始

減勞實力主義

受驗必携

數學講義

原　濱吉著

立體幾何學之部

東京

金刺芳流堂

受驗必携

數學講義

4

立體幾何學之部

原濱吉著

東京
金刺芳流堂

受驗必携 數學講義

立體幾何學ノ部　緒　言

近年諸官立學校ノ入學志願者ハ募集定員ノ五倍乃至十五倍ニモ達スルノ趨勢ナリ．此劇烈ナル競爭場裡ニ立チテ能ク及第ノ榮ヲ擔フニハ拔群ノ學力ヲ要ス，之レ實ニ至難ノ極ミナリトス．

然レドモ此事タルヤ敢テ絕無ニハアラズシテ學修方ノ當ヲ得タランニハ困難ヲ輕減シテ其ノ目的ヲ達シ得ルコト心然ナルベシ．

著者ハ多年此種ノ學生ニ數學ヲ敎授セシ實驗ニ徵シテ此處ニ

“本書ニ付キ3頁ニ掲グル豫備學修條項ヲ眞摯ニ實行セシ者ハ必ズ立體幾何學試驗ニ及第ス”

ト斷言シテ憚ラザルナリ．

本書ハ受驗ニ十二分ヲ期シテ著作シタルモノナルニヱ程度ハ現今ノ中學校卒業以上ナリ．然レドモ本書ハ解法ノ要點ニ從ヒ細密ニ且ツ嚴正ニ分類シテ解說〔平面幾何學ト併セ見ルヲ要ス〕シ加之其ノ稍々困難ナルモノニハ解析ヲモ附シタルヲ以テ，之ニ由テ學者ハ概括的智識ヲ得テ考究事項ヲ減少セルノミナラズ難問モ頗ル理解シ易カルベシ．

要スルニ本書ハ受驗豫備ニ勞力ヲ減ジ受驗ノ効果ヲ完タカラシムルニアルヲ以テ，學者ノ智識ヲ確實強固ナラシムル爲メニ少シク考究スベキ餘地ヲ存セリ．　〔但シ質問券ヲ挿入シ置ケリ〕

終リニ臨ンデ學者ニ希望ス，著者ノ斷言セシ事項ヲ實行セラレンコトヲ，之レ學者ノ幸榮ノ爲メニ外ナラズ．

大正五年三月十日　　東京　研數會ニ於テ

原　濱吉　誌ス．

科目ノ輕重ト問題ノ難易ニ附テノ參考

官立諸學校ハ夫々目的ヲ異ニスルユヱ科目ニ輕重ノ差アルハ勿論, 問題ニ難易ノ別アルハ當然ナリ. 此事ニ付キ未來ニ投機スルハ實ニ回復シ難キ冒險ノ虞レアリ, 然レドモ過去ヲ參考ニ資スルハ強チ無益ニハアラザルベシ.

仍テ各校ノ過去十有五年間ノ出題振リニ鑒ミ此等ノ差別ノ一班ヲ述ベンニ,

第一　科目ノ輕重ニ附テ

算術　ハ概シテ各校トモ重キヲ置カレシ方ニシテ, 若シ此科ヲ省カレシ場合ニハ他ノ科目中ニ含マセラレシコト多カリシ. 其特ニ重キヲ置カレシハ各高等商業學校ト各高等工業學校トナリキ.

代數學　ハ各校トモニ其最モ重キヲ置カレシモノノ一ナリ.

平面幾何學　ハ其重キヲ置カレシコト代數學ニ讓ラズ, 東京商船學校ニテハ時々新問ヲ出サレ, 又東京大阪ノ兩高等工業學校, 陸軍士官學校, 專門學校檢定, 海軍機關學校, 東京高等師範學校等ニテハ難問ヲ出サレシコトモ少ナカラズ. 海軍兵學校ニテハ重セザリシ傾向アリ, 又各高等商業學校ニテハ時々省カレシコトモアリキ.

立體幾何學　ハ各高等學校, 各高等工業學校, 專門學校檢定, 陸軍士官學校, 海軍機關學校ニテハ平面幾何學ト同一視セラレシガ如シ. 其他ノ學校ニテハ餘リ重キヲ置カレズ, 中ニハ出サザリシ學校モ少ナカラザリキ.

三角法　ハ是レ亦タ重キヲ置カレシモノノ一ニシテ, 時ニ難易ノ差ハアリタレドモ省カレシ學校ハ少ナカリキ.

第二　問題ノ難易ニ付テ

東京大阪ノ兩高等工業學校, 神戸高等商業學校, 陸軍士官學校, 海軍機關學校, 東京商船學校, 東北大學工學專門部, 盛岡高等農林學校ハ難カシカリシ方ニシテ,

他ノ高等工業學校〔名古屋, 仙臺, 熊本〕, 海軍兵學校, 海軍經理學校, 高等商業學校〔東京, 長崎, 小樽〕, 東京水產講習所, 高等師範學校〔東京, 廣島〕, 東北農科大學, 醫學專門學校〔千葉, 仙臺, 金澤, 岡山, 新潟〕等モ易キ方ニハアラザリキ.

高等學校〔第一乃至第八〕ハ易クモアリ亦タ難カシクモアリテ他校ト其選ヲ異ニシタリキ. 〔之レ法, 文, 醫, 理, 工ノ五科ヲ一緒ニ試驗スルニ依ルナラン〕

其他ノ諸學校ハ先ヅ易キ方ニ屬シタリキ.

([illegible])

豫備學修條項

第一條　先ヅ受驗豫備ノ期間〔學力ニ依ルモ二月内外トス〕ニ於テ最後ノ十日間ヲ省ブキ置キ, 毎週ノ自修ニ三時間乃至五時間ヲ取リテ本書ノ頁數ヲ之ニ割リ當テ熟讀スルト同時ニ必ス圖ヲ畫キテ解法ヲ試ムベシ.

〔幾何學ニ上達センニハ自發的實力ヲ涵養スルニ限ルコトハ平面幾何學ノ部ニ於テ述ベタリ,立體幾何學ヲ學ブニハ其ノ基本タル平面幾何學ニ精通スルヲ要スルヤ論ヲ俟タザルベシ〕.

其ノ際ニ重要ナル即チ應用ノ廣キ定義, 定理, 公式及ビ此等ノ解法ハ確實ニ理解シ且ツ記憶シ, 其ノ要處要處ニ赤線一條ヲ引キ置ケ. 而シテ複雜ナルモノ, 又ハ忘レ易キモノハ常ニ其ノ基本或ハ作リ方ヲ記憶シ, 此等ノ箇所ニハ赤線二條ヲ引キ置クベシ.

例ヘバ軌跡ノ解法,作圖題ノ解法,基本ノ作圖題,球ノ體積ハ錐體ノ和ナルコト, 等ノ如シ.

第二條　受驗前ノ十日間ヲ次ノ如ク配當シテ勵行セヨ.

(1)　最初ハ三日間ニ赤線二條ノ箇所ヲ省ブキテ總復習ヲセヨ.

此際ハ勿論,後ノ複習ニモ赤線一條ノ箇所ハ特ニ留意セヨ.

(2)　次ハ三日間ニ赤線二條ノ箇所ヲモ加ヘテ總復習ヲセヨ.

(3)　次ハ二日間ニ之ヲ綜合的ニ自問自答セヨ.

例ヘバ直線,平面及ビ其ノ關係,特殊問題,多面體,旋轉體ニハ夫々幾種類アリテ夫々如何ナリシカ,ノ如シ.

此際ハ忘レタル箇所ニ自發的實力ノ發揮ヲ試ムベシ.

(4)　次ハ一日ニ之ヲ亦タ綜合的ニ自問自答セヨ.

(5)　最後ノ一日即チ受驗ノ前日ハ唯々受驗要具ヲ整ヘ置ク位ニシテ、專ラ心身ヲ休養セヨ.

([illegible])

受験臨場ノ心得

指定ノ場所ニハ少ナクモ十五分前ニ到着シテ精神ヲ安静ナラシメ置クヲ肝要トス.

1. 臨場ノ上ハ及落ノ念ヲ斷チテ沈着ニ構ヘヨ.

已ニ臨場シタル以上ハ心配シタレバトテ出來ル丈ケシカ出來ザルユヱ, 須ラク及落ノ念ヲ斷チあせらず, あわてず恰モ自修スルが如ク落付キ構フベシ.

2. 恐ルルニ及バザルモ侮ル勿レ.

問題が六ケ數ケレバ受驗者全體ガ不成績ナルユヱ敢テ恐ルルニ足ラザルモ, 問題が平易ナレバ誰モ出來ルユヱ此時ハ一層ノ精力ヲ注ガザレバ衆ニ冲デ難キニヨリ決シテ侮ル勿レ.

3. 質問スベカラズ.

質問シタトテ試驗官ハ答ヘヌが通例ニシテ, 只其人ノ學力不足ヲ自白スルニ過ギズ.

4. 數字ヲ讀ミ違ヘヌ様ニセヨ.

題文ヲ讀ミ違ヘル輩ハ論外ナレドモ, 急イデ數字ヲ見違ヘタリ又ハ見落シタリシテ演算ニ困難ヲ來シ時間ヲ空費シテ失敗ヲ招クノ例ハ少ナカラズ, 能ク注意スベシ.

尙ホ計算違ヒハ平生ノ熟不熟ニ依ルモ, 位違ヒ又ハ單位違ヒヲセヌ様ニ深ク注意セヨ.

5. 題意ヲ悟ラザル答案ハ答案ニアラズ.

例ヘバ計算問題ニ明文ナシトテ只結果ノミヲ記スルモ其答案トハナラズ, 況ンヤ算術問題ヲ代數ニテ解キ, 又幾何問題ヲ三角法ニテ解キタルニ於テオヤ.

6. 易題ヲ先キニシ難題ヲ後チニセヨ.

答案ヲ作成スルニハ先ヅ全體ノ問題ヲ通讀シテ少シニテモ心當リノアル問題ヲ先キニ解キ, 然ル後チ時間ノアラン限リ難題ニ全力ヲ注グベシ.

7. 五問ニ粗ナランヨリハ四問ニ密ナレ.

五問トモ不殘粗漏ニ解クヨリハ四問ヲ完全ニ解クベシ. 五問ノ中チ三問出來レバ已ニ及第點ダケハアルニアラズヤ. 併シ幾何三問ノトキ平面ノミ二題解キタリトテ及第點ハ覺束ナシ.

8. 答案ハ繁ニ亘ランヨリモ寧ロ簡ニ失セヨ.

答案ハ試驗官ノ檢査ヲ受クルモノユヱ冗長ニ亘ラズシテ簡明ニ要領ヲ得ルコトヲ主トスベシ.

9. 筆蹟ハ一目整然タルヲ要ス.

字ノ下手ハ仕方ナキモ, 答案ハ極メテ丁寧ニ見易ク分リ易キ様ニ認ムベシ. 假令理論ハ正シクトモ自分ニサヘ分リ兼ヌル様ナ答案ハ見捨テラルルが常ナリ.

10. 答案ハ調査ノ上呈出セヨ.

早クニ答案ヲ出シタレバトテ得點ニハ何等ノ影響アルニアラズ, 與ヘラレタル時間中ハ已得ノ權限内ナルヲ以テ, 此間ハ落附テ答案ヲ少クトモ一度ハ必ズ調ベタル上ニテ差出スベシ.

受驗臨場ノ心得

試驗ノ場所ニハ少ナクモ十五分前ニ到着シテ精神ヲ安靜ナラシメ置クヲ肝要トス。

1. 臨場ノ上ハ及落ノ念ヲ斷チテ沈着ニ構ヘヨ。

已ニ臨場シタル以上ハ心配シタレバトテ出來ル丈ケシカ出來ザルモノナリ、須ラク及落ノ念ヲ斷ちあせらず、あわてず恰も自習スルガ如ク落付キ構フベシ。

2. 恐ルルニ及バザルモ侮ル勿レ。

問題ガ六ケ敷クトモ受驗者全體ガ不成績ナルユヱ敢テ恐ルルニ足ラザルモ、問題ガ平易ナレバ [illegible] 此時ハ一層ノ精力ヲ注ガザレバ [illegible] 侮ル勿レ。

3. 質問スベカラズ。

質問シタリトテ試驗官ハ答ヘヌヲ通例トス。只其人ノ學力不足ヲ自白スルニ過ギズ。

4. 数字ヲ讀ミ違ヘヌ樣ニセヨ。

題文ヲ讀ミ違フ事ハ論外ナレドモ、[illegible] 数字ヲ見違ヘ [illegible] 又ハ見落 [illegible] 演算ニ錯誤ヲ來シ時間ヲ空費シテ失敗ヲ招クノ例ハ少ナカラズ。能ク注意スベシ。

尚ホ計算違ヒハ平生ノ熟不熟ニ依ルモ、[illegible] 注意セヨ。

5. 題意ヲ悟ラザル答案ハ答案ニアラズ。

例ヘバ計算問題ニ問 [illegible] 其結果ノミヲ記 [illegible] 其答案トハナラズ。[illegible] 問題ヲ代數ニテ解キ、又幾何問題ヲ三角法ニテ解キ [illegible]

6. 易題ヲ先キニシ難題ヲ後ニセヨ。

答案ヲ作成 [illegible] 先ヅ全體ノ問題ヲ通讀 [illegible] 問題ヲ先キニ解キ、然ル後チ時間 [illegible] 難題ニ全力ヲ注グベシ。

7. 五問ニ粗ナランヨリハ四問ニ密ナレ。

五問トモ不完全 [illegible] 四問ヲ完全ニ解 [illegible] 五問ノ中ノ三問出來 [illegible] 及第點ニ [illegible] 及第點ハ覺束ナシ。

8. 答案ハ繁ニ亘ランヨリハ寧ロ簡ニ失セヨ。

答案ハ試驗官ノ [illegible] 簡明ヲ要旨 [illegible] 主トスベシ。

9. 筆跡ハ一目瞭然タルヲ要ス。

字ノ下手ハ [illegible] 答案ハ [illegible] 丁寧ニ見易ク [illegible] 假令理論ハ [illegible] 自分ニ [illegible] 當ナリ。

10. 答案ハ調査ノ上呈出セヨ。

早ク [illegible] 答案ヲ出 [illegible] 時間中ハ [illegible] 此間ハ [illegible] 答案 [illegible] 一度ハ必ズ調 [illegible] 差出スベシ。

立體幾何學ノ部 目次

立體幾何學ノ部

緒論

1. **幾何學** ヲ大別シテ平面幾何學及ビ立體幾何學トス.

平面幾何學ニ於テハ一平面上ニ在ル點ト線ト面トニ就テ講究シタリ.

立體幾何學ニ於テハ一平面上ニ在ラザル(卽チ空間ニ於ケル)點ト線ト面ト體トニ就テ講究ス.

幾何學ニ於テ論ズル事項ハ其ノ平面タルト立體タルトヲ問ハズ,之レヲ類別スレバ定理,軌跡,作圖ノ三種ニシテ各々其ノ趣旨ヲ異ニス. 然ルニ

定理ノ關係〔卽チ一般ノ形式,聯屬,關係名稱,聯立關係〕
定理ノ證明法〔卽チ間接法,直接法〕
軌跡ノ解法〔卽チ證明事項,其適用,考ヘ方,解法ノ種類〕
作圖題ノ解法〔卽チ解法ノ種類,解法ノ順序〕

等ノ神髓ト解法ニ就テノ一般ノ注意トハ平面幾何學ノ第一編ニ於テ平面ニ就キ說示シタリ. 此等ハ立體幾何學ニモ適スルヲ以テ再讀スルヲ要ス.

而シテ其ノ最モ注意スベキコトハ,

平面幾何學ニ於テ論ジタル點及ビ線ノ性質ハ
立體幾何學ニ於テハ線及ビ面ノ性質ニ對應スルコト

之レナリ.

注意 第一編ノ直線及ビ平面ノ關係ハ立體幾何學ノ主腦ナルヲ以テ十分ニ理解スルヲ要ス.

計算ノ主ナル公式集

今 p ヲ底周, h ヲ側稜或ハ高サ, B ヲ底面積トスレバ

$$\text{直角壔}\begin{cases}\text{側面積}=ph\\ \text{全面積}=ph+2\mathrm{B}\\ \text{體　積}=\mathrm{B}h\end{cases}$$

今 π ヲ圓周率, r ヲ底半徑, h ヲ高サトスレバ

$$\text{直圓壔}\begin{cases}\text{側面積}=2\pi rh\\ \text{全面積}=2\pi r(h+r)\\ \text{體　積}=\pi r^2h\end{cases}$$

之ヲ概括セバ　側面積＝底周×高, 體積＝底面積×高サ.

今 p ヲ底周, l ヲ斜高, B ヲ底面積トスレバ

$$\text{直角錐}\begin{cases}\text{側面積}=\frac{1}{2}pl\\ \text{全面積}=\frac{1}{2}pl+\mathrm{B}\\ \text{體　積}=\frac{1}{3}\mathrm{B}h\end{cases}$$

今 π ヲ圓周率, r ヲ底半徑, l ヲ母線, h ヲ高サトスレバ

$$\text{直圓錐}\begin{cases}\text{側面積}=\pi rl\\ \text{全面積}=\pi r(l+r)\\ \text{體　積}=\frac{1}{3}\pi r^2h\end{cases}$$

之ヲ概括セバ　側面積＝$\frac{1}{2}$(底周×斜高), 體積＝$\frac{1}{3}$(底面積×高)

今 l ヲ斜高, p_1 ト p_2 ヲ兩底周, B_1 ト B_2 ヲ兩底面積, h ヲ高サトセバ

$$\text{平截頭角錐}\begin{cases}\text{側面積}=\frac{1}{2}l(p_1+p_2)\\ \text{全面積ハ之ニ兩底面積ヲ加フ}\\ \text{體積ハ}\\ \frac{1}{3}h(\mathrm{B}_1+\sqrt{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2}+\mathrm{B}_2)\end{cases}$$

今 π ヲ圓周率, l ヲ母線, r_1 ト r_2 ヲ兩底半徑, h ヲ高サトセバ

$$\text{平截頭圓錐}\begin{cases}\text{側面積}=\pi l(r_1+r_2)\\ \text{全面積ハ之ニ兩底面積ヲ加フ}\\ \text{體積ハ}\\ \frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)\end{cases}$$

之ヲ概括セバ　側面積＝$\frac{1}{2}$×斜高×(上底周＋下底周)

體　積＝$\frac{1}{3}$×π×高×(上底面積＋下底面積＋其比例中項)

今 π ヲ圓周率, r ヲ半徑, h ヲ高サトセバ

$$\text{球}\begin{cases}\text{表面積}=4\pi r^2\\ \text{體　積}=\frac{4}{3}\pi r^3\end{cases}$$

球帶ノ曲面積＝$2\pi rh$.

立體幾何學ノ部

緒論

1.　幾何學　ヲ大別シテ平面幾何學及ビ立體幾何學トス.

平面幾何學ニ於テハ一平面上ニ在ル點ト線ト面トニ就テ講究シタリ.

立體幾何學ニ於テハ一平面上ニ在ラザル(即チ空間ニ於ケル)點ト線ト面ト體トニ就テ講究ス.

幾何學ニ於テ論ズル事項ハ其ノ平面タルト立體タルトヲ問ハズ, 之レヲ類別スレバ定理, 軌跡, 作圖ノ三種ニシテ各々其ノ趣旨ヲ異ニス. 然ルニ

定理ノ關係　即チ一般ノ形式, 聯屬, 關係名稱, 聯立關係

定理ノ證明法　即チ間接法, 直接法

軌跡ノ解法　即チ證明事項, 其適用, 考ヘ方, 解法ノ種類

作圖題ノ解法　即チ解法ノ種類, 解法ノ順序

等ノ神髓ト解法ニ就テノ一般ノ注意トハ平面幾何學ノ第一編ニ於テ平面ニ就キ說示シタリ. 此等ハ立體幾何學ニモ適スルヲ以テ再讀スルヲ要ス.

而シテ其ノ最モ注意スベキコトハ,

平面幾何學ニ於テ論ジタル點及ビ線ノ性質ハ

立體幾何學ニ於テハ線及ビ面ノ性質ニ對應スルコト

之レナリ.

注意　第一編ノ直線及ビ平面ノ關係ハ立體幾何學ノ基礎ナルヲ以テ十分ニ理解スルヲ要ス.

第一編

直線及ビ平面ノ關係

第一章

一平面

2. 定義及ビ記法

定義 (1) 或面上ノ任意ノ二點ノ連結直線ガ全ク其ノ面上ニ在ルトキハ,其ノ面ヲ平面ト云フ.

故ニ一直線ガ一平面上ニ在ルコトハ,其ノ線上ノ二點ガ其ノ平面上ニ在ルコトヲ證明スルヲ要ス.

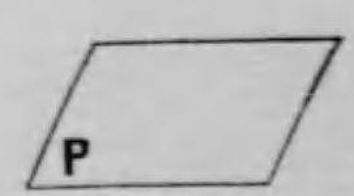
定義 (2) 點或ハ直線ガ一平面上ニ在ルトキハ,

(i) 點或ハ直線ハ其ノ平面ニ含マルト云ヒ,

(ii) 平面ハ其ノ點或ハ直線ヲ含ムト云フ.

定義 (3) 或條件ヲ具ヘタル平面ガ唯一ツナルトキハ,一平面ヲ決定スト云フ.

平面ノ記法 平面ハ何レノ方向ニモ無限ナリ,依テ之ヲ代表スルニ通例ハ其ノ上ニ在ル平行四邊形ヲ以テス. 例ヘバ右圖ノ如ク記シ,平面P或ハP面ト呼ブガ如シ.



時トシテハ,平面上ノ三角形或ハ圓或ハ其ノ他ノ圖形ヲ以テ,其ノ平面ヲ代表スルコトアリ.

3. 基本ノ定理

(1) 次ノ條件ノ何レカ一ツニ適スレバ一平面ヲ決定ス,

(i) 一定直線ト其線外ノ一定點.

(ii) 一直線上ニ在ラザル三定點.

(iii) 相交ハル二直線.

(iv) 平行二直線.

故ニ上ノ一條件ヲ共有スル二平面ハ一致ス.

(2) 二平面ノ交リハ一直線ナリ.

〔證明〕 二平面 P, Q ノ交線上ニ任意ノ二點 A, B ヲ取レバ,此二點ノ連結線 AB ハ二面 P, Q ニ共通點 A, B ヲ有スルヲ以テ P, Q 上ニ在リ. 而シテ P, Q ハ直線 AB 上ノ他ノ點ヲ共有スルコト無シ,若シ之レ有リトセバ P, Q ハ三點ヲ共有スルヲ以テ一致スルガ故ナリ.

系. 二平面ガ一交點ヲ有スレバ,其ノ交點ハ交線ノ上ニ在リ.

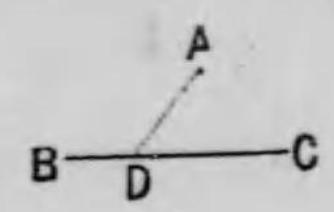
問題及ビ解答

1. (*a*) 定直線 BC 外ノ定點 A ヨリ其定直線ヘ引ケル諸直線ハ一平面上ニ在リ.

(*b*) (i) 二ツ宛三點ニ於テ相交ル三直線ハ一平面上ニ在リ.

(ii) 三角形ハ一平面ナリ. 〔(i)(長崗)〕

〔證明〕 (*a*) 定直線 BC ト其ノ線外ノ定點 A トハ一平面ヲ決定ス. 而シテ BC 上ノ任意ノ點 D ト A トノ連結線 AD ハ此ノ平面上ニ二點 A, D ヲ有スルユエ此ノ面上ニ在リ. 故ニ題意ノ如シ.

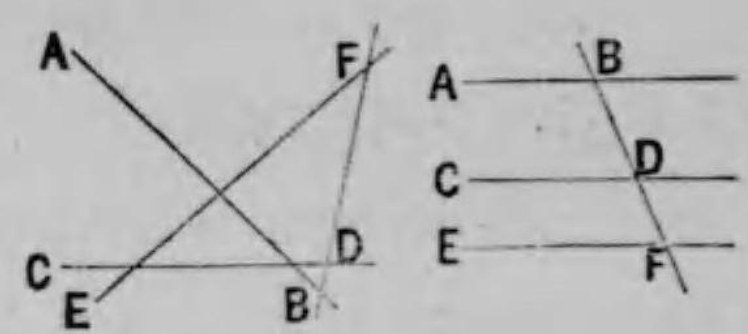


2. (*a*) 平行二直線 AB, CD ノ上ニ夫々點 E, F ヲ取レバ,其ノ連結線 EF ハ平行線ノ平面上ニ在リ.

(*b*) 平行四邊形ハ一平面ナリ.

3. 二ツヅツ互ニ相交ハルカ或ハ互ニ平行ナル三直線ガ第四ノ直線ト交ハレバ,此ノ四直線ハ一平面上ニ在リ.

〔證明〕 初メノ三直線ヲ AB, CD, EF トシ,第四ノ直線ヲ BDF トス. 然ルトキ AB, BF ハ相交ハルユヱ一平面 P ヲ決定ス.



同様ニ或ハ平行ナルユヱ AB, CD ハ一平面 Q ヲ決定ス. 然ルニ此ノ二平面 P, Q ハ三點 A, B, F ヲ共有スルユヱ一致ス,卽チ CD ハ P 面上ニ在リ.

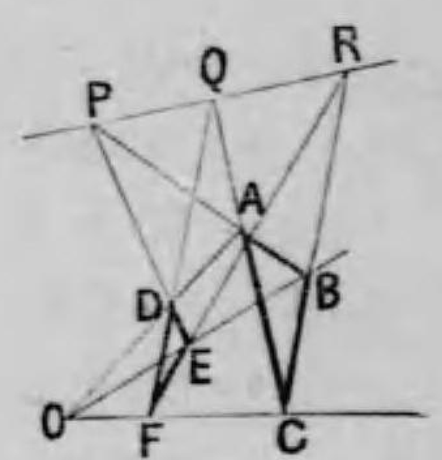
同様ニ EF モ P 面上ニ在ルコトヲ證シ得.

4. 同一ノ平面上ニ在ラズシテ二ツ宛互ニ相交ハル三直線ハ同一ノ點ヲ過ル. (長商)

〔證明〕 此三直線ヲ AA', BB', CC' トス. 若シ AA' ガ BB', CC' ト夫々 O, O' ニ於テ交ルトセバ AA' ハ相交ル二直線 BB', CC' ノ決定スル平面上ニ在リ,之レ假設ニ戻ル. 故ニ O, O' ハ一致セザルヲ得ズ,卽チ此三直線ハ一點ニ於テ相會ス.

5. 同一平面上ニ在ラザル兩三角形 ABC, DEF ノ頂點ノ連結線 AD, BE, CF ガ一點 O ニ於テ會スルトキハ, AB ト DE, BC ト EF, CA ト FD ノ交點 P, Q, R ハ一直線上ニ在リ. (各高,東工)

〔證明〕 直線 QR ハ FD, EF ヲ含ム平面 DEF ト CA, CB ヲ含ム平面 ABC トノ双方ノ上ニ在ルユヱ其二面ノ交線ナリ. 同様ニ直線 QP ハ FE, ED ヲ含ム平面 DEF ト BA, CB ヲ含ム平面 ABC トノ交線ナリ.



然ルニ二平面 DEF, ABC ノ交線ハ一直線ナルユヱ QR ト QP トハ一致セザルヲ得ズ,卽チ P, Q, R ハ一直線上ニ在リ.

第 二 章

平行ナル 直線 及ビ 平面

4. 二直線ノ位置ノ關係

(1) 一平面上ニ在ルトキ,

卽チ 相交ルカ,平行ナリ.

(2) 一平面上ニ在ラザルトキ,

卽チ 相交ラズ且ツ平行ナラズ.

定義 一平面上ニ在ラザル二直線ハ空間ノ二直線ト云フ.

故ニ二直線ガ平行ナルコトハ,其二直線ガ一平面上ニ在ルコト且ツ其相交ラザルコトノ二條件ヲ證明スルヲ要ス.

注意 立體幾何學ニ於テ單ニ二直線ト云ヘバ空間ノ二直線ト心得ベシ.

5. 一直線ト一平面トノ關係

定義 (1) 一直線ト一平面トガ一點ヲ共有スルトキハ,其直線ト平面トハ互ニ交ルト云フ.

定義 (2) 一直線ト一平面トヲ如何ニ延長スルモ決シテ共通點ヲ有セザルトキハ,其線ト面トハ互ニ平行ナリト云フ.

直線ト平面トガ其中ノ一方或ハ双方ガ數多アルトキモ亦タ之ニ準ズ.

一直線ト一平面トノ位置ノ關係

(1) 平行ナルトキ. (2) 交ルトキ.

(3) 直線ガ平面ニ含マルヽトキ.

故ニ 上ノ三條件中ノ一ツヲ證明スルニハ,他ノ二ツヲ否定スルヲ要ス. 例ヘバ平行ナルコトヲ證明スルニハ,交ラザルコト及ビ含マレザルコトヲ證明セザルベカラズ.

6. 二平面ノ關係

定義 (1) 二平面ガ一直線ヲ共有スルトキハ,其二面ハ互ニ交ルト云フ.

定義 (2) 二平面ハ其雙方ヲ如何ニ延長スルモ決シテ共通點ヲ有セザルトキハ,互ニ平行ナリト云フ.

數多ノ平面ニ就テモ亦タ之ニ準ズ.

二平面ノ位置ノ關係

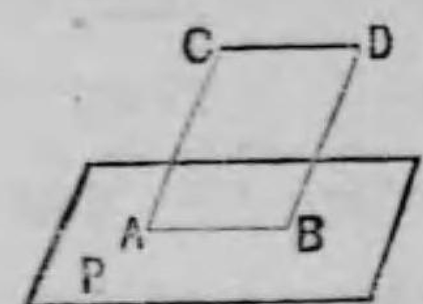
(1) 平行ナルトキ. (2) 交ルトキ. (3) 一致スルトキ.

故ニ 上ノ三條件ノ中ノ一ツヲ證明スルニハ,他ノ二ツヲ否定スルヲ要ス.例ヘバ交ルコトヲ證明スルニハ,平行セザルコト及ビ一致セザルコトヲ證明セザルベカラズ.

7. 重要定理

定理 (1) 平行二直線ノ一ツヲ含ミ他ヲ含マザル平面ハ,他ニ平行ナリ.

〔證明〕 AB//CD, AB ヲ含ミ CD ヲ含マザル平面ヲ P トス.然ルトキハ題意ニ依テ CD ハ P ニ含マレズ.又 CD ガ P ニ交ルトセバ平行二線 CD, AB ヲ含ム平面ト P トハ AB 及ビ CD 上ノ一點ヲ共有スルユヱ一致ス,從テ CD ハ P ニ含マル.之レ假設ニ背ク.故ニ CD ハ P ト交ラズ. 然レバ CD ハ P ニ含マレズ又交ラザルヲ以テ平行ス.



此定理ハ,一直線ガ之ヲ含マザル平面上ノ一直線ニ平行ナレバ其直線ハ其平面ニ平行ナリ,ト換言スルヲ得.

系 (1) 平行二直線ノ一ツ宛ヲ含ム二平面ノ交線ハ,元ノ二線ニ平行ナリ. (長商)

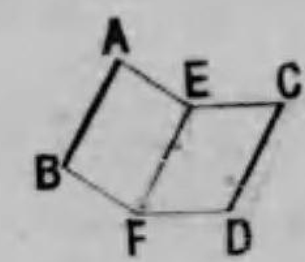
〔證明〕 次頁ノ圖ヲ用フ. AB//CD, 此一ツ宛ヲ含ム二平面ノ交線ヲ EF トス.

然ルトキハ CD // 面 AF ナルユヱ CD ト EF トハ交ラズ且ツ一平面上ニ在リ.

∴ CD//EF. 同様ニ AB//EF ヲ證シ得ベシ.

系 (2) 二直線ガ第三ノ直線ニ平行ナレバ,互ニ平行ナリ.

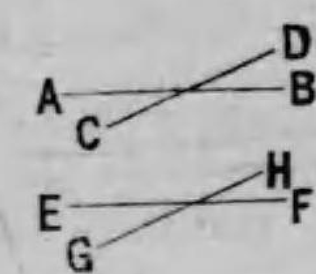
〔證明〕 AB//EF, CD/EF トス.然ルトキ AB ヲ含ム平面ト EF ヲ含ム平面トノ交線ヲ CD′ トセバ AB//CD′//EF. 然ルニ CD//EF. 故ニ CD′ ハ CD ニ一致ス. ∴ AB//CD//EF.



次ニ 平行三直線ガ一平面上ニ在ルトキハ,平面幾何學定理ニ於テ已ニ其眞ナルヲ知ル.

系 (3) 一平面上ニ在ラザル二雙ノ,相交ル二直線ニテ夫々決定スル二平面ハ平行ナリ.

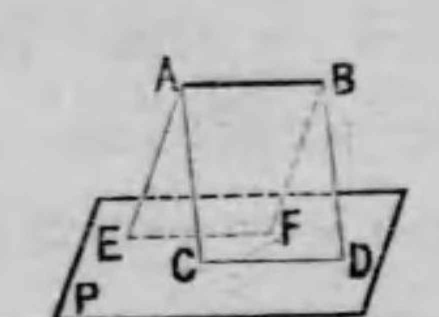
〔證明〕 AB//EF, CD//GH トス. 然ルトキ若シ AB, CD ノ平面ガ EF, GH ノ平面ト交ラバ其交線ハ AB, CD 及ビ EF, GH ノ各々ニ平行ス,卽チ一直線ガ相交ル二線ノ各々ニ平行ス,之レ不合理ナリ.故ニ此二平面ハ交ラズ卽チ平行ナリ.



系 (4) 一平面ニ平行シ且ツ相交ル二直線ノ平面ハ,前ノ平面ニ平行ナリ.

定理 (2) 一平面ト之ニ平行セル一直線ヲ含ム諸平面トノ交線ハ其直線ニ平行ナリ. 又其交線ハ互ニ平行ナリ.

〔證明〕 AB // 面 P, 面 ABD 及ビ面 ABF ト面 P トノ交線ヲ CD, EF トス.然ルトキハ AB//P ナルユヱ AB ハ CD ト交ラズ且ツ一平面上ニ在ルユヱ AB//CD. 同様ニ AB//EF ヲ證シ得.



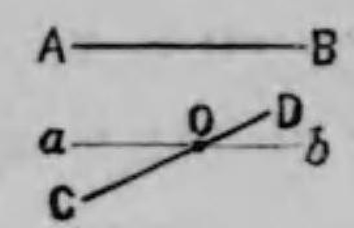
次ニ CD//AB//EF ナルユヱ CD//EF.

此定理ハ,二平面ト其交線ニ平行ナル一平面トノ交線ハ,前ノ交線ニ平行ナリ,ト換言スルヲ得.

系 (1) 一直線ニ平行ナル一平面上ノ一點ヲ過リ其直線ニ平行ナル直線ハ，其平面上ニ在リ.

系 (2) 空間ノ二直線ノ一ツヲ含ミ他ニ平行ナル平面ハ唯一ツナリ.

〔證明〕 此二直線ヲ AB, CD トス.　然ルトキ AB 及ビ CD 上ノ點 O ヲ含ム平面上ニ於テ ab//AB トシ，

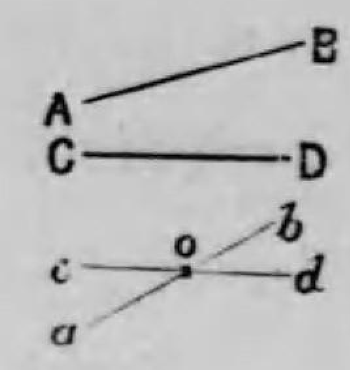


又 CD, ab ヲ含ム平面ヲ P トセバ P ハ平行二線中ノ ab ヲ含ミ AB ヲ含マザルユヱ AB//P ナリ.

次ニ CD 上ノ點及ビ AB ヲ含ム平面ト CD ヲ含ミ AB ニ平行ナル平面トノ交線ハ CD 上ノ點ヲ過リ ab ニ平行ナルヲ以テ，此交線ハ P 面上ニ在リ．故ニ題意ノ平面ハ P ノ他ニ無シ.

系 (3) 一點ヲ過リ，空間ノ二直線ニ平行ナル平面ハ唯一ツアリ.

〔證明〕 一點ヲ O，此二直線ヲ AB, CD トス. 然ルトキ O 及ビ AB ヲ含ム平面上ニ於テ ab//AB トシ，（八高）

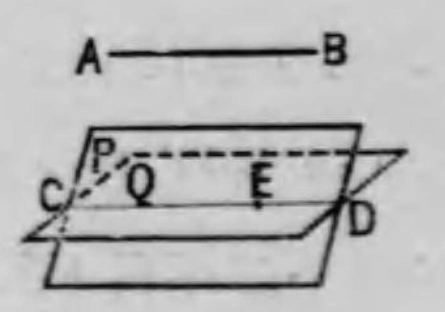


又 O 及ビ CD ヲ含ム平面上ニ於テ cd//CD トセバ ab,cd ヲ含ム平面ハ AB, CD ニ平行ナリ〔系(2)〕

次ニ面 ABO, CDO 上ニ於テ O ヲ過リ夫々 AB, CD ニ平行ナル直線ハ夫々 ab,cd ノミナルヲ以テ，O ヲ過リ AB 及ビ CD ニ平行ナル平面ハ ab,cd ヲ含ム平面ノ他ニ無シ.

定理 (3) 一直線ニ平行ナル二平面ノ交線ハ，其直線ニ平行ナリ.

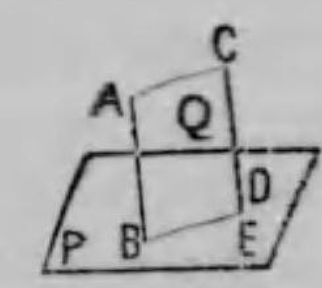
〔證明〕 面P // AB // 面Q，　P, Q ノ交線ヲ CD トス.



然ルトキ CD 上ニ點 E ヲ取レバ AB 及ビ E ヲ含ム平面ト P 及ビ Q トノ交線ハ各々 AB ニ平行ス. 然ルニ E ヲ過リ AB ニ平行ナル直線ハ只一ツナルユヱ，此二交線ハ一致シ且ツ P, Q ノ上ニ在ルユヱ CD ナリ.　∴ CD//AB.

定理 (4) 平行二直線ノ一ツニ交ル一平面ハ他ニモ交ル.

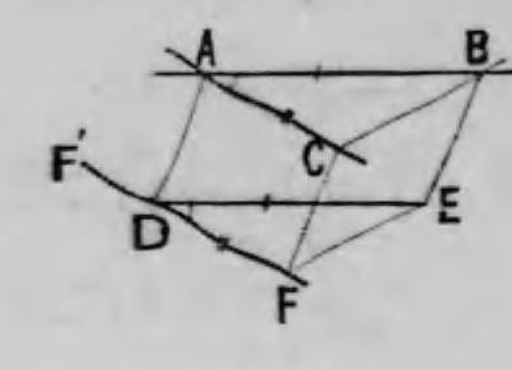
〔證明〕 AB//CD, AB ト P 面トノ交點ヲ B トス.



然ルトキ CD ガ P ニ含マルルトセバ，平行二線 AB, CD ヲ含ム平面 Q ト P トハ三點 C, D, B ヲ共有スル故一致ス，從テ Q 上ノ AB ハ P ニ含マル，之レ假設ニ背ク. 又 CD//P トセバ CD ヲ含ム Q ト P トノ交線ナル BE//CD，依テ Q 上ニ於テ BA, BE ハ共ニ CD ニ平行ナリ，之レ不合理ナリ. 然レバ CD ハ P ニ含マレズ又平行ナラザルヲ以テ，相交ル.

定理 (5) 一平面上ニ在ラザル二角ハ，二邊ガ夫々平行シ且ツ同方向ナルトキハ相等シク，異方向ナルトキハ補角ヲナス.

〔證明〕 先ヅ同方向ニ AB//DE, AC//DF トス.



然ルトキ AB=DE ニ取レバ $AB \mathrel{\underline{\angle}} DE$ ナルヲ以テ ADEB ハ平行四邊形ニシテ $AD \mathrel{\underline{\angle}} BE$.

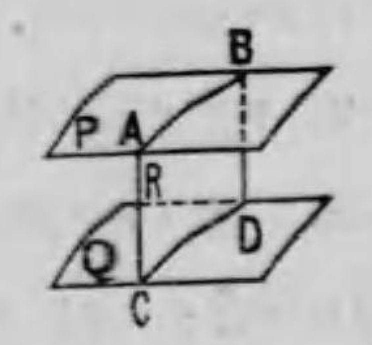
又 AC=DF ニ取レバ前ト同樣ニ $AD \mathrel{\underline{\angle}} CF$.

隨テ $BE \mathrel{\underline{\angle}} CF$ ナルユヱ CFEB ハ平行四邊形ニシテ BC=EF.　故ニ三邊ガ夫々相等シキヲ以テ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$，$\therefore B\hat{A}C = E\hat{D}F$.

次ニ異方向ニ平行ナルトキ，卽チ FD ノ延長上ニ F′ 點ヲ取レバ AB//DE, AC//DF′ トナル. 今 $F'\hat{D}E$ ト $E\hat{D}F$ トハ補角ニシテ $E\hat{D}F = B\hat{A}C$ ナリ，∴ $F'\hat{D}E$ ト $B\hat{A}C$ トハ補角ナリ.

定理 (6) 平行二平面ニ第三ノ平面ガ交レバ，其交線ハ平行ス.

〔證明〕 P面 // Q面，此各々ト R 面トノ交線ヲ AB, CD トス.　然ルトキハ P//Q ナルユヱ其面上ノ直線 AB, CD ハ交ハラズ且ツ此二線ハ一平面 R ノ上ニ在リ. ∴ AB//CD.

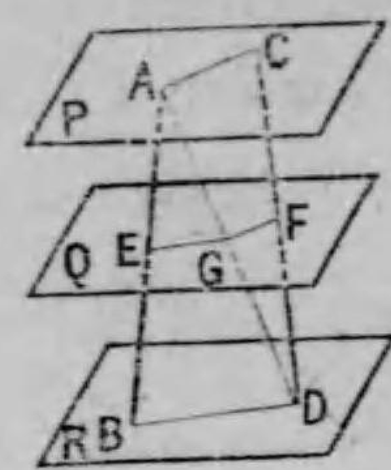


系 (1) 平行二直線ガ平行二平面ニ截ラルル部分ハ相等シ.

(海兵)

系 (2) 二直線ガ平行ナル三平面ニ截ラルルトキハ,其對應部分ハ比例ス.　(海兵,各醫,東商)

〔證明〕 二直線ト P面 // Q面 // R面トノ交點ヲ夫々 A, E, B 及ビ C, F, D トス.



然ルトキ AD ヲ結ビ Q 面トノ交點ヲ Gトセバ 面ABD ト二面 Q, R トノ交線 EG//BD.

同樣ニ GF//AC ナルコトヲ證シ得.

故ニ △ABD 及ビ △ADC ニ於テ

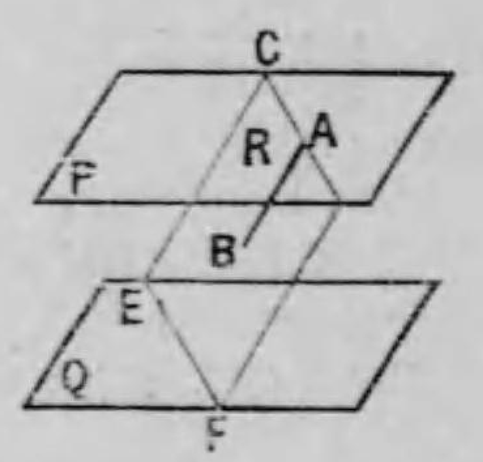
$$\frac{AE}{EB}=\frac{AG}{GD}=\frac{CF}{FD},\quad \therefore\quad \frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}.$$

次ニ AB, CD ガ一平面上ニ在ルトキハ AC//EF//BD トナリ, 平面幾何學定理ニ於テ已ニ其眞ナルヲ知ル.

定理 (7) (i) 平行二平面ノ一ツニ交ル直線ハ,他ニモ交ル.

(ii) 平行二平面ノ一ツニ交ル平面ハ,他ニモ交ル.

〔證明〕 (i) P面 // Q 面, AB ト P トノ交點ヲ A トス. 然ルトキ AB ガ Q ニ含マルルトセバ P, Q ハ共ニ A 點ヲ共有スルユヱ相交ル,之レ假設ニ背ク. 又 AB//Q トセバ AB ヲ含ム平面 R トノ交線ナル AC//EF, 依テ R 上ニ於テ AC, AB ハ共ニ EF ニ平行ナリ. 之レ不合理ナリ. 然レバ AB ハ Q ニ含マレズ又平行ナラザルヲ以テ,相交ル.



(ii) P面 // Q面, P 面ト R 面トノ交線ヲ AC トス. 然ルトキ R 上ニ於テ AC ト交ル直線 AB ヲ引ケバ AB ハ Q ト交ル〔(i)〕. 故ニ AB ヲ含ム R 面ハ Q 面ト交ル.

系 (1) 二平面ガ第三ノ平面ニ平行ナレバ,互ニ平行ナリ.

系 (2) 一平面外ノ一點ヲ過リ其面ニ平行ナル平面ハ唯一ツアリ.

〔定理(1)ノ系(4)及ビ上ノ(ii)ニ依ル〕.

8. 三平面ノ位置ノ關係

(1) 三ツガ互ニ平行ナルトキ. (2) 三ツガ一致スルトキ.

(3) 二ツガ平行シ,第三ガ之ニ平行セザルトキ.

(4) 三ツガ夫々平行ナラズシテ,

(i) 二ツ宛ノ交リガ平行ナルトキ.

(ii) 二ツ宛ノ交リガ一致スル,卽チ一直線ニ於テ會スルトキ.

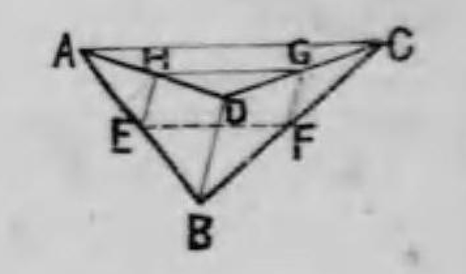
(iii) 二ツ宛ノ交リガ相交ル,卽チ一點ニ於テ會スルトキ.

問題及ビ解答

1. 一平面上ニ在ラザル四直線ノ爲ス四邊形ノ相隣レル邊ノ中點ヲ結ビ付クレバ平行四邊形ヲ爲ス.

〔此四邊形ヲごうしゆ四邊形ト云フ〕

〔證明〕 此四邊形 ABCD ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ E,F G,Hトス. 然ルトキハ △ABD ニ於テ HE$\underline{\angle}\frac{1}{2}$BD 又 △BCD ニ於テ GF$\underline{\angle}\frac{1}{2}$BD. 故ニ HE$\underline{\angle}$GF ナルヲ以テ EFGH ハ平行四邊形ナリ.



注意 之ニ由テ, ごうしゆ四邊形ノ相對スル邊ノ中點ノ連結線 EG, FH ハ互ニ二等分ス, ヲ知ル.

2. (*a*) 一平面上ニ在ラザル三直線 AB, BC, CD ノ各中點 E,F, G ニテ成レル平面ハ BD 及ビ AC ニ平行ナリ.　〔定理(2)ニ依ル〕

(*b*) 相交ル二平面ノ交線ニ平行ナル直線ヲ含ム平面ト前ノ二平面トノ交線ハ前ノ交線ニ平行ナリ.　〔同上〕

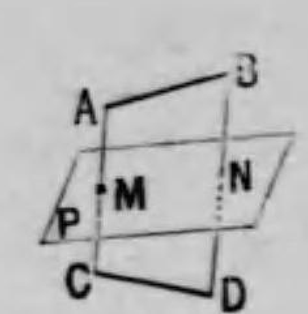
3. 氣泡水準器ニテ一平面ガ水平ナリヤ否ヤヲ決定スルニハ，其水準器ヲ互ニ平行ナラザル二ツノ位置ニ置キテ試驗スレバ可ナリ．其理由如何．

〔證明〕 水準器ノ位置ハ常ニ靜水ノ表面卽チ平面ニ平行ス，而シテ一平面上ニ在リテ互ニ平行セザル位置ハ之ヲ延長スレバ必ズ相交ル． 故ニ一平面上ニ在リテ相交ル二ツノ水準器ノ位置ガ何レモ靜水ノ表面卽チ一平面ニ平行ナルヲ以テ，此二ツノ位置ヲ含ム平面ハ靜水ノ表面ニ平行ス．

4. (a) 空間ノ二直線ノ共通垂線ノ中點ヲ過リ其各々ニ平行スル平面ハ，各線上ノ任意ノ點ヲ結ブ直線ヲ二等分ス．

(b) 一點ヨリ引ケル諸直線ガ平行二平面ニ截ラルル對應部分ハ比例ス．

〔證明〕 (a) 空間ノ二直線 AB, CD ノ共通垂線 AC ノ中點ヲ過リ此各々ニ平行ナル平面ヲPトス．然ルトキ AB, CD ハ何レモ P ニ平行ナルユエ，此二直線ノ一ツ宛ヲ含ミ P ニ平行ナル二平面ヲ作リ得ベシ．而シテ平行三平面ニ二直線ガ截ラルル對應部分ハ比例スルヲ以テ，BD ト P トノ交點ヲ N トセバ



BN : ND=AM : MC=1, ∴ BN=ND.

(b) ハ平行三平面ニ二直線ガ截ラルル對應部分ハ比例ス，ニ依ル．

5. 空間ノ二直線 AB, CD ニ平行ナル平面ト AC, AD 及ビ BD, BC トノ交點ヲ順次ニ E, F, G, H トセバ EFGH ハ平行四邊形ナリ．又此對角線ノ交點ハ AB, CD ノ中點ノ連結線 MN 上ニ在リ．

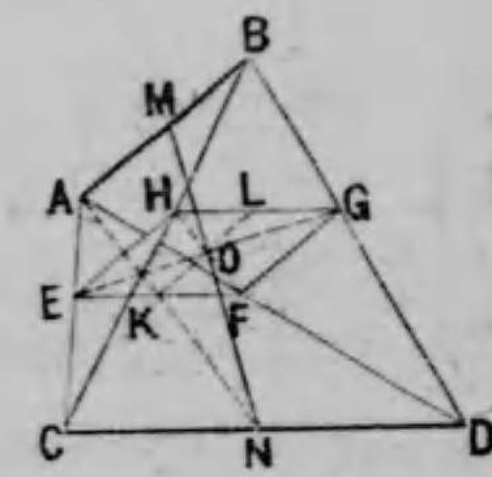
〔證明〕 AB // 面 EFGH ナルユエ此面ト面 CAB トノ交線 EH//AB. 同樣ニ FG//AB, 從テ EH//FG. 同樣ニ EF//HG. 故ニ對邊ガ夫々平行ナル EFGH ハ平行四邊形ナリ．

次ニ NA, NM ト面 EFGH トノ交點ヲ夫々 K, O トセバ KO//AB, 從テ KO//EH.

而シテ K ハ EF 上ニ在リテ EF//CD ナルユエ EK : KF=CN : ND=1,

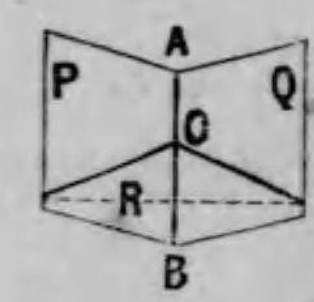
故ニ EK=KF. 又 KO//EH ナルユエ KO ハ HF ヲ二等分ス．同樣ニ O ト EH ノ中點トヲ結ブ直線ハ HF ヲ二等分ス．

故ニ O ハ HF ノ中點ナリ，卽チ MN ハ HF, EG ノ交點 O ヲ過ル．



6. 三平面ノ交リハ一般ニ一點ナリ．又其特別ナル場合ハ如何．

〔證明〕 三平面ヲ P, Q, R トス．然ルトキ P, Q ノ交リハ一般ニ一直線ナリ，之ヲ AB トス．AB ト R トノ交點 O ハ P, Q, R ニ共通ノ點ナリ．



故ニ互ニ相交ル三平面ハ一般ニ一點ニ於テ相交ル．

〔8條ノ(4)ノ(iii)ノ場合ナリ〕

次ニ特別ノ場合ハ二ツ宛ノ交リガ平行スルトキ，及ビ二ツ宛ノ交リガ一致スル卽チ三平面ガ一直線ニ於テ相會スルトキナリ．

7. 二平面ヅツノ交線ガ互ニ平行ナル三平面ハ空間ヲ幾ツノ部分ニ分ツカ．

〔解〕 相交ル二平面ハ空間ヲ四ツノ部分ニ分ツコト明カナリ，而シテ二平面ヅツノ交線ガ互ニ平行スルトキハ第三ノ平面ハ前ノ二面ノ交線ニ平行ナルヲ以テ第三ノ平面ハ前ノ四ツノ部分ノ中三ツヲ通過ス，故ニ此場合ノ三平面ハ空間ヲ七ツニ分ツ．

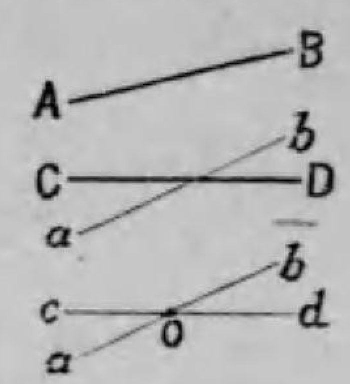
第三章

平行ナラザル直線及ビ平面

9. 定義

定義 (1) 空間ノ二直線ノ爲ス角 トハ一點ヲ過リ其二線ニ夫々平行スルカ或ハ一線ニ一致シ他線ニ平行スル二直線ノ爲ス角ヲ云フ.

例ヘバ空間ノ二直線 AB, CD ノ爲ス角トハ O 點ヲ過リ AB, CD ニ夫々平行スル二直 ab, cd 或ハ CD ト之ニ交リ AB ニ平行スル直線 ab トノ爲ス角ヲ云フ.

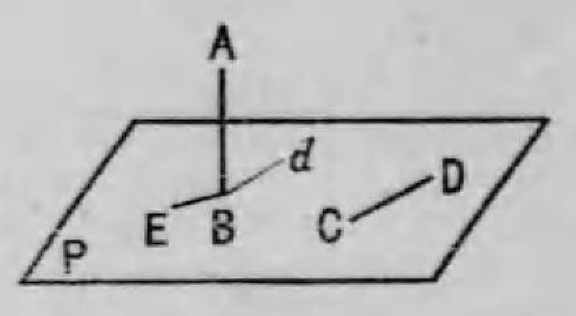


而シテ其角ガ直角ナルトキハ二直線ハ互ニ垂線ナリト云フ.

定義 (2) 一直線ガ一平面ニ交ルトキハ,其交點ヲ其直線ノ足ト云フ.

定義 (3) 一直線ガ一平面上ノ任意ノ直線ニ垂線ナルトキハ,其直線ハ平面ニ垂線或ハ垂直ナリト云ヒ,
其平面ハ直線ニ垂直ナリト云フ.

例ヘバ AB ガ P 面上ノ任意ノ直線 CD 或ハ BE ニ垂線ナルトキハ AB ト P トハ互ニ垂直ナリ.



故ニ AB ト CD トノ互ニ垂線ナルコトヲ證明スルニハ, P 面上ニ於テ垂線ノ足 B ヲ過リ CD ニ平行ニ引ケル直線 Bd ト AB トガ互ニ垂線ナルコトヲ證明スレバ可ナリ.

定義 (4) 一直線ガ一平面ニ垂直ナラザルトキハ,其直線ト平面トハ互ニ斜ナリト云フ.

定義 (5) 一點ト一平面トノ距離 トハ其點ヨリ平面ニ至ル垂線ノ長サヲ云フ.

定義 (6) 平行スル一直線ト一平面トノ距離 トハ其直線上ノ點ト平面トノ距離ヲ云フ.

定義 (7) 平行二平面ノ距離 トハ其共通垂線ノ二面ニ截ラルル部分ノ長サヲ云フ.

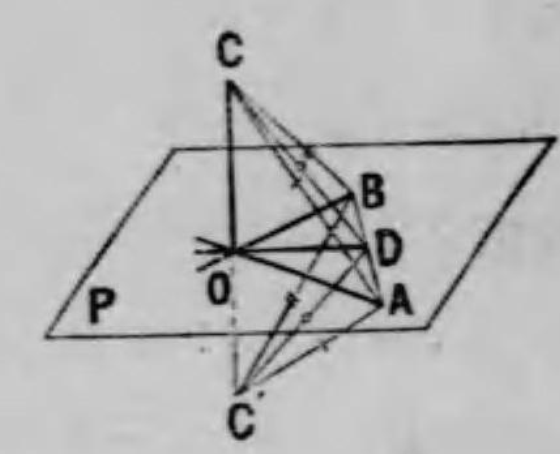
10. 重要定理

定理 (1) 二直線ニ垂線ナル一直線ハ,其二線ヲ含ム平面ニ垂線ナリ. (北農,海兵)

〔證明〕 (i) 一直線ガ二直線ニ其交點ニ於テ垂線ナルトキ.

OA⊥OC⊥OB トシ, OA ト OB トノ決定スル平面ヲ P トス. 然ルトキ P 面上ニ任意ノ直線 OD ヲ引キ直線 AB トノ交點ヲ D トシ, CO ヲ引長シテ OC′=CO トス.

然レバ OA, OB ハ OC ノ垂直二等分線ナルユヱ AC=AC′, BC=BC′,



∴ $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$, $C\hat{A}B = C'\hat{A}B$,

∴ $\triangle DAC \equiv \triangle DAC'$, $DC = DC'$. 然ルニ $OC = OC'$, $OD \perp CC'$. ∴ $OC \perp P$面.

(ii) 一直線ガ二直線ニ交ラズシテ垂線ナルトキ.

此場合ニハ其二直線ノ平面 P 上ニ於テ CO ノ足 O ヲ過リテ前ノ二直線ニ夫々平行線 OA, OB ヲ引ケバ CO⊥P ナリ[(i)]. 故ニ CO ハ其二線ヲ含ム平面ニ垂線ナリ.

系 (1) 一直線ノ上或ハ外ノ一點ヲ過リ其直線ニ垂直ナル平面ハ夫々唯一ツノミ. 〔其點ヨリ直線ニ垂線ヲ引キテ考ヘヨ〕

系 (2) 一平面ノ上或ハ外ノ一點ヨリ其平面ヘノ垂線ハ夫々唯一ツノミ.

系 (3) 斜線ハ平面上ニ於テ其足ヲ過ル唯一ツノ直線ニ垂線ナリ.

系 (4) 一點ニ於テ互ニ直角ニ交ル三直線ノ一ツハ他ノ二ツヲ含ム平面ニ垂線ナリ.

定理 (2)　一平面外ノ一點ヨリ之ニ引ケル諸直線ノ中,

(i)　垂線ハ最短ナリ.

(ii)　垂線ト等角ヲ爲ス斜線ハ相等シ.

(iii)　垂線ト大角ヲ爲ス斜線ハ他ヨリモ大ナリ.

此各々ノ逆ハ眞ナリ.

又 (iv)　垂線ノ足ヨリ等距離ニ足ヲ有スル斜線ハ相等シ.

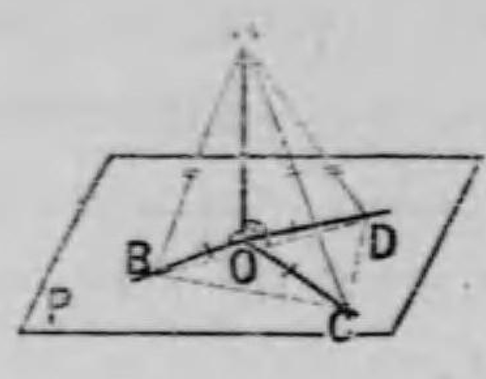
(v)　垂線ノ足ヨリ大距離ニ足ヲ有スル斜線ハ, 他ヨリモ大ナリ.

此各々ノ逆ハ眞ナリ.

系. 一直線ガ一平面上ノ三直線ト等角ヲナストキハ, 其直線ハ其面ニ垂線ナリ.

〔證明〕 一直線 AO ガ P 面上ノ三直線 OB, OC, OD ト等角ヲナストス.　然ルトキ OB=OC=OD ニ取レバ二邊ト其夾角ノ等シキ △AOB≡△AOC≡△AOD,
∴ 斜線 AB=AC=AD.

若シ AO ガ P 面ニ垂線ナラズトセバ垂線 AO′ ヲ引ケバ其足 O′ ハ等斜線ノ足ナル三點 B, C, D ヨリ等距離ナリ. 然ルニ P 面上ニ於テ此三點ヨリ等距離ナル點ハ △BCD ノ外心卽チ一點ニ限ル. ∴ AO⊥P面.



注意　一直線ハ一平面上ノ二直線ト直角ニアラザル等角ヲナスモ垂線トナラズ.

定理 (3)　(i)　一平面ヘノ垂線上ノ一點ト其足ヨリ平面上ノ直線ヘノ垂線ノ足トノ連結線ハ, 前ノ直線ニ垂線ナリ.

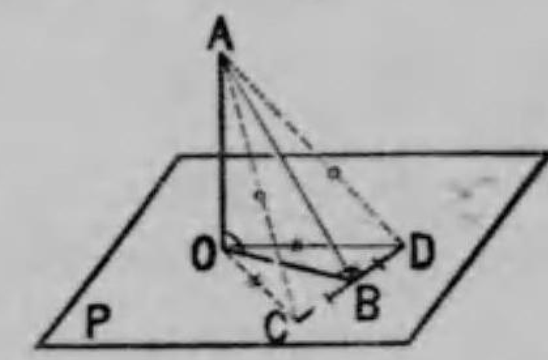
卽チ　　AO⊥P面, OB⊥CD　ナラバ　AB⊥CD　ナリ.

逆ニ,　(ii)　AO⊥P面, AB⊥CD　ナラバ　OB⊥CD　ナリ.

　　　AB⊥CD, OB⊥CD　ナラバ　AO⊥P面　ナリ.

〔之ヲ三垂線定理ト云フ, 其應用ハ廣大ナリ〕

〔證明〕 (i)　BC=BD ニ取レバ BO ハ共通, 此二邊ノ夾角 $O\hat{B}C=O\hat{B}D=\hat{R}$ ナルユヱ
△OBC≡△OBD,　∴ OC=OD.
同樣ニ　△AOC≡△AOD,　∴ AC=AD.
而シテ　BC=BD,　∴ AB⊥CD.
別證. AO⊥P ナルユヱ CD⊥AO, 又 CD⊥BO.
∴ CD⊥面AOB,　∴ CD⊥BA.
(ii) ハ (i) ノ逆順ニ過ギズ.

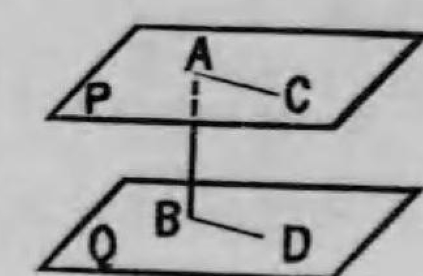


定理 (4)　(i)　一直線ニ垂直ナル二平面ハ平行ナリ.　（陸士）

逆ニ,　(ii)　平行二平面ノ一ツニ垂直ナル直線ハ, 他ニモ垂直ナリ.

〔證明〕 (i)　AB⊥P面, AB⊥Q面 トス. 然ルトキ若シ P, Q ガ相交ルトセバ其交線上ノ一點 E ヨリ AB ニ二垂線 EA, EB ヲ得, 之レ不合理ナリ. 故ニ P, Q ハ交ラザルユヱ一致セザレバ平行ナリ.

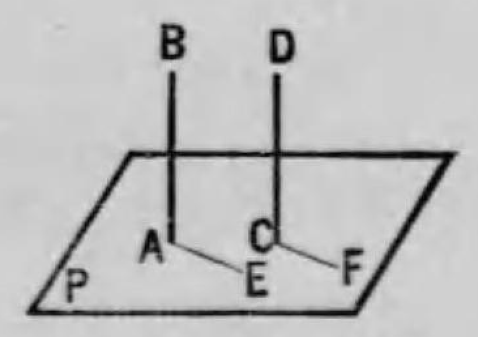
(ii)　P面//Q面, AB⊥P面 トス.
然ルトキ Q 面上ニ B 點ヲ過ル任意ノ直線 BD ヲ引ケバ,
面DBA ト平行二面 P, Q トノ交線ナル AC//BD.
而シテ AB⊥P面. 故ニ 面DBAC ニ於テ $D\hat{B}A=B\hat{A}C=\hat{R}$.
∴ AB⊥Q面.



定理 (5)　(i)　平行二線ノ一ツニ垂直ナル平面ハ, 他ニモ垂直ナリ.

逆ニ,　(ii)　一平面ヘノ二垂線ハ平行ナリ.

〔證明〕 (i)　AB//CD, AB⊥P 面, AB, CD ト P 面トノ交點ヲ A, C トス. 然ルトキ P 面上ニ於テ任意ノ直線 CF ヲ引キ, 之ニ平行線 AE ヲ引ケバ CF//AE, DC//BA ナルユヱ $D\hat{C}F=B\hat{A}E$.
然ルニ $B\hat{A}E=\hat{R}$, 從テ $D\hat{C}F=\hat{R}$,　∴ DC⊥面P.



