例　言

是書係按中學稍高之程度編輯故關於高等之學理亦間有採取

是書分平弧兩種平三角法約含八十餘課弧三角法約含五十餘課共計約含一百四十課

是書中之對數表篇與代數中相同本應删去以免重複但恐教授之先後不同至三角中用對數時而代數中尚未論及致使學者向隅故本書仍存斯篇教授時適宜取捨可也

是編乃以陳文氏平三角法及溫特渥氏弧三角法為主參以長澤氏與平氏諸家之書以期完善

是書行文悉用橫行庶免與算式參差學語數目代量等字皆採近今通行者

公式另錄成表附諸篇末以便查閱

目　錄

第　一　編

平　三　角　法

第二編

弧三角法

第一編
平面三角法

第一章
角之測法

1. 測角法 　係以任意角爲單位俱可用以爲測角之準

例如幾何學中所論三角形其三內角之和等於兩直角乃以直角爲單位者也卽以任意角爲單位亦可但普通恒用六十分法

2. 六十分法(或名常度) 　係一直角平分爲九十份每份謂之度一度平分爲六十份每份謂之分一分再平分爲六十份每份謂之秒

度分秒之數字恒用 °′″ 等記號書於各單位之右肩以示之

例如 d 度 m 分 S 秒即記爲 $d^\circ m' S''$ 此外尚有百分法

3. 百分法　係一直角平分爲百份每份謂之佛度一佛度平分爲百份每份謂之分一分再平分爲百份每份謂之秒如此則無論何角亦可用以測之度分秒之數字恒用 g ˋ ˋˋ 記號書於各單位右肩之上如35度23分16秒即記爲 $35^g\,23^{`}\,16^{``}$ 然現今用之者甚稀故是編略之

4. 單位之互變　凡角有以直角爲單位及以六十分法爲單位所測得之值二者任知其一種則他種即可推得例如次

例一　知直角之度變爲六十分度

(1)　設知一直角之$\frac{45}{64}$求以六十分法示之

解　$\frac{45}{64}\hat{R}=\left(\frac{45}{64}\times 90\right)^\circ=63\frac{9}{32}$

又　$\left(\frac{9}{32}\right)^\circ=\left(\frac{9}{32}\times 60\right)'=16'\frac{7}{8}$

又　$\left(\frac{7}{8}\right)'=\left(\frac{7}{8}\times 60\right)''=32''.5$

答　$63^\circ,\ 16',\ 32''.5$

(2)　設知一直角之 0.01375 求以六十分法示之

解　$0.01375\,\hat{R}=(0.01375\times 90)^\circ=1^\circ.2375$

又　$0^\circ.2375=(0.2375\times 60)'=14'.25$

又　$0.25=(0.25\times 60)''=15''$

答　$1^\circ, 14', 15''$

例二　知六十分法之度數化爲直角之數其法宜用次式

如 $d^\circ m' S'' = \left(\frac{d}{90} + \frac{m}{60\times 90} + \frac{S}{90\times 60\times 60}\right)\hat{R}$

例　求 $8^\circ 15' 27''$ 爲幾直角

解 $8^\circ 15' 27'' = \left(\frac{8}{90} + \frac{15}{90\times 60} + \frac{27}{90\times 60\times 60}\right)\hat{R}$

$= \left(\frac{8}{90} + \frac{1}{90\times 4} + \frac{3}{90\times 20\times 20}\right)\hat{R}$

$= \frac{3200+100+3}{90\times 400}\hat{R}$

$= \frac{3303}{36000}\hat{R} = \frac{367}{4000}\hat{R}$

$= 0.09175\,\hat{R}$

答　0.09175 直角

問題一

1、化次之諸角爲六十分度

(1) $\frac{11}{16}$ 直角　(2) 0.678 直角　(3) 0.0241 直角

2、化次之諸角爲直角之數

(1) $2907'$,　(2) $11^\circ 5'$,　(3) $8^\circ 0' 36''$,　(4) $45' 5''.44$,

3、時鐘之長針間每一分鐘時經過幾度之角

4、二等邊三角形之各底角若頂角之二倍求各

角度數

5. 求正六角形之一角度數

6. 有二角其和 84° 其差 0.1 直角求各爲幾度及爲直角之幾何

7. 二點三十分五十六秒時求鐘之長短針所夾之角度

第二章

銳角之三角函數

1. 定義 凡一圓周以正交二徑分之則成四象限

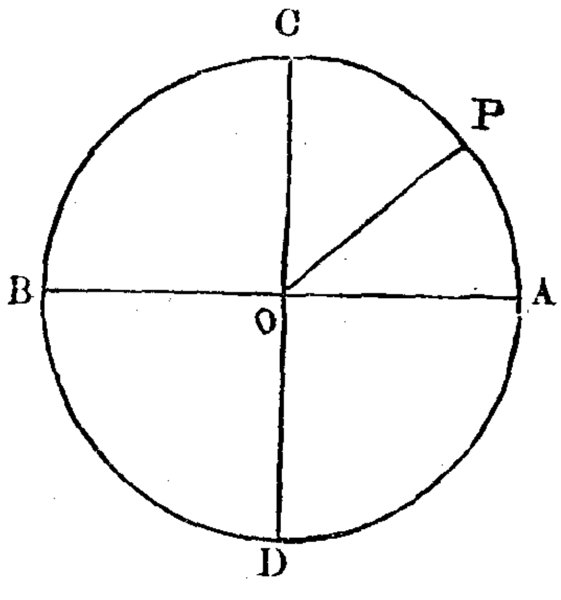
如圖 COD 與 AOB 正交於圓心 O 點所成之

AOC 稱爲第一象限

COB 稱爲第二象限

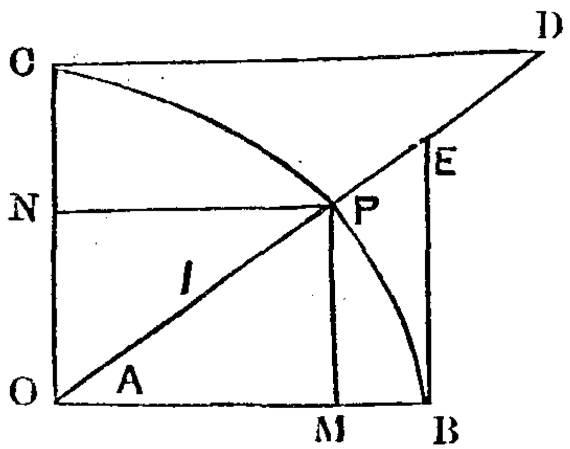
BOD 稱爲第三象限

DOA 稱爲第四象限



今以OA爲本線繞O點左轉作任意之角若動徑OP在第一象限內則AOP謂之第一象限之角餘倣此

2. 在第一象限內有任意之角如A則PM爲A角之正弦以sin A記之



NP(=OM)爲A角之餘弦以cos A記之

EB爲A角之正切以tan A記之

OD爲A角之餘切以cot A記之

OE爲A角之正割以sec A記之

OD爲A之餘割以cosec A記之

又MB爲A角之正矢NO爲A角之餘矢然今無用故略

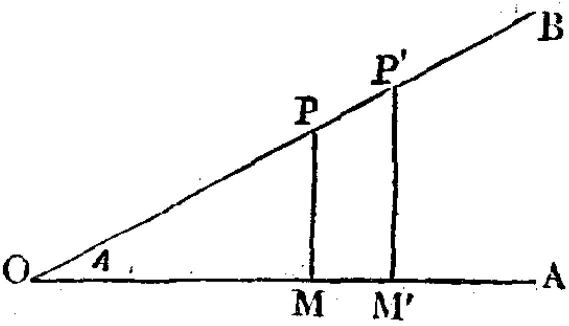
以上六項統稱爲A角之圓函數又名三角函數

又OP=OB=OC謂之半徑以r字顯之

3. 凡三角函數但與其角之大小有

關係而不關於邊之長短

如圖設任意之銳角A於其任意之邊OB上除角頂點外任取P,P'兩點作PM,P'M'為OA



之垂線則POM及P'OM'兩三角形為相似

依幾何學定理則 $\frac{PM}{OP}=\frac{P'M'}{OP'}$ 故其三角函數亦必相同今依同式形統可得次之六個比例式

第一 $\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}=\frac{PM}{OP}=\frac{\sin A}{r}$

因 r 通常設為 1 故 $\frac{PM}{OP}=\sin A$ (以下準此)

第二 $\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$ 即 $\frac{OM}{OP}=\cos A$

第三 $\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$ 卽 $\frac{PM}{OM}=\tan A$

第四 $\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$ 即 $\frac{OM}{PM}=\cot A$

第五 $\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$ 卽 $\frac{OP}{OM}=\sec A$

第六 $\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$ 卽 $\frac{OP}{PM}=\operatorname{cosec} A$

注意 正弦(sin)及餘弦(cos),正切(tan)及餘切(cot),

正割(sec)及餘割(cosec)互謂之餘函數

又 sin A 等原爲表 A 角中正弦等之記號故 sin 與 A 不能分離 又 sin A + sin B 乃顯 A 之正弦與 B 之正弦之和原非 A 與 B 之和之正弦 sin(A+B)

又$(\sin A)^2$, $(\cos A)^3$ 等當記爲 $\sin^2 A$, $\cos^3 A$ 學者宜熟記

問　題　二

1. 直角三角形之三邊爲三寸四寸五寸求其最小角之正弦餘弦正切各幾何

2. 以 C 爲直角之三角形 ABC 上若其 AB=5, BC=4 求各銳角之正弦及餘弦函數

3. 直角三角形之直角傍二邊爲 8 及 15 求各角之正切及餘割函數

4. 直角三角形之直角傍二邊爲 28, 及 45 求其大銳角之正弦函數

5. 直角三角形其三邊之比爲 33, 56, 65 求其最小角之餘切正割餘割各幾何

6. 直角三角形其三邊之比爲 25 : 24 : 7 求各銳角之餘切函數

7. 直角三角形之直角傍二邊爲 $\sqrt{m^2+n^2}$, 及 $\sqrt{2mn}$ 求最小角之正弦函數

8. 有以 C 爲直角之 ABC 三角形其 $\tan A=\frac{11}{3}$ $AC=\frac{27}{11}$ 求 AB

3. 三角函數之關係

今將同角度之三角函數揭其重要之關係如次

第一 <u>二種關係</u>

$$\sin A\cdot\operatorname{cosec} A=\frac{垂}{斜}\times\frac{斜}{垂}=1\text{......................}(1)$$

$$\cos A\cdot\sec A=\frac{底}{斜}\times\frac{斜}{底}=1\text{......................}(2)$$

$$\tan A\cdot\cot A=\frac{垂}{底}\times\frac{底}{垂}=1\text{......................}(3)$$

第二 <u>三種關係</u>

$$\tan A=\frac{垂}{底}=\frac{垂}{斜}\div\frac{底}{斜}=\frac{\sin A}{\cos A}\text{..................}(4)$$

$$\cot A=\frac{底}{垂}=\frac{底}{斜}\div\frac{垂}{斜}=\frac{\cos A}{\sin A}\text{..................}(5)$$

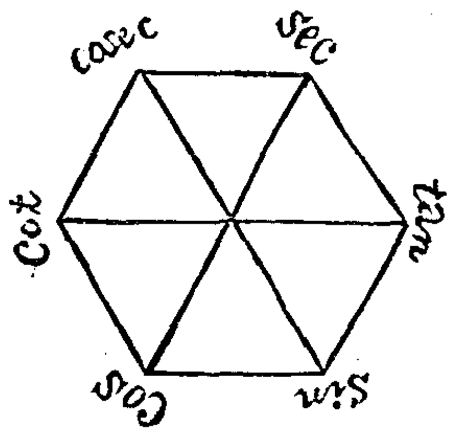
第三 <u>平方關係</u>

$$\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{垂}{斜}\right)^2+\left(\frac{底}{斜}\right)^2=\left(\frac{斜}{斜}\right)^2=1\text{...........}(6)$$

$$1+\tan^2 A=1+\left(\frac{垂}{底}\right)^2=\frac{斜^2}{底^2}=\sec^2 A\text{......................}(7)$$

$$1+\cot^2 A=1+\left(\frac{底}{垂}\right)^2=\frac{斜^2}{垂^2}=\operatorname{cosec}^2 A \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

注意　以上八個關係乃三角法之基礎公式最為重要學者須熟記之



4. 恆等式之證明法

依前節之公式能證明含三角函數之各種恆等式

例一　$\tan A+\cot A=\sec A\operatorname{cosec} A$ 求證之

證　$$\tan A+\cot A=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}$$

$$=\frac{1}{\cos A\sin A}$$

$$=\sec A\operatorname{cosec} A$$

$$\therefore\quad \underline{\tan A+\cot A=\sec A\operatorname{cosec} A}$$

例二　$(1-\sec A+\tan A)(\sec A+\tan A+1)$

$=(1+\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A-1)$ 求證之

證 $(1-\sec A+\tan A)(\sec A+\tan A+1)$

$=(1+\tan A-\sec A)(1+\tan A+\sec A)$

$=\overline{1+\tan A}^2-\sec^2 A$

$=1+2\tan A+\tan^2 A-\sec^2 A$

$=2\tan A+\sec^2 A-\sec^2 A$

$=2\tan A\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

又證 $(1+\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A-1)$

$=(\sec A+\overline{1-\tan A})(\sec A-\overline{1-\tan A})$

$=\sec^2 A-(1-\tan A)^2$

$=\sec^2 A-(1-2\tan A+\tan^2 A)$

$=\sec^2 A-(1+\tan^2 A-2\tan A)$

$=\sec^2 A-\sec^2 A+2\tan A$

$=2\tan A\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

由前(1)(2)式之證得本題左邊及右邊之式共為 $2\tan A$

故 $\underline{(1-\sec A+\tan A)(\sec A+\tan A+1)}$

$=\underline{(1+\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A-1)}$

注意 證二式恒等如例一各段皆變化左邊而為右邊之式又如例二分別變化左邊及右邊為相等之式然究以用例一之證法為妥

問題三

證以下諸式

1. $\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A \sin^2 A$

2. $\cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A \cos^2 A$

3. $\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A$

4. $\operatorname{cosec} A - \sin A = \cot A \cos A$

5. $\sec A - \cos A = \tan A \sin A$

6. $\cot A + \tan A = \sec A \operatorname{cosec} A$

7. $\sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A$

8. $\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2\sin^2 A \cos^2 A$

9. $\sin^6 A + \cos^6 A = 1 - 3\sin^2 A \cos^2 A$

10. $\dfrac{1}{1+\tan^2 A} + \dfrac{1}{1+\cot^2 A} = 1$

11. $(1+\tan A)^2 + (1+\cot A)^2 = (\sec A + \operatorname{cosec} A)^2$

12. $\sec A + \tan^3 A \operatorname{cosec} A = \sec^3 A$

13. $\cot A - \sec A \operatorname{cosec} A(1 - 2\sin^2 A) = \tan A$

14. $\dfrac{(\sec A + \operatorname{cosec} A)^2}{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A} = 1 + 2\sin A \cos A$

15. $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A} = (\operatorname{cosec} A - \cot A)^2$

16. $\sin A(1+\tan A) + \cos A(1+\cot A) = \operatorname{cosec} A + \sec A$

17. $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2$

18. $(1+\cos A)^2+(1+\sin A)^2=3+2(\sin A+\cos A)$

19. $\tan A(1-\cot^2 A)+\cot A(1-\tan^2 A)=0$

20. $(\sin A+\cos A)(\tan A+\cot A)=\sec A+\operatorname{cosec} A$

21. $(1+\cos-A\sin^2 A)(1-\cos A)^2+(1+\sin A-\cos^2 A)^2$

$$(1-\sin A)^2=\sin^2 A\cos^2 A$$

22. $\cot^2 A\times\dfrac{\sec A-1}{1+\sin A}+\sec^2 A\times\dfrac{\sin A-1}{1+\sec A}=0$

23. $\sin^3 A\cos A+\cos^3 A\sin A=\sin A\cos A$

24. $\dfrac{\sin^2 A}{1+\cos A}=1-\cos A$

25. $\dfrac{\tan A}{1-\tan^2 A}=\dfrac{\sin A\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 A}$

26. $\sin^2 A\tan^2 A+\cos^2 A\cot^2 A=\tan^2 A+\cot^2 A-1$

27. $(\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A)=1$

28. $\dfrac{2\sin A\cos A-\cos A}{1-\sin A+\sin^2 A-\cos^2 A}=\cot A$

29. $(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2-(\tan A+\cot A)^2=2\sec A\operatorname{cosec} A$

30. $\dfrac{\tan^2 B}{1+\tan^2 B}\times\dfrac{1+\cot^2 B}{\cot^2 B}=\sin^2 B\sec^2 B$

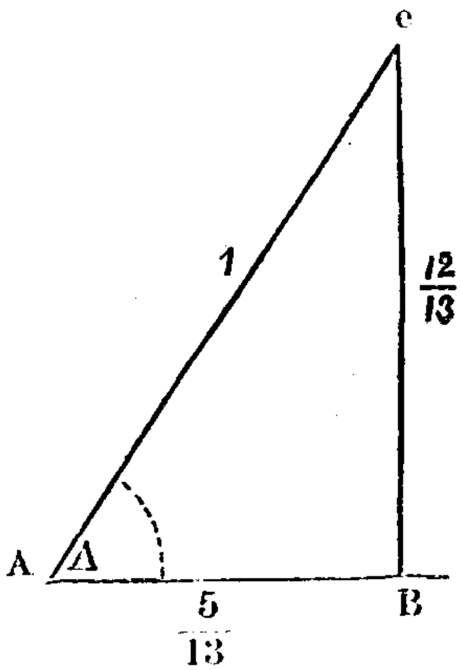
5. 知三角函數之一求他種之法

無論何角任知其三角函數之一則於關於此角之斜邊垂線底邊三者中設其用爲分母之邊爲1(即作

此函數用者)則用爲分子之邊等於此函數之值而其餘一邊由勾股定理卽可知之從而一切函數皆能求出或依前八個關係推之亦可

例一 設 $\sin A=\frac{12}{13}$ 求 A 之餘函數

解 依本章定義知



$\sin A=\frac{CB}{AC}$ 今

定 $AC=1$，則 $CB=\frac{12}{13}$，$AB=\frac{5}{13}$

$\therefore\ \cos A=\frac{5}{13}$

$\tan A=\frac{12}{13}\div\frac{5}{13}=\frac{12}{5}$

$\cot A=\frac{5}{13}\div\frac{12}{13}=\frac{5}{12}$

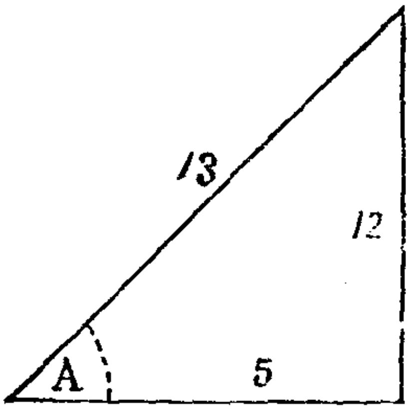
$\sec A=1\div\frac{5}{13}=\frac{13}{5}$

$\operatorname{cosec} A=1\div\frac{12}{13}=\frac{13}{12}$

或依公式求之則 $\cos A=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$ (依6式)

$\tan A=\frac{12}{13}\div\frac{5}{13}=\frac{12}{5}$ (依4式)

$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{5}{12}$ (依5式)



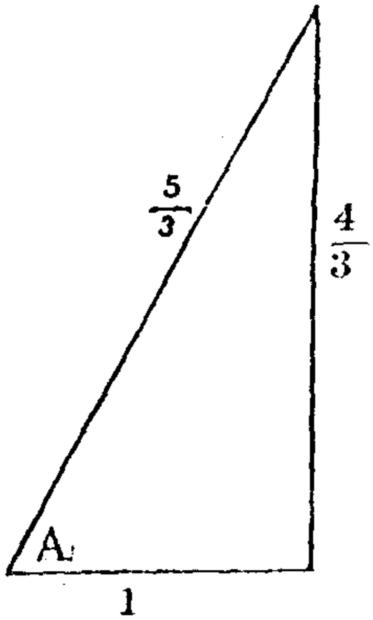
$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{13}{5} \qquad \text{(依 2 式)}$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{13}{12} \qquad \text{(依 1 式)}$$

例二 設 $\tan A=\dfrac{4}{3}$ 求其餘函數

解 命 A 角底邊 $=1$ 則

垂線 $=\dfrac{4}{3}$ 斜邊 $=\sqrt{1+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2}=\dfrac{5}{3}$



$$\therefore \quad \sin A=\frac{4}{3}\div\frac{5}{3}=\frac{4}{5}$$

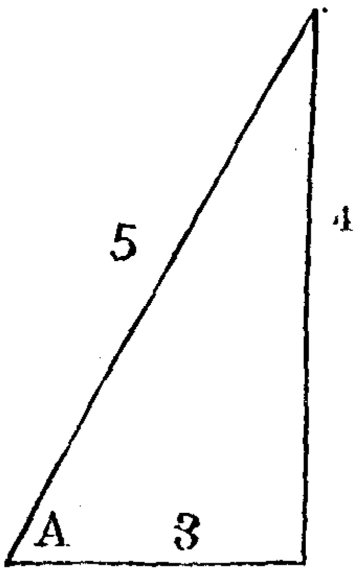
$$\cos A=1\div\frac{5}{3}=\frac{3}{5}$$

$$\cot A=1\div\frac{4}{3}=\frac{3}{4}$$

$$\sec A=\frac{5}{3}\div 1=\frac{5}{3}$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{5}{3}\div\frac{4}{3}=\frac{5}{4}$$

或依公式得



$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{3}{4} \qquad \text{(依 3 式)}$$

$$\sec A=\sqrt{1+\tan^2 A}=\frac{5}{3} \qquad \text{(依 7 式)}$$

$$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{3}{5} \qquad \text{(依 2 式)}$$

$$\operatorname{cosec} A=\sqrt{1+\cot^2 A}=\frac{5}{4} \qquad \text{(依 8 式)}$$

$$\sin A=\frac{1}{\operatorname{cosec} A}=\frac{4}{5} \qquad \text{(依 1 式)}$$

問題四

1. 設 $\sin A$ 之値 $=\frac{99}{101}$ 求其餘函數

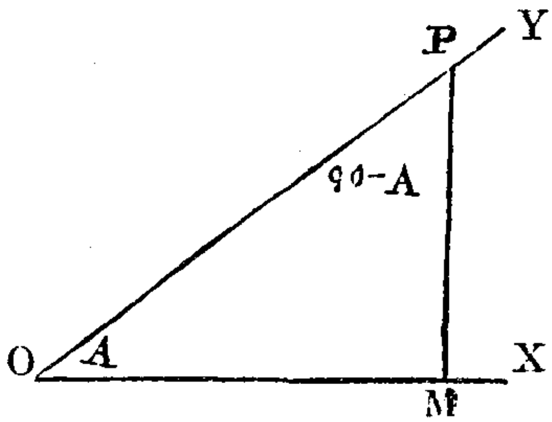
2. 設 $\cos A=.53$ 求其正切及正割之函數

3. 設 $\tan A=\frac{40}{9}$ 求其餘函數

4. 設 $\cot A=\frac{8}{15}$ 求其餘割及正弦之函數

5. 設 $\sec A=\frac{41}{9}$ 求其餘函數

6. 餘角之三角函數



有任意之銳角 A 在其一邊 OY 上任取一點 P 作 PM 為 OX 上之垂線則由三角函數之定義得次之關係

$$\sin(90^\circ-A)=\frac{OM}{OP}=\cos A$$

$$\cos(90^\circ-A)=\frac{PM}{OP}=\sin A$$

$$\tan(90^\circ-A)=\frac{OM}{PM}=\cot A$$

$$\cot(90^\circ-A)=\frac{MP}{OM}=\tan A$$

$$\sec(90^\circ-A)=\frac{OP}{PM}=\operatorname{cosec}A$$

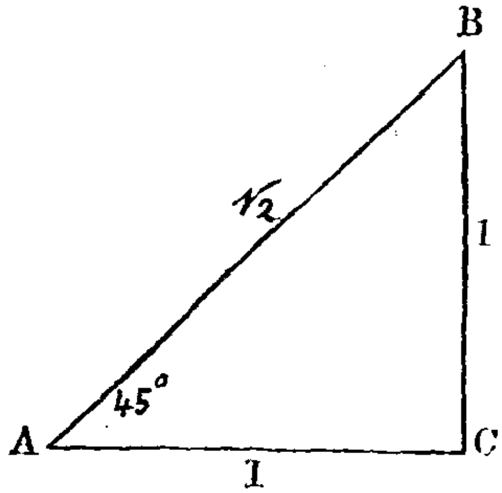
$$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\frac{OP}{OM}=\sec A$$

$90^\circ-A$ 爲 A 之餘角

據上式$(90^\circ-A)$之各三角函數與A之各三角函數其同數之項互爲餘函數

7. 特別之三角函數

第一 45° 之三角函數



設 ABC 爲等腰直角三角形其頂角 C 爲直角

依幾何學理則

$$AB=\sqrt{(AC)^2+(BC)^2}$$

$$=\sqrt{2(AC)^2}$$

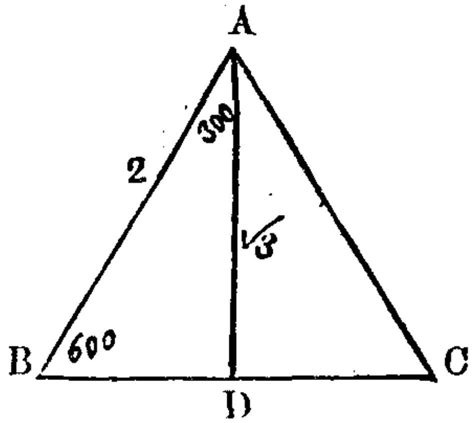
$$=AC\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad \sin 45^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45^\circ$$

$$\tan 45^\circ=\frac{BC}{AC}=1=\cot 45^\circ$$

$$\sec 45^\circ=\frac{AB}{AC}=\sqrt{2}=\operatorname{cosec}45^\circ$$

第二 30° 及 60° 之三角函數



設 ABC 爲等邊之三角形依幾何學題理從 A 點作 AD 爲 BC 之垂線則 AD 必平分 A 角並平分 BC,

故　$BD=\frac{1}{2}AB$

又
$$AD=\sqrt{(AB)^2-(BD)^2}$$
$$=\sqrt{(AB)^2-\frac{(AB)^2}{4}}$$
$$=\sqrt{\frac{3(AB)^2}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$$

$$\therefore\quad \sin 60^\circ=\frac{AD}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$$
$$\cos 60^\circ=\frac{BD}{AB}=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$$
$$\tan 60^\circ=\frac{AD}{BD}=\sqrt{3}=\cot 30^\circ$$
$$\cot 60^\circ=\frac{BD}{AD}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30^\circ$$
$$\sec 60^\circ=\frac{AB}{BD}=2=\operatorname{cosec} 30^\circ$$
$$\operatorname{cosec} 60^\circ=\frac{AB}{AD}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\sec 30^\circ$$

依前二欵可得 30°, 45°, 60°, 角之三角函數可以

表集之如下

函數 / 度	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

例一 已知 $\cos 2A=\sin 3A$ 求 A 之度數

解 $\because\ \cos 2A=\sin(90°-2A)$

由此則 $\sin(90°-2A)=\sin 3A$

$\therefore\ 90°-2A=3A$

故 $A=18°$

例二 設 $\tan^2 60°+2\tan^2 45°$ 求其數值為何

解 $\tan^2 60°+2\tan^2 45°=(\sqrt{3})^2+2\times 1^2$

$=3+2$

$=5$

例三 求證 $\tan A+\tan(90°-A)=\sec A\sec(90°-A)$

證 $\tan A+\tan(90°-A)=\tan A+\cot A$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}$$

$$=\frac{1}{\cos A\sin A}$$

$$=\sec A\ \mathrm{cosec}\ A$$

$$=\sec A\sec(90^\circ-A)$$

$$\therefore\quad \tan A+\tan(90^\circ-A)=\sec A\sec(90^\circ-A)$$

問題五

求次諸式A角之度數

1. $\sin 2A=\cos 4A$
2. $\cos 3A=\sin 7A$
3. $\tan A=\cot 3A$
4. $\cot A=\tan 2A$
5. $\sec 5A=\mathrm{cosec}\ A$
6. $2\cos A=\sec A$
7. $4\sin A=\mathrm{cosec}\ A$
8. $4\cos A=3\sec A$
9. $3\tan A=\cot A$

次之諸式求證之

10. $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = 1$

11. $\cos 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 30^\circ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

12. $3\tan^2 30^\circ + \frac{1}{4}\sec 60^\circ + 5\cot^2 45^\circ - \frac{2}{3}\sin^2 60^\circ = 6$

13. $\frac{1}{3}\sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\sec 60^\circ \tan^2 30^\circ + \frac{4}{3}\sin^2 45^\circ \tan^2 60^\circ = \frac{23}{12}$

14. $\frac{\cos 60^\circ + \cos 30^\circ}{\sec 60^\circ + \sec 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

15. $\tan 60^\circ \sin^2 45 = \cos 30^\circ$

16. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ + \tan 60^\circ = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ + \cot 30^\circ$

17. $\sin^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ = \frac{1}{6}\tan 60^\circ \cot 30^\circ$

18. $\frac{\cos 45^\circ - \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ + \sin 30^\circ} = (\operatorname{cosec} 45^\circ - \cot 45^\circ)^2$

19. $\frac{1 - \tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \cos 60^\circ$

20. $\frac{1 - \sin 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ} = 1 - \cos^2 30^\circ$

21. $\sin(90^\circ - A)\cot(90^\circ - A) = \sin A$

22. $\sin A \tan(90^\circ - A)\sec(90^\circ - A) = \cot A$

23. $\sin A \cot A \cot(90^\circ - A)\sec(90^\circ - A) = 1$

24. $\tan(90^\circ - A) + \cot(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec}(90^\circ - A)$

25. $\sec(90^\circ - A) - \cot A \cos(90^\circ - A)\tan(90^\circ - A) = \sin A$

26. $\frac{\sin(90^\circ - A)}{\sec(90^\circ - A)} \times \frac{\tan(90^\circ - A)}{\cos A} = \cos A$

27. $\dfrac{\cot(90^\circ-A)}{\operatorname{cosec}^2A}\times\dfrac{\operatorname{cosec}(90^\circ-A)\cot^3A}{\sin^2(90^\circ-A)}=\sec A$

28. $\dfrac{\cot^2A\sin^2(90^\circ-A)}{\cot A+\cos A}=\tan(90^\circ-A)-\cos A$

29. $\dfrac{\operatorname{cosec}^2A\tan^2A}{\cot(90^\circ-A)}\times\dfrac{\cot A}{\sec^2A}=\sec^2(90^\circ-A)-1$

30. $\dfrac{\cot(90^\circ-A)}{\operatorname{cosec}^2A}\times\dfrac{\sec A\cot^2A}{\sin^2(90^\circ-A)}=\sqrt{\tan^2A+1}$

8. 三角函數表用法

求作任何角之三角函數為三角法之高等部分其理論高尚運算繁雜故置於本書之尾冀俟學者代數程度稍深方易教授本欵只言函數表之用法

據對數表所載則由 0° 至 90° 其間每十分之諸角俱能檢其三角函數之五位數

凡非表中之角若欲求其三角函數或求對於三角函數之角其法如次

例一 求 $\sin 32^\circ16'.4$ 之三角函數

解 $\sin 32^\circ20'-\sin 32^\circ10'=0.5348-0.5324=0.0024$

$$10:6.4::0.0024:x$$

$$\therefore\quad x=0.0015$$

即 $\sin 32°16'.4 = 0.5324 + 0.0015 = 0.5339$,

例二 知 $\tan A = 1.568$ 求 A 角之度數

解 $\tan 57°30' - \tan 57°20' = 1.570 - 1.560 = 0.01$

而 $\tan A - \tan 57°20' = 1.568 - 1.56 = 0.008$

$$0.01 : 0.008 :: 10 : x$$

$$\therefore \quad x = 8'$$

即 $A = 57°20' + 8' = 57°28'$

例三 求 $\cot 29°43'.6$ 之三角函數

解 $\cot 29°40' - \cot 29°50' = 1.756 - 1.744 = 0.012$

$$10 : 3.6 :: 0.012 : x$$

$$x = 0.004$$

即 $\cot 39°43'.6 = 1.756 - 0.004 = 1.752$

例四 知 $\cos A = 0.4452$ 求 A 之度數

解 $\cos 63°30' - \cos 63°40' = 0.4462 - 0.4436 = 0.0026$

而 $\cos 63°30' - \cos A = 0.4462 - 0.4452 = 0.001$

$$0.0026 : 0.001 :: 10 : x$$

$$\therefore \quad x = 3'.8$$

即 $A = 63°30' + 3'.8 = 63°33'.8$

問題六

1. 求次之各三角函數之眞數

(1) $\tan 25°26'.7$, (2) $\sec 38°27'.7$, (3) $\cos 63°37'.3$,

(4) $\operatorname{cosec} 41°18'.2$, (5) $\sin 7°17'.4$, (6) $\cot 34°21'.8$,

2. 求次之 A 角度數

(1) $\sin A = 0.9479$, (2) $\cos A = 0.7318$,

(3) $\tan A = 0.1723$,

第三章

直角三角形

1. **定義**　凡平面三角形皆有六事其三者爲邊三者爲角知其六事中之三則其餘三事自能求得惟所知之三事中必有一爲邊

從三角形內已知之事求其未知之事謂之三角解法

2. 直角三角形之性質

如圖 $\overset{\triangle}{ABC}$ 其三個角爲 A, B, C, 其各對邊爲 a, b, c, 若 C 爲直角則有次之關係

$$A+B=90^\circ$$

$$\therefore \quad \sin A=\frac{a}{c}=\cos B$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\sin B$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\cot B$$

$$\cot A=\frac{b}{a}=\tan B$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\operatorname{cosec} B$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}=\sec B$$

$$\therefore \begin{cases} a=c\sin A=c\cos B=b\tan A=b\cot B \\ b=c\cos A=c\sin B=a\cot A=a\tan B \\ c=b\sec A=b\operatorname{cosec} B=a\operatorname{cosec} A=a\sec B \end{cases}$$

3. 直角三角形之解法

凡直角三角形於直角外知其五事中之兩事則其餘三事自能求得惟所知之兩事中必須有一邊其解法有四種

第一 知斜邊 c 及一銳角(如 A)則

由 $B=90°-A$ 求 B

又由 $\left.\begin{array}{l} a=c\sin A \\ b=c\cos A \end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l} a=c\cos B \\ b=c\sin B \end{array}\right\}$ 求 a, b

第二 知直角之一邊及一銳角(如 a,A)則

由 $B=90°-A$ 求 B

又由 $\left.\begin{array}{l} b=a\cot A \\ c=a\operatorname{cosec} A \end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l} b=a\tan B \\ c=a\sec B \end{array}\right\}$ 求 b, c

第三 知斜邊 c 及他之一邊(爲 a)則

由 $\left.\begin{array}{l} \sin A=\dfrac{a}{c} \\ b=c\cos A \\ B=90°-A \end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l} \cos B=\dfrac{a}{c} \\ b=c\sin B \\ A=90°-B \end{array}\right\}$ 求 A, B, b

第四 知直角之二邊則

由 $\left.\begin{array}{l} \tan A=\dfrac{a}{b} \\ c=b\sec A \text{ 或 } a\operatorname{cosec} A \end{array}\right\}$ 求 A, B, c

$\left.\begin{array}{l} \tan B=\dfrac{b}{a} \\ c=b\operatorname{cosec} B \text{ 或 } a\sec B \\ A=90°-B \end{array}\right\}$ 亦可

問題七

依次之條件求解直三角形 ABC，但 C 爲直角

1. $c=12$, $B=15°$
2. $b=10$, $B=45°$
3. $c=12$, $b=16$
4. $b=3\sqrt{7}$, $a=\sqrt{21}$
5. $c=4$, $A=30°$
6. $b=20\sqrt{3}$, $A=30°$
7. $c=18$, $a=9$
8. $b=20$, $a=20$
9. $b=291$, $a=250$
10. $B=42°10'$, $a=12$

4. 應用問題上重要之術語

第一　過一點及地球中心之直線或平面謂之此點之垂線或垂面

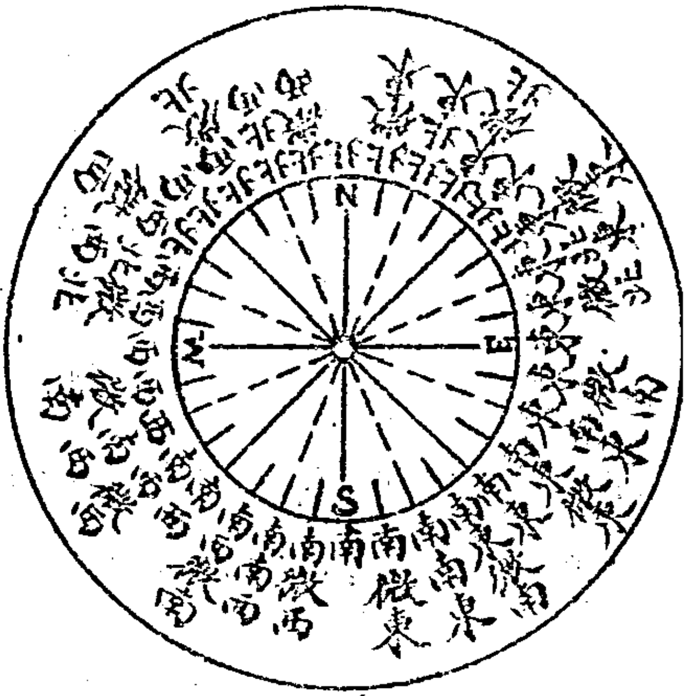
第二　過一點而在此點與垂線成直角之直線或平面謂之此點之水平線或水平面

第三　測一點時其點與觀測器之中心(即觀筒中

交線之交點)所聯之直線必與過覘測器中心之水平面成角視其點較水平面之低昇謂之仰角或俯角(仰角或稱爲高度)

第四　二點與覘測器之中心聯爲直線其夾角謂之此二點之角距

第五　羅盤之呼法



應用問題中屢有示直線之方位者故於下示羅盤之圖解

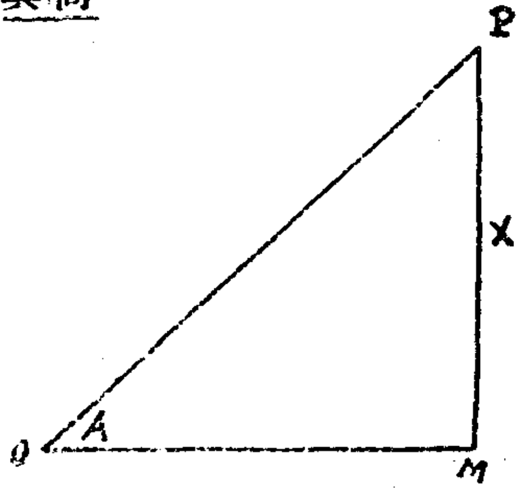
先以圓周分北東南西四等分次於各分之間再分八等分得三十二方向但圓周爲三百六十度故其相隣二點間之角均爲 $360^\circ \div 32$ 即 $11^\circ 15'$

