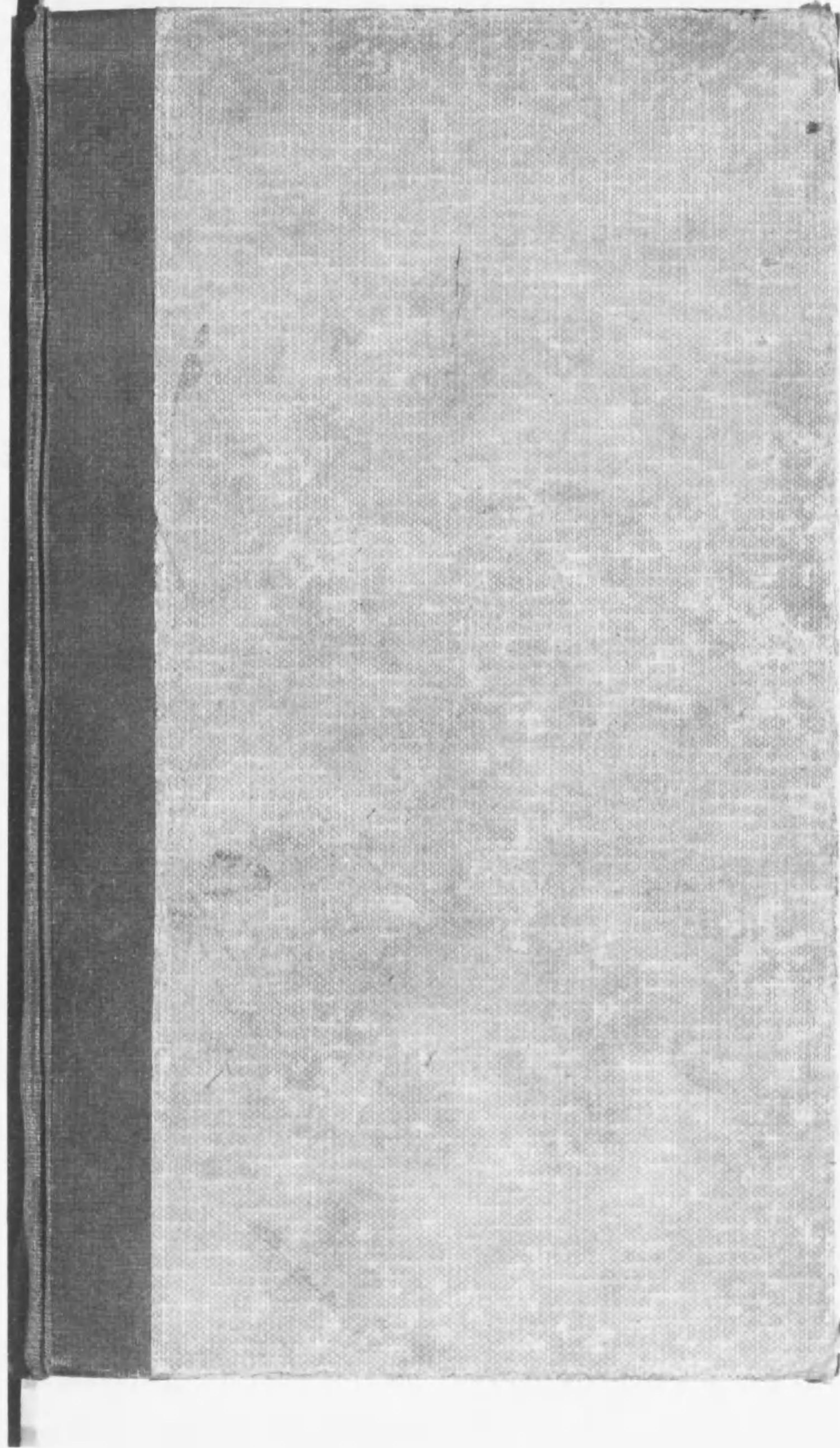




始



46
430

968

下

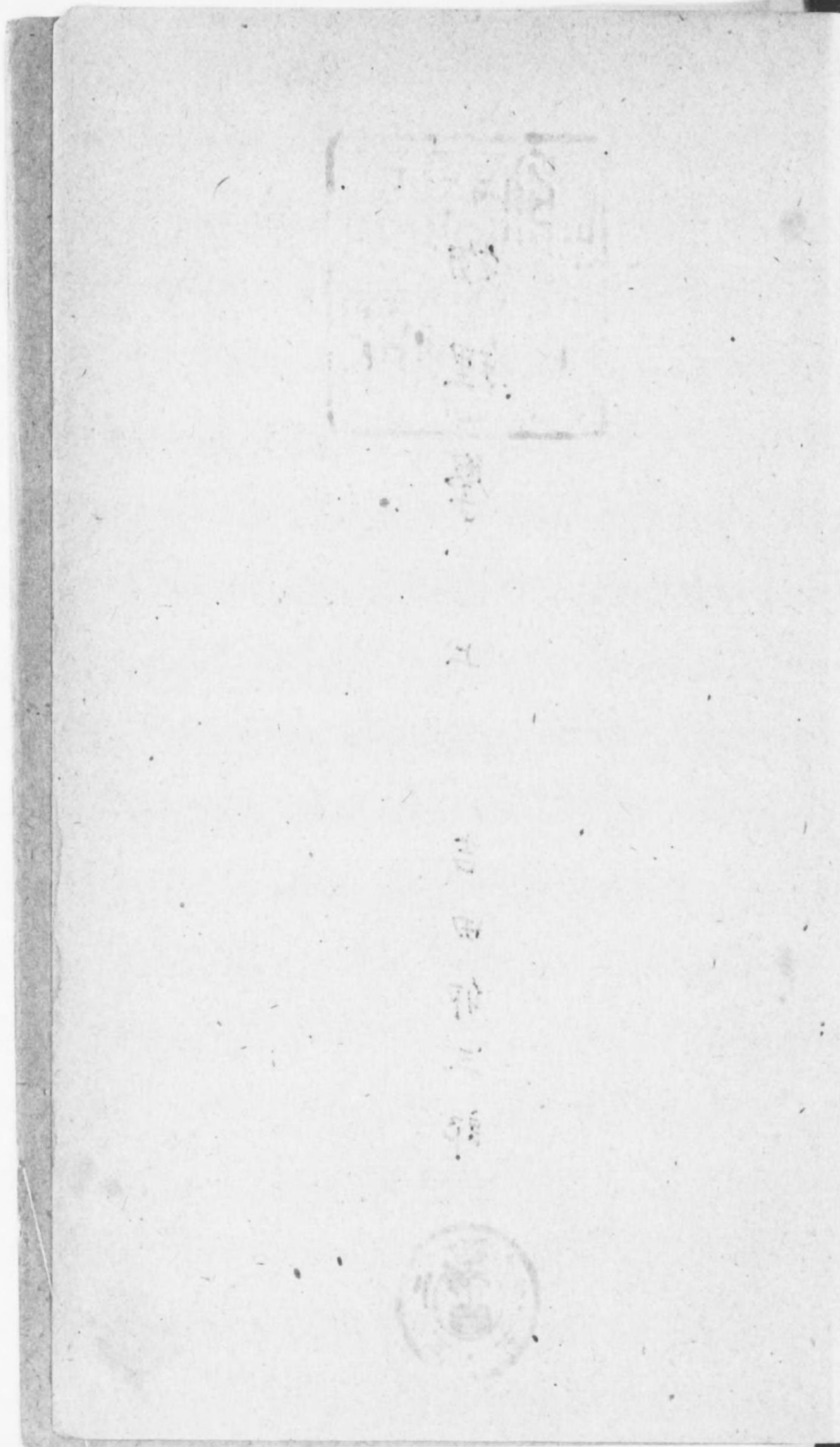


學

上

吉田卯三郎





欠

46~430

若し $\theta=90^\circ$ ならば $\cos\theta=0$, この時は (9圖II)

$$v^2=v_1^2+v_2^2$$

この時合成速度が v_2 となす角を ϕ で表せば

$$\tan\phi=\frac{v_1}{v_2}$$

或は $\phi=\tan^{-1}\frac{v_1}{v_2}$

2968
t2

變位の場合と同様に速度も亦任意の方向を有する二つの成分の速度に分解することが出来る。この際分解して生ずる二成分の方向は全く任意であるが分解される速度と二成分の速度とは三角形を作らなければならぬからそれらの大きさの間には必ず(1)の関係式が成立しなければならぬ。速度の分解で最も屢現はれるのは直角なる二方向に分解する場合である。

9圖IIを \vec{v} を直角なる二つの速度 \vec{v}_1 と \vec{v}_2 とに分解したものと見れば v_1 及び v_2 は

$$v_1=v\sin\phi, \quad v_2=v\cos\phi$$

となる。

§ 10 加速度 變位から速度を定義すると全く同様に速度から

から加速度を定義する。先づ質點が一直線上を運動する場合を考へる。今 OA 上の任意の一點 x に於ける速度を \vec{v} とし, x_1 に於ける速度を \vec{v}_1 とする。

今 t から t_1 までの時間中に質點が受けた速度の差 $\vec{v}_1-\vec{v}$ と t_1-t との比

$$\frac{\vec{v}_1-\vec{v}}{t_1-t} \equiv \vec{a} \dots\dots\dots(1)$$

を考へるとこれはまた明らかに一つのベクトルであつてその方向は任意の時刻に對して常に速度の方向である。次にこの比の大きさ

$$\frac{v_1-v}{t_1-t} \equiv a \dots\dots\dots(2)$$

欠

を考へる。一般にこの比は t_1 の取り方で種々の値を取るであらうがその中で特にすべての時刻に對して一定の値をもつ場合がある。この時質點は一直線上に等加速度運動をなしてゐると云はれる。 \vec{a} をこの際に於ける質點の¹⁾加速度と定義し、 a の値を質點の加速度の大きさと云ふ。今 v_1-v を Δv で表し、 t_1-t を Δt で表せば

$$\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \dots \dots \dots (3)$$

即ち質點が等加速度運動をなしてゐる時の加速度とは單位時間内に於ける速度の變化なりと云ひ得る。

次に(3)が一定でなく時間と共に變るときは(3)は單に質點の t_1-t 時間内の平均の速度の變化しか與へないからこの不正確を除くために t_1 が t に無限に接近したとき從つて v_1 が v に無限に接近した時の値をとり、これを t の時刻從つて x なる位置に於ける質點の加速度と云ふ。微分學の書式に從へば

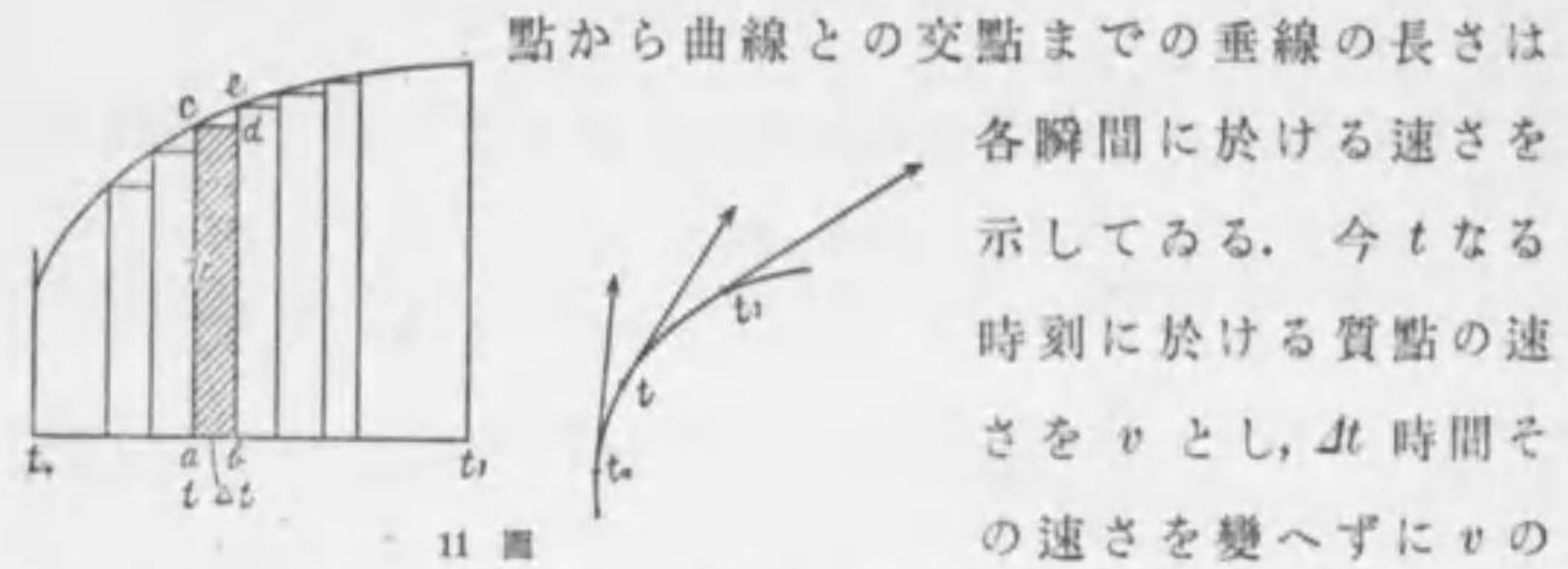
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \vec{a} \dots \dots \dots (4)$$

或は $dv = a dt \dots \dots \dots (5)$

これは dt 時間内の速度の變化 dv は dt に比例すること即ち t の時の加速度のまゝで運動を單位時間だけ繼續すれば \vec{a} だけの速度の變化を生ずることを示す。

§ 11 速さのグラフ 質點の速さが時と共に變化するとき、時間と速さとその時まで質點の通過した距離との關係を圖によつて示すことが出来る。圖に於て横軸上に時間を取り、縦軸上に速さをとる。速さが時間と共に變化する場合を考へると速さのグラフは一般に曲線となる。今横軸を數多の小間隔に分割し各分點から垂線を立て、曲線と c, e, \dots 等で交らすと各分

1) acceleration, Beschleunigung



點から曲線との交點までの垂線の長さは各瞬間に於ける速さを示してゐる。今 t なる時刻に於ける質點の速さを v とし、 Δt 時間その速さを變へずに v の速さで運動したとすると、 Δt 間の通過距離は $v\Delta t$ である。これは圖に於ては影を附けた矩形 $abdc$ の面積に相當する。今 Δt を限りなく小さくすると $abdc$ の面積は限りなく $abec$ の面積に近くなる。即ち $abdc$ の面積は $\Delta t \rightarrow 0$ なる極限に於ては $abec$ の面積を有することとなる。かやうな小面積は即ち微小時間中ある瞬間に有してゐた速さのまゝで運動した時の微小距離である。故にかやうな微小面積を無限に多く加へ合すればその面積は結局曲線と横軸との間の面積となるべく、それはある時間例へば t_0 から t_1 間に通過した距離を示すことになる。

上に述べたのは單に速さのみが問題になつたので質點の通路が曲線であつても直線であつても面積はその通路に沿うて測つた距離を表すのである。

質點の速さが時間の函數 $v(t)$ で與へられてゐるとき t_1-t_0 なる時間内に質點の通過した距離は積分學では次の計算によつて求められる。

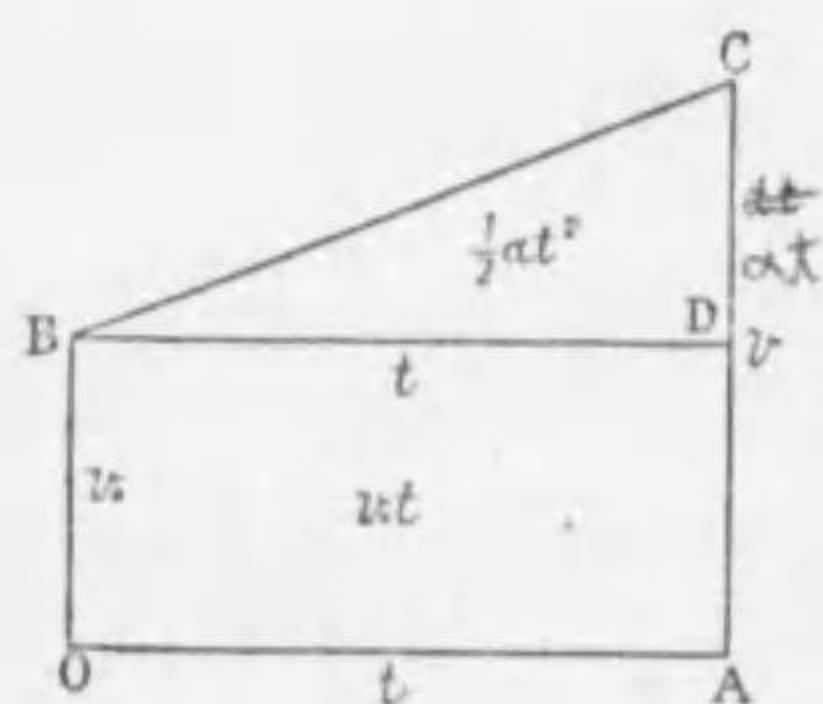
$$ds = v(t)dt$$

$$\therefore s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

§ 12 速さのグラフの例 今質點が一直線上を一定の加速度をもつて運動する場合を考へる。時間の始めに質點が v_0 の速さを有しそれより時間 t 後の速さを v とすると加速度の大きさは

$$\frac{v-v_0}{t} = a \dots \dots \dots (1) \quad (a \text{ は一定})$$

或は $v=v_0+at \dots\dots\dots(2)$
 即ち質点が t なる時刻に有する速さは最初の速さに加速度があるために生ずる速さの變化 at を加へたものに等しいことを示す。今この質点が t 時間中幾何の距離を運動したかを考へて



12 圖

OB=時間の最初の速さ v_0
 AC= t 時間後の速さ $v=v_0+at$
 OA=BD= t DC= at

面積 OACB = 面積 OADB + 面積 BDC

$$\therefore s = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \dots\dots\dots(3)$$

上式の中で v_0t は加速度がなく最初の v_0 のまゝ質点が運動したと考へたとき通過すべき距離であり、 $\frac{1}{2}at^2$ は最初質点は速度を有せずたゞ加速度だけで質点が速度を得たと考へたとき通過した距離を表してゐる。

(1)と(3)の式から t を消去すれば直ちに

$$v^2 = v_0^2 + 2as \dots\dots\dots(4)$$

(2)より(3)を導くことは §11 で述べた様に積分の計算法を用ひれば直ちに得られる。即ち

$$s = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (v_0 + at)dt = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

§13 落體の運動 最初ガリレイ(G. Galilei)によつて發見せられその後多くの人々によつて確められたところによれば地

球上の一定箇所ではすべての物體は落下の際皆下方に同一の加速度を受ける、その大きさを通常 g で表す。これは地球上の位置及び高さによつて多少異なるが約 980 cm/sec^2 である。今物體が初速 v_0 を以て下方に投下された場合には §12 によつて

$$v = v_0 + gt \dots\dots\dots(1)$$

$$s = v_0t + \frac{1}{2}gt^2 \dots\dots\dots(2)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gs \dots\dots\dots(3)$$

又上方に投げ上げる場合には s の増加する方向即ち上向きの方を正とすれば g は下向きとなるから上式中 g を $-g$ で置きかへると

$$v = v_0 - gt \dots\dots\dots(4)$$

$$s = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \dots\dots\dots(5)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gs \dots\dots\dots(6)$$

物體が上方に昇りきつた所では $v=0$ であるから(4)によつて最高所に達するに要する時間は

$$t = \frac{v_0}{g}$$

また最高所までの距離は

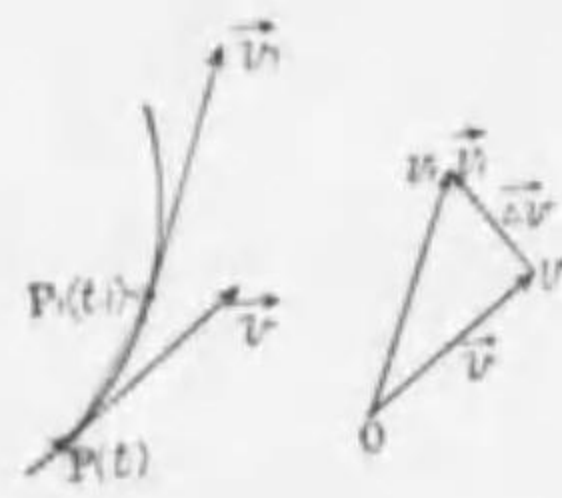
$$s = \frac{v_0^2}{2g}$$

以上の議論ではすべて空氣の抵抗を無視したこと勿論であるが空氣の抵抗は金屬塊又は石塊の様な密度の大なるものがあまり大きくない速さで落下し、又は上昇する時は殆ど無視してよろしいから上式は先づ正しいと見て差支へがない。然し彈丸の様な極めて大なる速さのもの、又は紙片の如き軽いものに對しては空氣の抵抗は可なり大きく運動状態は上述のものと著しく異なつてくる。

(注意) g の値は地球上緯度により、また海面よりの高さによつて多少異なる。緯度 ϕ で海拔 h 米の高さに於ける g の値は次の式によつて相當正確に與へられる。

$$g=977.989(1+0.0052\sin^2\varphi-0.0000002h)$$

§ 14 曲線運動の際の加速度 圖に於て質點が t なる時刻



13 圖

に P なる位置にあり, t_1 なる時刻に P_1 まで運動したとし P, P_1 に於ける質點の速度を夫々 \vec{v}, \vec{v}_1 とする. 任意の點 O から \vec{v} 及び \vec{v}_1 に平行で長さが夫々 v, v_1 に等しいベクトル \vec{OV}, \vec{OV}_1 を引けばそのベクトル差 $\vec{v}_1 - \vec{v} = \vec{OV}_1 - \vec{OV} = \vec{VV}_1$

今 \vec{VV}_1 を $\Delta \vec{v}$ で表せば $\Delta \vec{v}$ は $t_1 - t$ 間に質點が受けた速度の變化である. これを $t_1 - t = \Delta t$ で除した比

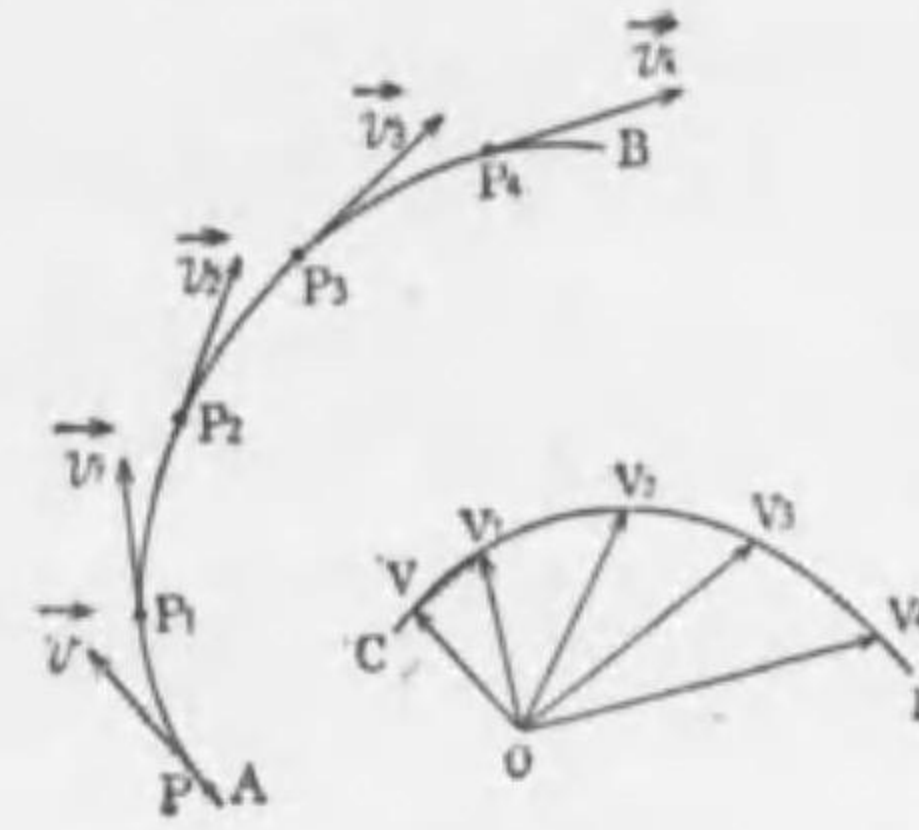
$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

を考ふればこのベクトルは單に $t_1 - t$ 時間内に於ける速度變化の平均値を與へるに過ぎない. この不正確を除くために $\Delta t \rightarrow 0$ なる極限従つて $\Delta \vec{v} \rightarrow 0$ なる極限の時の値を取りこれを曲線運動の際の P 點に於ける加速度と云ふ. この加速度を \vec{a} とすれば

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \dots \dots (1)$$

加速度に於て注意すべきことは或瞬間に於ける速度はその點に於ける瞬間の變位の方向であるが加速度の場合ではその點に於ける速度とその點の加速度の方向は一般には異なる. これについては後に詳述する所がある.

§ 15 ホドグラフ 質點が曲線運動をしてゐるとき各時刻 t_1, t_2, t_3, \dots に於ける位置を P_1, P_2, P_3, \dots とし, この點に於ける速度を $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$ とする. 今任意の原點 O を選び, O より $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$ にそれぞれ平行で長さの等しいベクトル $\vec{OV}_1, \vec{OV}_2, \vec{OV}_3, \dots$ を引きそれらの終點を結ぶと新たに一つの曲線が得られ



14 圖

る. この曲線を質點の曲線運動に対するホドグラフ¹⁾と云ふ. 質點が曲線 AB 上を運動する時にはその點に對應する點はまたホドグラフ CD 上を運動する. 而してこの二つの運動の間には次の様な關係がある. 即ち質點が

任意の點 P に於て有する加速度の大きさ及び方向はホドグラフ上に於ける P の對應點 V の速度の大きさ及び方向に等しい. 何となればホドグラフの性質より

$$\vec{v} = \vec{OV}, \quad \vec{v}_1 = \vec{OV}_1$$

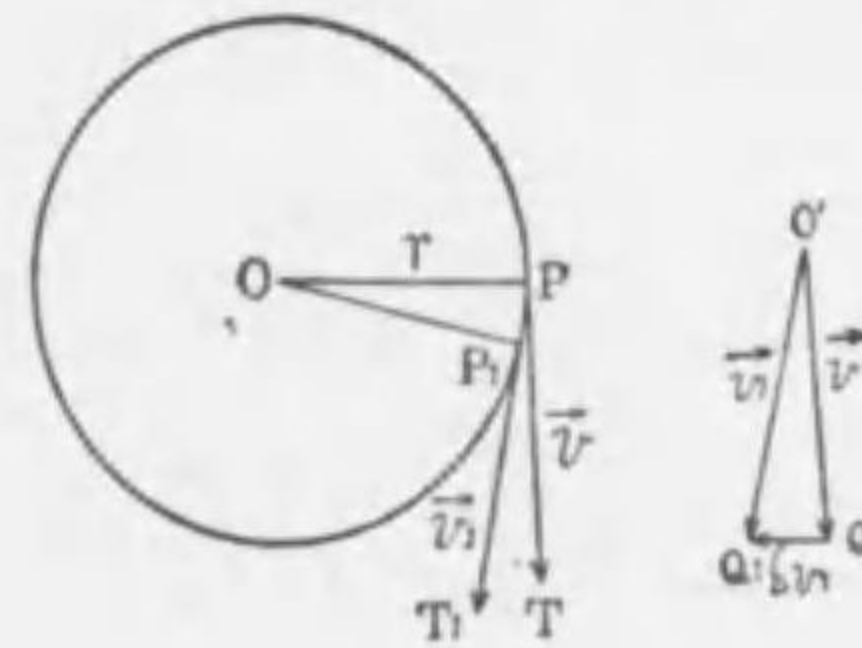
$$\therefore \vec{v}_1 - \vec{v} = \vec{OV}_1 - \vec{OV} = \vec{VV}_1$$

而して $\vec{v}_1 - \vec{v}$ は曲線 AB 上に於て $t_1 - t = \Delta t$ 時間内の質點の速度變化であり, \vec{VV}_1 は曲線 CD 上に於ける點 V の $t_1 - t$ 時間内の變位である. 故に

$$P \text{ 點の加速度} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{VV}_1}{\Delta t}$$

$$V \text{ 點の速度} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{VV}_1}{\Delta t}$$

§ 16 等速圓運動に於ける加速度 § 14 の質點の任意の曲線運動に於ける加速度の定義を比較的簡単な等速圓運動²⁾の場合について考へて見る. 今半徑 r なる圓周上を v なる一定の速さで運動してゐる質點 P の速度を $\vec{v} (= \vec{PT})$ とし, $t + \Delta t$ の時刻に於ける速度を



15 圖

1) hodograph, Hodograph
2) uniform circular motion, gleichmäßige Kreisbewegung

$\vec{v}_1(=\vec{P_1T_1})$ とする. 次に任意の点 O' より $\vec{PT}, \vec{P_1T_1}$ にそれぞれ平行で長さの等しい $\vec{O'Q}, \vec{O'Q_1}$ を引けば $\vec{O'Q}, \vec{O'Q_1}$ はそれぞれ P, P_1 に於ける速度 $\vec{v}, \vec{v_1}$ を表し, $\vec{QQ_1}$ は Δt 内の速度の變化 Δv を表す. 故に加速度の定義により P 點の加速度は

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{P_1T_1} - \vec{PT}}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{O'Q_1} - \vec{O'Q}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{QQ_1}}{\Delta t}$$

先づ加速度の大きさのみを考へよう. OP と $O'Q, OP_1$ と $O'Q_1$ は共に垂直なる故三角形 OPP_1 と三角形 $O'QQ_1$ とは相似であり, $O'Q=v, OP=r$ なる故に

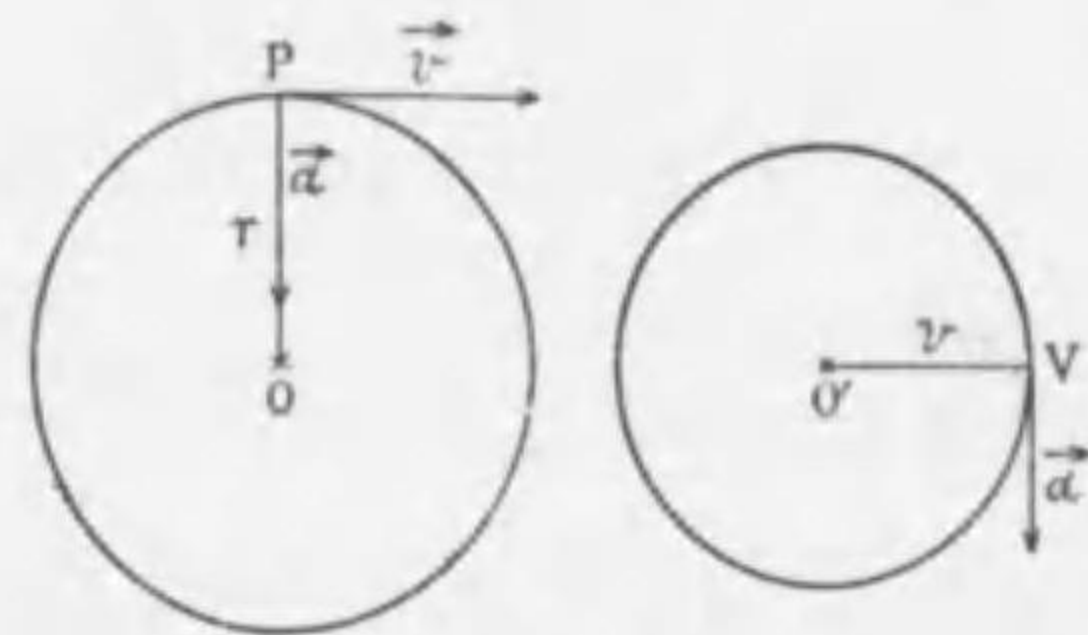
$$QQ_1 = O'Q \frac{PP_1}{OP} = v \frac{PP_1}{r}$$

$$\therefore a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{QQ_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{r} \frac{PP_1}{\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{PP_1}{\Delta t}$$

然るに $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{PP_1}{\Delta t}$ は P 點に於ける速度の大きさ v を表すものに外ならぬ.

$$\therefore a = \frac{v^2}{r}$$

次に加速度の方向を考へると Δt が次第に小さくなるに従ひ P_1 は P に近づき従つて Q_1 が Q に近づく. 即ち $\angle O'Q_1Q, \angle O'QQ_1$ は共に直角に近づく. 故に $\Delta t \rightarrow 0$ なる極限に於ては QQ_1 は $O'Q$ に垂直となり従つてまた PT に垂直となる. 故に速さ v , 半径 r なる圆周上を運動する質點の加速度は $\frac{v^2}{r}$ なる大きさを有し, その方向は常に中心に向ふ.



16 圖

P が圆周を一周する時間内に v はまた圆周 O' を一周し終るこ

とは明らかである. 故に今 P 點に於ける加速度或は V 點に於ける速度を a とすれば

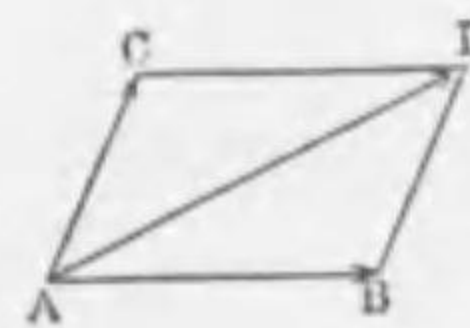
$$\frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi v}{a}$$

$$\therefore a = \frac{v^2}{r}$$

而して V 點に於ける速度 \vec{a} は $O'V$ に垂直であり, P 點に於ける速度 \vec{v} と $O'V$ は平行であるから P 點に於ける加速度 \vec{a} は圓の中心に向ふ. これは上に示したことと一致する.

屢述べた通り速度には常に大きさと方向とを併せ考ふべきもので加速度は速度の單位時間内の變化であるからその變化には速さの變化と方向の變化とを含むこと勿論である. 上の等速圓運動の例では速さ v は少しも變らないものとするにも關らず v^2/r の加速度が生ずるのは全く各瞬間に於ける質點の速度の方向だけを變へるに必要なためである.

§17 加速度の合成及び分解 §9 に於て單位時間に生ずべき二つの變位の合成と云ふことから速度の合成が可能であることを示した. 今これと全く同様の方法で加速度を合成し得ることを示さう.



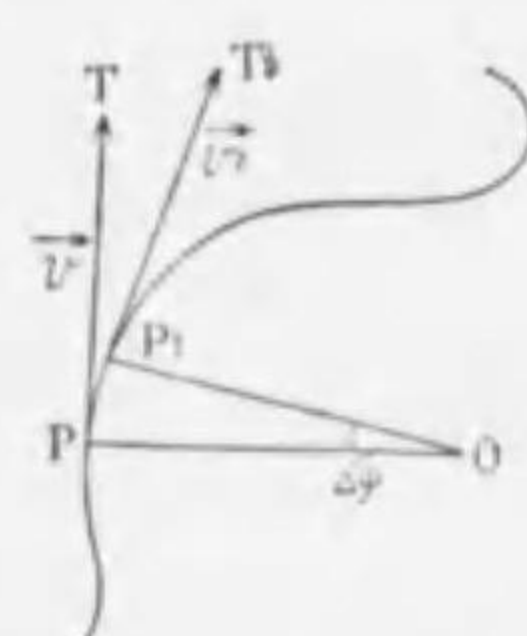
17 圖

圖に於て \vec{AB}, \vec{AC} を簡單のために方向及び大きさの一定なる加速度としよう. \vec{AB}, \vec{AC} なる二つの加速度を同時に受くる質點の加速度は \vec{AB}, \vec{AC} を二邊とする平行四邊形の對角線 \vec{AD} である. 何となれば \vec{AB} は一定の加速度を示してゐる場合であるからこれは單位時間中に質點の元の速度に加るべき速度を示してゐる. \vec{AC} も亦同様に \vec{AC} の方向に單位時間中に加るべき速度である. 然るに §9 によりて \vec{AB} と \vec{AC} は合成し得る. 而してその合成値 \vec{AD} は單位時間中に起つた速度の變化である. 換言すれば \vec{AD} は合成加速度である. 加速度が變化する時も同様の事實が成立する. たゞこ

の時には $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ はある瞬間の値及び方向を単位時間中変化しないと假定した時生ずべき速度の變化と考へなければならぬ。

次に任意の與へられた加速度は任意の二つの方向に分解することが出来る。速度分解に関する諸關係はそのまゝ加速度分解にも成立するから今こゝでは説明を繰り返さぬ。たゞその中で最も重要な二つの互に直角な方向の加速度に分解することを次に示す。

§18 切線加速度と法線加速度 質點が任意の曲線上を運動



18 圖

してゐて t なる時刻に P に於ける速度を \vec{v} , $t+\Delta t$ の時刻に P_1 に於ける速度を \vec{v}_1 とすれば \vec{v}, \vec{v}_1 は共に P, P_1 に於ける切線 PT, P_1T_1 の方向である。今 P, P_1 に於て切線 PT, P_1T_1 に垂直なる直線 PO, P_1O を引きその交點を O とする。別に任意の原點 O' から \vec{v}, \vec{v}_1 に等しく $O'Q, O'Q_1$ をとれば P 點の加速度 \vec{a} は

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{QQ}_1}{\Delta t} \dots \dots \dots (1)$$

で與へられる。今 $O'Q$ の長さに等しく $O'N$ を取り Δt 間に於ける速度の變化 \vec{QQ}_1 を \vec{QN} と \vec{NQ}_1 とに分解すると $O'Q = O'N$ であるから NQ_1 は Δt 間に生じた速さの變化だけを示し、従つて \vec{QN} は速度の方向の變化だけを示すこととなる。

故に(1)式を次の如く書くことが出来る。

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{QQ}_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{NQ}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{QN}}{\Delta t} \dots \dots (2)$$

上式の第一項 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{NQ}_1}{\Delta t}$ は P に於ける切線の方向の加速度でその大きさを a_t とすれば

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{NQ_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \dots \dots \dots (3)$$

である。

次に第二項 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{QN}}{\Delta t}$ を考へる。 P_1 が P に接近した極限即ち Q_1 が Q に接近した極限に於ては $\Delta\phi$ は限りなく小さくなるから二等邊三角形 QNO' の二角 $\angle Q$ 及び $\angle N$ は限りなく直角に近づくことになり、極限に於て加速度 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{QN}}{\Delta t}$ は P 點に於ける速度に垂直となる。今この加速度の大きさを考へるに P_1 が P に一致する極限に於ては $\triangle OPP_1$ の二角 $\angle P$ 及び $\angle P_1$ は共に直角となる。故に OP 及び OP_1 は長さ相等しくなり、従つて $\triangle OPP_1$ の一邊 PP_1 の極限の長さは次の如くなる。

$$\lim PP_1 = OP \lim \Delta\phi$$

また極限の二等邊三角形 $O'QQ_1$ に於ては

$$\lim QN = O'Q \lim \Delta\phi$$

$$\therefore \lim QN = \frac{O'Q}{OP} \lim PP_1$$

$$\therefore \lim \frac{QN}{\Delta t} = \frac{v}{OP} \lim \frac{PP_1}{\Delta t}$$

今 $\lim \frac{QN}{\Delta t} = a_n, OP = R$

とすれば $\lim \frac{PP_1}{\Delta t} = v$ であるから

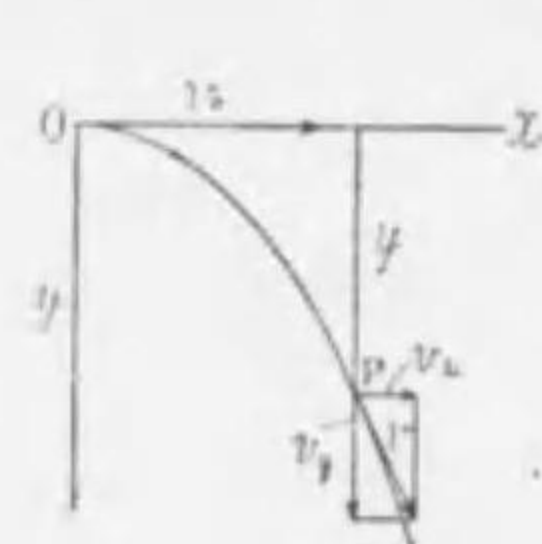
$$a_n = \frac{v^2}{R} \dots \dots \dots (4)$$

a_n は P 點に於ける速度に垂直な加速度の大きさでこれを法線加速度の大きさと呼び、 R を P 點に於ける曲率半径、 O を曲率圓の中心と呼ぶ。

上述の如く質點が曲線運動をするときの加速度は常に \vec{a}_t と \vec{a}_n とに分解せられ、一つは速さのみの變化を與へ他は方向のみの變化を與へるのである。 §16 の圓運動は曲率圓の中心が一定點で曲率半径も常に一定である様な特別の場合である。

スカラーとベクトルを特に區別しなくても誤解を生ずることのない場合には以下屢區別せずに用ひる。例へば速さ及び加速度の大きさと云ふべきところを單に速度及び加速度と云ふやうな場合である。

§19 水平の方向に投げられた質點の運動 v_0 の速度を以つて水平に投げられた質點の運動を考へて見る。水平の方向に



19 圖

Ox 軸をとり垂直の方向に Oy 軸をとる。

任意の時刻に於ける質點の位置を $P(x, y)$ とする。P に於ける速度を垂直の方向と水平の方向とに分解し、これをそれぞれ v_y, v_x とすれば、 v_x の方向には加速度がなく従つてこの

方向の運動は速度 v_0 の等速運動で、 v_y の方は初速度のない單なる落下運動であるから

$$v_x = v_0, \quad v_y = gt \dots \dots \dots (1)$$

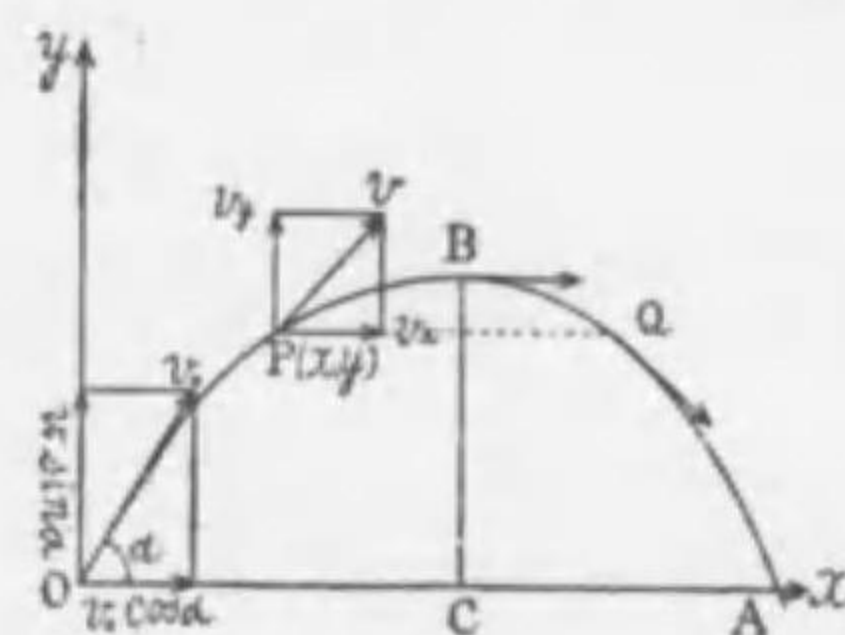
$$\therefore x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \dots \dots \dots (2)$$

依つて x と y から t を消去すれば

$$x^2 = \frac{2v_0^2}{g} y \dots \dots \dots (3)$$

上式は任意の時刻に於て P 點の位置 (x, y) が満足すべき式で直線 $\frac{2v_0^2}{g}$ なる拋物線である。

§20 任意の方向に投げられた質點の運動 最初 O より初速度 v_0 にて水平面と α の角をなす投射體の運動を考へる。水平、垂直の



20 圖

方向に Ox, Oy 軸を取り任意の時刻 t に於ける質點の位置を $P(x, y)$ とする。このとき P 點に於ける速度の水平分速度 v_x は、その方向には

加速度がないから O 點に於ける初速度 v_0 の分速度 $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ のまゝの等速度である。また垂直分速度 v_y は、 v_0 の垂直分速度

$v_0 \sin \alpha$ を以つて上方に投げ上げた時の速度であるから

$$v_x = v_0 \cos \alpha \dots \dots \dots (1) \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt \dots \dots \dots (2)$$

$$\therefore x = v_0 \cos \alpha t \dots \dots \dots (3) \quad y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \dots \dots \dots (4)$$

x と y より t を消去すれば

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \dots \dots \dots (5)$$

これは y が x に關する二次式であるから拋物線を表す式である。任意の時刻 t に於ける速度は

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2g(v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2)}$$

$$\therefore v = \sqrt{v_0^2 - 2gy} \dots \dots \dots (6)$$

この式によつて高さの等しい二點例へば P 及び Q に於ける速度の大きさの相等しいことが分る。質點が最高の位置に達したときは $v_y = 0$ であるからこの時刻までに要する時間 T_1 は(2)によつて

$$T_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \dots \dots \dots (7)$$

この T_1 を(3)(4)の式の t の代りに入れると

$$OC = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \dots \dots \dots (8)$$

$$BC = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \dots \dots \dots (9)$$

この BC の値を(6)の y に代入すると

$$v = v_0 \cos \alpha$$

即ち最高點に於ける質點の速度は水平の方向であつてその大きさは初速 v_0 の水平分速度に等しい。

質點がはじめより再び水平面上に落下するまでの時間を T_2 とすればこのときは(4)に於て $y=0$ であるから

$$v_0 \sin \alpha T_2 - \frac{1}{2} g T_2^2 = 0$$

$$= T_2 (v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g T_2) = 0$$

$$\therefore T_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 2T_1$$

次に水平面上に於ける質點の到達距離即ち射程 OA は(3)に於て $t=T_2$ とし(7)の関係により

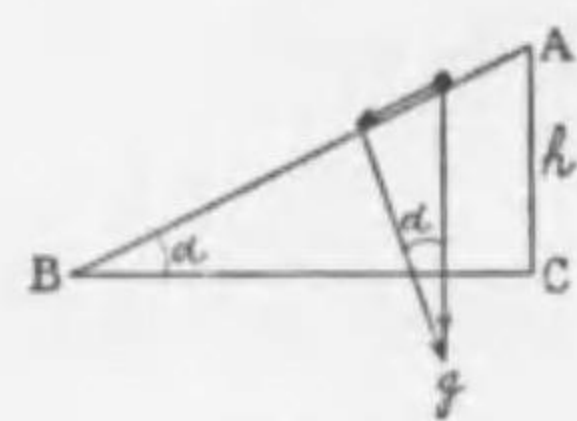
$$OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 2OC$$

OA が最大の値をとるのは $\sin 2\alpha$ が最大の値をとるときであるから

$$\sin 2\alpha = 1 \quad \text{即ち} \quad \alpha = 45^\circ$$

のときである。このとき質點の達し得る最高の高さは $\frac{v_0^2}{4g}$ である。

§21 摩擦のない斜面に沿うて落下する質點 摩擦のない斜面



21 圖

面を質點が A より初速度 v_0 で AB に沿うて落下する場合を考えると質點には下方に向ふ加速度 g があるが、これを斜面に平行な方向と垂直な方向とに分解すれば前者は $g \sin \alpha$ であり、後者は $g \cos \alpha$ である。運動は斜面上に限られてゐるからこの面に垂直な加速度 $g \cos \alpha$ は質點の運動には何等影響を及ぼさぬ。故に質點の運動はたゞ單に §12, (4) の a の代りに $g \sin \alpha$ を代入したものに過ぎない。今質點が $AB=s$ 間をこの加速度で落下した時の B に於ける速度を v とすれば

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2as \\ &= v_0^2 + 2g \sin \alpha \cdot s \end{aligned}$$

今 $AC=h$ とすれば $h=s \sin \alpha$ であるから

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

これを見れば B に於ける速度は斜面の傾き α には全く無関係であつて h の高さから初速度 v_0 をもつて直接鉛直に落下した場合と全く同一である。

[問 題]

1. 地上で球を投げたとき高さ50呎まで昇り 200 呎の地點に落下した。投げた時の方向及び速度を求めよ。但し $g=32.2 \text{ ft/sec}^2$ とする。

[答] $\alpha=45^\circ \quad v_0=80.2 \text{ ft/sec}$

2. 地上の或點 A から與へられた速度 $V \text{ m/sec}$ で物體を投げ、A と同一水平面内 A から a 米だけ隔つた點 B に達せしめるには如何なる方向に抛ぐべきか。但し空氣の抵抗は無視せよ。(昭4.東.理)

[答] 水平面となす角 $\frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{aa}{V^2}$

3. 投射點より拋物線上の任意の一點 P に達する迄の時間を t とし、P より再び水平面に達する迄の時間を t' とすれば P 點の水平面上の高さは $\frac{g}{2} t t'$ であることを證せよ。

4. 半徑 a の圓形の池がある。定切線速度 V で周りを走る人が走りつゝ水面から h の高さで水平に石を投げこれを池の中心に落さんとす。石に與ふべき初速度とその方向を求めよ。(昭2.東北工)

[答] 斜後方に $\theta = \tan^{-1} \frac{V}{a} \sqrt{\frac{2h}{g}}$, 初速度 $\sqrt{\frac{a^2 a + 2hV^2}{2h}}$

5. 水平な地面よりの高さ h 米の塔上から所定の速さ $V \text{ m/sec}$ で石を投げ、なるべく遠い地面に當てるためには如何なる仰角で投ぐべきか。(昭6.東北理)

[答] 仰角 $\alpha = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{gh}{V^2 + gh}$

第二章 力

§1 力運動の第一法則 今まで静止してゐた物体が何等かの原因により運動を開始し、又現に運動してゐる物体の速さ¹⁾或は運動の方向が變つた場合、吾々はその原因として物体に力が働いたためであると云ふ。故に力が働くと云ふ原因さへなければ最初静止してゐる物体は永久に同一場所に静止し、運動してゐる物体は永久に等速直線運動をする筈である。静止とは速さが零になつた特別の場合に過ぎないから結局力とは物体に加速度を與へる原因と云ひ得る。

如上の事柄を法則の形に表したるものをニュートン(I. Newton)の運動の第一法則と云ふ。即ち

すべて物体はその運動状態を變へんとする力が働かない限り静止或は等速度運動の状態を保持する。

この運動状態保持の性質はすべて物体の通有性でこの性質を物体の慣性²⁾と云ふ。従つて上の法則をまた慣性の法則とも云ふ。

§2 運動の第二法則 運動の第一法則は物体の運動状態の變化即ち加速度の生起は力の存在によるのであることを説くものであるがこの兩者の間の量的關係を明らかにしなければ物理学上の問題を精細に研究することは不可能である。而してこの兩者の數量的關係を明らかにするものがニュートンの運動の第二法則である。

今一つの物体が外部からの影響によつて種々の異なる加速度を受けた場合、この物体には種々の異なる力が作用したと考

1) force, Kraft 2) inertia, Trägheit

へ更に一步を進めてこの力には新に大き及び方向と云ふ性質を附隨せしめ、物体が得た加速度は加速度に比例する大きさの力が加速度の方向に働いたためであると規定する。即ち加速度の大きさを a 、力の大きさを f とすれば

$$f \propto a \text{ 或は } a \propto f \dots\dots\dots(1)$$

これによつて吾々は力の大きさを比較することが出来るのである。

今 A 及び B の二つの物体の各に力 $f, f', f'' \dots$ を別々に作用せしめ A 及び B に生ずる加速度をそれぞれ $a_A, a'_A, a''_A \dots$ 及び $a_B, a'_B, a''_B \dots$ とすると、實驗によつて次の式が成立する。

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{a'_A}{a'_B} = \frac{a''_A}{a''_B} = \dots = m \dots\dots(2)$$

この m を A を標準としたときの B の質量¹⁾と云ふ。(2)式の事實に基づいて吾々は更に加速度は質量に反比例すると規定する。

(1)及び(2)の結果を綜合すれば

$$a \propto \frac{f}{m}$$

或は比例の常数を k とすれば

$$f = kma \dots\dots\dots(3)$$

さて(2)式に現はるゝ質量は標準としてとつた A なる物体が異なるに従つて一般に異なる値をとること勿論である。

通常吾々は萬國秤原器の質量の $\frac{1}{1000}$ の質量即ち 1 瓦(g)を標準として用ひる。今これを質量の單位にとり、加速度の單位として 1 cm/sec^2 をとり、この單位質量の物体にこの單位加速度を生ずる力を單位にとれば

$$m=1, a=1, f=1$$

$$\therefore k=1$$

1) mass, Masse

かやうに定められたときの単位の力を1 ¹⁾ **ダイン**と云ふ。而してこの場合には(3)は

$$f=ma$$

となる。この関係をニュートンの運動の第二法則と云ひ、屢、簡単に運動方程式とも云ふ。

上式に於て加速度 a は

$$a=\frac{dv}{dt}$$

また速度 v は $v=\frac{ds}{dt}$

故に $f=ma=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)=m\frac{d^2s}{dt^2}$

即ち $m\frac{d^2s}{dt^2}=f$

と書き、この式を通常運動方程式と云ひ、 f が與へられてゐるときは一回の積分によつて任意の時刻に於ける質點の速度が求められ、更に積分してその時刻に於ける質點の位置が定めらるゝのである。

§ 3 物體の重量 地球上の物體は絶えず重力の作用を受け従つて重量を有する。今 m 瓦の物體に働く重量を f とすれば

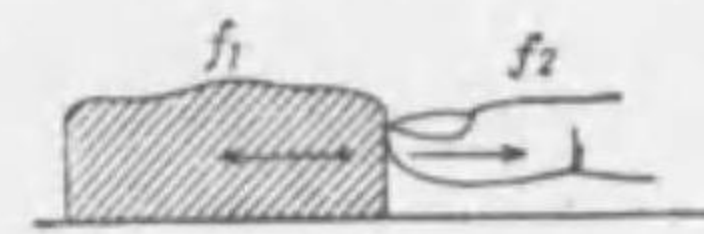
$$f=mg \text{ ダイン } [g \text{ は重力の加速度}]$$

力は上述の外に單位質量に働く重力を單位として測ることも出来る。この單位を力の重力單位と云ふ。この單位を用ひると質量1瓦の重さ即ち1瓦重は g ダインに相當し、従つて1ダインは $\frac{1}{g}$ 瓦重即ち約1 珥重に當る。

§ 4 運動の第三法則 運動の第一、第二の法則に於ては單に物體が力に働かれた結果として現はるゝ物體の加速度のみに關することを述べた。經驗によれば力は決して單獨に存在するものではなく必ず力を作用する物體と作用せらるゝ物體との間の相互作用としてのみ存在するものである。例へば二艘

1) dyne, Dyn

の舟を綱にて連結し、甲が乙を引きよせようとするれば甲はまた乙の方に引きよせられる。また地球の引力のもとで落下する石は地球が石を引くと同時に地球も亦石に引かれ僅かながらも石に向つて加速度を生ずる筈である。かやうに一對になつて現はるゝ二つの力の中の何れか一つを ¹⁾ **作用** と云ひ、他の方を ²⁾ **反作用** と云ふ。ニュートンによれば作用と反作用とはその大きき相等しく方向は反對である。



22 圖

作用と反作用との相等しいことは常に成立することであつて作用を受ける物體が靜止してゐても運動してゐてもそれには全く無關係である。手で壁を壓すときは手も亦壁より壓され、作用及び反作用の大きき等しく方向反對なることは了解されるであらう。又手よりの作用を受けて物體が動き出す場合に於ても、手で物體を壓す力 f_1 は物體に働き、物體の反作用は物體より考ふれば作用として手に働くのである。二つの力は決して一つの物體に働くのではない。物體は手により働きかけられた力を受けて動き出すのである。

§ 5 運動量及び力積 質量 m なる質點が t なる時刻に \vec{v} なる速度を有するとき $m\vec{v}$ なるベクトル量をその質點のこの時刻に於ける ³⁾ **運動量** と云ふ。今質點が t なる時刻に \vec{v} なる速度を有し、これに dt 時間だけ方向及び大きき一定の力 \vec{f} が働らき、速度が \vec{v} より $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ に變化したとき運動量の變化は

$$m(\vec{v} + \Delta\vec{v}) - m\vec{v} = m\Delta\vec{v}$$

今これを dt にて除すれば加速度の定義と運動の第二法則とによつて

$$\frac{m\Delta\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{f} \dots\dots\dots(1)$$

即ち時間に対する運動量の變化は力であると云ひ得る。また

1) action, Wirkung 2) reaction, Gegenwirkung 3) momentum, Bewegungsgröße

上の式より

$$m \Delta v = \vec{f} \Delta t \dots \dots \dots (2)$$

この $\vec{f} \Delta t$ を¹⁾力積と云ふ。これは丁度 Δt 時間内の運動量の變化に等しい。

若し力が時と共に變化し従つて加速度が一定でない場合には $m \Delta v / \Delta t$ は單に Δt 時間内の運動量の變化の平均値しか與へないからこの場合には $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考へる。

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d(mv)}{dt} = m \vec{a} = \vec{f} \dots \dots \dots (3)$$

即ち或瞬間に於ける運動量の時間に對する變化は、その瞬間に質點に働く力に等しい。

\vec{f} が一定の時には力積は $\vec{f} \Delta t$ と定義し得たが \vec{f} が一定でない時は次の様に定義しなければならぬ。即ち $d(mv) = \vec{f} dt$ より力積 I は

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \vec{f} dt$$

吾々は運動の第二法則を $\vec{f} = m \vec{a}$ なる形で書いた。然し本節に於て力は運動量の時間に對する變化の割合なることを述べた。これは m は常數であるから $\vec{f} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ も $\vec{f} = d(m\vec{v})/dt$ も同一であると云ふことに基つてゐる。これは結果に於ては同一であるがニュートンは運動の第二法則としてむしろ後者の立場を取つたのである。而して今日の相對性理論を含む一般の立場からしては後者を採らなければならぬ理由がある。

物體に力が働いて大なる運動量の變化を生ぜしめたにも關らず力が働いて居る時間が極めて短い場合がある。例へば彈丸を撃ち出す時の様な場合に彈丸は最初靜止の状態から大なる運動量を得る。而かも火藥力の彈丸に働く時間は極めて短い。従つて(2)から分る様に力は極めて大い。かやうな力を衝擊力と云ふ。

§ 6 運動量保存の原理 二つの質點が互に力を他に及ぼし

1) impulse, Impuls

ながら運動してゐるとする。この際互に作用する力は互に接觸して他に及ぼす力であつても後節に述べる様な引力の如きものでも差支ない。何れの場合でもニュートンの運動の第三法則によつて作用と反作用とは常に等しくその方向は反對である。

今二つの質點の質量をそれぞれ m_1, m_2 、速度を \vec{v}_1, \vec{v}_2 、互に他に及ぼす力を \vec{f} とし、これらはこれら以外には他より少しも力を受けないとすれば前節によつて

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} m_1 \frac{\Delta v_1}{\Delta t} \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{f} \Delta t,$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} m_2 \frac{\Delta v_2}{\Delta t} \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\vec{f} \Delta t$$

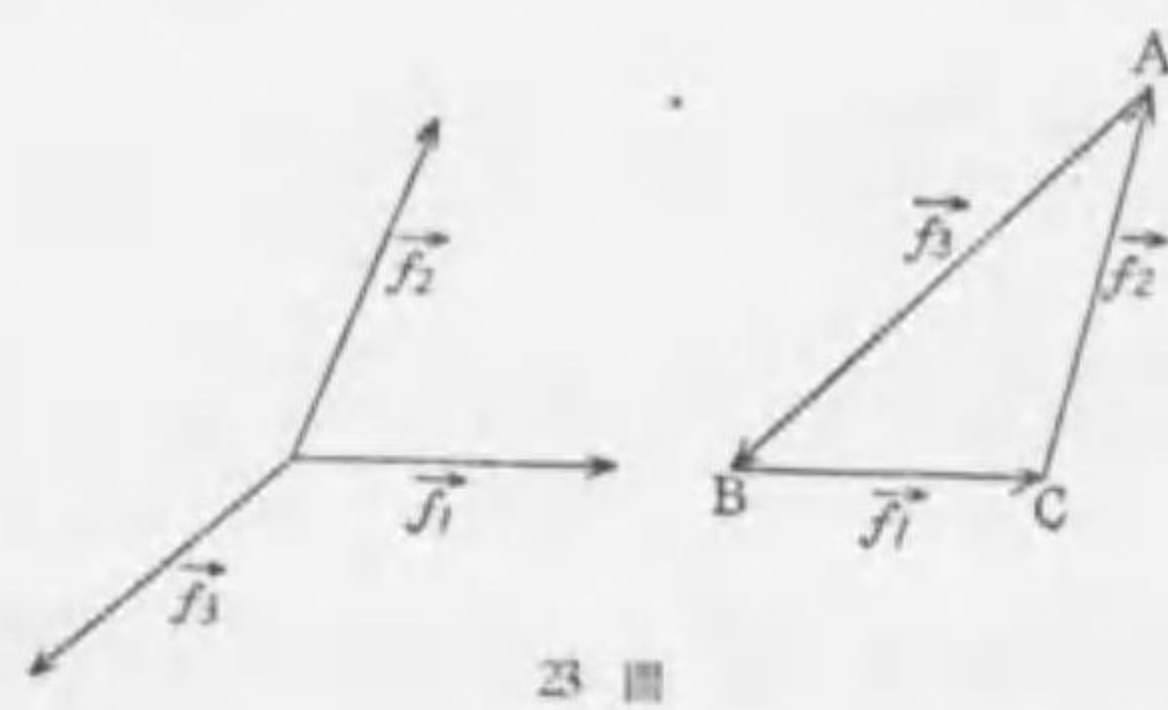
$$\therefore \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

即ち m_1, m_2 とから成る質點系に於ては極めて短時間中には運動量の變化が生じない。上式の右邊は常に零であるから左邊を如何程多く加へ合はせても即ち有限の時間内に於ける運動量の變化を考へても結果は常に零である。換言すればこの質點系の運動量は他より力が作用しない限り恆に一定の値を保有してゐる。

上記の事實は單に二つの質點に限らず數多の質點の場合にもこれらを二つ宛組み合はせるとその各組については上の關係が成立する故結局全質點についても運動量の變化が常に零である。かく質點が互に他に力を及ぼしながら運動し、これら質點間の力以外に力が外から加はらないときは箇々の質點の速度は常に變るが全體として運動量の變化は起らず常に一定の値を保つてゐる。これを¹⁾運動量保存の原理と云ふ。

1) principle of the conservation of momentum, Prinzip der Erhaltung der Bewegungsgröße

§7 力の合成・分解・平衡 力は運動の第二法則の示す通り加速度の方向を有するベクトルである。従つてこれはまた速度或は加速度と同様な平行四邊形の規則によるベクトルの合成・分解が可能である。質點にたゞ一つの力が作用してゐる時にはこの質點には必ずその力に應ずる加速度を生ずるが、二つ以上の力が同時に作用した結果質點に加速度を生じないことがある。この時は力が平衡の状態にありと云はれる。一質點に二力が働いて平衡の状態にあるためにはこの二力は大きさが等しく方向反對であることが必要且充分であるが一質點に三つ

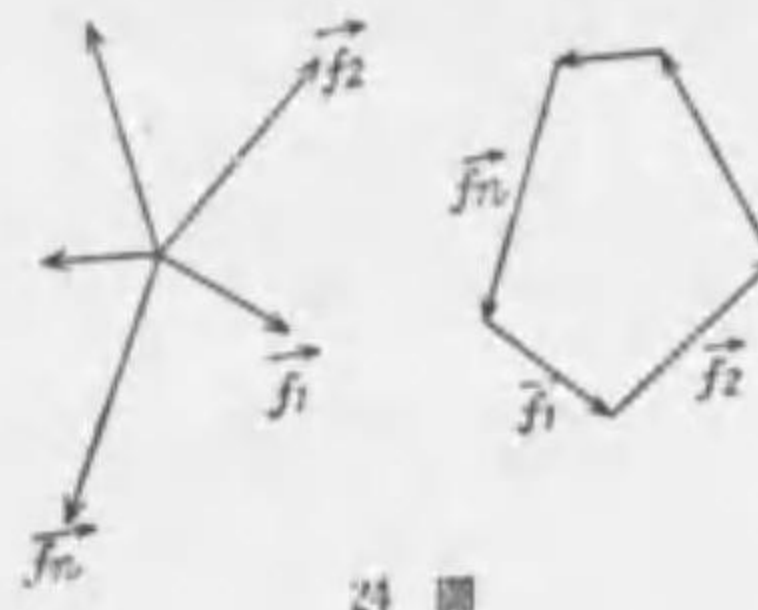


23 圖

の力が同時に作用する場合の平衡の條件を考へるとこのときは三力を示すベクトルを順次に連結して第三番目のベクトルの終點が最初のベクトルの出發點に一致するとき、即ちこれらのベクトルが三角形を作るときはこの三力は平衡の状態にある。何故ならば第一と第二力の合力 $\vec{BC} + \vec{CA}$ は \vec{BA} で、B より A に向ふ力であり、第三力 \vec{AB} は A より B に向ひ大きさが等しく方向反對の力に相當するからである。

次に上述の逆はまた成立する。即ち一質點に三つの力が作用しこれらの力が平衡の状態にあるときこの三力の方向に任意の三角形を作るときはこれらの三力は三角形を作らなければならぬ。何となれば \vec{f}_1 と \vec{f}_2 の合力従つて $\vec{BC} + \vec{CA}$ は \vec{BA} で、これが \vec{f}_3 と平衡状態になればならぬから \vec{f}_3 は丁度 \vec{BA} と大きさが等しく方向が反對でなければならぬ。即ち \vec{AB} (A より B に向ふ) であるべきである。

次に圖に示す如く一質點に數多くの力が同時に作用すると



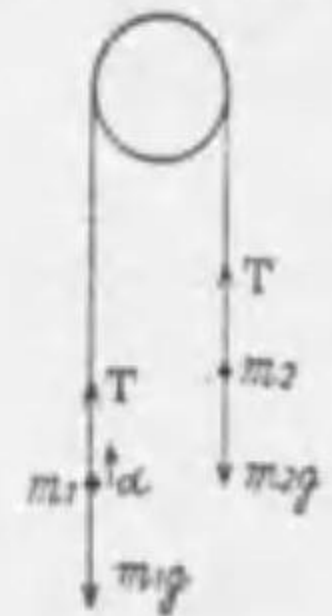
24 圖

きはこれらの力を示すベクトルを順次に圖に示す如く連結し、最後のベクトルの終點が最初のベクトルの出發點に一致するときはこれらの力の合力は零であること明らかであるから

平衡状態が保たれる。逆に若し數多の力が一質點に作用して平衡状態にあるときこれらの力を示すベクトルは閉じた多角形を作らなければならぬ。

[問題]

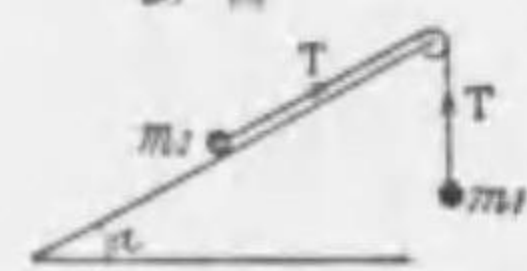
1. ニュートンの運動の法則から運動量不変の法則を導びけ。
(昭2.東北.理)
2. 70 kg の人が 100 cm/sec^2 の加速度で降下及び上昇するエレベーター内に在る時床に及ぼす力を算出せよ。 [答] 62.8 庇重, 77.1 庇重
3. 質量 5000 kg の大砲から 20 kg の弾丸を 450 m/sec の初速で發射するとき大砲の反撥せられる速度を求む。(昭3.東.農) [答] 1.8 m/sec



25 圖

4. 圖に示す如く質量 m_1, m_2 を糸で結びこれを滑車にかける。今 $m_2 > m_1$ とすれば m_1 は上昇し m_2 は下降する。この時の m_1 の加速度 a 及び糸の張力 T を求めよ。

$$[\text{答}] \quad a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g, \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$



