霍奈二氏代數學

下冊

Hall, Knight 著
姚元基 吳廉方譯

商務印書館發行

霍奈二氏代數學

下册

Hall, Knight 著
姚元基 吳廉方譯

商務印書館發行

中華民國二十九年五月初版
中華民國三十八年九月三版

霍奈二氏代數學二冊
Algebra for Colleges and Schools

⊕(51414)
每部基價貳拾捌元
印刷地點外另加運費

原著者 Hall Knight
譯述者 姚元基 吳廉方
發行人 陳懋解 上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠 各地
發行所 商務印書館

(本書校對者胡達聰 陳杰 徐培生 盧金聲)

第三十三章

比 比例 變數法

336. 定義 一量與同類他量之關係,以比較一量所含他量之倍數或部分者謂之**比**.

A與B之比恆書如$A:B$, A量與B量名爲比之二項,第一項名**前項**或**前率**,第二項名**後項**或**後率**.

337. 用分數表比 欲求A爲B之幾倍或幾部分,可以B除A而得,因此,$A:B$之比可用分數$\frac{A}{B}$記之,採用此記數法時,極爲便利.

欲比較兩量,必表如同單位之各數方可. 由是,2圓與15分之比,須用分數$\frac{2\times100}{15}$或$\frac{40}{3}$計之.

[註] 既一量含有他量之倍數謂之比,則每一比各爲不名量.

338. 依136款,$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$;故$a:b$之比等於$ma:mb$之比,即設前項與後項以同量乘之或除之,則比值仍不變.

339. 比之比較 兩個或兩個以上之比,可以其等值之分數化成公分母而比較之. 由是,假定$a:b$與$x:y$

爲兩個比. 今$\frac{a}{b}=\frac{ay}{by}$及$\frac{x}{y}=\frac{bx}{by}$亦爲兩個比,因此,$a:b$之比是否大於,等於或小於$x:y$,須視$ay$大於,等於或小於$bx$而定.

340. 兩分數之比,能表作一如兩整數之比. 由是,$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$之比,可以$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$或$\frac{ad}{bc}$表之,故亦卽等於$ad:bc$.

341. 設比之兩項中,有一項或兩項俱爲不盡根量,則不能求得適能量其比之兩整數. 由是,$\sqrt{2}:1$不能以任何兩項數完全表之.

342. 設任何兩量之比適能以二整數之比表之,則此兩量稱爲**可通約量**,否則稱爲**不可通約量**.

兩不可通約量之比雖不能適求得兩整數以表之,然恆能求得與所求之比相差至微之二整數表之.

由是,
$$\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{2.236067\cdots\cdots}{4}=0.559016\cdots\cdots,$$

故
$$\frac{\sqrt{5}}{4}\text{爲}>\frac{559016}{1000000}\text{及}<\frac{556017}{1000000};$$

顯見愈使小數延長,其近似值愈高.

343. 若以成比之兩分數相乘,則成**複比**.

例題 求三比$2a:3b$, $6ab:5c^2$, $c:a$之複比.

所需之比$=\frac{2a}{3b}\times\frac{6ab}{5c^2}\times\frac{c}{a}=\frac{4a}{5c}$.

344. 當兩等比 $a:b$ 與 $a:b$ 混合時,則結果之比爲 $a^2:b^2$, 此名謂 $a:b$ 之**二乘比**,同理 $a^3:b^3$ 名謂 $a:b$ 之**三乘比**,又 $a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}}$ 名謂 $a:b$ 之**平方根比**.

例題 (1) $2a:3b$ 之二乘比爲 $4a^2:9b^2$.

(2) $49:25$ 之平方根比爲 $7:5$.

(3) $2x:1$ 之三乘比爲 $8x^3:1$.

345. 比之謂爲成**優比**者或爲成**劣比**者,須視前項大於或小於後項而定.

346. 設於 $8:3$ 之比之各項上加以 4, 則得一新比 $12:7$, 並知此新比小於原比,因 $\frac{12}{7}$ 顯然小於 $\frac{8}{3}$ 之故也.

此卽茲將證明一般命題之特例.

<u>比之兩項加以同量,則優比減少而劣比增加.</u>

令 $\frac{a}{b}$ 爲此比,而令 $\frac{a+x}{b+x}$ 爲加 x 於兩項後所成之新比

今 $$\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{ax-bx}{b(b+x)}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)},$$

而 $a-b$ 之爲正或爲負須視 a 大於或小於 b 而定.

因此,設 a 爲 $>b$, $\frac{a}{b}$ 爲 $>\frac{a+x}{b+x}$.

且設 a 爲 $<b$, $\frac{a}{b}$ 爲 $<\frac{a+x}{b+x}$

命題乃得以此證明.

同理,可證明若從比之兩項取出同量則優比增加而劣比減少.

347. 若兩個或兩個以上之比相等,則若干重要之命題可以單一記號表示各等比而證明之.

如下列重要定理之證明係說明其程序之法.

設
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots,$$

是各比 $=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}$,

其中 p, q, r, n, 不論任何之量皆可.

令
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k.$$

則
$$a=bk,\ c=dk,\ e=fk,\cdots,$$

於是
$$pa^n=pb^nk^n,\ qc^n=qd^nk^n,\ re^n=rf^nk^n\cdots,$$

$$\therefore \frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}=\frac{pb^nk^n+qd^nk^n+rf^nk^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}=k^n.$$

$$\therefore \left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots.$$

與 $p, q, r\ n$, 以不同之值,可推出此一般命題之特例.或可用同一之方法單獨證明之.例如,設

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}, \text{其各比}=\frac{a+c+e}{b+d+f},$$

此結果可如是述之. 當一組分數相等時,則其中每一分數,等於以一切分母之和除一切分子之和.

例題1. 設 $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$,求 $\frac{5x-3y}{7x+2y}$ 之值.

$$\frac{5x-3y}{7x+2y}=\frac{\frac{5x}{y}-3}{\frac{7x}{y}+2}=\frac{\frac{15}{4}-3}{\frac{21}{4}+2}=\frac{3}{29}.$$

例題2. 兩數成5:8之比,設兩項各加9則成8:11之比,求此二數.

令兩數以 $5x$ 與 $8x$ 表之.

則 $$\frac{5x+9}{8x+9}=\frac{8}{11}, \quad \therefore x=3$$

因此兩數爲15與24.

例題3. 設 $A:B$ 爲 $A+x:B+x$ 之二乘比,試證 $x^2=AB$.

依已知之條件, $\left(\frac{A+x}{B+x}\right)^2=\frac{A}{B}$,

$$\therefore B(A+x)^2=A(B+x)^2.$$

$$A^2B+2ABx+Bx^2=AB^2+2ABx+Ax^2,$$

$$x^2(A-B)=AB(A-B),$$

$$\therefore x^2=AB,$$

因依假定 $A-B$ 不爲零.

習題 XXXIII. *a*.

求下各式之複比

1. $4:3$之二乘比與$27:8$之比.

2. $32:27$之比與$3:4$之三乘比.

3. $25:36$之平方根比,與$6:25$之比.

4. $x:y$之三乘比與$2y^2:3x^2$之比.

5. $3a:4b$與之比與$b^4:a^4$之平方根比.

6. 設$x:y=5:7$,求$x+y:y-x$之值.

7. 設$\dfrac{x}{y}=3\dfrac{1}{3}$,求$\dfrac{x-3y}{2x-5y}$之值.

8. 設$b:a=2:5$,求$2a-3b:3b-a$之值.

9. 設$\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}$,而$\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{7}$,求$\dfrac{3ax-by}{4by-7ax}$之值.

10. 設$7x-4y:3x+y=5:13$,求$x:y$之比.

11. 設$\dfrac{2a^2-3b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{2}{41}$,求$a:b$之比.

12. 設$2x:3y$爲$2x-m:3y-m$之二乘比,試證$m^2=6xy$.

13. 設$P:Q$爲$P-x:Q-x$之平方根比,試證$x=\dfrac{PQ}{Q+Q}$.

14. 設$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$,試證其每一比各等於

$$\sqrt[3]{\frac{2a^2c+3c^3e+4e^2c}{2b^2d+3d^3e+4f^2d}}.$$

15. 二數之比為3:4.若各減7,則餘數之比為2:3,求二數.

16. 27:35每項各減何數則成2:3.

17. 37:29每項各加何數則成8:7.

18. 設$\frac{p}{b-c}=\frac{q}{c-a}=\frac{r}{a-b}$,求證$p+q+r=0$.

19. 設$\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a-b}$,求證$x-y+z=0$.

20. 設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$,求證

$$\frac{a^6b-2c^5e+3a^4c^3e^2}{b^7-2d^5f+3b^4d^2e^2}\text{之平方根等於}\frac{ace}{bdf}$$

21. 設$a:b$, $c:d$, $e:f$三比彼此互等,試證,$la+mc+ne:lb+md+nf$等於此各比.又設此三比彼此不等,試證其在最大者及最小者之間之值.

22. 設$\frac{bx-ay}{cy-az}=\frac{cx-az}{by-ax}=\frac{x+y}{x+z}$,除非$b+c=0$,則此諸分數各等於$\frac{x}{y}$.

23. 設$\frac{2x-3y}{3z+y}=\frac{z-y}{z-x}=\frac{x+3z}{2y-3x}$,試證此諸比各等於$\frac{x}{y}$,因此求證$x=y$,或$z=x+y$.

比　　例

348. 定義 若第一項對第二項之比等於第三項對第四項之比,則**四量成比例**.此四量稱爲**比例量**或稱**比例項**.由是,設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,則a, b, c, d皆爲比例量.此可謂a對b之比適如c對d之比,而其比例式可書如

$$a:b::c:d,\text{或}\ a:b=c:d.$$

a與d兩項名爲**外項**,b與c兩項名爲**中項**.

349. 設四量成比例,則外項之積等於中項之積.

令a, b, c, d爲比例量.

則依定義 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

於是 $$ad=bc.$$

因此設比例之任何三項爲已知,則第四項不難求之,由是設已知a, c, d,則$b=\frac{ad}{c}$.

反之,設有任何四量a, b, c, d如$ad=bc$,則a, b, c, d皆爲比例量.a及d爲外項,b及c爲中項,或a及d爲中項,b及c爲外項.

350. 連比例 量之成連比例者,當第一項與第二項之比,猶如第二項與第三項之比,猶如第三項與第四項之比,餘仿此.由是若

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots,$$

則 $a, b, c, d, \cdots$ 成連比例.

設 a, b, c 三量成連比例，則

$$a:b=b:c$$

$$\therefore\ ac=b^2. \qquad [349 款.]$$

在上之情形中，b 名謂在 a 與 c 間之比例中項，而 c 名謂對 a 與 b 之第三比例量.

351. **設三量成比例量，則第一量與第三量之比為第一量與第二量之二乘比.**

命三量為 a, b, c, 則 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

今 $$\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2},$$

即. $$a:c=a^2:b^2.$$

352. **兩個或兩個以上比例之對應項之積仍為比例.**

設 $a:b=c:d$, 而 $e:f=g:h$, 則

$$ae:bf=cg:dh.$$

因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 及 $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, $\therefore\ \frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$, 或 $ae:bf=cg:dh$.

推論. 設 $a:b=c:d,$

又 $b:x=d:y,$

則 $a:x=c:y.$

353. 比例之移項 設四量a, b, c, d成比例,則其他諸比例皆可依分數之特性而推出.此等運算之結果用途殊廣,且其中尚有若干可由幾何學中直接引證之.

(1) 設 $a:b=c:d$, 則 $b:a=d:c$. [倒置法.]

因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 故 $1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}$.

即 $$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

或 $$b:a=d:c.$$

(2) 設 $a:b=c:d$, 則 $a:c=b:d$. [交換法.]

因 $ad=bc$, 故 $\frac{ad}{cd}=\frac{bc}{cd}$,

即 $$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$$

或 $$a:c=b:d.$$

(3) 設 $a:b=c:d$, 則 $a+b:b=c+d:d$ [比較法.]

因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 故 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$.

卽，
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

或
$$a+b:b=c+d:d.$$

(4) 設 $a:b=c:d$, 則 $a-b:b-c-d:d$. [除法.]

因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 故 $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$.

卽，
$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

或
$$a-b:b=c-d:d.$$

(5) 設 $a:b=c:d$, 則 $a+b:a-b=c+d:c-d$.

[比較法及除法.]

因依 (3) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, 又依 (4) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$,

∴用除法
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

或
$$a+b:a-b=c+d:c-d.$$

尙有其他命題可用相似之方法證明之.

例題 1 設
$$a:b=c:d=e:f,$$

證 $2a^2+3c^2-5e^2:2b^2+3d^2-5f^2=ae:bf$.

令 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$, 則 $a=bk$, $c=dk$, $e=fk$.

$$\therefore \frac{2a^2+3c^2-5e^2}{2b^2+3d^2-5f^2}=\frac{2b^2k^2+3d^2k^2-5f^2k^2}{2b^2-3d^2-5f^2}=k^2=\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}=\frac{ae}{bf}.$$

或 $$2a^2+3c^2-5e^2:2b^2+3d^2-5f^2=ae:bf.$$

例題2 設$(3a+6b+c+2d)(3a-6b-c+2d)$

$$=(3a-6b+c-2d)(3a+6b-c-2d),$$

證 a, b, c, d 成比例.

即有 $$\frac{3a+6b+c+2d}{3a-6b+c-2d}=\frac{3a+6b-c-2d}{3a-6b-c+2d}.$$ [349款.]

比較法及除法, $$\frac{2(3a+c)}{2(6b+2d)}=\frac{2(3a-c)}{2(6b-2d)}.$$

交換法, $$\frac{3a+c}{3a-c}=\frac{6b+2d}{6b-2d}.$$

又用比較法及除法 $$\frac{6a}{2c}=\frac{12b}{4d},$$

於是 $$a:b=c:d.$$

例題3 解方程式 $$\frac{x^2+x-2}{x-2}=\frac{4x^2+5x-6}{5x-6}.$$

用除法, $$\frac{x^2}{x-2}=\frac{4x^2}{5x-6},$$

於是,以 x^2 除之,其解答爲 $x=0$, [291款註.]

$$\frac{1}{x-2}=\frac{4}{5x-6}, \text{於是 } x=-2.$$

故其二根爲 $0, -2$.

習題 XXXIII. *b*.

求下之比例第四項:

1. a, ab, c.　　2. $a^2, 2ab, 3b^2$,　　3. $x^3, xy, 5x^2y$.

求下之比例第三項

4. a^2b, ab. 5. $x^3, 2x^2$. 6. $3x, 6xy$. 7. $1, x$.

求下之比例中項.

8. a^2, b^2. 9. $2x^3, 8x$. 10. $12ax^2, 3a^3$. 11. $27a^2b^3, 3b$.

設 a, b, c 爲三個比例量, 試證

12. $a:a+b=a-b:a-c$.

13. $(b^2+bc+c^2)(ac-bc+c^2)=b^4+ac^3+c^4$.

設 $a:b=c:d$, 試證

14. $ab+cd:ab-cd=a^2+c^2:a^2-c^2$.

15. $a^2+ac+c^2:a^2-ac+c^2=b^2+bd+d^2:b^2-bd+d^2$.

16. $a:b=\sqrt{3a^2+5c^2}:\sqrt{3b^2+5d^2}$.

17. $\frac{a}{p}+\frac{b}{q}:a=\frac{c}{p}+\frac{d}{q}:c$.

18. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}:\frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{d}{c}+\frac{c}{d}:\frac{cd}{c^2+d^2}$.

解下各方程式

19. $3x-1:6x-7=7x-10:9x+10$.

20. $x-12:y+3=2x-19:5y-13=5:14$.

21. $\frac{x^2-2x+3}{2x-3}=\frac{x^2-3x+5}{3x-5}$.

22. $\frac{2x-1}{x^2+2x-1}=\frac{x+4}{x^2+x+4}$.

23. 設 $(a+b-3c-3d)(2a-2b-c+d)$

$$=(2a+2b-c-d)(a-b-3c+3d)$$

試證a, b, c, d皆爲比例量.

24. 設a, b, c, d成連比例,試證

$$a:b=a^3+b^3+c^3:b^3+c^3+d^3.$$

25. 設b爲a與c之比例中項,求證

$4a^2-9b^2$及$4b^2-9c^2$之比爲a及b之二乘比.

26. 設a, b, c, d成連比例,試證$b+c$爲$a+b$及$c+d$之比例中項.

27. 設$a+b:b+c=c+d:d+a$,試證$a=c$,或$a+b+c+d=0$.

變數法

354. 定義 有互相關聯之兩量設變B量而A量以同比變之.則A量謂之因B量正變.

[註] 原文中"A量因B量正變"中之"正"一字恆從略,故可逕言A因B變.

355. 例如,設一火車以等速開行,60分鐘行40哩,則30分鐘行20哩.120分鐘行80哩,餘仿此.在每一情形中距離之增加或減少爲與時間同比.此亦可謂

當速度不變時,距離與時間成比例,或簡言之,距離因時間變.

356. 變數之記號 變數用$\propto$記號表之,如$A\propto B$讀如"A因B變."

357. 設A因B變,則A等於乘以某常量之B.

因假定$a_1, a_2, a_3\cdots, b_1, b_2, b_3\cdots$爲$A$與$B$之對應值.

則依定義,$\dfrac{A}{a_1}=\dfrac{B}{b_1}$, $\dfrac{A}{a_2}=\dfrac{B}{b_2}$, $\dfrac{A}{a_3}=\dfrac{B}{b_3}$,餘仿此.

$$\therefore \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots,\text{其中各等於}\frac{A}{B}.$$

因此$\dfrac{A\text{之任何值}}{B\text{之對應值}}$恆爲相同

即 $\dfrac{A}{B}=m$,此處m爲常量.

$$\therefore A=mB.$$

358. 定義 有A, B二量,若A量因另一B量之倒數變,則謂之A量因B量**反變**[見176款.]

由是設A因B反變,則$A=\dfrac{m}{B}$,此處m爲常量.

次爲反變之解釋.設6人合作某工,8小時而成,則12人爲4小時而成,2人爲之,24小時而成.餘仿此.由是可知人數增加則時間依比例減少,若人數減少,則時間依比例增加.

359. 定義 設一量因其他諸量之積變則謂之第一量因其他諸量**合變**.

由是若 $A=mBC$, 則 A 因 B 及 C 合變. 例如, 利息之銀數因本銀 時期及利率合變.

360. 定義 若 A 因 $\frac{B}{C}$ 變, 則謂之 A 因 B **正變**, 因 C **反變**.

361. 集合357款—360款之原則, 卽有.

設 A 因 B 正變, 則 $A=mB$.

設 A 因 B 反變, 則 $A=\frac{m}{B}$.

設 A 因 B 及 C 合變, 則 $A=mBC$.

設 A 因 B 正變因 C 反變, 則 $A=\frac{mB}{C}$.

362. 當 C 爲常量時, 設 A 因 B 變, 當 B 爲常量時, 設 A 因 C 變. 則當 B 及 C 俱爲變數時, A 因 BC 變.

A 之變數半依 B 而變, 半依 C 而變. 假定後之兩變數分別發生, 則各自輪流因 A 而變. 又令 a, b, c 爲 A, B, C 之某種聯立値.

1. 當 B 變成 b, 令 C 爲常量, 則 A 必受一部份之變化. 並假設爲某中間之値 a', 此處

$$\frac{A}{a'}=\frac{B}{b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

2. 當C變成c,令B為常數,卽令其保持原值b,則A必完成其變且由其中間之值a'變為最後之值a,此處

$$\frac{a'}{a}=\frac{C}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

從(1)及(2) $\frac{A}{a'}\times\frac{a'}{a}=\frac{B}{b}\times\frac{C}{c},$

卽 $A=\frac{a}{bc}\cdot BC,$

或 A因BC變.

363. 此卽為上款所謂之定理之解釋.

人數一定所作工之多寡因其所作之日數變,又時期一定所作工之多寡因人數變.故若日數與人數俱為變數,則工作之多寡,因人數與日數之積而變.

又在幾何學中,三角形之面積,若高為常量,則因其底邊而變,若高與底俱為變數,則其面積因高與底邊二數之積而變.

例題1 設$A\propto B$,而$C\propto D$,則必$AC\propto BD$.

因依假定,$A=mB$, $C=nD$.其中m及n皆為常量.

故$AC=mnBD$,且因mn為常量,故$AC\propto BD$.

例題2 設x因y^2-1反變,當$y=10$,則等於24,當$y=5$,求x.

依假定,$x=\frac{m}{y^2-1}$,其中m為常量.

命$x=24, y=10$,即得$24=\frac{m}{99}$,

於是 $$m=24\times99$$

$$\therefore\ x=\frac{24\times99}{y^2-1},$$

因此命$y=5$,即得 $x=99$.

例題3 一角錐之體積因其高及其底邊之面積合變.又若底邊之面積為60方呎,其高為14方呎,則其體積為280立方呎,問一角錐之體積為390立方呎,其高為26呎時,其底邊之面積應為若干呎?

令V表角錐之體積,A表其底邊之面積,h表其高,則$V=mAh$,其中m為常量.

代入V, A, h之已知值,即有

$$280=m\times60\times14,$$

$$\therefore m=\frac{280}{60\times14}=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore\ V=\tfrac{1}{3}Ah.$$

又當 $V=390, h=26$.

$$\therefore\ 390=\tfrac{1}{3}A\times26,$$

$$\therefore A=45.$$

因此底邊之面積爲45方呎.

習題 XXXIII. c.

1. 設 $x \propto y$, 而 $y=7$, 則 $x=18$, 今 $y=21$, 求 x.

2. 設 $x \propto y$, 而 $y=3$, 則 $x=2$, 今 $x=18$, 求 y.

3. A 因 B 及 C 合變, 而 $A=6$, 則 $B=3$, $C=2$, 今 $B=5$, $C=7$, 求 A.

4. A 因 B 及 C 合變, 而 $A=9$, 則 $B=5$, $C=7$, 今 $A=54$, $C=10$, 求 B.

5. 設 $x \propto \frac{1}{y}$, 而 $y=4$, 則 $x=15$, 今 $x=6$, 求 y.

6. 設 $y \propto \frac{1}{x}$, 而 $y=1$ 則 $x=1$, 今 $y=5$, 求 x.

7. A 因 B 正變, 因 C 反變, 而 $A=10$, 則 $B=15$, $C=6$, 今 $B=8$, $C=2$, 求 A.

8. 設 x 因 y 正變, 因 z 反變, 當 $y=10$, $z=14$, 則 $x=14$, 當 $x=49$, $y=45$, 問 z 爲幾何?

9. 設 $x \propto \frac{1}{y}$, 而 $y \propto \frac{1}{z}$, 試證 $z \propto x$.

10. 設 $a \propto b$, 試證 $a^n \propto b^n$.

11. 設 $x \propto z$ 而 $y \propto z$, 試證 $x^2-y^2 \propto z^2$.

12. 設 $3a+7b \propto 3a+13b$, 今 $a=5$, $b=3$, 求 a 與 b 之方程式.

13. 設 $5x-y\propto 10x-11y$, 今 $x=7$, $y=5$, 求 x 與 y 之方程式.

14. 設 x 之立方因 y 之平方變, 設 $x=3$ 則 $y=5$, 求 x 與 y 之方程式.

15. 設 a 之平方根因 b 之立方根變, 設 $a=4$, 則 $b=8$, 求 a 與 b 之方程式.

16. 設 y 因 x 之平方反變, 設 $y=8$, 則 $x=3$, 今 $y=2$, 求 x.

17. 設 $x\propto y+a$, 其中 a 為常量, 而 $x=15$, 則 $y=1$, 而 $x=35$, 則 $y=5$, 今 $y=2$, 求 x.

18. 設 $a+b\propto a-b$, 證 $a^2+b^2\propto ab$. 設 $a\propto b$, 證 $a^2-b^2\propto ab$.

19. 設 y 為各因 x, x^2, x^3 變之三量之和, 當 $x=1$, 則 $y=4$, 而 $x=2$, 則 $y=8$, 而 $x=3$, 則 $y=18$, x 之各項用 y 表明之!

20. 已知圓面積與其半徑之平方為正變.若半徑為7呎, 則面積為154方呎, 試求半徑為10.5呎時之圓面積.

21. 圓面積與其直徑之平方為正變, 試證直徑為 $2\frac{1}{2}$ 吋之圓之面積為直徑 $1\frac{1}{2}$ 吋及2吋者之面積之和

22. 平面上所受風之壓力與平面之面積及風速之平方爲合變,若風速每小時15哩,則一平方呎平面上所受之壓力爲1磅.若一平方碼平面上所受之壓力爲16磅,求風速.

23. 若銀幣之厚相等,則其值與其直徑之平方正變.若直徑相等,則其值與厚正變,二銀幣直徑之比爲4:3,若一幣之值爲他幣之四倍,試求其厚之比.

24. 圓柱體之體積,若高度不變,則與底半徑之平方正變,若底不變,則與其高正變.今高爲7呎底半徑爲2呎之體積爲88立方呎,試求體積396立方呎,底半徑9呎者之高度.

第三十四章

等差級數 等比級數 調和級數

364. 依某種固定定律所成連續之諸量謂之**級數**，其各量謂之級數之**項**.

等差級數

365. 定義 當諸量之增加或減少恆成公差時，謂之等差級數.

由是下之三級數各成等差級數.(以 A. P. 表之.)

$$3, 7, 11, 15, \cdots$$

$$8, 2, -4, -10, \cdots$$

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots.$$

公差可以級數之任何一項減以其後之一項而求得. 如上第一例之公差為4, 第二例之公差為-6, 第三例之公差為d.

366. A. P. 之末項或第n項. 檢查級數

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots$$

可見在級數之任何項中d之係數恆較級數之項數少1.

由是　　第3項爲$a+2d$,

　　　　第6項爲$a+5d$,

　　　　第20項爲$a+19d$,

且,通例　第p項爲$a+(p-1)d$.

設n爲項數,設l表末項,或第n項,卽有

$$l=a+(n-1)d.$$

367. A. P. 中n項之和 令a表首項,d表公差,n表項數,又令l表末項,S表所需之和,則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l$$

又,逆書此級數,

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a.$$

以此兩級數相加,

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\text{至 }n\text{ 項止}=n(a+l),$$

$$\therefore\ S=\frac{n}{2}(a+l)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

既

$$l=a+(n-1)d\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\therefore\ S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

368. 在上款中有重要之公式三,(1),(2),(3),其每一式中,若已知其三量,則其未知量可以任一文字表之.

例題1. 求次之級數之第20項及第35項.

$$38, 36, 34, \cdots.$$

公差爲 $36-38$, 或 -2.

$$\therefore \text{第20項} = 38+19(-2)=0,$$

而第35項 $\qquad = 38+34(-2) = -30.$

例題2. 求級數 $5\frac{1}{2}, 6\frac{3}{4}, 8\cdots$ 至17項止之和.

公差爲 $1\frac{1}{4}$, 因此從(3)得

和 $\qquad = \frac{17}{2}\left\{2\times\frac{11}{2}+16\times1\frac{1}{4}\right\}$

$$=\frac{17}{2}(11+20)=\frac{17\times31}{2}=263\frac{1}{2}.$$

例題3. 一級數之首項爲5,末項爲45,和爲400,求項數及公差.

設 n 爲項數,則從(1),得

$$400=\frac{n}{2}(5+45),$$

於是 $\qquad n=16.$

設 d 爲公差,

$$45=\text{第}16\text{項}=5+15d,$$

於是 $$d=2\frac{2}{3}.$$

習 題 XXXIV a.

1. 求級數 $5, 11, 17, \cdots$ 之第27項及第41項.

2. 求級數 $71, 70, 69, \cdots$ 之第13項及第109項.

3. 求級數 $10, 11\frac{1}{2}, 13, \cdots$ 之第17項及第54項.

4. 求級數 $-3, -2, -1 \cdots$ 之第20項及第13項.

5. 求級數 $-4, 2.5, 9, \cdots$ 之第90項及第16項.

6. 求級數 $-2.8, 0, 28, \cdots$ 之第37項及第89項.

求下列各級數之末項

7. $5, 7, 9, \cdots$ 至20項止.

8. $7, 3, -1, \cdots$ 至15項止.

9. $13\frac{1}{2}, 9, 4\frac{1}{2}, \cdots$ 至13項止.

10. $0.6, 1.2, 1.8, \cdots$ 至12項止.

11. $2.7, 3.4, 4.1, \cdots$ 至11項止.

12. $x, 2x, 3x, \cdots$ 至25項止.

13. $a-d, a+d, a+3d, \cdots$ 至30項止.

14. $2a-b, 4a-3b, 6a-5b, \cdots$ 至40項止.

求下列各級數之和及末項.

15. $14, 64, 114, \cdots$ 至20項止.

16. $1, 1.2, 1.4, \cdots$ 至12項止.

17. $9, 5, 1, \cdots$ 至100項止.

18. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \cdots$至21項止.

19. $3\frac{1}{2}, 1, -1\frac{1}{2}, \cdots$至19項止.

20. $64, 96, 128, \cdots$至16項止.

求下列各級數之和.

21. $5, 9, 13, \cdots$至19項止.

22. $12, 9, 6, \cdots$至23項止.

23. $4, 5\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2}, \cdots$至37項止.

24. $10\frac{1}{2}, 9, 7\frac{1}{2} \cdots$至94項止.

25. $-3, 1, 5, \cdots$至17項止.

26. $10, 9\frac{2}{3}, 9\frac{1}{3}, \cdots$至21項止.

27. $p, 3p, 5p, \cdots$至p項止.

28. $3a, a, -a, \cdots$至a項止.

29. $a, 0, -a, \cdots$至a項止.

30. $-3q, -q, q, \cdots$至p項止.

求項數及公差, 當

31. 首項爲3, 末項爲90, 而和爲1395.

32. 首項爲79, 末項爲7, 而和爲1075.

33. 和爲24, 首項爲9, 末項爲-6.

34. 和爲714, 首項爲1, 末項爲$58\frac{1}{2}$.

35. 末項爲-16, 和爲-133, 首項爲-3.

36. 首項爲-75, 和爲-740, 末項爲1.

37. 首項爲a, 末項爲$13a$, 而和爲$49a$.

38. 和爲 $-320x$, 首項爲 $3x$, 末項爲 $-35x$.

369. 設已知等差級數之任何二項,則此級數卽能完全決定,因已知量所給之兩個聯立方程式,其解答卽爲首項及公差也.

例題 求第7項及第51項之級數各爲 -3 及 -355.

設 a 爲首項, d 爲公差.

$$-3=\text{第 7 項}=a+6d.$$

而 $$-355=\text{第 51 項}=a+50d.$$

於是,相減 $$-352=44d.$$

$\therefore\ d=-8$, 而,於是, $a=45$.

故此級數爲 $45, 37, 29, \cdots$.

370. 等差中項 當三量成等差級數時,其中央之量謂之其他二量之等差中項.

由是 a 爲 $a-d$ 及 $a+d$ 之等差中項.

371. 求已知二量之等差中項之法.

令 a 及 b 爲二量, A 爲等差中項,則,既 a, A, b 成 A. P. 必有

$$b-A=A-a,$$

此各等於公差,

於是 $$A=\frac{a+b}{2}.$$

372. 在已知二量之間,恆能插入若干之項數,使其

全部級數成 A. P., 又推廣370款之定義, 其所插入之項數稱爲**等差諸中項**.

例題 在4及67之間, 插入20個等差中項.

連外項在內其項數共爲22, 故須求成A.P.之22項級數, 其中4爲首項而67爲末項.

令d爲公差,

則 $$67=\text{第}22\text{項}=4+21d,$$

於是$d=3$, 其全部級數爲4, 7, 10, … 61, 64, 67.

又所需之等差中項爲7, 10, 13, … 58, 61, 64.

373. 在已知二量之間插入若干等差中項之法.

令a及b爲二已知量, m爲等差中項之個數.

連外項在內, 其項數共爲$m+2$, 故須求成A. P.之$m+2$項級數, 其中a爲首項而b爲末項.

令d爲公差.

則 $$\begin{aligned} b&=\text{第}(m+2)\text{項}\\ &=a+(m+1)d. \end{aligned}$$

於是 $$d=\frac{b-a}{m+1}$$

而所需之等差中項爲

$$a+\frac{b-a}{m+1},\ a+\frac{2(b-a)}{m+1},\ \cdots a+\frac{m(b-a)}{m+1}.$$

例題1. 求A. P.之第30項,其首項爲17, 而第100項爲-16.

令 d 爲公差,

則 $$-16=\text{第}100\text{項}$$
$$=17+99d,$$
$$\therefore\ d=-\frac{1}{3}.$$

第30項 $$=17+29\left(-\frac{1}{3}\right)=7\frac{1}{3}.$$

例題2. A.P.之三數之和爲33,其積爲792,求此三數.

令 a 爲中央之數, d 爲公差,則此三數 $a-d, a, a+d$.

因此 $$a-d+a+ad=33,$$

於是 $a=11$, 此三數爲 $11-d, 11, 11+d$.

$$\therefore\ 11(11+d)(11-d)=792.$$
$$121-d^2=72.$$
$$d=\pm 7.$$

故此三數爲 4, 11, 18.

例題3. 從級數24, 20, 16,…中取出幾項始其和爲72.

令項數爲 n, 公差既爲 $20-24$, 或 -4, 則從367款之(3)卽得

$$72=\frac{n}{2}\{2\times 24+(n-1)(-4)\}$$
$$=24n-2n(n-1),$$

於是 $$n^2-13n+36=0,$$

或 $$(n-4)(n-9)=0.$$

$$\therefore n=4 \text{ 或 } 9.$$

此二值俱能滿足本題之條件. 因設書其前9項, 則得 24, 20, 16, 12, 8, 4, 0, −4, −8, 且因後五項互相消去, 故9項之和與4項之和同.

例題4. A. P. 共含21項, 其中央三項之和爲129, 而末三項之和爲237, 求此等差級數.

令a爲首項, d爲公差, 則

$$237=\text{末三項之和}=a+20d+a+19d+a+18d=3a+57d.$$

於是 $$a+19d=79 \cdots\cdots(1)$$

再中央三項爲第10項, 第11項, 第12項.

因此 $$129=\text{中央三項之和}=a+9d+a+10d+a+11d$$
$$=3a+30d.$$

於是 $$a+10d=43 \cdots\cdots(2)$$

從(1)及(2), 得$d=4$, $a=3$.

因而此等差級數爲3, 7, 11, …83.

習題 XXXIV. *b*.

求下之級數, 已知

1. 第27項爲186, 第45項爲312.

2. 第5項爲1, 第31項爲−77.

3. 第15項爲 -25, 第23項爲 -41.

4. 第9項爲 -11, 第102項爲 $-150\frac{1}{2}$

5. 第15項爲25, 第29項爲46.

6. 第16項爲214, 第51項爲739.

7. A.P.之第3項及第7項爲7及19, 求第15項.

8. 第54項及第4項爲 -125 及0, 求第42項.

9. 第31項及第2項爲 $\frac{1}{2}$ 及 $7\frac{3}{4}$, 求第59項.

10. 在71及23之間, 插入15個等差中項.

11. 在93及69之間, 插入17個等差中項.

12. 在 $-7\frac{1}{5}$ 及 $-2\frac{1}{5}$ 之間插入14個等差中項

13. 在7.2及 -6.4 之間插入16個等差中項.

14. 在 $8\frac{1}{2}$ 及 $2\frac{1}{3}$ 之間, 插入36個等差中項.

由下之級數取出若干項可使

15. 級數42, 39, 36, … 爲315.

16. 級數 $-16, -15, -14, \cdots$ 爲 -100.

17. 級數 $15\frac{2}{3}, 15\frac{1}{3}, 15 \cdots$ 爲129.

18. 級數 $20, 18\frac{3}{4}, 17\frac{1}{2}, \cdots$ 爲 $162\frac{1}{2}$.

19. 級數 $-10\frac{1}{2}, -9, -7\frac{1}{2} \cdots$ 爲 -42.

20. 級數 $-6\frac{4}{5}, -6\frac{2}{5}, -6, \cdots$ 爲 $-52\frac{4}{5}$.

21. A.P. 之三數之和爲 39, 其積爲 2184, 求此三數.

22. A.P. 之三數之和爲 12, 其平方之和爲 66, 求此三數.

23. 五個等差級數之和爲 75, 其最大項與最小項之積爲 161, 求此五數.

24. 五個等差級數之和爲 40, 其平方之和爲 410, 求此五數.

25. 已知等差級數之第 12 項第 85 項與末項各爲 38, 257, 395, 求項數.

等比級數

374. 定義 當諸量以一常量因數而增加或減少, 則此諸量謂之等比級數.

由是下之三級數各成等比級數(以 G.P. 表之)

$$3, 6, 12, 24, \cdots$$

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \cdots$$

$$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots$$

常量因數又名公比, 此可以任何一項除其後之一項而求得, 如上第一例之公比爲 2, 第二例之公比爲

$-\frac{1}{3}$, 第三例之公比為r.

375. G. P. 之末項或第n項 檢查級數

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ \cdots$$

可見在級數之任何項中r之指數恆較級數之項數少1.

由是　　第3項為ar^2,

　　　　第6項為ar^5,

　　　　第20項為ar^{19},

且,通例　　第p項為ar^{p-1}.

設n為項數,設l表示末項或第n項,即有

$$l=ar^{n-1}.$$

例題 求級數$-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ -\frac{3}{4},\cdots$之第8項.

公比為$\frac{1}{2}\div\left(-\frac{1}{3}\right)$, 或$-\frac{3}{2}$,

$$\therefore 第8項=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)^7$$

$$=-\frac{1}{3}\times-\frac{2187}{128}=\frac{729}{128}.$$

376. 等比中項. 當三量成等比級數時,其中央之量謂之其他二量之等比中項.

377. 求已知二量之等比中項之法.

令a及b爲二量,G爲等比中項,旣a, G, b成G.P.,則

$$\frac{b}{G}=\frac{G}{a}.$$

各等於公比

$$\therefore G^2=ab,$$

於是 $$G=\sqrt{ab}.$$

378. 在已知二量之間,插入若干等比中項之法.

令a及b爲二已知量,m爲等比中項之個數.

項數共有$m+2$個,故須求成G.P.之$m+2$項級數,其中a爲首項而b爲末項.

令r爲公比,

則 $$b=第(m+2)項=ar^{m+1},$$

$$\therefore r^{m+1}=\frac{b}{a},$$

$$\therefore r=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m+1}} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因此所需之等比中項爲$ar, ar^2, \cdots ar^m$,此處r有如(1)求得之值.

例題 在160與5之間,插入4個等比中項.

現須求成G.P.之6項,其中160爲首項,而5爲第6項.

令r爲公比,

則 $$5=\text{第六項}=160r^5,$$

$$\therefore\ r^5=\frac{1}{32},$$

於是,用試驗法, $$r=\frac{1}{2},$$

而等比中項爲 80, 40, 20, 10.

379. G. P. 中 n 項之和. 令 a 爲首項, r 爲公比, n 爲項數,而 S 爲所求之和,則

$$S=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1},$$

以 r 乘各項,則有

$$rS=ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n.$$

因此相減,

$$rS-S=ar^n-a,$$

$$\therefore\ (r-1)S=a(r^n-1),$$

$$\therefore\ S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

變分子分母之符號

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

註 上列所設 S 之二式,除當 r 爲正量及大於 1 外. (2) 式可適用於一切之情形,如能熟記,殊覺便利.

既 $ar^{n-1}=l$, 從而 $ar^n=rl$, 且公式 (1) 可書如

$$S=\frac{rl-a}{r-1}.$$

例題1. 求級數81, 54, 36, … 至9項之和.

公比$=\frac{54}{81}=\frac{2}{3}$, 此為小於1,

因此其和 $$=\frac{81\{1-(\frac{2}{3})^9\}}{1-\frac{2}{3}}=243\{1-(\tfrac{2}{3})^9\}$$

$$=243-\frac{512}{81}=236\frac{55}{81}.$$

例題2. 求級數$\frac{2}{3}$, -1, $\frac{3}{2}$, … 至7項之和.

公比$=-\frac{3}{2}$, 因此依公式(2)

和 $$=\frac{\frac{2}{3}\{1-(-\frac{3}{2})^7\}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{\frac{2}{3}\{1+\frac{2187}{128}\}}{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2315}{128}\times\frac{2}{5}=\frac{463}{96}.$$

習題 XXXIV. c

1. 求級數3, 6, 12, … 之第5項及第8項.

2. 求級數256, 128, 64, … 之第10項及第16項.

3. 求級數64, -32, 16, … 之第7項及第11項.

4. 求級數81, -27, 9, … 之第8項及第12項.

5. 求級數$\frac{1}{64}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, … 之第14項及第7項.

6. 求級數. $0.008, 0.04, 0.2, \cdots$ 之第4項及第8項.

求以下各級數之末項.

7. $2, 4, 8, \cdots$ 至9項.

8. $2, -6, 18, \cdots$ 至8項.

9. $2, 3, 4\frac{1}{2}, \cdots$ 至6項.

10. $3, -3^2, 3^3, \cdots$ 至$2n$項.

11. $x, x^3, x^5, \cdots$ 至p項.

12. $x, 1, \frac{1}{x}, \cdots$ 至30項.

13. 在486及6之間插入3個等比中項.

14. 在$\frac{1}{8}$及128之間插入4個等比中項.

15. 在56及$-\frac{7}{16}$之間,插入6個等比中項.

16. 在$\frac{32}{81}$及$4\frac{1}{2}$之間插入5個等比中項.

求以下各級數之和及末項.

17. $3, 6, 12, \cdots$ 至8項.

18. $6, -18, 54, \cdots$ 至6項.

19. $64, 32, 16, \cdots$ 至10項.

20. $8.1, 2.7, 0.9, \cdots$ 至7項.

21. $\frac{1}{72}, \frac{1}{24}, \frac{1}{8}, \cdots$ 至8項.

22. $4\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots$ 至9項.

求以下各數之和.

23. $3, -1, \frac{1}{3}, \cdots$ 至6項.

24. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \cdots$ 至7項.

25. $-\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, \cdots$ 至6項.

26. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots$ 至12項.

27. $9, -6, 4, \cdots$ 至7項.

28. $\frac{2}{8}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{24}\cdots$ 至8項.

29. $1, 3, 3^2, \cdots$ 至 p 項.

30. $2, -4, 8, \cdots$ 至 $2p$ 項.

31. $\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \frac{3}{\sqrt{3}}, \cdots$ 至8項.

32. $\sqrt{a}, \sqrt{a^3}, \sqrt{a^5}, \cdots$ 至 a 項.

33. $\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, \frac{8}{\sqrt{2}}, \cdots$ 至7項.

34. $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \cdots$ 至12項.

380. 無窮等比級數. 討論級數

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots.$$

$$n\text{項之和}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

從此結果可知從上列級數無論取出若干項恆較2小，又知，使 n 爲極大，則可使分數 $\frac{1}{2^{n-1}}$ 爲任意小，由是項數取去愈多，則愈可使其和與2相差爲任意小.

玆在下款中討論較普通之情形.

381. 無窮級數之和. 從379款即有

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

假定r爲眞分數,則n之值愈大,r^n之值愈小,結果$\frac{ar^n}{1-r}$之值愈小,故使n爲極大,則n項級數之和與$\frac{a}{1-r}$相差爲任意小.

此結果恆如是述之,降級等比級數之無窮項數之和爲$\frac{a}{1-r}$,或簡言之,無窮項數之和爲$\frac{a}{1-r}$.

382. 循環小數可以應用無窮等比級數而解釋.

例題 求$0.4\dot{2}\dot{3}$之值.

$$0.4\dot{2}\dot{3}=0.4232323\cdots=\frac{4}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\cdots\right)=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\cdot\frac{100}{99}=\frac{4}{10}+\frac{23}{990}=\frac{419}{990}.$$

此與以普通算術法則求得之值相合.

習 題 XXXIV. *d*.

1 9, 6, 4, … 2. 12, 6, 3, …

3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$　　4. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$

5. $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \cdots$　　6. $\frac{8}{5}, -1, \frac{5}{8},$

7. $0.9, 0.03, 0.001, \cdots$　8. $0.8, -0.4, 0.2, \cdots$

應用382款之方法求下各數之值.

9. $0.\dot{3}$.　10. $0.1\dot{6}$.　11. $0.\dot{2}\dot{4}$.　12. $0.3\dot{7}\dot{8}$.　13. $0.\dot{0}3\dot{7}$.

求下之等比級數.

14. 第10項爲320, 第6項爲20.

15. 第5項爲$\frac{27}{16}$, 第9項爲$\frac{1}{3}$.

16. 第7項爲625, 第4項爲-5.

17. 第3項爲$\frac{9}{16}$, 第6項爲$-4\frac{1}{2}$.

18. 分183爲成G. P.之三部,使其第一部與第三部之和爲第二部之$2\frac{1}{20}$倍.

19. G. P.之何任奇數連續項之積等於其中項之n次冪,而n爲項數,求證.

20. 無窮等比級數起首二項之和爲1,而任何部一項爲其後各項之和之二倍.試求此級數.

求下各級數之和:

21. $y^2+2b, y^4+4b, y^6+6b, \cdots$ 至 n 項.

22. $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}, 1, \dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}, \cdots$ 至無窮項.

23. $\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{1}{3}\sqrt{2}, \dfrac{2}{9}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, 至無窮項.

24. $2n-\dfrac{1}{2}, 4n+\dfrac{1}{6}, 6n-\dfrac{1}{18}, \cdots$ 至 $2n$ 項.

25. 四個等比級數之和較其公比大1,而已知其首項爲$\dfrac{1}{17}$,試求此四數.

26. 設有四個等比級數,已知其第一項與第二項之差,爲96,又第三項與第四項之差爲6,試求此四數.

27. 現洋225圓,以等比級數之序分給四人,其最大者與最小者之差比其二中項之差爲21比6,求各人所得之圓數.

28 三個等比級數之和爲13,而其倒數之和爲$\dfrac{13}{9}$.試求此三數.

調 和 級 數

383. 定義 三量a, b, c,當$\dfrac{a}{c}=\dfrac{a-b}{b-c}$.卽當其第一量第二量之差與第二量第三量之差之比等於其第一量與第三量之比時,則謂之**調和級數**.

不論若干量,若其中每三連續項成調和級數,則此諸量謂之調和級數.

384. 成調和級數之諸量之倒數成爲等差級數.

依定義,設a, b, c爲調和級數.(以H.P.表之).

$$\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}.$$

$$\therefore\ a(b-c)=c(a-b).$$

以abc除各項.

$$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a},$$

因此證明.故調和級數可解釋爲級數諸量之倒數成等差級數.

285. H.P.問題之解法 調和之特性所以獨具興趣者,因其對於幾何學及音樂之理論頗有關係,在代數學中,如現在所證之命題亦屬重要.又求調和級數任何諸量之和,無普通之公式,故H.P.問題恒倒置其項而應用與A.P.對應之特性以解之.

例題 H.P.之第12項爲$\frac{1}{5}$,其第19項爲$\frac{3}{22}$,求此級數.

令a爲首項,d爲與A.P.對應之公差,則

$$5=\text{第 }12\text{ 項}=a+11d,$$

及
$$\frac{22}{3}=\text{第 }19\text{ 項}=a+18d.$$

於是
$$d=\frac{1}{3},\ a=\frac{4}{3}.$$

因此等差級數爲 $\frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2, \frac{7}{3}, \cdots$

而調和級數爲 $\frac{3}{4},\ \frac{5}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{7}, \cdots$

386. 調和中項 當三量成調和級數時,其中央之量謂之其他二量之調和中項.

387. 求已知二量之調和中項之法.

令 a, b 爲二量, H 爲其調和中項,則 $\frac{1}{a},\ \frac{1}{H},\ \frac{1}{b}$ 成A.P.

$$\therefore\ \frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H},$$

$$\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

$$H=\frac{2ab}{a+b}.$$

388. 三種級數中項之關係 設 A, G, H 爲 a 與 b 之等差,等比,調和三中項.即可證明

$$A=\frac{a+b}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$G=\sqrt{ab} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$H=\frac{2ab}{a+b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

故
$$AH=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}$$
$$=ab=G^2.$$

卽, G 爲 A 與 H 之等比中項.

389. 三種級數之雜問題 此諸級數之雜問題常用某種巧妙之法以解之,此並能啓發靈巧與創造之能力.學者讀下之暗示卽知其效用.

1. 設 A.P. 所有之項加上或減去同量,則結果之諸項仍爲 A.P.,且其公差與前仍同. [365 款.]

2. 設 A.P. 所有之項乘以或除以同量,則結果之諸項仍爲 A.P.,然另得一新公差. [365 款.]

3. 設 G.P. 所有之項乘以或除以同量,則結果之諸項仍爲 G.P.,且其公比與前仍同. [374 款.]

4. 設 $a, b, c, d, \cdots$ 成 G.P.,則亦成連比例,因依定義

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{1}{r},$$

反之,成連比例諸量之級數可以 $x, xr, xr^2, \cdots$ 代之.

例題 1. 求三個等比級數,其積爲 343,其和爲 $30\frac{1}{3}$.

令 $\frac{a}{r}, a, ar$ 爲三量,

則有 $$\frac{a}{r}\times a\times ar=343\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及 $$a\left(\frac{1}{r}+1+r=\frac{91}{3}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從(1) $$a^3=343$$

$$\therefore a=7$$

因此從(2) $$7(1+r+r^2)=\frac{91}{3}r$$

於是得 $$r=3, \text{或 } \frac{1}{3}.$$

此三數爲 $\frac{7}{3}, 7, 21.$

例題2. 設 a, b, c 成 H.P., 證明 $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{a+c}, \frac{c}{a+b}$ 亦成 H.P., 既 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成 A.P.,

$$\frac{a+b+c}{a}, \frac{a+b+c}{b}, \frac{a+b+c}{c} \text{ 成 A.P.}$$

$$\therefore 1+\frac{b+c}{a}, 1+\frac{a+c}{b}, 1+\frac{a+b}{c} \text{ 成 A.P.,}$$

$$\therefore \frac{b+c}{a}, \frac{a+c}{b}, \frac{a+b}{c} \text{ 成 A.P.}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b+c},\ \frac{b}{a+c},\ \frac{c}{a+b}\text{ 成 H.P.}$$

例題 3. A.P. 之第 n 項爲 $\frac{n}{5}+2$, 求其 49 項之和.

令 a 爲首項, l 爲末項, 則命 $n=1$ 及 $n=49$, 卽得

$$a=\frac{1}{5}+2,\ l=\frac{49}{5}+2.$$

$$\therefore\quad S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{49}{2}\left(\frac{50}{5}+4\right)$$

$$=\frac{49}{2}\times 14=343.$$

例題 4. 設 a, b, c, d, e 成 G.P., 證明 $b+d$ 爲 $a+c$ 及 $c+e$ 之等比中項.

旣 a, b, c, d, e 成連比例,

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e},$$

∴ 每一比 $=\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{b+d}{c+e}$. [347 款.]

於是 $(b+d)^2=(a+c)(c+e)$.

習題 XXXIV. *e*.

1. 求級數 $4, 2, 1\frac{1}{3}\cdots$ 之第 6 項.

2. 求級數 $2\frac{1}{2}, 1\frac{12}{13}, 1\frac{9}{16}, \cdots$ 之第 21 項.

3. 求級數 $1\frac{1}{3}, 1\frac{11}{17}, 2\frac{2}{13}\cdots$ 之第 8 項.

4. 求級數 $3, 1\frac{1}{2}, 1, \cdots$ 之第 n 項.

求下之各級數,其

5. 第 15 項爲 $\frac{1}{25}$,第 23 項爲 1.

6. 第 2 項爲 2,第 31 項爲 $\frac{4}{31}$.

7. 第 39 項爲 $\frac{1}{11}$,第 54 項爲 $\frac{1}{26}$.

求下之調和中項.

8. 2 及 4.　　9. 1 及 13.　　10. $\frac{1}{4}$ 及 $\frac{1}{10}$.

11. $\frac{1}{a}$ 及 $\frac{1}{b}$.　　12. $\frac{1}{x+y}$ 及 $\frac{1}{x-y}$.　13. $x+y$ 及 $x-y$.

14. 在 4 及 12 之間插入二個調和中項.

15. 在 $2\frac{2}{5}$ 及 12 之間插入三個調和中項.

16. 在 1 及 6 之間插入四個調和中項.

17. 設 G 爲二量 A 與 B 之等比中項,則 A 與 G 之等差中項及等比中項之比等於 G 與 B 之等差中項及調和中項之比.求證.

18. 於G. P.之三連續項之各項上,加三項之第二項,求證此結果之三量成H. P.

求下各級數之和

19. $1+1\frac{3}{4}+3\frac{1}{16}+\cdots$ 至6項.

20. $1+1\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}+\cdots$ 至6項.

21. $(2a+x)+3a+(4a-x)+\cdots$ 至p項.

22. $1\frac{4}{5}-1\frac{1}{5}+\frac{4}{5}-\cdots$ 至8項.

23. $1\frac{4}{5}+1\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\cdots$ 至12項.

24. 設$x-a$, $y-a$, 及$z-a$成G.P., 試證$2(y-a)$爲$y-x$及$y-z$之調和中項.

25. 設a, b, c, d成A. P., a, e, f, d成G. P., a, g, h, d成H. P., 試證$ad=ef= h=cg$.

26. 設a^2, b^2, c^2成A. P., 試證$b+c, c+a, a+b$成H. P.

第三十五章

順列與組合

390. 從物羣中取其幾個或全數而作種種之排列,謂之**順列**.

從物羣中每次全取或取其中之若干所成之羣或選擇謂之**組合**.

由是若 a, b, c, d 四文字中,每次取其兩個作順列,則共有十二種,卽

$$ab,\quad ac,\quad ad,\quad bc,\quad bd,\quad cd,$$
$$ba,\quad ca,\quad da,\quad cb,\quad db,\quad dc.$$

上列各爲二文字不同之排列.

若 a, b, c, d 四文字中,每次取其二個作組合,則共有六種,卽

$$ab,\quad ac,\quad ad,\quad bc,\quad bd,\quad cd.$$

上列各爲二文字不同之選擇.

由上觀之,可知若僅論每次選擇所含之物爲若干

則成組合,而更須論及每種排列物之次序者則成順列. 例如,設由四文字a, b, c, d中,選擇其三,如abc,此簡單之組合得如下式排列.

$$abc, \quad acb, \quad bca, \quad bac, \quad cab, \quad cba.$$

故得六種不同之順列.

391. 基本原則 在討論本章普通命題之前,下之重要應注意之.

設作第一事有m個方法,而(當此事可以其中任一法爲之)作第二事有n種方法,則合作二事之方法數共有$m\times n$個.

設第一事能以任一方法爲之,則第二事可以此方法與n個方法之任一方法相配合,由是合作此二事不論作第一事所用之一個以上之方法,皆能用n個方法爲之,故合作二事所有之n個方法,相當於作第一事之m個方法之每一個方法,故$m\times n$之積係代合作此二事所有方法之總數.

例題 假定有10隻汽船,往來於紐約,利佛浦間,某人乘船往來其間,問來回分乘不同之船共有幾種方法?

第一程有十法,其中每一法可作九種回來方法之

選擇(因此人不乘原船回轉),故來回兩程所有方法之數為10×9,或90.

此原則頗易推廣至含有二個以上演算之情形,而每一演算均可用所設之方法數作之.

例題 三旅客,抵一鎮,其客寓有四,若彼等分住各不同之客寓,問有幾種方法?

第一旅客可以選擇四家客寓,而在彼已選定任何一法後,則第二旅客可選擇三客寓,故首二人可有4×3個方法之選擇,其中任何一法選定後,第三旅客有2個方法選擇其客寓,因此所求方法之數為$4\times3\times2$,或24.

392. 在n異類物中,每次取r個順列數之法.

此與當排列中有n個不同之物,求其能置入r位方法之數相同.

n物中可任取其一置入第一位,故此順列之第一位有n個方法,既以其任一方法定第二位,則第二位可置入$n-1$個方法,且既置入第一位之每一方法能與置入第二位之每一方法配合,則首二位所能置入之方法有$n(n-1)$個.首二位既定,則第三位可置入$n-2$個方法,根據上述之理由,則三位所能置入方法之數共有$n(n-1)(n-2)$個.

依次行之,並注意凡置入每一新位恆得一新因數,且此因數之數不論在任何階段恆與置入之位數同.即r位所能置入方法之數等於

$$n(n-1)(n-2)\cdots \text{至 } r \text{ 個因數止.}$$

由此而知每一因數可從n取出一較置入此位之因數少一之數而成.因此第r個因數爲$n-(r-1)$,或$n-r+1$.

故由n物中每次取r之順列數爲

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

推論. 由n物每次全取之順列數爲

$$n(n-1)(n-2)\cdots \text{至 } n \text{ 個因數止.}$$

或

$$n(n-1)(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

此積通常用記號$\underline{|n}$表之,此讀如"階乘n."有時亦可用$n!$代$\underline{|n}$.

393. 以後凡由n物中每次取r個之順列數統以記號${}^nP_r$表之,故

$${}^nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

亦書

$${}^nP_n=\underline{|n}.$$

演算數字題時,宜注意記號${}^nP_r$之添數恆指所用公式中之因數之個數.

例題1. 四人合乘一有六座位之馬車,問其座位之選擇有幾種方法?

第一人可佔座之法有6,則第二人有5,第三人有4,而第四人有3,且既此諸方法之每一方法可與其他之每一方法配合,則所需之解答爲$6\times5\times4\times3$,或360.

例題2. 從1, 2, 3, …9九個數字中,取其六個數字作順列,問有若干種不同之方法?

現有9個不同之物而求其每次取出6個之順列數.

$\therefore$ 所求之結果$={}^9P_6$

$$={9}\times8\times7\times6\times5\times4=60480.$$

394. 求由n個異類物中每次取出r個組合之數.

令${}^nC_r$表所求組合之數.

則此諸組合之每一個含有一羣能排列成$\underline{|r}$個方法之r個異類物. [392款,推論.]

因此${}^nC_r\times\underline{|r}$等於由$n$物中每次取出$r$個排列之數.即

$${}^nC_r\times\underline{|r}={}^nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

$$\therefore\quad {}^nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

推論. 公式${}^nC_r$亦可書成不同之形,因設以$\underline{|n-r}$乘其分子及分母,得

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times\underline{|n-r}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}\text{.或 }\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}\cdots\cdots\cdots(2)$$

因 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times\underline{|n-r}=\underline{|n}$.

加上 ${}^nC_r$ 之兩式極便記憶,在求數字結果之情形時通用(1),若留代數形已足,則通用(2).

註. 設命公式(2)中之 $r=n$,卽有

$$ {}^nC_n=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\,\underline{|0}}=\frac{1}{\underline{|0}}.$$

但 ${}^nC_n=1$,故設公式中 $r=n$ 爲合理,則記號 $\underline{|0}$ 須視爲等於1.

例題. 從12本書籍中,問選出5本之方法有幾種?然須(1)常含一指定之書,(2)常棄一指定之書.

(1)既每一選擇包含此指定之書,則僅須從剩餘之11本書中選出4本.

因此方法之數 $={}^{n}C_4=\frac{11\times10\times9\times8}{1\times2\times3\times4}=330.$

(2)此指定之書既必棄去,則須從剩餘之11本書中選出5本.

因此方法之數 $={}^{n}C_5=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4\times5}=462.$

395. 由 n 物中每次取出 r 個組合之數等於由 n 物中每次取出 $n-r$ 個組合之數.

欲使從n物中選出每一羣成r物之組合,則剩餘之對應羣爲$n-r$物,卽,由n物每次取出r之組合數爲與由n物每次取出$n-r$之組合數同.

$$\therefore \quad {}^nC_r = {}^nC_{n-r}.$$

此結果常用以縮短算術之演算.