(ii)　$BA\perp P$面, $DC\perp P$面 トス. 然ルトキ若シ DC ガ BA ニ平行ナラズトセバ, BA ニ平行線 DC' チ引ケバ $BA\perp P$面 ナルニヨ $DC'\perp P$面, 卽チ D 點ヨリ P 面ニ二垂線 DC, DC' アリ, 之レ不合理ナリ.　∴ $AB/\!/CD$.

系 (1)　平行二直線ノ夫々ニ垂直ナル二平面ハ平行ナリ.

〔略證〕 上ノ (i) 及ビ (4) ノ (i) ニ依ル.

系 (2)　平行二平面ノ夫々ヘノ二垂線ハ互ニ平行ナリ.

〔略證〕 (4) ノ (ii) 及ビ上ノ (ii) ニ依ル.

問題及ビ解答

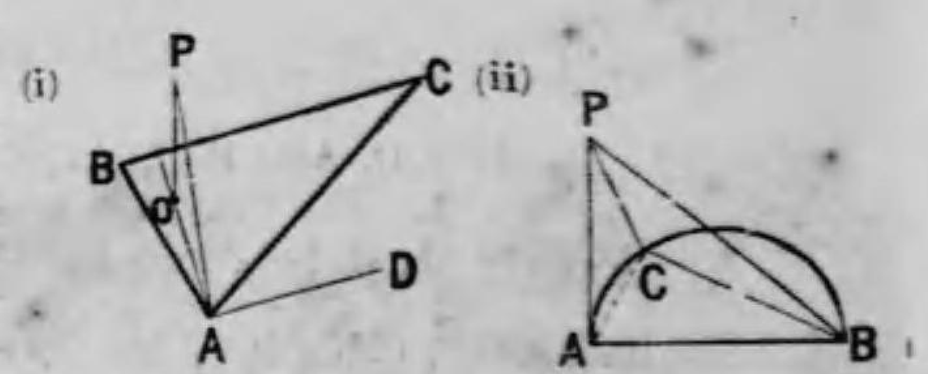
1. 一點ヲ過ル三直線ノ各々ガ他ノ一直線ニ垂線ナルトキハ前ノ三直線ハ一平面上ニ在リ.

〔證明〕 三直線 OA, OB, OC ノ各々ガ直線 OD ニ垂線ナリトス. 然ルトキハ OD ハ面 AOB ニ垂線ナリ. 今若シ OC ガ面AOB 上ニ在ラズトセバ 面DOC, 面 AOB ノ交線 OC' ト OC トハ 面 DOC 上ニ在リテ共ニ OD ニ垂線ナリ, 之レ不合理ナリ. 故ニ題言ノ如シ.

2. (*a*)　△ABC ノ垂心 O ヨリ其面ニ垂線 OP ヲ引ケバ, PA ハ A ヲ過リ BC ニ平行ナル直線 AD ニ垂線ナリ.　（山商, 大工）

(*b*)　直徑 AB ナル半圓周上ノ點ヲ C トシ, A ヨリ圓ノ平面ヘ垂線 AP ヲ立テ之レヲ弦 BC ニ等シクセバ, △PCB≡△PAB ナリ.　（專檢）

〔證明〕 (*a*)　O ハ △ABC ノ垂心ナルニヨ $AO\perp BC$.　$AD/\!/BC$ ナル故 AD ハ面ABC 上ニ在リ, 從テ $OA\perp AD$.　又 $OP\perp$面ABC. 故ニ三垂線定理ニ依テ $PA\perp AD$.



(*b*)　半圓周角 $C=\hat{R}$ 卽チ $AC\perp BC$.

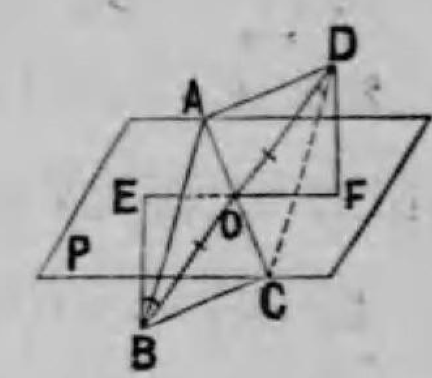
又 $PA\perp$面ABC.　故ニ三垂線定理ニ依テ $PC\perp BC$.　故ニ斜邊ト一邊トガ夫々相等シキ △PAB≡△PCB.

3. 直△ABC ノ各角頂ヨリ等距離ナル點 X ト斜邊BC ノ中點 E トノ連結線 XE ハ, 其三角形ノ面ニ垂線ナリ.

〔證明〕 上圖ヲ用フ. 直三角形ノ斜邊ノ中點 E ハ各角頂 A, B, C ヨリ等距離ナリ, 卽チ EA=EB=EC, XE ハ共通, 又 XA=XB=XC〔假設〕卽チ三邊ガ夫々相等シキニヨ　△XEA≡△XEB≡△XEC,　∴ $X\hat{E}A=X\hat{E}B=X\hat{E}C$.　∴ $XE\perp$面ABC.

4. 平行四邊形 ABCD ノ一對角線 AC ヲ含ム平面 P 上ニ他ノ對角線 BD ノ兩端ヨリ引ケル垂線 BE, DF ハ相等シ.

〔證明〕 P 面ヘノ垂線 $BE/\!/DF$ ナルニヨ此二線ハ一平面上ニ在リ, 而シテ此面上ニ在ル直線 BD ハ AC ニ O ニ於テ二等分セラル. 故ニ $E\hat{B}O$=錯角 FDO, 斜邊 BO=DO ナルニヨ 直△BEO≡△DFO,　∴ BE=DF.



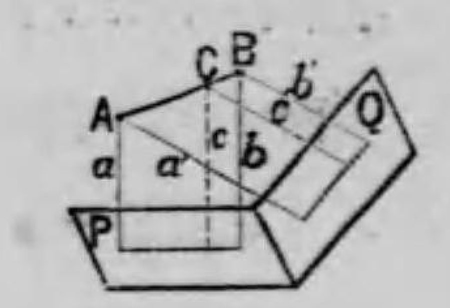
5. 相交ル二平面 P, Q 外ニ二點 A, B アリ. A ヨリ P, Q ヘノ垂線ノ和ガ B ヨリ P, Q ヘノ垂線ノ和ニ等シケレバ, 直線 AB 上ノ點 C ヨリ P, Q ヘノ垂線ノ和モ亦タ之ニ等シ.　（各高）

〔證明〕 A, B, C ヨリ P, Q ヘノ垂線ヲ夫々 $a, a'; b, b'; c, c'$ トス. 然レバ P, Q ヘノ垂線 a, b, c 及ビ a', b', c' ハ夫々平行シテ一平面上ニ在リ. 今 $AC:CB=m:n$ トスレバ平面幾何學定理ニ依リテ

$$\left.\begin{aligned}(m+n)c&=na+mb\\ (m+n)c'&=na'+mb'\end{aligned}\right\}+$$

及ビ

$$\therefore\ (m+n)(c+c')=n(a+a')+m(b+b')$$



然ルニ $a+a'=b+b'$ ナリ.

$$\therefore\ (m+n)(c+c')=(n+m)(a+a')$$
$$=(n+m)(b+b')\qquad \therefore\ c+c'=a+a'=b+b'.$$

注意　本題ハ單ニ $a/\!/b/\!/c,\ a'/\!/b'/\!/c'$ トスルモ合理ナリ.

第四章

二平面

11. 定義及ビ記法

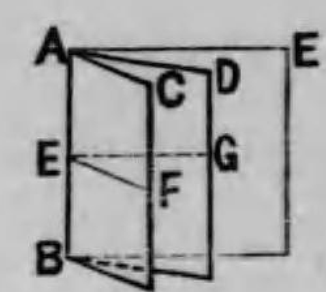
定義 (1) 相交ル二平面ガ其交線ニテ終ルトキ，其二平面ハ平面角ヲ爲スト云フ．而シテ，此等ノ平面ヲ二面角ノ面ト云ヒ，其交線ヲ稜ト云フ．

注意 單ニ二面角ト云ヘバ劣二面角ヲ指スモノトス．

記法 二面角ヲ表ハスニハ，各面上ノ一點宛ヲ取リ其間ニ稜上ノ二點ヲ挿ム．又唯一ツノ二面角ハ其稜上ノ二點ヲ以テス．

例ヘバ二平面CAB, DAB ノ交線ガ AB ナルトキハ，二面角 CABD ト記ス．

又二面角ガ唯一ツナルトキハ，二面角 AB ト記ス．



定義 (2) 二面角ノ稜上ノ一點ヨリ稜ニ垂直ニ各面上ニ引ケル二直線ノ爲ス角ヲ二面角ノ平面角ト云フ．

例ヘバ 面CAB, 面DAB ニ於テ $EF\perp AB$ 及ビ $EG\perp AB$ ナラバ，二面角 AB ノ平面角ハ $F\hat{E}G$ ナリ．

而シテ，平面角ガ直角ナルトキハ之ヲ直二面角ト云ヒ，其二面ハ互ニ垂直ナリト云フ．

二面角ノ大サヲ度ルニハ，其平面角ノ大サヲ以テス．

故ニ二面角ガ相等シキコトハ，其平面角ノ相等シキコトヲ證明セバ可ナリ．

又二平面ノ互ニ垂直ナルコトハ，其平面角ノ直角ナルコトヲ證明セバ可ナリ．

定義 (3) 二ツノ二面角ガ共通ノ一稜ト共通ノ一平面トヲ有スルトキハ，其二ツヲ互ニ隣二面角或ハ接二面角ト云フ．

例ヘバ上圖ニ於テ二面角 DABC, EABD ハ互ニ隣二面角ナリ．

定義 (4) 一ツノ二面角ト其各面ノ延長ニテ成レル二面角トハ互ニ對頂二面角ナリト云フ．

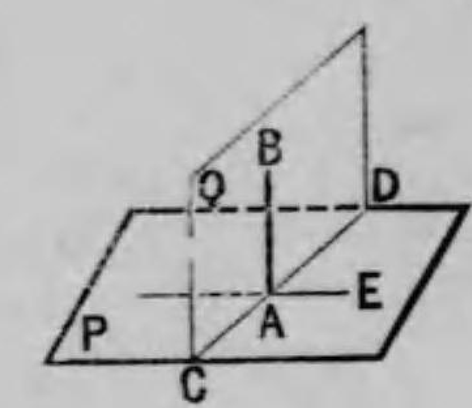
定義 (5) 二平面ニ第三平面ガ交ルトキノ二面角ノ關係名稱ハ，平面幾何學ニ準ジテ內二面角，外二面角，錯二面角，同位二面角ト稱ス．

12. 重要定理

定理 (1) 一平面ヘノ一垂線ヲ含ム諸平面ハ，其面ニ垂直ナリ．

(東工，海兵)

〔證明〕 $AB\perp P$ 面，其足ヲ A トス．然ルトキ AB ヲ含ム任意ノ平面 Q ト P トノ交線ヲ CD トシ，P 面上ニ於テ $AE\perp CD$ トセバ $BA\perp P$面 ナルユヱ $B\hat{A}E=\hat{R}$ ナリ．而シテ $B\hat{A}E$ ハ P, Q ノ二面角ノ平面角ナリ．∴ $P\perp Q$.



系 (1) 一平面ニ平行或ハ斜メナル一直線ヲ含ミ其面ニ垂直ナル平面ハ唯一ツアリ．〔線ノ一端ヨリ面ニ垂線ヲ引キテ考ヘヨ〕

系 (2) 一點ヨリ相交ル二面ヘ夫々垂線ヲ引ケバ此二垂線ヲ含ム平面ハ，其二面ノ交線ニ垂直ナリ．

系 (3) 相交ル二平面ハ隣二面角ガ相等シケレバ，互ニ垂直ナリ．

注意 之ヲ二平面ノ垂直ノ定義トスルコトヲ得．

逆ニ，隣二面角ガ各々直角ナラバ，外ノ二面ハ一平面トナル．

定理 (2) 垂直二平面ノ一ツノ上ニ在リテ且ツ交線ニ垂直ナル直線ハ他ノ面ニ垂直ナリ．

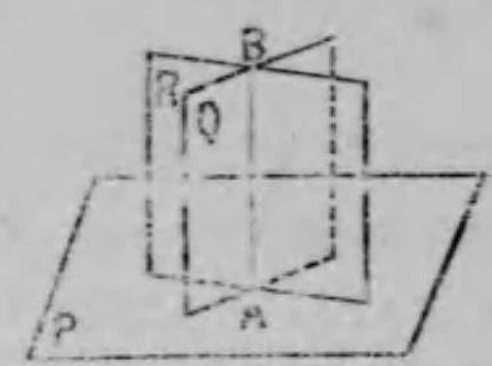
〔證明〕 上圖ヲ用フ．$Q\perp P$. (P 上ノ BA) ⊥ (交線 CD) トス．然ルトキ P 上ニ於テ $AE\perp CD$ トセバ $B\hat{A}E$ ハ垂直二面 Q, P ノ二面角ノ平面角トナルユヱ $\hat{R}$ ナリ．從テ BA ハ P 上ノ二線 CD, AE ニ垂線ナルユヱ $BA\perp P$.

系 (1)　垂直二平面ノ交線上ノ一點ヨリ一面ニ引ケル垂線ハ，他ノ面上ニ在リ.

系 (2)　垂直二平面ノ一面上ノ一點ヨリ他ノ面ニ引ケル垂線ハ,前ノ面上ニ在リ.

定理 (3)　一平面ニ垂直ナル二平面ノ交ハ，前ノ
リ.　(水講)

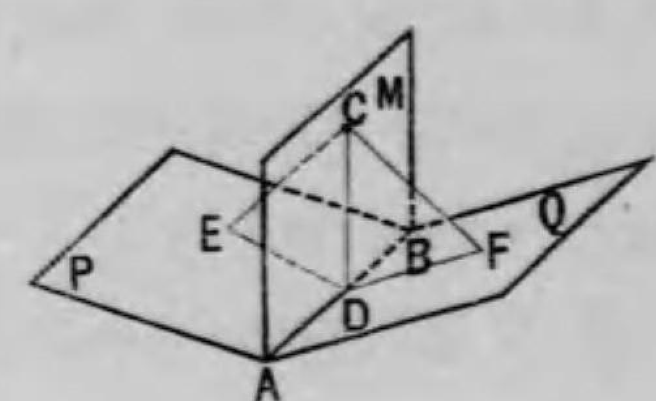
〔證明〕 P面ニ垂直ナル二面ヲQ, R トシ，其交線ヲ AB トス.　然ルトキ若シ AB ガ P ニ垂線ナラズトセバ B ヨリ P面ニ 垂線 BA′ ヲ引ケバ BA′ ハ Q, R ノ各々ノ上ニ在リ [(2) ノ系 (2)]. 故ニ BA′ ハ交線ニ外ナラズ，　∴ BA⊥P.



系.　三平面ノ各々ガ何レモ他ノ二ツニ垂直ナレバ，其三ツノ交線ハ互ニ垂線ナリ.

定理 (4)　二面角ノ二等分面上ノ點ハ，其二面ヨリ等距離ナリ.

〔證明〕 二面 PABQ ノ二等分面ヲ M トス. 然レバ M 面上ノ點 C ヨリ P, Q ヘノ垂線 CE, CF ヲ含ム平面 CEF ハ P, Q ニ垂ナリ，從テ其交線 AB ニ垂直ナリ.　其交點ヲ D トセバ AB ハ DE, DC, DF ニ垂直ナリ.



故ニ相等シキ二面角ノ平面角ナル $C\hat{D}E=C\hat{D}F$.　從テ 直△CDE≡直△CDF,
∴ CE=CF.

系.　二ツノ二面角ノ二面ガ夫々互ニ垂直ナルトキハ，相對スル平面角ハ互ニ補角ヲ爲ス.

定理 (5)　二平面ガ交レバ，對頂二面角ハ相等シ.

定理 (6)　二ツノ二面角ハ其二平面ガ夫々平行シ且ツ同方向ナルトキハ相等シク，異方向ナルトキハ補角ヲ爲ス.

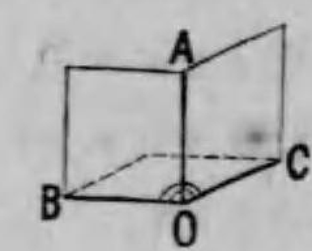
定理 (7)　平行二平面ニ第三平面ガ交レバ，錯二面角ハ相等シ，同位二面角ハ相等シ，同傍内二面角ハ補角ヲ爲ス.

逆ニ，二平面ニ第三平面ガ交リテ，錯二面角ガ相等シキカ，同位二面角ガ相等シキカ，同傍内二面角ガ補角ヲ爲ストキハ，最初ノ二平面ハ平行ス.

問題及ビ解答

1.　一點ニ於テ互ニ直角ニ交ル三直線中ノ二ツ宛ヲ含ム三平面ハ互ニ垂直ナリ.

〔證明〕 互ニ垂直ナル三直線ヲ OA, OB, OC トス.
然ルトキハ AO ハ BO, OC ニ垂線ナルユヱ AO⊥面 BOC. 從テ AO ヲ含ム面 AOB, AOC ハ何レモ面 BOC ニ垂直ナリ. 同様ニ 面AOB ハ 面AOC ニ垂直ナリ.
故ニ此三平面ハ互ニ垂直ナリ.



2.　一點ヨリ相交ル二平面ヘ夫々垂線ヲ引ケバ，其足ノ連結線ハ二面ノ交線ニ垂線ナリ.

〔證明〕 二平面 P, Q ヘノ垂線 CE, CF ヲ含ム平面 CEF ハ P, Q ノ雙方ニ垂直ナルヲ以テ其交線 AB ニ垂直ナリ，故ニ AB ハ之ニ垂直ナル平面 CEF 上ノ直線 EF ニ垂線ナリ.

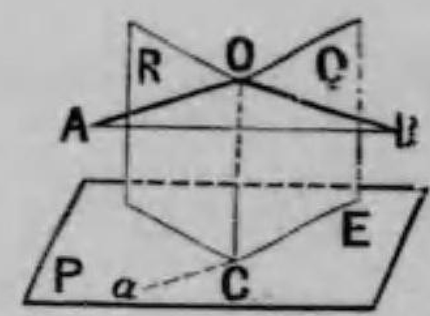
3.　二平面ノ交線ニ垂直ナル平面ハ，其二面ニ垂直ナリ.

〔證明〕 二平面 P, Q ノ交線 AB ニ垂直ナル平面ヲ R トス.　然レバ R ヘノ垂線 AB ヲ含ム平面 P, Q ハ共ニ R ニ垂直ナリ，卽チ R ハ P, Q ニ垂直ナリ.

4. 平面 P ニ平行ナル二直線 OA, OB ニ夫々垂直ナル二平面 Q, R ノ交線 OC ハ P 面ニ垂線ナリ．　（水講）

〔證明〕 面 Q, R ヘノ垂線 OA, OB ヲ含ム平面 AOB ハ Q, R ノ雙方ニ垂直ナルヲ以テ，其交線 OC ニ垂直ナリ．　而シテ OA, OB ハ共ニ P 面ニ平行ナルユヱ面 AOB//P面．

故ニ此平行二面中ノ面 AOB ニ垂直ナル直線 OC ハ亦タ P 面ニ垂線ナリ．

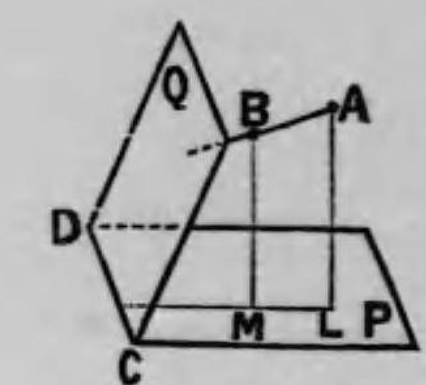


5. 二點 A, B ヨリ平面 P ヘ垂線 AL, BM ヲ引キ，又直線 AB ニ垂直ナル平面 Q ヲ作ルトキハ，P, Q ノ交線 CD ハ LM ニ垂線ナリ．　（七高）

〔證明〕 P 面ヘノ垂線 AL//BM ナルユヱ此二線ハ一平面上ニ在リ．　而シテ P, Q ヘノ垂線 AL, AB ヲ含ム平面 ABML ハ P, Q ノ雙方ニ垂直ナリ．

從テ此面ハ P, Q ノ交線 CD ニ垂直ナリ．

故ニ CD ハ之ニ垂直ナル平面 ABML 上ノ直線 LM ニ垂線ナリ．



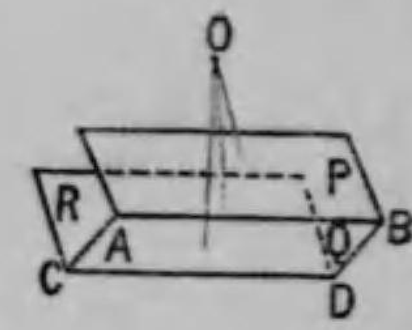
6. 平面 P ニ平行セル直線 AO ニ垂直ナル平面 Q ハ，P 面ニ垂直ナリ．

〔證明〕 4 題ノ圖ヲ用フ．　Q ト P トノ交線 CE ニ垂線 OC ヲ引キ，面 AOC ト P トノ交線 Ca ヲ引ケバ AO//P ナルユヱ AO//aC．　而シテ AO⊥Q ナルユヱ AO⊥OC．　∴ OC⊥Ca，又 OC⊥CE．　故ニ OC ハ Ca, CE ヲ含ム P ニ垂線ナリ．　故ニ P ヘノ垂線 OC ヲ含ム Q ハ P ニ垂直ナリ．

7. 數多ノ平面ノ交線ガ互ニ平行ナルトキハ，此等ノ面外ノ一點ヨリ其各面ヘ引ケル垂線ハ一平面上ニ在リ．

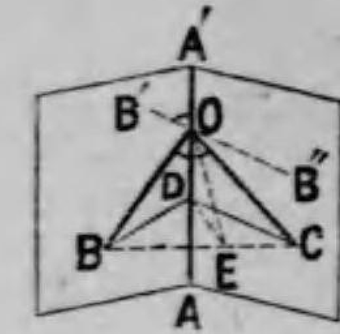
〔證明〕 平面 P, Q, R, ………ノ交線ヲ順次ニ AB, CD, EF, ………トシ，又一點ヲ O トス．　然ルトキ O ヲ過リ交線 AB ニ垂直ナル平面ハ一ツアリ唯，之ヲ M トスレバ

AB//CD//………ナルユヱ M ハ亦タ CD, ………ニ垂直ナリ．　而シテ交線 AB, CD, ………ニ垂直ナル平面 M ハ其ノ各面 P, Q, R, ………ニ垂直ナリ．　故ニ M 面上ノ O 點ヨリ之ニ垂直ナル各面 P, Q, R, ………ヘ引ケル垂線ハ皆ナ一平面 M ノ上ニ在リ．



8. 相異レル平面上ニ在ル角 AOB, AOC ガ相等シキトキハ，其二平面ノ爲ス二面角ノ二等分面ハ平面 BOC ニ垂直ナリ．　（北農）

〔證明〕 AO 上ノ點 D ヲ過リ AO ニ垂直ナル平面ヲ作リ OB, OC トノ交點ヲ夫々 B, C トセバ BD, CD ハ共ニ AO ニ垂線ナルヲ以テ，$\widehat{BDC}$ ハ二面角 BAOC ノ平面角ナリ．　而シテ $\widehat{BDC}$ ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ E トセバ $\widehat{ODE}$ モ $\widehat{R}$ ナルユヱ面 ODE ハ二面角 BAOC ヲ二等分ス．　然ルトキ △ODB, ODC ハ $\widehat{DOB}=\widehat{DOC}$, $\widehat{ODB}=\widehat{R}=\widehat{ODC}$, OD ハ共通ナルユヱ全等ナリ，故ニ BD=CD．　依テ $\widehat{BDC}$ ノ二等分線 DE⊥BC．　又 OD⊥面BDC ナル故三垂線定理ニ依テ OE⊥BC．　故ニ BC⊥面ODE．　∴ BCヲ含ム面OBC⊥面ODE．



9. 垂直二平面ノ交線上ノ一點ヨリ各面上ニ其交線ト半直角ヲ爲シテ引ケル二直線ノ爲ス角ハ直角ノ三分ノ二ニ等シキカ，若シクハ其補角ニ等シ．　（海機）

〔略解〕 前題ト同樣ニ交線 OA ニ垂直平面ヲ作レバ直 △ODB≡△ODC, OD=BD=DC．　從テ 直△BDC≡△ODB≡△ODC [二面角ノ平面角 BDC=$\widehat{R}$]，　∴ OB=OC=BC 卽チ OBC ハ正三角形ナルヲ以テ $\widehat{BOC}=\frac{2}{3}\widehat{R}$．　次ニ $B'\widehat{O}A'=\frac{1}{2}\widehat{R}$ トシ B'O ノ延長上ニ B'' 點ヲ取レバ前ト同樣ニ $B''\widehat{O}C=\frac{2}{3}\widehat{R}$ ナリ，故ニ $B'\widehat{O}C$ ハ $B''\widehat{O}C$ 卽チ $\frac{2}{3}\widehat{R}$ ノ補角ナリ．

第五章

多面角

13. 定義及ビ記法

定義 (1) 三ッ以上ノ平面ガ一點ニ會シ空間ヲ二部ニ分ツトキハ，此等ノ面ハ多面角或ハ立體角ヲ爲スト云フ.

而シテ，其點ヲ頂點，二面ノ交線ヲ稜，二稜間ノ平面ヲ面，二稜ノ爲ス角ヲ平面角或ハ面角ト云フ.

多面角ハ其面ノ數ニ從ヒ，之ヲ三面角，四面角，等ト云フ.

三面角ハ各面角或ハ各二面角ガ直角ナルトキハ，之ヲ直三面角ト云フ.

多面角ヲ各稜ニ交ル一平面ニテ截リテ生ズル所ノ多角形ヲ截リ口ト云ヒ，其凸ナルトキハ多面角ヲ凸ナリト云フ.

注意 單ニ多面角ト云ヘバ凸多面角ヲ指スモノトス.

記法 次圖ノ多面角ヲ四面角 O−ABCD 或ハ四面角 O ト記ス.

定義 (2) 一ツノ多面角ト其各稜ノ延長ニテ成レル多面角トハ互ニ對頂多面角ナリト云フ.

定義 (3) 二ツノ多面角ハ各平面角及ビ各二面角ガ逆順ニ相等シキトキハ，互ニ對稱多面角ナリト云フ.

從テ對頂多面角ハ對稱ニシテ相等シキモ全等ナラザルコト明カナリ.

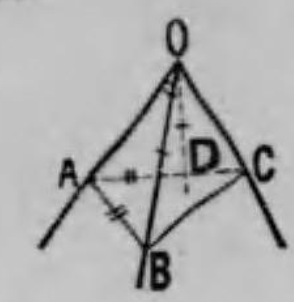
故ニ二ツノ多面角ノ全等ナルコトヲ證明スルニハ，各平面角及ビ各二面角ガ同順ニシテ且ツ相等キコトヲ證明セザルベカラズ.

14. 重要定理

定理 (1) 三面角ノ二ツノ面角ノ和ハ，他ノ一面角ヨリモ大ナリ.

(海機，京醫，臨教，海兵)

〔證明〕 三面角ヲ O−ABC トス.



(i) $A\hat{O}B \geqq A\hat{O}C$ ナルトキハ此定理ハ其眞ナルコト明カナリ.

(ii) $A\hat{O}B < A\hat{O}C$ ナルトキハ $A\hat{O}C$ 内ニ $A\hat{O}B$ ニ等シク $A\hat{O}D$ ヲ取リ OD ト AC トノ交點ヲ D トシ，OB=OD トセバ二邊ト其夾角ノ等シキ $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$, $\therefore$ AB=AD.

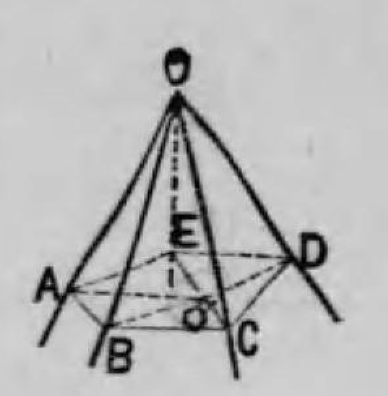
然ルニ $\triangle ABC$ ニ於テ AB+BC>AC=AD+DC. $\therefore$ BC>DC.

然レバ $\triangle BOC$, $\triangle DOC$ ハ OB=OD, OC ハ共通, BC>DC ナルユエ $B\hat{O}C > D\hat{O}C$. 又作圖ニ依リ $A\hat{O}B = A\hat{O}D$. 相加ヘテ $A\hat{O}B + B\hat{O}C > A\hat{O}D + D\hat{O}C = A\hat{O}C$.

系 三面角ノ二ツノ面角ノ差ハ，他ノ一面角ヨリモ小ナリ.

定理 (2) 凸多面角ノ面角ノ和ハ四直角ヨリモ小ナリ. (高等)

〔證明〕 凸多面角ヲ O−ABCDE トス. 然ルトキハ截リ口ABCDE ハ凸多角形ナリ. 其内ニ一點 O′ ヲ取リ之ト各角頂トヲ結ベバ三面角 A ニ於テ



$$O\hat{A}E + O\hat{A}B > E\hat{A}B$$

同様ニ $$O\hat{B}A + O\hat{B}C > A\hat{B}C$$

....

....

之ヲ邊々相加フレバ O, O′ ヲ夫々頂點トスル三角形ニ於テ

O ノ周圍ノ三角形ノ底角ノ和 >O′ ノ周圍ノ三角形ノ底角ノ和

然ルニ O ノ周圍ノ三角形ノ各角ノ和 =O′ ノ周圍ノ三角形ノ各角ノ和

$\therefore$ 此差卽チ，O ヲ角頂トスル角ノ和 <O′ ヲ角頂トスル角ノ和 $=4\hat{R}$.

問題及ビ解答

1. 三面角 O－ABC ニ於テ $A\hat{B}C+B\hat{C}O+C\hat{O}A+O\hat{A}B<4\hat{R}$ ナリ.

〔證明〕 三面角ノ一ツノ面角ハ他ノ二ツノ面角ノ和ヨリモ小ナルユエ

$$A\hat{B}C+B\hat{C}O+C\hat{O}A+O\hat{A}B \quad ハ$$

$(O\hat{B}A+O\hat{B}C)+(A\hat{C}B+O\hat{C}A)+(B\hat{O}C+B\hat{O}A)+(C\hat{A}O+C\hat{A}B)$ ヨリモ小ナリ.

而シテ此十二ノ角ノ和ハ四ツノ三角形ノ内角ノ和ナルユエ $8\hat{R}$ ナリ.

$$\therefore\ A\hat{B}C+B\hat{C}O+C\hat{O}A+O\hat{A}B<4\hat{R}.$$

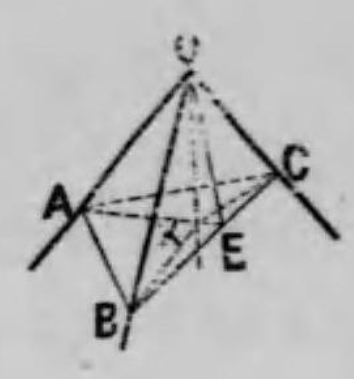
2. 三面角 O－ABC 内ニ一點 X ヲ取レバ次ノ證如何.

(a) $A\hat{O}X+B\hat{O}X+C\hat{O}X>\frac{1}{2}(A\hat{O}B+B\hat{O}C+C\hat{O}A)$.

(b) $A\hat{O}X+B\hat{O}X<A\hat{O}C+B\hat{O}C$.

(c) $A\hat{O}X+B\hat{O}X+C\hat{O}X<A\hat{O}B+B\hat{O}C+C\hat{O}A$.

〔證明〕 (a) $\left.\begin{array}{l} A\hat{O}X+B\hat{O}X>A\hat{O}B \\ B\hat{O}X+C\hat{O}X>B\hat{O}C \\ C\hat{O}X+A\hat{O}X>C\hat{O}A \end{array}\right\}+$



$\therefore\ A\hat{O}X+B\hat{O}X+C\hat{O}X>\frac{1}{2}(A\hat{O}B+B\hat{O}C+C\hat{O}A)$.

(b) OAX 面ト BOC 面トノ交線ヲ OE

トセバ $A\hat{O}C+C\hat{O}E>A\hat{O}E$

$B\hat{O}E+E\hat{O}X>B\hat{O}X$

而シテ $C\hat{O}E+B\hat{O}E=B\hat{O}C$

及ビ $A\hat{O}E-E\hat{O}X=A\hat{O}X$

$\therefore\ A\hat{O}C+B\hat{O}C>A\hat{O}X+B\hat{O}X$

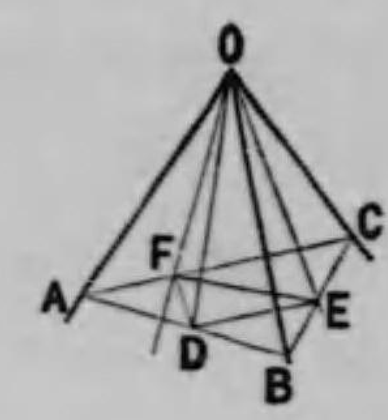
(c) (b) ニ依テ $A\hat{O}X+B\hat{O}X<A\hat{O}C+B\hat{O}C$

$B\hat{O}X+C\hat{O}X<B\hat{O}A+C\hat{O}A$

$C\hat{O}X+A\hat{O}X<C\hat{O}B+A\hat{O}B$

之ヲ邊々相加ヘテ 2 除セバ $A\hat{O}X+B\hat{O}X+C\hat{O}X<A\hat{O}B+B\hat{O}C+C\hat{O}A$.

3. △ABC ニ内接 △DEF ヲ畫キ, 其面外ノ一點 O ヲ共通ノ頂點トスル二ツノ三面角 O－ABC, O－DEF ヲ作レバ, 外三面角ノ面角ノ和ハ内三面角ノ面角ノ和ヨリモ大ナリ.



〔證明〕 $A\hat{O}F+A\hat{O}D>F\hat{O}D$

$C\hat{O}F+C\hat{O}E>E\hat{O}F$

及ビ $B\hat{O}D+B\hat{O}E>D\hat{O}E$

$\therefore\ A\hat{O}F+C\hat{O}F+A\hat{O}D+B\hat{O}D+C\hat{O}E+B\hat{O}E$

卽チ $A\hat{O}C+A\hat{O}B+B\hat{O}C>F\hat{O}D+E\hat{O}D+E\hat{O}F$.

4. 三面角 O－ABC ニ於テ AB＝OC, BC＝OA, CA＝OB トスルトキハ, O, A, B, C ヲ角頂トスル三ツノ面角ノ和ハ何レモ二直角ナリ.

〔證明〕 先ヅ O ヲ頂點トスル三面角ニ於テ AB＝OC, CA＝OB, BC ハ共通ナルヲ以テ △ABC≡△OBC, $B\hat{A}C=B\hat{O}C$. 同樣ニ $A\hat{C}B=A\hat{O}B$ 及ビ $A\hat{B}C=A\hat{O}C$.

$\therefore\ A\hat{O}B+A\hat{O}C+B\hat{O}C=A\hat{C}B+A\hat{B}C+B\hat{A}C=2\hat{R}$.

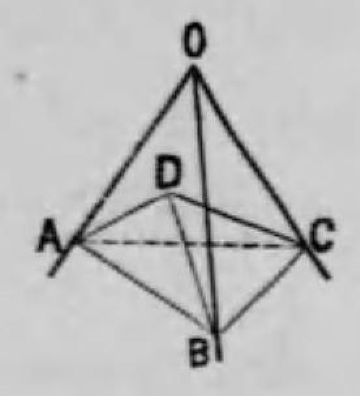
其他ニ就テモ同樣ニ證明スルコトヲ得.

5. 三面角 O－ABC ニ於テ次ノ證如何.

(a) 面角 AOB＝BOC ナラバ, 之ニ對スル二面角 OC＝OA ナリ.

(b) 面角 AOB＜BOC ナラバ, 之ニ對スル二面角 OC＜OA ナリ.

〔證明〕 BD⊥面OA, DA⊥OAC, DC⊥OC トセバ三垂線定理ニ依テ BA⊥OA, BC⊥OC ナルユエ $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$ ハ二面角 OA, OC ナリ.



(a) 直 △ABO, BCO ハ $A\hat{O}B=B\hat{O}C$〔假設〕, 斜邊 OB ハ共通ナルユエ全等ニシテ AB＝BC.

從テ 直△ABD≡BDC, ∴ $B\hat{A}D=B\hat{C}D$.

(b) 直 △AOB, BOC ニ於テ $A\hat{O}B<B\hat{O}C$〔假設〕, 斜邊 OB ハ共通ナルユエ AB＜BC. 從テ 直△ABD, BCD ニ於テ BD ハ共通, 斜邊 AB＜BC ナルユエ AD＜CD. CD 上ニ DA′＝DA トセバ △BA′D≡△BAD, $B\hat{A'}D=B\hat{A}D$. 又外角 $BA'D>B\hat{C}D$ ∴ $B\hat{A}D>B\hat{C}D$.

6. 二面角 O−ABC ニ於テ次ノ證如何.

(*a*) 二面角 $OC=OA$ ナラバ,之ニ對スル面角 $AOB=BOC$ ナリ.

(*b*) 二面角 $OC<OA$ ナラバ,之ニ對スル面角 $AOB<BOC$ ナリ.

〔證明〕 前題ノ逆ナルユエ,前題ノ證ヲ逆順ニスベシ.

7. 三面角ノ一ツノ二面角ガ直角ナルトキ[直三面角], 一稜ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口ハ直三角形ナリ.

〔證明〕 次圖ヲ用フ. 三面角 O−ABC ニ於テ二面角 OB ヲ直角トス. 然ルトキ截リ口ガ稜.OB ニ垂直ナルトキハ $A\hat{B}C=\hat{R}$ ナルコト明カナリ.

次ニ截リ口ガ稜 OA ニ垂直ナルトキハ $OA\perp$面ABC ナルユエ 面 $OAB\perp$ 面ABC. 然ルニ 面$OAB\perp$面OBC〔假設〕. 故ニ二面 ABC, OBC ノ交線ナルユエ $BC\perp$ 面OAB.

∴ BC ハ面 OAB 上ノ直線 BA ニ垂線ナリ, 卽チ $A\hat{B}C=\hat{R}$.

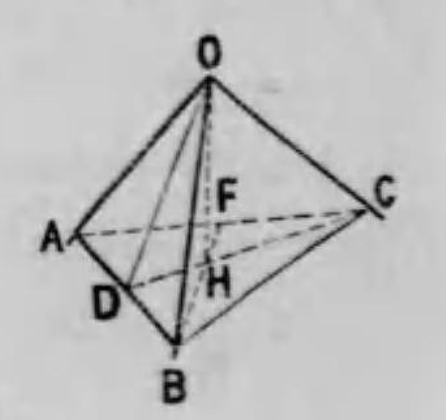
8. (*a*) 三面角ノ各々ノ二面角ガ直角ナルトキ[直三面角], 其角頂ヨリ截リ口へ引ケル垂線ノ足ハ截リ口ノ垂心ナリ. (各高)

(*b*) 又角頂ヨリ截リ口ノ各邊へ引ケル垂線ノ足ヲ結ビ付クレバ, 截リ口ノ垂足三角形ナリ.

(*c*) 又此三面角ノ截リ口ハ常ニ鋭角三角形ナリ.

(*d*) 三面角 O−ABC ノ截リ口 ABC ノ垂心ヲ H トスレバ, △ABO ハ △ABC ト ABH トノ比例中項ナリ.

〔證明〕 直三面角 O−ABC ノ截リ口 ABC へ O ヨリ引ケル垂線ノ足ヲ H トス. 然ルトキ CH, BH ノ延長ト AB, AC トノ交點ヲ D, F トス.



(*a*) 面 AOB, ABC へノ垂線 CO, OH ヲ含ム 面OCD ハ前ノ二面ニ垂直ナリ. 故ニ AB ハ 面OCD ニ垂線,從テ $AB\perp CD$. 同樣ニ $BF\perp AC$. ∴ H ハ △ABC ノ垂心ナリ.

(*b*) $CO\perp$面AOB ナルユエ $CO\perp AB$, 依テ $OD\perp AB$ トセバ $AB\perp$面ODC, ∴ $AB\perp CD$. 同樣ニ $BF\perp AC$, $AE\perp BC$ ヲ證シ得.

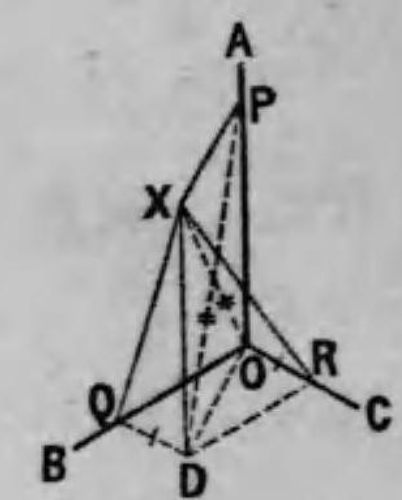
(*c*) $OD\perp AB$ トセバ $A\hat{O}B=\hat{R}$ ナルユエ D 點ハ AB 上ニ在リテ $CD\perp AB$. 同樣ニ F 點ハ AC 上ニ在リテ $BF\perp AC$. 故ニ CD, BF ノ交點 H ハ △ABC 內ニアルユエ ABC ハ鋭角三角形ナリ.

(*d*) AB ハ之ニ垂線ナル CD, CO ヲ含ム平面 ODC ノ直線 OD ニ垂線ナリ. 故ニ同底ナル $\triangle ABC:\triangle ABO=CD:OD$ 及ビ $\triangle ABO:\triangle ABH=OD:DH$. 然ルニ $CO\perp$面AOB ナルユエ $C\hat{O}D=\hat{R}$ ニシテ $OH\perp CD$ ナルユエ $\triangle COD\backsim\triangle ODH$, 故ニ $CD:OD=OD:DH$.

$$\therefore\ \triangle ABC:\triangle ABO=\triangle ABO:\triangle ABH.$$

9. 三面角 O−ABC ノ各平面角ガ皆ナ直角ナルトキ[直三面角], 任意ノ一點 X ヨリ OA, OB, OC ニ夫々垂線 XP, XQ, XR ヲ引ケバ $\overline{OX}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2+\overline{OR}^2$ ナリ. (海機)

〔證明〕 $XD\perp$面BOC トセバ $XD\perp OB$, 且ツ $XQ\perp OB$ ナルユエ $OB\perp$面XDQ. 從テ $OB\perp DQ$. 同樣ニ $OC\perp DR$. 而シテ $B\hat{O}C=\hat{R}$. 故ニ DQOR ハ矩形ニシテ對邊 $DQ=OR$.



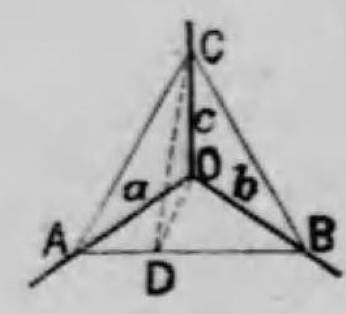
又 $AO\perp$ 面 $BOC\perp XD$ ナルユエ $PO//XD$ ニシテ $X\hat{D}O=P\hat{O}D=\hat{R}=X\hat{P}O$. 故ニ XDOP ハ矩形ニシテ $XO=PD$.

$$\therefore\ \overline{OX}^2=\overline{PD}^2=\overline{OP}^2+OD^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2+\overline{QD}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2+\overline{OR}^2.$$

10. 直三面角 O−ABC ニ於テ $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ トスレバ次ノ證如何,

$$截リ口\ ABC\ ノ面積=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}.$$

〔證明〕 假設ニ依リ $CO\perp AO\perp BO\perp CO$ ナルユエ $CO\perp$ 面AOB, 從テ $CO\perp AB$. 依テ $CD\perp AB$ トセバ三垂線定理ニ依リ $OD\perp AB$. 故ニ $OD.AB=2\triangle AOB=ab$.



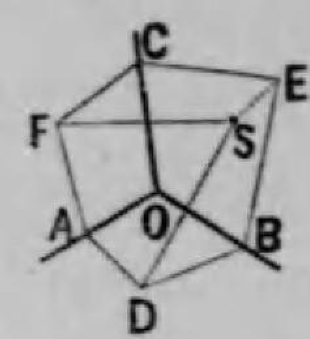
$$\therefore\ 2\triangle ABC=CD.AB=\sqrt{\overline{OD}^2+c^2}\times AB$$

$$=\sqrt{\frac{a^2b^2}{\overline{AB}^2}+c^2}\times AB=\sqrt{a^2b^2+c^2\overline{AB}^2}=\sqrt{a^2b^2+c^2(a^2+b^2)}.$$

11. 三面角 O−ABC 內ノ一點 S ヨリ各面上ニ引ケル垂線 SD, SE, SF ヲ各稜トスル三面角 S−DEF ヲ作レバ, 其一方ノ二面角ハ他ノ面角ト補角ヲ爲ス.

〔證明〕 O−ABC ト S−DEF トノ交線ヲ DA, DB, EB, EC, FA, FC トス.

然ルトキハ 面 AOB, 面 AOC ヘノ垂線 SD, SF ヲ含ム平面 SDAF ハ其二面ニ垂直ナリ, 從テ其交線 OA ニ垂線ナリ. 故ニ DA⊥OA⊥AF.



故ニ $\widehat{DAF}$ ハ 面 AOB ト 面 AOC トノ爲ス二面角ナリ. 而シテ四邊形 SDAF ニ於テ $\widehat{SDA}=\widehat{R}=\widehat{SFA}$.

$\therefore\ \widehat{DSF}+\widehat{DAF}=2\widehat{R}$.

其他 O−ABC ノ二面角ハ S−DEF ノ面角ト補角ヲナス.

同樣ニ S−DEF ノ二面角ハ O−ABC ノ面角ト補角ヲナスコトヲ證シ得.

12. 三面角ノ各二面角ノ和ハ二直角ヨリハ大ナルモ六直角ヨリハ小ナリ.

〔證明〕 上圖ヲ用フ. 二面角 OA ＋ 面角 FSD$=2\widehat{R}$

二面角 OB ＋ 面角 DSE$=2\widehat{R}$

二面角 OC ＋ 面角 ESF$=2\widehat{R}$

故ニ此和卽チ三面角 O−ABC ノ二面角ノ和ニ三面角 S−DEF ノ面角ヲ加ヘタルモノハ $6\widehat{R}$ ナリ. 然ルニ三面角 S−DEF ノ面角ノ和ハ $4\widehat{R}$ ヨリモ小ナリ.

∴ O−ABC ノ二面角ノ和ハ $2\widehat{R}$ ヨリハ大ナリ, 又 $6\widehat{R}$ ヨリハ小ナルコト明カナリ.

第六章

軌跡

15. 軌跡ニ就テ ハ已ニ緒論ニ述ベタルガ如ク, 平面幾何學ノ第一編第二章ヲ必ズ再讀スルヲ要ス.

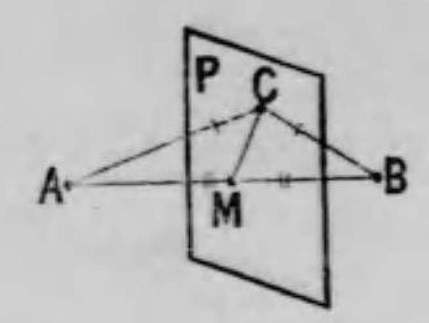
立體幾何學ニハ點ノ軌跡ノ外ニ線ノ軌跡アレドモ只其異ナル所ハ點ト云フ代リニ線ト云フニ過ギズ. 而シテ點ノ軌跡ハ線或ハ面トナリ, 又線ノ軌跡ハ線或ハ面トナルナリ.

16. 軌跡ノ重要定理

軌跡 (1) 二定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

〔解〕 先ヅ二定點 A, B ヨリ等距離ナル任意ノ點ヲ C トシ, CM⊥AB トセバ AM=MB.

∴ C ハ AB ノ中點 M ヨリ AB ヘノ任意ノ垂線 MC ヲ含ム平面, 卽チ AB ノ垂直二等分面 P ノ上ニ在リ.



次ニ P 面上ニ任意ノ點 C ヲ取リ CM ヲ結ベバ三邊ノ相等シキ △CAM≡△CBM, CA=CB.

∴ P面上ノ點ハ A, B ヨリ等距離ナリ.

∴ 所要ノ軌跡ハ二定點 A, B ノ連結線 AB ノ垂直二等分面 P ナリ.

注意 A, B ヨリノ距離ノ比ガ $m:n$ ナル點ノ軌跡ハ AB ヲ $m:n$ ニ內分及ビ外分スル點ヲ過リ AB ニ垂直ナル平面ナリ. 之レ本題ノ一般ノ場合ナリ.

以下ノ等距離ノ場合モ之ニ準ズ. 但シ此等ハ參考ニ供スルノミ.

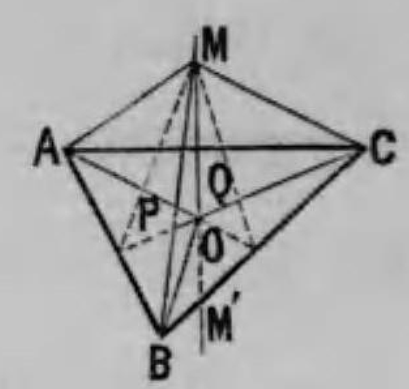
軌跡 (2) (i) 一直線上ニ在ラザル三點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

(ii) 一圓周ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

〔解〕(i)　一直線上ニ在ラザル三點ヲ A, B, C トス．然ルトキ先ヅ此平面 ABC 上ニ於テ A, B, C ヨリ等距離ナル點卽チ外心 O ヲ求ムレバ之レ極限點ナリ．サテ軌跡上ノ任意ノ點卽チ共通點ヲ M トセバ $MA=MB=MC$ ニシテ又 $OA=OB=OC$ ナルユヱ $\triangle MOA \equiv \triangle MOB \equiv \triangle MOC$, 從テ $M\hat{O}A=M\hat{O}B=M\hat{O}C$ ナルユヱ $MO \perp$ 面 ABC.

∴　M ハ定點 O ヲ過リ 面 ABC ニ垂直ナル直線 MOM′ 上ニ在リ．

逆ニ, MO 上ニ任意ノ點 M ヲ取レバ $MO \perp$ 面 ABC ニシテ $OA=OB=OC$ ナルユヱ $MA=MB=MC$.



∴　MOM′ 上ノ點ハ A, B, C ヨリ等距離ナリ．

∴　所要ノ軌跡ハ三點ニテ成レル三角形ノ外心ヲ過リ其面ニ垂直ナル一直線ナリ．

〔別解〕二點 A, B ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ直線 AB ノ垂直二等分面 P ナリ．

又二點 B, C ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ直線 BC ノ垂直二等分面 Q ナリ．

而シテ相交ル二線 AB, BC ニ夫々垂直ナル二面 P, Q ハ相交ル，且ツ $P \perp ABC$ 及ビ $Q \perp ABC$ ナルユヱ P, Q ノ交線 $MO \perp ABC$ ナリ．

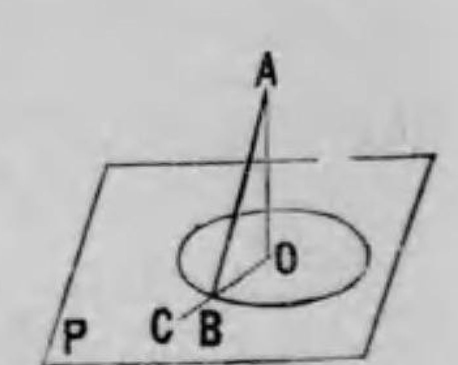
次ニ MO 上ノ凡テノ點ハ三點 A, B, C ヨリ等距離ナルガ故ニ MO ト面 ABC トノ交點 O ハ A, B, C ヨリ等距離ナリ，卽チ O ハ $\triangle ABC$ ノ外心ナリ．

∴　所要ノ軌跡ハ三點ニテ成レル三角形ノ外心ヨリ其面ヘノ垂線ナリ．

注意　本題ハ，三角形ノ各角頂ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ，ト換言シ得．

軌跡 (3)　平面外ノ一點ヨリ其面ニ引ケル定長斜線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ．

〔略解〕　A 點ヨリ P 面ニ垂線 AO ヲ引キ，P 面上ニ直線 OC ヲ引キ，面 AOC 上ニ於テ A ヲ中心トシ定長ヲ半徑トシテ OC ヲ B ニテ截レバ，P 面上ニ於テ O ヲ中心トシ OB ヲ半徑トスル圓周ハ所要ノ軌跡ナリ．



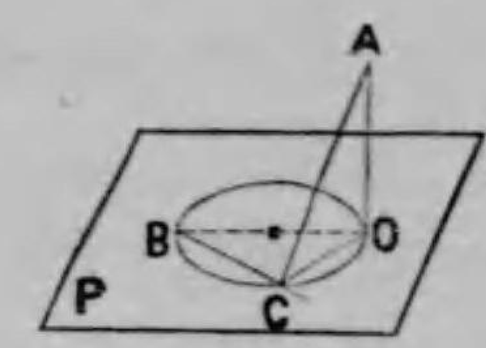
軌跡 (4)　平面上ノ定點ヲ過リ其面上ニ引ケル直線ニ，其面外ノ定點ヨリ引ケル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ．　（東商，各高）

〔解〕P 面上ノ定點ヲ B, 其面外ノ定點ヲ A トス．

今軌跡上ノ一點ヲ C トセバ $AC \perp BC$.

$AO \perp P$ トセバ三垂線定理ニ依リテ

$OC \perp BC$ 卽チ $B\hat{C}O=\hat{R}$ ナリ．



∴　C ハ P 上ノ直徑 OB 圓ノ周上ニ在リ．

逆ニ，此圓 OB ノ周上ニ點 C ヲ取レバ

$B\hat{C}O=\hat{R}$ 卽チ $BC \perp OC$, 而シテ $AO \perp P$ ナルユヱ $AO \perp OC$. 故ニ三垂線ノ定理ニ依リテ $AC \perp BC$.　∴　此圓 OB ノ周上ノ C 點ハ $BC \perp AC$ ナル點ナリ．

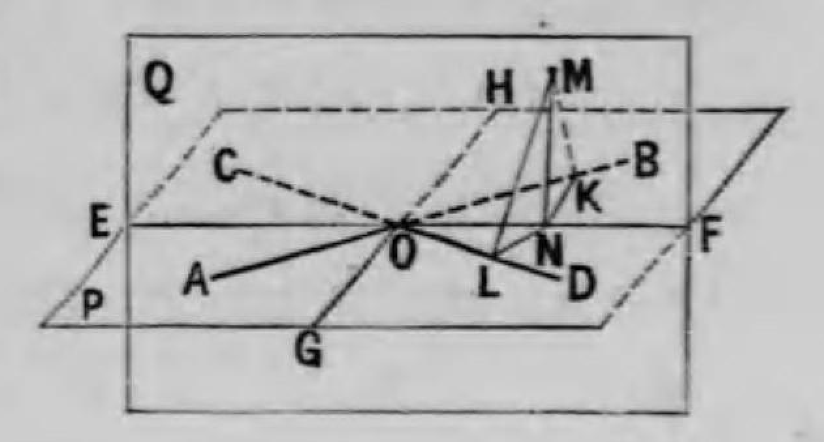
∴　所要ノ軌跡ハ面外ノ定點ヨリ面ヘノ垂線ノ足ト面上ノ定點トノ連結線ヲ直徑トシ其面上ニ畫ケル圓周ナリ．

軌跡 (5)　(i)　平行二定直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ．
(ii)　相交ル二定直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ．

〔解〕(ii)　相交ル二直線 AB, CD ノ交點ヲ O トシ，又其二線ノ平面ヲ P トス．

今軌跡上ノ一點ヲ M トシ，$MK \perp AB$, $ML \perp CD$, $MN \perp P$ 且ツ N ハ $B\hat{O}D$ 內ニ在リトセバ $MK=ML$, 從テ $NK=NL$. 又三垂線定理ニヨリ $KN \perp OB$, $LN \perp OD$.

故ニ N 點ハ $B\hat{O}D$ ノ二邊ヨリ等距離ナルユヱ其角ノ二等分線 EF 上ニ在リ．



而シテ P ヘノ垂線 MN ヲ含ム平面 Q ハ P ニ垂直ナリ．

∴　M 點ハ EF ヲ含ミ P ニ垂直ナル平面 Q 上ニ在リ．

逆ニ，Q 面上ニ點 M ヲ取リ $MN \perp EF$ トセバ MN ハ Q 面上ニ在リ，從テ $MN \perp P$. 又 $NK \perp AB$, $NL \perp CD$ トセバ $NK=NL$ 且ツ三垂線定理ニ依テ $MK \perp AB$, ML⊥CD. 從テ 直△MNK≡△MNL. ∴ MK=ML 卽チ Q 面上ノ點ハ AB, CD ヨリ等距離ナリ.

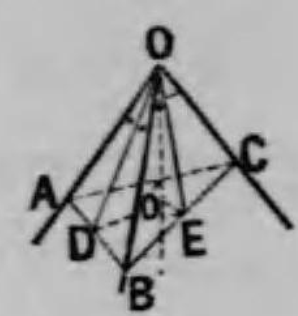
∴ $\hat{BOD}$ ノ二等分線 EF ヲ含ミ P ニ垂直ナル平面ハ所要ノ軌跡ナリ.

同樣ニ $\hat{BOC}$ ノ二等分線GH ヲ含ミ P ニ垂直ナル平面ハ所要ノ軌跡ナリ.

∴ 所要ノ軌跡ハ交角ノ二等分線ノ一ツヲ含ミ且ツ元ノ二線ノ平面ニ垂直ナル二平面ナリ.

系. 三面角ノ三稜ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ. （高等）

〔解〕 三面角ヲ O−ABC トス. 二稜 OA, OB ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ面角 AOB ノ二等分線 OD ヲ含ミ面 AOB ニ垂直ナル平面 P ナリ. 又二稜 OB, OC ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ面角 BOC ノ二等分線 OE ヲ含ミ面 BOC ニ垂直ナル平面 Q ナリ. 故ニ P, Q ノ交線 OO′ ハ三稜 OA, OB, OC ヨリ等距離ナリ. 從テ二稜 OA, OC ヨリ等距離ナル點ノ軌跡卽チ面角 COA ノ二等分線ヲ含ミ其面ニ垂直ナル平面 R モ亦タ OO′ ヲ過ル.



∴ 所要ノ軌跡ハ各々ノ面角ヲ二等分シ且ツ其面ニ垂直ナル三平面ノ交リナル一直線ナリ.

注意 60 頁ノ 1 題ハ本題ノ換言ナリ.

軌跡 (6) (i) 平行二平面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

(ii) 二面角ノ各面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

〔解〕 (ii) 22 頁ノ下圖ヲ用フ. 二面角ヲ PABQ トス. 先ヅ軌跡上ニ點 C ヲ取レバ P, Q ヘノ垂線 CE, CF ヲ含ム平面 ECF ハ P, Q ニ垂直ナリ, 從テ其交線 AB ニ垂直ナリ, 其交點ヲ D トセバ AB ハ DE, DC, DF ニ垂直ニシテ CE=CF, CD ハ共通, $\hat{E}=\hat{R}=\hat{F}$ ナルユヱ △ECD≡FCD, $E\hat{D}C=F\hat{D}C$ 卽チ CD ハ二面角ノ平面角 EDF ヲ二等分ス. ∴ C ハ二面角ノ二等分面 M ノ上ニ在リ.

次ニ M 面上ニ點 C ヲ取レバ P, Q ヘノ垂線 CE=CF.

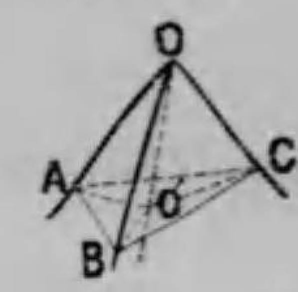
〔22 頁定理 (4) ノ證ヲ用フ.〕

∴ 所要ノ軌跡ハ二面角ノ二等分面ナリ.

系 (1) 相交ル二平面ノ各面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ, 其二ツノ隣二面角ノ各二等分面ニシテ互ニ直交ス.

系 (2) 三面角ノ各面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

〔解〕 三面角ヲ O−ABC トス. 二面 COA, BOA ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ其二面角 OA ノ二等分面 P ナリ. 又二面 BOA, BOC ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ其二面角 OB ノ二等分面 Q ナリ. 故ニ二面 P, Q ノ交線 OO′ ハ三面 COA, AOB, BOC ヨリ等距離ナリ. 從テ二面 BOC, COA ヨリ等距離ナル點ノ軌跡 卽チ二面角 OC ノ二等分面 R モ亦タ OO′ ヲ過ル.



∴ 所要ノ軌跡ハ各二面角ヲ二等分スル三平面ノ交リナル一直線ナリ.

注意 60 頁ノ 2 題ハ本題ノ換言ナリ.

問 題 及 ビ 解 答

1. 一定平面上ニ於テ其外ノ二定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ. （高等）

〔解〕 定平面ヲ Q, 其外ノ二定點ヲ A, B トス. 然ルトキ A, B ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ直線 AB ノ垂直二等分面 P ナリ, 故ニ A, B ヨリ等距離ニシテ Q 上ニ在ル點ハ二面 P, Q ノ交線 CD ナリ.

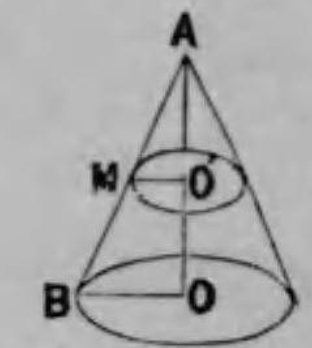
逆ニ, 此交線 CD 上ノ點ハ P 上ニ在ルユヱ A, B ヨリ等距離ニシテ亦タ Q 上ニ在リ.

∴ 所要ノ軌跡ハ二定點ノ連結線ノ垂直二等分面ト定平面トノ交線ナリ.