例如得測量中一點在北之北北東卽可記此角爲北 $2 \times 11^\circ 15'$ 東等計之

5. 應用問題例解

凡不能直接測得之距或高可用三角形解法推之其例如次

例一 有一垂直物體人能行至其基礎下欲求其高

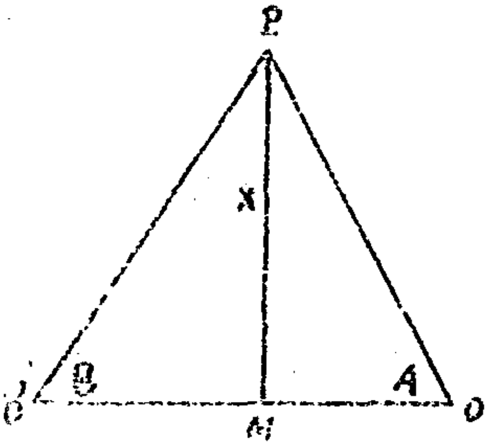


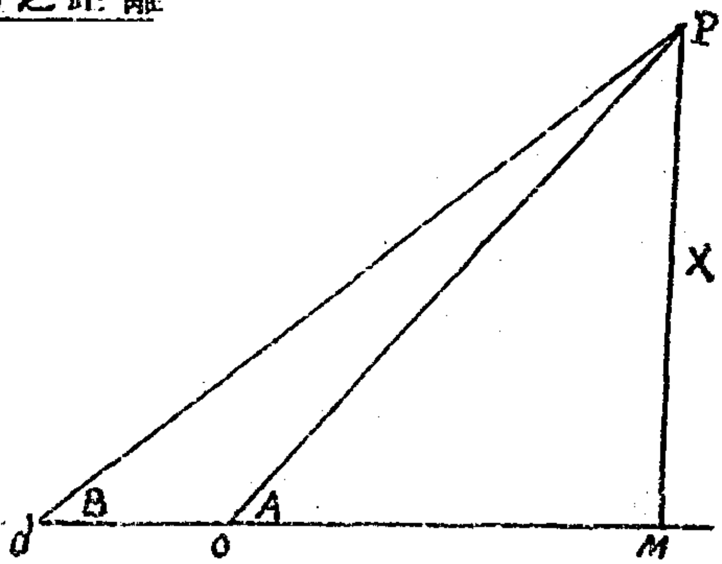
設 MP 垂直物體之高爲 X 若距 M 基礎取適當距離 P 處之 O 點測其頂點 P 得頂點之仰角爲 A

則 $MP = OM \tan MOP$

即 $X = p \tan A$

例二 有物在人所不能到之處但能自遠處望之欲求遠處一點與物之距離





如圖於直線上取 O, O′ 二點測其距離爲 p 由不能到之點 P 作 PM 爲此線之垂直設 PM 數之值爲 X 又 $\hat{MOP}$, $\hat{MO'P}$ 爲 $\hat{A}$, $\hat{B}$, 則

$$MO'\pm MO=OO'$$

$$MP\cot MO'P\pm MP\cot MOP=OO'$$

$$X\cot B\pm X\cot A=P$$

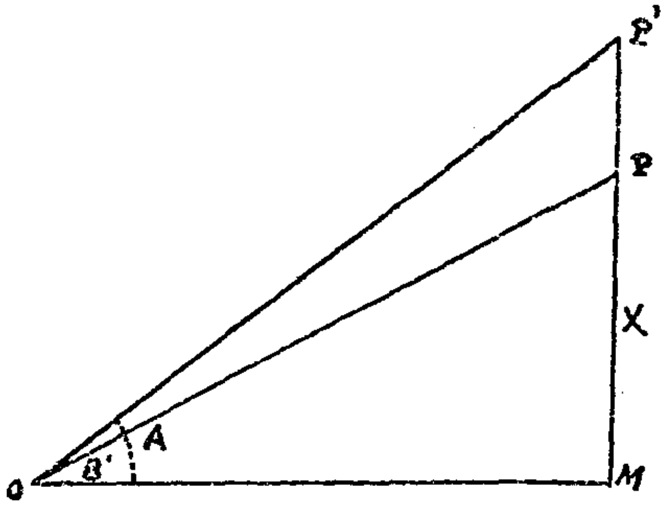
$$\therefore\quad X=\frac{P}{\cot B\pm\cot A}$$

例三　有一垂直物體人不能至其基礎下惟能在與此物體同在一平面上之二點測其頂之仰角欲求此物體之高及距離

於前例之右圖設 MP 爲物體, OO′ 爲兩窺測點, OM 爲 Y, 則　$X=\dfrac{P}{\cot B-\cot A}$

$$\therefore\quad Y=X\cot A=\frac{P\cot A}{\cot B-\cot A}$$

例四　有人在一垂直物體上置一標桿而在地面上一點測得桿之上下兩端之仰角欲求物體之高



設 PM 爲物體其高爲 X P'P 標桿爲 a 又 $\angle P'OM$, $\angle POM$ 爲 A, B,

則 $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{X+a}{X}$

即 $X=\dfrac{a\tan B}{\tan A-\tan B}$

問題八

1. 於距煙筒 300 尺之地測其頂之仰角爲 30° 求煙筒之高

2. 於高 160 尺之牆頂測得一小艇之俯角爲 30° 問牆與艇之距離幾何

3. 高六尺之竿影爲 $2\sqrt{3}$ 尺求太陽之高度

4. 有梯長 45 尺其一端倚壁頂他端置於地上而壁與梯成 60° 角求壁之高及距梯脚若干

5. 有二檣高 60 尺及 40 尺而聯其兩頂之直線與水平面成 $33^\circ41'$ 之角問二檣之距離幾何

6. 由某處望高 66 丈之絕壁得頂之仰角 $41^\circ18'$

問絕壁之頂與要測者之距離幾何(但 $\sin 41°18'=0.66$)

7. 有烟筒兩個其一個較他一個高 15 丈而聯兩頂之直線與水平面成 $27°2'$ 之角且此直線在距小烟筒 50 丈之處與地面相交求大烟筒之高幾何

($\tan 27°2'=0.41$)

8. 有在搭東相間隔 200 尺之兩地各望其頂得仰角 $45°$ 及 $30°$ 求搭高幾何

9. 由地上之一點望搭上長 2 米達之避雷針其上端及下端之仰角爲 $44°20', 40°10'$ 求搭高

10. 於海岸上取相距 165.2 米達之正對二點 A, B; 望海上之船 C, 知 $\angle CAB=62°30'$; $\angle CBA=76°16'$ 問船與海岸之距離幾何

11. 河之此畔有樹高 77 尺於彼畔正對此樹之點測得樹頂之仰角爲 $5°17'37''$ 求河寬幾何

12. 有眼高 5 尺之人自某點望某樹頂得仰角 $45°$ 又在該點上 1 丈 3 尺之高處望其樹頂得仰角 $30°$ 求樹高

13. 搭頂上有旗竿從距搭底 a 尺之處望其旗竿

正合 15° 之角又從塔底 b 尺之處望之亦合 15° 之角求此旗竿之長

14. 有一點直距河邊 $117\frac{1}{4}$ 尺而高出河面 11 尺自此點測河彼岸之俯視角為 $1^\circ12'$ 求河寬幾何

15. 有一樹其高 30 尺為暴風吹折其樹頂觸於地面與地成 18° 求自其根至折點之距離

16. 於高 50 尺之墻壁上測一塔頂之仰角得 30° 又在墻底測塔頂之仰角得 60° 求塔高幾何

17. 於東西相距一里之二地 A, B 望輕氣球之方位為正北及北東其仰角為 $60^\circ 45^\circ$ 問球之高幾何

18. 由山之麓望其頂得仰角 45° 又由成 30° 斜角之直線坂路向頂上行一里再望其頂得仰角 60° 求山高幾何

19. 有高 h 之塔於距塔 a 之地見塔頂與山頂在一直線上於塔脚得山頂之仰角 A 求山高幾何

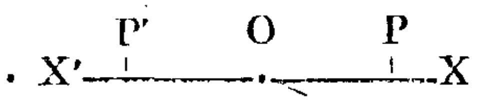
20. 於塔南之一地得其頂之仰角為 A 又由是向西行 d 測其仰角為 B 求塔高幾何

第四章

任意角之三角函數

1. 定義 就前所論角之事項欲通於一切須擴張之意義者也其普通之定義如次

第一 直線之正負乃以一直線不專論其大小且須考其方向以符號記之

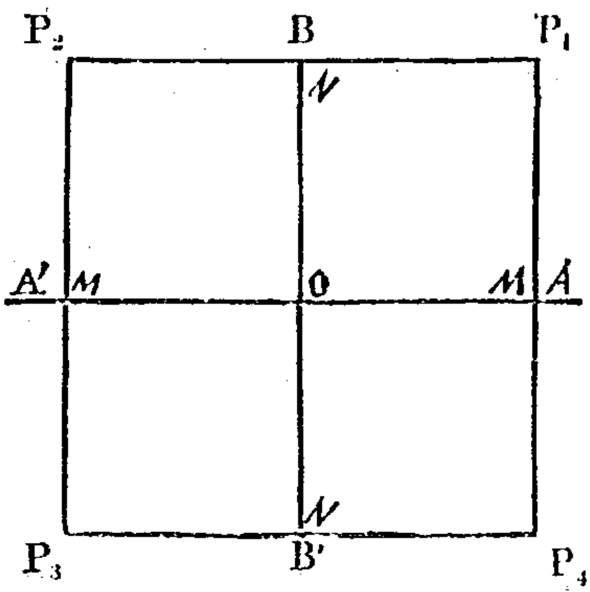


設 X, X' 爲通原點 O 之直線在此直線上欲取由 O 點相距爲 a 之 P 點位置若不知 P 在 O 之何方則必不能決定欲免此弊須用次之定則以明之

由原點向右所測之距離爲正

由原點向左所測之距離爲負

如前圖 P, P' 各爲在 X, X' 直線內距 O 點爲 a 之點然其位置可以 $OP=+a$, $OP'=-a$ 表之平面之例亦然



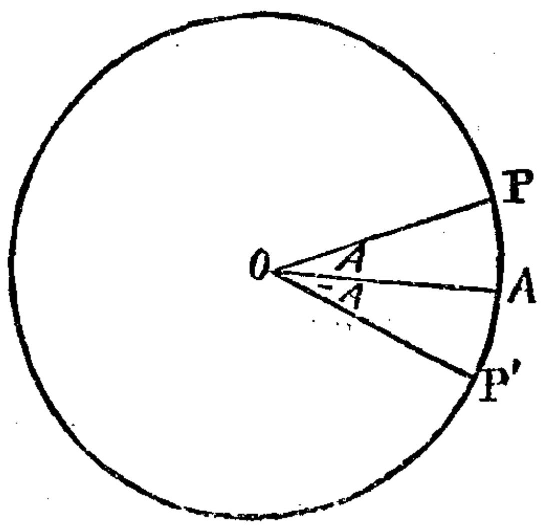
設於平面中任取O點通O點作AA'及BB'二直線正交成四象限於此可得次之定則

凡正交於直線BB'之右方者爲正左方者爲負

凡正交於直線AA'之上方者爲正下方者爲負

如圖 NP_1, NP_4 爲正, NP_2, NP_3 爲負,又 P_1M, P_2M 爲正 P_3M, P_4M 爲負是也

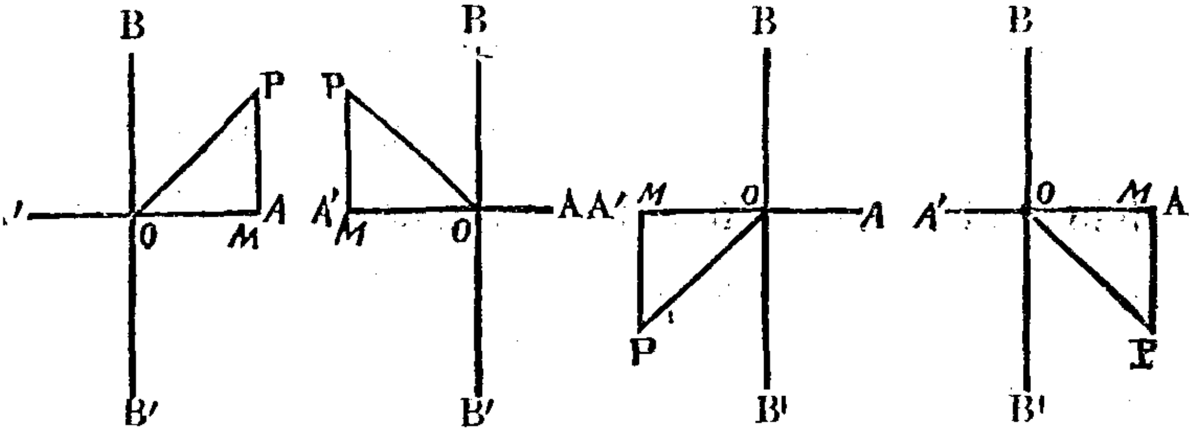
第二 角之正負



設O爲圓心OA爲本線令O點不動移動徑OP至逆時針之方位其所成之角AOP爲正反之若至順時針之方位其所成之角AOP'爲負

2. 三角函數之正負

設 AA′ 及 BB′ 爲正交 O 點之二直線令其動徑 OP 循 OA 之位置起繞 O 點轉行或正或負之方向依 A 角度回轉而取 OP 之位置



從 P 引垂線 PM 至 AA′ 則擴張前之定義如次

$$\sin A=\frac{MP}{OP},\cos A=\frac{OM}{OP},\tan A=\frac{MP}{OM}$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{OP}{MP},\sec A=\frac{OP}{OM},\cot A=\frac{OM}{MP}$$

但動徑 OP 則恒命爲正而 OM, MP 宜從前之定義以示正負之值今述之於下

在第一象限內 OM, PM 皆爲正

故 sin A, cos A, tan A 皆爲正

在第二象限內 OM 爲負 MP 爲正

故 $\sin A$ 為正 $\cos A$, $\tan A$ 皆為負

在第三象限內 OM, MP 皆為負

故 $\sin A$ $\cos A$ 皆為負惟 $\tan A$ 為正

在第四象限內 OM 為正 MP 為負

故 $\sin A$ $\tan A$ 皆為負惟 $\cos A$ 為正

而 $\operatorname{cosec} A$, $\sec A$, $\cot A$ 各為 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$

之反數故其符號亦各各相同由此可知兩角之大小相差四直角或四直角之幾倍數則其二邊之方位相同故其函數之數值亦同卽

$$\sin(n\times360^\circ+A)=\sin A$$

$$\cos(n\times360^\circ+A)=\cos A$$

$$\tan(n\times360^\circ+A)=\tan A$$

$$\cot(n\times360^\circ+A)=\cot A$$

$$\sec(n\times360^\circ+A)=\sec A$$

$$\operatorname{cosec}(n\times360^\circ+A)=\operatorname{cosec} A$$

但 n 為任意整數(零數或正或負皆合理)

3. 三角函數之關係

依前所論(1) (2) (3) (4) (5)之關係由定義推之任何角皆合理

依勾股定理無論邊之正負皆合理故由是誘導之(6) (7) (8)三關係任何角亦皆合理故通例

$$\sin A \times \operatorname{cosec} A = 1, \quad \cos A \times \sec A = 1,$$

$$\tan A \times \cot A = 1,$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A},$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1, \quad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A,$$

$$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$$

從此諸公式所生之關係亦皆合理

4. 三角函數之變化

如本章二節之圖則其三角函數之變化如次

第一 正弦爲 $\sin A = \frac{MP}{OP}$

故 $A = 0°$, 則 $\sin A = \frac{O}{OP} = 0$

由 $A = 0°$ 而至 $90°$ 則 $\sin A$ 爲正而漸增至 $A = 90°$ 則 sin 爲 1,

由 $A = 90°$ 而至 $180°$ 則 $\sin A$ 爲正而漸減至 $A = 180°$ 則 $\sin A$ 爲 O,

由 $A = 180°$ 而至 $270°$ 則 $\sin A$ 爲負而其絕對值漸增至 $A = 270°$ 則 $\sin A$ 爲 -1

由 $A = 270°$ 而至 $360°$ 則 $\sin A$ 爲負而其絕對值漸

減至 $A=360^\circ$ 則 $\sin A$ 為 O 今以圖示其變化如次

$$\sin 90^\circ = 1$$

	$\sin A$ 為正 而漸減	$\sin A$ 為正 而漸增	
$\sin 180^\circ = 0$			$\sin 0^\circ = 0$
	$\sin A$ 為負 其絕對值漸增	$\sin A$ 為負 其絕對值漸減	

$$\sin 270^\circ = -1$$

第二 餘弦為

$$\cos A = \frac{OM}{OP}$$

故依前推之如次

$$\cos 90^\circ = 0$$

	$\cos A$ 為負 其絕對值漸增	$\cos A$ 為正 而漸減	
$\cos 180^\circ = -1$			$\cos 0^\circ = 1$
	$\cos A$ 為負 其絕對值漸減	$\cos A$ 為正 而漸增	

$$\cos 270^\circ = 0$$

第三 正切為

$$\tan A = \frac{MP}{OM}$$

故依前推之如次

$$\tan 90^\circ = \infty$$

tan A 爲負	tan A 爲正
其絕對值漸減	而漸增
$\tan 180^\circ = 0$	$\tan 0^\circ = 0$
tan A 爲正	tan A 爲負
而漸增	其絕對值漸減

$$\tan 270^\circ = \infty$$

餘割正割餘切各爲正弦餘弦正切之反數故其值之變化亦可由前值推之今以之集於一表如次

函數＼度	0°	90°	180°	270°	360°	函數＼度	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	−1	0	cosec	∞	1	∞	−1	∞
cos	1	0	−1	0	1	sec	1	∞	−1	∞	1
tan	0	∞	0	∞	0	cot	∞	0	∞	0	∞

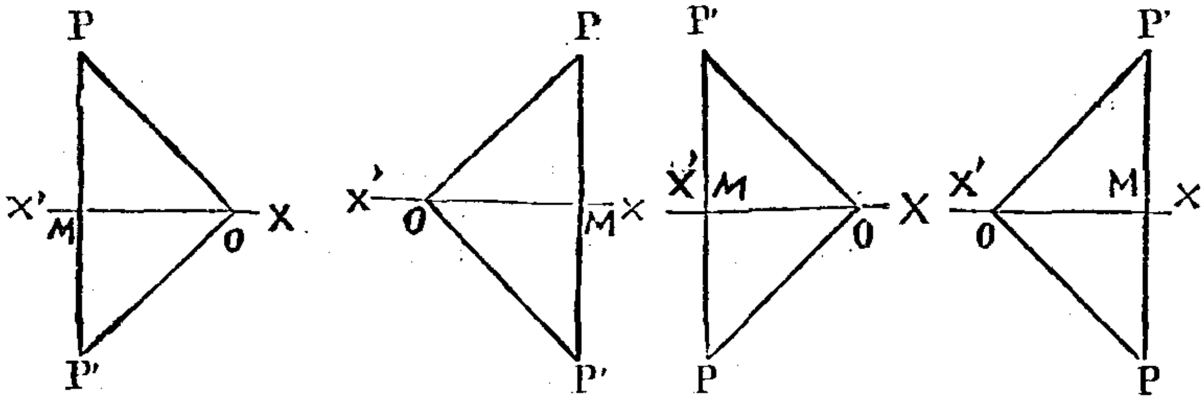
5. 九十度整倍數與他角相較之關係

第一　$-A$ 與 A 兩三角函數之關係

設 $X\hat{O}P$ 爲 A, XOP' 爲 $-A$ 於二角之動徑上取等

長之 OP, OP′ 則聯 P, P′ 之直線與 OX 或與其延長線直交設交點為 M,

則 $OP'=OP$, $MP'=-MP$ 故有次之關係



$$\sin(-A)=\frac{MP'}{OP'}=-\sin A$$

$$\cos(-A)=\frac{OM}{OP'}=\cos A$$

$$\tan(-A)=\frac{MP'}{OM}=-\tan A$$

$$\cot(-A)=\frac{OM}{MP'}=-\cot A$$

$$\sec(-A)=\frac{OP'}{OM}=\sec A$$

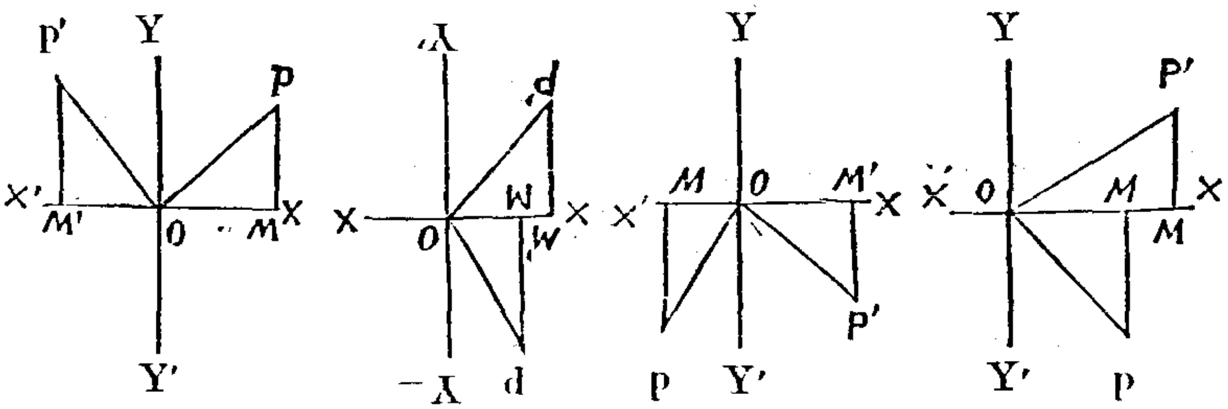
$$\operatorname{cosec}(-A)=\frac{OP'}{MP'}=-\operatorname{cosec} A$$

節二　$90°+A$ 與 A 兩三角函數之關係

設 $X\hat{O}P$ 為 A, $X\hat{O}P'$ 為 $90°+A$ 於二角之動徑上取等長之 OP, OP′ 由 P, P′ 作 PM, P′M′, 為 OX 之垂線

則 $OP=OP', M'P'=OM, OM'=-MP$

故有次之關係



$$\sin(90^\circ+A)=\frac{MP'}{OP'}=\cos A$$

$$\cos(90^\circ+A)=\frac{OM'}{OP'}=-\sin A$$

$$\tan(90^\circ+A)=\frac{M'P'}{OM'}=-\cot A$$

$$\cot(90^\circ+A)=\frac{OM'}{M'P'}=-\tan A$$

$$\sec(90^\circ+A)=\frac{OP'}{OM'}=-\operatorname{cosec} A$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ+A)=\frac{OP'}{M'P'}=\sec A$$

第三 90°−A與A兩三角函數之關係

$$\sin(90^\circ-A)=\sin\{90^\circ+(-A)\}=\cos(-A)=\cos A$$

$$\cos(90^\circ-A)=\cos\{90^\circ+(-A)\}=-\sin(-A)=\sin A$$

$$\tan(90^\circ-A)=\tan\{90^\circ+(-A)\}=-\cot(-A)=\cot A$$

$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)$, $\sec(90^\circ-A)$, $\cot(90^\circ-A)$之三角函數仿此類推

定義 $90^\circ-A$ 謂 A 之餘角

第四 $180^\circ+A$ 與 A 兩三角函數之關係

$$\sin(180^\circ+A)=\sin\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=\cos(90^\circ+A)=-\sin A$$

$$\cos(180^\circ+A)=\cos\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=-\sin(90^\circ+A)=-\cos A$$

$$\tan(180^\circ+A)=\tan\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=-\cot(90^\circ+A)=\tan A$$

第五 $180^\circ-A$ 與 A 兩三角函數之關係

$$\sin(180^\circ-A)=\sin\{180^\circ+(-A)\}=-\sin(-A)=\sin A$$

$$\cos(180^\circ-A)=\cos\{180^\circ+(-A)\}=-\cos(-A)=-\cos A$$

$$\tan(180^\circ-A)=\tan\{180^\circ+(-A)\}=\tan(-A)=-\tan A$$

餘類推

定義 $180^\circ-A$ 謂 A 之補角

系　$180^\circ\pm A$(即 $2\times 90^\circ\pm A$)之三角函數與 A 之各同名函數其數值或絕對值相等又 $90^\circ\pm A$ 之三角函數與 A 之各餘函數其數值或絕對值亦相等因得次之通例 I. 若 n 爲偶數則其數值等於 A 之各同名函數之數值若 n 爲奇數則其數值等於 A 之各餘函數之數值 II. $n\times 90^\circ\pm A$ 之三角函數設 A 爲銳角則其符號依象限定之

例一 以 A 之函數顯 $270^\circ+A$ 之三角函數

解 設 A 爲銳角則 $270^\circ+A$ 在第四象限內故其餘弦及正割爲正其他爲負又 $270^\circ+A$ 爲 90° 之奇倍

$$\therefore \quad \sin(270^\circ+A)=-\cos A \quad \operatorname{cosec}(270^\circ+A)=-\sec A$$

$$\cos(270^\circ+A)=\sin A \quad \sec(270^\circ+A)=\operatorname{cosec} A$$

$$\tan(270^\circ+A)=-\cot A \quad \cot(270^\circ+A)=-\tan A$$

例二 以 A 之函數顯 $270^\circ-A$ 之三角函數

解 設 A 爲銳角則 $270^\circ-A$ 在第三象限內故惟正切及餘切爲正其他爲負又 270° 爲 90° 之奇倍

$$\therefore \quad \sin(270^\circ-A)=-\cos A, \quad \operatorname{cosec}(270^\circ-A)=-\sec A$$

$$\cos(270^\circ-A)=-\sin A, \quad \sec(270^\circ-A)=-\operatorname{cosec} A$$

$$\tan(270^\circ-A)=\cot A, \quad \cot(270^\circ-A)=\tan A$$

例三 以 A 之函數顯 $\tan(540^\circ-A)$

解 設 A 爲銳角則 $540^\circ-A$ 在第二象限內故其正切爲負又 540° 爲 90° 之偶倍

$$\therefore \quad \tan(540^\circ-A)=-\tan A$$

例四 求 $\cos 675^\circ$ 之值

解 $675^\circ=7\times90^\circ+45^\circ$

$$\therefore \quad \cos 675^\circ=\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

例五 求 $\sin(-1050^\circ)$ 之值

解 $-1050^\circ=-12\times 90^\circ+30^\circ$

$\therefore \sin(-1050^\circ)=\sin 30^\circ$

問題九

1. 求次各角之象限

(1) 2000°, (2) -4000°, (3) 135°, (4) 265°,

(5) -315°, (6) -120°, (7) -60°, (8) 425°,

(9) 590°, (10) 370°, (11) 725°, (12) -1005°,

2. 求次各式之值

(1) $\cos 0^\circ \sin^3 270^\circ + 2\cos 180^\circ \tan 45^\circ$

(2) $3\sin 0^\circ \sec 180^\circ + 2\operatorname{cosec} 90^\circ - \cos 360^\circ$

(3) $2\sec^2 180^\circ \cos 0^\circ + 3\sin 270^\circ - \operatorname{cosec} 90^\circ$

(4) $\tan 180^\circ \cos 270^\circ + \sec 360^\circ - \operatorname{cosec} 270^\circ$

(5) $a\sin 90^\circ - b\cos 360^\circ + (a-b)\cos 180^\circ$

(6) $(a^2-b^2)\cos 360^\circ - 4ab\sin 270^\circ$

(7) $2\cos 120^\circ \sin 225^\circ - 3\sin 120^\circ \tan 135^\circ$

(8) $\tan 150^\circ \cos 0^\circ + 3\cos 180^\circ \cot 150^\circ$

(9) $a^2\cos 0^\circ - b^2\sin 270^\circ - 2ab\tan 135^\circ \cot 225^\circ$

(10) $\cos 180^\circ \tan(-45^\circ)+\sin 150^\circ \sec 210^\circ$

3. 求次之各角之三角函數

(1) 120°, (2) 135°, (3) 150°, (4) 315°,

(5) 405°, (6) 690°, (7) -36°, (8) -150°,

(9) -240°, (10) -330°, (11) -585°, (12) -810°,

4. 求次諸函數之值

(1) $\sin 210^\circ$, (2) $\sin(-510^\circ)$, (3) $\cos 240^\circ$,

(4) $\cos(-390^\circ)$, (5) $\tan 225^\circ$, (6) $\tan(-405^\circ)$

(7) $\cot 495^\circ$, (8) $\cot(-330^\circ)$, (9) $\sec 420^\circ$,

(10) $\sec(-240^\circ)$ (11) $\operatorname{cosec} 120^\circ$, (12) $\operatorname{cosec}(-315^\circ)$

5. 將次之諸函數用最小銳角之函數顯之

(1) $\sin 1005^\circ$, (2) $\tan 2232^\circ$, (3) $\sin(-1190^\circ)$

(4) $\tan(-1000^\circ)$, (5) $\cos(-3860^\circ)$, (6) $\cos 1345^\circ$,

(7) $\sec 7321^\circ$, (8) $\sec(-8325^\circ)$, (9) $\cot 7389^\circ$,

(10) $\cot(-375)$, (11) $\operatorname{cosec} 1732^\circ$, (12) $\operatorname{cosec}(-8146^\circ)$.

6. 化次諸式爲簡式

(1) $$\frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ+A)}-\frac{\tan(90^\circ+A)}{\cot A}+\frac{\cos A}{\sin(90^\circ+A)}$$

(2) $$\frac{\operatorname{cosec}(180^\circ-A)}{\sec(180^\circ-A)}\times\frac{\cos(-A)}{\cos(90^\circ+A)}$$

(3) $\dfrac{\cos(90^\circ+A)\sec(-A)\tan(180^\circ-A)}{\sec(360^\circ+A)\sin(180^\circ+A)\cot(90^\circ-A)}-1$

(4) $\dfrac{(a^2-b^2)\cot(180^\circ-A)}{\cot(180^\circ+A)}+\dfrac{(a^2+b^2)\tan(90^\circ-A)}{\cot(180^\circ-A)}$

(5) $\dfrac{\sin(90^\circ+A)\cos(90^\circ-A)}{\cos(180^\circ+A)}+\dfrac{\sin(180^\circ-A)\cos(90^\circ+A)}{\sin(180^\circ+A)}$

(6) $a\cos(90^\circ-A)+b\cos(90^\circ+A)$

(7) $\sin(90^\circ-A)\cos(90^\circ-A)$

(8) $(a-b)\tan(90^\circ-A)+(a+b)\cot(90^\circ+A)$

7. 次之諸式求證明之

(1) $\dfrac{\sin^4A-\cos^4A}{1-2\sin A\cos A}\times\dfrac{1-\cot A}{\sin A+\cos A}=\operatorname{cosec} A$

(2) $\cos A(\tan A+2)(2\tan A+1)=2\sec A+5\sin A$

(3) $\{\sin(90^\circ+A)+\cos(90+A)\}\{\sec(90^\circ-A)-\sec A\}$

$=\sec A\sec(90-A)-2$

(4) $\dfrac{\sin^3(90^\circ+A)+\cos^3(90^\circ+A)}{\sin(180^\circ+A)+\cos(360^\circ-A)}=1+\sin(90^\circ+A)$

$\cos(270^\circ+A)$

(5) $\operatorname{cosec}(90^\circ+A)\sec(360^\circ-A)+\sin(180^\circ+A)\sec A\tan$

$(180^\circ+A)=\tan(45^\circ+A)\tan(45^\circ-A)$

(6) $\tan A+\tan(180^\circ-A)+\cot(90^\circ+A)-\tan(360^\circ-A)$

(7) $\dfrac{\sin(180^\circ-A)}{\tan(180^\circ+A)}\times\dfrac{\cot(90^\circ-A)}{\tan(90+A)}\times\dfrac{\cos(360^\circ-A)}{\sin(-A)}$

(8)　$\cos^2 A+\cos^2(90°+A)+\cos^2(180°+A)$

$$+\cos^2(270°+A)=2$$

第五章

關於兩角之公式

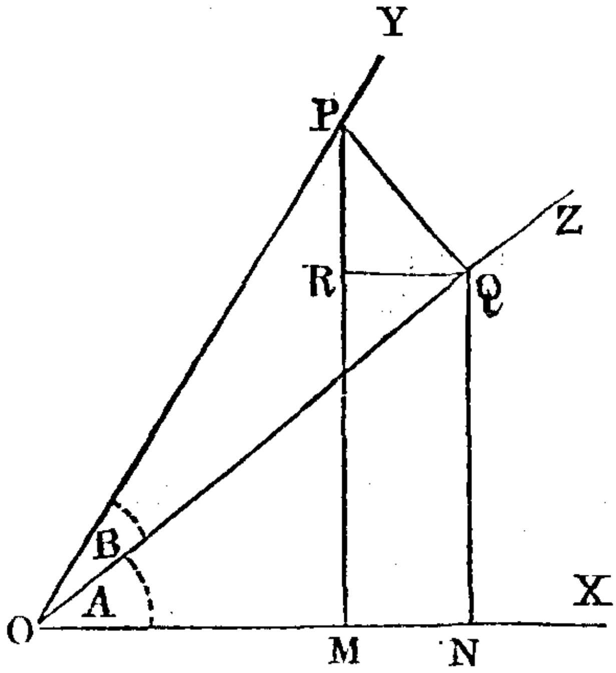
1. 兩角和之正弦及餘弦函數

用任意二角 A, B 之正弦及餘弦顯此二角 A+B 之正弦與餘弦其式如次

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B \cdots\cdots (9)$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \cdots\cdots (10)$$

第一　設 AB 共為正而 A+B 小於 90° 之例



如圖 $X\hat{O}Z=A, Z\hat{O}Y=B$ 則 $X\hat{O}Y=A+B$, 而於 OY 上任取一點 P 作 PQ, PM 為 OZ, OX 之垂線又由 Q 點作 QN, QR 為 OX, PM 之垂線則

$$R\hat{P}Q=Q\hat{O}N=A$$

由定義 $\sin(A+B)=\dfrac{PM}{OP}=\dfrac{QN+PR}{OP}=\dfrac{QN}{OP}+\dfrac{PR}{OP}$

$$=\frac{QN}{OQ}\times\frac{OQ}{OP}+\frac{PR}{PQ}\times\frac{PQ}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

又 $\cos(A+B)=\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{ON-MN}{OP}=\dfrac{ON}{OP}-\dfrac{RQ}{OP}$

$$=\frac{ON}{OQ}\times\frac{OQ}{OP}-\frac{RQ}{PQ}\times\frac{PQ}{OP}$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

第二 <u>AB 共為正銳角而 A+B 大於 90° 之例</u>

令 $A+B>90°$, 故 $(90°-A)+(90°-B)$ 必小於 $90°$

由是依前式得 $\sin\{(90°-A)+(90°-B)\}$

$$=\sin(90°-A)\cos(90°-B)+\cos(90°-A)\sin(90°-B)$$

$$=\cos A\sin B+\sin A\cos B$$

但 $\sin\{(90°-A)+(90°-B)\}=\sin\{180°-(A+B)\}$
$$=\sin(A+B)$$

$$\therefore\quad \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

又 $\cos\{(90°-A)+(90°-B)\}$

$$=\cos(90°-A)\cos(90°-B)-\sin(90°-A)\sin(90°-B)$$

$$=\sin A\sin B-\cos A\cos B$$

然 $\cos\{(90°-A)+(90°-B)\}=\cos\{180°-(A+B)\}$

$$= -\cos(A+B)$$

$\therefore \quad -\cos(A+B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B$

$\therefore \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

第三 A, B 爲任何正角之例

前已證明(9)(10)二公式設 A, B 二角爲正銳角而其值爲任意之大皆能合理則 A, B 之中有一角(如A)增加 90° 亦能證其合理如次

令 $(90^\circ + A) = A'$ 則 $\sin(A'+B) = \sin(90^\circ + A + B)$

$$= \cos(A+B)$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$= \sin(90^\circ + A) \cos B + \cos(90^\circ + A) \sin B$$

$$= \sin A' \cos B + \cos A' \sin B$$

同樣 $\cos(A'+B) = \cos(90^\circ + A + B)$

$$= -\sin(A+B)$$

$$= -(\sin A \cos B + \cos A \sin B)$$

$$= -\cos A \sin B - \sin A \cos B$$

$$= -\sin(90^\circ + A) \sin B + \cos(90^\circ + A) \cos B$$

$$= -\sin A' \sin B + \cos A' \cos B$$

$$= \cos A' \cos B - \sin A' \sin B$$

如斯卽 B 角增加 $90°$ 及 A, B 共增加 $90°$ 此式亦合理同樣 A, B 在 $0°$, $180°$ 或 $0°$ 及 $360°$ 之間皆能由第一第二證明 (9) (10) 兩式皆合理

第四 A, B 之一個或俱爲負角之例

設 A, B 中有一個 (如 A) 爲負則加 $360°$ 適當之倍數量於是其和 $n\times360°+A$ 爲正角則

$$\sin(A+B)=\sin(n\times360°+A+B)$$
$$=\sin(n\times360°+A)\cos B+\cos(n\times360°+A)\sin B$$
$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$
$$\cos(A+B)=\cos(n\times360°+A+B)$$
$$=\cos(n\times360°+A)\cos B-\sin(n\times360°+A)\sin B$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

同樣 B 爲負或 A, B 俱爲負可知公式亦合理

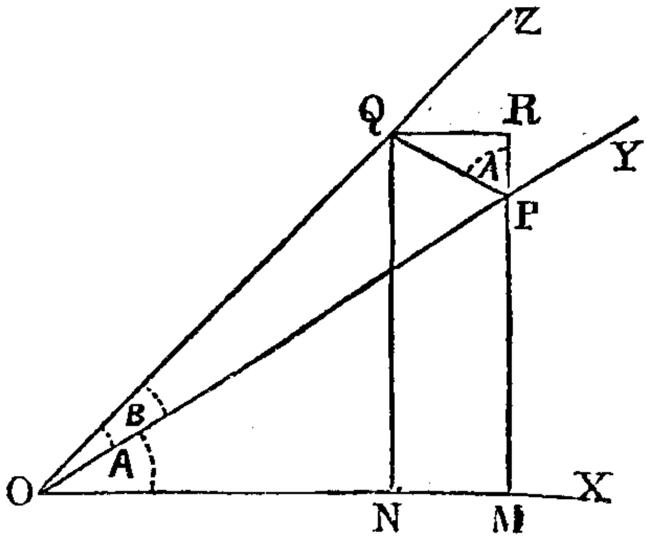
故 (9) (10) 二公式一切合理此二式爲三角函數之大本稱爲基礎公式

2. 兩角差之正弦及餘弦函數

用任意二角 A, B 之正弦及餘弦顯此二角差 $A-B$ 之正弦與餘弦其式如次

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$



證　依前圖中引OY於OX與OZ之間則

$$Y\hat{O}X=A-B$$

而　$\sin(A-B)=\dfrac{PM}{OP}$

$$=\frac{RM-RP}{OP}$$

$$=\frac{QN}{OQ}\times\frac{OQ}{OP}-\frac{RP}{QP}\times\frac{QP}{OP}$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

又　$\cos(A-B)=\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{ON+NM}{OP}$

$$=\frac{ON+QR}{OP}=\frac{ON}{OQ}\times\frac{OQ}{OP}+\frac{QR}{QP}\times\frac{QP}{OP}$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

又依代數學用第九第十二公式證明之如次

令　$B=-B$ 則

$$\sin(A-B)=\sin\{A+(-B)\}$$

$$=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos\{A+(-B)\}$$

$$=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

3. 兩角和差之正切及餘切函數

用任意二角 A, B 之正切顯此二角和 A+B 及差 A−B 之正切其式如次

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$=\frac{(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\div\cos A\cos B}{(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\div\cos A\cos B}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

同樣 $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$

系 $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$

$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

4. 兩角和及差之正弦或餘弦相乘積

由(9)(11)二公式相乘則

$$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B$$

$$=\sin^2A(1-\sin^2B)-(1-\sin^2A)\sin^2B$$

$$=\sin^2A-\sin^2B=\cos^2B-\cos^2A\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

由(10) (12)二公式相乘則

$$\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A\cos^2B-\sin^2A\sin^2B$$

$$=\cos^2A(1-\sin^2B)-(1-\cos^2A)\sin^2B$$

$$=\cos^2A-\sin^2B=\cos^2B-\sin^2A\ldots\ldots\ldots(18)$$

問題十

1. $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{5}{13}$, 求 $\sin(A+B)$ 及 $\cos(A+B)$ 之值

2. $\sin A=\frac{15}{17}$, $\tan B=\frac{4}{3}$ 求 $\cos(A-B)$之值

3. $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$, $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$, 求 $\tan(A-B)$之值

4. 求 75° 之圓函數

5. $\sec A=\frac{17}{5}$, $\operatorname{cosec} B=\frac{5}{4}$ 求 $\sec(A+B)$ 之值

6. $\cos A=\frac{4}{5}$, $\cos B=\frac{3}{5}$ 求 $\cos(A-B)$ 之值

7. $\cot A=\frac{11}{2}$, $\tan B=\frac{7}{24}$, 求 $\tan(A+B)$ 之值

8. $\cot A=\frac{5}{4}$, $\cot B=\frac{7}{5}$, 求 $\tan(A-B)$ 之值

證次之諸恆等式

9. $\sin A\sin B=\sin^2\frac{A+B}{2}-\sin^2\frac{A-B}{2}$

10. $\cos A \cos B = \cos^2\frac{A+B}{2} + \cos^2\frac{A-B}{2} - 1$

11. $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\sin(45^\circ + A) = \sqrt{2}\cos(45^\circ - A)$

