf{H}+\lambda^2\mathsf{K})+3G(G_{11}\mathsf{K}-2G_{12}\mathsf{H}+G_{22}\Theta)\right\},$$

und daher auch:

$$(106)\quad \mathsf{K}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}=\frac{R^4}{27}\left\{2S_{\varkappa\lambda}(\varkappa^2\Theta+2\varkappa\lambda\mathsf{H}+\lambda^2\mathsf{K})+3G(G_{11}\mathsf{K}-2G_{12}\mathsf{H}+G_{22}\Theta)\right\}.$$

6. Endlich schliessen sich an die Bildungen von $\Sigma$, $\Pi$ für $\varkappa\Pi+\lambda\mathsf{P}$ auch die Bildungen von $\Pi$ und $\mathsf{P}$ an. Da $\Pi=S\mathsf{T}-T\Sigma$, so hat man mit Hülfe der oben abgeleiteten Formeln:

$$\Pi^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}=\tfrac{4}{27}R^6\cdot\left\{G\cdot(T_1\Delta-T_2f)+T_{\varkappa\lambda}(G_2f-G_1\Delta)\right\}.$$

Setzt man $G_1\varkappa+G_2\lambda$ für $G$, $T_1\varkappa+T_2\lambda$ für $T_{\varkappa\lambda}$, so erhält man für die rechte Seite sofort:

$$-\tfrac{4}{27}R^6\cdot(G_1T_2-G_2T_1)\cdot(\varkappa f+\lambda\Delta).$$

Der Ausdruck $G_1T_2-G_2T_1$ hat dem Vorigen nach den symbolischen Ausdruck:

$$-3(gt)\,g_x^3t_x^5,$$

was nach B. F. § 42. gleich $\frac{3h^2}{2}$, also gleich $\frac{1}{6}S_{\varkappa\lambda}^2$ ist. Und so findet man also:

$$(107)\qquad \Pi^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}=-\tfrac{2}{81}R^6\cdot S_{\varkappa\lambda}^2(\varkappa f+\lambda\Delta).$$

Die Gleichung enthält die wesentlichste Eigenschaft der (nach Aronhold) zu $f$ *conjugirten Form* $\Pi$; wenn man sie für $\Pi$ selbst bildet, erhält man wieder $f$, indem nach (107) für $\varkappa=1$, $\lambda=0$

$$\Pi^{(\Pi)}=-\tfrac{2}{81}R^6S^2f$$

wird.

7. Die Bildung von $\mathsf{P}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$ erfolgt aus (107) sofort, indem man bemerkt, dass $\mathsf{P}=\delta\Pi$. Man erhält dann nach (100):

$$(108)\qquad \mathsf{P}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}=-\tfrac{2}{243}R^7S_{\varkappa\lambda}^2\cdot(S_1\Delta-S_2f).$$

8. Aus $\mathsf{P}$ geht $R$ hervor, indem man in $\mathsf{P}$ die $u$ durch Symbole $a$ ersetzt; denn aus den Formeln

$$(109)\qquad a_s^3=S,\quad \alpha_s^3=T,\quad a_t^3=T,\quad \alpha_t^3=\frac{S^2}{6}$$

folgt

$$T\cdot a_t^3-\frac{S^2}{6}\cdot a_s^3=R.$$

Ebenso ergiebt sich also $R^{(\varkappa \Pi + \lambda P)}$ aus $\mathsf{P}^{(\varkappa \Pi + \lambda P)}$, indem man zwei Theile bildet, die bez. mit $\varkappa$ und $\lambda$ multiplicirt, und aus $\mathsf{P}^{(\varkappa \Pi + \lambda P)}$ entstehen, indem man die $x$ bez. durch Symbole $p$ oder $r$ ersetzt. Daher ist

$$R^{(\varkappa \Pi + \lambda P)} = -\tfrac{2}{243} R^7 S^2_{\varkappa\lambda} \left\{ S_1 (\varkappa \alpha_p^3 + \lambda \alpha_r^3) - S_2 (\varkappa a_p^3 + \lambda a_r^3) \right\}.$$

Nun folgt aus (109)

$$a_p^3 = 0, \quad \alpha_p^3 = -R, \quad a_r^3 = R, \quad \alpha_r^3 = 0,$$

daher geht diese Gleichung über in

$$(110) \qquad R^{(\varkappa \Pi + \lambda P)} = \tfrac{2}{243} R^8 S^3_{\varkappa\lambda}.$$

Man erhält dieselbe, indem man $R^{(\varkappa \Pi + \lambda P)}$ aus (104), (105) zusammensetzt und rechts die Formel $85^b$ in Anwendung bringt.

## § 17.

### Bildung der Ausdrücke $N$, $\mathsf{N}$, $L$, $M$, $\Lambda$, $\mathsf{M}$ und $\psi$ für die Grundform $\varkappa\Pi + \lambda\mathsf{P}$.

Wir kommen jetzt zu der Untersuchung von $N$, $\mathsf{N}$ und den damit zusammenhängenden Bildungen. Insbesondre setzen uns die obigen Formeln in den Stand, auch von der $N$ dualistisch gegenüberstehenden Form $\mathsf{N}$ ausgehende Bildungen zu untersuchen, was uns auf die einzige Form führen wird, welche dem oben behandelten Formenkreise noch fehlt.

Die Form $N$ war definirt durch die Formel

$$N = a_x^2 \alpha_x^2 (a \alpha u).$$

Um nun $N^{(\varkappa \Pi + \lambda P)}$ zu bilden, hat man für die $u$ die Grössen $x$, für die Differentialquotienten von $f$ und $\Delta$ aber beziehungsweise die von

$$\varkappa\Pi + \lambda\mathsf{P} \text{ und } \Delta^{(\varkappa \Pi + \lambda P)} = \frac{R}{3}(S_1 \mathsf{P} - S_2 \Pi)$$

zu setzen. Es ist also die neue Form gleich $\frac{R}{3}$, multiplicirt mit der Determinante der Grössen

$$\tfrac{1}{3}\left\{\varkappa \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} + \lambda \frac{\partial \mathsf{P}}{\partial u_i}\right\}, \quad \tfrac{1}{3}\left\{S_1 \frac{\partial \mathsf{P}}{\partial u_i} - S_2 \frac{\partial \Pi}{\partial u_i}\right\}, \quad x_i.$$

Dies aber ist gleich $(\varkappa S_1 + \lambda S_2)$, multiplicirt mit der Determinante der Grössen

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial \Pi}{\partial u_i}, \quad \tfrac{1}{3}\frac{\partial \mathsf{P}}{\partial u_i}, \quad x_i,$$

oder der Grössen

$$\tfrac{1}{3}\left(S \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_i} - T \frac{\partial \Sigma}{\partial u_i}\right), \quad \tfrac{1}{3}\left(T \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_i} - \frac{S^2}{6}\frac{\partial \Sigma}{\partial u_i}\right), \quad x_i,$$

und diese zerfällt in $T^2 - \frac{S^3}{6}$ multiplicirt mit der Determinante der Grössen

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial u_i}, \quad \tfrac{1}{3}\frac{\partial \Sigma}{\partial u_i}, \quad x_i,$$

d. h. mit $-\mathsf{N}$. Demnach ist endlich

$$N^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\frac{R^2}{3} S_{\varkappa\lambda}\cdot \mathsf{N}. \tag{111}$$

In ähnlicher Weise findet man den Werth von $\mathsf{N}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$. Er ist zunächst ausgedrückt durch die Determinante der Grössen

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial \Sigma^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}}{\partial x_i}, \quad \tfrac{1}{3}\frac{\partial \mathsf{T}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}}{\partial x_i}, \quad u_i.$$

Führen wir nun die Ausdrücke

$$\Sigma^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \tfrac{2}{3} R^2 (G_2 f - G_1 \Delta)$$
$$\mathsf{T}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \tfrac{2}{9} R^3 (T_1 \Delta - T_2 f)$$

ein, so finden wir $\frac{4}{27} R^5$ multiplicirt mit der Determinante der Grössen

$$\tfrac{1}{3}\left\{G_2\frac{\partial f}{\partial x_i} - G_1\frac{\partial \Delta}{\partial x_i}\right\}, \quad \tfrac{1}{3}\left\{T_1\frac{\partial \Delta}{\partial x_i} - T_2\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}, \quad u_i.$$

Diese zerfällt in das Product von $T_1 G_2 - G_1 T_2$ mit der Determinante der Grössen

$$\tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \tfrac{1}{3}\frac{\partial \Delta}{\partial x_i}, \quad u_i,$$

d. h. mit $N$, und man hat also

$$\mathsf{N}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \tfrac{4}{27} R^5 (T_1 G_2 - G_1 T_2)\cdot N.$$

Endlich wurde schon oben ad 6. gezeigt, dass

$$G_1 T_2 - T_1 G_2 = \tfrac{1}{6} S_{\varkappa\lambda}^2,$$

und daher bleibt endlich

$$\mathsf{N}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\tfrac{2}{81} R^5 S_{\varkappa\lambda}^2 \cdot N. \tag{112}$$

Die Untersuchung der Formen $L$, $M$ für die Function $\varkappa\Pi + \lambda \mathsf{P}$ erfordert zunächst die Darstellung gewisser Bildungen, die wir entsprechend früheren Beziehungen durch

$$\Theta_\Sigma, \quad \Theta_T, \quad \mathsf{H}_\Sigma, \quad \mathsf{H}_T, \quad \mathsf{K}_\Sigma, \quad \mathsf{K}_T$$

bezeichnen. Es ist z. B.

$$\Theta_\Sigma = (abu)^2 b_x a_s u_s^2 = \tfrac{1}{6}\,\Sigma\frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\frac{\partial \Sigma}{\partial u_i};$$

diese Form entsteht aus der Formel (§ 10., F. 46)

$$f_\Sigma = a_x^2 a_s u_s^2 = \mathsf{H} + \frac{S}{6} u_x^2$$

hervor, indem man die $x$ durch Determinanten der $b$, $u$ ersetzt und mit $b_x$ multiplicirt. Demnach wird

$$\Theta_\Sigma = (a\alpha u)^2 (abu)(\alpha bu)\, b_x\,,$$

was nach 78ᵃ den Werth hat:

$$\Theta_\Sigma = -\tfrac{2}{3}\Lambda + \tfrac{1}{3}\mathrm{T}\,.\,u_x\,.$$

In gleicher Weise, bez. durch Anwendung der Operation $\delta$, findet man die andern Formeln der folgenden Tafel:

$$(113)\begin{cases}\Theta_\Sigma = -\tfrac{2}{3}\Lambda + \tfrac{1}{3}\mathrm{T}\cdot u_x & \Theta_T = -\tfrac{2}{3}\mathrm{M} + \frac{S}{18}\Sigma\cdot u_x\\ \mathrm{H}_\Sigma = \tfrac{2}{3}\mathrm{M} + \tfrac{1}{18}S\Sigma\cdot u_x & \mathrm{H}_T = \frac{S}{9}\Lambda + \left(\frac{T}{9}\Sigma - \frac{S}{18}\mathrm{T}\right)\cdot u_x\\ \mathrm{K}_\Sigma = \frac{S}{3}\Lambda + \left(\frac{S}{6}\mathrm{T} - \frac{T}{9}\Sigma\right)\cdot u_x & \mathrm{K}_T = -\frac{S}{9}\mathrm{M} + \frac{4T}{9}\Lambda + \left(\frac{T}{6}\mathrm{T} - \frac{S^2}{108}\Sigma\right)\cdot u_x\,.\end{cases}$$

Die Combination dieser Gleichungen giebt:

$$(114)\begin{cases}\Theta_\Pi = -\tfrac{2}{3}S\mathrm{M} + \tfrac{2}{3}T\Lambda - \frac{\mathrm{P}}{3}u_x\,, & \Theta_P = -\tfrac{2}{3}T\mathrm{M} + \frac{S^2}{9}\Lambda - \frac{S}{18}\Pi u_x\\ \mathrm{H}_\Pi = \frac{S^2}{9}\Lambda - \tfrac{2}{3}T\mathrm{M} - \frac{S\Pi}{18}u_x\,, & \mathrm{H}_P = \frac{ST}{9}\Lambda - \frac{S^2}{9}\mathrm{M} + \left(\frac{S}{18}\mathrm{P} - \frac{T}{9}\Pi\right)u_x\\ \mathrm{K}_\Pi = -\frac{S^2}{9}\mathrm{M} + \frac{ST}{9}\Lambda + \left(\frac{S\mathrm{P}}{18} - \frac{T\Pi}{9}\right)u_x\,, & \mathrm{K}_P = -\frac{ST}{9}\mathrm{M} + \left(\tfrac{4}{3}T^2 - \frac{S^3}{18}\right)\Lambda + \left(\frac{T}{9}\mathrm{P} - \frac{S^2}{36}\Pi\right)u_x\,.\end{cases}$$

Ebenso kann man die Ausdrücke von

$$f_\Theta\,,\quad \Delta_\Theta\,,\quad f_H\,,\quad \Delta_H\,,\quad f_K\,,\quad \Delta_K\,.$$

mit $L$, $M$ in Zusammenhang bringen.

Man hat

$$f_\Theta = (abc)(abu)\, a_x b_x c_x^2\,.$$

Wird hier $c$ mit $a$ und $b$ vertauscht und der dritte Theil der Summe aller drei Darstellungen eingeführt, so hat man

$$\begin{aligned} f_\Theta &= (abc)\, a_x b_x c_x\cdot\tfrac{1}{3}\left\{(abu)\, c_x - (acu)\, b_x + (bcu)\, a_x\right\}\\ &= \tfrac{1}{3}(abc)^2 a_x b_x c_x\cdot u_x = \tfrac{1}{3}\Delta u_x\,.\end{aligned}$$

Ferner ist (69)

$$\Delta_\Theta = (abu)(ab\alpha)\, a_x^2 = \tfrac{4}{3}L + \tfrac{1}{18}Sf\cdot u_x\,.$$

Indem man auf die gefundenen Formeln den Process $\delta$ anwendet, erhält man folgende Tafel:

$$(115)\begin{cases} f_\Theta = \tfrac{1}{3}\Delta u_x & \Delta_\Theta = \tfrac{4}{3}L + \frac{Sf}{18}u_x\\ f_H = -\tfrac{2}{3}L + \frac{Sf}{18}u_x & \Delta_H = \tfrac{2}{3}M + \tfrac{1}{18}(2Tf - S\Delta)u_x\\ f_K = -\tfrac{4}{3}M + \tfrac{1}{18}u_x(2Tf - S\Delta) & \Delta_K = \left(-\frac{T\Delta}{9} + \frac{S^2 f}{36}\right)u_x\,.\end{cases}$$

Gehen wir nun von der Formel (115)

$$L = \tfrac{3}{4}\,\Delta_\Theta - \frac{Sf}{24}\,u_x$$

aus und setzen darin für $f$ immer $\varkappa\Pi + \lambda P$. Indem wir durch das Congruenzzeichen andeuten, dass Glieder mit dem Factor $u_x$ ausgelassen sind, haben wir dann (F. 91 und 96)

$$\begin{aligned} L^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} &\equiv \tfrac{3}{4}\,\Delta^{\Theta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}}_{(\varkappa\Pi+\lambda P)} \\ &\equiv \frac{R^2}{4}\,\{-(G_{11}\mathsf{K}_\Pi - 2\,G_{12}\mathsf{H}_\Pi + G_{22}\Theta_\Pi)\,S_2 \\ &\qquad + (G_{11}\mathsf{K}_P - 2\,G_{12}\mathsf{H}_P + G_{22}\Theta_P)\,S_1\}\,. \end{aligned}$$

Nun entstehen die nicht mit $u_x$ multiplicirten Glieder in $\mathsf{K}_\Pi$ etc. (114), wenn man in den Ausdrücken ((41) und § 16.)

$$\tfrac{2}{3}\,S_{111}\,,\quad \tfrac{2}{3}\,S_{112}\,,\quad \tfrac{2}{3}\,S_{122}\,,\quad \tfrac{2}{3}\,S_{222}$$

die Veränderlichen (etwa $y_1$, $y_2$) durch $-\mathsf{M}$ und $\Lambda$ ersetzt. Dann wird aber der rechte Theil der obigen Gleichung bis auf Glieder mit $u_x$ gleich $\frac{2}{3}\,\mathrm{R}^2$ multiplicirt mit der binären Bildung

$$(gh')^2\,(hh')\,h_x^3 h_y' g_x^2\,.$$

Dieser Ausdruck ist zu bestimmen. Er entsteht aus $(gh')^2 h_y'^2 g_x^2$, wenn man nach dem $y$ differenzirt und mit $-\frac{1}{2}\,h_2\,h_x^3$, $\frac{1}{2}\,h_1\,h_x^3$ multiplicirt. Nun ist (B. F. § 8.)

$$(gh')^2\,h_y'^2\,g_x^2 = \varphi_x^2\,\varphi_y^2 + (xy)\,\psi_x\psi_y + \tfrac{1}{3}\,\chi\cdot(xy)^2,$$

wo

$$\begin{aligned} \varphi_x^4 &= (gh')^2\,g_x^2\,h_x'^2 = \frac{i}{6}\,G = 0 \\ \psi_x^2 &= (gh')^3\,g_x\,h_x' = 0 \\ \chi &= (gh')^4 = j = -\tfrac{2}{3}\,R\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Demnach ist

$$(gh')^2\,(hh')\,h_x^3 h_y' g_x^2 = -\tfrac{1}{3}\,j\cdot h\cdot(xy) = -\tfrac{2}{27}\,R\cdot(xy)\,S_{\varkappa\lambda}$$

und daher endlich:

$$L^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} \equiv -\tfrac{1}{9}\,R^3\cdot S_{\varkappa\lambda}\,(\varkappa\Lambda + \lambda\mathsf{M})\,.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass diese Congruenz zugleich eine Gleichung ist. Nehmen wir an, es müsse rechts $A\cdot u_x$ hinzugefügt werden, wo $A$ eine Form dritter Classe ist. Unterwirft man beide Seiten der Gleichung dem Processe

$$\Sigma\,\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial u_i}\,,$$

so geben $L$, $\Lambda$, $\mathsf{M}$ ihrer ursprünglichen Definition nach (67 und 74)

Null, und man erhält daher $0 = 6A$, daher $A = 0$. Es bleibt sonach

(116) $$L^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\tfrac{1}{6} R^3 S_{\varkappa\lambda} (\varkappa\Lambda + \lambda \mathsf{M}).$$

Nach (100) folgt hieraus sofort:

(117) $$M^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\tfrac{1}{27} R^4 S_{\varkappa\lambda} (S_1 \mathsf{M} - S_2 \Lambda).$$

In ähnlicher Weise erhält man aus der Formel (103):

$$\Lambda = -\tfrac{3}{2} \Theta_\Sigma + \tfrac{1}{2} \mathrm{T} \cdot u_x$$

die Congruenz:

$$\Lambda^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} \equiv -R^3 \{G_2 [G_{11} f_K - 2 G_{12} f_H + G_{22} f_\Theta] \\ - G_1 [G_{11} \Delta_K - 2 G_{12} \Delta_H + G_{22} \Delta_\Theta]\},$$

also nach (115)

$$\Lambda^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} \equiv \tfrac{4}{3} R^3 \{(G_{11} G_2 - G_{12} G_1) M + (G_{22} G_1 - G_{12} G_2) L\},$$

oder, nach oft angewandten Methoden:

(118) $$\Lambda^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\tfrac{2}{3} R^3 S_{\varkappa\lambda} (\varkappa L + \lambda M).$$

Dass die Congruenz in eine Gleichung übergeht, folgt, wie oben. Endlich, nach (100):

(119) $$\mathsf{M}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\tfrac{2}{27} R^4 S_{\varkappa\lambda} (S_1 M - S_2 L).$$

Die Form $\psi$, welche symbolisch durch den Ausdruck (§ 13.)

$$\psi = \tfrac{1}{2} (a \alpha N) \{a_n \alpha_x + \alpha_n a_x\} a_\alpha \alpha_x N_x^3$$

gegeben war, entsteht aus

$$L = a_n N_x^3 a_x (aNu), \quad M = \alpha_n N_x^3 \alpha_x (\alpha N u),$$

indem man in $M$ die $u_i$ durch $a_i a_x^2$, in $L$ die $u_i$ durch $\alpha_i \alpha_x^2$ ersetzt und die Differenz bildet. Dann hat man

(120) $$\psi = \tfrac{1}{2} (f_M - \Delta_L),$$

die Bezeichnungen $f_M$, $\Delta_L$ wie früher ähnliche verstanden.

Bilden wir nun diese Gleichung für $\varkappa\Pi + \lambda \mathrm{P}$, so haben wir:

$$\psi^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\tfrac{1}{54} R^4 S_{\varkappa\lambda} \{\varkappa S_1 \Pi_M + \lambda S_1 \mathrm{P}_M - \varkappa S_2 \Pi_\Lambda - \varkappa S_2 \mathrm{P}_\Lambda\} \\ + \tfrac{1}{54} R^4 S_{\varkappa\lambda} \{\varkappa S_1 \mathrm{P}_\Lambda + \lambda S_1 \mathrm{P}_M - \varkappa S_2 \Pi_\Lambda - \lambda S_2 \Pi_M\},$$

oder

(121) $$\psi^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \tfrac{1}{54} R^4 S_{\varkappa\lambda}^2 \{\Pi_M - \mathrm{P}_\Lambda\}.$$

Die Form sechster Classe, welche sich rechts in der Klammer befindet, wollen wir durch

(122) $$\Phi = \Pi_M - \mathrm{P}_\Lambda$$

bezeichnen. Diese Form ist, wie $\psi$, eine Combinante. Man sieht dies ein, indem man $\psi^{(\varkappa\Pi+\lambda P)}$ nach F. 62 in Symbolen $v$ ausdrückt. Da

$$\psi = N_{\varkappa'} N'_\varkappa N_x^3 N'^3_x$$

war, und (§ 11.)

$$N^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\frac{R^2}{3} S_{\varkappa\lambda} \cdot \mathrm{N}$$

$$= -\frac{R^2}{3} S_{\varkappa\lambda} \cdot \mathrm{N}_x u_\nu^3,$$

so hat man auch

$$\psi^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{R^4}{9} S^2_{\varkappa\lambda} \cdot N_{\nu'} N'_\nu u_\nu^3 u_{\nu'}^3,$$

daher, wenn man dies mit (121) vergleicht:

(123) $$\Phi = 6 \cdot \mathrm{N}_{\nu'} N'_\nu u_\nu^3 u_{\nu'}^3 .$$

Es ist also $\Phi$ aus N ebenso gebildet wie $\psi$ aus $N$, und da N selbst eine Form war, die zu $N$ gehört, so ist dasselbe mit $\Phi$ der Fall. Somit ist $\Phi$ eine der Form $\psi$ gewissermassen dualistisch gegenüberstehende Combinante. Vermöge der Eigenschaften der Combinanten hat man:

(124) $$\Phi_{\varkappa\lambda} = G^4 \cdot \Phi .$$

Bildet man nun $\Phi$ für $\varkappa\Pi + \lambda\mathrm{P}$, so gelangt man wieder zu $\psi$ zurück. Da

$$\Pi^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\tfrac{2}{81} R^6 \cdot S^3_{\varkappa\lambda} (\varkappa f + \lambda\Delta),$$

$$\mathrm{P}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\tfrac{2}{243} R^7 \cdot S^2_{\varkappa\lambda} (S_1\Delta - S_2 f),$$

$$\Lambda^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\tfrac{2}{9} R^3 \cdot S_{\varkappa\lambda} (\varkappa L + \lambda M);$$

$$\mathrm{M}^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = -\tfrac{2}{27} R^4 \cdot S_{\varkappa\lambda} (S_1 M - S_2 L),$$

so folgt mit Hülfe von (120):

(125) $$\Phi^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \frac{8}{3^7} \cdot R^{10} S^4_{\varkappa\lambda} \cdot \psi .$$

## § 18.

### Die zugehörigen Formen $F$ und $\Phi$.

Die Form $\Phi$ ist keine unzerfällbare. Man sieht dies schon daraus, dass bei ihrer Bildung die Formen $\Pi$, P benutzt sind, welche theils $S$, theils $T$ zum Factor haben.

In der That enthält $\Phi$ ausser den bisher behandelten Formen nur die in § 1., F. 3 angegebene Form sechster Classe

(126) $$F = (abu)^2 (cdu)^2 (acu) (bdu) = (\Theta\Theta' u)^2 u_\vartheta^2 u_{\vartheta'}^2 .$$

Die Theorie dieser Form und ihren Zusammenhang mit $\Phi$ wollen wir nunmehr entwickeln. Wir betrachten zu diesem Zwecke zunächst das System der 6 Formen, welche aus dem obigen Ausdrucke von $F$ entstehen, wenn man für eines der $\Theta$ oder für beide $\mathsf{H}$ oder $\mathsf{K}$ einführt, und welche die Coefficienten von $F_{\varkappa\lambda}$ sind. Bezeichnen wir dieselben der Kürze wegen durch $[\Theta\Theta]$ etc., so ist zunächst

$$[\Theta\,\Theta] = F.$$

Sodann hat man, indem man die erste Formel (46) benutzt, um $\mathsf{H}$ durch $a_s u_s^2 a_x^2$ auszudrücken:

$$[\Theta\mathsf{H}] = (a\Theta u)^2 a_s u_s^2 u_\vartheta^2 = (abu)(acu)(bcu)^2 a_s u_s^2 .$$

Vertauscht man hier $a$ mit $b$ und $c$ und setzt für die rechte Seite $\frac{1}{3}$ der Summe aller drei Bildungen, so hat man:

$$\begin{aligned}[\Theta\mathsf{H}] &= \tfrac{1}{3}(abu)(acu)(bcu) u_s^2 \left\{(bcu) a_s - (acu) b_s + (abu) c_s\right\} \\ &= \tfrac{1}{3} u_s^3 \cdot abu \cdot acu \cdot bcu \cdot abc = \tfrac{1}{3} \Sigma^2 .\end{aligned}$$

Ebenso findet man für $[\Theta\mathsf{K}]$ seinen Ausdruck, indem man $\mathsf{K}$ nach (46) durch

$$2 f_T - \frac{S\Theta}{6} - \frac{T}{8} u_x^2$$

ersetzt. Dies giebt

$$[\Theta\mathsf{K}] = 2 (a\Theta u)^2 a_t u_t^2 u_\vartheta^2 - \frac{S}{6} [\Theta\Theta] ,$$

oder, wenn man den ersten Theil rechts wie oben $[\Theta\mathsf{H}]$ behandelt:

$$[\Theta\mathsf{K}] = \tfrac{2}{3} \Sigma\mathsf{T} - \frac{S}{6} F.$$

Indem man nun auf die entwickelten Formeln den Process $\delta$ anwendet, erhält man folgende Tafel:

(127) $$\left\{\begin{array}{ll} [\Theta\Theta] = F; & [\mathsf{H}\mathsf{K}] = -\frac{T}{3} F + \mathsf{T}^2 \\ [\mathsf{H}\,\mathsf{H}] = -\frac{S}{6} F + \frac{2}{3} \Sigma\mathsf{T}; & [\Theta\,\mathsf{K}] = -\frac{S}{6} F + \frac{2}{3} \Sigma\mathsf{T} \\ [\mathsf{K}\,\mathsf{K}] = -\frac{S^2}{12} F + \frac{2}{3} S\Sigma\mathsf{T} - \frac{4}{3} T\Sigma^2; & [\Theta\mathsf{H}] = \frac{1}{3}\Sigma^2 \end{array}\right.$$

und insbesondere

(128) $$\delta F = \tfrac{4}{3} \Sigma^2 .$$

Aus (127) folgt sofort:

(129) $$F_{\varkappa\lambda} = G\cdot F + \tfrac{4}{3}\Sigma^2\varkappa^3\lambda + 4\Sigma\mathsf{T}\varkappa^2\lambda^2 + 4\mathsf{T}^2\varkappa\lambda^3 + (\tfrac{2}{3}S\Sigma\mathsf{T} - \tfrac{4}{3}T\Sigma^2)\lambda^4.$$

Um nun $F$ auch für $\varkappa\Pi + \lambda\mathsf{P}$ zu bilden, braucht man nur zu beachten, wie $F$ sich aus $\Theta$ zusammensetzt, und an Stelle von $\Theta$ den Ausdruck

$$\Theta^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = R\left\{G_{11}\mathsf{K} - 2\,G_{12}\mathsf{H} + G_{22}\Theta\right\}$$

zu setzen. Vergleicht man den so entstehenden Ausdruck mit $F_{\varkappa\lambda}$, so sieht man, dass er aus diesem hervorgehen muss, wenn man an Stelle von $\varkappa^2$, $\varkappa\lambda$, $\lambda^2$ die Grössen $G_{22}$, $-G_{12}$, $G_{11}$ setzt, an Stelle der Ausdrücke $[\Theta\Theta]$ die nach dem Schema von

$$[\vartheta\vartheta] = (\vartheta\vartheta' x)^2\,\Theta_x^2\,\Theta_x'^2$$

gebildeten setzt und endlich mit $R^2$ multiplicirt. Man hat also zunächst die Ausdrücke $[\vartheta\vartheta]$ zu bilden. Nun entsteht $[\vartheta\vartheta]$ aus $\Theta = \Theta_x'^2 u_\vartheta^2 = (abu)^2\,a_x b_x$, wenn man die $u$ durch Determinanten der $\vartheta$, $x$ ersetzt und mit $\Theta_x^2$ multiplicirt. Dabei geht $(abu)$ in $a_\vartheta b_x - b_\vartheta a_x$ über, und man hat also zunächst

$$[\vartheta\vartheta] = (a_\vartheta b_x - b_\vartheta a_x)^2\,\Theta_x{}^2 a_x b_x\,,$$

oder, wenn man Glieder vereinigt, welche durch Vertauschung von Buchstaben in einander übergehen:

$$[\vartheta\vartheta] = 2f\cdot\Theta_x^2 a_\vartheta^2\,a_x - 2\,\Theta_x^2\,a_x^2\,b_x^2\,a_\vartheta\,b_\vartheta\,.$$

Im ersten Theile rechts ist

$$\Theta_x^2\,a_\vartheta^2\,a_x = (abc)^2\,a_x\,b_x c_x = \Delta\,;$$

der zweite Theil giebt

$$\Theta_x^2\,a_\vartheta b_\vartheta a_x^2 b_x^2 = (acd)\,(bcd)\,a_x^2\,b_x^2\,c_x d_x\,,$$

also, wenn man $a$ mit $c$ und $d$ vertauscht und $\frac{1}{3}$ der entstehenden Ausdrücke einführt:

$$\begin{aligned}\Theta_x^2 a_\vartheta b_\vartheta a_x^2 b_x^2 &= \tfrac{1}{3}\,(acd)a_x b_x^2 c_x d_x\left\{(bcd)\,a_x - (bad)c_x - (bca)\,d_x\right\}\\ &= \tfrac{1}{3}\,(acd)^2\,a_x\,b_x^3\,c_x\,d_x = \frac{\Delta f}{3}\,.\end{aligned}$$

Es wird also

$$[\vartheta\vartheta] = \frac{4\,\Delta f}{3}.$$

Ausserdem bestimmen wir noch den Ausdruck $[\vartheta\varkappa]$, welcher ebenso zunächst den Ausdruck

$$[\vartheta\varkappa] = 2f\cdot\mathsf{K}_x^2\,a_x^2\,a_x - 2\,\mathsf{K}_x^2 a_x^2 b_x^2\,a_x b_x$$

annimmt. Hiebei ist

$$\mathsf{K}_x^2\,a_x^2 a_x = (\alpha\beta a)^2\,\alpha_x\beta_x a_x = -\frac{S\Delta}{6} + \frac{Tf}{3} \qquad (\S\ 8.,\ \text{F. } 33)$$

$$\mathrm{K}_z^2 a_z^2 b_z^2 a_x b_x = (\alpha\beta a)(\alpha\beta b)\, a_z^2 b_z^2 \alpha_z \beta_x$$
$$= \varphi'' = -\frac{4\psi}{3} + \frac{2\,Tf^2}{9} - \frac{S\Delta f}{6} \qquad (\S\ 13.,\ \mathrm{F}.\ 65).$$

Demnach wird endlich

$$[\vartheta\varkappa] = -\tfrac{8}{3}\psi + \tfrac{2}{9} Tf^2.$$

Aus den beiden soeben gebildeten Formeln erhält man durch den Process $\partial$, und indem man beachtet, dass $\partial\psi = 0$, folgende Tafel:

$$(130)\quad \begin{cases} [\vartheta\vartheta] = \tfrac{4}{3} f\Delta & [\eta\varkappa] = -\tfrac{1}{6} S\Delta^2 + \tfrac{1}{36} S^2 f^2 + \tfrac{2}{9} Tf\Delta \\ [\eta\eta] = \tfrac{4}{3}\psi + \tfrac{2}{9} Tf^2 & [\vartheta\varkappa] = -\tfrac{8}{3}\psi + \tfrac{2}{9} Tf^2 \\ [\varkappa\varkappa] = -\tfrac{4}{9} T\Delta^2 + \tfrac{1}{9} S^2 f\Delta & [\vartheta\eta] = \tfrac{1}{3}\Delta^2 + \tfrac{1}{6} Sf^2. \end{cases}$$

In Folge dessen wird nun

$$F^{(\varkappa\Pi + \lambda P)} = R^2 \{ G_{11}{}^2 [\varkappa\varkappa] - 4\, G_{11} G_{12} [\varkappa\eta] + 2\, G_{11} G_{22} [\varkappa\vartheta]$$
$$+ 4 G_{12}{}^2 [\eta\eta] - 4\, G_{22} G_{12} [\eta\vartheta] + G_{22}{}^2 [\vartheta\vartheta] \}.$$
$$= \tfrac{2}{9} R^2 S_{\varkappa\lambda} \cdot \psi$$
$$+ \frac{4R^2}{3} \begin{vmatrix} G_{22} f - G_{12}\Delta & G_{22} \cdot \frac{Sf}{6} - 2G_{12}\left(\frac{Tf}{3} - \frac{S\Delta}{6}\right) + G_{11}\left(\frac{S^2 f}{12} - \frac{T\Delta}{3}\right) \\ G_{12} f - G_{11}\Delta & G_{22} \cdot \Delta - 2G_{12} \cdot \frac{Sf}{6} + G_{11}\left(\frac{Tf}{3} - \frac{S\Delta}{6}\right) \end{vmatrix}.$$

Bemerken wir, dass die Coefficienten von $G_{11}$, $G_{12}$, $G_{22}$ in der letzten Verticalreihe der Determinante aus $G_{11}$ etc. (94) entstehen, wenn man $\varkappa$ durch $\Delta$, $\lambda$ durch $-f$ ersetzt. Wenn wir also für den Augenblick $x_1$, $x_2$ für $\varkappa$, $\lambda$ und $y_1$, $y_2$ für $\Delta$, $-f$ schreiben, so wird die Determinante folgende *binäre* Bildung:

$$- g_x^2 g_y (g' g'')^2 g_y'' (g g'') g_x'^2,$$

oder, wenn wir das Symbol der Form

$$h = (g' g'')^2 g_x'^2 g_x''^2 = -\tfrac{1}{3} S_{\varkappa\lambda}$$

einführen (B. F. p. 135) und bemerken, dass $i$ verschwindet:

$$- (gh)\, g_x^2 g_y h_x^2 h_y.$$

Betrachten wir nun die binäre Form

$$t = -\tfrac{1}{3} T_{\varkappa\lambda} = t_x^6 = (gh)\, g_x^3 h_x^3,$$

so folgt

$$t_x^4 t_y^2 = \frac{(gh)}{5} \{ g_x^3 h_x h_y^2 + h_x^3 g_x g_y^2 + 3\, g_x^2 g_y h_x^2 h_y \}.$$

Nehmen wir nun hinzu, dass (B. F. p. 136)

$$(gh)(g_x h_y - h_x g_y)^2 g_x h_x = (gh)^3 g_x h_x \cdot (xy)^2 = 0,$$

so können wir schreiben:

$$t_x^4 t_y^2 = (gh)\, g_x^2 g_y h_x^2 h_y\,,$$

was bis auf's Vorzeichen der gesuchte Ausdruck ist. Führen wir nun wieder $\varkappa$, $\lambda$, $\Delta$, $-f$ ein, so haben wir

$$\tfrac{1}{3}\left\{T_{11}\Delta^2 - 2\,T_{12}\Delta f + T_{22}f^2\right\}.$$

Mithin hat man endlich

$$(131)\quad F^{(\varkappa\Pi+\lambda P)} = \tfrac{8}{9}\,R^2 S_{\varkappa\lambda}\psi + \tfrac{4}{9}\,R^2\cdot\left\{T_{11}\Delta^2 - 2\,T_{12}\Delta f + T_{22}f^2\right\}.$$

Um nun den Zusammenhang zwischen $F$ und $\Phi$ nachzuweisen, gehen wir von der Definition von $\Phi$:

$$\Phi = \mathsf{M}_\Pi - \Lambda_P$$

aus und ersetzen zunächst $\Pi$ und $\mathsf{P}$ durch ihre Werthe:

$$\Pi = S\mathsf{T} - T\Sigma\,,\quad \mathsf{P} = T\mathsf{T} - \frac{S^2}{6}\Sigma\,.$$

Dann wird

$$\Phi = S\cdot\mathsf{M}_T - T\,.\,\mathsf{M}_\Sigma - T\cdot\Lambda_T + \frac{S^2}{6}\cdot\Lambda_\Sigma\,.$$

Die vier Ausdrücke $\Lambda_\Sigma$, $\Lambda_T$, $\mathsf{M}_\Sigma$, $\mathsf{M}_T$ erhalten wir, wenn wir $\Lambda_\Sigma$ direct bilden und dann den Process $\delta$ hinreichend oft anwenden. Da nach (113)

$$\Lambda = -\tfrac{3}{2}\,\Theta_\Sigma + \frac{\mathsf{T}}{2}\,u_x\,,$$

so erhalten wir $\Lambda_\Sigma$, indem wir rechts die $x$ durch $s$ ersetzen und mit $u_s{}^2$ multipliciren. Daher ist

$$\Lambda_\Sigma = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\mathsf{T} - \tfrac{3}{2}\,u_\vartheta{}^2\,\Theta_s\Theta_{s'}u_s{}^2 u_{s'}{}^2\,.$$

Nun ersetzt man den Term $\Theta_s\Theta_{s'}u_\vartheta{}^2 u_s{}^2 u_{s'}{}^2$ durch

$$\tfrac{1}{2}\,u_s u_{s'} u_\vartheta{}^2\left\{\Theta_s{}^2 u_{s'}{}^2 + \Theta_{s'}{}^2 u_s{}^2 - (\Theta_s u_{s'} - \Theta_{s'}u_s)^2\right\};$$

und da nach (25) $\Theta_s{}^2 u_s u_\vartheta{}^2 = \mathsf{T}$, so wird dies

$$\Sigma\mathsf{T} - \tfrac{1}{2}\,(\Theta_s u_{s'} - \Theta_{s'}u_s)^2\,u_s u_{s'} u_\vartheta{}^2\,.$$

Es entsteht aber $(\Theta_s u_{s'} - \Theta_{s'}u_s)^2\,u_s u_{s'} u_\vartheta{}^2$ aus F. 90,

$$(ss'x)^2\,u_s u_{s'} = \mathsf{K} + \frac{S}{2}\,\Theta\,,$$

indem man die $x$ durch die Determinante der $\Theta$, $u$ ersetzt und mit $_\vartheta{}^2$ multiplicirt. Daher ist

$$(\Theta_s u_{s'} - \Theta_{s'}u_s)^2\,u_s u_{s'} u_\vartheta{}^2 = [\mathsf{K}\Theta] + \frac{S}{2}\,[\Theta\Theta]\,,$$

und indem man die Werthe (127) einführt, erhält man also:

$$\Lambda_\Sigma = \tfrac{1}{4}\,SF - \tfrac{1}{2}\,\Sigma\mathsf{T}\,.$$

Indem man hierauf wiederholt den Process $\delta$ anwendet, ergeben sich lineare Gleichungen, aus denen folgende Tafel berechnet wird:

$$\mathsf{\Lambda}_\Sigma = \frac{SF}{4} - \tfrac{1}{2}\,\Sigma\mathsf{T}$$

$$\mathsf{M}_\Sigma = \frac{TF}{4} - \tfrac{3}{4}\,\mathsf{T}^2 + \frac{S}{24}\,\Sigma^2$$

$$\mathsf{\Lambda}_T = \frac{TF}{4} - \tfrac{1}{4}\,\mathsf{T}^2 - \frac{S}{24}\,\Sigma^2$$

$$\mathsf{M}_T = \frac{S^2}{24}\,F + \frac{T}{6}\,\Sigma^2 - \frac{S}{4}\,\Sigma\mathsf{T}.$$

Trägt man dies in den Ausdruck von $\Phi$ ein, so ergiebt sich endlich die Gleichung:

$$\Phi = -\frac{R}{2}\,F + T\mathsf{T}^2 - \frac{S^2}{3}\,\Sigma\mathsf{T} + \frac{ST}{6}\,\Sigma^2,$$

durch welche $\Phi$ auf $F$ zurückgeführt wird.

# Das Problem der räumlichen Projectivität*).

Von Rud. Sturm in Darmstadt.

---

Meiner früheren Abhandlung über das Problem der *ebenen* Projectivität**) erlaube ich mir eine Fortsetzung in einer neuen Abhandlung zu geben, die von dem Problem der *räumlichen* Projectivität (Homographie) handelt. Unter diesem Probleme wird man in ähnlicher Weise das folgende (oder das reciproke) verstehen:

*Gegeben sind im Raume zwei Gruppen von gleich viel Punkten, welche einander entsprechend zugeordnet (homolog) sind,* was durch gleichen Index bezeichnet werden soll; *solche entsprechende (correspondirende) Gerade zu finden, welche beziehlich mit den Punkten der einen und der andern Gruppe verbunden projectivische Ebenenwürfe liefern, in denen die nach homologen Punkten gehenden Ebenen entsprechend sind, und die Vertheilung dieser Geraden im Raume zu ermitteln.*

Es ist ersichtlich, dass der Lösung dieses Problems die Einführung der Liniengeometrie mit ihren neuen Begriffen des Complexes und der Congruenz (Systems) vorhergehen musste. Bis zu zwei Gruppen von je 7 Punkten ist es schon in seinen Hauptsätzen (Nr. 2, 8, 18, 29) von Herrn H. Müller***) gelöst worden; es ist meine Absicht, dasselbe eingehender zu behandeln und weiter zu führen.

In der Bezeichnung soll an Folgendem durchweg festgehalten werden: Die Punkte der einen Gruppe heissen $A_i$, ihre Verbindungsgeraden $a_{ik} = A_i A_k$ und ihre Verbindungsebenen $\alpha_{ikl} = A_i A_k A_l$; die Punkte, Verbindungs-Geraden und -Ebenen der andern Gruppe $B_i$, $b_{ik}$, $\beta_{ikl}$. Ein Punkt wird mit grossem lateinischen, eine Gerade mit kleinem lateinischen, eine Ebene mit kleinem griechischen Buchstaben bezeichnet. Alles, was durch die Buchstaben $A$, $a$, $\mathsf{A}$, $\alpha$, $\mathfrak{A}$, bezeichnet ist, gilt als der ersten Gruppe zugeordnet oder im Raume ($a$) be-

---

*) Die Resultate dieser Abhandlung sind schon in den Nachrichten der Göttinger Gesellsch. der Wiss. 1873 Nr. 12 (21. Mai) mitgetheilt worden.

**) Math. Annalen Bd. I., S. 533 (citirt mit „Eb. Proj.").

***) Math. Annalen Bd. I., S. 413.

findlich, alles durch $B$, $b$, $\mathsf{B}$, $\beta$, $\mathfrak{B}$ bezeichnete ist der zweiten Gruppe zugeordnet, befindet sich im Raume ($b$). Unter einer Gruppe $\mathsf{A}^{n-m}_{i,k,l\ldots}$ oder $\mathsf{B}^{n-m}_{i,k,l\ldots}$ ist eine Gruppe von $n-m$ Punkten $A_i$ oder $B_i$ zu verstehen, die aus einer Gruppe von $n$ Punkten durch Weglassung der $m$ Punkte $A_i$, $A_k$, $A_l\ldots.$ oder $B_i$, $B_k$, $B_l\ldots.$ entstanden ist; z. B. $\mathsf{A}^4_{4,5}$ ist die Gruppe $A_1A_2A_3A_6$; laufen die Indices der Punkte einer Gruppe ohne Unterbrechung von 1 ab, so genügt offenbar der obere Index.

Wird im Folgenden nicht gesagt, in Bezug auf welches Gruppenpaar zwei Gerade $a$ und $b$ oder von ihnen erzeugte Gebilde sich correspondiren, so entsprechen sie sich in Bezug auf das umfangreichste im betreffenden Abschnitte betrachtete Gruppenpaar, welchem ja auch der Abschnitt stets besonders gewidmet ist.

1. Die Richtigkeit folgender allgemeinen Sätze ist leicht einzusehen:

*Einer Geraden $a$, die durch einen Punkt $A_i$ geht, correspondiren in Bezug auf* $\mathsf{A}^n\mathsf{B}^n$ *alle Geraden $b$, welche ihr in Bezug auf* $\mathsf{A}^{n-1}_i\mathsf{B}^{n-1}_i$ *entsprechen*, weil die Ebene $aA_i$ unbestimmt ist und passend gewählt werden kann; *einer Geraden $a_{ik}$ correspondiren in Bezug auf* $\mathsf{A}^n\mathsf{B}^n$ *alle Geraden $b$, welche ihr in Bezug auf* $\mathsf{A}^{n-2}_{i,k}$, $\mathsf{B}^{n-2}_{i,k}$ *entsprechen*, weil $aA_i$ und $aA_k$ unbestimmt sind.

*Einer Geraden $a$, welche $a_{ik}$ trifft, correspondiren in Bezug auf* $\mathsf{A}^n\mathsf{B}^n$ *alle Geraden $b$, die ihr in Bezug auf* $\mathsf{A}^{n-1}_k\mathsf{B}^{n-1}_k$ (oder $\mathsf{A}^{n-1}_i$, $\mathsf{B}^{n-1}_i$) *entsprechen und der Geraden $b_{ik}$ begegnen, ohne durch $B_i$ (oder $B_k$) zu gehen*, weil für die Gerade $a$ und diese Geraden $b$ stets sowohl die Ebenen $aA_i$ und $aA_k$, als auch die Ebenen $bB_i$ und $bB_k$ identisch sind. Aehnliches gilt, wenn eine Gerade $a$ mehrere Geraden $a_{ik}$ trifft.

## I.

2. *Wenn die beiden Gruppen* $\mathsf{A}^4\mathsf{B}^4$ *gegeben sind, so bilden alle Geraden $b$, welche einer Geraden $a$ correspondiren, für die also*

$$b\,(B_1B_2B_3B_4) \barwedge a\,(A_1A_2A_3A_4)$$

*ist, einen Complex zweiten Grades* $\mathfrak{B}$*), denn die durch einen Punkt $B$ gehenden bilden, wie leicht einzusehen, einen Kegel zweiter Ordnung. Dieser Complex ist der schon früher**) von Herrn Reye gefundene und nach ihm benannte, mit welchem sich auch die Herren Lie und Klein beschäftigt haben. Es ist durch Herrn Reye bekannt, dass die Geraden des Complexes von den Ebenen des Tetraeders $B_1B_2B_3B_4$ ebenfalls in lauter projectivischen Punktwürfen geschnitten werden,

---

*) Müller a. a. O.; Reye, Journal für Mathem. Bd. 74, S. 10.

**) Geometrie der Lage II, S. 117.

so dass also zu demselben Complexe auch die reciproke Aufgabe führt. *Zu dem Complexe gehören alle Geraden, welche durch einen der Punkte* $B_i$ — die Hauptpunkte des Herrn Reye — *gehen und alle Geraden in jeder der 4 Hauptebenen* $\beta_{ikl}$. Beide Sorten Geraden bilden die singulären Geraden des Complexes: in allen Ebenen, die durch einen Hauptpunkt gehen, zerfällt der Complex-Kegelschnitt in zwei Punkte, von denen der eine der Hauptpunkt selbst ist, der andere in der Gegen-Hauptebene liegt; für alle Punkte einer Hauptebene zerfällt der Complexkegel in die Hauptebene und eine durch den Gegen-Hauptpunkt gehende Ebene. Die Singularitäten-Fläche des Complexes ist, wie bekannt, das Tetraeder der Hauptpunkte und Hauptebenen, weshalb er der tetraedrale Complex genannt werden kann. Alle Complexkegel unsers Complexes gehen also durch die 4 Hauptpunkte, alle Complexkegelschnitte berühren die 4 Hauptebenen. Die Benennung „Hauptpunkt", „Hauptebene", wozu wir „Hauptlinie" fügen, soll auch für die umfangreicheren Gruppenpaare beibehalten werden und ebenso für die Gruppen in ($a$) gelten.

3. Es ist ersichtlich, dass *die Gerade a selbst zu einem ähnlichen Complexe zweiten Grades* $\mathfrak{A}$ *gehört, von welchem jede Gerade an die Stelle von a treten kann, ohne dass das Doppelverhältniss* $a\ (A_1 A_2 A_3 A_4) = \lambda$ *und also auch der Complex* $\mathfrak{B}$ *sich ändert.* Dieser Complex $\mathfrak{A}$ und seine Geraden mögen der Geraden *a adjungirt* und zwei solche zusammengehörige Complexe mögen *analog* heissen. Sie durchschneiden sich in einer Congruenz vierten Grades, in der sich offenbar die Kanten der 8 Complexkegel, welche ihren Scheitel in den 8 Hauptpunkten haben und je zum Complexe des andern Raumes gehören, sowie die Tangenten der 8 Kegelschnitte befinden, welche in den 8 Hauptebenen liegen und je zu dem Complexe des andern Raumes gehören, so dass die Hauptpunkte und Hauptebenen singuläre Punkte und Ebenen der Congruenz sind. Jeder dieser Kegel enthält die von seinem Scheitel ausgehenden und jeder dieser Kegelschnitte berührt die in seiner Ebene befindlichen Hauptlinien. Die Congruenz ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) enthält also alle Geraden, die sowohl mit $A^4$ als mit $B^4$ das Doppelverhältniss $\lambda$ umfassen. Jedem Werthe von $\lambda$ entspricht ein Complexpaar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und eine Congruenz; alle Complexe $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ haben die Strahlenbündel der Hauptpunkte und die Geradenfelder der Hauptebenen ihres Raums gemein. Die sämmtlichen Congruenzen ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) erzeugen einen Complex vierten Grades, denn die Complexkegel aus einem Punkte $P$ in beiden Complexbüscheln bilden zwei projectivische Büschel.

*Alle Geraden also des Raums, welche mit* $A^4$ *je dasselbe Doppelverhältniss umfassen wie mit* $B^4$, oder, was dasselbe ist, von den 4 Hauptebenen $\alpha$ nach demselben Doppelverhältnisse geschnitten werden, wie von den Hauptebenen $\beta$, *bilden einen Complex vierten Grades; zu* *demselben gehören die Strahlenbündel der 8 Hauptpunkte und die Felder der 8 Hauptebenen vollständig.*

4. Besonders interessante analoge Complexe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind das System der beiden linearen Complexe $[a_{12}]$*), $[a_{34}]$ und das System der Complexe $[b_{12}]$, $[b_{34}]$ und die beiden ähnlichen Systempaare; denn z. B. einer Geraden $a$, welche $a_{12}$ trifft, correspondiren alle Geraden, welche $b_{12}$ oder $b_{34}$ treffen. Die beiden genannten analogen Complexe durchschneiden sich in den 4 linearen Congruenzen $[a_{12}, b_{12}]$**), $[a_{12}, b_{34}]$, $[a_{34}, b_{12}]$ und $[a_{34}, b_{34}]$; also *enthält der obige Complex 4. Grades 12 lineare Congruenzen.*

5. Seien $A$ und $B$ die Scheitel von Strahlenbündeln; jedem Strahle $a$ in $A$ sind in diesem Bündel sämmtliche Kanten eines Kegels 2. Grades, zu dem er selbst gehört, — des einzigen Kegels 2. Grades, der durch $A^4$ und $a$ geht und $A$ zum Scheitel hat —, adjungirt und im Bündel $B$ entsprechen ihm alle Kanten eines Kegels 2. Grades. Ein Schnitt durch eine beliebige Ebene führt zu dem entsprechenden Resultate der ebenen Projectivität***). Liegen $A$ und $B$ in zwei homologen Hauptebenen, welche den Hauptpunkten $A_i$ und $B_i$ bez. gegenüber liegen, so ist jedem Strahle $a$ von $A$ in $A$ ein (ihn selbst enthaltendes) ebenes Strahlbüschel, welcher in der Ebene $(a, A_i)$ liegt, adjungirt und demselben correspondirt im Bündel $B$ ein ebenes Strahlbüschel, dessen Ebene durch $B_i$ geht, wobei von den in den Hauptebenen selbst liegenden Büscheln, welche die Complexkegel vervollständigen, abgesehen wird.

6. Seien $\alpha$ und $\beta$ zwei Ebenen, so sind jeder Geraden $a$ von $\alpha$ in $\alpha$ alle Tangenten eines Kegelschnitts, den sie selbst tangirt, — des einzigen in $\alpha$, der $a$ und die 4 Hauptebenen von $(a)$ berührt — adjungirt und entsprechen in $\beta$ die Tangenten eines Kegelschnitts. Gehen $\alpha$ und $\beta$ durch zwei homologe Hauptpunkte $A_i$ und $B_i$, so ist jedem Strahle von $\alpha$ in dieser Ebene ein (ihn enthaltendes) Strahlbüschel adjungirt, dessen Scheitel in der Gegen-Hauptebene von $A_i$ liegt, und es entspricht ihm ebenfalls in $\beta$ ein Strahlbüschel, dessen Scheitel in der Gegen-Hauptebene von $B_i$ sich befindet, wobei wiederum von den Strahlbüscheln $(\alpha, A_i)$†) und $(\beta, B_i)$, welche die Complexkegelschnitte vervollständigen, abgesehen wird.

7. Hat man endlich zwei ebene Strahlbüschel $(A, \alpha)$ und $(B, \beta)$, so hat jeder Strahl des einen in demselben nur einen adjungirten, im

---

*) $[a_{12}]$ ist der Complex aller Geraden, welche $a_{12}$ treffen.

**) $[a_{12}, b_{12}]$ ist die Congruenz, welche $a_{12}$, $b_{12}$ zu Directricen hat.

***) Eb. Proj. Nr. 1.

†) Das in $\alpha$ liegt und seinen Scheitel in $A_i$ hat.

andern zwei correspondirende Strahlen, so dass sich in $(A, \alpha)$ und $(B, \beta)$ zwei projectivische Involutionen ergeben.

## II.

8. Wir haben *zwei Gruppen* $A^5 B^5$ *mit je 5 Punkten.* Einer Geraden $a$ correspondirt in Bezug auf $A^4 B^4$ und ebenso in Bezug auf $A_4{}^4 B_4{}^4$ je ein Complex 2. Grades. Die Congruenz 4. Grades, welche beiden gemeinsam ist, zerfällt in die 3 Strahlenbündel $B_1$, $B_2$, $B_3$, das Geradenfeld in $\beta_{123}$ und also noch eine Congruenz 1. Ordnung, 3. Classe, welche letztere — von der Art der Gruppirung unabhängig — diejenigen Geraden $b$ enthält, welche der $a$ in Bezug auf $A^5 B^5$ correspondiren, für welche also

$$b\,(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5) = a\,(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5).$$

Sei $b$ irgend eine dieser correspondirenden Geraden, so giebt es, wie man weiss, nur eine cubische Raumcurve $B^3$, welche durch die 5 Punkte $B_i$ geht und $b$ zur Sehne hat; nun ist es eine bekannte Eigenschaft der cubischen Raumcurve, dass alle Sehnen mit 5 festen Punkten derselben immer projectivische Ebenenwürfe bilden; da nun durch jeden Punkt des Raums — der nicht auf der Curve liegt — stets eine Sehne der Curve geht und in jeder Ebene 3 Sehnen liegen, so ergiebt sich, dass unsere obige Congruenz 1. Ordnung, 3. Classe das Sehnensystem von $B^3$ ist. Durch jeden Punkt von $B^3$ geht nun nicht blos eine correspondirende, sondern einfach unendlich viele ($\infty^1$), die einen Kegel 2. Grades bilden; für die 5 Hauptpunkte $B_i$ ist es der Complexkegel aus $B_i$ in dem Complexe, welcher der Geraden $a$ in Bezug auf $A_i{}^4 B_i{}^4$ correspondirt.

Also *jeder Geraden* $a$ *entsprechen in Bezug auf* $A^5 B^5$ *alle Sehnen einer cubischen Raumcurve* $B^3$, *welche durch die 5 Hauptpunkte* $B_i$ *geht**), *und ersichtlich sind ihr alle Sehnen einer durch die 5 Punkte* $A_i$ *gehenden cubischen Raumcurve adjungirt* — der einzigen, welche durch die $A_i$ geht und $a$ zur Sehne hat.

9. Je zwei solche analoge cubische Raumcurven haben 10 Sehnen gemein**); also giebt es 10 Gerade, welche mit $A^5$ und mit $B^5$ Würfe bilden, welche dem Wurfe $aA^5$ projectivisch sind.

Für die beiden Gruppen $A^4 B^4$ ergab sich ein Complex 4. Grades, dessen Gerade mit $A^4$ dasselbe Doppelverhältniss umfassen, wie mit $B^4$; die beiden Gruppen $A_4{}^4 B_4{}^4$ liefern einen ähnlichen Complex. Die Congruenz, in der sich beide durchschneiden, enthält die 6 Strahlenbündel

---

*) Müller a. a. O. Diese Curven sind die Reye'schen Ordnungscurven im Complexe 2. Grades der viergliedrigen Gruppen.

**) Sturm, Annali di Matematica Ser. II., T. III., S. 28.

$A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3$, die beiden Geradenfelder $\alpha_{123}$, $\beta_{123}$ und die 3 linearen Congruenzen $[a_{12}, b_{12}]$, $[a_{13}, b_{13}]$, $[a_{23}, b_{23}]$; es bleibt also *eine Congruenz 7. Ordnung, 11. Classe* übrig. *Diese besteht aus denjenigen Geraden des Raums, bei welchen je der mit* $\mathsf{A}^5$ *gebildete Ebenenwurf dem mit* $\mathsf{B}^5$ *gebildeten projectivisch ist.* Die 20 Geraden $a_{ik}$, $b_{ik}$ gehören ersichtlich zu dieser Congruenz und *jeder der 10 Hauptpunkte sendet zu derselben einen Kegel 4. Ordnung, welcher durch die 4 anderen Hauptpunkte desselben Raumes geht.*

*Von dieser Congruenz befindet sich in jeder Hauptebene ein Büschel, dessen Scheitel der Punkt ist, in dem die Ebene von der homologen Geraden der Gegen-Hauptgeraden getroffen wird*; z. B. in $\alpha_{123}$ der Punkt $(\alpha_{123}, b_{45})$. Von den 4 Kanten, in denen der Kegel aus $A_1$ durch die Ebene $\alpha_{123}$ geschnitten wird, sind zwei die Hauptlinien $a_{12}$, $a_{13}$, die beiden andern gehen nach den Spuren der Geraden $b_{23}$, $b_{45}$; die letztere gehört zu dem eben erwähnten Büschel.

10. Seien $A$ und $B$ wieder die Scheitel zweier Strahlenbündel: jeder Strahl $a$ von $A$ hat in $A$ im Allgemeinen keinen adjungirten Strahl, in $B$ dagegen stets einen und im Allgemeinen nur einen correspondirenden: *es findet* also *zwischen den beiden Bündeln A und B eine eindeutige Beziehung statt.* Eine Ausnahme wird durch die beiden Curven 3. Ordnung $A^3$ und $B^3$ bewirkt, welche durch $\mathsf{A}^5$ und $A$, bez. $\mathsf{B}^5$ und $B$ gehen: allen durch $A$ ($B$) gehenden Sehnen von $A^3$ ($B^3$) correspondirt die eine Sehne, welche aus $B$ ($A$) an die analoge Curve von $A^3$ ($B^3$) geht; falls nicht etwa gerade die beiden Curven ($\mathsf{A}^5$, $A$) und ($\mathsf{B}^5$, $B$) selbst analog sind.

11. Liegen die beiden Scheitel $A$ und $B$ auf zwei homologen Hauptlinien, z. B. auf $a_{45}$ und $b_{45}$, so sind je zwei Kegel in den Bündeln $A$ und $B$, welche in Bezug auf $\mathsf{A}^4\mathsf{B}^4$ analog sind (Nr. 5.), auch analog in Bezug auf $\mathsf{A}^5\mathsf{B}^5$ (Nr. 1.). Die cubische Raumcurve, deren Sehnen einer Geraden $a$, welche $a_{45}$ trifft, adjungirt sind, zerspaltet sich in die Gerade $a_{45}$ und den Kegelschnitt, der in $\alpha_{123}$ durch $A_1$, $A_2$, $A_3$ und die Spuren von $a$ und $a_{45}$ geht; die analoge in $b_{45}$ und den Kegelschnitt in $\beta_{123}$, der durch $B_1$, $B_2$, $B_3$ und $(\beta_{123}, b_{45})$ gehend mit diesen Punkten dasselbe Doppelverhältniss umfasst, wie der erstere mit den 4 homologen. Ueber diesen beiden Kegelschnitten stehen die oben genannten Kegel, wenn $a$ zu dem einen gehört.