2. 一定圓アリ, 其平面外ノ一定點ト圓周上ノ點トヲ結ブ直線ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ. （東工）

〔解〕 定圓ノ中心ヲ O トシ, 其平面外ノ定點ヲ A トス. 今 O 圓ノ周上ニ任意ノ點 B ヲ取リ AO, AB ノ中點ヲ夫々 O′, M トセバ △AOB ニ於テ $O'M \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}OB$ ナルユヱ

AB ノ中點 M ハ AO ノ中點 O′ ヲ中心トシ元圓ノ半徑ノ半ヲ半徑トシ元圓ニ平行スル一圓周上ニ在リ．



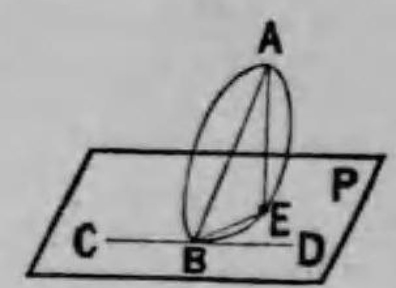
逆ニ，此圓周上ニ M 點ヲ取リ AM ノ延長上ニ B 點ヲ取リ MB＝AM トスレバ △AOB ニ於テ $BO \underline{\parallel} 2MO'$ ナルユヱ B 點ハ元圓ノ周上ニ在リ．

∴ 所要ノ軌跡ハ AO ノ中點ヲ中心トシ元圓ノ半徑ノ半ヲ半徑トシ元圓ニ平行スル一圓周ナリ．

平面幾何學 104 頁 3 ノ (a) ヲ參考セヨ．

3. 一定直線ヲ含ム平面上へ其外ノ一定點ヨリ引ケル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ．

〔解〕 定直線ヲ CD トシ，其外ノ定點ヲ A トス．然ルトキ A ヨリ CD ニ垂線 AB ヲ引キ，CD ヲ含ム任意ノ平面 P へ垂線 AE ヲ引ケバ三垂線定理ニ依テ EB⊥CD. 從テ CD⊥面ABE. 故ニ E 點ハ A ヨリ CD へノ垂線 AB ヲ含ミ CD へノ垂直面上ニ於テ AB ヲ直徑トスル一圓ノ周上ニ在リ．

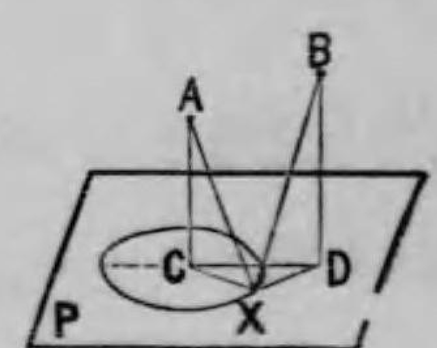


逆ニ，此圓周上ニ E 點ヲ取リ BE ヲ結ベバ $B\hat{E}A$ ハ $\hat{R}$ 卽チ AE⊥BE. 又 面ABE⊥CD ナルユヱ AE⊥CD. 從テ AE ハ BE, CD ヲ含ム平面ニ垂直ナリ．

∴ 所要ノ軌跡ハ A ヨリ CD へノ垂線 AB ヲ含ム平面卽チ CD へノ垂直平面上ニ於テ AB ヲ直徑トスル一圓周ナリ．

4. 一定平面外ノ二定點ヨリ其面上ノ一點ニ引ケル二直線ガ其面ト等角ヲ爲スベキ其點ノ軌跡ヲ求メヨ． （東工）

〔解〕 定平面ヲ P, 其外ノ二定點ヲ A, B トス．然ルトキ軌跡上ニ X 點ヲ取リ AX, BX ノ P 面上ニ於ケル正射影ヲ CX, DX トセバ △ACX ト △BXD トハ $A\hat{X}C＝B\hat{X}D$ 及ビ $\hat{C}＝\hat{R}＝\hat{D}$ ナルユヱ相似ニシテ XC : XD＝AC : BD＝一定ナリ．



故ニ X 點ハ CD ヲ AC : BD ニ內分及ビ外分スル點ノ連結線ヲ直徑トシテ P 面上ニ畫ケル一圓ノ周上ニ在リ．

逆ニ，此圓周上ニ X 點ヲ取レバ △AXC ト △BXD トハ $\hat{C}＝\hat{R}＝\hat{D}$ 且ツ又 AC : CX＝BD : XD ナルユヱ相似ニシテ $A\hat{X}C＝B\hat{X}D$ ナリ．

∴ 所要ノ軌跡ハ二定點ヨリ其面へ引ケル垂線ノ足ノ距離ヲ二垂線ノ長サノ比ニ內分及ビ外分スル點ノ連結線ヲ直徑トシテ其面上ニ畫ケル一圓ノ周ナリ．

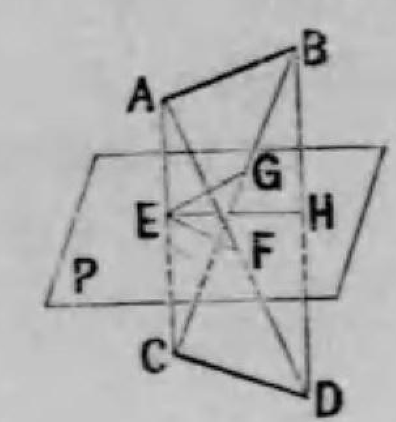
注意 平面幾何學 265 頁 6 ノ (a) ヲ參考セヨ．

5. 空間ノ二定直線ノ一ツニ平行シ他ノ一ツニ交ル直線ノ軌跡ヲ求メヨ．

〔略解〕 所要ノ軌跡ハ一直線ヲ含ミ他ノ直線ニ平行ナル一平面ナリ．

6. 空間ノ二定直線上ニ夫々各端ヲ有スル直線ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ．

〔解〕 此二直線 AB, CD ノ共通垂線 AC ノ中點ヲ E トシ，又 AD, BC ノ中點ヲ夫々 F, G トセバ △ACD, △ABC ニ於テ EF//CD, EG//AB ナルユヱ EF, EG ヲ含ム平面 P ハ AB, CD ニ平行ス．



故ニ AB, CD 上ニ各端ヲ有スル直線ノ中點ハ AB, CD ノ共通垂線ノ中點 E ヲ過リ AB, CD ニ平行スル一平面上ニ在リ．

逆ニ，AB, CD 上ノ任意ノ點 B, D ノ連結線ト P 面トノ交點ヲ H トシ；AB, CD ヲ含ミ P ニ平行ナル平面 Q, R ヲ作レバ Q//P//R ナルユヱ BH : HD＝AE : EC＝1, 故ニ H ハ BD ノ中點ナリ．

∴ 所要ノ軌跡ハ二定直線ノ共通垂線ノ中點ヲ過リ其各々ニ平行スル一平面ナリ．

注意 此直線ヲ $m : n$ ニ分ツ點ノ軌跡ハ AC ヲ E ニ於テ AE : EC＝$m : n$ ニ取レバ可ナリ．

7. 一平面上ニ在ラザル平行三直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ．

〔略解〕 此三線ヲ AB//CD//EF トセバ，所要ノ軌跡ハ AB, CD ノ距離ノ垂直二等分面ト AB, EF ノ距離ノ垂直二等分面トノ交線ナリ．

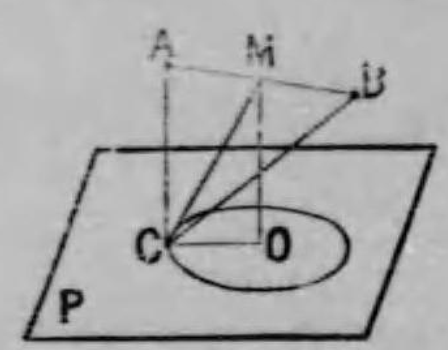
8. 三角形ノ各邊ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

〔略解〕 所要ノ軌跡ハ三角形ノ內心ヲ過リ其面ニ垂直ナル直線ナリ 〔36 頁ノ系ノ解ニ倣フ〕

9. 二定點及ビ二定平面ヨリ夫々等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ. （名工）

〔略解〕 所要ノ軌跡ハ二定點ノ連結線ノ垂直二等分面ト二定平面ノ二面角ノ二等分面或ハ二定平面ノ距離ノ垂直二等分面トノ交リナリ.

10. 定平面 P 外ノ二定點 A, B ヨリ P 面上ノ一點ニ至ル距離ノ平方ノ和ヲ a^2 ニ等シカラシムベキ其點ノ軌跡ヲ求メヨ. （名工）



〔解〕 今軌跡上ノ一點ヲ C トシ, AB ノ中點ヲ M トセバ $2(\overline{CM}^2+\overline{BM}^2)=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=a^2$ ナルユヱ $\overline{CM}^2=\left(\frac{1}{2}a^2-\overline{BM}^2\right)$ 卽チ定長ナリ. 又 M 點ト P 面トノ距離 MO モ定長ナルヲ以テ $\overline{OC}^2=(\overline{CM}^2-\overline{MO}^2)$ ハ定長ナリ.

故ニ C 點ハ O ヲ中心トシ OC ヲ半徑トスル一圓ノ周上ニ在リ.

逆ニ, 此圓周上ノ點ハ要件ニ適スルコトヲ證明シ得ベシ.

∴ 所要ノ軌跡ハ二定點ノ連結線 AB ノ中點 M ヨリ P 面ヘノ垂線ノ足 O ヲ中心トシ定長 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2-\overline{BM}^2-\overline{MO}^2\right)}$ ヲ直徑トシテ P 面上ニ畫ケル一圓ノ周ナリ.

11. 二定點 A, B ヨリ一點ニ至ル距離上ノ平方ノ差ヲ a^2 ニ等シカラシムベキ其點ノ軌跡ヲ求メヨ.

〔略解〕 所要ノ軌跡ハ直線 AB 上ニ於テ $\overline{AC}^2-\overline{CB}^2=a^2$ ナルベキ, C 點ヲ取リ, 此點ヲ過リ AB ニ垂直ナル一平面ナリ.

第七章

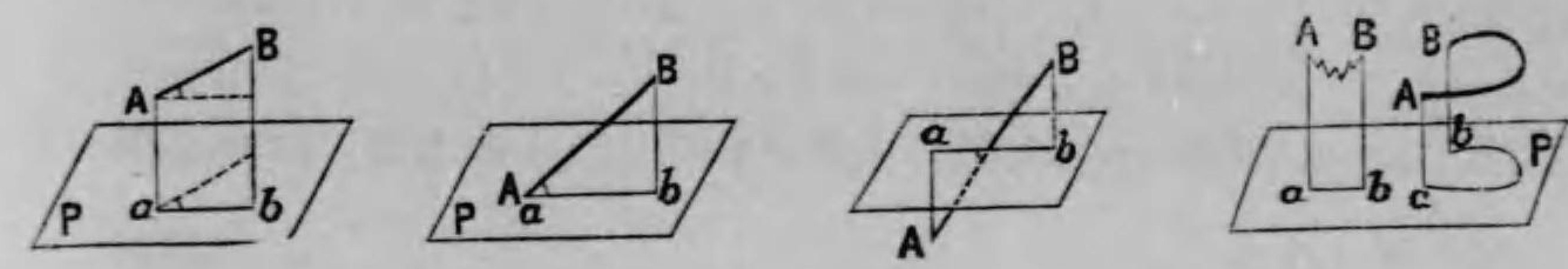
正射影

17. 正射影 ノ定義ハ平面幾何學ニ準ズ, 卽チ

定義 (1) **一點ノ一平面ニ於ケル正射影** トハ其點ヨリ其面ニ下セル垂線ノ足ヲ云フ.

定義 (2) **一線ノ一平面ニ於ケル正射影** トハ其線上ノ點ノ平面ニ於ケル正射影ノ軌跡ヲ云フ.

例ヘバ次圖ノ如ク, 線 AB ノ面 P ニ於ケル正射影ハ線 ab 或ハ Ab ナリ.



注意 直線ガ平面ニ於ケル正射影ハ其直線ガ其面ニ垂線ナルトキハ極小ニシテ, 平行ナルトキハ極大ナルコトヲ知リ得ベシ.

定義 (3) **一直線ガ一平面ト爲ス角** トハ其直線ノ面上ニ於ケル正射影ト直線トノ爲ス銳角ヲ云フ.

上圖ヲ熟視スベシ.

18. 重要定理

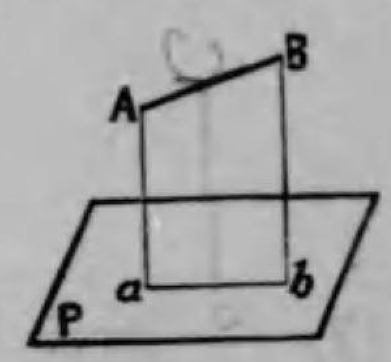
定理 (1) 一直線ノ一平面ニ於ケル正射影ハ一直線ナリ.

〔證明〕 直線 AB 上ノ二點 A, B ノ P 面上ニ於ケル正射影ヲ a, b トス.

今 AB ガ P 面ニ含マレヽトキハ, 其正射影ハ AB 自身ニシテ一直線ナルコト明カナリ.

又 AB ガ P 面ニ垂直ナルトキハ, 其正射影ハ一點トナルコト明カナリ.

其他ノ場合ニ付テ，Aa, Bb ハ共ニ P 面ニ垂直ナルヲ以テ平行ス，此二線ノ平面 Q ト P トノ交線ハ一直線 ab ナリ．サテ AB 上ノ任意ノ點 C ノ正射影ヲ c トセバ Cc ハ Q 面上ニ在リテ又 P 面上ニ在ルユヱ其交線 ab 上ニ在リ．次ニ交線 ab 上ノ任意ノ點 c ヨリ P 面ニ垂線 cC ヲ引ケバ cC ハ P 面ニ垂直ナル Q 面上ニ在リテ aA ニ平行スルユヱ AB ト交ル，其交點ヲ C トセバ c ハ C ノ P ヘノ正射影ナリ．



∴ 直線 AB ノ P 面上ニ於ケル正射影ハ AB 上ノ二點 A, B ノ P 面上ニ於ケル正射影 a, b ヲ連結セル直線 ab ナリ．

系．一平面ニ平行ナル直線ノ其面ニ於ケル正射影ハ，元ノ直線ニ平行ナリ．

〔證明〕 AB//P面ナルユヱ AB, ab ハ交ラズ且ツ AabB ハ一平面ナレバナリ．

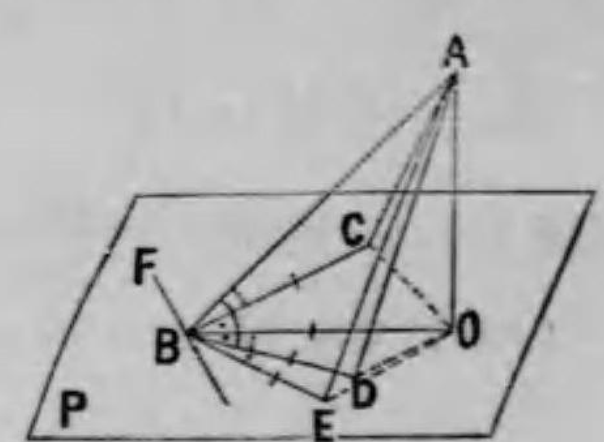
定理 (2) (i) 斜線ガ其正射影ト為ス鋭角ハ，平面上他ノ直線ト為ス鋭角ヨリモ小ナリ．（海兵）

(ii) 平面上正射影ト相等シキ鋭角ヲ為ス直線ガ斜線ト為ス鋭角ハ相等シ．

(iii) 平面上正射影ト大ナル鋭角ヲ為ス直線ガ斜線ト為ス鋭角ハ他ヨリモ大ナリ．

(iv) 斜線ハ平面上其足ヲ過リ正射影ニ垂線ナル直線ニ垂線ナリ．

〔證明〕 斜線 AB ノ P 面ヘノ正射影ヲ BO トス．



(i) P 面上ニ任意ノ直線 BC ヲ引キ BO ニ等シクセバ，AB ハ共通，斜線 AC>AO ナルユヱ △ABC, △ABO ニ於テ $A\hat{B}C>A\hat{B}O$.

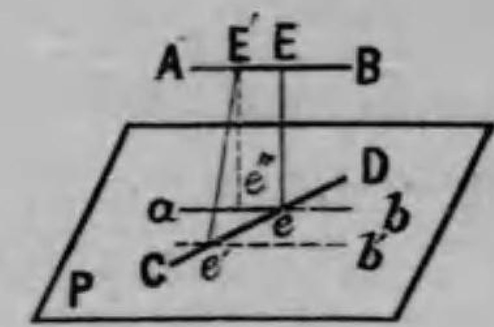
(ii) $O\hat{B}C=O\hat{B}D$ ナルトキ BC=BD トセバ OC=OD, 從テ AC=AD, ∴ △ABC≡ABD, $A\hat{B}C=A\hat{B}D$.

(iii) $O\hat{B}E>O\hat{B}D$ ナルトキ BD=BE トセバ OE>OD, 從テ AE>AD, 故ニ △ABE, △ABD ニ於テ $A\hat{B}E>A\hat{B}D$.

(iv) AO⊥P, OB⊥FB ナルトキハ三垂線定理ニ依テ AB⊥FB.

定理 (3) 空間ノ二直線ヘノ共通垂線ハ只一ツアリ，而シテ此垂線ハ此二線間ノ最短距離ナリ．

〔證明〕 空間ノ二直線ヲ AB, CD トス．CD ヲ含ミ AB ニ平行ナル平面ハ只一ツナリ，之ヲ P トシ其上ニ AB ノ正射影ヲ ab トセバ，ab ハ AB ニ平行ナルユヱ CD ニ平行ナラズ，故ニ ab, CD ノ交點ヲ e トセバ e ハ AB 上ノ或點ノ正射影ナリ．其點ヲ E トセバ Ee ハ P ニ垂線ナルユヱ CD 及ビ ab ニ垂線ナリ，從テ ab ニ平行ナル AB ニモ垂線ナリ，卽チ Ee ハ AB, CD ノ双方ニ垂線ナリ．



次ニ Ee ノ他ニ AB, CD ヘノ共通垂線 E'e' アリトセバ，E'e' ハ AB ト e' ヲ含ム平面ト P トノ交線 $e'b'$ ニ垂線ニシテ又 CD ニ垂線ナルヲ以テ P ニ垂線ナリ．故ニ e' ハ E' ノ正射影ニシテ亦タ ab ノ上ニ在リ．

故ニ e' ハ CD, ab ノ双方ノ上ニ在ルヲ以テ其交點 e ニ一致シ e'E' ハ eE ニ一致セザルベカラズ，卽チ AB, CD ヘノ共通垂線ハ Ee ノ只一ツノミナリ．

次ニ E'e''⊥ab トセバ E'e''≦Ee 且ツ E'e''⊥P ナルヲ以テ E'e'>E'e''=Ee, 卽チ Ee ハ AB, CD 間ノ最短距離ナリ．

系．此距離 Ee ハ AB, CD ノ一ツ宛ヲ含ム平行二平面ノ距離ニ等シ．

問題及ビ解答

1. 直線 AB ノ平面 P ノ上ニ投ジタル正射影ト直角ヲ為シ且ツ其平面 P ノ中ニ在ル任意ノ直線ハ直線 AB ト直角ヲ為ス．（東師）

〔略解〕 三垂線定理ノ換言ニ過ギズ．

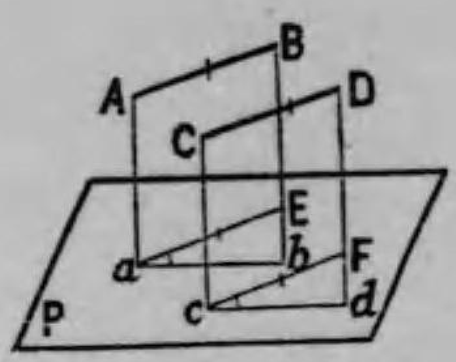
2. (*a*)　平行二直線ガ一平面ト爲ス角ハ相等シ.

(*b*)　相等シク且ツ平行ナル二直線ガ一平面上ニ投ズル正射影ハ，亦タ相等シク且ツ平行ナリ.　（海機）

(*c*)　一ツノ圓ト之ニ平行セル他ノ平面上ニ於ケル其正射影トハ全ク相等シ.　（高等）

〔證明〕(*a*)　略解 $AB//CD$ ノ P 面上ニ於ケル正射影 ab, cd ヲ取リ $\triangle Eab \equiv \triangle Fcd$ ヲ證スレバ可ナリ.

(*b*)　AB≦CD ガ P 面ニ於ケル正射影ヲ ab, cd トス. 然ルトキハ $AB//CD$ ニシテ P 面ヘノ垂線 $Aa//Cc$ ナルユヱ 面 BAa//面 DCc.

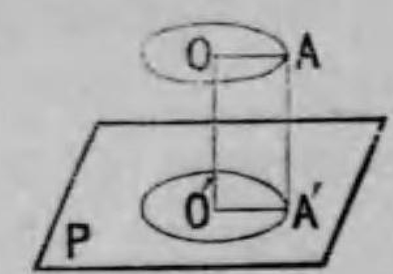


∴　此平行二面ト P 面トノ交線 $ab//cd$.

次ニ面 BAa, DCc ニ於テ $aE//AB$, $cF//CD$ トセバ AE 及ビ CF ハ平行四邊形ニシテ $aE=AB=CD=cF$. 又 $AB//CD$ ガ P 面ト爲ス $\hat{Eab}=\hat{Fcd}$. 故ニ斜邊ト一鋭角ガ等シキ 直 $\triangle Eab \equiv \triangle Fcd$.　∴　$ab=cd$.

若シ面 BAa, DCc ガ重ナルトキハ ab, cd ハ重ナルモ亦タ相等シキコト明カナリ.

(*c*)　圓心ヲ O, 半徑ヲ r トシ, 又平面 P//圓 O トス. 然ルトキ O 及ビ圓周上ノ點 A ノ P 面ニ於ケル正射影ヲ O', A' トセバ P 面ニ垂線ナル $OO'//AA'$, 從テ此二線ノ平面ト平行二面卽チ O 圓及ビ P トノ交線ナル $OA//O'A'$.



依テ $OAA'O'$ ハ平行四邊形ニシテ $OA=O'A'$. 故ニ A 點ノ P 面上ニ於ケル正射影ハ P 面上ニ於テ O' ヲ中心トシ $O'A'$ 卽チ元圓ノ半徑ト等半徑ノ圓周上ニ在リ.

逆ニ, 此圓周上ノ點ハ O 圓周上ノ之ニ對應スル點ノ正射影ナルコトヲ證シ得〔41 頁定理 (1) ニ倣フ〕.

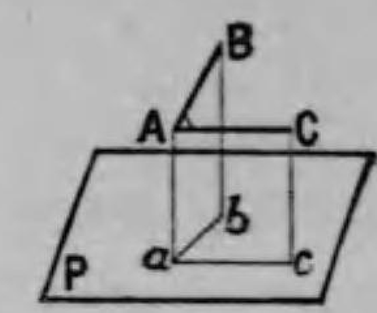
∴　此圓 O ノ P 面上ニ於ケル正射影ハ亦タ圓 O' ニシテ元圓ト全ク相等シ.

3. 數多ノ點ヨリ一平面ニ下セル正射影ガ皆ナ一直線上ニ在レバ, 此諸點ハ一ツノ平面上ニ在リ.

〔證明〕 A, B, C, 等ノ諸點ヨリ平面 P ニ下セル正射影 a, b, c, 等ガ一直線上ニ在レバ Aa, Bb, Cc, 等ハ何レモ P 面ニ垂直ナルユヱ P 面上ノ一直線上ノ點 a, b, c, 等ヲ過リテ P 面ニ垂直ナル一ツノ平面上ニアリ.

4. 直角ノ一邊ガ一平面ニ平行スルトキハ, 其角ノ其面上ニ於ケル正射影モ亦タ直角ナリ.　（東工）

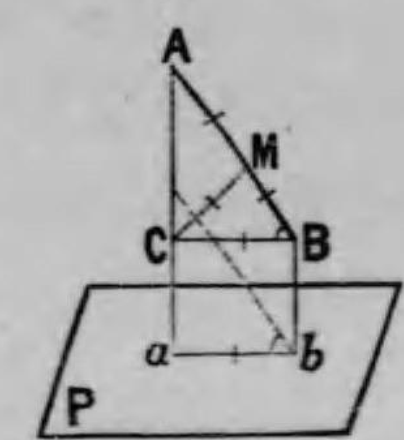
〔證明〕 直角 BAC ノ一邊 AC//P 面, 又 $\hat{BAC}$ ノ P 面上ニ於ケル正射影ヲ bac トス. 然ルトキハ CA ハ AB, Aa ニ垂線ナルユヱ面 $BAab$ ニ垂線ナリ.



而シテ $ca//CA$ ナルユヱ ca モ面 $BAab$ ニ垂線ナリ, 從テ ca ハ其面上ノ直線 ba ニ垂線ナリ卽チ $\hat{bac}=\hat{R}$.

5. 一直線ガ一平面ニ於ケル正射影ガ元ノ長サノ半分ナルトキハ, 其直線ト平面トノ爲ス角ハ如何.

〔證明〕 平面 P ニ於ケル直線 AB ノ正射影ヲ ab トシ, 且ツ $ab=\frac{1}{2}AB$ トス.　然ルトキ Aa ニ垂線 BC ヲ引ケバ $BC=ab=\frac{1}{2}AB$.



又 AB ノ中點ヲ M トセバ M ハ三點 A, B, C ヨリ等距離ナリ. 故ニ MBC ハ正三角形ニシテ $\hat{ABC}=\frac{2}{3}\hat{R}=60°$ ナリ. 而シテ此角ハ AB ト P トノ爲ス角ニ等シキコト明カナリ.

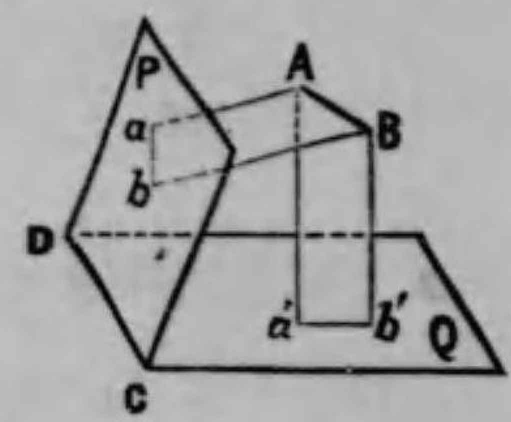
∴　所要ノ角ハ $\frac{2}{3}\hat{R}=60°$ ナリ.

6. 相交ハル二平面ノ一ツニ垂線ナル直線ノ他ノ面上ニ於ケル正射影ハ, 其二面ノ交線ニ垂線ナリ.　（三高）

注意　本題ハ 24 頁ノ 5 題ト同題ナリ.

7. 一線ノ相交ル二平面上ニ於ケル正射影ガ何レモ直線ニシテ且ツ一平面上ニ在ラザルトキハ, 元ノ線ハ一直線ナリ.

〔證明〕 面 P, Q ノ交線ヲ CD トシ, 此二面上ニ於ケル線 AB ノ正射影ヲ夫々直線 ab, $a'b'$ トス. 然ルトキハ AB 上ノ各點ハ其正射影 ab ヲ含ミ P ニ垂直ナル平面 abB 上ニ在リ.

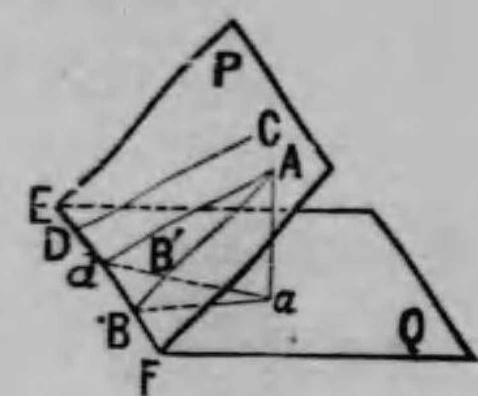


同樣ニ AB 上ノ各點ハ平面 $a'b'B$ 上ニ在リ.

而シテ ab ト $a'b'$ トハ一平面上ニ在ラザルユヱ此二平面ハ一致スルコトナクシテ必ズ相交ル. 故ニ AB ハ其二面ノ交線ニ外ナラズ, 卽チ AB ハ一直線ナリ.

8. **相交ル二平面ノ一ツノ上ニ在リテ其交線ヘノ垂線ガ他ノ面ト爲ス角ハ, 交線ヘノ斜線ガ他ノ面ト爲ス角ヨリモ大ナリ.**

〔證明〕 二平面 P, Q ノ交線ヲ EF トシ, P 上ニ於テ EF ヘノ垂線ヲ AB, 斜線ヲ CD トス.



然ルトキ $Ad /\!/ CD$ トセバ 斜線 $Ad > AB$. 而シテ $Aa \perp Q$ トセバ $ad > aB$, 依テ ad 上ニ於テ $aB' = aB$ トセバ $\triangle AB'a \equiv \triangle ABa$ ニシテ $A\hat{B'}a = A\hat{B}a$.

又 $\triangle AB'd$ ニ於テ外角 $A\hat{B'}a > A\hat{d}B'$. $\therefore$ $A\hat{B}a = A\hat{d}a$. 然ルニ $Aa \perp Q$ ナルユヱ da, Ba ハ夫々 Ad, AB ノ正射影ナリ. 故ニ AB 及ビ Ad 卽チ CD ガ Q ト爲ス角ニ於テ $A\hat{B}a > A\hat{d}a$.

第 八 章

作 圖 題

19. **作圖題ニ就テ** ハ已ニ緒論ニ述ベタルガ如ク, 平面幾何學ノ第一編第三章ヲ必ズ再讀スルヲ要ス.

平面幾何學ニ於テハ作圖題ハ定規トこんぱすトヲ用ヒテ實際ニ紙面上ニ其圖形ヲ畫キタリ.

然レドモ立體幾何學ニ於テ論ズル圖形ハ一般ニ空間內ニ在ルヲ以テ或要件ニ適スル圖形ヲ紙面上ニ實際ニ畫クコトハ不可能ナリ.

故ニ立體幾何學ニ於ケル作圖ノ命題ハ, 次條ニ揭グル事項及ビ位置ノ決定セル平面內ニ於テハ平面幾何學ノ作圖題ハ常ニ解キ得ルモノトス.

20. **作圖ノ公法** トシテ次ノ諸條項ヲ許容ス.

(1) 一直線及ビ其線外ノ一點ヲ含ム平面ヲ畫クコト.

從テ 一直線上ニ在ラザル三點ヲ含ム平面, 相交ル二直線ヲ含ム平面, 平行二直線ヲ含ム平面, ヲ畫クコト.

(2) 一平面ト或直線又ハ或平面トノ交リヲ定ムルコト.

從テ 三ツノ角ヲ平面角トスル三面角ヲ畫クコト.

(3) 任意ノ點ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ球面ヲ畫クコト.

(4) 任意ノ高サト任意ノ半徑トヲ以テ直圓壔ヲ畫クコト.

(5) 任意ノ高サト任意ノ半徑トヲ以テ直圓錐ヲ畫クコト.

附言 上ニ揭ゲタル五箇ノ作圖ノ公法ノ中 (3) 乃至 (5) ニ就テハ異議ヲ唱フル學者尠ナカラザルガ故ニ通例ハ (1), (2) ノミ採用ス.

21. 基本ノ作圖題

作圖題 (1) 次ノ條件ニ適スルモノヲ作レ,

(i) 一與點ヲ過リ一與平面ニ平行スル平面,

(ii) 一與平面ニ平行ナル一與直線ヲ含ミ其面ニ平行スル平面. 〔(i) ハ 7 頁系(4), (ii) ハ 6 頁 定理(1)〕

(iii) 空間ノ二與直線ノ一ツヲ含ミ他ニ平行スル平面. 又其一ツ宛ヲ含ミ互ニ平行スル二平面. 〔8 頁 系(2)〕

(iv) 一與點ヲ過リ, 其點ヲ過ラザル空間ノ二與直線ニ平行スル平面. 〔8 頁 系(3)〕

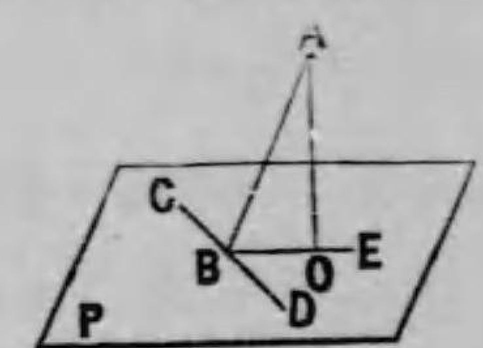
(v) 空間ノ二與直線ヨリ等距離ナル平面. 〔之レ共通垂線ノ垂直二等分面ナリ〕

作圖題 (2) 一與點ヨリ一與平面ニ垂線ヲ引ケ.

第一. 與點 A ガ與平面 P 外ニ在ルトキ. (海兵)

(解析) 先ヅ解キ得タリ, 卽チ AO⊥P面トス. 然ルトキハ P 面上ノ任意ノ直線 CD ニ垂線 OB ヲ引ケバ三垂線定理ニ依テ AB⊥CD トナル. 依テ次ノ作圖ヲ得.

〔作圖〕 先ヅ P 面上ニ任意ノ直線 CD ヲ引キ, 而シテ面 ACD 上ニ於テ AB⊥CD トシ, 又 P 面上ニ於テ BE⊥CD トシ, 次ニ面 ABE 上ニ於テ AO⊥BE トスレバ AO⊥P 面ナリ.



〔證明〕 作圖ニ依リ CD ハ BA, BE ノ雙方ニ垂線ナルユエ CD⊥面ABE, 從テ CD⊥AO. ∴ AO⊥P 面. 〔三垂線定理ノ (ii)〕

第二. 與點 O ガ與平面 P 上ニ在ルトキ.

〔作圖〕 與平面 P 外ノ任意ノ點 A′ ヨリ P 面ニ垂線 A′O′ ヲ引キ〔∵ 第一〕, 而シテ P 面上ノ與點 O ト A′O′ トノ平面上ニ於テ O′A′ ニ平行線 OA ヲ引ケバ, OA ハ所要ノ垂線ナリ.

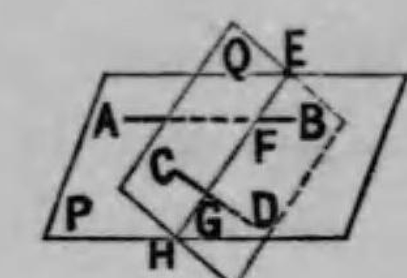
〔證明〕 O′A′//OA, O′A′⊥P面. ∴ OA⊥P面.

作圖題 (3) (i) 一與點ヲ過リ與平行二直線ニ平行スル直線ヲ引ケ.

(ii) 一與點ヲ過リ相交ル與二平面ニ平行スル直線ヲ引ケ.

作圖題 (4) 一與點ヲ過リ, 其點ヲ過ラザル空間ノ二與直線ニ交ル直線ヲ引ケ. (高等, 東師)

(解析) 先ヅ解キ得タリ, 卽チ與點 E ヲ過ル直線ト與直線 AB, CD トノ交點ヲ夫々 F, G トス. 然ルトキハ直線 EFG ハ E ヲ過リ AB ニ交ルユエ E ト AB トノ平面 P 上ニ在リ. 同樣ニ直線 EFG ハ E ト CD トノ平面 Q 上ニ在リ.



依テ次ノ作圖ヲ得.

〔作圖〕 E, AB 及ビ E, CD ニテ決定スル二平面 P, Q ノ交線 EH ヲ引ケバ可ナリ.

〔證明〕 解析ニ依リテ明カナリ.

(吟味) 本題ガ成立スル爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル要件ハ AB, CD ガ何レモ P, Q ノ交線 EH ニ平行セザルコトナリ. 而シテ上ノ如ク只一ツノ解アリ. 何トナレバ P 及ビ Q 上ニ於テ EF ハ AB 及ビ CD ト交リ且ツ E ヲ過ル二面ノ交線ハ只一ツナルガ故ナリ.

其他ノ場合ニハ解無シ.

作圖題 (5) 空間ノ二與直線ニ共通垂線ヲ引ケ. (高等, 臨教, 北農)

〔作圖〕 二與直線ヲ AB, CD トス. CD ヲ含ミ AB ニ平行ナル平面 P ヲ作リ, P 上ニ AB′ノ正射影 *ab* ヲ引キ, 之ト CD トノ交點 *e* ヨリ AB ニ垂線 *e*E ヲ引ケバ之レ所要ノ共通垂線ナリ.

〔證明〕 43 頁 定理 (3) ニ在リ.

作圖題 (6) (i) 一與點ヲ過リ一與直線ニ垂直ナル平面ヲ作レ.

(ii) 一與直線ヲ含ミ一與平面ニ垂直ナル平面ヲ作レ.

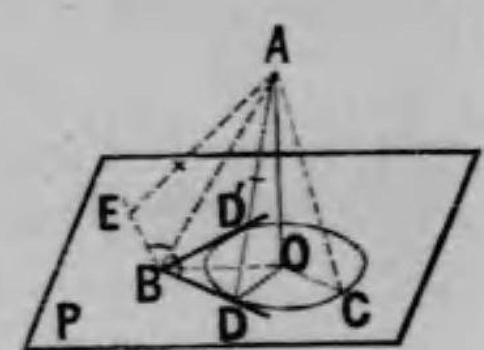
〔(i) ハ 15頁 系(1), (ii) ハ 21頁 系(1)〕

作圖題 (7) (i) 一與平面上ノ一與點ヨリ其面上ニ直線ヲ引キ, 其面外ノ一與點ヨリノ距離ヲ與長ニ等シカラシメヨ.

(ii) 一與平面ヘノ一與斜線ノ足ヲ過リ其面上ニ直線ヲ引キ斜線ト爲ス角ヲ與角ニ等シカラシメヨ.

〔解〕 (i) （解析） 先ヅ解キ得タリ, 卽チ P 面上ニ其上ノ點 B ヨリ引ケル直線 BD ニ P 面外ノ點 A ヨリノ垂線 AD ヲ與長 l ニ等シトス.

然ルトキ $AO \perp P$ トセバ三垂線定理ニ依テ $OD \perp BD$. 依テ AD ハ與長ニシテ AO ハ定長ナルユヱ OD ハ定長トナル. 故ニ BD ハ O 圓ヘノ切線ナリ. 仍テ次ノ作圖ヲ得.



〔作圖〕 P 面上ニ其外ノ與點 A ヨリ與長 l ニ等シキ斜線ノ足ノ軌跡 O 圓ヲ畫キ, 之ニ切線 BD, BD′ ヲ引ケバ可ナリ.

〔證明〕 D 點ハ A 點ヨリ P 面ヘノ l ニ等シキ斜線ノ足ノ軌跡上ニ在ルユヱ $AD=l$ 次ニ BD ハ O 圓ヘノ切線ナルユヱ $OD \perp BD$ 且ツ $AO \perp P$ ナルユヱ三垂線定理ニ依テ $AD \perp BD$. 同樣ニ $AD'=l$ 且ツ $AD' \perp BD$ ナルコトヲ證シ得.

（吟味） 本題ガ成立スル爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル要件ハ $l \geqq AO$ ニシテ且ツ B 點ガ O 圓ノ內ニ在ラザルコトナリ.

(ii) 〔作圖〕 與斜線 AB ヲ含ム任意ノ平面上ニ於テ $\widehat{ABE}$ ヲ與角 α ニ等シク且ツ $AE \perp BE$ トシ, 次ニ與平面 P 上ニ定長 AE ニ等シキ斜線ノ足ノ軌跡 O 圓ヲ畫キ, 之ニ B ヨリ切線 BD 及ビ BD′ ヲ引ケバ此二切線ハ所要ノモノナリ.

〔證明〕 三垂線定理ニ依テ $AD \perp BD$, 故ニ斜邊ト一邊トガ相等シキ 直$\triangle ADB \equiv \triangle ABE$, $\therefore$ $\widehat{ABD}=\widehat{ABE}=\alpha$. 同樣ニ $\widehat{ABD'}=\widehat{ABE}$ ヲ證シ得.

（吟味） 本題ハ α ガ斜線 AB ト P 面トノ爲ス角ヨリモ小ナラザレバ常ニ成立ス

作圖題 (8) 與二面角ヲ二等分セヨ.

〔作圖〕 二面 PABQ ノ稜 AB 上ノ點 D ヨリ各面上ニ稜ニ垂線 DE, DF ヲ引キ, 次ニ $\widehat{EDF}$ ノ二等分線 DC ト AB トヲ含ム平面ヲ作レバ, 之レ所要ノモノナリ.

〔證明〕 22頁 定理(4) ニ在リ.

作圖題 (9) 一與斜線ヲ含ミ一與平面ト與角ニ等シキ角ヲ爲ス平面ヲ作レ.

〔作圖〕 前頁ノ圖ヲ用フ. 與平面 P ヘノ斜線ヲ AB, 與角ヲ α トス. 然ルトキ $AO \perp P$, P 上ニ直線 OC ヲ引キ面 COA 上ニ於テ $\widehat{CAO}=(\hat{R}-\alpha)$ ニ作リ. P 面上ニ於テ O ヲ中心トシ OC ヲ半徑トスル圓ニ切線 BD ヲ引キ切點ヲ D トセバ AB, AD ヲ含ム平面ハ所要ノモノナリ.

若シ $\alpha>\hat{R}$ ナルトキハ $\widehat{CAO}=(\alpha-\hat{R})$ トスルノミ其他ハ上ト同樣ナリ.

〔證明〕 作圖ニ依テ $AO \perp P$, $OD \perp BD$ ナルユヱ三垂線定理ニ依リ $AD \perp BD$, 從テ $\widehat{ADO}$ ハ ABD 面ト P 面トノ爲ス二面角ノ平面角ナリ. 又作圖ニ依テ明カニ $\widehat{ADO}=\widehat{ACO}$ $=\hat{R}-\widehat{CAD}=\hat{R}-(\hat{R}-\alpha)=\alpha$ 卽チ $\widehat{ADO}=\alpha$.

（吟味） $\alpha<\hat{R}$ 及ビ $\alpha>\hat{R}$ ナルトキハ各々二ツノ解アリ. 又 $\alpha=\hat{R}$ ナルトキハ只一ツノ解アリ.

問題及ビ解答

1. (a) 一與直線上ニ其外ノ二與點ヨリ等距離ナル點ヲ求メヨ.

(b) 一與直線ヲ含ミ其外ノ二與點ヨリ等距離ナル平面ヲ作レ.

〔略解〕 (a) 二與點 A, B ノ連結線ノ垂直二等分面 P ト與直線 CD トノ交點 E ハ所要ノ點ナリ. 若シ P ト CD トガ交ラザレバ解無シ.

(b) 與直線 CD ヲ含ミ AB ニ平行スル平面及ビ與直線 CD ヲ含ミ AB ノ中點ヲ過ル平面ハ何レモ所要ノモノナリ.

若シ此平面ガ AB ヲ含ムトキハ, 平面ノ場合トナルモ合理ナリ.

2. (*a*) 一與平面上ニ其外ノ一直線上ニ在ラザル三與點ヨリ等距離ナル點ヲ求メヨ.

(*b*) 一直線上ニ在ラザル三與點ヨリノ距離ガ與長ニ等シキ點ヲ求メヨ.

〔解〕(a) 三與點 A, B, C ニテ成レル三角形ノ外心 O ヨリ 面ABC ニ垂直ナル直線 XO ヲ引ケバ, 之ト與平面 P トノ交點 E ハ所要ノ點ナリ.

何トナレバ OX ハ A, B, C ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ナルユヱ OX 上ノ E 點ハ A, B, C ヨリ等距離ニシテ且ツ P 面上ニ在ルガ故ナリ.

若シ XO ガ P ト交ラザレバ解無シ.

(b) 三與點 A, B, C ニテ成レル三角形ノ外心 O ヨリ 面ABC ニ垂直ナル直線 XOX′ ヲ引キ, 次ニ面 AXX′ 上ニ於テ A ヲ中心トシ與長 l ヲ半徑トシテ XX′ ヲ D, D′ ニテ截レバ, 此二點ハ所要ノモノナリ.

何トナレバ $\triangle DOA \equiv \triangle DOB \equiv \triangle DOC \equiv \triangle D'OA \equiv \triangle D'OB \equiv \triangle D'OC$ 且ツ $AD = l$ ナレバナリ.

3. 其凡テハ一平面上ニ在ラズシテ何レノ三ツモ一直線上ニ在ラザル四與點ヨリ等距離ナル點ヲ求メヨ.

〔略解〕 此四與點ヲ A, B, C, D トセバ △ABC ノ外心 O ヨリ面 ABC ニ垂直ナル直線ト A, D ノ連結直線ノ垂直二等分面 P トノ交點 E ハ所要ノ點ナリ.

若シ XO ガ P ト交ラザレバ解無シ.

4. (*a*) 一與直線上ニ之ヲ含マザル一與平面ヨリノ距離ガ與長ニ等シキ點ヲ求メヨ.

(*b*) 一與平面上ノ一直線上ニ在ラザル三與點ヨリ等距離ニシテ且ツ其平面ヨリノ距離ガ與長ニ等シキ點ヲ求メヨ. (臨教)

〔略解〕(a) 與平面 P 上ノ任意ノ點ヨリ其面ニ垂線 EF ヲ引キ且ツ與長 l ニ等シクシ, F 點ヲ過リ P ニ平行ナル平面 Q ヲ作レバ與直線 AB ト Q 面トノ交點ハ所要ノ點ナリ.

(b) 上ノ如ク Q 面ヲ作リ, 又三與點 A, B, C ニテ成レル三角形ノ外心 O ヨリ其面 P ヘノ垂線 OX ヲ引ケバ, Q 面ト OX トノ交點 E ハ所要ノ點ナリ.

5. 一與點ヲ過リ, 其點ヲ過ラズシテ一平面上ニ在ラザル一與直線ト一與圓周トニ交ル直線ヲ引ケ.

〔略解〕 與點 E ト與直線 AB トヲ含ム平面 P ヲ作リ, 此面ト與圓周トノ交點ヲ C, D トセバ CE, DE ハ所要ノ直線ナリ.

注意 本題ハ 49 頁ノ作圖題 (4) ノ直線 CD ガ圓周トナリタル場合ナリ.

6. (*a*) 空間ノ二與直線ト交リ且ツ他ノ與直線ニ平行スル直線ヲ引ケ, 但シ三與直線ハ何レノ二ツモ平行ナラズ. (新醫, 水講)

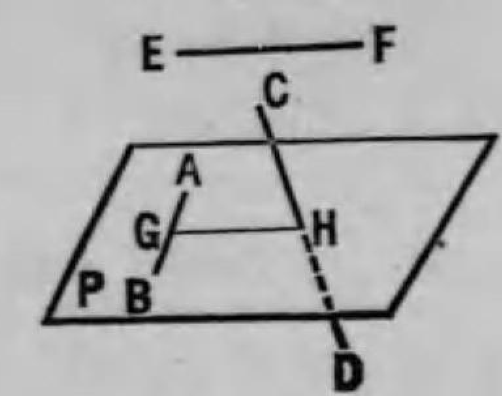
(*b*) 空間ノ二與直線ト交リ且ツ其一ツト與角ヲ爲ス直線ヲ引ケ.

(*c*) 空間ノ二與直線ト交リ且ツ與平面ニ平行スル直線ヲ引ケ, 但シ二與直線ハ何レモ與平面ニ平行ナラズ.

〔解〕 (a) 與二直線ヲ AB, CD トシ, 第三ノ與直線ヲ EF トス.

(解析) 先ヅ解キ得タリ, 卽チ GH ヲ所要ノ直線トセバ GH//EF ナルユヱ AB, GH ヲ含ム平面 P ハ EF ニ平行ス. 故ニ GH ト CD トノ交點ハ CD ト P トノ交點ナリ.

仍テ次ノ作圖ヲ得.



〔作圖〕 AB ヲ含ミ EF ニ平行平面 P ヲ作リ CD トノ交點 H ヨリ EF ニ平行線 HG ヲ引ケバ之レ所要ノモノナリ.

〔證明〕 作圖ニ依リ H ハ P 上ニ在リテ P//EF ナルユヱ GH ハ P 上ニ在リ. 又假設ニ依リ AB ハ EF ニ平行ナラザルユヱ GH ニ平行ナラズ. 故ニ GH ハ AB ト交ル.

故ニ GH ハ AB, CD ト交リ且ツ EF ニ平行ス.

(吟味) 本題ハ CD ガ P ト交レバ一般ニ一ツノ解アリ.

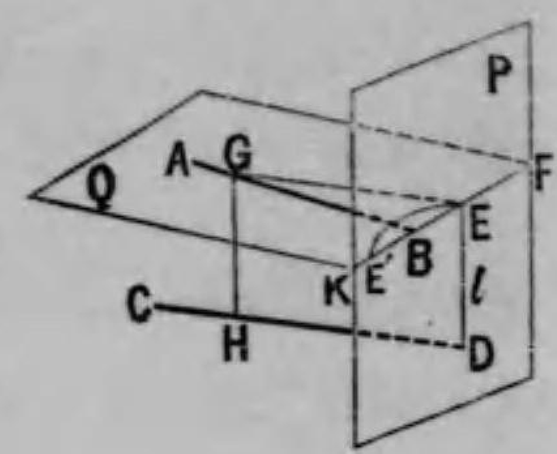
(b) ハ (a) ニ於ケル EF ヲ AB ト與角ヲ爲ス直線ナラシムルニ過ギズ.

(c) ハ (a) ノ解中 EF ヲ平面ト換言スルニ過ギズ.

7. 空間ノ二與直線ニ挿マレ與長ニシテ且ツ與平面ニ平行ナル直線ヲ引ケ,但シ二與直線ト與平面トハ平行ナラズ.

〔解〕 二與直線ヲ AB, CD トシ,與平面ヲ P トシ,與長ヲ l トス.

(解析) 先ヅ解キ得タリ,卽チ GH ヲ所要ノ直線トス. 然ルトキ G ヨリ CD ニ平行線 GE ヲ引ケバ P ト交ル其交點ヲ E トス. 今 AB ト P トノ交點ヲ B トセバ EB ハ AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面 Q ト P トノ交線ナルコト明カナリ. 又 CD ト P トノ交點ヲ D トセバ GH//P ナルユヱ ED//GH 故ニ GHDE ハ平行四邊形ニシテ $ED=l$.



〔作圖〕 AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面 Q ヲ作リ P 面トノ交線ヲ FK トシ, P 上ニ於テ CD ト P トノ交點 D ヲ中心トシ l ヲ半徑トシテ FK ヲ E, E′ ニテ截レ. 而シテ E, E′ ヨリ CD ニ平行線ヲ引キ AB トノ交點ヲ G, G′ トシ, 次ニ CD ノ上ニ適當ニ D ヨリ EG 及ビ E′G′ ニ等シク DH, DH′ ヲ取レバ二直線 GH, G′H′ ハ所要ノモノナリ.

〔證明〕 作圖ニ依リ CD ニ平行ナル EG ト AB トハ Q 上ニ在リテ一致セズ又平行セザルヲ以テ相交ル,而シテ GH≙ED ナルユヱ GHDE ハ平行四邊形ニシテ $GH=DE=l$ ナリ.

(吟味) 本題ガ成立スル爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル要件ハ, D ヨリ FK ヘノ垂線ヲ h トセバ $l \geqq h$ ナルコトナリ.

8. 一與點ヨリ相交ル二與平面ノ一ツニ直線ヲ引キ, 他ノ面ニ平行ニシテ且ツ與長ニ等シカラシメヨ.

〔略解〕 前圖ヲ用フ. 與點ヲ H トシ, 與平面ヲ Q トシ, 他ノ與平面ヲ P トス.

然ルトキ H ヲ過リ Q 面ニ平行線 HD ヲ引キ P 面トノ交點ヲ D トシ, D ヲ中心トシ與長 l ノ半徑ヲ以テ Q, P ノ交線 FK ヲ E, E′ ニテ截リ, 次ニ H ヨリ DE, DE′ ニ平行ニ引ケル直線ト Q トノ交點ヲ G, G′ トセバ GH, G′H ハ所要ノ直線ナリ.

9. 空間ノ二與直線ノ一ツヨリノ距離ガ與長ニ等シキ點ヲ他ノ一ツノ上ニ求メヨ.

〔略解〕 又前圖ヲ用フ. 與直線 CD ニ垂直ナル平面 P ヲ作リ, 又與直線 AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面 Q ヲ作リ, P ト Q トノ交線ヲ FK トス. 以下前題ニ同ジ.

10. 與點 A ヨリ與直線 BC 及ビ之ニ平行セル與平面 P ニ交ル直線ヲ引キ, 其直線及ビ平面ニ截ラルヽ部分ヲ與長ニ等シカラシメヨ.

〔略解〕 A, BC ヲ含ム平面 Q ヲ作リ P トノ交線ヲ EF トシ, BC ト EF トノ間ニ與長 l ニ等シキ直線ヲ引キ, A ヨリ之ニ平行線ヲ行ケバ之レ所要ノモノナリ.

若シ Q ガ P ニ平行スルトキハ解無シ.

11. (a) 與平面 P 上ニ, 其上ノ與直線 EF ニ平行シ且ツ其外ノ與點 A ヨリノ距離ガ與長 l ニ等シカルベキ直線ヲ引ケ.

(b) 與平面 P 上ニ, 其外ノ二與點 A, B ヨリノ距離ガ夫々 l, m ニ等シカルベキ直線ヲ引ケ.

〔略解〕 (a) P 面上ニ A ヨリ l ニ等シキ斜線ノ足ノ軌跡 O 圓ヲ畫キ, 次ニ O ヨリ EF ヘノ垂線ト O 圓トノ交點 B, B′ ヨリ P 上ニ於テ O 圓ニ二切線ヲ引ケバ之レ所要ノモノナリ.

(b) P 面上ニ A, B ヨリ夫々 l, m ニ等シキ斜線ノ足ノ軌跡 A′ 圓, B′ 圓ヲ畫ケバ, 此二圓ノ共通切線ハ所要ノ直線ナリ. 〔50 頁ノ (7) ヲ參考セヨ〕

本題ハ $AA' \geqq l$, $m \geqq BB'$ 且ツ二圓 A′, B′ ガ共通切線ヲ有スルトキハ常ニ成立ス.

12. 與點 A ヲ過リ平面ヲ畫キ, 與直線 BC ヨリノ距離ヲ與長 l ニ等シカラシメヨ.

〔略解〕 A ヲ過リ BC ニ垂直ナル平面 P ヲ作リ BC トノ交點ヲ D トシ, P 面上ニ於テ D ヲ中心トシ l ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, 之ニ切線 AE, AE′ ヲ引ケバ此一ツ宛ヲ含ミ BC ニ平行ニ作レル二平面ハ所要ノモノナリ.

13. 一與平面上ニ其上ノ一與點ヲ過リ其面外ノ一與直線ニ垂線ヲ引ケ.

〔略解〕 與平面 P 上ニ於テ其上ノ與點 A ヲ過リ P 面外ノ與直線 BC ノ正射影 bc ニ垂線 AD ヲ引ケバ, 之レ所要ノ直線ナリ. 何トナレバ $Bb \perp P$ ナルユヱ $Bb \perp AD$ ニシテ又 $bc \perp AD$ ナルユヱ面 $BbcC \perp AD$, 故ニ $AD \perp BC$ ナリ.

14. 與二面角內ノ一與點ヲ過リ各面ニ終ル直線ヲ引キ，其與點ニ於テ二等分ナラシメヨ．

〔略解〕 與點 A ヨリ其一面 P ニ垂線 AH ヲ引キ HA ヲ延長シテ $AH'=HA$ トシ，H′ ヲ過リ他ノ面 Q ニ垂直面 R ヲ作レバ，其交線 EF 上ノ凡テノ點ト A トヲ結ブ直線ハ皆ナ所要ノモノナリ．

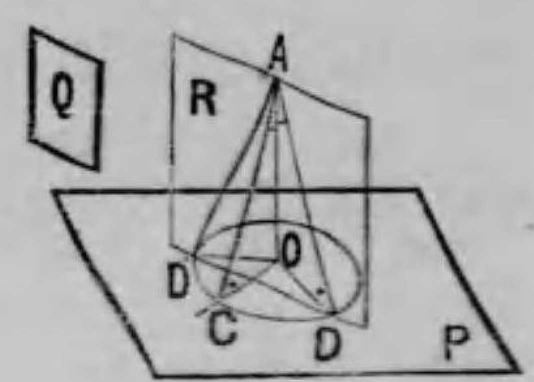
15. 與直二面角ヲ三等分スル平面ヲ作レ．

〔略解〕 與二面角ノ平面 P, Q ノ平面角 EDF ヲ三等分スル直線 DG, DH ヲ引ケバ，與二面角ノ稜 AB ト DG 及ビ AB ト DH ヲ含ム二平面ハ所要ノモノナリ．

16. 一與平面上ニ其外ノ二與點及ビ二與平面ヨリ夫々等距離ナル點ヲ求メヨ．

〔略解〕 二與點 A, B ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ一與平面 R 上ニ求メ，又與二平面 P, Q ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ R 面ニ求ムレバ，其二ツノ軌跡ノ交リハ所要ノモノナリ．

17. 與點 A ヨリ與平面 Q ニ平行シ他ノ與平面 P ト與角 α ト等角ヲ爲ス直線ヲ引ケ．



〔解〕 $AO\perp P$ トシ，P 面上ニ任意ノ直線 OC ヲ引キ，面 OAC 上ニ於テ $O\hat{A}C=\alpha$ ニ作リ，P 面上ニ O ヲ中心トシ OC ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ，次ニ A 點ヲ過リ Q 面ニ平行スル平面 R ヲ作レバ R 面ト圓 OC トノ交點 D, D′ ト A トヲ結ブ直線 AD, AD′ ハ所要ノ直線ナリ．

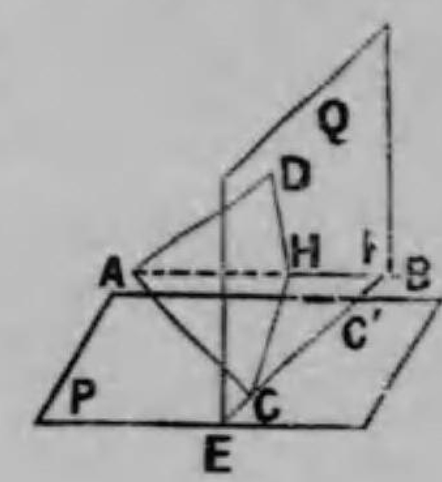
何トナレバ $OD=OC$ ナルユヱ $\triangle AOD\equiv\triangle AOC$, $A\hat{D}O=A\hat{C}O=\hat{R}-O\hat{A}C=\hat{R}-(\hat{R}-\alpha)=\alpha$. 又 R 面 //Q 面ナルユヱ AD//Q 面ナリ．AD′ ニ付テモ同樣ニ證明シ得．

若シ $\alpha>\hat{R}$ ナルトキハ $O\hat{A}C=\alpha-\hat{R}$ トスルノミ其他ハ上ト全ク同樣ナリ．

本題ハ R 面ガ圓 OC ト交點ヲ有スレバ常ニ成立ス．

18. 平面 P ニ平行ナル直線 AB 上ノ A 點ヨリ P 面ニ直線 AC ヲ引キ，與長 l ニ等シク且ツ $C\hat{A}B$ ヲ與角 α ニ等シカラシメヨ．

〔解〕 AB ヲ含ム平面上ニ於テ $B\hat{A}D=\alpha$ 且ツ $AD=l$ トシ D ヲ過リ P面ニ垂直面Q ヲ作リ其交線ヲ EF トシ，次ニ面AEF 上ニ於テ EF 上ニ $AC=AD=AC'$ ナル樣ニ C, C′ ヲ取レバ AC, AC′ ハ所要ノ直線ナリ．



何トナレバ AB ト Q面トノ交點ヲ H トスレバ HC, HD ハ何レモ AH ニ垂線ナルユヱ 直$\triangle ACH\equiv\triangle ADH$, $C\hat{A}H=D\hat{A}H=\alpha$ 且ツ $AD=l$ ナリ．

AC′ ニ付テモ同樣ニ證シ得．

本題ハ A ヨリ EF ヘノ垂線 $h\leqq l$ ナルトキハ常ニ成立ス．

19. $A\hat{O}B$ ノ頂點 O ヨリ直線ヲ引キ，其角ノ二邊ト等角ヲ爲シ且ツ角ノ平面ト與角 α ヲ爲サシメヨ．

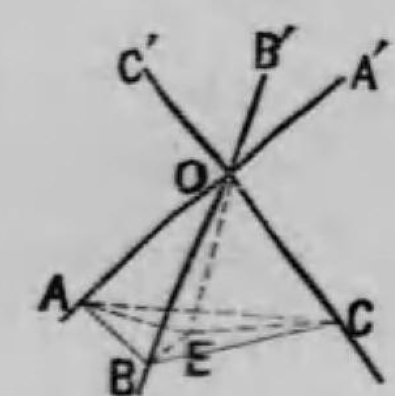
〔略解〕 $A\hat{O}B$ ノ二等分線 OE ヲ過リ 面 AOB ニ垂直面ヲ作リ，其面上ニ於テ OE ト α ヲ爲ス直線 OC ヲ引ケバ，之レ所要ノモノナリ．

20. 與點 A ヲ過リ與直線 EF ニ平行スル平面ヲ作リ，與平面 P トノ爲ス角ヲ與角 α ニ等シカラシメヨ．

〔略解〕 A ヲ過リ EF ニ平行線 AB ヲ引キ，次ニ 51 頁ノ作圖題 (9) ニ倣フベシ．

21. 一平面上ニ在ラズシテ一點ニ於テ相交ル三直線ト等角ヲ爲ス直線ヲ引ケ．

〔解〕 此三線 AA′, BB′, CC′ ノ交點ヲ O トシ，$OA=OB=OC$ ニ取リ $\triangle ABC$ ノ外心ヲ E トセバ，直線 OE ハ所要ノ一ツナリ．



何トナレバ三邊ガ夫々相等シキ $\triangle OEA\equiv\triangle OEB\equiv\triangle OEC$ ナルユヱ $E\hat{O}A=E\hat{O}B=E\hat{O}C$ ナリ．

同樣ニ O ヲ頂點トスル他ノ三ツノ三面角內ニ各々一直線ノアルコトヲ證シ得．

注意 三面角ノ各稜ト等角ヲ爲ス直線ヲ引ケ，ト云フ題ハ上ノ一場合ナリ．

22. 與三面角ヘノ距離ガ與長ニ等シキ點ヲ求メヨ.

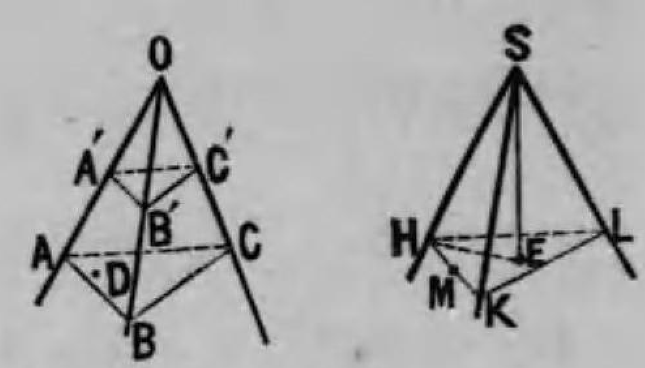
〔略解〕 三面角 $O-ABC$ ノ各面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡 OO' ヲ求メ〔37 頁ノ系 (2)〕. 次ニ OO' 上ニ 面AOB ヨリノ距離ガ與長 l ニ等シキ點ヲ求ム〔52 頁ノ (4) 題ノ (a)〕 レバ之レ所要ノ點ナリ.

23. (a) 一與點ヲ過リ與三面角ノ各稜ヲ等シク截ルベキ截平面ヲ作レ.

(b) 與三面角ト全等ナル三面角ヲ作レ.

〔解〕 (a) 與三面角 $O-ABC$ ニ於テ $OA'=OB'=OC'$ ニ取リ, 次ニ與點 D ヲ過リ 面$A'B'C'$ ニ平行平面ヲ作レバ可ナリ. 何トナレバ此截リ口ヲ ABC トセバ 面AOB ニ於テ$A'B'//AB$ ナルユヱ $OA:OB=OA':OB'=1$, 故ニ $OA=OB$. 同樣ニ $OB=OC$ ヲ證シ得ベシ.

(b) 與三面角 O ノ各稜ヲ等シク截ル所ノ截リ口 ABC ヲ作リ, 之ト全等ナル $\triangle HKL$ ヲ作リ其外心 E ヨリ其面ニ垂線 ES ヲ引キ, 次ニ 面HES 上ニ於テ $HS=AO$ ニ取レバ $S-HKL$ ハ所要ノモノナリ. 何トナレバ E ハ H, K, L ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ニシテ $\triangle ABC\equiv\triangle HKL$ ナルユヱ $\triangle SHK\equiv\triangle OAB$, $\triangle SKL\equiv\triangle OBC$, $\triangle SLH\equiv\triangle OCA$, 從テ面角 $H\hat{S}K=A\hat{O}B$, $K\hat{S}L=B\hat{O}C$, $L\hat{S}H=C\hat{O}A$ 卽チ各二面角ガ夫々同順ニ等シキユヱ 三面角$S-HKL\equiv$三面角 $O-ABC$ ナリ.



24. 與直三面角ヲ一平面ニテ截リ,其截リ口ヲ與三角形ト全等ナラシメヨ.

〔略解〕 上圖ヲ用フ. 與$\triangle HKL$ ノ垂心 E ヲ求メ, $ES\perp$面HKL トシ, HK ノ中點ヲ M トシ 面MES 上ニ於テ M ヲ中心トシ MK ト等半徑ヲ以テ ES ヲ S ニテ截レ. 次ニ與直三面角 O ノ各稜上ニ於テ $OA=SH$, $OB=SK$, $OC=SL$ ニ取レバ $\triangle ABC$ ハ所要ノ截リ口ナリ. 何トナレバ $SK\perp$面HKL, $EM\perp HK$ ナルユヱ三垂線定理ニ依テ $SM\perp HK$, 而シテ M ハ H, K, S ヨリ等距離ナルユヱ $H\hat{S}K=\hat{R}$. 同樣ニ $K\hat{S}L=\hat{R}$ $=K\hat{S}H$ ヲ證シ得.

然レバ 直三面角 $S-HKL\equiv$直三面角 $O-ABC$. $\therefore$ $\triangle HKL\equiv\triangle ABC$.

25. (a) 與四面角ヲ一平面ニテ截リ,其截リ口ヲ平行四邊形ナラシメヨ.

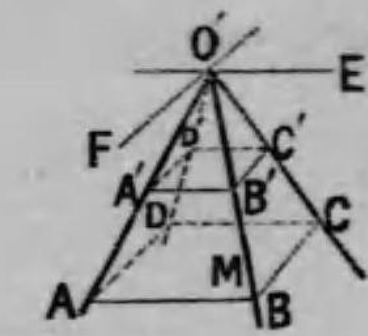
(陸士, 高等)

(b) 又其截面ヲシテ一與點ヲ過ラシメヨ.

(c) 又其截リ口ノ平行四邊形ノ一邊ヲ與長ニ等シカラシメヨ.

〔解〕 (a) (解析) 先ヅ解キ得タリ, 卽チ四面角 $O-ABCD$ ノ截リ口 $ABCD$ ヲ平行四邊形トシ之ヲ P トセバ, 平行二線 AB, CD ノ一ツ宛ヲ含ム平面 ABO, DCO ノ交リナル $OE//P$ ナリ. 同樣ニ 面ADO, BCO ノ交リナル $OF//P$ ナリ. 從テ 面$EOF//P$面.

(作圖) 面AOB, COD ノ交線 OE ト 面AOD, BCO ノ交線 OF トヲ含ム平面 EOF ニ平行スル平面ヲ作レバ之レ所要ノモノナリ.



〔證明〕 其截リ口ヲ $ABCD$ トスレバ $OE//P$ ナルユヱ $AB//OE//CD$ ニシテ, 又 $OF//P$ ナルユヱ $AD//OF//BC$, 故ニ對邊ガ夫々平行ナルユヱ $ABCD$ ハ平行四邊形ナリ.