例題. 從14人中,挑選11人爲一隊,問有若干種不同之方法?

所需之數$={}^{14}C_{11}={}^{14}C_3=\dfrac{14\times13\times12}{1\times2\times3}=364.$

設應用公式${}^{14}C_{11}$則務須化爲分子分母各含11個因數之式始可.

396. 下列各題須注意在問題所需適當之選擇未決定之前,不宜應用順列之公式.

例題. 從7英人和4美人擬選出6人組織委員會,問其方法有若干種?須(1)此委員會恰含2美人,(2)至少有2美人.

(1)選出美人方法之數爲${}^4C_2$,而選出英人方法之數爲${}^7C_4$,第一羣之每一個能與第二羣之每一個配合,因此

所需方法之數$={}^4C_2\times{}^7C_4$

$$=\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\times\frac{\underline{|7}}{\underline{|4}\,\underline{|3}}=\frac{\underline{|7}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|3}}=210.$$

(2) 悉取一切適當之組合使成含2美人4英人,又3美人3英人,最後4美人2英人一切之羣.

此解答爲三結果之和,因此所需方法之數 $={}^4C_2\times{}^7C_4+{}^4C_3\times{}^7C_3+{}^4C_4\times{}^7C_2$.

$$=\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\times\frac{\underline{|7}}{\underline{|4}\,\underline{|3}}+\frac{\underline{|4}}{\underline{|3}}\times\frac{\underline{|7}}{\underline{|3}\,\underline{|4}}+1\times\frac{\underline{|7}}{\underline{|2}\,\underline{|5}}$$

$$=210+140+21=371.$$

本章僅須應用組合之適當公式,因所論者,並非委員會全體會員可能之排列.

例題2. 從7子音及4母音中,問取出每個包含3子音及2母音之字有若干?

選擇3子音之方法有 ${}^7C_3$,而選擇2母音之方法有 ${}^4C_2$,且旣第一羣之每一個能與第二羣之每一個配合,則聯合羣之數,各包含3子音及2母音者爲 ${}^7C_3\times{}^4C_2$.

再者,此諸羣各含有5字母,此可以排列成 $\underline{|5}$ 個方法,

因此, 所需之字數 $=\dfrac{\underline{|7}}{\underline{|3}\,\underline{|4}}\times\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\times\underline{|5}$

$$=5\times\underline{|7}=25200.$$

習題 XXXV. *a*.

1. 求 ${}^5P_4$, ${}^7P_6$, ${}^8C_5$, ${}^{25}C_{23}$ 之值.

2. 由英字 *Soldier* 中, 若 (1) 每次取 5 個, (2) 每次全取, 問共有若干種不同之排列?

3. 設 ${}^nC_3 : {}^{n-1}C_4 = 8 : 5$, 求 n 之值.

4. 一錢囊中, 有銀圓, 半銀圓, 夸脫, 弗羅林, 先令, 法郎, 銀角, 六便士及便士各一枚, 若每次任意取其四枚, 問有若干種不同之選擇?

5. 在 3000 與 4000 之間, 9, 3, 4, 6 四個數字, 可組成若干數目?

6. 英字 *volume* 中若使其元音祇居於任意偶數之地位, 問其排列之方法有若干?

7. 若 n 個不同物中, 每次取四個之順列數爲 $n-2$ 個不同物, 每次取三個之順列數之十四倍, 試求 n.

8. 從 5 個教員與 10 個學生中, 任選 3 個教員與 6 個學生合組一會委員, 問有若干人選不同之委員.

9. 設 ${}^{20}C_r = {}^{20}C_{r-10}$, 求 ${}^rC_{12}$, ${}^{18}C_r$.

10. 在二十六個字母中, 取五個互異之字母拼成一字, 其中二字母必須爲 a 及 c, 問有若干方法?

11. 從 21 子音與 5 母音中, 問可拼成若干個每字含 3 子音與 2 母音之字?

12. 戲院兩旁,各能容觀客5人,今有10客同時入座,但限定一邊所坐之二人與他邊所坐之一人不得移動,問有若干種不同之坐法?

397. 在前證之公式中,所指之物,皆視爲異類,在討論某幾組同類物情形之前,須先確然指明同類或異類二字之具何意義,當論及之物爲不相似,不同,異類時,則含有顯著異類物之意,此所以易於互相區別也.反之,所見之物爲相似而不能互相區別時,恒用名詞同類物表之.假如,在396款例題2,子音與母音可謂各含有一種公共特性之物羣,故在某種意義上此二種俱屬同類,但不能視爲同類物,蓋在每羣物中,尚各有其個性之存在,此則便於互相區別也.因此項所論之題之最後一段,每羣可視爲含有五種不相似物,故其中可有$\lfloor 5$個排列.[392款,推論.]

398. ***n*物中有一種爲*p*物,一種爲*q*物,又一種爲*r*物,餘皆爲不同類物,求其每次全取之順列數.**

假定n個文字中,a字有p個,b字有q個,c字有r個,餘皆爲不同類之字.

令x爲所求之順列數,設於其任一順列中,易p個a字爲p個與其他任何文字不同之異類文字,則此

單一順列,如不變動其餘任何文字之位置,當有$\underline{|p}$種新順列,因此設變動x種順列之每一種,則順列之全數應有$x\times\underline{|p}$種.

同樣,設易q個b字爲q個異類文字,則順列之全數應有$x\times\underline{|p}\times\underline{|q}$種.

同理,易r個c字爲r個異類文字,則最後順列之全數當爲$x\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}$.

然現在諸物皆不同,故有$\underline{|n}$種順列,因此

$$x\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}=\underline{|n}.$$

卽
$$x=\frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\ \underline{|q}\ \underline{|r}}.$$

此卽所求之順列數.

凡任何非完全不同之物之情形亦可同樣處理.

例題1. 從英字*assassination*中每次全取,問有若干種不同之順列法?

此英字共有13個字母,其中四個爲s,3個爲a,2個爲i,2個爲n,因此順列之全數

$$=\frac{\underline{|13}}{\underline{|4}\ \underline{|3}\ \underline{|2}\ \underline{|2}}$$

$$=13\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot3\cdot5$$

$$=1001\times10800=10810800.$$

例題2. 從數字1, 2, 3, 4, 3, 2, 1中,使其奇數恆在奇位,問可作成若干數目?

奇數1, 3, 3, 1能在其四奇位排列者有

$$\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\text{方法}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

偶數2, 4, 2能在其三偶位排列者有

$$\frac{\underline{|3}}{\underline{|2}}\text{方法}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)之每一方法能與(2)之每一方法配合.

因此所求之數$=\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\times\frac{\underline{|3}}{\underline{|2}}=6\times3=18.$

399. **n物中,若每物不拘其排列之次序如何,恆能重複一次,二次…直至r次,求其每次取r個之順列數.**

若排列中有n不同之物,而n物之每種得任意作種種之排列,則必須考慮r位所能置入方法之數.

第一位可置入n個方法,此既用任一方法置入後,則第二位亦可置入n個方法,因重覆用同一之物固亦無妨.故首二位能置入之方法有$n\times n$或n^2種.

第三位亦能置入n種方法,故首三位有n^3種方法.

準此類推,則在任何階段,n之指數恆與置入之位數同,故r位所能置入之方法數等於n^r.

例題. 獎品5件,分給兒童4人,若每童各有取得全數獎品之資格,問分配之法有若干種?

獎品中之任一件能用4法分配,而餘下獎品之任一件亦能用4法分配,因已得獎之童亦有獲得之可能由是獎品二件有4^2法分配之,獎品三件有4^3法分配之,餘仿此.故5件獎品共有4^5或1024種方法分配之.

400. n物中取其若干或取其全數,求選擇方法之總數.

每物有二種分配之方法,因其或被取出或被遺漏,且既分配任何一物之任一法可與分配其他各物之任一法配合,則分配n物方法之全數共有

$$2\times2\times2\times2\cdots\text{至}\,n\,\text{個因數}.$$

然其中全物遺漏之情形亦在內,故除去此情形,方法之總數實爲2^n-1.

此通名之爲n物之"組合總數".

例題 某人有6友,問邀其一人或一人以上赴宴者共有幾種方法?

從6友人須選出若干或全部,故選擇方法之數共有2^6-1或63種.

此結果亦可如下證明!

被邀之客有一人者,二人者,三人者…,故選擇之數

$$={}^6C_1+{}^6C_2+{}^6C_3+{}^6C_4+{}^6C_5+{}^6C_6$$

$$=6+15+20+15+6+1=63.$$

401. 求由n物中每次取r個組合中r之最大值.

既 ${}^nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots(r-1)r}$.

而 ${}^nC_{r-1}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots(r-1)}$.

$$\therefore\ {}^nC_r={}^nC_{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}.$$

其乘因數$\dfrac{n-r+1}{r}$可書如$\dfrac{n+1}{r}-1$,以示其必因r之增加而減少,因r逐次受納$1, 2, 3,\cdots$之值,故${}^nC_r$之值亦逐漸增大,直至$\dfrac{n+1}{r}-1$變成等於1或小於1.

令$\dfrac{n+1}{r}-1>1$,故$\dfrac{n+1}{r}>2$,卽,$\dfrac{n+1}{2}>r$.

欲合此不等式須選r之最大值.

(1)令n為偶數,而等於$2m$,則

$$\frac{n+1}{2}=\frac{2m+1}{2}=m+\frac{1}{2}.$$

不論r有如何之值以至連m在內,此恆大於r.因此命

$r=m=\frac{n}{2}$, 求得最大之組合數爲 ${}^nC_{\frac{n}{2}}$.

(2) 令 n 爲奇數, 而等於 $2m+1$, 則

$$\frac{n+1}{2}=\frac{2m+2}{2}=m+1,$$

不論 r 有如何之值, 以至連 m 在內, 此恒大於 r. 但若 $r=m+1$, 則此乘因數變成等於 1, 且

$${}^nC_{m+1}={}^nC_m, \text{ 即, } {}^nC_{\frac{n+1}{2}}={}^nC_{\frac{n-1}{2}},$$

故若每次取出之物爲 $\frac{n+1}{2}$ 或 $\frac{n-1}{2}$, 則此組合之數爲最大, 此二種情形之結果相同.

習 題 XXXV. *b*.

1. 下列三英字中, 求其各字母全取時之順列數.

(1) *irresistible*. (2) *phenomenon*. (3) *tittle-tattle*.

2. 用 2, 3, 4, 3, 3, 1, 2 七個數字能造成若干數目? 又 2, 3, 4, 3, 3, 0, 2 可造成若干數目?

3. 從英字 *Simoon* 之字母中, 使其母音子音相間, 問可拼成若干個不同之字?

4. 一電報機有 5 鍵, 而每鍵連空位在內有 4 個號位, 求此機可作各種不同信號之總數.

5. 有 n 物，分給 m 人，若不限定每人所得之物數，問分配之法有若干?

6. 代數式 $a^5 b^3 c^6$，若書成連乘式時，問有若干種不同之排列法?

7. 設有不同之書 3 卷，每卷有 4 册，今排於書架上，問有若干不同之排列法?

8. 6 人圍圓桌而坐，問有幾種坐法? 又男子 4 人女子 4 人，圍圓桌而坐，限定男子二人不得並坐，問有若干不同之坐法?

9. 今有字母 a, b, e, c, d, o 拼成一 4 字母之字，若其字母不妨重覆，問可拼成若干字?

10. 英字 *toulouse* 文字中，使子音佔第一位第四位第七位，其餘任便，問可拼成若干字?

11. 船中有水手八人，但其中一人只會划頭槳，又一人只會划尾槳，問共有若干種排列法?

12. 求證 ${}^{n+1}C_r = {}^nC_r + {}^nC_{r-1}$.

13. 設 ${}^{2n}C_3 : {}^nC_2 = 44 : 3$，求 n.

14. 字母 A, B, C, p, q, r，排列成字，其第一字母必須大楷，問共有若干種排列法?

15. 有 50 種不同之物，每次任取其 46，求組合之數.

16. 設 ${}^{18}C_r={}^{18}C_{r+2}$, 求 ${}^{r}C_n$.

17. 錢囊中有銀圓,半銀圓,夸脫,銀角,五分幣,二分幣及便士各一枚,若任意取一枚或一枚以上,問有若干種不同之方法可取?

第三十六章

或許率(適遇法)

402. 定義 設一事,其成功之次數爲a,其失敗之次數爲b.乃取其各爲同等之兩種次數,則其成功之適遇法爲$\frac{a}{a+b}$,其失敗之適遇法爲$\frac{b}{a+b}$.因此欲求一事成功之適遇法,可以幸運方面及不幸運方面之總次數除幸運方面之次數而得之.

例如:設航空獎券有獎額7個,空門25個,則持一獎券之人能獲獎之適遇爲$\frac{7}{32}$,而其不能獲獎之適遇爲$\frac{25}{32}$.

不言一事成功之適遇爲$\frac{a}{a+b}$,有時可謂於事有利之優勢率爲a比b,或於事無利之優勢率爲b比a

故如上獲獎之優勢率爲七比二十五,而失敗之優勢率爲二十五比七.

403. 適遇法之數學定義可如下顯之.

設一事能獲成功者爲a次,而遭失敗者爲b次,若兩種次數爲全同,則可確定其成功之適遇對其失敗之適遇爲$a:b$,由是設其成功之適遇代以ka,而k爲未定常量,則其失敗之適遇可以kb代之.

$\therefore$ 成功之適遇+失敗之適遇$=k(a+b)$.

今此事之成功或失敗既爲確實,則成功與失敗適遇之和亦必確實,故設相約取確實爲單位,即有

$$1=k(a+b)\text{ 或 }k=\frac{1}{a+b},$$

$\therefore$ 此事成功之適遇爲$\dfrac{a}{a+b}$,

而此事不能成功之適遇爲$\dfrac{b}{a+b}$.

推論. 設p爲一事成功之適遇法,則不能成功之適遇法爲$1-p$.

404. 402款之適遇法定義,若稍變其形式,有時甚覺有用,設c爲二種情形之總數,其發生之機會各爲同等,而其中a爲對此事有利者,則此事之成功適遇法爲$\dfrac{a}{c}$,而此事之不成功適遇法爲$1-\dfrac{a}{c}$.

例題1. (a)一囊中盛白球4個及黑球5個,若一人

隨意取出一球,問黑球之適遇爲幾何?

取出黑球之次數有5,因5黑球中之任一個皆能取出,同理,4白球中之任一個亦能取出.

因此取出一黑球之適遇爲$\frac{5}{4+5}$,或$\frac{5}{9}$.

(b) 假定此人隨意取出3球,問全爲黑球之失敗優勢率爲幾何?

取出3球之總次數爲${}^9C_3$,取出3黑球之總次數爲${}^5C_3$,故取出三黑球之適遇

$$=\frac{{}^5C_3}{{}^9C_3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{9\cdot8\cdot7}=\frac{5}{42}.$$

由是此事失敗之優勢率爲37比5.

例題2. 一囊中盛紅球5個白球4個及黑球5個,隨意取出6球,間一次取出3白球,2黑球及1紅球之適遇爲幾何?

4白球每次取3個之組合數爲$\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}$或4,同理5黑球每次取2個之組合數爲$\frac{5\cdot4}{1\cdot2}$或10,既白球4個組合之每個可與黑球10個組合之任一個同取,而所成之每個組合又可與5個紅球中之任一個同取,則三種組合之總數爲$4\cdot10\cdot5$或200.然全球數每次取其6之組合

數爲$\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$或3003,因此3白球,2黑球,1紅球每次所能取出之適遇爲$\frac{200}{3003}$

例題3. 一航空獎券,A有3股,其中獎額3而空門6,另一獎券B有1股,其中獎額1而空門2,求證A與B之成功適遇爲16比7.

A 1次可抽得3個奬,$\frac{3\cdot2}{1\cdot2}\times6$次可抽得2個奬及1個空門,$3\times\frac{6\cdot5}{1\cdot2}$次可抽得1個奬及2個空門,三數之和爲64,此爲$A$能獲奬之次數.又$A\frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}$或84次可抽得3條票子,故$A$之成功適遇爲$\frac{64}{84}=\frac{16}{21}$.

B之成功適遇顯爲$\frac{1}{3}$,故A之適遇:B之適遇$=\frac{16}{21}:\frac{1}{3}=16:7$.

或可如是述之:$A\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}$或20次可得一切之空門,其適遇爲$\frac{20}{84}$,或$\frac{5}{21}$,故$A$之成功適遇$=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$.

405. 觀所設之例可見適遇法簡易問題之解法,除

應用適遇法定義及順列組合之定律外,無需應用其他之學識.

習題 XXXVI.

1. 袋中有白球5隻,黑球7隻,紅球4隻,求取出(a)一白球,(b)二白球,(c)三白球,(d)每種各一隻,(e)一白球二黑球3紅球之適遇.

2. 設拋亂四銀幣,求其2正2反之適遇.

3. 設有二事,必有一事要實現,已知第一事之適遇爲第二事適遇之三分之二倍,求對於第二事成功之優勢率.

4. 十三人圍坐一圓桌,求證二指定之人並坐對全座失敗之優勢率爲5對1.

5. 有A, B, C,三事,其一必能實現,其二有實現的可能,其三或可實現,已知對A失敗方面之優勢率爲8:3,對B失敗方面之優勢率爲5:3,求對C失敗方面之優勢率.

6. A買入3個獎與9個空門之彩票三份,B買入2個獎與6個空門之彩票2份,試比較二人得獎之適遇.

7. 有書三部,第一部有3卷,第二部4卷,第三部1

卷,今隨手排於書架上,試證每部之卷數各在一起之適遇為$\frac{3}{140}$.

8. 試將 *chifton* 一字中之字母隨手列成一排,求其中二母音常在一起時之適遇.

9. 今有人以撲克為戲,試求四只"K"為一人同時取去之適遇.

10. 4大洋及3半洋隨手列成一排,試證二端皆為半洋之適遇為$\frac{1}{7}$.

雜　題　VI

1. 簡約$\frac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\frac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\frac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$.

2. 求下二式之平方根:

$$\text{(i)}\quad 4x^4+6x^3+\frac{89}{4}x^2+15x+25.$$

$$\text{(ii)}\quad x^8-\frac{2x^{11}}{a^3}+2a^4x^4+\frac{x^{14}}{a^6}-2ax^7+a^8.$$

3. 一三位數較其三位數字之和之25倍大9,而其中央數加3,恰等於其他二數之和,又其個位數加6,則等於其他二數字之和之倍,求此三位數.

4. 求$2\sqrt{\frac{3}{2}}+3\sqrt{\frac{2}{3}}-\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\quad\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}-\sqrt{24}\right)$

之值.

5. 解 (i) $2=\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$.

(ii) $\sqrt{3x-11}+\sqrt{3x}=\sqrt{12x-23}$.

6. 解 $\dfrac{2(x+a)}{x+b}+\dfrac{3(x+b)}{x+a}=5$.

7. 某等差級數之和爲45,又其首末二項爲1與17.求此級數之項數及公差.

8. 解 (i) $\dfrac{2x-3}{x-2}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{2x-1}{1-x}=0$.

(ii) $\sqrt{12x-5}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{27x-2}$.

9. 若 $a=\dfrac{1}{2}, x=\dfrac{1}{3}, n=9$, 求 $(a+x)^n$ 之展開式中第七項之值.

10. 某人在11點鐘由 A 起程,在11.30時過一四分之一的哩程石,而在12.48時遇一在12點鐘由 B 出發之人,第二人過離 A 爲四分之一哩的哩程石時恰爲1.40時.試求 A, B 間之距離及第二人之速度.

11. 設 $x>a$, 求證 $x^3+13a^2x>5ax^2+9a^3$.

12. 求 $44x^3+63x^2+x^6+27+6x^5+21x^4+54x$ 之立方根.

13. 解 (i) $x-y=3$, $x^2+xy+y^2=93$. (ii) $2x^2-9xy+9y^2=5$, $4x^2-10xy+11y^2=35$.

14. 求 $\dfrac{\sqrt{13-8\sqrt{-3}}(a^0+b^0)^{-2}}{ab}$ 及 $\dfrac{4-\sqrt{-3}}{16a^3b}$ 之比例中項.

15. 一帆船之速率較另一帆船快2哩.同時啓椗,各航其1680哩及1152哩之水程,速率較慢之船比另一船早一天達目的地,問較快之船每小時之速率爲若干哩?

16. 解　(i) $x^6=8+7x^3$

(ii) $x^{2n}+b^2=c^2-2bx^n$.

17. 二數之比爲2:7,若每數各加6,則所得之二數爲2:3之二乘比,求此二數.

18. 解　(i) $2bx^2-2b=4x+b^2x$.

(ii) $\dfrac{x+4}{2x+3}+\dfrac{3x+10}{2x}=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

(iii) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=\sqrt{4x+21}$.

(iv) $x^2+xy+y=137$.

$y^2+xy+x=205$.

19. 簡約 $\dfrac{\left[\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{-2}}{2}}-\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{-2}}{2}}\right]^2}{2-\sqrt{6}}$.

20. 有一矩形若長加2呎,闊減1呎,則其面積不變,

若長減2呎闊減4呎,則其面積較原形小$\frac{4}{7}$,求矩形各邊之長.

21. G.P.之首項較其第二項多1,而其無窮項之和為81,求此級數.

22. 全取英字*mississippi*作排列,求順列之數.

23. 解 (i) $\sqrt{x+2}+\sqrt{4x-1}-\sqrt{9x+7}=0$.

$$\text{(ii)}\quad \frac{2x-3}{\sqrt{x-2}+1}=2\sqrt{x-2}-1.$$

$$\text{(iii)}\quad \frac{2}{x-6+\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{x}-2}=\frac{4}{\sqrt{x}+3}.$$

$$\text{(iv)}\quad \sqrt[3]{x-a}-\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{b-a}.$$

24. 求$ax^2+bx+c=0$之一根為他根n倍之條件.

25. 若$x=3+i$,求$x^3-3x^2-8x+15$之值.

26. 已知$\log 648=2.81157$, $\log 864=2.93651$,求3及5之對數.

27. 兩火車以不同之速率,同駛36哩之路程,一車之速率較他車每小時快15哩,故其抵目的地之時間,亦早12分鐘,試求二車之速度.

28. 求$9x^4-2x^3y+\frac{163}{9}x^2y^2-2xy^3+9y^4$之平方根.

29. 應用對數,求 $\left\{\frac{15(0.318)^{\frac{1}{7}}}{16}\right\}^{\frac{1}{11}}$.

30. 簡約 $\frac{1+ax^{-1}}{a^{-1}x^{-1}}\times\frac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1}x-ax^{-1}}\div\frac{ax^{-1}}{x-a}$.

31. 以兵一隊,排成矩形之陣,其深爲其闊之二倍,若人數減少206人,則可列成一與原形同長之空心方陣,而其深爲每邊三行,求原有之人數.

32. 解　(i) $2x^2+xy+y^2=37$,

$$8x^2+4xy+y^2=73.$$

(ii) $27x^3+y^3=152$,

$$3x^2y+xy^2=40.$$

33. 簡約 $8^{\frac{4}{3}}+\sqrt[3]{(2\times4^{-5})}\div\sqrt[7]{2}\div4^{-\frac{3}{7}}-(32)^{-\frac{3}{5}}$.

34. 某人買入田一塊,其長寬之比爲8:5,其每畝所值銀數等於此田長之羅數(1方畝 =160方羅)而13倍其周圍之羅數又等於此田共值之銀數,求此田之長及寬.

35. 解　(i) $x^2+xy+3y^2=14+2\sqrt{2}$,

$$2x^2+xy+5y^2=24+2\sqrt{2}.$$

(ii.) $2x+3y=10,$

$$5x^2+x+y=4\frac{3}{4}.$$

36. 二數之和加上其積等於34，又其平方之和減去其和等於42，求二數.

37. 求下各式之展開式中之第六項:

(i) $(a+3b^{-2})^7$. (ii) $\left(2a-\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{c^{-2}}\right)^8$. (iii) $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sqrt{y}}{3}\right)^9$.

38. A 因 B 正變而因 C 反變，若 $B=\frac{3}{7}$, $C=\frac{9}{14}$，則 $A=\frac{2}{3}$. 今 $A=\sqrt{48}$, $C=\sqrt{75}$，求 B 之值.

39. 解 (i) $\sqrt{x+12}+\sqrt[4]{x+12}=6.$

(ii) $x^2+y\sqrt{xy}=9,$

$$y^2+x\sqrt{xy}=18.$$

40. 試作一方程式，使其二根為已知方程式 $x^2-px+q=0$ 中二根之等差中項與調和中項.

第三十七章

二項式定理

406. 用普通之乘法可證明

$$(a+b)(a+c)(a+d)(a+e)$$
$$=a^4+(b+c+d+e)a^3+(bc+bd+be+cd+ce+de)a^2$$
$$+(bcd+bce+bde+cde)a+bcde \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但此結果亦可由視察書出，因完全積包含各部分積及由四因數各取其一個文字與其餘四文字相乘而成之和，由檢查所成各部分之積，可知

(1) a^4 項爲由各因數中取出文字 a 而成.

(2) 含 a^3 之項爲由任何三文字中取出文字 a 而成，而文字 b, c, d, e 之一文字可由其餘之因數中取出.

(3) 含 a^2 之項爲由任何三因數中取出文字 a 而成，而文字 b, c, d, e 之二文字可由其餘之因數中取出.

(4) 含 a 之項爲由任何一因數中取出文字 a 而成，而文字 b, c, d, e 之三文字可由其餘之因數中取出.

(5) 無 a 之項爲 b, c, d, e 全數文字之積.

例題. 求 $(a-2)(a+3)(a-5)(a+9)$.

積

$$=a^4+(-2+3-5+9)a^3+(-6+10-18-15+27-45)a^2$$
$$+(30-54+90-135)a+270.$$

$$=a^4+5a^3-47a^2-69a+270.$$

407. 設在前款之方程式(1)中,假定 $c=d=e=b$,則得

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

今用同一之方法證明一名謂二項式定理之公式,應用此定理,則任何俱有 $a+b$ 形之二項式能達到任何指定之正整數冪.

408. 若 n 爲正整數,求 $(a+b)^n$ 之展開式之法.

討論次式

$$(a+b)(a+c)(a+d)\cdots(a+k).$$

因數之個數爲 n.

此式之展開式爲 n 個因數, $a+b, a+c, a+d, \cdots a+k$ 之連乘積,而展開式之每項皆爲 n 次元,其積爲由 n 個因數中各取一文字與 n 文字相乘而成.

a 之最高冪爲 a^n,此爲由 n 個因數中各取文字 a 而成.

含 a^{n-1} 之項爲由任何 $n-1$ 個因數中取出文字 a 及

由餘下之因數中取出文字$b, c, d, \cdots k$中之一字而成.由是最後之積中a^{n-1}之係數爲$b, c, d, \cdots k$文字之和,以S_1表之.

含a^{n-2}之項爲由任何$n-2$個因數中取出文字a及由餘下之二因數中取出文字$b, c, d, \cdots k$中之二字而成.由是最後之積中a^{n-2}之係數爲文字$b, c, d, \cdots k$每次取出二字之積之和,以S_2表之.

通例,含a^{n-r}之項爲由任何$n-r$個因數中取出文字a及由餘下之r因數中取出文字$b, c, d, \cdots k$中之r字而成,由是最後之積中a^{n-r}之係數爲文字$b, c, d, \cdots k$,每次取出r字之積之和,以S_r表之.

連乘積之末項爲$bcd\cdots k$,以S_n表之.

因此 $(a+b)(a+c)(a+d)\cdots(a+k)$

$$=a^n+S_1a^{n-1}+S_2a^{n-2}+\cdots+S_ra^{n-r}+\cdots+S_{n-1}a+S_n.$$

S_1之項數爲n, S_2之項數爲與由n物中每次取出二個組合數同,即${}^nC_2$, S_3之項數爲${}^nC_3$,餘仿此.

今假定$c, d, \cdots k$各等於b,則S_1變成${}^nC_1b$, S_2變成${}^nC_2b^2$, S_3變成${}^nC_3b^3$.餘仿此,由是

$$(a+b)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}b+{}^nC_2a^{n-2}b^2+{}^nC_3a^{n-3}b^3+\cdots+{}^nC_nb^n$$

代入${}^nC_1$, ${}^nC_2$, $\cdots$卽得

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\cdots+b^n.$$

此級數包含$n+1$項.

此卽二項式定理,以右邊之式稱爲$(a+b)^n$之展開式.

409. $(a+b)^n$展開式中之諸係數如以記號${}^nC_1$, ${}^nC_2$, ${}^nC_3,\cdots{}^nC_n$表示較爲便利,然有時更可略去n以簡短之,而直書爲C_1, C_2, $C_3,\cdots C_n$. 應用此記數法卽有

$$(a+b)^n=a^n+C_1a^{n-1}b+C_2a^{n-2}b^2+C_3a^{n-3}b^3+\cdots+C_nb^n.$$

設書$-b$代b, 卽得

$$(a-b)^n=a^n+C_1\,a^{n-1}(-b)+C_2a^{n-2}(-b)^2$$

$$+C_3a^{n-3}(-b)^3+\cdots+C_n(-b)^n$$

$$=a^n-C_1a^{n-1}b+C_2a^{n-2}b^2-C_3a^{n-3}b^3+\cdots+(-1)^nC_nb^n.$$

由是$(a+b)^n$及$(a-b)^n$之展開式之諸項在數目上相同, 然$(a-b)^n$之項數爲正負相間, 且末項之爲正或爲負須視n爲偶數或奇數而定.

例題1. 求$(a+y)^6$之展開式.

依公式, 此展開式

$$=a^6+{}^6C_1a^5y+{}^6C_2a^4y^2+{}^6C_3a^3y^3+{}^6C_4a^2y^4+{}^6C_5ay^5+{}^6C_6y^6$$

$=a^6+6a^5y+15a^4y^2+20a^3y^3+15a^2y^4+6ay^5+y^6$, 此係依 ${}^6C_1, {}^6C_2, {}^6C_3, \cdots$ 之值計出.

例題2. 求 $(a-2x)^7$ 之展開式.

$(a-2x)^7=a^7-{}^7C_1a^6(2x)+{}^7C_2a^5(2x)^2-{}^7C_3a^4(2x)^3+\cdots$ 至8項止.

今計算係數至 ${}^7C_3$ 止, ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$, 須牢記之, 其餘可直書出, 因 ${}^7C_4={}^7C_3$, ${}^7C_5={}^7C_2$, 餘仿此, 因此

$$(a-2x)^7=a^7-7a^6(2x)+\frac{7\cdot6}{1\cdot2}a^5(2x)^2-\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}a^4(2x)^3+\cdots$$

$$=a^7-7a^6(2x)+21a^5(2x)^2-35a^4(2x)^3+35^3(2x)^4$$

$$-21a^2(2x)^5+7a(2x)^6-(2x)^7$$

$$=a^7-14a^6x+84a^5x^2-280a^4x^3+560a^3x^4-672a^2x^5$$

$$+448ax^6-128x^7.$$

410. 第 $(r+1)$ 項或公項 $(a+b)^n$ 之展開式第二項之係數爲 ${}^nC_1$, 第三項之係數爲 ${}^nC_2$, 第四項之係數爲 ${}^nC_3$, 餘類推, 故二項展開式中各項之添數恆較其所指之項數少一, 因此 ${}^nC_r$ 爲第 $(r+1)$ 項之係數, 此名爲公項. 因與 r 以不同之數值, 則任一係數均可由 ${}^nC_r$ 求得, 且與 a 及 b 以適當之指數, 則可得任何指定之項. 由是第 $(r+1)$ 項可書如

$$^nC_r a^{n-r} b^r, \text{或} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r^*}a^{n-r}b^r.$$

此公式應用於任何特別之情形時應注意<u>b之指數為與c之添數同,而a及b之指數之和為n.</u>

例題1. 求$(a+2x^3)^{17}$之第五項.

今$(r+1)=5$,故

$$\text{所求之項}={}^{17}C_4a^{13}(2x^3)^4$$

$$=\frac{17\cdot16\cdot15\cdot14}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\times16a^{13}x^{12}$$

$$=38080a^{13}x^{12}.$$

例題2. 求$(3-a)^{15}$之第十四項.

今$r+1=14$,故

$$\text{所求之項}={}^{15}C_{13}(3)^2(-a)^{13}$$

$$={}^{15}C_2\times(-9a^{13})\qquad\text{[395款]}$$

$$=-945a^{13}.$$

* 見392款,推論.

411. 二項式定理之最簡形 二項式定理之最簡便之形式為$(1+x)^n$之展開式.此可在408款之普通公式中以1代a及以x代b而得.由是

$$(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots+{}^nC_rx^r+\cdots+{}^nC_nx^n$$

$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots+x^n,$$

其公項爲 $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}{}^nx.$

412. 二項式定理恆可引入首項爲一之情形.

$(a+b)^n=\left\{a\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\right\}=a^n(1+c)^n$, 其中 $c=\dfrac{b}{a}$.

例題. 求在 $(x^2-2x)^{10}$ 之展開式中 x^{16} 之係數.

即有 $$(x^2-2x)^{10}=x^{20}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{10}.$$

既 x^{20} 乘 $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$ 之展開式中之各項,則須求此展開式中含 $\dfrac{1}{x^4}$ 項之係數.

因此所求之係數 $={}^{10}C_4(-2)^4$

$$=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\times 16=3360.$$

數學歸納法之證明

413. 依普通之乘法,可得下之恆等式.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$

任選其一而重書之,以顯示指數與係數之組成定律,即有

$$(a+b)^4=a^4+\frac{4}{1}a^{4-1}b+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}a^{4-2}b^2+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}a^{4-3}b^3$$

$$+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^0b^4. \qquad \text{(216 款)}$$

設此等組成定律亦適用於$(a+b)^n$,而n為任何正整數,則

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

以$(a+b)$乘假設恒等式之每邊,並集合諸項,即得

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+(n+1)a^nb+\frac{n(n+1)}{1\cdot2}a^{n-1}b^2$$

$$+\frac{n(n+1)(n-1)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-2}b^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

觀每一例,可見(1)之n為以(2)之$(n+1)$所代而成.因此設此定理適用於n之任何之值,則於$n+1$之值亦必適合,若n連續等於2, 3, 4,則此定理恒合理,此已由乘法證明,因此當$n=5$,餘無窮類推時恒合理,故此定理可適用於n之一切正整數.

414. 在$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\cdots$展開式中,知在任何項中

(1) 二項式第二文字b之指數恆較自左而右之項數少1.

(2) 指數之和爲n.

(3) 係數上分母之末因數爲與二項式第二文字b之指數同.

(4) 係數上分子之末因數爲二項式第一文字指數多1之數.

因此$(a+b)^n$之第$(r+1)$項或公項爲

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}a^{n-r}b^r.$$

例題. 求$(2a+b)^{10}$展開式中之第六項.

此處$n=10$,而$r+1=6$.

即有$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(2a)^5b^5=\frac{3\cdot 2\cdot 7\cdot 6}{1}(2a)^5b^5$

$$=252(2)^5a^5b^5=8064a^5b^5.$$

註. 學者應注意係數之分子與分母含有同數之因數

習題 XXXVII. *a*.

展開下之二項式:

1. $(x+2)^4$.
2. $(x+3)^5$,
3. $(a+x)^7$.
4. $(a-x)^5$.
5. $(1-2y)^5$.
6. $\left(a-\frac{3}{b}\right)^7$.
7. $\left(a-\frac{x}{2}\right)^6$.
8. $\left(2x+\frac{y}{2}\right)^4$.
9. $\left(ax+\frac{y}{a}\right)^9$.

書下各式成最簡形:

10. $(1+x)^{12}$ 之第 4 項.
11. $(2-y)^8$ 之第 6 項.
12. $(a-5b)^7$ 之第 5 項.
13. $(2x-1)^{17}$ 之第 15 項.
14. $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{10}$ 之第7項.
15. $\left(3x+\frac{a}{2}\right)^9$ 之第 6 項.
16. 求 $(x-\sqrt{3})^4+(x+\sqrt{3})^4$ 之值.
17. 展開 $(\sqrt{1-x^2}+1)^5-(\sqrt{1-x^2}-1)^5$.
18. 求 $(x^2+2x)^{10}$ 中 x^{12} 之係數.
19. 求 $\left(x^2-\frac{a}{2x}\right)^{14}$ 中 x 之係數.
20. 求 $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$ 中無 x 之項.

21. 求$\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2}{x^3}\right)^{15}$中$x^{-20}$之係數.

415. 等係數 在$(1+x)^n$展開式中,與首項末項距離相等之項之係數相等.

距首項第$(r+1)$項之係數爲${}^nC_r$.

距末項第$(r+1)$項之前有$n+1-(r+1)$或$n-r$項,故由首項計之,則爲第$(n-r+1)$項而其係數爲${}^nC_{n-r}$,此等於${}^nC_r$已證明於[395款,] 此命題乃得解之.

416. 最大係數 求在$(1+x)^n$展開式中之最大係數.

$(1+x)^n$公項之係數爲${}^nC_r$,並僅須求與r以如何之值此係數爲最大.

依401款,若n爲偶數,則最大係數爲${}^nC_{\frac{n}{2}}$,若n爲奇數,則最大係數爲${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$,或${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$,此等係數皆相等.

417. 最大項 求在$(a+b)^n$中之最大項.

卽有 $$(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n.$$

故.既a^n乘$\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$中之各項,則在後之展開式中卽能求其最大項.

令第r項及第$(r+1)$項爲任何兩連續項,第$(r+1)$項

可以$\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{b}{a}$,即以$\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{b}{a}$乘第$r$項而得.[410款]

因數$\frac{n+1}{r}-1$之值因r之增大而減小,因此第$(r+1)$項非至$\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{b}{a}$變成等於1或小於1恆不大於第$r$項.

令$\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{b}{a}>1$,從而$\frac{n+1}{r}-1>\frac{a}{b}$.

即 $$\frac{n+1}{r}>\frac{a}{b}+1,\text{或}\ \frac{(n+1)b}{a+b}>r\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設$\frac{(n+1)b}{a+b}$爲一整數,以p表之,則設$r=p$,此乘因數變成1,而第$(p+1)$項等於第p項,此兩項皆大於其他任何之項.

設$\frac{(n+1)b}{a+b}$不爲整數,以q表其整數部,則與(1)符合之r之最大值爲q,因此第$(q+1)$項爲最大項.

現在旣論在數目上之最大項,而$(a-b)^n$之計算亦同.故在任何數字題中無需顧及二項式第二項之符號,又演習各題時恆以不用普通公式爲佳.

例題. 若x之值爲$\frac{1}{3}$,求$(1+4x)^8$展開式中之各大項.

以T_r及T_{r+1}各表第r項及第$(r+1)$項,則

$$T_{r+1}=\frac{8-r+1}{r}\cdot 4x\times T_r=\frac{9-r}{r}\times\frac{4}{3}\times T_r.$$

因此 $T_{r+1}>T_r$,從而 $\frac{9-r}{r}\times\frac{4}{3}>1.$

卽 $36-4r>3r$, 或 $36>7r.$

欲合乎此式,則r之最大值爲5,因此最大項爲第六項,而其值

$$={}^8C_5\times\left(\frac{4}{3}\right)^5={}^8C_3\times\left(\frac{4}{3}\right)^5=\frac{57344}{243}.$$

418. 係數之和 求在$(1+x)^n$之展開式中諸係數之和.

在次之恒等式中

$$(1+x)^n=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots+C_nx^n.$$

命 $=1$, 由是

$$2^n=1+C_1+C_2+C_3+\cdots+C_n=\text{諸係數之和}$$

推論 $C_1+C_2+C_3+\cdots+C_n=2^n-1.$

卽,由n物中每次取若干或全取組合之總數爲2^n-1.

[見400款.]

419. 係數之和相等 於$(1+x)^n$之展開式中,諸奇數項之係數之和等於諸偶數項之係數之和之證法.

於恒等式

$$(1+x)^n=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots+C_nx^n \text{ 中,}$$

命 $x=-1$, 由是

$$0=1-C_1+C_2-C_3+C_4-C_5+\cdots,$$

$$\therefore\ 1+C_2+C_4+\cdots=C_1+C_3+C_5+\cdots.$$

420. 多項式之展開式 二項式定理亦可用以展開含有二項以上之式.

例題. 求 $(x^2+2x-1)^3$ 之展開式.

視 $2x-1$ 爲一單項, 則此展開式

$$=(x^2)^3+3(x^2)^2(2x-1)+3x^2(2x-1)^2+(2x-1)^3$$

$$=x^6+6x^5+9x^4-4x^3-9x^2+6x-1, \text{ 化簡後.}$$

421. 指數爲負數或分數之二項式定理 二項式定理,當指數不限於整數時,其詳細之討論,學者當於四十五章見之,其中有證明當 x 小於一, 此公式

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots$$

可適合於 n 之任何之值.

若 n 爲負數或分數, 則展開式中之項數爲無限, 然在若干特別情形中可任意書出若干項或可求得任何指定項之係數.

例題 1. 展開 $(1+x)^{-3}$ 至四項.

$$(1+x)^{-3}=1+(-3)x+\frac{(-3)(-3-1)}{1\cdot2}x^2$$

$$+\frac{(-3)(-3-1)(-3-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots$$

$$=1-3x+\frac{3\cdot4}{1\cdot2}x^2-\frac{3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots$$

$$=1-3x+6x^2-10x^3+\cdots.$$

例題2. 展開$(4+3x)^{\frac{3}{2}}$至四項.

$$(4+3x)^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=8\left(1+\frac{3x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=8\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{3x}{4}+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{1\cdot2}\left(\frac{3x}{4}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{3x}{4}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=8\left[1+\frac{3}{2}\cdot\frac{3x}{4}+\frac{3}{8}\cdot\frac{9x^2}{16}-\frac{1}{16}\cdot\frac{27x^3}{64}+\cdots\right]$$

$$=8+9x+\frac{27}{16}x^2-\frac{27}{128}x^3+\cdots.$$

422. 欲求公項,須用完全書出之公式

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r$$

因當n為分數或負數時,記號${}^nC_r$不適應用.

例題1. 求$(1+x)^{\frac{1}{2}}$之展開式中之公項.

$$\text{第}(r+1)\text{項}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-r+1\right)}{\underline{|r}}x^r$$

$$=\frac{1(-1)(-3)(-5)\cdots(-2r+3)}{2^r\underline{|r}}x^r$$

在分子中因數之數爲r,而其中$r-1$爲負量故,由此諸負因數中各取出-1,則上式可書如

$$(-1)^{r-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2r-3)}{2^r\underline{|r}}x^r$$

例題2. 求$(1-x)^{-3}$之展開式中之公項.

$$\text{第}(r+1)\text{項}=\frac{(-3)(-4)(-5)\cdots(-3-r+1)}{\underline{|r}}(-x)^r$$

$$=(-1)^r\frac{3\cdot4\cdot5\cdots(r+2)}{\underline{|r}}(-1)^r x^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{3\cdot4\cdot5\cdots(r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}x^r$$

由分子及分母中約去同類因數

$$=\frac{(x+1)(x+2)}{1\cdot2}x^r$$

423. 下之展開式應謹記之.

$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^r+\cdots.$

$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+(r+1)x^r+\cdots$

$$(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3\cdots+\frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot 2}x^r+\cdots.$$

424. 下題顯示二項式定理之重要應用.

例題. 求126至小數5位止之立方根.

$$(126)^{\frac{1}{3}}=(5^3+1)^{\frac{1}{3}}=5\left(1+\frac{1}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^6}+\frac{5}{81}\cdot\frac{1}{5^9}-\cdots\right)$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{5^7}-\cdots$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{10^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{2^5}{10^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{2^7}{10^7}-\cdots$$

$$=5+\frac{.04}{3}-\frac{.00032}{9}+\frac{.0000128}{81}-\cdots$$

$$=5+.013333\cdots-.000035\cdots+\cdots$$

$=5.01329$, 至小數五位.

習題 XXXVII. *b*.

求下之展開式中之最大項.

1. $(x+y)^{17}$, 當 $x=4$, $y=3$.
2. $(x-y)^{28}$, 當 $x=9$, $y=4$.
3. $(1+x)^4$, 當 $x=\frac{2}{3}$.
4. $(a-4b)^{15}$, 當 $a=12, b=2$.
5. $(7x+2y)^{30}$, 當 $x=8, y=14$.
6. $(2x+3)^n$, 當 $x=\frac{5}{2}, n=15$.

7. 已知$(1+x)^{25}$中第$2r+1$項與第$r+5$項之係數相等:試求r.

8. 求$(1+x)^n$中第16項及第26項之二係數相等時n之值.

9. 欲使$(1+x)^{3n}$中之第$r+3$項及第$2r-3$項之係數相等.試求r與n間之關係.

10. 在$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{2m}$中,求$x^m$之係數.

11. 試以最簡式列出$(1+x)^{2n}$之中心項.

12. 求$(x+y)^{16}$中諸係數之和.

13. 求$(3x+y)^9$中諸係數之和.

14. 在$(a+2x)^n$中求其起首第r項及末後第r項.

15. 展開$(a^2+2a+1)^3$及$(x^2-4x+2)^3$.

試將下列各式展開至第四項.

16. $(1+x)^{\frac{1}{3}}$.　　19. $(1+3x)^{-2}$.　　22. $(2+x)^{-3}$.

17. $(1+x)^{\frac{3}{4}}$.　　20. $(1-x^2)^{-3}$.　　23. $(1+2x)^{-\frac{1}{2}}$.

18. $(1+x)^{\frac{2}{5}}$.　　21. $(1-3x)^{-4}$.　　24. $(a-2x)^{-\frac{3}{2}}$.

書成最簡式.

25. $(1+x)^{-\frac{3}{2}}$中之第5項及第10項.

26. $(1+2x)^{\frac{11}{2}}$中之第3項及第11項.

27. $(1+x)^{-2}$中之第4項及第$r+1$項.

28. $(1-x)^{\frac{1}{2}}$中之第7項及第$r+1$項.

29. $(a-bx)^{-1}$及$(1-nx)^{\frac{1}{n}}$中之第$r+1$項.

求其數值至小數四位.

30. $\sqrt[3]{122}$.　31. $\sqrt[4]{620}$.　32. $\sqrt[5]{31}$.　33. $1\div\sqrt{99}$.

試求下四式之值

34. $(x+\sqrt{2})^4+(x-\sqrt{2})^4$.

35. $(\sqrt{x^2-a^2}+x)^5-(\sqrt{x^2-a^2}-x)^5$.

36. $(\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6$.

37. $(2-\sqrt{1-x})^6+(2+\sqrt{1-x})^6$.

38. 求$\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{x}{a}\right)^{10}$中之中心項.

39. 求$\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^{14}$中之中心項.

40. 在$\left(x^2+\dfrac{3a}{x}\right)^{15}$中,求$x^{18}$之係數.

41. 在$(ax^4-bx)^9$中,求x^{18}之係數.

42. 在$\left(x^4-\dfrac{1}{x^3}\right)^{15}$中,求$x^{32}$及$x^{-17}$之係數.

43. 在$\left(3a-\dfrac{a^3}{6}\right)^9$中，求其中心二項.

書成最簡式

44. $(1+2x)^{-\frac{1}{2}}$之第8項.

45. $(1-2x^3)^{\frac{11}{2}}$之第11項.

46. $(1+3a^2)^{\frac{16}{8}}$之第10項.

47. $(3a-2b)^{-1}$之第5項.

48. $(1-x)^{-2}$之第$r+1$項.

49. $(1-x)^{-4}$之第$r+1$項.

50. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$之第$r+1$項

51. $(1+x)^{\frac{11}{3}}$之第$r+1$項.

52. $(2^{10}-2^7x)^{\frac{13}{2}}$之第14項.

53. $(3^8+6^4x)^{\frac{11}{4}}$之第7項.

第三十八章

對數

425. 定義. 作某數之若干乘方使等於他一數,則指若干乘方之指數謂之他一數以某數爲底之對數.由是設$a^x=N$,則x謂之N以a爲底之對數.

例題. (1) 既$3^4=81$,則81之3底對數爲4.

(2) 既$10^1=10, 10^2=100, 10^3=1000, \cdots$

則自然數$1, 2, 3, \cdots$各爲$10, 100, 1000, \cdots$之10底對數.

426. N之a底對數恆書如$\log_a N$,故下之方程式係屬同一之意義.

$$a^x=N,\ x=\log_a N.$$

例題. 求$32\sqrt[5]{4}$之$2\sqrt{2}$底對數.

令x爲所求之對數,則依定義,

$$(2\sqrt{2})^x=32\sqrt[5]{4},$$

$$\therefore\ (2\cdot 2^{\frac{1}{2}})^x=2^5\cdot 2^{\frac{2}{5}};$$

$$2^{\frac{3}{2}x}=2^{5+\frac{2}{5}},$$

因此,使指數相等,
$$\frac{3}{2}x=\frac{27}{5},$$

$$\therefore\ x=\frac{18}{5}=3.6.$$

427. 若應用對數之特殊方法,則表底之添數恆從省.由是在算術計算中若其底為10,則通常書 $\log 2$, $\log 3,\cdots$ 以代 $\log_{10} 2$, $\log_{10} 3,\cdots$.

底為10之對數稱為常用對數,此法係勃列喀氏所首創,而於1615年始行輸入,勃氏者,與對數發明家訥坡爾氏同代人也.

對數之性質

428. 一之對數. 1之對數為0.

因無論 a 之值為何,恆得 $a^0=1$,故不論對數之底如何,恆得 $\log 1=0$.

429. 底之對數. 底之對數其本身恆為1.

因 $a^1=a$,故知 $\log_a a=1$.

430. 零之對數. 0之對數為負無窮,在任何方法中其底恆大於一.

因
$$a^{-\infty}=\frac{1}{a^{\infty}}=0.$$

又既 $a^{+\infty}=\infty$,則 $+\infty$ 之對數為 $+\infty$.

431. 積之對數. 積之對數爲其各因數之對數之和.

令 MN 爲共積, 令 a 爲此法之底, 並假定

$$x=\log_a M, \qquad y=\log_a N.$$

故 $$a^x=M, \qquad a^y=N.$$

由是 MN 之積 $=a^x\times a^y=a^{x+y}$.

於是, 依定義, $\log_a MN=x+y=\log_a M+\log_a N$.

同樣, $\log_a MNP=\log_a M+\log_a N+\log_a P$,

不論因數有若干, 餘均可類推.

例題. $\log 42=\log(2\times3\times7)=\log 2+\log 3+\log 7$.

432. 商之對數. 商之對數爲被除數對數與除數對數之代數差.

令 $\dfrac{M}{N}$ 爲分數, 並假定

$$x=\log_a M, \qquad y=\log_a N,$$

故 $$a^x=M, \qquad a^y=N.$$

由是此分數 $$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}.$$

於是, 依定義. $$\log_a\frac{M}{N}=x-y=\log_a M-\log_a N.$$

例題. $\log\left(2\frac{1}{7}\right)=\log\frac{15}{7}=\log 15-\log 7$.

$$=\log(3\times5)-\log 7=\log 3+\log 5-\log 7.$$

433. 冪之對數. 某數任何整數冪或分數冪之對數為某數之對數與其冪指數之積.

令 $\log_a(M^p)$ 爲所求之對數,並假定

$$x=\log_a M, \text{故 } a^x=M.$$

則 $$M^p=(a^x)^p=a^{px}.$$

於是,依定義, $$\log_a(M^p)=px.$$

即, $$\log_a(M^p)=p\log_a M.$$

同樣, $$\log_a(M^{\frac{1}{r}})=\frac{1}{r}\log_a M.$$

例題. 以 $\frac{\sqrt{a^3}}{c^5b^2}$ 之對數表如 $\log a, \log b, \log c$ 三項.

$$\log\frac{\sqrt{a^3}}{c^5b^2}=\log\frac{a^{\frac{3}{2}}}{c^5b^2}=\log^{\frac{3}{2}}-\log(c^5b^2)$$

$$=\frac{3}{2}\log a-(\log c^5+\log b^2)=\frac{3}{2}\log a-5\log c-2\log b.$$

434. 由方程式 $10^x=N$, 知常用對數通例不爲整數,且恆不爲正量.

例如, $3154>10^3$ 而 $<10^4$.

$\therefore \log 3154=3+$ 一分數.

再如 $.06>10^{-2}$ 而 $<10^{-1}$.

$\therefore \log .06=-2+$ 一分數.

負數無常用對數.

435. 定義. 對數之整數部分謂之指標,而其小數部分,若書爲正量,則謂之假數.

任何數之10底對數指標皆可由視察書出,茲特證之如下.

436. 大於一的任何數之對數指標. 整數部分爲二位數之某數顯然必介於10^1及10^2之間,整數部分若爲三位數,則此數必介於10^2及10^3之間餘類推,因此整數部分若爲n位數,則此數亦必介於10^{n-1}及10^n之間.

令N爲整數部分包含n位數之某數,則

$$N=10^{(n-1)+一分數},$$

$$\therefore \log N=(n-1)+一分數.$$

因此指標爲$n-1$,卽,大於一的某數之對數指標恆較其整數部分之數字少1,且爲正量.

437. 小數部之對數指標. 凡在小數點後有一個零之小數,如.0324,此必大於.01而小於.1,故介於10^{-2}及10^{-1}之間,某數之小數點後有二個零者,則雖大於10^{-3}亦必小於10^{-2},餘類推.因此小數點後有n個零之小數必介於$10^{-(n+1)}$及10^{-n}之間.

令D爲一前有n個零之小數,則

$$D=10^{-(n+1)+\text{一數分}},$$

$$\therefore\ \log D=-(n+1)+\text{一分數}.$$

因此其指標爲$-(n+1)$,卽,小數部分之對數指標較小數點後之零數多一,且爲負量.

438. 常用對數之利益. 普通所用以10爲底數之常用對數有兩大利益,現分述如下.

(1) 由已證得之結果可見指標能由視察書出,僅其假數,須由對數表中檢得之.

(2) 凡有效數字同之一切數之對數,其假數亦恆同.故在整數對數表中衹載假數已足.

此命題可進而證之.

439. 令N爲任何數,則雖以10之乘冪乘之或除之亦僅單變其小數點之位置而數字之次序個毫無變動也.故$N\times10^p$,及$N\div10^q$兩數,其有效數字與N之有效數字同,而p與q爲任何整數.

今　$\log(N\times10^p)=\log N+p\log 10=\log N+p$ ………(1)

又,　$\log(N\div10^q)=\log N-q\log 10=\log N-q$ ………(2)

(1)之$\log N$上加一整數,而由(2)之$\log N$上減一整數,卽,對數之假數或小數部仍然無變.

在本款及前三款中,假數恆視爲正.演算時爲欲利

用勃列喀氏方法恆使假數爲正.故當任何對數之假數已自表中檢出後,其指標之前得依已知之法則加以適當之符號.

440. 凡在負數對數之情形中,負號恆置於指標之上,而非置於其前,以示單指標爲負而非全式爲負.由是.0002之對數爲$\bar{4}.30103$,而等於$-4+.30103$,藉以與整數及小數俱爲負之-4.30103式區別.演算負數對數時欲使假數爲正,有時須用算術方法.例如,-3.69897之結果,因其全式爲負,故可由指標減1而於假數加1而變換之.由是

$$-3.69897=-4+(1-.69897)=\bar{4}.30103.$$

例題1. 求.0002432之對數.

由「七位對數表」中求得3859636爲$\log 2432$之假數(其小數點與指標均從略)並依437款,所設數之對數指標爲-4.

$$\therefore \log .0002432=\bar{4}.3859636.$$

此亦可書如$6.3859636-10$.

例題2. 求$\sqrt[5]{.00000165}$之值,已知$\log 165=2.2174839$,$\log 697424=5.8434968$.

令x表所求之值,則

$$\log x=\log(.00000165)^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\log(.00000165)=\frac{1}{5}(\bar{6}.2174839),$$

log .00000165 之假數與 *log* 165 之假數同,而其前之指標可依法則處理.

今 $$\frac{1}{5}(\bar{6}.2174839)=\frac{1}{5}(\overline{10}+4.2174839)=\bar{2}.8434968.$$

而 .8434968 爲 log 697424 之假數,因此 x 爲與諸數位數同之眞數,然在小數點後加一零. [437 款]

由是 $$x=.0697424.$$

441. 由 a 底對數變成 b 底對數 假定一切數之 a 底對數爲已知而載於表中.

令 N 爲所求任何數之 b 底對數.

令 $y=\log_b N$, 故 $b^y=N$.

$$\therefore\ \log_a(b^y)=\log_a N,$$

卽, $$y\log_a b=\log_a N,$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{\log_a b}\times\log_a N,$$

或 $$\log_b N=\frac{1}{\log_a b}\times\log_a N \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今既 N 及 b 爲已知,則 $\log_a N$ 與 $\log_a b$ 可由對數表中一索便知,由是 $\log_b N$ 可求得之.

因此欲變a底對數為b底對數可俱乘以$\frac{1}{\log_a b}$而得.

此為常量,且可由對數表中得之. 此名為對數率.

推論. 設命方程式(1)中之a代N,即得

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}\times\log_a a=\frac{1}{\log_a b},$$

$$\therefore\ \log_b a\times\log_a b=1.$$

442. 對數之算術計算. 下題說明利用對數以簡算術之計算.

例題 1. 已知 $\log 3=.4771213$,

$$\text{求}\ \log\left\{(2.7)^3\times(.81)^{\frac{4}{5}}\div(90)^{\frac{5}{4}}\right\}.$$

所求之值
$$=3\log\frac{27}{10}+\frac{4}{5}\log\frac{81}{100}-\frac{5}{4}\log 90$$

$$=3(\log 3^3-1)+\frac{4}{5}(\log 3^4-2)$$

$$-\frac{5}{4}(\log 3^2+1)$$

$$=\left(9+\frac{16}{5}-\frac{5}{2}\right)\log 3-\left(3+\frac{8}{5}+\frac{5}{4}\right)$$

$$=\frac{97}{10}\log 3-5\frac{17}{20}=4.6280766-5.85$$

$$=\bar{2}.7780766.$$

學者應注意5之對數及其冪之對數恆能由log2求得之.由是

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-\log 2.$$

例題2. 求875^{16}中之位數,已知$\log 2=.3010300$, $\log 7=.8450980$.

$$\log(875^{16})=16\log(7\times 125)=16(\log 7+3\log 5)$$

$$=16(\log 7\ .\ 3-\log 2)$$

$$=16\times 2.9420080=47.072128.$$

因此位數共有48. [436款]

習題 XXXVIII. *a*.

1. 若其底數爲$\sqrt[3]{2}$,試求$\sqrt{32}$及$.03125$之對數,又底數爲$.01$,試求100及$.00001$之對數.

2. 求$\log_4 512$, $\log_5 .0016$, $\log_{81}\frac{1}{27}$, $\log_{49} 343$之值.

3. 用25, 3, .02, 1, −4, 1.7, 1000爲底數時,其對數爲$\frac{1}{2}$, −2, −3, 5, −1, 2, $-\frac{2}{3}$,試求其眞數.

約簡下列二式

4. $\log\dfrac{(ab^2c^4)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[9]{a^{-3}b^3c^6}}$.　　5. $\log\left\{\left(\dfrac{x^4y^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^{-3}\div\left(\dfrac{x^{-2}y^3}{xy^{-1}}\right)^5\right\}$.

6. 查出 3174, 625.7, 3.502, .4, .374, .000135 及 23.22065 之指標.

7. log 37203 之假數爲 .5705780, 試求 .000037203 37.203, 及 372030000 之對數.

8. 7623 之對數爲 3.8821259, 求對數爲 .8821259, $\bar{6}.8821259$ 及 7.8821259 之眞數.

已知 $\log 2 = .3010300$, $\log 3 = .4771213$, $\log 7 = .8450980$, 求下列各題之值

9. $\log 729$.　　10. $\log 8400$.　　11. $\log .256$.