*Zu den correspondirenden Geraden einer Geraden a, welche eine Hauptlinie $a_{ik}$ trifft, gehören also auch alle Geraden in der Hauptebene, welche im vollständigen räumlichen Fünfecke der Punkte $B_i$ der homologen Kante $b_{ik}$ gegenüber liegt,* weil sie sämmtlich Sehnen des Kegelschnitts in dieser Hauptebene, als des einen Theils der cubischen Raumcurve, sind; die übrigen correspondirenden Geraden stützen sich einmal auf $b_{ik}$ und einmal auf diesen Kegelschnitt, und bilden also eine Congruenz 1. Ordnung und 2. Classe.

Wenn eine Gerade $a$ zwei Hauptlinien trifft, die keinen Index gemein haben, z. B. $a_{12}$, $a_{34}$, so zerfällt die correspondirende Congruenz in die beiden Geradenfelder $\beta_{125}$, $\beta_{345}$ und die lineare Congruenz $[b_{12}, b_{34}]$; die cubische Raumcurve besteht aus den 3 Geraden $b_{12}$, $b_{34}$ und $(\beta_{125}, \beta_{345})$.

12. Seien $(A, \alpha)$ und $(B, \beta)$ zwei ebene Strahlbüschel: suchen wir, wie viele Strahlen von $(A, \alpha)$ ihre correspondirenden in $(B, \beta)$ haben. In Bezug auf $\mathsf{A}^4\,\mathsf{B}^4$ erhält man nach Nr. 7. zwei projectivische Involutionen in den beiden Büscheln, und ebenso in Bezug auf $\mathsf{A}_4^4\,\mathsf{B}_4^4$: jedem Strahle $b$ von $(B, \beta)$ entsprechen in Bezug auf $\mathsf{A}^4\,\mathsf{B}^4$ zwei Strahlen $a$ in $(A, \alpha)$ und jedem dieser 2 Strahlen $b'$ in Bezug auf $\mathsf{A}_4^4\,\mathsf{B}_4^4$; also jedem Strahle $b$ entsprechen 4 Strahlen $b'$ und ersichtlich auch umgekehrt; von den 8 Coincidenzstrahlen liegen 3 in den Ebenen $B$ $(b_{12}, b_{13}, b_{23})$, welche den Strahlen von $(\alpha, A)$ in den Ebenen $A$ $(a_{12}, a_{13}, a_{23})$ in Bezug auf beide Paare viergliedriger Gruppen entsprechen, ohne jedoch Projectivität in Bezug auf $\mathsf{A}^5\,\mathsf{B}^5$ zu bewirken; die 5 andern Strahlen von $(B, \beta)$ entsprechen dagegen ihren correspondirenden in $(A, \alpha)$ auch in Bezug auf die vollständigen Gruppen.

*Die Strahlen $b$, welche den Strahlen eines ebenen Büschels $(A, \alpha)$ correspondiren und im Bündel $B$ sich befinden, erzeugen einen Kegel 5. Ordnung.*

Da derselbe wegen seiner eindeutigen Beziehung zu $(A, \alpha)$ vom Geschlecht 0 sein muss, so hat er 6 Doppelkanten; dies sind die 5 Geraden $BB_i$ und die Sehne aus $B$ an die analoge Curve der Curve $A^3 = (\mathsf{A}^5, A)$. Jeder der Geraden $BB_i$ correspondirt nach Nr. 1. ein Complex 2. Grades (der ihr in Bezug auf $\mathsf{A}_i^4\,\mathsf{B}_i^4$ correspondirt), welcher 2 Strahlen in $(A, \alpha)$ liefert; der zuletzt genannten Sehne correspondiren alle Sehnen von $A^3$, unter denen 2 in $(A, \alpha)$ sich befinden.

13. Werden beide Strahlenbündel durch eine Ebene durchschnitten (oder auch durch zwei verschiedene), so erhält man den Satz der ebenen Projectivität*). In dieser Ebene liegen zwei eindeutig auf einander bezogene Punktsysteme: jeder geraden Punktreihe entspricht eine Curve 5. Ordnung; alle Curven 5. Ordnung haben 6 Doppelpunkte gemein. Folglich giebt es $5+2=7$ vereinigte entsprechende Punkte**). Lassen wir $A$ und $B$ in den Punkt $P$ zusammenfallen, so erhalten wir

---

*) Eb. Proj. Nr. 10.

**) Cremona, Sulle trasformazioni geometriche nelle figure piane Nota II Nr. 29. (Memorie dell' Istituto di Bologna ser. II. t. V.)

die 7 durch $P$ gehenden Geraden, bei denen der nach $A^5$ gehende mit dem nach $B^5$ gehenden Wurfe projectivisch ist (Nr. 9.).

Zugleich ist das Resultat gewonnen:

*Die Sehnensysteme, welche den Geraden eines ebenen Strahlbüschels* $(A, \alpha)$ *entsprechen, bilden einen Complex 5. Grades; derselbe enthält alle 5 Strahlenbündel* $B_i$ *und das Sehnensystem derjenigen Curve doppelt, welche der durch* $A$ *und* $A^5$ *gehenden analog ist; die Geradenfelder der 10 Ebenen* $\beta_{ikl}$ *gehören zu ihm einfach*, sie entsprechen den 10 Strahlen von $(A, \alpha)$, welche die Hauptlinien $a_{ik}$ treffen (Nr. 11.).

Geht das Strahlbüschel $(A, \alpha)$ durch einen Hauptpunkt $A_i$, so zerfällt der entsprechende Complex 5. Grades in einen Complex 2. Grades, welcher der Geraden $AA_i$ allein correspondirt (Nr. 1.), und einen Complex 3. Grades, in welchem nur noch das Bündel des homologen Hauptpunktes doppelt ist.

Enthält $\alpha$ zwei Hauptpunkte $A_i$ und $A_k$, so besteht der Complex aus den beiden Complexen 2. Grades, die den Geraden $AA_i$ und $AA_k$ entsprechen, und dem linearen Complexe $[b_{ik}]$, weil alle Strahlen von $(A, \alpha)$ der $a_{ik}$ begegnen.

Fällt endlich $(\alpha, A)$ in eine Ebene $\alpha_{ikl}$, so wird der entsprechende Complex unbestimmt; *jeder* Geraden des Büschels correspondiren alle Geraden, welche die Gegenkante der homologen Ebene $\beta_{ikl}$ im vollständigen räumlichen Fünfecke der Punkte $B_i$ treffen.

14. Es seien $\alpha$ und $\beta$ zwei Ebenen als Träger von Geradenfeldern; jede Gerade $a$ in $\alpha$ hat in dieser Ebene noch zwei adjungirte Geraden und in $\beta$ drei correspondirende: die Sehnen der correspondirenden Raumcurve. Beschreibt $a$ ein Strahlbüschel $(A, \alpha)$, so umhüllt dieses Tripel eine Curve 5. Classe: die Complexcurve des Complexes, der dem Büschel $(A, \alpha)$ entspricht. Die Sehnen derjenigen Curve, deren analoge durch $A$ geht, berühren alle drei die Curve 5. Classe doppelt.

15. Wenn $\alpha$ und $\beta$ durch zwei homologe Hauptpunkte $A_i$, $B_i$ gehen, so entsprechen sich, wird von den durch die Hauptpunkte gehenden Geraden abgesehen, die beiden Geradenfelder eindeutig.

Gehen $\alpha$ und $\beta$ durch zwei homologe Hauptlinien, z. B. $a_{45}$ und $b_{45}$, so ist jedem Strahle $a$ der Ebene $\alpha$, weil sie durch $A_4$ geht, in dieser Ebene in Bezug auf $A^4B^4$ ein Strahlbüschel adjungirt, dessen Scheitel der Punkt $(a, \alpha_{123})$ ist, und ein Strahlbüschel mit dem Scheitel in $\beta_{123}$ entspricht ihr (oder auch dem Büschel) in der Ebene $\beta$, weil dieselbe durch $B_4$ geht (Nr. 6.); beide Büschel correspondiren sich auch in Bezug auf $A^5B^5$ (Nr. 1.).

16. Diejenigen correspondirenden Geraden der Strahlen zweier Büschel $(A, \alpha)$ und $(A', \alpha')$, welche sich im Bündel $B$ befinden, erzeugen 2 Kegel 5. Ordnung; dieselben haben ausser den 5 Doppelkanten $BB_i$

noch 5 Kanten gemein; im Allgemeinen gehört nun jede Gerade $b$ nur zu einem Sehnensystem; also sind die beiden Geraden in $(A, \alpha)$ und $(A', \alpha')$, welche jeder dieser letzteren 5 Kanten entsprechen, adjungirt; *die Sehnensysteme* also, *welche den Strahlen eines ebenen Strahlbüschels adjungirt sind, bilden einen Complex 5. Grades, zu dem natürlich das Büschel mit gehört.* Die correspondirenden Geraden der Strahlen von $(A, \alpha)$ und $(A', \alpha')$, welche in $\beta$ liegen, hüllen 2 Curven 5. Classe ein: gemeinsam sind diesen beiden Curven die fünfmal je 3 Geraden, welche den 5 Paaren adjungirter Strahlen in $(A, \alpha)$ und $(A', \alpha')$ correspondiren, und die Schnittgeraden von $\beta$ mit den 10 Hauptebenen $\beta_{ikl}$; jede von letztern entspricht denjenigen beiden — im Allgemeinen nicht adjungirten — Strahlen der beiden Büschel, welche die homologe Hauptlinie der Gegenkante der Ebene $\beta_{ikl}$ treffen (Nr. 11.).

17. Wenn man die cubischen Raumcurven $B^3$, deren Sehnensysteme den Strahlen eines ebenen Strahlbüschels $(A, \alpha)$ correspondiren, betrachtet, so kann man nach der von ihnen erzeugten Fläche fragen; sei also $\bar{b}$ irgend eine Gerade des Raumes $(b)$, so ist zu ermitteln, wie viele unter den Curven $B^3$ dieselbe treffen. Legt man durch $\bar{b}$ irgend eine Ebene $\beta$, so umhüllen die in ihr befindlichen Sehnendreiecke, die den Strahlen von $(A, \alpha)$ correspondiren, eine Curve 5. Classe. Wie oft fällt eine Ecke eines dieser Dreiecke auf die Gerade $\bar{b}$? Es erhellt, dass die Beantwortung dieser Frage von der allgemeinen Lage der Ebene $\beta$ unabhängig ist; legen wir dieselbe durch einen Hauptpunkt, z. B. $B_1$, so zerfällt die Curve 5. Classe in das doppelte Strahlbüschel $B_1$ und eine Curve 3. Classe $\beta_3$ (Nr. 13.) und je zwei Seiten des Sehnendreiecks gehören zu $B_1$, die dritte tangirt $\beta_3$. Durch jeden Punkt $B'$ auf $\bar{b}$ gehen 3 Tangenten von $\beta_3$, denen je zwei Strahlen von $B_1$ entsprechen, welche $\bar{b}$ in 6 Punkten $B''$ treffen. Jeder Punkt $B''$ liefert einen Strahl von $B_1$, dem, weil er eben durch den Hauptpunkt $B_1$ geht, überhaupt ein ganzer Complex 2. Grades, in $(A, \alpha)$ also zwei Strahlen entsprechen, und jedem dieser entspricht eine Tangente von $\beta_3$, welche also einen Punkt $B'$ liefert. Jedem $B'$ entsprechen demnach 6 $B''$, jedem $B''$ 2 $B'$; also giebt es 8 Coincidenzen. Durch den Punkt $B_1$ selbst gehen 3 Tangenten von $\beta_3$; die beiden Strahlen von $B_1$, die jeder dieser Tangenten entsprechen, können nun nicht beide von derselben verschieden, weil sonst sich alle 3 Ecken des Sehnendreiecks in $B_1$ vereinigen würden, was im Allgemeinen nicht der Fall ist (die dem Sehnendreiecke zugehörige Raumcurve würde die Ebene $\beta$ in $B_1$ osculiren); vielmehr fällt jede der 3 Tangenten von $\beta_3$, die durch $B_1$ gehen, mit einem ihrer entsprechenden Strahlen von $B_1$ zusammen (die cubische Raumcurve wird in $B_1$ von $\beta$ tangirt und ihre Tangente ist der andere Strahl von $B_1$, wäh-

rend die zusammengefallenen Sehnen den Berührungspunkt mit dem dritten verbinden); es vereinigen sich auf diese Weise dreimal zwei entsprechende Punkte $B'$ und $B''$, ohne dass dadurch ein Punkt der cubischen Raumcurve auf $\bar{b}$ zu liegen kommt. Folglich wird $\bar{b}$ von 5 cubischen Raumcurven getroffen, deren Sehnensysteme den Strahlen von $(A, \alpha)$ correspondiren. Daraus geht hervor, dass *die von allen cubischen Raumcurven, deren Sehnensysteme den Strahlen von* $(A, \alpha)$ *correspondiren, erzeugte Fläche 5. Ordnung ist.*

Ferner *legt man durch jeden Punkt von* $\bar{b}$ *die Curve* $B^3$ *und zieht aus* $A$ *jedesmal an die analoge Curve* $A^3$ *die Sehne, so erzeugt diese einen Kegel 5. Ordnung,* da 5 Gerade in $(A, \alpha)$ liegen. Und: *die Sehnensysteme aller dieser Curven* $A^3$ *bilden einen Complex 5. Grades.*

## III.

18. Wir gehen *zu 2 Gruppen von je 6 Punkten* über: $\mathsf{A}^6\,\mathsf{B}^6$. Einer Geraden $a$ correspondirt in Bezug auf $\mathsf{A}^5\,\mathsf{B}^5$ das Sehnensystem einer cubischen Raumcurve $B^3$ und ebenso in Bezug auf $\mathsf{A}_5{}^5\,\mathsf{B}_5{}^5$ das Sehnensystem einer Curve $B_1{}^3$. Beide Curven gehen durch $B_1 B_2 B_3 B_4$. Sei $b$ die Sehne von $B^3$, welche von einem Punkte von $B_1{}^3$, und $b_1$ die Sehne von $B_1{}^3$, welche von einem Punkte von $B^3$ ausgeht; ersichtlich ist

$$b\,(B_1 B_2 B_3 B_4) = b_1\,(B_1 B_2 B_3 B_4),$$

weil beide

$$= a\,(A_1 A_2 A_3 A_4).$$

Also gehören $b$ und $b_1$ zu der einen Schaar eines Hyperboloids, das durch die Punkte $B_1 B_2 B_3 B_4$ geht und jeder der beiden cubischen Raumcurven in 7 Punkten begegnet, mithin dieselben und also auch $B_5$ und $B_6$ enthält; $b$ und $b_1$ sind Sehnen von beiden Curven, demnach sind es alle Geraden derselben Schaar, folglich beiden Sehnensystemen gemeinsam.

*Der Geraden* $a$ *correspondiren* mithin *in Bezug auf* $\mathsf{A}^6\,\mathsf{B}^6$ *alle Geraden der einen Schaar eines Hyperboloids* $\mathfrak{B}^2$ (*einer Regelschaar*, wie wir von jetzt ab sagen wollen), *das durch die Punkte* $\mathsf{B}^6$ *geht**), *und natürlich ist ihr eine ebensolche Regelschaar* $\mathfrak{A}^2$, *die durch* $\mathsf{A}^6$ *geht, adjungirt* — die einzige, welche durch $\mathsf{A}^6$ geht und $a$ enthält. Bei der bekannten Eigenschaft des Hyperboloids war dies Resultat vorauszusehen.

19. Zwei solche analoge Regelschaaren haben im Allgemeinen keine Geraden gemein; unter den $\infty^3$ Regelschaarpaaren wird es aber gewiss solche geben, welche gemeinsame Geraden besitzen. *Diese ge-*

*) Müller a. a. O.

*meinsamen Geraden sind dann solche, welche je mit* $\mathsf{A}^6$ *und* $\mathsf{B}^6$ *projectivische Ebenenwürfe bilden. Dieselben erzeugen eine Regelfläche,* deren Grad auf folgende Weise ermittelt worden ist: Es ist aus Nr. 9. zu entnehmen, dass durch jeden der 12 Hauptpunkte $A_i$ und $B_i$ 7 solche Gerade gehen, folglich *sind diese Punkte 7-fache Punkte der gesuchten Fläche.* Ferner ist in jeder Hauptebene, z. B. $\alpha_{456}$, die Schnittlinie mit $\beta_{123}$ eine Gerade dieser Fläche, so dass z. B. $a_{56}$ von 4 derartigen Geraden getroffen wird, nämlich von $(\alpha_{156}, \beta_{234})$, $(\alpha_{256}, \beta_{134})$, $(\alpha_{356}, \beta_{124})$, $(\alpha_{456}, \beta_{123})$. Sehen wir zu, wie viele Geraden der Fläche einer Hauptlinie begegnen und nicht durch einen der beiden Hauptpunkte gehen oder in einer der 4 Hauptebenen liegen; solche Gerade müssen auch die homologe Hauptlinie treffen. In der bei zwei Gruppen $\mathsf{A}^5\mathsf{B}^5$ erhaltenen Congruenz 7. Ordnung und 11. Classe (Nr. 9.) bilden die Geraden, welche $a_{56}$ begegnen, ohne durch $A_5$ zu gehen, eine Regelfläche 14. Grades, für welche die Leitgerade $a_{56}$ eine 7-fache Gerade und der Punkt $B_5$ 4-fach ist (es ist der zur Congruenz gehörige Kegel 4. Ordnung mit dem Scheitel $A_5$ abzuziehen); sie wird also von $b_{56}$ ausserhalb $B_5$ noch 10 mal getroffen. Die getroffenen Geraden sind die gesuchten; folglich *ist die betrachtete Fläche vom Grade* $2 \cdot 7 + 4 + 10 = 28$.

20. *Geht die Gerade a durch einen Hauptpunkt* $A_i$, *so correspondirt ihr* nicht blos eine Regelschaar, sondern *ein Sehnensystem* $[B^3]$, dasjenige nämlich, das ihr in Bezug auf $\mathsf{A}_i^5\mathsf{B}_i^5$ entspricht, und adjungirt ist ihr das analoge Sehnensystem $[A^3]$, jedoch nicht so, dass auch allen Geraden des einen alle Geraden des andern correspondiren, sondern jeder der $\infty^1$ die $a$ enthaltenden Regelschaaren — die das System $[A^3]$ erschöpfen — entspricht eine besondere Regelschaar; diese $\infty^1$ correspondirenden Regelschaaren füllen das System $[B^3]$ aus.

*Einer Hauptlinie correspondirt ein ganzer Complex 2. Grades,* welcher durch die $\infty^2$ Regelschaaren ausgefüllt wird, welche den $\infty^2$ die Hauptlinie enthaltenden Regelschaaren analog sind.

21. *Durch die 6 Hauptpunkte jedes Raumes geht eine cubische Raumcurve* $\mathfrak{A}_0^3$ *resp.* $\mathfrak{B}_0^3$. *Allen* $\infty^2$ *Sehnen derselben correspondirt im andern Raume nur eine Regelschaar* $\overline{\mathfrak{B}^2}$, $\overline{\mathfrak{A}^2}$.

22. Seien $A$ und $B$ wieder zwei Scheitel von Strahlenbündeln, so ergiebt sich mit Hülfe eines ebenen Schnitts aus dem Probleme der ebenen Projectivität*), dass nicht jedem Strahle von $A$ ein Strahl von $B$ correspondirt, und diejenigen Strahlen von $A$, welche entsprechende in $B$ haben, einen Kegel 3. Ordnung $a^3$ (ohne Doppelkanten), die entsprechenden einen ebensolchen $b^3$ bilden. Der erstere geht durch die

*) Eb. Proj. Nr. 14.

6 Geraden $AA_i$, der letztere durch die Geraden $BB_i$; denkt man sich durch die 5 Punkte $\mathsf{A}_i^5$ und durch $A$, bez. durch $\mathsf{B}_i^5$ und $B$ die cubische Raumcurve $A_i^3$, bez. $B_i^3$ gelegt und von $B$, resp. $A$ an die analoge Curve von $A_i^3$, resp. $B_i^3$ in Bezug auf $\mathsf{A}_i^5\,\mathsf{B}_i^5$ die Sehne gezogen, so gehört dieselbe zu $b^3$ bez. $a^3$, was für jeden der analogen Kegel in den Bündeln $A$ und $B$ noch 6 Kanten giebt.

*Die Regelschaaren* also, *welche den sämmtlichen Strahlen eines Bündels A correspondiren, erzeugen einen Complex 3. Grades. Zu diesem Complexe gehört,* weil aus jedem $A$ eine Sehne an $\mathfrak{A}_0^3$ geht, *die ganze Regelschaar* $\overline{\mathfrak{B}}^2$ (liegt etwa $A$ auf $\mathfrak{A}_0^3$, so entspricht der Regelschaar $\overline{\mathfrak{B}}^2$ nicht blos eine Gerade in $A$, sondern ein ganzer Kegel 2. Grades); *ferner alle 6 Strahlenbündel $B_i$ und zwar einfach, und die Sehnensysteme der 6 Curven, welche den Raumcurven* $A_i^3 = (A, \mathsf{A}_i^5)$ *in Bezug auf* $\mathsf{A}_i^5\,\mathsf{B}_i^5$ *analog sind* (letztere correspondiren übrigens den Geraden $AA_i$). In dem eben erwähnten speciellen Falle, wo $A$ auf $\mathfrak{A}_0^3$ liegt, fallen alle 6 Curven $A_i^3$ in diese Curve zusammen; ihre analogen bleiben jedoch verschieden.

23. Die Complexe 3. Grades, welche zwei verschiedenen Strahlenbündeln $A$ und $A'$ correspondiren, haben ausser den 6 Strahlenbündeln $B_i$ noch eine Congruenz 3. Ordnung und 9. Classe gemein. Die Regelschaaren $\mathfrak{A}^2$, welche gleichzeitig durch $A$ und $A'$ gehen, bilden ein Hyperboloidbüschel, so dass diejenigen Geraden derselben, welche durch $A$ bez. $A'$ gehen, je einen Kegel 3. Ordnung erzeugen. In diesen beiden Kegeln ist je eine Gerade des einen und eine des andern adjungirt und je zwei solchen adjungirten Geraden correspondirt eine Regelschaar in der Congruenz 3. Ordnung 9. Classe. *Die adjungirten Geraden der Strahlen eines Strahlenbündels bilden einen Complex 3. Grades*; sie sind ja die sämmtlichen Geraden der Flächen des Netzes 2. Ordnung, welches durch die $\mathsf{A}^6$ und den Bündelscheitel $A$ constituirt wird*).

24. In einem ebenen Strahlbüschel $(A, \alpha)$ befinden sich 3 Strahlen, welche correspondirende in $B$ haben, nämlich die 3 Strahlen $(\alpha, a^3)$; *die Regelschaaren* also, *die den Strahlen eines ebenen Büschels $(A, \alpha)$ entsprechen, erzeugen eine Congruenz 3. Ordnung.*

25. $(A, \alpha)$ sei ein ebenes Strahlbüschel, das durch einen Hauptpunkt $A_i$, z. B. $A_1$, geht; $\beta$ irgend eine Ebene. Diejenigen Strahlen in $\beta$, welche den Strahlen von $(A, \alpha)$ in Bezug auf $\mathsf{A}^5\,\mathsf{B}^5$ correspondiren, hüllen — abgesehen von dem Kegelschnitte, welcher allein dem Strahle $AA_1$ entspricht, — eine Curve 3. Classe $\beta_3$ ein (Nr. 13.), und ebenso diejenigen, welche in Bezug auf $\mathsf{A}_5^5\,\mathsf{B}_5^5$ entsprechen, — wie-

*) Sturm, Journal für Math. Bd. 70, S. 217.

derum abgesehen von einem gewissen Kegelschnitte — eine Curve 3. Classe $\beta_3'$. Die beiden Curven $\beta_3$ und $\beta_3'$ haben ausser den 3 Geraden $(\beta, \beta_{123})$, $(\beta, \beta_{124})$, $(\beta, \beta_{134})$ noch 6 Tangenten gemein. Während jene 3 Geraden in Bezug auf $A^5 B^5$ den Strahlen von $(A, \alpha)$, welche $b_{45}$, $b_{35}$, $b_{25}$, und in Bezug auf $A_5{}^5 B_5{}^5$ denjenigen entsprechen, welche $b_{46}$, $b_{36}$, $b_{26}$ treffen (Nr. 13.), correspondirt jede der 6 andern in Bezug auf beide Gruppenpaare, also auch in Bezug auf $A^6 B^6$ der nämlichen Geraden von $(A, \alpha)$; denn der Complex 2. Grades, der jeder von ihnen in Bezug auf $A^4 B^4$ entspricht, hat mit $(A, \alpha)$ ausser $AA_1$ nur einen Strahl gemein. Würde statt des durch $A_1$ gehenden Büschels ein beliebiges genommen, so würde sich in ähnlicher Weise, wie beim Probleme der ebenen Projectivität*), eine Zweideutigkeit an dieser Stelle ergeben haben. In dem Strahlbüschel $(A, \alpha)$ giebt es also 6 von $AA_1$ verschiedene Strahlen, deren entsprechende in Bezug auf $A^6B^6$ in $\beta$ liegen; von den entsprechenden des Strahls $AA_1$ liegen 3 in $\beta$ (Nr. 20.). Mithin *erzeugen diejenigen Strahlen eines Bündels $A$, welche ihre correspondirenden in $\beta$ haben, einen Kegel 9. Ordnung, welcher die 6 Geraden $AA_i$ zu dreifachen Kanten hat; die correspondirenden selbst umhüllen die in $\beta$ befindliche Curve 3. Classe* des Complexes, der dem Bündel $A$ entspricht. Kegel und Curve müssen wegen der eindeutigen Beziehung ihrer Geraden vom nämlichen Geschlechte sein. Die Curve 3. Classe besitzt keine Doppeltangenten, denn so lange $A$ sich nicht auf der Fläche 4. Ordnung der Scheitel der durch $A^6$ gehenden Kegelschaaren (2. Grades) befindet, giebt es im Bündel $A$ keine adjungirten Geraden. Folglich muss der Kegel vom Geschlechte 1 sein, hat also ausser den 6 dreifachen Kanten noch 9 Doppelkanten; d. h. es giebt in $A$ 9 Gerade, welche 2 correspondirende in $\beta$ haben, deren correspondirende Regelschaar also eine Kegelschaar ist, welche ihre Spitze in $\beta$ hat. *Die Curve der Spitzen der Kegelschaaren, welche der dem Bündel $A$ entsprechende Complex 3. Grades enthält, ist 9. Ordnung,* während die Kegelspitzencurve des Complexes, welcher dem Bündel $A$ adjungirt ist, von der 6. Ordnung ist, da die Regelschaaren dieses Complexes ein Netz bilden.

26. *Der Complex der Geraden, welche den Geraden einer Ebene $\alpha$ (oder $\beta$) in Bezug auf $A^6 B^6$ correspondiren, ist 9. Grades,* denn durch jeden Punkt $B$ (oder $A$) geht ein Kegel 9. Ordnung von solchen Geraden. *Zu diesem Complexe gehört die Regelschaar $\overline{\mathfrak{B}}^2$ dreifach,* denn 3 Sehnen von $\mathfrak{A}_0{}^3$ (Nr. 21.) liegen in $\alpha$; *ebenso die ganzen 6 Strahlenbündel $B_i$ dreifach,* denn von dem Sehnensysteme, das jedem Strahle dieser Bündel correspondirt, befinden sich 3 Sehnen in $\alpha$; *der*

*) Eb. Proj. Nr. 12.

*Complex enthält ferner die vollständigen Geradenfelder der 20 Hauptebenen* $\beta_{ikl}$; denn es lässt sich leicht einsehen, dass z. B. *jeder* Geraden von $\alpha_{123}$ *jede* Gerade von $\beta_{456}$ correspondirt. *Endlich befinden sich in diesem Complexe noch* $\infty^1$ *doppelte Regelschaaren:* es giebt nämlich $\infty^1$ Kegelschaaren durch $B^6$, welche ihre Spitze in $\alpha$ haben (der Ort dieser Spitze ist bekanntlich eine Curve 4. Ordnung) und von jeder dieser Kegelschaaren enthält $\alpha$ zwei Gerade, denen dieselbe Regelschaar entspricht. *Die von den* $\infty^1$ *doppelten Regelschaaren gebildete Congruenz ist 9. Ordnung*; was aus dem Satze von Nr. 25. einleuchtet, dass es 9 Gerade durch einen Punkt $B$ giebt, denen Kegelschaaren mit in $\alpha$ befindlicher Spitze entsprechen.

*Die Kanten sämmtlicher Kegel (2. Grades), die durch* $A^6$ *gehen, bilden einen Complex 6. Grades,* denn der Complexkegel aus einem Punkte $A$ ist derjenige Kegel, welcher die Kegelspitzencurve 6. Ordnung des Flächennetzes $(A^6 A)$ aus $A$ projicirt. *Zu diesem Complexe gehören die 6 Bündel* $A_i$ *und das Sehnensystem der Curve* $\mathfrak{A}_0{}^3$ *zweifach* (denn die 6 Geraden $AA_i$ und die Sehne aus $A$ an $\mathfrak{A}_0{}^3$ sind Doppelkanten des eben erwähnten Kegels*); übrigens ist auch leicht einzusehen, dass jede dieser Geraden Kante von 2 Kegeln ist) *und die Geradenfelder der 20 Ebenen* $\alpha_{ikl}$. Die Kegelkanten also, die in einer Ebene $\alpha$ liegen, umhüllen eine Curve 6. Classe, welche die Schnittlinien von $\alpha$ mit allen 20 Hauptebenen berührt; die Geraden $a$ in $\alpha$, deren correspondirende in $\beta$ liegen, umhüllen eine Curve 9. Classe, welche ebenfalls diese Linien berührt. Beide Curven haben also ausser diesen 20 Tangenten noch 34 gemein, welche zu je zweien demselben Kegel angehören und also 17 Doppeltangenten der Curve 9. Classe der correspondirenden Geraden in $\beta$ liefern. Das sind die in $\beta$ befindlichen Geraden *der doppelten Regelschaaren des Complexes 9. Grades, der dem Geradenfelde von* $\alpha$ *entspricht. Folglich ist die Congruenz derselben 17. Classe.*

Zugleich ist der Satz gewonnen: *die Curve der Spitzen der Kegelschaaren, welche sich in diesem Complexe befinden, ist 17. Ordnung.*

Es giebt ferner unter den Kegelschaaren durch $A^6$, welche ihre Spitze auf $\alpha$ haben, 4, deren Kegel die Ebene $\alpha$ berührt; mithin *befinden sich unter den doppelten Regelschaaren der Congruenz 9. Ordnung 17. Classe, welche dem der Ebene* $\alpha$ *entsprechenden Complexe 9. Grades angehört, 4 cuspidale Regelschaaren,* d. h. für den Complexkegel eines Punktes auf einer Geraden einer dieser Schaaren oder für die Complexcurve einer Ebene durch eine solche Gerade ist letztere eine Cuspidalkante bez. Wendetangente.

---

*) Eb. Proj. Nr. 30.

27. Wenn die Ebene $\alpha$ durch einen Hauptpunkt, z. B. $A_1$, geht, so entspricht dem Strahlbüschel $(A_1, \alpha)$ allein ein Complex 5. Grades, der die Bündel $B_2 B_3 B_4 B_5 B_6$ doppelt enthält, ebenso das Sehnensystem der in Bezug auf $\mathsf{A}_1{}^5 \mathsf{B}_1{}^5$ analogen Curve der Curve $\mathfrak{A}_0{}^3$ (Nr. 13.); es bleibt also als eigentliches der Ebene $\alpha$ entsprechendes Gebilde ein Complex 4. Grades, welcher das Bündel $B_1$ dreifach, die eben erwähnten 5 Bündel und das Sehnensystem nur einfach enthält.

Enthält $\alpha$ zwei Hauptpunkte, z. B. $A_1$, $A_2$, so besteht der Complex 9. Grades aus dem Complexe 2. Grades, welcher der Hauptlinie $a_{12}$ allein correspondirt, aus den beiden Complexen 3. Grades, welche den Strahlbüscheln $(\alpha, A_1)$ und $(\alpha, A_2)$ entsprechen (Nr. 13.), und dem linearen Complexe $[b_{12}]$, welcher eigentlich der Ebene $\alpha$ correspondirt.

Ist $\alpha$ eine Hauptebene, z. B. $\alpha_{123}$, so haben wir zunächst 3 Complexe 2. Grades, den Geraden $a_{12}$, $a_{13}$, $a_{23}$ zugehörig, und 3 lineare Complexe $[b_{12}]$, $[b_{13}]$, $[b_{23}]$, welche den Strahlbüscheln $\alpha$ $(A_1, A_2, A_3)$ entsprechen. Was die andern Geraden $a$ von $\alpha_{123}$ anlangt, so wissen wir ja, dass jeder das ganze Geradenfeld $\beta_{456}$ entspricht; aber ausserdem ist aus Nr. 6. zu entnehmen, dass jeder Geraden $a$ von $\alpha_{123}$ in Bezug auf $\mathsf{A}^4_{1,2}$, $\mathsf{B}^4_{1,2}$ in dieser Ebene $\alpha_{123}$, weil sie durch $A_3$ geht, ein Strahlbüschel adjungirt ist, das seinen Scheitel auf $(\alpha_{123}, \alpha_{456})$ hat, und in $\beta_{123}$, weil diese Ebene durch $B_3$ geht, ein Strahlbüschel correspondirt, dessen Scheitel auf $(\beta_{123}, \beta_{456})$ liegt; diese in Bezug auf $\mathsf{A}^4_{1,2}$, $\mathsf{B}^4_{1,2}$ analogen Strahlbüschel sind aber (Nr. 1.) auch in Bezug auf $\mathsf{A}^6 \mathsf{B}^6$ analog. Also erhalten wir in je zwei homologen Hauptebenen $\infty^1$ analoge Strahlbüschel — welche als degenerirte Regelschaaren zu betrachten sind —; ihre Scheitel durchlaufen die Schnittgerade der betreffenden Hauptebene mit ihrer Gegen-Hauptebene.

Zu dem Complexe 9. Grades, der einer Ebene $\alpha$ entspricht, gehört also in jeder Ebene $\beta_{ikl}$, z. B. $\beta_{123}$, das Büschel, welches nach dem eben Gesagten der Geraden $(\alpha, \alpha_{123})$ entspricht, doppelt, in sofern es ja auch — wie alle andern Geraden von $\beta_{123}$ — der Geraden $(\alpha, \alpha_{456})$ correspondirt.

28. *Die Congruenz, welche von den Regelschaaren gebildet wird, die den Strahlen eines Strahlbüschels* $(A, \alpha)$ *entsprechen, ergiebt sich nun von der 9. Classe*, während oben (Nr. 24.) für ihre Ordnung 3 gefunden wurde. *Zu dieser Congruenz sendet jeder der Hauptpunkte* $B_i$ *einen Kegel 5. Ordnung* (Nr. 1., 12.).

Wenn $\alpha$ durch einen Hauptpunkt, z. B. $A_1$, geht, so besteht diese Congruenz aus dem Sehnensysteme (1. Ordnung, 3. Classe), welches allein der Geraden $AA_1$ entspricht, und zu dem jeder der 5 Punkte $B_2 B_3 B_4 B_5 B_6$ einen Kegel 2. Grades sendet, und aus einer Congruenz 2. Ordnung, 6. Classe, welche aus jedem dieser 5 Punkte einen Kegel 3. Ordnung, aus $B_1$ einen von der 5. Ordnung erhält.

Sei $\bar{a}$ eine durch $A_1$ gehende Gerade, so giebt es $\infty^1$ Regelschaaren (durch $A^6$), welche $\bar{a}$ zur Leitgeraden haben. Die Hyperboloide, denen sie angehören, bilden ein Flächenbüschel, dessen Grundcurve aus $\bar{a}$ und einer cubischen Raumcurve besteht, von der $A$ ein beliebiger Punkt sei. Wollen wir nun wissen, welche Congruenz von den Regelschaaren gebildet wird, die zu jenen analog sind, so genügt es, die durch $A$ gehenden Geraden der letzteren zu betrachten; dieselben treffen $\bar{a}$ und bilden demnach ein durch $A_1$ gehendes ebenes Strahlbüschel, folglich die ihnen correspondirenden Regelschaaren, also die analogen zu den auf $\bar{a}$ sich stützenden, eine Congruenz 2. Ordnung und 6. Classe.

Falls $(A, \alpha)$ durch 2 Hauptpunkte geht, z. B. durch $A_5$, $A_6$, so besteht die dem Büschel correspondirende Congruenz aus den beiden Sehnensystemen, welche den Geraden $AA_5$ und $AA_6$ entsprechen, und einer Congruenz 1. Ordnung und 3. Classe, die das eigentliche entsprechende Gebilde ist; zu derselben senden $B_1 B_2 B_3 B_4$ je ein ebenes Strahlbüschel, $B_5$ und $B_6$ einen Kegel 3. Ordnung, woraus schon hervorgeht, dass sie nicht das Sehnensystem einer cubischen Raumcurve ist. Zu derselben gelangt man auch auf folgende Weise: Dem Büschel $(A, \alpha)$ entspricht, weil es durch $A_5$ geht, in Bezug auf $A^5 B^5$ ein Complex 3. Grades, für welchen das Bündel $B_5$ doppelt, die übrigen 4 Bündel $B_1, B_2, B_3, B_4$ einfach sind (Nr. 13.); diejenigen Geraden dieses Complexes, welche der $b_{56}$ begegnen, entsprechen auch in Bezug auf $A^6 B^6$; sie bilden — abgesehen von dem doppelten Bündel $B_5$ — eine Congruenz 1. Ordnung und 3. Classe, denn beide zusammen bilden den vollen Schnitt des Complexes 3. Grades mit dem linearen Complexe $[b_{56}]$. Zu dieser Congruenz gehören die Büschel, welche $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ mit $b_{56}$ verbinden, und der Kegel des Complexes 3. Grades aus $B_6$ und in ähnlicher Weise also auch ein Kegel 3. Ordnung aus $B_5$.

## IV.

29. Wir betrachten jetzt *2 Gruppen von 7 Punkten:* $A^7 B^7$. Einer Geraden $a$ correspondiren in Bezug auf $A^6 B^6$ alle Geraden $b$ einer Regelschaar; construirt man für alle diese Geraden $b$ diejenige Ebene $bX$, für welche

$$b\,(B_1 B_2 B_3 X) = a\,(A_1 A_2 A_3 A_7),$$

also auch

$$b\,(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 X) = a\,(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7),$$

so gehen diese Ebenen $bX$ alle durch dieselbe Leitgerade der Regelschaar. Durch diese und $B_7$ geht eine einzige Ebene, welche auf der Regelschaar die einzige Gerade $b$ liefert, für welche

$$b\,(B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7) = a\,(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7),$$

die also der $a$ in Bezug auf $\mathsf{A}^7\,\mathsf{B}^7$ correspondirt. Oder sucht man noch die Regelschaar, welche der $a$ in Bezug auf $\mathsf{A}_6{}^6\,\mathsf{B}_6{}^6$ entspricht, so sind beide Schaaren Sehnen der nämlichen cubischen Raumcurve, deren Sehnensystem der Geraden $a$ in Bezug auf $\mathsf{A}^5\,\mathsf{B}^5$ correspondirt, mithin haben sie eine Gerade gemein. *In Bezug auf* $\mathsf{A}^7\,\mathsf{B}^7$ *entspricht* also *jeder Geraden a stets eine und im Allgemeinen nur eine Gerade b**); *die beiden Räume* ($a$) *und* ($b$) *sind also hinsichtlich ihrer Geraden eindeutig auf einander bezogen.*

*Eine Gerade hat im Allgemeinen keine adjungirte.*

30. Ausnahmen von dieser eindeutigen Beziehung sind folgende: *Einer Geraden a, die durch einen Hauptpunkt* $A_i$ *geht,* — nennen wir sie deshalb $a_i$ — *entspricht im andern Raume eine Regelschaar* $\mathfrak{B}_i{}^2$, *welche durch die nicht homologen Hauptpunkte desselben geht*; *jeder der 21 Hauptlinien entspricht das Sehnensystem einer cubischen Raumcurve.* Die entsprechenden Geraden der Strahlen eines Bündels $A_i$ bilden einen Complex 3. Grades (Nr. 22.), zu dem sämmtliche Bündel der Hauptpunkte $B_i$ ausser dem des homologen von $A_i$ gehören.

*Durch die 7 Punkte* $A_i$ *gehen* $\infty^2$ *Regelschaaren, welche wir* $\mathfrak{A}_0{}^2$ *nennen wollen*; die beiden Regelschaaren, welche jeder derselben in Bezug auf $\mathsf{A}^6\,\mathsf{B}^6$ und auf $\mathsf{A}_6{}^6\,\mathsf{B}_6{}^6$ correspondiren, gehören zu demselben Sehnensysteme einer cubischen Raumcurve, zu deren analogem in Bezug auf $\mathsf{A}^5\,\mathsf{B}^5$ die Schaar $\mathfrak{A}_0{}^2$ gehört; folglich haben sie *eine Gerade* $b_0$ gemein. *Dieselbe correspondirt* demnach *in Bezug auf* $\mathsf{A}^7\,\mathsf{B}^7$ *allen Geraden* $\mathfrak{a}_0$ *von* $\mathfrak{A}_0{}^2$. Auf jeder $\mathfrak{A}_0{}^2$ befindet sich je eine $a_i$, also liegt $b_0$ auf der entsprechenden $\mathfrak{B}_i{}^2$. Von den $\infty^2$ Regelschaaren $\mathfrak{B}_i{}^2$, z. B. $\mathfrak{B}_1{}^2$, gehen $\infty^1$ durch $B_1$, also durch alle Hauptpunkte $B_i$ und sind deshalb Schaaren $\mathfrak{B}_0{}^2$ (von ähnlicher Bedeutung im Raume ($b$) wie die $\mathfrak{A}_0{}^2$ im Raume ($a$)), so dass sich unter den Strahlen $a_1$ $\infty^1$ Strahlen $a_0$ befinden, zu denen auch die 6 Geraden $a_{ik}$ gehören. Diese Geraden $a_1$, die zugleich $a_0$ sind, bilden einen Kegel 3. Ordnung, weil in jeder der ihnen entsprechenden Regelschaaren eine Gerade durch $B_1$ geht, der Kegel also der aus $A_1$ im Complexe ist, welcher dem Bündel $B_1$ in Bezug auf $\mathsf{A}_1{}^6\,\mathsf{B}_1{}^6$ entspricht.

31. Sei $\mathfrak{A}_0{}^3$ die cubische Raumcurve, welche durch $\mathsf{A}^6$ geht; ihrem Sehnensysteme entspricht in Bezug auf $\mathsf{A}^6\,\mathsf{B}^6$ eine Regelschaar (Nr. 21.); $b$ sei eine Gerade dieser Schaar; ihr correspondirt in Bezug auf $\mathsf{A}_6{}^6\,\mathsf{B}_6{}^6$ eine Regelschaar, welche zu dem Sehnensysteme von $\mathfrak{A}_0{}^3$ gehört; denn die Curve $\mathfrak{A}_0{}^3$ ist derjenigen Curve in Bezug auf $\mathsf{A}^5\,\mathsf{B}^5$ analog, welche durch $\mathsf{B}^5$ geht und $b$ zur Sehne hat. Die eben genannte Regelschaar

*) Müller a. a. O.

in $(a)$ geht aber durch die 7 Punkte $A^7$, durch $A^6$ nämlich, weil sie zum Sehnensysteme von $\mathfrak{A}_0^3$ gehört, und durch $A_7$, weil sie der $b$ in Bezug auf $A_6^6 B_6^6$ correspondirt; also ist sie eine Regelschaar $\mathfrak{A}_0^2$. Die Gerade $b$ entspricht ihr ersichtlich in Bezug auf $A^7 B^7$, weil in Bezug auf $A^6 B^6$ und auf $A_6^6 B_6^6$; demnach ist sie eine Gerade $b_0$. Ebenso die andern Geraden der Regelschaar, aus der wir sie genommen haben, und die der 6 andern ähnlichen Regelschaaren. Wir erhalten folglich auf diese Weise keine neuen singulären Geraden.

32. *Bewegt sich eine Gerade $a$ auf einer Regelschaar durch $A_i^6$, so bewegt sich die ihr correspondirende $b$ auf der Regelschaar, welche jener in Bezug auf $A_i^6 B_i^6$ analog ist.*

33. Den Strahlen eines Bündels $A$ entspricht in Bezug auf $A^6 B^6$ und auf $A_6^6 B_6^6$ je ein Complex 3. Grades; an der Congruenz, welche beiden gemeinsam ist, nehmen theil die 5 Strahlenbündel $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$ und das Sehnensystem der Curve 3. Ordnung, welche der durch $A^5$ und $A$ gelegten in Bezug auf $A^5 B^5$ analog ist. *Die Congruenz 3. Ordnung 6. Classe*, die übrig bleibt, *wird durch die Geraden gebildet, welche den Strahlen von $A$ in Bezug auf $A^7 B^7$ entsprechen.* Die Ordnung dieser Congruenz kann wiederum auch durch einen ebenen Schnitt aus dem entsprechenden Resultate der ebenen Projectivität entnommen werden*). *Jeder der Hauptpunkte $B_i$ liefert zu dieser Congruenz einen Kegel 3. Ordnung,* dem in $A$ ebenfalls ein Kegel 3. Ordnung entspricht (Nr. 22.).

34. Ist $A$ der achte Punkt, der allen Flächen $\mathfrak{A}_0^2$ gemeinsam ist; so zeigt sich, dass *die Geraden $b_0$ eine eben solche Congruenz 3. Ordnung 6. Classe bilden;* dieselbe ergiebt sich auch als gemeinsam den zwei Complexen 3. Grades, welche dem Bündel $A_i$ und dem Bündel $A_k$ correspondiren und welche ausserdem die Bündel der 5 Punkte $A_{i,k}^5$ und das Sehnensystem einer cubischen Raumcurve gemein haben, das der Geraden $a_{ik}$ entspricht. *Die $\infty^3$ Geraden auf den Regelschaaren $\mathfrak{A}_0^2$, welche diesen $\infty^2$ Geraden $b_0$ entsprechen, erzeugen einen Complex 3. Grades,* da die Flächen, denen sie angehören, ein Netz bilden.

35. *Die Geraden, welche einem ebenen Geradenfelde $\alpha$ correspondiren, bilden* nach Nr. 33. *eine Congruenz 6. Ordnung*; die Classe dieser Congruenz ist schwieriger zu ermitteln. Den Geraden von $\alpha$ entspricht in Bezug auf $A^6 B^6$ und ebenso in Bezug auf $A_6^6 B_6^6$ je ein Complex 9. Grades. Beide Complexe enthalten die 5 Bündel $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ dreifach und die Geradenfelder der 10 Ebenen, welche diese Punkte verbinden, einfach (Nr. 26.); also bleibt eine Congruenz 36. Ordnung 71. Classe als beiden gemeinsam; jede Gerade derselben hat

*) Eb. Proj. Nr. 16.

in Bezug auf $A^6B^6$ und auf $A_6^6B_6^6$ je eine correspondirende Gerade in $\alpha$: beide correspondiren ihr in Bezug auf $A^5B^5$; da aber einer Geraden in Bezug auf diese beiden Gruppen 3 Gerade in $\alpha$ entsprechen, so *können* jene verschieden sein. Die obige Congruenz wird also aus 2 Theilen bestehen: die Geraden des einen — und das ist der, den wir ermitteln wollen — haben dieselbe correspondirende in $\alpha$ in Bezug auf $A^6B^6$ und auf $A_6^6B_6^6$, welche ihnen dann in Bezug auf $A^7B^7$ entspricht; die des andern verschiedene. Im Allgemeinen wird es schwer sein, die beiden Theile zu trennen; nehmen wir deshalb an, $\alpha$ gehe durch einen Hauptpunkt, z. B. $A_1$; $\beta$ sei eine beliebige Ebene. Diejenigen Geraden in $\beta$, welchen in $\alpha$ gelegene Gerade in Bezug auf $A^6B^6$ entsprechen, hüllen, wenn von der Curve 5. Classe abgesehen wird, deren Tangenten den Strahlen von $(A_1, \alpha)$ entsprechen, eine Curve 4. Classe $\beta_4$ ein, deren Tangenten also nicht durch $A_1$ gehenden Geraden von $\alpha$ correspondiren; $\beta_4$ berührt auch die Schnittlinien der Ebene $\beta$ mit den 10 Ebenen, welche $B_1$ mit je zwei der 5 Punkte $B_{1,7}^5$ verbinden, indem diese Geraden den Schnittlinien von $\alpha$ mit den 10 Ebenen entsprechen, welche je 3 der 5 Punkte $A_{1,7}^5$ verbinden; z. B. $(\beta, \beta_{123})$ entspricht $(\alpha, \alpha_{456})$. Die Geraden in $\beta$ ferner, welche nicht durch $A_1$ gehenden Geraden von $\alpha$ in Bezug auf $A_6^6B_6^6$ correspondiren, hüllen ebenfalls eine Curve 4. Classe $\beta_4'$ ein, welche auch die 10 Schnittlinien $\beta$ mit den Ebenen tangirt, welche $B_1$ mit je zwei der 5 Punkte $B_{1,6}^5$ verbinden. Beide Curven $\beta_4$ und $\beta_4'$ haben 16 Tangenten gemein: unter diesen befinden sich die 6 Geraden $\beta$ $(\beta_{123}, \beta_{124}, \beta_{125}, \beta_{134}, \beta_{135}, \beta_{145})$; ihnen entsprechen in Bezug auf $A^6B^6$ und auf $A_6^6B_6^6$ verschiedene Gerade in $\alpha$, z. B. der $(\beta, \beta_{123})$ resp. $(\alpha, \alpha_{456})$ und $(\alpha, \alpha_{457})$. Jede der 10 andern Geraden hat in Bezug auf beide Gruppenpaare dieselbe correspondirende in $\alpha$, nämlich die einzige Gerade, die ihr in Bezug auf $A^5B^5$ in $\alpha$ entspricht und nicht durch $A_1$ geht. Also correspondiren sich beide Gerade auch in Bezug auf $A^7B^7$.

Unter den nicht durch $A_1$ gehenden Geraden von $\alpha$ haben also 10 ihre entsprechenden in $\beta$.

Den Strahlen von $(A_1, \alpha)$ correspondirt eine Congruenz 3. Ordnung 9. Classe, also liegen 9 Gerade derselben in $\beta$.

Mithin haben 19 Gerade von $\alpha$ ihre correspondirenden in $\beta$. Dasselbe gilt natürlich von jeder Ebene $\alpha$. Folglich *ist die Congruenz der Geraden, welche den Geraden eines Geradenfelds entsprechen, 19. Classe. Zu dieser Congruenz liefert jeder der 7 Hauptpunkte $B_i$ einen Kegel 9. Ordnung*, den Kegel aus $B_i$ im Complexe 9. Grades, welcher dem Geradenfelde $\alpha$ in Bezug auf $A_i^6B_i^6$ entspricht.

36. Geht $\alpha$ durch 2 Hauptpunkte $A_i$, z. B. $A_6$, $A_7$, so zerfällt die Congruenz in zwei Congruenzen 2. Ordnung und 6. Classe, welche bez. den Strahlbüscheln $(A_6, \alpha)$ und $(A_7, \alpha)$ — die resp. durch $A_7$, $A_6$

gehen — entsprechen (Nr. 28), das Sehnensystem einer cubischen Raumcurve, welches allein der $a_{67}$ entspricht, und eine Congruenz 1. Ordnung, 4. Classe, welche allen andern Geraden von $\alpha$ correspondirt.

Letzteres ergiebt sich auch auf folgende Weise: Den nicht durch $A_6$ gehenden Geraden von $\alpha$ entspricht in Bezug auf $\mathsf{A}^6\,\mathsf{B}^6$ ein Complex 4. Grades, welcher das Bündel $B_6$ dreifach enthält (Nr. 27.). Diejenigen Geraden dieses Complexes, welche der $b_{67}$ begegnen, ohne durch $B_6$ zu gehen, entsprechen den Geraden in $\alpha$ auch in Bezug auf $\mathsf{A}^7\,\mathsf{B}^7$. Jeder Kegel des Complexes wird aber von $b_{67}$ ausser auf der nach $B_6$ gehenden dreifachen Kante nur noch einmal getroffen; also ist die Congruenz der die $b_{67}$ treffenden Complexgeraden, welche nicht zum Bündel $B_6$ gehören, 1. Ordnung, 4. Classe (denn an letzterer wird nichts geändert).

Für eine Ebene $\alpha_{ikl}$ z. B. $\alpha_{567}$ zerfällt die Congruenz in 3 Congruenzen 1. Ordnung, 3. Classe (nicht „cubische“ Sehnensysteme), entsprechend den 3 Büscheln $(\alpha, A_5)$, $(\alpha, A_6)$, $(\alpha, A_7)$, deren jedes durch die beiden andern Punkte geht, 3 Sehnensysteme, entsprechend den 3 Geraden $a_{56}$, $a_{57}$, $a_{67}$, und das Geradenfeld $\beta_{567}$; denn jede Gerade $a$ in $\alpha_{567}$, die nicht zu den 3 Büscheln gehört, hat in Bezug auf $\mathsf{A}^5\mathsf{B}^5$ 3 correspondirende in $\beta_{567}$, von denen eine nicht durch $B_5$ geht. Diese correspondirt jener auch in Bezug auf $\mathsf{A}^7\,\mathsf{B}^7$ (Nr. 1.).

37. Lassen wir ein Strahlenbündel $A$ längs einer Geraden $\bar{a}$ hingleiten, so dass der Complex $[\bar{a}]$ entsteht, welches ist der entsprechende Complex? In einem Strahlenbündel $B$ giebt es einen Kegel 3. Ordnung $b^3$, dessen Gerade Strahlen eines Bündels $A$ in Bezug auf $\mathsf{A}^6\mathsf{B}^6$, und ebenso einen Kegel 3. Ordnung $b_1{}^3$, dessen Gerade Strahlen von $A$ in Bezug auf $\mathsf{A}_6{}^6\,\mathsf{B}_6{}^6$ correspondiren. Beide Kegel haben die 5 Geraden $B\mathsf{B}^5$ und die Sehne gemein, welche von $B$ an die Curve $B^3$ geht, die der durch $A\mathsf{A}^5$ gelegten in Bezug auf $\mathsf{A}^5\mathsf{B}^5$ analog ist. Die 3 übrigen gemeinsamen Kanten entsprechen ihren correspondirenden in $A$ auch in Bezug auf $\mathsf{A}^7\,\mathsf{B}^7$; wir haben den Kegel zu ermitteln, den diese 3 Geraden beschreiben, während $A$ die Gerade $\bar{a}$ durchläuft. Sei $\bar{b}$ eine Gerade, deren Schnittpunkte mit diesem Kegel wir suchen wollen: durch jeden Punkt $B'$ von $\bar{b}$ geht eine Gerade $BB'$, der in Bezug auf $\mathsf{A}^6\mathsf{B}^6$ eine Regelschaar $\mathfrak{A}^2$ entspricht; von derselben treffen zwei Gerade die $\bar{a}$ (also gehört $BB'$ zu zwei Kegeln $b^3$); den Punkten $A$ auf $\bar{a}$, in denen dies geschieht, correspondiren in $B$ in Bezug auf $\mathsf{A}_6{}^6\mathsf{B}_6{}^6$ zwei Kegel $b_1{}^3$, welche also 6 Punkte $B''$ auf $\bar{b}$ veranlassen. Jedem Punkte $B'$ entsprechen demnach 6 Punkte $B''$ und ersichtlich auch umgekehrt; dies führt zu 12 Coincidenzpunkten, also zu einem Kegel 12. Ordnung. Doch muss ersichtlich von demselben der Kegel 5. Ordnung abgezogen werden, welchen die Sehnen aus $B$ an die cubischen Raumcurven bilden, welche denen durch $\mathsf{A}^5$ und je den be-

weglichen Punkt $A$ in Bezug auf $A^5B^5$ analog sind (Nr. 17.). Es bleibt also ein Kegel 7. Ordnung.

Demnach *entspricht dem linearen Complexe* $[\bar{a}]$ *ein Complex 7. Grades. Zu demselben gehören die Strahlenbündel* $B_i$ *doppelt,* denn jedem Strahle eines dieser Bündel entspricht eine Regelschaar, von der zwei Gerade der $\bar{a}$ begegnen.

Falls $\bar{a}$ durch einen Hauptpunkt $A_i$ geht, zerfällt der Complex 7. Grades in einen vom 3. Grade, der allein dem Bündel $A_i$ entspricht und die 6 Bündel $B_i^6$ einfach enthält, und einen Complex 4. Grades, welcher der eigentliche Correspondent zu $[\bar{a}]$ ist und die eben genannten Bündel einfach, das Bündel $B_i$ aber doppelt enthält.

Ist $\bar{a}$ eine Hauptlinie $a_{ik}$, so erhalten wir die beiden Complexe 3. Grades, welche den Bündeln $A_i$ und $A_k$ zugeordnet sind, und als eigentlichen Correspondenten den linearen Complex $[b_{ik}]$.

*Die Congruenz 3. Ordnung, 6. Classe der Graden* $b_0$, *deren jede einer Regelschaar* $\mathfrak{A}_0^2$ *entspricht* (Nr. 30., 34.), *gehört dem Complexe 7. Grades ebenfalls doppelt an;* geht $\bar{a}$ durch $A_i$, so befindet sich diese Congruenz in jedem der beiden Theile einfach.

38. Das Vorhergehende liefert ein weiteres Resultat: *Die Geraden, welche den Strahlen eines ebenen Strahlbüschels* $(A, \alpha)$ *correspondiren, erzeugen eine Regelfläche 7. Grades; für dieselbe ist jeder der 7 Hauptpunkte* $B_i$ *ein dreifacher Punkt* (Nr. 24.). Dass diese Fläche vom Geschlechte 0 sei, geht aus ihrer eindeutigen Beziehung auf das Strahlbüschel hervor.

Enthält $(A, \alpha)$ einen Hauptpunkt $A_i$, so löst sich die Regelschaar, welche dem Strahle $A A_i$ entspricht, ab und als eigentliche entsprechende Fläche bleibt eine Regelfläche 5. Grades, welche den homologen Hauptpunkt zum dreifachen hat, die andern nur zu doppelten Punkten.

Geht $(A, \alpha)$ durch zwei Hauptpunkte, z. B. $A_6$, $A_7$, so bleibt nach Abzweigung von zwei Regelschaaren eine Regelfläche 3. Grades, auf der die 5 Punkte $B^5$ einfach, die Gerade $b_{67}$ die doppelte Leitgerade ist. Letzteres ergiebt sich auch in folgender Weise: Dem Büschel $(A, \alpha)$ correspondirt in Bezug auf $A^6B^6$, weil es durch $A_6$ geht, eine Congruenz 2. Ordnung, 6. Classe, zu welcher $B_6$ einen Kegel 5. Ordnung sendet (Nr. 28.). Diejenigen Geraden dieser Congruenz, welche $b_{67}$ ausserhalb $B_6$ treffen, entsprechen ihren correspondirenden Geraden in $(A, \alpha)$ auch in Bezug auf $A^7B^7$: von jedem Punkte von $b_{67}$ gehen 2 aus und in jeder Ebene durch $b_{67}$ liegt ausser den Kanten des Kegels 5. Ordnung nur eine, was eine Regelfläche 3. Grades mit $b_{67}$ als doppelter Leitgeraden bewirkt.

Liegt das ebene Strahlbüschel in einer Hauptebene, z. B. in $\alpha_{567}$, so entspricht ihm — nach Ablösung dreier Regelschaaren — wieder ein ebenes Strahlbüschel in der homologen Ebene. Denn dem Büschel correspondirt in Bezug auf $A^5 B^5$, weil es durch $A_5$ geht, ein Complex 3. Grades, der das Bündel $B_5$ doppelt enthält (Nr. 13); die Complexcurve in $\beta_{567}$ besteht also aus dem doppelten Büschel $B_5$ und einem andern Büschel. Letzteres correspondirt dem in $\alpha_{567}$ auch in Bezug auf $A^7 B^7$ (Nr. 1.).

## V.

39. *Beide Gruppen haben 8 Punkte:* $A^8 B^8$. *Eine beliebige Gerade a hat nun im Allgemeinen nicht mehr eine correspondirende b; jedenfalls aber giebt es* $\infty^3$ *Gerade, welche entsprechende besitzen. Nennen wir diese Geraden* $(a)_8$ *und die ihnen entsprechenden* $(b)_8$.