(b) 與點 M ヲ過リ 面EOF ニ平行平面ヲ作レバ可ナリ.

(c) ハ先ヅ (a) ノ如ク 面EOF ニ平行ナル截リ口 $A'B'C'D'$ ヲ作レ. 次ニ OB' 上ニ於テ 與長 a: $A'B'=OB':OB$ ナル樣ニ B 點ヲ取リテ, B ヲ過リ 面$A'B'C'D'$ ニ平行ナル截リ口 $ABCD$ ヲ作レバ之レ所要ノモノナリ. 何トナレバ (a) ト同樣ニ $ABCD$ ハ平行四邊形ニシテ, 又 $\triangle ABO$ ニ於テ $A'B'//AB$ ナルユヱ $OB':OB$ $=A'B':AB=A'B':a$, 故ニ $AB=a$ ナレバナリ.

續 第一章 乃至 第八章

特 種 問 題

22. **三平面會一直線** ナル次ノ 1 乃至 4 及ビ 5 ハ三面角ノ性質トシテ重要ナルモノナリ.

問 題 及 ビ 解 答

1. 三面角ノ各々ノ平面角ノ二等分線ヲ含ミ夫々其面ニ垂直ナル三平面ハ一直線ニ於テ相會ス.

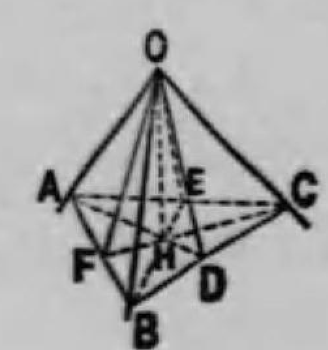
注意 之レ 36 頁ノ系, 卽チ三面角ノ各稜ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ, ノ換言ナリ.

2. 三面角ノ各々ノ二面角ヲ二等分スル三平面ハ一直線ニ於テ相會ス. 〔東工〕

注意 本題ハ 37 頁ノ系 (2), 卽チ三面角ノ各面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ, ノ換言ナリ.

3. 三面角ノ各々ノ稜ヲ過リ夫々其對面ニ垂直ナル三平面ハ一直線ニ於テ相會ス.

〔證明〕 三面角 O−ABC ノ稜 OA, OB ヲ過リ夫々對面ニ垂直ナル二平面 AOD, COF ノ交線ヲ OH トシ, H ヲ過リ OH ニ垂直ナル截リ口 ABC ヲ作レバ 面AOD ハ 面ABC, BOC ノ双方ニ垂直ナルユヱ亦タ其交線 BC ニ垂直ナリ. 故ニ AD⊥BC.



同樣ニ CF⊥AB. 故ニ H 點ハ △ABC ノ垂心ナリ. 從テ BHE⊥AC 且ツ OH⊥面ABC ナルユヱ三垂線定理ニ依テ OE⊥AC, 故ニ AC⊥面BEO, ∴ 面ACO⊥BEO. 故ニ此三平面AOD, COF, BOE ハ一直線 OH ニ於テ相交ル.

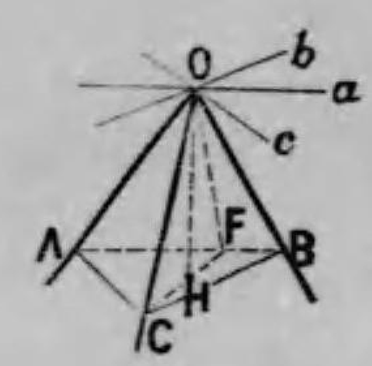
4. 三面角ノ各々ノ稜ト夫々其對面ノ平面角ノ二等分線トヲ含ム三平面ハ一直線ニ於テ相交ル.

〔證明〕 前圖ヲ用フ. 三面角 O−ABC ニ於テ OA=OB=OC トシ, $B\hat{O}C$, $A\hat{O}B$ ノ二等分線ト BC, AB トノ交點ヲ D, F トセバ D, F ハ夫々 BC, AB ノ中點ナルユヱ AD, CF ノ交點 H ハ △ABC ノ重心ナリ. 從テ BH ノ延長ト AC トノ交點 E ハ AC ノ中點ニシテ OA=OC ナルユヱ OE ハ $A\hat{O}C$ ヲ二等分ス. 故ニ 面AOD, COF, BOE ハ何レモ直線 OH ヲ過ル卽チ一直線 OH ニ於テ相會ス.

---

5. 三面角ノ頂點ヨリ各々ノ平面內ニ於テ夫々其對稜ニ垂直ナル三直線ハ同一ノ平面上ニ在リ.

〔證明〕 三面角 O−ABC ノ各々ノ稜ヲ過リ夫々其對面ニ垂直ナル三平面ノ交線ヲ OH 〔3 題〕トス. 然レバ O ヲ過リ 面OCH ヘノ垂線ハ此面ニ垂直ナル 面OAB ニ含マルルヲ以テ 面OAB 上ニ 對稜 OC ニ垂直ナル直線 Oa ハ 面OCH ニ垂線ナリ, 從テ Oa⊥OH. 同樣ニ 面 OBC, OCA 上ニ夫々對稜 OA, OB ニ垂線 Ob, Oc ヲ引ケバ Ob, Oc ハ何レモ OH ニ垂線ナリ. 故ニ Oa, Ob, Oc ハ何レモ O ヲ過リ OH ニ垂線ナルヲ以テ一平面上ニ在リ.



23. **極大 及ビ 極小** 平面幾何學 77 頁ヲ參考スベシ.

問 題 及 ビ 解 答

1. 一平面ヘノ斜線ガ其足ヲ過リテ其面上ニ引ケル直線ト爲ス鋭角ノ中, 其正射影ト爲ス角ガ最小ナリ. 〔42 頁ノ 定理 (2) ノ (i) ノ換言〕

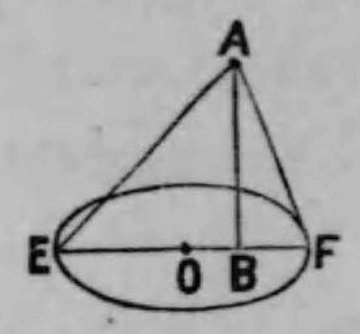
2. 相交ル二平面ノ一ツノ上ニ在リテ且ツ交線ニ交ル直線ガ他ノ面ト爲ス角ノ中, 交線ヘノ垂線ガ他ノ面ト爲ス角ガ最大ナリ.

〔46 頁ノ 8 題ノ換言〕

3. 一ツノ圓 P アリ，其平面外ノ一點ヨリ此圓周ニ至ル最長及ビ最短ナル直線ヲ引ケ．　　（各醫）

〔解〕 與點 A ヨリ與圓 O ノ平面ヘ垂線 AB ヲ引キ，OB ノ延長ト O 圓周トノ交點ヲ E, F トセバ AE, AF ハ所要ノ直線ナリ．

〔證明〕 今 E ヲ O ノ B ト反對ノ側ニ在リトスレバ B ヨリ此圓周ニ引ケル諸直線ノ中ニ於テ BE ハ最長ニシテ BF ハ最短ナリ 〔平幾〕．



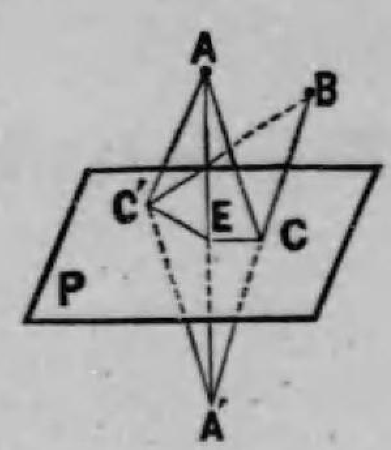
故ニ垂線ノ足ヲ距ルコト最長ナル斜線 AE ハ最長ニシテ，其足ヲ距ルコト最短ナル斜線 AF ハ最短ナリ．

本題ハ A 點ノ O 圓平面ヘノ正射影ガ圓心 O ト合セザルトキハ常ニ成立ス．

4. (*a*) 定平面 P 及ビ其同傍ニ二定點 A, B アリ．此 P 上ニ一點 C ヲ求メテ $AC+BC$ ヲ最小ナラシメヨ．　　（六高，大工）

(*b*) 又 A, B ガ P ノ兩傍ニ在ルトキ $AC \sim BC$ ヲ最大ナラシメヨ．

〔解〕 (*a*) A ヨリ P ニ垂線 AE ヲ引キ，之ヲ延長シテ $EA'=EA$ トシ BA' ト P トノ交點ヲ C トセバ，之レ所要ノ點ナリ． 何トナレバ P 上ニ任意ノ點 C' ヲ取レバ P ハ AA' ノ垂直二等分面ナルニヨ $AC=A'C$, $AC'=A'C'$． 故ニ $\triangle BC'A'$ ニ於テ



$$BA'=BC+A'C<BC'+A'C'$$

卽チ　$BC+AC<BC'+AC'$．

(*b*) 上ト同樣ニ作圖セバ，A ガ B ヨリモ P ヲ距ルコト大ナルトキハ $\triangle C'A'B$ ニ於テ $A'B=A'C-BC>A'C'-BC'$ 卽チ $AC-BC>AC'-BC'$．

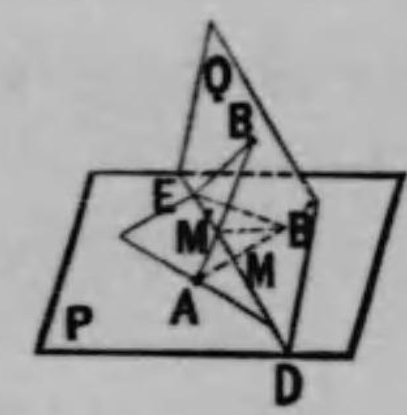
又 A ガ B ヨリモ P ヲ距ルコト小ナルトキハ上ト同樣ニ $BC-AC>BC'-AC'$．

$\therefore\ AC \sim BC>BC' \sim AC'$．

5. (*a*) 相交ル二平面 P, Q ノ上ニ夫々點 A, B アリ． 此二面ノ交線 CD 上ニ一點 M ヲ求メテ $AM+BM$ ヲ最小ナラシメヨ．

(*b*) 又 $AM \sim BM$ ヲ最大ナラシメヨ．

〔解〕 (*a*) $BE \perp CD$, P 上ニ於テ CD ノ A ト反對ノ側ニ $EB' \perp CD$ 且ツ $EB'=BE$ ニ取レバ，AB' ト CD トノ交點 M ハ所要ノ點ナリ． 何トナレバ CD 上ニ點 M' ヲ取レバ 直$\triangle BEM' \equiv B'EM'$， 從テ $BM'=B'M'$． 又 直$\triangle BEM \equiv B'EM$, 從テ $BM'=B'M$.



故ニ $\triangle AB'M'$ ニ於テ $AB'=AM+B'M<AM'+B'M'$ 卽チ $AM+BM<AM'+BM'$．

(*b*) EB' ヲ CD ノ A ト同ジ側ニ取レバ其他ハ上ト同樣ナリ．

第二編
多面體

總論

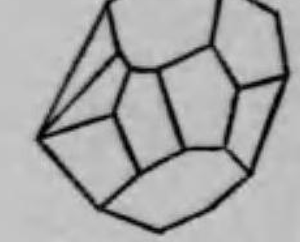
1. 定義

(1) **多面體** トハ數多ノ平面ニテ圍マレタル立體ヲ云フ.

・多面體ヲ形成スルニハ少ナクモ四面ヲ要ス [公理的].

多面體ハ其面ノ數ニ依リテ四面體, 五面體, 六面體, 等ト云フ.

而シテ, 其面, 面ノ交線及ビ面ノ爲ス立體角ノ頂點ヲ夫々多面體ノ面,稜及ビ頂點ト云フ.



多面體ノ對角線 トハ同一面上ニ在ラザル二角頂ノ連結線ヲ云フ.

(2) **凸多面體** トハ何レノ面ヲ延長スルモ其體內ニ入ラザルモノヲ云フ. 然ラザルモノヲ凹多面體ト云フ.

注意 本書ニ於テハ凸多面體ノミヲ論ズ, 從テ單ニ多面體ト云ヘバ凸多面體ヲ指スモノトス.

(3) **立體ノ體積** トハ其面ニテ圍マレタル空間ノ大サヲ云フ.

體積ノ單位 ハ線單位ヲ一稜トスル立方體ト定ム.

等積 トハ二ツ以上ノ立體ノ體積ガ相等シキモノヲ云フ.

2. 定理

(1) 多面體ニ於テ 面數ヲF, 頂點數ヲV, 稜數ヲ E トセバ

$$F+V=E+2$$ ナリ. （おいら1定理）

〔證明〕 先ヅ一面ヲ取リ之ニ順次ニ各面ヲ附ケ加ヘテ多面體ヲ形成スルモノト假定スレバ 一面ノトキハ $E_1=V_1$ ナルコト明カナリ.

之ニ第二ノ面ヲ附ケ加フレバ, 此面ハ最初ノ面ト一稜及ビ二頂點ヲ共有スルユヱ 二面ノトキハ $E_2=V_2+1$.

又之ニ第三ノ面ヲ附ケ加フレバ, 此面ハ前ノ二面ト二稜及ビ三頂點ヲ共有スルユヱ $E_3=V_3+2$.

逐テ斯クノ如ク一面ヲ附ケ加フル毎ニ稜ノ數ハ頂點ノ數ヨリ一ツ宛增加シ, $F-1$面ノトキハ $E_{F-1}=V_{F-1}+F-2$.

而シテ最後ノ一面ハ之ヲ附ケ加フルモ之ガ爲メニ稜及ビ頂點ノ數ハ增加セズ.

故ニ F面ノトキハ $E=V+F-2$.

$$\therefore\ E+2=V+F.$$

餘話 おいら1氏ハ西曆 1795 年頃ノ瑞西ノ人ニシテ近世ノ大數學者ノ一人ナリ.

(2) 多面體ノ各面ガ皆ナ m 角形ニシテ, 又各立體角ガ皆ナ n 面角ナルトキハ $mF=nV=2E$ ナリ.

〔證明〕 多面體ヲ形成スル多角形ノ各邊ハ二ツヅヽ相合シテ一稜トナルガ故ニ各面ノ邊ノ數ノ和ハ稜ノ數ノ二倍ニ等シ, 卽チ $mF=2E$.

又各立體角ハ n 面角ナルガ故ニ立體角ノ頂點ノ數ノ n 倍ハ稜ノ數ノ二倍ニ等シ, 卽チ $nV=2E$. $\therefore\ mF=nV=2E$.

3. 多面體ノ種類

3. 多面體ノ種類 ハ無限ニ存在スルモノナレドモ, 立體幾何ニ於テハ次ノ (1) 乃至 (4) 及ビ是等ヨリ誘導セラルルモノノミニ就テ講究スルヲ通例トス.

(1) 正多面體. (2) 角壔. (3) 角錐. (4) 相似多面體.

第一章

正多面體

4. 定義及ビ定理

定義 正多面體 トハ各面ガ全等ナル正多角形ニシテ且ツ各角ガ相等シキ多面體ヲ云フ.

定理 正多面體ハ只五種アルノミナリ. (東師, 陸士)

〔證明〕 先ヅ多面角ノ成立ヲ確定シ, 次ニ面數ヲ確定セントス.

(1) 一ツノ多面角ヲ形成スルニハ三ツ以上ノ平面角ガ頂點ニ於テ出會フコトヲ要ス. 而シテ一ツノ頂點ニ於ケル平面角ノ和ハ四直角ヨリモ小ナリ. 〔27 頁 (2)〕.

然ルニ正六邊形ノ一角ハ $\frac{4}{3}\hat{R}$ ナルユヱ之ヲ三ツ取レバ $4\hat{R}$ トナリ, 七邊以上ノ正多角形ナレバ其一角ヲ三ツ取レバ何レモ $4\hat{R}$ ヨリモ大トナル.

故ニ 正多面體ノ面ハ正三角形或ハ正方形或ハ正五邊形ノ内ニ限ル.

同様ニ六ツ以上ノ正三角形或ハ四ツ以上ノ正方形或ハ四ツ以上ノ正五邊形ハ多面角ヲ形成スルコト能ハズ.

∴ 正多面體ハ其多面角ヲ形成スル面ガ次ノ (i) 乃至 (v) ノ他ニ無シ, 卽チ

(i) 三ツノ正三角形, (ii) 三ツノ正方形, (iii) 四ツノ正三角形,

(iv) 三ツノ正五邊形, (v) 五ツノ正三角形.

(2) 65 頁ノ定理 $F+V=E+2$ 及ビ $mF=nV=2E$ ヨリ

(i) $m=3,\ n=3$ ナルトキハ $F=4$.

(ii) $m=4,\ n=3$ ナルトキハ $F=6$.

(iii) $m=3,\ n=4$ ナルトキハ $F=8$.

(iv) $m=5,\ n=3$ ナルトキハ $F=12$.

(V) $m=3,\ n=5$ ナルトキハ $F=20$.

(3) 故ニ 四ツノ正三角形ヲ面トスル正四面體,

六ツノ正方形ヲ面トスル正六面體,

八ツノ正三角形ヲ面トスル正八面體,

十二ノ正五邊形ヲ面トスル正十二面體,

二十ノ正三角形ヲ面トスル正二十面體, ニ限ル.

餘話 正多面體ハぴたごらす派ノ學者ハ旣ニ之ヲ知リシト雖モ, ぷらとー氏〔西暦紀元前 388 年頃ノ希臘ノ哲學兼幾何學者〕ノ學校ニ於テ特ニ之ヲ研究セシヲ以テ後世之ヲぷらとー體ト呼ブニ至レリ.

問題及ビ解答

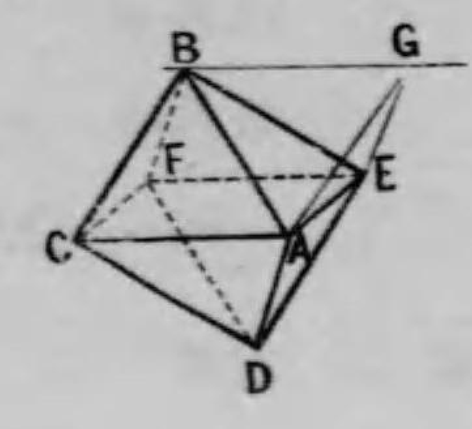
1. 正多面體ニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ,

(a) $\dfrac{1}{F}=\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2}\right).$ (b) $\dfrac{1}{V}=\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2}\right).$

(c) $\dfrac{1}{E}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2}.$ 〔證明ハ 65 頁ノ二定理ニ依ル〕

2. 正四面體ト正八面體トノ二面角ハ互ニ補角ヲナス.

〔證明〕 正八面體ヲ ABCDEF トシ, $BG \underline{\#} CA$ トシ, GA, GE ヲ結ベ. 然ルトキハ正八面體ノ面ABC ハ正三角形ナルユヱ, 之ト全等ナル △ABG ハ正三角形ナリ.



同様ニ四面體 GBAE ハ各面ガ正三角形ナルユヱ正四面體ナリ. 而シテ共通ノ稜 AB ニ於ケル二面角ノ面 ABC, ABG ハ同一平面ナリ. 故ニ此二ツノ二面角ハ互ニ補角ヲナス.

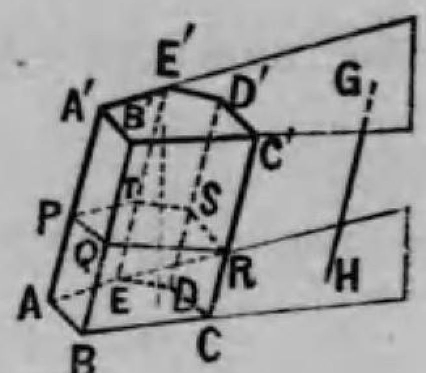
第　二　章
角　　壔

5. 定義及ビ記法

定義 (1)　角壔或ハ角柱　トハ同一ノ直線ニ平行セル數多ノ平面ト此直線ニ交ハル平行二平面トニテ圍マレタル多面體ヲ云フ.

而シテ,其同一直線ニ平行セル各面ヲ傍面或ハ側面ト云ヒ,各傍面ノ和ヲ傍面積ト云ヒ,二傍面ノ交線ヲ傍稜ト云フ.

又其同一直線ニ交ハル二面ヲ底面或ハ端面ト云ヒ,二底面ノ距離ヲ高サト云フ.



記法　右圖ノ如キ角壔ハ之ヲ角壔ABCDE−A′ ト記ス.

角壔ハ底面ノ邊數ニ依リテ三角壔,四角壔,五角壔,等ト云フ.

定義 (2)　直角壔　トハ角壔ノ傍稜ガ底面ニ垂直ナルモノ,

正角壔　トハ直角壔ノ底面ガ正多角形ナルモノヲ云フ.

斜角壔　トハ角壔ノ傍稜ガ底面ニ斜メナルモノヲ云フ.

例ヘバ上圖ノ如シ.

定義 (3)　直截リ口　トハ角壔ノ傍稜ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口ヲ云フ.

定義 (4)　斜截頭角壔　トハ角壔ヲ其各傍稜ニ交リ且ツ底面ニ平行セザル平面ニテ截リタル各部分ヲ云フ.

記法　ハ角壔ト同樣ニ斜截頭角壔 ABCDE−P ト記ス.

定義 (5)　平行六面體　トハ四角壔ノ底面ガ平行四邊形ナルモノヲ云フ.　其相對スル二面ヲ底面ト見做スコトヲ得.

又相對スル頂點ノ連結線ヲ對角線ト云フ.

直平行六面體　トハ平行六面體ノ傍稜ガ底面ニ垂直ナルモノヲ云フ.

矩形六面體　トハ直平行六面體ノ各面ガ矩形ナルモノヲ云フ.

正六面體或ハ立方體　トハ矩形六面體ノ各面ガ正方形ナルモノヲ云フ,　一稜 AB ナル立方體ノ體積ハ $\overline{AB}^3$ ト記ス.

6. 重要定理

定理 (1)　角壔ノ傍面ハ各々平行四邊形ナリ.

又其兩底面ナル多角形ハ全等ナリ.

〔證明〕 前頁ノ圖ヲ用フ.　直線 GH ニ平行ナル二面A′E, A′B ノ交線ナル A′A//GH. 同樣ニ B′B//GH.　故ニ A′A//B′B,　而シテ此ノ二線ノナス一平面 A′B ト平行二平面 A′C′, AC トノ交線 A′B′//AB.　∴ A′B ハ平行四邊形ナリ.　他ノ面ニ付テモ同樣ニ證明シ得.

次ニ前問ニ依リ　$A'B' \underline{\#} AB$, $B'C' \underline{\#} BC$,.........且ツ此等ハ夫々同方向ナルユヱ $\hat{A'}=\hat{A}$,　$\hat{B'}=\hat{B}$,......　∴ $A'B'C'D'E' \equiv ABCDE$.

定理 (2)　角壔ヲ其底面ニ出會ハザル平行二平面ニテノ截リ口ハ全等ナル多角形ナリ.

定理 (3)　角壔ノ傍面積ハ直截リ口ノ周ト一傍稜トノ積ニ等シ.

〔證明〕 前頁ノ圖ヲ用フ.　角壔 ABCDE−A′ ノ直截リ口ヲ PQRST トセバ

面A′B＝A′A.PQ,　面B′C＝B′B.QR,.........　然ルニ A′A＝B′B＝.........ナルユヱ

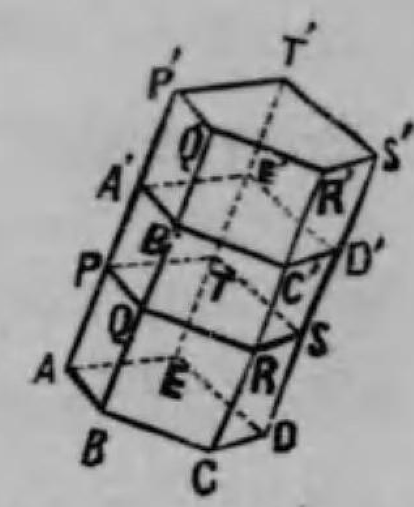
傍面積＝面A′B＋面B′C＋......＝A′A. PQ＋B′B. QR＋......＝A′A (PQ＋QR＋......)

系.　直角壔ノ傍面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シ.

定理 (4) 斜角壔ハ其直截リ口ヲ底面トシ傍稜ヲ高サトスル直角壔ト等積ナリ.

〔證明〕 斜角壔 ABCDE−A′ ノ直截リ口 PQRST ヲ底面トシ, 高サ PP′=AA′ ナル直角壔 PQRST−P′ ヲ作レ. 然ルトキ多面體 AS ヲ多面體 A′S′ ノ上ニ多角形 PQRST ガ P′Q′R′S′T′ ニ重ナル樣ニ置ケバ此二面ニ垂直ナル AP, BQ,...... ハ夫々 A′P′, B′Q′,......ニ重ナリ, 且ツ AA′=PP′, BB′=QQ′......ナルユヱ體 AS ハ全ク體 A′S′ ニ重ナル, 卽チ ABCDE−P≡A′B′C′D′E′−P′. 此双方ニ多面體 PD′ ヲ加フレバ

ABCDE−A′=PQRST−P′.



系. 全等底面, 等高ナル直角壔ハ等積ナリ. 〔重ネ合セテ證明ス〕

定理 (5) 平行六面體ノ相對スル二稜ヲ含ム平面ハ其體ヲ二等分ス.

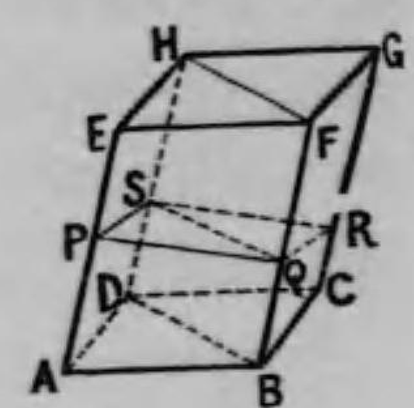
〔證明〕 平行六面體 ABCD−E ノ直截リ口ヲ PQRS トス. 對稜 HD, FB ヲ含ム平面ハ元體ヲ二ツノ三角壔, (ABD−E), (DBC−H) ニ分ツ. 而シテ

ABD−E=底面PQS, 高サ AE ナル直角壔,

DBC−H=底面SQR, 高サ AE ナル直角壔.

然ルニ底面PQS≡SQR ナルユヱ此二ツノ直角壔ハ等積ナリ.

∴ ABD−E=DBC−H.



注意 此二ツノ三角壔ハ對稱ニシテ相等シキモ全等ナラズ.

定理 (6) 矩形六面體ノ體積ハ一角頂ニ會セル三稜ノ乘積ニ等シ.

〔證明〕 矩形六面體 ABCD−E ニ於テ AB, AD, AE ヲ夫々線單位ノ a 倍, b 倍, c 倍トス. 然ルトキ AB, AD, AE ヲ夫々 a 箇, b 箇, c 箇ニ等分シ各分點ヲ過リテ各稜ニ垂直ナル平面ヲ作レバ元體ハ一稜ガ線單位ナル立方體 abc 箇ニ分タル.

∴ ABCD−E ノ體積ハ體積單位ノ abc 倍ナリ.

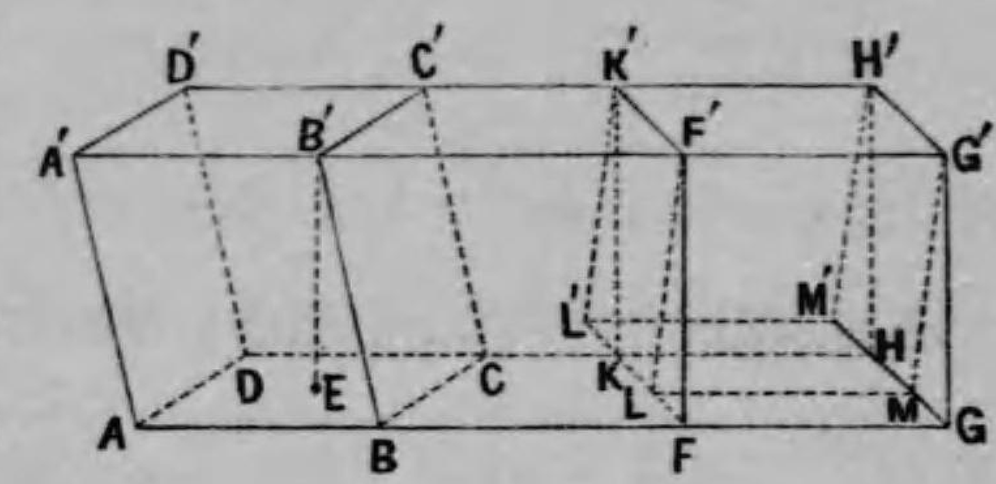
此定理ハ, 矩形六面體ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ, ト換言シ得ベシ.

系 (1) 立方體ノ體積ハ一稜ノ三乘ニ等シ.

系 (2) 等底, 等高ナル矩形六面體ハ等積ナリ.

定理 (7) 平行六面體ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ.

〔證明〕 平行六面體 ABCD−A′ ヲ P トシ, 高サヲ B′E トス. 然ルトキ一邊 AB ノ引長上ニ FG=AB ニ取リ, F, G ヲ過リ FG ニ垂直ナル二平面ヲ作リ, 之ト二傍面 AB′, DC′ 及ビ兩底面ノ引長トニテ直平行六面體 FF′K′K−G ヲ形成シ之ヲ Q トセバ P 體ノ一傍面 AA′D′D ヲ其底面ト見做ストキハ FF′K′K ハ其直截リ口ニ當ル. ∴ P體=Q體.



又 F′, K′ ヲ過リ F′K′ ニ垂直ナル二平面ヲ作リ, 之ト四平面 FK′, GH′, FH, F′H′ トニテ矩形六面體 LMG′F′−L′ ヲ形成シ之ヲ R トセバ Q 體ノ一傍面 FG′ ヲ其底面ト見做ストキハ LF′G′M ハ其直截リ口ニ當ル. ∴ Q體=R體.

∴ P體=R體. 然ルニ矩形六面體R=LMM′L′.F′L ニシテ,

底面 LMM′L′=F′G′H′K′=FGHK=ABCD 且ツ 高サ F′L=B′E ナルユヱ

平行六面體P=ABCD.B′E.

定理 (8) 角壔ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ.

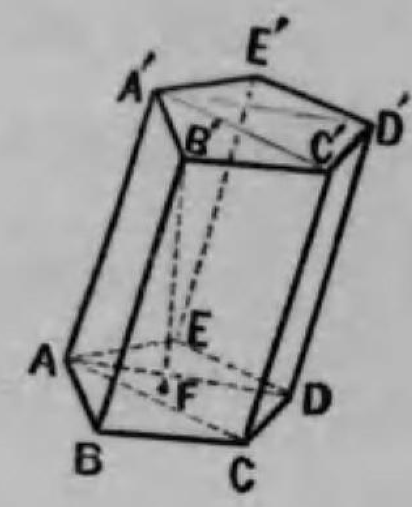
〔證明〕 **第一** 三角壔ノ場合. 上圖ノ左方ヲ用フ.

三角壔 (ABC−A′) ノ高サヲ B′E トス. AA′, CC′ ヲ含ミ對面ニ平行スル二平面ヲ作リ, 之ト二底面ノ引長トニテ平行六面體 ABCD−A′ ヲ形成スルトキハ

$$\text{ABC}-\text{A}'=\frac{1}{2}(\text{ABCD}-\text{A}')=\frac{1}{2}\square\text{AC.B}'\text{E}=\triangle\text{ABC.B}'\text{E}.$$

第二　一般ノ角壔ノ場合.

多角壔 ABCDE$-$A$'$ ノ高サヲ B$'$F トス.　然ルトキ底面ニ其一角頂ヨリ對角線 AC, AD ヲ引キ此等ノ各々ト AA$'$ トヲ含ム平面ヲ作レバ元體ハ三角壔ニ分タル.　故ニ　(ABCDE$-$A$'$)



$=(\mathrm{ABC}-\mathrm{A}')+(\mathrm{ACD}-\mathrm{A}')+(\mathrm{ADE}-\mathrm{A}')$

$=\triangle\mathrm{ABC}.\mathrm{B'F}+\triangle\mathrm{ACD}.\mathrm{B'F}+\triangle\mathrm{ADE}.\mathrm{B'F}$

$=(\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}+\triangle\mathrm{ADE})\,\mathrm{B'F}$

$=\mathrm{ABCDE}.\mathrm{B'F}.$

系 (1)　等底,等高ナル角壔ハ等積ナリ.

逆ニ,等積ナル角壔ハ等底或ハ等高ナレバ,等高或ハ等底ナリ.

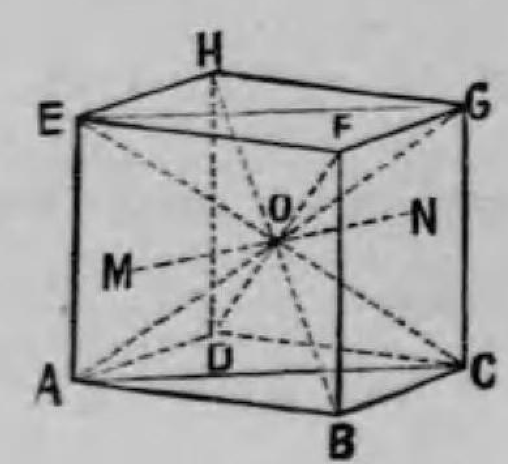
系 (2)　等底或ハ等高ナル角壔ハ高サ或ハ底ニ比例ス.

問　題　及　ビ　解　答

1.　(*a*)　平行六面體 ABCD$-$E ノ四ツノ對角線 EC, GA, HB, FD ハ一點(重心又ハ中心)ニ於テ相交リ且ツ互ニ二等分ス.　（各習）

(*b*)　其交點ヲ過リ對面ニ終ル直線ハ皆其點ニ於テ二等分セラル.

(*c*)　平行六面體ノ對稜ノ中點ヲ連結セル六直線ハ一點ニ於テ相交リ且ツ互ニ二等分ス.



〔證明〕(*a*)　EA ($\mathrel{\underline{/\!/}}$FB)$\mathrel{\underline{/\!/}}$GC ナルユヱ EACG ハ平行四邊形ニシテ其對角線 EC, GA ハ O ニ於テ互ニ二等分セラル.　同樣ニ ▱EBCH ノ對角線 EC, HB モ亦タ互ニ二等分セラル.　然ルニ EC ノ中點ハ只一ツノ O ナルユヱ HB モ亦タ O ニ於テ二等分セラル.

同樣ニ ▱HDBF ニ於テ FD モ亦タ O ニ於テ二等分セラル.　故ニ題言ノ如シ.

(*b*)　O ヲ過リ任意ノ對面ニ終ル任意ノ直線 MN ヲ引ケバ 面EMCN ト 面AH, BG トノ交線 EM//CN 且ツ EO$=$OC ニシテ △EMO$\equiv$△CON,　∴ MO$=$ON.

(*c*)　次圖ヲ用フ.　平行六面體ノ對面ハ夫々平行シ且ツ全等ナル平行四邊形ナリ,　故ニ PR$\left(\mathrel{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}\mathrm{EB}\mathrel{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}\mathrm{HC}\right)\mathrel{\underline{/\!/}}$SQ ナルヲ以テ PRQS ハ平行四邊形ニシテ其對角線 PQ, RS ハ O ニ於テ互ニ二等分セラル.　同樣ニ ▱RTSU ノ對角線 RS, TU モ亦タ互ニ二等分セラル.　然ルニ RS ノ中點ハ只一ツノミナルユヱ TU ノ中點モ亦タ O ナリ.　同樣ニ他ノ三双ノ對稜ノ中點ノ連結線モ亦タ皆ナ O ニ於テ二等分セラルルコトヲ證明シ得.　故ニ題言ノ如シ.

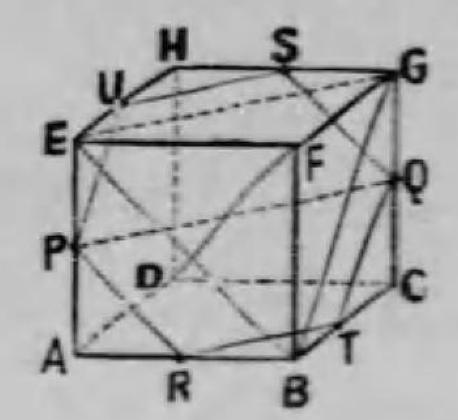
注意　此交點ハ中心ナリ,故ニ四對角線ト此六直線トハ中心ニ於テ互ニ二等分セラル.

2.　(*a*)　立方體 (ABCD$-$EFGH) ニ於テ,三ツノ角頂 B, E, G, ヲ含ム平面ハ對角線 DF ニ垂直ナリ.　（專檢）

(*b*)　立方體ノ兩對角頂ヲ過ラザル六稜ノ各中點ハ正六角形ノ各角頂ナリ.

〔證明〕(*a*)　正方形 HF ノ對角線 HF$\perp$EG.　又 DH$\perp$面HF ナルユヱ DH$\perp$EG,　∴ EG$\perp$面DFH,　從テ DF$\perp$EG.　同樣ニ DF$\perp$BE.　∴ DF$\perp$面BEG.

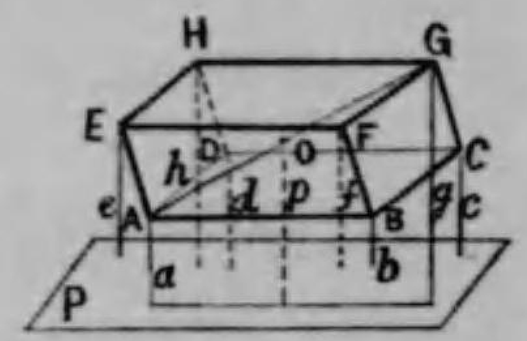
(*b*)　立方體 (ABCD$-$EFGH) ノ兩對角頂 D, F ヲ過ラザル對稜ノ中點ヲ夫々 P, Q, R, S, T, U トス.　然ルトキハ US (//EG)//PQ ナルユヱ PUSQ ハ一平面上ニ在リ.　同樣ニ USQT モ亦タ一平面上ニ在リ.　然ルニ此二平面ハ三點 U, S, Q ヲ共有スルユヱ一致ス,卽チ T ハ前ノ平面上ニ在リ.　同樣ニ R モ亦タ前ノ平面上ニ在リ.　故ニ PUSQTR ハ一平面上ニ在リテ,且ツ此各邊ハ相等シキ正方形ノ對角線ノ半分ヅツナルユヱ相等シ.



次ニ梯形 PUSQ$\equiv$USQT$\equiv$QTRP ナルユヱ PUSQTR ノ各角ハ相等シ.

∴ PUSQTR ハ一平面上ニ在リテ,各邊ガ相等シク且ツ各角ガ相等シキユヱ正六角形ナリ.

3. 平行六面體ノ中心ト此體ヲ截ラザル平面トノ距離ハ，各角頂ト其面トノ距離ノ相加平均ニ等シ.



〔證明〕 平行六面體 (ABCD−EFGH) ノ中心ヲ O トセバ P面ヘノ垂線 $a//g$, AG ノ正射影ハ一直線ニシテ AO=OG ナルユヱ $2p=a+g$. 同樣ニ $2p=b+h$, $2p=c+e$ 及ビ $2p=d+f$.

$\therefore\ 8p=a+b+c+d+e+f+g+h$.

4. N 角壔ニ於テハ (a) 稜ノ總數$=3n$.

(b) 面角ノ總和$=8(n-1)\hat{R}$. (c) 二面角ノ總和$=4(n-1)\hat{R}$.

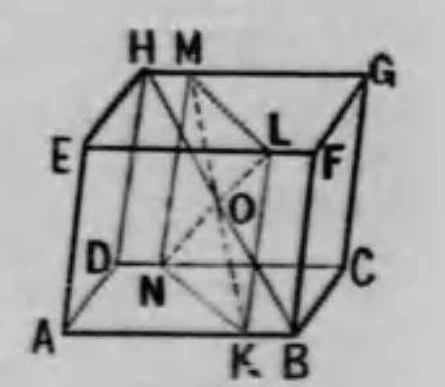
〔證明〕 (b) N 角壔ノ傍面ハ n 箇アリテ各々平行四邊形ナルユヱ，其面角ノ和$=4n\hat{R}$.
又二底面ノ内角ノ和$=2(2n\hat{R}-4\hat{R})$. $\therefore$ 總和$=4n\hat{R}-8\hat{R}+4n\hat{R}=8(n-1)\hat{R}$.

(c) 角壔ノ二底面ハ平行ナルユヱ之ト一傍面トノ爲スニツノ二面角ノ和ハ各々$2\hat{R}$ナリ. 故ニ此等ノ二面角ノ和$=2n\hat{R}$.

又直截リ口ヲ作ルトキハ，傍面ノ爲ス二面角ノ和ハ其截リ口ナル n 邊形ノ内角ノ和即チ $2n\hat{R}-4\hat{R}$ ナリ. $\therefore$ 二面角ノ總和$=2n\hat{R}+2n\hat{R}-4\hat{R}=4(n-1)\hat{R}$.

5. (a) 平行六面體ノ對面ニ交ル平面ニテノ截リ口ハ平行四邊形ナリ.

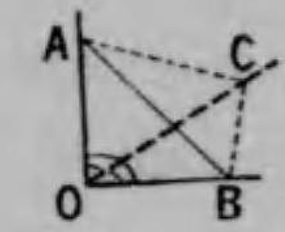
(b) 平行六面體ノ對角線ノ交點ヲ過リ對面ニ交ル平面ハ其體ヲ二等分ス.



〔證明〕 (b) 截リ口 KLMN ハ平行四邊形ニシテ其對角線 MK モ對角線ノ中點 O ヲ過ルユヱ HM=KB.
同樣ニ EL=CN. 故ニ HMLE=KBCN 及ビ ADNK=GFLM. $\therefore$ 角壔(AKND−E),(GMLF−C)ハ其各面，各面角，各二面角ガ夫々相等シキユヱ等積ナリ即チ 面KLMN ハ ABCD−E ヲ二等分ス.

6. 矩形六面體ノ一角頂ノ三稜ヲ過ル平面ノ截リ口ハ鋭角三角形ナリ.

〔證明〕 30 頁ノ 8 題ノ(c)ト同樣ナリ.

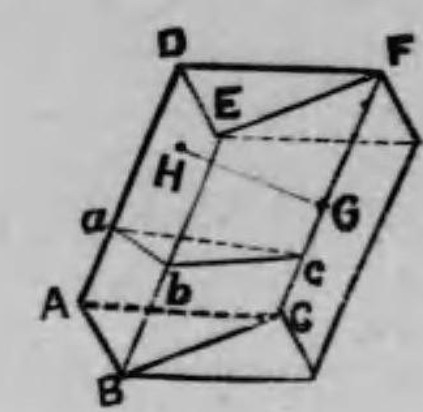


〔別證〕 其角頂ヲ O トシ，截リ口ヲ ABC トス. 然レバ OA, OB, OC ハ互ニ垂線ナルユヱぴたごらす定理ニ依テ $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2$, $\overline{BC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$ 及ビ $\overline{AC}^2=\overline{OA}^2+\overline{OC}^2$ ナリ. 故ニ △ABC ハ何レノ二邊ノ平方ノ和モ他ノ一邊ノ平方ヨリモ大ナルヲ以テ，平面幾何學定理ニ依テ各邊ノ對角ハ鋭角ナリ，即チ ABC ハ鋭角三角形ナリ.

7. (a) 三角壔ノ二傍面ノ和ハ他ノ傍面ヨリモ大ナリ.

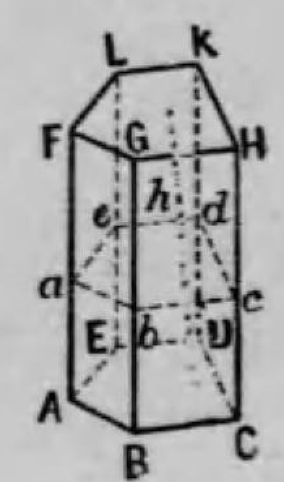
(b) 三角壔ノ體積ハ一傍稜ト其對面トノ積ノ半ニ等シ.

(c) 角壔ノ直截リ口ハ他ノ截リ口ヨリモ小ナリ.



〔證明〕 (a) 三角壔ABC−D ノ直截リ口ヲ abc トセバ ▱AE+▱BF=AD.ab+BE.bc=AD($ab+bc$) 及ビ ▱AF=AD.ac. 然ルニ $ab+bc>ac$ ナルユヱ ▱AE+▱BF>▱AF. 同樣ニ何レノ二面ノ和モ他ノ面ヨリ大ナルコトヲ證シ得.

(b) ABC−D ノ傍稜 CF ヨリ其對面ヘノ高サヲ GH トス. 然ルトキ平行六面體 DABE−F ヲ形成スレバ ABC−D$=\frac{1}{2}$(DABE−F)$=\frac{1}{2}$DABE. GH.



(c) 角壔 ABCDE−F ノ直截リ口ヲ $abcde$ トシ，他ノ截リ口ヲ ABCDE トシ，高サヲ h トス.

然レバ ABCDE−F=$abcde$. AF=ABCDE. h, 然ルニ AF>h. $\therefore$ $abcde$<ABCDE.

8. 角壔ノ底面ガ (*a*) 正三角形, (*b*) 正方形, (*c*) 正六角形, (*d*) 正八角形, 其ノ一邊ヲ a, 高サヲ h, 體積ヲ V トセバ次ノ證如何.

(*a*) $V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h.$ (*b*) $a^2h.$ (*c*) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h.$ (*d*) $2(\sqrt{2}+1)a^2h.$

〔證明〕 角壔ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ, 故ニ

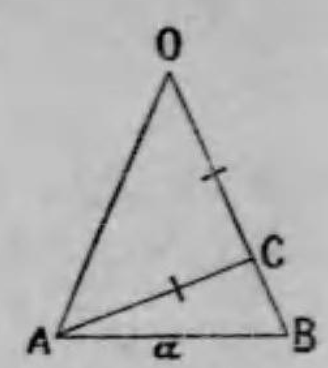
(*a*) 底面積 $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 〔平幾〕, $\therefore\ V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h.$

(*c*) 正六角形ハ其各邊ヲ一邊トセル六ツノ正三角形ニ分チ得ベシ. 故ニ (*a*) ニ依テ

$V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times 6\,h=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2h.$

(*d*) 正八角形ハ其各邊ヲ一邊トセル八ツノ二等邊三角形ニ分チ得. 而シテ一邊ニ對スル中心角ハ $4\hat{R}\div 8=\frac{1}{2}\hat{R}$ ナリ. 故ニ其一ツノ三角形ヲ OAB トシ, AC⊥OB トセバ明カニ AC=OC ナリ. 而シテぴたごらす定理ニ依リテ $\overline{OA}^2=\overline{AC}^2+\overline{OC}^2=2\overline{AC}^2$ 及ビ $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+(OB-OC)^2=\overline{AC}^2+\overline{OB}^2-2.OB.OC+\overline{OC}^2$ ナリ.

サテ $AC=OC=x$, $OA=OB=y$ トセバ上式ハ夫々



$y^2=2x^2$ 及ビ $a^2=x^2+y^2-2xy+x^2=2x^2+y^2-2xy.$

之ヲ解キ $x=\frac{a}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}$, $y=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}$

$\therefore\ \triangle OAB=\frac{1}{2}xy=\frac{\sqrt{2}+1}{4}a^2$ トナル.

$\therefore\ V=\frac{\sqrt{2}+1}{4}a^2\times 8.h=2(\sqrt{2}+1)a^2h.$

9. (*a*) 平行六面體ノ四ツノ對角線ノ平方ノ和ハ, 其各稜ノ平方ノ和ニ等シ.

或ハ 一角頂ニ會スル三稜ノ平方ノ和ノ四倍ニ等シ.

(*b*) 矩形六面體ノ一對角線ノ平方ハ一角頂ニ會スル三稜ノ平方ノ和ニ等シ. 又各對角線ハ相等シ.

(*c*) 立方體ノ一對角線ノ平方ハ一邊ノ平方ノ三倍ニ等シ.

〔證明〕 72 頁ノ下圖ヲ用フ.

(*a*) 平行四邊形ノ兩對角線ノ平方ノ和ハ各邊ノ平方ノ和ニ等シ 〔平幾〕

$\therefore\ \overline{EC}^2+\overline{GA}^2+\overline{HB}^2+\overline{FD}^2=\overline{EA}^2+\overline{AC}^2+\overline{CG}^2+\overline{GE}^2+\overline{HD}^2+\overline{DB}^2+\overline{BF}^2+\overline{FH}^2$

$=\overline{EA}^2+\overline{CG}^2+\overline{HD}^2+\overline{BF}^2+(\overline{AC}^2+\overline{DB}^2)+(\overline{EG}^2+\overline{FH}^2)$

$=\overline{EA}^2+\overline{CG}^2+\overline{HD}^2+\overline{BF}^2+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2+\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2+\overline{HE}^2$

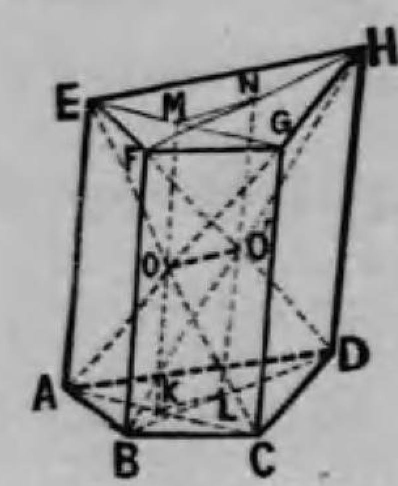
次ニ 稜ハ夫々四ツヅツ等シキユヱ, 上ノ結果ハ $4(\overline{AE}^2+\overline{AB}^2+\overline{AD}^2)$ トナル.

(*b*) 矩形六面體ニ於テハ EA⊥面DB, 又面DB ハ矩形ナリ.

$\therefore\ \overline{EC}^2=\overline{AE}^2+\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=\overline{AE}^2+\overline{AD}^2+\overline{AB}^2.$

10. 四角壔ノ各稜ノ平方ノ和ハ, 各對角線ノ平方ノ和ト其二交點ノ連結線ノ平方ノ八倍トノ差ニ等シ.

〔證明〕 四角壔 ABCD−EFGH ノ對角線 EC, GA 及ビ FD, HB ノ交點ヲ O, O′ トス.



然ルトキ ▱AG ノ對邊 AC, EG 及ビ對角線 EC ノ中點 K, M, O ハ一直線上ニ在リテ $OK \text{≝} \frac{1}{2}AE$. 同樣ニ $O'L \text{≝} \frac{1}{2}HD$. 而シテ AE≝HD, 故ニ ▱OKLO′ ノ對邊 OO′=KL=MN.

▱AG ニ於テ $\overline{EC}^2+\overline{GA}^2=\overline{AE}^2+\overline{EG}^2+\overline{GC}^2+\overline{AC}^2$,

▱BH 〃 $\overline{FD}^2+\overline{HB}^2=\overline{BF}^2+\overline{FH}^2+\overline{HD}^2+\overline{BD}^2$.

$\therefore\ \overline{EC}^2+\overline{GA}^2+\overline{FD}^2+\overline{HB}^2=\overline{AE}^2+\overline{GC}^2+\overline{BF}^2+\overline{HD}^2+(\overline{AC}^2+\overline{BD}^2)+(\overline{EG}^2+\overline{FH}^2)$

然ルニ ABCD ニ於テ $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AD}^2+4\overline{OO'}^2$ 〔KL=OO′〕〔平幾〕

EFGH ニ於テ $\overline{EG}^2+\overline{FH}^2=\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2+\overline{EH}^2+4\overline{OO'}^2$ 〔MN=OO′〕〔 〃 〕

$\therefore\ \overline{EC}^2+\overline{GA}^2+\overline{FD}^2+\overline{HB}^2-8\overline{OO'}^2=\overline{AE}^2+\overline{BF}^2+\overline{CG}^2+\overline{DH}^2+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$
$+\overline{AD}^2+\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2+\overline{EH}^2.$

第三章

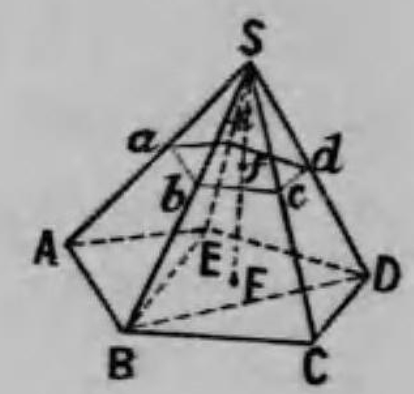
角錐

7. 定義及ビ記法

定義 (1) 角錐 トハ多角形ト其各邊ヲ底邊トシ其面外ノ一點ヲ共通頂トセル三角形トニテ圍マレタル多面體ヲ云フ.

面シテ, 其三角形ノ各面ヲ傍面或ハ側面ト云ヒ, 各傍面ノ和ヲ傍面積ト云ヒ, 二傍面ノ交線ヲ傍稜ト云フ.

又其多角形ヲ底面ト云ヒ, 其一點ヲ頂點ト云フ. 頂點ト底面トノ距離ヲ高サト云フ.



記法 右圖ノ如キ角錐ハ之ヲ角錐 S−ABCDE ト記ス.

角錐ハ底面ノ邊數ニ依リテ三角錐, 四角錐, 五角錐, 等ト云フ.

三角錐ハ特ニ之ヲ四面體ト云ヒ, 何レノ面ヲモ底ト見做シ得.

定義 (2) 正角錐 トハ角錐ノ底面ガ正多角形ニシテ高サガ其中心ヲ過ルモノヲ云フ. 其高サヲ軸トモ云フ.

又頂點ト底ノ一邊トノ距離ヲ斜高或ハ傍高ト云フ.

定義 (3) 平截頭角錐或ハ角錐臺 トハ角錐ノ底面ト之ニ平行ナル平面ニテノ截リ口トノ間ノ部分ヲ云フ.

其平行二面ヲ各々底面ト云ヒ, 其距離ヲ高サト云フ.

又二底面ノ對應セル二邊ノ距離ヲ斜高ト云フ.

記法 ハ角壔ト同樣ナリ.

8. 重要定理

定理 (1) 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ

(i) 傍稜ト高サトハ比例ニ分タル.

(ii) 截リ口ト底面トハ相似ナリ.

〔證明〕 前頁ノ圖ヲ用フ. 角錐 S—ABCDE ノ高サヲ SF トシ, 底面ニ平行ナル截リ口ヲ $abcde$ トシ, 高サト此面トノ交點ヲ f トス. 然ルトキハ

(i) 面AC//面 ac ト 面SAB トノ交線 AB//ab ナルユヱ $Sa : aA = Sb : bB$,

同樣ニ $Sb : bB = Sc : cC$, 等. ∴ $Sa : aA = Sb : bB = Sc : cC = \cdots\cdots$

次ニ AF, af ヲ結ベバ AF//af ナルユヱ $Sa : aA = Sf : fF$.

∴ $Sa : aA = \cdots\cdots = Sf : fF$.

(ii) 前問ノ證ト同樣ニ AB//ab, BC//bc,………且ツ此等ハ夫々同方向ナルユヱ $\widehat{ABC} = \widehat{abc}$, $\widehat{BCD} = \widehat{bcd}$,………

次ニ $SB : AB = Sb : ab$ ナルユヱ $SB : Sb = AB : ab$, 同樣ニ $SB : Sb = BC : bc$, 等

∴ $AB : ab = BC : bc = \cdots\cdots$

即チ 同邊數ニシテ, 對應角ガ相等シク, 對應邊ガ比例スルユヱ $ABCDE \backsim abcde$.

系 (1) 角錐ノ底面ニ平行ナル平面ニテノ截リ口ノ面積ハ頂點ヨリ此等ノ面ニ至ル距離ノ二乘ニ比例ス.

〔證明〕 二截面ヲ $abcde$, ABCDE トシ, 頂點ト此等ノ面トノ距離ヲ夫々 Sf, SF トス. 然ルトキハ $abcde \backsim ABCDE$ 且ツ $ab : AB = Sa : SA = Sf : SF$ ナルユヱ $abcde : ABCDE = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{Sf}^2 : \overline{SF}^2$

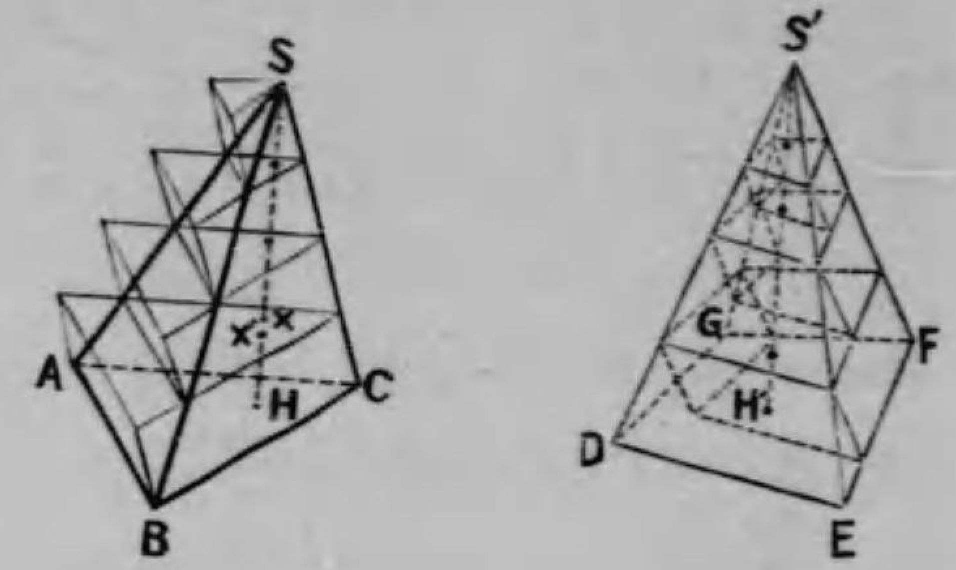
系 (2) 等高ナル角錐ヲ頂點ヨリ等距離ニ且ツ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ, 其截リ口ノ面積ハ底面積ニ比例ス.

系 (3) 等底, 等高ナル角錐ヲ頂點ヨリ等距離ニ且ツ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ, 其截リ口ハ等積ナリ.

定理 (2) 等底，等高ナル角錐ハ等積ナリ． （水講）

〔證明〕 三角錐 S−ABC ト四角錐 S′−DEFG ニ於テ 底面 ABC=DEFG 及ビ高サ SH=S′H′ トス． 然ルトキ若シ此二ツノ角錐ガ等積ナラズトセバ (S−ABC)>(S′−DEFG) トシ，其差ヲ底面ハ ABC ニシテ高サハ XH ナル角壔トセヨ．

高サ SH, S′H′ ヲ各々 XH ヨリ小ナル同數ノ相等シキ部分ニ分チ，各分點ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ヲ畫ケバ對應スル截リ口ハ夫々等積ナリ．



今各截リ口及ビ元ノ底面ヲ底面トシ，高サノ各分ニ等シキ高サノ角壔ヲ上圖ノ如ク作ルトキハ此等ノ對應スル角錐ハ夫々等底，等高ナルユエ等積ナリ．

故ニ (S−ABC) 及ビ (S′−DEFG) ニ屬スル角錐ノ和ヲ夫々 σ, σ' トスレバ

$\sigma-\sigma'$=角錐 (ABC.X′H)　又 $\sigma>$(S−ABC) 及ビ $\sigma'<$(S′−DEFG) ナル故

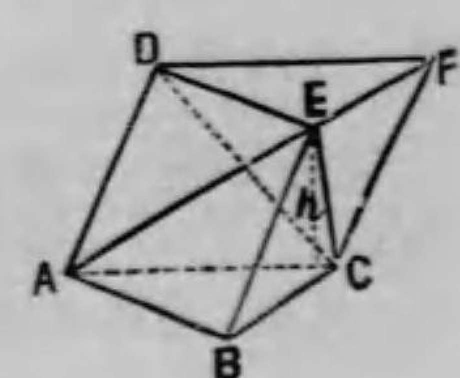
$\sigma-\sigma'>$(S−ABC)−(S′−DEFG)=角錐 (ABC.XH). ∴ ABC.X′H>ABC.XH.

X′H>XH 之レ假設ニ背ク，故ニ (S−ABC)=(S′−DEFG).

定理 (3) 角錐ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ．

〔證明〕 **第一** 三角錐ノ場合．

三角錐 (S−ABC) ヲ之ト同底 ABC, 同高 h ナル三角壔ニ完成スレバ



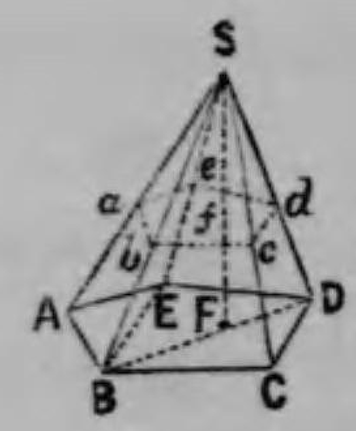
E−ABC=C−DEF〔等底，同高〕

∴ C−DEF=E−CDA.

∴ E−ABC=$\frac{1}{3}$(ABC−D)=$\frac{1}{3}$△ABC.h.

第二 一般ノ角錐ノ場合．

多角錐 S−ABCDE ノ高サヲ SF トス． 底面ニ BE, BD ヲ引キ 平面 SBE, SBD ヲ作レバ



S−ABCDE

=(S−BCD)+(S−BDE)+(S−BEA)

=$\frac{1}{3}$△BCD.SF+$\frac{1}{3}$△BDE.SF+$\frac{1}{3}$△BEA.SF

=$\frac{1}{3}$ABCDE.SF.

系 (1) 三角壔ハ之ヲ等積ナル三ツノ三角錐ニ分ツコトヲ得．

〔略解〕 本定理第一ノ場合ヲ見ヨ． （山商，七高，東師，仙醫）

系 (2) 三角錐ハ之ト等底，等高ナル三角壔ノ三分ノ一ナリ． （陸經）

系 (3) 等積ナル角錐ハ等底或ハ等高ナレバ，等高或ハ等底ナリ．

系 (4) 等底或ハ等高ナル角錐ノ體積ハ高サ或ハ底ニ比例ス．

注意 多面體ノ體積ヲ測ルニハ，之ヲ數多ノ角錐ニ分チテ各々ノ體積ヲ測リ，以テ之ヲ合計スルヲ通例トス．

定理 (4) 平截頭角錐ノ體積ハ兩底面ト其比例中項トノ和ニ高サヲ乘ジタル積ノ三分ノ一ニ等シ．

〔證明〕 上圖ヲ用フ． 平截頭角錐 ABCDE−a ノ高サ fF ヲ h トシ，而シテ底面 ABCDE, $abcde$ ヲ夫々 β, β' トスレバ其比例中項ハ $\sqrt{\beta\beta'}$ ナリ． 次ニ截頭部ヲ完成シ其高サ Sf ヲ x トセバ 角錐 S−ABCDE ノ高サ SF=$h+x$ ナリ．

サテ $\beta\backsim\beta'$ ナルユエ $\frac{\beta}{\beta'}=\left(\frac{AB}{ab}\right)^2=\left(\frac{SA}{Sa}\right)^2=\left(\frac{SF}{Sf}\right)^2=\left(\frac{h+x}{x}\right)^2$, ∴ $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta'}}=\frac{h+x}{x}$,

之ヨリ $x=\frac{h\sqrt{\beta'}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta'}}$ ヲ得．

$$\therefore\ ABCDE-a=(S-ABCDE)-(S-abcde)=\frac{1}{3}\beta(h+x)-\frac{1}{3}\beta'.x$$

$$=\frac{1}{3}\beta h+\frac{1}{3}(\beta-\beta')x=\frac{1}{3}\beta h+\frac{1}{3}(\beta-\beta').\frac{h\sqrt{\beta'}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta'}}$$

$$=\frac{1}{3}h\{\beta+(\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta'})\sqrt{\beta'}\}=\frac{1}{3}h(\beta+\sqrt{\beta\beta'}+\beta').$$

定理 (5) 正角錐ノ傍面積ハ底周ノ半ト斜高トノ乘積ニ等シ. 又, 平截頭正角錐ノ傍面積ハ兩底周ノ和半ト斜高トノ乘積ニ等シ.

9. 定理ニ準ズル問題

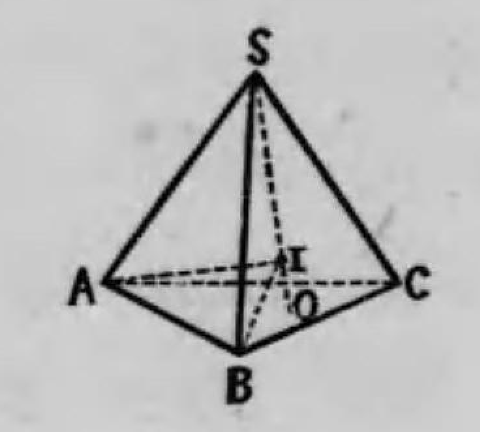
第一 四面體 (卽チ三角錐) ノ性質 〔三面角ノ性質ヲ參考セヨ〕

(1) 四面體ノ各二面角ヲ二等分スル六平面ハ各面ヨリ等距離ナル一點 (内心) ニ於テ相交ル.