26 圖

5. 摩擦のない傾角 α なる斜面上に質量 m_2 を載せ、これを滑車によつて質量 m_1 で引く時 m_1 の加速度 a 及び糸の張力 T を求めよ。

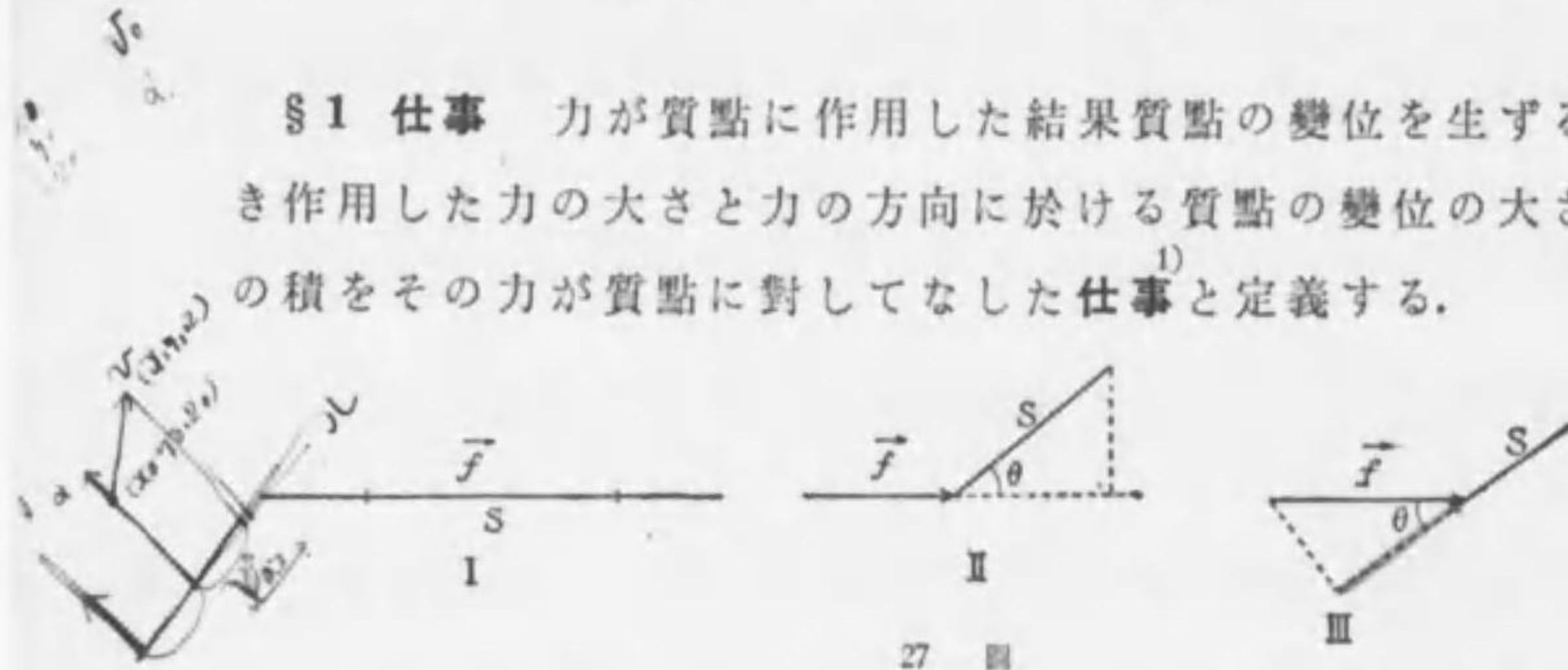
$$[\text{答}] \quad a = \frac{m_1 - m_2 \sin \alpha}{m_1 + m_2} g, \quad T = \frac{m_1 m_2 (1 + \sin \alpha)}{m_1 + m_2} g$$

6. 質量 100 g 及び $x \text{ g}$ の二物體を糸で結び傾角 30° なる斜面の頂點に設けた滑車の上にかへ、前者を斜面に載せ、後者を吊下るとき、全體が斜面を下る加速度は 420 cm/sec^2 であつた。 x の値を求めよ。

(昭2.京.農) [答] 5 g

第三章 仕事及びエネルギー

§1 仕事 力が質点に作用した結果質点の變位を生ずるとき作用した力の大きさと力の方向に於ける質点の變位の大きとの積をその力が質点に対してなした¹⁾仕事と定義する。



この定義に従へば I 圖の如く力の方向と質点の變位の方向とが一致する時は仕事 W は

$$W = f \cdot s$$

であるが第 II 圖の如く力の方向と質点の變位の方向が θ の角を夾む場合には變位の力の方向に於ける分値は $s \cos \theta$ であるから仕事 W は

$$W = f \cdot s \cos \theta \dots\dots\dots(1)$$

である。(1)は $s \cdot f \cos \theta$ とも書き得るから第 III 圖に示す様に仕事は質点の變位の大きさと變位の方向に於ける分力の大きとの積と考へてもよい。 $\theta = 90^\circ$ の時は力が如何程大きくてもそのなす仕事は零である。例へば極めて重い物體を吊下げてある起重機が物體を水平に如何に移動してもこの起重機のなした仕事は零である。次に θ が 90° から 180° の間にあるときは仕事は負の値を持つ様になる。このときは力は質点より仕事をされたと解釋すればよろしい。例へば進行中の車を止めようとする場合、車の進行の方向と逆の方向に力を或時間働かせる

1) work, Arbeit

がこの時間中は力を働かせつゝも却つて車によつて人が後退させられる。このときは車の移動の方向と力の方向とは逆であつて力のなした仕事は負となる。この場合人の力は車によつて仕事をされたと考ふるのである。

§2 仕事の單位 仕事の C.G.S.單位は 1 ダインの力に働かれて 1 厘米だけ力の方向に移動したときの仕事であつてこれを¹⁾エルグと云ふ。

$$\text{erg} = \text{dyne} \times \text{cm} = \frac{g \text{ cm}}{\text{sec}^2} \text{ cm} = \frac{g \text{ cm}^2}{\text{sec}^2}$$

1 エルグの仕事は約 1 疋重の物體を 1 厘米だけ上げるに要する仕事で、あまりに小さいから實用には 1 エルグ $\times 10^7$ を單位にとつてゐる。この仕事の單位を 1 ジュールと云ふ。この外に 1 疋重の物體を重力に抗して上方に 1 米だけ動かすに要する仕事を單位にとることもある。これを 1 キログラムメートル (疋米) と云ふ。疋米とエルグの關係は

$$1 \text{ 疋重} = 10^3 \text{ 瓦重} = 9.8 \times 10^5 \text{ ダイン}$$

$$\therefore 1 \text{ 疋米} = 9.8 \times 10^7 \text{ エルグ} \\ = 9.8 \text{ ジュール}$$

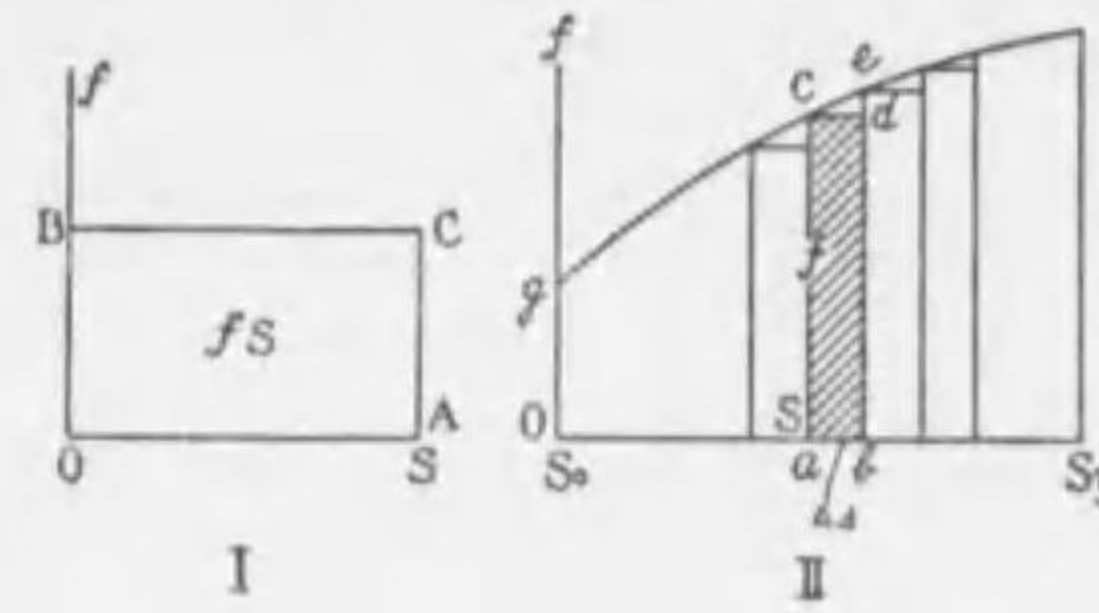
§3 仕事のグラフ 吾々は既に質点の速さと時間との關係をグラフに作つてこれから質点の通過した距離を計算し得ることを示した。今これと同様の計算法を仕事の場合について考へて見る。方向及び大きさの一定な力 f が質点に作用してこれを力の方向に距離 s だけ移動したとすれば、この時力のなした仕事 W は

$$W = f \cdot s$$

である。今圖に於て横軸上に質点の力の方向に移動した距離

1) erg, Erg

をとり、縦軸上に力の大きさ f をとれば f が常に一定であるから



28 圖

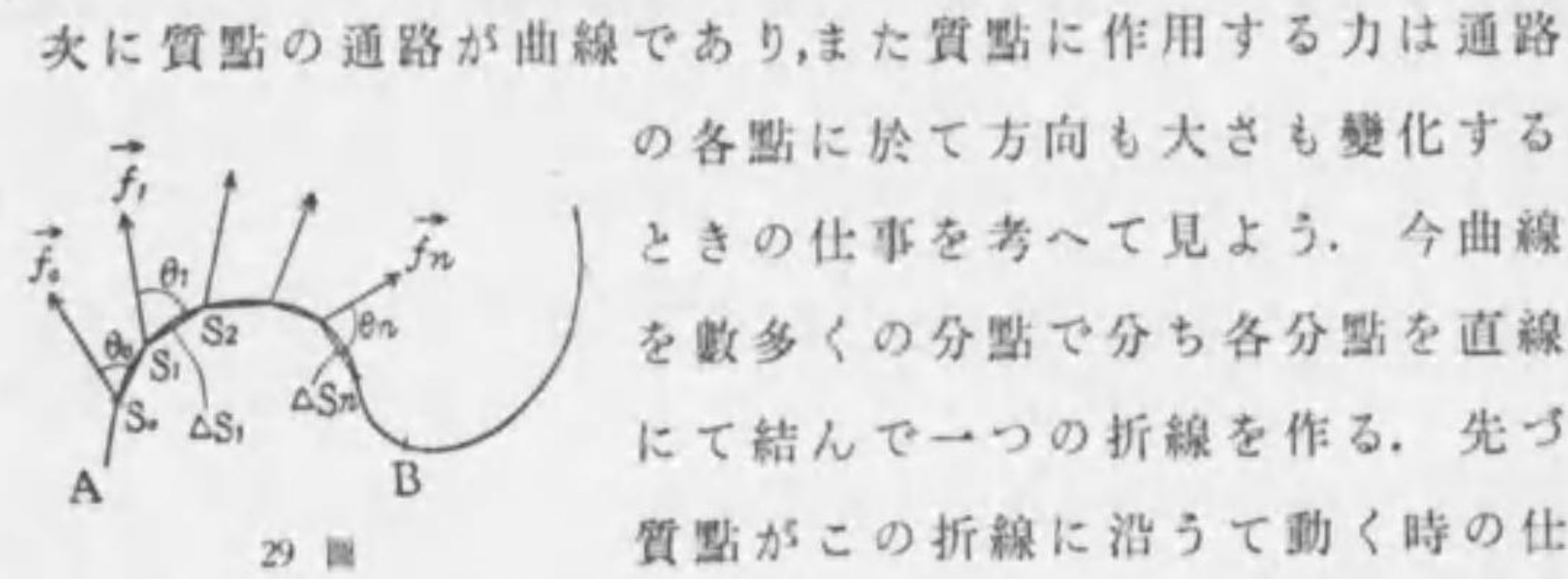
グラフは28圖 I の如く s 軸に平行な直線となり、力のなした仕事は明らかに矩形 OACB の面積で表される。

然し一般の場合即ち力の大きさが刻々變り且力の方向

と質點の變位の方向との間の角も刻々變化する場合は上の如く簡単ではないが、その中で比較的簡単な場合即ち質點の變位の方向と力の方向とが常に同一直線内にある場合を考へる。力の大きさは刻々變るのであるから s と f との関係は28圖 II のやうに曲線となるべきである。今横軸を數多の小間隔に分割し、各分點から垂線を立て曲線と c, e, \dots 等にて交らすと、各分點と曲線との交點までの距離は質點の各位置に於ける力の大きさを表してゐる。今 s なる位置で質點に働く力 f が Δs だけ進行する間その大きさを變へずに f のまゝであつたとすると Δs 間に f がなした仕事は $f\Delta s$ である。これは圖に於て影を附けた矩形 $abcd$ の面積に相當する。今 Δs を限りなく小さくすると $abcd$ の面積は限りなく $abec$ の面積に接近する。即ち $\Delta s \rightarrow 0$ なる極限に於て $abcd$ の面積は $abec$ の面積を有する。かやふな微小面積は微小距離間質點が s の位置に於ける f のまゝの力で作用された時の仕事である。かやうな微小面積を無限に加へ合はすとその面積は結局横軸と曲線間の面積となるべく、それは或距離例へば s_0 から s_1 まで質點が移動するとき力のなした仕事に外ならぬ。

質點に働く力の大きさ f が s の函數として與へらるるときには上の事柄を積分の記法を用ひて次の様を書くことが出来る。即ち

$$W = \int_{s_0}^{s_1} f(s) ds$$



29 圖

次に質點の通路が曲線であり、また質點に作用する力は通路の各點に於て方向も大きさも變化するときの仕事を考えて見よう。今曲線を數多くの分點で分ち各分點を直線にて結んで一つの折線を作る。先づ質點がこの折線に沿うて動く時の仕事を計算する。相隣る二つの分點間例へば s_1s_2 間の直線距離を Δs_1 とし、 Δs_1 とその一端 s_1 に於ける力の方向との間の角を θ_1 とし、質點が Δs_1 だけ動く間力は方向及び大きさを變化しないと假定すればこの間に力のなした仕事は

$$\Delta W_1 = f_1 \Delta s_1 \cos \theta_1 \dots \dots \dots (1)$$

故に質點が折線に沿うてその全長を移動する間に力のなした仕事は上記の如きものの和で表される。

$$\begin{aligned} \Sigma \Delta W &= f_0 \Delta s_0 \cos \theta_0 + f_1 \Delta s_1 \cos \theta_1 + \dots + f_n \Delta s_n \cos \theta_n \\ &= \Sigma f \Delta s \cos \theta \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

今分點間の距離を無限に小さくすれば、 Δs は極限に於て曲線の微小部分と一致すべく、各 Δs の方向はその一端に於ける曲線の切線の方向と一致する。従つて θ は切線と切點に於ける力の方向との間の角となる。故にこの極限に於ける微小仕事 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} f \Delta s \cos \theta$ を無限に數多く加へ合はせたるものを質點が曲線運動をなすときの仕事と考へ得る。今仕事を W とすれば

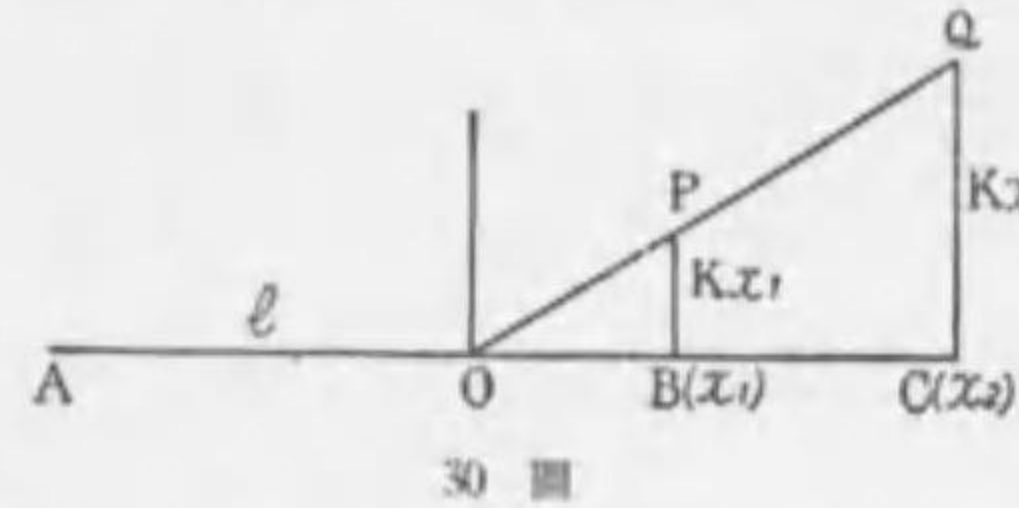
$$W = \Sigma \lim_{\Delta s \rightarrow 0} f \Delta s \cos \theta$$

積分學の記法を用ひて曲線上 A から B まで質點が運動する間に力のなした仕事を表せば

$$W = \int_A^B f \cos \theta ds$$



§ 4 仕事のグラフ応用の例 上述の仕事を求める一方法をゼンマイ又は護謨紐等の如き弾性体を引き延ばす場合の仕事



の計算に應用して見る。圖に於て OA=l とし、これを未だ引き延ばさないときの長さとする。今これを AB=l+x1 の長さから AC=l+x2 の長さまで引き延ばしたとしてそれに要する仕事を計算する。

實驗の結果によれば弾性体を引き延ばすに要する力は弾性体の延びに正比例する(但し弾性の極限内に於て)。故に今 l の長さのゼンマイ又は護謨紐を x だけ延ばすに要する力の大きさを f は

$$f=Kx \dots\dots\dots(1)$$

比例の常数は單位長だけ引き延ばすに要する力である。f と x との関係は明らかにグラフの示す如く直線で x=0 のときは f=0 であるからこれは原點を通る。前節で述べた通りゼンマイを x1 だけ延ばすに要する仕事は三角形 OPB の面積 $\frac{1}{2}Kx_1^2$ で表され、x2 まで延ばすに要する仕事は $\frac{1}{2}Kx_2^2$ で表される。従つて x1 から x2 の位置まで延ばすに要する仕事は PBCQ の面積即ち

$$\frac{1}{2}Kx_2^2 - \frac{1}{2}Kx_1^2 = \frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2) \dots\dots\dots(2)$$

である。

この例の如く力が延びに比例する場合或は力が物體の變位に比例し、形式的には上の例題と全く同様なものが物理學上に屢、あらはれるため本例の如きは重要なものである。

f=Kx なる時に積分の計算法を用ふれば上の結果は極めて簡単に

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f dx = \int_{x_1}^{x_2} Kx dx = \frac{1}{2}Kx_2^2 - \frac{1}{2}Kx_1^2$$

§ 5 工率 工業上には單に仕事と云ふことのほか單位時間内に何程の仕事をなし得るかと云ふことも極めて重要である。これを表すために工率¹⁾と云ふ言葉を用ひる。C.G.S. 單位では工率は 1 秒間について 1 エルグの仕事であるが、これは實用上非常に小さいのでその 10⁷ 倍をとつてこれを 1 ワットと云ふ。1 ワットの 1000 倍を 1 キロワットと云ふ。1 ワットは 1 秒間に 1 ジュールの仕事に他ならぬ。この他に實用上にはまた馬力なる工率の單位を用ひる。これには佛式馬力と英式馬力とがあるが吾國では主として英式馬力を採用して居る。それは毎秒 550 呎磅或は毎分 33,000 呎磅の工率である。

$$1 \text{ 馬力} = 550 \frac{\text{呎} \cdot \text{磅}}{\text{秒}} = 33,000 \frac{\text{呎} \cdot \text{磅}}{\text{分}} = 0.746 \text{ キロワット}$$

§ 6 運動のエネルギー 静止してある質點に一定の力 f が作用してこの質點が距離 s を進行して v なる速さを有つやうになつたとする。このとき力が質點に對してなした仕事を求める。

初速度が零であるから第一章 § 12 の(4)式で v₀=0 と置くと

$$v^2 = 2as$$

また $f = ma$

$$\therefore v^2 = 2 \frac{fs}{m}$$

今力が質點に對してなした仕事を W とすれば

$$W = fs = \frac{1}{2}mv^2 \dots\dots\dots(1)$$

即ち静止せる質量 m なる質點が v なる速さを有する様にするためには力は $\frac{1}{2}mv^2$ なる仕事をなさねばならぬ。

次に上述と見方をかへて v なる速さの質量 m なる質點が運動の方向と反對の方向に外部から一定の抵抗力 \vec{f} を受けて、こ

1) power, Leistung

れに反対しつゝ運動し、遂に静止するまでに質點は外部に幾何の仕事を行し得るかを考へて見る。第一章 § 12 の(4)式に於て初速 v_0 の代りに v と置き、最後の速さ v を零と置けば(加速度の方向は質點の運動の方向と反対なる故に負となる)

$$0 = v^2 - 2a's'$$

また $f' = ma'$

$$\therefore f's' = \frac{1}{2}mv^2 \dots\dots\dots(2)$$

\therefore (1)と(2)より

$$fs = f's'$$

これをもつて見れば、質量 m の質點が外力の作用によつて v なる速度を得るまでに爲された仕事だけをまたこの質點が静止させられるときに外部に向つてなすことが出来るのである。一般に外部に對して仕事をなし得る状態にある物體はエネルギーを有してゐると云はれる。上述の場合に $\frac{1}{2}mv^2$ を質點の有つ運動のエネルギー¹⁾と云ふ。運動のエネルギーをかく定義すればこの單位は仕事の單位と同一であつてその C.G.S. 單位はエルグである。

上述の場合に於ては質點が静止の状態より出發或は静止の状態に復歸すると云ふ假定をなしたが、この假定を除き質點が最初 v_0 の速さを有し、これに力が働いた結果速さを増して v になつた場合は

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

$$= v_0^2 + 2\frac{f}{m}s$$

$$\therefore W = f \cdot s = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \dots\dots\dots(3)$$

即ち力が質點になした仕事は質點の得た運動のエネルギーの増加に等しい。次に力 f' が初速度 v (上記の終速度)と反対の方

1) kinetic energy, kinetische Energie

向に作用し、質點が s' だけ動き速さが v より v_0 に減少したとすると

$$v_0^2 = v^2 - 2a's'$$

$$\therefore v_0^2 = v^2 - 2\frac{f'}{m}s'$$

$$\therefore -f's' = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore f's' = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \dots\dots\dots(4)$$

これは質點が外力に抵抗して外部に對してなした仕事であり、同時に質點の運動のエネルギーの減少を示す。(3)と(4)を比較すれば v 及び v_0 の意味が異なるけれども仕事全體としてはその數値は相等しい。これによつて見れば外力により質點に仕事をなしてその速度従つてその運動のエネルギーを増し、又運動せる質點が外部の抵抗力に抗してこれに仕事をなしつゝ運動しその運動のエネルギーを減ずる場合質點の運動のエネルギーの増加又は減少はそれぞれ外力が質點になした仕事又は質點が外部に對してなした仕事に等しいことが分る。

上述の場合では力が常に一定で力の方向が常に變位の方向と同一直線上にある場合であるが若し力の大きさがこの直線上の各點に於て異なる場合には § 3 で述べた様に仕事は

$$\int f(s)ds$$

で與へられる。今質點が最初 v_0 の速さから力に作用せられた結果 v の速さになつたとすると質點に對してなされた仕事は

$$\int_{s_0}^s f(s)ds = \int_{t_0}^t mads = \int_{t_0}^t m \frac{dv}{dt} v dt$$

$$= \int_{v_0}^v mvdv = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

これは本節の(3)の式に相當し、28圖に於て $Oacg$ の面積を表すものである。次に上式に於て初速 $v_0=0$, $s_0=0$ と置けば上の積分は

$$\int_0^s fds = \frac{1}{2}mv^2$$

となりこれは(1)式に相當する。これにより一般に質點に爲された仕

事の増加はその運動のエネルギーの増加に等しいことが知られる。

§7 位置のエネルギー及びこれと運動のエネルギーとの関係 質点が地表上 h の高さにおいて静止の状態より自然落下し地表に於て v なる速さを得たとき重力が質点に対して爲した仕事は明らかに mgh であり、 v は

$$v^2=2gh$$

によつて與へられる。而してこの仕事は前節の證明するところによつて質点の運動のエネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ となる。

即ち $\frac{1}{2}mv^2=mgh$

而してこの運動のエネルギーは更に何等か適當の装置によつて $\frac{1}{2}mv^2$ 従つて mgh の仕事をなすことが出来るから結局地表上 h の高さにある質点は mgh の仕事をなし得る状態にありと考へ得る。故に前節のエネルギーの定義によればこの質点は mgh のエネルギーを有する。而してこれは質点の位置に關係するものであるからこれを質点の重力場に於ける位置のエネルギー¹⁾と云ふ。

次に最初 v の速さで質点が直上に昇るときは質点の運動のエネルギーは次第に減少し、 $h=\frac{v^2}{2g}$ の高さに至つて零となる。その代りこの間質点は外力に抗して mgh だけの仕事をなす。

上述の事實を少しく一般的にして見る。今質点が h_1 の高さに於て v_1 の速さを有し、これが落下して h_2 の高さにて v_2 なる速さを有してゐるとするところの間重力のなした仕事は $mg(h_1-h_2)$ であり、この仕事によつて質点の運動のエネルギーは $\frac{1}{2}mv_1^2$ より $\frac{1}{2}mv_2^2$ に増加する。従つて

$$mg(h_1-h_2)=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2\cdots\cdots(1)$$

1) potential energy, potentielle Energie

これは位置のエネルギーの減少は運動のエネルギーの増加に等しいことを示してゐる。次に質点を h_2 の高さより v_2 の速さで上方に投げ上げる場合には h_1 の位置に於ては v_1 の速さを持つこと明らかであるからこの際重力のなされた仕事、或は質点が重力に抗してなした仕事は $mg(h_1-h_2)$ である。而してこの間の質点の運動のエネルギーの減少は $\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$ であり前と同様の關係が生ずる。

(1)を次の如く書きかへる。

$$\frac{1}{2}mv_1^2+mgh_1=\frac{1}{2}mv_2^2+mgh_2$$

これは任意の一點に於ける運動のエネルギーと位置のエネルギーとの和は他の任意の點に於けるものの和に等しいことを示してゐる。運動のエネルギー及び位置のエネルギーをそれぞれ U 及び V で表せば

$$U_1+V_1=U_2+V_2\cdots\cdots(2)$$

即ち兩エネルギーの和は位置の如何に關せず常に相等しく、この一定値を K と置けば

$$U+V=K=一定$$

§8 弾性體に起因する運動のエネルギーと位置のエネルギー、機械的エネルギー不減の原理 弾性體例へばゼンマイの一端に連結せられた質点の運動のエネルギーと位置のエネルギーとの關係を考へて見る。今質点に速度を與へてゼンマイを延長させ、 s_1 だけ延びた所に於ける質点の速さを v_1 、 s_2 の所での速さを v_2 とすれば質点は S_1, S_2 の場所ではそれぞれ $\frac{1}{2}mv_1^2$ 、 $\frac{1}{2}mv_2^2$ の運動のエネルギーを有してゐる。このエネルギーの差 $\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_2^2$ はゼンマイが爲された仕事、即ち質点がゼンマイの弾力に抗してなした仕事である。この仕事は §4 により

$$\frac{1}{2}Ks_2^2-\frac{1}{2}Ks_1^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}Ks_2^2 - \frac{1}{2}Ks_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 \dots\dots\dots(1)$$

次に引き伸ばされたゼンマイの収縮する場合に於ても(1)と同様の関係が得られる。而して $\frac{1}{2}Ks^2$ はバネを s だけ引き伸ばすときにバネになすべき仕事であり、且バネの伸び或はバネの先端の位置のみに関係するからこれをバネの位置のエネルギーと云ふ。

今運動のエネルギーを U とし、位置のエネルギーを V で表せば上式(1)は

$$U_1 + V_1 = U_2 + V_2 = \text{一定} \dots\dots\dots(2)$$

即ち前に得た結果と同様の結果が得られる。

位置のエネルギー及び運動のエネルギーを**機械的エネルギー**¹⁾と云ひ、§7(2)及び§8(2)は機械的エネルギーの和がすべての時刻に對して一定なることを示す。

§7, §8の例に限らず位置のエネルギーと運動のエネルギー²⁾の和は常に一定であつてこれを**機械的エネルギー不減の原理**と云ひ、この際物体に作用する力を**保存力**³⁾と云ふ。

エネルギー不減の法則が成立する場合には力が物体に働いてこれに運動のエネルギーを與へるときは力はこれと同量の仕事をなし、物体がかくして得た運動のエネルギーを力に抗し失ふときは力は物体よりその運動のエネルギーと同量の仕事を爲される。かやうに考へれば保存力とは物体が種々の徑路を経て出發點と同一點に復歸すればそのなした仕事の代數和が零であるやうな力と云ひ得る。

§9 保存力の性質 保存力は次の重要な性質を有する。

1) mechanical energy, mechanische Energie
 2) principle of conservation of mechanical energy, Prinzip der Erhaltung der mechanischen Energie
 3) conservative force, konservative Kraft

保存力が質點に作用しこれをAよりBに移動する時になす仕事はAよりBに移り行く道の如何に無關係である。

何となれば質點が道 a を経てAよりBに移動する時保存力のなす仕事を W_a , b を経る時の仕事を W_b とする。今



質點が a に沿うてAよりBに至り、次に道 C を経てAに復歸したとすれば保存力の定義により

$$W_a + W_c = 0$$

但し W_c はBより道 C に沿うてAに移る時の仕事

である。同様にして質點が道 b 及び C に沿うて移動する時は

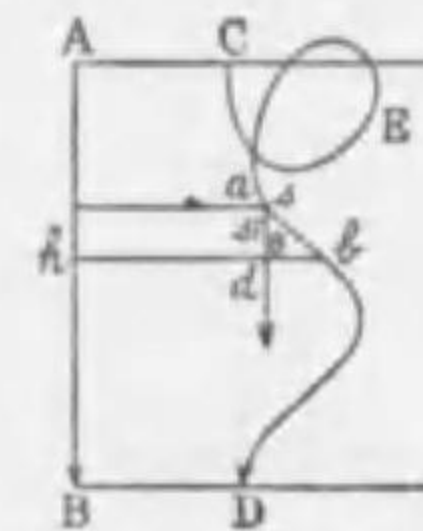
$$W_b + W_c = 0$$

依つて上の二式から

$$W_a = W_b$$

逆にかやうな關係が成立する時は質點に働く力は保存力なることは明らかである。

§10 重力及び中心力のなす仕事 圖に於て AB, CD は高さ h



を隔つる水平面とする。然らば質點が重力の下で AC に垂直な道 AB に沿うて落下するとき重力のなす仕事 W は

$$W = mgh$$

次に曲線 CED に沿うて落下する時の仕事 W' は

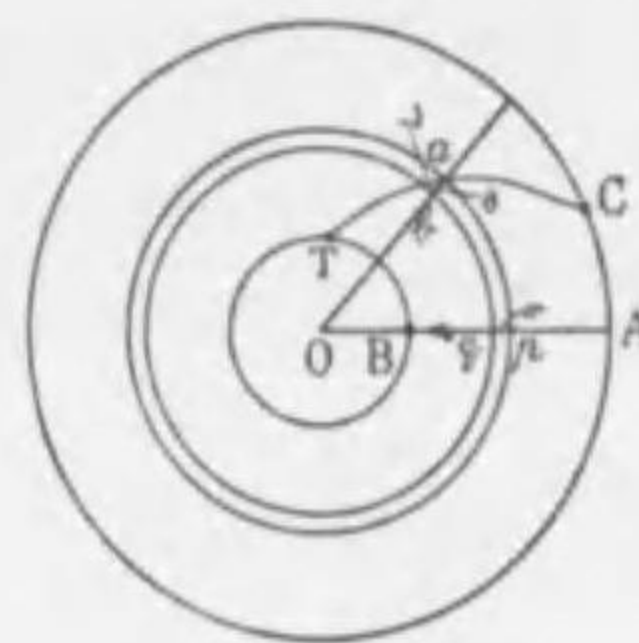
$$W' = \lim \sum mgs \cos \theta = \lim \sum mgs_1 = mg \lim \sum s_1 = mgh = W$$

茲に s は曲線 CED の微小部分 ab で θ は重力と ab とのなす角、 s_1 は ab の力の方向への正射影を表す。

即ち重力のなす仕事は二水平面間の距離のみに關し途中の道の形に關係しない。

空間内の任意の一點に働く力が常に同一の點 O に向つて働

きその大きさが O からの距離のみの函数である様な力を中心力と云ふ。



33 圖

今質點が O を通る直線上 A から B に向つて移動したときに中心力 f のなす仕事は AB の方向と力の方向が一致するから

$$W = \lim \sum_A^n f \sigma$$

但し σ は AB 上の微小距離 pq の長さを表す。

表す。

今 A, B, p, q を通る同心球面を描き A 面上の任意の點 C より B 面上の任意の點 T に至る任意の曲線が p 面, q 面と交る所を a, b とすれば a 點と p 點, b 點と q 點ではそれぞれ力の大きさが等しいから質點が C より T に移る間に中心力のなす仕事は

$$W' = \lim \sum f s \cos \theta = \lim \sum f s_1 = \lim \sum_A^n f \sigma = W$$

故に中心力のなす仕事は二つの同心球面のみに関係しこの間の道の形には関係しない。

上述の意味に於て中心力はまた保存力である。太陽と地球との間には距離の自乗に逆比例する力が働き中心力の一例をなす。

重力, バネの弾力等の中心力と反對に空氣の抵抗或は二物體間の接觸面に於ける摩擦等是非保存力である。何となれば物體が空氣の抵抗力に抗して運動しても單に物體の運動のエネルギーを減ずるのみでこれに相當する位置のエネルギーを増すこともなく, 又摩擦に抗して二點間を運動する物體のなす仕事は二點を結ぶ道の長さに關係するからである。この際失はれた運動のエネルギーは音, 熱, 光, 電氣或は化學的エネルギー等となつて外部に逸散するのである。然しこれらのエネルギーをすべて考慮の中に入れると全エネルギーの量は不減と考へられる。

§11 元 種々の物理的量の單位は長さ L , 質量 M , 時間 T の

三つの單位を基本とする基本單位から適當に組合はせて誘導することが出来る。かくして誘導單位と基本單位との關係を示すものを元或は **デメンション**¹⁾ と云ふ。

例へば任意の圖形の面積 A は一邊が L なる正方形の面積で表し得るからこれを

$$[A] = [L^2]$$

で表し, 面積の元は L^2 であると云ふ。

同様に體積 V の元は

$$[V] = [L^3]$$

以下二三の元の例を挙げると

$$\text{速度 } \left[\frac{L}{T} \right] = [LT^{-1}] \quad \text{加速度 } \left[\frac{L}{T^2} \right] = [LT^{-2}]$$

$$\text{力 } \left[\frac{ML}{T^2} \right] = [MLT^{-2}] \quad \text{運動量 } \left[\frac{ML}{T} \right] = [MLT^{-1}]$$

$$\text{仕事或はエネルギー } \left[\frac{ML^2}{T^2} \right] = [ML^2T^{-2}]$$

弧度法に於ては角 θ は圓弧の長さを半徑で除したものであるから

$$[\theta] = \left[\frac{L}{L} \right] = [L^0] = [1]$$

單なる數字は元を持たぬから角 θ も元を有しない。

種々の物理的諸量の間の方程式を元の關係に書き換へたものを元方程式と云ふ。而して方程式の各項は同種類の量でなければならぬから元方程式の各項も等しくなければならぬ。これに依つて物理學上の或問題を解いて得た方程式の各項の元を検してその方程式が成立するか否かを判断する一助となるのである。

1) dimension, Dimension

[問題]

1. 質量 15 kg の石が静止点から 10 秒間落下した後に於ける運動のエネルギーはいくらか. 但し $g=980\text{ cm/sec}^2$ (大15.京.工)

[答] 7.2×10^4 ジュール

2. 質量 100 g の弾丸を長さ 75 cm なる銃身の銃で発射したとき銃口に於ける速度は 400 m/sec であつた. 爆發ガスの壓力を一樣なりとすればその値如何. 又弾丸が銃身を通過する時間を算出せよ.

[答] $1.037 \times 10^9\text{ dyne}$, 0.00375 sec

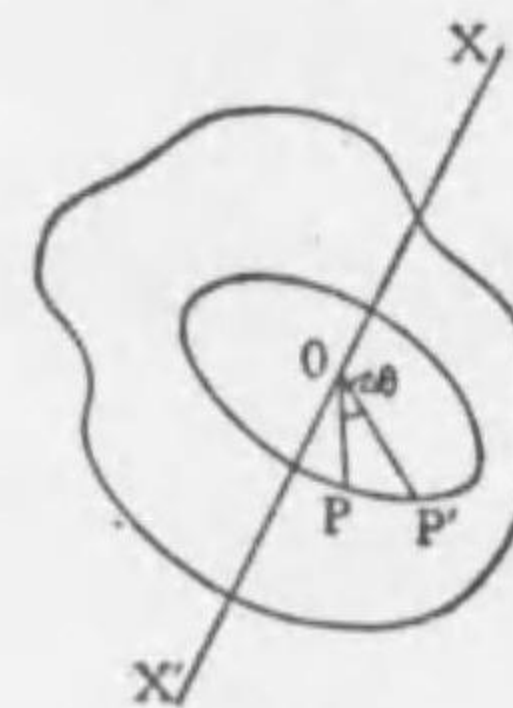
3. 弾丸を木材に撃ち込むにその速さが 150 m/sec ならば, 3 cm の深さまで入り得ると云ふ. この弾丸を 450 m/sec の速さでこの木材に撃ち込むとすると如何なる深さまで入り得るか. (昭2.京.理)

[答] 27 cm

第四章 剛體の力學

§1 剛體 有限の大きさを有し且如何に大きな力を加へてもその各部間の相互の位置の變らない物體を剛體¹⁾と云ふ. 勿論かやうな物體は理想的のものではあるが實際には剛體と見做して力學的性質を論じ得る物體は極めて多い.

§2 角速度 剛體の運動については質点と異り角速度を考



34 圖

へる必要がある. 迴轉運動²⁾とは物體中にこれに固定してある直線を考へこの直線以外のすべての點がこの點を過ぎり一定直線即ち軸に垂直な平面内に於てこの平面と軸との交點を中心とする圓運動を畫く運動である. 今剛體が XX' を迴轉の軸として迴轉する

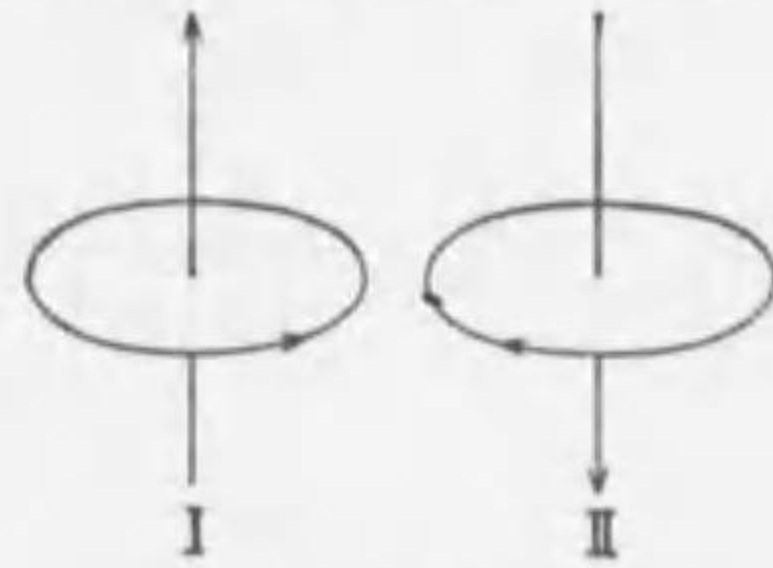
とき一點 P が dt 時間の後に P' に來たとし, 半径 OP が OP' の位置に來り角變位 $\angle POP' = \Delta\theta$ を作つたとすると $\frac{\Delta\theta}{dt}$ は OP が單位時間に迴轉する平均の迴轉角である. 今 $dt \rightarrow 0$ なるときの $\frac{\Delta\theta}{dt}$ の値即ち

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \dots\dots\dots(1)$$

を考へると, これは OP が單位時間に畫く角の大きさを表すもので, これを P の角速度³⁾の大きさと云ひ, この値及び XX' 軸の剛體に對する位置並びに XX' の周りの迴轉の方向とを併はせ考へたものを P の角速度と云ふ. 今考へる物體は剛體であるから物體中のすべての點は皆同一時間内に等しい角を畫くから點 P

1) rigid body, starrer Körper
 2) rotational motion, Rotationsbewegung
 3) angular velocity, Winkelgeschwindigkeit

の角速度は即ち物体の角速度である。角速度の単位は弧度法を用ひると1秒間に1レヂアンの廻轉角を畫く角速度であり、そのチメンションは[T⁻¹]である。

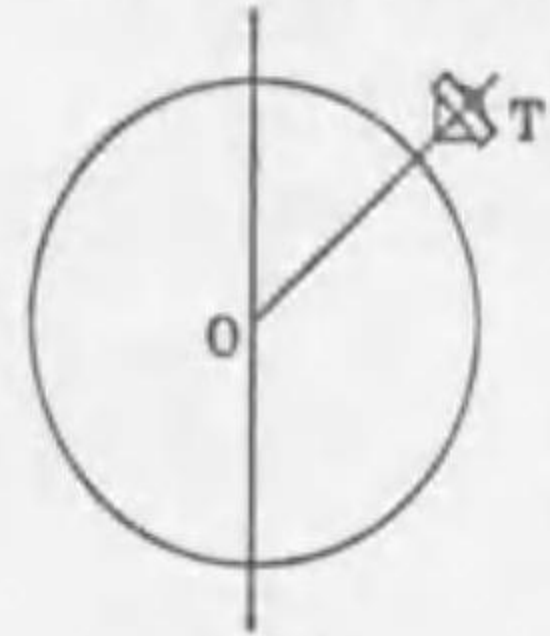


35 圖

角速度はその大きさと廻轉の方向とによつて定めらるべきものであるから、一種のベクトルと考へられる。従つて前章までに述べたベクトルの様に方向を附した一つの直線で表す。

これがために次の規約を行ふ。即ちこの直線は廻轉軸上の一 點を通つて廻轉軸の方向に引き、その長さを角速度の大きさに比例して採る。而してその方向はこの直線の矢端から質點の運動する平面を見下すとき質點の廻轉の方向が時計面の針の廻轉方向と反對に見ゆる様に採ることにする(35圖参照)。

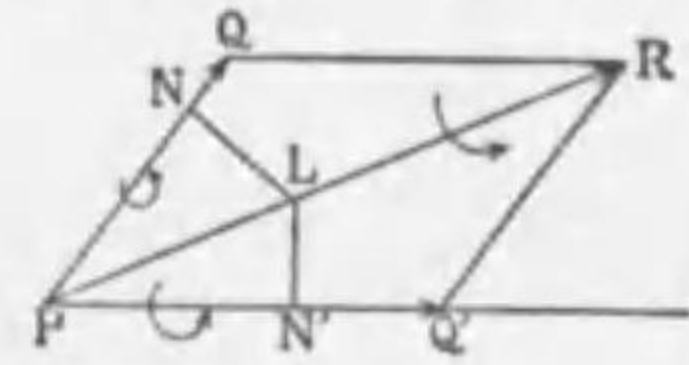
上述に於て角速度は方向と大きさによつて定められこれをベクトルであるとした。然し通常ベクトルの理論に於ては平行四邊形の法



36 圖

則に従ふ方向量のみをベクトルと稱へる。圖に於てTは廻轉する獨樂であるが若しこの時地球の自轉(地球自轉の角速度は獨樂の角速度に比すれば極めて小さいものではあるが)をも考慮に入れると獨樂の内部の點は獨樂の軸の周りの角速度と地球の自轉の軸の周りの角速度とを同時に

有することになる。このときには獨樂の一點の有する角速度は平行四邊形の法則によつて二つの角速度から合成せられるのである。



37 圖

今圖に於てPQ及びPQ'をPに於て交る二つの廻轉軸の方向とし、その長さをそれぞれPQ、PQ'の軸の周りに於ける角速度の大きさ ω, ω' に比例する様にとる。次に平行四邊形PQRQ'を作りその對角線PR上の任意の一點LからPQ、PQ'に下した垂線をLN、LN'とする。微小時間dt間に剛體はPQ軸の周りの

角速度によつて ωdt だけの角を廻轉する。この際L點はLN $\cdot\omega dt$ だけの距離をPLNの面に垂直に動く。同様にLはPQ'軸の周りの角速度によつてLN' $\cdot\omega'/dt$ だけの距離を前と反對の方向に動く。従つてL點の全變位の大きさは

$$LN\omega dt - LN'\omega'/dt \dots\dots\dots(2)$$

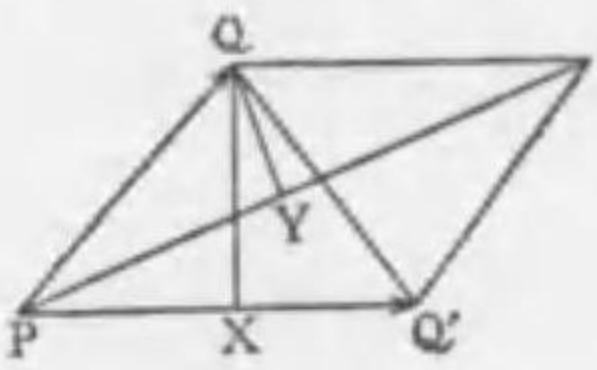
である。然るにLは對角線上の點であるから

$$PQ \cdot LN = PQ' \cdot LN'$$

然るにPQ:PQ'= $\omega:\omega'$ であるから上式は

$$LN \cdot \omega = LN' \cdot \omega'$$

と書き得る。これと(2)とを比較してL點の變位は零であることが分る。又Pは勿論變位しない。然るにLはPR上の任意の點であるからPRは合角速度の軸と見るべきである。



38 圖

次に合角速度の大きさを求める。この合角速度の大きさを Ω とする。QからPQ', PRに垂線QX, QYを下すとQがPRの周りの角速度によつてdt時間に受ける變位の大きさはQY $\cdot\Omega dt$ でPQR面に垂直である。一方この變位はまた ω, ω' による變位からも得られる。Qは廻轉軸上にあるから ω による變位は零であつて、 ω' による變位はQX $\cdot\omega'/dt$ である。従つて

$$QY \cdot \Omega dt = QX \cdot \omega'/dt \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{又一方 } QY \cdot PR = QX \cdot PQ'$$

この式の兩邊は共に平行四邊形の面積に等しくこれと(3)と比較して

$$\frac{\Omega}{PR} = \frac{\omega'}{PQ'}$$

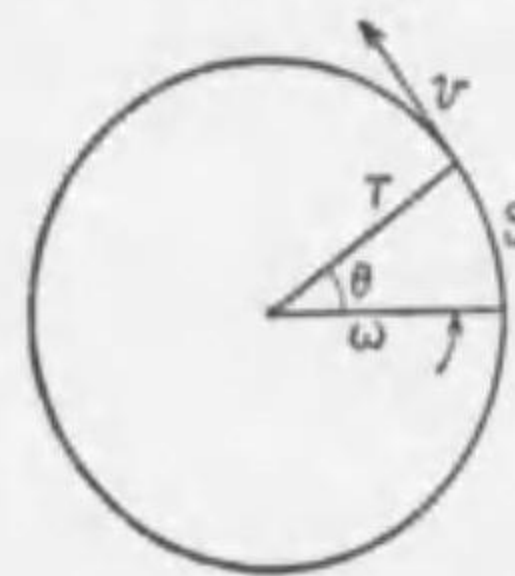
故にこの比の關係によつて若し ω' がPQ'によつて表さるゝならば Ω がまたPRで表されることを示す。

上述の結果によつて二つの角速度PQ, PQ'の合角速度はこれを二邊とする平行四邊形の對角線PRによつて表し得る。この理由によつて角速度はベクトルであると云ひ得る。今角速度 Ω を三つの直角の方向に分解し各方向に於ける角速度の成分を $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とすると

$$\Omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$$

一般に PQ, PQ' の二つの軸の周りに於ける有限の時間内に生じた二つの有限の角變位は平行四邊形の法則によつて一つの軸の周りの廻轉によつて表すことが出来ない。従つて或軸の周りに於ける有限の角變位はベクトルではあり得ない。たゞ無限小の時間内に生ずる無限小の角變位のみは平行四邊形の法則によつて合成し得るのである。

§ 3 角速度と速度(線速度)との關係 弧度法によれば



$$r\theta = s \dots\dots\dots(1)$$

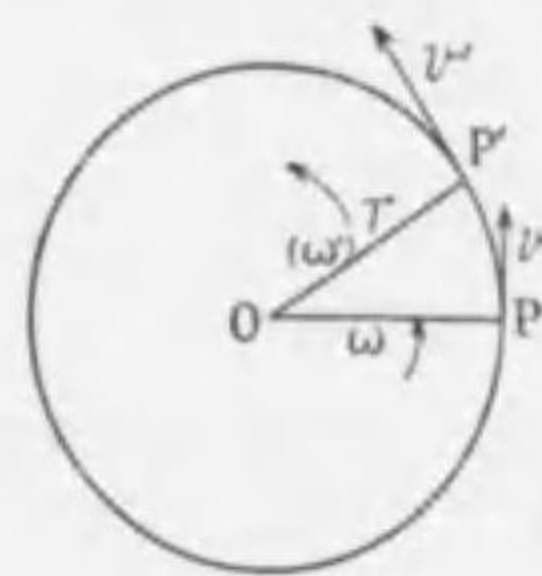
こゝに r は剛体内の一點から廻轉軸までの距離, s は廻轉中にこの一點が通過した圓弧の長さを示す。いま角速度を ω にて表せば

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{1}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}$$

或は $v = \omega r \dots\dots\dots(2)$

これは一點の角速度 ω とその點の速度(線速度)¹⁾ v との關係を示す式である。

§ 4 角加速度, 角速度と加速度との關係 今廻轉軸を中心



とし, 半徑 r なる圓周上の一點 P が Δt 時間後 P' に移動し, P, P' に於ける角速度をそれぞれ ω, ω' とする。このとき

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\omega' - \omega}{\Delta t} \right)$ を P 點に於ける角加速度²⁾ と定義しこれを以後 a で表す。今 P, P' に於ける線速度を v, v' とすれば前節により

$$\omega = \frac{v}{r}, \quad \omega' = \frac{v'}{r}$$

1) linear velocity, lineare Geschwindigkeit
2) angular acceleration, Winkelbeschleunigung

39 圖

40 圖

$$\therefore a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega' - \omega}{\Delta t} = \frac{1}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v' - v}{\Delta t} = \frac{1}{r} \frac{dv}{dt} = \frac{a_t}{r}$$

或は $a_t = ar \dots\dots\dots(1)$

こゝに a_t は P 點に於ける切線加速度を表す。今角加速度に關する一二の簡單なる場合を考へて見るに

i) 角加速度が零なる場合。この場合は物體が t 時間中に廻轉した角 θ は明らかに

$$\theta = \omega t \dots\dots\dots(2)$$

ii) 角加速度が一定なる場合。この場合では角加速度の定義は次の如く簡單になる。即ち

$$a = \frac{\omega - \omega_0}{t} \dots\dots\dots(3)$$

こゝに ω_0 は時間の最初の角速度を表す。

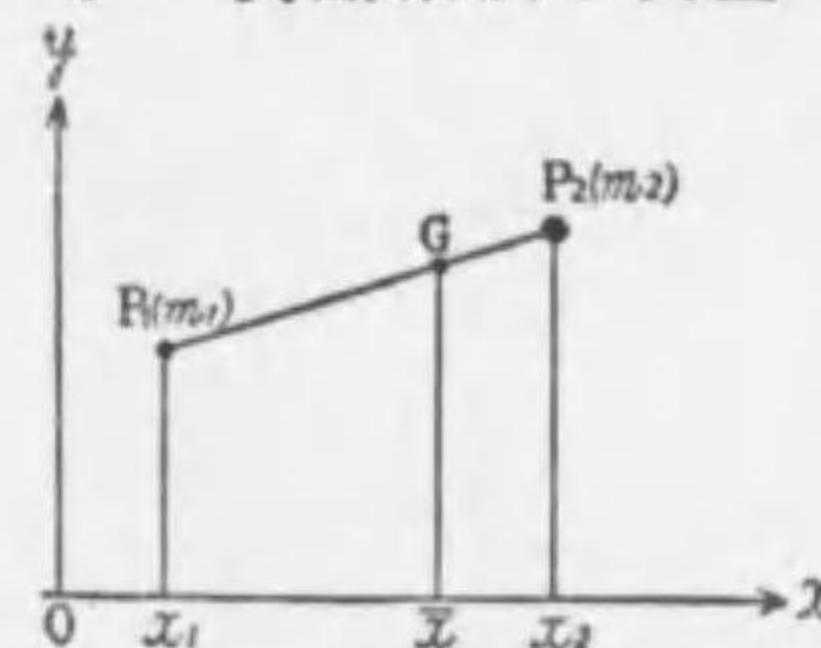
上式を $\omega = \omega_0 + at$ と書くとこれは角速度は時間と共に一様に次第に大きくなることを示してゐる。 ω がかやうな關係にあるときに物體が t 時間中に廻轉した角 θ を求むることは第一章 § 12, (3) 式に於て s を求むる方法と全く同様であつてたゞ v_0, s の代りに ω_0, θ を代入したものに過ぎぬ。即ち

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} at^2 \dots\dots\dots(4)$$

(3) と (4) から t を消去すれば

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2a\theta \dots\dots\dots(5)$$

§ 5 質點系及び質量の中心 二つ以上の質點を一團として



考ふるときはこの一團を質點系と云ふ。今最も簡單な質點系即ちたゞ二つの質點からなる質點系をとつて見る。 P_1, P_2 の二點にある質點の質量を m_1, m_2 とするとき $P_1 P_2$ を m_1, m_2 の

41 圖

逆比に内分する点即ち

$$\frac{P_1G}{P_2G} = \frac{m_2}{m_1}$$

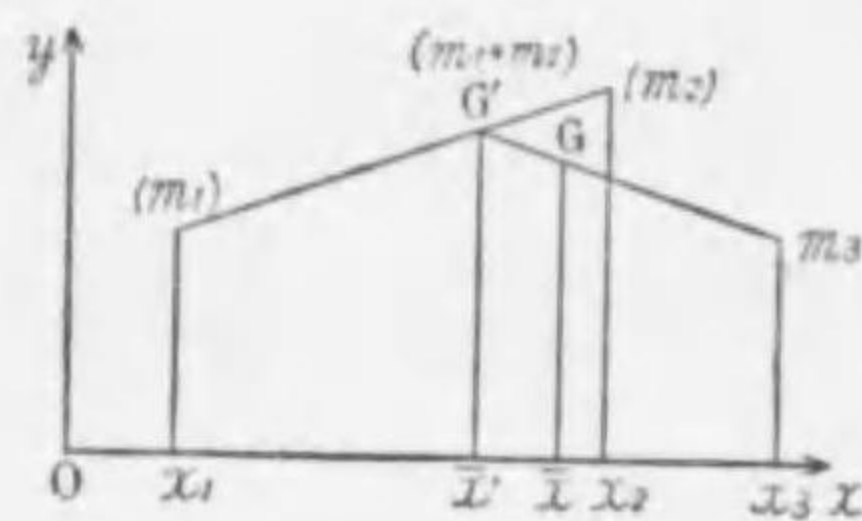
を満足する G 点をこの質点系の質心¹⁾を云ふ。今任意の座標軸をとり P₁, P₂, G の x 座標をそれぞれ x₁, x₂, \bar{x} とすれば, G の座標 \bar{x} は明らかに

$$\frac{\bar{x} - x_1}{x_2 - \bar{x}} = \frac{m_2}{m_1}$$

或は
$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \dots\dots\dots(1)$$

同様にして G の y 座標を \bar{y} とすれば

$$\bar{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \dots\dots\dots(2)$$



42 圖

次に三つ質点 m₁, m₂ 及び m₃ より成る質点系では先づ m₁ と m₂ との質量の中心 G' を求め, 次に m₁ と m₂ とが G' に集つたものと考へ, G' に於ける m₁+m₂ と m₃ との質量の中心 G を求める。この G を三つの質点の質量の中心と云ふ。今三質点の決定する平面内に座標軸をとり m₁, m₂, m₃, G', G の座標を (x₁, y₁), (x₂, y₂), (x₃, y₃), (x', y'), (\bar{x} , \bar{y}) とすれば

$$\bar{x}' = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{(m_1 + m_2)\bar{x}' + m_3x_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{(m_1 + m_2) \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \dots\dots(3)$$

同様に
$$\bar{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \dots\dots\dots(4)$$

1) centre of mass, Massenmittelpunkt

今 n 箇の質点があつて皆同一平面上にある場合にはこの方法を繰返して最後に到達する点 G をこの質点系の質量の中心と云ふ。今 G の座標を (\bar{x} , \bar{y}) とすれば

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \dots\dots\dots(5)$$

$$\bar{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \dots\dots\dots(6)$$

質点系の質量即ち各質点の質量の和を M とすれば $M = \sum_{i=1}^n m_i$ であるから

$$\bar{x} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \dots\dots\dots(7)$$

n 箇の質点在同一平面上でなく一般に立體的に分布せられるときには上の二式に更に

$$\bar{z} = \frac{\sum m_i z_i}{M} \dots\dots\dots(8)$$

を付け加へればよろしい。上の \bar{x} , \bar{y} 及び \bar{z} を表す式を見るに分子に於ける和の順序は任意に交換しても変化がないから G の位置はこれを求めるときに取る質点の順序には全く無関係で質点の配布の状態のみに關する一定点であることが分る。座標の原点を質量の中心にとれば \bar{x} , \bar{y} 及び \bar{z} は零であるから (7), (8) から

$$\left. \begin{aligned} \sum m_i x_i &= 0 \\ \sum m_i y_i &= 0 \\ \sum m_i z_i &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

が成立する。

§ 6 剛體の質量の中心 剛體は質点系の質点の数が無限に多く且無限に接近して一つの連続體をなす質点系の特別の場合

合である。一般に連続体には密度を考へることが出来る。密度とは物体の単位体積中に含まれる質量であつて質量が一樣に配布されてゐるときには全質量を M , 体積を V , 密度を ρ とすれば

$$\rho = \frac{M}{V}$$

で與へられるが質量が均一に配布されてゐないときには物体中のある點の周圍に極めて小さい體積をとり、この中に含まれる微小質量とこの微小體積との比をこの點に於ける密度と云ふ。即ち

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV}$$

さて剛體または一般に連続体の質量の中心を求むるには上記の如く連続体を無限に數多くの微小質量に分割しこの微小質量について §5 (7), (8) 式の計算を行へばよろしいのであるがこれを行ふには一般に積分法を行はなければならぬ。然し簡単な形の物体については對稱の性質を利用して求むることが出来或はまた物体を數多の部分に分割し、各部分の質量の中心を求むることが出来れば、その部分の質量がその部分の質量の中心に集つてゐるものと考へ、これによつて問題を單純化して求め得るものもある。

連続体の質量の中心を求むるには Σ の代りに積分記號を用ひる。今 (x, y, z) なる點に於ける微小質量を dm とすれば質量の中心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ は次の如くなる。

$$\bar{x} = \frac{\int x dm}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{M}$$

若し密度 ρ が與へられた時には

$$dm = \rho dv, \quad dv = dx dy dz$$

であるから

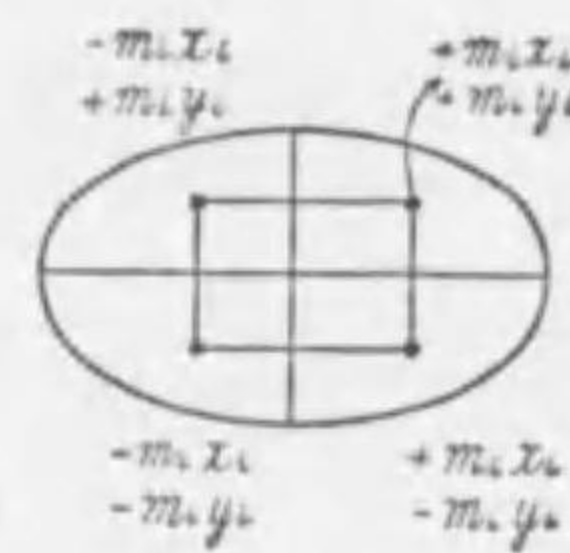
$$\bar{x} = \frac{\int \rho x dx dy dz}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\int \rho y dx dy dz}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\int \rho z dx dy dz}{M}$$

§7 簡単な形の物体の質量の中心

i) 密度一樣な極めて細い棒の質量の中心。圖に示す様な細い棒の質量の中心を求めるにはこの棒を極めて數多くの微小質量 m_i に等分し、座標軸を棒に一致せしめ座標の原点を棒の中央 O に取つて $\frac{\Sigma m_i x_i}{M}$ を計算すればよい。原点 O より A までの間にある微小質量に對しては x は正であり OB 間にあるもの對しては x は負である。棒は O に對して對稱であるから $\Sigma m_i x_i$ に於て $m_i x_i$ に對して必ず $-m_i x_i$ があるから結局

$$\Sigma m_i x_i = 0 \quad \text{即ち} \quad \bar{x} = 0$$

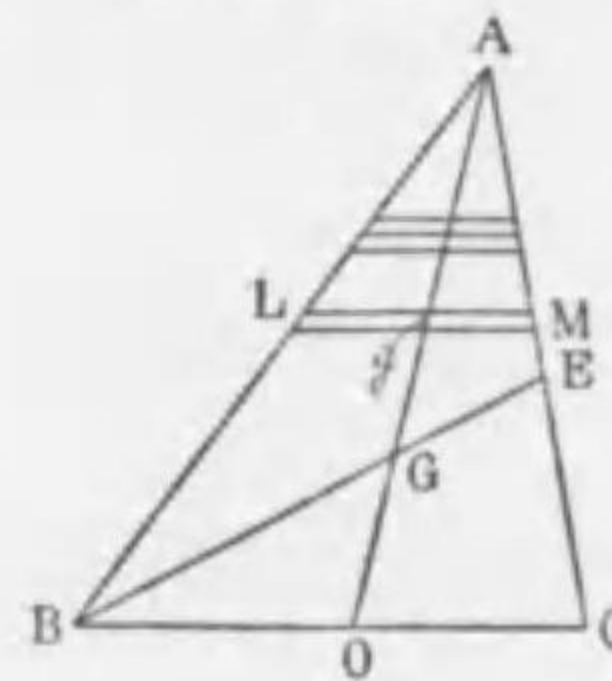
従つて質量の中心は原点に一致する。故に細い棒の質量の中心は棒の中點である。



43 圖

上の様に考へるとすべて對稱の中心を有つもの例へば圓、橢圓、矩形等の質量の中心は皆これらの對稱の中心と一致することが分る。(44圖参照)

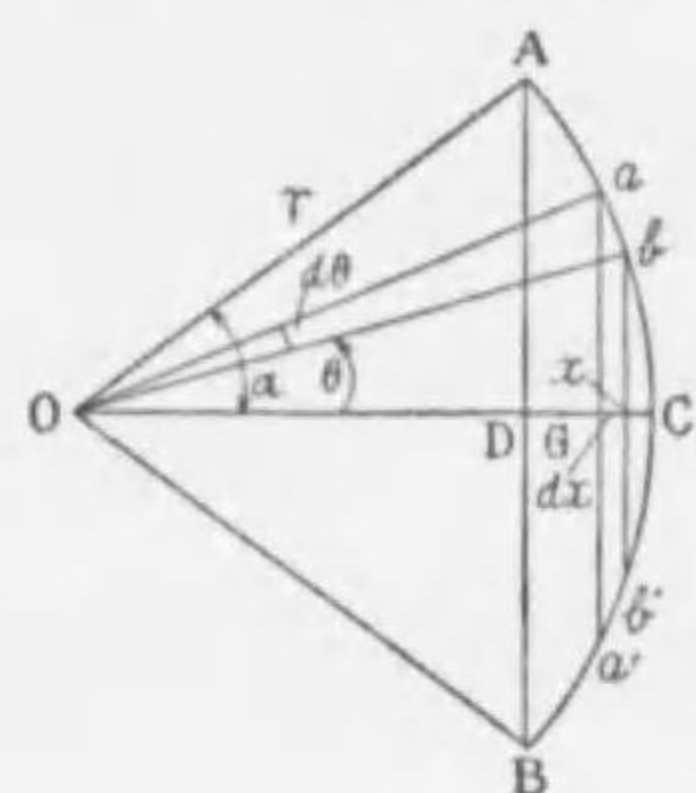
ii) 密度一樣な三角板の質量の中心。三角板 ABC を BC に平行な數多の直線で分割すると三角板は數多の細長い棒の集合體と考へ得る。今一つの棒 LM をとればこの質量の中心は LM の中點 g で g 點に棒全體の質量が集つてゐると見做し得る。従つて三角板全體の質量は中線 AO 上に集つてゐると考へられる。同様にして板の全質量はまた中線 BE 上にも集つてゐると考へられる。結局三角板の質量の中心はこの二中線の交



44 圖

点 G 即ち三角板の重心に一致することが分る.