Zunächst ist ersichtlich, dass *alle Geraden* $a_i$ *der Bündel* $A_i$ *zu den* $(a)_8$ *gehören;* die entsprechenden gehen im Allgemeinen nicht durch den homologen Punkt; ferner *jeder Geraden* $a_{ik}$ *entsprechen* $\infty^1$ *Geraden, welche eine durch* $B_{i,k}^6$ *gehende Regelschaar bilden.*

40. In Bezug auf $A^7 B^7$ giebt es $\infty^2$ Gerade $a_0$, deren jeder eine ganze Regelschaar $\mathfrak{B}_0^2$ correspondirt. Dieselben erzeugen eine Congruenz 3. Ordnung, 6. Classe (Nr. 34.). Sei $b$ irgend eine Gerade der Regelschaar, welche $a_0$ correspondirt; so werde in ihrem Büschel diejenige Ebene $bX$ aufgesucht, für welche

$$b(B_1 B_2 B_3 X) = a_0(A_1 A_2 A_3 A_8)$$

ist; diese Ebene $bX$ geht bekanntlich stets durch dieselbe Gerade $b'$ der Leitschaar der Regelschaar, welche Gerade $b$ aus letzterer auch genommen werde. Demnach liefert die Ebene $b' B_8$ diejenige Gerade der Regelschaar, welche der $a_0$ in Bezug auf $A^8 B^8$ entspricht. *Die Congruenz der* $a_0$ *und ähnlich die 7 andern durch andere Gruppirung sich ergebenden Congruenzen gehören zu dem Complexe der* $(a)_8$ *und zwar einfach; der Complex der* $(b)_8$ *enthält natürlich 8 ebensolche Congruenzen.*

41. Um den Grad des Complexes der $(a)_8$ (der der $(b)_8$ ist offenbar von demselben Grade) zu ermitteln, wäre zu untersuchen, wie viele Gerade $(a)_8$ sich in einem Strahlbüschel $(A, \alpha)$ befinden. Die ihnen correspondirenden sind den beiden Regelflächen 7. Grades gemein, welche $(A, \alpha)$ in Bezug auf zwei siebengliedrige Gruppenpaare entsprechen, z. B. $A^7 B^7$ und $A_7{}^7 B_7{}^7$; beide Regelflächen gehören zu der Congruenz 3. Ordnung, 9. Classe, welche $(A, \alpha)$ in Bezug auf $A^6 B^6$ correspondirt. In dieser allgemeinen Form wird die Frage schwer zu beantworten sein: nehmen wir an, dass das Büschel durch zwei Hauptpunkte, z. B. $A_7$ und $A_8$ gehe. Unter den gesuchten Geraden befinden sich dann auch $A(A_7, A_8)$, und zwar einfach; dem Büschel entspricht ferner in Bezug auf $A^7 B^7$, weil es durch $A_7$ geht, eine Regelfläche 5. Grades, für welche $B_7$ dreifacher Punkt ist (Nr. 38.); der $b_{78}$

begegnen also ausserhalb $B_7$ zwei Gerade der Regelfläche: diese und nur diese correspondiren ihren entsprechenden in $(A, \alpha)$ auch in Bezug auf $A^8B^8$. Mithin enthält $(A, \alpha)$ 4 Gerade $(a)_8$. *Der Complex der Geraden* $(a)_8$ *ist also 4. Grades und der ihm entsprechende der Geraden* $(b)_8$ *ebenfalls. Jeder enthält die Bündel der Hauptpunkte seines Raums, die 8 Congruenzen von Geraden* $a_0$ *(3. Ordnung, 6. Classe) dieses Raums und die 8 Congruenzen, ebenfalls 3. Ordnung, 6. Classe, welche den Bündeln der Hauptpunkte des andern Raums entsprechen.*

Liegt $(\alpha, A)$ in einer Ebene $\alpha_{ikl}$, so giebt es in ihm — abgesehen von den Geraden $A(A_i, A_k, A_l)$ — nur eine Gerade $(a)_8$; die ihr entsprechende $(b)_8$ liegt in $\beta_{ikl}$. Dies ergiebt sich auch auf folgende Art: Dem Strahlbüschel $(A, \alpha_{678})$ entspricht in Bezug auf $A^7B^7$ eine Regelfläche 3. Grades, welche $b_{67}$ zur doppelten Leitlinie hat (Nr. 38.) und demnach von der Ebene $\beta_{678}$ nur in einer Erzeugenden geschnitten wird; dies ist die $(b)_8$, deren correspondirende sich in $(A, \alpha_{678})$ befindet. *Es giebt also in jeder Ebene* $\alpha_{ikl}$ *ein Büschel von Geraden* $(a)_8$, *dessen Scheitel* $A_{ikl}$ *nicht in einem Hauptpunkte liegt; demselben entspricht in* $\beta_{ikl}$ *ein ebenso gelegenes Strahlbüschel* $B_{ikl}$ *von Geraden* $(b)_8$.

42. Die Geraden $(a)_8$, die sich in dem linearen Complexe $[\bar{a}]$ befinden, erzeugen offenbar eine Congruenz 4. Ordnung, 4. Classe; welches ist die Congruenz der correspondirenden Geraden $(b)_8$? Die Untersuchung bei der allgemeinen Lage von $\bar{a}$ bietet wieder ähnliche Schwierigkeiten, wie sich in der vorigen Nummer und in einigen frühern Fällen einstellten; legen wir $\bar{a}$ durch einen Hauptpunkt, z. B. $A_1$. Dem Complexe $[\bar{a}]$ entspricht in diesem Falle sowohl in Bezug auf $A^7B^7$, als auf $A_7{}^7B_7{}^7$ je ein Complex 4. Grades, welcher das Bündel $B_1$ doppelt, die Bündel $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$, $B_6$ einfach enthält (Nr. 37.). Also bleibt beiden Complexen noch eine Congruenz 7. Ordnung, 16. Classe gemein. Nun giebt es aber $\infty^1$ Regelschaaren durch $A^6$, zu deren Leitschaar $\bar{a}$ gehört: sei $\mathfrak{A}^2$ eine solche Schaar und $\mathfrak{B}^2$ die ihr analoge in Bezug auf $A^6B^6$; jede Gerade $b$ von $\mathfrak{B}^2$ hat ihre correspondirende sowohl in Bezug auf $A^7B^7$, als auf $A_7{}^7B_7{}^7$ auf $\mathfrak{A}^2$ (Nr. 32.) und zwar sind es im Allgemeinen verschiedene Gerade; da sie aber beide $\bar{a}$ treffen, so gehört $\mathfrak{B}^2$ jedenfalls zu den beiden Complexen 4. Grades und so alle $\infty^1$ Regelschaaren $\mathfrak{B}^2$, die den auf $\bar{a}$ sich stützenden Schaaren $\mathfrak{A}^2$ analog sind. Diese Regelschaaren bilden eine Congruenz 2. Ordnung, 6. Classe (Nr. 28.); also bleibt eine Congruenz 5. Ordnung, 10. Classe vom Schnitt der beiden Complexe übrig. Die Geraden derselben sind $(b)_8$, deren $(a)_8$ die $\bar{a}$ treffen. Dem Bündel $A_1$ allein entspricht eine Congruenz 3. Ordnung, 6. Classe. Uebertragen wir dies Resultat auf eine beliebige Gerade $\bar{a}$, bei der sich die beiden Congruenzen in eine einzige: 8. Ordnung, 16. Classe vereinigen, so erhalten wir: *Die Geraden* $(b)_8$, *deren entsprechende* $(a)_8$ *einer Ge-*

*raden* $\bar{a}$ *begegnen* (*und eine Congruenz 4. Ordnung, 4. Classe erzeugen*), *bilden eine Congruenz 8. Ordnung, 16. Classe.* Jedem Strahlbüschel $(B_i, \beta)$ entspricht in Bezug auf $\mathsf{A}^8\,\mathsf{B}^8$ eine Regelfläche 7. Grades (Nr. 38. und 1.); folglich giebt es in $(B_i, \beta)$ 7 Gerade $(b)_8$, deren entsprechende $\bar{a}$ treffen. *Jeder der Punkte* $B_i$ *sendet also zu der eben erhaltenen Congruenz einen Kegel 7. Ordnung*; *die 7 von* $B_i$ *ausgehenden Hauptlinien sind Doppelkanten dieses Kegels*, denn jeder derselben correspondirt eine ganze Regelschaar, mithin 2 die $\bar{a}$ treffende Gerade.

Der Fall, dass $\bar{a}$ durch einen Hauptpunkt $A_i$ geht, ist schon oben betrachtet. Verbindet $\bar{a}$ zwei Hauptpunkte, z. B. $A_7$, $A_8$, so zerfällt die Congruenz 8. Ordnung, 16. Classe in die beiden Congruenzen 3. Ordnung, 6. Classe, welche den Bündeln $A_7$, $A_8$ entsprechen, und in eine Congruenz 2. Ordnung, 4. Classe, welche das eigentliche entsprechende Gebilde ist. Zu derselben kann man auch so gelangen: Dem Complexe $[a_{78}]$ entspricht in Bezug auf $\mathsf{A}^7\,\mathsf{B}^7$, weil $a_{78}$ durch $A_7$ geht, ein Complex 4. Grades, der das Bündel $B_7$ doppelt enthält (Nr. 37.); er hat also mit dem Complexe $[b_{78}]$ ausser diesem Bündel noch eine Congruenz 2. Ordnung, 4. Classe gemein, deren sämmtliche Geraden der $b_{78}$ begegnen (indem jeder Punkt von $b_{78}$ zu ihr einen Kegel 2. Grades liefert). Diese Geraden correspondiren ihrer entsprechenden auch in Bezug auf $\mathsf{A}^8\,\mathsf{B}^8$. Die 2. Ordnung dieser Congruenz ist schon aus Nr. 41. zu entnehmen. Die entsprechenden Geraden bilden eine ebensolche Congruenz.

43. *Die Geraden* $(a)_8$, *welche in einem Bündel* $A$ *sich befinden, bilden einen Kegel 4. Ordnung; die ihnen entsprechenden eine Regelfläche 8. Grades*, denn von den Geraden $(b)_8$, welche $\bar{b}$ treffen, gehen 8 entsprechende durch $A$ (Nr. 42.); *jeder der Punkte* $B_i$ *ist ein dreifacher Punkt dieser Fläche* (Nr. 33.). Liegt $A$ auf einer Geraden $a_{ik}$, so zerfällt die Regelfläche 8. Grades in eine Regelschaar, welche durch $\mathsf{B}_{i,k}{}^6$ geht, und eine Regelfläche 6. Grades, die diese Punkte zu doppelten, $B_i$, $B_k$ zu dreifachen hat. Der Kegel 4. Ordnung bekommt die Gerade $a_{ik}$ zur doppelten Geraden.

Zu der Regelfläche 6. Grades gelangt man auch so: Dem Bündel $A$ entspricht in Bezug auf $\mathsf{A}_k{}^7\,\mathsf{B}_k{}^7$ eine Congruenz 3. Ordnung, 6. Classe, zu der die Punkte $\mathsf{B}_k{}^7$ je einen Kegel 3. Ordnung senden; durchschneidet man dieselbe durch $b_{ik}$ — die im Allgemeinen nicht auf dem Kegel aus $B_i$ liegt —, so ergiebt sich ausser diesem Kegel eine Regelfläche 6. Grades, für welche $b_{ik}$ eine dreifache Gerade ist. Diese Fläche enthält die Geraden $(b)_8$, deren entsprechende $(a)_8$ durch den auf $a_{ik}$ gelegenen Punkt $A$ gehen.

44. *Die Geraden* $(a)_8$, *die in einer Ebene* $\alpha$ *liegen, umhüllen eine Curve 4. Classe; ihre entsprechenden* $(b)_8$ *erzeugen eine Regelfläche 16. Grades*, denn von den entsprechenden der $(b)_8$, welche $\bar{b}$ treffen,

liegen 16 in $\alpha$ (Nr. 42.); *auf derselben ist jeder Punkt $B_i$ sechsfach* (Nr. 33.).

Geht $\alpha$ durch einen $A_i$, so zerfällt die Fläche 16. Grades in eine Regelfläche 7. Grades, die dem Büschel $(\alpha, A_i)$ entspricht und auf der die 7 Punkte $B_i^7$ dreifach sind (Nr. 38.), und in eine Regelfläche 9. Grades, auf der diese 7 Punkte dreifach, der achte, der homologe von $A_i$, 6-fach ist und welche den nicht durch $A_i$ gehenden Geraden $(a)_8$ von $\alpha$ — die eine Curve 3. Classe einhüllen — entspricht.

Enthält $\alpha$ zwei Hauptpunkte: $A_i$, $A_k$, so trennen sich von der Regelfläche 16. Grades ab zwei Regelflächen 5. Grades, welche den Büscheln $(A_i, \alpha)$, $(A_k, \alpha)$ entsprechen (Nr. 38.), und die Regelschaar, welche der Geraden $a_{ik}$ allein correspondirt (Nr. 39.). Es bleibt eine Regelfläche 4. Grades, auf der die Punkte $B_{i,k}^6$ einfach, die Punkte $B_i$ und $B_k$ aber dreifach sind, woraus hervorgeht, dass die ganze Gerade $b_{ik}$ auf ihr dreifach ist. Dies ergiebt sich auch auf folgende Weise: Der Ebene $\alpha$ entspricht in Bezug auf $A_k^7 B_k^7$, weil sie durch $A_i$ geht, eine Congruenz 3. Ordnung, 10. Classe (Nr. 35.), welche aus dem Punkte $B_i$ einen Kegel 9. Ordnung erhält; folglich bewirkt der Durchschnitt dieser Congruenz mit der Geraden $b_{ik}$ ausser diesem Kegel eine Regelfläche 4. Grades, auf der die Leitgerade $b_{ik}$ dreifach ist. Die Geraden dieser Fläche entsprechen den nicht durch $A_i$ oder $A_k$ gehenden Geraden $(a)_8$ in $\alpha$, welche einen Kegelschnitt einhüllen.

Ist $\alpha$ eine Ebene $\alpha_{ikl}$, so besteht die Regelfläche 16. Grades aus den drei Regelflächen 3. Grades, die den 3 Büscheln $(\alpha, A_i)$, $(\alpha, A_k)$, $(\alpha, A_l)$ entsprechen (welche je durch die beiden andern Punkte gehen), aus den 3 Regelschaaren, welche den Geraden $a_{ik}$, $a_{il}$, $a_{kl}$ correspondiren, und dem Strahlbüschel $B_{ikl}$ in $\beta_{ikl}$, welches dem Strahlbüschel $A_{ikl}$ in $\alpha_{ikl}$ entspricht (Nr. 41.).

## VI.

45. Wir gehen zu *2 Gruppen von je 9 Punkten:* $A^9 B^9$. Das Gruppenpaar $A^8 B^8$ liefert zwei entsprechende Complexe 4. Grades, desgleichen das Gruppenpaar $A_8{}^8 B_8{}^8$. Die beiden Complexe des Raums $(a)$ haben die 7 Bündel $A^7$ gemein, ferner die Congruenz 3. Ordnung, 6. Classe von Geraden $a_0$, deren jeder in Bezug auf $A^7 B^7$ einer Regelschaar entspricht (Nr. 34.), denn in dieser Regelschaar befinden sich dann die im Allgemeinen verschiedenen Geraden $(b)_8$, die der $a_0$ als Geraden $(a)_8$ in Bezug auf $A^8 B^8$ und auf $A_8{}^8 B_8{}^8$ entsprechen (Nr. 40.). Also bleibt den beiden Complexen noch gemein eine Congruenz 6. Ordnung, 10. Classe; jede Gerade dieser Congruenz hat dieselbe correspondirende in Bezug auf die beiden eben genannten Gruppenpaare (nämlich die einzige ihr correspondirende in Bezug auf $A^7 B^7$), also eine

correspondirende in Bezug auf $A^9B^9$. *Nennen wir die Geraden, welche entsprechende in Bezug auf* $A^9B^9$ *besitzen,* $(a)_9$, *die entsprechenden* $(b)_9$.

*Die Geraden* $(a)_9$ *bilden demnach eine Congruenz 6. Ordnung, 10. Classe; die ihnen entsprechenden* $(b)_9$ *natürlich eine ebensolche. Zu jeder dieser beiden Congruenzen schicken die 9 Hauptpunkte ihres Raums je einen Kegel 4. Ordnung, der durch die 8 andern Hauptpunkte desselben Raums einfach geht* (Nr. 41.).

46. Sei $A$ ein Punkt auf einer Geraden $a_{ik}$, so bilden die Geraden $(b)_8$, deren $(a)_8$ in Bezug auf $A_k^8 B_k^8$ durch $A$ gehen, eine Regelfläche 8. Grades, auf welcher $B_i$ dreifach ist (Nr. 43.); dieselbe wird von $b_{ik}$ ausserhalb $B_i$ noch auf 5 Geraden getroffen. Diese entsprechen ihren correspondirenden auch in Bezug auf $A^9 B^9$; so haben wir durch $A$ die 5 Geraden $(a)_9$, zu denen als sechste $a_{ik}$ tritt, welche ersichtlich eine Gerade $(a)_9$ ist, denn ihre $(b)_9$ ist die ihr in Bezug auf $A_{i,k}^7 B_{i,k}^7$ entsprechende.

Die Ebene $\alpha$ sei durch $a_{ik}$ gelegt; in Bezug auf $A_k^8$, $B_k^8$ bilden die Geraden $(b)_8$, deren $(a)_8$ in $\alpha$ liegen, eine Regelfläche 9. Grades, welche den Punkt $B_i$ sechsfach enthält; denn $\alpha$ geht durch $A_i$ (Nr. 44.). Dieselbe wird von $b_{ik}$ auf 3 nicht durch $B_i$ gehenden Geraden getroffen; diese entsprechen ihren correspondirenden in $\alpha$ auch in Bezug auf $A^9B^9$; wir haben also in $\alpha$ die 10 Geraden $(a)_9$, indem zu den 3 eben gefundenen noch die 7 kommen, welche durch $\alpha$ aus den beiden Kegeln 4. Ordnung $A_i$ und $A_k$ — denen $a_{ik}$ gemeinsam ist — ausgeschnitten werden. Die 10 Geraden $(a)_9$ in einer Ebene $\alpha_{ikl}$ sind erstens die 3 Hauptlinien, ferner durch jeden 3 der Hauptpunkte noch zwei andere (denn im Ganzen gehen wegen des Kegels 4. Ordnung in $\alpha_{ikl}$ 4 durch jeden) und eine einzelne Gerade, deren correspondirende ebenso in $\beta_{ikl}$ liegt.

47. *Einer Geraden* $\bar{a}$ *begegnen* $\infty^1$ *Gerade* $(a)_9$; *sie bilden eine Regelfläche 16. Grades, für welche die Leitgerade* $\bar{a}$ *sechsfach ist. Welche Regelfläche wird von den correspondirenden Geraden* $(b)_9$ *erzeugt?* Wir können die Anzahl ihrer Begegnungspunkte mit einer Hauptlinie $b_{ik}$ leicht ermitteln. Durch jeden der Punkte $B_i$ und $B_k$ und so durch jeden Hauptpunkt des Raums $(b)$ gehen 8 Erzeugende der gesuchten Fläche, denn diejenigen Geraden $(a)_9$, deren entsprechende $(b)_9$ durch $B_i$ gehen, bilden eine Regelfläche 8. Grades (Nr. 43.), so dass 8 der $\bar{a}$ begegnen. Dem Complexe $[b_{ik}]$ correspondirt ferner in Bezug auf $A_k^8 B_k^8$, weil $b_{ik}$ durch $B_i$ geht, eine Congruenz 5. Ordnung, 10. Classe, welche aus $A_i$ einen Kegel 7. Ordnung erhält (Nr. 42.). Die Geraden derselben, welche der $a_{ik}$ begegnen, ohne durch $A_i$ zu gehen, erzeugen also eine Regelfläche 8. Grades, auf welcher $a_{ik}$ 5-fach ist, sie entsprechen ihren correspondirenden auch in Bezug auf $A^9 B^9$. Folglich begegnen der $\bar{a}$ 8 Gerade $(a)_9$, deren entsprechende $(b)_9$ die $b_{ik}$ treffen,

ohne durch $B_i$ oder $B_k$ zu gehen. Demnach *ist der Grad der gesuchten Regelfläche* $2 \cdot 8 + 8 = 24$. *Sie hat*, wie schon gesagt, *die 9 Punkte $B_i$ zu achtfachen Punkten.*

Geht $\bar{a}$ durch einen Hauptpunkt $A_i$, so zweigt sich von der Regelfläche 24. Grades eine Regelfläche 8. Grades ab, welche den durch $A_i$ gehenden Geraden $(a)_9$ — die einen Kegel 4. Ordnung bilden — allein entspricht und die Punkte $\mathsf{B}_i^8$ zu dreifachen Punkten hat (Nr. 43.). Der Rest, welcher das eigentliche entsprechende Gebilde ist, ist eine Regelfläche 16. Grades, die die Punkte $\mathsf{B}_i^8$ zu 5-fachen, $B_i$ zum 8-fachen hat; die correspondirenden Geraden bilden eine Regelfläche 12. Grades, für welche $\bar{a}$ sechsfach ist.

Wenn $\bar{a}$ eine Hauptlinie $a_{ik}$ ist, so zweigen sich zunächst zwei Regelflächen 8. Grades ab, welche den durch $A_i$ und $A_k$ gehenden Kegeln 4. Ordnung von Geraden $(a)_9$ — die die $a_{ik}$ gemeinsam haben — entsprechen und welche beide die Punkte $\mathsf{B}_{i,k}^7$ zu dreifachen Punkten haben, während $B_k$ auf der einen, $B_i$ auf der andern dreifach ist. Es bleibt als eigentliches entsprechendes Gebilde eine Regelfläche 8. Grades, auf der die $\mathsf{B}_{i,k}^7$ doppelte Punkte sind, hingegen $B_i$ und $B_k$ 5-fach, woraus hervorgeht, dass die ganze $b_{ik}$ eine 5-fache Leitlinie der Fläche ist; was sich auch wiederum auf folgendem Wege erkennen lässt: Die Geraden $(b)_8$, deren entsprechende $(a)_8$ in Bezug auf $\mathsf{A}_k^8\,\mathsf{B}_k^8$ der Geraden $\bar{a} = a_{ik}$, welche durch $A_i$ geht, begegnen, erzeugen eine Congruenz 5. Ordnung, 10. Classe, zu welcher der Punkt $B_i$ einen Kegel 7. Ordnung sendet (Nr. 42.). Diejenigen Geraden dieser Congruenz, welche der $b_{ik}$ begegnen, ohne durch $B_i$ zu gehen, bilden eine Regelfläche 8. Grades, auf welcher $b_{ik}$ 5-fach ist. Das ist die eben erhaltene Fläche, indem ihre Geraden den ihnen in Bezug auf $\mathsf{A}_k^8\,\mathsf{B}_k^8$ correspondirenden auch in Bezug auf $\mathsf{A}^9\,\mathsf{B}^9$ entsprechen.

## VII.

48. Ich hatte schon die Absicht, meine Arbeit, obgleich einige Fragen noch nicht genügend oder gar nicht erledigt waren, hier zu schliessen, als ich durch Hrn. F. Klein auf die Halphen'schen Sätze*) aufmerksam gemacht wurde; dieselben haben mich in den Stand gesetzt, die noch nicht erledigten Fragen ebenfalls zu beantworten, und ich füge die nachträglich noch gemachten Untersuchungen, freilich etwas weniger geordnet, hinzu. Zunächst aber will ich selbst noch

*) Comptes rendus Dec. 1871 und Jan. 1872. Herr Halphen gebraucht bei einer Congruenz (System) die Worte „Ordnung" und „Classe" umgekehrt, als es sonst üblich ist.

Beweise für die Halphen'schen Sätze geben, so wie sie für meinen Zweck genügen.

49. *Zwei Congruenzen* $(p, q)$ *und* $(p', q')$ *d. i.* $p^{ter}$ *Ordnung* $q^{ter}$ *Classe, bez.* $p'^{ter}$ *Ordnung* $q'^{ter}$ *Classe haben* $pp' + qq'$ *Gerade gemein,* sagt der zweite der beiden Halphen'schen Sätze. Sind sie vollständige Complex-Durchschnitte, so geht dies aus dem Plücker'schen Satze hervor, dass 4 Complexe, deren Grad bez. $m, n, m', n'$ ist, $2mn \cdot m'n'$ gemeinsame Geraden besitzen. Ein Strahlenbündel ferner — Congruenz (1,0) — hat ersichtlich mit jeder Congruenz $(p, q)$ $p \cdot 1 + q \cdot 0 = p$ Gerade, ein Geradenfeld — Congruenz (0,1) — mit derselben $p \cdot 0 + q \cdot 1 = q$ Gerade gemein.

Seien nun zunächst zwei solche Congruenzen betrachtet, von denen die eine ein vollständiger Complex-Durchschnitt ist, mithin gleicher Ordnung und Classe $n'$, die andere $(p, q)$ zu einem vollständigen Schnitte $(n, n)$ durch einen ebenfalls vollständigen Schnitt $(m, m)$, $\mu$ Bündel und $\nu$ Felder ergänzt wird, so dass also $n = p + m + \mu = q + m + \nu$ ist; dann hat $(p, q)$ mit $(n', n')$ nach Obigem $2nn' - 2mn' - \mu n' - \nu n' = n'(p + q)$ Gerade gemein.

Zerfällt nun der volle Schnitt $(n', n')$ in einen unvollständigen $(p', q')$, einen vollständigen $(m', m')$, $\mu'$ Bündel und $\nu'$ Felder, so dass $n' = p' + m' + \mu' = q' + m' + \nu'$; so hat $(p, q)$ mit $(m', m')$ nach dem eben geführten Beweise $m'(p + q)$ Gerade gemein und weil mit den Bündeln und Feldern $\mu' p + \nu' q$, mit der Congruenz $(p', q')$ $n'p + n'q - (m'p + m'q + \mu' p + \nu' q) = pp' + qq'$ Gerade gemeinsam.

Wird in dieser Weise fortgefahren, so ergiebt sich die Richtigkeit des Satzes für alle Congruenzen, welche allmählig auf vollständige Complex-Durchschnitte, Bündel und Felder reducirt werden können; alle in meiner Arbeit vorgekommenen Congruenzen sind derartig, also genügt für meinen Zweck der vorstehende Beweis. Er wird natürlich allgemein genügen, wenn man für alle Congruenzen die Möglichkeit der Reduction nachweisen kann.

50. Besonders wichtig ist diese Frage hinsichtlich der Sehnensysteme der Raumcurven. Für das einer cubischen Raumcurve ist die Reduction im Abschnitte II. (Nr. 8.) bewiesen; ich setze sie hier noch, weil es für das Folgende nothwendig ist, für *das Sehnensystem* (2, 6) *der Raumcurve 4. Ordnung, 1. Species* auseinander. Diese Sehnen sind die Geraden der Flächen des durch die Curve constituirten Büschels; seien $P_1 \cdots P_8$ die die Curve und das Büschel bestimmenden Punkte; so betrachten wir die beiden Flächennetze, welche durch $P_1 \cdots P_7$ und durch $P_1 \cdots P_6 P_8$ gelegt sind. Die Geraden der Flächen jedes dieser Netze bilden einen Complex 3. Grades (Nr. 23.); beiden ist das betrachtete Sehnensystem gemein und wird zum vollen Complex-Durchschnitte durch die Bündel der 6 Punkte $P_1 \cdots P_6$ und das Sehnen-

system der cubischen Raumcurve ergänzt, welche durch diese Punkte geht.*)

51. Aus dem in Nr. 49. bewiesenen Satze folgt, dass *ein Complex $n^{ten}$ Grades und eine Congruenz $(p, q)$* — wie wir hinzufügen wollen, die der obigen Voraussetzung genügt —, *eine Linien-Fläche gemein haben, von der $n(p+q)$ Gerade einer beliebigen Geraden $g$ begegnen*, also im Allgemeinen eine windschiefe Regelfläche vom Grade $n(p+q)$; denn die die Gerade $g$ treffenden Geraden derselben sind der Congruenz $(p, q)$ und dem vollständigen Durchschnitte $(n, n)$ des Complexes $n^{ten}$ Grades mit dem linearen Complexe $[g]$ gemein.

52. Der erste Halphen'sche Satz sagt: *Ein Complex $n^{ten}$ Grades hat mit einer Linienfläche, von welcher $r$ Gerade eine beliebige Gerade treffen*, also im Allgemeinen einer windschiefen Regelfläche $r^{ten}$ Grades, *$nr$ Gerade gemein.* Die Richtigkeit dieses Satzes leuchtet auf der Stelle ein, wenn die Linienfläche ein Kegel $r^{ter}$ Ordnung oder eine ebene Curve $r^{ter}$ Classe ist (das ebene Strahlbüschel kann nach Belieben als Kegel 1. Ordnung oder als ebene Curve 1. Classe aufgefasst werden; es ist die einzige Linienfläche 1. Grades). Nehmen wir nun an, dass die Linienfläche zum vollen Schnitte eines Complexes $m^{ten}$ Grades und einer Congruenz $(p, q)$ durch $\mu$ Kegel $\tau^{ter}$ Ordnung und $\nu$ ebene Curven $v^{ter}$ Classe ergänzt werde; der vollständige Schnitt des Complexes $m^{ten}$ Grades und der Congruenz $(p, q)$ hat mit dem Complexe $n^{ten}$ Grades offenbar alle Geraden gemein, welche $(p, q)$ und dem Schnitte $(mn, mn)$ der beiden Complexe gleichzeitig angehören; also $mn(p+q)$. Mit den $\mu$ Kegeln und den $\nu$ Curven hat der Complex $n^{ten}$ Grades nach Obigem $n(\mu\tau + \nu v)$ Gerade gemein, also mit der Linienfläche $r^{ten}$ Grades $mn(p+q) - n(\mu\tau + \nu v) = n\left\{m(p+q) - \mu\tau - \nu v\right\} = nr$ Gerade.

So ergiebt sich denn durch Weiterführung die Richtigkeit des Satzes für jede Linienfläche, deren Ergänzung zum vollständigen Schnitte eines Complexes und einer Congruenz allmählig auf einen solchen vollen Schnitt selbst, auf Kegel und ebene Curven reducirt werden kann. Die in der Abhandlung vorkommenden Linienflächen sind alle von dieser Beschaffenheit.

Es versteht sich von selbst, dass in den vorhergehenden Sätzen von den beiden Gebilden, deren gemeinsame Gerade betrachtet werden,

*) Da die Zahl der Sehnen einer von Doppel- und Cuspidalpunkten freien Raumcurve $n^{ter}$ Ordnung, $r^{ter}$ Classe (Ranges), welche durch einen Punkt gehen, stets $\frac{1}{2}\left\{n(n-1)-r\right\}$ ist, die Anzahl der Sehnen aber in einer Ebene $\frac{1}{2}n(n-1)$; so muss der Halphen'sche Satz, da er sicher allgemein richtig ist, zu der Zahl der gemeinschaftlichen Sehnen zweier Raumcurven führen; er liefert in der That die in Salmon-Fiedler, anal. Geom. des Raums, II. Art. 364, ermittelte Zahl.

nicht das niedrigere in dem höheren oder beide in demselben höhern enthalten sein dürfen.

53. *Der Grad des Complexes der Geraden* $(a)_8$ *bez.* $(b)_8$ *bei* $A^8 B^8$ soll nun auf eine etwas allgemeinere Weise ermittelt werden, als es in Nr. 41. geschehen ist. Wir benutzen jetzt ein Büschel $(A, \alpha)$, welches nur noch durch *einen* Hauptpunkt $A_1$ geht. Demselben correspondirt in Bezug auf $A^6 B^6$ eine Congruenz $(2, 6)$, welche aus dem Punkte $B_1$ einen Kegel 5. Ordnung, für den die 5 Geraden von $B_1$ nach den $B_{1,7,8}^{5}$ Doppelkanten sind, und aus jedem dieser 5 Punkte einen Kegel 3. Ordnung erhält, auf welchem die Kante nach $B_1$ doppelt ist, die nach den 4 andern einfach sind (Nr. 28.); eine ähnliche Congruenz entspricht dem Büschel $(A, \alpha)$ in Bezug auf $A_{5,6}^{6} B_{5,6}^{6}$. Beide Congruenzen, nicht in demselben Complexe gelegen, haben 40 Grade gemein; unter denselben befinden sich die 3 doppelten Geraden $b_{12}$, $b_{13}$, $b_{14}$, dann die 3 Geraden $b_{23}$, $b_{24}$, $b_{34}$; durch den Punkt $B_1$ gehen ferner $5^2 - 3 \cdot 2^2 = 13$ weitere gemeinsame Kanten der beiden Kegel 5. Ordnung aus $B_1$ und durch jeden der 3 Punkte $B_2, B_3, B_4$ noch $3^2 - 2^2 - 2 = 3$ weitere gemeinschaftliche Kanten der Kegel 3. Ordnung, welche aus dem Punkte zu den beiden Congruenzen gehen; demnach bleiben von 40 Geraden 3 übrig. Jede derselben entspricht in Bezug auf $A^6 B^6$ und auf $A_{5,6}^{6} B_{5,6}^{6}$ der nämlichen Geraden in $(A, \alpha)$, der einzigen nicht durch $A_1$ gehenden, welche ihr in $(A, \alpha)$ in Bezug auf $A^4 B^4$ correspondirt. Folglich entsprechen sich zwei solche Gerade auch in Bezug auf $A^8 B^8$, sind also $(a)_8$ und $(b)_8$. In $(A, \alpha)$ giebt es demnach, wenn nun $A A_1$ mitgerechnet wird, 4 Gerade $(a)_8$; mithin *ist der Complex der* $(a)_8$ *4. Grades.*

54. Oder: dem Büschel $(A, \alpha)$ entspricht in Bezug auf $A^5 B^5$ ein Complex 3. Grades, welchem das Bündel $B_1$ doppelt, die Bündel $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ einfach angehören (Nr. 13.); hingegen in Bezug auf $A_5^{\,7} B_5^{\,7}$ eine Regelfläche 5. Grades, welche $B_1$ zum dreifachen, die $B_{1,5}^{6}$ zu doppelten Punkten hat (Nr. 38.). Dieselben haben 15 Gerade gemein; unter diesen befinden sich die 3 Generatricen der Regelfläche, welche durch $B_1$ gehen und dem Complexe doppelt angehören, und die 3. 2, welche durch $B_2$, $B_3$, $B_4$ gehen. Es bleiben 3 Gerade übrig, für welche dasselbe wie oben gilt.

55. Das Sehnensystem $(2, 6)$ der Raumcurve 4. Ordnung, erster Species, welche durch die 8 Punkte $A^8$ bestimmt ist, hat mit dem Complexe der $(a)_8$ eine Linienfläche vom Grade 32 gemein. Weil die Bündel um die $A^8$ ganz zum Complexe gehören, so nehmen an dieser Linienfläche die 8 Kegel 3. Ordnung theil, welche die Raumcurve aus den 8 Hauptpunkten projiciren. Die übrige Linienfläche 8. Grades zerfällt aber in 4 Regelschaaren, die auf Flächen 2. Grades liegen, welche durch die $A^8$ gehen; denn wenn $(a)_8$ eine Gerade dieser Linien-

fläche ist, so veranlasst sie als Sehne der Raumcurve mit dieser eine Fläche 2. Grades; jede Gerade derselben, welche mit ihr zu derselben Schaar gehört, umfasst mit den $A^8$ einen Ebenenwurf, welcher dem jener Geraden und also auch dem, den ihre correspondirende $(b)_8$ mit den $B^8$ bildet, projectivisch ist; demnach gehören alle diese Geraden zu den $(a)_8$ und da sie andererseits Sehnen der Raumcurven sind, sind sie dem Complexe der $(a)_8$ und dem Sehnensysteme (2, 6) gemeinsam. *Bei zwei Gruppen* $A^8 B^8$ *giebt es also durch jede von ihnen 4 Regelschaaren, deren sämmtliche Geraden je einer und derselben Geraden* $(b)_8{}^0$ *bez.* $(a)_8{}^0$ *correspondiren. Diese 4 Geraden* $(a)_8{}^0$ *bez.* $(b)_8{}^0$ *gehören zu den* $(a)_9$ *bez.* $(b)_9$ *für ein Gruppenpaar* $A^9 B^9$, *das aus* $A^8 B^8$ *hervorgegangen;* denn unter den $\infty^1$ Geraden $(a)_8$, die z. B. einer der 4 Geraden $(b)_8{}^0$ correspondiren, giebt es, wie mit Hilfe eines schon mehrfach angewandten Schlusses erhalten wird, eine, welche der $(b)_8{}^0$ auch in Bezug auf $A^9 B^9$ correspondirt.

56. Die Geraden $b_0$, denen in Bezug auf $A^7 B^7$ je eine ganze Regelschaar $\mathfrak{A}_0{}^2$ entspricht, bilden eine Congruenz (3, 6), zu der jeder der Punkte $B^7$ einen Kegel 3. Ordnung sendet (Nr. 34.). Der Complex der Geraden aller Regelschaaren, welche durch $B^7$ gehen, ist 3. Grades (Nr. 23.); folglich gehört ihm und jener Congruenz ausser den 7 Kegeln gleichzeitig eine Linienfläche 6. Grades an; jede ihrer Geraden gehört zu einer Regelschaar durch $B^7$, demnach umfassen alle ihre Geraden mit $B^7$ projectivische Ebenenwürfe; es entsprechen also alle derselben Regelschaar, wie jene Gerade; die Linienfläche 6. Grades besteht mithin aus 3 Regelschaaren. *Es giebt also in Bezug auf* $A^7 B^7$ *drei Paare analoger Regelschaaren,* $\mathfrak{A}_{0,0}^2$, $\mathfrak{B}_{0,0}^2$; *jeder Geraden der einen Schaar eines Paars entsprechen alle Geraden der analogen. Die Regelschaaren* $\mathfrak{A}_{0,0}^2$, $\mathfrak{B}_{0,0}^2$ *befinden sich natürlich,* da ihre Geraden zu den $a_0$, bez. $b_0$ gehören, *in den Complexen* $(a)_8$, *bez.* $(b)_8$ *und zwar so, dass während* $(a)_8$ *eine* $\mathfrak{A}_{0,0}^2$ *durchläuft, die correspondirende* $(b)_8$ *die analoge* $\mathfrak{B}_{0,0}^2$ *beschreibt.*

57. In Nr. 47. ist *der Grad der Regelfläche der Geraden* $(b)_9$, *deren entsprechende* $(a)_9$ *einer Geraden* $\bar{a}$ *begegnen,* in noch nicht hinreichend allgemeiner Weise ermittelt worden; es soll dies jetzt in etwas allgemeinerer Art geschehen. Die Gerade $\bar{a}$ aber wird immer noch als durch einen Hauptpunkt $A_1$ gehend angenommen; die Geraden $b$, welche den die $\bar{a}$ treffenden $a$ in Bezug auf $A^7 B^7$ entsprechen, bilden einen Complex 4. Grades, welcher das Bündel $B_1$ doppelt, die Bündel $B_1{}^6$ einfach enthält (Nr. 37.); die Geraden $(b)_8$, denen in Bezug auf $A_7{}^8 B_7{}^8$ Gerade $(a)_8$ entsprechen, welche der $\bar{a}$ begegnen, erzeugen eine Congruenz (5, 10), welche aus $B_1$ einen Kegel 7. Ordnung, aus den Punkten $B_{1,7}^7$ Kegel 4. Ordnung erhält (Nr. 42.). Die $\infty^1$ Regelschaaren $\mathfrak{A}^2$ durch $A^6$, welche sich auf $\bar{a}$ stützen, haben in Bezug auf $A^6 B^6$ analoge Regelschaaren $\mathfrak{B}^2$, deren Inbegriff eine Congruenz (2, 6) ist, zu wel-

cher aus $B_1$ ein Kegel 5. Ordnung, aus den 5 übrigen Punkten $\mathsf{B}^6$ je ein Kegel 3. Ordnung kommt (Nr. 28.); unter diesen $\mathfrak{A}^2$ befindet sich auch eine, deren Gerade sämmtlich Sehnen der durch $\mathsf{A}^6$ gehenden cubischen Raumcurve $\mathfrak{A}_0{}^3$ sind; ihre entsprechende Regelschaar ist $\overline{\mathfrak{B}}^2$ (Nr. 21.), welcher nicht blos jene $\mathfrak{A}^2$, sondern das ganze Sehnensystem von $\mathfrak{A}_0{}^3$ entspricht. Jedenfalls gehört $\overline{\mathfrak{B}}^2$ zu der Congruenz (2, 6); ferner gehören alle Geraden von $\overline{\mathfrak{B}}^2$ zu den Geraden $b_0$ in Bezug auf zwei siebengliedrige Gruppen, welche aus $\mathsf{A}^6\,\mathsf{B}^6$ hervorgegangen sind (Nr. 31.), und mithin auch zu den Geraden $(b)_8$ für zwei achtgliedrige so entstandene Gruppen (Nr. 40.), z. B. für $\mathsf{A}_7{}^8\,\mathsf{B}_7{}^8$; ihre correspondirenden $(a)_8$ sind Sehnen von $\mathfrak{A}_0{}^3$, welche im Allgemeinen nicht der $\bar{a}$ begegnen.

Der Complex 4. Grades sämmtlicher $(b)_8$ bei $\mathsf{A}_7{}^8\mathsf{B}_7{}^8$ und die Congruenz (2, 6) haben ausser dem Kegel 5. Ordnung, den 5 Kegeln 3. Ordnung und dieser Regelschaar $\overline{\mathfrak{B}}^2$ noch eine Linienfläche 10. Grades gemein. Jede Gerade $b$ derselben ist in Bezug auf $\mathsf{A}_7{}^8\,\mathsf{B}_7{}^8$ eine $(b)_8$, deren entsprechende $(a)_8$ die $\bar{a}$ trifft, und die ihr entsprechende in Bezug auf $\mathsf{A}^7\,\mathsf{B}^7$ trifft $\bar{a}$ ebenfalls; denn beide gehören der Regelschaar $\mathfrak{A}^2$ an, deren analoge $\mathfrak{B}^2$ die $b$ enthält, sind aber im Allgemeinen nicht identisch, weil alle Geraden der $\mathfrak{A}^2$ die $\bar{a}$ treffen. Ersichtlich gehört die Linienfläche 10. Grades sowohl zu der im Anfang der Nr. erwähnten Congruenz (5, 10), als auch zu dem dort genannten Complexe 4. Grades (von Geraden $b$, denen in Bezug auf $\mathsf{A}^7\,\mathsf{B}^7$ Gerade $a$ entsprechen, welche $\bar{a}$ begegnen). Beide Gebilde haben also den Kegel 7. Ordnung aus $B_1$ an die Congruenz, welcher im doppelten Bündel des Complexes liegt, die 5 Kegel 4. Ordnung aus den Punkten $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$, $B_6$ und die eben erhaltene Linienfläche 10. Grades gemein, mithin ausserdem noch eine Linienfläche vom Grade $4\,(5+10) - 2\cdot 7 - 5\cdot 4 - 10 = 16$. Jeder Geraden derselben entspricht in Bezug auf $\mathsf{A}^7\,\mathsf{B}^7$ und auf $\mathsf{A}_7{}^8\mathsf{B}_7{}^8$ dieselbe die $\bar{a}$ treffende Gerade, nämlich die einzige Gerade, welche ihr in Bezug auf $\mathsf{A}^6\,\mathsf{B}^6$ correspondirt und der $\bar{a}$ begegnet, ohne durch $A_1$ zu gehen. Folglich entsprechen sich beide Gerade auch in Bezug auf $\mathsf{A}^9\,\mathsf{B}^9$, sind also $(a)_9$, $(b)_9$. Die Linienfläche 16. Grades enthält aber nur diejenigen $(b)_9$, deren $(a)_9$ die $\bar{a}$ treffen, ohne im Allgemeinen durch $A_1$ zu gehen. Durch $A_1$ selbst gehen $\infty^1$ Gerade $(a)_9$ und ihre correspondirenden erzeugen eine Linienfläche 8. Grades (Nr. 43. und Nr. 1.); vereinigen wir beide Flächen, so finden wir: *Diejenigen Geraden $(b)_9$, deren entsprechende $(a)_9$ eine Gerade $\bar{a}$ treffen, erzeugen eine Linienfläche 24. Grades;* wie es sich in Nr. 47. ergeben hat.

58. Es ist in Nr. 40. gezeigt, dass die $\infty^2$ Geraden $b_0$, deren jeder in Bezug auf $\mathsf{A}^7\,\mathsf{B}^7$ die $\infty^1$ Geraden einer Regelschaar correspondiren, sich sämmtlich in dem Complex der $(b)_8$ befinden, der zu zwei

aus $A^7 B^7$ hervorgegangenen Gruppen $A^8 B^8$ gehört; ist nun $A^9 B^9$ wieder aus $A^8 B^8$ (und somit auch aus $A^7 B^7$) entstanden, so werden $\infty^1$ der Geraden $b_0$ sich noch unter den $(b)_9$ befinden. Ermitteln wir den Grad der von ihnen erzeugten Linienfläche. Die $\infty^2$ Geraden $b_0$ bilden eine Congruenz (3, 6), welche aus jedem der Punkte $B^7$ einen Kegel 3. Ordnung erhält (Nr. 34.). Die in der vorigen Nr. besprochene Regelschaar $\overline{\mathfrak{B}^2}$, welche in Bezug auf $A^6 B^6$ dem Sehnensysteme von $\mathfrak{A}_0{}^3$ entspricht, befindet sich sowohl in der Congruenz (3, 6) der Geraden $b_0$ jedes aus $A^6 B^6$ hervorgegangenen siebengliedrigen Gruppenpaars, z. B. des unsrigen $A^7 B^7$, als auch in dem Complexe der $(b)_8$ bei jedem aus $A^6 B^6$ entstandenen achtgliedrigen Gruppenpaare, z. B. bei dem in $A^9 B^9$ enthaltenen $A_7{}^8 B_7{}^8$. Dieser Complex 4. Grades und die Congruenz (3, 6) haben also ausser den 6 Kegeln der Congruenz aus den $B^6$ und der Regelschaar $\overline{\mathfrak{B}^2}$ noch eine Linienfläche 16. Grades gemein. Alle Geraden derselben sind Gerade $(b)_9$; denn, weil sie $b_0$ sind, so correspondiren jeder von ihnen in Bezug auf $A^7 B^7$ dieselben $\infty^1$ (eine Regelschaar bildenden), welche ihr in Bezug auf $A^6 B^6$ entsprechen (diejenigen nämlich, denen $\infty^2$ in Bezug auf $A^6 B^6$ correspondiren, sind durch die abgezogene Fläche $\overline{\mathfrak{B}^2}$ ausgeschieden), und unter diesen muss sich auch die befinden, welche die entsprechende in Bezug auf $A_7{}^8 B_7{}^8$ ist; also correspondirt ihr diese in Bezug auf $A^9 B^9$.

*Wenn* mithin $A^9 B^9$ *aus* $A^7 B^7$ *entstanden ist, so giebt es unter den* $\infty^2$ *Geraden* $(b)_9$ — *die eine Congruenz* (6, 10) *bilden* — $\infty^1$, *welche für* $A^7 B^7$ *Gerade* $b_0$ *sind; ihr Erzeugniss ist eine Linienfläche 16. Grades. Durch jeden der 7 Punkte* $B^7$ *gehen 6 Gerade derselben*, so dass er ein sechsfacher Punkt der Linienfläche ist; z. B. durch $B_7$ gehen die 6 Kanten, welche dem Kegel 3. Ordnung aus $B_7$ an die Congruenz (3, 6) und dem Kegel 4. Ordnung aus $B_7$ an den Complex 4. Grades der $(b)_8$ in Bezug auf $A_7{}^8 B_7{}^8$ gemeinsam sind ausser den 6 Geraden von $B_7$ nach den $B^6$, welche mit den 6 Kegeln ausgeschieden sind.

*Die Verbindungsgeraden der Punkte* $B^7$ *gehören also nicht der Linienfläche 16. Grades an*, obgleich sie sowohl Gerade $(b)_9$, als auch Gerade $b_0$ sind; unter den $b_0$ spielen sie schon eine ausgezeichnete Rolle, indem einer jeden $\infty^2$ Gerade in Bezug auf $A^7 B^7$ correspondiren, während den übrigen $b_0$ nur je $\infty^1$; und gerade dadurch erreichen sie es, dass sie sich noch unter den $(b)_9$ befinden, indem sie zunächst Gerade $(b)_8$ sind, denen je $\infty^1$ Gerade $(a)_8$ correspondiren, und unter diesen eine, die ihnen in Bezug auf $A^9 B^9$ correspondirt, so dass sie auch Gerade $(b)_9$ werden. Die gewöhnlichen $b_0$ aber, die sich noch unter den $(b)_9$ befinden, also die Geraden unserer Linienfläche 16. Grades, haben nur eine correspondirende in Bezug auf $A^8 B^8$ und dieselbe correspondirt auch noch in Bezug auf $A^9 B^9$.

Wie die Linienfläche 16. Grades selbst den beiden Congruenzen

(3, 6) und (6, 10) gemeinsam ist, welche beide im Complexe der $(b)_8$ in Bezug auf $A^8 B^8$ liegen, so sind die 6 Geraden derselben, die durch jeden der 6-fachen Punkte $B^7$ gehen, die gemeinsamen Kanten der Kegel 3. und 4. Ordnung, welche derselbe zu den beiden Congruenzen sendet, ausser den 6 Verbindungsgeraden.

In Bezug auf die $a_0$, welche unter den $(a)_9$ vorkommen, gilt natürlich dasselbe.

59. Gehen wir nun zu *zwei Gruppen von je 10 Punkten* über: $A^{10} B^{10}$; die Anzahl der Geraden $(a)_{10}$, welche correspondirende $(b)_{10}$ in Bezug auf dieselben haben, wird $\infty^1$ sein. Die Geraden $(a)_8$ in Bezug auf $A^8 B^8$ bilden einen Complex 4. Grades, welcher die Bündel $A^8$ vollständig enthält; die Geraden $(a)_9$ in Bezug auf $A_8{}^9 B_8{}^9$ eine Congruenz (6, 10), welche aus jedem der Punkte $A_8{}^9$ einen Kegel 4. Ordnung erhält. Die 7 Kegel aus den $A^7$ gehören zu beiden; ebenso die Linienfläche 16. Grades der $a_0$ für $A^7 B^7$, welche noch unter den $(a)_9$ für $A_8{}^9 B_8{}^9$ sich befinden, denn zu den $(a)_8$ in Bezug auf $A^8 B^8$ gehören alle diese $a_0$. Demnach haben Complex und Congruenz noch eine Linienfläche 20. Grades gemein; jede Gerade derselben hat in Bezug auf $A^8 B^8$ und auf $A_8{}^9 B_8{}^9$ dieselbe correspondirende, die einzige nämlich, die ihr in Bezug auf $A^7 B^7$ entspricht; denn diejenigen, denen in Bezug auf $A^7 B^7$ $\infty^1$ Gerade correspondiren, sind ausgeschieden; also entsprechen sich beide Geraden auch in Bezug auf $A^{10} B^{10}$. *Diejenigen Geraden $(a)_{10}$, welche correspondirende $(b)_{10}$ in Bezug auf $A^{10} B^{10}$ besitzen, bilden eine Linienfläche 20. Grades $\mathfrak{A}^{20}$ und diese entsprechenden eine ebensolche, $\mathfrak{B}^{20}$.*

*$\mathfrak{A}^{20}$ hat die 10 Punkte $A^{10}$ zu 6-fachen Punkten* (Nr. 45.); also müssen noch 8 Gerade $(a)_{10}$ eine Gerade $a_{ik}$ ausserhalb $A_i$ und $A_k$ treffen (denn auf $\mathfrak{A}^{20}$ liegen, wie leicht ersichtlich, die $a_{ik}$ im Allgemeinen nicht); betrachten wir z. B. die Gerade $a_{9,\,10}$. Die Geraden $(b)_9$, deren entsprechende $(a)_9$ in Bezug auf $A^9 B^9$ die $a_{9,\,10}$ treffen, erzeugen, weil diese durch $A_9$ geht, eine Linienfläche 16. Grades, auf welcher $B_9$ achtfach ist (Nr. 47., 57.). Folglich treffen 8 nicht durch $B_9$ gehende Geraden derselben die $b_{9,\,10}$. Diese entsprechen ihren correspondirenden auch in Bezug auf $A^{10} B^{10}$; und auch umgekehrt, die correspondirenden der $(a)_{10}$, welche $a_{9,\,10}$ treffen, ohne durch $A_9$ oder $A_{10}$ zu gehen, müssen $b_{9,\,10}$ treffen.

*Die beiden Flächen $\mathfrak{A}^{20}$ und $\mathfrak{B}^{20}$ sind eindeutig auf einander bezogen.*

60. Auf der Fläche $\mathfrak{A}^{20}$ wird noch eine endliche Zahl von Geraden $a_0$ für $A^7 B^7$ vorkommen; diese Zahl soll jetzt ermittelt werden. Die Congruenz (3, 6), welche von allen $a_0$ gebildet wird, und die Fläche $\mathfrak{A}^{20}$ befinden sich beide in jedem der Complexe 4. Grades der $(a)_8$ für ein 8-gliedriges Gruppenpaar, das, aus $A^7 B^7$ entstanden, in $A^{10} B^{10}$ enthalten ist.

Die eben genannte Congruenz (3, 6) und die Congruenz (6, 10) der Geraden $(a)_9$ für $A_7{}^9\, B_7{}^9$ haben 78 Gerade gemein; unter diesen kommen vor die 15 Verbindungsgeraden der Punkte $A^6$, ferner je $3 \cdot 4 - 5 = 7$ Gerade, welche den Kegeln 3. und 4. Ordnung, die aus jedem dieser Punkte zu (3, 6) und (6, 10) gehen, ausserdem gemeinsam sind, drittens die Geraden, welche von der Regelschaar $\overline{\mathfrak{A}^2}$, die in Bezug auf $A^6\, B^6$ dem Sehnensysteme der durch $B^6$ gehenden cubischen Raumcurve $\mathfrak{B}_0{}^3$ analog ist, noch unter den $(a)_9$ für $A_7{}^9 B_7{}^9$ sich befinden.

Diese Geraden gehören gleichzeitig zu der Regelschaar $\overline{\mathfrak{A}^2}$ und zu dem Complexe der $(a)_8$ für $A_{6,7}^{\ 8}\, B_{6,7}^{\ 8}$ (welches Gruppenpaar in $A_7{}^9\, B_7{}^9$ enthalten ist) ausser den 5 Geraden von $\overline{\mathfrak{A}^2}$, welche durch die $A^5$ gehen; also sind es 3 Gerade. Oder: Der Geraden von $\overline{\mathfrak{A}^2}$, welche sich noch unter den $(a)_9$ für $A_7{}^9 B_7{}^9$ befinden, sind soviele, als Sehnen des Systems (1, 3) von $\mathfrak{B}_0{}^3$ unter den $(b)_9$ für $A_7{}^9 B_7{}^9$ vorkommen, die nicht durch einen der $B^6$ gehen. Im Ganzen hat das Sehnensystem mit der Congruenz (6, 10) der $(b)_9$ 36 Gerade gemein, von denen die 15 Verbindungsgeraden der 6 Punkte $B^6$ und durch jeden von diesen Punkten noch $2 \cdot 4 - 5 = 3$ weitere gemeinsame Kanten der Kegel 2. und 4. Ordnung, die er zu den beiden Congruenzen sendet, in Abzug zu bringen sind, so dass 3 übrig bleiben. Also *von den* $\infty^1$ *(eine Regelschaar* $\overline{\mathfrak{A}^2}$ *bildenden) Geraden, denen in Bezug auf* $A^6 B^6$ $\infty^2$ *(das Sehnensystem einer cubischen Raumcurve bildende) Gerade entsprechen, sind unter den* $(a)_9$ *für ein 9-gliedriges Gruppenpaar, das aus* $A^6\, B^6$ *hervorgegangen ist, noch 3 enthalten.*

Werden von den 78 Geraden, welche den Congruenzen (3, 6) und (6, 10) gemeinsam sind, diese $15 + 6 \cdot 7 + 3 = 60$ Geraden abgezogen, so bleiben 18. Diese sind so beschaffen, dass jeder in Bezug auf $A^7 B^7$ dieselben $\infty^1$ Geraden entsprechen, wie in Bezug auf $A^6\, B^6$, und weil sich unter den auf $A^6 B^6$ correspondirenden die befinden muss, welche in Bezug auf $A_7{}^9 B_7{}^9$ entspricht, so correspondirt dieselbe ihr auch in Bezug auf $A^7\, B^7$, also auch auf $A^{10} B^{10}$. *Es giebt mithin 18 Gerade* $a_0$ *für* $A^7\, B^7$, *welche sich noch unter den* $(a)_{10}$ *in Bezug auf* $A^{10}\, B^{10}$, *das aus* $A^7 B^7$ *entstanden, vorfinden. Ebensoviele* $b_0$ *sind natürlich unter den* $(b)_{10}$ *enthalten.*

61. Wir wenden uns endlich zu *zwei Gruppen von je 11 Punkten:* $A^{11} B^{11}$; greifen wir $A^{10} B^{10}$ und $A_{8,9,10}^{\ 8}\, B_{8,9,10}^{\ 8}$ heraus. Die $(a)_{10}$ der ersteren bilden eine Linienfläche 20. Grades $\mathfrak{A}^{20}$, welche jeden der 10 Punkte $A^{10}$ zum 6-fachen Punkte hat; die $(a)_8$ der letzteren einen Complex 4. Grades, der die Bündel der $A_{8,9,10}^{\ 8}$ ganz enthält. Gemeinsam sind beiden die 6 Geraden von $\mathfrak{A}^{20}$, die durch jeden der 7 Punkte $A^7$ gehen, und die 18 Geraden $a_0$, welche noch unter den $(a)_{10}$ für $A^{10} B^{10}$ enthalten

sind; denn alle $a_0$ sind im Complexe 4. Grades der $(a)_8$ enthalten. Es bleiben folglich 20 Gerade, deren jede in Bezug auf $A^{10}B^{10}$ und auf $A^{8}_{8,9,10}B^{8}_{8,9,10}$ dieselbe correspondirende Gerade hat, die einzige nämlich, die in Bezug auf $A^7B^7$ entspricht. Folglich entsprechen sie sich auch in Bezug auf $A^{11}B^{11}$. *Es giebt demnach 20 Gerade $(a)_{11}$, welche je eine correspondirende $(b)_{11}$ haben.*

62. Zu demselben Resultate werden wir noch von einer andern Seite zu kommen suchen. Die Congruenzen (6, 10) der $(a)_9$ und $(a)_9'$ in Bezug auf $A^9B^9$ und $A^{9}_{8,9}B^{9}_{8,9}$ befinden sich nicht in demselben Complexe, also haben sie 136 Gerade gemein. Zu diesen gehören die 21 Verbindungsgeraden der Punkte $A^7$ und die $7 \cdot 10$ Kanten, welche je den beiden Kegeln 4. Ordnung aus jedem dieser Punkte noch gemeinschaftlich sind. Ferner liegen eine Anzahl von den zu $A^7B^7$ gehörigen $a_0$ gleichzeitig in beiden Congruenzen.

Die unter den $(a)_9$ enthaltenen $a_0$ bilden (Nr. 58.) eine Linienfläche 16. Grades $(a^{16})$, welche zum Schnitte der Congruenz (3, 6) sämmtlicher $a_0$ mit dem Complexe 4. Grades $(a^4)$ der $(a)_8$ bei $A_7^8B_7^8$ gehört und durch die 6 Kegel der Congruenz (3, 6) aus den $A^6$ und die Regelschaar $\overline{\mathfrak{A}}^2$ zum vollen Schnitte ergänzt wird. Eine ebensolche Linienfläche $(a^{16})'$ geben die $a_0$, welche sich unter den $(a)_9'$ befinden. Beide sind in (3, 6) enthalten; es fragt sich, wie viele Geraden ihnen gemeinschaftlich sind. Da $(a^{16})'$ sich in (3, 6) befindet, so bestehen die 64 Geraden, welche sie mit dem Complexe $(a^4)$ gemein hat, aus denen, welche ihr mit $(a^{16})$, mit den Kegeln 3. Ordnung aus $A^6$ und der Regelschaar $\overline{\mathfrak{A}}^2$ gemeinsam sind. Für $(a^{16})'$ ist jeder der Punkte $A^7$ ein 6-facher Punkt; also hat $(a^{16})'$ mit jedem dieser 6 Kegel ihre durch den Scheitel gehenden Erzeugenden gemein (welche ja auch die gemeinsamen Geraden des Kegels 3. Ordnung als desjenigen, der nach der Congruenz (3, 6) geht, mit dem Kegel 4. Ordnung, welcher nach (6, 10) geht, ausser den 6 Verbindungsgeraden sind (Nr. 58.)). Weil ferner die Geraden von $\overline{\mathfrak{A}}^2$ bei $A^6B^6$ sich unter den Geraden $a_0$ bei $A^7B^7$ befinden (Nr. 31.), so sind die 3 Geraden von $\overline{\mathfrak{A}}^2$, die sich unter den $(a)_9'$ befinden (Nr. 60.), die gemeinschaftlichen Geraden von $\overline{\mathfrak{A}}^2$ und $(a^{16})'$; folglich ist die Zahl der gemeinsamen Geraden von $(a^{16})$ und $(a^{16})'$ d. i. der Geraden $a_0$ für $A^7B^7$, die sich sowohl unter den $(a)_9$, als unter den $(a)_9'$ befinden, $64 - 6 \cdot 6 - 3 = 25$. Werden diese und die schon oben erhaltenen $21 + 70$ von den 136 Geraden abgezogen, so erhalten wir die 20 Geraden, welche in Bezug auf $A^9B^9$ und auf $A^{9}_{8,9}B^{9}_{8,9}$ je die nämliche correspondirende haben, die einzige nämlich, die in Bezug auf $A^7B^7$ entspricht, also die 20 Geraden $(a)_{11}$.