〔證明〕 四面體 S−ABC ノ三面角 S ノ二面角 SA, SB, SC ノ各二等分面ハ一直線 SO ニ於テ相交リ且ツ SO ハ三面角 S ノ各面ヨリ等距離ナリ. 〔60 頁ノ2〕

次ニ二面角 AB ノ二等分面ト SO トノ交點ヲ I トセバ I ハ四面體ノ各面ヨリ等距離ナリ.

故ニ二面角 BC, CA ノ二等分面モ亦タ I ヲ過ル. 故ニ題言ノ如シ.



(2) 四面體ノ各稜ノ中點ヲ過リ夫々其稜ニ垂直ナル六平面ハ一點 (外心) ニ於テ相交ル.

〔證明〕 四面體 S−ABC ノ稜 AB, BC ノ中點 D, E ヲ過リ夫々其稜ニ垂直ナル二面ノ交線ヲ OH トセバ之レ A ト B 及ビ B ト C ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ノ交リナルユヱ A, B, C ヨリ等距離ナリ.

次ニ SA ノ中點 F ヲ過リ SA ニ垂直ナル平面ト OH トノ交點ヲ P トセバ之レ S, A, B, C ヨリ等距離ニ在リ.

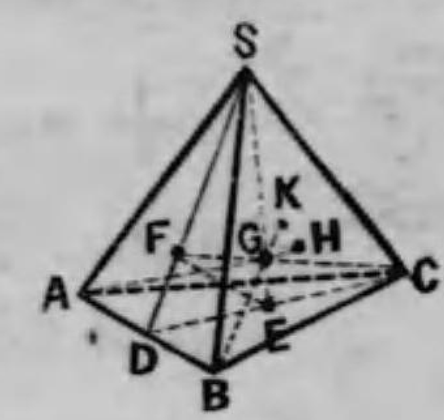
∴ 稜 SB, SC, AC ノ中點ヲ過リ夫々其稜ニ垂直ナル平面モ亦タ P ヲ過ル.

注意 本題ハ, 四面體ノ各面ノ外心ヨリ夫々其面ニ立ツル四垂線ハ一點ニ於テ相交ル, ト換言シ得ベシ. 其證ハ 122 頁ノ定理 (3) ヲ見ヨ.

(3) 四面體ノ各角頂ト其對面ノ重心トヲ結ビタル四直線ハ一點 (重心) ニ於テ相交ル. (新醫)

〔證明〕 四面體 S−ABC ノ底面及ビ傍面ノ重心ヲ順次ニ E, F, H, K トス. 然ルトキ CE, SF ノ引長ハ何レモ AB ノ中點 D ヲ過ル. 而シテ CD : ED = 3 : 1 = SD : FD ナルユヱ EF//CS. SE ト CF トノ交點ヲ G トセバ △SGC∽△EGF ナルユヱ

$$\frac{SG}{GE}=\frac{CG}{GF}=\frac{SC}{EF}=\frac{CD}{DE}=\frac{3}{1}$$ 卽チ SE, CF ハ其各々ヲ 3 : 1 ニ内分スル點 G ニ於テ相交ル.



同樣ニ AH, BK モ亦タ SE ト其各々ヲ 3 : 1 ニ内分スル點ニ於テ相交ルコトヲ證シ得. 然ルニ SE ヲ 3 : 1 ニ内分スル點 G ハ只一ツナリ.

∴ SE, AH, BK, CF ハ其各々ヲ 3 : 1 ニ内分スル點 G ニ於テ相交ル.

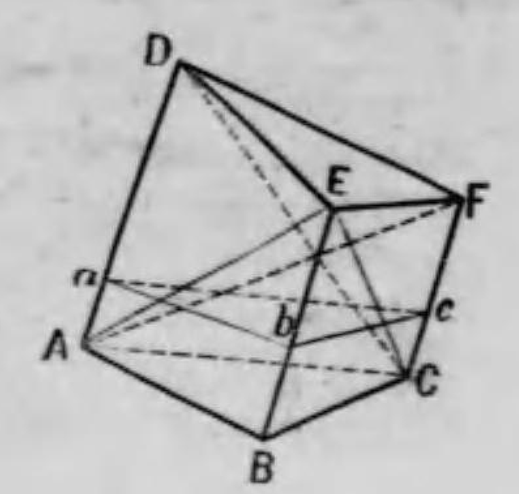
第二 斜截頭三角壔

斜截頭三角壔ハ其底面ヲ底面トシ斜截頭ノ各角頂ヲ頂點トスル三箇ノ三角錐ノ和ニ等シ.

〔證明〕 斜截頭三角壔 ABC−DEF ヲ平面DEC, AEF ニテ截ルトキハ三箇ノ錐體 (E−ABC), (E−CAD), (E−CDF) ヲ得. 然ルニ (E−CAD)=(B−CAD) 〔同底, 等高〕=(D−ABC).

又 (E−CDF)=(E−CAF) 〔等底, 等高〕 =(B−CAF) 〔同底, 等高〕=(F−ABC).

∴ (ABC−DEF)=(E−ABC)+(D−ABC)+(F−ABC).



系. 斜截頭三角壔ノ體積ハ其直截リ口ト傍稜ノ和トノ乘積ノ三分ノ一ナリ.

〔證明〕 前圖ヲ用フ. 直截リ口ヲ abc トス. 然ルトキハ, 角壔ノ體積ハ直截リ口ト一稜トノ乘積ニ等シク; 角錐ノ體積ハ之ト同底, 同高ナル角壔ノ三分ノ一ナリ; 故ニ

$(ABC-DEF)=(D-ABC)+(E-ABC)+(F-ABC)$ 〔本定理〕

$$=\frac{1}{3}\triangle abc.DA+\frac{1}{3}\triangle abc.EB+\frac{1}{3}\triangle abc.FC$$

$$=\frac{1}{3}\triangle abc(DA+EB+FC).$$

問題及ビ解答

1. (*a*) 四面體ノ對稜ガ夫々等シケレバ, 一角頂ノ三ツノ面角ノ和ハ二直角ニ等シ.

(*b*) 三角錐ノ各角頂ニ於ケル三ツノ面角ノ和ガ各々二直角ナルトキハ, 傍面ハ全等ナリ.

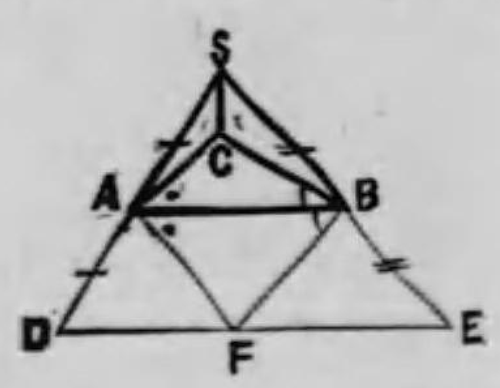
〔證明〕 (*a*) 各面ハ三邊ガ夫々相等シキユヱ全等ナリ. 從テ一角頂 S ニ於ケル三ツノ面角ノ和ハ底面 ABC ノ内角ノ和卽チ二直角ニ等シ.

(*b*) 三角錐 (S−ABC) ノ稜 SA, SB ヲ引長シテ SA=AD, SB=BE トシ, 面DSE 上ニ於テ $B\hat{A}F=C\hat{A}B$, $A\hat{B}F=C\hat{B}A$ ニ作レバ $\triangle AFB\equiv\triangle ACB$, $\therefore$ AF=AC, 及 $A\hat{F}B=A\hat{C}B$. 而シテ $D\hat{A}F+B\hat{A}F+S\hat{A}B=2\hat{R}=S\hat{A}C+C\hat{A}B+S\hat{A}B$ 〔假設〕ナルユヱ $D\hat{A}F=S\hat{A}C$, 故ニ二邊ト其夾角ノ等シキ $\triangle DAF\equiv\triangle SAC$, $\therefore$ $A\hat{F}D=S\hat{C}A$.

同樣ニ $B\hat{F}E=S\hat{C}B$ ヲ證シ得ベシ.

$\therefore$ $A\hat{F}D+A\hat{F}B+B\hat{F}E=S\hat{C}A+A\hat{C}B+S\hat{C}B=2\hat{R}$

ナルユヱ DFE ハ一直線ナリ.



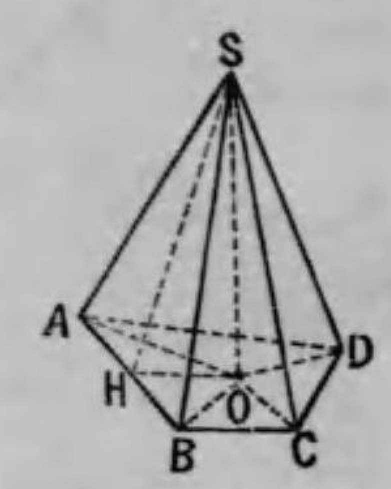
而シテ A, B ハ SD, SE ノ中點ナルヲ以テ

$\triangle SAB\equiv AFB\equiv ADF\equiv BFE$, $\therefore$ $\triangle SAB\equiv ACB\equiv SCA\equiv SCB$.

2. (*a*) 角錐ノ傍面積ハ其底面積ヨリモ大ナリ.

(*b*) 四面體ノ三面ノ和ハ, 他ノ一面ヨリモ大ナリ. (各高)

〔證明〕 (a) S−ABCD ニ於テ SO⊥ABCD トス. 底面ハ O ヲ各角頂ニ結ベバ傍面ト同數ノ三角形ニ分タル. 而シテ OH⊥AB トセバ三垂線定理ニ依テ SH⊥AB. 又直△SOH ニ於テ 斜邊 SH>OH. $\therefore$ △SAB>△OAB. 同樣ニ △SBC>△OBC, △SCD>△OCD, △SDA>△ODA 之ヲ邊々相加ヘテ 傍面積>底面積.

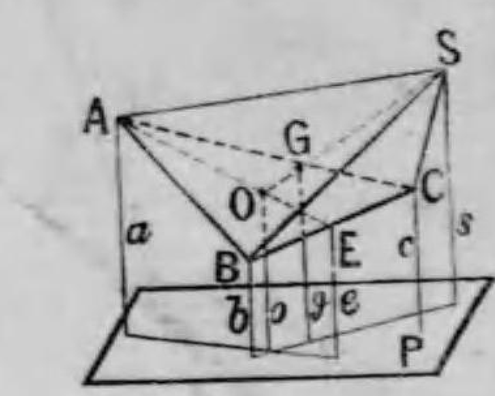


(*b*) ハ (a) ト同樣ナリ.

3. (*a*) △ABC ノ各角頂ヨリ之ヲ截ラザル平面 P ヘノ垂線ノ相加平均ハ, 元形ノ重心 O ヨリ其面ヘノ垂線ニ等シ.

(*b*) 四面體 (S−ABC) ノ各角頂ヨリ之ヲ截ラザル平面 P ヘノ垂線ノ相加平均ハ, 元體ノ重心 G ヨリ其面ヘノ垂線ニ等シ.

〔證明〕 (*a*) AO ノ引長ハ BC ノ中點 E ヲ過ル. A, O, E ヨリ P 面ヘノ垂線 $a//o//e$ ナルユヱ此三線ハ一平面上ニ在リ. 而シテ AO:OE=2:1 ナルユヱ $1.a+2.e=(1+2)o$ 〔平幾〕. 又 BE=EC ナルユヱ $b+c=2.e$.



$\therefore$ $a+b+c=3.o$.

(*b*) SG ノ引長ハ面 ABC ノ重心 O ヲ過ル. S, G, O ヨリ P 面ヘノ垂線 $s//g//o$ ナルユヱ此三線ハ一平面上ニ在リ. 而シテ SG:GO=3:1 〔83 頁(3)〕ナルユヱ

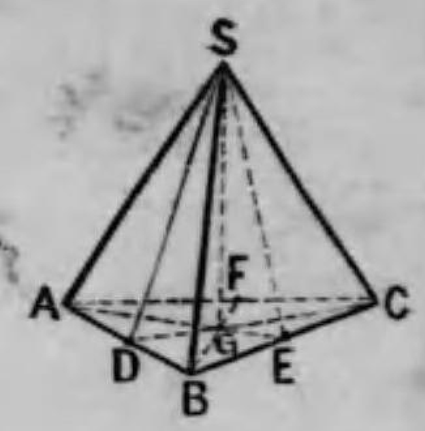
$1.s+3.o=(1+3)g$ 〔平幾〕. 然ルニ $3.o=a+b+c$ 〔(*a*)〕, 之ヲ前式ニ代用スレバ $s+a+b+c=4g$, $\therefore$ $g=\frac{1}{4}(s+a+b+c)$.

注意 74 頁 3 題ト對照セヨ.

4. (a) 四面體ノ一角頂ニ會スル三稜ノ各々ト夫々其對稜ノ中點トヲ含ム三平面ハ同一ノ直線ニ於テ相交ル.

(b) 四面體ノ一ツノ二面角ノ二等分面ハ其對稜ヲ其二面ノ面積ノ比ニ分ツ. (陸士, 專檢)

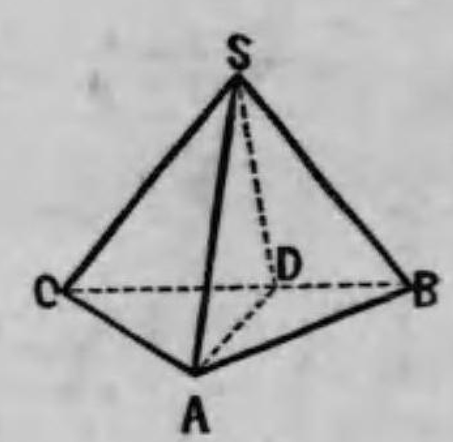
〔證明〕 (a) 四面體 S−ABC ニ於テ SA, SC ト夫々其對稜ノ中點 E, D トヲ含ム二平面 SAE, SCD ノ交線ハ AE, CD ノ交點 G ト S トノ連結線ナリ.



然ルニ G ハ △ABC ノ重心ナルユエ BG ノ引長ハ CA ノ中點 F ヲ過ル. 故ニ 面SBF モ SG ヲ過ル.

∴ 面SAE, SCD, SBF ハ SG ニ於テ相交ル.

(b) 四面體 S−ABC ノ二面角 SA ノ二等分面ト其對稜 BC トノ交點ヲ D トスレバ



(A−SBD) : (A−SDC) = △SBD : △SDC 〔同高〕
= BD : DC 〔同高〕.

又 (A−SBD) : (A−SDC) 卽チ (D−SAB) : (D−SAC)
= △SAB : △SAC 〔同高〕.

∴ BD : DC = △SAB : △SAC.

他ノ二面角ニ付テモ之ト同樣ニ證明シ得. 故ニ題言ノ如シ.

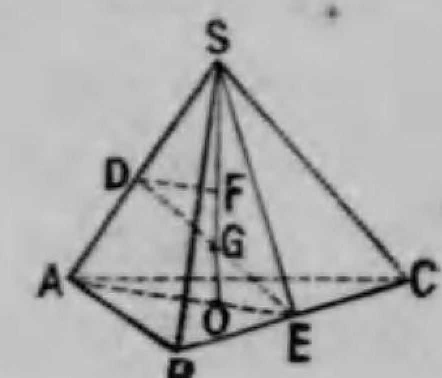
5. (a) 四面體ノ一雙ノ對稜ノ中點ノ連結線ハ其重心ニ於テ二等分セラル.

(b) 四面體ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三直線ハ一點ニ於テ相交リ且ツ互ニ二等分セラル. 〔此交點ハ重心ナリ〕 (東師, 海機)

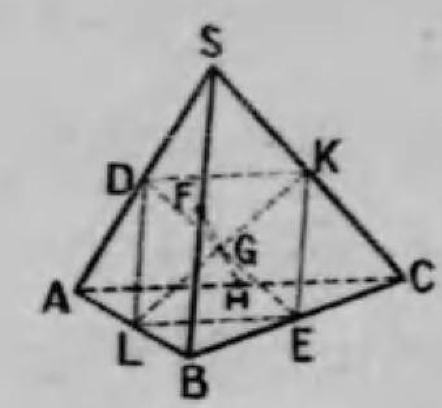
(c) 若シ其三直線ガ互ニ垂直ナルトキハ, 各面ハ全等ナリ.

(d) 四面體ノ一稜ト其對稜ノ中點トヲ含ム六平面ハ一點ニ於テ相交ル. 〔此交點モ重心ナリ〕

〔證明〕 (a) 四面體 S−ABC ノ稜 SA, BC ノ中點ヲ夫々 D, E トシ, 面ABC ノ重心ヲ O トス. 然ルトキ面SAE 上ニ於テ SO ト DE トノ交點ヲ G トシ, DF//AE トセバ SD=DA ナルユエ SF=FO. 又 DF$\underline{\angle}\frac{1}{2}$AO =OE ナルユエ FG=GO. 故ニ SG=SF+FG=3GO 卽チ G ハ重心ナリ.



(b) 四面體 S−ABC ノ各稜ノ中點 D, E, F, H, K, L トセバ DK$\underline{\angle}\frac{1}{2}AC\underline{\angle}$LE ナルユエ DKEL ハ平行四邊形ニシテ DE, KL ハ G ニ於テ互ニ二等分ス. 同樣ニ DE, FH モ亦タ互ニ二等分ス. 然ルニ DE ノ中點 G ハ只一ツナリ.



∴ DE, KL, FH ハ G ニ於テ互ニ二等分ス.

(c) 上圖ヲ用フ. LG=GK 〔(b)〕 且ツ DG⊥LK 〔假設〕 ナルユエ DL=DK, 此二倍ヅツナル SB=AC. 同樣ニ SA=BC, SC=AB ヲ證シ得.

∴ 面ABC, SAB, SBC, SCA ハ三邊ガ夫々相等シキユエ全等ナリ.

(d) 上圖ヲ用フ. 稜SA ト其對稜ノ中點 E トヲ含ム平面 SAE ハ對稜ノ中點ノ連結線 DE ヲ含ム. 同樣ニ他ノ稜ト其對稜ノ中點トヲ含ム平面ハ FH, KL ヲ含ム. 然ルニ DE, FH, KL ハ一點 G ニ於テ相交ル 〔(b)〕. 故ニ題言ノ如シ.

6. (a) 四面體ヲ一雙ノ對稜ニ平行セル平面ニテ截ルトキハ, 其截リ口ハ平行四邊形ナリ.

(b) 若シ又對稜ガ垂直ナルトキハ, 截リ口ハ矩形ナリ.

(c) 若シ又對稜ガ相等シキトキハ, 截リ口ノ周ハ一定ナリ.

〔證明〕 上圖ヲ用フ. (長商)

(a) 對稜SB, AC ニ平行ナル截リ口ヲ DLEK トス. 然レバ SB//面DLEK ナルユエ 面SAB ト 面DLEK トノ交線 DL//SB. 同樣ニ KE//SB. ∴ DL//KE. 同樣ニ DK//LE. ∴ 對邊ガ夫々平行ナルユエ DLEK ハ平行四邊形ナリ.

(b) SB⊥AC ナルトキハ夫々之ニ平行ナル DL⊥DK 卽チ $\hat{LDK}=\hat{R}$ ナルヲ以テ ▱DLEK ハ矩形ナリ.

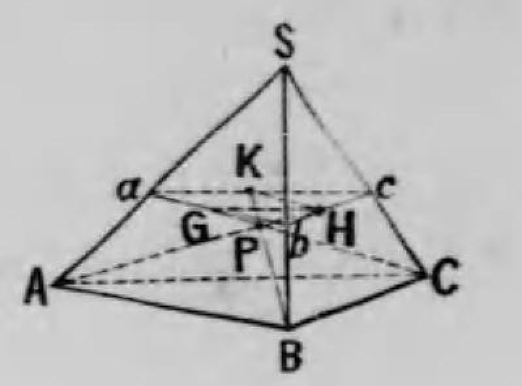
(c) △SAB ニ於テ DL//SB ナルユヱ SA : AD=SB : DL

又 △SAC ニ於テ DK//AC ナルユヱ SA : SD=AC : DK 且ツ SB=AC.

故ニ SA : AD+SD=SB : DL+DK, 然ルニ AD+SD=SA. ∴ DL+DK=SB.

∴ ▱DLEK ノ周=2(DL+DK)=2SB 或ハ 2AC 卽チ一定ナリ.

7. 四面體(S−ABC)ノ底面 ABC ニ平行ナル截面 *abc* ヲ作リ, 其截面ノ各邊ノ中點 G, H, K ト底面ノ對角頂 C, A, B トヲ結ブ三直線 GC, HA, KB ハ一點ニ於テ相會ス. (專檢)



〔證明〕 $KH \doteqdot \frac{1}{2}ab \doteqdot \frac{1}{4}AB$ ナルユヱ KABH ハ一平面上ニ在リテ AH, BK ハ相交ル, 其交點ヲ P トスレバ △PAB∽△PHK ナルユヱ PA : PH=AB : HK=PB : PK 卽チ AH, BK ハ P ニ於テ AB : HK ニ内分セラル.

同樣ニ AH, CG ハ其交點 P′ ニ於テ AC : GH ニ内分セラル.

然ルニ △ABC∽△*abc* ナルユヱ AB : HK=4 : 1=AC : GH. 而シテ AH ヲ同ジ比ニ内分スル點ハ只一ツナリ.

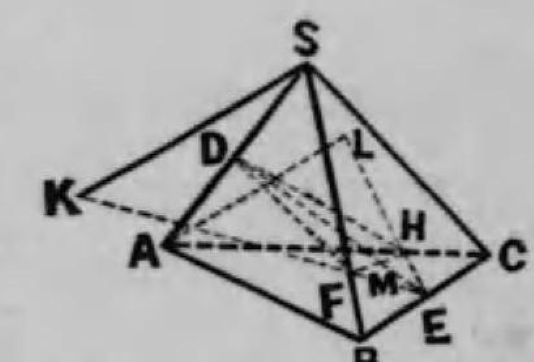
∴ P′ ハ P ト一致ス, 卽チ AH, BK, CG ハ其各々ヲ 4 : 1 ニ内分スル點 P ニ於テ相會ス.

8. (a) 四面體 S−ABC ノ對稜 SA, BC ノ中點 D, E ヲ過ル截面ト SB, AC トノ交點ヲ F, H トセバ DE ハ截面 DFEH ヲ二等分ス.

(b) 四面體ノ一雙ノ對稜ノ中點ノ連結線ヲ含ム平面ハ其體ヲ二等分ス.

〔證明〕 (a) BC ニ平行線 SK ヲ引キ EF ノ引長トノ交點ヲ K トス. 又 KD, EH ノ各引長ノ交點ヲ L トス. 然レバ SK//面ABC ナルユヱ 面KSA, ABC ノ交線ナル AL//SK//BC.

故ニ AL=SK, KD=DL, EF : FK(=BE : SK=EC : AL)=EH : HL ナルユヱ FH//KS 且ツ D ハ KL ノ中點ナルヲ以テ FH ハ DE ニ二等分セラル, 其點ヲ M トセバ等底, 等高ナル △DFM=△DMH, △EFM=△EMH. 之ヲ邊々相加フレバ △FDE=△HDE 卽チ DE ハ截面 DFEH ヲ二等分ス.



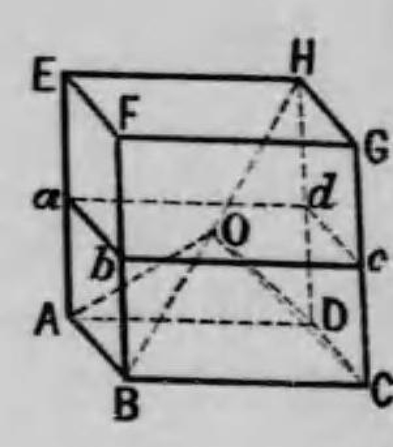
(b) 四面體 S−ABC ノ對稜ノ中點ノ連結線 DE ヲ含ム截面ヲ DFEH トス. BD, CD, CF ヲ結ベバ △BDA=△BDS ナルユヱ C−BDS=C−BDA 卽チ

$$D-ABC=\frac{1}{2}(S-ABC).$$

然ルニ B, C ヨリ截面 DFEH ヘノ垂線ハ相等シク且ツ △DEF=△DEH 〔(a)〕ナルユヱ (B−DEF)=(C−DEH). 此双方ニ D−ABEH ヲ加フレバ

$$DHEF-B=(D-ABC)=\frac{1}{2}(S-ABC).$$

9. 平行六面體ノ一面ヲ底面トシ對角線ノ交點ヲ頂點トスル角錐ハ元體ノ六分ノ一ナリ.



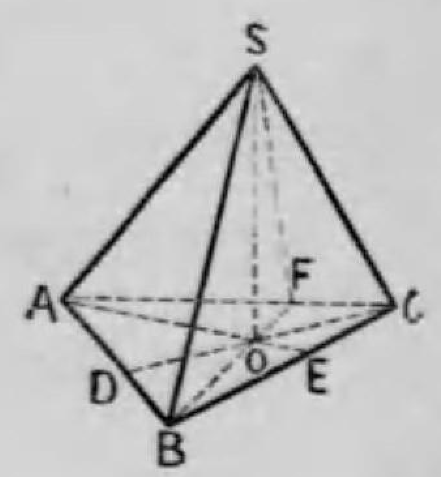
〔證明〕 ABCD−E ノ對角線ノ交點 O ヲ過リ底ニ平行ナル截平面 *abcd* ヲ作ルトキハ

$$ABCD-a=\frac{1}{2}(ABCD-E).$$

$$O-ABCD=\frac{1}{3}(ABCD-a)=\frac{1}{6}(ABCD-E).$$

10. (a) 四面體ノ二雙ノ對稜ガ夫々互ニ垂直ナルトキハ, 殘リノ一雙ノ對稜モ亦タ互ニ垂直ナリ.

(b) 四面體ノ對稜ガ夫々互ニ垂直ナルトキハ, 各角頂ヨリ夫々對面ニ引ケル四垂線ハ一點ニ於テ相會ス.

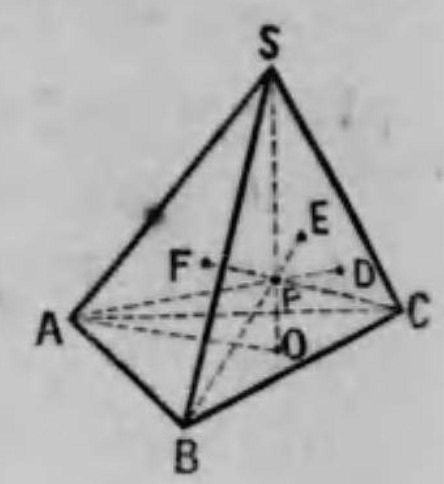


〔證明〕 (a) S−ABC ニ於テ SA⊥BC, SC⊥AB トス. SO⊥面ABC トセバ BC⊥SO⊥AB ナルユヱ BC⊥面SAO, AB⊥SCO.

∴ AE⊥BC, CD⊥AB ナルユヱ O ハ △ABC ノ垂心ナリ. 故ニ BOF⊥AC, SO⊥AC.

∴ AC⊥面SBO, ∴ AC⊥SB.

(*b*) S−ABC ニ於テ對稜ヲ夫々互ニ垂直トシ, 又各角頂ヨリ對面ヘノ垂線ヲ SO, AD, BE, CF トス. 然レバ $SO\perp ABC$, $AD\perp SBC$ ナルユヱ SO, AD ハ SA ヲ含ミ BC ニ垂直ナル面SAO 上ニ在リ. 而シテ SO, AD ハ BC 卽チ SA 及ビ SC 卽チ AB ニ夫々垂線ナルユヱ交ラズ, 卽チ相交ル, 其交點ヲ P トス. 同樣ニ BE ハ亦タ SO, AD ノ各々ト交ル, 然ルニ BE ハ SC ニ垂直ナル面SBE 上ニ在ルユヱ 面SAO 上ニ在ラズ. 故ニ BE ハ 面SAO 上ノ SO, AD ノ各々ト交ルヲ以テ其交點 P ヲ過ル. 同樣ニ CF モ亦タ P ヲ過ル.



11. (*a*) 四面體ノ各稜ノ平方ノ和ハ, 對稜ノ中點ヲ結ビタル三直線ノ平方ノ和ノ四倍ナリ.

(*b*) 若シ對稜ガ夫々互ニ垂直ナルトキハ, 對稜ノ平方ノ和ハ互ニ相等シ.

〔證明〕 87 頁ノ下圖ヲ用フ.

(*a*) ▱DLEK ニ於テ $\overline{DL}^2+\overline{LE}^2+\overline{EK}^2+\overline{DK}^2$ 卽チ $2\overline{DL}^2+2\overline{DK}^2=\overline{DE}^2+\overline{KL}^2$

而シテ $2DL=SB$, $2DK=AC$. $\therefore\ \overline{SB}^2+\overline{AC}^2=4\overline{DL}^2+4\overline{DK}^2=2(\overline{DE}^2+\overline{KL}^2)$.

同樣ニ $\overline{SA}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{FH}^2+\overline{KL}^2)$ 及ビ $\overline{SC}^2+\overline{AB}^2=2(\overline{DE}^2+\overline{FH}^2)$.

此三式ヲ邊々相加フレバ $\overline{SA}^2+\overline{SB}^2+\overline{SC}^2+\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=4(\overline{DE}^2+\overline{FH}^2+\overline{KL}^2)$.

(*b*) $SB\perp AC$ ナルトキハ夫々之ニ平行ナル $DL\perp DK$ 卽チ $L\hat{D}K=\hat{R}$ ナルヲ以テ, ▱DLEK ハ矩形ニシテ對角線 $DE=KL$. 同樣ニ $FH=KL$. $\therefore\ DE=KL=FH$.

故ニ (*a*) ニ依テ $\overline{SB}^2+\overline{AC}^2=\overline{SA}^2+\overline{BC}^2=\overline{SC}^2+\overline{AB}^2$.

12. (*a*) 正四面體ノ頂點ヨリ對面ヘ引ケル垂線ノ足ハ其面ノ垂心 (卽チ內心, 外心, 重心) ナリ.

(*b*) 正四面體ノ對稜ハ夫々互ニ垂直ナリ. (五高)

(*c*) 正四面體ノ高サハ, 其足ヨリ他ノ面ヘ引ケル垂線ノ三倍ニ等シ. (專檢, 高等)

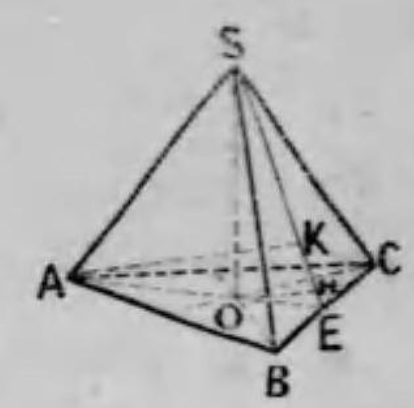
(*d*) 正四面體ノ高サノ平方ハ, 一稜ノ平方ノ三分ノ二ニ等シ. (海兵, 海經, 山商)

(*e*) 正四面體ノ一稜ヲ a トセバ 體積ハ $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ナリ. (水講, 專檢, 海機)

(*f*) 正四面體ノ體內ノ一點ヨリ各面ヘ下セル垂線ノ和ハ,其高サニ等シ. (仙工)

〔證明〕 正四面體ヲ SABC トス.

(*a*) $AB=BC=CA$ 〔假設〕 ナルユヱ $SO\perp$ 面ABC トセバ $OA=OB=OC$. 卽チ O ハ △ABC ノ外心ナリ. 而シテ正三角形ノ垂心, 重心, 內心, 外心ハ一致ス. 故ニ O ハ 面ABC ノ垂心ナリ.



(*b*) (*a*) ニ依リ O ハ △ABC ノ垂心ナルユヱ $BO\perp AC$, 又 $SO\perp$ 面ABC. 故ニ三垂線定理ニ依リ $SB\perp AC$. 同樣ニ $SA\perp BC$, $SC\perp AB$ ヲ證シ得.

(*c*) $AK\perp$ 面SBC トセバ K ハ △SBC ノ垂心〔(*a*)〕ナルユヱ S ヨリ BC ヘノ垂線 AE 上ニ在リ. 而シテ 面SBC ヘノ垂線 AK ヲ含ム 面$AKE\perp$面SBC. 次ニ $OH\perp$ 面SBC トスレバ OH ハ 面SBC ヘノ垂直面AKE 上ニ在リ. 故ニ AK, OH ハ 面AKE 上ニ在リテ 面SBC ニ垂線ナルユヱ平行ナリ. $\therefore\ AK:OH=AE:OE=3:1$ 〔O ハ △ABC ノ垂心卽チ重心〕, 故ニ $AK=3.OH$. 而シテ SABC ハ正四面體ナルユヱ $AK=SO$. $\therefore\ SO=3.OH$.

(*d*) (*a*) ニ依リ O ハ △ABC ノ垂心卽チ重心ナルユヱ $\overline{AO}^2=\left(\dfrac{2}{3}AE\right)^2=\dfrac{4}{9}\overline{AE}^2$ ナリ. 又 $\overline{AE}^2=\overline{AB}^2-\overline{BE}^2=\overline{AB}^2-\left(\dfrac{1}{2}AB\right)^2=\dfrac{3}{4}\overline{AB}^2$.

$$\therefore\ \overline{AO}^2=\frac{4}{9}\times\frac{3}{4}\overline{AB}^2=\frac{1}{3}\overline{AB}^2.$$

而シテ SO ハ體ノ高サナルユヱ $\overline{SO}^2=\overline{SA}^2-\overline{AO}^2=\overline{AB}^2-\dfrac{1}{3}\overline{AB}^2=\dfrac{2}{3}\overline{AB}^2$.

注意 底面ガ正三角形ニシテ頂點ノ各面角ガ直角ナルトキハ $3.\overline{SO}^2=\overline{SA}^2$ ナリ.

(*e*) (*d*) ヨリ高サ SO ヲ得, 又底面ハ正三角形ニシテ其面積ハ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ナリ. 下略.

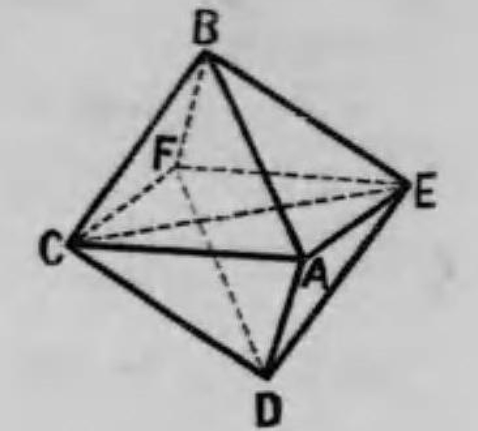
(f) 各面ノ面積ヲ A トシ, 高サヲ h トセバ 體積$=\frac{1}{3}A.h.$
而シテ元體ハ體内ノ一點 O ヲ頂點トシ各面ヲ底面トスル四ツノ三角錐ニ分チ得ベシ, 其高サヲ夫々 a, b, c, d トセバ 此等ノ體積ノ和$=\frac{1}{3}A(a+b+c+d).$

$\therefore\ \frac{1}{3}A.h=\frac{1}{3}A(a+b+c+d).\qquad \therefore\ a+b+c+d=h.$

13. 正八面體ニ於テ一稜ヲ a トシ次ノ各々ヲ證セ,

(a) 一對角線$=a\sqrt{2}.$　　(b) 體積$=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$

〔證明〕 (a) 正八面體 ABCDEF ニ於テ BCDE ハ各邊ガ夫々平行シ且ツ相等シク亦タ各角モ相等シキニヨ正方形ナリ. 故ニ一稜ヲ a トセバ一對角線 $CE=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{BE}^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}.$



(b) 正八面體 ABCDEF ヲ面BCDE ニテ截レバ四角錐 (A−BCDE), (F−BCDE) ハ其高サガ對角線 AF ノ半ニシテ底ガ同一ナルニヨ等積ナリ. 故ニ此各々ノ體積ハ

$\frac{1}{3}a^2\times a\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3.\qquad \therefore$ 元體ノ體積$=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3\times 2=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$

14. (a) 四面體 (S−ABC) ノ底ガ正三角形ニシテ頂點 S ノ面角ガ各々直角ナルトキハ, 底内ノ一點 O ヨリ他ノ面ヘ引ケル垂線ノ和卽チ OE+OF+OG ハ頂點ニ於ケル一稜 CS ニ等シ.

(b) 四面體 (S−ABC) ノ頂點 S ノ面角ガ各々直角ナルトキハ, $\overline{\triangle SCA}^2+\overline{\triangle SBC}^2+\overline{\triangle SAB}^2=\overline{\triangle ABC}^2$ ナリ.

〔證明〕 (a) 斜邊ト一邊トノ等シキ $\triangle ASC\equiv\triangle BSC$, 同樣ニ亦タ $\equiv\triangle ASB.\quad \therefore\ AS=BS=CS.$

次ニ 面OEF ト CS, CA, CB ノ交點ヲ H, K, L トセバ CH⊥面HKL. 故ニ 面HKL//SAB, 從テ HK//SA, HL//SB 且ツ SA=SB ナルニヨ HK=HL.

$\therefore$ OE+OF=KH〔平幾〕.

然ルニ △ASC ハ $\hat{S}=\hat{R}$, AS=SC, AS//KH, $\quad\therefore$ KH=CH.

又 面SAB ヘノ垂線 HS//OG. 此二線ノナス平面ト平行平面 HKL, SAB トノ交線ナル HO//SG. 故ニ HOGS ハ矩形ニシテ OG=HS.

$\therefore$ OE+OF+OG=CH+HS=CS.

(b) SD⊥AB トセバ $A\hat{S}B=\hat{R}$ ナルニヨ $\overline{SA}^2=AD.AB$, $\overline{SB}^2=DB.AB$ 及ビ $\overline{SD}^2=AD.DB,\quad \therefore\ \overline{SA}^2.\overline{SB}^2=\overline{AB}^2.AD.DB=\overline{AB}^2.\overline{SD}^2.$ 而シテ AS⊥CS⊥SB 卽チ CS⊥面ASB 且ツ SD⊥AB ナルニヨ三垂線定理ニ依テ CD⊥AB.

$$\therefore\ \overline{AB}^2.\overline{CD}^2=\overline{AB}^2(\overline{SD}^2+\overline{SC}^2)=\overline{AB}^2.\overline{SD}^2+(\overline{SA}^2+\overline{SB}^2)\overline{SC}^2$$
$$=\overline{AB}^2.\overline{SD}^2+\overline{SA}^2.\overline{SC}^2+\overline{SB}^2.\overline{SC}^2.$$

$\therefore\ 4\overline{\triangle ABC}^2=4(\overline{\triangle SAB}^2+\overline{\triangle SCA}^2+\overline{\triangle SBC}^2)$, 此兩邊ヲ 4 除セバ證ヲ得.

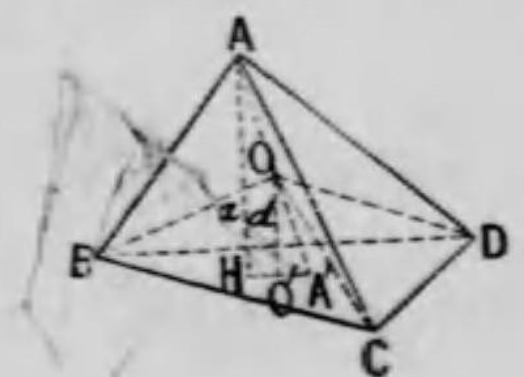
15. (a) 四面體 ABCD ノ各角頂ヨリ對面ニ下セル垂線ヲ夫々 a, b, c, d トシ, 又體内ノ點 O ヨリ前ト同順ノ面ニ下セル垂線ヲ夫々 a', b', c', d' トセバ $\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}+\frac{d'}{d}=1$ ナリ.

(b) 四面體 ABCD ノ體内ニ點 O ヲ取リ AO, BO, CO, DO ノ引長ト對面トノ交點ヲ夫々 A′, B′, C′, D′ トセバ

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1\ \text{ナリ}.$$

〔證明〕 (a) 四面體ABCD ハ體内ノ點 O ヲ頂點トシ各面ヲ底トスル四ツノ角錐ニ分チ得.

今 A, O ヨリ 底BCD ニ垂線 AH, OO′ ヲ引ケバ



$\frac{OO'}{AH}$ 卽チ $\frac{a'}{a}=\frac{O-BCD}{A-BCD}$〔同底〕.

同樣ニ $\frac{b'}{b}=\frac{O-ACD}{B-ACD}=\frac{O-ACD}{A-BCD}$,

$\frac{c'}{c}=\frac{O-ABD}{A-BCD}$ 及ビ $\frac{d'}{d}=\frac{O-ABC}{A-BCD}$.

$$\therefore\ \frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}+\frac{d'}{d}=\frac{O-BCD}{A-BCD}+\frac{O-ACD}{A-BCD}+\frac{O-ABD}{A-BCD}+\frac{O-ABC}{A-BCD}=\frac{A-BCD}{A-BCD}=1.$$

(b) H, O′, A′ ハ一直線上ニ在ルユエ $\frac{OA'}{AA'}=\frac{OO'}{AH}$ 卽チ $\frac{a'}{a}$.

同様ニ　$\frac{OB'}{BB'}=\frac{b'}{b}$, $\frac{OC'}{CC'}=\frac{c'}{c}$, $\frac{OD'}{DD'}=\frac{d'}{d}$ ヲ得.

$$\therefore\ \frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}+\frac{d'}{d}=1\ \text{〔(a)〕}.$$

16. (a) 斜截頭三角壔ノ體積ハ，底面ト截頭面ノ重心ヨリ底ニ下セル垂線トノ乘積ニ等シ.

(b) 平行六面體ノ斜截頭體ノ體積ハ，底面ト截頭面ノ兩對角線ノ交點ヨリ底ニ下セル垂線トノ乘積ニ等シ.

〔證明〕 83 頁ノ下圖ヲ見ヨ.

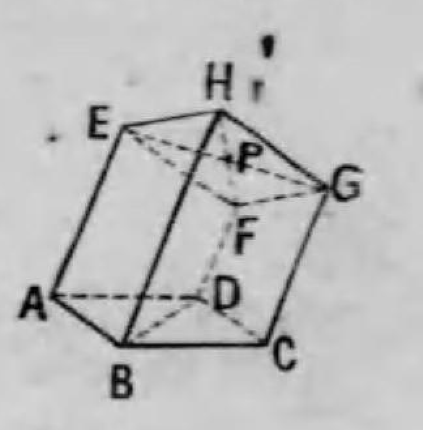
(a) 斜截頭面 DEF ノ各角頂及ビ重心 G ヨリ底面 ABC ヘノ垂線ヲ d, e, f 及ビ g トセバ　體積$=\frac{1}{3}\triangle ABC(d+e+f)$〔83 頁ノ第二〕$=g\triangle ABC$〔85 頁 3 題〕.

(b) 斜截頭面ノ各角頂及ビ對角線ノ交點ヨリ底面ヘノ垂線ヲ e, f, g, h 及ビ p トス.

而シテ元體ヲ平面 HBDF ニテ二ツノ斜截頭三角壔

ニ分テバ ABD−E$=\frac{1}{3}\triangle ABD\times(e+f+h)$

BCD−F$=\frac{1}{3}\triangle BDC\times(f+g+h)$



且ツ $\triangle ABD=\triangle BDC$ 及ビ $h+f=2p=e+g$,

$\therefore$　ABCD−E$=\frac{1}{3}\triangle ABD\times 6p=$ABCD. p.

17. 平截頭矩形錐體 (ABCD−EFGH) ノ高サヲ h トシ，兩底面ヲ過ル直截リ口ヲ作リ BC, AD 及ビ FG, EH トノ交リヲ PQ, SR トスレバ

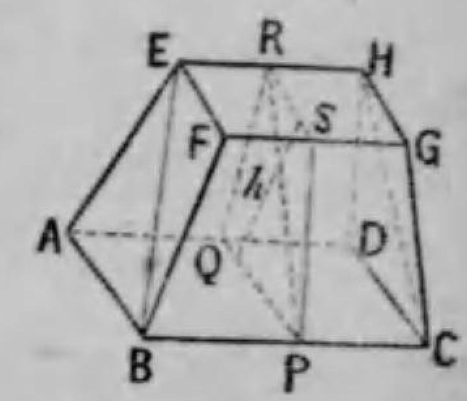
$$\text{體積}=\frac{1}{6}h\times\{SR\times(2FG+BC)+PQ\times(2BC+FG)\}\ \text{ナリ}.$$

〔證明〕 面AC//面EG ナルユエ PQ//SR, 從テ $\triangle PRS=\frac{1}{2}h.SR$ 及ビ $\triangle PQR=\frac{1}{2}h.PQ$ ナリ.　　而シテ元體ヲ平面 EBCH ニテ截レバ二ツノ斜截頭三角壔 (FBE−G), (ABE−D) ニ分タレ，△PRS, △PQR ハ其直截リ口ニ當ル.

故ニ　(FBE−G)$=\frac{1}{3}\triangle PRS\times(FG+EH+BC)$

〔83 頁ノ第二ノ系〕

$=\frac{1}{6}SR\times h\times(2FG+BC)$.



同様ニ　(ABE−D)$=\frac{1}{6}PQ\times h\times(FG+2BC)$.

$\therefore$　(ABCD−EFGH)=(FBE−G)+(ABE−D)

$=\frac{h}{6}\times\{SR\times(2FG+BC)+PQ\times(FG+2BC)\}$.

注意　本題ノ立體ハ直方臺トモ云フ. 上式ハ土，砂ノ堆積ヲ求ムル公式ニ用ヒラル. 而シテ SR=0 ナルトキハ斜截頭三角壔 (楔形臺) トナリテ，體積$=\frac{1}{6}h\times PQ(FG+2BC)$ トナル，之レ建築物ノ屋根又ハ彈丸ノ積ミ重ネ等ニ用ヲル.

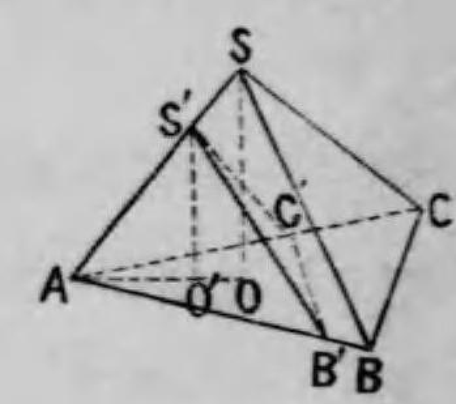
18. 二ツノ四面體ガ一雙ノ全等ナル三面角ヲ有スルトキハ，其體積ハ其角ノ三稜ノ乘積ニ比例ス.

〔證明〕 四面體 (S−ABC), (S′−AB′C′) ニ於テ三面角 A ヲ全等トシ；S′, B′, C′ ヲ夫々 AS, AB, AC 上ニ在リトス. 然ルトキ SO⊥面ABC⊥S′O′

トセバ $\frac{S-ABC}{S'-AB'C'}=\frac{\triangle ABC\times SO}{\triangle AB'C'\times S'O'}=\frac{\triangle ABC}{\triangle AB'C'}\times\frac{SO}{S'O'}$.

然ルニ　$\frac{\triangle ABC}{\triangle AB'C'}=\frac{AB\times AC}{AB'\times AC'}$ 及ビ $\frac{SO}{S'O'}=\frac{AS}{AS'}$.

$\therefore\ \frac{S-ABC}{S'-AB'C'}=\frac{AB\times AC\times AS}{AB'\times AC'\times AS'}$.



19. 一點 O ニ關スル對稱角錐 (O−ABCD), (O−A′B′C′D′) ハ全等ナリヤ又等積ナリヤ.

〔解〕 26 頁ノ圖ヲ用フ. AA′, BB′, 等ハ O ニ於テ二等分セラレ且ツ其夾角ハ相等シキユエ各面ハ逆順ニ相等シク，從テ各面角ハ逆順ニ等シキユエ各立體角ハ逆順ニ相等シ. 故ニ此兩角錐ハ等積ナルモ全等ナラズ.

第 四 章

相 似 多 面 體

10. 定義及ビ定理

定義 二ツノ多面體ハ面數ガ相等シク，一ツノ各面ガ夫々他各面ト相似ニシテ相似ノ位置ニアリ，且ツ各對應多面角ガ夫々全等ナルトキハ相似ナリト云フ.

注意 面數ノ相等シキ二ツノ正多面體ハ相似ナルコト明カナリ.

定理 (1) 相似多面體ノ對應二稜ハ比例ス.

〔證明〕 相似多面體ヲ P, P′ トシ，其對應面 A, A′ ノ對應二稜ヲ夫々 a, a' 及ビ b, b' トセバ $A \backsim A'$ ナルユヱ $a:a'=b:b'$. 其他ニ付テモ同樣ニ證明シ得.

定理 (2) 相似多面體ノ對應面ノ面積ハ其對應稜ノ二乘ニ比例ス.

從テ 全面積ハ對應稜ノ二乘ニ比例ス.

〔證明〕 相似多面體ヲ P, P′ トシ，其對應面 A, A′ ノ對應稜ヲ a, a' トセバ $A \backsim A'$ ナルユヱ $A:A'=a^2:a'^2$. 其他ニ付テモ同樣ニ證明シ得.

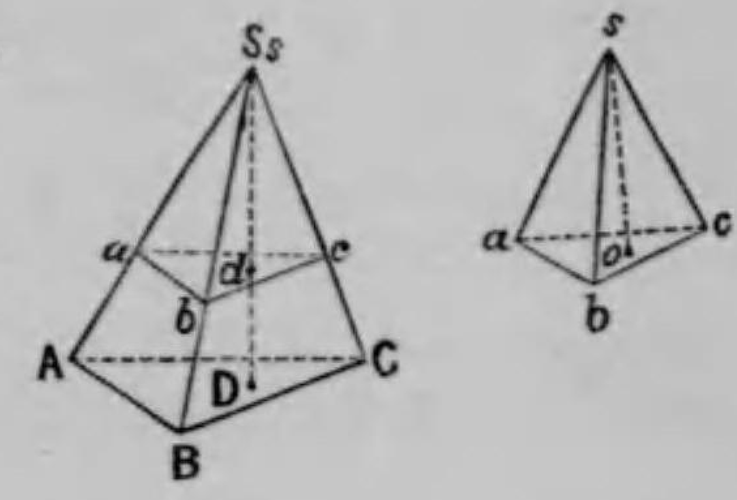
次ニ P, P′ ノ對應面ヲ夫々 A, A′; B, B′; C, C′;……トシ，其對應稜ヲ夫々 a, a'; b, b'; c, c';………トスレバ $A \backsim A'$, $B \backsim B'$, $C \backsim C'$,………ナルユヱ

$$\frac{a^2}{a'^2}=\frac{b^2}{b'^2}=\frac{c^2}{c'^2}=\cdots\cdots=\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\cdots\cdots=\frac{A+B+C+\cdots\cdots}{A'+B'+C'+\cdots\cdots}$$

定理 (3) 相似多面體ノ體積ハ對應稜ノ三乘ニ比例ス.

〔證明〕 **第一** 相似四面體ノ場合.

相似四面體 (S−ABC), ($s-abc$) ノ高サヲ夫々 SD, sd トス. 今 $s-abc$ ヲ S−ABC ノ上ニ對應三面角 S, s ガ一致スル樣ニ重ヌレバ面ABC, abc ハ何レモ面SAB ト等シキ二面角ヲ作ルユヱ 面abc//面ABC. abc ヘノ垂線 sd ハ ABC ノ垂線 SD ニ重ナル.



從テ $\triangle ABC \backsim \triangle abc$. 故ニ $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle abc}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}$,

又 $\dfrac{SD}{sd}=\dfrac{SB}{sb}=\dfrac{AB}{ab}$.

$$\therefore \quad \frac{S-ABC}{s-abc}=\frac{\triangle ABC.\,SD}{\triangle abc.\,sd}=\frac{\triangle ABC}{\triangle abc}\times\frac{SD}{sd}$$

$$=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{ab}^2}\times\frac{AB}{ab}=\frac{\overline{AB}^3}{\overline{ab}^3}.$$

第二 相似多面體ノ場合.

二箇ノ相似多面體ハ之ヲ同數ニシテ且ツ同順ナル相似四面體ニ分チ得ベシ.

然ルニ此等ノ内ノ對應四面體ノ體積ノ比ハ其對應稜ノ三乘比ニ等シク，又元體ノ對應稜ハ比例ス. 故ニ對應四面體ノ對應稜ノ比ハ元體ノ對應稜ノ比ニ等シ. 故ニ對應四面體ノ體積ノ比ハ元體ノ對應稜ノ三乘比ニ等シ.

∴ 對應四面體ノ和卽チ元體ノ體積ハ其對應稜ノ三乘ニ比例ス.

系. 相似多面體ノ體積ハ其高サノ三乘ニ比例ス.

問 題 及 ビ 解 答

1. (a) 四面體ヲ其一面ニ平行セル平面ニテ截リテ生ズル四面體ハ元體ニ相似ナリ.

(b) 錐角ヲ其底ニ平行セル平面ニテ截リテ生ゼル角錐ハ，元體ニ相似ナリ.

〔證明〕 (a) 上圖ヲ用フ. 四面體 SABC ヲ 面ABC ニ平行セル平面ニテノ截リ口ヲ abc トス. 然ルトキハ兩四面體 SABC, Sabc ハ各面ガ夫々相似ニシテ相似ノ位置ニアリ，且ツ對應三面角ガ夫々全等ナルユヱ相似ナリ.

2. 角錐ヲ高サノ中點ヲ過リ底面ニ平行スル平面ニテ截レバ，

(a) 其上部ト下部トノ傍面積ノ比ハ 1:3 ナリ.

(b) 其上部ト下部トノ體積ノ比ハ 1:7 ナリ.

〔證明〕 前頁ノ圖ヲ用フ. 角錐(S−ABC) ヲ其高サ SD ノ中點 d ヲ過リ底 ABC ニ平行スル平面ニテノ截リ口ヲ abc トス. 然ルトキハ

(a) $(s-abc)\backsim(S-ABC)$ 〔1 題〕ナルユヱ此等ノ傍面積ヲ夫々 F', F トスレバ

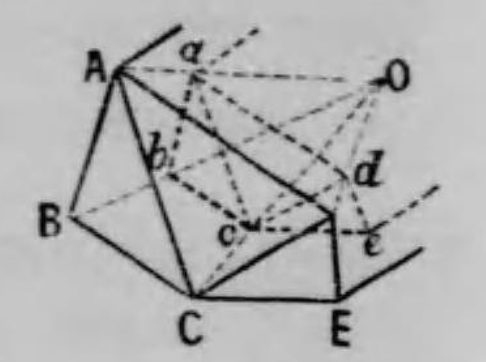
$F':F=\overline{sd}^2:\overline{SD}^2$ 〔定理 (2)〕$=1:4$, $\therefore$ $F':F-F'=1:3$.

(b) $(s-abc)\backsim(S-ABC)$ ナルユヱ, 此等ノ體積ヲ夫々 V', V トスレバ

$V':V=\overline{Sd}^3:\overline{SD}^3$ 〔定理 (3) ノ系〕$=1:8$, $\therefore$ $V':V-V'=1:7$.

3. **二ツノ相似多面體ヲ相似ノ位置ニ且ツ對應面ガ夫々平行ナル樣ニ置クトキハ, 對應角頂ノ連結線ハ一點ニ於テ相會ス.**

〔證明〕 相似多面體 ABCDE........, $abcde$........ニ於テ Aa, Bb ノ引長ノ交點ヲ O トセヨ. 然レバ $AB//ab$ ナルユヱ $AB:ab=BO:bo$.



次ニ Bb, Cc ノ引長ノ交點ヲ O' トセバ前ト同樣ニ $BC:bc=BO':bO'$.

然ルニ $AB:ab=BC:bc$ ナルユヱ Bb ヲ同ジ比ニ外分スル點 O, O' ハ一致ス, 卽チ Cc ノ引長ハ O ヲ過ル.

同樣ニ Dd, 等ノ引長モ皆 O ヲ過ル.

第五章

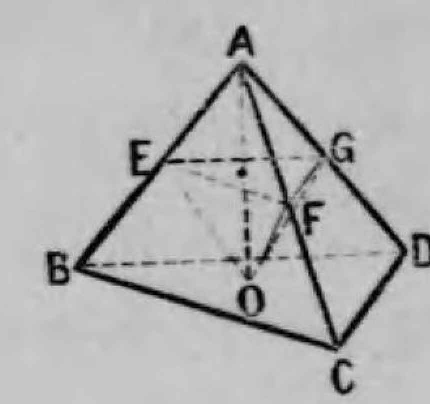
作圖題

11. **第二編卽チ多面體ノ作圖題ハ特ニ基本トスベキモノ無シ, 依テ第一編第八章〔47 頁乃至 51 頁〕ヲ參考スベシ.**

問題及ビ解答

1. **正四面體ニ內接スル正四面體ヲ作レ.**

〔解〕 正四面體 ABCD ニ於テ 面BCD ニ垂線 AO ヲ引キ, AO ノ垂直二等分面ト稜 AB, AC, AD トノ交點ヲ E, F, G トセバ, 四面體 OEFG ハ所要ノモノナリ.



何トナレバ AO ニ垂直ナル 面BCD//面EFG, 從テ 正$\triangle BCD\backsim\triangle EFG$, $\therefore$ $EF=FG=GE$.

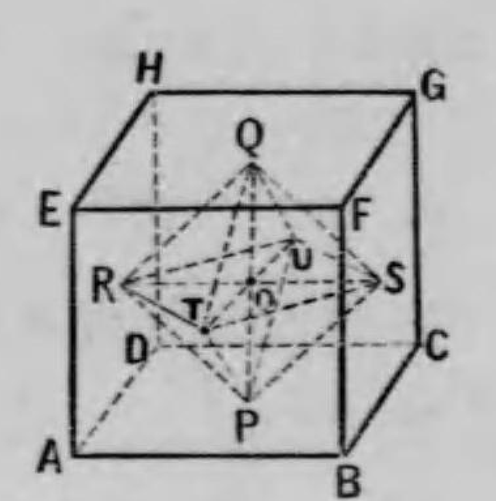
又 O ハ 正$\triangle BCD$ ノ垂心卽チ外心ニシテ $AO\perp$面EFG ナルユヱ $AE=AF=AG=OG=OF=OE$. 故ニ OEFG ハ各稜ガ相等シク, 從テ各面ハ全等ナル正三角形ナルユヱ正四面體ナリ.

〔別略解〕 各面ノ外心卽チ垂心ヲ各角頂トスル四面體モ亦タ所要ノモノナリ.

〔83 頁 (3)〕

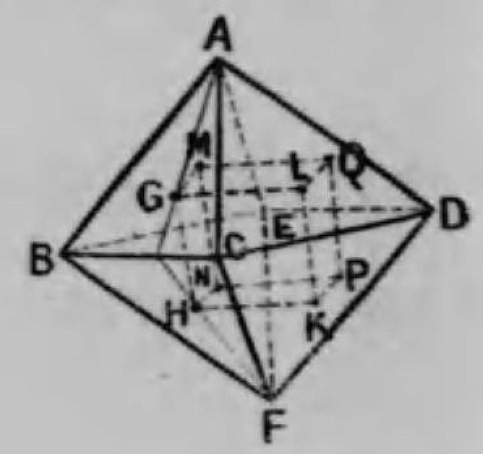
2. **正六面體ニ內接スル正八面體ヲ作レ.**

〔解〕 正六面體 (ABCD−EFGH) ノ對角線ノ交點 O ヲ過リ各稜ニ平行スル三直線ガ對面ニ交ル點 P, Q, R, S, T, U ハ所要ノ正八面體ノ各角頂ナリ. 何トナレバ PQ, RS, TU ハ相等シク且ツ互ニ垂直ニ二等分スルユヱ PRQS, PTQU ハ全等ナル正方形ナリ. 故ニ相隣ル三點ニテ成レル各面ハ全等ナル正三角形ナリ, 從テ此等ノ四面宛ニテ成レル各角頂ノ立體角ハ相等シケレバナリ.



3. 正八面體ニ內接スル正六面體ヲ作レ.

〔作圖〕 正八面體 ABCDEF ノ各面ノ中心（卽チ重心）G, H, K, L, M, N, P, Q ハ所要ノ正六面體ノ各角頂ナリ.



〔證明〕 正△ABC≡△BCF ナルユヱ GH$\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{3}$AF.

同樣ニ MN$\mathrel{\underline{\parallel}}LK\mathrel{\underline{\parallel}}QP\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{3}$AF.

∴ GH$\mathrel{\underline{\parallel}}MN\mathrel{\underline{\parallel}}LK\mathrel{\underline{\parallel}}QP\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{3}$AF.

同樣ニ HK$\mathrel{\underline{\parallel}}NP\mathrel{\underline{\parallel}}GL\mathrel{\underline{\parallel}}MQ\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{3}$BD.

及ビ GM$\mathrel{\underline{\parallel}}HN\mathrel{\underline{\parallel}}KP\mathrel{\underline{\parallel}}LQ\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{3}$CE.

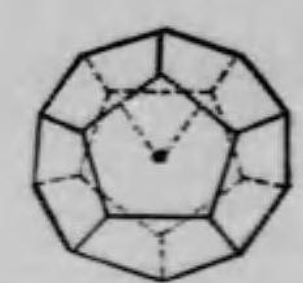
而シテ AF, BD, CE ハ相等シク且ツ互ニ直交ス.

故ニ (GHKL−MNPQ) ハ各稜ガ相等シク且ツ三稜ヅツ互ニ直交スルユヱ，各面ハ全等ナル正方形ニシテ，且ツ三面ヅツ互ニ直交ス卽チ各立體角ハ相等シキユヱ正六面體ナリ.

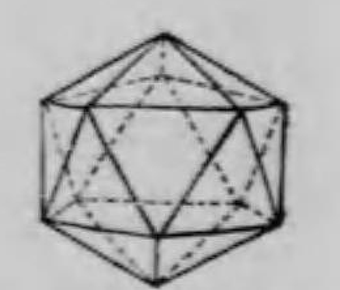
4. 正十二面體ニ內接スル正二十面體ヲ作レ.

〔解〕 正十二面體ノ各面ノ中心ハ所要ノ正二十面體ノ各角頂ナリ.

何トナレバ正十二面體ノ立體角ハ何レモ全等ナル正五角形ノ三面角ナルユヱ，其角ノ各面ノ中心ハ正三角形ヲナシ何レモ全等ナリ. 而シテ此等ノ正三角形ハ立體角ト同數卽チ二十箇アリテ，且ツ各面ノ中心ニ五箇ヅツ相會シテ立體角ヲナスユヱ此等ノ立體角モ相等シキユヱナリ.



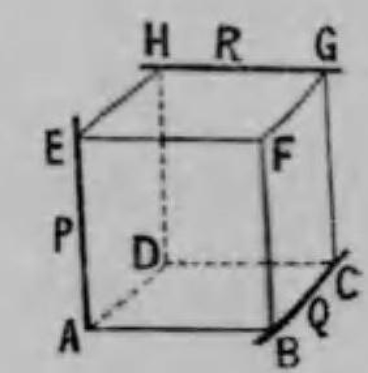
5. 正二十面體ニ內接スル正十二面體ヲ作レ.



〔解〕 正二十面體ノ各面ノ中心ハ所要ノ正十二面體ノ各角頂ナリ.

〔證明〕 ハ前題ニ準ズ.

6. 二ツヅツ同一平面上ニ在ラザル三定直線 P, Q, R アリ，之ヲ三稜ニ重ネテ平行六面體ヲ作レ.



〔解〕 P ヲ含ミ Q, R ニ夫々平行ナル二平面 ED, EB ヲ作レ，又 Q, R ノ各々ヲ含ミ前ト同樣ニ作圖シテ多面體 (ABCD−EFGH) ヲ作レバ可ナリ.

何トナレバ R ハ之ニ平行ナル面EB ト之ヲ含ム面HF トノ交線 EF ニ平行ナリ. 同樣ニ P//HD.

∴ 面AEF //面DHG. 同樣ニ他ノ對面モ夫々平行ナレバナリ.

7. 次ノ條件ニ適スル平面ニテ平行六面體ヲ二等分セヨ.

(*a*) 對角線ノ交點ヲ過ル.　(*b*) 定直線 L ヲ含ム.

(*c*) 定直線 L ト直交スル.　(*d*) 定平面 P ニ平行スル.

〔略解〕 (*a*) 74 頁ノ 5 題ノ (*b*) ニ依ル.

(*b*) 對角線ノ交點 O ト定直線 L トヲ含ム平面ニテ截レバ可ナリ.

(*c*) 對角線ノ交點 O ヲ含ミ定直線 L ニ垂直ナル平面ニテ截レバ可ナリ.

(*d*) 對角線ノ交點 O ヲ含ミ定平面ニ平行スル平面ニテ截レバ可ナリ. 證ハ同上.

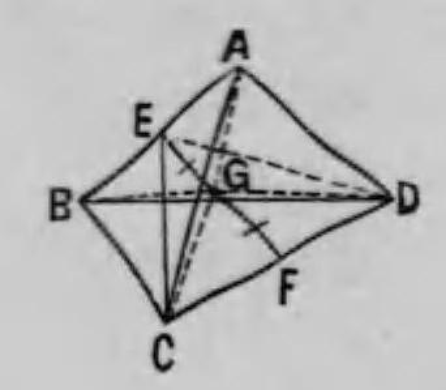
8. 立方體ヲ一平面ニテ截リ，其截リ口ヲ正六角形ナラシメヨ.

