中等學校教科適用

二B平面三角學

王允中譯

A Translation from

G. N. Bauer and W. E. Brooke's

"Plane Trigonometry"

二B平面三角學

王允中譯

A Translation from

G. N. Bauer and W. E. Brooke's

"Plane Trigonometry"

開明書店

二 B 平面三角學

每册售價人民幣9,000元　　丙(皮4122)

譯者　王　允　中
出版者　開　明　書　店
(北京西總布胡同甲50)
發行者　三聯·中華·商務·開明·聯營
聯合組織
中國圖書發行公司
(北京絨線胡同63—67號)
印刷者　華　文　印　刷　局
(上海濟寧路143弄4號)

1941年12月一版　　119P　32K
1951年3月十六版(滬1—5000)

序

近來中等學校中最流行的三角學教本,爲 Granville, Smith, Mikesh 三氏所著之 Plane Trigonometry, 卽一般所稱之"葛氏平面三角學". 該書程度之深淺與教材之選擇,均甚得當,惟條理淸晰與剖析精到,則猶不及 Bauer 與 Brooke 兩氏所著之 Plane and Spherical Trigonometry 甚多. 葛氏三角之缺點在教材的編排過於零亂,僅就每章而論也往往沒有一個共通中心. 例如牠特地把直角三角形的解法與斜三角形的解法,錯綜地編入應用與對數的理論及用途兩章之中,這在作者也許是要增加讀者復習的機會,然其結果,反使讀者迷亂恍惚,而不得要領. 卽如以應用一章而論,其中竟包括近似數計算,直角三角形解法,斜三角形解法,半角等項目,而關於半角一項教材,則又於三角的解析一章中再爲申述,徒見多事. 蓋科學的敍述貴層次分明,不若文藝作品之須曲折有致也. 又葛氏書中關於對數部分之過分强調,亦所不取. 對數在三角學中之重要,自不待言,然此僅謂其便於作冗長之數值計算,至其與三角學本身之理解,則並無絲毫關係. 且學習三角學之讀者,早經於代數學中習得對數之

知識,對於此項計算工具之使用,縱須稍加溫習,但絕無強調之必要。

準此以觀 Bauer 與 Brooke 兩氏的三角學,將見其具有葛氏等之長,而無葛氏等之短. 此或如原序中所謂"由於教室之經驗而作種種之訂正及改編"之故. 本書之內容及程度,與葛氏等之著作並無多大出入,而篇幅亦大致相等,然在編制方面則較有嚴密的層次,但這並非牠的特點. 其重要特色在演算上採用圖解式之計算輪廓,這至少具有 (1) 節省時間,(2) 易於檢算,(3) 免除錯誤等三種優點. 本書對於對數的安排,亦頗得當,即把牠列於最後一章,如是則可使一般讀者能集中注意於三角學本身之研習,而不致分心;即有一二對於對數較為生疏之讀者,亦可提前補習,蓋此與三角學之學習順序並無妨礙也. 此外書中又隨處插入種種有價值的提示,足以指引讀者解除不自知的迷惑,也極難能可貴.

譯者王允中先生任中等學校數理教師多年,故能獨具隻眼,將此書之平面部分譯出,定名為"二 B 平面三角學",交由開明書店印行,其對於我國數學教學上之貢獻,當非淺顯. 筆者以職務關係,得與本書校讀之役,書成之日,爰識其感想如此.

一九四〇,一二,三.

顧均正

原　　序

（第三版）

由於教室之經驗，本版已作種種之訂正及改編，並增加若干新的材料.

直角三角形一章，附有自然三角函數之四位數值表，舉凡該章所有之習題，皆可應用該表解之.此使學者可專注於三角學之原理，而不必着重繁複之數值計算.該章原不需用對數，然在已熟習對數者，自不妨用之.爲此之故，其所列例題之計算輪廓，將自然函數及對數函數一併列出.此外更加入一節，用以說明直角三角形當斜邊及其他各邊爲有理數時如何解出之方法.

對數一章，祇就用於初等三角學解出問題之各方面而論述之.

於若干情形中，對於某種基本公式曾導入交替證法，此種交替證法全以幾何圖示爲基礎.

三角函數圖都以圖示法作成，與以前所用者相同.而正弦及餘切曲線，則按射影方法爲之.

論述三角恆等式時，增以若干圖形，俾說明每個三角函數如何用其他三角函數表出之.此法同時亦用以使每個反

三角函數以其他反三角函數表出，此即明白指出反三角函數間之各個關係式並非具有恆等式之性質.

代莫伏爾定理一章，曾導入關於複素數之四種基本運算的圖示法，故已稍形擴大.

爲實際應用上需要起見，故新增一節，以說明如何可化 $A\sin\theta+B\cos\theta$ 爲 $C\sin(\theta+\phi)$ 之形式.

通編所增加之許多例題，其目的在使全書更爲明晰，此亦依經驗之指示也.

凡三角學教師曾給以優良建議者，著者深致感謝！並將其優良建議一一納諸本書之中.

一九三二年一月　G. N. B.
W. E. B

原書附錄之對數表，卷帙幾與正文相等，玆特於不妨礙應用之範圍內删存四位對數表兩種，以節省篇幅，而減輕讀者負擔. 希採用本書者注意.

開明書店編譯所附誌

目　　次

第一章　正坐標及角

正　坐　標

角

第二章　三角函數

第三章 直角三角形

第四章 三角函數之變化

$n\,90^\circ \pm \alpha$ 函數之簡化

第五章 基本關係 線值

基 本 關 係

線 值

第六章 二角之和之函數

二倍角 半角

第七章 反三角函數

第八章 斜三角形

第九章 代莫伏爾定理及其應用

第十章 對數

二B平面三角學

第一章

正坐標及角

1. **發明史** 三角學之行於世，在基督耶穌降生以前．約在紀元前150年，有一天文家曰希巴諸斯(Hipparchus)發明三角學，希氏及其生徒之所以從事研究三角學，純以三角學可作天文學上之助力．

至十五世紀中葉，三角學有長足之進步．此時已有關於平球面三角形解法之論文；然歷三百餘年而至今日，方具現代規模之三角學．

三角學(Trigonometry)之得名，須遠溯至約1600年，此字係由二希臘字三角形($\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu o\nu$)及量度($\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$)衍化而得．按其字之蘊義，三角學原以論述三角形之解法爲主．即在今日，此仍爲三角學中一個重要部分，但三角學之範圍業已大爲擴充．今日而論三角學，幾成數學分析科目中之不可缺少者，亦且對於不少的近代問題，莫不應用三角學而得解決。故讀三角學者，不但須論述三角形之解法，亦且須論及函數之其他問題．

三角學以數個基本定義爲其基礎．故在未論此等基本定義前，先將方向線及角詳盡討論之．

正　坐　標

2. 方向線 (Directed lines)　對於每一直線，吾人可任意指定其爲正方向及負方向．

若自 A 至 C 之方向爲正，則其反方向自 C 至 A 爲負．

若令文字之順序表線分度量之方向，則顯見 AC 與 CA 代表異方向之同一線分；是以

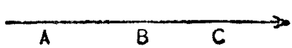
$$AC=-CA \quad \text{或} \quad -AC=CA.$$

又若 B 爲線上之第三點，則 AB 及 BA 二線分之符號相反；同樣 BC 及 CB 二線分之符號亦相反．是以

$$AB=-BA \quad \text{或} \quad -AB=BA,$$

及

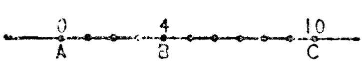
$$BC=-CB \quad \text{或} \quad -BC=CB.$$



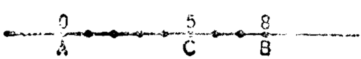
於是就線上 A, B, C 之一切位置而論，得知

$$AC=AB+BC.$$

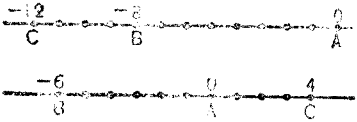
如是就下列各圖而論：



$$AC=AB+BC$$
$$10=4+6=10$$



$$AC=AB+BC$$
$$5=8+(-3)=5$$



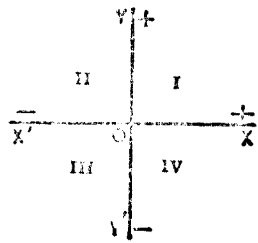
$$AC = AB + BC$$
$$-12 = -8 + (-4) = -12$$
$$AC = AB + BC$$
$$4 = -6 + 10 = 4$$

3. **參考線**(Lines of reference)　互相垂直之二有向直線,可取作參考線或參考軸. 通常以 $X'X$ 及 $Y'Y$ 表出之,並分別稱之曰 X 軸及 Y 軸.

在 X 軸上,凡自左至右者爲正,自右至左者爲負.

在 Y 軸上,凡向上方者爲正,向下方者爲負.

二軸之交點稱曰原點(Origin). 爲便利計,以原點爲度量距離之出發點.



4. **象限**(Quadrants)　相交之二軸分平面爲四部分,稱曰象限,並以數記出之. 第一象限以 XOY 表出之,第二象限以 YOX' 表出之,第三象限以 $X'OY'$ 表出之,而第四象限以 $Y'OX$ 表出之.

5. **一點之坐標**　自平面上任一所設點 P_1, 作一直線平行於 Y 軸而與 X 軸相交於 A 點.

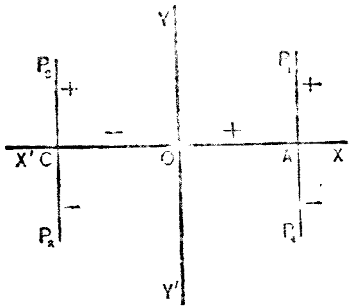
於是原點與交點間之距離, OA, 爲所設點 P_1 之橫坐標(Abscissa).

交點與所設點間之距離, AP_1, 爲所設點 P_1 之縱坐標(Ordinate).

P_2 點之橫坐標及縱坐標各為 OC 及 CP_2.

P_3 點之橫坐標及縱坐標各為 OC 及 CP_3.

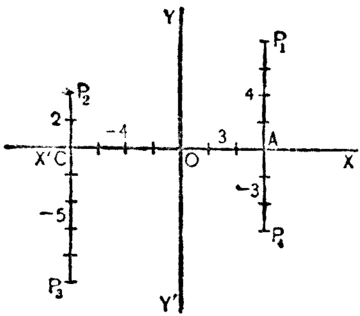
P_4 點之橫坐標及縱坐標各為 OA 及 AP_4.



一點之橫坐標及縱坐標稱為該點之坐標(Coördinates of the point).

選取一適當單位以測量距離，則平面上之任何點可用二個坐標以定其位。

例如，在左圖中，P_1 之橫坐標為 3，而其縱坐標為 4，此二個坐標可以完全決定 P_1 之位置。點 P_1 常以點 (3, 4) 表之，即將坐標書在括號之中，而以橫坐標書在第一位。



同理，點 P_2 可用橫坐標 -4 及縱坐標 2 而定其位，稱為點 $(-4, 2)$. 同理，點 P_3 稱為點 $(-4, -5)$，而點 P_4 稱為點 $(3, -3)$.

總之，二個已知坐標可決定一點；而任何所設點都有二個坐標，即一橫坐標與一縱坐標也。

6. 坐標之符號　於上節中，若干點之橫坐標與縱坐標之符號皆爲已知。若就一般而論，則凡橫坐標量自原點而至右方者爲正，量自原點而至左方者爲負。

縱坐標量自 X 軸而向上方者爲正，向下方者爲負。

例如在第 5 節之圖中，OA, AP_1 及 CP_2 皆爲正；CC, CP_3 及 AP_4 皆爲負。

7. 習題

1. 有一點，其橫坐標爲 4 而其縱坐標爲 7。試定其位置。此點可用 $(4,7)$ 表出之。

2. 試定一點具有橫坐標爲 2 及縱坐標爲 5，即點 $(2,5)$ 之位置。

3. 試定下列各點之位置：$(-3,4)$, $(-6,-3)$, $(5,-1)$, $(0,4)$, $(-7,0)$, 及 $(-8,10)$.

4. 試定下列各點之位置：$(1\frac{1}{2}, 3)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$, (m, n), (x, y), $(x, 0)$.

5. 問橫坐標爲 6 之點之軌跡爲何？

6 問縱坐標爲 -3 之點之軌跡爲何？

7. 問橫坐標爲二倍其縱坐標之點之軌跡爲何？

角

8 直角及度　於平面幾何學中，許多角如銳角，直角，鈍角及反射角 (Reflex angle) 等都有論及。直角可用作

一個便利的測量單位，任何角度皆可用直角表示之。例如，一所設角可等於一直角之三分之二，或他一所設角可等於一直角之 1.476 倍。

然為應用便利起見，有用較直角為小之單位之必要。度(°)即為此種之一個單位，並規定一度為一直角之九十分之一之一角。一度分為六十等分，謂之分(′)，一分分為六十等分，謂之秒(″)。於是吾人可書

$$60 \text{ 秒 } (60'') = 1 \text{ 分}$$

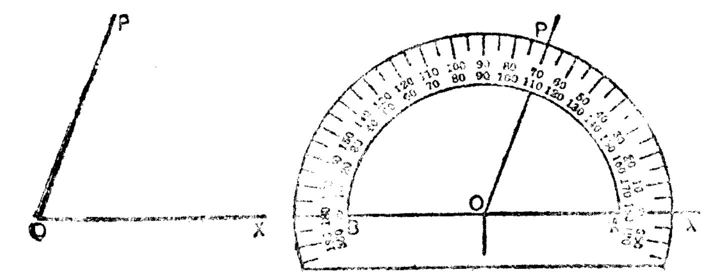
$$60 \text{ 分 } (60') = 1 \text{ 度}$$

$$90 \text{ 度 } (90^\circ) = 1 \text{ 直角}$$

為 26 度，30 分，57 秒之角，可書為 $26^\circ 39' 57''$。

作角及量角時，用一量角器較為便利。

下圖即示量角器應如何安置方可測量角 XOP。由量角器上標度所示，得知此角為 70°。於作角及量角時，量角器有一定之安置法，令其內圓之中心與角之頂點相合，而其直徑與角之一邊相重合。



習題

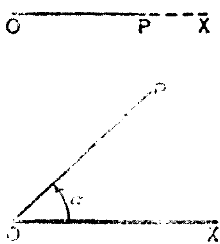
1. 用量角器,作 10°, 25°, 97°, 175° 諸角。

2. 問 $1\frac{1}{2}$ 直角有若干度?

3. 將下列各角以直角表示之: 30°, 135°, 180°.

9. **由旋轉而成之角** 在三角學中,非但採用小於 360° 之角,且採用大於 360° 之角. 即負角如 $-20°$, $-145°$ 亦有應用. 故一角之初步概念必須加以擴充,俾可包含一切不論正負大小之角. 今述之如下:

如圖中所示,已知二線分 OX 及 OP. 最初令其位置如左圖上,即令 OP 與 OX 重合. 然後命 OX 仍在原處不動,而 OP 繞 O 點在一固定平面內旋轉,及至如左圖下所示之位置而靜止. 弧及矢頭表示 OP 繞 O 之旋轉; 弧表示旋轉之量,矢頭表示 OP 旋轉之方向. 於是可謂角 XOP 係由 OP 之旋轉而成. 此角今以希臘文字 α (Alpha) 表示之.*



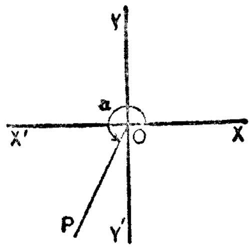
* 通常表示角之方法,恆用希臘文字表之:

α ······ Alpha　β ······ Beta　γ ······ Gamma

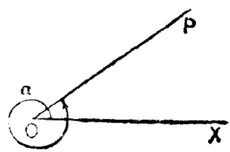
δ ······ Delta　θ ······ Theta　ϕ ······ Phi

ω ······ Omega

論及角度時，旋轉之意義極為有用，可使吾人對於任何大小之角度有一確切之意義．例如，若 OP 在下圖中繞 O 而旋轉，由原位置 OX 徧歷 OY, OX' 而達最後位置 OP，則構成大於二直角小於三直角之一角．圓弧表示旋轉量，而矢頭表示旋轉之方向．命其角仍為 α，則圖中 α 與 245° 相近．



此顯而易見者，一線分可無限制的旋轉，適如一車輪旋轉者然，故可形成一任何所欲之角．若線分作多於一之完全旋轉，則生成如下圖中大於四直角之角．由是得知圓弧與矢頭為表示角之要素．OX 及 OP 之位置，若無圓弧及矢頭，則不能表示其旋轉之量及旋轉之方向．於附圖中，角 α 與 398° 相近．由此等討論，可知角之大小，全視旋轉之量而定．



習 題

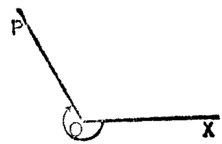
用量角器或不用量角器作下列之各角．並繪一圓弧及一矢頭以示旋轉之量及方向．

1. 190°.	2. 260°.	3. 185°.
4. 390°.	5. 470°.	6. 550°.

10. **旋轉之方向** 因正的及負的方向，對於一直線可

任意規定，故旋轉之正及負對於一角亦可任意指定。第九節之圖中，其矢頭所示之旋轉方向爲正方向；此常稱爲反時針的方向。

如本節之附圖所示，其矢頭所表之旋轉方向爲負方向；此常稱爲順時針的方向。



11. 正角及負角　用吾人所定旋轉之正負意義，即可區別正角與負角。

一線分按正方向而旋轉，則生正角 (Positive angle).

一線分按負方向而旋轉，則生負角 (Negative angle).

負角亦如正角，可無限其大小。例如可有 -395° 及 -4568° 等之角度。

習　　題

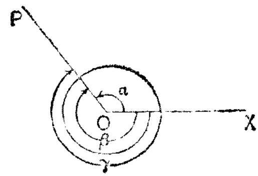
試用或不用量角器，作出下列之諸角：

1.	35°.	2.	-35°.	3.	175°.	4.	-175°.
5.	265°.	6.	-265°.	7.	408°.	8.	-408°.

12. 始線分與終線分　一固定線分，由此而量出正角與負角者，稱曰始線分 (Initial line segment). 通常始線分恆位於原點之右方而與 x 軸相重合。例如在第 9 節及第 10 節之圖中，OX 即爲始線分，通常簡稱曰始線 (Initial line).

旋轉線分之最後位置，即表示此角之終極者，稱曰終線

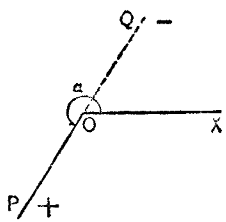
分 (Terminal line segment). 例如在第 9 節及第 10 節之圖形中, OP 即爲終線分, 通常簡稱之曰終線 (Terminal line).



二個或二個以上之不等角, 可有同一始線及同一終線. 此觀於附圖中正角 α 及負角 β 與 γ, 即見其眞實.

凡角之具有同一始線及同一終線者, 稱爲共線角 (Coterminal angles).

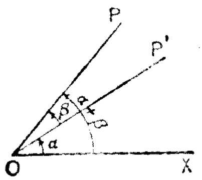
13　終線之符號　然則始線與終線是否恆爲正, 或是否可爲負. 始線之自 O 至 X 者爲正, 終線之自 O 至 P 者爲正. 由圖, 得知凡所謂正方向者, 即自角之頂點而至用以量角之圓弧之極端也.

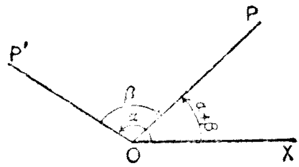


凡一線分與角 α 相處且與 OP 爲反方向者, 則爲負. 例如在圖中, 線分 OQ 爲負.

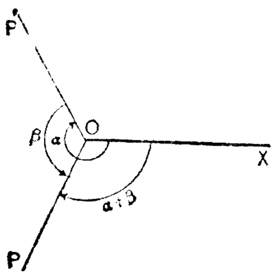
當終線 OP 旋轉時, 仍保住其正號; 故吾人可謂終線恆爲正.

14. 二角之代數和　欲作二個所設角 α 及 β 之代數和, 可想像 OP 由原位置 OX 而旋轉, 歷 α 角而至 OP'; 於是由此位置想像轉過 β 角, 不論正負與否, 而至 OP. 於是角 XOP 爲所求之角 $\alpha+\beta$.

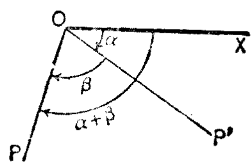




α 正
β 負



α 負
β 正



α 負
β 負

若學者將上述四個圖形以數值表之，則更易明白其理．然須切記本節概述之方法，對於任何大小之角皆可應用．於上列之每一圖中，其近似值可述之如下：

在第一圖中，　$\alpha=33^\circ$，　$\beta=18^\circ$，　$\alpha+\beta=51^\circ$．

在第二圖中，　$\alpha=145^\circ$，　$\beta=-102^\circ$，$\alpha+\beta=43^\circ$．

在第三圖中，　$\alpha=-241^\circ$，$\beta=127^\circ$，　$\alpha+\beta=-114^\circ$．

在第四圖中，　$\alpha=-35^\circ$，$\beta=-70^\circ$，$\alpha+\beta=-105^\circ$．

習　　題

於下列各題中，α 及 β 為已知，試用圖解法求出 $\alpha+\beta$，

然後按代數加法檢算其結果．各角用一圓弧及一矢頭表示之．

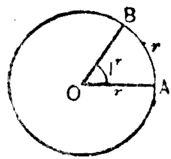
1　$\alpha=50^\circ,\ \beta=65^\circ.$　　2.　$\alpha=175^\circ,\ \beta=20^\circ.$

3　$\alpha=90^\circ,\ \beta=-15^\circ.$　　4　$\alpha=-120^\circ,\ \beta=-40^\circ.$

5　$\alpha=-45^\circ,\ \beta=-30^\circ.$　　6　$\alpha=-150^\circ,\ \beta=60^\circ.$

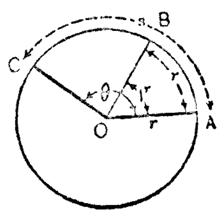
15. 圓弧或弳的度量法　度量角度可用各種不同之單位．前已述及直角及度數爲度量之單位．通常於數值計算之實際問題中，常用度數以作單位．此外尚有一第三種單位稱爲弳(Radian)者，此爲若干理論研究中之重要單位，並常用以表出某種角度．

一弳者，爲如是量之一角，若將其頂點置於一圓之中心，則張一個圓弧，其長等於圓之半徑．



例如，若弧 AB 等於半徑 OA，則 AOB 角爲一弳，並書 $\angle AOB=1^r$，^{r} 即用來表示以弳爲度量之單位．此 ^{r} 亦可略而不書，故可簡書爲 $\angle AOB=1$.

16 中心角，半徑與弧之關係　命任一角 AOC 之頂點與半徑爲 r 之任一圓的中心相合．設 OA 爲始線，而 OC 爲 AOC 角之終線．爲簡便起見，令 θ 表 AOC 角，而 s 表所張弧 AC 之長．更令單位角一弳之始線與 OA 重合．於是其 AB 弧等於



r. 而 AOB 角等於一弳.

由平面幾何學，得知一圓中心上之角與其所張弧成正比，

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB}=\frac{\widehat{AC}}{\widehat{AB}}$$

或
$$\frac{\theta}{1}=\frac{s}{r}. \tag{1}$$

惟 s 及 r 須以同一單位表出，否則比 $\frac{s}{r}$ 不能有一個定值.同理，θ 必以弳數表之，始可與單位角一弳作數值之比較. θ 既以弳數表之，而 r 及 s 皆表之以同一單位，如尺或厘米，則上述方程式可書爲

$$\theta=\frac{s}{r}. \tag{2}$$

此中心角，半徑及弧之基本關係極爲重要.今述之如下：

任何中心角可用弳數表之，並等於其所張之弧除以圓之半徑.

此基本關係，
$$\theta=\frac{s}{r}$$
按簡單之代數變形，則可書爲下列形式之一：

$$r\theta=s \quad 或 \quad r=\frac{s}{\theta}. \tag{3}$$

今述四種特例以明問題之類別，且極易按 (2) 或 (3) 解出之.

例一 有一半徑爲 8 吋之圓，其中心角張一 24 吋長之弧.問此中心角爲若何大小?

[解] 此處 $s=24$, $r=8$. 代入 (2), 得

$$\theta=\frac{24}{8}=3.$$

故 $\theta=3$ 弳.

例二 有一半徑爲 6 吋之圓, 其中心角爲 2.5 弳. 問該中心角所張之弧長爲何?

[解] 此處 $r=6$, $\theta=2.5$. 代入 (3) 之第一式, 則

$$s=6\times 2.5=15.$$

故所張之弧長爲 15 吋.

例三 若一中心角爲 2 弳, 且張 10 吋長之弧. 問該圓之半徑有若干長?

[解] 此處 $\theta=2$, $s=10$. 代入 (3) 之第二式, 得

$$r=\frac{10}{2}=5.$$

故半徑之長爲 5 吋.

例四 試決定一直角所含之弳數.

[解] 命 x 爲一直角所含之弳數. 因 x 爲以弳數所表之直角, 故可將公式 $\theta=\dfrac{s}{r}$ 書爲 $x=\dfrac{s}{r}$, 其中 s 爲一直角之弧. 一直角之弧爲圓周之四分之一, 或 $2\pi r$ 之四分之一, 或 $s=\dfrac{\pi r}{2}$. 由是得

$$x=\frac{\frac{\pi r}{2}}{r}=\frac{\pi}{2}.$$

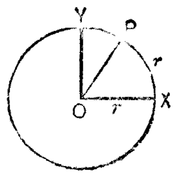
故一直角等於 $\dfrac{\pi}{2}$ 弳.

於上面述及四個例題中，其角皆以弳數表之。但此並不說明其角含有若干直角，亦不說明含有若干度數。故有一問題起焉：若以直角表之，或以度數表之，試問一弳含有若干直角？含有若干度數？吾人今作其答案如下：

17. 弳之值 因在同圓或等圓中，中心角與其所張之弧成正比，故得

$$\frac{\angle XOP}{\angle XOY}=\frac{\widehat{XP}}{\widehat{XY}}. \tag{1}$$

命 $\angle XOP$ 爲一弳，$\angle XOY$ 爲一直角。於是弧 XP 等於半徑 r 之長，而弧 XY 等於 $\frac{\pi r}{2}$，爲圓周 $2\pi r$ 之四分之一。於是關係式 (1) 可書爲



$$\frac{一弳}{一直角}=\frac{r}{\frac{\pi r}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

故

$$一弳=\frac{2}{\pi}\times一直角. \tag{2}$$

各以 π 乘之，並代直角以 90°，得

$$\pi\ 弳=180^\circ.$$

顯而易見者，弳之值與半徑無關，而祇依直角及常數 π 而定。故弳爲一個不變之單位。換言之，弳之值不依圓之不同而改變。

18. 度與弳之關係 由上節得知

$$1^r=\frac{180^\circ}{\pi},\tag{1}$$

或

$$1^r=\frac{180^\circ}{3.1416}=57^\circ 17'44''.\tag{2}$$

又由方程式 (1),

$$1^\circ=\frac{\pi^r}{180},\tag{3}$$

或

$$1^\circ=0.01745^r.\tag{4}$$

用方程式 (1) 及 (2) 可化弳數爲度數,而方程式 (3) 及 (4) 可化度數爲弳數. 例如,

由 (1), $\frac{2}{3}\pi^r=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)=120^\circ,$

由 (2), $4^r=4(57^\circ 17'44'')=229^\circ 10'56'',$

由 (3), $20^\circ=20\left(\frac{\pi^r}{180}\right)=\frac{\pi^r}{9},$

由 (4), $3^\circ=3(0.01745^r)=0.05235^r.$

用方程式 (3) 化度數爲弳數時,可引 π 於角之數值中. 故 π 常與弳量相伴而處. 因弳通常爲伴有 π 之角之單位, 故凡以 π 所表之角,卽不書明角之單位吾人亦知其以弳爲角之單位也.

例如, $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ 弳, $180^\circ=\pi$ 弳, $29^\circ=\frac{29\pi}{180}$ 弳,

通常可書爲

$$90^\circ=\frac{\pi}{2},\qquad 180^\circ=\pi,\qquad 29^\circ=\frac{29\pi}{180}.$$

須特別注意者，當角之單位並未指明者，常係弳之省略之謂．常數 π 恆等於 3.1416，而不等於 180；但言 π 弳則等於 180°.

習　題

將下列各角以度數表出之：

1. $\frac{\pi}{3}$ 弳．　2. $\frac{2\pi}{3}$ 弳．　3. 1.5 弳．　4. 2 弳．

將下列各角以弳數表出之：

5. 10°．　6. 60°．　7. 135°．　8. 225°．

9. 17.5°．　10. 275°.

用量角器，作出下列各角：

11. 1 弳．　12. 2 弳．　13. 2.5 弳．　14. 3 弳．

15. 5 弳．　16. π 弳．　17. $\frac{\pi}{3}$ 弳．　18. $\frac{2\pi}{5}$ 弳．

19. **直線速度及角速度**　由第 16 節之方程式 (3)，可直接導得在圓上以等速運動的直線速度與角速度 (Linear velocity and angular velocity) 間之關係．設有一點 P 沿圓周以等速 v 而運動，在 t 時內行一個 s 弧；於是 s/t 稱爲直線速度並表之以 v. 當同一之 t 時，角 θ 因此而生成；則 θ/t 稱爲角速度，並表之以希臘文字 ω (Omega).

以 t 除第 16 節之方程式 (3)，得

$$\frac{s}{t}=\frac{r\theta}{t} \quad \text{或} \quad v=r\omega. \tag{1}$$

此即，直線速度等於角速度乘以 r.

在一般之角速度中，可用任何單位表示之，在方程式 $v=r\omega$ 中，角速度必以每個單位時間之弳數表示之.

問題一　若一點在半徑為 7 呎之圓上，於 3 秒內行 26 呎之弧. 間其角速度為何?

[解]　此點之直線速度為 $\frac{26}{3}$ 呎/秒.

代入方程式 (1)，得

$$\frac{26}{3}=7\omega,$$

$$\therefore\ \omega=\frac{26}{21}=1.238\ 弳/秒.$$

問題二　一飛輪每分鐘間可旋轉 200 次. 試證其角速度為每分鐘 72,000°，或每秒 $\frac{20\pi}{3}$ 弳.

若飛輪之半徑為 3 呎，試證其邊緣上一點之速度為每小時 42.84 哩.

問題三　一輪每分鐘旋轉 280 次. 試求其角速度每分鐘之弳數，及每秒間之弳數.

問題四　間表之時針，其每小時角速度之弳數為何?

20. 習　題

1. 作下列各角:

30°, 45°, 60°, 135°, 300°, −60°, −90°, −390°, −420°.

2. 作下列各角:

2 弳, $3\frac{1}{2}$ 弳, $-\frac{1}{2}$ 弳, −4 弳, 9 弳.

3. 作下列各角:

$$\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{4},\ \pi,\ -\frac{5\pi}{4},\ \frac{5\pi}{2}.$$

4. 化下列各角爲弳數:

$10°,\ 30°,\ 45°,\ 60°,\ 135°,\ 225°,\ -270°,\ -12°,$

$-18°,\ 24°15',\ -612°19'25''.$

5. 化下列各角爲度數:

2 弳, 5 弳, −3 弳, $\frac{1}{2}$ 弳, $-\frac{1}{4}$ 弳　b 弳.

6. 化下列各角爲度數:

$$\frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{4},\ -\frac{5\pi}{3},\ \frac{3.1416}{\pi},\ \frac{2}{\pi},\ \frac{\pi+1}{2},\ \frac{2}{\pi+3}.$$

7. 若 30 呎之弧張一個 4 弳之角,試求圓之半徑.

8. 在半徑爲 5 之圓上,有一弧之長爲 12. 試求所對中心角之弳數及度數.

9. 若一平面三角形之二角各爲 1 弳及 $\frac{1}{2}$ 弳. 試將其第三角以度數表出之.

10. 在半徑爲 12 呎之圓上,試求 16° 之中心角所張之弧長.

11. 一圓之半徑爲 900 呎,今在圓周上相離 378 呎之二點各作一該圓之切線,試求二切線間之角度.

12. 一汽車之輪,其直徑爲 34 吋,每小時行 25 哩. 問每分鐘各輪可旋轉若干次? 每秒間角速度之弳数爲何?

13. 設地球爲半徑 92,000,000 哩之球形. 問其在軌道

旋轉時每秒速度之哩數爲何?

14. 蒸汽輪機之轉動子，其直徑爲二呎，每分鐘能轉動 25,000 次．其邊緣上爲蒸汽所衝動之葉片且有蒸汽一半之速度．試問蒸汽之速度(每秒之呎數)爲何?

15. 二滑輪各有 3 呎與 10 吋之直徑．今有一皮帶環繞該二滑輪而運動．大滑輪每分轉動 80 次．該求小滑輪之角速度(每秒之弳數)，並皮帶每分鐘轉動之呎數．

第二章

三角函數

21. 本章之要旨 三角學基於某種函數，稱爲三角函數．因此等函數爲一角之函數，故全依角之如何而定，角變，則其值亦變．

本章之要旨，在乎導出三角函數，熟習若干角之函數值，並研究其若干簡單性質．以後數章，更作詳盡之研究，並用以藉三角形而解各種之問題，且推出種種有用之公式．

一角之三角函數爲 sine (正弦), cosine (餘弦), tangent (正切), cotangent (餘切), secant (正割), cosecant (餘割), versed sine (正矢), 及 coversed sine (餘矢).

對於任何角 α, 其三角函數可書爲 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$, $\csc\alpha$, $\operatorname{vers}\alpha$ 及 $\operatorname{covers}\alpha$.

下節所述之定義最爲基本，學者須澈底明白，並完全牢記之．

22 三角函數之定義 命 OX 及 OP 分別爲任一角 α 之始線及終線．

命 P 爲終線上之任一點，

自原點至 P 點之距離爲 OP 或 r，

P 點之橫坐標爲 OA 或 x，而

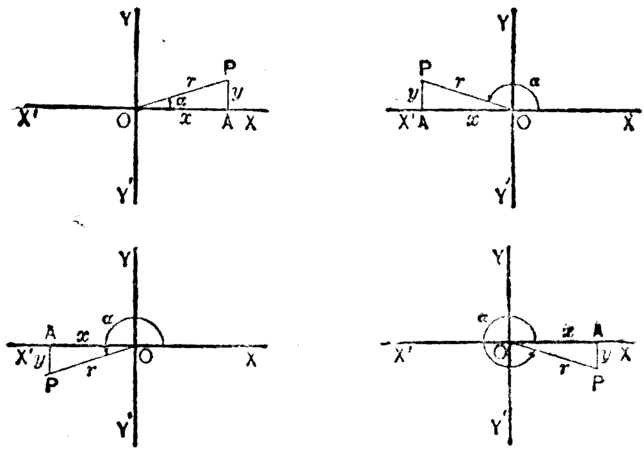
P 點之縱坐標爲 AP 或 y.

須注意者，OP, OA 及 AP 皆爲方向線，故

$$r = OP \text{ 而非 } PO,$$

$$x = OA \text{ 而非 } AO,$$

$$y = AP \text{ 而非 } PA.$$



於是定三角函數之義如下：

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{縱坐標}}{\text{距離}},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{橫坐標}}{\text{距離}},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\text{縱坐標}}{\text{橫坐標}},$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}=\frac{\text{橫坐標}}{\text{縱坐標}},$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\text{距離}}{\text{橫坐標}},$$

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{\text{距離}}{\text{縱坐標}},$$

$$\operatorname{vers}\alpha=1-\cos\alpha,$$

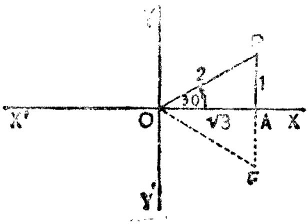
$$\operatorname{covers}\alpha=1-\sin\alpha.$$

所應注意者,在首之六個函數之定義悉爲二線分之比.此等函數係基本三角函數,而定其義之比稱曰三角比(Trigonometric ratios).

在首之六個函數都可稱爲三角比.但三角函數一語,含義更廣,係包含正矢,餘矢及三角比而言.由定義,顯見三角函數之值皆爲抽象數.

23. 30°,45°及60°之三角函數值 今述數個具體的例證,以說明三角函數之性質,以確定其意義,並作普徧討論之先導.

30°之函數 命 OPF 爲一個等邊三角形,各邊皆爲2單位之長.置三角形之一頂點於原點上,俾 OX 等分角 POF. 於是按幾何學,$\angle AOP=30°$,縱坐標 $AP=1$,而橫坐標 $OA=\sqrt{3}$.



於是按定義，得

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.500$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$,

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0.577,$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = 1.732,$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1.155,$$

$\csc 30^\circ = \frac{2}{1} = 2.000$, $\operatorname{vers} 30^\circ = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.134$,

$$\operatorname{covers} 30^\circ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.500.$$

問題 試取 $OP=1$，如上，再求 30° 之三角函數值．

45° 之函數 命 OAP 爲一直角等腰三角形，其等邊 OA 及 AP 各等於於 1. 於是 $\angle AOP = 45^\circ$，而距離 $OP = \sqrt{2}$.

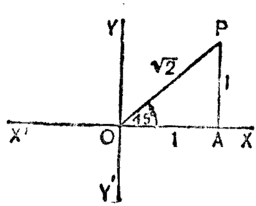
於是按定義，得

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1,$$



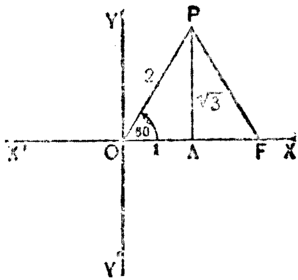
$$\sec 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2},\qquad \csc 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2},$$

$$\operatorname{vers} 45^\circ=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\qquad \operatorname{covers} 45^\circ=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

問題　試取 $OA=3$，再求 45° 之三角函數之值。

60° 之函數　命 OPF 爲等邊三角形，等邊各等於 2，並置之如圖中所示之地位。於是 P 之橫坐標及縱坐標分別爲 1 及 $\sqrt{3}$。

於是按定義，得



$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ=\tfrac{1}{2},$$

$$\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3},$$

$$\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tfrac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\sec 60^\circ=\tfrac{2}{1}=2,$$

$$\csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$\operatorname{vers} 60^\circ=1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2},\qquad \operatorname{covers} 60^\circ=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

問題　試取 $OP=4a$，如上，再求 60° 之函數。

30°，45° 及 60° 之正弦及餘弦值係常用者，故學者須牢記之。下列之表頗可助力：

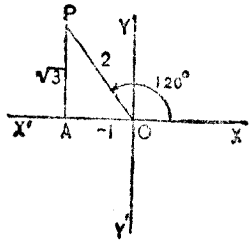
$$\sin 30^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{1}=\cos 60^\circ,$$

$$\sin 45^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}=\cos 45^\circ,$$

$$\sin 60^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}=\cos 30^\circ.$$

24. 120°, 135° 及 150° 之三角函數值　利用上節各圖中之諸數值，並就相當坐標軸而安置之，則許多不同角之三角函數值亦可得出。

120° 之函數　由圖及定義，顯見



$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120^\circ = \frac{-1}{2} = -\tfrac{1}{2},$$

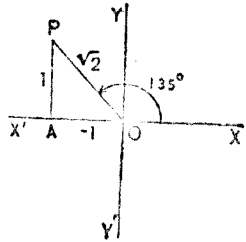
$$\tan 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3},$$

$$\cot 120^\circ = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\tfrac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$\sec 120^\circ = \frac{2}{-1} = -2, \qquad \csc 120^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$$\text{vers } 120^\circ = 1 - (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2}, \qquad \text{covers } 120^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

135° 之函數　由圖及定義，顯見



$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\cos 135^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

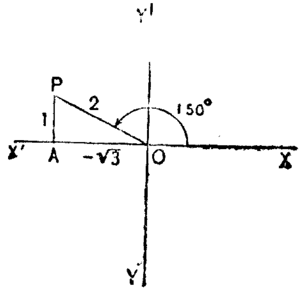
$$\tan 135^\circ = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$\cot 135^\circ = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$\sec 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}, \qquad \csc 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},$$

$\text{vers}\ 135° = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$,　　$\text{covers}\ 135° = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

150° 之函數　由圖及定義，顯見



$\sin 150° = \frac{1}{2}$,　　$\cos 150° = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$\tan 150° = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$,　$\cot 150° = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$,

$\sec 150° = \frac{2}{-\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$,　$\csc 150° = \frac{2}{1} = 2$,

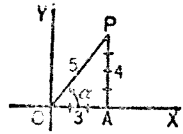
$\text{vers}\ 150° = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$,　　$\text{covers}\ 150° = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

問題　試求 210°, 225°, 240°, 300°, 315° 及 330° 之三角函數值.

25 **三角比之符號**　任何角之三角比，其符號視終線上任一點之縱坐標，橫坐標及距離之符號而定。當其終線由一象限而入另一象限時，終線上任何點之縱坐標或橫坐標恆變其符號，但距離之符號則仍爲正。若一個坐標改變符號，則由此成立之各個三角比亦必改變符號。

於第 23 節中，30°, 45°, 及 60° 之一切三角函數皆爲正。於第 24 節中，求得 120°, 135° 及 150° 之正弦與餘割爲正，而餘弦，正切，餘切及正割爲負。今更討論其他之角，並注意其三角函數之符號。

於附圖中，角 α 之終線上 P 點之坐標爲 3 與 4. 故



$$\overline{OP}^2=\overline{OA}^2+\overline{AP}^2=3^2+4^2=25,$$

而 $$OP=\sqrt{25}=5.$$

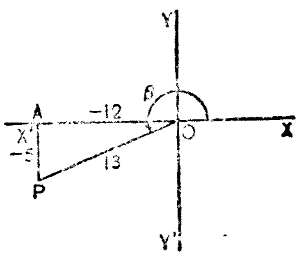
因 OP 爲角 α 之終線，而終線恆爲正。故根式祇取其正者。於是

$$\sin\alpha=\tfrac{4}{5},\qquad \cos\alpha=\tfrac{3}{5},\qquad \tan\alpha=\tfrac{4}{3},$$

$$\cot\alpha=\tfrac{3}{4},\qquad \sec\alpha=\tfrac{5}{3},\qquad \csc\alpha=\tfrac{5}{4}.$$

此處所有之符號皆爲正。

命 β 爲第三象限內之角，具有 $AP=-5$, $OP=13$. 於是



$$\overline{OA}^2=\overline{OP}^2-\overline{AP}^2$$

$$=13^2-(-5)^2=144,$$

而 $$OA=-12,$$

因如圖中所示，OA 爲負，故 $\sqrt{144}$ 應取負值。於是

$$\sin\beta=\frac{-5}{13}=-\frac{5}{13},\qquad \cos\beta=\frac{-12}{13}=\ \frac{12}{13},$$

$$\tan\beta=\frac{-5}{-12}=\frac{5}{12},\qquad \cot\beta=\frac{-12}{-5}=\frac{12}{5},$$

$$\sec\beta=\frac{13}{-12}=-\frac{13}{12},\qquad \csc\beta=\frac{13}{-5}=-\frac{13}{5}.$$

此處正切與餘切為正，而正弦，餘弦，正割及餘割為負．

問題　作一終止於第四象限內之角，令其終線經過 $(20, -21)$ 點．求其每一三角函數之值，並特別注意何種函數為正，何種函數為負．

下表係按橫坐標 x 及縱坐標 y 之符號作出，切記距離 r 恆為正．今述終止於每一象限內之角之一切三角比之符號如下：

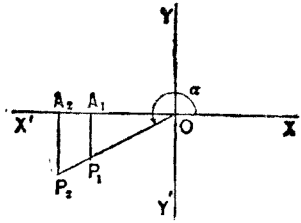
	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin\alpha$	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{-}{+}=-$	$\frac{-}{+}=-$
$\cos\alpha$	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{-}{+}=-$	$\frac{-}{+}=-$	$\frac{+}{+}=+$
$\tan\alpha$	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{+}{-}=-$	$\frac{-}{-}=+$	$\frac{-}{+}=-$
$\cot\alpha$	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{-}{+}=-$	$\frac{-}{-}=+$	$\frac{+}{-}=-$
$\sec\alpha$	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{+}{-}=-$	[illegible]	$\frac{+}{+}=+$
$\csc\alpha$	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{+}{-}=-$	$\frac{+}{-}=-$

26. 定理　每一所設角，其各個三角函數祇有一個值．

今就一角之正弦證明之，其餘諸函數亦然．

命 α 為任一角．按第 22 節，顯見若欲得二個或二個以上之 $\sin\alpha$ 必在終線上取數個不同之點．令 P_1 及 P_2 為終

線上之任何二點．於是按定義



$$\sin\alpha=\frac{A_1P_1}{OP_1},$$

或　$$\sin\alpha=\frac{A_2P_2}{OP_2}.$$

然因二個直角三角形 OA_1P_1 及 OA_2P_2 為相似形，且其諸對應邊為同方向，故得

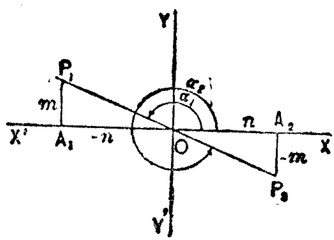
$$\frac{A_1P_1}{OP_1}=\frac{A_2P_2}{OP_2}.$$

是以知 $\sin\alpha$ 之值與終線上所選取點之位置無關，其值全視終線之位置，卽角之大小而定．

上述定理可述之如下：三角函數為角之單值函數．

27　定理　一三角函數之每一所設值，常可決定無限數或無窮數之正角及負角，其中普通有二個小於 360° 之正角．

今以一所設之正切證明之．其餘諸函數亦可用同法證之．



命 $\tan\alpha=-\frac{m}{n}$，其中 m 及 n 皆為正數．於是

$$\tan\alpha=\frac{+m}{-n}=\frac{-m}{+n}.$$

先由其橫坐標為 $-n$，與縱坐標為 m 而定點 P_1 之位置．此點與原點決定角 α_1 之

終線，其正切爲 $-\dfrac{m}{n}$.