積分を應用して質量の中心を求めの一例. 圖に於て ACB は細い



46 圖

針金を圆弧の形に曲げたものである. 圓 ACB の中心を O, 圆弧 ACB の中點を C, 半徑 OB を r, $\angle AOC$ を α とし, 針金の線密度(單位長の中に含まるゝ質量)を ρ とする. 今弧上に微小の長さ ab とこれに對稱の $a'b'$ をとり $\angle bOC = \theta$, $\angle aOb = d\theta$ とすれば ab 及び $a'b'$ の質量は共に $\rho r d\theta$ である. 今 Ob 及び ab の OC 上の正射影を x 及び dx とすれば

ab 及び $a'b'$ の二部分の質量の中心は明らかに OC 線上にあり, この二部分の質量の和 $2\rho r d\theta$ は dx 上に集合し従つて ACB の全質量は DC 上に集合してゐると考へられる. 今 $OD = l$ とし, 求むる質量の中心 G の O よりの距離を \bar{x} とすれば

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\alpha x dm}{\int_0^\alpha dm} = \frac{\int_0^\alpha r \cos \theta \cdot 2\rho r d\theta}{\int_0^\alpha 2\rho r d\theta} = r \frac{\int_0^\alpha \cos \theta d\theta}{\int_0^\alpha d\theta}$$

$$\therefore OG = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

§ 8 質量の中心の運動 前節により質量の中心及び各質點の x 座標間の關係は次の如く書き得る.

$$M\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n \dots \dots \dots (1)$$

今質點系の運動の結果 Δt 時間後に \bar{x} が $\bar{x} + \Delta\bar{x}$, x_i が $x_i + \Delta x_i$ に變化したとすると

$$M(\bar{x} + \Delta\bar{x}) = m_1(x_1 + \Delta x_1) + \dots + m_n(x_n + \Delta x_n) \dots \dots \dots (2)$$

この二式の差を作りその兩邊を Δt にて除し, 次に Δt を限り無く零に近づかしむれば

$$M \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{x}}{\Delta t} = m_1 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + m_2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta t} + \dots + m_n \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_n}{\Delta t}$$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{x}}{\Delta t}$ 及び $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t}$ は質量の中心及び質點 m_i の x 軸の方向への分速度であるからこれを \bar{v}_x 及び v_{ix} とすれば

$$\left. \begin{aligned} M\bar{v}_x &= m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + \dots + m_nv_{nx} \\ \text{同様にして} \\ M\bar{v}_y &= m_1v_{1y} + m_2v_{2y} + \dots + m_nv_{ny} \\ M\bar{v}_z &= m_1v_{1z} + m_2v_{2z} + \dots + m_nv_{nz} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

今 $(\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z)$ 及び (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}) をベクトルと考へ, 方向をも同時に考へると

$$\vec{\bar{v}} = \vec{\bar{v}}_x + \vec{\bar{v}}_y + \vec{\bar{v}}_z, \quad \vec{v}_i = \vec{v}_{ix} + \vec{v}_{iy} + \vec{v}_{iz}$$

故に (3) の三式より

$$M\vec{\bar{v}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n \dots \dots \dots (4)$$

即ち各質點の有する運動量の總和はその質點の質量が皆質量の中心に集つてこの中心の有する速度で運動したときの運動量に等しい. 次に時刻 $t + \Delta t$ に於ける質量の中心の速度及び m_i の速度をそれぞれ $\vec{v} + \Delta\vec{v}$, 及び $\vec{v}_i + \Delta\vec{v}_i$ とすれば

$$M(\vec{v} + \Delta\vec{v}) = m_1(\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_1) + \dots + m_n(\vec{v}_n + \Delta\vec{v}_n) \dots \dots \dots (5)$$

(4) と (5) 式の差を作り兩邊を Δt にて除し $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとれば

$$M \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m_1 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t} + \dots + m_n \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}$$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ 及び $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_i}{\Delta t}$ はそれぞれ質量の中心及び m_i の加速度を表してゐるから上式は

$$M\vec{a} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots + m_n\vec{a}_n \dots \dots \dots (6)$$

となる. 今 m_i に作用する力を \vec{f}_i とすれば

$$M\vec{a} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots + \vec{f}_n \dots \dots \dots (7)$$

即ち質点系の質量の中心の加速度を求めるには質点系の全質量が質量の中心に集まり、各質点に作用する力も亦この中心に集った質量に作用するものと見做せばよい。

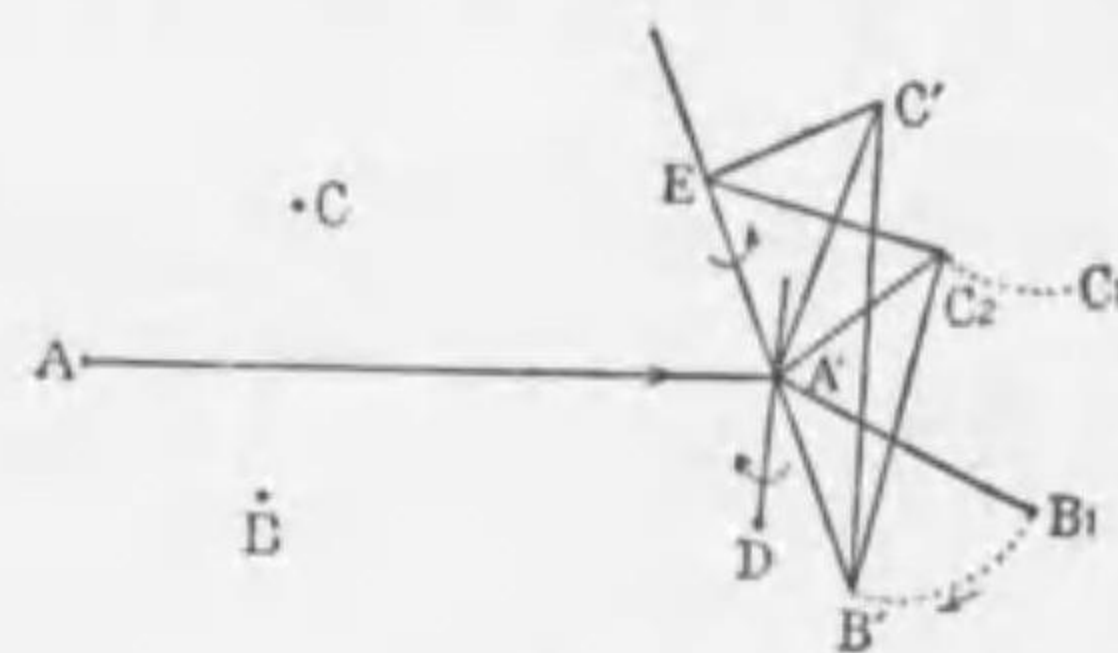
今各質点に働く力が系外より加へられた力でなく各質点相互に働く内力(例へば m_i と m_k との間の引力)のみであるときは運動の第三法則によつて或一つの内力があればこれに對し必ずそれと方向反對で大きさの等しい内力が存在するから系の内力の總和は常に零である。

この場合には (7) は

$$\vec{M}\vec{a}=0 \quad \text{或は} \quad \vec{a}=0$$

即ち質点系に外力が作用しないときには各質点間相互に如何なる力が作用してゐても質量の中心の速度には變化を生じない。故に質量の中心が最初静止してゐるときは永久に静止してゐるし、また最初速度を有してゐるときは永久に同一の速さで同一直線上を運動するのである。

§ 9 剛體の任意の運動 剛體の内部に固定せられてある直線が剛體の運動の際常に自分自身に平行に運動するときはこの運動を並進運動¹⁾と云ふ。而して剛體の運動は一般には一つの並進運動と或一點を通過する二つの軸の周りに於ける廻轉



47 圖

運動から合成せられるものである。以下これを證明する。圖に於て A, B 及び C は剛體内の三定點とする。剛體の位置は剛體内に一直線上にない三點を定めると一

1) translational motion, Translationsbewegung

義的に定まるから今かやうな三點によつて定められた位置 (A, B, C) から運動によつて生じた新たな位置 (A', B', C') に至る方法を考へて見る。

i) 先づ剛體に並進運動を起さしめ A 點を A' の位置にもつてくる。この際には一般には B 及び C は B' 及び C' には來ないから B 及び C はそれぞれ B₁ 及び C₁ に來たとする。

ii) 次に剛體に廻轉運動を起さしめる。それは A' を通過して平面 A'B₁B' に垂直な軸の周りに B₁ を B' に移す様な廻轉である。剛體の性質により A'B₁=A'B' であるから廻轉により必ず B₁ が B' に重り得る。この時 C₁ が C₂ の位置に來たとする。

iii) 第三に A'B' を軸とする廻轉を考へるに剛體の性質から

$$B'C' = B'C_2, \quad A'C' = A'C_2$$

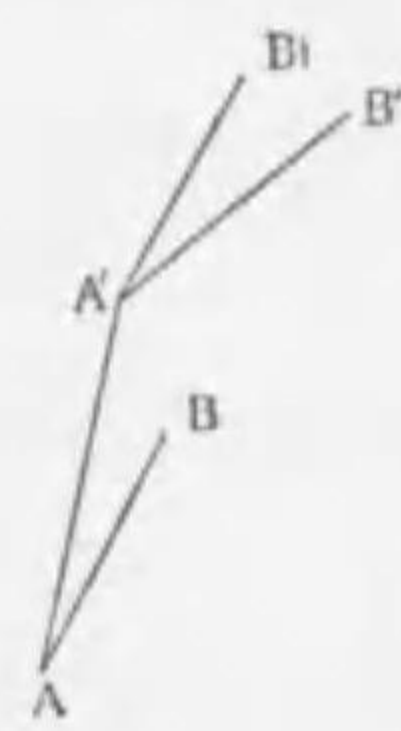
故に C' から B'A' に下した垂線の足 E と C₂ を結べば C₂E は B'A' に垂直であり且 C'E=C₂E 従つて B'A' を軸とする廻轉で C₂ を C' に移すことが出来る。

かくして剛體内の最初の三點 (A, B, C) は (A', B', C') に移つたのであるから剛體それ自身もまた最初の位置から最後の位置に移るべきである。

剛體の任意の運動は上述の如く並進運動と廻轉運動から成立し、その中並進運動は剛體内の任意の一點例へば質量の中心の運動を知れば充分でありまた一點に交る二軸の周りの廻轉運動の角速度は既に示した通りこれを合成して一軸の周りの廻轉の角速度となし得るから結局剛體の任意の運動はこの二つの運動を知れば充分に決定出来る筈である。

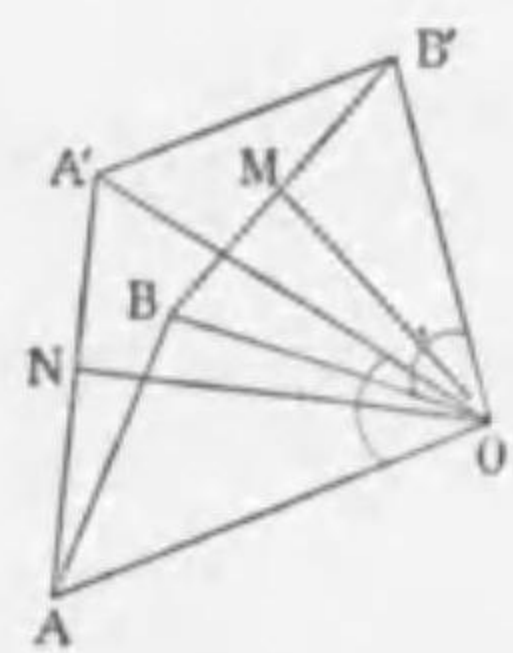
以上述べた所は極めて一般の場合であるが剛體の一般運動を精細に研究することは本書の目的でないから以下に於ては運動に制限を與へ比較的簡単な問題のみを研究する。

§10 剛體の平面運動 剛体内の各點が一定の平面に平行して運動する時はこれを剛體の平面運動と云ふ。平面運動の際は剛體の位置は剛体内の二點の位置を決定すれば充分決定出来るから前節に示した諸關係は極めて簡單である。



今剛體の最初の位置を (A, B) とし、最後の位置を (A', B') とすれば (A, B) から (A', B') に移すには先づ (A, B) に平行に (A', B₁) なる位置に移し、次に A' を中心として廻轉運動を行つて B₁ を B' に一致せしむればよい。

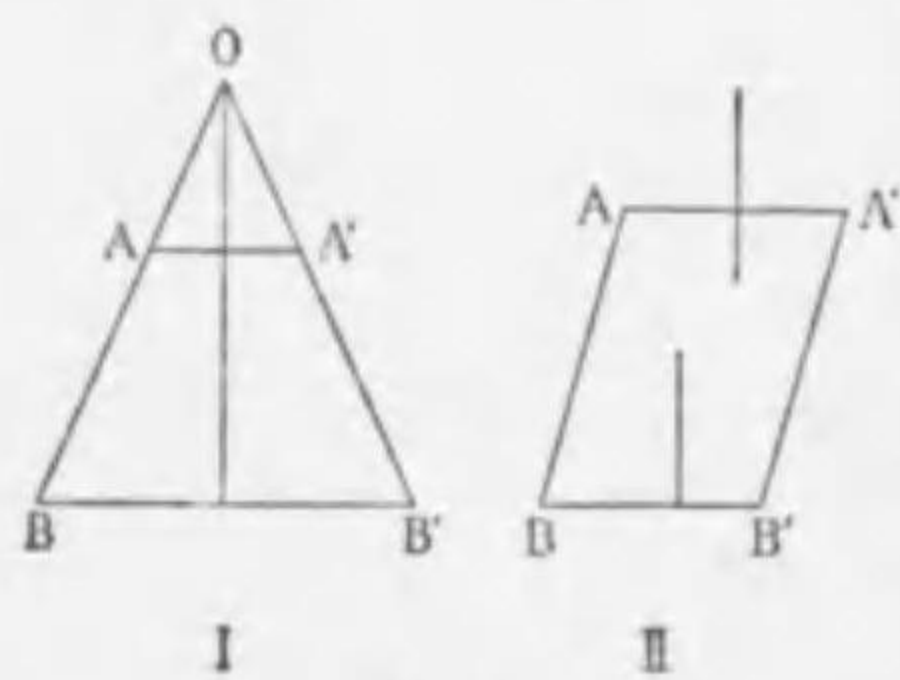
48 圖 剛體が平面運動をなすときは前述の様な方法の外に更に次の様な方法によつてたゞ一回の廻轉で最初の位置から最後の位置に到達し得る。圖に於て (A, B) 及び (A', B') を剛體の最初の位置及び最後の位置とする。A, A' 及び B, B' を結び各の垂直二等分線 MO 及び NO の交點 O を求めれば



49 圖 $\angle AOA' = \angle BOB'$, $AO = A'O$, $BO = B'O$

であるから O の周りに $\angle AOA'$ だけ廻轉すれば AB は完全に A'B' に一致し得る。

次に 50 圖 I の如く AB と A'B' が等脚梯形をなす時は AA', BB' の垂直二等分線は一致して廻轉の中心は不定であるが一見して AB と A'B' との交點 O がかやうな廻轉の中心であることが分る。また II 圖の様に垂直二等分線が平行である場合は廻轉の中心は無限の遠方にあると考へ得る。上記の性質を有する O を過ぎる廻轉軸

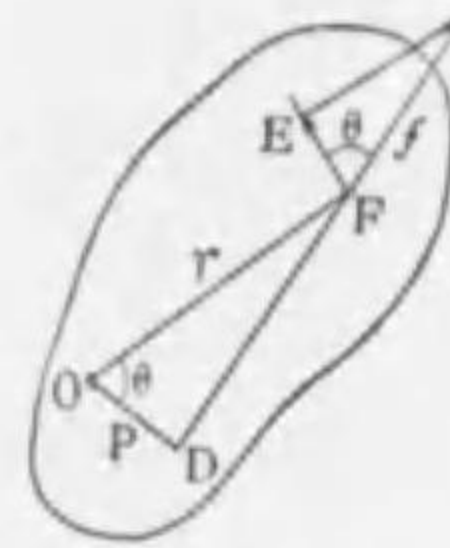


50 圖

方にあると考へ得る。上記の性質を有する O を過ぎる廻轉軸

を剛體の瞬間廻轉軸と云ふ。この軸は或瞬間には靜止して居るが次の瞬間には他の位置に移動する。剛體の平面運動はかくして瞬間軸の周りの無限に小さい廻轉運動を數多く加へ合はせて生じたものと見做し得る。

§11 力の能率 簡單の爲めに運動をすべて平面運動に限るとし、剛體が圖に示す O を過ぎり紙面に垂直な軸の周圍に廻轉するものとし、力 f が紙面に平行に F 點に働くものとする。このとき力 f の大きさと O から力の作用線 (F を過ぎつて力の方向に引いた直線) に下した垂線



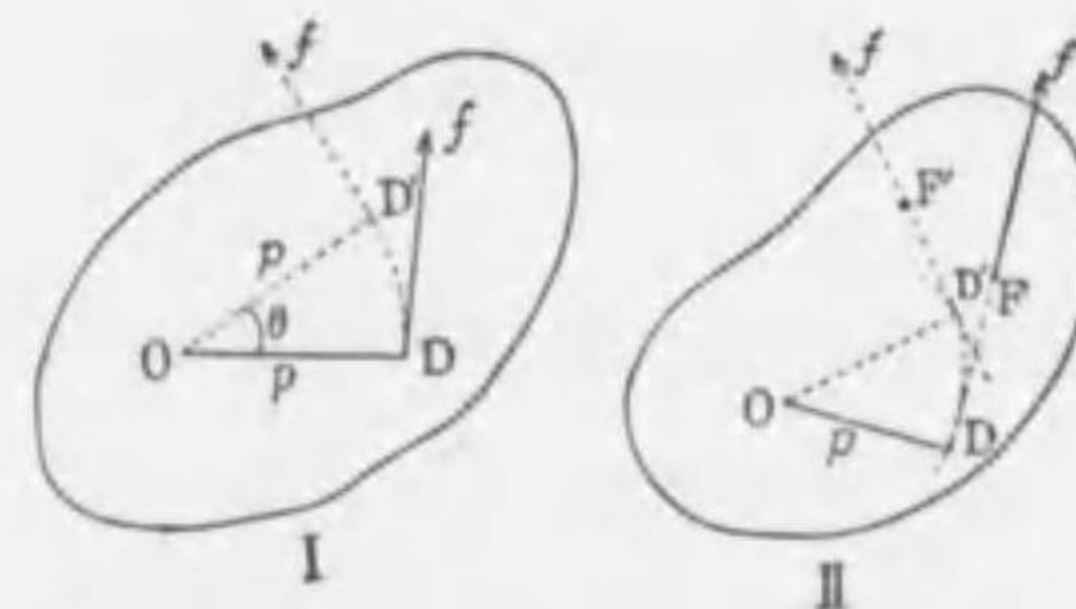
51 圖

OD 即ち臂¹⁾の長さ p との積 $f \cdot p$ を力 f の O 點に關する能率²⁾と云ふ。今 $OF = r$, $OD = p$ とすれば

$$\text{能率} = fr \cos \theta \dots \dots \dots (1)$$

上の式を $rf \cos \theta$ と書けば力の能率はまた f の OF に垂直な方向 EF の方向の分力と OF の長さとの積とも解せられる。

§12 力の能率のなす仕事 今剛體に對して一定の位置を有する直線の方に一定の大きさ f を有する力が作用しこれを O 點の周圍に θ だけ廻轉させたとする。このとき力のなす仕事を求めて見る。



52 圖

52 圖 I に於て着力點 D と O を結ぶ直線が丁度力の方向と垂直であれば力が働いて剛體が θ だけ廻轉した場合に力は DD' の圓弧に沿うて作用するから力のなした仕事は明らかに $f \cdot p \theta$ である。而して $f \cdot p$ は O に關

1) arm, Arm 2) moment of force, Moment der Kraft

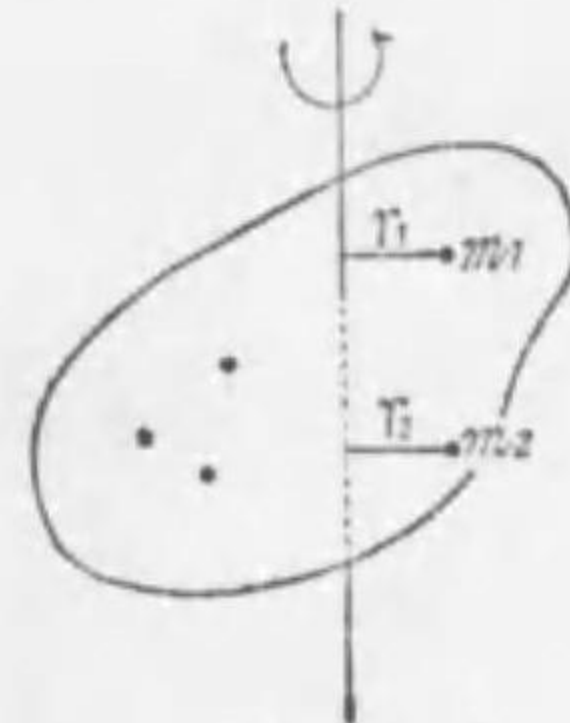
する力の能率でありこれを L で表せば

$$\text{仕事} = f \cdot p\theta = L\theta$$

これと仕事の一般の定義 $f \cdot s$ (s は力 f の方向に於ける變位)とを比較すれば力の能率 L は力 f に θ は s に相應してゐることが分る。

II 圖の如く O より力の作用線に下した垂線が着力點 F に一致しない場合を考へる。力の能率は單に臂 $OD=p$ と力の大きさだけに關係する量であるから力の着力點が F にあると考へても D にあると考へても作用線上にさへあれば仕事は常に I 圖の場合と同じく $L\theta$ であることが分る。

§13 迴轉運動のエネルギー 剛體が或軸の周りに迴轉するときには剛體を構成してゐる各質點はそれぞれ或速度をもつて運動し従つて或量の運動のエネルギーを有つてゐる。剛體の



53 圖

運動のエネルギーはこれらの質點の運動のエネルギーの和として計算さるべきである。迴轉軸から r の距離にある質點の速度を v とすればその運動のエネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ である。今剛體の角速度を ω とすれば $v = \omega r$ であるから運動のエネルギーは

$\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ である。各質點の迴轉軸からの距離はそれぞれ異なり、角速度は皆同一であるから剛體全體の運動のエネルギーを E とすれば

$$E = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots)\omega^2$$

上式の括弧の中の量は各質點の質量、剛體の形狀、迴轉軸の位置に關すること明らかである。今これを I で表せば

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 \dots\dots\dots(1)$$

§14 慣性能率 上述の I を或特定の軸に關する剛體の慣性

能率と云ふ。慣性能率は次の様に考へるとその意味がよく分る。即ち剛體の全質量を M としこれを極めて數多くの N 箇の部分に分ち各部は皆同一の質量 M/N を持つやうにする。このやうにすると

$$I = \sum_i \left(\frac{M}{N} r_i^2 \right) = Mk^2 \dots\dots\dots(1)$$

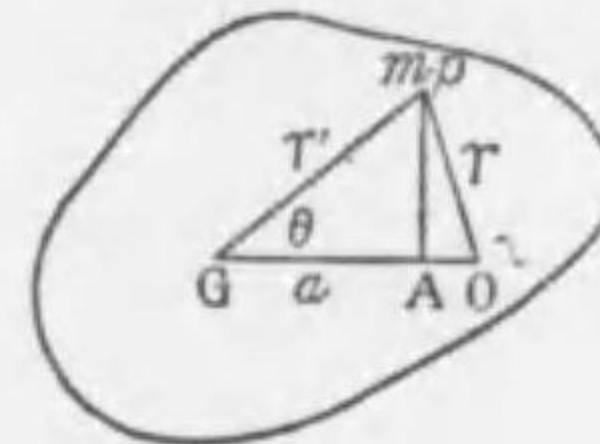
但し $k^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + \dots}{N} \dots\dots\dots(2)$

上式の k を迴轉半徑²⁾と云ふ。この k を用ひると運動のエネルギーの式は

$$E = \frac{1}{2}M(\omega k)^2 \dots\dots\dots(3)$$

これによつて見ると迴轉體の運動のエネルギーは軸から迴轉半徑の距離にある一點に剛體の全質量を集中した一質點の運動のエネルギーに等しい。

§15 慣性能率の定理 慣性能率に關して次の重要な定理がある。



54 圖

i) 質量の中心を通る軸に關する慣性能率を I_0 とし、任意の點 O を通りこの軸に平行でこれと a だけ距つた軸に關する慣性能率を I とすれば次の關係が成立する。

即ち $I = I_0 + Ma^2$

及び迴轉半徑に關しては

$$k^2 = k_0^2 + a^2$$

茲に k_0 は G に關する迴轉半徑とする。

圖に於て G, O を質量の中心及び任意の一點 O を通る互に

1) moment of inertia, Trägheitsmoment
2) radius of gyration, Gyrationradius

平行な軸の切口とする。剛体内の任意の一質点 P の質量を m とし GP, OP をそれぞれ r', r とすれば

$$I = \sum mr^2 = \sum m(r'^2 + a^2 - 2ar' \cos \theta)$$

$$= I_c + Ma^2 - 2a \sum mGA$$

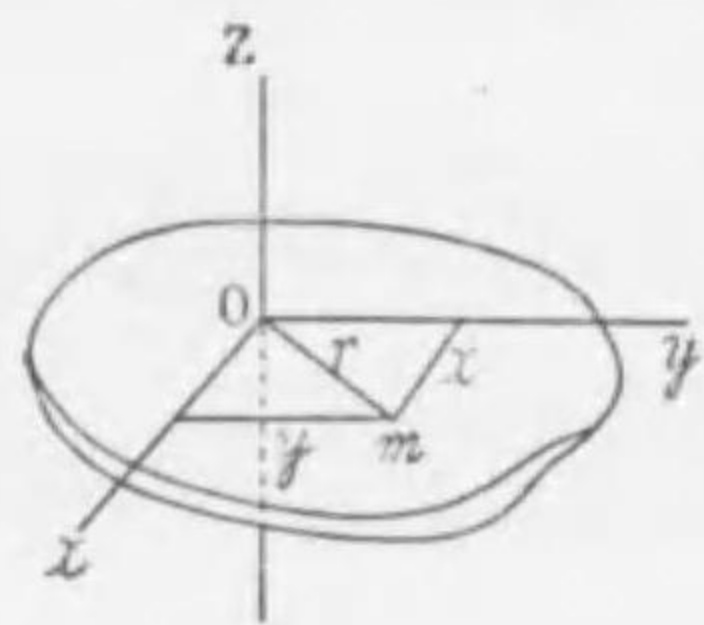
但し GA は GP の OG 上への正射影である。然るに G は質量の中心であるから § 5 (9) 式により

$$\sum mGA = 0$$

故に $I = I_c + Ma^2$ (1)

これより $\frac{I}{M} = \frac{I_c}{M} + a^2$ 即ち $k^2 = k_c^2 + a^2$ (2)

ii) 薄平板の面内に於て互に直角な二軸に関する慣性率



55 圖

の和はこの二軸の交点を通りこの平面に垂直な軸に関する慣性率に等し。

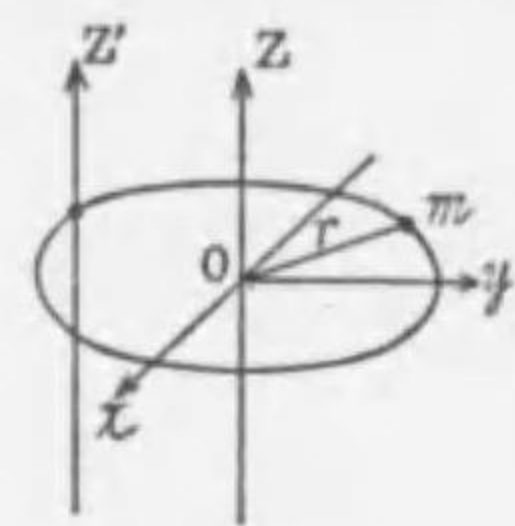
圖に於て Ox, Oy は平板面内の直交二軸。Oz はこれに垂直な軸とする。

Ox, Oy, Oz 軸に関する慣性率をそれぞれ I_x, I_y, I_z とすれば

$$I_x = \sum my^2, \quad I_y = \sum mx^2$$

$$I_z = \sum mr^2 = \sum m(x^2 + y^2) = I_x + I_y \dots\dots\dots(3)$$

§ 16 慣性率を求める簡単な例



56 圖

i) 半径 r の圓輪の中心に於て圓輪の面に垂直な軸に関する慣性率 I_z は

$$I_z = \sum mr^2 = (\sum m)r^2 = Mr^2 \dots\dots\dots(1)$$

次に中心を通つて圓輪の面内にある軸に関する慣性率 I_x は前節の定理 ii) により

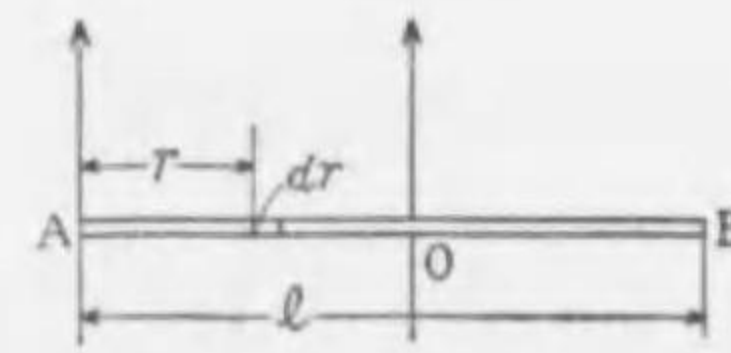
$$I_x = I_z + I_y = 2I_x, \quad \text{或は}$$

$$I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{1}{2}Mr^2 \dots\dots\dots(2)$$

又圓輪上の一点に於てこの面に垂直な z' 軸に関する慣性率は定理 i) によつて

$$I_{z'} = I_z + Mr^2 = 2Mr^2 \dots\dots\dots(3)$$

ii) 慣性率を求めるには一般には積分によらなければならぬがその中で最も簡単なもの例へば均一な線密度 ρ を有する長さ l の細い棒の一端 A に於て棒に垂直な軸に関する慣性率を求めて見る。



57 圖

$$I_A = \sum mr^2 = \int_0^l r^2 dm = \int_0^l r^2 \rho dr$$

$$= \rho \frac{l^3}{3}$$

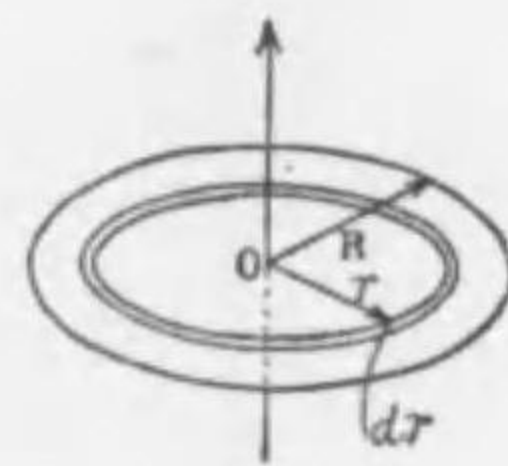
$$= M \frac{l^2}{3} \dots\dots\dots(4)$$

$$[M = l\rho]$$

棒の中点 O に於てこれに垂直な軸に関する慣性率 I_o は前節定理 i) により

$$I_o = I_A - M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{M}{12}l^2 \dots\dots\dots(5)$$

iii) 半径 R, 表面密度 ρ の圓板の中心に於て圓板に垂直な軸に関する慣性率



58 圖

$$I = \sum mr^2 = \int_0^R 2\pi r dr \cdot \rho \cdot r^2 = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho R^4$$

$$= \frac{1}{2}MR^2 \dots\dots\dots(6)$$

$$[M = \pi R^2\rho]$$

圓板の直径を軸とする慣性率 I' は前節定理 ii) により

$$I' = \frac{I}{2} = \frac{1}{4}MR^2 \dots\dots\dots(7)$$

慣性能率の表

物 體	軸 の 位 置	慣 性 能 率
細い棒	一端に於て垂直	$M \frac{l^2}{3}$
同	中點に於て垂直	$M \frac{l^2}{12}$
圓板	中心に於て垂直	$M \frac{R^2}{2}$
楕圓板	長軸(半) a , 短軸(半) b , 中心に於て垂直	$M \frac{a^2+b^2}{4}$
矩形板	二邊 a, b , 中心を通り面 に垂直	$M \frac{a^2+b^2}{12}$
球殼	中心を通過	$\frac{2}{3}MR^2$
球(内實)	中心を通過	$\frac{2}{5}MR^2$

§17 迴轉運動のエネルギー方程式 一定軸の周圍に迴轉し得る物體に一定の力が作用しこの力の能率を L とし、剛體の今考へる軸に關する慣性能率を I とする。今物體が力の能率によつて θ だけ迴轉すればこの時の仕事は §12 により $L\theta$ である。剛體内部に於ては力の作用により各部分の相互的の位置は變らぬから力のために位置のエネルギーの變化は生じない。従つて外力によつてなされた仕事 $L\theta$ は運動のエネルギーの増加でなければならぬ。即ち

$$L\theta = \frac{1}{2}I(\omega^2 - \omega_0^2) \dots \dots \dots (1)$$

§18 運動量の能率(角運動量) 上の式を少しく書きかへ剛體が $\Delta\theta$ の迴轉をなすに Δt 時間を要したとし、角速度がこの時間内に ω から $\omega + \Delta\omega$ に變化したとすると上式は

$$L\Delta\theta = \frac{1}{2}I\{(\omega + \Delta\omega)^2 - \omega^2\}$$

$$= \frac{1}{2}I\{2\Delta\omega\omega + (\Delta\omega)^2\}$$

今 $\Delta\theta = \omega\Delta t$ として上式に入れると

$$L\omega\Delta t = I\Delta\omega\omega + \frac{1}{2}I(\Delta\omega)^2$$

或は
$$L = I \frac{\Delta\omega}{\Delta t} + \frac{I}{2\omega} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Delta\omega$$

今 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考へると $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ は角加速度であり第二項は極限に於ては第一項に比しては無視し得るから上式は

$$L = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = I\alpha \dots \dots \dots (1)$$

この式は力の能率とこれによつて生ずる角加速度との關係を示すもので運動の第二法則 $f=ma$ に相當し剛體の迴轉運動を研究するに最も基礎的なものである。

或軸の周圍に於ける慣性能率 I とその軸の周圍に於て或瞬間の角速度 ω との積 $I\omega$ をこの軸に關する運動量の能率¹⁾或は角運動量²⁾と云ふ。(1)式はこの角運動量の時間に對する變化の割合は力の能率に等しいことを示してあるものである。

若し外力が今考ふる軸に對し能率を有してゐないときは角運動量は時間に對しては變化せず常に一定の値を有するのである。

即ち $L=0$ のときは (1) より

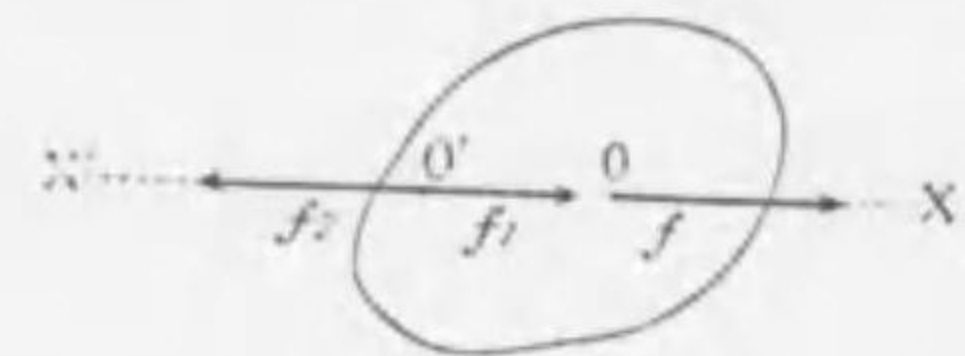
$$I\alpha = \frac{d}{dt}(I\omega) = 0$$

$$I\omega = \text{const.}$$

1) moment of momentum, Moment der Bewegungsgröße
2) angular momentum, winklige Bewegungsgröße

これは一定軸のまわりに於ける角運動量の不変を示すもので一般の角運動量不変の原理の一特例をなしてあるものである。

§19 剛体に働く力の合成 剛体に働く力の合成を論ずる前に剛体に働く力はその着力点を作用線上の任意の点に移動し



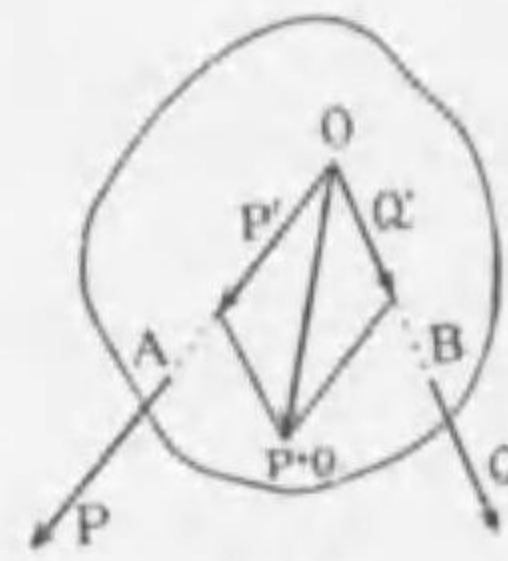
59 圖

得ることを説明する。剛體の一点 O に作用する力を f としその作用線を XX' とする。

今 XX' 上の任意の一点 O' を

とり O' に f と大きしく方向互に反対な二つの力 f_1, f_2 を f の作用線上にとるとこの二力は合力が零で力としてその作用を剛體には與へない。同様な關係は f と f_2 との間にも成立し互に消し合ふ。結局残るのは f_1 だけである。 f_1 は丁度 f をその作用線上に O' 点まで移動したことに相當する。

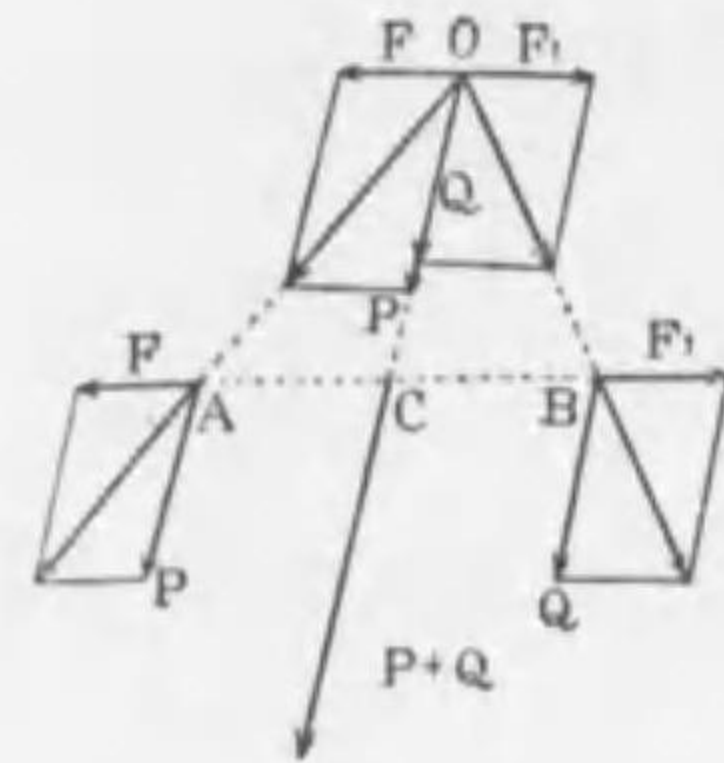
i) 二つの力の作用線が相交る場合。剛體内の二点 A, B に



60 圖

作用する二力 P, Q の作用線が O に於て相交るときこの二力の合力を求むるには P, Q をその作用線上の O に移しこの二力 P', Q' の合力を平行四邊形の法則によつて求むればよい。

ii) 二力の作用線が平行で二力の方向が同一な場合。剛體内の二点 A, B に平行で同方向の力が作用するときこの合力を求むる。直線 AB に沿うて A 及び B に大きしく方向反対な二力 F, F1 を作用せしめる。 F と F1 との合力は零であるから二力 P, Q の合力は P, Q, F, F1 の四力の合力と同一である。次に F と P, F1 と Q の合力を求めその合力をそれぞれその作用線の交点まで移動し次にこれらの合力をそれぞれ P と



61 圖

F 及び Q と F1 とに分解すれば F と F1 とは互に消し合ふから合力は結局 O 点に作用する P+Q である。今この合力の着力点を AB と合力の作用線との交点 C に移動すれば C には P 或は Q と平行で P+Q の力が作用してゐることになる。次に作圖によつ

て明らかな通り

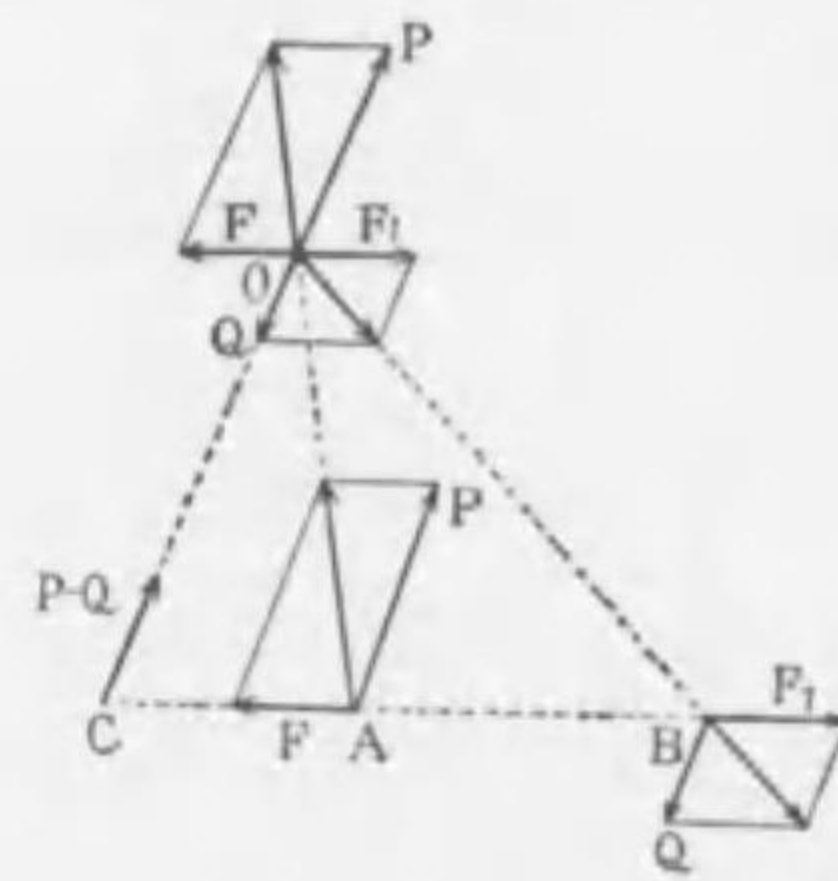
$$\frac{CA}{OC} = \frac{F}{P}, \quad \frac{CB}{CO} = \frac{F_1}{Q}$$

然るに F と F1 とは大きが等しい。

$$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P} \quad \text{或は} \quad CA \cdot P = CB \cdot Q$$

即ち C は AB を P, Q の逆比に内分する点である。

iii) 二力の作用線が平行で二力の方向が反対な場合。剛體内の二点 A, B に平行で方向反対な二力 P, Q が作用するときその合力を求むる。先づ P が Q より大であるとし前の場合と同



62 圖

様に AB 線上に A, B に方向反対で等大の力 F, F1 を作用させ P と F 及び Q と F1 との合力を求めこれら二合力をその作用線の交点 O に移し然る後にこの合力をそれぞれ F, P 及び F1, Q に分解すれば O 点に於て F と F1 は互に消し合ひたゞ二力の差 P-Q だけが作用する。

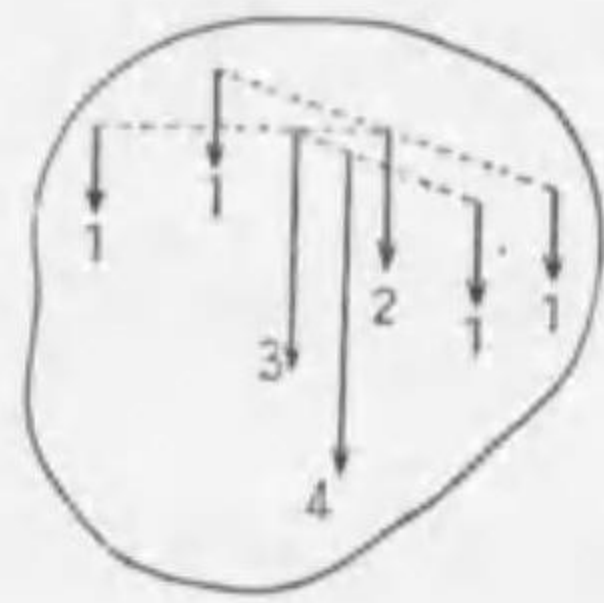
この差の力をその作用線と AB との交点 C に移せばこれは P 及び Q の合力である。而して C 点の位置は

$$\frac{AC}{CO} = \frac{F}{P}, \quad \frac{CB}{OC} = \frac{F_1}{Q}$$

∴ $AC \cdot P = CB \cdot Q$

即ち平行で方向反対な二力の着力点 C は AB を二力の逆比に外分する点である。i), ii) の場合に於て二力の合力の着力点 C を平行力の中心と云ふ。

§20 重心 物体の各部分は鉛直線の方に平行な重力の作用を受けてゐるから前節の方法によつて各部分に働く重力を



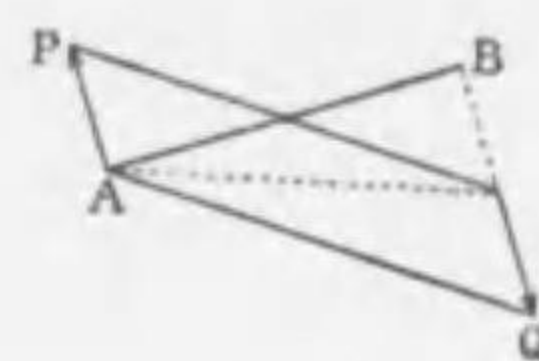
63 圖

順次合成し遂には物体全體に作用する重力の合力及びその着力点を求め得る筈である。物体に對するこの點の位置は物体の方向如何にかゝらず同一物体については常に一定である。かゝる點を物体の

1) 重心と云ひ、物体の全重量がこの點に作用

するものと見做し得られるのである。重心の位置を求むる方法は質量の中心の位置を求むる方法と全く一致するから重心の位置は質量の中心と全く一致する。

§21 偶力 §19, iii) に於て若し P の大きさが漸次に Q の大きさに近づくとときはその合力 P-Q は漸次小さくなりまた一方



64 圖

P と F 及び Q と F₁ の合力は殆んど平行となるから P と Q との合力の着力点 C は漸次 A から遠ざかる。故に P=Q なるときは合力の大きさは零で着力点は無限遠の位置に至る。故に働く二力が平行で大き等しく且方向が反対の場合この力の合力を求めてその作用を調べることは極めて不便であるから吾々はその二力をそのまゝ一組にして考へ、これを偶力²⁾と名づける。そして二力の作用線間の垂直距離 AB を偶力の

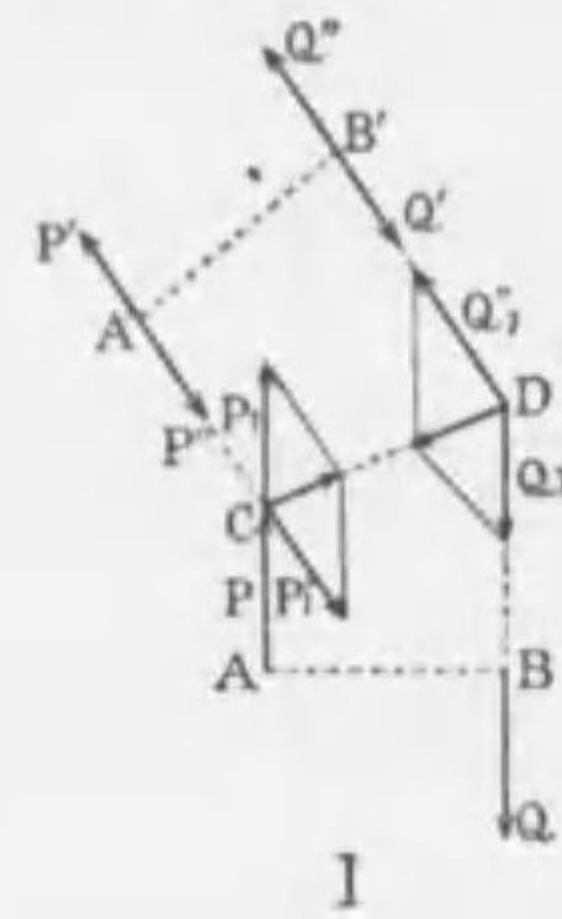
1) centre of gravity, Schwerpunkt

2) couple, Kräftepaar

臂、臂と力の大きとの積を偶力の能率と云ひ、剛體に對する偶力の効果をこの能率によりて計る。能率の大きさは二力を表す線分を對邊とする平行四邊形の面積に等しい。

§22 偶力の性質

i) 偶力はその力の大き及び臂の大きを變へることがなければ偶力のある平面内の任意の位置に移動しても剛體に對する効果には變りはない。何となれば今65圖 I に於て (P, Q) を AB を臂とする偶力とし、新に AB に等しい臂 A'B' を有し、力の大きがそれぞれ P, Q に等しい P', Q' を有する偶力を附け加へ、更に A', B' に P', Q' と等大で方向反対な P'', Q'' を加へると P' と P'', Q' と Q'' とは互に消し合ふから偶力 (P', Q') (P'', Q'') は剛體に對して何の効果も生じない。今 P'' と P の作用線の交點及び Q'' と Q の作用線の交點をそれぞれ C, D とし、P, P'' を C 點に、Q, Q'' を D 點に移す。これらの力をそれぞれ P₁, P₁'', Q₁, Q₁'' とし、P₁ と P₁'' 及び Q₁ と Q₁'' の合力を求めるとこの合力は大きさが等しく方向が反対であるから互に消し合ふ。結局残る力は P' と Q' のみである。これは丁度偶力 (P, Q) を AB の位置から A'B' の位置に移したのと同じ結果である。



I



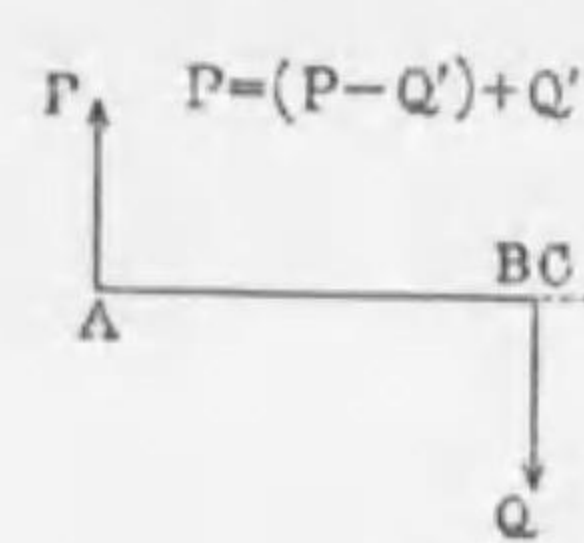
II

65 圖

力の方向の關係が II 圖の様な場合では AB は A'B' に等しく力の大きも等しいが AB の位置から A'B' の位置に移動することは偶力の平面内の運動だけでは不可能である。この二つの偶力の剛體に對する効果は同一ではない。

ii) 偶力は同一平面内に於て能率の等しい他の偶力に置き換

へても剛體に対する効果は等しい。



66 圖

ものとする。即ち

$$P' \cdot AB' = P \cdot AB$$

B' に於ける二力 P', Q' は互に消し合ひ、また A に於ける力 P は P-Q' と Q' の二力から成つて居ると考へても差支へはない。

次に A に於ける P-Q' と B' に於ける P' は互に平行であつて同方向の力であるからその合力を R とし、その着力点を C とすれば

$$R = P - Q' + P' = P \quad (P' = Q' \text{ なる故})$$

$$P' \cdot B'C = CA(P - Q')$$

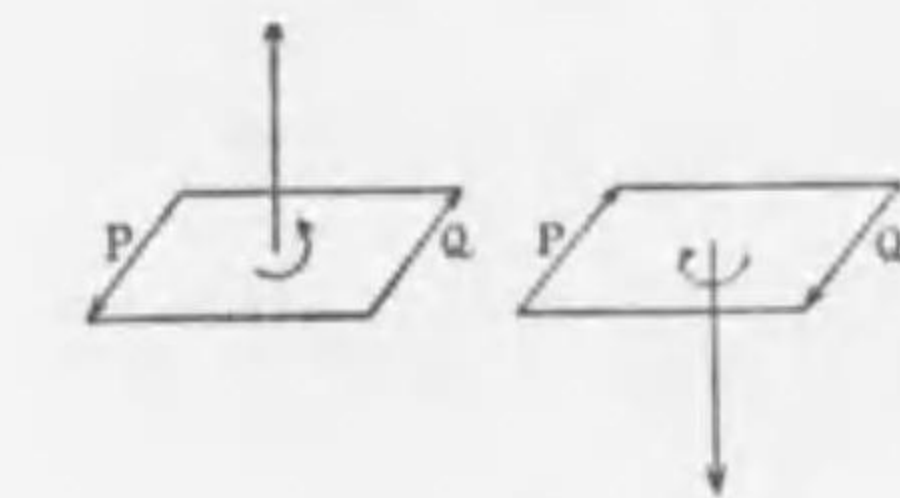
この兩邊に P' \cdot CA を加へると

$$P' \cdot AB' = CA(P - Q' + P') = R \cdot CA = P \cdot CA$$

然るに $P' \cdot AB' = P \cdot AB$ と假定したから B と C は同一の點でなければならぬ。従つて A に於ける P-Q' と B' に於ける P' との合力 P は B に働きこの點に於ける Q' とは互に消し合ふ。結局残つてゐるものは A に於ける Q' と B' に於ける Q' だけである。この二力は偶力を作りその能率 $Q' \cdot AB'$ は元の偶力の能率 $P \cdot AB$ と相等しい。既に證明した性質により偶力 (Q', Q') はこの平面内に如何様にも移動出来る。故に偶力はその能率を變へなければその平面内に於て任意に移動し得る。

iii) 偶力はその平面に平行な他の任意の平面に移動しても剛體に対する効果に變りはない。AB を臂とする偶力を (P, Q) と

しこの平面に平行な平面を P'A'B'Q' とする。この平面内に於て臂 A'B' が AB に等しく力の大きさがそれぞれ P, Q に等しい偶力 (P', Q') を付け加へる。この偶力を打ち消すために A', B' に大きさがそれぞれ P' 及び Q' に等しく方向反對の力 P'', Q'' を働かせる。次に P と Q'' の合力 R, Q' と P'' の合力 R' を求めると R と R' は明らかに大き等しく方向反對でその着力點は AB' と A'B' との交點 C である。従つて R と R' は互に打ち消し結局 P' と Q' だけが残る。即ち偶力 (P, Q) をこれに平行な平面内の偶力 (P', Q') に移動したことになる。

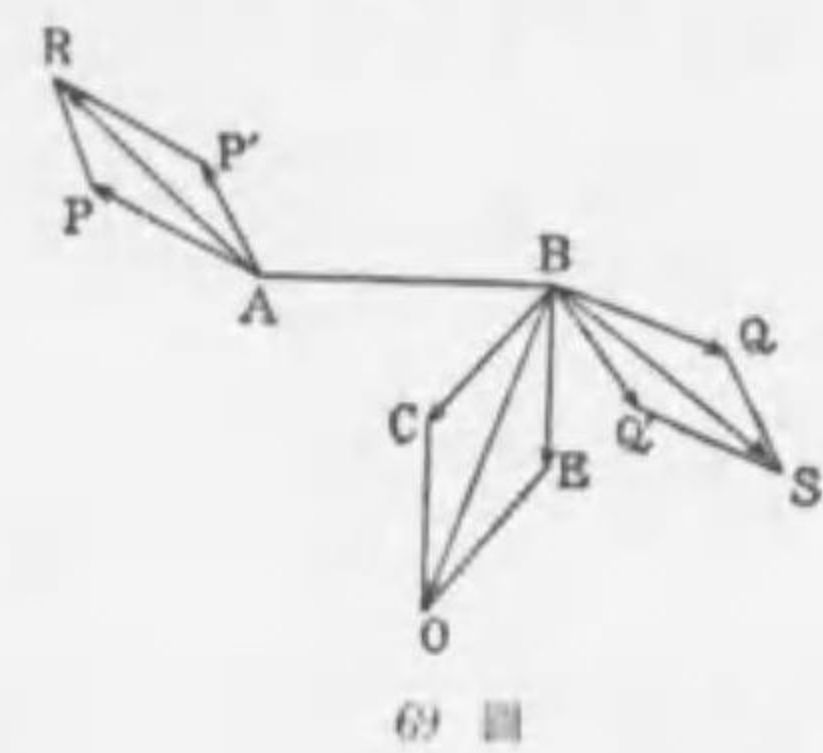


68 圖

以上述べた性質によつて偶力はそれ自身の平面内またはそれに平行な平面内に任意に移動し得、またその能率さへ變らなければその力の大きさまたは臂の大きさは任意に變へ得る。従つて偶力を一意的に決定するにはその能率、剛體を廻轉せんとする方向及び偶力の面に垂直な直線の方法を知ればよろしい。故にこの三つを知れば角速度と同様の表し方をすることが出来る。即ち偶力の平面に垂直な直線を引きこの直線上に平面から偶力の能率の大きさに比例する長さを取る。而してその方向はこの垂直軸の矢端から偶力の平面を見下すとき偶力による剛體の廻轉の方向が時計面の針の廻轉方向と反對の方向に見ゆる様にする。然し偶力はそれ自身に平行に任意に移動し得ることに於て角速度の場合とは異なる。

§23 任意の二つの偶力の合成 偶力を一つの方向を附した線分で表す方法を規定した。かく規定せられた偶力は平行四

邊形の法則によつて合成せられる。即ち相交る二つの平面内



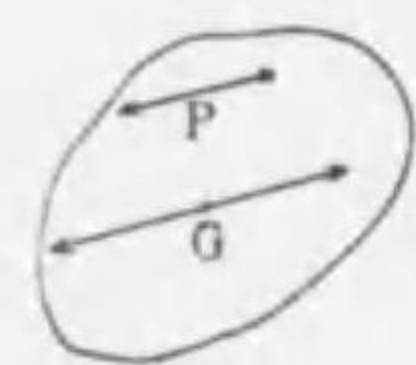
69 圖

にある二つの偶力は前節の i) 及び ii) によつて臂を共有にする様に適當に移動及び臂の大きさを變へることが出来る。その臂を AB とし (P, Q), (P', Q') を AB を臂とする偶力とする。R を P と P', S を Q と Q' の合力とすれば P 及び P' は Q 及び Q' にそれぞれ平行であるから R 及び S は互に平行である。従つてこの二つの偶力は AB を臂とする一つの偶力 (R, S) と効果は同一である。今 B 點に於て(必ずしも B 點なるを要しないが) 偶力 (P, Q), (P', Q'), (R, S) の平面に垂直なる直線 BE, BC, BO を立てその長さをそれぞれ偶力の大きさに比例してとる。この三つの直線間の角は BQ, BQ', BS 間の角に等しく且

$$BE : BC : BO = P \cdot AB : P' \cdot AB : R \cdot AB \\ = P : P' : R$$

然るに R は P と P' の合力である。従つて BO は BE と BC を二邊とする平行四邊形の對角線でなければならぬ。以上の事柄によつて偶力は一つのベクトルである。

§24 剛體の種々の點に働く力の合成 剛體の種々の點に働く力の合力は任意に選んだ一點に働く力と一つの偶力によつて置き換へることが出来る。G を任意に選んだ一點とし、P を任意の力とする。但し P の作用線は G を通らなると假定する。今 G に於て大きさは P に等しく方向反對で作用線が P の作用線に平行な二力を考へて見る。この二力と元の力との合力を作ると一つの偶力と P をそれ自身に平行に移動して G に



70 圖

て置き換へることが出来る。G を任意に選んだ一點とし、P を任意の力とする。但し P の作用線は G を通らなると假定する。今 G に於て大きさは P に等しく方向反對で作用線が P の作用線に平行な二力を考へて見る。この二力と元の力との合力を作ると一つの偶力と P をそれ自身に平行に移動して G に

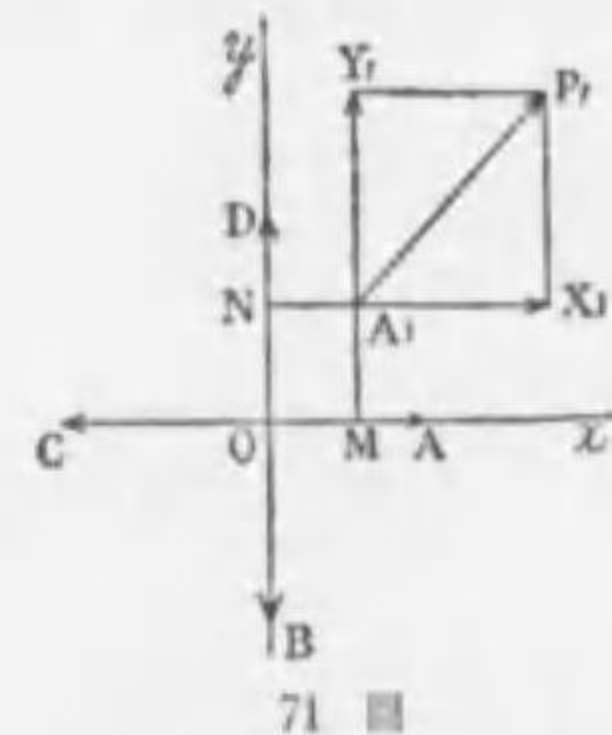
持ち來たした力とが得られる。

かやうな操作を剛體の種々の點に働く力に對して行へば結局

- a) G 點に働く幾つかの力
- b) 幾つかの偶力

G に働く幾つかの力はたゞ一つの力に合成せられ幾つかの偶力は前節によつて一つの偶力に合成せられる。この際 G は任意の點であるが剛體の運動を研究するには G を特に重心に選んでおくのが便利である。

§25 剛體に働く諸力が同一平面内にあるときこの剛體が平衡の状態にあるための條件 前節の結果によれば剛體に働く諸力は結局任意に選んだ一點に働く一つの力と一つの偶力とに



71 圖

歸することが出来而してこの力及び偶力の能率が零であれば剛體は平衡の状態にある。今この平衡状態の解析的條件を調べて見る。今 P_1, P_2, \dots 等の力が $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots$ 等の點に於て働いてあるものとする。 P_1 を Ox, Oy 軸に平行なる分力 X_1, Y_1 に分解し、 X_1, Y_1 の作用線がそれぞれ Oy, Ox と交る點を N, M とする。次に O 點に大きさが X_1 に等しくて方向反對な二力を X_1 に平行に作用せしめこれを OA, OC とし更に Y_1 に等しく方向反對な二力を Y_1 に平行に作用せしめこれを OB, OD とする。かくすると A_1 に於ける X_1, Y_1 はそれぞれ $ON \cdot X_1$ 及び $OM \cdot Y_1$ を能率とする二つの偶力と $OA = X_1, OD = Y_1$ の二力で代表される。而してこの二つの偶力は方向反對であるからその合成偶力のベクトルの大きさは

$$Y_1 \cdot OM - X_1 \cdot ON = Y_1 x_1 - X_1 y_1$$



同様に P_2, \dots を分解すればこれらの力は O 點に働く力 $(X_2, Y_2), \dots$ 及び能率 $Y_2x_2 - X_2y_2, \dots$ なる偶力を得る。これらの偶力の合成偶力の能率を G で表せば

$$G = \sum(Yx - Xy) \dots \dots \dots (1)$$

また O 點に於ける力 OA, \dots, OD, \dots 等の力の合力を R とすれば

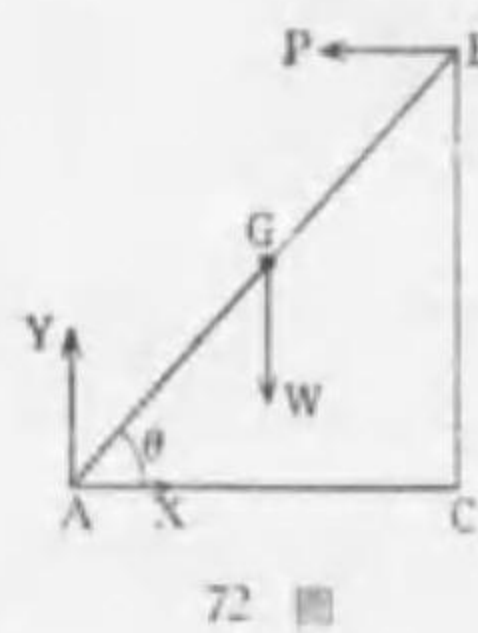
$$R^2 = (\sum X)^2 + (\sum Y)^2 \dots \dots \dots (2)$$

故に同一平面内にある諸力が剛體に作用するとき結局力 R と偶力 G とに歸する。而して剛體が平衡状態にあるためには $R=0$, 及び $G=0$ でなければならぬ。即ち

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\sum(Yx - Xy) = 0 \dots \dots \dots (4)$$

例 圖の様に重さ W の棒の一端 A を水平の床上の蝶番で止め他の一端を滑らかな壁で支へるとき A 及び B に働く抗力を求める。棒に働く外力は棒の中點 G に働く重力、 B 端に於て壁に直角に壁から受ける抗力、及び A 端に於ける力 X, Y である。棒が平衡状態にあるためには (3), (4) の式より



72 圖

$$X - P = 0 \dots \dots \dots (5)$$

$$Y - W = 0 \dots \dots \dots (6)$$

次に A 點の周りの偶力の平衡關係を求むるに $\angle BAC = \theta$, $AB = l$ とすれば

$$Pl \sin \theta - W \frac{l}{2} \cos \theta = 0 \dots \dots \dots (7)$$

$$\therefore P = \frac{1}{2} W \cot \theta \dots \dots \dots (8)$$

A 點の抗力は

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = W \sqrt{\frac{1}{4} \cot^2 \theta + 1} \dots \dots \dots (9)$$

§26 摩擦 二物體がその表面で接觸してゐるとき一つの物體をその接觸面に平行な力で動かさうとすると、力が小さい間

は物體は動くに至らず、物體に加へられた力と大きしく方向反對の力が接觸面を通して物體に働き物體の運動に抵抗する。この際現れた抵抗力を静止摩擦¹⁾力と云ふ。物體に加へられた力が次第に大きくなると抵抗力即ち摩擦力も次第に大きくなるが、ある極限に至るとそれからは摩擦力は増加せず遂に物體は運動するに至る。この極限の摩擦力を最大静止摩擦力と云ふ。最大静止摩擦力に對して實驗的に次の法則が見出されてゐる。

i) 最大静止摩擦力は一物體の他物體の面に垂直な全壓力に比例する。最大静止摩擦力を F , 垂直全壓力を R とすれば

$$F = \mu R$$

茲に μ は物體を構成する物質の種類或は表面の性質等によつて異なる常數である。これを静止摩擦係數と云ふ。

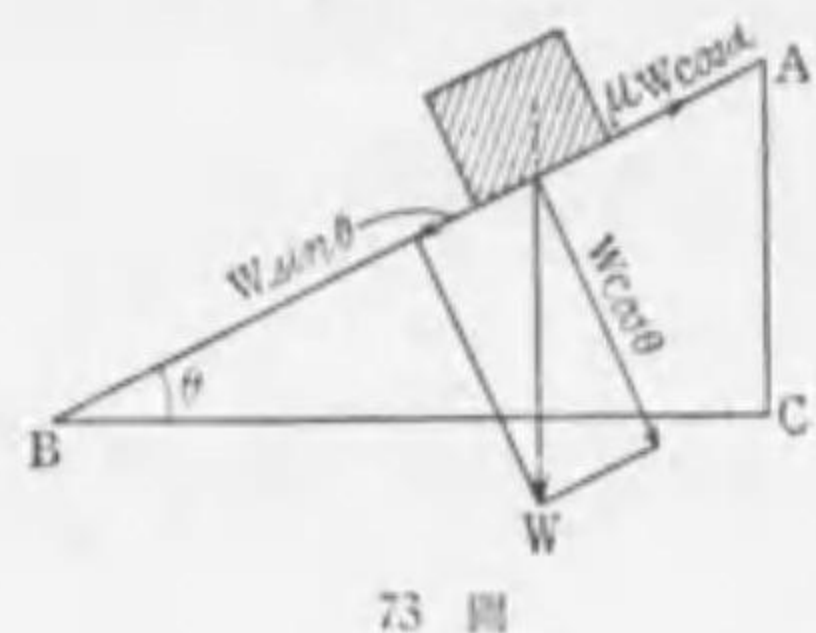
ii) 一物體が他物體に及ぶ全垂直壓力が一定ならば最大静止摩擦力は接觸面の廣狹には無關係である。

壓力とは單位面積についての力の割合で一物體が他物體に對し A なる面積の接觸面を通して R なる力を作用するとき $\frac{R}{A}$ が壓力であり $\frac{R}{A} \cdot A = R$ は全壓力である。水平の臺の上に重さ W の矩形柱を横たへ A なる面積を以て臺に接觸してゐるときの全垂直壓力は $\frac{W}{A} \cdot A = W$ でありこの矩形柱を臺の上に立て B の面積で臺に接してゐるときの全壓力は $\frac{W}{B} \cdot B = W$ である。従つて法則 i) が正しいれば法則 ii) が正しいことは當然である。故にこの二つの法則は一つに合して單位面積上の最大静止摩擦力は壓力に比例すると云ひ得る。

上記の i), ii) の法則はクーロン (A. Coulomb), 及びモラン (Morin) が實驗的に發見したもので正確に事實を表してゐるとは云へない。壓力が非常に大きいときは實際の最大静止摩擦力はこの法則で與へられるものよりも小さいのである。

1) static friction, statische Reibung

§27 摩擦角 摩擦ある斜面上に物體を載せ斜面の傾角 θ を次第に増加してある値に達せしむると



73 圖

物體ははじめて面に沿うて落下する。今物體が將に運動を起さうとするときの角を θ とすると摩擦の法則によつて

$$W \sin \theta = \mu W \cos \theta$$

$$\therefore \mu = \tan \theta$$

この θ を摩擦角¹⁾と云ふ。

§28 運動摩擦 一つの物體を他の物體の表面上に常に一定の速さで運動させるにはその接觸面に沿うて或大さの力を常に加へておく必要がある。これは運動中絶えず運動を妨害する力が接觸面に平行に現れるからでこの力を運動摩擦²⁾と云ふ。この力の大さは運動の速さによつて多少變はるものであるが實際上殆んど一定であると見做しても差支がない。今運動摩擦力を F とし接觸面に對する全垂直壓力を R とすれば最大静止摩擦力と同様な法則が成立する。即ち

$$F = \mu' R$$

この μ' を運動摩擦係數と云ふ。 R が一定であれば F はまた接觸面積の廣狹には無關係である。

一般に運動摩擦力は最大静止摩擦力に比して小さいものであるが速さを次第に減ずると摩擦力は次第に増大し速さを殆んど零に近づけるとこのときの運動摩擦力は最大静止摩擦力に等しくなることは明らかである。また極めて大なる速さで動く場合は運動摩擦力は可なり小さくなるものである。

1) angle of friction, Reibungswinkel

2) kinetic friction, kinetische Reibung

元來摩擦が起る主なる原因は物體の表面にある小突起が接觸の際相互に噛み合ふからである。運動が起るとこれらの小突起の或るものは摩り取られて接觸面の磨滅を惹き起すのである。長時間二物體を接觸させておくと、小突起間相互の噛み合ひがよく調節され、一面が他面によく適合し運動に對する抵抗が大きくなつてくる。運動摩擦力が最大静止摩擦力より小さいのは二物體間の小突起が充分噛み合はない内に二物體の表面が互に移動するからであると考えられる。一般に二物體が同物質である時よりも異物質である場合の方が摩擦が小さい。それは表面の性質を異にし二面の適合、完全なる密接を困難にするに因ると考へられる。鋼鐵の廻轉軸に對して眞鍮の軸受けを用ふることは摩擦を減ずる効果がある。調革を用ふる場合滑車の表面をも革で被へば摩擦を増大し兩者間の空滑りをなくするに有效である。また摩擦を減少する目的で諸種の油類、パラフィン(木材に對して)石墨粉末等を用ふるときは兩物體面は直接接觸せずその間に所謂薄い滑劑の層を狭むこととなり運動摩擦の法則は成立しないで、運動摩擦係數は壓力、速度、接觸面の廣狹に關係する様になる。

