

部定大學用書

材料力學

S. Timoshenko 著
G. H. Mac Cullough

王 德 榮 譯

Bought in Formosa
3 June 1947

F13
正中書局印行
國立編譯館出版

部定大學用書
材 料 力 學

S. Timoshenko 著
G. H. MacCullough

王 德 榮 譯

1946



國 立 編 譯 館 出 版
正 中 書 局 印 行

著 者 序

此材料力學教本，爲鐵木生可氏所著材料力學之產物，鐵氏原著共有二卷，上卷論初等題目，下卷論高等者；而本書之編，純爲供美國工程大學及專門學校作大學材料力學教本之用。

在此縮本中，著者恆多方努力，使能保留原書之主要特點，而同時使所論材料，能依循美國人之方法與愛好。有若干材料已重排或已重寫，使易於講授。對於基本原理特加注意，讀者在學習該題目時，宜時時反省基本原理，不可僅以盲目代入公式爲能事。少數公式性質之實在基本者，則用粗體字印之。其他公式初讀者應少用。讀者又宜時時注意學說及公式之應用限度。

書中除所需例題外，復加大量習題，以爲讀者練習之用。在半數以上之習題後，均附有答案，而凡無答案者，則其性質與有答案者相似。各計算均用計算尺計算，其結果恆以三位有效數字表之。本書已加入新例題，大部分之舊圖已重繪及改良。符號及座標軸排列，已稍改變，使大致能合美國之用。記法大體與美國工程標準委員會所規定者相合。

本書所論材料，似較一般大學所用者較廣，如是教師可加取舍，同時可使此書作爲參考之用。凡教材之不適用於初學者，均用小字排之。凡此外加教材，少數高深習題，及解習題所用新見解，均足勉勵有志攻讀高等材料力學之讀者。

(1)

國家圖書館



002566147

本新書之特點，可分述如下：對於簡單靜力不定結構內之張應力及壓應力（包括溫度改變）之求法，甚為注重。合成應力置於本書之前，使可應用其原理，以為討論以後各題目之用。然遇困難時，可稍緩教授。用馬氏圖解決合成應力問題，較用公式更為重視。然此等公式之來由，仍列於後。鉚釘接一項已加入；對於壓器內之接之解法，大體依照美國機械工程師學會所採之法。

在解決梁撓度問題時，並舉二次積分法及面積力矩法，使各法可以單獨應用。在求撓度及求靜力不定反動力時，詳論重疊法，因該法可使許多問題簡單化也。鋼筋混凝土梁問題，依照若干最近教本，不復依靠公式，而恆可用最簡之基本原理解決之。

在討論柱時，敘述一完全之合理分析，此較多少根據經驗法規者為佳。然較常用之經驗公式，仍附於後。又有一章專論應變能理論之要素，及其對於靜力不定問題之應用。最後有一章論機械性質：其中所述者為金屬之疲乏，強度理論及工作應力。

著者竭力勸告讀者，在學習此課時應同時使用結構手冊，至讀者未熟結構課程者，則尤應如是。然此亦非絕對需要者，因解決書中問題所需之結構剖面式樣，均已載於附錄之剖面要素表中矣。

著者感謝許多教本，因表示之方法及所述之教材選擇，多少受其影響也。承唐雷先生及其他同事，批判草稿；克冷先生繪圖，出版者之合作，及他人之多方對於此書之幫助，均特此誌謝。

安阿坡，密芝安

鐵木生司

渥斯脫，麻沙朱色士

麥克司洛

一九三五年，二月

譯 者 序

本書係大彈性學者鐵木生原著，涅斯脫專門學校麥克可洛改編，說理明晰，習題衆多，爲他書所莫及。今特譯成中文，以爲大學材料力學教本之用。

本書專門名詞譯名，係參照下列諸書而來：劉仙洲教授之機械工程名詞，國立編譯館之機械名詞及物理學名詞，及航空委員會之航空用語字典。

本書原著中有若干錯誤，在翻譯時均已更正。

用共軛梁法求梁撓度及斜度，較二次積分法或面積力矩法更爲簡易。該法雖已在 48 節中論及，惟尙嫌太略，在教授時似有補充之必要。

在第八章三力矩定理一節所舉習題 305 之解法中，欲得第二方程式，可在 R_1 之左加一支座 R_0 ，二者間之距離 $l=0$ ，於是應用三力矩定理至 $R_0-R_1-R_2$ ，即得相同結果。如是可不記憶斜度方程式 (99) 或 (102) 矣。

昆明國立清華大學
民國三十年五月

王德榮

目次

第一章

張力及壓力 … … … … … … … … … … … … … 1

緒言——彈性——應力及應變——虎克定律——伸長試驗圖——工作應力——靜力不定問題——熱應力——薄圓環，轉環及冷縮裝配——應力集中。

第二章

合成應力 … … … … … … … … … … … … … 32

簡張力對於剖面斜度之應力變化——在二垂直方向之張力或壓力——互成直角面上切應力間之關係——馬氏圓——由平衡條件所得之平面應力總例之方程式——簡張力例中之應變分析——在二垂直方向之張力或壓力之應變。

第三章

切，鑄釘接及薄壁圓筒內之應力 … … … … … … … … … 53

純切，切應變——切力對於簡單問題之若干應用——受壓容器之鑄釘接之強度——鑄釘鑄接之應力分析——薄壁圓筒及球內之應力——結構工作中之鑄釘接。

第四章

扭轉 … … … … … … … … … … … … … 80

圓軸之扭轉——空心軸之扭轉——矩形剖面軸——螺旋簧。

第五章

切力及彎矩 … … … … … … … … … … … … … 96

梁之定義及載荷之式樣——切力及彎矩之方程式及圖——動載荷。

第 六 章

梁內應力 …… 123

彎曲中之正應力——梁剖面之各種形式——彎曲中之切應力——工字梁內之切應力分布——彎曲中之主應力——組成梁內之應力。

第 七 章

梁之撓度 …… 169

二次積分法——面積力矩法——撓度公式摘要——重疊法——撻剖面梁——切力對於梁撓度之效應——不對稱彎曲。

第 八 章

關於彎曲之靜力不定問題 …… 215

多衍拘束——二次積分法——面積力矩法——重疊法——三力矩定理。

第 九 章

關於梁之特種問題 …… 255

當材料不遵虎克定律時之純彎曲——在屈點外之矩形鋼桿之彎曲——二不同材料之梁——鋼筋混凝土梁——平衡鋼筋——鋼筋混凝土梁內之切應力——曲桿內之彎應力。

第 十 章

由直應力，彎應力及扭應力之組合所生之應力 …… 276

扭轉與軸伸長或壓縮之組合——圓軸內彎曲與扭轉之組合——壓縮或伸長與彎曲之組合——短柱之偏心載荷。

第 十 一 章

柱 …… 294

長柱 歐拉柱公式 —— 他種端條件之歐拉柱公式 —— 設計任何長度壓縮構桿之
 木則 —— 經驗柱公式 —— 柱之偏心載荷。

第十二章

應變能 326

張力之彈性應變能 —— 因撞擊所生之張力 —— 彎曲之彈性應變能 —— 卡斯的龍 定
 理 —— 卡斯的龍 定理對於靜力不定問題之應用。

第十三章

材料之機械性質 346

伸長試驗 —— 壓縮試驗 —— 應變硬化，殘留應力及滯後作用 —— 在高溫度之金屬
 之物理性質 —— 金屬之疲乏 —— 各種強度理論 —— 工作應力。

附表 373

附錄 A 375

常用結構材料之物理性質及工作應力表

附錄 B 380

關於慣矩之定義及定理 —— 常用剖面要素之公式 —— 結構式樣之要素。

英漢索引 391

記 法

凡記法之祇用於一節者，則不復列舉。欲知關於鋼筋混凝土梁所用記法，見 64-66 節。

A = 面積。

b = 寬。

C = 壓力，扭轉剛性。

c = 中立軸至最外纖維之距離。

d = 直徑。

d_i = 內直徑。

E = 楊氏彈性係數。

e = 單位張或壓應變，偏距。

e_x, e_y, e_z = 各在 x, y 及 z 方向內之單位張或壓應變。

F = 總力。

G = 切力之彈性係數或剛性係數。

g = 重力加速度 = 32.2 呎/秒² = 386 吋/秒²

h = 高，距離，垂度，梁深。

hp = 馬力。

I = 面積之慣矩。

I_x, I_y, I_z = 各對於 x, y 及 z 軸之面積慣矩。

I_p = 面積之慣極矩.

I/c = 剖面係數.

k = 應力集中因數; $\sqrt{P/EI}$ 之記號.

l = 長.

\bar{M} = 彎矩.

M_t = 扭力, 扭矩.

N = 正力.

n = 數; 每分鐘轉數; 安全因數.

P = 力, 集中載荷; 環箍張力.

P_{cr} = 柱之臨界載荷.

p = 單位面積上之壓力(在 9 節中, p = 單位圓周長度上之壓力).

Q = 靜或第一力矩.

R_1, R_2, \dots = 反動力.

R = 螺旋簧之平均半徑.

r = 半徑, 外半徑; 迴轉半徑.

r_i = 內半徑.

S = 總應力.

$S = I/c$ = 剖面係數.

s = 單位應力.

s_c = 單位壓, 壓破或承應力.

s_{cr} = 在柱公式內之臨界單位應力.

s_e = 應力完全反復時之持久極限.

s_n = 單位正應力.

s_s = 單位切應力.

s_r = 單位張應力.

$s_{\text{極限}}$ = 極限應力.

s_w = 單位工作應力.

s_x, s_y, s_z = 各在 x, y 及 z 方向內之單位正應力.

s_{xy} = 在 x 及 y 平面上之單位切應力.

$s_{y.p.}$ = 在屈點之應力.

T = 張力; 切線力.

t = 溫度; 厚.

U = 應變能.

V = 縱切力.

v = 速度.

W = 總重量或載荷.

w = 單位長之重量或載荷.

w (註於字下者) = 工作或許可.

$X, Y,$ 等 = 力; 分力.

\bar{x}, \bar{y} = 質心距離.

y = 梁撓度(向上為正).

γ = 單位切應變.

δ = 總伸長或壓縮; 梁撓度(向下為正); 柱之最大撓度.

δ_{st} = 靜力撓度.

ϵ = 膨脹之溫度係數。

θ = 單位長之扭角；彈性曲線之斜度角。

μ = 柏生比。

ρ = 密度；變半徑；曲率半徑。

ϕ = 角；總扭角。



第一章

張力及壓力

1. 緒言。——今考究一簡單槓桿(圖 1)，以定材料力學中所論之題目。倘略去重量所得之加速度，使 P 及 W 二力對於支點之力矩相等，則可求舉重量 W 所需之力 P ；於是此為靜力學問題。設其加速度甚大，則此問題變為動力學問題。然猶有其他問題，必常解答者：即，此槓是否比例適當，能十分堅強乎？受載荷作用後不折斷亦不過度變形乎？又，此槓十分剛硬乎？能舉載荷而彎曲不過大乎？其彎曲之大小若干？欲答此諸問題，必用材料力學所討論之題目。由此討論，可知材料力學在討論作用於彈性體上之諸外力，與此諸外力所生之內力及變形間之關係。

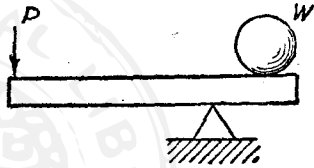


圖 1.