12. $\log 5.832$.　　13. $\log \sqrt[3]{392}$.　　14. $\log .304\dot{8}$.

15. 試證 $\log \frac{11}{15} + \log \frac{490}{297} - 2 \log \frac{7}{9} = \log 2$.

16. 求 $\log \frac{225}{224} - 2 \log \frac{20}{189} + \log \frac{512}{81}$ 至小數六位之值.

17. 約簡 $\log \{(10.8)^{\frac{1}{2}} \times (.24)^{\frac{5}{3}} \div (90)^{-2}\}$, 並求其數值.

18. 求 $\log (\sqrt[3]{126} \cdot \sqrt{108} \div \sqrt[6]{1008} \cdot \sqrt[3]{162})$ 之值.

19. 求 $\log \sqrt[5]{\frac{588 \times 768}{686 \times 972}}$.

20. 求 42^{42} 之位數.

21. 試證 $\left(\frac{81}{80}\right)^{1000}$ 大於 100000.

22. 在$\left(\frac{2}{3}\right)^{1000}$中，自小數點至數目字之間，共有幾個零(卽0)?

23. 已知$\log 398742 = 5.6006921$，求$\sqrt[5]{.01008}$之值.

24. 已知$\log 11 = 1.0413927$又$\log 500.977 = 2.6998179$，試求.00792之七次根.

25. 求$2\log\frac{75}{49} + \log\frac{135}{32} - 3\log\frac{45}{28}$.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

對數表之用法

443. 以上四位對數表中,凡一切整數自100至1000之常用對數之假數均行載入.

444. 有眞數求對數.

(a) 假定眞數包含三個數字,如56.7.

由首有N之縱行內先求前兩個有効數字,後依含此二數字之水平行而頂端有第三個數字之縱行內求假數.由是在有56之水平行上及頂端有7之縱行內求得7536.此爲對數之小數部分,其前應置以指標[436款],卽有

$$\log 56.7 = 1.7536.$$

(b) 在常用對數中,旣以10之整數冪乘眞數後,其假數仍不變,則在索求假數之前得加若干個零於含一字或二字之眞數上變成含三字之眞數,如log 56之假數得變爲560之假數,而對數所變者僅其指標耳.

由是 $$\log 560 = 2.7482,$$

$$\log 56 = 1.7482.$$

同理,log 7之假數得變爲log 700.

$$\log 700 = 2.8451,$$

$$\log \quad 7 = 0.8451.$$

(c) 假定有三個以上數字如62543之眞數求其對數,則既此數介於62500與62600之間,其對數必介於此二數之對數之間,先由首有N之縱行內尋出前二數字62,次依此二數字之水平行而頂端有5及6之縱行內求得假數.7959與.7966.其前復置以指標[436款],卽有

$$\log 62600 = 4.7966.$$

$$\log 62500 = 4.7959.$$

故當眞數由62500增至62600,則其對數增加.0007,今此數爲與由62500至62600相差$\frac{43}{100}$,因此設在62500之對數上加以.0007之$\frac{43}{100}$,則可得62543之近似校正數對數.

由是
$$\begin{aligned} \log 62543 &= 4.7959 \\ &.0003 \text{ 校正數} \\ \hline &= 4.7962 \end{aligned}$$

(d) 假定所求者爲小數如.0005243之對數,則眞數介於.0005240與.0005250之間,先由首有N之縱行內尋出前二數字52,次依此二數字之水平行而頂端有4與

5之縱行內求得假數.7193與.7202.其前復置以指標[437款],卽有

$$\log .0005250=\bar{4}.7202$$

$$\log .0005240=\bar{4}.7193$$

二數之差 $\overline{.0000010}$ $\overline{.0009}$

今.0005243比.0005240大.0000003.因此log.0005243等於log.0005240加上.0009之$\frac{.0000003}{.0000010}$或$\frac{3}{10}$(兩對數之差).

卽,
$$\log .0005243=\bar{4}.7193$$
$$\underline{\quad .0003}\text{(近似值)}$$
$$=\bar{4}.7196$$

實習上,負指標輒能加10而免去而於對數後書-10可矣.由是在上題中$\bar{4}.7196=6.7196-10$.

445. 同一行上其相隣二縱行內之二對數之差謂之**表差**.欲求62543之對數,可視對數之差爲與其對應眞數之差成比例,則其結果稍爲近似.因欲增加準確之程度,須用位數較多之對數表.

446. **求與對數對應之眞數.**

(a) 假定已知對數爲1.7466,求其對應眞數.

於對數表中,先查假數.7466,此可由首有8之縱行及N縱行有55之水平行內得之,故得數字558,並因

指標爲1,點開二位,得55.8.

(b) 假定已知對數爲3.7531,求其對應眞數.

於對數表中知無精確假數.7531,故取出其較大之數.7536,及較小之數.7528,並於整列時保留其指標.

由是,對應於3.7536之眞數爲5670

而對應於	3.7528	之眞數爲	5660
二對數之差	.0008		10

今對數3.7531比對數3.7528大.0003,而.0008之對數差對應於10之眞數差,故應於與對數3.7528對應之眞數上增加10之 $\frac{.0003}{.0008}$ 或 $\frac{3}{8}$.

由是對應於對數3.7531之眞數=5660

3.7 校正數

=5663.7

(c) 假定已知對數爲8.8225−10或 $\bar{2}.8225$,求其對應眞數.

先如上題取出假數.

對應於 $\bar{2}.8228$ 之眞數爲.0665 [437款]

對應於	$\bar{2}.8222$	之眞數爲	.0664
二數之差	.0006		.0001

今對數 $\bar{2}.8225$ 比對數 $\bar{2}.8222$ 大.0003,而.0006之對數

差對應於 .0001 之眞數差,故應於與對數 $\bar{2}.8222$ 對應之眞數上增加 .0001 之 $\frac{.0003}{.0006}$ 或 $\frac{3}{6}$.

由是對應於對數 $\bar{2}.8222 = .0664$

對應於對數 $\bar{2}.8225 = .0664$

$$\begin{array}{r} .00005 \text{ 校正數} \\ \hline = .06645 \end{array}$$

習題 XXXVIII. *b*.

試求下列各數之常用對數.

1. 50.
2. 203.
3. 6.73.
4. .341.
5. 0.045.
6. 5265.
7. 12345.
8. 0.010203.
9. 354.076.

試求下列諸常用對數之眞數.

10. 1.8156.
11. 2.1439.
12. 4.0022.
13. $\bar{1}.9131$.
14. $\bar{3}.8441$.
15. $7.4879-10$.

447. 餘對數. 某數倒數之對數,謂之此數之餘對數,常以 colog 表之.

由是, $\text{colog } 210 = \log \frac{1}{210} = \log 1 - \log 210$.

既 $\log 1 = 0$, 則先書成 $10-10$ 之形而後減 $\log 210$, 得

$$\text{colog } 210 = (10 - 2.3222) - 10 = 7.6778 - 10.$$

因有

法則. 欲求其數之餘對數,可由10減去此數之對數而書-10於其結果之後而得.

448. 餘對數之效用在能以加法代減法.

例題. 應用對數求$\dfrac{4.26}{7.42\times .058}$之值.

$$\log\frac{4.26}{7.42\times .058}=\log 4.26+\log\frac{1}{7.42}+\log\frac{1}{.058}$$

$$=\log 4.26+\operatorname{colog} 7.42+\operatorname{colog} .058$$

$$=.6294+(9.1296-10)+1.2366$$

$$=10.9956-10.$$

故與此對數對應之眞數爲9.9.

欲求colog .058,可如下演算

$$\operatorname{colog} .058=\log\frac{1}{.058}=10-[\log .058]-10\ [447\text{ 款}]$$

$$=10-[8.7634-10]-10[437\text{ 款.}]$$

$$=10-8.7634+10-10=1.2366.$$

449. **指數方程式** 方程式中,其指數爲未知量者,謂之指數方程式.此可應用對數之方法以求解答.

例題. 在方程式$15^x=28$中,求x之值.

由方程式之兩邊各求對數,即有

$$\log 15^x = \log 28.$$

$$\therefore\ x \log 15 = \log 28.$$

$$x = \frac{\log 28}{\log 15} = \frac{1.4472}{1.1761} = 1.2305+.$$

習題 XXXVIII. c.

試應用對數求下列之值

1. $\dfrac{24.051 \times .02456}{.006705 \times .0203}$.　　2*. $\dfrac{145.206 \times (-7.564)}{448.1 \times (-.2406)(-47.85)}$.

3. $(742.8024)^{\frac{2}{3}}$.　　4. $(-.0012045)^{\frac{3}{5}}$.

5. $\dfrac{\sqrt[3]{4.8} \times \sqrt[4]{.002} \times \sqrt[5]{442.6}}{(18)^2 \times .7^3 \times (3.4562)^{\frac{1}{2}}}$.

6. $\dfrac{\sqrt{9.8149} \times 80.80008}{\sqrt[7]{8283} \times (.0006412)^4}$.

7. $845692.1 \times .845856$.

8. $.00010101 \times (7117.1)^6$.

9. $\dfrac{(285.42)^{1.4} \times (5.672)^3}{\sqrt{20} \times \sqrt[3]{.02} \times \sqrt[3]{-124.89}}$.

10. $\sqrt[3]{\dfrac{12.876 \times \sqrt{.068} \times (.005157)^2}{29.029 \times (52.81)^4 \times (.4)^9}}$.

11. $3^{x+2} = 405$.　　12. $10^{5-3x} = 2^{7-2x}$.

---

*對數演算中所有之負量皆須視爲正量,當數字結果已求得後,以普通之乘法及除法決定其符號.

13. $12^{3x-4} \times 18^{7-2x} = 1458.$

14. $2^{x} \times 6^{x-2} = 5^{2x} \times 7^{1-x}.$

15. $2^{x+y} = 6^{y}, \ 3^{x} = 3 \times 2^{y+1}.$

16. $3^{1-x-y} = 4^{-y}, \ 2^{2x-1} = 3^{3y-x}.$

第三十九章

利息與年金

450. 單利之問題,如以算術法則解之實甚簡易,然複利之演算恆極繁複.茲特說明利用對數化簡算術之記算.銀100圓,一年之利息不計其利率而計1年1圓之利息亦甚便利.設此以r圓表之,而1年1圓之本利和以R圓表之,即得$R=1+r$.

451. **在複利中知本金,與利率,與年數,求本利和.**

令P表本金,R表一年間1圓之本利和,n表年數,I表利息,而M表本利和.

在第一年末P之本利和為PR,且,既以此作為第二年之本金,則第二年末之本利和為$PR\times R$或PR^2.同樣在第三年末之本利和為PR^3,依此類推.因此n年後之本利和為PR^n,即

$$M=PR^n,$$

故
$$I=P(R^n-1).$$

例題. 本金100圓,約定複利爲百分之5,按季併入本金,求一百年後之本利和. 已知

$\log 2=.3010300$, $\log 3=.4771213$, $\log 14.3906=1.15808$.

一季1圓之本利和爲$\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{100}\right)$或$\frac{81}{80}$圓.

期數爲400,設M爲本利和,卽有

$$M=100\left(\frac{81}{80}\right)^{400},$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \log M&=\log 100+400\,(\log 81-\log 80)\\&=2+400(4\log 3-1-3\log 2)\\&=2+400(.0053952)=4.15808,\end{aligned}$$

$$M=14390.6.$$

由是本利和爲14390.60圓.

註. 以單利計,本利和爲600圓.

452. 在複利中,知年限滿時所應支之金額,求現價.

令P爲已知金額,V爲現價,D爲應支之數,R爲一年間1圓之本利和,n爲年數.

既V爲在n年末本利和P之金額,而現在停付利息,卽有

$$P=VR^n,$$

$$\therefore\ V=PR^{-n},$$

而 $$D=P-V=P(1-R^{-n}).$$

年 金

453. **年金者,**爲在某種情形下按期支付一定金額之謂也.支款時,有每年一付者,有每年數付者,苟未另外注明,支付恆以年計.

454. **在複利中已知年金未付之年數,求其本利和.**

令 A 爲年金, R 爲一年1圓之本利和, n 爲年數, M 爲本利和.

第一年末 A 恰到期,此金額在其餘 $n-1$ 年末之本利和爲 AR^{n-1},第二年末另一 A 亦到期,而此金額在其餘 $n-2$ 年末之本利和爲 AR^{n-2},餘可類推.

$$\therefore\ M=AR^{n-1}+AR^{n-2}+\cdots+AR^2+AR+A$$

$$=A(1+R+R^2+\cdots\text{至}\ n\ \text{項止})=A\frac{R^n-1}{R-1}.$$

455. **在複利中已知年金繼續生利之年數,求其現價.**

令 A 爲年金, R 爲一年1圓之本利和, n 爲年數, V 爲所求之現價.

1年到期 A 之現價爲 AR^{-1},

2年到期 A 之現價爲 AR^{-2}.

3年到期A之現價爲AR^{-3},餘可類推. [452款.]

今V爲支付不同現價之金額.

$$\therefore\ V=AR^{-1}+AR^{-2}+AR^{-3}+\cdots\text{至}\,n\,\text{項},$$

$$=AR^{-1}\frac{1-R^{-n}}{1-R^{-1}}=A\frac{1-R^{-n}}{R-1}.$$

註. 此結果亦可如454款所示以R^n除M之值而得[451款.]

推論. 設令n爲無窮,則得永久年金爲現價,

$$V=\frac{A}{R-1}=\frac{A}{r}.$$

習 題 XXXIX.

1. 設有洋1000圓,於西曆1600年存入某銀行,年利率百分之4,複利計算,越300年,至西曆1900年提出,問此時取得之總數爲若干圓?已知

$$\log 104=2.0170333,\ \text{又}\ \log 12885.5=4.10999.$$

2. 設有一款,存於某銀行中,年利率爲百分之$5\frac{1}{2}$複利計算,今欲其總數積至百倍於其本金,問共需若干年數?已知$\log 1055=3.023$.

3. 設某種存款之年利率爲百分之8,複利計算,問現在需存入若干圓,則於20年後可取本利和洋共6000圓.已知

$$\log 2 = .30103,\ \log 3 = .47712,\ \text{又}\ \log 12875 = 4.10975.$$

4. 若每年存入洋100圓,年利率為百分之4,複利計算,至15年後,問其總數為若干圓?已知

$$\log 1.04 = .01703,\ \text{又}\ \log 180075 = 5.25545.$$

5. 今有年金1000圓,定期30年,年利率百分之5,複利計算,問其現價為何?

第四十章

極限值與消失分數

456. 玆爲使學者便利起見,引用在代數習讀上常見之用語及記數法.

457. 函數. 凡含有任何量如x之式,若其值須視x之值而定,則此式謂之x之函數,x之函數通常以$f(x)$, $f'(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ 諸記號表之,並讀如"x之f函數""x之f'函數"餘類此.

由是方程式$y=f(x)$可視爲若令x之值任意改變,則y之值連帶改變.反之,若令y之值任意改變,則x之值連帶改變.x及y兩量謂之變數,而更以自變數及因變數區別之.

自變數者,爲一可選擇而與以任何之值之量也.而其對應之因變數則須俟自變數之值明白後,方可決定其值.

458. 定義. 設$y=f(x)$,而當x接近a值時,則可使

函數$f(x)$與一固定量b相差極微,於是,當$x=a$時,b謂之y之極限.

例如,設S表級數$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$ n項之和,則$S=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

今S爲n之函數,故如增大$\frac{1}{2^{n-1}}$中n之值,可使其任意小,卽,當n爲無窮時,S之極限爲2,此可以書如$\lim\limits_{n=\infty} S=2$而表之.符號$\doteq$有時用作"近似極限"之意義.

459. 現將乘機略述關於依某公文字之冪序排列如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

之諸項級數之式,其中係數$a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$爲與$x$無關之有限量,而其項數可爲有限或爲無限.

故現將順便論及在某種情形下含有上式有限值之命題.

460. 極限值. 級數.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

之極限,若x無窮減小,則爲a_0.

(i) 假定級數包含之項數無窮.

令 b 爲係數 $a_1, a_2, a_3\cdots$ 之最大係數，而以 a_0+S 表所設之級數，則

$$S<bx+bx^2+bx^3+\cdots.$$

又設 $x<1$，卽有 $S<\frac{bx}{1-x}$.

由是若 x 無窮減小，則能令 S 爲任意小，因此所設級數之極限爲 a_0.

(ii) 設級數包含之項數有限，則 S 小於上述之情形，故此命題更爲合理.

461. 任何項之值. 在級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

中，令 x 爲極小，則隨意可使任何項與其後一切項數之和大小等. 又令 x 爲極大，則隨意可使任何項與其前一切項數之和大小等.

(i) 任何項，如 a_nx^n 與其後一切項數之和之比爲

$$\frac{a_nx^n}{a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}\cdots+} \text{ 或 } \frac{a_n}{a_{n+1}x+a_{n+2}x^2+\cdots}$$

若 x 爲無窮小，則可使分母任意小，卽，可使分數任意大.

(ii) 又，a_nx^n 項與其前一切項數之和之比爲

$$\frac{a_nx^n}{a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots}\text{ 或 }\frac{a_n}{a_{n-1}y+a_{n-2}y^2+\cdots}.$$

其中$y=\frac{1}{x}$.

當x爲無窮大,則y爲無窮小,因此如前之情形,能使分數爲任意大.

462. 前行之命題表如下之特別形式時極爲便利.

在次式中

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

所含有限之項數係依x之降冪序整列,故若令x爲極小,則隨意可使末項a_0與其前一切項數之和大小等.又令x爲極大,則隨意可使首項a_nx^n與其他一切項數之和大小等.

例題1. 令n爲極大,則隨意可使n^4-5n^3-7n+9之首項與其他一切項數之和等大. 卽,可使首項n^4與全式等值. 故若令n爲極大,則錯誤可任意使之減少.

例題2. 當(1) x爲無窮. (2) x爲零,求$\frac{3x^3-2x^2-4}{5x^3-4x+8}$之值.

(1) 在分子及分母中,除首項外,其他一切項可略而不計,因此

$$\lim_{x=\infty}\frac{3x^3-2x^2-4}{5x^3-4x+8}=\frac{3x^3}{5x^3}=\frac{3}{5}.$$

(2) 若x爲無窮小,除末項外,其他一切項可略而不計,因此其極限爲$\frac{-4}{8}$,或$-\frac{1}{2}$.

消失分數

463. 假定欲求次式之極限:

$$\frac{a^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}.$$

當$x=a$時.

設命$x=a+h$,則h將因x接近a值而近乎零值.

以$a+h$代x,

$$\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}=\frac{3ah+h^2}{2ah+h^2}=\frac{3a+h}{2a+h},$$

又若h爲無窮小,則此式之極限爲$\frac{3}{2}$.

然關於此問題倘有其他方法,因

$$\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}=\frac{(x-a)(x+2a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{x+2a}{x+a},$$

今設$x=a$,則此式之值如前爲$\frac{3}{2}$.

設在化簡所設之式$\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}$之前,令$x=a$,則此式

終變成$\frac{0}{0}$之形,而其值謂之不定[183 款.]又知此形之構成爲因分子分母間俱有因數$x-a$之故.今零因數既不能除之,故當x非絕對等於a時,因數$x-a$可以約去,並知x愈近a值,則分數之值愈近$\frac{3}{2}$,或依458款之定義,

當$x=a$時,$\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}$之極限爲$\frac{3}{2}$.

464. 消失分數. 設$f(x)$及$f'(x)$爲x之兩函數,其中若與x以特別值a則各等於零.而分數$\frac{f(x)}{f'(x)}$卽變成$\frac{0}{0}$,是謂之**消失分數**.

例題 1. 設$x=3$,求次式之極限.

$$\frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-5x-3}.$$

當$x=3$時,則此式變成不定形$\frac{0}{0}$,但若由分子分母中約去因數$x-3$,則此分數變成$\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$.當$x=3$時,此式卽變成$\frac{1}{4}$,故此爲所求之極限.

例題 2. 若$x=a$,則分數$\frac{\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+a}}{x-a}$變成$\frac{0}{0}$.

欲求其極限,可以與$\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+a}$共軛之不盡根乘分子及分母,此分數即變成

$$\frac{(3x-a)-(x+a)}{(x-a)(\sqrt{3x-a}+\sqrt{x+a})}, \text{或} \frac{2}{\sqrt{3x-a}+\sqrt{x+a}},$$

於是命$x=a$,求得其極限爲$\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

例題3. 若$x=1$,則分數$\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$變成$\frac{0}{0}$.

欲求其極限,命$x=1+h$,而以二項式定理展開之,由是此分數

$$=\frac{1-(1+h)^{\frac{1}{3}}}{1-(1+h)^{\frac{1}{5}}}=\frac{1-(1+\frac{1}{3}h-\frac{1}{9}h^2+\cdots)}{1-(1+\frac{1}{5}h-\frac{2}{25}h^2+\cdots)}=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}h-\cdots}{-\frac{1}{5}+\frac{2}{25}h-\cdots}.$$

今若$x=1$,則$h=0$,因此所求之極限爲$\frac{5}{3}$.

465. 現將討論在二次方程式解答中所發生之特點.

令方程式爲

$$ax^2+bx+c=0,$$

設$c=0$,則 $$ax^2+bx=0,$$

於是 $$x=0, \text{或} -\frac{b}{a}.$$

即,一根爲零,而其他一根爲有限.

設$b=0$,則二根爲等量而異號.

設$a=0$,則此方程式變成$bx+c=0$,在此情形中,顯見二次式僅得一根,卽,$-\frac{c}{b}$,然每一二次方程式必有二根,故欲討論其他一根之值,可如下例行之.

在原方程式中,書$\frac{1}{y}$代x並去分數,由是

$$cy^2+by+a=0$$

今若$a=0$,卽有

$$cy^2+by=0$$

此式之解答爲$y=0$,或$-\frac{b}{c}$,卽,$x=\infty$,或$-\frac{c}{b}$.

因此,在任何二次方程式中,設x^2之係數變成零,則其中一根變成無窮.

此式之結果在其他高等代數學中常能見之.特以此尙係次之完全陳說之簡式,故學者宜注意之.

在方程式$ax^2+bx+c=0$中,設a爲極小,則其一根爲極大,並因a之無窮減小,此根變成無窮大.在此情形中,因有限根接近$-\frac{c}{b}$,故爲其極限.

習 題 XL.

試求下列各式之極限:

(1) 設 $x=\infty$.

1. $\dfrac{(2x-3)(3-5x)}{7x^2-6x+4}$.

2. $\dfrac{(3x^2-1)^2}{x^4+9}$.

3. $\dfrac{(3+2x^3)(x-5)}{(4x^3-9)(1+x)}$.

(2) 設 $x=0$.

4. $\dfrac{(x-3)(2-5x)(3x+1)}{(2x-1)^3}$.

5. $\dfrac{1-x^2}{2x^2-1} \div \dfrac{1-x}{2x^2}$.

6. $\dfrac{(3-x)(x+5)(2-7x)}{(7x-1)(x+1)^3}$.

求下各式之極限.

7. $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, 設 $x=-1$.

8. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2a}+\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}$, 設 $x=2a$.

9. $\dfrac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}+(a-x)^{\frac{3}{2}}}{(a^3-x^3)^{\frac{1}{2}}+(a-x)^{\frac{1}{2}}}$, 設 $x=a$.

10. $\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$, 設 $x=0$.

第四十一章

收斂級數與發散級數

466. 級數爲諸連續項依有秩序之定律組成之式已如第三十四章解釋矣.設級數以某定項終結,是謂**有限級數**. 設項數爲無限,是謂**無限級數**.

在本章中,級數恆用次式表示:

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

467. 定義. 假定有一包含n項之級數,其和爲n之函數,設n無窮增加,則其和或致變成等於某有限極限,或又變成無窮大.

無限級數中,若其首n項之和,不論n爲如何大,不能在數目上大於某有限量,則謂之收斂.

無限級數中,若其首n項之和,令n爲無窮大,在數目上能使其大於任何有限量,則謂之發散.

收斂之檢驗

468. 當所設級數之首n項之和爲已知. 設所設

級數之首n項之和已能求出,當n爲無窮大時,並可檢查級數仍爲有限或變爲無限而定其爲收斂或發散.

例如級數

$$1+x+x^2+x^3+\cdots\text{之首}n\text{項之和爲}\ \frac{1-x^n}{1-x}.$$

設x在數目上小於1,則其和接近於有限極限$\dfrac{1}{1-x}$,故此級數爲收斂.

設x在數目上大於1,則首n項之和爲$\dfrac{x^n-1}{x-1}$,又令n爲極大,則能使其大於任何有限量,由是此級數爲發散.

設$x=1$,則其首n項之和爲n,故此級數爲發散.

設$x=-1$,則此級數變成

$$1-1+1-1+1-1+\cdots.$$

偶數項數之和爲零,而奇數項數之和爲1,由是其和搖動於0值與1值之間,故此級數屬於所謂搖動收斂級數或週期收斂級數之一種.

469. 當所設級數之首n項之和爲未知. 尚有若干情形迄無法求出級數之首n項之和,故現在進而

研究能檢出所設之級數爲收斂或發散而與其總和無關之法則.

470. 第一步檢驗. 無限級數中,設諸項正負相間,而其各項在數目上小於前項,則此級數爲收斂級數.

令次式表此級數:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6+\cdots$$

其中 $$u_1>u_2>u_3>u_4>u_5\cdots$$

所設之級數更可書成下之各式:

$$(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-(u_6-u_7)-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)知任何若干項數之和爲正量,又由(2)知任何若干項數之和爲小於 u_1,此級數故爲收斂.

例如,在級數

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots 中$$

諸項爲正負相間,且各項在數目上小於前項,故此級數爲收斂.

471. 第二步檢驗. 無限級數中,設諸項俱爲同號,而其各項大於某有限量(不論其小如何),則此級數爲發散級數.

因設各項大於某有限量a,則首n項之和大於na,且令n爲極大,可使其大於任何有限量.

472. 在未研究收斂級數及發散級數之檢查法之前,先附加重要原則二,以作公理.

I. 若由諸項中,加上或移去任何有限之項數,則收斂仍爲收斂,發散仍爲發散,因此諸項之和爲有限量故也.

II. 設一切正項之級數爲收斂,則當諸項有若干或完全爲負時,此級數亦爲收斂.因當一切項爲同號時,其和顯爲最大.

苟未述及反面,則一切項皆假定爲正.

473. **第三步檢驗.** 設無限級數之各項,由某定項之前或後,與其前項之比在數目上小於某量,而此量又在數目上小於一,則此級數爲收斂.

今由某定項起之級數以次式表之:

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots,$$

而令
$$\frac{u_2}{u_1}<r,\ \frac{u_3}{u_2}<r,\ \frac{u_4}{u_3}<r,\ \cdots,$$

其中$r<1$.

則
$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots$$

$$=u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_4}{u_3}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\cdots\right)$$

$$<u_1(1+r+r^2+r^3+\cdots),$$

卽$<\frac{u_1}{1-r}$, 因 $r<1$.

因此所設之級數爲收斂.

474. 在上款之陳述中,學者應注意"在某定項前及在某定項後"字之意義.

討論級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}+\cdots.$$

此處 $$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{nx}{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)x,$$

令 n 爲極大,能使此比任意接近於 x, 而各項與其前項之比終爲 x, 因此設 $x<1$, 則此級數爲收斂.

然 $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ 之比非至 $\frac{nx}{n-1}<1$, 卽, 非至 $n>\frac{1}{1-x}$, 恆不小於 1.

現有一收斂級數之情形,其項數可增加至某點而後逐漸減少,例如,設 $x=\frac{99}{100}$, 則 $\frac{1}{1-x}=100$, 而其項數須至第100項之後,始可逐漸減少.

4? **第四步檢驗.** 設無限級數之各項,在某定項

前及其後，與其前項之比爲大於一，或等於一，且其一切項爲同號，則此級數爲發散.

命此定項以 u_1 表之，若其比等於一，則連續項中之各項皆等於 u_1，而 n 項之和等於 nu_1，故此級數爲發散.

設其比大於一，則在某定項後之各項大於 u_1，而 n 項之和大於 nu_1，故此級數爲發散.

476. 在各項大於或小於前項之前之定項，實習上應用此項試驗，殊無確定之必要. 蓋當 n 無窮增加時，則 $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ 之極限頗便求得，命 l 表此極限.

設 $l<1$，則此級數爲收斂. [473 款.]

設 $l>1$，則此級數爲發散. [475 款.]

設 $l=1$，則此級數或爲收斂或爲發散，並須更作檢驗，因或 $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}<1$，若 n 無窮增加，則續漸接近於 1 一如其極限. 在此情形中，則任何有限量不能名爲 r，因其本身雖小於 1，然尙大於 l，因而 473 款之檢驗不能合理矣. 然設 $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}>1$，而續漸接近於 1 一如其極限，則依 475 款此級數爲發散.

茲用"$\text{Lim}\,\frac{u_n}{u_{n-1}}$"以表"$n$爲無窮時$\frac{u_n}{u_{n-1}}$之極限"之略記.

例題 1. 級數之第n項爲$\frac{(n+1)x^n}{n^2}$,問此級數爲收斂抑爲發散?

此處 $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{(n+1)x^n}{n^2}\div\frac{nx^{n-1}}{(n-1)^2}=\frac{(n+1)(n-1)^2}{n^3}\cdot x,$

$$\therefore \text{Lim}\,\frac{u_n}{u_{n-1}}=x,$$

因此　　設$x<1$,則此級數爲收斂.

　　　　設$x>1$,則此級數爲發散.

設$x=1$,則$\text{Lim}\,\frac{u_n}{u_{n-1}}=1$,則更須檢驗而決定.

例題 2. 級數

$$1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots$$

爲收斂抑爲發散.

此處　　$\text{Lim}\,\frac{u_n}{u_{n-1}}=\text{Lim}\,\frac{n^2x^{n-1}}{(n-1)^2x^{n-2}}=x.$

因此　　設$x<1$,則此級數爲收斂.

　　　　設$x>1$,則此級數爲發散.

設$x=1$,則此級數變成$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots$,此顯爲發散.

例題 3. 在級數

$$a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot d)r^{n-1}+\cdots \text{中},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\operatorname{Lim}\frac{a+(a-1)d}{a+(n-2)d}\cdot r=r.$$

由是設 $r<1$, 則此級數爲收斂, 且其和爲有限.

477. 第五步檢驗. 設兩無限級數中之項俱爲正, 而其對應項之比常爲有限, 則此兩級數俱爲收斂或俱爲發散.

兩無限級數令次式表之:

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots,$$

及

$$v_1+v_2+v_3+v_4+\cdots.$$

其分數

$$\frac{u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n}{v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n}$$

之值介於分數

$$\frac{u_1}{v_1},\ \frac{u_2}{v_2},\ \cdots\frac{u_n}{v_n}$$

之最大值及最小值之間, 故爲有限量, 譬如 L,

$$\therefore u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n=L(v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n).$$

因此, 設一級數之值爲有限, 則他一級數之值亦然. 又設一級數之值爲無限, 則他一級數之值亦然. 而命題乃得證明.

478. 補助級數 前款之原則,應用殊廣,蓋藉此可以收斂或發散已決定之補助級數與一所設之級數相比較.下款討論之級數以之用作補助級數較為便利.

479. 無限級數$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots$除當$p$為正量而大於1外,恆為發散.

實例I. 令$p>1$.

首項為1,次二項共小於$\frac{2}{2^p}$,再次四項共小於$\frac{4}{4^p}$,又次八項共小於$\frac{8}{8^p}$,餘依次類推.故此級數小於

$$1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots,$$

即,小於等比級數,而其公比$\frac{2}{2^p}$又小於1,因$p>1$,故此級數為收斂.

實例II. 令$p=1$.

此級數成為$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$.

第三第四兩項共大於$\frac{2}{4}$或$\frac{1}{2}$,此四項共大於$\frac{4}{8}$或

$\frac{1}{2}$, 又次八項共大於 $\frac{8}{16}$ 或 $\frac{1}{2}$, 餘依次類推. 因而此級數大於

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots,$$

故爲發散. [475 款.]

實例 III. 令 $p<1$, 或爲負.

今各項大於實例 II 之對應項, 故級數爲發散.

故除當 p 爲正量及大於一之情形時, 此級數恆爲發散.

例題. 求證級數 $\frac{2}{1}+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}\cdots+\frac{n+1}{n^2}+\cdots$ 爲發散.

以 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 與所設之級數比較.

由是設 u_n 及 v_n 各表所設級數與補助級數之第 n 項, 卽有

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{n+1}{n^2}\div\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n},$$

因此 $\operatorname{Lim}\frac{u_n}{v_n}=1$, 故兩級數俱爲收斂或俱爲發散. 但補助級數爲發散, 故所設之級數亦爲發散.

本題完成例題 1 之解答. [476 款.]

480. 二項級數之收斂. 當$x<1$時,以二項式定理證$(1+x)^n$之展開式爲收斂.

令u_r, u_{r+1}代展開式之第r項及第$(r+1)$項,則

$$\frac{u_{r+1}}{u_r}=\frac{n-r+1}{r}x.$$

若$r>n+1$,則其比值爲負,卽,由此點起若x爲正,則諸項正負相間.若x爲負,則諸項恆爲同號.今若r爲無限,則在數目上$\operatorname{Lim}\frac{u_{r+1}}{u_r}=x$,故旣$x<1$,並設一切項爲同號,則此級數爲收斂,且,若項中若干爲正若干爲負,則此級數爲收斂者殆無疑義.[472款.]

習 題 XLI.

試決定下列各級數爲收斂抑爲發散.

1. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+2a}-\frac{1}{x+3a}+\cdots$,設$x$及$a$皆爲正量.

2. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots$.

3. $\frac{1}{xy}-\frac{1}{(x+1)(y+1)}+\frac{1}{(x+2)(y+2)}-\frac{1}{(x+3)(y+3)}+\cdots$,

x及y皆爲正量.

4. $\frac{x}{1\cdot2}+\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^3}{3\cdot4}+\frac{x^4}{4\cdot5}+\cdots$.

5. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{3\cdot 4}+\frac{x^3}{5\cdot 6}+\frac{x^4}{7\cdot 8}+\cdots$.

6. $1+\frac{2^2}{\lfloor 2}+\frac{3^2}{\lfloor 3}+\frac{4^2}{\lfloor 4}+\cdots$.

7. $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\cdots$.

8. $1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots$.

9. $\frac{2}{1^p}+\frac{3}{2^p}+\frac{4}{3^p}+\frac{5}{4^p}+\cdots$.

10. $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{10}+\cdots+\frac{x^n}{n^2+1}+\cdots$.

註. 收斂級數與發散級數較深之研究,讀者可參閱 Hall & Knight's Higher Algebra, 第二十一章.

第四十二章

未定係數

有限次元函數

481. 在105款中已證明當$x=a$時,則x之任何有理整函數消失,並適能以$x-a$整除.

令
$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n$$
爲n次元之x之有理整函數,當x等於下之各不等式時.
$$a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots a_n$$
此函數卽行消失.

以$f(x)$表此函數,則旣$f(x)$可以$x-a$整除,卽有
$$f(x)=(x-a_1)\ (p_0x^{n-1}+\cdots),$$
其商爲$n-1$次元.

同理,旣$f(x)$可以$x-a_2$整除,卽有
$$p_0x^{n-1}+\cdots=(x-a_2)\ (p_0x^{n-2}+\cdots),$$
其商爲$n-2$次元.

$$p_0x^{n-2}+\cdots=(x-a_3)(p_0x^{n-3}+\cdots).$$

依此法演之,則除n次後,終得

$$f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n).$$

482. n次元之有理整函數,設與其變數以n以上之值而消失,則變數各乘冪之係數必為零.

令$f(x)$表此函數,其中

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n,$$

並假定$f(x)$當x等於不等值$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$之各個而消失,則

$$f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n).$$

令c為x之另一可使$f(x)$消失之值,則既$f(c)=0$,即有

$$p_0(c-a_1)(c-a_2)(c-a_3)\cdots(c-a_n)=0,$$

故$p_0=0$,既,依假設,其他因數中無一等於零. 因而$f(x)$變成

$$p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots+p_n.$$

依假設,此式因與x以n以上之值而消失,故$p_1=0$.
同理可證明$p_2, p_3, \cdots p_n$係數中之各個必等於零.

此結果亦可如下述之.

設n次元之有理整函數,因與變數以n以上之值

而消失,則此亦必因其變數之每一值而消失.

推論. 設函數$f(x)$因與x以n以上之值而消失,則函數$f(x)=0$有n個以上之根.

因此,亦然,設n次元之方程式有n個以上之根,則此式爲恆等方程式.

例題. 求證

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1.$$

此爲二次元之方程式,顯然可以三值a, b, c之每一值適合之,故此爲恆等方程式.

483. 設兩個n次元之有理整函數因與變數以n以上之值而相等,則此亦必與變數以每一值而相等.

假定兩函數

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n,$$

$$q_0x^n+q_1x^{n-1}+q_2x^{n-2}+\cdots+q_n,$$

因與x以n以上之值而相等,則此式

$$(p_0-q_0)x^n+(p_1-q_1)x^{n-1}+(p_2-q_2)x^{n-2}+\cdots+(p_n-q_n)$$

因與x以n以上之值而消失,故,依前款

$$p_0-q_0=0,\ p_1-q_1=0,\ p_2-q_2=0,\cdots p_n-q_n=0,$$

卽, $$p_0=q_0,\ p_1=q_1,\ p_2=q_2,\ p_n=q_n.$$

因而二式爲恆等,故與變數以每一值,此二式亦相等. 由是

設兩有理整函數同爲相等,則可使變數同次冪之係數相等.

推論. 設一函數較他函數之次元低,則此命題仍屬合理. 例如,設

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots+p_n$$
$$=q_2x^{n-2}+q_3x^{n-3}+\cdots+q_n.$$

就上檢查,只須假定 $q_0=0$, $q_1=0$,便得

$$p_0=0,\ p_1=0,\ p_2=q_2,\ p_3=q_3,\cdots p_n=q_n.$$

484. 上款所成立有限次元函數之定理恆視爲未定係數之原則,此原則應用甚廣,茲特分述如次.

例題 1. 求級數

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)\text{ 之和.}$$

假設 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$

$$=A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4+\cdots,\qquad\cdots\cdots(1)$$

其中 $A, B, C, D, E,\cdots$ 爲與 n 無關之量,而 n 之值猶待決定. 變 n 爲 $n+1$,則

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)+(n+1)(n+2)$$
$$=A+B(n+1)+C(n+1)^2+D(n+1)^3+E(n+1)^4+\cdots.(2)$$

從(2)減(1),

$$(n+1)(n+2)=B+C(2n+1)+D(3n^2+3n+1)$$
$$+E(4n^3+6n^2+4n+1)+\cdots.$$

此方程式於n之一切整數值均合理,其兩邊n之各乘冪之係數必相等,由是E與一切連續係數必等於零.而

$$3D=1,\ 3D+2C=3,\ D+C+B=2,$$

於是 $$D=\frac{1}{3},\quad C=1,\quad B=\frac{2}{3}.$$

因而其和 $$=A+\frac{2n}{3}+n^2+\frac{1}{3}n^3.$$

欲求A,命$n=1$,則此級數變成第一項,而

$$2=A+2,\text{ 或 } A=0.$$

因而 $$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

註. 由上例可知若級數第n項爲一n之有理整數,則以較該級數第n項高一次之n之函數視爲其和已足.

例題 2. 求x^3+px^2+qx+r可爲

$$x^2+ax+b$$

整除之條件.

商中含二項,即,x項與一不含x之項. 因此,假設

$$x^3+px^2+qx+r=(x+k)(x^2+ax+b).$$

使x之同次冪係數相等,卽有

$$k+a=p,\ ak+b=q,\ kb=r.$$

從上最後一方程式$k=\frac{r}{b}$,因而用代入法,卽得

$$\frac{r}{b}+a=p,\ 及\ \frac{ar}{b}+b=q.$$

卽, $$r=b(p-a),\ 及\ ar=b(q-b)$$

此卽所求之條件.

習 題 XLII. *a*.

試以未定係數法求下各級數之和.

1. $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots$ 至n項.

2. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots$ 至n項.

3. $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+4\cdot5^2+\cdots$ 至n項.

4. $1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots$ 至n項.

5. $1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots$ 至n項.

6. 試求$x^3-3px+2q$能被$x^2+2ax+a^2$中一因數所除盡之條件.

7. 試求ax^3+bx^2+cx+d爲完全立方時之條件.

8. 試求$a^2x^4+bx^3+cx^2+dx+f^2$爲完全平方時之條件.

9. 證恆等式

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

無限次元函數

485. 設無限級數$a_0+a_1x+a_2x^2+a^3x^3+\cdots$因級數爲收斂時並與$x$以每一有限値而等於零.則其每一係數必恆等於零.

令S表此級數,而令S_1代$a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots$之式,則$S=a_0+xS_1$,故,依假設,$a_0+xS_1=0$可適合於x之一切有限值.然S既爲收斂,則S_1不能大於某有限極限.故令x爲極小,可使xS_1爲任意小,在此情形中,S之極限爲a_0,但S常爲零,故a_0必恆等於零.

去a_0項,則$xS_1=0$可適合於x之一初有限值,卽,因x有一切有限値而$a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots$消失.

同樣,可連續證明係數$a_1, a_2, a_3,\cdots$各恆等於零.

486. 設二無限級數因與其變數以任一有限値而爲收斂,且互爲相等,則二級數中變數之同次冪係數相等.

假定二級數以次二式表之.

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

及

$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$

則此式 $a_0-A_0+(a_1-A_1)x+(a_2-A_2)x^2+(a_3-A_3)x^3+\cdots$

因x在所定之極限內有一切之值而消失,故依上款

$$a_0-A_0=0,\ a_1-A_1=0,\ a_2-A_2=0,\ a_3-A_3=0,\cdots,$$

卽,
$$a_0=A_0,\ a_1=A_1,\ a_2=A_2,\ a_3=A_3,\cdots,$$

因而變數之同次冪係數相等,此命題乃得證明.

分數展成級數

487. 展開$\dfrac{2+x^2}{1+x-x^2}$成x之昇冪序之級數.

令
$$\frac{2+x^2}{1+x-x^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots,$$

其中$A, B, C, D,\cdots,$為須決定其值之常量,則

$$2+x^2=A(1+x-x^2)+Bx(1+x-x^2)+Cx^2(1+x-x^2)$$
$$+Dx^3(1+x-x^2)+\cdots$$

$$=A+\left.\begin{array}{r}B\\A\\ \\\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{r}C\\B\\-A\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{r}D\\C\\-B\end{array}\right|x^3+\cdots$$

使x之同次冪係數相等,卽有

$$A=2,\quad B+A=0,\quad C+B-A=1,\quad D+C-B=0,$$

$$\therefore B=-2,\qquad \therefore C=5,\qquad \therefore D=-7,$$

由是
$$\frac{2+x^2}{1+x-x^2}=2-2x+5x^2-7x^3+\cdots.$$

488. 分子及分母應依同一之量之昇冪序排列,後以分母之第一項除分子之第一項而決定<u>展開式之形式</u>.

例題. 展開$\dfrac{2}{2x^2-3x^3}$成x之昇冪序之級數.

以分母第一項x^2除分子第一項x^0,卽得x^{-2}爲展開式之第一項,故假設

$$\frac{2}{2x^2-3x^3}=Ax^{-2}+Bx^{-1}+C+Dx+\cdots,$$

則
$$\begin{array}{rl|rl|rl|l} 2=2A+2B & x+ & 2C & x^2+ & 2D & & x^3+\cdots \\ -3A & & -3B & & -3C & & \end{array}$$

使x之同次冪係數相等,卽有

$$A=1,\quad 2B-3A=0,\quad 2C-3B=0,\quad 2D-3C=0,$$

$$\therefore B=\frac{3}{2},\qquad \therefore C=\frac{9}{4},\qquad \therefore D=\frac{27}{8}.$$

由是
$$\frac{2}{2x^2-3x^3}=x^{-2}+\frac{3}{2}x^{-1}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}x+\cdots$$

$$=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{2x}+\frac{9}{4}+\frac{27x}{8}+\cdots.$$

習 題 XLII. *b*.

試以x之昇冪序展開下列各式至四項.

1. $\dfrac{1+2x}{1-x-x^2}$. 2. $\dfrac{1-8x}{1-x-6x^2}$. 3. $\dfrac{1+x}{2+x+x^2}$. 4. $\dfrac{3+x}{2-x-x^2}$.

5. $\dfrac{1}{1+ax-ax^2-x^3}$. 7. $\dfrac{1}{2x-3x^2}$. 9. $\dfrac{2+x}{3x^2+x^3}$.

6. $\dfrac{2-2x+3x^2}{4+x+x^2}$. 8. $\dfrac{c}{b-ax}$. 10. $\dfrac{1+x+x^2}{x+x^3+x^4}$.

不盡根展成級數

489. 展開$\sqrt{1+x}$成x之昇冪序.

3

令$\sqrt{1+x}=A+Bx+Cx^2+Dx^2+Ex^4+\cdots$.

自乘方程式之兩邊,即有

$$
1+x=A^2+2AB\left|\begin{array}{r} x+B^2 \\ +2AC \\ \end{array}\right|\begin{array}{r} x^2+2AD \\ +2BC \\ \end{array}\left|\begin{array}{r} x^3+C^2 \\ +2BD \\ +2AE \end{array}\right| x^4+\cdots
$$

使x之同次冪係數相等,即有

$$A=1,\quad 2AB=1,\quad B^2+2AC=0,\quad 2AD+2BC=0$$

$$\therefore B=\frac{1}{2},\qquad \therefore C=-\frac{1}{8},\qquad \therefore D=\frac{1}{16},$$

$$C^2+2BD+2AE=0.$$

$$\therefore E=-\frac{5}{128}.$$

由是 $$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\cdots.$$

註. 如應用二項式定理,此展開式即能成立[421款.]

習題 XLII. c.

展開下列各式至四項:

1. $\sqrt{1-x}$.　　3. $\sqrt{a^2-x^2}$　　5. $(1+x)^{\frac{3}{2}}$.

2. $\sqrt{a-x}$.　　4. $\sqrt[3]{2+x}$.　　6. $(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}$.

級數之轉換

490. 轉換級數 $y=ax+bx^2+cx^3+\cdots$ 者,卽用 y 之昇冪序以表 x 之值之級數.

變換級數

$$y=x-2x^2+3x^3-4x^4+\cdots \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

假設 $x=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\cdots$.

以(1)中 y 之值代入於此方程式,卽有

$$\begin{aligned}x=A(x-2x^2+3x^3-4x^4+\cdots)&=A(x-2x^2+3x^3-4x^4+\cdots)\\+B(x-2x^2+3x^3-4x^4+\cdots)^2&=B(x^2+4x^4-4x^3+6x^4+\cdots)\\+C(x-2x^2+3x^3-4x^4+\cdots)^3&=C(x^3-6x^4-\cdots)\\+D(x-2x^2+3x^3-4x^4+\cdots)^4&=D(x^4+\cdots)\end{aligned}$$

使 x 之同次冪係數相等,卽有,

$$A=1,\quad B-2A=0,\quad C-4B+3A=0,$$

$$\therefore B=2,\qquad\qquad \therefore C=5.$$

$$D-6C+10B-4A=0,$$

$$\therefore D=14.$$

因此　　$x=y+2y^2+5y^3+14y^4+\cdots$.

491. 設級數爲 $y=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$.

命 $y-1=z$,

則 $z=2x+3x^2+4x^3+\cdots$.

假設 $x=Az+Bz^2+Cz^3+\cdots$ 而依490款完成之,然後代入 z 之值 $y-1$.

習題 XLII. *d.*

試轉換下列各式,使以 y 表 x 之值.

1. $y=x+x^2+x^3+x^4+\cdots$.

2. $y=x+3x^2+5x^3+7x^4+\cdots$.

3. $y=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{4}-\dfrac{x^4}{8}+\cdots$.

4. $y=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\cdots$.

5. $y=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots$.

6. $y=ax+bx^2+cx^3+dx^4+\cdots$.

部分分數

492. 聯接加減符號之若干分數,若集成一分母爲所設分數之最低公分母之單分數,則可化爲更簡之形.但分裂分數爲若干單分數及部分分數之逆法,亦甚重要.例如,若欲展開 $\dfrac{3-5x}{1-4x+3x^2}$ 成 x 之昇冪

序級數,則用487款之方法可任意求得若干項,但如欲求此級數之公項,則此法不得應用.如將所設之分數表成簡單之等形$\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1-3x}$,則$(1-x)^{-1}$及$(1-3x)^{-1}$各式現俱能依二項式定理展開而求公項.

493. 現試舉若干有理分數分解成部分分數之題,如欲專意討論本題,讀者可參閱高等代數論或積分學.其中有證明任何有理分數可分解成部分分數之級數者,並證明

(1) $\frac{A}{x-a}$形之部分分數與其分母中任何一次因數如$x-a$,相對應.

(2) $\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}+\cdots+\frac{R}{(x-b)^n}$形之$n$個部分分數之級數與其分母中$n$個如$x-b$之任何一次因數相對應.

(3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$形之部分分數與其分母中任何二次因數如x^2+px+q者相對應.

(4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{Rx+S}{(x^2+px+q)^n}$形之$n$個部分分數之級數與其分母中$n$個如$x^2+px+q$之任何二次因數相對應.

此處$A, B, C, D, \cdots R, S$爲皆與x不相關之量.

現將此項結果應用於下題.

例題 1. 分$\dfrac{5x-11}{2x^2+x-6}$爲部分分數.

既分母$2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$,假設

$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-3},$$

其中A與B爲與x無關之量,而x之值猶未決定.

去分數,

$$5x-11=A(2x-3)+B(x+2).$$

既此方程式恆爲合理,則可使x之同次冪係數相等.由是

$$2A+B=5, \quad -3A+2B=-11,$$

於是
$$A=3, \quad B=-1.$$

$$\therefore \frac{5x-11}{2x^2+x-6}=\frac{3}{x+2}-\frac{1}{2x-3}.$$

例題 2. 分解$\dfrac{mx+n}{(x-a)(x+b)}$爲部分分數.

假設
$$\frac{mx+x}{(x-a)(x+b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+b}.$$

$$\therefore mx+n=A(x+b)+B(x-a)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

現可使諸係數相等並求A與B之值.演算時以下式較簡.

A 與 B 既與 x 無關，故 x 可與以任何之值.

在 (1) 中，命 $x-a=0$，或 $x=a$，則

$$A=\frac{ma+n}{a+b}.$$

命 $x+b=0$，或 $x=-b$， $B=\dfrac{mb-n}{a+b}.$

$$\frac{mx+n}{(x-a)(x+b)}=\frac{1}{a+b}\left(\frac{ma+n}{x-a}+\frac{mb-n}{x+b}\right).$$

例題 3. 分解 $\dfrac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}$ 爲部分分數.

假設 $\dfrac{23x-11x^2}{(2x-1)(3+x)(3-x)}=\dfrac{A}{2x-1}+\dfrac{B}{3+x}+\dfrac{C}{3-x}$ ......(1)

$$\therefore\ 23x-11x^2=A(3+x)(3-x)+B(2x-1)(3-x)$$
$$+C(2x-1)(3+x).$$

使 x 之同次冪係數相等，或連續命 $2x-1=0$，$3+x=0$，$3-x=0$，卽得

$$A=1,\quad B=4,\quad C=-1.$$

$$\therefore\ \frac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}=\frac{1}{2x-1}+\frac{4}{3+x}-\frac{1}{3-x}.$$

例題 4. 分解 $\dfrac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}$ 爲部分分數.

假設 $\dfrac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=\dfrac{A}{1-2x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{(x-2)^2}$,

$$\therefore 3x^2+x-2=A(x-2)^2+B(1-2x)(x-2)+C(1-2x).$$

命 $1-2x=0$, 則 $\qquad A=-\dfrac{1}{3},$

令 $x-2=0$, 則 $\qquad C=-4.$

欲求 B, 使 x^2 之係數相等, 由是

$$3=A-2B,\quad 於是\ B=-\frac{5}{3}.$$

$$\therefore \frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=\frac{1}{3(1-2x)}-\frac{5}{3(x-2)}-\frac{4}{(x-2)^2}.$$

例題 5. 分解 $\dfrac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}$ 爲部分分數.

假設 $\qquad \dfrac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{x-4},$

$$\therefore 42-19x=(Ax+B)(x-4)+C(x^2+1).$$

令 $x=4$, 則 $\qquad C=-2,$

使 x^2 之係數相等, $\qquad 0=\hat{B}+C$, 而 $A=2$,

使絕對項相等, $\qquad 42=-4B+C$, 而 $B=-11$,

$$\therefore \frac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}=\frac{2x-11}{x^2+1}-\frac{2}{x-4}.$$

494. 在上數題中, 分子之次元皆較分母之次元低, 不然, 可以分母除分子至所得餘數之次元較分母之次元低爲止.

例題. 分解 $\frac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}$ 爲部分分數.

用除法,

$$\frac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}=2x+3+\frac{8x-4}{3x^2-2x-1}$$

而
$$\frac{8x-4}{3x^2-2x-1}=\frac{5}{3x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

$$\therefore\ \frac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}=2x+3+\frac{5}{3x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

495. 公項. 玆說明應用分解部分分數之法使有理分數依 x 之昇冪序展開較易.

例題 1. 若 $\frac{1+6x}{1-3x+2x^2}$ 依 x 之昇冪序級數展開, 求其公項.

依 493 款, 例題 1, 卽有

$$\frac{1+5x}{1-3x+2x^2}=\frac{7}{1-2x}-\frac{6}{1-x}=7(1-2x)^{-1}-6(1-x)^{-1}$$
$$=7[1+(2x)+(2x)^2+\cdots+(2x)^r+\cdots]$$
$$-6(1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots).$$

因此第 $(r+1)$ 式之第 $(r+1)$ 項或公項爲

$$7(2x)^r-6x^r \text{ 或 } [7(2)^r-6]\,x^r.$$

例題 2. 若 $\frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}$ 依 x 之昇冪序級數展開, 求其公項.

依 493 款例題 4, 即有

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=-\frac{1}{3(1-2x)}-\frac{5}{3(x-2)}-\frac{4}{(x-2)^2}$$

$$=-\frac{1}{3(1-2x)}+\frac{5}{3(2-x)}-\frac{4}{(2-x)^2}$$

$$=-\frac{1}{3(1-2x)}+\frac{5}{6\left(1-\frac{x}{2}\right)}-\frac{4}{4\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{3}(1-2x)^{-1}+\frac{5}{6}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}-\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$$

$$=-\frac{1}{3}[1+(2x)+(2x)^2+\cdots+(2x)^r+\cdots]$$

$$+\frac{5}{6}\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^r+\cdots\right]$$

$$-\left[1+2\left(\frac{x}{2}\right)+3\left(\frac{x}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\cdots+(r+1)\left(\frac{r}{2}\right)^r+\cdots\right].$$

因而此展開式之第$(r+1)$項或公項爲

$$\left(-\frac{2^r}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2^r}-\frac{r+1}{2^r}\right)x^r.$$

496. 當分母含一二次因數時,依下題之方法行算較爲詳明.

例題. 展開 $\dfrac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}$ 成 x 之昇冪序,並求其公

項.

假設 $$\frac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

$$\therefore\ 7+x=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+x)$$

令 $1+x=0$, 則 $A=3$,

使絕對項相等, $7=A+C$, 於是 $C=4$,

使 x^2 之係數相等, $0=A+B$, 於是 $B=-3$.

$$\therefore \frac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{3}{1+x}+\frac{4-3x}{1+x^2}$$

$$=3(1+x)^{-1}+(4-3x)(1+x^2)^{-1}$$

$$=3\{1-x+x^2-\cdots+(-1)^p x^p+\cdots\}$$

$$+(4-3x)\{1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^p x^{2p}+\cdots\}.$$

求 x^r 之係數.

(1) 設 r 爲偶數, 則在第二項級數中 x^r 之係數爲 $4(-1)^{\frac{r}{2}}$, 故展開式中 x^r 之係數爲 $3+4(-1)^{\frac{r}{2}}$.

(2) 設 r 爲奇數, 則在第二項級數中 x^r 之係數爲 $-3(-1)^{\frac{r-1}{2}}$, 而所求之係數爲 $3(-1)^{\frac{r+1}{2}}-3$.

習 題 XLII. e.

試化爲部分分數:

1. $\dfrac{7x-1}{1-5x+6x^2}$. 2. $\dfrac{46+13x}{12x^2-11x-15}$. 3. $\dfrac{1+3x+2x^2}{(1-2x)(1-x^2)}$.

4. $\dfrac{x^2-10x+13}{(x-1)(x^2-5x+6)}$.

8. $\dfrac{26x^2+208x}{(x^2+1)(x+5)}$.

5. $\dfrac{2x^3+x^2-x-3}{x(x-1)(2x+3)}$.

9. $\dfrac{2x^2-11x+5}{(x-3)(x^2+2x-5)}$.

6. $\dfrac{9}{(x-1)(x+2)^2}$.

10. $\dfrac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^4}$.

7. $\dfrac{x^4-3x^3-3x^2+10}{(x+1)^2(x-3)}$.

11. $\dfrac{5x^3+6x^2+5x}{(x^2-1)(x+1)^3}$.

試依x之昇冪序展開下列各式且求其公項.

12. $\dfrac{1+3x}{1+11x+28x^2}$.

13. $\dfrac{5x+6}{(2+x)(1-x)}$.

14. $\dfrac{x^2+7x+3}{x^2+7x+10}$.

15. $\dfrac{2x-4}{(1-x^2)(1-2x)}$.

19. $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$.

16. $\dfrac{4+3x+2x^2}{(1-x)(1+x-2x^2)}$.

20. $\dfrac{1-x+2x^2}{(1-x)^3}$.

17. $\dfrac{3+2x-x^2}{(1+x)(1-4x)^2}$.

21. $\dfrac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$.

18. $\dfrac{4+7x}{(2+3x)(1+x)^2}$

22. $\dfrac{3-2x^2}{(2-3x+x^2)^2}$.

第四十三章

連分數

497. 凡式之具有$a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e}+\cdots}$之形式謂之連分數.

其中文字$a, b, c, \cdots$表任何量皆可,但現在所論者僅較簡之形如$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}+\cdots}$,其中$a_1, a_2, a_3, \cdots$皆爲正整數,此如書作次形,則較爲得式

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots.$$

498. 若$a_1, a_2, a_3, \cdots$之商數爲有限,則此分數爲之有限連分數. 設商數爲無限,則此分數謂之無限連分數.

凡有限連分數俱得從最低項起連續化簡之,使成一普通分數.

499. 化所設之分數爲連分數之法.

令$\dfrac{m}{n}$爲所設之分數，以n除m，令商爲a，而剩餘爲p，由是

$$\frac{m}{n}=a_1+\frac{p}{n}=a_1+\frac{1}{\frac{n}{p}},$$

以p除n，令a_2爲商，而q爲剩餘，由是，

$$\frac{n}{p}=a_2+\frac{q}{p}=a_2+\frac{1}{\frac{p}{q}},$$

以q除p，令a_3爲商而r爲剩餘，其餘類推，由是

$$\frac{m}{n}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}=a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots.$$

設m小於n，則初商爲零，並命

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n}{m}}$$

再如前演之.

可見上之運算與求m與n之最大公約數之法同，因而設m與n爲可通約量，則終可達於整除之演算而止．由是凡分子及分母皆爲正整數之分數，均可化成一有限連分數.

例題．化$\dfrac{832}{159}$爲連分數.