12. $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\cos(45^\circ + A) = \sqrt{2}\sin(45^\circ - A)$

13. $\tan(45^\circ \pm A) = \frac{1 \pm \tan A}{1 \mp \tan A}$

14. $\cot(45^\circ \pm A) = \frac{\cot A \mp 1}{\cot A \pm 1}$

15. $\tan(P+Q)A - \tan PA - \tan QA$

$$= \tan(P+Q)A \tan PA \tan QA$$

16. $\tan A \pm \tan B = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}$

17. $\cot B \pm \cot A = \frac{\sin(A \pm B)}{\sin A \sin B}$

18. $\cot A \pm \tan B = \frac{\cos(A \mp B)}{\sin A \cos B}$

19. $\sin(A+B+C) = \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C$

$$+ \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C$$

20. $\cos(A+B+C) = \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C$

$$- \sin A \cos B \sin C - \sin A \sin B \cos C$$

21. $\tan(A+B+C)$

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan A \tan C - \tan A \tan B}$$

5. 正弦餘弦之乘積與和或差之轉換

作(9)(11)二公式之和及差幷(10)(12)二公式之和及差將各式之左右邊轉換得次式

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)\cdots\cdots(19)$$

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)\cdots\cdots(20)$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A-B)+\cos(A+B)\cdots\cdots(21)$$

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)\cdots\cdots(22)$$

此四式稱爲A, B,式用和或差變二角之正弦餘弦之乘積

次爲 $$\sin C+\sin D=\cos\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)+\sin\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots\cdots(23)$$

$$\sin C-\sin D=\sin\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)-\sin\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\cdots\cdots(24)$$

$$\cos D+\cos C=\cos\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)+\cos\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots\cdots(25)$$

$$\cos D-\cos C=\cos\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)-\cos\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

此四式稱爲 C, D 式用乘積變正弦餘弦之和或差

系　$\cos C+\sin D=\sin(90^\circ+C)+\sin D$

$$=2\sin\left(45^\circ+\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{C-D}{2}\right)$$

$\cos C-\sin D=\sin(90^\circ+C)-\sin D$

$$=2\cos\left(45^\circ+\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{C-D}{2}\right)$$

此二式亦與前四式爲同樣之目的

系二　$\sin\{(P+1)A\}=2\sin(PA)\cos A-\sin\{(P-1)A\}$

$\cos\{(P+1)A\}=2\cos(PA)\cos A-\cos\{(P-1)A\}$

由此二式可逐次求得倍角之正弦及餘弦

問題十一

1. 化次之諸式爲一次式

(1)　$2\sin 50^\circ\cos 10^\circ$　　(5)　$2\sin 2A\cos 3A$

(2)　$2\cos 60^\circ\sin 10^\circ$　　(6)　$2\cos 4A\sin 2A$

(3)　$2\cos 77^\circ\cos 4^\circ$　　(7)　$2\cos 7A\cos 5A$

(4)　$2\sin 6^\circ\sin 5^\circ$　　(8)　$2\sin 3A\sin 2A$

2. 化次之諸式爲一項式

(1)　$\sin 70^\circ+\sin 30^\circ$　　(5)　$\sin 10A+\sin 4A$

(2) $\sin 30° - \sin 16°$　　(6) $\sin 7A - \sin 5A$

(3) $\sec 1° \cos 3°$　　(7) $\cos 8A + \cos 2A$

(4) $\cos 27° - \cos 77°$　　(8) $\cos 5A - \cos 4A$

3. 化次之諸式爲最簡式

(1) $\sin 40° + \sin 20°$　　(5) $\cos 10° - \cos 50°$

(2) $\sin 80° - \sin 40°$　　(6) $\sin 70° + \sin 50°$

(3) $\cos 55° + \cos 65°$　　(7) $\cos 10° + \sin 40°$

(4) $\cos 17° - \cos 77°$　　(8) $\cos 80° - \sin 70°$

證次之諸式

4. (1) $\cos(60° + A) + \cos(60° - A) = \cos A$

(2) $\sin(60° + A) - \sin(60° - A) = \sin A$

(3) $\cos A + \cos(120° + A) + \cos(120° - A) = 0$

(4) $\sin A + \sin(120° + A) + \sin(120° - A) = 0$

5. (1) $4\sin A \sin B \sin C = \sin(B + C + A) + \sin(C + A - B)$
$+ \sin(A + B - C) - \sin(A + B + C)$

(2) $4\cos A \cos B \cos C = \cos(B + C - A) + \cos(C + A - B)$
$+ \cos(A + B - C) + \cos(A + B + C)$

6. (1) $\dfrac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A} = \tan 3A$

(2) $\dfrac{\cos 7A + \cos 3A - \cos 5A - \cos A}{\sin 7A - \sin 3A - \sin 5A + \sin A} = \cot 2A$

7. (1) $\sin A+\cos B=2\cos\{45^\circ-\frac{1}{2}(A-B)\}\cos\{45^\circ-\frac{1}{2}(A+B)\}=2\sin\{45^\circ+\frac{1}{2}(A-B)\}\sin\{45^\circ+\frac{1}{2}(A+B)\}$

(2) $\sin A-\cos B=2\sin\{45^\circ-\frac{1}{2}(A-B)\}\sin\{\frac{1}{2}(A+B)-45^\circ\}=2\cos\{45^\circ+\frac{1}{2}(A-B)\}\cos\{45^\circ+\frac{1}{2}(A+B)\}$

8. (1) $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$

(2) $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\tan\frac{1}{2}(A+B)$

(3) $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos B-\cos A}=\cot\frac{1}{2}(A-B)$

(4) $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}=\tan\frac{1}{2}(A-B)$

(5) $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}=\cot\frac{1}{2}(A+B)$

(6) $\dfrac{\cos A+\cos B}{\cos B-\cos A}=\cot\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$

9. 求次諸式之值

(1) $8\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$

(2) $\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ$

(3) $\cos 55° + \cos 65° + \cos 175°$

(4) $\cos 108° \cos 132° + \cos 132° \cos 12° + \cos 12° \cos 108°$

6. (1) 壹倍角之函數 示於次

$$\sin A = 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A \quad \cdots\cdots (27)$$

證 由第(23)公式之 $D=O$, 則 $\sin A + \sin 0$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$$

故 $\sin A = 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$

又 $\cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A - 1, \ = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} A,$

$$= \cos^2 \frac{1}{2} A - \sin^2 \frac{1}{2} A \quad \cdots\cdots (28)$$

證 由第(25)公式之 $D=O$, 則 $\cos A + 1$

$$= 2 \cos^2 \frac{1}{2} A$$

故 $\cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A - 1$

又證 由第(26)公式之 $D=O$ 則 $1 - C \cos A$

$$= 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$$

故 $\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$

以上之二式相加則 $\cos A = \cos^2 \frac{1}{2} A - \sin^2 \frac{1}{2} A$

$$\sin(A+B)=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)\ \ldots\ldots(29)$$

證 由第(27)公式之 A 爲 A+B 則得本題之證明

(2) 貳倍角之函數 示于次

$$\sin 2A=2\sin A\cos A\ \ldots\ldots(30)$$

$$\cos 2A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A=\cos^2 A-\sin^2 A\ \ (31)$$

以上二式可由(27)(28)之二式證明之

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\ \ldots\ldots(32)$$

證 $\tan 2A=\dfrac{\sin 2A}{\cos 2A}=\dfrac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A-\sin^2 A}=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

(3) 叁倍角之函數 示于次

$$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A\ \ldots\ldots(33)$$

證 $\sin 3A=\sin(2A+A)=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A$

$=(2\sin A\cos A)\cos A+(1-2\sin^2 A)\sin A$

$=2\sin A(1-\sin^2 A)+\sin A-2\sin^3 A$

$=3\sin A-4\sin^3 A$

$$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A\ \ldots\ldots(34)$$

證 $\cos 3A=\cos(2A+A)=\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A$

$=(2\cos^2 A-1)\cos A-(2\sin A\cos A)\sin A$

$=2\cos^3 A-\cos A-2\cos A(1-\cos^2 A)$

$$=4\cos^3 A-3\cos A$$

$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

證 $\tan 3A=\tan(2A+A)=\dfrac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}$

$$=\frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\tan A}{1-\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\tan A}$$

$$=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

系 $\sin^3 A=\dfrac{3\sin A-\sin 3A}{4}$

$$\cos^3 A=\frac{3\cos A+\cos 3A}{4}$$

由此式可化任意角之正弦或餘弦之立方爲一次式

注意 四倍角五倍角亦可仿本章法則推求之

問題十二

1. 求 18° 及 72° 之三角函數

證次之諸式

2. (1) $\sin 2A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(2) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(3) $\operatorname{cosec} 2A = \dfrac{\cot^2 A+1}{2\cot A}$

3. (1) $\cot A+\tan A=2\operatorname{cosec} 2A$

(2) $\cot A-\tan A=2\cot 2A$

4. (1) $\operatorname{cosec} A+\cot A=\cot\dfrac{1}{2}A$

(2) $\operatorname{cosec} A-\cot A=\tan\dfrac{1}{2}A$

5. (1) $1\pm\sin A=\left(\cos\dfrac{1}{2}A\pm\sin\dfrac{1}{2}A\right)^2$

(2) $\dfrac{1\pm\sin A}{1\mp\sin A}=\tan^2\left(45^\circ\pm\dfrac{1}{2}A\right)$

(3) $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}=\tan^2\dfrac{1}{2}A$

(4) $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}=\tan\dfrac{1}{2}A$

(5) $\sec A\pm\tan A=\tan\left(45^\circ\pm\dfrac{1}{2}A\right)$

(6) $\sec 2A-\tan 2A=\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}$

6. (1) $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin(A+B)}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$

(2) $\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin(A+B)}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}$

(3) $\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin(A+B)}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}$

(4) $\dfrac{\cos B-\cos A}{\sin(A+B)}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$

7. (1) $4\sin A\sin(60°-A)\sin(60°+A)=\sin 3A$

(2) $4\cos A\cos(60°-A)\cos(60°+A)=\cos 3A$

(3) $\tan A\tan(60°-A)\tan(120°+A)=-\tan 3A$

8. (1) $\dfrac{\sin A+\sin 5A+\sin 9A}{\cos A+\cos 5A+\cos 9A}=\tan 5A$

(2) $\dfrac{\cos 3A}{\cos A}-\dfrac{\cos 6A}{\cos 2A}+\dfrac{\cos 9A}{\cos 3A}-\dfrac{\cos 18A}{\cos 6A}$

$=2(\cos 2A-\cos 4A+\cos 6A-\cos 12A)$

9. (1) $\sec A+\sec(120°+A)+\sec(240°+A)=-3\sec 3A$

(2) $\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}(120°+A)+\operatorname{cosec}(240°+A)$

$=3\operatorname{cosec} 3A$

10. (1) $\cos^3 A\dfrac{\sin 3A}{3}+\sin^3 A\dfrac{\cos 3A}{3}=\dfrac{\sin A}{4}$

(2) $\sin 2A\sin^3 A+\cos 3A\cos^3 A=\cos^3 2A$

11. (1) $\tan A+\tan(60°+A)+\tan(120°+A)=3\tan 3A$

(2) $\cot A+\cot(60°+A)+\cot(120°+A)=3\cot 3A$

12. (1) $\dfrac{3\cos A+\cos 3A}{3\sin A-\sin 3A}=\cot^3 A$

(2) $\dfrac{\sin 3A+\cos 3A}{\sin 3A-\cos 3A}=\tan(A-45^\circ)\left(\dfrac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}\right)$

13. (1) $\sin^3 A+\sin^3(120^\circ+A)-\sin^3(120^\circ-A)=-\dfrac{3}{4}\sin 3A$

(2) $\cos^3 A+\cos^3(120^\circ+A)+\cos^3(120^\circ-A)=-\dfrac{3}{4}\cos 3A$

14. (1) $\sin 4A=4\sin A\cos A-8\sin^3 A\cos A$

(2) $\cos 4A=1-8\cos^2 A+\cos^4 A$

(3) $\sin 5A=5\sin A-20\sin^3 A+16\sin^5 A$

(4) $\cos 5A=5\cos A-20\cos^3 A+16\cos^5 A$

(5) $\sin 6A=\cos A\,(6\sin A-32\sin^3 A+32\sin^5 A)$

(6) $\cos 6A=-1+18\cos^2 A-48\cos^4 A+32\cos^6 A$

(7) $\sin mA=\sin A\cos(m-1)A+\cos A\sin(m-1)A$

(8) $\cos mA=\cos A\cos(m-1)A-\sin A\sin(m-1)A$

7. 分角之函數 係某角之函數以其角之若干等分角表示之謂也其例如次

第一 知任意角之餘弦求其半角之正弦及餘弦之值各有式

由第(28)公式知 $2\sin^2\frac{1}{2}A=1-\cos A$

故 $\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$ ....(36)

依同理 $\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$…………………(37)

例設 $\cos 184^\circ=-.99756$ 求 $\sin 92^\circ$ 及 $\cos 92^\circ$ 之值

茲因 92° 在第二象限內故其正弦爲正餘弦爲負

由此 $\cos 92^\circ=-\sqrt{\frac{1+\cos 184^\circ}{2}}=-\sqrt{\frac{.00244}{2}}$

$\sin 92^\circ=+\sqrt{\frac{1-\cos 184^\circ}{2}}=+\sqrt{\frac{1.99756}{2}}$

第二 知任意角之正弦求其半角之正弦及餘弦之值各有四

由第(27)公式知 $2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A=\sin A$

又(6)式 $\sin^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}A=1$

依此二式相加或相減可得次式卽

$(\sin\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}A)^2=1+\sin A$ 及 $(\sin\frac{1}{2}A-\cos\frac{1}{2}A)^2$

$=1-\sin A$

故 $\sin\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{1+\sin A}$

$\sin\frac{1}{2}A-\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{1-\sin A}$

又依此二式之加減得次式卽

$\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1+\sin A}{4}}\mp\sqrt{\frac{1-\sin A}{4}}$………(38)

$$\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1+\sin A}{4}}\pm\sqrt{\frac{1-\sin A}{4}}\cdots\cdots(89)$$

由此則僅知 $\sin A$ 而不知 A 者 $\sin\frac{A}{2}$ 及 $\cos\frac{A}{2}$ 皆有四值

然若知 A 則如次其根號前之符號亦可決定

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{2}A+45^\circ\right)=\cos\frac{1}{2}A+\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{1+\sin A}$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{2}A+45^\circ\right)=\cos\frac{1}{2}A-\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{1-\sin A}$$

由此則知 A 者卽可知 $\frac{1}{2}A+45^\circ$ 之角在第幾象限故根號前之符號亦可決定

例 設已知 $\sin 170^\circ=.17365$ 求 $\sin 85^\circ$ 之值

因 $\frac{A}{2}+45^\circ=130^\circ$ 故其正弦爲正餘弦爲負

由此 $$\sin 85^\circ=+\sqrt{\frac{1+\sin 170^\circ}{4}}+\sqrt{\frac{1-\sin 170^\circ}{4}}$$

$$=+\sqrt{\frac{1.17365}{4}}+\sqrt{\frac{.82635}{4}}$$

第三 故知任意角之正切求其半角正切之值有二

由第(32)公式得 $\tan A=\dfrac{2\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan^2\frac{1}{2}A}$

故 $$\tan^2\frac{1}{2}A+\frac{2\tan\frac{1}{2}A}{\tan A}-1=0$$

$\therefore \qquad \tan\frac{1}{2}A=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2A}}{\tan A}\ldots\ldots(40)$

例 設 $A=190°$ 則 $\tan\frac{1}{2}A=\frac{-1-\sqrt{1+\tan^2A}}{\tan A}$

證 $\tan A=\tan 190°$ 爲正而 $\tan\frac{1}{2}A=\tan 95°$ 爲負

故 $\tan\frac{1}{2}A=\frac{-1-\sqrt{1+\tan^2A}}{\tan A}$ 爲負依此式則得正切之值

問題十三

1. 設 A 等於(1) $80°$, (2) $100°$, (3) $390°$, (4) $1890°$ 時求決定次之各公式之複符號

(1) $\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ (2) $\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

(3) $\cos\frac{1}{2}A=\pm\frac{\sqrt{1+\sin A}}{2}\pm\frac{\sqrt{1-\sin A}}{2}$

(4) $\sin\frac{1}{2}A=\pm\frac{\sqrt{1+\sin A}}{2}\pm\frac{\sqrt{1-\sin A}}{2}$

(5) $\tan\frac{1}{2}A=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2A}}{\tan A}$

2. (1) $\cos A=\frac{1}{2}$ 求 $\cos\frac{1}{2}A$ 及 $\sin\frac{1}{2}A$ 之值

(2) $\sin A=\frac{1}{2}$ 求證 $\tan\frac{1}{2}A=2\pm\sqrt{3}$

次之各式求證之

(3) $\sin\dfrac{80°}{4}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos\dfrac{180°}{2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

(4) $\sin\dfrac{90°}{4}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos\dfrac{90°}{4}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

(5) $\sin\dfrac{90°}{8}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$\cos\dfrac{90°}{8}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

(6) $\tan\dfrac{90°}{4}=\sqrt{2-1}$ $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

(7) 求 $9°$ 之正絃函數

(8) 求 $2°\frac{1}{2}$ 之正絃函數

第六章

對數

對數之事學者旣於代數學而得知之今於三角法解應用問題之重要者示於次

1. 對數之定義及記法

任意一數 a 之 x 乘方爲 y (但 x 爲任意之數) 則

x 爲 y 之 a 底對數此關係以 $x=\log_a y$ 記之或記爲

$y=\log_a^{-1}x$

據定義可推次之關係

(1) $a^0=1$ $\quad\therefore\quad \log_a 1=0$

(2) $a^1=a$ $\quad\therefore\quad \log_a a=1$

(3) $a^m=a^m$ $\quad\therefore\quad \log_a a^m=m$

問題十四

求次對數之值

(1) $\log_2 1024$ (5) $\log_3\sqrt{81}$

(2) $\log_3\sqrt{27}$ (6) $\log_{49}343\sqrt{7}$

(3) $\log_4 0.125$ (7) $\log_4\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$

(4) $\log_5\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{125}}$ (8) $\log_2\sin 45^\circ$

2. 對數之性質

用對數爲計算中最便之法今以四定理示之於次

第一　乘積之對數等於其各因子對數之和

證　設 $\log_a m=x,\ \log_a n=y$ 則 $m=a^x,\ n=a^y$

$\therefore\quad mn=a^x a^y=a^{x+y}$

$$\log_a mn = x + y = \log_a m + \log_a n$$

同樣 $\log mnp\ldots\ldots = \log m + \log n + \log p \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

第二 商之對數等於由實之對數減法之對數之差

證 $\log_a m = x, \log_a n = y$ 則 $m = a^x, n = a^y$

$$\therefore \quad \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\therefore \quad \log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

第三 一數若干乘方之對數等於其指數乘原數之對數

證 $\log_a m = x$ 則 $m = a^x$，今 k 為任意之數則

$$m^k = (a^x)^k = a^{kx}$$

$$\therefore \quad \log_a(m^k) = kx = k \log_a m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

第四 以一數之對數除他數之對數其商等於以第二數為底之第一數之對數

證 $\log_c a = x, \log_c b = y$ 則 $a = c^x, b = c^y$

$$\therefore \quad a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}}$$

$$\therefore \quad a = b^{\frac{x}{y}}$$

$$\therefore \quad \log_b a = \frac{x}{y} = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

問題十五

1. 知 8, 14, 21 之 10 底對數求由 1 至 10 諸整數之對數

2. $\log_8 9=a$, $\log_2 5=b$, $\log_5 7=c$ 問由 1 至 7 諸整數之 10 底對數各幾何

3. 證 $7\log_a\frac{15}{16}-6\log_a\frac{3}{8}+5\log_a\frac{2}{5}-\log_a\frac{25}{32}=\log_a 3$

4. 證 $2\log_a x+2\log_a x^2+2\log_a x^3+\cdots\cdots+2\log_a x^n$

$$=n(n+1)\log_a x$$

5. 證 $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$

$\log_a b\times\log_b a=1$

3. 對數之種類 於數學所用之對數爲下之二種

第一 納白爾之對數又名自然對數此對數專用理論的數學上其底數爲無窮級數 $1+\frac{1}{|\underline{1}}+\frac{1}{|\underline{2}}+\frac{1}{|\underline{3}}+\cdots$ 之總和卽 2.71828182……通例以 e 示之而取發明者名云納白爾氏之底數

第二 常用對數此對數用於實地之計算者其底數爲 10

於本書以後單云對數時爲常用對數故其記法不須記其底即 $\log_{10}$ 單記 log 且此對數之小數部分常爲正若整數爲負號則記於其數字上

定義 對數之小數部分謂之假數其整數部分謂之指標以及變數之對數謂之餘對數

定理一 惟單位相異之二數其對數之假數無異

證 $\log(a\times10^n)=\log a+\log 10^n=n+\log a$

$\log(a\div10^n)=\log a-\log10^n=-n+\log a$

故 $a\times10^n$, 及 $(a\div10^n)$其對數之假數無異

定理二 有整數 n 位之數其對數之指標爲$(n-1)$小數點以下至有意數字間有 n 個零(即0之小數)其指標爲$-(n+1)$

證 有整數 n 位之數原在 10^{n-1} 與 10^n 之間因而其對數在 $n-1$ 與 n 之間故其指標爲 $n-1$

小數點以下至有意數字有個零之數原在 $10^{-(n+1)}$ 與 10^{-n}之間因而其對數在 $-(n+1)$ 與 $-n$ 之間故其指標爲 $-(n+1)$

定理三 以由 1 減對數之假數爲假數並以變其指標之符號加於 -1 爲指標則其對數爲原對數之

餘對數

證　設任意對數之指標爲 a, 假數爲 b, 則

$$-(a+b)=-a-b=(-1-a)+(1-b)$$

4. 對數四則

第一　對數之加法

因對數之假數常爲正故求和時宜注意指標之符號而求其對數和

例 (1)　$3.6428+2.5364=6.1792$

(2)　$\overline{2}.9326+\overline{1}.6785=\overline{2}.6111$

(3)　$3.5637+\overline{5}.7456=\overline{1}.3093$

第二　對數之減法

對數相減惟加其餘對數可也（互爲反數之二數對數爲餘對數）

例　由 2.6389, $\overline{3}.5463$ 之和減 $\overline{2}.5713$, 2.2105 之和

解　$-(\overline{2}.5713)=1.4287$, $-(2.2105)=\overline{3}.7895$

$\therefore\quad 2.6389+\overline{3}.5463+1.4287+\overline{3}.7895=\overline{1}.4034$

第三　以整乘對數之法

對數爲正則如普通數學乘法若爲負則分指標與假數各別用乘法並加其結果

例(1) $2.3576\times3=7.0728$

(2) $\bar{3}.6782\times2=\bar{5}.3564$

第四 以整數除對數之法

對數爲正則如普通數用除法若爲負則由指標減適當之數而加此適當之數於假數使指標能整除然後行除法

例(1) $2.754\div4=0.6885$

(2) $\bar{5}.9287\div3=\bar{2}.6429$

5. 數之對數表

數之對數表原載至若干數止諸整數對數之假數本書按對數表惟列舉假數四位之小數對數至 999 止其用法如次

第一 求數之對數法

例(1) 求 $\log 83.2$

解 83.2 之對數之假數檢表知爲 9201 又指標據本章(3)節知爲 1

$$\therefore \quad \log 83.2=1.9201$$

(2) 求 $\log 0.009357$

解 0.0000357 之對數之假數檢表知爲 5527 又指

標知為 -4

$\therefore \quad \log 0.000357 = \bar{4}.5527$

(3) 求 $\log 5.118$

解 $\log 5.12 - \log 5.11 = 0.7093 - 0.7084 = 0.0009$

$$0.01 : 0.008 :: 0.0009 : x$$

$$x = 0.0007$$

$\therefore \quad \log 5.118 = 0.7084 + 0.(\quad)7 = 0.7091$

(4) 求 $\log 0.7332$

解 $\log 0.734 - \log 0.733 = \bar{1}.8657 - \bar{1}.8651 = 0.0006$

$$0.001 : 0.0002 :: 0.0006 : x$$

$$x = 0.0001$$

$\therefore \quad \log 0.7332 = \bar{1}.8651 + 0.0001 = \bar{1}.8652$

第二 知對數求相當之眞數法

例(1) $\log a = 0.4579$ 求 a (即 $\log^{-1} 0.4579$)

解 以 0.4579 為對數之眞數其數字之排列檢表287此數據指標知為整數一位之數

$$\therefore \quad a = 2.87$$

(2) $\log a = \bar{1}.3766$ 求 a

解 以 $\bar{1}.3766$ 為對數之眞數其數字之排列檢表得

238此數據指標知爲小數點以下至有意數字間無0之小數

$$\therefore \quad a=0.238$$

(3) $\log a=2.7516$ 求 a

解 $\log 565-\log 564=2.7520-2.7513=0.0007$

$$\log a-\log 564=2.7516-2.7513=0.0003$$

$$0.0007 : 0.0003 :: 1 : x$$

$$x=0.4$$

$$\therefore \quad a=564+0.4=564.4$$

(4) $\log a=\bar{3}.8314$ 求 a

解 $\log 0.00679-\log 0.00678=\bar{3}.8319-\bar{3}.8312$

$$=0.0007$$

$$\log a-\log 0.00678=\bar{3}.8314-\bar{3}.8912=0.0002$$

$$0.0007 : 0.0002 :: 0.00001 : x$$

$$x=0.000003$$

$$\therefore \quad a=0.00678+0.000003=0.006783$$

6. 三角函數之對數表

三角函數之對數表者載由0°至90°諸角之三角函數之對數或加10於是者也(但表加10對數通常

以 L 爲其記號)

本書按對數表列舉由 0° 至 90° 間每加 10′ 諸角之三角函數之對數其用法如次

第一 <u>求角之三角函數之對數法</u>

例 (1) 求 $\log\sin 23°34'.6$

解 $\log\sin 23°40' - \log\sin 23°30' = \bar{1}.6036 - \bar{1}.6007$

$$= 0.0029$$

$$10 : 4.6 :: 0.0029 : x$$

$$x = 0.0013$$

$$\therefore \quad \log\sin 23°34'.6 = \bar{1}.6007 + 0.0013 = \bar{1}.6020$$

(2) 求 $\log\tan 72°53'.3$

解 $\log\tan 73° - \log\tan 72°50' = 0.5147 - 0.5102$

$$= 0.0045$$

$$10 : 3.3 :: 0.045 : x$$

$$x = 0.0015$$

$$\therefore \quad \log\tan 72°53'.3 = 0.51(\quad + 0.0015 = 0.5117$$

(3) 求 $\log\cos 35°42'.7$

解 $\log\cos 35°40' - \log\cos 35°5(\quad \bar{1}.9098 - \bar{1}.9089$

$$= 0.0009$$

$$10 : 2.7 :: 0.0009 : x$$

$$x = 0.0002$$

$$\therefore \quad \log\cos 35°42.'7 = \bar{1}.9098 - 0.0002$$

$$= \bar{1}.9096$$

(4)　求　$\log\cot 64°18.'6$

解　$\log\cot 64°10' - \log\cot 64°20' = \bar{1}.6850 - \bar{1}.6817$

$$= 0.0033$$

$$10 : 8.6 :: 0.0033 : x$$

$$x = 0.0028$$

$$\therefore \quad \log\cot 64°18.'6 = \bar{1}.6850 - 0.0028 = \bar{1}.6822$$

(5)　求　$\log\sec 21°37.'4$

解　$\log\cos 21°37.'4 = \bar{1}.9683$

$$\therefore \quad \log\sec 21°37.'4 = 0.0317$$

(6)　求　$\log\operatorname{cosec} 16°42.'3$

解　$\log\sin 16°42.'3 = \bar{1}.4586$

$$\therefore \quad \log\operatorname{cosec} 16°42.'3 = 0.5414$$

第二　知三角函數之對數求相當之角法

例(1)　$\log\sin A = \bar{1}.3035$　求　A

解　$\log\sin 11°40' - \log\sin 11°30' = \bar{1}.3058 - \bar{1}.2997$

$$=0.0061$$

$$\log A-\log 11°30'=\bar{1}.3035-\bar{1}.2997=0.0038$$

$$0.0061:0.0038::10:x$$

$$x=6.2$$

$$\therefore \quad A=11°30'+6.'2=11°36.'2$$

(2) $\log\cos A=\bar{1}.9349$ 求 A

解 $\log\cos 30°30'-\log\cos 30°40'=\bar{1}.9353-\bar{1}.9346$

$$=0.0007$$

$$\log\cos 30°30'-\log\cos A=\bar{1}.9353-\bar{1}.9349$$

$$=0.0004$$

$$0.0007:0.0004::10:x$$

$$x=5.7$$

$$\therefore \quad A=30°30'+5.'7=30°35.'7$$

依上二法任求 $\log\tan A$, $\log\cot A$, $\log\sec A$, $\log\operatorname{cosec} A$ 之 A 角度數皆可求得

7. 諸計算中對數之應用

例(1) 計算 $x=2.582\times 345.7$

解 $\log x=\log 2.582+\log 345.7$

$=0.4119+2.5387=2.9506$

$\therefore \quad x=892.4$

(2) 計算　$x=\dfrac{0.07438}{129.5}$

解　$\log x=\log 0.07438-\log 129.5=\bar{2}.8715+\bar{3}.8877$

$=\bar{4}.7592$

$\therefore \quad x=0.0005744$

(3) 計算　$x=(3.072)^3$

解　$\log x=\log 3.072\times 3=0.4874\times 3=1.4622$

$\therefore \quad x=28.99$

(4) 計算　$x=\sqrt[4]{0.007654}$

解　$\log x=\log 0.007654\div 4=\bar{3}.8839\div 4=\bar{1}.4710$

$\therefore \quad x=0.2958$

(5) 解　$(1.2)^x=1.1$

$x\log 1\ 2=\log 1.1$

故　$x=\dfrac{\log 1.1}{\log 1.2}=\dfrac{0.0414}{0.0792}$

又　$\log x=\log 0.0414-\log 0.0792=\bar{2}.6170-\bar{1}.1013$

$=\bar{1}.7183$

$\therefore \quad x=0.5229$

問題十六

1. 解 $\left(\dfrac{203}{200}\right)^{2x}=2$.

2. 解 $8^{5-3x}=12^{4-2x}$

3. 計算 $\dfrac{(2.013)^2\times(0.0593)^{\frac{3}{5}}}{(0.9122)^4}$

4. 計算 $\dfrac{(34.73)^{\frac{4}{5}}\times\sqrt[6]{2.539}}{\sqrt[4]{4.397}\times(3.456)^3}$

第七章

任意三角形

1. 三角形之性質

第一 角之關係

於任意三角形 $A+B+C=180^\circ$ 因而 $A+B=180^\circ-C$

$$\text{又}\quad \frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}$$

故有次之關係

$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin C\\ \cos(A+B)&=-\cos C\\ \tan(A+B)&=-\tan C\end{aligned}\right\}\text{ 又 }\left\{\begin{aligned}\sin\frac{(A+B)}{2}&=\cos\frac{C}{2}\\ \cos\frac{A+B}{2}&=\sin\frac{C}{2}\\ \tan\frac{A+B}{2}&=\cot\frac{C}{2}\end{aligned}\right\}$$

問題十七

設 A, B, C, 為任意三角形求證次之諸式

1. (1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(2) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(3) $\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1$

(4) $\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1$

2. (1) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1$

(2) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+2$

3. (1) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)$

$$\cos\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)$$

(2) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}=4\sin\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)$

$$\sin\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)$$

(3) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=4\sin\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)$

$$\sin\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)+1$$

(4) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}=4\cos\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)$

$$\cos\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)-1$$

4. (1) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=4\sin A\sin B\sin C$

(2) $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=-4\cos A\cos B\cos C-1$

5. (1) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2\cos A\cos B\cos C+2$

(2) $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=-2\cos A\cos B\cos C+1$

6. (1) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

(2) $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$

7. $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C$

$$+\operatorname{cosec} A\operatorname{cosec} B\operatorname{cosec} C$$

8. (1) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$

(2) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

9. (1) $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$

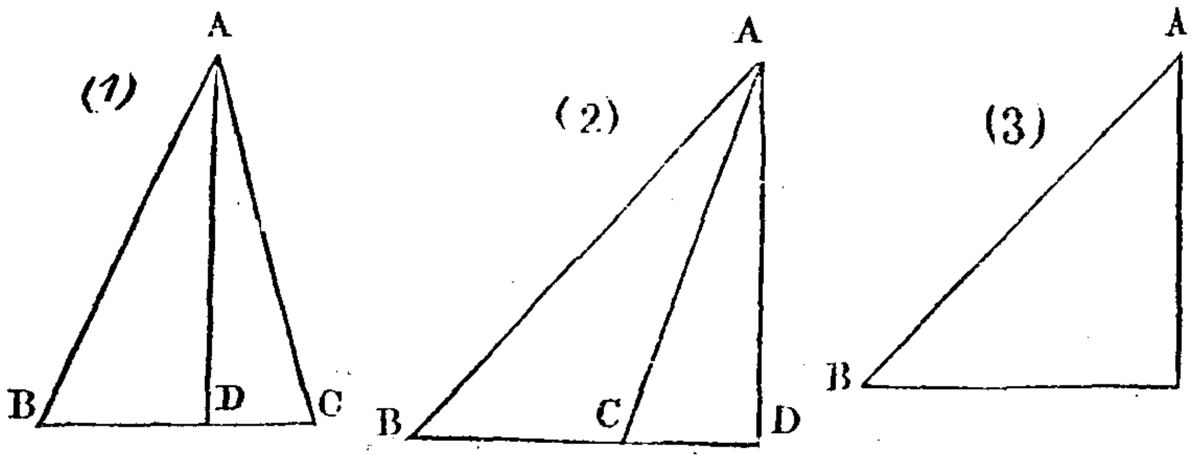
(2) $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=-4\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}$

$\sin\frac{3C}{2}+1$

10. $\cot\frac{A}{2},\cot\frac{B}{2},\cot\frac{C}{2}$成等差級數求證

$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=3$

第二 任意三角形之第一邊等於餘二邊各乘其與第一邊夾角之餘弦二積和之公式



(1) 圖 $BC=BD+DC=AB\cos B+AC\cos C$

即 $a=c\cos B+b\cos C$

(2) 圖 $BC=BD-DC=AB\cos B-AC\cos(180^\circ-C)$

$=AB\cos B+AC\cos C$

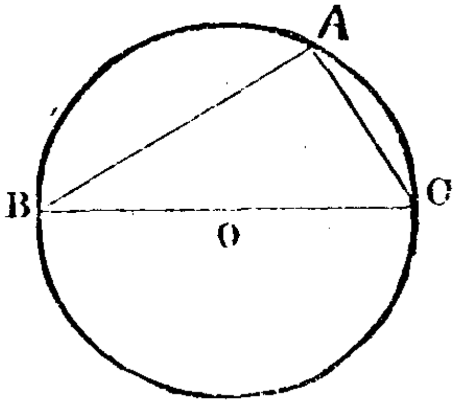
即　$a=c\cos B+b\cos C$

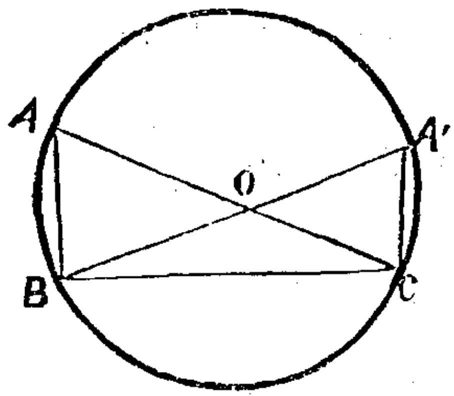
(3)　圖　$\cos C=\cos 90^\circ$

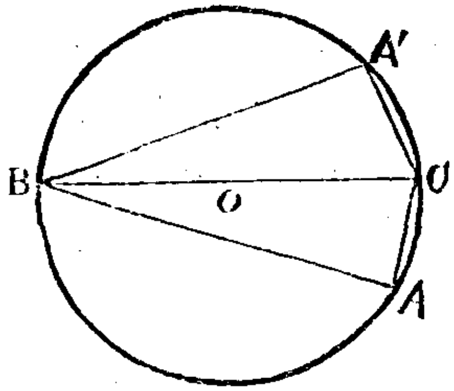
$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad a&=c\cos B+b\cos C\\ \text{同様}\quad b&=a\cos C+c\cos A\\ c&=b\cos A+a\cos B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

第三　外接圓之直徑及正弦比例之式

設$\triangle ABC$上$A,B,C,$角之對邊爲$a,b,c.$外接圓之中心爲O半徑爲R







(1)　$A=90^\circ$ 則 $\sin A=1, a=2R$

$$\therefore \quad \sin A=\frac{a}{2R}$$

$$\therefore \quad 2R=\frac{a}{\sin A}$$

(2) $A \neq 90°$ 則延長 BO 與圓周相交於 A′ 點連此點於 C 則 $B\hat{C}A=90°$ 而 A, A′ 角相等或互爲補角故

$$\sin A=\sin A'=\frac{CB}{A'B}=\frac{a}{2R}$$

$$\therefore \quad 2R=\frac{a}{\sin A}$$

故不拘 A 之如何 $2R=\dfrac{a}{\sin A}$

同樣得 $2R=\dfrac{b}{\sin B},\ 2R=\dfrac{c}{\sin C}$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}(=2R) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (42)$$

是謂正弦比例式

第四 <u>兩角之半差及半和之三角函數之關係</u>

由第(42)公式知 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$$\therefore \quad a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$$

故有次之關係

(1) $\dfrac{a-d}{a+b}=\dfrac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin A+2R\sin B}=\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

(2) $$\frac{a+b}{c}=\frac{2R\sin A+2R\sin B}{2R\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

(2) $$\frac{a-b}{c}=\frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin C}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}$$

$$\therefore\quad c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\qquad(44)$$

第五 以邊顯一角之餘弦及正弦之式

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(2R)^2\sin^2 B+(2R)^2\sin^2 C-(2R)^2\sin^2 A}{2\times 2R\sin B\times 2R\sin C}$$

$$=\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin^2(C+A)+\sin(C+A)\sin(C-A)}{2\sin(C+A)\sin C}$$

$$=\frac{\sin(C+A)+\sin(C-A)}{2\sin C}$$

$$=\frac{2\sin C\cos A}{2\sin C}$$

$$=\cos A$$

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \text{同樣}\quad \cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

此等公式又可書爲次之形

即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

此關係亦可依三角形邊上諸正方形之幾何學定理作之如次

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{\{(1+\cos A)(1-\cos A)\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right\}}$$

$$=\frac{1}{2bc}\sqrt{\{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)\}}$$

令 $\frac{a+b+c}{2}=s$ 則

$b+c-a=2(s-a)$，$c+a-b=2(s-b)$，$a+b-c=2(s-c)$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad \sin A&=\frac{2}{bc}\sqrt{\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}}\\ \text{同樣}\ \sin B&=\frac{2}{ca}\sqrt{\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}}\\ \sin C&=\frac{2}{ab}\sqrt{\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(46)$$

第六　半角之正弦餘弦及正切以各邊之項表之

(1)　$\sin^2\frac{1}{2}A=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

解　由第(45)公式之第一　$2bc\cos A=b^2+c^2-a^2\ldots\ldots(1)$

$$2bc=2bc\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

由(2)減(1)則　$2bc(1-\cos A)=a^2-(b-c)^2$

故　$4bc\sin^2\frac{1}{2}A=(a+b-c)(a-b+c)$

即　$\sin^2\frac{1}{2}A=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

由前條已知　$(a-b+c)=2(s-b)$，$a+b-c=2(s-c)$

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \sin\frac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(47)$$

同樣

(2) $\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}$

解 加上之(1)(2)兩式則

$$2bc(1+\cos A)=(b+c)^2-a^2$$

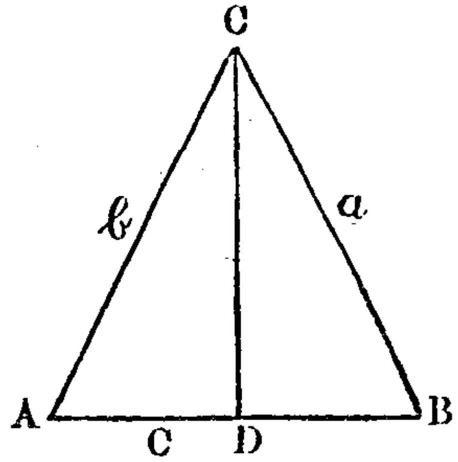
即 $4bc\cos^2\frac{1}{2}A=(b+c+a)(b+c-a)=2s2(s-a)$

$$\therefore\quad\left.\begin{aligned}\cos\frac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

