相加減之三面數其數係數中不見其常數之項

微積溯源卷五

英國華里司輯

英國 傅蘭雅 口譯
金匱 華蘅芳 筆述

論反流數

第九十九款 反流數者卽積分算學也此法專以任何函數之微分求其原函數之式

論流數之學者名其所求之函數爲反流數微分之家名其原函數爲微分式之積故名之曰積分術

第一百款 凡有任何函數之積恆能依公法求其微分但無一公法能還原而徑得其積惟有循其求微分之原路步步退回始可得之

若其求微分之法每步之迹俱爲明顯則從其原路退回固是甚易然往往有其原路之迹已滅而不易見或其所設之式非從求微分之法而徑得者則無迹可循非各設專法不能求之

第一百〇一款 凡微分式之欲求積分者可先用一號以記之其所用之號爲禾（卽積字之簡式也）

假如有 呋伕 欲求其積分則可先作 禾呋伕 以記之

第一百〇二款 前于第九款中已證明凡變數與常數相加減之函數其微係數中不見其常數之項

卽如 呋±呐 式之微分則其常數 呐 不見故凡以微分之式反求其積者必加減常數 呐 方爲全積其呐爲未定之常數初創此式之人名之曰改正數近時之人名之曰定常數其數及號之正負不能預定必從所設之題而定之

論獨變之函數

第一百〇三款 函數之第一種其微分之公式爲 呐伕 其 呋 爲獨變數 天 之任何函數其形可有數種

實函數之形有如

$$呷天^{寅}\bot叱天^{卯}\bot呐天^{巳}\bot\cdots\cdots=呅$$

者則爲整級數有如

$$\frac{呻天^{寅}\bot叱天^{卯}\bot呐天^{巳}\bot\cdots\cdots}{呷天^{寅}\bot叱天^{卯}\bot呐天^{巳}\bot\cdots\cdots}=\frac{咳}{呅}$$

者則爲級數之分數

虛函數之形如 $呅\ 咳^{\frac{卯}{寅}}$ 越函數之形如 函(呅訥呅) 及 函(呅三弦亥) ……

求實函數微分式之積分

第一百〇四款

實函數之最簡者，其形如 $甲天^{卯}$，其微分之式為 $卯甲天^{卯丅一}彳天$，所以可令 $寅＝卯丅一$，即 $卯＝寅丄一$，以求之。

設有微分式 $彳地＝甲天^{寅}彳天$，則

$$地＝禾甲天^{寅}彳天＝\frac{寅丄一}{甲}天^{寅丄一}丄呞$$

所以凡有獨項微分如 $甲天^{卯}彳天$ 者，欲求其積分，可將其變數之指數增一為新指數，乃以新指數與彳天相乘之數約之。

其末定之常數呞，可令其形為 $丅\frac{卯丄一}{甲乙^{卯丄一}}$，即得

$$禾甲天^{卯}彳天＝\frac{卯丄一}{甲(天^{卯丄一}丅乙^{卯丄一})}$$

若 $天＝乙$ 之時，其積能不見者，必有此形。

第一百〇五款　有一種特設之式，不能用上款之法求其積分。

如于 $甲天^{卯}彳天$ 之式中，令 $卯＝丅一$，則式變為

$$禾\frac{天}{甲彳天}＝禾甲天^{丅一}彳天＝\frac{〇}{甲(天^{〇}丅乙^{〇})}＝\frac{〇}{甲(一丅一)}＝\frac{〇}{〇}$$

從此式不能求得何數，故謂之絕積分。

然所謂絕者，乃其外貌耳，非真不可求也。如令 $卯丄一＝寅$，依第三十五款之理得

$$天^{寅}＝一丄(訥天)寅丄(訥天)^{二}\frac{一\cdot二}{寅^{二}}丄\cdots\cdots$$

$$乙^{寅}＝一丄(訥乙)寅丄(訥乙)^{二}\frac{一\cdot二}{寅^{二}}丄\cdots\cdots$$

$$天^{寅}丅乙^{寅}＝(訥天丅訥乙)寅丄[(訥天)^{二}丅(訥乙)^{二}]\frac{一\cdot二}{寅^{二}}丄\cdots\cdots$$

$$\frac{寅}{天^{寅}丅乙^{寅}}＝訥天丅訥乙丄[(訥天)^{二}丅(訥乙)^{二}]\frac{二}{寅}丄\cdots\cdots$$

則因 $卯丄一＝寅＝〇$，$卯＝丅一$，而

$$禾\frac{天}{甲彳天}＝甲[訥天丅訥乙]＝甲訥天丄呞$$

此款所用之式，與第二十款求對數微分之式同。

第一百〇六款

設有微分式 $彳地＝甲天^{寅}彳天丄乙天^{卯}彳天丄丙天^{巳}彳天$，則從第一百〇四款之法易知

$$地＝\frac{寅丄一}{甲天^{寅丄一}}丄\frac{卯丄一}{乙天^{卯丄一}}丄\frac{巳丄一}{丙天^{巳丄一}}丄呞$$

無論所設之式其項如何多，此例必為真。其式中之末項呞，以代諸項積分數中各常數之和。

總之，多項微分式，無論其各項之正負如何，依第十五

款之例

$彳(彳戊 \perp 彳亥 \top 人) = 彳戊 \perp 彳亥 \top 彳人$

故

$戊 \perp 亥 \top 人 = 禾彳戊 \perp 禾彳亥 \top 禾彳人$

若以吧咋味代天之任函數，則

$禾(吧彳天 \perp 咋彳天 \top 味彳天) = 禾吧彳天 \perp 禾咋彳天 \top 禾味彳天$

第一百〇七款

若令戊與亥為變數之任何函數，則可從

$彳(戊亥) = 戊彳亥 \perp 亥彳戊$

攷知

$禾戊彳亥 = 戊亥 \top 禾亥彳戊$

又可從

$彳(甲戊) = 甲彳戊$

攷知

$禾甲呋彳天 = 甲禾呋彳天$

亦可從分數之微分式攷知

$禾\frac{戊彳亥}{亥^{二}} = \top\frac{戊}{亥} \perp 禾\frac{彳戊}{亥}$

第一百〇八款

一題　設有微分式

$彳地 = (甲天 \perp 乙)^{寅} 彳天$

欲求其積分。

此式可化為級數，依多項之法，以求其積分，亦可令

$人 = 甲天 \perp 乙$

則

$天 = \frac{人 \top 乙}{甲}$

$彳天 = \frac{彳人}{甲}$

乃依代法得

$彳地 = \frac{人^{寅}彳人}{甲}$

求積分得

$地 = \frac{人^{寅 \perp 一}}{甲(寅 \perp 一)} \perp 丙 = \frac{(甲天 \perp 乙)^{寅 \perp 一}}{甲(寅 \perp 一)} \perp 丙$

二題　設有微分式

$彳地 = (甲天^{卯} \perp 乙)^{寅} 天^{卯 \top 一} 彳天$

欲求其積分。

此式可令

$甲天^{卯} \perp 乙 = 人$

如前法求其積分，得

$地 = \frac{(甲天^{卯} \perp 乙)^{寅 \perp 一}}{卯甲(寅 \perp 一)} \perp 丙$

第一百〇九款

茲欲論分函數之微分式求積分之法，先從式之最簡者論起。

凡分數之微分式，其形如

$彳地 = \frac{呷天^{寅}彳天}{(甲天 \perp 乙)^{卯}}$ 　(一)

者，可令

$人 = 甲天 \perp 乙$

則其

$天 = \frac{人 \top 乙}{甲}$

$彳天 = \frac{彳人}{甲}$

所以

$彳地 = \frac{呷(人 \top 乙)^{寅}彳人}{甲^{寅 \perp 一}人^{卯}}$ 　(二)

若化其 $(人 \top 乙)^{寅}$ 為級數，而各項以 $彳人$ 乘之，以 $人^{卯}$ 約之，則其變得之多項微分式，各項俱有 $丙人^{巳}彳人$ 之形，故可將其各項依第一百〇四款之法，一一求其積分而合之。

題 設有微分式 $彵=\frac{(甲天\perp乙)^{二}}{呷天^{三}伕}$ 欲求其積分

以此式與㈠式相比知 $寅=三$ $卯=二$ 則從㈢式得 $彵=\frac{甲^{四}人^{二}}{呷(人\top乙)^{三}伙}$ 依法

化之爲級數得 $彵=\frac{甲^{四}}{呷}\left[人伙\top三乙伙\perp三乙^{二}人^{\top一}伙\top乙^{三}人^{\top二}伙\right]$ 求其積分得 $地=\frac{甲^{四}}{呷}\left[\frac{二}{人^{二}}\top三乙人\perp三乙^{二}訥人\perp乙^{三}人^{\top一}\right]\perp丙$ 再將人之同

數代還之則得 $地=\frac{甲^{四}}{呷}\left[\frac{二}{一}(甲天\perp乙)^{二}\top三乙(甲天\perp乙)\perp三乙^{二}訥(甲天\perp乙)\top\frac{甲天\perp乙}{乙^{三}}\right]\perp丙$

第一百十款

凡微分式若爲實分數必能化之爲 $\frac{天^{卯}\perp呷天^{卯\top一}\perp叱天^{卯\top二}\perp\cdots\cdots\perp哂}{(呷天^{卯\top一}\perp叱天^{卯\top二}\perp哂天^{卯\top三}\perp\cdots\cdots\perp哂)伕}$ 之形

凡求實分數微分式之積分其公法必將實分數微分式化爲多項微分式令其各項中之分母更簡而不同

謂之散分數

凡欲化所設之實分數爲散分數必使其分母等于〇

則 $天^{卯}\perp呷天^{卯\top一}\perp叱天^{卯\top二}\perp\cdots\cdots\perp哂=〇$ 令此式之各根爲 $天=\top甲$ $天=\top甲'$ $天=\top甲''$ $天=\top甲'''$ …… 俱爲不

相同之數則依代數術第九十九款之法其式之左邊

爲有卯箇乘數 $天\perp甲$、$天\perp甲'$、$天\perp甲''$、$天\perp甲'''$ …… 連乘所成之積故可

令所設之實分數等于 $\frac{天\perp甲}{呷伕}$ $\frac{天\perp甲'}{呷'伕}$ $\frac{天\perp甲''}{呷''伕}$ …… 散分數之和

而散分數之分母即爲實分母之各乘數其各分子內之呷，呷′，呷″……爲未定之常數即從倍數乃將其散分數齊同通分令其總分母與所設之實分母相同如此則可將左右兩邊分子內天之同方之倍數作爲相等于是可化得數箇方程式從此數箇方程式可求得呷，呷′，呷″，呷‴……之各同數茲設一式以爲則

設有微分式 $\frac{天^{三}丄呷天^{二}丄吃天丄呐}{(呷天^{二}丄吃天丄呐)}㣑$ 欲求其積分 則可令其分母等于各乘數如 $\frac{天丄呷天丄吃天丄呐}{(天丄甲)(天丄甲′)(天丄甲″)}$ 若不計所設式中之㣑可令其實分數等于 $\frac{天丄甲}{呷}丄\frac{天丄甲′}{呷′}丄\frac{天丄甲″}{呷″}$ 將此式齊同通分得 $\frac{(天丄甲)(天丄甲′)(天丄甲″)}{呷(天丄甲′)(天丄甲″)丄呷′(天丄甲)(天丄甲″)丄呷″(天丄甲)(天丄甲′)}$ 若將其分子內各乘數相乘得積則爲

$$(呷丄呷′丄呷″)天^{二}丄[呷(甲′丄甲″)丄呷′(甲丄甲″)丄呷″(甲丄甲′)]天丄呷甲′甲″丄呷′甲甲″丄呷″甲甲′$$

此式無論其天之同數如何必與所設實分數之分子相等故依代數術第十八卷之例其天之同方之各倍數亦必爲相等所以可得三箇相等式

$$呷丄呷′丄呷″＝呷$$

$$呷(甲′丄甲″)丄呷′(甲丄甲″)丄呷″(甲丄甲′)＝吃$$

$$呷甲′甲″丄呷′甲甲″丄呷″甲甲′＝呐$$

此三式各就其本式而論皆不過一次故可從此三式求得呷，呷′，呷″各同數則其散分數

之式為

天丄呷天乙天丙 …… 天丄甲 天丄甲 天丄甲

如令 天丄甲＝人 則 伏＝仸 故 天丄甲／呷伏＝人／呷仸

此式之積分為 呷訥人＝呷訥(天丄甲)

又

以同法推得

禾天丄甲／呷伏＝呷訥(天丄甲)

禾天丄甲／呷伏＝呷訥(天丄甲)

所以得

禾……＝呷訥(天丄甲)丄呷訥(天丄甲)丄呷訥(天丄甲)丄常數

＝訥〔(天丄甲)(天丄甲)(天丄甲)〕丄常數

此法若充極其量可推凡有分母能化為一次不相等各乘數之各實分數且此法中除化其分母為乘數之外別無難為之事

第一百十一款　若所設之微分式其分母之根有數箇相等者則必依式而改其法

假如其分母 …… 內有一乘數為(天丄甲)之形則必另設一箇分數(天丄甲) …… 將此式又化為散分數與他乘數之散分數

齊同通分乃令其分子之諸項等于所設實分數內分子之諸項如前法求其同方之倍數則可化為多項之式以求積分

第一百十二款　觀前款所論可見凡合于相等乘數之散分數其形如 …… 所以可用此式代其相等之分數而將其 天丄甲／呷伏 等類之各項一一求其積分　如令 天丄甲＝人 則其 伏＝仸 即可得