一種接近此諸問題之解法，為純用試驗法。將各種尺寸不同之槓桿逐條試驗，可得一既堅強，又剛硬，且同時材料又經濟之槓桿。然此為遲緩而不經濟之手續。一較良之接近法，在用試驗測定所用材料之若干基本堅強及剛硬性質，於是應用數學分析，以得所需之尺寸，使此槓能具十分強度及剛性。

是以，讀者應注意材料力學中之題目，有二殊為混合之部分：第一，為根據數學分析之部分，第二，為根據材料若干物理性質之試驗測定部分。由此材料力學之二部分，可使工程師設計一合理論而經濟，且所需試驗研究最少之結構。

2. 彈性。——一物體可假定由分子組成，而於諸分子間有力作用着，此分子力能抵抗物體之變形，此變形即外力所欲生者。設此等外力作用於物體，其分子即變位，且此互變位繼續，直至外力與內力間已成平衡。在如此情形，可謂此物體在變形或應變狀態 (state of deformation or strain) 中。在變形時，作用於物體之外力作功，而此功完全或一部分變為應變勢能。錶內之彈簧，為變形物體中勢能積蓄之例。設使物體生變形之力漸漸減少，則此物體完全或一部分回復原形，而在此反變形時，積於物體中之應變勢能，可以外功之形式恢復。

例如，今有一段柱形桿，一端負載荷，如圖 2 所示。在此載荷作用之下，將生若干桿伸長。於是載荷之作用點，將在向下方向中移動，在此移動中，此載荷將作正功。當載荷減少，桿之伸長亦減少，受載荷之桿端向上移動，應變勢能將變為功，使載荷在向上之方向移動。

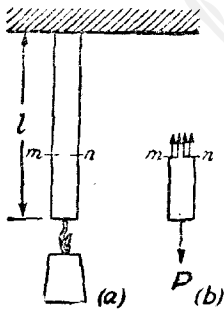


圖 2.

物體在卸載荷後，其回至原形式之性質，稱為彈性 (elasticity)。設在卸載荷後，能完全恢復原形狀，則稱此物體為完全彈性；設卸載荷後，外力所生之變形，不能完全消除，則稱此物體為部分彈性。在完

全彈性體之例中，在變形時外力所作之功，可完全變為應變勢能。在部分彈性體之例中，在變形時外力所作功之一部分，將變為熱而消散，此熱為在不完全彈性變形時，所生於物體中者。由試驗知鋼，木，石等結構材料，在某極限以內（此視材料之性質而定），可作為完全彈性。假定已知作用於結構上之外力，設計者之主要問題，為定結構桿之比例，使在各服務條件下，常近完全彈性體之狀態。祇在此種條件下，方始自結構可得繼續可靠之服務，且構桿內無永久變形（permanent set）。

3. 應力及應變。——在討論內力之大小時，假想在距載荷作用點若干距離處，以一剖面 mn ，將圖 2 之桿，割為二段，而討究此桿下部之平衡（圖 2b）。在此部分之下端，有張力 P 作用。在上端有諸力作用，此諸力代表變形桿上部分對於下部分之作用。此諸力連續分布於剖面之上。力連續分布於平面上之習見之列，為水壓力或蒸汽壓力。在處理此等連續分布力，力強度，即，單位面積上之力，甚為重要。在軸張力之例中，其各纖維之伸長相同，故剖面 mn 上之力分布均勻。由平衡條件，此諸力之和必等於 P （圖 2b），於是，以 s 表示每單位剖面積上之力，得

$$s = \frac{P}{A}, \quad (1)$$

式中 A = 桿之橫剖面積。此單位面積上之力，稱為應力，或單位應力（stress or unit stress）。（註 1）在以下所述，力以磅計，面積以方吋計，

註 1. 有若干工程師將名詞應力或總應力與力同意，而稱單位面積上之力為單位應力或應力強度。在此書中，應力恆表示單位應力，而在易混淆處，則用名詞單位應力，使與總應力區別。

故應力以磅/方吋計。

以上所論之例，其應力等布於剖面上，但在許多例中，其應力非爲等布。在如此例中，欲求作用於剖面 O 點之應力大小，可考究一面積元素 ΔA ，此元素位於剖面內，且含 O 點。作用於此面積元素上之內力，可化至一合力 ΔP 。設繼續縮小面積元素 ΔA ，商 $\Delta P/\Delta A$ 之極限值，爲作用於剖面上 O 點之應力大小，故

$$s = \frac{\Delta P}{\Delta A}. \quad (1a)$$

合力 ΔP 之極限方向，爲應力之方向。在一般之情形中，應力之方向與其作用面積 ΔA 傾斜，此恆分解爲二分力：一垂直於面積之正應力(normal stress)，及一作用於面積 ΔA 平面內之切應力(shearing stress)。當桿受張力，如圖 2 所示，其正應力之作用方向離開剖面 mn ，此稱爲張應力(tensile stress)。設桿受沿軸之壓力，其正應力將向剖面 mn 作用，此應力稱爲壓應力(compressive stress)。在此章中，將討論關於張力及壓力問題；切應力則在以下數章述之。

今回至圖 2 所示之桿，設不考究加力附近之桿部分，則可假定在受張力時，此稜柱形桿之縱纖維之伸長相同，且原爲平面而垂直於桿軸之剖面，在伸長後仍如是。此桿每單位長之伸長， e ，稱爲單位伸長或稱張應變，此可用下式求之

$$e = \frac{\delta}{l}, \quad (2)$$

式中 l = 桿長， δ = 桿之總伸長。同理，設桿受壓力，則 e 稱爲單位收縮或稱壓應變。

4. 虎克定律。——用稜柱形桿(圖 2) 作伸長之直接試驗,對於許多結構材料已創立一關係,即在某極限以內,桿之伸長,與張力成比例。此力與此力所生伸長間之簡單直線關係,係英國科學家虎克(Robert Hooke)在 1678 年所首先創立,因以其名名之。設以材料,長度及剖面積各不同之桿作試驗,可知桿之伸長與張力及桿長成正比,而與剖面積成反比。以代數式表之, $\delta \propto Pl/A$ 或

$$\delta = \frac{1}{E} \cdot \frac{Pl}{A} = \frac{Pl}{AE}, \quad (3)$$

式中 E 為任何已知材料之一常數,此稱為彈性係數 (modulus of elasticity),或稱為楊氏係數,蓋楊氏(Dr. Thomas Young)為定此數之第一人,故以其名名之。

將(1)及(2)式之

$$s = \frac{P}{A} \quad \text{及} \quad e = \frac{\delta}{l}$$

代入(3)式,得

$$s = Ee. \quad (4)$$

以文字表之,由(4)式可得虎克定律之熟悉而簡明之敘述:應力與應變成正比。由此可見, E 為應力與應變間之比例因數,此可直接用下述法定之

$$E = \frac{s}{e} = \frac{\text{應力}}{\text{應變}}. \quad (4a)$$

因應變或單位伸長 e 為一代表二長比(見(2)式)之純數,故由(4a)式

可知彈性係數以應力之同樣單位計之，即以每方吋之磅數計之。在附錄 A 中，載有數種材料之彈性係數平均值。

在稜柱形桿受壓力時，(1)至(4a)諸式亦可適用。於是 δ 將表示總縱收縮， e 壓應變， s 壓應力。大部分材料之壓力彈性係數，與張力彈性係數相同。在計算中，張應力及張應變作為正，壓應力及壓應變為負。

習 題

(各題中所述之物理常數值，稍有不同，因含鐵金屬及非鐵金屬之諸常數，視其形狀，成分，熱處理及機械工作等大有變動。設不載明機械性質之數值，則用附錄 A 所載者。)

1. 鋼桿長 25 吋，設其張應力為 15,000 磅/方吋， $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋，求其總伸長。 答. $\epsilon = 1/80$ 吋。

2. 一圓鋼桿直徑 1 吋，設其單位伸長等於 0.0007， $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋，求其張力。

3. 二桿尺寸相同，設受相同張力之作用後，二桿之單位伸長成 1 與 $15/8$ 之比，求二桿材料彈性係數之比。設第一桿為鋼製，第二桿銅製，其張應力為 10,000 磅/方吋，求二桿之伸長。 答. 1.875; 鋼之 $e = 1/3000$; 銅之 $e = 1/1600$ 。



圖 3.

4. 一稜柱形桿垂直懸掛，求因其本身重量所生之總伸長。

解。——令 A 表示剖面積， ρ 表示單位體積之重量。先以相鄰剖面（見圖 3）自桿上截下長 dx 之元素，而考究其伸長。沿其短長度 dx ，其應力可假定為一定。此應力由於剖面以下桿部分之重量，其值為

$$s = \frac{\rho A x}{A} = \rho x.$$

於是元素之伸長 $d\delta$ 為

$$d\delta = \frac{sdx}{E} = \frac{\rho x dx}{E}$$

總加諸元素之伸長，可得總伸長。於是

$$\delta = \int_0^l \frac{\rho x dx}{E} = \frac{\rho l^2}{2E} = \frac{Wl}{2AE}$$

式中 W 一桿之全重。

將此結果與(3)式相比，由此可知其本身重量所生之總伸長，與將其本身重量之半之載荷加於下端所生之總伸長相同。

5. 一鋼製直桿長 40 呎，垂直懸掛，求因其本身重量所生伸長之吋數。假定 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋，鋼之密度作爲 485 磅/立呎。 答：0.60168 吋。

6. 一桿長 10 呎，直徑 2 吋，垂直懸掛，其每立呎之重量爲 485 磅，而在其下端負 1000 磅之載荷。假定 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋。求因本身重量及外載荷所生總伸長之吋數。

7. 一圓錐形桿受其本身重量之作用(圖 4)，設材料每單位體積之重量爲 ρ ，求其伸長。

解。一桿重爲

$$W = \frac{\pi d^2}{4} \frac{l\rho}{3}$$

在距桿下端距離 x 處之任何剖面上，其張力等於桿下部之重量，即

$$\frac{Wx^3}{l^3} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho x^3}{3l^2}$$

因下錐體積與全錐體積之比，等於各高度立方之比。假定張力等布於剖面上，(註 2)將長 dx 之元素作爲稜柱形桿，於是此元素之伸長爲

$$d\delta = \frac{\rho x}{3E} dx,$$

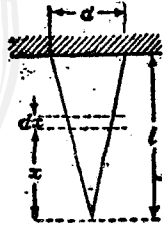


圖 4.

