乾隆壬辰新鐫

九數通考

豫簪堂藏版

序

余少時讀周官經六書九數之目因尋求漢永元中南閣祭酒許慎說文解字以為古小學賴是以存而前此北平侯張蒼傳古九章算術魏劉徽爲之註者卒不可得近有宣城梅氏撰中西算學通獨九數存古有錄無書蓋唐宋立之學官所謂算經十書厪厪周髀有全文梅氏所論述周髀而外絕不見徵引是以意欲存古而未能歟常熟屈君省園嗜古好深湛之思於書

靡不披覽尤加意實學俾足以致用既撰萬言
肄雅為識字津涉其治算數也妙盡其能亦兼
中西而會通之乃舉而分隸九章則又梅氏所
志焉未逮也古者九數司徒掌之以教萬民保
氏掌之以教國子與五禮六樂五射五馭六書
之倫合而謂之道藝夫德行以為體道藝以為
之用是故司諫巡問民閒則以時書其德行道
藝辨其能而可任於國事者由是言之士有國
事之責期在體用賅備有如是今屈君將出為
國家分理斯民凡用之於官施之為教淵乎其
有本也君以是編屬余撰序余曰昔鄭康成氏
遊於馬季長之門三年不得親相質問季長集
諸生考論圖緯因疑於算聞其能乃召見之樓
上漢晉閒達人學士若張衡王粲闞康之髙允
咸稱明算且於此學各有論著今屈君所為書
信足以補道藝中一事矣適
朝廷開館纂四庫全書九章算經於是逸而復
出而以是編者方之古算經猶說文之後不可

無玉篇廣韻以今之詳廣古之略以今之逐事
加密盡抉古之奧其在是歟其在是歟
乾隆癸巳日在箕初休寧戴震謹序

自序

古者九數列於六藝掌於保氏以教國子故七十子之徒身通其術秦漢而後代不乏人如洛下閎張衡劉焯祖冲之輩各有著述號爲專家唐宋設明經算學科其書須在學宮令博士弟子肄習誠以算雖小學實格物致知之要務也夫九章之術用以齊七政正五音敬天授民格神和人以至同量衡通食貨便營作莫不賴之以爲統紀其爲道豈淺鮮哉近世以來學士文人以其無關進取遂視爲賈人胥史之事棄置不復留心而里塾教授又僅抄因乘歸除歌訣及方田粟布數法轉相傳習問以九章名目茫然不能舉對良可慨已曾自早歲遊心算學間嘗采輯傳本手自抄錄以備遺忘然於按題立法之故究未能通曉

原委洞悉其所以然心嘗格而不化己丑之春因事入都

得

聖祖仁皇帝御製數理精蘊伏而讀之訂古今之同異集中西之

大成蒐羅美備剔抉奧微平日之格而不化者一旦渙然

冰釋且得開拓其心胸增廣其聞見因歎

大聖人之制作超出百代之上而又惜薄海內外窮儒寒畯未獲

悉覩全書乃不揣固陋舉曩時所輯重加增改一折衷於

數理精蘊書凡十有三卷名曰九數通考學者誠取而習

之不特古者六藝教人之法可以得其旨趣即我

朝文軌大同制作明備之休亦藉以仰窺萬一矣是爲序

乾隆壬辰季冬之月虞山屈曾發識

例言

謹按

御製數理精蘊以線面體分部九章之義包括無遺精深浩博非初學所能驟窺茲編專爲學算而輯故仍以九章分卷俾學者知九數之名義

近代算書流傳者少坊間所刻程氏統宗號爲善本而平方立方定位未經指明平圓立圓比例未能密合又或僅傳其法而弗申其解習者未能了然於心手間也伏讀

數理精蘊條理分明本末昭晰始若發蒙茲編分類輯錄中西一貫迥非向來傳本所及

數理精蘊所載設如各題大約舊傳者十之五新增者十之四舊題而用新法者十之一茲編限於卷帙未能悉登

每種僅列一題，間有一題而備數法者，所以明算法殊塗同歸之趣也。

算學理數，非圖不顯，非說不明。茲編圖則細列，說則詳著，庶幾理數既明，而所以用算之法，亦迎刃而解。學者果能精思熟玩，觸類引伸，即以窮天下之變不難矣。

舊本各種歌訣，便於學者記習。茲編仍舊俱載，間有隱晦舛誤之處，重加刪潤改正，俾讀者一覽了然。

九章設如，坊本混淆雜出。茲編劃分條貫，皆有理義。細玩自見，非好為更張也。

難題昉於劉氏通明算法，嗣後吳氏比類、程氏統宗遞相纂集，然其法皆不離乎九章。明其法而善用之，題雖難無難也。故分輯於各條之中，不另標出。

數理本原肇於圖書，度量權衡根於黃鐘，周髀為算書之祖，幾何乃西法之宗。學算而不講求，非先河後海之旨也。故弁於卷首，竊比

數理精蘊之上編所以立綱明體云爾。

方五斜七，周三徑一，正六面七，諸說皆舉大概以立言，非可定率以立算。向來刻本皆據此為問答，鶻突了事，安所得真數而求之乎。

數理精蘊所載諸物輕重、面體比例，皆有定率，求之不爽毫釐。今彙輯卷首，以便檢閱。

坊本開卷多載因乘歸除，自一至九之設，如以為初學入門。茲編不載，非畧也。諸法業已散見各條，細玩自可得其端緒。若初學者無從入手，只消以自一至九之數挨列於

盤另以自一至九之數各爲法以漸習之可耳

各面形求積爲丈量田地之原各體形求積爲盤量倉窖之原各面形求邊周爲分田截積之原各體形求邊周爲米求倉窖之原坊本於方田章僅載量田盤倉諸法少廣章僅載截田求倉諸法是求末而遺本也茲編於此二章輯錄獨詳亦欲共探其本耳

割圓之法屢求句股相傳已久西法又有八線六宗三要等說而圓度內外諸線相求之法始備坊本皆闕而不載非通儒之見也茲編另爲一卷附於九章之後庶明於三角之法乃得爲算學之全云若夫弧三角算係造歷者專家之業故未編入

數理精蘊後載借根借方之法以假數求眞數有對數比

例之法以加減代乘除皆西人用算之捷徑因卷帙浩繁未能悉載惟比例規一法既可以尺代算而於畫圖製器尤所必需故另輯末卷以備參考至於外間所傳籌算筆算等法雖不學可也

數理精蘊命位皆以筆記故有作〇作、之號茲編從俗所便概用珠盤中間立說不無小異然說雖殊而理與法則仍一也

是編所輯大要本於

數理精蘊其間歌訣雜法兼採舊本他如河洛圖說則本周易折衷方程設例則參梅氏全書不敢忘其所自也

九數通考目錄

卷五　少廣章第四

卷六　商功章第五

卷十 句股章第九

卷十一

三角說 七題

割圓說

割圓八線 一題

六宗三要二簡法說

六宗 八題 理分中末線法 一 按分作連比例四率法 二條

三要 四題

二簡法 二題

八線相求法 一題

求象限內各線總法

八線表

邊線角度相求說 十三題

三角測量說 十題

卷末

比例規解

平分線 八題

分面線 七題

更面線 四題

分體線 九題

更體線 四題

五金線 五題

分圓線 五題

正弦線 三題

正切線 四題

正割線 三題

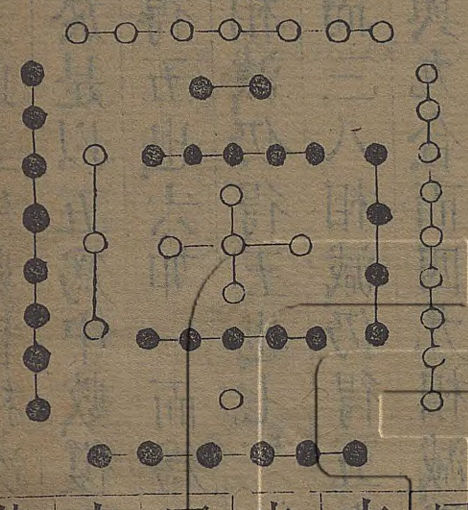
九數通考卷首

虞山屈曾發省園氏輯

圖書爲數學之源

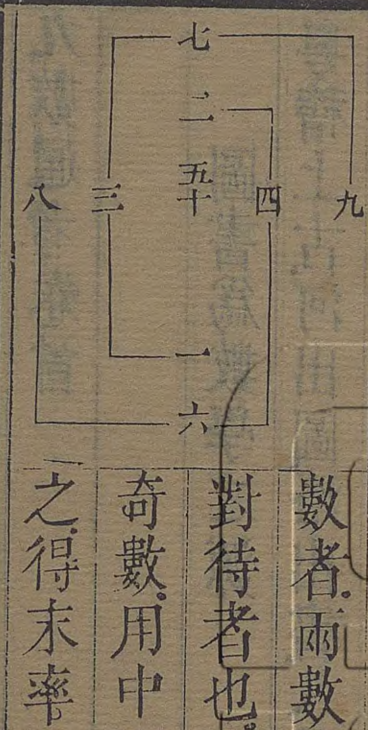
粤稽上古河出圖洛出書八卦是生九疇是敘數學亦於是乎肇焉蓋圖書應天地之瑞因聖人而始出數學窮萬物之理自聖人而得明也溯其本源加減出於河圖乘除出於洛書朱子

河圖



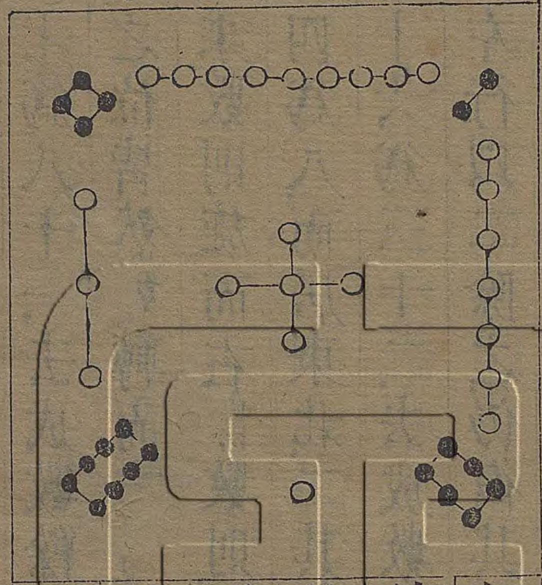
曰河圖以五生數統五成數而同處其方蓋揭其全以示人而道其常數之體也其位一六居下二七居上三八居左四九居右五十居中今考其數始於一中於五終於十而加減之法由是生焉蓋自一而二自二而三自三而四自四

而五此五生數皆挨次遞加一者也自一至五則五又爲一體矣於是以五爲中數復加一而爲六故一與六合而一六相減仍得五也六加一而爲七以五計之實加二故二與七合而二七相減仍得五也七加一而爲八以五計之實加三故三與八合而三八相減仍得五也八加一而爲九以五計之實加四故四與九合而四九相減仍得五也九加一而爲十以五計之實加五故五與十合而五十相減仍得五也此五成數亦挨次遞加而以中數五計之又爲按位遞加之數凡兩數相加求得一數者兩數相減仍還原數此加減二法相爲對待者也又作圖以明之



如一三七九爲四奇數用中兩率三七相加得十以首率一減之得末率九以末率九減之得首率一若以首末兩率一九相加亦得十以中兩率三減之得七七減之得三如二四六八爲四耦數用中兩率四六相加得十以首率二減之得末率八以末率八減之得首率二若以首末兩率二八相加亦得十以中兩率四減之得六六減之得四故曰河圖爲加減之原也

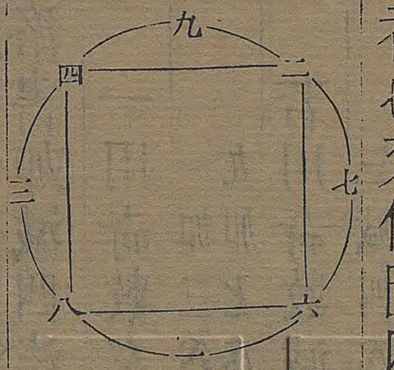
洛書



朱子曰洛書以五奇數統四耦數而各居其所蓋主於陽以統陰而肇其變數之用也其位戴九履一左三右七二四爲肩六八爲足而五居中今考其數陽以三左行陰以二右行易曰參天兩地而倚數蓋以一乘一以一除一皆不可變故奇數起於三因天圓徑一而圍三也耦數起於二因地方徑一而圍四兩其二也陽以三左

行乘數則旋而左除數則返而右如三其一爲三而居東三其三爲九而居南三其九爲二十七去成數餘七而居西三其二十七爲八十一去成數餘一而居北等而上之至於億兆其餘數之位皆然如轉而右行以三除之仍復其原數矣陰以二右行乘數則旋而右除數則返而左如二其二爲四而居東南二其四爲八而居東北二其八爲十六去成數餘六而居西北二其十六爲三十二去成數餘二而居西南上而億兆亦然如轉而左行以二除之仍復其原數矣此乘除之數見於運行者如此若以對待者觀之一與九對一爲數之始九爲數之終互乘互除其數不變也二與八對二八互乘皆得十六二除之得八八除之仍得二此二與八之相倚也三與七對三七互乘皆得二十一三除之得七七除之仍得三此三與七之相倚也四與

六對四六互乘皆得二十四四除之得六六除之仍得四此四與六之相倚也至五爲參兩之合而位於中三二之合五也一四之合亦五也一一二二之積又五也三三四四之積又五之積也此五所以爲數之會而位之中與故斜直四圍皆得十五進退循環縱橫交錯總不外於乘除蓋乘除二法相爲對待者也又作圖以明之



如一三九七爲奇數用中兩率三九相乘得二十七以首率一除之得末率二十七以末率二十七除之得首率一若以首末兩率一與二十七相乘亦得二十七以中兩率三除之得九九除之得三如二四八六爲耦數用中兩率四八相乘得三十二以首率二除之得末率十六以末率十六除之得首率二若以首末兩率二與十六相乘亦得三十二以中兩率四除之得八八除之得四故曰洛書爲乘除之原也然

洛書固爲乘除之原，而亦爲加減之本。今推得洛書加減之法四，乘除之法十六，積方之法五，句股之法四，併圖書合一之妙，各爲圖表以明之如左。俾學者知算法之所自昉焉。

洛書加減四法

一用奇數左旋相加，得相連之耦數。

一加三爲四　三加九爲十二
九加七爲十六　七加一爲八

若用奇數減左旋相加，得右旋相連之奇數。

三減四爲一　九減十二爲三
七減十六爲九　一減八爲七

一用耦數左旋相加，得相連之耦數。

二加六爲八　六加八爲十四
八加四爲十二　四加二爲六

若用耦數減左旋相連之耦數，得右旋相連之耦數。

六減八爲二　八減十四爲六
四減十二爲八　二減六爲四

一用奇數右旋加耦數，得相連之奇數。

一加六爲七　七加二爲九
九加四爲十三　三加八爲十一

若用奇數減相連之奇數，得相連之耦數。

一減七爲六　七減九爲二
九減十三爲四　三減十一爲八

一用耦數右旋加奇數，得相對之奇數。

二加九爲十一　四加三爲七
八加一爲九　六加七爲十三

若用奇數減相對之奇數，得相連之耦數。

九減十一爲二　三減七爲四
一減九爲八　七減十三爲六

洛書乘除十六法

一用三左旋乘奇數，得相連之奇數。

三三如九　三九二十七
三七二十一　三一如三

一用八左旋乘耦數，得相連之耦數。

一用三左旋乘耦數得相連之耦數
八八六十四　八二一十六　八四三十二　八六四十八
三四一十二　三六一十八　三二如六　三八二十四

一用八左旋乘奇數得相連之耦數
八三二十四　八七五十六　八九七十二　八一如八

一用二右旋乘耦數得相連之耦數
二二如四　二八一十六　二四如八　二六一十二

一用七右旋乘奇數得相連之奇數
七七四十九　七三二十一　七九六十三　七一如七

一用二右旋乘奇數得隔二位之耦數
二九一十八　二一如二　二三如六　二七一十四

一用七右旋乘耦數得相連之耦數
七二一十四　七八五十六　七四二十八　七六四十二

一用一乘奇數得本位之奇數
一一如一　一九如九　一三如三　一七如七

一用六乘耦數得本位之耦數
六六三十六　六四二十四　六八四十八　六二一十二

一用一乘耦數得本位之耦數
一二如二　一八如八　一四如四　一六如六

一用六乘奇數得相連之耦數
六七四十二　六三一十八　六九五十四　六一如六

一用四乘耦數得相對之耦數
四四一十六　四二如八　四六二十四　四八三十二

一用九乘奇數得相對之奇數

九九八十一　九三二十七　九一如九　九七六十三

一用四乘奇數得隔二位之耦數

四九三十六　四一如四　四七二十八　四三一十二

一用九乘耦數得相對之耦數

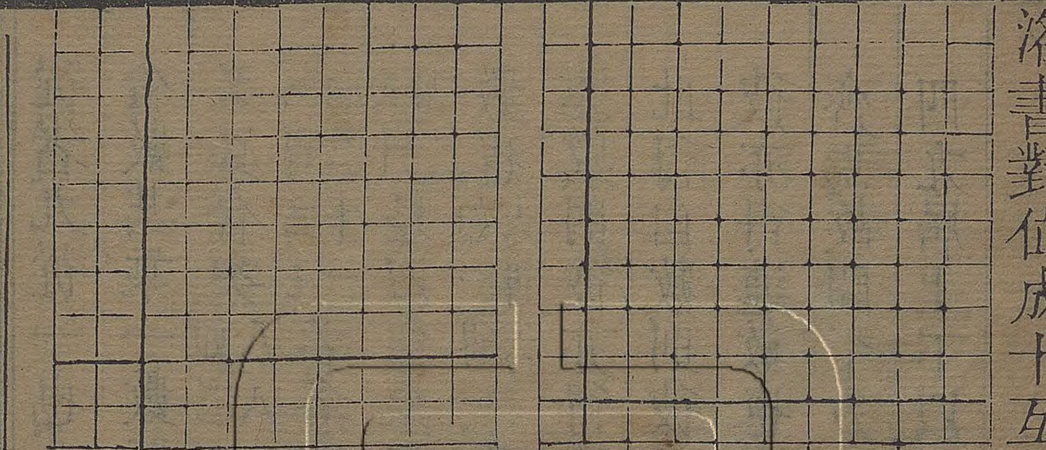
九二一十八　九四三十六　九八七十二　九六五十四

凡除法除其所得之數得其所乘之數茲不再設

數有合數有對數合數生於五對數成於十一六二七三八四九此合數也皆相減而為五者也五加一為六六減五為一是六與一同根也五加二為七七減五為二是七與二同根也三八四九其理亦然故凡同根數為合數一九二八三七四六此對數也皆相併而為十者也在河圖則合數同方而對數相連在洛書則合數相連而對數相對相合之相從者六從一也七從二也八從三也九從四也如前乘除十六法相對之相

從者九從一也八從二也七從三也六從四也如後積方五法凡以合數共乘一數所得之數必同乘耦既同數乘奇則同根若各自乘焉則又必合矣如三三得九八八六十四以對數共乘一數所得之數必對如三三得九七三二十一若各自乘焉則又必同矣如一一得一九九亦八十一二二得四八八亦六十四是以自乘之數相合之相從者此得自數則彼亦得自數也如一得一六得六此得對數則彼亦得對數也如四得六九得一此得連數則彼亦得連數也如三得九八亦得四二得四七亦得九相對之相從者此得自數則彼得對數也如一得一九亦得一二得四八亦得四此得連數則彼亦得連數也如三得九七亦得九二得四八亦得四要皆會於一六四九而齊焉故開平方之自乘數止於一六四九而洛書之位一六四九居上下以為經二七三八居左右以為緯者此也