禾(天丄甲)／呷伏＝禾人／呷仸

……

故各項之積分俱可以對數明之除末式 禾天丄甲／呷伏 之外必有對數在其式內

第一百十三款

設分母之乘數為虛式則必有兩兩之形如 …… 其相

乘之積必爲 $天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二}$ 如遇此種之式莫妙于將所設之式化其分母爲一次二次之實乘數此事依相等式之理恆能爲之惟分母之虛乘數若有數雙俱相等者則所設之微分式其分母內必有一乘數之方其形如 $(天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二})^{午}$ 而其單乘數 $天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二}$ 必爲第一次乘數 如欲化其數雙相等之乘數爲散分數必設 $\frac{天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二}}{(呷天丄吜)彳天}$ 及 $\frac{(天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二})^{午}}{(呷天^{二午丅一}丄味天^{二午丅二}丄\cdots丄吔)彳天}$ 或不用上式則用分數之級數 $\frac{(天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二})^{午}}{(呷天丄吜)彳天}丄\frac{(天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二})^{午丅一}}{(呷天丄吜)彳天}丄\cdots\cdots丄\frac{天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二}}{(呷天丄吜)彳天}$ 其各倍數仍依前數款之法定之

第一百十四款

如欲求其 $\frac{天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二}}{(呷天丄吜)彳天}$ 式之積分可見其分母 $天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二}=(天丄角)^{二}丄亢^{二}$ 故可令 $天丄角=人$ 則 $\frac{(天丄角)^{二}丄亢^{二}}{(呷天丄吜)彳天}=\frac{人^{二}丄亢^{二}}{(呷人丄吜丅呷角)彳人}=\frac{人^{二}丄亢^{二}}{呷人彳人}丄\frac{人^{二}丄亢^{二}}{吜彳人}$ 其吜者以代常數 $吜丅呷角$ 也其第一項散分數可以對數明其積分因令 $人^{二}丄亢^{二}=戊$ 則 $人彳人=\frac{一}{二}彳戊$ 從此可得 $禾\frac{人^{二}丄亢^{二}}{呷人彳人}=\frac{二}{呷}禾\frac{戊}{彳戊}=\frac{二}{呷}訥戊=呷訥\sqrt{人^{二}丄亢^{二}}$ ㈠其第二項散分數可令 $人=亢亥$ 則 $\frac{人^{二}丄亢^{二}}{吜彳人}=\frac{亢}{吜}\times\frac{亥^{二}丄一}{彳亥}$ 已于第二十三款證明 $\frac{亥^{二}丄一}{彳亥}$ 爲有切線爲亥之弧微分式故可以 $正切^{丅一}亥$ 明其積分其亥爲切線之

弧則得

禾 亢/毋 ×（亥丄一）/亥 ＝ 亢/毋 正切丅亥 丄 常數 ＝

亢/毋 正切丅亢/人 丄 常數

㈡將㈠㈡兩式相加得

禾 （人丄亢）/（（呼人丄毋）㕥）＝ 呼訥（人丄亢）丄 亢/毋 正切丅亢/人 丄 常數

以人與啞之同數代還之即得

禾 （天丄二角天丄角丄亢）/（（呼天丄毋）㕥）＝

呼訥（天丄二角天丄角丄亢）丄 亢/（毋丅呼角）正切丅亢/（天丄角）丄 常數

第一百十五款

如欲求其 （天丄二角天丄角丄亢）午/（（呼天丄毋）㕥） 式之積分則可令 天丄角＝人 又 毋丅呼角＝啞 化之爲散分數如

（人丄亢）午/（（呼人丄啞）㕥）＝（人丄亢）午/（呼人㕥）丄（人丄亢）午/（啞㕥）

求其第一項之積分可令 人丄亢＝戊 則 人㕥＝二戊 故得

禾 （人丄亢）午/（呼人㕥）＝ 二/呼 禾 戊午/戊 ＝ 二/呼 × 一/（（一丅午）戊一丅午）

求其第二項之積分必識別得

禾 （人丄亢）午/㕥 ＝ （人丄亢）午丅一/（噢人）丄 哼禾 （人丄亢）午丅一/㕥

此式之右邊第一項可以代數明之其第二項爲比左邊之分母次一方之積分式若欲將此式之各項化爲微分式只須將右邊之第一項求其微分其餘兩項除去其積分之號即爲化得之微分式又因其各項中公乘數可棄之不用故可得相等式

一一一 噢（人丄亢）丅二（午丅一）噢人丄哼（人丄亢）

［（三丅二午）噢丄哼］人丄（噢丄哼）亢丅一＝〇

惟因人爲未定之數必得

（噢丄哼）亢丅一＝〇

（三丅二午）噢丄哼＝〇

從此兩式得

噢＝（二午丅二）亢二/（一）

哼＝（三午丅二）亢二/（二午丅三）

將此噢哼二同數代入所設之

式內即得 $禾\frac{(人^{二}丄元^{二})^{午}}{彳人}=\frac{(二午丅二)元^{二}}{一}\times\frac{(人^{二}丄元^{二})^{午丅一}}{人}丄\frac{(二午丅二)元^{二}}{二午丅三}禾\frac{(人^{二}丄元^{二})^{午丅一}}{彳人}$ 以 $午丅一$ 代午得 $禾\frac{(人^{二}丄元^{二})^{午丅一}}{彳人}=\frac{(二午丅四)元^{二}}{一}\times\frac{(人^{二}丄元^{二})^{午丅二}}{人}丄\frac{(二午丅四)元^{二}}{二午丅五}禾\frac{(人^{二}丄元^{二})^{午丅二}}{彳人}$ 以 $午丅二$ 代午得 $禾\frac{(人^{二}丄元^{二})^{午丅二}}{彳人}=\frac{(二午丅六)元^{二}}{一}\times\frac{(人^{二}丄元^{二})^{午丅三}}{人}丄\frac{(二午丅六)元^{二}}{二午丅七}禾\frac{(人^{二}丄元^{二})^{午丅三}}{彳人}$ 依此法遞推之則知 $禾\frac{(人^{二}丄元^{二})^{午}}{彳人}$ 可藉代數及他積分式 $禾\frac{(人^{二}丄元^{二})^{午丅一}}{彳人}$ 明之而其他積分式又可藉他代數式及積分式 $禾\frac{(人^{二}丄元^{二})^{午丅二}}{彳人}$ 明之如是屢推之以至其他積分式為 $禾\frac{人^{二}丄元^{二}}{彳人}$ 則此式能以平圓之弧明之可為已知之數故用前法推至此處必止因再變一次其積分必為 $禾\frac{(人^{二}丄元^{二})^{○}}{彳人}$ 之形則其倍數為無窮不能用以攷知所求之事也

從此可見本款之求積分法為最佳最盛之法以其能遞生多式也

觀以上各款所論之事可見凡有實分數之微分式皆能用代數與對數及平圓弧各法明其積分祇須化其所設之式為散分數耳其散分數之分母或為二項之式或為三項之式

第一百十六款　茲設數題如法求之以明實分數微分式求積分之法

一題　設有微分式 $\frac{天^{二}丅甲^{二}}{甲彳天}$ 欲求其積分

因能化其分母 $天^{二}丅甲^{二}=(天丅甲)(天丄甲)$ 所以可令 $\frac{(天丅甲)(天丄甲)}{甲彳天}=\left[\frac{天丅甲}{呷}丄\frac{天丄甲}{吅}\right]彳天$ 將此式晋出其彳天而將右邊齊同通分得 $\frac{(天丅甲)(天丄甲)}{甲}=\frac{(天丅甲)(天丄甲)}{(呷丄吅)天丄(呷丅吅)甲}$ 乃令 $甲=(呷丄吅)天丄(呷丅吅)甲$ 因其天為未定之數則依第十八款之理必為 $(呷丅吅)甲=甲$ $呷丄吅=○$ 從此二式求得 $呷=\frac{二}{一}$ $吅=丅\frac{二}{一}$ 以此兩同數代入前式中則得 $\frac{天^{二}丅甲^{二}}{甲彳天}=\frac{二}{一}\times\frac{天丅甲}{彳天}丅\frac{二}{一}\times\frac{天丄甲}{彳天}$ 如

法求其積分得

$$禾\frac{天丅甲^{二}}{甲伏}=\frac{二}{一}訥(天丅甲)丅\frac{三}{二}訥(天丄甲)丄呥$$

$$=\frac{二}{一}訥\frac{天丄甲}{天丅甲}丄呥=訥\left[\frac{天丄甲}{天丅甲}\right]丄呥$$

二題　設有微分式 $\frac{甲^{二}天丅天^{三}}{甲^{二}丄乙天^{二}}伏$ 欲求其積分

因其分母之乘數爲天與 $甲^{二}丅天^{二}$ 而其 $甲^{二}丅天^{二}$ 能化爲 $(甲丅天)(甲丄天)$ 所以可置出其式中之伏而令

$$\frac{天(甲丅天)(甲丄天)}{甲^{二}丄乙天^{二}}=\frac{天}{呷}丄\frac{甲丅天}{吃}丄\frac{甲丄天}{呥}$$

將此式之右邊齊同通分之得

$$\frac{天(甲丅天)(甲丄天)}{呷甲^{二}丄甲(吃丄呥)天丄(吃丅呷丅呥)天^{二}}$$

令左右兩邊天之同方之倍數爲相等則得

$$呷甲^{二}=甲^{二}$$

$$甲(吃丄呥)=〇$$

$$吃丅呷丅呥=乙$$

此三箇簡方程式中其未知之數呷吃呥可以依代數術第八卷之各法求其同數則得

$$呷=甲$$

$$吃=\frac{二}{一}(甲丄乙)$$

$$呥=丅\frac{二}{一}(甲丄乙)$$

所以

$$\frac{甲^{二}天丅天^{三}}{甲^{二}丄乙天^{二}}伏=\frac{天}{甲伏}丄\frac{二(甲丅天)}{甲丄乙}伏丅\frac{二(甲丄天)}{甲丄乙}伏$$

求其積分得

$$禾\frac{甲^{二}天丅天^{三}}{甲^{二}丄乙天^{二}}伏=甲訥天丅\frac{二}{甲丄乙}訥(甲丅天)丅\frac{二}{甲丄乙}訥(甲丄天)丄呥$$

惟依對數之理

$$訥吧丄訥吽=訥(吧吽)$$

又

$$卯訥吧=訥吧^{卯}$$

故其積分又可以他式

$$禾\frac{甲^{二}天丅天^{三}}{甲^{二}丄乙天^{二}}伏=訥\frac{(甲丅天^{二})^{\frac{三}{甲丄乙}}}{天^{甲}}丄呥$$

明之

三題　設有微分式 $\frac{天^{二}丅六天丄八}{三天丅五}伏$ 欲求其積分

欲化其分母爲簡乘數可令 $天^{二}丅六天丄八=〇$ 開得其方根爲

$$天=二$$

$$天=四$$

所以

$$天^{二}\top六天\bot八=(天\top二)(天\top四)$$

畱出題式中之彳而令其

$$\frac{(天\top二)(天\top四)}{三天\top五}=\frac{天\top二}{呷}\bot\frac{天\top四}{吃}=\frac{(天\top二)(天\top四)}{(呷\bot吃)天\top四呷\top二吃}$$

乃使左右分子內天之同方之倍數為相等則

$$呷\bot吃=三$$

$$\top四呷\top二吃=\top五$$

從此兩式得

$$呷=\top\frac{二}{一}$$

$$吃=\frac{二}{七}$$

所以得積分之式為

$$禾\frac{天^{二}\top六天\bot八}{(三天\top五)彳}=\top\frac{二}{一}禾\frac{天\top二}{彳}\bot\frac{二}{七}禾\frac{天\top四}{彳}=\frac{二}{七}訥(天\top四)\top\frac{二}{一}訥(天\top二)\bot呩$$

四題　設有微分式

$$\frac{(天^{二}\top甲^{二})(天\top甲)}{天^{二}彳}$$

欲求其積分（此題之式分母中有相等乘數）可令題式為

$$\frac{(天^{二}\top甲^{二})(天\top甲)}{天^{二}彳}=\frac{(天\top甲)^{二}(天\bot甲)}{天^{二}彳}$$

則可依第一百十二款之法化之為

$$\frac{(天\top甲)^{二}(天\bot甲)}{天^{二}}=\frac{(天\top甲)^{二}}{呷}\bot\frac{天\top甲}{吃}\bot\frac{天\bot甲}{呩}=\frac{(天\top甲)^{二}(天\bot甲)}{呷(天\bot甲)\bot吃(天^{二}\top甲^{二})\bot呩(天\top甲)^{二}}=\frac{(天\top甲)^{二}(天\bot甲)}{呷甲\top吃甲^{二}\bot呩甲^{二}\bot(呷\top二甲呩)天\bot(吃\bot呩)天^{二}}$$

乃令其天之同方之倍數為相等則

$$呷甲\top吃甲^{二}\bot呩甲^{二}=〇$$

$$呷\top二甲呩=〇$$

$$吃\bot呩=一$$

從此三式依常法求其呷吃呩之各同數得

$$呷=\frac{二}{甲}$$

$$吃=\frac{四}{三}$$

$$呩=\frac{四}{一}$$

則其變形之微分式為

$$\frac{(天\top甲)^{二}(天\bot甲)}{天^{二}彳}=\frac{二}{甲}\times\frac{(天\top甲)^{二}}{彳}\bot\frac{四}{三}\times\frac{天\top甲}{彳}\bot\frac{四}{一}\times\frac{天\bot甲}{彳}$$