註 2. 設錐角小時，此假設爲正當。Timoshenko's "Strength of Materials," Part II, Chapter VI 內，載有變剖面桿伸長之更詳細之研究。

而桿之總伸長爲

$$\delta = \frac{\rho}{5E} \int_0^l x dx = \frac{\rho l^2}{6E}$$

此伸長爲等長稜柱形桿伸長之三分之一。

8. 一均勻拔梢桿垂直懸掛，下端負 10,000 磅之載荷，求此所生之伸長。此桿長 100 吋；上端之直徑爲 2 吋，下端直徑 1 吋。用 $E = 30 \times 10^5$ 磅/方吋。

答。0.0212 吋。

5. 伸長試驗圖。(註 3)——張力與伸長間之比例，僅一直保持至張應力之某極限值，此極限值稱爲比例極限(proportional limit)，或常稱爲彈性極限，此值視材料之性質而定。在此極限以外，伸長與張應力間之關係，更變複雜。如結構鋼等材料，載荷與伸長間之比例，可保持於極大之範圍內，而其比例極限可高至 25,000 至 30,000 磅/方吋。如鑄鐵或軟銅等材料，其比例極限甚低，即，其對於虎克定律之偏差，在低張應力時即可察出。在考究比例極限以外之材料之機械性質，應變與其相當應力間之關係，恆用伸長試驗圖表示之。圖 5a 示一結構鋼之代表圖。此處伸長沿橫軸繪之，其相當應力以曲線

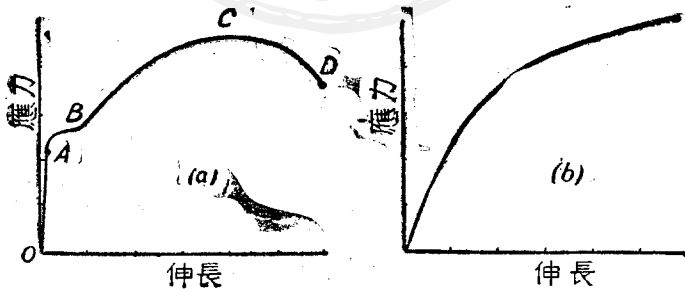


圖 5.

註 3. 在第十三章中，載有更詳細之材料機械性質及材料力學試驗方面之討論。

$OABCD$ 之縱座標表之。自 O 至 A , 其應力與應變成比例; 在 A 以外, 對虎克定律之偏差漸變顯著; 故 A 處之應力為比例極限。在此極限外再加載荷, 伸長之增加較速, 於是此圖變為曲線。在 B 發生桿之突然伸長, 而無幾分之張力增加。此現象稱為金屬之屈服 (yielding), 此在圖中以曲線之幾為水平部分表之。與點 B 相當之應力, 稱為屈點 (yield point)。設再引伸此桿, 則材料恢復, 於是如圖所示, 其所需之張力, 隨伸長而遞增, 直至 C 點為止, 力在此 C 點已至其最大值。其相當應力, 稱為材料之極限強度 (ultimate strength)。在 C 點以外, 發生桿伸長而載荷減少, 最後在圖中 D 點相當之載荷處, 發生折斷。應注意桿伸長後, 則側收縮發生, 但在實際上, 恆用初剖面積 A 以算屈點及極限強度。此問題以後當再詳論之 (見 82 節)。

圖 5b 表示鑄鐵之伸長試驗圖。此材料之比例極限甚低, 且無一定之屈點。

在伸長試驗中, 亦常求一定規長之百分伸長 (percentage elongation); 而在折斷時之剖面面積之百分減小 (percentage reduction of area), 亦常求之。此二量作為金屬展性之度量。

百分伸長之定義, 為規長 (包含折斷) 之總伸長與初長之比, 乘以 100。

在折斷時面積百分減小之定義, 為所減小之剖面面積與原面積之比, 乘以 100。

各材料與伸長圖相類似之壓縮圖, 亦可求得, 而比例極限, 屈點等諸性質點 (如在鋼之例中) 亦可創立。

習 題

9. 一鋼桿直徑 0.924 吋，由伸長試驗得下列結果：

在比例極限之載荷 = 11,000 磅。

最大載荷 = 21,000 磅。

規長 8 吋在載荷 2,000 磅與 11,000 磅間之伸長 = 0.0081 吋。

在折斷時 8 吋內之總伸長 = $2\frac{1}{4}$ 吋。

在折斷處所減小之剖面之直徑 = 0.393 吋。

求比例極限處之應力，極限強度，彈性係數，8 吋內之百分伸長，及面積之百分減小。

答。 37,900 磅/方吋； 68,700 磅/方吋； 29×10^6 磅/方吋； 28.1%； 60.4%。

10. 在水城兵工廠 (Watertown Arsenal) 作來輕鎗管鋼之伸長試驗，已得下列結果，此結果報告於 Test No. 6733, "Tests of Metals," year 1900.

試樣直徑 = 0.505 吋。 量伸長之規長 = 3.00 吋。

所加總載荷 以磅計	在 3 吋規長內 之總伸長	所加總載荷 以磅計	在 3 吋規長內 之總伸長
200	0.0060	14,400	0.0177
1,000	0.0062	15,200	0.0250
2,000	0.0068	16,000	0.0318
4,000	0.0018	16,800	0.0395
6,000	0.0029	17,600	0.0490
8,000	0.0039	18,400	0.0570
10,000	0.0050	19,200	0.0660
12,000	0.0060	20,000	0.0761
13,400	0.0068	20,800	0.0870
15,600	0.0081	21,600	0.0990
13,800	0.0094	22,400	0.1170
14,000	0.0135	25,400	試樣折斷

在折斷後之總伸長 = 0.46 吋。 在折斷處之減小直徑 = 0.570 吋。

繪一伸長試驗圖(總載荷對總伸長,或單位應力對單位應變則更佳)。求比例極限, 屈點, 極限強度, 2 吋內之百分伸長, 面積之百分減小及彈性係數。

6. 工作應力。——由伸長試驗圖, 可得甚有價值之材料機械性質。已知材料之比例極限, 屈點及極限強度後, 則可對各特殊工程問題, 訂定應力之大小, 作為安全應力。此應力恆稱為工作應力(working stress)。

在選擇鋼之工作應力之大小時, 必考研下列二事, 即在比例極限以下之應力, 該材料可作為完全彈性, 而在此極限以外, 則將桿上載荷卸去後, 仍留部分之應變, 即, 發生永久變形。欲使結構在一彈性狀態, 且除去永久變形之可能性, 在實際上恆使工作應力遠在比例極限之下。在用試驗測定此極限時, 必用靈敏之測量儀器(伸縮表), 而此極限之位置, 多少視其測量之正確與否而定。欲除去此困難, 恆將材料之屈點或極限強度, 作為測定工作應力大小之根據。設以 s_w , $s_{y.p.}$, $s_{極限}$ 各代表材料之工作應力, 屈點及極限強度, 則工作應力之大小, 可用下列二式之一測定之:

$$s_w = \frac{y.p.}{n}, \quad \text{或} \quad s_w = \frac{s_{極限}}{n_1} \quad (5)$$

此處 n 及 n_1 為因數, 恆稱安全因數, 此測定工作應力之大小。在結構鋼之例中, 將屈點作為計算工作應力之根據, 最為合理, 因此點可發生頗大之永久變形, 此在工程結構中所不許者。在如此情形, 設僅有常載荷作用於結構上, 則 $n=2$ 之安全因數, 可得嚴格之工作應力值。在驟加载荷或變載荷之例中(此在機器部分中時常發生), 應用較大

之安全因數。如鑄鐵，混凝土，及各種石塊等脆材料，與如木等之材料，恆將極限強度，作為測定工作應力之根據。

安全因數之大小，與作用於結構之外力測定之正確程度，結構桿內應力計算之正確程度，及所用材料之均勻性，頗有關係。此工作應力之重要問題，以後將詳論之（見 88 節）。

習 題

11. 一空心鑄鐵圓筒，壁厚 1 吋，負 200,000 磅之壓載荷。設 $s_{\text{極限}} = 120,000$ 磅/方吋，所用安全因數為 10，欲安全擔負此載荷，問其外直徑該幾何？ 答。 6.30 吋。

12. 一鋼尺垂直懸掛，僅受其本身重量之作用。設鋼每立呎重 490 磅，問尺可長若干而仍不過其許可應力 20,000 磅/方吋？ 答。 5,880 呎。

13. 壓機鋼螺釘 N ，受最大壓力 $P = 100,000$ 磅（圖 6），設在此例之鋼工作應力為 $s_w = 10,000$ 磅/方吋，求螺釘之直徑 d （在螺紋根），設螺釘長 $l = 50$ 吋，求在此最大載荷時之總伸長。

14. 礦用唧筒之縱後柱形桿，以此柄軸上下運動（圖 7）。假定此材料為鋼，工作應力為 7,000 磅/方吋，設向下運動時之活塞阻力為 200 磅，向上運動時為 2,000 磅，求桿之剖面積。桿長為 320 呎。設唧筒衝程等於 8 吋，求曲柄半徑 r 所需之長度。

解。—— 桿所需之剖面積 A （以方吋計），可由(1)式， $s = P/A$ 求之。於是

$$7,000 = \frac{2,000 + \frac{490(320)A}{144}}{A},$$

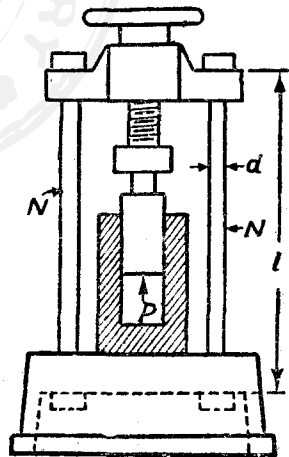


圖 6.