以普通方法求832及159之最大公約數

$$\begin{array}{l} 159)832(5 \\ \quad 795 \\ \quad\ 37)159(4 \\ \qquad\ 148 \\ \qquad\ \ 11)37(3 \\ \qquad\qquad 33 \\ \qquad\qquad\ 4)11(2 \\ \qquad\qquad\quad\ 8 \\ \qquad\qquad\quad\ 3)4(1 \\ \qquad\qquad\qquad 3 \\ \qquad\qquad\qquad 1)3(3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

卽得連續商5, 4, 3, 2, 1, 3. 因此

$$\frac{832}{159}=5+\frac{1}{4+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3}.$$

500. 近數. 分數中,截取第一,第二,第三,…所得連分數之商謂之第一近數,第二近數,第三近數,…,因,將於506款述明,每一連續近數在連分數之眞值上實較其前之任何近數爲近似.

501. 求證各近數比連分數大小相間.

令連分數爲$a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots$.

第一近數爲a_1, 因$\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots$部統略去,故較原連分數爲小,第二近數爲$a_1+\frac{1}{a_2}$, 因其分母$a_2$較$a_2+\frac{1}{a_3+}\cdots$爲小,故較原連分數爲大,第三近數爲$a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3}$,

因其分母$a_2+\frac{1}{a_3}$較$a_2+\frac{1}{a_3+}\cdots$爲大,故較原連分數爲小. 餘順次大小相間.

所設之分數若爲眞分數,則$a_1=0$,在此情形中,設以零視爲第一近數,則上之結果可以陳述如下.

奇次之近數皆較原連分數小,偶次之近數皆較原連分數大.

502. 連續近數之組成定律.

令連續近數以次式表之,

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4+}\cdots,$$

則首三近數爲

$$\frac{a_1}{1},\quad \frac{a_1a_2+1}{a_2},\quad \frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_3\cdot a_2+1},$$

可見第三近數之分子可以第三商乘第二近數之分子加上第一近數之分子而成,其分母亦可同理組成.

假定諸連續近數皆用同一之方法組成,令$p_1,p_2,p_3,\cdots$表分子,而令$q_1,q_2,q_3,\cdots$表分母.

假設此組成定律亦適用於第n近數,即,假定

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},\ q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}.$$

第$(n+1)$近數與第n近數所差別者僅在其商爲a_n+

$\frac{1}{a_{n+1}}$而非a_n因而第$(n+1)$近數

$$=\frac{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1}+p_{n-2}}{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{a_{n+1}(a_np_{n-1}+p_{n-2})+p_{n-1}}{a_{n+1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1}}$$

$$=\frac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}},\text{ 依假定.}$$

故設命

$$p_{n+1}=a_{n+1}p_n+p_{n-1},\ q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}.$$

可見第$(n+1)$近數之分子及分母爲從所假定能適用於第n近數之情形中之定律者,然此定律亦適用於第三近數,因而亦適用於第四近數,等等,故此定律可以普偏適用.

例題. 化$\frac{674}{313}$爲連分數並計算其連續近數.

依499款,$\frac{674}{313}=2+\frac{1}{6+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{11+}\ \frac{1}{2}$.

連續商爲　　2, 6; 1, 1, 11, 2.

連續近數爲　$\frac{2}{1}, \frac{13}{6}, \frac{15}{7}, \frac{28}{13}, \frac{323}{150}, \frac{674}{313}$.

解釋. 第一近數及第二近數可由第一商及第二商取出,此決定極易. 由是在本題中,2爲第一近數,

$2+\frac{1}{6}$或$\frac{13}{6}$爲第二近數,第三近數之分子15,等於前一近數之分子13乘第三商之1加上再前一近數之分子2,分母亦可同理組成,由是$7=1\times6+1$.

第五近數$=\dfrac{11(28)+15}{11(13)+7}=\dfrac{323}{150}$.

503. 設分數爲眞分數,可以零視爲第一近數,再如下演之.

化$\frac{84}{227}$爲連分數並計其連續近數:

依499款演之,

$$
\begin{array}{l}
227)84(0 \\
\quad\;\; \underline{00} \\
\quad\;\; 84)227(2 \\
\qquad\quad \underline{168} \\
\qquad\quad\; 59)84(1 \\
\qquad\qquad\;\; \underline{59} \\
\qquad\qquad\;\; 25)59(\cdots
\end{array}
$$

卽得 $0+\frac{1}{2+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{2+}\;\frac{1}{2+}\;\frac{1}{1+}\;\frac{1}{3+}\;\frac{1}{2}$.

連續商爲0, 2, 1, 2, 2, 1, 3, 2.

書$\frac{0}{1}$代第一近數,復如上款所示之例列之,卽有

其商	0,	2,	1,	2,	2,	1,	3,	2.
其近數	$\frac{0}{1}$,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{3}{8}$,	$\frac{7}{19}$,	$\frac{10}{27}$,	$\frac{37}{100}$,	$\frac{84}{227}$.

504. 爲便利起見,名 a_n 爲第 n 部分商,此段之全部商,爲

$$a_n+\frac{1}{a_{n+1}+}\,\frac{1}{a_{n+2}+}\cdots$$

現不論在何階段,完全商統以 k 表之.

已知

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_n p_{n-1}+p_{n-2}}{a_n q_{n-1}+q_{n-2}}.$$

令 x 表此連分數,則 x 與 $\frac{p_n}{q_n}$ 之差別僅在取全部商 k 而不取部分商 a_n,由是

$$x=\frac{kp_{n-1}+p_{n-2}}{kq_{n-1}+q_{n-2}}.$$

505. 設求證 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲一連分數之第 n 近數,則

$$p_n q_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

令此連分數以次式表之,

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_4+}\cdots,$$

則
$$\begin{aligned} p_n q_{n-1}-p_{n-1}q_n &=(a_n p_{n-1}+p_{n-2})q_{n-1}-p_{n-1}(a_n q_{n-1}+q_{n-2})\\ &=(-1)(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}p_{n-1})\\ &=(-1)^2(p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2}),\ \text{同理},\\ &=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$=(-1)^{n-2}(p_2q_1-p_1q_2).$$

但 $\quad p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1\cdot a_2=1=(-1)^2.$

因此 $$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

當連分數小於一時假定 $a_1=0$ 並假定第一近數為零,則此結果亦可適用.

註. 上之定理,當計算連續近數之數值時,其演算之是否正確,可一查便知.

推論1. 各近數為最低項,因設 p_n 及 q_n 有一公除數,則必能除 $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n$,或一,然此為不可能者.

推論2. 兩連續近數之差為分子為一分母為諸近數分母之積之分數.因

$$^{*}\frac{p_n}{q_n}\sim\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_nq_{n-1}\sim p_{n-1}p_n}{q_nq_{n-1}}=\frac{1}{q_nq_{n-1}}.$$

506. 各近數較其前之任何近數逼近於連分數.

令 x 表此連分數.而令 $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ 表連續三近數,則 x 與 $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ 相差者僅在取全部第 $(n+2)$ 商而不取 a_{n+2},此以 k 表之,由是

$$x=\frac{kp_{n+1}+p_n}{kq_{n+1}+q_n}$$

$$\therefore\ x\sim\frac{p_n}{q_n}=\frac{k(p_{n+1}q\sim p_nq_{n+1})}{q(kq_{n+1}+q_n)}=\frac{k}{q_n(kq_{n+1}+q_n)},$$

*記號 ~ 意為"相差".

及 $$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \sim x = \frac{p_{n+1}q_n \sim p_n q_{n+1}}{q_{n+1}(kq_{n+1}+q_n)} = \frac{1}{q_{n+1}(kq_{n+1}+q_n)}.$$

令 k 大於一，而 q_n 小於 q_{n+1}，因而就此二種計算言，則 $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ 與 x 之差小於 $\frac{p_n}{q_n}$ 與 x 之差，卽，每一近數較其前一近數近於連分數，故較其前之任何近數逼近於連分數.

本款之結果與 501 款之結果相合，卽有

奇次之近數逐漸增大，然恆小於連分數.

偶次之近數逐漸減小，然恆大於連分數.

507. 求任何近數與原連分數所差之極限.

令 $\frac{p_n}{q_n}$，$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$，$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ 爲連續三近數，而令 k 表全部第 $(n+2)$ 商.

則 $$x = \frac{kp_{n+1}+p_n}{kq_{n+1}+q_n},$$

$$\therefore\ x \sim \frac{p_n}{q_n} = \frac{k}{q_n(kq_{n+1}+q_n)} = \frac{1}{q_n\left(q_{n+1}+\frac{q_n}{k}\right)}.$$

令 k 大於1，故原連分數 x 與任何近數 $\frac{p_n}{q_n}$ 之差，爲小於 $\frac{1}{q_nq_{n+1}}$，而大於 $\frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)}$.

又既 $q_{n+1} > q_n$ 則取 $\frac{p_n}{q_n}$ 而代 x 之差，小於 $\frac{1}{q_n^2}$ 而大於 $\frac{1}{2q^2_{n+1}}$.

508. 觀上款知取 $\frac{p_n}{q_n}$ 而代原連分數之差，當小於 $\frac{1}{q_nq_{n+1}}$，或 $\frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n+q_{n-1})}$，卽，小於 $\frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$，因而 a_{n+1} 愈大，則 $\frac{p_n}{q_n}$ 愈近於連分數. 故凡在任何近數之後，緊接一甚大之商，則此近數逼近於原連分數.

又既所差者小於 $\frac{1}{q_n^2}$，故欲求一與原連分數相差小於所設量 $\frac{1}{a}$ 之近數，僅須計算連續近數至於 $\frac{p_n}{q_n}$ 可矣，其中 q_n^2 大於 a.

509. 連分數之特性在能尋出二小整數，其比恆與此二不可通約量之比接近，然其正確之比，祇能以二大整數之比表之.

例題. 求近於3.14159之分數級數.

求14159與100000之最大公約數之演算時，其連續商爲7, 15, 1, 25, 1, 7, 4, 由是

$$3.14159=3+\frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{25+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{4}.$$

其連續近數爲

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \cdots.$$

上之在最大之商25前之近數爲最近似之值,其相差爲小於$\frac{1}{25\times(113)^2}$,故小於$\frac{1}{25\times(100)^2}$,或0.000004.

510. 任何近數較其他分母小於此近數分母之分數近於連分數.

令x爲原連分數,$\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$爲連續二近數,$\frac{r}{S}$爲其分母S小於q_n之分數.

設爲可能,令$\frac{r}{S}$較$\frac{p_n}{q_n}$近於x,則$\frac{r}{S}$必較$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$近於x [506款]且x既介於$\frac{p_n}{q_n}$與$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$之間,從而$\frac{r}{S}$必介於$\frac{p_n}{q_n}$與$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$之間.

因此

$$\frac{r}{S}\sim\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{p_n}{q_n}\sim\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \text{卽}<\frac{1}{q_nq_{n-1}},$$

$$\therefore\ rq_{n-1}\sim Sp_{n-1}<\frac{S}{q_n},$$

卽,整數小於分數,此必爲不可能,故$\frac{p_n}{q_n}$必較$\frac{r}{S}$近於原連分數.

習題 XLIII. *a.*

試計算下列各連分數之連續近數.

1. $2+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2}.$

2. $\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{6}.$

3. $3+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{9}.$

試以下各量表如連分數,且求其第四近數,更决定第三近數,與原分數所差之極限.

4. $\frac{253}{179}.$ 6. $\frac{1189}{3927}.$ 8. 0.37. 10. 0.3029.

5. $\frac{251}{802}.$ 7. $\frac{729}{2318}.$ 9. 1.139. 11. $4.31\dot{6}$

12. 已知一米突等於1.0936碼,試求$\frac{222}{203}$碼爲米突時所差之極限.

13. 試求$1+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{9+}\,\frac{1}{11+}\cdots$之近似值,已知該值與眞值之差爲小於0.0001.

14. 試以連續分數定理,證明1.41421與$\frac{99}{70}$之差爲小於$\frac{1}{11830}$.

循環連分數

511. 凡商爲有理之有限連分數皆能化爲分子分母俱爲整數之尋常分數,此蓋已知之矣.故此連分數不能等於不盡根,然二次不盡根之能表如商爲循環之無限連分數者則可證明.茲試先舉一數字之題.

例題. 表$\sqrt{19}$爲連分數,並求其近似值之分數級數.

$$\sqrt{19}=4+(\sqrt{19}-4)=4+\frac{3}{\sqrt{19}+4},$$

$$\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-2}{3}=2+\frac{5}{\sqrt{19}+2},$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-3}{5}=1+\frac{2}{\sqrt{19}+3},$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{19}-3}{2}=3+\frac{5}{\sqrt{19}+3},$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-2}{5}=1+\frac{3}{\sqrt{19}+2},$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-4}{3}=2+\frac{1}{\sqrt{19}+4}.$$

$$\sqrt{19}+4=8+(\sqrt{19}-4)=8+\cdots$$

自此以後,商 2, 1, 3, 1, 2, 8 卽循環.因而

$$\sqrt{19}=4+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{8+}\cdots.$$

當演至商爲第一商之二倍時,則此商循環.

解釋. 先求$\sqrt{19}$之最大整數,此爲4,而書如$\sqrt{19}=4+(\sqrt{19}-4)$,次表$\sqrt{19}-4$爲含一有理分子之等值分數,由是

$$\sqrt{19}-4=\frac{(\sqrt{19}-4)(\sqrt{19}+4)}{\sqrt{19}+4}=\frac{3}{\sqrt{19}+4}.$$

此式卽成

$$\sqrt{19}=4+\frac{3}{\sqrt{19}+4}=4+\frac{3}{\frac{\sqrt{19}+4}{3}}.$$

第二行開始用此繁分數之分母$\frac{\sqrt{19}+4}{3}$者,蓋其本身爲一有理分母之分數故也.此分數之最大整數爲2,並書如

$$\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-2}{3}.$$

次以與$\sqrt{19}-2$凡軛之不盡根乘分子與分母,故倒此結果$\frac{5}{\sqrt{19}+2}$後,再置一有理分母於行首.下列各行中,級數之演算皆同此.

依502款所成之前七近數爲

$$\frac{4}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{48}{11},\ \frac{61}{14},\ \frac{170}{39},\ \frac{1421}{326}.$$

上之末一近數之差爲小於$\frac{1}{(326)^2}$,故小於$\frac{1}{(320)^2}$或$\frac{1}{102400}$,而更小於0.00001.由是第七近數之值至少有四位小數.

512. 每一週期連分數等於係數爲有理之二次方程式中之一根.

令x表此連分數,而令y表其週期部,並假定

$$x=a+\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\cdots\frac{1}{h+}\;\frac{1}{k+}\;\frac{1}{y}.$$

而

$$y=m+\frac{1}{n+}\cdots\frac{1}{u+}\;\frac{1}{v+}\;\frac{1}{y},$$

其中$a, b, c,\cdots h, k, m, n,\cdots u, v$皆爲正整數.

令$\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$各爲與商h, k對應之x之近數,則y旣爲完全商,卽有

$$x=\frac{p'y+p}{q'y+q},\text{於是 } y=\frac{p-qx}{q'x-p'}.$$

令$\frac{r}{s}$, $\frac{r'}{s'}$各爲與商u, v對應之y之近數,則$y=\frac{r'y+r}{s'y+s}$.

以y代入x而約之,卽得一係數爲有理之二次式.

方程式$s'y^2+(s-r')y-r=0$, y之値所由得者,爲實根而異號,設以y之正値入$x=\frac{p'y+p}{q'y+q}$,則使其分母有理

化後,x之值成$\dfrac{A+\sqrt{B}}{C}$之形,其中A, B, C,皆爲整數,因y爲實值,故B爲正量.

例題. 表$1+\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{3+}$爲一不盡根.

令x爲此連分數之值,則

$$x-1=\frac{1}{2+}\;\frac{1}{3+(x-1)}.$$

於是$2x^2+2x-7=0$.

此連分數等於上之方程式之正根,故等於$\dfrac{\sqrt{15}-1}{2}$.

習題 XLIII. b.

試表下列各根式爲連分數,且求其第六近數.

1. $\sqrt{3}$.	5. $\sqrt{11}$.	9. $2\sqrt{3}$	13. $\dfrac{1}{\sqrt{21}}$.
2. $\sqrt{5}$.	6. $\sqrt{13}$.	10. $4\sqrt{2}$.	14. $\dfrac{1}{\sqrt{33}}$.
3. $\sqrt{6}$.	7. $\sqrt{14}$.	11. $3\sqrt{5}$.	15. $\sqrt{\dfrac{6}{5}}$
4 $\sqrt{8}$.	8. $\sqrt{22}$.	12. $4\sqrt{10}$.	16. $\sqrt{\dfrac{7}{11}}$.

17. 試求$\sqrt{17}$與$\dfrac{268}{65}$相差之極限.

18. 試求$\sqrt{23}$與$\dfrac{916}{191}$相差之極限.

19. 試求$\sqrt{101}$之第一近數而此數與原值之差在五位小數以下.

20. 試求$\sqrt{15}$之第一近數而此數與原值之差在五位小數以下.

試將下列各方程式之正根化成連分數.

21. $x^2+2x-1=0.$ 22. $x^2-4x-3=0.$

23. $7x-8x-3=0.$

24. 試將$x^2-5x+3=0$中之諸根化成連分數.

25. 求$3+\frac{1}{6+}\,\frac{1}{6+}\,\frac{1}{6+}\cdots$之值.

26. 求$\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\cdots$之值.

27. 求$3+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\cdots$之值.

28. 求$5+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{10+}\cdots$之值.

第四十四章

級數之總和法

513. 某種級數(等差與等比)總和之例題已於前數章見之矣. 茲再討論總結其他級數之方法.

514. 循環級數. 凡級數$u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots$,其中從某項前與從某項後計之,各項等於前固定之項數各乘以常量之和者,謂之循環級數. 循環級數依所需1,2,或r個常量爲其乘數而爲第1,第2,或第r次.

515. 級數率. 在級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots \text{中},$$

第二項後之各項等於前二項各乘以常量$2x$與$-x^2$之和,此二量所以名爲常量者,因其於一切n之值均同之故也. 由是

$$5x^4=2x\cdot 4x^3+(-x^2)\cdot 3x^2,$$

即
$$u_4=2xu_3-x^2u_2$$

通常當n大於1,則其各項皆爲其前緊接之兩項所組成,如下方程式所示.

$$u_n=2xu_{n-1}-x^2u_{n-2},$$

或，
$$u_n-2xu_{n-1}+x^2u_{n-2}=0.$$

方程式中，u_n，u_{n-1} 及 u_{n-2} 之係數，加以適當之符號，即成所謂級數率.

由是級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots$$

爲循環級數而其級數率爲

$$1-2x+x^2.$$

516. 已知級數率而求任何項. 設所設循環級數之級數率，已知其前之充足項數，則任何項不難求出. 因不論級數率所含之項數爲若干，其程序之方法則無異. 如下所述頗爲充足.

設 $$1-px-qx^2-rx^3$$

爲級數 $$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

之級數率，即有

$$a_nx^n=px\cdot a_{n-1}x^{n-1}+qx^2\cdot a_{n-2}x^{n-2}+rx^3\cdot a_{n-3}x^{n-3},$$

或 $$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3},$$

由是當已知前三項之係數時，則任何係數即能求得.

517. 級數率之求法. 設所設之級數項數甚爲充足,則級數率可求得之.

例題. 求次列循環級數之級數率.

$$2+5x+13x^2+35x^3+97x^4+275x^5+793x^6+\cdots.$$

此非一次級數明甚,設爲二次級數,則欲得p及q,卽有方程式

$$13=5p+2q, \text{ 及 } 35=13p+5q,$$

於是$p=5$,及$q=-6$,應用此等p及q之値,可得第五及第六係數,因而此二値俱爲合理,故其級數率爲

$$1-5x+6x^2.$$

設剩餘之係數不能用p及q之値求得,可假設此級數爲三次,並使方程式成

$$35=13p+5q+2r,$$

$$97=35p+13q+5r,$$

$$275=97p+35q+13r,$$

於是p, q, r之値當可求得.至其正確與否,當可試驗第七以下之係數而證實之.

518. 設級數率有3項,則其包含兩常量p及q,欲決定p及q者,須有兩方程式.欲求第一常量,至少須知3項級數.欲求第二常量,必於所設之項上再

一加項. 由是欲求含有兩常量之級數率至少須知4項級數始可.

設級數率爲$1-px-qx^2-rx^3$,則欲求3常量,須有3方程式. 欲求第一常量,至少須知4項級數,故欲求其他兩常量,須於所設之項上再加二項,因此欲求含有3常量之級數率,至少須知6項級數始可.

通常欲求含有m常量之級數率,至少須知$2m$連續項.

反之,設已知$2m$連續項,則其級數率可假設爲

$$1-p_1x-p_2x^2-p_3x^3-\cdots-p_mx^m.$$

519. 循環級數n項之和. 求循環級數之和,不論級數率爲如何之式,其法恆同. 爲簡便起見,假定此級數僅含兩量.

令級數爲

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

又令和爲S,令級數率爲$1-px-qx^2$,故如n之每一值均大於1,卽有

$$a_n-pa_{n-1}-qa_{n-2}=0.$$

今
$$S=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1},$$

$$-pxS=-pa_0x-pa_1x^2-\cdots-pa_{n-2}x^{n-1}-pa_{n-1}x^n,$$

$$-qx^2S=-qa_0x^2-\cdots-qa_{n-3}x^{n-1}-qa_{n-2}x^n-qa_{n-1}x^{n+1}.$$

因此$(1-px-qx^2)S=a_0+(a_1-pa_0)x-(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n$

$-qa_{n-1}x^{n+1}$,因

$$a_n-pa_{n-1}-qa_{n-2}=0$$

之關係而x之相間乘冪之係數爲零.

$$\therefore\ S=\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}-\frac{(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n+qa_{n-1}x^{n+1}}{1-px-qx^2}.$$

由是循環級數之和爲分母成級數率之分數.

520. 在上款之結果中,設第二分數因n之無窮增大而無窮減小,則二次循環級數無窮項數之和之公式可化爲

$$S=\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}.$$

設此分數如487款所述,依x之昇冪序展開,則原級數之項數可隨意得之.故此式

$$\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}$$

稱爲級數之母函數,* 此母函數求得後,卽爲級數之總和.

設級數爲三次,則

*有時稱母分數.

$$S=\frac{a_0+(a_1-pa_0)x+(a_2-pa_1-qa_0)x^2}{1-px-qx^2-rx^3}$$

521. 從519款之結果,可得

$$\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n+1}$$

$$+\frac{(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n+qa_{n-1}x^{n+1}}{1-px-qx^2}.$$

從上可知其母函數

$$\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx}$$

雖可用以任意求得若干項級數,然其母函數得視爲與無窮級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

確爲等值,此惟須n無窮增大時,其剩餘

$$\frac{(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n+qa_{n-1}x^{n+1}}{1-px-qx^2}$$

即行消失始可,換言之,惟須此級數爲近數時始可.

522. 公項 若母函數能以一羣部分分數表之者,則此循環級數之公項容易求得.

例題. 求次之循環級數之母函數及公項.

$$1-7x-x^2-43x^3-\cdots$$

令其級數率爲$1-px-qx^2$,則

$$-1+7p-q=0, \qquad -43+p+7q=0,$$

於是 $p=1, q=6$, 而其級數率爲

$$1-x-6x^2.$$

令 S 表此級數之和, 則

$$S=1-7x-\ x^2-43x^3-\cdots$$

$$-\ xS=\ -\ x+7x^2+\ \ x^3+\cdots$$

$$-6x^2S=\qquad -6x^2+42x^3+\cdots$$

$\therefore (1-x-6x^2)S=1-8x$,

$$=\frac{1-8x}{1-x-6x^2},$$

此卽爲母函數.

設分 $\frac{1-8x}{1-x-6x^2}$ 爲部分分數, 卽得

$$\frac{2}{1+2x}-\frac{1}{1-3x}.$$

依普通之除法, 或依二項式定理

$$\frac{2}{1+2x}=2[1-2x+(2x)^2-\cdots+(-1)^r(2x)^r+\cdots]$$

$$-\frac{1}{1-3x}=-[1+3x+(3x)^2+\cdots+(3x)^r+\cdots].$$

於是第 $(r+1)$ 項, 或公項爲

$$[2(2^r)(-1)^r-3^r]x^r=\{(-1)^r2^{r+1}-3^r\}x^r.$$

習題 XLIV. a.

試求下列各級數之母函數.

1. $1+6x+24x^2+84x^3+\cdots$.

2. $2+2x-2x^2+6x^3-14x^4+\cdots$.

3. $3-16x+42x^2-94x^3+\cdots$.

4. $2-5x+4x^2+7x^3-26x^4+\cdots$.

5. $4+5x+7x^2+11x^3+\cdots$.

6. $1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7+\cdots$.

7. $1+3x+7x^2+13x^3+21x^4+31x^5+\cdots$.

8. $1-3x+5x^2-7x^3+9x^4-11x^5+\cdots$.

試求下列各級數之母函數並求其公項.

9. $1+5x+9x^2+13x^3+\cdots$.

10. $2-x+5x^2-7x^3+\cdots$.

11. $2+3x+5x^2+9x^3+\cdots$.

12. $7-6x+9x^2+27x^4+\cdots$

13. $3+6x+14x^2+36x^3+98x^4+276x^5+\cdots$.

差法

523. 令 u_n 表 n 之有理整函數,當連續書 $1, 2, 3, 4, \cdots$ 諸值代 n 時令 $u_1, u_2, u_3, u_4, \cdots$ 表 u_n 之值.

從級數 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \cdots$ 各項減其前項則得第二次級數.

如是所得之級數 $u_2-u_1, u_3-u_2, u_4-u_3, u_5-u_4, \cdots$ 謂之

差之第一次級數,且可以$Du_1, Du_2, Du_3, Du_4, \cdots$表之頗便.

由此級數之各項減其前項,即有$Du_2-Du_1, Du_3-Du_2, Du_4-Du_3, \cdots$,此名爲差之第二次級數,而以$D_2u_1, D_2u_2, D_2u_3, \cdots$表之.

由此級數逐次演之,則得差之第三次,第四次,第五次,…級數,此等級數之公項各爲$D_3u_r, D_4u_r, D_5u_r, \cdots$.

524. 求級數任何項之法. 從級數之組成定律.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
u_1, & & u_2, & & u_3, & & u_4, & & u_5, & & u_6,\cdots \\
& Du_1, & & Du_2, & & Du_3, & & Du_4, & & Du_5,\cdots & \\
& & D_2u_1, & & D_2u_2, & & D_2u_3, & & D_2u_4,\cdots & & \\
& & & D_3u_1, & & D_3u_2, & & D_3u_3,\cdots & & &
\end{array}$$

....

可知級數中之任何項等於其前一項加上其下靠左之一項.

由是 $u_2=u_1+Du_1$, 而 $Du_2=Du_1+D_2u_1$,

依加法,既$u_2+Du_2=u_3$,即有

$$u_3=u_1+2Du_1+D_2u_1,$$

同理,以第二次,第三次,第四次,級數代第一次,第二次,第三次,級數,即得$Du_3=Du_1+2D_2u_1+D_3u_1$.

依加法，既 $u_3+Du_3=u_4$，即有

$$u_4=u_1+3Du_1+3D_2u_1+D_3u_1.$$

綜觀上之演算，其數字係數與二項式定理之數字係數爲從同一之定律，玆試以歸納法證明此亦能合此情形. 因假定

$$u_{n+1}=u_1+nDu_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}D_2u_1+\cdots+{}^nC_rD_ru_1+\cdots+D_nu_1,$$

則用第二次至第 $(n+2)$ 次級數代第一次至第 $(n+1)$ 次級數，即有

$$Du_{n+1}=Du_1+nD_2u_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}D_3u_1+\cdots+{}^nC_{r-1}D_ru_1+\cdots$$
$$+D_{n+1}u_1.$$

依加法，既 $u_{n+1}+Du_{n+1}=u_{n+2}$，即得

$$u_{n+2}=u_1+(n+1)Du_1+\cdots+({}^nC_r+{}^nC_{r-1})D_ru_1+\cdots+D_{n+1}u_1.$$

但 $${}^nC_r+{}^nC_{r-1}=\left(\frac{n-r+1}{r}+1\right)\times{}^nC_{r-1}=\frac{n+1}{r}\times{}^nC_{r-1}$$
$$=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(\overline{n+1}-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)r}={}^{n+1}C_r.$$

故設組成定律可適用於 u_{n+1}，則亦能適用於 u_{n+2}，但於 u_4 之情形爲合理，故於 u_5 亦合理，故能普遍合理因而

$$u_n=u_1+(n-1)Du_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}D_2u_1+\cdots+D_{n-1}u_1.$$

設取a作所設級數之第一項,取$d_1, d_2, d_3,\cdots$作差之連續次級數之第一項,則所設級數之任何項可由次之公式求得.

$$a_n=a+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}d_2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|3}}d_3$$
$$+\cdots.$$

525. 級數n項之和. 假定級數$u_1, u_2, u_3,\cdots$爲次之級數之第一次差.

$$v_1,\quad v_2,\quad v_3,\quad v_4,\cdots,$$

則$v_{n+1}=(v_{n+1}-v_n)+(v_n-v_{n-1})+\cdots+(v_2-v_1)+v_1$恆等.

$$\therefore\ v_{n+1}=u_n+u_{n-1}+\cdots+u_2+u_1+v_1.$$

因而級數

$$0_1,\quad v_2,\quad v_3,\quad v_4,\quad v_5,$$
$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad u_4,\cdots$$
$$Du_1,\ Du_2,\ Du_3,\cdots$$

之組成定律與前款同.

$$\therefore\ v_{n+1}=0+nu_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}Du_1+\cdots+D_nu_1.$$

即,$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

$$=nu_1+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}Du_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}D_2u_1+\cdots+D_nu_1.$$

如前款，設 a 爲所設級數之第一項，$d_1, d_2, d_3, \cdots$ 各爲差之連續次級數之第一項，則所設級數之 n 項之和可由次列之公式求得.

$$S_n=na+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}d_2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}d_3+\cdots.$$

例題 1. 求級數 4, 14, 30, 52, 80,… 之第 7 項及前七項之和.

差之連續次級數爲

$$\begin{array}{ccccccc} 10, & & 16, & & 22, & & 28, \\ & 6, & & 6, & & 6, & \\ & & 0, & & 0. & & \end{array}$$

此處 $n=7$, $a=4$.

因此用 524 款之公式，第 7 項 $=4+6\cdot10+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot6=154$.

再用 525 款之公式，則前七項之和

$$=7\cdot4+\frac{7\cdot6}{1\cdot2}\cdot10+\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\cdot6=448.$$

例題 2. 求級數 12, 40, 90, 168, 280, 432,… 之公項及 n 項之和.

差之連續次級數爲

$$28,\quad 50,\quad 78,\quad 112,\quad 152,\cdots$$

$$22,\quad 28,\quad 34,\quad 40,\cdots$$

$$6,\quad 6,\quad 6,\cdots$$

$$0,\quad 0,\cdots$$

因而第 n 項 [524 款]

$$=12+28(n-1)+\frac{22(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}+\frac{6(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|3}}$$

$$=n^3+5n^2+6n.$$

用求 n 項之和之公式，卽得

$$S_n=12n+\frac{28n(n-1)}{\underline{|2}}+\frac{22n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}$$

$$+\frac{6n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}$$

$$=\frac{n}{12}(3n^3+26n^2+69n+46)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+23n+46).$$

526. 可見此總和法，當未得差之第幾次級數之前，僅須繼續演之，終至於諸項俱爲相等之級數．故設級數之第 n 項爲 n 之有理整函數，則亦能適合此情形．

彈丸堆積法

527. 正方積彈． 求正方底上堆成完全角錐形之

彈丸數.

上層包含一彈,次層包含4彈,再次層包含9彈,逐次如此直至n^2彈,n爲層數,因而此級數形爲

$$1^2,\quad 2^2,\quad 3^2,\quad 4^2,\cdots,n^2.$$

級數	1,	4,	9,	16,⋯,	n^2.
差之第1次	3,	5,	7,		
差之第2次	2,	2,			
差之第3次	0.				

代入於525款,得

$$S=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 3+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

528. 三角積彈. 求等邊三角形底上堆成完全角錐形之彈丸數.

上層包含一彈,次層包含3彈,再次包含6彈,又次包含10彈,餘仿此,則得級數形

$$1,\quad 1+2,\quad 1+2+3,\quad 1+2+3+4,\cdots$$

級數	1,	3,	6,	10,
差之第1次	2,	3,	4,	
差之第2次	1,	1,		
差之第3次	0.			

因此$S=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

529. 矩形積彈. 求矩形底上疊成完全積彈之彈丸數.

上層含有一排彈丸,假定此排含有m彈,則次層含有$2(m+1)$彈,再次含有$3(m+2)$彈,餘仿此,即得級數形

$$m,\quad 2m+2,\quad 3m+6,\quad 4m+12,\cdots$$

差之第一次級數, $m+2$, $m+4$, $m+6$,

差之第二次級數, 2, 2,

差之第三次級數, 0.

茲命l及w各爲底邊之長及其闊所含之彈丸數,則

$$m=l-w+1.$$

代入後,即有

$$S=\frac{n(n+1)(3l-w+1)}{6}.$$

習題 XLIV. b.

1. 求級數1, 8, 27, 64, 125,⋯之第八項,及其首八項之和.

2. 求級數4, 11, 28, 55, 92⋯之第十項及其首十項之和.

求下各題中之彈丸數:

3. 設有一正方積彈,其底邊各爲15彈.

4. 設有一三角積彈,其底邊各爲18彈.

5. 設有一長方積彈,其底邊之長爲50彈,闊爲28彈.

6. 設有一不完全之三角積彈,其底邊爲25彈,其頂邊爲14彈.

7. 設有一27層之不完全正方積彈,其底邊爲40彈.

8. 求級數1,3+5,7+9+11,‥之第九項及其首九項之和.

1,2,3,…諸數恆指自然數.

9. 試求首n項自然數之平方之和.

10. 試求首n項自然數之立方之和.

11. 一矩形積彈之彈數爲24395,已知其底邊之闊爲34彈,試求其底邊長之彈數.

12. 一正方積彈之頂面爲169彈,而其底層爲1089彈,問此積彈共有彈丸若干?

13. 一15層之完全矩形積彈之底面較長之邊爲20彈,求此積彈共有彈子若干?

14. 一不完全矩形積彈最高層之邊爲11與18,而其底層之短邊爲30彈,試求此積彈之彈數.

求下級數之第n項及首n項之和.

15. 4, 14, 30, 52, 80, 114,⋯.

16. 8, 26, 54, 92, 140, 198,⋯.

17. 2, 12, 36, 80, 150, 252,⋯.

18. 8, 16, 0, -64, -200, -432,⋯.

19. 30, 144, 420, 960, 1890, 3360,⋯.

20. 一不完全矩形積彈之頂邊爲15彈及6彈,若將其堆成一完全之矩形積彈,問需加彈子若干?

21. 一三角積彈之彈數較正方積彈之彈數之半多150,若其層數相同,試求底邊之彈數.

22. 試求一不完全正方積彈之彈數,已知其層數爲16,而其頂層較其底層少1005彈.

23. 試證正方積彈之彈數爲倍其層數之三角積彈數之四分之一.

插入法

530. 按照級數之定律,凡在級數諸項間插入中間值之方法,謂之**插入法**. 其重要之應用乃求在對數

表及其他代數表間所設數之中間數者,為此目的,故可應用差法之求第n項之公式給n以分數值.

例題. 已知$\log 40=1.6021$, $\log 41=1.6128$, $\log 42=1.6232$, $\log 43=1.6335$,… 求$\log 40.7$.

級數	1.6021,	1.6128,	1.6232,	1.6335.
差之第1次,	.0107,	.0104,	.0103,	
差之第2次,	−.0003,	−.0001,		
差之第3次,	+.0002.			

代入於524款之公式,即有

$$\log 40.7=1.6021+\frac{7}{10}(.0107)+\frac{7}{10}\left(-\frac{3}{10}\right)\left(\frac{-.0003}{\lfloor 2}\right)$$
$$+\frac{7}{10}\left(-\frac{3}{10}\right)\left(-\frac{13}{10}\right)\left(\frac{.0002}{\lfloor 3}\right)$$
$$=1.6021+.00749+.000031+.000009=1.6096+.$$

此處$\log 40$為第一項$(n=1)$, $\log 41$為第二項$(n=2)$,因此欲插入中間項$\log 40.7$,可給n以1.7之值.

習 題 XLIV. c.

1. 已知$\log 3=0.4771$, $\log 4=0.6021$, $\log 5=0.6990$, $\log 6=0.7782$,… 求$\log 4.4$.

2. 已知$\log 51=1.7076$, $\log 52=1.7160$, $\log 53=1.7243$, $\log 54=1.7324$,… 試求$\log 51.9$.

3. 已知 $\sqrt{5}=2.236$, $\sqrt{6}=2.449$, $\sqrt{7}=2.645$, $\sqrt{8}=2.828$, 求 $\sqrt{5.6}$, $\sqrt{7.4}$, $\sqrt{7.74}$.

4. 已知 $\sqrt[3]{51}=3.7084$, $\sqrt[3]{52}=3.7325$, $\sqrt[3]{53}=3.7563,\cdots$, 試求 $\sqrt[3]{51.18}$.

第四十五章

二項式定理 任何指數

531. 三十七章中已研究指數爲任何正整數之二項式定理,茲再討論關於上述所得之公式能否適用於指數爲負量及分數之情形.

依411款,每一二項式旣可化成一普通之形,是則當指數非正整數之二項式時,僅須注意於$(1+x)^n$形之二項式已足.

依開方法,即有

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\cdots,$$

又依除法

$$(1-x)^{-2}=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots,$$

上之各級數其項數皆無限.

上述之情形係用各別之演算求得$(1+x)^{\frac{1}{2}}$及$(1+x)^{-2}$

二式之展開式. 玆再證明此僅限於展開$(1+x)^n$之普通公式而爲任何有理量時之特別情形.

此公式爲牛頓氏所創.

532. 假定二式依x之昇冪序整列如

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及 $$1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此二式之積爲x成昇冪序之級數, 此以

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\cdots$$

表之, 顯見$A, B, C, \cdots$爲m及n之函數, 故在任何特別情形中, $A, B, C, \cdots$之眞值全視此情形中之m及n之值而定. 然聯合(1)式及(2)式中x諸乘冪之係數而得之$A, B, C, \cdots$爲與m及n全然無關者, 換言之, 不論m及n之值如何, $A, B, C, \cdots$仍保持其同樣不變之形. 故設與m及n以任何之值後而能決定$A, B, C, \cdots$之形者, 則卽與m及n以一切之值而$A, B, C, \cdots$仍保持其原形.

現在所述之原則恆指"等形恆久性"之例者. 蓋就現在之情形言, 祗須確認在任何代數積中不問其所

含之量爲整數,或分數,正量或負量,其結果之形無不相同可矣.

現應用此原則證明任何指數之二項式定理,此爲尤拉氏之證法.

533. 指數爲正分數時之二項式定理之證法.

不論 m 之值爲正量或負量,整數或分數,令記號 $f(m)$ 代級數

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots,$$

而令 $f(n)$ 代級數

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots.$$

設以此二級數相乘,則其積爲另一成 x 之昇冪序之級數. 其係數不論 m 及 n 爲如何之值而仍不變.

欲決定此不變形之積,可給 m 及 n 以任何便利之值,爲此假定 m 及 n 皆爲正整數,在此情形中 $f(m)$ 爲 $(1+x)^m$ 之展開形,而 $f(n)$ 爲 $(1+x)^n$ 之展開形,故

$$f(m)\times f(n)=(1+x)^m\times(1+x)^n=(1+x)^{m+n}.$$

然如 m 及 n 皆爲正整數,則 $(1+x)^{m+n}$ 之展開式爲

$$1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot2}x^2+\cdots$$

此卽爲$f(m)\times f(n)$之積之形,不論m及n之值爲何,於一切之情形皆適用,並爲合於前之記法,此又可以$f(m+n)$表之,故m及n有一切之值時,

$$f(m)\times f(n)=f(m+n)$$

亦然,
$$f(m)\times f(n)\times f(p)=f(m+n)\times f(p)$$
$$=f(m+n+p),$$ 同理.

如上演算,可證明

$f(m)\times f(n)\times f(p)\cdots$至$k$因數$=f(m+n+p+\cdots$至$k$項$)$

令此$m,n,p,\cdots$諸量各等於$\frac{h}{k}$,其中h及k皆爲正整數.

$$\therefore\ \left\{f\left(\frac{h}{p}\right)\right\}^k=f(h)$$

但h旣爲正整數,
$$f(h)=(1+x)^h,$$

$$\therefore\ (1+x)^h=\left\{f\left(\frac{h}{k}\right)\right\}^k,$$

$$\therefore\ (1+x)^{\frac{h}{k}}=f\left(\frac{h}{k}\right),$$

但$f\left(\frac{h}{k}\right)$係代級數

$$1+\frac{h}{k}x+\frac{\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\cdots,$$

$$\therefore\ (1+x)^{\frac{h}{k}}=1+\frac{h}{k}x+\frac{\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\cdots,$$

此爲二項式定理於任何正分數指數之證明.

534. 指數爲任何負量之二項式定理之證法.

前已證明

$$f(m)\times f(n)=f(m+n)$$

可適於 m 及 n 一切之值, 故如以 $-n$ (此處 n 爲正量) 代 m, 即有

$$f(-n)\times f(n)=f(-n+n)=f(0)=1.$$

級數之一切項除第一項外旣行相消,

$$\therefore\ \frac{1}{f(n)}=f(-n).$$

但 $f(n)=(1+x)^n$ 亦適於 n 之任何正值,

$$\therefore\ \frac{1}{(1+x)^n}=f(-n)$$

或

$$(1+x)^{-n}=f(-n).$$

但 $f(-n)$ 代級數

$$1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots,$$

$$\therefore\ (1+x)^{-n}=1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots,$$

此爲二項式定理於任何負指數之證明.

535. 應注意者,若 $x<1$,則級數 $f(m)$, $f(n)$, $f(m+n)$ 各爲收斂級數,而 $f(m+n)$ 爲 $f(m)\times f(n)$ 之算術眞等式,若然 $x>1$,則此諸級數俱爲發散級數,且祇能如是述之:設以 $f(n)$ 所表之級數乘 $f(m)$ 所表之級數,則不論 r 有何有限值,其積之首 n 項必與 $f(m+n)$ 之首 n 項一致.

第四十六章

指數級數與對數級數

536. 常用對數之效用已於438款述之矣,在實用上,除此以外,多不採用,蓋其他底之對數亦常變成10底而計算也.

玆於本章證明所謂指數級數與對數級數之某種公式並以構成對數表之方法作簡明之解釋.

537. **依x之昇冪序展開a^x.**

依二項式定理,設$n>1$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{xn}=1+nx\cdot\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{\lfloor 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots(1)$$

命$x=1$,即得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots(2)$$

但
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x,$$

因而(1)式之級數爲(2)式之級數之x次冪,卽

$$1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|2}}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots$$

$$=\left\{1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots\right\}^x,$$

此不論n之值如何大爲眞,故設n爲無窮增大,卽有

$$1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots=\left(1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\right)^x.$$

級數
$$1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots$$

恆以e表之,因此

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots.$$

書cx代x,則

$$e^{cx}=1+cx+\frac{c^2x^2}{\underline{|2}}+\frac{c^3x^3}{\underline{|3}}+\cdots.$$

現令$e^c=a$,故$c=\log_e a$,代入c,即得

$$a^x=1+x\log_e a+\frac{x^2(\log_e a)^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3(\log_e a)^3}{\lfloor 3}+\cdots.$$

此即爲指數定理.

538. 級數

$$1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots,$$

即前用e表之者極爲重要,蓋此爲最先計算之對數底也.以此爲底之對數,名訥布爾法,蓋由對數發明家訥布爾之名而來者也.事實上,因其自然入於代數研究中之第一種對數,故又名自然對數.

理論上所用之對數,其e底輒從略.適如在算術演習中恆用10底然者,此須牢記之.

e之近似值可從級數求得任何所需之正確程度,其在小數點後十位者爲2.7182818284.

例題1. 求無限級數$1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 6}+\cdots$之和.

即有 $$e=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots,$$

命$x=-1$,代此級數中之e^x,即得

$$e^{-1}=1-1+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\cdots.$$

$$\therefore\ e+e^{-1}=2\left(1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 6}+\cdots\right),$$

故此級數之和爲 $\frac{1}{2}(e+e^{-1})$.

例題 2. 在 $\frac{a-bx}{e^x}$ 之展開式中,求 x^r 之係數.

$$\frac{a-bx}{e^x}=(a-bx)e^{-x}$$

$$=(a-bx)\left\{1-x+\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{(-1)^r x^r}{\lfloor r}+\cdots\right\}.$$

$$\text{所求之係數}=\frac{(-1)^r}{\lfloor r}\cdot a-\frac{(-1)^{r-1}}{\lfloor r-1}\cdot b$$

$$=\frac{(-1)^r}{\lfloor r}-(a+rb).$$

539. 依 x 之昇冪序展開 $\log_e(1+x)$.

從 537 款,

$$a^y=1+y\log_e a+\frac{y^2(\log_e a)^2}{\lfloor 2}+\frac{y^2(\log_e a)^3}{\lfloor 3}+\cdots.$$

在此級數中,書 $1+x$ 代 a, 由是 $(1+x)^y$

$$=1+y\log_e(1+x)+\frac{y^2}{\lfloor 2}\{\log_e(1+x)\}^2$$

$$+\frac{y^3}{\lfloor 3}\{\log_e(1+x)\}^3+\cdots \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又依二項式定理,若 $x<1$, 卽有

$$(1+x)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots(2)$$

今(2)式中y之係數爲

$$x+\frac{(-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{(-1)(-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\cdots,$$

卽，
$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

使此與(1)式中y之係數等，由是卽有

$$\log_e(1-x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots.$$

此卽所謂對數級數.

540. 除當x爲極小外，$\log_e(1+x)$之級數，於數字之計算上，甚少用之，然其他可構成對數表之級數可由此而推出之.

541. 於539款已證明

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots.$$

變x爲$-x$，卽有

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots.$$

相減，

$$\log_e\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right).$$

命 $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$, 故 $x=\frac{1}{2n+1}$, 由是得

$$\log_e(n+1)-\log_e n=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\}.$$

從此公式命 $n=1$, 可得 $\log_e 2$, 又命 $n=2$, 卽得 $\log_e 3-\log_e 2$, 於是求得 $\log_e 3$, 故 $\log_e 9$ 亦可知矣.

今若 $n=9$, 卽得 $\log_e 10-\log_e 9$, 由是 $\log_e 10$ 求得之值爲 $2.30258509\cdots$.

欲變訥氏對數爲10底對數, 可以 $\frac{1}{\log_e 10}$ 乘之而得. 此爲常用法之對數率[441款.] 且其值爲 $\frac{1}{2.30258509\cdots}$, 或 $0.43429448\cdots$, 此對數現以 M 表之.

以 M 遍乘上之級數卽得一適於計算常用對數之公式. 由是

$$M\log_e(n+1)-M\log_e n$$

$$=2M\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\quad\right\},$$

卽, $\log_{10}(n+1)-\log_{10} n$

$$=2\left\{\frac{M}{2n+1}+\frac{M}{3(2n+1)^3}+\frac{M}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\}$$

因此設二連續數中已知其一之對數, 則他一對數不難求出. 由是對數表亦能構成矣.

習 題 XLVI.

1. 求證.

$$(1)\quad e^{-2}=1-\frac{2^3}{\underline{|3}}+\frac{2^4}{\underline{|4}}-\frac{2^5}{\underline{|5}}+\cdots$$

$$(2)\quad \frac{e^2-1}{2e}=1+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|5}}+\frac{1}{\underline{|7}}+\cdots.$$

2. 試依 x 之昇冪序展開 $\log\sqrt{1+x}$.

3. 證明 $\log_e 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\cdots$.

4. 求證 $\log_{10}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{\log_e 10}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)$.

5 證明 $\log\frac{1+x}{1-3x}=4x+4x^2+\frac{28}{3}x^3+20x^4+\cdots$.

6. 若 $x>1$, 求證

$$\log\sqrt{x^2-1}=\log x-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{6x^6}-\cdots.$$

第四十七章

行列式

542. 討論下之兩等次直線方程式:

$$a_1x+b_1y=0,$$

$$a_2x+b_2y=0.$$

以 b_2 乘第一方程而以 b_1 乘第二方程,再相減而除以 x,即得

$$a_1b_2-a_2b_1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此結果有時可書如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0.$$

上式謂之行列式,包含二行及二列在(1)式之首節所見之展開形或展開(development),其各項爲二量之積,故稱爲第二次,a_1b_2 線謂之主對角線,而 b_1a_2 線謂之副對角線.

文字a_1, b_1, a_2, b_2,名行列式之成分,而a_1b_2, a_2b_1兩項名爲元素.

行列式變後之值

543. 既 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b^2 \end{vmatrix}$,

可知任意變行成列及變列成行,則行列式之值不變.

又,易知

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \text{ 及 } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},$$

卽,設以行列式之二行或二列互換,卽得與原式僅差符號之行列式.

544. 玆討論如下之等次直線方程式:

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0.$$

消去x, y, z,卽得

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0,$$

或 $$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

此恆可書如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

上式含有三行及三列,是謂第三次行列式.

545. 上行列式之展開形,整列諸項後,可書成

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1),$$

或 $$a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

因此

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

卽,行列式中,變行爲列或變列爲行,其值終不變.

546. 小行列式. 從前款.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdots\cdots(1)$$

又從544款

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdots\cdots(2)$$

現解释書一第三次行列式之展開式之簡法，當展開時，其從第一行開始或從第一列開始均無妨.

由方程式(1)可知成分a_1, a_2, a_3中任一之係數為略去橫行縱列而得之第二次行列式，此類行列式謂之原行列式之小行列式，而方程式(1)之左邊可書如

$$a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3,$$

其中A_1, A_2, A_3各為a_1, a_2, a_3之小行列式.

又，由方程式(2)，此行列式等於

$$a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1$$

其中A_1, B_1, C_1各為a_1, b_1, c_1之小行列式.

547 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= -b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - a_1(c_2b_3 - c_3b_2) - c_1(b_2a_3 - b_3a_2),$$

因此
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

由上可見,設互換行列式之二鄰行或鄰列,則行列式之符號變而其值不變.

爲簡便計,設以$(a_1b_2c_3)$表行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

則適所得之結果可書如

$$(b_1a_2c_3) = -(a_1b_2c_3)$$

同理可證明

$$(c_1a_2b_3) = -(a_1c_2b_3) = +(a_1b_2c_3).$$

548. 行列式相消. 行列式中,有二行或二列恆等者,則此行列式相消.

因令D爲此行列式之值,故交換二行或二列後得一其值爲$-D$之行列式,然行列式仍不變.因此$D=-D$,即$D=0$,由得下之方程式

$$a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3 = D$$
$$b_1A_1 - b_2A_2 + b_3A_3 = 0,$$
$$c_1A_1 - c_2A_2 + c_3A_3 = 0.$$

549. 行列式相乘. 設任何行或任何列中之各成分乘以同一之因數,則此行列式統爲此因數所乘.

因
$$\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=ma_1\cdot A_1-ma_2\cdot A_2+ma_3\cdot A_3=m(a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3),$$

故命題乃證明.

推論. 一行或一列中之各成分如爲他行或他列中對應成分之同一倍數者,則此行列式消失.

550. 一行列式表作其他二行列式之和. 設任何行或任何列中之各成分包含二項,則此行列式可表作其他二行列式之和.

由是有

$$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

因左式 $=(a_1+d_1)A_1-(a_2+d_2)A_2+(a_3+d_3)A_3$

$$=(a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3)+(d_1A_1-d_2A_2+d_3A_3),$$

故命題乃證明.

同理,設任一行或任一列中之各成分包含 m 項,則此行列式能表作其他 m 行列式之和.

同樣,可證明

$$\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1+e_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2+e_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3+e_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & e_1 & c_1 \\ a_2 & e_2 & c_2 \\ a_3 & e_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} d_1 & e_1 & c_1 \\ d_2 & e_2 & c_2 \\ d_3 & e_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

通常設三列之成分各含 m, n, p 項,則此行列式能表作 mnp 行列式之和.

例題 1. 求證

$$\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix}=3abc-a^3-b^3-c^3.$$

所設之行列式

$$=\begin{vmatrix} b & a & a \\ c & b & b \\ a & c & c \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} b & b & a \\ c & c & b \\ a & a & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & a \\ a & b & b \\ b & c & c \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix}$$

此四行列式之首三式相消,548款. 由是此式化成四行列式之末一式,故其值

$$=-\{c(c^2-ab)-b(ac-b^2)+a(a^2-bc)\}$$

$$=3abc-a^3-b^3-c^3.$$

例題2. 求 $\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$ 之值.

即有

$$\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10+57 & 19 & 21 \\ 0+39 & 13 & 14 \\ 9+72 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 57 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 72 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 19+2 \\ 0 & 13 & 13+1 \\ 9 & 24 & 24+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 2 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 24 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 24 & 2 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 20-63=-43.$$

551. 行列式之簡約法. 討論行列式

$$\begin{vmatrix} a_1+pb_1+qc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2+qc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+pb_3+qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

此可如前款證明等於

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pb_1 & b_1 & c_1 \\ pb_2 & b_2 & c_2 \\ pb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qc_1 & b_1 & c_1 \\ qc_2 & b_2 & c_2 \\ qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

而上之行列式之後二式相消[549款,推論]. 由是可見所設之行列式等於一第一列由原行列式第一列之諸成分減其他列中對應成分之等倍數而得之新行列式,而第二第三兩列則如舊.

反之,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+pb_1+qc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2+qc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+pb_3+qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

而關於第一列已證明於此者,爲於任一列或任一行皆同等合理. 故欲簡約行列式者顯可依下法所成之新行或新列與其任一行或任一列互換地位可矣.

取互換之列或行中諸成分,增以或減以任何一或一以上對應成分之等倍數.

練習數次後,可知行列式自能隨卽化簡,祇須同時互換二或二以上之行或列可矣. 例如,易知

$$\begin{vmatrix} a_1+pb_1 & b_1-qc_1 & c_1 \\ a_2+pb_2 & b_2-qc_2 & c_2 \\ a_3+pb_3 & b_3-qc_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

然以上述法則任意變化時,所須注意者必留其一行或一列不變.

由是,上之恆等式左邊第三列之諸成分各易以 c_1+ra_1, c_2+ra_2, c_3+ra_3, 則以前之值應加上

$$\begin{vmatrix} a_1+pb_1 & b_1-qc_1 & ra_1 \\ a_2+pb_2 & b_2-qc_2 & ra_2 \\ a_3+pb_3 & b_3-qc_3 & ra_3 \end{vmatrix}$$

而此式可分解為四個行列式,其中並不消失者有一,即

$$\begin{vmatrix} pb_1-qc_1 & ra_1 \\ pb_2-qc_2 & ra_2 \\ pb_3-qc_3 & ra_3 \end{vmatrix}$$

例題1. 求 $\begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 63 & 54 & 46 \end{vmatrix}$ 之值.

所設之行列式

$$=\begin{vmatrix}3&26&-4\\-6&31&-4\\9&54&-8\end{vmatrix}=-3\times4\times\begin{vmatrix}1&26&1\\-2&31&1\\3&54&2\end{vmatrix}=-12\times\begin{vmatrix}1&26&1\\-3&5&0\\1&2&0\end{vmatrix}$$

$$=-12\begin{vmatrix}1&1&26\\0&-3&5\\0&1&2\end{vmatrix}=-12\begin{vmatrix}-3&5\\1&2\end{vmatrix}=132.$$

解釋. 第一步通約時,令第二列不變,其第一新列係以第一列之各成分減第二列之對應成分而得. 第三新列以第三列之各成分減第二列之對應成分而得. 第二步取出因數3及-4,第三步令第一行不變,其第二新行係以第二行之各成分減第一行之對應成分而得. 其第三新行係以第三行之各成分減兩倍第一行之對應成分而得. 其餘諸步,不難知之.

例題2. 求證

$$\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$

所設之行列式

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

$$= (a+b+c) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \times \begin{vmatrix} -b-c-a & 0 \\ 0 & -c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

解釋. 第一新行列式之第一行爲原行列式三行中諸成分之和,第二第三兩行不變,在第三新行列式中,其第一列仍之,而第二第三兩列可以第二第三兩列之成分各減第一列之對應成分而得. 餘之變換,甚易明瞭.

習題 XLVII. a.

試計算下列各式之值

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 13 & 8 & 23 \\ 30 & 7 & 53 \\ 39 & 9 & 70 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & z & -y \\ -z & 1 & x \\ y & -x & 1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$.

9. 不用展開法,試證

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & b & q \\ x & a & p \\ z & c & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

解下列各方程式

10. $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0.$

11. $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0.$

試證明下列恆等式

12. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$

13. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b).$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$

試計算下列各式之值

15. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \\ 5 & 8 & 11 \end{vmatrix}.$ 16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$

應用於解一次聯立方程式

552. 行列式之特性能用以解聯立直線方程式.令此方程式爲

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$

$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0.$$

各以A_1, $-A_2$, $-A_3$乘之，而以其結果相加，而A_1, A_2, A_3皆爲次之行列式中a_1, a_2, a_3之小行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

因依548款所證之關係，y及z之係數消失，卽得

$$(a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3)x+(d_1A_1-d_2A_2+d_3A_3)=0$$

同樣可證明

$$(b_1B_1-b_2B_2+b_3B_3)y+(d_1B_1-d_2B_2+d_3B_3)=0,$$

又 $$(c_1C_1-c_2C_2+c_3C_3)z+(d_1C_1-d_2C_2+d_3C_3)=0.$$

今 $$a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3=-(b_1B_1-b_2B_2+b_3B_3)$$

$$=-c_1C_1-c_2C_2-c_3C_3=D,$$

因此其解答可書如

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

或較對稱如

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

例題. 解
$$x+2y+3z-13=0,$$
$$2x+y+z-7=0,$$
$$3x+4y+3z-21=0.$$

卽有

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -13 \\ 1 & 1 & -7 \\ 4 & 3 & -21 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -13 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 3 & -21 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -13 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & 4 & -21 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}}$$

或
$$\frac{x}{-8}=\frac{-y}{24}=\frac{z}{-16}=\frac{-1}{8},$$

於是$x=1$, $y=3$, 及$z=2$.

解釋. x之分母爲除x之係數外,取其他各列之係數而成之行列式. 同理y及z之分母爲略去其本身兩列之係數而成,末一行列式爲取x, y及z三列之係數而成.

553. 假定有四等次直線方程式於此.

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1u=0,$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2u=0,$$

$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3u=0,$$

$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4u=0.$$

從上後三式,即如前款所有

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}}=\frac{-u}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}$$

代入於第一方程式,此消去式爲

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}-d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}=0.$$

此更可簡括書成

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0.$$

左式爲第四次行列式.

又知 a_1, b_1, c_1, d_1 之係數,取以適當之符號,爲略去各含此諸成分之行及列所得之小行列式.

554. 設有較普通之n等次直線方程式,含n未知量$x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$

$$
\begin{aligned}
&a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+\cdots+k_1x_n=0,\\
&a_2x_1+b_2x_3+c_2x_3+\cdots+k_2x_n=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&a_nx_1+b_nx_2+c_nx_3+\cdots+k_nx_n=0.
\end{aligned}
$$

其未知量可消去而表其結果如次一形

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1\cdots k_1\\
a_2 & b_2 & c_2\cdots k_2\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
a_n & b_n & c_n\cdots k_n
\end{vmatrix}
$$

此方程式之左節為含n行及n列之行列式,是謂**第n次行列式**.