故其

$$禾\frac{(天\top甲)^{二}}{彳}=\frac{天\top甲}{\top一}$$

$$禾\frac{天\top甲}{彳}=訥(天\top甲)$$

$$禾\frac{天\bot甲}{彳}=訥(天\bot甲)$$

以散分數之原倍數還之又依常法添入未定之常數則得

$$禾\frac{(天\top甲)^{二}(天\bot甲)}{天^{二}彳}=\top\frac{二}{甲}\times\frac{天\top甲}{一}\bot\frac{四}{三}訥(天\top甲)\bot\frac{四}{一}訥(天\bot甲)\bot常數$$

五題　設有微分式 $\frac{x^3+x^2+2}{x(x+1)^2(x-1)^2}dx$ 欲求其積分。

其分母中有兩雙相等之乘數，故可依第一百十二款之法，令

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1}$$

將左邊之各項齊同通分，又令左右兩邊天之同方之倍數為相等，而求其呷吃吶叮哦之各同數，則得

$A=2$，

$B=-\frac{1}{2}$，

$C=-\frac{5}{4}$，

$D=1$，

$E=-\frac{3}{4}$。

如此則可化其微分式為

$$\frac{2}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{5}{4}\cdot\frac{dx}{x+1}+\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{dx}{x-1}$$

故求得積分之式為

$$\int\frac{x^3+x^2+2}{x(x+1)^2(x-1)^2}dx=$$

$$2\log x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{5}{4}\log(x+1)-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{4}\log(x-1)+\text{常數}$$

六題　設有微分式其分母中第二箇乘數為第一箇乘數之函數，而不能化其函數為整乘數者，則如所設之微分式為 $\frac{a+bx}{x^3-1}dx$ 欲求其積分。

觀題式可見其分母 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$，而其 x^2+x+1 不能化為整乘數，但可令 $x^2+x+1=0$ 而解此二次式為兩箇虛乘數，如 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$，則其

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)$$

若欲免此虛式，可依第一百十三款，令

$$\frac{a+bx}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

將此式之右邊齊同通分，乃令左右兩邊天之同方之倍數為相等，用常法求得其同數

$A=\frac{1}{3}(a+b)$，

$B=-\frac{1}{3}(a+b)$，

$C=-\frac{1}{3}(2a-b)$，

則可化其

所設之微分式為

$$\frac{(天-一)(天^{二}+天+一)}{甲+乙天}彳天=\frac{三}{甲+乙}\times\frac{天-一}{彳天}-\frac{三}{二}\times\frac{天^{二}+天+一}{(甲+乙)天^{二}+二甲-乙}彳天$$

此式之左邊其第一項之積分可以對數明之欲求第二項之積分可令其分母

$天^{二}+天+一$ 變為 $(天+\frac{一}{二})^{二}+\frac{三}{四}$ 又令其 $天+\frac{一}{二}=人$ 則 $天=人-\frac{一}{二}$，$彳天=彳人$ 故其分子之式可變為

$(甲+乙)天^{二}+二甲-乙=(甲+乙)人+\frac{三}{二}(甲-乙)$ 所以

$$\frac{三}{二}\times\frac{天^{二}+天+一}{(甲+乙)天^{二}+二甲-乙}彳天=\frac{三}{甲+乙}\times\frac{人^{二}+\frac{三}{四}}{人彳人}+\frac{二}{甲-乙}\times\frac{人^{二}+\frac{三}{四}}{彳人}$$

此式右邊之第一項可以對數明其積分欲化第二項使簡可令 $人^{二}=\frac{三}{四}亥^{二}$ 則 $彳人=\frac{\sqrt{三}}{二}彳亥$ 所以 $\frac{人^{二}+\frac{三}{四}}{彳人}=\frac{\sqrt{三}}{二}\times\frac{一+亥^{二}}{彳亥}$ 總之

以所有之各法化其所設之微分式以便于求積分者其式為

$$\frac{天^{三}-一}{甲+乙天}彳天=\frac{三}{甲+乙}\times\frac{天-一}{彳天}-\frac{三}{甲+乙}\times\frac{人^{二}+\frac{三}{四}}{人彳人}-\frac{\sqrt{三}}{甲-乙}\times\frac{一+亥^{二}}{彳亥}$$

故求得其積分之式為

$$禾\frac{天^{三}-一}{甲+乙天}彳天=\frac{三}{甲+乙}訥(天-一)-\frac{六}{甲+乙}訒(人^{二}+\frac{三}{四})-\frac{\sqrt{三}}{甲-乙}正切^{-一}亥+常數$$

如于此積分式內令人與亥以其有天之項之各同數代之即得所求之積分式為

$$禾\frac{天^{三}-一}{甲+乙天}彳天=\frac{三}{甲+乙}訥\frac{天^{二}+天+一}{天-一}-\frac{\sqrt{三}}{甲-乙}正切^{-一}\left(\frac{\sqrt{三}}{二天+一}\right)+常數$$

第一百十七款　以上各款（謂從第一百十款至第一百十五各款也）以泛倍數之法化實分數為散分數其立法之理比他法為淺惟其周折太多最費工夫故不便于用茲更設簡便之

法如下

如 $\frac{咳}{哦}$ 爲最簡之實分數而其分母中有一次式不相等之乘數一爲 $天+甲$ 一爲吘則其兩乘數相乘之積必爲 $咳=(天+甲)吘$ 可令其 $\frac{咳}{哦}=\frac{天+甲}{呷}+\frac{吘}{吧}$ 此式中之呷爲與天不相關之常數其吧與吘爲天之函數而其天爲變數如將前式化爲同母之分數而勿忘其 $咳=(天+甲)吘$ 卽得相等式 $哦=呷吘+吧(天+甲)$ 此式內若依分數之例其哦與吘不能以 $天+甲$ 約之若令 $天+甲=〇$ 卽 $天=-甲$ 因此可令戌與午代哦與吘之同數則式變爲 $戌=呷午$ 所以 $呷=\frac{午}{戌}$ 卽爲散分數內分子之同數依此法又能求得各散分數中分子之同數

假如有欲化之分數 $\frac{咳}{哦}=\frac{(天+甲)(天-乙)}{寅天+卯}$ $=\frac{天+甲}{呷}+\frac{天-乙}{吃}$ 則

$$\frac{天-乙}{寅天+卯}=呷+\frac{天-乙}{吃}(天+甲) \quad ㊀$$

$$\frac{天+甲}{寅天+卯}=吃+\frac{天+甲}{呷}(天-乙) \quad ㊁$$

令 $天=-甲$ 從㊀式得 $呷=\frac{-甲-乙}{-寅甲+卯}=\frac{甲+乙}{寅甲-卯}$ 令 $天=乙$ 從㊁式得 $吃=\frac{甲+乙}{寅乙+卯}$ 所以得

$$\frac{(天+甲)(天-乙)}{寅天+卯}=\frac{甲+乙}{一}\left[\frac{天+甲}{寅甲-卯}+\frac{天-乙}{寅乙+卯}\right]$$

第一百十八款　散分數中呷吃各同數亦可用微分術求之

如用前款之 $咳=(天+甲)吘$ 式求其微係數得 $\frac{彳天}{彳咳}=吘+\frac{彳天}{彳吘}(天+甲)$ 又設 $天=-甲$ 之時其 $\frac{彳天}{彳咳}$ 變爲亥若吘之同數爲午則 $亥=午$ 又因其 $呷=\frac{午}{戌}$ 所以知 $呷=\frac{亥}{戌}$

如用前款之 $咳=(天+甲)(天-乙)$ 式求其微係數得 $\frac{彳天}{彳咳}=二天+甲-乙$ 令 $天=-甲$ 則得 $\frac{彳天}{彳咳}=-甲-乙=亥$ 令 $天=乙$ 則得 $\frac{彳天}{彳咳}=甲+乙=亥$ 則從 $亥=午$ 之式可得呷吃各同數與前款

所得者無異

第一百十九款

設分數 $\frac{咳}{咸}$ 其分母爲

$$咳 = (天丄甲)^{卯}\,吘$$

卽爲有卯箇相等之乘數與其他數吘相乘之積故可令所設之式爲

$$\frac{咳}{咸} = \frac{吘(天丄甲)^{卯}}{咸} = \frac{(天丄甲)^{卯}}{呷} \,丄\, \frac{(天丄甲)^{卯一}}{吃} \,丄\, \frac{(天丄甲)^{卯二}}{呐} \,丄 \cdots\cdots 丄\, \frac{天丄甲}{咸} \,丄\, \frac{吘}{吧}$$

其呷吃呐……咸各爲未知之常數其吧吘爲天之函數

若以 $(天丄甲)^{卯}$ 乘其各項卽變爲

$$\frac{吘}{咸} = 呷 \,丄\, 吃(天丄甲) \,丄\, 呐(天丄甲)^{二} \,丄 \cdots\cdots 丄\, 咸(天丄甲)^{卯一} \,丄\, \frac{吘}{吧}(天丄甲)^{卯}$$

令 $天 = 丅甲$ 則咸與吘必能有一定之同數仍令戌午代其同數則所有以天丄甲乘之之項俱不見而其 $呷 = \frac{午}{戌}$ 則呷之同數亦爲已知之數矣

惟因

$$\frac{吘}{咸丅呷吘} = 吃(天丄甲) \,丄\, 呐(天丄甲)^{二} \,丄 \cdots\cdots$$

此式之左邊其分子 $咸丅呷吘$ 必能以天丄甲度之可命之爲 $咸_{一}(天丄甲)$ 所以得

$$\frac{吘}{咸_{一}} = 吃 \,丄\, 呐(天丄甲) \,丄 \cdots\cdots 丄\, 咸(天丄甲)^{卯二} \,丄\, \frac{吘}{吧}(天丄甲)^{卯一}$$

此式中之咸一因不能以天丄甲度之故

令 $天 = 丅甲$ 則其咸一必能有一定之同數若以戌一代其同數則其吘之同數與前所得者同而其以天丄甲乘之之項必不見故得 $吃 = \frac{午}{戌_{一}}$ 其自呐至咸各同數亦依此法求之

茲特設一題以明此法之用

題 設有 $\frac{咳}{咸} = \frac{(一丅天)(一丄天)}{天}$ 欲化之爲散分數

則可令

$$\frac{天^{二}}{(一+天)(一-天)^{三}}=\frac{呷}{(一-天)^{三}}+\frac{吃}{(一-天)^{二}}+\frac{呐}{一-天}+\frac{吧}{一+天}$$

以$(一-天)^{三}$乘之爲

$$\frac{天^{二}}{一+天}=呷+吃(一-天)+呐(一-天)^{二}+\frac{吧}{一+天}(一-天)^{三}$$

令$一-天=〇$則$天=一$卽得$呷=\frac{一}{二}$而

$$\frac{天^{二}}{一+天}-呷=-\frac{一+二天}{二(一+天)}(一-天)=$$

$$吃(一-天)+呐(一-天)^{二}+\frac{吧}{一+天}(一-天)^{三}$$

其

$$-\frac{一+二天}{二(一+天)}=吃+呐(一-天)+\frac{吧}{一+天}(一-天)^{二}$$

再令$天=一$則得$吃=-\frac{三}{四}$而

$$\left[-\frac{一+二天}{二(一+天)}-吃\right]=\frac{-天}{二(一+天)}(一-天)$$

$$=呐(一-天)+\frac{吧}{一+天}(一-天)^{二}$$

則其

$$\frac{-天}{二(一+天)}=呐+\frac{吧}{一+天}(一-天)$$

再令$天=一$則得$呐=-\frac{二}{四}$故其化得之分數爲

$$\frac{天^{二}}{(一+天)(一-天)^{三}}=\frac{一}{二\times(一-天)^{三}}-\frac{二}{二\times(一-天)^{二}}-\frac{一}{四\times(一-天)}+\frac{吧}{一+天}$$

第一百二十款

前款之分數其分子中呷吃呐之各同數亦可用微分術求之

依第四十二款之法得

$$哦=吽\left[呷+吃(天+甲)+呐(天+甲)^{二}+\cdots\cdots+哦(天+田)^{卯-一}+吧(天+甲)^{卯}\right]$$

㊀若將此式疊求其微係數至$(卯-一)$次再令其$天+甲=〇$則㊀式及其所求得之各次微係數必爲

$$哦=呷吽$$

$$\frac{彳哦}{彳天}=呷\frac{彳吽}{彳天}+吃吽$$

$$\frac{彳^{二}哦}{彳天^{二}}=呷\frac{彳^{二}吽}{彳天^{二}}+二吃\frac{彳吽}{彳天}+二呐吽$$

$$\frac{彳^{三}哦}{彳天^{三}}=呷\frac{彳^{三}吽}{彳天^{三}}+三吃\frac{彳^{二}吽}{彳天^{二}}+六呐\frac{彳吽}{彳天}+六叮吽$$

從此各式能定其呷吃呐等各同數惟勿忘每次求微分之後必令$-甲$代其微係數中之天

此式中求吽之同數其法最便只須以$(天+甲)^{卯}$約

其咳卽可得之若依第一百十八款之法求之亦通

第一百二十一款 若其欲化之分數 $\frac{咳}{戌}$ 其分母中有相等乘數之三次式在內如 $天^{二}+二角天+角^{二}+亢^{二}$ 而不能化為兩箇整乘數者則其式中之 $咳=(天^{二}+二角天+角^{二}+亢^{二})吽$ 可令

$$\frac{咳}{戌}=\frac{天^{二}+二角天+角^{二}+亢^{二}}{呷天+叱}+\frac{吽}{吧}$$

則

$$戌=(呷天+叱)吽+吧(天^{二}+二角天+角^{二}+亢^{二})$$

此式中之天如將 $天^{二}+二角天+角^{二}+亢^{二}=〇$ 之任一虛根代之則其有吧之項必不見而變得兩種式一為實一為虛必令其實者與虛者相等則可得兩箇方程式從此兩式可求得呷叱之同數