洛書對位成十互乘成百圖



一與九對成十。十自乘其積一百。 九自乘八十一。

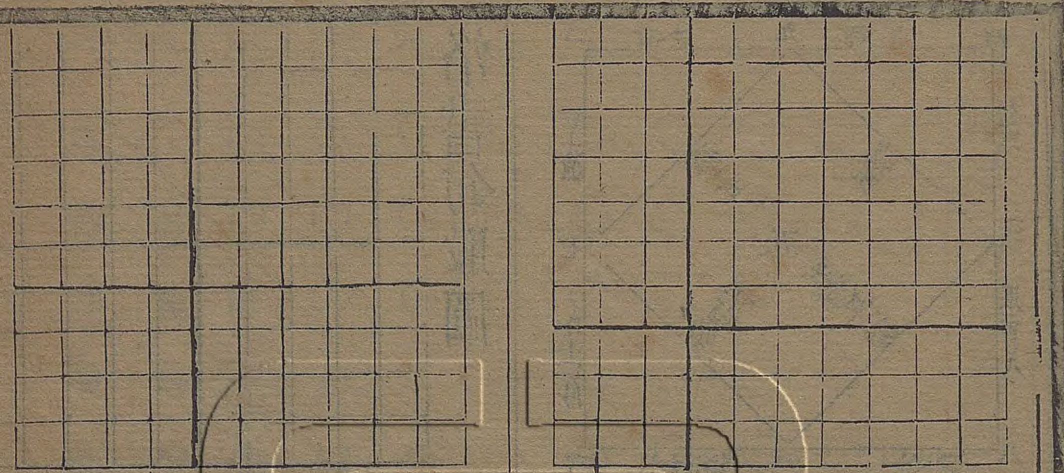
一自乘一。 一乘九。九乘一。俱爲九。共十八。

合之一百。與十自乘積同。

二與八對成十。 八自乘六十四。 二自乘

四。 二乘八。八乘二。俱十六。共三十二。

合之一百。



三與七對成十。 七自乘四十九。 三自乘

九。 三乘七。七乘三。俱二十一。共四十二。

合之一百。

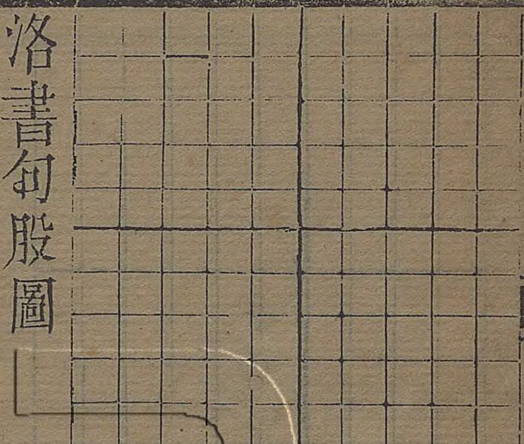
四與六對成十。 六自乘三十六。 四自乘

十六。 四乘六。六乘四。俱二十四。共四十八。

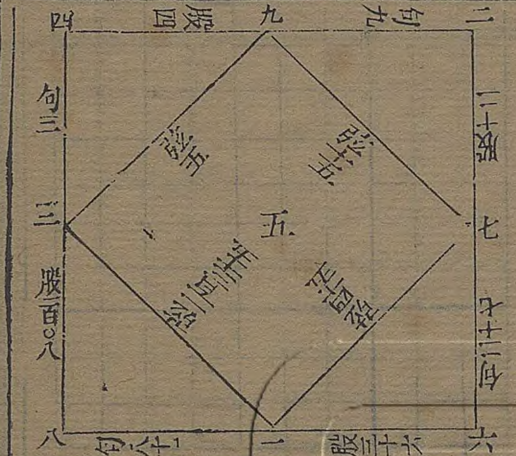
合之一百。

中五含五成十。五自乘二十五。又五自乘二十五。又五五乘各二十五，共五十。

合之一百。



洛書句股圖



句三股四弦五。

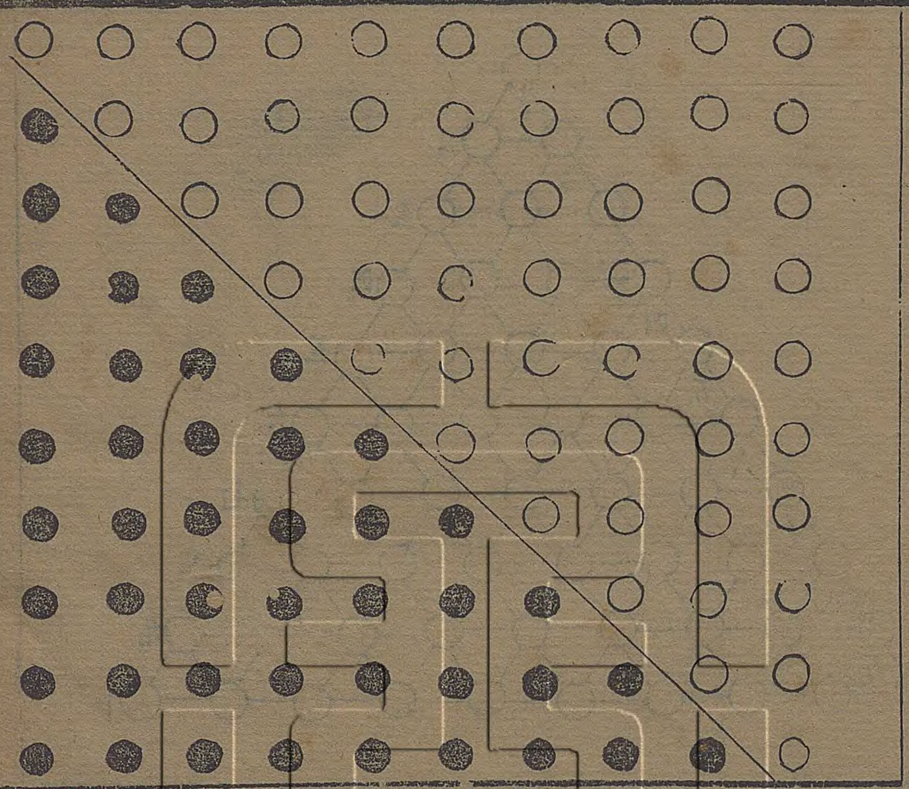
句九股十二弦十五。

句二十七股三十六弦四十五。

句八十一股一百〇八弦一百三十五。

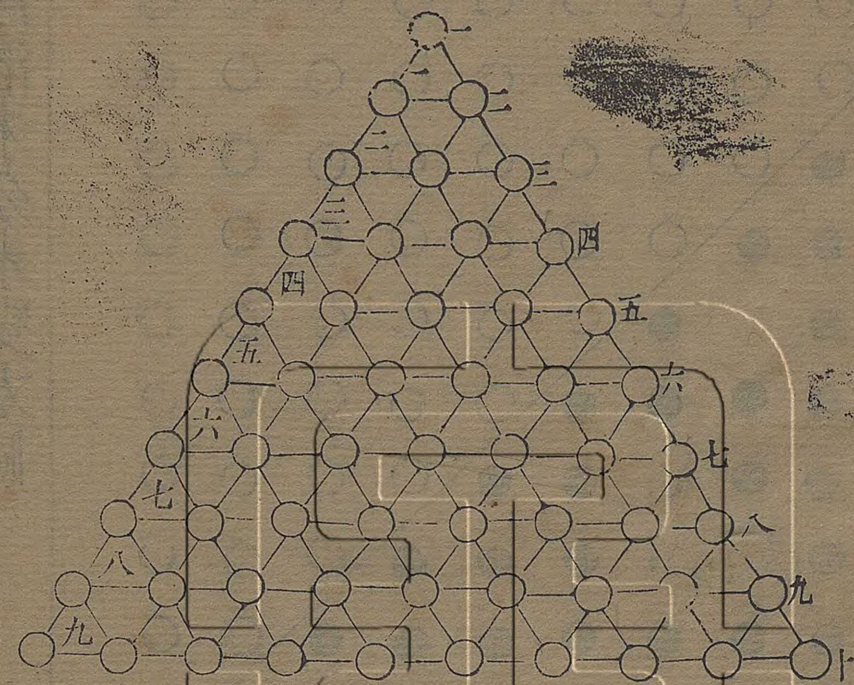
此洛書四隅合中方而寓四句股之法者推之至於無窮法皆視此。

河洛未分未變方圖



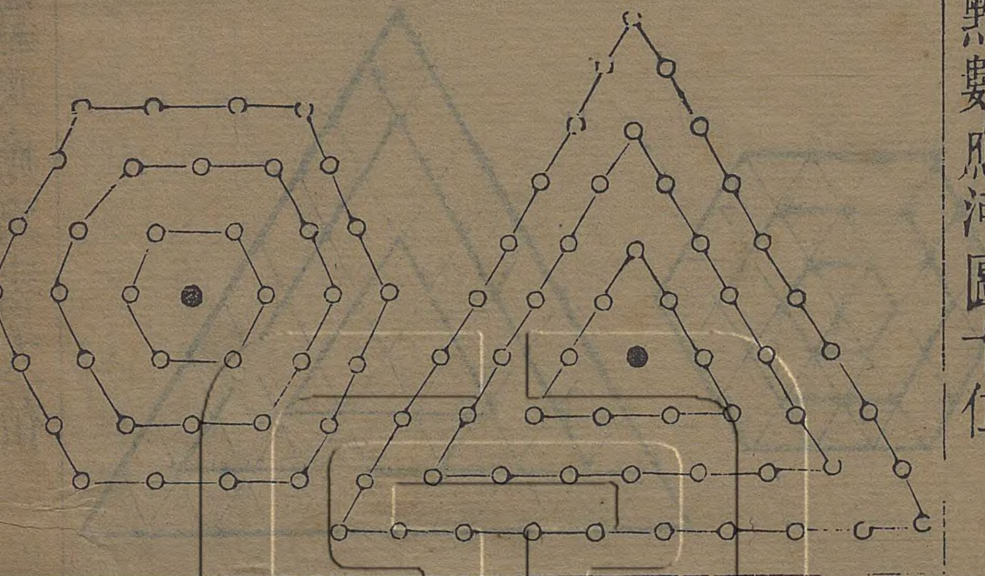
河圖之數五十有五，洛書之數四十有五，合爲一百。此天地之全數也。以一百之全數爲斜界而中分之，則自一至十者積數五十有五；自一至九者積數四十有五。二者相交而成河洛數之兩三角形矣。凡積數自少而多，必以三角而破百數之全方以爲三角，其形不離乎此。二者下諸圖之根實出於此。

河洛未分未變三角圖



河圖之數自一至十洛書之數自一至九象之已分者也圖則生數居內成數居外書則奇數居正偶數居偏位之已變者也如前圖被前方之百數以為河洛二數又就點數十位中涵冪形之九層以為河洛合一之數則雖其象未分其位未變而陰陽相包之理三極互根之道已粲然默寓於其中矣故為分析以明之如後論

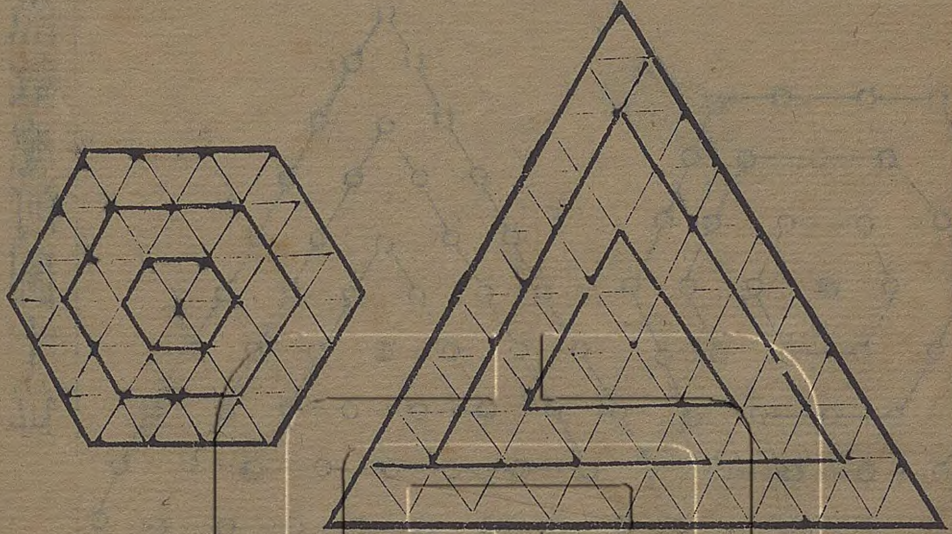
點數應河圖十位



周圍三角分三重中一重九次內一重二九一十八外一重三九二十七除中心凡五十四

中含六角亦分三重中一重六次內一重二六一十二外一重三六一十八除中心凡三十六

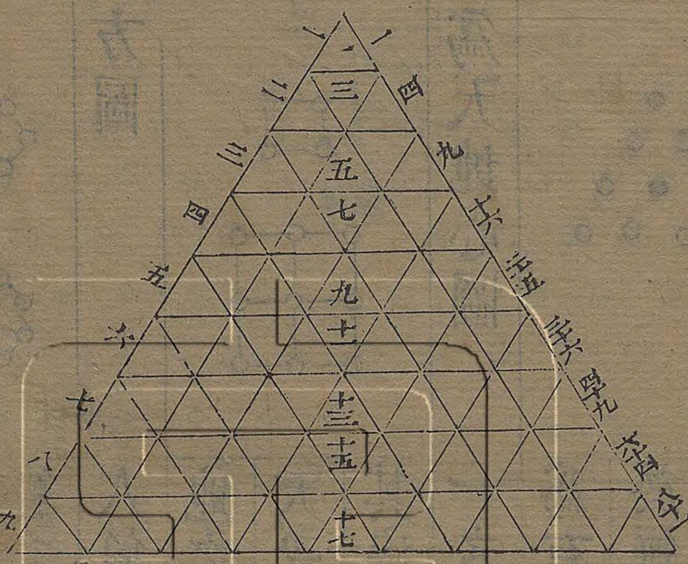
冪形應洛書九位



周圍三角分三重中一重至九次內一重三九二十七外一重五九四十五凡八十一

中含六角亦分三重中一重六次內一重三六一十八外一重五六三十凡五十四○以上諸圖本同一根雖積數若異而其爲九六之變則一也

冪形爲算法之原

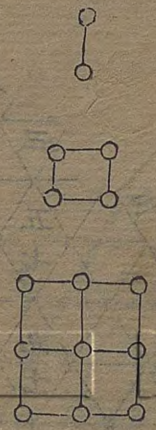


此圖左方注者本數也自一至九而用數全矣中列注者加數也一加二爲三二加三爲五至八加九而爲十七皆以本數遞加而每層之冪積如之右方注者乘數也一自乘一其冪積一二自乘四其冪積合一三兩層而爲四至九自乘八十一則其冪積亦合自一至十七九層之數而爲八十一皆以本數自乘而每形之冪積亦如之得加乘之法則減除在其中矣自此而衍至於無窮其數無不合焉九章之術其理無不貫焉此圖書所以爲算法之原也

圖形合洛書爲象法之原

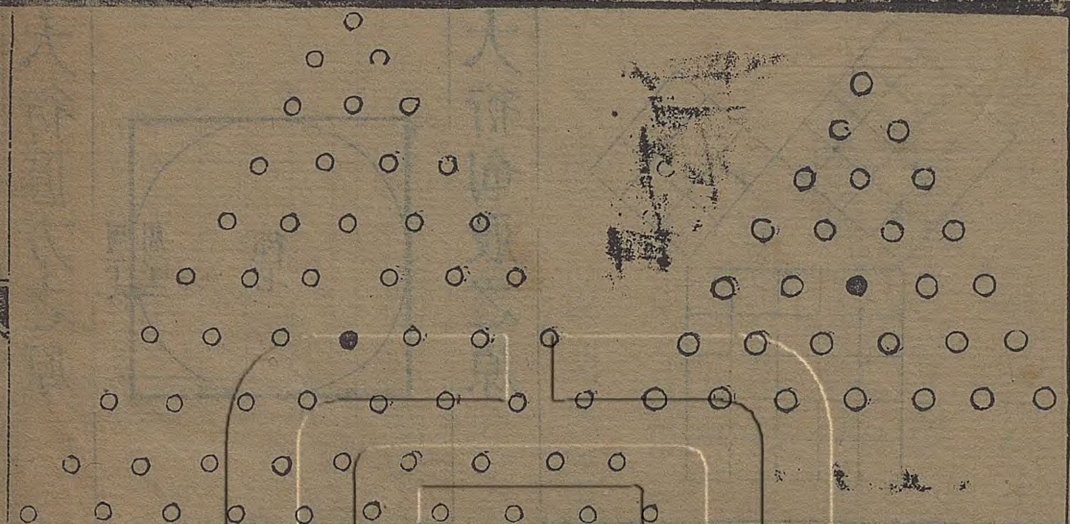
天圓圖

地方圖



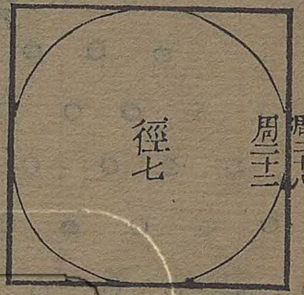
人爲天地心圖

凡有數則有象象不離乎數也萬象起於方圓而測方圓者以三角此句股所以爲算之宗也圓者天象方者地象三角形者人象何則天之道如環無端故其象圓也地之道奠定有常故其象方也人受性於天受形於地猶三角之形其心則圓之心其邊則方之邊也今就九數而三分之則一者圓之根也而十數之內惟六角八角爲有法之圓形其自十以後角愈多以至於無角者視此矣此一六八所以爲圓象之數也二者方之根也而十數之內惟四



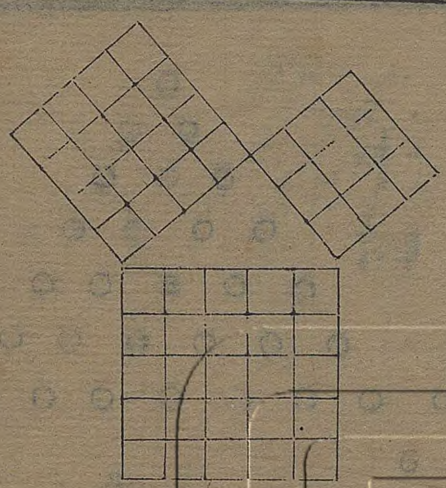
九可以積成方面其自十以後積愈多而皆可成方者視此矣此二四九所以爲方形之數也以十數裁爲三角自一至四則三其心也自一至七則五其心也自一至十則七其心也所謂三角求心之法者如是其自十以後數愈多而皆可以求心者視此矣此三五七所以爲三角形之數也洛書之位一六八居下爲天道之下濟二四九居上爲地道之上行三五七居中爲人道之中處其數其象亦於圖形乎有合矣

大衍圓方之原



凡方圓可爲比例惟徑七者方周二十八圓周二十二即兩積相比例之率也（用其半故）若十四與十一合二十八與二十二共五十是大衍之數含方圓同徑兩周數

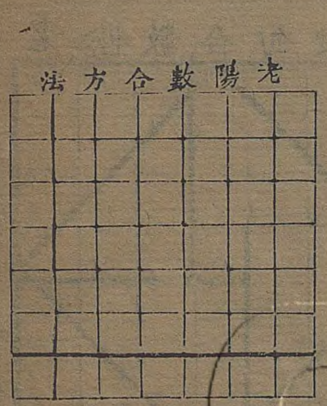
大衍句股之原



句三其積九
股四其積十六
弦五其積二十五
合之五十是大衍之數含句股弦三面積

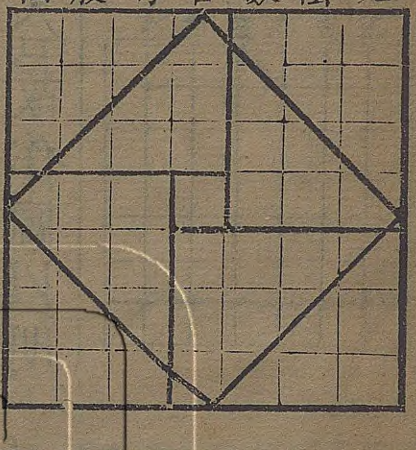
蓍策之數必以七爲用者蓋方圓之形惟以徑七爲率則能得周圍之整數句股之形亦惟以三四爲率則能得斜弦之整數徑七圍七也句三股四之合亦七也是故論方圓周圍之合數則五十論句股弦之合積亦五十此大衍之體也因而開方則不盡一數而止於四十九此大衍之用也開方而不盡一數則蓍策之虛一者是已方面之中函八句股而又不盡一數則蓍策之掛一者是已惟老陽老陰之數與此密合故作圖以明之

老陽數合方法



全方四十九
中含大方六六三十六爲過揲之數
小角一一如一一六互乘共十二併成十三爲掛扐之數

老陰數合句股法



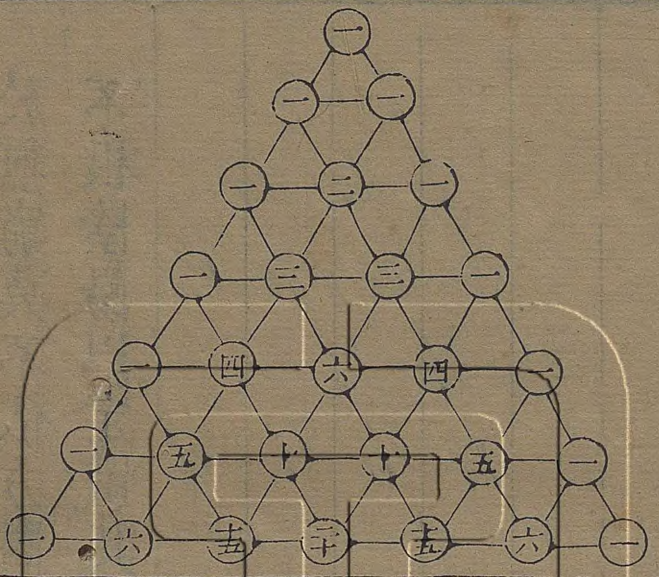
全方四十九

句三股四其積六四因之得二十四爲過揲之數

弦五其積二十五爲掛扐之數弦實亦含四句股積而多句股較一

十數之中除一二不變自二三至十七皆可成方然惟三三則五數居中七七則二十五數居中此二者爲能得天地之中數蓋三三者洛書之數七七者蓍策之數洛書之數五居中矣而其四方則又成四句股之數蓍策之數二十五居中矣而其四方則又具四句股之積而即以二十五爲弦之實焉蓋大衍之數本於河圖之數其同條共貫者有如此

加倍法圖



此圖用加一倍法如第二層兩一生第三層中位之二併左右兩一成四是倍二爲四也第三層一二二一各生第四層中位之三併左右兩一成八是倍四爲八也以下放此此出於數學中謂之開方求廉率其法以左一爲方右一爲隅而中間之數則其廉法也第三層爲平方第四層爲立方第五層六層七層爲三乘四乘五乘方於成卦之理亦相肖合何則陽大陰小陽如方陰如隅分居兩端陰陽合則生中間之兩象如平方之方隅合而生兩廉其長如方其廣如隅也又乘則生中間