欲論較普通形之行列式,實已越乎現實之演算範圍矣.現如能注意一般第二次第三次行列式情形中所成立之性質已甚充足,並能推廣至任何次行列式.

555. 項之符號. 上述之方法,雖恆能展開一行列式,然非最簡便之方法.須知吾人之目的有時固非求全行列式之值,而求其若干元素之符號也.

556. 次一行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

之展開形$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$, 可知每一元素為由每行及每列中各取一因數共三因數之積. 又項數一半為＋號, 其他一半為－號. 如上書時, 其中若干元素之符號可如下法得之, 第一元素 $a_1b_2c_3$ 中之添數為從算術之次序者且為正號, 此名為主要元素. 其他各元素可由此元素中之添數施以適當之交換而得. 再任何元素前之符號為＋或為－, 須視添數行中倒換次序之數為偶數或奇數而定. 例如, 在 $a_3b_2c_1$ 之元素中, 2 及 1 不成自然次序, 或倒置於 3, 而 1 則倒置於 2, 因此倒換共有三, 故此元素之符號為負, 又在元素 $a_3b_1c_2$ 中, 倒換有二, 因而符號為正.

557. 主要元素為 $a_1, b_2, c_3, d_4\cdots$ 之行列式可以次之記法表之

$$^*\Sigma\pm a_1b_2c_3d_4\cdots.$$

*Σ是希臘字母第十八字 Sigma.

$\Sigma\pm$置於主要元素之前以示一切由該元素中適當交換其添數及整理其符號後所得元素之合計.

有時行列式亦可以其主要元素括入括弧中以簡之.由是$(a_1b_2c_3d_4\cdots)$用作$\Sigma\pm a_1b_2c_3d_4\cdots$之略記.

例題. 行列式$(a_1b_2c_3d_4e_5)$中,求元素$a_4b_3c_1d_5e_2$前應置之符號.

其中就4言,則3,1,及2爲倒序.就3言,則1及2爲倒序.就5言,則2爲倒序.因此共有六倒換,故元素之符號爲正.

558. 低次行列式. 設在554款中,成分$b_1, c_1, \cdots k_1$各等於零,則此行列式變成a_1A_1,換言之,等於a_1與第$(n-1)$次行列式之積,且頗易推知下列一般之定理.

設某行列式之第一行或第一列之成分,除第一成分外,各等於零,且設第一成分等於m,則此行列式等於一略去第一列及第一行所得之低次行列式之m倍.

又既於行與列施以適當之交換,則任何成分皆可移至第一位.故設任何行或列之成分,除有一成分外,俱等於零,則此行列式即能表作低次行列式.

此理有時可應用於行列式之通約與化簡.

例題. 求 $\begin{vmatrix} 30 & 11 & 20 & 28 \\ 6 & 3 & 0 & 9 \\ 11 & -2 & 36 & 3 \\ 19 & 6 & 17 & 22 \end{vmatrix}$ 之值.

以第一列之各成分減二倍第二列之對應成分,而以第四列之各成分減三倍第二列之對應成分,乃得

$$\begin{vmatrix} 8 & 11 & 20 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 15 & -2 & 36 & 9 \\ 7 & 6 & 17 & 4 \end{vmatrix}$$

且既第二行有三成分爲零,故此行列式

$$=3\begin{vmatrix} 8 & 20 & 5 \\ 15 & 36 & 9 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 8 & 20 & 5 \\ 8 & 19 & 5 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 19 & 5 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=9.$$

習題 XLVII. *b*.

試計算下列各式之值

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 7 & 13 & 10 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 \\ 8 & 12 & 11 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+c & a & a \\ 1 & b & c+a & b \\ 1 & c & c & a+b \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & c & b \\ -y & -c & 0 & a \\ -z & -b & -a & 0 \end{vmatrix}$.

解下列各方程式

9. $4x-5y+2z=11,$
$2x+3y-z=20,$
$7x-4y+3z=33.$

11. $2x-y+3z-2u=14,$
$x+7y+z-u=13,$
$3x+5y-5z+3u=11,$
$4x-3y+2z-u=21.$

10. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=7,$
$x+2y+3z=48,$
$\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}+\frac{z}{3}=4.$

12. $x+y+z=1,$
$ax+by+cz=k,$
$a^2x+b^2y+c^2z=k^2.$

13. $$\begin{aligned} ax+by+cz&=k,\\ a^2x+b^2y+c^2z&=k^2,\\ a^3x+b^3y+c^3z&=k^3. \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} x+y+z+u&=1,\\ ax+by+cz+du&=k,\\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2u&=k^2,\\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3u&=k^3. \end{aligned}$$

第四十八章

方程式論

559. n次方程式一般之形. 命$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$爲含$n$次元之$x$之有理整函數而以$f(x)$表之,則$f(x)=0$爲$n$次有理整數方程一般之形.而通以$p_0$除之,可見使

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

成任何次有理整數方程一般之形者,並不失其通性.

通例恆假定係數$p_1, p_2, \cdots p_n$爲有理.

設係數$p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$之任一個爲零,則此方程式謂之**不完全**,否則謂之**完全**.

560. 任何x之值能使$f(x)$消失者謂之方程式$f(x)=0$之一根.

561. 現假設具有$f(x)=0$形之每一方程式有一根爲實根或虛根,此命題可根據高等方程式論以證之,蓋非本題之演算範圍所及矣.

562. **方程式之可分性.** 設a爲方程式$f(x)=0$之一根,則$f(x)$適能爲$x-a$除盡.

以$x-a$除第一節,至剩餘不含x止,以Q表商,設有剩餘,以R表之,則有

$$f(x)=Q(x-a)+R=0.$$

現旣a爲方程式$x=a$之一根,故

$$Q(a-a)+R=0.$$

因此 $$R=0.$$

卽,所設方程式之第一節適能以$x-a$整除.

563. 反之,設$f(x)=0$之第一節適能以$x-a$整除,則a爲此方程式之一根.

因除之適盡,

$$Q(x-a)=0.$$

而a之代入x可滿足此方程式,因此a爲一根.

用分離係數之除法

564. 以一多項式除其他多項式之演算,可僅書出諸項之係數以簡短之. 下爲解釋.

例題. 以 x^3-2x^2-4x+8 除 $3x^5-8x^4-5x^3+26x^2-33x+26$.

$$
\begin{array}{r|l}
1+2+4-8) & 3-8-5+26-33+26\,(3-2+3 \\
& \underline{3+6+12-24} \\
& \quad -2+7+2-33 \\
& \quad \underline{-2-4-8+16} \\
& \qquad 3-6-17+26 \\
& \qquad \underline{3+6+12-24} \\
& \qquad\qquad -5+2
\end{array}
$$

由是商爲 $3x^2-2x+3$ 而剩餘爲 $-5x+2$.

所應注意者,書除數時,除第一項外,各項之符號俱須變之. 蓋在逐步演算時可以加法代減法也.

何諾氏綜合除法

565. 爲便利起見,現再詳述**何諾氏之綜合除法**. 蓋此已於63款中論及之矣.

玆以上款之例題整列如下

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
1 & 3 & -8 & -5 & +26 & -33 & +26 \\
2 & & 6 & +12 & -24 & & \\
4 & & & -4 & -8 & +16 & \\
-8 & & & & 6 & +12 & -24 \\
\hline
& 3 & -2 & +3 & -0 & -5 & +2
\end{array}
$$

解釋. 垂直線左之數字列爲除數之係數,自第一項後之各符號均須改變. 第二水平行可以商之第一項3乘2, 4, −8而得. 次以垂直線右第二列之諸項相加,卽得−2,此爲商之第二項之係數. 用所得之係數作第三次平行,再加第三列之諸項,卽得3,此爲商之第三項之係數.

其他諸列再相加,卽得在剩餘中諸項之係數.

566. 此法應用於下式時,所用之除數爲$x\pm a$之形,蓋演算可藉此更行化簡. 證例如次:

例題. 求以$x+2$除$3x^7-x^6+31x^4+21x+5$時之商數與剩餘

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l} 3 & -1 & 0 & 31 & 0 & 0 & 21 & 5 & \underline{-2} \\ & -6 & 14 & -28 & -6 & 12 & -24 & 6 & \\ \hline 3 & -7 & 14 & 3 & -6 & 12 & -3 & 11 & \end{array}$$

由是商爲$3x^6-7x^5+14x^4+3x^3-6x^2+12x-3$,剩餘爲11.

解釋. 第一水平行包含被除數之係數,零係數係代不含x冪之對應項者,除數書於此水平行之右而變其符號(564款)且略去x之係數1,令商之第三水平行之第一項爲以在除數中x之係數1除在被除數中x^7之係數3所得之結果,次再以除數-2乘之,結果爲-6,此爲第二水平行之第一項,商之第二項-7爲-1與-6之和,再以-2乘之得第二水平行之第二項14,14與0相加得商之第三項14,再以-2乘之,得第二行中之第三項-28,餘仿此.

567. **根數.** 凡n次方程式必有或僅有n根.

所設之方程式以$f(x)=0$表之,其中

$$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n.$$

方程式$f(x)=0$有一實根或一虛根,此命a_1表之,則$f(x)$可以$x-a_1$除之,故

$$f(x)=(x-a_1)f_1(x),$$

其中$f_1(x)$爲一$n-1$次元之有理整函數,又方程式$f_1(x)=0$有一實根或一虛根,此以a_2表之,則$f_1(x)$可以$x-a_2$除之,故

$$f_1(x)=(x-a_2)f_2(x),$$

其中$f_2(x)$爲一$n-2$次元之有理整函數.

由是 $$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)f_2(x)$$

依此演之,則得

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

因而方程式$f(x)=0$有n根,因當x有$a_1, a_2, a_3,\cdots a_n$中之任一值而$f(x)$消失.

又方程式不得有n以上之根,因設x有與$a_1, a_2, a_3,\cdots a_n$任一量相異之任何值者,則右之因數俱與零相異,故$f(x)$不能因x之此值而消失.

按上研究,$a_1, a_2, a_3,\cdots a_n$中有若干量可爲相等.在此情形中,其根雖非完全相異,然得假定方程式仍有n根.

568. 方程式次數之低減法. 設已知方程式之一根,則由前段知可用除法化約或減低至一含餘根之較低次方程,故設已知其k根,則此方程式可使之減低至$(n-k)$次方程. 一切根中僅知其二者,則此減低次方程爲一二次式,並可由此求得其餘根.

569. 方程式之組成法. 既$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$[567款].

故知欲作一方程式可由未知量減去已知之每一根並使各該二項因數所成之連乘積等於0而得之.

例題. 試作一根爲$1, -2$,及$\frac{1}{2}$之方程式

$$(x-1)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0,$$

$$\therefore\ 2x^3+x^2-5x+2=0.$$

習題 XLVIII. *a*.

1. 證明4爲$x^3-5x^2-2x+24=0$中之一根.

2. 證明$+3$爲$x^3-7x^2-7x+15=0$中之一根.

3. 證明$-\frac{1}{3}$爲$6x^3+17x^2-4x-3=0$中之一根.

4. 證明$\frac{4}{5}$爲$10x^3-3x^2-9x+4=0$中之一根.

5. 已知$x^3+6x^2-6x-63=0$中之一根爲3,求他根.

6. 已知$x^3-23x^2+166x-378=0$中之一根爲7,求他根.

7. 已知$x^3-2x^2+6x-9\frac{2}{27}=0$中之一根爲$\frac{5}{3}$,求他根.

8. 已知$x^4-15x^2+10x+24=0$中之一根爲2與3,求他根.

9. 已知$x^4-3x^3-21x^2+43x+60=0$中之一根爲3與5,求他根.

10. 已知$x^3+2ax^2+5a^2x+4a^3=0$中之一根爲$-a$,求他根.

11. 試作一根爲$-1, -2, -5$之方程式.

12. 試作一根爲$-2, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$之方程式.

570. 根與係數之關係. 令

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

表方程式,而以$a, b, c, \cdots k$表其根,則下爲恆等.

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-k).$$

因此,用乘法,即有

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$$

$$=x^n-s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}x+(-1)^ns_n.$$

在此恆等式中使x之同次冪係數等,即有

$$-p_1=s_1,$$

$$p_2=s_2,$$

$$-p_3=s_3,$$

$$(-1)^np_n=s_n,$$

其中s_1代$a, b, c,\cdots k$諸根之和,s_2代每次取二根之積之和,s_n可仿之.此等於一切根之連乘積,卽

(1) 第二項符號變後之係數等於諸根之和.

(2) 第三項之係數等於所有之根每次取其二根之積之和.

(3) 第四項符號變後之係數等於所有之根每次取其三根之積之和,餘仿此.

(4) 末項等於一切根之連乘積,其符號之爲+或爲−須視n爲偶數或爲奇數而定.

571. 從而設方程式成一般之形

(1) 若第二項缺去,則諸根之和爲零.

(2) 若末項缺去,則至少有一根爲零.

572. 學者或以爲前款所成立之關係可用以解任何所設之方程式.蓋關係之數等於根數故也.然一

究實際,殊未必盡然.因假定消去$a,b,c,\cdots k$中之任一$n-1$量後,以所得之方程式決定其餘之一量,而各該方程式所含此諸量既爲對稱,則顯能得一含有同一係數之方程式.此方程式故爲以$a,b,c,\cdots k$中之某一根代x之原方程式.

現試以次之方程式爲例

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$$

而令$a,b,c,$爲三根,則

$$a+b+c=-p_1,$$

$$ab+ac+bc=+p_2,$$

$$abc=-p_3.$$

此三方程各以$a^2,-a,1$乘之並相加,由是

$$a^3=-p_1a^2-p_2a-p_3,$$

卽, $$a^3+p_1a^2+p_2a+p_3=0,$$

此卽以a代x之原方程式.

上之消去法極爲普通,且於任何次方程式均適用.

573. 方程式中,若其二或二以上之根存有指定之關係,則570款所證之特性有時可得全部之解答.

例題1. 解方程式$4x^3-24x^2-23x+18=0$,已知其三根成等差級數.

此三根以$a-b, a, a+b$表之,則三根之和爲$3a$,每次取二根之積之和爲$3a^2-b^2$,三根之積爲$a(a^2-b^2)$,因得方程式三

$$3a=6,\ 3a^2-b^2=\frac{23}{4}, a(a^2-b^2)=-\frac{9}{2},$$

從第一方程式得$a=2$,從第二方程式得$b=\pm\frac{5}{2}$,且既此諸值能滿足第三方程式,則三方程式皆一致.由是三根爲$-\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}$.

例題2. 解方程式$24x^3-14x^2-63x+45=0$,已知一根爲他根之倍.

此三根以$a, 2a, b$表之,則有

$$3a+b=\frac{7}{12}, 2a^2+3ab=-\frac{21}{8}, 2a^2b=-\frac{15}{8}.$$

從首兩方程式,得

$$8a^2-2a-3=0$$

$$\therefore a=\frac{3}{4}, \text{或} -\frac{1}{2}, \text{而} b=-\frac{5}{3}, \text{或} \frac{25}{12}$$

經試驗後知$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{25}{12}$兩值不能滿足第三方程式$2a^2b=-\frac{15}{8}$,故滿足此方程者祇有$a=\frac{3}{4}, b=-\frac{5}{3}$兩值.

574. 方程式中之根雖未必皆能求得,然用570款所證之關係,則其根之對稱*函數之值不難求得.

例題. 求方程式$x^3-px^2+qx-r=0$中之平方根及立方根之和.

此三根各以a, b, c表之,則$a+b+c=p$, $bc+ca+ab=q$.

今$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(bc+ca+ab)=p^2-2q$.

又在所設之方程式中以a, b, c代x而相加,由是

$$a^3+b^3+c^3-p(a^2+b^2+c^2)+q(a+b+c)-3r=0.$$

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3=p(p^2-2q)-pq+3r=p^3-3pq+3r.$$

習題 XLVIII. *b*.

設已知諸根如下,試作方程式

1. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\pm\sqrt{3}$.　　2. 0, 0, 2, 2, -3, -3,

3. 2, 2, -2, -2, 0, 5.　4. $a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$.

解下列各方程式

5. $x^4-16x^3+86x^2-176x+105=0$,已知其二根為1與7.

6. $4x^3+16x^2-9x-36=0$中二根之和為零.

7. $4x^3+20x^2-23x+6=0$中之二根相等.

---

*所謂函數與其變數為對稱者,即交換其變數之任何一對後,函數之值恆不變也.由是$x+y+z$, $bc+ca+ab$, $x^3+y^3+z^3-xyz$各為一次,二次及三次之對稱函數[見319款].

8. $3x^3-26x^2+52x-24=0$ 中之三根成等比級數.

9. $2x^3-x^2-22x-24=0$ 中二根之比爲3:4.

10. $24x^3+46x^2+9x-9=0$ 中,一根爲他根之倍.

11. $8x^4-2x^3-27x^2+6x+9=0$ 中之二根爲等量而異號.

12. $54x^3-39x^2-26x+16=0$,已知其諸根成等比級數.

13. $32x^3-48x^2+22x-3=0$,已知其諸根成等差級數.

14. $6x^4-29x^3+40x^2-7x-12=0$,已知其二根之積爲2.

15. $x^4-2x^3-21x^2+22x+40=0$,已知其諸根成等差級數.

16. $27x^4-195x^3+494x^2-520x+192=0$,已知其諸根成等比級數.

17. $18x^3+81x^2+121x+60=0$ 中,已知其一根爲其他二根之和之半.

18. 試求 $x^4+qx^2+rx+s=0$ 中諸根之平方和及立方和.

575. 分數根. 方程式之諸係數俱爲整數,而第一項之係數爲一者,則其根不得爲一有理分數.

設爲可能,假定方程式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-2}x^2+p_{n-1}x+p_n=0$$

之根爲一最低項之有理分數,以 $\frac{a}{b}$ 表之,代此值於 x 而以 b^{n-1} 通乘之,卽有

$$\frac{a^n}{b}+p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}+\cdots+p_{n-1}a^{n-2}+p_na^{n-1}=0.$$

移項,

$$-\frac{a^n}{b}=p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}b+\cdots+p_{n-1}ab^{n-2}+p_nb^{n-1}.$$

此結果爲不可能者,蓋最低項之分數本不能等於整數故也,因此所設方程式之根不能爲一有理分數.

576. 虛根. 在含實係數之方程式中,其虛根成對.

假定 $f(x)=0$ 爲一含實係數之方程式,並假定有一虛根 $a+ib$,茲證明 $a-ib$ 亦爲一根.

$f(x)$ 之因數與此二根對應者爲

$$(x-a-ib)(x-a+ib),\text{ 或 }(x-a)^2+b^2.$$

令 $f(x)$ 爲 $(x-a)^2+b^2$ 所除,以 Q 表商,若有剩餘,以 $Rx+R'$ 表之,則

$$f(x)=Q\{(x-a)^2+b^2\}+Rx+R'$$

此恆等式中,命 $x=a+ib$,則,依假設 $f(x)=0$,亦卽 $(x-a)^2+b^2=0$,因此 $R(a+ib)+R'=0$

使實根部及虛根部俱等於零.

$$Ra+R'=0,\ Rb=0.$$

而依假設,b不爲零,

$$\therefore\ R=0 \text{ 及 } R'=0.$$

因此$f(x)$可以$(x-a)^2+b^2$整除,即,以

$$(x-a-ib)(x-a+ib)$$

整除,因此$x=a-ib$亦爲一根.

577. 由前款知設方程式$f(x)=0$有一對虛根$a\pm ib$,則$(x-a)^2+b^2$爲$f(x)$式之一因數.

假定$a\pm ib$, $c\pm id$, $e\pm ig$,…皆爲方程式$f(x)=0$之虛根,並假定*$\phi(x)$爲與此諸虛根對應之二次因數之積,則

$$\phi(x)=\{(x-a)^2+b^2\}\{x-c)^2+d^2\}\{x-e)^2+g^2\}\cdots.$$

今各該因數於x之每一實值爲正,因此$\phi(x)$於x之實值恆爲正.

578. 依576款即可證明於一係數爲有理之方程式中,其所有之不盡根成對. 即,設$a+\sqrt{b}$爲一根,則$a-\sqrt{b}$亦必爲一根.

例題 1. 解方程式$6x^4-13x^3-35x^2-x+3=0$,已知其一根爲$2-\sqrt{3}$.

---

* ϕ是希臘字母第二十一字 Phi.

既 $2-\sqrt{3}$ 爲其一根，則 $2+\sqrt{3}$ 亦爲一根．而與此一對根對應者爲二次因數 x^2-4x+1.

亦然 $6x^4-13x^3-35x^2-x+3=(x^2-4x+1)(6x^2+11x+3)$.

因此其他諸根可由次式得之．

$$6x^2+11x+3=0,\text{ 或 }(3x+1)(2x+3)=0,$$

由是四根爲 $-\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$.

例題 2. 試作一係數爲有理之四次方程式，其中一根爲 $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$.

此式之一對根爲 $\sqrt{2}-\sqrt{-3}, \sqrt{2}-\sqrt{-3}$, 而其他一對根爲 $-\sqrt{2}+\sqrt{-3}, -\sqrt{2}-\sqrt{-3}$.

與第一對根對應者爲二次因數 $x^2-2\sqrt{2}x+5$, 而與第二對根對應者爲二次因數 $x^2+2\sqrt{2}x+5$.

由是所需之方程式爲

$$(x^2+2\sqrt{2}x+5)(x^2-2\sqrt{2}x+5)=0.$$

或 $$(x^2+5)^2-8x^2=0,$$

或 $$x^4+2x^2+25=0.$$

習題 XLVIII. c.

解下列各方程式

1. $3x^4-10x^3+4x^2-x-6=0$, 已知其一根爲 $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$.

2. $x^4-36x^2+72x-36=0$，已知其一根爲$3-\sqrt{3}$.

3. $x^4+4x^3+5x^2+2x-2=0$，已知其一根爲$-1+\sqrt{-1}$.

4. $x^4+4x^3+6x^2+4x+5=0$，已知其一根爲$\sqrt{-1}$.

方程式之變形

579. 欲論某種方程式，有時可使之變成另一方程式以簡之．其中諸根與所求方程式中諸根同負有某種指定之關係．如是之變形，於三次方程式之解，尤見重要．

580. 凡方程式變成另一方程式時，其根爲原方程式中變換符號後之根．

令$f(x)=0$爲此方程式．

以$-y$代x，則方程式$f(-y)=0$可以$f(x)=0$中符號變後之每一根滿足之．由是所需之方程式爲$f(-y)=0$.

設所設之方程式爲

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0,$$

則所需之方程式顯爲

$$y^n-p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}p_{n-1}y+(-1)^np_n=0.$$

故變形之方程式可由原方程式自第二項起改變各相間項之符號而得．

註 設所設方程式中缺去任何一項，則必以零補足之以作係數．

例題. 改變$x^4-17x^2-20x-6=0$成另一方程式使其根仍爲原方程式之根惟號相反.此方程式可書作

$$x^4+0x^3-17x^2-20x-6=0,$$

依法則,卽有

$$x^4-0x^3-17x^2+20x-6=0,$$

或 $$x^4-17x^2+20x-6=0.$$

581. 改變方程式成另一方程式,其諸根等於以一所設之因數乘原方程式之諸根.

令$f(x)=0$爲此方程式,而令q表所設之量,使$y=qx$,故當x有任何定值時,y大q倍,則$x=\dfrac{y}{q}$,而所需之方程式爲

$$\left(\frac{y}{q}\right)^n+p_1\left(\frac{y}{q}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{y}{q}\right)^{n-2}+\cdots+p_{n-1}\left(\frac{y}{q}\right)+p_n=0.$$

統以q^n乘之,卽有

$$y^n+p_1qy^{n-1}+p_2q^2y^{n-2}+\cdots+p_{n-1}q^{n-1}y+p_nq^n=0.$$

故變形之方程式可以所設之因數乘原方程式之第二項再以此因數之平方乘第三項,餘仿此而得.

582. 此法之主要用途爲消除含分數係數之方程式

例題. 由方程式$2x^3-\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3}{16}=0$中去其分數係數.

命 $x=\frac{y}{q}$, 而以 q^3 乘各項, 由是

$$2y^3-\frac{3}{2}qy^2-\frac{1}{8}q^2y+\frac{3}{16}q^3=0.$$

若 $q=4$, 則一切項悉變爲整數, 再以 2 除之, 即得

$$y^3-3y^2-y+6=0.$$

583. 改變方程式成另一方程式使其諸根較原方程式諸根大一所設之量.

令 $f(x)=0$ 爲此方程式, 而令 h 爲所設之量, 設 $y=x+h$, 則於 x 之任何定值時 y 之值大於 h, 由是 $x=y-h$, 而所需之方程式爲 $f(y-h)=0$.

同理, 若諸根小去 h, 則所假設 $y=x-h$, 因得 $x=y+h$, 而所需之方程式爲 $f(y+h)=0$,

584. 設 n 甚小, 則上之變換法不見麻煩. 方程式爲高次者, 下法得適用之.

令 $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$.

使 $x=y+h$, 並假定 $f(x)$ 此時變成

$$q_0y^n+q_1y^{n-1}+q_2y^{n-2}+\cdots+q_{n-1}y+q_n.$$

今 $y=x-h$, 因得恆等式

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$$
$$=q_0(x-h)^n+q_1(x-h)^{n-1}+\cdots+q_{n-1}(x-h)+q_n.$$

故q_n爲以$x-h$除$f(x)$後所得之剩餘,又由除法所得之商爲

$$q_0(x-h)^{n-1}+q_1(x-h)^{n-2}+\cdots+q_{n-1}.$$

同理,q_{n-1}爲以$x-h$除末一式所得之剩餘,其由除法所得之商爲

$$q_0(x-h)^{n-2}+q_1(x-h)^{n-3}+\cdots+q_{n-2},$$

餘可類推.由是$q_n, q_{n-1}, q_{n-2},\cdots$可遞用綜合除法求之.其末一商爲$q_0$,且顯然等於$p_0$.

故欲求變形之方程式,其法如下:

依所求方程式之根大於或小於原方程式者而以$x\pm h$去除$f(x)$,則其餘數卽所求方程式之末項,如此以$x\pm h$除所得之商,則其餘數必爲所需方程式中含x項之係數.如更以$x\pm h$除第二次商,則其餘數必爲所需方程式中含x^2項之係數等等.

例題. 求諸根比方程式$4x^4+32x^3+83x^2+76x+21=0$之諸根大於2之方程式.

所需之方程式可以$x-2$代入所求方程式中之x而得.故依何諾氏方法應用$x+2$爲除數,其計算之法如次:

$$\begin{array}{llllll}
4 & 32 & 83 & 76 & 21 & \underline{|+2} \\
4 & 24 & 35 & 6 & \underline{|9} & \\
4 & 16 & 3 & \underline{|0} & & \\
4 & 8 & \underline{|-13} & & & \\
4 & \underline{|0} & & & & \\
4 & & & & &
\end{array}$$

由是此變形方程式爲

$$4x^4-13x^3+9=0, \text{或} (4x^2-9)(x^2-1)=0.$$

此式之四根爲 $+\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, +1, -1$. 因而所設式之四根爲

$$-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, -1, -3.$$

585. 一完全無缺之方程式變成另一缺一指定項之方程式.

前款之代入法爲用以消去方程式中之指定項.

令所設之方程式爲

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0,$$

設 $y=x-h$, 則得新方程式

$$p_0(y+h)^n+p_1(y+h)^{n-1}+p_2(y+h)^{n-2}+\cdots+p_n=0.$$

若依 y 之降冪序整列之, 則變成

$$p_0y^n+(np_0h+p_1)y^{n-1}$$
$$+\left\{\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}p_0h^2+(n-1)p_1h+p_2\right\}y^{n-2}+\cdots=0.$$

消去之項若爲第二項,使$np_0h+p_1=0$,因而$h=-\frac{p_1}{np_0}$,設消去之項爲第三項,使$\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}p_0h^2+(n-1)p_1h+p_2=0$,故得一求$h$之二次式.同樣,其他諸指定項皆不難消去.

如下所舉之例,更較便利.

例題. 由方程式$px^3+qx^2+rx+s=0$中,去其第二項.

令a, b, c爲三根,故$a+b+c=-\frac{q}{p}$,設於每一根上增$\frac{q}{3p}$,則在變形方程式中諸根之和等於$-\frac{q}{p}+\frac{q}{p}$,即第二項之係數爲零.

因而所需之變形式可以$x-\frac{q}{3p}$代入所設方程式中之x而成.

三次方程式一般之形既能去其第二項之變成較簡者.故學者應注意變形式可以方程式之次數除x減第二項之係數後代入原方程式中之而成.

586. 改變方程式成另一諸根爲所求方程式中諸根之倒數之方程式.

令所求之方程式爲 $f(x)=0$, 使 $y=\frac{1}{x}$, 因而 $x=\frac{1}{y}$, 則所需之方程式爲 $f\left(\frac{1}{y}\right)=0$.

此變換法於含有根爲負乘冪之對稱函數之式中尚能用以求得其值

例題. 設 a, b, c 爲方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 中之三根, 求次式之值

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

書 $\frac{1}{y}$ 代 x, 而以 y^3 乘之, 並變其一符號則結果方程式

$$ry^3-qy^2+py-1=0$$

之根爲 $\quad \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$

因此 $\quad {}^*\Sigma\frac{1}{a}=\frac{q}{r},\ \Sigma\frac{1}{ab}=\frac{p}{r},$

$$\therefore \Sigma\frac{1}{a^2}=\frac{q^2-2pr}{r^2}.$$

587. 倒數方程式. 方程式中, 若變 x 爲 $\frac{1}{x}$ 後, 其值

---

* $\Sigma\frac{1}{a}$ 爲成 $\frac{1}{a}$ 形之一切項之和.

仍不變者,則謂之**倒數方程式**.

若所設之方程式為

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-2}x^2+p_{n-1}x+p_n=0,$$

則書 $\frac{1}{x}$ 代 x 及去分數後之方程式為

$$p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+p_{n-2}x^{n-2}+\cdots+p_2x^2+p_1x+1=0.$$

設此二方程式同,則必有

$$p_1=\frac{p_{n-1}}{p_n},\ p_2=\frac{p_{n-2}}{p_n},\ \cdots,\ p_{n-2}=\frac{p_2}{p_n},\ p_{n-1}=\frac{p_1}{p_n},\ p_n=\frac{1}{p_n}.$$

由上結果,得 $p_n=\pm1$, 由是得倒數方程式兩類

(i) 設 $p_n=1$, 則

$$p_1=p_{n-1},\ p_2=p_{n-2},\ p_3=p_{n-3},\ \cdots,$$

卽,諸項首尾等距之係數相等.

(ii) 設 $p_n=-1$, 則

$$p_1=-p_{n-1},\ p_2=-p_{n-2},\ p_3=-p_{n-3},\ \cdots,$$

因而若方程式為 $2m$ 次元, 則 $p_m=-p_m$, 或 $p_m=0$, 在此情形中,其首尾等距諸項之係數量常相等而號相反,若方程式為偶次,則無中項.

588. 倒數方程式之標準形. 假定 $f(x)=0$ 為一倒數方程式.

設$f(x)=0$爲第一類並爲奇次,則其一根爲-1,故$f(x)$可以$x+1$除之 設$\phi(x)$爲商,則$\phi(x)=0$爲第一類且爲偶次之倒數方程式.

設$f(x)=0$爲第二類並爲奇次,則其一根爲$+1$,如是則$f(x)$可以$x-1$除之,且如前$\phi(x)$爲第一類且爲偶次之倒數方程式.

設$f(x)=0$爲第二類並爲偶次,則其一根爲$+1$,及一根爲-1,如是則$f(x)$可以x^2-1除之,而如前$\phi(x)=0$爲第一類偶次之倒數方程式.

因而任何倒數方程式爲偶次其末項且爲正,或凡能變成此形者,統稱之爲倒數方程式之標準形.

589. 倒數方程式之標準能化成次元折半之方程式.

令此方程式爲

$$ax^{2m}+bx^{2m-1}+cx^{2m-2}+\cdots+kx^m+\cdots cx^2+bx+a=0,$$

除以x^m而整列其諸項,卽有.

$$a\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+b\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+c\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\cdots+k=0$$

今 $$x^{p+1}+\frac{1}{x^{p+1}}=\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right),$$

因而書z代$x+\dfrac{1}{x}$,並連續給p以$1, 2, 3\cdots$諸值卽得

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=z(z^2-2)-z=z^3-3z,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=z(z^3-3z)-(z^2-2)=z^4-4z^2+2,$$

餘倣此,通常 $x^m+\frac{1}{x^m}$ 爲含 m 次元之 z,故在 z 中之方程式爲 m 次元.

590. 求諸根爲所求方程式中諸根之平方之方程式.

令 $f(x)=0$ 爲所設之方程式,使 $y=x^2$,則 $x=\sqrt{y}$,故所需之方程式爲 $f(\sqrt{y})=0$.

例題. 求方程式,使其諸根爲 $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$ 中諸根之平方.

命 $x=\sqrt{y}$,並移項,卽有

$$(y+p_2)\sqrt{y}=-(p_1y+p_3),$$

於是 $$(y^2+2p_2y+p_2^2)y=p_1^2y^2+2p_1p_3y+p_3^2,$$

或 $$y^3+(2p_2-p_1^2)y^2+(p_2^2-2p_1p_3)y-p_3^2=0.$$

習題 XLVIII. *d.*

1. 改變 $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$ 成另一方程式,使其根仍爲原方程式之根,惟號相反.

2. 改變$2x^3-4x^2+7x-3=0$成另一方程式,使其諸根為3乘原方程式之諸根.

3. 改變$x^3-7x-6=0$成另一方程式,使其諸根為原方程式諸根之$-\frac{2}{3}$倍.

4. 改變$x^3-4x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{9}=0$成另一係數為正整數之方程式,且使其首項之係數為1.

5. 改變$3x^4-5x^3+x^2-x+1=0$成另一方程式,使其首項之係數為1.

6. 改變$x^4+10x^3+39x^2+76x+65=0$成另一方程式,使其根較原方程式之根大4.

7. 改變$x^4-12x^3+17x^2-9x+7=0$成另一方程式,使其根較原方程式之根小3.

8. 試將$2x^4-13x^2+10x-19=0$之諸根減少1.

9. 試求一方程式,其諸根各較已知方程式

$x^4+16x^3+72x^2+64x-129=0$之諸根大4.

10. 解方程式$3x^3-22x^2+48x-32=0$,已知其諸根成調和級數.

11. 已知方程式$x^3-11x^2+36x-36=0$之諸根成調和級數,試求其根.

試消去下列方程式之第二項:

12. $x^3-6x^2+10x-3=0.$

13. $x^4+4x^3+2x^2-4x-2=0.$

14. 改變$x^3-\frac{x}{4}-\frac{3}{4}=0$成另一方程式,使其諸根各較原方程式之諸根大$\frac{3}{2}$.

15. 試將方程式$x^5-4x^4+3x^2-4x+6=0$之諸根減少3.

16. 試求一方程式,使其諸根各較

$x^3-5x^2+6x-3=0$之一根大1.

17. 試求一方程式,使其諸根爲$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$之諸根之平方.

18. 試求一方程式,使其諸根爲方程式

$x^3+3x^2+2=0$之諸根之立方.

設a, b, c爲方程式$x^3+qx+r=0$之三根,試以下列各題所示之根,列出其方程式

19. $ka^{-1},\quad kb^{-1},\quad kc^{-1}.$

20. $b^2c^2,\quad c^2a^2,\quad a^2b^2.$

21. $\frac{b+c}{a^2},\quad \frac{c+a}{b^2},\quad \frac{a+b}{c^2}.$

22. $bc+\frac{1}{a},\ ca+\frac{1}{b},\ ab+\frac{1}{c}.$

解下列各方程式

23. $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0.$

24. $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0.$

25. $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0.$

26. $4x^6-24x^5+57x^4-73x^3+57x^2-24x+4=0.$

狄卡德氏之符號法則

591. 級數中各項前之符號不論爲+或爲−，其兩連續項苟爲同號，則生連續或不易，兩連續項苟爲異號，則生變化或變數.

592. 狄卡德之法則. 在任何方程式中，正根之數不得多於符號變化之數，而在任何完全方程式中，負根之數不得多於符號連續之數.

假定多項式中諸項之符號爲＋＋－－＋－－－＋－＋－，現設以符號爲＋－之二項式乘之，則乘積中至少比原多項式多一符號之變化，其證如次.

行乘法時，單書諸項之符號，卽有

$$
\begin{array}{l}
+\,+\,-\,-\,+\,-\,-\,-\,+\,-\,+\,- \\
+\,- \\
\hline
+\,+\,-\,-\,+\,-\,-\,-\,+\,-\,+\,- \\
\quad -\,-\,+\,+\,-\,+\,+\,+\,-\,+\,-\,+ \\
\hline
+\,\pm\,-\,\mp\,+\,-\,\mp\,\mp\,+\,-\,+\,-\,+
\end{array}
$$

其中複符號係表示兩意者,於不能確定項前之符號爲正抑爲負時用之.

檢查乘積知

(i) 原多項式中,每一符號之連續,以兩意代之

(ii) 一兩意或一組兩意前後之符號爲不同類.

(iii) 符號之變化由末尾引入.

現以最逆之情形假定一切兩意俱以連續代之.從(ii)知符號變化之數爲與任取上符號或下符號無異.若取上符號,由是符號變化之數不能小於在

$$+\,+\,-\,-\,+\,-\,-\,-\,+\,-\,+\,-\,+$$

之內,而此組符號與原多項式末尾加一符號之變化同.

設此時假定諸因數對應於負根及虛根之乘積,則與正根對應之各因數 $x-a$ 至少多引入一符號之變化,故方程式之正根不能多於其符號之變化.

欲證狄卡德法則之第二段,姑假定方程式爲完全者而以$-y$代x,則原方程式中符號之連續變成變形方程式中符號之變化.今變形方程式中之正根不能多於其符號之變化.因此原方程式中之負根不能多於其符號之連續.

不問方程式$f(x)=0$爲完全或不完全,其根恆等於$f(-x)$之根,所差者僅其符號耳.故$f(x)=0$之負根卽爲$f(-x)=0$之正根,但此項正根之數不能多於$f(-x)$中符號變化之數,卽$f(x)=0$中負根之數不能多於$f(-x)$中符號變化之數.

故狄卡德之法則可如下述之.

方程式$f(x)=0$之正根不能多於$f(x)$中所有符號之變化,其負根亦不能多於$f(-x)$中所有符號之變化.

例題. 討論方程式$x^9+5x^8-x^3+7x+2=0$.

其中符號之變化有二,故至多有二正根.

又$f(-x)=-x^9+5x^8+x^3-7x+2$,而其中符號之變化有三,故所設之方程式至多有三負根,故至少必有四虛根.

593. 次之結果歸入前款者明甚.

(i) 設諸係數俱爲正，則方程式無正根. 由是方程式$x^5+x^3+2x+1=0$不能有一正根.

(ii) 設偶數冪x之係數俱爲一種符號，而奇數冪x之係數俱爲相反一種符號，則方程式無負根. 由是次之方程式不能有一負根

$$x^7+x^5-2x^4+x^3-3x^2+7x-5=0.$$

習題 XLVIII. *e*.

試求下列各方程式之根之性質.

1. $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$.

2. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$.

3. $3x^4+12x^2+5x-4=0$.

4. 證明方程式$2x^7-x^4+4x^3-5=0$至少有四個虛根.

5. 方程式$x^{10}-4x^6+x^4-2x-3=0$諸根之性質如何推測之.

6. 試求方程式$x^9-x^5+x^4+x^2+1=0$中能含虛根之至少數.

594. 誘導函數. 求當$f(x)$爲x之有理整函數時之$f(x+h)$之值.

令$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$，則

$$f(x+h)=p_0(x+h)^n+p_1(x+h)^{n-1}+p_2(x+h)^{n-2}$$
$$+\cdots+p_{n-1}(x+h)+p_n.$$

展開各項並整列此結果爲h之昇羃序,卽有

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$$
$$+h\{np_0x^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}+\cdots+p_{n-1}\}$$
$$+\frac{h^2}{\lfloor 2}\{n(n-1)p_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)p_1x^{n-3}$$
$$+\cdots+2p_{n-2}\}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{h^n}{\lfloor n}\{n(n-1)(n-2)\cdots 2.1\,p_0\}.$$

此結果恆書作次形

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x)+\frac{h^3}{\lfloor 3}f'''(x)$$
$$+\cdots+\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(x),$$

而函數$f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,…各稱爲$f(x)$之第一,第二,第三,…誘導函數.

檢查h, $\frac{h^2}{\lfloor 2}$,…之係數可知<u>欲由$f(x)$求$f'(x)$</u>, <u>可以$f(x)$中含x項之指數乘各該項再由此指數減1而得</u>.

同理可得$f''(x)$, $f'''(x)$,….

595. 等根 設方程式$f(x)=0$有r根等於a，則方程式$f'(x)=0$必有$r-1$根等於a.

當$f(x)$爲$(x-a)^r$所除時，令$\phi(x)$表商，則

$$f(x)=(x-a)^r\phi(x).$$

書$x+h$代x，由是

$$f(x+h)=(x-a+h)^r\phi(x+h),$$

$$\therefore f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

$$=\{(x-a)^r+r(x-a)^{r-1}h+\cdots\}\{\phi(x)+h\phi'(x)$$

$$+\frac{h^2}{2!}\phi''(x)+\cdots\}.$$

此恆等式中，使h之係數皆相等，卽有

$$f'(x)=r(x-a)^{r-1}\phi(x)+(x-a)^r\phi'(x)$$

由是$f'(x)$含有重複$r-1$次之因數$x-a$，卽，方程式$f'(x)=0$有$r-1$根等於a.

同樣可證明者設方程式$f(x)=0$有S根等於b，則方程式$f'(x)=0$有$S-1$根等於b，餘可類推.

由上之證，可知設$f(x)$含一因數$(x-a)^r$，則$f'(x)$含一因數$(x-a)^{r-1}$，由是$f(x)$及$f'(x)$有一公因數$(x-a)^{r-1}$. 故設$f(x)$及$f'(x)$無公因數，則$f(x)$無重複之因數，因而方

程式$f(x)=0$之有無等根,須視$f(x)$及$f'(x)$有無一含x之公因數而定.

596. 故欲求方程式$f(x)$之等根,必先求$f(x)$及$f'(x)$之最高公因數,後使之等於零,再解所得之方程式.

例題. 解等根方程式$x^4-11x^3+44x^2-76x+48=0$.

令
$$f(x)=x^4-11x^3+44x^2-76x+48,$$
$$f'(x)=4x^3-33x^2+88x-76,$$

並依普通法則,求得$f(x)$及$f'(x)$之最高公因數為$x-2$,因此$(x-2)^2$為$f(x)$之一因數,而

$$f(x)=(x-2)^2(x^2-7x+12)$$
$$=(x-2)^2(x-3)(x-4),$$

由是四根為2, 2, 3, 4.

根之位置

597. 設變數x續漸由a變至b,則函數$f(x)$必續漸由$f(a)$變至$f(b)$.

令c及$c+h$為x介於a及b間之任何二值,即有

$$f(c+h)-f(c)=hf'(c)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(c)+\cdots+\frac{h^n}{\underline{|n}}f^n(c)$$

取h為極小,則$f(c+h)$及$f(c)$之差能使之任意小,因此

使變數x變小，則函數$f(x)$亦對應變小，故因x之漸由a變至b，函數$f(x)$亦漸由$f(a)$變至$f(b)$.

588. 所須注意者現尚未證明$f(x)$恆由$f(a)$增大至$f(b)$，抑由$f(a)$減小至$f(b)$. 然由一值變至另一值而無任何突變者，則已證明，蓋有時雖增大，有時亦或減小也.

599. 設$f(a)$及$f(b)$之符號相反，則方程式$f(x)=0$之一根必在a與b之間.

因x之漸由a變至b而函數$f(x)$漸由$f(a)$變至$f(b)$，故此函數必經一切中間之值. 然既$f(a)$及$f(b)$之符號相反，則零值必介於此二者之間，卽因x於a與b間之某值而$f(x)=0$.

此並非言$f(x)=0$中祇有一根在a與b之間亦非言$f(a)$與$f(b)$爲同號時，$f(x)=0$中，在a與b之間卽無根.

600. 凡奇次方程式，至少有一實根，其符號與其末項者相反.

於函數$f(x)$中，連續以$+\infty, 0, -\infty$諸值代入x，則

$$f(+\infty)=+\infty, \quad f(0)=p_n, \quad f(-\infty)=-\infty.$$

設p_n爲正，則$f(x)=0$有一根介於0與$-\infty$之間，設p_n爲負，則$f(x)=0$有一根介於0與$+\infty$之間.

601. 凡方程式爲偶次而其末項爲負者，至少有正負兩根.

因在此情形中

$$f(+\infty)=+\infty,\quad f(0=)p_n,\quad f(-\infty)=+\infty.$$

但 p_n 爲負，因此 $f(x)=0$ 有一根介於 0 與 $+\infty$ 之間，而另一根介於 0 與 $-\infty$ 之間.

602. 設 $f(a)$ 及 $f(b)$ 兩式之符號相反，則 $f(x)=0$ 之根成奇數者必介於 a 與 b 之間. 且設 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之符號同，則介於 a 與 b 之間者爲其成偶數之根或竟無根.

假定 a 大於 b，而 $c, d, e, \cdots k$ 代介於 a 與 b 間之 $f(x)=0$ 一切之根. 當 $f(x)$ 爲 $(x-c)(x-d)(x-e)\cdots(x-k)$ 之乘積所除時，令 $\phi(x)$ 爲商，則

$$f(x)=(x-c)(x-d)(x-e)\cdots(x-k)\phi(x).$$

因此 $$f(a)=(a-c)(a-d)(a-e)\cdots(a-k)\phi(a).$$

$$f(b)=(b-c)(b-d)(b-e)\cdots(b-k)\phi(b).$$

今 $\phi(a)$ 及 $\phi(b)$ 必爲同號，否則方程式 $\phi(x)=0$ 之一根，必介於 a 與 b 之間 [599 款]，因已與假設衝突，故爲 $f(x)=0$ 之一根，因此設 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號相反，則二式

$$(a-c)(a-d)(a-e)\cdots(a-k),$$

$$(b-c)(b-d)(b-e)\cdots(b-k)$$

之符號必相反．又第一式之因數俱爲正，而第二式之因數俱爲負．因而諸因數必成奇數，卽根 $c, d, e, \cdots k$ 之數必成奇數．

同理，設 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之符號同，則諸因數必成偶數，在此情形中，設 $c, d, e, \cdots k$ 俱大於 a，或小於 b，則所設之條件可滿足之．故 $f(x)=0$ 無需有一 a 與 b 間之根．

習題 XLVIII. f.

1. 試求 $2x^4-x^3-2x^2+5x-1$ 之連續誘導函數．

試解下列各等根方程式

2. $x^4-9x^2+4x+12=0$.
3. $x^4-6x^3+12x^2-10x+3=0$.
4. $x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0$.
5. $x^5-x^3+4x^2-3x+2=0$.
6. $8x^4+4x^3-18x^2+11x-2=0$.
7. 證明方程式 $10x^3-17x^2+x+6=0$ 中，有一根在 0 與 -1 之間．
8. 證明方程式 $x^4-5x^3+3x^2+35x-70=0$ 中，有一根在 2 與 3 之間，另一根在 -2 與 -3 之間．
9. 證明方程式 $x^4-12x^2+12x-3=0$ 中，有一根在

-3與-4之間,另一根在2與3之間.

10. 證明方程式$x^5+5x^4-20x^3-10x-2=0$中,有一根在2與3之間,另一根在-4與-5之間.

史頓氏定理及其方法

603. 西曆1829年,瑞士數學家史頓氏始以確定方程式中實根之數及實根之位置之法供於世.

604. 令$f(x)$為等根已消去之方程式,並令$f_1(x)$為第一個誘導函數. 令以$f_1(x)$除$f(x)$後,其剩餘以$f_2(x)$表之,並變其符號. 再以$f_2(x)$除$f_1(x)$而續行演算,以求$f(x)$及$f_1(x)$之H.C.F. 惟每一剩餘在未用作除數之前,須變其符號至求得不含x之剩餘止,而其符號亦須改變,其他符號則無需.

$f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots f_n(x)$諸式謂之史頓氏函數.

令$Q_1, Q_2, \cdots Q_{n-1}$表所得之連續商,其演算之步驟如下

$$f(x)=Q_1 f_1(x)-f_2(x),$$
$$f_1(x)=Q_2 f_2(x)-f_3(x),$$
$$f_2(x)=Q_3 f_3(x)-f_4(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{n-2}(x)=Q_{n-1}f_{n-1}(x)-f_n(x),$$

由上等式,卽得

(1) **二連續函數不能因x之同值而消失.**

設爲可能,則一切連續函數連$f_n(x)$在內盡將消失,然此必爲不可能者,蓋$f_n(x)$與x無關故也.

(2) **若任何函數除第一函數外,因x之特別值而消失,則鄰接二函數之符號相反.**

由是於$f_2(x)=Qf_3(x)-f_4(x)$中,設$f_3(x)=0$,卽有

$$f_2(x)=-f_4(x).$$

現以史頓氏定理一述.

於史頓函數中,設以任何特別值a代x並注意其符號變化之數,後與x以一較大之值b,再注意其符號變化之數,則所失變化之數必等於在a與b間$f(x)$之實根之數.

(1) 令c爲可使某函數,除第一函數外,消失之x之值,如$f_r(x)$,故$f_r(c)=0$.今若$x=c$,則$f_{r-1}(x)$及$f_{r+1}(x)$之符號相反,由是三函數$f_{r-1}(x), f(x), f_{r+1}(x)$適在$x=c$之前後有一符號之連續及一符號之變化,因而當$x$經過可使一函數,除$f(x)$外,消失之值時,則變化之數無變動.

(2) 令 c 爲方程式 $f(x)=0$ 之一根，故 $f(c)=0$，令 h 爲任何正量.

今 $$f(c+h)=f(c)+hf'(c)-\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(c)+\cdots,\qquad [594\text{款}]$$

且因 c 爲方程式 $f(x)=0$ 之一根，故 $f(c)=0$，因此

$$f(c+h)=hf'(c)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(c)+\cdots.$$

設取 h 爲極小，則凡含有最高冪之項均可忽之，乃得

$$f(c+h)=hf'(c),$$

且因 h 爲正量，故 $f(c+h)$ 及 $f'(c)$ 之符號同. 卽以近乎 x 而在後者之一根代入時，此根之函數與 $f'(x)$ 爲同號.

同樣可證明 $f(c-h)=-hf'(c)$，卽以近乎 x 而在前者之一根代入時，此根之函數與 $f'(x)$ 爲異號，由是 x 逐漸增加，僅能於 x 經過方程式 $f(x)=0$ 中一根時，史頓函數間方減少一符號之變化.

在上述一瞬間可得一符號之變化數，故此定理乃成立.

605. 欲決定方程式 $f(x)=0$ 全數之實根，可以 $-\infty$

與 $+\infty$ 依次代去史頓函數中之 x, 其二次所得符號變化數之差卽爲全數之實根.

以 $-\infty$ 及 0 代入 x 可決定負實根之數, 而以 $+\infty$ 及 0 代入 x, 卽得正實根之數.

606. 當 $+\infty$ 及 $-\infty$ 代 x 時, 任何函數之符號爲該函數中 x 爲最高冪之符號.

607. 現試決定 $x^3+3x^2-9x-4=0$ 之實根之數及其位置.

其中 $f_1(x)=3x^2+6x-9$.

今如欲求 $f_2(x)$, $f_3(x)$, 等等, 可引入或消去任何正因數, 因其結果之符號並不受此影響. 故以 3 乘原方程式, 卽有

$$
\begin{array}{r}
3x^2+6x-9)\,3x^3+9x^2-27x-12\,(x+1 \\
\underline{3x^3+6x^2-\ \ 9x\qquad} \\
3x^2-18x-12 \\
\underline{3x^2+\ \ 6x-\ \ 9} \\
3)\underline{-24x-\ \ 3} \\
-\ \ 8x-\ \ 1
\end{array}
\qquad \therefore f_2(x)=8x+1.
$$

$$
\begin{array}{r}
8x+1)\,24x^2+48x-72\,(3x+5 \\
\underline{24x^2+\ \ 3x\qquad} \\
9)\underline{45x-72} \\
5x-\ \ 8 \\
\underline{8} \\
40x-64 \\
\underline{40x+\ \ 5} \\
-69
\end{array}
\qquad \therefore f_3(x)=69.
$$

故得

$$f(x)=x^3+3x^2-9x-4,$$

$$f_1(x)=3x^2+6x-9,$$

$$f_2(x)=8x+1,$$

$$f_3(x)=69.$$

		$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	
若 $x=-\infty$	卽有	$-$	$+$	$-$	$+$	3變
若 $x=+\infty$	卽有	$+$	$+$	$+$	$+$	無變
若 $x=0$	卽有	$-$	$-$	$+$	$+$	1變

故實根之數爲3，正者一而負者二.

欲決定此諸根之位置，可代入不同之數，以0開始並於各方演算，由是.

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	
$x=-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3變
$x=-5$	$-$	$+$	$-$	$+$	3變
$x=-4$	$+$	$+$	$-$	$+$	2變
$x=-3$	$+$	$\pm$	$-$	$+$	2變
$x=-2$	$+$	$-$	$-$	$+$	2變
$x=-1$	$+$	$-$	$-$	$+$	2變
$x=0$	$-$	$-$	$+$	$+$	1變

$x=1$	$-$	$\pm$	$+$	$+$	1變
$x=2$	$-$	$+$	$+$	$+$	1變
$x=3$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變
$x=\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	無變

由是一根在 -4 與 -5 之間,第二根在 0 與 -1 之間,而第三根在 2 與 3 之間.

習題 XLVIII. *g*.

試決定下列各方程式之實根數及其位置

1. $x^3-4x^2-6x+8=0.$

2. $2x^4-11x^2+8x-16=0.$

3. $x^3-7x+7=0.$

4. $x^4-4x^3+6x^2-12x+2=0.$

5. $x^4-4x^3+x^2+6x+2=0.$

6. $x^4-x^3+x-1=0.$

7. $x^3-9x^2+23x-16=0.$

8. $x^5+x^3-2x^2+2x-1=0.$

函數之圖示法

坐標

608 畫互成直角之兩直線如圖1即成一次直

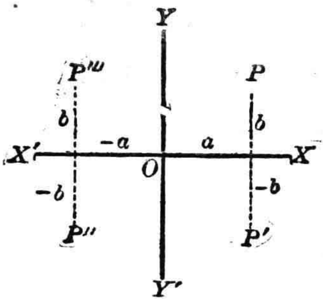

圖 1

線法，其交點O，謂之原點，由O至XX'之距離謂之橫坐標．由XX'與YY'平行之直線距離謂之縱坐標．

609. 橫坐標上在原點之右者爲正，其在原點之左者爲負，縱坐標上由XX'向上者爲正，其向下者爲負．

610. 某點之橫坐標及縱坐標謂之此點之坐標，而XX'及YY'直線謂之坐軸，X軸，Y軸，或橫軸及縱軸．

611. 在一平面中任何點均可用此二坐標顯之．由是圖1之P點位於橫軸上，在O右先量a之距離，而後量向上b之距離．

a與b既正負皆可，故知P'點爲a正b負，P''點可取a負b負得之，而P'''點可取a負b正得之．

橫坐標及縱坐標通常各以x及y描寫之，由是$x=a$，

$y=b$ 描寫點 P，而 $x=a$，$y=-b$ 描寫點 P' 等等.

612. 不必書"坐標之點爲5與3"而用較簡括者，由是，點(5, 3)意卽此點在橫坐標上爲5單位，在縱坐標上爲3單位.

定諸點(3, −2)，(5, 8)，(−4, 4)，(−8, −3)之位置.

函數之圖形

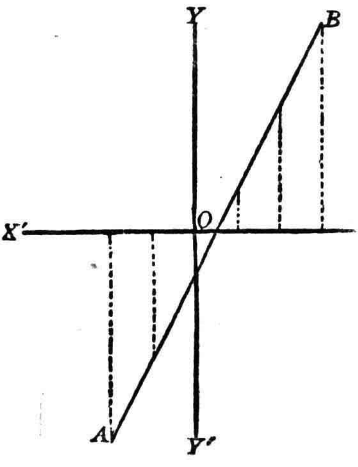

圖 2

613. 令 $f(x)$ 爲 x 之任何有理整函數，並使與 y 等. 設與 x 以一列數值，則 y 亦得一列對應之值. 現橫坐標上 x 之值及縱坐標上 y 之對應值均不計之，而引一直線以連結此一列之點. 此卽所設函數之圖形矣.

例題 1. 作 $2x-1$ 之圖形.

令 $2x-1=y$，與 x 以連續之值，則得 y 之對應值如下

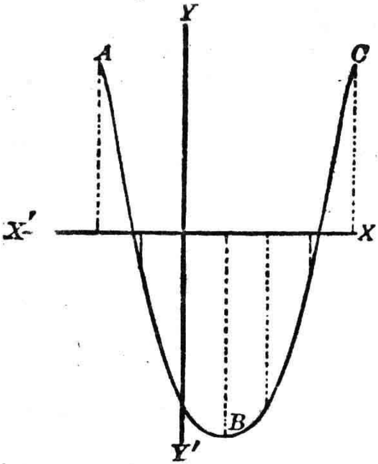

圖 3

$x=-2,\quad y=-5,$

$x=-1,\quad y=-3,$

$x=0\quad\quad y=-1.$

$x=1,\quad\quad y=1.$

$x=2,\quad\quad y=3.$

$x=3,\quad\quad y=5.$

依611款所述定出此諸點,並引一直線通過之,如是卽得一直線 AB 如圖2. 此卽所求之圖形.

例題2. 作方程式 x^2-2x-4 之圖形.

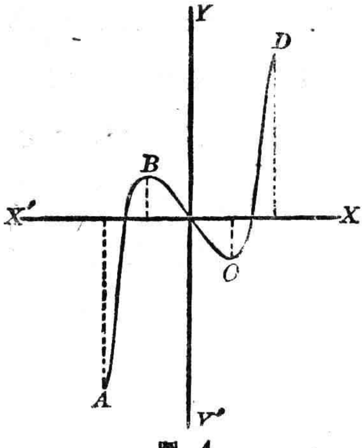

圖 4

命 $y=x^2-2x-4$, 卽得以下之值

$x=-2,\quad y=4.$

$x=-1,\quad y=-1.$

$x=0,\quad\quad y=-4.$

$x=1,\quad\quad y=-5.$

$x=2,\quad\quad y=-4.$

$x=3,\quad\quad y=-1.$

$x=4,\quad\quad y=4.$

以曲線ABC連結此諸點,如圖3,此卽所設方程式之圖形.

例題3. 作x^3-2x之圖形.

假設$y=x^3-2x$,卽有

$$x=-2,\qquad y=-4.$$

$$x=-1,\qquad y=1.$$

$$x=0,\qquad y=0.$$

$$x=1,\qquad y=-1.$$

$$x=2,\qquad y=4.$$

曲線$ABCD$,如圖4,卽所求之圖形.

在假設之值中取其他諸值,則較正確之曲線不難定出.

614. 給諸值與x,則顯然代入一根後可得$y=0$,卽縱坐標,或由橫坐軸至縱坐標之距離爲0,因此在圖形截X軸處,卽爲一實根之位置. 而圖形經過X軸之長短須視方程式中有多少實根及不等根爲準,設方程式中爲虛根,則此曲線不遇X軸.

習題 XLVIII. *h*.

試作下列各函數之圖形

1. $2x-3$. 2. x^3+2x+1. 3. x^2-5.

4. x^3+x-1. 6. x^3-5x+3. 8. $x^3+3x^2+5x-12$.

5. x^3-2. 7. x^4-3x^2+3.