同樣，又由其縱坐標及橫坐標分別爲 $-m$ 及 n 而定點 P_2 之位置。作終線 OP_2，得第二角 α_2，亦有所設正切。

二個角 α_1 及 α_2 皆小於 $360°$，且皆有所設正切 $-\dfrac{m}{n}$，此爲顯而易見者。我人已知與 α_1 及 α_2 共線者有無窮數之正角及負角，則此等正負角自皆具所設正切。是以本定理可成立。

23.　習　題

問下列諸函數值，α 終止於第幾象限：

1. $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$.　　2. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.　　3. $\tan\alpha=5$.

4. $\cot\alpha=-8$.　　5. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.　　6. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

7. $\sin\alpha$ 爲正而 $\cos\alpha$ 爲負。

8. $\tan\alpha$ 爲正而 $\cos\alpha$ 爲負。

9. $\csc\alpha$ 爲負而 $\cos\alpha$ 爲負。

10. $\tan\alpha$ 爲負而 $\sin\alpha$ 爲正。

11. $\cos\alpha$ 爲負而 $\sin\alpha$ 爲負。

試說下列各角之三角函數之符號：

12. $750°$.　　13. $\dfrac{8\pi}{3}$.　　14. $560°$.　　15. $5\frac{2}{3}\pi$.

16. $-15°$.　　17. $-\dfrac{5\pi}{4}$.　　18. $-470°$.　　19. $-\dfrac{7\pi}{6}$.

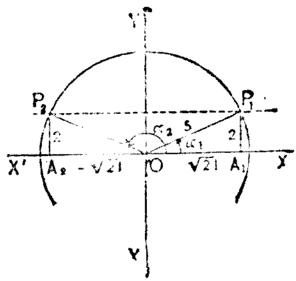
試求與下列各角共線且數值上小於 360° 之負角。

20. $\frac{10\pi}{3}$. 21. $\frac{2\pi}{3}$. 22. 300°.

23. π. 24. $\frac{3\pi}{2}$. 25. $-495°$.

26. 試作小於 360° 之諸正角，其正弦等於 $\frac{2}{5}$，並求諸正角之其他函數值。

[解] 今決定具有縱坐標為 2 而距離為 5 之諸點如下：



以 O 為中心，取 5 為半徑作一圓。在 y 軸上，原點之上方二單位處，作一平行於 x 軸之直線，交圓於所求之二點 P_1 及 P_2。作終線 OP_1 及 OP_2，得二角 α_1 及 α_2，於是得

$\sin \alpha_1 = \frac{2}{5}$, 而 $\sin \alpha_2 = \frac{2}{5}$.

$\cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\cos \alpha_2 = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

$\tan \alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2}{21}\sqrt{21}$, $\tan \alpha_2 = \frac{2}{-\sqrt{21}} = -\frac{2}{21}\sqrt{21}$.

$\cot \alpha_1 = \frac{\sqrt{21}}{2}$, $\cot \alpha_2 = \frac{-\sqrt{21}}{2}$.

$\sec \alpha_1 = \frac{5}{\sqrt{21}} = \frac{5}{21}\sqrt{21}$, $\sec \alpha_2 = \frac{5}{-\sqrt{21}} = -\frac{5}{21}\sqrt{21}$.

$\csc \alpha_1 = \frac{5}{2}$, $\csc \alpha_2 = \frac{5}{2}$.

27. 作小於 360° 而其餘弦爲 $\frac{3}{5}$ 之諸正角,並求各角其他函數之值.

試求適合下列各函數值而小於 360° 之諸角之各函數值.

28 $\tan \alpha = -\frac{6}{7}$. 29. $\cot \alpha = 1\frac{1}{2}$. 30. $\csc \alpha = 3\frac{1}{2}$.

31. $\cot \alpha = -5$. 32. $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$. 33. $\sin \alpha = \frac{a}{o}$.

34 $\cos \alpha = 0.4$.

35 已知 $\tan \alpha = -4$, 試求 $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cot \alpha}$ 之值.

36 已知 $\sec \alpha = 6$, 試求 $\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ 之值.

37. 已知 $\sin \alpha = 0.3$, 試求 $\tan \alpha \sec \alpha \cos \alpha$ 之值.

38 已知 $\csc \alpha = 8$ 及 $\tan \beta = 3$, 試求 $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ 之值.

39. 已知 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 及 $\cos \beta = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$, α 終止於第一象限內,而 β 終止於第二象限內,試證 α 及 β 之終線間之角爲一直角.

第　三　章

直　角　三　角　形

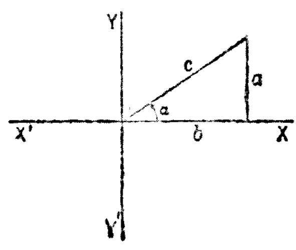
29. 本章之要旨　每一三角形有六部分，即三條邊與三個角是也。

若已知其三，而其中之一為一邊者，則其他三部分可以判定。

所謂三角形之解者，即由已知部分而判定未知部分之方法也。

本章說明如何用三角函數以解直角三角形。

30. 三角函數之定義對於直角三角形之應用　命 ABC 為任何直角三角形。置此三角形於第一象限內，令其一銳角之頂點與原點重合，一邊（不為斜邊）與 X 軸重合，今示之如下圖。



於是，按定義，得

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\qquad \cot\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}\qquad \sec\alpha=\frac{c}{b}=\frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$$

$$\tan\alpha=\frac{a}{b}=\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}\qquad \csc\alpha=\frac{c}{a}=\frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$$

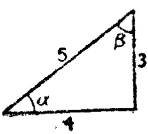
由是可知直角三角形之任一銳角，其函數可用鄰邊，對邊及斜邊表示之，勿必定須以坐標軸爲根據．由此推知

$$\sin\beta=\frac{b}{c}.\qquad \cot\beta=\frac{a}{b}.$$

$$\cos\beta=\frac{a}{c}.\qquad \sec\beta=\frac{c}{a}.$$

$$\tan\beta=\frac{b}{a}.\qquad \csc\beta=\frac{c}{b}.$$

習　題



1. 如右圖所示，已知一直角三角形之三邊爲 3, 4 及 5，其二銳角爲 α 及 β；試求 α 及 β 之諸三角函數。

［解］

$\sin\alpha=\frac{3}{5}.$　　$\cot\alpha=\frac{4}{3}.$

$\cos\alpha=\frac{4}{5}.$　　$\sec\alpha=\frac{5}{4}.$

$\tan\alpha=\frac{3}{4}.$　　$\csc\alpha=\frac{5}{3}.$

$\sin\beta=\frac{4}{5}.$　　$\cot\beta=\frac{3}{4}.$

$\cos\beta=\frac{3}{5}.$　　$\sec\beta=\frac{5}{3}.$

$\tan\beta=\frac{4}{3}.$　　$\csc\beta=\frac{5}{4}.$

2　已知一直角三角形之斜邊爲 25，角 α 之對邊爲 24. 求其他一邊，並 α 之三角函數.

3　已知一直角三角形之斜邊爲 5，其他兩邊分別爲 $\sqrt{5}$ 及 $2\sqrt{5}$；試求二銳角之三角函數.

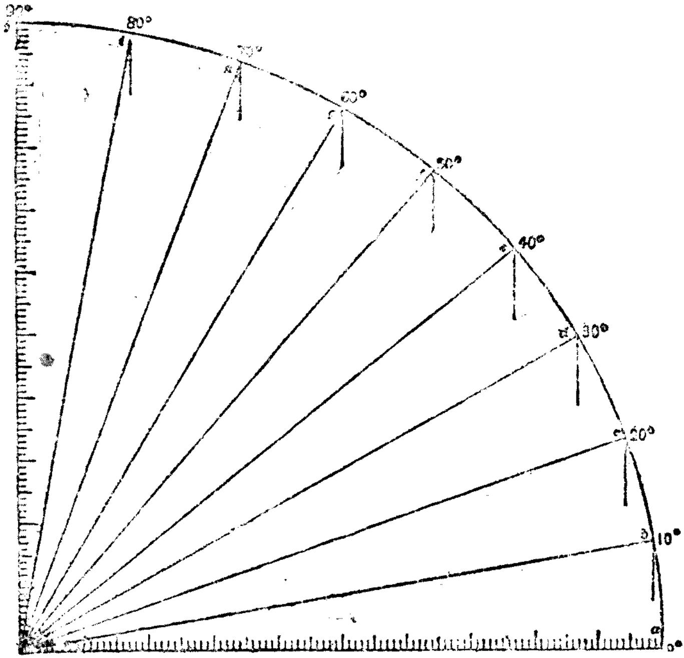
31. **三角表**　於上章內，已算出 30°, 45° 及 60° 之諸三角函數. 至於其他各銳角之三角函數亦可用十分繁複之方法計算而得，並可將其列成表式，以便檢查. 此等表通常含有二部分. 一部陳列諸函數之值者，稱曰**自然函數**(Natural functions)；另一部分陳列諸函數之對數者，稱曰**對數函數**(Logarithmic funtion).

若一角爲已知，則其三角函數可由表中查得，反之若已知其三角函數，則亦可由表查知其角度. 如是則使已知角之函數爲已知數，而可用之於問題計算之中.

三角函數之近似值可用圖解法得之.

問題　量出 $a, b, c, \cdots\cdots j$ 諸點之距離，橫坐標及縱坐標. 由此等量度，算出 0°, 10°, 20°, …… 90° 之正弦，餘弦及正切之值至二位小數. 將所得之值排成表式，即可構成一個二位數值的表.

次頁之表可用以解第 38 節之習題 1 至 6. 因其使用十分簡便，故可令檢查者集中注意於解三角形之基本方法.



32　三角表之用法　在第38頁至第41頁上，載有自0°至90°每間十分之正弦，餘弦，正切及餘切之四位數値表。用此諸表，當角度已知時，則可求其三角函數之値，又若三角函數爲已知時，則可求其角度。今用數個數値例題以解釋此二個基本問題。

1. 由一四位表求一角之正弦　第38頁及第39頁爲載自0°至90°每間10分正弦及餘弦之値之表。頁之上端，

SINE

°		0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
0	0.	0000	0029	0058	0087	0116	0145	0175	89	29
1		0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88	29
2		0349	0378	0407	0436	0465	0494	0523	87	29
3		0523	0552	0581	0610	0640	0669	0698	86	29
4		0698	0727	0756	0785	0814	0843	0872	85	29
5	0.	0872	0901	0929	0958	0987	1016	1045	84	29
6		1045	1074	1103	1132	1161	1190	1219	83	29
7		1219	1248	1276	1305	1334	1363	1392	82	29
8		1392	1421	1449	1478	1507	1536	1564	81	29
9		1564	1593	1622	1650	1679	1708	1736	80	29
10	0.	1736	1765	1794	1822	1851	1880	1908	79	29
11		1908	1937	1965	1994	2022	2051	2079	78	28
12		2079	2108	2136	2164	2193	2221	2250	77	28
13		2250	2278	2306	2334	2363	2391	2419	76	28
14		2419	2447	2476	2504	2532	2560	2588	75	28
15	0.	2588	2616	2644	2672	2700	2728	2756	74	28
16		2756	2784	2812	2840	2868	2896	2924	73	28
17		2924	2952	2979	3007	3035	3062	3090	72	28
18		3090	3118	3145	3173	3201	3228	3256	71	28
19		3256	3283	3311	3338	3365	3393	3420	70	27
20	0.	3420	3448	3475	3502	3529	3557	3584	69	27
21		3584	3611	3638	3665	3692	3719	3746	68	27
22		3746	3773	3800	3827	3854	3881	3907	67	27
23		3907	3934	3961	3987	4014	4041	4067	66	27
24		4067	4094	4120	4147	4173	4200	4226	65	26
25	0.	4226	4253	4279	4305	4331	4358	4384	64	26
26		4384	4410	4436	4462	4488	4514	4540	63	26
27		4540	4566	4592	4617	4643	4669	4695	62	26
28		4695	4720	4746	4772	4797	4823	4848	61	26
29		4848	4874	4899	4924	4950	4975	5000	60	25
30	0.	5000	5025	5050	5075	5100	5125	5150	59	25
31		5150	5175	5200	5225	5250	5275	5299	58	25
32		5299	5324	5348	5373	5398	5422	5446	57	24
33		5446	5471	5495	5519	5544	5568	5592	56	24
34		5592	5616	5640	5664	5688	5712	5736	55	24
35	0.	5736	5760	5783	5807	5831	5854	5878	54	24
36		5878	5901	5925	5948	5972	5995	6018	53	23
37		6018	6041	6065	6088	6111	6134	6157	52	23
38		6157	6180	6202	6225	6248	6271	6293	51	23
39		6293	6316	6338	6361	6383	6406	6428	50	22
40	0.	6428	6450	6472	6494	6517	6539	6561	49	22
41		6561	6583	6604	6626	6648	6670	6691	48	22
42		6691	6713	6734	6756	6777	6799	6820	47	22
43		6820	6841	6862	6884	6905	6926	6947	46	21
44		6947	6967	6988	7009	7030	7050	7071	45	21
45	0.	7071								
		60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	d.

P. P.

	30	29
1	3.0	2.9
2	6.0	5.8
3	9.0	8.7
4	12.0	11.6
5	15.0	14.5
6	18.0	17.4
7	21.0	20.3
8	24.0	23.2
9	27.0	26.1

	28	27
1	2.8	2.7
2	5.6	5.4
3	8.4	8.1
4	11.2	10.8
5	14.0	13.5
6	16.8	16.2
7	19.6	18.9
8	22.4	21.6
9	25.2	24.3

	26	25
1	2.6	2.5
2	5.2	5.0
3	7.8	7.5
4	10.4	10.0
5	13.0	12.5
6	15.6	15.0
7	18.2	17.5
8	20.8	20.0
9	23.4	22.5

	24	23
1	2.4	2.3
2	4.8	4.6
3	7.2	6.9
4	9.6	9.2
5	12.0	11.5
6	14.4	13.8
7	16.8	16.1
8	19.2	18.4
9	21.6	20.7

	22	21	20
1	2.2	2.1	2.0
2	4.4	4.2	4.0
3	6.6	6.3	6.0
4	8.8	8.4	8.0
5	11.0	10.5	10.0
6	13.2	12.6	12.0
7	15.4	14.7	14.0
8	17.6	16.8	16.0
9	19.8	18.9	18.0

P. P.

COSINE

°		0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
45	0.	7071	7092	7112	7133	7153	7173	7193	44	20
46		7193	7214	7234	7254	7274	7294	7314	43	20
47		7314	7333	7353	7373	7392	7412	7431	42	20
48		7431	7451	7470	7490	7509	7528	7547	41	19
49		7547	7566	7585	7604	7623	7642	7660	40	19
50	0.	7660	7679	7698	7716	7735	7753	7771	39	18
51		7771	7790	7808	7826	7844	7862	7880	38	18
52		7880	7898	7916	7934	7951	7969	7986	37	18
53		7986	8004	8021	8039	8056	8073	8090	36	17
54		8090	8107	8124	8141	8158	8175	8192	35	17
55	0.	8192	8208	8225	8241	8258	8274	8290	34	16
56		8290	8307	8323	8339	8355	8371	8387	33	16
57		8387	8403	8418	8434	8450	8465	8480	32	16
58		8480	8496	8511	8526	8542	8557	8572	31	15
59		8572	8587	8601	8616	8631	8646	8660	30	15
60	0.	8660	8675	8689	8704	8718	8732	8746	29	14
61		8746	8760	8774	8788	8802	8816	8829	28	14
62		8829	8843	8857	8870	8884	8897	8910	27	14
63		8910	8923	8936	8949	8962	8975	8988	26	13
64		8988	9001	9013	9026	9038	9051	9063	25	12
65	0.	9063	9075	9088	9100	9112	9124	9135	24	12
66		9135	9147	9159	9171	9182	9194	9205	23	13
67		9205	9216	9228	9239	9250	9261	9272	22	11
68		9272	9283	9293	9304	9315	9325	9336	21	11
69		9336	9346	9356	9367	9377	9387	9397	20	10
70	0.	9397	9407	9417	9426	9436	9446	9455	19	10
71		9455	9465	9474	9483	9492	9502	9511	18	9
72		9511	9520	9528	9537	9546	9555	9563	17	9
73		9563	9572	9580	9588	9596	9605	9613	16	8
74		9613	9621	9628	9636	9644	9652	9659	15	8
75	0.	9659	9667	9674	9681	9689	9696	9703	14	7
76		9703	9710	9717	9724	9730	9737	9744	13	7
77		9744	9750	9757	9763	9769	9775	9781	12	6
78		9781	9787	9793	9799	9805	9811	9816	11	6
79		9816	9822	9827	9833	9838	9843	9848	10	5
80	0.	9848	9853	9858	9863	9868	9872	9877	9	5
81		9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	8	4
82		9903	9907	9911	9914	9918	9922	9925	7	4
83		9925	9929	9932	9936	9939	9942	9945	6	3
84		9945	9948	9951	9954	9957	9959	9962	5	3
85	0.	9962	9964	9967	9969	9971	9974	9976	4	2
86		9976	9978	9980	9981	9983	9985	9986	3	2
87		9986	9988	9989	9990	9992	9993	9994	2	1
88		9994	9995	9996	9997	9997	9998	9998	1	1
89		9998	9999	9999	*0000	*0000	*0000	*0000	0	0
90	1.	0000								
		60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	d.

P. P.

	21	20	19	18
1	2.1	2.0	1.9	1.8
2	4.2	4.0	3.8	3.6
3	6.3	6.0	5.7	5.4
4	8.4	8.0	7.6	7.2
5	10.5	10.0	9.5	9.0
6	12.6	12.0	11.4	10.8
7	14.7	14.0	13.3	12.6
8	16.8	16.0	15.2	14.4
9	18.9	18.0	17.1	16.2

	17	16	15	14
1	1.7	1.6	1.5	1.4
2	3.4	3.2	3.0	2.8
3	5.1	4.8	4.5	4.2
4	6.8	6.4	6.0	5.6
5	8.5	8.0	7.5	7.0
6	10.2	9.6	9.0	8.4
7	11.9	11.2	10.5	9.8
8	13.6	12.8	12.0	11.2
9	15.3	14.4	13.5	12.6

	13	12	11	10
1	1.3	1.2	1.1	1.0
2	2.6	2.4	2.2	2.0
3	3.9	3.6	3.3	3.0
4	5.2	4.8	4.4	4.0
5	6.5	6.0	5.5	5.0
6	7.8	7.2	6.6	6.0
7	9.1	8.4	7.7	7.0
8	10.4	9.6	8.8	8.0
9	11.7	10.8	9.9	9.0

	9	8	7	6
1	0.9	0.8	0.7	0.6
2	1.8	1.6	1.4	1.2
3	2.7	2.4	2.1	1.8
4	3.6	3.2	2.8	2.4
5	4.5	4.0	3.5	3.0
6	5.4	4.8	4.2	3.6
7	6.3	5.6	4.9	4.2
8	7.2	6.4	5.6	4.8
9	8.1	7.2	6.3	5.4

	5	4	3	2
1	0.5	0.4	0.3	0.2
2	1.0	0.8	0.6	0.4
3	1.5	1.2	0.9	0.6
4	2.0	1.6	1.2	0.8
5	2.5	2.0	1.5	1.0
6	3.0	2.4	1.8	1.2
7	3.5	2.8	2.1	1.4
8	4.0	3.2	2.4	1.6
9	4.5	3.6	2.7	1.8

P. P.

COSINE

TANGENT

°		0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
0	0.	0000	0029	0058	0087	0116	0145	0175	89	29
1		0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88	29
2		0349	0378	0407	0437	0466	0495	0524	87	29
3		0524	0553	0582	0612	0641	0670	0699	86	29
4		0699	0729	0758	0787	0816	0846	0875	85	29
5	0.	0875	0904	0934	0963	0992	1022	1051	84	29
6		1051	1080	1110	1139	1169	1198	1228	83	30
7		1228	1257	1287	1317	1346	1376	1405	82	30
8		1405	1435	1465	1495	1524	1554	1584	81	30
9		1584	1614	1644	1673	1703	1733	1763	80	30
10	0.	1763	1793	1823	1853	1883	1914	1944	79	30
11		1944	1974	2004	2035	2065	2095	2126	78	30
12		2126	2156	2186	2217	2247	2278	2309	77	30
13		2309	2339	2370	2401	2432	2462	2493	76	31
14		2493	2524	2555	2586	2617	2648	2679	75	31
15	0.	2679	2711	2742	2773	2805	2836	2867	74	31
16		2867	2899	2931	2962	2904	3026	3057	73	32
17		3057	3089	3121	3153	3185	3217	3249	72	32
18		3249	3281	3314	3346	3378	3411	3443	71	32
19		3443	3476	3508	3541	3574	3607	3640	70	33
20	0.	3640	3673	3706	3739	3772	3805	3839	69	33
21		3839	3872	3906	3939	3973	4006	4040	68	34
22		4040	4074	4108	4142	4176	4210	4245	67	34
23		4245	4279	4314	4348	4383	4417	4452	66	34
24		4452	4487	4522	4557	4592	4628	4663	65	35
25	0.	4663	4699	4734	4770	4806	4841	4877	64	36
26		4877	4913	4950	4986	5022	5059	5095	63	36
27		5095	5132	5169	5206	5243	5280	5317	62	37
28		5317	5354	5392	5430	5467	5505	5543	61	38
29		5543	5581	5619	5658	5696	5735	5774	60	39
30	0.	5774	5812	5851	5890	5930	5969	6009	59	39
31		6009	6048	6088	6128	6168	6208	6249	58	40
32		6249	6289	6330	6371	6412	6453	6494	57	41
33		6494	6536	6577	6619	6661	6703	6745	56	42
34		6745	6787	6830	6873	6916	6959	7002	55	43
35	0.	7002	7046	7089	7133	7177	7221	7265	54	44
36		7265	7310	7355	7400	7445	7490	7536	53	45
37		7536	7581	7627	7673	7720	7766	7813	52	46
38		7813	7860	7907	7954	8002	8050	8098	51	48
39		8098	8146	8195	8243	8292	8342	8391	50	49
40	0.	8391	8441	8491	8541	8591	8642	8693	49	50
41		8693	8744	8796	8847	8899	8952	9004	48	52
42		9004	9057	9110	9163	9217	9271	9325	47	54
43		9325	9380	9435	9490	9545	9601	9657	46	55
44		9657	9713	9770	9827	9884	9942	*0000	45	57
45	1.	0000								
		60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	d.

P. P.

	29	30	31	32	33
1	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3
2	5.8	6.0	6.2	6.4	6.6
3	8.7	9.0	9.3	9.6	9.9
4	11.6	12.0	12.4	12.8	13.2
5	14.5	15.0	15.5	16.0	16.5
6	17.4	18.0	18.6	19.2	19.8
7	20.3	21.0	21.7	22.4	23.1
8	23.2	24.0	24.8	25.6	26.4
9	26.1	27.0	27.9	28.8	29.7

	34	35	36	37	38
1	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
2	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6
3	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4
4	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2
5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0
6	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8
7	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6
8	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4
9	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2

	39	40	41	42	43
1	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3
2	7.8	8.0	8.2	8.4	8.6
3	11.7	12.0	12.3	12.6	12.9
4	15.6	16.0	16.4	16.8	17.2
5	19.5	20.0	20.5	21.0	21.5
6	23.4	24.0	24.6	25.2	25.8
7	27.3	28.0	28.7	29.4	30.1
8	31.2	32.0	32.8	33.6	34.4
9	35.1	36.0	36.9	37.8	38.7

	44	45	46	47	48
1	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8
2	8.8	9.0	9.2	9.4	9.6
3	13.2	13.5	13.8	14.1	14.4
4	17.6	18.0	18.4	18.8	19.2
5	22.0	22.5	23.0	23.5	24.0
6	26.4	27.0	27.6	28.2	28.8
7	30.8	31.5	32.2	32.9	33.6
8	35.2	36.0	36.8	37.6	38.4
9	39.6	40.5	41.4	42.3	43.2

	49	50	51	52	53
1	4.9	5.0	5.1	5.2	5.3
2	9.8	10.0	10.2	10.4	10.6
3	14.7	15.0	15.3	15.6	15.9
4	19.6	20.0	20.4	20.8	21.2
5	24.5	25.0	25.5	26.0	26.5
6	29.4	30.0	30.6	31.2	31.8
7	34.3	35.0	35.7	36.4	37.1
8	39.2	40.0	40.8	41.6	42.4
9	44.1	45.0	46.0	46.8	47.7

	54	55	56	57	58
1	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8
2	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6
3	16.2	16.5	16.8	17.1	17.4
4	21.6	22.0	22.4	22.8	23.2
5	27.0	27.5	28.0	28.5	29.0
6	32.4	33.0	33.6	34.2	34.8
7	37.8	38.5	39.2	39.9	40.6
8	43.2	44.0	44.8	45.6	46.4
9	48.6	49.5	50.4	51.3	52.2

P. P.

COTANGENT

TANGENT

°	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
45	1.000	1.006	1.012	1.018	1.024	1.030	1.036	44	6
46	1.036	1.042	1.048	1.054	1.060	1.066	1.072	43	6
47	1.072	1.079	1.085	1.091	1.098	1.104	1.111	42	6
48	1.111	1.117	1.124	1.130	1.137	1.144	1.150	41	6
49	1.150	1.157	1.164	1.171	1.178	1.185	1.192	40	7
50	1.192	1.199	1.206	1.213	1.220	1.228	1.235	39	7
51	1.235	1.242	1.250	1.257	1.265	1.272	1.280	38	8
52	1.280	1.288	1.295	1.303	1.311	1.319	1.327	37	8
53	1.327	1.335	1.343	1.351	1.360	1.368	1.376	36	8
54	1.376	1.385	1.393	1.402	1.411	1.419	1.428	35	9
55	1.428	1.437	1.446	1.455	1.464	1.473	1.483	34	9
56	1.483	1.492	1.501	1.511	1.520	1.530	1.540	33	10
57	1.540	1.550	1.560	1.570	1.580	1.590	1.600	32	10
58	1.600	1.611	1.621	1.632	1.643	1.653	1.664	31	11
59	1.664	1.675	1.686	1.698	1.709	1.720	1.732	30	11
60	1.732	1.744	1.756	1.767	1.780	1.792	1.804	29	12
61	1.804	1.816	1.829	1.842	1.855	1.868	1.881	28	13
62	1.881	1.894	1.907	1.921	1.935	1.949	1.963	27	14
63	1.963	1.977	1.991	2.006	2.020	2.035	2.050	26	14
64	2.050	2.066	2.081	2.097	2.112	2.128	2.145	25	16
65	2.145	2.161	2.177	2.194	2.211	2.229	2.246	24	17
66	2.246	2.264	2.282	2.300	2.318	2.337	2.356	23	19
67	2.356	2.375	2.394	2.414	2.434	2.455	2.475	22	20
68	2.475	2.496	2.517	2.539	2.560	2.583	2.605	21	22
69	2.605	2.628	2.651	2.675	2.699	2.723	2.747	20	24
70	2.747	2.773	2.798	2.824	2.850	2.877	2.904	19	26
71	2.904	2.932	2.960	2.989	3.018	3.047	3.078	18	29
72	3.078	3.108	3.140	3.172	3.204	3.237	3.271	17	32
73	3.271	3.305	3.340	3.376	3.412	3.450	3.487	16	36
74	3.487	3.526	3.566	3.606	3.647	3.689	3.732	15	41
75	3.732	3.776	3.821	3.867	3.914	3.962	4.011	14	46
76	4.011	4.061	4.113	4.165	4.219	4.275	4.331	13	53
77	4.331	4.390	4.449	4.511	4.574	4.638	4.705	12	62
78	4.705	4.773	4.843	4.915	4.989	5.066	5.145	11	73
79	5.145	5.226	5.309	5.396	5.485	5.576	5.671	10	88
80	5.671	5.769	5.871	5.976	6.084	6.197	6.314	9	
81	6.314	6.435	6.561	6.691	6.827	6.968	7.115	8	
82	7.115	7.269	7.429	7.596	7.770	7.953	8.144	7	
83	8.144	8.345	8.556	8.777	9.010	9.255	9.514	6	
84	9.514	9.788	10.078	10.385	10.712	11.059	11.430	5	
85	11.430	11.826	12.251	12.706	13.197	13.727	14.301	4	
86	14.301	14.924	15.605	16.350	17.169	18.075	19.081	3	
87	19.081	20.206	21.470	22.904	24.542	26.432	28.636	2	
88	28.636	31.242	34.368	38.188	42.964	49.104	57.290	1	
89	57.290	68.750	85.940	114.59	171.89	343.77	infinit.	0	
90	infinit.								
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	d.

P. P.

	6	7	8	9	10	11
1	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
2	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
3	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0	3.3
4	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0	4.4
5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
6	3.6	4.2	4.8	5.4	6.0	6.6
7	4.2	4.9	5.6	6.3	7.0	7.7
8	4.8	5.6	6.4	7.2	8.0	8.8
9	5.4	6.3	7.2	8.1	9.0	9.9

	12	13	14	15	16
1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2
3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4
5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6
7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2
8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8
9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4

	17	18	19	20	21
1	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1
2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2
3	5.1	5.4	5.7	6.0	6.3
4	6.8	7.2	7.6	8.0	8.4
5	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5
6	10.2	10.8	11.4	12.0	12.6
7	11.9	12.6	13.3	14.0	14.7
8	13.6	14.4	15.2	16.0	16.8
9	15.3	16.2	17.1	18.0	18.9

	22	23	24	25	26
1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2
3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8
4	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4
5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0
6	13.2	13.8	14.4	15.0	15.6
7	15.4	16.1	16.8	17.5	18.2
8	17.6	18.4	19.2	20.0	20.8
9	19.8	20.7	21.6	22.5	23.4

	27	28	59	62	63
1	2.7	2.8	5.9	6.2	6.3
2	5.4	5.6	11.8	12.4	12.6
3	8.1	8.4	17.7	18.6	18.9
4	10.8	11.2	23.6	24.8	25.2
5	13.5	14.0	29.5	31.0	31.5
6	16.2	16.8	35.4	37.2	37.8
7	18.9	19.6	41.3	43.4	44.1
8	21.6	22.4	47.2	49.6	50.4
9	24.3	25.2	53.1	55.8	56.7

	64	67	68	70	72
1	6.4	6.7	6.8	7.0	7.2
2	12.8	13.4	13.6	14.0	14.4
3	19.2	20.1	20.4	21.0	21.6
4	25.6	26.8	27.2	28.0	28.8
5	32.0	33.5	34.0	35.0	36.0
6	38.4	40.2	40.8	42.0	43.2
7	44.8	46.9	47.6	49.0	50.4
8	51.2	53.6	54.4	56.0	57.6
9	57.6	60.3	61.2	63.0	64.8

P. P.

COTANGENT

載有 sine(正弦)一字，意即求一角之正弦時，須自上向下而檢之。度數載在左端之直行內，並標之以(°)，若欲求正弦之分數，須自頁之上端首列內檢之。小數點僅在 0′ 之直行內標出，其實在其他直行內亦須補充之。牢記此諸準則，則用表至屬簡易。例如，15° 之正弦值可於第 38 頁檢得。先查 15° 所在之列，然後就頁之上端 0′ 欄讀下來即得。如

$$\text{sine } 15°\ 0' = 0.2588$$

同樣，
$$\text{sine } 15°10' = 0.2616,$$
$$\text{sine } 62°40' = 0.8884,$$
$$\text{sine } 85°20' = 0.9967$$

同樣，若已知一角之正弦值，則按三角表之用法，極易查得其角度。

例如，於下列之各題中，其角之數值可直接由表中得之，學者當可自行驗證：

當 $\text{sine } \alpha = 0.3557,\qquad \alpha = 20°50'.$

$\text{sine } \alpha = 0.6018,\qquad \alpha = 37°0'.$

$\text{sine } \alpha = 0.9983,\qquad \alpha = 86°40'.$

2. 由一四位表求一角之餘弦　在第 38 頁及第 39 頁之下端，載有 cosine (餘切)一字，此即說明表之讀法須自下而上。頁之下端標有(°)者，須與餘弦共同讀之。求餘弦時，其分數之一列，亦載在頁之下端。

牢記此諸準則，則一切關於餘弦之數值極易求得。

$$\text{cosine } 34^\circ 10' = 0.8274,$$

$$\text{cosine } 46^\circ 40' = 0.6862,$$

$$\text{cosine } 85^\circ \ 0' = 0.0872.$$

又易知;

當
$$\text{cosine } \alpha = 0.9674, \qquad \alpha = 14^\circ 40'.$$

$$\text{cosine } \alpha = 0.4975, \qquad \alpha = 60^\circ 10'.$$

$$\text{cosine } \alpha = 0.9957, \qquad \alpha = \ 5^\circ 20'.$$

3 由一四位表求正切與餘切　正切與餘切載在第 40 頁及第 41 頁上.應用於正弦與餘弦之普徧準則亦可應用於正切與餘切.由此求得

$$\text{tangent } \ 4^\circ 10' = 0.0729,$$

$$\text{tangent } 35^\circ 50' = 0.7221,$$

$$\text{tangent } 85^\circ 20' = 12.251,$$

$$\text{cotangent } \ 4^\circ 10' = 13.727,$$

$$\text{cotangent } 35^\circ 50' = 1.385,$$

$$\text{cotangent } 85^\circ \ 0' = 0.0875.$$

又,當
$$\text{tangent } \alpha = 1.428, \qquad \alpha = 55^\circ \ 0'.$$

$$\text{tangent } \alpha = 0.5354, \qquad \alpha = 28^\circ 10'.$$

$$\text{cotangent } \alpha = 0.3772, \qquad \alpha = 69^\circ 20'.$$

$$\text{cotangent } \alpha = 2.850, \qquad \alpha = 19^\circ 20'.$$

4. 內推法(Interpolation)　應用三角表時,卽有二個基本問題呈現於我人眼前. 其一爲已知一角而求其一三角函

數值；其二為已知一三角函數而求其角．對於上述二個問題，前已舉例說明．若已知角為表中所列之一角，或已知之三角函數適為表中所列之值，則查檢時毫無困難．但若此等條件不能滿足，則必須應用內推法作一調整．今以數例說明之如下：

(*a*) 求正弦 $12^\circ 14'$.

角 $12^\circ 14'$ 不列於四位表之中，故其正弦之值不能直接由表中求得，惟可求之如下：

$$\text{sine } 12^\circ 10' = 0.2108,$$

而

$$\text{sine } 12^\circ 20' = 0.2136.$$

今將 $12^\circ 10'$, $12^\circ 14'$ 及 $15^\circ 20'$ 諸角書在同一直行中，而諸角之正弦值書在另一直行中，且以文字 u 代表未知正弦值．於是得

$$\begin{array}{r|l} \text{角} & \text{正弦} \\ \hline 10'\left\{\begin{array}{l} 4'\left[\begin{array}{l}12^\circ 10'\\ 12^\circ 14'\end{array}\right. \\ \;12^\circ 20'\end{array}\right. & \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}0.2108\\ u\end{array}\right]c\\ 0.2136\end{array}\right\}0.0026 \end{array}$$

角中 $10'$ 之改變，使正弦中有 0.0026 之改變．角中 $4'$ 之改變，定使正弦中有 c 之改變．於是 c 為校正數，可加於 0.2108 而求 u，亦即 sine $12^\circ 14'$ 之值．

假定一角之正弦中之改變與角中之改變成正比，則可書為

$$c : 0.0026 = 4 : 10.$$

或
$$10c=0.0104,$$
$$c=0.0010.$$

於是 $\quad \text{sine}\ 12°14'=0.2108+0.0010=0.2118.$

(*b*) 已知 $\text{sine}\ \alpha=0.3724$，試求 α.

數 0.3724 不列於正弦值之表中，故用較此數稍大與稍小之二數方可着手進行。

$$\begin{array}{r|l}
\quad 角 & \quad 正弦 \\
\hline
10'\left\{\begin{array}{l} c\left[\begin{array}{l}21°50' \\ \alpha\end{array}\right. \\ \quad 21°60' \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}0.3719 \\ 0.3724\end{array}\right]5 \\ 0.3746\end{array}\right\}27
\end{array}$$

於是
$$c:10'=5:27,$$
$$27c=50',$$
$$c=2'.$$
$$\therefore\quad \alpha=21°50'+2'=21°52'.$$

(*c*) 上述之例題，明示如何應用內推法以求含有正弦之角，而餘弦，正切及餘切亦極易用同法求之。惟當論及餘弦或餘切時，有一點亟須詳加注意，卽表中所列此種函數之值，隨角之增大而減小，是以角若增大則函數值減小，反之亦然。至於正弦與正切則隨角之增大而增大。

今以數值例題說明之。例如：

當一角自 50°20′ 增至 50°30′ 時，角之正弦自 0.7698 增至 0.7716.

當一角自 5°40′ 增至 5°50′ 時，角之餘弦自 0.9951 減至 0.9948.

當一角自 10°20′ 增至 10°30′ 時，角之正切自 0.1823 增至 0.1853，同時角之餘切自 5.485 減至 5.396.

(*d*) 凡標有 P. P. 之輔助表爲比例部分 (Proportional parts) 表，用在內推法中以替代本節所述之方法者.

33 解直角三角形所 之公式 若一直角三角形有二個獨立部分爲已知者，外加直角 γ 本爲已知，則該直角三角形恆可解出. 其通常所用之公式爲

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}.\qquad \sin\beta=\frac{b}{c}.$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}.\qquad \cos\beta=\frac{a}{c}.$$

$$\tan\alpha=\frac{a}{b}.\qquad \tan\beta=\frac{b}{a}.$$

$$\cot\alpha=\frac{b}{a}.\qquad \cot\beta=\frac{a}{b}.$$

$$\alpha+\beta=90^\circ,\qquad a^2+b^2=c^2.$$

34 公式之選擇

(*a*) 若已知一角與一邊，則恆可直接由已知部分以求其未知部分. 欲求未知邊，可選一包含已知部分及所求邊之公式，其未知角恆由

$$\alpha+\beta=90^\circ$$

中求得之。

(b) 若已知二邊,則第三邊可用公式

$$a^2+b^2=c^2$$

以求之;然有時宜先用含有已知部分之公式而求一角,然後再用含有所得角之公式以求第三邊.

習 題

1. 已知一直角三角形之一銳角為 28°,其斜邊等於 12. 試解此三角形.

[解] 欲求 a 邊,可用公式

$$\sin\alpha=\frac{a}{c} \quad 或 \quad a=c\sin\alpha.$$

代入此公式,

$$a=12\sin 28^\circ=12\times 0.4695=5.634.$$

欲求 b 邊,用公式

$$\cos\alpha=\frac{b}{c} \quad 或 \quad b=c\cos\alpha.$$

代入此公式,

$$b=12\cos 28^\circ=12\times 0.8829=10.5948.$$

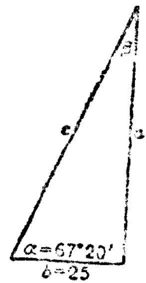
欲求 β 角,用公式

$$\alpha+\beta=90^\circ.$$

於是 $\beta=90^\circ-\alpha=90^\circ-28^\circ=62^\circ.$

2. 在一直角三角形中,其一角為 67°20′,其鄰邊為 25,試求其他各部分.

［解］ 欲求 a 邊，用公式



$$\tan\alpha=\frac{a}{b}\quad 或\quad a=b\tan\alpha.$$

代以數值，

$$a=25\tan 67°20'=25\times 2.394=59.85.$$

欲求 c，用公式

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}\quad 或\quad c=\frac{b}{\cos\alpha}.$$

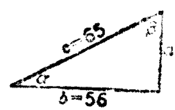
代以數值，

$$c=\frac{25}{\cos 67°20'}=\frac{25}{0.3854}=64.87.$$

$$角\ \beta=90°-67°20'=22°40'.$$

3. 一直角三角形之斜邊爲 65，一邊爲 56. 試求其他一邊及其各角.

［解］ 欲求角 α，可用公式



$$\cos\alpha=\frac{b}{c}.$$

代以數值，

$$\cos\alpha=\frac{56}{65}=0.8615.$$

故由表，得知

$$\alpha=30°31',$$

而

$$\beta=59°29'.$$

欲求 a 邊，用公式

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}\quad 或\quad a=c\sin\alpha.$$

代以數值，

$$a=65\times 0.5078=33.$$

a 邊亦可直接由已知部分按公式 $a^2=c^2-b^2$ 而求之。代以數值，則得

$$a^2=65^2-56^2=4225-3136=1089,$$

而 $\qquad a=33.$

4. 在一直角三角形內，已知其斜邊 $c=65$，而角 $\alpha=75°45'$，試求 a 與邊 b 邊。

5. 在一直角三角形內，已知斜邊 $c=292$，a 邊 $=192$. 試求其 b 邊及角 α 與 β

6. 在一直角三直形內，已知 a 邊 $=180$，b 邊 $=112$. 試求斜邊及其各角。

7. 在一直角三角形內，已知 $b=0.64$，$\beta=14°15'$，試求 a, c 及 α

35. 檢算公式　於一切計算中，亟須時常注意是否有數值上之錯誤．蓋計算雖極精詳，而錯誤有時仍不能免，故計算部分應以檢算公式以驗之．凡任何公式未曾用於解此三角形者，皆可用作檢算公式。

直角三角形可不用公式

$$a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$$

而解之，是以此公式用作檢算公式極爲便利。

36　關於解三角形之提示　將所求三角形精確地徒

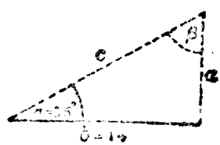
手作一圖形,並寫出各未知部分的估計值.由估計值之比較,即不用公式以檢算之,其較大錯誤亦極易檢出.