之六卦如立方之方隅合而生六廉三平廉根於方而其厚如隅三長廉根於隅而其長如方也故開方之法雖相乘至於無窮莫不依方隅以立算成卦之法雖相加至於無窮莫不根陰陽以定體其理亦一而已

黃鐘爲萬事根本

大哉黃鐘萬事之本也黃鐘立則元聲協而十二律呂亦協宮聲正而五音亦正天下萬物紛錯而不齊者皆由是以定焉黃鐘之長九十橫黍以爲分寸尺丈引則曰度而物之長短不差毫釐黃鐘之容千二百黍以爲龠合升斗斛則曰量而物之多寡不失圭撮黃鐘所容千二百黍之重以爲銖兩斤鈞石則曰權衡而物之輕重不爽忽微蓋得其本而物自不能外也律呂新書黃鐘九寸空圍九分積八百一十分注曰天地之數始於一終於十其一三五七九爲陽九者陽之成也二四六八十爲陰十者陰之成也黃鐘陽聲之始陽氣之動也故按其數九寸分之數具於聲氣之元不可得而見及斷竹爲管吹之而聲和候之而氣應而後數始形焉均其長得九寸審其圍得九分積

其實得八百一十分是爲律本度量權衡於是而受法十一律由是而損益焉蓋理者氣之體氣者理之用惟理出於自然故數亦出於自然也

黃鐘生度

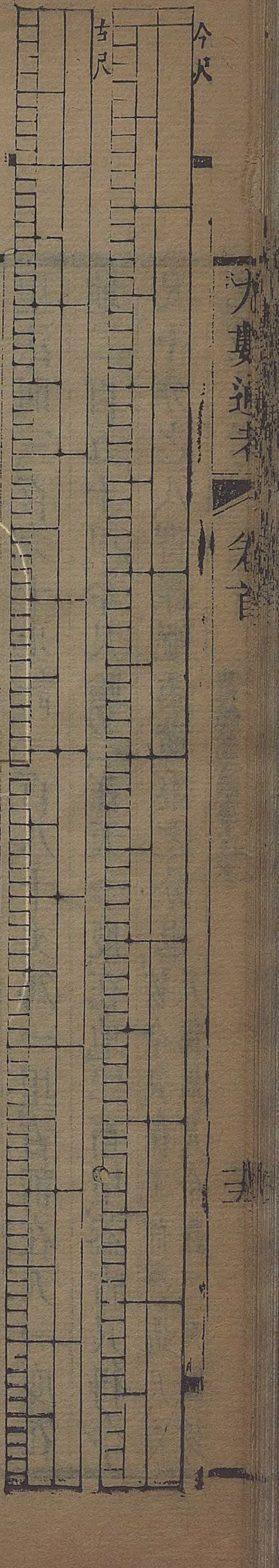
黃鐘之管其長橫累秬黍中者九十粒一粒爲一分十分爲寸十寸爲尺十尺爲丈十丈爲引古法四丈爲疋五丈爲端今無定則分下有釐毫絲忽微纖沙塵埃渺漠模糊逡巡須臾瞬息彈指刹那六德虛空清淨釐毫以下皆以十析若平方則百分爲寸立方則千分爲寸丈尺與毫釐以下皆同

黃鐘生量

黃鐘之管容秬黍中者一千二百粒爲一龠兩其龠爲合十合爲升十升爲斗十斗爲石今法合下有勺撮抄圭粟亦以十析

黃鐘生衡

黃鐘所容千二百黍重十二銖倍其銖爲兩十六兩爲斤三十斤爲鈞四鈞爲石今法兩下有錢分釐分釐以下並與度法同凡度量衡自單位以上如度法之丈量法之石衡法之斤兩皆爲單位則曰十百千萬億兆京垓秭穰溝澗正載極恒河沙阿僧祇那由他不可思議無量數自億以上有以十進者有以萬進者有以自乘之數進者今立法俱以萬進如萬萬曰億萬億曰兆之類是也歷法則曰宮三十度度六十分分六十秒秒六十微微六十纖纖六十忽忽六十芒芒六十塵塵凡自度以下須每項列兩位如幾十幾度幾十幾分之類又有曰十二時又爲二十四小時時八刻又以小時爲四刻刻十五分分以下與前同田法則曰頃百畝畝積二百四十步分積二十四步分以下釐毫絲忽同度法里法則三百六十步計一百八十丈爲一里古稱在天一度在地二百五十里今尺驗之在天一度在地二百里蓋古尺得今尺十分之八實絫縱黍橫黍之分也按今尺係工部營造尺古尺係周尺今將二尺圖後



石法二千五百寸。此按舊法，古今尺度不同，量法又異，斛米一石，量得今尺上若干寸，較准石法，推算方得密合。今設例從舊法。

諸物輕重率　此係較準新法，用工部營造尺，將諸物製為立方，其邊一寸，其積千分，較量毫釐，諸物如一，乃以部平逐樣細較，得其輕重，故與舊法迥殊焉。

赤金十六兩八錢　紋銀九兩
水銀十二兩三錢八分　紅銅七兩五錢
白銅六兩九錢八分　黃銅六兩八錢
鋼六兩七錢三分　生鐵六兩七錢
熟鐵六兩七錢三分　高錫六兩三錢
六錫七兩六錢　倭鉛六兩
黑鉛九兩九錢三分　白玉二兩六錢
金珀八錢　白瑪瑙二兩三錢
紅瑪瑙二兩二錢　硨磲二兩五錢二分
青石二兩八錢八分　白石二兩五錢
紅石二兩五錢六分　象牙一兩五錢四分
牛角一兩九錢　沉香八錢二分
白檀八錢三分　紫檀一兩〇二分
花梨八錢七分　楠木四錢八分
黃楊七錢五分　烏木一兩一錢
油八錢三分　水九錢三分

附各面各體比例定率　凡各面各體，皆有比例之定率，其散見於各法者，恐難查考，茲特彙

周徑定率　又

列卷首以便檢閱

徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇	周	一〇〇〇〇〇〇〇〇
周	三一四一五九二六五	徑	三一八三〇九八八

圓面積與周方積比例定率　又

圓面	一〇〇〇〇〇〇〇〇	周方	一〇〇〇〇〇〇〇〇
周方	一二五六六三七〇六二	圓面	七九五七七四七

方斜定率

方	一〇〇〇〇〇〇〇〇
斜	一四一四二一三五六

理分中末線定率

全分	一〇〇〇〇〇〇〇〇
大分	六一八〇三三九九
小分	三八一九六六〇一

邊線相等面積不同定率　又

方	一〇〇〇〇〇〇〇〇	圓	一〇〇〇〇〇〇〇〇
圓	七八五三九八一六	方	一二七三二三九五四
三邊	四三三〇一二七〇	三邊	五五一三二八八九
五邊	一七二〇四七七四一	五邊	二一九〇五七九八六
六邊	二五九八〇七六二〇	六邊	三三〇七九七三三四
七邊	三六三三九一二四〇	七邊	四六二六八四〇九八
八邊	四八二八四二七一二	八邊	六一四七七四四三五
九邊	六一八一八二四二〇	九邊	七八七〇九四三〇二
十邊	七六九四二〇八八三	十邊	九七九六五七〇九九

面積相等邊線不同定率

方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
圓	一一二八三七九一六
三邊	一五一九六七一三七
五邊	七六二三八七〇五
六邊	六二〇四〇三二四
七邊	五二四五八一二六
八邊	四五五〇八九八五
九邊	四〇二一九九六三
十邊	三六〇五一〇五八
圓徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇

求圓內各形之一邊定率

又

圓	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
方	八八六二二六九二
三邊	一三四六七七三六九
五邊	六七五六四七九三
六邊	五四九八一八〇五
七邊	四六四八九八〇三
八邊	四〇三三一二八八
九邊	三五六四四〇一四
十邊	三一九四九四一八
圓徑方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇

求圓內各形之面積定率

三邊	八六六〇二五四〇
方	七〇七一〇六七八
五邊	五八七七八五二五
六邊	五〇〇〇〇〇〇〇
七邊	四三三八八三七四
八邊	三八二六八三四三
九邊	三四二〇二〇一四
十邊	三〇九〇一六九九
圓徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇

求圓外各形之一邊定率

方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
三邊	一七三二〇五〇八〇

三邊	三二四七五九五三
方	五〇〇〇〇〇〇〇
五邊	五九四四一〇三一
六邊	六四九五一九〇五
七邊	六八四一〇二五四
八邊	七〇七一〇六七八
九邊	七二三一三六〇六
十邊	七三四七三一五六
圓徑方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇

求圓外各形之面積定率

方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
三邊	一二九九〇三八一〇

五邊	七二六五四二五二	五邊	九〇八一七八一六
六邊	五七七三五〇二七	六邊	八六六〇二五四〇
七邊	四八一五七四六二	七邊	八四二七五五五八
八邊	四一四二一三五六	八邊	八二八四二七一二
九邊	三六三九七〇二四	九邊	八一八九三三〇三
十邊	三二四九一九七〇	十邊	八一二三九九二四

圓與圓內各形面積定率　　圓與圓外各形面積定率

圓積	一〇〇〇〇〇〇〇	圓積	一〇〇〇〇〇〇〇
三邊	四一三四九六六七	三邊	一六五三九八六九
方	六三六六一九七七	方	一二七三二三九五四
五邊	七五六八二六七二	五邊	一一五六三二八三四
六邊	八二六九九三三四	六邊	一一〇二六五七七九

七邊	八七一〇二六四一	七邊	一〇七三〇二九七四
八邊	九〇〇三一六三一	八邊	一〇五四七八六一七
九邊	九二〇七三五四二	九邊	一〇四二六九七九一
十邊	九三五四八九三八	十邊	一〇三四二五一五二

邊線相等體積不同定率　　又

立方	一〇〇〇〇〇〇〇〇	球	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
球	五二三五九八七七五	立方	一九〇九八五九三一七
四面	一一七八五一一三九	四面	二二五〇七九〇七七
八面	四七一四〇四五二一	八面	九〇〇三一六三一七
十二面	七六六三一一八九〇三	十二面	一四六三五四七九〇五一
二十面	二一八一六九四九六九	二十面	四一六六七三〇四六三

體積相等邊線不同定率　　又

各面體比例定率

立方	一〇〇〇〇〇〇〇〇
球	一二四〇七〇〇九八
四面	二〇三九六四八九〇
八面	一二八四八九八二九
十二面	五〇七二二二〇七
二十面	七七一〇二五三四

球	一〇〇〇〇〇〇〇〇
立方	八〇五九九五九七
四面	一六四三九四八八一
八面	一〇三五六二二八五
十二面	四〇八八一八九五
二十面	六二一四四三三二

求球內各形之一邊定率

球徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	八一六四九六五八
立方	五七七三五〇二六
八面	七〇七一〇六七八
十二面	三五六八二二〇九
二十面	五二五七三一一一

求球內各形之體積定率

球徑方	一〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	六四一五〇〇二九
立方	一九二四五〇〇八六
八面	一六六六六六六六六
十二面	三四八一四五四八二
二十面	三一七〇一八八三三

求球外各形之一邊定率

球徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	二四四九四八九七四
立方	一〇〇〇〇〇〇〇〇
八面	一二二四七四四八七
十二面	四四九〇二七九七
二十面	六六一五八四五三

求球外各形之體積定率

球徑方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	一七三二〇五〇八〇七
立方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
八面	八六六〇二五四〇三
十二面	六九三七八六三六七
二十面	六三一七五六九九九

球與球內各形體積定率

球積	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	一二二五一七五三〇
立方	三六七五五二五九〇

球與球外各形體積定率

球積	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	三三〇七九七三三七二
立方	一九〇九八五九三一七

八面	三一八三〇九八八五	
八面	一六五三九八六六八六	
十二面	六六四九〇八八九一	
十二面	一三三二五〇三四三五八	
二十面	六〇五四六一三七二	
二十面	一二二〇八五六六九九一	

周髀經解

昔者周公問於商高曰。竊聞乎大夫善數也。請問古者庖犧立周天歷度。

周天歷度者、分周天三百六十度。爲推求歷日之用也。按通鑑載包犧作甲歷、又易大傳言包犧仰以觀於天文、俯以察於地理。其觀察之時。必有度數、以紀其法象、則歷度始於包義無疑矣。

夫天不可階而升。地不可將尺寸而度。請問數從安出。

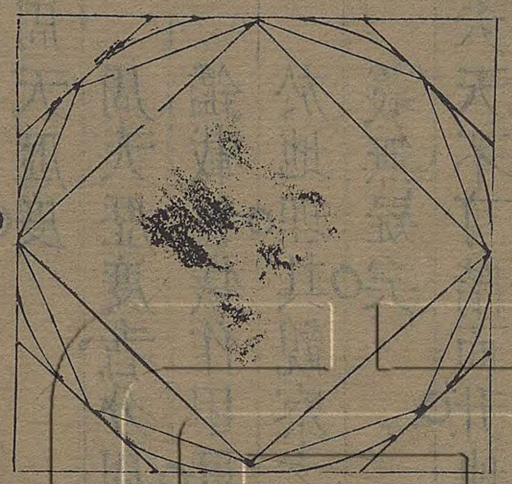
天之高明、地之博厚、非人力所能及。其歷度之數、不知從何而得也。

商高曰。數之法出於圓方。

萬物之象、不出圓方、萬象之數、不離圓方。河圖者、方之象也。

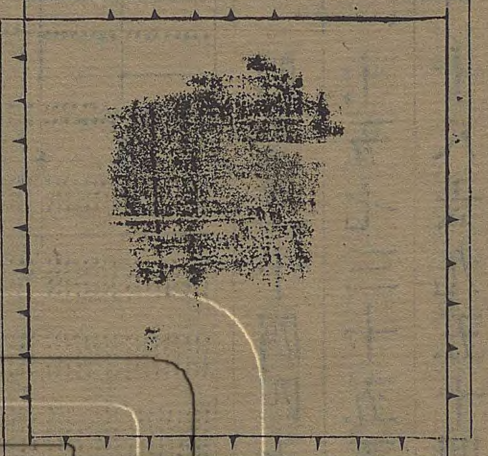
洛書者圓之象也。太極者圓之體奇也。四象者方之體偶也。奇數天也。耦數地也。有天地而萬物於是乎生有圓方而萬象於是乎定有奇耦而萬數於是乎立矣。

圓出於方



以數而論出於圓方。以圓方而論則圓出於方。蓋方易度而圓難測方有盡而圓無盡故推圓者以方度之以有盡而度無盡也。是以圓周內弦外切屢求句股為無數多邊形以切近圓界將合而為一。而圓周始得故曰圓出於方也。

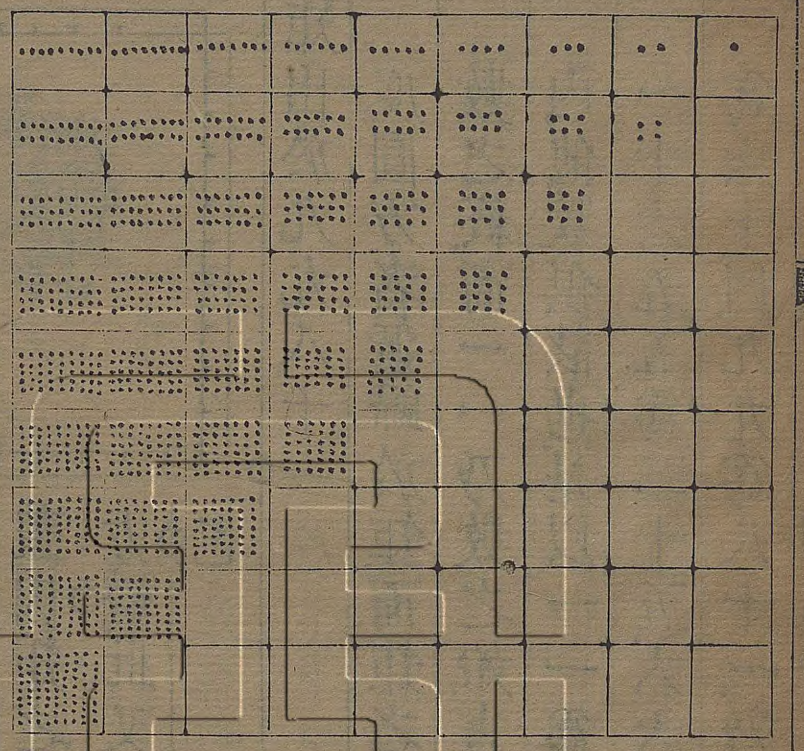
方出於矩



孟子曰。不以規矩不能成方圓。夫規所以成圓而矩所以成方也。故凡方形必出於二矩相合。如矩之二股均者合之即為正方。矩之二股一大一小者合之則為長方。蓋因矩之為形其角直其線正所以能成方體此又直內方外之理。故曰方出於矩也。

矩出於九九八十一。

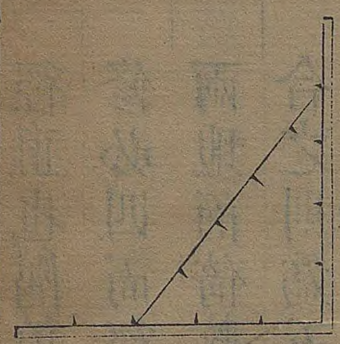
度圓方者遞歸於矩。而矩之形總不外乎二數相乘。九九者數之終。而一一乃數之始。言九九而不及他數者以九九之內他數俱該也。是以一一為一。二二為四。三三為九。四四為一十六。五五為二十五。六六為三十六。七七為四十九。八八為六十四。九九為八十一。乃矩之二股均平所成之正方也。



一二爲二，一三爲三，一四爲四，一五爲五，一六爲六，一七爲七，一八爲八，一九爲九，形雖未方，而其理猶存也。二三爲六，二四爲八，二五一十，二六一十二，二七一十四，二八一十六，二九一十八，三四一十二，三五一十五，三六一十八，三七二十一，三八二十四，三九二十七，四五二十，四六二十四，四七二十八，四八三十二，四九三十六，五六三十，五七三十五，五八四十，五九四十五，六七四十二，六八四十八，六九五十四，七八五十六，七九六十三，八九七十二，乃

矩之一股小一股大，所成之長方也。至於一百之類，雖爲正方，乃十之相乘，十則仍歸於一也。又如八十四，九十六之類，乃六七四十二，六八四十八之倍，不得自立爲數之本。又或十一、十三、十七、十九之類，十一爲二五一十之奇，十三爲二六一十二之奇，十七爲二八一十六之奇，不得成正方，亦不得成長方，故不入九九之數也。是以九九之數爲方之本，而方之形，必合以矩，故曰矩出於九九八十一也。

故折矩以爲句廣三，股修四，徑隅五。



前言圓方之形，此言句股生成之正數也。以二矩合之，既爲方形，今以一矩折之，則爲一方之兩邊，是以折矩之橫者爲句之廣，折矩之縱者爲股之長，於句股之末，以斜弦連之，是爲徑隅，

徑直也隅角也言自兩角相對直連之也句之廣必三股之修必四而徑隅始得五此乃自然生成之正分也易曰參天兩地而倚數天數一參之則爲三地數二兩之則爲四三二合之則爲五此又句三股四弦五之正義也

旣方其外半其一矩

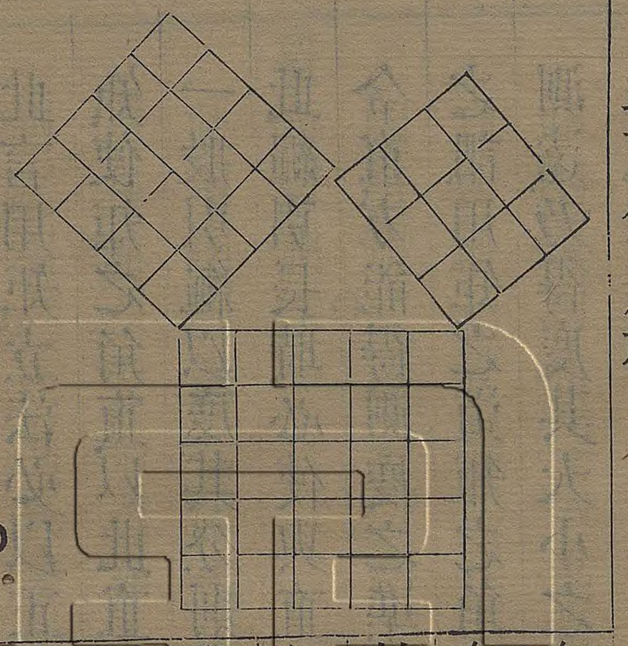
此言句股之面積也句股以弦連之不得爲方形必再合一矩乃爲一長方所謂方其外者言弦之外復加一矩以成方也句三股四相乘得一十有二即爲兩矩合成之數半之得六乃句股之面積所謂半其一矩者也

環而共盤得成三四五

此言句股弦相和之數也環而共盤者環繞盤旋於句股弦之周圍得成三四五共之爲一十有二乃三數相和總數也

兩矩共長二十有五是爲積矩

此言句股相求之法也兩矩者句與股也其所以相求者以句股弦各面積彼此加減以立法也



句三自乘爲九股四自乘爲十六合計之爲二十五是句股各自乘之積相併而與弦自乘積等故曰積矩也弦自乘積內減句自乘之積得股自乘之積若減股自乘之積得句自乘之積故爲句股弦相求之法也