題 設有

$$\frac{(天-一)(天^{二}+天+一)}{天}=\frac{天^{二}+天+一}{呷天+叱}+\frac{吽}{吧}$$

欲求其呷叱之同數

則可化之為

$$天=(呷天+叱)(天-一)+吧(天^{二}+天+一) \quad ㊀$$

若令 $天^{二}+天+一=〇$ 則 $天=-\frac{二}{一}+\frac{二}{一}\sqrt{-三}$ 故可將天之同數代入㊀式而序其各項則式變為

$$-\frac{二}{一}+\frac{二}{一}\sqrt{-三}=-\frac{二}{三}叱+\left(\frac{二}{一}叱-呷\right)\sqrt{-三}$$

由此得

$$-\frac{二}{三}叱=-\frac{二}{一}$$

$$\frac{二}{一}叱-呷=\frac{二}{一}$$

所以求得

$$叱=\frac{三}{一}$$

$$呷=-\frac{三}{一}$$

第一百二十二款

設其分數為

$$\frac{咳}{戌}=\frac{(天^{二}+二角天+角^{二}+亢^{二})^{卯}}{呷天+叱}+\frac{(天^{二}+二角天+角^{二}+亢^{二})^{卯-一}}{呥天+叮}+\cdots\cdots+\frac{吽}{吧}$$

則其

$$咳=(天^{二}+二角天+角^{二}+亢^{二})^{卯}吽$$

所以

$$\frac{吽}{戌}=(呷天+叱)+(呥人+叮)(天^{二}+二角天+角^{二}+亢^{二})+\cdots\cdots+\frac{吽}{吧}(天^{二}+二角天+角^{二}+亢^{二})^{卯}咳$$

此式為前兩款

之式相并而成故必依同法解之將天⊥二角天⊥亢=〇之任一虛根代

其天則凡有(天⊥二角天⊥亢)之各方乘之之項俱不見而變爲咋/咳=呷天⊥吃

此式內咳與咋合于前式內天之同數故亦有未⊥申⊥丅=未申丅之形

其未與申爲未定之常數呷與吃所成故呷吃之同數

可從未=未申 申=二申兩式求得之

茲將前式求其微係數又于所得之式中去其所有以

天⊥二角天⊥亢爲倍數之各項得……=呷⊥(二天⊥二角)(哂天⊥叮)此式中之天若將天⊥二角天⊥亢=〇之虛根

代之而合其所得之虛實兩式爲相等則得兩箇方程

式從此能求其哂叮之同數

題 設有……=……欲求呷吃哂叮各同數

則將分數化去其母爲天二天⊥天三=呷天⊥吃(哂天⊥叮)(天二天⊥三)(一)以天二天⊥二=〇之一根天=⊥丅代入(一)

式而變爲……=呷⊥吃⊥呷⊥丅從此式得呷⊥吃=丅四 呷=丅所以又可得吃=三若將呷

吃兩同數代入(一)式而移其項爲天二天⊥二天=(哂天⊥叮)(天二天⊥三)再求其微分而

以袪約之爲……（二）再以……代其天則（二）式變爲……從

此得丙＝一。丁＝〇。所以分數……可化爲……

案微分式中往往有一種實分數其分母爲……或……之形者已在代數術第二百七十四款至二百七十八款詳論此種函數能化爲一次二次之簡乘數旣化之後卽可依本卷各法求其積分

興化劉彝程校算

微積溯源卷六

英國華里司輯
英國傅蘭雅口譯
金匱華蘅芳筆述

求虛函數微分式之積分

第一百二十三款　凡微分式內之虛函數若能變之爲實函數者則可依前卷之各法求其積分

如有微分式 $\frac{一丄天^{\frac{三}{一}}}{(一丄天^{\frac{二}{一}}丅天^{\frac{三}{二}})彳天}$ 觀此式易知若令 $天=人^{六}$ 則所有根號內之數易開其方因 $彳天=六人^{五}彳人$ 故可變所設之微分式爲 $\frac{一丄人^{二}}{六人^{五}彳人(一丄人^{三}丅人^{四})}$ 此式若以分母約分子可得 $丅六(人^{七}丅人^{六}丅人^{五}丄人^{四}丅人^{二}丄一)彳人丅\frac{一丄人^{二}}{六彳人}$ 其積分爲 $丅六\left[\frac{八}{人^{八}}丅\frac{七}{人^{七}}丅\frac{六}{人^{六}}丄\frac{五}{人^{五}}丅\frac{三}{人^{三}}丄人丅正切^{丅一}人\right]丄常數$ 再將人之同數 $天^{\frac{六}{一}}$ 代還之卽能以有天之各項明其積分、

第一百二十四款　茲專論微分式內之有虛函數其形如 $\sqrt{甲丄乙天丄丙天^{二}}$ 者　此種虛函數不外乎下兩式一爲 $吧彳天\sqrt{甲丄乙天丄丙天^{二}}$ 一爲 $\frac{\sqrt{甲丄乙天丄丙天^{二}}}{吧彳天}$ 其吧爲天之任何實函數

惟此兩式亦可以一總式包括之如將其第一式依其根之次數自乘而以未乘之虛函數爲其分母則可變之爲 $\frac{\sqrt{甲丄乙天丄丙天^{二}}}{吧(甲丄乙天丄丙天^{二})彳天}$ 而與第二式爲同類

其簡式 $\frac{\sqrt{甲丄乙天丄丙天^{二}}}{彳天}$ 之形有兩種一其分母內之丙爲正二其分母內之丙爲負

第一百二十五款　茲先論其第一種丙爲正者

設有微分式

$$\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{彳天}$$

欲求其積分可令

$$\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}=巳地\perp\frac{地}{午}$$

一其巳午爲未定之常數乃將其左右兩邊之數各自乘而變爲無根號之式如

$$甲\perp乙天\perp丙天^{二}=巳^{二}地^{二}\perp二巳午\perp\frac{地^{二}}{午^{二}}$$

若欲令此式之左邊變爲正乘方之式必將其第一項移至右邊而兩邊俱以丙乘之又各以 $\frac{四}{乙^{二}}$ 加之則變爲

$$\frac{四}{乙^{二}}\perp乙丙天\perp丙天^{二}=丙\left[巳^{二}地^{二}\perp二巳午\top甲\perp\frac{四丙}{乙^{二}}\perp\frac{地^{二}}{午^{二}}\right]$$

再令其右邊之

$$二巳午\top甲\perp\frac{四丙}{乙^{二}}=\top二巳午$$

即

$$四巳午=\frac{四丙}{四甲丙\top乙^{二}}$$

如此則恆可變爲正乘方式

$$\frac{四}{乙^{二}}\perp乙丙天\perp丙^{二}天^{二}=丙\left[巳^{二}地^{二}\perp二巳午\perp\frac{地^{二}}{午^{二}}\right]$$

乃將其左右兩邊各開平方得

$$\frac{二}{乙}\perp丙天=\sqrt{丙}\left[巳地\perp\frac{地}{午}\right]$$

二將此式求微分得

$$\sqrt{丙}彳天=\frac{地}{彳地}\left[巳地\top\frac{地}{午}\right]=\frac{地}{彳地}\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}$$

從此式又可得

$$\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{彳天}=\frac{\sqrt{丙}}{一}\times\frac{地}{彳地}$$

三乃將$\sqrt{丙}$約二式以與一式相加得

$$\frac{二\sqrt{丙}}{乙}\perp天\sqrt{丙}\perp\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}=二巳地$$

配其對數即得

$$訥\left[\frac{二\sqrt{丙}}{乙}\perp天\sqrt{丙}\perp\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}\right]=訥(地)\perp訥(二巳)$$

四惟因

$$訥(地)=禾\frac{地}{彳地}\perp呐$$

其呐爲任何常數故可令之爲

$$呐=呐\top訥(二巳)$$

其呐又爲他常數所以

$$訥(地)\perp訥(二巳)=禾\frac{地}{彳地}\perp呐$$

將此式與三四兩式

相比得

$$禾\frac{\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}{伏}=\frac{\sqrt{丙}}{一}訥\left[\frac{二\sqrt{丙}}{乙}天\sqrt{丙}⊥\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}\right]⊥呐$$

$$=\frac{\sqrt{丙}}{一}訥\left[乙⊥二丙天⊥二\sqrt{丙}\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}\right]⊥呐.$$

此式中各項對數之函數所不同者.惟在常數 訥$(二\sqrt{丙})$ 而已.

第一百二十六款

茲論其第二種丙為負者.

如有微分式 $\frac{\sqrt{甲⊥乙天丅丙天^{二}}}{伏}$. 欲求其積分 則可令其式中之分母

$$\sqrt{甲⊥乙天丅丙天^{二}}=巳正弦斗$$ (一).

其巳為未定之常數斗為變角.則 $甲⊥乙天丅丙天^{二}=巳^{二}正弦^{二}斗=巳^{二}丅巳^{二}餘弦^{二}斗$. 依前款之法變之得

$$\frac{四}{乙^{二}}丅乙丙天⊥丙^{二}天^{二}=丙巳^{二}餘弦^{二}斗⊥\frac{四}{乙^{二}}⊥甲丙丅巳丙$$

此式之左邊巳為正乘方.若欲變其右邊亦為正乘方可令

$$丙巳^{二}=\frac{四}{乙^{二}}⊥甲丙.$$

即

$$巳\sqrt{丙}=\frac{二}{\sqrt{乙^{二}⊥四甲丙}}$$ (二).

由此得

$$\frac{四}{乙^{二}}丅乙丙天⊥丙^{二}天^{二}=丙巳^{二}餘弦^{二}斗.$$

兩邊各開平方得

$$\frac{二}{乙}丅丙天=\sqrt{丙}巳餘弦斗$$ (三).

求其微分而以$丙$約之得

$$伏=\frac{\sqrt{丙}}{科}巳正弦斗=\frac{\sqrt{丙}}{科}\sqrt{甲⊥乙天丅丙天^{二}}.$$

所以

$$\frac{\sqrt{甲⊥乙天丅丙天^{二}}}{伏}=\frac{\sqrt{丙}}{一}科.$$

求其積分得

$$禾\frac{\sqrt{甲⊥乙天丅丙天^{二}}}{伏}=\frac{\sqrt{丙}}{一}斗⊥常數.$$

如欲求其斗則從(三)(二)兩式得

$$餘弦斗=\frac{二\sqrt{丙}巳}{乙丅二丙天}=\frac{\sqrt{乙^{二}⊥四甲丙}}{乙丅二丙天}.$$

所以其積分之式或為

$$禾\frac{\sqrt{甲⊥乙天丅丙天^{二}}}{伏}=\frac{\sqrt{丙}}{一}餘弦^{丅一}\frac{\sqrt{乙^{二}⊥四甲丙}}{乙丅二丙天}⊥呐.$$

或為

$$禾\frac{\sqrt{甲⊥乙天丅丙天^{二}}}{伏}=\frac{\sqrt{丙}}{一}正弦^{丅一}\frac{\sqrt{乙^{二}⊥四甲丙}}{二丙天丅乙}⊥呐.$$

此兩式

因其餘弦之角亥與正弦之角亥其較恆為正角所以其較角為常數而兩角之積分不出乎此兩式之外

第一百二十七款

如有微分式 $\frac{\sqrt{甲+乙天+丙天^{二}}}{天^{卯}彳天}$ 欲求其積分

因其卯為任何整數故可令

$$呋=\sqrt{甲+乙天+丙天^{二}}$$

而

$$地=天^{寅}\sqrt{甲+乙天+丙天^{二}}=天^{寅}呋$$

則

$$地^{二}=甲天^{二寅}+乙天^{二寅+一}+丙天^{二寅+二}$$

將此式求其微分得

$$二地他=\left[二寅甲天^{二寅-一}+(二寅+一)乙天^{二寅}+(二寅+二)丙天^{二寅+一}\right]彳天$$

以 $地=天^{寅}呋$ 約之得

$$二他=二寅甲\frac{呋}{天^{寅-一}彳天}+(二寅+一)乙\frac{呋}{天^{寅}彳天}+(二寅+二)丙\frac{呋}{天^{寅+一}彳天}$$

乃令 $寅+一=卯$ 則

$$寅=卯-一$$

$$寅-一=卯-二$$

$$二寅=二卯-二$$

$$二寅+一=二卯-一$$

$$二寅+二=二卯$$

由此得

$$二他=(二卯-二)甲\frac{呋}{天^{卯-二}彳天}+(二卯-一)乙\frac{呋}{天^{卯-一}彳天}+二卯丙\frac{呋}{天^{卯}彳天}$$

依法序其各項得

$$\frac{呋}{天^{卯}彳天}=\frac{卯丙}{他}-\frac{二卯}{二卯-一}\times\frac{丙}{乙}\times\frac{呋}{天^{卯-一}彳天}-\frac{卯}{卯-一}\times\frac{丙}{甲}\times\frac{呋}{天^{卯-二}彳天}$$

所以可將此式求其積分而以地與呋所代之數仍還之則可得

$$禾\frac{\sqrt{甲+乙天+丙天^{二}}}{天^{卯}彳天}=$$

$$\frac{卯丙}{一}天^{卯-一}\sqrt{甲+乙天+丙天^{二}}-\frac{二卯}{二卯-一}\times\frac{丙}{乙}禾\frac{\sqrt{甲+乙天+丙天^{二}}}{天^{卯-一}彳天}-\frac{卯}{卯-一}\times\frac{丙}{甲}禾\frac{\sqrt{甲+乙天+丙天^{二}}}{天^{卯-二}彳天}$$