同樣

(3)
$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

第七 三角面積之式



設 $A\hat{B}C$ 以 AB 爲底邊 CD 爲高則

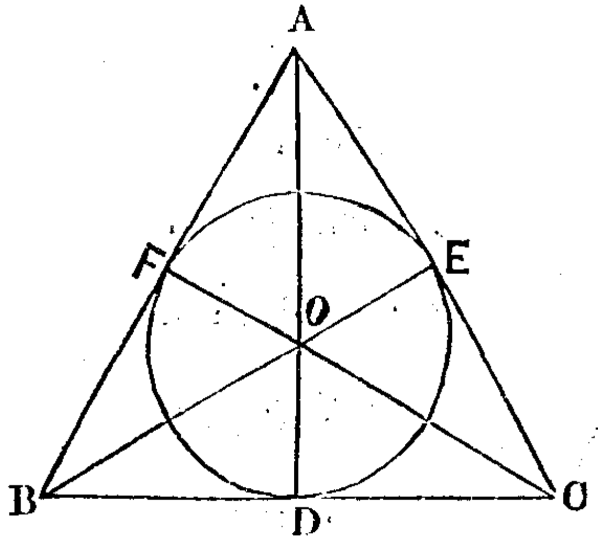
$$\triangle ABC\text{之面積}=\frac{1}{2}AB.CD$$
$$=\frac{1}{2}AB(AC\sin A)$$

於是三角形之面積爲 S 則

$$\left.\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}bc\sin A\\ S&=\frac{1}{2}ca\sin B\\ S&=\frac{1}{2}ab\sin C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

(2)　以第(46)公式之第一式代入第(50)式之第一式內

故　$S=\sqrt{\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}}\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$



第八　內接圓之半徑及半角正切之式

設 $A\hat{B}C$ 之面積爲 S 內接圓之中心爲 O 半徑爲 r 各邊之切點爲 D, E, F 則

$$S=O\hat{B}C+O\hat{C}A+C\hat{A}B$$
$$=\tfrac{1}{2}ar+\tfrac{1}{2}br+\tfrac{1}{2}cr$$

$$= \frac{a+b+c}{2} r\times = sr$$

$$\therefore \quad r = \frac{S}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

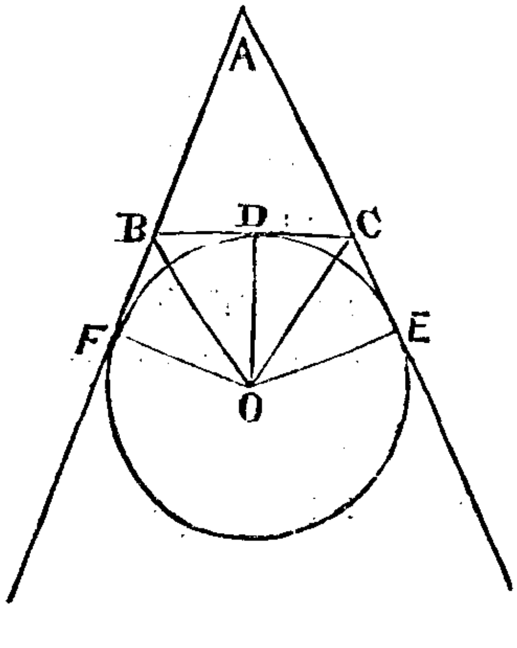
次 $\tan FAO = \frac{FO}{AF}$ 而 $FO = r, AF = s-a$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad \tan\frac{1}{2}A &= \frac{r}{s-a} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \\ \text{同樣} \tan\frac{1}{2}B &= \frac{r}{s-b} = \frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \\ \tan\frac{1}{2}C &= \frac{r}{s-c} = \frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(53)$$

以上三式可以 $\cos A$ 之值代入求得 $\tan^2\frac{1}{2}A$

$$= \frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$

第九 <u>傍接圓之半徑之式</u>



設 $\overset{\triangle}{ABC}$ 之 AB, AC 延長及 BC 之傍接圓之中心為 O 其切點各為 E, F, D 半徑為 r 則 $OD=OE=OF=r'$

故 $\overset{\triangle}{BOC}$ 之面積 $=\frac{1}{2}ar'$

$\overset{\triangle}{COA}$ 之面積 $=\frac{1}{2}br'$

$\overset{\triangle}{AOB}$ 之面積 $=\frac{1}{2}cr'$

$\therefore$ $\hat{COA}$之面積$+\hat{AOB}$之面積$+\hat{BOC}$之面積

$$=\frac{1}{2}(b+c-a)r'$$

即 $\hat{ABO}$之面積 $=S-\frac{1}{2}(b+c-a)r'=(s-a)r'$

$$\therefore \quad r'=\frac{S}{s-a}$$

同樣 AC, AB 側傍接圓之半徑爲 r'' r''' 則

$$r''=\frac{S}{s-b}, \quad r'''=\frac{S}{s-c}$$

$$\therefore \quad r'=\frac{S}{s-a}$$

$$r''=\frac{S}{s-b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (54)$$

$$r'''=\frac{S}{s-c}$$

問題十八

設 A, B, C 爲三角形之角 a, b, c 爲其對邊證次之諸式

1. (1) $b\sin B-c\sin C=a\sin(B-C)$

(2) $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$

2. (1) $a\cos\frac{B-C}{2}=(b+c)\sin\frac{A}{2}$

(2) $a\sin\frac{B-C}{2}=(b+c)\cos\frac{A}{2}$

3.　$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$

4.　$c\,(a\cos B - b\cos A) = a^2 + b^2$

5.　$\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos B}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

6.　$(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$

7. (1)　$\cot A + \cot B = \dfrac{c}{b\sin A}$

(2)　$\cot A - \cot B = -\dfrac{a^2 - b^2}{ab\sin C}$

8. (1)　$S = \dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B + C)}$

(2)　$S = \dfrac{a^2 - b^2}{2} \cdot \dfrac{\sin A\sin B}{\sin(A - B)}$

(3)　$S = \dfrac{abc}{s}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

9.　以三角形之三垂線爲 P_1, P_2, P_3, 證明次式

$$a\sin A + b\sin B + c\sin C = 2(P_1\cos A + P_2\cos B + P_3\cos C)$$

10. (1)　$\dfrac{1}{r'} + \dfrac{1}{r''} + \dfrac{1}{r'''} = \dfrac{1}{r}$　(3)　$r'r'' + r''r''' + r'''r' = S^2$

(2)　$r' + r'' + r''' - r = 2S$　(4)　$\dfrac{r' - r}{a} + \dfrac{r'' - r}{b} = \dfrac{c}{r''}$

11.(1) $r=\dfrac{a\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}$ (2) $r'=\dfrac{a\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}$

12. (1) $r'r''r'''=r^3\cot^2\dfrac{A}{2}\cot^2\dfrac{B}{2}\cot^2\dfrac{C}{2}$

13. (1) $S=\sqrt{rr'r''r'''}$ (2) $\dfrac{r'r''r'''}{S}=S$

2. 多角形之性質

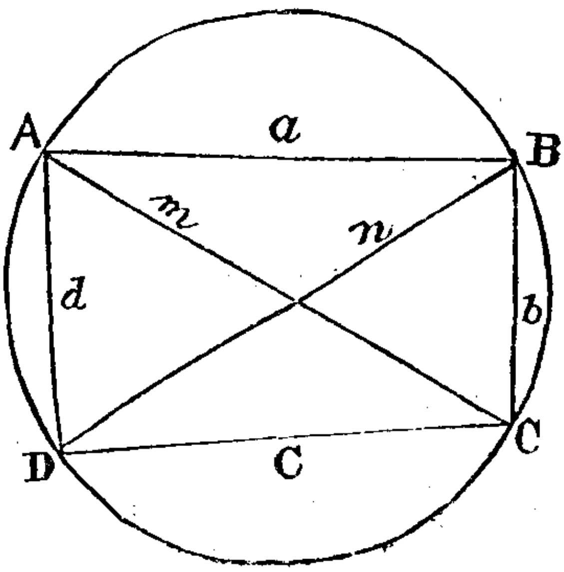
第一　圓之內接四邊形之面積

設內接四邊形ABCD之邊AB, BC, CD, 與DA及對角線AC, BD為a, b, c, d, 及m, n, 則

$$m^2=a^2+b^2-2ab\cos B\cdots\cdots(1)$$

及 $m^2=c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-B)$

卽 $$m^2=c^2+d^2+2cd\cos B\cdots\cdots(2)$$



依上之(1)(2)兩式得次式

即 $a^2+b^2-2cb\cos B$

$=c^2+d+2cd\cos B$

故 $\cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$

故 $1-\cos B$

$=1-\dfrac{a^2+b^2-(c^2+d^2)}{2(ab+cd)}$

即 $\sin^2\frac{1}{2}B=\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{4(ab+cd)}$

又 $1+\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}+1$

即 $\cos^2\frac{1}{2}B=\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{4(ab+cd)}$

於此四邊形之半周$=\frac{1}{2}(a+b+c+d)=S$則

$$\sin\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab+cd}}\cdots\cdots(55)$$

$$\cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{ab+cd}}\cdots\cdots(56)$$

以第(87)式代用第(55)(56)二式內則

$$\sin B=2\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}B$$

$$\therefore\quad \sin B=\frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{db+cd}\cdots\cdots(57)$$

又以四邊形之面積爲 S 則

$\therefore\quad S=A\hat{B}C$ 之面積 $+A\hat{D}C$ 之面積

$$=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D \text{ (由第(50)公式得)}$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin(180^\circ-B)$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin B+\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B$$

即 $S=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B$ 以此代用第(57)公式內

則 $S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ ……………… (58)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{系一} & m^2=\dfrac{(ac+db)(ad+bc)}{ab+dc}\\ \text{同樣} & n^2=\dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots (59)$$

此二公式代用 $\cos B$ 之值卽得

系二 $4R=\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$ ……………… (60)

解 先以其圓之半徑爲 R 則

$$\frac{m}{2R}=\sin B \quad \therefore \quad R=\frac{m}{2\sin B}$$

故依本章(57)及(59)二公式推之可得本式之證明

第二 <u>任意四邊形之面積</u>

解 用前條之圖則

$$S=\frac{1}{2}(ad\sin A+bc\sin C) \quad\cdots\cdots\cdots (1)$$

然 $\cos A=\dfrac{a^2+d^2-n^2}{2ad}$, $\cos C=\dfrac{b^2+c^2-n^2}{2bc}$

$\therefore$ $2ad\cos A-2bc\cos C=a^2+d^2-b^2-c^2$ ……………… (2)

前(2)式之兩端各加 $2ad+2bc$ 且變化之則

$$4ad\cos^2\frac{1}{2}A+4bc\sin^2\frac{1}{2}C=(a+d)^2-(b-c)^2$$

$$=(a+d+b-c)(a+d-b+c)$$

$$=(2s-2c)(2s-2b)$$

即 $ad\cos^2\frac{1}{2}A+bc\sin^2\frac{1}{2}C=(s-c)(s-b)$ ……………… (3)

又由(2)式之兩端各減 $2ad+2bc$ 且變化之

依前同法則

$$ad\sin^2\frac{1}{2}A+bc\cos^2\frac{1}{2}C=(s-a)(s-d)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

再以(3)(4)二式相乘且簡單之則

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

$$=(ab\cos^2\frac{1}{2}A+bc\sin^2\frac{1}{2}C)(ab\sin^2\frac{1}{2}A+bc\cos^2\frac{1}{2}C)$$

$$=\frac{1}{4}(ad\sin A+bc\sin C)^2+abcd\cos^2\frac{1}{2}(A+C)\cdots\cdots\cdots(5)$$

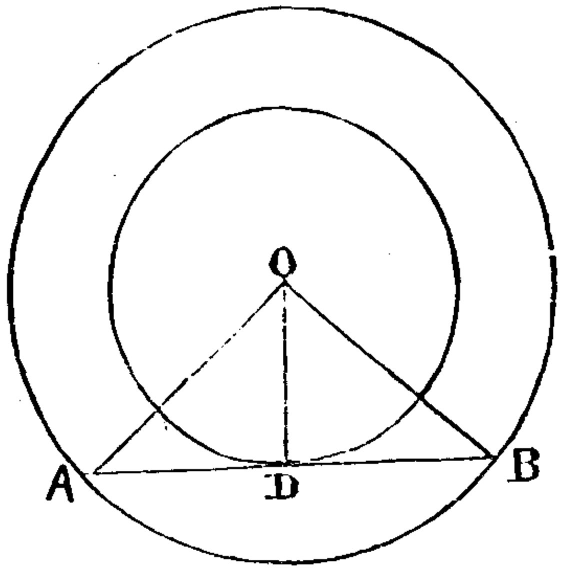
然以(1)式平方之則得 $S^2=\frac{1}{4}(ab\sin A+bc\sin C)^2$

以此代用於(5)且轉項則得所求之式卽

$$S^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{1}{2}(A+C)\cdots(61)$$

第三 <u>求正多角形之外接圓及內接圓之半徑及多邊形之面積</u>

設 n 邊正多角形之一邊爲 AB=a 兩圓之心爲 O 外接圓之半徑 OA=R 內接圓之半徑 OD=r



則 $\angle AOB=\frac{1}{n}$ 四直角

$\therefore \angle AOB=\frac{2\pi}{n}$ 及 $\angle AOD$

$$=\frac{\pi}{n}$$

$$AD=\frac{a}{2}=R\sin\frac{\pi}{n}$$

$$=r\tan\frac{\pi}{n}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad R&=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} \\ r&=\frac{a}{2\tan\frac{\pi}{n}} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(62)$$

又多角形之面積$=n\overset{\Delta}{AOB}=n\times AD\cdot OD$

$$=n\times\frac{a}{2}\times r$$

$$=nr^2\tan\frac{\pi}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

或因　$AD=R\sin\frac{\pi}{n}$ 及 $OD=R\cos\frac{\pi}{n}$

$\therefore$　多角形之面積 $=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$

$$=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(64)$$

注意　任意圓之周與其直徑比爲 π 而其値爲 3.1415926……………之數也

第四　求半徑爲 r 之圓面積

解　設 n 邊正多角形之面積 $=nr^2\tan\frac{\pi}{n}$

由 n 增加此正多角形漸近內接圓故 n 爲甚大時則此多角形與內接圓殆至壹致故

$$\tan\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}\text{ 亦可}$$

$\therefore$　圓之面 $=nr^2\tan\frac{\pi}{n}=nr^2\cdot\frac{\pi}{n}=\pi r^2$

第五 求弧度為 θ 扇形之面積

解 依幾何學定理則

圓之弧度:扇形之弧度::圓面積:扇形之面積

$2\pi:\theta::\pi r^2:$ 扇形之面積

$\therefore$ 扇形之面積 $=\dfrac{\theta r^2\times\pi}{2\times\pi}=\dfrac{\theta r^2}{2}$

問題十九

1. 有相等周邊之正三角形與正六邊形內接圓之面積之比為 $4:9$

2. 二等圓各過他之中心時證明次式

二等圓共通部分之面積 $=\dfrac{1}{6}r^2(4\pi-3\sqrt{3})$

3. 正多角形之外接圓及內接圓之半徑為 R, r 而與此等積邊數為2倍之他正多角形之外接圓及內接圓之半徑亦為 R', r' 則 $R'=\sqrt{Rr}, r'=\sqrt{\dfrac{R(+r)}{2}}$

3. 三角形之解法

一般三角形之解法有例四種如次

第一 知一邊及二角(如 a, B, C)

則由 $A=180°-(B+C)$ 求 A

又由 $\left.\begin{aligned} b&=\frac{a\sin B}{\sin A} \\ c&=\frac{a\sin C}{\sin A}\end{aligned}\right\}$ 求 b, c

第二 <u>知二邊及其夾角如(b, c, A)則</u>

由 $\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}$ 求 $\frac{B+C}{2}$

由 $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ 求 $\frac{B-C}{2}$

由 $B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2}$ $C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}$ 求 B, C

由 $a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$ 或 $\frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}$ 求 a

第三 <u>知二邊及對其一邊之角(如 a, b, A)則</u>

由 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$ 求 B

由 $C=187°-(A+B)$ 求 C

由 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$ 求 c

然由正弦之值定有下例

(1) $\sin B>1$ 卽 $\log\sin B>0$ 則不能解

(2) $\sin B=1$ 卽 $\log\sin B=0$ 則 $B=90°$

故祇有一個解法(見前直三角形解法)

(3) $\sin B<1$ 卽 $\log\sin B<0$ 而 a 大 b 則

$A \nless B$ 故 $B<90°$ 從而有一種解法

(4) $\sin B<1$ 卽 $\log\sin B<0$ 而 $a<b$ 則

$A<B$ 故 B 爲銳角或鈍角故 B 至爲補角之二值從而有二種解法是謂有兩意之例

第四 知三邊爲 $a, b, c,$ 則

由 $$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\frac{1}{s-a}\sqrt{\left\{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\right\}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\frac{1}{s-b}\sqrt{\left\{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\right\}}\end{aligned}\right\}$$ 求 A, B

由 $C=180°-(A+B)$ 求 C

例(1) 於 $\overset{\triangle}{ABC}$, $A=50°68.'7$, $B=32°50.'8$,

$c=169.4$ 求 a, b

解 此式爲

$$C=180°-(A+B)$$

$$\therefore\quad C=180°-(50°58.'7+32°50.'8)$$

$$=96°10.'5$$

又 $a=c\dfrac{\sin A}{\sin C}$

故 $\log a=\log c+\log\sin A-\log\sin C$

$=\log 169.4+\log\sin 50°58.'7-\log\sin 96°10.'5$

$=2.2289+\bar{1}.8904-0.0025=2.1218$

$\therefore \quad a=132.4$

又　$b=c\dfrac{\sin B}{\sin C}$

故　$\log b=\log c+\log\sin B-\log\sin C$

$=\log 109.4+\log\sin 32°50.'8$

$-\log\sin 96°10.'5$

$=2.2289+\bar{1}.7344-0.0025=1.9658$

$\therefore \quad b=92.43$

例(2)於 $\widehat{ABC}$, $b=4.567$, $c=3.456$

$A=56°7.'8$ 求 B, C, a

解　此式為　$\tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{(b-c)}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$

即　$\log\tan\dfrac{B-C}{2}=\log(b-c)-\log(b+c)+\log\cot\dfrac{A}{2}$

$=\log(4.567-3.456)-\log(4.567+3.456)+\log\cot\dfrac{56°7.'8}{2}$

$=\log 1.111-\log 8.023+\log\cot 28°3.'9$

$=0.0457+\bar{1}.0956+0.2731=\bar{1}.4144$

$\therefore \quad \dfrac{B-C}{2}=14°33.'3$

而　$\dfrac{B+C}{2}=90°-\dfrac{A}{2}=90°-\dfrac{56°7.'8}{2}=61°56.'1$

$\therefore \quad B=\dfrac{B+C}{2}+\dfrac{B-C}{2}$

$=14°33.'3+61°56.'1=76°29.'4$

$$\therefore \quad C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}$$

$$=61°56.'1-14°33.'3=47°22.'8$$

又
$$c=\frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}$$

即
$$\log a=\log(b-c)+\log\cos\frac{A}{2}-\log\sin\frac{B-C}{2}$$

$$=\log 1.111+\log\cos 28°3.'6-\log\sin 14°33.'3$$

$$=0.0457+\bar{1}.9457-0.5998=0.5912$$

$$\therefore \quad a=3.901$$

例(3) 於$\overset{\triangle}{ABC}$, $a=182.5$, $b=236.8$, $A=32°29.'6$ 求 B, C, c

解 此式為 $\sin B=b\dfrac{\sin A}{a}$

$$\log\sin B=\log b+\log\sin A-\log a$$

$$=\log 236.8+\log\sin 32°29.'6-\log 182.5$$

$$=2.3743+\bar{1}.7301-\bar{3}.7397=\bar{1}.8441$$

因 $\log\sin B<0$, $a<b$ 從而有兩種解法

故 $B=44°17.'7$

但 $A=32°29.'6$ 或 $135°42.'3$

$\therefore \quad A+B=76°47.'3$ 或 $168°11.'9$

$\therefore \quad C=180°-(A+B)$

$=103°12.'7$ 或 $11°48.'1$

又　$c=b\frac{\sin C}{\sin B}$

卽　$\log c=\log\sin C+\log b-\log\sin B$

$=\overline{1}.9993+2.3743-0.1559$

或　$=\overline{1}.3107+2.3743-0.1359$

$=2.5185$　或　$=1.8409$

$\therefore\quad c=330$　或　69.33

例(4)　於 $\hat{ABC}$, $a=273.9$, $b=198.6$, $c=236.8$ 求 A, B, C

解　$\therefore\quad s=\frac{273.9+198.6+236.8}{2}=354.7$

則　$s-a=354.7-273.9=80.8$

$s-b=354.7-198.6=156.1$

$s-c=354.7-236.8=117.9$

由此　$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{s-a}\sqrt{\left\{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\right\}}$

卽　$\log\tan\frac{A}{2}=\log 1-\log 80.8$

$+\frac{\log 80.8+\log 156.1+\log 117.9-\log 354.7}{2}$

$=\overline{2}.0926+\frac{1.9074+2.1934+2.0715+\overline{3}.4502}{2}$

$=\overline{2}.0926+1.8113=\overline{1}.9039$

$\therefore\quad\frac{A}{2}=38°42.'69$

$A=77°25.'4$

又　$\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

即　$\log\tan\frac{B}{2}=\log 1-\log 156'1$

$$+\frac{1'9074+2'1934+2'0715+\bar{3}'4502}{2}$$

$$=\bar{1}'6179$$

$\therefore\quad\frac{B}{2}=22°31'.04$　即　$B=45°3'.9$

又　$C=180°-(A+B)$

$$=180°-(77°25'.4+45°3'.9)=57°30'.7$$

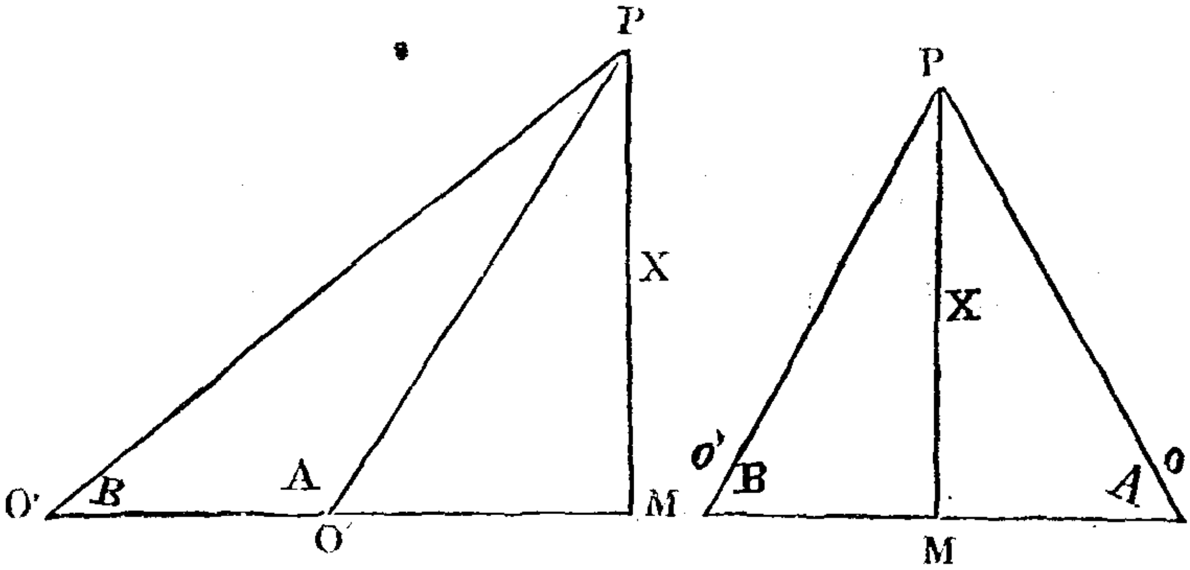
問題二十

1. $A=78°23'.2,\quad B=52°16'.3,\quad a=796'3$ 求 $b,\ C$
2. $b=295'6,\quad c=999'2,\quad A=180°29'.6$ 求 $C,\ a$
3. $a=23'46,\quad b=35'76,\quad A=28°35'.4$ 求 $c,\ C$
4. $a=375'9,\quad b=298'7,\quad c=400'8$ 求 $A,\ B$
5. 知 $a, b, A-B$ 間解 $\hat{ABC}$ 之方法
6. 知 $a+b, A, B$ 間解 $\hat{ABC}$ 之方法
7. 知 $a, b+c, A$ 間解 $\hat{ABC}$ 之方法
8. 知 $a+b+c, A, B$ 間解 $\hat{ABC}$ 之方法
9. 知四邊形之三邊及二對角線求其之餘一邊之方法若何

3. 距離及高之測法

用直角三角形之解法以測距離及高既舉其數例矣而用一般三角形之解法其所得之方法較前尤便更舉數例如次

第一　有物在人所不能到之處但能由遠處望之欲求遠處一點與物之距離



於直線上取 O, O′ 二點測其距離(設爲 p) 由不能到之點 P 作 PM 爲此線之垂線設 PM 之數值爲 x

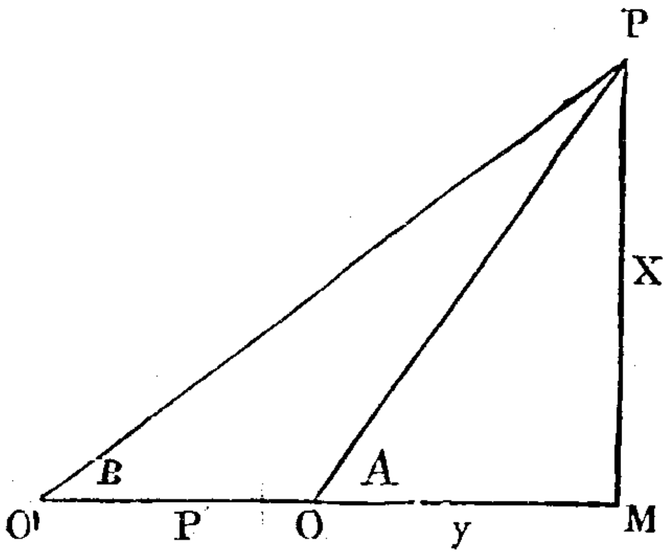
又設 $O'\hat{O}P$ 及 $O\hat{O'}P$ 爲 A, B 則

$$於\ O\hat{O'}P,\ OP=\frac{OO'\sin OO'P}{\sin OPO'}=\frac{p\sin B}{\sin(A+B)}$$

又於 $O\hat{M}P$, $MP=OP\sin MOP=OP\sin A$

$$\therefore\quad x=\frac{p\sin A\sin B}{\sin(A+B)}$$

第二 有一垂直物體人不能至基礎下惟能在地上之二點觀測之求其高及距離



如圖 MP 爲物體 O, O' 爲觀測點

設 OO', MP, OM 之數値爲 p, x, y 從 OO' 與 MP 同在一平面上與否而判次之方法

(1) OO' 與 MP 同在一平面上則測$\angle MOP$及$\angle MO'P$設之爲 A' B 則

於 $\hat{OO'P}$, $OP=\dfrac{OO'\sin OO'P}{\sin OPO'}$

$$=\frac{p\sin B}{\sin(A-B)}$$

次於 $\hat{OMP}$, $MP=OP\sin MOP=OP\sin A$

$$OM=OP\cos MOP=OP\cos A$$

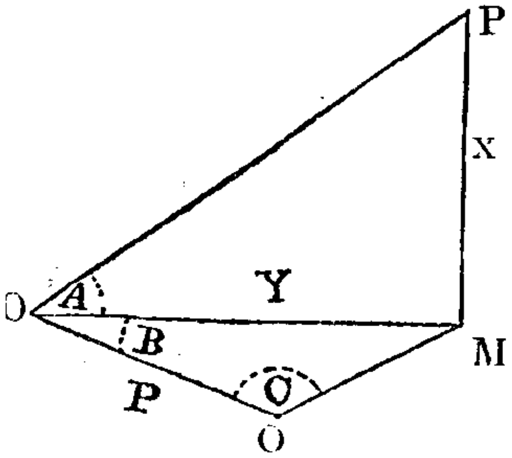
$$\therefore\quad x=\frac{p\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$$

$$y=\frac{p\cos A\sin B}{\sin(A-B)}$$

(2) OO' 與 MP 不同在一平面上則測$\angle MOP$, $\angle MOO'$,

$\angle OO'M$ 設之為 A, B, C 則

於 $\overset{\triangle}{OMO'}$ 內 $OM=\dfrac{OO'\sin OO'M}{\sin OMO'}$

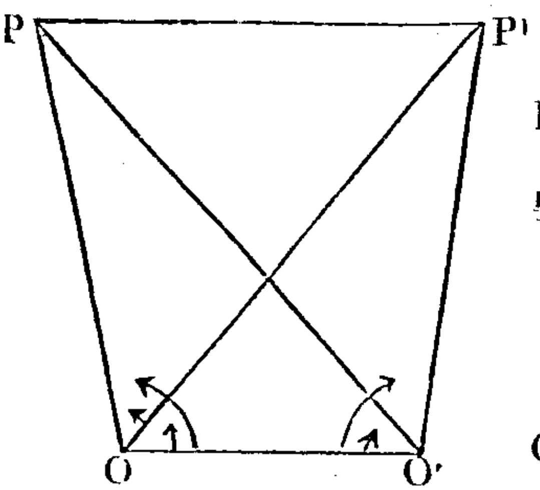


$$\therefore\quad y=\frac{p\sin C}{\sin(B+C)}$$

次於 $\overset{\triangle}{OMP}$, $MP=OM\tan MOP$

$$\therefore\quad x=\frac{p\tan A\sin C}{\sin(B+C)}$$

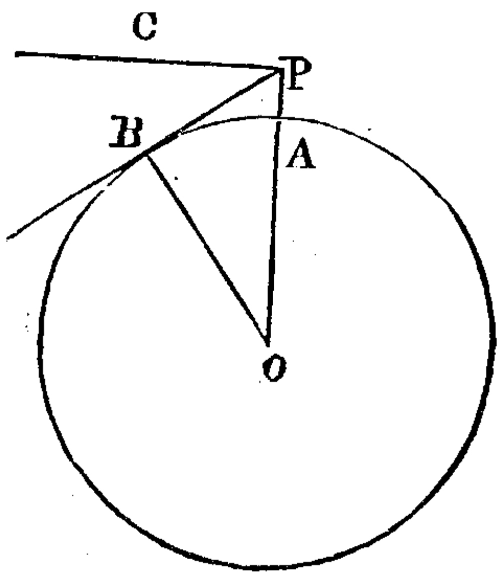
第三 有二物在遠處皆人所不能到之處欲求其距離



如圖有人不能到之二點 P P′ 惟能於相宜之二點 O, O′ 望之則測 $\angle O'OP$, $\angle O'OP'$, $\angle P'OP$, $\angle OO'P'$, $OO'P$, 及 OO' 於 $\overset{\triangle}{OO'P}$ 求 OP, 於 $\overset{\triangle}{OO'P'}$ 求 OP,′ 於 $\overset{\triangle}{POP'}$ 求 PP′

注意 P, P′, O, O′, 同在一平面上則可少測一 O 角

第四 視水平之距離及俯向



如圖O爲地球之中心,P爲若干高之觀測點,PB爲切線,則B之軌跡圓周謂之視水平PB及∠BPC(PC爲水平線)謂之距離及俯向今設地球之半徑爲r觀測點之高爲h視水平之距離及俯向爲L及θ則有次之關係

(1) $\cos\theta=\cos BOP=\dfrac{OB}{OP}=\dfrac{r}{r+h}$

(2) 變上式之形則 $h\cos\theta=r(1-\cos\theta)$

$$\therefore\quad h=\frac{r(1-\cos\theta)}{\cos\theta}$$

(3) $r=\dfrac{h\cos\theta}{1-\cos\theta}$

(4) $L=r\tan\theta=\dfrac{h\sin\theta}{1-\cos\theta}=h\cot\dfrac{\theta}{2}.$

問題二十一

1. 於河之一岸由相距100丈之二點A,B,望對岸之一點P知$P\hat{A}B=60^\circ$, $P\hat{B}A=45^\circ$問河寬若干

2. 有人望前面之塔頂測其仰角得 $30°$, 由是向塔再進 100 尺測其頂之仰角得 $75°$ 求塔高及至初觀測點之距離

3. 有人望北及北 $30°$ 西兩方向之二物體 A, B 由是向北西之方向進 10 里則 A, B, 之方向爲北東及東問 A, B 之距離幾何

4. 有立於 h 高石台上之紀念碑於距石台 a 之一地望之紀念碑上端之仰角爲下端仰角之二倍問台上碑高幾何

5 設地球半徑爲 r 則於 h 高之一點其視水平之距離等於 $\sqrt{2rh+h^2}$ 試證之

6. 由高 h 尺之塔頂於其一面望與塔脚同在一水平面上之二物體得俯角 $45°-A$ 及 $45°+A$ 問二物之距離幾何

7. 於塔南之一地測其頂之仰角得 $30°$, 次由此地向西行 a 距離再測塔頂之仰角得 $18°$ 求塔高等於 $\dfrac{a}{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}$

8. 由湖水面上高 h 尺之處停雲之一點得仰角 a, 同時望其在湖水中之影得俯角 b 問其雲高幾何

9. 有人望塔頂及立於塔頂上高 C 尺之旗竿之上端得仰角 B 及 A 問塔高幾何

10. 在塔之基礎望樹頂得仰角 a, 次登塔 h 尺再望其仰角得 b 問樹高幾何

11. 有人測立於邱上之塔頂及塔根得仰角 a 及 b 次退後 L 距離再測塔頂之仰角得 C 問在邱上之塔高及邱高幾何

12. 在山麓測在山頂之巖之上端得仰角 47° 由是向成 32° 傾斜角之直線坂路登 1000 尺再測巖之仰角得 77° 問巖較初之測點高幾何

13. 由向北走之船望見兩個燈台爲北東及北北東之方向由是走 20 里後再望二燈台俱在東方向問二燈台之距離幾何

14. 距 ALB 塔 48 尺之地有一高 14 尺台 C 在此台上望塔知 ACL =LCB 而 AL=30 尺問塔高幾何

15. 由向西南走之二船望碇泊之二船爲北北西及西北西由是走 5 里再望二船其方向爲北及北西問二船之距離幾何

16. 有二點 P, Q 於 P 南之一地 L 望之知 PLQ=A 次由 L 向西走 a 距離到 M 知 PMQ=A 更猶同方向

進 b 達 Q 之地 N 證 P, Q 之距離為 $\sqrt{(a+b)^2+b^2\tan^2A}$

17. 有立於 ED 塔上之旗竿 DC, 於與塔腳 E 同在一水平面上之一點 P 知 $E\hat{P}D=B$, $D\hat{P}C=A$, 次由 P 向 E 進 c 距離到 Q 再進望之知 $D\hat{Q}C=A$ 問塔高幾何

18. 有立於 BC 塔上之旗竿 CD, 於由 B 距 C 里之地測得最大角為 A 則

$CD=2c\tan A$, $BC=c\tan(45°-\frac{A}{2})$ 試證之

19. 有海岸望樓手當其正西望見一船為俯角 A 然一時間後此船在正南為俯角 B 今知望樓之高在水面上 h 尺則此船每時以 $h\sqrt{\cot^2A+\cot^2B}$ 尺之速度進行求證之

20. 有海籌海容兩巡洋艦相距半英里與日本之朝日號軍艦同時停泊於吳淞口外海籌測得兩餘船所對之角為 85°15′ 海容測得兩餘船所對之角為 83° 45′ 求每華船距日船之遠度

21. 有二工程師伏於 A, B 二處同時測得一紙鳶之仰視角各為 a 而其由 A 處測得紙鳶與 B 處相聯之綫對於 A 之角為 β 設知兩處相距之度為 a 求紙

鳶之高

22. 有路自山麓至山頂計長 $1\frac{2}{3}$ 英里每長五英尺升高一英尺山之對坡又有之字形之小路亦自山麓繞山至山頂惟每長十二英尺計高一英尺求其長度

23. 設從山巔測得兩隣碑之俯角為 $12°13'$ 與 $2°45'$ 求山之高但兩碑相距一里並同在地平面內

24. 一台築於地平之上有溝繞其四圍其廣如台之高又有一台其高為 a 其距溝之度為 c 一人在後台頂測得前台所對之角為 $45°$ 試證前台之高度為 $\frac{a^2+c^2}{a-c}$

25. 一環置於一竪桿之頂其高為環徑之 4 倍環心距桿底之度與桿高等求日高角

26. 一輪船行抵 A 點時測得一島在其正北迨向正東駛行 10 英里至 B 點復測之見在西北求島距 A, B 之度

27. 有燈塔建於崗頂其頂與底之仰視角為 $60°$ 試證塔之長度倍於崗之高度

28. 以木製二等邊三角形之板以垂面向太陽頂點向上立之今三角形之底邊為 2a 高為 h 太陽之高

度爲 30° 則三角形之影頂角之正切爲

$\frac{2ah\sqrt{3}}{3h^2-a^2}$ 求證之

第八章
逆三角函數

1. 定義

於前數章所論圓函數皆以角而研究其角之函數值於本章反之以函數值而求適合之角度謂之逆三角函數(又稱爲反函數)

但知任意之一角時求其函數之值惟一反之若知一函數之值求適合此值之角甚夥

例如 30° 角其正弦函數之值爲 $\frac{1}{2}$ 而正弦函數之值爲 $\frac{1}{2}$ 者其角不止 30° 尙有無窮何則依 IV 章 2 節知圓函數爲週期即 n 爲任意之整數時則 $\sin(n\times360°+30°)=\frac{1}{2}$

2. 反記法 示於次

正弦爲 a 之角謂之 a 之逆正弦以 $\sin^{-1}a$ 表之

故　　$\sin\theta = a$ 與 $\theta = \sin^{-1}a$ 全同

同樣　$\cos\theta = a$ 與 $\theta = \cos^{-1}a$ 全同

$\tan\theta = a$ 與 $\theta = \tan^{-1}a$ 全同

此記法恰如代數學之負指數然其意迥異

例　$x^{-1}\theta = a$　即 $\frac{1}{x}\theta = a$　∴　$\theta = ax = xa$

而　$\sin^{-1}\theta = a$　即　$\theta = \sin a$

則　$\theta = \sin a \neq a\sin$ 此與代數學所異者也

3. 求正弦各數之值

正弦相等之角其動徑之位置祇有兩種因

$\sin(180° - A) = \sin A$, $\sin(n\times360° + A) = \sin A$

故 $n\times360° + \sin^{-1}a$ 或 $n\times360° + (180° - \sin^{-1}a)$ 悉有 a

正弦其他諸角不然

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sin^{-1}a &= n\times360° + \sin^{-1}a\\ &\text{或}\quad n\times360° + (180° - \sin^{-1}a)\\ &= 2n\times180° + \sin^{-1}a\\ &\text{或}\quad (2n+1)180° - \sin^{-1}a\\ &= n\times180° + (-1)^n\sin^{-1}a \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(65)\end{aligned}$$

但 n 顯零或任意之整數(以下準此)

例(1)　$\sin^{-1}0 = n\times180° + (-1)^n\sin^{-1}0 = n\times180° + 0°$

$$= n\times180°$$

(2) $\sin^{-1}1=n\times180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}1=n\times180^\circ+(-1)^n90^\circ$

而 $n\times180^\circ+(-1)^n90^\circ$ 其 n 爲任意之偶數(2n)則爲 $2n\times180^\circ+90^\circ$ 卽 $(4n+1)90^\circ$, n 爲任意之奇數$(2n+1)$則亦爲$(2n+1)180^\circ-90^\circ$ 卽$(4n+1)90^\circ$故可記爲$\sin^{-1}1=(4n+1)90^\circ$

(3) $\sin^{-1}(-1)=n\times180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}(-1)$

$$=n\times180^\circ+(-1)^n(-90^\circ)$$

而 $n\times180^\circ+(-1)^n(-90^\circ)$ 其 n 爲任意之偶數(2n)則爲 $2n\times180^\circ-90^\circ$ 卽 $(4n-1)90^\circ$, n 爲任意之奇數$(2n-1)$則亦爲$(2n-1)180^\circ+90^\circ$ 卽 $(4n-1)90^\circ$