故禹之所以治天下者此數之所由生也

言禹平成之功臨垂萬古揆厥所以奏績者必藉句股以審高下始得順水之性而告厥成功然則禹之所以治水者非

此句股之法所由生乎。

周公曰。大哉言數。請問用矩之道。

商高曰。平矩以正繩。

此言用矩立法。必以正且直也。平矩以正繩有兩義。平置其矩。使矩之角直。以此直角之一股。或橫或平。橫以度遠 平以度高 復自一股引繩以度其分。則此分爲我所知。故以所知推所不知。此繩引長時。必使與直角對正。不論其分之幾何。引之又必令直。方能得測度之準。故爲平矩以正繩。又平者均平準齊之謂。用矩之道。矩之角正。卽直角之謂 然後二股得直。以之測高測遠。乃得度其大小之分。此矩旣正。而所測之度亦正矣。孟子曰。規矩準繩。以爲方圓平直。繩者。卽準之之意。規矩所以度方圓。而準繩所以考平直。故準之以平。繩之以直。始得立法之精微。故曰平矩以正繩也。

偃矩以望高。

此用矩測高之法也。偃者仰也。仰矩方可測高。矩之一股直立在前。一股定平在下。然後比例推之。蓋平股與立股之比。卽所知之遠與所測之高之比也。故仰測而得高。

覆矩以測深。

此用矩測深之法也。覆者俯也。俯矩方可測深。矩之一股立者在前。一股平者在上。平股與立股之比。卽所知之遠與所測之深之比也。故俯測而得深。

臥矩以知遠。

此用矩測遠之法也。臥者平也。平矩方可測遠。以矩之一股爲橫向內。一股爲縱向前。是以橫與縱之比。卽所知之度與

所求之遠之比也。故平測之而得遠。

環矩以爲圓。

此用矩爲圓之法也。以矩之一端爲樞，一端旋轉爲圓，則成一圓。環矩者，卽旋規之說也。

合矩以爲方。

此用矩爲方之法也。矩二股也。兩矩相合，乃成一方。卽前方出於矩之說也。

方屬地，圓屬天。天圓地方。

前言用矩以測高深廣遠，復用矩以爲圓方，此以圓方屬之天地者，非以形體言，蓋以陰陽動靜之理言也。樂記云：著不息者天也，著不動者地也。不息故運而不積，圓之象也。不動故靜而有常，方之理也。且圓之數無盡，而方之數有盡。天不可階而升，測天者恒於地上度之，是仍以方度圓也。凡數之不盡者必奇，數之可盡者必耦。是以陽爲奇，陰爲耦。此方圓之理數所以屬乎天地也。

方數爲典，以方出圓。

典，則也。言圓之數奇零不盡，不可爲則。故惟方數可爲典則。以方出圓者，以方之形度圓之分，從方數中生出圓數。卽前圓出於方之說也。如圓徑求積，則以徑自乘之爲正方形，而以方率圓率比例推之，卽得圓積。是皆以方出圓之理也。

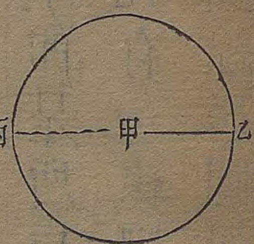
笠以寫天。天靑黑，地黃赤，天數之爲笠也。靑黑爲表，丹黃爲裏，以象天地之位。

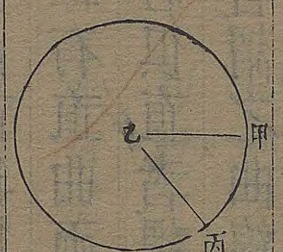
此卽儀象以表天地之形色也。笠形圓，故以象天。寫，象也。靑黑，天之色；黃赤，地之色。天數之爲笠形，則以靑黑爲表，丹黃

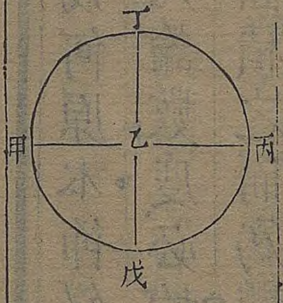
爲裏以象天地之位葢取天包地之象也
是故知地者智知天者聖智出於勾勾出於矩夫矩之於數其裁制萬物惟所爲耳
天地之高深廣遠非聖智不能知然聖智非由理之自然亦不能無所憑藉而知也故明句股之數即可以知地而爲智知地之數即可因地以知天而爲聖矣故曰智出於句也然句股之形又賴矩以成故矩爲句股之本而天地之高深廣遠皆賴矩以測況萬物之大小巨細豈能外於矩之度分乎故矩之於數其裁制萬物惟其所爲而無不可也
周公曰善哉
以周公之聖而與之曰善哉則其得數之本立法之妙可謂至矣至是而周髀之義盡矣

幾何原本節錄

凡論數度必始於一點自點引之而爲線自線廣之而爲面自面積之而爲體是名三大綱是以有長而無濶者謂之線有長與濶而無厚者謂之面長與濶厚俱全者謂之體
線有直曲兩種其二線之一端相合二端漸離必成一角二線若俱直者謂之直線角一直一曲者謂之不等線角二線俱曲者謂之曲線角
凡命角必用三字而以中一字爲所指之角如甲乙丙三角形指甲角則云乙甲丙角是也亦有單舉一字者則其所舉之一字即是所指之角也
凡有一線以此線之一端爲樞一端爲界旋轉一周即成一圓此線居圓徑之半謂之半徑線如甲乙若引長至圓之對界將全



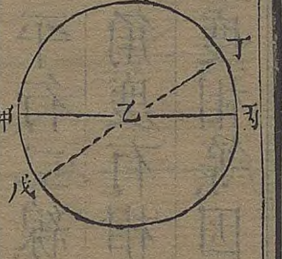


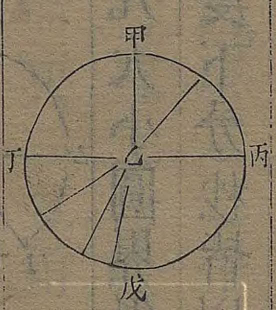


圓平分爲二，卽爲全徑線。如丙乙。若自圓心至圓界作幾何半徑線，皆謂之輻線，其圓線卽謂之圓界。圓界內所積之面度謂之圓面。

凡圓線分界之所，皆以所對之角而命其弧。因其形似弧，故名之。而角又以所對之弧而命其度。弧大者角亦大，弧小者角亦小。蓋角度俱在圓界，而圓界爲角度之規也。如乙角爲心，甲丙爲界，則乙角相對之界卽甲丙弧，而甲丙弧卽乙角之度也。

凡角相對之弧，得圓界四分之一者，此角必直，謂之直角。如第一圖丁乙丙、丙乙戊、丁乙甲、甲乙戊四角是也。若不足四分之一者，謂之銳角。如第二圖丁乙丙、甲乙戊二角是也。若過於四分之一者，謂之

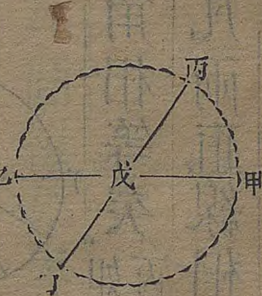




鈍角。如第二圖丁乙甲、丙乙戊二角是也。其二角兩尖相對，則曰對角。如兩銳角相對，兩鈍角相對也。二角兩尖相並，則曰並角。如一銳角與一鈍角相並也。

凡有一圓，將全徑線平分爲二，如丙乙丁線。每半圓界內，自徑線中心如乙作相並之幾角，此幾角之共度，必與兩直角等。蓋角雖多寡不同，銳鈍各異，然總在全徑線所限半圓界內，爲全圓界四分之二，故與二直角相等也。若合全圓論之，作衆輻線，衆角雖多，亦必與四直角相等矣。如丙甲丁乙半圓內三角與兩直角度等，丙乙丁戊半圓內四角亦與兩直角度等。

凡兩直線相交，所成二對角之度，必俱相等。如甲乙丙丁二線交於戊，戊處成甲戊丁、丙戊乙二對角，斯二鈍角之度必等，又成

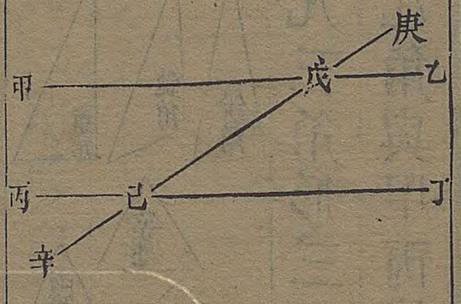


甲戊丙丁戊乙二對角斯二鈍角之度亦必等今試以二線相交之處爲心旋轉作一圓則二線俱爲此圓之全徑線而一圓俱兩平分其相對之弧度必俱相等弧度既等故相對之角度亦必相等也

凡大小圓界俱定爲三百六十度取其數無奇零便於布算也度下分秒皆以六十起數以三百六十爲六六所成以六十度之可得整數也

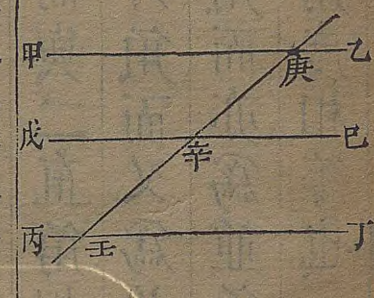
凡二線之間寬狹相離之分俱等則此二線謂之平行線雖引至無窮其端必不能相合以其遠近雖殊皆爲平行線也

凡平行二線或縱或斜作一直線交加於上如庚辛則成八角此八角度有相等者必是對角或內外角如庚戊乙甲戊己二角其度相等因其兩尖相對謂之對角庚戊乙戊己丁二角其度

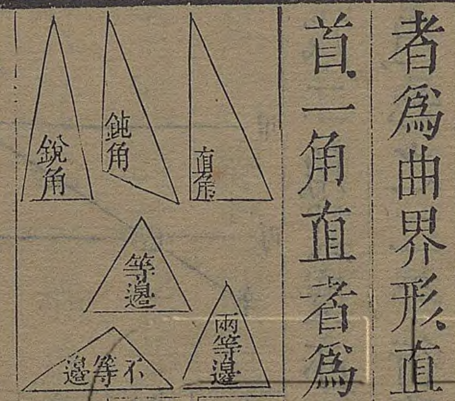


亦相等因其在平行二線之內外故謂之內外角甲戊己戊己丁二角其度亦相等因其俱在二平行線之內而立斜線之左右故又謂之相對錯角庚戊甲丁己辛二角其度亦相等因其俱在平行二線之外故謂之外角乙戊己丙己戊二角其度亦相等因其又俱在平行二線之內故又謂之內角總之二平行線上交以斜線所成八角必兩兩相等也惟平行線上一邊之二內角或一邊之二外角謂之並角其度不等而與二直角相等如甲戊庚與乙戊庚丁己辛與丙己辛雖爲外角而又爲並角乙戊己與甲戊己丁己戊與丙己戊雖爲內角而亦爲並角以其同出於一線之一邊故謂之並角與二直角度相等也

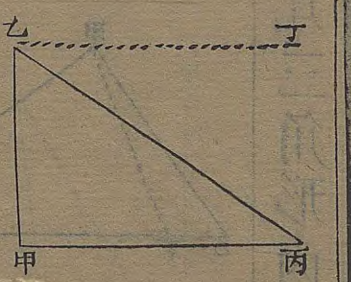
凡平行二線之間再作一平行線如戊己則三線互相爲平行也在此三線上照前作一庚辛壬斜線則所成之庚辛二角必相等而辛壬二角亦必相等也



凡各種界所成俱謂之形其直界所成者爲直界形曲界所成者爲曲界形直界形未有少於三角形者故三角形爲諸形之首一角直者爲直角三角形一角鈍者爲鈍角三角形三角俱銳者爲銳角三角形三邊線度等者爲等邊三角形兩邊線度等者爲兩等邊三角形三邊線度俱不等者爲不等邊三角形

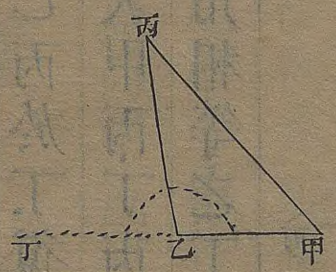


凡三角形三角度相併必與二直角度等如甲乙丙三角形自乙角與甲丙線平行作乙丁線則成丙乙丁角與丙角爲二尖



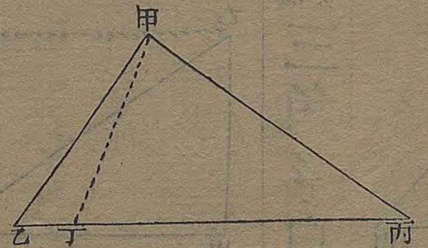
交錯之角其度必等而甲乙丁角亦爲直角今於直角內減丙乙丁角所餘爲甲乙丙角與丙角相併不適得一直角之度耶再加以甲角與二直角等矣

凡三角形自一界線引長成一外角此外角度與形內二銳角度等蓋甲乙丙三角形三角度相併原與二直角等今乙丙外角丙乙甲爲內角丙乙丁爲外角相併亦與二直角等則減去內角所餘外角與甲丙二銳角其度相等矣



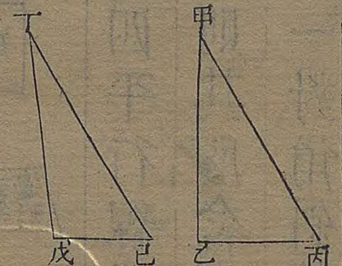
三角形之兩邊線若等其底線之兩角度亦必等若自上角至底作一直線將底線平分爲兩則此線爲上角之分角線又爲底線之中垂線也如甲丁

凡三角形內長界所對之角必大短界所對之角必小如甲乙丙三角形乙丙界長於甲丙界故所對之甲角大於乙角而甲乙界短於甲丙界故所對之丙角小於乙角試依甲丙界度截乙丙於丁復自甲至丁作甲丁線即成甲丙丁兩等邊三角形夫甲丙丁丙兩界既等則甲丁丙丁甲丙兩角亦等今甲丁丙角相等之丁甲丙角原自乙甲丙角所分則乙甲丙角必大於



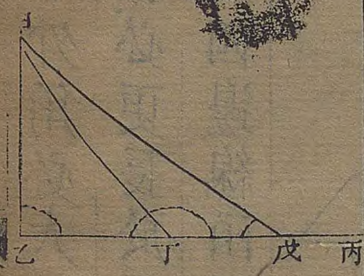
甲丁丙角矣然此甲丁丙角爲甲乙丁小三角形之外角與小形內之甲乙二角共度等既與甲乙二角共度等則大於乙角可知矣夫甲丁丙角既大於乙角則乙甲丙角必更大於乙角矣丙角之小於乙角其理亦同

凡三角形內必有二銳角蓋三角形之三角併之與二直角等



如甲乙丙三角形乙角爲直角則所餘甲角丙角併之始與乙角等故此甲丙二角爲銳角也又如丁戊己三角形戊角爲鈍角則所餘之丁角己角愈小於直角而爲銳角矣

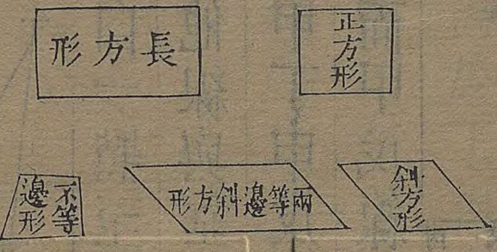
凡自一點至一橫線作衆線而衆線內有一垂線必短於他線而他線與垂線相離愈遠則愈長也如自甲點至乙丙線作甲乙甲丁甲戊幾線此內甲乙爲垂線較之甲丁甲戊線其度最短而甲戊線與甲乙線相離既遠於甲丁故更長於甲丁線蓋



甲乙爲垂線則乙角必爲直角而甲乙丁三角形內丁角甲角必俱爲銳角而小於乙角矣因乙角大於丁角故所對之甲丁線必長於甲乙線又甲丁戊外角原與甲乙二內角共度等則

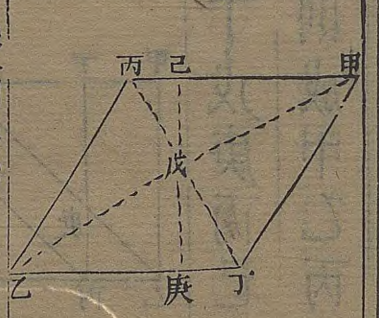
丁外角必大於乙丙角矣。因丁外角大於乙角，故所對之甲戊線，必更長於甲丁線也。

凡四邊線函四角者，其形有五。四邊線度等，而角度亦等者，爲

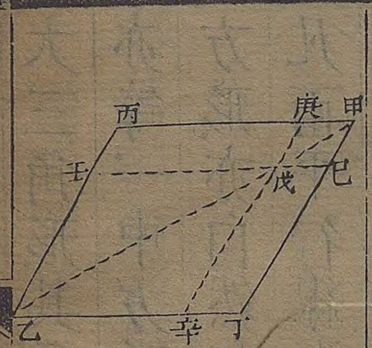


正方形。四直角，而兩邊線短，兩邊線長者，爲長方形。四邊線度等，而角度不等者，爲等邊斜方形。兩邊線長，兩邊線短，而角度又不等者，爲兩等邊斜方形。以上四形，俱自平行線出。如四邊線不等，亦不平行，而四角度又不等者，爲不等邊斜方形。

凡四平行線所成方形，其兩兩平行線度俱相等，如丙甲與乙丁，丙乙與甲丁。則其所含之角，成兩對角，亦必兩兩相等，如甲乙兩對角，丙丁兩對角。若作一對角斜線，如甲乙，則平分爲兩三角形，如丙甲乙與丁甲乙。其對角之度必等，如丙角與丁角。而二尖交錯之角，其度亦必兩兩相等，如丙甲乙與丁乙甲，丙乙甲與丁甲乙。若作兩對角線，如甲乙與丙丁，則平分爲四三角形，其相交處必平分二線之正中，如戊。而所成四線，亦必兩兩相等，如甲戊、戊乙，丙戊、戊丁。其相對之各角，與二尖交錯之各角，亦必兩兩相等。若再於對角線上，或縱或橫，正中截開，如己庚，則又平分爲六三角形。其相對之線度角度，亦無不相等也。

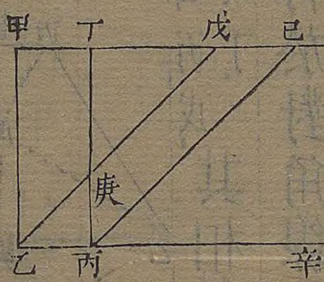


凡四邊形，於對角線不拘何處，如戊，復作相交二平行線，如壬戊己、辛戊庚二線相交。則成四四邊形，如甲己戊庚、戊辛乙壬，庚戊壬丙、己丁辛戊，四形。又卽成四三角形，如甲己戊、甲庚戊，兩小三角形；戊辛乙、戊壬乙，兩中三角形。及兩長方形，如己丁辛戊、庚戊壬丙。盡甲丁乙丙之全形。因甲乙對角線，平分爲甲丁乙、甲丙乙兩

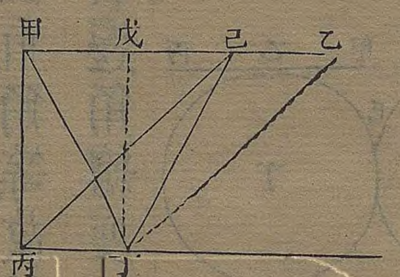


大三角形其分俱等今一小方形復平分爲兩小三角形其分亦等一中方形復平分爲兩中三角形其分亦等則所餘二長方形亦自然相等也

凡兩平行線內所作之四邊形其底度若等則面積必俱等如甲己乙辛兩平行線內於乙丙底作甲乙丙丁長方形戊乙丙己斜方形此兩形雖不同而所容之分必等何也試以兩三角形考之如甲乙戊丁丙己兩三角形其甲乙丁丙二線等甲戊丁己二線等甲角丁角俱爲直角其度又等則此兩三角形自然相等今於兩三角形內各減去丁戊庚形則所餘之甲乙庚丁戊庚丙己二形之分必等復於此二形內各加一庚乙丙形則成甲乙丙丁戊乙丙己兩四邊形其面積必然相等也

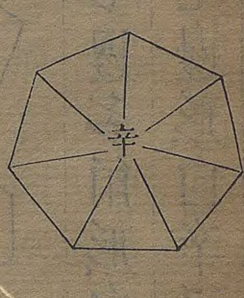


凡兩平行線內所作之三角形其底度若等則面積必俱等如甲乙丙丁兩平行線內於丙丁底作甲丙丁三角形己丙丁三角形此兩形之積必等何也自丁至乙作一直線與甲丙平行再自丁至戊作一直線與丙己平行即成甲丙丁戊己丙丁乙兩四邊形此二形既同出於丙丁底其面積相等今兩三角形俱平分四邊形之一半其面積亦必相等矣

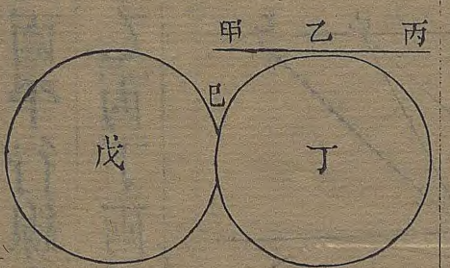


凡等邊等角各形內五邊者爲五角形六邊者爲六角形邊愈多角愈多者俱隨其邊與角而名之焉

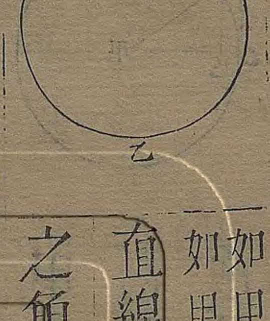
多邊多角形自角至心作線凡有幾界即成幾三角形設如辛七邊形自辛至邊七角作七線即成七三角形而此各三角形