則此式之積分今以實函數並同類之他

積分式其天之方數降等者明之

若欲將此式如第一百二十五六兩款之 $禾\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{伏}$ $禾\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{伏}$ 兩式之法求其同數則因前兩款之式其卯等于○而此式不能如此求之若令 $卯=○$ 則卯入于各分數之分母內而其項俱變爲無窮 惟可令 $卯=一$ 則式之右邊所有兩箇降等之積分式其末一箇可不見因其倍數爲○故也

所以可令公式中 $卯=一$ 而從 $卯=○$ 得 $禾\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{天伏}=$ $\frac{丙}{二}\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}\perp\frac{二丙}{乙}禾\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{伏}$ 之同數又可令公式中 $卯=二$ 而從 $卯=一$ 之式得其同數如是推之可求至卯爲任何數惟其卯必爲正整之數

第一百二十八款 若令卯爲負數則其式可變爲他形法以丅卯代其卯而將所得之各項從新排列之則其式爲

$$禾\frac{天^{卯}\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}^{三}}{伏}=\frac{(卯丅一)甲}{丅一}\times\frac{天^{卯丅一}}{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}^{三}}丅\frac{二卯丅二}{二卯丅三}\times\frac{甲}{乙}禾\frac{天^{卯丅一}\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}^{三}}{伏}丅\frac{卯丅一}{卯丅二}\times\frac{甲}{丙}禾\frac{天^{卯丅二}\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}^{三}}{伏}$$

而此式中之卯可以正數代之

第一百二十九款

惟 $卯=一$ 者則不能用前款之變式因分母內凡有 $卯丅一$ 者其項俱變爲無窮故 $\frac{天\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{伏}$ 之積分必分求之令 $天=\frac{地}{一}$ 則 $\frac{天}{伏}=\frac{一}{丅地}$

所以其 $\frac{天\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{伏}=\frac{\sqrt{丙\perp乙地\perp甲地^{二}}}{丅地}$ 惟此變式之微分其積分之形有兩種視

甲之正負而異

如甲爲正數則依第一百二十五款之法得積分之式

爲 $\frac{\sqrt{甲}}{一}訥\left(乙丄二甲地丄\sqrt{甲}\sqrt{丙丄乙地丄甲地^{二}}\right)丄呐$ 其$\sqrt{甲}$可任爲正負之數如令之爲負則積分之式變爲 $\frac{\sqrt{甲}}{一}訥\left(乙丄二甲地丅二\sqrt{甲}\sqrt{丙丄乙地丄甲地^{二}}\right)丄呐$ 以地之同數$\frac{天}{一}$代還之則得

$$禾\frac{天\sqrt{甲丄乙天丄丙天^{二}}}{彳天}=\frac{\sqrt{甲}}{一}訥\frac{天}{二甲丄乙天丄二\sqrt{甲}\sqrt{甲丄乙天丄丙天^{二}}}丄呐$$

惟須勿忘其$\sqrt{甲}$或可爲正或可爲負

如甲爲負數則 $禾\frac{天\sqrt{甲丄乙天丄丙天^{二}}}{彳天}=禾\frac{\sqrt{丙丄乙地丄甲地^{二}}}{丅彳地}$ 依第一百二十六款得其積分式

$$禾\frac{\sqrt{丙丄乙地丄甲地^{二}}}{丅彳地}=\frac{\sqrt{甲}}{一}正弦^{丅一}\frac{\sqrt{乙^{二}丅四甲丙}}{二甲地丄乙}丄呐=\frac{\sqrt{甲}}{一}餘弦^{丅一}\frac{\sqrt{乙^{二}丅四甲丙}}{二甲地丄乙}丄呐$$

以$\frac{天}{一}$代其地即得

$$禾\frac{天\sqrt{甲丄乙天丄丙天^{二}}}{彳天}=\frac{\sqrt{甲}}{一}餘弦^{丅一}\frac{天\sqrt{乙^{二}丅四甲丙}}{二甲丄乙天}丄呐$$

第一百三十款 以上各款之法（謂從第一百二十五款至一百二十九款也）已足爲多種微分式求積分之用

卽如從第一百二十五款之法可得

$$禾\frac{\sqrt{甲丄天^{二}}}{彳天}=訥\left(天丄\sqrt{甲丄天^{二}}\right)丄呐$$

及

$$禾\frac{\sqrt{乙天丄天^{二}}}{彳天}=訥\left(二乙丄天丄\sqrt{乙天丄天^{二}}\right)丄呐$$

從一百二十九款之法可得

$$禾\frac{天\sqrt{甲丄丙天}}{甲彳天}=訥\frac{天}{二甲丄二\sqrt{甲}\sqrt{甲丄丙天}}丄呐$$

若以訥(二甲)約之令 $\frac{訥(二甲)}{呐}$ 爲呐則

$$禾\frac{天\sqrt{甲丄丙天}}{甲彳天}=訥\frac{天}{甲丄\sqrt{甲}\sqrt{甲丄丙天}}丄呐$$

此式又可用法變之因其

$$禾\frac{天\sqrt{甲丄丙天}}{二甲彳天}=訥\frac{丄丙天}{\left(甲丄\sqrt{甲}\sqrt{甲丄丙天}\right)}丄呐$$

而

$$丄丙天=\left(甲丄\sqrt{甲}\sqrt{甲丄丙天}\right)\left(甲丅\sqrt{甲}\sqrt{甲丄丙天}\right)$$

所以

代而化之可得 $禾\frac{天\sqrt{甲\perp丙天^{二}}}{甲彳天}=\frac{二}{一}訥\frac{甲\perp\sqrt{甲\perp丙天^{二}}}{甲\top\sqrt{甲\perp丙天^{二}}}\perp呐$ 由此可見凡積分之式每能隨其所用之常數而有多種變形

第一百三十一款

凡對函數之積分每類中各有其相配之一幅積分數可以角度或平圓之弧明之

即如依第一百二十六款之法可得 $禾\frac{\sqrt{甲\top天^{二}}}{彳天}=正弦^{\top一}\frac{甲}{天}\perp呐$ 及 $禾\frac{\sqrt{甲天\top天^{二}}}{彳天}=餘弦^{\top一}(一\top\frac{甲}{天})\perp呐$

又如依第一百二十九款第二法可得 $禾\frac{天\sqrt{天^{二}\top甲}}{甲彳天}=正割^{\top一}\frac{甲}{天}\perp呐=餘弦^{\top一}\frac{天}{甲}\perp呐$

第一百三十二款　茲款特設一式以明微分式內有平方根號而欲求其積分之法

如有微分式 $\frac{天}{彳天}\sqrt{\frac{天^{二}\top乙^{二}}{甲^{二}\top天^{二}}}$ 欲求其積分　則依已知之法變之得 $\frac{天}{彳天}\sqrt{\frac{天^{二}\top乙^{二}}{甲^{二}\top天^{二}}}=\frac{天\sqrt{(甲^{二}\top天^{二})(天^{二}\top乙^{二})}}{甲彳天}\top\frac{\sqrt{(甲^{二}\top天^{二})(天^{二}\top乙^{二})}}{天彳天}$ 此兩項之微分其第一項有他法可明之

為 $\top\frac{乙}{甲}\times\frac{\sqrt{(\frac{甲^{二}}{一}\top\frac{天^{二}}{一})(\frac{天^{二}}{一}\top\frac{乙^{二}}{一})}}{\frac{天^{二}}{一}彳(\frac{天^{二}}{一})}$ 所以得 $\frac{天}{彳天}\sqrt{\frac{天^{二}\top乙^{二}}{甲^{二}\top天^{二}}}=\frac{\sqrt{(甲^{二}\top天^{二})(天^{二}\top乙^{二})}}{\top天彳天}\top\frac{乙}{甲}\times\frac{\sqrt{(\frac{甲^{二}}{一}\top\frac{天^{二}}{一})(\frac{天^{二}}{一}\top\frac{乙^{二}}{一})}}{\frac{天^{二}}{二}彳(\frac{天^{二}}{一})}$ 可見其兩項之式眞為相類　如欲求其第一項之積分可令其 $天^{二}=甲^{二}餘弦^{二}斗\perp乙^{二}正弦^{二}斗$ 則 $天彳天=(乙^{二}\top甲^{二})正弦斗餘弦斗彳斗$ 而其

$甲丅天=(甲丅乙)\,正弦^{二}斗$ (一)

$天丅乙=(甲丅乙)\,餘弦^{二}斗$ (二)

所以 $\frac{\sqrt{(甲丅天)(天丅乙)}}{丅彳天}=\frac{(甲丅乙)餘弦斗正弦斗}{(甲丅乙)餘弦斗正弦斗彳斗}=彳斗$

又依同法令 $\frac{天}{二}=\frac{甲}{二}餘弦^{二}井丄\frac{乙}{二}正弦^{二}井$

則得 $\frac{天}{二}彳\left(\frac{天}{二}\right)=\left(\frac{乙}{二}丅\frac{甲}{二}\right)正弦井餘弦井彳井$

而其

$\frac{甲}{二}丅\frac{天}{二}=\left(\frac{甲}{二}丅\frac{乙}{二}\right)正弦^{二}井$ (三)

$\frac{天}{二}丅\frac{乙}{二}=\left(\frac{甲}{二}丅\frac{乙}{二}\right)餘弦^{二}井$ (四)

所以又得 $\frac{\sqrt{\left(\frac{甲}{二}丅\frac{天}{二}\right)\left(\frac{天}{二}丅\frac{乙}{二}\right)}}{丅\frac{天}{二}彳\left(\frac{天}{二}\right)}=\frac{\left(\frac{乙}{二}丅\frac{甲}{二}\right)正弦井餘弦井}{\left(\frac{乙}{二}丅\frac{甲}{二}\right)正弦井餘弦井彳井}=彳井$

總之其斗井二角如能爲

$餘弦斗=\sqrt{\frac{甲丅乙}{天丅乙}}$

$餘弦井=\frac{天}{甲}餘弦斗$

則

$禾\frac{天}{彳天}\sqrt{\frac{天^{二}丅乙^{二}}{甲^{二}丅天^{二}}}=斗丄\frac{乙}{甲}井丄常數$

求二項微分式之積分

第一百三十三款

此種微分式可用公式 $天^{寅丅一}彳天\left(甲丄乙天^{卯}\right)^{\frac{午}{巳}}$ 明之茲欲查出用何式能變其微分式爲實函數

如令 $甲丄乙天^{卯}=人^{午}$

則 $\left(甲丄乙天^{卯}\right)^{\frac{午}{巳}}=人^{巳}$

而 $天^{卯}=\frac{乙}{人^{午}丅甲}$

所以 $天^{寅}=\left(\frac{乙}{人^{午}丅甲}\right)^{\frac{卯}{寅}}$

而 $天^{寅丅一}彳天=\frac{卯乙}{午}人^{巳丄午丅一}\left(\frac{乙}{人^{午}丅甲}\right)^{\frac{卯}{寅}丅一}彳人$

則所設之微分式變爲 $\frac{卯乙}{午}人^{巳丄午丅一}彳人\left(\frac{乙}{人^{午}丅甲}\right)^{\frac{卯}{寅}丅一}$

此式遇 $\frac{卯}{寅}$ 能爲整數者必爲實函數

設其微分式爲 $天^{八}彳天\left(甲丄乙天^{三}\right)^{\frac{午}{巳}}$ 則此式合于前例因其 $寅=九$ $卯=三$ $\frac{卯}{寅}=三$

故能變其形爲 $\frac{三乙}{午}人^{巳丄午丅一}彳人\left(\frac{乙}{人^{午}丅甲}\right)^{二}$

設其微分式爲 $天^{寅丅一}彳天\left(甲丄乙天^{卯}\right)^{\frac{午}{巳}}$ 則可變之使其括弧中天之指數

爲負

法將括弧內之數變爲 $甲丄乙天^{卯}$ 約 $天^{卯}$ 卽得

$天^{午}\,彳(甲丄乙天^{卯})^{\frac{午}{巳}}=$

$天^{寅丅一}\,彳[(甲天^{丅卯}丄乙)天^{卯}]^{\frac{午}{巳}}=$

$天^{寅丄\frac{午}{巳}卯丅一}\,彳(甲天^{丅卯}丄乙)^{\frac{午}{巳}}$。又

依前法變之至其末式中之 $\frac{卯}{寅}丄\frac{午}{巳}$ 每遇能爲整數之時則微分式可爲實函數或可云每遇 $\frac{卯}{寅}丄\frac{午}{巳}$ 能爲整數則其微分式可變爲實函數

設有微分式 $天^{四}\,彳(甲丄乙天)^{三}$。此式亦與以上所言者爲一類因其

$\frac{卯}{寅}=\frac{三}{五}$。$\frac{午}{巳}=\frac{三}{一}$。$\frac{卯}{寅}丄\frac{午}{巳}=\frac{三}{六}=二$。

故可用此諸數于 $天^{寅丄\frac{午}{巳}卯丅一}\,彳(甲天^{丅卯}丄乙)^{\frac{午}{巳}}$ 之式中得 $甲天^{丅卯}丄乙=人^{午}$。從此式化得 $甲丄乙天^{卯}=天^{卯}人^{午}$。若徑將其 $天^{寅丅一}\,彳(甲丄乙天^{卯})^{午}$ 如法變之則易知所得之式必與用 $天^{寅丄\frac{午}{巳}卯丅一}\,彳(甲天^{丅卯}丄乙)^{\frac{午}{巳}}$ 之式所得者相同

第一百三十四款

有時其微分之式 $天^{寅丅一}\,彳(甲丄乙天^{卯})^{\frac{午}{巳}}$ 不能徑求積分則必變爲簡式以求之其法與第一百十三款之理相同惟因 $禾戊彳亥=戊亥丅禾亥彳戊$ 所以