## VIII.

63. *Bei den Gruppen* $\mathsf{A}^5\,\mathsf{B}^5$ *hatte sich* (Nr. 9. und 13.) *eine Congruenz* (7, 11) *von solchen Geraden* — die wir jetzt $(c)_5$ nennen wollen — *ergeben, welche mit* $\mathsf{A}^5$ *und* $\mathsf{B}^5$ *projectivische Ebenenwürfe bilden; während die Geraden* $(c)_4$, *bei denen dies in Bezug auf* $\mathsf{A}^4\,\mathsf{B}^4$ *stattfindet, einen Complex 4. Grades erzeugen* (Nr. 3.).

Die Congruenz 1. Grades $[a_{12}, b_{12}]$ gehört ganz zu diesem Complexe; welches ist der Grad der von den Geraden derselben erzeugten Linienfläche, die sich unter den $(c)_5$ befinden? Der Complex der $(c)_4'$ in Bezug auf $\mathsf{A}_2^4\mathsf{B}_2^4$ hat mit der Congruenz $[a_{12}, b_{12}]$ ausser den beiden Strahlbüscheln $(A_1, b_{12})$ und $(B_1, a_{12})$ eine Linienfläche 6. Grades gemein, dies ist die gesuchte, nennen wir sie $\mathfrak{C}_{1,2}^6$. *Die Geraden* $(c)_5$, *welche sich in der Congruenz, die zwei homologe Hauptlinien zu Directricen hat, befinden, bilden eine Linienfläche 6. Grades. Für* $\mathfrak{C}_{1,2}^6$ *sind* $a_{12}$ *und* $b_{12}$ *dreifache Leitgeraden;* durch jeden Punkt $C$ von $b_{12}$ z. B. gehen die 3 Geraden, welche Kanten des Kegels des Complexes der $(c)_4'$ sind und in $(C, a_{12})$ liegen, ohne durch $A_1$ zu gehen. Von den 3 Geraden, welche durch $(\alpha_{123}, b_{12})$ gehen, oder, was dasselbe ist, in $\alpha_{123}$ liegen, geht die eine nach $A_3$, die zweite nach dem Punkte $A_{123} = (\alpha_{123}, b_{45})$, gehört also zu dem in $\alpha_{123}$ liegenden Büschel von Geraden $(c)_5$ (Nr. 9.), die dritte ist die Gerade $(\alpha_{123}, \beta_{123})$. Damit zeigt sich zugleich, *dass die 6 Punkte* $A_3$, $A_4$, $A_5$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ *einfache Punkte von* $\mathfrak{C}_{1,2}^6$ *sind, dass die 3 Geraden* $(\alpha_{123}, \beta_{123})$, $(\alpha_{124}, \beta_{124})$, $(\alpha_{125}, \beta_{125})$ *auf* $\mathfrak{C}_{1,2}^6$ *liegen* und diese Fläche mit jedem der 6 Büschel von Geraden $(c)_5$ in den durch $a_{12}$ bez. $b_{12}$ gehenden Hauptebenen einen Strahl gemein hat.

Die 7 Geraden der Congruenz (7, 11), welche durch einen Punkt einer Hauptgeraden, z. B. $a_{12}$ gehen, sind die 3 Erzeugenden von $\mathfrak{C}_{1,2}^6$, die Gerade $a_{12}$ selbst und die Strahlen nach den Scheiteln $A_{123}$, $A_{124}$, $A_{125}$ der in den Ebenen $\alpha_{123}$, $\alpha_{124}$, $\alpha_{125}$ gelegenen Büschel von Geraden $(c)_5$.

64. *Bei zwei Gruppen von je 6 Punkten* $\mathsf{A}^6\mathsf{B}^6$ haben die Congruenz (7, 11) der $(c)_5$ in Bezug auf $\mathsf{A}^5\,\mathsf{B}^5$ und der Complex 4. Grades der $(c)_4'$ in Bezug auf $\mathsf{A}_{4,5}^4\,\mathsf{B}_{4,5}^4$ eine Fläche 72. Grades gemein; zu derselben gehören die 6 Kegel 4. Ordnung der ersteren aus jedem der Punkte $\mathsf{A}^3\,\mathsf{B}^3$, ferner die 3 Linienflächen $\mathfrak{C}_{1,2}^6$, $\mathfrak{C}_{1,3}^6$, $\mathfrak{C}_{2,3}^6$ und die beiden Büschel $(A_{123}, \alpha_{123})$, $(B_{123}, \beta_{123})$; denn die Bündel um die $\mathsf{A}^3$, $\mathsf{B}^3$, die Congruenzen $[a_{12}, b_{12}]$, $[a_{13}, b_{13}]$, $[a_{23}, b_{23}]$ und die Felder $\alpha_{123}$, $\beta_{123}$ gehören vollständig zu dem Complexe der $(c)_4'$ (Nr. 3. und 4.).

*Es bleibt* demnach *eine Fläche 28. Grades* $\mathfrak{C}^{28}$, *deren Gerade die Geraden* $(c)_6$ *sind, welche mit* $\mathsf{A}^6$ *und* $\mathsf{B}^6$ *projectivische Ebenenwürfe geben;* wie schon in Nr. 19. in etwas weniger allgemeiner Weise gefunden worden ist. Dort ist schon gezeigt, dass *die 12 Hauptpunkte* $\mathsf{A}^6$, $\mathsf{B}^6$

*7-fache Punkte dieser Fläche sind und dass dieselbe zu jeder der 15 linearen Congruenzen* $[a_{ik}, b_{ik}]$ *10 Gerade liefert; so wie auch dass sie die 20 Geraden enthält, in denen eine Hauptebene des einen Raums der des andern begegnet, die mit ihr keinen Index gemein hat, z. B.* $(\alpha_{123}, \beta_{456})$.

65. Gehen wir zu *zwei Gruppen mit 7 Punkten* $\mathsf{A}^7\mathsf{B}^7$. Die Fläche $\mathfrak{C}^{28}$ der $(c)_5$ in Bezug auf $\mathsf{A}^6\mathsf{B}^6$ und der Complex 4. Grades der $(c)_4'$ in Bezug auf $\mathsf{A}^4_{4,5,6}\mathsf{B}^4_{4,5,6}$ haben 112 Gerade gemein, darunter die 7 Erzeugenden der $\mathfrak{C}^{28}$ durch jeden der 6 Punkte $\mathsf{A}^3$, $\mathsf{B}^3$, ferner die je 10 Geraden von $\mathfrak{C}^{28}$, die in den Congruenzen $[a_{12}, b_{12}]$, $[a_{13}, b_{13}]$, $[a_{23}, b_{23}]$ sich befinden, und die beiden Geraden $(\alpha_{123}, \beta_{456})$ und $(\alpha_{456}, \beta_{123})$. *Die 38 übrigen Geraden sind die* $(c)_7$, *welche nach* $\mathsf{A}^7$ *und* $\mathsf{B}^7$ *projectivische Würfe senden.*

Versuchen wir auch dies Resultat auf einem zweiten Wege zu erreichen. Die beiden Congruenzen (7, 11) der $(c)_5$ und der $(c)_5'$ in Bezug auf $\mathsf{A}^5\mathsf{B}^5$ und auf $\mathsf{A}^5_{4,5}\mathsf{B}^5_{4,5}$ haben 170 gemeinsame Geraden. Zu denselben gehören erstens die 6 Hauptlinien $a_{12}$, $a_{13}$, $a_{23}$, $b_{12}$, $b_{13}$, $b_{23}$, zweitens durch jeden der 6 Punkte $\mathsf{A}^3$, $\mathsf{B}^3$ noch 14 weitere gemeinsame Kanten der von ihm ausgehenden Congruenzkegel 4. Ordnung, drittens die beiden Geraden, welche in $\alpha_{123}$ die Spuren von $b_{45}$ und $b_{67}$, in $\beta_{123}$ die Spuren von $a_{45}$ und $a_{67}$ verbinden, viertens die Gerade $(\alpha_{123}, \beta_{123})$. Fünftens sind den beiden Congruenzen auch diejenigen Geraden gemein, welche je in beiden Linienflächen 6. Grades liegen, die von den Geraden $(c)_5$ und $(c)_5'$ in die linearen Congruenzen $[a_{12}, b_{12}]$, $[a_{13}, b_{13}]$, $[a_{23}, b_{23}]$ geliefert werden. Diese Geraden, die z. B. in $[a_{12}, b_{12}]$ sich befinden, sind offenbar identisch mit denen, welche der Linienfläche $\mathfrak{C}^6_{1,2}$ der $(c)_5$ — der ersteren der obigen — und dem Complexe 4. Grades der $(c)_4''$ in Bezug auf $\mathsf{A}^4_{2,4,5}\mathsf{B}^4_{2,4,5}$ gemeinsam sind. Beide haben im Ganzen 24 Gerade gemein; zu ihnen gehören die je 3 Geraden von $\mathfrak{C}^6_{1,2}$, welche durch $A_1$ bez. $B_1$ gehen, die beiden Geraden, welche durch $A_3$ bez. $B_3$ gehen (Nr. 63.), weil die ganzen Bündel $A_1$, $B_1$, $A_3$, $B_3$ im Complexe der $(c)_4''$ liegen, und die 3 Geraden $(\alpha_{123}, \beta_{123})$, $(\alpha_{134}, \beta_{134})$, $(\alpha_{135}, \beta_{135})$ (Nr. 63.), weil sie in der Congruenz $[a_{13}, b_{13}]$ und damit in dem Complexe der $(c)_4''$ sich befinden. Es bleiben demnach von den 24 Geraden 13 übrig. Dies sind die Geraden in $[a_{12}, b_{12}]$, welche sowohl $(c)_5$, als auch $(c)_5'$ sind. Ebenso giebt es in $[a_{13}, b_{13}]$ und in $[a_{23}, b_{23}]$ je 13.

Von den 170 Geraden sind also $6 + 6 \cdot 14 + 2 + 1 + 3 \cdot 13$ in Abzug zu bringen. Der Rest beträgt 38: dies sind die Geraden $(c)_7$.

Darmstadt, Anfang April 1873.

# Ueber Flächen dritter Ordnung *).

(Dazu gehörig mehrere lithographirte Tafeln.)

Von Felix Klein in Erlangen.

Wenn eine Curve mit Doppelpunkten gezeichnet vorliegt, so kann man aus ihr Curven derselben Ordnung ohne Doppelpunkt oder mit weniger Doppelpunkten schematisch ableiten, indem man die in den Doppelpunkten oder einigen derselben zusammenstossenden Curvenäste durch ähnlich verlaufende, sich nicht treffende ersetzt. Nach diesem ebenso einfachen als fruchtbaren Principe **) erhält man z. B. ohne Weiteres die beiden Grundformen der ebenen Curven dritter Ordnung, wenn man von der Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte ausgeht und letzteren in dem einen oder anderen Sinne auflöst; man erhält Beispiele von Curven beliebiger Ordnung, wenn man als besondere Curve eine solche zeichnet, die in lauter gerade Linien zerfallen ist, und auf deren Doppelpunkte den bewussten Process anwendet.

Ein ähnliches Verfahren ist im Raume anwendbar, wenn es sich darum handelt, von den Flächen höherer Ordnung eine Anschauung zu gewinnen. Man construirt eine besondere Fläche derselben Ordnung, die mit einzelnen Knotenpunkten oder auch mit Doppelcurven behaftet sein mag, und leitet aus ihr eine allgemeinere dadurch ab, dass man die an die singulären Stellen hinantretenden Flächentheile durch ähnlich verlaufende ersetzt ***).

*) Vergl. eine vorläufige Mittheilung in den Berichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Sitzung vom 5. Mai 1873.

**) Wer dieses Princip zuerst verwerthet hat, lässt sich bei dessen grosser Selbstverständlichkeit wohl kaum feststellen. Dem Verf. ist dasselbe, sowie namentlich das Beispiel der Erzeugung einer Curve $n^{ter}$ Ordnung aus $n$ geraden Linien, von Plücker her bekannt: vergl. z. B. dessen Theorie der algebraischen Curven (1839), in welcher fortwährend ähnliche Ueberlegungen angewandt werden.

***) Fast noch interessanter sind die Anwendungen, die man von demselben Principe in dualistischem Sinne auf Curven oder Flächen gegebener *Classe* machen kann, da man von den bei diesen Curven und Flächen auftretenden Gestalten seither nur erst eine sehr unvollkommene Kenntniss hat. Man hat sich an

Indem ich auf diese Art versuchte, mir eine grössere Zahl von Flächen dritter Ordnung zu construiren, bemerkte ich, dass die Methode bei ihnen, wie bei den Curven dritter Ordnung, *fast ohne Weiteres überhaupt alle Gestalten ergiebt.* Ich gehe dabei von der Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten als speciellem Falle aus. Eine solche Fläche ist leicht herzustellen, da sie vollständig bestimmt ist, wenn man das durch die Knotenpunkte gebildete Tetraeder und die Ebene der drei auf der Fläche verlaufenden einfachen Geraden beliebig annimmt (vergl. die Beschreibung eines Modells, das Herr Neesen angefertigt hatte. Gött. Nachrichten. Aug. 1872, sowie § 1. des Folgenden). Ueberdies hat die Fläche für den hier vorliegenden Zweck den Vorzug, dass sie nur in einer Art existirt, indem jede solche Fläche in jede andere durch reelle Collineation übergeführt werden kann, dass ferner ihre Knotenpunkte unter einander gleichwerthig sind, weil die Fläche Collineationen in sich selbst besitzt, vermöge deren sich die Knotenpunkte beliebig vertauschen lassen.

Einen Knotenpunkt mit reellem Tangentenkegel kann man in zwei wesentlich unterschiedenen Weisen auflösen. Entweder man *verbindet* die in demselben zusammenstossenden Flächentheile, so dass in der neuen Fläche an Stelle des Knotenpunktes ein dünner Ast mit hyperbolischer Krümmung sich findet, oder man *trennt* dieselben von einander, so dass in der neuen Fläche zwei verschiedene Flächentheile mit elliptischer Krümmung einander gegenüber stehen. Am deutlichsten sind die beiden Processe vorzustellen, wenn man den reellen Kegel zweiter Ordnung als Uebergangsfall zwischen einem einschaligen und einem zweischaligen Hyperboloide auffasst.

Diese beiden Processe kann man nun an jedem der vier Knotenpunkte der zu Grunde gelegten Fläche beliebig anwenden. Man erhält dadurch eine Reihe von Flächen mit weniger als vier Knotenpunkten, insbesondere von Flächen ohne Knotenpunkt. Und es soll nun im Folgenden gezeigt werden, *dass durch die so erzeugten Flächen die Flächen mit reellen Knotenpunkten, insbesondere diejenigen ohne Knotenpunkt in gewissem Sinne vollständig repräsentirt sind.* Wenn wir bei diesen Erörterungen uns auf solche Flächen beschränken, welche getrennte conische Knotenpunkte oder gelegentlich einfache biplanare Punkte besitzen, und auch bei diesen nur solche Fälle berücksichtigen, in denen die singulären Punkte reell sind, so geschieht es der Uebersichtlichkeit wegen: die Flächen mit höheren biplanaren

---

der Erkenntniss, dass bei diesen Gebilden Alles in dualistischem Sinne gerade so ist, wie bei den Gebilden der betreffenden Ordnung, seither wohl zu sehr genügen lassen und ist nur zu wenig zu einem concreten Erfassen der damit bezeichneten wirklichen Verhältnisse durchgedrungen.

Punkten oder uniplanaren Punkten, sowie die Flächen mit imaginären Singularitäten lassen sich aus den im Folgenden allein betrachteten ebenfalls durch continuirliche Aenderung der Gestalt in durchaus anschaulicher Weise gewinnen.

Die Eintheilung der Flächen dritter Ordnung nach ihrer Gestalt, wie sie sich aus diesen Betrachtungen ergiebt, fällt für die Flächen ohne Knoten genau mit derjenigen zusammen, welche Schläfli nach der Realität der geraden Linien getroffen hat*), während sie sich für die Flächen mit Knotenpunkten in dieselbe zum mindesten einordnet. Der Grund für diese Uebereinstimmung liegt, ganz allgemein gesagt, darin, dass bei den Flächen dritter Ordnung das Zusammenfallen von Geraden und das Auftreten von Knotenpunkten gegenseitig an einander geknüpft sind. Aus demselben Grunde stimmen die Flächen der von uns unterschiedenen Arten auch noch mit Bezug auf andere Eigenschaften überein. Es genügt dann immer, diese Eigenschaften an einer einzelnen möglichst bequem gewählten Fläche zu verfolgen.

In diesem Sinne sollen in den §§ 10.—14. die Flächen mit 27 reellen Geraden einer näheren Untersuchung unterworfen werden. Unter der grossen Reihe gemeinsamer Eigenschaften gerade dieser Flächen sei vor Allem hervorgehoben, dass dieselben immer ein reelles *Pentaeder* besitzen, dessen Seitenflächen sich näherungsweise angeben lassen, wenn die 27 Geraden als bekannt vorausgesetzt werden. Es sind hierdurch die Gleichung $5^{\text{ten}}$ Grades, von der die Pentaederebenen abhängen, und die Gleichung $27^{\text{sten}}$ Grades, welche die Linien bestimmt, in eine sehr merkwürdige Beziehung gesetzt.

Die Bestimmung der Gestalten aller Flächen dritten Grades mag als Beitrag zu einer allgemeinen Theorie aufgefasst werden, welche von den Gestalten algebraischer Flächen überhaupt handelt. Es sind mit Bezug auf letztere in § 15. einige sich leicht darbietende Sätze aufgestellt worden. Sodann erörtere ich in den letzten Paragraphen gewisse Beziehungen, welche diese Untersuchungen zu der sog. Analysis situs besitzen.

In einer neueren Arbeit**) hat nämlich Hr. Schläfli, ausgehend von der Fläche dritten Grades ohne Knoten, die in zwei getrennte Theile zerfallen ist (nach seiner, wie nach der im Folgenden eingehaltenen Aufzählung, die *fünfte* Art), die übrigen Flächen ohne Knoten nach ihrem *Zusammenhange* im Riemann'schen Sinne untersucht.

*) On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species etc. Philosophical Transactions, t. 153 (1863), p. 193.

**) Quand' è che dalla superficie generale di terz' ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale? Annali di Matematica, t. V., p. 289.

Eine Anwendung der Riemann'schen Vorstellungen auf Gebilde der projectivischen Geometrie scheint mir wegen der verschiedenartigen Auffassung des Unendlich-Weiten, die man in den gewöhnlichen Untersuchungen der Analysis situs einerseits, in der projectivischen Geometrie andererseits zu Grunde legt, nicht ohne vorherige Erörterung einer Reihe fundamentaler Punkte gestattet, die ich bei dieser Gelegenheit wenigstens habe bezeichnen wollen, wenn ich auch nicht im Stande war, dieselben zu erledigen.

## § 1.

## Ueber ein Modell einer Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten.

Die Eigenschaften der Flächen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten sind in neuerer Zeit wiederholt untersucht worden, so dass sie als wesentlich bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Es sei daher nur an die Lage der 27 Geraden der Fläche erinnert. Von denselben fallen 24 in die als Gerade der Fläche vierfach zählenden Kanten des Knotenpunkt-Tetraeders. Die drei übrigen liegen in einer beliebig anzunehmenden Ebene und bilden die Diagonalen des Vierseits, in welchem dieselbe von den Tetraederflächen geschnitten wird.

Es mögen jetzt die vier Knotenpunkte insbesondere reell vorausgesetzt sein. Dann besteht die Fläche, von der durch das Unendlich-Ferne erfolgenden Trennung abgesehen, aus zwei zusammenhängenden Theilen, welche nur in den vier Knotenpunkten zusammenstossen. Von denselben ist der eine nirgends hyperbolisch, der andere nirgends elliptisch gekrümmt. Denn die parabolische Curve der Fläche besteht *doppeltzählend* aus den sechs Tetraederkanten, und es wird also ein Uebergang von elliptischer zu hyperbolischer Krümmung nur beim Durchsetzen eines Knotenpunktes, nicht beim Ueberschreiten der parabolischen Curve stattfinden.

Um eine concrete Anschauung von der Gestalt, welche eine solche Fläche besitzt, zu vermitteln, sei hier die Beschreibung eines Modells derselben gegeben, das Hr. Weiler auf meinen Wunsch anfertigte, und auf welches sich die ebenfalls von Hrn. Weiler entworfene Zeichnung auf Tafel I. bezieht. Die vier Knotenpunkte bilden in demselben ein gleichseitiges Tetraeder, dessen eine Seitenfläche horizontal gestellt und nach oben gekehrt ist. Der elliptische Theil der Fläche fällt nahe mit dem von den vier Knoten begrenzten endlichen Tetraeder zusammen und weicht nur dadurch von demselben ab, dass statt der ebenen Begrenzungen convexe Partieen auftreten. Der hyperbolische Theil setzt sich nach aussen an die vier Knotenpunkte an und breitet sich von diesen ab wesentlich horizontal aus, so dass er die unendlich ferne Ebene in einem symmetrischen Curvenzuge schneidet, der drei auf einer Horizontalen gelegene Wendungen besitzt. Durch diese Symmetrieverhältnisse ist ersichtlich der untere Knotenpunkt, wiewohl nicht in projectivischem Sinne, ausgezeichnet. Weiter unterhalb desselben, um die Höhe des Knotenpunkttetraeders von ihm entfernt, befindet sich in horizontaler Lage die Ebene der einfach zählenden Geraden; die geraden Linien in ihr bilden ein gleichseitiges Dreieck.

Es wurde bereits hervorgehoben, dass die Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten für die projectivische Auffassung nur eine Art darstellt, und in diesem Sinne repräsentirt das geschilderte Modell also alle derartigen Flächen. Die räumliche Anschauung löst sich aber nur schwer von der gewöhnlichen Weise ab, für welche das Unendlich-Weite seine besondere Geltung beansprucht. Insofern ist es nicht gleichgültig, dass in dem Modelle gerade ein Fall dargestellt ist, in welchem die unendlich ferne Ebene nur den hyperbolischen Theil der Fläche und zwar nach einer Curve ohne Oval schneidet. Es werden dadurch gewisse charakteristische Uebergänge, deren Betrachtung im Folgenden nothwendig wird, besonders anschaulich, indem sie ihren Einfluss nur auf ganz im Endlichen gelegene Partieen der Fläche erstrecken. Das in der Einleitung erwähnte Neesen'sche Modell hatte einen anderen Fall zur Anschauung gebracht (das Unendlich-Weite ist bei ihm eine auch ganz auf dem hyperbolischen Theile gelegene Curve, aber mit Oval); bei ihm sind die bezüglichen Verhältnisse nicht so leicht zu verfolgen.

## § 2.

### Ableitung neuer Flächen aus der Fläche mit vier reellen Knoten.

An jedem der vier Knotenpunkte des Modells mag man nun den Process des *Verbindens* oder des *Trennens*, wie er in der Einleitung geschildert wurde, anbringen. Da die vier Knotenpunkte projectivisch unter einander gleichberechtigt sind, auch keine ihrer Gruppirungen zu zwei, drei ausgezeichnet ist, so wird es nur auf die Zahl der Knotenpunkte ankommen, die von dem einen oder anderen Processe betroffen werden, und wir können die bez. Knotenpunkte in jedem Falle den Symmetrieverhältnissen der Fläche möglichst entsprechend wählen.

Soll insbesondere (und dieser Fall allein wird im Folgenden specieller erörtert, um an ihm das Verhalten der Flächen beim Auftreten biplanarer Punkte allgemein zu charakterisiren) nur ein Knotenpunkt aufgelöst werden, so wählen wir den unteren. Die beiden so hervorgehenden Flächen mit drei Knoten mögen mit I und II bezeichnet sein, je nachdem der Process des Verbindens oder des Trennens angewandt wurde. Oder, wenn die beiden Processe allgemein durch $+$ und $-$ bezeichnet werden, so wird man das Schema haben:

$$\begin{array}{l} \text{I} \cdot + \\ \text{II} \cdot -. \end{array}$$

Von Flächen mit zwei Knoten erhalten wir drei Arten, die bezüglich durch:

$$\begin{array}{l} \text{I} \cdot + + \\ \text{II} \cdot + - \\ \text{III} \cdot - - \end{array}$$

bezeichnet sein sollen.

Flächen mit einem Knoten giebt es vier:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & + + + \\ \text{II} & + + - \\ \text{III} & + - - \\ \text{IV} & - - -; \end{array}$$

endlich von Flächen ohne Knoten fünf:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & + + + + \\ \text{II} & + + + - \\ \text{III} & + + - - \\ \text{IV} & + - - - \\ \text{V} & - - - -. \end{array}$$

Es ist ersichtlich, dass die letzterzeugten fünf Flächen mit Ausnahme der fünften aus einem überall zusammenhängenden Theile bestehen; die Fläche V enthält zwei getrennte Theile.

Aus diesen Flächen sollen nun noch weitere abgeleitet werden, indem man sich einen oder einige der vorhandenen Knotenpunkte durch die *biplanare* Form hindurch ändern lässt, sofern dies möglich ist. Hierzu wird aber die Betrachtung eines biplanaren Knotens an sich und des Uebergangs einer Fläche mit gewöhnlichem Knoten in eine solche mit biplanarem Knoten überhaupt erforderlich.

## § 3.

### Ueber Flächen mit biplanarem Knoten *).

Der Kegel zweiter Ordnung, der von den Tangenten in einem biplanaren Knoten einer Fläche gebildet wird, ist in ein Ebenenpaar

*) Vergl. hierzu die Erörterung, die Schläfli giebt: Philosophical Transactions. 1863. p. 207.

ausgeartet. Dieses Ebenenpaar kann reell oder imaginär sein. Jedenfalls ist der Durchschnitt der beiden Ebenen, die *Axe* des biplanaren Punktes, wie er genannt sein mag, reell. Während eine durch den biplanaren Punkt beliebig durchgelegte Ebene die Fläche in einer Curve mit Doppelpunkt trifft, ist die Durchschnittscurve der Fläche mit einer durch die Axe gehenden Ebene eine Curve mit Spitze, deren Tangente eben die Axe ist.

Sind nun die beiden ausgezeichneten Ebenen imaginär, so ist diese Spitze für alle derartigen Ebenen gleich gerichtet. Die Fläche hat in der Nähe des biplanaren Punktes eine Gestalt, wie wenn sie durch Rotation einer Curve mit Spitze um deren Tangente entstanden wäre.

Bei dem biplanaren Punkte hingegen, der reelle Ebenen besitzt, ist die Spitze der ausgeschnittenen Curve verschieden gerichtet, je nachdem die gewählte Ebene dem einen oder anderen Winkelraume angehört, der durch die beiden ausgezeichneten Ebenen begrenzt wird. Der Uebergang von der einen zur anderen Lage findet in den ausgezeichneten Ebenen statt, welche ihrerseits die Fläche nach einer Curve mit dreifachem Punkte schneiden. Es sind hierbei wiederum zwei Fälle zu unterscheiden, die freilich den Zusammenhang der Fläche in der Nähe des singulären Punktes nicht wesentlich beeinflussen. Der dreifache Punkt der Schnittcurve hat nämlich entweder nur einen reellen Ast oder er hat drei reelle Aeste. Die beiden Fälle (eigentlich sind drei Fälle biplanarer Punkte mit reellen Ebenen zu unterscheiden, da die einzelne Ebene unabhängig von der anderen beide Arten des Uebergangs zeigen kann) sind auf Taf. II., III. zur Anschauung gebracht. In dem ersten Falle (Taf. II.) wird die Spitze der Durchschnittscurve, welche eine durch die Axe gelegte Ebene mit der Fläche gemein hat, immer flacher, sowie man die Ebene der ausgezeichneten Lage nähert, d. h. die in der Spitze zusammenstossenden Aeste der Curve biegen sich immer rascher von einander weg. An der Grenze sind die beiden Aeste der eine in die Verlängerung des anderen übergegangen, die Spitze selbst ist verschwunden. Bewegt man die schneidende Ebene über die Grenzlage hinaus, so erscheint die Spitze wieder, aber nun nach der anderen Seite gerichtet. In dem zweiten Falle (Tafel III.) ist der Uebergang ganz anders. Wenn sich die schneidende Ebene der Grenzlage nähert, so treten an die Spitze zwei weitere Aeste der Durchschnittscurve hinan. An der Grenze entsteht aus der Verschmelzung derselben mit der Spitze der dreifache Punkt in der Weise, dass die Spitze die Hälften zweier Aeste des dreifachen Punktes geliefert hat. Hernach löst sich der dreifache Punkt in entsprechender Weise aber in umgekehrtem Sinne wieder auf.

Unabhängig von diesem Unterschiede hat der biplanare Punkt mit reellen Ebenen ersichtlich die Eigenschaft, *dass man auf der Fläche* *von jedem Punkte in der Nähe des biplanaren zu jedem anderen benachbarten gelangen kann, ohne den biplanaren Punkt zu durchsetzen*; wir werden sogleich auf diesen Unterschied zurückkommen.

## § 4.

## Ableitung des biplanaren Knoten aus dem conischen.

Betrachten wir jetzt, wie eine Fläche mit biplanarem Knoten aus einer mit gewöhnlichem Knoten hervorgehen kann.

Beim biplanaren Punkte mit imaginären Ebenen ist das leicht ersichtlich. Eine ebene Curve mit Spitze ist der Uebergang zwischen einem isolirten Knoten, an den sich ein Curvenzug mit zwei Wendungen heranzieht, und einem nicht isolirten Knoten, der eine kleine geschlossene Schleife besitzt (vergl. Fig. 1. Tafel IV.). Die mit dem biplanaren Punkte versehene Fläche bildet den Uebergang zwischen einer Fläche mit isolirtem und einer Fläche mit nicht isolirtem Knoten, wie sie aus den bez. Curven durch Rotation um die Symmetrie-Axe hervorgehen.

Beim biplanaren Punkte mit reellen Ebenen ist der Uebergang der folgende. *Die Fläche mit Knoten muss hier die eben hervorgehobene Eigenschaft des Zusammenhangs um den singulären Punkt herum ebenfalls besitzen.* Sie ist daher folgendermassen gestaltet (vergl. Fig. 2. Tafel IV.). Durch die Axe des späteren biplanaren Punktes lege man schneidende Ebenen. Dieselben schneiden zum Theil in einer Curve mit isolirtem Punkte, zum anderen Theil in einer Curve mit nicht isolirtem Knotenpunkte, aber *kleiner* Schleife. Stellt man die Fläche so, wie in der Zeichnung geschehen ist, dass sich die Curven der ersten Art wesentlich nach unten erstrecken, so erstrecken sich die Curven der zweiten Art (abgesehen von der kleinen Schleife) wesentlich nach oben. Unterhalb des Knotens befindet sich daher, wie in der beigegebenen Figur zu sehen, eine Art kleiner Oeffnung der Fläche. Zieht sich dieselbe vollends zusammen, so hat man den biplanaren Punkt. Aendert sich die Fläche weiter, so tritt diese Oeffnung wieder auf, aber nun oberhalb des Punktes und um einen rechten Winkel gedreht. *Beim Durchgange durch den biplanaren Punkt reproduciren sich also die an die singuläre Stelle angrenzenden Flächentheile nur in anderer Anordnung; sie scheinen um $90^0$ um die Axe des biplanaren Punktes gedreht und dann an der gegen die Axe senkrechten Ebene gespiegelt.*

Auf die Knotenpunkte der beiden Flächen, welche sonach den Flächen, die einen biplanaren Punkt mit reellen Ebenen besitzen, benachbart erscheinen, wende man jetzt die zur Verfügung stehenden Aenderungsprocesse des Verbindens oder Trennens an. Man erhält dann ersichtlich bei beiden Flächen die nämlichen Resultate, wie sie in Figur 1, 2 der Tafel V. dargestellt sind.

Etwas ganz Aehnliches findet in dem Falle statt, dass man es mit einem biplanaren Punkte mit imaginären Ebenen zu thun hat. Wendet man auf die Fläche mit nicht isolirtem Knoten, die der Fläche mit biplanarem Knoten benachbart ist, die Processe des Verbindens oder Trennens an, so erhält man dasselbe Resultat, als wenn man bei der Fläche mit isolirtem Knoten diesen Knoten die Aenderungen eingehen lässt, deren er fähig ist, d. h. wenn man ihn entweder ganz verschwinden oder in eine kleine Kugel übergehen lässt.

Als Resultat dieser Ueberlegungen mögen wir also Folgendes hinstellen:

*Eine Fläche mit biplanarem Knoten bildet freilich den Uebergang zwischen zweierlei Flächen mit gewöhnlichem Knoten; wendet man aber auf diese Knoten die beiden in jedem Falle zulässigen Auflöseprocesse an, so sind die Resultate bei beiden Flächen dieselben.*

## § 5.

## Ableitung weiterer Flächen dritter Ordnung.

Aus den in § 2. aufgestellten Flächen sollen jetzt weitere abgeleitet werden, indem man die einzelnen Knotenpunkte, sofern es möglich ist, sich durch die biplanare Form hindurch ändern lässt. Betrachten wir zu dem Zwecke die einzelnen Flächen genauer.

Ein Durchgang durch einen biplanaren Knoten mit imaginären Ebenen kann ersichtlich so lange nicht stattfinden, als noch ein anderer Knoten vorhanden ist. Denn die Verbindungslinie beider Knoten würde der Fläche ganz angehören, während doch durch einen biplanaren Punkt mit imaginären Ebenen niemals eine reelle Gerade hindurchgehen kann. Aber unter den Flächen mit einem Knoten hat nur *IV* eine solche Gestalt, wie sie behufs des gedachten Ueberganges nothwendig ist. Diese Fläche *IV* kann wirklich einen biplanaren Knotenpunkt der gemeinten Art erhalten; ändert sie sich durch diesen hindurch, so giebt's eine Fläche *IV'* mit isolirtem Knoten, die als neue Fläche den vier mit einem reellen Knoten hinzugefügt werden mag.

Ein Durchgang durch einen biplanaren Knoten mit reellen Ebenen setzt ebenfalls, nach § 4., eine gewisse Art des Zusammenhangs bei der ursprünglichen Fläche voraus. Betrachten wir, statt aller anderen, die beiden Flächen *I* und *II* mit drei Knoten. Bei *II* ist ein solcher Uebergang ersichtlich nicht möglich, weil die in einem Knoten zusammenstossenden Flächentheile weiter keinen Zusammenhang zeigen. Anders bei *I*. Hier können sich sämmtliche drei Knoten durch die biplanare Form hindurch ändern und das giebt, je nachdem es bei 1, 2, 3 Knoten geschieht, drei neue Arten mit drei Knoten:

$$I', I'', I'''.$$

Bei den Flächen mit zwei Knoten stellen sich die Verhältnisse so: Im Falle *III* ist keinerlei Uebergang durch eine biplanare Form möglich. Bei *II* und *I* finden Uebergänge statt. Ebenso ergeben die Fälle *I, II, III* der Flächen mit einem Knoten eine Reihe neuer Formen; der Fall *IV*, der eben schon die Fläche mit isolirtem Punkte ergeben hat, liefert hier keinen Beitrag.

Wenn man an den Knotenpunkten der so erhaltenen neuen Flächen nunmehr die beiden gestatteten Aenderungsprocesse anbringt, so erhält man nach dem Schlusssatze des § 4. nichts Neues. Auf die Flächen ohne Knotenpunkt insbesondere ist also die Aenderung der vorangehenden Flächen durch die Formen mit biplanaren Knoten hindurch ohne Einfluss.

## § 6.

## Die abgeleiteten Flächen erschöpfen alle Flächen dritten Grades mit reellen conischen Knotenpunkten.

Ich behaupte nun, dass die abgeleiteten Flächen alle Flächen mit drei, zwei, einem reellen conischen Knoten bez. ohne Knoten repräsentiren. Der Sinn dieser Behauptung muss durch nähere Umgrenzung des Art-Begriffs zunächst präcisirt werden. Unbedingt als zu derselben Art gehörig betrachte ich diejenigen Flächen dritten Grades, welche durch reelle Collineation in einander übergehen. Ich rechne ferner aber zu derselben Art solche Flächen, welche durch allmähliche Aenderung ihrer Constanten so in einander übergeleitet werden können, dass während des ganzen Aenderungsprocesses kein neuer oder kein höherer singulärer Punkt auftritt.

Die folgende Anschauungsweise scheint geeignet, diesen *Artbegriff* noch deutlicher zu machen. Eine Fläche dritter Ordnung hängt von 19 Constanten ab. Die Gesammtheit aller Flächen dritter Ordnung (wobei nur an Flächen mit reellen Coefficienten gedacht sein soll) bilden also eine Mannigfaltigkeit von 19 Dimensionen. In dieser Mannigfaltigkeit füllen die Flächen mit Knotenpunkt einen Raum von nur 18 Dimensionen aus, welcher die ganze Mannigfaltigkeit in eine Reihe getrennter Gebiete zerlegt, so dass man aus einem Gebiete in ein anderes nur dadurch treten kann, dass man diesen Raum von 18 Dimensionen durchsetzt. *Jedes dieser Gebiete repräsentirt nun eine Art von Flächen ohne Knotenpunkt.*

Mit Bezug auf diese Definition der Art könnte man einen Einwand machen. Nach dem Vorhergehenden sollen zu derselben Art in erster Linie alle Flächen gehören, die aus einer Fläche durch reelle Collineation hervorgehen. Aber nicht alle reellen Collineationen haben die Eigenschaft, durch Wiederholung unendlich kleiner reeller Collineationen ableitbar zu sein. So ist es z. B. mit denjenigen Collineationen, welche aus rechtsgewundenen Curven linksgewundene machen. Es ist darum nicht von vornherein ersichtlich, dass alle zu einer Art gehörige Flächen ein einziges zusammenhängendes Gebiet in der Mannigfaltigkeit aller Flächen constituiren. Aber dieses Bedenken erweist sich als unbegründet. Man beachte, dass diejenigen Collineationen, die sich nicht durch Wiederholung unendlich kleiner Collineationen zusammensetzen lassen, von den anderen nur durch Collineationen mit verschwindender Determinante — die dann allerdings als unzulässig auszuscheiden sind — getrennt sein können. Collineationen der letzteren Art ziehen aber alle Flächen und also auch alle Flächen dritter Ordnung in (mehrfach zählende) Ebenen, die Gesammtheit aller Flächen also in ein Gebiet von drei Dimensionen zusammen, und Gebiete von drei Dimensionen sind nicht hinreichend, um Gebiete von 19 Dimensionen in verschiedene Theile zu zerlegen. *Jede Fläche derselben Art lässt sich also aus jeder anderen durch continuirliche Aenderung der Coefficienten ableiten**).

Entsprechend, wie wir jetzt bei den Flächen ohne Knoten Arten unterschieden haben, ist bei den Flächen mit Knoten zu verfahren. Die Mannigfaltigkeit von 18 Dimensionen z. B., wie sie durch die Flächen mit einem Knoten vorgestellt wird, ist durch Mannigfaltigkeiten von 17 Ausdehnungen, die sich auf die Flächen mit zwei Knoten oder mit biplanarem Knoten beziehen, in Gebiete zerlegt u. s. f. Der Sinn unserer Behauptung ist nun der, *dass die von uns abgeleiteten Flächen die überhaupt vorhandenen Gebiete, sofern sich dieselben nicht auf Flächen mit höheren oder mit imaginären singulären Punkten beziehen, vollständig und jedes nur einmal repräsentiren.*

## § 7.

## Beweis des aufgestellten Satzes.

Der Beweis des aufgestellten Satzes ergiebt sich nun fast unmittelbar. Man hat sich nur zu überzeugen, dass die niederen Mannigfaltigkeiten, welche in jedem einzelnen Falle die Trennung der gerade betrachteten Mannigfaltigkeit in Gebiete bewirken, keine anderen sein

*) Die ganze Vorstellungsweise von der durch die Flächen repräsentirten Mannigfaltigkeit, sowie insbesondere dieser Satz, haben nicht nur bei Flächen dritten Grades, sondern überhaupt bei Flächen höheren Grades ihre Geltung.

können, als die ohnehin schon in Betracht gezogenen. Der Beweis dafür ruht darin, dass alle anderen Mannigfaltigkeiten, an die man würde denken können, nicht die Zahl von Dimensionen haben, die ausreicht, um eine Trennung in Gebiete zu begründen. So wird z. B. die Mannigfaltigkeit von 19 Dimensionen, die durch die Flächen ohne Knoten repräsentirt ist, nur durch die Flächen mit einem Knoten in Gebiete zerlegt werden können, nicht aber z. B. durch die Flächen mit zwei imaginären Knotenpunkten, da letztere nur von 17 Constanten abhängen. Der eigentliche tiefere Grund, warum die Derivation aller Gestalten bei den Flächen dritter Ordnung so einfach gelingt, während sie z. B. bei den Flächen vierter Ordnung viel complicirter sein dürfte, liegt eben darin, dass bei den Flächen höherer Ordnung auch Fälle mit Doppelcurven etc. vorhanden sind, die von hinlänglich vielen Constanten abhängen, um Unterabtheilungen zu begründen. Die Fläche dritter Ordnung mit dem Maximum der Doppelpunkte, 4, hängt noch von 15 Constanten ab, während die Fläche mit Doppelgerade nur 12, die Fläche, welche in eine Ebene und eine Fläche zweiten Grades zerfallen ist, auch nur 12 Constanten hat. Bei Flächen vierter Ordnung hat die Fläche mit dem Maximum der Knotenpunkte (die Kummer'sche Fläche mit 16 Knoten) 18 Constante; eine Fläche dagegen, die in eine $F_3$ und eine Ebene zerfallen ist, 22.

Auch dass die Unterscheidung, welche bei den Flächen mit $r$ Knoten stattzufinden hat, je nachdem ein Knoten sich durch die biplanare Form geändert hat oder nicht, für die Flächen mit $\overline{r-1}$ Knoten ohne Einfluss ist, wird man jetzt ohne Weiteres einsehen. Es sei z. B. $r=1$: Wir fassen das Gebiet der Flächen ohne Knoten mit 19, das Gebiet der Flächen mit einem Knoten von 18 und endlich die trennenden Gebiete auf letzterem mit ihren 17 Dimensionen in's Auge. Um die Zusammenhangsverhältnisse zwischen diesen verschiedenen Räumen deutlicher zu übersehen, mögen wir zwischen den Constanten der Flächen 16 willkürliche Relationen annehmen, wodurch die Gebiete der Flächen ohne Knoten, mit einem Knoten, mit mehr oder höheren Singularitäten bez. auf 3, 2, 1 Dimensionen herabgedrückt werden. Als Bilder der Mannigfaltigkeiten mag man dann den Punktraum, eine ihn durchsetzende Fläche und auf der letzteren verlaufende Curven betrachten. Es fragt sich, in wie viele Kammern der Raum durch die Fläche zerlegt wird. Die auf der Fläche gezogenen Curven entsprechen der Annahme zweier Knotenpunkte oder eines biplanaren Punktes. Ersichtlich sind die ersteren Doppelcurven der Fläche, die letzteren Rückkehrcurven. Die Rückkehrcurven können aber niemals dazu beitragen, den Raum in getrennte Gebiete zu zerlegen; während eine solche Zerlegung bei jeder nicht isolirten Doppelcurve wirklich zu Stande kommt. Dies ist, nur anders ausgesprochen, der Satz von der Einflusslosigkeit der biplanaren

Punkte, wie er in § 5. in Anlehnung an die unmittelbare Anschauung gewonnen wurde.

Noch in der folgenden, mehr anschaulichen Weise, mag man sich von der Vollständigkeit überzeugen, mit der die von uns abgeleiteten Flächen die Flächen dritten Grades repräsentiren.

Betrachten wir zunächst Flächen dritten Grades mit drei reellen Knotenpunkten. Es sei $f = 0$ eine irgendwie gegebene Fläche der Art, so construire man eine Fläche $f'$ mit vier Knoten, welche drei Knoten mit $f$ gemein hat, und betrachte das Bündel $f + \lambda f' = 0$. In demselben werden (möglicherweise) eine grössere Zahl von Flächen mit vier Knoten auftreten; diejenige unter ihnen, welche dem kleinsten positiven oder negativen Werthe von $\lambda$ entspricht, heisse $\varphi$. *Aus der Fläche $\varphi$ geht $f$ dann hervor, indem der vierte Knotenpunkt einem der bewussten beiden Processe unterworfen wird, indem ferner eine beliebige Zahl der drei bleibenden Knotenpunkte durch die biplanare Form hindurch sich ändert.* Aber andere Unstetigkeiten können nicht eintreten, weil dazu besondere Bedingungen zu erfüllen wären, die man immer als nicht erfüllt ansehen kann; die Flächen mit drei Knoten sind also durch die von uns aufgestellten Arten erschöpft. Jetzt zeigt man dasselbe für Flächen mit zwei Knoten, dann für die Flächen mit einem Knoten und endlich für die Flächen ohne Knoten, *womit dann der allgemeine Beweis erbracht ist.*

## § 8.

## Ueber den Verlauf der geraden Linien auf den erzeugten Flächen. Zusammenhang der gewonnenen Eintheilung mit der von Schläfli.

Den Ausgangspunkt für die Erzeugung aller anderen Flächen bildete die Fläche mit 4 Knoten. Die Lage der geraden Linien auf ihr ist bekannt (vergl. § 1.). Wie die geraden Linien auf den abgeleiteten Flächen vertheilt sind, ergiebt sich durch eine einfache Ueberlegung, die nun entwickelt werden soll.

Denken wir die abgeleiteten Flächen von der ursprünglichen Fläche mit vier Knoten zunächst wenig verschieden. Dann werden sich die drei einfach zählenden Geraden der ursprünglichen Fläche auf der abgeleiteten wiederfinden. Denn keine von ihnen kann sich mit einer anderen Geraden vereinigt haben und dann imaginär geworden sein, weil sie von vornherein zu keiner Geraden benachbart war. Es fragt sich also nur nach dem Verhalten der 24 bei der ursprünglichen Fläche in den 6 Tetraederkanten vereinigten Geraden.

Hier gilt nun offenbar: *Werden die in einem Knotenpunkte an* *einander stossenden Flächentheile von einander getrennt, so werden die bez. Geraden imaginär*; und man wird vermuthen: *Werden die Theile hingegen vereinigt, so trennen sich die bez. Geraden in die doppelte Zahl reeller.* Eine gerade Linie z. B., welche durch zwei Knotenpunkte hindurchging, die beide von dem Processe des Verbindens betroffen wurden, wird sich in vier reelle Gerade gespalten haben.

Um dies sicherer einzusehen, als es bei der geringen Uebung, welche unsere räumliche Anschauung in solchen Dingen besitzt, gelingen will, bilde ich die Fläche dritten Grades von einem ihrer Punkte durch Projection auf eine Doppelebene ab. Den Projectionspunkt wähle ich auf dem elliptischen Theile der ursprünglichen Fläche, etwa, in dem auf Taf. I dargestellten Falle, in dem höchstgelegenen Punkte des elliptischen Theils. Dabei wird, nach bekannten Eigenschaften der Fläche dritter Ordnung mit vier Knoten, eine aus einem Kegelschnittpaare bestehende Uebergangscurve auftreten, deren vier Doppelpunkte den Knoten der Fläche entsprechen. Nun aber befindet sich der elliptische Theil ganz innerhalb der in den Knoten berührenden Tangentenkegel. Bei der besonderen Wahl des Projectionspunktes, die wir getroffen haben, wird daher das Kegelschnittpaar imaginär sein, die Uebergangscurve sich auf vier isolirte Punkte reduciren. Die sechs Verbindungsgeraden dieser vier Punkte sind die Bilder der sechs auf der Fläche liegenden Tetraederkanten. Der Einfluss einer Deformation der Fläche auf die Geraden derselben lässt sich jetzt in der Abbildung studiren. Denn die Bilder der geraden Linien sind, wie Geiser entwickelt hat (Mathematische Annalen Bd. I.), die Doppeltangenten der bei der Abbildung auftretenden Uebergangscurve vierter Ordnung, welche letztere in dem speciellen bis jetzt betrachteten Falle in ein Kegelschnittpaar ausgeartet war.

Die Aenderung, welche die Uebergangscurve bei der Deformation der Fläche erfährt, ist aber diese: Zerreisst man die an einen Knoten hinantretenden Flächentheile, so verschwindet der bez. isolirte Punkt der Uebergangscurve vollends; im umgekehrten Falle wird er ein kleines Oval. Wendet man z. B. den Process des Verbindens auf alle Knoten an, was die von uns mit I bezeichnete Art ohne Knoten ergiebt, so geht die Uebergangscurve in 4 Ovale über. Dieselben haben unter einander 24 reelle Doppeltangenten (ausserdem sind 4 Doppeltangenten, wie schon im Falle des Kegelschnittpaares, isolirt). Mit den drei einfach zählenden Geraden, die die Fläche ohnehin besitzt, ergiebt dies 27 Gerade; *die mit I bezeichnete Fläche ohne Knoten hat also lauter reelle Gerade.*

Die entsprechende Abzählung ergiebt bei den vier anderen Flächen ohne Knotenpunkt bez.

15, 7, 3, 3

reelle Gerade. *Die drei ersten Arten entsprechen also einzeln den von Schläfli unterschiedenen Arten, insofern dieselben durch die Zahl der reellen Geraden völlig charakterisirt sind; die beiden letzten Arten entsprechen zusammen der vierten und fünften Art Schläfli's, und es bleibt zu untersuchen, ob auch ein Entsprechen im Einzelnen stattfindet.*

Diese Untersuchung ist durch Schläfli's bereits genannte Arbeit (Annali di Matematica V.) erledigt, wo er zeigt, dass die zweitheilige Fläche (unsere fünfte Art) mit seiner fünften Art zusammenfällt. Die vierte und fünfte Art bei Schläfli sind durch die Zahl der reellen Dreiecksebenen unterschieden, sie beträgt bez. 7 und 13. In der That ist nun leicht zu sehen (Schläfli's Betrachtung in den Annali benutzt ganz ähnliche Momente), dass auch unsere fünfte Art 6 reelle Dreiecksebenen mehr besitzt als die vierte. Denn die 3 Ebenen, welche man durch die drei isolirten Geraden der Fläche und den Knotenpunkt legen kann, dessen Flächentheile im Falle IV verbunden, im Falle V getrennt werden, gehen eben deshalb im Falle V in 6 reelle, im Falle IV in imaginäre Tangentenebenen über, und diese Tangentenebenen sind Dreiecksebenen, da sie, durch eine Gerade der Fläche hindurchgelegt, in einem nicht der Geraden angehörigen Punkte berühren. *Also auch die Arten IV und V entsprechen der vierten und fünften Art Schläfli's.*

Durch das nämliche Raisonnement beweist man einen Satz, den mir Hr. Sturm mitgetheilt hat. Eine Tetraederkante liefert imaginäre Gerade, sowohl wenn beide auf ihr befindlichen Knotenpunkte zerrissen werden, als auch, wenn diess nur bei einem der Fall ist. Man findet nun nach Hrn. Sturm, *dass die Gerade völlig imaginär wird, wenn das letztere eintrat, dass sie dagegen im ersteren Falle punktirt imaginär wird.* Doch gehe ich hier nicht näher auf die Betrachtung der einzelnen Fälle ein, als deren Summe eben die Sturm'sche Regel resultirt.

Aber auch die Flächen mit Knoten, wie wir sie abgeleitet haben, entsprechen den von Schläfli unterschiedenen Arten. Man findet durch blosses Abzählen der geraden Linien, dass sich entsprechen:

Flächen mit drei reellen Knoten:

| | | |
|---|---|---|
| I | Schläfli | VIII, 1 |
| II | „ | VIII, 2. |

Flächen mit zwei reellen Knoten:

| | | |
|---|---|---|
| I | Schläfli | IV, 1 |
| II | „ | IV, 2 |
| III | „ | IV, 3. |

Flächen mit einem reellen Knoten:

| | | |
|---|---|---|
| I | Schläfli | II, 1 |
| II | „ | II, 2 |

III Schläfli II, 3
IV „ II, 4.

Hiermit sind Schläfli's Arten bis auf die mit einem isolirten Knoten (II, 5) erschöpft; eine solche wurde aber weiterhin (§ 4.) abgeleitet und unter den mit einem Knoten versehenen Flächen durch IV′ bezeichnet, so dass also *alle* in Betracht kommenden Arten unter den unseren nachgewiesen sind.

## § 9.

## Weiterer Vergleich mit Schläfli's Eintheilung.

Die Beziehung zur Schläfli'schen Eintheilung wurde erst dargelegt für diejenigen Flächen, die von der ursprünglichen Fläche mit 4 Knoten wenig abwichen. Es bleibt nachzuweisen, *dass unsere Arten ihrem ganzen Umfange nach mit den Schläfli'schen coincidiren*, es bleibt zu begründen, *warum die von uns in § 4. aufgestellten neuen Arten für Schläfli's Eintheilungsprincip, bis auf die eine Art IV′ der Flächen mit einem Knotenpunkte, keine neuen Arten begründen.*

Um nicht zu sehr durch Betrachtung der einzelnen Fälle gehindert zu werden, soll der erste Nachweis hier nur für die Flächen ohne Knoten explicite gegeben werden. Ist er bei ihnen geführt, so ist die Richtigkeit der Behauptung bei den Flächen mit Knoten ebenfalls erwiesen, da man ja nun diese aus den Flächen ohne Knoten entstehen lassen kann.

Bei den Flächen ohne Knoten ist aber die Richtigkeit darin begründet, *dass überhaupt Flächen ohne Knoten keine zusammenfallenden Geraden haben können.* Denn daraus folgt, dass die Flächen jeder der von uns umgrenzten Arten in der Zahl ihrer reellen Geraden und Dreiecksebenen übereinstimmen.

Dieser Hülfssatz ist folgendermassen einzusehen. Wenn zwei Gerade auf einer Fläche consecutiv werden, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder die Geraden schnitten sich vorher, oder es war dies nicht der Fall. In dem ersten Falle hat die Fläche längs der Geraden eine constante Tangentialebene, in dem zweiten sind Tangentenebene und Berührungspunkt projectivisch auf einander bezogen. Legt man also durch die Gerade eine beliebige Ebene, welche dann noch einen Kegelschnitt aus der Fläche ausschneidet, so müssen im ersten Falle *beide* Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der Geraden, im letzteren Falle der *eine* Schnittpunkt fest sein. Im ersteren Falle liegen zwei, im letzteren ein Knotenpunkt der Fläche auf der Geraden; die Fläche hat einen Knotenpunkt w. z. b.

Der Grund nun, um dessen willen Schläfli die grössere Zahl der

Fälle, die wir in § 4. aufstellten, nicht zu unterscheiden hat, liegt darin, *dass der Durchgang eines Knotens durch die biplanare Form die Zahl der reellen Geraden nicht ändert.* Es ist das algebraisch evident. Die Geraden, welche durch den einfachen Knoten gehen, zählen zweimal; wird der Knoten ein biplanarer, so zählen sie dreimal; es hat sich also jede Gerade noch mit einer hinzugetretenen einfach zählenden vereinigt. Hernach, wenn der Knoten wieder ein conischer wird, löst sich diese Gerade ab, ohne aufzuhören, reell zu sein; es ist kein Grund, dass Gerade imaginär werden, weil sich ungleichwerthige Elemente vereinigt hatten.

Geometrisch geht dieses Zusammenfallen folgendermassen vor sich. Es sei etwa ein Knoten mit 6 reellen Linien gegeben, und er gehe in die biplanare Form über. Dann vereinigen sich mit seinen Geraden sechs solche, welche bis dahin durch die Oeffnung verliefen, welche (nach § 3.) die Fläche in der Nähe eines Knotens zeigt, der die biplanare Form annehmen will; hernach erstrecken sich diese Geraden durch die entsprechende Oeffnung, welche auf der anderen Seite des Knotens entstanden ist.

## § 10.

## Von der Diagonalfläche.

Unsere weiteren Betrachtungen sollen sich auf die Flächen mit 27 reellen Geraden allein beziehen; die Principien, welche uns dabei leiten, sind in gleicher Weise bei den übrigen Fällen anwendbar, liefern aber nicht immer die gleichen einfachen Resultate.

Wir gehen von der Betrachtung einer einzelnen Fläche mit 27 reellen Geraden aus. Es ist dies die von Clebsch sogenannte *Diagonalfläche* (vergl. Math. Annalen IV. S. 331) mit reell vorausgesetztem Pentaeder. Diese Fläche ist durch die einfache Beziehung zu dem ihr zugeordneten Pentaeder ausgezeichnet. Sind nämlich die Ebenen des Pentaeders durch

$$p=0\,,\quad q=0\,,\quad r=0\,,\quad s=0\,,\quad t=0$$

dargestellt, und wählt man die absolute Bedeutung dieser Buchstaben so, dass

$$p+q+r+s+t=0\,,$$

so ist die Gleichung der Fläche

$$p^3+q^3+r^3+s^3+t^3=0.$$

Die Diagonalfläche ist eine Covariante des zu Grunde gelegten Pentaeders (vergl. Math. Annalen IV. S. 353). Jede Diagonalfläche ist in Folge dessen mit jeder anderen und insbesondere mit sich selbst auf 120 Weisen collinear, wobei die Collineationen reell sind, wenn zwei Flächen mit reellem Pentaeder in einander übergeführt werden sollen. In Folge dessen gestattet ein Modell der Fläche mit reellem Pentaeder für alle solchen Flächen allgemeine Schlüsse zu ziehen; die Kenntniss der Collineationen der Fläche in sich selbst controlirt die Abzählung gleichwerthiger Vorkommnisse. Ein solches Modell wurde von Hrn. Weiler nach Angaben von Clebsch ausgeführt (vergl. Göttinger Nachrichten. Aug. 1872) und ich habe wesentlich an diesem Modelle die im Folgenden entwickelten Verhältnisse kennen gelernt.

Die 27 Geraden der Diagonalfläche spalten sich in zwei Gruppen von bez. 15 und 12. Die 15 ersten Linien liegen in den Pentaederebenen und bilden in jeder die Diagonalen desjenigen Vierseits, in welchem die Ebene von den vier übrigen geschnitten wird. Diese Linien schneiden sich also zu drei in den 10 Pentaedereckpunkten. Die übrigen 12 bilden eine Doppelsechs. Dieselben sollen in bekannter Weise durch:

$$\begin{array}{cccccc} 1 \cdot & 2 \cdot & 3 \cdot & 4 \cdot & 5 \cdot & 6 \\ 1' \cdot & 2' \cdot & 3' \cdot & 4' \cdot & 5' \cdot & 6' \end{array}$$

bezeichnet sein, die 15 Geraden sind dann durch die Zahlen $\overline{12}$, $\overline{13}$ etc. gegeben. Diese Indices können dabei so gewählt werden, dass die Geraden, welche in den fünf Pentaederebenen liegen, die folgenden sind:

$$\left.\begin{array}{ccc} 12, & 34, & 56 \\ 13, & 25, & 46 \\ 14, & 26, & 35 \\ 15, & 24, & 36 \\ 16, & 23, & 45 \end{array}\right\} (A)$$

während die Geraden, wie sie sich bez. zu drei in einem Punkte schneiden, durch das Schema gegeben sind:

$$\left.\begin{array}{ccc} 12, & 35, & 46 \\ 12, & 36, & 45 \\ \hline 13, & 24, & 56 \\ 13, & 26, & 45 \\ \hline 14, & 25, & 36 \\ 14, & 23, & 56 \\ \hline 15, & 26, & 34 \\ 15, & 23, & 46 \\ \hline 16, & 24, & 35 \\ 16, & 25, & 34 \end{array}\right\} (B)$$

Die 15 Geraden der ersten Art haben reelle *Asymptotenpunkte*; dieselben liegen eben in den zwei Pentaedereckpunkten, welche jede solche Gerade enthält. Die 12 Geraden der zweiten Art hingegen haben imaginäre Asymptotenpunkte. Die 10 Pentaederecken, in welche die 30 Asymptotenpunkte der Geraden erster Art zusammenfallen, sind isolirte Punkte der parabolischen Curve*) der Fläche. Sie können isolirte Punkte vorstellen, da die Hesse'sche Fläche, welche die parabolische Curve ausschneidet, in ihnen Knotenpunkte hat.

Andere reelle Punkte von parabolischer Krümmung giebt es nicht: *die Diagonalfläche ist, abgesehen von den 10 auf ihr liegenden Pentaedereckpunkten, überall hyperbolisch gekrümmt.*

Die Geraden der Fläche bilden auf derselben eine Reihe von Vierecken. Jedes solche Viereck hat zu auf einander folgenden Kanten zwei Gerade der ersten und weiterhin zwei Gerade der zweiten Art. In jedem der 10 Pentaedereckpunkte stossen 6 solcher Vierecke zusammen; die $2 \cdot 6$ Kanten zweiter Art, welche sie besitzen, gehören nur 6 Linien der zweiten Art an, so dass der Eckpunkt von einem (windschiefen) Sechsseit von Geraden zweiter Art umgeben ist. Ausser den $6 \cdot 10 = 60$ an die Eckpunkte hinanreichenden Vierecken finde ich noch 60 andere, so dass die Zahl der überhaupt vorhandenen vierseitigen Felder, in welche die Fläche durch die 27 Geraden zerlegt wird, 120 beträgt.