§29 斜面上に沿ふ物體の運動 §27の圖に於て質量 m なる物體が斜面上を a なる加速度で落下する場合に二面間の運動摩擦係數を μ' とすれば

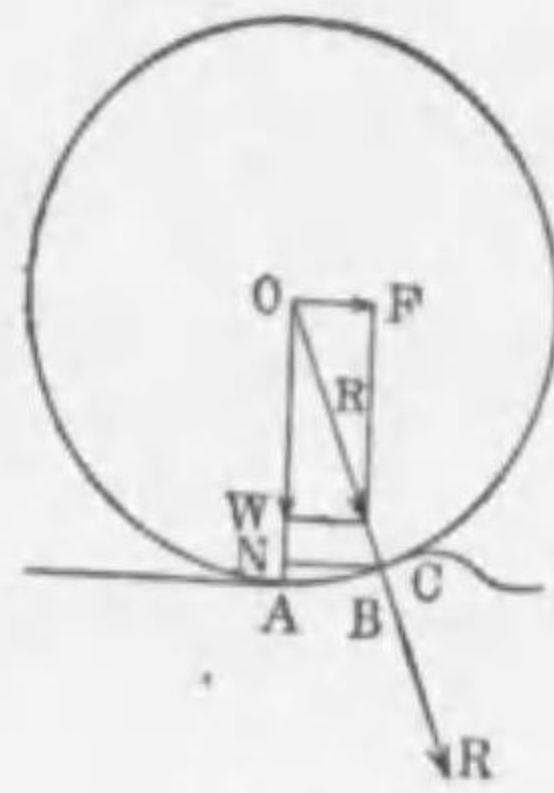
$$ma = mg \sin \theta - \mu' mg \cos \theta$$

$$\therefore \mu' = \frac{g \sin \theta - a}{g \cos \theta} = \tan \theta - \frac{a}{g \cos \theta}$$

上式により a, θ を測定すれば μ' を測定し得る。

§30 轉動摩擦 一つの物體が他の物體の表面を滑ることなくして轉動する場合にも前と同じくこれに抵抗する力が働く。これを轉動摩擦¹⁾と云ふ。轉動の場合に二物體が共に完全な剛體であれば轉動摩擦が現れることはないが實際の物體に於

1) rolling friction, wälzende Reibung



74 圖

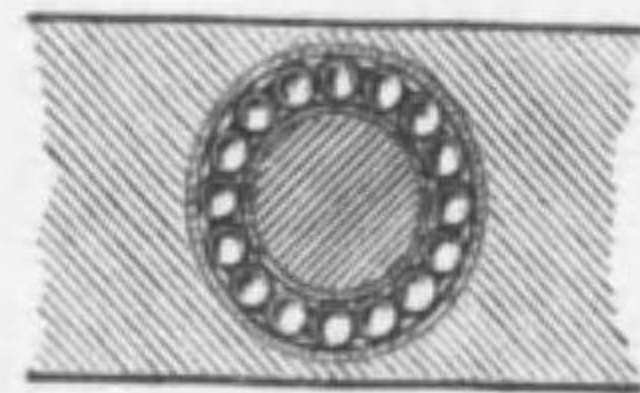
ては圖に示す如く必ず表面の形状の變化が現れる。今車に F なる力を水平に働かせてこれを水平に轉動せしむると車が下の接觸面に及ぼす全壓力は F と車の重さ W との合力 R であり、これは B を通つて接觸面 ABC に作用する。車のこのときの瞬間の廻轉は O の周りの廻轉ではなくて B 點の周りの廻轉である。この場合 F の B 點の周りの能率は W の B 點の周りの能率に等しく方向反對であるから

$$F \cdot ON = W \cdot BN$$

$$\therefore F = \frac{BN}{ON} \cdot W$$

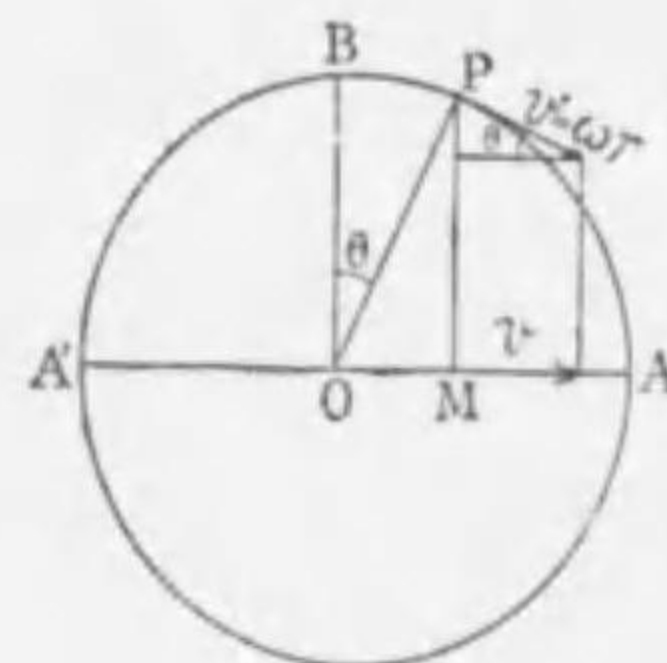
この F が轉動摩擦係数であり、 $\frac{BN}{ON}$ を轉動摩擦係數と云ふ。

一般に轉動摩擦は前節に於ける滑り摩擦に比して著しく小さいから物體を動かす場合に極めて僅かの力で充分である。この爲めに廻轉體の軸と軸承けとの間に數多の鋼鐵小球を入れた球軸承けにより滑り摩擦を轉動摩擦に變じ極めて輕快に廻轉する様に工夫せられてある。



75 圖

§31 單振動 等速圓運動をなすつゝある點のその圓の一直徑上に於ける正射影の運動を單振動¹⁾または單弦運動²⁾と云ふ。P 點が圓 O の圓周上を等速運動をするとき P 點の直徑 A'OA 上への正射影を M とすれば、M は P が圓周上を運動するにつれて A'OA 上を振動的の往復運動をする。この運動が單振動で



76 圖

1) simple oscillation, einfache Schwingung

2) simple harmonic motion, einfach harmonische Schwingung

ある。今

$$OA=r, \quad OM=x, \quad \angle POB=\theta$$

とすれば

$$x=r \sin \theta \dots \dots \dots (1)$$

P 點の O の周圍の角速度を ω とし、時間の始めに P が B の位置にあつたとすると

$$x=r \sin \omega t$$

今 P が圓周を一周するに要する時間或は M が O から A に至り次に A' を經て O に復歸する時間を T、單位時間内に起る往復の回数を n とすれば

$$T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\omega} \dots \dots \dots (2)$$

$$\therefore x=r \sin \frac{2\pi}{T} t = r \sin 2\pi n t \dots \dots \dots (3)$$

この T を週期¹⁾、n を振動數²⁾、M 點の中心 O からの最大變位 r を振幅³⁾と云ふ。次に P の速度を v' 、M の速度を v とすれば

$$v=v' \cos \theta = r \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t \dots \dots \dots (4)$$

次に P の加速度は $\frac{v'^2}{r} = \omega^2 r$ であり、その方向は P より O に向ふ。故に O より P の方向の加速度は $-\omega^2 r$ である。従つて M の變位の方向と加速度の方向は反對であるから加速度 a は

$$a = -\omega^2 r \sin \theta = -\omega^2 x = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x \dots \dots \dots (5)$$

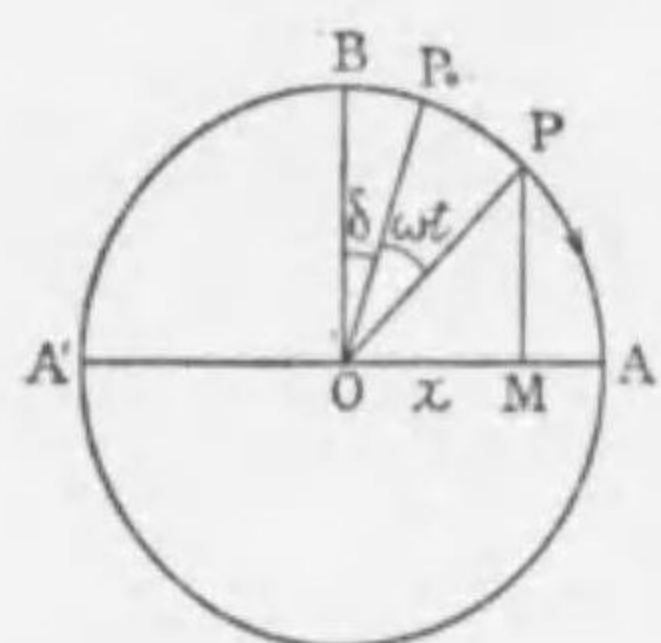
即ち單振動の加速度は常に變位 x に比例し、その方向は變位の方向と反對である。

逆に一直線上の運動で加速度が變位に比例し、その方向が變位の方向と反對であるときは單振動である(この證明は微分方程式の積分に關する問題であるから今しばらく省く)。次に時間の始めに P が B に一致してゐないで P が P₀ にあつたとし

1) period, Periode

2) frequency, Frequenz

3) amplitude, Amplitude



(77圖) t 時間後に P にあるとすれば

$\angle POB = \omega t + \delta$, このときは

$$OM = x = r \sin(\omega t + \delta) \\ = r \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \delta\right) \dots\dots\dots(6)$$

上式に於ける $\frac{2\pi}{T}t + \delta$ を時刻 t に於ける

単振動の位相¹⁾と云ふ。 δ は $t=0$ の時の位相である。

M 点の速度及び加速度は前と同様に

$$v = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \delta\right) \dots\dots\dots(7)$$

$$a = -r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \delta\right) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2x \dots\dots(8)$$

v 及び a を得るには微分法を用ひると簡単に (6) から

$$v = \frac{dx}{dt} = r\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \delta\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \delta\right)$$

§32 単振動をなす質点の運動のエネルギー 単振動をなす質点の運動のエネルギーを U とすれば

$$U = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \delta\right) \\ = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left\{r^2 - r^2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \delta\right)\right\} \\ = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2(r^2 - x^2) \dots\dots\dots(1)$$

となり $x=0$ 即ち中心に於て最大の運動エネルギー $\frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2r^2$ を有する。然るに第三章 §8 に於て述べた様に加速度が質点の變位に比例しその方向が變位の方向と反対であるときはこの運動に対してはエネルギーの保存法則が成立する。今この場合の位置のエネルギーを V とすれば

1) phase, Phase

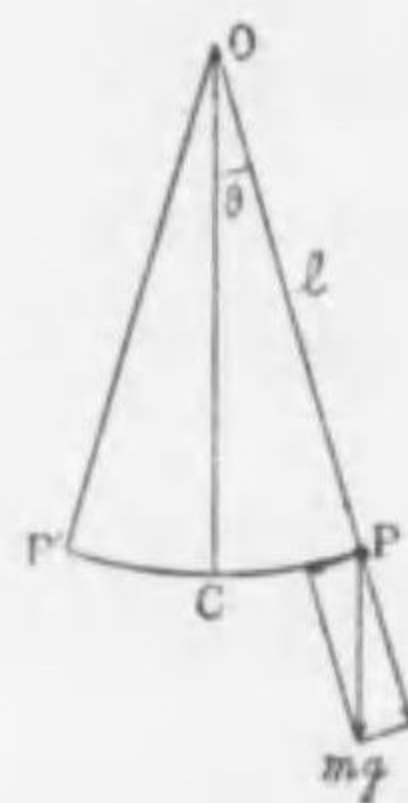
$$U + V = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2r^2 = \text{一定} \dots\dots\dots(2)$$

従つて V は

$$V = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2x^2 \dots\dots\dots(3)$$

この位置のエネルギーはバネの仕事を求める際に別の方法より誘導した所のものである。単振動に於て全エネルギーは (2) の示す如く振幅の二乗に比例することは極めて重要なことである。

§33 単振り子 質量を無視し得る様な極めて細い糸の一端に



78 圖

重い錘を吊し、一固定点を中心とする圆周上に運動する様に作られたものを単振り子¹⁾と云ふ。

今振り子 P が鉛直線 OC の左右に極めて小さい振動ををするとする。 P に働らく鉛直の力 mg を OP の方向と P に於ける切線方向とに分

解すれば前者は単に糸に張力を生ずるだけで P の運動には無関係であり、後者は切線方向に加速度を生ずる。今 OP が OC に對して θ の傾きをなすときは mg の切線分力は $mg \sin \theta$ である。然るに θ が非常に小さいときは近似的に $\sin \theta \doteq \theta$ と見做して差支なく、又振り子の長さに對して振幅が極めて小さいとすれば $P'CP$ は殆んど直線と見做して差支ない。今 $CP=x$ とし、糸の長さを l とすれば

$$x = l\theta$$

$$\therefore mg \sin \theta \doteq mg\theta = mg\frac{x}{l}$$

變位 x を正にとれば加速度は負の方向であるから加速度 a は

$$-mg\frac{x}{l} = ma$$

より

$$a = -\frac{g}{l}x \dots\dots\dots(1)$$

1) simple pendulum, einfaches Pendel

故に § 31 に述べた所により P は PCP' 上を單振動をすることが分る. 今この週期を T とすれば § 31, (5) と比較して

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{g}} \dots\dots\dots(2)$$

この振動の振幅は初め靜かに放したときの CP の長さである. T は錘の質量,及び振幅には無關係でたゞ l, 及び g のみに關するものでこの性質を振子の等時性¹⁾と云ふ.

§ 34 物理振子(複振子) 任意の形をなした物體を水平軸によ



つて支へこの周圍に小さい角の振動をなし得る様に作られたものを物理振子²⁾又は複振子³⁾と云ふ. 圖は重心 G を通つて水平軸 O に垂直な平面で截つた斷口である. OG を h とし OG が鉛直線 OM となす角を θ とする. 振子に働らく重力は G を通り大さは mg である. この力が O 點の周りに能率として

$$mg \cdot MG = mgh \sin \theta$$

を生じ振子を運動せしめる. 今 O を通る水平軸の周りに於ける振子の慣性能率を I とし角加速度を α とすれば § 18, (1) により

$$-mgh \sin \theta = I\alpha$$

負の符號は θ が正なる時に能率の方向が負であることを示す.

今 θ が極めて小さいとし $\sin \theta \doteq \theta$ とすれば

$$\alpha = -\frac{mgh\theta}{I} \dots\dots\dots(1)$$

この式は前節の(1)と同一の形をもつてゐる. 従つてこの振子の週期は直ちに

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \dots\dots\dots(2)$$

1) isochronism, Isochronismus 2) physical pendulum, physikalisches Pendel 3) compound pendulum, zusammengesetztes Pendel

上の式に於て $\frac{I}{mh} = l$ 置けば

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \dots\dots\dots(3)$$

となり,前節に於て絲の長さ l なる單振子と同一の週期をもつて振動してゐることが分る. このときの l を物理振子の相當振子¹⁾の長さ¹⁾と云ふ. (2) に於て T, m, I を知れば g を測定することが出来る. 勿論單振子からも g の測定が出来るが單振子は理想的の場合であり,物理振子はこれに較べて實現し易いのは論をまたない. 然し正確に g を測定するには次に述べる可逆振子によるのが最も便利である.

§ 35 可逆振子 前節の圖に於て O 及び G を過ぐる水平軸に關する廻轉半徑 (§ 14, § 15 參照), をそれぞれ k, k' とすれば

$$k^2 = k'^2 + h^2$$

O 軸の周りに廻轉するときの相當振子の長さは

$$l = \frac{I}{mh} = \frac{k'^2 + h^2}{h} \dots\dots\dots(1)$$

今 O 軸以外に O 軸に平行な數多の水平軸をとりこの軸の周りに於ける振動を考へて見るに何れの軸を選べば O 軸の周りの振動と同一の週期を與ふべきかと云ふ問題は何れの軸を選べばこの軸に對する相當振子の長さが l となるかと云ふことに歸する. 上の式に於て k' は G を通りその方向を定めた軸に關しては一定の値をとる. 更に l が與へられたものとせば O 軸と同一週期を與へる軸の位置は次の式を満足する h で決定される. 即ち

$$h^2 - hl + k'^2 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore h = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4k'^2}}{2} \dots\dots\dots(3)$$

この式の h の二つの値を h_1, h_2 とすれば,重心 G から h_1, h_2 の

1) equivalent pendulum, reduziertes Pendel

距離にある二軸を選べば相當振子の長は共に l に等しい。従



つて G を中心とし h_1, h_2 を半径とする同心圓を描けばこの圓周上を通る平行な二軸に對する相當振子の長さは常に l であり、各軸に對する週期は相等しい。また

80 圖

$$h_1 + h_2 = l \quad h_1 h_2 = k^2 \dots\dots\dots(4)$$

であるから G を通る任意の直線を引き G の兩側に於てこの二圓との交點を O, O' とし O, O' の位置を知り得れば相當振子の長さが見出し得られ、O 軸に對する週期と O' 軸に對する週期とは相等しい。かやうな關係にある O, O' を互に他に對する吊心¹⁾と云ふ。ケーター (H. Kater) の可逆振子²⁾はこの理に基づいて製作せられたものである。

これを用ひるには O にある刃で振子を支へ長時間振動せしめてその週期を正確に定め、次に振子を逆にし O' の刃でこれを支へ前の如く週期を求むるのにこれを C に於ける錘を適當に移動して前後の週期を同一になる様に調節する。かくして得られた週期を T とし、OO' を l とすれば

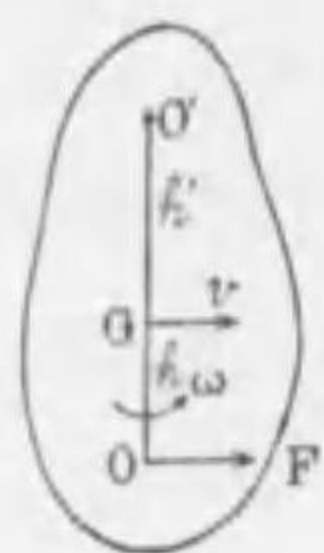


$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots\dots\dots(5)$$

これによつて g を測定することが出来る。この方法の最も便利なるは慣性能率の様に複雑なものを測定する必要もなくまた重心の位置も正確に知る必要がない點である。

§36 衝撃の中心 非常に大きい力 F を剛體の一點 O に働かせると §24 により剛體は重心 G に働く力 F と一つの偶力との作用を受け G には F の方向に速度を生ずると同時に剛體は

1) centre of suspension, Suspensionszentrum 2) reversible pendulum, Reversionspendel



82 圖

偶力により G の周りに廻轉する。G の F の方向の速度を v , G の周りの剛體の角速度を ω とし、力が剛體に作用する時間 t が極めて短いと假定する。運動量の變化と力積の關係より

$$mv = F \cdot t \dots\dots\dots(1)$$

また G の周りの廻轉半径を k とし、G より F の方向に下した垂線の長さを h とすれば §18 (1) により

$$mk^2 \frac{\omega}{t} = Fh \dots\dots\dots(2)$$

$$\omega = \frac{vh}{k^2} \dots\dots\dots(3)$$

今 OG の延長上に一點 O' をとり O'G = h' とすると O' の速度 v' は明らかに

$$v' = v - \omega h' = v \left(1 - \frac{hh'}{k^2}\right) \dots\dots\dots(4)$$

若し h, h' が $hh' = k^2$ なる關係を満足せば v' は零となる。即ち O' は動かずに剛體は單に O' の周りに廻轉運動を起す。逆に O' に力を與へた場合には O が靜止の状態であることは明らかである。かやうな O, O' を互に他に對する衝擊の中心¹⁾と云ふ。例へばバットで球を打つとき打撃が丁度衝擊の中心に當つてゐるときは打者の手には何等の痛みを感じない。OO' = $h + h' = l$ (=相當振子の長さ) とすれば $hh' = k^2$ であるから §35 (4) と同じである。故に衝擊の中心は吊心に一致する。

§37 獨樂の運動 圖に於て圓輪がその中心を通り輪の面に垂直な軸 OM の周りに角速度 ω を以て矢の方向に廻轉し、この圓輪が更に垂直軸 AB の周りに矢で示す ω_1 の角速度で廻轉してゐる場合を考へて見る。輪の一部分が微小時間の後に E から F に來たとすると、 ω_1 の廻轉のため E 及び F はそれぞれ

1) centre of percussion, Perkussionsmittelpunkt



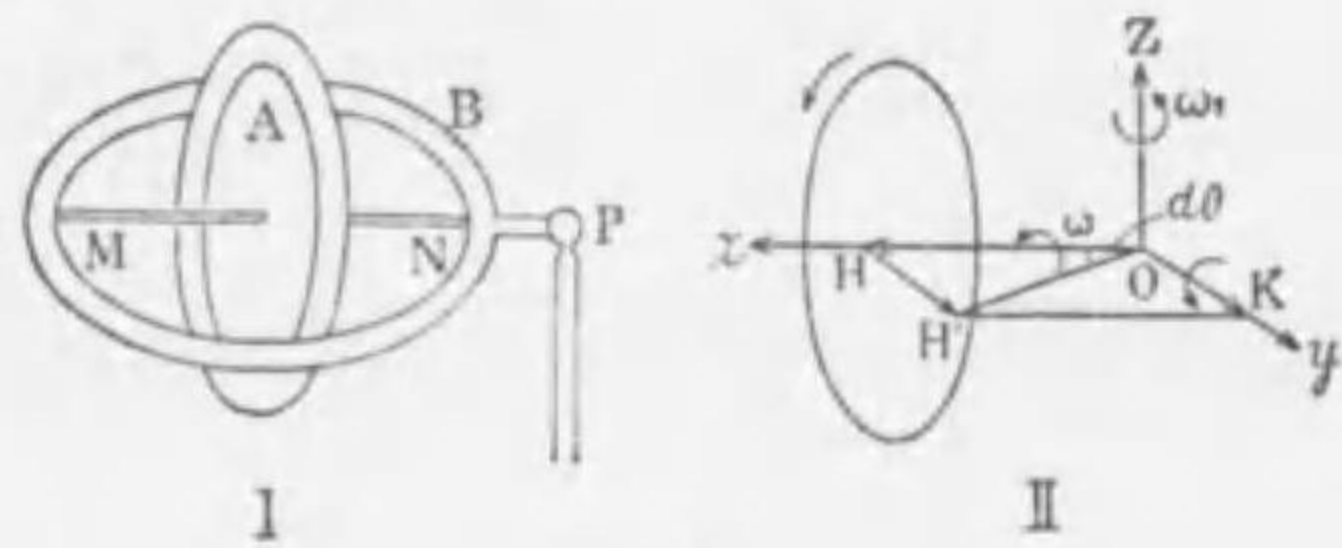
83 圖

AB に垂直な EG, FH を半径とする圓運動をなし何れも紙面の裏から表に向ひ且 FH > EG であるから F の速度は E の速度より大きい。従つて E にはこの速度の變化を生ぜしむべき力が紙面の裏から表へ向つて働いたと考へなければならぬ。これと同様な考へ方をすると K の部分でも同じく力が

裏から表へ向つて働いてゐる。これに反し圓輪の CBD の部分にはすべて表から裏に向ふ力が働いてゐることが分る。

これによつて見れば圓輪が OM の周りに廻轉しつゝ更に直径 AB の周りに廻轉してその廻轉面を變化するとき軸 OM に偶力が働いてゐることが分る。

このことを逆に考へると OM の周りに廻轉する圓輪の軸に力が能率を生ずると圓輪は AB を軸として廻轉し絶えずその廻轉面が變化する。



84 圖

84 圖 I はジャイロスコープ¹⁾の一種で慣性能率の大きい圓板 A は廻轉軸 MN の周りに廻轉し得られこれを

を支ふる圓輪 B は支柱の尖端 P の周りに更に廻轉し得る。

今 A が大なる角速度で廻轉するときジャイロスコープは圖に示す様なほゞ水平の位置を取り、軸 MN は P の周りに水平面に廻轉する。つまり A 及び B の重力による能率が MN の方向を變へんとするときはこの抗力として A の廻轉面は次第に變つて行く。この運動を歳差運動²⁾と云ふ。

1) gyroscope, Gyroskop

2) precession, Präzession

歳差運動は Oz (II 圖) の周りに ω_1 の角速度で行はるゝとし Oz 上に OH の長さを圓板の角運動量 $I\omega$ に等しくとり OH が歳差運動の爲め dt 時間後 OH' の位置に來たとすれば dt 時間内の角運動量の變化は

$$OH' - OH = HH' = I\omega d\theta = I\omega\omega_1 dt = OK$$

でその方向は Oy の方向である。この變化を生ずるに必要な力の能率を L とすれば § 18, (1) により

$$L dt = d(I\omega) = HH' = I\omega\omega_1 dt$$

$$\therefore L = I\omega\omega_1 \quad \omega_1 = \frac{L}{I\omega}$$

即ち L なる能率が軸に作用すると ω_1 なる歳差運動をすることになる。



85 圖

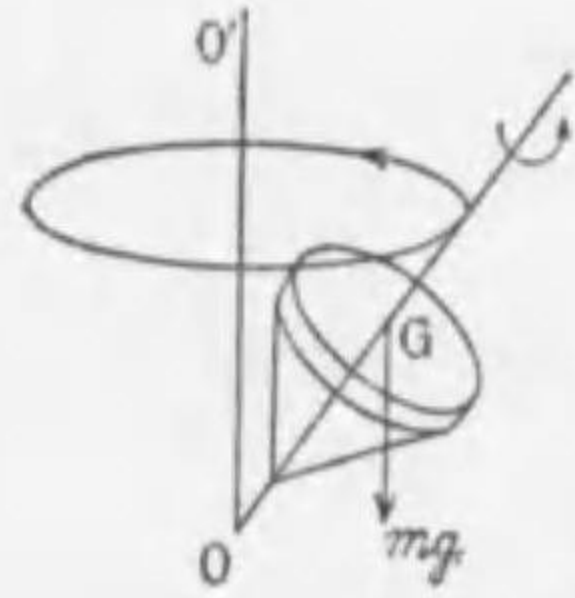
85 圖も一種のジャイロスコープで廻轉板はその重心だけで固定せられ空間に於ける任意の位置をとり得る様にしてある。かやうな装置では廻轉軸には重力の能率が作用することなく従つて歳差運動を起すことはない。故に圓板の廻轉中は軸は常に一定方向を保つ。故にこれを用ひて地球の自轉を實證することも出来るし、また地球の自轉の軸が軌道面に對して殆んど一定の傾きを有してゐることも説明出来る。

今この種のジャイロスコープの廻轉軸を水平面内にあらしめる様に適當な装置をしたとする。若しその軸が南北の方向を指してゐないならば空間に對するジャイロスコープの軸は地球の自轉によつて常に一方向に壓されることになりその結果廻轉軸は南北の方向に向ふやうに廻轉し、これが丁度南北の方向を指すと地球自轉の影響を蒙らず結局軸は南北の方向を指して靜止するのである。ジャイロコンパス¹⁾は

1) gyro-compass, Kompasskreisel

イロスコープのこの性質を羅針盤として應用し、電流装置で廻轉板に大なる角速度を與へたものである。これを用ひると普通の羅針盤の様に鐵の影響を受けずに正確に方向が知れる。

尙この種のジャイロスコープは船舶の安定装置、單軌車、魚形水雷の自動操縦機等應用の廣いものである。



86 圖

通常の獨樂の運動も84圖に於けるジャイロスコープの場合とほゞ同様に説明出来る。即ち獨樂の軸には重力 mg による能率が生じ従つて OG は垂直軸 OO' の周りに歳差運動をなす。

§38 萬有引力 地球及び他の遊星は太陽の周りに曲線軌道を描いて運行してゐる。ニュートンはかく曲線軌道を描いて運行し得るのは地球及び遊星と太陽との間に引力が働いてゐる結果であると考え、その力の大きさは次の法則に依るものとするれば遊星の運行状態を説明し得るとした。

即ち二天體間の引力はこの天體を結ぶ直線上に働き、その大きさは二天體の質量の積に比例し、その距離の二乗に逆比例する。

今二天體の質量を m_1, m_2 とし兩者の距離を r とすれば引力の大きさ F は

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \dots \dots \dots (1)$$

この式の比例常數 γ を萬有引力¹⁾常數と云ふ。ニュートンは上式の引力關係は天體間に限らず宇宙間のすべての物體間に成立する關係であると考えた。これをニュートンの萬有引力の法則と云ふ。

§39 ケプレル (J. Kepler) の法則 ニュートンが萬有引力の法則を發見するに先だち既にケプレルは遊星の觀測結果より

1) universal gravitation, allgemeine Gravitation

次の三つの法則を發見してゐた。即ち

- i) すべての遊星は皆太陽を焦點とする楕圓の軌道上を運行する。
- ii) 太陽より遊星に引いた動徑(ベクトル)は同一の時間内には常に同一の面積を描く。
- iii) 遊星が軌道上を一周する時間即ち週期の二乗は軌道楕圓の長軸の三乗に比例する。

ニュートンは上記ケプレルの第一法則より出發し遊星が太陽の周りに楕圓軌道を描いて運行するためには兩者の間に如何なる力が働くべきかを研究して兩者間の距離に關する逆二乘法則を發見した。従つてケプレルの第一法則は當然ニュートンの法則より導くことが出来、また第二、第三の法則もニュートンの法則より誘導し得る(この證明は力學書に譲り、今こゝでは證明しない)。然し今こゝにケプレルの法則より逆に萬有引力の法則を近似的に導き得ることを示す。

遊星の軌道楕圓の離心率は極めて小さく従つてその軌道はケプレルの第一法則よりほゞ圓と見做しうる。今遊星の太陽の周りの週期を T とし、太陽よりの距離を r とすれば遊星の太陽に向ふ加速度 a は

$$a = r\omega^2 = r \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \dots \dots \dots (1)$$

次に遊星の質量を m_2 とすれば向心力 f は

$$f = m_2 a = m_2 r \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \dots \dots \dots (2)$$

然るにケプレルの第三法則により

$$r^3 = kT^2$$

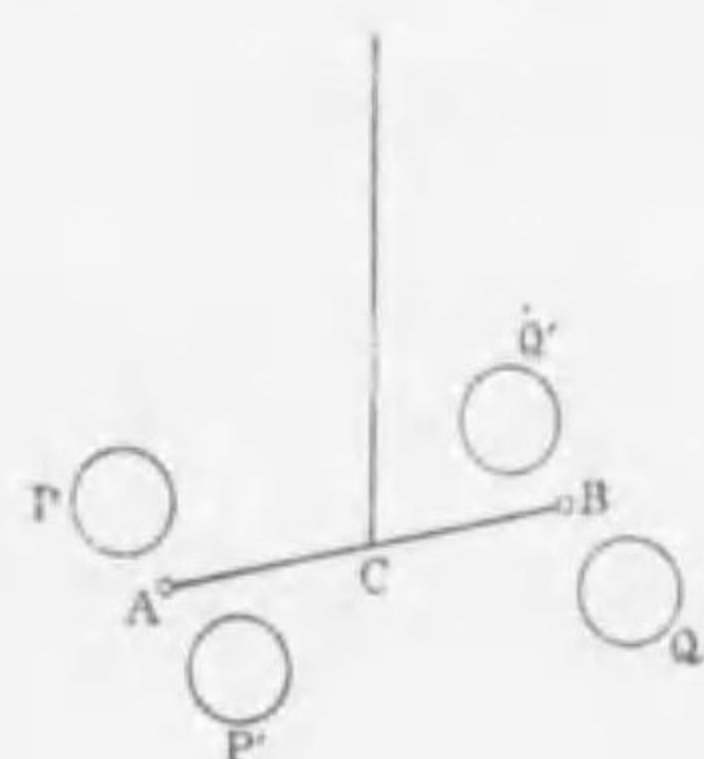
$$\therefore f = m_2 r \frac{4\pi^2}{T^2} = m_2 r \frac{4\pi^2 k}{r^3} = 4\pi^2 k \frac{m_2}{r^2} \dots \dots \dots (3)$$

作用及び反作用の法則より上記の力 f はまた太陽が遊星よ

り作用される力とも考へられる。かやうに考へると f はまた太陽の質量 m_1 に比例しなければならぬ。従つて k は m_1 を含み $k=cm_1$ と考へなければならぬ。故に

$$f = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \dots \dots \dots (4)$$

§40 萬有引力常数の實驗的決定 萬有引力常數 γ を決定するには m_1, m_2, r が知られてゐるとき m_1 と m_2 間に働く

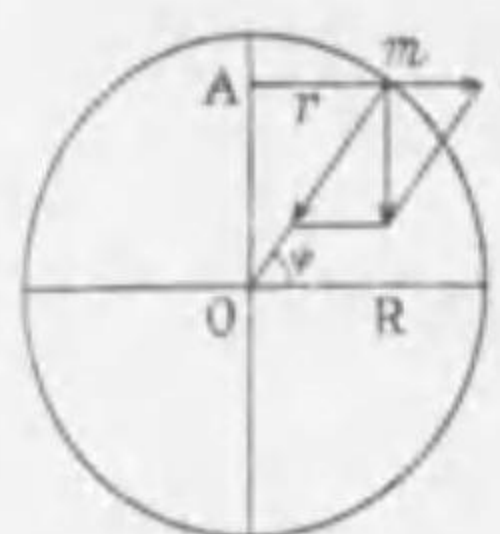


87 圖

引力 f を求むることに歸着する。この研究を最初に行つたのはキ、ペンデ、シ、(H. Cavendish) でその實驗の大略は下の通りである。圖に於て A, B は二箇の小鉛球でこれを棒の兩端に取り付けこの棒の中心 C に細い銀線を結んで棒を水平に吊るす。更に A, B の反對側に鉛の大きな球 P, Q を置く。かくするとき A, B は P, Q より引力によつて引かれ棒には C の周りに力の能率が現れ、銀線に捩れを生ずる。球を P, Q の位置から反對の位置 P', Q' に移すと線の捩れが反對になる。この前後の球の位置に對する AB の角變位を測定しその平均値を取る。次に大鉛球を除き AB を水平に振動せしめ、その週期を測定して單位の角變位を生ぜしむるに要する力を決定し(第五章 §10 参照)これより P, Q による引力を測定するのである。この實驗に於てキ、ペンデ、シ、の用ひた銀線の代りに水晶絲を用ひて實驗の精密度は著しく増大した。ボーイス (Boys) によれば $\gamma = 6.6579 \times 10^{-8}$ ダインであり、これは 1 瓦の二球が 1 厘隔てて置かれたときの引力である。この γ の値から地球の平均密度を計算することが出来る。今 $m_2 = 1$ 瓦とし、地球の半徑を $r = 6.37 \times 10^8$ 厘とする。 $f = 980$ ダインであるから地球の質量は 5.97×10^{27} 瓦となる。今地球を

密度一様な球とすると、地球の質量と體積からその平均密度として 5.527 を得る。地殼の密度は 2.5 程度であるから地球内部の密度は相當に大きなものと想像しなければならぬ。

§41 重力の加速度 地表に質量 m なる物體があり、地球の半



88 圖

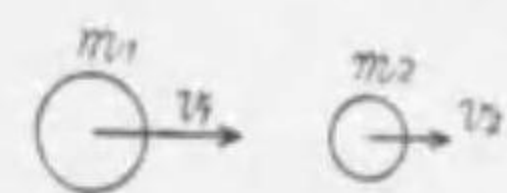
徑を R 、地球の質量を M とすれば物體は $\gamma \frac{Mm}{R^2}$ なる引力を受ける。また地球は自轉するから物體は引力の外に遠心力を受ける。圖に於て地球の自轉の軸を OA 、この軸の周りの角速度を ω とする。今物體のある地點の緯度を ϕ とし、 m から OA に至る距離を r とすれば m は mA を半徑とする圓周上を運動するから物體に働く遠心力は $m r \omega^2 = m R \omega^2 \cos \phi$ である。故に物體はこの力と $\gamma \frac{Mm}{R^2}$ との合力として mg なる力を受ける。吾々が地上に於て測定する mg はこの合力に外ならぬ。遠心力の大きさは赤道に於て最も大で引力と反對の方向をとり極地方では最小である。故に同一質量の物體は赤道に於て最も軽く極地方に進むに従ひ重くなることが分る。尙地球は完全な球ではなく自轉軸を短軸とする多少扁平な廻轉橢圓體であるから重力の加速度は橢圓體の離心率に關係し、更に重力は海面よりの高さに關係する。緯度 ϕ 、海面よりの高さ h 米の地點の g を次の通りに表せば實驗とよく一致する。

$$g = 977.989(1 + 0.0052 \sin^2 \phi - 0.0000002h)$$

§42 彈性體の衝突 二物體が衝突したとき二物體の衝突前の速度が衝突の瞬間に於ける接觸面の共同の法線の方をとりときはこの衝突を直衝突¹⁾と云ひ、然らざるときは斜衝突²⁾と云ふ。尙この共同の法線が二物體の質量の中心を通過するとき

1) direct impact (collision), gerader Stoss 2) oblique impact, schiefer Stoss

はこの衝突を¹⁾向心衝突と云ふ。二物體の形が共同の法線に對して非對稱的である場合には衝突後には一般に廻轉運動が生ずる。この場合には衝突問題はやゝ複雑になるため以下最も



89 圖

簡単な二球の向心衝突を考へる。今 m_1, m_2 の質量を有する二球の衝突前の速度を v_1, v_2 とし、衝突後の速度を V_1, V_2 とする。二球 m_1, m_2 を一系と考へると運動量保存の法則により衝突の前後に於てこの一系の運動量の變化は零であるから

$$m_1(V_1 - v_1) + m_2(V_2 - v_2) = 0 \dots\dots\dots(1)$$

この式だけからは V_1, V_2 を見出すことは不可能であるため、²⁾トンは實驗的に定めた次の法則を用ひることにより V_1, V_2 を求め得ることを示した。即ち二物體の分離の速さ $V_2 - V_1$ と接近の速さ $v_1 - v_2$ との比は二物體の質量及び速度には無關係で物體を構成する物質の性質により定まる常數である。

今この常數を e とすれば

$$\frac{V_2 - V_1}{v_1 - v_2} = e \dots\dots\dots(2)$$

この e を²⁾反撥係數と云ひ、完全なる非弾性體では $e=0$ であつて完全なる弾性體では $e=1$ である。一般には $0 < e < 1$ である。

(2) と (1) との關係によつて V_1, V_2 を求めると

$$V_1 = v_1 - \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}(1 + e) \dots\dots\dots(3)$$

$$V_2 = v_2 - \frac{m_1(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}(1 + e) \dots\dots\dots(4)$$

次に二球が衝突によつて互に接觸してゐる極めて短時間中は二球は同一の速度を有してゐると考へられるから、この時の二

1) central impact, zentraler Stoss
2) coefficient of restitution, Restitutionskoeffizient

球の共通の速度を V とすれば同じく運動量保存則によつて

$$m_1(V - v_1) + m_2(V - v_2) = 0$$

或は $m_1v_1 + m_2v_2 = V(m_1 + m_2)$

即ち $V = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \dots\dots\dots(5)$

(3), (4) の式に於て $e=0$ とすれば即ち完全に非弾性球の場合では

$$V_1 = V_2 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

これは(5)に一致し二物體は接觸してゐるときに有してゐる速度のまゝで分離することなく共通の速度で運動する。

次に $e=1$ の場合で、特に $m_1=m_2$ のときを考へると

$$V_1 = v_2, \quad V_2 = v_1 \dots\dots\dots(6)$$

即ち同質量の完全な弾性球では衝突の前後に於て互に速度を交換する。

更に $m_2=\infty, v_2=0$ 即ち一つの球が固定してある平面に衝突するときは

$$V_1 = v_1 - (1 + e)v_1 = -ev_1, \quad V_2 = 0 \dots\dots\dots(7)$$

即ち球は衝突前の速さの e 倍の速さで反撥され、特に $e=1$ のときは球は衝突前と同じ速さで反撥せられる。

§43 衝突の前後に於ける運動のエネルギーの變化 今 E, E'

を二球の衝突の前後に於ける運動のエネルギーとすれば

$$E' - E = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 - \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right)$$

前節(3), (4)を用ひて V_1, V_2 を消去すれば

$$E' - E = -\frac{1}{2}(1 - e^2)\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2 \dots\dots\dots(1)$$

$e < 1$ であるから

$$E' < E$$

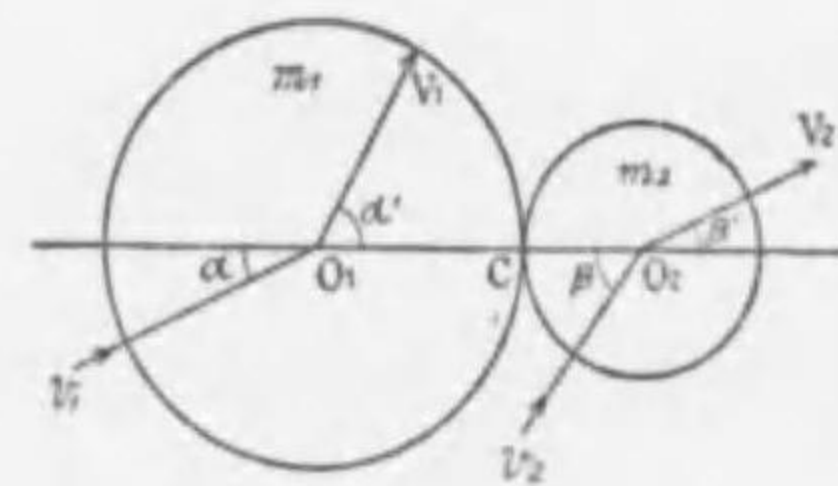
即ち全運動のエネルギーは減少する。このエネルギーの減少

量は音響熱のエネルギー等に形を変へて系外に出ずる。

$$e=0 \text{ の時は } E'-E = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (v_1-v_2)^2$$

でエネルギーの減少最大で $e=1$ の時は $E'=E$ でエネルギーの減少は起らない。

§44 摩擦のない弾性球の斜衝突 圖に示すが如く質量 m_1 ,



90 圖

m_2 の弾性球が最初 v_1, v_2 の速度で運動しこれが C 點にて衝突したとする。 v_1, v_2 が二球の中心 O_1, O_2 を結ぶ直線となす角をそれぞれ α, β とし、二球の衝突後の速度が

O_1O_2 となす角をそれぞれ α', β' とする。二球は摩擦のない弾性球と考へてゐるから衝突の際接觸點に於て二球の切線の方
向には互に少しも力を及ぼさない。従つてこの方向の分速度
には衝突の前後に於て變化を生じない。従つて

$$v_1 \sin \alpha = V_1 \sin \alpha' \dots\dots\dots(1)$$

$$v_2 \sin \beta = V_2 \sin \beta' \dots\dots\dots(2)$$

O_1O_2 の方向の速度變化は前節と同様に直ちに

$$V_1 \cos \alpha' = v_1 \cos \alpha - \frac{m_2(v_1 \cos \alpha - v_2 \cos \beta)}{m_1+m_2} (1+e) \dots\dots\dots(3)$$

$$V_2 \cos \beta' = v_2 \cos \beta - \frac{m_1(v_2 \cos \beta - v_1 \cos \alpha)}{m_1+m_2} (1+e) \dots\dots\dots(4)$$

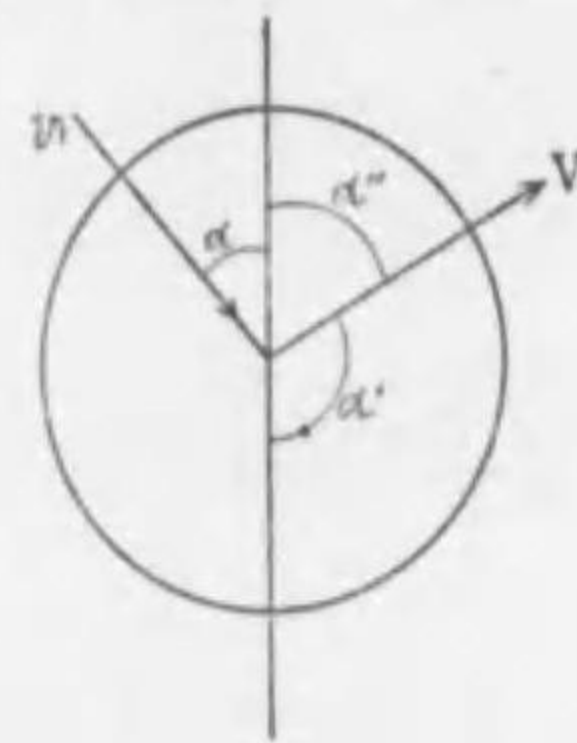
以上 (1), (2), (3), (4) から容易に $V_1, V_2, \alpha', \beta'$ を求めることが出来る。

次に (3) に m_1 を掛け (4) に m_2 を掛けて加へると

$$m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \beta = m_1 V_1 \cos \alpha' + m_2 V_2 \cos \beta'$$

これは O_1O_2 の方向に於ける運動量の不變なことを示してゐる。

上述の特別の場合として $m_2 = \infty, v_2 = 0$ なる場合即ち球が平面に斜衝突する場合には (3) により



91 圖

$$V_1 \cos \alpha' = v_1 \cos \alpha - (1+e)v_1 \cos \alpha = -ev_1 \cos \alpha \dots\dots\dots(5)$$

また (1) によつて

$$V_1 \sin \alpha' = v_1 \sin \alpha$$

$$\therefore V_1 = v_1 \sqrt{\sin^2 \alpha + e^2 \cos^2 \alpha} \dots\dots\dots(6)$$

$$\tan \alpha' = -\frac{1}{e} \tan \alpha$$

今 $\alpha' = 180^\circ - \alpha''$ と置けば

$$\tan \alpha'' = \frac{1}{e} \tan \alpha \dots\dots\dots(7)$$

一般に $e < 1$ であるから (6) によつて

$$V_1 < v_1$$

(7) によつて

$$\alpha'' > \alpha$$

若し $e=1$ の場合、即ち完全弾性體のときは

$$V_1 = v_1, \quad \alpha'' = \alpha$$

即ち光の反射法則と同様の關係で球は反撥せられる。

【問題】

1. 三角形 ABC の頂點 A, B から對邊に引いた垂線を AD, BE とし直線 DE に沿うて働く力 F を邊 BC, CA, AB に沿うて働く三力に分解せよ。
[答] $F \cos A, F \cos B, -F \cos C$

2. 同じ高さに在る二點 A, B 間に張つた絲の一點 C に重さ 10 kg の錘がかけてある。 $AC=10 \text{ cm}, BC=30 \text{ cm}$ 、C 點が AB から 1 cm 下つたとすれば AC 部と BC 部との絲の張力の略値如何。
[答] 75.1 kg, 74.7 kg

3. 一樣な眞直な棒をその兩端に附けた絲でぶらさげて置くとき絲の水平線に對する傾きが α 及び $\beta (\beta > \alpha)$ ならば棒の水平線に對する傾き θ は次の關係をなすことを證明せよ。
[答] 3. 東. 理

$$\tan \theta = \frac{1}{2} (\tan \beta - \tan \alpha)$$

4. 重い一樣な眞直な棒の兩端に長さ a 及び b の二本の絲を結び、

糸の他端を同一の點に結んで棒を吊せば各糸の張力は a 及び b に比例することを證明せよ。

5. 毎秒 8 廻轉の割合で廻轉する獨樂がある, その質量 500 g , 廻轉半徑 10 cm である. この廻轉を止めるには何程のエネルギーを要するか. (大 3. 京. 工) [答] 6.31 joule

6. 質量 10 kg , 半徑 25 cm の圓輪が 300 cm/sec の速度で滑らかに地上を廻轉するときその運動のエネルギーを求めよ. [答] 90 joule

7. 直徑 16 cm の圓板がある. その中心から 2 cm のところを中心として直徑 12 cm の圓形を切り去つたときその殘部の重心の位置を求めよ. (昭 6. 京. 工) [答] 原圓の中心から $\frac{18}{7}\text{ cm}$ のところ

8. 高さが底面の直徑に等しい圓錐體を充分粗なる斜面上に載せ漸次にその傾角を増加するとき圓錐が顛倒しないための最大傾角如何. [答] $\tan^{-1}2$ (圓錐の重心の位置を積分により求めよ)

9. 平板の一點 O を通りその板面に垂直な軸に關するこの平板の慣性能率はこの點 O を通り板面内に在つて互に直交する二軸に關する慣性能率の和に等しいことを證せよ. (昭 6. 東北. 理)

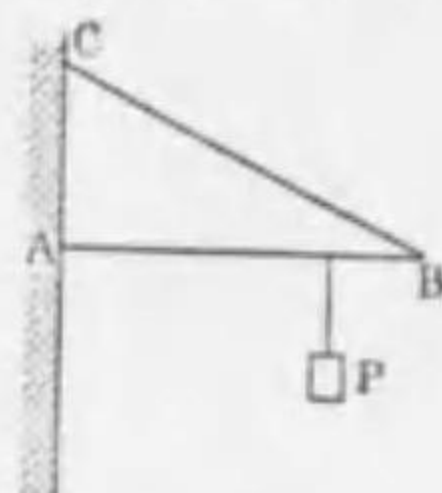
10. 眞直な一圓柱の一端がこれに直角な一廻轉軸に懸つてゐる場合の慣性能率を求めよ. (大 15. 同. 農大)

$$[答] m \frac{4l^2 + 3r^2}{12}, \quad m \text{ は質量, } l \text{ は長さ, } r \text{ は半徑}$$

11. 重さ 20 kg の物體を水平面と 30° の傾きをなす斜面上に沿うて 10 m 引き上げるに要する仕事を求めよ. 但し物體と斜面との摩擦係数を 0.3 とする. (昭 5. 大. 工) [答] 152 kg

12. 傾斜角 30° の斜面上に沿うて 10 疋重の力で引き上げるとき, 或は 1 疋重の力で引き下げるとき將に動かんとする物體がある. この斜面を水平に直して物體を動かさんとするには幾何の力を要するか. 但し斜面は若干の摩擦を有つものとする. (昭 2. 東. 農) [答] 6.35 疋重

13. 一樣な棒 AB に錘 P をかけたものを A 端に於ける鉛直な壁 AC の摩擦力と糸 BC の張力とで壁に垂直な位置に支へようとする. $AB=20\text{ cm}$,



92 圖

$AC=10\text{ cm}$, 壁と棒との間の摩擦係数 $=\frac{1}{3}$, 錘の重さと棒の重さとが等しいとき錘を懸けるべき位置を求めよ. (大 15. 東. 理)

[答] B から 6 cm

14. 一樣な細い眞直な棒 AB が粗な水平な床と粗な鉛直な壁とに支へられて釣合つてゐる. 摩擦係数は壁に對して μ_1 , 床に對して μ_2 であるとするとき棒と床とが作る角 α は次の關係を滿すことを示せ.

$$\tan \alpha \geq \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2 \mu_2} \quad (\text{昭 6. 東. 理})$$

15. 單振子の週期 T は振子の長さを $L\text{ m}$ として大略

$$T = 2\sqrt{L} \text{ sec}$$

で與へられることを示せ. 但し振子の振幅は小さいとする.

(昭 5. 東北. 理)

16. 質量 5 g の物體が單弦振動をする. 今振動の中心から 3 cm の距離に於て 60 dyne の力が作用するものとすればその週期何程か.

(昭 4. 大. 工大) [答] $\pi \text{ sec}$

17. 單振子を有する時計を 2 m/sec^2 なる加速度で鉛直に昇りつゝある氣球内に持ち込むと一時間に就て何秒進むか. (昭 6. 東北. 工)

[答] 349.2 sec

18. $g=980\text{ cm/sec}^2$ の所で 1 分間 60 回振動する振子が山頂では 1 分間 59.94 回振動すると云ふ. 山頂の g を求めよ. [答] 978.4 cm/sec^2

19. 長さ 1 m の棒で週期 2 sec の複振子を作るには支點の位置を何處にすべきか. (昭 2. 東北. 理) [答] 中點から 9.3 cm

20. 半徑 $a\text{ cm}$ の一樣な薄圓板にこれを垂直に貫く軸が圓板の中心から $b\text{ cm}$ の距離に取附けてある. この軸を水平にしてその周りに小さい振動をさせる場合の振動週期を求め, なほ與へられた圓板について週期を最小にするには b を如何に選ぶべきかを吟味せよ.

$$(\text{昭 4. 東. 理}) \quad [答] 2\pi \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} + b^2\right) / gb}, \quad \frac{a}{\sqrt{2}}$$

21. 横斷面が正方形の眞鍮棒に正三角形の横斷面の鋼製の刃を貫通した複振子がある. 次の條件に従ひこの振子の慣性能率を求めよ.

イ) 棒は長さ l , 横斷面(正方形)の一邊 a

ロ) 刃は長さ b , 横斷面(正三角形)の一邊 c

ハ) 棒の上端より刃の下端(支點)までの距離 $\frac{1}{3}l$

ニ) 密度は真鍮棒が s , 鋼が d

ホ) 棒及び刃の両端は共に横断面とする. (昭4.東.文理)

$$[答] \frac{al^2s}{3} \left(\frac{l^2}{3} + \frac{a^2}{4} \right) + \frac{5}{16\sqrt{3}} c^2 (bd - as)$$

22. 棒の一点 A に棒に直角に打撃を加へると, B 點の速度が v となれば, B 點に同一の打撃を棒に直角に加へると A 點の速度は v となることを證明せよ.

23. 地球の公轉運動を近似的に太陽を中心とする一定半径 R cm の圓運動であると假定する. 今太陽の質量を mg , 地球の質量を $m'g$ とし, C.G.S. 單位で表した萬有引力の重力恆数を γ として地球がその公轉軌道を一周するに要する時間 T を計算せよ. (昭5.京.理)

$$[答] 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma m}}$$

24. 太陽の周りに於ける遊星の軌道を圓としてケプレルの第三法則を萬有引力の法則から導け.

25. 萬有引力常數を 6.68×10^{-8} C.G.S., 地球半径を 6370 km, 平均の重力加速度を 980 cm/sec² として地球の平均密度を求めよ.

$$(昭6.東北.理) [答] 5.51 \text{ g/cm}^3$$

26. 北極に在る物體を赤道に持つてくるとその見かけの重さに如何なる變化が起るか. (昭5.京.工大)

$$[答] m\omega^2 R \text{ だけ軽くなる.}$$

27. 反撥係數 $\frac{1}{2}$ なる相等しい二球を $2a$ なる距離に在る同一水平線上の二點から \sqrt{ga} なる速度を以て互に反對の方向に向き合はせて投射するとき衝突後の速度は $\frac{1}{2}\sqrt{5ga}$ となることを證せよ.

28. 反撥係數 e なる机上に h の高さから彈性球を降すときその運動の止むまでに球の運動する距離及び時間はそれぞれ

$$\frac{1+e^2}{1-e^2} h, \quad \frac{1+e}{1-e} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

であることを證明せよ.

29. 同一直線上に同一方向又は反對方向に運動する二箇の完全非彈性球が衝突する場合に失ふ運動エネルギーを求めよ. (昭3.東.理)

$$[答] -m_1 m_2 (v_1 \pm v_2)^2 / 2(m_1 + m_2)$$

第五章 弾性

§1 物質の均一性及び等方性 物體中の各點に於て物理的性質がすべて相等しいときにはこの物體の組成は均一¹⁾であると云ふ. 結晶體は通常均一な組成を有してゐると考へられるが普通の岩石は不均一である場合が多く金属は通常のみでは均一であると見做し得る. 次に物體中の一點でこの點の周りのすべての方向に對して同一の物理的性質を有するときはこの物體は等方體²⁾と云ふ. 液體及び瓦斯體は普通の状態では等方體であり結晶體或は引き延ばされた金属等は方向によつて著しく物理的性質を異にする. かやうな物體を異方體³⁾と云ふ.

以下に於て論ずる物體は等方性の物體に限る.

§2 弾性及び歪 物體に外力を加へてその形又は體積の變化を生ずるとき一般にはその外力を除くと同時に物體はまたもとの形又は體積に復歸しようとする性質がある. この性質を彈性⁴⁾と云ひ, 外力によつて生じた形又は體積の變化を歪⁵⁾と云ふ. 棒を引き延ばす場合, 物體を壓縮する場合, 棒を捻ぢる場合, 板を撓める場合等には皆物體が歪を受けたと云ふ. 歪には一般に體積の變化と形の變化とが同時に現はれるが特に體積の變化がなく形だけの變化が起つた場合にはこの歪をスリ⁶⁾と云ふ.

次に針金が引き張られる場合, 棒が兩端から壓縮せらるゝ場

1) homogeneous, homogen

3) anisotropic body, anisotropischer Körper

5) strain, Strain

2) isotropic body, isotropischer Körper

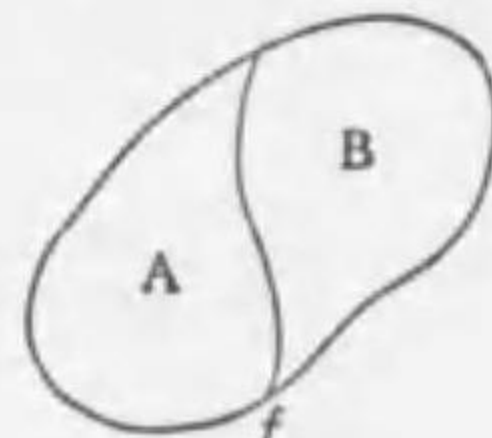
4) elasticity, Elastizität

6) shearing strain (shear), Schere

合、液體、氣體が壓力を受ける場合には物體の各點の歪は大きさも性質も同一であると考へられるが棒が捩ぢられる場合には歪は棒の中心では最小で表面では最大である。また棒を撓める場合には棒の一侧は引き延ばされ一侧は壓縮せられる。

歪が物體中の各點で同一の場合にはこの歪を均一歪¹⁾と云ひ、各點で異なる場合には不均一歪²⁾と云ふ。

§ 3 應力 物體が外力の作用によつて歪を受けてゐるときは物體内の各部は互に他に力を及ぼしてゐる。この力を應力³⁾



93 圖

と云ふ。今歪を受けた物體の内部に任意の面 f を考へると、二面の兩側の部分⁴⁾は互に面を通して應力を及ぼす。若し面を境として兩部分が互に押し合ふときはこのときの應力⁴⁾を壓力と云ひ、兩部分が引き合ふときは張力⁵⁾と云ふ。物體内の一點を過ぎる面を考へ、この面内に於てこの點の周りの微小面積に働く應力とこの微小面積との比をこの面に對し今考ふる點に於ける應力の強さと云ふ。即ち應力の強さは單位面積に働く應力である。

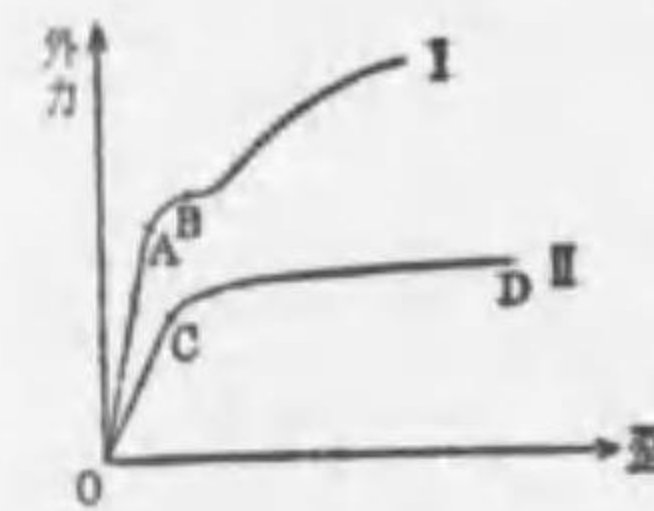
§ 4 弾性の際限及びフック (R. Hooke) の法則 外力が物體に働いて歪を生ずるとき、若し外力があまり大きくない時は外力を除くと共に物體の歪は消え去るが若し外力を次第に大きくして或際限に達するときは外力を除去しても歪は完全に消失せずして歪の痕跡が残る。やかうに痕跡が残りはじめるときは物體は弾性の際限⁶⁾に到達したと云ふ。鋼鐵、ゴム等は極めて大きい歪によつてはじめて弾性の際限に達し、鉛、粘土等は極く

1) homogeneous strain, homogenes Strain
 2) heterogeneous strain, heterogenes Strain
 3) stress, Stress
 4) pressure, Druck
 5) tension, Spannung
 6) elastic limit, Elastizitätsgrenze

僅少の歪によつて直ちに弾性の際限に達する。

實驗の結果によれば弾性の際限内に於ては應力は歪に比例する。これをフックの法則¹⁾と云ひ、この比を弾性率²⁾と云ふ。

外力が弾性の際限内にあれば歪と外力の關係は圖に示す如



94 圖

く、直線 OA であるが弾性の際限點 A を超えるとこの直線的關係は成立せず、更に外力が加はつて或値に達すると歪は急に増加する。かやうな點を降伏點³⁾と云ふ(圖に於ける B 點)。この點を過ぎると外力が増

加すれば従つて歪も亦増加し遂に物體は破壊する。降伏點と弾性の際限點とは物質の種類によつては必ずしも明確に區別し得ずして、圖に於ける OCD の様な曲線になるものもある。

次に弾性體がその際限内に於て歪を受けた場合でも外力を除き去つたとき直ちには舊狀態に歸らない。外力を除いた後舊狀態にまで復歸するに要する時間は物質によつて著しく異なる。外力除去の後物體が原狀に戻るまで多少の時間を要する事實を弾性餘效⁴⁾と云ふ。

§ 5 延長の弾性率又はヤング率 長さ l 、横斷面積 S なる針金の一端を固定し、他端に P なる力を加へてこの針金を引き延し Δl だけ延びたとするとこの針金の單位長當りの延びは $\Delta l/l$ であり、斷面積 S を通して働く應力の強さは $P/S (=p)$ とする)である。従つてこの場合の弾性率は

$$E = \left(\frac{P}{S}\right) / \left(\frac{\Delta l}{l}\right) = \frac{Pl}{S\Delta l} = \frac{pl}{\Delta l} \dots \dots \dots (1)$$

1) Hooke's law, Hookesches Gesetz
 2) modulus of elasticity, Elastizitätsmodul,
 3) yield point, Fließgrenze
 4) elastic after-effect, elastische Nachwirkung

この E を延長の弾性率¹⁾又はヤング率²⁾と云ふ。ヤング率を測定するには次の如くにする。圖に於て A, B は同じ針金でこれを隣接した二點から吊し, A の下端に錘 G を附してこの針金を張り, B の下端には分銅 P を載せ B の伸びを A に附してある尺度 C 及び B に附してある副尺 D を用ひて精密に讀む。面積 S は通常針金の直径をマイクロメーターワイヤゲージを用ひて測りこれから算出する。

§ 6 ポアソンの比 棒の一端を固定し他端に力を加へて引き延ばし又は壓縮すると力の方向にそれぞれ長さの増加又は減少が生ずる。これと同時に力と直角の方向にも厚さの減少又は増加が現はれる。この際力と直角の方向に於ける單位の厚さに対する厚さの變化と力の方向に於ける單位の長さに対する長さの變化との比をポアソンの比³⁾と云ひ、通常これを σ で表す。

即ち幅若しくは直径を b とし、長さを l とすれば

$$\sigma = \frac{\Delta b}{b} / \frac{\Delta l}{l} \dots\dots\dots(1)$$

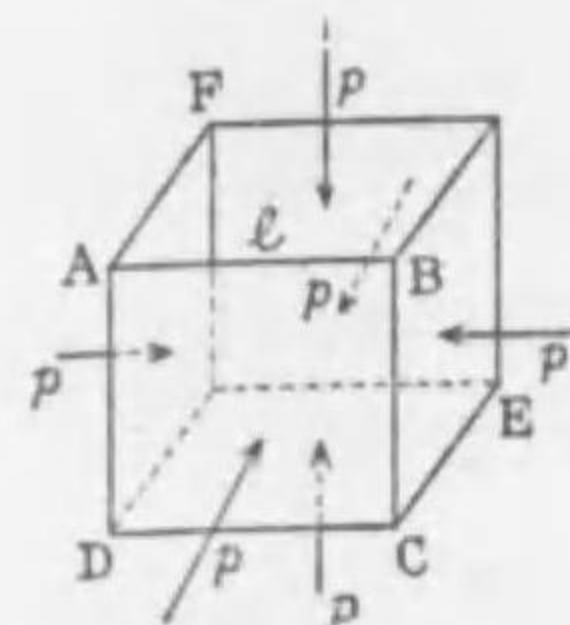
§ 7 體積の弾性率 物體の表面に一様に力を加へたとき單位面積に対する應力即ち壓力を p とし、物體が壓力により體積 v から Δv だけ減少したとすれば單位體積に対する歪は $\Delta v/v$ である。この時の弾性率を k とすれば

$$k = p / (\Delta v/v) \dots\dots\dots(1)$$

この k を體積の弾性率⁴⁾と云ふ。

圖に示す一邊の長さ l である立方體の各面に直角な壓力 p を作用させると立方體の體積は縮小する。今立方體の一邊 BC

1) modulus of elasticity for elongation, Modul der Längenelastizität
 2) Young's modulus, Youngscher Modul
 3) Poisson's ratio, Poissonsche Zahl
 4) bulk-modulus, Volumenmodul



96 圖

の長さの變化を考へて見る。

i) 面 BF 及びその對面に働く壓力による BC の單位長に對する收縮を λ とすれば BC は $l\lambda$ だけの收縮を受け $l-l\lambda$ となる。

ii) 今この收縮した一邊が面 AC 及びその對面の壓力によつて延長しその單位長に對する延長を μ とすれば BC は $(l-l\lambda)\mu$ だけの延長を受け長さは $l-l\lambda+(l-l\lambda)\mu$ となる。

iii) これが更に面 BE 及びその對面の壓力によつて

$$\{l-l\lambda+(l-l\lambda)\mu\}\mu$$

だけ延長し結局

$$l-l\lambda+(l-l\lambda)\mu+\{l-l\lambda+(l-l\lambda)\mu\}\mu$$

となる。

今この最後の長さを l' とし、ポアソンの比 σ を用ひると $\mu = \lambda\sigma$ となるから

$$l' = l(1-\lambda) + l(1-\lambda)\sigma\lambda + \{l(1-\lambda) + l(1-\lambda)\sigma\lambda\}\sigma\lambda$$

今 λ をあまり大でないとして假定しその二乗以上の項を省略すると

$$l' = l\{1-\lambda(1-2\sigma)\}$$

故に體積の變化 Δv は

$$\Delta v = l'^3 - l^3 = l^3 - l^3\{1-\lambda(1-2\sigma)\}^3$$

再び λ^2 及び λ^3 の項を省略して

$$\Delta v = 3l^3\lambda(1-2\sigma)$$

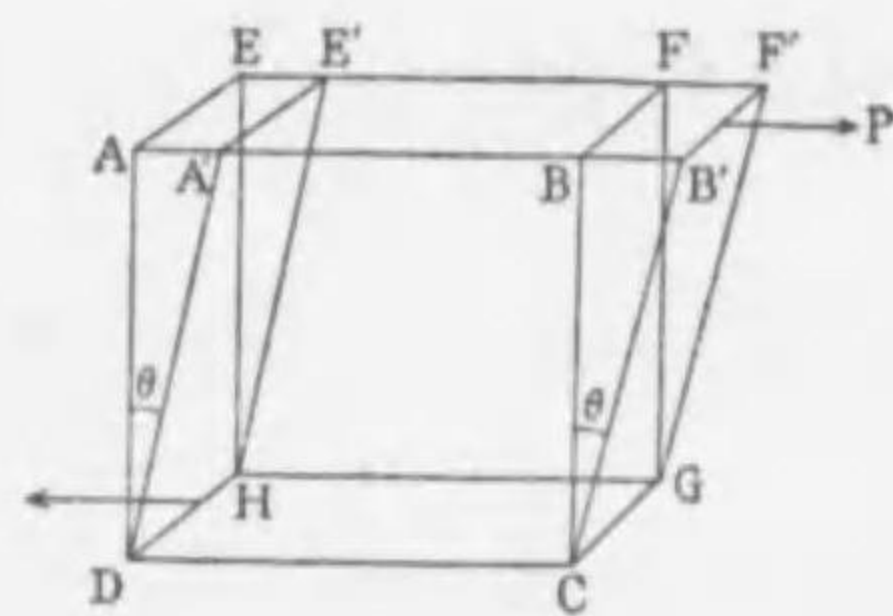
$$k = \frac{p}{\frac{\Delta v}{v}} = \frac{p}{3\lambda(1-2\sigma)} \dots\dots\dots(2)$$

また $E = \frac{P}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{P}{\lambda}$ なる故に

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \dots\dots\dots(3)$$

これは k, E 及び σ との間の関係を示す重要な式である。上式に於て $k, E > 0$ であるから(即ち p と Δv 及び p と Δl が常に同一符號をとるものとすれば) $\sigma < \frac{1}{2}$ でなければならぬ。