凡遇微分式若能化其式爲兩箇乘數其一箇乘數能求其積分而以悉明之其又一箇乘數以戊明之則其全微分式之積分必可從求 $禾亥彳戊$ 之積分而得。用此法變得之微分有時可比所設之式更簡故其積分更易求。此爲最妙之法其用甚廣名曰分求積分之法。茲因欲從簡易故令巳代其 $\frac{午}{巳}$。惟推算之時須勿忘巳之所代者常爲分數則所設之微分式變爲 $天^{寅丅一}\,彳(甲丄乙天^{卯})^{午}$。化此式爲兩箇乘數其有數法茲言其最便之法如左

變其式爲 $天^{寅丅卯}天^{卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 其一箇乘數 $天^{卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 爲能求積分者依第一百〇八款之法無論巳所代之分數如何必能得其積分所以可用亥代之則

$$亥=\frac{卯乙(巳丄一)}{(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}}$$

$$戊=天^{寅丅卯}$$

由此得

$$禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}=\frac{天^{寅丅卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}}{卯乙(巳丄一)}丅\frac{寅丅卯}{卯乙(巳丄一)}禾天^{寅丅卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}$$

惟因一

$$禾天^{寅丅卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}=$$

$$禾天^{寅丅卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}(甲丄乙天^{卯})=甲禾天^{寅丅卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}丄乙禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$$

以此代入前式中而將其 $禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 之同數各項聚而化之卽得㽅式如左

㽅式

$$禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}=\frac{天^{寅丅卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}}{乙(巳卯丄寅)}丅\frac{甲(寅丅卯)}{乙(巳卯丄寅)}禾天^{寅丅卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$$

觀此易知凡求 $天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 之積分者可變之爲求 $天^{寅丅卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 式之積分所以此式又可變爲求 $天^{寅丅二卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 之積分法將 $寅丅卯$ 代㽅式中之寅再將其 $寅丅卯$ 變爲 $寅丅二卯$ 則能用 $禾天^{寅丅三卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 而求 $禾天^{寅丅二卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 順是以下倣此類推

總言之若以未代其變化之次數則至末得 $禾天^{寅丅未卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 而其末式必爲

$$禾天^{寅丅(未丅一)卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}=\frac{乙[巳卯丄寅丅(未丅一)卯]}{天^{寅丅未卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}}丅\frac{乙[巳卯丄寅丅(未丅一)卯]}{甲(寅丅未卯)}禾天^{寅丅未卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$$

從此可知寅若爲卯所可度則能用代數之式明其 $禾天^{卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 之積分因遞次變化之至末矣之積分式必以 $寅丅未卯=〇$ 爲天之方數故也

用茲款之法所求得之積分與用第一百三十三款之法所得者無異

第一百三十五款

又有一種變化之法可將其括弧外之指數遞損其一數

用此法惟須知其

$$禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}=禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}(甲丄乙天^{卯})$$
$$=甲禾天^{寅丅一}(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}丄乙禾天^{寅丄卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}$$

如將 (呷) 式中之寅變爲 $寅丄卯$ 又將其巳變爲 $巳丅一$ 則其式變爲

$$禾天^{寅丄卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}=\frac{乙(巳卯丄寅)}{天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}丅甲寅禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}}$$

以此代入前式即得 (吃) 式如左

(吃) 式

$$禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}=\frac{巳卯丄寅}{天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}}丄\frac{巳卯丄寅}{巳卯甲}禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}$$

依此式可令其巳遞減一數 若與 (呷) 式並

用之可令 $禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 藉 $禾天^{寅丄未卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅申}$ 而得其未卯爲$寅丅$內所能有卯之最大之倍數其申爲巳所能有之最大整數

如有式 $禾天^{七}彳天(甲丄乙天^{三})^{\frac{三}{二}}$ 可依呷式遞次消化之爲 $禾天^{四}彳天(甲丄乙天^{三})^{\frac{三}{二}}$ $禾天彳天(甲丄乙天^{三})^{\frac{三}{二}}$ 又依吃式消化其 $禾天彳天(甲丄乙天^{三})^{\frac{三}{二}}$ 爲 $禾天彳天(甲丄乙天^{三})^{\frac{三}{一}}$ $禾天彳天(甲丄乙天^{三})^{\frac{三}{一}}$

第一百三十六款　從以上兩款之式易知其寅與卯若爲負數則不能依呷吃兩式而求其積分因其指數必反增故也然若反其術而用之亦未嘗不可通

卽如從呷式得

$$禾天^{寅丅卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}=\frac{甲(寅丅卯)}{天^{寅丅卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}}丅\frac{甲(寅丅卯)}{乙(寅丄卯巳)}禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$$

以$寅丄卯$代其寅則得哂式如左

哂式

$$禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}=\frac{甲寅}{天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}}丅\frac{甲寅}{乙(寅丄卯巳丄卯)}禾天^{寅丄卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$$

依此式則能減其括弧外變數之指數因如令$丅寅$代其$寅丄卯丅一$中之寅則爲$丅寅丄卯丅一$故也

若欲反其吃式可令

$$禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}=丅\frac{巳卯甲}{天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}}丄\frac{巳卯甲}{寅丄卯巳丄卯}禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$$

以$巳丄一$代其巳則得叮式如左

（丁）式

$$\int 天^{寅-1}d天(甲+乙天^{卯})^{巳}=-\frac{天^{寅}(甲+乙天^{卯})^{巳+1}}{卯甲(巳+1)}+\frac{寅+卯+卯巳}{卯甲(巳+1)}\int 天^{寅-1}d天(甲+乙天^{卯})^{巳+1}$$

依此式則能減其括弧之指數因巳若爲負數則其$巳$能變爲$巳+1$故也

第一百三十七款

如有式$\int\frac{天^{寅-1}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}$其寅爲正整之數令

$甲=一$

$乙=-一$

$卯=二$

$巳=-\frac{1}{2}$

即可得

$$\int\frac{天^{寅-1}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=-\frac{天^{寅-2}\sqrt{1-天^{2}}}{寅-1}+\frac{寅-2}{寅-1}\int\frac{天^{寅-3}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}$$

若以寅代其$寅-1$則得

$$\int\frac{天^{寅}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=-\frac{天^{寅-1}\sqrt{1-天^{2}}}{寅}+\frac{寅-1}{寅}\int\frac{天^{寅-2}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}$$

如令寅之各同數爲遞加之奇數則

$$\int\frac{天d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=-\sqrt{1-天^{2}}+常數$$

$$\int\frac{天^{3}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=-\frac{1}{3}天^{2}\sqrt{1-天^{2}}+\frac{2}{3}\int\frac{天d天}{\sqrt{1-天^{2}}}$$

$$\int\frac{天^{5}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=-\frac{1}{5}天^{4}\sqrt{1-天^{2}}+\frac{4}{5}\int\frac{天^{3}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}$$

$$\int\frac{天^{7}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=-\frac{1}{7}天^{6}\sqrt{1-天^{2}}+\frac{6}{7}\int\frac{天^{5}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}$$

……從此得

$$\int\frac{天^{3}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=-\left(\frac{1}{3}天^{2}+\frac{2}{1\cdot3}\right)\sqrt{1-天^{2}}$$

$$\int\frac{天^{5}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=-\left(\frac{1}{5}天^{4}+\frac{4}{3\cdot5}天^{2}+\frac{2\cdot4}{1\cdot3\cdot5}\right)\sqrt{1-天^{2}}$$

$$\int\frac{天^{7}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=-\left(\frac{1}{7}天^{6}+\frac{6}{5\cdot7}天^{4}+\frac{4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}天^{2}+\frac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5\cdot7}\right)\sqrt{1-天^{2}}$$

……則其求各積分之法自明又每式必加一常數

若寅之各同數爲偶則

$$\int\frac{天^{2}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=-\frac{1}{2}天\sqrt{1-天^{2}}+\frac{1}{2}\int\frac{d天}{\sqrt{1-天^{2}}}$$

$$\int\frac{天^{4}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=-\frac{1}{4}天^{3}\sqrt{1-天^{2}}+\frac{3}{4}\int\frac{天^{2}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}$$

$$\int\frac{天^{6}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=-\frac{1}{6}天^{5}\sqrt{1-天^{2}}+\frac{5}{6}\int\frac{天^{4}d天}{\sqrt{1-天^{2}}}$$

……依第二十三款之理以此各式從$\int\frac{d天}{\sqrt{1-天^{2}}}=正弦^{-1}天+常數$之例令所有天爲正弦之弧

爲呷卽得

$$禾\frac{\sqrt{一-天^{二}}}{伕}=呷+常數$$

$$禾\frac{\sqrt{一-天^{二}}}{天^{二}伕}=-\frac{二}{一}天\sqrt{一-天^{二}}+\frac{二}{一}呷+常數$$

$$禾\frac{\sqrt{一-天^{二}}}{天^{四}伕}=-\left(\frac{四}{一}天^{三}+\frac{二\cdot四}{一\cdot三}天\right)\sqrt{一-天^{二}}+\frac{二\cdot四}{一\cdot三}呷+常數$$

$$禾\frac{\sqrt{一-天^{二}}}{天^{六}伕}=-\left(\frac{六}{一}天^{五}+\frac{四\cdot六}{一\cdot五}天^{三}+\frac{二\cdot四\cdot六}{一\cdot三\cdot五}天\right)\sqrt{一-天^{二}}+\frac{二\cdot四\cdot六}{一\cdot三\cdot五}呷+常數$$

……

第一百三十八款　前款之式其寅俱爲正數茲款乃論寅爲負數之式

從（丙）式得

$$禾\frac{\sqrt{一-天^{二}}}{天^{寅}伕}=-\frac{寅}{天^{寅-一}\sqrt{一-天^{二}}}+\frac{寅}{寅-一}禾\frac{\sqrt{一-天^{二}}}{天^{寅-二}伕}$$

以$-寅$代其$-寅-一$則變爲

$$禾\frac{天^{寅}\sqrt{一-天^{二}}}{伕}=\frac{(寅-一)天^{寅-一}}{-\sqrt{一-天^{二}}}+\frac{寅-一}{寅-二}禾\frac{天^{寅-二}\sqrt{一-天^{二}}}{伕}$$

惟此式中之寅不能等于一因寅$=$一則其分母爲〇而其倍數必爲無窮之故也

寅等于一之式可從第一百三十款之例得

$$禾\frac{天\sqrt{一-天^{二}}}{伕}=+訥\frac{天}{一-\sqrt{一-天^{二}}}+常數$$

再令

寅$=$三

寅$=$五

……

卽得

$$禾\frac{天^{三}\sqrt{一-天^{二}}}{伕}=-\frac{二天^{二}}{\sqrt{一-天^{二}}}+\frac{二}{一}禾\frac{天\sqrt{一-天^{二}}}{伕}$$

$$禾\frac{天^{五}\sqrt{一-天^{二}}}{伕}=-\frac{四天^{四}}{\sqrt{一-天^{二}}}+\frac{四}{三}禾\frac{天^{三}\sqrt{一-天^{二}}}{伕}$$

$$禾\frac{天^{七}\sqrt{一-天^{二}}}{伕}=-\frac{六天^{六}}{\sqrt{一-天^{二}}}+\frac{六}{五}禾\frac{天^{五}\sqrt{一-天^{二}}}{伕}$$

……

再令

寅$=$二

寅$=$四

寅$=$六

……

卽得

$$禾\frac{天^{二}\sqrt{一-天^{二}}}{伕}=-\frac{天}{\sqrt{一-天^{二}}}+常數$$

$$禾\frac{天^{四}\sqrt{一-天^{二}}}{伕}=-\frac{三天^{三}}{\sqrt{一-天^{二}}}+\frac{三}{二}禾\frac{天^{二}\sqrt{一-天^{二}}}{伕}$$

$$禾\frac{天^{六}\sqrt{一-天^{二}}}{伕}=-\frac{五天^{五}}{\sqrt{一-天^{二}}}+\frac{五}{四}禾\frac{天^{四}\sqrt{一-天^{二}}}{伕}$$

……

此款所論之各式皆可如前款之法得其級數之式以對數及代數明其積分

以級數求積分法

第一百三十九款

如將 $函(呹)$ 詳爲級數，則其 $禾呹伏$ 易求得之，因祇須將級數之各項用第一百〇四款之法一一求其積分故也。

即如 $呹=呷天^{寅}丄吆天^{寅丄卯}丄哂天^{寅丄二卯}丄叮天^{寅丄三卯}丄\cdots\cdots$ 兩邊俱以伏乘之，各項求積分得

$$禾呹伏=\frac{呷天^{寅丄一}}{寅丄一}丄\frac{吆天^{寅丄卯丄一}}{寅丄卯丄一}丄\frac{哂天^{寅丄二卯丄一}}{寅丄二卯丄一}丄\cdots\cdots丄常數$$

若其呹詳得之級數中有任一項之形爲 $\frac{呲}{天}$，則此項之積分數依第二十款之例必爲 $呲訥天$。

茲設數題于下，以明本款之法。

一題　設微分式爲 $\frac{伏}{甲丄天}$，欲求其積分，則依第二十款之例，已知其級數中有 $甲丄天$ 之訥對。惟依除法則得

$$\frac{一}{甲丄天}=\frac{一}{甲}丅\frac{天}{甲^{二}}丄\frac{天^{二}}{甲^{三}}丅\frac{天^{三}}{甲^{四}}丄\cdots\cdots$$

以伏偏乘之而求其積分，則得

$$禾\frac{伏}{甲丄天}=\frac{天}{甲}丅\frac{天^{二}}{二甲^{二}}丄\frac{天^{三}}{三甲^{三}}丅\frac{天^{四}}{四甲^{四}}丄\cdots\cdots丄呐$$