## § 11.

## Uebertragung auf die allgemeine Fläche mit 27 reellen Geraden.

Die bei der Diagonalfläche erkannten Eigenschaften können nun unmittelbar für die Flächen dritten Grades mit 27 reellen Geraden überhaupt verwerthet werden, indem man überlegt, wie sich dieselben ändern werden, wenn man die Diagonalfläche beliebigen Deformationen unterwirft, ohne dass ein Zusammenfallen von geraden Linien stattfindet oder (was dasselbe ist) ein Knotenpunkt entsteht.

Zuvörderst ist ersichtlich: *die Vertheilung der reellen Asymptotenpunkte auf die Geraden der Fläche ist bei den Flächen mit 27 Geraden überhaupt so wie bei der Diagonalfläche.* Denn jede Fläche mit 27 Geraden lässt sich aus jeder anderen und also auch aus der Dia-

---

*) In einem solchen isolirten Punkte einer parabolischen Curve berührt jede Tangente dreipunktig, jeder durch denselben durchgelegte ebene Schnitt der Fläche hat dort eine Wendung. Drei unter den Tangenten sind vierpunktig berührend; im Falle der Flächen dritten Grades müssen sich also in einem solchen Punkte, wie es bei der Diagonalfläche in der That geschieht, drei Gerade der Fläche kreuzen.

gonalfläche ableiten, ohne dass eine Fläche mit Knotenpunkt dazwischen tritt. Sollten nun bei dieser Ableitung Asymptotenpunkte, die vorher reell waren, imaginär werden oder umgekehrt, so müssten sie vorher zusammenfallen. Wenn aber auf einer Geraden die Asymptotenpunkte zusammenfallen, so hat die Fläche dort nothwendig einen Knotenpunkt Denn die Asymptotenpunkte sind harmonisch zu jedem Punktepaar, in welchem die bez. Gerade von einem Kegelschnitte der Fläche getroffen wird, der in einer beliebig durch die Gerade hindurchgelegten Ebene liegt etc.

*Auf jeder Fläche mit 27 Geraden giebt es also eine Doppelsechs von Geraden mit imaginären Asymptotenpunkten, die 15 übrigen Geraden haben reelle Asymptotenpunkte.* Bezeichnet man die ersteren, wie bei der Diagonalfläche, mit 1, 2 ·· bez. 1′, 2′ ··, so geben die Schemata $A$, $B$ des vorigen Paragraphen die von den Geraden der anderen Art gebildeten Dreiecksebenen.

Betrachten wir jetzt *die Vertheilung der Geraden* und den Verlauf *der parabolischen Curve* auf der allgemeinen Fläche. Zu diesem Zwecke sei angenommen, dass die Fläche zunächst wenig von einer Diagonalfläche abweiche. Dann ist der einzige Unterschied in der Vertheilung der Geraden der, dass die drei Geraden, welche sich bis dahin in den Pentaederecken schnitten, nunmehr ein Dreieck, aber (zunächst) ein kleines Dreieck zwischen sich einschliessen. Von den 6 Vierecken der Fläche, die in dem gemeinsamen Schnittpunkte zusammenstiessen, sind drei zu Fünfecken geworden; die Fläche wird also durch die geraden Linien in 10 Dreiecke, 90 Vierecke, 30 Fünfecke zerlegt. Die drei Asymptotenpunkte der drei sich in einem Punkte schneidenden Geraden, die bis dahin vereinigt waren, sind in drei Punkte auf den Seiten des kleinen Dreiecks auseinandergerückt. Der isolirte Punkt der parabolischen Curve hat sich zu einem kleinen in das Dreieck eingeschriebenen Ovale erweitert (denn imaginär kann er nicht geworden sein, da die Asymptotenpunkte, in denen ein Zweig der parabolischen Curve berühren soll, reell geblieben sind). *Die parabolische Curve besteht also aus 10 Ovalen, welche bezüglich in die durch das Schema $B$ bezeichneten Dreiecke eingeschlossen sind; das Schema $A$ bezeichnet fünf Dreiecksebenen, welche je 6 dieser Ovale berühren.* Auch die Lage, welche das Pentaeder der neuen Fläche angenommen hat, lässt sich näherungsweise angeben. Die Hesse'sche Fläche, welche in den Pentaedereckpunkten Knotenpunkte hat, schneidet die Fläche dritten Grades nach 10 getrennten Ovalen. Die Fläche dritten Grades ist durch leichte Deformation aus der Diagonalfläche entstanden, bei der an Stelle dieser Ovale isolirte Punkte auftraten, die eben selbst die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche vorstellten. In Folge dessen sind die 10 Ovale der neuen Fläche *die Durchschnitte derselben* *bez. mit den 10 von den Knotenpunkten der Hesse'schen Fläche sich erhebenden kegelartigen Stücken derselben* (welche näherungsweise durch die Tangentenkegel in den bez. Knotenpunkten dargestellt werden). Aber auf diesen Stücken verlaufen jedesmal drei Kanten des durch die Knotenpunkte bestimmten Pentaeders, denn diese Kanten gehören der Hesse'schen Fläche ganz an. *Das Pentaeder unserer Fläche liegt also in der Nähe der durch das Schema A bezeichneten fünf Dreiecksebenen, derart, dass seine Kanten zu drei jedes der 10 Ovale der parabolischen Curve treffen.*

Die hiermit bezeichneten Verhältnisse übertragen sich nun ohne Weiteres auf die allgemeine Fläche mit 27 Geraden. In der That können sie sich nicht ändern, wenn man eine beliebige Deformation der Fläche, bei der die 27 Geraden getrennt bleiben, eintreten lässt. *Die Vertheilung der Geraden auf der Fläche* kann keine andere werden, es können höchstens drei Gerade erster Art, die sich bei der Diagonalfläche in einem Punkte schnitten, wieder in einen Punkt zusammenrücken (was unwesentlich sein würde). Denn es können nie drei Gerade verschiedener Art sich in einem Punkte schneiden, weil sonst dieser Punkt ein gemeinsamer Asymptotenpunkt wäre und also gerade Linien, welche vorher imaginäre Asymptotenpunkte besassen, nunmehr reelle hätten etc. *Die Zahl der Ovale der parabolischen Curve ist immer 10*; es kann sich höchstens ein oder das andere Oval in einen isolirten Punkt zusammenziehen, was nicht in Betracht kommt. Denn kein Oval kann verschwinden — es bleiben ja die Asymptotenpunkte, in denen es berührt, reell —, es können sich nie zwei Ovale vereinigen — denn jedes Oval ist von einem Sechsseit von geraden Linien umgeben, welche keine reellen Asymptotenpunkte besitzen, und das also von dem Ovale nie überschritten werden kann, — es darf endlich auch nie ein Oval neu entstehen, denn dasselbe müsste aus einem neuen isolirten Punkte hervorgehen und ein solcher würde (wie oben in einer Note bemerkt) einen neuen Kreuzungspunkt von drei Geraden der Fläche bedeuten, der doch nicht auftreten soll. *Die Beziehung des Pentaeders zur Fläche ist dieselbe geblieben.* Denn waren einmal die 10 Ovale den 10 Knotenpunkten einzeln zugeordnet, so kann dies Verhältniss, so lange die 10 Ovale einzeln erhalten bleiben, keine Aenderung erleiden.

Es begründen diese Beziehungen insbesondere noch den Satz, der die Wichtigkeit der Diagonalfläche gerade für Untersuchungen der vorliegenden Art kennzeichnet: *Eine Fläche dritten Grades mit 27 reellen Geraden kann nur auf eine continuirliche Weise in eine Diagonalfläche übergeführt werden.* Das Pentaeder derselben entsteht aus den fünf Dreiecksebenen $A$, welche bez. je 6 der 10 parabolischen Ovale berühren.

## § 12.

## Die Entstehung der Fläche mit 27 Geraden aus der Fläche mit vier Knoten.

Wenn wir nach § 2. eine Fläche mit 27 Geraden aus einer mit vier Knoten ableiten, so werden die 10 elliptisch gekrümmten Theile der Fläche in folgender Weise erzeugt. Vier derselben werden durch die vier Seitenfelder des ursprünglich elliptischen Flächentheils (der tetraederähnlich gestaltet war) hervorgebracht. Die sechs anderen entstehen an denjenigen Stellen des ursprünglich hyperbolischen Theiles, in denen die drei einfachen Geraden der Fläche von den sechs Tetraederkanten geschnitten werden.

Die Ebene der einfachen Geraden giebt also eine der fünf Dreiecksebenen $A$ ab, die den fünf Pentaederebenen benachbart sind, wie das mit dem Umstande stimmt, dass für die Fläche mit vier Knoten jene Ebene geradezu eine Pentaederebene ist.

Will man daher untersuchen, wie oft eine Fläche mit 27 reellen Geraden aus der Fläche mit 4 Knoten abgeleitet werden kann, so hat man von vornherein fünf Classen solcher Ableitungen zu unterscheiden, je nach der Dreiecksebene $A$, welche man aus der Ebene der isolirten Geraden hervorgehen lassen will. Aber man überzeugt sich, dass jede solche Classe nur eine Art enthält, *dass eine Fläche mit reellen Geraden überhaupt nur in fünf Weisen aus einer Fläche mit vier Knoten gewonnen werden kann.* Als solche fünf Flächen mag man dann geradezu diejenigen nehmen, deren Pentaeder*) mit den fünf Dreiecksebenen $A$ zusammenfällt.

Um dies zu begründen, betrachte ich die Gruppe der 24 Geraden, die bei der Auflösung der Knoten einer Fläche mit vier Doppelpunkten aus den Tetraederkanten entstehen. *Eine solche Gruppirung lässt sich aus den 24 Geraden, die von den 27 bleiben, wenn man die drei in einer Ebene $A$ gelegenen fortnimmt, nur einmal bilden, und darin liegt der Beweis.*

Diese Gruppirung ist nämlich folgende. Die drei Kanten, welche durch einen Knoten hindurchgingen, ergeben bei der Auflösung eine Doppelsechs. Je drei Linien aus jeder Sechs derselben haben reelle, die drei anderen imaginäre Asymptotenpunkte. Die vier Doppelsechsen, welche den vier Knotenpunkten entsprechen, haben je vier Gerade gemein, darunter zwei und nur zwei mit reellen Asymptotenpunkten.

*) Eine Fläche mit vier Knoten ist, wie leicht zu sehen, vollständig bestimmt, wenn ihr Pentaeder bekannt und eine Entscheidung darüber getroffen ist, welche Pentaederebene die isolirten Geraden enthalten soll. Zu einem Pentaeder gehören also fünf Flächen mit vier Knoten.

Die Linien einer Doppelsechs, welche reelle Asymptotenpunkte haben, berühren unter den 6 Ovalen der parabolischen Curve, welche in der Nähe der Ebene der isolirten Geraden entstehen, solche drei, welche nicht (auch nicht annähernd) in gerader Linie liegen.

Sondern wir aber aus den 27 Geraden drei in einer Ebene $A$ gelegene, etwa

$$12, \quad 34, \quad 56,$$

aus, so lassen sich die übrigen 24 nur in einer Weise in vier Doppelsechsen gruppiren, welche diesen Forderungen genügen. Bei der Bezeichnung der Geraden, die ich an dem Weiler'schen Modelle der Diagonalfläche angebracht habe, sind dies die folgenden:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 46 | 62 | 24 |
| 35 | 51 | 13 | 2′ | 4′ | 6′ |
| 1 | 4 | 6 | 35 | 52 | 23 |
| 46 | 61 | 14 | 2′ | 3′ | 5′ |
| 2 | 3 | 6 | 45 | 51 | 14 |
| 36 | 62 | 23 | 1′ | 4′ | 5′ |
| 2 | 4 | 5 | 36 | 61 | 13 |
| 45 | 52 | 24 | 1′ | 3′ | 6′ |

Die Doppelsechsen, welche in dieser Weise bei den 5 Rückleitungen einer Fläche mit 27 Geraden auftreten, sind übrigens nicht in der Zahl 20, sondern nur in der Zahl 10 vorhanden, indem jede Doppelsechs zweimal benutzt wird. Bezeichnet man die eben genannten (in verständlicher Weise) durch:

$$135, \quad 146, \quad 245, \quad 236,$$

so giebt es ausserdem die folgenden sechs:

$$\begin{array}{ccc} 123, & 124, & 156 \\ 256, & 345, & 346 \end{array}$$

und dieselben vertheilen sich auf die fünf Ebenen $A$ in der folgenden Weise:

| Ebene | |
|---|---|
| 12 · 34 · 56 | 135 · 146 · 245 · 236 |
| 13 · 25 · 46 | 124 · 156 · 236 · 345 |
| 14 · 26 · 35 | 123 · 156 · 245 · 346 |
| 15 · 24 · 36 | 123 · 146 · 256 · 345 |
| 16 · 23 · 45 | 124 · 135 · 256 · 346 |

## § 13.

### Von den ebenen Schnitten der Fläche mit 27 reellen Geraden.

Auf Grund der bisherigen Erörterungen wird es möglich, die Gesammtheit der ebenen Schnitte, welche eine Fläche mit 27 Geraden zeigt, zu classificiren. Ich muss mich freilich darauf beschränken, hier die Resultate einfach anzugeben, da eine genaue Herleitung derselben ohne die durch ein Modell ermöglichte concrete Anschauung zum mindesten sehr weitläufig scheint.

Der ebene Schnitt einer Fläche dritter Ordnung zeigt als Curve dritter Ordnung entweder nur einen zusammenhängenden Curvenzug (mit 3 Wendungen) oder er besitzt ausserdem ein Oval. Die Ebenen, welche die Fläche nur nach *einem* Zuge schneiden, bilden nun, wie sich zeigt, *eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen.* Von ihr werden ebenfalls dreifach unendliche Mannigfaltigkeiten solcher Ebenen, die in Curven mit Oval schneiden, eingeschlossen.

Diese Ebenen selbst zerfallen zunächst in drei Gruppen, deren jede wieder in eine grössere Zahl getrennter Mannigfaltigkeiten getheilt ist. *Das Oval wird nämlich entweder von keiner Geraden der Fläche, oder von 12 oder von 16 getroffen.*

Dass hiermit in der That alle Möglichkeiten erschöpft sind, welche eintreten können, wenn man Durchschnittscurven mit Doppelpunkt etc. nicht beachtet, ergiebt sich durch folgende Betrachtung aus der eindeutigen Abbildung der Fläche auf eine Ebene. Der ebene Schnitt bildet sich bekanntlich ab als Curve dritter Ordnung, die durch sechs Fundamentalpunkte hindurchgeht. Er wird überdies, je nachdem er aus einem Zuge oder aus zwei Theilen besteht, eine ebenso beschaffene Bildcurve liefern. Beschränken wir uns also auf Bildcurven, die aus zwei Theilen, aus einem Ovale und einem Zuge mit drei Wendungen bestehen. Es liegen dann noch eine Reihe von Möglichkeiten bezüglich der Vertheilung der Fundamentalpunkte auf die beiden Curventheile vor: das Oval kann $0, 1, 2 \cdots 6$ Fundamentalpunkte enthalten. Man beweist nun zunächst: *Das Oval des ebenen Bildes entspricht dem Ovale der räumlichen Curve oder dem anderen Theile derselben, je nachdem es eine gerade oder ungerade Zahl von Fundamentalpunkten enthält.* Enthält nämlich das Oval eine ungerade Zahl, so wird es, nach Grundsätzen der Analysis situs, von jeder Curve, die durch die 6 Fundamentalpunkte geht, noch in einem Punkte oder in einer ungeraden Zahl von Punkten geschnitten; der entsprechende räumliche Curvenzug wird also von jeder Ebene einmal oder eine ungerade Anzal von Malen getroffen, d. h. er ist ein Curvenzug mit drei Wendungen, kein Oval. Umgekehrt beweist man, dass das Oval des ebenen Bildes und das

Oval des räumlichen Schnittes einander entsprechen, wenn ersteres eine gerade Zahl von Fundamentalpunkten enthält. — Indem man sich dieser Regel bedient, ersieht man sofort, dass die räumlichen Schnitte mit Oval eben in die drei Arten zerfallen, die dadurch charakterisirt sind, dass das Oval bez. von keiner Geraden, oder von 12 (die eine Doppelsechs bilden), oder von 16 Geraden geschnitten wird.

Ebenen, welche nach Curven mit Oval schneiden, so dass das Oval keiner Geraden begegnet, erhält man z. B., wenn man das Oval ganz auf eine der 10 elliptisch gekrümmten Partieen der Fläche verlegt. Man überzeugt sich dann ferner, dass dies die einzigen Ebenen dieser Art sind, *die bez. Ebenen constituiren also 10 getrennte Mannigfaltigkeiten.*

Ebenen, deren Oval einer Doppelsechs begegnet, erhält man beispielsweise, wenn man die Fläche zunächst in eine solche mit Knotenpunkt überleitet und dann einen ebenen Schnitt legt, für den einer der Knotenpunkte ein isolirter Punkt ist. Geht man sodann zur ursprünglichen Fläche zurück, so hat man einen Schnitt, dessen Oval von den Linien derjenigen Doppelsechs getroffen wird, welche aus den drei durch den Knotenpunkt verlaufenden Kanten entstanden ist. Jede der 10 im vorigen Paragraphen aufgezählten Doppelsechsen giebt zu solchen ebenen Schnitten*) Veranlassung. Man kann wiederum beweisen, dass diese die einzigen ihrer Art sind, *dass also auch die Ebenen dieser Art 10 getrennte Mannigfaltigkeiten constituiren.*

Es giebt ferner *15 Mannigfaltigkeiten von Ebenen, deren Oval von 16 Geraden getroffen wird.* Man überzeugt sich hiervon einmal, indem man zu den Flächen mit 4 Knoten zurückgeht. Jede der fünf Flächen mit 4 Knoten, aus denen die allgemeine Fläche entstehen kann, hat dreierlei Schnitte, die beim Uebergange Durchschnittscurven der gewünschten Art geben: diejenigen Schnitte, welche den elliptischen Theil der Fläche mit 4 Knoten so treffen, dass die Knoten in zwei Gruppen von zwei zerlegt werden. Andererseits erhält man Schnitte der gewünschten Art, wenn man, was ersichtlich möglich ist, durch jede der 15 Geraden mit reellen Asymptotenpunkten Ebenen hindurchlegt, welche Kegelschnitte enthalten, die der bez. Geraden nicht be-

*) Ein Modell einer Fläche mit 27 Geraden zeigt eine Reihe von „Durchgängen" oder „Oeffnungen".

Auf den Partieen der Fläche, welche an diese Durchgänge angrenzen, verlaufen eben die Geraden einer der 10 Doppelsechsen. Jede solche Doppelsechs giebt zu einem „Durchgange" Veranlassung; ob derselbe aber in dem Modelle ohne Weiteres sichtlich ist, hängt einmal von der Beziehung zum Unendlich-Weiten ab, die man bei der Construction des Modell's zu Grunde gelegt hat, dann aber auch davon, welche Seite der im Endlichen gelegenen Partie der Fläche man als äussere, welche als innere betrachten will.

gegnen, — und wenn man weiterhin diese Ebene etwas verschiebt, so dass sie eine eigentliche Curve dritter Ordnung enthält.

Diese Unterscheidung der ebenen Schnitte liefert die Eintheilung der Flächen mit 27 Geraden nach dem Unendlich-Weiten. Sieht man von Flächen mit parabolischen Aesten ab (welche die unendlich ferne Ebene berühren), *so hat man bei den Flächen mit 27 reellen Geraden vier Arten zu unterscheiden.* Das Wiener'sche Modell gehört zu der Art, welche die unendlich ferne Ebene in einem zusammenhängenden Curvenzuge trifft. Ebendahin gehört die Fläche, die man aus der Fläche mit 4 Knoten ableiten wird, wie sie auf Tafel I dargestellt ist. Das von Hrn. Neesen angefertigte Modell einer Fläche mit 4 Knoten, dessen oben Erwähnung geschah, würde eine Fläche mit 27 Geraden angeben, die das Unendlichferne in einer Curve mit Oval trifft, so, dass das Oval von 12 Linien geschnitten wird. —

## § 14.

## Von den Haupttangentencurven der Fläche mit 27 reellen Geraden.

Die Aufgabe, auf einem Modelle einer Fläche mit 27 reellen Geraden die Haupttangentencurven zu zeichnen, ist practisch nicht zu schwer auszuführen, da die 27 Geraden selbst Haupttangentencurven vorstellen. In der That ist der Verlauf der bez. Curven innerhalb der Vierecke, welche von den Geraden der Fläche eingeschlossen werden, durch diese Bemerkung durchaus bestimmt, d. h. schematisch bestimmt. Nur bez. der Dreiecke und Fünfecke, welche an die parabolische Curve angränzen, wird eine anderweitige Ueberlegung nöthig. Das Resultat derselben, das auf Tafel VI versinnlicht ist, mag hier um so lieber mitgetheilt werden, als dasselbe einen Beitrag zur Theorie der Haupttangentencurven überhaupt, noch allgemeiner, zur Theorie der singulären Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variabeln abgiebt.

Auf Tafel VI bezeichnet die punktirte Curve eins der 10 Ovale der parabolischen Curve; die drei geradlinigen Tangenten stellen drei Gerade der Fläche vor, die sechs umschliessenden Geraden repräsentiren das windschiefe Sechsseit, in welches das Oval eingeschlossen ist. Die ausgezogenen Curven, zusammen mit diesen Geraden, sind Haupttangenten-Curven. Dieselben haben auf der parabolischen Curve (wie das schon sonst bekannt war, vergl. Berliner Monatsberichte 1870 S. 894) Spitzen; in den Asymptotenpunkten der drei Geraden sind aber diese Spitzen in *Selbstberührungspunkte* übergegangen. Solcher Selbstberührungspunkte treten auf der parabolischen Curve einer Fläche $n^{ter}$ Ordnung im Allgemeinen eine endliche Zahl auf. Es sind die

Punkte, in denen sich die parabolische Curve und die Curve vierpunktiger Berührung begegnen.

## § 15.

## Einige allgemeine Sätze über die Gestalten algebraischer Curven und Flächen.

Die geschlossenen Curven der Ebene hat man in projectivischem Sinne in zwei Clossen zu theilen, in *paare* und *unpaare* Curven.*) Zu den unpaaren Curven gehört z. B. die gerade Linie, sowie der Zug mit drei Wendungen, der bei den Curven dritter Ordnung auftritt. Als ein Beispiel für eine paare Curve mag man jede im Endlichen verlaufende geschlossene Curve betrachten. Man hat für diese Curven und ihre gegenseitigen Beziehungen eine Reihe allgemeiner Sätze (vergl. Staudt's Geometrie), von denen hier nur der eine angeführt sein soll:

*Zwei Curven schneiden sich nothwendig, wenn beide unpaar sind, und zwar in einer unpaaren Anzahl von Punkten. Ist eine von zwei Curven eine paare, so brauchen sich die Curven nicht zu treffen; thun sie es, so geschieht es in einer paaren Anzahl von Punkten.*

Man kann hieran einen Schluss über die Gestalten der ebenen algebraischen Curven ohne vielfachen Punkt oder, wenn man will, der allgemeinen durch eine Gleichung zwischen Punkt-Coordinaten gegebenen Curven knüpfen. Da eben kein vielfacher Punkt vorhanden sein soll, da ferner die Curve, je nachdem ihre Ordnung gerade oder ungerade ist, von einer geraden Linie in einer paaren oder unpaaren Zahl von Schnittpunkten getroffen werden muss, so kommt:

*Curven gerader Ordnung enthalten keinen, Curven ungerader Ordnung einen und nur einen unpaaren Zug; die Zahl der etwa vorhandenen paaren Züge ist unbeschränkt.***)

Entsprechende Ueberlegungen kann man mit Bezug auf *geschlossene Flächen* anstellen. Bei ihnen, wie bei den Curven im Raume, hat man, nach Staudt, ebenfalls paare und unpaare zu unterscheiden. Eine unpaare Fläche und eine unpaare Curve schneiden sich nothwendig.

*) Es ist wohl Staudt's Verdienst, auf diesen Unterschied zuerst aufmerksam gemacht zu haben (Geometrie der Lage §§ 1, 2, 12 (1847)). Andererseits geht Möbius von demselben aus bei seiner Untersuchung über die Grundformen der Linien dritter Ordnung (Abhandl. der Sächs. Akademie. Bd. I. 1852).

**) Ist $n$ die gegebene Ordnung, so kann die Zahl der paaren Züge, für $n > 2$, nicht grösser als $\frac{n-2 \cdot n+1}{2} - 1$ sein. Denn betrüge sie $\frac{n-2 \cdot n+1}{2}$, so könnte man durch ebensoviele bezüglich in deren Innerem angenommene Punkte eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung legen; dieselbe hätte dann $n-2 \cdot n+1$ Punkte mit der gegebenen Curve gemein, was unmöglich ist.

Eben dieser Umstand begründet aber noch eine weitere Theilung der paaren Flächen: in solche nämlich, welche unpaare Curven enthalten, und solche, bei denen das nicht der Fall ist. Für die so gewonnenen drei Flächenarten: *die unpaaren, die paaren mit unpaaren Curven und die paaren ohne unpaare Curven,* sind etwa Beispiele: die Ebene, das einschalige Hyperboloid, das Ellipsoid (oder das zweischalige Hyperboloid). Man findet sofort:

*Unpaare Flächen oder auch eine unpaare Fläche und eine paare der ersten Art schneiden sich nothwendig.*

Und hierauf gestützt leitet man den Satz ab:

*Flächen $n^{ter}$ Ordnung ohne vielfache Punkte und Curven enthalten, wenn n gerade ist, keinen, wenn n ungerade ist, einen und nur einen unpaaren Theil. Paare Theile der ersten Art treten nur bei den Flächen einer paaren Ordnung auf und ihre Zahl ist dann beliebig; paare Theile der zweiten Art können, unabhängig davon, ob die Ordnung der Fläche gerade oder ungerade ist, in unbeschränkter Zahl vorhanden sein.*

Die Flächen dritter Ordnung ohne Knotenpunkt, wie wir sie oben haben kennen lernen, bestehen nur in einem Falle ($F$) aus zwei Theilen. Der eine Theil ist, wie er sein muss, ein paarer von der zweiten Art, der andere ein unpaarer. Die überall zusammenhängenden Flächen der vier ersten Arten geben Beispiele unpaarer Flächentheile. Sie haben — ähnlich wie die unpaaren Curvenzüge der Ebene, die sich nicht selbst durchsetzen — die Eigenschaft, den Raum unzertheilt zu lassen, ihn nur zu begränzen.

## § 16.

## Beziehungen zur Analysis situs.

Die entwickelten Unterscheidungen bei geschlossenen Curven und Flächen beziehen sich auf Eigenschaften derselben, welche ebenso wohl bei beliebigen reellen Collineationen als bei stetigen Deformationen ungeändert bleiben. Es entsteht durch diese Bemerkung überhaupt die Frage nach solchen Eigenschaften. Die Fragestellung ist ähnlich, aber nicht dieselbe, wie in der gewöhnlichen *Analysis situs*, und es mag hier ausdrücklich auf das Gemeinsame wie auf das Unterscheidende aufmerksam gemacht werden.

Die Analysis situs beschäftigt sich zunächst nur mit Gebilden, die durchaus im Endlichen verlaufen, indem sie bei ihnen allen als gleichartig betrachtet, was durch stetige Deformation in einander übergeführt werden kann. Besondere Festsetzungen sind zu treffen, wenn auch von Theilen die Rede sein soll, die sich in's Unendliche erstrecken, und diese mit im Endlichen verlaufenden Theilen verglichen werden sollen.

Man wird ganz allgemein eine solche Festsetzung in der Weise treffen können, dass man mit den im Endlichen stattfindenden Deformationen irgendwelche Transformationen verbunden denkt, welche das Unendliche in's Endliche überführen, *und dann Gebilde als äquivalent betrachtet, welche durch Verknüpfung dieser Transformationen mit den Deformationen im Endlichen in einander übergeführt werden können.*

Man hat nun seither bei derartigen Untersuchungen, und zwar (so viel mir bekannt) *ohne* die darin liegende Willkürlichkeit hervorzuheben, das Unendliche so betrachtet, wie es bei einer Raumtransformation durch reciproke Radii vectores erscheint, d. h. *als einen einzelnen Punkt.* Es entspricht das der Art, nach welcher bei der geometrischen Interpretation von $x + iy$ in der Ebene das Unendliche beurtheilt werden muss, damit sich die geometrische Auffassung an die Vorstellung einer complexen Veränderlichen anschmiegt. Man hat es bei dieser Anschauung als eine Zufälligkeit zu erachten, die sich immer durch geeignete Transformation vermöge reciproker Radien vermeiden lässt, wenn sich eine Curve oder Fläche einfach oder mehrfach in's Unendliche erstreckt. *Die Unterscheidung der geschlossenen Curven in zwei, der geschlossenen Flächen in drei Arten, wie sie für die projectivische Anschauung stattfand, kommt in Wegfall.*

Die Ergebnisse dieser Art von Analysis situs sind daher nicht ohne Weiteres für die projectivische Auffassung zu verwerthen. Letzterer entspricht eine Analysis situs, die das Unendlichferne durch reelle *Collineationen* mit dem Endlichen vergleichbar macht, wobei es als Ebene, allgemeiner ausgedrückt, als in eine Ebene ausbreitbare unpaare Fläche erscheint. Für sie sind die Theoreme der anderen ein erster Beitrag, der unbedingt für alle im Endlichen verlaufenden Gebilde giltig ist; es treten aber weitere Unterscheidungen ganz neuer Art ein, wie eben die Eintheilung der Curven und Flächen in paare und unpaare.

Ein Theorem, das auf diesem Standpunkte eben nur als ein Anfang zur Lösung eines allgemeinen Problem's erscheint, *ist das Riemann'sche vom Zusammenhang der Flächen.* Nach Riemann können zwei geschlossene Flächen (und nur von solchen mag die Rede sein) dann in einander durch stetige Deformation übergeführt werden, wenn die Zahl der geschlossenen Curven, die man auf den Flächen ziehen kann, ohne dass dieselben in Stücke zerfallen, beiderseits dieselbe ist; das Doppelte der Zahl dieser Curven heisst der (ausserordentliche) *Zusammenhang.* Für die von uns geforderte Analysis situs ist das Uebereinstimmen in der Zahl ebenso eine nothwendige aber nicht mehr eine ausreichende Bedingung. *Flächen verschiedener Classen können niemals in einander übergeführt werden, auch wenn diese Zahl stimmt.*

Die unbegrenzte Ebene z. B. wird nach dieser Definition des Zusammenhanges bei projectivischer Anschauung den Zusammenhang 2 bekommen. Denn man kann eine und nur eine geschlossene Curve in der Ebene ziehen, ohne dass dieselbe zerfällt, z. B. eine gerade Linie oder jede unpaare Curve, welche sich nicht selbst durchsetzt; zwei Curven aber trennen die Ebene nothwendig. Und doch wird man die Ebene nicht überführen können in eine im Endlichen gelegene Ringfläche, die auch den Zusammenhang 2 besitzt.

Der Unterschied der beiden Flächen ist auch nicht darin allein begründet, dass das eine Mal eine unpaare, das andere Mal eine paare Curve auf der Fläche gezogen wird.

Denn ein einschaliges Hyperboloid hat wie die Ringfläche die Eigenschaft, dass man auf der Fläche eine und nur eine geschlossene Curve ziehen kann, ohne dass sie zerfällt, und dass man für diese Curve eine paare Curve wählen kann. Und doch sind die beiden Flächen verschieden: das Hyperboloid gehört zur ersten, die Ringfläche zur zweiten Classe der paaren Flächen.

Das Resultat dieser Ueberlegungen ist also Folgendes: *Der Zusammenhang der Flächen ist auch für die projectivische Anschauung ein bleibendes Element; es giebt aber nicht mehr das ausreichende Kriterium für die Transformirbarkeit zweier Flächen in einander ab.*

## § 17.

## Der Zusammenhang der Flächen dritten Grades.

Herr Schläfli hat in dem wiederholt genannten Aufsatze (Annali di Mat. V) den Zusammenhang der Flächen ohne Knoten I, II, III, IV, V bez. zu 6, 4, 2, 0, — 2 bestimmt. Diese Bestimmung gründet sich aber nicht auf die projectivische Auffassung vom Unendlich-Weiten, sondern auf die andere, die das Unendlich-Ferne als Punkt betrachtet. Denn Herr Schläfli setzt den Zusammenhang der unbegränzten Ebene gleich Null, während er projectivisch gleich 2 zu setzen ist, wie eben bemerkt wurde. Er gewinnt sodann seine Zahl dadurch, dass er die vierte Fläche aus der fünften, die dritte aus der vierten etc. ableitet, indem er zwei bis dahin getrennte Partieen der Fläche in einem Knotenpunkte zusammenwachsen lässt. Diese Operationen erhöhen den Zusammenhang immer um zwei und so entsteht die Reihe der jedesmal um zwei unterschiedenen Zahlen — 2, 0, 2, 4, 6.

Für die im vorigen Paragraphen entwickelte projectivische Auffassung behält die Operation, welche in dem Entstehenlassen eines Knotenpunktes und der weiteren Verwerthung desselben besteht, ihren Einfluss auf den Zusammenhang. Es sind nur die Zahlen — 2, 0, 2, 4, 6 alle um zwei zu erhöhen. Denn z. B. die Art IV, die sich in eine unbegränzte Ebene ausbreiten lässt, erhält für uns den Zusammenhang

2, und daraus folgt (in derselben Weise, wie Schläfli seine Zahlen ableitet):

| | |
|---|---|
| I | 8 |
| II | 6 |
| III | 4 |
| IV | 2 |
| V | 0. |

In der That kann man auf diesen Flächen 4, 3, 2, 1, 0 geschlossene Curven ziehen, ohne dass sie in Stücke zerfallen, wenn man sich der Entstehung aus der Fläche mit vier Knoten erinnert. Bei I, II, III, IV haben sich bez. die Flächentheile, die in 4, 3, 2, 1 Knoten an einander stiessen, mit einander vereinigt. Um 3, 2, 1, 0 der so entstandenen dünnen Stelle der Fläche lege man geschlossene Ovale. Man ziehe ferner auf dem ursprünglichen hyperbolischen Theile der Fläche mit vier Knoten einen geschlossenen unpaaren Curvenzug, als welchen man z. B. eine der isolirten Geraden wählen kann. Dann hat man auf den Flächen I, II, III, IV, V bez. 4, 3, 2, 1, 0 geschlossene Curven gezogen, ohne dass ein Zerfallen der Fläche eingetreten wäre. Jede weitere geschlossene Curve führt aber ein Zerfallen herbei. Der Zusammenhang ist also bez. 8, 6, 4, 2, 0.

Erlangen, den 6. Juni 1873.

# Zur Staudt-Schröter'schen Construction des regulären Vielecks.

Von Fr. G. Affolter zu Solothurn.

---

Die Constructionen des regulären Siebenzehnecks, welche v. Staudt im 24. Bande und Herr H. Schröter im 75. Bande des Crelle-Borchardt'schen Journals niedergelegt haben, lassen sich auf alle regulären Vielecke, die sich mit Zirkel und Lineal construiren lassen, ausdehnen. Es ist die Aufgabe der nachfolgenden Zeilen, dies zu zeigen.

## I.

Ich erlaube mir die trigonometrische Lösung in ihren allgemeinen Umrissen anzudeuten.

Bezeichnen wir den Werth $\cos\left(h\cdot\frac{2\pi}{2^{4n}+1}\right)$ mit $C_h$, so dass:

$$(1) \qquad C_h = C_{[\alpha(2^{4n}+1)\pm h]} \quad \text{und} \quad 2\, C_h C_{h'} = C_{h-h'} + C_{h+h'}$$

ist, wo $\alpha$ jeder ganzen Zahl gleich sein kann, so ergeben sich zwischen den $2^{4n-1}$ Werthen

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4 \cdots\cdots C_h \cdots\cdot C_{2^{4n-1}}$$

eine Menge von Relationen, durch welche zunächst gewisse Verbindungen von ihnen, sowie schliesslich sie selbst als Wurzeln von quadratischen Gleichungen bestimmt werden.

Bezeichnen wir die Summe der obigen $C_h$ mit $S$, so ist ihr Werth $S$ durch die Gleichung

$$(2) \qquad S = \sum_{h=1}^{h=2^{4n-1}} C_h = -\tfrac{1}{2}$$

gegeben.

Sämmtliche $C_h$ lassen sich in $z = \frac{2^{4n-3}}{n}$ Gruppen von je $4n$ Gliedern zusammenstellen. Der allgemeine Repräsentant einer solchen Gruppe ist

$$G_h \equiv C_{1h};\ C_{2h};\ C_{2^2 h};\ C_{2^3 h} \cdots C_{2^k h} \cdots C_{2^{4n-1} h}.$$

Bilden wir das Product $\Pi$ sämmtlicher Glieder dieser Gruppe, so erhalten wir

(3) $$\Pi = \frac{S}{2^{4n-1}} = -\frac{1}{2^{4n}},$$

d. h. da $\Pi$ von $h$ unabhängig ist: *das Product aller Glieder einer jeden Gruppe ist gleich* $-\frac{1}{2^{4n}}$.

Setzt man an die Stelle von $h$ den Werth $2^r h$, so erhält man einer gewissen Reihenfolge nach dieselben Glieder der behandelten Gruppe. Ersetzen wir aber $h$ durch $ht^k$ *), so erhalten wir sämmtliche Gruppen, welche sich aus den $C_h$ überhaupt bilden lassen; dabei hat hat man $k$ alle Werthe von 0 bis $z - 1$ durchlaufen zu lassen. Würde man $k$ die folgenden höheren Werthe beilegen, so würden sich die Gruppen einer bestimmten Reihenfolge nach wiederholen. Die Gruppenreihe lässt sich symbolisch darstellen durch

$$G_{t^0 h};\quad G_{t^1 h};\quad G_{t^2 h}\ \cdots\cdots\ G_{t^k h}\ \cdots\cdots\ G_{t^{z-1} h}.$$

Wir dürfen $h = 1$ setzen, da, welchen Werth auch $h$ annehmen mag, diese Gruppen sich nur einer bestimmten Reihenfolge nach wiederholen.

In Betreff der obigen Gruppen $G$ gelten die zwei nachfolgenden allgemeinen Sätze.

(4) *Je zwei der obigen Gruppen sind einander in der Weise zugeordnet, dass, wenn man den Zeiger der einen Gruppe mit* $2^r\,(2^{2n} - 1)$ *multiplicirt, man den Zeiger der andern Gruppe erhält. Dieser Factor ist für alle einander zugeordneten Gruppen derselbe.* $r$ *selbst kann jeden ganzen positiven Werth,* 0 *mit inbegriffen, haben.*

(5) *Hat man für die allgemeine Gruppe* $G_h$ *irgend welche Relationen und Eigenschaften, so erhält man die entsprechenden Relationen und Eigenschaften irgend einer andern Gruppe, indem man den Zeiger der ersten Gruppe mit der, dem Zeiger der andern Gruppe entsprechenden Potenz von* $t$ *multiplicirt. Insbesondere erhält man zu den Eigenschaften einer Gruppe die entsprechenden der zugeordneten Gruppe, indem man den Zeiger der ersteren mit* $2^r\,(2^{2n} - 1)$ *multiplicirt.*

Bezeichnen wir die Summe der Glieder einer jeden Gruppe allgemein mit $S_h$, so erhalten wir die Reihe von Summen

$$S_h;\quad S_{t^1 h};\quad S_{t^2 h};\quad S_{t^3 h}\ \cdots\cdots\ S_{t^k h}\ \cdots\cdots\ S_{t^{z-1} h},$$

wo $h = 1$ gesetzt werden darf.

Bezeichnen wir die Summe aller ungeraden $S_h$ mit $X_1$ und die Summe der geraden mit $X_2$, so finden die Gleichungen statt:

---

*) wo $t$ eine primitive Wurzel der Primzahl $2^{4n} + 1$ bedeutet, so dass z. B. $t = 3$ wird für $n = 2$.

$$\text{a)}\quad X_1 + X_2 = S\,,$$
$$\text{b)}\quad X_1 X_2 = 2^{4n-3} S = -\,2^{4n-4}.$$

Es lassen sich also die Werthe $X_1$ und $X_2$ als Wurzeln der Gleichung zweiten Grades

$$\text{I.}\quad X^2 - SX - 2^{4n-4} = 0$$

darstellen. Setzen wir in $X_1$

$$Y_{1,1} = S_1 + S_{t^4} + S_{t^8} + \cdots\cdot$$
$$Y_{2,1} = S_{t^2} + S_{t^6} + \cdots\cdot$$

und in $X_2$

$$Y_{1,2} = S_{t^1} + S_{t^6} + \cdots\cdot$$
$$Y_{2,2} = S_{t^3} + S_{t^7} + \cdots\cdot$$

so hat man

$$\text{a}_2)\quad Y_{1,k} + Y_{2,k} = X_k\,,$$
$$\text{b}_2)\quad Y_{1.k} \cdot Y_{2.k} = -\,2^{4n-6},$$

folglich ergeben sich die $Y_k$ als die Wurzeln der Gleichung

$$\text{II.}\quad Y_k{}^2 - X_k Y_k - 2^{4n-6} = 0,$$

so dass, wenn $k = 1$ und $2$ genommen wird, man die 4 Werthe $Y$ erhält.

Bilden wir also in den Summen $X_k$ selbst wieder die Summen der ungeraden und geraden Glieder — die Glieder nach den steigenden Potenzen von $t$ im Zeiger geordnet — so lassen sich diese Summen wieder als die Wurzeln einer quadratischen Gleichung darstellen. Auf diese Weise weiter gehend, erhalten wir die sämmtlichen Summen $S_h$ berechnet. Es ist jedoch zu bemerken, dass die Producte der zusammengehörenden Summenaggregate der $S_h$ sich nicht immer allein durch $S$ ausdrücken lassen, sondern dass sie vielmehr von $S$ und einer bestimmten Anzahl vorher berechneter Grössen abhängen.

Aus den nun berechneten $S_h$ lassen sich die $C_h$ in ähnlicher Weise bestimmen wie die $S_h$ selbst aus $S$. Wir haben allgemein

$$S_h = C_{2^0 h} + C_{2^1 h} + C_{2^2 h} + \cdots + C_{2^k h} + \cdots C_{2^{4n-1} h}.$$

Setzen wir hier die Summe der ungeraden Glieder gleich $U_1$ und die Summe der geraden gleich $U_2$, so ist

$$U_1 + U_2 = S_h\,,$$
$$U_1 U_2 = A_h.$$

$A_h$ selbst ist die Summe einer gewissen Anzahl von den $S_h$ und somit bekannt. Die Werthe $U_1$ und $U_2$ ergeben sich also als die Wurzeln der Gleichung

$$\text{III.}\quad U^2 - S_h U + A_h = 0.$$

Bestimmen wir in den berechneten $U$ die Summen der ungeraden und geraden Glieder und setzen sie bezüglich gleich $V_{1,k}$ und $V_{2,k}$, so ist

$$V_{1,k} + V_{2,k} = U_{h,k}$$
$$V_{1,k} \cdot V_{2,k} = B_{h,k}$$

bekannt. Es bestimmen sich also die Werthe $V$ aus der Gleichung

$$\text{IV.} \quad V_{h,k}^2 - U_{h,k} \cdot V_{h,k} + B_{h,k} = 0.$$

Hier sieht man, in welcher Weise man weiter zu gehen hat, um die Werthe $C_h$ zu bestimmen. Man bestimmt in jeder berechneten Summe einer bestimmten Anzahl der $C_h$ die Aggregate der ungeraden und geraden Glieder — die Glieder nach den steigenden Potenzen von 2 im Zeiger geordnet. — Ihre Summe ist berechnet, ihr Product aber immer der Art beschaffen, dass es sich durch die bereits berechneten Grössen ausdrücken lässt. Es ist somit klar, dass sich die sämmtlichen $C_h$ mittelst Gleichungen zweiten Grades berechnen lassen.

## II.

Wenden wir das angegebene Verfahren auf die Berechnung der $C_h$ des regulären 257-Ecks an.

Der allgemeine Repräsentant einer der 16 Gruppen von je 8 Gliedern ist

$$G_h \equiv C_h\,;\quad C_{2h}\,;\quad C_{4h}\,;\quad C_{8h}\,;\quad C_{16h}\,;\quad C_{32h}\,;\quad C_{64h}\,;\quad C_{128h}\,.$$

Ersetzen wir $h$ durch $3^k$, geben $k$ alle Werthe von 0 bis 15, und beachten die Relation (1), so erhalten wir die Gruppen:

$$\begin{array}{llllllll}
G_1 \equiv C_1\,; & C_2\,; & C_4\,; & C_8\,; & C_{16}\,; & C_{32}\,; & C_{64}\,; & C_{128} \\
G_3 \equiv C_3\,; & C_6\,; & C_{12}\,; & C_{24}\,; & C_{48}\,; & C_{96}\,; & C_{65}\,; & C_{127} \\
G_9 \equiv C_9\,; & C_{18}\,; & C_{36}\,; & C_{72}\,; & C_{113}\,; & C_{31}\,; & C_{62}\,; & C_{124} \\
G_{27} \equiv C_{27}\,; & C_{54}\,; & C_{108}\,; & C_{41}\,; & C_{82}\,; & C_{93}\,; & C_{71}\,; & C_{115} \\
G_{11} \equiv C_{11}\,; & C_{22}\,; & C_{44}\,; & C_{88}\,; & C_{81}\,; & C_{95}\,; & C_{67}\,; & C_{123} \\
G_7 \equiv C_7\,; & C_{14}\,; & C_{28}\,; & C_{56}\,; & C_{112}\,; & C_{33}\,; & C_{66}\,; & C_{125} \\
G_{21} \equiv C_{21}\,; & C_{42}\,; & C_{84}\,; & C_{89}\,; & C_{79}\,; & C_{99}\,; & C_{59}\,; & C_{118} \\
G_5 \equiv C_5\,; & C_{10}\,; & C_{20}\,; & C_{40}\,; & C_{80}\,; & C_{97}\,; & C_{63}\,; & C_{126} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
G_{15} \equiv C_{15}\,; & C_{30}\,; & C_{60}\,; & C_{120}\,; & C_{17}\,; & C_{34}\,; & C_{68}\,; & C_{121} \\
G_{45} \equiv C_{45}\,; & C_{90}\,; & C_{77}\,; & C_{103}\,; & C_{51}\,; & C_{102}\,; & C_{53}\,; & C_{106} \\
G_{13} \equiv C_{13}\,; & C_{26}\,; & C_{52}\,; & C_{104}\,; & C_{49}\,; & C_{98}\,; & C_{61}\,; & C_{122} \\
G_{37} \equiv C_{37}\,; & C_{74}\,; & C_{109}\,; & C_{39}\,; & C_{78}\,; & C_{101}\,; & C_{55}\,; & C_{110} \\
G_{23} \equiv C_{23}\,; & C_{46}\,; & C_{92}\,; & C_{73}\,; & C_{111}\,; & C_{35}\,; & C_{70}\,; & C_{117}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{llllllll}
G_{19} \equiv C_{19}\,; & C_{38}\,; & C_{76}\,; & C_{105}\,; & C_{47}\,; & C_{94}\,; & C_{69}\,; & C_{119} \\
G_{25} \equiv C_{25}\,; & C_{50}\,; & C_{100}\,; & C_{57}\,; & C_{114}\,; & C_{29}\,; & C_{58}\,; & C_{116} \\
G_{43} \equiv C_{43}\,; & C_{86}\,; & C_{85}\,; & C_{87}\,; & C_{83}\,; & C_{91}\,; & C_{75}\,; & C_{107}\,.
\end{array}
$$

Multiplicirt man den Index einer Gruppe mit $2^r\,15$, so erhält man den Index der zugeordneten. Folglich sind die acht ersten Gruppen den acht letzten Gruppen paarweise zugeordnet.

Das Product der acht Glieder einer jeden Gruppe ist gleich $-\left(\frac{1}{2}\right)^8$ und allgemein

$$(6) \quad \Pi = C_h \cdot C_{2h} \cdot C_{4h} \cdot C_{8h} \cdot C_{16h} \cdot C_{32h} \cdot C_{64h} \cdot C_{128h} = -\left(\frac{1}{2}\right)^8;$$

ferner ist nach der Definition:

$$S_h = C_h + C_{2h} + C_{4h} + C_{8h} + C_{16h} + C_{32h} + C_{64h} + C_{128h}\,.$$

Ersetzen wir wie oben $h$ durch $3^k$, so erhalten wir die 16 entsprechenden Summen

$$
\begin{array}{llllllll}
S_1\,; & S_3\,; & S_9\,; & S_{27}\,; & S_{11}\,; & S_7\,; & S_{21}\,; & S_5\,; \\
S_{15}\,; & S_{45}\,; & S_{13}\,; & S_{37}\,; & S_{23}\,; & S_{19}\,; & S_{25}\,; & S_{43}\,.
\end{array}
$$

Setzen wir nun

$$
\begin{aligned}
X_1 &= S_1 + S_9 + S_{11} + S_{21} + S_{15} + S_{13} + S_{23} + S_{25} \\
X_2 &= S_3 + S_{27} + S_7 + S_5 + S_{45} + S_{37} + S_{19} + S_{43}\,,
\end{aligned}
$$

so ist

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_2 &= S\,, \\
X_1 X_2 &= -16\,.
\end{aligned}
$$

Die Werthe $X_1$ und $X_2$ bestimmen sich somit aus der Gleichung

$$\text{I.} \quad X^2 - SX - 16 = 0\,.$$

Setzen wir ferner:

$$
\begin{aligned}
Y_{1,1} &= S_1 + S_{11} + S_{15} + S_{23}\,; & Y_{2,1} &= S_9 + S_{21} + S_{13} + S_{25} \\
Y_{1,2} &= S_3 + S_7 + S_{45} + S_{19}\,; & Y_{2,2} &= S_{27} + S_5 + S_{37} + S_{43}\,,
\end{aligned}
$$

so ist

$$
\begin{aligned}
Y_{1,k} + Y_{2,k} &= X_k \\
Y_{1,k} \cdot Y_{2,k} &= -4\,.
\end{aligned}
$$

Es bestimmen sich also die $Y$ aus der Gleichung:

$$\text{II.} \quad Y_k^2 - X_k Y_k - 4 = 0\,,$$

wo, um alle 4 Werthe $Y$ zu erhalten, $k = 1$ und $2$ zu nehmen ist.

Setzen wir endlich:

$$Z_{1,h} = S_h + S_{15h}\,; \quad Z_{2,h} = S_{11h} + S_{23h}\,; \text{ u. s. w.,}$$

so wird:

$$Z_{1,h,k} + Z_{2,h,k} = Y_{h,k},$$
$$2\,Z_{1,h,k} \cdot Z_{2,h,k} = 2\,S + 2\,Y_{9\,h,k} + 3\,X_k = 2\,A_{h,k}\,.$$

Mithin stellen sich die $Z_{h,k}$ als die Wurzeln der Gleichung

$$\text{III.}\quad Z_{h,k}^2 - Y_{h,k}\,Z_{h,k} + A_{h,k} = 0$$

dar; und zwar erhält man für $Z$ alle acht entsprechenden Werthe, wenn man $h = 1, 3$ mit den Werthen $k = 1, 2$, und ferner $h = 9, 27$ wiederum mit $h = 1, 2$ combinirt. Da nun

$$S_1 + S_{15} = Z_{1,1,1}$$
$$2\,S_1 S_{15} = 2\,(S_1 + S_{15}) + (S_{11} + S_{23}) + 2\,(S_7 + S_{19})$$
$$+ (S_{21} + S_{25}) + 2\,(S_9 + S_{13}) = 2\,B$$

ist, so ergeben sich die Werthe $S_1$ und $S_{15}$ aus der Gleichung

$$\text{IV.}\quad S^2 - Z_{1,1,1}\,S + B = 0.$$

Durch Vertauschen der Zeiger entstehen so alle 16 Werthe $S_h$.

Aus den berechneten Werthen $S_h$ sind nun die $C_h$ selbst zu finden. Setzen wir zu diesem Zweck:

$$U_{1,h} = C_h + C_{4\,h} + C_{16\,h} + C_{64\,h}\,; \quad U_{2,h} = C_{2\,h} + C_{8\,h} + C_{32\,h} + C_{128\,h}\,,$$

so ist

$$U_{1,h} + U_{2,h} = S_h\,,$$
$$2\,U_{1,h} \cdot U_{2,h} = S_h + S_{3\,h} + S_{9\,h} + S_{7\,h} = 2\,D_h\,.$$

Es bestimmen sich also $U_{1,h}$ und $U_{2,h}$ aus der Gleichung

$$\text{V.}\quad U_h^2 - S_h\,U_h + D_h = 0\,.$$

Indem wir $h$ alle 16 Werthe geben, erhalten wir die 32 nothwendigen Lösungen für $U$.

Setzt man ferner:

$$V_{1,h,k} = C_h + C_{16\,h}\,; \qquad V_{2,h,k} = C_{4\,h} + C_{64\,h}\,,$$

so ist

$$V_{1,h,k} + V_{2,h,k} = U_{h,k}\,,$$
$$2\,V_{1,h,k} \cdot V_{2,h,k} = U_{3h,k} + U_{5h,k} = 2\,E_{h\,k}\,.$$

Es ergeben sich also die Werthe $V$ aus der Gleichung

$$\text{VI.}\quad V_{h,k}^2 - U_{h,k}\,V_{h,k} + E_{h,k} = 0\,.$$

Durch entsprechendes Vertauschen von $k$ mit 1 und 2, und von $h$ mit seinen 16 Werthen erhalten wir die 64 nöthigen Lösungen für $V_{h\,k}$.

Da nun

$$C_h + C_{16\,h} = V_h\,,$$
$$2\,C_h \cdot C_{16\,h} = V_{15\,h} = 2\,F_h\,,$$

so bestimmen sich die 128 Werthe $C_h$ aus der Gleichung

$$\text{VII.}\quad C_h^2 - V_F C_h + F_h = 0,$$

indem man $h$ und $E_h$ entsprechend vertauscht.

## III.

### Geometrische Construction des regulären 257-Ecks.

Wenden wir das Princip, welches Herr Schröter zur Construction der Gleichungen zweiten Grades angegeben hat, zur Construction der obigen Gleichungen an, so ergiebt sich ohne Weiteres nachfolgendes Verfahren zur geometrischen Construction des regulären 257-Ecks.

1. *Man errichte in dem Kreise $O$ mit dem Radius $r = 1$ zwei zu einander normal stehende Durchmesser $AB$ und $CD$. In den Punkten $C$ und $D$ ziehe man an den Kreis $O$ die Tangenten. Die positiven Hälften derselben seien mit $BA$ und die negativen mit $AB$ parallel. Die Tangenten mit ihren Richtungen bezeichnen wir mit $\pm C_t$ und $\pm D_t$.* (Um die Lage irgend eines Punktes auf der Tangente anzugeben, fügen wir zu seiner Bezeichnung das Zeichen der Tangente hinzu.)

2. *Wir tragen auf $-C_t$ die Strecke $Cc_1$ gleich dem doppelten Durchmesser und auf $+C_t$ die Strecke $C\gamma$ ebenfalls gleich dem doppelten Durchmesser ab. Auf $+D_t$ tragen wir $Dd_1$ gleich dem 32-fachen Durchmesser und auf $-D_t$ tragen wir $D\delta$ gleich dem 8-fachen Durchmesser ab. Wir ziehen den Strahl $c_1 d_1$, welcher den Kreis $O$ in den Punkten $E_1'$ und $E_1''$ schneidet, und ziehen die Strahlen $CE_1'$, $CE_1''$, welche $D_t$ bezüglich in den Punkten $+e_1'$ und $-e_1''$ schneiden.*

3. *Wir ziehen die Strahlen $DE_1'$, $DE_1''$, welche $C_t$ in den Punkten $e_2'$ und $e_2''$ schneiden, und ferner den Strahl $\gamma\delta$, welcher $CD$ in $p$ schneidet. Die Strahlen $e_2'p$ und $e_2''p$ schneiden den Kreis in den 4 Punkten $F_1'$, $F_1''$; $F_2'$, $F_2''$. Die Strahlen, welche den Punkt $C$ mit den Punkten $F$ verbinden, geben auf $D_t$ die Schnittpunkte $+e_{2,1}'$; $-e_{2,1}''$; $+e_{2,2}'$; $-e_{2,2}''$.*

4. *Wir construiren auf $D_t$ die Punkte $n_{3,x}^{(\nu)}$, deren Abstände von $D$ durch nachfolgende Gleichungen bestimmt werden:*

$$\begin{aligned}
&1)\quad Dn_{3,1}' = -2 + 3\,De_1'' + 2\,De_{2,1}''\\
&2)\quad Dn_{3,}'' = -2 + 3\,De_1'' + 2\,De_{2,1}'\\
&3)\quad Dn_{3,2}' = -2 + 3\,De_1' + 2\,De_{2,2}''\\
&4)\quad Dn_{3,2}'' = -2 + 3\,De_1' + 2\,De_{2,2}'.
\end{aligned}$$

*Diese Punkte verbinden wir mit dem Punkte $\gamma$ auf $C_t$ durch Strahlen, welche $CD$ bezüglich in den Punkten $g_1$; $g_2$; $g_3$; $g_4$ schneiden.*

*Verbindet man die Punkte $F$ mit $D$ durch Strahlen, welche die $C_t$ in den Punkten $C^{(y)}_{3,x}$ schneiden, so erhält man im Durchschnitt von $C_t$ mit $DF_1'$ den Punkt $C'_{3,1}$, mit $DF_1''$ den Punkt $C''_{3,1}$, mit $DF_2'$ den Punkt $C'_{3,2}$ und endlich mit $DF_2''$ den Punkt $C''_{3,2}$. Verbinden wir diese Punkte der Reihe nach mit den Punkten $g_x$ durch Strahlen, so schneiden diese den Kreis $O$ in den Punkten $G_1'$, $G_1''$; $G_2'$, $G_2''$; $G_3'$, $G_3''$; $G_4'$, $G_4''$. Verbinden wir diese Punkte mit dem Punkte $C$ durch Strahlen, so ergeben sich im Durchschnitte dieser mit $D_t$ die Punkte $+e'_{3,1}$, $-e''_{3,1}$; $+e'_{3,2}$, $-e''_{3,2}$; $+e'_{3,3}$, $-e''_{3,3}$; $+e'_{3,4}$, $-e''_{3,4}$.*

5. *Wir bestimmen auf $D_t$ die Punkte $n^{(y)}_{4,x}$, deren Lage durch die nachfolgenden Gleichungen gegeben ist:*

1) $Dn'_{4,1} = 2\,De'_{3,1} + De''_{3,1} + 2\,De''_{3,3} + De''_{3,2} + 2\,De'_{3,2}$
2) $Dn''_{4,1} = 2\,De''_{3,1} + De'_{3,1} + 2\,De'_{3,3} + De'_{3,2} + 2\,De''_{3,2}$
3) $Dn'_{4,2} = 2\,De'_{3,2} + De''_{3,2} + 2\,De''_{3,4} + De'_{3,1} + 2\,De''_{3,1}$
4) $Dn''_{4,2} = 2\,De''_{3,2} + De'_{3,2} + 2\,De'_{3,4} + De''_{3,1} + 2\,De'_{3,1}$
5) $Dn'_{4,3} = 2\,De'_{3,3} + De''_{3,3} + 2\,De''_{3,2} + De''_{3,4} + 2\,De'_{3,4}$
6) $Dn''_{4,3} = 2\,De''_{3,3} + De'_{3,3} + 2\,De'_{3,2} + De'_{3,4} + 2\,De''_{3,4}$
7) $Dn'_{4,4} = 2\,De'_{3,4} + De''_{3,4} + 2\,De'_{3,1} + De'_{3,3} + 2\,De''_{3,3}$
8) $Dn''_{4,4} = 2\,De''_{3,4} + De'_{3,4} + 2\,De''_{3,1} + De''_{3,3} + 2\,De'_{3,3}$.

*Verbinden wir diese Punkte der Reihe nach mit dem Punkte $\gamma$ durch Strahlen, so schneiden diese $CD$ in den entsprechenden Punkten $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$, $h_5$, $h_6$, $h_7$, $h_8$. Verbinden wir den Punkt $D$ mit den 8 Punkten $G^{(y)}_x$, so erhalten wir im Durchschnitt dieser Strahlen mit $C_t$ die Punkte $C'_{4,1}$, $C''_{4,1}$; $C'_{4,2}$, $C''_{4,2}$; $C'_{4,3}$, $C''_{4,3}$; $C'_{4,4}$, $C''_{4,4}$. Verbinden wir diese Punkte der Reihe nach mit den Punkten $h_x$, so erhalten wir auf dem Kreise $O$ die 16 Schnitte: $H_1'$; $H_1''$: $H_2'$; $H_2''$; $H_3'$; $H_3''$; $H_4'$; $H_4''$; $H_5'$; $H_5''$; $H_6'$; $H_6''$; $H_7'$; $H_7''$; $H_8'$; $H_8''$. Die Strahlen, welche $C$ mit diesen Punkten verbinden, schneiden $D_t$ in den 16 Punkten $e^{(y)}_{4,x}$, wo $x$ und $y$ mit den entsprechenden Zeigern von $H^{(y)}_x$ übereinstimmen.*

6. *Wir bestimmen auf der Tangente $D_t$ die Punkte $n^{(y)}_{5,x}$, deren Lagen durch nachfolgende Gleichungen definirt werden:*

1) $Dn'_{5,1} = De'_{4,1} + De'_{4,2} + De'_{4,3} + De'_{4,6}$
2) $Dn'_{5,2} = De'_{4,2} + De'_{4,3} + De'_{4,4} + De'_{4,7}$
3) $Dn'_{5,3} = De'_{4,3} + De'_{4,4} + De'_{4,5} + De'_{4,8}$
4) $Dn'_{5,4} = De'_{4,4} + De'_{4,5} + De'_{4,6} + De''_{4,1}$
5) $Dn'_{5,5} = De'_{4,5} + De'_{4,6} + De'_{4,7} + De'_{4,2}$
6) $Dn'_{5,6} = De'_{4,6} + De'_{4,7} + De'_{4,8} + De'_{4,3}$
7) $Dn'_{5,7} = De'_{4,7} + De'_{4,8} + De''_{4,1} + De''_{4,4}$
8) $Dn'_{5,8} = De'_{4,8} + De''_{4,1} + De''_{4,2} + De''_{4,6}$.