§ 8 剛性率(スリの弾性率) 直平行六面體 $ABCD-EFGH$ の上面に P なる切線力を、下面にこれと等しく方向反對の力を作用

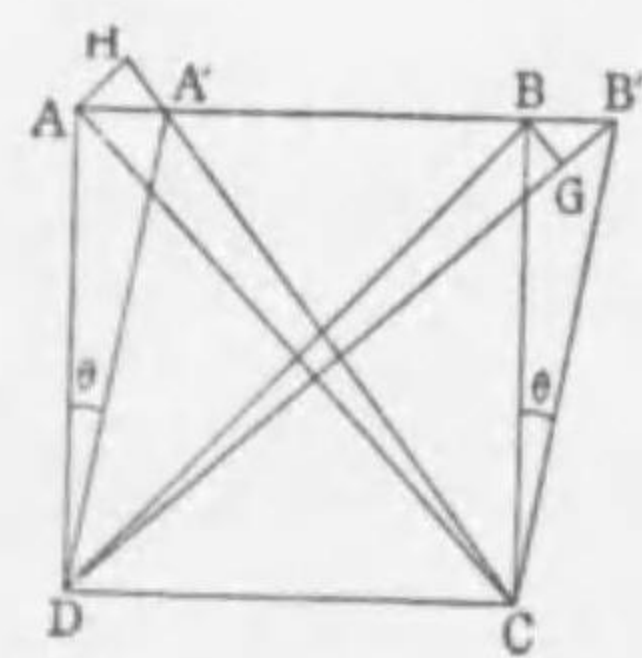


97 圖

せしめるとこの直平行六面體は $ABCD-EFGH$ から $A'B'CD-E'F'GH$ なる平行六面體に變形する。この歪の際には形の變化を起すだけで體積の變化が生じない。かやうな歪をズリ

と云ひ、 $\angle ADA' = \theta$ をズリの角、また上面の面積を S とするとき $p = P/S$ をズリの應力、而して

$$n = \frac{P}{S \theta} = \frac{p}{\theta}$$



98 圖

を剛性率¹⁾又はスリの弾性率²⁾と云ふ。

ズリによつて矩形 $ABCD$ が菱形 $A'B'CD$ (98 圖) に變形したとすれば對角線 AC は短縮して $A'C$ となり、 BD は延長して $B'D$ となる。今 DB に等しく DG をとれば GB' はズリによる

1) rigidity, Gleitmodul

2) shear-modulus, Scherungsmodul

延長を表し、ズリが小さいと假定すれば

$$\angle BB'G \doteq 45^\circ, \angle G \doteq 90^\circ$$

$$\therefore GB' = BB' / \sqrt{2}$$

$$\text{また } DB = CB \sqrt{2}$$

故に DB の單位長に對する延長を e とすれば

$$e = \frac{GB'}{DB} = \frac{\frac{BB'}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}CB} = \frac{BB'}{2CB} = \frac{\theta}{2} = \frac{p}{2n}$$

同様にして AC の單位長に對する短縮 e は

$$e = \frac{HA'}{AC} = \frac{\theta}{2} = \frac{p}{2n}$$

なることが知られる。尙菱形 $A'B'CD$ の對角線 $A'C$ と DB' とは互に垂直であるから短縮と延長とは互に直角の方向に起ることが分る。

弾性率間の關係として § 7(3) の外に剛性率 n と σ, E との間に

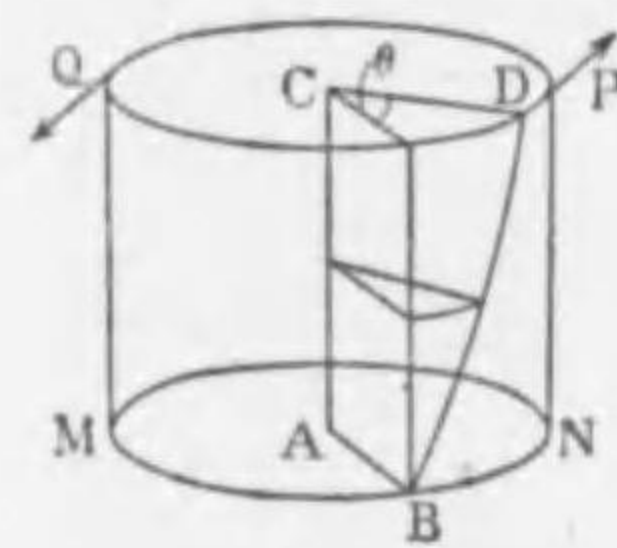
$$n = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

なる關係が證明される。この關係を假定すれば § 7(3) と上式から

$$\sigma = \frac{3k-2n}{2(3k+n)}$$

が出る。

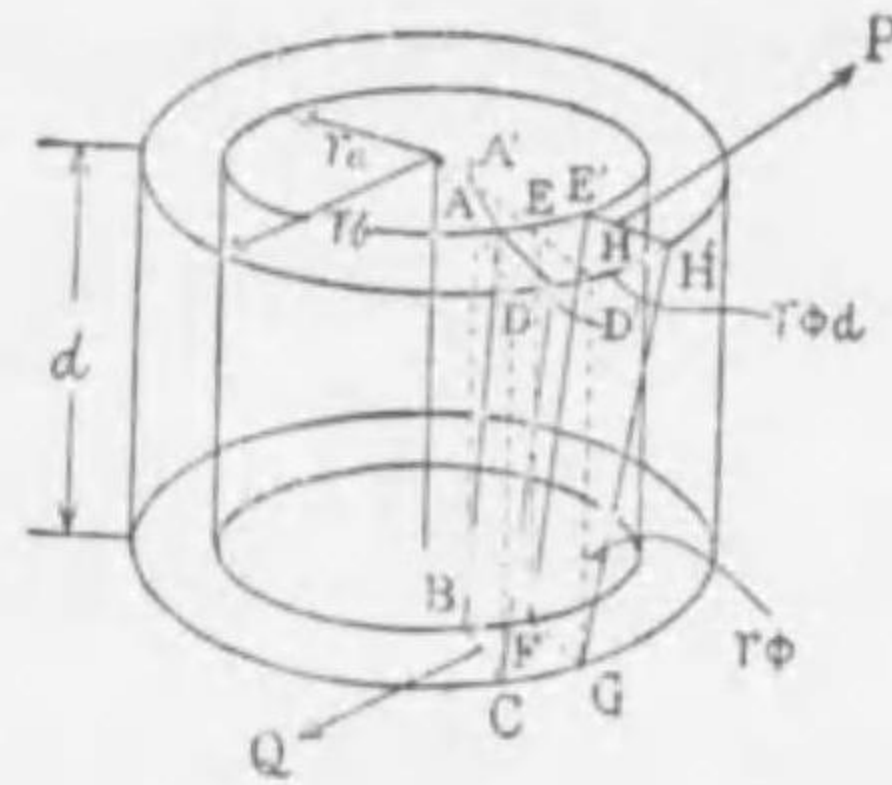
§ 9 圓柱の捩れ 圖に於て直圓筒の一端 MN を固定し、他端



99 圖

に圓柱の軸に垂直な平面内に偶力 (P, Q) を加へてこれを捩ると圓柱の各切斷面はその面内に於て廻轉し各切斷面の廻轉角は下端からその切斷面までの距離に比例する。かくして生じた弾性體の歪を捩れと云ひ、上端の廻轉角 θ を捩れの角と云ふ。

100 圖は内半徑 r_0 、外半徑 r_0 なる極めて短かい中空の圓筒と



100 圖

しその長さを d とする。今 $ABCD$ 及び $EFGH$ を圓筒の軸を通過する二平面とし、この二平面間の角が極めて小さく且 r_a と r_b との差があまり大でなければ $ABCD-EFGH$ は直角平行六面體と見做して差支へない。今この圓筒を捩つて

$ABCD-EFGH$ の平行六面體が $A'BCD'-E'FGH'$ になつたとする。 r_a と r_b の平均値を r 、圓筒の單位長の捩れ角を ϕ で表せば 100 圖に示す圓筒の薄層の上面の下面に対する廻轉角は $r\phi d$ であり、従つて $HH'=r\phi d$ である。故に $A'BCD'-E'FGH'$ の元の平行六面體 $ABCD-EFGH$ に対するズリの角即ち $\angle DCD'$ 或は $\angle HGH'$ は

$$r\phi d/d=r\phi$$

今上記の小平行六面體に $r\phi$ なるズリを生ずるに必要な應力として (P, Q) が働くとし、圓筒を N 箇の相等しい平行六面體に分割する。圓筒の上端の面積を a とすれば各 1 の平行六面體の上端の面積は a/N である。従つて小平行六面體の上端の單位面積に働く應力は $P/(a/N)=NP/a$ である。故に剛性率 n は

$$\frac{NP}{\frac{a}{r\phi}}=n \dots\dots\dots(1)$$

この n を捩れの剛性率¹⁾と云ふ。上式より直ちに

$$P=\frac{1}{N} \cdot nar\phi$$

1) torsional rigidity, Torsionsmodul

この力は圓筒の軸に対して能率を生じその大きさは

$$Pr=\frac{1}{N} \cdot nar^2\phi$$

圓筒中には N 箇の相等しい平行六面體があるから圓筒に働く全能率は

$$NPr=nar^2\phi$$

また一方 $a=\pi(r_b^2-r_a^2)$ 且 $r^2=\frac{1}{2}(r_a^2+r_b^2)$ と見做し得るから

$$NPr=\phi n\pi(r_b^2-r_a^2)\frac{(r_b^2+r_a^2)}{2} = \frac{n\phi\pi}{2}(r_b^4-r_a^4) \dots\dots\dots(2)$$

次に圓筒の内徑と外徑との差があまり小でないときには内徑と外徑との間を $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n$ なる半徑の同心圓に分つて上記の結果を用ひると圓筒の一端面に働く全能率は

$$\frac{n\phi\pi}{2}\{(r_1^4-r_0^4)+(r_2^4-r_1^4)+\dots+(r_n^4-r_{n-1}^4)\} = \frac{n\phi\pi}{2}(r_n^4-r_0^4) \dots\dots\dots(3)$$

故に若し圓筒が中實である場合には $r_0=0$ また $r_n=r$ とすれば圓筒の一端面全體に働く力の能率 τ は

$$\tau=\frac{n\phi\pi}{2}r^4 \dots\dots\dots(4)$$

今圓筒の全長を l とし上端面の下面に対する捩れの角を θ とすれば $\phi=\theta/l$ であるから

$$\tau=\frac{n\pi\theta r^4}{2l} \dots\dots\dots(5)$$

$n\pi r^4/2l$ は圓筒については一定の常數であるからこれを C と置けば

$$\tau = C\theta \dots \dots \dots (6)$$

§10 振れ振り 今圖の様に長さ l , 半径 r , 剛性率 n である針



101 圖

金の一端を固定し下端に棒の中點を結びこれに水平に偶力を加へて針金を少しく捻つて後に放せば棒は單振動をする。この様な装置を振れ振り¹⁾と云ふ。棒の中點を通過しこれに垂直な軸の周りの棒の慣性能率を I , 振れの角を θ , 單振動の角加速度を a とすれば

$$Ia = -C\theta \dots \dots \dots (1)$$

上式の負號は a の増加と θ の増加の方向と反對であるためである。今この振れ振子の振動の週期を T とすれば

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{2I}{n\pi r^4}} \dots \dots \dots (2)$$

上式に於て針金の長さ l , 半径 r , 及び棒の慣性能率 I を知れば週期 T を測定することによつて針金の剛性率 n を求めることが出来る。

上述の振れ振子で未知の慣性能率を實驗的に求めることが出来る。(2) から

$$T^2 = \frac{4\pi^2 I}{C}$$

今慣性能率 I の知れた物體の上に更に慣性能率 I' の知れない物體を附加して振動せしめこのときの週期を T' とすると C は兩方の場合について共に一定であるから

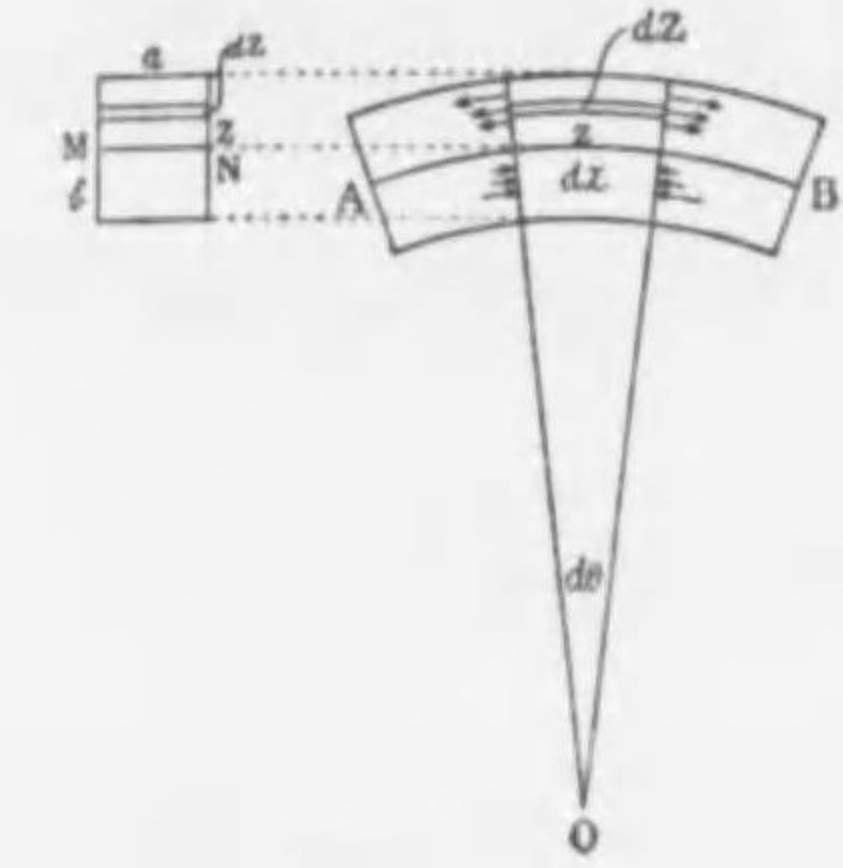
$$T'^2 = \frac{4\pi^2}{C} (I + I')$$

$$\therefore I' = \frac{T'^2 - T^2}{T^2} I \dots \dots \dots (3)$$

1) torsion pendulum, Torsionspendel

§11 棒の撓み¹⁾ 切口が矩形の眞直な棒を撓めて圖の様にす

ると上側では伸び下側では縮むからその中間には伸縮のない



102 圖

層がある筈である。この中層²⁾ AB 上に長さ dx なる部分を取りこの兩端に於て AB に垂直なる二平面間の角を $d\theta$ とする。今 dx から z の距離にある dz の厚さの薄層の伸びを考へるに dx の場所の曲率半径を ρ とすれば伸びは

$$(\rho + z)d\theta - \rho d\theta = zd\theta$$

同様に中層から下の部分では同じく $zd\theta$ だけの縮みを受ける。

今棒の幅を a , 厚さを b , そのヤング率を E とすれば薄層の断面積は adz であるから中層より上では

$$\frac{zd\theta}{dx} Eadz$$

だけの張力を受け下では同大の壓力を受ける。この二力が偶力を作りその能率を dL とすれば

$$\begin{aligned} dL &= 2z \frac{d\theta}{dx} Eadz \\ &= 2Ea \frac{d\theta}{dx} z^2 dz \end{aligned}$$

$$\text{一方 } \rho = \frac{dx}{d\theta}$$

であるから

$$dL = \frac{E}{\rho} 2az^2 dz$$

1) flexure, bending; Biegung

2) neutral layer, Neutralschicht

故に截面全体についての能率 L は

$$L = \Sigma dL = \frac{E}{\rho} \Sigma 2az^2 dz \left(= \frac{E}{\rho} \int 2az^2 dz \right)$$

$\Sigma 2az^2 dz$ は矩形の截面を有する棒の截面の密度を 1 としたときこの面の中層の切りの線 MN に關する慣性能率と見得る。故にこれを I とすれば

$$L = \Sigma dL = \frac{E}{\rho} I \dots\dots\dots(1)$$

即ち棒を撓める偶力の能率はヤング率、曲率、断面慣性能率に比例する。 I は断面の形に關係するから同一の材料を用ひてもこの形を適當に選んで撓め難くすることが出来る。(104 圖参照)。

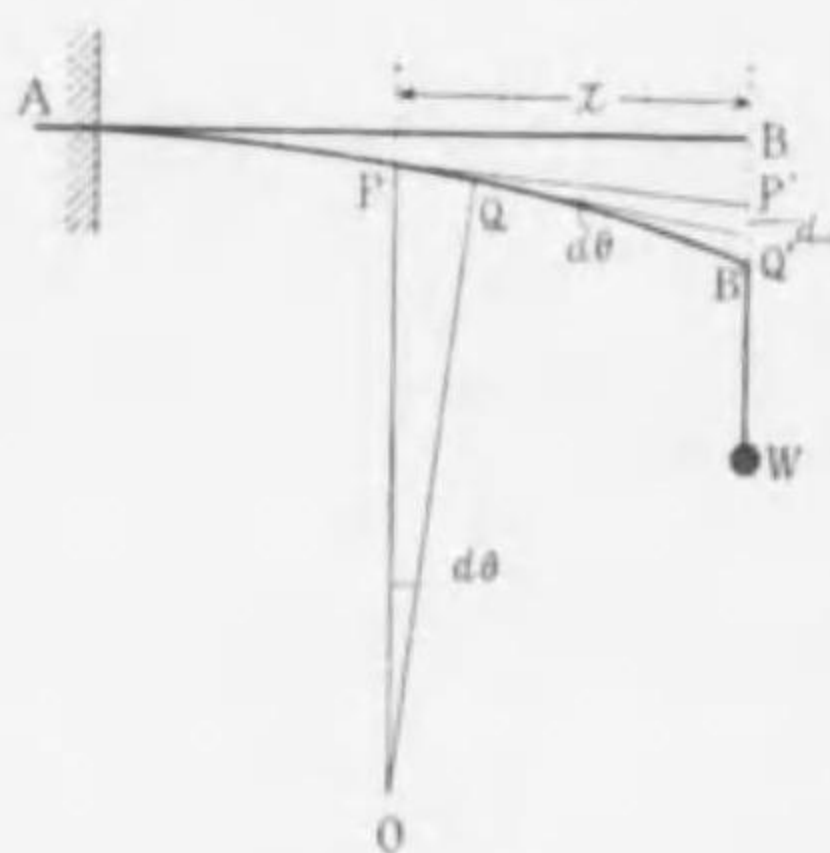
尙 L は上記矩形の截面を有する場合は

$$L = \frac{Eab^3}{12\rho} \dots\dots\dots(2)$$

(2) の計算は

$$L = \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{E}{\rho} 2az^2 dz = \frac{E}{\rho} 2a \int_0^{\frac{b}{2}} z^2 dz = \frac{Eab^3}{12\rho}$$

截面矩形の棒の一端を固定し他端に錘を附して圖の如くこれを撓めたとき一端 B の降下 s を計算する。今棒の撓みが小さいと假定し B の降下點 B' が B と殆んど同一鉛直面内にあるものとする。かくすれば錘 W のために棒の一點 Q には



103 圖

錘 Wx の能率を生じこれが Q 點に於ける能率

$$\frac{Eab^3}{12\rho}$$

と釣合を保つ棒は平衡の状態にある。即ち

$$Wx = \frac{Eab^3}{12\rho}$$



104 圖

さて撓みが小さいため棒の中層に沿うて測つた長さが上式の x と殆んど等しいとし隣接二點 P, Q の切線が BB' と交る點 P'Q' の距離を ds とすれば

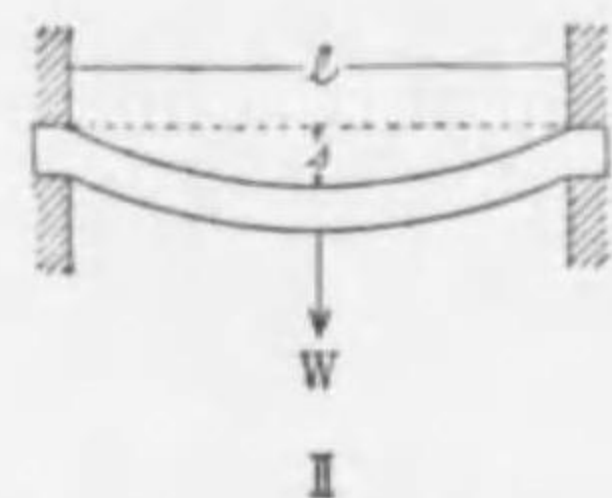
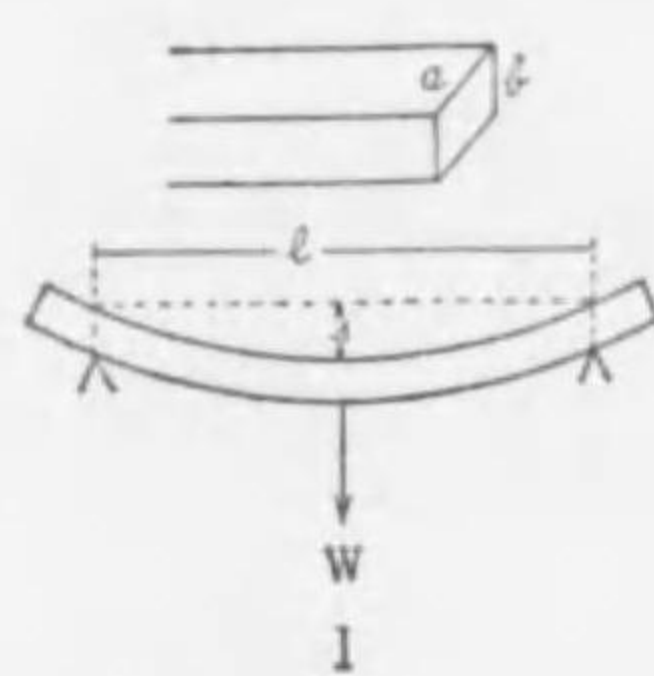
$$ds = x d\theta$$

$$Wx = \frac{Eab^3}{12} \frac{d\theta}{dx}$$

$$\therefore ds = \frac{12W}{Eab^3} x^2 dx$$

$$\therefore s = \int_0^l \frac{12W}{Eab^3} x^2 dx$$

$$= \frac{4l^3 W}{Eab^3} [l \dots \text{棒の長さ}]$$



105 圖

同一の材料で同一の長さ、同一の截面面積を有つ種々の形の截面を有する棒の降下を圖示すれば 104 圖の通りである。

次に 105 圖 I の如く幅 a 、厚さ b なる棒の両端を支柱で支へ中央に錘 W をかけたときの降下は計算の結果

$$s = \frac{l^3}{4Eab^3} W$$

であり

又 II 圖の様に両端を固定した支へ方では

$$s = \frac{l^3}{16Eab^3} W$$

となる。上記三種の場合に於て降下 s を測

定すればヤング率 E を求めることが出来る。

弾 性 率 の 表

	E (10^{11} dyne/cm ²)	k (10^{11} dyne/cm ²)	n (10^{11} dyne/cm ²)	σ
アルミニウム	6.3—7.2	2.5—3.5	7.5	0.33
鉛	1.5—1.7	0.5—0.6	4.4	0.42
鍛 鐵	19—22	14.6	7.7—8.3	0.28
鑄 鐵	10—13	3.5—8	10—15	0.23—0.31
金	7.6—8.1	3—4	17	0.42
銅	10—13	4.0—4.7	13—14	0.34
水晶絲	5.2	3.0	1.4	—
ガラス	5—8	2.0—3.2	3.4—6	0.2—0.27

【問 題】

1. 銅のヤング率は毎平方センチにつき12000 kgである。これをC.G.S. 絶対単位で云ひ表はせ。(大9.東.物) [答] 12×10^{11} dyne/cm²

2. 長さ L m, 切断面半径 r mm の圓なる針金に, m kg の錘をかけたとき l m 伸びたとすればその針金のヤングの弾性率はC.G.S. 単位, 並に重力単位でいくらか(特に単位を明記せよ) (大2.九.工)

$$[答] \frac{Lmq}{l\pi r^2} \times 10^5 \text{ dyne/cm}^2, \frac{Lm}{l\pi r^2} \text{ 庭重/耗}^2$$

3. バネに500 g の錘をかけて静止させたとき長さが25 cm になった。尚500 g の錘をかけて静止させたとき長さが30 cm になった。これを尚2 cm 下げて放つとどんな運動をするか。(大11.東.理)

[答] 1000 瓦の錘はバネの長さ30 cm のところを中心として振幅2 cm, 週期0.53 sec の單振動をなす

4. l cm なる長さの弾性棒がある。これを x cm だけ伸ばすには $K(x/l)$ dyne の力を要する(但し K は定數)。然るときこの棒を $(l+a)$ cm の長さに引き伸ばすに要する仕事は幾何か (大4.九.工)

$$[答] \frac{Ka^2}{2l} \text{ erg}$$

5. 半径 R なる圓形横断面の棒とこれと同長, 同質の棒で横断面の外徑 R , 内徑 r なる棒がある。これらの棒の両端を刃の上に支へその中央に同量の錘をかけたとき各棒の中央の下りを比較せよ

$$[答] \frac{\text{筒の下り}}{\text{棒の下り}} = \frac{R^4}{R^4 - r^4} = \frac{1}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4}$$

第六章 流 體

§ 1. 流體, 液體, 氣體 形の變化に對して少しも抵抗を現はさない物質を完全流體¹⁾又は粘性のない流體と云ふ。かやうな物質に對しては剛性率 n は零として差支がない。普通静止の状態にある流體は完全流體でなくても皆かやうな性質をもつてゐる。云ひ換へれば流體を一度變形した後これをそのまゝの形に保つておくには少しも外力を要しない。然し流體が運動状態にあるとき即ち流體の部分部分が互に相對的に運動するときには多少のズリに對する抵抗力を現はす。これが粘性である。流體靜力學に於てはたゞ流體の静止状態に就てのみ論ずるのであるから粘性を考へる必要なく盡く完全流體と見做して差支ない。

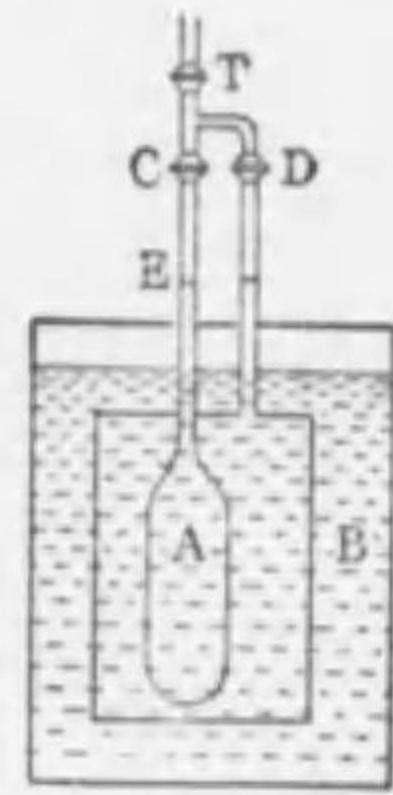
流體を二分して液體³⁾と氣體⁴⁾に分つ。この兩者の相違は前者の壓縮は極めて困難なるに反し, 後者は極めて容易に壓縮し得ることと後者では容器全體一樣に擴がる性質の有ることである。液體の壓縮は困難ではあるが出来ないのではない。液體にその周圍から一樣に壓力を加へ壓縮するとき, 初めの體積 v が壓力が p から $p + \Delta p$ に増加したためその體積が Δv だけ減じたとする。このとき

$$x = \frac{\Delta v}{v} / \Delta p$$

を液體の壓縮率⁵⁾と云ふ。

液體の壓縮率は極めて小さいからこれを測定するには特別

1) perfect fluid, vollkommenes Fluidum 2) viscosity, Zähigkeit
3) liquid, Flüssigkeit 4) gas, Gas
5) compressibility, Kompressibilität



106 圖

の装置を要する。圖に於て壓縮率を測定しようとする液體が器A内に入れてあるとする。この液體に極めて大きい壓力を加へると、この器は破損する危険があると同時に器自身も多少膨脹して測定が不正確になるから器Aを更に大きな丈夫な器Bの中に入れ、器Aの壁を内外兩側から壓して器の破壊又は膨脹を避ける。即ち器Aは管Tによつて壓縮空氣溜に連結せられ栓Cを開いてA内の液體を壓縮する。これと同時に栓Dをも開いてA器の外部の液體に壓力を與へ器Aの壁を内外より壓するのである。今この壓力によつてAの液面Eに*l*だけの動きを來したとし、この細管の斷面積を*S*とすれば

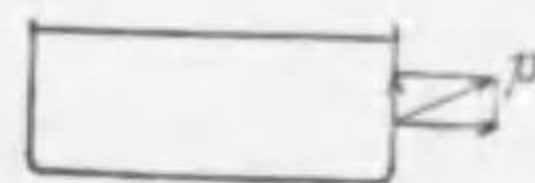
$$Jv = S \cdot l$$

故に壓縮空氣の壓力を知ればこれによつて液體の壓縮率を知ることが出来る。

上述の測定では器Aの壁を内外から壓縮することにより器自身の體積の微小な變化をも考慮に入れなければならぬがAを作つてゐる物質が極めて堅牢であるとして省略したのである。事實水銀の壓縮率は一氣壓について約 3.8×10^{-6} 、水は 49×10^{-6} 、エーテルは 152×10^{-6} であるに反し鋼鐵では 0.6×10^{-6} であるから水の約 $1/80$ 位である。上記の壓縮率が溫度により著しく變化することは注意しなければならぬ。

§2 静止してゐる液體の壓力の諸性質

i) 静止してゐる液體がこれに接してゐる面に及ぼす壓力はこの面に垂直である。



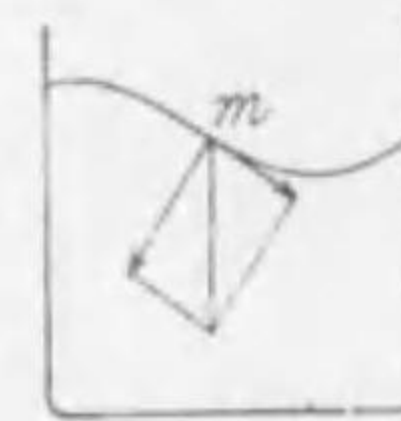
107 圖

何となれば若し壓力*p*が垂直でなければこれを面に垂直な方向と平行の方向に分解すると静止してゐる液體に対しては剛性率が零であるから*p*の平

行分力に對抗することが出来ず液體は運動を起す様になるからである。この關係は液體が容器に接してゐる面に対してのみならず液體の内部に於ける任意に想像せる面に対しても成立する。

ii) 静止してゐる液體の自由表面(容器に接してゐない面)はこの部に働く外力に対して垂直である。

今若し外力に対して垂直ならずとし、液體の表面上の一點に

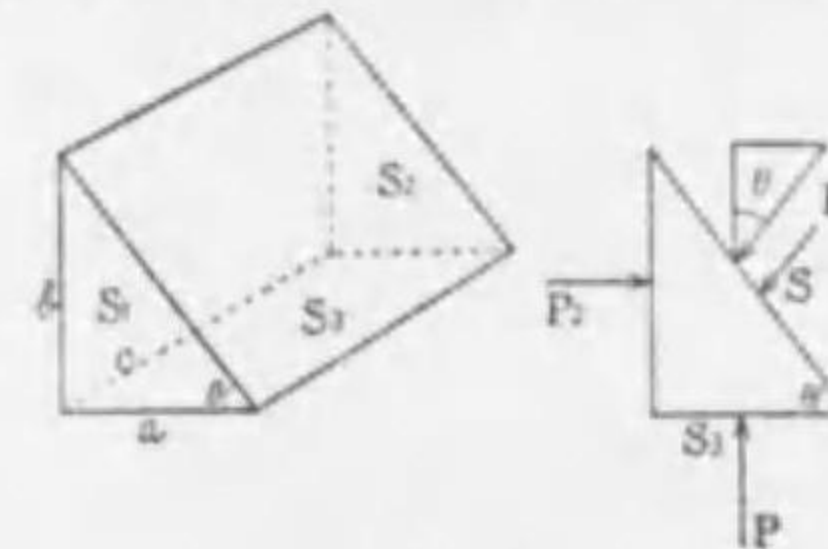


108 圖

働く力を表面に垂直な方向と平行な方向とに分解すると、平行分力に相應する液體の運動を起すことになるからである。

iii) 静止してゐる液體内の一點に於ける壓力の大きさは凡ての方向に対して相等しい。

何となれば液體の内部の一點の周圍に圖に示す如き小さい直角三角塊を想像して見る。但し兩端面 S_1, S_2 は稜*e*に垂直



109 圖

で S_3 面は水平面であるとする。今考ふる液體の小部分は静止の状態にあるから各面に働く各壓力は i) によつて各面に垂直で、その合力は零でなければならぬ。今上下の方向の壓力の釣合だけを考へると (p_2 は上下の方向に於ける液體の運動に無關係であるから) p_1 の鉛直分力は $p_1 S_3 \cos \theta = p_1 S_1$ で

下方に向ひこれと p 及び三角塊内の液體の重さとが釣合つてゐる。今液體の密度を ρ 、體積を V とすれば

$$p_1 S_1 + V \rho g = p S_2 \quad [g \text{ は重力の加速度}]$$

又 $S_1 = ac, \quad V = (abc)/2$

であるから

$$p_1 + \frac{h}{2} \rho g = p$$

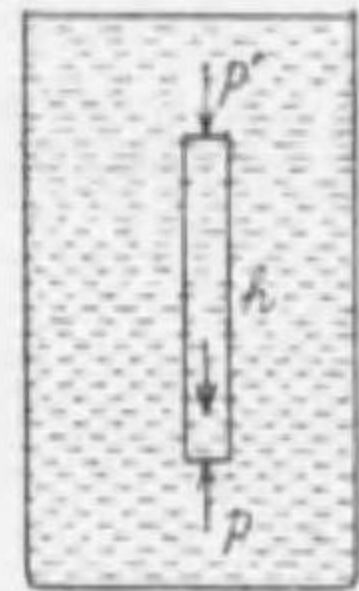
今壩體を極めて小なるものとして極限に於て b を零とすれば

$$p_1 = p$$

上の関係には θ を含まぬから p はすべての方向の p_1 と相等しい。かやうな性質の壓力を液體の靜壓力¹⁾と云ふ。

iv) 静止せる液體内に於ては同一水平面上の各點の壓力は相等しい。

今液體内に高さ h の鉛直な液柱を考へ、この液柱の兩端の面積を S とし、密度を ρ とすればこの液柱の靜止條件から



110 圖

今液柱の上端面が液體の自由表面と一致する場合には p' は大氣の壓力に等しい。今これを p_0 とすると

$$pS = p'S + Sh\rho g$$

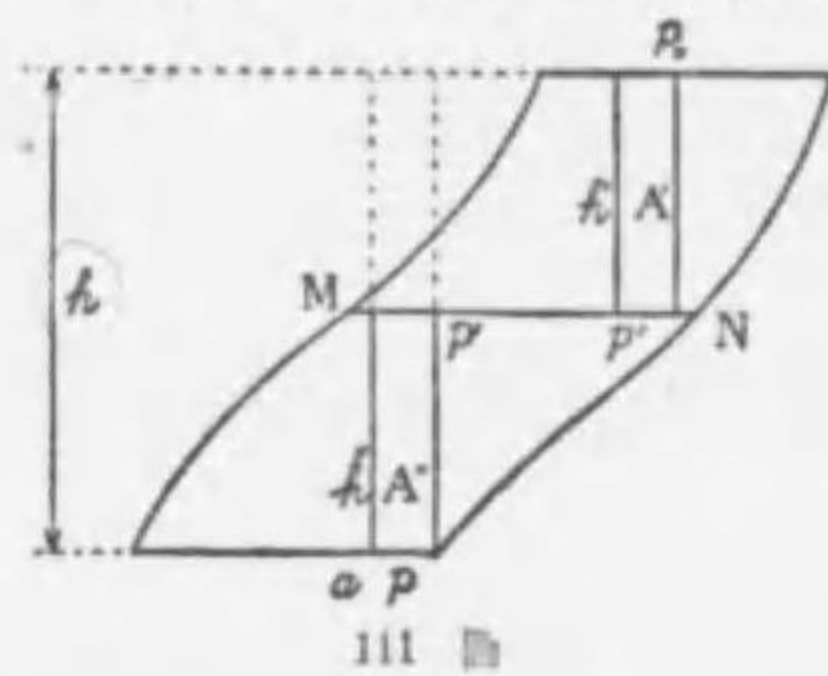
$$\therefore p = p' + h\rho g$$

即ち液體の自由表面から同一の深さにある水平面上に於ては壓力はすべて相等しい。

$$p = p_0 + h\rho g$$

上記の事實から直ちに次のことが云ひ得る。

v) 静止せる液體が容器の底面に及ぼす全壓力は液體の表面と底面との垂直距離及び底面積だけで定まり、容器の形には無關係である。



111 圖

今圖の様な容器中の液體の内部に水平面 MN を想像し、鉛直な液柱 A' 、 A'' を考へると iv) によつて A' の下端の壓力と A'' の上端の壓力とは相等しい。また

$$A' \text{ に対して } p' = p_0 + h'\rho g$$

1) statical pressure, statischer Druck

$$A'' \text{ に対して } p = p' + h''\rho g$$

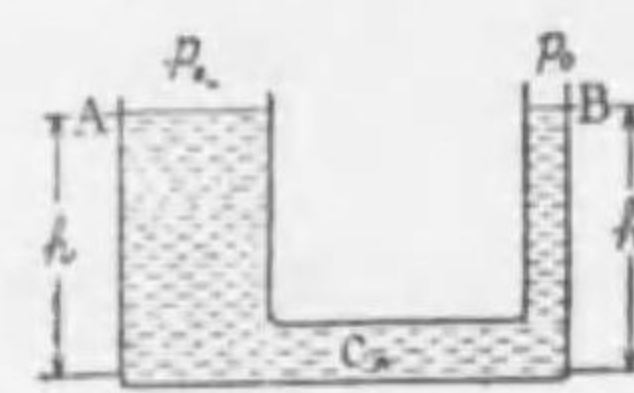
$$\therefore p = p_0 + (h' + h'')\rho g = p_0 + h\rho g$$

容器の底面積を a とすれば底面に及ぼす全壓力は

$$ap = ap_0 + ah\rho g$$

である。

§ 3 連通管 圖の様な連通管¹⁾に於て C 點は水平面 A から h 、B から h' の高さにありとする。このとき C の壓力 p は

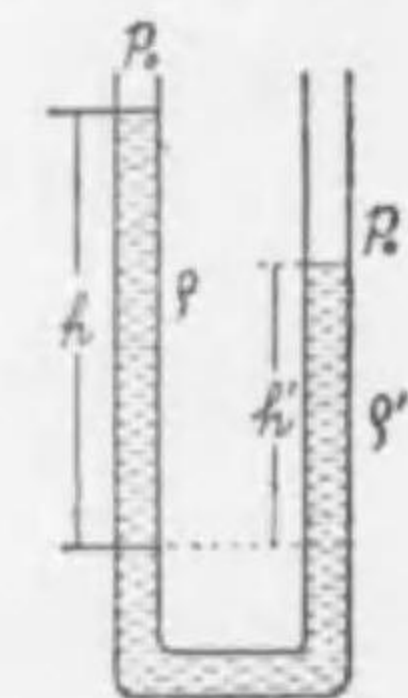


112 圖

$$p = p_0 + h\rho g = p_0 + h'\rho g$$

$$\therefore h' = h$$

即ち A 及び B の水平面は C から等高にある。次に混合しない二液を連通管に入れ二液の境界面から各液の自由表面までの高さを h 及び h' とし、二液の密度を ρ 及び ρ' とすれば境界面の壓力 p は



113 圖

及び

$$p = p_0 + h\rho g$$

$$p = p_0 + h'\rho'g$$

$$\therefore h/h' = \rho'/\rho$$

これによつて液體の密度を簡単に比較し得る。

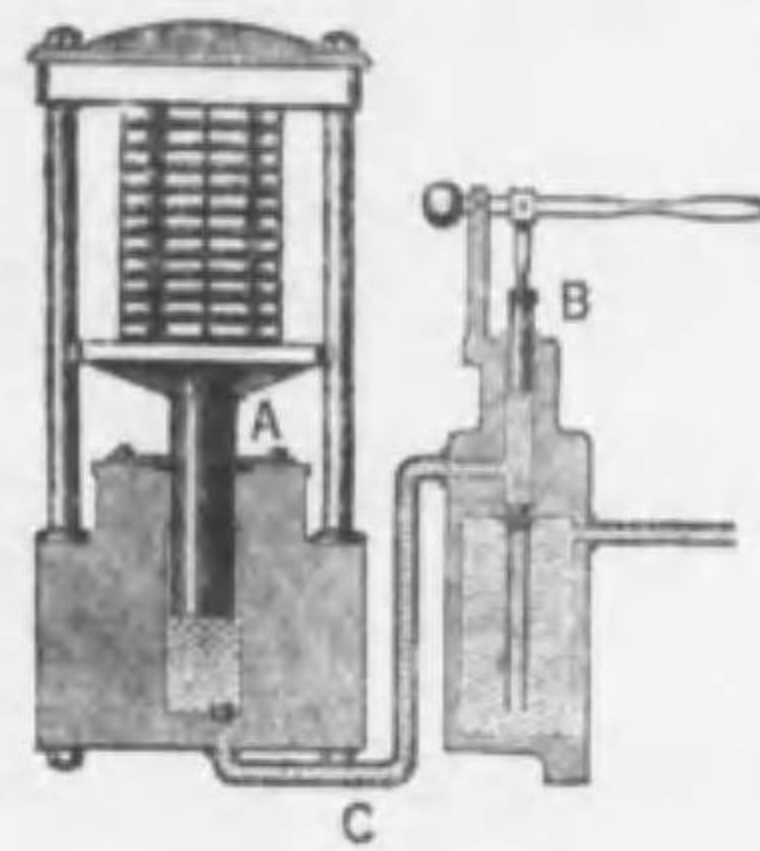
§ 4 パスカルの原理 液體に壓力を加へると液體は各方向に増減なく一様にこの壓力を傳達する。これをパスカルの原理²⁾と云ふ。ブラーマ (Brahma) はこの原理を應用して小さい力を働かせて極めて大きい力を得る所謂水壓機³⁾を考案した。この水壓機は二箇の大小の圓筒及びピストンから成り、二つの圓筒は管 C によつて連結され、この管及び圓筒は液體を以て満さ

1) communicated vessel, kommunizierendes Gefäß

2) Pascal's principle, Pascalsches Prinzip

3) hydraulic press, hydraulische Presse

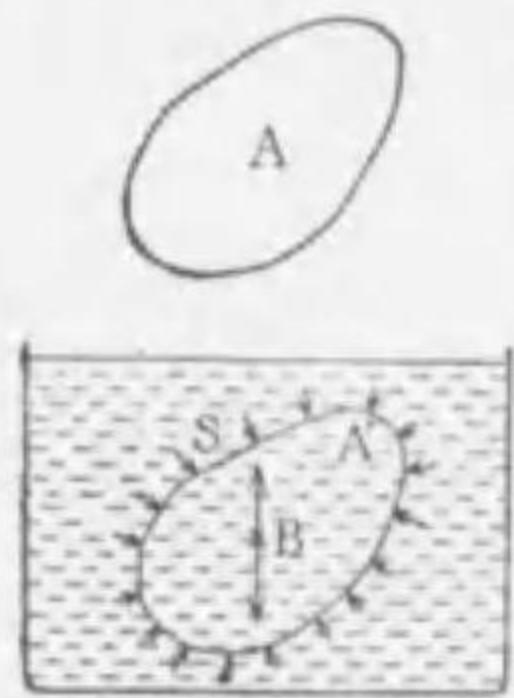
れてある。今大きいピストンAの底面積をS, 小さいピストン



Bの底面積をsとし, Bに力pを加へるとBの下面に接する水は $\frac{p}{s}$ の圧力を受け, この圧力はCを通つてピストンAの下面に働きAは $S \times \frac{p}{s}$ の力を以つて押し上げられる。故に $\frac{S}{s}$ の比を充分大きくすればAの下端にあらはれる力は極めて大きい。

§5 アルキメデスの原理 液體中にある物體はそれが排除してゐる液體の重さに等しい力で上方に押し上げられる。これをアルキメデスの原理¹⁾と云ふ。

今液中に入れらるべき物體をAとし, これを入れる前に液體



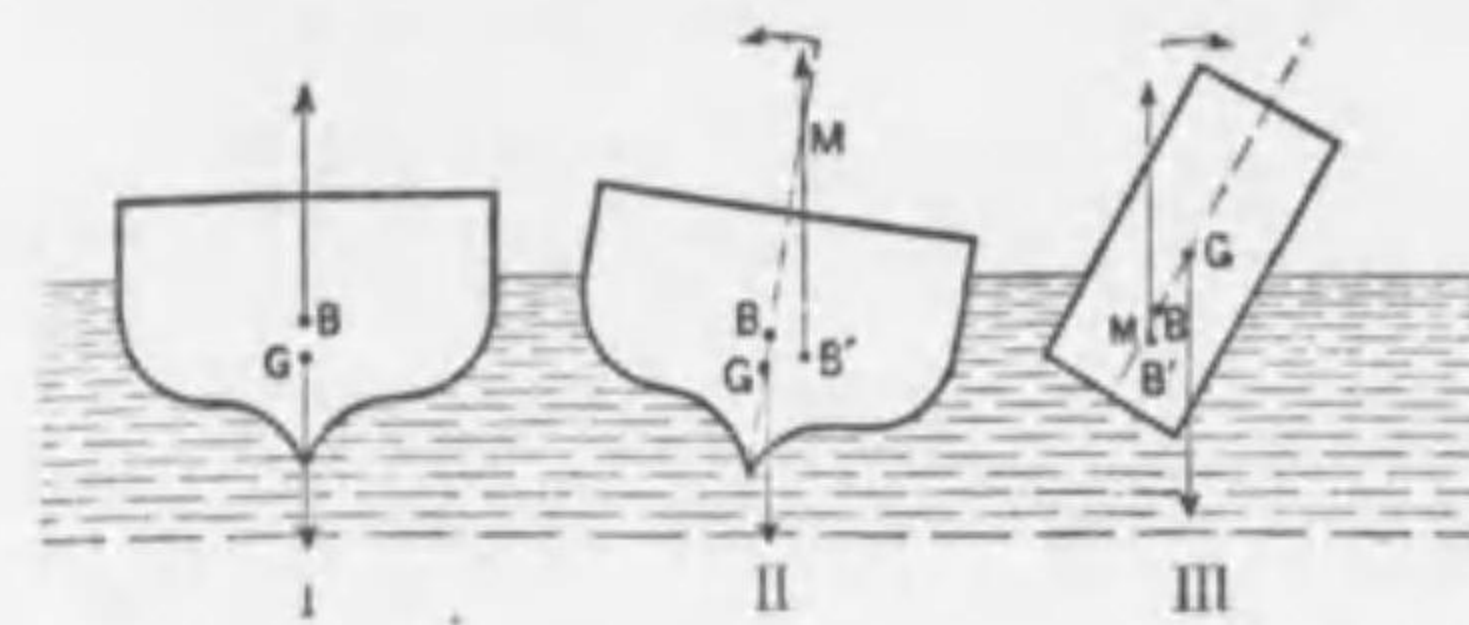
中にAと大き, 形状共に全く同一である液體の一部分を考へて見る, これをA'とする。A'の重心をBとすればBにはA'の重さに等しいだけの重力が作用する。またA'の表面Sに働く壓力は皆Sに垂直でこの壓力の合力はBに働き, その大きさはA'の重さと相等しく方向が反對で

なければならぬ。何となればA'に働く力はA'の重さとA'の表面に働く壓力より外にはなく, またA'は液中に静止して居るからである。次にA'の代りにAを以つて置き換へたとすると壓力に關する關係は前と少しも變化がないから壓力の合力即ち液重だけ上方に向ふ力を受ける。この力を浮力²⁾と云ひ, 排除せらるべき液體の重心Gを浮力の中心と云ふ。

§6 液體に浮ぶ固體の釣合 今或物體が液體に浮かべてあ

1) Archimedes' principle, Prinzip von Archimedes
2) buoyancy, Auftrieb

るとする。このときは浮力は浮力の中心を通つて鉛直線の方



向に上方に浮體を押し上げようとし, その大きさは浮體が排除した液體の重量に等しい。しかもこ

の重量は浮體自身の重量に等しいのであるからI圖のやうに浮體が釣合を保つて静止してゐる場合には浮體の重心Gと浮力の中心Bとは同一直線上にあつて浮體の重量と液の浮力とは釣合ふ。

今浮體が傾くと, 浮體の重心Gはそれに固定して位置を變へないが排除さるゝ液はその形状, 位置共に變るから浮力の中心の位置はBよりB'に變り(II圖, III圖), 浮體に作用する重力と浮力は偶力となつて作用し, 浮體を廻轉しようとする。この際浮體の釣合はB'を通ずる鉛直線とBG直線との交點M¹⁾(傾心)がII圖の如くGの上であれば安定であり, III圖の如く下に來れば不安定である。船の底部を重くすることによつて船の安定度を増すことが出来る。

§7 比重及びその測定 次の比を比重²⁾と云ふ。

$$\text{比重} = \frac{\text{物體の重さ}}{\text{物體と同體積の } 4^{\circ}\text{C に於ける水の重さ}}$$

比重はアルキメデスの原理により測定出来るが物體の性質の異なるに従ひ比重測定には種々の方法がある。

1) 固體の比重

a. 天秤による法 物體の空氣中に於ける重さW及び水中に於け

1) metacentre, Metazentrum 2) specific gravity, spezifisches Gewicht

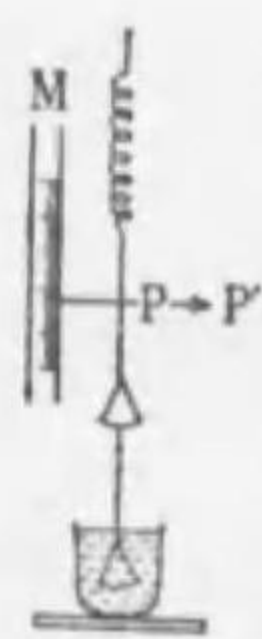
る重さ W' を天秤で測れば $W - W'$ は物體と同體積の水の重さである。水の温度を $t^\circ\text{C}$ とし、この温度の水の比重 S_t を表によりて求めると $(W - W')/S_t$ は 4°C の水の重さである。故に

$$\text{比重 } S = \frac{W}{W - W'} \cdot S_t$$

若し固體が水に溶ける場合ではその固體が溶けない液體で比重の知れたものを用ひる。今かゝる液體の $t^\circ\text{C}$ の時の比重を $S_{t'}$ とすれば

$$S = \frac{W}{W - W'} \cdot S_{t'}$$

b. ジョリー (Jolly) の **ゼンマイ秤** による法 圖に於て M は尺度を附した鏡である。先づ物體を上皿に載せ標點 P を尺度によつて讀む、このとき P と P の鏡による像 P' とが一致する様に見える。次に物體の代りに分銅 W を乗せ前と同じ位置にくる様にすればこれは物體の重さである。次に物體を水中の皿に乗せ同じく P が更に前と同じ位置にくるやうに分銅 W' を乗せると、 W' は物體と同體積の水の重量である。故に



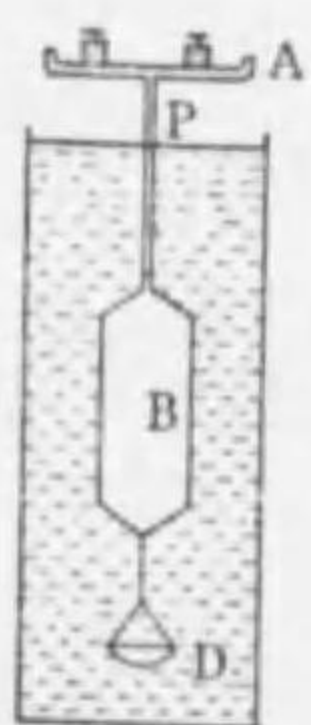
117 圖

$$S = \frac{W}{W'} \cdot S_t$$

この實驗中には下の皿は常に水中にある様にしておかねばならぬ。

c. **比重錘** 物體の重さ W 、錘に水のみを満したときの重さ W' 、その中に物體を入れ溢れる水を拭き去つたときの重さ W'' を測れば

$$S = \frac{W}{W + W' - W''} \cdot S_t$$



118 圖

d. ニコルソン (Nicholson) の **浮秤** 浮秤 B に附してある標點 P が水面と一致する様に上の皿 A に適當の分銅を載せ、次に測定すべき物體を更に A に載せ分銅 W を減じ P が常に水面と一致する様にする。次に物體を水中の皿 D に入れ、 W' の分銅を A に加へて再び P が水面と一致する様にすれば物體の比重は

$$S = \frac{W}{W'} \cdot S_t$$

1) spring balance, Federwage 2) pyknometer, Pyknometer
3) hydrometer, Aräometer

ii) 液體の比重

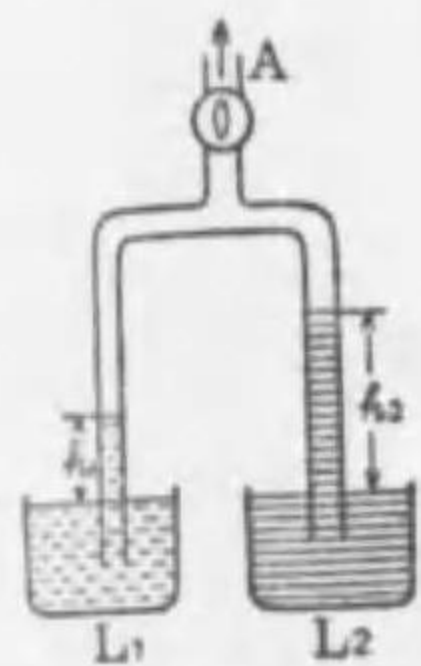
a. 天秤による法 或固體を比重を測定すべき液中、及び水中に浸したときの重量の減少を W, W' とすれば

$$S = \frac{W}{W'} \cdot S_t$$

b. 比重錘による法 錘に液體を満したときの重さを W 、水を満したときの重さを W' 、比重錘だけの重さを W'' とすれば

$$S = \frac{W - W''}{W' - W''} \cdot S_t$$

c. ヘーヤ (Hare) の装置 圖の様な装置に於て A から空氣を適當に抜きとつたときの各液 L_1, L_2 の液面からの高さ h_1, h_2 とすれば兩液の比重の比 S_1/S_2 は



119 圖

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

故に何れか一方の比重を知れば他は求め得る。

d. ボーメ (Baumé) の浮秤 目盛した太さ一樣の硝子管で下端に水銀の錘を附け、液中に直立し得る様に



120 圖

に作られてある。この浮秤には比重が水より大なるものと小なるものとを測定する二種あるが、以下水より重い液體の比重を測定するものについて述べる。上方の目盛の零を浮秤を 4°C の水中に立てたときの水面の位置とし、それ以下に等距離に目盛を附しておく。管の一目盛の體積を v 、零より以下の全體積を V 、全重量を W とする。今これを密度 ρ_1 の液體中に立てた時に液面の位置が n_1 であるとすればアルキ

メデスの原理により

$$\rho_1 g (V - n_1 v) = W = 1 \times g V$$

$$\therefore \frac{V}{v} = \frac{n_1 \rho_1}{\rho_1 - 1}$$

故に浮秤を密度既知の液體中に立てて n_1 を讀めばこれから V/v を計算し得る。次に浮秤を密度 ρ を測らんとする液中に立てたときの讀みを n とすれば

$$\rho g (V - n v) = W = V g$$

$$\therefore \rho = \frac{V}{V - n v} = \frac{V/v}{V/v - n}$$

$$\frac{V}{V - n v}$$

故に前の V/v の値を入れると ρ を計算し得る。或は n の代りにそれに相當する ρ の目盛を施しておけば直ちに密度を知り得る。

§ 8 氣體 既に述べた様に氣體が液體と異なる點はその壓縮率が液體に比し著しく大であることである。尙氣體は一定の體積を有しないために如何に大なる器に入れてもその全内部に擴がり一定の自由表面を生じない。他の點に於ては液體と同様にズリの彈性率の零なること、或點に於ける壓力はすべての方向に對して同等であること、或面に對する壓力はその面に垂直なること、また或面に加へられた壓力はその値を變へずに各方向に傳達されること(パスカルの原理)、氣體中の物體は排除した氣體の重量に等しい浮力を受くること(アルキメデスの原理)、地球上 h の鉛直距離にある二點間の壓力の差は $gh\rho$ であること等の性質を有してゐる。更に運動中の氣體は液體と同じく多少の粘性を有してゐる。

§ 9 大氣の壓力 空氣の重量によつて起る地球表面上の壓力即ち大氣の壓力は約 760 mm の水銀柱の底部に及ぼす水銀の壓力に等しい。大氣の壓力と釣合ふべき水銀柱の高さは場所及び時と共に變るが通常緯度 45° の海面上に於て 0°C 、高さ 760 mm の水銀柱の壓力と等しい大氣の壓力を考へこれを¹⁾ 氣壓と云ふ。

$$\text{一氣壓} = 76 \times 13.596 \times 980.6$$

$$= 1.0133 \times 10^6 \left[\frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2} \right] = 10^6 \left[\frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2} \right]$$

通常 $1 \left[\frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2} \right]$ を²⁾ パールと云ひ、 $10^6 \times \left[\frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2} \right]$ をメガパールと云ふ。この單位を用ひると

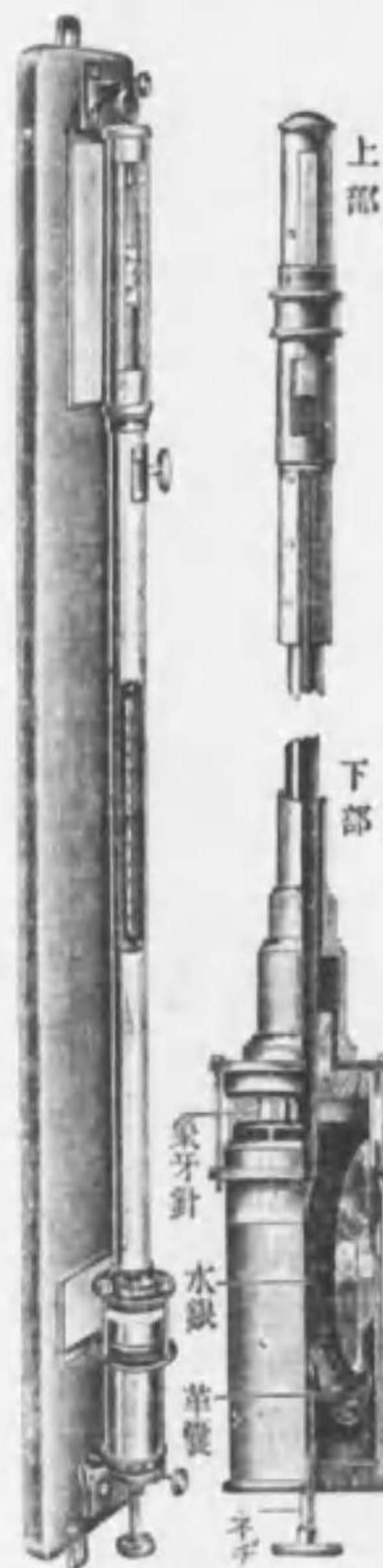
$$\text{一氣壓} = 10^6 \text{ パール} = 1 \text{ メガパール}$$

1) atmospheric pressure, atmosphärischer Druck 2) bar, Bar

§ 10 氣壓計 氣壓を測定する装置を氣壓計(晴雨計)¹⁾と云ふ。

圖は氣壓計を示し、ネヂで水銀槽の底をなす革を上下することによつて槽内の水銀面が丁度圓筒に固定せる象牙針の下端に觸れる様にし、その點を基點とした目盛で水銀柱の高さを知る様になつてゐる。氣壓を正確に知るには水銀密度の溫度によりて異なること及び硝子器の膨脹に伴ふ目盛の變化に對する補正並びに重力加速度 g が各所により異なることに對する補正を必要とする。

アネロイド氣壓計²⁾は密閉した金屬製の圓筒の上面が波形の薄い板で出来てゐて、内部の空氣が排除してある爲、氣壓の變化



121 圖

に應じて波形状の薄板が動く。この

動きを挺子を用ひて盤面上の指針に大きく現はれるやうにし、盤面上の目盛りで指針の位置を読み、氣壓を測る。



122 圖

§ 11 氣體に於ける壓力と體積との關係 實驗上の事實によりボイル (Boyle) 及びマリオート (Mariotte) は次の法則を發見

1) barometer, Barometer 2) Aneroid barometer, Aneroidbarometer

した。温度が一定のときには一定量の氣體の體積はその壓力に反比例する。今壓力を p , 體積を v とすれば

$$pv = \text{const.} \dots\dots\dots(1)$$

尙一定量の氣體に対しては體積は密度 ρ に反比例するから上式は

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} \dots\dots\dots(2)$$

とも書き得る。

今氣體の壓力を少しく増しその結果體積が少しく減じたとすれば

$$(p + \Delta p)(v - \Delta v) = pv$$

上の式で $\Delta p \Delta v$ は二次の微小量であるからこれを省略すれば

$$\frac{\Delta v}{\Delta p} = -\frac{v}{p} \dots\dots\dots(3)$$

故に氣體の壓縮率 α は

$$\alpha = -\frac{\frac{\Delta v}{v}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{1}{p} \dots\dots\dots(4)$$

従つて體積の彈性率 k は

$$k = \frac{1}{\alpha} = p$$

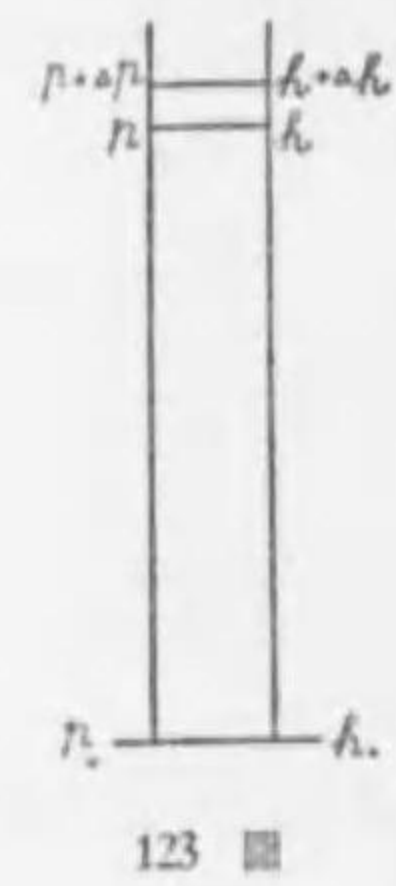
ボイルの法則は近似的のものであつて酸素、水素、窒素等の様に容易に液化し難いものにあつては温度があまり低くなく壓力があまり大でない間はこの法則からの隔離は小さいが温度低く壓力が大きくなると即ち氣體が液化の状態に近づくときは上の法則は事實と相當異つた結果を與へる。

§12 ダルトン (J. Dalton) の混合氣體の壓力の法則 化學的に相互反應しない氣體を同時にある容器中に入れると混合氣體の壓力 p は各氣體が單獨に容器全體に充ちたときに及ぼす壓力 p_i の和に等しい。即ち

$$p = p_1 + p_2 + \dots$$

この關係をダルトンの混合氣體の壓力の法則と云ふ。

§13 氣壓計による高さの測定 大氣中に鉛直氣柱を考へ地



上 h 及び $h + \Delta h$ の高さに於ける水銀柱の讀みを p 及び $p + \Delta p$ (但し $\Delta p < 0$) とし h_0 及び h の高さに於ける空氣の密度を ρ_0 及び ρ , 水銀の密度を ρ' とすれば

$$-\Delta p \cdot \rho' g = \Delta h \cdot \rho g$$

$$\text{即ち } -\Delta p \cdot \rho' = \Delta h \cdot \rho$$

然るにボイルの法則より

$$\rho : \rho_0 = p : p_0$$

$$\text{即ち } \rho = \frac{p}{p_0} \cdot \rho_0$$

$$\therefore -\Delta p = \frac{\rho_0}{\rho' p_0} p \cdot \Delta h$$

$$\text{或は } -\frac{\Delta p}{p} = \frac{\rho_0}{\rho' p_0} \Delta h$$

Δh 及び Δp は極めて小さい量として上式を h_0 から h まで加へ合はせると

$$-\int_{p_0}^p \frac{\Delta p}{p} = \frac{\rho_0}{\rho' p_0} \int_{h_0}^h \Delta h$$

$$\therefore h - h_0 = \frac{p_0 \rho'}{\rho_0} (\log_e p_0 - \log_e p)$$

最後の式を出すには次の計算法による。

$$-\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{\rho_0}{\rho' p_0} \int_{h_0}^h dh$$

$$\therefore -(\log_e p - \log_e p_0) = \frac{\rho_0}{\rho' p_0} (h - h_0)$$

$$\therefore h - h_0 = \frac{\rho' p_0}{\rho_0} (\log_e p_0 - \log_e p)$$

今海面上よりの高さを知るものとすれば $h_0 = 0$, $p_0 = 76 \text{ cm}$, 温度を 0°C とすれば

$$\rho_0 = 0.001293 \quad \rho' = 13.596$$

$$13.596 \times 76 \times 2.3026 = \frac{2386}{0.001293} = 18450$$

$$\frac{w}{v} = \rho$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$\begin{array}{r} 276 \\ 76 \times 2.3026 \\ \hline 175.18 \end{array}$$

$$10^4 \times 175.18$$

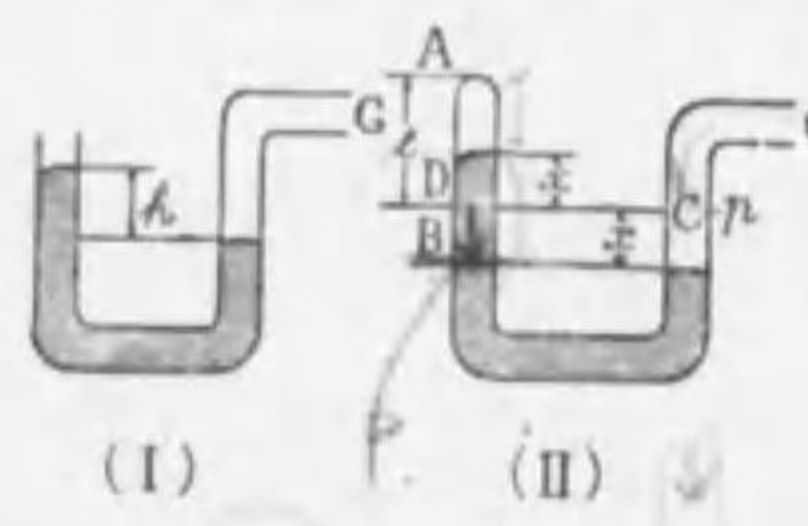
$$\ln P = \log_e P = \log_{10} P \cdot \log_e 10$$

また $\log_e 10 = 2.3026$ であるから

$$h = 18400(1.8808 - \log_{10} p) m$$

上記の計算には海面と上空に於ける温度の差を考慮に入れなかつたが正確な計算にはこれの補正を加へなければならぬ。

§14 開壓力計¹⁾閉壓力計²⁾及び金屬壓力計 I 圖に於て G は壓力を測らんとする瓦斯溜に連結され



他端は大氣中に開口してある。今管の水銀の高さの差を h とし、水銀柱で測つた大氣壓を P とすれば瓦斯溜の壓力 p は

$$p = P + h$$

この壓力計は一氣壓内外のものを測定する場合にしか用ひられぬ。

II 圖に於ては一端 A は閉ぢられ水銀によつてこの場所に一定量の空氣が封じ込まれてある。今 G が一氣壓の時管の兩水銀面が BC 水平面上にあるとすれば AB 間の空氣も一氣壓である。次に G の壓力が p 氣壓になつた結果密閉されてある氣體が AD 間に壓縮されたとする。BD = x とすれば AD 間の氣體の壓力は明らかに $(p - \frac{2x}{76})$ 氣壓である。今 AB = l 、管の切口の面積を S とすればボイルの法則により

$$(p - \frac{2x}{76})(l - x)S = 1.1.S$$

これを x について解けば

$$x = \frac{1}{4} \{76p + 2l \pm \sqrt{(76p + 2l)^2 - 8(p-1)76l}\}$$

この式により $p = 1, 2, 3, \dots$ として、これに應ずる x の値を B から上方に目盛しておけば、G の壓力を直ちに氣壓單位で讀み得

1) open manometer, offenes Manometer
2) closed manometer, geschlossenes Manometer

Handwritten calculations at the bottom of the page:

$$p + h = P$$

$$p - \frac{2x}{76} = P$$

る。この際上式の複符號は $p = 1$ のときは $x = 0$ であるから負號をとらなければならぬ。

次に若し AD の部分が所謂トリチュリ真空である場合は水銀面の高さの差から G の壓力を直ちに知り得る。これは稀薄な氣體の壓力を測る場合に用ひられることをまたない。



125 圖

§15 金屬壓力計¹⁾ブルドン (Bourdon) 壓力計は

壓搾せられた氣體の壓力とか汽罐内の壓力とかの様な強大な壓力を測るに用ひられる。その主要部は一端を閉ぢた金屬曲管で、開端を通じて管内に壓力を働かせると、曲管は外側に向つて幾らか開く。その運動を指針に傳へて壓力を讀むのである。

§15 マクレオード (McLeod) の真空計²⁾



126 圖

この真空計は極めて高度の真空を測定する場合に屢用ひられる。構造は圖に示す如くで F の部分のゴム管を除く他は全部硝子製である。B は壓力を測定すべき器に連結し、D には水銀を充してある。大氣に接する D を上下することにより左方の水銀面の位置は適當に變化し得る。さて壓力を測定するには D を下げて左方の水銀面の位置を分岐點 C 以下に下げる。この時 CAE 及び CGB の壓力は共に被測定壓(これを P とする)に等しい。次に D を徐々に上げると左方の水銀面も次第に上がり、C を超えて後は水銀は二つに

1) metal manometer, Metallmanometer 2) vacuumgauge, Vakuummeter

Handwritten calculations at the bottom of the page:

$$p - \frac{2x}{76} = P$$

分れ, GB 内では被測定圧 P であるが CAE 内の氣體は EH の毛細管内に壓縮せられ, 最初 P より次第に壓力を増し, 兩水銀面の間に h の高さの差を生ずる. 今 C から上の體積 (CAEH) を V , EH の體積を v , v の中に閉ぢられた氣體の壓力を p とすれば

$$P.V = p.v$$

また $p = P + h$

$$\therefore P.V = (P + h).v$$

$$\therefore P = \frac{hv}{V - v}$$

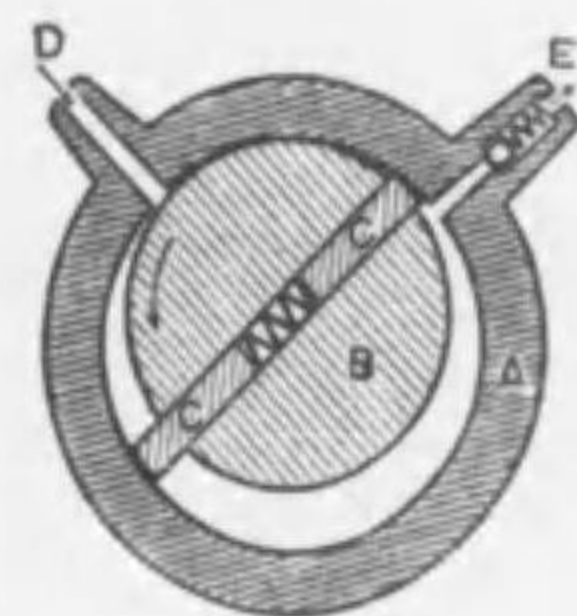
v は V に比し極めて小さいからこれを省略すれば

$$P = \frac{hv}{V}$$

V 及び v は知ることが出来るから h を読んで P を計算し得る. この真空計を用ひると 1mm の 1 萬分 1 位までの壓力を測定することが出来る.