此級數能明其積分之公式，而不論其專式內之用法。如令其級數爲明 $訥(甲丄天)$，即得

$$訥(甲丄天)=\frac{天}{甲}丅\frac{天^{二}}{二甲^{二}}丄\frac{天^{三}}{三甲^{三}}丅\frac{天^{四}}{四甲^{四}}丄\cdots\cdots丄呐$$

其常數呐非爲未定之數，故其天之同數無論如何，必能合于此式之用。如令 $天=〇$，則級數中有天之各項俱不見，而得 $訥甲=呐$。如此則呐之同數已知，所以得

$$訥(甲丄天)=訥甲丄\frac{天}{甲}丅\frac{天^{二}}{二甲^{二}}丄\frac{天^{三}}{三甲^{三}}丅\cdots\cdots$$

此式與第八十六款所得者同。

二題 設有微分式 $\frac{彳天}{一\bot天^{二}}$ 欲以級數明其積分。

則以約法得 $\frac{一}{一\bot天^{二}}=一\top天^{二}\bot天^{四}\top天^{六}\bot\cdots\cdots$ 將此式之兩邊俱以彳天乘之乃如法求各項之積分則得積分之式爲 $禾\frac{彳天}{一\bot天^{二}}=天\top\frac{天^{三}}{三}\bot\frac{天^{五}}{五}\top\frac{天^{七}}{七}\bot\cdots\cdots\bot呐$ 此式若但以代數之法攷之不能得其呐之同數惟從第二十二款之第三式則知 $\frac{彳天}{一\bot天^{二}}$ 爲以天爲切線（半徑爲一）之弧微分式故用 $正切^{\top一}天$ 以明其級數則 $正切^{\top一}天=天\top\frac{天^{三}}{三}\bot\frac{天^{五}}{五}\top\frac{天^{七}}{七}\bot\cdots\cdots\bot呐$ 求其呐之定同數之法可令 $正切^{\top一}天$ 及天爲任何相配之各同數而攷之惟因 $正切^{\top一}天=〇$ 則 $天=〇$ 所以知級數中有天之各項不見之時必得 $〇=〇\bot呐$ 故知其常數呐必等于〇

三題 欲以天之斂級數明 $\frac{彳天}{一\bot天^{二}}$ 之積分（因前題之解法其所得之級數中天之各方漸增大而爲發級數惟此式亦可以漸減之項明之故更設此題）

先以約法得 $\frac{一}{天^{二}\bot一}=\frac{一}{天^{二}}\top\frac{一}{天^{四}}\bot\frac{一}{天^{六}}\top\frac{一}{天^{八}}\bot\cdots\cdots$ 則 $禾\frac{彳天}{天^{二}\bot一}=\top\frac{一}{天}\bot\frac{一}{三天^{三}}\top\frac{一}{五天^{五}}\bot\cdots\cdots\bot呐$ 卽 $正切^{\top一}天=\top\frac{一}{天}\bot\frac{一}{三天^{三}}\top\frac{一}{五天^{五}}\bot\cdots\cdots\bot呐$ 此式中若令 $天=〇$ 則不能攷得其呐之同數因 $弧=〇$ 則 $天=〇$ 而級數之各項皆爲無窮之故惟令其弧爲象限則 $弧=\frac{周}{二}$ 而天爲無窮其級數之各項俱爲〇而 $\frac{周}{二}=呐$ 所以得 $正切^{\top一}天=\frac{周}{二}\top\frac{一}{天}\bot\frac{一}{三天^{三}}\top\frac{一}{五天^{五}}\bot\cdots\cdots$

四題 設有正弦爲天之弧微分式$\frac{彳天}{\sqrt{一-天^{二}}}$欲以級數之法求其積分。

則依二項例得

$$\frac{一}{\sqrt{一-天^{二}}}=(一-天^{二})^{-\frac{一}{二}}=一+\frac{一}{二}天^{二}+\frac{一\cdot三}{二\cdot四}天^{四}+\frac{一\cdot三\cdot五}{二\cdot四\cdot六}天^{六}+\frac{一\cdot三\cdot五\cdot七}{二\cdot四\cdot六\cdot八}天^{八}+\cdots\cdots$$

所以得

$$正弦^{-一}天=\int\frac{彳天}{\sqrt{一-天^{二}}}=天+\frac{一天^{三}}{二\cdot三}+\frac{一\cdot三天^{五}}{二\cdot四\cdot五}+\frac{一\cdot三\cdot五天^{七}}{二\cdot四\cdot六\cdot七}+\cdots\cdots$$

此式中令$弧=〇$。則$正弦=〇$。而其左右兩邊之項同時俱變爲〇故不必有常數配之自能相等

第一百四十款 凡用級數以求積分其意謂積分之眞同數不能得則可用此法以求其略近之數也所以必用各法求得數種級數而擇其最易密合者用之

凡發級數其天之指數爲正則其方數恆增除其天本爲甚微之數以外皆不合于用(如前款二題所得者是也)惟其天之指數若爲負者即爲斂級數除天爲大數以外亦不合于用

第一百四十一款 用級數之法以求積分不過欲查得一式能分爲多項而各求其積分耳雖所分之各項其形與$呷天^{\frac{寅}{卯}}彳天$爲一類者亦可用之蓋無論其各項之形如何祇須其化得之級數能以代數對數或平圓之弧明之者皆可用之總以其函數之同數最易知而得數易密者爲佳因其所用之若干項和數與其全積分數所差極微故可用也

凡必用級數以求積分者因其全積分式之性情不能以有窮之項明之故不得已而借代數對數或平圓弧各式以無窮級數明之然則級數求積分之法必爲他法所不能得者方可用此法也

如能將各種函數與變數相配以其各同數列爲表則用以求積分最便惟因造此表之工夫極大卷帙必多而用此表之時甚少所以無人爲之凡立成之表能省人推算之工者除八線表之外惟有對數表而已

第一百四十二款 求對函數微分式之積分

如有微分式$吧彳天(訥天)^{卯}$欲求其積分其吧爲天之對函數則可

用 禾戊彳亥＝戊亥丅禾亥彳戊 之例令 戊＝（訥天）^卯 則 彳戊＝卯（訥天）^卯丅一 彳天/天 又令 彳亥＝吧彳 因欲從簡易故可令其

禾吧彳＝吧卯 則 禾吧彳（訥天）^卯＝吧卯（訥天）^卯丅卯禾（訥天）^卯丅一 彳天/天 如將其 禾 彳天/天 吧卯 以寅代之則為 禾 彳天/天 吧卯（訥天）^卯＝寅（訥天）^卯丅（卯丅一）禾 彳天/天（訥天）^卯丅二 寅 依此法屢

變化之則可令其對數之指數遞損一數而藉同類之

式得其積分

設有 吧＝天^寅 即可得 禾天^寅彳天（訥天）^卯＝天^寅丄一/寅丄一（訥天）^卯丅卯/寅丄一 禾（訥天）^卯丅一 天^寅彳天 如是遞變之可得 禾天^寅彳天（訥天）^卯＝天^寅丄一［（訥天）^卯/寅丄一 丅 卯（訥天）^卯丅一/（寅丄一）^二 丄 卯（卯丅一）（訥天）^卯丅二/（寅丄一）^三 丅……］丙 觀此式易

知其卯若為整正之數則其級數恆能有窮

一百四十三款

卯若為負整數則用 禾戊彳亥＝戊亥丅禾亥彳戊 其對數之方必增大如 禾 吧彳/（訥天）^卯 天 若

令 吧天＝戊 彳天/（訥天）^卯 天＝彳亥 則 亥＝丅一/（卯丅一）（訥天）^卯丅一 而其 禾 吧彳/（訥天）^卯＝丅吧天/（卯丅一）（訥天）^卯丅一 丄 一/卯丅一 禾 彳（吧天）/（訥天）^卯丅一 設 吧＝天^寅 則上式又可變

為 禾 天^寅彳天/（訥天）^卯＝丅天^寅丄一/（卯丅一）（訥天）^卯丅一 丄 寅丄一/卯丅一 禾 天^寅彳天/（訥天）^卯丅一 如是屢變之至末必可藉 禾 天^寅彳天/訥天 而得其積分再

令 天^寅丄一＝人 則 訥天＝訥人/寅丄一 天^寅彳天＝彳人/寅丄一 所以 天^寅彳天/訥天＝彳人/訥人 此為最奇之越函數其積

分除用無窮級數之外無他法能明之

求指函數微分式之積分
法分求其積分

求指函數微分式之積分

第一百四十四款

從第十九款已知 $彳(甲^{天})=訥(甲)甲^{天}彳天$ 所以 $禾甲^{天}彳天=\frac{甲^{天}}{訥甲}丄丙$ 惟因 $彳天=\frac{彳(甲^{天})}{甲^{天}訥甲}$ 所以咳若為 $甲^{天}$ 之任何對函數則令 $甲^{天}=戊$ 卽得 $咳彳天=\frac{咳彳戊}{戊訥甲}$ 若就戊而論之此式有代數之形如令 $咳=\frac{甲^{天}}{一丄甲^{二天}}$ 卽可得 $禾\frac{甲^{天}彳天}{一丄甲^{二天}}=禾\frac{彳戊}{訥甲(一丄戊^{二})}$ 此式之級數可依以上各款之法求之

設人為天之任何函數令戊為其 $訥=一$ 之數則 $彳(人戊^{天})=戊^{天}彳人丄戊^{天}人彳天$ 所以其 $禾戊^{天}彳天\left(人丄\frac{彳人}{彳天}\right)=人戊^{天}丄丙$ 若令 $人=天^{三}丅一$ 則 $\frac{彳人}{彳天}=三天^{二}$ 而 $禾戊^{天}彳天(三天^{二}丄天^{三}丅一)=戊^{天}(天^{三}丅一)丄丙$

第一百四十五款 其餘各式可用第一百三十四款之法分求其積分

設有微分式 $天^{卯}甲^{天}彳天$ 欲求其積分則可從 $禾戊彳亥=戊亥丅禾亥彳戊$ 式之例令其 $戊=天^{卯}$ $彳亥=甲^{天}彳天$ 卽得 $禾甲^{天}天^{卯}彳天=\frac{甲^{天}天^{卯}}{訥甲}丅\frac{卯}{訥甲}禾甲^{天}天^{卯丅一}彳天$ 再將其 $甲^{天}天^{卯丅一}彳天$ 以同法遞變若干次至末則得

$$禾甲^{天}天^{卯}彳天=甲^{天}\left[\frac{天^{卯}}{訥甲}丅\frac{卯天^{卯丅一}}{(訥甲)^{二}}丄\frac{卯(卯丅一)天^{卯丅二}}{(訥甲)^{三}}\cdots\cdots丄丅\frac{一\cdot二\cdot三\cdots\cdots卯}{(訥甲)^{卯丄一}}\right]丄丙$$

卽所求之式也

第一百四十六款 若卯為負指數則可依同法以天之

指數增之故可從 $禾戌彳亥=戌亥\top禾亥彳戌$ 式之例令 $戌=甲^{天}$ $彳亥=天^{卯}彳天$ 即可得 $禾\frac{天^{卯}}{甲^{天}}彳天=\frac{(卯\top一)天^{卯}}{\top甲^{天}}\perp\frac{卯\top一}{訥甲}禾\frac{天^{卯\top一}}{甲^{天}}彳天$ 如

是屢變至末則 $禾\frac{天^{卯}}{甲^{天}}彳天$ 可藉 $禾\frac{天}{甲^{天}}彳天$ 而得若令 $甲^{天}=人$ 則 $天訥甲=訥人$ $天=\frac{訥甲}{訥人}$

$彳天=\frac{訥甲}{一}\times\frac{人}{彳人}$ 所以 $\frac{天}{甲^{天}}彳天=\frac{訥甲}{一}\times\frac{訥人}{彳人}$ $禾\frac{天}{甲^{天}}彳天=\frac{訥甲}{一}禾\frac{訥人}{彳人}$ 求此二積分之同數其難大略相同算學家曾經極費心思求其解法大約除用無窮級數之外無他法可得其同數

第一百四十七款 卯若爲分指數則可用以上各法將其天之指數變之得一分數在○與⊥一丅一之間乃用無窮之級數求其積分

凡求 $禾\frac{天^{卯}}{甲^{天}}彳天$ 之積分無論用何法皆可用 $吧甲^{天}彳天$ 代之惟其吧必爲天之任何函數

求圓函數角函數微分式之積分

第一百四十八款 凡有一箇變數之圓函數微分或角函數微分其求積分有數法

第一法以天爲正弦之弧令 $正弦天=人$ 則 $餘弦天=\sqrt{一\top人^{二}}$ $彳天=\frac{\sqrt{一\top人^{二}}}{彳人}$ 而 $正弦^{寅}天餘弦^{卯}天彳天=人^{寅}(一\top人^{二})^{\frac{卯\top一}{二}}彳人$ 若其卯爲奇數則依二項之法變化而得之式其方根之號可不見 若其寅爲奇數而括弧外人之指數加一與括弧內人之指數相等者則合于第一百三十三款之第一例而其微分式可變爲實函數 若寅卯俱爲偶數則合于一百三十三款之第二例而其積分亦可求

題 設其微分式爲 $正弦^{三}天彳天$ 欲求其積分則令 $正弦天=人$ 即可變其微分式爲 $\frac{人^{三}彳人}{\sqrt{一\top人^{二}}}$ 乃依第一百三十七款之法求其積分得 $禾\frac{人^{三}彳人}{\sqrt{一\top人^{二}}}=\top\frac{一}{三}餘弦天(二\perp正弦^{二}天)\perp丙$