由此 $A = 0.338$ 方吋。

當桿向上及向下運動時，桿總伸長之差，由於活塞阻力，其值等於

$$\Delta\delta = \frac{(2,000 + 200)(320)(12)}{(30 \times 10^6)(0.338)} = .833 \text{ 吋。}$$

曲柄之半徑應為

$$r = \frac{8 + .833}{2} = 4.42 \text{ 吋。}$$

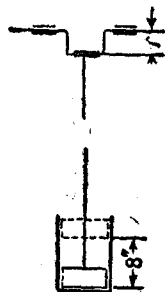


圖 7。

15. 一結構有二相等鋼桿(圖 8)，長 15 呎，兩端絞釘，受一垂直載荷 P 之作用。當 $P = 5,000$ 磅， $\epsilon_{10} = 10,000$ 磅/方吋，桿之初傾斜角 $\theta = 30^\circ$ ，求此桿所需之剖面積及 B 點之撓度。

解。——圖 8(b) 表示絞 B 之平衡條件，由此圖桿內張力為

$$F = \frac{P}{2 \sin \theta}; \text{ 當 } \theta = 30^\circ, \quad E = P = 5,000 \text{ 磅。}$$

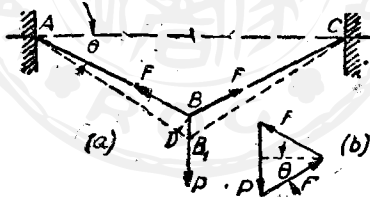


圖 8。

其所需剖面積

$$A = \frac{F}{\epsilon_{10}} = \frac{5,000}{10,000} = \frac{1}{2} \text{ 方吋。}$$

撓度 BB_1 可自小三角形 DBB_1 求之，在此形內，弧 BD (其半徑等於桿長) 可視為作於 AB_1 上之垂線，此 AB_1 為 AB 變形後之桿位置。於是桿 AB 之伸長為

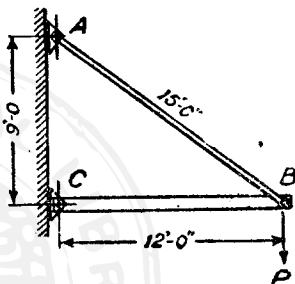
$$B_1D = e \cdot l = \frac{\epsilon_{10} l}{E} = \frac{10,000 \times 15 \times 12}{30 \times 10^6} = 0.06 \text{ 吋。}$$

其撓度

$$BB_1 = \frac{B_1 D}{\sin \theta} = 0.12 \text{ 吋}$$

由此可知因撓度 BB_1 所生之變角，甚為細小，而以前根據假設 $\theta = 30^\circ$ 所計算之 F ，已甚正確矣。

16. 圖 9 示木梁 BC 及鋼桿 AB ，設木之工作應力作為 $s_w = 130$ 磅/方吋，鋼之工作應力作為 $s_w = 10,000$ 磅/方吋，求 BC 及 AB 之剖面尺寸，載荷 $P = 3,000$ 磅。又求因桿變形所生節 B 之垂直分變位及水平分變位。鋼之 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋，木之 $E = 1.2 \times 10^6$ 磅/方吋。



答. $\delta_v = 0.1205$ 吋; $\delta_h = 0.0154$ 吋。

17. 承前題，求桿 AB 之傾斜度，使其重量最小， BC 仍不變，但 AB 及 AC 之長可以變動。

答. $\theta = 45^\circ$

圖 9.

18. 一鋼桿長 480 呎，垂直懸掛，此桿由各長 160 呎之三稜柱形部分所成，在其下端有一載荷 $P = 40,000$ 磅。設每部分內之最大應力為 $5,600$ 磅/方吋；且將桿之重量算入，求每部分之剖面面積，問桿之全重若干？用 $\rho = 490$ 磅/立呎。

答. 最下部分之面積 = 7.91 方吋；全重 = 14,380 磅。

19. 承前題，問桿之總伸長若干？

7. 張力及壓力之靜力不定問題。——在有數種情形中，作用於結構桿內之軸力，不能單獨用靜力方程式求之，而必將結構之變形計入。如此結構之力系，稱為靜力不定系。欲明解決包括張力及壓力之問題，讀者宜讀下列諸習題。

習 題

20. 一鋼筒及一銅管，壓縮於二平行板間，如圖 10 所示。設 $P = 100,000$ 磅， $d = 1$

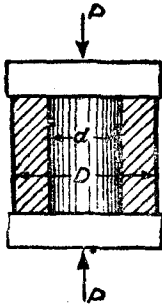


圖 10.

時, $D=8$ 吋, 求鋼及銅內之應力, 及其單位壓縮, 鋼之 $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋, 銅之 $E=16 \times 10^5$ 磅/方吋。

第一解法。——此題靜力條件不足, 必考研筒及管之變形, 以求各材料所負之載荷部分, 鋼內及銅內之單位收縮相等; 故每材料之應力之比, 與二者彈性係數之比相同 (4 式), 即, 鋼內之壓應力為銅內壓應力之 $16/8$ 倍。於是銅內之應力大小 s_{cu} , 可自靜力方程式得之,

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \left(\frac{15}{8} s_{cu} \right) + \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) s_{cu}.$$

代入數值, 得 $s_{cu} = 1,630$ 磅/方吋, $s_{st} = 15/8 (s_{cu}) = 3,030$ 磅/方吋; 單位收縮

$$e = \frac{s_{cu}}{E_{cu}} = 102 \times 10^{-6}.$$

第二解法。——在此方法, 將鋼筒及銅管所負之總力, 作為未知數, 此二未知數各以 P_s 及 P_c 表示之。此二力之和, 必等於總載荷 100,000 磅:

$$P_s + P_c = 100,000.$$

又筒之總變形, 必等於管之總變形, 用求變形之 (3) 式

$$\delta = \frac{Pl}{AE},$$

得第二關係

$$\frac{P_s l}{12.57 \times 20 \times 10^6} = \frac{P_c l}{57.70 \times 16 \times 10^5}.$$

解此二聯立方程式,

$$P_s = 38,500 \quad \text{及} \quad P_c = 61,500.$$

各除以面積, 得 $s_{st} = 3,030$ 磅/方吋, $s_{cu} = 1,630$ 磅/方吋。

21. 在節間 (panel) 為 40 呎之橋梁中, 其下弦 (bottom chord) 由三鋼眼桿組成 (圖 11), (相並而置), 每桿剖面為 $6'' \times 1''$ 。此三桿聯合負 250,000 磅之牽力。中間桿較短

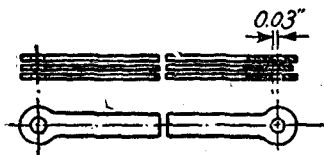


圖 11.

0.03 吋。假定穿過眼之釘互相平行，問各桿內之單位張應力該若干？假定各桿全長 3 呎內各剖面皆為均勻。 $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋。

答。外桿， $s=12,000$ 磅/方吋。

22. 一水平梁長 10 呎，以二垂直桿懸掛之，該二桿加在梁之各端。一桿為鋼製，直徑 $\frac{1}{2}$ 吋，長 6 呎；他桿為黃銅製，直徑 $\frac{7}{8}$ 吋，長 10 呎。梁上懸一載荷 6,000 磅。加上載荷後，欲使該梁絕對水平，問載荷應加於何處？略去梁之重量，且假定在加載荷前，二桿之下端，均在同一水平面內。黃銅之 $E=11 \times 10^6$ 磅/方吋，鋼之 $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋。

答。在距鋼桿 4.03 呎處。

23. 圖 12 示一鋼螺釘及一銅管，設螺釘長 $l=30$ 吋，螺釘螺紋之螺距 $p=1/8$ 吋，螺釘之剖面面積 $A_{st}=1$ 方吋，管之剖面面積 $A_{cu}=2$ 方吋，今將螺帽旋 $1/4$ 一轉，問鋼螺釘螺紋部分內及銅管內各生應力若干？鋼之 $E=30 \times 10^6$ ；銅之 $E=16 \times 10^6$ 磅/方吋。

指示：螺釘之伸長加管之收縮，等於螺帽沿螺釘之變位。

答。 $s_{st}=10,100$ 磅/方吋； $s_{cu}=8,050$ 磅/方吋。



圖 12.

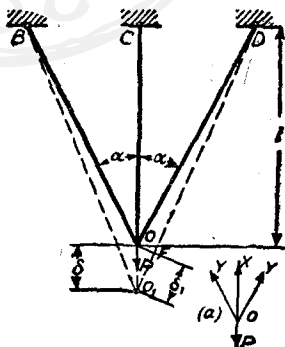


圖 13.

24. 載荷 P 以三鋼桿負之，三桿材料相同，剖面積均為 $1/2$ 方吋（見圖 13）。 $\alpha = 30^\circ$ ， $l = 10$ 呎，設載荷 $P = 15,000$ 磅，未作用前，各桿內無初應力，求加載荷 P 後每桿內之單位應力，及 O 點之撓度。用 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋。

解。——用 X 表示垂直桿內之總力，以 Y 表示各斜桿內之總力。欲得方程式以求未知量 X 及 Y ，此結構將分成二靜力可定系。一系包括二斜桿 OB 及 OD ，而垂直桿已除去，其力作用以 X 代之。載荷 P 將在 O 點作用於第一系。由上手續，垂直桿即如是分離，另組成第二系。作用於此桿下端者，僅為反動力 X ，而力 P 之全部已假定作用於第一系。此二靜力可定系，示於圖 14 中。

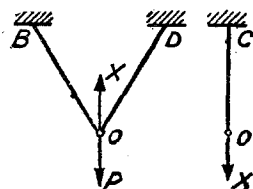


圖 14.

因作用於 O 點(圖 13a)之垂直分力之和，必等於零，

$$X + 2Y \cos \alpha = P. \quad (a)$$

欲得第二方程式，以求未知量 X 及 Y ，必考研二系之變形。此甚易明曉，設欲使此二分離系接合，力 X 及 Y 必如是調合，使各系在 O 之垂直撓度相等。

因力 X 所生垂直桿 OC 之撓度，可用(3)式得之：

$$\delta = \frac{Xl}{AE}.$$

今求 BOD 系之撓度。在力 Y 作用之下， OB 或 OD 之伸長為

$$\delta_1 = \frac{Yl}{AE \cos \alpha}.$$

當桿 OB 及 OD 如是伸長後，假定在位置 O_1B 及 O_1D (圖 13)，而 O 點則垂直撓曲至位置 O_1 。設以 D 為中心，作一圓弧 OF ，則距離 O_1F 表示 OD 之伸長。因伸長甚小，(註 4)此圓弧 OF 可以垂直於 O_1D 之線代之，而 O_1 處之角度，可作為等於初角

註 4. 在此假定結構之變形甚小，不致有幾分改變其形狀：一般所用工程材料，均為如是。然倘以橡皮帶作成同樣之結構，則需更精密之考究，因各桿傾斜度改變後，其應力亦因之而改變也。

度 α 。於是在三角形 OFO_1 ，

$$\delta_1 = \delta \cos \alpha,$$

在上已述過，二分離系之撓度必相等，故第二方程式為

$$\delta = \frac{Xl}{AE} = \frac{Yl}{AE \cos^2 \alpha},$$

由此

$$Y = X \cos^2 \alpha. \quad (b)$$

解聯立方程式(a)及(b)，

$$X = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \quad \text{及} \quad Y = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

代入 P 及 α 之數值，

$$X = 6,520 \text{ 磅}, \quad Y = 4,880 \text{ 磅}, \quad \delta = 0.0522 \text{ 吋}.$$

25. 承前題，設中心桿為銅製，其剖面積為 0.8 方吋，二斜桿各為鋼製，面積仍為 1/2 方吋。試解之。

26. 一鋼圓桿兩端固定，在剖面 mn 上負一軸載荷 P ，如圖 15 所示。受載荷 P 作用後，反動力 R 及 R_1 若干？剖面 mn 將向下移動若干？假定 $a=12$ 吋， $b=24$ 吋，直徑 = 0.798 吋， $P=12,000$ 磅， $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋。略去桿重。

解。——此載荷 P 與兩端之反動力 R 及 R_1 成平衡，故

$$R + R_1 = P.$$

欲得第二式，必考研桿之變形。桿下部所負載荷 P 之部分為 R ，其將下部縮短之量為

$$\delta = \frac{Rb}{AE}.$$

桿上部所負載荷 P 之部分為 R_1 ，其將上部伸長之量為

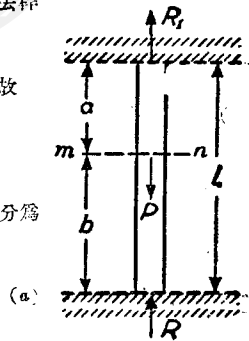


圖 16。

$$\delta = \frac{R a}{AE}$$

此二變形之數值必等，故

$$\frac{R}{R_1} = \frac{a}{b} \quad (b)$$

解(a)及(b), $R = Pa/l$, $R_1 = Fb/l$.