§16 排氣ポンプ

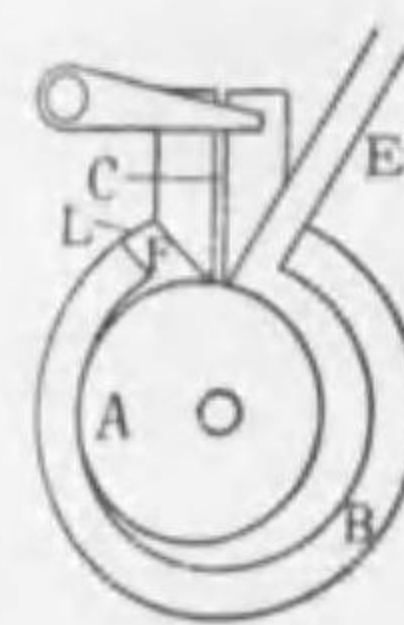
i) **ゲーデ (Gaede) の廻轉ポンプ** 圓筒 A の内部に偏心的に取付けられた廻轉圓筒 B がある. B の中心を通る板 CC' はバネの作用により B の廻轉の際常に A の内壁に接して B と共に廻轉する様になつてゐるから B の廻轉により D に接続してゐる密閉器内の空氣は A, B 兩圓筒間の狭い空間に壓縮せられて氣壓が高くなり, E の瓣を押し開いて外に出るのである.



127 圖

ii) **センコハイバクポンプ**¹⁾ このポンプは前述の廻轉ポンプに改良を加へたもので原理は前と同じである. 128 圖で圓筒 B の内部に偏心的に取付けられてある圓筒 A がある. これは常

1) Cenco hyvac pump



128 圖

に B の内部の一點に接しつゝ B の中心を通過する軸の周圍に廻轉する. C は金屬の板でバネによつて常に A に押しつけられてゐる. E は空氣の吸入口, F は排氣口, L は排氣孔に取付けてある瓣である. これらはすべて E を除くほか油の中に沈ませてある. 廻轉中に於ける排氣作用は下圖によつてほゞ了解し得る.



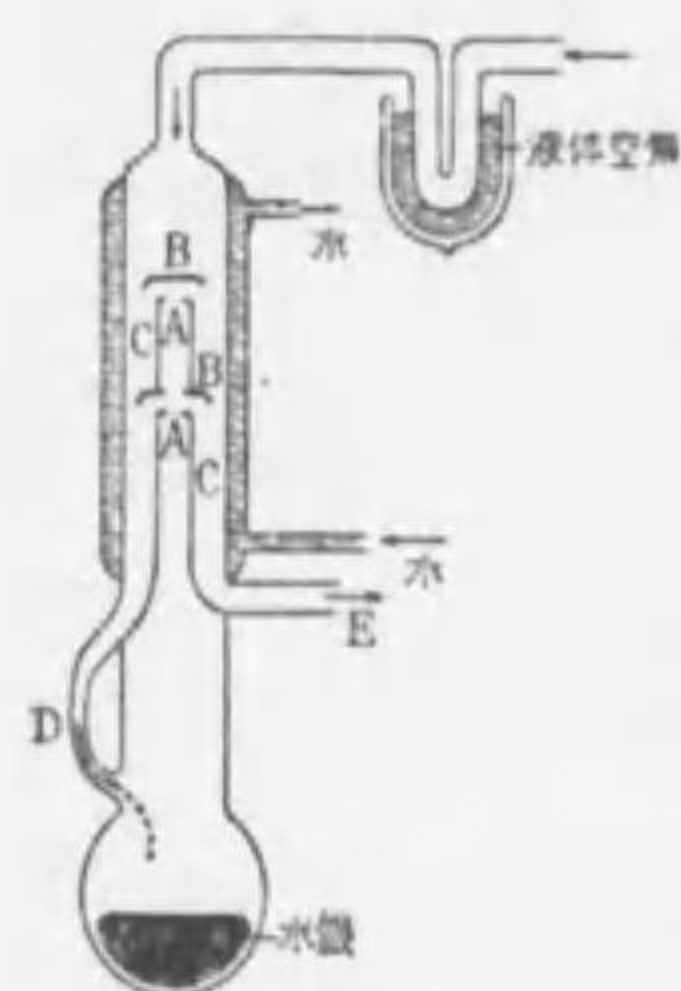
129 圖

このポンプでは通常 128 圖に示す装置を二箇列連結してある. 即ち一方の吸入口を他の排氣口に連結し一方が吸入するとき他方が排氣する様にしてある. このポンプにより 1/1000 耗位の真空度を得ることは困難でなく, 今日盛に賞用せられてゐるものである.

iii) **水銀凝結ポンプ**¹⁾ **及び水銀擴散ポンプ**²⁾ この兩ポンプの原理は共に水銀を熱して水銀の蒸氣流を作り, 排氣せんとするものから水銀蒸氣流中に空氣を擴散せしめ, 之を水銀蒸氣に運び去らしめ, 更に補助ポンプを用ひて之を排除するのである. このポンプは最初ゲーデによつて考案されたもので圖はこの式のポンプの一種を示してある. 下部の水銀を熱して沸騰せしめ A に向つて盛に水銀蒸氣を送ると蒸氣は B に衝突して C の空間に噴出する. この際 C の空氣は水銀蒸氣中に擴散せられ蒸氣と共に下方に下るが, 水銀蒸氣は C の周圍を包む水流のた

1) mercury condensation pump, Quecksilberkondensationspumpe

2) mercury diffusion pump, Quecksilberdiffusionspumpe



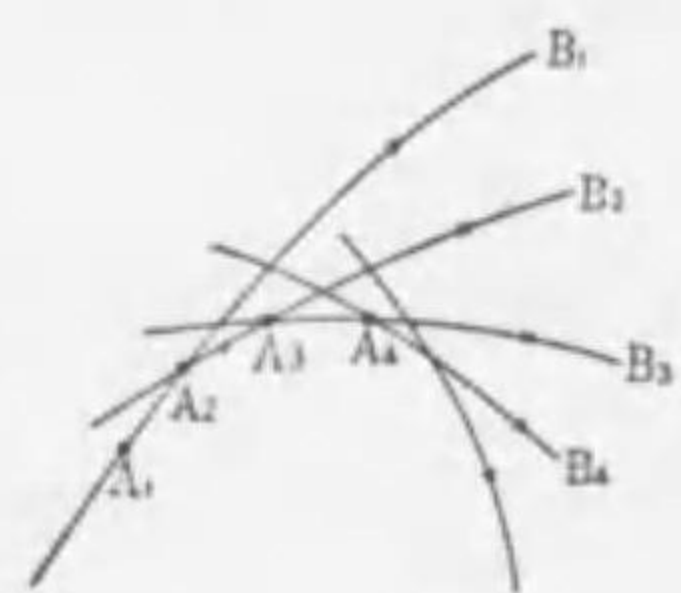
130 圖

め冷却凝結し、空氣は E を通じて補助ポンプに至る、また凝結した水銀は D を通じて元に歸る。然し水銀蒸氣の極く微量は上方に昇つて排氣すべき器に入る恐れがあるから管の一部を液體空氣にて冷却すれば水銀蒸氣の侵入は完全に阻止することが出来る。この方法により 10^{-6} 或はそれ以下の眞空を得ることは困難でない。

ゲーデは上記の式のポンプを數段に連結した鋼鐵製水銀ポンプを製作したがこのポンプは現今最良のポンプとして賞用せられてゐるものである。

尙上記の外にゲーデの廻轉水銀ポンプ、及び分子式ポンプ¹⁾その他種々の形式のポンプがあるが何れも排氣速度が遅いか又は故障が起り易くて今日あまり廣く賞用されないものである。

§17 速度線、流線、定常流 運動してゐる流體内に一つの曲線を考へこの曲線の各點に於ける切線方向が流體のその點に於ける質點の運動方向即ち速度方向と一致するときはこの曲線を速度線²⁾と云ふ。速度線は一般には流體質點の眞の移動の路を表はしてゐるものではない。流體質點の眞の移動の路を表はすものを流線³⁾と云ふ。



131 圖

圖に於て或瞬間 t に於ける速度線を A_1B_1 とし、質點が微小時間 dt 後に速度線 A_2B_2 に沿うて A_1 から A_2 に來たとする。然るに速度線は刻々變つて行くから dt 後に於ては A_2 を通る速度線は最早 A_1B_1 ではなく

1) molecular pump, Molekularpumpe 2) line of velocity, Geschwindigkeitlinie
3) stream line, Stromlinie

A_2B_2 になつてゐる。従つて質點は A_2 に達した後は A_2B_2 に沿うて運動しなければならぬ。この線に沿うて更に dt 間に質點は A_3 に至る。かくして質點の實際の通路即ち流線は $A_1A_2A_3A_4$ の様な曲線になる。この様に速度線が刻々移動するときは速度線は流線とは一致しないが流體の各點に於ける速度の大き及び方向が時刻に無關係に各、一定である場合には速度線は常に流線と一致する。従つて流線によつて質點の速度の分布状態が定まり、流線のある一點に流れ來る質點はこの點に於てすべて同一の速度を持つことになる。かやうな流體の運動状態を定常流¹⁾と云ふ。以下主として定常流を取り扱ふ。

§18 流管、連續の定理 流線の一群によつて圍まれた管状の部分²⁾を流管と云ふ。定常流に於ては流管の管壁を通して流線の出入はないから流管は恰も固體管と見做して



132 圖

差支ない。今定常流をなす流體中に極めて細い流管をとりその兩端の直截面の面積を S_1, S_2 とし、 S_1, S_2 の所の流體の速度を v_1, v_2 とすれば、 S_1 を通して微小時間 dt 間に管内に流入する流體の質量は $\rho S_1 v_1 dt$ であり、 S_2 を通り流出する量は $\rho S_2 v_2 dt$ である。然るに定常流に於ては管内には常に同量の流體が存在せねばならぬから S_1, S_2 を通る液量は等しくなければならぬ。即ち

$$S_1 v_1 \rho dt = S_2 v_2 \rho dt$$

或は $S_1 v_1 = S_2 v_2$

或は $\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}$

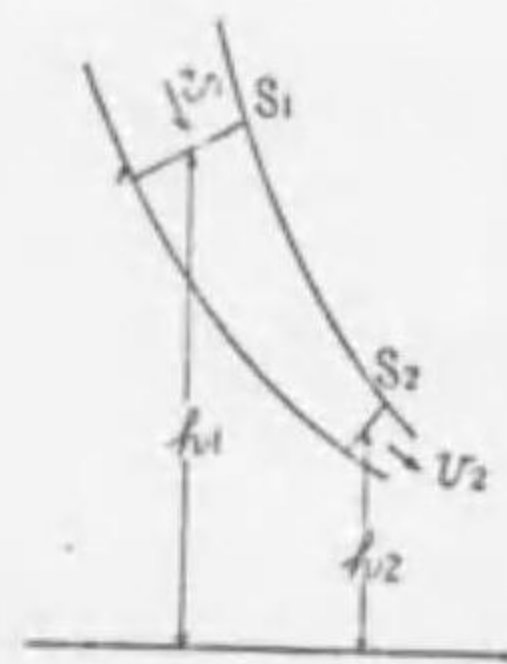
1) stationary flow, stationäre Strömung 2) tube of flow, Stromrohr

この様な式を連続の式¹⁾と云ふ。上式の示す如く同一流管内の流體の速度は管の直截面の面積に逆比例する。若し流體が壓縮可能である場合は連続の式は

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

となる。

§19 ベルヌーイ (D. Bernoulli) の定理 重力の作用によつて



133 圖

液體が定常流をなす場合を考へる。液體中に小さい流管を考へ、その兩端の直截面の面積を S_1, S_2 、その速度を v_1, v_2 、壓力を p_1, p_2 とし、 S_1, S_2 の或一つの水平面よりの高さを h_1, h_2 とする。時間 dt 中に S_1 を通して管中に流入する液量は $S_1 v_1 \rho dt$ 従つて流入する運動のエネルギーは

$$\frac{1}{2} (S_1 v_1 \rho dt) v_1^2$$

又位置のエネルギーの流入は

$$(S_1 v_1 \rho dt) g h_1$$

更に管中に流入する液體は S_1 に於ける p_1 に働かれて流入するから外部から

$$p_1 S_1 v_1 dt$$

だけの仕事をなされ同じくエネルギーとして管内に入る。

同様にして S_2 から流出するエネルギーは運動のエネルギーとして

$$\frac{1}{2} (S_2 v_2 \rho dt) v_2^2,$$

位置のエネルギーとして $(S_2 v_2 \rho dt) g h_2$ 及び p_2 によつて外部に仕事をなすことによるエネルギー $p_2 S_2 v_2 dt$ である。

然るに定常流では兩端間の管中のエネルギーは不變であるべきであるから

1) equation of continuity, Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (S_1 v_1 \rho dt) v_1^2 + (S_1 v_1 \rho dt) g h_1 + p_1 S_1 v_1 dt \\ & = \frac{1}{2} (S_2 v_2 \rho dt) v_2^2 + (S_2 v_2 \rho dt) g h_2 + p_2 S_2 v_2 dt \end{aligned}$$

これに連続の式 $S_1 v_1 = S_2 v_2$ を用ひて

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2 \dots \dots \dots (1)$$

上の關係は流管の各直截面に對して成立する關係であるから添字 1, 2 を除けば

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h + p = \text{const.} \dots \dots \dots (2)$$

この關係をベルヌーイの定理と云ふ。

上式を次の如く書き換へ

$$\frac{1}{2} \frac{v^2}{g} + h + \frac{p}{g\rho} = \text{const.} \dots \dots \dots (3)$$

$\frac{1}{2} \frac{v^2}{g}$ を速度落差¹⁾, $\frac{p}{g\rho}$ を壓力落差²⁾と云ふ。

次に二つの特別の場合を考へる。

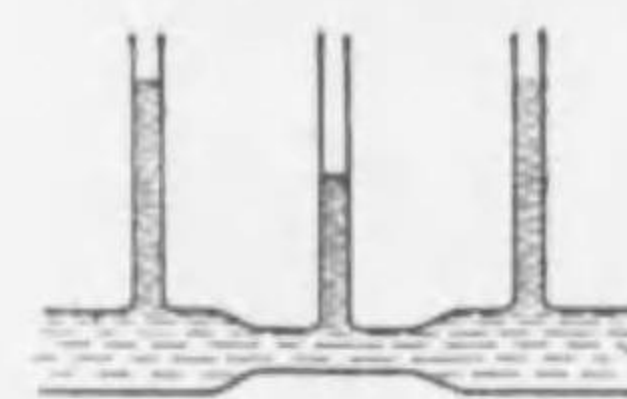
i) $v_1 = 0, v_2 = 0$ 即ち静止せる液體の場合。

(1)式より既に知られた關係

$$p_2 = p_1 + (h_1 - h_2) g \rho \dots \dots \dots (4)$$

を得る。

ii) $h_1 = h_2$ 即ち液體が水平管中を流れる場合。



134 圖

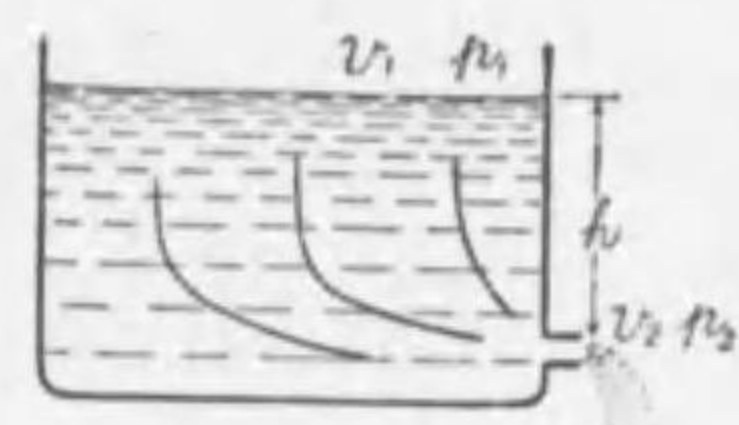
(1)式より

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$$

然るに $S_1 > S_2$ であれば $v_1 < v_2$ であるから $p_1 > p_2$ 即ち水平流管に於ては切口の面積が小さい場所では壓力が小さくなる。或は流れの急な所では壓力が小さくなると考へてもよい。

§20 トリチェリ (Torricelli) の定理 液體が器壁の小孔から流出する場合には流線がほゞ圖の如く生ずる。流出孔が小さく

1) velocity head, Geschwindigkeitshöhe 2) pressure head, Druckhöhe



135 圖

て短時間中は液面の高さに殆んど變化を生じないものと見做せば

$$v_1=0, \text{ また } p_1=p_2=\text{一氣壓}, \\ h_1-h_2=h$$

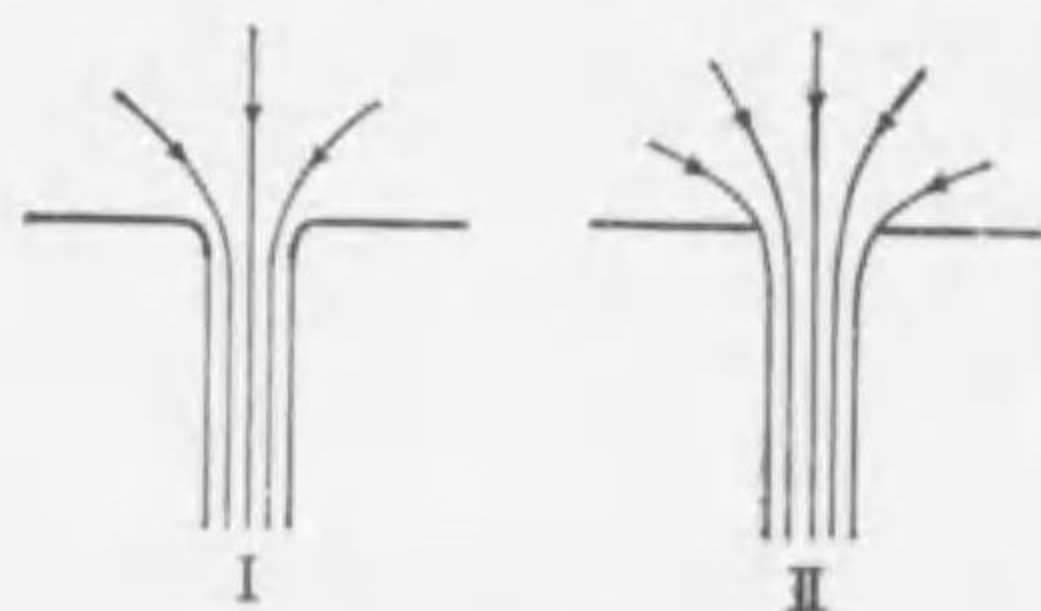
とすればベルヌーイの定理より

$$v_2^2=2g(h_1-h_2)=2gh$$

$$\therefore v_2=\sqrt{2gh}$$

即ち液體は h だけの高さを重力に働かれて自由に落下したのと等しい速度で流出する。これをトリチェリの定理と云ふ。

液體が孔から流出するとき孔の形が I 圖の様であるときには流



136 圖

線は孔の附近では孔の面に垂直であるが II 圖の様に器底に孔が單に切つてある場合には流線は液體の慣性によつて孔の附近で直ちに孔の面に垂直にはなり得ず流管は孔の外に於て多少收縮する。この現象を縮脈と云ふ。縮脈が止んで流管の大きさが一定になるのは孔の直径の約半分下方の所であつてこの場所の流管の直径は孔の直径の約 0.8 倍である。孔の直径を d とすればその面積と流管が一定の大きさになつたときの流管の截口の面積との比は

$$(0.8d)^2/d^2=0.64$$

である。この比を縮脈係數と云ふ。

§21 氣體の流出 函の中に封じられてある氣體が函の小孔から流出するとき流出孔に於ける氣體の速度はベルヌーイの定理から計算することが出来る。函の内部の氣體の速度を零とすると

$$\frac{1}{2}\rho_1 \times 0^2 + g\rho_1 h_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + g\rho_2 h_2 + p_2$$

1) vena contracta

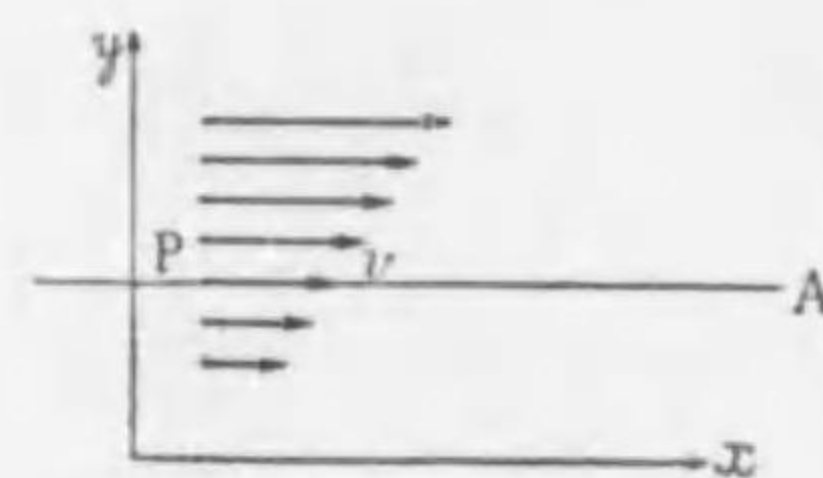
$$\therefore v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_2} + 2g\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}h_1 - h_2\right)$$

この式に於て $\rho_1 > \rho_2$ であるが函の内外の壓力差 $p_1 - p_2$ が相當大きくても ρ_1/ρ_2 は非常に大きな値になることはなく、又氣體の密度は非常に小さいから第二項は第一項に對して無視しても差支ない。今 $\rho_2 = \rho$ とすれば上式は

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

この關係をグラハム(Graham)の定理と云ふ。

§22 粘性係數 既に述べた様に流體の靜力學的性質を研究するには流體の粘性を考慮する必要はないが實際の流體の動力學的性質を知るにはその粘性を考慮に入れなければならぬ。即ち流體の部分部分が相對的に運動をするときには速さの異なる二つの流體の相接する層の間にはズリに對する抵抗力が生ずるのである。これは相接する面に於て速度の大なる側は速度の小なる側を前方に引き、逆に速度の小なる側はその大なる側を後方に引き戻さうとする力が現れるからである。この力のことをまた内部摩擦力とも云ふ。



137 圖

圖に於て流體は x 軸の方向に流れるものとし、圖中の數箇の平行線は流體内各部に於ける速度を示す。實驗の結果によるに流體の二つの接觸面 A 内に働く力は接觸面の面積に比例し、 y 軸の方向に對する速度變化の割合(速度勾配)に比例する。

今 A 面内の一點 P に於ける流體の速度を v とし、A 面の面積

1) velocity gradient, Geschwindigkeitgradiente

をS, この面内に働く力を f とすれば y の方向に於ける速度變化の割合は

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{dv}{dy}$$

であるから

$$f = \eta S \cdot \frac{dv}{dy} \quad [\eta] = [\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}]$$

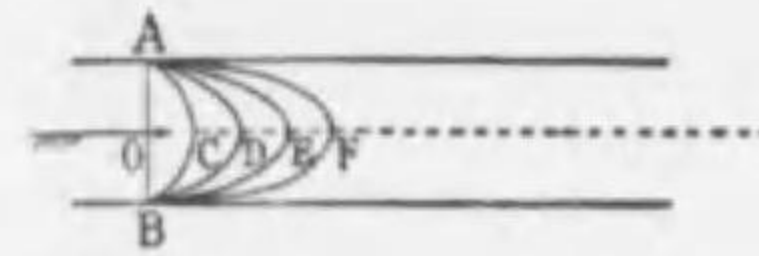
上式の比例の常數 η は粘性係數又は内部摩擦係數と稱せらるゝもので、これは物質の種類並びに同一物質にあつても溫度によつて著しく異なるものである。液體の粘性係數は氣體のそれより著しく大きく、また溫度が上昇するに従ひ液體の粘性係數は減少するに反し、氣體に於ては寧ろ増加する。二三の例を次の表によつて示す。

物 質	溫 度	η (C.G.S. 單位)	物 質	溫 度	η (C.G.S. 單位)
水	0°C	0.01793	空 氣	0°C	0.000171
"	20°C	0.01006	"	20°C	0.000181
アルコール	0°C	0.0177	水 蒸 氣	18°C	0.000097
"	20°C	0.0119	"	100°C	0.000132
グリセリン	0°C	46.0	水 素	0°C	0.0000864
"	20°C	8.5	酸 素	0°C	0.000187
水 銀	20°C	0.0154			

§23 ポアスイユ (Poiseuille) の定理 細管内を流るゝ液體を考へて見るに、液體の管壁に接してゐる層は管壁と液體の粘着によつて動くことなく中心に近づくに従つて速度が大きくなる。従つて最初AOB上にあつた水の粒子は時間 $t, 2t, 3t, \dots$ 後にはACB, ADB, AEB, \dots 上に来ることになる。

今管の長さを l , 半径を a , 管の兩端に於ける壓力の差を $p_1 - p_2$ とすれば單位時間内に管の一端から流れ出る液體の體

積 V は次の式で表される。



$$V = \frac{\pi(p_1 - p_2)a^4}{8l\eta}$$

133 圖

これをポアスイユの定理と云ふ。こ

の式に於て V, l, p_1, p_2 及び a を測定すれば液體の粘性係數が測定せられる。

次に粘性ある氣體の場合には粘性係數は次の式を用ひて測定せられる

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = \frac{\pi(p_1^2 - p_2^2)}{16l\eta} a^4$$

但し V_1, V_2 は兩端に於て單位時間内に通過する氣體の體積である。

ポアスイユの定理は次の様にして證明せられる。流體が定常状態



139 圖

で圓筒中を流れる場合にこの圓筒の軸を

共通の軸とする無数の同軸圓筒を考へて

見ると各圓筒の内面には流の方向に向ふ

力が作用し、外面には流體によつて逆の方

に力が働く。今半径 r なる圓筒面に於ける速度を v とし、管の長さを l とすればこの面に働く力 f は

$$f = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}$$

従つて $r+dr$ の場所に於ける圓筒面に作用する力を $f+df$ とすれば

$$f+df = 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr} + d\left(2\pi r l \eta \frac{dv}{dr}\right)$$

$$= 2\pi r l \eta \frac{dv}{dr} + 2\pi l \eta \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) dr$$

$2\pi l \eta \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr}\right) dr$ は dr なる厚さの圓筒層の内面及び外面に平行に働く力の差である。

然るに一方圓筒の兩端に於ける壓力差を p とすれば、 dr の厚さの圓筒層の兩端には $(2\pi r dr)p$ の力が作用してゐる。而して流體は定常流であり、この層の流體には加速度はないから、これに働く諸力の和は零である。即ち

$$2\pi r \eta \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) dx + 2\pi r p dx = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -p \frac{r}{\eta}$$

これを積分すれば

$$r \frac{dv}{dr} = -\frac{p}{2\eta} r^2 + C$$

Cは積分定数であるがこれは上式に於て $r=0$ とすれば直ちに $C=0$ なることが分る。従つて

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{p}{2\eta} r$$

再び積分すれば

$$v = -\frac{p}{4\eta} r^2 + C'$$

積分定数 C' は次の様にして定むる。即ち管の半径を a とすれば $r=a$ の所では $v=0$ であるから

$$C' = \frac{p}{4\eta} a^2$$

$$\therefore v = \frac{p}{4\eta} (a^2 - r^2)$$

これは任意の点 r に於ける速度分布の状態を示すもので $r=a$ では勿論 $v=0$, $r=0$ では $v=pa^2/4\eta$, $0 < r < a$ では v は略、138圖に示す様になる。

次に単位時間中に流るゝ流體の體積 V は明らかに

$$V = \int_0^a 2\pi r v dr$$

であるから更に上式の v を用ひると

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi p}{2\eta} \int_0^a (a^2 - r^2) r dr \\ &= \frac{\pi p}{8\eta} a^4 \end{aligned}$$

次に氣體に於ける粘性係數に関する公式を出して見る。氣體の場合には管内に於ける壓力が各點に於て異なる結果密度が各點に於て異なる。然るに管内の各點を単位時間内に同一の質量の氣體が通過しなければならぬから単位時間に通過する氣體の體積を V とすれば

$$V\rho = \text{const.}$$

尚ボイルの法則が成立するものと假定すれば上式は

$$V\rho = \text{const.}$$

である。

今管の極めて微小なる長さ dl を取り、この内部に於ては密度の變化はないと考へればポアスイユの定理が成立すべきであるから

$$V = \frac{\pi d p a^4}{8\eta dl}$$

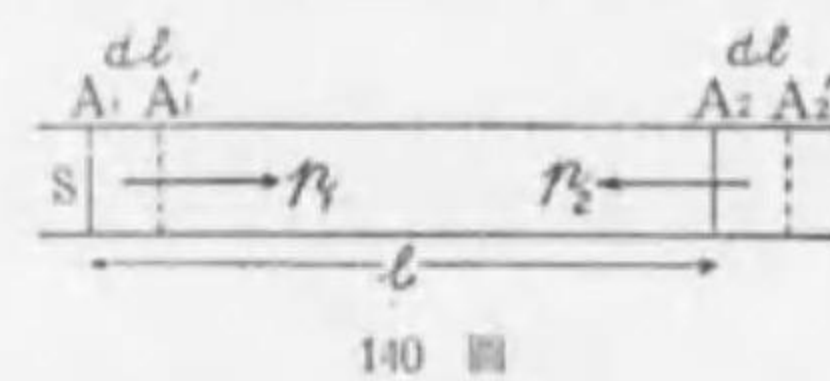
或は
$$V p dl = \frac{\pi a^4}{8\eta} p dp$$

$V\rho = \text{const.}$ であるから上式の積分は

$$V p l = \frac{\pi a^4}{8\eta} \int_{p_2}^{p_1} p dp = \frac{\pi a^4 (p_1^2 - p_2^2)}{16\eta}$$

$$\therefore V\rho = \frac{\pi a^4 (p_1^2 - p_2^2)}{16l\eta} = \text{const.}$$

§24 粘性ある液體が截面一様な水平管内を流れる場合 液體は管壁との摩擦及び液體内部の摩擦に打ち勝つて流れるために液體の有するエネルギーの一部を消費する。圖に於て液

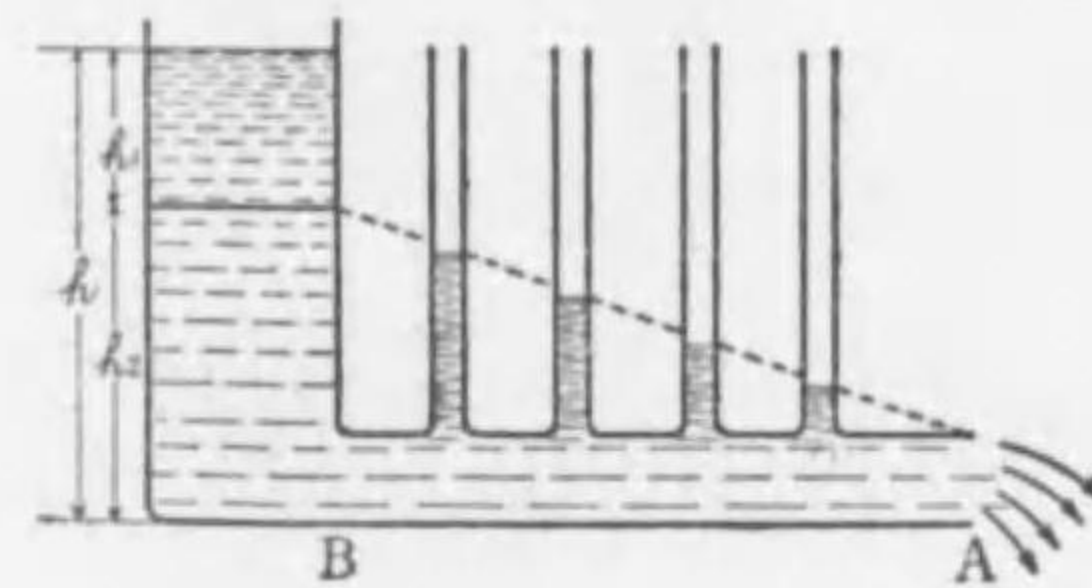


體が A_1A_2 なる水平管を流れるものとし、 A_1A_2 中の液體が dt 間だけ移動して $A_1'A_2'$ に来たとする。 dl

が極めて小さいから A_1A_1' 及び A_2A_2' の間では壓力は變らぬものとし、それぞれの壓力を p_1, p_2 とする。 A_1, A_2 の面に働く力はそれぞれ p_1S, p_2S である。従つて今考ふる液體に外部からなした仕事は

$$p_1 S dl - p_2 S dl$$

である。而してこの仕事は液體が摩擦に抗して流るゝために



要する仕事である。今單位の長さに対する摩擦による抵抗力を R とすれば、 l の長さについては Rl の抵抗力を生じ、これが dl だけ移動するとき抵抗力に対する仕事は

$Rl \cdot dl$ であるから

$$p_1 S dl - p_2 S dl = Rl \cdot dl$$

$$\therefore p_1 - p_2 = \frac{R}{S}$$

即ち液體の壓力は流るゝ方向に次第に減少する。

若し液體に内部摩擦がない場合には A (141 圖) の壓力は $g\rho h$ であり, A に於ける流出速度はトリチェリの定理により $\sqrt{2gh}$ であるが粘性ある液體の場合には A と B との間には

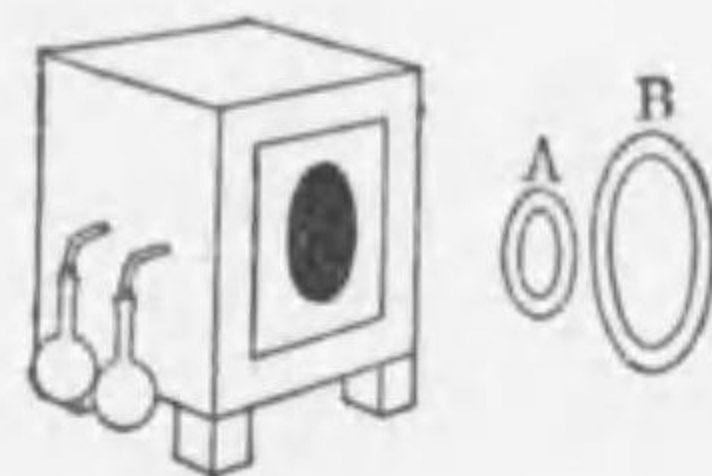
$$p_A - p_B = \frac{R}{S} AB$$

だけの壓力の低下があるから流出速度は

$$\sqrt{2g(h-h_2)} = \sqrt{2gh_1}$$

だけの速度となる。この際 h_1 を速度落差, h_2 を壓力落差と云ふことがある。

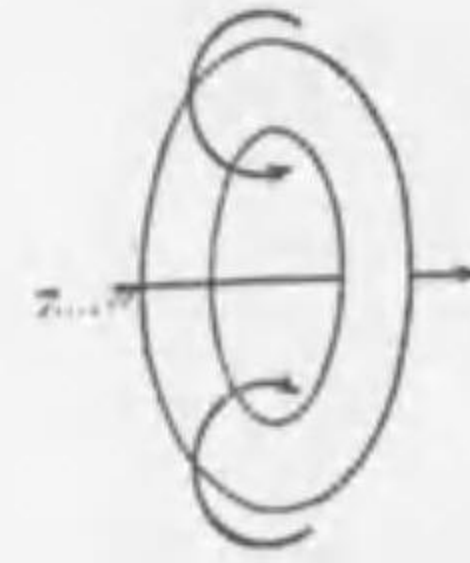
§25 渦動 流體內の一部が或軸の周りに閉曲線を描いて廻轉運動をなしてゐるときにはこの流體の柱狀の部分¹⁾を渦動又は渦動線¹⁾と云ふ。この柱狀流體の軸が直線をなすこともあり, 曲線をなすこともある。また特に閉曲線を作ることもある。この場合にはこの渦動線を渦動環²⁾と云ふ。渦動線の中で渦動



142 圖

環は時に興味のあるものであるがこれを作るに圖に示す様な装置を作ればよい。即ち木箱の一側面は圓形の孔のある薄い板からなり, その後の面には緻密な布を張り付ける。また別にアンモニア水及び鹽酸を入れたフラスコを箱に連結する。フラスコを適當に熱するとアンモニア及び鹽酸の蒸氣は箱の内部で鹽化アンモニウムの濃霧になる。このとき布を強くたゞけば霧は

1) vortex filament, Wirbelfaden 2) vortex ring, Wirbelring



143 圖

孔の周圍を摩擦して渦動環が生ずる。かくして生じた渦動環の構成各分子の廻轉方向と環自身の進行方向とは圖に示す様なものである。渦動環の前進速度は一般に環の直径が大きい程遅い。渦動環について興味ある現象は渦動環が二つあり, それらが共通の軸に沿うて移動するときである。

I 圖の様に二つが同方向に進行するときは後の環は次第に小さくなり速さを増し, 前の環は反對に次第に大きくなり速さを減じ遂に後の環は

前の環の中を通り抜ける。かやうなことが幾回も繰り返へされる。また II 圖の様に相向つて前進する場合には両者が近づくと同時に次第に大きくなり遂に直径が無限大となつて兩環は消滅するに至る。

渦動に対する詳細な理論は複雑な數學的取扱ひを必要とするためこゝでは詳論できないが完全流體に對してヘルムホルツ (H. v. Helmholtz) その他の人々によつてなされた研究の結果の二三を列記すれば次の通りである。

i) 渦動の強さ(或點に於ける角速度とその點に於ける渦動線の直截面積との積の 2 倍)は渦動線の各部に於て一定の値を有し, 時が経過し渦動線の變形若しくは移動が起つても不變である。かくして一度あつた渦動は永久に消滅せずまた新に作ることも出来ない。

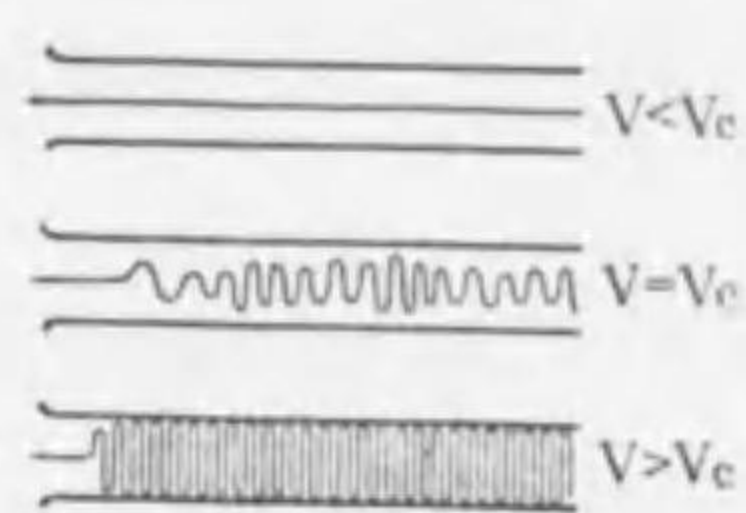
吾々が通常の流體內に渦動を生ぜしむることが出来, また時の経過と共に消滅し去るのは全く流體の粘性及び流體の不完

全性によるものである。

ii) 渦動線は常に流體の同じ部分から成り、渦動なき部分からは區別されてゐる。

iii) 渦動線は流體内に於て閉曲線をなすか又はその両端は流體容器の表面にありて流體内に於て終るやうなことはない。

§26 攪亂 粘性を有する液體が細管中を液量一定の割合で流るゝときには、管の両端に於て壓力の差を生じ、ポアスイユの定理の示す通り、両端に於ける壓力差が液の流出量の割合に比例する。然しこれは液の流出の割合が比較的小さいときであつて流出の割合が大きくなると両端に於ける壓力差は流出の割合のほゞ二乗に比例する。従つて管中を流るゝ液の平均速度を V とし、両端の壓力差を P とすれば、 V が或臨界の値 V_c より小なるときは $P \propto V$ であり、 V_c より大なるときは $P \propto V^2$ であ



145

る。かやうな臨界の速度 V_c が存在することは次の様にして見ることが出来る。管内に水を流し水中に更に微量の着色液を流すと V が小さい間は直線の流線を生じ、 V が或値に達すると急に流線が亂れ始め、 V がこの値より少しく増加すると着色液は急に管全體に擴がり全く流線を見出し得ない様になる。この際の V_c は勿論液體の性質及び管の半径に關係するが同一の状況にある同一の液體に対しては V_c は半径に逆比例する。

流體の運動が一定の流線を有せず不規則な運動をするときは¹⁾攪亂の状態にありと云はれる。

流體が規則的の運動をするか或は不規則な運動をするかと云ふこ

1) turbulent motion, turbulente Bewegung

との條件を充分に研究することは困難なことであるが、たゞ V_c が流體の性質並びに管の太さに如何なる關係を有するかを決定することは必ずしも困難ではない。

今流體の密度、粘性係數、管の半径をそれぞれ ρ, η, r とし、 V_c が ρ^a, η^b, r^c (x, y, z は未知數) に比例するものとすれば

$$V_c = k \rho^a \eta^b r^c \quad (k \text{ は單に數值的の常數})$$

上式を元の形に書き換へると

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{M}{LT}\right)^b L^c$$

上式の元は左右兩邊に於て相等しくなければならぬから

$$M \text{ について } x + y = 0$$

$$T \text{ について } -1 = -y \quad \therefore y = 1 \quad \therefore x = -1$$

$$L \text{ について } 1 = -3x - y + z = 3 - 1 + z$$

$$\therefore z = -1$$

$$\therefore V_c = k \frac{\eta}{\rho r}$$

§27 粘性流體中に於ける物體の運動に對する抵抗 物體が粘性流體中を運動するときには現はれる抵抗力の第一は、粘性に起因するものである。即ち物體に密着してゐる流體の薄層は常に物體と共に運動するに反し、物體より極めて遠方に於ては流體は殆んど運動を起さない。従つてこの間にある流體層間には速度の勾配を生じ、粘性による抵抗力が現はれる。抵抗力の第二は流體の靜止の慣性に抗して流體に運動を引き起すことに對する反作用である。第三には物體の運動によつてその背後に眞空部を生ぜんとする傾向による吸引作用である。然しこの際には物體の背後には攪亂が生ずるため物體の運動に對する抵抗は極めて複雑である。

一般に粘性流體の物體の運動に對する抵抗は甚だ複雑であつて理論のみによつて精確な計算式を與ふることは極めて困難であるが、次の式に於ける n を實驗によつて定むることが出

來る場合には抵抗力は次の式で表される。

$$f = k \left(\frac{Vl\rho}{\eta} \right)^n \frac{\eta^2}{\rho} \dots \dots \dots (1)$$

但しこの式に於て ρ は液體の密度, l は物體の大きさ, V は物體の速度を表す。

抵抗力 f が次の形で表されるものとする。

$$f = kl^n \rho^n \eta^n V^n \quad (\text{但し } k \text{ は単なる数値})$$

この式を元の形で書き改めると

$$\frac{ML}{T^2} = L^n \left(\frac{M}{L^3} \right)^n \left(\frac{M}{LT} \right)^n \left(\frac{L}{T} \right)^n$$

上式の兩邊に於ける M, L, T の元の指數を相等しと置けば

$$M \text{ について } 1 = y + z$$

$$L \text{ について } 1 = x - 3y - z + n$$

$$T \text{ について } -2 = -z - n$$

この三式から

$$y = n - 1, \quad x = n, \quad z = -n + 2$$

$$\therefore f = kl^n \rho^{n-1} \eta^{2-n} V^n = k \left(\frac{Vl\rho}{\eta} \right)^n \frac{\eta^2}{\rho}$$

この方法からは η を定むることが出来ず、たゞ實驗にまつより外に方法がない。

次に(1)式により表される二つの場合について考へて見る。

i) 實驗の結果によれば物體の速度小なるときは抵抗力は物體の速度に比例する。即ち $n=1$ とすれば(1)式は

$$f = kVl\eta \dots \dots \dots (2)$$

従つて f は l 及び η にも比例することが分る。ストークス (Stokes) は半径 r の小球が粘性流體中を運動するときに現はれる抵抗力として理論的に

$$f = 6\pi\eta rV \dots \dots \dots (3)$$

を得た。従つてこの場合には $k=6\pi$ である。

今密度 σ の小球が密度 ρ の粘性流體中を重力の作用で落下する場合を考へて見る。このときは球には $(4/3)\pi r^3(\sigma - \rho)g$ だけの力が下向きに作用する(アルキメデスの原理考慮)。この力が作用してゐる限り、球の速度は次第に増加するがこれに應じて流體の抵抗力も増加するから速度がある値に達すると、球に働く下向きの力は流體の抵抗力と等しくなり、球は加速度を受くことなく、一定の速度で落下することになる。この時の速度 V は次の式から求めることが出来る。

$$6\pi\eta rV = \frac{4}{3}\pi r^3(\sigma - \rho)g$$

$$\therefore V = \frac{2}{9}g \frac{r^2(\sigma - \rho)}{\eta} \dots \dots \dots (4)$$

上式に示す如く物體が最後に得る速度は r^2 に比例するため、 r が極めて小なるときは V は極めて小さく、 r が増加するに應じて V が急激に増加する。霧、雲等の水滴は容易に落下せず、雨滴が大なる速度で落下するのはこの理に基づく。

ii) 實驗の結果によれば速度が大なる時は(物體の背後に攪亂が生ずる場合)流體の抵抗力は物體の速度の二乗に比例する。

この場合(1)式に於て $n=2$ と置けば





$$f = k \left(\frac{Vl\rho}{\eta} \right)^2 \frac{\eta^2}{\rho} = kV^2 l^2 \rho \dots \dots \dots (5)$$

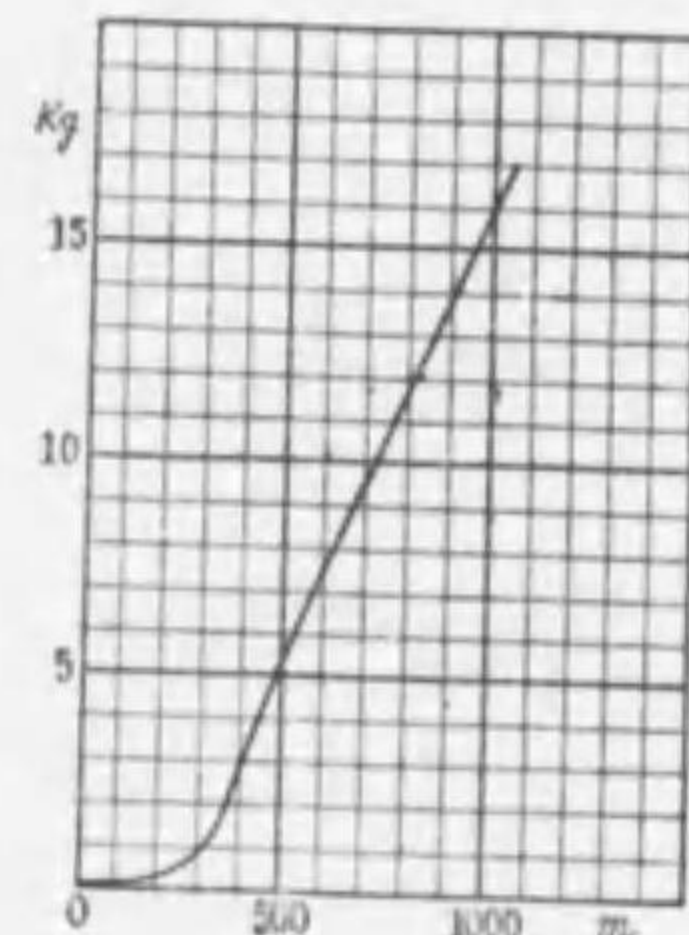
上式より知らるゝ如く速度が大いときは(1)の場合と異り、抵抗力は粘性には無關係で、 l^2 (物體の面積に比例する量)に比例し且密度に比例する様になつてくる。

彈丸に對する空氣の抵抗。飛行する彈丸に對する空氣の抵抗は理論的並びに實驗的に種々研究されてゐるが結果は極めて複雑である。 n と彈丸の速度との關係を表示すれば次頁の様である。

彈丸の形狀が空氣の抵抗と密接な關係にあることは勿論である。この形狀は1900年頃の I 圖の様な形から次第に變り、最近では IV 圖

v m/sec	0— 255	257— 318	316— 361	361— 444	446— 611	611— 793	790— 1217	1216— 1521
n	1.60	3.00	6.47	3.00	1.80	1.50	1.66	1.46

- I  I の様な尻の細まった形が用ひられる様になつた。
- II  II 圖の右側に記してある數字はほぼ抵抗に比例する
- III  値である。
- IV  直徑 1 吋の II 圖の様な形の彈丸について空氣抵抗と速度の關係をグラフで示せば左の通りである。



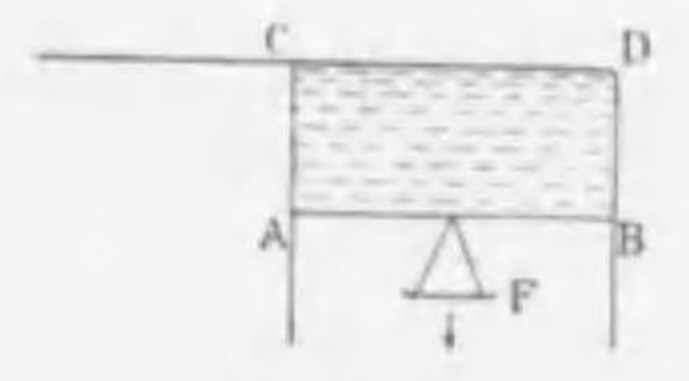
147 圖

速度が 340→350 m/sec 即ち音の速度の前後に於て抵抗の性質が著しく變ることは注意に價する。

§28 表面張力 圖に示す様な針金の棒を作りその一邊 AB はこの棒の上を滑かに動き得る様にし、この矩形の棒に液體の薄膜を張るとこの膜は恰も護謨膜の如く收縮せんとする。従つて AB に適當の重 F を載せて丁度液膜が平衡状態に達する

様にすることが出来る。このときには液膜には張力が働いてあると考へるのが至當で、この張力は實驗によれば液膜が極めて薄く (10^{-6} cm 程度) ならない限り膜の厚さには全く無關係である。従つてこの張力は液體の内部に原因するものでなくて、液の表面のみに存在する力であると考えられる。液體の表面が有するかやうな張力を表面張力¹⁾と云ふ。かく表面張力は液面内に於てのみ働き、且面内に於て考へられる任意の直線の兩側からこの線に垂直に働くと考へ得るから、その大きさは面内の直線の單位長に對する力の大きさを測る。

1) surface tension, Oberflächenspannung



148 圖

今 AB の長さを l とし、表面張力を T とし、液膜を引き張るために要する力を F とすれば

$$F=2lT \quad (\text{膜に二面ある故 2 倍する})$$

或は
$$T=\frac{F}{2l}$$

今 AB を CD の位置から AB の位置まで表面張力に抗して移動したものとすると、このとき液膜に對してなした仕事は

$$F \cdot AC=2l \cdot AC \cdot T$$

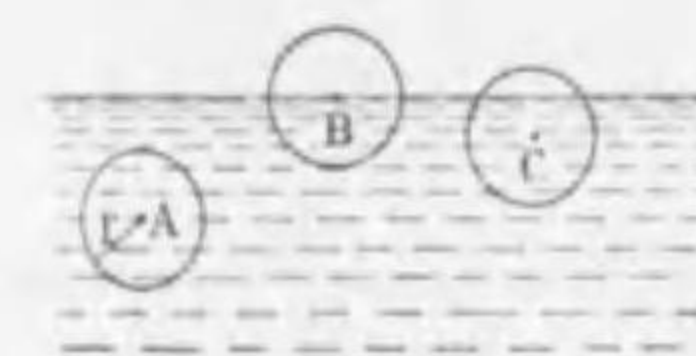
であり、この仕事は位置のエネルギーとして液面に貯へられる。次に液の單位面積内に存在する位置のエネルギーを E とすれば、膜の全面積内に存在するエネルギーは $2AC \cdot l \cdot E$ である。故にエネルギーの法則により

$$2AClT=2AClE$$

$$\therefore T=E$$

即ち液面には表面張力の大きさに等しい位置のエネルギーが貯へられてゐる。

§29 表面張力生起の説明 表面張力が如何にして生起するかと云ふことは液體表面の分子の極めて複雑な性質に起因し、

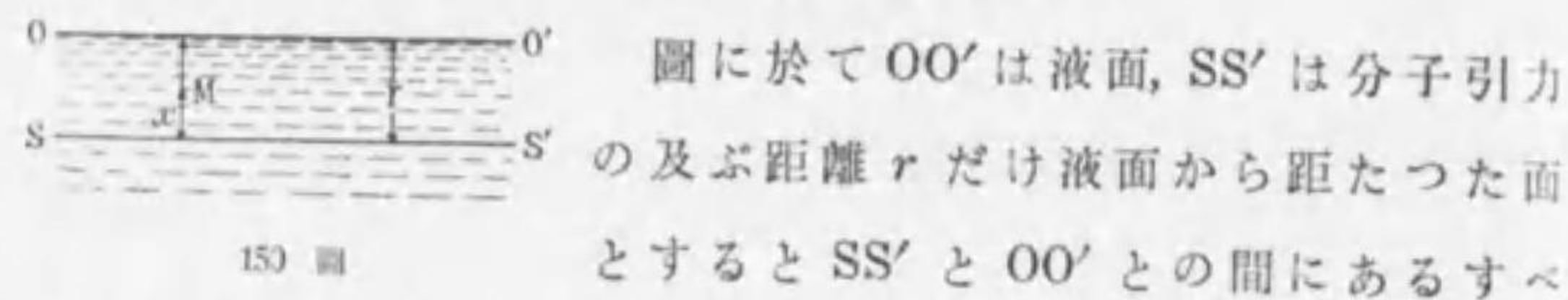


149 圖

到底簡單には説明し得まいが、然し液體を構成する分子間には互に引力が作用するものとなし、次の如く考ふればほぼ定性的の説明がなされよう。

今液體内部の A にある分子を考へ、この分子の分子引力の作用する距離を r とすれば、 r を半徑とする球面内にあるすべての分子は、A に引力を及ぼすことになる。然し分子 A は周囲のすべての分子から一様に、同時に引力を受けるため分子 A には結局引力が働かないと同一の結果になる。然し液面若しくは液面に極めて近い分子即ち B 若しくは C では上述の球の半分

若しくは一部分が液体外に出るために上方に向ふ引力が全然缺けるか若しくは弱められる。従つてB, C等の分子は下方に向ふ引力を受けることになる。云ふまでもなくこの引力は液面の極く薄い層にのみ存在し、下方に向つて急に減少する。單位面積についてのこの力を凝集¹⁾壓と云ふ。



150 圖

圖に於てOO'は液面, SS'は分子引力の及ぶ距離rだけ液面から距たつた面とするとSS'とOO'との間にあるすべての分子は液体内に向つて引力を受ける。今種々の實驗から知らるゝ事實を基礎とし、分子が下方に引かるゝ引力の大きさがSS'からの距離xの二乗に比例するものとし(この假定は充分正確ではない)、液面OO'に於ける引力の大きさをkとすれば、xの位置にある分子Mの受ける引力は

$$F = \frac{x^2}{r^2} k$$

である。

今分子MをSS'からOO'に持ち來すためには上記の引力に抗して仕事を爲さなければならぬが、この仕事はFがSS'からの距離によつて異なるから、xの各線素dxについての仕事の和で表さるべきである。即ち

$$A = \sum F \cdot dx = \sum \frac{x^2}{r^2} \cdot k \cdot dx = \frac{k}{r^2} \sum x^2 \cdot dx$$

今dxを無限に小さくとれば上記の和はxを0からrまでの間に取つた積分に代る。即ち

$$A = \frac{k}{r^2} \int_0^r x^2 dx = \frac{k}{r^2} \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{kr}{3}$$

一つの分子を液内から液面に移動するには上記の仕事をなさ

1) cohesive pressure, Kohäsionsdruck

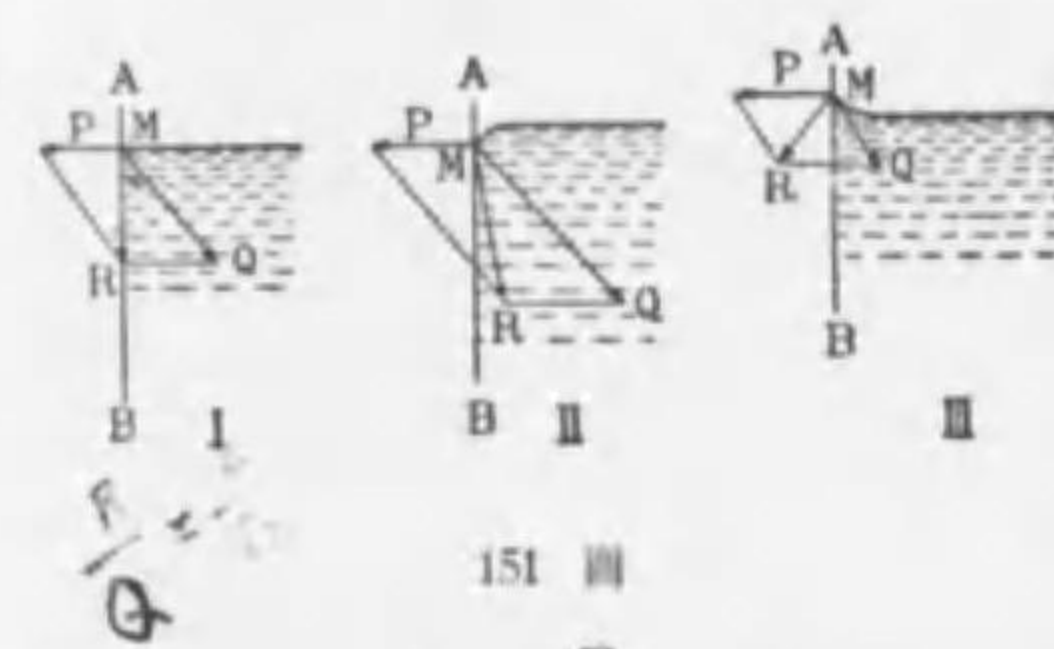
なければならぬが、今液面の單位面積中にあるすべての分子に就いての引力即ち凝集壓をKとすれば、これらの分子を液面まで持ち來すに要する仕事Eは

$$E = \frac{K \cdot r}{3}$$

である。従つて液面には上記の仕事に相當する位置のエネルギーが保存せられる。通常これを表面¹⁾エネルギーと云ふ。このエネルギーが表面張力として表れるのである。

すべて質點系に於ては位置のエネルギーが最小の時にこの系は安定の釣合を保つものである。液體の場合に於てもその表面の位置のエネルギーと重力に關する位置のエネルギーとの和が最小の値を保たんとする傾向を有する。若し重力の影響を考へる必要がない程液量が小さいときには、液體は球形をなすことは上記の理によつて理解出来る。(體積一定の物體の中で球は最小の面積を有する。)

§30 接觸角 液體の自由表面は平面であるが固體に接してゐる點の附近では一般に曲面をなしてゐる。かやうな現象も



151 圖

亦固體と液體との接觸面に於ける兩者の分子引力によつて説明せられる。分子引力中同種類の分子間に働くものを凝集²⁾力と云ひ、異種類の分子間に

働くものを附着³⁾力と云ふ。

今圖に於て器壁ABに極めて近い分子Mを考へると、Mに働く器壁の分子の分子引力の合力Pは明らかにABに垂直であり、また液體分子の引力の合力Qは前節の説明から考へるとAB

1) surface energy, Oberflächenenergie 2) cohesive force, Kohäsionskraft
3) adhesive force, Adhäsionskraft

$P = \frac{Q}{2}$

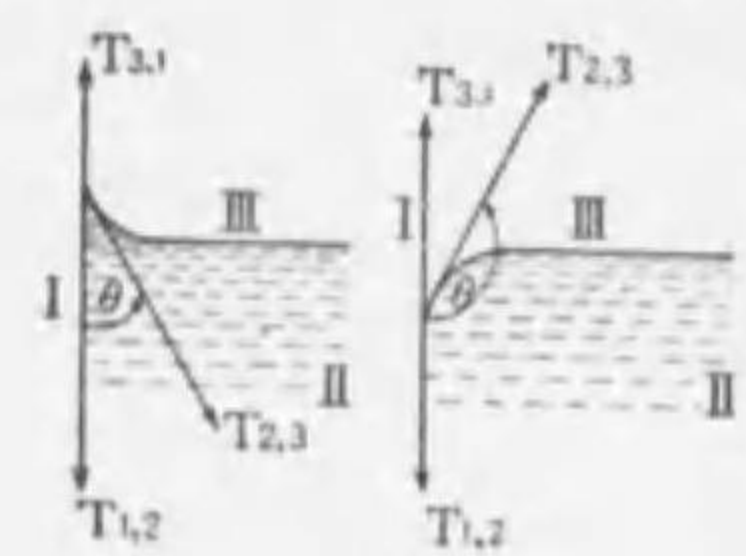
と 45° の傾きをなす. 今 P と Q との合力 R の方向に關して次の三つの場合を考へて見る.

i) R が M を通つて液面に垂直である場合, 即ち $Q = P\sqrt{2}$ である場合には, 液體は器壁の接觸點に於て何等液面の彎曲を起さない. (I 圖)

ii) $Q > P\sqrt{2}$ の場合では, R の方向は液内に向ひ, 液面は器壁の接觸點附近に於て下方に彎曲する. (II 圖)

iii) $Q < P\sqrt{2}$ の場合では, R の方向は器壁内に向ひ, 液面は器壁の接觸點附近に於て上方に彎曲する. (III 圖)

液體と固體との接觸點に於て液面に引いた切線と固體壁とのなす角 θ を接觸角と云ふ.



152 圖

接觸角の大きさは, 液體と固體との種類は勿論, 液體と固體と更にこれに接する氣體(例へば空氣)にも關係を有するものである. 従つて例へば圖に於て I を固體, II を液體, III を氣體とし, この三者が接するものとし, $T_{1,2}, T_{2,3}, T_{3,1}$ を夫々 [固體, 液體], [液體, 氣體], [氣體, 固體] の接觸面に現はるゝ表面張力の大きたとすれば, この三者が平衡の状態にあるための條件は

$$T_{1,2} + T_{2,3} \cos \theta = T_{3,1}$$

或は
$$\cos \theta = \frac{T_{3,1} - T_{1,2}}{T_{2,3}}$$

故に若し $T_{3,1} > T_{1,2}$ ならば $\theta < 90^\circ$, $T_{3,1} < T_{1,2}$ ならば $\theta > 90^\circ$ となる. $\theta < 90^\circ$ の場合には液體は固體を潤すと云ひ, $\theta > 90^\circ$ の場合は潤さないと云ふ. 尚 $|\cos \theta| \leq 1$ であるから $|T_{3,1} - T_{1,2}| \leq T_{2,3}$ の場合にのみ液體は平衡状態を保つが, $|T_{3,1} - T_{1,2}| > T_{2,3}$ の場合は平衡が保たれず液體は絶えず固體の壁に沿うて上方に昇るので

1) angle of contact, Randwinkel

ある. かやうな場合では固體上に一滴の液體を落すと液體は點滴として存することが出来ず, 固體面全體に擴がることとなる. これに近い現象は充分磨いた硝子板と水滴との間に起ることである. また圖に示す如く油滴が水上に浮ぶ場合にも三つの表面張力 $T_{1,2}, T_{1,3}, T_{2,3}$ が現はれるがこの中の何れの一つも他の二つの和より小なる間は油滴はその形を保持するが, 若し $T_{1,3} > T_{1,2} + T_{2,3}$ の様な場合には A の附近の分子は $T_{1,3}$ の方向へ限りなく擴がることになる.



153 圖

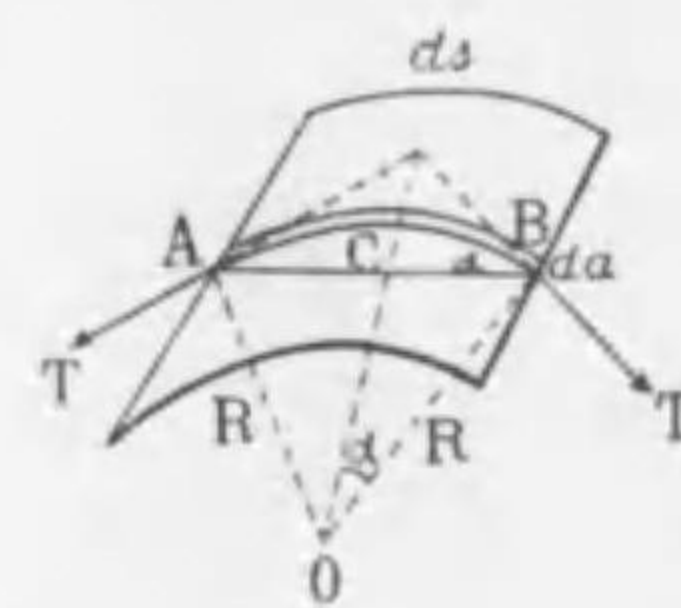
§31 彎曲液面に於ける壓力 液體の表面が平面であるときは表面にある液體分子に働く分子引力は平面内に存在し, 各方向に對し同じ強さであるためこの合力は零であるが (I 圖), 表面が下方に彎曲してある場合 (II 圖) には新たに液内に下方に向ふ力を生じ, 凝集壓を増加せしめ, 液面が上方に彎曲する場合 (III 圖) にはこの反對の結果を來す.



154 圖

今彎曲した液面の壓力を 155 圖に示す様な液面が圓筒をなす場合について考へ, この圓筒面内に軸に垂直な小帶を取り, その幅を da , 長さを ds とする.