在查表及作任何計算前,先選取適用之公式,然後就所求部分而解之,並作一計算之輪廓,其中酌留空缺,俾將所需各數一一填入.通常此法可減少實際計算工作,蓋所求之各數往往在表之同頁上也.

此種演算步驟,對於每一冗長之計算,頗為重要.

37. **例題** 下列諸例題,其解法有二:(1)用自然函數,(2)用對數.若學者尚未知對數之用法,則可俟讀畢第十章後再作對數之計算,或立即參看第十章對數之解釋,即作對數之演算.

1. 在一直角三角形中,已知 $b=14$, $\alpha=35^\circ$. 試求 a, c 及 β.



[解] 作適合題之圖形.

估計得 $a=9$, $c=17$.

用自然函數

$$\tan\alpha=\frac{a}{b},\qquad \cos\alpha=\frac{b}{c}.$$

$$\therefore\quad a=b\tan\alpha,\quad a=14\times 0.7002,\quad a=9.803$$

及 $$c=\frac{b}{\cos\alpha},\quad c=14\div 0.8192,\quad c=17.09.$$

$$\beta=90^\circ-\alpha,\qquad \beta=55^\circ.$$

檢　算

$$c^2=a^2+b^2$$

$$\begin{array}{rr} a^2= & 96.10 \\ b^2= & 96.0 \\ \hline & 292.1 \end{array}$$

$$c^2=(17.09)^2=292.1.$$

用對數

$a=b\tan\alpha$　　　　$c=\dfrac{b}{\cos\alpha}$

$\log a=\log b+\log\tan\alpha$

b	14
α	35°
$\log b$	
$\log\tan\alpha$	
$\log a$	
a	

$\log c=\log b-\log\cos\alpha$

$\log b$	
$\log\cos\alpha$	
$\log c$	
c	

$\beta=90°-\alpha,$　　$\beta=$　　.

檢　算

$$a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b).$$

$$\log a=\tfrac{1}{2}[\log(c-b)+\log(c+b)]$$

c	
b	
$c-b$	
$c+b$	

$\log(c-b)$	
$\log(c+b)$	
$2\log a$	
$\log a$	

將上列之空白處補充，則完全工作如下：

$a=b\tan\alpha,$　　　　$c=\dfrac{b}{\cos\alpha}.$

$\log a = \log b + \log \tan \alpha$

b	14
α	35°
$\log b$	1.1461
$\log \tan \alpha$	9.8452 − 10
$\log a$	.9913
a	9.802

$\log c = \log b - \log \cos \alpha$

$\log b$	1.1461
$\log \cos \alpha$	9.9132
$\log c$	1.2327
c	17.09

$$\beta = 90^\circ - \alpha, \qquad \beta = 55^\circ.$$

檢　算

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b).$$

$$\log a = \tfrac{1}{2}[\log(c-b) + \log(c+b)]$$

c	17.09
b	14
$c-b$	3.09
$c+b$	31.09

$\log(c-b)$	0.4900
$\log(c+b)$	1.4927
$2\log a$	1.9828
$\log a$	0.9914

因由檢算公式，亦得與解中同一之結果，故所有之計算完全正確。

2.　在一直角三角形內，已知 $c = 6.275$，$\beta = 18°47'$. 試求 a, b 及 α.

［解］　作略圖，估計得

$$a = 5, \qquad b = 2.$$

用自然函數

$a = c\cos\beta$,　　$b = c\sin\beta$,　　$\alpha = 90° - \beta$,

$a = 6.275 = 0.9468$,　　$b = 6.275 \times 0.3220$,　　$\alpha = 71°13'$.

$a = 5.941$.　　$b = 2.021$.

檢 算

$$c^2=a^2+b^2$$

$$\begin{array}{rr} a^2= & 35.30 \\ b^2= & 4.084 \\ \hline & 39.384 \end{array}$$

$$c^2=(6.275)^2=39.38.$$

用對數

$a=c\cos\beta.$ $b=c\sin\beta.$

$\log a=\log c+\log\cos\beta$

c	6.275
β	18°47′
$\log c$	0.7976
$\log\cos\beta$	9.9762 − 10
$\log a$	0.7738
a	5.940

$\log b=\log c+\log\sin\beta$

$\log c$	0.7976
$\log\sin\beta$	9.5079 − 10
$\log b$	0.3055
b	2.020

$$\alpha=90°-\beta, \qquad \alpha=71°13'.$$

檢 算

$$a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b).$$

$$\log a=\tfrac{1}{2}[\log(c-b)+\log(c+b)]$$

c	6.275
b	2.020
$c-b$	4.255
$c+b$	8.295

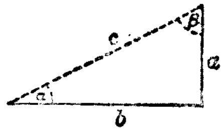
$\log(c-b)$	0.6289
$\log(c+b)$	0.9188
$2\log a$	1.5477
$\log a$	0.7738

至此,可見 $\log a$ 之二個值爲完全相同。是卽說明計算爲完全正確。

3. 已知 $a=0.06487$, $b=0.1257$. 試求 α, β 及 c.

[解] 作略圖．估計得

$\alpha=30°$, $\beta=60°$, $c=0.15$.



用自然函數

$\tan\alpha=\dfrac{a}{b}$, $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$ 或 $c=\dfrac{a}{\sin\alpha}$,

$\tan\alpha=\dfrac{0.06487}{0.1257}=0.5161$, $c=\dfrac{0.06487}{0.4587}=0.1414$.

$\alpha=27°18'$. $\beta=90°-\alpha$, $\beta=62°42'$.

檢 算

$$c^2=a^2+b^2$$

$$a^2=0.00421$$
$$b^2=0.01580$$
$$c^2=0.02001$$

$$c^2=(0.1414)^2=0.01999.$$

由檢算，得知只在第四位有效數字中差兩單位，故可認為滿意。

用對數

$\tan\alpha=\dfrac{a}{b}$. $c=\dfrac{a}{\sin\alpha}$.

$\log\tan\alpha=\log a-\log b$

a	0.06487
b	0.1257
$\log a$	8.8120 − 10
$\log b$	9.0993 − 10
$\log\tan\alpha$	9.7127 − 10
α	27°18′
β	62°42′

$\log c=\log a-\log\sin\alpha$

$\log a$	8.8120 − 10
$\log\sin\alpha$	9.6615 − 10
$\log c$	9.1505 − 10
c	0.1411

檢　算

$$b^2=(c-a)(c+b).$$

$$\log b=\tfrac{1}{2}[\log(c-a)+\log(c+a)]$$

c	0.1414	$\log(c-a)$	8.8837−10
a	0.06487	$\log(c+a)$	9.3145−10
$c-a$	0.0765	$2\log b$	18.1982−20
$c+a$	0.2063	$\log b$	9.099[illegible]−10
		b	0.1256

將 b 之已知值與 b 之檢算值相比較.

38.　習　題

解下列各直角三角形，γ 爲直角．前十題試以自然函數之三位表或用算尺(Slide rule)解之.

1. $a=6$, $\alpha=20°$.　**2.** $c=2.5$, $\alpha=35°$.　**3.** $b=0.84$, $\beta=75°$.

4. $a=25$, $b=60$.　**5.** $c=82$, $a=37$.　**6.** $c=0.0091$, $a=0.0029$.

7. $b=371$, $\alpha=43°$.　**8.** $c=7.72$, $b=6.87$.　**9.** $\alpha=18°$, $c=0.0938$.

10. $\beta=49°30'$, $c=12.47$.

用四位表解下列各題:

11. $a=1870$, $\alpha=19°55'$.　**12.** $c=0.3194$, $\alpha=25°41'$.　**13.** $b=0.9293$, $\beta=32°43'$.

14.	$a=0.00006$, $b=0.000019$.	**15.**	$c=1200$, $a=885.6$	**16.**	$c=12.14$, $a=9.321$.
17.	$b=78.54$, $\alpha=51°41'$.	**18.**	$b=3.457$, $\beta=57°57'$.	**19.**	$c=20.08$, $b=16.17$.
20.	$\alpha=78°10'$, $a=271.8$.	**21.**	$a=5987$, $\beta=88°53'$.	**22.**	$c=0.09008$, $a=0.07654$.
23.	$\alpha=46°39'$, $a=26.43$.	**24.**	$a=30.0$, $b=29.9$.	**25.**	$a=111.4$, $b=121.6$
26.	$\beta=83°15'$, $c=7000$.	**27.**	$\alpha=66°6'$, $c=8070$.	**28.**	$a=978.4$, $b=1067$.
29.	$a=5280$, $b=5608$.	**30.**	$\alpha=17°26'$, $c=46.47$.		

31. 一個二等邊三角形,其等邊為 690.1,其餘角為15°20′,試解此二等邊三角形.

32. 一個二等邊三角形,其高為606.6,其等邊為955.7.試解此二等邊三角形.

33. 一個二等邊三角形,其底邊為 2558,其頂角為104°0′,試解此二等邊三角形.

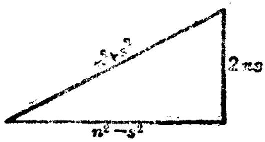
34. 一個二等邊三角形,其底邊為161.4,其高為204.4.試解此二等邊三角形.

35. 一內接正八邊形,其外接圓之半徑為 49.試求該八邊形每邊之長.

37. 邊爲有理數之直角三角形　有時爲便利起見，須使直角三角形之邊爲有理數．如三角形之邊爲 3，4 及 5，即其一例，以 $3^2+4^2=5^2$ 之故也．其他如三角形之邊分別爲 5，12 及 13；8，15 及 17；6，$\frac{37}{2}$ 及 $\frac{35}{2}$；4，$\frac{25}{6}$ 及 $\frac{7}{6}$；17，144 及 145，皆爲此種三角形也．

直角三角形之邊可不用根式而表示之，其法如下：

命 n 及 s 爲任何二個有理數．



於是　n^2+s^2，n^2-s^2 及 $2ns$

可代表一直角三角形之三邊，因

$$(n^2+s^2)^2=(n^2-s^2)^2+(2ns)^2$$

之故也．若 n 與 s 爲有理數，顯見

$$n^2+s^2,\quad n^2-s^2\quad 及\quad 2ns$$

必爲有理數．例如，若

$$n=5,\qquad s=2,$$

則　$n^2+s^2=29$，$n^2-s^2=21$，而　$2ns=20$．

因　$20^2+21^2=29^2$，

故 20，21，29 三數可代表一直角三角形之三邊．

習　題

1. 已知 $n=4$，$s=3$，試求一直角三角形之三邊．

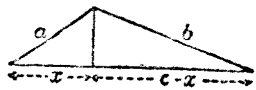
2. 已知 $n=4$，$s=2$，試求一直角三角形之各邊．

3. 已知 $n=\frac{4}{5}$，$s=\frac{3}{5}$，試求一直角三角形之各邊．

40. **斜三角形**　若一斜三角形之三個獨立部分爲已知者，則可藉直角三角形而解之。由斜三角形之頂角向對邊，或向對邊之延長線，作一垂直線，則此斜三角形分爲二個直角三角形。

若已知部分中之一爲一角者，則選作此垂直線時須使所得之直角三角形含有二個已知部分。

若三邊爲已知者，則各直角三角形之第二部分，可根據兩三角形的垂線長之代數式相等之理而求得。



例如，　$$a^2-x^2=b^2-(c-x)^2,$$

故得　$$x=\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$$

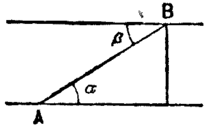
41. 應　用

1. 欲求一河對岸二點 B 與 C 之距離，先量得與 BC 聯線相垂直之直線 BA 爲 200 呎，$\angle BAC$ 爲 $55°29$，問 BC 之距離爲若干呎？

2. 一鐵道與地平面有 $4°23'20''$ 之傾斜。試問沿地平面而測量，該鐵道每哩高出若干？

3. 由高爲 120 呎之塔頂，測得與塔基同平面上之一物，其俯角爲 $24°27'$。問該物與塔基之距離爲何？又與觀者之距離爲何？

已知任一點 A, 及與 A 成一仰角之第二點 B.



所謂 B 與 A 成一仰角者, 卽通過 A 之直線 AB 與地平面上正射影所成之角也. 於左圖中, α 角卽爲仰角.

所謂 A 與 B 成一俯角者, 卽通過 B 之直線 BA 與地平面上正射影所成之角也. 於上圖中 β 爲俯角. 顯然 $\alpha=\beta$.

4. 一圓之半徑爲 18.24 呎. 試求其內接正五邊形每邊之長.

5. 一圓之半徑爲 r. 試求其內接正 n 邊形之周長.

6. 一圓之半徑爲 18.24 呎. 試求其外切正五邊形之周長.

7. 一圓之半徑爲 r, 試求其外切正 n 邊形之周長.

8. 一圓之半徑爲 124.93 呎. 試求其中心角 $63°14'20''$ 所張之弦長.

9. 有一直路 PR 與另一直路 PS 成一個 $19°27'30''$ 之角. 已知 $PR=640$ 呎. 試求由 R 至 PS 之垂直距離 RS 之長.

10. 在某處測得一山之仰角爲 $34°28'$. 退後 500 呎, 測得該山之仰角爲 $31°12'$. 試求此山之高.

11. 一正稜錐體之底爲一正方形, 正方形每邊 15 吋, 錐體之高爲 20 吋. 試求其斜高及其稜之長. 並求其面與底之斜度.

12. 假定地球爲具 3900 哩半徑之球體. 試問由 2000 呎之高度,可見到多少遠?

13. 有 95.75 磅及 120.25 磅之二力,作用於一點且互成直角;試求其合力之大小,並求合力與較大力間之角度.

14. 設地球之半徑爲 3960 哩. 今有一點, 其緯度爲 $44°30'20''$, 試求該點因地球自轉而生之速度.

15. 有一皮帶繞二個滑輪而轉動, 二滑輪之半徑各爲 12 吋與 4 吋. 輪心距離爲 6 呎. 試求該皮帶之長.

16. 一立方體之對角線與一面之對角線交於某頂角. 試求其間之角度.

17. 有 2000 磅之一力作用於原點上,與正 X 軸成 $33°25'$ 之角. 試求沿 X 軸及 Y 軸之各個分力.

18. 有 185 磅之力作用於原點上,與正 X 軸成 $82°15'$ 之角. 另有 327 磅之力作用於原點,與正 X 軸成 $11°32'$ 之角. 試求各力之沿 X 軸及 Y 軸之分力. 將 X 軸之二分力相加,並亦將 Y 軸之二分力相加,然後求其合力之大小與方向.

19. 有一圓柱形之貯水池,其軸與地平面平行,其直徑爲 8 呎,其長爲 12 呎. 其中一部分充之以水,水之最深點爲 3 呎. 試問該池內共有水若干加倫?(每立呎之水爲 $7\frac{1}{2}$ 加倫)

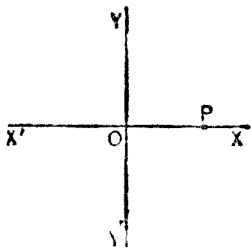
20. 有半哩闊之一河,某人以每小時 5 哩之通常速度在靜水中將其小划舟划過該河. 若此河之水速爲每小時 4 哩. 問該舟在何處登陸? 且其速度爲何?

第四章

三角函數之變化

$n90^\circ \pm \alpha$ 函數之簡化

42. 研究三角函數之變化時，其 0°, 90°, 180°, 270° 及 360° 等值特爲重要。



0° 之函數值 0° 之終線與正 X 軸相重合。因爲此線上之一點與原點之距離爲 r 者，其

$$x=r,\quad y=0.$$

是以按第 22 節之定義，得

$$\sin 0^\circ=\frac{0}{r}=0. \qquad \cot 0^\circ=\frac{r}{0}{}^{*}=\infty.$$

$$\cos 0^\circ=\frac{r}{r}=1. \qquad \sec 0^\circ=\frac{r}{r}=1.$$

$$\tan 0^\circ=\frac{0}{r}=0. \qquad \csc 0^\circ=\frac{r}{0}=\infty.$$

90° 之函數值 90° 之終線與正 Y 軸相重合。故

---

* 關於 $\frac{r}{0}$ 之意義，可參閱任何高等代數學。

$$x=0, \qquad y=r.$$

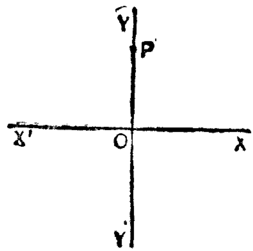
是以按第 22 節之定義,得

$$\sin 90^\circ=\frac{r}{r}=1.$$

$$\cos 90^\circ=\frac{0}{r}=0.$$

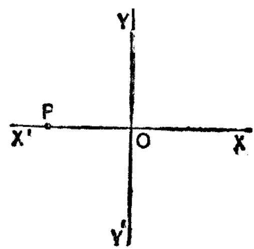
$$\tan 90^\circ=\frac{r}{0}=\infty.$$

$$\cot 90^\circ=\frac{0}{r}=0.$$



$$\sec 90^\circ=\frac{r}{0}=\infty. \qquad \csc 90^\circ=\frac{r}{r}=1.$$

180° 之函數值 180° 之終線與負 X 軸相重合. 故



$$x=-r, \quad y=0.$$

是以按第 22 節之定義,得

$$\sin 180^\circ=\frac{0}{r}=0.$$

$$\cos 180^\circ=\frac{-r}{r}=-1. \qquad \tan 180^\circ=\frac{0}{-r}=0.$$

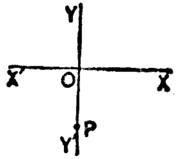
$$\cot 180^\circ=\frac{-r}{0}=\infty. \qquad \sec 180^\circ=\frac{r}{-r}=-1.$$

$$\csc 180^\circ=\frac{r}{0}=\infty.$$

270° 之函數值 270° 之終線與負 Y 軸相重合. 故

$$x=0, \qquad y=-r.$$

是以按第 22 節之定義，得



$$\sin 270^\circ = \frac{-r}{r} = -1.$$

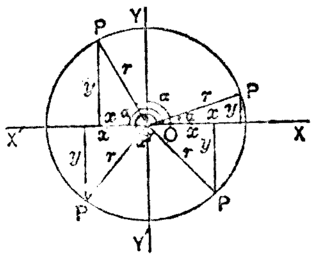
$$\cos 270^\circ = \frac{0}{r} = 0.$$

$$\tan 270^\circ = \frac{-r}{0} = \infty. \qquad \cot 270^\circ = \frac{0}{-r} = 0.$$

$$\sec 270^\circ = \frac{r}{0} = \infty. \qquad \csc 270^\circ = \frac{r}{-r} = -1.$$

360° 之函數值　因 360° 與 0° 爲共線角，故其函數值與 0° 相同.

43. 函數之變化　前已說明三角函數爲一角之函數. 當角變化時，則依存於此角之三角函數亦當變化.



命直線 OP，有固定長度 r，自始線 OX 繞 O 而旋轉. 於是得 XOP 角或 a 角，自 0° 增大而至 360°. 三角函數之變化亦可視爲點 P 之橫坐標與縱坐標之變化而成.

(a) 當 a 角自 0° 增至 90° 時，

y 自 0 增至 r，

而 x 自 r 減至 0.

是以

$\sin a$ 或 $\dfrac{y}{r}$ 爲正，且自 0 增至 1.

$\cos\alpha$ 或 $\frac{x}{r}$ 爲正，且自 1 減至 0.

$\tan\alpha$ 或 $\frac{y}{x}$ 爲正，且自 0 增至 ∞.

$\cot\alpha$ 或 $\frac{x}{y}$ 爲正，且自 ∞ 減至 0.

$\sec\alpha$ 或 $\frac{r}{x}$ 爲正，且自 1 增至 ∞.

$\csc\alpha$ 或 $\frac{r}{y}$ 爲正，且自 ∞ 減至 1.

當 α 角經歷 90° 而增大，則 x 通過零，由一正數變爲一負數．當 α 趨近 90° 時，$\cos\alpha$ 或 $\frac{x}{r}$ 爲極小正角；當 α 剛過 90° 時，$\cos\alpha$ 爲一極小負角．故可謂當 α 經過 90° 時，$\cos\alpha$ 經歷零而變號．

同理，當 α 趨近 90° 時，$\tan\alpha$ 或 $\frac{y}{x}$ 爲一極大正數；當 α 剛過 90° 時，$\tan\alpha$ 爲一極大負數．前已證明 $\tan 90^\circ=\infty$. 是以當 α 經過 90° 時，$\tan\alpha$ 經歷 ∞ 而變號．故可謂 $\tan 90^\circ=\pm\infty$，若把 90° 當作位於第一象限時，則取其正號，當作位於第二象限時，則取其負號．

同理，不論何時一三角函數經過 ∞ 者，則必須變號．

(b) 當 α 角自 90° 增至 180° 時，

y 自 r 減至 0,

而 x 自 0 而減至 $-r$.

是以

$\sin\alpha$ 或 $\frac{y}{r}$ 爲正，且自 1 減至 0.

$\cos\alpha$ 或 $\frac{x}{r}$ 爲負，且自 0 減至 -1.

$\tan\alpha$ 或 $\frac{y}{x}$ 爲負，且自 $-\infty$ 增至 0.

$\cot\alpha$ 或 $\frac{x}{y}$ 爲負，且自 0 減至 $-\infty$.

$\sec\alpha$ 或 $\frac{r}{x}$ 爲負，且自 $-\infty$ 增至 -1.

$\csc\alpha$ 或 $\frac{r}{y}$ 爲正，且自 1 增至 $+\infty$.

(c) 當 α 角增大而經過 180° 時，y 經過零，由一正數變至一負數.

當 α 角自 180° 增至 270°,

y 自 0 減至 $-r$,

而 x 自 $-r$ 增至 0.

是以

$\sin\alpha$ 或 $\frac{y}{r}$ 爲負，且自 0 減至 -1.

$\cos\alpha$ 或 $\frac{x}{r}$ 爲負，且自 -1 增至 0.

$\tan\alpha$ 或 $\frac{y}{x}$ 爲正，且自 0 增至 $+\infty$.

$\cot\alpha$ 或 $\frac{x}{y}$ 爲正，且自 $+\infty$ 減至 0.

$\sec\alpha$ 或 $\frac{r}{x}$ 爲負，且自 -1 減至 $-\infty$.

$\csc\alpha$ 或 $\frac{r}{y}$ 爲負，且自 $-\infty$ 增至 -1.

(d) 當 α 角增大而經過 270°, x 經過零，自一負數變爲一正數.

當 α 角自 270° 增至 360° 時,

y 自 $-r$ 增至 0,

而 x 自 0 增至 r.

是以

$\sin\alpha$ 或 $\frac{y}{r}$ 爲負，且自 -1 增至 0.

$\cos\alpha$ 或 $\frac{x}{r}$ 爲正，且自 0 增至 1.

$\tan\alpha$ 或 $\frac{y}{x}$ 爲負，且自 $-\infty$ 增至 0.

$\cot\alpha$ 或 $\frac{x}{y}$ 爲負，且自 0 減至 $-\infty$.

$\sec\alpha$ 或 $\frac{r}{x}$ 爲正，且自 $+\infty$ 減至 1.

$\csc\alpha$ 或 $\frac{r}{y}$ 爲負，且自 -1 減至 $-\infty$.

上列諸結果，列表如左頁。

故知正弦與餘弦不能大於 $+1$, 亦不能小於 -1; 正割與餘割之値則無一在 $+1$ 與 -1 之間，而位於 $+1$ 與 $+\infty$ 或位於 -1 與 $-\infty$ 之間。正切與餘切則可有自 $+\infty$ 至 $-\infty$ 間之任何值.

	0° 第一象限 90°	第二象限 180°	第三象限 270°	第四象限 360°
$\sin\alpha=\frac{y}{r}$	$+0$ 增至 $+1$	$+1$ 減至 $+0$	-1 減至 1	-1 增至 -0
$\cos\alpha=\frac{x}{r}$	$+1$ 減至 $+0$	-0 減至 -1	-1 增至 0	$+0$ 增至 $+1$
$\tan\alpha=\frac{y}{x}$	$+0$ 增至 $+\infty$	$-\infty$ 增至 -0	$+0$ 增至 $+\infty$	$-\infty$ 增至 -0
$\cot\alpha=\frac{x}{y}$	$+\infty$ 減至 $+0$	-0 減至 $-\infty$	$+\infty$ 減至 $+0$	-0 減至 $-\infty$
$\sec\alpha=\frac{r}{x}$	$+1$ 增至 $+\infty$	$-\infty$ 增至 -1	-1 減至 $-\infty$	$+\infty$ 減至 $+1$
$\csc\alpha=\frac{r}{y}$	$+\infty$ 減至 $+1$	$+1$ 增至 $+\infty$	$-\infty$ 增至 -1	-1 減至 $-\infty$

44. 三角函數的圖示　欲圖示三角函數,可以角之諸不同值爲橫坐標,各角之對應函數值爲縱坐標,求得諸點,於是按角度遞增之順序,過此諸點作一圓潤之曲線.

α	$\sin\alpha$	α	$\tan\alpha$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$	∞
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
π	0	π	0
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
	等		等

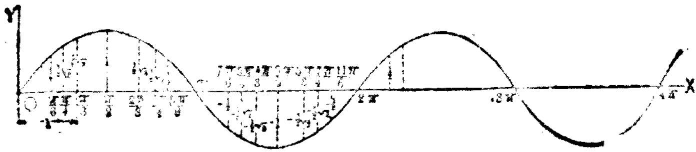
以前算得之角之函數值已足以決定一近似的圖.欲其正確則其函數值可從自然函數表中求得之.

次頁之正弦與正切曲線釋明第 26 節與第 27 節定理之眞實.

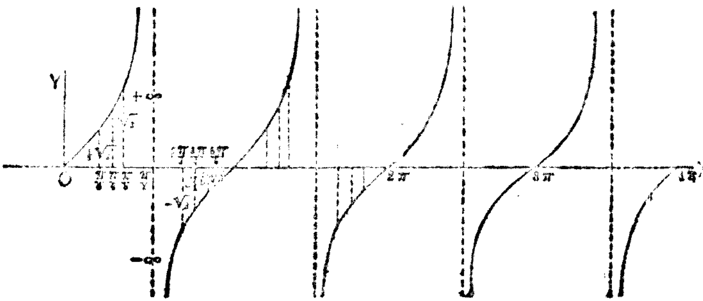
例如,就角之任一已知值而論,如 $\frac{3\pi}{4}$,每一函數祇有一值,在曲線上得知正弦及正切各爲 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 及 -1.

但試三角函數之任一已知值而論,如 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 則有無

正弦曲線 $y = \sin x$



正切曲線 $y = \tan x$



窮數之角，如 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $2\frac{1}{6}\pi$, $2\frac{5}{6}\pi$, 等。

又以 $\tan\alpha = \sqrt{3}$ 而論，則知 α 有 $\frac{\pi}{3}$, $1\frac{1}{3}\pi$, $2\frac{1}{3}\pi$, $3\frac{1}{3}\pi$ 等值。

45 三角函數之週期性 由正弦曲線，極易知當角為 0 時，則正弦為 0，且角由 0 增大至 $\frac{\pi}{2}$ 時，正弦亦為增大至 1. 於是正弦又開始減小，角至 π 時，正弦又為 0，而最後角至 $\frac{3\pi}{2}$ 時，正弦為 -1，然後角至 2π 時，正弦又增大而至 0.

當角自 2π 增至 4π，正弦就重複在 0 至 2π 一段間之值。若角無窮增大，則正弦每間 2π 就重復其值一次。故

稱正弦爲週期函數 (Periodic function), 而 2π 爲其週期 (Period).

研究正切曲線,得知在 0 與 π 間有同一値,在 π 與 2π 間,或 2π 與 3π 間亦然. 是以正切亦爲一週期函數,其週期爲 π.

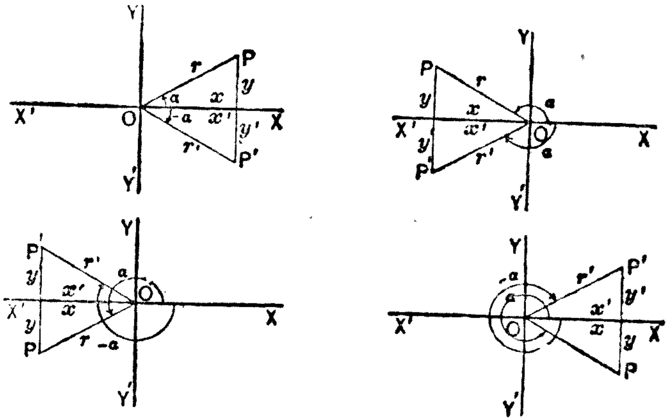
46. 習　　題

1. 描 $y=\cos x$ 之圖形,而求餘弦之週期.
2. 描 $y=\cot x$ 之圖形,而求餘切之週期.
3. 描 $y=\sec x$ 之圖形,而求正割之週期.
4. 描 $y=\csc x$ 之圖形,而求餘割之週期.
5. 描 $y=\sin x+\cos x$ 之圖形.
6. 描 $y=10\sin(x+30^\circ)$ 之圖形.
7. 描 $y=5\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 之圖形.

$n90^\circ\pm\alpha$ 函數之簡化

47. 本節所開展之公式,可使吾人將任一角之任一函數,以與所設角差 90° 之任何倍數之一角之函數表示之. 此等公式,可用小於 90°, 或小於 45° 一角之函數,表出任一角之任一函數.

48. $-\alpha$ 之函數以 α 之函數表示之　命 XOP 爲任何正角,而 XOP' 爲數值相等之負角.



於是就每一圖形取 $OP'=OP$, 得

$$x'=x,\quad y'=-y,\quad r'=r,$$

其中 x,y,r 及 $x',y'\ r'$ 分別爲 P 及 P' 之坐標及與原點之距離.

於是在每一象限內,

$$\sin(-\alpha)=\frac{y'}{r'}=\frac{-y}{r}=-\sin\alpha.$$

$$\cos(-\alpha)=\frac{x'}{r'}=\frac{x}{r}=\cos\alpha.$$

$$\tan(-\alpha)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{x}=-\tan\alpha.$$

$$\cot(-\alpha)=\frac{x'}{y'}=\frac{x}{-y}=-\cot\alpha.$$

$$\sec(-\alpha)=\frac{r'}{x'}=\frac{r}{x}=\sec\alpha.$$

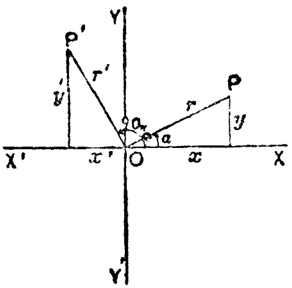
$$\csc(-\alpha=\frac{r'}{y'}=\frac{r}{-y}=-\csc\alpha.$$

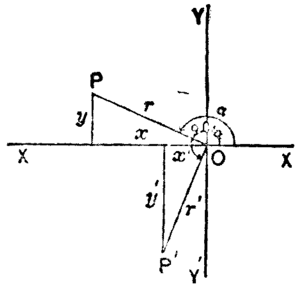
49. **$90^\circ+\alpha$ 之函數以 α 之函數表示之** 命 XOP 爲任何正角 α，而 XOP' 爲角 $90^\circ+\alpha$.

於是就每一圖形取 $OP'=OP$，得

$$x'=-y,\quad y'=x,\quad r'=r,$$

其中 x, y, r 及 x', y', r' 分別爲 P 及 P' 之坐標及與原點之距離.





其他諸象限內，亦可作同樣之圖形. 於是在每一象限內，

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\frac{y'}{r'}=\frac{x}{r}=\cos\alpha.$$

$$\cos(90^\circ+\alpha)=\frac{x'}{r'}=\frac{-y}{r}=-\sin\alpha.$$

$$\tan(90^\circ+\alpha)=\frac{y'}{x'}=\frac{x}{-y}=-\cot\alpha.$$

$$\cot(90^\circ+\alpha)=\frac{x'}{y'}=\frac{-y}{x}=-\tan\alpha.$$

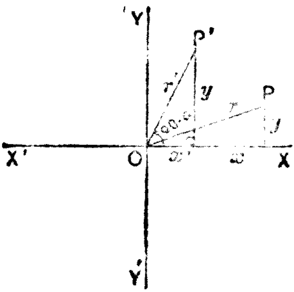
$$\sec(90^\circ+\alpha)=\frac{r'}{x'}=\frac{r}{-y}=-\csc\alpha.$$

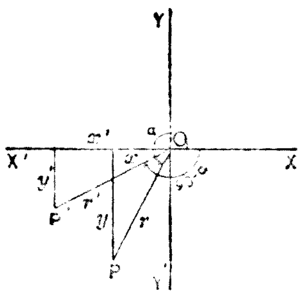
$$\csc(90^\circ+\alpha)=\frac{r'}{y'}=\frac{r}{x}=\sec\alpha.$$

50. **$90^\circ-\alpha$ 之函數以 α 之函數表示之**　命 XOP 為任一正角，而 XOP' 為角 $90^\circ-\alpha$.

於是就每一圖形取 $OP'=OP$，得

$$x'=y,\quad y'=x,\quad r'=r.$$





其他諸象限內，亦可作同樣之圖形。於是在每一象限內，

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\frac{y'}{r'}=\frac{x}{r}=\cos\alpha.$$

$$\cos(90^\circ-\alpha)=\frac{x'}{r'}=\frac{y}{r}=\sin\alpha.$$

$$\tan(90^\circ-\alpha)=\frac{y'}{x'}=\frac{x}{y}=\cot\alpha.$$

$$\cot(90^\circ-\alpha)=\frac{x'}{y'}=\frac{y}{x}=\tan\alpha$$

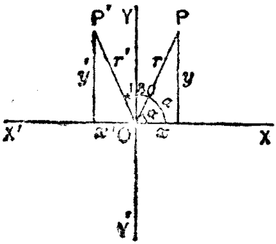
$$\sec(90^\circ-\alpha)=\frac{r'}{x'}=\frac{r}{y}=\csc\alpha$$

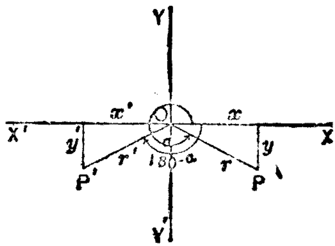
$$\csc(90^\circ-\alpha)=\frac{r'}{y'}=\frac{r}{x}=\sec\alpha.$$

51. **$180^\circ-\alpha$ 之函數以 α 之函數表示之**　命 XOP 爲任何正角,而 XOP' 爲角 $180^\circ-\alpha$.

於是就每一圖形取 $OP'=OP$, 得

$$x'=-x,\quad y'=y,\quad r'=r.$$





其他諸象限內,亦可作同樣之圖形.於是在每一象限內,

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{y'}{r'}=\frac{y}{r}=\sin\alpha.$$

$$\cos(180^\circ-\alpha)=\frac{x'}{r'}=\frac{-x}{r}=-\cos\alpha.$$

$$\tan(180^\circ-\alpha)=\frac{y'}{x'}=\frac{y}{-x}=-\tan\alpha.$$

$$\cot(180^\circ-\alpha)=\frac{x'}{y'}=\frac{-x}{y}=-\cot\alpha.$$

$$\sec(180^\circ-\alpha)=\frac{r'}{x'}=\frac{r}{-x}=-\sec\alpha.$$

$$\csc(180^\circ-\alpha)=\frac{r'}{y'}=\frac{r}{y}=\csc\alpha.$$

52. **簡化定律**　在前四節所論之角度, $-\alpha$, $90^\circ+\alpha$, $90^\circ-\alpha$ 及 $180^\circ-\alpha$ 皆爲 $n\cdot 90^\circ+\alpha$ 或 $n\cdot 90^\circ-\alpha$ 之形式,而 n

爲一整數或爲零。例如，$n=2$，則 $n90°-\alpha$ 代表 $180°-\alpha$。前四節之方法可應用於具有 $n90°\pm\alpha$ 形式之任何角以求得簡化之式，且對於 n 之一切正負整數值，及 α 爲任何角度，都可適用。如詳加研究卽可知下述定律之眞實：

若 n 爲偶數，則 $n90°\pm\alpha$ 之任一函數於數值上等於 α 之同一函數；若 n 爲奇數，則 $n90°\pm\alpha$ 之任一函數在數值上等於 α 之餘函數。除符號外，此可決定一公式。

若 $n90°\pm\alpha$ 之函數爲正，α 爲銳角，則公式之左右兩端具同號；若 $n90°\pm\alpha$ 之函數爲負，α 爲銳角，則公式之左右兩端具異號。如是所得之結果，對於 α 之一切正負值，皆爲合理。

53.　　習　題

以小於 90° 之正角函數表示。

1. $\sin 130°$.

[解]　$\sin 130° = \sin(2\times 90°-50°) = \sin 50°$,

$\sin 130° = \sin(90°+40°) = \cos 40°$.

2. $\cos 259°$

[解]　$\cos 259° = \cos(3\times 90°-11°) = -\sin 11°$,

$\cos 259° = \cos(2\times 90°+79°) = -\cos 79°$.

3. $\tan 110°$.　　4. $\cot 160°$.　　5. $\cos(-20°)$.

6. $\tan(-80°)$.　　7. $\sin(-120°)$.

以 θ 之函數表示：

8. $\sin(810^\circ-\theta)$.　　9. $\tan(360^\circ-\theta)$.

10. $\cot(270^\circ+\theta)$.　　11. $\sin(\theta-90^\circ)$.

12. $\tan(\theta-180^\circ)$.　　13. $\sec(-180^\circ-\theta)$.

14. $\csc(-630^\circ+\theta)$.　　15. $\cos(990^\circ-\theta)$.

試不用簡化定律，而用圖形，將下列各角之三角函數以 α 之函數表出之：

16. $180^\circ+\alpha$.　　17. $270^\circ-\alpha$.

18. $270^\circ+\alpha$.　　19. $360^\circ-\alpha$.

第　五　章

基本關係　線值

54. 於本章內先開展三角函數間之八個基本關係．然後說明每個三角函數可按幾何方法用一單純直線來代表，而給以所謂線值(Line value)．此予三角函數以第二個方面．線值供獻一簡單方法以闡明基本關係，及開展以前用三角比導出之性質．以實論之，線值可視爲三角函數之基本定義，故三角學可以線值爲基礎．且線值亦間有暗示若干三角函數命名之由來者．

基　本　關　係

55. 在一角之諸三角函數間，有若干個重要基本關係存在．今申述之如下：

由定義，

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},$$

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}.\qquad \therefore\quad \sin\alpha=\frac{1}{\csc\alpha}.\qquad (1)$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}.\qquad\therefore\quad\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}.\tag{2}$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x},$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}.\qquad\therefore\quad\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}.\tag{3}$$

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}.\qquad\therefore\quad\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.\tag{4}$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}.\qquad\therefore\quad\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha.\tag{5}$$

由幾何學，　　$y^2+x^2=r^2.$

分別以 r^2, x^2 及 y^2 除之，得

$$\frac{y^2}{r^2}+\frac{x^2}{r^2}=1,\qquad\therefore\quad\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.\tag{6}$$

$$\frac{y^2}{x^2}+1=\frac{r^2}{x^2},\qquad\therefore\quad\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha.\tag{7}$$

$$\frac{x^2}{y^2}+1=\frac{r^2}{y^2},\qquad\therefore\quad\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha.\tag{8}$$

上列的八個公式，稱爲基本關係 (Fundamental relations)．因其係時常用到者，故須記憶之．欲記憶此等基本關係，對於其導出方法須有澈底之了解方可．

56. **指數之用法**　欲表示指數對於三角函數之影響，通常將指數放置於函數之後。例如，在上節之諸公式中，$\sin^2\alpha$ 與 $(\sin\alpha)^2$ 有同一之意義，$\tan^2\alpha$ 與 $(\tan\alpha)^2$ 有同一之意義.

惟對於指數 -1，則為例外。如遇此種情形，恆須以括號表述之。例如，$(\cos\alpha)^{-1}$ 用以表示 $\dfrac{1}{\cos\alpha}$，而 $\cos^{-1}\alpha$ 表有與前完全不同之意義，此於以後詳論之。

57. **三角恆等式**　凡方程式之未知量，以一切值代入都能適合者，稱為恆等方程式或恆等式 (Indentity). 上述八個基本關係即為三角恆等式，許多其他恆等式多由此導出。

恆等式之真實可由下二法成立之：

其一.　由基本關係之一開始，而用基本關係及代數學原理將已知恆等式化出。

其二.　由已知恆等式開始，按運算方法將已知恆等式變換為一個基本關係，或用基本關係及代數學原理，將方程式之一端化為他端。

用以完成簡化之三角變換之選取，通常可視問題中所含有之函數而定。若不能作問題中含有函數之變換，則可將其中每一函數皆化為正弦與餘弦，然後用

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

之關係而簡化之。

若可能的話，根式亟宜避免用之。

習　　題

1. 試證 $\sin\theta\cot\theta=\cos\theta.$

[第一解]　含有之諸函數為 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 及 $\cot\theta$.

今先用基本關係

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{1}$$

以 $\sin\theta$ 乘 (1) 之各端,

$$\sin\theta\cot\theta=\cos\theta.$$

此即所求之恆等式.

[第二解]

先將此等式之左端變換,而不變其右端. 如

$$\begin{array}{r|l}
\sin\theta\cot\theta & \cos\theta \\
\sin\theta\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} & \\
\cos\theta &
\end{array}$$

第 55 節方程式 (5)

代數化簡

故 $\sin\theta\cot\theta=\cos\theta.$

2. 試證 $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}.$

[第一解]

可由下之基本關係開始

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1. \tag{1}$$

以 $\sin\theta\cos\theta$ 除 (1) 之各端,得

$$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}. \tag{2}$$

由此得

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}, \tag{3}$$

或

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}. \tag{4}$$

故得

$$\tan\alpha+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}. \tag{5}$$

[第二解]

先將恆等式之左端變換，而不變其右端。

$\tan\theta+\cot\theta$	$\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$	
$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$		第 55 節方程式 (4), (5)
$\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$		諸分式相加
$\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$		第 55 節方程式 (6)

故

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}.$$

3. 證實恆等式

$$\frac{\sec^2\theta+\csc^2\theta}{\cot^2\theta}=(1+\tan^2\theta)^2.$$

[解] $\tan\theta$ 爲右端之唯一三角函數，故左端之諸函數須皆以 $\tan\theta$ 表示之．如

$\dfrac{\sec^2\theta+\csc^2\theta}{\cot^2\theta}$	$(1+\tan^2\theta)^2$	
$\dfrac{1+\tan^2\theta+1+\cot^2\theta}{\cot^2\theta}$		第 55 節方程式(7)及(8)

$\dfrac{2+\tan^2\theta+\cot^2\theta}{\dfrac{1}{\tan^2\theta}}$	第 55 節方程式 (3)
$2\tan^2\theta+\tan^4\theta+\tan^2\theta\cot^2\theta$	代數化簡
$\tan^4\theta+2\tan^2\theta+1$	第 55 節方程式 (3)
$(\tan^2\theta+1)^2$	代數化簡

此證實此式爲恆等式.

4. 試決定 $\cos\theta\tan^2\theta=\sec\theta-\sin\theta$ 是否爲一恆等式.