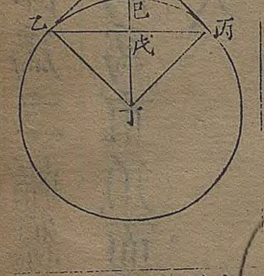
之分俱等。若欲知各邊角之總度，則將邊數加一倍，得數減四，所餘即各邊角之總度。如辛七邊形，則加一倍得十四，減去四，餘十，即七邊形之各邊角總度也。何則？凡三角形之三角與二直角度等。七邊形成三角形者七，共與十四直角等。而辛心所有之七角又與四直角等。故於十四直角內減四直角，餘十直角與七邊形之各邊角總度相等矣。



凡有直線切於圓界而不與圓界出入相交者，謂之切線。如甲乙丙線切於丁圓之乙界是也。又如此圓界與彼圓界相切而不相交，則謂之切圓。如丁戊二圓於己界相切，二界總未相交也。



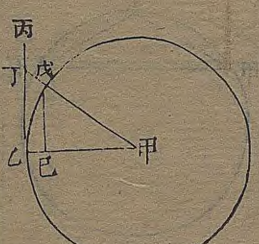
凡一直線橫分圓之兩界，謂之弦線。如甲丙。其所分圓界之兩段，皆謂之弧。如甲丁丙、甲乙丙。此弧與弦相交所成之二角，謂之弧分角。如甲丙乙、丙甲乙二角，如甲丙丁、丙甲丁二角。又自弦線之兩端作二直線，相遇於圓界之一處，如甲丁、丙丁二線相遇於丁。所成之角，如甲丁丙角。謂之圓分內角，又謂之弧分相對之界角。以其與甲乙丙弧相對也。



圓弦線上，自圓心作一中垂線，如丁戊。則將弦線兩平分。如戊丙與戊乙。若自圓心至弦線兩端作二輻線，如丁丙與丁乙。成一丁丙乙三角形。此三角形之二輻線既等，則中垂線所分之戊丙、戊乙二段必等。若將中垂線引長至弧界己，則又將弧界兩平分矣。如己丙與己乙。若自弦線兩端與圓界相切，各作一切線，如丙甲與乙甲。相遇於甲，此二線之度必等。

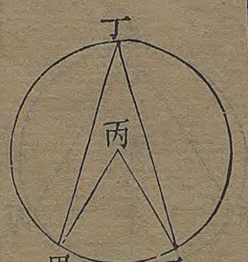
又即爲二輻線之垂線矣因其爲垂線則甲乙丁甲丙丁二角必同爲直角而甲丙乙與丁丙乙兩三角形其度亦必兩兩相等矣

凡一圓有二輻線（如甲乙與甲戊）截弧之一段所成三角形謂之分圓面形（如甲戊乙一段）若欲取弧界各角之度則用三種線求之一爲弧之切線如於甲乙輻線之末與圓界相切作丙乙垂線是也爲弧之割線如自圓心甲將甲戊線引長割出至切線丁處作



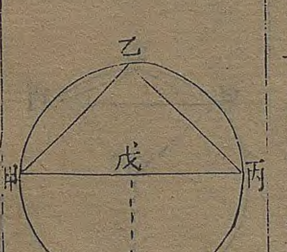
甲丁線是也一爲弧之正弦線如從圓界戊至甲乙輻線作戊己垂線是也若欲取甲角相對弧度於此三線取之皆得乙戊弧之度焉

一圓界內任於圓界一段至圓心作二線（如甲丙與乙丙）至圓界作二線（如甲丁與乙丁）即成二角在圓心者爲心角（如甲丙乙）在圓界者爲界角



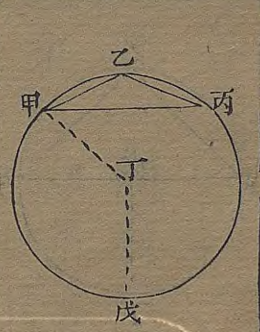
（如甲丁乙）凡心角界角形雖不一其所對弧度若等則心角皆大於界角一倍若心角所對弧度居界角所對弧度之一半則兩角之度相等蓋凡量角度必以角爲圓心眞度乃見故界角所對之弧僅得其半爲眞角度也

凡圓內界角立於圓界之半者爲直角如甲乙丙界角立於甲丁丙圓界之正一半則乙角必爲直角也試自圓心戊至圓界丁作戊丁輻線即成甲戊丁心角其相對之甲丁弧爲圓界四分之一則戊角亦必爲直角夫戊心角所對甲丁弧正爲乙界角所對甲丁丙弧之一半則戊心角度必與乙界角度相等也



凡圓內界角其所對之弧過於圓界之一半者爲鈍角如甲乙

丙界角相對之甲戊丙弧大於圓界之一半則乙角必為鈍角也試將甲戊丙弧平分於戊為甲戊丙戊兩段復自圓心丁至

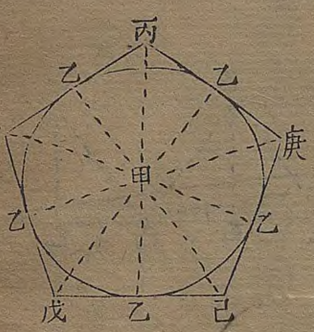


甲戊作二輻線即成甲丁戊心角其相對之甲戊弧過於圓界四分之一則丁角亦必為鈍角夫丁心角所對甲戊弧正為乙界角所對甲戊丙弧之一半則丁心角度必與乙界角相等也

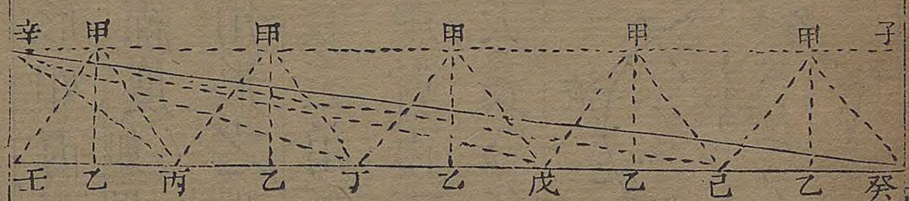
凡圓內界角其所對之弧不及圓界之一半者為銳角如甲乙丙界角相對之甲戊丙弧小於圓界之一半則乙角必為銳角也試將甲戊丙弧平分於戊為甲戊丙戊二段復自圓心丁至

甲戊作二輻線即成甲丁戊心角其相對之甲戊弧小於圓界四分之一則丁角亦必為銳角夫丁心角所對甲戊弧正為乙界角所對甲戊丙弧之一半則丁心角度必與乙界角度相等也

凡函圓各形之各邊線與圓界相切而不相交則謂之函圓切界形如丙丁戊己庚五角形各邊皆切於圓界也其所函圓之輻線度如甲乙與一直角長三角形之小邊度等如辛壬癸形之辛壬邊而五角形之五邊共度如丙丁類五邊又與長三角形之大邊度等如壬癸邊則長三角形之面積與函圓五角形之面積亦等何則試自圓心甲對丙丁戊己庚五角各作分角線即成甲丙丁類五三角形夫長三角形之壬癸度既與五角形之五邊共度等今將壬



癸底線平分為五依前所分五三角形式作甲壬丙類五正式三角形復自所分丙丁戊己四處俱向辛角各作四線遂分辛壬丙類五斜式三角形再於五正式三角形內自甲角至底各

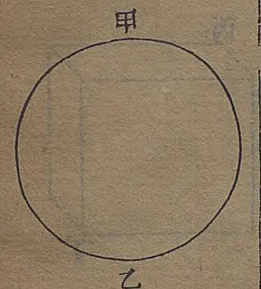


作甲乙垂線俱與圓輻線等則五正式三角形之高度亦自相等於是復自辛角與壬癸平行作辛子切角線則此兩式三角形同底又同在二平行線內其面積必兩兩相等夫分形之面積等者全形之面積自無不等此辛壬癸長三角形與丙丁戊己庚函圓五角形其面積必然相等也若以圓形論之則以圓之輻線爲長三角形之小邊以圓之周線爲長三角形之大邊其長三角形面積亦與圓面積等矣夫圓周界曲線也前所設五角形之邊界直線也觀之似難於相通者然以圓之內外各設無數多邊形逼近圓界則直線曲線將合而爲一其理亦無不同矣

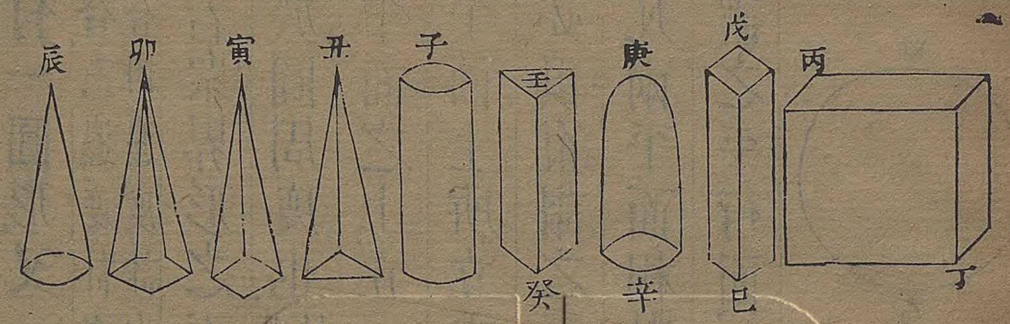
有一圓形又一衆界形此圓周度若與彼衆界形總度等如三角形合三邊邊度計之正方形合四邊邊度計之之類也則圓形之面積必大於衆界形之面積若衆界形之面積與圓形面積同者則衆界形之總度必復大於圓周度也蓋圓祇可用周求衆界形之積只可用邊求不可用周求也

平面之上立一直線無少偏倚則各邊所生之角必俱直謂之平面上所立垂線若立一平面無少偏倚則四邊所成之角亦必俱直謂之平面上所立直面

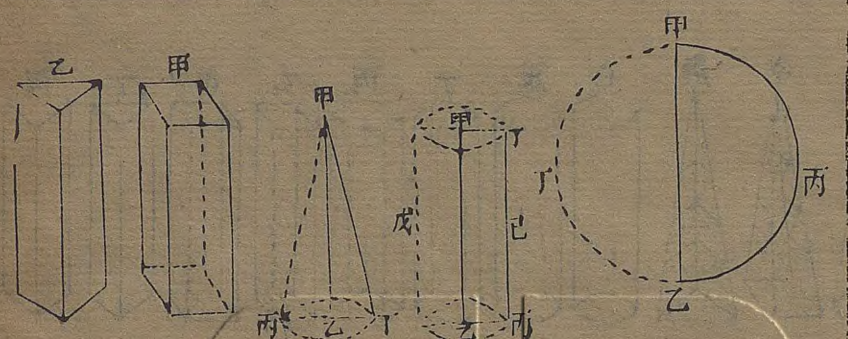
凡兩平面相對其所立衆垂線度俱各相等則此相對之平面謂之平行面



凡各種面內所積之實爲體而皆因其面以名之焉如全體不成角度止現圓之圓面則謂之圓體甲乙圖是也全體各面俱平各邊相等所

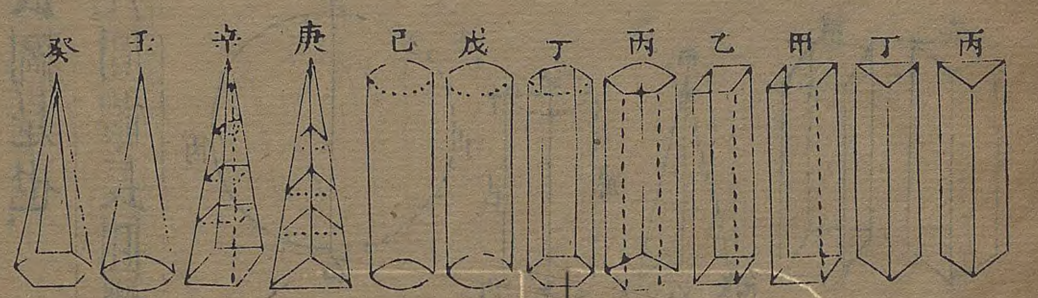


成各角又等則謂之正方體丙丁圖是也全體各面雖平體長而面成兩式其相對各面仍兩兩相等相對各邊則又平行角又相等則謂之長方體戊己圖是也體有曲平兩面相雜而不成等邊等面則謂之平底半圓體庚辛圖是也全體相對之各面不平行上下兩面平行則謂之上下面平行三稜體壬癸圖是也體圓而上下面俱平則謂之長圓體子圖是也底爲平面其各面俱合於一角而成厚角則謂之尖瓣體底三角者謂之三瓣尖體底四角者謂之四瓣尖體底衆角者謂之衆瓣尖體如丑寅卯三圖是也又或底面圓而漸銳成形則謂之尖圓體辰圖是也



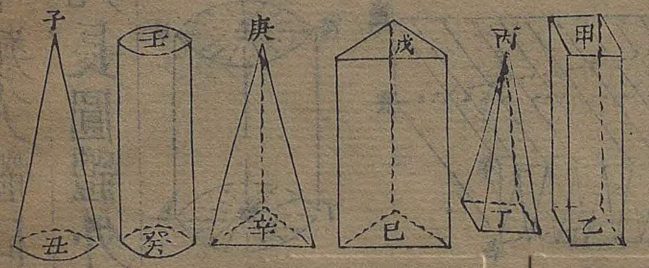
凡圓體長圓體尖圓體俱生於圓面故其外皮面積亦生於圓界一旋轉之度分耳如取甲乙丙丁之圓形則以甲乙徑線爲樞心將甲丙乙半圓作轉式旋轉復還於原處卽成甲丙乙丁一圓形體如取甲乙戊己長圓形則以甲乙中線爲樞心將丙丁線界作轉式旋轉復還於原處卽成甲乙戊己一長圓體如取甲丙丁平底尖圓形則以甲乙中線爲樞心將甲丁邊線作轉式旋轉復還於原處卽成甲乙丙丁一尖圓體矣

凡體面式不一而積等者爲積數相等之體面式旣同而體積又等者爲面式體積全等之體



如甲乙二體、爲積數相等之體也、丙丁二體、爲面式體積全等之體也、

凡各面所成體形內、其各面俱平行、或上下面爲平行、而立於等積之底、其體之高又等、則其體之積亦相等、如甲乙體、其各面俱平行、又如丙丁體、其上下面平行、立於等積之底、其高又等、或又如戊己體、其上下面平行、圓面積又等、高又等、則其兩兩體積必相等矣、又如庚辛壬癸之類尖體形、苟立於等積之底、其體之高若等、則其體之積亦等、何以見之、若將衆尖體分爲平行底之衆小體、其所分之衆小體底度高度、必俱相等、如庚辛圖、其所分小體之積俱等、

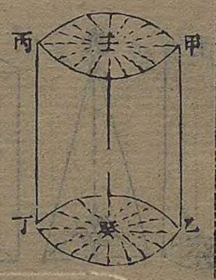


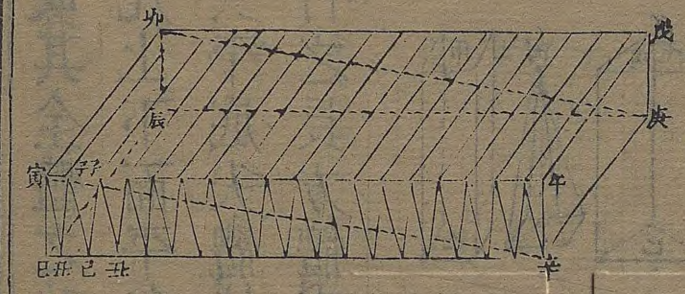
故其全體之積亦相等也、

凡上下面平行各體、與平底尖體同底同高者、不論平面圓面、其平底尖體、皆得上下面平行體三分之一、如甲乙上下面平行之長方體、與丙丁四瓣尖體、其乙丁兩底積等、甲乙丙丁兩高度又等、則甲乙體與三丙丁體等、如戊己上下面平行之三稜體、與庚辛三瓣尖體、其己辛兩底積等、戊己庚辛兩高度又等、則戊己體與三庚辛體等、如壬癸上下面平行之長圓體、與子丑尖圓體、其癸丑兩底積等、壬癸子丑兩高度又等、則壬癸體與三子丑體等、又如壬癸長圓體、與甲乙戊己類體同底同高、則亦與三丙丁庚辛類尖體等、又或子丑尖圓體、與丙丁庚

辛類尖體同底同高則亦得甲乙戊己類體三分之一矣

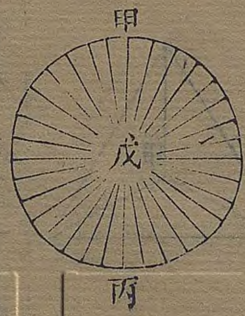
凡長圓體外周面積與長方體底面積等而長圓體半徑又與

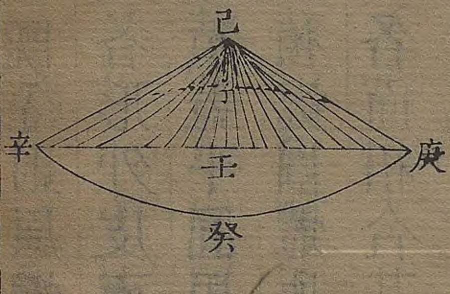




長方體高度等則長圓體積必得長方體積之半如甲乙丙丁一長圓體戊己一長方體試將長圓體從壬癸中線至周圍外面剖爲無數分則成子丑巳類無數長尖體此無數長尖體之高與長圓體之壬甲半徑等而無數長尖體之共底即長圓體之周圍外面積則此無數長尖體必爲戊己長方體之一半矣蓋寅己辛三角面爲午巳長方面之一半而此子丑巳類衆三角面與寅巳辛三角面等則卯辰庚辛巳寅三角體爲戊己長方體之一半而此子丑己類衆長尖體亦必與卯辰庚辛巳寅三角體等而爲長方體之一半矣故甲乙丙丁長圓體爲戊己長方體之一半也

凡球體外面積與尖圓體之底積等而球體之半徑又與尖圓

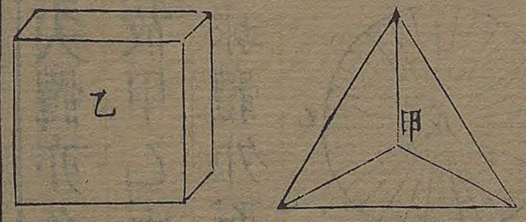




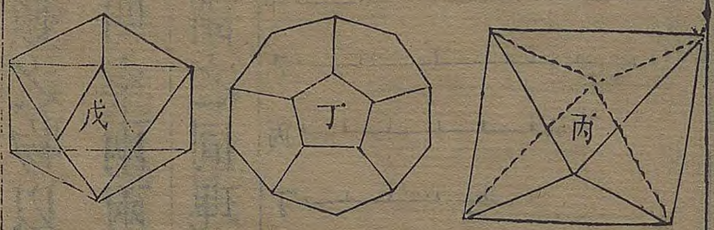
體之高度等則球體之積與尖圓體之積等如甲乙丙丁一球體己庚辛一尖圓體試將球體從中心平分爲兩半圓體又從兩半圓體中心各分爲無數尖體此所分尖體每一分必皆與尖圓體所分尖體一分等何則球體所分尖體皆以球外面甲乙丙丁爲底以球甲戊半徑爲高尖圓體所分尖體皆以尖圓之庚子辛癸底爲底以尖圓之己壬高爲高故此兩種無數尖體皆爲同底同高其積相等無疑矣夫所分之

體既等則原體亦必相等故曰球體與尖體俱相等也

凡各形外皮面積相等之體惟圓體所函之積大於他體所含之積蓋平圓周度與各形衆邊總度等則圓面積必大於各形面積況圓體所函有不大於他體所函者乎



凡各面相合其每面之角所合處復成一種體角謂之厚角厚角所成等面體形有五種各以面數而名之其一爲四面體每面有三角各三角之各三界度俱等如甲圖是也其二爲六面體每面俱爲正方其方面之四角俱爲直角而各界互等故又爲正方體如乙圖是也其三爲八面體每邊有三角各三角之各三界度俱等如丙圖是也其四爲十二面體每面有五角各五角之五界度俱等如丁圖是也其五爲



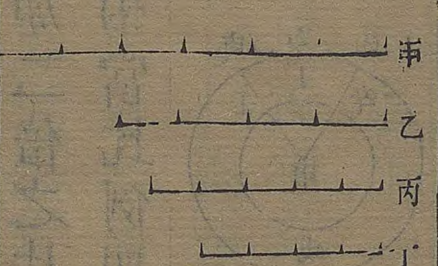
二十面體每面有三角各三角之各三界度俱等如戊圖是也此外不能復生他形蓋此五種厚角體俱是等邊三角四角五角之平面相合所成凡平面自三角以下不能成面而厚角自三面以下亦不能成角故厚角自三面始然平面三角四角五角所成厚角除此五種體亦不能復成他形也若平面六角以外並不能成厚角矣