〔解〕 ハ 73 頁ノ 2 題ノ (*b*) ニ依ル.　（大工）

9. 四面體ノ各角頂ヨリ等距離ナル一點ヲ求メヨ.　（大工）

〔解〕 ハ 82 頁ノ (2) ニ依ル.

10. 四面體 ABCD 內ニ一點ヲ求メテ，此點ト稜トヲ含ム平面ニテ元體ヲ四等分セヨ.



〔解〕 對稜 AB, CD ノ中點ノ連結線 EF ノ中點 G ハ所要ノ點ナリ. 何トナレバ $(D-ECA)=(D-ECB)=\frac{1}{2}(D-ABC)$

卽チ $(A-ECD)=(B-ECD)=\frac{1}{2}(A-BCD)$.

而シテ $GF=\frac{1}{2}EF$ ナルユヱ $\triangle GCD=\frac{1}{2}\triangle ECD$ ナリ.

∴ $(A-GCD)=\frac{1}{2}(A-ECD)=\frac{1}{4}(A-BCD)$ 卽チ $(G-ACD)=\frac{1}{4}(A-BCD)$.

同樣ニ $(G-ABD)=(G-BCD)=(G-ABC)=\frac{1}{4}(A-BCD)$ ヲ證シ得.

11. 次ノ條件ニ適スル平面ニテ四面體ヲ二等分セヨ.

(a) 一定點ヲ過ル.　(b) 定直線ニ平行或ハ直交スル.

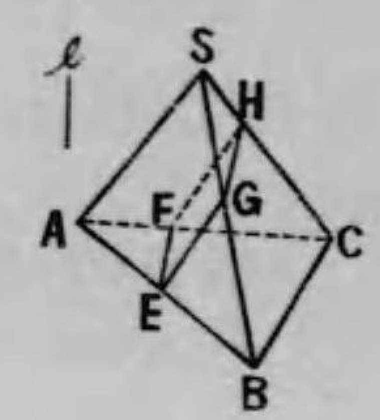
(c) 定平面ニ平行或ハ直交スル.

〔略解〕 前題ノ圖ヲ用フ. 四面體 ABCD ノ對稜 AB, CD ノ中點ノ連結線ヲ EF トス.

(a) EF ト定點 O トヲ含ム平面ハ所要ノモノナリ.　〔88 頁ノ 8 題ノ (b)〕

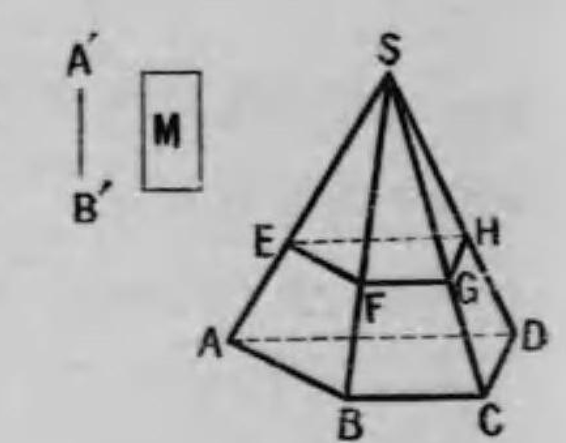
(b), (c) EF ヲ含ミ定直線 L 或ハ定平面 P ニ平行或ハ直交スル平面ハ所要ノモノナリ.　〔同上〕

12. 四面體 (S−ABC) ヲ一平面ニテ截リ, 其截リ口ヲシテ定長 l ニ等シキ對邊ヲ有スル平行四邊形ナラシメヨ.



〔解〕 $B\hat{A}C$, $B\hat{S}C$ ノ各二邊間ニ l ニ等シク且ツ BC ニ平行スル直線 EF, GH ヲ引ケ〔平幾〕バ EFHG ハ所要ノモノナリ.

13. 角錐 (S−ABCD) ヲ底面ニ平行スル平面ニテ截リ, 其截リ口ヲ與面積 M ニ等シカラシメヨ.



〔解〕 底面 ABCD ニ相似ニシテ且ツ與面積ニ等シキ四邊形 A′B′C′D′ ヲ作リ, 而シテ $A\hat{S}B$ ノ二邊間ニ AB ノ對應邊 A′B′ ニ等シク且ツ AB ニ平行スル直線 EF ヲ引キ, 次ニ EF ヲ含ミ底ニ平行スル平面ニテ截レバ可ナリ.

何トナレバ EFGH∽ABCD∽A′B′C′D′ 且ツ EF=A′B′ ナルユヱ EFGH=A′B′C′D′=M ナリ.

14. 角錐 (S−ABCD) ヲ 底面ニ平行スル平面ニテ截リテ,

(a) 其截リ口ノ面積 : 底面積 $=m:n$ ナラシメヨ.

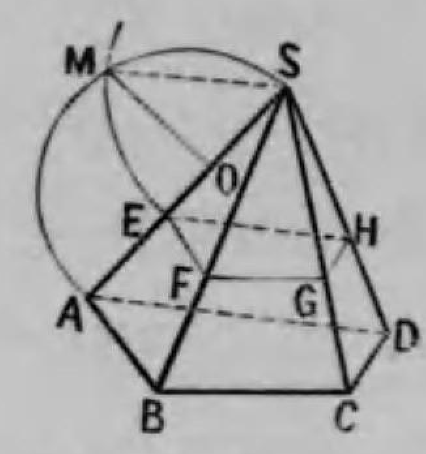
(b) 上部ノ傍面積 : 下部ノ傍面積 $=m:n$ ナラシメヨ.

〔解〕 (a) 稜 SA ヲ O ニ於テ SO : SA $=m:n$ ニ内分シ, OM⊥SA トシ, 面 SAM 上ニ於テ SA ヲ直徑トスル半圓ヲ畫キ OM トノ交點ヲ M トシ, SA 上ニ SE=SM ニ取リ, E ヲ含ミ底面ニ平行スル平面ニテ截レバ可ナリ.

何トナレバ, 截リ口ハ底面ニ相似ナルユヱ

$$\frac{EFGH}{ABCD}=\frac{\overline{EF}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{SE}^2}{\overline{SA}^2}\ 〔\triangle SEF\backsim\triangle SAB〕$$

$$=\frac{\overline{SM}^2}{\overline{SA}^2}=\frac{SO.SA}{\overline{SA}^2}=\frac{SO}{SA}=\frac{m}{n}.$$



(b) 稜 SA ヲ O ニ於テ SO : OA $=m:n$ ニ内分シ, 以下ハ (a) ト同樣ニセバ可ナリ.

何トナレバ (S−EFGH)∽(S−ABCD) ナルユヱ, 此等ノ傍面積ヲ夫々 β', β トスレバ $\beta':\beta=\overline{SE}^2:\overline{SA}^2=\overline{SM}^2:\overline{SA}^2=SO:SA$, $\therefore\ \beta':\beta-\beta'=SO:OA=m:n$.

注意 (a) $m=1$, $n=2$;　(b) $m=n$ トシテ見ヨ.

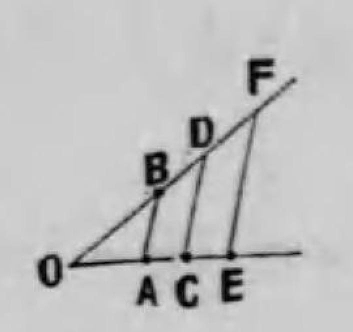
15. 角錐 (S−ABCD) ヲ底面ニ平行スル平面ニテ截リテ生ジタル角錐ト元體トノ體積ノ比ヲ與比 $m:n$ ニ等シカラシメヨ.

〔解〕 上圖ヲ用フ. 稜 SA ヲ E ニ於テ SE : SA $=\sqrt[3]{m}:\sqrt[3]{n}$ ニ内分シ, 卽チ SA 上ニ於テ $SE=\sqrt[3]{\frac{m}{n}}.SA$ ニ取リ, E ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ニテ截レバ可ナリ.

何トナレバ截リ口ト底面トハ平行ナルユヱ (S−EFGH)∽(S−ABCD) ナリ, 故ニ此等ノ體積ヲ夫々 V′, V トセバ $V':V=\overline{SE}^3:\overline{SA}^3=m:n$.

注意 $m=1$, $n=2$ トセバ $V'=\frac{1}{2}V$ トナル.

16. 已知ノ二立方體ニ比例スル二直線ヲ求メヨ.



〔解〕 $\hat{O}$ ノ二邊上ニ二立方體ノ各一稜ニ等シク OA, OB ヲ取リ, 次ニ右圖ノ如ク OC=OB ニ取リ CD//AB トシ, 又次ニ OE=OD ニ取リ EF//CD トセバ OA, OF ハ所要ノ二直線ナリ.

$$\therefore\ \frac{\overline{OB}^3}{\overline{OA}^3}=\frac{OB}{OA}\cdot\frac{OD}{OC}\cdot\frac{OF}{OE}=\frac{OF}{OA}.$$

續第一章乃至第五章

特種問題

12. 直線或ハ平面ノ會一點　此種ノ問題ヲ證明スルニハ,先ヅ第一ト第二トノ會スルコト, 次ニ第二ト第三トノ會スルコトヲ斷定スレバ, 以下ハ之ト同樣ナリ.

第一　直線會一點問題

1. 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ一點 (中心) ニ於テ相會シ且ツ互ニ二等分セラル.　〔72頁ノ1題重出〕

2. 平行六面體ノ對稜ノ中點ヲ連結セル六直線ハ一點(中心) ニ於テ相會シ且ツ互ニ二等分セラル.　〔73頁ノ2題參考〕

3. 四面體ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三直線ハ一點(重心) ニ於テ相會シ且ツ互ニ二等分セラル.　〔86頁ノ5題(b)重出〕

4. 四面體ノ各角頂ト其對面ノ重心トヲ結ブ四直線ハ一點 (重心) ニ於テ相會シ且ツ互ニ 3:1 ニ分タル.　〔83頁ノ(3)重出〕

5. 四面體ノ底面ニ平行ナル截リ口ノ各邊ノ中點ト底面ノ其ノ對角頂トヲ結ブ三直線ハ一點ニ於テ相會シ且ツ互ニ 4:1 ニ分タル.　〔88頁ノ 7題重出〕

6. 四面體ノ對稜ガ夫々互ニ垂直ナルトキハ, 各角頂ヨリ夫々對面へ引ケル四垂線ハ一點ニ於テ相會ス.　〔89頁 10題(b)重出〕

7. 二ツノ相似多面體ヲ相似ノ位置ニ且ツ對應面ガ夫々平行ナル樣ニ置クトキハ, 對應角頂ノ連結線ハ一點ニ於テ相會ス.　〔98頁〕

第二　平面會一點問題

1. 平行六面體ノ對稜ヲ含ム六平面ハ一點ニ於テ相會ス.

〔略證〕 其二平面ハ一双ノ對角線ノ中點ヲ結ブ直線ニ於テ相交ル, 而シテ此等ノ四直線ハ元體ノ對角線ノ交點ニ於テ互ニ二等分セラルルガ故ナリ.

2. 四面體ノ各二面角ヲ二等分スル六平面ハ各面ヨリ等距離ナル一點(內心) ニ於テ相會ス.　〔82頁(1)重出〕

3. 四面體ノ各稜ノ中點ヲ過リ夫々其稜ニ垂直ナル六平面ハ一點(外心) ニ於テ相會ス.　〔同上(2)重出〕

4. 四面體ノ一稜ト其對稜ノ中點トヲ含ム六平面ハ一點(重心) ニ於テ相會ス.　〔86頁 5題(d)重出〕

13. 常數問題ニ付テハ平面幾何學 75頁ヲ再讀スルヲ要ス.

問題及ビ解答

1. 平行六面體ノ各角頂ヨリ其體ヲ過ラザル一平面へ下セル六垂線ノ和ハ一定ナリ.　〔74頁 3題重出〕

2. 四面體ノ各角頂ヨリ其體ヲ過ラザル一平面へ下セル四垂線ノ和ハ一定ナリ.　〔85頁 3題(b)重出〕

3. 四面體ノ對稜ガ夫々相等シキトキハ, 對稜ノ一雙ニ平行ナル平面ニテノ截リ口ハ平行四邊形ニシテ其周ハ一定ナリ.　〔87頁 6題(a), (c)重出)〕

4. 正四面體ノ體內ノ一點ヨリ各面へ下セル四垂線ノ和ハ一定ナリ.　〔91頁 12題(f)重出〕

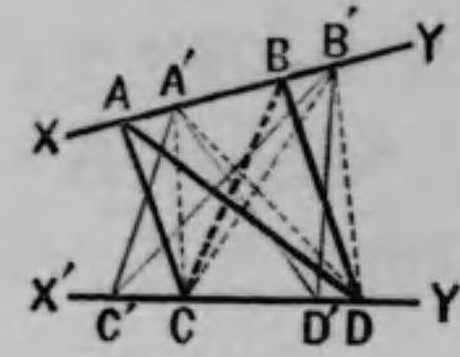
5. (a) 四面體 ABCD ノ各角頂ヨリ對面へ下セル垂線ヲ夫々 a, b, c, d トシ, 又體內ノ點 O ヨリ前ト同順ノ面ニ下セル垂線ヲ夫々 a', b', c', d' トセバ $\dfrac{a'}{a}+\dfrac{b'}{b}+\dfrac{c'}{c}+\dfrac{d'}{d}$ ハ常數ナリ.〔93頁 15題重出〕

(b) 又其體內ニ點 O ヲ取リ AO, BO, CO, DO ノ引長ト對面トノ交點ヲ夫々 A′, B′, C′, D′, トセバ $\dfrac{OA'}{AA'}+\dfrac{OB'}{BB'}+\dfrac{OC'}{CC'}+\dfrac{OD'}{DD'}$ ハ常數ナリ.

6. 空間ニ二ツノ無限與直線 XY, X′Y′ アリ；此等ノ上ニ夫々定長 AB, CD ヲ取レバ A, B, C, D ヲ頂點トスル四面體ノ體積ハ一定ナリ.

（東工）

〔證〕 AB, CD ヲ夫々 A′B′, C′D′ ノ位置ニ變ズレバ $\triangle CAB=\triangle CA'B'$〔等底, 同高〕且ツ此二面ハ一平面上ニ在ルユヱ,



四面體 $(D-CAB)=(D-CA'B')$〔等底, 同高〕

卽チ　$(A-BCD)=(A'-B'CD)$

同樣ニ　$(A'-B'CD)=(A'-B'C'D')$

∴ 四面體 $(A-BCD)=(A'-B'C'D')$

卽チ AB, CD ガ夫々 XY, X′Y′ 上ニ於テ其位置ヲ變ズルモ A, B, C, D ヲ頂點トスル四面體ノ體積ハ不變ナリ.

14. 極大 及ビ 極小

61頁第23條ヲ見ヨ.

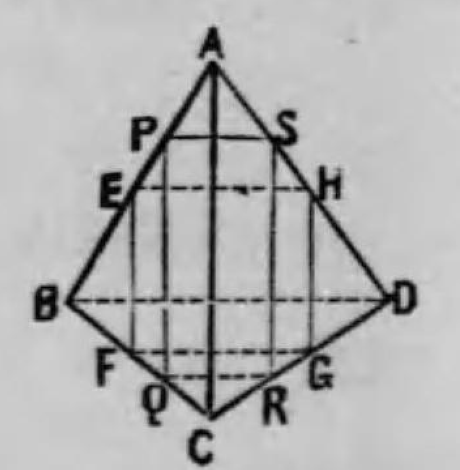
問 題 及 ビ 解 答

1. 角壔ヲ一平面ニテ截リ, 其截リ口ヲ最小ナラシメヨ.

〔解〕 直截リ口ハ所要ノモノナリ. 證明ハ 75 頁ノ7 題 ノ (c) ニ在リ.

2. 四面體ヲ其一双ノ對稜ニ平行ナル平面ニテ截リ, 其截リ口ヲ最大ナラシメヨ.

〔解〕 四面體 ABCD ヲ對稜 AC, BD ノ他ノ各稜ノ中點ヲ過ル截リ口 EFGH ハ所要ノモノナリ. 何トナレバ此截リ口ハ對邊ガ夫々 AC, BD ニ平行ナルユヱ平行四邊形ナリ, 又 AC, BD ニ平行スル任意ノ截リ口モ平行四邊ナリ. 而シテ此兩形ハ二隣邊ガ同方向ニ夫々平行ナルユヱ等角ナリ. 故ニ

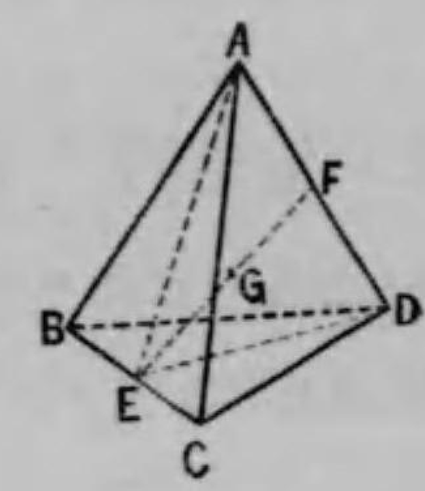


$\dfrac{\square EG}{\square PR}=\dfrac{EF.\ EH}{PQ.\ PS}$〔平幾〕$=\dfrac{EF}{PQ}.\dfrac{EH}{PS}=\dfrac{BE}{BP}.\dfrac{AE}{AP}.$

然ルニ $AE=BE$,　∴ $BE.\ AE>BP.\ PA$ ナリ.

3. 正四面體ノ一双ノ對稜ノ最短距離ハ, 一稜ノ上ノ正方形ノ半ニ等シ.

〔證明〕 正四面體ヲ ABCD トシ, 稜 AD ヲ含ミ對稜 BC ニ垂直面 ADE ヲ作リ, $EF\perp AD$ トスレバ EF ハ AD, BC ノ共通垂線ニシテ且ツ其最短距離ナリ〔43 頁定理 (3)〕. 而シテ 正$\triangle ABC$ ニ於テ $AE\perp BC$ ナルユヱ $BE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB.$　從テ $AE=ED$ 且ツ $EF\perp AD$ ナルユヱ $AF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}AB.$



$$\therefore\ \overline{EF}^2=\overline{AE}^2-\overline{AF}^2=(\overline{AB}^2-\overline{BE}^2)-\overline{AF}^2=\overline{AB}^2-\frac{1}{4}\overline{AB}^2-\frac{1}{4}\overline{AB}^2=\frac{1}{2}\overline{AB}^2,$$

$$\therefore\ EF=\frac{1}{\sqrt{2}}AB=\frac{\sqrt{2}.\ AB}{2}.$$

4. 四面體ノ內ニ一點ヲ求メテ, 其點ト各角頂トノ距離ノ平方ノ和ヲ最小ナラシメヨ.

〔解〕 四面體ヲ ABCD トシ, 對稜 BC, AD ノ中點ノ連結線 EF ノ中點 G ヲ求ムレバ可ナリ. 何トナレバ $\overline{GA}^2+\overline{GD}^2=2(\overline{AF}^2+\overline{GF}^2)$ 及ビ $\overline{GB}^2+\overline{GC}^2=2(\overline{BE}^2+\overline{GE}^2)$ ナルユヱ $\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+\overline{GD}^2=2(\overline{DF}^2+\overline{BE}^2+2\overline{GE}^2)=\frac{1}{2}(\overline{AD}^2+\overline{BC}^2)+4\overline{GE}^2$ ナリ.

今 體內ニ他ノ點 G′ ヲ取レバ上ト同樣ニ

$$\overline{G'A}^2+\overline{G'B}^2+\overline{G'C}^2+\overline{G'D}^2=\frac{1}{2}(\overline{AD}^2+\overline{BC}^2)+2(\overline{G'E}^2+\overline{G'F}^2)$$ ヲ得.

然ルニ G′ 點ハ EF 上ニ在ルト否トニ關ハラズ. $4\overline{GE}^2<2(\overline{G'E}^2+\overline{G'F}^2)$

$$\therefore\ \overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+\overline{GD}^2<\overline{G'A}^2+\overline{G'B}^2+\overline{G'C}^2+\overline{G'D}^2.$$

第 三 編
旋 轉 體

1. 旋轉體 トハ面ヲ旋轉シテ生ジタル立體ヲ云フ．其ノ種類ハ無限ニ存在スルモノナレドモ，立體幾何學ニ於テハ直圓壔，直圓錐，球及ビ此等ヨリ誘導セラルルモノノミニ付テ講究スルヲ通例トス．

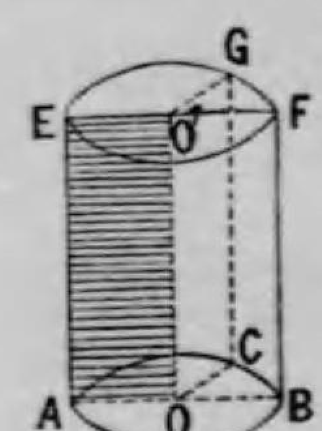
第 一 章
直 圓 壔

2. 定義及ビ記法

定義 (1) **直圓壔或ハ直圓柱** トハ矩形ヲ其一邊ヲ軸トシテ一回旋轉シテ生ジタル體ヲ云フ．

而シテ其邊及ビ其長サヲ直圓壔ノ軸及ビ高サト云フ．

軸ノ對邊ヲ母線ト云ヒ，其邊ガ生ゼシ表面ヲ曲面或ハ傍面ト云フ．又軸ニ直交セル二邊ヲ底半徑ト云ヒ，其二邊ガ生ゼシ表面ヲ底面或ハ端面ト云フ．



記法 ハ角壔ト同樣ニ右圖ヲバ直圓壔(ABC−E)ト記ス．

定義 (2) 直圓壔ト其一母線ノミニテ出會フ平面ヲ切平面ト云フ．

定義 (3) **平截頭直圓壔** トハ直圓壔ヲ其底面ニ平行セル平面ニ截リタル各部ヲ云フ．

定義 (4) **相似直圓壔** トハ相似ナル矩形ヲ其對應邊ヲ軸トシテ夫々一回旋轉シテ生ジタル諸體ヲ云フ．

注意 直圓壔ハ直角壔ニ對應スル事項多シ，兩者ヲ對照スベシ．

3. 重要定理

定理 (1) 直圓壔ノ兩底面ハ全等ナル圓ナリ．

〔證明〕 何トナレバ，兩底面ハ軸ニ垂線ナル二邊ノ軌跡ナルユヱ平行ナル二圓面ニシテ其半徑ハ矩形ノ對邊卽チ等長ナルガ故ナリ．

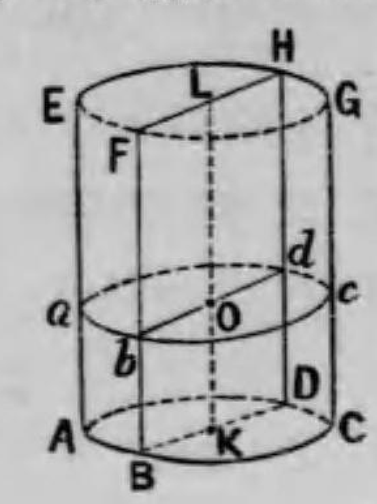
定理 (2) (i) 直圓壔ノ軸ヲ含ム平面ニテノ截リ口ハ矩形ナリ．

(ii) 又其ノ軸ニ平行ナル平面ニテノ截リ口ハ矩形ナリ．

(iii) 又其ノ軸ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口ハ底面ト全等ナリ．

注意 若シ底ニ斜メナル平面ニテ截ルトキハ，其截リ口ハ楕圓トナリテ，本書ノ範圍ヲ超越ス．

〔證明〕 (i) 直圓壔(ABCD−EFGH)ノ軸ニ平行ナル平面ニテ，截口ヲBFHDトス．然ルトキハKLFBハ廻轉スル矩形ニシテKLハ軸ナルユヱBFハ一母線ナリ．同樣ニHDモ母線ナリ．故ニBF≦KL≦DH且ツKL⊥面ACナルユヱBF⊥BD．故ニBHハ矩形ナリ．

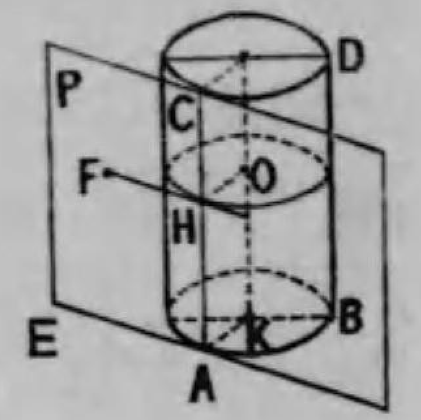


(iii) 軸KLト之ニ垂直ナル截リ口acノ交點ヲOトシ，又截リ口上ノ任意ノ點bヲ過ル母線BbFヲ引ケ． 然レバKLニ垂直ナル面ac//面ACナルユヱOb//KB．又OK//bB且ツOK⊥KB． 故ニBbOKハ矩形ナリ．從テOb=KB卽チ底半徑． 故ニ截リ口上ノ點ハ皆ナOヨリ底半徑ニ等シキ距離ニアルユヱ截リ口ハ底面ト全等ナル圓ナリ．

系． 直圓壔ノ傍面上ノ點ハ皆ナ軸ヨリ等距離ナリ．

定理 (3)　直圓壔ノ一母線ト其母線ノ端ニ於ケル底面ノ切線トヲ含ム平面ハ切平面ナリ.

〔證明〕　直圓壔 (AB−C) ノ母線 AC ト A ニ於ケル底面ノ切線 AE トヲ含ム平面ヲ P トシ, 底面ノ中心ヲ K トス. 然ルトキ P面上ニ於テ AC 外ノ點 F ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ AC トノ交點ヲ H トシ, 截リ口ノ中心ヲ O トセバ　AE//HF, AK//HO ナルユヱ　$\hat{FHO}=\hat{EAK}=\hat{R}$ ナリ,　從テ FH ハ截リ口ノ切線ナリ. 故ニ P 面上ニ於ケル AC 外ノ點ハ皆ナ直圓壔ノ曲面ト出會ハザルユヱ P ハ切平面ナリ.



系 (1)　直圓壔ノ切平面上ノ直線ト母線トノ交點ハ唯一ツナリ.

系 (2)　直圓壔ノ切平面ハ母線ト軸トヲ含ム平面ニ垂直ナリ.

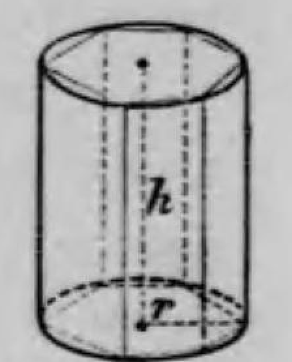
定理 (4) (i)　直圓壔ノ曲面積ハ底周ト高サトノ積ニ等シ.

(ii)　又其ノ全面積ハ底周ニ高サト底半徑トノ和ヲ乘ジタル積ニ等シ.

(iii)　又其ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シ.

〔證明〕　直圓壔ノ底面ニ内接正 n 邊形ヲ畫キ, 其各邊ヲ含ミ夫々軸ニ平行ナル平面ニテノ截リ口ハ何レモ全等ナル矩形ニシテ, 其二面ヅツノ交線ハ母線ナリ.　依テ此等ノ面ト兩底面ノ正 n 邊形トニテ形成セル立體ハ内接直角正角壔ナルコト明カナリ.　サテ今 n ヲ無究ニ多クシタルトキノ極限ニ於テ底周ハ殆ンド底圓周ナリ.

故ニ 底半徑ヲ r, 高サヲ h, 曲面積ヲ s, 全面積ヲ T, 體積ヲ V トセバ角壔ノ定理ニ依リテ



(i)　$S=2\pi r.h.$　　〔69 頁ノ (3)〕

(ii)　$T=2\pi r.h+2\pi r^2=2\pi r(h+r).$

(iii)　$V=\pi r^2.h.$　　〔71 頁ノ (8)〕

系.　二ツノ直圓壔ノ曲面積ハ其底半徑ト高トノ乘積ニ比例ス.　又其ノ體積ハ其底半徑ノ二乘ト高サトノ乘積ニ比例ス.

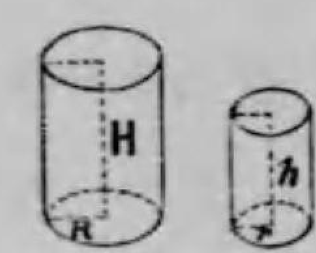
〔證明〕　次圖ヲ用フ.　曲面積及ビ體積ヲ夫々 S, s 及ビ V, v トスレバ

$$\frac{S}{s}=\frac{2\pi R.H}{2\pi r.h}=\frac{R.H}{r.h}\quad 及ビ\quad \frac{V}{v}=\frac{\pi R^2.H}{\pi r^2.h}=\frac{R^2.H}{r^2.h}$$

定理 (5) (i)　相似直圓壔ノ曲面積ハ其高サノ二乘或ハ底半徑ノ二乘ニ比例ス.　又其ノ全面積モ亦タ然リ.

(ii)　又其ノ體積ハ其高サノ三乘或ハ底半徑ノ三乘ニ比例ス.

〔證明〕　二ツノ相似直圓壔ノ夫々底半徑ヲ R, r; 高サヲ H, h; 曲面積ヲ S, s; 全面積ヲ T, t; 體積ヲ V, v トセヨ.　然レバ兩體ヲ生セシ二ツノ矩形ハ相似ナルヲ以テ,



$$\frac{H}{h}=\frac{R}{r}=\frac{H+R}{h+r},\ 故ニ$$

(i)　$$\frac{S}{s}=\frac{2\pi RH}{2\pi rh}=\frac{R}{r}.\frac{H}{h}=\frac{H^2}{h^2}\ 或ハ\ =\frac{R^2}{r^2}.$$

又　$$\frac{T}{t}=\frac{2\pi R(H+R)}{2\pi r(h+r)}=\frac{R}{r}.\frac{H+R}{h+r}=\frac{H^2}{h^2}\ 或ハ\ =\frac{R^2}{r^2}.$$

(ii)　$$\frac{V}{v}=\frac{\pi R^2H}{\pi r^2h}=\frac{R^2}{r^2}.\frac{H}{h}=\frac{H^3}{h^3}\ 或ハ\ =\frac{R^3}{r^3}.$$

問　題　及　ビ　解　答

1.　定位置ノ有限直線ヨリ定距離ニ在ル點ノ軌跡如何.

〔略解〕　此直線ヲ軸トシ定距離ヲ定半徑トスル直圓壔ノ曲面上ノ點ハ定距離ニ等シク, 逆ニ, 其軸ヨリ定距離ニアル點ハ皆ナ其直圓壔ノ曲面上ニ在ルコトヲ證セ.

2.　矩形ヲ二隣邊ヲ夫々軸トシテ旋轉シテ生ジタル二ツノ直圓壔ノ體積ハ, 其軸ニ逆比例ス.

〔證明〕 矩形ノ二隣邊ヲ夫々 a, b トシ，之ヲ夫々軸トセル二ツノ直圓壔ノ體積ヲ V, V′ トセバ　$V : V' = \pi b^2 . a : \pi a^2 . b = b : a.$

3. (a) 曲面積ガ相等シキ二ツノ直圓壔ノ體積ハ其底半徑ニ比例ス.

(b) 等積ナル二ツノ直圓壔ノ曲面積ハ其底半徑ニ逆比例ス.

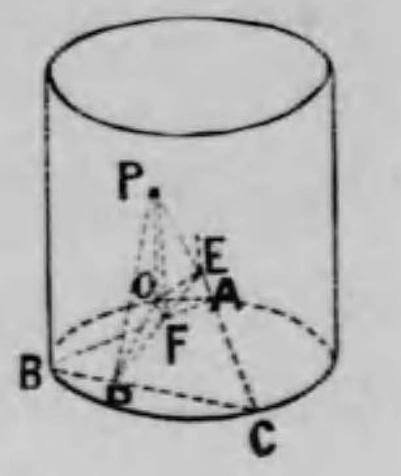
〔證明〕 二ツノ直圓壔ニ於テ，底半徑ヲ R, r; 高サヲ H, h; 曲面積ヲ S, s; 體積ヲ V トスレバ

(a) $\dfrac{V}{v} = \dfrac{\pi R^2 . H}{\pi r^2 . h} = \dfrac{2\pi RH . R}{2\pi rh . r} = \dfrac{R}{r}$ 〔$2\pi R . H = 2\pi r . h$ (假設)〕.

(b) $\dfrac{S}{s} = \dfrac{2\pi R . H}{2\pi r . h} = \dfrac{V \div R}{v \div r} = \dfrac{V}{v} . \dfrac{r}{R} = \dfrac{r}{R}$ 〔$V = v$ (假設)〕.

4. 直圓壔ノ曲面上ノ一點ヨリ底圓ノ內接三角形ノ各邊ニ下セル三垂線ノ足ハ一直線上ニ在リ.

〔證明〕 直圓壔ノ曲面上ノ一點 P ヨリ底面ノ內接三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ヘ垂線 PD, PE, PF ヲ引ケ.　然ルトキ P 點ヨリ底面ニ垂線 PO ヲ引ケバ三垂線定理ニ依リテ $DO \perp BC$, $EO \perp AC$, $FO \perp AB$.　而シテ PO ハ底面ニ垂線ナルユヱ O ハ底圓ノ周上ニ在リ. 故ニ P ヨリ △ABC ノ各邊ヘ引ケル垂線ノ足 D, E, F ハ亦タ △ABC ノ外接圓ノ周上ノ點 O ヨリ各邊ヘ引ケル垂線ノ足ナルヲ以テさむそん定理ニ依リ D, F, E ハ一直線上ニ在リ.



注意 本題ハ平面幾何學ノさむそん定理ヲ擴張シタルモノナリ.

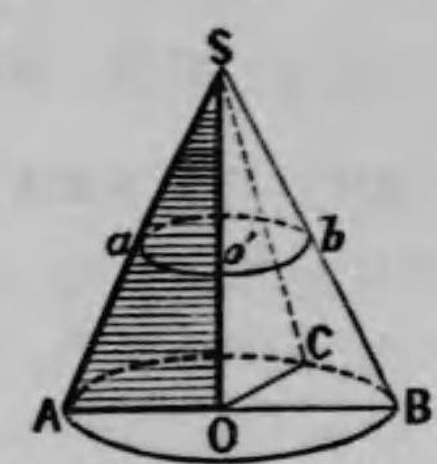
第二章
直圓錐

4. 定義及ビ記法

定義 (1) 直圓錐　トハ直三角形ヲ其直角ノ一邊ヲ軸トシテ一回旋轉シテ生ジタル體ヲ云フ.

而シテ其邊及ビ其長サヲ直圓錐ノ軸及ビ高サト云フ.

斜邊ヲ母線或ハ斜高ト云ヒ，其邊ガ生ゼシ表面ヲ曲面或ハ傍面ト云フ.　又直角ニ隣ル他ノ邊ヲ底半徑ト云ヒ，其邊ガ生ゼシ表面ヲ底面ト云フ.　又軸ト斜邊トノ交點ヲ頂點ト云フ.　又軸ヲ含ム平面ニテノ截リ口ノ頂角ヲ直圓錐ノ頂角ト云フ.



記法　ハ角錐ト同樣ニ右圖ヲバ直圓錐 (S−ABC) ト記ス.

定義 (2) 直圓錐ト其一母線ノミニテ出會フ平面ヲ切平面ト云フ.

定義 (3) 平截頭直圓錐或ハ直圓錐臺　トハ直圓錐ノ底面ト之ニ平行ナル平面ニテノ截リ口トノ間ノ部分ヲ云フ.

其平行二面ヲ各々底面ト云ヒ，其距離ヲ高サト云フ.

又斜高ノ平行二面間ニアル部分ヲ其斜高ト云フ.

定義 (4) 相似直圓錐　トハ相似ナル直三角形ヲ其對應邊ヲ軸トシテ夫々一回旋轉シテ生ジタル諸體ヲ云フ.

注意 直圓錐ハ直角錐ニ對應スル事項多シ，兩者ヲ對照スベシ.

5. 重要定理

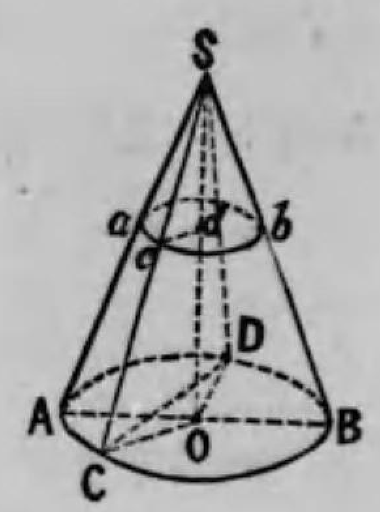
定理 (1) 直圓錐ヲ一平面ニテ截ルトキハ,其面ノ位置ニ從テ次ノ場合ヲ得, 卽チ

(i) 其面ガ頂點ヲ過リ曲面ニ會セザレバ,截リ口ハ一點ナリ.

(ii) 其面ガ頂點ヲ過リ曲面ヲ截レバ,截リ口ハ二等邊三角形ナリ.

又其面ガ軸ヲ含ムモ亦タ然リ.

(iii) 其面ガ頂點ヲ過ラズ軸ト直交スルトキハ,截リ口ハ圓ナリ.



〔證明〕 (ii) 直圓錐 (S−AB) ノ頂點ヲ過ル曲面ノ截リ口ヲ SCD トセヨ. 然ルトキ底面ノ中心 O ヲ C,D ニ結ベバ底半徑 OC=OD, SO=共通, 其夾角 $S\hat{O}C=S\hat{O}D$ ナルユヱ △SOC≡△SOD. ∴ SC=SD.

(iii) 其截リ口 ab ト軸 SO トノ交點ヲ o' トシ, 又截リ口上ノ任意ノ母線 ScC ヲ引ケ. 然レバ SO ニ垂直ナル面 ab//面AB, 從テ △SCO ニ於テ co'//CO ナルユヱ $co':CO=So':SO$, 卽チ截リ口上ノ點 o' ヨリノ距離ト底半徑トノ比ハ常ニ定比 $So':SO$ ニ等シ. 故ニ截リ口上ノ點ハ皆ナ o' ヨリ等距離ナルユヱ截リ口ハ中心 o ナル圓ナリ.

注意 直圓錐ノ平面ニテノ截リ口ハ尙ホ上ノ他ニアリ. 今其名稱ヲ次ニ示サン.

(iv) 其面ガ底面ニ平行セズシテ各母線ヲ截ルトキハ,截リ口ヲ楕圓ト云フ.

(v) 其面ガ二ツノ母線ニ平行ナルトキハ,截リ口ヲ拋物線ト云フ.

(vi) 頂點ノ兩傍ニ在ル對稱直圓錐ヲ軸ニ平行ナル一平面ニテ截ルトキハ截リ口ヲ雙曲線ト云フ.

以上ノ截リ口ヲ總稱シテ圓錐曲線ト云ヒ, 解析幾何學ニ於テ講究スベキモノナリ.

定理 (2) 直圓錐ノ一母線ト其母線ノ端ニ於ケル底面ノ切線トヲ含ム平面ハ切平面ナリ.

〔證明〕 ハ110頁ノ(3)ト全ク同樣ナリ.

系 (1) 直圓錐ノ切平面上ノ直線ト母線トノ交點ハ只一ツナリ.

系 (2) 直圓錐ノ切平面ハ母線ト軸トヲ含ム平面ニ垂直ナリ.

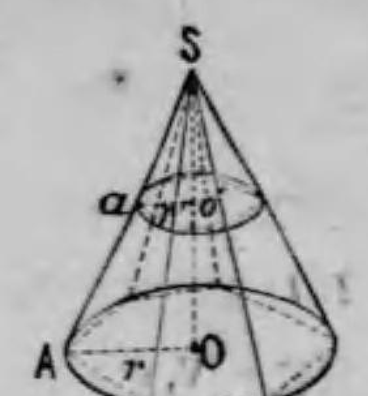
定理 (3) (i) 直圓錐ノ曲面積ハ底周ノ半ト斜高トノ乘積ニ等シ.

(ii) 又其全面積ハ底周ノ半ニ斜高ト底半徑トノ和ヲ乘ジタル積ニ等シ.

(iii) 又其ノ體積ハ底面積ト高サトノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ.

〔證明〕 直圓錐ノ底面ニ內接正 n 邊形ヲ畫ケバ, 其各邊ト頂點トヲ過ル平面ニテノ截リ口ハ何レモ全等ナル二等邊三角形ニシテ, 其二面ヅヽノ交線ハ母線ナリ. 依テ此等ノ面ト底面ノ正 n 邊形トニテ形成セル立體ハ內接正角錐ナルコト明カナリ.

サテ今 n ヲ無究ニ多クシタルトキノ極限ニ於テ底周ハ殆ンド底圓周ナリ.



故ニ底半徑ヲ r, 高サ SO ヲ h, 斜高 SA ヲ l, 曲面積ヲ S, 全面積ヲ T, 體積ヲ V トセバ

角錐ノ定理ニ依リテ

(i) $S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot l=\pi rl.$

(ii) $T=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r).$ 〔82頁(5)〕.

(iii) $V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h.$ 〔80頁(3)〕

系. 二ツノ直圓錐ノ曲面積ハ其底半徑ト斜高トノ乘積ニ比例ス. 又其體積ハ其底半徑ノ二乘ト高サトノ乘積ニ比例ス.

〔證明〕 二ツノ直圓錐ニ於テ, 底半徑ヲ R, r; 高サヲ H, h; 斜高ヲ L, l; 曲面積ヲ S, s; 體積ヲ V, v トスレバ

$$\frac{S}{s}=\frac{\pi R.L}{\pi r.l}=\frac{R.L}{r.l} \quad 及ビ \quad \frac{V}{v}=\frac{1}{3}\pi R^2.H\Big/\frac{1}{3}\pi r^2.h=\frac{R^2.H}{r^2.h}.$$

定理 (4) (i) 平截頭直圓錐ノ曲面積ハ兩底周ノ和半ト斜高トノ乘積ニ等シ.

(ii) 又其ノ體積ハ兩底面ト其比例中項トノ和ニ高サヲ乘ジタル積ノ三分ノ一ニ等シ. (陸士)

〔略證〕 前圖ヲ用フ. 高サ Oo' ヲ h', 斜高 Aa ヲ l', 半徑 a' ヲ r', 曲面積ヲ S', 體積ヲ V トセバ (i) $S'=\frac{1}{2}(2\pi r+2\pi r')l=\pi l(r+r')$. 〔82 頁 (5)〕

又高サ Oo' ノ中點 M ヲ過リ底面ニ平行スル平面ニテノ截リ口ノ半徑ヲ MN トセバ $MN=\frac{1}{2}(r+r')$ ナルヲ以テ $S'=\pi l.MN$ トナル. (各醫)

(ii) $V=\frac{1}{3}h'\{\pi r^2+\pi r'^2+\sqrt{\pi r^2.\pi r'^2}\}$

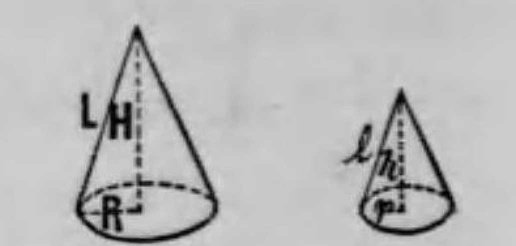
$=\frac{1}{3}h'\pi(r^2+r'^2+rr')$ 〔81 頁ノ定理 (4)〕

定理 (5) (i) 相似直圓錐ノ曲面積ハ其高サノ二乘或ハ斜高ノ二乘或ハ底半徑ノ二乘ニ比例ス. (陸士)

又其全面積モ亦タ然リ.

(ii) 又其ノ體積ハ其高サノ三乘或ハ底半徑ノ三乘ニ比例ス. (東農, 陸士)

〔證明〕 二ツノ相似直圓錐ノ夫々高サヲ H, h; 斜高ヲ L, l; 底半徑ヲ R, r; 曲面積ヲ S, s; 全面積ヲ T, t; 體積ヲ V, v トセヨ. 然レバ兩體ヲ生ゼシ二ツノ直三角形ハ相似ナルヲ以テ,



$$\frac{H}{h}=\frac{R}{r}=\frac{L}{l}=\frac{H+R}{h+r}=\frac{L+R}{l+r},$$

$$\therefore \ \text{(i)} \ \frac{S}{s}=\frac{\pi RL}{\pi rl}=\frac{R}{r}\cdot\frac{L}{l}=\frac{R^2}{r^2} \text{ 或ハ } =\frac{L^2}{l^2} \text{ 或ハ } =\frac{H^2}{h^2}.$$

$$\text{又} \ \frac{T}{t}=\frac{\pi R(L+R)}{\pi r(l+r)}=\frac{R}{r}\cdot\frac{L+R}{l+r}=\frac{R^2}{r^2} \text{ 或ハ } =\frac{L^2}{l^2} \text{ 或ハ } =\frac{H^2}{h^2}.$$

$$\text{(ii)} \ \frac{V}{v}=\frac{\pi R^2H}{\pi r^2h}=\frac{R^2}{r^2}\cdot\frac{H}{h}=\frac{R^3}{r^3} \text{ 或ハ } =\frac{L^3}{l^3} \text{ 或ハ } =\frac{H^3}{h^3}.$$

問題及ビ解答

1. (*a*) 直圓錐ノ斜高ガ底半徑ニ等シケレバ, 其曲面積ハ底面積ニ等シ.

又高サガ底半徑ニ等シケレバ,曲面積ト底面積ノ比ハ $\sqrt{2}:1$ ナリ.

(*b*) 直圓錐ノ全面積ハ底面積ノ二倍ヨリモ大ナリ.

〔證明〕 直圓錐ノ高サヲ SO, 斜高ヲ SA トセヨ. 然ルトキハ

(*a*) 曲面積$=\pi.OA.SA=\pi.OA.OA$ 〔假設〕$=\pi.\overline{OA}^2$ 卽チ 底面積.

又 曲面積 : 底面積$=\pi.OA.SA:\pi.\overline{OA}^2=SA:OA=\sqrt{2}.OA:OA=\sqrt{2}:1$.

(*b*) $\hat{SOA}=\hat{R}$ ナルニヨ $SA>OA$, 故ニ $\pi SA.OA>\pi\overline{OA}^2$.

$\therefore \ \pi SA.OA+\pi\overline{OA}^2>2\pi\overline{OA}^2$ 卽チ題言ノ如シ.

2. 直圓錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リテ生ゼシ直圓錐ハ, 元體ニ相似ナリ.

〔證明〕 此兩體ハ其軸及ビ底半徑ガ旋轉ニ要セシ直三角形ノ相當邊ナルガ故ナリ.

3. 直圓錐ヲ其軸ノ中點ヲ過リ底面ニ平行スル平面ニテ截レバ,

(*a*) 其上部ト下部トノ曲面積ノ比ハ $1:3$ ナリ.

(*b*) 其上部ト下部トノ體積ノ比ハ $1:7$ ナリ. (新醫)

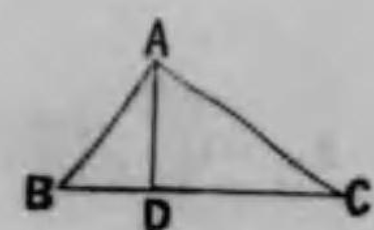
〔證明〕 (*a*) 97 頁ノ 2 題ト全ク同樣ナリ.

4. (*a*) 直三角形 ABC ニ於テ直角頂 A ヨリ斜邊 BC ニ垂線 AD ヲ引ケバ, 邊 AB, AC, BC ヲ夫々軸トシテ元形ヲ一回ヅツ旋轉シタル體ノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi\overline{AC}^2.AB$, $\frac{1}{3}\pi\overline{AB}^2.AC$, $\frac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.BC$ ナリ.

(第三ハ海機)

(*b*) 正三角形ヲ其一邊 a ヲ軸トシテ一回旋轉シタル體ノ體積ハ $\frac{1}{4}\pi a^3$ ナリ.

〔證明〕 (a) 第三 BC ヲ軸シタル體ノ體積ハ BD, DC ヲ軸トシ AD ヲ底半徑トセル二ツノ直圓錐ノ和ナリ,



$\therefore$ 此體積$=\frac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.BD+\frac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.CD=\frac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.BC$.

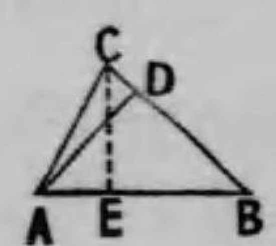
(b) 正三角形 ABC ニ於テ 高サ $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ナルヲ以テ, (a) ノ第三ト同様ニ

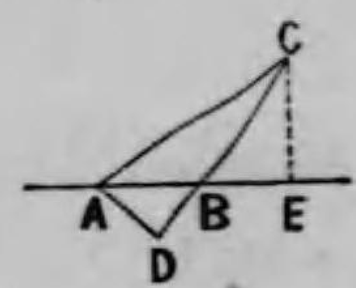
體積$=\frac{1}{3}\pi\overline{AD}^2.\ BC=\frac{1}{3}\pi\times\frac{3}{4}a^2\times a=\frac{1}{4}a\pi^3$.

5. 三角形 ABC ノ邊 AB ヲ軸トシテ元形ヲ一回旋轉シタル體積ハ, 一角頂 A ヨリノ高サ AD ト底邊 BC ノ生ゼシ曲面積トノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ. （陸主）

〔證明〕 CE⊥AB トセバ AE±EB=AB ナルユヱ前題ト同様ニ

AB ヲ軸トシテ元形ヲ旋轉シタル體





$=\frac{1}{3}\pi.\overline{CE}^2.(AE\pm EB)$

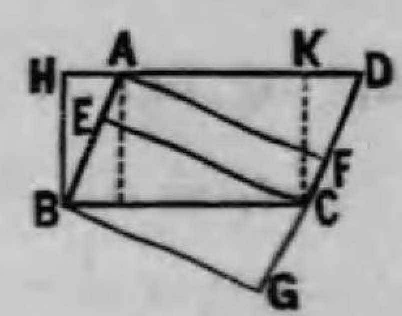
$=\frac{1}{3}\pi.\overline{CE}^2.AB$ 〔$CE.AB=\frac{1}{2}\triangle ABC$

$=\frac{1}{3}\pi.CE.BC.AD$ 　　　$=BC.AD$〕

$=\frac{1}{3}$曲面積 $BC\times AD$.

6. 平行四邊形 ABCD ヲ其二隣邊 AB, BC ヲ夫々軸トシテ一回ヅツ旋轉シテ生ジタル體ノ體積ハ其軸ニ逆比例ス.

〔證明〕 AB, DC ニ垂線 CE, AF ヲ引キ, 之ニ平行線 BG ヲ引キ DC ノ引長トノ交點ヲ G トシ, 又 DA 及ビ其引張ニ垂線 CK, BH ヲ引ケバ明カニ $\triangle ADF\equiv\triangle BCG$ 及ビ $\triangle CKD\equiv\triangle BHA$ ナルヲ以テ,



軸 AB ノ旋轉體 V＝軸 AB, 底半徑 BG ノ直圓壔,

軸BC　　〃　　v＝軸 BC, 底半徑 BH　　〃

而シテ $\triangle ABH\backsim\triangle CBG$ ナルユヱ $\frac{BH}{AB}=\frac{BG}{BC}$

$\therefore\ \frac{V}{v}=\frac{\pi\overline{BG}^2.AB}{\pi\overline{BH}^2.BC}=\frac{BG}{BH}=\frac{BC}{AB}$.

〔別證〕 V＝(軸 AE, 底半徑 CE ノ直圓壔)＋(軸 BE, 底半徑 CE ノ直圓錐)×2

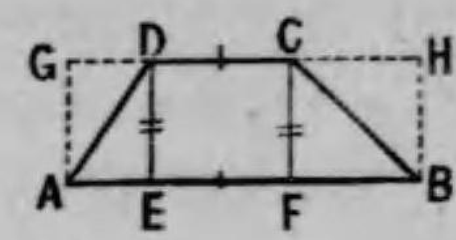
及ビ v＝(軸 AK, 底半徑 CK　〃　)＋(軸 DK, 底半徑 CK　〃　)×2 トスルモ可ナリ.

7. (a) 梯形 ABCD ニ於テ底 AB＞底DC 且ツ DE⊥AB⊥CF トス. 然ルトキハ AB, DC ヲ夫々軸トシテ元形ヲ一回ヅツ旋轉シタル體ノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi\overline{DE}^2(AB+2.CD)$ 及ビ $\frac{1}{3}\pi\overline{DE}^2(2.AB+CD)$ ナリ.

(b) 上ノ圖形 AFCD ヲ AF, CD ヲ夫々軸トシテ一回ヅツ旋轉シタル體ノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi\overline{DE}^2(AF+2.CD)$ 及ビ $\frac{1}{3}\pi\overline{DE}^2(2AF+CD)$ ナリ.

又 CF ヲ軸トシタルトキノ體積ハ $\frac{1}{3}CF.\pi(\overline{DC}^2+\overline{AF}^2+DC.AF)$ ナリ.

〔證明〕 (a) AB ヲ軸トシテ元形ヲ旋轉シタル體



＝(軸 EF, 底半徑 DE ノ直圓壔)

＋(軸 AE, 底半徑 DE ノ直圓錐)

＋(軸 FB, 底半徑 FC ノ直圓錐)

$=\pi\overline{DE}^2.EF+\frac{1}{3}\pi\overline{DE}^2.AE+\frac{1}{3}\pi\overline{FC}^2.FB=\frac{1}{3}\pi\overline{DE}^2(3.EF+AE+EB)$

$=\frac{1}{3}\pi\overline{DE}^2(AB+2.EF)=\frac{1}{3}\pi\overline{DE}^2(AB+2.CD)$.

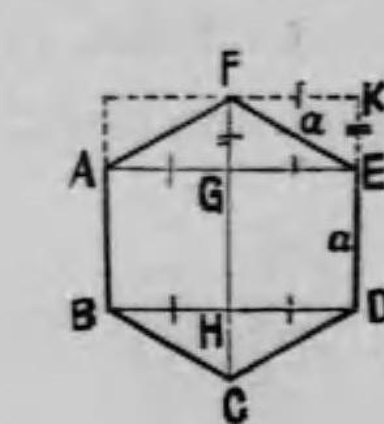
之ト同法ニ依リテ 次問ヲ證明シ得ベシ.

(b) 前問ハ (a) ニ倣フ. 次問ハ平截頭直圓錐ナリ.

8. 正六邊形ヲ其一邊ヲ軸トシテ一回旋轉シタル體ノ體積ハ $\frac{9}{2}\pi a^3$ ナリ, 但シ a ハ一邊ノ長サナリ.

〔證明〕 AE, BD ト FC トノ交點ヲ G, H トシ, 又 F ヨリ AE ニ平行線ヲ引キ DE ノ引長トノ交點ヲ K トス. 然ルトキハ $G\hat{F}E=\frac{1}{2}\hat{F}=\frac{2}{3}\hat{R}$ ナルユヱ $FG=\frac{1}{2}FE=\frac{1}{2}a$.

$GE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ナリ, 從テ



$\triangle FGE\equiv\triangle EKF\equiv\triangle FGA\equiv\triangle CHB\equiv\triangle CHD$,

$KE=FG=\frac{1}{2}a$, $BD=AE=\sqrt{3}.a$ 及ビ

$KD=KE+ED=\frac{1}{2}a+a=\frac{3}{2}a$ ナリ.

$\therefore$ DE ヲ軸トシテ元形ヲ旋轉シタル體

＝軸 KD, 底半徑 BD ノ直圓壔

$=\pi\overline{BD}^2.KD=\pi\times 3a^2\times\frac{3}{2}a=\frac{9}{2}\pi a^3$.

〔別證〕 此體積=(軸ED ノ直圓壔)+(軸 KE ノ平截頭直圓錐 FAEK)×2
　　−(軸 EK ノ直圓錐)×2

$$=\pi\overline{AE}^2.ED+\frac{1}{3}GF.\pi(\overline{EG}^2+\overline{AE}^2+EG.AE)\times 2-\frac{1}{3}\pi\overline{GE}^2.GF\times 2$$

$$=\pi\times 3a^2.a+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a\pi\left(\frac{3}{4}a^2+3a^2+\frac{\sqrt{3}}{2}a.\sqrt{3}.a\right)\times 2-\frac{2}{3}\pi\times\frac{3}{4}a^2\times\frac{1}{2}a$$

$$=3\pi a^3+\frac{1}{3}\pi a^3\left(\frac{3}{4}+3+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{4}\pi a^3=\frac{9}{2}\pi a^3.$$

9. 底半徑ト軸トガ共ニ a ナル直圓壔ト直圓錐トノ曲面積ノ比ハ $\sqrt{2}:1$ ナリ.

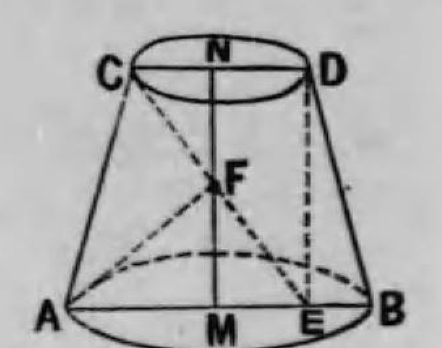
〔證明〕 直圓壔ノ曲面積 $S=2\pi a^2$. 又直圓錐ノ斜高ハ二等邊三角形ノ斜邊ナルユエ $\sqrt{2}.a$ ナリ, 故ニ 直圓錐ノ曲面積 $s=\pi a.\sqrt{2}.a=\sqrt{2}.\pi a^2$.

$\therefore\ S:s=2\pi a^2:\sqrt{2}.\pi a^2=2:\sqrt{2}=\sqrt{2}:1.$

10. 平截頭直圓錐ノ斜高ガ兩底半徑ノ和ニ等シキトキハ,

(*a*) 其高サハ兩底直徑ノ比例中項ナリ.

(*b*) 又其ノ體積ハ全面積ト高サトノ乘積ノ六分ノ一ナリ.



〔證明〕 (*a*) 平截頭直圓錐ノ軸 MN ヲ含ム平面ニテノ截リ口ヲ ABDC トセバ AC=AM+CN=BD (假設).

又 DE⊥AB, CE ト MN トノ交點ヲ F トセバ

ME=CN. 故ニ $CF=FE,\ FM=\frac{1}{2}MN$,

AE=AM+ME=AM+CN=AC, ∴ AF⊥CE,

FM⊥AE, ∴ AM : MF=MF : ME 卽チ 2AM : MN=MN : 2CN.

(*b*) $AM=R,\ CN=r;\ MN=h,\ AC=L$ トスレバ

$$體積=\frac{1}{3}\pi h(R^2+R.r+r^2)=\frac{1}{6}\pi h(2R^2+2R.r+2r^2)=\frac{1}{6}h\pi\left[(R+r)^2+R^2+r^2\right]$$

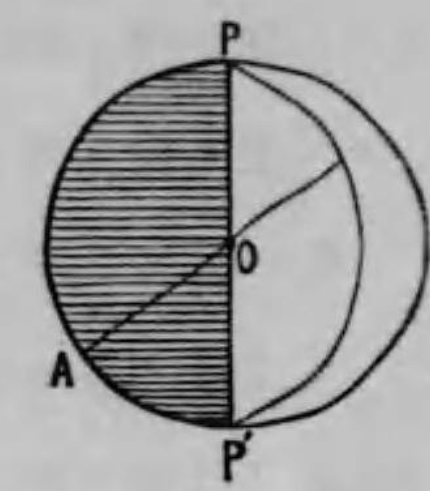
$$=\frac{1}{6}h\times(全面積).$$

第　三　章

球

6. 定義

(1) **球** トハ半圓ヲ其直徑ヲ軸トシテ一回旋轉シテ生ジタル體ヲ云フ. 而シテ其中心ヲ球ノ中心或ハ球心ト云フ.

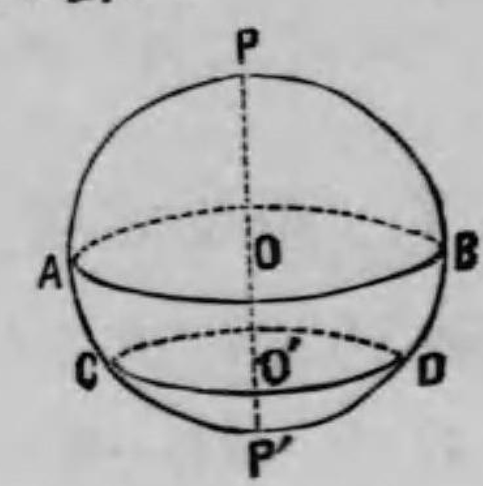


又其半圓周ガ生ゼシ表面ヲ球面ト云フ.

球心ヨリ球面ニ終ル直線ヲ球ノ半徑ト云ヒ, 球心ヲ過リ双方球面ニ終ル直線ヲ球ノ直徑ト云フ; 從テ 直徑=2半徑.

直徑ノ兩端ノ二點ヲ對點ト云フ.

(2) **大圓** トハ球心ヲ過ル平面ニテノ截リ口ヲ云フ.



小圓 トハ其他ノ平面ニテノ截リ口ヲ云フ. 而シテ此等ノ圓ノ平面ニ垂直ナル直徑ヲ其圓ノ軸ト云ヒ, 軸ノ兩端ヲ其圓ノ極ト云フ.

(3) **半球** トハ球ガ大圓ニ分タレタル各部ヲ云フ.

分球 トハ球ガ小圓ニ分タレタル各部ヲ云フ.

而シテ此等ノ圓面ヲ底ト云ヒ, 軸ノ部分ヲ高サト云ヒ, 球面ノ部分ヲ曲面ト云フ.

球帶 トハ球ガ平行二平面ニ截ラレタル其二面間ノ部分ヲ云フ. 其二圓面ヲ底ト云ヒ, 二圓面ノ距離ヲ高サト云ヒ, 球面ノ部分ヲ曲面ト云フ.

扇球 トハ旋轉半圓ノ扇形ニテ生ジタル球ノ部分ヲ云フ.

(4) 球面ト唯一點ノミニ於テ出會フ無限直線ヲ<u>切線</u>ト云ヒ, 其點ヲ<u>切點</u>ト云フ.

又球面ト唯一點ノミニ於テ出會フ平面ヲ<u>切平面</u>ト云ヒ, 其點ヲ<u>切點</u>ト云フ.

(5) 二球ガ唯一點ノミニテ出會フトキハ<u>相切</u>スト云ヒ, 而シテ各々ガ全ク他ノ外ニ在リテ切スルトキハ<u>外切</u>スト云ヒ, 一ツガ全ク他ノ內ニ在リテ切スルトキハ<u>內切</u>スト云フ.

又二球ノ各々其一部分ガ他ノ內ニ在ルトキハ<u>相交ル</u>ト云ヒ, 球面ノ出會フ所ヲ<u>交リ</u>ト云フ.

注意 球ハ圓ニ對應スル事項多シ, 兩者ヲ對照スベシ.

而シテ二ツ以上ノ球ハ其中心或ハ半徑ヲ以テ表ハスコトアリ.

7. 重要定理

定理 (1) 球ノ凡テノ半徑ハ相等シ, 從テ凡テノ直徑ハ相等シ.

系 (1) 球心ハ唯一ツニ限ル.

系 (2) 球心ハ球面ノ對稱中心ナリ.

〔證明〕 何トナレバ球心ハ凡テノ直徑ノ中心ナルガ故ナリ.

定理 (2) 球心ヨリ一點ニ至ル距離ハ, 其點ガ球ノ內, 上, 外ニ在ルニ從テ, 半徑ヨリモ小, 等, 大ナリ. 此逆ハ眞ナリ.

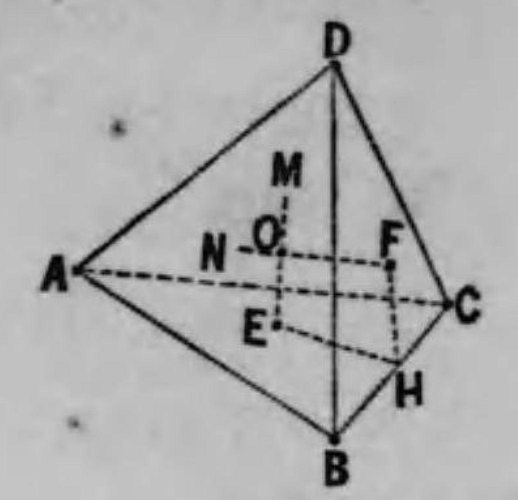
系 一定點ヨリ定距離ニ在ル點ノ軌跡ハ, 其點ヲ球心トシ其距離ヲ半徑トスル一球面ナリ.

注意 此系ハ球面ノ定義トスルコトヲ得, 然ルトキハ其一定點ヲ球心ト云ヒ, 定距離ヲ球半徑ト云ヒ, 球面ニテ圍マレタル體ヲ球ト云フ.

定理 (3) 同一平面上ニ在ラザル四點ヲ過ル球ハ唯一ツニ限ル.