故可記爲 $\sin^{-1}(-1)=(4n-1)90^\circ$

系 $\operatorname{cosec}^{-1}a=n\times180^\circ+(-1)^n\operatorname{cosec}^{-1}a$

4. 求餘弦各數之値

餘弦相等之角其動徑之位置祇有兩種因$\cos(-A)=\cos A$, $\cos(n\times360^\circ+A)=\cos A$

故 $n\times360^\circ+\cos^{-1}a$ 或 $n\times360^\circ+(-\cos^{-1}a)$悉有a餘弦其他諸角不然

$\therefore\ \cos^{-1}a=n\times360^\circ+\cos^{-1}a$

或 $n\times360^\circ+(-\cos^{-1}a)$

$$=2n\times 180^\circ+\cos^{-1}a$$

或 $2n\times 180^\circ-\cos^{-1}a$

$$=2n\times 180^\circ\pm\cos^{-1}a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (66)$$

例 (1) $\cos^{-1}0=2n\times 180^\circ\pm\cos^{-1}0=2n\times 180^\circ\pm 90^\circ$

$$=(4n\pm 1)\,90^\circ$$

而以 $4n+1$ 及 $4n-1$ 所表之諸數俱爲一切奇數故可記爲 $\cos^{-1}0=(4n+1)\,90^\circ$

(2) $\cos^{-1}1=2n\times 180^\circ\pm\cos^{-1}1=2n\times 180^\circ\pm 0$

$$=2n\times 180^\circ$$

(3) $\cos^{-1}(-1)=2n\times 180^\circ\pm\cos^{-1}(-1)$

$$=2n\times 180^\circ\pm 180^\circ=(2n\pm 1)\,180^\circ$$

而 $2n+1$, $2n-1$ 俱顯一切奇數

故可記爲 $\cos^{-1}(-1)=(2n+1)\,180^\circ$

系 $\sec^{-1}a=2n\times 180^\circ\pm\sec^{-1}a$

5. 求正切各數之值

正切相等之角其動徑之位置祇有兩種因

$$\tan(180^\circ+A)=\tan A,\ \tan(n\times 360^\circ+A)=\tan A$$

故 $n\times 360^\circ+\tan^{-1}a$ 或 $n\times 360^\circ+(180^\circ+\tan^{-1}a)$ 悉有 a 正切其他諸角不然

$$\therefore \quad \tan^{-1}a = n\times 360^\circ + \tan^{-1}a$$

或 $n\times 360^\circ + (180^\circ + \tan^{-1}a) = 2n\times 180^\circ + \tan^{-1}a$

或 $(2n+1)180^\circ + \tan^{-1}a = n\times 180^\circ + \tan^{-1}a$ ········ (67)

例 (1) $\tan^{-1}0 = n\times 180^\circ + \tan^{-1}0 = n\times 180^\circ + 0 = n\times 180^\circ$

(2) $\tan^{-1}1 = n\times 180^\circ + \tan^{-1}1 = n\times 180^\circ + 45^\circ$

$= (4n+1)\,45^\circ$

(3) $\tan^{-1}(-1) = n\times 180^\circ + \tan^{-1}(-1) = n\times 180^\circ$

$+ (-45^\circ) = (4n-1)\,45^\circ$

(4) $\tan^{-1}\infty = n\times 180^\circ + \tan^{-1}\infty = n\times 180^\circ + 90^\circ$

$= (2n+1)\,90^\circ$

系 $\cot^{-1}a = n\times 180^\circ + \cot^{-1}a$

問題二十二

證次之諸式

1. (1) $\cot^{-1}a = \cos^{-1}\sqrt{1-a^2} = \tan^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

$= \cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a} = \sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}} = \operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1}{a}$

(2) $\cos^{-1}a = \sin^{-1}\sqrt{1-a^2} = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

$= \cot^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \sec^{-1}\dfrac{1}{a} = \operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

(3)　$\tan^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\cot^{-1}\dfrac{1}{a}$

$$=\sec^{-1}\sqrt{1-a^2}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$$

(4)　$\cot^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\cos^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\tan^{-1}\dfrac{1}{a}$

$$=\sec^{-1}\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}=\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{1+a^2}$$

(5)　$\sec^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\cos^{-1}\dfrac{1}{a}=\tan^{-1}\sqrt{a^2-1}$

$$=\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$$

(6)　$\operatorname{cosec}^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{1}{a}=\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

$$=\cot^{-1}\sqrt{a^2-1}=\sec^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$$

2. (1)　$\sin^{-1}a\pm\sin^{-1}b=\sin^{-1}\{a\sqrt{1-b^2}\pm b\sqrt{1-a^2}\}$

(2)　$\cos^{-1}a\pm\cos^{-1}b=\cos^{-1}\{ab\mp\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\}$

(3)　$\tan^{-1}a\pm\tan^{-1}\dfrac{a\pm b}{1\mp ab}$

(4)　$\cos^{-1}a\pm\cos^{-1}b=\cot^{-1}\dfrac{ab\pm 1}{b\pm a}$

3. (1)　$2\sin^{-1}a=\sin^{-1}2a\sqrt{1-a^2}$

(2)　$2\cos^{-1}a=\cos^{-1}(2a^2-1)$

(3)　$2\tan^{-1}a=\tan^{-1}\dfrac{2a}{1-a^2}$

(4)　$2\cot^{-1}a=\cot^{-1}\dfrac{a^2-1}{2a}$

上之諸式俱爲重要之式

4. (1) $\sin^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=90^\circ$

(2) $\cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{82}}+\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}=45^\circ$

(3) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=45^\circ$

(4) $\cot^{-1}\frac{3}{4}+\cos^{-1}\frac{1}{7}=135^\circ$

5. (1) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=90^\circ$

(2) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=45^\circ$

(3) $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=45^\circ$

(4) $4\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{239}=45^\circ$

(5) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=45^\circ$

(6) $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}=45^\circ$

6. 求適於次之方程式之 x 值

(1) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}\frac{1}{2}x=45^\circ$

(2) $\sin^{-1}x-\cos^{-1}x=90^\circ$

(3) $\sin^{-1}x+\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}=60^\circ$

(4) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}\sqrt{3}x=90^\circ$

(5) $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=46°$

(6) $\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\sec^{-1}5x=45°$

(7) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}(n^2-x+1)=\cot^{-1}(n-1)$

第九章

三角方程式

1. 定義

顯未知角之三角函數與已知數之關係之方程式謂之三角方程式求其適於此式之角謂之解法而所得之角謂之所求之解

2. 三角方程式之解法

三角方程式可依次之方法解之

第一 用普通方程式之解法以求其未知角之三角函數之值

第二 應所得之三角函數之值求其逆三角函數之一切值此值即爲所求之解

例(1) $\sin\theta=a$

解 $\theta=\sin^{-1}a=n\times180°+(-1)^n\sin^{-1}a$

或依此法解之則

$\sin\theta = a$ 卽 $\cos(\theta - 90^\circ) = a$

$\therefore\quad \theta - 90^\circ = 2n \times 180^\circ \pm \cos^{-1}a$

故 $\theta = 2n \times 180^\circ + 90^\circ \pm \cos^{-1}a$

$= (4n + 1)90^\circ \pm \cos^{-1}a$

(2) $\cos\theta = a$ 求解之

解 $\theta = \cos^{-1}a$

$= 2n \times 180^\circ \pm \cos^{-1}a$

(3) $\tan\theta = a$ 求解之

解 $\theta = \tan^{-1}a$

$= n \times 180^\circ + \tan^{-1}a$

(4) $\sin\theta = a$ 求解之

解 $\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2} = a$ 則 $\cos 2\theta = 1 - 2a$

卽 $2\theta = 2n \times 180^\circ \pm \cos^{-1}(1 - 2a)$

$\therefore\quad \theta = n \times 180^\circ \pm \dfrac{1}{2}\cos^{-1}(1 - 2a)$

(5) $\cos^2\theta = a$ 求解之

解因 $\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2} = a$ 卽 $\cos 2\theta = 2a - 1$

卽 $2\theta = 2n \times 180^\circ \pm \cos^{-1}(2a - 1)$

$\therefore\quad \theta = n \times 180^\circ \pm \dfrac{1}{2}\cos^{-1}(2a - 1)$

(6) $\cos\theta+\sin\theta=a$ 求解之

解 $\sqrt{2}\cos(\theta-45^\circ)=a$ 即 $\cos(\theta-45^\circ)=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

即 $\theta-45^\circ=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\therefore\quad \theta=2n\times180^\circ+45^\circ\pm\cos^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$$=(8n+1)\,45^\circ\pm\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{2}}$$

同樣 $\cos\theta-\sin\theta=a$

則 $\theta=(8n-1)\,45^\circ\pm\cos^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

(7) $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ 求解之

解 $\cos\theta+\dfrac{b}{a}\sin\theta=\dfrac{c}{a}$

今設 $\tan^{-1}\dfrac{b}{a}=A$ 則 $\tan A=\dfrac{b}{a}$, $\cos A=\dfrac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$

而 $\cos\theta+\tan A\sin\theta=\dfrac{c}{a}$

$$=\frac{\cos(\theta-A)}{\cos A}=\frac{c}{a}$$

$$\cos(\theta-A)=\frac{c}{a}\cos A=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\theta-A=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\theta=2n\times180^\circ+A\pm\cos^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=2n\times180^\circ+\tan^{-1}\frac{b}{a}\pm\cos^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=2n\times180^\circ+\tan^{-1}\frac{b}{a}\pm\tan^{-1}\frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c}$$

$$=2n\times180^\circ+\tan^{-1}\frac{bc\pm c\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{ca\mp b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}$$

同樣　$a\cos\theta-b\sin\theta=c$

則　$\theta=2n\times180^\circ-\tan^{-1}\frac{bc\pm a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{ca\mp b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}$

問題二十三

解次之三角方程式

1. $\cos\theta\cos5\theta+\cos5\theta\cos7\theta=0$
2. $\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$
3. $\sin5\theta+\sin\theta=\sin3\theta$
4. $\cos\theta-\cos7\theta=\sin4\theta$
5. $3\cos^2\theta-\sin^2\theta+(\sqrt{3}+1)(1-2\cos\theta)=0$
6. $(\cot\theta-\tan\theta)^2(2+\sqrt{3})=4(2-\sqrt{3})$
7. $\sin(x+a)=b\sin x+c\cos x$
8. $\cos(x-a)=b\sin x-c\cos x$
9. $\cot\theta-\tan\theta=\cot a-\tan a$

10. $\cos 2\theta + \cos 120^\circ = \cos\theta - \cos 60^\circ$

11. $\sec^2\theta + 3\operatorname{cosec}^2\theta = 8$

12. $\tan\theta + \tan 3\theta = 2\tan 2\theta$

13. $2\cos 2\theta - \tan 2\theta = 3\cot 3\theta$

14. $\tan\theta + \tan(\theta - 45^\circ) = 2$

15. $2\cot^2\theta = 1 + 4\cos^2\theta$

16. $3(\sin^4\theta - \cos^4\theta) + 4\cos^6\theta = \cos^3 2\theta$

17. $\operatorname{cosec} 3\theta + \operatorname{cosec} 2\theta = \sin 2\theta \operatorname{cosec}\theta \operatorname{cosec} 3\theta$

18. $\sin\theta - \cos\theta = 4\cos^2\theta\sin\theta$

19. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}$

20. $\tan 2\theta = 8\cos^2\theta - \cot\theta$

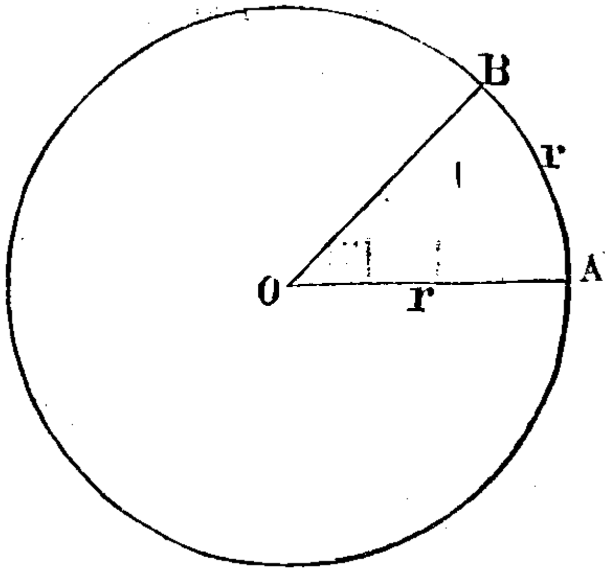
21. $\tan(45^\circ + \theta) = 1 + \sin 2\theta$

22. $\cot 15^\circ \cos\theta + \sin\theta = 1$

第 十 章

眞 弧 度 法

1. 定義



設以O為中心半徑r之圓令 $\widehat{AB}=r$ 則由幾何學圓之中心角與其所乘之弧爲比例故

$$\frac{A\hat{O}B}{2\text{直角}}=\frac{\widehat{AB}}{\text{半圓角}}=\frac{r}{\pi r}=\frac{1}{\pi}$$

$$\therefore\ A\hat{O}B=\frac{1}{\pi}\times 2\ \text{直角}$$

由此則取 $A\hat{O}B$ 以爲測角之單位亦可

但 $\widehat{AOB}$ 名曰弧角以弧角爲單位所測之角度名謂眞弧度法

某角之弧度卽其角中所含弧之數也

2. 以弧角爲單位者有二理由卽

(1) 凡弧角皆相等

(2) 以弧角爲單位而測角者理論的三角法之多少公式可簡單之

(3) 1 弧角 $=\frac{1}{\pi}\times 2$ 直角

$$=\frac{1}{3.14159\ldots}\times 180^\circ$$

$$=57^\circ 2957\ldots$$

4. 某角之度數爲 D 眞弧度之數爲 a 則

$$\frac{D}{180^\circ}=\frac{a}{\pi}$$

由是以度所表之角可改爲眞弧度又以眞弧度數所表之角亦可改爲度數

問題二十四

1. 求次諸角之眞弧度

(1) 15°,　(2) $10^\circ 15'$,　(3) $35'30''$,　(4) $10^\circ 15' 27''$

(5) $67^\circ\frac{1}{2}$,　(6) 45°,　(7) 60°,　(8) 135°

2. 求此之各度數

(1) $\frac{\pi}{13}$,　(2) $\frac{\pi}{6}$,　(3) $\frac{\pi}{4}$,　(4) $\frac{2\pi}{5}$

3. 求次之各一內角之弧度

(1) 正五邊形,　(2) 正八邊形,

(3) 正十二邊形,　(4) 正 n 邊形

4. 於半徑 8 尺之圓問其 10 尺弧上之中心角之度數幾何

5. 地球之直徑爲 3900 哩此直徑於太陽之張角爲 $17''.8$ 太陽之光以 $8^m 13^s.3$ 達地球問光速度幾何

(小文字 m 及 s 爲時候之分及秒)

第二編

弧三角法

第一章

論正弧三角形

1. 緒論及界說 弧三角學之所由設者乃示正球面上三角形之問題如何解决也所謂解决弧三角形問題者即以已知弧三角形之三事而求其未知之三事也

弧三角形之邊俱爲大圜弧其長短以若干度分秒計算卽爲以諸角點至球心之半徑所成之平面角之大小言其長短故其度數多寡與半徑之長短無涉而半徑可任用一數如恒設半徑爲 1 是也

弧三角形之角卽爲各邊所在之各平面所成之角每角亦以大圜弧所函之度數爲準則其大圜弧以本角點爲極以夾本角之兩邊爲界

弧三角形之邊恒在 0 與 360° 之間而本編所論者則俱小於 180° 焉

弧三角形之角恒在 0 與 180° 之間

凡弧三角形之任兩事俱小於 90° 或俱大於 90° 者謂之同類之事項若其一事小於 90° 其一事大於 90° 者則謂之異類之事項

弧三角形亦如平三角形有等腰等角等邊正角斜角之別惟正弧三角形不僅有一正角而兼有兩正角或三正角者

弧三角形有一邊或兩邊或三邊爲象限弧者爲象限弧三角形

2. 凖立體幾何學所證凡弧三角形俱合後列四則

I. 若弧三角形有兩邊不等則其所對之角亦不等其大角對大邊小角對小邊反之若弧三角形有兩角不等則其所對之邊亦不等其大邊對大角小邊對小角

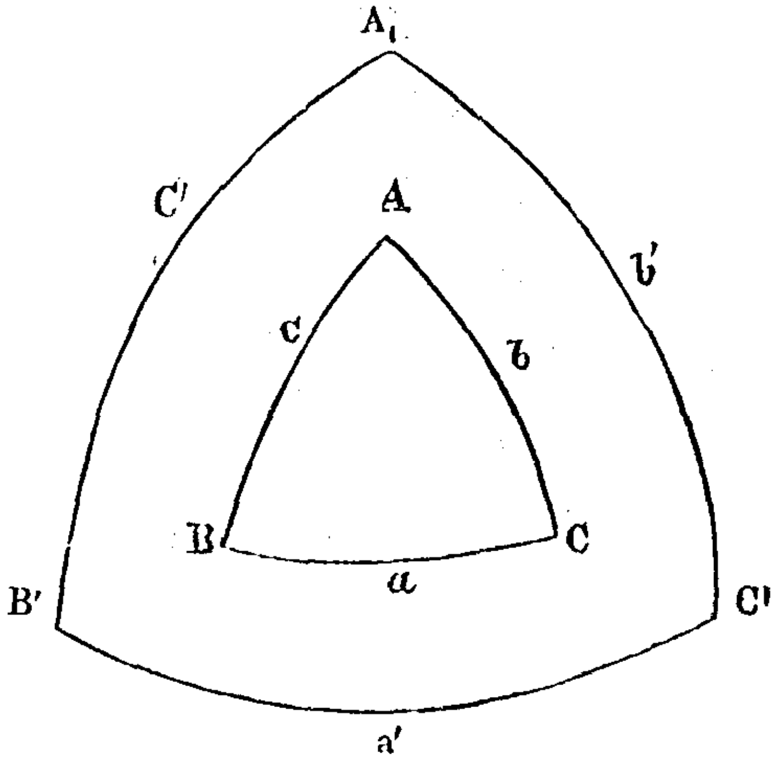
II. 凡弧三角形三邊和小於 360°

III. 凡弧三角形三角和大於 180° 而小於 540°

IV. 若以弧三角形之角點爲極作三大圜弧則三弧相交即另成一弧三角形此形之各邊必與原形各對角互爲外角或其各角必與原形各對邊互爲外角

如此兩弧三角形謂之極三角形(polar triangles)

如圖A, B, C 爲弧三角形之三角 a, b, c 爲其所對之邊 A′, B′, C′ 爲相當極三角形之三角 a′, b′, c′ 爲其所對之邊按以上第四則得後列之方程式



$$A+a'=180^\circ,\quad B+b'=180^\circ\quad C+c'=180^\circ$$

$$A'+a=180^\circ\quad B'+b=180^\circ\quad C'+c=180^\circ$$

問　題　一

1. 設知弧三角形之角爲 70°, 80°, 100° 求極三角形各邊

2. 試證象限弧三角形之極三角形爲正弧三角形

3. 若弧三角形有三直角則其三邊必俱爲象限弧

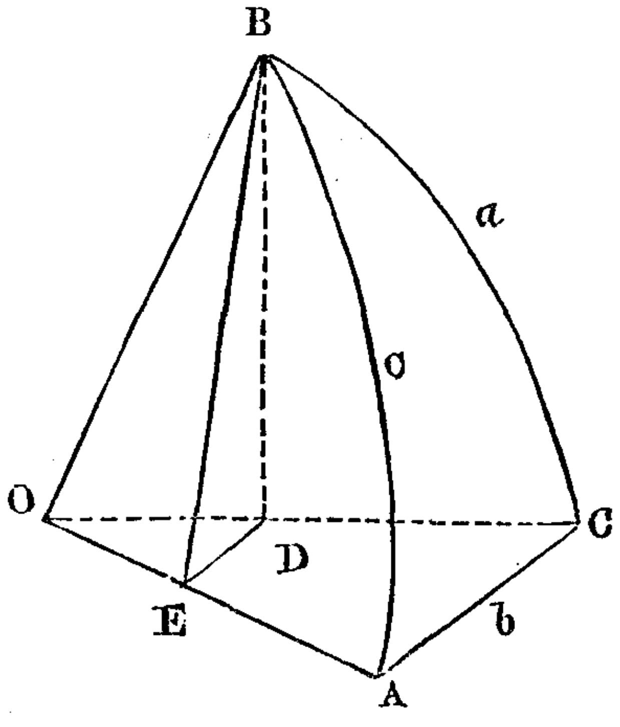
4. 若弧三角形有兩直角則兩對邊必俱為象限弧其餘一角有若干度即其對邊有若干度

5. 設知弧三角形三邊之度數又知球之半徑長問如何求三邊之長度

6. 設弧三角形之邊為 40°, 90°, 125° 其球之半徑為 4 尺求三邊之長度

3. 關於正弧三角形之公式

從上欵第三第四兩題可知弧三角形有二三正角者無庸研究茲僅將弧三角形有一直角者推求其公式如下



如圖 ABC 為弧三角形祇有一角為直角

設 A, B, C 為三角 a, b, c 為其對邊設 C 為直角又設其餘兩角三邊俱各小於 90° 且球之半徑為 1 者

設作平面過三邊其交綫 OA, OB, OC, 各為半徑又設作平面過頂

點爲 OA 之垂面交 OA 於 E 交 OC 於 D 作 BE, BD, DE 三綫

則 BE, DE 俱爲 OA 之垂綫　　(幾何界說)

故 $B\hat{E}D=\hat{A}$　　(見 1 欵三節)

而 BDE 面爲 OAC 面之垂面　　(見幾何)

但前設 BOC 面爲 AOC 面之垂面.

則是 BDE 與 BOC 之交綫 BD 爲 AOC 之垂綫

(見幾何)

故 BD 爲 OC 與 DE 之垂綫

今 $\cos c = OE = OD \times \cos b$ 而 $OD = \cos a$

則 $\cos c = \cos a \cdot \cos b$ ……………………………………(1)

又 $\sin a = BD = BE \sin A$ 而 $BE = \sin c$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{則} & \sin a = \sin c \cdot \sin A \\ \text{仿此則} & \sin b = \sin c \cdot \sin B\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 $\cos A = \dfrac{DE}{BE} = \dfrac{OE \tan b}{OE \tan c}$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{故} & \cos A = \tan b \cdot \cot c \\ \text{仿此則} & \cos B = \tan a \cdot \cot c\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又 $\cos A = \dfrac{DE}{BE} = \dfrac{OD \sin b}{\sin c} = \cos a \dfrac{\sin b}{\sin c}$

惟從(2)式得 $\dfrac{\sin b}{\sin c}=\sin B$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{故} & \cos A=\cos a\sin B\\ \text{仿此則} & \cos B=\cos b\sin A\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

又 $\sin b=\dfrac{DE}{OD}=\dfrac{BD\cot A}{OD}=\tan a\cot A$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{故} & \sin b=\tan a\cdot\cot A\\ \text{仿此則} & \sin a=\tan b\cdot\cot B\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

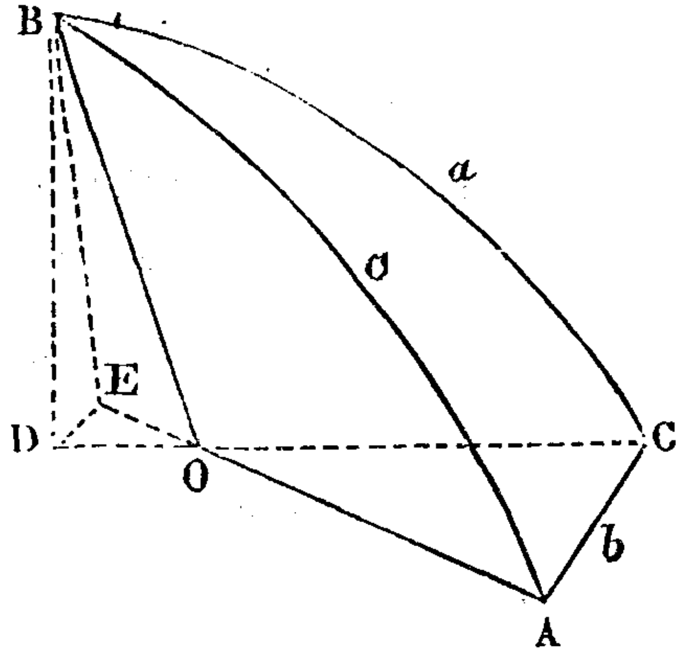
若於公式(4)以 $\cos a$ 與 $\cos b$ 之同數代入公式(1)內則得

$$\cos c=\cot A\cot B\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

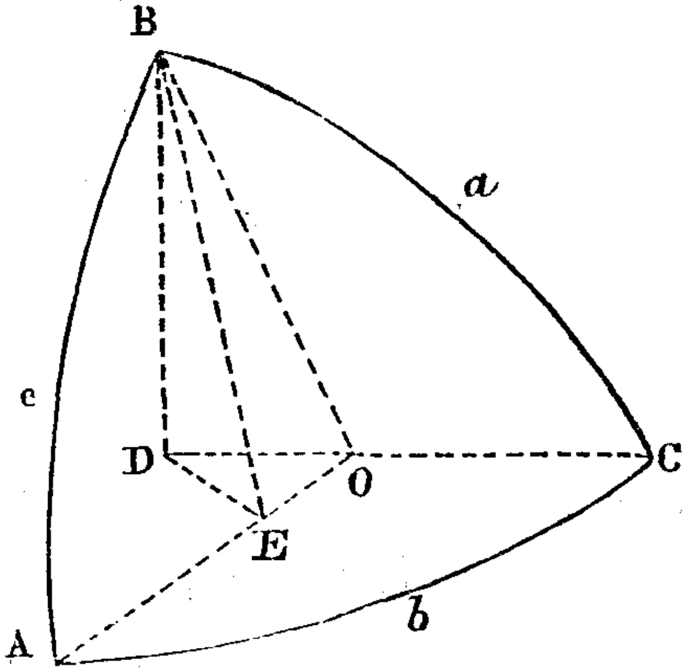
注意 以上自(2)至(5)其第二式欲由圖得之則須於 A 點作 OB 之垂面仿前證之

4. 以上十公式足備推解正弧三角形之用所推得之十式係設 C 角爲直角其餘邊與角俱各小於 $90°$ 倘其餘邊與角各大於 $90°$ 此十式亦無不準確茲證之如下

設 a 邊大於 $90°$ 仿前作圖如下式 I 圖



I



II

惟 BDE 面與 CO, AO 之引增綫相遇且在 O 心之外由是得

$$\cos c = -OE = -OD \cos DOE$$

$$=(-\cos a)\,(-\cos b)$$

$$=\cos a \cos b$$

倣此亦可證明其餘九公式俱與此圖相符

再設 a 與 b 俱大於 90° 如 II 圖則 BDE 面與 OO 之引增綫相遇於 O 點之外又與 AO 相遇於 A, O 兩點之間 E

由是得 $\cos c = OE = OD \cos DOE$

$$=(-\cos a)\,(-\cos b)$$

$$=\cos a \cdot \cos b$$

倣此亦可證明其餘九公式俱與此圖相符

無論若何三角形以上十公式無一不與之相符

問題二

1. 凡正弧三角形其弦小於 90° 或大於 90° 當視餘兩邊為同類或異類以為衡試引公式(1)證之

2. 凡正弧三角形其每邊與對角必同類試引公式(4)證之

3. 若將後列之四同數迭次代入本款之十公式內則由所得之式可知何事

(a) $c=90°$　(b) $a=90°$　(c) $c=a=90°$　(d) $a=b=90°$

試引上編第五章(6)款內之公式以證後列諸題

4. $\tan^2\frac{b}{2}=\tan\frac{1}{2}(c-a)\cdot\tan\frac{1}{2}(c+a)$

5. $\tan^2\left(45°-\frac{A}{2}\right)=\tan\frac{1}{2}(c-a)\cot\frac{1}{2}(c+a)$

6. $\tan^2\frac{B}{2}=\sin(c-a)\operatorname{cosec}(c+a)$

7. $\tan^2\frac{1}{2}c=-\cos(A+B)\sec(A-B)$

8. $\tan^2\frac{1}{2}a=\tan\left(\frac{A+B}{2}-45°\right)\tan\left(\frac{A-B}{2}+45°\right)$

9. $\tan^2\frac{1}{2}b=\tan\left(\frac{A+B}{2}-45°\right)\tan\left(45°-\frac{A-B}{2}\right)$

10. $\tan^2\left(45°-\frac{c}{2}\right)=\tan\frac{A-a}{2}\cot\frac{A+a}{2}$

11. $\tan^2\left(45°-\frac{b}{2}\right)=\sin(A-a)\operatorname{cosec}(A+a)$

12. $\tan^2\left(45°-\frac{B}{2}\right)=\tan\frac{A-a}{2}\tan\frac{A+a}{2}$

5. 倪丕氏例

前款所立之十公式係示正弧三角形其餘五事(即三邊及其餘兩斜角)之關係而此等關係未始非總括於倪氏兩例也倪氏兩例為何觀下示自明

正弧三角形六事中其直角既不列入十公式內倪

氏兩例亦不計之其餘五事中弦與兩斜角則俱各以其餘弧餘角爲替故其例中所載之五事項爲 a, b, A 之餘角, c 之餘弧, B 之餘角

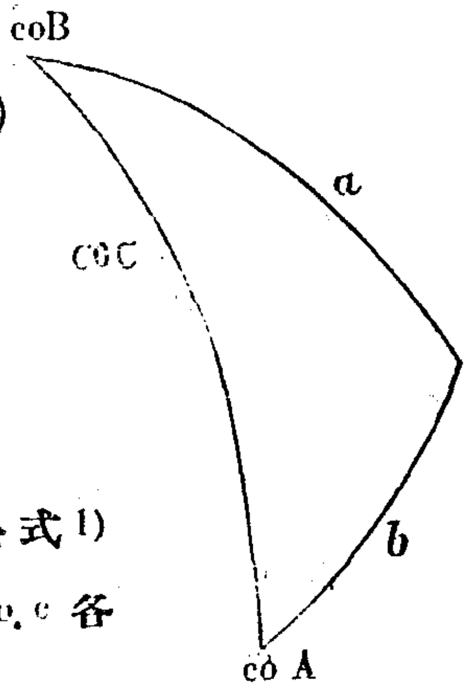
所謂 c 之餘弧者即與 c 併而成象限弧之弧也餘仿此此五項中任一項俱可稱爲中項而其兩旁之項俱稱倚項其餘兩項俱稱對項 A 之餘角可寫作 co. A 此乃英字之省文也餘可類推

例 I 凡中項正弦與其倚項兩正切之積等

例 II 凡中項正弦與其對項兩餘弦之積等

茲證此兩例與十公式相符如下

設任取 co. c 爲中項則 co. A 與 co. B 各爲倚項由是準例I得



$\sin(\mathrm{co.}\ c) = \tan(\mathrm{co.}\ A)\tan(\mathrm{co.}\ B)$

或卽 $\cos c = \cot A \cot B$

(卽公式 6)

又準例II得

$\sin(\mathrm{co.}\ c) = \cos a \cos b$

或卽 $\cos c = \cos a \cos b$ (此卽公式 1)

又取 co. A 爲中項則 b 與 co. c 各爲倚項 a 與 co. B 爲對項

由是準兩例得

$$\sin(\mathrm{co}\ A)=\tan b\cdot\tan(\mathrm{co}\ c)$$

或卽 $\cos A=\tan b\cdot\cot c$ (此卽公式3之1)

又 $\sin(\mathrm{co}\ A)=\cos a\cos(\mathrm{co}\ B)$

或卽 $\cos A=\cos a\sin B$ (此卽公式4之1)

又取 b 爲中項則 a 與 co.A 爲倚項 co B 與 co c 爲對項

由是得

$$\sin b=\tan a\tan(\mathrm{co.}\ A)$$

或卽 $\sin b=\tan a\cdot\cot A$ (此卽公式5之1)

又 $\sin b=\cos(\mathrm{co.}\ B)\cos(\mathrm{co.}c)$

或卽 $\sin b=\sin B\sin c$ (此卽公式2之2)

又取 a 爲中項則

$$\sin a=\tan(\mathrm{co.}\ B)\tan b$$

卽 $\sin a=\cot B\cdot\tan b$ (此卽公式5之2)

又 $\sin a=\cos(\mathrm{co.}\ A)\cos(\mathrm{co}\ c)$

卽 $\sin a=\sin A\sin c$ (此卽公式2之1)

又取 co B 爲中項則

$$\sin(\mathrm{co}\ B)=\tan a\tan(\mathrm{co.}\ c)$$

即 $\cos B = \tan a \cot c$ (此即公式 3 之 2)

又 $\sin(co\,B) = \cos(co\,A)\cos b$

即 $\cos B = \sin A \cos b$ (此即公式 4 之 2)

問題三

若以正弧三角形之弦與兩斜角及餘兩邊之餘弦為五事則倪丕氏兩例有何改變

6. 論正弧三角形推求邊角法

凡正弧三角形除直角不計外若已知其二事則可求其未知之三事也已知之二事分情節六種設施如下

情節 I 已知 a 與 b (即夾直角 C 之兩邊) 求其餘三事本情節可按(1)與(5)式推解之

即 $\cos c = \cos a \cos b$ .... (1)

並 $\left.\begin{aligned}\sin b &= \tan a \cot A\\ \sin a &= \tan b \cot B\end{aligned}\right\}$ .... (5)

或即 $\left.\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{cosec} b} &= \frac{\tan a}{\tan A}\\ \frac{1}{\operatorname{cosec} a} &= \frac{\tan b}{\tan B}\end{aligned}\right\}$

亦即 $\left.\begin{aligned}\tan A &= \tan a\cdot\operatorname{cosec} b\\ \tan B &= \tan b\cdot\operatorname{cosec} a\end{aligned}\right\}$ (V) (V_1)

既有(1) (V) (V_1)三方程故可推求 A, B, c

例如 $a=27^\circ, 28', 36''$, $b=51^\circ, 12', 8''$

則以對數推算如下：—

$L\cos c-10=L\cos a-10+L\cos b-10$

$L\cos c\quad =L\cos a+L\cos b-10$

$=9.94802+9.79697-10$

$=9.74499$

$\therefore\quad c\quad =56^\circ,\ 13',\ 41''$

又 $L\tan A=L\tan a+L\operatorname{cosec} b-10$

$=9.71605+10.10826-10$

$=9.82431$

$\therefore\quad A\quad =33^\circ,\ 42',\ 50''$

又 $L\tan B=L\tan b+L\operatorname{cosec} a-10$

$=10.09476+10.33594-10$

$=10.43070$

$\therefore\quad B\quad =69^\circ,\ 38',\ 54''$

情節 II　已知 c(卽弦)與一邊 a 求其餘三事

由公式(1)(2)(3)得下列三方程式以求 b, A, B 之值

$$\cos b = \cos c \sec a$$

$$\sin A = \sin a \operatorname{cosec} c$$

$$\cos B = \tan a \cot c$$

從第二方程雖可推得 A 有兩值一銳一鈍但案閱問題二第二題卽知 A 與 a 必同類是 A 祇有一值耳

情節 III.　已知 a 邊並對角 A 求其餘三事

由公式(2)(5)(4)得下列三方程以求 c, b, B 之值

$$\sin c = \sin a \cdot \operatorname{cosec} A$$

$$\sin b = \tan a \cot A$$

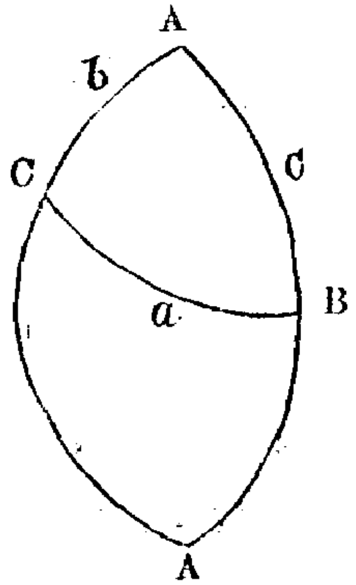
$$\sin B = \sec a \cos A$$

既已得 c 之值若不用第二第三兩方程亦可求 b 與 B 蓋由公式(1)與(3)可得下列兩方程也

$$\cos b = \cos c \sec a$$

$$\cos B = \tan A \cot c$$

但 c 既係由其正弦推出則必有兩值互爲補角者故有兩弧三角形俱與本題相符



如圖將 b 與 c 兩邊引長相遇相於 A' 則有 ABC 與 A'BC 兩正弧三角形以 a 爲公用之邊並

$\angle A = \angle A'$ 又 $A'C = 180° - b$

$A'B = 180° - c$ 並 $\angle A'BC$

$= 180° - B$

情節 IV. 已知 a 邊與倚角 B 求其餘三事

由公式 (3) (5) (4) 得

$\tan c = \tan a \sec B$

$\tan b = \sin a \tan B$

$\cos A = \cos a \sin B$

情節 V. 已知 a 並 A 角求其餘三事

由公式 (2) (3) (5) 得

$\sin a = \sin c \sin A$

$\tan b = \tan c \cos A$

$\cot B = \cos c \tan A$

第一方程旣以正弦求 a 則 a 或銳或鈍當視 A 爲銳爲鈍而異蓋 A 與 a 必須同類也

情節VI. 已知A與B求其餘三事

由公式(6)(4)得

$$\cos c = \cot A \cot B$$

$$\cos a = \cos A \operatorname{cosec} B$$

$$\cos b = \cos B \operatorname{cosec} A$$

7. 後列注意十則關係於正弧三角形邊角互相推求之理法宜詳加攷察之

注意1. 第一情節(設知a與b)若c甚近乎0°或180°則按公式(1)不能求得c之精確同數須先求B然後按第四情節(已知a與B)求c較爲精確

注意2. 第二情節(設知c與a)若b甚近乎0°或180°則以下式求之較爲精確:—

$$\tan^2\frac{1}{2}b = \tan\frac{1}{2}(c+a)\tan\frac{1}{2}(c-a)$$ (見問題二題4)

又若A幾爲90°而檢表不能求精確同數則以下式求之:—

$$\tan^2(45^\circ - \frac{1}{2}A) = \tan\frac{1}{2}(c-a)\cot\frac{1}{2}(c+a)$$ (見問題二, 5)

又若按餘弦不能求其B之精確同數則以下式求之:—

$$\tan^2\frac{B}{2}=\sin(c-a)\operatorname{cosec}(c+a)\qquad\text{(見問題二, 6)}$$

注意3. 第三情節(設知 a 與 A)若由所設各公式不能求精確同數則以下式求之:—

$$\tan^2\left(45^\circ-\frac{c}{2}\right)=\tan\frac{A-a}{2}\cot\frac{A+a}{2}\quad\text{(見問題二, 10)}$$

$$\tan^2\left(45^\circ-\frac{b}{2}\right)=\sin(A-a)\operatorname{cosec}(A+a)\quad\text{(見問題二, 11)}$$

$$\tan^2\left(45^\circ-\frac{B}{2}\right)=\tan\frac{A-a}{2}\tan\frac{A+a}{2}\quad\text{(見問題二, 12)}$$