代入數值, $R = 4,000$ 磅, $R_1 = 8,000$ 磅. 又 $\delta = 0.0064$ 吋.

27. 一棧柱形桿固定於兩端, 以軸力 P_1 及 P_2 加於二中間剖面上(圖 16). 設 $P_1 = 3,000$ 磅, $P_2 = 5,000$ 磅, $a = 4$ 吋, $b = 8$ 吋, $c = 12$ 吋, 求反動力 R 及 R_1 .

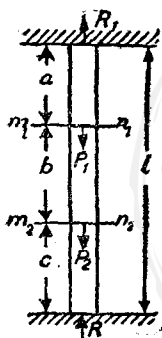


圖 16.

8. 熱應力。——求熱應力(因溫度變化所生之應力)之基本原理, 甚為簡單. 設桿(長為 l)之溫度自 t_0 升至 t , 其熱膨脹為

$$\delta_t = \epsilon l (t - t_0), \quad (6)$$

式中 ϵ 為一物理常數, 稱為溫度膨脹係數. ϵ 甚明顯為溫度變化一度單位桿長之長度改變, 在此書中, 此根據華氏溫度.

設以端反動力阻止桿之膨脹, 且升高溫度, 則此桿將受應力. 由此可知桿內所生之應力, 與假設此桿先因熱而膨脹, 再使之縮至原長所需之應力, 適為相同. 故因溫度及因應力所生之單位應變(見(4)式), 其數必相等: 等之得

$$s = E \epsilon (t - t_0). \quad (6a)$$

習題

28. 電車軌在 50°F 鉗接. 設車軌因日光熱至 100°F , 且設不能自由膨脹, 問軌內

生應力若干? 鋼之 $e = 3.5 \times 10^{-6}$ 。

解。——設一單軌自由膨脹，其單位伸長將為

$$e = 3.5 \times 10^{-6} (100 - 50) = 325 \times 10^{-6}.$$

將此軌壓至其原長所需之單位應力，(註 5) 為(用(4)式)

$$s = Ee = 30 \times 10^6 \times 325 \times 10^{-6} = 9,750 \text{ 磅/方吋, 壓力.}$$

29. 設 28 題之軌長 40 呎，在 50°F 裝軌時，有餘隙 $1/8$ 吋，問在 100°F 軌內應力若干?

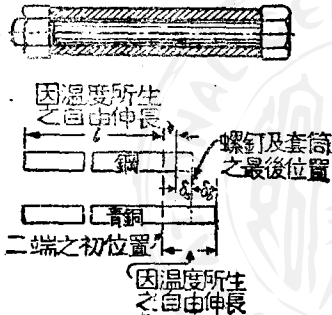


圖 7.

30. 鋼桿剖面積 2 方吋，兩端剛接於支座上，桿長為 5 呎。假定 $e = 3.5 \times 10^{-6} / ^\circ\text{F}$ ， $E = 29 \times 10^6$ 磅/方吋，求 (a) 設溫度降落 100°F，問此桿對支座生力若干? 求 (b) 當溫度降落 100°F 時，支座屈服之總量為 0.01 吋，問桿對支座所生牽力。

答。(b) 28,000 磅。

31. 圖 17 示一軟鋼螺釘，直徑 1 吋。其緊密配合套筒為青銅製成，外直徑 $1\frac{1}{2}$ 吋。設在 40°F 時，螺帽之肩適接套筒之端，當溫度升

至 160°F，問套筒及螺釘內之應力強度各若干?

青銅: $E = 10 \times 10^6$ 磅/方吋, $e = 10.1 \times 10^{-6} / ^\circ\text{F}$.

鋼: $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋, $e = 3.1 \times 10^{-6} / ^\circ\text{F}$.

解。——此題之解法，根據二明晰事實，第一，套筒內之總壓力，必等於螺釘內之總張力，第二，因溫度升高所生鋼螺釘內之伸長 + 鋼受總力後所生螺釘內之引長 δ_s = 因溫度升高所生青銅套筒之伸長 - 套筒受總力後所生青銅套筒內之壓縮 δ_b 。

註 5. 直接用(註 a)式，亦可得同樣結果。讀者在解題時，倘二者同樣便利，則應用基本公式，而不應用特殊公式。

由第一敘述，得方程式

$$P_b = P_s,$$

式中 P_b 及 P_s 各表示青銅及鋼內之總力。

由第二敘述，得其他方程式

$$6.1 \times 10^{-6}(l)(130 - 40) + \frac{P_s l}{.7854 \times 50 \times 10^6} \\ = 10.1 \times 10^{-6}(l)(160 - 40) - \frac{P_b l}{.982 \times 10 \times 10^6}.$$

解上述 P_b 及 P_s 之方程式，得 $P_b = P_s = 3,330$ 磅。

其單位應力為：鋼， $s = 4,230$ 磅/方吋；青銅， $s = 3,290$ 磅/方吋。

32. 承前題，設鋼螺釘直徑 $1\frac{1}{4}$ 吋，青銅套筒外徑 1 吋，又設溫度升至 100°F ，試解之。用 31 題所載之 E 及 ϵ 。

33. 一物體重 6,000 磅，用三平行線負之，如圖 18 所示。各線之剖面為 $1/2$ 方吋。在未加重量前，設在 50°F 時，各線之端均在同一水平面內，求加載荷後各線內之單位應力。設 (a) 其溫度仍在 50°F ，(b) 溫度升至 100°F 。鋼之 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋， $\epsilon = 6.2 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$ ，黃銅之 $E = 12 \times 10^6$ ， $\epsilon = 10 \times 10^{-6}$ 。

答。(註 6) (b) $s_{st} = 6,200$ 張力； $s_{br} = 1,800$ 壓力。

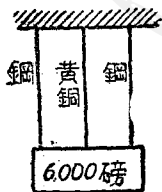


圖 18.

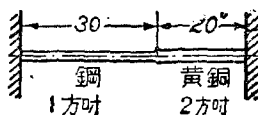


圖 9.

34. 承前題，假定黃銅線之剖面積不為 $1/2$ 方吋，而為 1 方吋，試解之。

35. 在 33 題中，設黃銅線較鋼線短百分之 .02，試解之。

註 6. 僅當黃銅線能防止皺縮，此結果始可適用。

答. (a) $s_{st}=3,900$ 張力. $s_{br}=4,000$ 張力.

(b) $s_{st}=5,900$ 張力. $s_{br}=200$ 張力.

30. 圖 19 示一桿,設其內無初應力,又設支座間之距離仍一定,問溫度降落 100°F ,各部內生應力若干?鋼之 $E=29 \times 10^6$; $\epsilon=5.1 \times 10^{-6}$. 黃銅之 $E=141/2 \times 10^6$; $\epsilon=19.5 \times 10^{-6}$.

答. 鋼之 $s=22,800$ 磅/方吋,張力.

9. 薄圓環內之應力及應變.對於轉環及冷縮裝配(註 7)之應用.

——設等布沿徑力作用於薄圓環(圖 20a)之圓周上,將生均勻之環擴張.欲求環內之張力 P ,假想在水平直徑剖面上(圖 20b)分割此環,而將上部作為自由體.設 p 表示環平均圓周單位長度上之均勻載荷, r_e 為平均圓周半徑,於是作用於二相鄰剖面所截之環元素上之力,為 $pr_e d\phi$, $d\phi$ 為與此元素相當之中心角.求作用於半環上諸

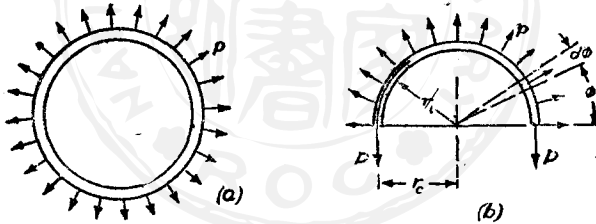


圖 20.

力之垂直分力之和,可得下列平衡方程式:

$$2P = 2 \int_0^{\pi/2} pr_e \sin \phi d\phi = 2pr_e,$$

由此

註 7. 欲知應力及應變之討論,與厚圓筒之冷縮裝配問題,見 Timoshenko's "Strength of Materials," Vol. II, Chap. IV.

$$P = p r_c \quad (7)$$

此張力 P 有時稱為環箍張力 (hoop tension).

當壓力作用於環之內圓筒面上, (7) 式中 p 可自下式求之

$$p = p_i (r_i / r_c), \quad (a)$$

式中 p_i 表示環內圓周單位長之壓力, (a) 式根據下列事實而來, 即其向外之總徑向壓力仍為一定, 但在半徑 r_c 處所分布之圓筒表面, 較在半徑 r_i 處大. 在此例, (7) 式變為

$$P = p_i r_i. \quad (7a) \text{ (註 8)}$$

今將環之剖面積除力 P , 可得環內之平均單位張應力. (註 9)

在實際應用上, 時有求迴轉環內張應力之必要. 於是 p 表示環單位長度之離心力, 其大小以下式表之 (註 10)

$$p = \frac{w}{g} \frac{v^2}{r_c},$$

式中 w = 環單位長度之重量, r_c = 中心線之半徑, v = 半徑 r_c 處之速度, g = 重力加速度. 將此代入 (7) 式之 p , 得

$$P = \frac{w \cdot v^2}{g}, \quad (8)$$

註 8. 在 23 節中不用微積分求得類似之公式.

註 9. 由正確分析, 知切線應力不等布於圓筒厚上. 故如上法以剖面積除 P , 以求最大切線應力, 即在甚薄之圓筒, 亦仍稍有不確. 厚 t 之薄環, 受內壓力 p_i (如上所述者) 後, 其內之正確最大應力, 已知為 $s = p_i r_i / b$, 式中 b 為環寬. 欲得矩形剖面薄迴轉環內之正確最大應力, (8) 式中之 v , 應作半徑等於 $r_i + 0.82 t$ 處之速度.

註 10. 欲知此離心力公式之來由, 可參考任何力學教科書. 選擇單位時應留意; 啟用時, 於是 $g = 32.2$ 呎/秒².