大凡欲論諸物之不齊必借同類之物以比之始可以得其不齊之度數此比例之法所由設也其比者與所比者俱謂之率率者法也矩也以數互相準之之謂也如一線與他線相比其度之或長或短其數之或多或少自能見之如一面與他面相比其面度之或大

或小其積數之或多或少自能見之如一體與他體相比其體度之或厚或薄其積數之或多或少自能見之若將一線與一面相比或一面與一體相比既不同類又不同形則線之長短面之大小體之厚薄俱不可辨矣故曰欲論諸物之不齊必借同類之物以比之也

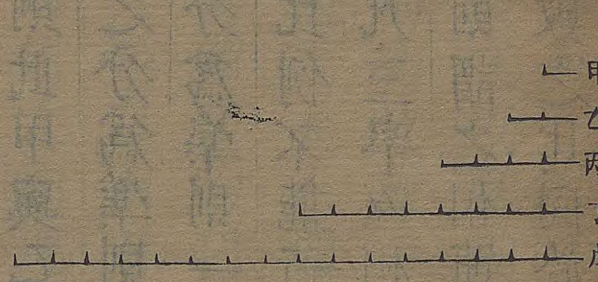
有四率兩兩相比其一率與二率之比同於三率與四率之比則謂之同理比例亦謂之相當比例也如甲乙丙丁四數甲與

乙比丙與丁比苟乙爲甲六分之五丁爲丙六分之五則甲與乙之比例丙與丁之比例此兩比例相同而乙有甲幾分之數即可知丁有丙幾分之數矣故凡四率內將一率與三率分數定爲相等二率與四率分數亦定爲相等其度

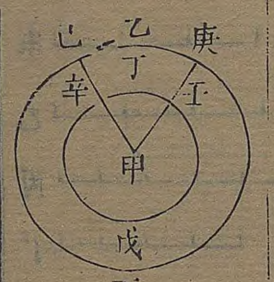


之長短雖有不同苟分數定準則一率與二率之比即如三率與四率之比也若一率與二率相比之分大於三率與四率相比之分則爲不同理之比例而比例不得行矣如甲與乙相比之分爲六與四而丙與丁相比之分爲五與四則此甲與乙之比大於彼丙與丁之比矣若以一率二率相比之分爲準則三率四率相比之分爲小若依三率四率相比之分爲準則一率二率相比之分又大故謂之不同理之比例而比例不能行也

凡三率互相爲比此一率與二率之比同於二率與三率之比則謂之相連比例也如甲乙丙三數互相爲比苟甲數與乙數之比同於乙數與丙數之比則此三數謂之相連比例率矣



若相連比例率丙將一率與三率比之則爲隔一位加一倍之比例或有相連比例四率將一率與四率比之則爲隔二位加二倍之比例大凡有幾率隔幾位以比者皆以隔幾位而爲加幾倍之比例也如甲乙丙三數其甲與丙之比爲隔一位加一倍之比例或甲乙丙丁戊五數俱爲相連比例率其甲與丁之比即爲隔二位加二倍之比例而甲與戊之比又爲隔三位加三倍之比例矣



相當比例四率爲數學之要因其理之所該最廣故設爲雙圜圖以申明之立甲點爲心作乙丙一大圜丁戊一小圜此二圜界各爲三百六十分象天度也於是自圜之甲心過小圜界之辛壬二處至大圜己庚二處作二線則大圜之己甲庚小圜之辛甲壬俱同一甲角此甲角相對之己庚大弧界設爲六十度爲大圜六分之一則辛壬小弧界亦爲六十度爲小圜六分之一矣大凡角度俱定於相對之圜界今大圜之己庚弧界小圜之辛壬弧界俱與一甲角相對其度雖依圜之大小不同而分數則等分數既等則大圜小圜大弧大弧兩兩互相爲比即如四率之兩兩相比爲同理比例也是以大圜之三百六十分爲一率大弧之六十分爲二率小圜之三百六十分爲三率小弧之六十分爲四率其大圜與大弧之比即同於小圜與小弧之比也故凡各率各度雖異相當之分數若同則一率與二率之比必同於三率與四率之比而俱謂之順推比例矣亦曰正比例要之分合加減各率之法總不越此圖之互轉相較之理也

一種反推比例將一率與二率之比同於三率與四率之比者反推之以二率與一率爲比四率與三率爲比其所比之例仍同故亦謂之相當比例率也如前雙圜圖以大圓界與大弧界爲比小弧界與小圓界爲比也因其以一率爲二率以三率爲四率前後互移故謂之反推比例然名雖爲反推而相當比例之率仍與順推相同也

一種遞轉比例將一率與二率之比同於三率與四率之比者轉較之以一率與三率爲比二率與四率爲比其所比之例仍爲相當比例率也如前雙圜圖以大圓界與小圓界爲比大弧界與小弧界爲比也因其以三率爲二率以二率爲三率遞轉相較故謂之遞轉比例然其所比之例亦仍爲相當比例率也

一種分數比例將相比之率較數截開以一率與二率之較爲一率與二率爲比以三率與四率之較爲三率與四率爲比其所比之例仍爲相當比例率也如前雙圜圖大圓界內減去大弧界仍與大弧界爲比小圓界內減去小弧界仍與小弧界爲比也因其各分內有分開相減之故所以謂之分數比例然其所比之例仍同於相當比例率也

一種合數比例將相比之率併之以一率與二率之和爲一率與二率爲比以三率與四率之和爲三率與四率爲比其所比之例仍同於相當比例率也如前雙圜圖大圓界所分大段加入大弧界仍與大弧界爲比小圓界所分大段加入小弧界仍與小弧界爲比也因其有相加之殊故謂之合數比例然其所比之例仍同於相當比例之四率也

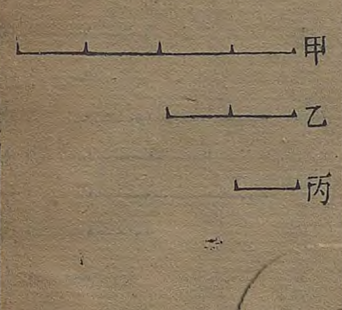
一種更數比例以一率與二率之比同於三率與四率之比者

更之將一率與二率相減用其餘分爲二率仍與一率爲比將三率與四率相減用其餘分爲四率仍與三率爲比則其比例之理亦同於相當比例率也如前雙圓圖將大圓與大弧相減餘己丙庚一大段仍與大圓界爲比將小圓與小弧相減餘辛戊壬一大段仍與小圓界爲比也因其以所餘之大段更弧界故謂之更數比例然雖更入比之仍與相當比例四率同也

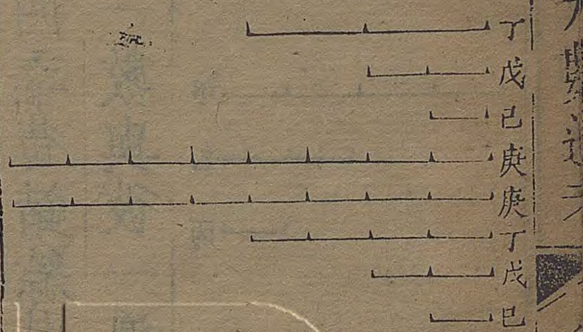
一種隔位比例有兩相比例四率將此一邊四率內一率與末率爲比彼一邊四率內一率與末率爲比則其所比之例仍同於相當比例率也如前雙圓圖以所分弧界之兩線引長

自庚壬過甲至癸丑作一全徑線自己辛過甲至子寅作一全徑線則分大圓爲庚己己丑丑寅寅庚四段分小圓爲壬辛辛癸癸子子壬四段其大圜四段爲相當四率而小圜四段亦爲相當四率度之大小雖異而分數相同故以此各相當四率隔位以比之其大圓之庚己一段與寅庚一段爲比而小圜之壬辛一段與子壬一段爲比其比例仍同於相當比例四率但以其兩邊各取兩率隔位以比之故謂之隔位比例耳

一種錯綜比例有兩連比例三率此一邊三率內中率與末率之比同於彼一邊三率內中率與末率之比則爲相當比例之四率苟錯綜其位分以此一邊首率與末率隔位爲比復取另一數與彼一邊中率爲比而成同理之四率則此另一數必與



彼邊三率爲連比例四率矣如此一邊有甲乙丙三數彼一邊有丁戊己三數將此一邊中率乙數與末率丙數之比同於彼一邊中率戊數與末率己數之比則爲同理比例矣今錯綜其



位分使此一邊首率甲數與末率丙數隔位為比復另取一庚數與彼一邊中率戊數為比則亦同於相當比例之四率而此庚數與彼邊丁戊己三數為連比例之四率矣何則試以庚數置於彼邊丁數之上而為首率丁移為中率戊移為末率則此邊甲首率與丙末率之比同於彼邊庚首率與戊末率之比但以兩連比例率互相易位增入比之之不同故謂之錯綜比例耳

一種加分比例凡有二率依本度各加幾倍所加之分數若等則此二率互相為比仍同於原二率之互相為比謂之等倍相加之比例也如甲乙二數依甲度加三倍為丙依乙度加三倍為丁則此丙丁二數互相為比仍同於甲乙二數之互相為比因於原數有相加之分故謂之加分比例也

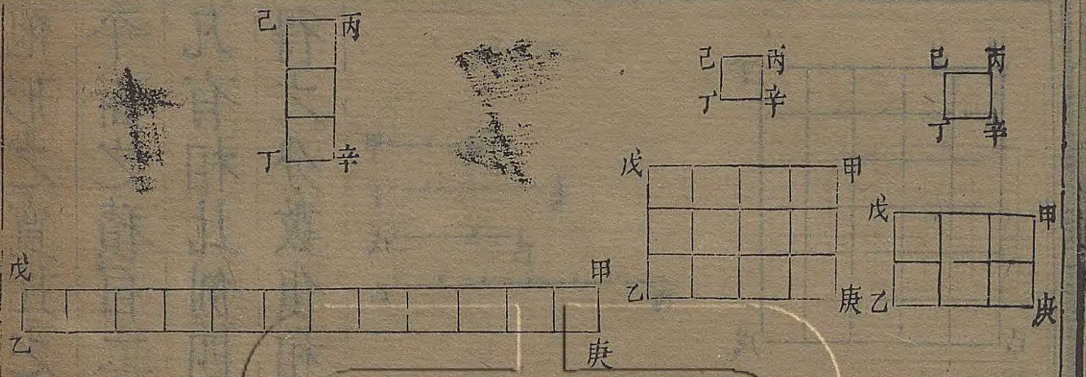
一種減分比例凡有二率依本度各減幾倍所減之分數若等則此二率互相為比仍同於原二率之互相為比謂之等分相減之比例也如有甲乙丙丁二數甲乙三分內減去甲戊一分丙丁三分內減去丙己一分則戊乙己丁互相為比仍同於原甲乙丙丁全數之互相為比因其於原數有相減之分故謂之減分比例也

前所論比例之法凡一十有二雖種種變化不窮其每相當分數所成之率依然一理故其相比之例俱同而皆為相當比例四率也是故線與線為比面與面為比體與體為比依前各種比例之法線之比例若同則為相當比例線面之比例若同則為相當比例面體之比例若同則為相當比例體矣夫線面體

為類不同雖不能互相為比假使線面體之每相當分數若等則按其各類相當分數比之亦為同理比例率也如甲之六分線與乙之三分線相比丙之六分面與丁之三分面相比戊之六分體與己之三分體相比此三種每相當分數既俱相等故其比例亦俱相等而六率互為同理比例可知矣

大凡直角平方面積皆生於二線之度故欲知方面所生比例之分將二形之縱橫線分考之即可得而知矣如甲乙丙丁兩方面形甲乙形之甲戊橫界比丙丁形之丙己橫界大一倍而丙丁形之丙庚縱界比甲乙形之甲辛縱界亦大一倍則甲乙丙丁兩形之分必相等如甲乙大形之甲戊橫界比丙丁小形

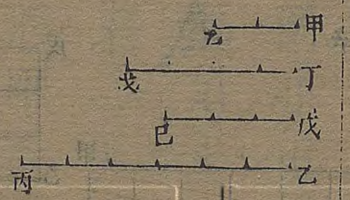
之丙己橫界大三倍甲乙大形之甲庚縱界比丙丁小形之丙辛縱界大二倍則大形與小形

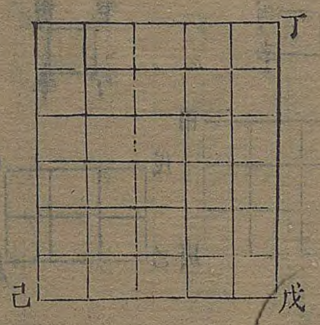


三倍者有二其為六分可知矣再如甲乙大形之甲戊橫界比丙丁小形之丙己橫界大四倍甲乙大形之甲庚縱界比丙丁小形之丙辛縱界大三倍則大形與小形四倍者有三其為十二分可知矣再或甲乙大形之甲戊橫線比丙丁小形之丙己橫線大十二倍而丙丁小形之丙辛縱線比甲乙大形之甲庚縱線反大三倍則大形之寬雖比小形多十一倍而大形之長又比小形少二倍將此縱橫二線之多少較之則大形與小形止為四分可知矣故凡直角平方面形與他一形相比其比例有二以此形之長與他形之長比之為一比例以此形之寬與

他形之寬比之爲一比例兩形相比之閒而兼兩比例者正以平面之積自二線之度生之之故也

凡有相比例四率其二率與三率相乘一率與四率相乘則所得之分數俱相等也如甲乙丁戊戊己乙丙相比例四率甲乙





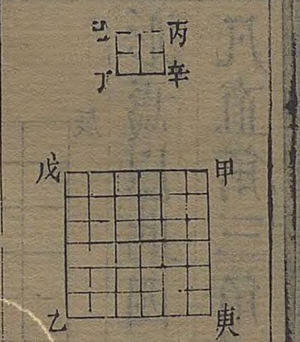
一率爲二分丁戊二率爲四分戊己三率爲三分乙丙四率爲六分將二率三率相乘一率四率相乘其分數俱得十二也是故四率中凡有三率欲求其不知之一率將兩率之分相乘所得之數以一率之分除之即得其一率矣如甲乙三分爲一率丁戊六分爲二率戊己五分爲三率乙丙十分爲四率今只知一率二率三率之分欲推四率則以二率三率相乘爲丁己三

十分乃以甲乙一率除之即得乙丙四率爲十分矣此以小分爲首率者也或知乙丙戊己丁戊之三率而推甲乙之一率則以乙丙十分爲一率戊己五分爲二率丁戊六分爲三率二率與三率相乘一率除之即得甲乙之四率矣此以大分爲首率者也又或知甲乙丁戊乙丙之三率而推戊己之一率則以丁戊爲一率甲乙爲二率乙丙爲三率二率與三率相乘一率除之即得戊己之四率矣此即反推比例之理也又或知戊己乙丙甲乙之三率而推丁戊之一率則以戊己爲一率甲乙爲二率乙丙爲三率二率與三率相乘一率除之即得丁戊之四率矣此即遞轉比例之理也

凡有兩直角方面形其兩界之比例大幾倍者其兩方面之比

例較兩界爲隔一位相加之比例也如甲乙丙丁同式兩方面形甲乙方面之縱橫界比丙丁方面之縱橫界爲二倍則甲乙方面內如丙丁方面之二倍者有二二其二爲四故甲乙方面

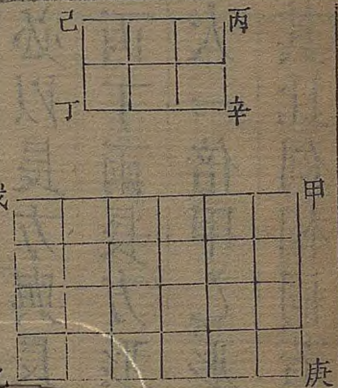
積比丙丁方面積爲四倍凡欲求其比例相連之率則於甲乙形之界二倍之得八分與丙丁方界二分爲比卽如甲乙面積十六與丙丁面積四分之比矣夫八與十六四與八二與四皆二分之一之比例而十六隔八與四比八隔四與二比則皆成四分之一之比例故十六與四較之四與二爲兩界上連比例隔一位相加之比例也又如甲乙方面之縱橫界比丙丁方面之縱橫界爲三倍則甲乙方面內如丙丁方面之三倍者有三三其三爲九故甲乙之面積比丙丁面積爲九倍凡欲求其比例相連之率則



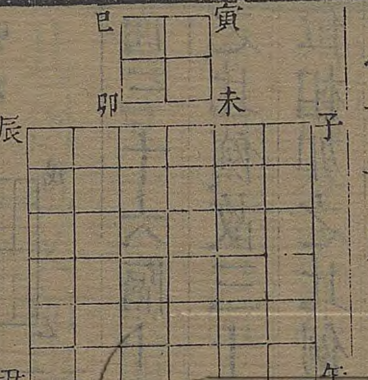
於甲乙形之界三倍之得十八與丙丁界二分爲比卽如甲乙面積三十六與丙丁面積四之比矣夫十八與六六與二皆三分之一之比例而三十六隔十二與四比十八隔六與二比則皆成九分之一之比例故三十六與四較之十八與二亦爲兩界上連比例隔一位相加之比例也

凡直角方面形有三種一爲長方一爲正方因其縱橫界之比例各異故其所生之形亦不同而積亦不得互相爲比也如欲比之必以長方與長方爲比正方與正方爲比其比例始行如甲乙丙丁兩長方形其甲乙形之甲戊橫界比丙丁形之丙己橫界大一倍甲乙形之甲庚縱界比丙丁形之丙辛縱界亦大一倍其比例相同若以甲乙形之甲戊橫界比丙丁形之丙辛縱界

則大三倍以甲乙形之甲庚縱界比丙丁形之丙己橫界止大一分猶不得大二倍其比例則異故甲乙形所生之積爲二十四而丙丁形所生之積爲六俱爲長方形焉又如子丑寅卯兩

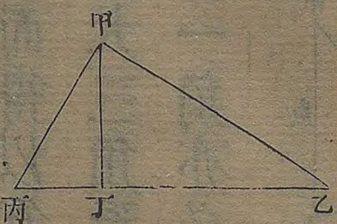


正方形其子丑形之子辰橫界比寅卯形之寅己橫界子丑形之子午縱界比寅卯形之寅未縱界俱大三倍而比例相同復

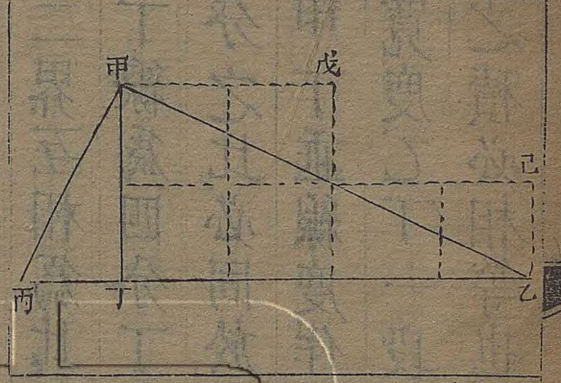


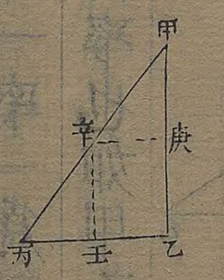
以子丑形之子辰橫界比寅卯形之寅未縱界以子丑形之子午縱界比寅卯形之寅己橫界亦俱大三倍而比例相同故子丑形所生之積爲三十六而寅卯形所生之積爲四俱爲正方形焉以此四形兩兩相比各爲相當比例之四方面也

凡直角三角形自直角至相對界作一垂線則所截之兩段一爲一率一爲三率而所作之垂線爲中率此三率即爲相連比例率也如甲乙丙直角三角形自甲直角至相對乙丙界作一



甲丁垂線則截乙丙界爲兩段以乙丁段爲一率則丁丙段爲三率若丁丙段爲一率則乙丁段爲三率而甲丁垂線總爲中率蓋甲乙丁甲丁丙兩三角形爲同式故其相當之乙丁甲丁二界互相爲比即同於甲丁丁丙二界之互相爲比也今以乙丁線爲四分丁丙線爲一分則甲丁線必得二分因四分與二分之比必同於二分與一分之比故爲相連比例三率也若依甲丁垂線度作一戊丁正方形即爲中率自乘之數以所截丁丙一段爲寬度乙丁一段爲長度作一己丁長方形即爲首率末率相乘之數此兩形之積必相等也何也乙丁線既爲一率則甲丁線爲二率甲丁



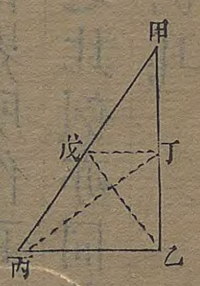


線復為三率則丁丙線為四率此相連比例三率又為相當比例四率矣因其可為相當比例四率故二率與三率相乘一率與四率相乘所得之分數相同也此乃首率末率求中率之法也要之首率末率相乘中率相乘其所成之二式雖異因俱自相連比例四率而生故其積相等而得以為準也。

凡大三角形內作小三角形其相當之三角度兩兩相等則其餘一角亦必等謂之同式形也如甲乙丙三角形內作辛庚辛壬二線遂成甲庚辛辛壬丙兩小三角形此兩形庚角壬角既與大形乙角同為直角而大形甲角又為甲庚辛小形所同用則小形所餘辛角必與大形丙角等大形丙角又為辛壬丙小形所同用則小形所餘辛角亦必與大形甲角等凡同式之形其積雖不同而其相當各界互相為比俱為相當比例之率也是故同式形之相當各界比例既同則同式形之面積比例亦同而為隔一位相加之比例矣然此不獨三角形為然也凡各等邊形其邊數同相當角度俱等而相當界之比例又同則皆謂之同式直界形又衆曲線形於其內外作各種直界形其式若同則亦謂之同式曲界形凡此大小各種同式形其相為比例同於其各相當界所作正方形或三角形之互相為比也若同式各種體積之比例亦同此理惟較之各界之比例則為隔二位相加之比例耳