*Die übrigen 8 Punkte $n_{5,x}''$ ergeben sich durch Gleichungen von derselben Form wie die obigen. Man erhält sie, indem man an die Stelle der obigen $De_{4,x}'$; $De_{4,x}''$ bezüglich die Strecken $De_{4,x}''$ und $De_{4,x}'$ setzt. Wir verbinden diese Punkte $n_{5,x}^{(\nu)}$ mit $\gamma$ durch Strahlen, welche den Durchmesser $CD$ in den 16 Punkten $j_1, j_2, j_3 \cdots j_{16}$ schneiden. Wir bestimmen die Strahlen $DH_x^{(\nu)}$, welche von der Tangente $C_t$ in den Punkten $C_{5,x}^{(\nu)}$ geschnitten werden. Wir verbinden allgemein den Punkt $C_{5,x}^{(\nu)}$ mit demjenigen Punkte $j_k$, der auf dem Strahle $\gamma n_{5,x}^{(\nu)}$ liegt. Diese 16 Strahlen $j_k C_{5,x}^{(\nu)}$ schneiden den Kreis $O$ in 32 Punkten:*

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} J_1' & J_2' & J_3' & J_4' & J_5' & J_6' & J_7' & J_8' & J_9' & J_{10}' & J_{11}' & J_{12}' & J_{13}' & J_{14}' & J_{15}' & J_{16}' \\ \underbrace{J_1'' \; J_2''}_{1} & & \underbrace{J_3'' \; J_4''}_{2} & & \underbrace{J_5'' \; J_6''}_{3} & & \underbrace{J_7'' \; J_8''}_{4} & & \underbrace{J_9'' \; J_{10}''}_{5} & & \underbrace{J_{11}'' \; J_{12}''}_{6} & & \underbrace{J_{13}'' \; J_{14}''}_{7} & & \underbrace{J_{15}'' \; J_{16}''}_{8} & \end{array}$$

*Die unter einander stehenden $J_k'$ und $J_k''$ liegen auf demselben Strahle. Die vier $J_x^{(\nu)}$, welche über derselben Klammer $m$ stehen, haben ihren Ursprung von den Punkten $C_{5,x}^{(\nu)}$ und $n_{5,x}^{(\nu)}$ her, von denen die letzteren durch die Gleichungen bestimmt sind, die die Nummer $m$ tragen. Verbinden wir ferner den Punkt $C$ mit den Punkten $J_x^{(\nu)}$, so erhalten wir im Durchschnitt dieser Geraden mit $D_t$ die Punkte $e_{5,x}^{(\nu)}$.*

7. *Wir bestimmen auf der Tangente $D_t$ die Punkte $n_{6,x}^{(\nu)}$, deren Lagen durch die folgenden Gleichungen definirt sind.*

| | |
|---|---|
| 1) $Dn_{6,1}' = De_{5,9}' + De_{5,16}'$. | 2) $Dn_{6,2}' = De_{5,10}' + De_{5,15}'$ |
| 3) $Dn_{6,3}' = De_{5,11}' + De_{5,14}'$. | 4) $Dn_{6,4}' = De_{5,12}' + De_{5,13}'$ |
| 5) $Dn_{6,5}' = De_{5,13}' + De_{5,12}'$. | 6) $Dn_{6,6}' = De_{5,14}' + De_{5,11}'$ |
| 7) $Dn_{6,7}' = De_{5,15}' + De_{5,10}'$. | 8) $Dn_{6,8}' = De_{5,16}' + De_{5,9}'$ |
| 9) $Dn_{6,9}' = De_{5,7}' + De_{5,2}'$. | 10) $Dn_{6,10}' = De_{5,6}' + De_{5,3}'$ |
| 11) $Dn_{6,11}' = De_{5,5}' + De_{5,4}'$. | 12) $Dn_{6,12}' = De_{5,8}' + De_{5,4}'$ |
| 13) $Dn_{6,13}' = De_{5,3}' + De_{5,6}'$. | 14) $Dn_{6,14}' = De_{5,4}' + De_{5,5}'$ |
| 15) $Dn_{6,15}' = De_{5,4}' + De_{5,8}'$. | 16) $Dn_{6,16}' = De_{5,2}' + De_{5,7}'$. |

*Die übrigen Punkte erhält man durch analoge Gleichungen, indem man statt der Strecken $De_{5,x}'$ die Strecken $De_{5,x}''$ einführt. Verbinden wir die Punkte $J_x^{(\nu)}$ mit dem Punkte $D$ durch Strahlen, so schneiden diese die Tangente $C_t$ in den Punkten $C_{6,x}^{(\nu)}$. Es entsprechen sich somit die Punkte $C_{6,x}^{(\nu)}$ und $n_{6,x}^{(\nu)}$. Verbinden wir die 32 Punkte $n_{6,x}^{(\nu)}$ mit dem Punkte $\gamma$ auf der Tangente $C_t$ durch Strahlen, so schneiden diese den Durchmesser $CD$ in den 32 Punkten $k_1'\ k_2' \cdots k_{16}'$; $k_1''\ k_2'' \cdots k_{16}''$. Verbinden wir diese Punkte der Reihe nach mit den entsprechenden Punkten $C_{6,x}^{(\nu)}$ durch Strahlen, so schneiden diese den Kreis in den 64 Punkten $K_x'$ und $K_x''$. Verbinden wir diese Punkte mit $C$ durch Gerade, so schneiden diese die Tangente $D_t$ in den Punkten $e_{6,x}'$ und $e_{6,x}''$.*

8. *Wir verbinden die 64 Punkte* $e_{6,x}^{(y)}$ *mit dem Punkte* $y$ *durch Strahlen. Diese schneiden den Durchmesser* $CD$ *in 64 Punkten* $l_x^{(y)}$. *Verbinden wir ferner den Punkt* $D$ *mit den Punkten* $K_x^{(y)}$ *durch Strahlen, so schneiden diese die Tangente* $C_t$ *in den Punkten* $C_{7,x}^{(y)}$. *Diese Punkte mit den entsprechenden Punkten* $l_x^{(y)}$ *verbunden, geben Strahlen, welche den Kreis* $O$ *in 128 Punkten* $L_x$ *schneiden. Diese sämmtlichen Punkte* $L_x$ *liegen auf der Hälfte des Kreises, auf der der Punkt* $D$ *selbst liegt. Verbinden wir die Punkte* $L_x$ *mit* $C$, *so schneiden diese Strahlen den Durchmesser* $AB$ *in 128 Punkten* $M_x$. *Errichten wir in diesen Punkten* $M_x$ *die Normalen zum Durchmesser* $AB$, *so schneiden sie den Kreis in 256 Punkten. Diese Punkte endlich bilden mit dem Punkte* $A$ *die Ecken des regulären einbeschriebenen 257-Ecks.*

Pisa, den 9. Januar 1873.

# Construction des regulären Sieben- und Dreizehn-Ecks.

Von Fr. G. Affolter zu Solothurn.

Die Construction der regulären 7- und 13-Ecke, überhaupt aller derjenigen regulären Vielecke, welche mittelst Construction von Gleichungen dritten Grades gefunden werden, lässt sich sehr leicht ausführen, sobald man die Construction der cubischen Gleichungen mittelst der Trisection des Winkels bewerkstelligt. Der übrige Theil der Construction ist wesentlich übereinstimmend mit der Construction der regulären Vielecke, welche sich mittelst des Zirkels und Lineals ausführen lassen. Da die Trisection eines Winkels*) mittelst der Fusspunktcurven des Kreises elegant und leicht ausgeführt werden kann, so halte ich die Construction der regulären Vielecke (dritten Grades) mittelst Trisection für die einfachste.

## I.

Da unsere Constructionen auf der Construction der Gleichung dritten Grades mittelst Trisection beruhen, so gebe ich diese Construction zunächst an. Haben wir die cubische Gleichung mit drei reellen Wurzeln

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0\,, \tag{1}$$

so erhalten wir durch Wegschaffen des zweiten Gliedes die neue Gleichung

$$x_1{}^3 - 3\,p x_1 + 2\,q = 0, \tag{2}$$

wo der Werth von $p$ wesentlich positiv ist. Ersetzen wir $x_1$ durch $R\cos\alpha$, so ergeben sich bekanntlich $R$ und $\alpha$ durch die Gleichungen

$$R = 2\sqrt{p}\,, \qquad \cos 3\,\alpha = -\frac{q}{p}\,\frac{1}{\sqrt{p}}. \tag{3}$$

Die Werthe $R$ und $3\,\alpha$ lassen sich nun leicht geometrisch bestimmen. Wir theilen den Winkel $3\,\alpha$ in drei gleiche Theile mittelst der Trisection und erhalten dann für $x$ die drei Werthe

*) H. Hippauf, Lösung des Problems der Trisection. Leipzig, Teubner. 1872.

(4) $R \cos \alpha - \frac{a_1}{3}$; $\quad -R\cos(\alpha - 60) - \frac{a_1}{3}$; $\quad -R\cos(\alpha + 60) - \frac{a_1}{3}$.

Die Wurzeln der Gleichung dritten Grades erhält man also, indem man die Gleichungen (3) und (4) constructiv ausführt. Da durch die speciellen Werthe von $p$ und $q$ in unseren späteren Fällen die Constructionen sich ändern, so unterlasse ich hier die weitere Angabe der Construction der Wurzeln.

## II.

## Trigonometrische Lösung der Construction des regulären 7- und 13-Ecks.

### a. Das reguläre Siebeneck.

Setzen wir $\cos\left(h \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = c_h$, so ergeben sich zwischen den drei Werthen $c_1$; $c_2$; $c_3$ die Relationen:

(1) $$c_1 + c_2 + c_3 = -\tfrac{1}{2}.$$

(2) $$c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 = -\tfrac{1}{2}.$$

(3) $$c_1c_2c_3 = +\tfrac{1}{8}.$$

Die Werthe $c_h$ bestimmen sich also aus der Gleichung

(4) $$c^3 + \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{8} = 0.$$

Setzen wir $2c = x$, und $x = y - \frac{1}{3}$, so ergiebt sich die Gleichung

(5) $$y^3 - \tfrac{7}{3}y - \tfrac{7}{27} = 0.$$

Wir haben somit

(6) $$R = \tfrac{2}{3}\sqrt{7}; \quad \cos 3\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{7}};$$

und daher schliesslich

(7) $$2c_1 = R\cos\alpha - \tfrac{1}{3};$$
$$2c_2 = -R\cos(\alpha - 60) - \tfrac{1}{3};$$
$$2c_3 = -R\cos(\alpha + 60) - \tfrac{1}{3}.$$

### b. Das reguläre Dreizehneck.

Setzen wir $\cos\left(h \cdot \frac{2\pi}{13}\right) = c_h$, so sind die sechs Hauptwerthe $c_1$; $c_2$; $c_3$; $c_4$; $c_5$; $c_6$ zu bestimmen.

Wir setzen

$$c_1 + c_5 = x_1; \quad c_2 + c_3 = x_2; \quad c_4 + c_6 = x_3.$$

Zwischen diesen Werthen existiren die folgenden für uns wesentlichen Relationen:

(1) $$x_1 + x_2 + x_3 = -\tfrac{1}{2}.$$

(2) $$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1.$$

(3) $$x_1x_2x_3 = -\tfrac{1}{8}.$$

Die Werthe $x$ ergeben sich also als die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3 + \tfrac{1}{2} x^2 - x + \tfrac{1}{8} = 0 . \tag{4}$$

Ersetzen wir $2x$ durch $y - \frac{1}{3}$, so folgt

$$y^3 - \tfrac{13}{3} y + \tfrac{65}{27} = 0 . \tag{5}$$

Wir haben also:

$$R = \tfrac{2}{3} \sqrt{13} \,; \quad \cos 3\alpha = - \tfrac{5}{2} \sqrt{\tfrac{1}{13}} . \tag{6}$$

Es bestimmen sich somit die Werthe $x$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x_1 &= R \cos \alpha - \tfrac{1}{3} \,; \\ 2x_2 &= - R \cos (\alpha - 60) - \tfrac{1}{3} \,; \\ 2x_3 &= - R \cos (\alpha + 60) - \tfrac{1}{3} . \end{aligned} \tag{7}$$

Aus den Werthen $2x_k$ ergeben sich die Cosinuswerthe $c_h$ durch die Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} 2(c_1 + c_5) = 2x_1 \\ 4 c_1 \cdot c_5 = 2x_3 \,; \end{cases} \qquad (9) \quad \begin{cases} 2(c_2 + c_3) = 2x_2 \\ 4 c_2 \cdot c_3 = 2x_1 \,; \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} 2(c_4 + c_6) = 2x_3 \\ 4 c_4 \cdot c_6 = 2x_2 . \end{cases}$$

Die Werthe $c_h$ folgen somit aus der quadratischen Gleichung

$$(2c)^2 - 2x_h \cdot (2c) + 2x_{h-1} = 0 , \tag{11}$$

wo $h$ die Werthe 1, 2, 3 annimmt.

## III.

## Geometrische Construction des regulären 7- und 13-Ecks.

Indem wir die obigen Gleichungen constructiv lösen, ergeben sich für das reguläre 7- und 13-Eck die folgenden Resultate.

### a. Das reguläre Siebeneck.

1. *Man errichte in dem Kreise $O$ mit dem Radius $r$ zwei zu einander normal stehende Durchmesser $AB$ und $CD$. Man trage in der Richtung $CD$ über $D$ hinaus die Strecke $DE$ gleich dem dreifachen Durchmesser ab.*

2. *Wir schlagen über $CE$ als Durchmesser den Halbkreis, welcher den Durchmesser $AB$ über $B$ hinaus in dem Punkte $F$ schneidet. Wir ziehen die Gerade $CF$ und errichten zu ihr die Normale $CG$ im Punkte $C$, welche $AB$ in dem Punkte $G$ schneidet, und bestimmen auf $AB$ die Punkte $H$ und $J$, so dass $OH = \frac{2}{3} OF$* und *$OJ = \frac{1}{2} OG$.*

3. *Wir errichten in $J$ die Normale zu $AB$, welche den Kreis in dem Punkte $K$ schneidet. Wir theilen den Bogen $AK$ nach der Methode der Trisection, wodurch wir die drei Punkte $L_1, L_2, L_3$ erhalten.*

*Es ist also* $AL_1 = \frac{1}{3} AK < \frac{1}{2}\pi$, $AL_2 = AL_1 + \frac{2}{3}\pi$ *und* $AL_3 = AL_1 + \frac{4}{3}\pi$. *Wir ziehen die Radien nach den Punkten* $L_1$; $L_2$; $L_3$.

4. *Wir schlagen um* $O$ *als Mittelpunkt den Kreis mit dem Radius* $OH$. *Dieser Kreis schneide obige Radien in den Punkten* $L_1'$, $L_2'$, $L_3'$. *Von diesen Punkten fällen wir auf* $AB$ *die Normalen, deren Fusspunkte* $l_1$; $l_2$; $l_3$ *seien. In der Richtung* $AB$ *tragen wir von diesen Punkten die Strecke* $l_1 l_1' = l_2 l_2' = l_3 l_3' = \frac{1}{3} r$ *ab, wodurch die Punkte* $l_1'$; $l_2'$; $l_3'$ *festgestellt werden.*

5. *Wir bestimmen die Punkte* $p_1$; $p_2$; $p_3$, *durch welche die Strecken* $Ol_1'$; $Ol_2'$; $Ol_3'$ *halbirt werden. Errichten wir nun in den Punkten* $p_1$, $p_2$, $p_3$ *die Normalen, so schneiden diese in 6 Punkten den Kreis* $O$. *Diese Punkte sind 6 Punkte des einbeschriebenen 7-Ecks. Der 7te Eckpunkt liegt im Punkte* $A$.

### b. Das reguläre Dreizehneck.

1. *Wir construiren im Kreise* $O$ *zwei zu einander normal stehende Durchmesser* $AB$ *und* $CD$ *und ziehen in den beiden Punkten* $C$ *und* $D$ *die Tangenten. Wir unterscheiden die positiven und negativen Seiten der Durchmesser und Tangenten, und zwar sei die positive Richtung mit* $BA$ *resp.* $DC$ *und die negative mit* $AB$ *resp.* $CD$ *parallel.*

3. *Wir tragen auf dem Durchmesser* $DC$ *die Strecke* $+ DE =$ 6 *Durchmesser ab und schlagen über der Strecke* $DE$ *als Durchmesser den Halbkreis, welcher* $AB$ *über* $A$ *hinaus in dem Punkte* $F$ *schneidet. Wir ziehen* $FD$ *und errichten im Punkte* $D$ *die Normale zu* $FD$, *welche* $AB$ *auf der negativen Seite* $OB$ *im Punkte* $G$ *schneidet.*

3. *Wir bestimmen die Punkte* $H$ *und* $J$, *so dass* $OH = \frac{2}{3} OF$ *und* $OJ = \frac{1}{2} OG$ *wird, und errichten in dem Punkte* $J$ *die Normale zu* $AB$, *welche den Kreis* $O$ *in dem Punkte* $K$ *schneide. Den Bogen* $AK$ *theilen wir nach der Trisection in den Punkten* $L_1$; $L_2$; $L_3$ *und ziehen die Radien* $OL_1$; $OL_2$; $OL_3$ *in genügender Verlängerung.*

4. *Wir schlagen um* $O$ *als Mittelpunkt den Kreis mit dem Radius* $OH$, *welcher jene Radien in den Punkten* $L_1'$; $L_2'$; $L_3'$ *schneide. Wir fällen von diesen Punkten zur Tangente in dem Punkte* $D$ *die Normalen, deren Fusspunkte bezüglich* $l_1$; $l_2$; $l_3$ *seien. Wir tragen von diesen Punkten in negativer Richtung je* $\frac{1}{3}$ *Radius ab, so dass wir die Punkte* $e_1$; $e_2$; $e_3$ *erhalten. Es ist also* $l_1 e_1 = l_2 e_2 = l_3 e_3 = -\frac{1}{3} r$.

5. *Wir verbinden die Punkte* $e_1$; $e_2$; $e_3$ *mit dem Punkte* $C$ *durch Gerade. Diese schneiden den Kreis* $O$ *zum zweiten Male in den Punkten* $e_1'$; $e_2'$; $e_3'$. *Wir ziehen die Geraden* $De_1'$; $De_2'$; $De_3'$, *welche die Tangente im Punkte* $C$ *in den Punkten* $c_1$; $c_2$; $c_3$ *schneiden, Wir tragen in positiver Richtung* $C\gamma = 4\,r$ *ab und verbinden den Punkt* $\gamma$ *mit den Punkten* $e_1$, $e_2$, $e_3$ *durch Gerade. Diese schneiden den*

*Durchmesser CD in den Punkten* $n_1$; $n_2$; $n_3$. *Wir ziehen die Strahlen* $c_1 n_3$; $c_2 n_1$; $c_3 n_2$. *Diese schneiden den Kreis O in den Punkten*

$$N_1', N_1''; \; N_2', N_2''; \; N_3', N_3'',$$

*und zwar liegen alle Punkte auf demselben Halbkreise, wo der Punkt D selbst liegt. Wir ziehen die Strahlen* $CN_x^{(y)}$, *welche den Durchmesser AB in den Punkten*

$$m_1', m_1''; \; m_2', m_2''; \; m_3', m_3''$$

*schneiden. Errichten wir in diesen Punkten* $m_x^{(y)}$ *die Normalen zu AB, so schneiden diese den Kreis O in 12 Punkten. Diese sind 12 Eckpunkte des einbeschriebenen regulären 13-Ecks. Der 13^te^ Punkt liegt in dem Punkte A selbst.*

*Bemerkung.* Es hält nun nicht schwer, das Constructionsverfahren für alle regulären Vielecke (dritten Grades) herzuleiten. Die Constructionen der nächstfolgenden Vielecke (z. B. für 19, 37) sind aber schon so weitläufig, dass ich mich enthalte, dieselben hier anzugeben. Das Verfahren bei diesen wie bei allen andern, also im allgemeinen Falle aufzustellen, bietet keine Schwierigkeiten mehr.

Pisa, den 20. Januar 1873.

# Ueber das Malfatti'sche Problem.

Von FR. G. AFFOLTER in SOLOTHURN.

Steiner hat in Band 1 des Crelle'schen Journals eine sehr elegante Construction dieser Aufgabe gegeben. Weder von Steiner selbst noch von einem Andern ist mir ein Beweis für den Fall des Kreisdreiecks bekannt. In dem Nachfolgenden soll zunächst ein solcher Beweis mitgetheilt werden. Alsdann füge ich noch die Lösungen zu zwei weiteren, dem Malfatti'schen Problem verwandten Kreisaufgaben hinzu.

## I.

### Beweis der Steiner'schen Construction.

Diese Construction beruht auf zwei ebenso einfachen, als interessanten und der mannigfaltigsten Erweiterung fähigen Sätzen über den Kreis und die Gerade. Wir geben diese Sätze unter dem Namen des ersten und zweiten Hauptsatz.

*Erster Hauptsatz:*

*Trägt man von dem Scheitel $S$ eines Winkels je auf dessen Schenkeln $a$ und $b$ die Punkte $A$ und $B$ ab, so dass $SA = SB$ und man legt durch irgend einen Punkt $N$ in der Ebene des Winkels zwei beliebige Transversalen $t_1$ und $t_2$, welche die Schenkel des Winkels beziehendlich in den Punkten $a_1, b_1; a_2, b_2$ schneiden, und man beschreibt um diese Punkte beziehungsweise Kreise mit den Radien $a_1A, b_1B; a_2A, b_2B$, so schneiden sich je die zwei ersten und je die zwei letzten Kreise in Punktepaaren $n_1', n_1''; n_2', n_2''$, so dass alle diese Punkte von dem Punkte $N$ gleiche Entfernung haben. Construirt man also zu jeder durch $N$ gehenden transversalen $t_x$ die Punkte $n_x'$ und $n_x''$ so liegen diese Punkte auf einem Kreise $N$ mit dem Mittelpunkte $N$.*

Sind alle Transversalen mit einander parallel, so geht der Kreis $N$ in eine Gerade $G(N)$ über; die normal ist zur transversalen Richtung. Diese Gerade $G(N)$ geht durch den Punkt $o$, in dem sich die Normalen zu den Schenkeln des Winkels schneiden, die durch die Punkte $A$ und $B$ gehen.

In Betreff der Kreise $N$ hat man nachfolgende Sätze.

*1. Alle Kreise $N$, deren Mittelpunkte auf einer Geraden $G$ liegen, gehen durch zwei feste Punkte $n'$ und $n''$, welche die Punkte $n$ sind, die der Geraden $G$ als Transversalen $t$ entsprechen und umgekehrt.*

---

*) Anm. d. Red. Vgl. indess Binder: Das Malfatti'sche Problem. Tübingen 1868, überhaupt Fortschritte der Mathematik, Bd. 2, S. 358 ff.

*2. Alle Kreise, welche durch zwei Punkte $n'$ und $n''$ gehen, sind Kreise von der Natur der Kreise $N$.*

*3. Alle Kreise $N$, welche durch einen beliebigen Punkt gehen, gehen noch durch einen zweiten, dem ersten zugeordneten Punkt.*

*4. Durch zwei beliebig gewählte Punkte geht immer ein und nur ein Kreis $N$.*

Durch weitere geeignete Betrachtungen ergeben sich eine Menge einfacher, schöner Resultate, welche in der Theorie des Kreises unbedingt massgebend sind. Wir machen hier nur die folgende Anwendung.

Sind irgend drei beliebige Kreise gegeben und man schneidet das durch ihre Mittelpunkte gebildete Dreieck durch irgend eine Transversale und beschreibt aus den Schnittpunkten als Mittelpunkten die Kreise, welche je zu der Kreisschaar gehören, die bez. durch die zwei Kreise bestimmt wird, deren Mittelpunkte auf derselben Seite liegen wie der Schnittpunkt, so schneiden sich diese drei Kreise in demselben Punktepaar. Lassen wir nun jene drei Kreise sich berühren, so folgt jetzt ohne weiteres, wenn wir diese drei transversalen Kreise Potenzkreise und ihre Schnittpunkte $n'$ und $n''$ Potenzpunkte nennen:

*5. Die Potenzpunkte zu allen Potenzkreisen, deren Centrallinien oder Transversalen durch denselben Punkt gehen, liegen auf einem Kreise $N$, dessen Mittelpunkt mit diesem Punkte zusammenfällt. Und die Potenzpunkte aller Potenzkreise mit parallelen Transversalen liegen auf einer, durch den Punkt gleicher Potenzen jener drei sich berührenden Kreise gehenden Geraden $G(N)$.*

Liegen in der Ebene jener sich berührenden Kreise $k_1, k_2, k_3$ irgend drei Kreise $m_1, m_2, m_3$ vor, so bilden diese zu je zweien genommen drei Kreisschaaren. Beachten wir die Sätze 2 und 4, so erhalten wir:

*6. In jeder der drei durch die drei Kreise $m_x$ bestimmten Kreisschaaren giebt es einen Kreis von der Natur der Kreise $N$. Die Mittelpunkte dieser drei möglichen Kreise $N_1$, $N_2$, $N_3$ liegen auf einer Geraden $G(N)$.*

*Zweiter Hauptsatz.*

*Haben die zwei Kreispaare $k_1, k_2$ und $k_1', k_2'$ dieselbe Potenzlinie $P$ und berühren sich $k_1$ und $k_1'$, wie $k_2$ und $k_2'$ je in den Punkten $b_1$ und $b_2$, so sind die Tangenten des äussern oder innern gemeinsamen Tangentenpaares des einen Kreispaares beziehendlich parallel mit den Tangenten des äusseren oder inneren gemeinsamen Tangentenpaares des andern Kreispaares, je nachdem $k_1'$ und $k_2'$ die Kreise $k_1$ und $k_2$ gleich und ungleichartig berühren. Die Radien $k_1 b_1$ und $k_2 b_2$ schneiden sich in einem Punkte $k_3$, welcher der Mittelpunkt eines Kreises ist, der die Kreise $k_1$ und $k_2$ in $b_1$ und $b_2$ berührt.*

Dieser Satz lässt sich durch das Princip der reciproken Radien verallgemeinern. Transformiren wir zweimal, indem wir das erste Mal das Transformationscentrum auf der Potenzlinie $P$, das zweite Mal jedoch anderswo beliebig annehmen, so folgt:

7. *Haben wir irgend zwei Kreisschaaren mit dem gemeinsamen Kreise $K$. Wird jeder der Kreise $k_1$ und $k_2$ der einen Schaar von je einem Kreise der zweiten Schaar berührt, z. B. $k_1$ von $k_1'$ und $k_2$ von $k_2'$, und beschreiben wir einen Kreis $m_3$, welcher $k_1$ und $k_2$ in gleicher Weise berührt wie $k_1'$ und $k_2'$, so giebt es allemal einen und nur einen bestimmten Kreis $\mu_3$, welcher die Kreise $k_1'$, $k_2'$ und $m_3$ berührt und zwar $m_3$ in dem einen oder dem andern der Punkte $p_3$, in welchem der Kreis $m_3$ von dem Kreise $K$, der beiden Schaaren gemeinsam ist, geschnitten wird.*

Lassen wir die Kreise $k_1$ und $k_2$ sich berühren und nehmen wir den oben definirten Kreis $k_3$ hinzu, so folgt:

8. *Haben wir irgend drei Kreise $k_1, k_2, k_3$, die sich zu je zwei in den Punkten $b_{12}$, $b_{23}$, $b_{31}$ (von aussen) berühren. Schneiden wir das durch die Mittelpunkte der Kreise $k$ gebildete Dreieck durch eine beliebige Transversale $t_y$ in den Punkten $k_2'$, $k_3'$, $k_1'$ und beschreiben um diese Punkte die Potenzkreise zu jenen drei Kreisen $k_1$, $k_2$, $k_3$, so schneiden sich diese in den zwei Potenzpunkten $n_y'$, $n_y''$. Beschreiben wir ferner die Kreise $m_1$, $m_2$, $m_3$, welche die Kreise $k_1, k_2, k_3$ zu je zweien berühren (von aussen), so schneidet der Kreis $m_1$ den Kreis $k_1'$ in dem Punktepaar $p_1$. Ebenso erhalten wir die Punktepaare $p_2$ und $p_3$ durch die andern Kreise. Es giebt nun allemal einen und nur einen Kreis $\mu_1$, welcher die Kreise $k_2', k_3'$ und $m_1$ berührt und zwar den letzteren in dem einen oder andern der Punkte des Punktepaares $p_1$. Ebenso erhalten wir Kreise $\mu_2$ und $\mu_3$.*

Betrachten wir von diesem Satze den speciellen Fall, wo wir nur den Kreis $m_3$ nehmen und ihn in eine Gerade, in die gemeinsame Tangente der Kreise $k_1$ und $k_2$ übergehen lassen. Es ist alsdann ohne weiteres Nachfolgendes klar.

Zu jeder Transversalen $t_x$ gehören zwei Kreise $\mu_3^x$, und auch wenn wir nur von dem Mittelpunkte $\mu_3^x$ sprechen, so gehören zu jeder Transversalen zwei Punkte $\mu_3^x$ und umgekehrt zu jedem Punkte $\mu_3$ eine Transversale $t_x$. Die gegenseitigen Beziehungen zwischen $t_x$ und $\mu_3^x$ sind also festgestellt und wir haben, wie sich aus der Figur ohne weiteres ergiebt, folgenden Satz:

9. *Dreht sich die Transversale $t_x$ um einen beliebigen Punkt $N$, so durchlaufen die zugehörigen Punkte $\mu_3^x$ eine Parabel $\pi_3$, deren Axe durch $N$ geht und zu der Tangente $m_3$ normal steht. Die Kreise $\mu_3^x$ berühren ausser der Tangente $m_3$ noch einen bestimmten Kreis $S_3$ und endlich liegen die zu den Transversalen gehörenden Potenzpunkte $n$ auf dem Kreise $N$, dessen Mittelpunkt in $N$ liegt. Die Parabel $\pi_3$, die Kreise $S_3$ und $N$ schneiden sich in denselben zwei Punkten $n_3'$, $n_3''$ der Tangente $m_3$.*

*Lässt man den Punkt $N$ eine beliebige Gerade $G$ durchlaufen, so gehen die Parabeln $\pi_3$ aller Punkte der Geraden $G$ durch den Mittelpunkt $\mu_3$ des Kreises, der dieser Geraden $G$ als Transversalen entspricht. Die Kreise $S_3$ berühren diesen Kreis. Die Kreise $N$ gehen durch die zwei Potenzpunkte, welche diesen Geraden $G$ entsprechen.*

Verlegen wir den Punkt $N$ auf die Gerade $G^\infty$, so gehen die Kreise $N$ und $S_3$, so wie die Parabel $\pi_3$ in Gerade über, die wir mit $G(N)$, $G(S_3)$ und $G(\pi_3)$ bezeichnen, und wir haben:

*10. Die Kreise $\mu_3$ aller Transversalen $t$, welche einer bestimmten Richtung parallel sind, haben ihre Mittelpunkte auf der Geraden $G(\pi_3)$, sie berühren die Gerade $G(S_3)$, und die Potenzpunkte der zugehörigen Potenzkreise liegen auf einer Geraden $G(N)$. Welches auch die Richtung sein mag, der die Transversalen parallel sind, die Gerade $G(\pi_3)$ geht immer durch den bestimmten Punkt $\mu_3^\infty$; die Gerade $G(S_3)$ berührt immer den bestimmten Kreis $\mu_3^\infty$ und endlich $G(N)$ geht immer durch den Punkt $o$ gleicher Potenzen der drei Kreise $k$. Der Kreis $\mu_3^\infty$ mit seinem Mittelpunkt $\mu_3^\infty$ ist der Kreis $\mu_3$, welcher der Geraden $G^\infty$ entspricht. Die drei Geraden $G(N)$, $G(S_3)$ und $G(\pi_3)$ schneiden sich in demselben Punkte $n_3$ der Tangente $m_3$.*

Die Gerade $G(N)$ bestimmt also die andern Geraden $G(S_3)$ und $G(\pi_3)$ vollständig. Nehmen wir jetzt die Tangente $m_2$ hinzu, welche die Kreise $k_1$ und $k_3$ berührt, so haben wir hier zu jeder Graden $G(N)$ entsprechend die Geraden $G(S_2)$ und $G(\pi_2)$; die in Bezug auf die Tangente $m_2$ die gleiche Bedeutung haben wie $G(S_3)$ und $G(\pi_3)$ in Bezug auf die Tangente $m_3$.

Lassen wir beziehendlich die Geraden $G(S_2)$ und $G(S_3)$ wie $G(\pi_2)$ und $G(\pi_3)$ einander entsprechen, welche zu derselben Geraden $G(N)$ gehören, so folgt sowohl direkt aus den projectivischen Eigenschaften der Figur, als auch wenn man die bewiesene Construction für das geradlinige Dreieck voraussetzt, dass $G(S_2)$ und $G(S_3)$ in einem Durchmesser der Kreise $k_1$ zusammenfallen, sobald $G(N)$ durch den Schnittpunkt $S_1$ der Tangente $m_2$ und $m_3$ geht. Es geht auch dieser Durchmesser $D$ durch den Punkt $S_1$. Transformiren wir die Figur nach dem Princip der reciproken Radien, und zwar so, dass der Kreis $k_1$ die Kreise, welche nur den Tangenten $m_2$ und $m_3$ entsprechen, gleichartig berührt, so geht der Durchmesser $D$ in den äussern orthogonalen Potenzkreis über und wir haben den Lehrsatz:

*11. Legt man durch die Schnittpunkte der Kreise $m_2$ und $m_3$ den Kreis $N$ von der Natur der Kreise $N$, so berühren alle Kreise $\mu_2$ und $\mu_3$, welche zu den Transversalen gehören, die durch den Mittelpunkt des Kreises $N$ gehen, den äusseren orthogonalen Potenzkreis der Kreise $m_2$ und $m_3$, sobald diese zwei von dem Kreise $k_1$ gleichzeitig berührt werden.*

Nehmen wir den Kreis $m_1$, der die Kreise $k_2$ und $k_3$ (von aussen) berührt, hinzu, so erhalten wir ebenso zu $m_1$ und $m_2$ den Kreis $N_3$;

zu $m_2$ und $m_3$ den Kreis $N_1$ und zu $m_3$ und $m_1$ den Kreis $N_2$. Die Mittelpunkte $N_1, N_2, N_3$ liegen auf derselben Graden $G(N)$. (Satz 6.) Die Kreise $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ dieser Geraden $G(N)$ berühren also nach dem vorhergehenden Satze zu je zwei die drei äusseren orthogonalen Potenzkreise der drei Kreise $m_1, m_2, m_3$. *Führen wir die Construction zu dieser Thatsache aus, so haben wir die Steiner'sche Figur, die sich durch seine Construction ergiebt.*

## II.

## Behandlung einiger verwandter Aufgaben.

Aus dieser Darstellung sieht man ohne weiteres, wie man vorzugehen hat, um die entsprechende Aufgabe auf der Kugel und für Kugeln im Raume zur Lösung zu bringen. Für jetzt gebe ich noch die Lösungen zu zwei Specialfällen in der Ebene, jedoch, da die Beweise leicht zu führen sind, ohne Beweis.

*Erste Aufgabe. Es sind drei Kreise $m_1, m_2, m_3$ beliebig in der Ebene gegeben. Man soll drei Kreise $k_2, k_3, k_1$ so finden, dass sich diese alle drei je zu zweien rechtwinklig schneiden und dass ferner $k_2, k_3, k_1$ je die Kreispaare $m_3, m_1$; $m_1, m_2$; $m_2, m_3$ rechtwinkelig schneiden.*

*Lösung.* Man construirt die Potenzlinien $p_{12}, p_{23}, p_{31}$ zu je zwei der drei Kreise. Sie schneiden sich in dem Punkt $o$. Man construirt die Pole $P_{12}, P_{13}$ der Potenzlinien $p_{12}$ und $p_{13}$ in Bezug auf den Kreis $m_1$ und zieht die Gerade $P_{12}P_{13}$, welche die Centrale $m_2 m_3$ in dem Punkte $a_1$ schneidet. Ebenso construirt man die Punkte $a_2$ und $a_3$. Es liegen dann diese Punkte auf einer Geraden $A$. Die Gerade $P_{12}P_{13}$ oder die Polare der Potenzpunkte $o$ in Bezug auf den Kreis $m_1$ schneide $p_{12}$ in dem Punkt $b_1$. Die Polare $B_1$ dieses Punktes in Bezug auf den Kreis $m_1$ schneidet $p_{13}$ in dem Punkte $b_2'$. Wir verbinden $a_1$ mit $b_2'$ durch die Gerade, welche $p_{12}$ in dem Punkte $b_1'$ schneidet, ziehen ferner $oP_{12}$ und errichten zu dieser Geraden die Normale, welche durch den Mittelpunkt $m_1$ geht. Diese schneide $p_{12}$ in dem Punkte $o'$. Die zwei Punktepaare $b_1, b_1'$ und $o, o'$ bestimmen, je als zugeordnete Punkte eines jeden Paares betrachtet, eine Involution 2. Grades. Dessen Doppelpunkte seien $k_3$ und $k_3'$, so sind dies die Mittelpunkte der gesuchten Kreise $k_3$. Verbinden wir $a_1$ mit $k_3$ und $k_3'$ durch Gerade, so schneiden sie $p_{13}$ in den Punkten $k_2$ und $k_2'$. Ziehen wir die Geraden $a_3k_2, a_3k_2'$ und $a_2k_3, a_2k_3'$ so schneiden sich diese paarweise in den Mittelpunkten $k_1$ und $k_1'$ der dritten Kreise. Die Kreise $k_1, k_2, k_3$ geben die erste und die Kreise $k_1', k_2', k_3'$ die zweite Lösung.

Für das geradlinige Dreieck folgt:

*12. Beschreibt man über den Seiten eines Dreiecks als Durchmesser Kreise, so schneidet jeder Kreis die zugehörige Höhe des Dreiecks in* *zwei Punkten. Von diesen drei Punktepaaren liegen dreimal je zwei auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt in der nicht zugehörigen Ecke des Dreiecks liegt. Diese drei Kreise schneiden sich rechtwinkelig.*

*Zweite Aufgabe. Es sind drei Kreise $m_1, m_2, m_3$ gegeben; man soll drei Kreise $k_2, k_3, k_1$ so finden, dass sich diese gegenseitig zu je zweien berühren, und dass insbesondre $k_2$ die Kreise $m_1$ und $m_3$; $k_3$ die Kreise $m_1$ und $m_2$ und endlich $k_1$ die Kreise $m_2$ und $m_3$ rechtwinkelig schneidet.*

*Auflösung.* Man beschreibt die acht Kreise $R$, welche die drei Kreise $m_1, m_2, m_3$ berühren. Es berühre z. B. der Kreis $R_1$ in den Punkten $b_1, b_2, b_3$. Man zieht in diesen Punkten die Tangenten an die Kreise, so sind die Ecken des dadurch gebildeten Dreiecks die Mittelpunkte für drei Kreise $k_1, k_2, k_3$.

*Bemerkung.* Für irgend drei Kreise, welche durch denselben Punkt gehen, ergeben sich bei jeder Aufgabe, welche verlangt, jene drei Kreise durch andre Kreise unter bestimmten Winkeln nach gewissen Gesetzen zu schneiden, halb so viele Auflösungen als wenn die drei Kreise *nicht* durch denselben Punkt gehen, sondern allgemeine Lage haben. Findet nämlich Letzteres statt, so sind je zwei Lösungen einander so beigeordnet, dass die eine die polarreciproke Figur der andern ist, in Bezug auf den Orthogonalkreis der drei Kreise als Transformationskreis. Ist der Orthogonalkreis imaginär, so ändert dies an der Sache nichts, indem an seine Stelle alsdann ein anderer Kreis $k$ tritt, der von jenen drei je über einem Durchmesser geschnitten wird. Bezeichnen $\alpha$ und $\beta$ die Centralabstände zweier entsprechender Punkte und $r$ den Radius des Orthogonalkreises (falls dieser imaginär, so soll $r$ der Radius des Kreises $k$ sein) so hat man im ersten Falle die Relation $\alpha \cdot \beta = r^2$ und im zweiten Falle $\alpha \cdot \beta = -r^2$.

Das heisst: im ersten Fall liegen die Punkte vom Mittelpunkt des Transformationskreises in gleicher Richtung, im zweiten Fall in entgegengesetzter.

Gehen die drei Kreise durch denselben Punkt, so wird der Orthogonalkreis gleich Null, und ebenso reduciren sich die Kreise je der einen von zwei einander entsprechenden Lösungen auf Null, d. h. fallen in jenen gemeinsamen Punkt.

Eigenschaften, die zwischen den Lösungen existiren, die zu drei Kreisen durch einen Punkt gehend gehören, lassen sich nun jedesmal sehr leicht auf die Lösungen zu drei Kreisen in allgemeiner Lage übertragen, nur dürfen von diesen letztern keine zwei einander entsprechende sein.

Aehnliches gilt von vier Kugeln im Raume.

Pisa, den 27. Januar 1873.

# Darstellung des Quotienten zweier Thetafunctionen, deren Argumente sich um Drittel ganzer Periodicitätsmoduln unterscheiden, durch algebraische Functionen.

Von J. Thomae in Halle.

---

Unterscheiden sich in einem Quotienten zweier $\vartheta$-Functionen die Argumente der Zählerfunction von denen der Nennerfunction um rationale Multipla der Periodicitätsmoduln, so kann man nach Riemann (Crelle's Journal Bd. 54, S. 154) den Zähler so mit einer einfachen Exponentialfunction multipliciren, dass der Quotient eine Wurzel einer einwerthigen Function derjenigen Riemann'schen Fläche T wird, welcher die in die $\vartheta$-Functionen als Argumente eingesetzten Integrale algebraischer Functionen entnommen sind. Dass man bisher solche $\vartheta$-Quotienten nur in dem einzigen Falle durch algebraische Functionen dargestellt hat, in welchem die Wurzeln Quadratwurzeln sind, rührt wohl daher, dass die Darstellung in jedem anderen Falle ausserordentlich complicirt ist. Dies ist selbst dann der Fall, wenn die Fläche nur dreifach zusammenhängend ist; also wenn diejenigen zweiwerthigen Functionen derselben, deren Quadrate einwerthige sind, die sogenannten elliptischen Functionen sind. Es ist deshalb von Interesse, wenigstens für den Fall einer dreifach zusammenhängenden Fläche T diejenigen *dreiwerthigen* Functionen, *deren Cuben in* T *einwerthige sind*, algebraisch darzustellen.

Die Aufgabe, welche hier gelöst werden soll, ist näher präcisirt die folgende.

Ist eine Riemann'sche Fläche T wie die Function

$$\sigma = \sqrt{\xi \cdot \overline{1-\xi} \cdot \overline{1-\varkappa\xi}}$$

verzweigt, und ist $u(\sigma, \xi)$ oder kürzer bezeichnet $u$ das überall endliche Integral

$$u = \int_0^{(\sigma,\xi)} \frac{\frac{1}{2}\, d\xi}{\sigma},$$

und ist ferner

$$\mathsf{K}=\int_0^1\frac{d\xi}{2\sigma},\quad i\mathsf{K}'=\int_1^{\frac{1}{\varkappa}}\frac{d\xi}{2\sigma},\quad \frac{-\pi\mathsf{K}'}{\mathsf{K}}=\lg q,$$

$$\Theta_{0.1}(u)=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(m)}\,e^{\frac{-\pi K'}{K}m^2+\frac{mi\pi(u+K)}{K}}=1+2\sum_{1}^{\infty}{}_{(m)}(-1)^m q^{m^2}\cos\frac{m\pi u}{\mathsf{K}},$$

so soll die Function

$$(1)\qquad \chi_{hg}(\sigma,\xi)=\frac{e^{-hg2i\pi-\frac{hiu\pi}{K}+h^2\lg q}\cdot\Theta_{0,1}(u-g2\mathsf{K}-h2i\mathsf{K}')}{\Theta_{0,1}(u)}$$

als eine algebraische Function von $\sigma$ und $\xi$ dargestellt werden, wenn $h$ und $g$ beliebige ganze Multipla von $\frac{1}{3}$ sind.

Da sich die Functionen, in denen $h, g$ bez. nur um ganze positive oder negative Zahlen von einander verschieden sind, nur durch einen constanten Factor (eine Wurzel der Einheit) unterscheiden, so giebt es im ganzen nur *acht* wesentlich von einander verschiedene Functionen, welche in vier *Paare* geordnet werden können, so dass in jedem Paare die Indices $h$ und $g$ bez. entgegengesetzte Vorzeichen haben. Es bilden also $\chi_{h'g'}$ und $\chi_{h,g,}$ dann ein *Paar*, wenn $h'=-h,$ und $g'=-g_,$, oder auch wenn $h'+h,$ und $g'+g,$ ganze Zahlen sind. Aus der Darstellung der Function $\chi$ als $\Theta$-quotient ergiebt sich, *dass die eine Function eines Paares dadurch aus der andern erhalten wird*, dass man in ihr $\sigma$ durch $-\sigma$ ersetzt. Verschwindet demnach die Function $\chi_{h,g,}$ im Punkte $(\sigma_,, \xi_,)$, so verschwindet $\chi_{h'g'}$ im Punkte $(-\sigma_,, \xi_,)$. Zerschneiden wir, was nachher geschehen wird, die Fläche T so in eine einfach zusammenhängende T′, dass $u$ in übereinanderliegenden Punkten von T′ genau entgegengesetzte Werthe annimmt, und hat dann $u$ im Punkte $(\sigma_,, \xi_,)$ den Werth $g_,2\mathsf{K}+(\frac{1}{2}+h_,)2i\mathsf{K}'$, so hat $u$ im Punkte $(-\sigma_,, \xi_,)$ den Werth $-g_,2\mathsf{K}-(\frac{1}{2}+h_,)2i\mathsf{K}'$.

Setzt man in $\chi_{h,g,}(\sigma,\xi)$ für $(\sigma,\xi)$ den Werth $(-\sigma_,, \xi_,)$ ein, so erhält man, wenn man berücksichtigt, dass die $\Theta$-Function gerade ist

$$\chi_{h,g,}(-\sigma_,, \xi_,)=\frac{e^{-2h_,g_,i\pi+h_,^2\lg q+2h_,g_,i\pi+2h_,(\frac{1}{2}+h_,)\lg q}\cdot\Theta_{0,1}(-4g_,\mathsf{K}-(\frac{1}{2}+2h_,)2i\mathsf{K}')}{\Theta_{0,1}(g_,2\mathsf{K}+(\frac{1}{2}+2h_,)2i\mathsf{K}')}$$

$$=\frac{e^{3h_,^2\lg q+h_,\lg q}\cdot\Theta_{0,1}(g_,2\mathsf{K}+(\frac{1}{2}+h_,)2i\mathsf{K}'-(1+3h_,)2i\mathsf{K}')}{\Theta_{0,1}(g_,2\mathsf{K}+(\frac{1}{2}+h_,)2i\mathsf{K}')},$$

und hieraus liefert das Periodicitätsgesetz der $\Theta$-Functionen

$$(2)\qquad \chi_{h,g,}(-\sigma_,, \xi_,)=(-1)^{1+3h_,}\cdot e^{g_,(1+3h_,)2i\pi},$$

welcher Ausdruck eine sechste Wurzel der Einheit ist.

Da nun $\chi^3_{h,g,}(\sigma,\xi)$ eine in T einwerthige Function ist, die für $\xi=\infty$ unendlich gross in der dritten Ordnung wird, also, da der unendlich ferne Punkt in T ein Verzweigungspunkt ist, wie $\xi^{\frac{3}{2}}$ unendlich wird, die ferner da, wo sie verschwindet, unendlich klein in der dritten Ordnung wird, weil $\chi_{h,g,}(\sigma,\xi)$ unendlich klein in der ersten Ordnung wird, die endlich', wenn sie im Punkte $(\sigma_,, \xi_,)$ verschwindet, der Gleichung (2) Genüge leisten muss, so folgt:

$$(3)\qquad \chi^3_{h,g,}(\sigma,\xi) = \pm \begin{vmatrix} 1, \xi, \sigma \\ 1, \xi_,, \sigma_, \\ 0, 1, \frac{\partial\sigma_,}{\partial\xi_,} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, \xi_,, -\sigma_, \\ 1, \xi_,, \sigma_, \\ 0, 1, \frac{\partial\sigma_,}{\sigma\,\xi_,} \end{vmatrix}$$

$$= \pm \left\{(\xi - \xi_,)\frac{d\sigma_,}{2\sigma_, d\xi_,} + \frac{\sigma_, - \sigma}{2\sigma_,}\right\},$$

worin noch $\xi_,$ so bestimmt werden muss, dass $\chi^3$ nicht blos in der *zweiten*, was für jedes $\xi_,$ geschieht, sondern in der *dritten* Ordnung für $\xi = \xi_,$ $\sigma = \sigma_,$ verschwindet. Es muss also $(\sigma_,, \xi_,)$ so gewählt werden, dass dort ausser $\chi^3_{h,g,}$ und $d(\chi^3_{h,g,})$ auch noch $d^2(\chi^3_{h,g,})$ verschwindet, oder dass

$$(4^a)\quad \sigma\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi - 1} + \frac{\varkappa}{\xi\varkappa - 1}\right)^2 - 2\sigma\left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - 1)^2} + \frac{\varkappa^2}{(\xi\varkappa - 1)^2}\right) = 0$$

oder

$$(4^b)\qquad 3\varkappa^2\xi^4 - 4\varkappa(1+\varkappa)\xi^3 + \sigma\varkappa\xi^2 - 1 = 0$$

werde. Die quadratische Invariante dieser Gleichung ist Null, und sie lässt sich deswegen für eine Gleichung vierten Grades verhältnissmässig leicht auflösen. Die vier Wurzeln dieser Gleichung $\xi', \xi'', \xi''', \xi^{IV}$ liefern die acht Punkte der Fläche T

$$\begin{array}{cccc} (\sigma', \xi'), & (\sigma'', \xi''), & (\sigma''', \xi'''), & (\sigma^{IV}, \xi^{IV}) \\ (-\sigma', \xi'), & (-\sigma'', \xi''), & (-\sigma''', \xi'''), & (-\sigma^{IV}, \xi^{IV}); \end{array}$$

substituirt man diese acht Puukte für $(\sigma_,, \xi_,)$, so erhält man acht Functionen $\chi_{h,g,}(\sigma, \xi)$; und zwar bilden diejenigen Functionen, welche je zwei unter einander stehenden Punkten entsprechen, immer ein *Paar*, wie wir ein solches oben definirt haben.

Um die Gleichung $(4^b)$ aufzulösen, machen wir (nach der Schlömilch'schen Methode) die Substitution

$$\xi = \frac{r}{1 + t\cdot\sqrt{1 - 3\varkappa r^2 + \varkappa(1+\varkappa)r^3}} = \frac{r}{1 + \varrho t},$$

worin zur Abkürzung

$$\sqrt{1 - 3\varkappa r^2 + \varkappa(1+\varkappa)r^3} = \varrho$$

gesetzt ist. Durch diese Substitution erhält man für $t$ die Gleichung:

$$3\varkappa^2 r^4 - 4\varkappa(1+\varkappa)r^3(1+\varrho t) + 6\varkappa(1+\varrho t)^2 - (1+\varrho t)^4 = 0$$

und nach Potenzen von $t$ geordnet

$$-\varrho^4 t^4 - 4\varrho^3 t^3 + 6\varrho^2 t^2(\varkappa r^2 - 1) - 4\varrho^3 t - 1 + 6\varkappa r^2 - 4\varkappa(1+\varkappa)r^3 + 3\varkappa^2 r^4 = 0$$

oder mit $-\varrho^4$ dividirt

$$t^4+\frac{4}{\varrho}t^3-6\frac{1-\varkappa r^2}{\varrho^2}t^2+\frac{4}{\varrho}t+\frac{1-6\varkappa r^2+4\varkappa(1+\varkappa)r^3-3\varkappa^2r^4}{\varrho^4}=0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichungen sind paarweise die reciproken Werthe von einander, wenn $r$ so bestimmt wird, dass das von $t$ freie Glied gleich Eins wird, also so, dass

$$1-6\varkappa r^2+4\varkappa(1+\varkappa)r^3-3\varkappa^2r^4=\varrho^4=1-6\varkappa r^2+2\varkappa(1+\varkappa)r^3 \\ +9\varkappa^2r^4-6\varkappa^2(1+\varkappa)r^5+\varkappa^2(1+\varkappa)^2r^6$$

wird. Mithin bestimmt sich $r$ aus der Gleichung

$$r^3\cdot\{\varkappa^2(1+\varkappa)^2r^3-6\varkappa^2(1+\varkappa)r^2+12\varkappa^2r-2\varkappa(1+\varkappa)\}=0,$$

wofür man schreiben kann, da die Wurzel $r=0$ nicht zu gebrauchen ist, wenn $1-\varkappa=\varkappa'$ gesetzt wird:

$$(\varkappa(1+\varkappa)r-2\varkappa)^3+8\varkappa^3-2\varkappa^2(1+\varkappa)^2=(\varkappa(1+\varkappa)r-2\varkappa)^3-2\varkappa^2\varkappa'^2=0.$$

Demnach muss

$$r=\frac{2\varkappa+\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}}{\varkappa(1+\varkappa)}$$

gesetzt werden. Dividiren wir nach dieser Substitution die Gleichung für $t$ durch $t^2$ und schreiben sie in die Form

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)^2+\frac{4}{\varrho}\left(t+\frac{1}{t}\right)-6\frac{1-\varkappa r^2}{\varrho^2}-2=0,$$

so folgt:

$$t+\frac{1}{t}=-\frac{2+\sqrt{4-6+6\varkappa r^2+2\varrho^3}}{\varrho}=-\frac{2+\sqrt{2\varkappa(1+\varkappa)r^3}}{\varrho}$$

und hieraus endlich

$$t=\frac{-2-\sqrt{2\varkappa(1+\varkappa)r^3}+\sqrt{12\varkappa r^2-2\varkappa(1+\varkappa)r^3+4\sqrt{2\varkappa(1+\varkappa)r^3}}}{2\varrho}.$$

Also erhalten wir

$$(5)\quad \frac{1}{\xi'}=\frac{2+2\varrho t}{2r}=\frac{-\sqrt{2\varkappa(1+\varkappa)r^3}+\sqrt{12\varkappa r^2-2\varkappa(1+\varkappa)r^3+4\sqrt{2\varkappa(1+\varkappa)r^3}}}{2r}$$

$$=-\sqrt{\tfrac{1}{2}\varkappa(1+\varkappa)r}+\sqrt{3\varkappa-\tfrac{1}{2}\varkappa(1+\varkappa)r+\sqrt{2\varkappa(1+\varkappa)\frac{1}{r}}}$$

$$=-\sqrt{\varkappa+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}}$$

$$+\sqrt{2\varkappa-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}+\sqrt{4\varkappa^2-2\varkappa\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}+\sqrt[3]{4\varkappa^2\varkappa'^2}}},$$

welcher Ausdruck gleich

$$\tfrac{3}{4}\varkappa(1+\omega')$$

gesetzt werden kann, wenn $\omega'$ eine mit $\varkappa$ verschwindende Grösse bedeutet. Die übrigen Wurzeln sind:

$$
\begin{aligned}
(6)\quad \frac{1}{\xi''} &= -\sqrt{\varkappa+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}} \\
&\quad -\sqrt{2\varkappa-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}+\sqrt{4\varkappa^2-2\varkappa\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}+\sqrt[3]{4\varkappa^4\varkappa'^4}}} \\
&= -2\sqrt[3]{\tfrac{\varkappa}{2}}\,(1+\omega''), \\
\frac{1}{\xi'''} &= \sqrt{\varkappa+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}} \\
&\quad +\sqrt{2\varkappa-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}-\sqrt{4\varkappa^2-2\varkappa\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}+\sqrt[3]{4\varkappa^4\varkappa'^4}}} \\
&= 2\sqrt[3]{\tfrac{\varkappa}{2}}\,\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,(1+\omega'''), \\
\frac{1}{\xi^{IV}} &= \sqrt{\varkappa+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}} \\
&\quad -\sqrt{2\varkappa-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}-\sqrt{4\varkappa^2-2\varkappa\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2}+\sqrt[3]{4\varkappa^4\varkappa'^4}}} \\
&= 2\sqrt[3]{\tfrac{\varkappa}{2}}\,\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\,(1+\omega^{IV}),
\end{aligned}
$$

worin $\omega''$, $\omega'''$, $\omega^{IV}$ mit $\varkappa$ verschwindende Grössen sind. Diese Ausdrücke in $\omega'$, $\omega''\cdots$ werden uns nachher gute Dienste leisten.

Bei der Untersuchung, wie die Grössen $\xi'$, $\xi''$, $\cdots$ und die Indices $h'g'$, $h''g''$, $\cdots$ zusammen gehören, kann man sich auf den Fall beschränken, in welchem $\varkappa$ positiv reell und kleiner als Eins ist. Denn da $\xi'$, $\xi''$, $\cdots$ algebraische Functionen der complexen Veränderlichen $\varkappa$ sind, so erhält man die Zuordnung für andere Werthe von $\varkappa$ durch die Methoden, durch welche Functionen complexer Variabeln stetig fortgesetzt werden. — Es werde also $\varkappa$ positiv reell und kleiner als Eins vorausgesetzt. — Die Riemann'sche über der $\xi$-Ebene zweifach ausgebreitete Fläche T, die wie $\sigma$ verzweigt ist, hat die vier Verzweigungspunkte $0$, $1$, $1:\varkappa$, $\infty$. Wir bestimmen die Blätter so, dass sie längs einer Geraden zwischen 0 und 1, und längs einer Geraden, welche Träger der positiv reellen Zahlen zwischen $1:\varkappa$ und $\infty$ ist, zusammen hängen. Im oberen Blatte sei $\sigma$ für negativ reelle Werthe von $\xi$ positiv imaginär, im untern also negativ imaginär. Die Fläche T werde in eine einfach zusammenhängende T′ dadurch zerschnitten, dass wir den Theil der positiv reellen Achse zwischen 1 und $\infty$ sowohl im oberen als im unteren Blatte als Begrenzung von T′ ansehen. Der Theil zwischen $1:\varkappa$ und $\infty$ wird gleichzeitig als die Uebergangsstelle aus dem oberen Blatte von T ins untere und umgekehrt angesehen werden, und gehört als solche beiden Blättern an.