今この小帶 AB の兩端 A, B に於ける表面張力の大きさを T とすれば, 幅 da の帶の兩端に働く力は Tda で A, B の端に於て小帶の切線の方



155 圖

向をとる. この二力の合力は曲線 AB の曲率の中心 O に向ひ, その大きさは $2T \cdot da \sin \alpha$ である (この場合の曲率の中心 O は圓筒の軸上にあり, OAB は軸に垂直である). 茲に α

は T と直線 AB とのなす角である。α はまた曲率半径 R と OC (C は AB の中点) との間の角に等しいから

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{ds}{R}$$

である。α が極めて小さい場合には

$$\sin \alpha \doteq \alpha = \frac{ds}{2R}$$

であるから上の合力は

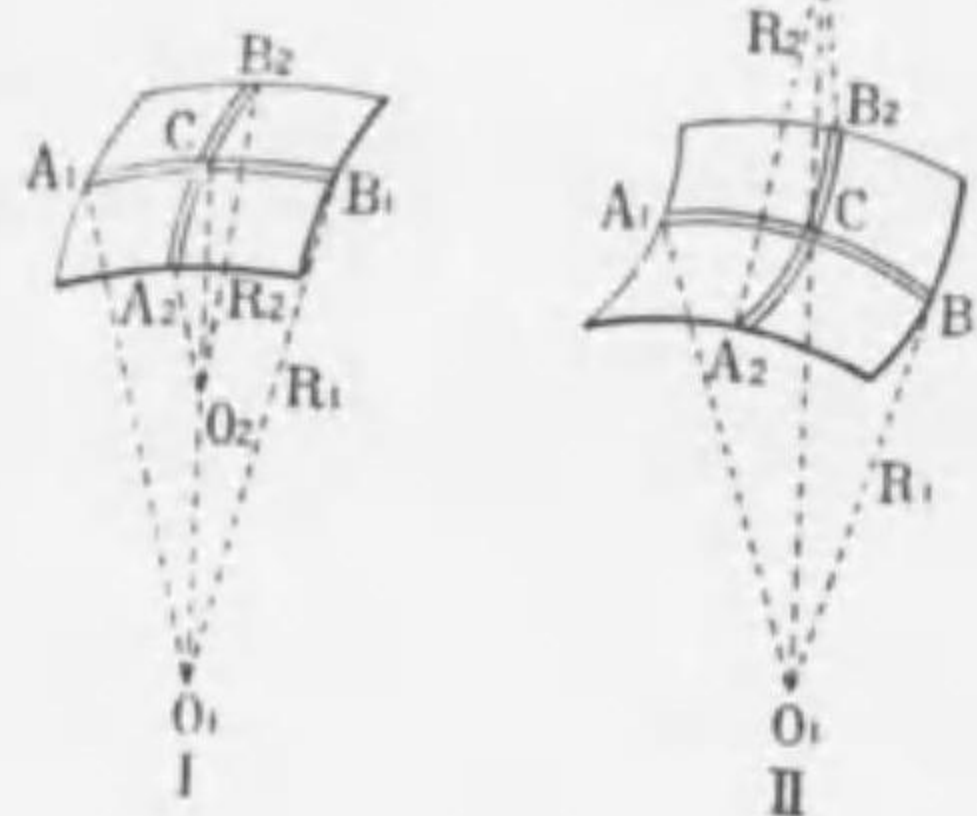
$$2T \cdot da \cdot \sin \alpha \doteq T \frac{dads}{R}$$

となる。dads は小帯の面積であり、上式はこの小帯に対する力であるから単位面積に対する力即ち圧力は dads にて除し、これを表面張力の法圧と云ふ。これを N とすれば

$$N = \frac{T}{R} \dots\dots\dots(1)$$

次に液面が二重の彎曲を有するときは考ふる一點を通つて

(H)



155 圖

互に垂直なる二小帯を取り、各小帯のこの點に於ける曲率半径を R1, R2 とすれば前述の理と同様にして

$$N = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \dots\dots\dots(2)$$

上述に於て或點の曲率半径の方向が二つとも同一なるときは

(I 圖) 同符號を附し、方向反對のときは符號を反對に取ることにする (II 圖)。

幾何學の教ふるところによれば曲面上の一點に於ける法線を含む互に垂直なる任意の二つの平面とこの曲面との二つの交線のこの點に於ける二つの曲率半径の逆數の和は一定である。この和を曲率度¹⁾と

1) measure of curvature, Krümmungsmass

云ふ。従つて(2)式は次の如く云ひ表される。

表面張力の法圧は表面張力の大きさと曲面の曲率度との積である。

特別の場合として液面が球面をなす場合には R1=R2 であるから R1=R2=R とすれば

$$N = T \frac{2}{R} \dots\dots\dots(3)$$

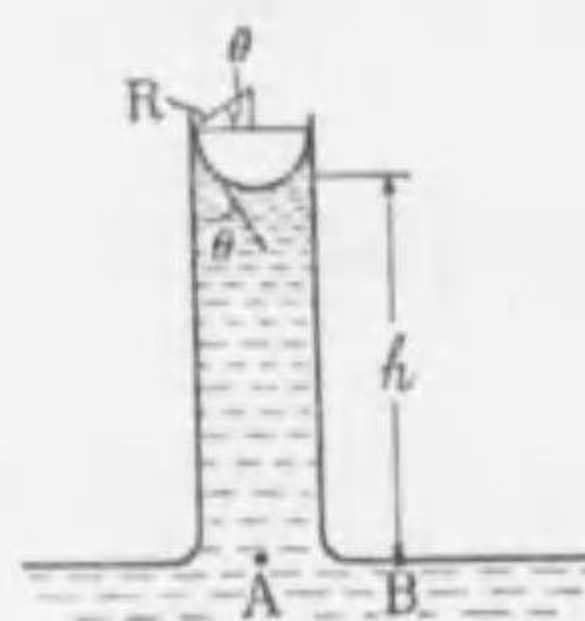
又液がシャボン球の様に薄膜をなす場合には面には表裏二面あり且 N の方向は同じであるから

$$N = T \frac{4}{R}$$

である。従つてシャボン球内の空氣の壓力が外氣の壓力より $\frac{4T}{R}$ だけ大なるとき球面は平衡を保つ。

§32 毛細管現象

毛細管を液面に立てると液の種類によつて液は管内に上昇し、或は逆に下降する。かやうな現象を毛細管現象¹⁾と云ふ。



157 圖

今液體が毛細管内に上昇する場合についてその上昇の高さ、管の半径及び表面張力の間の關係を考へて見る。

A, B 二點に於ける壓力を Pa, Pb とし、大氣の壓力を p とする。液が h の高さに上昇し(圖に示すが如く、液面は中央では低く、周邊では高いがその差を無視して全體として h の高さとする)、その管内に於ける液面が球面をなすものと假定する。§31, (3) 式を用ひ且管内の液面に於て大氣の壓力と表面張力の法壓との方向とが相反することを考慮して

$$P_a = p - \frac{2T}{R} + h\rho g \quad (\rho \text{ は液の密度})$$

$$P_b = p$$

1) capillarity, Kapillarität

$P_a = P_b$ なる故に

$$h\rho g = \frac{2T}{R} \dots\dots\dots(1)$$

r を管の半径とし, θ を接触角とすれば

$$r = R \cos \theta$$

$$\therefore h = \frac{2T \cos \theta}{r \rho g} \dots\dots\dots(2)$$

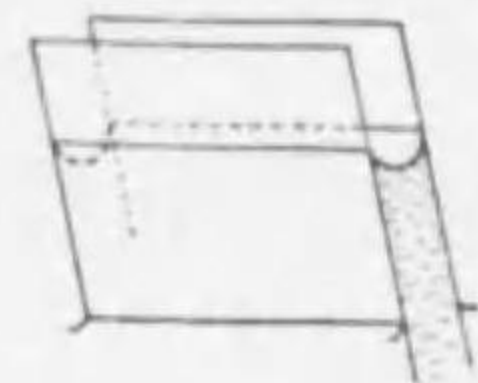
この際 $\theta < 90^\circ$ ならば液は上昇し, $\theta > 90^\circ$ ならば液は下降する。上式の示す如く液の上昇の高さが管の半径 r に逆比例することをジュリン(Jurin)の定理と云ふ。

充分磨いた硝子と純粹の水では θ は殆んど零であるから

$$h = \frac{2T}{r \rho g} \quad (\rho = 1 \text{ とする})$$

次に平行な二枚の板が液體中に對立するときは上昇せる液

面はほぼ圓筒面をなすから §31(1)を用ひ(1),(2)と同様にして



158 圖

$$h\rho g = \frac{T}{R}$$

$$h = \frac{T \cos \theta}{r \rho g} \dots\dots\dots(3)$$

但し r は二平面間の距離の半分を表す。

また二枚の板が小さな角をなしてゐる

ときは液面上の一點 P に於ける二面の距離は OY からの距離 x に比例するから(3)

に於て

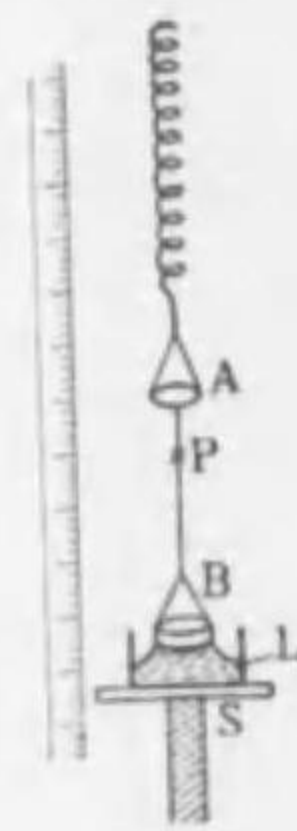
$$r = kx, \quad h = y$$

と置けば

$$xy = \frac{T \cos \theta}{k \rho g} = \text{const.} \dots\dots\dots(4)$$

即ち上昇せる液面は雙曲線をなす。

§ 33 表面張力測定法 ゼンマイ秤に肉の薄い金屬輪 B を



160 圖

附し,これを表面張力を測定すべき液 L に軽く接觸せしめ,次に L を載せた臺をネヂ S によつて徐々に下げると輪の一端に附着した液の表面張力のため秤のゼンマイが延びるが或程度迄臺が下ると液膜は破れて輪が飛び上る。このときのゼンマイの延びを標尺 P によつて正確によみ,次に液を去り輪を拭つて A に分銅を載せて前と同一の読みまでゼンマイを延ばして分銅の重さ W を測れば

$$Wg = 2\pi(r_1 + r_2)T$$

$$\therefore T = \frac{Wg}{2\pi(r_1 + r_2)}$$

茲に r_1, r_2 は輪の内半径及び外半径である。尙上式は輪が充分薄いとして輪によつて引き張られてゐる液膜の厚さを無視したものである。

表面張力の表 (dyne/cm)

アルコール	24.5(20°C)	オリーブ油	34.3(20°C)
エーテル	17.6(20°C)	水	銀
水	73.5(20°C)		539(20°C)

【問 題】

- 水を容れた器を滑かな水平板上を a の加速度で直進せしめるとき水面の傾斜角は幾何か。 [答] $\theta = \tan^{-1} \frac{a}{g}$
- 高さ h cm, 底邊 a cm の三角形の板を頂點を下にし,底邊を水平にして水中に鉛直に入れ,底邊が水面に達するまで沈めたとき,板の一面に作用する水の壓力の合力の大きさ及びその作用點を定めよ。
[答] $ah^2/6$ 瓦重, 頂點を過ぎる中線の中點
- 水を満した半径 r , 高さ h の直圓筒がある。側壓が底壓の 2 倍

- であるときに、 h と r との比を求めよ。 [答] $h/r=2$
4. 海上に浮ぶ上下同形の氷山がある。水面上の高さ 100 m のとき水面下に隠れた部分の高さは幾米か。但し氷及び海水の比重をそれぞれ 0.913 及び 1.025 であるとする。 (昭2.金.醫大) [答] 823 m
5. 密度 ρ の物体を深さ h 、密度 ρ' の液面に静かに落すとき底面に達するまでに要する時間を求めよ。(但し $\rho > \rho'$) [答] $\sqrt{\frac{2h\rho}{g(\rho-\rho')}}$
6. 重さ 560 g の石塊を水中で秤ると 330 g 、これを食鹽水中で秤ると 330 g であるとき、石塊及び食鹽水の比重を求めよ。 (大14.京.農) [答] $2.5, 1.15$
7. 砂の如き細粒の比重測定法及びその数式を示せ。(昭2.九.農) [答] 122頁cに同じ
8. 6 m の水底に 0.01 cc の気泡がある。これが水面に達するときの體積を求めよ。但し氣壓は 730 mm とする。 [答] 0.0155 cc
9. 空氣の溫度が一樣に 0°C 、地上の氣壓を 750 mm として高さ 10 m 及び 800 m の點の氣壓を求めよ。但し空氣の密度は 0°C 、 730 mm に於て 0.00129 g/cm^3 であるとする。 (昭2.東.理) [答] $749\text{ mm}, 673\text{ mm}$
10. 一端閉じた長さ 60 cm の硝子管を開端を下にして海底に沈めた。これを引き上げたとき水は閉端より 5 cm の所まで侵入したことを知った。大氣壓を 730 mm として海の深さを計算せよ。但し海水の密度は一樣で 1.025 とする。 [答] 110.8 m
11. 晴雨計の管の切口の面積は 2 cm^2 、水銀柱の高さ 73 cm で、水銀柱上真空部は 10 cm とする。この真空部に空氣を少し送り込んだとき水銀面は 10 cm だけ下つた。送り込んだ空氣の體積を求めよ。 [答] 一氣壓で 5.25 cm^3
12. 二つの半球から成立する半径 r の球狀剛體がある。その外面のみに p の壓力が作用するものとする。これを二つの半球に引き離すには何程の力を要するか。(昭4.京.醫) [答] $\pi r^2 p$
13. 水平に置いてある太さが一樣でない細い圓管を通して粘性のない液體が流れてゐるとき、任意の點に於ける液體の壓力と管の半径

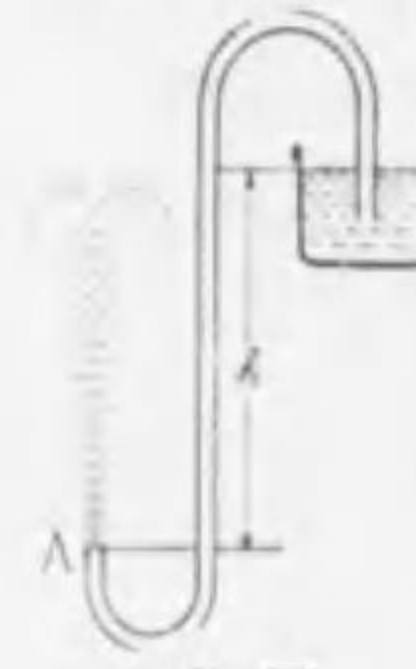
との間に如何なる關係があるかを見出しその理由を記せ。但し液體は管を満し、流れは定常状態にあるものとする。 (昭6.京.理)

[答] $a/r^4 + p = b$

14. 大なる器に水を容れて密閉する。今器に附けた細管からこの水を外壓 P に抗し、速度 v で流出せしめるために必要な器の内壓 p を求めよ。但し水の重量及び粘性は無視するものとする。

(昭6.京.醫) [答] $P + \frac{1}{2}\rho v^2$

15. 圖の様な噴水装置がある。噴水口 A に於ける水の速度を求めよ。この速度の大きさは水の射出する方向によつて異なるか。時の進むに従つて速度が如何に變化すべきかを計算式で表せ。但し噴水口の斷面積を a 、貯水器の斷面積を b とする。 (大7.東.理)



161 圖

16. 金剛砂の粉末を 10 cm の深さまで水を容れたビーカー中で攪拌した後に放置して24時間を経過して尙水中に浮遊してゐる最大粒の大きさを求めよ。但し金剛砂の比重を 4 g/cm^3 、水の粘性係数を $0.010\text{ g/cm}\cdot\text{sec}$ とし金剛砂は球狀をなすものと假定する。

[答] $r = 4.21 \times 10^{-3}\text{ cm}$

17. 雨滴の落下速度は地上では一定と見做すことが出来る。その速度の大きさを求めよ。(147頁(5)は球に対しては $f = \frac{\pi}{4} r^2 \rho V^2$ となる)。

(昭3.東北.工) [答] 雨滴の半径を r とすれば $2004\sqrt{r}\text{ cm}$

18. シヤボン球の表面張力を 27.45 dyne/cm とする。半径 3 cm のシヤボン球内の壓力は球外の壓力より何程大であるか。

[答] 35.5 dyne/cm^2

19. 半径 r の球狀水滴の内部の壓力はその表面に働く大氣壓より $2T/r$ だけ大なることを證明せよ。但し T は水の表面張力である。

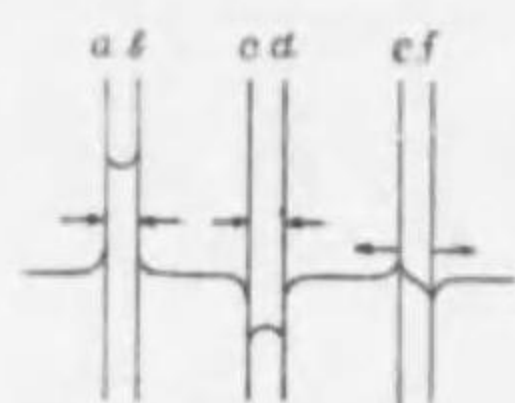
又内外の壓力の差が1氣壓なる球狀水滴の直径は幾何なるか。但し $T = 74\text{ dyne/cm}$ とする。(昭6.東.工大) [答] $2.9 \times 10^{-4}\text{ cm}$

20. 圓筒狀のシヤボン泡と球狀のシヤボン球とが細管で連絡されてゐる場合にこの兩泡が平衡状態にあるためには球と圓筒との半径

の比如何.

[答] 2:1

21. 圖に於て液は板 a, b を潤し c, d を潤さない, また e を潤し f を潤さないとする. このとき a と b , 及び c と d は互に引き合ひ e と f は互に押し合ふ. 何故か.



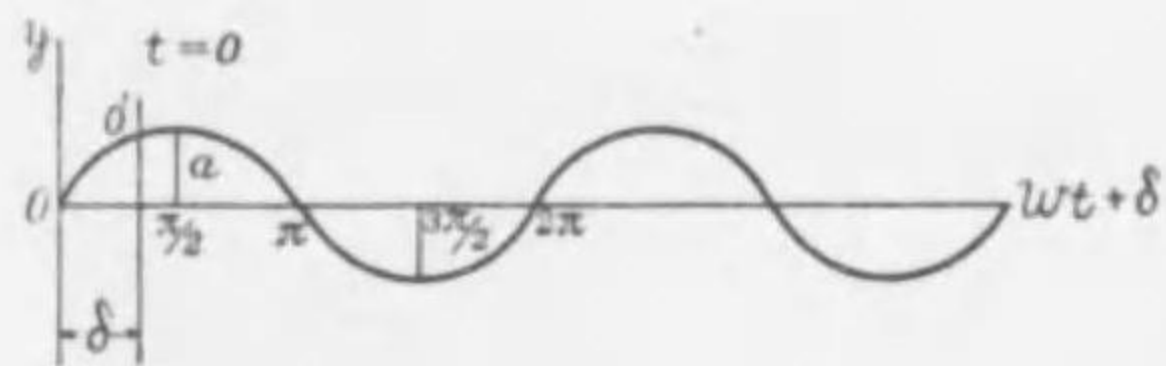
162 圖

22. 二枚の硝子板間に数滴の水を入れて硝子板を押し合はせ水の薄膜を作るときこの板を再び引き離すには困難を感じる. 何故か.

第七章 振動, 波動及び音響

§1 振動及び正弦函数 力學系が平衡状態にあるとき外部から極めて僅かこの平衡状態の亂される原因が働くときは, この系は平衡状態の附近に振動運動を起す. 吾々は既に單振子及び物理振子がそれぞれ鉛直線の左右に $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 及び $2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$ の週期をもつて振動し, また弾性體の振動として振れ振子が $2\pi\sqrt{\frac{2lI}{n\pi r^4}}$ の週期で平衡状態の周りに振動することを知つた. これらは何れも單振動で系の位置若しくは角變位の時間に對する變化は常に正弦函数で表された.

物理現象には振動状態が正弦函数で表される場合極めて多く, 最も重要な週期運動である. 何となれば如何なる振動運動も後に記する如く有限若しくは無限に數多くの單振動即ち正弦函数の組み合せとして表し得る²⁾である.



163 圖

圖は單振動をなす質點の變位と時間との關係を示す所謂正弦曲線である.

單振動が

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} t$$

で表される場合は正弦曲線は O から始まり

$$y = a \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \delta \right)$$

で表される場合は曲線は O' から始まる.

§ 2 同一方向を有し同一週期を有する二つの単振動の合成

圖に於て P は O の左右に直線 AB 上に單振動をなす。任意の時刻 t に於て O からの變位を y_1 、その振幅、週期及び最初の位相をそれぞれ a, T 、及び δ_1 とすれば

$$y_1 = a \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \delta_1 \right)$$

次に O が更に AB 上の一定點 O' の左右に同一週期の單振動をなし、O の O' からの變位を y_2 、その振幅、及び最初の位相をそれぞれ b 及び δ_2 とすれば

$$y_2 = b \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \delta_2 \right)$$

P が上記二つの單振動を同時に受けるとき P の O' からの變位を y とすれば明らかに

$$y = y_1 + y_2 = a \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \delta_1 \right) + b \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \delta_2 \right)$$

$$= (a \cos \delta_1 + b \cos \delta_2) \sin 2\pi \frac{t}{T} + (a \sin \delta_1 + b \sin \delta_2) \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

今

$$\left. \begin{aligned} a \cos \delta_1 + b \cos \delta_2 &= A \cos \delta \\ a \sin \delta_1 + b \sin \delta_2 &= A \sin \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

と置けば上式は

$$y = A \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \delta \right) \dots\dots\dots(2)$$

δ 及び A は(1)から次の様に決定出来る

$$\tan \delta = \frac{a \sin \delta_1 + b \sin \delta_2}{a \cos \delta_1 + b \cos \delta_2} \dots\dots\dots(3)$$

$$A^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\delta_1 - \delta_2) \dots\dots\dots(4)$$

即ち δ 及び A を(3)及び(4)によつて決定すれば、同一週期を有し、異なる振幅及び異なる最初の位相を有する二つの單振動の

合成は再び同一週期を有する一つの單振動になる。

次に二三の特別の場合を考へて見る。

i) $a=b, \delta_1 - \delta_2$ (位相差)が任意のとき (165 圖 I)

$$\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \pm 2n\pi \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots\dots\dots)$$

ii) $\delta_1 - \delta_2 = 0$ 或は一般に $\delta_1 - \delta_2 = 2n\pi$ のとき

$$A = a + b \quad \delta = \delta_1 = \delta_2$$

特に $\delta_1 - \delta_2 = 0$ 、及び $b=a$ のとき

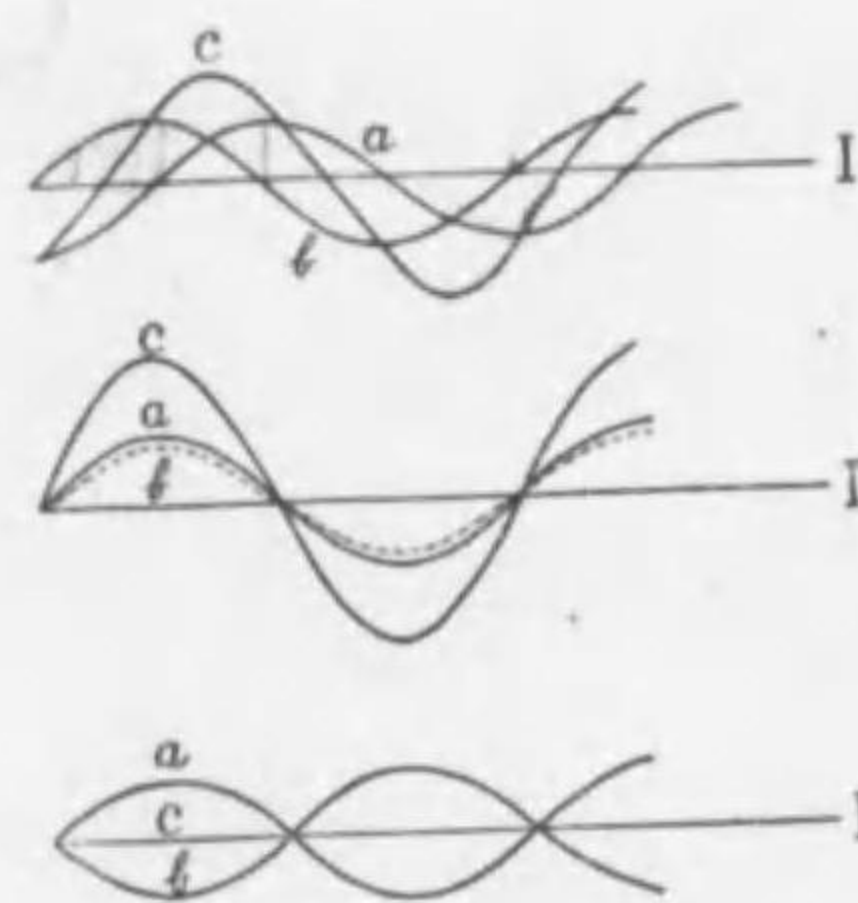
$$A = 2a \quad (165 \text{ 圖 II})$$

iii) $\delta_1 - \delta_2 = \pi$ 或は一般に $\delta_1 - \delta_2 = (2n+1)\pi$ のとき

$$A = a - b$$

特に $\delta_1 - \delta_2 = (2n+1)\pi$ 及び $a=b$ のとき

$$A = 0 \quad (165 \text{ 圖 III})$$



即ち振幅等しくして反對の位相にある二つの單振動の合成振動は零である。

左圖は上記三つの場合を圖示したもので曲線 a 及び b はそれぞれ y_1 、及び y_2 を表し、 c は y_1, y_2 の代數和をとりその合成單振動を表してゐる。

§ 3 同一方向を有し同一の週期を有する數多の單振動の合成 同一方向を有し週期の等しい數多の單振動の一つを

$$y_i = a_i \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \delta_i \right) \dots\dots\dots(1)$$

合成振動を y とすれば

1) phase difference, Phasenunterschied

$$y = \sum_i y_i = \sum_i a_i \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta_i\right) \dots\dots\dots(2)$$

上式の括弧を除き

$$\left. \begin{aligned} \sum_i a_i \cos \delta_i &= A \cos \delta \\ \sum_i a_i \sin \delta_i &= A \sin \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

と置けば(2)は

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right) \dots\dots\dots(4)$$

と書き得る. A及びδは(3)から

$$\tan \delta = \frac{\sum_i a_i \sin \delta_i}{\sum_i a_i \cos \delta_i} \dots\dots\dots(5)$$

$$\begin{aligned} A^2 &= (\sum_i a_i \sin \delta_i)^2 + (\sum_i a_i \cos \delta_i)^2 \\ &= \sum_i \sum_k a_i a_k \cos(\delta_i - \delta_k) \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

であることが計算できる.

§4 同一方向を有し週期を異にする二つの単振動の合成
週期を T_1, T_2 とする同一方向の単振動を

$$y_1 = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T_1} + \delta_1\right)$$

$$y_2 = b \sin\left(2\pi \frac{t}{T_2} + \delta_2\right)$$

この二つの単振動を解析的に合成することも出来るが結果は
稍複雑であるためこれを省き §2 に述べた方法により得られ



166 圖

た結果の一例のみを圖示する. 圖
は週期の比が 1:3 の場合の合成振
動を示す. これらの合成振動は週

期運動ではあるが単振動ではなくて稍複雑である.

フーリエー (Fourier) によれば如何なる週期運動でも極めて
數多くの単振動をとればこれらの和として表される.

即ち

$$\begin{aligned} x = f(t) &= C_0 + C_1 \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta_1\right) + C_2 \sin\left(4\pi \frac{t}{T} + \delta_2\right) \\ &+ \dots\dots + C_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T} + \delta_n\right) + \dots\dots \end{aligned}$$

但し n は整数で C_0, C_1, \dots は $f(t)$ の形によつて決定される
常數である. 即ち一般に複雑なる週期的の振動はその振動數
($=\frac{1}{T}$) の整数倍の振動數を有する多數の單振動の合成と考へ
得る. これをフーリエーの定理と云ふ. 多くの振動數の中で
振動數の最も低いものを原振動¹⁾と云ひ, 其他を倍振動²⁾と云ふ.

§5 週期を等しくする互に垂直な單振動の合成 直角に交
る X 軸及び Y 軸の方向の單振動をそれぞれ x 及び y とすれば

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \delta_1\right) \\ y &= b \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \delta_2\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

一點がこの二つの單振動を同時に受けるときその點の運動徑
路が如何なるものであるかを研究して見る. (1)から

$$\frac{x}{a} = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos \delta_1 + \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin \delta_1$$

$$\frac{y}{b} = \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos \delta_2 + \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin \delta_2$$

更に $\frac{x}{a} \cos \delta_2 - \frac{y}{b} \cos \delta_1 = \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin(\delta_1 - \delta_2)$

$$\frac{x}{a} \sin \delta_2 - \frac{y}{b} \sin \delta_1 = \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin(\delta_2 - \delta_1)$$

この二式を自乗して加へると

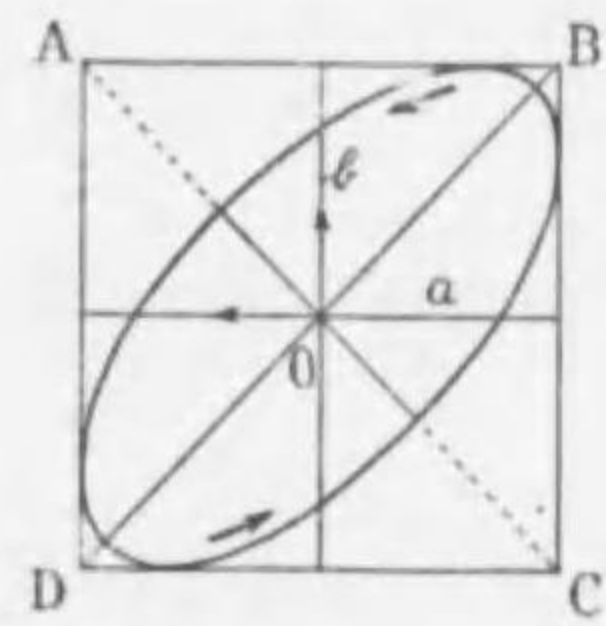
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos(\delta_1 - \delta_2) = \sin^2(\delta_1 - \delta_2)$$

1) fundamental oscillation, Grundschiwingung
2) over oscillation, Oberschiwingung

今 $\delta_1 - \delta_2 = \varphi$ とすれば(即ち y の振動が x の振動よりも位相に於て φ だけ後で振動を起したとすれば)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \dots\dots\dots(2)$$

これはすべての φ に対して楕圓の方程式である。今次の特別の場合を考へて見る。



167 圖

i) $\varphi = 0$ のときは(2)から

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

或は $y = \frac{b}{a}x$

これは直線の方程式で対角線 BD に一致し合成振動は明らかに単振動である。即ち

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right)$$

但し δ は $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ とし, s は対角線上に於ける O からの距離である。

ii) $\varphi = \pi$ のときは

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

或は $y = -\frac{b}{a}x$

これは対角線 AC に一致する。

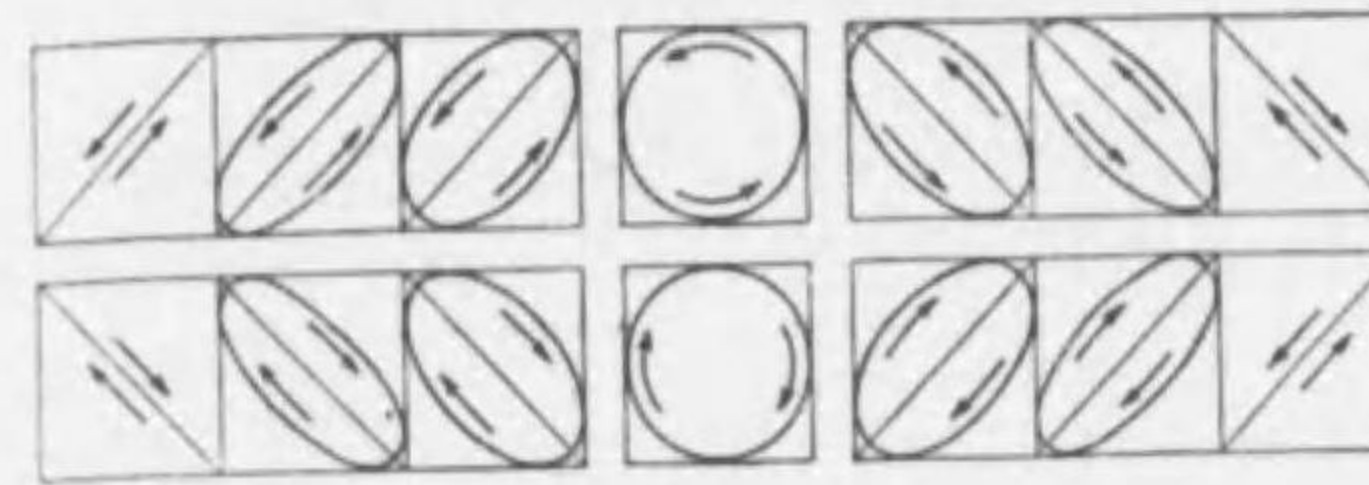
iii) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 又は $\frac{3\pi}{2}$ のときは

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

これは X 及び Y 軸を主軸とする楕圓である。

iv) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 又は $\frac{3\pi}{2}$ で $a=b$ の場合は

$$x^2 + y^2 = a^2$$



168 圖

即ち圓運動である
次に $a=b$ なる場合につき $\varphi=0$ から $\varphi=2\pi$ まで

の間を φ が $\frac{\pi}{6}$ ずつ増加する時の合振動を圖示すれば 168 圖の如くである。

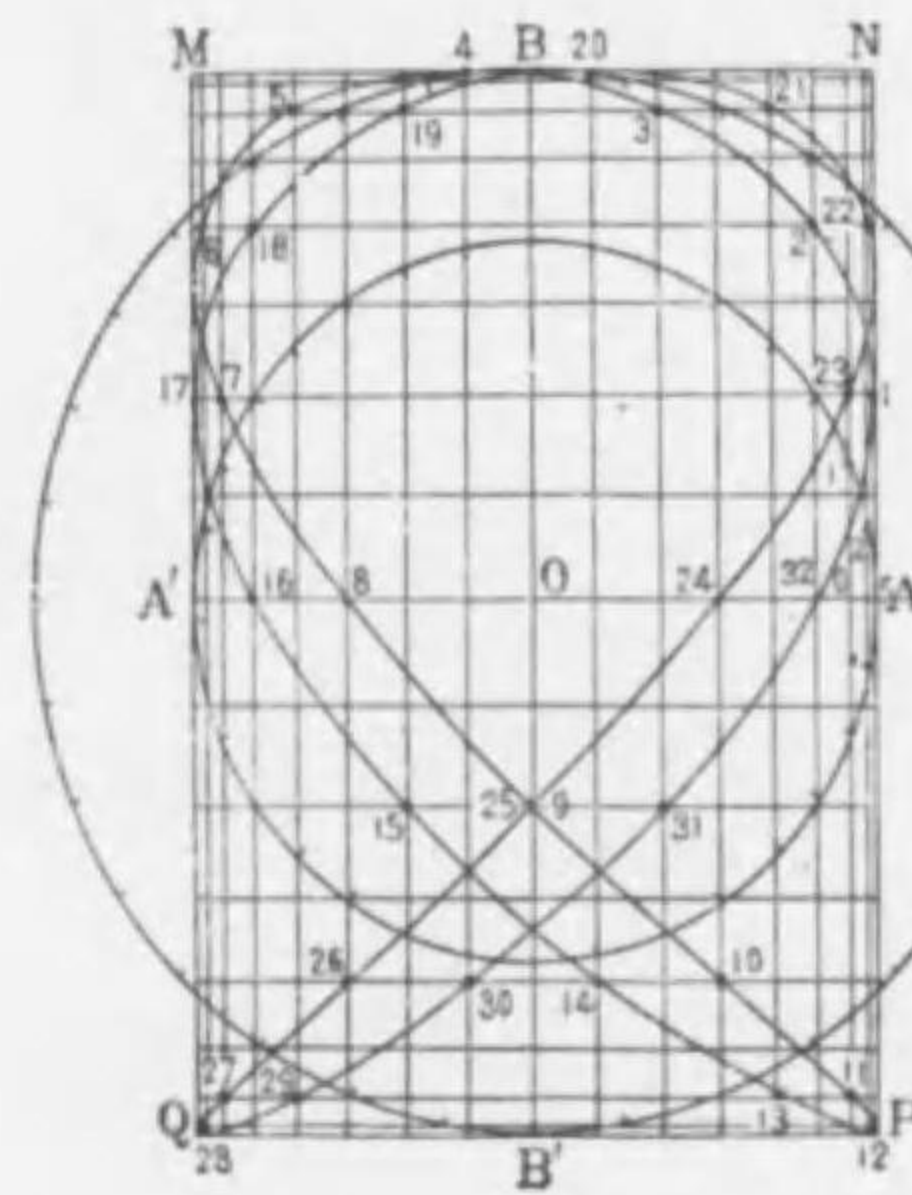
§ 6 週期が異なる二つの互に垂直な単振動の合成 週期 T_1

及び T_2 をもつ互に垂直な二つの振動を

$$x = a \sin\left(2\pi \frac{t}{T_1} + \delta_1\right)$$

$$y = b \sin\left(2\pi \frac{t}{T_2} + \delta_2\right)$$

上の二式から t を消去すれば x と y との関係が得られ合成運動を受ける點の徑路が得られる。解析的には稍複雑であるため幾何學的の作圖法のみを示すことにする。



169 圖

AOA' 及び BOB' を互に直交する二軸とし

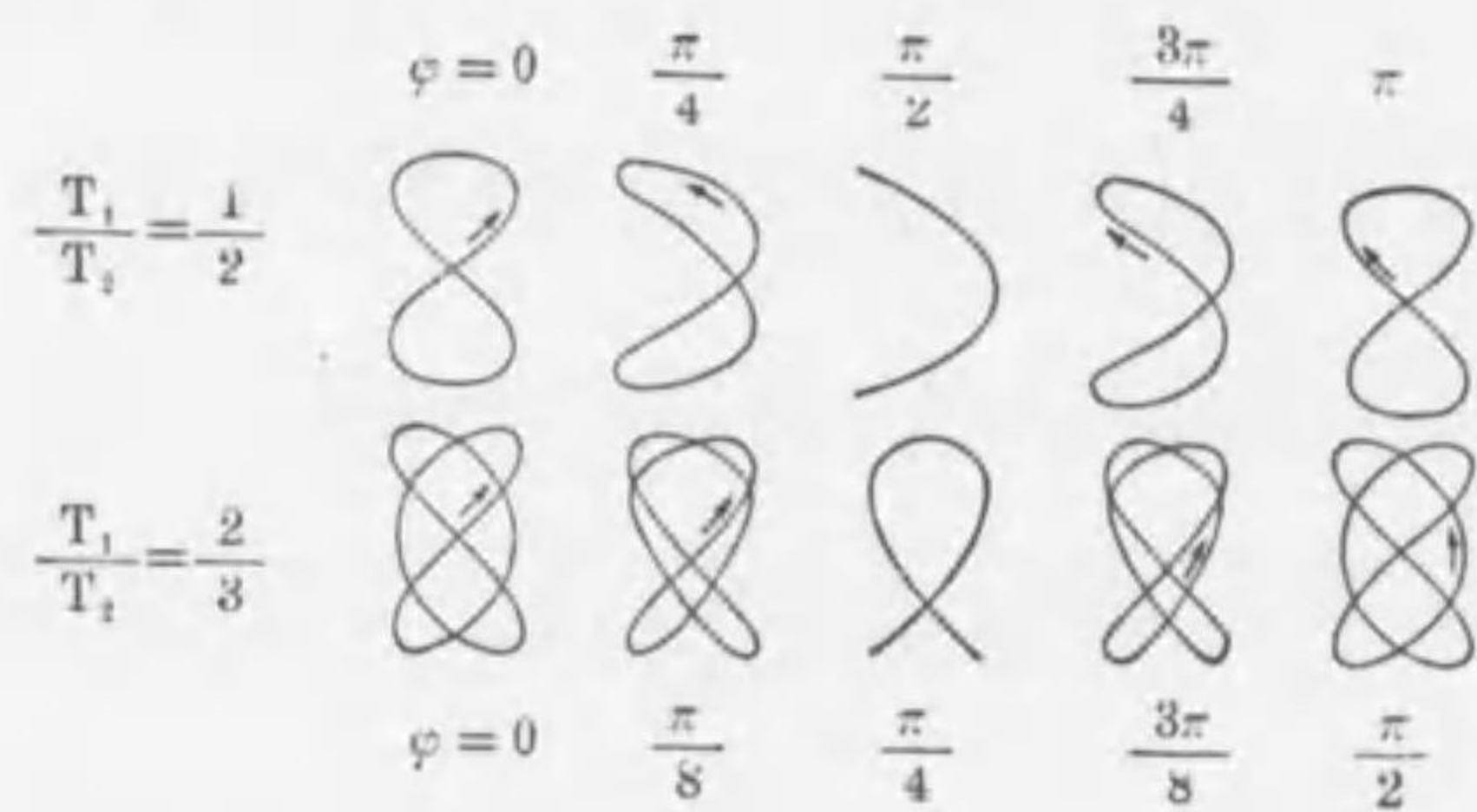
$$AO = a, \quad EO = b$$

を半径とする二圓を畫き、各圓をそれぞれ $4n$ 等分し (n は整数) 各圓の分點をそれぞれ AOA' 及び BOB' に垂直なる直線で結ぶ。169 圖に於ては

$$T_1/T_2 = 2:3$$

で運動点の最初の位置は0で、次の位置1は0から右方へ三つ目の直線と AOA' の上方へ二つ目の直線との交点である。以下順を追うて交点を求めると圖の様な曲線が得られる。

次に T_1/T_2 及び φ の種々の値に對して合成運動の徑路を描けば次の通りである。



170 圖

170圖で φ の値は運動の最初の時の位相差であつて運動が始まつた後に於ては T_1 と T_2 とが異なるため位相差は一定ではなく次第に變化してくる。また $T_1:T_2$ が上記の様な簡単なものでなく $T_1:T_2$ が無理数の場合には上圖の様な閉曲線にならず、時間の経過につれて曲線は 169圖 MNPQ の全面を覆ふに至る。

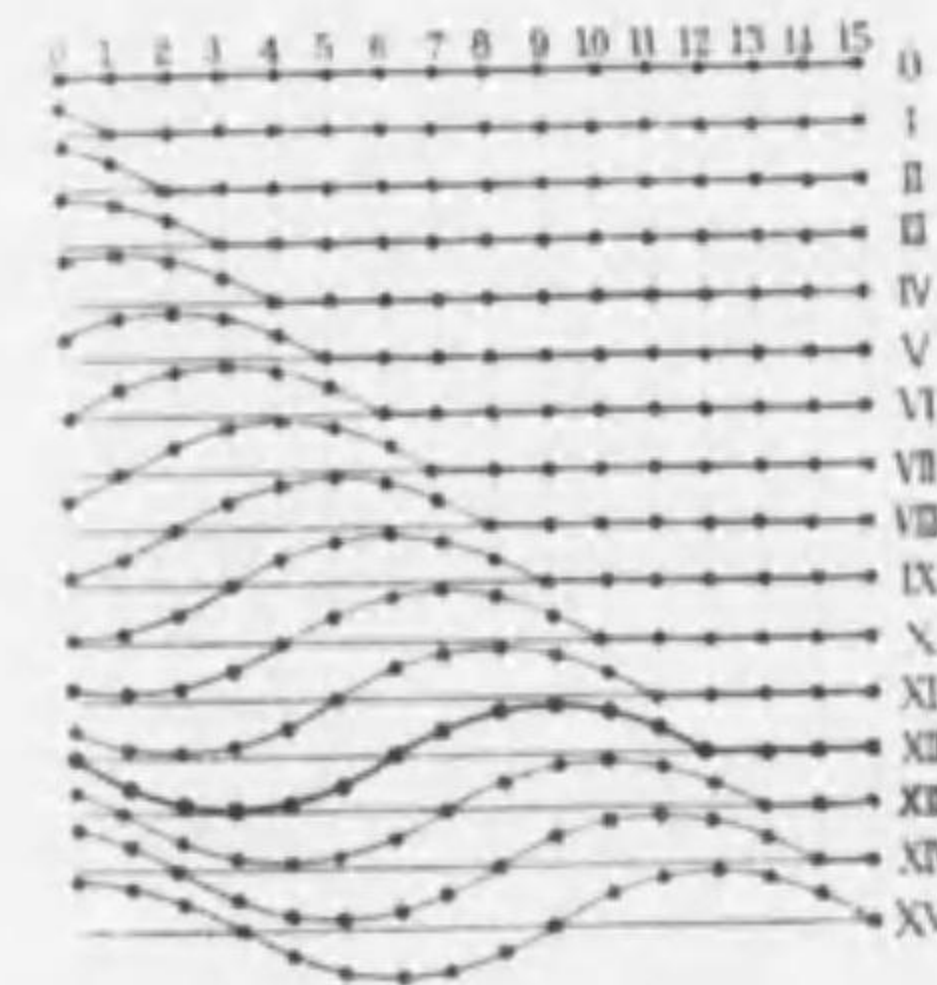
§5 及び §6 に示した様な互に直角な単振動を合成して生ずる曲線はリサージュ (Lissajous) の研究したものでこれをリサージュの曲線と云ふ。x, y, z の三つの互に直角な方向に於ける単振動を合成してもリサージュの曲線が得らるゝが今こゝでは論じない。

§7 波動 流體又は固體(弾性體)内の一部に何等かの擾亂が起りその平衡状態を亂すときはその一部分は一般に振動運動を起す。而して物體を構成する各質點は相互に力を作用し互に關聯する故に一箇所に於ける振動はその箇所のみならず必ずこれに近接する部分に振動を惹き起し、こゝの振動は更に次の部分に振動を惹き起す。かくして振源に於ける振動は

次第に媒質中に傳はる。かくの如く振動の傳播する現象を波動と云ふ。波動傳播の有様は種々の場合によつて異なるが何れの場合でもそれは單に運動状態の逐次の傳達にすぎず、媒質を構成する各部分の運動は平衡状態の附近に於ける極めて小さい振動運動に過ぎないのである。

以下取り扱ふ波動はその中の最も簡単なもの即ち振源の振動は單振動であり、これに隣接する各質點は振源からの距離に比例する位相差だけ遅れて振源と全く同様の單振動をなす場合である。

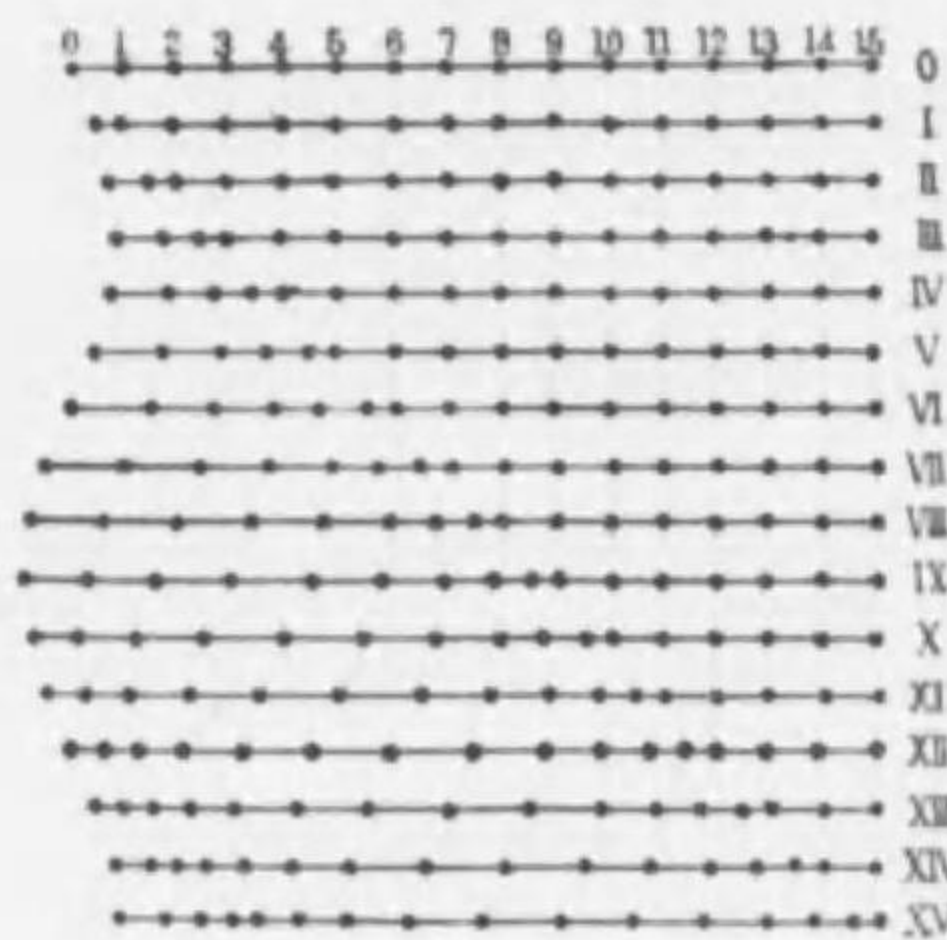
而してかゝる波動に於て媒質の質點の振動の方向と波動の進行方向とが直角のものを横波²⁾と云ふ。例へば紐の一端を固定し、他端を紐に直角に振動せしむるとき一種の波動が傳播する様な場合である。171圖は横波の傳播状態を明瞭に表してゐる。



171 圖

次に音叉を打ちこれに單振動を與ふればこれに接する空氣は音叉の單振動を受けて音叉の振動方向に單振動を起し、次第にこれを隣接する空氣に傳へる。この場合に於ける空氣の振動は明らかに波動の方向と平行である。かやうに媒質の振動方向と波動の進行方向とが一致するものを縦波³⁾と云ふ。縦波の生起及びその傳播の状態は 172圖を見れば明瞭であるが、これを 173圖の如く横波と關係せしめ

1) wave motion, Wellenbewegung
 2) transverse wave, transversale Welle
 3) longitudinal wave, longitudinale Welle



172 圖

て考へるのも便利である。即ち縦波の進行方向に一つの横波を描き、横波の各點の變位を90°廻轉して縦波に對する變位を得るのである。この際横波の變位で上方に向ふ變位に對しては縦波では(廻轉後)右向きの變位を對應せしめ、横波の下方に向ふ變位に對しては縦波では左向きの變位を對應せしめる。



173 圖

かくして生じた縦波には媒質の疎部と密部とが交互に生ずるためこれを疎密波とも云ふ。波の進行方向に於て隣接各質點の變位は疎部に於ては互に相離れ密部に於ては互に相接近する。

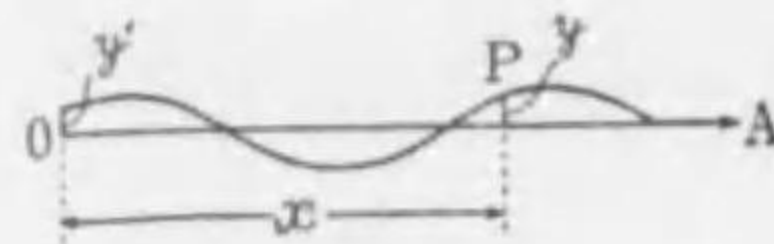
波動の傳播方向に於て同一時刻に、同一位相にある相隣接する二點間の距離を波長と云ふ。而して質點が一振動する間に波は一波長だけ進むから週期をT、波長をλ、波動の進行の速さをvとすれば

$$\lambda = vT$$

今振動數(=1/T)をnとすれば

$$v = n\lambda$$

§ 8 波動の方程式 圖に於てOAの方向にvの速さで進行



174 圖

する波動を考へて見る。原點Oに於ける質點の時刻tに於ける變位をy'とすれば

$$y' = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

次に同一時刻に於てOからxの距離にある質點Pの變位をyとすればこの點の單振動は波動がOからxだけ進むに要する時間x/vだけ位相が遅れてゐるだけであるから

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right) \\ = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots \dots \dots (1)$$

§ 9 波動の干渉及び唸り 幾つかの波動が媒質内に同時に傳播する場合には媒質中の或點に於ける振動は幾つかの振動を同時に受け、或は強められ、或は弱められ、合成波は一般に複雑な形をとる。かやうな現象を一般に波の干渉と云ふ。波の干渉の中で興味のある一つは週期が僅かに異なる二つの單波が同方向に進む場合の干渉であつてこれを特に唸りと云ふ(175, 176圖)。

今T₁, T₂を兩波の週期, λ₁, λ₂をその波長, a, vを兩波共通の振幅及び速度とすれば合成波の一點に於ける變位yは

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1} \right) + a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2} \right) \\ = a \sin 2\pi \frac{1}{T_1} \left(t - \frac{T_1}{\lambda_1} x \right) + a \sin 2\pi \frac{1}{T_2} \left(t - \frac{T_2}{\lambda_2} x \right)$$

n₁及びn₂を兩波の振動數とすれば

$$n_1 = \frac{1}{T_1}, \quad n_2 = \frac{1}{T_2}, \quad \frac{\lambda_1}{T_1} = \frac{\lambda_2}{T_2} = v$$

1) interference, Interferenz

2) beat, Schwebung

であるから

$$y = a \sin 2\pi n_1 \left(t - \frac{x}{v}\right) + a \sin 2\pi n_2 \left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$= 2a \cos \left\{ 2\pi \left(t - \frac{x}{v}\right) \cdot \frac{n_1 - n_2}{2} \right\} \sin \left\{ 2\pi \left(t - \frac{x}{v}\right) \cdot \frac{n_1 + n_2}{2} \right\}$$

$n_1 - n_2$ は n_1 若しくは n_2 に比して極めて小さいものとして

$$n_1 - n_2 = \Delta n$$

とおけば

$$n_1 + n_2 = n_1 + n_1 - \Delta n = 2n_1 (\Delta n \text{ とおく})$$

とすることが出来るから上式は

$$y = 2a \cos \left\{ \frac{2\pi \Delta n}{2} \left(t - \frac{x}{v}\right) \right\} \sin \left\{ 2\pi n \left(t - \frac{x}{v}\right) \right\} \quad (1)$$

と書くことが出来る。

$$\text{今 } 2a \cos \left\{ \frac{2\pi \Delta n}{2} \left(t - \frac{x}{v}\right) \right\} = A \dots \dots \dots (2)$$

とすれば

$$y = A \sin \left\{ 2\pi n \left(t - \frac{x}{v}\right) \right\}$$

従つて合成波はまた n を振動数とする波動ではあるがその振幅もまた $2/\Delta n$ を週期としてゆるやかに週期的に変化する。

$$\text{今 } A = 2a \cos \left\{ 2\pi \frac{\Delta n}{2} \left(t - \frac{x}{v}\right) \right\}$$

に於て

$$x = \text{const.}$$

即ち振源から一定の場所に於ては振幅は単位時間内に $\Delta n/2$ 回だけ $+2a$ だけの極大値と $-2a$ だけの極小値をとる。従つて振幅の正負を除いて考へると或點に於ける合成波の振幅は単位時間中に Δn 回 $2a$ なる値と零との間を往復することになる。かゝる合成波の消長を唸りと云ふ。而して

$$\Delta n = n_1 - n_2$$

であるから単位時間中に起る唸りの数は唸りを作る二波の振動数の差に等しい。175圖は

$$n_1 = 9, n_2 = 8, \Delta n = 1$$

の場合に生ずる唸りを圖示したものである。

次に x をも變數として考へると(2)式に於て

$$t - \frac{x}{v} = \text{const.}$$

$$\left(\text{例へば } t - \frac{x}{v} = 0, \frac{x}{t} = v \right)$$

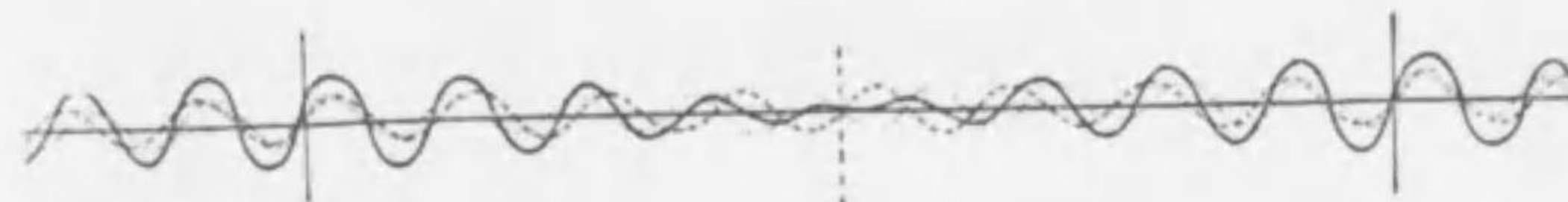
を満足するすべての x の値に對して振幅は同一の値を有し、この振幅は v の速さで進行することが分る。而してある瞬間に於て

$$\frac{2\pi \Delta n}{2} \left(t - \frac{x}{v}\right) = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

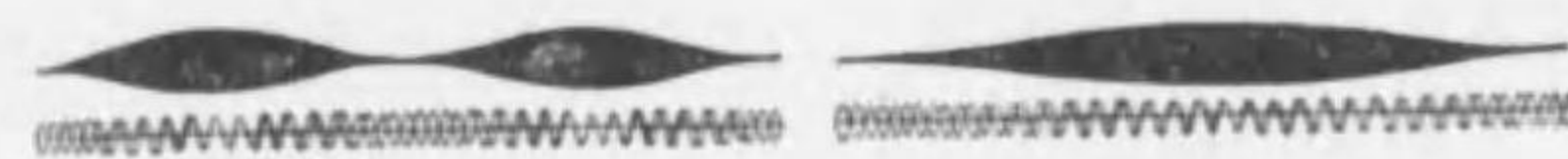
(n は整数)を満足する x に對しては振幅は常に零であるが簡單のために $t=0$ の時を考へて見ると

$$x = -(2n+1) \frac{v}{2\Delta n}$$

即ち振幅は $\frac{v}{\Delta n}$ の間隔毎に零となる。即ち $\frac{v}{\Delta n}$ の波長を有する(176圖参照)一群の波が v の速さで傳播するのである。



175 圖



176 圖

§10 群波及び群速度 前節に於ては二つの振動数の相異なる然し速度が相等しい單波の合成を考へたが、今これを少く一般化して振動数が異なると同時に傳播速度も相異なる二つの單波の合成波を考へて見る。即ち

$$y = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{v_1 t - x}{\lambda_1} \right) \right\} + a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{v_2 t - x}{\lambda_2} \right) \right\} \dots\dots(1)$$

これを書きかへて

$$y = 2a \cos \left\{ \frac{2\pi}{2} \left[t \left(\frac{v_1}{\lambda_1} - \frac{v_2}{\lambda_2} \right) - x \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right] \right\} \\ \times \sin \left\{ \frac{2\pi}{2} \left[t \left(\frac{v_1}{\lambda_1} + \frac{v_2}{\lambda_2} \right) - x \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right] \right\} \dots\dots(2)$$

今考ふる二つの単波に於て $v_1 - v_2 = Jv_1$, $\lambda_1 - \lambda_2 = J\lambda_1$ とし Jv_1 , $J\lambda_1$ は充分小さい量とするとテーラー級数により

$$\frac{v_1}{\lambda_1} - \frac{v_2}{\lambda_2} = \frac{v_1}{\lambda_1} - (v_1 - Jv_1)(\lambda_1 - J\lambda_1)^{-1} \\ \doteq \frac{v_1}{\lambda_1} - (v_1 - Jv_1) \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2} J\lambda_1 \right) \doteq \frac{\lambda_1 Jv_1 - v_1 J\lambda_1}{\lambda_1^2}$$

同様に $\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1} - \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1^2} J\lambda_1 \right) = -\frac{J\lambda_1}{\lambda_1^2}$

及び $\frac{1}{2} \left(\frac{v_1}{\lambda_1} + \frac{v_2}{\lambda_2} \right) \doteq \frac{v_1}{\lambda_1}$ $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \doteq \frac{1}{\lambda_1}$

と書き換へても大した誤は生じないから(2)式は

$$y = 2a \cos \left\{ \frac{2\pi}{2} \left(\frac{\lambda_1 Jv_1 - v_1 J\lambda_1}{\lambda_1^2} t + \frac{J\lambda_1 x}{\lambda_1^2} \right) \right\} \\ \times \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{v_1 t - x}{\lambda_1} \right) \right\} \dots\dots(3)$$

となる。上式に於ける

$$\sin 2\pi \left(\frac{v_1 t - x}{\lambda_1} \right)$$

は最初の単波と同様波長、速度は共に λ_1 , v_1 をもつがその振幅は唸りの場合と同様 x 及び t の変化に對して週期的に變化する。この場合も亦振幅は一定の間隔毎に零となり、單波は一群となつて進行するがその一群の速度は唸りの場合の様に單波の速度と同一でない。この速度を求むるのに唸りの時の様に

$$\frac{\lambda_1 Jv_1 - v_1 J\lambda_1}{\lambda_1^2} t + \frac{J\lambda_1 x}{\lambda_1^2} = 0$$

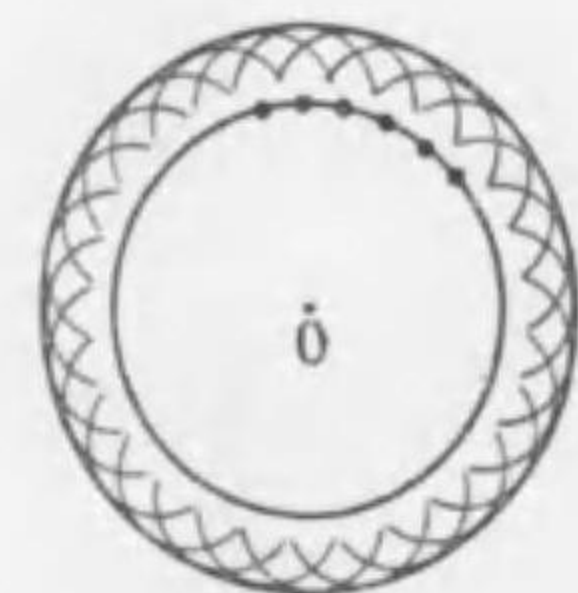
即ち $\frac{x}{t} = v_1 - \lambda_1 \frac{Jv_1}{J\lambda_1} \equiv V \dots\dots(4)$

今 Jv_1 , $J\lambda_1$ を無限に小さくとれば

$$V = v_1 - \lambda_1 \frac{dv_1}{d\lambda_1} \dots\dots(5)$$

上式によつて定義さるゝ速度を¹⁾群波の²⁾群速度と云ひ、かやうな場合に單波の速度 v_1 を³⁾位相速度と云ふ。若し單波の速度が波長に無關係であれば $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ で群速度は單波の速度と同一である。このことは空氣中の音波または真空中に於ける光波の場合には實現せらるゝが媒質が波動の分散を生ずる場合例へば水中等に於ける光波の場合は光速は波長に關係するため群速度と位相速度とは區別して考へ得るのである。また水面に生ずる波でも極めて波長の小なるものを除き波長が大きい程速度が大きい。従つて群速度は箇々の波の速度より小となり ($\frac{dv}{d\lambda} > 0$)、箇々の波は群波の後方に生じて速かに前進し、群波の前端に進む。

§11 ハイゲンス (C. Huygens) の原理 今等方性の物質の内部に波源 O があり波動は波源から速度 v を以て傳播するものとする。波動は O を中心として四方に球面をなして擴がつて行くが t 時間後には O から vt の距離にあるすべての點は皆同一の位相で振動してゐると考へられる。かやうに同一の位相で振動してゐる點を結び付けたものを⁴⁾波面と云ふ。今この波面上の各點の振動を考へて見ると



177 圖

を⁴⁾波面と云ふ。今この波面上の各點の振動を考へて見ると

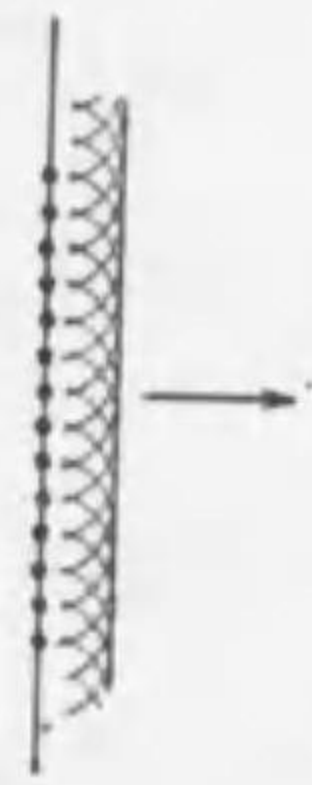
1) group wave, Gruppenwelle

2) group velocity, Gruppengeschwindigkeit

3) phase velocity, Phasengeschwindigkeit

4) wave front, Wellenfronte

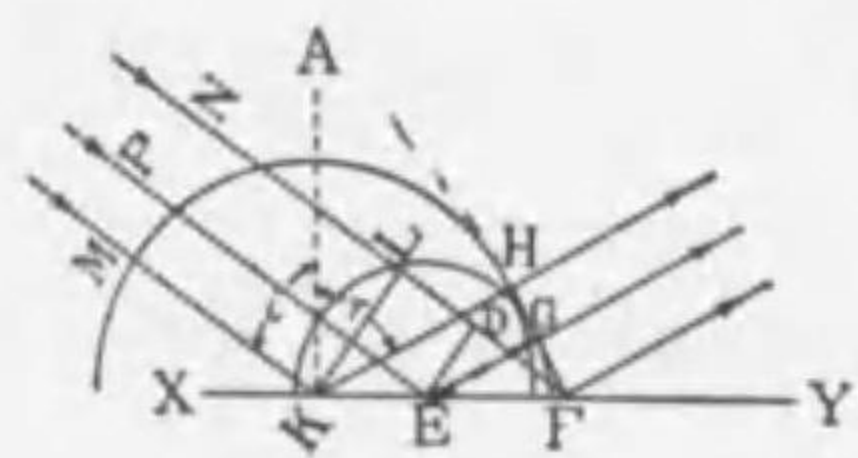
この振動は波源Oの振動とは本質的に少しも異なつたものでないからこれらの點は波源Oと同様に新しく波源となると考へても少しも差支ない。従つて或時刻後これらの



點を中心として生ずる數多の素元波¹⁾の最前點を結べば一つの球面が得られ、この面上のすべての點は皆同一の位相にあり従つてその時刻に於ける新しい波面を作ると考へられる。一般に或時刻に於ける波面の位置はその前の時刻に於ける波面の各點を波源と考へて生ずる素元波の包絡面として與へ

られる。これをハイゲンスの原理²⁾と云ふ。177圖は球面波³⁾を表し、178圖は平面波⁴⁾を表してゐるが球面波も波源から充分遠い場所では平面波と見做し得るものである。

§12 波面の反射 179圖に於てXYを二つの相異なる媒體の境界面の切口とし、MNはXYに向つて進む平面波の波面とする。



この入射波⁵⁾の波面MN上の點でMは最初にXY上のK點に達する。

この時の波面はKLで他の點は順次遅れて到達する。LがYX上のFに達する時には既にKを波源とする素元波はLFを半徑とする球面まで擴つてゐる。

これと同様にこの時刻に於てはMN間の一點PからEに進んだ波はEを中心とし、DFを半徑とする球面まで擴つてゐる。今Fから圓Kに切線を引きEからFHに垂線EGを引けばFD=EGなることは直ちに知られるからFHは圓Eに切する。

1) elementary wave, elementare Welle
2) Huygens' principle, Huygensches Prinzip
3) spherical wave, Kugelwelle
4) plane wave, Ebenewelle

5) incident wave, einfallende Welle

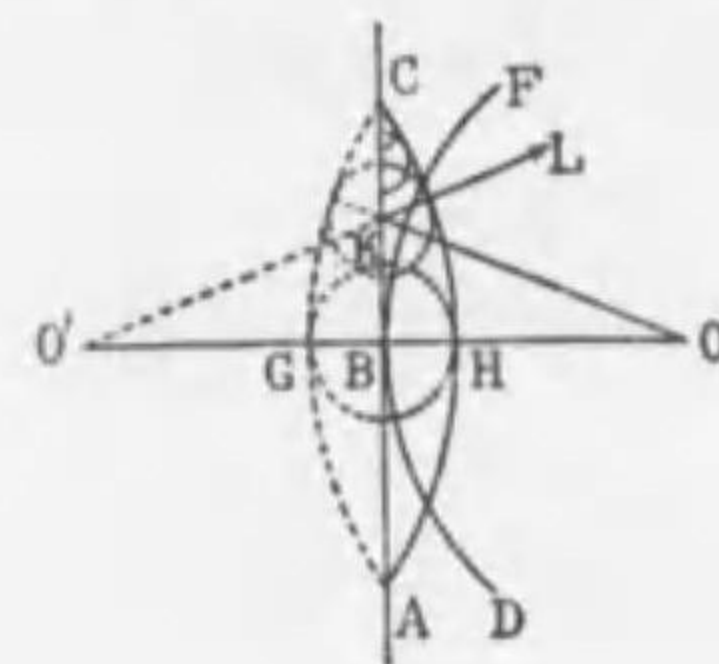
然るにEはKF上の任意の點であるから、FHはKF上の總べての點を波源として、刻々に生ずる素元波の波面に切する。而してこれら切點は總べて同一位相であるから、FHは反射波の波面である。またKに於てXYに垂線AKを引けば

$$\angle LKF = \angle HFK$$

であるから

$$\angle i = \angle r$$

即ち入射角¹⁾は反射角²⁾に等しい。180圖はOを波源とする球面波DBFが媒體の境界面ACで反射せらるゝ場合の反射波面を、ハイゲンスの原理により作圖したものである。