其相當之張應力將為

$$\delta = \frac{P}{A} = \frac{wv^2}{Ag} = \frac{\rho v^2}{g}. \quad (9)$$

由此可知此應力與材料之質量密度 ρ/g ，及周邊速度之平方成正比。設有一鋼環，其速度 $v=100$ 呎/秒，此應力變為 1,060 磅/方吋。於是同一材料在其他任何速度 v 時，其應力將為 $0.106 \times v^2$ 磅/方吋，式中 v 以呎/秒計。

習 題

37. 一鋼環蓋其剖面寬 1 吋，厚 $1/4$ 吋，在 470°F 使其內直徑為 3.05 吋。此環箍套於實心鐵圓筒上，此筒在 70°F 之直徑為 3 吋。假定圓筒不受風服，當環與筒均在 70°F 時，問環箍內張應力若干？環箍與筒間之正壓力若干？假定 $\epsilon=3.5 \times 10^{-6}$ ， $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋。

答. 28,000 磅/方吋；467 磅/方吋。

38. 一直徑 30 吋之鑄鐵筒上，加收縮裝配之鐵環。環周較筒周短 0.10 吋。假定鑄鐵不受風服，問環內總張力若干？環之剖面厚 $3/8$ 吋，寬 $1 1/4$ 吋。環與筒間之正壓力強度若干？當將環加熱至 700°F ，問直徑之餘隙有若干？假定 ϵ 及 E 如 37 題所載者。

答. 14,950 磅；197 磅/方吋；0.105 吋。

39. 試用下述考究，以求(8)式。將環之一半作為自由體，且將其質量集中於重心。此集中質量對於中心之角速，與原環同，求此質量所生之離心力。二環箍張力 P ，必平衡此離心力。

40. 設銅環之工作應力為 $s_w=3,000$ 磅/方吋。 $\rho=550$ 磅/立方呎，求其極限周邊速。

答. $v=159$ 呎/秒。

41. 一雙輪帶厚 0.35 吋，套於滑輪上，帶之平均直徑為 15 吋，以每分鐘 1,200 轉迴轉，問因離心作用，帶每吋寬之張應力若干？皮之密度為 $1/30$ 磅/立方吋。

答. 28.1 磅/方吋。

10. 張力或壓力桿內之應力集中。——在此章討論簡單伸長或壓縮時，假定桿為廢柱形，於是力加於中心時，離兩端稍遠處之應力，等布於其剖面上，剖面之突然變化，能生頗不規則之應力分布，此等不規則，在設計受變外力及反應力之機器部分，特為重要。在此處之不規則應力分布，即表示在此處之應力遠在平均應力之上，於是在反應力作用之下，漸進之破裂有在此處漸漸開始之可能。機器部分之大部折斷之原因，可歸之此漸進之破裂。

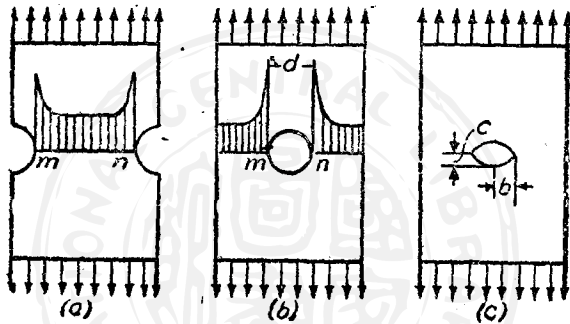


圖 21.

應力集中一事，恆為設計者所忽視，在許多工程設計中略去此因數而不致常遭禍難者，蓋由於應力分析時用較大之安全因數，且由於因局部屈服對於應力分布之有利影響，然，此諸例中有應力集中而略去之，不能謂合理。在此節中，略論將張力或壓力桿內所過之應力集中，以說明此因數之重要。希望此簡略之敘述，(註 11)已足使讀者知應力集中發生及其影響，且助彼能承認此種情形，以作特殊考研。

◎ 一簡單之應力集中例，為有圓孔之矩形板，而受張力者(圖 21b)。由考研知(註 12)在此例中，在孔邊之 m 及 n 二點上，有高應力集中。經過孔中心之剖面上之應力分布，以陰影面積表之。使孔之尺寸與板寬相比而覺小時，則剖面上距孔中心距離為 r 之任何

註 11. 欲知此問題更詳盡之討論，及最近之參考，見 Timoshenko's "Strength of Materials," Vol. II, Chap. VI, pp. 615-647.

註 12. 見 Timoshenko's "Strength of Materials," Vol. II, Art. 11, p. 454.

一點之正應力大小，可用下式求之：(註 13)

$$s = \frac{s_0}{2} \left(2 + \frac{d^3}{4r^2} + \frac{9}{13} \frac{c^4}{r^4} \right), \quad (10)$$

上式中 s_0 為板端之均勻應力，由此可知在此例中，應力集中為十分局部化，在 m 及 n ，(此處 $s = 3s_0$)，應力隨距過度引伸點之距離增加而迅速減小，在距孔邊之距離等於孔半徑處 ($r=d$)， s 僅等於 $17/32 s_0$ 。因沿孔之彎曲關係(圖 21b)，在孔頂及孔底生一大小為 s_0 之壓應力。

在小橢圓孔之例中(圖 21c)，最大應力亦在孔之水平軸之兩端，其大小為

$$s_{\text{最大}} = s_0 \left(1 + 2 \frac{b}{c} \right). \quad (11a)$$

此應力隨 b/c 而增加，故垂直於張力方向之甚狹孔，可生甚高之應力集中，此可解釋何故垂直於力方向之破裂，有擴大之傾向，倘在破裂兩端鑽孔，以消去破裂兩端之小半徑(此處可生高度應力集中)，則可防止破裂之擴大。

受張力之板內倘有小半圓槽(圖 21a)，亦可生高度應力集中，由試驗知在點 m 及 n 處，其應力約為板端所加應力之二倍。洋灰之標準張力試樣(圖 22)，為剖面有尖銳變化之張力桿之其他一例，由試驗知最大應力發生於 m 及 n 二點，其應力為剖面 mn 上平均應力之 $13/4$ 倍。

在板有二不同寬度部分之情形中，其最大應力發生於 m 及 n 二點(圖 23)，此應力可以方程式表之：

$$s_{\text{最大}} = ks_0,$$

式中 s_0 為加於狹部頂端之均勻張應力， k 為一數值因數，此視內圓角半徑 r 及比 b/a 而

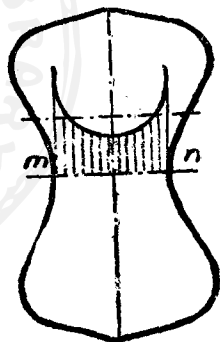


圖 22.

註 13. 欲知來由，見 Timoshenko's "Theory of Elasticity," McGraw-Hill Book Co., 1924, p. 76.

定。此因數值稱應力集中因數。此因數之值，以圖 24 之曲線表之。(註 14)由此可知當內圓角半徑減小，則應力集中因數增加。在弱剖面用較大之內圓角半徑，則可得較為滿意

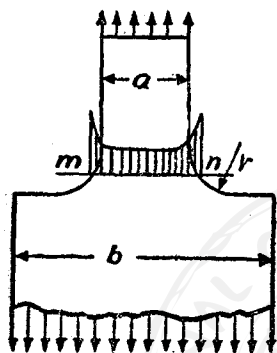


圖 23.

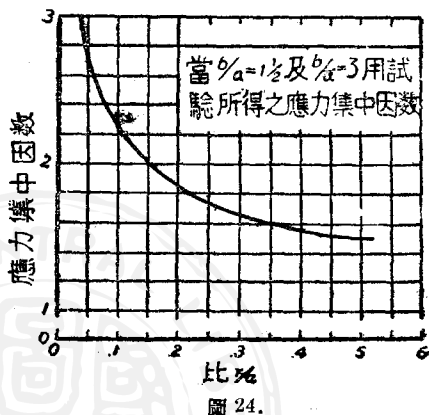


圖 24.

之應力分布。此事實今在機器設計及工廠練習中，均已公認矣。在慣例上恆規定一最小之內圓角半徑，以防止凹角處漸進破裂之發生。

以上所得關於應力分布之結論，均假定最大應力在材料比例極限之內。在比例極限以外，則應力分布視材料之展性而定。一柔韌材料可受屈點外之相當伸長而不致十分增加其應力。因此事實，故當材料伸長，其在屈點以外之應力分布，漸漸變為均勻。將有凹口或孔之柔韌材料，用靜力試驗之，其極限強度不因凹口或孔而降低，此可以上述理論解釋之。更有進者，在試驗有深槽之軟鋼試樣，其極限強度恆可增加若干，因此槽能防止破裂剖面處之頸作用(necking)也。然，在脆材料，如玻璃等，其高度應力集中直可保留至破裂點。此能生實質變弱之效應，由有任何凹口之脆材料桿之極限強度減少，即可證明此效應。

故由以上所論，知在設計中用凹口及凹角，為一判斷之問題。在柔韌結構鋼之例中，假無交變應力，則高度應力集中不危險。在脆材料之例中，應力集中點可有甚大之變弱

註 14. 欲知此曲線，見 E. E. Weibel, "Studies in Photoelastic Stress Distribution," Trans. A. S. M. E., 1934, Vol. 53, paper no. APM-56-13.

效應，故在此處應消去或用較大之內圓角，以減小應力集中。在受反應力之桿，則必考研應力集中之效應，因即使材料柔韌，漸進破裂亦有在此諸點開始之可能也。

第一章之外加習題

42. 鋼線及鉛線垂直懸掛。設鋼線之 s 極限 = 300,000 磅/方吋， $\rho = 490$ 磅/立方呎，鉛線之 s 極限 = 50,000 磅/方吋， $\rho = 170$ 磅/立方呎，求各線因線重所生應力等於其極限強度時之長度。

43. 設將稜柱形桿之各面尺寸，用 n 與 1 之比增加之(圖 2)，問其本身重量所生之最大應力，以何比增加? 答。應力以 $n:1$ 之比增加。

44. 一鋼線長 100 呎，許可單位應力為 12,000 磅/方吋。問線內相當總伸長若干? 問何溫度變化可生相同伸長? $E = 15 \times 10^6$ 磅/方吋， $\epsilon = 10 \times 10^{-6}$ 。

答。0.93 吋; 80°F。

45. 鋼桿直徑 1/2 吋，長 20 呎，垂直懸掛，溫度為 40°F。在此溫度時，桿上懸一載荷 5,000 磅。設略去桿重，問在 100°F 時桿長若干? $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋， $\epsilon = 6.3 \times 10^{-6}$ 。

46. 鋼桿 AB 之剖面積 $A = 1$ 方吋，受力 $Q = 10,000$ 磅及 $P = 5,000$ 磅(圖 25)之

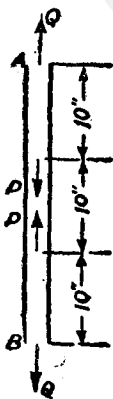


圖 25.

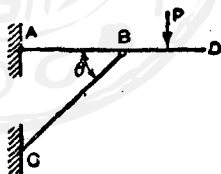


圖 26.

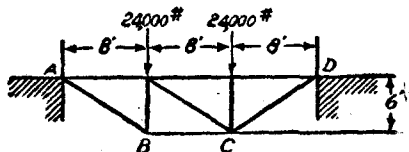


圖 27.