(海經, 熊工)

〔證明〕 此四點ニテ四面體 DABC ヲ作リ, 面ABC 及ビ 面BCD ノ外心ヲ夫々 E 及ビ F トシ, 又 BC ノ中點ヲ H トセヨ. 然レバ BC ヘノ垂線 EH, FH ヲ含ム 面EHF ハ BC ニ垂直ナリ. 從テ此面ハ 面ABC, BCD ノ双方ニ垂直ナリ. 故ニ 面ABC, BCD ヘノ夫々垂線 EM, FN ハ其二面ニ夫々垂直ナル 面EHF ニ含マル. 而シテ EM, FN ハ $E\hat{H}F$ ノ二邊ニ夫々垂線ナルユヱ相交ル.



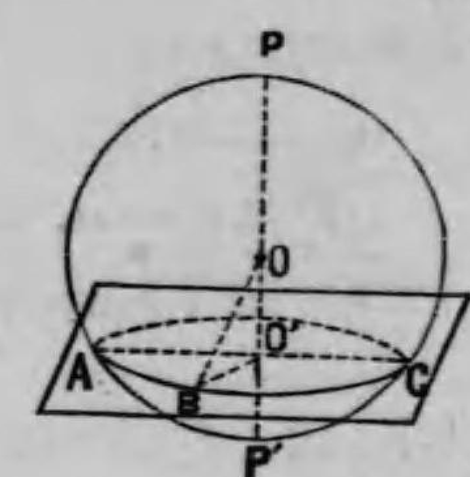
然ルニ其交點 O ハ 面ABC ノ三點 A, B, C ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ト 面BCD ノ三點 B, C, D ヨリ等距離ナル點ノ軌跡トノ交點ナルユヱ四點 A, B, C, D ヨリ等距離ナリ. 故ニ此四點ハ O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル球面上ニ在リ. 次ニ四點 A, B, C, D ヲ過ル球ノ中心ハ A, B, C 及ビ B, C, D ヨリ夫々等距離ナル點ノ軌跡ナル二直線 EM, FN ノ各々ノ上ニ在リ. 然ルニ二直線ノ交點ハ只一ツナルユヱ此球心ハ O ノ他ニ無シ.

系 一點ヨリ球面ヘ引ケル等直線ガ四ツ以上アレバ, 其一點ハ球心ナリ.

定理 (4) 球ノ平面ニテノ截リ口ハ圓ナリ.　(海兵)

〔證明〕 球 O ノ截リ口ヲ ABC トス. 然ルトキ球心 O ヨリ 面ABC ニ垂線 OO′ ヲ引キ, 截リ口上ノ任意ノ三點ヲ A, B, C トセバ, 球ノ半徑ヲ斜邊トシ OO′ ヲ一邊トセル $\triangle OAO' \equiv \triangle OBO' \equiv \triangle OCO'$,

$\therefore\ O'A = O'B = O'C$ ナルヲ以テ截リ口 ABC ハ圓ナリ.



系 (1) 球心ヨリ小圓ノ面ニ引ケル垂線ノ足ハ小圓ノ中心ナリ. 又此逆ハ眞ナリ.

系 (2) 球心ト小圓トノ距離ノ大, 等, 小ニ從テ小圓ハ小, 等, 大ナリ. 又此逆ハ眞ナリ.

系 (3) (*a*) 大圓ハ球面ノ對稱面ナリ.

(*b*) 凡テノ大圓ハ相等シ.

(*c*) 相交ル二ツノ大圓ハ各他ヲ二等分ス.

(*d*) (i) 一ツノ大圓ハ球及ビ球面ヲ二等分ス.

(ii) 直交セル二ツノ大圓ハ球及ビ球面ヲ四等分ス.

(*e*) 球面上對點ナラザル二點ヲ過ル大圓ハ只一ツニ限ル.

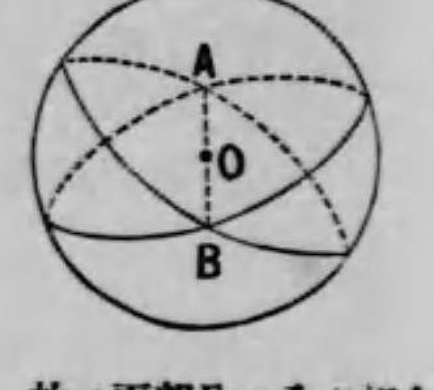
(*f*) 一直線ガ球面ニ交ル點ハ二ツヨリモ多カラズ. （仙工）

〔證明〕 (*a*) 略證 大圓ニ垂直ニシテ双方球面ニ終ル諸直線ガ皆大圓ニテ二等分セラルルコトヲ證セ.

(*b*) 何トナレバ各大圓ノ直徑ハ皆ナ球ノ直徑ニシテ相等シキガ故ナリ.

(*c*) 二ツノ大圓ナル平面ノ交線 AB ハ直線ニシテ A, B ハ球面上ニ在リ. 又此二面ハ球心 O ヲ過ル. 故ニ AB ハ O ヲ過ルヲ以テ AOB ハ各圓ノ直徑ナリ.

故ニ 題言ノ如シ.

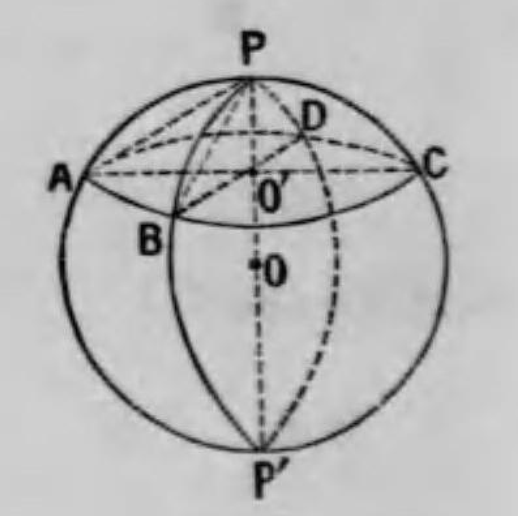


(*d*) (i) 大圓ニ截ラレシ兩部ヲ全ク相重ネ且ツ其曲面ヲ其底ノ同傍ニ在ル樣ニ置ケバ, 其兩曲面ハ全ク相合ス, 故ニ兩部分ハ全ク相合ス. 故ニ題言ノ如シ. (ii) ハ之ニ傚ヘ

(*e*) 其二點ト球心トハ一直線上ニ在ラザルユヱ一平面卽チ一ツノ大圓ヲ決定ス.

(*f*) 何トナレバ, 此直線ハ之ト球心トノ決定スル平面ニテノ截リ口卽チ大圓ノ周トニツヨリ多クノ點ニ於テ出會フコト無キガ故ナリ.

定理 (5) 球ノ截圓ノ極ヨリ其圓周上ノ點ニ至ル距離ハ相等シ.



〔證明〕 其圓ノ中心ヲ O′ トシ, 其極ヲ P, P′ トスレバ POP′ ハ其圓ノ面ニ垂線ナリ. 依テ其圓ノ周上ニ任意ノ點 A, B, ...ヲ取レバ O′A＝O′B＝......, 其夾角 $P\hat{O'}A=P\hat{O'}B=\dots\dots=\hat{R}$ ナルユヱ PA＝PB＝........

同樣ニ P′A＝P′B＝........ヲ證明シ得.

系 (1) 又此等ノ大圓ノ弧ハ相等シ.

〔證明〕 何トナレバ相等シキ大圓ノ等弦ノ對弧ナルガ故ナリ.

系 (2) 同ジ極ヲ有スル圓ノ平面ハ平行ナリ.

〔證明〕 何トナレバ此等ノ平面ハ何レモ兩極ノ連結線卽チ只一ツノ直徑ニ垂直ナルガ故ナリ.

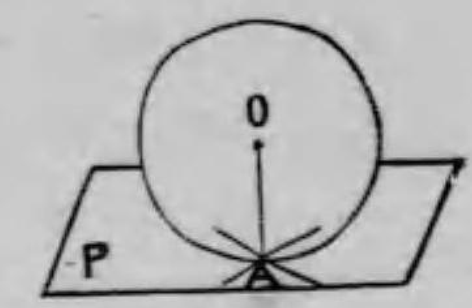
系 (3) 球ノ截圓ノ極ヲ過ル大圓ハ其圓ヲ垂直ニ二等分ス.

〔證明〕 前頁ノ下圖ヲ用フ. 截圓 AC ノ中心ヲ O′ トシ又其極ヲ P, P′ トス. 然ルトキハ POP′⊥面AC ナルユヱ PP′ ヲ含ム大圓ノ面 PBP′⊥面ABC.

次ニ此圓面ト大圓面トノ交線ヲ BDトセバ, BD ハ PP′ ニ交ハルユヱ其交點ハ O′ ナリ. 故ニ BO′D ハ此圓ノ直徑ナルユヱ, 此圓ハ PP′ ヲ含ム大圓ニ二等分セラル.

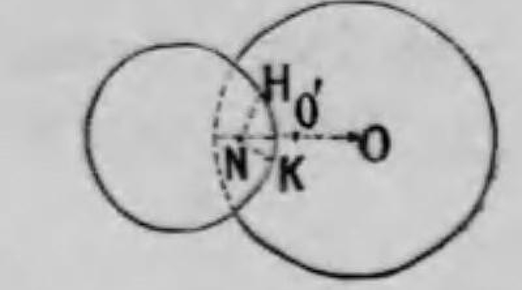
定理 (6) 球ノ半徑ノ一端ニ於テ其半徑ヘノ垂線ハ球ノ切線ナリ. 又此逆ハ眞ナリ.

球ノ半徑ノ一端ニ於テ, 其半徑ヘノ垂直面ハ球ノ切平面ナリ. 又此逆ハ眞ナリ.



〔證明〕 球 O ノ球面上ノ點ヲ A トシ, OA ニ垂直ナル平面ヲ P トセヨ. 然レバ OA⊥P 面ナルユヱ, O ヨリ P 面上 A ノ他ノ點ヘ引ケル直線ハ皆ナ半徑 OA ヨリ大ナリ. 故ニ P 面上 A ノ他ノ點ハ球面外ニ在リ, 卽チ P 面ハ球面ト只一點ノミニテ出會フユヱ切平面ナリ.

定理 (7) 二球ノ交リハ圓周ナリ; 而シテ其圓面ハ中心線ニ垂直ニシテ, 其圓心ハ中心線上ニ在リ. （東商）



〔證明〕 二球 O, O′ ノ交リ上ニ任意ノ二點 H, K ヲ取レバ △OHO′≡△OKO′. 從テ HN⊥OO′ トセバ △O′HN≡△O′KN ナルユヱ HN＝KN 且ツ KN⊥O′N (卽 OO′). 故ニ交リハ中心 N ナル圓ニシテ OO′ ニ垂直ナル面 HNK ナリ.

(8) 二球ノ半徑ヲ夫々 r, r' $(r>r')$ トシ, 中心距ヲ d トセバ

(i) 二球ガ外ニ離ルルトキハ $d>r+r'$ ナリ.

(ii) 二球ガ外切スルトキハ $d=r+r'$ ナリ.

(iii) 二球ガ相交ルトキハ $r+r'>d>r-r'$ ナリ.

(iv) 二球ガ内切スルトキハ $d=r-r'$ ナリ.

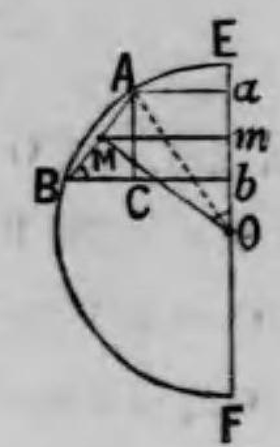
(v) 二球ガ内ニ離ルルトキハ $d<r-r'$ ナリ.

又此各々ノ逆ハ眞ナリ.

定理 (9) 球ノ面積ハ其直徑ト大圓ノ周トノ乘積ニ等シ. (陸士)

或ハ 大圓ノ面積ノ四倍ニ等シ.

〔證明〕 半圓ノ直徑ヲ EF トシ中心ヲ O トス. 半圓周上ノ二點 A, B ヨリ EF ニ垂線 Aa, Bb ヲ引キ, ab ヲト軸シテ平面 $ABba$ ヲ一回旋轉スレバ AB ヲ斜高トスル平截頭直圓錐ヲ生ジ, 其曲面積 $=AB.\pi(Aa+Bb)$.



次ニ AB ノ中點 M ヨリ ab ニ垂線 Mm ヲ引キ, Bb ニ垂線 AC ヲ引ケバ等角ナル直△ABC∽直△MOm ナルユヱ

$AB:AC=MO:Mm$ 卽 $AB:ab=MO:\frac{1}{2}(Aa+Bb)$

故ニ $AB(Aa+Bb)=2MO.ab$.

∴ 平截頭直圓錐 AB ノ曲面積 $=2MO.\pi\times ab$.

サテ, 半圓周 EAF ヲ n 等分シ其分點ヲ順次ニ結ビ直徑 EF ヲ軸トシテ其半圓ヲ旋轉スレバ, 此等ノ弦ノ旋轉體ノ和ハ半圓ニ內接スル正多角形ノ半ノ旋轉體ナリ. 今 n ヲ漸々大ナラシムルニ從ヒ內接正多角形ノ半ノ周ハ漸々半圓周ニ近ヅキ, 其極限ニ於テ殆ンド半圓周トナル. 從テ其際ニ旋轉體ノ表面ハ殆ンド球面トナリ, 又 OM ノ如キ垂線ハ半徑トナリ, 又弦 AB, 等ノ正射影 ab, 等ノ和ハ直徑 EF トナル.

∴ 半徑ヲ r トセバ 球ノ面積 $=2r\pi\times 2r$ 卽チ 大圓ノ周ト直徑トノ乘積

$=4\pi r^2$ 卽チ 大圓ノ面積ノ四倍.

系 (1) 球帶 AB ノ曲面積 $=2r\pi\times ab$ 卽チ 大圓ノ周ト高サトノ乘積.

系 (2) 分球AEノ曲面積 $=2r\pi\times Ea$ 卽チ 大圓ノ周ト高サトノ乘積.

或ハ $=EF\times\pi\times Ea=\pi\times(\overline{弦AE}^2)$.

扇球 OAE ノ曲面積 $=$(分球AEノ曲面積)$+$(直圓錐OAaノ曲面積)

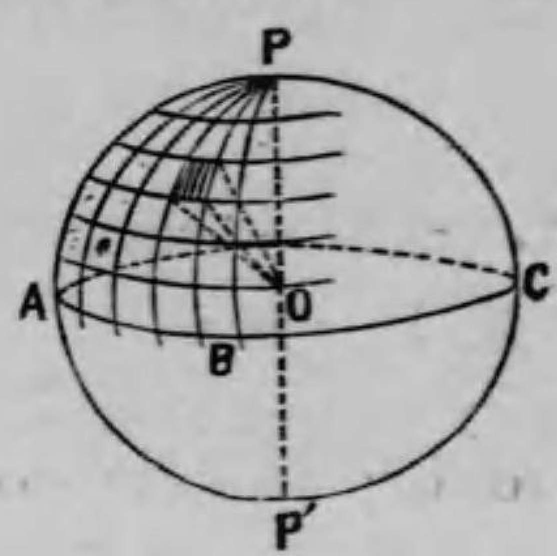
$=2r\pi.Ea+\pi.Aa.r$ 〔$OA=r$〕

$=\pi r(2.Ea+Aa)$.

定理 (10) 球ノ體積ハ其球面積ト半徑トノ乘積ノ 三分ノ一 ナリ.

(陸士)

〔證明〕 先ヅ 球Oノ大圓 ABC ノ極ヲ PP′ トス, 此大圓ニ平行ナル數多ノ小圓ヲ畫キ, 又 PP′ ヲ過ル數多ノ大圓ヲ畫ケバ球面ハ圓弧ヲ邊トセル四角形及ビ三角形ニ分タル. 從テ球ハ此等ノ曲面ヲ底面トシ O ヲ共通頂點トスル數多ノ錐體ノ和ナリ.



今大圓 ABC ニ平行ナル小圓及ビ PP′ ヲ過ル大圓ノ數ヲ無限ニ多クシタルトキノ極限ニ於テハ錐體ノ底ナル曲面ハ殆ンド平面トナリ, 又高サハ球ノ半徑トナル.

故ニ此等ノ底面ヲ $S_1, S_2, S_3, \dots\dots S_n$ トシ, 又球ノ半徑ヲ r トシ, $2r=d$ トスレバ

球ノ體積 $=\frac{1}{3}(S_1+S_2+S_3+\dots\dots+S_n).r$

$=\frac{1}{3}4\pi r^2.r$ 卽チ題言ノ如シ

$=\frac{4}{3}\pi r^3$ 或ハ $=\frac{1}{6}\pi d^3$ 〔d ハ直徑 $2r$〕.

系 (1) 前頁ノ圖ニ於ケル, 球帶ABノ體積 $=\frac{1}{3}.2r\pi.ab.ab=\frac{2}{3}\pi r.\overline{ab}^2$.

注意 或ハ之ヲ $\frac{1}{2}\pi(\overline{Aa}^2+\overline{Bb}^2)ab+\frac{1}{6}\pi\overline{ab}^3$ トスルコトヲ得レドモ其證ハ複雜ナリ.

系 (2) 前頁ノ圖ニ於ケル, 分球AEノ體積 $=\frac{1}{3}.2r\pi.Ea.Ea$.

$=\frac{2}{3}\pi r.\overline{Ea}^2$.

注意 或ハ之ヲ $\frac{1}{2}\pi\overline{Aa}^2.Ea+\frac{1}{6}\pi.\overline{Ea}^3$ トスルコトヲ得レドモ其證ハ複雜ナリ.

系 (3) 前々頁ノ圖ニ於ケル，扇球AEノ體積$=\frac{1}{3}.2r\pi.\mathrm{E}a.r$

$$=\frac{2}{3}\pi r^2.\mathrm{E}a.$$

注意 或ハ此體積＝(分球 AE ノ體積)＋(直圓錐 O$\mathrm{A}a$ ノ體積)

$$=\frac{2}{3}\pi r.\overline{\mathrm{E}a}^2+\frac{1}{3}.\pi\overline{\mathrm{A}a}^2.\ a\mathrm{O}.=\frac{1}{3}\pi(2r.\overline{\mathrm{E}a}^2+\overline{\mathrm{A}a}^2.a\mathrm{O}).$$

餘話 西洋ニテ球ノ體積ノ公式ヲ初メニ證定シタルハあるきめです氏(西暦第一世紀ノ希臘人)ニシテ，又我邦ニテハ關孝和氏(平面幾何 162 頁ヲ見ヨ)ガ $\frac{1}{6}\pi$ ヲ玉積率トシテ算定シタリ.

定理 (11) (1) 二球ノ面積ハ其半徑ノ二乘或ハ直徑ノ二乘ニ比例ス.

(2) 又其ノ體積ハ其半徑ノ三乘或ハ直徑ノ三乘ニ比例ス.

系. 同球或ハ等球ニ於ケル，球帶或ハ分球ノ曲面積ハ高サニ比例ス. 又其ノ體積ハ高サノ二乘ニ比例ス.

問題及ビ解答

1. 球 O ノ球面上ノ一點 P ヲ過ル凡テノ大圓ノ周ハ亦タ P 點ノ對點 P′ ヲ過ル.

〔證明〕 大圓ハ球心ヲ過ルユヱ，P ヲ過ル凡テノ大圓ハ直線 POP′ ヲ含ム. 而シテ PO=OP′ ナルユヱ P′ ハ O ヲ中心トシ OP ヲ半徑トスル圓ノ周上ニ在リ，卽チ P ヲ過ル大圓ノ周ハ亦タ P′ ヲ過ル.

2. 相切スル二ツノ球ハ其切點ニ於テ同一ノ切平面ヲ有ス.

〔證明〕 二ツノ球 O, O′ ノ外切點或ハ內切點ヲ E トセヨ. 然レバ E ハ中心線 OO′ 或ハ其引長上ニ在ルユヱ E ヲ過リ OO′ ニ垂直ナル平面 P ハ亦タ OO′ ニ垂直ナリ. 而シテ球面上ノ一點ニ於テ其點ヲ過ル半徑ニ垂直ナル平面ハ其球ノ切平面ナリ. 故ニ P ハ二ツノ球ニ共通ナル切平面ナリ.

3. 定球 O ニ定點 A ヨリ割線 ABC ヲ引ケバ AB. AC ハ一定ナリ.

〔證明〕 直線 ABC ト球心 O トヲ過ル平面ハ球ト大圓ニ於テ交リ，此圓ノ半徑ハ球ノ半徑ナリ. 故ニ球ノ半徑ヲ r トセバ $\mathrm{AB.AC}=r^2\sim\overline{\mathrm{OA}}^2$ ナルコトハ平面幾何學定理ニ依テ明カナリ. 然ルニ r, OA ハ一定ナルユヱ $r^2\sim\overline{\mathrm{OA}}^2$ ハ一定ナリ，從テ AB.AC ハ一定ナリ.

4. (a) 定直線ニ直角ニ對スル點ノ軌跡ハ，其直線ヲ直徑トスル球面ナリ. (名工)

(b) 定平面上ニ在リテ其外ノ定直線ニ直角ニ對スル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

〔解〕 (a) 此球面上ノ任意ノ點 C ト直徑 AB トヲ含ム平面ニテノ球ノ截リ口ハ大圓ニシテ ACB ハ其半圓ナルユヱ $\widehat{\mathrm{ACB}}=\widehat{\mathrm{R}}$ ナリ. 次ニ此球面ノ內或ハ外ノ點 C ト AB トヲ含ム平面ニテノ球ノ截リ口ノ半圓上ニ於テ $\widehat{\mathrm{ACB}}$ ハ半圓ノ角卽チ直角ヨリモ大或ハ小ナリ. ∴ 直線 AB ニ直角ニ對スル點ノ軌跡ハ AB ヲ直徑トスル球面ナリ.

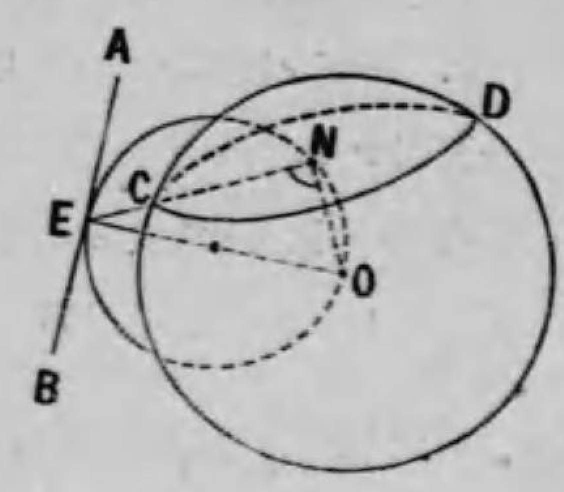
(b) 略解 所要ノ軌跡ハ定直線ヲ直徑トスル球面ト定平面トノ交リナル圓ノ周ナリ.

吟味. 本題ハ定直線 AB ノ中點 O ヨリ定平面ヘノ垂線 $h<\mathrm{AO}$ ナルトキ成立ス.

5. (a) 定直線ヲ含ム平面ニテ定球ヲ截リテ生ズル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ.

(b) 定點ヲ過ル平面ニテ定球ヲ截リテ生ズル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ.

〔解〕 (a) 定直線ヲ AB トシ，定球ノ中心ヲ O トシ，AB ヲ含ム平面ニテノ截リ口圓ノ中心ヲ N トセバ，ON⊥面CD. 又 OE⊥AB トシ，OE ヲ含ミ AB ニ垂直ナル平面ヲ P トセバ P 面ト CD 面トノ交線 NE⊥ON.



∴ N ハ OE ヲ直徑トシタル球面ノ球 O ノ內ニ在ル部分ノ上ニ在リ.

逆ニ 此上ニ任意ノ點 N ヲ取レバ ON⊥EN, P面⊥面CD ナルユヱ ON⊥面CD.

∴ N 點ハ AB ヲ含ム截リ口ノ圓心ナリ.

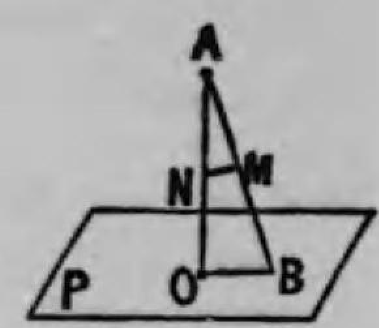
∴ 所要ノ軌跡ハ球心ヨリ定直線ニ至ル垂線ヲ直徑トスル球面ノ元球內ニ在ル部分ナリ.

注意 直線 AB ガ球 O ト交レバ OE ハ球 O ノ全ク内ニ在ルユヱ，此場合ニハ OE ヲ直徑トスル球面ノ全面ガ所要ノ軌跡ナリ.

(b) 略解 點 E ト球心 O トヲ結ブ直線ヲ直徑トスル球面或ハ其部分ナリ.

6. 平面 P 外ノ定點 A ヨリ其面ニ引ケル直線 AB 上ニ點 M ヲ取リ AB.AM ガ一定ナルベキ M 點ノ軌跡ヲ求メヨ.

〔解〕 面 P ニ垂線 AO ヲ下シ，其上ニ點 N ヲ取リテ AO.AN=AB.AM ナラシムレバ O, N, M, B ハ一圓ノ周上ニ在リテ $\widehat{AMN}=\widehat{O}=\widehat{R}$ ナルヲ以テ點 M ハ AN ヲ直徑トスル一ツノ球面上ニ在リ.



逆ニ 此球面上ニ點 M ヲ取リ AM ノ引長ト面 P トノ交點ヲ B トセバ $\widehat{AMN}=\widehat{R}$ ナルユヱ AM ノ引長ト面 P トノ交點ヲ B トセバ AB.AM=AO.AN 卽チ一定ナリ.

∴ 所要ノ軌跡ハ AN ヲ直徑トスル一ツノ球面ナリ.

7. 二點 A, B ヨリ夫々 a, b ナル距離ニ在ル點ノ軌跡如何.

〔解〕 點 A ヨリ a ナル距離ニ在ル點ノ軌跡ハ A ヲ中心トシ a ヲ半徑トスル球面ニシテ，點 B ヨリ b ナル距離ニ在ル點ノ軌跡ハ B ヲ中心トシ b ヲ半徑トスル球面ナリ. 故ニ 二點 A, B ヨリ夫々 a, b ナル距離ニ在ル點ハ此二ツノ球面ノ交リナル圓周上ニ在リ.

逆ニ此圓周上ノ點ハ A, B ヨリ夫々 a, b ナル距離ニ在ルコト明カナリ.

∴ 所要ノ軌跡ハ夫々 A, B ヲ中心トシ a, b ヲ半徑トスル二ツノ球面ノ交リナル一圓周ナリ.

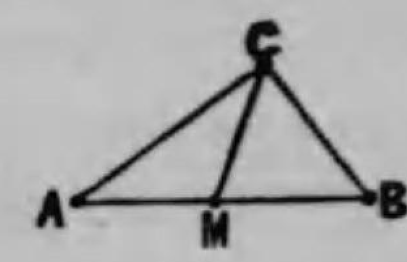
吟味. 本題ガ成立スル爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ $a+b>AB>a-b$ ナルコトナリ. 尙ホ 126 頁 (8) ヲ見ルベシ.

8. 二定點 A, B ヨリノ距離ノ比ガ定比 $m:n$ ニ等シキ點 P ノ軌跡ハ，直線 AB ヲ $m:n$ ニ內分及ビ外分スル點 P, Q ノ連結線 PQ ヲ直徑トスル一球面ナリ.

〔略解〕 平面幾何學 16 頁 (3) ヲ參考スベシ.

9. 二定點 A, B ヨリ一點 C ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナルトキ C 點ノ軌跡ヲ求メヨ.

〔解〕 AB ノ中點ヲ M トセバ平面幾何學定理ニ依テ $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=2\overline{CM}^2+2\overline{AM}^2$ ナリ. 然ルニ假設ニ依テ $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2$ ハ一定ニシテ $\overline{AM}^2$ モ一定ナルヲ以テ，CM モ亦タ一定ナリ. ∴ C 點ノ軌跡ハ M ヲ中心トシ一定セル距離 MC ヲ半徑トスル一ツノ球面ナリ.



10. (a) 定點 P ヨリ定球 O ニ切線 PA ヲ引ケバ，切點 A 及ビ切線 PA ノ軌跡ハ圓周及ビ直圓錐ノ曲面ナリ.

(b) 三面角ニ內切スル球ノ中心ノ軌跡ハ，各二面角ノ二等分面ノ交線ナリ.

11. 地球ノ半徑ヲ r トシ，地上ヨリノ高サヲ h トスレバ

(a) 其所ニ於ケル視界半徑ハ $\sqrt{h(2r+h)}$ ナリ.

(b) 又其所ニ於ケル視界面ハ $\dfrac{2\pi r^2h}{r+h}$ ナリ.

定義 地球ヲ球 O ト見做ストキ一點 P ヨリノ切線 PA ヲ視界半徑ト云ヒ；又切點 A ノ軌跡ナル圓 AB ヲ視界ト云ヒ，視界ノ P 點ノ側ノ分球ノ曲面ヲ視界面ト云フ.

〔解〕 平面 APO ノ大圓ト PO トノ交點ヲ C, D トセバ

(a) $\overline{PA}^2=\overline{OP}^2-\overline{OA}^2$ 〔$OA\perp PA$〕

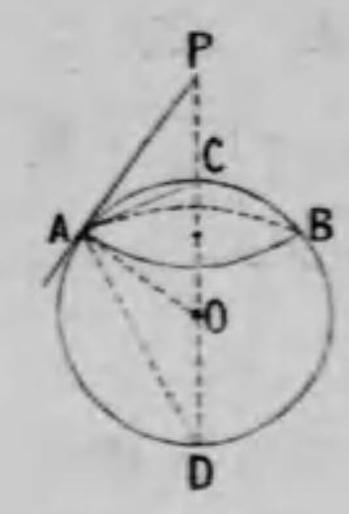
$=(r+h)^2-r^2=h(2r+h)$.

(b) $\triangle PAC \backsim \triangle PDA$ ナルユヱ $\dfrac{AC}{PA}=\dfrac{AD}{DP}$,

從テ $\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{PA}^2}=\dfrac{\overline{AD}^2}{\overline{DP}^2}=\dfrac{\overline{CD}^2-\overline{AC}^2}{\overline{DP}^2}=\dfrac{\overline{CD}^2}{\overline{PA}^2+\overline{DP}^2}$

$\therefore\ \overline{AC}^2=\dfrac{\overline{PA}^2\cdot\overline{CD}^2}{\overline{PA}^2+\overline{DP}^2}=\dfrac{PC.PD.\overline{CD}^2}{PC.PD+\overline{DP}^2}$

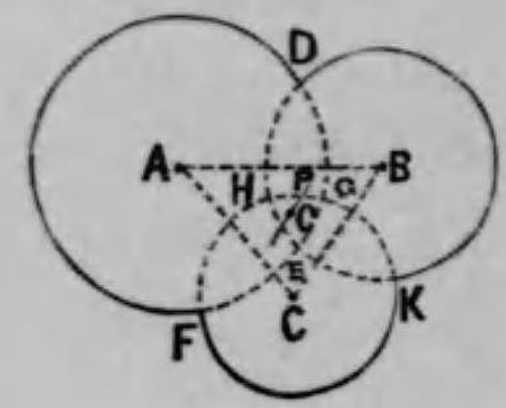
$=\dfrac{PC.\overline{CD}^2}{PC+DP}=\dfrac{h(2r)^2}{h+2r+h}=\dfrac{2r^2h}{r+h}$,



∴ 分球 CAB ノ曲面積卽チ視界面 $=\pi.\overline{AC}^2=\dfrac{2\pi r^2h}{r+h}$.

12. 互ニ相交ル三球ノ二ツ宛ノ交リナル三圓ノ平面ハ,三球心ヲ含ム一平面ニ垂直ナル一直線ニ於テ相交ル.

〔證明〕 三ツノ球ノ中心ヲ夫々 A, B, C トシ, 二ツ宛ノ交リナル圓ヲ夫々 DE, FG, HK トス. 然ルトキハ中心線 AB⊥圓面DE ナルニヨ, AB ヲ含ム面ABC⊥圓面DE.



同樣ニ 面ABC ハ圓面FG, HK ノ各々ニ垂直ナリ.

故ニ 面ABC ニ垂直ナル二圓面 DE, FG ノ交線 (OP トス) ハ其面ニ垂直ナリ. 而シテ圓面HK モ亦タ面ABC ニ垂直ニシテ且ツ二圓面DE, FG ノ各々ト交ルニヨ其交線 OP ヲ過ル. 故ニ題言ノ如シ.

13. (a) 一定點 P ヨリ二定球 A, B ヘ引ケル二切線 PE, PF ガ相等シカルベキ P 點ノ軌跡ハ, AB ヲ其二分ノ差ガ兩半徑ノ平方ノ差ニ等シキ樣ニ内分スル點 C ヲ過リ AB ニ垂直ナル一平面ナリ.

定義 此一平面ヲ二球ノ根軸ト云ヒ, 又其二球ヲ同軸球ト云フ.

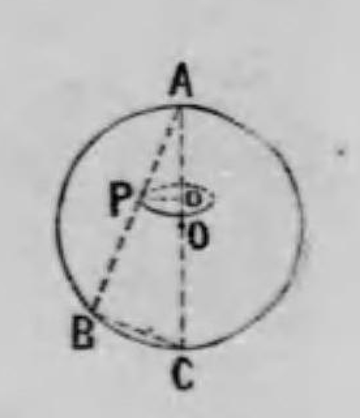
(b) 三球ノ各二球ノ根軸ハ一直線ニ於テ相交ル.

〔解〕 ハ平面幾何學 215 頁ノ 8 題ニ準ズ.

注意 前題ハ本題ノ三球ガ相交ル一場合ニシテ, 其 OP ハ (b) ノ一直線ナリ.

14. 定球 O ノ球面上ノ定點 A ヲ過ル直線ト球面トノ交點ヲ B トシ, AB 上ニ點 P ヲ取リ AP.AB ヲ一定ナラシムベキ P 點ノ軌跡ヲ求メヨ. （東工）

〔解〕 直徑 AC 上ニ D 點ヲ取リ AP.AB=AD.AC ナラシムレバ PBCD ハ一圓周上ニ在リ, 從テ $\hat{A}\hat{D}P=\hat{B}=\hat{R}$ ナルニヨ P 點ハ直徑 AC ニ垂直ナル圓ノ周上ニ在リ.



逆ニ 此圓ノ周上ニ點 P ヲ取リ AP ノ引長ト球面トノ交點ヲ B トセバ, $\hat{B}=\hat{R}=A\hat{D}P$ ナルニヨ PBCD ハ一圓周上ニ在リ, 故ニ AP.AB=AD.AC 卽チ一定ナリ

15. 球面上ノ二定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

〔略解〕 二定點 A, B ヲ夫々中心トシ弧 AB ノ半ヨリモ大ナル半徑ヲ以テ, 二小圓ヲ畫キ, 其交點ヲ C, D トセバ C, D ヲ過ル大圓ノ周ハ所要ノ軌跡ナリ.

16. 一稜 a ナル正四面體ニ内接及ビ外接スル球ノ半徑ヲ夫々 r 及ビ R トセバ $r=\frac{\sqrt{6}}{4}a$ 及ビ $R=\frac{\sqrt{6}}{12}a$ ナリ.

〔證明〕 正四面體ノ各角頂ヨリ其對面ヘノ垂線ハ一點ニ於テ相交リ且ツ互ニ 4:1 ニ分タル; 故ニ其垂線ヲ h トセバ $3h^2=2a^2$ 且ツ垂線ノ交點ハ内切及ビ外接スル球ノ中心ニ當リ是ヨリ各面ヘノ距離ハ内切球ノ半徑ニシテ頂點マデノ距離ハ外接球ノ半徑ナリ.

$\therefore\ r=\frac{3}{4}h=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a$ 及ビ $R=\frac{1}{4}h=\frac{1}{4}\times\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a.$

17. (a) 球ノ體積ト其外切立方體ノ體積トノ比ハ $\pi:6$ ナリ.

(b) 球ノ體積ト其内接立方體ノ體積トノ比ハ $\sqrt{3}.\pi:2$ ナリ.

〔略證〕 (a) 外切立方體ノ一稜 a ハ其球ノ直徑 $2r$ ニ等シ.

(b) 内接立方體ノ一對角線ハ $\sqrt{3}.a$〔a ハ立方體ノ一邊トス〕ニシテ球ノ直徑 $2r$ ニ等シ.

18. 同ジ球ニ外切セル多面體ノ體積ハ其外面積ニ比例ス.

〔證明〕 球ニ外切セル多面體ハ其各面ヲ底面トシ球心ヲ共通頂點トスル數多ノ角錐ニ分チ得ベク, 而シテ此等ノ高サハ何レモ球ノ半徑ナルニヨ相等シ.

故ニ 其一ツノ多面體ノ體積=(外面積)$\times\frac{1}{3}r$ ナリ. 故ニ題言ノ如シ.

19. (a) 球ノ面積ハ其外切直圓壔ノ全面積ノ三分ノ二ナリ.

(b) 半球ト直圓錐トガ同底及ビ同軸ヲ有スルトキハ,半球ハ直圓錐ニ二等分セラル.

〔證明〕 (a) 外切直圓壔ノ高サ及ビ底半徑ハ球ノ直徑及ビ半徑ニ等シキコト明カナリ, 故ニ球ノ半徑ヲ r トセバ 直圓壔ノ全面積$=2\pi r.2r+2.\pi r^2=6\pi r^2$.

$\therefore$ 球ノ面積$=4\pi r^2=\frac{2}{3}\times6\pi r^2=\frac{2}{3}\times$(直圓壔ノ全面積).

餘話 此 (a) モあるきめです氏ノ發見ニ係ルト云フ〔128 頁ヲ見ヨ〕

(b) 球ノ半徑ヲrトセバ　半球ノ體積$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi r^3$ ニシテ,

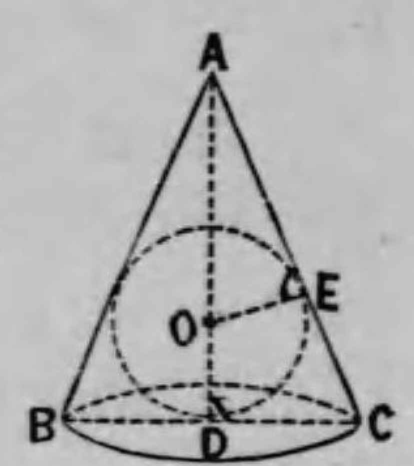
之ニ 内接スル直圓錐ノ體積$=\frac{1}{3}\pi r^2.r=\frac{1}{3}\pi r^3$ ナリ.

故ニ 直圓錐ノ體積ハ半球ノ半ナリ, 卽チ半球ハ内接直圓錐ニ二等分セラル.

20. 球ノ直徑ニ等シキ高サ及ビ其底面ニ等シキ底面ヲ有スル直圓錐及ビ直圓壔アリ, 其直圓錐ト球ト直圓壔トノ體積ノ比ハ 1:2:3 ナリ.

〔略證〕 直圓錐:球:(直圓壔)$=\frac{1}{3}\pi r^2.2r:\frac{4}{3}\pi r^3:\pi r^2.2r=1:2:3.$

21. 球ニ外切スル直圓錐ノ高サガ球ノ直徑ノ二倍ナルトキハ, 直圓錐ノ全面積ト體積トハ夫々球ノ面積ト體積トノ二倍ナリ. (陸士)



〔證明〕 球 O ノ外切直圓錐ヲ ABC トシ, 頂點 A ヨリ底面ニ垂線 AD ヲ下セバ AD ハ球心 O ヲ過リ D ハ切點ナルコト明カナリ. 又直圓錐ノ母線 AC ガ球面ニ切スル點ヲ E トセバ等角ナル 直△ADC∽直△AEO ナルユヱ AC : CD = AO : OE = 3.OE : OE 〔假設〕= 3 : 1 ナリ.

故ニ AC=3.CD.　而シテ $\overline{AC}^2-\overline{CD}^2=\overline{AD}^2$ 卽チ $8.\overline{CD}^2=16.\overline{OD}^2$ 卽チ $\overline{CD}^2=2.\overline{OD}^2$ ナリ.

故ニ 直圓錐ノ全面積$=\pi.CD.AC+\pi.\overline{CD}^2=\pi.CD\times 3.CD+\pi.\overline{CD}^2=4\pi.\overline{CD}^2=8\pi.\overline{OD}^2$,

又 球ノ面積$=4\pi.\overline{OD}^2$ ナリ,　∴ 此直圓錐ノ全面積ハ球ノ面積ノ二倍ナリ.

次ニ 直圓錐ノ體積$=\frac{1}{3}\pi.\overline{CD}^2.AD=\frac{1}{3}\pi(2.\overline{OD}^2)(4.OD)=\frac{8}{3}\pi\overline{OD}^3$,

又 球ノ體積$=\frac{4}{3}\pi\overline{OD}^3$ ナリ.　∴ 此直圓錐ノ體積ハ球ノ體積ノ二倍ナリ.

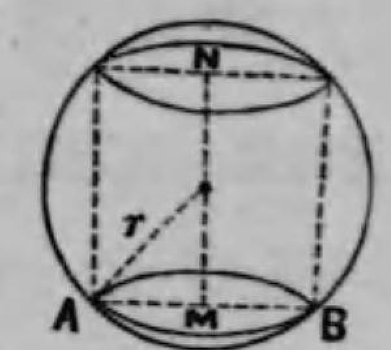
22. (a) (i) 球ニ内接セル等邊直圓壔ト等邊直圓錐トアリ. 其ノ直圓壔ノ全面積ハ球ノ面積ト直圓錐ノ全面積トノ比例中項ナリ.

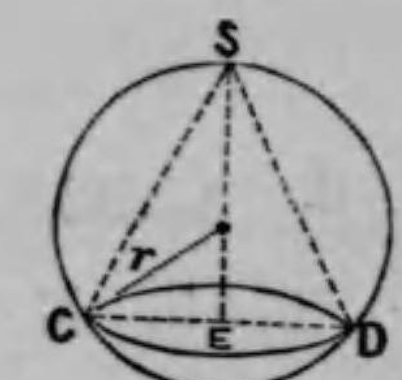
(ii) 又其ノ體積ニ就テモ亦タ然リ.

定義 等邊直圓壔トハ底ノ直徑ガ高サニ等シキモノ, 又等邊直圓錐トハ底ノ直徑ガ斜高ニ等シキモノヲ云フ.

(b) 上ノ内接ヲ外切トスルモ亦タ同定理アリ.

〔證明〕 (a) 球ノ半徑ヲ r トス. 今球ヲ軸ト底ノ直徑トヲ含ム平面ニテ截ルトキハ, 直圓壔ノ底ノ直徑 AB ハ大圓ノ内接正方形ノ一邊 $\sqrt{2}.r$ ニシテ 直圓錐ノ底ノ直徑 CD ハ大圓ノ内接正三角形ノ一邊ハ $\sqrt{3}.r$ ニシテ且ツ其高サ $SE=\frac{\sqrt{3}}{2}CD=\frac{3}{2}r$ ナルコトハ平面幾何學ニ依テ明カナリ. 故ニ





(i) 直圓壔, 球, 直圓錐ノ各面積ヲ夫々 S, S′, S″ トスレバ

$$S=2\pi.AM.MN+\pi\overline{AM}^2\times 2=\pi\overline{AB}^2+\pi.\frac{1}{2}\overline{AB}^2=\frac{3}{2}\pi\overline{AB}^2=\frac{3}{2}\pi\times 2r^2=3\pi r^2.$$

又 $S'=4\pi r^2.$

$$S''=\pi.CE.SC+\pi\overline{CE}^2=\frac{1}{2}\pi\overline{CD}^2+\frac{1}{4}\pi\overline{CD}^2=\frac{3}{4}\pi\overline{CD}^2=\frac{9}{4}\pi r^2.$$

∴ $S^2=9\pi^2r^4=(4\pi r^2)\left(\frac{9}{4}\pi r^2\right)=S'.S''$ 卽チ題言ノ如シ.

(ii) 直圓壔, 球, 直圓錐ノ各體積ヲ夫々 V, V′, V″ トスレバ

$V=\pi\overline{AM}^2.MN=\frac{1}{4}\pi\overline{AB}^3=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi r^3.$　$V'=\frac{4}{3}\pi r^3$ 及ビ

$$V''=\frac{1}{3}\pi\overline{CE}^2.SE=\frac{1}{12}\pi\overline{CD}^2.SE=\frac{1}{12}\pi.3r^2.\frac{3}{2}r=\frac{3}{8}\pi r^3.$$

∴ $V^2=\frac{1}{2}\pi^2r^6=\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\left(\frac{3}{8}\pi r^3\right)=V'.V''$ 卽チ題言ノ如シ.

(b) 球ノ半徑ヲ r トセバ, 其外切等邊直圓壔ノ一邊ハ 2r ニシテ,

又 其外切等邊直圓錐ノ一邊ハ其内切等邊直圓錐ノ一邊ノ 2 倍ナリ. 以下ハ (a) ニ倣フ.

第四章
作圖題

8. 第三編卽チ旋轉體ノ作圖題モ亦タ特ニ基本トスベキモノ無シ．依テ第一編ノ第八章〔47頁乃至51頁〕ヲ參考スベシ．

問題及ビ解答

1. (a) 直圓壔ヲ底ニ平行スル平面ニテ截リ，其二部分ノ曲面積或ハ體積ノ比ヲ $m:n$ ナラシメヨ．

(b) 直圓壔ヲ底ニ平行スル平面ニテ截リ，其二部分ノ曲面積ノ比例中項ヲシテ底面ト等積ナラシメヨ．

〔略解〕 (b) 軸 AB ヲ C ニ於テ $AC.CB=\left(\frac{1}{2}r\right)^2$ 〔r ハ底半徑〕ナラシメ，C ヲ過リ底面ニ平行スル平面ニテ截レバ可ナリ．若シ $r>AB$ ナルトキハ解無シ．∵ 等底ナルユヱ高サニ比例ス．

2. (a) 直圓壔或ハ直圓錐ニ其曲面ノ上或ハ外ノ定點ヲ含ミテ切平面ヲ作レ．

(b) 直圓壔或ハ直圓錐ニ其ノ外ニ在リテ軸ニ平行スル直線ヲ含ミテ切平面ヲ作レ．

〔略解〕 (a) 定點 E ヲ過リ底面ニ平行スル平面ニテ截リ，E ヲ過ル母線 EA ヲ引キ，又 E ヨリ截リ口ナル圓ニ切線 EB ヲ引ケバ 面BEA ハ所要ノ切平面ナリ．

但シ E 點ガ外ニ在ルトキハ，E ヨリ截リ口圓ニ二切線ヲ引キ得ルユヱ二ツノ解アリ．

(b) 定直線 FE ト底面ノ引長トノ交點 E ヨリ底圓ニ切線 EA, EA′ ヲ引ケバ，面FEA, FEA′ ハ所要ノモノナリ．

3. 直圓壔ヲ其底周上ノ定點 C ヲ含ミ軸ニ平行ナル平面ニテ截リ其截リ口ヲ定正方形 a^2 ト等積ナラシメヨ．

〔解〕 軸AB : $a=a:x$ ナルベキ x ヲ求メ，底圓ノ弦 CD ヲ x ニ等シク取リ，CD ヲ含ミ軸 AB ニ平行スル平面ニテ截レバ可ナリ． 何トナレバ截リ口 CDFE ハ矩形ニシテ CE=AB, CD=x ナルユヱ 矩形CDFE=CE.CD=AB.$x=a^2$ ナルガ故ナリ．

4. 直圓錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ，

(a) 其截リ口ノ面積：底面積＝$m:n$ ナラシメヨ．

(b) 上部ノ曲面積：下部ノ曲面積＝$m:n$ ナラシメヨ．

(c) 上部ノ直圓錐：元直圓錐＝$m:n$ ナラシメヨ．

〔證明〕 (a), (b) ハ 102 頁ノ 14 題ト同樣ナリ．(c) ハ 103 頁ノ 15 題ト同樣ナリ．
注意 底面ニ平行ナル截リ口ヲ定面積ニ等シカラシメヨ，ト云フ題ハ (a) ニ含マル．

5. 高サ 12 吋ノ直圓錐ヲ其底面ニ平行スル平面ニテ截リ其體積ヲ二等分セヨ． 〔熊工〕

〔解析〕 上下兩部ノ體積及ビ高サヲ夫々 V_1, V_2 及ビ h_1, h_2 トス．先ヅ解キ得タリトセバ $V_1=V_2$．而シテ上部ハ元體ニ相似ナルユヱ，其體積ハ高サノ三乘ニ比例ス，卽チ $V_1:(V_1+V_2)=h_1^3:(h_1+h_2)^3$ 卽チ $V_1:2V_1=h_1^3:12^3$ ナルユヱ $h_1^3=\frac{12^3}{2}$, ∴ $h_1=\frac{12}{\sqrt[3]{2}}=\frac{12\sqrt[3]{2^2}}{2}=6\sqrt[3]{4}$. 依テ

〔作圖〕 高サヲ頂點ヨリ距離 $6\sqrt[3]{4}$ ニ取リ其點ヲ過リ底ニ平行スル平面ニテ截レ．

〔證明〕 解析ト同理ニ依テ $V_1:(V_1+V_2)=(6\sqrt[3]{4})^3:12^3=864:1728$,
∴ $V_1:V_2=864:1728-864=864:864$, ∴ $V_1=V_2$.

6. 直圓錐ヲ其頂點 S ト底周上ノ定點 A トヲ含ム平面ニテ截リ，其截リ口 SAB ノ高サヲ定長 l ニ等シカラシメヨ．

〔解〕 底面ニ垂線 SO 及ビ l ニ等シキ斜線 SC ノ軌跡ナル OC 圓ヲ畫キ，之ニ切線 AD ヲ引ケバ SAD ニテノ截リ口ハ所要ノモノナリ．證明ハ三垂線定理ニ依ルベシ．

7. 球或ハ分球或ハ扇球ノ中心ヲ求メヨ．

〔證明〕 球面或ハ球面部ヲ平行セザル二平面ニテ截リ，其截リ口ナル小圓 AB, CD ノ中心 E, F ヲ求メ，次ニ E, F ヨリ夫々其圓面ニ立ツル垂線ハ何レモ球或ハ球面ノ中心ヲ過ルユヱ其二垂線ノ交點 O ハ所要ノ中心ナルコト明ナリ．

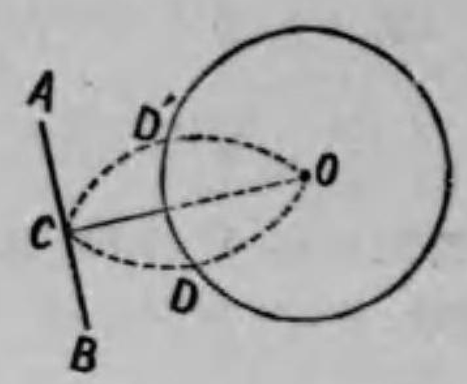
8. 定球ニ次ノ與條件ニ適スル切平面ヲ作レ,

(a) 定平面 P ニ平行スル.　(b) 其球外ノ定直線 AB ヲ含ム.

(b) 其球外ノ定直線 AB ト直交スル.

〔解〕(a) 先ヅ球心 O ヲ求メ, O ヲ過リ P面ニ垂直ナル直徑 AB ヲ引キ, AB ノ兩端ヲ過リ之ニ垂直ナル二平面 Q, R ヲ作レバ, 此二平面ハ所要ノモノナリ.

(b) 先ヅ球心 O ヲ求メ, AB ニ垂線 OC ヲ引キ, OC ヲ直徑トシ AB ニ垂直ナル圓ヲ作リ球面トノ交點ヲ D, D′ トセバ二平面 ABD, ABD′ ハ所要ノ切平面ナリ.　何トナレバ AB⊥圓面CDO ナルユヱ AB⊥OD. 又 CD⊥OD ナルユヱ OD ハ AB, CD ノ決定スル平面ニ垂線ナルガ故ナリ.

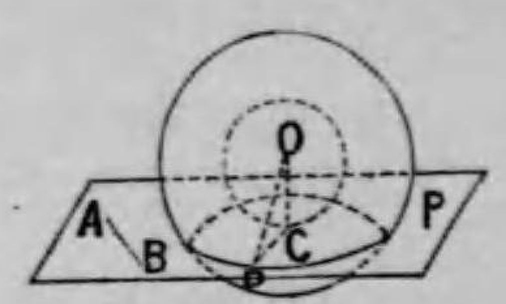


面ABD′ ニ付テモ同樣ニ證明シ得ベシ.

(c) 先ヅ球心 O ヲ求メ, O ヨリ定直線 AB ニ平行スル直徑 CD ヲ引キ, 其兩端ヲ過リ之ニ垂直ナル二平面ヲ作レバ, 之レ所要ノ切平面ナリ.

9. 定直線 AB ヲ含ム平面ニテ定球 (半徑 r) ヲ截リ, 其截口ノ半徑ヲ定長 l ニ等シカラシメヨ.　（名工）

〔解〕先ヅ球心 O ヲ求メテ O ヲ球心トシ $\sqrt{r^2-l^2}$ ヲ半徑トスル同心ノ小球ヲ作リ, AB ヲ含ミ此小球ニ切スル平面 P ヲ作レバ之レ所要ノモノナリ.



何トナレバ P面ニ垂線 OC ヲ引ケバ C ハ切點ニシテ且ツ截リ口ナル圓心ナリ, 依テ截リ口ノ周上ニ任意ノ點 D ヲ取レバ $\overline{CD}^2=\overline{OD}^2-\overline{OC}^2=r^2-\sqrt{r^2-l^2}^2=l^2$, 從テ CD$=l$ ナルガ故ナリ.

而シテ AB ヲ含ミ小球ニ切スル平面ハ球心 O ノ C ノ反對ノ側ニアルモ之ト同樣ナリ.

10. 球面上ノ二定點ヲ過ル大圓ヲ畫ケ.

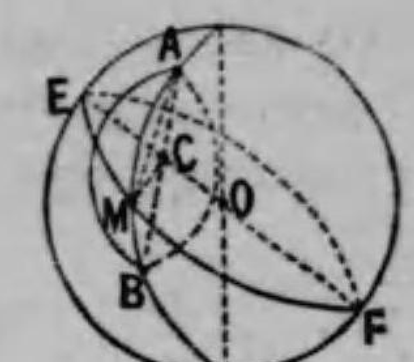
〔解〕先ヅ球心 O ヲ求メ, 球面上ノ二定點 A, B ト O トヲ含ム平面ヲ作レバ, 其平面ニテノ球ノ截リ口ハ所要ノ大圓ナルコト明カナリ.

11. 球ノ大圓ノ定弧ヲ二等分セヨ.

〔解〕弧 AB ノ A, B ヲ夫々中心トシ其半分ヨリモ大ナル半徑ヲ以テ二圓弧ヲ畫キ其二交點ヲ過ル大圓弧ヲ畫キ定弧 AB トノ交點ヲ M トセバ, M ハ所要ノ點ナリ.

〔直定線ヲ二等分スルニ準ズ〕

〔別解〕大圓ノ定弧 AB ノ弦 AB ヲ直徑トシテ小圓ヲ畫キ, 其中心 C ヲ過ル球ノ直徑 EF ヲ含ミ弦 AB ニ垂直ナル大圓ヲ畫キ其周ト定弧 AB トノ交點ヲ M トセバ之レ所要ノ點ナリ.　何トナレバ AC⊥圓面EF ナルユヱ AC⊥CM, 故ニ △AMC≡△BMC, 從テ同ジ大圓ニ於テ弦AM=MB ナルユヱ弧 AM=MB ナレバナリ.



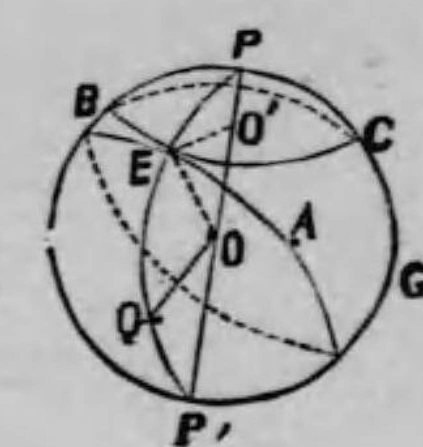
12. 球面上ノ一直線上ニ在ラザル三定點ヲ過リテ小圓ヲ畫ケ.

〔解〕此三定點ヲ A, B, C トス.　A, B ヨリ等距離ナル點ノ軌跡及ビ B, C ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メ〔133頁 15題〕, 其交點ヲ P トセバ P ヲ中心トシ PA ヲ半徑トスル圓ハ所要ノモノナリ.

何トナレバ P ハ A, B, C ヨリ等距離ナルユヱ此圓ハ亦タ B, C ヲ過ルガ故ナリ.

13. 球面上ノ一定點ヲ過リ其ノ面上ノ一定小圓ニ切スル大圓ヲ畫ケ.

〔解〕球面上ノ定點ヲ A トシ, 小圓ヲ BC トス.　先ヅ球心 O ヲ求メ, 小圓 BC ニ垂線ナル球ノ直徑 PP′ ヲ引キ, 大圓ノ四分圓弧 PCG ヲ取レ.　次ニ A ヲ中心トシ PG ヲ半徑トスル圓弧ヲ畫キ, 又 P′ ヲ中心トシ CG ヲ半徑トスル圓弧ヲ畫キ, 其二圓弧ノ交點ヲ Q トシ此點ヲ極トセル大圓 AE ヲ畫ケバ之レ所要ノモノナリ.　何トナレバ



大圓ノ半圓 PQP′ ヲ畫キ大圓 AE トノ交點ヲ E トセバ　QE=四分圓弧, P′Q=CG ナルユヱ PE=PC.　故ニ E 點ハ小圓 BC ノ周上ニ在リ.　而シテ P, Q ハ夫々圓 BC, AE ノ極ナルユヱ面POQ ハ其二圓面ノ雙方ニ垂直ナリ, 從テ二圓面ノ交線ハ面POQ ニ垂線ニシテ E ヲ過リ其面上ノ OE, O′E (卽チ圓 BC, AE ノ半徑) ニ垂線ナルガ故ニ大圓 AE ハ小圓BC ニ切ス.

同樣ニ Q ノ對點 Q′ ヲ極トスル大圓アリ.

〔別解〕 球心 O ヲ頂點トシ小圓 BC ヲ底トスル直圓錐 (O—BC) ニ A ヲ過ル切平面ヲ作レバ，其ノ截リ口ナルニツノ大圓ハ何レモ所要ノモノナルコト明カナリ.

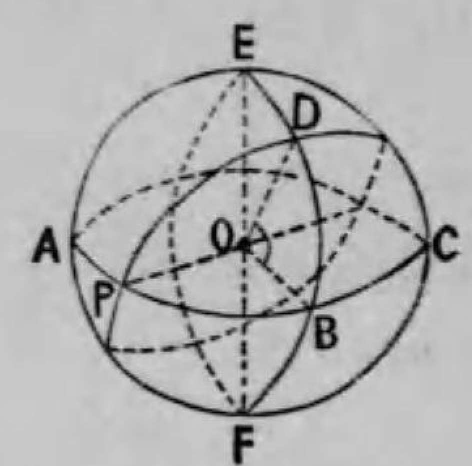
14. 球面上ノ二定小圓ニ切スル大圓ヲ畫ケ.

〔略解〕 二定小圓ヲ BC, MN トス. 前題ト同法ニ依リ小圓 BC ニ就キ P′ ヲ中心トシ CG ヲ半徑トスル圓弧ヲ畫キ，又小圓 MN ニ就キ其極 Q ノ對點 Q′ ヲ中心トシ CG ヲ半徑トスル圓弧ヲ畫キ，其二圓弧ノ二交點ヲ夫々極トスル二大圓ハ所要ノモノナリ.
證ハ前題ト同樣ナリ.

15. 定大圓ノ周上ノ一定點ヲ過ル大圓ヲ畫キテ元大圓ト與角ヲ爲サシメヨ.

〔51 頁作圖題 (9) ヲ參考セヨ〕

〔解〕 定大圓ヲ AC トシ，其周上ノ定點ヲ P トス. 然ルトキ球心 O ヲ過リ OP ニ垂直ナル大圓 EF ヲ畫キ大圓 AC トノ交點ヲ B トシ，大圓 EF ノ面上ニ於テ $\widehat{BOD}$＝與角ニ作リ，OD ト $\overset{\frown}{EF}$ トノ交點ヲ D トセバ P, D ヲ過ル大圓ハ所要ノモノナリ.



何トナレバ PO⊥大圓 EF ナルユヱ PO⊥OB 及ビ PO⊥DO 卽チ二大圓 DP, AC 上ノ直線 DO, BO ハ其二大圓ノ平面ノ交線 PO ニ垂直ナルルユヱ $\widehat{BOD}$ ハ二大圓ノ面ノ交角ニシテ且ツ與角ニ等シケレバナリ.

16. 次ノ與條件ニ適スル與半徑 r ノ球ヲ作レ，

(*a*) (i) 三定點ヲ過ル.
(ii) 三定點ヲ過リ且ツ一定球ニ切スル.

(*b*) (i) 二定點ヲ過リ一定平面ニ切スル.
(ii) 二定點ヲ過リ一定球ニ切スル.

(*c*) (i) 一定點ヲ過リ二定平面ニ切スル.
(ii) 一定點ヲ過リ二定球ニ切スル.
(iii) 一定點ヲ過リ一定平面ト一定球トニ切スル.

(*d*) (i) 三定平面ニ切スル.　(ii) 二定球ニ切スル.
(iii) 二定平面ト一定球トニ切スル.

(iv) 二定球ト一定平面トニ切スル.

〔略解〕 (*a*) (i) 三定點ヲ夫々中心トシ r ヲ半徑トスル三ツノ球ヲ作リ，其交點ヲ中心トシ r ヲ半徑トスル球ヲ作レバ可ナリ.

(ii) 三定點 A, B, C ヲ過ル圓ノ中心 G ヨリ其圓面ニ垂線 GH ヲ引キ；定球心 O ト GH トヲ含ム平面 P ヲ作リ圓 ABC トノ交點ヲ K, L トシ；此二點ヲ過リ P 面ノ定球ノ截リ口ナル圓 O ニ切スル圓ヲ畫キ，此圓ノ中心 D ヲ中心トシ半徑 DK ヲ半徑トスル球ヲ作レバ可ナリ.

何トナレバ GH ハ K, L ヨリ等距離ナル點ノ跡軌ナルユヱ D ハ GH ノ上ニ在リ，故ニ DK＝DA＝DB＝DC 卽チ球 D ハ A, B, C ヲ過ル. 次ニ圓 O ト圓 D トノ切點ヲ E トスレバ兩球ハ中心ノ連結線上ニ共通點ヲ有スルガ故ニ相切ス.

(*b*) (i) 二定點ヲ夫々中心トシ r ヲ半徑トスル球ヲ作リ，又定平面ヨリ r 距離ニ平面ヲ作レバ，其球ト平面トノ交點ハ所要ノ球心ナリ.

(ii) 二定點ヲ夫々中心トシ r ヲ半徑トスル球ヲ作リ，又定球ト同心ニシテ其半徑ト r トノ和或ハ差ヲ半徑トスル球ヲ作レバ，其二球ノ交點ハ所要ノ球心ナリ.

(*c*) 及ビ (*d*)　定點ヲ中心トシ r ヲ半徑トスル球ヲ作リ； 定平面ノ兩側ニ於テ距離 r ニ平面ヲ作リ；定球心ト同心ニシテ其半徑ト r トノ和或ハ差ヲ半徑トスル球ヲ作リ；以上ノ交點ヲ求ムレバ，其交點ヲ球心トシ r ヲ半徑トスル球ハ所要ノモノナリ.

17. 四面體ニ內切及ビ外接スル球ヲ作レ.

〔解〕 內切球ヲ作ルハ 82 頁ノ 9 條ノ (1) ニアリ.
又外接球ヲ作ルハ 82 頁 9 條ノ (2) 或ハ 122 頁 7 條ノ (3) ニアリ.

18. 直圓錐ニ內切スル球ヲ作レ.

〔略解〕 任意ノ母線 SA ヲ引キ，底圓心 O ト A トヲ結ビ，$\widehat{SAO}$ ノ二等分線ト SO トノ交點ヲ P トセバ，P ヲ中心トシ PO ヲ半徑トスル球ヲ作レバ可ナリ.

續 第一章 乃至 第四章

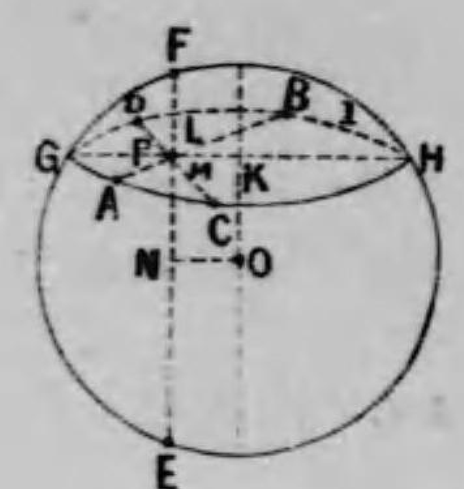
特種問題

8. 常數問題 ニ付テハ 105 頁ノ 13 條ト同樣ナリ.

問題及ビ解答

1. 球 O ノ內或ハ外ノ定點 P ヨリ互ニ直交スル三直線ヲ引キ球面トノ交點ヲ夫々 A, B; C, D; E, F トセバ $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+\overline{EF}^2$ ハ一定ナリ.