[解]

$\cos\theta\tan^2\theta$	$\sec\theta-\sin\theta$
$\cos\theta(\sec^2\theta-1)$	第 55 節方程式 (7)
$\dfrac{\sec^2\theta-1}{\sec\theta}$	第 55 節方程式 (2)
$\dfrac{\sec^2\theta}{\sec\theta}-\dfrac{1}{\sec\theta}$	代數運算
$\sec\theta-\cos\theta$	第 55 節方程式 (2)

因 $\sec\theta-\cos\theta$ 不等於 $\sec\theta-\sin\theta$ (就 θ 之一切值而論),故所設方程式並非一恆等式. 但由此得知

$$\cos\theta\tan^2\theta=\sec\theta-\cos\theta$$

爲一恆等式.

試證下列各恆等式:

5. $\sin\theta=\cos\theta\tan\theta$.　　6. $\tan\theta=\sin\theta\sec\theta$.

7. $\cos\theta=\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta}$.

8 $(1-\sin x)(1+\sin x)=\cos^2 x.$

9 $(\sec x-\tan x)(\sec x+\tan x)=1.$

10. $(\sin x+\cos x)^2=2\sin x\cos x+1.$

11. $\dfrac{\sqrt{1+\cot^2 x}}{\cot x}=\sec x.$

12. $\cos^2\alpha\tan^2\alpha+\sin^2\alpha\cot^2\alpha=1.$

13. 已知 $\cos\alpha=\frac{5}{9}$, α 在第四象限，求其餘各三角函數之值.

〔解〕 因 $\qquad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{25}{81}=\frac{56}{81}.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=-\sqrt{\frac{56}{81}}=-\tfrac{2}{9}\sqrt{14}.$$

又 $$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{2}{9}\sqrt{14}}{\frac{5}{9}}=-\tfrac{2}{5}\sqrt{14};$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{-\frac{2}{5}\sqrt{14}}=-\frac{5}{2\sqrt{14}}=-\frac{6}{28}\sqrt{14};$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\frac{5}{9}}=\tfrac{9}{5};$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{-\frac{2}{9}\sqrt{14}}=-\frac{9}{2\sqrt{14}}=-\frac{9}{28}\sqrt{14};$$

試與第 28 節第 26 題及第 27 題之方法比較之.

14. 已知 $\tan y=4$, y 在第三象限，試求其餘各三角函數之值.

〔解〕 因 $\qquad \sec^2 y=1+\tan^2 y,$

$$\sec y=-\sqrt{1+16}=-\sqrt{17}.$$

又
$$\cot y = \frac{1}{\tan y} = \tfrac{1}{4};$$
$$\csc^2 y = 1 + \cot^2 y = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16};$$
$$\csc y = -\tfrac{1}{4}\sqrt{17};$$
$$\sin y = \frac{1}{\csc y} = \frac{1}{-\tfrac{1}{4}\sqrt{17}} = -\frac{4}{17}\sqrt{17};$$
$$\cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{-\sqrt{17}} = -\frac{1}{17}\sqrt{17}.$$

15. 已知 $\sin\theta = \frac{2}{3}$, θ 終於第二象限，試求其餘各三角函數之值.

16. 已知 $\cot\theta = \frac{7}{10}$, θ 終於第一象限，試求其餘各三角函數之值.

17. 已知 $\sec\theta = -2$, θ 在第三象限內，試求其餘各三角函數之值.

18. 已知 $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$, 試求適合此方程式小於 360° 之諸角之其餘各三角函數.

試證下列各三角恆等式:

19. $\tan^2\theta + \cot^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta - 2$.

20. $\sec^2\beta + \cos^2\beta = \tan^2\beta\sin^2\beta + 2$.

21. $\csc^2\gamma - \sec^2\gamma = \cos^2\gamma\csc^2\gamma - \sin^2\gamma\sec^2\gamma$.

22. $\sin\alpha\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha + \tan\alpha}{\cot\alpha + \csc\alpha}$.

23. $\cot^2\alpha - \cos^2\alpha = \cot^2\alpha\cos^2\alpha$.

24. $\dfrac{1 - 2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$.

25. $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$

26. $\sin^2 x+\operatorname{vers}^2 x=2(1-\cos x)$.

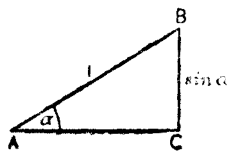
27. $\sec^2 a\csc^2 a-\dfrac{(1-\tan^2 a)^2}{\tan^2 a}=4$.

58. 任一三角函數以其他三角函數表示之 應用三角函數之定義於直角三角形,並將三角形之邊適當地命定後,則任何三角函數極易以其他三角函數表示之.今以數例說明其方法.

1. 以 $\sin\alpha$ 表示其他三角函數.

作一直角三角形 ABC, 並適當地選取其邊,俾應用三角函數 $\sin\alpha$ 之定義於此三角形時,可得出 $\sin\alpha$. 此可命

$AB=1$, 則 $BC=\sin\alpha$,



因 $\sin\alpha=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{BC}{1}=BC$.

由直角三角形,

$$AC=\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

於是,按第 30 節之基本定義,得

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\sin\alpha;$$

$$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\sqrt{1-\sin^2\alpha};$$

$$\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}};$$

$$\cot\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha=\frac{AB}{AC}=\frac{}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}};$$

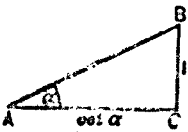
$$\csc\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

2. 以 cot α 表出其他諸三角函數.

作一直角三角形ABC,並適當地選取其邊,俾應用cot α之定義於此三角形時,可得出 cot α 此可命

$BC=1$, 則 $AC=\cot\alpha$

於是 $AB=\sqrt{1+\cot^2\alpha}$.



由基本定義,得

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}};$$

$$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}};$$

$$\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\cot\alpha};$$

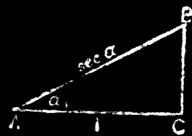
$$\cot\alpha=\frac{AC}{BC}=\cot\alpha;$$

$$\sec\alpha=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha};$$

$$\csc\alpha=\frac{AB}{BC}=\sqrt{1+\cot^2\alpha}$$

3. 以 sec α 表出其他諸三角函數.

作一直角三角形 ABC 並適當地選取其邊,俾應用 $\sec\alpha$ 之定義於此三角形時,可得出 $\sec\alpha$. 此可命



$$AC=1,\quad 則\quad AB=\sec\alpha$$

於是 $\quad BC=\sqrt{\sec^2\alpha-1}.$

由基本定義得

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha};$$

$$\cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sec\alpha};\quad 等等.$$

4. 由圖形導出之上列各恆等式,其 α 角均須小於 90°,但其關係卻是普徧的,且吾人若給予其根式以適當之符號,則對於任何數值之角皆可應用. 例如,若 α 爲大於 180° 而小於 360° 之角,則在

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$$

關係中之根式,應取其負號方可.

習　題

1. 以 $\cos\alpha$ 表出其他各三角函數.
2. 以 $\tan\alpha$ 表出其他各三角函數.
3. 以 $\csc\alpha$ 表出其他各三角函數.

59. 三角方程式　凡方程式之未知量,以一切值代入並不都能適合,而祇爲某個特殊值所適合者,稱爲條件方程式.

(a) 若三角方程式含有同一角之不同三角函數者，往往可應用基本關係將方程式簡化而解之．例如，

$$\sin\alpha=\cos\alpha$$

可書為 $$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=1,\quad 或\quad \tan\alpha=1.$$

$$\therefore\quad \alpha=45^\circ\quad 或\quad 225^\circ.$$

(b) 有若干方程式可將一切項移於方程式之左端，分解因式，然後令每一因式等於零而解之．例如，

$$2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha$$

可書為

$$\sin\alpha(2\sin\alpha-1)+\sqrt{3}\cos\alpha(1-2\sin\alpha)=0,$$

或 $$(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha)(2\sin\alpha-1)=0.$$

此方程式對於

$$\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=0,\quad 或\quad 2\sin\alpha-1=0$$

皆為適合。

故 $$\tan\alpha=\sqrt{3},\quad 或\quad \sin\alpha=\tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \alpha=60^\circ,\ 240^\circ,\quad 或\quad \alpha=30^\circ,\ 150^\circ.$$

(c) 若並無其他方法可用，則用基本關係將方程式變換為祇含一個函數之方程式．於是按代數方法就含有函數而解之，由是則得一角之諸值．例如，

$$10\cos^3\alpha\tan\alpha-9\cos^2\alpha-\frac{2}{\csc\alpha}-10\sin\alpha+9=0,$$

$$10\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-9(1-\sin^2\alpha)-12\sin\alpha+9=0,$$

$$10\sin\alpha-10\sin^3\alpha+9\sin^2\alpha-12\sin\alpha=0.$$

$\therefore \quad \sin\alpha=0,$ 或 $10\sin^2\alpha-9\sin\alpha+2=0.$

由此，得 $\sin\alpha=0,\ \frac{2}{5},$ 或 $\frac{1}{2}.$

$\therefore \quad \alpha=0^\circ,\ 23^\circ35',\ 30^\circ,\ 150^\circ,\ 156^\circ25',$ 或 $180^\circ.$

當小於 360° 之每一正角已決定可適合此方程式時，則此三角方程式視爲可完全解出．凡與此等角有同終邊之一切其他角皆適合此方程式．

於三角方程式之解中，常遇額外之根．此可代入原方程式以檢取之．

就小於 90° 之角以解下列各三角方程式：

1 $5\sin x+8=3(4-\sin x).$

2 $\sin u-\cos u=0.$

3 $2\cos^2 x-3\cos x+1=0.$

4 $(\tan\theta-1)(\tan\theta-\sqrt{3})=0.$

5 解 $\sin x=\cot x$ 求 $\sin x.$

下列諸習題中，有者爲恆等式，有者爲方程式．試就小於 180° 之角證實其中的恆等式，並解其中的方程式．

6. $\sin^4 x=1-2\cos^2 x+\cos^4 x.$

7. $\sin^4 x=2-6\cos^2 x+\cos^4 x.$

8. $(\sqrt{3}+1)\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}+\dfrac{2\cos\theta}{\cot\theta}=\sin\theta+\cos\theta.$

9. $2\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta}=\sin\theta+\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

10. $\tan u+\cot u=\sec u\csc u$

11. $2\sin^2 y\csc y+3\csc y=7$.

就小於 180° 之角，解下列各三角方程式：

12. $2\cos^2\alpha-3\sin\alpha=0$.

13. $\sec^2\alpha+\cot^2\alpha=4\frac{1}{3}$.

14. $1+\tan^2 x-4\cos^2 x=0$.

15. $\tan x+\cot x=2$.

16. $2\sin^2 x+3\cos x=0$.

17. $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$.

18. $\csc^2 x-4\sin^2 x=0$.

19. $\cot x+\csc^2 x=3$.

線　　　　值

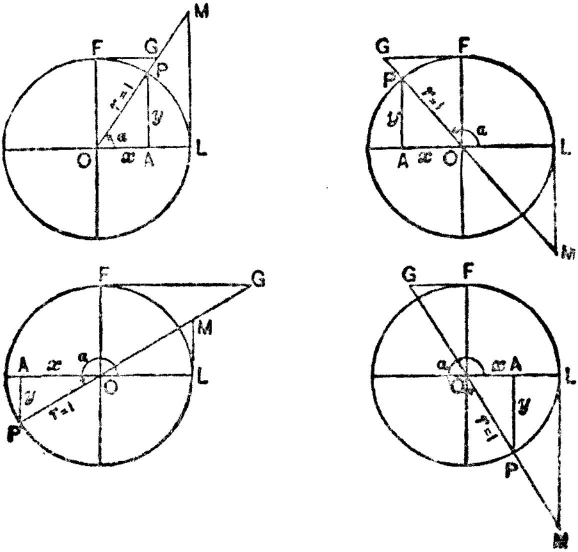
60. 三角函數之直線代表法　以前祇就比之觀點研究一角之三角函數；但每一函數亦可以一直線代其數值與符號.

命 LOP 為一角. 取 $OP=1$. 作 P 點之縱坐標及橫坐標. 以 O 為中心，以 OP 為半徑作一圓. 於第一象限及第二象限之開始點 L 及 F 分別作二切線，並延長之，使與終線相交，或與終線之延線相交於 M 及 G.

於是

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{AP}{OP}=\frac{AP}{1}=AP,$$

或
$$\sin\alpha=AP$$



$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{OA}{OP}=\frac{OA}{1}=OA,$$

或 $$\cos\alpha=OA.$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{AP}{OA}=\frac{LM}{OL}=LM.$$

或 $$\tan\alpha=LM$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}=\frac{OA}{AP}=\frac{FG}{OF}=FG.$$

或 $$\cot\alpha=FG.$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{OP}{OA}=\frac{OM}{OL}=OM.$$

或 $$\sec\alpha=OM.$$

$$\csc a=\frac{r}{y}=\frac{OP}{AP}=\frac{OG}{OF}=OG.$$

或 $$\csc a=OG.$$

於是諸三角函數可以線分 AP, OA, LM, FG, OM 及 OG 代表之．顯而易見者，此等線分代表三角函數之數值．亦代表三角函數之符號．按第 6 節及第 13 節之所述，線分 AP 及 LM 當自 x 軸向上方作者爲正，作向下方者爲負；線分 OA 及 FG 作自 y 軸而向右方者爲正，作向左方者爲負；線分 OM 及 OG 與角之終線相合者爲正，與角之終線的延線相合者爲負．

每一三角函數之符號顯由代表函數之線分而決定，因在各象限內，規定函數之比爲正，則線分爲正，而規定函數之比爲負，則線分亦爲負．例如，在每一象限內，LM 與比 $\frac{y}{x}$ 有同號，其他函數亦然．故線分旣可代表三角函數之數值，亦可代表三角函數之符號．

凡線分可代表三角函數者，稱爲三角函數之線值．

習　　題

1. 試作一終於第三象限之角之線值．

2. 試作一終於第四象限之角之線值．

3. 試用線值推出 $90°+x$ 之諸函數與 x 之諸函數間之關係．

〔提示〕 作二圖，一圖表角 $90°+x$，一圖表角 x．

4 試用線值推出 $180°-x$ 之函數與 x 之函數間之關係.

5. 試用線值推出 $90°-x$ 之函數與 $270°+x$ 之函數間之關係.

6. 試用線值表出 vers α 及 covers α.

61 **用線值表出三角函數之變化** 當角自 $0°$ 變化至 $360°$ 時,用線值代表函數之變化最為簡易. 例如在第 60 節之圖形中,當 P 點沿以單位長度為半徑所作的圓而移動時,諸線分 AP, OA, LM 等之變化,即分別代表正弦,餘弦,正切等之變化. 考數圖形,在各象限中之角,有三個或四個不同的值,即說明此種變化.

習題

用線值方法,作出下列各函數自 $0°$ 變化至 $360°$ 間之諸變化:

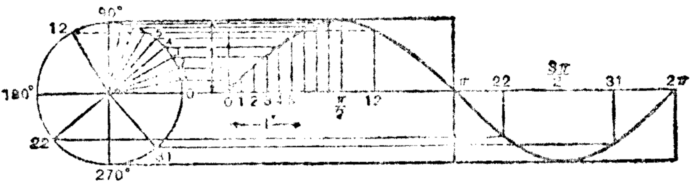
1. $\sin\alpha$.	2. $\cos\alpha$.	3 $\tan\alpha$.
4. $\cot\alpha$.	5. $\sec\alpha$	6. $\csc\alpha$.

62. **由線值而得出三角函數之圖** 欲利用線值而作一三角函數之圖,通常將角設於橫坐標之軸上,而用以單位長度為半徑所作之圓弧量此諸角. 於是三角函數之值即被作成縱坐標.

吾人可選取任一直線爲橫坐標軸，並按欲作之圖之位置而任意選取原點．再在圓周上選取一適當點爲原點，由此原點以量出諸弧．如是即可由線值作圖．下列諸例，一說明作 $\sin\alpha$ 之方法，一說明作 $\cot\alpha$ 之方法．

試將此處所述之方法與第 44 節之方法比較之．

1 $\sin\alpha$ 之圖．

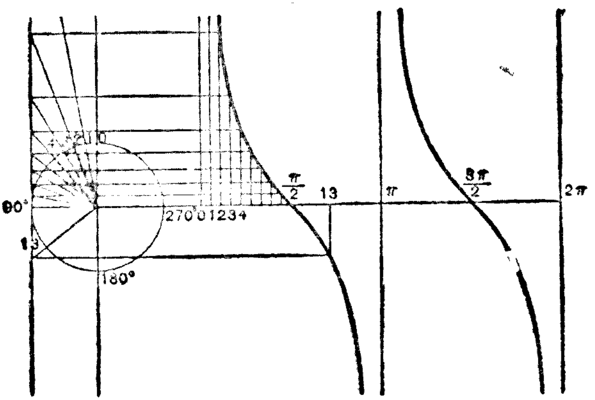


作一以單位長度爲半徑之圓，並用量角器量出 10°, 20°, 30° 等角．作此等角之線值，此可於水平軸上任選一點爲原點，由此點，對應於標出 01, 02, 03 等諸角，量出 01, 02, 03 等橫坐標；於圖中，水平軸上自 0 至 2π 的一段等於圓之圓周．由圓射影至圖上之許多平行線即爲 10°, 20°, 30° 等角之正弦之線值．此等線值亦可用圖規代射影法而量出．最後將 $\sin\alpha$ 的射影線值之上端按順序而連結之，即得正弦曲線．

2. $\cot\alpha$ 之圖．

作一以單位長度爲半徑之圓，並如作 $\sin\alpha$ 之圖，量出 10°, 20°, 30° 等角．若始線取水平線，則 $\cot\alpha$ 之線值亦爲水平線．欲射影 $\cot\alpha$ 在垂直線上，則始線須爲垂直線，如是始

可使 $\cot\alpha$ 之線值亦爲垂直線.然後如 $\sin\alpha$ 作出其射影線.須切記者,在第三及第四象限中, $\cot\alpha$ 之線值不能由終線決定,而須以終線之負方向延線決定之.



另一方法,又可將 $\cot\alpha$ 之線值如第60節就每一角作出,而用圓規量取,置於橫坐標軸上許多適當之點作縱坐標.

習　　題

1. 用線值,作 $\tan\alpha$ 自 0 至 π 弧之圖.

[提示]　爲便利起見,作此圖可選取通過圓心及圓周上的某定點(用作量弧或角之原點者)的一直線爲橫坐標軸,如作 $\sin\alpha$ 之圖時一樣.

2. 用線值,作 $\sin\alpha$ 自 0 至 π 弧之圖.

[提示]　此可按下列二法爲之:

(a) 如作 $\cot\alpha$ 之圖而選取橫坐標軸.

(b) 如作 $\sin\alpha$ 之圖而選取橫坐標軸,並用兩脚規量取 $\cos\alpha$ 之値,然後將此等值作縱坐標.

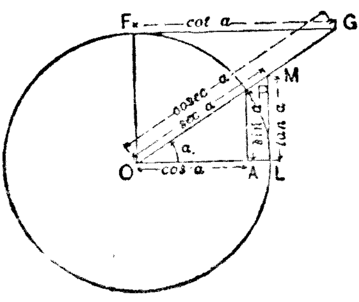
3　用線值,作 $\sin\alpha$ 自 $-\pi$ 至 π 强之圖.

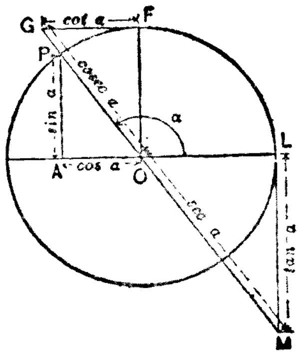
4.　作 $2\sin\alpha$ 自 0 至 π 强之圖.

5.　作 $\sin 2\alpha$ 自 0 至 π 强之圖.

6.　作 $\tan\alpha$ 自 $-\pi$ 至 π 强之圖.

63　按線值而得之基本關係　用線值則使第 55 節之基本關係極易得出,且極易記憶.





例如:

由三角形 OAP,

$$\overline{AP}^2+\overline{OA}^2=\overline{OP}^2,\quad \text{或}\quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

由三角形 OLM,

$$\overline{LM}^2+\overline{OL}^2=\overline{OM}^2,\quad \text{或}\quad \tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha.$$

由三角形 OGF,

$$\overline{FG}^2+\overline{OF}^2=\overline{OG}^2,\quad 或\quad \cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha.$$

由定義,

$$\tan\alpha=\frac{AP}{OA}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad 或\quad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\cot\alpha=\frac{OA}{AP}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad 或\quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$\sec\alpha=\frac{OP}{OA}=\frac{1}{\cos\alpha},\quad 或\quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

$$\csc\alpha=\frac{OP}{AP}=\frac{1}{\sin\alpha},\quad 或\quad \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

$$\cot\alpha=\frac{OA}{AP}=\frac{OL}{LM}=\frac{1}{\tan\alpha},\quad 或\quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}.$$

此等公式之導出方法,對於第三或第四象限之角亦可同樣應用;是以對於 α 之一切值,此等公式皆爲眞實.

欲記憶此等公式,其最易之方法,可就第一象限內之圖形作極清楚之意像圖,並按比之定義及畢塔哥拉斯氏定理,直接由圖中讀出每一公式.

習題一 試用線值求出在第三象限內之一角之基本關係.

習題二 試用線值求出終於第四象限內之一角之基本關係.

64. 習 題

證明下列各三角恆等式:

1　$\dfrac{1}{\cot x+\tan x}=\sin x\cos x.$

2　$\cos^2\alpha\,(1+\cot^2\alpha)=\cot^2\alpha$

3.　$\sin\theta\cot^2\theta=\csc\theta-\sin\theta.$

4.　$\tan\alpha-\tan\alpha\sin^2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha.$

5.　$\cos\alpha\tan^2\alpha=\sec\alpha-\cos\alpha$

6.　$\dfrac{\cos\alpha}{\tan\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cot\alpha}=\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}.$

7.　$\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=1-\sin\alpha\cos\alpha.$

8　$\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\tan x}{\cot x}+\dfrac{\sec x}{\csc x}=\dfrac{2\cot x+1}{\cot^2 x}.$

9　$\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{\sec x-1}{\sec x+1}.$

10.　$\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}.$

11　$\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}.$

12.　$2\sin y\cos^2 y+(2\cos^2 y-1)\sin y$

$$=3\sin y-4\sin^3 y.$$

13　$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

14　$\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=\sec^2\alpha\csc^2\alpha.$

15.　$\dfrac{\tan x+\tan y}{\sec x-\sec y}=\dfrac{\sec x+\sec y}{\tan x-\tan y}.$

16　$\tan^4 u-\cot^4 u=(\tan^2 u+\cot^2 u)(\sec^2 u-\csc^2 u).$

17. $\dfrac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y}=\tan x\tan y.$

18. $\dfrac{\tan x-\tan y}{\cot x-\cot y}=-\tan x\tan y.$

19. $\dfrac{\tan x+\cot y}{\cot x+\tan y}=\dfrac{\tan x}{\tan y}.$

20. 將 $\sin^2 x-\cos^2 x$ 以 $\tan x$ 表出之.

21. 將 $\operatorname{vers} x-\operatorname{covers} x$ 以 $\sin x$ 表出之.

22. 將 $\cot^2 x+\csc^2 x$ 以 $\cos x$ 表出之.

23. 將 $\dfrac{\operatorname{vers} x}{\operatorname{covers} x}$ 以 $\tan x$ 表出之.

24. 將 $\tan^2 x+\sec^2 x$ 以 $\cot x$ 表出之.

25. 將 $(4\sin^3\theta-3\sin\theta)(2\cos^2\theta-1)$

$$+(3\cos\theta-4\cos^3\theta)(2\sin\theta\cos\theta)$$

以 $\sin\theta$ 表出之.

26. 已知 $\sin\theta=a$, 試求 θ 之其餘各函數.

27. 已知 $\cot\theta=b$, 試求 θ 之其餘各函數.

28. 將 θ 之每一三角函數以 $\cos\theta$ 表出之.

29. 將 θ 之每一三角函數以 $\tan\theta$ 表出之.

30. 簡化 $(a+b)\sin 30^\circ-b\cos 60^\circ+a\tan 180^\circ$.

31. 簡化

$$l\sin(270^\circ-x)+m\cos(180^\circ+x)+n\sin(90^\circ-x).$$

32. 簡化 $a\sin 135^\circ+(a-b)\cos 225^\circ+b\cos 315^\circ$.

33. 簡化 $\tan(-120°)+\cot 150°-\tan 210°+\cot 240°$.

試求適合下列各方程式而小於 180° 之 θ 之正值:

34. $\sin\theta\cos\theta=0$.　　35. $\sin\theta+\cos\theta=0$.

36. $\sin\theta(2\sin\theta-1)(2\cos\theta-1)=0$.

37. $\sin\theta+\cos\theta\cot\theta=0$.

38. $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$.

39 $2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta-2\cos\theta=1$.

40. $2\cos\theta+\sec\theta=3$.　　41. $\sec\theta+\tan\theta=2$.

42. $2\sin\theta+5\cos\theta=2$.

43. $1+\sin^2\theta=3\sin\theta\cos\theta$.

44. $\tan^4\theta-4\tan^2\theta-5=0$.

45. 問何種小於 180° 之負角能適合方程式

$$\sin^2 x+\sin x=\cos^2 x-1?$$

46. 已知 $9\cos u+9\sin u=11$, 試求 $\tan u$.

47. 已知 $\tan^2 x-5\sec x+7=0$, 試求 $\sin x$.

試求適合下列各方程式而小於 360° 之 θ 之正值:

48. $\sin\theta=-\cos 285°$.　　49. $\tan\theta=\cot(-144°)$.

50. $\cos(-\theta)=\sin 190°$.　　51. $\sin\theta=-\sin 50°$.

52. 若 $\sin 122°=k$, 試證

$$\tan 32°=\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}.$$

53. 若 $\cot 255°=a$, 試證

$$\cos 345°=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

54 若 $\cos(-100^\circ)=k$, 試證

$$\tan 80^\circ = -\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}.$$

解下列各方程式以求 α 之任一三角函數:

55. $2\sin\alpha+\csc\alpha=1.$

56. $\csc\alpha\cot\alpha=\frac{5}{3}.$

57. $2\sin\alpha+\cos^2\alpha=1.$

58 $\tan\alpha+4\sec\alpha=5.$

59 $\tan\alpha+\cot\alpha=2.$

60. 已知 $\sin u=k\sin v$ 及 $\tan u=l\tan v$. 試求 $\sin u$ 及 $\sin v$.

第六章

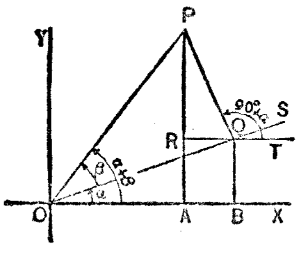
二角之和之函數

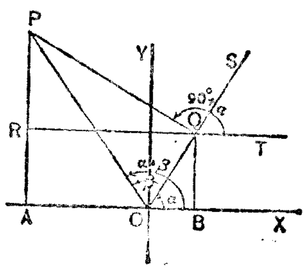
二倍角　半角

65. 吾人既詳論一角之三角函數之性質與關係，後又證明 $n\,90\pm\alpha$ 角之函數依 α 角之函數而定。

本章專論二個獨立角之和之函數與單獨角之函數之關係，並演繹成若干個相關公式。

66. 將二銳角和之正弦以各角之正弦與餘弦表出之。





命 α 及 β 為任何所設銳角。

依第 14 節之方法作角 $(\alpha+\beta)$。

於是如圖一所示，$(\alpha+\beta)$ 爲銳角；如圖二所示，$(\alpha+\beta)$ 爲鈍角.

於 $(\alpha+\beta)$ 角之終線上，由任一點 P, 作 PA 垂直於 OX, PQ 垂直於 OS. 通過 Q 作 RQT 平行於 OX. QB 垂直於 OX.

於是角 TQP 等於 $90^\circ+\alpha$.

按定義

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{AP}{OP}=\frac{AR+RP}{OP}=\frac{BQ}{OP}+\frac{RP}{OP}$$

$$=\frac{BQ}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{RP}{QP}\cdot\frac{QP}{OP}.$$

但 $\frac{BQ}{OQ}=\sin\alpha$, $\frac{OQ}{OP}=\cos\beta$, $\frac{RP}{QP}=\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$,

而 $\frac{QP}{OP}=\sin\beta$.

故 $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

問題一 當 α 或 β 爲 90°, 試證公式 (1) 爲眞實.

問題二 當 α 與 β 皆爲 90°, 試證公式 (1) 爲眞實.

67. 將二銳角和之餘弦以各角之正弦與餘弦表出之.

仍以上節之二個圖形，按定義得

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OA}{OP}=\frac{OB+BA}{OP}\text{(第 2 節)}=\frac{OB}{OP}+\frac{QR}{OP}$$

$$=\frac{OB}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{QR}{QP}\cdot\frac{QP}{OP}.$$

但 $\frac{OB}{OQ}=\cos\alpha$, $\frac{OQ}{OP}=\cos\beta$.

$$\frac{QR}{QP}=\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha,\quad \frac{QP}{OP}=\sin\beta.$$

故 $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \tag{1}$$

問題一　若 α 或 β 為 90°，試證公式 (1) 為真實.

問題二　若 α 及 β 皆為 90°，試證公式 (1) 為真實.

68 用圖形說明二角之和之正弦與餘弦　下列附圖，其作法大抵如上節之圖形，可說明 $\sin(\alpha+\beta)$ 與 $\cos(\alpha+\beta)$ 二個基本公式. 按作法，$OP=1$. 學者應知

$$QP=\sin\beta,$$

$$OQ=\cos\beta,$$

$$RQ=\sin\alpha\sin\beta,$$

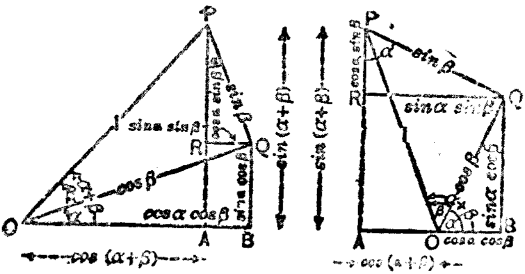
$$OB=\cos\alpha\cos\beta,$$

$$PR=\cos\alpha\sin\beta.$$

$$AR=BQ=\sin\alpha\cos\beta,$$

$$AP=\sin(\alpha+\beta),$$

$$OA=\cos(\alpha+\beta).$$



於是，於各圖中，

$$AP=AR+RP,$$

或 $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

同理，於各圖中，

$$OA=OB-RQ,$$

須知在第二圖中，OA 爲負，

或 $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

69. 由最後三節求得之公式最爲重要，因有許多其他公式皆由是推得也。求此等公式時，可視 α 及 β 爲正銳角，但事實上此等公式對於 α 與 β 之一切値皆爲真實，此可以幾何方法或解析方法證明之。

今述其解析證法如下：

70. 試證

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \tag{1}$$

及 $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \tag{2}$$

對於 α 與 β 之一切値，皆爲眞實。

其一 試證 α 可爲 α' 所替代，$\alpha'=\alpha+90°$.

命 $\alpha'=\alpha+90°$，α 爲銳角。

α 自 $0°$ 變化至 $90°$ 時，則 α' 自 $90°$ 變化至 $180°$.

又 $$\sin\alpha'=\sin(\alpha+90°)=\cos\alpha, \tag{3}$$

$$\cos\alpha'=\cos(\alpha+90°)=-\sin\alpha. \tag{4}$$

今　$\sin(\alpha'+\beta)=\sin(90^\circ+\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

因 α 與 β 俱爲銳角，$\cos(\alpha+\beta)$ 可按 (2) 而展開之，是以　$\sin(\alpha'+\beta)=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

故，按 (3) 及 (4)，

$$\sin(\alpha'+\beta)=\sin\alpha'\cos\beta+\cos\alpha'\sin\beta. \tag{5}$$

同理，

$$\cos(\alpha'+\beta)=\cos(90^\circ+\alpha+\beta)=-\sin(\alpha+\beta)$$
$$=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

故，按 (3) 及 (4)，

$$\cos(\alpha'+\beta)=\cos\alpha'\cos\beta-\sin\alpha'\sin\beta. \tag{6}$$

公式 (5) 與 (6) 證明在 (1) 與 (2) 內，一角 α 可擴大至 180°.

其二　試將 α 可爲 α'' 所替代，$\alpha''=\alpha+180^\circ$.

命 $\alpha''=\alpha+180^\circ$.

α 自 0° 變化至 180° 時，則 α'' 自 180° 變化至 360°.

又　$$\sin\alpha''=\sin(\alpha+180^\circ)=-\sin\alpha, \tag{7}$$

$$\cos\alpha''=\cos(\alpha+180^\circ)=-\cos\alpha. \tag{8}$$

今　$\sin(\alpha''+\beta)=\sin(180^\circ+\alpha+\beta)=-\sin(\alpha+\beta)$.

因 α 小於 180° 而 β 爲銳角，$\sin(\alpha+\beta)$ 可按 (1) 展開之．是以

$$\sin(\alpha''+\beta)=-\sin(\alpha+\beta)=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

故，按 (7) 及 (8)，

$$\sin(\alpha''+\beta)=\sin\alpha''\cos\beta+\cos\alpha''\sin\beta \qquad (9)$$

同理，

$$\cos(\alpha''+\beta)=\cos(180°+\alpha+\beta)=-\cos(\alpha+\beta)$$
$$=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

故，按 (7) 及 (8)，

$$\cos(\alpha''+\beta)=\cos\alpha''\cos\beta-\sin\alpha''\sin\beta \qquad (10)$$

公式 (9) 與 (10)，卽證明 (1) 與 (2) 之一角 α 可展至 $360°$.

其三　同理可證 β 自 $0°$ 變至 $360°$，α 有 $0°$ 至 $360°$ 間之任一值時，(1) 與 (2) 皆爲眞實．由此極易推知 (1) 與 (2) 對於 α 與 β 之一切正值皆爲眞實.

其四　用下之代入法可證明公式 (1) 與 (2) 對於 α 或 β 爲正負值時皆爲眞實:

$$\alpha'=\alpha-n\,360°,\quad \beta'=\beta-n\,360°,$$

其中 n 爲任一整數。

是以 (1) 與 (2) 對於 α 與 β 之一切正負值皆爲眞實。

71.　任何二所設角之和之正切以所設角之正切表出之。

命 α 及 β 爲所設角。

於是　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

將最後一分式以 $\cos\alpha\cos\beta$ 除其分子與分母，並簡化之，得

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

72. 任何二所設角之和之餘切以所設角之餘切表出之.

命 α 及 β 爲二所設角.

於是 $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}.$

以 $\sin\alpha\sin\beta$ 除最後一分式之分子與分母,並簡化之,

得
$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}.$$

73. 加法公式 (addition formulas)　爲參考之便利起見,將二角和之公式集合之,得

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \tag{1}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \tag{2}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}, \tag{3}$$

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}. \tag{4}$$

74. 求二所設角之差之正弦,餘弦,正切及餘切.

因第73節公式對於 α 及 β 之一切值皆爲眞實, 故若以 $-\beta$ 替代 β 亦必眞實.

是以

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta).$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta).$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot(-\beta)-1}{\cot(-\beta)+\cot\alpha}.$$

惟

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta \qquad \cos(-\beta)=\cos\beta$$

$$\tan(-\beta)=-\tan\beta, \qquad \cot(-\beta)=-\cot\beta.$$

故上列諸公式可改書爲

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \tag{1}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \tag{2}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \tag{3}$$

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}. \tag{4}$$

75. 習　題

1. 求 $\sin 75^\circ$.

[解]　$75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1).$$

2. 求 $\cos 75^\circ$.　　3. 求 $\sin 15^\circ$.

4. 求 $\cos 15^\circ$.　　5. 求 $\tan 75^\circ$.

6. 求 $\cot 15^\circ$.　　7. 求 $\sin(90^\circ-\beta)$.

8. 求 $\tan(90^\circ+\alpha)$.　　9. 求 $\cos(180^\circ-\alpha)$.

10. 求 $\sec 15°$.　　　　11. 求 $\csc(90°+\alpha)$.

76. 二倍角 double angles)　求二倍所設角之正弦，餘弦，正切，及餘切，以所設角之函數表示之.

由第 73 節之公式，命 $\beta=\alpha$，簡化後得，

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{1}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \tag{2}$$

$$=1-2\sin^2\alpha. \tag{3}$$

$$=2\cos^2\alpha-1. \tag{4}$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \tag{5}$$

$$\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}. \tag{6}$$

欲明白表出此等公式之眞意，可由下列二觀點敍述之.

若以 α 爲所討論之角，則公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

可謂爲：一角二倍之正弦等於二倍該角之正弦乘以該角之餘弦.

若以 2α 爲所討論之角，則同一公式可謂爲：一角之正弦等於二倍半角之正弦乘以半角之餘弦.

於是得

$$\sin\alpha=2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha \tag{7}$$

同理，若以 α 爲所討論之角，則公式

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

可謂爲：一角二倍之餘弦等於該角餘弦之平方減去該角正弦之平方。

若以 $2a$ 爲所討論之角，則同一公式可謂爲：一角之餘弦等於該半角餘弦之平方減去該半角正弦之平方。

於是得

$$\cos a=\cos^2\tfrac{1}{2}a-\sin^2\tfrac{1}{2}a. \tag{8}$$

同理，

由 $\cos 2a=1-2\sin^2 a$，得

$$\cos a=1-2\sin^2\tfrac{1}{2}a. \tag{9}$$

由 $\cos 2a=2\cos^2 a-1$，得

$$\cos a=2\cos^2\tfrac{1}{2}a-1, \tag{10}$$

由 $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$，得

$$\tan a=\frac{2\tan\frac{1}{2}a}{1-\tan^2\frac{1}{2}a}, \tag{11}$$

由 $\cot 2a=\dfrac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$，得

$$\cot a=\frac{\cot^2\frac{1}{2}a-1}{2\cot\frac{1}{2}a}. \tag{12}$$

77. 半角 求半所設角之正弦，餘弦，正切，及餘切，以所設角之函數表出之。

由第 76 節公式 (9)，得

$$\cos a=1-2\sin^2\frac{a}{2},$$

或
$$\sin\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}. \tag{1}$$

由第76節公式(10)，得
$$\cos a=2\cos^2\frac{a}{2}-1,$$

或
$$\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}. \tag{2}$$

由(1)及(2)，
$$\tan\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}=\frac{\sin a}{1+\cos a}, \tag{3}$$

及
$$\cot\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}=\frac{1+\cos a}{\sin a}. \tag{4}$$

每一公式之正號或負號之選取，以適合於 $\frac{a}{2}$ 之函數之符號爲準，即全視 $\frac{a}{2}$ 所在之象限而定。

此等公式可由二觀點考察之。例如，公式(1)可謂爲：半角之正弦等於一分式之平方根，該分式之分子爲1減去該角之餘弦，而分母爲2；或，一角之正弦等於一分式之平方根，該分式之分子爲1減去二倍該角之餘弦，而分母爲2.

習　　題

1. 設 $\sin 30°=\frac{1}{2}$ 及 $\cos 30°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$，試求 $\sin 60°$，$\cos 60°$，$\tan 60°$，及 $\cot 60°$ 等之值.

2. 設 $\sin 60°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 及 $\cos 60°=\frac{1}{2}$，試求 $\sin 30°$，$\cos 30°$，$\tan 30°$，及 $\cot 30°$ 之值.

3. 試求 $\sin 22\frac{1}{2}°$, $\cos 22\frac{1}{2}°$, $\tan 22\frac{1}{2}°$, 及 $\cot 22\frac{1}{2}°$.

4. 設 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, 試求 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ 及 $\cot 2\alpha$.

5. 設 $\sin\theta=\dfrac{8}{17}$, 試求 $\sin\frac{1}{2}\theta$ $\cos\frac{1}{2}\theta$, $\tan\frac{1}{2}\theta$, 及 $\cot\frac{1}{2}\theta$.

6. 設 $\tan\gamma=3$, 試求 $\sin\frac{1}{2}\gamma$, $\cos\frac{1}{2}\gamma$, $\tan\frac{1}{2}\gamma$, 及 $\cot\frac{1}{2}\gamma$.

7. 設 $\csc\beta=\dfrac{29}{21}$, β 爲終於第三象限內之角；試求 $\sin 2\beta$, $\cos 2\beta$, $\tan 2\beta$, 及 $\cot 2\beta$.

78. 求任何二角正弦之和及差，與任何二角餘弦之和及差.

由第 73 節及第 74 節之公式，施以加減，則得，

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta.$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta.$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta.$$

命 $\alpha+\beta=\gamma$ 及 $\alpha-\beta=\partial$, 解出 α 及 β, 則得 $\alpha=\frac{1}{2}(\gamma+\partial)$, 及 $\beta=\frac{1}{2}(\gamma-\partial)$. 將此等值代入上列之方程式，卽得

$$\sin\gamma+\sin\partial=2\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\partial)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\partial). \tag{1}$$

$$\sin\gamma-\sin\partial=2\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\partial)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\partial). \tag{2}$$

$$\cos\gamma+\cos\partial=2\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\partial)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\partial). \tag{3}$$

$$\cos\gamma-\cos\partial=-2\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\partial)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\partial). \tag{4}$$

方程式 (1), (2), (3) 及 (4) 可由二個觀點讀出之.

將 γ 及 ∂ 視爲二所設角，則 (1) 可述之如下：二角之正弦之和，等於二所設角的半和之正弦與二所設角的半差之

餘弦之乘積之二倍.

例如，　$\sin 6x+\sin 4x=2\sin 5x\cos x$.

將 $\frac{1}{2}(\gamma+\partial)$ 及 $\frac{1}{2}(\gamma-\partial)$ 視爲二所設角，則其和顯然爲 γ 而其差爲 ∂. 於是，先讀右端，則 (1) 可謂爲：二倍任一角之正弦乘以任一他角之餘弦，等於二角和之正弦加以二角差之正弦.

例如，　$2\sin 20^\circ\cos 5^\circ=\sin 25^\circ+\sin 15^\circ$.

習　題

1. 試證 $\sin 35^\circ+\sin 25^\circ=\cos 5^\circ$.

2. 試證 $\cos 70^\circ+\cos 20^\circ=\sqrt{2}\cos 25^\circ$.

3. 試證 $\sin 4x+\sin 2x=2\sin 3x\cos x$.

4. 將 $\sin 50^\circ+\sin 10^\circ$ 以乘積表出之.

5. 將 $\cos 80^\circ-\cos 20^\circ$ 以乘積表出之.

6. 將 $\sin 25^\circ\cos 11^\circ$ 以和或差表出之.

7. 將 $\cos 35^\circ\sin 23^\circ$ 以和或差表出之.

8. 將 $\sin 6x+\sin 4x$ 以乘積表出之.

9. 將 $\cos 2x+\cos x$ 以乘積表出之.

10. 試證 $\cos(-50^\circ)-\cos(-70^\circ)=\sin 10^\circ$.

11. 試證 $\dfrac{\sin 110^\circ+\sin 40^\circ}{\cos 110^\circ+\cos 40^\circ}=\tan 75^\circ$.