作用，問其總伸長若干？

47. 求載荷 P 在梁 ABD (圖 28) 上之位置，使桿 BC 內之力變為最大。求角度 θ ，使桿之體積為最小。

答。當 $\theta = 45^\circ$ ，體積為最小。

48. 設 $s_w = 16,000$ 磅/方吋，求桿 AB 及 BC (圖 27) 所需之剖面積。

答。 AB 之面積 $= 2\frac{1}{2}$ 方吋， BC 之面積 $= 2$ 方吋。

49. 一直鋼桿長 200 呎，其剖面自一端為 $1'' \times 1''$ 之矩形，均勻變至他端為 $1'' \times 3''$ 之矩形，上加 15,000 磅之張力。略去其本身重量，求桿之伸長。

50. 一直立唧筒桿長 200 碼，剖面一定，設其下端負載荷 6 噸，且桿材料之密度為 485 磅/立呎，問該桿增長若干？其最大應力為 9,000 磅/方吋， $E = 29 \times 10^6$ 磅/方吋。

51. 設 50 題中之唧筒桿，用四節 50 碼之長度組成，又設每長度剖面為一定之正方形。設每長度之 $s_{\text{最大}}$ 最大 $= 9,000$ 磅/方吋，問此四節之剖面大小該若干？問可節省材料百分之幾？在上述載荷條件之下，問長度總變更若干？

答。 1.19, 1.22, 1.26, 1.30 吋； 10.35%； $\delta = 2.17$ 吋。

52. 一鋼筋混凝土柱，受壓力 $P = 60,000$ 磅。設鋼之剖面積為混凝土面積之 $1/10$ ，問混凝土及鋼各負載荷若干？假設混凝土係數為鋼係數之 $1/10$ 。

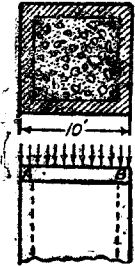


圖 28.

53. 一短空心鑄鐵柱，中盛混凝土，如圖 28 所示。鑄鐵剖面為 10 吋正方，1 吋厚， $E = 12 \times 10^6$ 磅/方吋，其許可應力為 6,000 磅/方吋。混凝土心之 $E = 2 \times 10^6$ 磅/方吋，許可應力為 800 磅/方吋。問可安全負擔總載荷 P (等布於板 AB 上) 若干？假定 AB 剛硬，且保持水平。

答。 224,000 磅。

54. 一梁長 10 呎，以二支持於高處之二桿，繫於梁之兩端，使之位於水平方向。一端為銅桿，長 8 呎，他端為鋁桿，長 12 呎。於是於距銅桿 4 呎之一點，掛一集中載荷 10,000 磅。求各桿之剖面，使銅桿之應力為 5,000 磅/方吋，且在加載荷 10,000 磅後，使此梁仍在水平面內。鋁之 $E = 15 \times 10^6$ ，銅之 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋。

55. 如圖 29，當未架梁以前，二桿之下端均在同一水平面內。欲使此梁最後在水平面內，問 W 之值該若干？各桿內應力該若干？略去彎曲。用 54 題中所載之 E 值。

答. $W=8,000$ 磅.

56. 在圖 8 所示壓機中, 設其內直徑為 10 吋, 圓筒壁厚為 1 吋, 求壁內之周向張應力.

答. $s=6,350$ 磅/方吋.

57. 一銅條鉸於二鋼條之間(圖 9), 設條內溫度自 t_0 昇至 t 度, 問鋼及銅內將生應力若干?

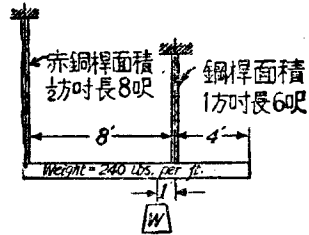


圖 9.

$$\text{答. 鋼內總壓力} = \frac{(t - t_0)(t - t_0)A_s E_s}{1 + \frac{A_s B_s}{A_c E_c}}$$



圖 30.

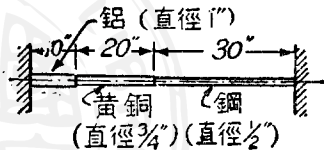


圖 31.

58. 一黃銅環箍內直徑 20 吋, 厚 $1/2$ 吋, 在 420°F 時緊配於一鋼環箍上, 此鋼環箍厚 1 吋; 二環箍寬均為 1 吋. 溫度降至 70°F . 求各環箍內所生之單位應力及二環箍間之單位壓力. 鋼之 $E=30 \times 10^6$, $\epsilon=6.5 \times 10^{-5}$. 黃銅之 $E=13 \times 10^6$, $\epsilon=10.4 \times 10^{-5}$.

答. $s_{br}=14,560$ 磅/方吋. 二環箍間之正壓力為 728 磅/方吋.

59. 在 55 題中, 假定溫度升高 10°F ; 欲使梁最後在水平面內, 問 W 之值該若干求各桿內之單位應力. 用 $\epsilon_{cu}=9.3 \times 10^{-5}$, $\epsilon_{st}=6.5 \times 10^{-6}$.

答. $W=16,500$ 磅. $s_{st}=16,550$ 磅/方吋.

60. 在 20 題之情形中, 假設在初溫度 t_0 時, 加定載荷 $P=100,000$ 磅. 設 $\epsilon_{st}=6.5 \times 10^{-6}$, $\epsilon_{cu}=9.3 \times 10^{-5}$, 欲使載荷完全傳於銅管, 問溫度應增加幾度?

答. 59.2°F .

61. 設桿內無初應力(圖 31), 且設兩支座間之距離一定, 當溫度降下 100°F . 問各部分生應力若干?

鋁	黃銅	鋼
$E=11 \times 10^6$	14×10^6	29×10^6
$\epsilon=12.8 \times 10^{-6}$	10.4×10^{-6}	6.1×10^{-6}

62. 一重量 6,000 磅，用在同一垂直面內之三線負之(圖 18)，中間一線為黃銅，二外面者為鋼。各線之剖面為 $1/2$ 方吋，各線已經糾正，使在 50°F . 時所負載荷部分均等。

(a) 設溫度仍在 50°F . ; (b) 設溫度昇至 150°F . , 問各線內之應力各若干?

鋼之 $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋。 $\epsilon=6.2 \times 10^{-6}$.

黃銅之 $E=12 \times 10^6$ 磅/方吋。 $\epsilon=10.0 \times 10^{-6}$.

答. (b) 黃銅內應力 = 200 磅/方吋，張力。

鋼內應力 = 5,900 磅/方吋，張力。

63. 一梁(圖 32)鉸於一端，此梁又以等長之二鋼桿支持之。在加載荷前，梁懸於水平面內。加上載荷後，求各桿內之總應力，(a) 設無溫度變化；(b) 設溫度升高 100°F . 用 $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋， $\epsilon=6.0 \times 10^{-6}$. 略去梁之彎曲。

答. (b) A 內之總應力 = 8,590 磅；B 內之總應力 = 10,940 磅。

64. 三面積各為 $1/4$ 方吋之線，共負載荷 1,000 磅。設先糾正各線，使在未加載荷前，線不弛鬆，亦無應力，(a) 受載荷作用後，求各線之應力強度。 (b) 設溫度降下 20°F . ,

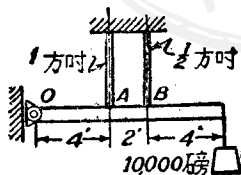


圖 32.

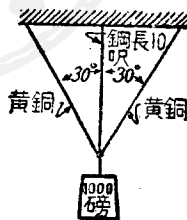


圖 33.

求各線之應力強度。對於鋼， $E=30 \times 10^6$ ， $\epsilon=6.1 \times 10^{-6}$. 對於銅， $E=15 \times 10^6$ ， $\epsilon=9.5 \times 10^{-6}$.

答. (a) $s_{st}=2,420$ ， $s_{cu}=907$ 磅/方吋。

(b) $s_{st}=240$ ， $s_{cu}=1,765$ 磅/方吋。

第二章

合成應力—應變之初步分析

11. 簡張力對於剖面斜度之應力變化。——當稜柱形桿受軸張力 P (圖 34a) 時, 以前僅已考究垂直於軸之剖面上之應力。今將論數列, 其剖面 pq (垂直於圖之平面) 乃與軸成傾斜者。

因諸縱纖維之單位伸長相同(見 3 節), 表示桿右部對於左部之作用之力, 將等布於剖面 pq 上。今分離桿之左部, 如圖 34b 所示, 於是在此諸力及左端載荷 P 之作用下, 此桿處於平衡狀態: 故分布力之合力, 將等於 P 。剖面 pq 單位面積上之力, 稱為此剖面上之應力或合應力, 以 S 表之。以 A 表示垂直於桿軸之剖面積, 以 ϕ 表示桿軸 X

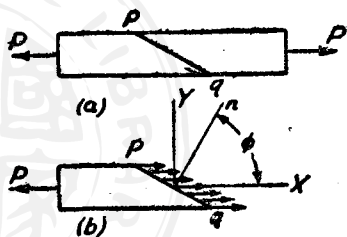


圖 34.

與剖面 pq 之法線 n 所成之角, pq 之面積將等於 $A/\cos \phi$: 於是, 由諸力在 x 方向之平衡條件,

$$S \left(\frac{A}{\cos \phi} \right) = P,$$

由此

$$S = \frac{P \cos \phi}{A}$$

設將力 P 視作分布在垂直於桿軸之剖面上，此剖面上之單位應力以 s_x 表之（書於 s 下之 x ，指示應力之方向）：其值為 $s_x = \frac{P}{A}$ ，將此代入上式，

$$S = s_x \cos \phi.$$

由此可知，在桿任何斜面 pq 上之應力 S ，較垂直於桿軸之剖面上之應力 s_x 小，當角 ϕ 增加，其應力即減小。當 $\phi = \frac{\pi}{2}$ ，剖面 pq 為水

平，而應力 S 變為零，即，縱纖維之側面間無力之存在。

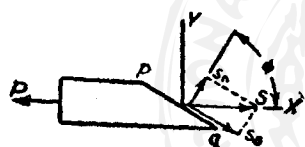


圖 35.

在任何斜剖面，應力 S 之方向與 P 相同。此力恆分為二分應力，如圖 35 所示。垂直於剖面 pq 之分應力 s_n 稱為正

應力，（註¹）其值為

$$s_n = S \cos \phi = s_x \cos^2 \phi = s_x \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{2} \right); \quad (11)$$

其切線分應力 s_s ，或切應力之值為

$$s_s = S \sin \phi = s_x \sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2} s_x \sin 2\phi. \quad (12)$$

故在上式中，將在任何剖面或平面 pq 上之正應力及切應力，以 s_n 及角 ϕ 表示之，此角 ϕ 為平面 pq 之法線與 x 軸所成之角。

註 1. 表示張力之正分應力作為正，而表示壓力者作為負。

今用二平行斜剖面 pq 及 p_1q_1 (圖 36) 自桿中割出一元素, 以摹想各分應力所生之應變。圖 36a 示諸力, 此力表示桿右部及左部對於此元素之作用。如上述方法, 將諸力分爲二分力, 以分別表示各組分力之作用, 則得圖 36b 及 c。由此可知正應力 σ_n 在法線 n 之方向, 使元素生伸長, 而切應力 τ , 使剖面 pq 對 p_1q_1 生滑動。當作用於相對而相平行之元素面上之一對切應力, 生順時針方向之偶力, 則此切應力作爲正。

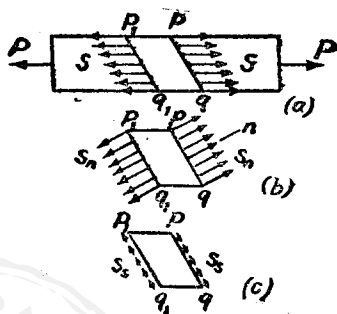


圖 36.