高次數字方程式之解法

可通約根

615. 實根之爲整數或分數者謂之**可通約根**.

從582款,凡分數係數之方程式均能變成其他係數統爲整數,且其第一項爲一之方程式.因此現祇須討論具有此形之方程式,如是方程式之根無有爲最低項之有理分數者[575款]故須求其整數根.從570款,$f(x)$之末項可以每一整數根除之,故欲求$f(x)$之可通約根,僅須求其末項之整除數而以試驗決定其中之根可矣.

616. **牛頓氏法.** 設除數爲小數,則其是否爲根可逕用代入法確定之.於其他情形中可用562款及566款之方法或除數方法,有時亦名**牛頓氏法**.

假定a爲方程式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

之一整數根.

用代入法,卽有

$$a^n+p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}+\cdots\cdots p_{n-1}a+p_n=0.$$

移項而遍除以a,卽得

$$\frac{p_n}{a}=-p_{n-1}-\cdots-p_2a^{n-3}-p_1a^{n-2}-a^{n-1},$$

其中$\frac{p_n}{a}$必爲整數者明甚.以Q表$\frac{p_n}{a}$而移$-p_{n-1}$項,得

$$Q+p_{n-1}=-\cdots-p_2a^{n-3}-p_1a^{n-2}-a^{n-1}.$$

再以a除之,得

$$\frac{Q+p_{n-1}}{a}=-\cdots-p_2a^{n-4}-p_1a^{n-3}-a^{n-2}.$$

又如前,方程式之第一節必爲一整數,以Q_2表之而如前演算,則除n次後必得一結果,如

$$\frac{Q_{n-1}+p_1}{a}=-1.$$

因此設以a代末項中之一整除數,卽有下之法則

以a除末項後,其商上加以x之係數.

此和再以a除之,若商爲整數則以x^2之係數加之.

依法演之,設a爲方程式之一根,則每一商必爲整數且其末商爲-1.

牛頓氏法之效用爲在除法任何一段求得之分數商可用以證明除數非方程式中之一根.

例題. 求 $x^4+4x^3-x^2-16x-12=0$ 中之整數根,按狄氏法則此方程式不能多於一正根,亦不能多於三負根.

-12 之整除數爲 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6$. 代入後可證明 -1 爲一根而 $+1$ 則否.

欲確定2是否爲根,可如下整列之.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & +4 & -1 & -16 & -12 & \underline{2} \\ & -1 & -6 & -11 & -6 & \\ \hline & -2 & -12 & -22 & & \end{array}$$

因而2爲一根.

解釋. 第一行含有原方程式之諸係數及除數2. 以2除末項 -12 得商 -6, 加上 x 之係數 -16 得 -22, 次以2除 -22 得 -11, 加上 x^2 之係數 -1 得 -12, 再以2除 -12 得 -6, 乃加上 x^3 之係數 $+4$, 則得 -2, 此更以2除之, 得最後一商 -1, 因此2爲一根.

既方程式不能有一個以上之正根,故再須試驗餘下之負除數. 由是,

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & +4 & -1 & -16 & -12 & \underline{-6} \\ & & & +2 & & \\ \hline & & & -14 & & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr|l} 1 & +4 & -1 & -16 & -12 & \underline{-4} \\ & & & +3 & & \\ \hline & & & -13 & & \end{array}$$

因此 -6 非其中一根　　因此 -4 非其中一根.

$$\begin{array}{r|l} 1+4-1-16-12 & \underline{-3} \\ -1-1+4+\ 4 & \\ \hline +3+3-12 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1+4-1-16-12 & \underline{-2} \\ -1-2+5+\ 6 & \\ \hline +2+4-10 & \end{array}$$

因此-3為其中一根.　因此-2為其中一根.

習題　XLVIII. *i*.

解下各方程式,已知其中含一或一以上之整數根

1. $x^3-9x^2+26x-24=0.$

2. $x^3-x-2x^2+2=0.$

3. $2x^3+5x^2-11x+4=0.$

4. $4x^3-20x^2+31x-14=0.$

5. $x^3-2x^2-29x+30=0.$

6. $x^3-8x^2+5x+14=0.$

7. $x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0.$

8. $x^4-4x^3-14x^2+36x+45=0.$

9. $x^4-3x^2-42x-40=0.$

10. $x^4-10x^2-20x-16=0.$

11. $x^4+8x^3+9x^2-8x-10=0.$

12. $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0.$

13. $x^4-3x^2-6x-2=0.$

14. $x^4-2x^3-12x^2+10x+3=0.$

15. $6x^4-x^3-17x^2+16x-4=0.$

16. $x^4-2x^3-13x^2+14x+24=0.$

17. $x^4+4x^3-22x^2-4x+21=0.$

18. $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0.$

19. $x^4-6x^2-16x+21=0.$

20. $x^4+4x^3-x^2-16x-12=0.$

21. $2x^4-x^3-29x^2+34x+24=0.$

22. $x^5-3x^4-5x^3+15x^2+4x-12=0.$

617. 一之立方根.

假定 $x=\sqrt[3]{1}$, 則 $x^3=1$, 或 $x^3-1=0$,

即 $$(x-1)(x^2+x+1)=0,$$

$\therefore$ $$x-1=0,\text{ 或 } x^2+x+1=0,$$

於是 $$x=1,\text{ 或 } x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

若三乘此諸值後,則各等於一,此用自乘法可證明. 由是一有三個立方根.

$$1,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

其兩式為虛式

現以a及b表此二式,此既為方程式

$$x^2+x+1=0$$

之二根,故其積等於一.

即, $$ab=1,$$

$$\therefore a^3b=a^2,$$

即, $$b=a^2, \text{因 } a^3=1.$$

同樣又可證明$a=b^2$.

618. 旣每一虛根爲其他根之平方,故一之三個立方根恆以$1, \omega, \omega^2$* 表之.

ω亦能滿足方程式$x^2+x+1=0$

$$\therefore 1+\omega+\omega^2=0,$$

即,一之三個立方根之和爲零.

又 $$\omega\cdot\omega^2=\omega^3=1,$$

故(1)二虛根之積爲一.

(2)ω^3之每一整數冪爲一.

卡鄧氏三次方程式之解法

619. 三次方程式一般之形爲

$$x^3+Px^2+Qx+R=0,$$

但如585款所述此方程式更可化簡如次

$$x^3+qx+r=0.$$

此可視作三次方程式之標準形.

620. 現進行解方程式$x^3+qx+r=0$

* ω是希臘字母第二十四字Omega.

令 $x=y+z$, 則

$$x^3=y^3+z^3+3yz(y+z)=y^3+z^3+3yzx,$$

而所設之方程式變成

$$y^3+z^3+(3yz+q)x+r=0.$$

現在 y, z 爲任何二量, 且合於其和等於所設方程式中一根之條件, 設更假定此二量可滿足方程式 $3yz+q=0$, 則二量可完全決定. 由是得

$$y^3+z^3=-r \qquad (1)$$

$$z^3=-\frac{q^3}{27y^3} \qquad (2)$$

因此 $$y^3-\frac{q^3}{27y^3}=-r, \text{ 或 } y^6+ry^3=\frac{q^3}{27}.$$

解此方程式

$$y^3=-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}} \qquad (3)$$

代入(1), $$z^3=-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}} \qquad (4)$$

依 $x=y+z$ 之關係而得 x 之值, 由是

$$x=\left\{-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left\{-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}} \qquad (5)$$

上之解法, 通常名之爲卡鄧氏法, 而於西曆1545年首次在阿斯孟那(Ars Magna)發表者也. 相傳卡鄧氏

解法係得自戴達利(Tartaglia)者,然其立方之解法似於西曆1505年傳自色普佛羅(Scipio Ferreo)者也.

此解法中,假設$x=y+z$,而從(2)得$z=-\frac{q}{3y}$,因而欲解一三次方程式如

$$x^3+qx+r=0$$

者,可以$y-\frac{q}{3y}$代入x.

例題 解方程式$x^3-15x=126$.

命$y-\left(\frac{-15}{3y}\right)$或$y+\frac{5}{y}$代$x$,則

$$y^3+15y+\frac{75}{y}+\frac{125}{y^3}-15y-\frac{75}{y}=126,$$

或
$$y^3+\frac{125}{y^3}=126,$$

於是
$$y^6-126y^3=-125.$$

$$\therefore y^3=125,$$

$$\therefore y=5.$$

但$x=y+\frac{5}{y}=6$.

以$x-6$除所設方程式$x^3-15x-126=0$,卽得降次方程式

$$x^2+6x+21=0,$$

其二根為 $-3+2\sqrt{-3}$, 及 $-3-2\sqrt{-3}$.

由是 $x^3-15x=126$ 之三根為 6, $-3+2\sqrt{-3}$ 及 $-3-2\sqrt{-3}$.

四次方程式

621. 現將若干用以得一四次方程式普通解法之方法一論,然在各方法中,須先由一補助三次方程式之解法得之. 故在三次方程之情形中,可知普通解法不適用於書一所設數字方程之解法.

622. 四次方程式之解法為弗賴利(Ferrari),卡鄧之學生,首先發見,如下:

四次方程式表作

$$x^4+2px^3+qx^2+2rx+s=0,$$

於兩邊各加$(ax+b)^2$,其a, b二量之值為可使左邊成完全平方者,則

$$x^4+2px^3+(q+a^2)x^2+2(r+ab)x+s+b^2=(ax+b)^2.$$

今假定方程式之左邊等於$(x^2+px+k)^2$,則比較其係數,即有

$$p^2+2k=q+a^2,\ pk=r+ab,\ k^2=s+b^2,$$

從此三方程式中消去a及b,即得

$$(pk-r)^2=(2k+p^2-q)(k^2-s),$$

或 $$2k^3-qk^2+2(pr-s)k+p^2s-qs-r^2=0.$$

從此三次方程式中,k之一實值不難求得[600款]由是a與b皆爲已知者.又

$$(x^2+px+k)^2=(ax+b)^2,$$

$$\therefore x^2+px+k=\pm(ax+b),$$

而x之值可由次之兩個二次方程式求得

$$x^2+(p-a)x+(k-b)=0,$$

及 $$x^2+(p+a)x+(k+b)=0.$$

例題 解方程式$x^4-2x^3-5x^2+10x-3=0.$

於方程式之兩邊各加$a^2x^2-2abx+b^2$,並假設

$$x^4-2x^3+(a^2-5)x^2+2(ab+5)x+b^2-3=(x^2-x+k)^2;$$

則使其諸係數等,卽有

$$a^2=2k+6,\quad ab=-k-5,\quad b^2=k^2+3,$$

$$\therefore (2k+6)(k^2+3)=(k+5)^2,$$

$$\therefore 2k^3+5k^2-4k-7=0.$$

驗之,得$k=-1$,因而$a^2=4$, $b^2=4$, $ab=-4.$

但從假設,則

$$(x^2-x+k)^2=(ax+b)^2.$$

以k, a及b之值代入,卽得二方程式如下

$$x^2-x-1=\pm(2x-2),$$

卽 $$x^2-3x+1=0,\ 及\ x^2+x-3=0;$$

於是其二根爲 $$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2},\quad \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

623. 下爲狄卡德於1637年所發表之解法.

假定四次方程式化成

$$x^4+qx^2+rx+s=0.$$

假設 $x^4+qx^2+rx+s=(x^2+kx+l)(x^2-kx+m)$,

則使其諸係數等,卽有

$$l+m-k^2=q,\quad k(m-l)=r,\quad lm=s.$$

從上方程式之首兩式,可得

$$2m=k^2+q+\frac{r}{k},\quad 2l=k^2+q-\frac{r}{k};$$

因而代入於第三方程式中,

$$(k^3+qk+r)(k^3+qk-r)=4sk^2,$$

或 $$k^3+2qk^4+(q^2-4s)k^2-r^3=0.$$

此爲 k^2 之三次式,其解答恆有一實而正者[600款];由是若 k^2 爲已知,則 l 及 m 之値可決定,而四次方程式之解答,可以解次之兩個二次方程式而得之

$$x^2+kx+l=0,\ 及\ x^2-kx+m=0.$$

例題 解方程式 $x^4-2x^2+8x-3=0$.

假設 $x^4-2x^2+8x-3=(x^2+kx+l)(x^2-kx+m)$,

則使諸係數等,卽有

$$l+m-k^2=-2,\quad k(m-l)=8,\quad lm=-3;$$

於是得 $$(k^3-2k+8)(k^3-2k-8)=-12k^2,$$

或 $$k^6-4k^4+16k^2-64=0.$$

此方程式顯當 $k^2-4=0$, 或 $k=\pm 2$ 時能滿足.故取 k 值中之一值已充足;命 $k=2$, 卽有

$$m+l=2,\quad m-l=4;\quad 卽,\ l=-1,\quad m=3.$$

由是 $x^4-2x^2+8x-3=(x^2+2x-1)(x^2-2x+3)$;

因而 $$x^2+2x-1=0,\ 及\ x^2-2x+3=0.$$

故其二根為 $-1\pm\sqrt{2}$, $1\pm\sqrt{-2}$.

624. 四次以上方程式之普通代數解法迄今猶未發見,蓋當亞培爾(Abel)最初證明如是解法之不可能時,多數數學家均然其說,並一致公認.然設方程式為數字係數,則任何實根之值可依626款之方法求得其任何所需之準確程度.

習題 XLVIII. *k*.

解下列各方程式

1. $x^3-18x=35$.

2. $x^3+72x-1720=0$.

3. $x^3+63x-316=0.$

4. $x^3+21x+342=0.$

5. $28x^3-9x^2+1=0.$

6. $x^3-15x^2-33x+847=0.$

7. $2x^3+3x^2+3x+1=0.$

8. $x^3-6x^2+3x-18=0.$

9. $8x^3-36x+27=0.$

10. $x^3-15x-4=0.$

11. $x^4+8x^3+9x^2-8x-10=0.$

12. $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0.$

13. $x^4-3x^2-6x-2=0.$

14. $x^4-2x^3-12x^2+10x+3=0.$

不可通約根

625. 不可通約根者,爲方程式之根不能精密求得者也.但設已求得根之起首充足之數字以與其他諸根區別者,則可依何諾氏於1819年第一次發表之方法求得其近似値

何諾氏近似法

626. 用此法解方程式

$$x^3-3x^2-2x+5=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

依史頓氏定理,其中有3實根,其一根在1與2之間;故其值可求至小數四位,現足以闡明此方法矣.

以1減方程式之諸根[583款,584款],卽有

$$
\begin{array}{rrrrl}
1 & -3 & -2 & +5 & \underline{|1} \\
 & \underline{1} & \underline{-2} & \underline{-4} & \\
 & -2 & -4 & 1 & \\
 & \underline{1} & \underline{-1} & & \\
 & -1 & -5 & & \\
 & \underline{1} & & & \\
 & 0 & & &
\end{array}
$$

此變形方程式爲

$$y^3-5y+1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

方程式(1)有一根在1與2之間.方程式(2)之諸根各較方程式(1)之諸根小1;因而方程式(2)有一根在0與1之間.此根小於一,故y之高次冪各小於y,此可以忽而不計,則從$-5y+1=0$,或$y=.2$可得y之近似值.

以.2減(2),第一變形方程式之諸根,卽有

$$
\begin{array}{rrrrl}
1 & \pm 0 & -5 & +1 & \underline{|.2} \\
 & \underline{.2} & \underline{.04} & \underline{.992} & \\
 & .2 & -4.96 & .008 & \\
 & \underline{.2} & \underline{.08} & & \\
 & .4 & -4.88 & & \\
 & \underline{.2} & & & \\
 & .6 & & &
\end{array}
$$

其變形方程式爲

$$z^3+.6z^2-4.88z+.008 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

方程式(2)有一根在.2與.3之間;方程式(3)之諸根較方程式(2)之諸根小.2;因而方程式(3)有一根在0與.1之間.方程式(3)所含高次冪之諸項可依第一變形方程式情形中之辦法忽而不計,卽有

$$-4.88z+.008=0,\ 或\ z=.001.$$

再以.001減(3),第二變形方程式之諸根,卽有

$$\begin{array}{lrrrl}
1 & +.6 & -4.88 & +.008 & \underline{|.001} \\
 & \underline{.001} & \underline{.000601} & \underline{-.004879399} & \\
 & .601 & -4.879399 & .003120601 & \\
 & \underline{.001} & \underline{.000602} & & \\
 & .602 & -4.878797 & & \\
 & \underline{.001} & & & \\
 & .603 & & &
\end{array}$$

其變形方程式爲

$$v^3+.603v^2-4.878797v+.003120601 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

方程式(3)有一根在.001與.002之間;方程式(4)之諸根較方程式(3)之諸根小.001;故方程式(4)有一根在0與.001之間.含v^3及v^2之項可忽而不計,而解

$$-4.878797v+.003120601=0,$$

卽得$v=.0006$.乃以.0006減(4),第三變形方程式之諸根,求得此數之正確數字爲小數第四位;因而1.2016爲在1與2之間之根至小數第四位之值.

以(A), (B), (C)等表連續變形方程式之係數,則如下整列較爲緊湊:

1		−3		−2		+5	1.2016
		1		−2		−4	
		−2		−4	(A)	1	
		1		−1		− .992	
		−1	(A)	−5	(B)	.008	
		1		.04		− .004879399	
	(A)	0		−4.96	(C)	.003120601	
		.2		.08			
		.2	(B)	−4.88			
		.2		.000601			
		.4		−4.879399			
		.2		.000602			
	(B)	.6	(C)	−4.878797			
		.001					
		.601					
		.001					
		.602					
		.001					
	(C)	.603					

現以何諾氏法求一正不可通約根之近似值之法則一述.

法則. 依史頓氏定理或602款之方法求根之整數部.

改變一方程式爲另一方程式,使其諸根較原有諸根小根之整數部.

在此變形方程式中,殺其一次冪之未知量之係數

與其末項為同號,則此數為不適合,須應用求根之整數部之方法另求一數字.設此二項為異號,則以其前者除其後者,而商之第一數字必為其根之次一數字之近似值.

再改變前得方程式為另一方程式使其根較前得方程式之根小如上用除法所求得之近似值,而根之另一數字更可如前求之.

627. 有時以第一變形方程式中x項之係數除該方程式之末項而得一大於一之商,在此情形中,因其二項為同號,故須用求根之整數部之法以求其另一數字.

628. 設在第一式後之任何變形方程式中,其末二項之符號相同,則因用以使其變形之根之數太大,故必逐漸減少,使其二項至異號為止.

629. 設在任何變形方程式中,其一次冪之未知量之係數為零,則欲求根之次一數字時,可用二次冪之未知量之係數為除數除之而取其結果之平方根而得.

630. 欲求負不可通約根,可變此方程式之根為正[580款],而用626款之方法求其對應根,再變其結果之符號,此卽為所需之根矣.

或將負不可通約根增加一較大之數,使成正號,而由其結果減去所增之數亦可.

631. 數之任何根 依何諾氏法可求得任何數之任何根之近似值,命$\sqrt[n]{a}$等於x,卽得方程式$x^n=a$,或$x^n-a=0$.

習題 XLVIII. l.

試計算下列各方程式之根,設已知其地位之限制如題所示

1. $x^3+10x^2+6x-120=0$,已知其根在2與3之間.
2. $x^3-2x-5=0$,設已知其根在2與3之間.
3. $x^4-2x^3+21x-23=0$,設已知其根在1與2之間.
4. $x^3+x-1000=0$,設已知其根在9與10之間.
5. $x^3+x^2+x-100=0$,設已知其根在4與5之間.
6. $2x^3+3x^2-4x-10=0$,設已知其根在1與2之間.
7. $x^3-46x^2-36x+18=0$,設已知其根在0與1之間.
8. $x^3+x-3=0$,設已知其根在1與2之間.
9. $x^3+2x-20=0$,設已知其根在2與3之間.
10. $x^3+10x^2+8x-120=0$,設已知其根在2與3之間.
11. $3x^3-5x-40=0$,設已知其根在2與3之間.
12. $x^4-12x^2+12x-3=0$,設已知其根在-3與-4之間

13. $x^5-4x^4+7x^3-863=0$, 設已知其根在4與5之間.

試求下列各方程式之實根:

14. $x^3-3x-1=0$.

15. $x^3-22x-24=0$.

16. $x^4-8x^3+12x^2+4x-8=0$.

17. $x^4+x^3+x^2+3x-100=0$.

試用何諾氏法, 求下各式之值, 至小數四位.

18. $\sqrt[3]{11}$. 19. $\sqrt[4]{13}$. 20. $\sqrt[5]{5}$. 21. $\sqrt[5]{7}$.

雜題 VII.

1. 簡約 $b-\{b-(a+b)-[b-(b-\overline{a-b})]+2a\}$.

2. 求 $a+b-2(c+d)$, $b+c-3(d+a)$ 及 $c+d-4(a+b)$ 之和.

3. 用 $x-\frac{1}{3}y$ 乘 $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y$.

4. 設 $x=6$, $y=4$, $z=3$, 求 $\sqrt[3]{2x+3y+z}$ 之值.

5. 求 $2-3x+x^2$ 之平方數.

6. 解方程 $\frac{x+3}{x-1}+\frac{x+4}{x-6}=2$.

7. 求 a^3-2a-4 及 a^3-a^2-4 之最高公因數.

8. 約簡 $\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

9. 解方程 $\left.\begin{aligned}\frac{3}{5}x+\frac{y}{4}&=13\\ \frac{1}{3}x-\frac{y}{8}&=3\end{aligned}\right\}$.

10. 設有一兩位數,若加上18,則其二位數字倒置,而此二數之和爲44;求該兩位數.

11. 設$a=1, b=-2, c=3, d=-4$,試求$\dfrac{a^2b^2+b^2c+d(a-b)}{10a-(c+b)^2}$之值.

12. 從$\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{4}y^2$, $\dfrac{1}{5}y^2+\dfrac{1}{3}z^2$,及$\dfrac{1}{3}z^2-\dfrac{1}{4}x^2$之和減去$-x^2+y^2-z^2$.

13. 試書出$x+8y$之立方數.

14. 簡約$\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\times\dfrac{x^4-y^4}{xy+y^2}\times\dfrac{y}{x}$.

15. 解$\dfrac{3}{5}(2x-7)-\dfrac{2}{3}(x-8)=\dfrac{4x+1}{15}+4$.

16. 求x^4+x^3+2x-4及x^3+3x^2-4之最高公因數及最低公倍數.

17. 求$4a^4+9(1-2a)+3a^2(7-4a)$之平方根.

18. 解方程 $\left.\begin{aligned} y&=\dfrac{x+a}{2}+\dfrac{b}{3} \\ x&=\dfrac{y+b}{2}+\dfrac{a}{3}\end{aligned}\right\}$.

19. 簡約$\left(\dfrac{a}{x+a}-\dfrac{x}{x-a}\right)\div\dfrac{x^2+a^2}{x^2+ax}$.

20. 某分數之分子分母各加1,則此分數成$\frac{3}{2}$;若各減1,則此分數爲2;求此分數.

21. 證明$12a+6b-c$, $-7a-b+c$及$a+b+6c$之和爲六倍$25a+13b-8c$, $-13a-13b-c$及$-11a+b+10c$之和.

22. 用$x-\frac{1}{4}y$去除$x^2-xy+\frac{3}{16}y^2$.

23. 求$18\left\{\frac{2x}{9}-\frac{1}{6}\left(\frac{2y}{3}+z\right)\right\}$, $24\left(\frac{3x}{8}-\frac{2y-3z}{12}\right)$, 及

$$30\left\{\frac{7z}{15}-\frac{4}{5}(2x-y)\right\}$$之和.

24. 求右二式之因數(i) $10x^2+79x-8$. (ii) $729x^6-y^6$

25. 解$\frac{2x-1}{5}+\frac{5x+3}{17}=3-\frac{4x-118}{11}$.

26. 設$a=0$, $b=-1$, $c=\frac{1}{2}$,求次式之値

$$(5a-3b)(a-b)-b\{3a-c(4a-b)-b^2(a+c)\}.$$

27. 求$7x^3-10x^2-7x+10$及$2x^3-x^2-2x+1$之最高公因數.

28. 簡約$\frac{x^2-7xy+12y^2}{x^2+5xy+6y^2}\div\frac{x^2-5xy+4y^2}{x^2+xy-2y^2}$.

29. 解$\left.\begin{aligned}3abx+\ \ y&=9b\\4abx+3y&=17b\end{aligned}\right\}$.

30. 試求7點8點間表上二針相距15分時之二時間.

31. 設 $a=1, b=-2, c=3, d=-4$, 求次式之值

$$\sqrt{d^2-4b+a^2}-\sqrt{c^3+b^3+a+d}.$$

32. 用 x^3-8y^3 去乘 $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}xy+y^2$ 與 $\frac{1}{2}x+y$.

33. 去 $a^4-\{4a^3-(\overline{6a^2-4a}+1)\}-[-2$
$-\{a^4-(-4a^3-6a^2-4a)\}-(8a-1)]$ 之括號.

34. 求 $5x^4-7x^3+3x^2-x+8$ 被 $x-4$ 除後之剩餘.

35. 簡約 $\frac{x^2+y^2}{x^2-xy}\times\frac{xy-y^2}{x^4-y^4}\times\frac{x}{y}$.

36. 解 $\left.\begin{array}{l}\frac{x-11}{3}+y=18\\[2ex] 2x+\frac{y-13}{4}=29\end{array}\right\}$.

37. 求 $4x^6-12x^4+28x^3+9x^2-42x+49$ 之平方根.

38. 解 $.006x-.491+.723x=-.005$.

39. 求 x^3+y^3, $3x^2+2xy-y^2$ 及 $x^3-x^2y+xy^2$ 之最低公倍數.

40. 今有值銀12.50圓之支票一紙,以四分之一圓及半銀圓兌換,若二倍其半圓數,則較三倍其四分之一圓多10枚,問此二種各若干枚?

41. 簡約

$$(a+b+c)^2-(a-b+c)^2+(a+b-c)^2-(-a+b+c)^2.$$

42. 求 $a^4-3a^3b+2a^2b^2-b^4$ 被 $a^2-ab+2b^2$ 除後之餘數.

43. 設 $a=0, b=1, c=-2, d=3$, 求次式之值

$$(3abc-2bcd)\sqrt[3]{a^3bc-c^3bd+3}.$$

44. 試求一能除盡 $4x^2+3x-10$ 與 $4x^3+7x^2-3x-15$ 而無餘數之式.

45. 簡約 $\dfrac{a+\dfrac{ab}{a-b}}{a^2-\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}\times\dfrac{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}.$

46. 求 $8x^3-2x^2y+\dfrac{xy^2}{6}-\dfrac{y^3}{216}$ 之立方根.

47. 解方程 $\left.\begin{aligned}9x+8y&=43xy\\8x+9y&=42xy\end{aligned}\right\}.$

48. 簡約 $\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{2}{x-5}-\dfrac{x-7}{(x-2)(x-3)}.$

49. 求 $8x^3+38x^2+59x+30$ 與 $6x^3-13x^2-13x+30$ 之最低公倍數.

50. 某童在第一店中用去其所有銀之半, 又在第二店中用去其所餘之三分之一, 又在第三店中用去

所剩之五分之一,結果彼倘存銀20分;問此童原有銀若干?

51. 求 $x^7-10x^6+8x^5-7x^3+3x-11$ 被 x^2-5x+4 除後之餘數.

52. 簡單 $4\left\{a-\frac{3}{2}\left(b-\frac{4c}{3}\right)\right\}\left\{\frac{1}{2}(2a-b)-2(b-c)\right\}$.

53. 設 $a=\frac{25}{16}$, $b=1$, $c=\frac{3}{4}$, 試證

$$(a-\sqrt{b})(\sqrt{a}+b)\sqrt{a-b}=\frac{3c^4}{\sqrt{a-c^2}}.$$

54. 求 $x^2-7x+12$, $3x^2-6x-9$ 與 $2x^2-6x-8$ 之最低公倍數.

55. 試求 $ax+by$, $bx-ay$, $ay+bx$, $by-ax$ 之諸平方之和;且將其結果分解成因數.

56. 解 $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=\frac{3x-5z}{4}=\frac{z}{8}+\frac{7y}{16}=1$.

57. 化簡 $\frac{a^3+b^3}{a^4-b^4}-\frac{a+b}{a^2-b^2}-\frac{1}{2}\left\{\frac{a-b}{a^2+b^2}-\frac{1}{a-b}\right\}$.

58. 解 $x-\left(3x-\frac{2x+5}{10}\right)=\frac{1}{6}(2x+67)-\frac{5}{3}\left(1+\frac{x}{5}\right)$.

59. 試將 $\frac{2}{x^2+xy+y^2}$, $\frac{-4x}{x^3-y^3}$, $\frac{x^2}{y^2(x-y)^2}$, $\frac{-x^2}{x^3y-y^4}$ 相加.

60. 某工人與其主訂約作工30天,其條件爲工作每天,給洋2.5圓.若停工一天,須轉罰洋1.5圓;最後此工人共得洋51圓,問其工作若干天?

61. 用$\frac{x^2}{2}+3-x$去除

$$\frac{3x^5}{4}+27-\frac{43x^2}{4}-4x^4+\frac{77x^3}{8}-\frac{33x}{4}.$$

62. 若$x=-\frac{1}{2}$又$y=2$,求次式之值

$$\frac{4y}{5}(y-x)-35\left[\frac{3x-4y}{5}-\frac{1}{10}\left\{3x-\frac{5}{7}(7x-4y)\right\}\right].$$

63. 化簡$\frac{10x-11}{3(x^2-1)}-\frac{10x-1}{3(x^2+x+1)}+\frac{x^2-2x+5}{(x^3-1)(x+1)}$.

64. 求$\frac{a^3c^3}{b^3}x^6-\frac{3a^2c}{b}x^5+\frac{3ab}{c}x^4-\frac{b^3}{c^3}x^3$之立方根.

65. 解$\frac{4x-17}{x-4}+\frac{10x-13}{2x-3}=\frac{8x-30}{2x-7}+\frac{5x-4}{x-1}$.

66. 求右二式之因數 (i) x^3+5x^2+x+5. (ii) $x^2-2xy-323y^2$.

67. 解
$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3}(x+y)+2z&=21\\ 3x-\frac{1}{2}(y+z)&=65\\ x+\frac{1}{2}(x+y-z)&=38\end{aligned}\right\}.$$

68. 化簡 $\dfrac{x+2y}{\frac{2}{7}x-y}-\dfrac{3x^2+63xy+70y^2}{2x^2+3xy-35y^2}$.

69. 求 $-(3b-2c-2a)^3\{2(a+c)-3b\}$ 之平方根.

70. 某君夫婦二人之年齡為其子女年齡之和之六倍.已知彼等二年前之年齡為其子女年齡之和之十倍.再經六年,則彼二人之年齡將為其子女年齡之和之三倍.問共有子女若干人?

71. 求 $x^2-3xy-\dfrac{2}{3}y^2$, $2y^2-\dfrac{2}{3}y^3+z^2$, $xy-\dfrac{1}{3}y^2+y^3$ 與 $2xy-\dfrac{1}{3}y^3$ 之和.

72. 從 $\{(a+b)(a-x)-(a-b)(b-x)\}$ 減去 $(a+b)^2-2bx$.

73. 設 $a=5, b=4, c=3$, 試求次式之值

$$\sqrt[3]{6abc+(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-(a+b+c)^3}.$$

74. 求下列二式之因數

(i) $3x^3+6x^2-189x$. (ii) $a^2+2ab+b^2+a+b$.

75. 解 $\left.\begin{aligned} px&=qy \\ (p+q)x-(q-p)y&=r\end{aligned}\right\}$.

76. 化簡 $\dfrac{x+\frac{y}{2}}{2x^2+xy+\frac{y^2}{2}}-\dfrac{x^2-\frac{y^2}{2}}{4\left(x^3-\frac{y^3}{8}\right)}$.

77. 解 $\dfrac{x-7}{x+7}+\dfrac{1}{2(x+7)}=\dfrac{2x-15}{2x-6}$.

78. 試將 $\dfrac{x^4-x^2-2x+2}{2x^3-x-1}$ 化成最低項.

79. 試將 $\dfrac{1}{2x^2-4x+2}$, $\dfrac{1}{2x^2+4x+2}$ 與 $\dfrac{1}{1-x^2}$ 相加

80. 設有一三位數,其右首第一位爲零.若左首第一位數字與其中位數字互易,則此數減少180;若將左首第一位數字折半,而中位數字與右手第一位數字互易,則此數減少336;求此數.

81. 用 $1-x-\dfrac{14}{15}x^2$ 去除 $1-5x+\dfrac{152}{15}x^3-\dfrac{106}{225}x^4-\dfrac{28}{9}x^5$.

82. 設 $p=1$, $q=\dfrac{1}{2}$, 求 $\dfrac{(p^2+q^2)-(p-q)\sqrt{p^2+2pq+q^2}}{2p+q-\{-(pq-p)\}}$

83. 用 $\dfrac{x^2}{2}-x+3$ 去乘 $\dfrac{3x^2}{2}-5x^2+\dfrac{x}{4}+9$.

84. 求 $(a^2b-2ab^2)^2$, $2a^2-3ab-2b^2$ 與 $2(2a^2+ab)^2$ 之最低公倍數.

85. 解 $\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{4x+5}{4x+4}+\dfrac{3x+3}{3x+1}$.

86 將 $\dfrac{5x^3-14x^2+16}{3x^3-2x^2+16x-48}$ 化成最低項.

87 求 $4a^4+9\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)+12a(a^2+1)+18$ 之平方根.

88. 解 $\left.\begin{aligned}\frac{x}{2a}+\frac{y}{3b}&=a+b\\ \frac{3x}{a}-\frac{2y}{b}&=6(b-a)\end{aligned}\right\}.$

89. 用 $10x-3y-\dfrac{11xy}{\frac{x}{4}+y}$ 去乘 $3x+4y+\dfrac{11xy}{x-\frac{3}{2}y}$.

90. 一錢袋中有雙角及四分之一洋,合銀十圓;若取出雙角17枚及四分之一洋6枚,則所餘角數恰爲四分之一洋數之三倍.求銀幣每種若干枚.

91. 設 $a=-\frac{1}{9}b$, 求次式之值

$$5(a-b)-2\{3a-(a+b)\}+7\{(a-2b)-(5a-2b)\}.$$

92. 用 $3x-2$ 去除 $3x^4-5x^3+7x^2-11x-13$.

93. 求 $15(p^3+q^3)$, $5(p^2-pq+q^2)$, $4(p^2+pq+q^2)$ 與 $6(p^2-q^2)$ 之 L. C. M.

94. 劈出下二式之因數

(i) a^3-8b^{15}. (ii) $-x^2+2x-1+x^4$.

95. 解 $\dfrac{x+a}{x+b}=\dfrac{x+3a}{x+a+b}$.

96. 化簡 (i) $\dfrac{35a^2b^2c^2-49b^3c^3}{65a^5bc-91a^3b^2c^2}$.

(ii) $\dfrac{y^4-7y^3+8y^2-12y}{2y^2-2y-60}$.

97. 解 $\left.\begin{array}{r}7x-9y+4z=16\\ \dfrac{x+y}{3}=\dfrac{x+y+z}{2}\\ 2x-3y+4z-5=0\end{array}\right\}$.

98. 化簡 $\dfrac{y^2-\dfrac{2y}{y-1}}{y^2-\dfrac{2y}{y+1}}\div\left(\dfrac{y^2-5y-6}{y^2-6y+5}\times\dfrac{y-2}{y+2}\right)$.

99. 求 $\dfrac{4a^2-12ab-6bc+4ac+9b^2+c^2}{4a^2+9c^2-12ac}$ 之平方根.

100. 一特別快車於下午3時離紐約,至6時抵亞彭;又一尋常快車於下午1時30分離亞彭,至6時抵紐約.設二車皆以等速度行駛,試求其相遇時之時間.

101. 解. (i) $.\dot{6}x+.75x-1\dot{6}=x-.58\dot{3}x+5$.

(ii) $\dfrac{37}{x^2-5x+6}+\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{7}{3-x}$.

102 化簡 (i) $\dfrac{a+x}{a^2+x+ax^2}+\dfrac{a-x}{a^2-ax+x^2}+\dfrac{2x^3}{a^4+a^2x^2+x^4}$.

(ii) $(1+x)^2\div\left\{1+\dfrac{x}{1-x+\dfrac{x}{1+x+x^2}}\right\}$.

103. 求得 $a^6+\dfrac{1}{a^6}-6\left(a^4+\dfrac{1}{a^4}\right)+15\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)-20$ 之平方

根後,再將其結果開立方.

104. 用$1+3x$去除$1-2x$至第四項.

105. 余嘗以450圓之價購得馬與馬車各一;售去時,在馬上賺百分之五,馬車上賺百分之二十,計總賺百分之十.試求馬之原價.

106. 已知其被除數爲$(4a^2+7ab+5b^2)^2$,其商爲$8(a+2b)^2$,又其餘數爲$b^2(9a+11b)^2$,試求其除數.

107. 解 (i) $5x(x-3)=2(x-7)$.

$$\text{(ii)}\quad \frac{1}{(x-1)(x-2)}+6=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-1}.$$

108. 設$x=a+b+\dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)}$,又$y=\dfrac{a+b}{4}+\dfrac{ab}{a+b}$,試證$(x-a)^2-(y-b)^2=b^2$.

109. 求$49x^4+\dfrac{1051x^2}{25}-\dfrac{14x^3}{5}-\dfrac{6x}{5}+9$.

110. 解$\dfrac{a+x}{a^2+ax+x^2}+\dfrac{a-x}{a^2-ax+x^2}-\dfrac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$.

111. 用$1+\dfrac{2(x^2-12)}{x^2+7x+12}$去除$\dfrac{x+4}{x^2-x-12}$與$\dfrac{x+3}{x^2+x-12}$之差.

112. 求$2x^2+(6a-10b)x-30ab$與$3x^2-(9a+15b)x+45ab$之最高公因數和最低公倍數.

113. 解 (i) $2cx^2-abx+2abd=4cdx$.

(ii) $\frac{x}{2(x+3)}-2\frac{5}{24}=\frac{x^2}{x^2-9}-\frac{8x-1}{4(x-3)}$.

114. 設 $a=1, b=2, c=3, d=4$, 試求次式之值

$$\frac{a^b+b^c+c^d}{b^a+c^b+d^c+(a+b)(b+c)}+3(a^a+b^b+c^c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

115. 余嘗騎馬馳某距離,初以每時10哩之速度行其三分之一,又以每時9哩之速度再行其三分之一,最後以每時8哩之速度行畢其距離;若余以每時10哩之速度,行此距離之半而以每時8哩之速度行此所餘之半,則此行需多費半分鐘.問余所行之距離爲何?

116. 二因數之積爲 $(3x+2y)^3-(2x+3y)^3$, 已知其一因數爲 $x-y$, 試求其另一因數.

117. 設 $a+b=1$, 試證 $(a^2-b^2)^2=a^3+b^3-ab$.

118. 分解下列二式之因數:

(i) $x^3+y^3+3xy(x+y)$.

(ii) $m^3-n^3-m(m^2-n^2)+n(m-n)^2$.

119. 解 (i) $\left.\begin{aligned} x^3-y^3&=28 \\ x^2+xy+y^2&=\ 7 \end{aligned}\right\}$. (ii) $\left.\begin{aligned} x^2-6xy+11y^2&=9 \\ x-3y&=1 \end{aligned}\right\}$.

120. 求 $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$ 之平方根.

121 化簡下列二分數.

(i) $\dfrac{1}{a^2-\dfrac{a^3-1}{a+\dfrac{1}{a+1}}}$.　　(ii) $\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}{x-\dfrac{1}{x}}$.

122. 試求 $a^2b+b^2c-abc-ab^2$ 與 $ax^2+ab-a^2-bx^2$ 之最高公因數.

123. 某村之三分之二主張共和,但在選舉時有25人棄權,60人反投民主,於是二方票數相等.問共有選舉員若干人?

124. 解 (i) $\dfrac{x^2}{a+b}+(a-b)=\dfrac{2ax}{a+b}$.

(ii) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=6\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2x}\right)=2$.

125. 化簡 (i) $\left(1+\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right)\div\left(1-\dfrac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right)$.

(ii) $\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^4-(x-1)^4}$.

126. 用 $x^2-3x+a+2$ 去除 $x^4+(a-1)x^3-(2a+1)x^2$

$$+(a^2+4a-5)x+3a+6.$$

127. 分解下列二式成因數:

(i) $x^2+5xy-24y^2+x-3y$.　　(ii) $x^3-\dfrac{4}{x}$.

128. 求 p^2-3q 之平方根至第三項.

129. 解 (i) $\dfrac{x-5}{x-6}-\dfrac{x-6}{x-7}=\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}$.

(ii) $ax+1=by+1=ay+bx$.

130. 求 $3x^2+(4a-2b)x-2ab+a^2$ 與

$x^3+(2a-b)x^2-(2ab-a^2)x-a^2b$ 之最高公因數.

131. 化簡 (i) $\dfrac{(x^a)^3}{x^{b+c}}\times\dfrac{(x^b)^3}{x^{c+a}}\times\dfrac{(x^c)^3}{x^{a+b}}$.

(ii) $x^{\frac{1}{2}}\ y^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)\div\dfrac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.

132. 某處球賽時,其廚司曾備有27球員之餐,若每人按定價付餐費,則可賺洋百分之$12\frac{1}{2}$. 但結果有6球員缺席,祇所餘之21人照付餐費,致此廚司損失大洋3圓.問餐價共若干圓?

133. 設 $x=\dfrac{y}{y+1}$, $y=\dfrac{a-2}{2}$, 試證 $x(y+2)+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ 等於a.

134. 求 $x^3-12x^2+54x-112+\dfrac{108}{x}-\dfrac{48}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}$ 之立方根.

135. 求 $x^3+2ax^2+a^2x+2a^3$ 與 $x^3-2ax^2+a^2x-2a^3$ 之H. C. F. 及 L. C. M.

136. 化簡

(i) $42\left\{\frac{4x-3y}{6}-\frac{3x-4y}{7}\right\}-56\left\{\frac{3x-2y}{7}-\frac{2x-3y}{8}\right\}$.

(ii) $\frac{4b+a}{3b+a}+\frac{a-4b}{a-3b}+\frac{a^2-3b^2}{a^2-9b^2}$.

137. 將 $4a^2(x^3+18ab^2)-(32a^5+9b^2x^3)$ 劈成四因數

138. 解 (i) $5\sqrt{3x}-1=\sqrt{75x-29}$.

(ii) $\frac{xy}{x+y}=70,\ \frac{xz}{x+z}=84,\ \frac{yz}{y+z}=140$.

139. 試證 x 之值無論爲何數. $\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}+\frac{x}{x-c}$ 及 $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}$ 之差恆不變.

140. 用 $x^{\frac{3}{2}}-2y^{\frac{3}{2}}-3z^{\frac{3}{2}}$ 去乘 $x^{\frac{3}{2}}+2y^{\frac{3}{2}}+3z^{\frac{3}{2}}$.

141. 余每小時能行 $4\frac{1}{4}$ 哩,而余友每小時祇能行 3 哩;設余較余友遲出發 $1\frac{1}{2}$ 小時,問須經若干小時始能追及.

142. 以最簡之式表示之

(i) $(8^{\frac{2}{3}}+4^{\frac{3}{2}})\times 16^{-\frac{3}{4}}$. (ii) $\frac{\left\{9^n\cdot 3^2\times\frac{1}{3^{-n}}-27^n\right.}{3^{3n}\times 9}$.

143. 求 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+3-2\sqrt{\frac{x}{y}}-2\sqrt{\frac{y}{x}}$ 之平方根.

144. 化簡

$$\text{(i)}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{x^3-1}{x^6+1}\cdot\frac{(x-1)^2(x+1)^2+x^2}{x^4+x^2+1}.$$

$$\text{(ii)}\left\{\frac{a^4-y^4}{a^2-2ay+y^2}\div\frac{a^2+ay}{a-y}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{a^5-a^3y^2}{a^3+y^3}\div\frac{a^4-2a^3y+a^2y^2}{a^2-ay+y^2}\right\}.$$

145. 求下二式之値

(i) $\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{18}+\sqrt{48}$.　(ii) $\sqrt{35+14\sqrt{6}}$.

146. 解 (i) $\dfrac{x-b}{x-a}-\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{2(a-b)}{x-(a+b)}$.

$$\text{(ii)}\quad \left.\begin{aligned} 2x+3y&=1\tfrac{1}{2}\\ 4x^2+9xy+9y^2&=11\end{aligned}\right\}.$$

147. 證 $\dfrac{(a+b)^3-c^3}{(a-b)-c}+\dfrac{(b+c)^3-a^3}{b+c-a}+\dfrac{(c+a)^3-b^3}{c+a-b}$ 等於

$$2(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2.$$

148. 用 $a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{2}}$ 去除 $a-x+4a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}-4a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$.

149. 求 $(a-1)^4+2(a^4+1)-2(a^2+1)(a-1)^2$ 之平方根.

150. 梨數若每圓增加12,則每打之價減低五分.求梨十二打之價.

151. 若一二位數等於六倍其數字之和,則此二位數字倒置時之數等於五倍其數字之和.求證.

152. 求 $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{1}{(b-c)(a-c)}-\dfrac{1}{(c-a)(b-a)}$ 之值.

153. 用 $5-2x+\dfrac{26x-8x^2-14}{3-4x}$ 去乘

$$3+5x-\frac{12+41x+36x^2}{4+7x}.$$

154. 設 $x-\dfrac{1}{x}=1$, 試證 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$, 又 $x^3-\dfrac{1}{x^3}=4$.

155. 解 (i) $\dfrac{3x}{11}+\dfrac{23}{x+4}=\dfrac{1}{3}(x+5)$.

(ii) $\left.\begin{array}{l}2x^2-3y^2=23\\ 2xy-3y^2=3\end{array}\right\}.$

156. 化簡 (i) $1\frac{3}{5}\sqrt{20}-3\sqrt{5}-\sqrt{\frac{1}{5}}$.

(ii) $\dfrac{\sqrt{x}}{y^{-\frac{1}{3}}}\left(\dfrac{\sqrt[4]{y}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)\div\dfrac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.

157. 求 $(p^2-1)x^2+(3p-1)x-p(p-1)$ 與 $p(p+1)x^2-(p^2-2p-1)x-(p-1)$ 之最高公因數.

158. 化下式成最簡形

$$\frac{ax+\dfrac{a}{y}}{x-\dfrac{1}{y}}\times\frac{x^2+\dfrac{1}{y^2}}{bx^2-\dfrac{b}{y^2}}\times\frac{\dfrac{1}{5}(xy-1)^2}{\dfrac{1}{3}(x^4y^4-1)}.$$

159. 求右二式之平方根 (i) $1-2^{2n+1}+4^{2n}$

(ii) $9^n-2\cdot6^n+4^n$.

160. 一鐘每天快4分鐘，問在清晨6點鐘時開至何處，則在下午7.15點鐘時可準？

161. 若$x=2+\sqrt{2}$，試求$x^2+\dfrac{4}{x^4}$之值.

162. 解 (i) $\dfrac{\sqrt{x}+a}{\sqrt{x}-b}=\dfrac{\sqrt{x}-a}{\sqrt{x}}$. (ii) $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=3$.

163. 化簡 $\dfrac{a^2}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{b^2}{(c-b)(a-b)}+\dfrac{c^2}{(a-c)(b-c)}$.

164. 求 $\dfrac{1}{5}\sqrt{5}$, $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{80}$, $\sqrt[3]{5}$ 之積，與 $\dfrac{3\sqrt{5}-7}{5+\sqrt{7}}$除$\dfrac{8-4\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$之商.

165. 化$9x^6y^2-576y^2-4x^8+256x^2$成六因數.

166. 化簡 (i) $\dfrac{1-\dfrac{a^2}{(x+a)^2}}{(x+a)(x-a)}\div\dfrac{x(x+2a)}{(x^2-a^2)(x+a)^2}$.

(ii) $\dfrac{6x^2y^2}{m+n}\div\left[\dfrac{3(m-n)x}{7(r+s)}\div\left\{\dfrac{4(r-s)}{21xy^2}\div\dfrac{r^2-s^2}{4(m^2-n^2)}\right\}\right]$.

167. 化簡 (i) $\left(a^{1+\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{p+q}}\div\sqrt[p]{\dfrac{a^{2p}}{(a^{-1})^{-p}}}$.

(ii) $\sqrt{14-\sqrt{132}}$.

168. 求$20x^4+x^2-1$, $25x^4+5x^3-x-1$, $25x^4-10x^2+1$之最高公因數及最低公倍數.

169. 解 (i) $a+x+\sqrt{2ax+x^2}=b.$

(ii) $x+9\frac{5}{8}+\dfrac{1}{\dfrac{x}{7}+\dfrac{11}{8}}=8.$

170. 照片每打之價增加3圓，故其買客每5圓之照片較前少得10張，求每打之原價.

171. 設 $(a+\frac{1}{a})^2=3$，試證 $a^3+\frac{1}{a^3}=0.$

172. 若 $x=\frac{ab}{a+b}$，求 $\frac{x+2a}{2b-x}+\frac{x-2a}{2b+x}+\frac{4ab}{x^2-4b^2}$ 之值.

173. 化成最低項之分數

(i) $$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$
$$\div\left(\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}-\frac{1}{x+y+z}\right)+1.$$

(ii) $$\left(1-\frac{56}{x+4}+\frac{42}{x+3}\right)\left(1+\frac{56}{x-4}-\frac{42}{x-3}\right).$$

174. 化 $(27)^{\frac{2}{3}}+(16)^{\frac{3}{4}}-\dfrac{2}{(8)^{-\frac{2}{3}}}+\dfrac{\sqrt[5]{2}}{(4)^{-\frac{2}{5}}}$ 成一整數.

175. 化簡 (i) $\dfrac{n}{1-x^n}+\dfrac{n}{1-x^{-n}}$. (ii) $\sqrt[4]{97-56\sqrt{3}}.$

176. 解方程 (i) $\dfrac{x-4a}{x-3a}+\dfrac{x-5a}{x-4a}=\dfrac{x+6a}{x-4a}+\dfrac{x+5a}{x-3a}.$

$$\text{(ii.)}\quad \left.\begin{aligned} 3x^2+\ xy+3y^2&=\ 8\frac{1}{4} \\ 8x^2-3xy+8y^2&=17\frac{3}{4} \end{aligned}\right\}.$$

177. 求 $\dfrac{a^2x^2+2ab^2x^3+b^4x^4}{a^{2m}+2a^mx^n+x^{2n}}$ 之平方根.

178. 化簡 (i) $\dfrac{b}{\sqrt{a}}\times\sqrt[3]{ac}\times\dfrac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt{b}}\times\dfrac{\sqrt{b^{-1}}}{a^{-\frac{1}{6}}}$.

$$\text{(ii)}\quad \left\{\frac{\left(9^{n+\frac{1}{4}}\right)\times\sqrt{3\times3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

179. 一船在靜水中之速度爲每小時8哩. 設此船嘗以2點又40分之時間,往返8哩之距離,試求河流之速爲每小時若干哩.

180. 設 $a=x^2-yz,\ b=y^2-zx,\ c=z^2-xy$, 試證

$$a^2-bc=x(ax+by+cz).$$

181. 若從 a, b, c 三量各減一數,則減後之三餘數成連比例,試求此數.

182. 化簡

$$\text{(i)}\quad \left(x+y-\frac{1}{x+y-\dfrac{xy}{x+y}}\right)\times\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}.$$

(ii) $\dfrac{2(7x-4)}{6x^2-7x+2}+\dfrac{x-10}{6x^2-x-2}-\dfrac{2(4x-1)}{4x^2-1}$.

183. 求 $729-2916x^2+4860x^4-4320x^6+2160x^8-576x^{10}+64x^{12}$ 之六次方根.

184. 化簡 (i) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

(ii) $\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{-512}+\sqrt[3]{192}-7\sqrt[6]{9}$.

185. 解 (i) $\dfrac{5}{6-\dfrac{5}{6-\dfrac{5}{6-x}}}=x$.

(ii) $\left.\begin{aligned} x^2y^2+192&=28xy \\ x+y&=8 \end{aligned}\right\}$.

186. 化簡 $\dfrac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\dfrac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$.

187. 解 (i) $x-15\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{x-15\frac{3}{4}}=6$.

(ii) $2(x+y^{-1})=3(x^{-1}-y)=4$.

188. 設 $xy=ab(a+b)$ 與 $x^2-xy+y^2=a^3+b^3$, 試證

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{b}-\frac{y}{a}\right)=0.$$

189. 求 $(2a^2-3a-2)x^2+(a^2+7a+2)x-a^2-2a$ 與 $(4a^2+4a+1)x^2-(4a^2+2a)x+a^2$ 之最高公因數.

190. 用 $\frac{1}{\sqrt{2x}}+\sqrt{2(2x-1)}-\sqrt{2x}$

$$乘\sqrt{2x}+\sqrt{2(2x-1)}-\frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

191. 用 $a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2$ 去除

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2-a^2b^4-b^2c^4-c^2a^4.$$

192. 化簡 (i) $\dfrac{7}{2(x+1)}-\dfrac{1}{6(x-1)}-\dfrac{10x-1}{3(x^2+x+1)}.$

(ii) $\left\{\dfrac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}}-\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}\right\}\times\dfrac{\sqrt{x^3-a^3}}{\sqrt{(x+a)^2-ax}}.$

193. 設 p 為任何一數與其倒數之差, q 為同數之平方與其倒數之平方之差, 試證

$$p^2(p^2+4)=q^2.$$

194. 一人起步時表上二針相合於3點4點之間, 而止步時表上二針又相合於5點6點之間, 問此人何時動身, 又此人跑路若干時.

195. 若 n 為一任何正整數, 試證 $7^{2n+1}+1$ 常能為8以除盡.

196. 化簡 $\dfrac{\left(p+\dfrac{1}{q}\right)^p\left(p-\dfrac{1}{q}\right)^q}{\left(q+\dfrac{1}{p}\right)^p\left(q-\dfrac{1}{p}\right)^q}.$

197. 求下二式之值

(i) $\dfrac{7+3\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}+\dfrac{7-3\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}}$.

(ii) $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, 設 $x=\dfrac{2b}{b^2+1}$.

198. 設 $a+b+c+d=2s$. 試證

$$4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

199. 一人以5圓之價購物若干件,後自用其2,而以每件賺洋5分之價將所餘買得洋5.40圓,問此人購物幾件?

200. 求 $2(81x^4+y^4)-2(9x^2+y^2)(3x-y)^2+(3x-y)^4$ 之平方根.

201. 設 $x:a::y:b::z:c$, 試證

$$(bc+ca+ab)^2(x^2+y^2+z^2)=(bz+cx+ay)^2(a^2+b^2+c^2).$$

202. 某君每年儲蓄續增洋10圓,若其初次存入爲20圓;問須經若干年始積得洋1700圓?

203. 已知4爲二次方程 $x^2-5x+q=0$ 之一根,試求他根及 q 之值.

204. 一人欲行7哩之遙,在行去一哩之後,將速度每小時增加一哩,於是較原定時間,早到半小時,問此人經若干小時而抵目的地?

205. 設 $(a+b+c)x=(-a+b+c)y=(a-b+c)z$

$$=(a+b-c)w,$$

試證
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{x}.$$

206. 已知等比級數首二項之和爲$2\frac{2}{3}$,其無窮項之和爲$4\frac{1}{6}$. 試求此級數.

207. 化簡
$$\frac{\left(1+\frac{x}{y}\right)^m\left(1-\frac{y}{x}\right)^n}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^n\left(1-\frac{x}{y}\right)^m}.$$

208. 一人有10圈之馬廐一所,今欲養馬5匹,問有若干種不同方法可養?

209. 今欲鑽一400呎深之井,其第一呎之價洋爲27分,以後每深一呎,加洋一分. 試求最後一呎之價,及全井之價.

210. 設a, b爲方程式$x^2+px+q=0$之二根,試證p, q爲方程式

$$x^2+(a+b-ab)x-ab(a+b)=0\text{ 之二根.}$$

211. 求$7-30\sqrt{-2}$之平方根.

212. 設$\frac{x+z}{y}=\frac{z}{x}=\frac{x}{z-y}$,試決定$x:y:z$之比.

213. 設a, b, c成調和級數,試證

$$\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}-\frac{2}{c}\right)\left(\frac{3}{c}+\frac{3}{b}-\frac{2}{a}\right)+\frac{9}{b^2}=\frac{25}{ac}.$$

214. 試求下列二式之字母全取時之順列數

(i) Consequences. (ii) Acarnania.

215. 試用二項定理展開$(2a-3x)^5$;更求$(1+x)^n$中之最大項,設$x=\frac{3}{5}$, $n=7$.

216. 設$x=\frac{\sqrt{3}}{4}$, 求$\frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$之值.

217. 化簡 $\frac{x^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{x^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{x^2-ab}{(c-a)(c-b)}$.

218. 解方程式 (i) $(x^2-5x+2)^2=x^2-5x+22$.

(ii) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=12$.

219. 試證

$$(y-z)^3+(x-y)^3+3(x-y)(x-z)(y-z)=(x-z)^3.$$

220. 子音16個,母音5個,今欲拼成含子音4個,母音2個之字,問有若干字可拼?

221. 設$b-a$爲$c-a$與$d-a$之調和中項,試證$d-c$爲$a-c$與$b-c$之調和中項.

222. 問從紅球4,黑球6,白球2,藍球5中隨手取

得紅球2,黑球3,白球1,藍球2,共有若干種方法可選擇,又其排列數爲何?

223. 已知等差級數若干項之和爲36,又其首末二項爲1與11,試求其項數及公差.

224. 試以二項定理展開 (i) $\left(2-\frac{3a}{4}\right)^5$.

(ii) $\left(1-\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ 至第五項.

225. 解

$$x^2-xy+x=35.$$
$$xy-y^2+y=15.$$

226. 化簡 $\frac{2\sqrt{10}}{3\sqrt{27}}\times\frac{15\sqrt{21}}{4\sqrt{15}}\div\frac{5\sqrt{14}}{7\sqrt{48}}$, 且求 $\frac{1}{3\sqrt{5}-6}$ 之值,已知 $\sqrt{5}=2.236$.

227. 試以二項定理求128之立方根至小數六位.

228. 櫥中有書9册,其中希臘文4册,拉丁文3册,英文2册;若任取每種一册,問共有若干種不同之選擇法?

229. 化簡 (i) $\frac{\sqrt{45x^3}-\sqrt{80x^3}+\sqrt{5a^2x}}{a-x}$.

(ii) $\left\{\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{x^2-x+1}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}{x^2+x+1}\right\}\div\left\{\frac{x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}}{x^3-1}-\frac{x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}}{x^3+1}\right\}$.

230. (i) 已知其二根爲$5\pm\sqrt{6}$,試作此二次方程式.

(ii) 設$x^2-px+q=0$之二根爲二連續整數,試證

$$p^2-4q-1=0.$$

231. 解 $x^3+1=81(y^2+y)$; $x^2+x=9(y^3+1)$.

232. 求$\log_{16}128$, $\log_4\sqrt{128}$, $\log_2\frac{1}{4}$之值,且求.00001728之對數,已知$\log 2=.3010300$, $\log 3=.4771213$.

233. A, B二人於同地出發,同向而行,惟B較A遲五日動身,A之速率,第1天爲1哩,第2天爲2哩,第3天爲3哩,餘類推;B之速率爲每天12哩. 問二人何時相遇?試說明二解答皆準確.

234. 解方程式

(i) $2^x=8^{y+1}$, $9^y=3^{x-9}$.

(ii) $z^x=y^{2x}$, $2^z=2\times4^x$, $x+y+z=16$.

235. 等差級數首十項之和對其首五項之和爲13對4,試求其首項與其公差之比.

236. 求$(1-x)^{-\frac{4}{3}}$之最大項,設$x=\frac{12}{13}$.