12. 試證 $\dfrac{\sin 40^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}=-\sqrt{3}$

13. 試證 $\dfrac{\sin 70^\circ-\sin 20^\circ}{\sin 70^\circ+\sin 20^\circ}=\tan 25^\circ.$

14. 試證 $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$

79. **方程式及恆等式**　本章求得之公式對於角之一切值皆爲眞實；故此等公式爲三角恆等式．利用此諸恆等式可成立其他許多恆等式。第 57 節之附註，論述建立恆等式時基本關係之用法，卽可應用於此處．

本章之恆等式亦可用以解三角方程式．藉此種恆等式可將含有倍角函數之方程式變形爲含有單角函數之方程式．於是將此變形方程式按第 59 節所指示者而解之．通常若將方程式按第 78 節之關係，將正弦與餘弦之和或差簡化爲乘積，則可成最簡之形式．

習　　題

解出下列各方程式，求 α 小於 180° 之一切正值：

1. $\sin 2\alpha-4\cos^2\frac{1}{2}\alpha-\sin\alpha+3=0.$

〔解〕

$$2\sin\alpha\cos\alpha-4\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)-\sin\alpha+30=,$$

或　$$2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos\alpha-\sin\alpha+1=0,$$

或　$$(2\cos\alpha-1)(\sin\alpha-1)=0,$$

∴　$$\cos\alpha=\tfrac{1}{2},\ \text{或}\ \sin\alpha=1,$$

而　$$\alpha=60^\circ,\ \text{或}\ 90^\circ.$$

2. $\sin 2a-\cos a=0.$

3. $\sin 2a+\sin a=0.$

4. $\sin 2a+\cos 2a=0.$

5. $\sin 5a-\sin 3a+\sin a=0.$

〔解〕 $2\sin 3a\cos 2a-\sin 3a=0.$ 第78節。

或 $$\sin 3a(2\cos 2a-1)=0.$$

∴ $$\sin 3a=0,\ \text{或}\ \cos 2a=\tfrac{1}{2},$$

∴ $$3a=0^\circ,\ 180^\circ,\ 360^\circ,\ \text{而}\ 2a=60^\circ,\ 300^\circ.$$

∴ $$a=0^\circ,\ 60^\circ,\ 120^\circ,\ 30^\circ,\ 150^\circ.$$

6. $\cos 3a+\sin 2a-\cos a=0.$

7. $\sin 3a+\sin 2a+\sin a=0.$

8. $\cos 3a-\sin 2a+\cos a=0.$

9. $\cos 2\phi=1-\sin\phi.$

10. $\tan 2\phi-2\sin\phi=0.$

11. $\tan 2\theta\tan\theta=1.$

12. $2\cos x\cot 2x=1.$

試下列各恆等式:

13. $\dfrac{\cos\theta-\cos\phi}{\cos\theta+\cos\phi}=-\dfrac{\tan\frac{1}{2}(\theta+\phi)}{\tan\frac{1}{2}(\theta-\phi)}.$

14. $\dfrac{\sin\theta+\sin 3\theta}{\cos\theta+\cos 3\theta}=\tan 2\theta.$

15. $\dfrac{\sin 7\theta-\sin 5\theta}{\cos 7\theta+\cos 5\theta}=\tan\theta.$

16. $\cot A+\tan B=\dfrac{\cos(A-B)}{\sin A\cos B}$.

17. $\cot A-\tan B=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\cos B}$.

18. $\dfrac{\cot\theta-\tan\theta}{\cot\theta+\tan\theta}=\cos 2\theta$.

80. 將 $A\sin\theta+B\cos\theta$ 以 $C\sin(\theta+\phi)$ 形式表出之 通常爲便利起見，可將

$$A\sin\theta+B\cos\theta \tag{1}$$

以

$$C\sin(\theta+\phi). \tag{2}$$

形式表出之. A 及 B 爲所設常數；而 C 及 ϕ 爲所求以 A 及 B 來決定的常數.

以 $\sqrt{A^2+B^2}$ 乘及除 (1)，得

$$\sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\theta+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\theta\right] \tag{3}$$

今因 $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 小於 1，故可代表某一角 ϕ 之餘弦. 於是，因

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\phi,\quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\phi \tag{4}$$

將 (4) 代入 (3)，得結果

$$\sqrt{A^2+B^2}[\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi]. \tag{5}$$

亦可書爲下之形式：

$$\sqrt{A^2+B^2}\sin(\theta+\phi). \tag{6}$$

而 (6) 可化爲所求之形式

$$C\sin(\theta+\phi). \qquad (7)$$

其中
$$C=\sqrt{A^2+B^2}.$$

顯見 A 與 B 既可爲正值，亦可爲負值.

習　　題

1. 將 $8\sin\theta+15\cos\theta$ 以 $C\sin(\theta+\phi)$ 之形式表出之.

［解］ 以 $\sqrt{8^2+15^2}$ 或 17 除及乘原式，則得

$$17\left(\frac{8}{17}\sin\theta+\frac{15}{17}\cos\theta\right).$$

於是因 $\frac{8}{17}$ 小於 1，故可書爲

$$\frac{8}{17}=\cos\phi, \text{ 是以 } \frac{15}{17}=\sin\phi.$$

由是得
$$17\left(\frac{8}{17}\sin\theta+\frac{15}{17}\cos\theta\right)=17(\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi)$$
$$=17\sin(\theta+\phi).$$

C 之數值爲 17，由 $\sin\phi=\frac{15}{17}$ 求得 ϕ 爲 $61°56'$. 故

$$8\sin\theta+15\cos\theta=17\sin(\theta+61°56').$$

2. 化 $3\sin\theta+7\cos\theta$ 爲 $(\theta+c)$ 之函數，其中 c 爲待決定之常數.

［解］ 導入諸係數之平方和之平方根，

$$3\sin\theta+7\cos\theta=\sqrt{58}\left(\frac{3}{\sqrt{58}}\sin\theta+\frac{7}{\sqrt{58}}\cos\theta\right).$$

於是置

$$\frac{3}{\sqrt{58}}=\cos c,\ \text{及}\ \frac{7}{\sqrt{58}}=\sin c.$$

則上式變爲

$$\sqrt{58}\,(\sin\theta\cos c+\cos\theta\sin c),$$

此式可化爲 $$\sqrt{58}\sin(\theta+c).$$

此即所求之形式．常數角 c 可由下列二式決定之：

$$\cos c=\frac{3}{\sqrt{58}}\quad\text{及}\quad\sin c=\frac{7}{\sqrt{58}}.$$

將下列各式表成 $C\sin(\theta+\phi)$ 之形式：

3. $6\sin\theta+8\cos\theta.$

4. $5\sin\theta+\frac{2}{3}\cos\theta.$

5. $4\sin\theta-3\cos\theta.$

6. $-9\sin\theta+40\cos\theta.$

7. 解 $4\sin\theta-3\cos\theta=2$，求小於 $180°$ 之 θ 角．

81. 習 題

1. 求 $\sin 75°$, $\cos 75°$, $\tan 75°$, 及 $\cot 75°$.

2. 已知 $\cos a=\frac{1}{4}$；試求 $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$ 及 $\cot 2a$.

3. 已知 $\tan a=2$；試求 $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$ $\tan\frac{1}{2}a$, 及 $\cot\frac{1}{2}a$.

證明下列各恆等式：

4. $(\cos a+\sin a)(\cos a-\sin a)=\cos 2a.$

5. $(\sin a+\cos a)^2=1+\sin 2a.$

6. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

［提示］ $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha)$.

7. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

8. $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$.

9. $\tan\frac{1}{2}x = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

10. $\cot\frac{1}{2}x = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

11. $\dfrac{1+\tan\frac{1}{2}x}{1-\tan\frac{1}{2}x} = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

12. $\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

13. $\sec 2\alpha = \dfrac{\sec^2\alpha}{2-\sec^2\alpha}$.

14. $4\sin^2\frac{1}{2}\alpha\cos^2\frac{1}{2}\alpha = 1-\cos^2\alpha$.

15. $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin 3\alpha\cos\alpha$.

16. $\cos 6\alpha - \cos 2\alpha = -2\sin 4\alpha\sin 2\alpha$.

17. $\sin(45^\circ+\alpha) - \sin(45^\circ-\alpha) = \sqrt{2}\sin\alpha$.

18. $\sin(30^\circ+\alpha) + \sin(30^\circ-\alpha) = \cos\alpha$.

19. 將 $\cos 4\alpha\sin 3\alpha$ 以二個正弦之差表出之。

20. 將 $\cos 5\alpha\cos\alpha$ 以二個餘弦之和表出之。

證明下列各恆等式：

21. $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = -\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)$.

22. $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin\alpha}{\cos 2\alpha+\cos\alpha}=\tan\dfrac{3\alpha}{2}$.

23. $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

24. $\sin\theta=\dfrac{2\tan\frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta}$.

25. $\sin\frac{1}{2}x+2\sin^2\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x\cot x=\sin x\cos\frac{1}{2}x$.

26. $2\tan\frac{1}{2}x\csc x=1+\tan^2\frac{1}{2}x$.

27. $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\gamma)\cos\gamma$

$=\sin(\alpha+\gamma)\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$.

28. $\cos 2\alpha=8\sin^4\frac{1}{2}\alpha-8\sin^2\frac{1}{2}\alpha+1$.

29. $\cos 2\alpha-\cos\alpha=2(4\sin^4\frac{1}{2}\alpha-3\sin^2\frac{1}{2}\alpha)$.

30. $(1-\cos 2\alpha)\cot^2\frac{1}{2}\alpha=\cos 2\alpha+4\cos\alpha+3$.

31. $2\sin^2\frac{1}{2}\theta\cot\theta-\csc 2\theta+\csc\theta=\cot 2\theta+\sin\theta$.

32. 已知 $\tan x=a\tan\frac{1}{2}x$；試求 $\tan\frac{1}{2}x$ 以 a 表出之.

解下列各方程式，求 α 小於 180° 之一切正值：

33. $\sin\alpha+\cos 2\alpha=1$.

34. $\cos 3\alpha+2\cos 2\alpha-8\cos^3\alpha+2\sin^2\alpha+5\cos\alpha=0$.

35. $\cos 2\alpha+2\sin^2\frac{1}{2}\alpha-1=0$.

36. $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+\sin\alpha=1$.

37. $\sin 3\alpha+\cos 3\alpha-\sin\alpha-\cos\alpha=0$.

38. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$.

39. $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}=2\cos 2x$.

證明下列各恆等式：

40 $\tan(30°+\alpha)\tan(30°-\alpha)=\dfrac{2\cos 2\alpha-1}{2\cos 2\alpha+1}$.

41. $\tan\alpha+\cot\alpha=2\csc 2\alpha$.

42. $\sin 80°=\sin 40°+\sin 20°$.

43. $\dfrac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

44. $\cos^2\alpha-\sin(30°+\alpha)\sin(30°-\alpha)=\frac{3}{4}$.

45 $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

解下列各方程式，求小於 360° 之 x 之一切正值：

46. $\sin 11x\sin 4x+\sin 5x\sin 2x=0$.

47. $\tan x+\tan 2x=\tan 3x$.

48. $\tan x=x$.

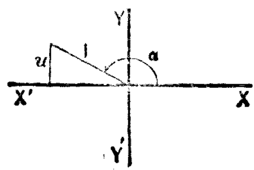
第七章

反三角函數

82 反三角函數(Inverse trigonometric functions)與以上研究之三角函數有密切之關係.

明瞭反三角函數之基本意義後，即可知由反函數可導出與以前求得之諸關係有密切聯繫之許多新關係.

83. 反三角函數之基本意義 由方程式 $\sin a=u$, 顯見 a 爲正弦等於 u 之角. 而 a 爲正弦等於 u 之角一語，更可簡寫如下:



$$a=\sin^{-1}u.$$

在方程式 $u=\sin a$ 中,以 a 表出 u.

在方程式 $a=\sin^{-1}u$ 中,以 u 表出 a.

如是,欲表出一角與其正弦間之關係,其方法有二.

符號 $\sin^{-1}u$ 爲 **u 之反正弦**(Inverse sine)可讀作 u 之反正弦，u 之逆正弦，arc sin u, 或**正弦爲 u 之角**. 上列之式須俟反函數之含義完全明瞭後方可用之.

每一個三角函數有一反函數．例如，

$\alpha=\sin^{-1}u$ 對應於 $\sin\alpha=u$,

$\alpha=\cos^{-1}u$ 對應於 $\cos\alpha=u$,

$\alpha=\tan^{-1}u$ 對應於 $\tan\alpha=u$, 等等．

注意　因 $\sin^{-1}u$ 爲一反函數，-1 不能視爲指數，祇爲一反函數符號中之一部分．若一函數之指數爲 -1 者，須書以括號表明之，例如 $(\sin\alpha)^{-1}$.

84. 反三角函數爲多值函數　前已證明凡三角函數爲單值函數．例如，若 α 爲已知，則對於 $\sin\alpha$ 祇有一值．參閱第 26 節及第 44 節．

反之，反三角函數則爲多值函數．例如，若 u 爲已知，則對於 $\sin^{-1}u$ 有一無窮數之值．參閱第 27 節及第 44 節．今以例題說明反三角函數之此種性質，並證明任一所設反三角函數之一切值可合併而成一式．

求 $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ 之一切值．

$$
\begin{aligned}
\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} &= 30^\circ\\
&=180^\circ+30^\circ\\
&=360+30^\circ\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=-180^\circ+30^\circ,\ \text{或}\ -450^\circ\\
&=-360^\circ+30^\circ,\ \text{或}\ -330^\circ
\end{aligned}
$$

$$= -540^\circ + 30^\circ, \text{ 或 } -510^\circ$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一切此等角度可以 $n\,180^\circ + 30$ 表示之，n 爲任一正整數或負整數．是以

$$\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = n\pi + \frac{\pi}{6}.$$

就一般而論，若 a 爲一角而其正切爲 u 者，皆可書爲

$$\tan^{-1} u = n\pi + a.$$

求 $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ 之一切値．

$$\begin{aligned}
\cos^{-1}\tfrac{1}{2} &= 60^\circ \\
&= -60^\circ \\
&= 360^\circ + 60^\circ \\
&= 360^\circ - 60^\circ \\
&= 720^\circ + 60^\circ \\
&= 720^\circ - 60^\circ \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= -360^\circ + 60^\circ \\
&= -360^\circ - 60^\circ \\
&= -720^\circ + 60^\circ \\
&= -720^\circ - 60^\circ \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

凡此等角度皆可用 $n\,360^\circ \pm 60^\circ$ 表示之，n 爲任一正整數或負整數。是以

$$\cos^{-1}\tfrac{1}{2}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

就一般而論，凡 a 爲一角而其餘弦爲 u 者，皆可書爲

$$\cos^{-1}u=2n\pi\pm a.$$

求 $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ 之一切値。

$$
\begin{aligned}
\sin^{-1}\tfrac{1}{2} &= 30^\circ\\
&=180^\circ-30^\circ\\
&=360^\circ+30^\circ\\
&=540^\circ-30^\circ\\
&=720^\circ+30^\circ\\
&=900^\circ-30^\circ\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=-180^\circ-30^\circ\\
&=-360^\circ+30^\circ\\
&=-540^\circ-30^\circ\\
&=-720^\circ+30^\circ\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

凡此等角度皆可用 $n180^\circ+(-1)^n30^\circ$ 表示之，n 爲任一正整數或負整數．是以

$$\sin^{-1}\tfrac{1}{2}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

就一般而論，凡 a 爲一角而其正弦爲 u 者，皆可書爲

$$\sin^{-1}u=n\pi+(-1)^n a.$$

同理可證

$$\cot^{-1}u = n\pi + \alpha,$$

$$\sec^{-1}u = 2n\pi \pm \alpha,$$

$$\csc^{-1}u = n\pi + (-1)^n\alpha.$$

85. 主值 (Principal values)　一反三角函數之最小值稱爲該函數之主值(如遇不分明時,寧擇最小正角而計其值).

反正弦及反餘割之主值位於 $-\frac{\pi}{2}$ 及 $\frac{\pi}{2}$ 之間;反餘弦及反正割之主值位於 0 與 π 之間;反正切及反餘切之主值位於 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間.

反三角函數之主值有時爲與一般值作區別起見,特用一大寫文字表明之.

例如,　$$\mathrm{Sin}^{-1}\tfrac{1}{2} = \frac{\pi}{6},$$

而　$$\sin^{-1}\tfrac{1}{2} = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

86. 解釋 $\sin\sin^{-1}u$ 及 $\sin^{-1}\sin\alpha$ 之意義

$\sin\sin^{-1}u$ 一式之讀法,爲:正弦爲 u 之角之正弦.此正弦顯然卽爲 u,是以

$$\sin\sin^{-1}u = u.$$

$\sin^{-1}\sin\alpha$ 一式之讀法,爲:正弦爲 α 之正弦之角.此角顯然卽爲 α,是以

$$\sin^{-1}\sin\alpha = \alpha,$$

或更就一般而言，

$$\sin^{-1}\sin\alpha=n\pi+(-1)^n\alpha.$$

任何三角函數與其對應反函數間，都有同樣關係存在。

例如，　$\cos\cos^{-1}u=u;$

$\cos^{-1}\cos\alpha=\alpha$, 或 $\cos^{-1}\cos\alpha=2n\pi\pm\alpha;$

$\tan\tan^{-1}u=u;$

$\tan^{-1}\tan\alpha=\alpha$, 或 $\tan^{-1}\tan\alpha=n\pi+\alpha$, 等等。

87. **基本關係對於以反函數表出之角之應用.** 各基本關係既對於一切之角皆爲眞實，則角之以反函數表出者亦必眞實.

例如，於下之恆等式內命 $\alpha=\tan^{-1}u$:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

則得　$(\sin\tan^{-1}u)^2+(\cos\tan^{-1}u)^2=1.$

同理　$(\sin\csc^{-1}u)^2+(\cos\csc^{-1}u)^2=1;$

$(\tan\sec^{-1}u)^2+1=(\sec\sec^{-1}u)^2;$

$$\sin\cos^{-1}u=\frac{1}{\csc\cos^{-1}u}.$$

欲以反函數表出基本關係之角，吾人可將其各反函數間之關係展開之.

88. **已知一以 u 之反函數表出之角，而求其以 u 表出之任一函數值**　按一個或多個基本關係之應用，恆可解出所述之問題. 今述數例如下. 其所用之方法極易應用於其他

各函數上.

1. 求以 u 表出之 $\tan\cos^{-1}u$ 之值.

若將 $\tan\cos^{-1}u$ 以 $\cos^{-1}u$ 之餘弦表出之，則問題卽得解決，因 $\cos\cos^{-1}u=u$ 之故也.

此可演述之如下:

$$\tan\cos^{-1}u=\frac{\sin\cos^{-1}u}{\cos\cos^{-1}u}=\frac{\pm\sqrt{1-(\cos\cos^{-1}u)^2}}{u}$$

$$=\frac{\pm\sqrt{1-u^2}}{u}.$$

若取其各端之反正切，則此關係亦可表之如下:

$$\cos^{-1}u=\tan^{-1}\frac{\pm\sqrt{1-u^2}}{u}.$$

2. 求以 u 表出之 $\sec\cot^{-1}u$ 之值.

欲解此題，祇須將 $\sec\cot^{-1}u$ 以 $\cot\cot^{-1}u$ 表出之.

例如

$$\sec\cot^{-1}u=\pm\sqrt{1+(\tan\cot^{-1}u)^2}$$

$$=\pm\sqrt{1+\frac{1}{(\cot\cot^{-1}u)^2}}=\pm\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{u^2+1}}{u}.$$

若各端均取反正割，則此結果亦可表之如下.

$$\cot^{-1}u=\sec^{-1}\frac{\pm\sqrt{u^2+1}}{u}.$$

3. 求以 u 表出之 $\cot\operatorname{vers}^{-1}u$ 之值.

依前述方法，得

$$\cot \operatorname{vers}^{-1} u=\frac{\cos \operatorname{vers}^{-1} u}{\pm\sqrt{1-(\cos \operatorname{vers}^{-1} u)^2}}$$

$$=\frac{1-\operatorname{vers}\operatorname{vers}^{-1} u}{\pm\sqrt{1-(1-\operatorname{vers}\operatorname{vers}^{-1} u)^2}}$$

$$=\frac{1-u}{\pm\sqrt{1-(1-u)^2}}=\frac{1-u}{\pm\sqrt{2u-u^2}}.$$

若各端均取反餘切，則其結果亦可表之如下：

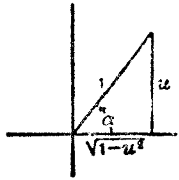
$$\operatorname{vers}^{-1} u=\cot^{-1}\frac{1-u}{\pm\sqrt{2u-u^2}}.$$

按以上所用之方法，可將任一反函數以其他任一反函數表出之。

於應用上列公式時，須留心作選取角度之練習，因每一反函數代表一無窮數之角，而方程式之一端可代表不為他端所代表之角。例如，在問題一，若 u 為正，則 $\csc^{-1} u$ 代表終於第一及第四象限內之角；但 $\tan^{-1}\frac{\pm\sqrt{1-u^2}}{u}$ 既可代表終於第二及第三象限內之角，亦可代表終於第一及第四象限內之角。

89. 由圖形得出反三角函數間之關係 將任一反函數用任一其他反函數表出之問題，可完全依照第 58 節中所述，將任一三角函數用任一其他三角函數表出之問題而解之。今以二例說明之。

1. 以其他各反函數表出 $\sin^{-1}u$.



命 α 爲一正弦等於 u 之角。由圖形及三角函數之定義，立得

$$\alpha=\sin^{-1}u=\cos^{-1}\sqrt{1-u^2}$$

$$=\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$=\csc^{-1}\frac{1}{u}.$$

此等關係式係由一小於 90° 之 α 角之圖形求得者，對於 α 之某一定值爲眞實。若用根式導入負號，則導得之角中亦有若干爲眞實。

於作含有反三角函數之等式時，適與對於 α 者相同，惟須留意其爲等式而非恆等式。蓋每一反三角函數可代表無窮數之角也。故選角時亟宜注意之。

例如，若 $u=\frac{1}{2}$，則

$$\sin^{-1}u=\csc^{-1}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}.$$

變爲
$$\sin^{-1}\tfrac{1}{2}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{1}$$

此並非一個恆等式，因

$$\sin^{-1}\tfrac{1}{2}=30^\circ,\ 150^\circ,\ 390^\circ,\ 510^\circ,\cdots\cdots$$

而
$$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=30^\circ,\ 330^\circ,\ 390^\circ,\ 690^\circ,\cdots\cdots$$

故 (1) 對於 30°, 390°,……爲眞實，但對於 150°, 330°,……不爲眞實。

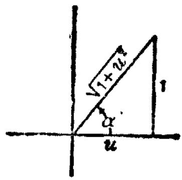
同理，於下之關係中

$$\sin^{-1}\tfrac{1}{2} \quad \cos^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin^{-1}\tfrac{1}{2}=30^\circ,\ 150^\circ,\ 390^\circ,\ 510^\circ,\ \cdots\cdots$$

而
$$\cos^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{2}=150^\circ,\ 210^\circ,\ 510^\circ,\ 570^\circ,\ \cdots\cdots$$

故 (2) 對於 $150^\circ, 510^\circ, \cdots\cdots$ 爲眞實，但對於 $30^\circ, 210^\circ, \cdots\cdots$ 爲不眞實.



2.　以其他各反函數表出 $\cot^{-1}u$.

命 α 爲具有餘切爲 u 之一角．由圖形及三角函數之定義，立得

$$\alpha=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\cos^{-1}\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$=\tan^{-1}\frac{1}{u}=\cot^{-1}u=\sec^{-1}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u}$$

$$=\csc^{-1}\sqrt{1+u^2}.$$

習題　何角對於

$$\cot^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}=\sec^{-1}2.$$

之關係爲眞實，(a) 用 $\sqrt{3}$ 之正值；(b) 用 $\sqrt{3}$ 之負值？

90.　**由二倍角，半角及加法公式，而得各反三角函數間之關係式.**

關於此類問題之解決方法，今以數例說明之如下：

1.　以 u 表出 $\cos(2\sec^{-1}u)$.

$$\cos(2\sec^{-1}u)=2(\cos\sec^{-1}u)^2-1 \qquad \text{第 76 節, (4)}$$

$$=\frac{2}{(\sec\sec^{-1}u)^2}-1=\frac{2}{u^2}-1.$$

由此關係，立得

$$2\sec^{-1}u=\cos^{-1}\left(\frac{2}{u^2}-1\right).$$

2. 以 u 表出 $\tan(\frac{1}{2}\cos^{-1}u)$.

$$\tan(\tfrac{1}{2}\cos^{-1}u)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\cos^{-1}u}{1+\cos\cos^{-1}u}}=\pm\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$$

第 77 節，(3)

由此關係，立得

$$\tfrac{1}{2}\cos^{-1}u=\tan^{-1}\left(\pm\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\right).$$

3. 以 u 及 v 表出 $\sin(\sin^{-1}u+\cos^{-1}v)$.

$$\sin(\sin^{-1}u+\cos^{-1}v)=\sin\sin^{-1}u\cdot\cos\cos^{-1}v+\cos\sin^{-1}u\cdot\sin\cos^{-1}v$$

第 66 節，(1)

$$=uv\pm\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}.$$

由此關係，立得

$$\sin^{-1}u+\cos^{-1}v=\sin^{-1}(uv\pm\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}).$$

91. 習　　題

求下例各式之值：

1. $\sin^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{3}$.　　**2.** $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$.　　**3.** $\tan^{-1}1$.

4. $\tan\cot^{-1}4$.　　**5.** $\sin\cot^{-1}4$.

以 u 及 v 表出下列各式：

6. $\cos\cot^{-1}u$.
7. $\sec\cot^{-1}u$.
8. $\csc\cot^{-1}u$.
9. $\cos\sin^{-1}u$.
10. $\cos\tan^{-1}u$.
11. $\cos\sec^{-1}u$.
12. $\cos\csc^{-1}u$.
13. $\sin(2\cos^{-1}u)$.
14. $\tan(2\tan^{-1}u)$.
15. $\tan(2\sec^{-1}u)$.
16. $\tan(2\cos^{-1}u)$.
17. $\cos(2\cos^{-1}u)$.
18. $\cos(2\sin^{-1}u)$.
19. $\cos(2\tan^{-1}u)$.
20. $\sin(\sin^{-1}u+\sin^{-1}v)$.
21. $\cos(\sin^{-1}u+\sin^{-1}v)$.
22. $\tan(\tan^{-1}u+\cot^{-1}v)$.
23. $\tan(\sec^{-1}u+\sec^{-1}v)$.
24. $\cos(\sec^{-1}u+\csc^{-1}v)$.
25. $\sin(\frac{1}{2}\cos^{-1}u)$.
26. $\cos(\frac{1}{2}\cos^{-1}u)$.
27. $\sin(\frac{1}{2}\sec^{-1}u)$.
28. $\sin(\frac{1}{2}\tan^{-1}u)$.

求 x 以 a 表出之。

29. $\tan^{-1}x=\cot^{-1}a$.
30. $\sin^{-1}x=\tan^{-1}a$.
31. $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}a$.
32. $\cos^{-1}x=\sin^{-1}a+\tan^{-1}a$.
33. $\sin^{-1}x=\frac{1}{2}\sec^{-1}a$.

求 x 以 a 及 b 表出之。

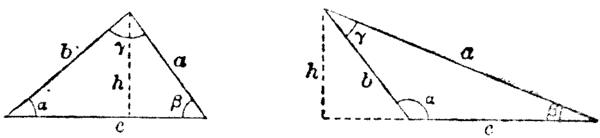
34. $\tan^{-1}x=\sin^{-1}a+\sin^{-1}b$.
35. $\cos^{-1}x=\sec^{-1}a-\sec^{-1}b$.
36. $\sin^{-1}x=2\cos^{-1}a+\frac{1}{2}\cos^{-1}b$.

第　八　章

斜　三　角　形

92. 本章就一三角形推出諸公式，當已知其三個獨立部分時即可藉此等公式以完全解出之。

93. **正弦定律** (Law of sines)　於一平面三角形中，其任何二邊之比適如其二對角正弦之比。



命 a, b, c 爲一三角形之三邊，而 $\alpha\ \beta\ \gamma$ 爲各邊之對角。由頂角 γ 作 h 垂直於 c，或 c 之延線上。

於是，在任一圖中，　$\sin\alpha=\dfrac{h}{b}$，　　第 22 節

及　　$\sin\beta=\dfrac{h}{a}$.　　第 30 節

以第二方程式除第一方程式，得

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

同樣，由頂角 α 作一垂直線，則得

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

此最後二方程式可書爲

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

94 正切定律 (Law of tangents) 二角半差之正切與該二角半和之正切之比，適等於其對應二對角之差與和之比。

由正弦定律，得

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

按分比及合比，則得

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta},$$

此式可化爲 $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$ 第78節

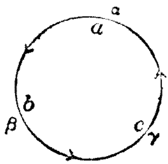
$$=\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

或 $$\frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=\frac{a-b}{a+b}. \qquad (1)$$

同理 $$\frac{\tan\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}=\frac{b-c}{b+c}, \qquad (2)$$

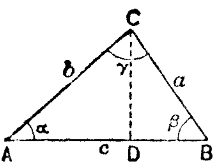
及 $$\frac{\tan\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)}{\tan\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)}=\frac{c-a}{c+a}. \qquad (3)$$

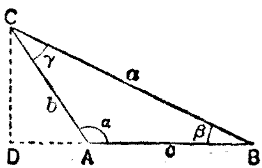
95. 文字之輪換法 關於斜三角形之每一公式，若作



其文字之輪換，則可得同一型式之二個其他公式．欲作文字之輪換，可如圖所示，將文字繞一圓之圓周排列之，於是以次一文字替代前一文字，如矢頭所指示者．例如，將第 94 節公式 (1) 作此文字之輪換，則得公式 (2)；同樣，公式 (2) 得出公式 (3)．

96. **餘弦定律** (Law of cosines)　一平面三角形任一邊之平方等於其他二邊平方之和減去二倍此二邊與其夾角之餘弦之乘積．





於任一圖中，

$$AB = AD + DB \text{ 或 } DB = AB - AD. \qquad \text{第 2 節}$$

但　$AB = c,\ AD = b\cos\alpha,$ 是以 $DB = c - b\cos\alpha.$

又　$DC = b\sin\alpha.$

由直角三角形 CDB，得

$$\overline{BC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{DB}^2.$$

將其值代入之，則方程式變為

$$a^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2$$

$$= b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha$$

$$= b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

是以 $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

同理 $$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta.$$

及 $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

97. 求一平面三角形之半角之正弦而以該三角形之諸邊表出之.

由第 77 節之方程式 (1),

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

由此 $$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha. \tag{1}$$

由餘弦定律,

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \tag{2}$$

由方程式 (1) 及 (2)

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}. \tag{3}$$

命 $$a + b + c = 2s. \tag{4}$$

由 (4) 之各端減去 $2a$, $2b$, 及 $2c$, 則分別得

$$-a+b+c=2(s-a),$$

$$a-b+c=2(s-b),$$

$$a+b-c=2(s-c).$$

於是方程式 (3) 變為

$$\sin\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

同理 $$\sin\frac{\beta}{2}=+\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}},$$

及 $$\sin\frac{\gamma}{2}=+\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

在此等公式中,因已知任一平面三角形之半角小於 90°, 故根式必為正號. 而半角之餘弦及正切之各個對應公式亦皆如此.

98. 求一平面三角形之半角之餘弦, 而以該三角形之邊表出之.

由第 77 節方程式 (2), 得

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha.$$

於是 $$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}.$$

而 $$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{s(s-a)}{bc}.$$

是以 $$\cos\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

同理 $$\cos\frac{\beta}{2}=+\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},$$

及 $$\cos\frac{\gamma}{2}=+\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

99. 求一平面三角形之半角之正切，而以該三角形之邊表出之.

因 $$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}. \tag{1}$$

同理 $$\tan\frac{\beta}{2}=+\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}, \tag{2}$$

及 $$\tan\frac{\gamma}{2}=+\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \tag{3}$$

公式(1)可書爲

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

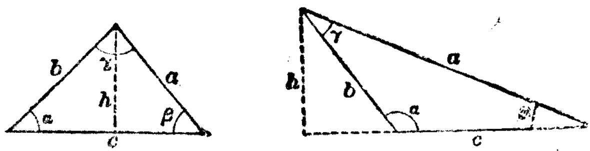
命 $$r=+\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}. \tag{4}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}. \tag{5}$$

同理 $$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{s-h}, \tag{6}$$

及 $$\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s-c}. \tag{7}$$

100. 求一平面三角形之面積，而以二邊及其夾角表出之.



命 A 爲面積，h 爲高. 於是在任一圖內.

$$A=\tfrac{1}{2}ch,$$

而 $$h=b\sin\alpha.$$

故 $$A=\tfrac{1}{2}bc\sin\alpha$$

同理 $$A=\tfrac{1}{2}ca\sin\beta,$$

及 $$A=\tfrac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

101. 求一平面三角形之面積，而以一邊及二鄰角表出之.

由第 100 節 $$A=\tfrac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

由正弦定律 $$b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma},$$

$$A=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}.$$

於是因

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ,$$

$$A=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

102. 求一平面三角形之面積，而以三邊表出之。

由第 100 節.

$$A=\tfrac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

因

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$A=bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

將第 97 節及第 98 節求得之 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 及 $\cos\frac{\alpha}{2}$ 之值代入，經簡化後，即得，

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

103. **解一斜三角形之公式**　若一平面三角形之三個獨立部分為已知，則本章求得之公式足以解出該三角形。

正弦定律

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

可用於二個已知部分為一角及其對邊時。

正切定律

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{a-b}{a+b}\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

可用於二邊及其夾角爲已知者.若 a, b, 及 γ 爲已知部分,則 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 可由 $\alpha+\beta+\gamma=180°$ 之關係而得之.於是此公式可得 $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 之值,若以之與 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 之值結合之,則得 α 及 β.

半角定律

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{r}{s-a}.$$

則用於三邊爲已知者.上列末一式最爲正確,因正切較正弦或餘弦之改變爲速.且此式中含有 r,當計算一切角度時,更便於着手.

餘弦定律　　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$

可用於已知二邊及一角,而欲決定第三邊者.若三邊爲已知,亦可用以決定一角.

此公式宜以自然函數值計算之,不宜採用對數計算.

104 **檢算公式**　任一公式未用於三角形解法中者,即可用作檢算公式.

若一個問題用正切定律解出者,切不可用 $\alpha+\beta+\gamma=180°$ 之關係以檢算之,因正切定律已含有此關係.

若二個方程式得自正弦定律而用以求出一三角形之二

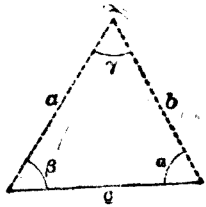
個部分者，則自正弦定律而得之第三方程式不能用作檢算，因前二個方程式已含第三方程式之故也。

105. 例題*.

1. 已知　$c=127.32$　　求 a

$\alpha=\ 71°58'22''$　　b

$\beta=\ 52°19'40''$　　γ



〔解〕 作圖並估計之.

$a=140 \qquad \gamma=60°$

$b=120$

演算之輪廓

算　檢

$$a=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{a-b}{a+b}\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

c	
α	
β	
$\alpha+\beta$	
γ	
$\log\sin\alpha$	
$\log c$	
$\operatorname{colog}\sin\gamma$	
$\log a$	
a	

$a-b$	
$a+b$	
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	
$\log(a-b)$	
$\operatorname{colog}(a+b)$	
$\log\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	
$\log\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	
$\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	
α	
β	

* 關於對數之初步演算於第十章述之.

$$b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$\log\sin\beta$	
$\log c$	
$\operatorname{colog}\sin\gamma$	
$\log b$	
b	

或更簡其形式，

$\log a$	$\log\sin\alpha$	
$\log a$, $\log b$	$\log c$	
$\log a$, $\log b$	$\operatorname{colog}\sin\gamma$	
$\log b$	$\log\sin\beta$	
	$\log a$	
	$\log b$	
	a	
	b	

將上列輪廓填充之，則得完全形式如下：

$$a=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

c	127.32
α	71°58′22″
β	52°19′40″
$\alpha+\beta$	124°18′2″
γ	55°41′58″
$\log\sin\alpha$	9.97814 − 10
$\log c$	2.10490
$\operatorname{colog}\sin\gamma$	0.08297
$\log a$	2.16601
a	146.56

$$b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$\log\sin\beta$	9.89846 − 10
$\log c$	2.10490
$\operatorname{colog}\sin\gamma$	0.08297
$\log b$	2.[illegible]8633
b	121.99

檢算

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{a-b}{a+b}\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$a-b$	24.57
$a+b$	268.55
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	62°9′1″
$\log(a-b)$	1.39041
$\operatorname{colog}(a+b)$	7.57098
$\log\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$	0.27708
$\log\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	9.23847 − 10
$\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	9°49′28″
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta$	62°9′1″
α	77°58′29″
β	52°19′33″

或，更簡其形式，

$\log a$	$\log \sin \alpha$	9.97814 − 10
$\log a$ / $\log b$	$\log c$	2.10490
$\log a$ / $\log b$	$\operatorname{colog} \sin \gamma$	0.08297
$\log b$	$\log \sin \beta$	9.89846
	$\log a$	2.16601
	$\log b$	2.08633
	a	146.56
	b	121.99

2. 已知　$a = 1674.3$　　求 α

$c = 1021.7$　　γ

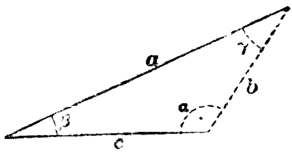
$\beta = 28°44'39''$　　b

估計得

$\alpha = 120°$

$\gamma = 30°$

$b = 900$



$$\tan \tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \frac{a - c}{a + c} \tan \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)$$

a	1674.3
c	1021.7
β	28°44′39″
$a - c$	652.6
$a + c$	2696.0
$\alpha + \gamma$	151°15′21″
$\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$	75°37′40″
$\log(a - c)$	2.81465
$\operatorname{colog}(a + c)$	6.56928 − 10
$\log \tan \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$	0.59135
$\log \tan \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$	9.97528 − 10
$\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$	43°22′12″
$\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$	75°37′40″
α	118°59′52″
γ	32°15′28″

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$\log c$	3.00932
$\log \sin \beta$	9.68205 − 10
$\operatorname{colog} \sin \gamma$	0.27268
$\log b$	2.96405
b	920.56

檢算

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$\log a$	3.22384
$\log \sin \beta$	9.68205 − 10
$\operatorname{colog} \sin \alpha$	0.05817
$\log b$	2.96406

3\. 已知 $a=1.4932$ 求 α

$b=2.8711$ β

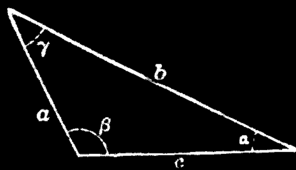
$c=1.9005$ γ

估計得

$\alpha=25°$

$\beta=120°$

$\gamma=35°$



$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\gamma}{s-a}$$

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{s-b}$$

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s-c}$$

$$\gamma=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

a	1.4932
b	2.8711
c	1.9005
$2s$	6.2648
s	3.1324
$s-a$	1.6392
$s-b$	0.2613
$s-c$	1.2319
s	3.1324

$\log(s-a)$	0.21463
$\log(s-b)$	9.41714 − 10
$\log(s-c)$	0.09058
$\operatorname{colog} s$	9.50412 − 10
$\log r^2$	19.22647 − 20
$\log r$	9.61324 − 10
$\log\tan\frac{\alpha}{2}$	9.39861 − 10
$\log\tan\frac{\beta}{2}$	0.19610
$\log\tan\frac{\gamma}{2}$	9.52266 − 10
$\frac{\alpha}{2}$	14° 3′26″
$\frac{\beta}{2}$	57°31′ 2″
$\frac{\gamma}{2}$	18°25′34″
α	28° 6′52″
β	115° 2′ 4″
γ	36°51′ 8″
算檢 $\alpha+\beta+\gamma$	180°00′ 4″

4. 已知 $b=.0060041$ 求 β

$c=.0093284$ α

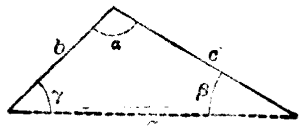
$\gamma=44°47'58''$ a

<u>估計得</u>

$\beta=30°$

$\alpha=105°$

$a=.012$



$$\sin\beta=\frac{b\sin\gamma}{c}$$

b	.0060041
c	.0093284
γ	44°47'58"
$\log b$	7.77845−10
colog c	2.03019
$\log\sin\gamma$	9.84796−10
$\log\sin\beta$	9.65660−10
β	26°58'12"
$\beta+\gamma$	71°46'10"
α	108°13'50"

$$a=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$\log c$	7.96981−10
colog $\sin\gamma$	0.15204
$\log\sin\alpha$	9.97764−10
$\log a$	8.09949−10
a	0.012574

<u>檢 算</u>

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)=\frac{a-c}{a+c}\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

a	.012574
c	.0093284
$a-c$	.0032456
$a+c$	.021902
$\alpha+\gamma$	153° 1'48"
$\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$	76°30'54"
$\log(a-c)$	7.51129−10
colog $(a+c)$	1.65952
$\log\tan\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$	0.62015
$\log\tan\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)$	9.79096−10
$\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)$	31°42'51"
$\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$	76°30'54"
α	108°13'45"
γ	44°48' 3"

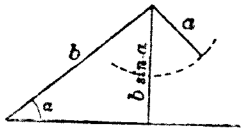
106. 疑款 (the ambiguous case) 當已知二邊及其一對角時，則該三角形可爲無解，一解，或二解。

命 a, b, α 爲已知．則公式

$$\sin\beta=\frac{b\sin\alpha}{a}.$$

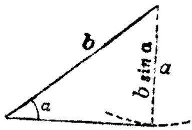
決定 β.

若算得之 $\sin\beta$ 大於 1, 則無解．



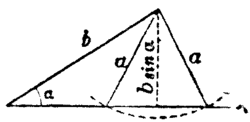
$a<b\sin\alpha.$

若算得之 $\sin\beta$ 等於 1, $\beta=90^\circ$, 則有一解．



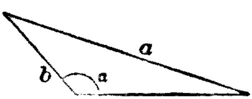
$a=b\sin\alpha.$

若算得之 $\sin\beta$ 小於 1, 則決定互爲補角之二個 β, 故有二個解，除非 β 之較大值加以 α 等於或大於 180°.



$a>b\sin\alpha.$
$a<b.$

$a\geqq b.$



$a>b.$

已知　$b=420$　　求 β

$c=389.73$　　α

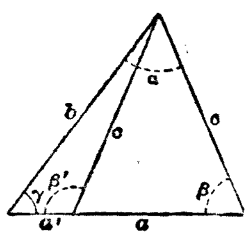
$\gamma=53^\circ 47' 20''$　　a

估計得二解

$\beta=65^\circ$　　$\beta'=115^\circ$

$\alpha=60^\circ$　　$\alpha'=10^\circ$

$a=390$　　$a'=90$



$$\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c}$$

b	420
c	389.73
γ	53°47′20″
$\log b$	2.62325
colog c	7.40924 − 10
$\log\sin\gamma$	9.90679 − 10
$\log\sin\beta$	9.93928 − 10
β	60°24′ 9″
$180° - \beta = \beta'$	119°35′51″
$\beta+\gamma$	114°11′29″
$\beta'+\gamma$	173°22′11″
α	65°48′31″
α'	6°37′49″

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$a' = \frac{c\sin\alpha'}{\sin\gamma}$$

$\log\sin\alpha$	9.96008 − 10
$\log c$	2.59076
colog $\sin\gamma$	0.09321
$\log\sin\alpha'$	9.06244 − 10
$\log a$	2.64405
$\log a'$	1.74641
a	440.61
a'	55.771

第一解之檢算

$$\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma) = \frac{a-c}{a+c}\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

a	440.61
c	389.73
$a-c$	50.88
$b+c$	830.34
$a+\gamma$	119°35′51″
$\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$	59°47′56″
$\log(a-c)$	1.70655
colog $(a+c)$	7.08074 − 10
$\log\tan\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$	0.23505
$\log\tan\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)$	9.02234 − 10
$\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)$	6° 0′36″
$\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$	59°47′56″
a	65°48′32″
γ	53°47′20″

第二解之檢算

$$\tan\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha') = \frac{c-a'}{c+a'}\tan\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha')$$

c	389.73
a'	55.771
$c-a'$	333.96
$c+a'$	445.50
$\gamma+\alpha'$	60°25′ 9″
$\frac{1}{2}(\gamma+\alpha')$	30°12′34″
$\log(c-a')$	2.52370
colog $(c+a')$	7.35115 − 10
$\log\tan\frac{1}{2}(\gamma+\alpha')$	9.76509 − 10
$\log\tan\frac{1}{2}(\gamma-\alpha')$	9.63994 − 10
$\frac{1}{2}(\gamma-\alpha')$	23°34′45″
$\frac{1}{2}(\gamma+\alpha')$	30°12′34″
γ	53°47′19″
α'	6°37′49″

第一解	第二解
$\beta = 60°24'9''$	$\beta' = 119°35'51''$
$\alpha = 65°48'31''$	$\alpha' = 6°37'49''$
$a = 440.61$	$a' = 55.781.$

107. 習題

用一三位表或一算尺，試解下列各三角形.