注意4. 第四情節(設知 a 與 B)若 A 近乎 0° 或 180° 則可先求 b 然後求 A 較爲精確

注意5. 第五情節(設知 c 與 A)若 a 近乎 90° 則可先求 b 然後按公式(5) 求 a 較爲精確

注意6. 第六情節(設知 A 與 B)若各邊之同數有不稱意者則以下式求之較爲精確

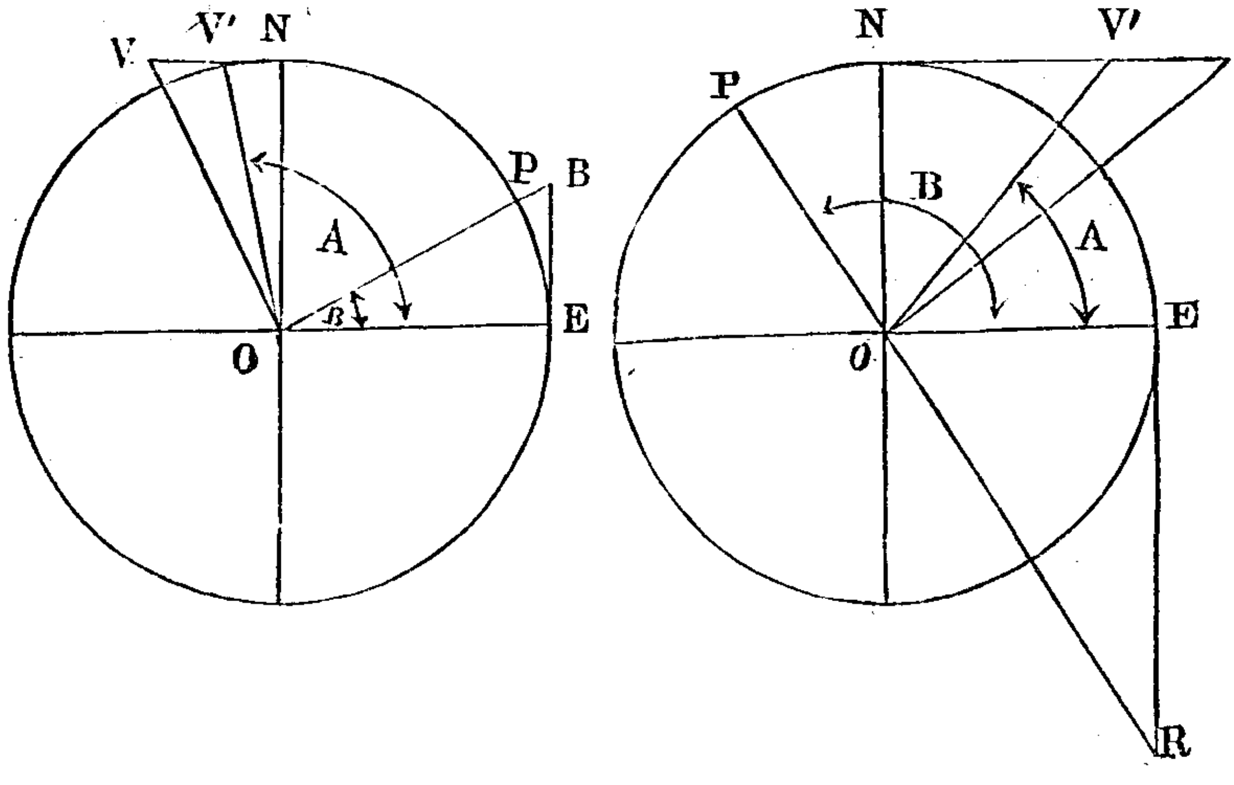
$$\tan^2\frac{c}{2}=-\cos(A+B)\sec(A-B)\qquad\text{(見問題二, 7)}$$

$$\tan^2\frac{a}{2}=\tan\left(\frac{A+B}{2}-45^\circ\right)\tan\left(45^\circ+\frac{A-B}{2}\right)$$ (見問題二, 8)

$$\tan^2\frac{b}{2}=\tan\left(\frac{A+B}{2}-45^\circ\right)\tan\left(45^\circ-\frac{A-B}{2}\right)$$ (見問題二, 9)

注意7. 第一第四第五情節無論所設之數爲何恒能推出未知之數其餘各情節則有不盡然者如第二情節必須 $\sin a$ 不大於 $\sin c$ 蓋該情節所用之第二式 $\sin A=\sin a \operatorname{cosec} c=\frac{\sin a}{\sin c}$ 而正弦永不大於 1 也第三情節 a 與 A 必須同類且 $\sin A$ 又須不小於 $\sin a$ 蓋該情節所用之第一式 $\sin c=\sin a \operatorname{cosec} A=\frac{\sin a}{\sin A}$ 而正弦永不大於 1 也第六情節 $A+B+C$ 必須大於 $180°$ (見1欵3節)即 $A+B>90°$ 且 A 與 B 之較又須 $<90°$ 否則不能推解

茲特解明 A 與 B 之較必須 $<90°$ 如下:—



如左圖設 B 爲銳角 $=\angle EOR$ 作 OV 爲 OR 之⊥則 $\angle EOV=90^\circ+B$

令姑勿論號之正負 $ER=NV$

即　$\tan B=\cot EOV$

則因該情節所用之第(1)式

$$\cos c=\cot A\cot B=\frac{\cot A}{\tan B}$$

而 c 既爲弦則必須小於 180° 故 $\cos c$ 必須 <-1

$\therefore\quad \frac{\cot A}{\tan B}$ 必須 <-1 所以姑勿無論號之正負 $\cot A$ 必須 $<\tan B$ 即 $\tan B>\cot A$ 前已證明 $\tan B=\cot EOV$

$\therefore\quad A$ 必須 $<90^\circ+B\quad\therefore\quad A-B<90^\circ$

如右圖設 B 爲鈍角 $=\angle EOP$ 作 OV 爲 OP 之垂綫則 $\angle EOV=B-90^\circ$

令姑勿論號之正負 $ER=NV$ 即 $\tan B=\cot EOV$

故若令 $\tan B>\cot A$ 則 A 必 $>B-90^\circ,A+90^\circ>B,$ $90^\circ>B-A,$ 則 $B-A<90^\circ$

注意8.　若球半徑之長度爲無窮則正弧三角形之公式與直角平面三角形之公式相符蓋半徑既係無窮則察3,4兩欵之圖即見 AB, BC, CA 三弧俱

爲直綫 ABC 爲平面三角形 a, b, c 三邊所對之球心角各等於 0 是各邊之餘弦俱等於 1 則公式(1)變爲 $1=1\times1$ 可姑置之不論

又各邊之正弦或正切相比如各該邊相比

則公式(2)變爲 $a=c\cdot\sin A$ 並 $b=c\cdot\sin B$

公式(3)變爲 $\cos A=\dfrac{b}{c}$ 並 $\cos B=\dfrac{a}{c}$

公式(4)變爲 $\cos A=\sin B$ 並 $\cos B=\sin A$

公式(5)變爲 $b=a\cot A$ 並 $a=b\cdot\cot B$

公式(6)變爲 $1=\cot A\cot B$

從此可悟凡三角形無論平弧其公式悉相符也

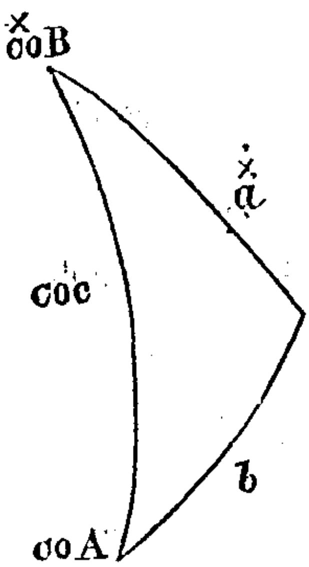
注意 9. 凡推解弧三角形須注意於函數之正負若函數爲餘弦正切或餘切則正號示角小於 90° 負號示角大於 90° 若函數爲正弦則所屬之角有二一銳一鈍其和等於 180° 若題中未題其爲銳爲鈍則其兩角俱合所求定角銳鈍之法正弧三角形見問題二(1)(2)斜弧三角形見 2 欵 1 則

注意 10. 凡推解弧三角形欲證得數合否則於前十公式內擇一公式函所求三項者將三得數代各該項視其能否與該公式相符以定之

8. 捷法 凡正弧三角形若不能記憶宜用何公式可按倪丕氏例求之卽得惟用倪丕氏例須於所設兩項並所求之一項中擇取一項爲中項而以餘兩項爲倚項或對項

例如已知 a 與 B 求其餘三項

則先作弧三角形標明各項作×號於已知項之上以醒目而免誤會



如是求 b 則以 a 爲中項以 b 與 co B 爲兩倚項 由是按倪氏例 I 得

$$\sin a = \tan b \cot B$$

或 $\tan b = \sin a \tan B$

由是可得 b 之同數

次求 c 則以 co B 爲中項以 a 與 co c 爲兩倚項按例 I 得

$$\cos B = \tan a \cot c$$

或 $\tan c = \tan a \sec B$

由是可求得 c 之同數

後求 A 則以 co A 爲中項以 a 與 co B 爲兩對項按例 II 得

$\cos A=\cos a \sin B$

由是可得A之同數

凡正弧三角形除直角外任設兩項俱可仿此推求其餘三項

問題四

有正弧三角形如下各求餘三項

1. $a=36°,27'$, $b=43°,32',31''$

答 $c=54°20'$, $A=46°,50',43''.2$, $B=57°,59',10''.3$

2. $a=86°,40'$ $b=32°,40'$

答 $c=87°,11',39''.8$, $A=88°,11',57''.8$, $B=32°,42',38''.6$

3. $c=55°,9',32''$, $a=22°,15',7''$

答 $b=51°,53'$, $A=27°,28',25''.7$, $B=73°,27',11''.16$

4. $c=23°,49',51''$ $a=14°,16',35''$

答 $b=19°,17'$, $A=37°,36',49''.4$, $B=54°,49',23''.3$

5. $a=77°,21',50''$, $A=83°,56',40''$

答 $c=78°,53',20''$, $b=23°,14,31''.3$, $B=28°,49',57''.4$

或 $c=101°,6',40''$ $b=151°,45',28,7$ $B=151°,10',2''.6$

6. $a=97°,21',50''$ $A=40°,40',40''$

答所設不合不能推解

7. $a=92°,47',32''$　$B=50°,2',1''$

答　$c=91°,47',40''$　$b=50°$　$A=92°\,8',23''$

8. $a=2°,0',55''$　$B=12°,40'$

答　$c=2°,3',55''.7$,　$b=0°,27',10''.2$,　$A=77°,20',28''.4$

9. $c=69°,25',11''$　$A=54°,54',42''$

答　$a=50°$　$b=56°,50',49''.3$　$B=63°,25',4''$

10. $c=112°,48'$,　$A=56°,11'56''$

答　$a=50°$　$b=127°,4',30''$　$B=120°,3',50''$

11. $A=63°,15',12''$　$B=135°33',39''$

答　$a=50°,0',4''$　$b=143°,5',12''$　$c=120°,55',34''.3$

12. $A=116°,43',12''$　$B=116°,31',25''$

答　$a=120°,10',3''$,　$b=119°,59',46''$,　$c=75°,26',58''$

13. 何為象限弧三角形試申言之凡弧三角形若已知三邊其一邊為象弧者則如何借正弧三角形之助以推解之

14. 設知弧三角形之三邊如下求其餘三事

$a=174°,12',49''.1$　$b=94°,8',20''$　$c=90°$

15. 設知象限弧三角形之三事如下求其餘三事

$c=90°$,　$A=110°,47',50''$,　$B=135°,35',34''.5$

16. 有弧三角形 A, C, c 各等於 $90°$ 求推解之

17. 設知 $A=60°, C=90°$ $c=90°$ 求推解三角形

18. 有正弧三角形 $A=42°,24',9''$ $B=9°,4',11''$ 求推解之

19. 有正弧三角形 $a=119°,11'$, $B=126°,54'$ 求推解之

20. 有正弧三角形 $c=50°$, $b=44°,18',39''$ 求推解之

21. 有正弧三角形 $A=156°, 20', 30''$ $a=65°,15',45''$ 求推解之

22. 有正弧三角形其 a, b, 兩邊等試證 $\cos a=\cot A=\sqrt{\cos c}$

23. 凡正弧三角形 $\cos^2 A\times\sin^2 c=\sin(c-a)\sin(c+a)$

24. 凡正弧三角形 $\tan A\cos c=\sin b\cot B$

25. 凡正弧三角形 $\sin^2 A=\cos^2 B+\sin^2 a\sin^2 B$

26. 凡正弧三角形 $\sin(b+c)=2\cos^2\frac{A}{2}\cos b\sin c$

27. 凡正弧三角形 $\sin(c-b)$ 必 $=2\sin^2\frac{A}{2}\times\cos b\sin c$

28. 正弧三角形過直角作大圜弧與弦正交其在形內之一段(可名垂綫)以 p 代之其所截弦之二段

與 a, b 兩邊各相倚者以 m 與 n 代之試證下列兩式

(a) $\tan^2 a = \tan c \tan m$　(β) $\sin^2 p = \tan m \tan n$

9. 論等腰弧三角形推解法

凡等腰弧三角形若過頂角與底中點作大圜弧則分爲相等之兩正弧三角形故可藉正弧三角形之推解法以推解等腰弧三角形

照此推之凡有法弧多邊形若過形心與諸角點作大圜弧則分爲若干等腰弧三角形而每等腰弧三角形可復分相等之兩正弧三角形故有法弧多邊形可藉正弧三角形推解法以推解之[設正稜錐體之頂角在球心其底之諸角點各切球面又設將其諸斜面引而廣之令各與球面相交則各交綫所圍合球面之一部分謂之有法弧多邊形]

問題五

1. 等腰弧三角形設知每腰爲 a 其底爲 b 求底端 A 角 B 頂角與垂弧 h

2. 等邊弧三角形設知每邊爲 a 求 A 角

3. 有 n 邊有法弧多邊形設知每邊爲 a 求其A

角並求形心距任一角點之度 R 及形心距任一邊中點之度 r (距度以弧綫計)

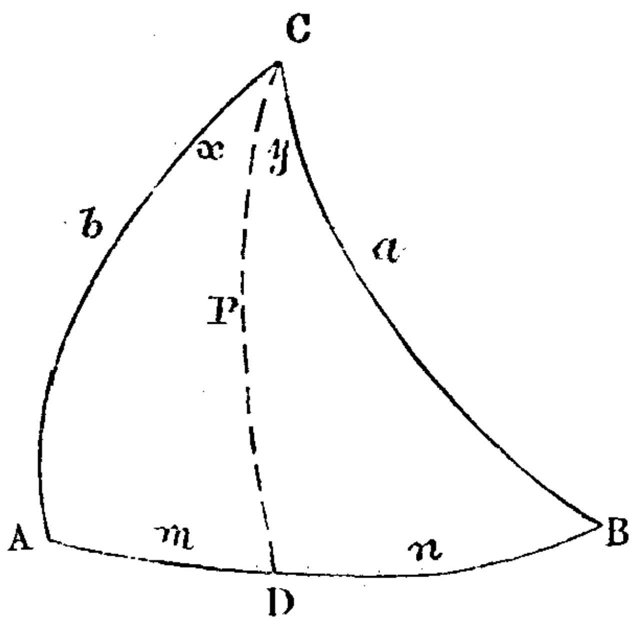
4. 試求五種有法稜體每兩面之交角有幾度

5. 有弧正方形設知每邊爲 a 試其 A 角有若干度

第二章

論斜弧三角形

10. 緊要公式



如圖設 ABC 爲斜弧三角形 a, b, c 爲其三邊 A, B, C 爲各該邊所對之角又設過 C 角作 CD 爲 AB 邊之垂弧遇之於 D 令 p 代 CD, m 代 AD, n 代 BD, x 代 $\angle ACD$, y 代 $\angle BCD$

I BDC, ADC 既爲兩正弧三角形則按 3 款公式

(2)得

$$\sin p=\sin a\sin B$$

$$\sin p=\sin b\sin A$$

$$\left.\begin{array}{ll} \therefore & \sin a\sin B=\sin b\sin A \\ \text{仿此則} & \sin a\sin C=\sin c\sin A \\ & \sin b\sin C=\sin c\sin B \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

此三方程式亦可以比例式代表之：—

$$\sin a:\sin b:\sin c=\sin A:\sin B:\sin C$$

於以見弧三角形各邊之正弦與其對角之正弦有正比例

上圖CD垂弧係在形內倘垂弧遇AB引長而在形外則以上之證法宜用 $\sin(180°-A)$, $\sin(180°-B)$ 或 $\sin(180°-C)$ 以代 $\sin A$, $\sin B$ 或 $\sin C$ 緣本角正弦與其補角正弦等故無論何等弧三角形以上之公式(7)必與之相符

II. 又BCD既爲正弧三角形則按公式(1)得

$$\cos a=\cos\cdot\cos pn=\cos p\cdot\cos(c-m)$$

惟 $\cos(c-m)=\cos c\cdot\cos m+\sin c\cdot\sin m$

則 $\cos a=\cos p\cdot\cos c.\cos m+\cos p.\sin c.\sin m$

但準公式(1)得 $\cos p\cdot\cos m=\cos b$

$\therefore\quad \cos p=\cos b\cdot\sec m$

$\therefore\quad \cos p\cdot\sin m=\cos b\cdot\tan m$

又準公式(3)得 $\tan m=\tan b\cdot\cos A$

$$\therefore\quad \cos p\cdot\sin m=\cos b\cdot\tan b\cdot\cos A$$

$$=\sin b\cdot\cos A$$

以 $\cos p\cdot\cos m$ 與 $\cos p\cdot\sin m$ 之同數代入 $\cos a$ 之同數內則得

$$\left.\begin{aligned}&\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cos A\\ \text{仿此則}\quad&\cos b=\cos a\cdot\cos c+\sin a\cdot\sin c\cdot\cos B\\ &\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

III. 又ADC既爲正弧三角形則按公式(4)得

$$\cos A=\cos p\cdot\sin x$$

$$=\cos p\cdot\sin(C-y)$$

惟 $\sin(C-y)=\sin C\cdot\cos y-\cos C\cdot\sin y$

則 $\cos A=\cos p\sin C\cdot\cos y-\cos p\cdot\cos C\cdot\sin y$

但準公式(4)得 $\cos p\sin y=\cos B$

由是得 $\cos p=\cos B\operatorname{cosec} y$

$\therefore\quad \cos p\cos y=\cos B\cot y$

又準公式(6)得 $\cos a = \cot B \cdot \cot y$

$\therefore \quad \cos p \cos y = \sin B \cos a$

以 $\cos p \cdot \sin y$ 與 $\cos p \cos y$ 之同數代入 $\cos A$ 之同數內則得

$$\text{倣此則}\quad \left.\begin{aligned} \cos A &= -\cos B\cdot\cos C + \sin B\cdot\sin C\cdot\cos a \\ \cos B &= -\cos A\cdot\cos C + \sin A\cdot\sin C\cdot\cos b \\ \cos C &= -\cos A\cdot\cos B + \sin A\cdot\sin B\cdot\cos c \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(9)$$

無論何等弧三角形以上之公式(8)與(9)俱與之相符蓋若 CD 垂弧與 AB 相交於形外則所得之諸方程式無殊異也

問 題 六

1. 若 $A=90°$ 或 $B=90°$ 或 $C=90°$ 或 $a=90°$ 或 $A=B=90°$ 或 $a=b=90°$ 問公式(7)變爲何式

2. 若 $A=0°$ 或 $A=90°$ 或 $A=180°$ 則公式(8)變爲何式

3. 試按本弧三角形與其極三角形相關之理由公式(8)推出公式(9)

11. 關於各半角與各邊之公式

由公式(8)之第一方程得

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}$$

由是得 $1-\cos A=\dfrac{\sin b\cdot\sin c+\cos b\cdot\cos c-\cos a}{\sin b\cdot\sin c}$

$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}(a-b+c)$$

$$\times\operatorname{cosec} b\operatorname{cosec} c$$ (見五章5欵)

$$1+\cos A=\frac{\sin b\cdot\sin c-\cos b\cos c+\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)$$

$$\times\operatorname{cosec} b\cdot\operatorname{cosec} c$$

惟因 $\left.\begin{aligned}\sin^2\tfrac{1}{2}A&=\tfrac{1}{2}(1-\cos A)\\ \cos^2\tfrac{1}{2}A&=\tfrac{1}{2}(1+\cos A)\end{aligned}\right\}$ (見五章7欵)

則 $\sin^2\tfrac{1}{2}A=\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(a-b+c)\operatorname{cosec} b\cdot\operatorname{cosec} c$

$\cos^2\tfrac{1}{2}A=\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{cosec} b\operatorname{cosec} c.$

今設 $\tfrac{1}{2}(a+b+c)=s$, 則 $\tfrac{1}{2}(b+c-a)=s-a$

$\tfrac{1}{2}(a-b+c)=s-b,\quad \tfrac{1}{2}(a+b-c)=s-c$

以此四同數代入前兩式並開方得

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\sin(s-b)\sin(s-c)\operatorname{cosec}b\operatorname{cosec}c}\\ \cos\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\sin s\sin(s-a)\operatorname{cosec}b\operatorname{cosec}c}\\ \tan\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\operatorname{cosec}s\operatorname{cosec}(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

依照前法亦可得後列各式:—

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-c)\operatorname{cosec}a\operatorname{cosec}c}\\ \cos\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\sin s\cdot\sin(s-b)\operatorname{cosec}a\operatorname{cosec}c}\\ \tan\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\operatorname{cosec}s\operatorname{cosec}(s-b)\sin(s-a)\sin(s-c)}\\ \sin\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\operatorname{cosec}a\operatorname{cosec}b}\\ \cos\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\sin s\sin(s-c)\operatorname{cosec}a\operatorname{cosec}b}\\ \tan\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\operatorname{cosec}s\operatorname{cosec}(s-c)\sin(s-a)\sin(s-b)}\end{aligned}\right\}$$

又從公式(9)之第一方程得

$$\cos a=\frac{\cos B\cdot\cos C+\cos A}{\sin B\cdot\sin C}$$

由是得 $1-\cos a=\dfrac{\sin B\cdot\sin C-\cos B\sin C-\cos A}{\sin B\cdot\sin C}$

$$=-\frac{\cos(B+C)+\cos A}{\sin B\cdot\sin C}$$

$$=-2\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)\operatorname{cosec}B\operatorname{cosec}C$$

$$1+\cos a=\frac{\sin B\sin C+\cos B\cos C+\cos A}{\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\cos(B-C)+\cos A}{\sin B\cdot\sin C}$$

$$=2\cos\tfrac{1}{2}(A-B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)\operatorname{cosec}B\operatorname{cosec}C$$

令 $\frac{1}{2}(A+B+C)=S$ 則仿前法得

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}a&=\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\operatorname{cosec}B\operatorname{cosec}C}\\ \cos\tfrac{1}{2}a&=\sqrt{\cos(S-B)\cos(S-C)\operatorname{cosec}B\operatorname{cosec}C}\\ \tan\tfrac{1}{2}a&=\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\sec(S-B)\sec(S-C)}\end{aligned}\right\}(11)$$

照此推之則

$$\left.\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{-\cos S\cos(S-B)\operatorname{cosec}A\operatorname{cosec}C}\\ \cos\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{\cos(S-A)\cos(S-C)\operatorname{cosec}A\operatorname{cosec}C}\\ \tan\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{-\cos S\cos(S-B)\sec(S-A)\sec(S-C)}\\ \sin\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{-\cos S\cos(S-C)\operatorname{cosec}A\operatorname{cosec}B}\\ \cos\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{\cos(S-A)\cos(S-B)\operatorname{cosec}A\operatorname{cosec}B}\\ \tan\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{-\cos S\cos(S-C)\sec(S-A)\sec(S-B)}\end{aligned}\right\}$$

12. 葛士氏公式與倪丕氏公式

準上編五章1欵之公式得

$$\cos\frac{A+B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

以前欵所得 $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$ 之同數代入此式則

$$\cos\frac{A+B}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\times\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\times\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}$$

$$\frac{\sin s-\sin(s-c)}{\sin c}\times\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}$$

$$\frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\left(s-\frac{c}{2}\right)}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}$$ (見五章 1 欵及上欵)

$$\frac{\cos\left(s-\frac{c}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{C}{2}$$

惟因 $s-\frac{c}{2}=\frac{a+b}{2}$

$$\therefore\quad \cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}$$

倣照上法亦可得 $\sin\frac{A+B}{2}$, $\cos\frac{A-B}{2}$, $\sin\frac{A-B}{2}$ 之同數故有相似之四公式如下是謂之葛士氏(Gauss's)公式

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}&=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}\\
\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}&=\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}\\
\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2}&=\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}\\
\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2}&=\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

以第一式除第二式以第二式除第四式以第一式除第三式以第二式除第四式即得

$$\left.\begin{aligned}
\tan\frac{A+B}{2} &= \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2} \\
\tan\frac{A-B}{2} &= \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2} \\
\tan\frac{a+b}{2} &= \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2} \\
\tan\frac{a-b}{2} &= \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

仿照此法亦可推出 $\tan\frac{A+C}{2}$, $\tan\frac{A-C}{2}$, $\tan\frac{a+c}{2}$, $\tan\frac{a-c}{2}$, $\tan\frac{B+C}{2}$, $\tan\frac{B-C}{2}$, $\tan\frac{b+c}{2}$ $\tan\frac{b-c}{2}$ 之諸同數

此等公式謂之倪丕氏公式

公式(13)之第一方程內 $\cos\frac{a-b}{2}$ 與 $\cot\frac{C}{2}$ 兩因數恆為正緣弧三角形無論何邊何角各不能大於

180° 其理甚明顯則 $\frac{a-b}{2}$ 與 $\frac{C}{2}$ 必俱爲第一象限內之角此兩函數既恒爲正而其積又與 $\tan\frac{A+B}{2}$ 與 $\cos\frac{a+b}{2}$ 之積等則 $\tan\frac{A+B}{2}$ 與 $\cos\frac{a+b}{2}$ 之號必各爲正或各爲負矣

故 $a+b<180^\circ$ 則 $\frac{a+b}{2}<90^\circ$, $\cos\frac{a+b}{2}$ 必 >0

夫 $\cos\frac{a+b}{2}$ 爲分母 $\cos\frac{a-b}{2}\cot\frac{C}{2}$ 爲分子分母既大於 0 則 $\tan\frac{A+B}{2}$ 亦必 >0

是 $\frac{A+B}{2}$ 必 $<90^\circ$ 卽 $A+B<180^\circ$

照此推之若 $a+b>180^\circ$ 則 $A+B$ 亦 $>180^\circ$

又若 $a+b=180^\circ$ 則 $\cos\frac{a+b}{2}=0$ 分母既等於 0 則 $\tan\frac{A+B}{2}$ 必 $=\infty$

由是 $\frac{A+B}{2}=90^\circ$ 卽 $A+B=180^\circ$

反之由第三方程亦可照上法證明 $a+b$ 小於或大於或等於 180° 當視 $A+B$ 小於或大於或等於 180° 而異

玆將斜弧三角形分各種情節設施以詳明其推解之法於後：—

13. 情節 I. 已知 a 與 b 兩邊並其所夾之角

C 求其餘三事

本情節可按下列倪氏爲首兩公式以求餘兩角A,B

$$\tan\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}$$

既得A與B則c邊可按公式(7)或公式(13)之第三或第四方程求之惟不若用葛氏公式省却許多煩勞蓋其中有一函數與倪氏公式內一函數相同而此函數前於推求A與B時已知爲何數則可將其代入葛氏公式以求c也由葛氏四公式中任一式俱可求c

例如由第一式得

$$\cos\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\sin\frac{C}{2}$$

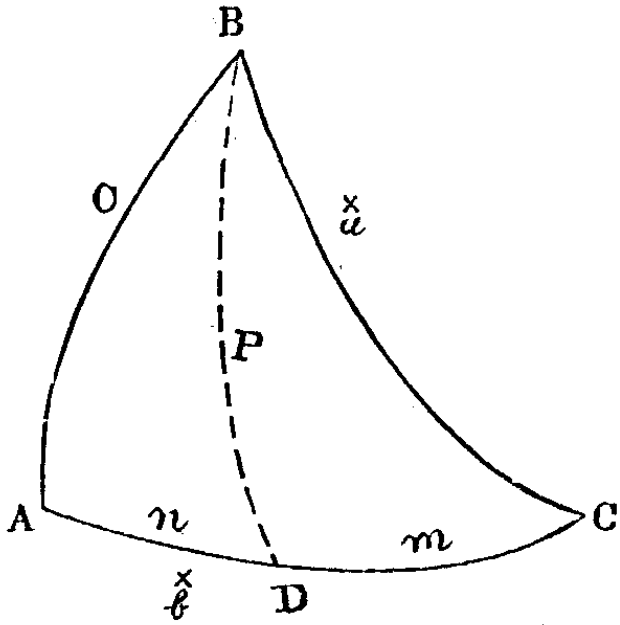
〔例1〕

$$\left.\begin{aligned} a&=73^\circ,58',54'' \\ b&=38^\circ,45' \\ C&=46^\circ,33',41'' \end{aligned}\right\}\quad \therefore\quad \begin{aligned} \frac{a-b}{2}&=17^\circ,36',57'' \\ \frac{a+b}{2}&=56^\circ,21',57'' \\ \frac{C}{2}&=23^\circ,16',50''.5 \end{aligned}$$

$L\cos\frac{a-b}{2}=9.97914$ $L\sec\frac{a+b}{2}=10.25658$ $L\cot\frac{C}{2}=10.36626$	$L\sin\frac{a-b}{2}=9.48092$ $L\csc\frac{a+b}{2}=10.07956$ $L\cot\frac{C}{2}=10.36626$
$L\tan\frac{A+B}{2}=10.60198$	$L\tan\frac{A-B}{2}=9.92674$
$L\sec\frac{A+B}{2}=10.61515$ $L\cos\frac{a+b}{2}=9.74342$ $L\sin\frac{C}{2}=9.59686$	$\frac{A+B}{2}=76^\circ,57',40''.7$ $\frac{A-B}{2}=40^\circ,11',25''.6$
	$A=116^\circ,9',6''.3$
$L\cos\frac{c}{2}=9.95543$ $\frac{c}{2}=25^\circ,31'$	$B=35^\circ,46',16''.1$ $c=51^\circ,2'$

本題若祇求c可按公式(8)之3求之無庸先將A與B推出但按公式(8)不能用對數推算則與其將該式改變使合對數之用不若用後列之法以求c而所得c之同數與公式(8)所得者相同且用此法祇記憶倪氏公式即可無須記憶他式也

如圖過B角作BD為AC邊之垂弧分原形為兩正弧三角　令其和或較等於原當視BD交AC或



AC 引長而異或過 A 角作 BC 之垂弧亦可惟不得於所設之 C 角作之命 BD = p, CD = m, AD = n 並以 × 號標所設之三項

按倪氏例 I 得

$\cos C = \tan m \cot a$

由是得

$$\tan m = \tan a \cos C$$

按倪氏例 II 得

$\cos a = \cos m \cos p$ 由是得 $\cos p = \cos a \sec m$

$\cos c = \cos n \cos p$ 由是得 $\cos p = \cos c \sec n$

$\therefore \quad \cos c \sec n = \cos a \sec m$

但 $\quad n = b - m$

則 $\quad \cos c = \cos a \sec m \cos (b - m)$

故 c 之同數可用對數由後列兩方程求之:—

$\tan m = \tan a \cos C$

$\cos c = \cos a \sec m \cos (b - m)$

〔例 2〕 已知 $a=97°,30',20'',b=55°,12',10'',C=39°58'$

求 c

$\because$ $\tan m=\tan a \cos C$

$\because$ $-\tan(180°-m)=-\tan(180°-a)\cos C$

$\therefore$ $\tan(180°-m)=\tan(82°,29',40'')\cos C$

$\therefore$ $L\tan(180°-m)=L\tan(82°,29',40'')+L\cos C-10$

$=10.88025+9.88447-10$

$=10.76472$

$\therefore$ $180°-m=80°,14',46''$

$\therefore$ $m=99°,45',14''$

$\therefore$ $b-m=-44°,33',4''$

又 $\because$ $\cos c=\cos a \sec m \cos(b-m)$

$=\cos(180°-a)\sec(180°-m)\cos(b-m)$

$=\cos(82°,29',40'')\sec(80°,14',46'')\cos(b-m)$

$\therefore$ $L\cos c=L\cos(82°,29',40'')+L\sec 80°,14,46''$

$+L\cos(44°,33',4'')-20$

$=9.11602+10.77103+9.85286-20$

$=9.73991$

$\therefore$ $c=56°,40',20''$

問題七

1. 設知 b, c, A 問按倪氏例求 a 之公式爲何又設知 a, c, B 問求 B 之公式爲何

2. 設知 $a=88°,12',20''$ $b=124°,7',17''$, $C=50°,2',1''$ 試求 $A=63°,15',11''$, $B=132°,17',59''$ $c=59°,4',18''$

3. 設知 $a=120°,55',35''$ $b=88°,12',20''$ $C=47°,42',1''$ 試求 $A=129°,58',3''$ $B=63°,15',9''$, $C=55°,52',40''$

4. 設知 $b=63°,15',12''$, $c=47°,42',1''$ $A=59°,4',25''$ 試求 $B=88°,12',24''$ $C=55°,52',42''$, $a=50°,1',40''$

5. 設知 $b=69°,25',11''$ $c=109°,46',19''$, $A=54°,54',42''$ 試求 $B=56°,11',57''$, $C=123°,21',12''$, $a=67°,13'$

14. 情節II. 設知 c 邊與其兩倚角 A, B 求其餘三事

a 與 b 可由倪氏之第三第四兩公式求之:—

$$\tan\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}$$

$$\tan\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}$$

其餘C角可用公式(7)或用倪氏公式第二式或用葛氏公式任一式例如用葛氏公式第二式則

$$\cos\frac{C}{2}=\frac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{a-b}{2}}\cos\frac{c}{2}$$

〔例1〕 $A=107°,47',7''$　　$\therefore\ \dfrac{A-B}{2}=34°,24',20''$

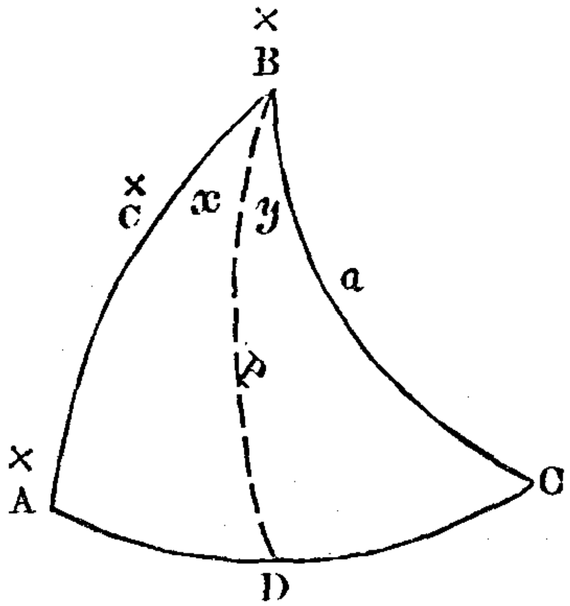
$B=38°,58'27''$　　$\dfrac{A+B}{2}\ 73°,22'47''$

$c=51°,41',14''$　　$\dfrac{c}{2}=25°,50',37''$

$L\cos\frac{A-B}{2}=9.91648$	$L\sin\frac{A-B}{2}=9.75208$
$L\sec\frac{A+B}{2}=10.54359$	$L\operatorname{cosec}\frac{A+B}{2}=10.01852$
$L\tan\frac{c}{2}=9.68517$	$L\tan\frac{c}{2}=9.68517$
$L\tan\frac{a+b}{2}=10.14524$	$L\tan\frac{a-b}{2}=9.45579$
$L\sin\frac{A+B}{2}=9.98148$	$\frac{a+b}{2}=54°,24',25''.4$
$L\sec\frac{a-b}{2}=10.01703$	$\frac{a-b}{2}=15°,56',23''.6$
$L\cos\frac{c}{2}=9.95423$	$a=70°,20'48''$

$L\cos\frac{C}{2}=9.95273$	$b=38°,28'2''$
$\frac{C}{2}=26°.14'.50''5$	$C=52°,29',40''$

若祇求C角則最好將弧三角形分爲兩正弧三角形然後仿照情節I祇求c之法按倪氏例以求C



如圖令 $\angle ABD=x$,

$\angle CBD=y\ \ BD=p$

則準例 I

$$\cos c=\cot x\cot A$$

由是 $\cot x=\tan A\cos c$,

又準例 II 得

$$\cos A=\cos p\sin x$$

由是 $\cos p=\cos A\operatorname{cosec} x$

$$\cos C=\cos P\sin y$$

由是 $\cos p=\cos C\operatorname{cosec} y$

$$\therefore\quad \cos C=\cos A\operatorname{cosec} x\cdot\sin y$$

$$=\cos A\operatorname{cosec} x\sin(B-x)$$

然則C之同數可按後列兩方程求之:—

$$\cot x=\tan A\cos c$$

$$\cos C=\cos A\operatorname{cosec} x\sin(B-x)$$

〔例2〕 已知 $A=35°,46',15''$ $B=115°,9',7''$ $c=51°,2'$ 求 C

$L\tan A=9.85760$	$L\cos A=9.90992$
$L\cos c=9.79856$	$L\sin(B-x)=9.88122$
	$L\operatorname{cosec} x=10.04055$
$L\cot x=9.65616$	
$x=65°,37',35''$	$L\cos C=9.83099$
$\therefore B-x=49°,31',22''$	$C=47°,20',30''$

問題八

1. 試知 a, B, c 求 A 或 A, b, C 求 B 間宜用何公式推算

2. 設知 $A=26°,58',46''$ $B=39°,45',10''$ $C=154°,46',48''$ 求其餘三事

3. 設知 $A=128°,41',49''$ $B=107°,33',20''$ $C=124°,12',30''$ 求其餘三事

4. 設知 $B=153°,17',6''$ $C=78°,43',36''$ $a=86°,15',15''$ 求其餘三事

5. 設知 $A=125°,41',44''$, $C=82°,47',35''$ $b=52°,37',57''$ 求其餘三事

15. 情節III. 設知 a 與 b 與 a 之對角 A 求餘三事

由公式(7)得下列之式以求 B:—

$$\sin B = \sin A \sin b \operatorname{cosec} a$$

既得 B 則由倪氏第四第二兩式得下列兩式以求 C 與 c:—

$$\tan\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\tan\frac{a-b}{2}$$

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\tan\frac{A-B}{2}$$

按倪氏公式之第三第一亦可推求 C 與 c

注意 1. 本情節因 B 係由其正弦推出則所餘三事必各有二同數倘遇 $\sin B>1$ 時則不能推解因正弦永不能大於 1 也仿照第七章 3 欵卽可解明所設情節有兩形或祇有一形合題惟於實用時三角形之式樣如何係可預知則其應有一形或兩形與問題相符無須詳察卽能洞悉矣

凡 A 與 a 同類且 $\sin b>\sin a>\sin A \sin b$ 則有兩形

與題相符

凡 A 與 a 異類(A 與 a 有 90° 者亦在此例)且 $\sin b > $ 或 $= \sin a$ 或 $\sin a < \sin A \sin b$ 者俱不能成三角形

凡不合以上二說者俱有一三角形

注意2. c 邊或 C 角可用後列兩式求之無須先求 B 角

$$\left.\begin{aligned}&\tan m = \cos A \tan b\\&\cos(c-m) = \cos a \sec b \cos m\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\cot x = \tan A \cos b\\&\cos(C-x) = \cot a \tan b \cos x\end{aligned}\right\}$$

茲證此四式於後：—

過 C 角作 CD 爲 AB 之垂弧

令 $x = \angle ACD$ $p = CD$

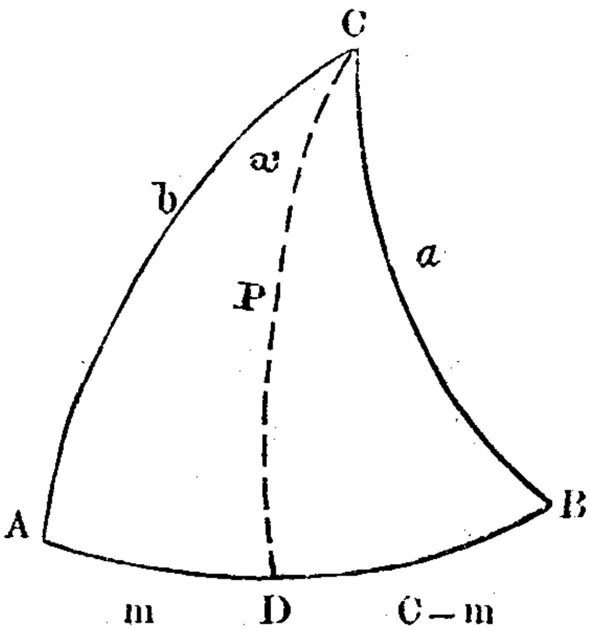
$m = AD$

則 $c - m = BD$

準倪氏例 I 得

$\cos A = \tan m \cot b$

$\tan m = \cos A \tan b$



準倪氏例 II 得

$\cos a = \cos(c-m) \cos p$

$\therefore\quad \cos p=\cos m\sec(c-m)$

又 $\cos b=\cos m\cos p$

$\therefore\quad \cos p=\cos b\sec m$

$\therefore\quad \cos b\sec m=\cos a\sec(c-m)$

$\therefore\quad \cos b=\cos a\sec(c-m)\cos m$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sec b}=\frac{\cos a\cos m}{\cos(c-m)}$$