237. 五男一女同搭一公共汽車,但其中僅三空

位;設(1)各人自由占座,(2)其一須讓與此女人坐,問共有若干方法可坐?

238. (i) 已知 $\log 2 = .301030$, $\log 3 = .4771213$, $\log 7 = .8450980$, 求 $.005$, 6.3, 及 $\left(\frac{49}{216}\right)^{\frac{1}{3}}$ 之對數.

(ii) 由方程式 $18^{8-4x} = (54\sqrt{2})3^{x-2}$, 求 x.

239. 設 z 爲常量時 P 及 Q 與 $y^{\frac{1}{2}}$ 及 $y^{\frac{1}{3}}$ 正變, y 爲常量時 P 及 Q 與 $z^{\frac{1}{2}}$ 及 $z^{\frac{1}{3}}$ 正變, 又設 $x = P + Q$, 試求 x, y, z 之間之方程式, 已知 $y = z = 64$, $x = 12$, 又 $y = 4z = 16$, $x = 2$.

240. 化簡 $\log \frac{133}{65} + 2\log \frac{13}{7} - \log \frac{143}{90} + \log \frac{77}{171}$.

241. 若 n 物中每次取 4 個之順列數比 $2n$ 物中每次取 3 個之組合數爲 22 比 3, 求 n.

242. 設 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2b-a} + \frac{1}{2b-c}$, 試證 $2b$ 旣爲 $2a$ 及 $2c$ 之等差中項, 又爲 a 及 c 之調和中項.

243. 設 ${}^nC_r$ 表 n 物中每次取出 r 個之組合數, 試證

$$ {}^{n+2}C_{r+1} = {}^nC_{r+1} + {}^nC_{r-1} + (2 \times {}^nC_r). $$

244. 已知 $\log_{10} 2 = .30103$, $\log_{10} 3 = .47712$, 求

(i) $\log_3 54$ 之指標. (ii) $\log_{10} (.0125)^{\frac{1}{3}}$.

(iii) 3^{45} 之位數.

245. 試以最簡式表$(2ax^3-x^2)^{\frac{5}{3}}$中之第$r+1$項.

246. 一演說辯論會中,共有講員9人;5人講正面,4人講反面.若第一人已指定講正面,以後正反相間,問共有若干種不同之講法?

247. 已知二根為$a+b+\sqrt{a^2+b^2}$與$\dfrac{2ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$,試列出其二次方程式.

248. 設一點行動之速率各哩不同,但在各哩之中則不變,而任何哩數之速率與該哩起始以前之哩數為反變.若已知至第二哩時為2小時,試求至n哩時之時數.

249. 解下列二方程式

(i) $x^2(b-c)+ax(c-a)+a^2(a-b)=0.$

(ii) $(x^2-px+p^2)(qx+pq+p^2)=qx^3+p^2q^2+p^4.$

250. 試以二項定理,證明$\sqrt{8}$之值為

$$1+\frac{3}{4}+\frac{3\cdot5}{4\cdot8}+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot8\cdot12}+\cdots.$$

251. A, B二人各作一英哩之賽跑,第一次A給B先跑11碼,而早到57秒鐘勝之;第二次A給B先跑81分鐘而以遲到88碼被B所敗.問每人各行一哩所需之時間為何?

252. 火車離站一小時後,忽生障礙,在途中逗留一小時,始得繼續行駛,此後速度僅爲原速之五分之三,抵終點時,已脫班3小時矣;若此意外發生於出事地點50哩以後,則可早到$1\frac{1}{2}$小時.求火車所行之距離.

253. 試以未定係數法展開$\frac{2}{3x^2-2x^3}$至第4項.

254. 今有人一團列成三層深之空心方陣,若此團人數加上25人,則可列成一實心方陣,其各邊較空心方陣之各邊之方平根多22. 試求此團人數.

255. 將$\sqrt{a^2+b^2}$展成一級數.

256. 解方程式$\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}=\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$.

257. 將$\frac{7x^2+22x+5}{(x+3)(x^2-1)}$分成部份分數.

258. 解方程式 $x^4-5x^2-6x-5=0$.

259. 求$1+5x+7x^2+17x^3+31x^4+\cdots$之母函數.

260. 分$\frac{3x-x^2-4}{(x^2+1)(x^2-x-2)}$成部份分數.

261. 解 $x^4+3x^2-16x-60=0$.

262. 試以連續分數法求$\frac{763}{396}$之值,且求其第4近數.

263. 求級數$1, 8, 27, 64, \cdots$至無窮項之和.

264. 已知級數$1-x\sqrt{-1}-x^2+\cdots$首6項之和爲其無窮項之和之65倍，求x.

265. 將$2\sqrt{5}$化成連續分數.

266. 試求$\sqrt{23}$與$\dfrac{916}{191}$相差之極限.

267. 求$3-x-2x^2-16x^3-28x^4-676x^5+\cdots$至無窮項之和.

268. 求$\dfrac{1}{3+}\ \dfrac{1}{2+}\ \dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{3+}\ \dfrac{1}{2+}\ \dfrac{1}{1+}\cdots$之值.

269. 試以卡鄧氏法解下三次方程式

$$x^3-30x+133=0.$$

270. 解$x^3-13x^2+15x+189=0$，已知其中一根較他根大2.

271. 解方程式$x^4-4x^2+8x+35=0$，已知其一根爲$2+\sqrt{-3}$.

272. 求級數$4-9x+16x^2-25x^3+36x^4-49x^5+\cdots$至無窮項之和.

273. 解方程式$x^4-12x^3+47x^2-72x+36=0$.

274. 解 $\begin{vmatrix} 4x & 6x+2 & 8x+1 \\ 6x+2 & 9x+3 & 12x \\ 8x+1 & 12x & 16x+2 \end{vmatrix}=0.$

275. 解方程式 $2x^5+x^4+x+2=12x^3+12x^2$.

276. 已知 $\log 2=.30103$, $\log 3=.47712$, 試解下列方程式.

(i) $6^x=\dfrac{10}{3}-6^{-x}$.　　(ii) $\sqrt{5^x}+\sqrt{5^{-x}}=\dfrac{29}{10}$.

277. 求 $1+\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{2+}\cdots$ 之值.

278. 將 $\dfrac{x^3+7x^2-x-8}{(x^2+x+1)(x^2-3x-1)}$ 化成部份分數.

279. 試以 x 之昇冪序展開 $\dfrac{3x-8}{x^2-4x-4}$, 且求其公項.

280. 解下列方程式

(i) $\dfrac{\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{x-y}}=3,\ x^2+y^2=65.$

(ii) $\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-1}=\dfrac{2}{\sqrt{3-2x^2}}.$

(iii) $x^5-4x^4-10x^3+40x^2+9x-36=0.$

第四十九章

函數之圖示法

632. 定義. 凡含一變量x之式而此式之值恆依x之變動為轉移,是謂x之函數.

由是,$3x+8$, $2x^2+6x-7$, $x^4-3x^3+x^2-9$各為x之一次,二次,四次函數.

633. 記號$f(x)$恆用以表x之函數設$y=f(x)$,以連續數值代入x後,則得y之連續對應值,此卽該函數之值.故在此關係中,有時名x為自變數而y為因變數甚屬便利.

634. 討論函數$x(9-x^2)$,且令y代其值.

則, $x=0$時, $y=0\times9=0$,

$x=1$時, $y=1\times8=8$,

$x=2$時, $y=2\times5=10$,

$x=3$時, $y=3\times0=0$,

$x=4$時, $y=4\times(-7)=-28$.

等等.

依法演之,則不論若干函數之值均可任意求得,然尋常在一部份函數求出後,其他函數變動時之各種 x 之值常不必加以注意. 此種變化,如以次述之圖形法表之,極稱便利.

635. 取二直線 XOX', YOY' 於 O 上相交成四直角,由是在紙面上分成四位置 XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX$, 此各名爲第一,第二,第三,第四象限.

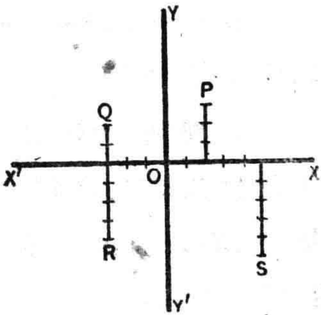

圖 1

兩直線 XOX', YOY' 常晝作水平線及垂直線,此二關連線各名爲 X 軸及 Y 軸,點 O 謂之原點. x 之值通常依量度法之便利由 O 沿 X 軸量之,此謂之橫坐標,其由 O 之右沿 OX 之值爲正,其由 O 之左沿 OX' 之值爲負.

由對應橫坐標之間作與 y 軸平行之 y 值(於同一之尺寸上),此謂之縱坐標,其在 XX' 上之值爲正,其在 XX' 下者爲負.

636. 一點之橫坐標及縱坐標統稱曰**坐標**. 一點之坐標爲x及y者簡稱之曰"點(x, y)."

一點之坐標完全在平面中測定其位置. 由是,設欲描寫點$(2, 3)$,可在O之右取$x=2$單位,而於垂直於x軸之上量得3單位,結果爲第一象限內之點P. 點$(-3, 2)$可在O之左先取3單位,而在x軸上取$y=2$單位得之. 結果爲第二象限內之點Q. 同樣,點$(-3, -4)$,$(5, -5)$各在圖1中之第三,第四象限內,以R及S描寫之.

關於坐軸上描寫點之位置之法謂之**作點**.

637. 實習時以用方格紙較便,卽用二組等距離之平方直線一橫一豎之方格紙選就二交線爲軸後(不能使目力過分混亂),其單位可用一格或一格以上代之. 故若已知其坐標,則點立可作成. 反之,設欲描寫任一象限內點之位置,則其坐標可在方格紙上量得.

以下諸圖,用十分之一吋之方格,然有時宜用較大之尺寸,見657款.

例題. 於方格紙上作點(5, 2), (−3, 2), (−3, −4), (5, −4). 假設紙上之方格爲十分之一吋, 求此諸點所定圖形之面積.

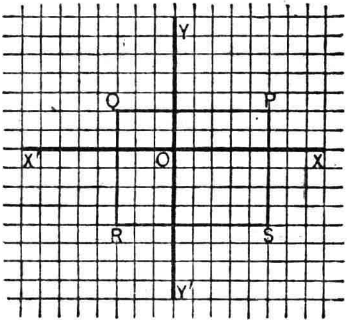

圖 2

依次取諸點, 可知此爲圖2中之P, Q, R, S, 且成含48方格之矩形, 其中每格各爲一平方吋之百分之一. 故此矩形之面積爲一平方吋之.48.

習題 XLIX. a.

[下列諸題專爲在方格紙上以測量法作之; 苟屬可能, 更以計算法證之.]

試作下列各點並作其間之聯線:

1. (3, 0), (0, 6).　　**2.** (−2, 0), (0, −8).

3. (3, −8), (−2, 6).　　**4.** (5, 5), (−2, −2).

5. (−2, 6), (1, −3).　　**6.** (4, 5), (−1, 5).

7. 作(3, 3), (−3, 3), (−3, −3), (3, −3)四點, 且求此四點所合成之形之方格數

8. 作(4, 0), (0, 4), (−4, 0), (0, −4)四點,且在結果所成之形中求其面積單位數.

9. 作(0, 0), (0, 10), (5, 5)三點,且求此三角形面積之單位數.

10. 試證以(0, 0), (0, 6), (4, 3)為頂點而成之三角形,其面積為12單位,並證以(0, 0), (0, 6), (4, 8)為頂點而成者,與此面積相同.

11. 作(5, 6), (−5, 6), (5, −6), (−5, −6)諸點.若以粍作單位,試以平方粍表此形之面積.

12. 作(1, 3), (−3, −9)二點,並證明此二點在一經過原點之直線上.試略舉此線上他點之坐標.

13. 作(0, 5), (3, 4), (5, 0), (4, −3), (−5, 0), (0, −5), (−4, 3), (−4, −3)八點,並證明此八點皆與原點等距.

14. 作下列二組之點:

(i) (5, 0), (5, 2), (5, 5), (5, −1), (5, −4).

(ii) (−4, 8), (−1, 8), (0, 8), (3, 8), (6, 8).

證明此二組之點在各與x軸及y軸平行之二直線上.求其交點之坐標.

15. 作(13, 0), (0, −13), (12, 5), (−12, 5), (−13, 0),

$(-5, -12)$, $(5, -12)$ 諸點,並求其軌跡 (i) 用測量法,(ii) 用計算法.

16. 作 $(2, 2)$, $(-3, -3)$, $(4, 4)$, $(-5, -5)$ 四點,證明此四點皆在經過原點之某一直線上. 反之,證明在此直線上之各點,其橫坐標及縱坐標皆相等.

函數之圖形

638. 令 $f(x)$ 代 x 之函數,其值以 y 表之. 設與 x 以一組數值,則 y 亦可得對應數值一組. 設以此各表作橫坐標與縱坐標,則可作連續之點. 此諸點若均已作就則成一直線或曲線矣. 此卽各函數 $f(x)$ 之圖形,或方程式 $y=f(x)$ 之圖形. 因變數 x 之各種不同值而生函數之變化可由一點通過他一點所表之縱坐標顯之.

實習時細心作少數之點已足繪出較正確之圖形.

639. 學者若已熟習前之習題,則於未論簡單圖形題之前,不可不稍得其初步之概念,當循序演習時須牢記下之陳說.

(i) 原點之坐標爲 $(0, 0)$.

(ii) 在 y 軸上每點之橫坐標爲 0.

(iii) 在 x 軸上每點之縱坐標爲 0.

(iv) 同一橫坐標上一切點之圖形爲與 y 軸平行之直線. (如 $x=2$).

(v) 同一縱坐標上一切點之圖形爲與 x 軸平行之直線. (如 $x=5$).

(vi) 由原點至任何點 $P(x, y)$ 之距離可以 $OP^2=x^2+y^2$ 表之.

例題 1. 作 $y=x$ 之圖形.

$x=0$ 時, $y=0$, 由是此點爲圖形上之原點.

又當 $x=1, 2, 3, \cdots -1, -2, -3, \cdots$, $y=1, 2, 3, \cdots -1, -2, -3, \cdots$.

由是此圖形經過 O, 其縱坐標上一組之點各等於橫坐標上一組之點. 此顯爲圖 3 之 POP'.

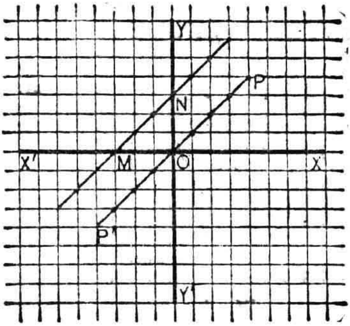

圖 3

例題 2. 作 $y=x+3$ 之圖形.

如下整列 x 及 y 之值:

x	3	2	1	0	-1	-2	-3	$\cdots$
y	6	5	4	3	2	1	0	$\cdots$

聯結此諸點卽得直線 MN,而與例題1之直線平行.

上表粗體之結果應特別注意且與其圖形比較,其所證之距離 ON, OM(恆名爲二軸之交點),可以在圖形方程式中分別命 $x=0$, $y=0$ 得之.

同理二方程式

$$y=x+5, \quad y=x-5,$$

描寫 $y=x$ 對邊上之二平行線且與其等距. 此學者試自證之.

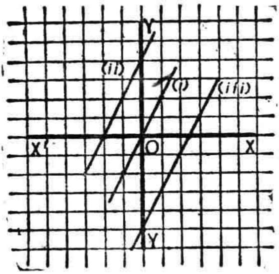

圖 4

例題 3. 作下三方程式之圖形:

(i) $y=2x$;

(ii) $y=2x+4$;

(iii) $y=2x-5$.

此處僅舉圖解,學者可依前二題所述之法,試自詳細證之.

習題 XLIX. *b*.

[下自1題至18題每三題列一羣,每羣應描寫於同一之圖上;藉示三圖形互相之關係.]

註. 注意例題2中每一縱坐標大於例題1中對應縱坐標者3單位. $y=x+3$ 之圖形可由 $y=x$ 之圖形將其每一縱坐標依正向多加3單位而得.

作下列方程式之圖形:

1. $y=5x$.	2. $y=5x-4$.	3. $y=5x+6$.
4. $y=-3x$.	5. $y=-3x+3$.	6. $y=-3x-2$.
7. $y+x=0$.	8. $y+x=8$.	9. $y+4=x$.
10. $4x=3y$.	11. $3y=4x+6$.	12. $4y+3x=8$.
13. $x-5=0$.	14. $y-6=0$.	15. $5y=6x$.
16. $3x+4y=10$.	17. $4x+y=9$.	18. $5x-2y=8$.

19. 作圖證明上列最後三圖形有一坐標爲2,1之公共點.

20. 作圖證明二方程式

$$x+y=10, \quad y=x-4$$

爲互成直角之二直線.

21. 在同軸上作$x=5$, $x=9$, $y=3$, $y=11$之圖形. 求此諸直線所圍面積之單位數.

22. 取十分之一吋爲長之單位,求$x=7$, $x=-3$. $y=-2$, $y=8$圖形所含之面積.

23. 求 $y=x+6$, $y=x-6$, $y=-x+6$, $y=-x-6$圖形所含之面積.

24. 用粍作直線單位,試以平方糎表下列圖形所含之面積.

$$y=2x+8,\quad y=2x-8,\quad y=-2x+8,\quad y=-2x-8.$$

640. 學者現應準備實習下列之陳說:

(i) 不拘a之數值,方程式$y=ax$爲描寫一經原點之直線.

(ii) 不拘a與b之數值,方程式$y=ax+b$爲描寫一與$y=ax$平行之直線,且在y軸上割一交點b.

641. 反之,凡含x及y之一次方程式既能化爲$y=ax$, $y=ax+b$二式,故凡有二變數之一次方程式必爲一直線. 因此,式之如$ax+b$者,謂之x之直線函數,而方程式如$y=ax+b$,或$ax+by+c=0$者,謂之直綫方程式.

例題. 證明$(3,-4)$, $(9,4)$, $(12,8)$在一直線上,並求其方程式.

假設$y=ax+b$爲此直線之方程式. 設其經過所給之前二點,則其坐標必能滿足上之方程式. 因此

$$-4=3a+b,\quad 4=9a+b$$

此二方程式爲 $a=\frac{4}{3},\qquad b=-8.$

因此 $y=\frac{4}{3}x-8$, 或 $4x-3y=24$,

為經過前二點直線之方程式,既 $x=12, y=8$ 可滿足此方程式,則此線亦經過(12, 8). 此題可作聯結任何二點之直線用圖形證之,且證明其經過第三點.

聯立方程式之應用

642. x 與 y 間之一次方程式之情形中,其能隨意求得若干對 x 與 y 之值以適合所設之方程式者已於167款證之矣. 現知此即等於言在任何所設之直線上可隨意求得若干點. 但設 x 與 y 間有二聯立方程式,則適合二方程式者僅能有一對值,如即等於言二直線間僅能有一公共點.

例題. 用圖形解二方程式:

$$3x+7y=27, \quad 5x+2y=16.$$

如能細心作之,可見此二方程式描寫圖中之二直線. 再量此點相交之坐標時,可知 $x=2, y=3$; 試用171款之方法證明此解答.

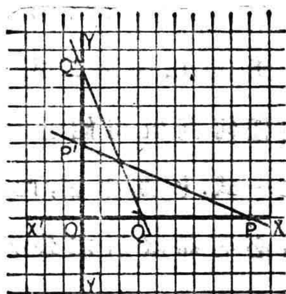

圖 5

643. 故知解二聯立方程式之方法等於求其圖形所遇之點(或諸點)之坐標.

644. 一直線既能聯結任何二點,故在用圖形解直線聯立方程式時,僅須作每線二點.二直線所遇二軸之諸點,通常頗易選擇.

645. 設二聯立方程式互爲矛盾,則無有限之解答.例如,二方程式

$$x+3y=2, \qquad 3x+9y=8$$

互爲矛盾,因第二方程式可書如 $x+3y=2\frac{2}{3}$, 此顯與 $x+3y=2$ 矛盾.此二方程式之圖形求得爲二平行直線,而其間無有限之交點.

又,二聯立方程式非皆獨立不可.二方程式

$$4x+3y=1, \qquad 16x+12y=4$$

不爲獨立,因第二式可由第一式偏乘以4而推出.由是任何對值苟能適合一方程式者,則亦能適合其他之一式.依圖形言,此二方程式爲兩重合直線,其間當必有無限數之公共點.

習題 XLIX. c.

解下列各聯立方程式且用圖形證明其解答:

1. $y=2x+3,$ $y+x=6.$ **2.** $y=3x+4,$ $y=x+8.$ **3.** $y=4x,$ $2x+y=18.$

4. $2x-y=8$,
$4x+3y=6$.

5. $3x+2y=16$,
$5x-3y=14$.

6. $6y-5x=18$,
$4x=3y$.

7. $2x+y=0$,
$y=\frac{4}{3}(x+5)$.

8. $2x-y=3$,
$3x-5y=15$.

9. $2y=5x+15$,
$3y-4x=12$.

10. 試用圖示法證明三點(3, 0), (2, 7), (4, −7)在一直線上. 問此直線割y軸於何處?

11. 證明三點(1, 1), (−3, 4), (5, −2)在一直線上, 求其方程式. 作此方程式之圖形, 且證明其經過所設諸點.

12. 證明三點(3, 2), (8, 8), (−2, −4)在一直線上, 用代數法及圖示法證明此直線割x軸於距原點$1\frac{1}{3}$之處.

646. 現應舉若干一次以上函數之圖形

例題 1. 作$2y=x^2$之圖形.

x與y之對應值現列表如下:

x	$\cdots$	3	2.5	2	1.5	1	0	−1	−2	−3	$\cdots$
y	$\cdots$	4.5	3.125	2	1.125	.5	0	.5	2	4.5	$\cdots$

此處爲欲得一極大比例之圖形, 故於紙上取二格作單位.

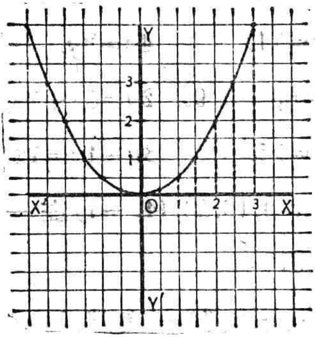

圖 6

設作以上之點,而以一手製之線聯之,則得如圖6之曲線.此曲線謂之拋物線.

此題須特別注意者有二事.

(i) 既由方程式得$x=\pm\sqrt{2y}$,則縱坐標之每一值,相當於橫坐標之二值,其量相等而號相反.因此就y軸言,其圖形爲對稱,故當留意作充足之點以定第一象限內之圖形後,其在第二象限內之圖形可不必在此象限內作任何之點而推出.同時,在此及相似之情形中,初學者應試作數點於圖形所經之各象限內.

(ii) 又知所作之點皆在x軸之上,此可由方程式見之,因既x^2於x之一切值必爲正,故由方程式$y=\frac{x^2}{2}$所得之每一縱坐標亦必爲正.

同理可證明$2y=-x^2$之圖形爲一與圖6相似之曲

註. 此圖形與次題之重要解釋將於651款見之

線，然其位置則全在x軸之下也.

例題 2. 求$y=2x+\frac{x^2}{4}$之圖形.

下之整列甚覺便利:

x	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
$2x$	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10	-12	-14	-16
$\frac{x^2}{4}$	2.25	1	.25	0	.25	1	2.25	4	6.25	9	12.25	16
y	8.25	5	2.25	0	-1.75	-3	-3.75	-4	-3.75	-3	-1.75	0

由方程式之形，顯然由x之每一正值而得y之一正值，且因x之值增大而y之值亦增大. 因此在第一象限內曲線之部份位如圖 7，且能由此象限內無限延長. 現在之情形中，僅x與y之二三正值須作點，然於由x之負值所生之結果亦須注意焉.

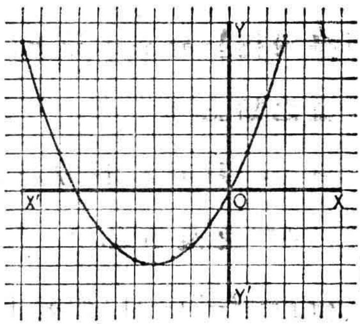

圖 7

當$y=0$，則得$\frac{x^2}{4}+2x=0$，由是在圖形中與$y=0$對應之x之二值為方程式之根$\frac{x^2}{4}+2x=0$.

647. 設$f(x)$代x之一函數,則方程式$f(x)=0$之近似解答可先作$y=f(x)$之圖形而後量x軸上之交點以求之.此交點爲使y等於零之x之值故皆爲$f(x)=0$之根.

648. 設$f(x)$之值逐漸增大至於一值a,此在代數上大於其兩邊之鄰值,則a謂之$f(x)$之**極大值**.

設$f(x)$之值逐漸減小至於一值b,此在代數上小於其兩邊之鄰值,則b謂之$f(x)$之**極小值**.

若以圖形述$y=f(x)$,則顯然$f(x)$之極大值及極小值遇於縱坐標在代數上爲其鄰接諸點最大值與最小值之點上.

例題. 用圖形解方程式$x^2-7x+11=0$,並求函數x^2-7+11之最小值.

命$y=x^2-7x+11$,並求此方程式之圖形.

x	0	1	2	3	**3.5**	4	5	6	7
y	11	5	1	-1	$\mathbf{-1.25}$	-1	1	5	11

使函數$x^2-7x+11$消失者,爲與$y=0$對應之x之值,

如精密量之,則得交點 OM 及 ON 近乎等於 2.38 及 4.62.

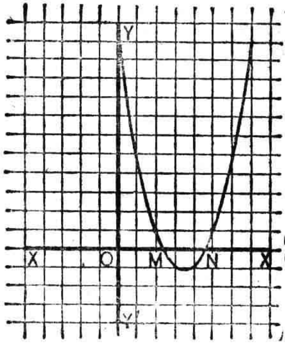

圖 8

$$x^2-7x+11=0$$

之代數解答得

$$x=\frac{1}{2}(\pm 7\sqrt{5}).$$

設取 2.236 爲 $\sqrt{5}$ 之近似值,則求得 x 之值爲與由圖形中所求得者一致.

又 $x^2-7x+11=(x-\frac{7}{2})^2-\frac{2}{4}$. 今 $(x-\frac{7}{2})^2$ 於 x 之一切實值必爲正,而非 $x=\frac{7}{2}$, 蓋如此則將消失,此函數之值遂化爲 $-\frac{5}{4}$, 此卽其所有之最小值.

此圖形證明若 $x=3.5$, 則 $y=-1.25$, 且證明在所作之曲線中,此爲代數上之最小縱坐標.

649. 下題證明圖示法所選諸點須受某極限所限制.

例題. 求 $x^2+y^2=36$ 之圖形.

此方程式可書如下之任一式:

$$\text{(i)}\quad y=\pm\sqrt{36-x^2};\qquad \text{(ii)}\quad x=\pm\sqrt{36-y^2}.$$

由(i)知$36-x^2$必爲正,始y爲一實量,由是x祇能有在-6與$+6$間之值.同樣由(ii)顯然y亦必在-6與$+6$之間.在此等極限之間,可知所作一切之點皆位於距原點6之處.因而此圖形爲一圓,其中心爲O,而其半徑爲6.

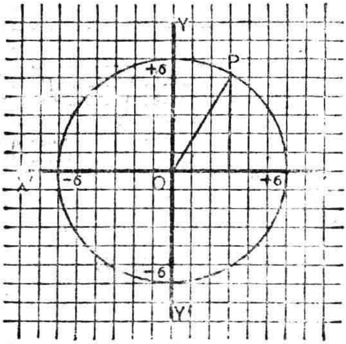

圖 9

此反覺顯明,因由原點至任何點$P(x, y)$之距離可以$OP=\sqrt{x^2+y^2}$表之[639款].故方程式$x^2+y^2=36$爲一組皆距原點爲6之點之圖形.

習題 XLIX. *d.*

1. 作$y=x^2$,及$x=y^2$之圖形,證明二形僅有一公弦,並求其方程式.

2. 由圖形,及用計算法證明$y=\dfrac{x^2}{8}$割$x=-y^2$於二點,且求其坐標.

3. 試繪下列三圖形

註.欲由方程式(ii)作曲線,應先選出y之連續值,而後求x之對應值.換言之,命y爲自變數,而x爲因變數,學者應準備多習下題.

(i) $y^2=-4x$; (ii) $y=2x-\frac{x^2}{4}$; (iii) $y=\frac{x^2}{4}+x-2$.

4. 作 $y=x+x^2$ 之圖形,並證明此形可由題1之 $y=x^2$ 圖形推出.

5. 用(i)圖形法(ii)代數法證明直線 $y=2x-3$ 遇曲線 $y=\frac{x^2}{4}+x-2$ 於一點,且求其坐標.

6. 用圖形求下列三方程式之根至小數2位.

$$\text{(i)}\ \frac{x^2}{4}+x-2=0; \qquad \text{(ii)}\ x^2-2x=4;$$

$$\text{(iii)}\ 4x^2-16x+9=0;$$

並用代數法證明其解答.

7. 求 x^2-2x-4 之極小值,又求 $5+4x-2x^2$ 之極大值.

8. 試繪 $y=(x-1)(x-2)$ 之圖形並求 $(x-1)(x-2)$ 之極小值.試精密量出 x 之值使 $(x-1)(x-2)$ 各等於5及9,用代數法證之.

9. 解以下之聯立方程式

$$x^2+y^2=100, \qquad x+y=14;$$

並作方程式之圖形及量其公共點之坐標以證其解答.

10. 作$x^2+y^2=25$, $3x+4y=25$二圖形,而於其相交之處,檢驗其相互間之關係,用代數法證其結果.

650. 應注意者,當零及無窮之記號於此用作181,182款之意義時,則其屬於代數上之符號法則,故爲便利計,用一簡括之陳說:"當$x=+0$時,$y=+\infty$"意即若給x以一極小而正值,則y之對應值爲極大且爲正.

651. 現在若回至646款所演之例題1,可見若$x=\pm\infty$,則$y=+\infty$,因此在第一及第二兩象限內之曲線可向上延長至無窮,在例題2,當$x=+\infty$時,$y=+\infty$.又y在x之0與-8二值之間爲負,故如與x以一切數目上大於8之負值,則y爲正,且$x=-\infty$時,$y=+\infty$,故在第一及第二兩象限內之曲線可延長至無窮.

當x及y俱爲無窮時學者宜檢查習題*XLIX d*中圖形之性質.

例題. 求$xy=4$之圖形.

此方程式可書如 $$y=\frac{4}{x},$$

由此可見$x=0$時,$y=\infty$,又$x=\infty$時,$y=0$,又若x爲正,則y亦爲正,x爲負,y亦爲負,故此圖形必完全在第一及第三兩象限內.

現在若分別取二變數之正值及負值,頗覺便利.

(1) 正值:

x	0	1	2	3	4	5	6	…	∞
y	∞	4	2	$1\frac{1}{3}$	1	.8	$\frac{2}{3}$	…	0

就圖形言,證明此等數值因由原點在x軸上依正向逐漸倒退而y之值爲正而愈變愈小,卽,此圖形繼續接近於x軸,如是若取x之正值爲極大,則隨意可得圖形上接近x軸之一點,當$x=\infty$時,則遇之.同樣因x愈變愈小,而圖形愈益接近y軸正向之末端,當x有任何有限正值時,則遇之,不論其小若何.

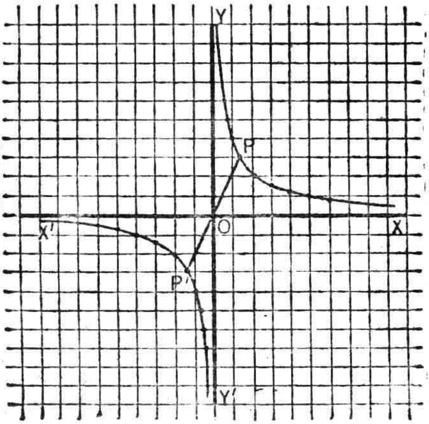

圖 10

(2) 負值:

x	-0	-1	-2	-3	-4	-5	$\cdots$	$-\infty$
y	$-\infty$	-4	-2	$-1\frac{1}{3}$	-1	$-.8$	$\cdots$	-0

由此等數值可得如圖10所示第三象限內之圖形部份,而與第一象限內所描寫之部份完全相似,所須注意者,因x經$+0$至-0,而y之値亦由$+\infty$變爲$-\infty$. 由是,其在第一象限內已進至距y軸正邊無窮遠處之圖形,重見於第三象限內,此係由距該軸負邊之無窮遠處而來. 其與x軸有關之圖亦可同理述之.

652. 當一曲線逐漸接近於一在未至無窮距離不能相遇之直線,則如此線者,謂之曲線之**漸近線**. 在上之情形中,兩軸各爲一漸近線.

653. 凡方程式爲$y=\frac{c}{x}$,或$xy=c$之形者,其中c爲常量,可得一圖形與651款所示者相似. 其結果之曲線謂之**直角雙曲線**,且極有趣. 要之,由方程式之形,顯然曲線上之每點(x, y)必有其對應點$(-x, -y)$以適合此方程式. 依圖形述之,等於說任何直線之經原點而遇曲線之兩枝於P與P'者在O等分爲二.

654. 在圖形較簡之情形中，通常作數點已覺充分正確．且有適當之坐標而選擇諸點，亦未見若何困難，但在其他情形中，尤其圖形有無限枝時，更宜留意，其最重要者厥惟(1)函數$f(x)$變為零或無窮時之值及(2)函數假設x之值為零與無窮時之值．換言之，曲線之一般性質須由原點之鄰近，二軸，及無窮遠處測定之，故作點愈合宜，則其正確性愈大．至此種點之選擇，前數題已示之矣．

關於任一軸對稱之存在亦當注意，若方程式不合x之奇數冪，則在y軸上此圖形為對稱．同樣y之不合奇數冪者，則x軸上為對稱，試比較646款例題1.

例題． 繪$y=\dfrac{2x+7}{x-4}$之圖形[見次頁之圖形].

即有$y=\dfrac{2x+7}{x-4}=\dfrac{2+\dfrac{7}{x}}{1-\dfrac{4}{x}}$，後一式於$x$為無窮值較便．

$$\left.\begin{array}{lll}\text{(i) 當} & y=0, & x=-\dfrac{7}{2}, \\ \text{當} & y=\infty, & x=4;\end{array}\right\}$$

∴此曲線割x軸於距原點-3.5之處而遇直線$x=4$於無窮遠處.

設x爲正而大於4極微,則y爲極大且爲正.設x爲正而小於4極微,則y爲極大且爲負.由是近於直線$x=4$之圖形上之無窮點向右者爲正縱坐標,而在此直線之左者爲負縱坐標.

$$\left.\begin{array}{lll}\text{(ii) 當} & x=0, & y=-1.75, \\ \text{當} & x=\infty, & y=2;\end{array}\right\}$$

∴此曲線割y軸於距原點-1.75之處,而遇直線$y=2$於無窮遠處.

取y之正值大於及小於2極微,可見當$x=+\infty$時,此曲線在直線$y=2$之上,當$x=-\infty$時,此曲線在直線$y=2$之下.

此曲線之一般性質現已決定矣:兩直線$PO'P'$ $(x=4)$及$QO'Q'(y=2)$皆爲漸近線;此曲線之兩枝各在$PO'Q$及$P'O'Q'$之內,其下枝割兩軸於距原點-3.5及-1.75之處.

欲詳細檢討下枝,則x之值可於$-\infty$與-3.5間及-3.5與4間選擇之.

x	$-\infty$	…	-16	-8	-6	-3.5	-1	0	2	3	…	4
y	2	…	1.25	.75	.5	0	-1	-1.75	-5.5	-13	…	$-\infty$

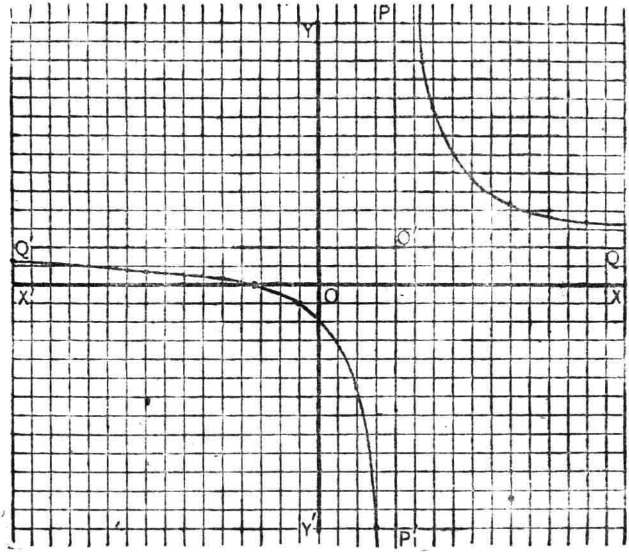

圖 11

現上枝亦可用同一方法辦理，即選擇x在4與∞間之值，此圖形如圖11所得.

655. 曲線方程式中，其所含之y爲平方或較高冪者，則與x值對應之y值，可用開方法或對數法之計算以求之.現舉一例以明之，其法係用四位數字對數表.

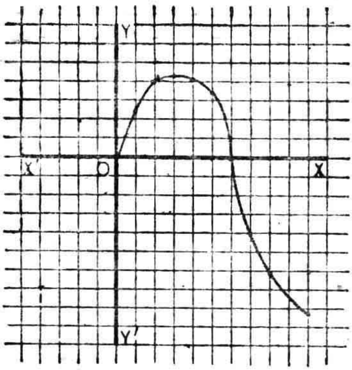

圖 12

例題. 繪 $y^3=x(9-x^2)$.

爲簡捷起見,現祇須注意於y軸右之一部份曲線而其他一半,學者宜用同一方法描寫之.

當$x=0$, $y=0$;故此曲線經過原點.再,y於x在0與3間一切之值爲正,且於$x=3$時消失;與x以大於3之值,則y爲負且在數目上繼續增大.

x	0	1	2	3	4	5	6	…
x^2	0	1	4	9	16	25	36	…
$9-x^2$	9	8	5	0	-7	-16	-27	…
y^3	0	8	10	0	-28	-80	-162	…
$\log y^3$			1		1.4472*	1.9031*	2.2095*	…
$\log y$			.3333		.4824	.6344	.7365	…
y	0	2	2.15	0	-3.04	-4.31	-5.45	…

*取y^3之連續值對數,其負號可忽之,但在得y之連續值之末行中,須留意插入適當之符號

此諸點頗與曲線近似.欲使更爲正確,應取少數中間值如 $x=1.5, 2.5, 3.5\cdots$,其結果將如圖12之曲線,其中取一吋之十分二爲直線單位.

各種圖形之測量法

656. 爲便利起見,在紙面上分一吋爲十格,通常用一格作直線之單位.但實習上欲得一適度之圖形宜選一較大之單位.現在所量之横坐標及縱坐標皆爲同一之尺寸以求簡便,然亦無需如此,蓋用問題之特別條件暗示不同之尺寸以量二變數者已覺便利也.

取 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 之圖形,如646款,爲例.設以如前同一之單位作 $y=x^2$ 之圖形,則求得一與前所證相似之曲線,惟 y 軸

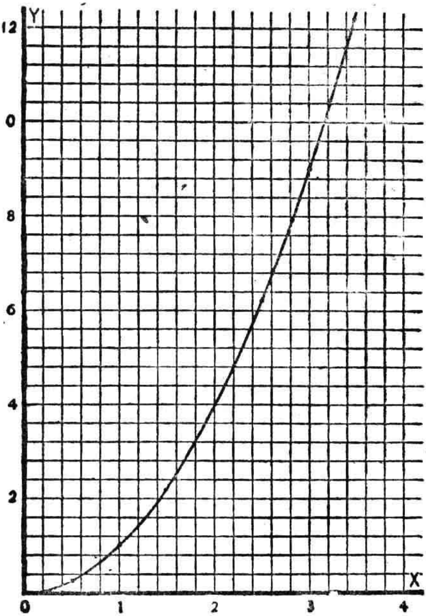

圖 13

之方向已延長.此實,與前之圖形依y軸之方向伸長二倍其長者相同.

657. 凡方程式爲$y=ax^2$之形者,其中a爲常量,爲一拋物線,其線之長短須視a之值大小爲轉移;而a之值愈大,則y之值較x增大愈速.乃有極大之縱坐標與其對應之極小縱坐標,此圖形遂於實用上不適應用.於此,其困難不便處可量y之值較x之值更小之尺寸而見之.

一般言之,當一變數較其他一變數增大極速時,則極速增大之變數應選一較小之單位代之,而其他一變數可以大單位代之.下題當示及其變化.

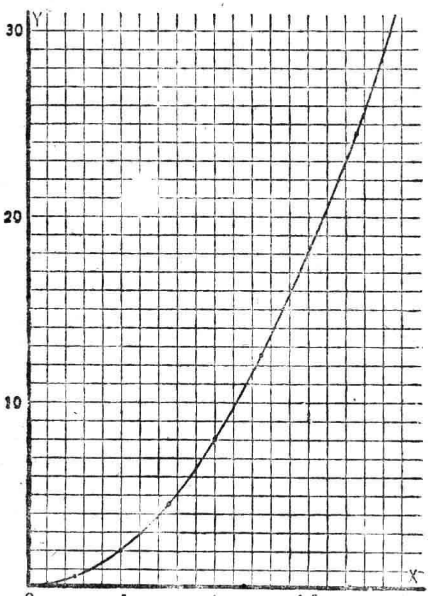

圖 14

658. 現以$y=x^2$(圖13),及$y=8x^2$(圖14)之圖形作比較.

圖13中x之單位大於y之單位者爲二倍.

圖14中x單位其大爲y單位之十倍.

學者如能以同一或較大之尺寸作其他類似之圖形，頗屬有用．例如，在圖14中，$y=16x^2$與$y=2x^2$之圖形可比較$y=8x^2$而描寫之．

習題 XLIX. *e*.

1. 試作$y=x^3$之圖形，證明此圖在第一，第三兩象限內有一連續之曲線，於原點經過x軸．並推出(i) $y=-x^3$; (ii) $y=\frac{1}{2}x^3$二圖形．

2. 作$y=x-x^3$之圖形，並由$y=x$及$y=x^3$二圖形證之．

3. 作$y=\frac{1}{x^2}$之圖形，證明此圖形有二枝完全在第一，第二兩象限內並檢查及比較此圖形接近二軸時之位置．

4. 討論圖形$y=\frac{a}{x^2}$之一般性質，設a為某整數常量．試區別二情形中a之數值為量等而號異．

5. 作 (i) $y=1+\frac{1}{x}$; (ii) $y=2+\frac{10}{x^2}$二圖形．並證明此二圖形可由$y=\frac{1}{x}$，及$y=\frac{10}{x^2}$推出．

6. 作$y=x^3-3x$之圖形．試檢驗曲線在點$(1,-2)$,

$(-1, 2)$之性質,並用圖形證明方程式之三根近於$-1.732, 0, 1.732$.

7. 解聯立方程式

$$3x+2y=16,\ \ xy=10,$$

其解答可從其圖形中交點之坐標以證之.

8. 作下列二圖形:

$$\text{(i)}\ y=\frac{15-x^2}{x};\quad \text{(ii)}\ x=\frac{10-y^2}{y},$$

更由方程式$x^2+xy=15$及$y^2+xy=10$以代數方法證明其解答.

9. 畫方程式$y=\dfrac{x}{2-x}$爲曲線,證明此曲線有二枝,其一在第一及第三兩象限內,另一完全在第四象限內,並求其漸近線之方程式.

試作下各式之圖形:

10. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

11. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x}$.

12. $y=\dfrac{x^2-15}{x-4}$.

13. $y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-3}$.

14. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

15. $y=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+1}$.

16. $y=x^3-6x^2+11x-6$.

17. $10y=x^3-5x^2+x-5$.

18. $y=\frac{20}{x^2+2}$.　　19. $y=\frac{40x}{x^2+10}$.

20. $y=\frac{x(8-x)}{x+5}$　　21. $y=\frac{(x-2)(x-3)}{x-5}$.

22. $y=\frac{(x-1)(x-2)(x+1)}{4}$.　　23. $y^2=x^2-5x+4$.

24. $4y^2=x^2(5-x)$　　25. $y^2=\frac{x(3-x)(x-8)}{x^2+5}$.

26. $y^2=\frac{(x+7)(x-4)(x-10)}{x^2+5}$.

27. $y^2=\frac{x^2(49-x^2)}{50}$.　　28. $y^2=\frac{(81-x^2)(x^2-4)}{100}$.

29. $5y^3=x(x^2-64)$.　　30. $5y^3=x^2(36-x^2)$.

31. 作 $y=x^3$ 及 $y=2x^2+x-2$ 二圖形. 又求方程式 $x^3-2x^2-x+2=0$ 之三根.

32. 用圖形求方程式 $x^3-4x^2-5x+14=0$ 之三根至三位有效數字.

659. 除已給諸例外,尙有若干算術及代數演算亦可引入圖解.

例如, $y=x^2$ 之圖形可用以得數字平方根. 因旣 $x=\sqrt{y}$,則每一縱坐標與其對應之橫坐標可顯出某數及其平方根. 同様,立方根亦可由 $y=x^3$ 之圖形求之.

例題 1. 用圖形求10之立方根至小數3位止.

所需之根顯爲略大於2,因此作 $y=x^3$ 之圖形時. 取

$x=2.1, 2.2, \cdots$，已頗充足.其對應之縱坐標為$9.26, 10.65, \cdots$.

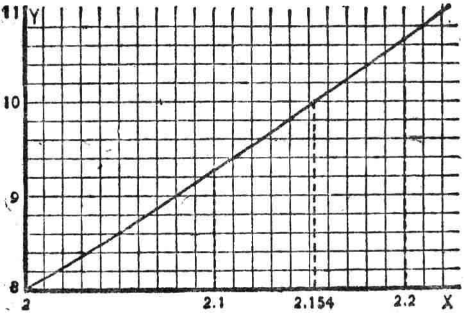

圖 15

當$x=2$時，$y=8$，取經過此點之二軸而令x及y之單位各為10吋及.5吋.按此尺寸，則圖形之全部與一直線相差至微，遂得較為正確之結果.

當$y=10$時，則x所量得之值為2.154.

例題2. 用圖形證$4x^2+4x-3$式於x在.5與-1.5間之一切實值為負而於x在此極限外之一切實值為正[圖16].

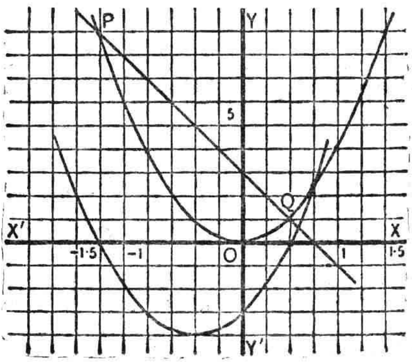

圖 16

命$y=4x^2+4x-3$，而如648款之例題演之，取x之單位為y單位之四倍.可求得此圖形割x軸於橫坐標為.5及-1.5之點上.且在此二點間，此圖形在x軸

之下;卽,當x在.5與-1.5之間時,y之值爲負,而於x一切其他之值爲正.

或可如下演之:

命$y_1=4x^2$,而$y_2=-4x+3$,作此二方程式之圖形.在其交點上$y_1=y_2$而在此點上求得x之值爲.5及-1.5.因此由x所有之值,得

$$4x^2=-4x+3, \text{或 } 4x^2+4x-3=0.$$

由是方程式$4x^2+4x-3=0$之二根可由$4x^2$及$-4x+3$二圖形上公共點之橫坐標而得.

再,x在.5與-1.5間之值可用圖形求得y_1小於y_2,因而y_1-y_2,或$4x^2+4x-3$爲負.

此兩解均於此處顯出.

上部曲線爲$y=4x^2$之圖形;PQ爲$y=-4x+3$之圖形而下部曲線爲$y=4x^2+4x-3$之圖形.

660. 上題二法中,第一法較爲直接而易明;但第二法亦有其利益.

凡一羣方程式如$x^2=px+q$之形者,其圖形之解法,皆可以$y=x^2$作於便利之尺寸上,而$y=px+q$亦可代

入p及q不同之值後作出其圖形.

次數較高之方程式亦可同樣處理.

例如,方程式如

$$x^3=px+q, \text{ 或 } x^3=ax^2+bx+c$$

者,其解答可根據$y=x^3$與與其他圖形之交點而定.

例題　求次二方程式之實根

(i)　$x^3-2.5x-3=0$;　　(ii)　$x^3-3x+2=0$.

此處現須求出次二式之交點

(i)　$y=x^3$,　　(ii)　$y=x^3$,

$y=2.5x+3$;　　$y=3x-2$.

作此二方程式之圖形時,選x之單位大於y之單位者五倍.

可見$y=2.5x+3$僅在$x=2$之點上與$y=x^3$相遇.由是2爲方程式(i)僅有之實根.

又$y=3x-2$切$y=x^3$於$x=1$之點上而割於$x=-2$之處.

方程式$x^3-3x+2=0$與前點對應者有二等根.由是(ii)之三根爲1, 1, -2.

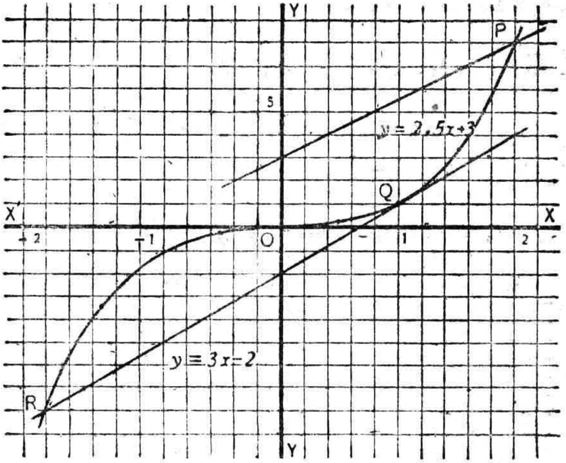

圖 17

661. 兩個直線聯立方程式之圖解已於642款示及矣. 因不論方程式爲何次數,其所用之原理盡相同,故651款及659款所示之例題,未曾加以詳細之解釋.惟二十八章所討論之方程式,其圖形之解法實屬必要也.

例題 用圖形解次之聯立方程式

$$\text{(i)}\quad \left.\begin{aligned} x-y&=2\\ xy&=35\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(ii)}\quad \left.\begin{aligned} x^2+y^2&=74\\ xy&=35\end{aligned}\right\}.$$

(比較300款,例題1.)

此處 $xy=35$ 爲一直角雙曲線[651款]; $x-y=2$ 爲直

線 QS, 而 $x^2+y^2=74$ 為一圓.

(i) 之諸根為 Q 及 S 之坐標; 即,

$$x=7,\ y=5;\ 或\ x=-5,\ y=-7.$$

(ii) 之諸根為 P, Q, R 及 S; 即,

$$x=5, y=7; x=7, y=5; x=-7, y=-5; x=-5, y=-7.$$

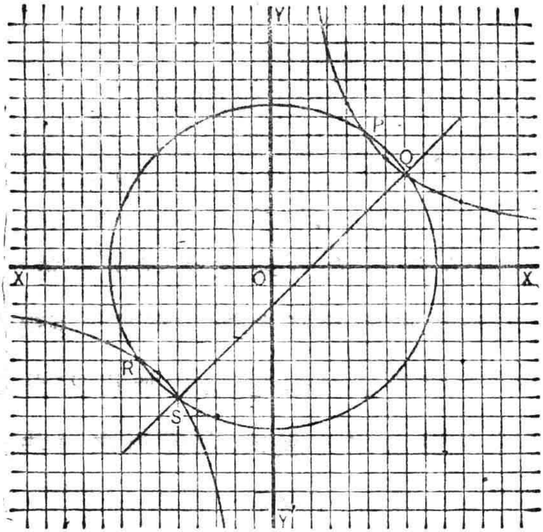

圖 18

習題 XLIX. *f*.

1. 繪 $y=x^2$ 之圖形於二倍圖 13 之尺寸上, 再以此求 .72, 1.7, 3.4 之平方, 又求 7.56, 5.29, 9.61 之平方根.

2. 繪 $y=\sqrt{x}$ 之圖形, 取 y 之單位為 x 單位之五倍

應用此曲線驗例題1所得平方根之值.

3. 由$y=x^3$之圖形(依659款設圖之尺寸)求$\sqrt[3]{9}$及$\sqrt[3]{9.8}$之值至4位有效數字止.

4. 某學生不知求$\sqrt[3]{14.71}$之平方根之法,乃作$y=x^3$之圖形,用2.2, 2.3, 2.4, 2.5諸值代x而求得此立方根之值爲2.45.試詳細證明其方法,並由同一之圖上求$\sqrt[3]{13.8}$之值.

5. 用圖形求能使x^2-2x-8式消失之x值.證明當x之值爲在此諸極限內,則此式爲負,然x爲其他之值時此式爲正.求此式之最小值.

6. 由前題之圖形證明與a以任何大於1之值,方程式$x^2-2x+a=0$,不得有實根.

7. 用圖形證明x^2-4x+7式於x爲一切實值時爲正.

8. 於同軸上,作下列之圖形

$$y=x^2,\ y=x+6,\ y=x-6,\ y=-x+6,\ y=-x-6.$$

其次討論下列四方程式之根:

$$x^2-x-6=0,\ x^2-x+6=0,\ x^2+x-6=0,\ x^2+x+6=0.$$

9. 設x爲實量,試用圖形證明$5-4x-x^2$不大於9;又$4x^2-4x+3$不小於2.在x如何之值間始第一式爲正.

10. 用圖形解方程式$x^3=3x^2+6x-8$,並證明函數

x^3-3x^2-6x+8 於 x 在 -2 及 1 間之一切之值爲正,而於 x 在 1 及 4 間之一切之值爲負.

11. 用圖形證明方程式 $x^3+px+q=0$ 若 p 爲正,則僅有一實根.

12. 試繪方程式 $y=2^x$ 爲曲線.求 $2^{4.75}$ 及 $2^{5.25}$ 之近似值.試以12,表作2之近似冪.

又證明 $\log_2 26.9+\log_2 38=10$.

13. 用轉輾開方法求 $10^{\frac{1}{2}}, 10^{\frac{1}{4}}, 10^{\frac{1}{8}}, 10^{\frac{1}{16}}$ 之值.用乘法求 $10^{\frac{3}{16}}, 10^{\frac{5}{16}}, 10^{\frac{6}{16}}, 10^{\frac{7}{16}}, 10^{\frac{9}{16}}$ 之值.應用此諸值作曲線 $y=10^x$ 之一部於較大之尺寸上.求 log 3, log 1.68, log 2.24, log 34.3 小數三位後之正確值.又選數值與 a 及 b,且證明次之定律

$$\log ab=\log a+\log b;\ \log\frac{a}{b}=\log a-\log b.$$

[用十分之一吋之方格紙,設 x 及 y 各取10吋及1吋爲單位,則 x 值對角之尺寸爲三位小數正確,y 值對角之尺寸爲二位小數正確.]

14. 與 x 以 0, 1, 2, 3,…9 諸值,試算出 $x(9-x)^2$ 之值.從 $x=0$ 至 $x=9$ 試作 $x(9-x)^2$ 之圖形.

有一9吋長之彈性細棒,固定於一端,能作如鑷擱

之搖動,由 $x(9-x)^2$ 式量得此細棒於距支點 x 吋之處有折斷傾之向.求此棒折斷之處.

15. 某數之倒數乘以2.25後,加其積於此數上.設此結果之式有最小可能之值,用圖形求此數.

16. 用圖形證明 $4x^2+2x-8.75$,除 x 於1.25至−1.75之值外,於 x 之一切實值為正.問 x 須為何值此式始為極小值?

17. 用圖形求方程式

(i) $x^3+x-2=0$. (ii) $x^3-7x+6=0$.

之實根.

18. 在同軸上作

$$x+y=9\frac{1}{2},\ xy=12,\ x^2-y^2=32$$

三圖形;再求以下三聯立方程式之解:

$$\text{(i)}\ \left.\begin{aligned} x+y&=9\tfrac{1}{2}\\ xy&=12\end{aligned}\right\}. \quad \text{(ii)}\ \left.\begin{aligned} x^2-y^2&=32\\ x+y&=9\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\}. \quad \text{(iii)}\ \left.\begin{aligned} x^2-y^2&=32\\ xy&=12\end{aligned}\right\}.$$

19. 在同軸上作 $y=x^3$ 及 $y=3y^2-4$ 二圖形,並求方程式 $x^3-3x^2+4=0$ 之三根.

證明 x^3-3x^2+4 式於 x 小於−1之值為負,而於 x 其他一切之值時為正.

20. 試以下列聯立方程式作圖形:

$$\text{(i)}\ x^2+y^2=a,\qquad \text{(ii)}\ x+y=a,$$

$$xy=b,\qquad xy=b,$$

解釋(i)因何有四解或竟無解,(ii)因何有二解或竟無解.

21. 在同軸上繪$y=x^3$及$y=x^2+3x-3$二圖形.

再求方程式$x^3-x^2-3x+3=0$之三根至小數三位止,並討論與x以不同之值後x^3-x^2-3x+3式之符號如何.

圖形之實用

662. 以前所討論之情形中,曲線方程式皆爲已知,且其圖形可先選適合方程式之x及y之值而後畫直線經過所作諸點以得之.如是可確定任何若干點之位置且由所用演算可知其諸點是否皆在所求之圖形上.若已正確算出變數充足之對應値,則雖不知曲線方程式,其結果殊無異.

有時自情形之性質觀,其含二變數之方程式爲已知.例如,設一量y與其他一量x成正例,則未始不可令$y=ax$,a爲某常量.因此凡在二量間成正比之情形中,其所示變化之圖形爲一經過原點之直線.又,既

二點足以測定一直線是在考慮之情形之下僅須,除原點外,知其一點之位置,而此則可以變數之任何對聯立值得之.

例題1 已知5.5瓩略等於12.125磅.問磅數折成瓩數應如何用圖形表之.表$7\frac{1}{2}$磅爲瓩數,表$4\frac{1}{4}$瓩爲磅數.

現以水平線量磅數而以垂直線量瓩數,所需之圖形可逕聯原點於坐軸上爲12.125及5.5之一點而得之.

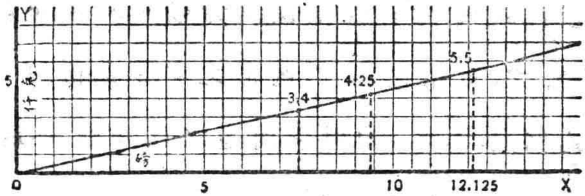

圖 19

量之得$7\frac{1}{2}$磅$=3.4$瓩,而$4\frac{1}{4}$瓩$=9.37$磅.

例題2 某學校之經費,半爲固定,半爲與生徒數成比例.學生105個時之經費爲3250圓,學生128個時之經費爲3710圓.繪一圖形描寫任何數學生之經費;求115人時之經費,並求經費3550圓時所能維持之學生數.

設以y圓代學生x個時之經費,則顯然x及y能適合一直線方程式$y=ax+b$,其中a與b皆爲常量.故此圖形爲一直線.

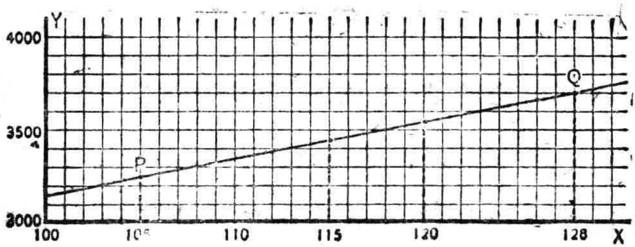

圖 20

因數目頗大,故若縱坐標開始以3000,橫坐標開始以100計之,可稍便利.則圖形之必要部份可引入較小之比例矣.點P及Q係以問題之已知數決定之,而直線PQ卽爲所需之圖形.