1. $a=26,\ \alpha=53°,\ \beta=49°.$ **2.** $a=48,\ \beta=61°,\ \gamma=69°.$ **3.** $a=73°,\ \beta=59°,\ b=55.$

4. $\alpha=69°,\ a=80,\ b=64.$ **5.** $\alpha=54°40',\ b=122,\ c=110.$ **6.** $a=163,\ b=241,\ \gamma=34°20'.$

7. $a=42,\ b=28,\ \gamma=72°.$ **8.** $b=115,\ c=96,\ \alpha=110°.$ **9.** $a=51,\ b=63,\ c=70.$

10. $a=8.03,\ b=6.42,\ c=7.15.$ **11.** $\alpha=20°,\ a=15,\ b=25.$ **12.** $\gamma=43°50',\ a=.34,\ c=.30.$

解下列各三角形：

13. $b=63.67,\ \beta=100°10',\ \alpha=40°0'10'',$

14. $b=20.007,\ \alpha=40°27'30'',\ \gamma=42°30'15'',$

15. $a=238.61$, $b=216.\ 7$, $c=93.435$.

16. $a=8.0038$, $b=4.6259$, $c=4.3167$.

17. $b=.76328$, $c=2.4359$, $\gamma=120°46'18''$.

18. $b=85.249$, $c=105.63$, $\alpha=50°40'24''$.

19. $a=1.4562$, $c=.45296$, $\beta=74°19'38''$.

20. $a=83.831$, $b=56.479$, $c=74.025$.

21. $a=2.1469$, $b=3.2824$, $c=4.0026$.

22. $c=7.2693$, $a=.54871$, $\alpha=5°41'30''$.

23. $b=.06532$, $c=.01846$, $\gamma=8°0'20''$.

24. $b=10.246$, $c=18.075$, $\beta=33°30'5''$.

25. $a=764.38$, $\alpha=143°18'31''$, $\beta=13°34'26''$.

26. $a=962.27$, $b=637.34$, $c=6\ \ 5.80$.

求下列各三角形之面積：

27. $a=15$, $b=20$, $c=25$.

28. $a=172$, $b=103$, $c=141$.

29. $a=20.46$, $b=19.72$, $c=15.04$.

30. $a=18.3$, $b=22.4$, $\gamma=32°$.

31. $b=3.46$, $c=4.09$, $\alpha=56°10'$.

32. $c=435.3$, $a=289.6$, $\beta=31°7'$.

33. $a=48$,　　**34.** $b=10.34$,

$\beta=26°$,　　$\alpha=83°22'$.

$\gamma=43°$.　　$\gamma=60°40'$.

35. 塔頂上某點與遠處一旗桿之水平距離爲 468 呎。測得桿頂之仰角爲 $5°8'30''$，桿足之俯角爲 $15°36'$. 求該旗桿之高度。

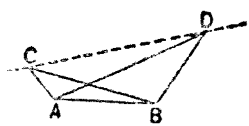
36 今有與水平面成 $23°19'10''$ 角度之小山一座，山上有一塔。自山坡上某一點，測得塔頂之仰角爲 $43°39'50''$. 又下山 75.5 呎，測得塔頂之仰角爲 $39°23'20''$. 試問該塔之高爲若干呎？

37. 於距湖之一端 5 哩及距湖之他端 3 哩之處，測得該湖張一個 $47°34'30''$ 之角。求該湖之長。

38. 一三角形之各邊爲 125.4, 230.6, 及 179.8. 試求三角形之三個高。

39 山巔插一旗桿。該山與地平面成 $32°18'20''$ 之斜度。沿此斜度而距旗桿足 25.5 呎之處，測得旗桿所張之角爲 $41°24'$. 求旗桿之高。

40. 有相距 4000 呎 A, B 二個測量者，同時測量在直道上開行汽車之 BAC 角及 CBA 角三分鐘後，測量汽車在第二位置之 DAB 角及 ABD 角。



若 $\angle BAC=136°28'$,

$$\angle CBA=32°8',$$

$$\angle DAB=40°12',$$

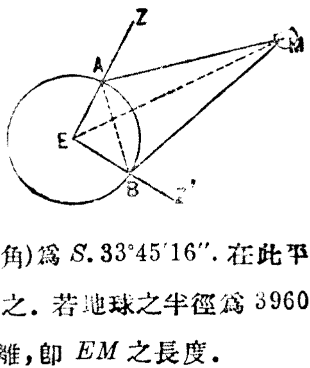
$$\angle ABD=118°44',$$

問該汽車之速率爲何?

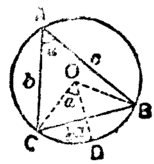
41. 某人立在高出湖面 185 呎之山巔上，測量一湖之長．量得該湖兩端之俯角爲 6°18′ 及 2°30′ 且該湖所張之角，即二視線交成之角，爲 66°27′．試求該湖之長．

42. 在直道之二端，測得二端間直道上空之白雲之仰角各爲 78°15′20″ 及 59°47′40″．若二端間之距離爲 5000 呎，試求該雲之高度．

43 在經度相同之 A, B 二地，有二觀測者在 A B 二處同時測量月亮，量得 ZAM 角及 $Z'BM$ 角各爲 35°2′20″ 及 51°17′10″．A 之緯度(格林維克 Greenwich)爲 N. 51°17′15″，而 B 之緯度(好望角)爲 S. 33°45′16″．在此平面中，月亮可由 A, E, 及 B 決定之．若地球之半徑爲 3960 哩，試求地球之中心至月亮之距離，即 EM 之長度．

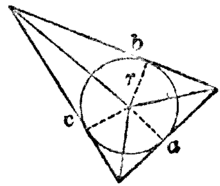


44. 試證二倍一三角形外接圓之半徑，$2R$，可用下之方程式表示之:



$$2R=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

提示 $\angle BAC = \angle DOC$.



45. 若已知三角形之三邊，試求其內切圓之半徑。

［解］ 以 Δ 代表三角形之面積，則得

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr = rs.$$

但 $$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ 第 102 節。

故 $$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$ 參閱第 99 節。

108. 雜題

1. 一角為 4 弳，其頂點位於一圓之中心，截得 7 吋長之弧；試求圓之半徑。

2. 將下列各角以度數表出之：$\frac{\pi}{3}$ 弳，$\frac{2\pi}{5}$ 弳，$\frac{3\pi}{4}$ 弳。

3. 將下列各角以弳數表出之：40°，55°，38°，52°16′.

4. 化 $\frac{3}{4}$ 弳為度數。

5. 一圓之半徑為 8 呎，若在其圓周上截取 5 呎長之弧，試求該弧所對中心角之度數。

6. 12 吋長之弧張一個 50° 之中心角，試求該圓之半徑。

7. 一角之分數為其補角度數之 $7\frac{1}{2}$ 倍；求該角之弳數。

8. 一角大於另一角$\frac{\pi}{8}$弳，此二角之和爲 160°；試以弳數表出每一角.

9. 三角形各角之比爲 2：3：4；試以弳數表出每一角.

10. 三角形之各角成等差級數，次小角爲最小角之二倍；試以弳數表出每一角.

11. 今將一圓之圓周按等差級數而分成 7 分，最大部分爲最小部分之 10 倍；試求各弧於中心所張中心角之弳數.

12. 一圓之半徑爲 6 吋，其 40° 之弧長等於他圓 25° 之弧長；試問後一圓之半徑爲何？

證明下列各式：

13. $\sin\alpha\cos\alpha=\sin^3\alpha\cos\alpha+\cos^3\alpha\sin\alpha.$

14. $\cot\alpha\csc\alpha=\dfrac{1}{\sec\alpha-\cos\alpha}.$

15. $\dfrac{1+\tan^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$

16. $\sin\beta+\dfrac{\sin\beta}{\cot\beta-1}=\dfrac{\cos\beta}{1-\tan\beta}-\cos\beta.$

17. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

18. $\cot\alpha-\tan\alpha=\csc\alpha\sec\alpha(1-2\sin^2\alpha).$

19. $\dfrac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}=\dfrac{\cot\beta-1}{\cot\beta+1}.$

20. $\sec^4 \alpha - \tan^4 \alpha = 2\sec^2 \alpha - 1.$

21. $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$

22. $\sin 4x = 4(\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x).$

23. $\cos 4x = 4\cos^4 x + 4\sin^4 x - 3.$

24. $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x.$

25. $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x.$

26. $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$
$\quad + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

27. $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma - \tan\gamma\tan\alpha - \tan\alpha\tan\beta}.$$

28. $2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha = \sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta.$

29. $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$

30. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right) = \dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{2}}.$

31. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right) = \dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sqrt{2}}.$

32. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right) = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}.$

33. $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

34. $\cot\alpha + \cot\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$

35. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$

36. $\cos\theta=\dfrac{1-\tan^2\frac{1}{2}\theta}{1+\tan^2\frac{1}{2}\theta}.$

37. $\sec 2\theta=\dfrac{\cot\theta+\tan\theta}{\cot\theta-\tan\theta}.$

38. $\tan\theta+\cot\theta=2\operatorname{cosec}2\theta.$

39. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan 2\alpha+\sec 2\alpha.$

40. $\dfrac{\cos(45^\circ+\theta)}{\cos(45^\circ-\theta)}=\sec 2\theta-\tan 2\theta.$

41. $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=\sin 2\alpha.$

42. $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right).$

43. $\tan 2\alpha-\tan\alpha=\tan\alpha\sec 2\alpha.$

44. $\sin\alpha=\dfrac{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\cot\frac{1}{2}\alpha}.$

45. $\cos 3\alpha\cos\alpha+\sin 3\alpha\sin\alpha=\cos 2\alpha.$

46. $\left[\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$

$\left[\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]=\sin\alpha+\cos\beta.$

47. $4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin 3\theta.$

48. $\tan^2\frac{1}{2}\theta=\dfrac{2\sin\theta-\sin 2\theta}{2\sin\theta+\sin 2\theta}.$

就小於 360° 之一切値，解出下列各方程式之未知量：

49 $\tan\theta=\sin\theta$.

50. $(3-4\cos^2 a)\cos 2a=0$.

51. $\sin a+\cos a\cot a=2$.

52. $\tan(45°+\theta)=3\tan(45°-\theta)$.

53. $5\sin\theta=\tan\theta$.

54. $1+\sin^2 a=3\sin a\cos a$.

55 $2\cos x+\sec x=3$.

56. $\tan^4 y-4\tan^2 y+3=0$.

57. $\sec\beta+\tan\beta=2$.

58. $2\sin a+5\cos a=2$.

59. $\sin 5x+\sin 3x=0$.

60. $\cos 7x-\cos x=0$.

61. $\tan 6\theta=1$.

62. $\tan 2\theta\tan\theta=1$.

63 $\sin 4\theta+\sin 2\theta+\cos\theta=0$.

64. $\sin 2\theta-2\cos\theta+2\sin\theta-2=0$.

65. $\sin^2\theta+\sin 3\theta=2\sin\theta\cos 2\theta-\frac{1}{2}$.

66. $\tan 2\theta\cot\theta-\tan 2\theta+\cot\theta-1=0$.

67. $\cos 7\theta+\cos 5\theta+\cos 3\theta=0$.

68. $\sec^2\theta\csc^2\theta+4=4\csc^2\theta+\sec^2\theta$.

69. 已知 $\tan\beta=u$，求 $\sin 2\beta$.

70. 已知 $\tan\theta=\csc 2\theta$, 試求 $\cos\theta$.

71. 已知 $\cos x=\frac{1}{2}$, 試求 $\cos\frac{1}{2}x$.

72. 已知 $\cos x=\frac{3}{7}$, 試求 $\tan\frac{1}{2}x$ 及 $\tan 2x$.

73. 已知 $\tan 2x=m$, 試求 $\tan x$.

74. 若 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, 試證

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$$

75. 若 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, 試證

$$\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}.$$

76. 若 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, 試證

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

證明下列各式:

77. $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\frac{\pi}{4}$.

78. $\tan^{-1}\frac{1}{6}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{14}{27}=\frac{\pi}{4}$.

79. $\tan^{-1}k+\tan^{-1}l=\tan^{-1}\frac{k+l}{1-kl}$

82. $3\tan^{-1}u=\tan^{-1}\frac{3u-u^3}{1-3u^2}$.

81. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$.

82. $\sin^{-1}\sqrt{\frac{m}{m+n}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{m}{n}}$.

83. $\cos^{-1}\sqrt{\frac{m}{n}}=\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{n}{n-m}}$.

84 $\cot^{-1}\dfrac{k^2-2}{2\sqrt{k^2-1}}=2\csc^{-1}k.$

解出下列各式之 y:

85. $2\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cot^{-1}y=\dfrac{\pi}{2}.$

86. $\sin^{-1}y+\sin^{-1}2y=\dfrac{\pi}{2}.$

87 $\dfrac{\pi}{2}-\cot^{-1}3y=2\tan^{-1}y.$

88. $\tan^{-1}y=\sin^{-1}a+\cos^{-1}b$

89 試證在一平面三角形內，γ 爲直角，

$$\sin 2\alpha=\frac{2ab}{b^2+a^2};\quad \cos 2\alpha=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}.$$

90. 在一直角三角形內，c 爲斜邊，試證

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{c-b}{2c};\quad \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{c+b}{2c}.$$

91. 在一等邊三角形內，$a=b$，試證

$$\cos\alpha=\frac{c}{2a};\quad \operatorname{vers}\gamma=\frac{c^2}{2a^2}.$$

92. 在一三角形內，$\gamma=60^\circ$，試證

$$\cos(60^\circ-\beta)=\frac{a+b}{2c}.$$

93. 一圓之半徑爲 r，試證其中內接有正多角形之面積爲 $\dfrac{nr^2}{2}\sin\dfrac{2\pi}{n}.$

94. 一圓之半徑爲 r，試證其外切正多角形之面積爲

$$nr^2\tan\frac{\pi}{n}.$$

95. 試證 n 邊正多角形之面積為 $\frac{na^2}{4}\cot\frac{\pi}{n}$，$a$ 為一邊之長度.

96. 試證具有相等周界 (perimeter) 之等邊三角形與正六角形，其面積之比為 2 : 3.

97. 平面上插有 125 呎長之旗桿，而得 250 呎長之桿影；試求太陽之斜度？

98. 由高出海面 325.6 呎之巖石頂上，測得一舟之俯角為 24°35′；試求該舟與巖石之距離.

99. 一氣球適在 A 站之上空. 由同平面上之 B 站，測得氣球之仰角為 60°30′. 若 $AB=300$ 呎，試求氣球之高度.

100. 由高為 64 呎之塔上，測得在與塔基在同一水平線上且在同一方二物之俯角，為 28°14′ 及 42°47′；試求二物間之距離.

101. 三角地之各邊為 48 桿，62 桿，及 74 桿. 試求該三角地之面積.

102. 地球在太陽上張一個 $17\frac{1}{2}''$ 之角；若地球之半徑為 3960 哩，試求地球與日球之距離.

103. 一垂直塔聳立於一斜坡上而與斜坡成 113°12′ 之角；沿此斜坡而下，於離開塔基 89 呎 8 吋之處，測得該塔所張之角為 23°26′. 試求該塔之高.

104. 有半徑為 8 之圓，試求其 50° 弧所作成扇形之面積.

105. 有半徑為 12 之圓，試求其 132° 弧所作成弓形之面積.

106. 有半徑為 r 之圓，試求其 1 强之弧所作成扇形之面積.

107. 圓內接正方形之面積為 200 方呎；試求同圓內接正三角形之面積.

108. 若一三角形之二邊為 $6+\sqrt{5}$ 及 $6-\sqrt{5}$，其夾角為 $32^\circ12'$，試求該三角形之面積.

109. 在何種緯度，其緯度圓之半徑等於地球半徑之 $\frac{1}{3}$?

110. 自巖石上 85 呎高之燈塔頂上，測得一舟之俯角為 $3^\circ38'$，而自該燈塔之基底上，測得該舟之俯角為 $2^\circ43'$；試求該舟之水平距離及巖石之高.

111. 於旗桿基底正南地平面上之一點，某觀察者測得旗桿之仰角為 45°；於是向東行 200 呎，測得旗桿之仰角為 35°. 試求旗桿之高度.

112. 一礮臺與一紀念塔在同一平面上. 自礮臺之頂，測得紀念塔頂及紀念塔基之俯角各為 $40^\circ32'18''$ 及 $80^\circ17'46''$. 若礮臺之高為 $104\frac{3}{4}$ 呎. 試求紀念塔之高度.

113. 離塔基 a 距離之處，測得塔尖之仰角 α 為塔尖旗桿仰角之餘角；試證旗桿之高為 $2a\cot 2\alpha$.

114. 在 $3a$ 呎高之塔上，插有 a 呎高之旗桿. 今觀察者於桿頂同平面之某點，測得旗桿及塔所張之角相等. 問觀者

與桿頂之距離爲何？

115.　平面上有相距 120 呎之二塔．某人依次立於二塔之塔基上測得一塔之仰角爲他塔仰角之二倍；但若立在二塔距離之中央處，則二塔之仰角互爲餘角．求二塔之高．

116.　某人乘船向正北航行，見正西之直線上有相距 8 哩之二座燈塔．航行一小時後，一燈塔之方向爲 *S. W.*，他燈塔之方向爲 *S. S. W.* 試求該船之速率．

117.　自 42 呎高之屋頂上，測得一桿端之仰角爲 14°26′9″；在屋基上，則該桿端之仰角爲 23°21′33″；求該桿之高．

118.　由一山巔，測得山下地面上適與觀者成直線之二塊連續記哩石(milestone)，其俯角各爲 14°20′24″及5°31′14″．求該山之高．

119.　沿河岸量 500 呎之直線，在對岸有一物．今測得自直線之二端與該物所成之角爲 53°1′7″ 及 79°44′55″．求此河之寬度．

120.　自一船而望某海峽，測得該海峽爲北偏東（北偏東 90° 之八分之一）．今向 *N. W.* 航行 30 哩，則海峽適在船之正東．問海峽與船在第二位置之距離爲何？

121.　在平面上之二站，測得某山崖之仰角爲 39°30′ 及 34°15′．若二站間之距離爲 145 呎．試求該山崖之高．

122.　自高出平面 360 呎之山巖，測得平面上一塔之頂與底之俯角爲 41° 及 54°；試求該塔之高．

123. 在運河之一旁，有 21 呎之旗桿插於 15 呎高之牆頂上；今於運河之他旁，正對旗桿與牆之地上某點，測得旗桿與牆所張之角相等．求運河之闊．

124. 由 600 呎高山崖頂之 C 處，測得氣球 B 之仰角爲 $47°22'$，而該球在海面上影子 S 之俯角爲 $61°10'$；若日球之高度爲 $65°31'$，B, S, C 在同一垂直平面上，且日球在觀測者之後方，試求氣球 B 之高．

125. 於基線 $AB=758$ 碼之兩端，測量他端與二物 C 及 D 間之角度．即 $\angle CAB=103°50'41''$，$\angle DAB=53°17'24''$，$\angle DBA=85°47'30''$，而 $\angle CBA=46°13'27''$；試求 CD．

126. 若 r 爲地球之半徑，h 爲觀者高出海面之高度，而 d 爲水平面之俯角；試證 $\tan d=\frac{\sqrt{(2r+h)h}}{r}$.

127. 一巡邏船位於某港之 $S. W.$ 12.75 哩，一商輪自該港出發，以每小時 10 哩之速率向東偏南 ($E.$ by S) 之方向航行；若該巡邏船欲於 $1\frac{1}{2}$ 小時內追及該輪，問須按何種航向及何速率航行？

128. 自山巔測得與山基同平面上二物之俯角爲 45° 及 30°，而其間之水平角亦爲 30°；若二物間之距離爲 a，試求該山之高而以距離 a 表出之．

129. 某戰艦之主桅高出海面 120 呎，今以每小時 10 哩之速率向某港前進．該桅於上午 8.45 爲某人在港口游泳

時首先發見;於上午 10.06 抵港停泊. 試求地球半徑之近似值.

130 有一弧狀鐵道,適成一圓形象限. 兩端各插有電桿木,沿此弧每隔相等距離亦插有電桿,電桿之總數為 10. 今有一人在一端半徑之延線上而與該端相距 300 呎之處,測得第三根與第六根電桿成一直線. 試求該弧之半徑.

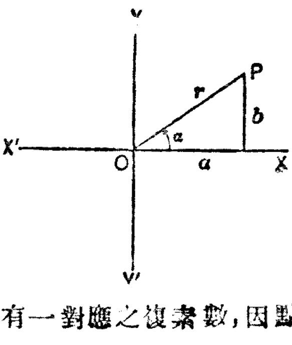
第　九　章

代莫伏爾定理及其應用

109 本章介紹代莫伏爾定理 (De Moivre's theorem) 及其若干應用，其中又述及用以計算三角表之基本級數，及此種基本級數之證明.

複素數 (Complex number) 爲代莫伏爾定理的必要基礎，玆先述其種種性質如下.

110. 複素數之幾何圖示　在代數學中，已證得凡複素數皆可化爲 $a+b\sqrt{-1}$ 或 $a+ib$ 之形式，其中 a 及 b 爲任何實數，$i=\sqrt{-1}$.



設已知一複素數 $a+ib$，今作出具有坐標爲 a 及 b 之一點 P，則此點卽可視爲複素數之幾何圖示．如是可見每一複素數在平面上必有一對應點.

反之，在平面上之每一點，必有一對應之複素數，因點之坐標代表複素數之二元 a 及 b 之故也.

替代點 P 之直線 OP, 亦可視為複素數之幾何圖示.

由圖形,顯見

$$a=r\cos\alpha \text{ 及 } b=r\sin\alpha.$$

故
$$a+ib=r\cos\alpha+ir\sin\alpha.$$

是以任一複素數 $a+ib$, 可化為下之形式:

$$r(\cos\alpha+i\sin\alpha). \qquad (1)$$

在特別情形下,式(1)包含一切實數及一切純虛數. 命 $\alpha=0°$ 或 $180°$, 則(1)可化為 r 或 $-r$, 此則代表任一實數,因 r 代表任一實正數也. 命 $\alpha=90°$ 或 $270°$, 則(1)可化為 $\pm ri$, 即為任一純虛數矣.

角 XOP 或 α 為複素數 $a+ib$ 之幅角(Argument), 此可由下方程式決定之:

$$\tan\alpha=\frac{b}{a}.$$

距離 OP 或 r 為複素數 $a+ib$ 之虛數率(Modulus). 此可由下方程式決定之:

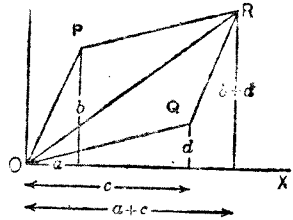
$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

111. 二個複素數之和,差,積及商的幾何圖示

(a) 和　命 OP 代表複素數 $a+ib$, 而 OQ 代表複素數 $c+id$. 於是二數之和

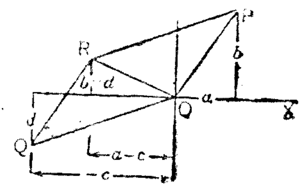
$$(a+ib)+(c+id)$$

或
$$(a+c)+i(b+d)$$



可以 OR 圖示之，按幾何學，OR 爲 OP 與 OQ 作出平行四邊形之對角線。

(b) 差　差 $(a+ib)-(c+id)$，與和 $(a+ib)+(-c-id)$ 相同，可用在 $OP=a+ib$ 及 $OQ=-c-id$ 上所作的平行四邊形之對角線圖示之。



(c) 積　欲作二複素數乘積之幾何圖示，可將複素數表成三角形式，則極爲容易。

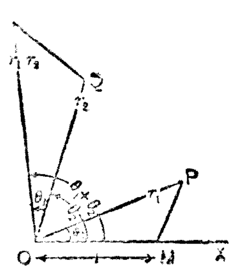
命 $$OP=a+ib=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$

及 $$OQ=c+id=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2).$$

於是

$$OP\times OQ=r_1r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)],$$

或 $$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$



由是可知二個複素數乘積之輻角爲二個複素數輻角之和，而乘積之虛數率爲二個虛數率之乘積。

欲作 OP 與 OQ 之乘積，可先量出單位 OM，並作三角形 OMP. 於是在 OQ 上作一相似三角形 OQR, OQ

對應於 OM. 於是 OR, 如圖所示，表示乘積之大小與方向.

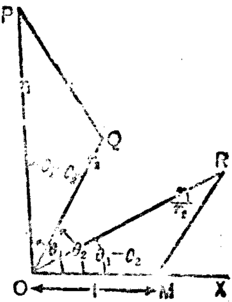
由相似三角形，

$$OR : OQ = OP : 1,$$

或
$$OR : r_2 = r_1 : 1,$$

或
$$OR = r_1 r_2.$$

是以 OR 表示乘積之虛數率. 又由圖形，角 $XOR = \theta_1 + \theta_2$，故 OR 之幅角為乘積之幅角.



(d) 商　欲作二個複素數之商之幾何圖示，將複素數表成三角形式，則極為容易.

命
$$OP = a + ib = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$

及
$$OQ = c + id = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

於是
$$\frac{OP}{OQ} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}.$$

以 $(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$ 乘分子與分母，並簡化之，

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

由是可見二個複素數之商的幅角等於被除數之幅角減去除數之幅角，而商之虛數率等於二虛數率之商.

欲作 OP 除以 OQ 之商，可作 PQ, 及 OR 直線，使 MOR 角等於 QOP 角. 量 OM 等於單位長，並作三角形 OMR 相似於 OQP. 於是 OR 表示商之大小與方向. 至於其證法，則

相似於 (c) 之證法。

習題

1. 試作圖表示複素數 $3+2i$ 及 $2+5i$. 並作圖表示二者之和及二者之差。

2. 試作圖表示複素數 $-3+5i$ 及 $4-9i$. 並作圖表示二者之和及二者之差。

3. 試以三角形式表出複素數 $3+4i$.

［解］ 將 $3+4i$ 與 $a+ib$ 及 $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ 比較之。

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5,$$

$$\tan\alpha=\tfrac{4}{3}=1.333.$$

故 $$\alpha=53°6'.$$

是以 $$3+4i=5(\cos 53°5'+i\sin 53°6').$$

4. 將複素數 $5+3i$, $2+i$, $-7-4i$, $1+i$, 及 i 以三角形式表出之。

以圖示方法完成下列各乘法及除法，並以代數法檢算之：

5. $(1+2i)(3+i)$.　　6. $(3+4i)(-2+3i)$.

7. $(1+6i)\div(3+4i)$.　　8. $(-3-5i)\div(-5+4i)$

112. 試證

$$[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha),$$

n 為一正整數。

平方 $r(\cos a+i\sin a)$，得

$$[r(\cos a+i\sin a)]^2=r^2(\cos^2 a-\sin^2 a+2i\sin a\cos a)$$
$$=r^2(\cos 2a+i\sin 2a)$$

按第 76 節.　(1)

以 $r(\cos a+i\sin a)$ 乘 (1) 之各端，得

$$[r(\cos a+i\sin a)]^3=r^3[(\cos 2a\cos a-\sin 2a\sin a)$$
$$+i(\sin 2a\cos a+\sin a\cos 2a)]$$
$$=r^3(\cos 3a+i\sin 3a)$$

按第 73 節.　(2)

由 (2)，同理得，

$$[r(\cos a+i\sin a)]^4=r^4(\cos 4a+i\sin 4a).\qquad(3)$$

方程式 (1)，(2) 及 (3) 有下之形式：

$$[r(\cos a+i\sin a)]^n=r^n(\cos na+i\sin na).\qquad(4)$$

以 $r(\cos a+i\sin a)$ 乘 (4) 之各端，得

$$[r(\cos a+i\sin a)]^{n+1}=r^{n+1}[\cos(n+1)a+i\sin(n+1)a].\qquad(5)$$

是以，假定由 (4) 所表出之定律爲眞實，則方程式 (5) 說明若 n 增以 1，亦必眞實．但按方程式 (3)，此律對於 $n=4$ 爲眞實，故對於 $n=5$ 亦必眞實．因 $n=5$ 爲眞實，則 $n=6$ 亦必眞實．如是類推．故方程式(4)對於 n 之一切正整值皆爲眞實．

此亦可證明方程式 (4) 對於 n 爲負整數，或一分數，仍爲眞實．

由方程式 (4), 可見一複素數之 n 次冪為一具有已知輻角 n 倍的輻角, 及已知虛數率 n 次冪的虛數率的複素數.

命 $r=1$, 則方程式 (1), (2), (3) 及 (4) 變為

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha, \tag{5}$$

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha, \tag{6}$$

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4=\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha, \tag{7}$$

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha. \tag{8}$$

最後一個方程式即為代莫伏爾定理 (De Moivre's theorem).

問題　試證代莫伏爾定理對於 $n=-3$ 為眞實.

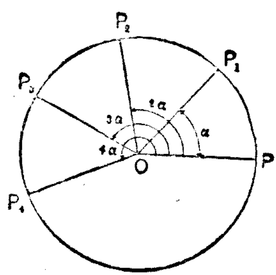
113　幾何的解釋　因每個複素數

$$\cos\alpha+i\sin\alpha,$$

$$\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha,$$

$$\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha,$$

$$\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha,$$



有一個等於單位數之虛數率, 故代表此等數之直線, 必止於半徑為 1 之圓周上之各點.

$$\cos\alpha+i\sin\alpha$$

之任何二個連續整數冪的輻角祇相差 α, 是以代表任何二連續乘冪之直線在方向上祇有 α 的差別.

114 代莫伏爾定理之應用　利用代莫伏爾定理,可求單位數之任何根,求複素數之任何根,求角之任何倍數之正弦與餘弦,並可展開角之正弦與餘弦成角之冪級數.

115 求單位數之三次方根.

若單位數之三次根爲實數,或複素數,按第110節可假

設 $$\sqrt[3]{1}=r(\cos\alpha+i\sin\alpha). \tag{1}$$

於是,三方之,

$$1=r^3(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha). \tag{2}$$

又 $$1=r^3\cos(3\alpha-2n\pi)+ir^3\sin(3\alpha-2n\pi), \tag{3}$$

n 爲一整數.

等置方程式(3)之實數部分及虛數部分,得

$$r^3\cos(3\alpha-2n\pi)=1,$$

及 $$r^3\sin(3\alpha-2n\pi)=0.$$

欲適合此等條件方程式,須使 $3\alpha-2n\pi=0$ 及 $r=1$,

故 $$\alpha=\frac{2n\pi}{3}.$$

當 $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ 等.

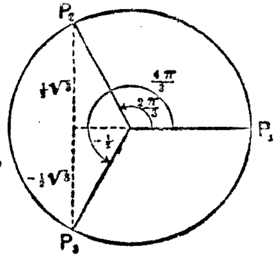
則 $$\alpha=0,\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{6\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ 等. \tag{4}$$

此級數中之每一角必與 $0,\dfrac{2\pi}{3}$ 或 $\dfrac{4\pi}{3}$ 共線;是以祇用 α 之首三値卽可求得 $\sin\alpha$ 與 $\cos\alpha$ 之一切値.將 α 之此諸値代入方程式(1),更牢記 $r=1$,則得

$n=0$, 則 $\sqrt[3]{1}=1$,

$n=1$, 則 $\sqrt[3]{1}=-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$n=2$, 則 $\sqrt[3]{1}=-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{3}$.



單位數之三個三次根可用 P_1, P_2 及 P_3, 按幾何方法代表之.

今吾人可寫出任一實數 a 之三次根, 此可命 a_1, a_2 及 a_3 爲 a 之三次根, 得

$$a_1=\sqrt[3]{a}\cdot 1,\ a_2=\sqrt[3]{a}\left(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right),\ a_3=\sqrt[3]{a}\left(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

其中 $\sqrt[3]{a}$ 爲算術的三次根.

問題 試由 $(-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{3})^3=1$, 以證實方程式(1)之假說.

116 求單位數之五次根.

命 $$\sqrt[5]{1}=r(\cos\alpha+i\sin\alpha). \tag{1}$$

於是, 作各端之五次冪,

$$1=r^5(\cos 5\alpha+i\sin 5\alpha). \tag{2}$$

又 $$1=r^5\cos(5\alpha-2n\pi)+ir^5\sin(5\alpha-2n\pi), \tag{3}$$

n 爲一個整數.

等置方程式 (3) 之實數部分及虛數部分, 得

$$r^5\cos(5\alpha-2n\pi)=1,$$

及 $$r^5\sin(5\alpha-2n\pi)=0.$$

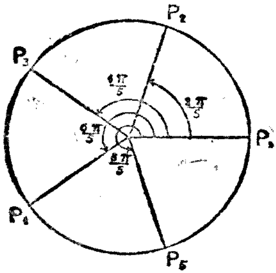
欲適合此等條件方程式, 須使 $5\alpha-2n\pi=0$ 及 $r=1$,

故 $$\alpha=\frac{2n\pi}{5}.$$

當 $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ 等.

則 $$\alpha=0,\ \frac{2\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5},\ \frac{6\pi}{5},\ \frac{8\pi}{5},\ \text{等}. \tag{4}$$

將自 (4) 所得之值一一代入方程式 (1), 並牢記 $r=1$, 得



$n=0$, 則 $\sqrt[5]{1}=1,$

$n=1$, 則 $\sqrt[5]{1}=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5},$

$n=2$, 則 $\sqrt[5]{1}=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5},$

$n=3$, 則 $\sqrt[5]{1}=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5},$

$n=4$, 則 $\sqrt[5]{1}=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}.$

117　求 $a+ib$ 之平方根.

命 $$\sqrt{a+ib}=r(\cos\alpha+i\sin\alpha). \tag{1}$$

平方之, $$a+ib=r^2(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha). \tag{2}$$

又 $$a+ib=r^2[\cos(2\alpha-2n\pi)+i\sin(2\alpha-2n\pi)],\tag{3}$$

其中 n 爲任何整數。

等置實數部分及虛數部分，

$$r^2\cos(2\alpha-2n\pi)=a,\tag{4}$$

$$r^2\sin(2\alpha-2n\pi)=b.\tag{5}$$

平方後相加，得

$$r^4=a^2+b^2,\tag{6}$$

或 $$r^2=\sqrt{a^2+b^2},\tag{7}$$

及 $$r=\sqrt[4]{a^2+b^2}.\tag{8}$$

方程式 (8)，以已知值 a 及 b 表出 r 之値。

由方程式 (4) 及 (7)，

$$\cos(2\alpha-2n\pi)=\frac{a}{r^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

故 $$2\alpha-2n\pi=\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

按 (4) 與 (5) 可決定 $2\alpha-2n\pi$ 之象限。

於是 $n=0$，則 $$\alpha=\tfrac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\tag{9}$$

而 $n=1$，則 $$\alpha=\pi+\tfrac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\tag{10}$$

當 $n=2,3,4$ 等時，其 α 之値與方程式 (9) 或 (10) 內之 α 之値共線．是以 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 祇有二個值；即 $n=0$ 及 $n=1$ 時之二值。

將 α 之值代入方程式 (1)，最後得

$$\sqrt{a+ib}=\sqrt[4]{a^2+b^2}\left[\cos\left(\tfrac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\tfrac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right], \tag{11}$$

及
$$\sqrt{a+ib}=\sqrt[4]{a^2+b^2}\left[\cos\left(\pi+\tfrac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\pi+\tfrac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right]. \tag{12}$$

$\sqrt{a+ib}$ 之此等值雖較 $\sqrt{a+ib}$ 之本身爲繁複，但仍然爲複素數 $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ 之標準形式。

118　求 $a+ib$ 之 k 次根。

命
$$\sqrt[k]{a+ib}=r(\cos\alpha+i\sin\alpha). \tag{1}$$

於是
$$a+ib=r^k(\cos k\alpha+i\sin k\alpha), \tag{2}$$

$$=r^k[\cos(k\alpha-2n\pi)+i\sin(k\alpha-2n\pi)], \tag{3}$$

其中 n 爲一整數。

等置方程式 (3) 之實數及虛數部分，得

$$r^k\cos(k\alpha-2n\pi)=a, \tag{4}$$

及
$$r^k\sin(k\alpha-2n\pi)=b. \tag{5}$$

平方 (4) 與 (5)，並相加之，得

$$r^{2k}=a^2+b^2. \tag{6}$$

於是
$$r^k=\sqrt{a^2+b^2}, \tag{7}$$

及
$$r=\sqrt[2k]{a^2+b^2}. \tag{8}$$

由方程式 (4) 及 (7)，得

$$\cos(k\alpha-2n\pi)=\frac{a}{r^k}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

或
$$k\alpha-2n\pi=\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

至於 $k\alpha-2n\pi$ 位於若何象限，全視 (4) 及 (5) 之符號而定。

故
$$\alpha=\frac{2n\pi}{k}+\frac{1}{k}\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{9}$$

當 $n=0$，則 $\alpha=\frac{1}{k}\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$ (10)

$n=1$，則 $\alpha=\frac{2\pi}{k}+\frac{1}{k}\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$ (11)

$n=2$，則 $\alpha=\frac{4\pi}{k}+\frac{1}{k}\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$ (12)

………………………………………

將由方程式 (8), (10), (11), (12) 等求得之 r 及 α 值代入方程式 (1)，則得 $a=ib$ 之 k 次根。

若 k 爲一個整數，則有 k 個根。如 (9) 所指示，可見 α 之連續值，其間相差 $\frac{2\pi}{k}$，是以第 k 個以後之一切 α 值與第一次 k 值中一個 α 值共線。

119. 以 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 表出 $\sin n\alpha$ 及 $\cos n\alpha$.

已知 $\cos n\alpha+i\sin n\alpha=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$.

按二項式定理將右端展開之，並等置實數與虛數部分，則此問題即可解出。

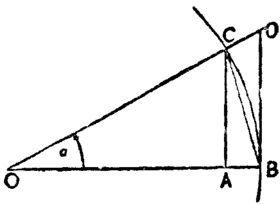
例如，就 $\sin 4\alpha$ 及 $\cos 4\alpha$ 而論，得

$$\cos 4\alpha+i\sin 4\alpha=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^4=\cos^4\alpha$$
$$+4i\cos^3\alpha\sin\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha-4i\cos\alpha\sin^3\alpha+\sin^4\alpha.$$

故 $$\sin 4\alpha=4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha$$

及 $$\cos 4\alpha=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha.$$

120. 比較 $\sin\alpha$, α 及 $\tan\alpha$ 之值，α 為一銳角　命 α 為以弧數表出之任一銳角．以頂點 O 為中心，以 OB 為半徑，作弧 BC．作 AC 及 BD 垂直於 OB，並聯結 B 及 C．



三角形 OBC 之面積小於扇形 OBD 之面積，而扇形 OBC 小於三角形 OBD．

但因 $$AC=OC\sin\alpha,\quad BD=OB\tan\alpha,$$

而弧 $$BC=OB\cdot\alpha,$$ 第 16 節

三角形 OBC 之面積等於 $\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OC\sin\alpha$,

扇形 OBC 之面積等於 $\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OB\cdot\alpha$,

而三角形 OBD 之面積等於 $\frac{1}{2}\cdot OB\cdot OB\tan\alpha$,

是以

$$\tfrac{1}{2}\cdot OB\cdot OC\sin\alpha<\tfrac{1}{2}\cdot OB\cdot OB\cdot\alpha<\tfrac{1}{2}\cdot OB\cdot OB\tan\alpha,$$

或 $$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha.$$

121. 就 α 之小值，以求 $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ 之值　由第 43 節，得

知當 α 趨近於 0 時，則 $\sin\alpha$ 趨近於 0. 故 α 趨近於 0 時 $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ 之值趨近於 $\dfrac{0}{0}$.

但由上節，　　$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

以 $\sin\alpha$ 除之，得

$$1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha},$$

或
$$1>\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha.$$

因 $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ 位於 1 與 $\cos\alpha$ 之間，故當 α 趨近於 0 時，$\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ 必趨近於 1，因 $\cos\alpha$ 此時亦趨近於 1 也.

於是就極小角而論，$\sin\alpha$ 可以 α 替代之，並表之以弳數.如是所引起之差誤至爲微小，在許多問題中可略而不計，例如，求至五位小數，

$$\sin 1^\circ=0.01745,\qquad 1^\circ=0.01745\text{ 弳}.$$
$$\sin 2^\circ=0.03490,\qquad 2^\circ=0.03491\text{ 弳}.$$
$$\sin 3^\circ=0.05234,\qquad 3^\circ=0.05236\text{ 弳}.$$
$$\sin 4^\circ=0.06976,\qquad 4^\circ=0.06981\text{ 弳}.$$

122. 展開 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 爲 α.

按代莫伏爾定理，

$$\sin n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n.$$

按二項式定理將右端展開之，得

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=\cos^n\theta+in\cos^{n-1}\theta\sin\theta$$

$$-\frac{n(n-1)}{|\underline{2}}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta-i\frac{n(n-1)(n-2)}{|\underline{3}}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{|\underline{4}}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta+\cdots\cdots. \tag{1}$$

等置虛數部分,得

$$\sin n\theta=n\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{|\underline{3}}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{|\underline{5}}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots\cdots. \tag{2}$$

命 $n\theta=\alpha$, 於是方程式 (2) 可書爲

$$\sin\alpha=\frac{\alpha}{\theta}\cos^{n-1}\theta\sin\theta$$

$$-\frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-2\right)}{|\underline{3}}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$$

$$+\frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-2\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-3\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-4\right)}{|\underline{5}}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots, \tag{3}$$

或 $$\sin\alpha=\alpha\cos^{n-1}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$$

$$-\frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)}{|\underline{3}}\cos^{n-3}\theta\left(\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\right)$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)(\alpha-3\theta)(\alpha-4\theta)}{|\underline{5}}\cos^{n-5}\theta\left(\frac{\sin^5\theta}{\theta^5}\right)-\cdots. \tag{4}$$

命 α 爲始終不變,而 n 無窮增大.於是 θ 須無窮減小,因 $n\theta=\alpha$ 爲一常數故也.按第 121 節,當 θ 趨於 0, $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$

趨近於 1, 而 $\cos\theta$ 亦趨近於 1. 代入方程式 (4), 得

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{\underline{|3}}+\frac{\alpha^5}{\underline{|5}}-\frac{\alpha^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots.$$

等置方程式 (1) 之實數部分,得

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots. \quad (5)$$

與上同樣演算之,方程式 (5) 變爲

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{\underline{|2}}+\frac{\alpha^4}{\underline{|4}}-\frac{\alpha^6}{\underline{|6}}+\cdots\cdots.$$

就 α 之一切有限値而論,此 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 級數皆爲收斂*. 此可使吾人算出任何角之正弦與餘弦,故可藉以作一自然函數表,由此更可作成對數表。惟用此等 α 値時, α 當以弧數表示之。

123. 習　　題

1. 用代莫伏爾定理,求單位數之四個四次根。

2. 用代莫伏爾定理,求單位數之六個六次根。

3. 求 $5-3i$ 之平方根。

[解]　命　$\sqrt{5-3i}=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, (1)

於是　$5-3i=r^2(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)$

$=r^2[\cos(2\alpha-2n\pi)+i\sin(2\alpha-2n\pi)]$.