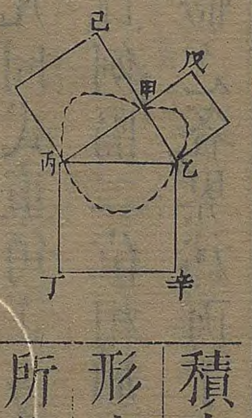
凡三角形在二平行線之間又共立於一線之底則其面積必

兩兩相等如甲乙丙三角形與乙丙平行作一丁戊線復自丁



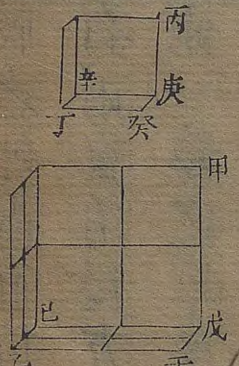
至丙自戊至乙作二線則分爲四三角形此四形丙乙戊丁丙丁戊兩形既在乙丙丁戊二平行線之間又共立於丁戊之底其積必等於此二形各加一所截甲丁戊形即成甲戊乙甲丁丙兩形其積亦必等又如甲丁戊乙丁戊兩形其底俱在甲乙一線上而戊角又共在一處亦爲二平行線所限甲丁戊丙丁戊兩形其底俱在甲丙一線上而丁角又共在一處亦爲二平行線所限其積亦無不相等然則各形之積互相爲比亦即同於各界線之互相爲比也

凡直角三角形其直角相對界所作方形之積必與兩旁界所作兩方形之積等而直角相對界所作半圓形與小三角形之



積亦必與兩半圓形與兩小三角形之積等如乙丙界所作乙丁方積與甲乙界所作戊乙方甲丙界所作己丙方兩形之積相等也其所作半圓形三角形直界與兩旁相等亦同此圖

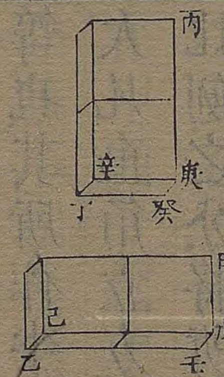
大凡直角立方體積皆生於面線互乘之度故欲知方體所生比例之分將所比形之長寬與厚詳較之即可得而知矣如甲乙丙丁直角立方二體甲乙體之戊己戊壬長寬之度比丙丁體之庚辛庚癸長寬之度大一倍則戊乙平面底形之內如庚丁平面底形二倍者有二矣而甲乙體之甲戊厚度又比丙丁



體之丙庚厚度又大一倍則甲乙體形之內如丙丁體形四倍者有二可知矣是故欲知直角方體之比例以本體之長寬與厚互相比例以

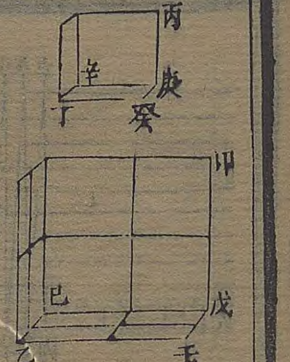
較之，即得直角方體互相爲比之比例也。

有兩直角長方體，若將此一體之底度與他一體之底度，又將他一體之厚度與此一體之厚度爲比，其比例若同，則此二體之積必等也。如甲乙、丙丁兩直角長方體，甲乙體之戊乙底度，比丙丁體之庚丁底度大一倍，而丙丁體之丙庚厚度，比甲乙體之甲戊厚度亦大一倍，則甲乙、丙丁二體之積必相等。是故



兩體之底積與厚度相較，則兩體之積可知矣。蓋體積之比例，視其面線，今兩體之底面厚度交互相等如此，其體積不得不等也。

凡同式直角正方體，其體積之比例，比之兩界線之比例，爲連比例隔二位相加之比例也。如甲乙、丙丁同式兩正方體，甲乙體之各界爲丙丁體之各界之二倍，則甲乙體內，如丙丁體之



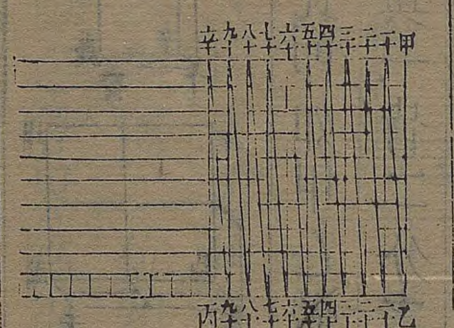
二倍者有四，二其四爲八，故甲乙體積比丙丁體積大八倍。凡欲求其相連比例之率，則於甲乙體之界四倍之，得八分，與丙丁體界一分爲比，即如甲乙體積與丙丁體積之比例矣。夫八與四，四與二，二與一，皆二分之一之比例。今以八與一爲比，其間隔四與二之兩位，故曰同式兩體積之比例，爲兩界上連比例隔二位相加之比例也。若邊爲三倍，則面爲九倍，而體爲二十七倍，亦爲隔二位相加之比例也。

凡圓面半徑與球體半徑等者，其圓面積爲球體外面積四分之一，而圓面半徑與球體全徑等者，其圓面積與球體外面積等。又球體全徑與長圓體底徑高度等者，則球體之外面積與長圓體之周圍外積等，而球體積爲長圓體積三分之二。又尖圓體之底徑與球體全徑等，而高與球之半徑等者，則尖圓體

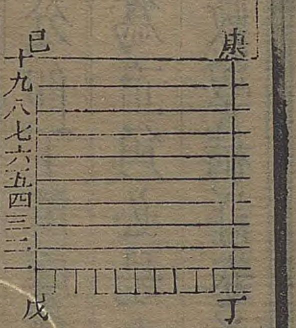
積爲球體積四分之一、又即爲半球體積二分之一也、凡此各種之比例、皆以比例而得者也、

凡橢圓體大徑與圓球體徑相等者、其二體積之比例、同於橢圓體小徑所作方面與圓球體徑所作方面之比、又即同於函橢圓之長方體與函球之正方體之比、其外面積之比例、又即同於橢圓體小徑與球體全徑之比也、

作分釐尺法、如甲戊尺三寸、每寸欲分爲百釐、則將甲乙與戊己邊俱平分爲十分、作諸橫線、次將一寸之甲辛乙丙兩邊俱分爲十分、再於甲辛邊之第一分作斜線至乙丙邊之乙處、如此作十斜線、俱與第一分斜線平行、即分乙丙之一寸爲一百釐也、何則甲辛乙丙皆爲一寸之度、俱平分爲

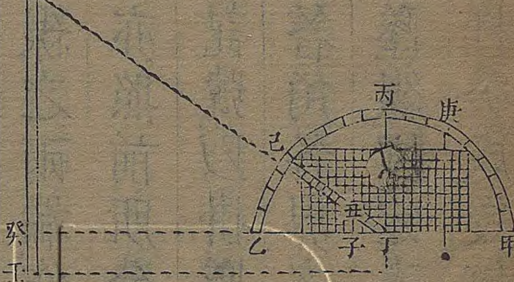


十分矣、今又作橫線斜線各十、其橫斜相交處、共有百分、此百分即百釐也、如第一斜線與第一橫線相交處、即爲一釐、與第二橫線相交處、即爲二釐、至第十橫線相交處、即爲十釐、一線十釐、十線百釐矣、



作分數比例測量儀器法、以甲丙乙半圓界分爲一百八十度、每度作六十分、將丁甲丁乙丁丙三半徑線、照所容方界分截開分爲一百分、於每分上俱與三半徑平行、作縱橫線、於甲乙徑線之兩端、作兩定表、以圓丁心爲樞、作一遊表、如丁己、將遊表亦照前所分度分、作一百四十分、復於此儀器後面、作一垂線記號、以掛墜線、如庚、即成一全儀器、用以測高深廣遠、可知其各角各界之度矣、如有一辛壬棋杆、欲測其高、則將儀器定準墜線、以定表對地平癸、遊表對旗杆頂辛、乃量儀器中心至旗杆癸處幾何、如有四十丈、則看儀器丁乙線上自丁心至子

得四十分以當四十丈卽看與子相對垂線至遊表相交處有幾何如丑子三十分卽爲旗杆自辛至癸相當數三十丈也再加癸壬高卽得旗杆辛壬之高矣蓋儀器上之丁子丑與所測之丁癸辛爲同式三角形其相當各界之比例俱同故丁子與子丑之比卽同於丁癸與癸辛



之比也若欲知丁辛弦線數卽視遊表自丁至丑相交之處得幾何如有五十分其相當數卽爲五十丈也若欲知丁癸辛三角度則視圓界與遊表相交處如己其乙己弧三十五度十三分卽丁角度其餘己丙弧五十度四十七分卽辛角度而癸角爲直角必是九十度也

數學精詳卷首終

九數通考卷一

虞山屈曾發省園氏輯

九章名義歌

數學從來有九章方田粟布易推詳衰分辨別多和寡少廣開除圓與方商度功程術最妙均平輸送法尤良盈朒隱互須列位方程正負要排行若算高深并廣遠好將勾股細思量

算學提要訣

學算之人須努力加減乘除時時習觀其發問果何如仔細斟量分法實若然法實既能知次求定位最爲急再考諸分母子名商除之法細尋繹有能致志用工夫算學雖深可盡識

九九合數

少數在上多數在下加減乘除皆呼此數

一一如一

一二如二　二二如四

一三如三

二三如六　三三如九　一四如四　二四如八
三四一十二　四四一十六　一五如五　二五一十
三五一十五　四五二十　五五二十五　一六如六
二六一十二　三六一十八　四六二十四　五六三十
六六三十六　一七如七　二七一十四　三七二十一
四七二十八　五七三十五　六七四十二　七七四十九
一八如八　二八一十六　三八二十四　四八三十二
五八四十　六八四十八　七八五十六　八八六十四
一九如九　二九一十八　三九二十七　四九三十六
五九四十五　六九五十四　七九六十三　八九七十二
九九八十一　右法（遇十本身改。逢如下位加。）

九歸歌（多數在上。少數在下。歸法呼此數。）

一歸　不須歸　其法故不立（逢一進一十。至逢九進九十。是也。）
二歸　二一添作五　逢二進一十（逢四進二十。逢六進三十。逢八進四十。）
三歸　三一三十一　三二六十二　逢三進一十（逢六進二十。逢九進三十。）
四歸　四一二十二　四二添作五　四三七十二　逢四進一十（逢八進二十。）
五歸　五一倍作二　五二倍作四　五三倍作六　五四倍作八
逢五進一十
六歸　六一下加四　六二三十二　六三添作五　六四六十四
六五八十二　逢六進一十
七歸　七一下加三　七二下加六　七三四十二　七四五十五
七五七十一　七六八十四　逢七進一十
八歸　八一下加二　八二下加四　八三下加六　八四添作五

八五六十二　八六七十四　八七八十六　逢八進一十

九歸隨身下　逢九進一十　九一下加一。至九八下加八。是也。

解曰　三歸云三一三十一。謂如三人分銀一兩。各得三錢。共除九錢。餘存一錢。再用三歸。又除九分。餘存一分也。又云三二六十二。謂如三人分銀二兩。各得六錢。共除一兩八錢。餘存二錢。再用三歸。又除一錢八分。餘存二分也。又云逢三進一十。謂如三人分銀三兩。各得一兩也。餘倣此。

分法實訣　凡因乘不必拘。惟歸除不可顛倒錯誤。須詳理而分之。

一曰。以所有總數爲實。以所求每數爲法。

一曰。有總物而又有總價。或云每物。即以物爲法。以價爲實。或云每價。即以價爲法。以物爲實。餘倣此。

定位訣

數家定位法爲奇

因乘俱向下位推　但用因乘法。實後定位。故曰乘法雖陞而位反降。又曰乘從每下得術。

加減只須認本位　加法減法。本身不動。故曰只須認本位。

歸與歸除上位施　但用歸除法。實前定位。故曰歸除法雖降而位反陞。又曰歸從法前得令。

法多原實逆上法　此謂法多實少者。蓋法數多而實數少也。須從實首位數起。逆數至法首位之數止。

法少原實降下數　此謂法少實多者。蓋法數少而實數多也。須從實首位數起。降下至法首位之數止。

法前得令順下宜　再進前一位得令。令者斤兩石斗丈尺貫箇等名也。順下是小數。逆上是大數也。

法前得令逆上知　却進前一步得令。逆上則十百千萬。逐位而大。順下則錢分釐毫。挨次而小也。

又十二字訣

乘從每下得術　術者。乃法首位每下該得之名也。從實首位數起。降下至法首位每數則止。再下一位。得法首每下該得之名。是兩呼兩。是石呼石。以上十百千萬。以下錢分釐毫也。

歸從法前得令　注見前

加減乘除總說

算法以加減乘除爲入門。然究其終。雖至於千變萬化。總不出

乎此但用法不同耳或應取其相和之數則用加或應取其相較之數則用減或應聚而總其積則用乘或應散而取其分則用除又有先加而後減者或先減而後加者有先乘而後除者或先除而後乘者又有加減與乘除先後互用者古來九章命算自方田以至句股數有煩簡理有顯晦法有深淺算有難易然何一不從加減乘除而得故淺言之則算法之入門究言之實算法之全體也

加法訣

加法須從下位先　法首有一姑舍旃　十加本位零加次
一外添如法更玄　用減法還原。又有幾數相併亦曰加所謂取其相和之數也

減法訣　亦曰定身除從實首位起

減法須知先定身　得其身數始爲眞　法中有一何曾用
身外除零妙入神　用加法還原○又有幾數相減亦曰減所謂取其相較之數也

因法訣　因與乘一也單位法謂之因法位數多謂之乘特以此而異其名耳又總名之曰乘

因法須呼九九數　起手先從末位推　言十就身如下位
若要還原用九歸

歸法訣　歸與除一也單位法謂之歸法位數多謂之歸除又總名之止曰除

學者如何算九歸　先從實上左頭推　逢進起身須進上
下加不動下施爲　用因法還原

乘法說

乘者兩數相因而成也蓋有兩數視此一數有幾何彼一數有幾何將此一數照彼一數加幾倍則兩數積而復成一數故謂之相因而成然不用加而用乘者何也蓋加須層累而得乘則一因即得此立法之精而理則實相通也如有六與十兩數以

十爲主而加六次得六十以六爲主而加十次亦得六十今以十爲主而六乘之或以六爲主而十乘之皆得六十其數無異而用爲捷矣

乘法訣

下乘之法留頭眞　起手先將法二因　三四五來乘遍了
却將法首破原身　用歸除還原○原有破頭乘掉尾乘隔位乘諸法總不如留頭乘之妙

除法說

除者兩數相較而分也蓋視大數內有小數之幾倍將大數照小數減幾次則大數分而復爲一小數故謂之相較而分然不用減而用除者何也蓋減必遞消其分除則一歸即得除之與減即猶乘之與加亦相對待者也如有大數一十二小數四若用一十二以四減之三次而盡即知一十二爲四之三倍也今用除法呼四一二十二逢四進一十即知一十二爲四之三倍矣此除之與減理相通而用較捷也

歸除訣

惟有歸除法更奇　將身歸了次除之先將法首對實首呼九歸歌歸之次將歸見數對法次位以下呼九九數挨次除之
有歸若是無除數　起一還將原數施若本位有子可歸次位無子可除或雖有子不敷除也則用後起一還原法
或遇本歸歸不得　撞歸之法莫教遲如一歸只一子二歸只二子因下位無子可除故不能歸也則用後撞歸法如撞歸訣仍不敷除則再用起一還原法
若人識得中間意　算學雖深可盡知

撞歸法

一歸見一無除作九一　二歸見二無除作九二　三歸見三無除作九三

四歸見四無除作九四五歸見五無除作九五六歸見六無除作九六
七歸見七無除作九七八歸見八無除作九八九歸見九無除作九九

起一還原法

一歸起一下還一二歸起一下還二三歸起一下還三四歸起一下還四
五歸起一下還五六歸起一下還六七歸起一下還七八歸起一下還八
九歸起一下還九

命分說

凡歸除分至最細而可以恰盡無餘者謂之無奇零數若分至最細而屢除不盡者謂之有奇零數其零數若畧去之則不能復還原數此命分之所以立也其法命爲分母分子分母者即歸除之法數也分子者即除不盡之實數也凡不盡之數得分母中之幾分者即命爲幾分之幾是以命分之一法所以濟歸除之不逮也

約分說

約分者以所命之分約之以就整分也蓋命分是就其數之多寡全而紀之而約分則即其多寡之數從而約之以求簡易焉其法以分母分子兩數輾轉相減務期減餘兩數相同是爲度盡兩大數之一小數乃以此數爲一分以除分母得幾分者即約分母爲幾分又除分子得幾分者即約爲分母幾分中之幾凡諸法中有帶分者皆由約法而得則約分實帶分之根也若夫數之不可約者兩數互轉相減必至於一始可以減盡一之外別無他小數可以度盡此兩數也即不用約分用命分誌之可也

約分訣

約分須分子母名　更相減損至同成　就把其同爲法則
除來各數自無零

設如古歷歲實命爲三百六十五日又一百分日之二十五問約得幾何答曰四分日之一　法置母一百以子二十五減三次餘亦二十五謂之子母相同就以此爲法以除母數得四分以除子數得一分即約得四分日之一也蓋將一日剖作四分而得其一分也凡約分法以分母分子相減必得相等之數然後用之蓋因此數可以度盡分母又可以度盡分子也今以相等之數二十五爲一分則分母一百有四倍二十五而餘數二十五又恰足一分之數故爲四分日之一一百與二十五之比即同於四與一之比是四與一即爲一百與二十五之相當最小數也

設如有絲二百五十二斤賣過一百四十四斤問約得幾何答曰七分斤之四　法置母二百五十二減去子一百四十四餘母一百○八減反將子一百四十四減去餘母一百○八餘子三十六又將餘母一百○八減去餘子三十六二次餘亦三十六謂之更相減損至同就以此爲法以除原母得七分以除原子得四分即約得七分斤之四也

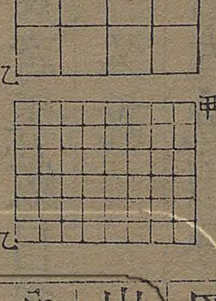
通分說

凡奇零數目不以十遞析者難以立算則用通分如斤通爲兩宮通爲度度通爲分之類是也又有整數而帶零分者則必通之以從其類如化整爲零收零作整之類是也或有零分而分母不同者則必通之以同其母如互乘之類是也通分之法立然後奇零數目得以歸有餘齊不足而帶分之法皆根於此矣

又說

凡有大分以分母乘之通爲小分則爲通分法也然不曰乘而曰通者何也蓋乘則積少成多其得數溢於原數之外通則變大爲小其得數仍含於原數之中也如甲乙長方形圖原大分

一十二其分母爲四今通爲小分則以分母四乘大分一十二得小分四十八其數雖比原大分加四倍然其每分之分只得原數



四分之一故仍含於甲乙方形之內而未嘗溢出原數之外也又如丙丁方形圖原大分九其分母爲九今通爲小分則以分母九乘大分九得小分八十一其數雖比原大分加九倍然其每分之分只得原數九分之一故仍函於丙丁方形之內亦未嘗溢出原數之外也推之每分之母或爲八或爲十二或爲數十亦皆倣此通之其所通之數雖至千萬而要皆未有溢於所通原分之外者矣

互乘說

凡有兩數其分母分子俱不同則紛紜難御無可置算故必依此數之分將彼數加爲幾倍又依彼數之分將此數加爲幾倍則兩分數既同而比例亦同矣如甲乙二數甲爲三分之二乙爲四分之三欲辨其孰大則先以分母三四相乘得一十二爲共母數再以甲分母三互乘乙分子三得九爲乙數化一十二分之九又以乙分母四互乘甲分子二得八爲甲數化一十二分之八故法用互乘者所以齊其分母也夫以兩分母相乘得一十二者乃以兩分母俱變爲十二分也以甲分母互乘乙分子得九者乃以乙分子變爲十二分中之九也以乙分母互乘甲分子得八者又以甲分子變爲十二分中之八也蓋兩分母既變爲同等則兩分子亦俱爲同分母之子矣若子母分有幾數而子數同爲一者先以各母連乘得數次以各母除之則爲各子數也如甲乙丙三數甲爲二分之一乙爲三分之一丙爲四分

之一則先以三母連乘得二十四為甲乙丙共母數又以甲母二除之得一十二為甲之子數以乙母三除之得八為乙之子數以丙母四除之得六為丙之子數也若子母分有幾數而子母數俱不同者亦先以各母連乘得數次以各母除之得數復以各子乘之即為各子數也如甲乙丙三數甲為三分之二乙為四分之三丙為五分之四則先以三母連乘得六十為甲乙丙共母數又以甲母三除之得二十再以甲子二乘之得四十為甲之子數以乙母四除共母得一十五再以乙子三乘之得四十五為乙之子數以丙母五除共母得一十二再以丙子四乘之得四十八為丙之子數也若大分下又帶小分者則以小分母通大分母為母數又以小分母通大分子加入小分子為子數然後以所變之兩母數兩子數算之如甲乙兩數甲數四分之三又帶此一分之七分之二乙數九分之五又帶此一分之三分之一則先以甲小分母七通甲大分母四得二十八仍以甲小分母七通甲大分子三得二十一加入甲小分子二得二十三共得二十八分之二十三為甲大小分所變之數次以乙小分母三通乙大分母九得二十七仍以乙小分母三通乙大分子五得一十五加入乙小分子一得一十六共得二十七分之一十六為乙大小分所變之數然後以所變之子母乘除加減隨其宜而用之可也今再分加減乘除之法於左