Die Fläche T′ theilen wir in vier Halbebenen, welche durch die Linie der reellen Zahlen begrenzt werden. $H_1$ sei die Halbebene, welche die positiv imaginären Zahlen enthält, $H_2$ die, welche die complexen Zahlen mit negativ imaginären Theilen enthält. $H_3$ sei die unter $H_1$, $H_4$ die unter $H_2$ liegende Halbebene von T′. Durch das überall endliche Integral $u$ wird die Halbebene $H_1$ auf das Innere und den Rand eines Rechteckes $R_1$ conform abgebildet. Die Ecken (in der $u$-Ebene) sind $0, K, K+iK', iK'$, und entsprechen bez. den Punkten $0, 1, 1:\varkappa, \infty$. Die Halbebene $H_2$ wird auf ein Rechteck $R_2$ abgebildet mit den Ecken $0, -K, -K+iK', iK'$, welche in $H_2$ den Punkten $0, 1, 1:\varkappa, \infty$ bez. entsprechen. Die Halbebene $H_3$ bildet sich auf ein Rechteck $R_3$ ab, dessen Ecken $0, -K, -K-iK', -iK'$ bez. den Punkten $0, 1, 1:\varkappa, \infty$ entsprechen, und $H_4$ wird auf ein Rechteck $R_4$ mit den Ecken $0, K, K-iK', -iK'$ abgebildet, dessen Ecken bez. den Punkten $0, 1, 1:\varkappa, \infty$ entsprechen. Die ganze Fläche T′ wird auf das Rechteck mit den Ecken $K+iK', -K+iK', -K-iK', K-iK'$ conform abgebildet. Da nun $\chi_{hg}$ für $u = g2K + (\frac{1}{2}+h)2iK'$ verschwindet, so verschwinden in dem Rechtecke $R_1$ und folglich in der Halbebene $H_1$ die Functionen

$$\chi_{0,1},\quad \chi_{-1,1},$$

in $R_2$ und folglich in $H_2$

$$\chi_{-1,-1},\quad \chi_{-1,0},$$

in $R_3$ und folglich in $H_3$

$$\chi_{1,-1},\quad \chi_{0,-1},$$

in $R_4$ und folglich in $H_4$

$$\chi_{1,1},\quad \chi_{1,0}.$$

Für sehr kleine $\varkappa$ ergeben die Ausdrücke (5) und (6) in $\omega_1'\,\omega_1''\cdots$ dass $\xi'$ positiv reell ist, $\xi''$ negativ reell, $\xi'''$ aber einen negativ imaginären, $\xi^{IV}$ einen positiv imaginären Bestandtheil hat. Mit $\sigma', \sigma'', \sigma''', \sigma^{IV}$ bezeichnen wir die Punkte im oberen Blatte von T, mit $-\sigma', -\sigma'', \cdots$ im unteren Blatte. Daraus ergiebt sich, zunächst wenigstens für hinreichend kleine $\varkappa$, dass

$$\chi_{0,1},\ \chi_{-1,1} \text{ und die Punkte } (\sigma', \xi'),\ (\sigma^{IV}, \xi^{IV})$$
$$\chi_{-1,-1},\ \chi_{-1,0} \text{ und die Punkte } (\sigma'', \xi''),\ (\sigma''', \xi''')$$
$$\chi_{1,-1},\ \chi_{0,-1} \text{ und die Punkte } (-\sigma', \xi'),\ (-\sigma^{IV}, \xi^{IV})$$
$$\chi_{1,1},\ \chi_{1,0} \text{ und die Punkte } (-\sigma'', \xi''),\ (-\sigma''', \xi''')$$

bez. zu einander gehören. Da aber die Functionen $\xi', \xi''\cdots$ als Functionen von $\varkappa$ sich nur für $\varkappa = 0, 1, \infty$ verzweigen, so findet diese Zusammengehörigkeit nicht blos für kleine $\varkappa$, sondern für alle zwischen 0 und 1 gelegenen $\varkappa$ statt.

Um die Zusammengehörigkeit der Punkte $(\sigma', \xi') \cdot\cdot$ und der Indices $hg$ vollständig zu bestimmen, benutzen wir den Ausdruck

$$(8) \qquad \chi_{h,g,}(0,0) = \pm\, \varepsilon_{h,g,} \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\,\frac{1-2(1+\varkappa)\xi_{,}+3\varkappa\xi_{,}^{2}}{1-(1+\varkappa)\xi_{,}+\varkappa\xi_{,}^{2}}}$$

$$= \pm\, \varepsilon_{h,g,} \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}\,\frac{1-\varkappa\xi_{,}^{2}}{1-(1+\varkappa)\xi_{,}+\varkappa\xi_{,}^{2}}} = \pm\, \varepsilon_{h,g,} \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}\,\frac{\frac{1}{\xi_{,}^{2}}-\varkappa}{\frac{1}{\xi_{,}^{2}}-(1+\varkappa)\frac{1}{\xi_{,}}+\varkappa}},$$

in welchem $\varepsilon_{h,g,}$ eine dritte Wurzel der Einheit bedeutet. Setzen wir hierin für $\xi_{,}$ den Werth $\xi'$ aus (5) ein und zwar für $\frac{1}{\xi'}$ den gefundenen Nährungswerth $\frac{3}{4}\varkappa(1+\omega')$, so erkennt man, dass $\chi_{h,g,}(0,0)$ für abnehmende $\varkappa$ gleich Eins wird, wenn $\pm\,\varepsilon_{h,g,} = -1$ gesetzt wird. Von den Ausdrücken

$$(9) \qquad \frac{e^{-h,g,2i\pi+h,^{2}\lg q}\cdot \Theta_{01}(g,2K+2h,iK')}{\Theta_{01}(0)} = \chi_{h,g,}(0,0)$$

in $\Theta$-Functionen bleiben für abnehmende $\varkappa$ nur die, in denen $h=0$ ist, von $0$ verschieden und nähern sich beide der Eins. Mit Rücksicht auf die unter (7) aufgestellten Resultate folgt hieraus:

$$(10) \qquad \chi_{0,1}(\sigma,\xi) = \sqrt[3]{(\xi'-\xi)\frac{d\sigma'}{2\sigma' d\xi'} + \frac{\sigma-\sigma'}{2\sigma'}},$$

$$\chi_{0,-1}(\sigma,\xi) = \sqrt[3]{(\xi'-\xi)\frac{d\sigma'}{2\sigma' d\xi'} - \frac{\sigma+\sigma'}{2\sigma'}},$$

$$(11) \qquad \chi_{-1,1}(\sigma,\xi) = \sqrt[3]{(\xi-\xi^{IV})\frac{d\sigma^{IV}}{2\sigma^{IV} d\xi^{IV}} + \frac{\sigma^{IV}-\sigma}{2\sigma^{IV}}},$$

$$\chi_{1,-1}(\sigma,\xi) = \sqrt[3]{(\xi-\xi^{IV})\frac{d\sigma^{IV}}{2\sigma^{IV} d\xi^{IV}} + \frac{\sigma^{IV}+\sigma}{2\sigma^{IV}}}.$$

In (10) sind die dritten Wurzeln so zu nehmen, dass man für $\xi=0$ und für positiv reelle $\varkappa$ kleiner als Eins, positiv reelle Grössen erhält. In (11) aber ist die dritte Wurzel so zu nehmen, dass sie für abnehmende positiv reelle $\varkappa$ sich immer mehr einer positiv reellen mit $e^{\frac{2i\pi}{9}}$ multiplicirten Zahl nähert.

Ist in (9) $g,=0$, $h,=\pm 1$, so convergirt dieser Ausdruck für abnehmende $\varkappa$, da $q$ bekanntlich gleich $\frac{\varkappa}{16}(1+\omega)$ gesetzt werden kann, wenn $\omega$ eine mit $\varkappa$ verschwindende Grösse bedeutet, wie die positiv reelle neunte Wurzel $\sqrt[9]{\frac{\varkappa}{16}}$ gegen Null, während der Ausdruck unter (8) in derselben Weise gegen Null convergirt, wenn $\xi''$ für $\xi_{,}$ gesetzt wird und $\pm \varepsilon_{+1,0} = 1$ genommen wird. Mit Rücksicht auf (7) folgt daraus:

$$(12)\qquad \chi_{1,0}(\sigma,\xi) = \sqrt[3]{(\xi-\xi'')\frac{d\sigma''}{2\sigma''d\xi''}+\frac{\sigma''+\sigma}{2\sigma''}},$$

$$\chi_{-1,0}(\sigma,\xi) = \sqrt[3]{(\xi-\xi'')\frac{d\sigma''}{2\sigma''d\xi''}+\frac{\sigma''-\sigma}{2\sigma''}},$$

welche Ausdrücke für $\xi = 0$ positiv reell zu nehmen sind. Endlich ist:

$$(13)\qquad \chi_{1,1}(\sigma,\xi) = \sqrt[3]{(\xi-\xi''')\frac{d\sigma'''}{2\sigma'''d\xi'''}+\frac{\sigma'''+\sigma}{2\sigma'''}},$$

$$\chi_{-1,-1}(\sigma,\xi) = \sqrt[3]{(\xi-\xi''')\frac{d\sigma'''}{2\sigma'''d\xi'''}+\frac{\sigma'''-\sigma}{2\sigma'''}},$$

worin für $\xi = 0$ die dritte Wurzel so zu nehmen ist, dass sich die Ausdrücke mit abnehmenden $\varkappa$ wie eine positiv reelle mit $e^{\frac{-2i\pi}{9}}$ multiplicirte Zahl der Null nähern.

Die dritten Wurzeln in (11) und (12) lassen sich einfacher noch dadurch bestimmen, dass

$$(14)\qquad \chi_{-1,1}(-\sigma^{IV},\xi^{IV}) = 1,\quad \chi_{1,0}(\sigma'',\xi'') = 1,$$

$$\chi_{1,-1}(\sigma^{IV},\xi^{IV}) = 1,\quad \chi_{-1,0}(-\sigma'',\xi'') = 1$$

zu nehmen ist.

Um noch ein numerisches Beispiel zu haben, setzen wir $\varkappa = -1$, welcher Fall besonders leicht zu behandeln ist, weil dann $\sqrt[3]{2\varkappa^2\varkappa'^2} = 2$ ist. Die Formeln (5) und (6) oder die directe Auflösung von (4), welche Gleichung in diesem Falle eine quadratische für $\xi^2$ ist, liefert dann für $(\sigma_{,}, \xi_{,})$ die acht Punkte

$$(15)\quad \begin{array}{r|llll} \xi_{,} = & \sqrt{1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}}, & -\sqrt{1-\sqrt{\tfrac{1}{3}}}, & \sqrt{1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}}, & -\sqrt{1+\sqrt{\tfrac{1}{3}}}. \\ \sigma_{,} = & \pm\sqrt[4]{\tfrac{4}{3}(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}})}, & \pm i\sqrt[4]{\tfrac{4}{3}(1-\sqrt{\tfrac{1}{3}})}, & \pm i\sqrt[4]{\tfrac{4}{3}(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}})}, & \pm\sqrt[4]{\tfrac{4}{3}(1+\sqrt{\tfrac{1}{3}})}. \end{array}$$

Setzen wir dann

$$\int_0^1 \tfrac{1}{2}\frac{d\xi}{\sigma} = \mathsf{K},\quad \int_0^{-1} \tfrac{1}{2}\frac{d\xi}{\sigma} = i\mathsf{K},\quad \lg q = -\pi,$$

$$\Theta(u) = 1 + 2\sum_{(m)1}^{\infty} q^{m^2}\cos\frac{m\pi u}{\mathsf{K}},$$

so ist

$$(16)\quad \frac{\Theta\left(u+\frac{2K}{3}\right)}{\Theta(u)} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{1+\sqrt{\tfrac{4}{3}}}+\xi\right)\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{4}{3}(1+\sqrt{\frac{4}{3}})}} - \frac{\sigma+\sqrt[4]{\frac{4}{3}(1+\sqrt{\frac{4}{3}})}}{2\sqrt[4]{\frac{4}{3}(1+\sqrt{\frac{4}{3}})}}},$$

$$\frac{\Theta\left(u-\frac{2K}{3}\right)}{\Theta(u)} = \sqrt[3]{\left(\xi+\sqrt{1+\sqrt{\tfrac{4}{3}}}\right)\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{1+\sqrt{\frac{4}{3}}}} + \frac{\sigma-\sqrt[4]{\frac{4}{3}(1+\sqrt{\frac{4}{3}})}}{2\sqrt[4]{\frac{4}{3}(1+\sqrt{\frac{4}{3}})}}},$$

$$\frac{\Theta\left(+\frac{2K}{3}\right)}{\Theta(0)} = \sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{\frac{4}{3}}}{4\sqrt{\frac{4}{3}}}} = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}.$$

---

Nachdem so das vorgesteckte Ziel erreicht ist, sei es noch gestattet, eine Bemerkung über die dreiwerthigen Functionen zu machen, deren Cuben einwerthige Functionen einer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche von beliebig vielfachem Zusammenhange sind.

Ist eine zusammenhängende Riemann'sche Fläche T über der $x$-Ebene überall dreifach ausgebreitet, und hat sie $2p+2$ einfache Verzweigungspunkte, die über den Punkten $k_1, k_2, \cdots k_{2p+2}$ der $x$-Ebene liegen, so ist die Fläche $\overline{2p-1}$-fach zusammenhängend. Um eine einwerthige Function $s$ in ihr zu construiren, welche in $p$ Punkten unendlich gross erster Ordnung wird, kann man die durch $\vartheta$-Functionen und die überall endlichen Integrale einer zweiblättrigen $\overline{2p+1}$-fach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche $T_1$ mit den Verzweigungspunkten $k_1, k_2, \cdots k_{2p+2}$ dargestellten dreiwerthigen Functionen benutzen.

Die Function $s$ werde in den $p$ über $k_1, k_2, \cdots k_p$ liegenden Verzweigungspunkten von T unendlich gross erster Ordnung, so ist sie die Wurzel einer Gleichung von der Form

$$F(\overset{3}{s}, \overset{p}{x}) = a_0 s^3 + 3 \cdot c \cdot a_0 s^2 + 3a_2 s + 2a_3 = 0,$$

worin $a_0 = (x-k_1)(x-k_2)\cdots(x-k_p)$ und $c$ eine Constante ist, $a_2$ und $a_3$ aber ganze Functionen von $x$ vom $p^{\text{ten}}$ Grade sind. Der Coefficient von $s^2$ ist $a_0$, weil sich $s$ in den Punkten, in welchen $a_0$ verschwindet, $s$ also unendlich wird, verzweigen soll. Es enthält aber $s$ noch *zwei* willkürliche Constante, von denen die additive dazu benutzt werden kann, den Coefficienten von $s^2$ in $F(s, x)$ verschwinden zu lassen. Dies geschieht, wenn man für $s$ die Substitution $s-c$ macht. Da wir also $c = 0$ annehmen können, so ist $s$ durch die Gleichung bestimmt:

$$(17)\qquad F(s, x) = a_0 s^3 + 3 \cdot a_2 s + 2a_3 = 0.$$

Die Bestimmung der Coefficienten in $a_2$ und $a_3$, wenn die $k$ gegeben sind, ist ausserordentlich complicirt, weil sie sehr vieldeutige Functionen der $k$ sind. Die Cardanische Formel ergiebt für $s$

$$(18) \qquad s = \sqrt[3]{-\frac{a_3}{a_0} + \sqrt{\frac{a_3^2 a_0 + a_2^3}{a_0^3}}} + \sqrt[3]{-\frac{a_3}{a_0} - \sqrt{\frac{a_3^2 a_0 + a_2^3}{a_0^3}}}.$$

Setzen wir nun

$$(19) \qquad r = \sqrt{(a_3{}^2 a_0 + a_2{}^3) a_0},$$

so verzweigt sich $s$ in Punkten, in welchen $r$ verschwindet, so dass $r^2 = \text{Const.}\,(x - k_1)\cdot(x - k_2)\cdots(x - k_{2p+2})$ sein muss. Die $\overline{2p+1}$-fach zusammenhängende Fläche, welche wie $r$ verzweigt ist, werde mit $\mathrm{T}_1$ bezeichnet, und die in (18) unter der Cubikwurzel stehende in $\mathrm{T}_1$ einwerthige Function werde mit $\chi^3(r, x)$ bezeichnet. Da wo sie verschwindet muss sie unendlich klein in der dritten Ordnung werden, weil im andern Falle sich um einen solchen Punkt die Fläche T dreimal herum winden müsste, was im Allgemeinen in keinem Punkt der Fläche stattfindet. Demnach ist $\chi(r, x)$ eine solche dreiwerthige für die Verzweigungspunkte $k_1 k_2 \cdots k_p$ in $\mathrm{T}_1$ $\infty$ gross erster Ordnung werdende Function, deren Cubus eine einwerthige ist, und umgekehrt, wenn $\chi(r, x)$ eine solche Function ist, so ist

$$s = \chi(r, x) + \chi(-r, x)$$

wie eine Fläche T verzweigt, deren Verzweigungspunkte über $k_1 k_2 \cdots k_{2p+2}$ liegen. Diese Verzweigungspunkte sind je nach der Wahl von $\chi$ (für $p = 1$ giebt es acht verschiedene $\chi$) verschieden zwischen die Blätter vertheilt.

Sind nun $u_1(r, x)\ u_2(r, x) \cdots u_p(r, x)$ die überall endlichen Integrale der Fläche $\mathrm{T}_1$, so wie sie von Riemann in Crelle's Journal Band 54 S. 143 bestimmt sind, so erhält man, wenn man sich der von Riemann am a. O. eingeführten Bezeichnung bedient, für $s$ den Ausdruck

$$(20) \qquad s = \frac{e^{\Sigma h_\mu u_\mu(r, x)} \cdot \vartheta[u_1(r, x) + g_1 i\pi + \Sigma h_\mu a_{(\mu)}, \cdots]}{\vartheta[u_1(r, x), u_2(r, x), \cdots]}$$
$$+ \frac{e^{\Sigma h_\mu u_\mu(-r, x)} \cdot \vartheta[u_1(-r, x) + g_1 i\pi + \Sigma h_\mu a_{1\mu}, \cdots]}{\vartheta[u_1(-r, x), u_2(-r, x) \cdots]},$$

wenn $h$ und $g$ ganze Multipla von $\frac{1}{3}$ sind.

Halle, April 1873.

# Zum Problem des Apollonius.

Von Stoll in Bensheim an der Bergstrasse.

Die Anregung zu der folgenden Arbeit empfing ich von Herrn Professor Dr. Sturm, welcher mich darauf aufmerksam machte, dass bei dem allgemeinen Problem des Apollonius die zwei conjugirten Berührungskreise nicht immer, wie man gewöhnlich anzunehmen scheine, ungleichartige Berührungen eingingen, sondern häufig auch gleichartige, und dass ferner merkwürdigerweise die Zahl der Lösungen immer entweder 8 oder 4 oder 0 sei. Er forderte mich auf, den Grund und die Gesetze dieser Erscheinungen zu untersuchen und gab mir auch bei der Ausführung manchen Wink, welcher der Arbeit zu gute kam und wofür ich demselben dankbar bin.

Bekanntlich sollen bei dem Problem des Apollonius in seiner allgemeinsten Form 3 gegebene Kreise von einem vierten zugleich berührt werden. Um die Aufgabe zu lösen, d. h. Radius und Mittelpunktscoordinatrn dieses 4ten Kreises zu finden, nehme man den Mittelpunkt des ersten der gegebenen Kreise zum Anfangspunkte der Coordinaten; die Gleichungen der gegebenen Kreise werden dann sein:

$$x^2 + y^2 = r_1^2, \tag{1}$$

$$(x - \alpha_2)^2 + (y - \beta_2)^2 = r_2^2, \tag{2}$$

$$(x - \alpha_3)^2 + (y - \beta_3)^2 = r_3^2, \tag{3}$$

und die des gesuchten:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2. \tag{4}$$

Der letzte Kreis soll nun vorerst die drei ersten entweder alle *ausschliessend* berühren, d. h. so, dass die Fläche des berührenden Kreises ausserhalb der Fläche der berührten liegt, oder alle *einschliessend*, d. h. so, dass die Fläche des berührenden Kreises in die Fläche der berührten hineinfällt oder umgekehrt. Damit die eine oder die andere Art der Berührung stattfinde, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein, wobei da, wo doppelte Zeichen stehen, hier und im Folgenden das obere für die ausschliessende, das untere für die einschliessende Berührung gilt:

$$(5)\qquad \alpha^2 + \beta^2 = (r \pm r_1)^2 ,$$
$$(6)\qquad (\alpha - \alpha_2)^2 + (\beta - \beta_2)^2 = (r \pm r_2)^2 ,$$
$$(7)\qquad (\alpha - \alpha_3)^2 + (\beta - \beta_3)^2 = (r \pm r_3)^2 .$$

Um hieraus $\alpha$, $\beta$ und $r$ zu bestimmen, ziehe man die Gleichungen (6) und (7) nach einander von (5) ab und erhält so:

$$2\,\alpha\alpha_2 + 2\,\beta\beta_2 \mp 2\,(r_1 - r_2)\,r = \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 + (r_1 + r_2)\,(r_1 - r_2)$$
$$2\,\alpha\alpha_3 + 2\,\beta\beta_3 \mp 2\,(r_1 - r_3)\,r = \alpha_3{}^2 + \beta_3{}^2 + (r_1 + r_3)\,(r_1 - r_3),$$

oder

$$(7^a)\quad \begin{cases} 2\,\alpha\alpha_2 + 2\,\beta\beta_2 \mp 2\,(r_1 - r_2)\,(r \mp r_1) = \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 - (r_1 - r_2)^2 \\ 2\,\alpha\alpha_3 + 2\,\beta\beta_3 \mp 2\,(r_1 - r_3)\,(r \mp r_1) = \alpha_3{}^2 + \beta_3{}^2 - (r_1 - r_3)^2 . \end{cases}$$

Wenn man nun zur Abkürzung

$$(8)\qquad \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 - (r_1 - r_2)^2 = p ,$$
$$(9)\qquad \alpha_3{}^2 + \beta_3{}^2 - (r_1 - r_3)^2 = q ,$$
$$(10)\qquad r + r_1 = y ,$$
$$(11)\qquad r - r_1 = z$$

setzt, so erhält man aus diesen 2, bezüglich 4 Gleichungen für die ausschliessende Berührung

$$2\,\alpha = \frac{q\beta_2 - p\beta_3 + 2\,y\,[\beta_2\,(r_1 - r_3) - \beta_3\,(r_1 - r_2)]}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3},$$
$$2\,\beta = \frac{p\alpha_3 - q\alpha_2 + 2\,y\,[\alpha_3\,(r_1 - r_2) - \alpha_2\,(r_1 - r_3)]}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3},$$

und für die einschliessende Berührung

$$2\,\alpha = \frac{q\beta_2 - p\beta_3 - 2\,z\,[\beta_2\,(r_1 - r_3) - \beta_3\,(r_1 - r_2)]}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3},$$
$$2\,\beta = \frac{p\alpha_3 - q\alpha_2 - 2\,z\,[\alpha_3\,(r_1 - r_2) - \alpha_2\,(r_1 - r_3)]}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3},$$

und wenn man wiederum zur Abkürzung setzt

$$(12)\quad p\alpha_3 - q\alpha_2 = A , \qquad (14)\quad \alpha_3\,(r_1 - r_2) - \alpha_2\,(r_1 - r_3) = A' ,$$
$$(13)\quad q\beta_2 - p\beta_3 = B , \qquad (15)\quad \beta_2\,(r_1 - r_3) - \beta_3\,(r_1 - r_2) = B' ,$$
$$(16)\qquad \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3 = D ,$$

für die ausschliessende Berührung

$$(17)\qquad 2\,\alpha = \frac{B + 2\,B'z}{D}, \qquad 2\,\beta = \frac{A + 2\,A'y}{D},$$

und für die einschliessende Berührung

$$(18)\qquad 2\,\alpha = \frac{B - 2\,B'y}{D}, \qquad 2\,\beta = \frac{A - 2\,A'z}{D}.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichung (5) giebt für die ausschliessende Berührung

$$(B + 2B'y)^2 + (A + 2A'y)^2 = 4D^2y^2,$$

oder

(19) $4y^2(A'^2 + B'^2 - D^2) + 4y(AA' + BB') + A^2 + B^2 = 0,$

und für die einschliessende Berührung

(20) $4z^2(A'^2 + B'^2 - D^2) - 4z(AA' + BB') + A^2 + B^2 = 0.$

Durch diese beiden Gleichungen ist die Aufgabe gelöst, indem $y$ und $z$, d. h. $r + r_1$ und $r - r_1$, also auch $r$ durch lauter bekannte Grössen ausgedrückt sind und man mit Hülfe der Werthe von $y$ und $z$ auch die betreffenden $\alpha$ und $\beta$ aus (17) und (18) finden kann. Dabei wohl zu bemerken, dass, wenn für $r$ ein reeller Werth gefunden ist, auch $\alpha$ und $\beta$ reell sein müssen, wie ein Blick auf die Gleichungen (17) und (18) lehrt. Nun haben aber die Gleichungen (19) und (20) dieselbe Discriminante, d. h. sie haben zu gleicher Zeit entweder reelle oder complexe Wurzeln, und überdies sind die Wurzeln der Gleichung (20) entgegengesetzt gleich denen der Gleichung (19); ergiebt sich also aus (19) für $r + r_1$ ein Werth $m$, d. h. für $r$ ein Werth $m - r_1$, so ist der aus (20) gefundene Werth von $r - r_1$ gleich $-m$, woraus $r = -(m - r_1)$ folgt, so dass auch die Werthe von $r$, die von diesen beiden Gleichungen geliefert werden, entgegengesetzt gleich sind. Giebt also die Gleichung (19) unter der Voraussetzung reeller Wurzeln 2 positive Werthe für $r$, so giebt Gleichung (20) 2 negative von derselben absoluten Grösse; giebt die erste ein positives und ein negatives $r$, so giebt die zweite ein negatives und ein positives $r$ von derselben Grösse, und liefert endlich die erste Gleichung 2 negative $r$, so liefert die zweite 2 positive $r$. Da aber $r$ seiner Natur nach immer positiv sein muss (eine Ausnahme, die sich durch das Lagenverhältniss rechtfertigt, werden wir weiter unten kennen lernen), so folgt, dass unter der Voraussetzung, die Wurzeln obiger Gleichungen seien reell, entweder 2 ausschliessende Berührungen möglich sind, oder eine ausschliessende und eine einschliessende oder 2 einschliessende. Manche Schriftsteller scheinen angenommen zu haben, es könne nur der mittlere Fall stattfinden, d. h. einer ausschliessenden Berührung sei immer eine einschliessende conjugirt; dass dies nicht so ist, kann man schon an dem einen Beispiel sehen, wenn zwei der gegebenen Kreise innerhalb des dritten liegen, ohne sich selbst zu schneiden, denn hier sind 2 Kreise möglich, welche die 3 gegebenen zugleich einschliessend in dem hier gebrauchten Sinne berühren. Genau die nämlichen Schlussfolgerungen ergeben sich, wenn man die Aufgabe von vornherein so stellt, dass der gesuchte Kreis den ersten gegebenen einschliessend und die beiden andern ausschliessend oder den ersten ausschliessend und die beiden andern einschliessend berühre; man hat dann nur in den Gleichungen (5), (6), (7) $r_1$ negativ und $r_2$, $r_3$ positiv, oder $r_1$ positiv und $r_2$, $r_3$ negativ zu setzen und die Rechnung in derselben Weise wie oben durchzuführen. Setzt man $r_2$ negativ und $r_1$, $r_3$ positiv oder umgekehrt, so erhält man das dritte Paar conjugirter Kreise, und wenn man $r_3$ negativ und $r_1$, $r_2$ positiv macht oder umgekehrt, das vierte Paar. Jedesmal ergeben sich 2 Gleichungen, ähnlich den (10) und (20), von derselben Determinante und entgegengesetzt gleichen Wurzeln, und jedesmal können die Kreise eines Paares nicht blos ungleichartig, sondern sie können auch beide gleichartig die gegebenen Kreise berühren.

Um die Bedingungen zu finden, unter denen die Kreise eines Paares mit den gegebenen gleichartige oder ungleichartige Berührungen eingehen, beachte man, dass in der Gleichung (19)

$$4\,y^2\,(A'^2+B'^2-D^2)+4\,y\,(AA'+BB')+A^2+B^2=0$$

die Grösse $A^2+B^2$ nie negativ werden kann, dass daher nach der Zeichenregel des Cartesius die Gleichung eine positive und eine negative Wurzel hat, wenn $A'^2+B'^2-D^2$ negativ, 2 positive oder 2 negative, wenn $A'^2+B'^2-D^2$ positiv ist, natürlich vorausgesetzt, dass die Gleichung überhaupt reelle Wurzeln hat; im 1ten Falle berühren die conjugirten Berührungskreise die gegebenen Kreise ungleichartig, im 2ten Falle in gleicher Art. Es kommt jetzt nur darauf an, den Ausdruck $A'^2+B'^2-D^2$ so umzuformen, dass er einer geometrischen Deutung fähig ist. Es ist aber, wenn wir aus (16) und (15) die Werthe von $A'$ und $B'$ substituiren

$$\begin{aligned}
A'^2+B'^2 &= (\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3)^2+(\alpha_3^2+\beta_3^2)(r_1-r_2)^2-2(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_2)(r_1-r_3)\\
&= (\alpha_3^2+\beta_3^2)(r_1-r_2)^2-\frac{(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)^2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}(r_1-r_2)^2+\\
&\quad+\frac{(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)^2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}(r_1-r_2)^2-2(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_2)(r_1-r_3)+(\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3)^2\\
&= \frac{(\alpha_2^2+\beta_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2)-(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)^2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}(r_1-r_2)^2+\\
&\quad+\left[\frac{\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}(r_1-r_2)-\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}\cdot(r_1-r_3)\right]^2,
\end{aligned}$$

oder, wenn man die Grösse in der eckigen Klammer mit $F$ bezeichnet,

$$A'^2+B'^2=\frac{D^2\,(r_1-r_2)^2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}+F^2.$$

Daraus folgt:

$$A'^2+B'^2-D^2=F^2-D^2\cdot\frac{p}{\alpha_2^2+\beta_2^2}. \tag{21}$$

Nun sind die Gleichungen der 2 äusseren gemeinschaftlichen Tangenten an den ersten und zweiten Kreis in der Normalform

$$(22)\quad x\left[\frac{\alpha_2(r_1-r_2)\mp\beta_2\sqrt{p}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\right]+y\left[\frac{\beta_2(r_1-r_2)\pm\alpha_2\sqrt{p}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\right]-r_1=0.$$

Durch Substitution der Mittelpunktscoordinaten $\alpha_3$ und $\beta_3$ des dritten gegebenen Kreises gehen die linken Seiten dieser Gleichungen in die negativ genommenen Längen $P_3$ und $P_3'$ der Senkrechten über, welche man vom Mittelpunkte des dritten Kreises auf die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten der 2 ersten gefällt hat, vorausgesetzt, dass dieser Mittelpunkt auf derselben Seite der äusseren Tangenten liegt, wie der Anfangspunkt der Coordinaten. Addirt man dann noch zu jeder dieser Senkrechten den Radius $r_3$, so hat man

$$-P_3+r_3=\frac{(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_2)-(\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3)-(\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)\sqrt{p}}{\alpha_2^2+\beta_2^2},$$

$$-P_3'+r_3=\frac{(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_2)-(\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3)+(\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)\sqrt{p}}{\alpha_2^2+\beta_2^2},$$

oder mit unserer obigen Bezeichnung

$$(23)\quad \begin{cases} -P_3+r_3=\dfrac{F\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}-D\sqrt{p}}{\alpha_2^2+\beta_2^2} \\[2ex] -P_3'+r_3=\dfrac{F\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}+D\sqrt{p}}{\alpha_2^2+\beta_2^2}. \end{cases}$$

Durch Multiplication dieser Gleichungen erhält man endlich

$$(\alpha_2^2+\beta_2^2)(P_3-r_3)(P'-r_3)=F^2-D^2\cdot\frac{p}{\alpha_2^2+\beta_2^2},$$

so dass folgt:

$$(24)\quad A'^2+B'^2-D^2=(P_3-r_3)(P_3'-r_3)(\alpha_2^2+\beta_2^2).$$

Ganz ebenso ist natürlich auch

$$A'^2+B'^2-D^2=(P_2-r_2)(P_2'-r_2)(\alpha_3^2+\beta_3^2)$$

und

$$A'^2+B'^2-D^2=(P_1-r_1)(P_1'-r_1)[(\alpha_2-\alpha_3)^2+(\beta_2-\beta_3)^2],$$

wo $P_2$, $P_2'$, $P_1$, $P_1'$ die Senkrechten bedeuten, welche man vom Mittelpunkte des zweiten oder ersten Kreises auf die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten des ersten und dritten oder des zweiten und dritten gefällt hat. Bezeichnet man die Mittelpunktsentfernungen bezüglich mit $c_{12}$, $c_{13}$, $c_{23}$, so ergiebt sich die merkwürdige Beziehung

$$(25)\quad (P_1-r_1)(P_1'-r_1)c_{23}^2=(P_2-r_2)(P_2'-r_2)c_{13}^2=(P_3-r_3)(P_3'-r_3)c_{12}^2.$$

Die $P$ haben wir seither immer positiv angenommen, aber dabei vorausgesetzt, dass der Mittelpunkt des Kreises, von dem aus sie gezogen sind, auf derselben Seite der betreffenden äusseren Tangenten liege wie der Anfangspunkt der Coordinaten; liegt er nun aber auf der entgegengesetzten Seite wie dieser, so muss man sie negativ nehmen. Die Gleichung (24) lehrt uns jetzt, wann $A'^2 + B'^2 - D^2$ positiv und wann es negativ ist. Positiv ist es

1) wenn $P_3$ und $P_3'$ zugleich positiv und zugleich $>$ oder $< r_3$ sind,
2) wenn ein $P$ negativ und das andere positiv, aber $< r_3$ ist,
3) wenn beide $P$ negativ sind.

Findet einer dieser 3 Fälle statt, so muss nach Gleichung (25) einer dieser Fälle auch bei den $P_2$ und $P_1$ eintreten.

Negativ ist $A'^2 + B'^2 - D^2$ dann, wenn

1) beide $P$ positiv sind, aber das eine $>$, das andere $< r_3$ ist,
2) das eine $P$ negativ und das andere positiv, aber $> r_3$ ist.

Einer dieser Fälle muss dann gleichzeitig auch bei den $P_2$ und $P_1$ stattfinden.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist es leicht, sich ein Bild von der Lage zu machen, welche die gegebenen Kreise haben müssen, um von dem ersten Paar conjugirter Kreise gleichartig berührt zu werden. Nehmen wir vorerst an, es sei möglich, an 2 der gegebenen Kreise äussere gemeinschaftliche Tangenten zu legen; man denke sich dann den Mittelpunkt eines von ihnen als Anfangspunkt der Coordinaten. Liegt nun der Mittelpunkt des dritten Kreises in dem Winkelraum zwischen den äusseren Tangenten und liegt der Kreis selbst entweder ganz in diesem Winkelraume oder schneidet er beide Tangenten zugleich, so hat man den ersten Fall, wo $A'^2 + B'^2 - D^2$ positiv ist. Der zweite Fall findet statt, wenn der Mittelpunkt des dritten Kreises sowohl ausserhalb des Winkelraumes der äusseren Tangenten, als auch ausserhalb des Winkelraumes liegt, welcher von den Verlängerungen derselben über ihren Durchschnittspunkt hinaus gebildet wird, der Kreis selbst aber diejenige Tangente oder ihre Verlängerung schneidet, welche von seinem Mittelpunkte nach derselben Seite hin liegt, wie von den Mittelpunkten der 2 ersten Kreise. Im dritten Falle liegt der Mittelpunkt des dritten Kreises in dem Winkelraume, welcher von den Verlängerungen der Tangenten gebildet wird; der Radius desselben ist beliebig, der dritte Kreis kann also entweder ganz in diesem Winkelraume liegen oder eine der Tangenten oder beide schneiden. In allen übrigen Lagen hat man ungleichartige Berührungen.

Wir wollen jetzt einmal annehmen, $A'^2 + B'^2 - D^2$ sei positiv, dann hat die Gleichung (19) 2 negative Wurzeln, wenn $AA' + BB'$ positiv, 2 positive, wenn es negativ ist. Im ersten Falle hat man 2 einschliessende Berührungen, im andern 2 ausschliessende. Um diese Bedingung geometrisch zu interpretiren, müssen wir den Ausdruck $AA' + BB'$ umformen. Durch Substitution der Werthe von $A$, $A'$, $B$, $B'$ aus den Gleichungen (12) bis (15) erhält man nach Ausführung der angezeigten Operationen:

$$AA'+BB'=p(\alpha_3^2+\beta_3^2)(r_1-r_2)-(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)[p(r_1-r_3)+q(r_1-r_2)]$$
$$+q(\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3),$$

oder, anders geordnet,

$$AA'+BB'=p[(\alpha_3^2+\beta_3^2)(r_1-r_2)-(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_3)]$$
$$+q[(\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3)-(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_2)].$$

Setzt man nun, ähnlich wie oben,

$$(26)\quad \begin{cases}(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_2)-(\alpha_2^2+\beta_2^2)(r_1-r_3)=F\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2},\\ (\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)(r_1-r_3)-(\alpha_3^2+\beta_3^2)(r_1-r_2)=F'\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2},\end{cases}$$

so erhält man

$$AA'+BB'=-pF'\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}-qF\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}.$$

Aus den Gleichungen (23) ergiebt sich aber durch Addition und Subtraction

$$\frac{-2F}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}}=P_3+P_3'-2r_3,\qquad \frac{4pD^2}{(\alpha_2^2+\beta_2^2)^2}=(P_3-P_3')^2.$$

Ebenso ist

$$\frac{-2F'}{\sqrt{\alpha_3^2+\beta_3^2}}=P_2+P_2'-2r_2,\qquad \frac{4qD^2}{(\alpha_3^2+\beta_3^2)^2}=(P_2-P_2')^2.$$

Damit wird aus obiger Gleichung

$$(27)\quad AA'+BB'=\frac{(\alpha_2^2+\beta_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2)}{8D^2}$$
$$[(P_3-P_3')^2(P_2+P_2'-2r_2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)+(P_2-P_2')^2(P_3+P_3'-2r_3)(\alpha_3^2+\beta_3^2)].$$

Da der Factor auf der linken Seite vor der Klammer positiv ist, so hat man nur nöthig, das Zeichen des Ausdrucks in der Klammer zu berücksichtigen. Im Allgemeinen ist es nothwendig, den Werth dieses Ausdrucks auszurechnen. Doch giebt es einige Fälle, in denen man vermittelst desselben sofort an der Figur erkennen kann, welche Art von Berührungen statt hat. Nimmt man nämlich für die $P$ in der Klammer solche Werthe an, welche den Ausdruck $A'^2+B'^2-D^2$ positiv machen, so wie sie oben angegeben worden sind, so sind entweder

1) $P_3$ und $P_3'$ zugleich positiv und zugleich $> r_3$, dann muss auch entweder
   a) $P_2$ und $P_2'$ zugleich positiv und zugleich $> r_2$ sein und dann ist $AA'+BB'$ positiv, oder
   b) $P_2$ und $P_2'$ sind zugleich positiv und zugleich $< r_2$, oder ein $P_2$ ist negativ und das andere positiv aber $< r_2$, oder beide $P_2$ sind negativ, dann wird der erste Posten in der Klammer negativ und der zweite positiv, und es kommt dann

auf die absoluten Werthe beider Posten an bei Entscheidung der Frage, ob $AA' + BB'$ positiv oder negativ sei;

2) oder $P_3$ und $P_3'$ sind zugleich positiv und zugleich $< r_3$, oder ein $P_3$ ist negativ und das andere positiv aber $< r_3$, oder beide $P_3$ sind negativ, dann ist der zweite Posten immer negativ; ist nun

   a) $P_2$ und $P_2'$ zugleich positiv und zugleich $> r_2$, so kommt es auf die absoluten Werthe beider Posten an; sind aber

   b) $P_2$ und $P_2'$ zugleich positiv und zugleich $< r_2$, oder ist ein $P_2$ negativ und das andere positiv, aber $< r_2$, oder sind beide $P_2$ negativ, so ist auch der zweite Posten negativ und deshalb auch $AA' + BB'$ negativ.

In ähnlicher Weise, wie wir im Vorstehenden die Rechnung durchgeführt haben für das erste Paar conjugirter Berührungskreise, lässt sie sich führen, wenn man finden will, ob die conjugirten Kreise des zweiten Paares die gegebenen Kreise gleichartig berühren oder nicht. Man hat dann nur überall statt $r_1$ zu setzen $-r_1$, wodurch die Gleichungen (22) übergehen in die Gleichungen der zwei inneren gemeinschaftlichen Tangenten, und man findet endlich, dass die Berührungen gleichartig oder ungleichartig sind, je nachdem der Ausdruck

$$(P_3 + r_3)(P_3' + r_3)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$$

positiv oder negativ ist, wo aber hier $P_3$ und $P_3'$ die Senkrechten von dem Mittelpunkte des dritten Kreises auf die gemeinschaftlichen inneren Tangenten des ersten und zweiten Kreises bedeuten. Das Nämliche bedeuten die $P$ für das dritte Paar conjugirter Kreise in dem für diese geltenden Ausdruck $(P_3 - r_3)(P_3' - r_3)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$, während in dem Ausdrucke $(P_3 + r_3)(P_3' + r_3)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$, welcher für das vierte Paar gefunden wird, die $P$ wieder die Senkrechten auf die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten sind. Dass man in diesen 3 Fällen Beziehungen finden kann, ähnlich der oben (25) aufgestellten, ist klar, ebenso, dass, wenn gleichartige Berührungen sich ergeben, man wieder, gerade wie oben, mit Hülfe des Ausdrucks $AA' + BB'$ bestimmen kann, ob dieselben beide einschliessende oder beide ausschliessende sind.

Bemerkenswerth ist es, dass die äusseren oder inneren gemeinschaftlichen Tangenten auch imaginär werden können, und zwar geschieht das erste, wenn $\alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_1 - r_2)^2$ negativ ist, d. h. wenn der erste und zweite Kreis ineinander liegen, das zweite, wenn $\alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_1 + r_2)^2$ negativ ist, d. h. wenn sie sich schneiden oder ineinander liegen. In diesen Fällen sind auch die Senkrechten vom Mittelpunkte des dritten Kreises imaginär, aber wie aus den Gleichungen (23) hervorgeht, sind dann $P_3 \pm r_3$ und $P_3' \pm r_3$ conjugirte complexe Grössen, das Product derselben und in Folge davon auch $A'^2 + B'^2 - D^2$ ist also immer positiv, oder in Worten ausgedrückt: Wenn der erste und zweite Kreis ineinander liegen, so geht, falls die Berührungskreise überhaupt möglich sind, was später untersucht werden soll, sowohl das erste als das vierte Paar derselben jedes zwei gleichartige Berührungen mit den gegebenen Kreisen ein, und wenn der erste und zweite Kreis einander schneiden oder ineinander liegen, so gilt das Gleiche für das zweite und dritte Paar. Es ist natürlich beliebig, welche der drei gegebenen Kreise man als ersten und zweiten wählen will.

Eine Ausnahme erleiden die von uns aufgestellten Regeln dann, wenn alle drei gegebenen Kreise sich gegenseitig schneiden und dabei einer der Durchschnittspunkte der zwei ersten innerhalb des dritten liegt. In diesem Falle zeigt die geometrische Betrachtung an der Figur, dass ungleichartige Berührungen stattfinden, wenn das nach unseren Regeln gefundene $A'^2 + B'^2 - D^2$ positiv, gleichartige, wenn es negativ ist; beim zweiten und dritten Paare, wo man wegen der imaginären inneren Tangenten lauter gleichartige Berührungen erwartet hätte, sind dann die Berührungen immer ungleichartig, beim ersten und vierten Paar entweder gleichartig oder ungleichartig, je nachdem das betreffende nach unseren Regeln bestimmte $A'^2 + B'^2 - D^2$ negativ oder positiv ist. Eine Erklärung dieses Paradoxons ergiebt sich in folgender Weise. Offenbar ist es ein Grenzfall, welcher den Uebergang von der Regelmässigkeit zu den Ausnahmen bezeichnet, wenn die drei Kreise sich in einem und demselben Punkte schneiden. In diesem Grenzfall ist aber für alle vier Paare von Berührungskreisen der eine Kreis eines Paares zu einem Punkte zusammengeschrumpft, d. h. sein Radius ist Null, was sich geometrisch leicht einsehen lässt, analytisch aber folgendermassen bewiesen wird. Sieht man in den Gleichungen (1), (2) und (3) die $x$ und $y$ als demselben Punkte gehörig an, so findet man durch Elimination derselben die Bedingung, welche stattfinden muss, damit der Grenzfall eintrete. Zieht man deshalb von (2) und (3) nach einander (1) ab, so erhält man

$$2\,\alpha_2 x + 2\,\beta_2 y = r_1^2 - r_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2,$$
$$2\,\alpha_4 x + 2\,\beta_3 y = r_1^2 - r_3^2 + \alpha_3^2 + \beta_3^2;$$

daraus findet man, wenn man

$$r_1^2 - r_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 = m\,,$$
$$r_1^2 - r_3^2 + \alpha_3^2 + \beta_3^2 = n$$

setzt,

$$2\,x = \frac{n\beta_2 - m\beta_3}{D}, \qquad 2\,y = \frac{m\alpha_3 - n\alpha_2}{D},$$

und wenn man diese Werthe in (1) substituirt,

$$(n\beta_2 - m\beta_3)^2 + (m\alpha_3 - n\alpha_2)^2 = 4\,D^2 r_1^2,$$

oder

$$m^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2) + n^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2) - 2\,mn\,(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3) = 4\,D^2 r_1^2.$$

Nun ist aber nach Gleichung (8)

$$m = p + (r_1 - r_2)^2 + r_1^2 - r_2^2,$$

d. h.

$$m = p + 2\,r_1(r_1 - r_2)$$

und ebenso

$$n = q + 2\,r_1(r_1 - r_3).$$

Die Substitution dieser Werthe in obige Gleichung giebt

$$\begin{gathered}[4r_1^2(r_1-r_2)^2 + 4r_1(r_1-r_2)\,p + p^2](\alpha_3^2+\beta_3^2) + \\ + [4r_1^2(r_1-r_3)^2 + 4r_1(r_1-r_3)\,q + q^2](\alpha_2^2+\beta_2^2) - \\ - 2\{4r_1^2(r_1-r_2)(r_1-r_3) + 2r_1[p(r_1-r_3)+q(r_1-r_2)] + pq\}(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3) = 4D^2r_1^2,\end{gathered}$$

oder, wenn man immer je die ersten, zweiten und dritten Glieder eines jeden Postens addirt

$$\begin{gathered}4r_1^2[(r_1-r_2)^2(\alpha_3^2+\beta_3^2) + (r_1-r_3)^2(\alpha_2^2+\beta_2^2) - 2(r_1-r_2)(r_1-r_3)(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)] + \\ + 4r_1\{p(r_1-r_2)(\alpha_3^2+\beta_3^2) + q(r_1-r_3)(\alpha_2^2+\beta_2^2) - [p(r_1-r_3)+q(r_1-r_2)](\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta)\} + \\ + [p^2(\alpha_3^2+\beta_3^2) + q^2(\alpha_2^2+\beta_2^2) - 2pq(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3)] = 4D^2r_1^2.\end{gathered}$$

Die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke haben wir aber alle schon oben kennen gelernt; mit unserer abgekürzten Bezeichnungsweise wird daher die letzte Gleichung

$$4\,r_1^2(A'^2 + B'^2) + 4\,r_1(AA' + BB') + A^2 + B^2 = 4\,D^2 r_1^2,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(28)\quad 4\,r_1^2(A'^2 + B'^2 - D^2) + 4\,r_1(AA' + BB') + A^2 + B^2 = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit unserer Gleichung (19)

$$4\,y^2(A'^2 + B'^2 - D^2) + 4\,y\,(AA' + BB') + A^2 + B^2 = 0,$$

so ergiebt sich, dass derselben für den Grenzfall durch $y = r_1$ genügt wird; da nun $y = r + r_1$, so ist $r = 0$. Die Mittelpunktscoordinaten, welche hier die Coordinaten des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes sind, ergeben sich aus den Gleichungen (17), wenn man in denselben $y = r_1$ setzt, zu

$$2\,\alpha = \frac{B + 2\,B'r_1}{D}, \qquad 2\,\beta = \frac{A + 2\,A'r_1}{D}.$$

Dividirt man die Gleichung (19) durch $y - r_1$, so bleibt der Rest

$$4\,r_1^2(A'^2 + B'^2 - D^2) + 4\,r_1(AA' + BB') + A^2 + B^2,$$

welcher aber nach (28) gleich Null ist, und der Quotient, gleich Null gesetzt, ergiebt die Gleichung

$$y(A'^2 + B'^2 - D^2) + AA' + BB' + r_1(A'^2 + B'^2 - D^2) = 0,$$

aus welcher man den Radius des dem eben gefundenen conjugirten Kreises und dann mit Hülfe der Gleichungen (17) die Coordinaten seines Mittelpunktes finden kann. Aehnlich verfährt man bei den drei übrigen Paaren conjugirter Kreise.

Denken wir uns nun den dritten Kreis in einer solchen Lage, dass seine Durchschnittspunkte mit der Chordalen der beiden ersten sich schneidenden Kreise beide zwischen den Endpunkten dieser Chordale liegen, und schieben wir ihn stetig gegen den einen Durchschnittspunkt der zwei ersten Kreise vor, so nimmt der Radius des einen der beiden conjugirten Berührungskreise immer mehr ab und wird zu Null, sobald der dritte Kreis den Durchschnittspunkt der beiden ersten erreicht hat. Fährt man mit der stetigen Verschiebung des dritten Kreises fort, so dass er jetzt den Durchschnittspunkt der beiden ersten einschliesst, so muss nach einem analytischen Grundsatze der Radius des einen Berührungskreises, der vorher einen positiven und dann den Werth Null hatte, nunmehr einen negativen Werth annehmen, ohne dass sich deswegen die Grösse $A'^2 + B'^2 - D^2$ änderte, d. h. mit anderen Worten: Hier haben wir den einzigen Fall, wo der Radius des einen der beiden conjugirten Kreise aus der Gleichung (19), der andere aus der Gleichung (20) gewonnen wird, selbst wenn der letztere negativ gefunden werden sollte, und umgekehrt. Ist also z. B. $A'^2 + B'^2 - D^2$ positiv, so müssten nach der allgemeinen Regel beide Radien entweder aus der Gleichung (19) oder aus der Gleichung (20) bestimmt werden, in unserem Ausnahmsfalle aber wird der eine aus (19), der andere aus (20) bestimmt. Dies hat aber geometrisch die Wirkung, dass wir jetzt zwei ungleichartige Berührungen haben, wo zwei gleichartige erwartet worden wären. In der That hat auch nach dem Uebergange zu dem Ausnahmefalle der Radius des einen Berührungskreises zu den Peripherien der drei gegebenen Kreise die entgegengesetzte Lage wie vorher. Es kann auch vorkommen, dass der dritte Kreis die beiden Durchschnittspunkte der 2 ersten einschliesst; da hier der Ausnahmefall in derselben Weise umgekehrt wird, wie er selbst durch Umkehrung aus der Regelmässigkeit entstanden ist, so tritt die Regelmässigkeit wieder ein. Haben endlich die 3 gegebenen Kreise dieselbe Potenzlinie, so reduciren sich die 4 Paare von Berührungskreisen auf 2 Punkte, nämlich die gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der 3 Kreise; dieselben sind reell oder imaginär, je nachdem die gemeinschaftliche Potenzlinie die 3 Kreise schneidet oder nicht. Wir werden jedoch diesen Fall noch einmal weiter unten in einem andern Zusammenhange betrachten.

Es bleibt uns jetzt noch übrig zu untersuchen, unter welchen Bedingungen jedes der vier Paare von Berührungskreisen überhaupt möglich sei. Beschränken wir die Untersuchung vorerst auf das erste Paar. Wir haben dann die gemeinschaftliche Discriminante der Gleichungen (19) und (20) zu suchen; ist dieselbe positiv, dann existirt dieses Kreispaar, ist sie negativ, nicht. Wird dieselbe mit $\Delta_1$ bezeichnet, so ist

$$\Delta_1 = (AA' + BB')^2 - (A^2 + B^2)(A'^2 + B'^2 - D^2)$$

oder nach der Entwickelung

$$\Delta_1 = D^2(A^2 + B^2) - (AB' + A'B)^2.$$

Durch Einsetzung der Werthe von $A$, $A'$, $B$, $B'$ aus (12) bis (15) und Benutzung von (16) erhält man nach gehöriger Reduction

$$A^2 + B^2 = p^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2) + q^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2) - 2pq(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_2),$$

und

$$AB' - A'B = [p(r_1 - r_3) - q(r_1 - r_2)]\, D.$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= D^2[p^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2) + q^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2) - 2pq(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3) \\ &\qquad - p^2(r_1 - r_3)^2 - q^2(r_1 - r_2)^2 + 2pq(r_1 - r_2) r_1 - r_3)], \\ &= D^2\{p^2q + pq^2 - 2pq[\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 - (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_1 - r_2)]\}, \\ &= D^2pq[p + q - 2\alpha_2\alpha_3 - 2\beta_2\beta_3 + 2(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)].\end{aligned}$$

Wenn man die Werthe von $p$ und $q$ aus (8) und (9) in die eckige Klammer einsetzt, so bekommt man nach der Reduction

$$\Delta_1 = D^2pq[(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\beta_2 - \beta_3) - (r_2 - r_3)^2],$$

oder endlich

$$(29)\quad \Delta_1 = D^2[\alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_1 - r_2)^2][\alpha_3^2 + \beta_3^2 - (r_1 - r_3)^2] \\ [(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\beta_2 - \beta_3)^2 - (r_2 - r_3)^2].$$

Bezeichnet man die Entfernungen der Mittelpunkte der gegebenen Kreise wie oben mit $c_{12}$, $c_{13}$, $c_{23}$, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$\Delta_1 = D^2[c_{12}^2 - (r_1 - r_2)^2][c_{13}^2 - (r_1 - r_3)^2][c_{23}^2 - (r_2 - r_3)^2]$$

oder

$$(30)\quad \Delta_1 = D^2[c_{12} + (r_1 - r_2)][c_{13} + (r_1 - r_3)][c_{23} + (r_2 - r_3)] \\ [c_{12} - (r_1 - r_2)][c_{13} - (r_1 - r_3)][c_{23} - (r_2 - r_3)].$$

Der erste Factor $D^2$ auf der rechten Seite kann nie negativ, wohl aber Null werden, ein Fall, den wir weiter unten betrachten werden; er hat also keinen Einfluss auf das Zeichen. Nimmt man an, dass $r_1 > r_2 > r_3$, so sind die folgenden 3 Factoren auf der rechten Seite immer positiv und können nie Null werden; sie sind deshalb unter dieser Voraussetzung unwesentlich zur Bestimmung des Zeichens von $\Delta_1$ und man kann sie kurzweg mit $\varrho_1^2$ bezeichnen. Demnach ist jetzt

$$(31)\quad \Delta_1 = D^2 \varrho_1^2 [c_{12} - (r_1 - r_2)] [c_{13} - (r_1 - r_3)] [c_{23} - (r_2 - r_3)] .$$

Das Zeichen dieser Grösse giebt mir Aufschluss, ob das erste Paar conjugirter Kreise möglich ist; will ich eine ähnliche Probegrösse für das zweite Paar haben, so muss ich in (30) $r_1$ negativ setzen, für das dritte Paar $r_2$, für das vierte $r_3$, so dass man hat:

$$(32)\quad \Delta_2 = D^2 \varrho_2^2 [c_{12} - (r_1 + r_2)] [c_{13} - (r_1 + r_3)] [c_{23} - (r_2 - r_3)] .$$
$$(33)\quad \Delta_3 = D^2 \varrho_3^2 [c_{12} - (r_1 + r_2)] [c_{13} - (r_1 - r_3)] [c_{23} - (r_2 + r_3)] .$$
$$(34)\quad \Delta_4 = D^2 \varrho_4^2 [c_{12} - (r_1 - r_2)] [c_{13} - (r_1 + r_3)] [c_{23} - (r_2 + r_3)] .$$

Die Grössen $\varrho_2^2$, $\varrho_3^2$, $\varrho_4^2$ in diesen 3 letzten Gleichungen sind der Grösse $\varrho_1^2$ in (31) analog.

Es lassen sich nun im Ganzen 125 Fälle unterscheiden, je nachdem eines der $c$ grösser als die Summe der betreffenden Radien oder gleich derselben oder kleiner als die Summe, aber grösser als die Differenz oder gleich der Differenz oder kleiner als diese ist, d. h. je nachdem die beiden Kreise auseinander liegen oder sich ausschliessend berühren oder sich schneiden oder sich einschliessend berühren oder ineinander liegen. Von diesen Fällen sind 44 unmöglich, weil bei ihnen unter der gemachten Voraussetzung, dass $r_1 > r_2 > r_3$, die Mittelpunktsentfernungen der drei gegebenen Kreise kein reelles Dreieck bilden, indem nämlich dann nicht mehr, wie es bei einem reellen Mittelpunktsdreieck der Fall sein muss, $c_{12} + c_{13} > c_{23}$, $c_{12} + c_{23} > c_{13}$, $c_{13} + c_{23} > c_{12}$ ist; nimmt man also $r_1$, $r_2$, $r_3$ als reell an, so müssen in diesen 44 Fällen die Mittelpunktscoordinaten des zweiten oder dritten der gegebenen Kreise oder die Mittelpunktscoordinaten beider complexe Grössen sein, und ebenso eins oder mehrere der $c$. Nimmt man z. B. $c_{12} > r_1 + r_2$, $r_1 - r_3 < c_{13} < r_1 + r_3$, $c_{23} < r_2 - r_3$, so kann kein Mittelpunktsdreieck existiren; denn aus den beiden letzten Ungleichheiten folgt $c_{13} + c_{23} < r_1 + r_2$, was, mit der ersten verbunden, giebt $c_{13} + c_{23} < c_{12}$. Trotzdem ergiebt sich für diese 44 Fälle immer eine gewisse Zahl reeller Berührungskreise; so ist für das obige Beispiel $\Delta_1$ und $\Delta_3$ negativ, aber $\Delta_2$ und $\Delta_4$ positiv, so dass 4 reelle Lösungen existiren; die Berührungspunkte sind dann natürlich auch imaginär. Aber auch die 81 übrigen Fälle reduciren sich auf eine geringere Anzahl, weil mehrere derselben wesentlich identisch sind, indem sie sich nur durch die Grösse der Radien der dabei gegebenen Kreise unterscheiden. Lässt man ferner die Fälle ausfallen, in denen einer oder zwei der gegebenen Kreise mit dem dritten oder unter sich eine Berührung haben, so bleiben nur noch 12 Fälle übrig, die ich in folgender Tabelle zusammengestellt habe.

| | Zeichen von $\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3\ \Delta_4$ | Zahl der Lösungen |
|---|---|---|
| 1) $c_{12}>r_1+r_2,\ c_{13}>r_1+r_3,\ c_{23}>r_2+r_3$ | $+\ +\ +\ +$ | 8 |
| 2) $c_{12}>r_1+r_2,\ c_{13}>r_1+r_3,\ r_2-r_3<c_{23}<r_2+r_3$ | $+\ +\ -\ -$ | 4 |
| 3) $c_{12}>r_1+r_2,\ c_{13}>r_1+r_3,\ c_{23}<r_2-r_3$ | $-\ -\ -\ -$ | 0 |
| 4) $c_{12}>r_1+r_2,\ r_1-r_3<c_{13}<r_1+r_3,\ r_2-r_3<c_{23}<r_2+r_3$ | $+\ -\ -\ +$ | 4 |
| 5) $r_1-r_2<c_{12}<r_1+r_2,\ c_{13}>r_1+r_3,\ c_{23}<r_2-r_3$ | $-\ +\ +\ -$ | 4 |
| 6) $r_1-r_2<c_{12}<r_1+r_2,\ r_1-r_3<c_{13}<r_1+r_3,\ r_2-r_3<c_{23}<r_2+r_3$ | $+\ +\ +\ +$ | 8 |
| 7) $r_1-r_2<c_{12}<r_1+r_2,\ r_1-r_3<c_{13}<r_1+r_3,\ c_{23}<r_2-r_3$ | $-\ -\ +\ +$ | 4 |
| 8) $r_1-r_2<c_{12}<r_1+r_2,\ c_{13}<r_1-r_3,\ c_{23}<r_2-r_3$ | $+\ -\ -\ +$ | 4 |
| 9) $c_{12}<r_1-r_2,\ r_1-r_3<c_{13}<r_1+r_3,\ r_2-r_3<c_{23}<r_2+r_3$ | $-\ +\ +\ -$ | 4 |
| 10) $c_{12}<r_1-r_2,\ c_{13}<r_1-r_3,\ c_{23}>r_2+r_3$ | $+\ +\ +\ +$ | 8 |
| 11) $c_{12}<r_1-r_2,\ c_{13}<r_1-r_3,\ r_2-r_3<c_{23}<r_2+r_3$ | $+\ +\ -\ -$ | 4 |
| 12) $c_{12}<r_1-r_2,\ c_{13}<r_1-r_3,\ c_{23}<r_2-r_3$ | $-\ -\ -\ -$ | 0 |

Merkwürdig ist, dass die Zahl der Lösungen immer entweder 8 oder 4 oder 0 ist. Dies rührt daher, dass von den 4 Discriminanten (31) bis (34) je 2 abgesehen von $D^2$ einen Factor gemeinschaftlich haben, der in den 2 andern nicht vorkommt, so dass mit dem Verschwinden dieses Factors immer 2 Discriminanten Null werden und mit ihm zugleich das Zeichen ändern. Nun können, wie obige Tabelle lehrt, alle 4 Discriminanten zugleich negativ sein (Fall 3 und 12). Wechseln zwei von ihnen bei dem gemeinschaftlichen Uebergang durch Null zugleich ihr Zeichen und werden positiv, so muss auch, da jeder Discriminante 2 Auflösungen entsprechen, die Anzahl der letzteren um 4 zunehmen. Wenn fernerhin 2 Discriminanten, welche dasselbe Zeichen haben, dasselbe wechseln, so muss die Zahl der Auflösungen um 4 zu- oder abnehmen. Wechseln dagegen fernerhin 2 Discriminanten, welche ungleiche Zeichen haben, die Zeichen, so bleiben die beiden anderen, die dann auch ungleiche Zeichen haben, entweder unverändert oder wechseln auch ihre Zeichen; was nun aber auch geschehen mag, die Zahl der Lösungen muss dann unverändert bleiben. Die Fälle, wo die gegebenen Kreise Berührungen unter sich haben, bilden gewissermassen den Uebergang; denn jedesmal, wenn dies stattfindet, verschwindet ein gemeinschaftlicher Factor zweier Discriminanten. Weil dann für jede der beiden Null werdenden Discriminanten 2 Auflösungen in eine zusammenfallen, so hat man wenigstens 2 Lösungen. Die 2 übrigen Discriminanten können nun entweder beide positiv sein, wo 6 Lösungen, oder beide negativ, wo 2 Lösungen möglich sind, oder sie können einzeln oder zusammen verschwinden. Verschwindet eine und ist die andere positiv, so hat man 5 Lösungen, ist die andere negativ, 3 Lösungen, verschwinden beide, 4 Lösungen; wenn nur die eine verschwindet, so berührt einer der gegebenen Kreise die zwei andern, ohne dass diese eine Berührung haben, wenn aber beide verschwinden, so berühren sie sich alle drei. Aus dieser Darstellung ersieht man, dass, wenn unter den gegebenen Kreisen Berührungen vorkommen, als Zahl der Auflösungen nie 1 oder 7, wohl aber alle Zahlen von 2 – 6 auftreten können. Jedoch kann es geschehen, dass einer der gefundenen Berührungskreise identisch ist mit einem der gegebenen Kreise, wodurch die Zahl der Auflösungen um eine vermindert wird.