* 參閱任何高等代數關於級數之收斂一章.

等置實數及虛數部分，

$$r^2\cos(2\alpha-2n\pi)=5, \tag{2}$$

及
$$r^2\sin(2\alpha-2n\pi)=-3. \tag{3}$$

將 (2) 及 (3) 平方後相加，得

$$r^4=34,\quad \therefore\quad r^2=\sqrt{34},\quad 而\quad r=\sqrt[4]{34}. \tag{4}$$

於是
$$\cos(2\alpha-2n\pi)=\frac{5}{\sqrt{34}},$$

及
$$2\alpha-2n\pi=329°2', \tag{5}$$

其所在象限可由 (2) 及 (3) 決定之。

當
$$n=0,\quad \alpha=164°31'; \tag{6}$$

$$n=1,\quad \alpha=344°31'. \tag{7}$$

由 (4) 及 (6) 代入 (1)，得

$$\sqrt{5-3i}=-2.3271+0.6446i.$$

由 (4) 及 (7) 代入 (1)，得

$$\sqrt{5-3i}=2.3271-0.6446i.$$

4. 求 $3+4i$ 之平方根。

5. 求 $-3-4i$ 之平方根。

6. 求 -4 之平方根。

7. 求 i 之平方根。

8. 求 $-i$ 之平方根。

9. 求 $2-3i$ 之立方根。

〔解〕 命 $\sqrt[3]{2-3i}=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$. (1)

於是 $$2-3i=r^3(\cos 3a+i\sin 3a)$$
$$=r^3[\cos(3a-2n\pi)+i\sin(3a-2n\pi)].$$

等置實數及虛數部分，

$$r^3\cos(3a-2n\pi)=2; \tag{2}$$

及 $$r^3\sin(3a-2n\pi)=-3. \tag{3}$$

將 (2) 及 (3) 平方後相加，得

$$r^6=13,\quad\therefore\quad r^3=\sqrt{13},\quad \text{而}\quad r=\sqrt[6]{13}. \tag{4}$$

於是 $$\cos(3a-2n\pi)=\frac{2}{\sqrt{13}},$$

及 $$3a-2n\pi=303°41', \tag{5}$$

其所在象限可由 (2) 及 (3) 決定之.

當 $$n=0,\quad a=101°14'; \tag{6}$$
$$n=1,\quad a=221°14'; \tag{7}$$
$$n=2,\quad a=341°14'. \tag{8}$$

由 (4) 及 (6) 代入 (1)，得

$$\sqrt[3]{2-3i}=-0.2987+1.5041i.$$

由 (4) 及 (7) 代入 (1)，得

$$\sqrt[3]{2-3i}=-1.1530-1.0107i.$$

由 (4) 及 (8) 代入 (1)，得

$$\sqrt[3]{2-3i}=1.4518-0.4933i.$$

至此吾人已求得 $2-3i$ 之三個立方根.

10. 求 $1+i$ 之立方根.

11. 求 $-1+i$ 之立方根。

12. 求 $2+3i$ 之立方根。

13. 試以 $\sin x$ 及 $\cos x$ 表出 $\sin 3x$ 及 $\cos 3x$ 之值。

14. 試以 $\sin x$ 及 $\cos x$ 表出 $\sin 5x$ 及 $\cos 5x$ 之值。

15. 用代莫伏爾定理，證明

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

又

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

［提示］ $\cos \alpha + i \sin \alpha = \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2.$

16. 試證：

$$\cos \alpha = \cos^3 \frac{\alpha}{3} - 3 \cos \frac{\alpha}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{3},$$

$$\sin \alpha = 3 \cos^2 \frac{\alpha}{3} \sin \frac{\alpha}{3} - \sin^3 \frac{\alpha}{3}.$$

第十章

對數

124. 對數在數學上之地位 嚴正的說，對數並不是三角學之一部分；然於解三角問題時所引起之數值計算，對數之為用極大．為此之故，今簡述其大要如後．

對數為幫助計算之工具．其對於含有乘，除，乘方及開方之問題，尤著成效．一個乘或除的簡單問題，不用對數亦極易解出；但欲求二個四位數或五位數之積或商者，用對數着手可簡單其計算工作．同理，有許多數雖不難求出其平方根，但用對數恆可簡單其演算；然若欲求一數之七次根或十次根，則非用對數不可．例如求 $3^{\frac{2}{3}}$ 之值，用對數可極易求得之．

本章先述對數之基本定律，然後舉例說明其用法．

125. 對數為指數 每一對數為一指數．例如，在簡單關係 $1000=10^3$ 內，3 為 1000 之對數，而 10 稱為對數系之底數 (Base)．吾人可謂 3 為以 10 為底數的 1000 之對數通常簡書為 $3=\log_{10}1000$．在方程式 $n=a^x$ 內，x 為 n 之對

數，而 a 為對數系之底數。吾人可謂 x 為以 a 為底數的 n 之對數。通常可簡書為 $x=\log_a n$.

除1外，任何正數皆可用作對數系之底數。通常所習用之對數系有二：其一之底數為10，另一之底數通常以 e 代表之，e 約等於 2.71828. e 不能用正確數字代表，故書作 $e=2.71828\cdots\cdots$.

以10為底數之對數系，係由布里格斯氏(Briggs, 1556–1630)所發明，稱為布氏對數系或常用對數系。以 e 為底數之對數系，係由訥白爾氏(Napier, 1560–1617)所發明，稱為訥氏對數系或自然對數系。

126. **指數定律** 因每一對數為一指數，故對數定律全隨指數定律而定。以此之故，此處所述之指數基本定律，純作復習與參考之用。每一定律以方程式之形式表出之。讀者若以文字表出每一定律，亦為極好之練習。

命 a, b 及 c 為不等於零之任何實數。

命 x 及 y 為含有零之任何實數。

於是可書出下列各基本定律：

定律一 $a^0=1$.

[例解] 1. $10^0=1$.

2. $(-4)^0=1$.

定律二 $a^x a^y=a^{x+y}$.

[例解] 1. $3^2\cdot 3^5=3^7$.

2. $10^{1.268}10^{3.135}=10^{4.403}$.

定律三 $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

[例解] **1.** $\dfrac{(129)^6}{(129)^4}=(129)^2$.

2. $\dfrac{10^{-1.2461}}{10^{4.1215}}=10^{-5.3676}$.

定律四 $(a^x)^y=a^{xy}$.

[例解] **1.** $(5^2)^3=5^6$.

2. $(10^{1.6245})^4=10^{6.4980}$.

定律五 $a^{\frac{1}{x}}=\sqrt[x]{a}$ (x 爲正整數)。

[例解] **1.** $64^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{64}=4$.

2 $(-32)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{-32}=-2$.

定律六 $a^{\frac{x}{y}}=\sqrt[y]{a^x}$ 或 $a^{\frac{x}{y}}=(\sqrt[y]{a})^x$ (y 爲正整數)。

[例解] **1.** $4^{\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3}=\sqrt{64}=8$.

2. $4^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{4})^3=2^3=8$.

定律七 $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$ 或 $a^x=\dfrac{1}{a^{-x}}$.

[例解] **1.** $5^{-3}=\dfrac{1}{5^3}$.

2. $47^{\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{47^{-\frac{2}{3}}}$.

定律八 $(abc)^x=a^xb^xc^x$ 此定律可擴展至任何個因式。

[例解] **1.** $(2\cdot5\cdot7)^3=2^3\cdot5^3\cdot7^3$.

2. $(10^{1.32}\cdot10^{3.04})^3=10^{3.96}\cdot10^{9.12}=10^{13.08}$.

定律九 $\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$.

［例解］ 1. $\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{5^3}{2^3}=\frac{125}{8}=15\frac{5}{8}$.

2. $\left(\frac{10^{2.102}}{10^{1.463}}\right)^2=\frac{10^{4.204}}{10^{2.926}}=10^{1.278}$.

127. **常用對數系** 給 10 以相當的指數，可以任何之正確程度表出每個正數。例如，

$$1=10^{0.00000},\qquad 2=10^{0.30103},$$
$$3=10^{0.47712},\qquad 4=10^{0.60206},$$
$$5=10^{0.69897},\qquad 6=10^{0.77815},$$
$$7=10^{0.84510},\qquad 8=10^{0.90309},$$
$$9=10^{0.95424},\qquad 10=10^{1.00000}.$$

指數 0.30103 爲以 10 爲底數的 2 之對數，指數 0.95424 爲以 10 爲底數的 9 之對數。須切記者，對數實爲近似値。於上列之表中，1 及 10 之對數爲確數，而其他一切皆爲近似値。其正確程度全依數之小數點後之數字而定。普通對數表有四位，五位，六位及更多之小數位。吾人非欲論述對數表之構成方法；祇欲取以應用之而已。

因爲 10 之指數爲實數時，不能將負數表出，故通常恆謂負數無對數，但此並不爲絕對眞實，蓋負數之對數爲複素數之故也。此等複素數不在對數表中列出，但並不卽謂對數不能計算負數也。如遇此蘊問題，其一切對數計算皆可視作正

數而進行之，其結果之符號全依代數原理而定，與對數完全無關。

習題

1. 將 3000 以帶指數的 10 之形式表之。

因 $$3=10^{0.47712},\tag{1}$$

及 $$1000=10^{3}.\tag{2}$$

以 (2) 乘 (1)，得

$$3000=10^{3}\cdot10^{0.47712}=10^{3.47712}.$$

此爲所求之形式。

2. 將 0.005 以帶指數的 10 之形式表之。

因 $$5=10^{0.69897},\tag{1}$$

及 $$1000=10^{3}.\tag{2}$$

以 (2) 除 (1)，得

$$0.005=\frac{10^{0.69897}}{10^{3}}=10^{0.69897-3}=10^{-2.30103}.$$

此爲所求之形式。

3. 將下列各數以帶指數的 10 之形式表之。

(*a*) 40. (*b*) 0.7. (*c*) 800.

(*d*) 0.09. (*e*) 6000. (*f*) 0.003.

128. **定位部及定值部** (Characteristic and Mantissa) 由對數表，檢得以 10 爲底數的 7.62 之對數爲 0.8820，故可

書爲 $$7.62=10^{0.8820}.\tag{1}$$

以 10, 以 100, 以 1000 分別乘 (1) 之各端，得

$$76.2=10^{0.8820}\times10^{1}=10^{1.8820},\tag{2}$$

$$762=10^{0.8820}\times10^{2}=10^{2.8820},\tag{3}$$

$$7620=10^{0.8820}\times10^{3}=10^{3.8820}.\tag{4}$$

同理，以 10, 100, 1000 各除 (1) 之各端，得

$$0.762=10^{0.8820}\div10^{1}=10^{0.8820-1},\tag{5}$$

$$0.0762=10^{0.8820}\div10^{2}=10^{0.8820-2},\tag{6}$$

$$0.00762=10^{0.8820}\div10^{3}=10^{0.8820-3}.\tag{7}$$

由此可知，7.62, 76.2, 762, 7620, 0.762, 0.0762, 0.00762 各數之對數祇於整數 (Whole number) 上有不同，其各數皆含小數部分 0.8820 故吾人在習慣上常把對數看作係二部分所構成，一部分爲一正小數，如0.8820；一部分爲一正整數，負整數，或零．對數之正小數稱爲定值部(Mantissa)；而正整數或負整數，並包括零而言，則稱爲定位部 (Characteristic). 例如，於

$$762=10^{2.8820}$$

內，以 10 爲底數的 762 之對數爲 2.8820, 可簡書爲：

$$\log_{10}762=2.8820,$$

或更簡書爲 $$\log 762=2.8820.$$

就上式而論，2 爲定位部，0.8820 爲定值部。

於論係式 $$0.0762=10^{0.8820-2}$$

內，即知 0.0762 之對數為 0.8840－2，可簡書為

$$\log 0.0762 = 0.8820 - 2.$$

此處之定位部為 －2，而定值部為 0.8820.

由上述之例證，即得一普徧原理；即一數之小數點有改變，對於其對數之定值部並無影響．換言之，凡各數祇有小數點之位置不同者，則其對數祇於定位部上有不同；其定值部則皆相同．

所須注意者，定值部恆為正，雖對數自身為負時亦然．由關係式 (5) 可書為

$$\log 0.0762 = 0.8820 - 2 = -1.1180.$$

可見 0.0762 之對數為 －1.1180. 此對數並不以正小數，或正負整數表出，是以 －1 不為其定位部，而 －0.1180 亦不為其定值部． 0.0762 對數之定位部為 －2，而定值部為 0.8820.

在以 10 為底數之對數表中，定位部並不一一列出，而定值部恆以正小數部分表出．於是，若定位部不在表中列出，試問如何可求得之？ 今以下節作本問題之答案．

129　**定位部之定律**　常用對數系，其底數為 10. 此對數系即吾人用以計算者．由底數為 10 之事實，即得定位部之二個定律．第一律屬於大於一之數之對數，第二律屬於小於一之數之對數．

第一律由以下事實而化得:

$$\begin{array}{lll} 10^0=1 & \text{或} & \log 1 \quad\;\; =0, \\ 10^1=10 & & \log 10 \quad =1, \\ 10^2=100 & & \log 100 \;\, =2, \\ 10^3=1000 & & \log 1000=3, \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

位於 100 與 1000 間之任何數,其對數位於 2 與 3 之間,故其對數爲 2 加以某個正小數.但位於 100 與 1000 間之一切數,在小數點左方都有三位數,如 436.27, 故一切如是之數之對數都有定位部 2. 普徧論之,當知下律爲眞實.

定位部之第一律 凡大於一之數,其對數之定位部,在數值上,較小數點左方之數之位數少一.

例如, 34.67 之對數定位部爲 1, 由對數表求得其定值部爲 0.53995, 是以吾人可書爲

$$\log 34.67=1.53995.$$

又, 34670 之對數定位部爲 4, 而定值部爲 0.53995. 故吾人可書爲

$$\log 34670=4.53995.$$

第二律由下列事實而化得:

$$
\begin{array}{lll}
10^0=1 & \text{或} \ \log 1 & =0, \\
10^{-1}=0.1 & \log 0.1 & =-1, \\
10^{-2}=0.01 & \log 0.01 & =-2, \\
10^{-3}=0.001 & \log 0.001 & =-3, \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots &
\end{array}
$$

位於 0.01 與 0.001 間之一切數，其對數位於 -2 與 -3 之間．如 0.00368 卽爲位於 0.01 與 0.001 之間之一數．同理，凡小於一之一切數，而其小數點與首位有效數字間有二個零者，卽位於 0.01 與 0.001 之間，故一切如是之數之對數部位於 -2 及 -3 之間．因定値部恆爲正小數，故對數位於 -2 與 -3 之間者，可書成正小數 -3 之形式，故 -3 爲一切如是之對數之定位部．此極易知下律爲眞實．

定位部之第二律　凡小於一之正數，其對數之定位部爲負數，在數值上，較該數小數點與首位有效數字間零之個數多一．

例如，0.003467 之對數定位部爲 -3，由對數表檢得其定値部爲 0.53995，故可書爲

$$\log 0.003467=0.53998-3.$$

又，0.03467 之對數定位部爲 -2，0.3467 之對數定位部爲 -1．於應用定位部第二律於 0.3467 之對數時，須知小數點與首位有效數字間並無零，故於數值上，其定位部等於一．

其所以爲負者,全以 0.3467 小於一之故. 故吾人可書爲

$$\log 0.3467 = 0.539951 - 1.$$

習題 書出下列各數之對數定位部:

0.271.	36.59.	0.45.
3002.4.	6200.0031.	673.8.
0.5007.	5.007.	2.73×10^4.
396×10^{-8}.	4.87×10^{-6}.	3.373737….

130. **對數表** 前已述及,對數爲指數,而對數表專供吾人查檢之用. 所宜注意者,對數僅爲近似值. 表中所列出之對數則爲儘表之小數位數限度內所作最近之近似值也.

在本書附錄的對數表中,表一爲自 1 至 999 之常用對數,各至四位小數. 表二爲正弦,餘弦,正切及餘切等三角函數自 0° 至 90° 之對數,亦各至四位小數.

在表中,數之對數的定位部皆不列出. 而在三角函數之對數表中,則其對數的定位部並不省略;若定位部爲 0 或更多者,即列出其眞實定位部; 若定位部爲負整數者,則將其眞實定位部增以 10 而列出之. 例如,30°10′ 之餘切之對數爲 0.2356,此即爲其眞實對數;但 30°10′ 之正弦對數爲 9.7012,而其眞實對數則爲 9.7012−10. 此純爲免去排印負定位部之故. 稍事練習查表後,即可區別何個定位部係由增加 10 而得者. 一角之正弦對數稱爲該角之對數正弦,例如, log sin 10° 稱爲 10° 之對數正弦. 其餘各函數亦莫不皆然.

131. 對數可書成數種形式 一個對數可書成數種形式. 今以 0.002694 之對數例證之如下:

$$\log 0.002694 = 0.43040 - 3. \tag{1}$$

0.43040 − 3 之差可書爲

$$0.43040 - 3 = -2.56960, \tag{2}$$

$$0.43040 - 3 = \bar{3}.43040, \tag{3}$$

$$0.43040 - 3 = 7.43040 - 10, \tag{4}$$

$$0.43040 - 3 = 17.43040 - 20, \tag{5}$$

等等.

各個形式有各個的利益.

形式 (1) 顯示定值部與定位部各爲分開之數.

形式 (2) 表出二數之差爲一個負數. 此種形式於計算中恆避免用之, 因表中所列之常用對數恆爲正數也; 但有時則必須用其正確值, 如欲以一個對數除他數之時就須應用此式.

形式 (3) 純爲一簡略形式, 且實由一個正數與一個負數結合而成. 3 上方之減號表示 3 爲負數. 小數 0.43040 爲正數. 數 $\bar{3}.43040$ 之意義爲方程式 (3) 所確定.

形式 (4) 用於普通計算時爲最適合. 此爲標準形式之一. 表中有許多對數皆係增加 10 而列出者, 如正弦及餘弦之對數卽增以 10 也.

形式 (5), 當對數除以 2 時, 頗多用之.

132. **內推法** (Interpolation)　數的對數及三角函數的對數,在表中所列出者,皆為相隔相當間段所取之某定值.若欲求不在表中列出之數或角之對數之值,則須用一種方法,稱為內推法.應用此種方法時,恆假定在極小間段中,一數之對數與該數成正比例.

同理,亦假定在極小間段中,一角之三角函數與其角成正比.雖此等假定並不完全與事實相符合,然如是所得之值,對於計算之目的而言,已充分正確.又,用內推法所求得之結果,通常祇限於表中所列之小數部分.

內推法可按下列二法行之:

(*a*) 根據第 32 節解釋之比例部分之原理,或

(*b*) 應用表中附列之比例部分輔助表.

於任何表中,其內推之法完全相同.

133 **對數表之用法**　關於數的對數表之用法有二個問題:其一,已知一數,欲求其對數;其二,已知一數之對數,欲求其數.至於三角函數之對數表,亦有二個完全相同之問題:其一,已知一角,欲求該角之對數函數;其二,已知一角之對數函數,欲求該角.

今以下列數例說明之:

1.　求 log 1.936.

a.　在附錄表一之第 215 頁上,檢得

$$\log 1.936 = 0.2869.$$

數 2869 在 193 之右且於上端標有 6 之一行內檢得．此爲對數之定値部，惟省略其小數點而已．其定位部爲零；故

$$\log 1.936 = 0.2869.$$

b. 此對數亦可由附錄表一之第 216 頁上檢得，惟須用內推法．此可按第 32 節，或用比例部分表．例如，

(1)
$$\begin{array}{r}\log 1.93 = 0.2856\\ \log 1.94 = 0.2878\\ \hline \text{差數}\quad 0.0022\end{array}$$

$$
\begin{array}{r|l}
\text{數} & \text{對數} \\ \hline
10\left\{\begin{array}{r} 6\left[\begin{array}{l}1.930\\1.936\end{array}\right. \\ 1.940\end{array}\right. &
\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}0.2856\\u\end{array}\right]c \\ 0.2878\end{array}\right\}0.0022
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \frac{c}{0.0022} = \frac{6}{10}\quad \text{或}\quad c = 0.00132.$$

c 爲校正數，應加之於 0.2856 而得 u，即爲 log 1.936 之値．

於是　　$\log 1.936 = 0.2856 + 0.0013 = 0.2869.$

(2) 若用比例部分表，則內推之工作更可簡省．用同頁上端比例部分 22，則見在數內有 6 之改變，對數內有 13.2 之校正數．故知加於 0.2856 之校正數爲 0.0013.

於是　　$\log 1.93 = 0.2856,$

對於 6 之校正數 $= 0.0013,$

故　　$\log 1.936 = 0.2869.$

2　求 log sin 15°16′ 至四位小數.

附錄表二爲具有四位小數之表. 欲求 log sin 15°16′ 可翻閱第 220 頁，該頁上端標有 log sine 字樣，即於左方直行內定 15° 之位置. 其分數則標明於上端之橫列內。例如，

$$\begin{array}{r}
\log\sin 15^\circ 10' = 9.4177-10\\
\log\sin 15^\circ 20' = 9.4223-10\\
\hline
\text{差數}\qquad 0.0046
\end{array}$$

由比例部分表查得 6′ 之校正數爲 27.6, 故

$$\begin{array}{r}
\sin\log 15^\circ 10' = 9.4177-10\\
6'\text{ 之校正數} = \qquad 28\\
\hline
\log 15^\circ 16' = 9.4205-10
\end{array}$$

3　由一四位數表，求 log cos 42°27′.

於附錄表二第 220 頁上，其所標 log cosine 字樣在頁之下端. 因爲所用之函數標明在頁之下端，故標示度數之直行須用在表之右方者，而分數亦須從頁之下端所標的行內讀出. 例如，

$$\begin{array}{c}
10'\left\{\begin{array}{l} 7'\left[\begin{array}{l}\log\cos 42^\circ 20' = 9.8688\\ \log\cos 42^\circ 27' = \quad u\end{array}\right]\\ \qquad\log\cos 42^\circ 30' = 9.8676\end{array}\right\}-12\\
\hline
\text{差}\quad\text{數}\quad = \;-12
\end{array}$$

由比例部分表 12 查得 7′ 之校正數爲 8.4, 故

$$\begin{array}{r}
\log\cos 42^\circ 20' = 9.8688\\
7'\text{ 之校正數} = \quad -8\\
\hline
\log\cos 42^\circ 27' = 9.8680
\end{array}$$

4. 已知 $\log x=2.1711$ 求 x.

由附錄表一,第 214 頁,得知 0.1711 爲所列各對數之一,故不必用內推法. 定値部 1711 與數 148 在同一直線上,且在標有 3 之直行內,故

$$x=148.3.$$

因其定位部爲 2,故小數點須置在第三位有效數字之後.

5. 已知 $\log x=\overline{2}.3469$, 求 x.

用附錄表一,第 216 頁,可書爲

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\log 0.0222 &=\overline{2}.3464\\ \log \qquad\quad x &=\overline{2}.3469\end{array}\right]5\\ \log 0.0223=\overline{2}.3483\end{array}\right]19$$

顯而易見者, x 位於 0.0222 與 0.0223 之間. x 之對數較 0.0222 之對數大 5. 用比例部分表 19,得知由對數之差數 5 而得之校正數,在表中並不適爲列出,而比較上則近於 3,

$$\therefore\quad x=0.02223.$$

6. 已知 $\log\sin x=9.2432-10$, 求 x.

用附錄表二,第 219 頁,得知 $x=10°5'$. 故無須再用內推法.

7. 已知 $\log\sin x=9.5382-10$, 求 x

用附錄表二,第 220 頁,可書爲(省略 -10):

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{ll}\log\sin 20°10' &=9.5375\\ \log\sin \qquad x &=9.5382\end{array}\right]7\\ \log\sin 20°20'=9.5409\end{array}\right]34$$

欲求對應差數 7 之角之校正數,可用比例部分表 34. 由表查得 $2'$ 對應於差數 6.8,

此爲表中所列之最近值。

故角之校正數爲 $2'$,

$$\therefore\quad x=20°12'.$$

134. 表之特徵

1. 表一爲數之對數表,至四位數字,惟有一個特徵須注意者.第 214 頁及第 215 頁,可使吾人不用內推法而求得不大於 1999 四位數之對數. 此爲對數改變最速之一個階段. 第 216 頁及第 217 頁爲三位數之對數表.

2. 表二亦有一個特徵. 此表列出小間段間函數之對數,而其時函數改變最爲迅速. 例如,對數正弦在首 13 度內,將每一分數皆一一列出.

135. 對數之定律

定理一 二數乘積之對數,等於各數對數之和.

命 m 及 n 爲任何二個正數. 並各以指數形式表示之.

$$m=a^x, \tag{1}$$

$$n=a^y. \tag{2}$$

其乘積爲 $$mn=a^x\cdot a^y=a^{x+y}. \tag{3}$$

將 (1), (2) 及 (3) 以對數式表出之.

$$\log_a m = x, \tag{4}$$

$$\log_a n = y, \tag{5}$$

$$\log_a mn = x + y. \tag{6}$$

由 (4) 及 (5) 代入 x 及 y 之值，得

$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n \tag{7}$$

此卽所欲證明者.

此律可使吾人藉對數表而以加法替代乘法.

定理二 二數之商之對數，等於被除數之對數減去除數之對數.

以 (2) 除 (1),

$$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}. \tag{8}$$

改成對數形式

$$\log_a \frac{m}{n} = x - y. \tag{9}$$

由 (4) 及 (5) 代 x 及 y 之值,

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n, \tag{10}$$

此卽所欲證明者.

此律可使吾人以減法替代除法.

定理三 凡具有指數之數，其對數等於其指數乘以該數之對數.

將 (1) 之各端俱取一指數 p.

$$m^p = a^{px}. \tag{11}$$

改爲對數式,

$$\log_a m^p = px. \tag{12}$$

將 (4) 之 x 值代入,

$$\log_a m^p = p \log_a m, \tag{13}$$

此即所欲證明者.

不論 p 爲分數抑整數,此律皆爲眞實. 例如,

$$\log 254^3 = 3 \log 254,$$

$$\log \sqrt[3]{254} = \log 254^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 254,$$

$$\log \sqrt[5]{254^7} = \log 254^{\frac{7}{5}} = \frac{7}{5} \log 254.$$

此律可使吾人以乘法替代乘方,以除法替代開方.

由公式 (7),(10) 及 (13) 所表出之定律,對於許多形式皆可應用. 今以數例說明之.

(1) 已知　　$x = a \cdot b \cdot c.$

$$\log x = \log(ab) + \log c \qquad \text{按 (7)}$$

$$= \log a + \log b + \log c.$$

(2) 已知　　$x = \dfrac{a^2\sqrt{b}}{c^3}.$

$$\log x = \log a^2\sqrt{b} - \log c^3 \qquad \text{按 (10)}$$

$$= \log a^2 + \log \sqrt{b} - \log c^3 \qquad \text{按 (7)}$$

$$= 2 \log a + \tfrac{1}{2} \log b - 3 \log c. \qquad \text{按 (13)}$$

136. 習 題

1. 求 98.2×4.63.

命 $$x=98.2\times4.63.$$

[解] $$\log x=\log 98.2+\log 4.63$$ 按 (7)

$\log 98.2$	1.9921
$\log 4.63$	0.6656
$\log x$	2.6577
x	454.67

2. 已知 $b=2.46\sin 12^\circ18'$, 求 b.

[解] $$\log b=\log 2.46+\log\sin 12^\circ18'$$

$\log 2.46$	0.3909
$\log\sin 12^\circ18'$	$9.3284-10$
$\log b$	$9.7193-10$
b	0.524

3. 已知 $x=\dfrac{763.20}{25.49}$.

[解] $$\log x=\log 763.20-\log 25.49$$ 按 (10)

$\log 763.20$	2.88262
$\log 25.49$	1.40633
$\log x$	1.47629
x	29.94

4. 已知 $x=2^{25}$, 試求 x.

[解] $$\log x=25\log 2$$ 按 (17)

$\log 2$	0.3010	
$\log x$	7.5250	乘以 25
x	33,500,000	

5. 已知 $x^2=\dfrac{54.78\cot 69°20'20''}{49.02}$.

[解] (7), (10), (13)

$\log x=\frac{1}{2}(\log 54.78+\log\cot 69°20'20''-\log 49.02)$

log 54.78	1.73864	
log cot 69°20′20″	9.57645 − 10	
	11.31509 − 10	
log 49.02	1.69038	
2	19.62471 − 20	
log x	9.81235 − 10	除以 2
x	0.6492	

用四位數字表求出下列各數之對數:

6. 724.5. 7. 8.423. 8. 0.0069.

9. 2.004. 10. 0.207. 11. 3.49×10^6.

用四位數字表求下列各式之 x 值:

12. $\log x=2.5740$. 13. $\log x=\bar{1}.6551$.

14. $\log x=-1.6551$. 15. $\log x=3.4051$

16. $\log x=9.7641-10$. 17. $\log x=\bar{2}.1037$.

求下列各式之值:

18. 942×68.3. 19. 10275×32010.

20. $10275\div 320.10$. 21. $763\times 42.37\div 38.4$.

22. 4.621^4. 23. $\sqrt[4]{4.621}$. 24. $\dfrac{23.23^2}{45.67^3}$.

25. $10.04^{\frac{3}{2}}$. 26. $(0.0354)^{0.041}$ 27. $\dfrac{634}{\log 245}$.

28. $\log\dfrac{634}{245}$. 29. $\dfrac{\log 634}{245}$. 30. $\log 634^2$.

31. $(\log 634)^2$.

答　　數

第20節　第19頁

4. $\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$, 等等.　　5. $114°35'28''$, $286°28'40''$, 等等.

6. $60°$, $135°$, $-300°$, $57°17'44''$, $36°28'31''$, 等等.

7. $7\frac{1}{2}$ 呎.　　8. $2\frac{2}{5}$ 弳, $137°30'34''$.　　9. $94°3'24''$.

10. $\frac{16}{15}\pi$ 呎.　　11. 2.7216 弳.　　12. 每分 247.16 次, 25.882.

13. 每秒 18.33 哩.　　14. 5236.　　15. 9.6π, 每秒 240π 呎.

第28節　第31頁

1. 第三及第四.　　2. 第一及第四.　　3. 第一及第三.

7. 第二.　　8. 第三.　　20. $-\frac{2\pi}{3}$.　　21. $-\frac{4\pi}{3}$.

28. $\sin \alpha_1 = \frac{6}{85}\sqrt{85}$,　$\cos \alpha_1 = -\frac{7}{85}\sqrt{85}$,　$\cot \alpha_1 = -\frac{7}{6}$,

$\sec \alpha_1 = -\frac{1}{7}\sqrt{85}$,　$\csc \alpha_1 = \frac{1}{6}\sqrt{85}$,

$\sin \alpha_2 = -\frac{6}{85}\sqrt{85}$,　$\cos \alpha_2 = \frac{7}{85}\sqrt{85}$,　$\cot \alpha_2 = -\frac{7}{6}$,

$\sec \alpha_2 = \frac{1}{7}\sqrt{85}$,　　$\csc \alpha_2 = -\frac{1}{6}\sqrt{85}$.

35. $\frac{16}{17}$.

第34節　第49頁

4. $a=63$, $b=16$.　　5. $b=220$, $\alpha=41°7'$.

6. $c=212$, $\alpha=58°7'$.　　7. $a=2.52$, $c=2.60$, $\alpha=75°45'$.

第38節　第55頁

1. $b=16.5$, $c=17.5$, $\beta=70°$.
2. $a=1.44$, $b=2.05$, $\beta=55°$.
3. $c=0.869$, $a=0.225$, $\alpha=15°$.
4. $c=65$, $\alpha=23°$, $\beta=67°$.
5. $\alpha=27°$, $\beta=63°$, $b=72.6$.
6. $\alpha=18\frac{1}{2}°$, $\beta=71\frac{1}{2}°$, $b=0.00863$.
7. $a=346$, $c=507$, $\beta=47°$.
8. $\alpha=27°$, $\beta=63°$, $a=3.50$.
9. $a=0.029$, $b=0.089$, $\beta=72°$.
10. $\alpha=40\frac{1}{2}°$, $a=8.11$, $b=9.48$.
11. $b=5161$, $c=5489$, $\beta=70°5'$.
12. $a=0.1384$, $b=0.2878$, $\beta=64°19'$.
13. $a=1.446$, $c=1.719$, $\alpha=57°17'$.
14. $c=0.00006294$, $\alpha=72°26'$, $\beta=17°34'$.

15, 16. 等題，自行檢驗其結果.

31. 底邊 1331，頂角 149°20′.　32. 底角 39°23′56″，底邊 1477.

33. 二等邊 1623，底角 38°.　34. 二等邊 219.75，底角 68°27′19″.

35. 37.504.

第39節　第57頁

1. 7, 24, 25.　2. 12, 16, 20.　3. $1, \frac{7}{25}, \frac{24}{25}$.

第41節　第58頁

1. 290.83 呎.　2. 405.24 呎.　3. 263.92 呎，289.93 呎.

4. 21.442 呎.　5. $2nr\sin\frac{180°}{n}$.　6. 132.52 呎.

7. $2nr\tan\frac{180°}{n}$.　8. 130.99 呎.　9. 226.11 呎.

10. 2572.5 呎.　11. 21.360 吋，22.638 吋，69°26′36″.

12. 54.775 哩.　13. 153.72 磅，38°31′46″.

14. 739.38 哩/小時.　15. 16 呎，$3\frac{5}{32}$ 吋.　16. 35°16′.

第53節 第74頁

3. $-\cot 20^\circ,\ -\tan 70^\circ.$ 4. $-\cot 20^\circ,\ -\tan 70^\circ.$

5. $\cos 20^\circ,\ \sin 70^\circ.$ 6. $-\tan 80^\circ,\ -\cot 10^\circ.$

7. $-\sin 60^\circ,\ -\cos 30^\circ.$ 8. $\cos\theta.$

9. $-\tan\theta.$ 10. $-\tan\theta.$ 11. $-\cos\theta.$

第57節 第83頁

15. $\cos\theta=-\frac{1}{3}\sqrt{5},\quad \tan\theta=-\frac{2}{5}\sqrt{5},\quad \cot\theta=-\frac{1}{2}\sqrt{5},\quad \sec\theta=-\frac{3}{5}\sqrt{5},$
$\csc\theta=\frac{3}{2}.$

16. $\sin\theta=\dfrac{10}{149}\sqrt{149},\quad \cos\theta=\dfrac{7}{149}\sqrt{149},\quad \tan\theta=\dfrac{10}{7},$

$\sec\theta=\frac{1}{7}\sqrt{149},\qquad \csc\theta=\dfrac{1}{10}\sqrt{149}.$

第59節 第88頁

1. $x=30^\circ.$ 2. $u=45^\circ.$ 3. $x=0^\circ,\ 60^\circ.$ 4. $\theta=45^\circ,\ 60^\circ.$

5. $\sin x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{5}}.$ 6. 恆等式. 7. $x=60^\circ,\ 120^\circ.$

8. $\theta=120^\circ.$ 9. $\theta=30^\circ.$ 10. 恆等式. 11. $y=30^\circ,\ 150^\circ.$

12. $a=30^\circ,\ 150^\circ.$ 13. $a=30^\circ,\ 60^\circ,\ 120^\circ,\ 150^\circ.$

14. $x=45^\circ,\ 135^\circ.$ 15. $x=45^\circ.$

第64節 第93頁

20. $\dfrac{\tan^2 x-1}{\tan^2 x+1}.$ 21. $\sin x\pm\sqrt{1-\sin^2 x}.$ 22. $\dfrac{1+\cos^2 x}{1-\cos^2 x}.$

26. $\cos\theta=\pm\sqrt{1-a^2},\quad \tan\theta=\dfrac{a}{\pm\sqrt{1-a^2}},\quad \cot\theta=\dfrac{\pm\sqrt{1-a^2}}{a},$

$\sec\theta=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+a^2}},\quad \csc\theta=\dfrac{1}{a}.$

23. $\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta},\quad \tan\theta=\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}.$

$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}},\quad \sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta},\quad \csc\theta=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}}.$

30. $\frac{a}{2}$.　　34. 0°, 90°.　　35. 135°.　　36. 0°, 30°, 60°, 150°.

37. 30°, 150°.　　38. 45°.　　41. 36°52′ (參閱表).　　42. 90°.

44. 65°54′, 114°6′.　　45. 0°, −30°, −150°.

46. $\tan x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}, \pm\frac{1}{4}\sqrt{2}$.　　47. $\sin x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}, \pm\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

48. 195°, 345°.　　49. 54°, 234°.

第75節　第108頁

2. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$.　　3. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$.　　4. $\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$.

5. $\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$.　　7. $\cos\beta$.　　8. $-\cot\alpha$.　　9. $-\cos\alpha$.

第77節　第111頁

1. $\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}$.　　2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

3. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{3-2\sqrt{2}}, \sqrt{3+2\sqrt{2}}$,

4. $\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{24}{7}, -\frac{7}{24}$.　　5. $\frac{1}{17}\sqrt{17}, \frac{4}{17}\sqrt{17}, \frac{1}{4}, 4$.

6. $\pm\sqrt{\frac{10\pm\sqrt{10}}{20}}$.　　7. $+\frac{840}{841}, -\frac{41}{841}, -\frac{840}{41}, -\frac{41}{840}$.

第79節　第115頁

2. 30°, 90°, 150°.　　3. 0°, 120°.　　4. 67°30′, 157°30′.

6. 0°, 30°, 90°, 150°.　　7. 0°, 90°, 120°.　　10. 0°, 120°.

11. 30°, 150°.

第80節　第118頁

3. $10\sin(x+53°8')$.　　4. $5.044\sin(x+7°36')$.

第81節　第118頁

1. $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1), \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1), 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$.

2. $\pm\frac{1}{8}\sqrt{15}, -\frac{7}{8}, \pm\frac{1}{7}\sqrt{15}, \pm\frac{7}{15}\sqrt{15}$.

3. $\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

32. $0, \pm\sqrt{\dfrac{3-a}{1-3a}}$. 33. $0°, 30°, 150°$. 36. $0°, 65°42'$

第91節 第132頁

1. $60°, 120°, 420°$, 等等. 2. $150°, 210°, -150°$, 等等.

3. $45°, 225°, -135°$, 等等. 4. $\dfrac{1}{4}$. 5. $\pm\dfrac{1}{17}\sqrt{17}$.

6. $\dfrac{u}{\pm\sqrt{u^2+1}}$. 7. $\dfrac{\pm\sqrt{u^2+1}}{u}$. 9. $\pm\sqrt{1-u^2}$.

10. $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+u^2}}$. 11. $\dfrac{1}{u}$. 13. $\pm 2u\sqrt{1-u^2}$.

14. $\dfrac{2u}{1-u^2}$. 15. $\dfrac{\pm 2\sqrt{u^2-1}}{2-u^2}$. 20. $\pm u\sqrt{1-v^2}\pm v\sqrt{1-u^2}$.

21. $\pm\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}-uv$. 25. $\pm\sqrt{\dfrac{1-u}{2}}$. 27. $\pm\sqrt{\dfrac{u-1}{2u}}$.

29. [解] $x=\tan\cot^{-1}a=\dfrac{1}{\cot\cot^{-1}a}=\dfrac{1}{a}$.

30. $x=\dfrac{\pm a}{\sqrt{1-a^2}}$. 31. $1-2a^2$. 32. $\dfrac{\sqrt{1-a^2}-a^2}{\sqrt{1+a^2}}$.

34. $\dfrac{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}-ab}$. 35. $\dfrac{1}{ab}(1+\sqrt{a^2-1}\sqrt{b^2-1})$.

第107節 第150頁

1. $b=24.5$, $c=31.8$, $\gamma=78°$.

2. $\alpha=50°$, $b=54.9$, $c=53.6$.

3. $a=61.4$, $c=47.7$, $\gamma=48°$.

4. $\beta=48°20'$, $\gamma=62°40'$, $c=76.1$.

5. $\beta=68°22'$, $\gamma=56°58'$, $a=107$.

6. $\alpha=40°48'$, $\beta=104°52'$, $c=141$.

7. $\alpha=69°22'$, $\beta=38°38'$, $c=42.7$.

8. $\beta=38°37'$, $\gamma=31°23'$, $a=173$.

9. $\alpha=44°42'$, $\beta=60°20'$, $\gamma=74°54'$.

10. $\alpha=70°21'$, $\beta=49°38'$, $\gamma=58°1'$.

11. $\beta=34°44'$ 或 $145°16'$, $\gamma=125°16'$ 或 $13°44'$, $c=35.8$ 或 10.4.

12. $\alpha=51°44'$ 或 $128°16'$, $\beta=84°26'$ 或 $7°54'$, $b=0.431$ 或 0.059.

13. $\gamma=39°49'50''$, $a=41.581$, $c=41.432$.

14. $a=13.081$, $c=13.620$, $\beta=97°2'15''$.

15. $\alpha=90°20'34''$, $\beta=65°17'34''$, $\gamma=24°21'50''$.

16. $\alpha=126°59'18''$, $\beta=27°29'38''$, $\gamma=25°31'4''$.

17. $a=1.9555$, $\alpha=43°36'35''$, $\beta=15°37'7''$.

18. $\gamma=77°22'16''$, $\beta=51°57'20''$, $a=83.732$.

19. $\alpha=87°33'58''$, $\gamma=18°6'24''$, $b=1.4033$.

20. $\alpha=78°40'32''$, $\beta=41°20'47''$, $\gamma=59°58'41''$.

21. $\alpha=32°24'0''$, $\beta=55°0'28''$, $\gamma=92°35'32''$.

22. 不可能.

23. $\alpha=142°28'9''$ 或 $21°31'11''$, $\beta=29°31'31''$ 或 $150°28'29''$, $a=0.080746$ 或 0.04862.

24. $\gamma=76°50'20''$ 或 $103°9'40''$, $\alpha=69°39'35''$ 或 $43°20'15''$, $a=17.405$ 或 12.739.

25. $c=502.28$, $b=300.25$, $\gamma=23°7'3''$.

26. $\alpha=96°9'32''$, $\beta=41°11'10''$, $\gamma=42°39'18''$.

27. $A=150$.

30. $A=108.61$.　33. $A=368.91$.　35. 172.8 呎.　36. 106.1 呎.

37. 3.710 哩.　38. 97.14, 124.59, 178.64.　39. 60.1 呎.

40. 57.93 哩/每小時.　41. 3888 呎.　42. 6328.7 呎.

43. 239600 哩.

第103頁　第154頁

1. $1\frac{3}{4}$ 吋.　2. $60°, 72°, 135°$.　3. $\frac{2\pi}{9}, \frac{11\pi}{36}, \frac{19\pi}{90}, \frac{196\pi}{675}$.

4. $42°58'18''$.　5. $35°48'35''$.　6. 13.754 吋.　7. $\frac{\pi}{9}$.

8. $\frac{55\pi}{144}, \frac{73\pi}{144}$.　9. $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$.　10. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

11. $\frac{4\pi}{77}, \frac{10\pi}{77}, \frac{16\pi}{77}, \frac{22\pi}{77}, \frac{28\pi}{77}, \frac{34\pi}{77}, \frac{40\pi}{77}$.　12. $9\frac{3}{5}$ 吋.

49. $0°, 180°$.　50. $30°, 150°, 210°, 330°, 45°, 135°, 225°, 315°$.

51. $30°, 150°$.　52. $\tan^{-1}(2\pm\sqrt{3})$.　53. $0°, 180, \cos^{-1}\frac{1}{3}$.

54. $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 215^\circ, \sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$. 55. $60^\circ, 300^\circ, 0^\circ$

56. $60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$.