$\therefore\quad \underline{\underline{\cos(c-m)=\cos a\sec b\cos m}}$

準倪氏例 1 得

$\cos b=\cot X\cot A \qquad \therefore\quad \underline{\underline{\cot X=\tan A\cos b}}$

又 $\cos(C-X)=\tan p\cot a$

$\therefore\quad \tan p=\cos(C-X)\tan a$

又 $\cos X=\cot b\tan p$

$\therefore\quad \tan p=\cos X\tan b$

$\therefore\quad \cos(C-X)\tan a=\cos X\tan b$

$\therefore\quad \cos(C-X)=\underline{\underline{\cot a\tan b\cos X}}$

注意 3. 既得 B 之兩同數則欲知其俱合題與否可按第 2 款 I 則定之若 $\log\sin B$ 爲正則不能成三角形

〔例〕 已知 $a=57°,36'$, $b=31°,12'$, $A=104°,25',30''$

求餘三事

本題因 $A>90^\circ$	$L\sin A=9.98608$
且 $a+b<180^\circ$	$L\sin b=9.71435$
∴ $A+B<180^\circ$	$L\operatorname{cosec} a=10.07349$
∴ $B<90^\circ$	$L\sin B=9.77392$
∴ 祇有一三角形	$B=36^\circ,27',16''$
$a+b=88^\circ,48$	$\frac{1}{2}(a+b)=44^\circ,24'$
$a-b=26^\circ,24'$	$\frac{1}{2}(a-b)=13^\circ,12'$
$A+B=140^\circ,52,46''$	$\frac{1}{2}(A+B)=70^\circ,26',23''$
$A-B=67^\circ58'14''$	$\frac{1}{2}(A-B)=33^\circ,59',7''$
$L\sin\frac{A+B}{2}=9.97419$	$L\sin\frac{a+b}{2}=9.84502$
$L\operatorname{cosec}\frac{A+B}{2}=10.25260$	$L\operatorname{cosec}\frac{a-b}{2}=10.64086$
$L\tan\frac{a-b}{2}=9.37023$	$L\tan\frac{A-B}{2}=9.82873$
$L\tan\frac{c}{2}=9.59702$	$L\cot\frac{C}{2}=10.31461$
$\frac{c}{2}=21^\circ,34'23$	$\frac{C}{2}=25^\circ,51',15''$
$c=43^\circ,8'46''$	$C=51^\circ,42',30''$

問題九

1. 設知 $a=73°,49',38''$, $b=120°,53',35''$ $A=88°,52',42''$ 試求其餘三事

2. 設知 $a=150°,57',5''$, $b=134°,15',54''$ $A=144°,22',42''$ 試求 $B_1=120°,47'45''$, $c_1=55°,42',8''$, $C_1=97°,42',55''$. $B_2=59°,12'15''$ $c_2=23°57',17''.4$, $C_2=29°,8',39''$

3. 設知 $a=79°,0',54''.5$ $b=82°,17,4''$ $A=82°,9',25''.8$ 試求 $B=90°$, $c=45°,12',19''$ $C=45°,44''$

4. 設知 $a=30°,52',36''.6$, $b=31°,9'16''$, $A=87°,34',12''$ 試證不能成三角形

16. 情節IV. 設知 A 與 B 兩角並其一對邊 a 求餘三事

由公式(7)第一式得

$$\sin b=\sin a\sin B\operatorname{cosec} A$$

由是可求 b

由倪氏公式第四第二兩式得

$$\tan\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\tan\frac{a-b}{2}$$

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\tan\frac{A-B}{2}$$

由是兩式可求 c 與 C

注意1. 本情節 b 既係由其正弦推求則欲知應有一形兩形或無形與之相符可按極三角形之理仿照情節 III 相當之各事項定之凡 A 與 a 同類且 $\sin B>\sin A>\sin a\sin B$ 則有兩形與題相符凡 A 與 a 異類(A 與 a 有 90° 者亦在此例)且 $\sin B>$ 或 $=\sin A$ 或 $\sin A<\sin a\sin B$ 者俱不能成三角形凡不合以上兩說者俱有一三角形

注意2. 仿照情節 III 注意 2 可用後列四式求 c 或 C 無須先求 b :—

$$\left.\begin{aligned}&\tan m=\tan a\cos D\\&\sin(c-m)=\cot A\tan B\sin m\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\cot x=\cos a\tan B\\&\sin(c-x)=\cos A\sec B\sin x\end{aligned}\right\}$$

按此四公式內 $m=BD$, $x=\angle BCD$, D 爲過 C 角之大圜弧與 AB 之交點

注意3. 既得 b 之兩同數則欲知其俱合問與

否可按2款I則定之若 $\log\sin b$ 爲正則不能成三角形

問題十

1. 設知 $A=110°,10'$ $B=133°,18'$ $a=147°,5',32''$ 試求 $b=155°,5',18''$, $c=33°,1',36''$, $C=70°,20',40''$

2. 設知 $A=113°,39',21''$, $B=123°,40',18''$ $a=65°,39',46''$ 試求其餘三事

3. 設知 $A=100°,2',11''.3$, $B=98°,30',28''$, $a=95°\,20'\,38''7$ 試求 $b=90°$, $c=147°,41',43''$ $c=148°,5',33''$

4. 設知 $A=24°,33',9''$, $B=38°,0',12''$ $a=65°,20',13''$ 試證不能成三角形

17. 情節V. 設知 a, b, c 三邊求三角

A 角可用公式(10)求之 B 與 C 兩角可用相似之公式求之惟用正切公式求角較之用正餘弦公式稍爲簡便

又
$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\operatorname{cosec} s \operatorname{cosec}(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

可變爲
$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\operatorname{cosec}(s-a)}{\operatorname{cosec}(s-a)}\sqrt{\operatorname{cosec} s \operatorname{cosec}(s-a)}.$$

$$\times\sqrt{\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$=\operatorname{cosec}(s-a)\sqrt{\operatorname{cosec} s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

設 $\sqrt{\operatorname{cosec} s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}=\tan$

則 $\tan\frac{A}{2}=\operatorname{cosec}(s-a)\tan r$

仿照上法可得 $\tan\frac{B}{2}$ 與 $\tan\frac{C}{2}$ 之變式故有相似之三式如下:—,

$$\tan\frac{A}{2}=\tan r \operatorname{cosec}(s-a)$$

$$\tan\frac{B}{2}=\tan r \operatorname{cosec}(s-b)$$

$$\tan\frac{C}{2}=\tan r \operatorname{cosec}(s-c)$$

此爲求三角之最簡便式其 $\tan r$

$$=\sqrt{\operatorname{cosec} s\cdot\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

〔例 I〕

$a=50^\circ,54',32''$	$L\operatorname{cosec} s=10.00448$
$b=37^\circ,47',18''$	$L\operatorname{cosec}(s-b)=10.28978$
$c=74^\circ,51',50''$	$L\sin(s-b)=9.84171$
$2s=163^\circ,33',40''$	$L\sin(s-c)=9.08072$
$s=81^\circ,46',50''$	$2\,\underline{\vert 19.21669}$
$s-a=30^\circ,52',18''$	$L\tan\frac{A}{2}=9.60835$
$s-b=43^\circ,59',32''$	$\frac{A}{2}=22^\circ,5'20''$
$s-c=6^\circ,55',0''$	$A=44^\circ,10',40''$

求餘兩角公式如下:—

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\operatorname{cosec} s \operatorname{cosec}(s-b)\sin(s-a)\sin(s-c)}$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{cosec} s\cdot\sin(s-c)}{\sin(s-b)\operatorname{cosec}(s-a)}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\operatorname{cosec} s \operatorname{cosec}(s-c)\sin(s-a)\sin(s-b)}$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{cosec} s\sin(s-b)}{\sin(s-c)\operatorname{cosec}(s-a)}}$$

$L\operatorname{cosec} s=10.00448$	$L\operatorname{cosec} s=10.00448$
$L\sin(s-a)=9.08078$	$L\sin(s-b)=9.84171$
$L\sin(s-b)=-9.84171$	$L\sin(s-c)=-9.08072$
$L\operatorname{cosec}(s-a)=-10.28978$	$L\operatorname{cosec}(s-a)=-10.28978$
$2\,\lvert\,-1.04629$	$2\,\lvert\,.47569$
-52315	$.23785$
$L\tan\frac{B}{2}=9,47685$	$L\tan\frac{C}{2}=10.23785$
$\frac{B}{2}=16^\circ,41',22''$	$\frac{C}{2}=59^\circ,57',33'',8$
$B=33^\circ,22',44''$	$C=119^\circ,55',7''.6$

〔例2〕 $a=124^\circ,12',31''$	$s-a=13^\circ,39',5''$
$b=54^\circ,18',16''$	$s-b=83^\circ,33',20''$
$c=97^\circ12'25''$	$s-c=40^\circ,39'11''$

$2s = 275°,43',12''$

$s = 137°,51',36''$

$L\sin(s-a) = 9.37293$

$L\sin(s-b) = 9.99725$

$L\sin(s-c) = 9.81390$

$L\operatorname{cosec} s = 10.17331$

39.35739

-40

$2 \,|\, -.64261$

$-.321305$

$+10$

$L\tan r = 9.67870$

$L\tan\frac{A}{2} = 10 + L\tan r - L\sin(s-a)$

$= 19.67870$

9.37293

10.30577

$L\tan\frac{B}{2} = 10 + L\tan r - L\sin(s-b)$

$= 19.67870$

9.99725

9.68145

$L\tan\frac{C}{2} = 10 + L\tan r - L\sin(s-c)$

$= 19.67870$

9.81390

9.86480

$\frac{A}{2} = 63°,41',3''.8$	$\frac{B}{2} = 25°,39',5''.6$	$\frac{C}{2} = 36°,13',20''.1$
$A = 127°,22',7''.6$	$B = 51',18',11''.2$	$C = 72°,26',40''.2$

問題十一

1. 設知 $a = 120°,55',35''$ $b = 59°,4',25$ $c = 106°,10',22''$

試求 $A = 116°,44',50''$, $B = 63°,15',18''$ $C = 91°,7',22''$

2. 設知 $a = 50°,12',4''$, $b = 116°,\ 44',48''$, $c = 129°,11',$

42″試求其餘三事

3. 設知 $a=131°,35',4''$, $b=108°,30',14''$, $c=84°,46',34''$ 求其餘三事

4. 設知 $a=20°,16',38''$, $b=56°,19',40''$ $c=66°,20',44''$ 求其餘三事

18. 情節 VI. 設知 A, B, C 三角求三邊

a 邊可用公式(11)求之 b 與 c 兩邊可用相似之公式求之惟用正切公式求邊較之用正餘弦公式畧爲省事

正切公式

$$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\sec(S-B)\sec(S-C)}$$

可變爲 $\tan\frac{a}{2}=\frac{\cos(S-A)}{\cos(S-A)}$

$$\sqrt{-\cos S\ \cos(S-A)\ \sec(S-B)\ \sec(S-C)}$$

$$=\sec(S-A)\ \sqrt{-\cos S\ \sec(S-A)\ \sec(S-B)\ \sec(S-C)}$$

設 $\sqrt{-\cos S\sec(S-A)\sec(S-B)\ \sec(S-C)}=\tan R$

則 $\tan\frac{a}{2}=\tan R\cos(S-A)$

照上法亦可得 $\tan\frac{b}{2}$ 與 $\tan\frac{c}{2}$ 之變式故有相似之三式如下:—

$$\tan\frac{a}{2}=\tan R\cos(S-A)$$

$$\tan\frac{b}{2}=\tan R\cos(S-B)$$

$$\tan\frac{c}{2}=\tan R\cos(S-C)$$

此爲求三邊之最簡便式其

$$\tan R=\sqrt{-\cos S\sec(S-A)\sec(S-B)\sec(S-C)}$$

〔例 1〕 $A=220°$

$B=130$

$C=150°$

$2S=500°$

$S=250°$

$S-A=30°$

$S-B=120°$

$S-C=100°$

$-\cos S=\cos 70°$

$\cos(S-A)=\cos 30°$

$\sec(S-B)=-\sec 60°$

$\sec(S-C)=-\sec 80°$

此四函數之積爲正

$L\cos 70°=9.53405$

$L\cos 30°=9.93753$

$L\sec 60°=10.30103$

$L\sec 80°=10.76033$

$2\,\underline{|0.53294}$

$L\tan\frac{a}{2}=10.26647$

$\frac{a}{2}=61°,34',6''$

$a=123°,8',12''$

求餘兩邊之公式如下

$$\tan\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\sec(S-C)}{\sec(S-B)\cos(S-A)}}$$

$$\tan\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\sec(S-B)}{\sec(S-C)\cos(S-A)}}$$

$L\cos 70^\circ = 9.53405$

$L\sec 80^\circ = 10.76033$

$L\sec 60^\circ = -10.30103$

$L\cos 30^\circ = -9.93753$

$2\underline{|.05582}$

$L\tan\frac{b}{2} = 10.02791$

$\frac{b}{2} = 46^\circ,50',23''.3$

$b = 93^\circ,40',46''.6$

$L\cos 70 = 9.53405$

$L\sec 60^\circ = 10.30103$

$L\sec 10^\circ = -10.76033$

$L\cos 30^\circ = -9.93753$

$2\underline{|-.86278}$

$-.43139$

$L\tan\frac{c}{2} = 9.56861$

$\frac{c}{2} = 20^\circ,19',19''.2$

$c = 40^\circ,38',38''.4$

〔例2〕 $A = 20^\circ,9',56''$

$B = 55^\circ,52',32''$

$C = 114^\circ,20',14''$

$S - A = 75^\circ,1',25''$

$S - B = 39^\circ,18',49''$

$S - C = 19^\circ,8',53''$

$2S = 190^\circ,22',42''$

$S = 95^\circ,11',21''$

$-\cos S = \cos 84^\circ,48'39$

$\sec(S-A) = \sec 75^\circ,1'25''$

$\sec(S-B) = \sec 39^\circ,18',49''$

$\sec(S-C) = \sec 19^\circ,8',53''$

此四函數之積爲正

$L\tan\frac{a}{2} = 10 + L\tan R$

$- L\sec(S-A)$

$= 19.84010$

$\underline{10.58768}$

9.25242

$L\tan\frac{b}{2} = 10 + L\tan R$

$- L\sec(S-B)$

$= 19.84010$

$L\cos 84°,48',39'' = 8.95638$

$L\sec 75°,1',25'' = 10.58768$

$L\sec 39°,18',49'' = 10.11143$

$L\sec 19°,8',53'' = 10.02472$

39.68021

-40

$2\,|\,\overline{-.31979}$

$-.15990$

$L\tan R = 9.84010$

10.11143

9.72867

$L\tan\frac{c}{2} = 10 + L\tan R$

$-L\sec(S-C)$

$= 19.84010$

10.02472

9.81538

$\frac{a}{2} = 10°,8',18''.9$

$\frac{b}{2} = 28°,9',50''.4$

$\frac{c}{2} = 33°,10',21''.3$

$a = 20°,16',38''$

$b = 56°,19',41''$

$c = 66°,20',43''$

問題十二

1. 設知 $A = 130°$, $B = 110°$ $C = 80°$ 試求 $a = 139°,21',22''$, $b = 126°,57',52''$, $c = 56°,51',48''$

2. 設知 $A = 59°,55',10''$, $B = 85°,36',50''$ $C = 59°,55',10''$ 試求 $a = 51°,17',31''$, $b = 64°,2',47''$ $c = 51°,17',31''$

3. 設知 $A=102^\circ,14',12''$, $B=54^\circ,32',24''$, $C=89^\circ,5',46''$ 試求其餘三事

4. 設知 $A=4^\circ,23',35''$, $B=8^\circ,28',20''$ $C=172^\circ,17',56''$ 試求其餘三事

19. 求弧三角形面積

情節 I. 設知 A, B, C 三角求面積

設 $R=$ 球之半徑

$E=A+B+C-180^\circ$

$F=$ 三角形面積

過球心作三平面互爲垂面平分球面爲 8 分每分爲三直角弧三角形復將每分平分爲 90° 小分各小分以球度稱之如是則凡球面共函 720 球度

今準立體幾何理 $\triangle ABC$ 所函之球度爲 E 而全球面所函爲 720 球度故有比例如下 —

$\triangle ABC:$ 球面 $=E:720$

又準立體幾何理球面 $=4\pi R^2$

則 $\triangle ABC:4\pi R^2=E:720$

$\therefore\quad \triangle ABC=\dfrac{\pi R^2E}{180}$

即 $F=\dfrac{\pi R^2E}{180}$ ....(14)

情節II. 設知 a, b, c 三邊求面積

由公式(12)第一式得 $$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

準比例和較之理改之則得

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}-\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A+B}{2}+\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}}\text{(a)}$$

由上編五章 5 款公式得

$$\frac{\cos A-\cos B}{\cos A+\cos B}=-\tan\frac{A+B}{2}\cdot\tan\frac{A-B}{2}\text{,…………(b)}$$

此式內之 A 與 B 可任以兩角代之如 A 代以 $\frac{A+B}{2}$, B 代以 $90^\circ-\frac{c}{2}$ A 或代以 $\frac{a+b}{2}$, B 代以 $90^\circ-\frac{c}{2}$ 是也

今以 A 與 B 代以 $\frac{A+B}{2}$ 與 $90^\circ-\frac{C}{2}$ 則(b)式左端變爲

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}-\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A+B}{2}+\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)}$$

其右端變爲

$$-\tan\frac{1}{2}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+90^\circ-\frac{C}{2}\right)\tan\frac{1}{2}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}-90^\circ+\frac{C}{2}\right)$$

即 $\quad -\tan\frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ)\tan\frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)$

惟 $\quad A+B-C-180^\circ=E$

又 $\quad \tan\frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ)=\tan\frac{1}{4}(360^\circ-2C+A$

$$+B+C-180^\circ)=\tan\frac{1}{4}(360^\circ-2C+E)$$

$$=\tan\left\{90^\circ-\frac{1}{4}(2C-E\right.$$

$$=\cot\frac{1}{4}(2C-E)$$

故(b)式變為

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}-\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A+B}{2}+\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)}=-\cot\frac{1}{4}(2C-E)$$

$$\tan\frac{E}{4}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (c)$$

若以 $\frac{a+b}{2}$ 與 $\frac{C}{2}$ 代(b)式內之 A 與 B 並以 s 代

代 $\frac{1}{2}(a+b+c)$ 又 $s-c$ 代 $\frac{1}{2}(a+b-c)$ 則(b)式變為

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}}=-\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-c}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (d)$$

察閱(a)(c)(d)三式即見

$$\cot\frac{1}{4}(2C-E)\tan\frac{E}{2}=\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-c}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (e)$$

再將公式(12)第二式照上法變之得

$$\tan\frac{1}{4}(2C-E)\tan\frac{E}{4}=\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\cdots\cdots\cdots(f)$$

(e)與(f)兩方程兩端各相乘得

$$\tan^2\frac{E}{4}=\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}\cdots\cdots(15)$$

是謂之 l'Huiliers 公式

按此公式由三邊之同數卽可求 E 而弧三角形之面積卽可由情節 I 求之矣

情節 III. 若已之一角兩邊或兩角一邊則先求餘兩角或餘一邊或餘一角或餘兩邊然後按公式(14)或公式(15)求三角形之面積

〔例 1〕

$A=102°,14',12''$	$\log F=\log\pi+\log R^2$
$B=54°,32',24''$	
$C=89°,5',46''$	$+\log 237142-\log 468000$
$245°,52',22''$	$=.49715+\log R^2$
$E=65°,52',22''$	$+5.37501-5.81158$
$=237142''$	$=.06058+\log R^2$
$180°=468000''$	$=\log 1.1497+\log R^2$
$F=\dfrac{\pi R^2E}{180}$	$=\log 1.1497R^2$
$=\dfrac{\pi R^2\times 237142}{648000}$	$\therefore\quad F=1.1497R^2$

故若知球半徑之同數則可弧三角形面積函平常面積準簡若干矣

〔例 2〕 $a=138°,26',19''$

$b=64°,50',53''$

$c=144°,13',45''$

$2s=342°,30',57''$

$s=171°,15',28''.5$

$s-a=37°,49',9''.5$

$s-b=106°,24',35''.5$

$s-c=27°,1',43''.5$

$\frac{s}{2}=85°,37',44''$

$\frac{s-b}{2}=18°,54',35''$

$\frac{s-b}{2}=53°,12',18''$

$\frac{s-c}{2}=13°,30',52''$

$L\tan\frac{s}{2}=11.11669$

$L\tan\frac{s-a}{2}=9.53474$

$L\tan\frac{s-b}{2}=10.12612$

$L\tan\frac{s-c}{2}=9.38083$

40.15838

-40

$2\overline{)\ .15838}$

$.07919$

$L\tan\frac{E}{4}=10.7919$

$\frac{E}{4}=50°,11',43''$

$E=200°,46',52''$

既得 E 則若知半徑即可求面積

問題十三

1. 設知 $A=84°,20',19''$, $B=27'',22',40''$ $C=75°33$

試求 E＝26159″, F＝.12682R²

2. 設知 a＝69°,15′,6″, b＝120°,42′,47″ c＝159°,18′,33″ 試求 E＝216°,40′,38″

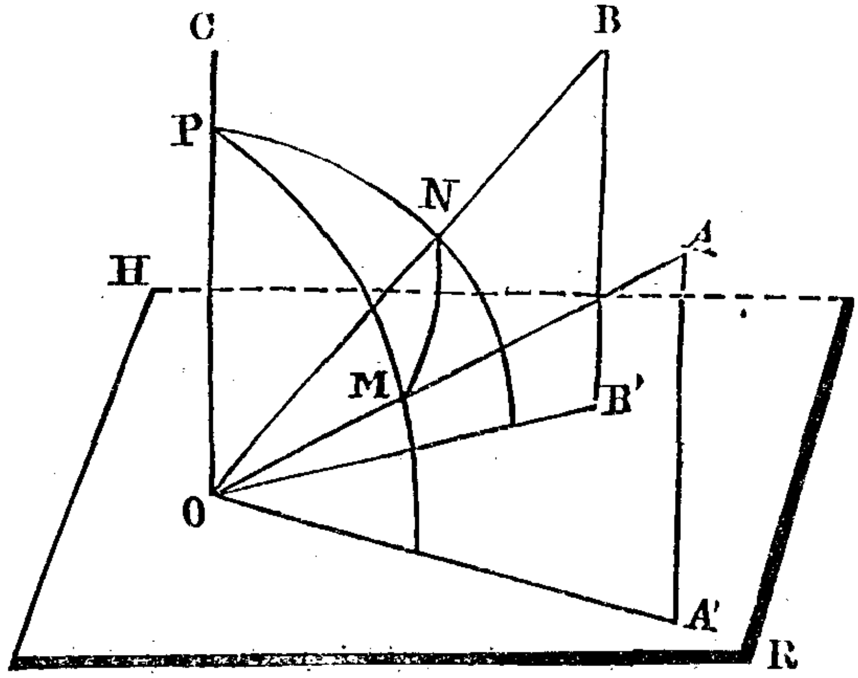
3. 設知 a＝33°,1′,45″, b＝155° 5′, 18″ c＝110°,10′ 試求 E＝133°,48′,53″

4. 設以地球爲正球於其面上作三角形每邊長1度問其面積若干(地球半徑＝3958英里)

第三章

論弧三角形之實用

20. 設於空際測得一角求化爲地平面之角



如圖設O爲測者所在之處 ∠AOB＝h 爲空際所測之角(例如旗竿頂與塔頂對

於測量處所成之角) OA', 與 OB' 爲 ∠AOB 兩腰在 HR 地平面上之投影 ∠AOA'＝m, ∠BOB'＝n 爲 OA 與 OB 各與地平面所成之角求 ∠A'OB' 即 ∠AOB 在地平面上之投影以 x 代之

AOA' 與 BOB' 兩角所在之兩平面引而廣之相交於 OC 綫而準几何理 OC 爲地平面之垂綫

以 O 爲心作球其面與 O－ABC 體角之三稜於交於 M, N, P 三點 MNP 弧三角形內旣知三邊 MN, MP, NP 與 h, $90^\circ-m$, $90^\circ-n$ 各等其 P 角卽爲所求之 x 角

按公式 (10) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\sin s\sin(s-a)\operatorname{cosec} b\operatorname{cosec} c}$

式內之 a 即 $=h$, $b=90^\circ-m$, $c=90^\circ-n$, $A=x$

$$\therefore\quad s=\tfrac{1}{2}(h+90^\circ-m+90^\circ-n)=90^\circ-\tfrac{1}{2}(m+n-h)$$

$$\sin s=\sin\{90^\circ-\tfrac{1}{2}(m+n-h)\}=\cos\tfrac{1}{2}(m+n-h)$$

$$s-a=90^\circ-\tfrac{1}{2}(m+n-h)-h=90^\circ-\tfrac{1}{2}(m+n+h)$$

$$\sin(s-a)=\sin\{90^\circ-\tfrac{1}{2}(m+n+h)\}=\cos\tfrac{1}{2}(m+n+h)$$

$$\operatorname{cosec} b=\operatorname{cosec}(90^\circ-m)=\sec m$$

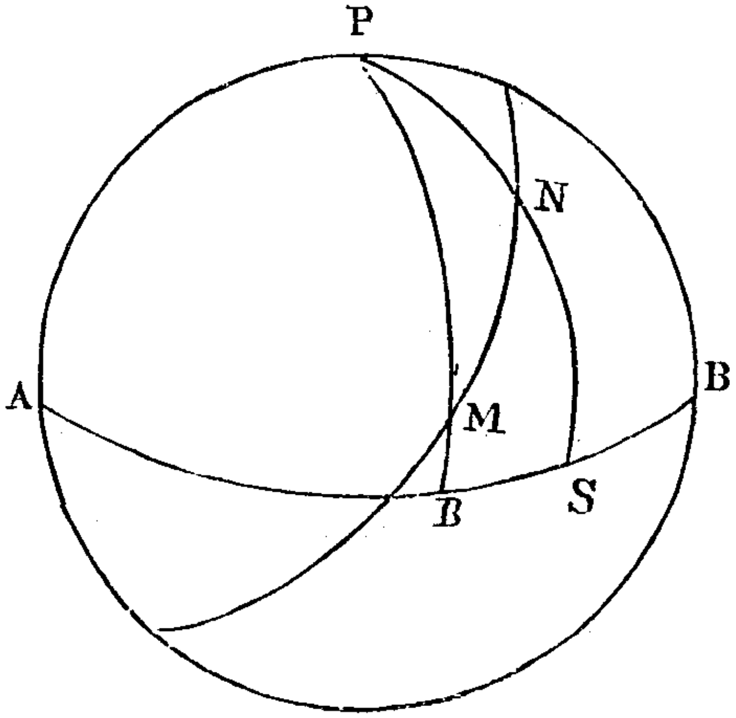
$$\operatorname{cosec} c=\operatorname{cosec}(90^\circ-n)=\sec n$$

$$\therefore\quad \cos\frac{x}{2}=\sqrt{\cos\tfrac{1}{2}(m+n-h)\cos\tfrac{1}{2}(m+n+h)\sec m\sec n}$$

設 $s'=\frac{1}{2}(m+n+h)$ 則 $s'-h=\frac{1}{2}(m+n-h)$

由是 $\cos\frac{X}{2}=\sqrt{\cos s' \cos(s'-h) \sec m \sec n}$

21. 已知兩處之緯度與經較求其距離

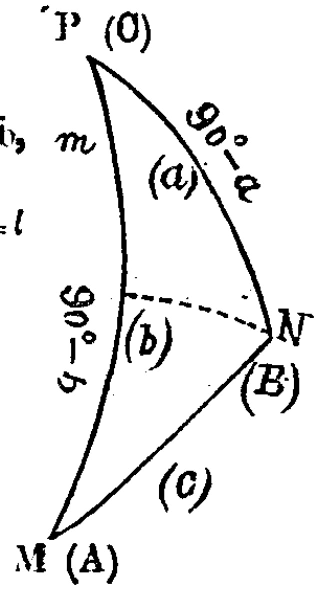


如圖設 M 與 N 為兩處

則其距離即為過兩處之大圜弧

設 P 為極 AB 為赤道 MR 與 NS 兩弧為兩處之緯度 RS 弧或 MPN 角即為兩處之經較

又設 $MR=b$, $NS=a$, $RS=l$



MNP 弧三角形內既知 $MP=90°-b$, $NP=90°-a$ 並兩邊所夾之角 $MPN=l$

則按 13 款之兩公式

$$\tan m=\tan a \cos C$$

$$\cos c=\cos a \sec m \cos(b-m)$$

得 $\tan m=\tan(90°-a)\cos P$

$$=\cot a \cos l$$

並 $\cos MN = \cos(90°-a) \sec m \cos(90°-b-m)$

$$= \sin a \sec m \sin(b-m)$$

由此方兩程可求 m 然後求 MN 弧

惟地面上每度 =60 海里故 60MN 即爲兩處距離

22. 論天球

天球爲懸揣之球其半徑爲無窮長吾人仰觀天象恍若象星羅列於其凹面內者焉

地赤道之平面引而廣之與天球面相交而成之大圈謂之天球赤道

地軸兩端引長與天球面相交之兩點謂之天球南北兩極

其處子午綫之平面引而廣之與天球面於交而成之大圈謂之某處之天球子午綫

過天球兩極與天赤道正交之諸大圈爲時圈或名經圈

切某處地面作平面引而廣之其天球面相交而成

之大圈謂之地平界

從地面某處作垂線引長至無窮其與天球面相交之點謂之某處之天頂亦卽某處地平界之一極

過某處之天頂與其地平界正交之諸大圈爲豎圈

過地平界南北兩點之豎圈(卽天子午線)爲子午圈

過地平界東西兩點之豎圈爲卯酉圈

地本繞日而行然自地見日儼如日環地而轉其逐年自西至東所經之天球大圈爲黃道

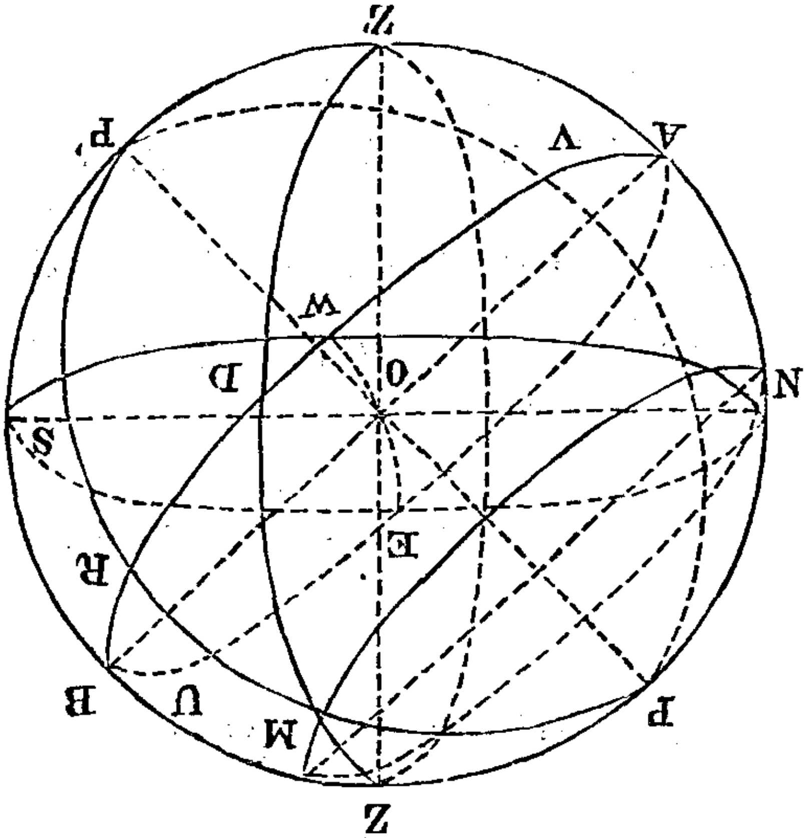
黃道與天赤道於交之二點爲春分秋分二點

太陽逐年於陽歷三月二十一日經過春分點於九月二十一日經過秋分點

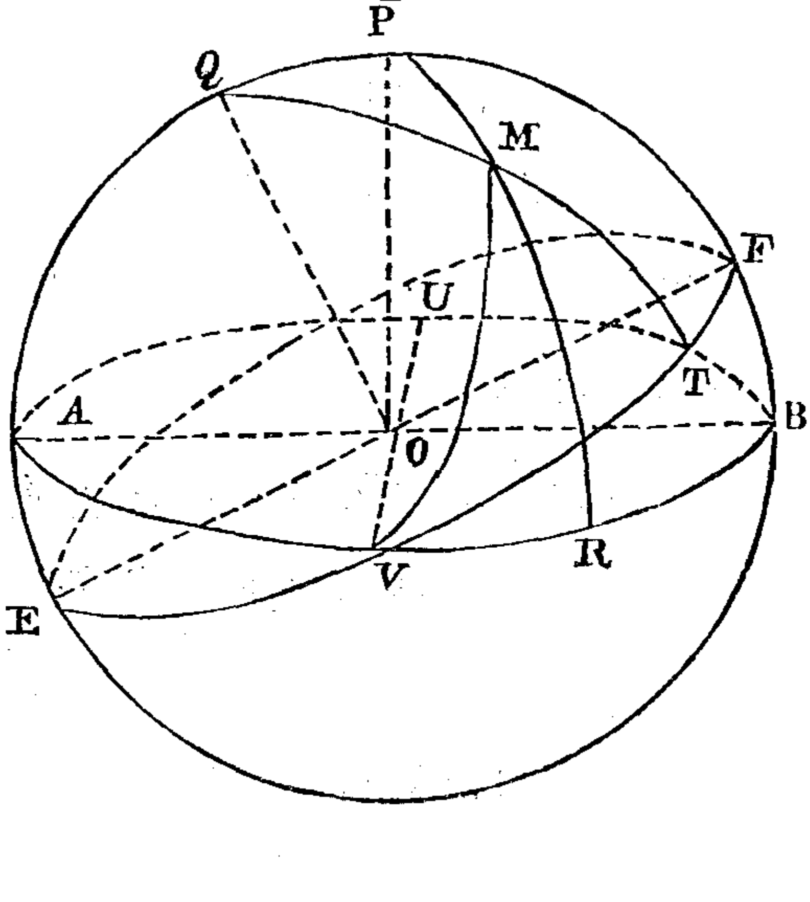
過黃道二極而與黃道正交諸大圈爲黃經圈

黃道與天赤道所成之角爲黃赤角約爲 $23°27'$, 恒以 e 字母代之

以上諸界說可用後列兩圖明之



1



2

如左圖 AVBU 爲天赤道 P 與 P' 爲天球二極 NPZS 爲一天子午圈 NESW 爲其地平界 Z 爲天頂 M 爲一星 PMP' 爲過星之時圈 ZMDZ' 爲過星之堅圈

如右圖 AVBU 爲天赤道 EVFU 爲黃道 P 爲赤道極 Q 爲黃道極 V 爲春分點 U 爲秋分點 M 爲一星 PMR 爲過星之時圈 QMT 爲過星之黃經圈 $\angle TVR$ 爲黃赤角 $=\theta$

地球逐日自西至東旋轉一週故空際諸星自地觀之儼如自東至西每小時旋轉 15 度如左圖設於天球 0 點(即地球)觀天而天頂地平界天子午線悉如圖中所列且諸星繞 PP' 天球軸線每小時旋轉 15 度如是則可領悟諸星儼若行動之狀太陽或星逐日轉動而過子午線謂之過子午線迨既渡過地平界之 NWS 一段謂之落渡過地平界之 NES 一段謂之升(其蒙氣差不計)空際諸星每日繞天軸繞行一小圈與天赤道平行謂之各該星之逐日行圈星距兩極愈近其逐日行圈愈小若星適在兩極則星不動而無逐日行圈矣自赤道之北觀天恒見天北極在地平界之上自赤道之南觀恒見天南極在地平界之上

23. 論縱橫弧

無論何時欲定某星居天球面之方位有四法可備採用然每法俱取一大圈與其兩極爲標準而每星之方位可以縱橫二弧定之玆將各法詳述於後

I. 擇地平界與天頂爲標準其縱弧名爲高度橫弧名爲地平界經度

循堅圈而測某星與地平界相距之弧度爲某星之高度高度之餘弧爲星距天頂之度

某星之地平界經度者卽測者所在之子午圈與過某星之堅圈相交於天頂而成之角是故地平界經度卽爲以上兩圈由地平界所截之弧其在赤道之北者恒自地平界正北計之在赤道之南者恒自地平界正南計之其或偏東偏西當視星之在東或在西而異

II. 擇天赤道與其兩極爲標準以星之緯度與時角定星之方位

循時圈而測某星與天赤道相距之弧度爲某星之緯度緯度之餘弧爲距極度

星之緯度如地面上某處之緯度亦有南緯與北緯之別惟於實習問題內恒以地面緯度爲正而星之緯

度若以其與測者所在之緯度異名者須作爲負

若星之緯度爲負則其距極度卽爲 90° 加其緯度

某星之時角者卽測者所在之子午圈與過某星之時圈相交於天球二極所成之角也星之時角恒變每小時以 15° 遞差緣地球每日旋轉一週也時角係由天子午線起計向西計者爲正向東爲負

III. 仍擇天赤道與其極爲標準而以星之緯度與其經度爲縱橫弧以定星之方位

某星之經度者卽會分點與星之時圈交天赤道之點所截之天赤道弧也星之經度係從春分點向東起計自 0° 至 360°

IV. 取黃道與其極爲標準其縱橫二弧名爲黃經與黃緯

某星之黃經者卽春分點與過是之黃經圈交黃道之點所截之黃弧也星之黃經亦自春分點向東起計自 0° 至 360°

循黃經圈而測某星與黃道相距之弧度爲某星之

黃緯

24. 今以英字母標明前欵左圖內 M 星之各事項所用之字母與英文相當以便於記憶後來之公式

設 l = 測者所在之緯度 (latitnde)

$h=DM=$ 星之高度 (altitude-haight)

$z=ZN=$ 星距天頂之度 (zenith distance)

$a=\angle PZM=$ 星之地平界經度 (azimnth)

$t=\angle ZPM=$ 星之時角 (honrangle-timel)

$d=RM=$ 星之緯度 (declination)

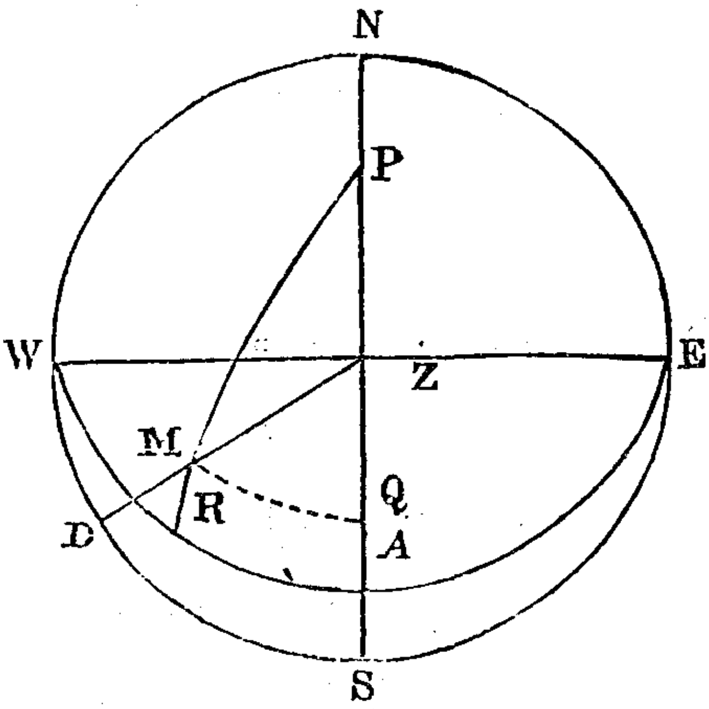
$p=PM=$ 星距天北極之度 (polar dist ance)

$r=VR=$ 星之經度 (right ascension

$\left.\begin{array}{l} u=MT= \text{星之黃緯} \\ r=VT= \text{星之黃經} \\ e=BV= \text{黃赤角} =23^\circ,27' \end{array}\right\}$ 右圖

(nobligntv of ecliptic)