第一百四十九款

第二法其正弦之方或餘弦之方可以化為級數而其級數之各項以正弦之弧或餘弦之弧為乘數者則其各項之形必如

$$\text{伏餘弦子天}$$

或

$$\text{伏正弦子天}$$

惟因

$$\text{禾伏餘弦子天} = \frac{\text{子}}{\text{一}}\text{正弦子天} \text{丄} \text{丙}$$

$$\text{禾伏正弦子天} = \text{丅}\frac{\text{子}}{\text{一}}\text{餘弦子天} \text{丄} \text{丙}$$

故其積分易得

一題　設其微分式為 $\text{伏餘弦}^{\text{五}}\text{天}$ 欲求其積分

則可從代數術第二百五十八款得

$$\text{餘弦}^{\text{五}}\text{天} = \frac{\text{一六}}{\text{一}}(\text{餘弦五天} \text{丄} \text{五餘弦三天} \text{丄} \text{一〇餘弦天})$$

所以求得其積分式為

$$\text{禾伏餘弦}^{\text{五}}\text{天} = \frac{\text{八〇}}{\text{一}}\text{正弦五天} \text{丄} \frac{\text{四八}}{\text{五}}\text{正弦三天} \text{丄} \frac{\text{八}}{\text{五}}\text{正弦天} \text{丄} \text{丙}$$

此為常用之法因任幾倍弧之正弦餘弦比正弦餘弦之方其數更易得也

二題　設其微分式為 $\text{伏餘弦}^{\text{二}}\text{天正弦}^{\text{三}}\text{天}$ 欲求其積分

則可從代數術第二百六十款之式得

$$\text{餘弦}^{\text{二}}\text{天正弦}^{\text{三}}\text{天} = \frac{\text{一六}}{\text{一}}(\text{丅正弦五天} \text{丄} \text{正弦三天} \text{丄} \text{二正弦天})$$

以伏乘之而求其積分得

$$\text{禾伏餘弦}^{\text{二}}\text{天正弦}^{\text{三}}\text{天} = \frac{\text{八〇}}{\text{一}}\text{餘弦五天} \text{丅} \frac{\text{四八}}{\text{一}}\text{餘弦三天} \text{丅} \frac{\text{八}}{\text{一}}\text{餘弦天} \text{丄} \text{丙}$$

第一百五十款

第三法已于代數術第二百七十款內言戊為訥對之

底則 $\text{天餘弦}=\dfrac{\text{二}}{\text{戊}^{\text{天}\sqrt{\text{丅一}}}\,\text{丄}\,\text{戊}^{\text{丅天}\sqrt{\text{丅一}}}}$ $\text{天正弦}=\dfrac{\text{二}\sqrt{\text{丅一}}}{\text{戊}^{\text{天}\sqrt{\text{丅一}}}\,\text{丅}\,\text{戊}^{\text{丅天}\sqrt{\text{丅一}}}}$ 從此式能將圓函數微分式內有正弦餘弦爲指數者變爲有指函數與對函數之微分則可用第一百四十款至一百四十五款之各法求其積分

第一百五十一款

第四法凡微分式如 $\text{正弦}^{\text{寅}}\text{天}\,\text{餘弦}^{\text{卯}}\text{天}\,\text{彳天}$ 者求其積分之法能將其式變爲他微分式令正弦餘弦之指數爲更小之數

如依 $\text{禾戌彳亥}=\text{戌亥}\,\text{丅}\,\text{禾亥彳戌}$ 之例令 $\text{戌}=\text{正弦}^{\text{寅丅一}}\text{天}$ $\text{彳亥}=\text{彳天正弦天餘弦}^{\text{卯}}\text{天}$ 卽得 $\text{亥}=\text{丅}\dfrac{\text{卯丄一}}{\text{餘弦}^{\text{卯丄一}}\text{天}}$ 故其 $\text{禾彳天正弦}^{\text{寅}}\text{天餘弦}^{\text{卯}}\text{天}=\text{丅}\dfrac{\text{卯丄一}}{\text{正弦}^{\text{寅丅一}}\text{天}}\text{餘弦}^{\text{卯丄一}}\text{天}\,\text{丄}\dfrac{\text{卯丄一}}{\text{寅丅一}}\text{禾彳天餘弦}^{\text{卯丄二}}\text{天正弦}^{\text{寅丅二}}\text{天}$ 此式中之 $\text{餘弦}^{\text{卯丄二}}\text{天}$ 若以其同數 $\text{餘弦}^{\text{卯}}\text{天}(\text{一丅正弦}^{\text{二}}\text{天})$ 代之而移其項則得

$$\text{禾彳天正弦}^{\text{寅}}\text{天餘弦}^{\text{卯}}\text{天}=\text{丅}\dfrac{\text{寅丄卯}}{\text{正弦}^{\text{寅丅一}}\text{天餘弦}^{\text{卯丄一}}\text{天}}\,\text{丄}\dfrac{\text{寅丄卯}}{\text{寅丅一}}\text{禾彳天正弦}^{\text{寅丅二}}\text{天餘弦}^{\text{卯}}\text{天}$$

爲(角)式

若將所設之式化爲兩箇乘數如 $\text{彳天餘弦天正弦}^{\text{寅}}\text{天}$ 與 $\text{餘弦}^{\text{卯丅一}}\text{天}$ 而依前法變之則可得

$$\text{禾彳天正弦}^{\text{寅}}\text{天餘弦}^{\text{卯}}\text{天}=\dfrac{\text{寅丄卯}}{\text{正弦}^{\text{寅丄一}}\text{天餘弦}^{\text{卯丅一}}\text{天}}\,\text{丄}\dfrac{\text{寅丄卯}}{\text{卯丅一}}\text{禾彳天正弦}^{\text{寅}}\text{天餘弦}^{\text{卯丅二}}\text{天}$$

爲(亢)式

觀以上兩式其(角)式能將正弦之指數遞變小其(亢)式能將餘弦之指數遞變小若其寅與卯爲正整之數則

將角九兩式迭用之可得其積分

如有

$$禾伏正弦^{三}天餘弦^{二}天 = 丅\frac{五}{一}正弦^{二}天餘弦^{三}天 丄 \frac{五}{二}禾伏正弦天餘弦^{二}天$$

則

$$禾伏正弦天餘弦^{二}天 = \frac{三}{一}正弦^{二}天餘弦天 丄 \frac{三}{一}禾伏正弦天$$

惟因

$$禾伏正弦天 = 丅\frac{三}{一}餘弦天 丄 丙$$

所以得

$$禾伏正弦^{三}天餘弦^{二}天 = 餘弦天\left(丅\frac{五}{一}正弦^{二}天餘弦^{二}天 丄 \frac{一五}{三}正弦^{一}天 丅 \frac{四五}{二}\right) 丄 丙$$

第一百五十二款

其寅與卯若為負指數則必改其公式法將角式之卯變為$丅卯$即得

$$禾\frac{餘弦^{卯}天}{伏正弦^{寅}天} = 丅\frac{(寅丅卯)餘弦^{卯丄一}天}{正弦^{寅丅一}天} 丄 \frac{寅丅卯}{寅丅一}禾\frac{餘弦^{卯}天}{伏正弦^{寅丅二}天}$$

為氐式

依此式遞變之則所求之積分可藉$\frac{餘弦^{卯}天}{伏正弦天}$一或$\frac{餘弦^{卯}天}{伏}$二之積分而得視寅之奇偶而異

如令$餘弦天 = 人$則一式變為$丅人^{卯}伏$而其積分易得欲求其二式之積分在下款明之

若將公式九令其指數卯變為負又令其右邊之數為此邊獨有之項變其卯為$丅卯$二謂令其右邊之指數卯獨變而左邊不變也則得房式如左

如

$$禾\frac{餘弦^{卯}天}{伏正弦^{寅}天} = \frac{(卯丅一)餘弦^{卯丅一}天}{正弦^{寅丅一}天} 丅 \frac{卯丅一}{寅丅一}禾\frac{餘弦^{卯丅二}天}{伏正弦^{寅}天}$$

為房式

依此式遞變之則所求之積分可藉$伏正弦^{寅}天$一或$\frac{餘弦天}{伏正弦^{寅}天}$二而

得視卯之奇偶而異。其㊀式可依㊊式求其積分。其㊂式求積分之法俟後詳解之。

第一百五十三款　若寅或卯等于〇，即得

$$\text{禾伕正弦}^{\text{寅}}\text{天}=\frac{\text{寅}}{\text{丅餘弦天正弦}^{\text{寅丅一}}\text{天}}\text{丄}\frac{\text{寅}}{\text{寅丅一}}\text{禾伕正弦}^{\text{寅丅二}}\text{天}$$

$$\text{禾伕餘弦}^{\text{卯}}\text{天}=\frac{\text{卯}}{\text{正弦天餘弦}^{\text{卯丅一}}\text{天}}\text{丄}\frac{\text{卯}}{\text{卯丅一}}\text{禾伕餘弦}^{\text{卯丅二}}\text{天}$$

$$\text{禾}\frac{\text{正弦}^{\text{寅}}\text{天}}{\text{伕}}=\frac{(\text{寅丅一})\text{正弦}^{\text{寅丅一}}\text{天}}{\text{丅餘弦天}}\text{丄}\frac{\text{寅丅一}}{\text{寅丅二}}\text{禾}\frac{\text{正弦}^{\text{寅丅二}}\text{天}}{\text{伕}}$$

$$\text{禾}\frac{\text{餘弦}^{\text{卯}}\text{天}}{\text{伕}}=\frac{(\text{卯丅一})\text{餘弦}^{\text{卯丅一}}\text{天}}{\text{正弦天}}\text{丄}\frac{\text{卯丅一}}{\text{卯丅二}}\text{禾}\frac{\text{餘弦}^{\text{卯丅二}}\text{天}}{\text{伕}}$$

第一百五十四款　若其正弦餘弦之指數皆為負，可將其分子以 $\text{餘弦}^{\text{二}}\text{天丄正弦}^{\text{二}}\text{天}=\text{一}$ 乘之，則得

$$\text{禾}\frac{\text{正弦}^{\text{寅}}\text{天餘弦}^{\text{卯}}\text{天}}{\text{伕}}=\text{禾}\frac{\text{正弦}^{\text{寅丅二}}\text{天餘弦}^{\text{卯}}\text{天}}{\text{伕}}\text{丄}\text{禾}\frac{\text{正弦}^{\text{寅}}\text{天餘弦}^{\text{卯丅二}}\text{天}}{\text{伕}}$$

此各積分有 正弦天 或 餘弦天 在其分母內，因 $\text{寅}=\text{卯}$，而 $\text{正弦天餘弦天}=\frac{\text{二}}{\text{一}}\text{正弦二天}$，故可令 $\text{二天}=\text{人}$，而變其積分之式為前款中第三式之形。

第一百五十五款　茲款特設數種簡要之題，以畢圓函數微分中求積分之事。

一題　設有微分式如 $\frac{\text{正弦天}}{\text{伕}}$，欲求其積分。

則因 $\text{正弦天}=\text{二正弦}\frac{\text{二}}{\text{天}}\text{餘弦}\frac{\text{二}}{\text{天}}$，所以

$$\frac{\text{正弦天}}{\text{伕}}=\frac{\text{二正弦}\frac{\text{二}}{\text{天}}\text{餘弦}\frac{\text{二}}{\text{天}}}{\text{伕}}=\frac{\text{二}}{\text{一}}\times\frac{\text{正切}\frac{\text{二}}{\text{天}}}{\text{伕正割}^{\text{二}}\frac{\text{二}}{\text{天}}}=\frac{\text{正切}\frac{\text{二}}{\text{天}}}{\text{征切}\frac{\text{二}}{\text{天}}}$$

故求得

$$\text{禾}\frac{\text{正弦天}}{\text{伕}}=\text{訥}\left(\text{正切}\frac{\text{二}}{\text{天}}\right)\text{丄兩}$$

二題　設有微分式如 $\frac{\text{餘弦天}}{\text{伕}}$，欲求其積分。

以 $\frac{\text{二}}{\text{周}}$ 代九十度之弧，令 $\text{天}=\frac{\text{二}}{\text{周}}\text{丅人}$，則其 $\text{伕}=\text{丅伙}$，$\text{餘弦天}=\text{正弦人}$，

$$\text{禾}\frac{\text{餘弦天}}{\text{伕}}=\text{禾}\frac{\text{正弦人}}{\text{丅伙}}=\text{丅訥正切}\frac{\text{二}}{\text{人}}=\text{訥}\frac{\text{正切}\frac{\text{二}}{\text{人}}}{\text{一}}\text{丄兩}$$

惟

因 $\frac{正切三人}{一}=\frac{正切(\frac{周}{四}\top\frac{天}{二})}{一}=正切(\frac{周}{四}\bot\frac{天}{二})$ 所以求得 $禾\frac{餘弦天}{彳天}=訥正切(\frac{周}{四}\bot\frac{天}{二})\bot丙$

以上兩題之積分亦可以他法明之如

$$禾\frac{正弦天}{彳天}=\frac{二}{一}訥\frac{一\bot餘弦天}{一\top餘弦天}\bot丙$$

$$禾\frac{餘弦天}{彳天}=\frac{二}{一}訥\frac{一\bot正弦天}{一\top正弦天}\bot丙$$

是也

三題 設有微分式如 $\frac{正切天}{彳天}$ 欲求其積分 惟因 $禾\frac{正切天}{彳天}=禾\frac{正弦天}{彳天餘弦天}$ 所以其積分之式爲 $訥(正弦天)\bot丙$

四題 設有微分式如 $彳天正切天$ 欲求其積分 則因 $禾\frac{餘弦天}{彳天正弦天}=禾彳天正切天$ 所以其積分之式爲 $訥\frac{餘弦天}{一}\bot丙$

以上各款之法已足備尋常算學中求積分之用故下卷且未暇論積分術中奧賾之理而先將以上之理解明幾何中各種最要之題