〔證明〕 AB, CD ヲ含ム小圓ノ中心ヲ K トシ, AB, CD, EF ノ中點ヲ夫々 L, M, N トス. 又小圓及ビ球ノ半徑ヲ夫々 r 及ビ R トス. 然ルトキハ



$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+\overline{EF}^2=4(\overline{AL}^2+\overline{CM}^2+\overline{EN}^2)$

$=4(\overline{AK}^2-\overline{KL}^2+\overline{CK}^2-\overline{KM}^2+\overline{OE}^2-\overline{ON}^2)$

$=4(r^2-\overline{KL}^2+r^2-\overline{KM}^2+R^2-\overline{ON}^2)$

〔而シテ KLPM, KPNO ハ共ニ矩形ナルユエ

$\overline{KL}^2+\overline{KM}^2+\overline{ON}^2=\overline{PK}^2+\overline{ON}^2=2\overline{PK}^2$〕

$=4R^2+8r^2-8\overline{PK}^2$

$=4R^2+8\{\overline{OA}^2-\overline{OK}^2-(\overline{OP}^2-\overline{OK}^2)\}=12R^2-8.\overline{OP}^2.$

然ルニ R 及ビ OP ハ夫々一定ナルユエ此結果ハ一定ナリ, 從テ $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+\overline{EF}^2$ ハ一定ナリ.

2. 前題ニ於テ $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2$ ハ常數ナリ.

〔證明〕 AB⊥CD ナルユエ $\widehat{AC}+\widehat{BD}=$半圓周ナリ, 故ニ $\widehat{CI}=\widehat{BD}$ ニ取レバ AI ハ小圓ノ直徑トナリ GH ニ等シ,

$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PC}^2+\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CI}^2=\overline{AI}^2=\overline{GH}^2.$

同樣ニ $\overline{PG}^2+\overline{PH}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2=(2R)^2$ 〔R ハ球ノ半徑〕

$\therefore\ \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PF}^2=4R^2+\overline{GH}^2-(\overline{PG}^2+\overline{PH}^2)=4R^2+2PG.PH$

$=4R^2+2(\overline{GK}^2-\overline{PK}^2)=4R^2+2(R^2-\overline{OK}^2-\overline{PK}^2)=4R^2+2(R^2-\overline{PO}^2).$ 以下同上.

9. 極大及ビ極小

問題及ビ解答

1. (a) 上半徑 8 寸, 下半徑 1 尺, 長サ 9 尺ノ圓柱材ヲ削リテ最大方柱ヲ作レバ, 其屑ノ體積ハ幾何ナルカ. 但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トス.

(b) (i) 各稜ガ 2 寸ナル立方石ヲ削リテ最大球ヲ製レバ, 其球ノ體積ハ幾何ナルカ, 但シ π ハ同上.

(ii) 直徑 15 尺ノ球ノ內部ニ其抱容シ得ル最大ナル正立方體狀ノ空腔ヲ作レバ, 殘リノ體積幾何. 但シ立方尺ヲ單位トシ小數第三位マデ精確ニ計算セヨ. （大工）

〔解〕 (a) 116 頁ノ (4) ノ (ii) ノ公式 $V=\frac{1}{3}\pi h\{r^2+r'^2+rr'\}$ ニ依リテ.

此圓柱材ノ體積 $=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times9\times\{0.8^2+1^2+0.8\times1\}=23.005$ (立方尺).

而シテ圓ニ內接スル最大正方形ハ其直徑ヲ對角線トスル正方形ナルヲ以テ, 直徑 8寸×2 ノ圓ニ內接スル最大正方形ノ面積ハ $1.6^2\div2=1.28$ (平方尺) ナリ.

故ニ 最大方柱ノ體積 $=1.28\times9=11.52$ (立方尺).

∴ 屑ノ體積 $=23.005$立方尺-11.52立方尺$=11.475$ 立方尺.

(b) (i) 最大球ハ內切球ニシテ其直徑ハ立方體ノ高サ卽チ一稜ニ等シ.

∴ 所求ノ最大球ノ體積 $=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times\left(\frac{2}{2}\right)^3=4.194$……答 4.2 立方寸弱.

(ii) $\sqrt{3}=1.73205$, $\pi=3.14159$ トスベシ, 答 1117.626 立方尺.

2. (a) 球面外ニ在ル一定直線ヲ含ム平面ニテ球ヲ截リ, 其截リ口ヲ最大ナラシメヨ.

(b) 球面內ニ在ル一定點ヲ含ム平面ニテ球ヲ截リ, 其截リ口ヲ最小ナラシメヨ.

〔解〕 (a) 球心ト定直線トヲ含ム平面ニテノ截リ口ハ所要ノモノナリ.

(b) 球心ヲ O, 定點ヲ A トシ, OA ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口 P ヲ作レバ可ナリ.

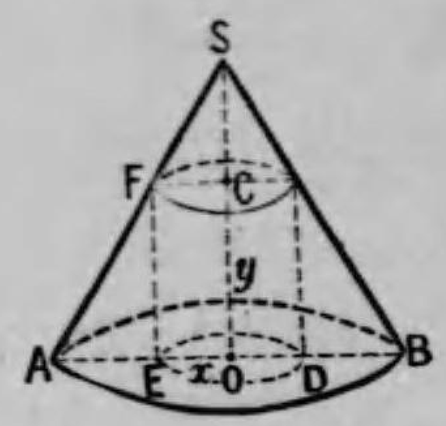
何トナレバ截リ口ハ球心ヲ距ルコト遠キモノガ小ナリ，然ルニ $OA \perp P$面ニシテ A ヲ過ル他ノ任意ノ截リ口 Q ノ圓心ヲ B トセバ $OB \perp Q$面ナルユヱ 直$\triangle OBA$ ニ於テ $OA > OB$ ナルガ故ナリ.

3. (*a*) 直圓錐ニ最大ノ曲面積ヲ有スル直圓壔ヲ内接セヨ.

(*b*) 直圓錐ニ最大ノ體積ヲ有スル直圓壔ヲ内接セヨ.

〔解〕 直圓錐 (S−AB) ノ内接直圓壔 (ED−F) ノ底半徑 $OE=x$, 高サ $OC=y$ トス.

(*a*) 直圓壔ノ軸 SO ノ中點 C ヲ過リ其底面ニ平行スル平面ニテノ截リ口ヲ底面トスル内接直圓壔ヲ作レバ之レ所要ノモノナリ.　何トナレバ



内接直圓壔ノ曲面積$=2\pi x.y$ ガ最大ナル爲メニハ 2π ハ常數ナルユヱ xy ガ最大ナレバ可ナリ.　今 SCO, AEO ハ夫々一直線ニシテ $FC /\!/ AO$, $FE /\!/ CO$ ナルヲ以テ $\triangle SAO$ ニ於テ

$AO : x = SO : SC = SO : SO - y$

故ニ　$y=\dfrac{SO}{AO}(AO-x)$.　　$\therefore$　$xy=\dfrac{SO}{AO}(AO-x)x$

ガ最大ナル爲メニハ SO/AO ハ常數ナルヲ以テ $(AO-x)x$ ガ最大ナルヲ要ス.　而シテ，諸數ノ乘積ガ最大ナルハ其諸數ノ和ガ常數ニシテ其各々ガ相等シキトキナリ.　然ルニ $AO-x+x=AO$ ハ常數ナルヲ以テ $AO-x=x$ 卽チ　$x=\dfrac{AO}{2}$ ナルトキニ xy ハ最大ナリ.

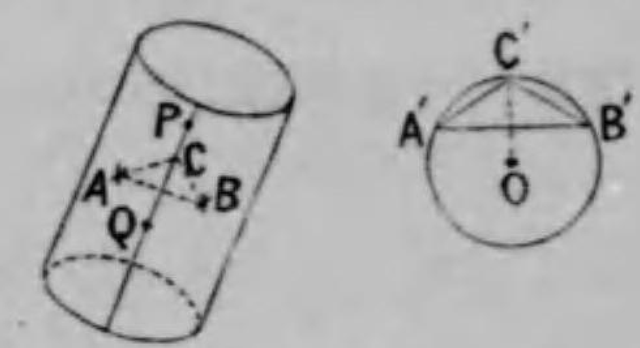
(*b*) 直圓錐ノ底半徑 OA 上ニ O ヨリ其ノ$\dfrac{2}{3}$ノ點 E ヲ取リ，OE ヲ底半徑トスル内接直圓壔ヲ作レバ之レ所要ノモノナリ.　何トナレバ内接直圓壔ノ體積$=\pi x^2.y$ ガ最大ナル爲メニハ π ハ常數ナルヲ以テ x^2y ガ最大ナレバ可ナリ.　依テ (*a*) ト同樣ニ $y=\dfrac{SO}{AO}(AO-x)x$.

$\therefore$　$x^2y=\dfrac{SO}{AO}x^2(AO-x)$　　ガ最大ナル爲メニハ SO/AO ハ常數ナルヲ以テ $x.x.(2AO-2x)$ ガ最大ナルヲ要ス.　　然ルニ $x+x+2AO-2x=2AO$ ハ常數ナルヲ以テ $2AO-2x=x$ 卽チ $x=\dfrac{2}{3}AO$ ナルトキニ x^2y ハ最大ナリ.

10.　實體ノ半徑ヲ求ムルコト

作圖題 (1)　實體圓壔ノ一母線ヲ知リテ其直截リ口ノ半徑ヲ求メヨ.

〔解〕 與母線ヲ PQ トス.　P, Q ヲ夫々中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ實體圓壔ノ曲面上ニ等圓ヲ畫キ其交點ヲ A, B トシ，又 PQ ノ中點ヲ C トス.　而シテ 直線距離 AB, BC, CA ヲ一平面上ニ移シテ $\triangle A'B'C'$ ヲ作リ之ニ外接圓 O ヲ畫ケバ此圓ノ半徑ハ所要ノ半徑ニ等シ.

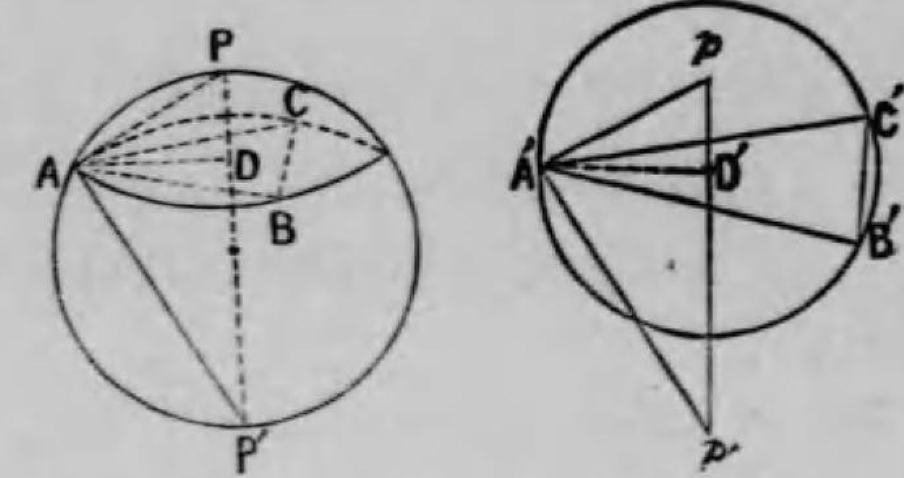


何トナレバ CA, CB ハ何レモ PQ ノ垂直二等分線ナルユヱ PQ ハ面ABC ニ垂直ナリ.　故ニ A, B, C ハ此圓壔ノ直截リ口ナル面上ノ三點ニシテ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ノ外接圓ハ全等ナリ，故ニ圓 $A'B'C'$ ノ半徑ハ實體圓壔ノ直截リ口ノ半徑ニ等シ.

作圖題 (2)　實體球ノ半徑ヲ求ムルコト.

〔解〕 實體球ノ面上ノ任意ノ點 P ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ小圓 ABC ヲ畫キ，直線距離 AB, BC, CA ヲ一平面上ニ移シテ $\triangle A'B'C'$ ヲ作リ，其外接圓ノ中心 D' ヲ求メ.

次ニ 此平面上ニ於テ $A'D'$ ヲ底邊トシ PA ニ等シキ斜邊ノ直三角形 $pA'D'$ ヲ作リ pA' ヘノ垂線ト pD' ノ引長トノ交點ヲ P' トセバ $pp'/2$ ハ所要ノ半徑ニ等シ.



何トナレバ $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$,

從テ此等ノ外接圓ノ半徑 $A'D'=AD$,　$pA'=PA$ 且ツ $\hat{A'}=\hat{A}$ ナルユヱ $\triangle pA'p' \equiv \triangle PAP'$, 從テ $pp'=PP'$,　故ニ $\dfrac{pp'}{2}=\dfrac{PP'}{2}$ ハ此實體球ノ半徑ナリ.

續第二編乃至第三編

計算問題

注意 計算問題ノ多クハ已知ノ定理或ハ問題ニ於ケル數ノ計算ナリ.

問題及ビ解答

1. 平行六面體ノ四對角線ノ各平方ノ和ガ 2900 平方寸ニシテ,其一角頂ニ會セル三稜ノ比ガ 2:3:4 ナラバ,其三稜ノ長サハ,各々幾何ナルカ.

〔解〕 一角頂ニ會セル三稜ヲ $2x, 3x, 4x$ 寸トセバ平行六面體ノ對稜ハ四ツヅツ相等シキユヱ各對角線ノ平方ノ和 $2900=4(\overline{2x}^2+\overline{3x}^2+\overline{4x}^2)$, 之ヲ解キ $x=\pm5$, 此正ノミヲ取リテ $2x=10$, $3x=15$, $4x=20$. 答 10 寸, 15 寸, 20 寸.

2. 矩形六面體ノ全面積ガ 286 平方尺ニシテ一角頂ニ會セル三稜ノ和ガ 21 尺ナラバ, 其一對角線ノ長サ幾何. 答 12.4 尺餘.

〔解〕 一角頂ニ會スル三稜ヲ夫々 a, b, c 尺トセバ $a+b+c=21$, $2(ab+bc+ca)=286$.

$\therefore$ 一對角線 $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}=\sqrt{21^2-286}=12.4.$

3. (a) 體積 15625 立方米ナル立方體ノ一對角線ノ長サ幾何.

(b) 一稜ガ 307.9 粍ナル正六面體ヲ一平面ニテ截リ, 其截リ口ヲ正六邊形ナラシメ, 且ツ其面積ヲ求メヨ. （大工）

〔解〕 (a) 立方體ノ體積ハ一稜ノ立方ニ等シキユヱ 一稜 $=\sqrt[3]{15625}=25$ ナリ. 而シテ一對角線ノ平方ハ一稜ノ平方ノ 3 倍ニ等シキユヱ 一對角線 $=25\sqrt{3}=43.3$.

答 43.3 米餘.

(b) 此作圖ハ 101 頁 8 題ニアリ. 此截リ口ナル正六邊形ノ一邊ハ一面ナル正方形ノ對角線ノ半即チ $307.9\times\frac{\sqrt{2}}{2}=153.95\sqrt{2}$ ナリ. 而シテ一邊 a ナル正六邊形ノ面積ハ $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ ナリ.

$\therefore$ 此正六邊形ノ面積 $=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times153.95^2\times2=123048.33.$ 答 123048.33 平方粍.

4. (a) 底面ガ正三角形ナル角壔アリ, 其體積ハ 1 立方米ニシテ其高サハ 0.8 米ナリ. 底ノ一邊ヲ粍ノ位マデ正シク算出セヨ. （陸士）

(b) 高サ二寸五分ナル直角壔アリ, 其底面ハ正六邊形ニシテ底面ノ一邊ハ一寸二分ナリト. 然ラバ此角壔ノ全面積及ビ體積幾何. （陸士）

(c) 厚サ $\frac{3}{8}$ 吋ノ鐵板ニテ造レル直角壔狀ノ無蓋ノ水溜アリ, 其底面ハ內法ニテ 3 呎 4 吋ト 2 呎 6 吋ノ矩形ニシテ其深サ 4 呎 8 吋ナリ. 水ヲ充タセル時及ビ空虛ナル時ノ此水溜ノ重量ヲ計算セヨ. 但シ鐵ノ比重ヲ 7.2 トシ, 又水一立方呎ノ重サヲ 62.3 封度トス. （大工）

(d) 東西ニ傾斜ナク, 北ヨリ南ニ向ヒ地面ニ沿ヒテ m 尺ニ付キ n 尺低下セル地面アリ. 此地面中東西 a 尺, 南北 b 尺ノ矩形ノ地所ヲ北ノ境界線ヨリ地面ニ沿ヒテ $\frac{1}{4}b$ 尺 南ノ處ト同ジ高サニ地均セントス. 幾何ノ土ヲ補フベキカ. （海兵）

〔解〕 (a) 正三角形ノ一邊ヲ a 米トセバ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times0.8=1.$

$\therefore\ a^2=\frac{4}{\sqrt{3}\times0.8}=\frac{5\sqrt{3}}{3}=\frac{5\times1.73205}{3}=2.8867\ldots\ldots$

$\therefore\ a=\sqrt{2.8867}=1.61.$ 答 1 米 6 糎 1 粍.

(b) 一邊 a ナル正六邊形ノ面積 $=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ ナルヲ以テ,

全面積 = 傍面積 + 底面積 × 2 = 底周 × 高 + 底面積 × 2 $=1.2\times6\times2.5+\frac{3\sqrt{3}}{2}\times1.2^2\times2$
$=7.48224.$ 答 7.48 平方寸餘.

又 體積 = 底面積 × 高 $=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\times1.2^2\times2\right)\times2.5=18.7006.$ 答 18.7 立方寸餘.

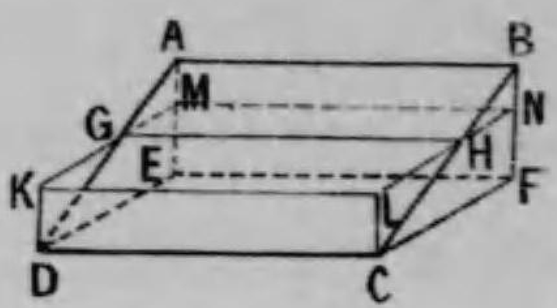
(c)　水ノ重量$=62.3$封度$\times\left(3\frac{4}{12}\times2\frac{6}{12}\times4\frac{8}{12}\right)=2422.7$ 封度餘.

又　水溜ノ重量$=62.3$封度$\times7.2\times\left\{\left(3\frac{4}{12}+\frac{3}{8}\times2\right)\times2\frac{6}{12}\times\left(4\frac{8}{12}+\frac{3}{8}\right)-\left(3\frac{4}{12}\times2\frac{6}{12}\times4\frac{8}{12}\right)\right\}$

$=5642.44$ 封度弱.

(d)　地面ヲ ABCD トシ，　BA$=a$ 尺，　CB$=b$ 尺 トス.　又地均シタル地面ヲ KLNM トシ，而シテ 面 ABCD, KLNM ノ交線ヲ GH トス.　然ルトキ

所要ノ土ノ立積ヲ V トスレバ



V＝三角壔 (GKD−HLC)−三角壔 (AMG−BNH)

$=\frac{1}{2}$LH.▱CDKL$-\frac{1}{2}$HN.▱ABNM

$=\frac{1}{2}$LH. CD. CL$-\frac{1}{2}$HN. AB. BN

$=\frac{1}{2}$LH. AB. CL$-\frac{1}{2}$HN. AB. BN.

然ルニ　△HLC∽△BNH∽△BFC ナルニヨ　LH : LC＝HN : NB＝FC : FB 且ツ BH$=\frac{1}{4}$CB ナルヲ以テ　LH$=\frac{3}{4}$FC, LC$=\frac{3}{4}$FB, HN$=\frac{1}{4}$FC, NB$=\frac{1}{4}$FB ナリ.

$\therefore$　V$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)$AB. FC. FB$=\frac{1}{4}$AB. FB. FC.

又　BC : BF$=m:n$ ナルニヨ BF$=\frac{bn}{m}$，CF$=\sqrt{(\overline{BC}^2-\overline{BF}^2)}=\sqrt{b^2-\frac{b^2n^2}{m^2}}$

$=\frac{b}{m}\sqrt{m^2-n^2}$.

$\therefore$　V$=\frac{1}{4}a.\frac{b}{m}\sqrt{m^2-n^2}.\frac{bn}{m}=\frac{ab^2n}{4m^2}\sqrt{m^2-n^2}$　(立方尺)

5.　(a)　二ツノ相似角壔ノ體積ノ比ガ 216 : 343 ナラバ，其全面積如何.

答　36 : 49.

(b)　二ツノ四面體 SABC, VDEF トノ比ガ 3 : 5 ニシテ，頂點 S 及ビ V ニ於ケル三面角ガ相等シク且ツ　SA : VD＝2 : 3 及ビ SB : VE＝6 : 5 ナラバ SC : VE ハ如何.

答　3 : 4.

〔略解〕 (a)　相似角壔ノ體積ハ對應稜ノ三乘ニ比例シ，又全面積ハ對應稜ノ平方ニ比例ス.

(b)　頂點ニ於ケル三面角ガ相等シキ二ツノ四面體ノ體積ハ，其頂點ニ於ケル三稜ノ乘積ニ比例ス.

6.　(a)　各稜ノ長サ 1 尺ナル正四面體ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ.

（東工）

(b)　(i)　一稜ノ長サ a 尺ナル正四面體ノ體積ヲ求メヨ.

（水講，海機）

(ii)　一稜ノ長サ六寸ナル正四面體ノ體積ヲ求メヨ，但シ立方寸以下二位マデ算セヨ.

（四高）

(c)　(i)　高サ l 尺ノ正四面體ノ體積ヲ求メヨ.

（專檢）

(ii)　高サ六寸ノ正四面體ノ體積幾何.

（熊工）

(d)　一稜ノ長サ 2 尺ナル正四面體ニ內接スル正四面體ノ體積ヲ小數三位マデ求メヨ.

(e)　一邊ノ長サ a ナル正四面體ノ相對スル稜ノ間ノ最短距離ヲ求メヨ.

（東工）

〔解〕 (a)　各面ハ一邊 1 尺ナル正三角形ナルニヨ

表面積$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\times4=1.732$　(平方尺)

又 91 頁ノ (c) ト同樣ニ　體積$=\frac{\sqrt{2}}{12}\times1^3=0.144$ (立方尺)

(b)　同上　答 (i) $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ 立方尺.　(ii)　25.45 立方寸.

(c)　91 頁ノ (d) ト同樣ニ，高サノ平方ハ一稜ノ平方ノ三分ノ二ナリ.　故ニ一稜ヲ a 尺トセバ $l^2=\frac{2}{3}a^2$，從テ $a=l\sqrt{\frac{3}{2}}$ ナリ.　故ニ

(i)　體積$=\frac{1}{3}$ 底面積×高$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times l=\frac{\sqrt{3}}{12}l^2\times\frac{3}{2}\times l=\frac{\sqrt{3}}{8}l^3$ (立方尺).

(ii)　同樣ニ　體積$=\frac{\sqrt{3}}{8}\times6^3=46.764$ (立方寸).

(d)　83 頁ノ (3) ヲ正四面體トスレバ EF : CS＝DF : DS＝1 : 3 卽チ EF$=\frac{1}{3}$CS.

同樣ニ　相隣ル面ノ重心ノ連結線ハ皆ナ各等稜ノ $\frac{1}{3}$ ナリ.

故ニ (a) ト同樣ニ　內接正四面體ノ體積$=\frac{\sqrt{2}}{12}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=0.034$ (立方尺) 餘.

(e)　107 頁 3 ト同樣ニ　所要ノ最短距離$=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

7. (a) (i) 正六角錐ノ底面ノ一邊ハ一寸八分ニシテ，高サハ四寸七分ナリト．其體積幾何．　(東農)

(ii) 底面ノ各邊四寸ニシテ高サ一尺五寸ノ正六角錐ノ體積ヲ求メヨ．　答 207.84 立方寸．　(熊工)

(b) 體積 1 立方寸ナル角錐アリ，底面ハ平行四邊形ニテ其二邊及ビ對角線ハ夫々 1 寸，2 寸，$\sqrt{7}$ 寸ナリト．高サ幾何．　(名工)

(c) 底ノ一邊ノ長サ 4 尺，傍稜ノ長サ 10 尺ナル正四角錐ノ全面積幷ニ體積ヲ小數第三位マデ求メヨ．　(專檢)

(d) 對角線ノ長サ a 寸ナル正方形ヲ底面トスル直角錐ノ斜稜及ビ底面ノ一邊ノ長サノ比 3:2 ナルトキ，體積及ビ斜面ノ面積ヲ求メヨ．　(東北工)

〔解〕 (a) (i) 正六角錐ノ體積 $=\frac{1}{3}\times$ 底面積 $\times$ 高サ $=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\times1.8^2\right)\times4.7$

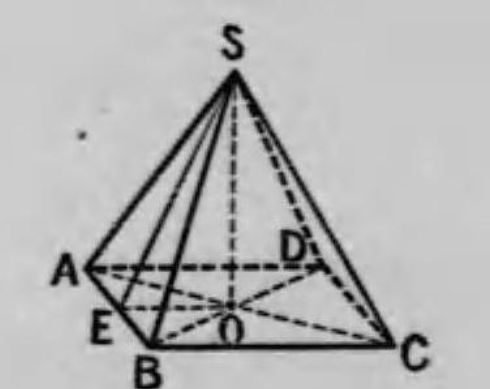
$=13.19$ (立方寸) 弱．

(b) $1+2+\sqrt{7}=2s$ トセバ $s=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$ ナルユヱ，三邊ヲ知リテ三角形ノ面積ヲ求ムル公式ニ依テ　半底面ノ面積 $=\sqrt{s(s-1)(s-2)(s-\sqrt{7})}$

$=\sqrt{\left\{\frac{3+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right\}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

∴　高サ $=1\div\left(\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\right)=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=1.732$ (寸)．

(c) 正四角錐 (S−ABCD) ノ頂點 S ヨリ底面ヘノ垂線ノ足 O ハ底面ノ中心 卽チ 兩對角線ノ交點ナリ．又 SA=SB ナルユヱ斜高 SE ハ AB ヲ二等分ス．故ニ $\overline{SE}^2=\overline{SB}^2-\overline{BE}^2=10^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2=96$ 且ツ $\widehat{SOE}=\widehat{R}$ ナルユヱ $SO=\sqrt{(\overline{SE}^2-\overline{EO}^2)}=\sqrt{\left(96-\frac{4}{2}\right)}=\sqrt{92}$．



∴　全面積 $=\frac{1}{2}AB.SE\times4+\overline{BC}^2=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{96}\times4+4^2=94.38$ (平方尺) 餘．

又　體積 $=\frac{1}{3}\overline{BC}^2\times SO=\frac{1}{3}\times4^2\times\sqrt{92}=51.16$ (立方尺) 弱．

(d) 前圖ヲ用フ．$AO=\frac{1}{2}a$，$AB=\frac{1}{\sqrt{2}}a$，$AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2\sqrt{2}}a$ ニシテ，

又 SA : AB = 3 : 2 ナルユヱ $SA=\frac{3}{2}AB=\frac{3}{2\sqrt{2}}a$ ナリ．

而シテ　$SO=\sqrt{(\overline{SA}^2-\overline{AO}^2)}=\sqrt{\left\{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2\right\}}=\frac{\sqrt{14}}{4}a$，

$SE=\sqrt{(\overline{SA}^2-\overline{AE}^2)}=\sqrt{\left\{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}a\right)^2-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}a\right)^2\right\}}=a$ ナリ．

∴　體積 $=\frac{1}{3}AB^2.SO=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{14}}{4}a\right)=\frac{\sqrt{14}}{24}a^3$ (立方寸)

及ビ　斜面ノ面積 $=\triangle SAB\times4=4\times\frac{1}{2}AB.SE=\sqrt{2}.a^2$ (平方寸)．

8. (a) 底面積九平方寸，高サ五寸ノ角錐アリ．之ヲ高サ三寸ノ所ニテ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ，其兩部分ノ體積ハ各々幾何ナルカ．　(海兵)

(b) 平截頭三角錐 (ABC−DEF) ノ兩底ノ周ハ夫々 108 糎及ビ 60 糎ニシテ又其內切圓ノ半徑ハ夫々 9 糎及ビ 5 糎ナリ．今高サガ 36 糎ナラバ體積ハ幾何ナルカ．

(c) 土堤アリ，其下底ハ竪 20 尺 幅 14 尺及ビ上底ハ竪 12 尺 幅 9 尺ノ各矩形ニシテ，又高サハ 8 尺ナリ．其立積ヲ求メヨ．

〔94 頁ノ17 題〕

〔解〕 (a) 上下兩部ノ體積ヲ夫々ヲ V_1，V_2 トシ，又高サヲ夫々 h_1, h_2 トス．然ルトキハ上部ノ角錐ト元體トハ相似ニシテ，相似多角錐ノ體積ハ高サノ三乘ニ比例ス．

故ニ $V_1:(V_1+V_2)=h_1^3:(h_1+h_2)^3$　卽チ $V_1:\frac{1}{3}\times9\times5=(5-3)^3:5^3$

∴　$V_1=\frac{1}{3}\times9\times5\times\frac{2^3}{5^3}=0.96$ (立方寸)，

從テ $V_2=\frac{1}{3}\times9\times5-0.96=14.04$ (立方寸)．

(b) 多角形ノ面積ハ其周ト內切圓ノ半徑トノ積ノ半ニ等シキユヱ，

下底面 $ABC=\frac{1}{2}\times108\times9=486$ (平方糎)，上底面 $DEF=\frac{1}{2}\times60\times5=150$ (平方糎)

此兩底面ノ比例中項 $=\sqrt{486\times150}=270$ (平方糎) ナリ．

∴　體積 $=\frac{1}{3}\times(486+150+270)\times36=10872$ (立方糎)．

(c) 體積 $=\frac{1}{6}\times8\times\{12\times(2\times9+14)+20\times(2\times14+9)\}=1498.67$ (立方尺) 弱．

9. (a) 底周2呎, 高サ 7吋ナル直圓壔ノ體積ハ幾何.

(b) 直圓壔ノ高サ一米ニシテ其全面積ハ半徑二米ナル圓ノ面積ニ等シト, 此圓壔ノ半徑及ビ體積ヲ求メヨ. (陸士)

(c) 高サ二尺五寸ニシテ十立方尺ノ體積ヲ有スル直圓壔アリ, 其底面ノ直徑ヲ求メヨ, 但シ厘位以下四捨五入セヨ. (東商)

(d) 半徑 R ナル水槽アリ, 今活塞ノ通路ノ長サ l ニシテ其内半徑 r ナルぽんぷヲ使用シテ此水ノ深サヲ L ダケ減ゼントス. 幾回活塞ヲ上下スベキカ. (海兵)

(e) 直圓壔狀ノ中空鉛管アリ, 其外徑ハ 24 糎, 内徑ハ 21 糎ニシテ長サハ 1.5 米ナリト. 其體積如何. 又鉛ノ比重ヲ 11.25 トセバ鉛管ノ重サハ幾何. 但シ $\pi=3.1416$ トス.

〔略解〕 底半徑ヲ r トシ, 又 (a) 乃至 (d) ハ $\pi=\frac{22}{7}$ トス.

(a) $2\pi r=2\times 12$ (吋) ヨリ $r=\frac{12}{\pi}$, 仍テ公式ニ依リ 答 320.7 立方吋餘.

(b) 全面積 $\pi\times 2^2=2.\pi r^2+2\pi r.1$ $\therefore$ $r^2+r-2=0$ 卽 $(r-1)(r+2)=0$

此正根ノミヲ取リテ $r=1$ (米). 從テ 體積 $=\pi r^2.1=\frac{22}{7}\times 1^2\times 1=3.14$ (立方米) 餘.

(c) 體積 $10=\pi r^2\times 2.5$ ヨリ r ヲ求ムベシ. 答 1.128 尺.

(d) 此水槽ハ底半徑 R, 高サ l ナル直圓壔ニシテ, 又ぽんぷハ半徑 r, 高サ l ナル直圓壔ナリ. 而シテ, 直圓壔ノ體積ハ底面積ト高サトノ乘積ニ等シ. 故ニ

減ズベキ水槽ノ水量 $=\pi R^2.L$. 又 活塞一回上下ノ水量 $=\pi r^2.l$ ナリ.

$\therefore$ 所要ノ回數 $=\pi R^2.L\div(\pi r^2.l)=\frac{LR^2}{lr^2}$.

(e) 所要ノ體積ハ外徑ノ直圓壔ヨリ内徑ノ直圓壔ヲ減ジタルモノ,

卽チ $3.1416\times\left\{\left(\frac{24}{2}\right)^2-\left(\frac{21}{2}\right)^2\right\}\times 150=15904.35$ 卽チ 15904.4 立方糎弱.

又 1 立方糎 $=1$ 瓦ナルユエ 此體ノ重サ $=1^{瓦}\times 15904.4\times 11.25=178923.94$ 瓦弱

$=0.267^{匁}\times 178923.94=47772.69$ 匁強.

10. (a) 底半徑4.8尺, 高サ6.4尺ナル直圓錐ノ全面積ハ幾何. (仙醫)

(b) 底半徑ト高サトガ相等シキ直圓錐ノ體積ガ 620928 立方糎ナラバ, 其底半徑ハ幾何.

(c) (i) 底面ノ周ガ八寸八分ニシテ高サガ二寸七分ナル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ. 但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トス. (長商)

(ii) 高サガ底面ノ直徑ニ等シキ直圓錐體アリ, 底面ノ周ガ 2尺2寸ナルトキハ, 其體積幾何. 但シ π ハ同上. (東農)

(d) 半徑五尺, 斜高十三尺ナル直圓錐ノ體積如何. (海機)

(e) 斜高 a 寸ノ上口徑 $2b$ 寸 (下口徑ハ甚ダ小ナルユエ無キモノトス) ノ漏斗アリ. 斜高ニ沿ヒ n 個ノ刻ミヲ附シ相隣レル刻ミ間ニ於ケル漏斗ノ容量ヲ相等シカラシムルニハ如何ナル間隔ニ刻ミヲ附スベキカ. (金醫)

〔解〕 (a) 底半徑ヲ r, 高サヲ h, 斜高ヲ L トセバ $L=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{4.8^2+6.4^2}=8$,

$\therefore$ 全面積 $=\pi r L+\pi r^2=\pi r(L+r)=\frac{22}{7}\times 4.8\times(8+4.8)$ $\left[\pi=\frac{22}{7}\text{ トス}\right]$

$=193.097$. 答 193.1 平方尺弱.

(b) 底半徑ヲ r トセバ, 體積 $620928=\frac{1}{3}\times\pi r^2.r$, 依テ $\pi=\frac{22}{7}$ トセバ

$r^3=620928\times\frac{3}{\pi}=620928\times\frac{3\times 7}{22}=592704$, $\therefore$ $r=\sqrt[3]{592704}=84$ (糎).

(c) (i) 底半徑ヲ r トセバ $2\pi r=8.8$ ナルユエ $r=\frac{4.4}{\pi}$ ナリ.

$\therefore$ 體積 $=\frac{1}{3}\pi r^2\times 2.7=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{4.4}{\pi}\right)^2\times 2.7=\frac{1}{3}\times\frac{7}{22}\times 4.4^2\times 2.7=5.544$ (立方寸).

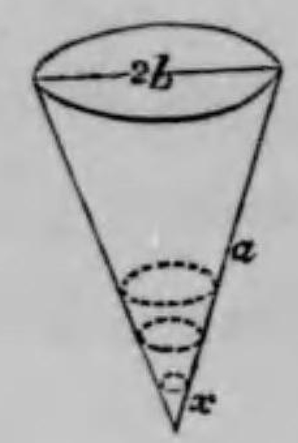
(ii) 同上 答 89.83 立方寸餘.

(d) 高サ $=\sqrt{13^2-5^2}=12$. 依テ $\pi=3.1416$ トスレバ

體積 $=\frac{1}{3}\pi\times 5^2=\frac{3.1416}{3}\times 25=26.18$ (立方尺).

(c) 漏斗ヲ直圓錐トシ，其體積ヲ V トシ，底面ニ平行ナル平面ニテ截リタル一部分ノ體積ヲ v トセバ，元體ト尖端ヨリ第一ノ體トハ相似ナルニエ其體積ハ對應邊ノ立方ニ比例ス，故ニ此體ノ斜高ヲ x 寸トセバ　$V:v=a^3:x^3$.

而シテ斜高ニ n 箇ノ刻ミヲ付スレバ其一部ハ



$\frac{1}{n+1}$ ナルニエ　$v=\frac{1}{n+1}V$,　　$\therefore\ x^3=\frac{a^3}{n+1}$

$\therefore$ 第一ノ刻ミ目ハ尖端ヨリ　$x=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}a$ 寸.

又第二 $v=\frac{2}{n+1}V$ ナルニエ，尖端ヨリ第二ノ刻ミ目マデノ斜高ヲ y 寸トスレバ上ト同樣ニ

$$y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{n+1}}a \text{ 寸}.$$

$\therefore$ 第二ノ刻ミ目ハ第一ヨリ　$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{n+1}}a$ 寸 $-\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}a$ 寸 $=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[3]{n+1}}a$ 寸.

以下同理ニヨリテ夫々 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{n+1}}a$ 寸，$\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{n+1}}a$ 寸………ナリ.

11. (a) (i) 平截頭直圓錐アリ，其高サ七十尺ニシテ，兩底面ノ直徑ハ夫々十尺及ビ七尺ナリ．體積幾何，但シ $\pi=\frac{22}{7}$.　(水講)

(ii) 直圓錐臺ノ上下兩底ノ徑ハ夫々 3尺，4尺ニシテ高サハ 5尺ナリ．此體積如何，但シ π ハ同上.　(七高)

(iii) 丸太材木アリ，其兩底半徑ハ夫々 3 尺及ビ 3 尺 8 寸ニシテ又斜高ハ 2 尺 4 寸ナリト．體積幾何.

(b) (i) 底半徑ガ夫々 20 寸，10 寸ニシテ高サ 16 寸ナル平截頭直圓錐アリ．今高サノ中點ニ於テ底面ニ平行ナル平面ニテ之ヲ二分シ，各部分ノ體積ヲ計算セヨ.　(大工)

(ii) 西洋樽アリ，兩端面ノ內法半徑ハ各 6 吋，中央ノ內法縱半徑ハ 9 吋ニシテ兩端面ノ距離ハ 21 吋ナリト．其容積如何，但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トス.

(c) 平截頭直圓錐ノ兩底半徑ノ和ハ 27 尺，高サハ 14 尺ニシテ，體積ハ 8052 立方尺ナリト．兩底半徑ヲ求メヨ，但シ $\pi=\frac{2}{7}$ トス.

(d) 雨天ニテ屋外ニ置キタル口徑 1 尺，底徑 6 寸，深サ 8 寸ナルばけつノ深サノ半分ニ至リシト．1 坪ノ面積ニ降レル雨量ハ幾斗幾升ナルカ，但シ 1 升ヲ 64.8 立方寸トス.　(海兵)

〔解〕 116 頁 (4) ノ (ii) ノ公式 $V=\frac{1}{3}h\pi(r^2+r'^2+rr')$ ニ依リテ

(a) (i) 體積 $=\frac{1}{3}\times70\times\frac{22}{7}\times\left\{\left(\frac{10}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{10}{2}\times\frac{7}{2}\right\}=4015$ (立方尺).

(ii) 同上　　答 48.45 立方尺餘.

(iii) 高サ $=\sqrt{24^2-(38-30)^2}=8$. 以下同上.　　答 29 立方尺 199 立方寸餘.

(b) (i) 高サノ中點ニ於ケル截リ口ハ圓ニシテ其半徑ハ $(20+10)\div2=15$ (寸) ナリ，以下同上.　　答 上部 3979 立方寸强，下部 7749 立方寸强.

(ii) 西洋樽ハ中央ノ垂直截リ口ヲ共通底面トセル二ツノ全等ナル平截頭直圓錐ナリ，故ニ上ト同樣ニ　體積 $=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times21\times(6^2+9^2+6\times9)\times2=7524$ (立方吋).

(c) 兩底半徑ヲ夫々 r, r' トセバ，體積 $8052=\frac{1}{3}\times14\times\frac{22}{7}\times(r^2+r'^2+rr')$

$$\therefore\ r^2+r'^2+rr'=\frac{3\times7}{14\times22}\times8052=549 \text{………………………}(1)$$

又 $(r+r')^2=27^2=729$.　$\therefore\ rr'=729-549=180$ ……(2)

此 (1), (2) ヲ解キ　$r=15,\ r'=12$.　　答 15 尺，12 尺.

(d) ばけつ內ノ水ノ量ハ直圓錐臺狀ヲ爲シ，其底半徑ハ夫々 $(10+6)\div2=8$ (寸) 及ビ 6 (寸) ニシテ，高サハ $8\div2=4$ (寸) ナルニエ　其立積ハ $\frac{1}{3}4\pi\times(4^2+3^2+4\times3)$ 卽チ　$\frac{148}{3}\pi$ (立方寸) ナリ．而シテ此水量ハ徑 1 尺ノ圓ノ面積卽チ $5^2\pi$ (平方寸) ノ面積內ニ降レル雨水ナリ．　故ニ 1 坪卽チ 60^2 (平方寸) 內ニ降レル雨水ノ量ヲ x (立方寸) トセバ

$$5^2\pi : 60^2=\frac{148}{3}\pi : x,$$　之ヨリ $x=7104$ ヲ得.

$\therefore$ 所要ノ雨量ハ $7104\div64.8=109.6$………卽チ 約 1 石 1 斗ナリ.

12. (*a*) 半徑 2 尺ノ球ノ中心ヨリ其 3 平方尺ナル小圓ニ至ル距離ヲ求メヨ.

(*b*) 球ノ小圓周ヨリ其極ニ至ル大圓ノ弧ガ大圓周ノ $\frac{1}{12}$ ナル小圓ノ面積ト兩底ガ夫々小圓及ビ大圓ノ各半徑ニ等シク高サモ大圓ノ半徑ニ等シキ梯形ノ面積トハ何レガ大ナルカ.　（海兵）

(*c*) (i) 面積ガ 400 平方寸ナル球ノ直徑如何.　（海機）

(ii) 徑 1 尺 2 寸ノ球ノ全面ニ 4 寸平方ノ金箔ヲ張リ詰メントス, 約何枚ノ金箔ヲ要スルカ.

(iii) 半徑 12 米及ビ 5 米ナル二球ノ面積ノ和或ハ差ニ等シキ面積ヲ有スル球ノ半徑ヲ求メヨ.

(*d*) (i) 體積ガ 100 立方尺ナル球ノ直徑及ビ面積ヲ求メヨ.

(ii) 鐵ノ比重ガ 7.8 ナラバ重サ一貫ノ鐵球ノ徑如何.

(iii) 地球ノ赤道ニ於ケル周ヲ 4 萬粁トシテ, 地球ノ表面積及ビ體積ヲ概算セヨ.

(iv) 半徑 5 寸及ビ 3 寸ナル二ツノ鉛球彈ヲ熔シテ一球彈ニ改造スルトキハ, 其半徑ハ幾何トナルカ.

(v) 外半徑 5 寸, 內半徑 3 寸ナル中空球ノ體積幾何.

(*e*) 球ノ半徑四尺ニシテ球帶ノ高サ二尺五寸ナルトキハ, 其球帶ノ曲面積幾何. 但シ $\pi=2.1416$ トス.　（仙醫）

〔略解〕 球ノ半徑ヲ r トシ, 又 明言セザル $\pi=\frac{22}{7}$ トス.

(*a*) 小圓ノ半徑 $=\sqrt{\frac{3}{\pi}}$,　∴ 所要ノ距離 $=\sqrt{2^2-\frac{3}{\pi}}=1.75$ (尺) 弱.

(*b*) 此小圓ノ徑ハ球心ニ於テ $4R\times\frac{2}{12}$ 卽チ $\frac{2}{3}\hat{R}$ ニ對スルユエ球半徑ニ等シ.

∴ 小圓ノ面積 $=\pi.\left(\frac{1}{2}r\right)^2=\frac{1}{4}\pi r^2$. 又 梯形ノ面積 $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}r+r\right)r=\frac{3}{4}r^2$.

然ルニ $\pi>3$ ナルユエ 小圓ノ面積ノ方ガ大ナリ.

(*c*) (i) 面積 $400=4\times\frac{22}{7}r^2$,　∴ $2r=\sqrt{400\times\frac{7}{22}}=5.21$ (寸) 强.

(ii) 球ノ表面積 $=4\times\frac{22}{7}\times\left(\frac{12}{2}\right)^2$ 平方寸, 金箔一枚ノ面積 $=4^2$ 平方寸.

∴ 所要ノ枚數 $=4\times\frac{22}{7}\times36\div16=28.28$ ……… 卽チ 約 28 枚 3 分.

(iii) $4\pi.12^2+4\pi.5^2=4\pi r^2$ ヨリ $r=13$ (米).

又　$4\pi.12^2-4\pi.5^2=4\pi r^2$ ヨリ $r=10.91$ (米) 弱.

(*d*) (i) 體積 $100=\frac{4}{3}\pi r^3$,　∴ 直徑 $2r=\sqrt[3]{\frac{100\times2\times3\times7}{22}}=5.76$ (尺) 弱.

又 面積 $4\pi r^2=4\times\frac{22}{7}\times5.76^2=104.2$ (平方尺) 餘.

(ii) 1 貫 $=3750$ 瓦, 1 立方糎 $=1$ 瓦 ナルヲ以テ, $\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{3750}{7.8}$ 立方糎,

∴ $r=\sqrt[3]{\frac{3750}{7.8}\times\frac{3}{4}\times\frac{7}{22}}=9.71$ ………(糎) $=32.04$ ………(分)　答 3 寸 2 分餘.

(iii) $2\pi r=4$ ナルユエ $r=\frac{2}{\pi}$ ナリ,

∴ 地球ノ表面積 $=4\pi.\left(\frac{2}{\pi}\right)^2=\frac{16}{\pi}=\frac{16\times7}{22}=5.0$ ……… 約 5 億平方粁.

又 地球ノ體積 $=\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{2}{\pi}\right)^3=\frac{32}{3\pi^2}=\frac{32\times7^2}{3\times22^2}=1.08$ ……… 約 1 億立方粁.

(iv) $\frac{4}{3}\pi(5^3+3^3)=\frac{4}{3}\pi r^3$,　∴ $r=\sqrt[3]{152}=5.33$ (寸) 弱.

(v) $\frac{4}{3}\pi(5^3-3^3)=\frac{4}{3}\pi r^3$,　∴ $r=\sqrt[3]{98}=4.61$ (寸) 餘.

(*e*) 126 頁 (9) ノ系ニ依テ 球帶ノ曲面積 $=2\times4\times3.1416\times2.5=62.83$ (平方寸) 餘.

13. (*a*) 直徑四尺深サ六間ナル井戸ヲ掘リ此土ヲ以テ直徑二間四尺ノ圓錐形ノ山ヲ築カントス. 山ノ高サ幾何.

(*b*) 直徑四寸ノ球ヲ一邊六寸ノ正三角形ノ三邊ニテ支フルトキハ, 三角形ノ面ヨリ球ノ最高點マデノ距離幾何.　（大工）

(*c*) 直徑 6 糎, 高サ 28 糎ノ直圓壔ノ兩端ニ同ジ直徑ノ半球ヲ附シタル立體アリ. 此體ト等積ナル球ノ直徑幾何.　（小商）

(d) (i) 直圓錐ノ底周ハ 32 尺ニシテ其體積ハ半徑 5 尺ノ球ノ體積ニ等シ，此圓錐ノ高サヲ求メヨ. (海機)

(ii) 半徑 8 尺ナル球ト體積ハ相等シクシテ底面ノ半徑ガ 7 尺ナル直圓錐ノ高サ幾何. (海兵)

(iii) 直徑六米ナル球ノ體積ト底ノ直徑六米，高サ四米ナル直圓錐ノ體積トノ比ヲ求メヨ. (陸士)

(iv) 底面ノ半徑 5 寸，高サ 1 尺 2 寸ノ直圓錐ニ內切スル球ノ面積及ビ體積ヲ求メヨ. (熊工)

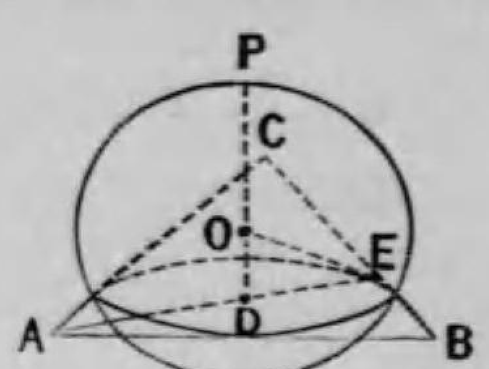
〔解〕 斷リナキ π ハ $\frac{22}{7}$ トス.

(a) 井戶ハ直圓壔ニシテ， 其體積 $=\pi r^2 h$
又 築山ハ直圓錐ニシテ， 其體積 $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\Bigg\}$ 但シ r ハ底半徑，h ハ高サナリ.

故ニ 築山ノ高サヲ x 尺トセバ， 此山ハ井戶ノ土ヲ以テ築クユヱ

$$\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{2\times6+4}{2}\right)^2\times x \text{ 立方尺}=\pi\times\left(\frac{4}{2}\right)^2\times6\times6 \text{ 立方尺},$$ 答 1 間 1 尺弱.

(b) 球 O ハ正三角形 ABC ノ內切圓ノ切點ニ於テ此三角形ニ交ル，今其內切圓ノ中心ヲ D トセバ DO⊥△ABC. BC ノ中點ヲ E トセバ OE ハ球半徑, DE ハ內切圓半徑, ADE ハ一直線ナリ.



$\therefore$ $AE=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$, $DE=\frac{1}{3}AE=\sqrt{3}$.

故ニ $OD=\sqrt{\overline{OE}^2-\overline{DE}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$. 依テ DO ノ引長ト球面トノ交點ヲ P トセバ

所要ノ距離 $PD=PO+OD=2+1=3$ (寸).

(c) 所要ノ球ノ直徑ヲ d トセバ $\frac{1}{6}\pi d^3=\pi.\left(\frac{6}{2}\right)^2\times28+\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{6}{2}\right)^3$

$\therefore$ $d^3=(9\times28+\frac{4}{3}\times27)\times6=27\times(56+8)=3^3\times4^3$, $\therefore$ $d=12$ (糎).

(d) (i) 直圓錐ノ底半徑ヲ r 尺，高サヲ h 尺トセバ $2\pi r=32$ ヨリ $r=\frac{16}{\pi}$ ヲ得.

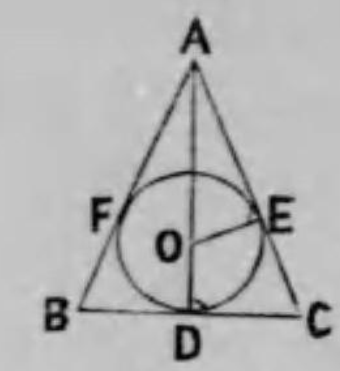
故ニ $\pi.\left(\frac{16}{\pi}\right)^2 h=\frac{4}{3}\pi\times5^3$, $\therefore$ $h=\frac{4}{3}\times125\times\frac{3.1416^2}{16^2}=19.27$ (尺) 餘.

(ii) 同上 答 41.8 尺弱.

(iii) 所要ノ體積ノ比 $=\frac{1}{6}\pi.6^3:\frac{1}{3}\pi\left(\frac{6}{2}\right)^2\times4$ 卽チ $36:12$ 卽チ $3:1$.

(iv) 直圓錐 (A−BC) ノ高サ AD ヲ含ム平面ニテノ截リ口ヲ △ABC トセバ，之ニ內切スル圓 O ハ直圓錐ノ內切球ノ截リ口ニシテ其切點ヲ D, E, F トセバ OD, OE, OF ハ球ノ半徑ナリ.

而シテ 等角ナル 直△AOE∽直△ACD ナルユヱ



$AO:OE=AC:CD$

卽チ $12-OE:OE=\sqrt{(12^2+5^2)}:5$

故ニ $12:OE=13+5:5$

$\therefore$ $OE=\frac{12\times5}{18}=\frac{10}{3}$ (寸).

$\therefore$ 所要ノ球ノ面積 $=4\pi.\left(\frac{10}{3}\right)^2=4\times3.14159\times\frac{100}{9}=139.63$ (平方寸) 弱.

又 所要ノ球ノ體積 $=\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{10}{3}\right)^3=\frac{4}{3}\times3.14159\times\frac{1000}{27}=155.14$ (立方寸) 强.

14. (a) (i) 邊 AB ヲ軸トシテ矩形 ABCD ヲ一廻轉シテ生ズル體ノ體積ト對角線 AC ヲ軸トシテ三角形 ABC ヲ一廻轉シテ生ズル體ノ體積トノ比ヲ求メヨ，但シ AB ハ 3 尺, BC ハ 5 尺トス. (名工)

(ii) 面積 a^2 ナル矩形ノ相隣レル二邊ヲ軸トシテ夫々之ヲ一廻轉シテ生ズル二ツノ直圓壔ノ體積ノ差ガ，半徑 $\frac{a}{2}$ ナル球ノ體積ノ 3 倍ニ等シキトキハ，矩形ノ二邊幾何. (海機)

(b) (i) 直三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ガ七寸及ビ二尺四寸ナルトキ，斜邊ヲ軸トシテ元形ヲ一回旋轉シテ生ズル體ノ體積ヲ求メヨ. (陸士)

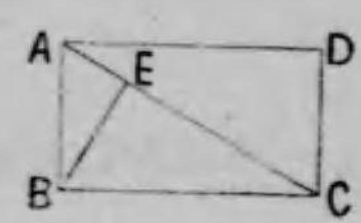
(ii) 邊ノ比 3:4:5 ナル直三角形ノ各邊ヲ夫々軸トシテ廻轉セシメテ生ズル立體ノ體積ヲ比較セヨ. (仙工)

(c) (i) 直三角形ノ直角ニ隣レル二邊ハ夫々四尺及ビ五尺ナリ，斜邊ヲ軸トシテ此三角形ヲ一廻轉スルトキ生ズル立體ノ體積及ビ此立體ニ内切スル球ノ體積ヲ計算セヨ. （東工）

(ii) 三角形 ABC ニ於テ BC ハ 18 寸, CA ハ 15 寸, AB ハ 12 寸ナルトキ，邊 BC 上ニ中心ヲ有シ且ツ他ノ二邊ニ切スル樣ニ半圓ヲ内切セシメ，BC ヲ軸トシテ此半圓ヲ一廻轉シタル體ノ面積及ビ體積ヲ求メヨ. 次ニ此體積ニ等シキ容量ヲ升ニテ表ハセ. （陸士）

〔解〕 (a) (i) AB ヲ軸トシタル廻轉體ハ直圓壔ニシテ，其體積 $V=\pi.\overline{BC}^2.AB$.

又 AC ヲ軸トシタル廻轉體ハ AC ヘノ垂線 BE ヲ底トスル二ツノ直圓錐ノ和ニシテ，



其體積 $V'=\frac{1}{3}\pi.\overline{BE}^2.AE+\frac{1}{3}\pi.\overline{BE}^2.EC$

$=\frac{1}{3}\pi.\overline{BE}^2(AE+EC)=\frac{1}{3}\pi.\overline{BE}^2.AC.$

$\therefore\ V:V'=\pi.\overline{BC}^2.AB:\frac{1}{3}\pi.\overline{BE}^2.AC=BC:\frac{1}{3}BE$ 〔$BC.AB=\frac{1}{2}\triangle ABC=BE.AC$〕

$=3BC:\frac{AB.BC}{AC}=3AC:AB=3\sqrt{3^2+5^2}:3=\sqrt{34}:1.$

(ii) 矩形ノ二邊ヲ x, y トスレバ $xy=a^2$ ……………(1)

又二邊ヲ軸トシテ夫々一廻轉シテ生ジタル二ツノ直圓壔ノ體積ハ夫々 πx^2y, πy^2x ナリ.

故ニ $x>y$ トセバ $\pi x^2y-\pi y^2x=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3\times 3$ 卽チ $xy(x-y)=\frac{1}{2}a^3$ …………(2)

此 (1) ヲ (2) ニ代用スレバ $x-y=\frac{1}{2}a$ ……………(3)

(1), (3) ヲ解キ正根ノミヲ取リテ $x=\frac{\sqrt{17}+1}{4}a$, $y=\frac{\sqrt{17}-1}{4}a$.

(b) (i) 118 頁上圖ヲ用フ. $BC=\sqrt{7^2+24^2}=25$, $AD\times 25=\frac{1}{2}\triangle ABC=7\times 24$ ナルユヱ $AD=6.72$ (寸). 故ニ 117 頁ノ 4 題ノ (a) ト同樣ニ

所要ノ體積$=\frac{1}{3}\pi.\overline{AD}^2.BC=\frac{1}{3}\times 3.1416\times(6.72)^2\times 25=118.25$ (立方寸) 弱.

(ii) 117 頁ノ 4 題 (a) ト同樣ニ

所要ノ體積ノ比$=\frac{1}{3}\pi.\overline{AC}^2.AB:\frac{1}{3}\pi.\overline{AB}^2.AC:\frac{1}{3}\pi.\overline{AD}^2.BC$

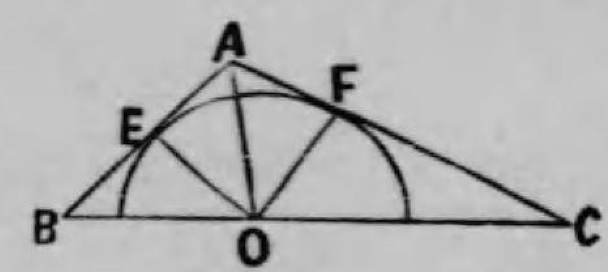
$=\overline{AC}^2.AB:\overline{AB}^2.AC:\frac{AB.AC}{BC}$ 〔$AD.BC=\frac{1}{2}\triangle ABC=AB.AC$〕

$=AC.BC:AB:1=4\times 5:3:1$

$=20:3:1.$

(c) (i) ノ廻轉體ノ體積ハ (b) (i) ト全ク同樣ナリ 答 65.42 立方尺.

次ニ斜邊 BC 上ニ中心 O ヲ有シ AB, AC ニ E, F ニ於テ切スル圓ヲ畫キ，之レヲ BC ヲ軸トシテ一廻轉スルトキハ内切球ヲ得テ OE, OF ハ其半徑ナルコト明カナリ. 而シテ



$\triangle AOB+\triangle AOC=\triangle ABC$

卽チ $\frac{1}{2}AB.OE+\frac{1}{2}AC.OF=\frac{1}{2}AB.AC$, 依テ $AB=4$, $AC=5$ トセバ $OE=OF$ ナルユヱ $OE=OF=\frac{20}{9}$.

$\therefore$ 内切球ノ體積$=\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{20}{9}\right)^3=45.97$ (立方尺).

(ii) 上圖ヲ任意ノ三角形トシテ用フ.

$2s=a+b+c=18+15+12$ ナルユヱ $s=22.5$.

故ニ $\triangle ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{22.5\times 4.5\times 7.5\times 10.5}$

$=\sqrt{5\times 4.5\times 4.5\times 5\times 1.5\times 7\times 1.5}=5\times 4.5\times 1.5\times\sqrt{7}.$

又圓心ヲ O トシ，半徑ヲ r トセバ $\triangle ABC=ABO+\triangle ACO=\frac{1}{2}r(12+15)=13.5\,r.$

故ニ $5\times 4.5\times 1.5\times\sqrt{7}=13.5\,r$, $\therefore\ r=2.5\times\sqrt{7}$ (寸).

$\therefore$ 所要ノ球ノ面積$=4\pi.(2.5\times\sqrt{7})^2=175\times 3.14159$

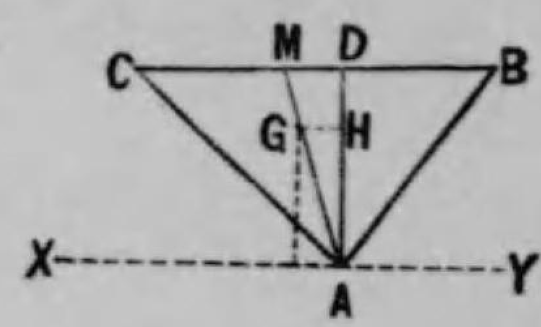
$=549.77$………(平方寸).

又 所要ノ球ノ體積$=\frac{4}{3}\pi.(2.5\times\sqrt{7})^2=\frac{875}{6}\times 3.141592\ldots\ldots\times 2.645751\ldots\ldots$

$=1212.1$………(立方寸)

此體積ヲ升ニ直セバ 1212.1………$\div 64.827=18.69$…… 卽チ 18.7 升弱.

15. 右圖ニ於テ AB=10 寸, BC=21 寸, CA=17 寸トス. 今 A ヲ通ジテ BC ニ平行ナル直線 XY ヲ軸トシテ △ABC ノ平面ヲ一廻轉スルトキ, 次ノ各々ヲ計算セヨ.



(*a*) △ABC ノ作ル廻轉體ノ體積.

(*b*) △ABC ノ重心ノ畫ク徑路ト △ABC ノ面積トノ乘積. （大工）

〔解〕 AD⊥BC トセバ $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2.BC.CD$ 卽チ $10^2=17^2+21^2-2\times 21\times CD$

∴ CD=15. 從テ直△ACD ニ於テ $AD=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{17^2-15^2}=8.$

(*a*) AB ヲ軸トシタル △ABC ノ體積 V ハ, BC ヲ母線トシタル直圓壔ヨリ AC 及ビ AB ヲ斜高トシタル二ツノ直圓錐ヲ減ジタルモノニシテ, 其底半徑ハ何レモ AD ニ等シ.

$$\therefore\ V=\pi.\overline{AD}^2.BC-\frac{1}{3}\pi.AD.BC=\frac{2}{3}\pi.\overline{AD}^2.BC=\frac{2}{3}\times 3.1416\times 8^2\times 21$$

$$=2814.87\ldots\ldots\text{(立方寸)}.$$

(*b*) BC ノ中點ヲ M トシ, 重心ヲ G トシ, GH//BC トセバ △AHG∽△ADM ナルニヨ $AH:AD=AG:AM=\frac{2}{3}AM:AM=\frac{2}{3}:1,\quad \therefore\ AH=\frac{2}{3}AD.$

而シテ GH//XY ナルニヨ G ノ畫ク徑路ハ H ノ畫ク徑路ニ等シクシテ $\pi.\overline{AH}^2$ ナリ,

又 $\triangle ABC=\frac{1}{2}BC.AD.\quad \therefore$ 所要ノ乘積 $=\pi.\overline{AH}^2\times\frac{1}{2}BC.AD=\frac{2}{3}\pi.\overline{AD}^2.BC$

之レ △ABC ノ作レル廻轉體ト同一ナリ.

──{立體幾何學ノ部終}──

大正五年三月十一日印刷
大正五年三月十五日發行

正價金五拾錢

著者　原濱吉　東京市牛込區南榎町五十七番地

發行者　金刺源次　東京市神田區今川小路一丁目五番地

印刷者　赤羽正己　東京市芝區南佐久間町一丁目一番地

關東大賣捌　東京堂書店　東京市神田區表神保町二番地

關西大賣捌　三宅書店　大阪市東區南本町四丁目

印刷所　東洋印刷株式會社　東京市芝區愛宕町三丁目二番地

發行所　東京市神田區今川小路一丁目五番地（電話本局七六六番）　金刺芳流堂　振替貯金口座東京（八四二四）

地方大賣捌所

京都市二條通リ河原町　寶文館
同市寺町通リ二條　若林書店
名古屋市本町三丁目　川瀬書店
同市玉屋町一丁目　百架堂書店
同市同町三丁目　永東書店
神戸市元町通リ五丁目　寶文館支店
廣島市鹽屋町　積善館
同市東横町　友田書店
福岡市博多中島町　積善館支店
久留米市米屋町　菊竹書店
熊本市新二丁目　長崎次郎
佐賀市呉服町　大坪書店
鹿兒島市東千石町　久永金光堂
同市中町俊寛堀町　谷村書店
徳島市西新町五丁目　黒崎書店
高知市種崎町　澤本書店
高松市丸龜町　宮脇書店
松山市湊町　土肥書店
同市同町　向井書店
大連市大山通リ　大阪屋號
朝鮮京城本町　日韓書房
同京城本町　大阪屋號

金澤市片町　宇都宮書店
福井市佐佳枝中町　品川書店
同市佐佳枝上町　中六書店
富山市東四十物町　中田書店
同市西三番町　福田書店
高岡市守山町　學海堂書店
長野市大門町　西澤書店
松本市本町壹丁目　松榮堂書店
新潟市古町通リ六　萬松堂支店
長岡市表三ノ町　覺張書店
同市表四ノ町　目黒書店
仙台市大町四丁目　金港堂支店
同市大町五丁目　鈴英書店
盛岡市呉服町　佐々木書店
青森市米町四丁目　今泉支店
弘前市土手町　今泉本店
秋田市茶町菊之町　成見書店
山形市七日町　五十嵐書店
前橋市曲輪町　煥乎堂書店
甲府市柳町　柳正堂書店
函館區末廣町　魁文舍書店
札幌區南一條西三丁目　富貴堂書店

終