25. 有時演算問題將天球各圈投影法繪於地平界之面內較爲簡明如下圖是也



NESW 爲地平界 Z 爲天頂 NZS 爲天子午線 WZE 爲卯酉圈 WAE 爲天赤道 P 爲北極 M 爲一星 DM 爲其高度 ZM 爲距天頂之度 ∠PZM 爲其地平界經度 RM 爲其緯度 PM 爲距天北極 ∠ZPM 爲時角 DM 爲其高度

26. 論天文家恒用之三角形

前欵圖內之 ZPM 三角形係天文家恒以推算天文問題者恒稱之爲天文家三角形其 PZ 邊爲測者所在之緯度之餘緯度盖查閱22欵左圖即見ZOB角介於天頂與天赤道之間顯與測者所在之緯度等且∠POZ爲∠ZOB之餘角故也又 NP 弧爲 PZ 弧之餘弧故若測者在北緯則天北極之高度即與測者所在之緯度等也

ZPM 三角形其式樣雖因 M 星之方位而改變然其邊角恆有後列五事

$PZ =$ 餘緯度 $= 90^\circ - l$

$ZM =$ 星距天頂之度 $= z$

$PM =$ 星距天北極之度 $= p$

$\angle ZPM =$ 星之時角 $= t$

$\angle PZM =$ 地平界經度 $= a$

27. 太陽每點鐘自東至西既行 15° 則其在某處之午線(即子午線省文)時(即時角 $=0^\circ$)該處儼如適值正午是謂視午正(即視若午正之謂)而如確實午正蓋空際蒙氣令日光斜射有以改其差也

故若時角爲 0°, 15°, -15° 則該處必適至午正午後一點鐘午前 11 點鐘餘可類推其蒙氣差姑不必計

設 t 爲時角之同數(不計正負)若日在午線之西則

午後點鐘數 $= \frac{t}{15}$

若日在午線之東則

午前點鐘數 $= 12 - \frac{t}{15}$

若以時角在午線之西爲正在午線之東爲負則

午後點鐘數 $= -\frac{t}{15}$

午前點鐘數 $=12+\frac{t}{15}$

28. 已知測者所在之緯度及星之高度與地平界經度求星之緯度與時角

按本題即於前款之 ZPM 三角形內

已知 $PZ=90^\circ-l=$ 餘緯度

$ZM=90^\circ-h=$ 星距天頂之度

$\angle PZM=a$　$=$ 地平界經度

試求 $PM=90^\circ-d=$ 星距天北極之度

$\angle ZPM=t$　$=$ 時角

作 MQ 為 NS 之垂弧 令 $ZQ=m$

則若 $a<90^\circ$　PQ 即 $=90^\circ-(l+m)$

若 $a>90^\circ$　PQ 即 $=90^\circ-(l-m)$

若 $a>90^\circ$　則 $\angle QZM=a$

若 $a>90^\circ$　則 $\angle QZM=180^\circ-\angle PZM$

$=180^\circ-a$

而 $\angle QZM$ 之餘角 $=90^\circ-180^\circ+a=-(190^\circ-a)$

則於 QZM 直角三角形內準倪氏例 I 得

$\sin(\text{co. }QZM)=\tan ZQ\tan(\text{co. }ZM)$

若 $a<90^\circ$ 則 $\cos a=\tan m \tan\{90^\circ-(190^\circ-h)\}$

即 $\cos a=\tan m\tan h$

若 $a>80^\circ$ 則 $\sin\{-(90^\circ-a)\}=\tan m\tan h$

即 $-\sin(90^\circ-a)=\tan m\tan h$

即 $-\cos a=\tan m\tan h$

$\therefore\quad \pm\cos a=\tan m\tan h$

或即 $\tan m=\pm\cot h\cos a$ ....(1)

又於 PMQ 直角三角形內準倪氏例 II 得

$\sin(\text{co. } PM)=\cos PQ\cos MQ$

即 $\sin d\qquad=\cos PQ\cos MQ$ ....(2)

又於 QZM 直角三角形內準倪氏例 III 得

$\sin(\text{co. } ZM)=\cos ZR\cos MQ$

即 $\sin h\qquad=\cos m\cos MQ$ ....(3)

以(3)式內 $\cos MQ$ 之同數代入(2)式內則得

$\sin d=\cos PQ\dfrac{\sin h}{\cos m}=\sin h\cos PQ\sec m$

即 $\sin d=\sin h\sin(l+m)\sec m$

若 $a<90^\circ$ 則此式內之號宜用正若 $a>90^\circ$ 則宜用

負號

按公式(13)

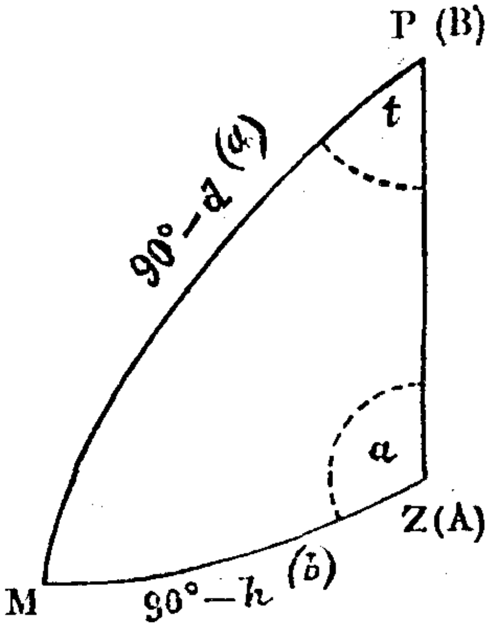
$$\sin B = \sin A \sin b \operatorname{cosec} a$$

可求時角如下：—

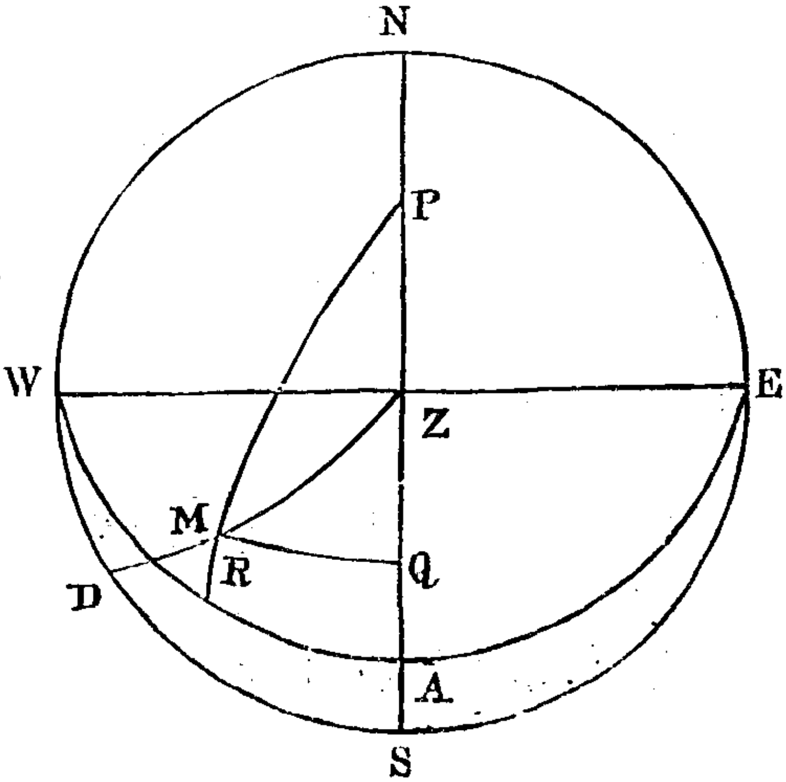
$$\sin t = \sin a \sin (90° - h)$$

$$\operatorname{cosec} (90° - d)$$

$$= \sin a \cos h \sec d$$



29. 已知一星之緯度高度及測處之緯度求星之時角



按本題ZPM三角形內

已知 $PZ = 90° - l$

$PM = 90° - d = p$

$ZM = 90° - h$

試求 $\angle ZPM = t$

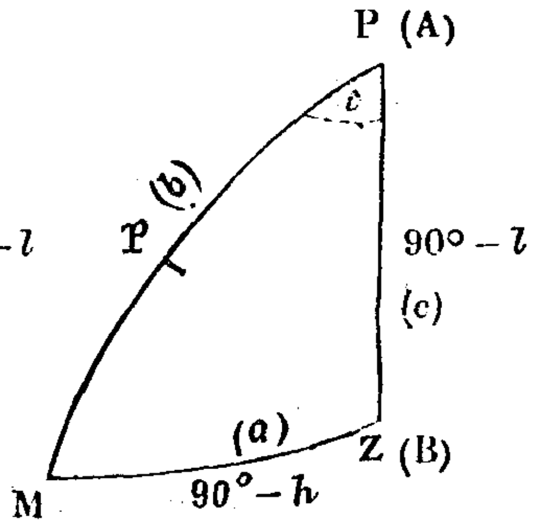
若於公式(10)第一方程

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\,\sin c}}$$

令 $A=t,\ a=90°-h,\ c=90°-l$

則 $s-b=90°-\frac{1}{2}(l+p+h)$

$$s-c=\frac{1}{2}(l+p-h)$$



而原式變牌

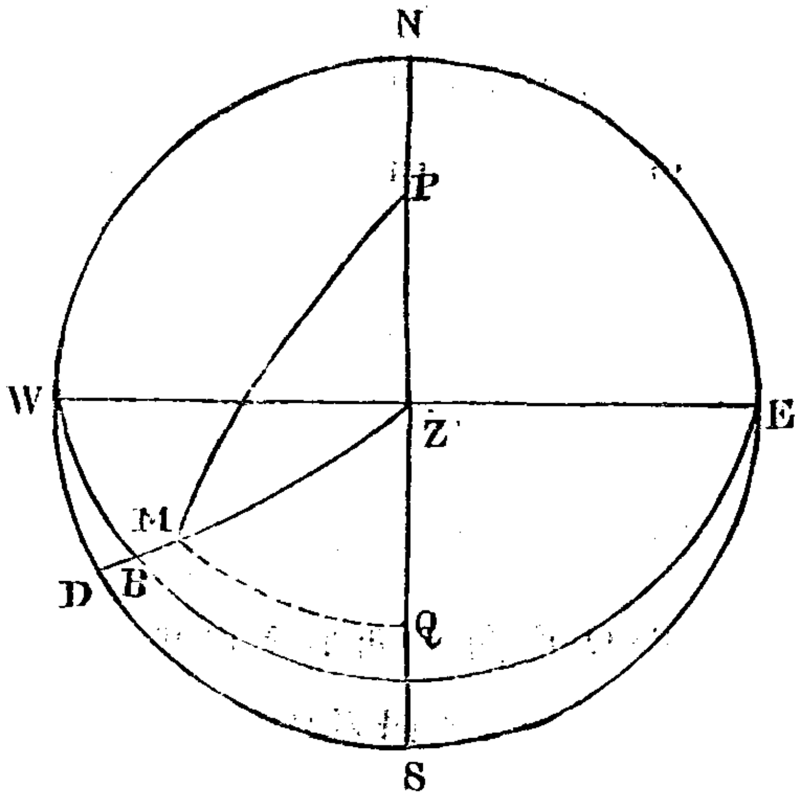
$$\sin\frac{t}{2}=\pm\sqrt{\cos\tfrac{1}{2}(l+p+h)\sin\tfrac{1}{2}(l+p-h)\operatorname{cosec}p\sec l}$$

若星在午線東則此式方根號前宜用負號

若星爲太陽則照此式求得其時角之後可按27欵之法求本處時刻

30. 己知星之緯度時角及測處緯度求星高度及地平界經度

按本題ZPM三角形內己知



$PZ = 90^\circ - l$

$PM = 90^\circ - d = p$

$\angle ZPM = t$

試求

$ZM = 90^\circ - h$

$\angle PZM = a$

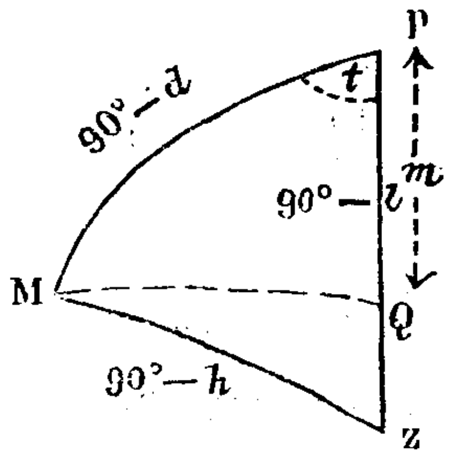
令　$PQ = m$, 則

若 $\angle PZM \angle 90^\circ$

$ZQ = PZ - PQ$

$= 90^\circ - l - m$

$= 90^\circ - (l + m)$



於 PMQ 直角三角形準倪氏例 I 得

$$\cos t = \tan d \tan m$$

$$\therefore \quad \tan m = \cot d \cos t \quad \ldots\ldots(1)$$

又於 ZMQ 直角三角形準倪氏例 II 得

$$\sin h = \cos MQ \cos ZQ$$

即 $\sin h = \cos MQ \sin (l + m) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$

於 PMQ 直角三角形準倪氏例 II 得

$$\sin d = \cos MQ \cos m$$

以 $\cos MQ$ 之同數代入(a)式則

$$\sin h = \sin(l+m)\sin d \sec m \;\dots\dots\dots\dots (2)$$

於 ZMQ 直角三角形準倪代例 I 得

$$\sin ZQ = \tan MQ \cot a \;\dots\dots\dots\dots (b)$$

即 $\cos(l+m) = \dfrac{\tan MQ}{\tan a}$

PMQ 直角三角形準倪氏例 I 得

以 $\tan MQ$ 之同數代入(b)式則

$$\cos(l+m) = \frac{\sin m}{\cot t \tan a}$$

即 $$\frac{1}{\sec(l+m)} = \frac{\tan t \sin m}{\tan a}$$

$$\therefore \quad \tan a = \sec(l+m)\tan t \sin m \;\dots\dots\dots\dots (3)$$

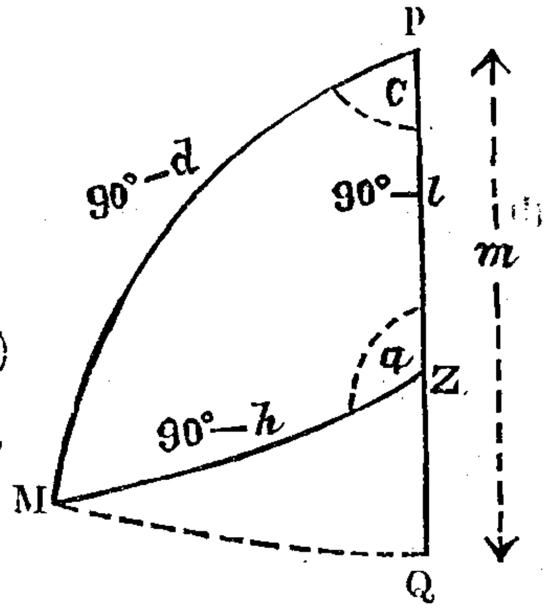
若 $\angle PZM > 90°$ 則

$ZQ = PQ - PZ = m - (90° - l) = -\{90° - (l+m)\}$

$\angle MZQ$ 之餘角 $= 90° - (180° - a) = -(90° - a)$

$\triangle PMQ$ 內 $\cos t = \tan d \tan m$

$$\therefore \quad \tan m = \cot d \cos t \;\dots\dots\dots\dots (1)$$



$\triangle ZMQ$ 內 $\sin h=\cos MQ\cos ZQ$

即 $\sin h=\cos MQ\cos\{90°-(l+m)\}$

即 $\sin h=\cos MQ\sin(l+m)$

$\triangle PMQ$ 內 $\sin d=\cos MQ\cos m$

以 $\cos MQ$ 之同數代入

(a)式則

$$\sin h=\sin(l+m)\sin d\sec m \qquad \cdots\cdots(2)$$

$\triangle ZMQ$ 內 $\sin ZQ=\tan MQ\tan(co. MZQ)$

即 $-\sin\{90°-(l+m)\}=\tan MQ\tan\{-(90-a)\}$

即 $-\cos(l+m)=\tan MQ\{-\tan(90°-a)\}$

即 $-\cos(l+m)=-\tan MQ\cot a$

即 $\cos(l+m)=\tan MQ\cot a$

即 $$\cos(l+m)=\frac{\tan MQ}{\tan a} \qquad \cdots\cdots(b)$$

$\triangle PMQ$ 內 $\sin m=\cot t\tan MQ$

以 $\tan MQ$ 之同數代入(b)式則

$$\cos(l+m)=\frac{\sin m}{\cot t\tan a}$$

卽 $\dfrac{1}{\sec(l+m)}=\dfrac{\tan t\sin m}{\tan a}$

∴ $\tan a=\sec(l+m)\tan t\sin m$ .... (3)

由此觀之無論 PZM 小於或大於直角以上之 (1) (2) (3) 三式俱合推解三角形之用

由 (3) 式求得 a 之同數時須標明東或西字樣使與時角相當

31. 已知星之高度緯度時角求測處之緯度

按本題 ZPM 三角形內

已知

$ZM=90°-h$

$PM=90°-d$

$\angle ZPM=t$

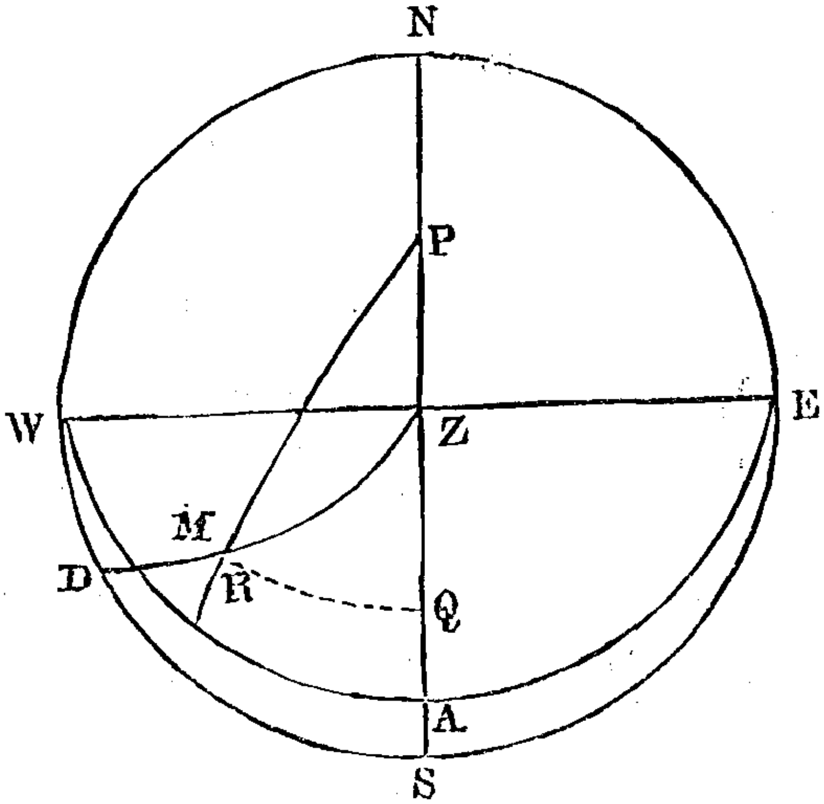
試求

$PZ=90°-l$

命 $PQ=m$

$ZQ=n$

則準倪氏兩例得



$$\cos t = \tan m \tan d$$

$$\sin h = \cos n \cos MQ$$

$$\sin d = \cos m \cos MQ$$

由是得 $\tan m = \cot d \cos t$

$$\cos n = \cos m \sin h \operatorname{cosec} d$$

由此兩元同局方程卽可推出 m 與 n

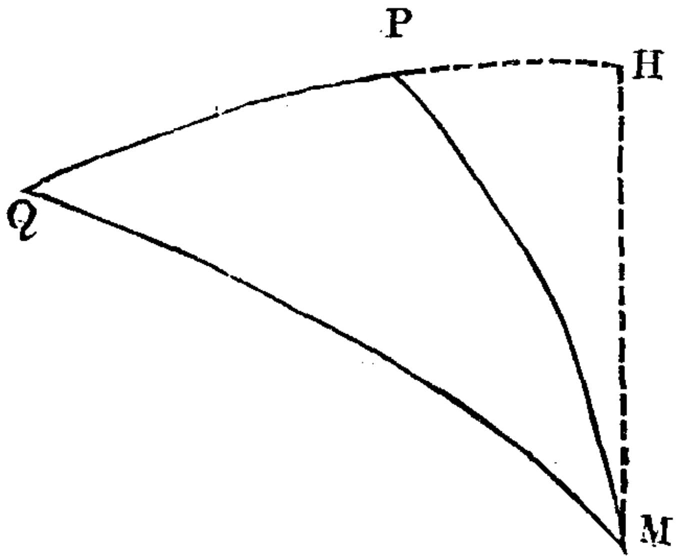
既得 m 與 n 則由圖可知下列方程以求測處之緯度

$$l = 90° - (m \pm n)$$

此方程內 n 字前之號宜正或宜負當視星與所近之天極同在卯酉圈之一方或各在卯酉圈之一方而異

若 n 之同數為甚小之同數則所測之星與卯酉圈相距甚近而不能辨其與天極同在一方與否是 l 之兩同數(相差甚微)似俱合題惟若 n 之同數非為甚小之數則 l 之兩同數大小懸殊固不難決何者為合題也

32. 已知星之經度緯度及黃赤角求其黃經黃緯



如圖設M為一星P為天赤道極Q為黃道極

於 PMQ△ 內

(參看 22 款右圖)

已知

$PQ = l = 23°,27'$

$PM = PR - MR = 90° - d$

$\angle MPQ = \angle AQV + VOR = 90° + VR = 90° + r$

試求 $QM = QT - MT = 90° - u$

$\angle PQM = \angle FQT - \angle FOT = \angle FOV - \angle TOV$

$= 90° - TV = 90° - V$

本題所設者為兩邊與其所夾之角作 MH 為 PQ 之垂弧(卽 22 款右圖將 VM 引長)遇 QP 引長於 H

命 $PH = n$

則準倪氏兩例得

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(co.\ MPH) = \tan n \tan d \\
&\sin(co.\ MQ) = \cos(l+n)\cos MH \\
&\sin(co.\ PM) = \cos n \cos MH \\
&\sin(l+n) = \cot PQM \tan MH \\
&\sin n = \tan(co.\ MPH)\tan MH
\end{aligned}\right\}$$

惟 $\sin(\text{co.}MPH)=\sin(90^\circ-MPM)$

$=\sin\{90^\circ-(180^\circ-MPQ\}=\sin\{-90^\circ+MPQ\}$

$=\sin(-90^\circ+90^\circ+r)=\sin r$

$\sin(\text{co.}QM)=\sec(90^\circ-u)=\sin u$

$\sin(\text{co.}PM)=\sin(90^\circ-PM)=\sin(90^\circ-90^\circ+b)$

$=\sin d$

$\cot PQM=\cot(90^\circ-v)=\tan v$

$$\therefore\quad\left.\begin{array}{l}\sin r=\tan n\tan d\\ \sin u=\cos(l+n)\cos MH\\ \sin d=\cos n\cos MH\\ \sin(l+n)=\tan v\tan MH\\ \sin n=\tan r\tan MH\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

由是得

$\tan n=\cot d\sin r$ ··························(1)

$\sin u=\sin d\cos(l+n)\sec n$ ··························(2)

$\tan v=\tan r\sin(l+n)\operatorname{cosec} n$ ··························(3)

從以上三元同局方程即可推出 u 與 r 而得黄經黄緯之同數

若不欲從正弦求 u 可用下法

以(3)式除(2)式得

$$\sin u = \tan v \cot(l+n) \sin d \cot r \tan n$$

於 MQH, MPH 兩直角三角形內各依次以 MH 為中項得

$$\sin MH = \cos(co.MPH)\cos(co.PM)$$

$$\sin MH = \cos(co.PQM)\cos(co.QM)$$

$$\therefore \quad \sin MPH \sin PM = \sin PQM \sin QM$$

$$\sin(90^\circ - r)\sin(90^\circ - d) = \sin(90^\circ - v)\sin(90^\circ - u)$$

$$\cos r \cos d = \cos v \cos u$$

$$\cos u = \sec v \cos d \cos r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

以(b)式除(2)式得

$$\tan u = \sin v \cot(l+n) \tan d \operatorname{cosec} r \tan n$$

惟因(a)式 $\sin r = \tan n \tan d$

則 $\tan d \operatorname{cosec} r \tan n = \sin r \operatorname{cosec} r = 1$

$$\therefore \quad \tan u = \sin v \cot(l+n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

∴ 以上之(1)(2)(3)式變為

$$\tan n = \cot d \sin r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\tan v = \tan r \sin(l+n) \operatorname{cosec} n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\tan u = \sin v \cot(l+n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

問題十四

1. 有十面有法稜錐體其相依之二稜作頂角$18°$問其相依二面作何角

2. 一桿斜立於橫平面上與之作角 A 從交點作直綫於平面內與桿之豎投影作角 B 求綫與桿所作之角

3. 有斜四面稜體其成體角之三稜爲 a, b, c 三稜所成之平面角爲 l, m, n 求其體角 V 之同數

4. 亞細亞洲畧似等邊三角形其三角點爲東羅馬尼亞角及已巳角設此形每邊長 4800 海里地球半經 3440 海里試按平弧二等三角形算之求其面積

5. 一船自緯度 l 處展輪循大圈弧駛行其向與啓行處之子午綫所作之角爲 a 問其在何處過赤道並問過赤道時之行向及抵赤道時所行海里數幾何

6. 已知三處之經緯度及地球半經若過三處作大圈弧成一弧三角形問其面積幾何

7. 巴黎居北緯 $48°, 50', 31''$ 柏林居北緯 $52°, 30', 16''$ 兩城之距離爲 472 海里(即循大圈弧之距離)問

巴黎正午柏林幾時

8. 設測得天北極高 45°, 同時見一星在天涯測得其地平經度爲 45° 問其與天北極於距幾何

9. 已知測處緯度 l 日之緯度 d 求日出入時刻及地平界經度(蒙氣差不計)

波士頓居北緯 42°, 21′ 問其夏至之日(此時太陽緯度 $=+23°27'$)與冬至之日 (此時太陽緯度 $=-23°27'$) 各在何時何方出入並問自出至入各歷若干時

10. 前題太陽緯度與測處緯度有何關係卽不可推能並問不可推解者爲地面上何處

11. 已知某處之緯度係太陽緯度問至上午 6 點鐘時太陽高度及地平界經度各幾何(蒙氣差不計)

苗匿克居北緯 48°, 9′ 問其夏至之日 6 點鐘時太陽高度及地平界經度各幾何

12. 自赤道至兩極同經度之各處一日內上午 6 點鐘時太陽高度如何又一年內某處於何時見太陽最高(已知 $\sin h=\sin t \sin d$)

13. 已知某號居北緯若干度並太陽緯度問太陽何時在本處正東正西

聖彼得堡居北緯 59°, 56' 問其夏至太陽何時在正東正西

14. 試將前公式 $\cos t = \cos l \tan d$ 按晝夜平分之日(此時 $d=0$)推之夏日上午6點鐘之前太陽永無在正東時下午6點太陽永無在正西時試言其故

太陽居正東正西之時刻隨其如何更變若 $l<d$ 並 $l=d$ 時其式若何在北極者其方又有何更變

15. 已知太陽緯度與其在正東時之高度求測處之緯度

16. 設於 MN 橫平面內之 O 點插一桿 OA 令與面作 ∠AOB 等於本處之北緯 51°, 31' 又令 OB 適指正北當太陽在赤道時(即春分秋分)下午一點鐘 OB 與桿影作何角

17. 一墻居北緯 52°, 30' 當夏至之日上午6點鐘時此墻無影求其方向

18. 某處於夏至之日太陽出自正東北求此處緯度

19. 某處於夏至之日太陽10點鐘始落求此處緯度

20. 設有後列三同數 (1) $h=0°$, (2) $l=0°$, $d=0°$ (3) l 或 $d=90°$ 問 29 款時角公式化爲何三式

21. 設 $t=90°=6$ 小時問 30 款之地平界經度公式化爲何式

22. 31 款之公式若 $t=90°$ 則得 $\sin l=\sin h \operatorname{cosec} d$ 又若 $d=0°$ 則得 $\cos l=\sin h \sec t$ 試證之

23. 已知某處緯度爲 $52°, 30', 16''$ 某星之緯度 $38°$ 其時角爲 $28°, 17', 15''$ 求其高度

24. 已知某處緯度爲 $51°19'20''$ 某星距天極度爲 $67°, 59', 5''$ 其時角爲 $15°, 8', 12''$ 求其高度與地平界經度

25. 已知星之緯度 $7°54'$ 高度 $22°, 45', 12''$ 地平界經度 $129°, 45', 37''$ 求其時角與測處緯度

26. 已知日之黃經爲 v 黃赤角 $l=23°, 27'$ 求其緯度 d 及其經度 r 之同數

27. 已知黃赤角 $l=23°, 27'$ 星之黃緯 $51°$ 其黃經 $315°$ 求其經緯度

28. 已知某處緯度 $44°, 50', 14''$ 星之地平界經度 $138°, 58'$ 求其緯度

29. 已知某處緯度 $51°, 31', 48''$ 日在午線西其高度為 $35°, 14', 27''$ 其緯度為 $+21°27'$ 求本處時刻(蒙氣差不計)

30. 已知某處之緯度為 l 某星距天極之度為 p 高度為 h 求其地平界經度 a 之同數

公式彙錄

公式彙錄

平三角法

1. $\sin A \operatorname{cosec} A=1$, 2. $\cos A \sec A=1$

3. $\tan A \cot A=1$, 4. $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

5. $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$, 6. $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

7. $1+\tan^2 A=\sec^2 A$, 8. $1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$

9. $\sin(90^\circ-A)=\cos A$, 10. $\cos(90^\circ-A)=\sin A$

11. $\tan(90^\circ-A)=\cot A$, 12. $\cot(90^\circ-A)=\tan A$

13. $\sec(90^\circ-A)=\operatorname{cosec} A$, 14. $\operatorname{cosec}(90^\circ-A)\sec A$

15. $\sin(180^\circ-A)=\sin A$, 16. $\cos(180^\circ-A)=-\cos A$

17. $\tan(180^\circ-A)=-\tan A$, 18. $\cot(180^\circ-A)=-\cot A$

19. $\sec(180^\circ-A)=-\sec A$, 20. $\operatorname{cosec}(180^\circ-A)=\operatorname{cosec} A$

21. $\sin(-A)=-\sin A$, 22. $\cos(-A)=\cos A$

23. $\tan(-A)=-\tan A$, 24. $\cot(-A)=-\cot A$

25. $\sec(-A)=\sec A$, 26. $\operatorname{cosec}(-A)=-\operatorname{cosec} A$

27. $\sin(90^\circ+A)=\cos A$, 28. $\cos(90^\circ+A)=-\sin A$

29. $\tan(90^\circ+A)=-\cot A$, 30. $\cot(90^\circ+A)=-\tan A$

31. $\sec(90^\circ+A)=-\operatorname{cosec} A$, 32. $\operatorname{cosec}(90^\circ+A)=\sec A$

33. $\sin(180°+A)=-\sin A$,　34. $\cos(180°+A)=-\cos A$

35. $\tan(180°+A)=\tan A$,　36. $\cot(180°+A)=\cot A$

37. $\sec(180°+A)=-\sec A$,　38. $\operatorname{cosec}(180°+A)=-\operatorname{cosec} A$

39. $\sin(270°\pm A)=-\cos A$,　40. $\cos(270°\pm A)=\pm\sin A$

41. $\sin(360°\pm A)=\pm\sin A$,　42. $\cos(360°\pm A)=\cos A$

43. $\sin(n\times 360°+A)=\sin A$,　44. $\cos(n\times 360°+A)=\cos A$

45. $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

46. $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

47. $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

48. $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

49. $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

50. $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

51. $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$

52. $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

53. $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\cos^2 A$

54. $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A$

55. $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$

56. $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$

57. $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$

58. $\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B$

59. $\sin C+\sin D=2\sin\frac{1}{2}(C+D)\cos\frac{1}{2}(C-D)$

60. $\sin C-\sin D=2\cos\frac{1}{2}(C+D)\sin\frac{1}{2}(C-D)$

61. $\cos D+\cos C=2\cos\frac{1}{2}(C+D)\cos\frac{1}{2}(C-D)$

62. $\cos D-\cos C=2\sin\frac{1}{2}(C-D)\sin\frac{1}{2}(C-D)$

63. $\sin A=2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$

64. $\cos A=2\cos^2\frac{1}{2}A-1=1-2\sin^2\frac{1}{2}A=\cos^2\frac{1}{2}A-\sin^2\frac{1}{2}A$

65. $\sin(A+B)=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$

66. $\sin 2A=2\sin A\cos A$

67. $\cos 2A=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A=\cos^2A-\sin^2A$

68. $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3A$,

69. $\cos 3A=4\cos^3A-3\cos A$

70. $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1\ \tan^2A}$

71. $\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}$

72. $\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

73. $\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

74. $\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

75. $\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

76. $\tan\frac{1}{2}A=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan 2A}}{\tan A}$

77. $\log_a mnp\ldots=\log_a m+\log_a n+\log_a p+\cdots$

78. $\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$

79. $\log_a(mk)=K\log_a m$

80. $\log_b a=\frac{x}{y}=\frac{\log_c a}{\log_c b}$

81. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

82. $\left\{\begin{array}{l} a=b\cos C+c\cos B \\ b=c\cos A+a\cos C \\ c=a\cos B+b\cos A \end{array}\right\}$

83. $\left\{\begin{array}{l} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{array}\right\}$

84. $\left\{\begin{array}{l} \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} \\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{array}\right\}$

$$85.\quad \begin{cases} \sin A = \dfrac{2}{bc}\sqrt{\{S(S-a)(S-b)(S-c)\}} \\ \sin B = \dfrac{2}{ca}\sqrt{\{S(S-a)(S-b)(S-c)\}} \\ \sin C = \dfrac{2}{ab}\sqrt{\{S(S-a)(S-b)(S-c)\}} \end{cases}$$

$$86.\quad \begin{cases} \sin\dfrac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{(S-b)(S-c)}{bc}} \\ \sin\dfrac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{(S-c)(S-a)}{ca}} \\ \sin\dfrac{1}{2}C = \sqrt{\dfrac{(S-a)(S-b)}{ab}} \end{cases}$$

$$87.\quad \begin{cases} \cos\dfrac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{S(S-a)}{bc}} \\ \cos\dfrac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{S(S-b)}{ca}} \\ \cos\dfrac{1}{2}C = \sqrt{\dfrac{S(S-c)}{ab}} \end{cases}$$

$$88.\quad \begin{cases} \tan\dfrac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}} \\ \tan\dfrac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{(S-c)(S-a)}{S(S-b)}} \\ \tan\dfrac{1}{2}C = \sqrt{\dfrac{(S-a)(S-b)}{S(S-c)}} \end{cases}$$

89 $$\left\{\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc\sin A \\ &= \frac{1}{2}ca\sin B \\ &= \frac{1}{2}ab\sin C \end{aligned}\right\}$$

90 $$\left\{\begin{aligned} \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2} &= \tan\frac{B-c}{2} \\ \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2} &= \tan\frac{C-A}{2} \\ \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2} &= \tan\frac{A-B}{2} \end{aligned}\right\}$$

91 $(b+c)\sin\frac{1}{2}A = a\cos\frac{1}{1}(B-c)$

92 $S=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

93 $r=\frac{S}{S}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-b)(S-c)}{S}}$

94. $r'=\frac{S}{S-a},\ r''=\frac{S}{S-b},\ r'''=\frac{S}{S-c}$

95. $\sin\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(B-a)(S-b)}{ab+cd}}$

96. $\cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(S-c)(S-d)}{ab+cd}}$

97. $\sin B=\frac{2\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}}{ab+cd}$

98. $S=\sqrt{\left\{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)\right\}}$

99. $m^2=\frac{(ac+bd)\ (ad+bc)}{ab+cd}n^{2\ (ac+bd)}$

100. $4R-\sqrt{\frac{(ac+bd)\ (ab+cd)\ (ad+bc)}{(S-a)\ (S+b)\ (S-c)\ (S+d)}}$

101. $S^2=(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)-abcd\cos\frac{1}{2}(A+C$

102. $R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$

103. $r=\frac{a}{2\tan\frac{\pi}{n}}$

104. n正多角形之面積 $=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}$

105. 同上 $=nr^2\tan\frac{\pi}{n}$

106. 圓(半徑r)之面積 $=\pi r^2$

107. 扇形(弧θ)之面積 $=\frac{1}{2}\theta r^2$

108. $\sin^{-1}a=n\times180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}a$

109. $\cos^{-1}a=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}a$

110. $\tan^{-1}a=n\times180^\circ+\tan^{-1}a$

111. $\sin 75^\circ=\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

112. $\cos 75^\circ=\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

113. $\tan 75^\circ=\cot 15^\circ=2+\sqrt{3}$

114 $\sin 18^\circ=\cos 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

	sin	eos	tan	cosec	sec	cot
$\sin\theta =$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$	$\dfrac{\sqrt{(\sec^2\theta-1)}}{\sec\theta}$	$\dfrac{1}{\sqrt{(\cot^2\theta+1)}}$
$\cos\theta =$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{(1+\tan^2\theta)}}$	$\dfrac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\theta-1)}}{\operatorname{cosec}\theta}$	$\dfrac{1}{\sec\theta}$	$\dfrac{\cot\theta}{\sqrt{(\cot^2\theta+1)}}$
$\tan\theta =$	$\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)}}$	$\dfrac{\sqrt{(1-\cos^2\theta)}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1)}}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\dfrac{1}{\cot\theta}$
$\operatorname{cosec}\theta =$	$\dfrac{1}{\sin\theta}$	$\dfrac{1}{\sqrt{(1-\cos^2\theta)}}$	$\dfrac{\sqrt{(1+\tan^2\theta)}}{\tan\theta}$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\dfrac{\sec\theta}{\sqrt{(\sec^2\theta-1)}}$	$\sqrt{\cot^2\theta+1}$
$\sec\theta =$	$\dfrac{1}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)}}$	$\dfrac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\theta-1)}}$	$\sec\theta$	$\dfrac{\sqrt{(\cot\theta^2-1-1}}{\cot\theta}$
$\cot\theta =$	$\dfrac{\sqrt{(1-\sin^2\theta)}}{\sin\theta}$	$\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{(1-\cos^2\theta)}}$	$\dfrac{1}{\tan\theta}$	$\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\theta-1)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{(\sec^2\theta-1)}}$	$\cot\theta$

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

弧三角法

$$\cos c = \cos a \cos b \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin a &= \sin c \sin A \\ \sin b &= \sin c \sin B \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \tan b \cot c \\ \cos B &= \tan a \cot c \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \cos a \sin B \\ \cos B &= \cos b \sin A \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin b &= \tan a \cot A \\ \sin a &= \tan b \cot B \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\cos c = \cot A \cot B \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin a \sin B = \sin b \sin A \\ \sin a \sin C = \sin c \sin A \\ \sin b \sin C = \sin c \sin B\end{array}\right\} \cdots\cdots (7)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\end{array}\right\} \cdots\cdots (8)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c\end{array}\right\} \cdots\cdots (9)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\sin(s-b)\sin(s-c)\operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c} \\ \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\sin s \sin(s-a)\operatorname{cosec} b \operatorname{cosec}} \\ \tan\frac{1}{2}A = \sqrt{\operatorname{cosec} s \operatorname{cosec}(s-a)\sin(s-b)\sin(S-C)}\end{array}\right\} \cdots (10)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{-\cos S \cos(S-A)\operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C} \\ \cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\cos(S-B)\cos(S-C)\operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C} \\ \tan\frac{1}{2}a = \sqrt{-\cos S \cos(S-A)\sec(S-B)\sec(S-C)}\end{array}\right\} \cdots (11)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}&=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2}\\
\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2}&=\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{c}{2}\\
\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2}&=\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2}\\
\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2}&=\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

$$\left.\begin{aligned}
\tan\frac{A+B}{2}&=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{c}{2}\\
\tan\frac{A-B}{2}&=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{c}{2}\\
\tan\frac{a+b}{2}&=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}\\
\tan\frac{a-b}{2}&=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\tan\frac{c}{2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$F=\frac{\pi R^2E}{180}\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$\tan^2\frac{E}{4}=\tan\frac{s}{2}\tan\frac{s-a}{2}\tan\frac{s-b}{2}\tan\frac{s-c}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

中華民國六年七月

軍學編輯局印