帶分加法

凡零數相加兩分母同者即併兩分子為得數如九分丈之七與九分丈之五相加兩分母同為九分則兩分子亦同為九分中之零分故不用互乘徑併兩分子得一十二又以滿母數九收

爲一丈所餘三仍爲九分中之三分故相加得一丈零九分丈之三也此分母相同之加法也

凡零數相加兩分母不同者則用互乘法以所變兩子相加爲得數前說論之詳矣此分母不同之加法也

又或分母不同可以加減之使同者則變而同之可省互乘如八分兩之二與一十二分兩之三則將一十二分兩之三各減三分之一變爲八分兩之二則兩分母同爲八分亦徑併兩分子二一得三爲相加之數矣又如六分石之五與三分石之二則將三分石之二各加一倍變爲六分石之四則兩分母同爲六分亦徑併兩分子四五得九內以滿母數六收爲一石餘三爲六分石之三即相加之數矣

凡子母數有三四種相加者其分母分子俱不同則用互乘法三種者以第一數與第二數互乘相加得數又與第三數互乘相加四種者以第一數第二數互乘相加得數與第三數互乘相加得數復與第四數互乘相加如兩分母相同者即併其兩分子而與所餘之分母不同者用互乘以加之又或有兩分母相乘後所得之數與所餘之分母相同者則直以所得之分子與所餘之分子相加爲得數即不用互乘矣如三分斤之一又四分斤之二又五分斤之三相加求總數法以前二數案互乘法相加得一十二分斤之十乃以一十二分斤之十與第三數用互乘法相加得六十分斤之八十六因子數大於母數乃收六十爲一整數餘二十六爲零數即得一斤零六十分斤之二十六爲三數相加之總數也凡子母分有四五種相加者倣此又如五分丈之三又四分丈之一又五分丈之一相加求總數法以五分丈之三與五分

丈之一。兩分母相同。則以此二數併為五分丈之四。與四分丈之一。依互乘法相加。得二十分丈之二十一。因子數大於母數。乃收二十為一整數。餘一為零數。即得一丈零二十分丈之一。為總數也。又如三分兩之二。又四分兩之三。又一十二分兩之四。相加求總數法以前二數。案互乘法相加。得一十二分兩之一十七。與第三分母適相同。即以所得之分子一十七。與第三分子四相加。得二十一。因子數大於母數。乃收一十二為一整數。餘九為零數。即得一兩零一十二分兩之九。為總數也。

帶分減法

凡零數相減。兩分母同者。即將兩分子相減為餘數。如一十一分丈之七。減一十一分丈之五。求餘數。法以兩分母同為一十一分。則兩分子亦同為一十一分中之零分。故徑將兩分子七五

相減餘二。為兩數相減餘數。得一十一分丈之二。此分母相同之減法也。

凡零數相減。兩分母不同者。則用互乘法。以所變兩子相減得餘數。如加法例。此分母不同之減法也。如兩分母不同。可加減之使其相同者。亦如加法中例。故不重設。

凡零數與整數相減者。即以分子與分母相減。得餘數。如米一石。內減七分石之五。求餘數。法以米一石。通為七分。為分母。與分子五相減。餘二。即得七分石之二。為餘數也。此整數中減零數法也。

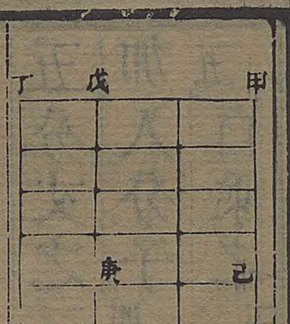
凡整數帶零分相減者。將兩零分互乘。變為同母。然後減之。如銀八兩零五分兩之四。內減五兩零七分兩之三。求餘數。法以兩零分互乘。變為八兩零三十五分兩之二十八。內減五兩零三十五分兩之一十五。得

三兩零三之一十十五分兩之三為餘數也此整數帶零分相減之法也

凡子母數三四種相減者其分母分子俱不同則用互乘以齊其分母按前法減之如兩分母相同者即將其兩分子相減而與所餘之分母不同者用互乘以減之又有兩分母相乘後所得之數與所餘之分母相同者則直以所得之分子與所餘之分子相減即得餘數其理俱與加法同

帶分乘法

零分與零分相乘者兩分母兩分子各相乘所得之數即乘出之分也如三分丈之二與五分丈之四相乘法以兩分母三五相乘得一十五又以兩分子二四相乘得八即定為一十五分丈之八為乘出之數也試作圖以明之如甲乙為一丈甲丁亦為一丈作一甲乙丙丁正方形將甲丁分為三分甲乙分為五分內共容一十五分即兩分母乘出之共母數也甲丁三分之二為甲戊甲乙五分之四為甲己二數相乘得甲己庚戊長方形內容八分即兩分子乘出



之共子數也正方與長方相較即知長方為正方一十五分之八矣此零分乘零分之法也

零分與整數相乘者分子乘整數而以分母除之即所得之數也如有七人每人賞銀五分兩之二法以分子二乘七人得一十四以分母五除之得二兩八錢即七人共該之數也蓋五分兩之二是一兩分為五分而得其二分也一人得二分則七人必共得一十四分既以一兩分為五分今滿五分收為一兩故一十四分為二兩八錢也此零分與整數相乘之法也此即後歌訣所云一邊子母無整數子因共物母除之也

整數帶零分與整數乘者，先將此帶分之整數以分母通之，加入分子，與彼整數相乘，却以分母除之，即得總數也。如一百九十人，每人支銀一兩又一十九分兩之一，求共該銀數。法以分母一十九通銀一兩為一十九，加入分子一，共二十，以乘其人一百九十，得三千八百，以分母一十九除之，得二百兩，即共該銀數也。此整數帶零分與整數相乘之法也。此即後歌訣所云邊子母帶整數，母乘整分子納之，以乘其物為之實，却將分母法除之也。

整數帶零分與零分乘者，先將整數通為零分，相乘得數，以分母自乘之數除之，即得。如有整數二丈又五分丈之四，與零分五分丈之三，相乘求總數。法以整數二丈用分母五通為一十分，加入分子四得一十四分，乃與零分分子三相乘得四十二，以分母五自乘之二十五除之，得一百六十八尺，即所求之數也。此整數帶零分與零分相乘之法也。此因兩分母相同，故用此法。如分母不同，則用互乘法齊其分母，乃以所變之分母化整為零，再與彼所變分子相乘得數，以所變分母自乘之數除之，即得也。

整數帶零分與整數帶零分相乘，而分母不同者，則用互乘法齊其數，然後以相同之分母各化整為零，加入分子，相乘得數，再以同母自乘之數除之，即得。如長方田，濶二丈又四分丈之三，長三丈又三分丈之二，求積。法以兩分母三四相乘得一十二，以前分母四乘後分子二得八，以後分母三乘前分子三得九，乃以共母數一十二通濶二丈為二十四分，加入分子九得三十三分，為濶分數；又以一十二通長三丈為三十六分，加入分子八得四十四分，為長分數；爰以兩數相乘得一千四百五十二分，乃以同母一十二自乘之一百四十四歸除之，得一十丈〇八尺又三分尺之一，為所得之積也。此整數帶零分與整數帶零分相乘之法也。此即後歌訣所云兩邊子母帶

整數照前乘納相乘之同母自乘爲法則法除實分不差池也蓋有一法不用互乘得數亦同更爲直捷以前分母四通濶二丈爲八加分子三得濶一十一分以後分母三通長三丈爲九加分子二得長亦一十一分兩數相乘得一百二十一分乃以兩分母四三相乘得一十二爲法除之即得積一十丈○八尺不盡四約得三分尺之一也

帶分除法

零分歸除零分者兩分母兩分子各自除之所得之數即除出之分也如有奇零不盡者用互乘法代除即得分數其比例與除出之法同如九分丈之二以三分丈之一除之求得幾何法以九分丈之二爲實三分丈之一爲法以法分母三除實分母九得三又以法分子一除實分子二仍得二即定爲三分丈之二爲所得之數也若用互乘代除法則以實分母九乘法分子一得九爲除出之分母又以法分母三乘實分子二得六爲除出之分子則定爲九分丈之六爲所得之數也此法與前法所得之分母分子數雖不同而理則一蓋三分之二與九分之六其比例實同也前法以法除實其得數爲減分之比例此法兩數互乘其得數爲加分之比例耳

設如有米六分石之二每斗價四分錢之三問該銀幾何答曰二錢五分

法以兩分子二三相乘得六爲實以兩分母六四相乘得二十四爲法除之得二錢五分即所求之數也此即後歌訣所云兩邊子母無整數乘子爲實乘母除也

設如有銀買羽絨每三分丈之一價四分兩之三今欲買八分丈之七問該銀幾何答曰一兩九錢六分八釐七毫五絲

法以原價分母四乘今羽絨分母八得三十二爲乘出之分母以原價分子三乘今羽絨分子七得二十一爲乘出之分子是爲三十二分之二十一乃以原羽絨三分丈之一爲法除之

因分母除不盡變用互乘法代除以乘出之分母三十二乘法分子一仍得三十二為除出之分母以乘出之分子二十一乘法分母三得六十三為除出之分子即得三十二分兩之六十三滿分母三十二收為整數一兩餘三十一如求真數以分子三十一乘整數一兩得三十一兩以分母三十二除之得九錢六分八釐七毫五絲加整數一兩即得所求之數也

整數歸除零分者分母通整數以除分子即得所求之數如五分丈之三以八丈除之求得幾何法以分子三為實以分母五通整數八丈得四十為法除之得七寸五分即所求之數也此整數除零分之法也

零分歸除整數者分母通整數以分子除之即得所求之數如六丈以三分丈之二除之求得幾何法以分母三通整數六丈得十八為實以分子二為法除之得九丈即所求之數也此零分除整數之法也

整數帶零分歸除整數者先將法實之兩整數俱通為零分而於法中加入分子除之即得如二十四丈以二丈零三分丈之二除之求得幾何法以分母三通二十四丈得七十二為實又以分母三通二丈得六加入分子二得八為法除之得九丈即所求之數也此法以分母三通法實之兩整數者是將兩整數之每丈俱通為三分也兩整數既化為同等則法實一體故法除實而得所求之數也此整數帶零分除整數之法也

整數歸除整數帶零分者先將法實之兩整數俱通為零分而於實中加入分子以法除之即得如前二丈零三分丈之二以二十四丈除之求得幾何法以分母三通二丈得六加入分子

二得八爲實又以分母三通二十四丈得七十二爲法除之得一尺一寸一分不盡約爲九分丈之一即所求之數也蓋七十二與八之比即同於九與一之比故約爲九分之一此整數除整數帶零分之法也

整數帶零分歸除零分者先將整數通爲零分加入分子除之即得如五分丈之四以三丈零八分丈之一除之求得幾何法以五分丈之四爲實以法分母八通三丈爲二十四加入分子一得二十五共得八分丈之二十五爲法用第一條兩分母兩分子各自除之之法以法分母八除實分母五得六二五爲除出之分母以法分子二五除實分子四得〇一六爲除出之分子乃以所得之分母除所得之分子得二尺五寸六分即所求之數也蓋法之三丈又八分丈之一乃三丈一尺二寸五分也實之五分丈之四乃八尺也以三丈一尺二寸五分除八尺得二尺五寸六分今以六二五除〇一六得數亦同者六二五與三丈一尺二寸五分之比即同於〇一六與八尺之比爲加倍之比例也此整數帶零分除零分之法也若數有奇零歸除不盡者則用互乘法代除如前數已將整數通爲八分丈之二十五爲法乃以實分母五乘法分子二十五得一百二十五爲除出之分母又以法分母八乘實分子四得三十二爲除出之分子乃以所得之分母除所得之分子亦得二尺五寸六分蓋一百二十五與六二五之比又即同於三十二與一六〇之比亦皆爲加倍之比例也

零分歸除整數帶零分者先將整數通爲零分加入分子以法除之即得如四丈又三分丈之二以七分丈之四除之求得幾何法以實之分母三通整數四丈爲一十二加入分子二得一十四

共得三分丈之一十四為實以七分丈之四為法用互乘代除之法以實分母三乘法分子四得一十二為除出之分母以法分母七乘實分子一十四得九十八為除出之分子乃以所得之分母除所得之分子得八尺餘二不盡約為六分尺之一此八尺零六分尺之一即所求之數也此零分除整數帶零分之法也

整數帶零分歸除整數帶零分者先各以整數通為零分加入分子以法除實即得如有田五畝又三分畝之二共租銀五兩又二十七分兩之一每畝求得幾何法以銀分母二十七通五兩為一百三十五加入分子一得一百三十六共得二十七分兩之一百三十六為實又以田分母三通五畝為一十五加入分子二得一十七共得三分畝之一十七為法用互乘代除之法以銀分母二十七乘田分子一十七得四百五十九為除出之分母以田分母三乘銀分子一百三十六得四百○八為除出之分子乃以所得之分母除所得之分子得八錢八分八釐又四百五十九分釐之四百○八即每畝所出租銀數也此整數帶零分除整數帶零分之法也

設如城守兵一營其糧可支一年又七分年之二今汰去兵三分之一求應支年數幾何答曰一年又七分年之六分半

法以年分母七通一年為七加入分子二得七分年之九又以兵分子一減分母三餘二為現存兵三分之二因兩分母不同故用互乘以齊之以兩分母三七相乘得二十一為共母分即原兵分以年分母七乘兵分子二得一十四為現存兵分以兵分母三乘年分子九得二十七為原年分即以所通現存兵分一十四為法以原年分二十七乘原兵分二十一得五百六十七以法除之得四十分半滿母數二十一收為一年餘數為一年又二十一分年

之一十九分半用法約之得一年又七分之六分年之半為今應支之年數
也蓋現存兵比原兵少三分之一則支糧年數必多三分之
一故現存兵一十四與原兵二十一之比即同於原年分二
十七與今年分四十分半之比也

通分訣

一邊子母無整數　子因其物母除之　兩邊子母無整數
乘子為實乘母除　十邊子母帶整數　母乘整分子納之
以乘其物為之實　却將分母法除之　兩邊子母帶整數
照前乘納相乘之　同母自乘為法則　法除實分不差池

異乘同除說

數有應先除後乘者但用除法多有奇零不盡之數則無由而
乘故變用先乘後除雖有不盡之數皆可命之此通變之法也

以今有之此一件乘原有之彼一件故曰異乘以原有之此一
件除之而得今所求彼一件之數故曰同除

又訣

異乘同除法何如　物賣錢來作例推　先用原錢乘只物
却將原物法除之　算者留心能善用　一絲一忽不差池

設如原有麥三斗五升磨麪二十五斤今要麪一百七十五斤
問該麥幾何答曰二石四斗五升　法以原麥三斗五升乘今用
麪一百七十五斤得六十一石二斗五升為實以原磨麪二十五斤為法除之即得

設如原有麥八斗六升磨麪六十四斤半今有麥三十五石四
斗八升問該磨麪幾何答曰二千六百六十一斤　法以原
磨麪乘今麥得二萬二千八百八十四斤六為實以原麥八斗六升除之即得

同乘異除訣

同乘異除法可識　原物價相乘爲實　今物除實求今價
今價除實求今物

設如有田一畝原濶八步長三十步今濶要一十二步求得長幾何答曰二十步　法以原濶八步乘原長三十步得二百四十步爲實以今濶一十二步爲法除之即得按異乘同除法以原有之兩件爲一率二率今有之一件爲三率今所求之一件爲四率俱以原有之一件與今有之一件相乘其積相等同乘異除法則以原有之兩件爲二率三率今有之一件爲一率今所求之一件爲四率是原有之兩件相乘今有之兩件相乘其積相等此兩法異同之故也

設如原有小珍珠五十顆重一兩價一十二兩今有大珍珠三十顆重一兩問該價幾何答曰二十兩　法以原珠五十乘原價一十二得六百兩爲實以今珠三十爲法除之即得

異乘同乘法　謂如以四乘之又以五乘之再以七乘之者就變法以四乘五得二十再以七乘之得一百四十就以一百四十爲法乘之以代三次相乘而數一轍也

設如每人日織錦八尺二寸五分今有五十六人共織二十七日問該織錦幾何答曰一千二百四十七丈四尺　法以五十六人乘二十七日得一千五百一十二再以日織八尺二寸五分乘之即得

異除同除法　謂如用四除之又用五除之再用一十二除之者就變法以四乘五得二十再以一十二乘之得二百四十就以二百四十除以代三次歸除而數一轍也

設如有客一十五人住一十二日共用米三石六斗問每客日用米幾何答曰二升　法以米三石六斗爲實以一十五人乘一十二日得一百八十人爲法除之即得

同乘同除法　謂應一除一乘再除再乘又除又乘多有不盡之數今變法總乘爲實總乘爲法除之

設如以夏布換棉布。但知每夏布三丈。價銀二錢。每棉布七丈。價銀七錢五分。今有夏布四十五丈。問換棉布幾何。答曰。二十八丈。 法以夏布價二錢。乘棉布七丈。得一兩四錢。再以夏布四十五丈乘之。得六十三丈為實。以棉布價七錢五分。乘夏布三丈。得二兩二錢五分為法。除之。即得。此法乃合兩比例為一比例也。如分作兩比例明之。每夏布三丈。價銀二錢。今夏布四十五丈。則價銀應得三兩。此一比例也。棉布價銀七錢五分。得棉布七丈。今夏布四十五丈之價三兩。則應得棉布二十八丈。此又一比例也。夫銀三兩。原為夏布四十五丈之價。則夏布四十五丈所換之棉布二十八丈價銀亦應三兩。可知矣。蓋兩比例中。一以三丈作一率。一以七錢五分作一率。故以三丈與七錢五分相乘。得二兩二錢五分而為一率。是合兩一率而為一一率也。一以二錢作二率。一以七丈作二率。故二錢與七丈相乘。得一兩四錢而為二率。是合兩二率而為一二率也。而後比例之三率。即前比例之四率。如以兩三率相乘為三率。則所得四率。亦為兩四率相乘之數。必須以前比例之四率除之。方得後比例之四率。故即以夏布四十五丈為主率。而得棉布二十八丈為四率也

一比例
一率 夏布三丈
二率 二錢
三率 夏布四十五丈
四率 三兩

二比例
一率 七錢五分
二率 棉布七丈
三率 三兩
四率 棉布二十八丈

總比例
一率 二兩二錢五分
二率 一兩四錢
三率 夏布四十五丈
四率 棉布二十八丈

設如原有鵞八隻換雞二十隻。每雞三十隻。換鴨九十隻。每鴨六十隻。換羊二隻。今卻有羊五隻換鵞。問該幾何。答曰。換鵞二十隻。 法先用異乘同乘法。以原鵞八乘原雞三十。得二百四十。又以原鴨六十乘之。得一萬四千四百。再以今有羊五乘之。得七萬二千為

實。又用異除同除法。以換雞十二乘換鴨十九。得一千八百。又以換羊二乘之。得三千六百為法。除實卽得。此法乃合三比例為一比例也。如分作三比例明之。羊二隻換鴨六十隻。則羊五隻必換鴨一百五十隻。此一比例也。鴨九十隻換雞三十隻。則鴨一百五十隻必換雞五十隻。此二比例也。雞二十隻換鵞八隻。則雞五十隻必換鵞二十隻。此三比例也。夫雞五十隻原為鴨一百五十隻之所換。而鴨一百五十隻又原為羊五隻之所換。則雞五十隻所換之鵞二十隻。卽為羊五隻之所換可知矣。今以三比例之各一率連乘之為一率。又以三比例之各二率連乘之為二率者。正合三比例為一比例也。

設如原有麥一萬二千石。車一十二輛。每車載三石。日行八十里。四十日運完。今有麥三萬石。車一十六兩。每車載四石。日行六十里。問運完日數幾何。答曰。七十五日。

法以原有麥一萬二千石。互乘今車一十六輛。得一十九萬二千輛。又以今車載四石乘之。得七十六萬八千石。又以今行里六十乘之。得四千六百○八萬里為法。以今有麥三萬石。互乘原車一十二輛。得三十六萬輛。又以原車載三石乘之。得一百○八萬石。又以原行里八十乘之。得八千六百四十萬里。又以原運日四十乘之。得三十四萬五千六百萬日為實。以法除實卽得。此法乃合四比例為一比例也。如分作四比例明之。則先以麥數為比例。原麥一萬二千石。四十日運完。今麥三萬石。則應運一百日。此一正比例也。然車數不同。故次以車數為比例。原車一十二輛應運一百日。今車十六輛。則應運七十五日。此一轉比例也。然每車所載石數又不同。故次以石數為比例。原車載三石應運七十五日。今車載四石。則應運五十六日四分日之一。此又一

轉比例也。然日行里數又不同。故次以里數爲比例。原行八十里。應運五十六日四分日之一。今行六十里。則應運七十五日。此又一轉比例也。今以四比例之各一率連乘之爲一率。以四比例之各三率連乘之爲三率者。正合四比例爲一比例也。

九數通考卷一　終