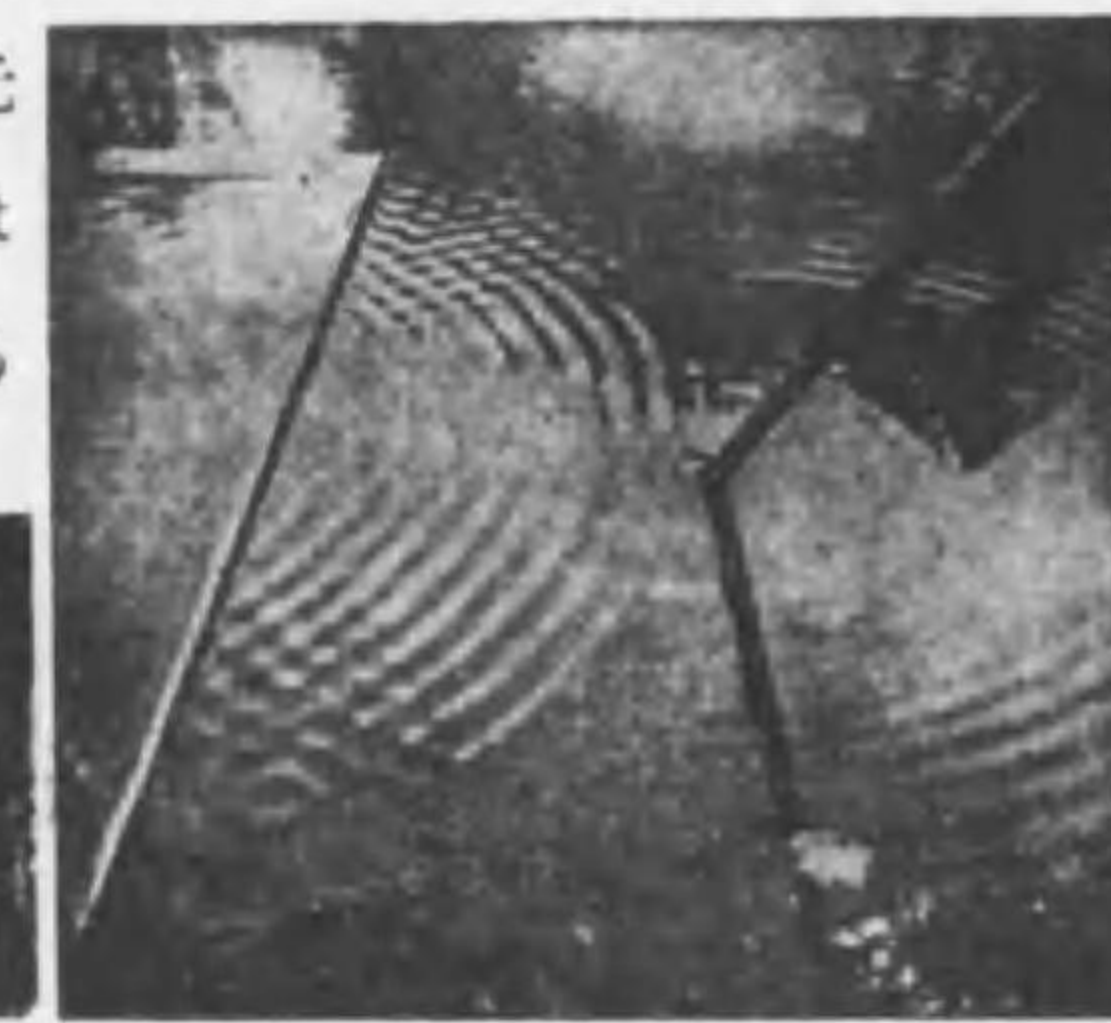
180圖

球面DBFは若し反射面ACがなければ、或る時刻にAGCの位置にくる筈であるが、ACがあるためAGCと對稱なAHCが反射せられた波面となる。即ちOに對稱なO'を波源とする様な波面であることは容易に理解せられよう。この際OKの方向へ進む入射波は、反射せられてOLの方向に進む。

181圖はハイゲンスの素元波の生ずるところを、182圖は圓形の波が平面で反射せらる



181圖

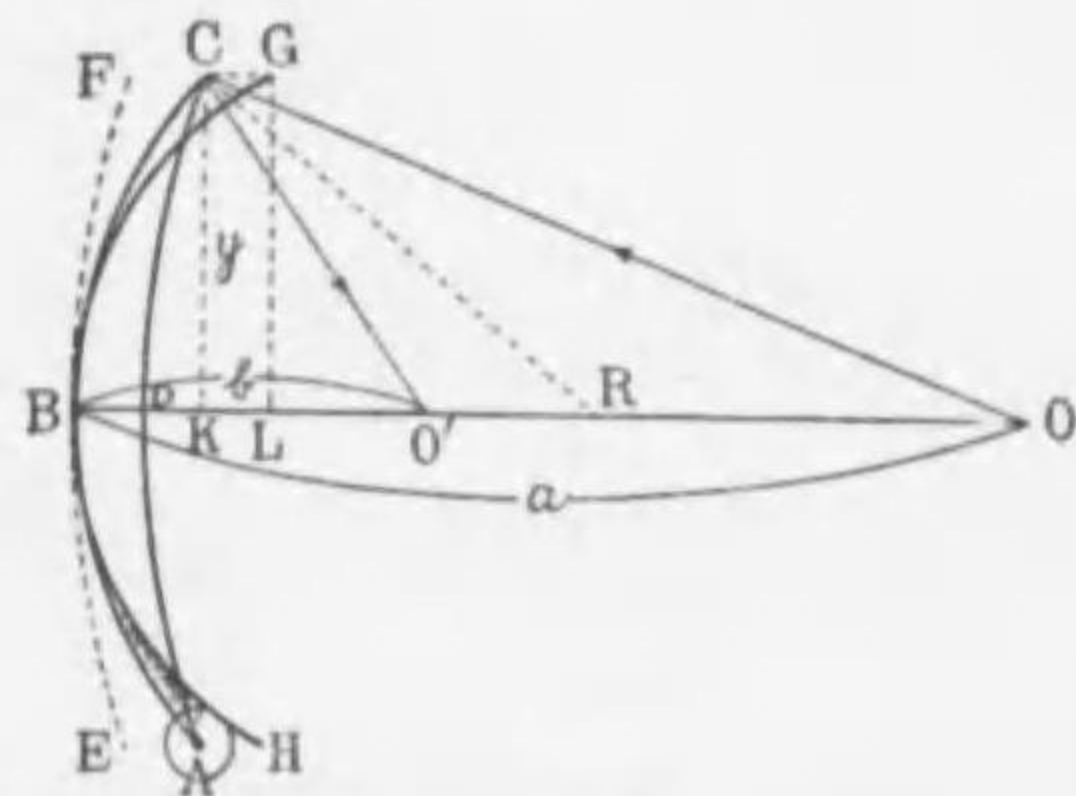


182圖

1) angle of incidence, Einfallswinkel
2) angle of reflection, Reflexionswinkel

るところを實際に示したものである。

§13 球面波の球面による反射 今Oを波源とする球面波が、Rを中心とする球面で反射せられる場合を考へる。波面がADCの位置を通過した後、若し反射面がなければ、或る時間の



183 圖

後 EBF の位置をとる筈であるが、反射面があるため A 及び C に於て先づ反射が起り、D が B まで進行する間に A 及び C の小波は、半径が BD に等しい球面になつてゐる。BC 及び BA 間の點もこの間に素元波を出し、これらの小波に切する面 HBG が反射波の波面である。今反射面の開きが球面の半径 BR に比して小さいものとして考へると、HBG は殆んど球と見て差支なく、従つて反射波は一點 O' に収斂するものと考へられる。

今 C から BO に平行線 CG を引き、且 C が B に相當に近いと考へると

$$CG \doteq BD \dots\dots\dots(1)$$

次に CK, GL を BO に垂直に引き

$$CK = GL = y, \quad RB = r, \quad OB \doteq OD = a, \quad O'B = b$$

とすれば

$$y^2 = BK(2r - BK) \doteq 2BK \cdot r \dots\dots\dots(2)$$

$$y^2 = DK(2a - DK) \doteq 2DK \cdot a \dots\dots\dots(3)$$

$$y^2 = BL(2b - BL) \doteq 2BL \cdot b \dots\dots\dots(4)$$

一方 $EL = BK + CG = BK + BD \dots\dots\dots(5)$

[(1) により]

故に (1), (2), (3), (4), (5) から $\frac{y^2}{2r} = BK$

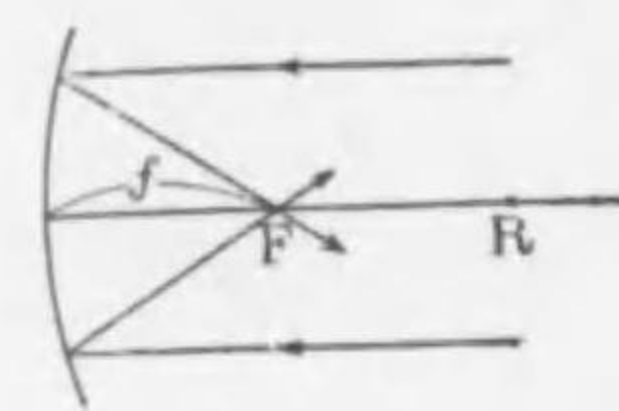
$$\frac{y^2}{2a} = BK - BD$$

$$\frac{y^2}{2b} = BK + BD$$

$$\therefore \frac{y^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} = 2BK = \frac{2y^2}{2r}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}$$

この式によつて反射面の半径 r と、波源の反射面からの距離が



184 圖

知られるときは、反射波の収斂點即ち像の位置を見出すことが出来る。

今 $a = \infty$ とすれば球面波は平面波と見做すことが出来る

$$b = \frac{r}{2}$$

となる。この時の像の位置を焦點¹⁾と云ひ、 $\frac{r}{2}$ を焦點距離²⁾と云ふ。

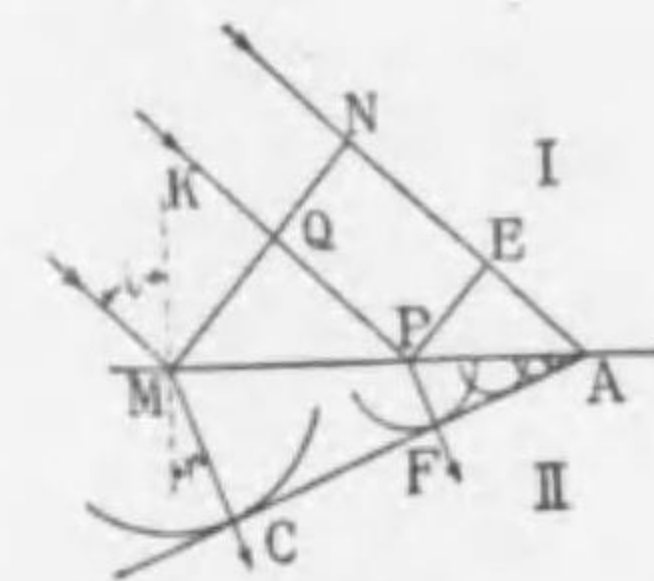
今 $\frac{r}{2} = f$ をおけば

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \quad \text{は}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

となる。

平面波を球面反射面で反射すれば反射波は焦點に収斂されるが、逆に波源が焦點にあれば反射波は平面波であることが考へられる。



185 圖

§14 平面波の屈折 波面が二つの異なつた媒體の境界面に達すると、波面の進む方向が變る。この現象を波動の屈折³⁾と云ふ。この現象は異なる媒體内に於ては、波動の傳播速度が異なることから、よく説明

1) focus, Brennpunkt

2) focal length, Brennweite

3) refraction, Brechung

することが出来る。

MA を媒體 I 及び II の境界面とする。波面 MN の M 點は、N が A に達する間に MC を半徑とする球面まで達する。而して兩媒體に於て波動の速度が異なるため、MC は NA に等しくない。この時 A から MC を半徑とする球に切平面 AC を引けば、AC は屈折波の波面になる。何となれば今 I, II の媒體内の波動の速度をそれぞれ v_0, v とすれば

$$\frac{MC}{AN} = \frac{v}{v_0} \dots\dots\dots(1)$$

次に AM 上の任意の一點 P から AC に垂線 PF を引けば

$$\frac{PF}{MC} = \frac{AP}{AM} \dots\dots\dots(2)$$

又一方 $\frac{AE}{AN} = \frac{AP}{AM} = \frac{PF}{MC}$ [(2) により]

$$\therefore \frac{PF}{AE} = \frac{MC}{AN} = \frac{v}{v_0} \dots\dots\dots(3)$$

然るに P を中心として生じた球面の半徑を r とすれば

$$\frac{r}{AE} = \frac{v}{v_0}$$

でなければならぬ。

故に(3)により

$$r = PF$$

即ち球面 P は AC に切する。而して AC 上の點は總べて同一位相であること明らかであるから、AC は屈折波の波面であり、波動は MC の方向に進む。

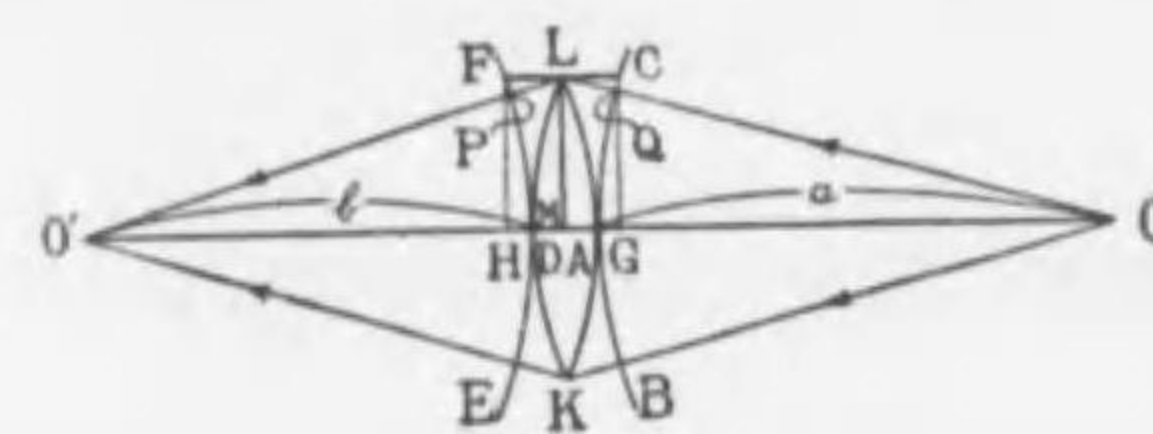
次に入射角及び屈折角を i, r (共に M に於ける法線 MK より測る) とすれば

$$i = \angle NMA, r = \angle MAC$$

$$\therefore \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\frac{AN}{AM}}{\frac{MC}{AM}} = \frac{AN}{MC} = \frac{v_0}{v} = \mu$$

即ち入射角と屈折角の正弦の比は、兩媒體の波動の速度の比に等しく入射角に無關係である。而してこの比 μ を媒體 I から II へ行く時の屈折率¹⁾と云ひ、 $v_0 > v$ の時即ち $\mu > 1$ の時は媒體 II は I より密であると云ひ、 $\mu < 1$ の時は疎であると云ふ。

§15 薄いレンズによる球面波の屈折 O を波源とする波の波面 BAC の最前端の點 A がレンズ²⁾ LK を通過して D に到達する間に、Q 點はレンズの先端に近い附近で二度屈折して P 點に達する(但し空氣中の速度 v_0 はレンズ中の速度 v より大とす)。また A と Q との間にある點は、レンズの中を通過すべき距離に應じて AD と QLP との中間の距離だけ前進するから、レンズを通過した後は波面は EDF の様になる。



186 圖

今レンズの開きを極めて小さいと考へると、EDF は球面と見做して差支なく、この中心を O' とする。また QLP は FC に殆んど等しと考へても大した誤は生じない。次に F, C, L より $O'O'$ に垂線 FH, CG, LM を引けば、波が空氣中を QLP だけ進むに要する時間は

$$\frac{QL+LP}{v_0} = \frac{FC}{v_0} = \frac{GH}{v_0} = \frac{GA+AD+DH}{v_0} \dots\dots(1)$$

この時間内に波はレンズ中を A から D に達するから

$$\frac{GA+AD+DH}{v_0} = \frac{AD}{v} \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore GA+DH = \left(\frac{v_0}{v} - 1\right)AD = (\mu - 1)AD \dots\dots\dots(3)$$

1) refractive index, Brechungsexponent

2) lens, Linse

今 KAL 及び KDL の半徑をそれぞれ r_1, r_2 とし

$$OA=a, O'D=b, CG=LM= FH=y$$

とすれば

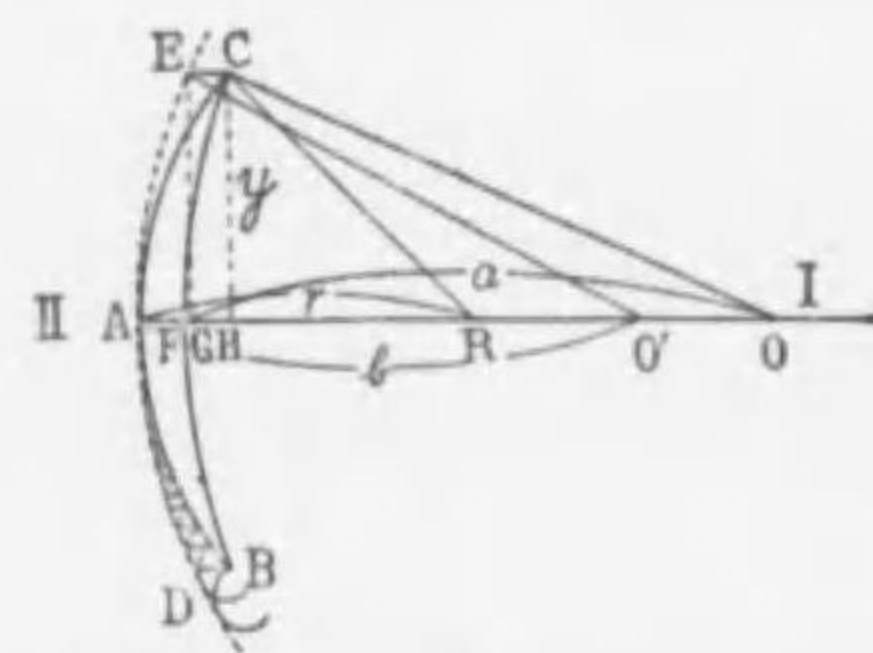
$$y^2=2a.GA, y^2=2r_1.AM, y^2=2r_2.MD, y^2=2bDH$$

$$\therefore GA+DH=\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

また $AD=AM+MD=\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(\mu-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\dots\dots\dots(4)$$

§16 球面波の球面による屈折 媒體 I 中に O を波源とする球面波の波面 BFC の點 B 及び C が最初に R を中心とする球面



187 圖

状の媒體 II の面 BAC に達する場合を考へるに、波面の F 點が媒體 II の面の A 點に達する間に B に於ける素元波は、B を中心として $AF \cdot \frac{v}{v_0}$ (v_0 はそれぞれ媒體 I, II 中の波の速さ) を半徑とする球面までに擴つて

ある。又 AB 及び AC 間の點を中心として出る素元波は、それぞれ $AF \cdot \frac{v}{v_0}$ より小さい半徑を有し、これらの總べての小波に切する面 DAE は屈折波の波面を構成する。今屈折面 BAC の開きが充分小さいとすれば、DAE は殆んど球面と見做すことが出来る。この球面の中心を O' とする。

次に C から OA に平行な CE を引けば、BAC の開きが小さい故 CE は殆んど AF/μ に等しい。又 EG, CH を OA に垂直に引き

$$GE=HC=y, AR=r, AO=FO=a, AO'=b$$

とすれば

$$y^2=2AH.r, y^2=2FH.a, y^2=2AG.b$$

又 $AG=AH-EC=AH-\frac{AF}{\mu}$

故に $AH-\frac{AF}{\mu}=\frac{y^2}{2b} \dots\dots\dots(1)$

$$FH=AH-AF$$

$$\therefore AH-AF=\frac{y^2}{2a} \dots\dots\dots(2)$$

故に (1) と (2) より

$$AH(\mu-1)=\frac{y^2}{2} \cdot \left(\frac{\mu}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

又 $AH=\frac{y^2}{2r}$ なる故に

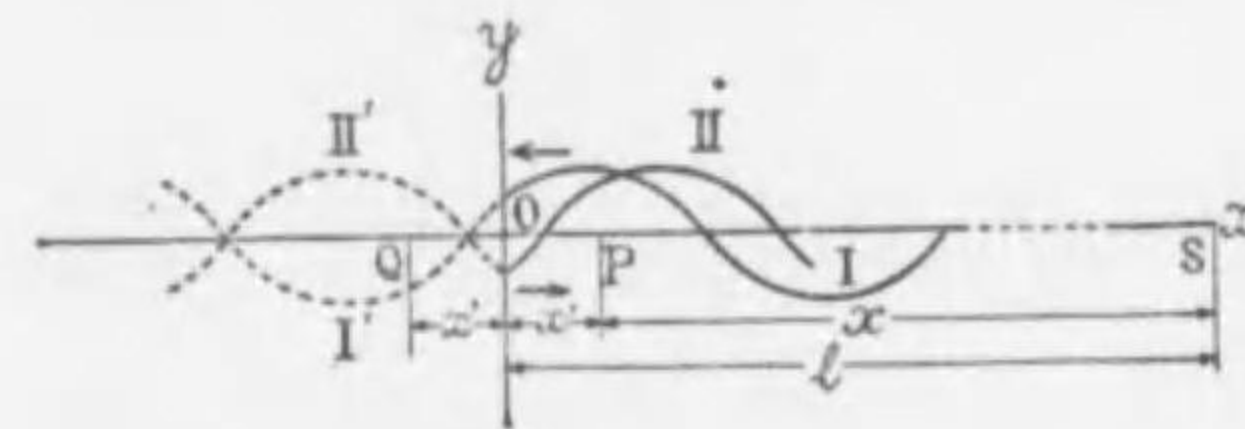
$$\frac{(\mu-1)y^2}{2r}=\frac{y^2}{2}\left(\frac{\mu}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\therefore \frac{\mu}{b}-\frac{1}{a}=\frac{(\mu-1)}{r}$$

これにより a 及び μ が既知の場合は、像の位置 b を計算し得る。

§17 波動の反射と位相との關係及び定常波

i) 固定端による反射 今波動(圖曲線 D)が Ox に沿うて波源 S より右から左へ進み、S より l の距離にある固定



188 圖

壁 Oy に達し、こゝで反射せられるとき波動の位相の變化を考へて見る。今若し Oy に固定壁がなく波動がその儘曲線 I' に連續するものと假定すれば、O 及び Q の點では波動は

$$y=a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{l}{\lambda}\right) \dots\dots\dots(1)$$

及び $y=a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{l+x'}{\lambda}\right) \dots\dots\dots(2)$

である。然し固定壁を考へるとこの壁面及びその左には波動は少しもなく、その變位は零であるべきである。この變位の零であることは次の様に考へることも出来る。即ち(1)及び(2)の波動の外に更にこれと變位の方向の反對の波動

$$y = -a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right) \dots\dots\dots(3)$$

$$y = -a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l+x'}{\lambda} \right) \dots\dots\dots(4)$$

が新に生じて(1)及び(2)の變位を打ち消すのであると (圖曲線 II'), この波が O を波源として右方に傳播するものを反射波と考へるのである。即ち曲線 II' に對稱な II はこの反射波を表はす。(3),(4)はまた

$$y = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right) - \pi \right\} = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{2} \right)$$

$$y = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l+x'}{\lambda} \right) - \pi \right\} = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l+x'}{\lambda} - \frac{1}{2} \right)$$

と書き換へ得るから、波動が固定端によつて反射せられるときは π だけの位相變化が生じたものと云ひ得る。従つて横波では山は谷、谷は山として、また縦波では密は粗、粗は密として反射することになる。

今 Ox 上の任意の一點を P とし

$$SP = x, PO = x'$$

とすれば波源 S より進む波は

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \dots\dots\dots(5)$$

で Oy によつて反射せられる波は $x+x'=l$ であるから

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) \dots\dots\dots(6)$$

(5),(6) で表はされる二波を合成すれば

$$y = 2a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{4} \right) \cos 2\pi \left(\frac{l-x}{\lambda} + \frac{1}{4} \right) \dots\dots(7)$$

この式に於て第一項は x を含まず、第二項は t を含まぬから合成波は OS 上の各點に於て異なる振幅

$$\left| 2a \cos 2\pi \left(\frac{l-x}{\lambda} + \frac{1}{4} \right) \right|$$

を有する單弦運動を表はし、その位相は單なる入射若しくは反射波の場合と異なり、或る時刻に於ては各場所(189圖 N_1N_2 間)同一である。

次に $\left| 2a \cos 2\pi \left(\frac{l-x}{\lambda} + \frac{1}{4} \right) \right|$

の變化を考へて見ると、これが零になる位置では、總べての t に對して合成波の振幅は零である。即ち

$$2\pi \left(\frac{l-x}{\lambda} + \frac{1}{4} \right) = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

を満す x 或は

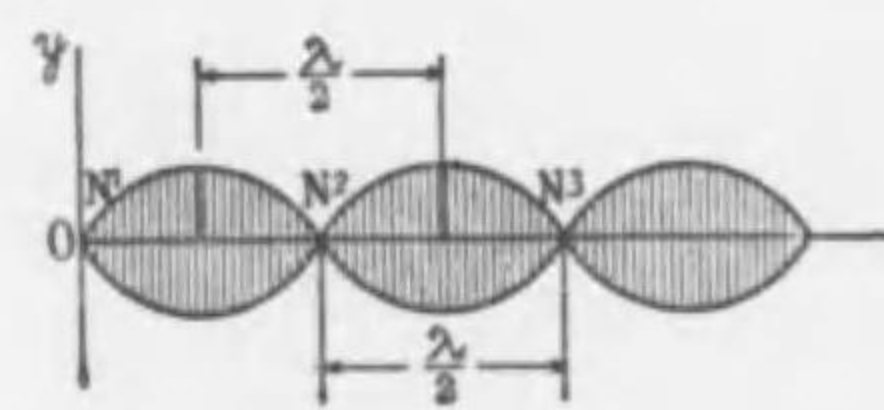
$$x = l, l - \frac{\lambda}{2}, l - \lambda, l - \frac{3}{2}\lambda, \dots$$

なる場所では質點は少しも振動しない。かやうな點を¹⁾節と云ひ、これに反して

$$x = l - \frac{\lambda}{4}, l - \frac{3}{4}\lambda, l - \frac{5}{4}\lambda, l - \frac{7}{4}\lambda, \dots$$

では振幅は最大値 $2a$ をとる。この點を²⁾腹と云ふ。節と節及び

腹と腹との距離は共に $\frac{\lambda}{2}$ であり、節と節との間の各質點は、何れも同一の位相にて單弦振動をなし、合成波は少しも進行しない。かやうな波を³⁾定常波と云ふ。



189 圖

1) node, Knot 2) loop, Bauch 3) stationary wave, stehende Welle

ii) 自由端による反射. 波動が Ox 上を右より左へ進み, 自由に振動し得る媒質の一端 Oy に達すると, このときも亦 Oy の所から反射波が生ずるが, この場合には



190 圖

から反射波が生ずるが, この場合には Oy の一端は自由に振動し得るから, この振動が直ちに反射波の振動をひき起すものと考へられる. 即ち入射波

I の連続である I' が, その儘 Oy を境として, その對稱の位置に反射波 II を生起すると見られよう. かやうに考へると, Oy の所では入射波と反射波の變位は常に同一であるから, 波は自由端の反射によつて位相が變化しないことになる. 即ち横波の場合では, 山は山, 谷は谷として反射し, 縦波では密は密, 粗は粗として反射する.

反射の式は (6) と同様にして

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{2l-x}{\lambda} \right)$$

これと入射波

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

とを合成すると

$$y = 2a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right) \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda}$$

これはまた一つの定常波でその節は

$$2\pi \frac{l-x}{\lambda} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

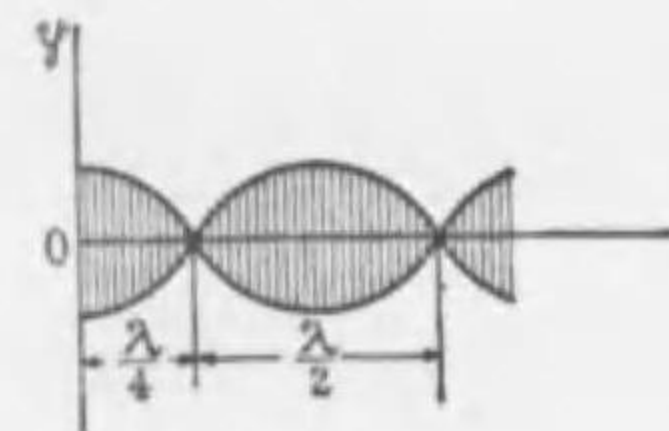
或は
$$x = l - \frac{\lambda}{4}, l - \frac{3}{4}\lambda, l - \frac{5}{4}\lambda, \dots$$

の所即ち $\frac{\lambda}{2}$ の間隔をもつて生じ, 腹は

$$x = l, l - \frac{\lambda}{2}, l - \lambda, \dots$$

の所に生ずる. 自由端は常に腹となり, これより $\frac{\lambda}{2}$ の間隔毎

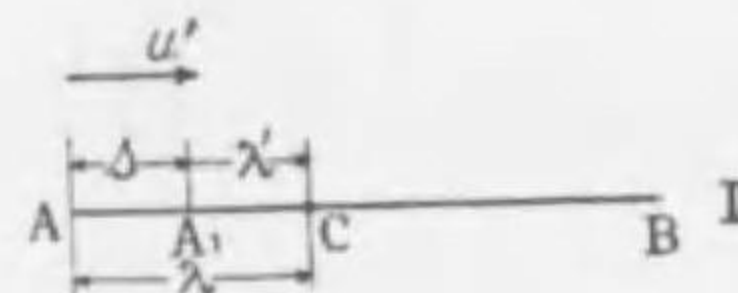
に腹が生ずる.



191 圖

以上の固定端及び自由端に於ける波動の反射に關する諸關係は, 必ずしも固定端及び自由端でなくても, 波動が粗な媒質より密な媒質に對して進むときは, 反射に際し π の位相差を生じ, 密な媒質より粗な媒質に對して進むときは, 反射に際しては, 位相差が起らない.

§18 ドップレルの効果(又は原理) 波源と観測者とが相對的に運動してゐるときには, 観測者の認める振動數と波源の振動數とは異なる.



192 圖

この現象を **ドップレルの効果** と云ふ. 波動の傳播速度を v とし, 波源と観測者との相對速度のないときの波源の振動數及び波長を n 及び λ とし, 相對速度のあるときに観測者の認める振動數及び波長を n' 及び λ' とする.

今 n と n' との關係を求めるのに次の三つの場合に分けて考へて見る.

i) 観測者 B が速度 u を以て運動し, 波源 A が靜止する場合 (192圖I) 観測者 B が若し B 點に t 時間だけ靜止してゐるものとするれば, この間に B は nt だけの數の波を受ける筈であるが, これが運動する時は (近づく場合) B が t 時間内に移動した距離 $BB_1 = ut$ 内に含まれる波の數だけ餘分に受け取る筈である. 即ち観測者が t 時間内に受けとる波數 $n't$ は

1) Doppler's effect, Dopplerscher Effekt

Handwritten notes: $n' = n \frac{v}{v-u}$

$$n't = n't + \frac{vt}{\lambda}$$

或は $v = \lambda n$ であるから

$$n' = n + n \frac{u}{v} = n \left(1 + \frac{u}{v} \right) \dots \dots \dots (1)$$

BがAから遠ざかる場合には

$$n' = n \left(1 - \frac{u}{v} \right) \dots \dots \dots (2)$$

ii) 波源Aが速度 u' を以て運動し、観測者が静止してゐる場合 II 圖に於て波源AがBに近づく場合には、時間の始めに假りに音波の密部がAを出發して、一週期Tの後にCが密部であるとすると、Aは運動するからT時間後には

$$AA_1 = u'T = s$$

の位置にあつて、この場所に於て第二の密部を發することになる。即ち観測者には波長 $\lambda = AC$ から $\lambda' = A_1C$ まで短くなって認められる。これに対する振動数を n' とすれば v は不変であるから

$$v = n\lambda = n'\lambda'$$

$$\text{従つて } n' = n \frac{\lambda}{\lambda'} = n \frac{\lambda}{\lambda - s} = n \frac{vT}{vT - u'T} = n \frac{v}{v - u'} \dots \dots \dots (3)$$

AがBから遠ざかる場合には

$$n' = n \frac{v}{v + u'} \dots \dots \dots (4)$$

この最後の二つの式は u' が v に比して小さいときは夫々

$$n' = n \left(\frac{1}{1 - \frac{u'}{v}} \right) \doteq n \left(1 + \frac{u'}{v} \right)$$

及び $n' = n \left(\frac{1}{1 + \frac{u'}{v}} \right) \doteq n \left(1 - \frac{u'}{v} \right)$

と書き得るから、この場合では i) 及び ii) は著しく異らない。



iii) 観測者及び波源が共にそれぞれ u 及び u' の速度で運動する場合 今両者が互に向ひ合つて接近する場合を考えると、先づ波源の運動によつてその振動数は $n \frac{v}{v - u'}$ となり、この振動数は更に観測者の運動によつて $\left(1 + \frac{u}{v} \right)$ 倍されるから結局観測者には

$$n' = n \frac{v}{v - u'} \cdot \left(1 + \frac{u}{v} \right) = n \frac{v + u}{v - u'}$$

が受けられる理由である。

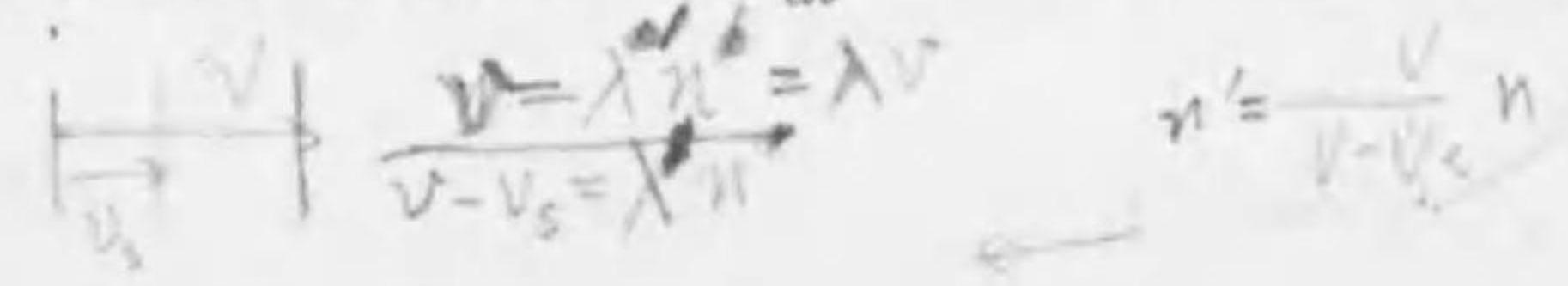
ドップレル効果は音響學のほか更に光學或は星學に於ても重要な意味をもつものである。

§ 19 減衰振動 單振子に働く力が單に平衡の中心に向つて働き、その大きさが平衡の中心から振子の變位に比例する力であつて、それ以外に何等の力も作用しない限り、振子は永久單弦運動をする筈である。然し單に振子のみならず自然界に起る種々の振動は、時間の経過と共に次第に振幅を減じ、遂にある平衡の位置に靜止するに到るものである。かやうに振幅の次第に減ずる原因は、振動體系内に於ける摩擦或は空氣の抵抗等が、常に振動方向と逆方向に働いて、この振動を妨害することにある。この抵抗力は振動體の速度と密接な關係があるが、この關係は一般には甚だ複雑である。以下抵抗力が速度に比例する簡単な場合を考へて見る。事實空氣の抵抗は物體の速度のあまり大ならざる間は速度に比例するものである(第六章 §27 参照)。

今質量 m の質點が一直線上を上を假定した様な抵抗力を受けつゝ運動するものとし、平衡の中心からの變位を y とすれば、力の關係を表はす式は單弦運動を表はす式

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \quad (k > 0)$$

に、速度に比例する抵抗力 $-k' \frac{dy}{dt}$ を付け加へたものである。



$$\text{即ち } m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - k' \frac{dy}{dt} \dots \dots \dots (1)$$

k' は抵抗力の大小を表はす常數で, 速度と抵抗力は常に方向反對であるから, k' は常に正でなければならぬ.

(1)式即ち

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + k' \frac{dy}{dt} + ky = 0$$

に於て t の函數としての y の形を知るために

$$y = e^{pt}$$

と置けば

$$\frac{dy}{dt} = pe^{pt} = py, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = p^2 e^{pt} = p^2 y$$

これを上式に入れて

$$y \left(p^2 + \frac{k'}{m} p + \frac{k}{m} \right) = 0$$

$$\therefore p^2 + \frac{k'}{m} p + \frac{k}{m} = 0$$

$$\therefore p = -\frac{k'}{2m} \pm \sqrt{\frac{k'^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

即ち p を上の様に定めて置けば $y = e^{pt}$ は(1)の解である. この p の値に對して三つの場合が起る. 即ち

i) $\frac{k}{m} > \frac{k'^2}{4m^2}$ この場合は p は複素數で

$$p = -\frac{k'}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k'^2}{4m^2}}$$

今 $\frac{k'}{2m} = b, \quad \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k'^2}{4m^2}} = \omega$ と置けば

$$p = -b \pm i\omega$$

従つて(1)の解は

$$e^{-bt+i\omega t}, \quad e^{-bt-i\omega t}$$

即ち $e^{-bt}(\cos \omega t + i \sin \omega t), \quad e^{-bt}(\cos \omega t - i \sin \omega t)$

この二つの解で實數部分及び虚數部分は別々に(1)を満足する

解であることは, 微分して(1)に代入すれば直ちに分る. 即ち

$$y_1 = e^{-bt} \cos \omega t, \quad y_2 = e^{-bt} \sin \omega t$$

は何れも解であり, 且 A, B を任意の二つの常數とすれば

$$y = Ae^{-bt} \cos \omega t + Be^{-bt} \sin \omega t \dots \dots \dots (2)$$

も亦解であることは上と同様にして分る. A, B は任意であるから

$$A = C \cos \delta, \quad B = -C \sin \delta$$

と置けば

$$y = Ce^{-bt} \cos(\omega t + \delta) \dots \dots \dots (3)$$

と書き改めることが出来る.

この振動は週期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{k'^2}{4m^2}}} \dots \dots \dots (4)$$

を有する振動で, 單弦運動 $C \cos(\omega t + \delta)$ と異なる所は振幅が一定でなく, 時間と共に減少する因子 e^{-bt} を有する爲め次第に減少することである. かやうな振動を減衰振動¹⁾と云ふ. 而してその減少の遲速は $b = \frac{k'}{2m}$ 即ち外部の抵抗の大小によつて定められることは勿論である.

次に(3)式に於ける C, δ は任意の常數であるが, これを決定するのに先づ(3)式を t で微分して速度を求めれば

$$\frac{dy}{dt} = -Ce^{-bt} \{ \omega \sin(\omega t + \delta) + b \cos(\omega t + \delta) \} \dots \dots (5)$$

今 $t=0$ の時に $y=y_0$ であり, $\frac{dy}{dt}=0$ とすれば(3), (5)より

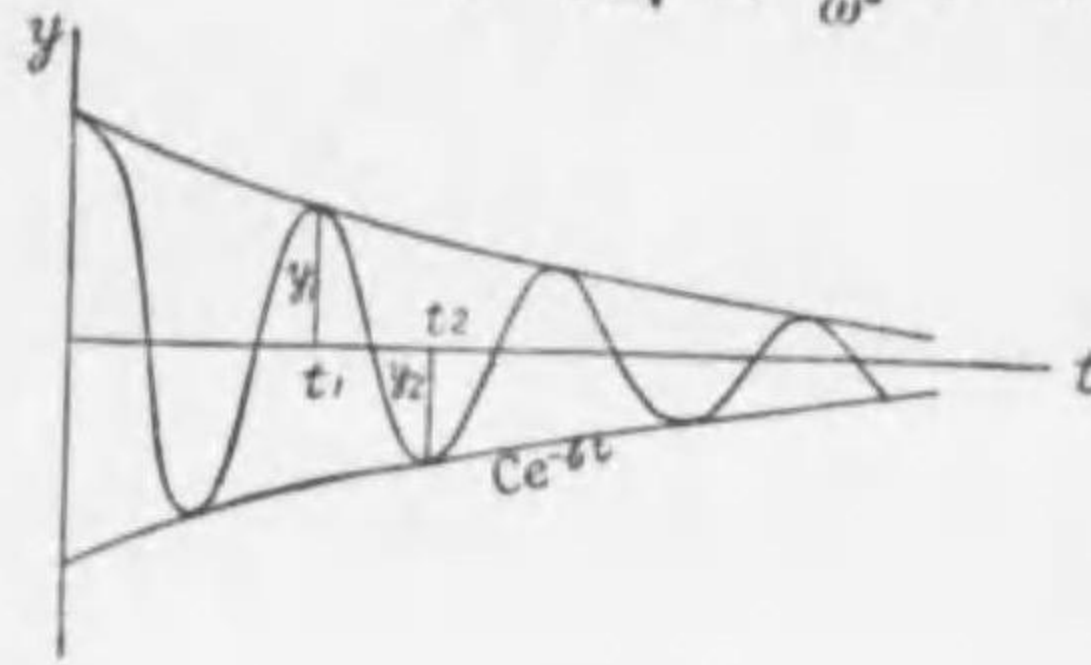
$$y_0 = C \cos \delta, \quad 0 = -C(\omega \sin \delta + b \cos \delta)$$

$$\text{即ち } C = y_0 \sqrt{1 + \frac{b^2}{\omega^2}}, \quad \tan \delta = -\frac{b}{\omega}$$

依つて完結せられた質點の變位を表はす式は

1) damped oscillation, gedämpfte Schwingung

$$y = y_0 \sqrt{1 + \frac{b^2}{\omega^2}} e^{-bt} \cos \left[\omega t + \tan^{-1} \left(-\frac{b}{\omega} \right) \right] \dots (6)$$



193 圖

この式を圖示すれば 193 圖のようになる。今(5)に於て $t=0$ 以外に速度の零になる時刻を t_1 とすれば(5)より $\tan(\omega t_1 + \delta) = -\frac{b}{\omega} \dots (7)$

t_1 が上式を満足すれば $t_1 + \frac{\pi}{\omega} = t_2$ の時も上式が満足せられる。今上の引きつゞいて速度を零ならしむる時刻 t_1, t_2 に對する質點の變位を y_1, y_2 (絶対値のみを考ふ) とすれば

$$\begin{aligned} |y_1| &= |Ce^{-bt_1} \cos(\omega t_1 + \delta)| \\ |y_2| &= |Ce^{-bt_2} \cos(\omega t_2 + \delta)| \\ &= |Ce^{-b(t_1 + \frac{\pi}{\omega})} \cos(\omega t_1 + \delta)| \\ \therefore \frac{|y_2|}{|y_1|} &= e^{-b\frac{\pi}{\omega}} \dots (8) \end{aligned}$$

かやうに相續いた二つの振幅の比は常に一定の比を有する。即ちこの一定の比を以つて振幅は次第に減少する。

上式の對數をとり

$$\log |y_2| - \log |y_1| = -b\frac{\pi}{\omega} = -b\frac{T}{2} \dots (9)$$

この量を對數減衰¹⁾と云ふ

ii) $\frac{k}{m} < \frac{k'^2}{4m^2}$ これは抵抗が充分大きい場合で p は實數である。今

$$\begin{aligned} -b_1 &= -\frac{k'}{2m} + \sqrt{\frac{k'^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \\ -b_2 &= -\frac{k'}{2m} - \sqrt{\frac{k'^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \end{aligned}$$

と置けば $b_1 < b_2$ で $e^{-b_1 t}, e^{-b_2 t}$ は共に(1)の解で更に A, B を

1) logarithmic decrement, logarithmische Dekrement

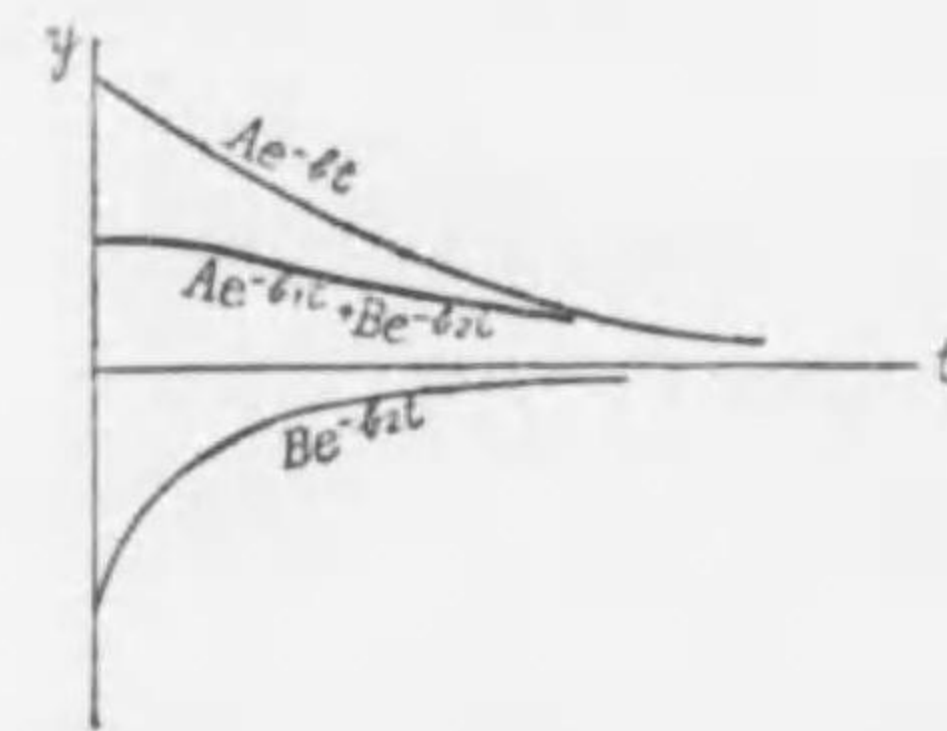
任意の常數とすれば

$$y = Ae^{-b_1 t} + Be^{-b_2 t} \dots (10)$$

も亦(1)を満すことが分る。而して $b_1 < b_2$ であるから(10)の第二項は第一項に比して速かに減少する(194圖)。次に A, B を決定するために $t=0$ の時 $y=y_0, \frac{dy}{dt}=0$ とすれば直ちに

$$A = \frac{b_2 y_0}{b_2 - b_1}, \quad B = -\frac{b_1 y_0}{b_2 - b_1}$$

を得る。この場合では時間の経過と共に質點は平衡の状態に



194 圖

近づくのみで週期的の運動をしなから非週期運動¹⁾と云ふ。

iii) $\frac{k'^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$ この場合は二つの p の値は一致して $b_1 = b_2$ となるが直ちに相等しいとせずその差は極めて小さいものと考え

(10)式を

$$y = \{A + Be^{-(b_2 - b_1)t}\} e^{-b_1 t}$$

と書き改め、次に b_2 が限りなく b_1 に近づいた極限を求めると

$$e^{-(b_2 - b_1)t} \doteq 1 - (b_2 - b_1)t$$

となるから

$$y = (A+B)e^{-b_1 t} - B(b_2 - b_1)t e^{-b_1 t}$$

今 $A+B=A', -B(b_2 - b_1)=B'$ と置けば

$$y = A'e^{-b_1 t} + B'te^{-b_1 t} \dots (11)$$

茲に $e^{-b_1 t}$ 及び $te^{-b_1 t}$ が共に(1)を満足することは直ちに驗することが出来る。

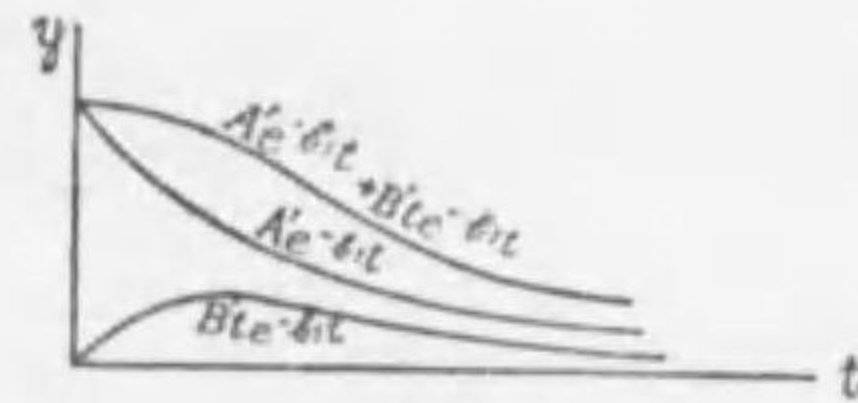
今 $t=0$ の時に $y=y_0$ で $\frac{dy}{dt}=0$ とすれば

$$A' = y_0, \quad 0 = -b_1 A' + B'$$

1) aperiodic motion, aperiodische Bewegung

∴ B' = b_1 y_0

B'te^{-b_1 t} = b_1 y_0 t e^{-b_1 t} は始めは時間と共に増加するが,ある時刻を



195 圖

経過した後は, t による増加よりも e^{-b_1 t} による減少の方が大きいため 遂に 195 圖に示す如く,次第に減少する. この場合も亦 ii)と同様非週

期減衰運動である.

§ 20 共振 質點に働く力が質點の平衡の位置よりの距離

に比例する場合質點は單弦運動をするが,今この力の外に更に



外部から週期的に變化する力が作用する場合には,その力のために質點は稍,複雑な振動をすることになる. 例へば質點 m (196 圖)が A に固定してあるバネによつて,上下に單弦運動をなすと同時に A 自身がまた上下に別の單弦振動を行ふ様な場合である. 今外部から作用する力が n' を振動數として變化するものとし

A sin 2πn't

とすれば,力の關係を表はす式は

m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky + A sin 2πn't \dots\dots\dots (1)

この式に於て

y = \frac{1}{4π^2 m(n^2 - n'^2)} A sin 2πn't + C sin(2πnt + δ) \dots\dots\dots (2)

として y を t につき微分して上式に代入すればこの y が(1)を満すことが分る.

但し n = \frac{1}{2π} \sqrt{\frac{k}{m}}

であり, C 及び δ は任意の常數である.

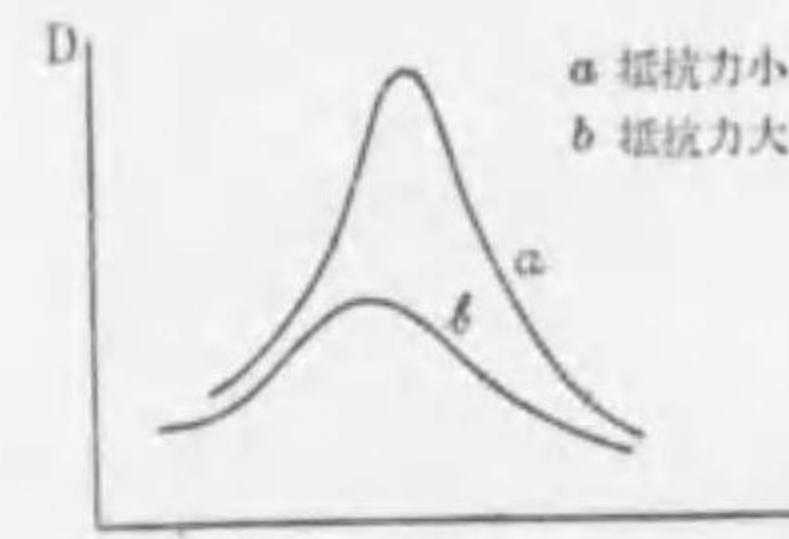
(2)に於ける第二項 C sin(2πnt + δ) は外部から作用する力に

は全く關係なく振動數 n を有つて振動する振動系固有の振動を表はし,第一項

\frac{1}{4π^2 m(n^2 - n'^2)} A sin 2πn't

は外力と同じ振動數を有つて振動する項で振幅は外力の振幅に比例した外力の振動數にも關係する. この際第二項によつて表はさるゝ振動を自由振動¹⁾又は固有振動²⁾と云ひ,第一項によるものを強制振動³⁾と云ふ. 強制振動の振幅は外力の振動數 n' が自由振動の振動數 n に近づくと極めて大きくなり, n' = n のときには無限大になる(例へば振動系を破壊するに到る). かやうな現象を共振⁴⁾或は共鳴と云ふ.

上述の振動に於ては外部から抵抗力が作用しない場合を考へたが,實際に於ては前節に述べた様な抵抗力が作用する結果,自由振動は次第に減衰し,ある時間の後には消失してたゞ強制



197 圖

振動だけが残る. この場合強制振動の振幅は計算の結果次の様になる.

D = \frac{A}{4π^2 m \sqrt{(n^2 - n'^2)^2 + \frac{k'^2 n'^2}{4π^2 m^2}}}

こゝに k' は外部の抵抗の大小を表はす常數である. この場合 n' がほゞ n に等しいとき D は極大となり,矢張り共振の現象を生ずるが,抵抗力が作用するため D は無限に大きくはならない. (分母が零になることはない). D と n' との關係を圖示すれば大體 197 圖の様になる.

(1)から(2)を導くことは微分方程式に關する多少の知識を必要とす

1) free oscillation, freie Schwingung 2) proper oscillation, Eigenschwingung
3) forced oscillation, erzwungene Schwingung 4) resonance, Resonanz

る故これを述べない。不十分ながらた x, y を微分して原式が満たされることだけに止めた。

強制振動、共振は普通の力学系ばかりでなく電気振動、原子による光の吸収等に甚だ重要な役目をする。

§21 今まで取り扱った共鳴では振動体 A にその固有振動に等しい振動数を有する週期的の力を及ぼす物体 B を考へ、A の振動は B に影響を及ぼさない事とした。

本節では A と B とが對等で、A が B に作用すると同時に B が



18 圖

また A に作用する場合を考へる。質量 m の二つの球を長さ l の糸に結び、この糸を軽いバネで連結し一方を振れば他方も亦振り始める。

今二本の糸の鉛直の方向となす角を θ_1, θ_2 とし、バネの単位長の伸縮に対する弾力を k とすれば、 θ_1, θ_2 が餘り大きくない間はバネの伸縮は

$$l\theta_2 - l\theta_1$$

故にバネの振子に及ぼす力は

$$kl(\theta_2 - \theta_1)$$

また θ_1 が小さくて $\sin \theta_1 \doteq \theta_1$ の場合は重力による力は $-mg\theta_1$ であるから A についての運動の方程式は

$$ml \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = -mg\theta_1 + kl(\theta_2 - \theta_1) \dots \dots \dots (1)$$

次に B については弾力の方向は A に対する方向と反對であるから

$$ml \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = -mg\theta_2 - kl(\theta_2 - \theta_1) \dots \dots \dots (2)$$

(1)+(2) を作れば

$$l \frac{d^2}{dt^2} (\theta_1 + \theta_2) = -g(\theta_1 + \theta_2) \dots \dots \dots (3)$$

$$\therefore \theta_1 + \theta_2 = C \cos(2\pi n_1 t + \delta) \dots \dots \dots (4)$$

但し $n_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \dots \dots \dots (5)$

(1)-(2) を作れば

$$l \frac{d^2}{dt^2} (\theta_1 - \theta_2) = -\left(g + 2\frac{kl}{m}\right) (\theta_1 - \theta_2) \dots \dots \dots (6)$$

$$\theta_1 - \theta_2 = D \cos(2\pi n_2 t + \delta') \dots \dots \dots (7)$$

但し $n_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} \dots \dots \dots (8)$

故に(4)と(7)より

$$\theta_1 = \frac{1}{2} [C \cos(2\pi n_1 t + \delta) + D \cos(2\pi n_2 t + \delta')] \dots \dots (9)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} [C \cos(2\pi n_1 t + \delta) - D \cos(2\pi n_2 t + \delta')] \dots \dots (10)$$

この二式に於て C, D 及び δ, δ' は任意の常數であるから簡單の爲めに $C=D$, 及び $\delta=\delta'=0$ とすれば

$$\theta_1 = C \cos \pi(n_2 - n_1)t \cos \pi(n_1 + n_2)t \dots \dots \dots (11)$$

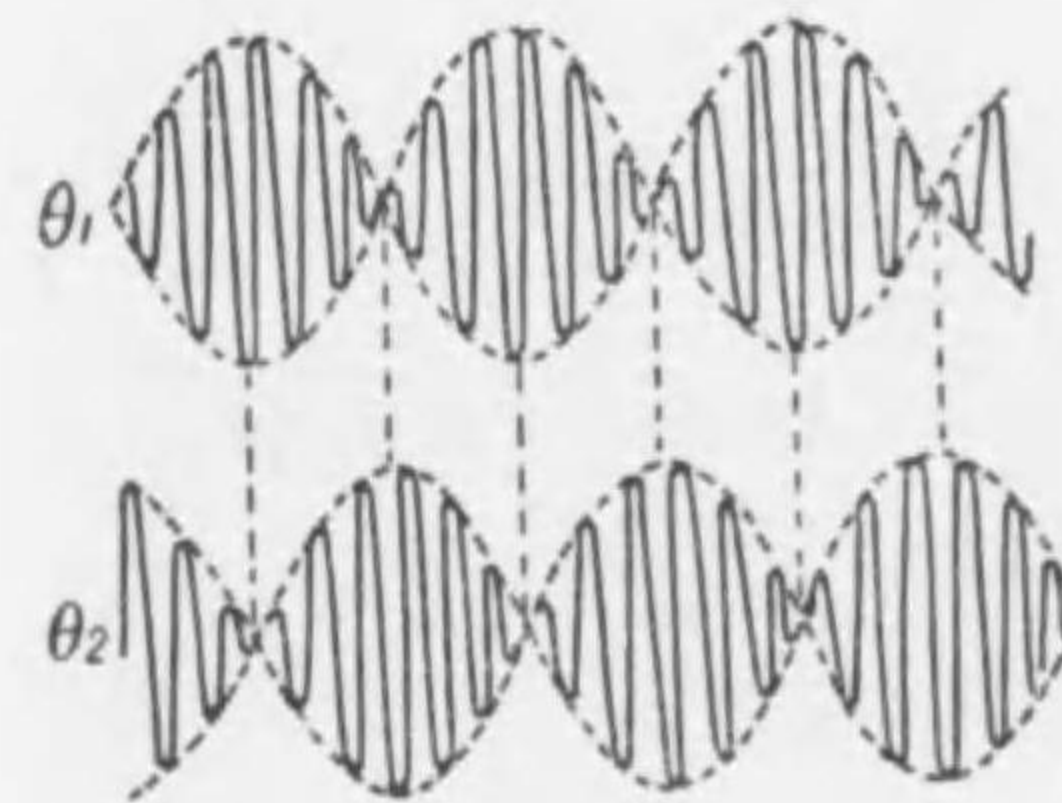
$$\theta_2 = C \sin \pi(n_2 - n_1)t \sin \pi(n_1 + n_2)t \dots \dots \dots (12)$$

k が餘り大きくなければ(5)と(8)より知らるゝ通り $n_2 - n_1$ は小さい、また(11), (12)に於て

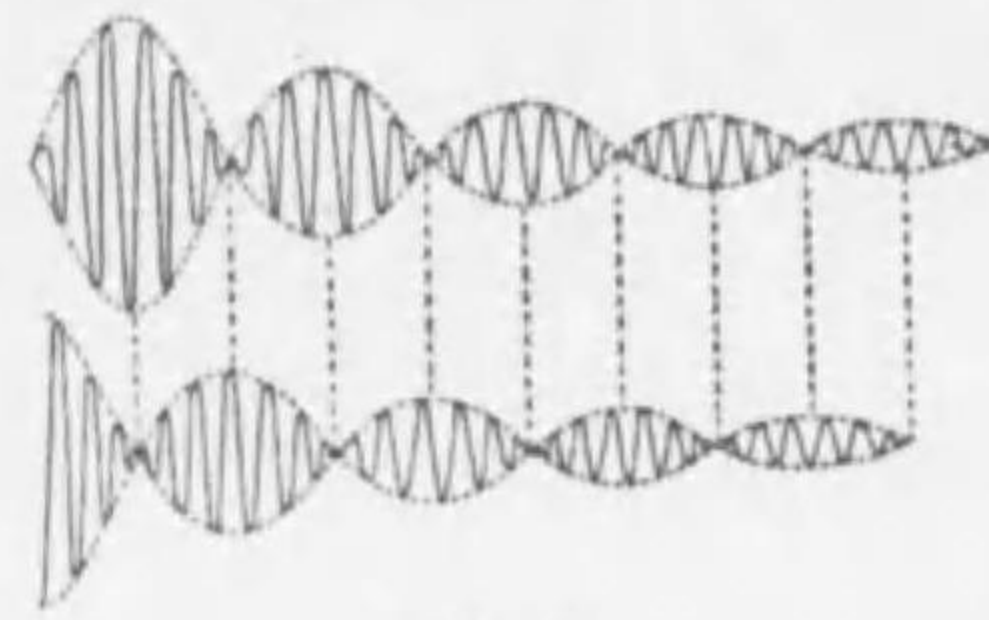
$$\cos \pi(n_1 + n_2)t = \cos 2\pi \frac{(n_1 + n_2)}{2} t$$

$$\sin \pi(n_1 + n_2)t = \sin 2\pi \frac{(n_1 + n_2)}{2} t$$

と書けば θ_1, θ_2 は振動數 $\frac{n_1 + n_2}{2}$ なる單振動の振幅が靜かに週期的に變化することを表はす。圖はこの關係を示すものである。先づ A が振動するとこの振動は次第に B に移り A は遂に靜止し、次に B の振動は再び A



19 圖

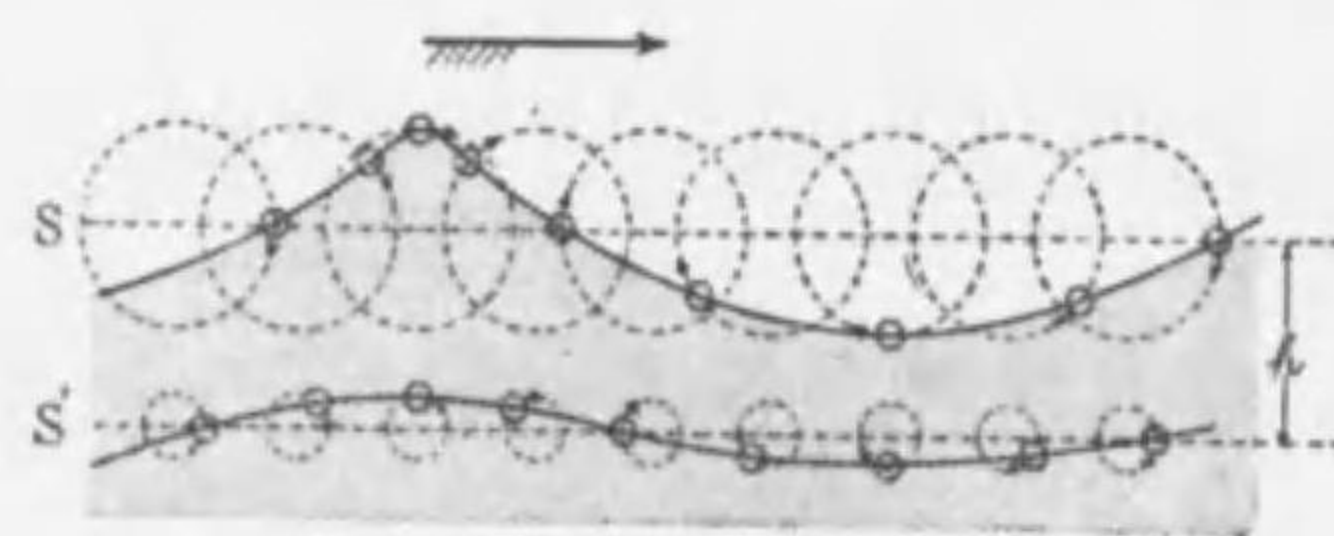


200 圖

に移る。かく A, B の振動振幅は交互に消長する。

若しこの振動に空氣等の抵抗力が働き振動が減衰するときは左圖の示す通りになる。

§22 水の波 理論及び實驗の結果によれば水の自由表面 S 及びこれに平行な平面 S' 上の各質點は波の進行方向を含む鉛



201 圖

直平面内に於て順次一定の位相差を以て圓運動をなし、その結果圖に示す様な水波を形成する。

計算の結果によれば水波の速度は

$$V = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi} \left\{ g + \frac{T}{\rho} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right\}} \dots\dots\dots(1)$$

で與へられる。茲に g は重力の加速度, T は表面張力の強さ, ρ は水の密度, λ は水波の波長である。

この際波長が大きく従つて波面の曲率が小さく、そのため表面張力を無視し得る場合では(1)式の第二項を第一項に比し省略し

$$V = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} \dots\dots\dots(2)$$

となる、かやうな波を¹⁾重力波と云ふ。

これに反し波長が小さく、波面の曲率が大き、表面張力の影響が重力によるものよりも大であつて重力の影響を無視し得る場合では

1) gravity waves, Schwerwellen

$$V = \sqrt{\frac{2\pi T}{\lambda \rho}} \dots\dots\dots(3)$$

となる、かやうな波を¹⁾漣と云ふ。

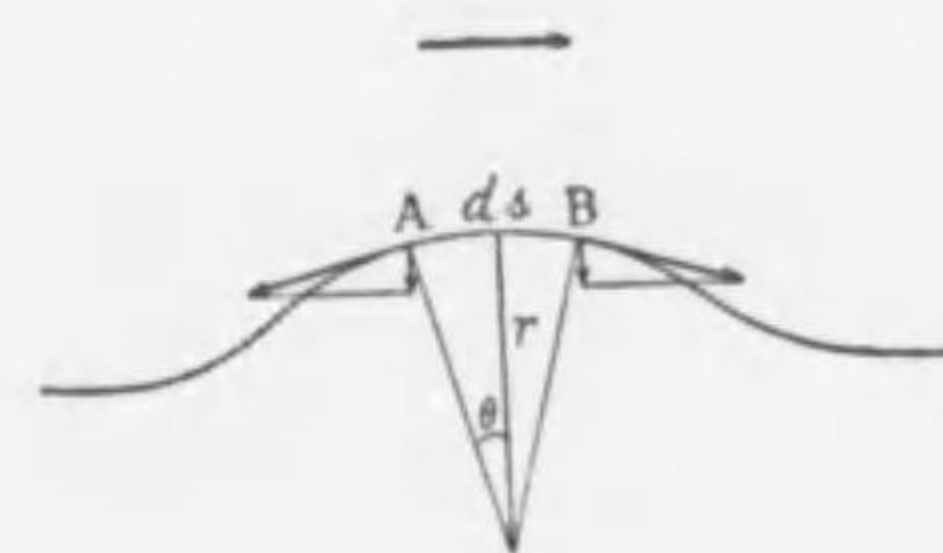
$\lambda < 3mm$ の時はほゞ漣と考へてよく、 $\lambda > 10cm$ の時は重力波と考へてよろしい。 $5mm < \lambda < 10cm$ の範圍では表面張力と重力とが共に波の形成にあづかると考ふべきである。

尙水の自由表面から h の(201圖参照)深さにある質點の振幅を a とすれば

$$a = a_0 e^{-2\pi h/\lambda}$$

であることが計算される。茲に a_0 は水の最上層の振幅である。この式により深さの増加に對して極めて急に振幅が減少することが分る。漣の場合では波動は殆んど水面の薄層に限られてゐると考へていゝ位である。

§23 絃の横振動の傳播速度 圖に於て絃の波動が左から右に向つて v の速さで進むものとする。この時絃全體に(波形を



202 圖

變へずに)右から左に向ふ速度を與へると、波動は空間に固定した定常的のものとなり絃がこの波形を通過することになる。かやうに考へた絃に於て絃の一部分 AB の運動を考へる、AB が微小

なる間は AB は圓運動をなし、その求心力は絃の張力に起因しその曲率中心に向ふ分力に等しい筈である。

故に絃の線密度(單位長に對する質量)を σ 、張力を T とすれば次式が成立する。

1) ripples, Rippeln