量之得$x=115$時,$y=3450$;$y=3550$時,$x=120$.由是所需之答數爲3450圓及120人.

663. 二變數之對應値有時可由視察或由經驗而得之.在如是之情形中,其已知數不能視爲完全無誤,蓋所作點之位置不能認爲絕對可靠,亦不能隨意作其他之點以改正圖形之不確,然則所能爲之事惟何.

惟有畫一曲線,在可能範圍內,使其整齊地位於所作之點間.在經過曲線之兩邊時與其餘平均分配之.如欲作一整齊而連續之曲線,可用一薄木片或其他易曲之材料折成必要之灣曲.校定位置而後作線.若所作之點在近乎一直線上,則其最簡之法莫如用一已畫直線之紙或一塊假象牙,此若已置於適當之位置後,則諸極點可於方格紙上記出,聯結諸點後,則得近似之圖形矣.

例題1 下表爲某國人口之統計,其中P爲每年歲首以百萬爲單位之人口數.

年份	1830	1835	1840	1850	1860	1865	1870	1880
P	20	22.1	23.5	29.0	34.2	38.2	41.0	49.4

令t爲自1830後之年數,作垂直線代P值,作水平線代t值.用一經過所作點中之簡單曲線以顯P及t間之關係,求1848年及1875年歲首之人口.

此圖形如下頁之圖21.1848年及1875年之人口各在A點及B點,故求得爲27.8及45.3百萬.

例題2 x與y之對應值為下表所示:

x	1	4	6.8	8	9.5	12	14.4
y	4	8	12.2	13	15.3	20	24.8

假定此諸值視察上有錯誤,作近似之圖形,且測定x與y間最可能之方程程式[見圖22].

在細心作所設之點後,知經過其中三點者為一直線,且此直線整齊地位於其他之點中,此即所需之圖形.

其方程式假設為$y=ax+b$,則a與b之值可選x及y之兩對聯立值以求之.

故在方程式中,代入$x=4$, $y=8$,及$x=12$, $y=20$,則得$a=1.5$, $b=2$.由是此圖形之方程式為$y=1.5x+2$.

664. 在上題中,因圖形為直線,故在紙上之限制內能達到任何之程度,故若一變數之任何值已測定後,則他一變數之對應值不難讀出.若問題中之值頗大,

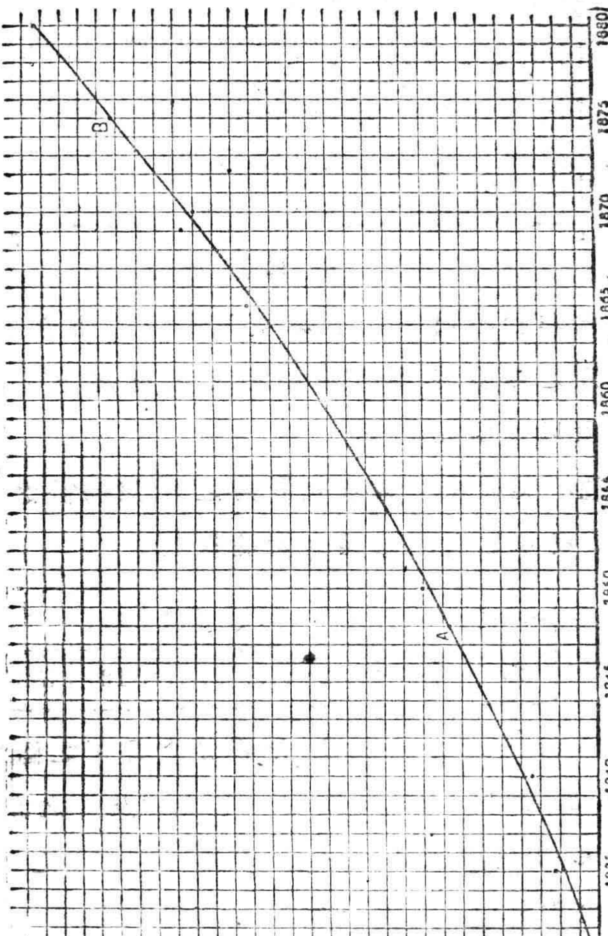
B
A
1830
1835
1840
1845
1850
1855
1860
1865
1870
1875
1880
50
40
30
20

圖 21

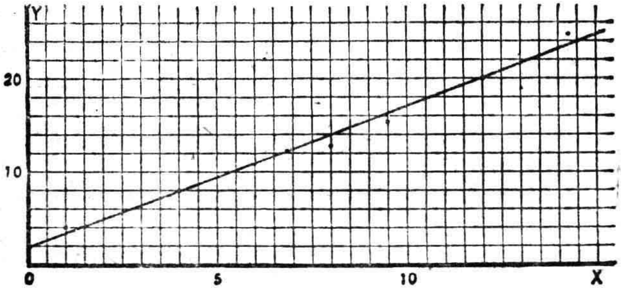

圖 22

則此法非獨不便抑且不妥,蓋實際上若曲線已超出所作點之極限時,則所畫圖形之部份將更不確.下例卽用以說明此程序.

例題. 某機械,P為舉重W磅之力,以磅計之.下表所載P與W之對應值為由實驗得之:

P	3.08*	3.9	6.8	8.8	9.2	11*	13.3
W	21	36.25	66.2	87.5	103.75	120	152.5

此諸值作於方格紙上,作聯結P與W之圖形,當$W=70$時,書出P值.又測定一聯結P及W之直線定律,求舉310磅重量所需之力,又求一180.6磅之力所能舉起之重量.

因紙頁太小,頗難顯示適宜比例之圖形,故現在僅示解法之步驟,此與上題之步驟殆全相似.

以垂直線作P值而以水平線作W值.求得與星點註出之結果對應之點上能畫一直線經過之,而頗整齊位於其他之點中.由此圖形求得當$W=70$時則$P=7$.

假設$P=aW+b$,而由與直線所經之二點對應之值代入P及W解此結果之方程式,則得$a=.08$, $b=1.4$. 由是P及W之直線方程式爲$P=.08W+1.4$

此謂之機械定律.

由此方程式,當$W=310$. $P=26.2$;當$P=180.6$, $W=2240$.

由是26.2磅之力可舉起310磅之重量;若所用之力爲180.6磅,則所舉之重量爲2240磅.

665. 前款之例題,爲程序之簡單說明,而爲工廠及實驗室所通用.其目的乃在若干聯立值已由經驗或由視察測定時,所以測定二變數之定律者也.

畫圖形恰在與視察所得之值對應之所作諸點內,雖非難事,然圖形若非直線,則苟不用某種間接方法,實難求其方程式.

例如,假定x與y爲可適合方程式,如$xy=ax+by$之二量,並顯示此定律.

書此方程式如

註.圖形之方程式不僅於測定難以用圖形求得之結果極見用處,並且恆能用以檢查以量求得之結果.

$$\frac{a}{y}+\frac{b}{x}=1,\text{ 或 } au+bv=1;$$

其中$u=\frac{1}{y}$, $v=\frac{1}{x}$,顯然u, v適合一直線方程式.換言之,設欲作在所設值之倒數對應之點,則其直線間之關係當立顯明.故a與b之值可如前題求得.而如$xy=ax+by$所需之定律亦可測定.

再,假定x與y能適合如$x^n y=c$之方程式,其中n與c皆為常量.

取對數,即有

$$n\log x+\log y=\log c.$$

此方程式之形可證明$\log x$及$\log y$適合一直線之方程式.故設已作$\log x$及$\log y$之值,則直線之圖形不難畫出,而n及c二常量亦可如前求得.

例題 有一橫樑,支於二柱,其距離為x,於其中部,懸一物,重y克.則此物發生折度而距離x變小,以實驗所得,示於下表:

x	56	60	70	80	90	100
y	270	150	100	60	47	32

假設x及y之關係為方程式$x^n y=c$,求n及c

由三十八章對數表,得如此處所示 $\log x$ 及 $\log y$ 之值與 x 及 y 視察所得之值對應,作出諸點後,則得如圖23之圖形,而其方程式爲次形.

$$n \log x+\log y=\log c.$$

$\log x$	$\log y$
1.699	2.431
1.778	2.176
1.845	2.000
1.903	1.778
1.954	1.672
2.000	1.519

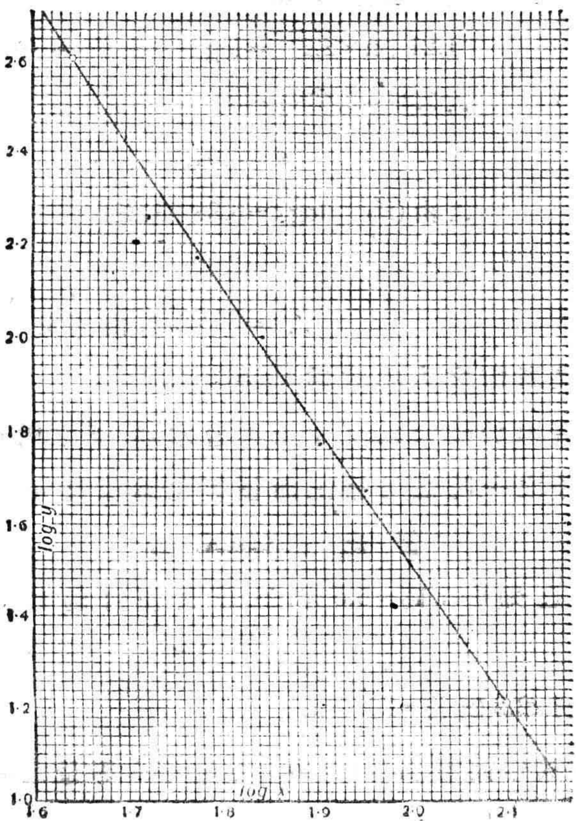

圖 23

欲得 n 及 c, 選直線所經之二外點, 則求得當

$$\log x=1.642, \qquad \log y=2.6,$$

又當 $\log x=2.1, \qquad \log y=1.21.$

代入諸值後, 卽有

$$2.6+n\times1.642=\log c\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i}),$$

$$1.21+n\times2.1 \quad =\log c\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii});$$

$$\therefore 1.39-0.458\,n=0;$$

於是 $n=3.04.$

$\therefore$ 由 (ii) $\log c=6.38+1.21$

$$=7.59;$$

$\therefore c=39\times10^6$, 由對數表.

由是所需之方程式爲 $x^3y=39\times10^6$.

學者應於較大之尺寸上再習本題. 下之圖形係作於十分之一吋之方格上而後復化爲原尺寸之半.

習題 XLIX. g.

1. 已知 6.01 碼 = 5.5 米, 試證與任何碼數相等之米數.

證明 22.2 碼約 = 20.3 米.

2. 試作圖證明喱 (grain), 克 (gram), 等量之關係, 已知 18.1 喱 = 1.17 克.

表明(i) 3.5克爲喱數.

(ii) 3.09喱爲克之小數.

3. 設3.26吋相當於8.28糎,證明與已知糎數相當之吋數如何用圖形測定之.試求一米之吋數及一碼之糎數.此圖形之方程式如何?

4. 下表爲與各種半徑對應之近似圓周:

C	15.7	20.1	31.4	44	52.2
r	2.5	3.2	5	7	8.3

於方格紙上作上表之值,且由圖形測定圓周爲12.1吋之直徑及半徑爲2.8吋之圓周.

5. 已知溫度,攝氏C度等於華氏F度.下表爲一組F及C之對應值:

C	-10	-5	0	5	10	15	25	40
F	14	-23	32	41	50	59	77	104

試作圖形證明與已知攝氏溫度對應之華氏溫度,並求與$12.5°C$及$31°C$之對應華氏溫度.

視察圖形求F及C之代數關係.

6. 男性之平均壽齡可以某數年之死亡率計算,示於下表:

年齡	6	10	14	18	22	26	27
壽齡	50.38	47.60	44.26	40.96	37.89	34.96	34.24

試作圖形證明任何男性在6歲與27歲間之壽齡，且由此圖形測定12歲及20歲者之壽命.

7. 設W爲伸長一彈力線l吋之重物，以㖊計之，試作W及l之下列諸值:

W	2.5	3.75	6.25	7.5	10	11.25
l	8.5	8.7	9.1	9.3	9.7	9.9

試由圖形測定此線未經伸長之處，並此線伸長1呎時所支持之重量.

8. 某考試之最高分數及最低分數各爲297及132. 現須變其分數，使考卷上之最大分數(200)給予第一名考生，並使首末二名相差150分. 求原來所得分數x及變後對應分數y之方程式.

繪此方程式之圖形，並記出此考試中所得200, 262, 163三考生應得之分數.

9. 某物體以初速前進，而依運動方向爲加速，經t秒後，其速度爲v秒呎. 設附表表示v與t之對應值，

v	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

試作圖顯示任何時間之速度.由此求(i)初速,(ii)速度爲28秒呎時之時間.又求v與t之方程式.

10. 下表爲等邊三角形面積及其底(用對應單位)之關係:

面積	.43	1.73	3.90	6.93	10.82	15.59
底	1	2	3	4	5	6

用圖形說明其結果,並測定底爲2.4呎之等邊三角形之面積.

11. 某物體,因地心引力而下墜,經t秒後其距爲s呎.設s及t於半秒間之對應值如下:

t	.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
s	4	16	36	64	100	144	196	256

試繪聯結s, t之曲線,並由圖求

(i) 某物體於落下1.8″後所經之距離;

(ii) 井之深度,設投下一石須時3.16″達其底.

12. 一物體,以已知之速度射出且與地平線成一直角,已知其高度之呎數經t秒後可以方程式$h=64t-16t^2$表之.求h於一秒之$\frac{1}{4}$間之值,並作此物所經之路線.又求h之極大值及此物在射出後至達地面之時間.

13. 下表為不同日期上午七時之太陽位置:

三月廿三	四月三日	四月廿日	五月八日	五月廿七	六月廿二	七月十八	八月五日	八月廿五
$80^\circ E$	$82^\circ E$	$85^\circ E$	$89^\circ E$	$92^\circ E$	$95^\circ E$	$94^\circ E$	$91^\circ E$	$85^\circ E$

用圖形證明其結果,並計算六月八日同時太陽之近似位置.

14. 設已知溫度下每v立方吋體積之氣體在每平方吋面積上所受之壓力為p磅,試從下表之對應值作一曲線以聯p及v:

p	36	36	25.7	22.5	20	18	16.4	15
v	5	6	7	8	9	10	11	12

15. 試將下表中x與y所表之值作圖於方格紙上,並測定x與y間最可能之方程式:

x	3	5	8.3	11	13	15.5	18.6	23	28
y	2	2.2	3.4	3.8	4	4.6	5.4	6.2	7.25

16. 下表為x與y之對應值:

x	1	3.1	6	9.5	12.5	16	19	23
y	2	2.8	4.2	5.3	6.6	8.3	9	10.8

假定上諸值視察上有誤，試作近似之圖形，並測定x與y間最可能之方程式．當$x=19$時，求y之正確值；當$y=2.8$時，求x之正確值．

17. 下表所載x及y之對應值係由實驗而得：

x	0.5	1.7	3.0	4.7	5.7	7.1	8.7	9.9	10.6	11.8
y	148	186	265	326	388	436	529	562	611	652

可知上表諸值爲方程式$y=ax+b$之形所聯接，但x與y之値在量度上有錯誤，求a，b最可能之値，當$x=9.9$時計算y所量之値之錯誤．

18. 某機械能以P之力舉起W磅重之物．下列P與W之對應値係由實驗得之：

P	2.8	3.7	4.8	5.5	6.5	7.3	8	9.5	10.4	11.75
W	20	25	31.7	35.6	45	52.4	57.5	65	71	82.5

作聯結P與W之圖形，當$W=60$時，試書出P之値．又測定其機械定律，並由此定律求用31.7磅之力可舉重若干．

19. 下列x與y之値，其中有不盡正確者係以方程式$y=ax^2+b$之形所聯接：

x	·1	1.6	3	3.7	4	5	5.7	6	6.3	7
y	3.25	4	5	6.5	7.4	9.25	10.5	11	14	15.25

作此諸值之點後,繪出其圖形,並求a與b之最可能之值.

當$y=4$時,求x之眞值,當$x=6$時,求y之眞值.

20. 下表爲二變數x與y之對應值:

x	2.75	3	3.2	3.5	4.3	4.5	5.3	6	7	8	10
y	11	9.8	8	6.5	6.1	5.4	5	4.3	4.1	4	3.9

此諸值視察上有錯誤,然其眞值必可適合如$xy=ax+by$之方程式.依上表所測定之點作圖形,求a與b最可能之值.求與$x=3.5$,及$x=7$對應之y之眞值.

21. x與y視察所得之值如下:

x	100	90	70	60	50	40
y	30	31.08	33.5	35.56	37.8	40.7

假設x與y爲方程式如$xy^n=c$之形所聯接,求n及c之值.

22. 下表x與y之值視察上有錯誤:

x	66.83	63.10	58.88	51.52	48.53	44.16	40.36
y	144.5	158.5	177.8	208.9	236.0	264.9	309.0

設x及x可適合方程式如$x^ny=c$,求n及c.

直線圖形之雜應用

666. 凡x及y有關之二量,若變其一量,則其他一量亦同比而變,其變化恆能以方程式如$y=ax$者表之,其中a爲某常量,故凡在如是之情形中其顯示變化之圖形爲一經過原點之直線,故欲描寫此圖形,僅須知圖形上是他一點之位置.如論工作及時間,距離及時間(當速度不變時),物品之質量及原價已知利率之本金及單利之題,完全可用經過原點之直線圖形描寫之.

例題 1. 上午八時,A由P騎馬赴Q,其距離爲48哩.同時B由Q出發往遇A.設A每小時之騎速爲8哩而於每小時之末休息半小時,其時B之走速爲每小時4哩,用圖形求

(i) 二人相遇之時間及地方;

(ii) A, B二人在上午11時之距離;

(iii) 二人相距14哩之時間.

在次頁之圖24中,選P之位置爲原點,令時間自上午8時起以水平線量之(1吋代1小時),令距離以垂直線量之(1吋代20哩).

1小時內A騎行8哩,故點D(1, 8)記出其在上午9時之位置.在其次半小時內,A未向Q行去,故,圖形

之對應部分爲DE. A前後之行動現在可以折線$PDEFGHKX$完成之.

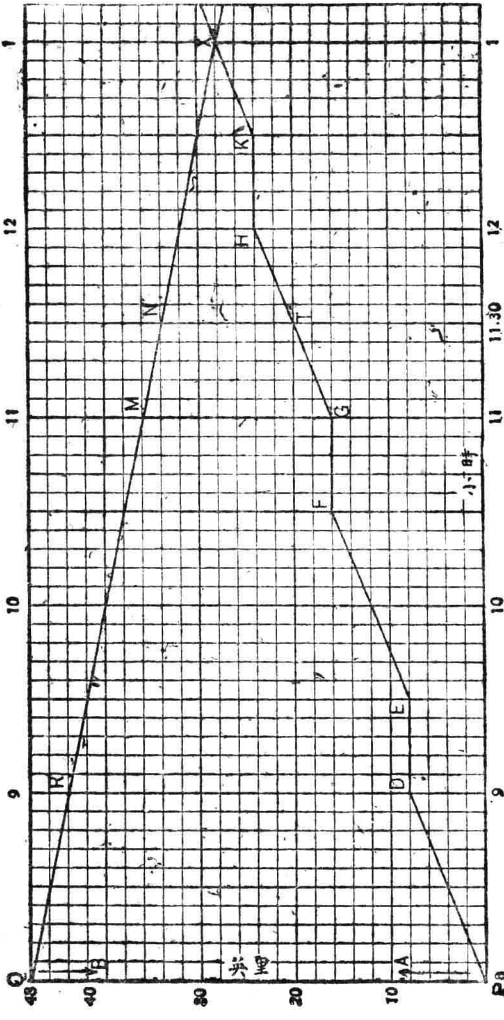

圖 24

在垂直軸上記 PQ 代 48 哩而於經過 Q 之水平線上記時間. 上午 9 時, B 已向 P 方走去 4 哩. 向下量一距離代表 4 哩, 卽得點 R, 而所得之 QR 爲 B 之行程之圖形. 此圖形割 A 之圖形於 X, 故二人相遇之點爲 X, 此距 P 爲 28 哩, 時間爲下午 1 時.

A 與 B 在任何時間之距離可以兩縱坐標之差表之. 由是在上午 11 時, 二人之距離爲 MG, 此代 20 哩.

最後, NT 代 14 哩; 由是 A 與 B 在上午 11 時 30 分之距離爲 14 哩.

例題 2. A, B, C 三人作 300 碼之賽跑. A 與 C 由出發線起跑, 而 A 以 40 秒畢之, 勝 C 60 碼. B 在 12 碼處出發, 勝 A 4 秒. 假定三人之速率不變, 當 B 越終點時, 試用圖形求各賽者之關係位置. 又求當 A 已跑畢全跑道四分之三時, B 在 A 前幾碼.

如圖 25, 令時間水平量(0.5 吋代 10 秒), 而距離垂直量之(1 吋代 60 碼), O 爲 A 與 C 之出發點; 取 OP 等於 0.2 吋在垂直軸上以代 12 碼, 則 P 爲 B 之出發點.

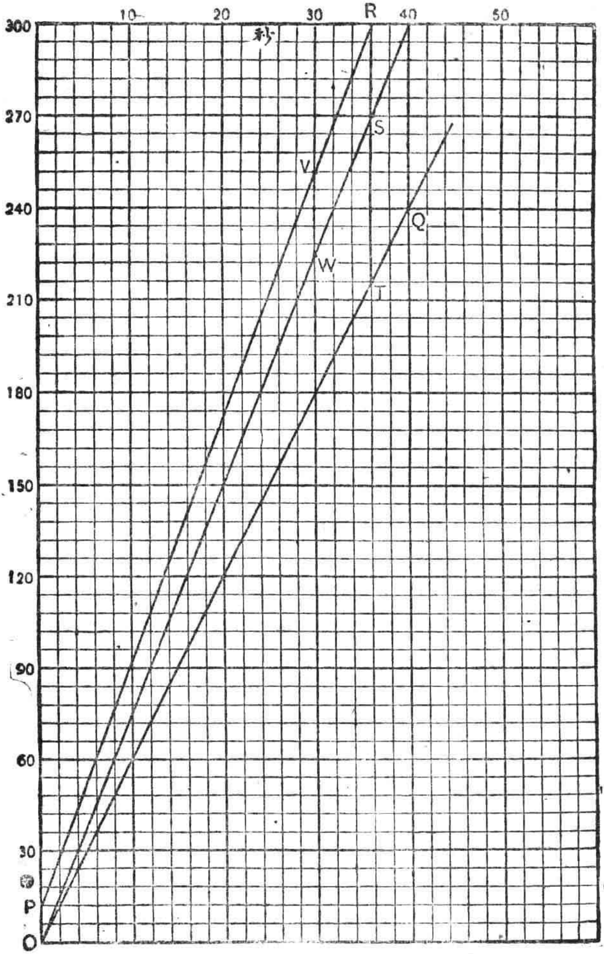

圖 25

A之圖形可以聯結O與記出40秒之一點描寫之.由此點向下至Q量1吋之垂直距離,則既1吋代60

碼,則當A在終點時Q點爲C之位置,而OQ爲C之圖形.

沿時間軸上取1.8吋等於R,代36秒,則PR爲B之圖形.

畫一經R之垂直線,而各遇A,C之圖形於S,T. 則當B越終點時,S及T記明A及C之位置.

由視察RS及ST各代30碼及54碼.

由是B在A前30碼,而A在C前54碼.

再,A既於30秒中跑去全道四分之三,則在30秒後A,B圖形對應縱坐標之差卽爲A與B之距離.量之得$VW=0.45$吋,此卽代27碼.

學者應試自繪一圖形,其尺寸爲圖25之二倍.

667. 當一變量y半爲常量半爲與另一變量x成比例時,則x與y間之代數關係爲成$y=ax+b$之形,其中a與b皆爲常量. 故其對應之圖形爲一直線,且旣已知二點之位置後,一直線可完全測定,故凡在俱能以直線圖形說明之問題中,僅須已知數給每一圖形以二變量之二對獨立聯立值已足.

此類較易之題,早於習題XLIX g給之.現更示一二題.

例題 1. 某商號內,職員之待遇,第一年為最低俸給,而此更隨固定之花紅逐年增加;最低俸給及花紅因各部而異. A 於第10年得1000圓,而於第19年得1450圓. B 服務於另一部,第5年得1050圓而於第13年得1250圓. 繪圖形以示二人在不同年數之俸給. 問在何年二人可獲相等之俸給? 又求 A 於何年可得與 B 於第21年所得者同一之薪俸.

圖26中,令每一水平格子代1年;而令俸給垂直量之,以1000起首,1格代10圓.

設 x 年末之俸給以 y 圓表之,則顯在每一情形中,有一關係形 $y=ax+b$, 其中 a 及 b 皆為常量. 由是時間與俸給之變化可以直線圖形描寫之.

第一年既無花紅,故當 $y=1000$ 時, $x=9$, 當 $y=1450$ 時, $x=18$. 由是 P 及 Q 二點測定矣,又聯結二點卽得 A 俸之圖形,同樣, B 俸之圖形,可聯結 $P'(4, 1050)$ 及 $Q'(12, 1250)$ 以得之.

此二直線於 L 處有同一之縱坐標及橫坐標,此處 $x=16$, $y=1350$. 由是 A 與 B 已服務16年後,卽在第17年,二人可得同一之俸給. 又在第20年末 B 之俸給

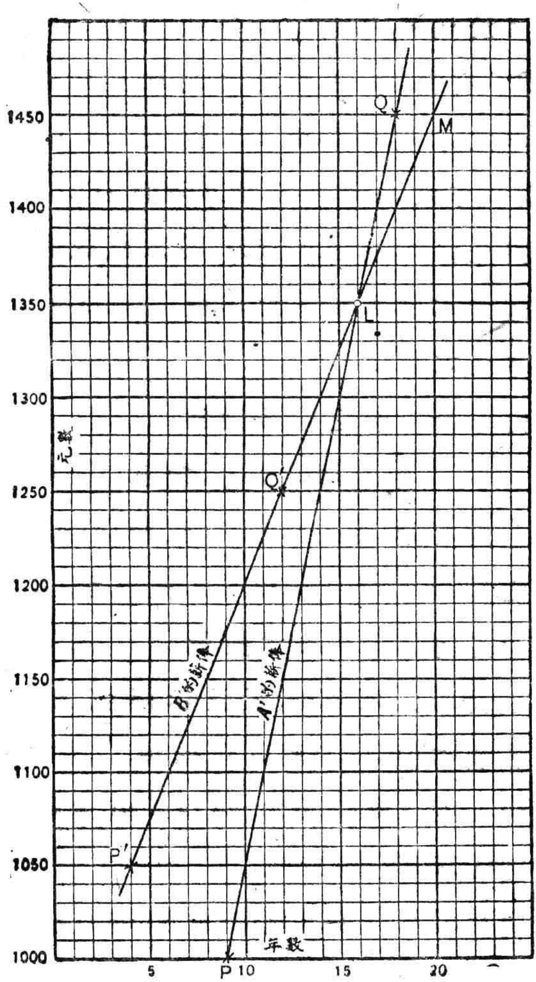

圖 26

可以M之縱坐標表之,此與第18年後代A俸之Q之縱坐標同.

由是A於第19年之俸給等於B於第21年之俸給.

例題2. 有兩款,以不同之利率生單利.一款經6年及15年之本利和各爲1300圓及1750圓. 第二款經5年及20年之本利和各爲1650圓及2100圓. 作圖形使記出任何年數之本利和,並求兩款之本金與所生之利達到本利和相等之年數. 又於圖形上記出每一款本金之原值.

凡任何年數單利之總銀數爲

本利和=本金+利息

其中本金爲常量,而利息因年數而變,因此本利和與時間之變化可用一直線圖形描寫之,其中取x表年數,而y表對應本利和之圓數.

此處,因圖形大而不便,現僅示解法之步驟,此與上題之各項相似.學者應試自繪圖.

水平量時間(1吋等於10年),而垂直量本利和(1吋等於200圓),以1300圓起首.

第一圖形爲聯結$L(6,1300)$及$M(15,1750)$之直線.第二圖形爲聯結$L'(5,1650)$及$M'(20,2100)$之直線.在每一直線中,任何點之縱坐標即對應橫坐標上本利和之年數.

又 LM 及 $L'M'$ 交於 $x=25$, $y=450$ 之點 P, 由是每宗本金及其單利在25年後之本利和同爲2250圓.

當 $x=0$ 時, 則無利息; 由是本金可於 y 軸上二圖形之交點所註之二值以得之. 此二值爲1000圓及1500圓.

習題 XLIX. h.

1. A 於正午以每小時6哩之速度出發, B 於下午1.30以每小時8哩之速度乘馬追之. 問何時 B 可追及 A? 又求

(i) 當 A 在 B 前5哩處之時間;

(ii) 當 A 在 B 後3哩處之時間.

[垂直線上取1吋代1小時, 水平線上取1吋代10哩.]

2. 沿 OX(1吋代1小時)量時間, 沿 OY(1吋代10哩)量距離, 如何作直線證明

(i) 以每小時12哩之速度由 O 赴 Y 之距離;

(ii) 以每小時9哩之速度由 Y 赴 O 之距離.

設上述爲二人於正午各由相距60哩之兩地出發之速率, 試由圖形求二人第一次互距18哩之時間. 又求其相會之時間.

註. 欲得 $y=200$ 之結果, 須以 y 軸繼續向下儘量顯示縱坐標.

3. 二自由車賽者從相距95哩之兩地出發相會. A於上午8時以每小時10哩之速度動身, B於上午9.30時以每小時15哩之速度動身. 試用圖形求二人相會之時間及地方, 並求二人相距$37\frac{1}{2}$哩之時間.

4. A, B二人同時由紐約起程往弗爾維, A步行之速為每小時4哩, B騎行之速為每小時9哩. B經4小時而至弗爾維, 隨卽騎返紐約. 休息2小時後, 復以同一之速度再往弗爾維. 同時A已休息$6\frac{1}{4}$小時, 問B離紐約若干遠可追及A?

5. 一列車, 於下午2.33時自紐約以每小時35哩之速度駛往海德公園, 兩地之距離為80哩, 問此車於離紐約若干遠及何時可遇另一於下午1.45時自海德公園開出之列車, 其速率為每小時25哩?

又求何時兩車相距24哩.

6. A, B, C三人各以每小時5,6,4哩之速度從支加哥出發競走至亞洛拉, C較A先走3分鐘而B較A慢走7分鐘. 試繪圖形證明(i) A追及C之時間及地方; (ii) B追及A之時間及地方; (iii)在C已走去45分鐘後, 其與另二人之位置關係.

[水平線上取1吋代10分鐘,垂直線上取1吋代1哩.]

7. X, Y 爲相距35哩之二鎮. A 於下午8.30時以每小時4哩之速度由 X 出發步行至 Y; 走去8哩後,休息半小時,再乘馬以每小時10哩之速度完成其路程. B 於上午9.48時以每小時3哩之速度由 Y 步行至 X. 問 A, B 何時何地相遇. 又求何時二人相距 $6\frac{1}{2}$ 哩.

8. A, B, C 三人賽跑,已知 A 跑120碼可勝 B 20碼, B 跑50碼可勝 C 10碼. 假定三人之速度不變,試用圖形求 A 跑120碼時讓 C 先跑幾碼始二人可同時抵終點. 設 A, B, C 同時起跑問 B 跑80碼時, A, C 在何處.

9. A, B, C 三人作200碼之賽跑, A 讓 B 先跑8碼而 C 在 A 起脚後數秒鐘始跑出. A 於25秒鐘內跑畢,勝 C 40碼. 已知 B 較 A 早到1秒,且 B 跑15秒時在 C 前48碼. 試用圖形求 C 較 A 慢跑若干碼. 又由圖形證明若三人同時同地出發,則此賽結果並無軒輊.

[取1吋等於40碼,又1吋等於10秒.]

10. 一善駕自由車者,擬作75哩之旅行,起初每小時行9哩,後變其速度爲每小時15哩,而於7小時中完畢其程. 問此人何時改變其速度?

11. A, B 二人各由相距60哩之二鎮 X, Y 乘馬相會, A 於下午1時動身, 而 B 遲36分鐘動身. 設二人於下午4時相遇而 A 於下午6時抵 Y, 試求 B 至 X 之時間. 又求二人相距22哩之時間. 當 A 在 X 及 Y 間之半途, 問 B 在何處?

12. X, Y 二鎮之距爲119哩, 設余於正午由 X 乘自由車出發. 第一小時行23哩, 以後每小時減速3哩, 試用圖形求余行若干小時可抵 Y, 又求余抵一距 Y 48哩之鎮時之近似時間.

13. A 於上午8時以每小時20哩之速度駕汽車出發, 一小時半後, B 於同地以每小時10哩之速度乘自由車追之. 經36哩後, A 休息1時24分. 而以每小時9哩之速駕車返. 試用圖形求 A 遇 B 之時間及地方, 又求(i)二人相隔21哩之時間. (ii)當 A 已返至其起點時 B 已行若干遠.

14. 余逆流划舟, 一小時行 $1\frac{1}{2}$ 哩. 抵某點後, 隨即划返. 停於離原來出發點二哩之處. 設全部划舟時間爲2小時10分, 而余於靜水中之等速爲每小時 $4\frac{1}{2}$ 哩, 試用圖形求余順流行若干遠.

[水行取一吋之1.2代1小時而垂直取1吋代2哩.]

15. 一火車於下午3時離亞彭納而於下午6時抵紐約;第二次火車於下午1.30時離紐約而於下午6時至亞彭納,假定二車速率不變.問二車何時相遇,用圖形證明其時間與紐約及亞彭納間之距離無關.

16. 專車一列,於上午7.40時由赫德遜動身而於上午11.40時抵紐約.上午9時另一快車自紐約開出而於上午11.40時抵赫德遜,設二車速度不變,求二車相遇之時間,又如題15證明其時間與二地之距離無關.

17. 某童由家中以3秒10碼之速度步行至學校,早到20秒鐘.翌日以17秒40碼之速度步行到校,結果遲到半分鐘.試用圖形求其由家到校之距離,且證明此童若以7秒20碼之速度步行適能準時到校.

18. 一物體沿直線以變速前進,已知其任何一瞬間之速度爲此物體射出(以每秒呎量之)之速度常數減以每秒中每秒呎之減速常數.經4秒鐘後,其速度爲320,而13秒鐘後爲140.試作一圖形證明此物體在任何時間前進時之速度.

第二物體同時在同一條件下射出,經5秒後,其速

度爲450, 15秒後, 減至150. 用圖形證明二物體之前進同時停止. 又求第二物體於何時之速較第一物體每秒快100呎, 且由圖形測定二物體射出之速度.

19. 某考試中, 拉丁文考卷之最高及最低分數各爲153及51. 現擬變其分數, 使最大分數(120)給予第一名考生, 最低分數(30)給予最末一名考生. 法將所有分數皆化成某比, 後皆以同一之數加減之. 又希臘文考卷之最高及最低分數各爲161及56; 經同一之處理後, 各變爲100及40. 試作數圖形記出所有已變之分數, 並求拉丁文得102, 希臘文得126之學生應給予最後之分數.

又證明一考生於化分數之前及於化分數之後二課一次可得相等之分數. 問在此情形中, 其原來及已變之分數如何?

雜圖形

1. 作下列二圖形

$$2y=3(x-4), \qquad 3y=1-5x,$$

在每一圖形上至少須作五點, 求其所遇之點之坐標.

2. 試繪下列二圖形

$$y=5-3x,\qquad y=\frac{1}{3}(x+5),$$

並求其交點之坐標.

3. 求下列二圖形在軸上之交點

$$\text{(i)}\ 15x+20y=6;\qquad \text{(ii)}\ 12x+21y=14.$$

(i)中取1吋作單位,而(ii)中取十分之六吋爲單位.在此二情形中,爲何取此單位較便,試言其故.

4. 用圖形解 $y=10x+8,\quad 7x+y=25.$

[x 用1吋作單位, y 用十分之一吋作單位.]

5. 由 $11x+6$ 之圖形,當 $x=1.8$ 時,試求其值.又求可使此式等於20之 x 值.

6. 用題4之單位,繪函數 $\frac{36-5x}{3}$ 之圖形. 由此圖形,當 $x=1.8$ 時,求此函數之值;又求 x 須爲何值始此函數等於8.

7. 試證下列方程式所作之直線遇於一點,求其坐標

$$9y=5x+65,\quad 5x+2y+10=0,\quad x+3y=11.$$

8. 試作下列三方程式所給之邊之三角形,並求其頂點之坐標

$$3y-x=9,\qquad x+7y=11,\qquad 3x+y=13.$$

9. 用圖形證明可適合下方程式之x及y之值

$$5x=2y-18, \quad 5y=6-7x,$$

又可適合方程式$x+y=2$.

10. 試繪(i) $y=x^2$, (ii) $y=8x^2$二圖形.

(i) 中取0.4″爲x之單位, 0.2″爲y之單位.

(ii) 中取1″爲x之單位, 0.1″爲y之單位.

11. 如題10(ii)同一之尺寸上, 作$y=16x^2$之圖形, 證明此圖形亦可由題10(ii)之圖形推出.

12. 試作$y=x^2$之圖形, 二軸上各取1吋爲單位, 並用下列x之值:

$$-0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4.$$

13. 作$x=y^2$之圖形, 從$y=0$至5, 再求7及3.6之平方根.

[取0.2″爲x之單位, 1″爲y之單位.]

14. 作$y=5+x-x^2$之圖形, 以x之值從-2至$+3$, 且由此圖求方程式$5+x-x^2=0$之二根之近似值.

[取1″爲x之單位, 0.2″爲y之單位.]

15. 繪下列三圖形:

(i) $5x+6y=60$, (ii) $6y-x=24$, (iii) $2x-y=7$;

並證明此三直線遇於一點.

16. 用圖形解下列方程式:

(i) $x^2+y^2=53$,
$y-x=5$;

(ii) $x^2+y^2=100$,
$x+y=14$;

(iii) $x^2+y^2=34$,
$2x+y=11$;

(iv) $x^2+y^2=36$,
$4x+3y=12$.

[給小數一位之近似根.]

17. 用圖形解方程式 $3+6x=x^2$, 且求 $3+6x-x^2$ 式之極小值.

18. 試繪 x^2 及 $3x+1$ 二圖形. 用此二圖形求

$x^2-3x-1=0$ 之二根之近似值.

19. 設 24 人能於規定時間內刈田 29 畝, 試用圖形約略求 15 人, 33 人及 42 人於同一時間內各能刈之田數.

20. 有某考試, 其所得分數最高者爲 136, 現擬提高最大分數爲 200. 試用圖形證明如何爲之, 且將所得 61 分及 49 分之二學生記出其最後獲得分數之最近整數.

21. 試繪一圖形, 使 25 與 36 間所有之數至小數三位之平方根盡在此圖形中.

[作 $y=x^2$ 之圖形, 以點 (5, 25) 起首, 用 10″ 及 0.5″ 各爲 x 及 y 之單位.]

22. 余欲用一簡便之法求任何在10以內之數之0.866. 證實以下之構造. 聯結原點於點P, 其坐標爲10及8.66 (取1吋爲單位); 則OP上任何點之縱坐標爲其對應橫坐標之0.866. 由圖上試記出

$$3\text{之}0.866,\ 6.5\text{之}0.866,\ 4.8\text{之}0.866,\ \text{及}5\text{之}\frac{1}{0.866}.$$

23. A於正午由紐約以每小時8哩之速起程; 二小時後, B以每小時12哩之速騎馬動身. 試用圖形求何時及離紐約若干遠B可追及A, 何時A. B之距爲8哩? 設C在B後於下午3時更以每小時15哩之速騎馬出發, 試由圖形求

(i) A, B, C三人於下午5時之距離;

(ii) C在B後8哩時之時間.

24. O, Y爲相距45哩之二鎮, 設A於正午以每小時6哩之速由Y步行至O, 而B亦同時以每小時4哩之速由O步行至Y. 試用圖形求其相遇之時間及地方.

又由圖形記出

(i) 二人相距15哩之時間;

(ii) 於下午6.15時B離Y之距離.

25. 上午8時A由P騎馬至Q,二處之距爲48哩.同時B由Q出發往遇A.設A之騎速每小時爲8哩,且於每小時之末休息半小時,而B之步速每小時始終爲4哩,用圖形證明

(i) 相遇之時間及地方;

(ii) A, B在上午11時之距離;

(iii) 何時二人相距14哩.

26. 下表爲某國之人口統計,其中P爲各該年歲首以百萬爲單位之人口數.

年份	1830	1835	1840	1845	1850	1855	1860
P	20	22	24.5	28	31	36	41

令t爲1830年後之年份,垂直作P之值,水平作t之值,並以經過所作諸點中之單曲線證明P與t之關係.求1847年及1858年歲首之人口數.

27. 某職員之月薪每年以固定之數增加.服務6年後,其月薪爲1280圓,經15年後增至2000圓.作一圖形以示其任何年數之月薪,且由圖形測定(i)其起首之月薪,(ii)服務第21年時應得之月薪.

28. 試於同一之圖上,繪$y=x^2$及$2y=x+3$二圖形,

且推出方程式$2x^2-x-3=0$之二根.

29. 取1吋爲單位,作$y=x^3-3x$之圖形,取下列x之值:

$0, \pm .2, \pm .4, \pm .6, \pm .8, \pm 1, \pm 1.2, \pm 1.4, \pm 1.6, \pm 1.8, \pm 2.$

求其轉向點,並在所設之極限內,求其極大或極小縱坐標之值.

30. 由題29之圖形,求$x^3-3x=0$之二根至小數二位.

31. 用圖形解下列三對方程式

(i) $x+y=15,\quad xy=36;$ (ii) $x-y=3,\quad xy=18;$ (iii) $x^2+y^2=13,\quad xy=6.$

32. 一橡皮帶上,懸有重量不同之重物,每一重物懸上後,量得其長度如下表.試作一圖形證明此帶之長度與重物之關係.

重物之磅數	10	12	17	21	23	25
長度之糎數	36.4	37.7	40.5	43.0	44.3	45.4

此帶於未懸重物時,其長度爲若干?

33. 每月第一日之平均温度,50年內之平均數如下列之值:

一月一日, 37°; 五月一日, 50°; 九日一日, 59°;

二月一日, 38°; 六月一日, 57°; 十月一日, 54°;

三月一日, 40°; 七月一日, 62°; 十一月一日, 46°;

四月一日, 45°; 八月一日, 62°; 十二月一日, 41°.

用一平滑之曲線抽寫此變化.

[不同月份長短之差別可忽而不計.]

34. 某製造商擬定製各種尺寸之某種物品;但此商現在祇有五種尺寸,其價載於下表:

長度之吋數	20	27	33	45	54
價格之圓數	11	14.5	20	35	48.5

試繪一圖形證明其適中尺寸之適當價格,且求長度爲30吋及46吋之價格.

35. 旅行家數人,以每小時3哩之速度出發赴距離3哩之車站.走去半哩後,其中一人因事須折返出發點,問此人現在步行之速率須爲若干始可與其他數人同時抵站?

36. 一汽車,於赴白列斯脫之途中追出一自由車,時正上午9時;此汽車後於10.30時抵白列斯脫,

停1小時後,隨即駛歸,復於正午遇此自由車.假定二車之速率不變,求此自由車何時可抵白列斯脫,又比較汽車自由車之速率.

附　　錄

I. 數學名詞英漢對照

A

abbreviation, 略記
Abel's Theorem, 亞爾培定理
abridged, 簡短的
abscissa, 橫坐標, 橫線
absolute, 絕對的
absolute term, 絕對項
absolute value, 絕對值
abstract quantity, 不名量
acute angle, 銳角
accuracy, 正確
add, 加
addition, 加法
additive, 加的
adjacent, 鄰的
affected quadratic equation, 雜二次方程式
aggregation, 合計
algebra, 代數學
algebra difference, 代數差
algebra sum, 代數和
algebraic common divisor, 代數公除數
alphabet, 字母
alter, 改變
alternate, 相間
alternation, 交換法
ambiguity, 兩意
amount, 本利和
angle, 角
annexed diagram, 附圖
annuity, 年金
annuity at compound interest, 複利年金
annuity at simple interest, 單利年金
antecedent, 前項, 前率
any, 任何
approximate value, 近似值
approximation, 近似法
area, 面積
arithmetic, 算術
arithmetical algebra, 算術代數
arithmetic mean, 算術中項, 等差中項
arithmetical progression, 算術級數等差級數
article, 款
arrangement, 排列
ascending power, 昇冪序
assigned, 指定的
associate, 配合
associative law, 結合定律
assumption, 假設
asymptote, 漸近線
auxiliary series, 補助級數
axiom, 公理
axis of abscissa, 橫軸
axis of ordinate, 縱軸

B

base, 底
binomial coefficient, 二項係數
binomial expansion, 二項展開式
binomial expression, 二項式

binomial series, 二項級數
binomial theorem, 二項定理
biquadratic equation, 四次方程式
bisect, 等分為二
bracket, 括弧
branch, 枝
Briggs, 白列克氏

C

calculus, 微積分
calculation, 計算
concel, 相消
capacity, 容量
capital, 資本
Cardan's Method, 卡鄧氏法
cardinal number, 基數
case, 情形, 實例
chance, 適遇法
change, 變化
chapter, 章
character, 性質
characteristic, 指標, 首數
circle, 圓
circumference, 圓周
coefficient, 係數
coincident, 重合
collecting terms, 集項
cologarithm, 餘對數
column, 列
combine, 聯合
combination, 組合
commensurable quantity, 可通約量
commensurable root, 可通約根
common denominator, 公分母
common difference, 公差
common factor, 公因數
common logarithm, 常用對數
common multiple, 公倍數
common ratio, 公比
common root, 公根
commutative law, 交換定律
complete equation, 完全方程式
complete quotient, 完全商
complex fraction, 繁分數
complex number, 複虛數
complex quantity, 複虛量
composition, 比較法
compound expression, 複式
compound interest, 複利
compound proportion, 複比例
compound ratio, 複比
compound surd, 複不盡根
condition, 條件
conditional equation, 條件方程式
conjugate, 共軛
conjugate quadratic surds, 共軛二次不盡根
consecutive number, 連續數
consequent, 後項
consider, 討論
consistent, 一致
constant, 常量
constituent, 成分
construction, 構圖
continued fraction, 連分數
continued product, 連乘積
continued proportion, 連比例
continued ratio, 連比
convergency, 收歛
convergent of a continued fraction, 連分數之近數
convergent series, 收歛級數
converse, 反
co-ordinates, 坐標
corollary, 推論
correction, 校正數
corresponding, 相當, 對應
count, 計算
cube, 立方
cube root, 立方根
cube root of unity, 一之立方根
cubic equation, 三次方程式
cubic expression, 三次式
cubic surd, 三次不盡根

curve, 曲線
cut, 割
cylic order, 輪換次序
cypher, 零

D

data, 已知件
decimal, 小數
deduction, 演繹法
definition, 定義
degree, 次, 度
decreasing geometrical progression, 降級等比級數
denominate number, 名數
denominator, 分母
dependent variable, 因變數
depression of equation, 方程式次數之減低法
derived function, 誘導函數
Descartes' Rule of signs, 狄卡德氏符號法則
descending power, 降冪序
detached coefficient, 分離係數
determinant, 行列式
determine, 決定, 測定
development, 展開
diagonal, 對角線
diagram, 圖
difference, 差, 較
differential method, 差法
digit, 數字
dimension, 次元, 度
diminish, 減
discuss, 討論
dissimilar, 不相似
distributing product, 配積法
distributive law, 分配定律
divergency, 發散
divergent series, 發散級數
divide, 除, 分
dividend, 被除數
division, 除法, 格子
divisor, 除數
double sign, 複符號
duplicate ratio, 二乘比

E

each, 每個, 各個
eight, 八
element, 元素, 基線
eliminate, 消去
elimination by addition and subtraction, 加減消去法
elimination by substitution, 代入消去法
elimination by comparison, 比較消去法
entire surd, 完全不盡根
equal, 相等
equality, 等式
equal coefficient, 等係數
equal roots, 等根
equals, 等量
equate, 使相等
equation, 方程式
equation of higher degree, 高次方程式
equidistant, 等距離
equimultiple, 等倍數
equivalent, 等值
erase, 消去
error, 誤差
Euler's Method, 尤拉氏法
even, 偶數
evolution, 開方法
exact cube, 完全立方
exact divisor, 約數
exactly divisible, 整除, 除盡
exact ratio, 正確之比
exact square, 完全立方
example, 例題
exceed, 超過
exercise, 習題
expand, 展開

expansion, 展開式
explanation, 解釋
exponent, 指數
exponential equation, 指數方程式
exponential series, 指數級數
expression, 式
extention 推廣
extraction of cube root, 開立方法
extraction of square root, 開平方法
extreme, 外項

F

factor, 因數
factorial, 階乘, 逐乘
factor theorem, 因數定理
failing, 失敗
Ferrari, 佛拉利
fifth, 第五
fifth root, 五次根
figure, 數字, 圖形
fill, 插入
final, 末一
find, 求
finite dimension, 有限次元
finite series, 有限級數
first, 第一
first degree, 一次
first term, 首項, 第一項
five, 五
form, 形, 式
formation of equation, 方程式之組成法
formula, 公式
fourth, 第四
fourth, 四次根
fraction, 分數
fractional coefficient, 分數係數
fractional index, 分數指數
fractional root, 分數根
function, 函數
function of first degree, 一次函數
fundamental law, 基本定律

G

general axiom, 普通公理
general form, 一般之形
generality, 通性
general solution, 普通解答
general term, 公項, 普通項
generating function, 母函數
geometrical mean, 等比中項, 幾何中項
geometrical progression, 等比級數, 幾何級數
geometry, 幾何學
given, 已知的, 所設的
graph, 圖形
graphical representation of function, 函數之圖示法
greater than, 大於
greatest coefficient, 最大係數
greatest common factor, 最大公因數
greatest common measure, 最大公約數
greatest term, 最大項
greatest value, 最大值
group, 物羣, 集合

H

half, 一半
happening, 成功, 發生
harmonical mean, 調和中項
harmonical progression, 調和級數
height, 高度
higher algebra, 高等代數學
higher roots, 高次根
highest common factor, 最高公因數
highest common measure, 最高公約數
hint, 暗示
homogeneous, 同次
horizontal line, 水平線
Horner's Method of approximation, 何諾氏近似法

Horner's Method of Synthetic division, 何諾氏綜合除法
hundred, 百
hundreds' place, 百位
hyperbola, 雙曲線
hypothesis, 假設

I

identity, 恆等式
imaginary quantity, 虛量
imaginary root, 虛根
imaginary unit, 虛單位
impossible problem, 不能問題
improper fraction, 假分數
inadmissible, 不適用
incommensurable quantity, 不可通約量
incommensurable root, 不可通約根
incomplete equation, 不完全方程式
increase, 增加, 增大
indefinitely large, 無窮大
indefinitely small, 無窮小
independent variable, 自變數
indeterminate coefficient, 不定係數
indeterminate equation, 不定方程式
indeterminate form, 不定形
indeterminate problem, 不定問題
index, 指數
index law, 指數定律
induction, 歸納法
inequality, 不等式
infinite dimension, 無限次元
infinite series, 無限級數
infinity, 無限大
inspection, 視察法
integer, 整數
integral calculus, 積分學
integral expression, 整式
interchange, 互換
interest, 利息
intermediate, 中間的
interpolation, 插入法
intersection, 交點
inverse operation, 逆算
inverse proportion, 反比例
inverse ratio, 反比
inversion, 倒置法
involution, 自乘法
irrational equation, 無理方程式
irrational expression, 無理式
irrational quantity, 無理量
irrational root, 無理根

J

join, 聯結

K

known number, 已知數
known quantity, 已知量

L

last term, 末項
law, 定律
law of formation, 組成定律
least, 最小數
least common denominator, 最小公分母
least common multiple, 最小公倍數
length, 長度
less than, 小於
letter, 文字
like power, 同次冪
like term, 同類項
limit, 極限
limiting value, 極限值
line, 直線
linear equation, 直線方程式
literal coefficient, 文字係數
literal equation, 文字方程式
logarithm, 對數
logarithm series, 對數級數
lower base, 下底

lowest common denominator, 最低公分母
lowest common multiple, 最低公倍數
lowest term, 最低項
location of the roots, 根之位置

M

magnitude, 大小, 量
mantissa, 假數
mathematical induction, 數學歸納法
mathematics, 數學
maximum, 極大
mean, 中項
measure, 量度
members of an equation, 方程式之節
method of difference, 差法
method of divisors, 除數之法
middle term, 中央之項
minimum, 極小
minor, 小行列式
minuend, 被減數
minus, 減
miscellaneous case, 雜例
mixed expression, 混合式
mixed surd, 混合不盡根
modulus, 對數率
monomial expression, 一項式
multinomial expression, 多項式
multiple, 倍數
multiplicand, 被乘數
multiplication, 乘法
multiplier, 乘數
multiply, 乘

N

Napier, 訥白爾氏
Napierian logarithm, 訥白爾對數
natural logarithm, 自然對數
naught, 零
necessary and sufficient condition, 必要且充足條件
negative, 負
negative index, 負指數
negative quantity, 負量
negative root, 負根
negative sign, 負號
neglect, 忽而不計
Newton's Method, 牛頓氏法
next, 次一
nine, 九
notation, 記數法
notion, 概念
nth power, n 次冪
nth root, n 次根
nth root of unity, 一之 n 次根
number, 數
numerator, 分子
numerical coefficient, 數字係數
numerical equation, 數字方程式
numerical value, 數值

O

obtain, 求得
odd, 奇數
odds, 優勢率
one, 一
operation, 運算
opposite, 相反
order, 次
origin, 原點
original equation, 原方程式
oscillating series, 搖動級數

P

parabola, 拋物線
parallel, 平行
part, 部份
partial fraction, 部份分數
partial product, 部份積
partial quotient, 部份商
particular, 指定的, 特別的
perfect cube, 完全立方

perfect square, 完全平方
periodic continued fraction, 週期連分數
permutation, 順列
perpendicular, 垂直
perpetual annuity, 永久年金
piles of shot and shells, 積彈
place, 位
plane, 平面
plus, 加
point, 點
polynomial, 多項式
position, 位置
positive, 正
positive integer, 正整數
positive quantity, 正量
positive root, 正根
positive sign, 正號
power, 乘冪, 冪
principal, 資本
principal diagonal, 主對角線
principle, 原則
probability, 或許率
problem, 問題
procedure, 程序
process, 演算
product, 積
progression, 級數
proof, 證明
proper fraction, 眞分數
property, 特性
proportion, 比例
proportional, 比例量
proposition, 命題
pure quadratic equation, 純二次方程式
pyramid, 角錐形

Q

quadrant, 象限
quadratic equation, 二次方程式
quadratic form, 二次形
quadratic surd, 二次不盡根
quantity, 量
quartic, 四次方程式
quotient, 商

R

radical, 根數
radical sign, 根號
radius, 半徑
rate of interest, 利率
ratio, 比
rational expression, 有理式
rational fraction, 有理分數
rational integral expression, 有理整式
rationalization, 有理化
rationalizing factor, 有理化因數
rational quantity, 有理量
ratio of greater inequality, 優比
ratio of less inequality, 劣比
real quantity, 實量
rearrangement, 整列, 重列
reciprocal equation, 倒數方程式
reciprocals, 倒數
rectangle, 矩形
recurring decimal, 循環小數
recurring series, 循環級數
reduce, 通約, 化約
relation between roots and coefficient, 根與係數之關係
remainder, 剩餘
remainder theorem, 剩餘定理
remove, 消去, 棄去
replace, 代, 換去
represent, 描寫, 代
resolution, 分解法
respective, 各個的
restriction, 限制
result, 結果
reversion of series, 級數之轉換
right angle, 直角
root, 根

rule, 法則
rule of sign, 符號法則

S

satisfy, 滿足, 適合
scale, 尺寸, 比例
scale of notation, 記數法
scale of relation, 級數率
second, 第二, 秒
secondary diagonal, 副對角線
second power, 二次冪
second root, 二次根
sense, 向
series, 級數
seven, 七
side of an equation, 方程式之邊
sign, 符號
significant figure, 有效數字
sign of continuation, 連續符號
sign of deduction, 推論符號
sign of equality, 等號
sign of inequality, 不等號
sign of identity, 恆等號
similar, 相似
simple equation, 一次方程式
simple expression, 一次式
simple interest, 單利
simple proportion, 單比例
simple ratio, 單比
simplest form, 最簡式
simple surd, 單不盡根
simplification, 約簡
simultaneous equation, 聯立方程式
single fraction, 單分數
single term, 單項
six, 六
small, 小
solution, 解法, 解答
square, 平方
square root, 平方根
standard form, 標準形
statement, 陳述
Sturm function, 史頓函數
Sturm's Theorem and Method, 史頓定理及其方法
style, 體式
subduplicate ratio, 平方根比
substitution, 代入法
subtraction, 減法
subtractive, 減的
successive convergents, 連續近數
successive orders of difference, 差之連續次
sufficient condition, 充足條件
suffix, 添數
sum, 和
summation of series, 級數總和法
supposition, 假定
surd, 不盡根
symbol, 記號
symbolical algebra, 記號代數
symmetrical equation, 對稱方程式
symmetrical function, 對稱函數
symmetry, 對稱式
synthetic division, 綜合除法

T

table, 表
table of logarithm, 對數表
tabular difference, 表差
tabular logarithm, 表對數
ten, 十
tens' place, 十位
term, 項
terminating continued fraction, 有限連分數
test, 試驗
theorem, 定理
theorem of equations, 方程式論
theorem of indices, 指數論
third, 第三
third power, 三次冪
third root, 三次根
thousand, 千

thousands' place, 千位
three, 三
total, 合計, 總數
time, 倍
to vary, 變
to vary directly, 正變
to vary inversely, 反變
to vary jointly, 合變
transformation, 變換
transformation of equations, 方程式之變形
transposition, 移項
trial divisor, 試除數
triangle, 三角形
trinomial expression, 三項式
triplicate ratio, 三乘比
true, 合理
twice, 二倍
two, 二

U

unalter, 不變
unchanged, 不變
undetermined coefficient, 未定係數
unequal, 不等
unit, 單位
units' place, 個位
unity, 一
unknown quantity, 未知量
unlike, 不同類
unlike surds, 不同類不盡根
unlike terms, 不同類項
unlimited, 無限
unreal, 不實
upper base, 上底

V

value, 値
vanishing fraction, 消失分數
variable, 變數
variation, 變數法
verification, 驗證
vertical line, 垂直線
vertice, 頂點
vinculum, 括線

W

whole, 完全
whole number, 完全數

Y

yard, 碼
year, 年

Z

zero, 零
zero coefficient, 零係數
zero factor, 零因數

II. 數學所用之希臘文字

Α	α	Alpha.	Ν	ν	Nu.
Β	β	Beta.	Ξ	ξ	Xi.
Γ	γ	Gamma.	Ο	ο	Omikron.
Δ	δ	Delta.	Π	π	Pi.
Ε	ε	Epsilon.	Ρ	ρ	Rho.
Ζ	ζ	Zeta.	Σ	σ	Sigma.
Η	η	Eta.	Τ	τ	Tau.
Θ	θ	Theta.	Υ	υ	Upsilon.
Ι	ι	Iota.	Φ	φ	Phi.
Κ	κ	Kapya.	Χ	χ	Chi.
Λ	λ	Lambda.	Ψ	ψ	Psi.
Μ	μ	Mu.	Ω	ω	Omega.