Zum Schlusse verdient noch der Fall eine besondere Betrachtung, wo der allen 4 Discriminanten gemeinschaftliche Factor $D^2$ Null ist, wo also, geometrisch interpretirt, der Flächeninhalt des Mittelpunktsdreiecks Null ist oder, was dasselbe ist, die Mittelpunkte der gegebenen Kreise auf einer geraden Linie liegen; es ist dies derselbe Fall, in welchem auch die Gergonne'sche Construction illusorisch wird. Ist aber $D$ gleich Null, so verschwinden alle 4 Discriminanten und man erhält also unter allen Umständen 4 reelle Werthe oder genauer 4 Paare gleicher reeller Werthe für $r$. Damit ist jedoch nicht gesagt, dass es auch immer 4, bezüglich 8 reelle Lösungen der Aufgabe geben müsse; denn die Mittelpunktscoordinaten $\alpha$ und $\beta$ des Berührungskreises können hier nicht wie oben durch die linearen Gleichungen (17) und (18), sondern müssen durch die quadratischen Gleichungen (5), (6) und (7) direct bestimmt werden, wodurch sich allerdings unter Umständen auch complexe Werthe für $\alpha$ und $\beta$ ergeben können. Um nun zu erkennen, wann dies stattfinde, setze man in den Gleichungen (13) und (15) $\beta_2 = \beta_3 \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$, was nichts anderes ist als $D = 0$; dann gehen dieselben über in

$$B = \frac{\beta_3}{\alpha_3}(q\alpha_2 - p\alpha_3), \qquad B' = \frac{\beta_3}{\alpha_3}\left[\alpha_2(r_1 - r_3) - \alpha_3(r_1 - r_2)\right],$$

oder, wenn man die Gleichungen (12) und (14) in Vergleich zieht, in

$$B = -\frac{\beta_3}{\alpha_3} \cdot A, \tag{35}$$

$$B' = -\frac{\beta_3}{\alpha_3} \cdot A'. \tag{36}$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung (19) und macht darin auch

40*

$D = 0$, so erhält man nach Weghebung des dann in allen Gliedern erscheinenden Factors $\frac{\alpha_3^2 + \beta_3^2}{\alpha_3^2}$

$$4\,y^2 A'^2 + 4\,y A A' + A^2 = 0\,. \tag{37}$$

Hätte man in ähnlicher Weise die Gleichung (20) behandelt, so würde man gefunden haben

$$4\,z^2 A'^2 - 4\,z A A' + A^2 = 0\,. \tag{38}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich sowohl für $y$ als für $z$ je ein Paar gleicher reeller Werthe, nämlich

$$y = -\frac{A}{2\,A'} \text{ und } z = \frac{A}{2\,A'}\,.$$

Man muss dasjenige Paar wählen, welches für $r$ zwei gleiche positive Werthe giebt. Daraus ergiebt sich, dass die conjugirten Berührungskreise nicht nur gleichen Radius haben, sondern auch die gegebenen Kreise gleichartig berühren. Wir haben jetzt noch die Mittelpunktscoordinaten dieser Kreise zu finden. Die zweite Gleichung ($7^a$) heisst mit den in (8), (9) und (10) angegebenen Bezeichnungen

$$2\,\alpha\alpha_3 + 2\,\beta\beta_3 = 2\,(r_1 - r_3)\,y + q\,,$$

und, wenn man den eben gefundenen Werth von $y$ substituirt,

$$2\,\alpha\alpha_3 + 2\,\beta\beta_3 = \frac{qA' - (r_1 - r_3)\,A}{A'}\,.$$

Die Gleichungen (12) und (14) geben dann

$$\begin{aligned}2\,\alpha\,\alpha_3 + 2\,\beta\,\beta_3 &= \frac{q\,\alpha_3\,(r_1 - r_2) - q\,\alpha_2\,(r_1 - r_3) - p\,\alpha_3 (r_1 - r_3) + q\,\alpha_2\,(r_1 - r_3)}{A'}\,,\\ &= \frac{q\,(r_1 - r_2) - p\,(r_1 - r_3)}{A'}\cdot\alpha_3\,,\\ &= \frac{C\alpha_3}{A'}\,,\end{aligned}$$

wenn man nämlich zur Abkürzung

$$q\,(r_1 - r_2) - p\,(r_1 - r_3) = C \tag{39}$$

setzt. Man entwickele aus dieser Gleichung $\alpha$ und setze es in (5) ein; dann erhält man nach einigen Reductionen für $\beta$ die Gleichung

$$4\,\beta^2 A'^2 (\alpha_3^2 + \beta_3^2) - 4\,\beta A' C \alpha_3 \beta_3 + (C^2 - A^2)\,\alpha_3^2 = 0. \tag{40}$$

Dieselbe Gleichung würde man erhalten haben, wenn man in die Gleichung

$$2\,\alpha\alpha_3 + 2\,\beta\beta_3 = 2\,(r_1 - r_3)\,z + q$$

den Werth $z = \frac{A}{2\,A'}$ substituirt hätte. Nimmt man jetzt die Gerade, worauf die Mittelpunkte liegen, zur Abscissenaxe, d. h. macht man $\beta_2 = \beta_3 = 0$, so liefert diese Gleichung

$$\beta = \frac{\pm\sqrt{A^2 - C^2}}{2A'},$$

während $\alpha$ gegeben ist durch die Gleichung

$$\alpha = \frac{C}{2A'}.$$

Daraus geht hervor, dass die 2 Berührungskreise symmetrisch zur gemeinschaftlichen Centralen der gegebenen Kreise liegen. Um nun noch zu finden, wann es möglich ist, unter der Voraussetzung $D = 0$, die Berührungskreise zu construiren, bilden wir die Discriminante der Gleichung (40); dieselbe ist

$$\delta_1 = A'^2\left[C^2 \cdot \frac{\beta_3^2}{\alpha_3^2} - \left(1 + \frac{\beta_3^2}{\alpha_3^2}\right)\left(C^2 - A^2\right)\right],$$

oder nach der Entwickelung

$$\delta_1 = \frac{A'^2}{\alpha_3^2}\left[A^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2) - C^2\alpha_3^2\right].$$

Durch Wiedereinführung der Werthe von $A$ und $C$ aus (12) und (39) wird

$$\delta_1 = \frac{A'^2}{\alpha_3^2}\{p^2[\alpha_3^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2) - \alpha_3^2(r_1 - r_3)^2] + q^2[\alpha_2^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2) - \alpha_3^2(r_1 - r_2)^2]$$
$$- 2pq[\alpha_2\alpha_3(\alpha_3^2 + \beta_3^2) - \alpha_3^2(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)]\},$$

und wenn man in jedem Term der grossen Klammer $\alpha_3^2$ als Factor ausscheidet und die Relation $D = 0$ beachtet,

$$\delta_1 = \frac{A'^2}{\alpha_3^2}\{p^2\alpha_3^2[\alpha_3^2 + \beta_3^2 - (r_1 - r_3)^2] + q^2\alpha_3^2[\alpha_2^2 + \beta_2^2 - (r_1 - r_2)^2]$$
$$- 2pq\alpha_3^2[\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 - (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)]\},$$

oder

$$\delta_1 = A'^2\{p^2q + pq^2 - 2pq[\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 - (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)]\}$$

und endlich ebenso wie oben bei $\Delta_1$

$$\delta_1 = A'^2 pq[(\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\beta_2 - \beta_3)^2 - (r_2 - r_3)^2].$$

Nach den nämlichen Voraussetzungen und Folgerungen wie oben bei $\Delta_1$ erhält man hieraus

(41) $$\delta_1 = A'^2\varrho_1^2[c_{12} - (r_1 - r_2)][c_{13} - (r_1 - r_3)][c_{23} - (r_2 - r_3)].$$

In ähnlicher Weise wie oben findet man, dass auch das zweite, dritte und vierte Paar conjugirter Kreise aus gleichen, gleichartig berührenden und symmetrisch zur Centralen liegenden Kreisen besteht, und dass die zugehörigen Discriminanten $\delta_2$, $\delta_3$, $\delta_4$ bis auf den Factor $A'^2$ identisch sind mit den oben erhaltenen $\Delta_2$, $\Delta_3$, $\Delta_4$, gerade wie auch $\delta_1$ bis auf den Factor $A'^2$ identisch ist mit $\Delta_1$. Die Bedingungen der Möglichkeit in dem Specialfalle $D = 0$ sind also die nämlichen wie in dem allgemeinen Falle und es gelten auch hier die nämlichen Schlüsse wie dort.

Der Fall $D = 0$ schliesst auch noch den Fall in sich ein, wo die drei gegebenen Kreise dieselbe Potenzlinie haben. Die Gleichungen

$$2\,\alpha_2 x + 2\,\beta_2 y = r_1^2 - r_2^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 2\,r_1\,(r_1 - r_2) + p\,,$$
$$2\,\alpha_3 x + 2\,\beta_3 y = r_1^2 - r_3^2 + \alpha_3^2 + \beta_3^2 = 2\,r_1\,(r_1 - r_3) + q\,,$$

welche man erhält, indem man von Gleichung (1) nach einander die Gleichungen (2) und (3) abzieht und dann die Gleichungen (8) und (9) berücksichtigt, sind die Gleichungen der Potenzlinien des ersten und zweiten und des ersten und dritten Kreises. Sollen dieselben in eine Gerade zusammenfallen, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} \text{ oder } D = 0$$

und

$$\frac{2\,r_1\,(r_1 - r_2) + p}{\alpha_2} = \frac{2\,r_1\,(r_1 - r_3) + q}{\alpha_3}$$

oder

$$2\,r_1\,[\alpha_3\,(r_1 - r_2) - \alpha_2\,(r_1 - r_3)] = -\,[\alpha_3 p - \alpha_2 q]\,,$$

d. h. nach (12) und (14)

$$2\,r_1 A' = -\,A\,.$$

Die Gleichung (37) nimmt nach Einführung dieser Relation die Gestalt an

$$y^2 - 2\,r_1 y + r_1^2 = 0$$

und man erhält also für $y$ zwei gleiche Werthe, deren jeder $= r_1$ ist; ebenso würde man für $z$ aus Gleichung (38) zwei gleiche Werthe erhalten haben, deren jeder $= -\,r_1$ ist. Daraus folgt aber für $r$ jedesmal der Werth Null, d. h. die zwei Berührungskreise des ersten Paares reduciren sich für diesen Fall auf zwei Punkte, deren Coordinaten gefunden werden, indem man obige Relation in (40) einsetzt. Nimmt man auch jetzt die gemeinschaftliche Centrale zur Abscissenaxe, so folgt

$$\beta = \frac{\pm\sqrt{4\,r_1^2 A'^2 - C^2}}{2\,A'}$$

und

$$\alpha = \frac{C}{2\,A'}\,.$$

Durch dieselbe Voraussetzung über die Abscissenaxe wird aber die Gleichung der gemeinschaftlichen Potenzlinie der drei Kreise

$$2\,\alpha_2 x = 2\,r_1\,(r_1 - r_2) + p\,.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $A'$ und berücksichtigt die oben gefundene Relation $2\,r_1 A' = -\,A$, so erhält man

$$2\,\alpha_2 A' x = -A\,(r_1 - r_2) + p A',$$

oder, wenn man die Werthe von $A$ und $A'$ aus (12) und (14) substituirt,

$$\begin{aligned}2\alpha_2 A' x &= -p\alpha_3(r_1-r_2) + q\alpha_2(r_1-r_2) + p\alpha_3(r_1-r_2) - p\alpha_2(r_1-r_2)\\ &= q\alpha_2(r_1-r_2) - p\alpha_2(r_1-r_3)\\ &= \alpha_2 C,\end{aligned}$$

woraus, wie oben für $\alpha$,

$$x = \frac{C}{2A'}$$

folgt; setzt man diesen Werth von $x$ in die Gleichung (1) ein, so erhält man, ebenfalls wie oben für $\beta$,

$$y = \frac{\pm\sqrt{4r_1^2 A'^2 - C^2}}{2A'}.$$

Die zu 2 Punkten zusammengeschrumpftun Berührungskreise sind also identisch mit den 2 Schnittpunkten der gegebenen 3 Kreise. Ebenso beweist man, dass die Berührungskreise der 3 übrigen Paare in je 2 Punkte sich verwandeln, die mit den eben gefundenen identisch sind.

Wir haben gesehen, dass die Discriminanten $\delta$ noch einen Factor $A'^2$ bei sich hatten; derselbe ist für jedes $\delta$ verschieden, er ist

$$\begin{aligned}&\text{für } \delta_1\text{: } [\alpha_3(r_1-r_2) - \alpha_2(r_1-r_3)]^2,\\ &\text{für } \delta_2\text{: } [-\alpha_3(r_1+r_2) + \alpha_2(r_1+r_3)]^2,\\ &\text{für } \delta_3\text{: } [\alpha_3(r_1+r_2) + \alpha_2(r_1-r_3)]^2,\\ &\text{für } \delta_4\text{: } [\alpha_3(r_1-r_2) - \alpha_2(r_1+r_3)]^2.\end{aligned}$$

Für jedes $\delta$ kann nun das zugehörige $A'^2$ gleich Null werden; dies geschieht für $\delta_1$, wenn

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\beta_2}{\beta_3} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_3},$$

d. h. wenn die drei Kreise so liegen, dass der äussere Aehnlichkeitspunkt des ersten und zweiten auch der des zweiten und dritten ist. In diesem Falle ist $y$, also auch $r$ unendlich gross und die Mittelpunktscoordinaten ebenfalls, und zwar hat $\alpha$ das positive, $\beta$ das positive und negative Zeichen. In der That kann man dann an die drei Kreise zwei gemeinschaftliche geradlinige äussere Tangenten legen, die hier als Kreise mit unendlich grossem Radius anzusehen sind. Man darf aber nicht glauben, dass jetzt auch die übrigen $\delta$ Null seien; denn, wie oben bemerkt, ist der Factor $A'^2$ für die verschiedenen $\delta$ verschieden. Man hat deshalb ausser den zwei geradlinigen Tangenten im Allgemeinen noch 6 Auflösungen. Ebenso verhält es sich, wenn das $A'^2$, welches zu $\delta_2$, $\delta_3$ oder $\delta_4$ gehört, gleich Null wird. Das erste geschieht, wenn die drei Kreise so liegen, dass der innere Aehnlichkeitspunkt des ersten und zweiten zugleich der äussere des zweiten und dritten ist, das zweite, wenn der innere Aehnlichkeitspunkt des zweiten und dritten zugleich der äussere des dritten und ersten ist, das dritte, wenn der innere Aehnlichkeitspunkt des dritten und ersten zugleich der äussere des ersten und zweiten ist. In allen diesen Fällen können an die drei Kreise zwei gemeinschaftliche Tangenten gelegt werden und existiren ausserdem im Allgemeinen sechs Lösungen.

Bensheim a. d. Bergstrasse.

# Ueber ebene Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt.

Von B. Igel in Wien.

---

Die fundamentale Eigenschaft der ebenen Curven dritter Ordnung, welche einen Doppelpunkt besitzen, dass man ihre Punkte eindeutig auf die Punkte einer geraden Linie oder auf die Strahlen eines Büschels beziehen kann, bietet erhebliche Vortheile bei der Untersuchung solcher Curven und ist zu diesem Behufe mehrfach in Anwendung gebracht worden*). Aber, so viel ich weiss, hat man die Betrachtung nicht in dem Sinne durchgeführt, dass drei *allgemeine* cubische Formen bei der analytischen Darstellung zu Grunde gelegt werden, und in Folge dessen ist der Zusammenhang mit der algebraischen Theorie der cubischen Formen nicht erörtert worden. Ich will daher im vorliegenden Aufsatze versuchen, gewisse Aufgaben, welche bei einer ebenen Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt auftreten, zu behandeln, indem ich die homogenen Coordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ des beweglichen Punktes der Curve ausdrücke durch den Parameter $\lambda_1 : \lambda_2$ mittelst dreier Functionen dritten Grades mit allgemeinen Coefficienten:

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(\lambda) = a_0\lambda_1^3 + 3\,a_1\lambda_1^2\lambda_2 + 3\,a_2\lambda_1\lambda_2^2 + a_3\lambda_2^3 \\ f_2(\lambda) = b_0\lambda_1^3 + 3\,b_1\lambda_1^2\lambda_2 + 3\,b_2\lambda_1\lambda_2^2 + b_3\lambda_2^3 \\ f_3(\lambda) = c_0\lambda_1^3 + 2\,c_1\lambda_1^2\lambda_2 + 3\,c_2\lambda_1\lambda_2^2 + c_3\lambda_2^3. \end{cases}$$

1. Für die Werthe des Parameters, welche den Schnittpunkten der durch die Gleichungen:

$$(2)\qquad x_1 = f_1(\lambda)\,, \quad x_2 = f_2(\lambda)\,, \quad x_3 = f_3(\lambda)$$

dargestellten Curve mit einer beliebigen Geraden

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

entsprechen, hat man die cubische Gleichung

$$(3)\qquad u_1f_1(\lambda) + u_2f_2(\lambda) + u_3f_3(\lambda) = 0\,;$$

---

*) Vgl. besonders Durège Mathem. Annalen Bd. I. S. 509, Weyr ebendas. Bd. III. S. 235, und Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. Bd. XV. S. 383.

und es liefert umgekehrt jede cubische Gleichung von der Form (3) solche Punkte der Curve, welche in gerader Linie liegen. Es seien $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$, $\pi_1 : \pi_2$ die drei Wurzeln der Gleichung (3); dann ist, wenn der Factor $A$ passend bestimmt wird, identisch:

$$u_1 f_1(\lambda) + u_2 f_2(\lambda) + u_3 f_3(\lambda) = 3A(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(\lambda_1\nu_2 - \lambda_2\nu_1)(\lambda_1\pi_2 - \lambda_2\pi_1).$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von $\lambda_1$, $\lambda_2$ auf beiden Seiten erhält man vier Gleichungen:

$$u_1 a_0 + u_2 b_0 + u_3 c_0 = A \cdot 3\,\mu_2\nu_2\pi_2, \cdots\cdots,$$
$$u_1 a_3 + u_2 b_3 + u_3 c_3 = -A \cdot 3\,\mu_1\nu_1\pi_1,$$

aus welchen durch Elimination von $u_1$, $u_2$, $u_3$, $A$ die Bedingung resultirt, welche die Parameter $\mu$, $\nu$, $\pi$ von *drei in gerader Linie gelegenen Punkten* der Curve (2) erfüllen müssen:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & 3\,\mu_2\nu_2\pi_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & -\mu_1\nu_2\pi_2 - \nu_1\pi_2\mu_2 - \pi_1\mu_2\nu_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \mu_2\nu_1\pi_1 + \nu_2\pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_1\nu_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -3\,\mu_1\nu_1\pi_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Bedingung vereinfacht sich, wenn man für die Determinanten aus den Coefficienten $a$, $b$, $c$ die Bezeichnungen $\frac{1}{3}A_0$, $A_1$, $A_2$, $\frac{1}{3}A_3$ einführt, und zwar so, dass für beliebige Grössen $g$:

$$(5) \qquad 3\,\Sigma \pm a_0 b_1 c_2 g_3 = A_3 g_0 - 3\,A_2 g_1 + 3\,A_1 g_2 - A_0 g_3.$$

Die Gleichung (4) nimmt nämlich dadurch folgende Form an:

$$(6) \qquad A_0\mu_1\nu_1\pi_1 + A_1(\mu_2\nu_1\pi_1 + \nu_2\pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_1\nu_1)$$
$$+ A_2(\mu_1\nu_2\pi_2 + \nu_1\pi_2\mu_2 + \pi_1\mu_2\nu_2) + A_3\mu_2\nu_2\pi_2 = 0.$$

Wenn nicht die Parameter der drei in gerader Linie gelegenen Punkte gegeben sind, sondern die Gleichung, durch welche sie bestimmt werden:

$$g_0\lambda_1^3 + 3\,g_1\lambda_1^2\lambda_2 + 3\,g_2\lambda_1\lambda_2^2 + g_3\lambda_2^3 = 0,$$

so lautet die Bedingung zwischen den Coefficienten $g$:

$$(6^a) \qquad A_3 g_0 - 3\,A_2 g_1 + 3\,A_1 g_2 - A_0 g_3 = 0.$$

Man kann noch durch ein anderes Verfahren zur Gleichung (6) gelangen. Es ist nämlich

$$\begin{vmatrix} f_1(\mu) & f_1(\nu) & f_1(\pi) \\ f_2(\mu) & f_2(\nu) & f_2(\pi) \\ f_3(\mu) & f_3(\nu) & f_3(\pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 a_1 a_2 a_3 \\ b_0 b_1 b_2 b_3 \\ c_0 c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \mu_1^3 & 3\mu_1^2\mu_2 & 3\mu_1\mu_2^2 & \mu_2^3 \\ \nu_1^3 & 3\nu_1^2\nu_2 & 3\nu_1\nu_2^2 & \nu_2^3 \\ \pi_1^3 & 3\pi_1^2\pi_2 & 3\pi_1\pi_2^2 & \pi_2^3 \end{vmatrix}.$$

Man erhält also statt der Bedingung (4), wenn man die Bezeichnungen (5) anwendet, die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \mu_1^3 & \mu_1^2\mu_2 & \mu_1\mu_2^2 & \mu_2^3 \\ \nu_1^3 & \nu_1^2\nu_2 & \nu_1\nu_2^2 & \nu_2^3 \\ \pi_1^3 & \pi_1^2\pi_2 & \pi_1\pi_2^2 & \pi_2^3 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & -A_0 \end{vmatrix} = 0,$$

und daraus folgt die Gleichung (6) durch Beseitigung des überflüssigen Factors

$$(\nu_1\pi_2 - \nu_2\pi_1)(\pi_1\mu_2 - \pi_2\mu_1)(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1).$$

2. Wenn zwei Punkte der Curve (2) durch ihre Parameter $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ gegeben sind, so dient die Gleichung (6) zur Berechnung des Parameters $\pi_1 : \pi_2$, welcher dem dritten Durchschnittspunkt der Curve mit der Verbindungslinie jener beiden Punkte entspricht. Wird aber statt der Parameter $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ die quadratische Gleichung gegeben, deren Wurzeln sie sind, etwa

$$k_0\lambda_1^2 + 2k_1\lambda_1\lambda_2 + k_2\lambda_2^2 = 0,$$

so ergiebt sich folgende Gleichung für den Parameter $\pi_1 : \pi_2$ des dritten Punktes:

(7) $$\pi_1(A_2k_0 - 2A_1k_1 + A_0k_2) + \pi_2(A_3k_0 - 2A_2k_1 + A_1k_2) = 0.$$

Wir stellen nun die allgemeinere Frage nach der Gleichung der Geraden, welche die Punkte $(\mu_1 : \mu_2)$ und $(\nu_1 : \nu_2)$ verbindet. Wenn man aus den fünf Gleichungen

$$x_1 = f_1(\mu), \quad x_2 = f_2(\mu), \quad x_3 = f_3(\mu), \quad 0 = k_0\mu_1^3 + 2k_1\mu_1^2\mu_2 + k_2\mu_1\mu_2^2,$$
$$0 = k_0\mu_1^2\mu_2 + 2k_1\mu_1\mu_2^2 + k_2\mu_2^3$$

die vier Grössen $\mu_1^3$, $\mu_1^2\mu_2$, $\mu_1\mu_2^2$, $\mu_2^3$ eliminirt, so ergiebt sich zwischen $x_1$, $x_2$, $x_3$ eine homogene lineare Gleichung. Diese wird sowohl vom Punkte $(\mu_1 : \mu_2)$ als vom Punkte $(\nu_1 : \nu_2)$ erfüllt, folglich repräsentirt sie die *Verbindungslinie der zwei Curvenpunkte*. Sie lautet:

(8) $$\begin{vmatrix} x_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ x_2 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ x_3 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 3k_0 & 2k_1 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 & 2k_1 & 3k_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Man würde dasselbe Resultat finden, wenn man die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & f_1(\mu) & f_1(\nu) \\ x_2 & f_2(\mu) & f_2(\nu) \\ x_3 & f_3(\mu) & f_3(\nu) \end{vmatrix} = 0$$

durch $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1$ dividirt; denn es ist

$$k_0 = \mu_2\nu_2, \quad 2k_1 = -\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1, \quad k_2 = \mu_1\nu_1.$$

Wenn man diese Werthe einsetzt, so wird die Gleichung (8) vom zweiten Grade sowohl in Bezug auf $\mu_1$, $\mu_2$ als auf $\nu_1$, $\nu_2$. Es entspringt daraus die *Gleichung der Tangente*, welche die Curve (2) im Punkte $(\mu_1 : \mu_2)$ berührt, indem man $\nu_1 = \mu_1$, $\nu_2 = \mu_2$ setzt:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ x_2 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ x_3 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 3\mu_2^2 & -2\mu_1\mu_2 & \mu_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2^2 & -2\mu_1\mu_2 & 3\mu_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sie ist vom vierten Grade in Bezug auf $\mu_1$, $\mu_2$ und lässt sich einfacher schreiben:

$$(9^a) \qquad x_1 F_1(\mu) + x_2 F_2(\mu) + x_3 F_3(\mu) = 0,$$

wenn man folgende Bezeichnungen einführt:

$$F_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\frac{\partial f_2(\lambda)}{\partial \lambda_1} & \frac{1}{3}\frac{\partial f_3(\lambda)}{\partial \lambda_1} \\ \frac{1}{3}\frac{\partial f_2(\lambda)}{\partial \lambda_2} & \frac{1}{3}\frac{\partial f_3(\lambda)}{\partial \lambda_2} \end{vmatrix}, \quad F_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\frac{\partial f_3(\lambda)}{\partial \lambda_1} & \frac{1}{3}\frac{\partial f_1(\lambda)}{\partial \lambda_1} \\ \frac{1}{3}\frac{\partial f_3(\lambda)}{\partial \lambda_2} & \frac{1}{3}\frac{\partial f_1(\lambda)}{\partial \lambda_2} \end{vmatrix},$$

$$(10) \qquad F_3(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\frac{\partial f_1(\lambda)}{\partial \lambda_1} & \frac{1}{3}\frac{\partial f_2(\lambda)}{\partial \lambda_1} \\ \frac{1}{3}\frac{\partial f_1(\lambda)}{\partial \lambda_2} & \frac{1}{3}\frac{\partial f_2(\lambda)}{\partial \lambda_2} \end{vmatrix}.$$

In der That kann man die linke Seite der Gleichung (9) auf die Form bringen:

$$\frac{1}{\mu_1^4} \begin{vmatrix} x_1 & \frac{1}{3}\frac{\partial f_1(\mu)}{\partial \mu_1} & \frac{1}{3}\frac{\partial f_1(\mu)}{\partial \mu_2} & a_2 & a_3 \\ x_2 & \frac{1}{3}\frac{\partial f_2(\mu)}{\partial \mu_1} & \frac{1}{3}\frac{\partial f_2(\mu)}{\partial \mu_2} & b_2 & b_3 \\ x_3 & \frac{1}{3}\frac{\partial f_3(\mu)}{\partial \mu_1} & \frac{1}{3}\frac{\partial f_3(\mu)}{\partial \mu_2} & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\mu_1\mu_2 & 3\mu_1^2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & \frac{1}{3}\frac{\partial f_1(\mu)}{\partial \mu_1} & \frac{1}{3}\frac{\partial f_1(\mu)}{\partial \mu_2} \\ x_2 & \frac{1}{3}\frac{\partial f_2(\mu)}{\partial \mu_1} & \frac{1}{3}\frac{\partial f_2(\mu)}{\partial \mu_2} \\ x_3 & \frac{1}{3}\frac{\partial f_3(\mu)}{\partial \mu_1} & \frac{1}{3}\frac{\partial f_3(\mu)}{\partial \mu_2} \end{vmatrix}.$$

3. Um den Punkt $(\pi_1 : \pi_2)$ zu finden, in welchem die im Punkte $(\mu_1 : \mu_2)$ gezogene Tangente der Curve nochmals begegnet, den *Tangentialpunkt von* $(\mu_1 : \mu_2)$, hat man nur nöthig, in Gleichung (7)

$$k_0 = \mu_2^2, \quad k_1 = -\mu_1\mu_2, \quad k_2 = \mu_1^2$$

zu setzen, wodurch man erhält:

$$(11) \quad \pi_1(A_0\mu_1^2 + 2A_1\mu_1\mu_2 + A_2\mu_2^2) + \pi_2(A_1\mu_1^2 + 2A_2\mu_1\mu_2 + A_3\mu_2^2) = 0.$$

Wenn $(\pi_1 : \pi_2)$ gegeben ist, so hat man (11) als eine quadratische Gleichung zu betrachten, welche für $(\mu_1 : \mu_2)$ zwei Werthe liefert, entsprechend den Berührungspunkten der beiden Tangenten, welche vom Punkte $(\pi_1 : \pi_2)$ aus an die Curve gezogen werden können.

Die drei *Inflexionspunkte* der Curve dritter Ordnung ergeben sich jetzt ohne Weiteres aus (11), indem man annimmt, dass der Tangentialpunkt mit dem Berührungspunkte zusammenfällt. Sie genügen der cubischen Gleichung:

$$\varphi(\lambda) = 0\,,$$

wenn man mit $\varphi(\lambda)$ die für unsere Untersuchung sehr wichtige Form

$$(12) \qquad A_0\lambda_1^3 + 3\,A_1\lambda_1^2\lambda_2 + 3\,A_2\lambda_1\lambda_2^2 + A_3\lambda_2^3 = \varphi(\lambda)$$

bezeichnet.

Die Coefficienten dieser Form befriedigen, an Stelle von $g_0 \cdots g_3$ eingetragen, die Bedingung ($6^a$). Daraus folgt der bekannte Satz, dass die drei Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung, welche einen Doppelpunkt besitzt, in gerader Linie liegen. Es ist leicht, $\varphi(\lambda) = 0$ auf die Form (3) zu bringen; denn nach (5) ist

$$\Sigma \pm a_0 b_1 c_2 A_3 = 0\,, \quad \text{also} \quad \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & a_0 & a_1 & a_2 \\ f_2(\lambda) & b_0 & b_1 & b_2 \\ f_3(\lambda) & c_0 & c_1 & c_2 \\ \varphi(\lambda) & A_0 & A_1 & A_2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

und indem man diese Determinante ausführt, resultirt eine Beziehung von der Form

$$(12^a) \qquad v_1 f_1(\lambda) + v_2 f_2(\lambda) + v_3 f_3(\lambda) = A_0\varphi(\lambda)\,.$$

Die Grössen $v_1$, $v_2$, $v_3$ sind die Coordinaten der Verbindungslinie der drei Wendepunkte.

Die Gleichungen (6), (7) und (11) enthalten die Coefficienten der drei gegebenen Formen (1) nur in denjenigen Verbindungen, welche Coefficienten von $\varphi(\lambda)$ sind, und lassen sich daher zu dieser Form in einfache Beziehung bringen. Um die Beziehung zwischen einem Punkte $(\mu_1 : \mu_2)$ und seinem Tangentialpunkte auszudrücken, bildet man durch Differentiation die Function:

$$(13) \quad \varphi(\mu, \pi) = \tfrac{1}{3}\left\{\pi_1 \frac{\partial\varphi(\mu)}{\partial\mu_1} + \pi_2 \frac{\partial\varphi(\mu)}{\partial\mu_2}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{6}\left\{\mu_1^2 \frac{\partial^2\varphi(\pi)}{\partial\pi_1^2} + 2\,\mu_1\mu_2 \frac{\partial\varphi(\pi)}{\partial\pi_1\partial\pi_2} + \mu_2^2 \frac{\partial^2\varphi(\pi)}{\partial\pi_2^2}\right\};$$

dies ist die linke Seite der Gleichung (11). Für die linke Seite der Gleichung (7) folgt daraus sofort der Werth:

$$\tfrac{1}{6}\left\{k_0 \frac{\partial^2\varphi(\pi)}{\partial\pi_2^2} - 2\,k_1 \frac{\partial^2\varphi(\pi)}{\partial\pi_1\partial\pi_2} + k_2 \frac{\partial^2\varphi(\pi)}{\partial\pi_2^2}\right\};$$

verschwindet dieser Ausdruck, so liefert die Gleichung

$$k_0\lambda_1^2 + 2\,k_1\lambda_1\lambda_2 + k_2\lambda_2^2 = 0$$

die Parameter von zwei Punkten, welche mit $(\pi_1 : \pi_2)$ in gerader Linie liegen. Bildet man endlich durch nochmaliges Differentiiren die Function

$$(14) \qquad \varphi(\mu, \nu, \pi) = \tfrac{1}{2}\left\{\nu_1 \frac{\partial\varphi(\mu\pi)}{\partial\mu_1} + \nu_2 \frac{\partial\varphi(\mu\pi)}{\partial\mu_2}\right\},$$

so ist $\varphi(\mu, \nu, \pi) = 0$ die Bedingung (6) für drei Punkte in einer Geraden.

4. Die Function $\varphi(\lambda)$ kann in drei lineare Factoren zerlegt werden:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda_1\alpha_2 - \lambda_2\alpha_1)(\lambda_1\beta_2 - \lambda_2\beta_1)(\lambda_1\gamma_2 - \lambda_2\gamma_1) = A \cdot B \cdot C,$$

wo $(\alpha_1 : \alpha_2)$, $(\beta_1 : \beta_2)$, $(\gamma_1 : \gamma_2)$ den drei Wendepunkten entsprechen. Die Gleichungen:

$$A^3 \equiv (\lambda_1\alpha_2 - \lambda_2\alpha_1)^3 = 0, \quad B^3 \equiv (\lambda_1\beta_2 - \lambda_2\beta_1)^3 = 0, \quad C^3 \equiv (\lambda_1\gamma_2 - \lambda_2\gamma_1)^3 = 0$$

repräsentiren alsdann die den einzelnen Wendetangenten entsprechenden Systeme von Schnittpunkten mit der Curve und müssen daher auf die Form der Gleichung (3) gebracht werden können; d. h. es existiren solche Constanten $p$, $q$, $r$, dass

$$(15) \qquad \begin{cases} A^3 = p_1 f_1(\lambda) + p_2 f_2(\lambda) + p_3 f_3(\lambda) \\ B^3 = q_1 f_1(\lambda) + q_2 f_2(\lambda) + q_3 f_3(\lambda) \\ C^3 = r_1 f_1(\lambda) + r_2 f_2(\lambda) + r_3 f_3(\lambda). \end{cases}$$

Die Grössen $(p_1, p_2, p_3)$, $(q_1, q_2, q_3)$, $(r_1, r_2, r_3)$ sind nichts Anderes als die *Coordinaten der Wendetangenten* der Curve (2).

Die Gleichungen (15) wollen wir in Bezug auf $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $f_3(\lambda)$ auflösen. Dann kommen Relationen von folgender Gestalt heraus*):

$$(15^a) \qquad \begin{cases} f_1(\lambda) = \xi_1 A^3 + \eta_1 B^3 + \zeta_1 C^3 \\ f_2(\lambda) = \xi_2 A^3 + \eta_2 B^3 + \zeta_2 C^3 \\ f_3(\lambda) = \xi_3 A^3 + \eta_3 B^3 + \zeta_3 C^3. \end{cases}$$

Hierin sind $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ die Coordinaten der Ecken des von den Wendetangenten gebildeten Dreiecks.

Hält man die Gleichung ($12^a$) mit ($15^a$) zusammen, so gelangt man zu dem interessanten Resultat, dass auch die Function $\varphi(\lambda)$ sich aus den Cuben der linearen Factoren $A$, $B$, $C$ zusammensetzen lässt. Denn es nimmt dann $\varphi(\lambda)$ die Form an:

$$\varphi(\lambda) = \alpha A^3 + \beta B^3 + \gamma C^3.$$

Durch die Gleichungen (15) wird es nahe gelegt, auf die Coordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ eine lineare Transformation anzuwenden, und zwar seien die neuen Coordinaten $y_1$, $y_2$, $y_3$:

---

*) Es ist dies nur ein specieller Fall eines ganz allgemeinen Satzes, welchen Herr Rosanes in Borchardt's Journal, Bd. 75, S. 172, aufgestellt hat.

$$y_1 = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3$$
$$y_2 = q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3$$
$$y_3 = r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 .$$

Die Darstellung der Curve (2) in den neuen Coordinaten hat dann eine sehr elegante Gestalt, indem statt der allgemeinen Formen (1) die Cuben von drei beliebigen linearen Formen auftreten. Es wird

(16) $$y_1 = A^3, \quad y_2 = B^3, \quad y_3 = C^3 .$$

Jedoch werden alle diese Schlüsse illusorisch, wenn die Factoren der Function $\varphi(\lambda)$ nicht sämmtlich von einander verschieden sind. Es würde dieser Ausnahmsfall eintreten, wenn die Curve nicht einen Doppelpunkt, sondern einen Rückkehrpunkt besitzt.

5. Der Doppelpunkt der Curve (2) ist dadurch vor ihren übrigen Punkten ausgezeichnet, dass ihm zwei verschiedene Werthe des Parameters $\lambda_1 : \lambda_2$ entsprechen.

Sind $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ diese beiden Werthe, so entstehen die Gleichungen:

$$f_1(\mu) : f_2(\mu) : f_3(\mu) = f_1(\nu) : f_2(\nu) : f_3(\nu) .$$

Aus einem Systeme von solcher Art hat Herr Haase*) für rationale Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung in Form einer Determinante die Gleichung $(n-1)(n-2)^{\text{ten}}$ Grades hergestellt, von welcher die Parameter der $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte abhängen. In unserem speciellen Falle handelt es sich nur um eine quadratische Gleichung, wobei ein einfaches Verfahren eingeschlagen werden kann.

Denkt man sich nämlich einen Punkt $(\pi_1 : \pi_2)$ auf der Curve festgehalten und eine Gerade um ihn gedreht, so schneidet dieselbe die Curve in einer Reihe von Punktepaaren. Ist

$$k_0 \lambda_1^2 + 2 k_1 \lambda_1 \lambda_2 + k_2 \lambda_2^2 = 0$$

die Gleichung für die Parameter eines solchen Punktepaares, so erfüllen die Coëfficienten $k$ die Relation (7):

$$\pi_1 (A_2 k_0 - 2 A_1 k_1 + A_0 k_2) + \pi_2 (A_3 k_0 - 2 A_2 k_1 + A_1 k_2) = 0 .$$

Es giebt nun immer eine Lage des Strahles, in welcher das Punktepaar durch den doppelt zu zählenden Doppelpunkt der Curve vertreten wird. Diese Lage tritt ein, wenn die Coefficienten $k$ den beiden Werthen, welche der Parameter für den Doppelpunkt annimmt, entsprechen. Alsdann wird die Gleichung (7) immer erfüllt, welche Werthe auch $\pi_1 : \pi_2$ haben mag. Dadurch aber zerlegt sie sich in folgende zwei Gleichungen für die Grössen $k$:

$$A_2 k_0 - 2 A_1 k_1 + A_0 k_2 = 0 , \quad A_3 k_0 - 2 A_2 k_1 + A_1 k_2 = 0 .$$

*) Mathem. Annalen, Bd. II, S. 526.

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich sofort die Gleichung, welcher die Parameter *des Doppelpunktes* genügen müssen, in Form einer Determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 \\ A_2 & -A_1 & A_0 \\ A_3 & -A_2 & A_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{d. i.:}$$

$$(A_0A_2 - A_1^2)\lambda_1^2 + (A_0A_3 - A_1A_2)\lambda_1\lambda_2 + (A_1A_3 - A_2^2)\lambda_2^2 = 0.$$

Die linke Seite ist offenbar die Hesse'sche Determinante, von $\varphi(\lambda)$, welche ich mit $\Delta(\lambda)$ bezeichnen will:

$$(17) \qquad \Delta(\lambda) = \delta_0\lambda_1^2 + 2\delta_1\lambda_1\lambda_2 + \delta_2\lambda_2^2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{6}\frac{\partial^2\varphi(\lambda)}{\partial\lambda_1^2} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2\varphi(\lambda)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} \\ \frac{1}{6}\frac{\partial^2\varphi(\lambda)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2} & \frac{1}{6}\frac{\partial^2\varphi(\lambda)}{\partial\lambda_2^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_0\lambda_1 + A_1\lambda_2 & A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 \\ A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 & A_2\lambda_1 + A_3\lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Es mag noch eine andere Betrachtung erwähnt werden, welche zu dem vorstehenden Resultat führt. Wir fanden, dass $\varphi(\mu, \nu, \pi)$ verschwindet, wenn die Punkte $(\mu_1 : \mu_2)$, $(\nu_1 : \nu_2)$, $(\pi_1 : \pi_2)$ in einer Geraden liegen. Dies ist aber stets der Fall, sobald $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$ die Parameter des Doppelpunktes sind, welchen Werth auch $\pi_1 : \pi_2$ haben mag. Folglich ergeben sich für den Doppelpunkt, da $\varphi(\mu, \nu, \pi)$ in Bezug auf $\mu, \nu, \pi$ symmetrisch ist, aus (14) und (13) die Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial\varphi(\mu,\nu)}{\partial\mu_1} = \tfrac{1}{6}\left\{\nu_1\frac{\partial^2\varphi(\mu)}{\partial\mu_1^2} + \nu_2\frac{\partial^2\varphi(\mu)}{\partial\mu_1\partial\mu_2}\right\} = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial\varphi(\mu,\nu)}{\partial\mu_2} = \tfrac{1}{6}\left\{\nu_1\frac{\partial^2\varphi(\mu)}{\partial\mu_1\partial\mu_2} + \nu_2\frac{\partial^2\varphi(\mu)}{\partial\mu_2^2}\right\} = 0,$$

und hieraus folgt, indem man $\nu_1, \nu_2$ eliminirt: $\Delta(\mu) = 0$. Es sind also die dem Doppelpunkte entsprechenden Parameter diejenigen, für welche die Hesse'sche Determinante von $\varphi(\lambda)$ verschwindet.

Die drei Wurzeln der Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ bilden mit den beiden Wurzeln der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ ein „cyclisch-projectivisches System"*). Nun ist es bekannt, dass man den Parameter $\lambda_1 : \lambda_2$ geometrisch deuten kann als den Parameter eines um den Doppelpunkt der Curve (2) sich drehenden Strahles, welcher durch den entsprechenden Punkt der Curve geht. Demnach ergiebt sich der Satz: „Die Strahlen, welche vom Doppelpunkte nach den Wendepunkten gehen, bilden mit den Tangenten im Doppelpunkte ein cyclisch-projectivisches System."

6. Von einem beliebigen Punkte $(\pi_1 : \pi_2)$ der Curve können zwei Tangenten an dieselbe gezogen werden. Nennen wir $\mu_1 : \mu_2$, $\nu_1 : \nu_2$

*) Clebsch Theorie der binären algebraischen Formen. S. 133 und 351.

die Parameter der Berührungspunkte, also die Wurzeln der Gleichung (11) oder $\varphi(\mu, \pi) = 0$, und vergleicht man in der Identität:

$$\varphi(\lambda\pi) = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(\lambda_1\nu_2 - \lambda_2\nu_1)$$

die Coefficienten von $\lambda_1$, $\lambda_2$ auf beiden Seiten, so kommt:

$$\mu_2\nu_2 = \pi_1 A_0 + \pi_2 A_1, \quad \tfrac{1}{2}(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1) = -(\pi_1 A_1 + \pi_2 A_2),$$
$$\mu_1\nu_1 = \pi_1 A_2 + \pi_2 A_3,$$

und daraus durch Elimination von $\pi_1$, $\pi_2$:

$$\begin{vmatrix} \mu_1\nu_1 & \tfrac{1}{2}(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1) & \mu_2\nu_2 \\ A_2 & -A_1 & A_0 \\ A_3 & -A_2 & A_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Relation zwischen *zwei Punkten mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkt*, welche offenbar auch so geschrieben werden kann:

$$(18)\quad \delta_0\mu_1\nu_1 + \delta_1(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1) + \delta_2\mu_2\nu_2 = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}\left\{\nu_1\frac{\partial\Delta(\mu)}{\partial\mu_1} + \nu_2\frac{\partial\Delta(\mu)}{\partial\mu_2}\right\} = 0.$$

Man findet dieselbe auch, indem man aus den Gleichungen

$$\pi_1\frac{\partial\varphi(\mu)}{\partial\mu_1} + \pi_2\frac{\partial\varphi(\mu)}{\partial\mu_2} = 0, \quad \pi_1\frac{\partial\varphi(\nu)}{\partial\nu_1} + \pi_2\frac{\partial\varphi(\nu)}{\partial\nu_2} = 0$$

$\pi_1$, $\pi_2$ eliminirt und die entstehende Gleichung von dem Factor $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1$ befreit. Durch die Gleichung (18) werden die Punkte der Curve einander paarweise zugeordnet, und ihre Form sagt aus, dass die Strahlenpaare, welche vom Doppelpunkte nach solchen Punktepaaren hingehen, eine Involution bilden, deren Doppelstrahlen die Tangenten des Doppelpunktes sind.*) Wenn die Tangente im Punkte $(\mu_1 : \mu_2)$ durch einen Wendepunkt $(\alpha_1 : \alpha_2)$ hindurchgeht, so sind $(\alpha_1 : \alpha_2)$ und $(\mu_1 : \mu_2)$ entsprechende Punkte. Dann hat man:

$$\alpha_1\frac{\partial\Delta(\mu)}{\partial\mu_1} + \alpha_2\frac{\partial\Delta(\mu)}{\partial\mu_2} = 0, \quad \alpha_1\frac{\partial\varphi(\mu)}{\partial\mu_1} + \alpha_2\frac{\partial\varphi(\mu)}{\partial\mu_2} = 0,$$

und man erhält also für *die drei Punkte, deren Tangentialpunkte die Wendepunkte sind*, d. Gl.: $Q(\lambda) = 0$, wenn man bezeichnet:

$$\begin{vmatrix} \tfrac{1}{2}\frac{\partial\Delta(\lambda)}{\partial\lambda_1} & \tfrac{1}{2}\frac{\partial\Delta(\lambda)}{\partial\lambda_2} \\ \tfrac{1}{2}\frac{\partial\varphi(\lambda)}{\partial\lambda_1} & \tfrac{1}{2}\frac{\partial\varphi(\lambda)}{\partial\lambda_2} \end{vmatrix} = Q(\lambda).$$

Die Strahlen, welche diese drei Punkte mit dem Doppelpunkte verbinden (die harmonischen Polaren der Wendepunkte) werden durch dieselbe Gleichung bestimmt, und es folgt daraus nach der Theorie

*) Vgl. Weyr, Ztschr. f. Mathem. und Phys., Bd. XV., S. 383.

der cubischen Formen*) unmittelbar der Satz: „Construirt man zu den drei Strahlen, welche den Doppelpunkt mit den drei Inflexionspunkten verbinden, den vierten harmonischen Strahl, welcher einem bestimmten conjugirt ist, so erhält man die entsprechende harmonische Polare.“**)

Auch die Modificationen, welche eintreten, wenn die Discriminante von $\varphi(\lambda)$, d. i. die von $\Delta(\lambda)$, verschwindet, wenn also der Doppelpunkt zu einem Rückkehrpunkt wird, folgen unmittelbar aus den Eigenschaften der cubischen Formen. Doch mag eine weitere Verfolgung des Gegenstandes für eine spätere Veröffentlichung vorbehalten bleiben.

Wien, den 13. Januar 1873.

*) Clebsch, a. a. O. S. 352.
**) Vgl. Durège a. a. O. S. 518.

## Verbesserungen.

S. 36. Zeile 1. Statt „Hilfe von $f(x)=0$ ..... noch $\frac{y_1}{y_2}$ eliminirt und den Grad ...“ lies: „*Hilfe von* $f(y)=0$ *die Coordinaten von y aus* $\varphi(xy)=0$ *und* $\varphi'(xy)=0$ *eliminirt, aus der so entstehenden Gleichung und* $f(x)=0$ *noch* $x_3$ *eliminirt, und den Grad* ...“

S. 36. Zeile 15. Statt „$\gamma'$ mal“ lies: „$\gamma' n$ *mal, wo n der Grad von f ist*“.

S. 36. Zeile 22. Statt: „so scheide man den Factor ..... entsteht“ lies: „*so scheide man den Factor* $\varphi(xx)$, *welcher in der Gleichung, die durch Elimination der y entsteht*“.

S. 63. in der Formel Zeile 9 von unten füge rechts das Glied zu: $2p(p-1)\cdot\frac{1}{2}$.

S. 63. in der Formel Zeile 6 von unten füge rechts das Glied zu: $2p(p-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.

S. 63. in der Formel letzte Zeile statt: $3p(p-1)$ lies: $\frac{p(p-1)}{2}$.

S. 64. in der Formel Zeile 27 statt: $+3\cdot 56=154$ lies: $+\frac{56}{2}=14$.

S. 247. Zeile 20 von oben zu lesen: $6\sigma$.

S. 261. Zeile 11 von unten ist zu lesen: $2(n\nu+\varrho-2\nu)$.

S. 369. Zeile 13 von oben statt: „de toute“ liess: „d'une“.

S. 371. Zeile 4 von oben statt: „$\cdot\cdot+2kxy+2lxz+\cdot\cdot$“ liess: „$+2kx_1y+2lx_1z+\cdot\cdot\cdot$“

S. 373. Zeile 28 von oben statt: „$y=1$“ liess: „$y=0$“.

S. 373. Zeile 30 von oben statt: „donne“ liess: „donnent“.

S. 379. Zeile 5 von oben statt: „Surpasser“ liess: „être inférieur“.

S. 382. Zeile 5 von oben statt: „inégalités“ liess: „identités“.

S. 385. Zeile 7 von oben statt: „$y=1$, $t=0$“ liess: „$y=0$, $t=1$“.

S. 388. Zeile 21 von oben statt: „sont“ liess: „ont“.

S. 389. Zeile 7 von oben statt: „sont“ liess: „ont“.

Taf. I.

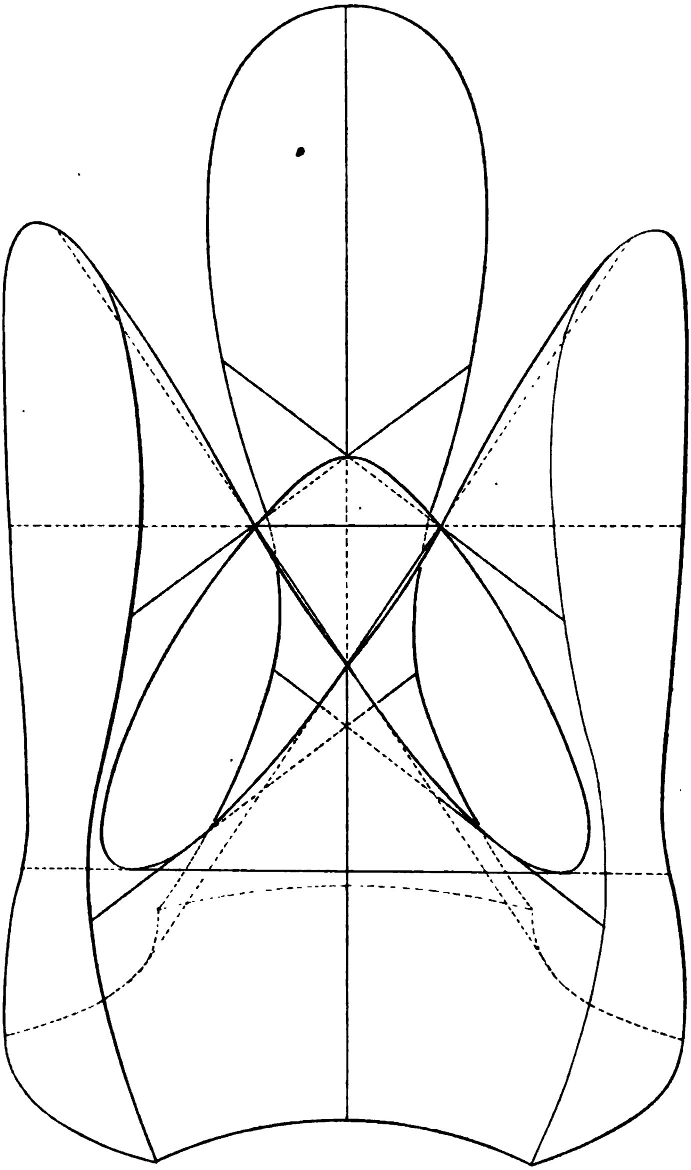


Fig. 1.

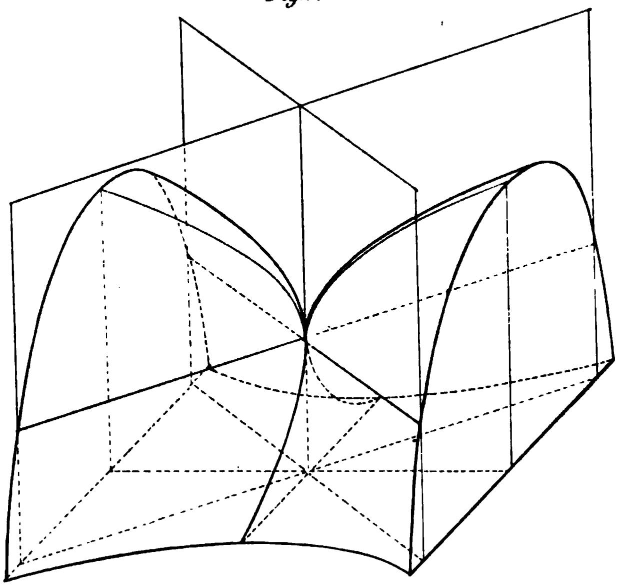


Fig. 2.

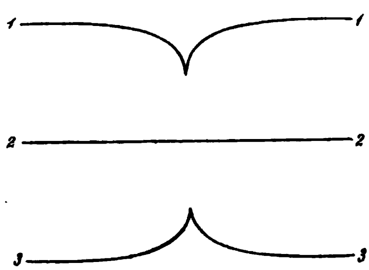


Fig. 1.

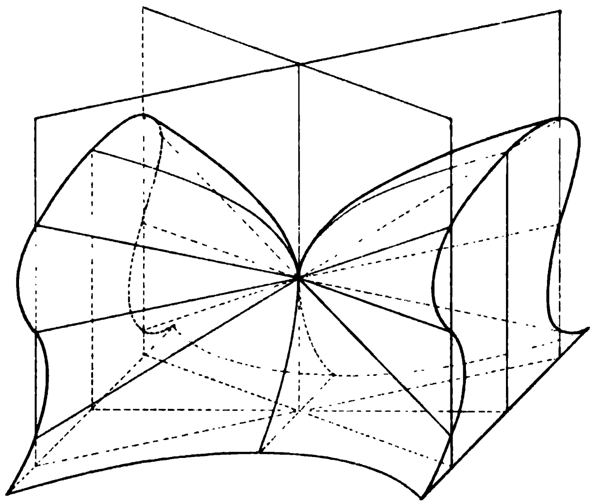


Fig. 2.

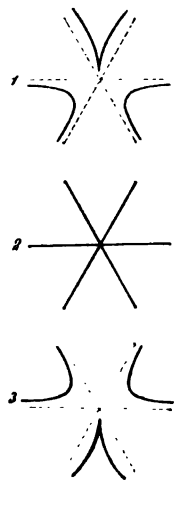


Fig. 1.

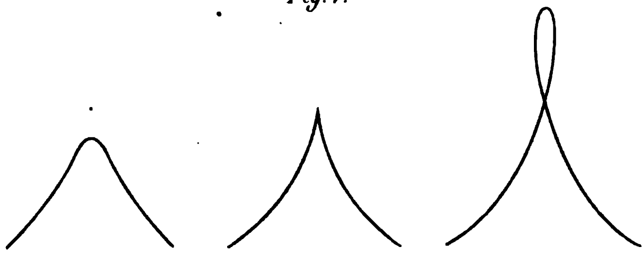


Fig. 2.

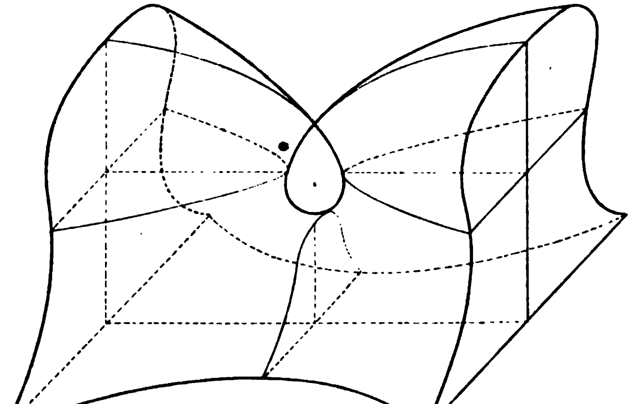


Fig. 1.

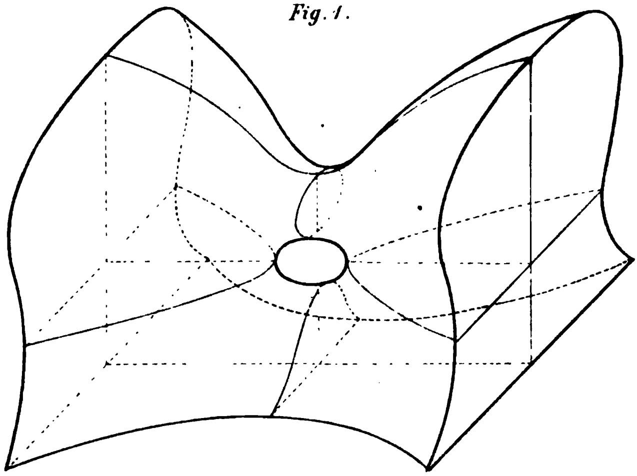
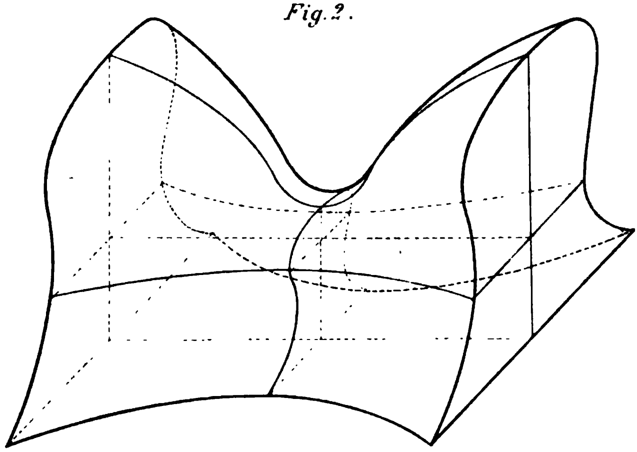
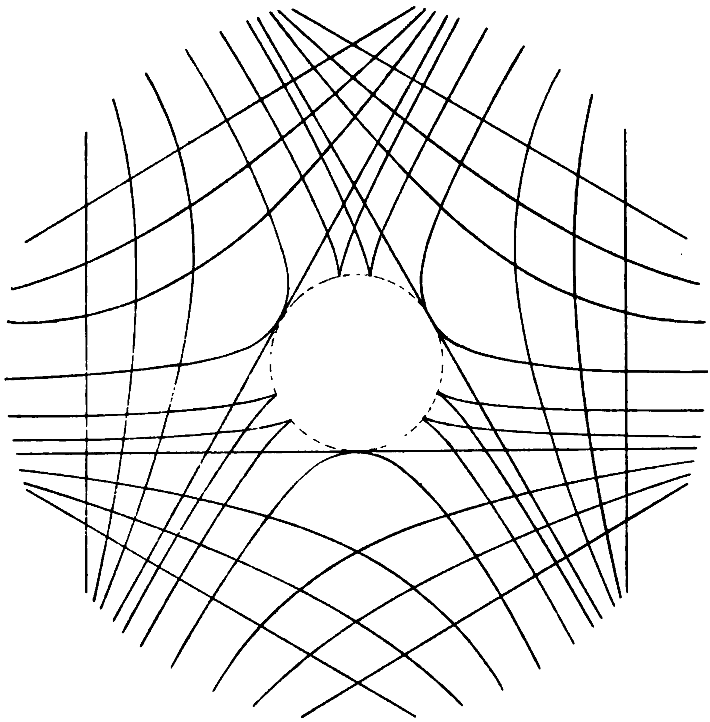


Fig. 2.



Taf. VI.



# INHALT.



Verantwortliche Redaction: **C. Neumann.**