57. $\tan^{-1}\frac{3}{4}$. 58. $90^\circ, 270^\circ, \sin^{-1}\left(-\frac{21}{29}\right)$.

59. $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ$.

60. $0^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ$.

61. $7\frac{1}{2}^\circ, 37\frac{1}{2}^\circ, 67\frac{1}{2}^\circ, 97\frac{1}{2}^\circ, 127\frac{1}{2}^\circ, 157\frac{1}{2}^\circ$, 等等.

62. $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$.

63. $90^\circ, 270^\circ, 70^\circ, 110^\circ, 190^\circ, 230^\circ, 310^\circ, 350^\circ$.

64. $90^\circ, 180^\circ$. 65. $210^\circ, 330^\circ$.

66. $45^\circ, 215^\circ, 67\frac{1}{2}^\circ, 157\frac{1}{2}^\circ, 247\frac{1}{2}^\circ, 337\frac{1}{2}^\circ$.

67. $60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 18^\circ, 54^\circ, 90^\circ, 126^\circ, 162^\circ$, 等等.

68. $60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ$. 69. $\frac{2u}{1+u^2}$.

70. $0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. 71. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 72. $\frac{1}{8}\sqrt{10}, -\frac{12}{31}\sqrt{10}$.

73. $\frac{-1\pm\sqrt{1+m^2}}{m}$. 85. $\sqrt{3}$. 86. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$. 87. $0, \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

88. $\frac{ab+\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}}{b\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-b^2}}$. 97. $26^\circ34'$. 98. 7117.

99. 532. 100. 50. 101. 1478.5. 102. 93,470,000 哩.

103. 51.9 呎. 104. 27.925 105. 112.36. 106. $\frac{r^2}{2}$.

107. 129.9 呎. 108. 8.2596. 109. $70^\circ31'43''$.

110. 5296 呎, 251 呎. 111. 196. 112. 89.431. 114. $a\sqrt{2}$.

115. 90 呎, 40 呎. 116. 13.66. 117. 103.97. 118. 820.54.

119. 535.4. 120. 25.43. 121. 567.3. 122. 132.6.

123. 36.7 呎. 124. 641. 125. 962.605.

127. 16.33 N, $75^\circ36'$ E. 128. a. 129. 4009. 130. 1674.3.

第123節 第182頁

1. $1, i, -1, -i$.

2. $1, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i, -1, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i$.

4. $\pm(2+i)$ 5. $\pm(1-2i)$. 6. $\pm$[illegible]

7. $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i$.

8. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i$.

10. $1.0842+0.29051i$, $-0.79370+0.79370i$, $-0.29051-1.0842i$.

第 136 節　第 205 頁

18.	64340.	19.	328800000.	20.	32.1.	21.	841.8.
22.	455.8.	23.	1.466.	24.	0.005665.	25.	31.81.
26.	0.872.	27.	265.3.	28.	0.4129.	29.	0.01143.
30.	5.6042.	31.	7.852.				

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 00	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
1 01	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
1 02	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
1 03	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
1 04	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
1 05	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
1 06	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
1 07	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
1 08	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
1 09	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
1 10	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449
1 11	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488
1 12	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527
1 13	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565
1 14	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603
1 15	0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641
1 16	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678
1 17	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715
1 18	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752
1 19	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788
1 20	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824
1 21	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860
1 22	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896
1 23	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931
1 24	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966
1 25	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0990	0993	0997	1000
1 26	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035
1 27	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069
1 28	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103
1 29	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136
1 30	1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169
1 31	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202
1 32	1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235
1 33	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268
1 34	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300
1 35	1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332
1 36	1335	1339	1342	1345	1348	1351	1355	1358	1361	1364
1 37	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396
1 38	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427
1 39	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1455	1458
1 40	1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489
1 41	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520
1 42	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550
1 43	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581
1 44	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611
1 45	1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641
1 46	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670
1 47	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700
1 48	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729
1 49	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 50	1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787
1 51	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816
1 52	1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844
1 53	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872
1 54	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901
1 55	1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928
1 56	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956
1 57	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984
1 58	1987	1989	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011
1 59	2014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2033	2036	2038
1 60	2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066
1 61	2068	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092
1 62	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119
1 63	2122	2125	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146
1 64	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172
1 65	2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198
1 66	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225
1 67	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251
1 68	2253	2256	2258	2261	2263	2266	2269	2271	2274	2276
1 69	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302
1 70	2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327
1 71	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353
1 72	2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378
1 73	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403
1 74	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428
1 75	2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453
1 76	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477
1 77	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502
1 78	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526
1 79	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550
1 80	2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574
1 81	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598
1 82	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622
1 83	2625	2627	2629	2632	2634	2636	2639	2641	2643	2646
1 84	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669
1 85	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693
1 86	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716
1 87	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739
1 88	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762
1 89	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785
1 90	2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808
1 91	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831
1 92	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853
1 93	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876
1 94	2878	2880	2882	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898
1 95	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920
1 96	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942
1 97	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964
1 98	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986
1 99	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	3906	3008

本頁前十列之數，可應用上兩頁之表以行內推手續

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

	22
1	2.2
2	4.4
3	6.6
4	8.8
5	11.0
6	13.2
7	15.4
8	17.6
9	19.8

	21	20	19
1	2.1	2.0	1.9
2	4.2	4.0	3.8
3	6.3	6.0	5.7
4	8.4	8.0	7.6
5	10.5	10.0	9.5
6	12.6	12.0	11.4
7	14.7	14.0	13.3
8	16.8	16.0	15.2
9	18.9	18.0	17.1

	18	17	16
1	1.8	1.7	1.6
2	3.6	3.4	3.2
3	5.4	5.1	4.8
4	7.2	6.8	6.4
5	9.0	8.5	8.0
6	10.8	10.2	9.6
7	12.6	11.9	11.2
8	14.4	13.6	12.8
9	16.2	15.3	14.4

	15	14	13
1	1.5	1.4	1.3
2	3.0	2.8	2.6
3	4.5	4.2	3.9
4	6.0	5.6	5.2
5	7.5	7.0	6.5
6	9.0	8.4	7.8
7	10.5	9.8	9.1
8	12.0	11.2	10.4
9	13.5	12.6	11.7

	12
1	1.2
2	2.4
3	3.6
4	4.8
5	6.0
6	7.2
7	8.4
8	9.6
9	10.8

	11
1	1.1
2	2.2
3	3.3
4	4.4
5	5.5
6	6.6
7	7.7
8	8.8
9	9.9

	10
1	1.0
2	2.0
3	3.0
4	4.0
5	5.0
6	6.0
7	7.0
8	8.0
9	9.0

	9
1	0.9
2	1.8
3	2.7
4	3.6
5	4.5
6	5.4
7	6.3
8	7.2
9	8.1

	8
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.6
8	6.4
9	7.2

表一　數的對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

	6
1	0.6
2	1.2
3	1.8
4	2.4
5	3.0
6	3.6
7	4.2
8	4.8
9	5.4

	5
1	0.5
2	1.0
3	1.5
4	2.0
5	2.5
6	3.0
7	3.5
8	4.0
9	4.5

	4
1	0.4
2	0.8
3	1.2
4	1.6
5	2.0
6	2.4
7	2.8
8	3.2
9	3.6

LOG SINE

°	′		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		
0	0	6	——	4637	7648	9408	*0658	*1627	*2419	*3088	*3668	*4180	*4637	50	
	10	7.	4637	5051	5429	5777	6099	6398	6678	6942	7190	7425	7648	40	
	20		7648	7859	8061	8255	8439	8617	8787	8951	*109	*261	*408	30	
	30	7.9	408	551	689	822	952	*078	*200	*319	*435	*548	*658	20	
	40	8.0	658	765	870	972	*072	*169	*265	*358	*450	*539	*627	10	
	50	8.1	627	713	797	880	961	*041	*119	*196	*271	*346	*419	0	89
1	0	8.2	419	490	561	630	699	766	832	898	962	*025	*088	50	
	10	8.3	088	150	210	270	329	388	445	502	558	613	668	40	
	20		668	722	775	828	880	931	982	*032	*082	*131	*179	30	
	30	8.4	179	227	275	322	368	414	459	504	549	593	637	20	
	40		637	680	723	765	807	848	890	930	971	*011	*050	10	
	50	8.5	050	090	129	167	206	243	281	318	355	392	428	0	88
2	0	8.5	428	464	500	535	571	605	640	674	708	742	776	50	
	10		776	809	842	875	907	939	972	*003	*035	*066	*097	40	
	20	8.6	097	128	159	189	220	250	279	309	339	368	397	30	
	30		397	426	454	483	511	539	567	595	622	650	677	20	
	40		677	704	731	758	784	810	837	863	889	914	940	10	
	50		940	965	991	*016	*041	*066	*090	*115	*140	*164	*188	0	87
3	0	8.7	188	212	236	260	283	307	330	354	377	400	423	50	
	10		423	445	468	491	513	535	557	580	602	623	645	40	
	20		645	667	688	710	731	752	773	794	815	836	857	30	
	30		857	877	898	918	939	959	979	999	*019	*039	*059	20	
	40	8.8	059	078	098	117	137	156	175	194	213	232	251	10	
	50		251	270	289	307	326	345	363	381	400	418	436	0	86
4	0	8.8	436	454	472	490	508	525	543	560	578	595	613	50	
	10		613	630	647	665	682	699	716	733	749	766	783	40	
	20		783	799	816	833	849	865	882	898	914	930	946	30	
	30		946	962	978	994	*010	*026	*042	*057	*073	*089	*104	20	
	40	8.9	104	119	135	150	166	181	196	211	226	241	256	10	
	50		256	271	286	301	315	330	345	359	374	388	403	0	85
5	0	8.9	403	417	432	446	460	475	489	503	517	531	545	50	
	10		545	559	573	587	601	614	628	642	655	669	682	40	
	20		682	696	709	723	736	750	763	776	789	803	816	30	
	30		816	829	842	855	868	881	894	907	919	932	945	20	
	40		945	958	970	983	996	*008	*021	*033	*046	*058	*070	10	
	50	9.0	070	083	095	107	120	132	144	156	168	180	192	0	84
6	0	9.0	192	204	216	228	240	252	264	276	287	299	311	50	
	10		311	323	334	346	357	369	380	392	403	415	426	40	
	20		426	438	449	460	472	483	494	505	516	527	539	30	
	30		539	550	561	572	583	594	605	616	626	637	648	20	
	40		648	659	670	680	691	702	712	723	734	744	755	10	
	50		755	765	776	786	797	807	818	828	838	849	859	0	83
			10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′		°

LOG COSINE

表二　三角函數對數表

LOG SINE

°	′		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′	′	°
7	0	9.0	859	869	879	890	900	910	920	930	940	951	961	50	
	10		961	971	981	991	*001	*011	*020	*030	*040	*050	*060	40	
	20	9.1	060	070	080	089	099	109	118	128	138	147	157	30	
	30		157	167	176	186	195	205	214	224	233	242	252	20	
	40		252	261	271	280	289	299	308	317	326	336	345	10	
	50		345	354	363	372	381	390	399	409	418	427	436	0	82
8	0	9.1	436	445	453	462	471	480	489	498	507	516	525	50	
	10		525	533	542	551	560	568	577	586	594	603	612	40	
	20		612	620	629	637	646	655	663	672	680	689	697	30	
	30		697	705	714	722	731	739	747	756	764	772	781	20	
	40		781	789	797	806	814	822	830	839	847	855	863	10	
	50		863	871	879	887	895	903	911	919	927	935	943	0	81
9	0	9.1	943	951	959	967	975	983	991	999	*007	*015	*022	50	
	10	9.2	022	030	038	046	054	061	069	077	085	092	100	40	
	20		100	108	115	123	131	138	146	153	161	169	176	30	
	30		176	184	191	199	206	214	221	229	236	243	251	20	
	40		251	258	266	273	280	288	295	303	310	317	324	10	
	50		324	332	339	346	353	361	368	375	382	390	397	0	80
10	0	9.2	397	404	411	418	425	432	439	447	454	461	468	50	
	10		468	475	482	489	496	503	510	517	524	531	538	40	
	20		538	545	551	558	565	572	579	586	593	600	606	30	
	30		606	613	620	627	634	640	647	654	661	667	674	20	
	40		674	681	687	694	701	707	714	721	727	734	740	10	
	50		740	747	754	760	767	773	780	786	793	799	806	0	79
11	0	9.2	806	812	819	825	832	838	845	851	858	864	870	50	
	10		870	877	883	890	896	902	909	915	921	928	934	40	
	20		934	940	947	953	959	965	972	978	984	990	997	30	
	30		997	*003	*009	*015	*021	*027	*034	*040	*046	*052	*058	20	
	40	9.3	058	064	070	077	083	089	095	101	107	113	119	10	
	50		119	125	131	137	143	149	155	161	167	173	179	0	78
12	0	9.3	179	185	191	197	202	208	214	220	226	232	238	50	
	10		238	244	250	255	261	267	273	279	284	290	296	40	
	20		296	302	308	313	319	325	331	336	342	348	353	30	
	30		353	359	365	370	376	382	387	393	399	404	410	20	
	40		410	416	421	427	432	438	444	449	455	460	466	10	
	50		466	471	477	482	488	493	499	504	510	515	521	0	77
13	0	9.3	521	526	532	537	543	548	554	559	564	570	575	50	
	10		575	581	586	591	597	602	608	613	618	624	629	40	
	20		629	634	640	645	650	655	661	666	671	677	682	30	
	30		682	687	692	698	703	708	713	719	724	729	734	20	
	40		734	739	745	750	755	760	765	770	775	781	786	10	
	50		786	791	796	801	806	811	816	822	827	832	837	0	76
			10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	′	°

LOG COSINE

LOG SINE

°		0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
14	9.3	837	887	937	986	*035	*083	*130	75	
15	9.4	130	177	223	269	314	359	403	74	
16		403	447	491	533	576	618	659	73	
17		659	700	741	781	821	861	900	72	
18		900	939	977	*015	*052	*090	*126	71	
19	9.5	126	163	199	235	270	306	341	70	
20	9.5	341	375	409	443	477	510	543	69	34
21		543	576	609	641	673	704	736	68	32
22		736	767	798	828	859	889	919	67	31
23		919	948	978	*007	*036	*065	*093	66	29
24	9.6	093	121	149	177	205	232	259	65	28
25	9.6	259	286	313	340	366	392	418	64	27
26		418	444	470	495	521	546	570	63	25
27		570	595	620	644	668	692	716	62	24
28		716	740	763	787	810	833	856	61	23
29		856	878	901	923	946	968	990	60	23
30	9.6	990	*012	*033	*055	*076	*097	*118	59	22
31	9.7	118	139	160	181	201	222	242	58	21
32		242	262	282	302	322	342	361	57	20
33		361	380	400	419	438	457	476	56	19
34		476	494	513	531	550	568	586	55	18
35	9.7	586	604	622	640	657	675	692	54	18
36		692	710	727	744	761	778	795	53	17
37		795	811	828	844	861	877	893	52	16
38		893	910	926	941	957	973	989	51	16
39		989	*004	*020	*035	*050	*066	*081	50	15
40	9.8	081	096	111	125	140	155	169	49	15
41		169	184	198	213	227	241	255	48	14
42		255	269	283	297	311	324	338	47	14
43		338	351	365	378	391	405	418	46	13
44		418	431	444	457	469	482	495	45	13
45	9.8	495	507	520	532	545	557	569	44	12
46		569	582	594	606	618	629	641	43	12
47		641	653	665	676	688	699	711	42	12
48		711	722	733	745	756	767	778	41	11
49		778	789	800	810	821	832	843	40	11
		60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	d.

	50	49	48	47	46
1	5.0	4.9	4.8	4.7	4.6
2	10.0	9.8	9.6	9.4	9.2
3	15.0	14.7	14.4	14.1	13.8
4	20.0	19.6	19.2	18.8	18.4
5	25.0	24.5	24.0	23.5	23.0
6	30.0	29.4	28.8	28.2	27.6
7	35.0	34.3	33.6	32.9	32.2
8	40.0	39.2	38.4	37.6	36.8
9	45.0	44.1	43.2	42.3	41.4

	45	44	43	42	41
1	4.5	4.4	4.3	4.2	4.1
2	9.0	8.8	8.6	8.4	8.2
3	13.5	13.2	12.9	12.6	12.3
4	18.0	17.6	17.2	16.8	16.4
5	22.5	22.0	21.5	21.0	20.5
6	27.0	26.4	25.8	25.2	24.6
7	31.5	30.8	30.1	29.4	28.7
8	36.0	35.2	34.4	33.6	32.8
9	40.5	39.6	38.7	37.8	36.9

	40	39	38	37	36
1	4.0	3.9	3.8	3.7	3.6
2	8.0	7.8	7.6	7.4	7.2
3	12.0	11.7	11.4	11.1	10.8
4	16.0	15.6	15.2	14.8	14.4
5	20.0	19.5	19.0	18.5	18.0
6	24.0	23.4	22.8	22.2	21.6
7	28.0	27.3	26.6	25.9	25.2
8	32.0	31.2	30.4	29.6	28.8
9	36.0	35.1	34.2	33.3	32.4

	35	34	33	32	31
1	3.5	3.4	3.3	3.2	3.1
2	7.0	6.8	6.6	6.4	6.2
3	10.5	10.2	9.9	9.6	9.3
4	14.0	13.6	13.2	12.8	12.4
5	17.5	17.0	16.5	16.0	15.5
6	21.0	20.4	19.8	19.2	18.6
7	24.5	23.8	23.1	22.4	21.7
8	28.0	27.2	26.4	25.6	24.8
9	31.5	30.6	29.7	28.8	27.9

	30	29	28	27	26
1	3.0	2.9	2.8	2.7	2.6
2	6.0	5.8	5.6	5.4	5.2
3	9.0	8.7	8.4	8.1	7.8
4	12.0	11.6	11.2	10.8	10.4
5	15.0	14.5	14.0	13.5	13.0
6	18.0	17.4	16.8	16.2	15.6
7	21.0	20.3	19.6	18.9	18.2
8	24.0	23.2	22.4	21.6	20.8
9	27.0	26.1	25.2	24.3	23.4

	25	24	23	22	21
1	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1
2	5.0	4.8	4.6	4.4	4.2
3	7.5	7.2	6.9	6.6	6.3
4	10.0	9.6	9.2	8.8	8.4
5	12.5	12.0	11.5	11.0	10.5
6	15.0	14.4	13.8	13.2	12.6
7	17.5	16.8	16.1	15.4	14.7
8	20.0	19.2	18.4	17.6	16.8
9	22.5	21.6	20.7	19.8	18.9

	20	19	18	17	16
1	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6
2	4.0	3.8	3.6	3.4	3.2
3	6.0	5.7	5.4	5.1	4.8
4	8.0	7.6	7.2	6.8	6.4
5	10.0	9.5	9.0	8.5	8.0
6	12.0	11.4	10.8	10.2	9.6
7	14.0	13.3	12.6	11.9	11.2
8	16.0	15.2	14.4	13.6	12.8
9	18.0	17.1	16.2	15.3	14.4

	15	14	13	12	11
1	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1
2	3.0	2.8	2.6	2.4	2.2
3	4.5	4.2	3.9	3.6	3.3
4	6.0	5.6	5.2	4.8	4.4
5	7.5	7.0	6.5	6.0	5.5
6	9.0	8.4	7.8	7.2	6.6
7	10.5	9.8	9.1	8.4	7.7
8	12.0	11.2	10.4	9.6	8.8
9	13.5	12.6	11.7	10.8	9.9

LOG COSINE

表二 三角函數對數表

LOG SINE

°		0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
50	9.8	843	853	864	874	884	895	905	39	10
51		905	915	925	935	945	955	965	38	10
52		965	975	985	995	*004	*014	*023	37	10
53	9.9	023	033	042	052	061	070	080	36	9
54		080	089	098	107	116	125	134	35	9
55	9.9	134	142	151	160	169	177	186	34	8
56		186	194	203	211	219	228	236	33	8
57		236	244	252	260	268	276	284	32	8
58		284	292	300	308	315	323	331	31	8
59		331	338	346	353	361	368	375	30	7
60	9.9	375	383	390	397	404	411	418	29	7
61		418	425	432	439	446	453	459	28	7
62		459	466	473	479	486	492	499	27	7
63		499	505	512	518	524	530	537	26	6
64		537	543	549	555	561	567	573	25	6
65	9.9	573	579	584	590	596	602	607	24	6
66		607	613	618	624	629	635	640	23	6
67		640	646	651	656	661	667	672	22	5
68		672	677	682	687	692	697	702	21	5
69		702	706	711	716	721	725	730	20	5
70	9.9	730	734	739	743	748	752	757	19	5
71		757	761	765	770	774	778	782	18	4
72		782	786	790	794	798	802	806	17	4
73		806	810	814	817	821	825	828	16	4
74		828	832	836	839	843	846	849	15	4
75	9.9	849	853	856	859	863	866	869	14	3
76		869	872	875	878	881	884	887	13	3
77		887	890	893	896	899	901	904	12	3
78		904	907	909	912	914	917	919	11	3
79		919	922	924	927	929	931	934	10	3
80	9.9	934	936	938	940	942	944	946	9	2
81		946	948	950	952	954	956	958	8	2
82		958	959	961	963	964	966	968	7	2
83		968	969	971	972	973	975	976	6	2
84		976	977	979	980	981	982	983	5	1
85	9.9	983	985	986	987	988	989	989	4	1
86		989	990	991	992	993	993	994	3	1
87		994	995	995	996	996	997	997	2	0
88		997	998	998	999	999	999	999	1	0
89		999	*000	*000	*000	*000	*000	*000	0	0
90	10.0	000								
		60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	d.

	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	1.0	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1
2	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	1.0	.8	.6	.4	.2
3	3.0	2.7	2.4	2.1	1.8	1.5	1.2	.9	.6	.3
4	4.0	3.6	3.2	2.8	2.4	2.0	1.6	1.2	.8	.4
5	5.0	4.5	4.0	3.5	3.0	2.5	2.0	1.5	1.0	.5
6	6.0	5.4	4.8	4.2	3.6	3.0	2.4	1.8	1.2	.6
7	7.0	6.3	5.6	4.9	4.2	3.5	2.8	2.1	1.4	.7
8	8.0	7.2	6.4	5.6	4.8	4.0	3.2	2.4	1.6	.8
9	9.0	8.1	7.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.7	1.8	.9

LOG COSINE

表二 三角函數對數表

LOG TANGENT

°	′		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		
0	0	6.		4637	7648	9408	*0658	*1627	*2419	*3088	*3668	*4180	*4637	50	
	10	7.	4637	5051	5429	5777	6099	6398	6678	6942	7190	7425	7648	40	
	20		7648	7860	8062	8255	8439	8617	8787	8951	*109	*261	*409	30	
	30	7.9	409	551	689	823	952	*078	*200	*319	*435	*548	*558	20	
	40	8.0	658	765	870	972	*072	*170	*265	*359	*450	*540	*627	10	
	50	8.1	627	713	798	880	962	*041	*120	*196	*272	*346	*419	0	89
1	0	8.2	419	491	562	631	700	767	833	899	963	*026	*089	50	
	10	8.3	089	150	211	271	330	389	446	503	559	614	669	40	
	20		669	723	776	829	881	932	983	*033	*083	132	181	30	
	30	8.4	181	229	276	323	370	416	461	506	551	595	638	20	
	40		638	682	725	767	809	851	892	933	973	*013	*053	10	
	50	8.5	053	092	131	170	208	246	233	321	358	394	431	0	88
2	0	8.5	431	467	503	538	573	608	643	677	711	745	779	50	
	10		779	812	845	878	911	943	975	*007	*038	*070	*101	40	
	20	8.6	101	132	163	193	223	254	283	313	343	372	401	30	
	30		401	430	459	487	515	544	571	599	627	654	682	20	
	40		682	709	736	762	789	815	842	868	894	920	945	10	
	50		945	971	996	*021	*046	*071	*096	*121	*145	*170	*194	0	87
3	0	8.7	194	218	242	266	290	313	337	360	383	406	429	50	
	10		429	452	475	497	520	542	565	587	609	631	652	40	
	20		652	674	696	717	739	760	781	802	823	844	865	30	
	30		865	886	906	927	947	967	988	*008	*028	*048	*067	20	
	40	8.8	067	087	107	126	146	165	185	204	223	242	261	10	
	50		261	280	299	317	336	355	373	392	410	428	446	0	86
4	0	8.8	446	465	483	501	518	536	554	572	589	607	624	50	
	10		624	642	659	676	694	711	728	745	762	778	795	40	
	20		795	812	829	845	862	878	895	911	927	944	960	30	
	30		960	976	992	*008	*024	*040	*056	*071	*087	*103	*118	20	
	40	8.9	118	134	150	165	180	196	211	226	241	256	272	10	
	50		272	287	302	316	331	346	361	376	390	405	420	0	85
5	0	8.9	420	434	449	463	477	492	506	520	534	549	563	50	
	10		563	577	591	605	619	633	646	660	674	688	701	40	
	20		701	715	729	742	756	769	782	796	809	823	836	30	
	30		836	849	862	875	888	901	915	927	940	953	966	20	
	40		966	979	992	*005	*017	*030	*043	*055	*068	*080	*093	10	
	50	9.0	093	105	118	130	143	155	167	180	192	204	216	0	84
6	0	9.0	216	228	240	253	265	277	289	300	312	324	336	50	
	10		336	348	360	371	383	395	407	418	430	441	453	40	
	20		453	464	476	487	499	510	521	533	544	555	567	30	
	30		567	578	589	600	611	622	633	645	655	667	678	20	
	40		678	688	699	710	721	732	743	754	764	775	788	10	
	50		788	796	807	818	828	839	849	860	871	882	891	0	83
			10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	′	°

LOG COTANGENT

LOG TANGENT

°	′		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		
7	0	9.0	891	902	912	923	933	943	954	964	974	984	995	50	
	10		995	*005	*015	*025	*035	*045	*055	*066	*076	*086	*096	40	
	20	9.1	096	106	116	125	135	145	155	165	175	185	194	30	
	30		194	204	214	223	233	243	252	262	272	281	291	20	
	40		291	300	310	319	329	338	348	357	367	376	385	10	
	50		385	395	404	413	423	432	441	450	460	469	478	0	82
8	0	9.1	478	487	496	505	515	524	533	542	551	560	569	50	
	10		569	578	587	596	605	613	622	631	640	649	658	40	
	20		658	667	675	684	693	702	710	719	728	736	745	30	
	30		745	754	762	771	779	788	797	805	814	822	831	20	
	40		831	839	848	856	864	873	881	890	898	906	915	10	
	50		915	923	931	940	948	956	964	973	981	989	997	0	81
9	0	9.1	997	*005	*013	*022	*030	*038	*046	*054	*062	*070	*078	50	
	10	9.2	078	086	094	103	110	118	126	134	142	150	158	40	
	20		158	166	174	181	189	197	205	213	221	228	236	30	
	30		236	244	252	259	267	275	282	290	298	305	313	20	
	40		313	321	328	336	343	351	358	366	374	381	389	10	
	50		389	396	404	411	419	426	434	441	448	456	463	0	80
10	0	9.2	463	471	478	485	493	500	507	515	522	529	536	50	
	10		536	544	551	558	565	573	580	587	594	601	609	40	
	20		609	616	623	630	637	644	651	658	666	673	680	30	
	30		680	687	694	701	708	715	722	729	736	743	750	20	
	40		750	757	764	770	777	784	791	798	805	812	819	10	
	50		819	825	832	839	846	853	859	866	873	880	887	0	79
11	0	9.2	887	893	900	907	913	920	927	933	940	947	953	50	
	10		953	960	967	973	980	987	993	*000	*006	*013	*020	40	
	20	9.3	020	026	033	039	046	052	059	065	072	078	085	30	
	30		085	091	098	104	110	117	123	130	136	142	149	20	
	40		149	155	162	168	174	181	187	193	200	206	212	10	
	50		212	219	225	231	237	244	250	256	262	269	275	0	78
12	0	9.3	275	281	287	293	300	306	312	318	324	330	336	50	
	10		336	343	349	355	361	367	373	379	385	391	397	40	
	20		397	403	409	416	422	428	434	440	446	452	458	30	
	30		458	464	469	475	481	487	493	499	505	511	517	20	
	40		517	523	529	535	541	546	552	558	564	570	576	10	
	50		576	581	587	593	599	605	611	616	622	628	634	0	77
13	0	9.3	634	639	645	651	657	662	668	674	680	685	691	50	
	10		691	697	702	708	714	719	725	731	736	742	748	40	
	20		748	753	759	764	770	776	781	787	792	798	804	30	
	30		804	809	815	820	826	831	837	842	848	853	859	20	
	40		859	864	870	875	881	886	892	897	903	908	914	10	
	50		914	919	924	930	935	941	946	952	957	962	968	0	76
			10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	′	°

LOG COTANGENT

表二 三角函數對數表

LOG TANGENT

°		0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
14	9.3	968	*021	*074	*127	*178	*230	*281	75	53
15	9.4	281	331	381	430	479	527	575	74	49
16		575	622	669	716	762	808	853	73	46
17		853	898	943	987	*031	*075	*118	72	44
18	9.5	118	161	203	245	287	329	370	71	42
19		370	411	451	491	531	571	611	70	40
20	9.5	611	650	689	727	766	804	842	69	38
21		842	879	917	954	991	*028	*064	68	37
22	9.6	064	100	136	172	208	243	279	67	36
23		279	314	348	383	417	452	486	66	35
24		486	520	553	587	620	654	687	65	34
25	9.6	687	720	752	785	817	850	882	64	33
26		882	914	946	977	*009	*040	*072	63	32
27	9.7	072	103	134	165	196	226	257	62	31
28		257	287	317	348	378	408	438	61	30
29		438	467	497	526	556	585	614	60	29
30	9.7	614	644	673	701	730	759	788	59	29
31		788	816	845	873	902	930	958	58	28
32		958	986	*014	*042	*070	*097	*125	57	28
33	9.8	125	153	180	208	235	263	290	56	27
34		290	317	344	371	398	425	452	55	27
35	9.8	452	479	506	533	559	586	613	54	27
36		613	639	666	692	718	745	771	53	26
37		771	797	824	850	876	902	928	52	26
38		928	954	980	*006	*032	*058	*084	51	26
39	9.9	084	110	135	161	187	212	238	50	26
40	9.9	238	264	289	315	341	366	392	49	26
41		392	417	443	468	494	519	544	48	25
42		544	570	595	621	646	671	697	47	25
43		697	722	747	772	798	823	848	46	25
44		848	874	899	924	949	975	*000	45	25
		60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	d.

	53	52	51	50	49
1	5.3	5.2	5.1	5.0	4.9
2	10.6	10.4	10.2	10.0	9.8
3	15.9	15.6	15.3	15.0	14.7
4	21.2	20.8	20.4	20.0	19.6
5	26.5	26.0	25.5	25.0	24.5
6	31.8	31.2	30.6	30.0	29.4
7	37.1	36.4	35.7	35.0	34.3
8	42.4	41.6	40.8	40.0	39.2
9	47.7	46.8	45.9	45.0	44.1

	48	47	46	45	44
1	4.8	4.7	4.6	4.5	4.4
2	9.6	9.4	9.2	9.0	8.8
3	14.4	14.1	13.8	13.5	13.2
4	19.2	18.8	18.4	18.0	17.6
5	24.0	23.5	23.0	22.5	22.0
6	28.8	28.2	27.6	27.0	26.4
7	33.6	32.9	32.2	31.5	30.8
8	38.4	37.6	36.8	36.0	35.2
9	43.2	42.3	41.4	40.5	39.6

	43	42	41	40	39
1	4.3	4.2	4.1	4.0	3.9
2	8.6	8.4	8.2	8.0	7.8
3	12.9	12.6	12.3	12.0	11.7
4	17.2	16.8	16.4	16.0	15.6
5	21.5	21.0	20.5	20.0	19.5
6	25.8	25.2	24.6	24.0	23.4
7	30.1	29.4	28.7	28.0	27.3
8	34.4	33.6	32.8	32.0	31.2
9	38.7	37.8	36.9	36.0	35.1

	38	37	36	35	34
1	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4
2	7.6	7.4	7.2	7.0	6.8
3	11.4	11.1	10.8	10.5	10.2
4	15.2	14.8	14.4	14.0	13.6
5	19.0	18.5	18.0	17.5	17.0
6	22.8	22.2	21.6	21.0	20.4
7	26.6	25.9	25.2	24.5	23.8
8	30.4	29.6	28.8	28.0	27.2
9	34.2	33.3	32.4	31.5	30.6

	33	32	31	30	29
1	3.3	3.2	3.1	3.0	2.9
2	6.6	6.4	6.2	6.0	5.8
3	9.9	9.6	9.3	9.0	8.7
4	13.2	12.8	12.4	12.0	11.6
5	16.5	16.0	15.5	15.0	14.5
6	19.8	19.2	18.6	18.0	17.4
7	23.1	22.4	21.7	21.0	20.3
8	26.4	25.6	24.8	24.0	23.2
9	29.7	28.8	27.9	27.0	26.1

	28	27	26	25
1	2.8	2.7	2.6	2.5
2	5.6	5.4	5.2	5.0
3	8.4	8.1	7.8	7.5
4	11.2	10.8	10.4	10.0
5	14.0	13.5	13.0	12.5
6	16.8	16.2	15.6	15.0
7	19.6	18.9	18.2	17.5
8	22.4	21.6	20.8	20.0
9	25.2	24.3	23.4	22.5

LOG COTANGENT

LOG TANGENT

°		0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		d.
45	0.0	000	025	051	076	101	126	152	44	25
46		152	177	202	228	253	278	303	43	25
47		303	329	354	379	405	430	456	42	25
48		456	481	506	532	557	583	608	41	25
49		608	634	659	685	711	736	762	40	25
50	0.0	762	788	813	839	865	890	916	39	26
51		916	942	968	994	*020	*046	*072	38	26
52	0.1	072	098	124	150	176	203	229	37	26
53		229	255	282	308	334	361	387	36	26
54		387	414	441	467	494	521	548	35	27
55	0.1	548	575	602	629	656	683	710	34	27
56		710	737	765	792	820	847	875	33	27
57		875	903	930	958	986	*014	*042	32	28
58	0.2	042	070	098	127	155	184	212	31	28
59		212	241	270	299	327	356	386	30	29
60	0.2	386	415	444	474	503	533	562	29	29
61		562	592	622	652	683	713	743	28	30
62		743	774	804	835	866	897	928	27	31
63		928	960	991	*023	*054	*086	118	26	32
64	0.3	118	150	183	215	248	280	313	25	33
65	0.3	313	346	380	413	447	480	514	24	34
66		514	548	583	617	652	686	721	23	35
67		721	757	792	828	864	900	936	22	36
68		936	972	*009	*046	*083	*121	*158	21	37
69	0.4	158	196	234	273	311	350	389	20	38
70	0.4	389	429	469	509	549	589	630	19	40
71		630	671	713	755	797	839	882	18	42
72		882	925	969	*013	*057	*102	*147	17	44
73	0.5	147	192	238	284	331	378	425	16	46
74		425	473	521	570	619	669	719	15	50
75	0.5	719	770	822	873	926	979	*032	14	52
		60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	d.

	25	26	27	28	29
1	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
2	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8
3	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7
4	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6
5	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5
6	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4
7	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3
8	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2
9	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1

	30	31	32	33	34
1	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
2	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8
3	9.0	9.3	9.6	9.9	10.2
4	12.0	12.4	12.8	13.2	13.6
5	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0
6	18.0	18.6	19.2	19.8	20.4
7	21.0	21.7	22.4	23.1	23.8
8	24.0	24.8	25.6	26.4	27.2
9	27.0	27.9	28.8	29.7	30.6

	35	36	37	38	39
1	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
2	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8
3	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7
4	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6
5	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5
6	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4
7	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3
8	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2
9	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1

	40	41	42	43	44
1	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4
2	8.0	8.2	8.4	8.6	8.8
3	12.0	12.3	12.6	12.9	13.2
4	16.0	16.4	16.8	17.2	17.6
5	20.0	20.5	21.0	21.5	22.0
6	24.0	24.6	25.2	25.8	26.4
7	28.0	28.7	29.4	30.1	30.8
8	32.0	32.8	33.6	34.4	35.2
9	36.0	36.9	37.8	38.7	39.6

	45	46	47	48	49
1	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9
2	9.0	9.2	9.4	9.6	9.8
3	13.5	13.8	14.1	14.4	14.7
4	18.0	18.4	18.8	19.2	19.6
5	22.5	23.0	23.5	24.0	24.5
6	27.0	27.6	28.2	28.8	29.4
7	31.5	32.2	32.9	33.6	34.3
8	36.0	36.8	37.6	38.4	39.2
9	40.5	41.4	42.3	43.2	44.1

	50	51	52	53
1	5.0	5.1	5.2	5.3
2	10.0	10.2	10.4	10.6
3	15.0	15.3	15.6	15.9
4	20.0	20.4	20.8	21.2
5	25.0	25.5	26.0	26.5
6	30.0	30.6	31.2	31.8
7	35.0	35.7	36.4	37.1
8	40.0	40.8	41.6	42.4
9	45.0	45.9	46.8	47.7

LOG COTANGENT

表二 三角函數對數表

LOG TANGENT

°	′		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		
76	0	0.6	032	038	043	048	054	059	065	070	076	081	086	50	
	10		086	092	097	103	108	114	119	125	130	136	141	40	
	20		141	147	152	158	163	169	174	180	185	191	196	30	
	30		196	202	208	213	219	224	230	236	241	247	252	20	
	40		252	258	264	269	275	281	286	292	298	303	309	10	
	50		309	315	320	326	332	338	343	349	355	361	366	0	13
77	0	0.6	366	372	378	384	389	395	401	407	413	419	424	50	
	10		424	430	436	442	448	454	459	465	471	477	483	40	
	20		483	489	495	501	507	513	519	525	531	536	542	30	
	30		542	548	554	560	566	572	578	584	591	597	603	20	
	40		603	609	615	621	627	633	639	645	651	657	664	10	
	50		664	670	676	682	688	694	700	707	713	719	725	0	12
78	0	0.6	725	731	738	744	750	756	763	769	775	781	788	50	
	10		788	794	800	807	813	819	826	832	838	845	851	40	
	20		851	858	864	870	877	883	890	896	902	909	915	30	
	30		915	922	928	935	941	948	954	961	967	974	980	20	
	40		980	987	994	*000	*007	*013	*020	*027	*033	*040	*047	10	
	50	0.7	047	053	060	067	073	080	087	093	100	107	113	0	11
79	0	0.7	113	120	127	134	141	147	154	161	168	175	181	50	
	10		181	188	195	202	209	216	223	230	236	243	250	40	
	20		250	257	264	271	278	285	292	299	306	313	320	30	
	30		320	327	334	342	349	356	363	370	377	384	391	20	
	40		391	399	406	413	420	427	435	442	449	456	464	10	
	50		464	471	478	485	493	500	507	515	522	529	537	0	10
80	0	0.7	537	544	552	559	566	574	581	589	596	604	611	50	
	10		611	619	626	634	641	649	657	664	672	679	687	40	
	20		687	695	702	710	718	725	733	741	748	756	764	30	
	30		764	772	779	787	795	803	811	819	826	834	842	20	
	40		842	850	858	866	874	882	890	898	906	914	922	10	
	50		922	930	938	946	954	962	970	978	987	995	*003	0	9
81	0	0.8	003	011	019	027	036	044	052	060	069	077	085	50	
	10		085	094	102	110	119	127	136	144	152	161	169	40	
	20		169	178	186	195	203	212	221	229	238	246	255	30	
	30		255	264	272	281	290	298	307	316	325	333	342	20	
	40		342	351	360	369	378	387	395	404	413	422	431	10	
	50		431	440	449	458	467	476	485	495	504	513	522	0	8
82	0	0.8	522	531	540	550	559	568	577	587	596	605	615	50	
	10		615	624	633	643	652	662	671	681	690	700	709	40	
	20		709	719	728	738	748	757	767	777	786	796	806	30	
	30		806	815	825	835	845	855	865	875	884	894	904	20	
	40		904	914	924	934	945	955	965	975	985	995	*005	10	
	50	0.9	005	016	026	036	046	057	067	077	088	098	109	0	7
			10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	′	°

LOG COTANGENT

表二 三角函數對數表

LOG TANGENT

°	′		0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′		
83	0	0.9	109	119	129	140	151	161	172	182	193	204	214	50	
	10		214	225	236	246	257	268	279	290	301	312	322	40	
	20		322	333	344	355	367	378	389	400	411	422	433	30	
	30		433	445	456	467	479	490	501	513	524	536	547	20	
	40		547	559	570	582	593	605	617	629	640	652	664	10	
	50		664	676	688	700	711	723	735	747	760	772	784	0	6
84	0	0.9	784	796	808	820	833	845	857	870	882	895	907	50	
	10		907	920	932	945	957	970	983	995	*008	*021	*034	40	
	20	1.0	034	047	060	072	085	099	112	125	138	151	164	30	
	30		164	177	191	204	218	231	244	258	271	285	299	20	
	40		299	312	326	340	354	367	381	395	409	423	437	10	
	50		437	451	466	480	494	508	523	537	551	566	580	0	5
85	0	1.0	580	595	610	624	639	654	669	683	698	713	728	50	
	10		728	744	759	774	789	804	820	835	850	866	882	40	
	20		882	897	913	929	944	960	976	992	*008	*024	*040	30	
	30	1.1	040	056	073	089	105	122	138	155	171	188	205	20	
	40		205	222	238	255	272	289	306	324	341	358	376	10	
	50		376	393	411	428	446	464	482	499	517	535	554	0	4
86	0	1.1	554	572	590	608	627	645	664	682	701	720	739	50	
	10		739	758	777	796	815	835	854	874	893	913	933	40	
	20		933	952	972	992	*012	*033	*053	*073	*094	*114	*135	30	
	30	1.2	135	156	177	198	219	240	261	283	304	326	348	20	
	40		348	369	391	413	465	458	480	503	525	548	571	10	
	50		571	594	617	640	663	687	710	734	758	782	806	0	3
87	0	1.2	806	830	855	879	904	929	954	979	*004	*029	*055	50	
	10	1.3	055	080	106	132	158	185	211	238	264	291	318	40	
	20		318	346	373	401	429	456	485	513	541	570	599	30	
	30		599	628	657	687	717	746	777	807	837	868	899	20	
	40		899	930	962	993	*025	*057	*089	*122	*155	*188	*221	10	
	50	1.4	221	255	289	323	357	392	427	462	497	533	569	0	2
88	0	1.4	569	606	642	679	717	754	792	830	869	908	947	50	
	10		947	987	*027	*067	*108	*149	*191	*233	*275	*318	*362	40	
	20	1.5	362	405	449	494	539	584	630	677	724	771	819	30	
	30		819	868	917	967	*017	*068	*119	*171	*224	*277	*331	20	
	40	1.6	331	386	441	497	554	611	670	729	789	850	911	10	
	50		911	974	*037	*101	*167	*233	*300	*369	*438	*509	*581	0	1
89	0	1.7	581	654	728	804	880	959	*038	*120	*202	*287	*373	50	
	10	1.8	373	460	550	641	735	830	928	*028	*130	*235	*342	40	
	20	1.9	342	452	565	681	800	922	*0048	*0177	*0311	*0449	*0591	30	
	30	2.	0591	0739	0891	1049	1213	1383	1561	1745	1938	2140	2352	20	
	40		2352	2575	2810	3058	3322	3602	3901	4223	4571	4949	5363	10	
	50		5363	5820	6332	6912	7581	8373	9342	3.0692	3.2352	3.5363	—	0	0
			10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	′	°

LOG COTANGENT

④ 售價 9,000元