由(11)式, 可知最大正應力作用在垂直於桿軸之剖面上, 其值爲 $(\sigma_n)_{\text{最大}} = \sigma_x$ 。由(12)式可知當 $\sin 2\phi = 1$ 之處, 發生最大切應力, 此應力作用於與桿軸成 45° 斜角之剖面上; 其值爲

$$(\tau_s)_{\text{最大}} = \frac{1}{2} \sigma_x. \quad (13)$$

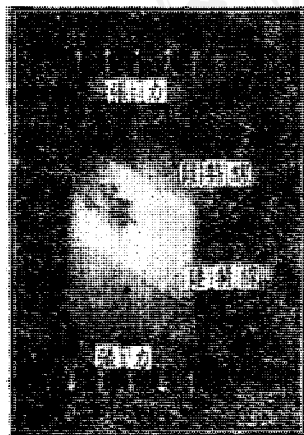


圖 37.

此最大切應力雖僅爲最大正應力之半, 然有時此應力在實際上甚爲重要, 因有數種材料, 對於切力之抵抗, 遠較張力之抵抗薄弱。例如, 設一有光面之軟鋼桿, 加引伸之載荷, 直達屈點而止, 於是此金屬之屈服用肉眼即可明見。此屈服沿切應力近於最大之斜面開始。此等表面上之滑動平面, 可自顯露之線辨之, 此線稱

為陸特線(Lucders' lines)(見圖 37)。

習 題

65. 一桿之剖面積 $A=1$ 方吋，以軸張力 $P=10,000$ 磅，使之伸長，求桿內之最大切應力。
 答. (s_s) 最大 $=5,000$ 磅/方吋。

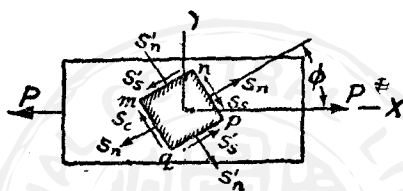


圖 38.

66. 如圖 38，設 $s_x=5,000$ 磅/方吋， $\phi=30^\circ$ ，求作用於元素 $mnpq$ 面上之應力。
 67. 有一元素，如圖 38 中之 $mnpq$ ，與 x 軸成任何角度 ϕ ，在互成直角之平面上之切應力 s_s 及 s_s' 之數值相等，試證之。
 68. 一桿受簡張力，其正應力及切應力之數值相等，求其剖面之傾斜度。
 答. $\phi=45^\circ$ 或 135° 。

69. 一鑄鐵圓柱長 2 吋，直徑 $1\frac{1}{4}$ 吋，用軸力作壓縮試驗。設鑄鐵之壓強度為 160,000 磅/方吋，其切強度為 60,000 磅/方吋，求使此鐵塊破壞所需之力，注意生破壞之應力種類及強度，且以圖表明破壞平面。

12. 在二垂直方向之張力或壓力。——由簡正應力及切應力各種組合而成之應力，稱為合成應力。今考究矩形平行六面體內之合成應力，此體受垂直於四面之張力，如圖 39a 所示。以 A_x 及 A_y 各表示垂直於 x 及 y 軸之表面面積，以 P_x 及 P_y 表示在 x 及 y 軸方向內之張力，表面 A_x 及 A_y 上之單位張應力將為

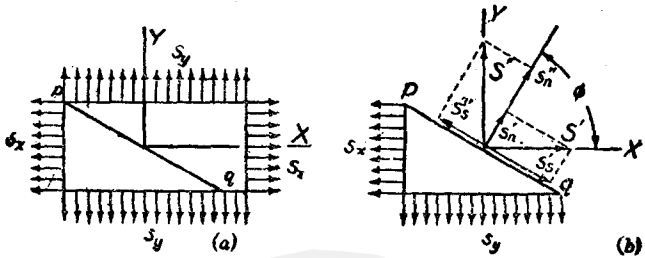


圖 59.

$$s_x = \frac{P_x}{A_x}; \quad s_y = \frac{P_y}{A_y}.$$

今考究任何剖面 PQ (垂直於圖之平面) 上之應力, 此剖面之法線與 x 軸成角度 ϕ . 在此剖面上所生之應力, 可甚易自下列二法計算之.

第一法. 此法利用重疊原理, 此原理普偏述之, 即可將部分效應相加, 以求其總效應. 今應用此原理至合成應力問題, 同時作用之力系在一點所生之應力情形, 可將該諸力分別作用時所生效應相加, 以求得之. (註 2)

用(11)及(12)式, 可得力 P_x 所生之正應力及切應力, 各為 $s_n' = s_x \cos^2 \phi$ 及 $s_{sn}' = \frac{1}{2} s_x \sin 2\phi$. 同樣, 將 $\phi - 90^\circ$ 替代(11)及(12)式之 ϕ , 得 P_y 所生之應力為 $s_n'' = s_y \sin^2 \phi$ 及 $s_{sn}'' = \frac{1}{2} s_y \sin 2\phi$. 此諸分應力之方向, 示於圖 39b 中, 今用重疊原理將二者相加, 得下列計算總正應力及總切應力之方程式: (註 3)

註 2. 欲知重疊原理不能應用之例, 見 72 節之最後一段.

註 3. 由三角術, $\cos^2 \phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi)$ 及 $\sin^2 \phi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi)$.

$$s_n = s_x \cos^2 \phi + s_y \sin^2 \phi = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2\phi, \quad (14)$$

$$s_s = \frac{s_x - s_y}{2} \sin 2\phi. \quad (15)$$

第二法。此法將淨力平衡條件，應用至圖 39a 平行六面體之一部分。令此部分為垂直於 x 軸之面，垂直於 y 軸之面，及對角面 pq 所圍成之部分，如圖 40 所示。所示向量表示應力強度，非為總力，故在立平衡條件時，單位應力必乘以應力所作用之面積。令 A 為面 pq 之面積；於是面 po 之面積 $= A \cos \phi$ ，面 qo 之面積 $= A \sin \phi$ 。

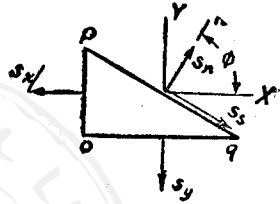


圖 40。

將作用於元素上之諸力，投影於 n 之方向，得平衡式

$$s_n A = (s_x A \cos \phi) \cos \phi + (s_y A \sin \phi) \sin \phi,$$

或

$$s_n = s_x \cos^2 \phi + s_y \sin^2 \phi = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2\phi. \quad (14)$$

同樣，由諸力在 pq 方向之平衡，

$$s_s A = (s_x A \cos \phi) \sin \phi - (s_y A \sin \phi) \cos \phi,$$

或

$$s_s = (s_x - s_y) \sin \phi \cos \phi = \frac{s_x - s_y}{2} \sin 2\phi. \quad (15)$$

設將二應力代數值之較大者作為 s_x ，於是由 (14) 式，可知當 $\cos 2\phi = 1$ 時，正應力變為最大，其值為 $(s_n)_{\text{最大}} = s_x$ 。同樣，當 $\cos 2\phi = -1$ 時，正應力之代數值為最小，其值為 $(s_n)_{\text{最小}} = s_y$ 。又有可注意者，即以 $\pm \phi$ 之二值，能使 (15) 式所示之切應力等於零，故可知在切應力等於零之平面上之正應力，為最大或為最小。此最大及最小正應力，

稱為主應力。主應力之平面，稱為主平面。由(15)式，當 $\sin 2\phi = 1$ ，或 $\phi = 45^\circ$ ，切應力變為最大。

$$(\sigma_s)_{\text{最大}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (16)$$

設 $\sigma_x > \sigma_y$ ， $(\sigma_s)_{\text{最大}}$ 之方向，將如圖 40 所示。

以上對於二張力之分析，亦可應用於一或二力均為壓力之例；在用(14)及(15)式時，僅需將壓力作為負值即可。

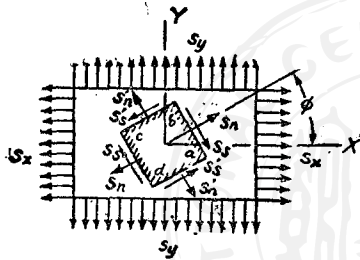


圖 41.

用二對垂直面，可自受合成應力之桿內，割出一元素，如圖 41 所示。用以上所得公式，可計算作用於各邊之正應力及切應力。在四面上之切應力，數值相等，且設

$\sigma_x > \sigma_y$ (又見 67 題)，則切應力方向將如圖中所示者。

習 題

70. 在圖 41 中，設 $\sigma_x = 10,000$ 磅/方吋， $\sigma_y = -5,000$ 磅/方吋， $\phi = 30^\circ$ ，求 σ_n ， σ_n' ， σ_s ，及 σ_s' 。

答. $\sigma_n = 5,250$ ， $\sigma_n' = -1,250$ ， $\sigma_s = 3,500$ 及 $\sigma_s' = -3,500$ 磅/方吋。

71. 承前題，設選擇 ϕ 值，使切應力為最大，求 σ_n ， σ_n' ， σ_s 及 σ_s' 。

答. $\sigma_n = 2,500$ ， $\sigma_n' = 2,500$ ， $\sigma_s = -\sigma_s' = 7,500$ 磅/方吋。

72. 已知 $\sigma_x = 500$ 及 $\sigma_y = 1,000$ 磅/方吋。一平面之法線與 x 軸成角度 $\phi = 30^\circ$ ，求此面上之分應力。

73. 如 72 題所述之應力條件 求主平面之位置，及計算其面上之應力值。

74. 一 1 吋見方之桿，沿軸受牽力 600 磅，在側面又受壓應力 $s_y = -1,000$ 磅/方吋。完全求出桿內所生各種最大應力。

13. 互成直角面上切應力間之關係。(註 4)——作用於一點且位於二互成直角面內之單位切應力 (此應力平行於互相垂直之第三平面)，其數值相等。

欲證明以上敘述，令 $abcd$ (圖 42) 表示一單位厚之甚小稜柱形元素，此元素由受應力之物體中割出，受有切應力。設有切應力 s_s' 作用於右邊面上，作用於此面之切力為 $s_s' dy$ (1)，而在左邊面上有相等而方向相反之切力，如是在平衡時可使 y 分力之和為零。然此二力組成一偶力，而欲阻止轉動，必有其他由作用於上面及下面上之切力 $s_s'' dx$ 所組成之偶力。此二偶力必數值相等，而作用之方向相反。第一偶力之力臂為 dx ，第二偶力之力臂為 dy 。於是

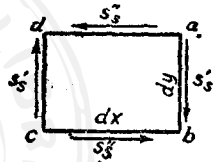


圖 42.

$$(s_s' dy)(dx) = (s_s'' dx)(dy),$$

於是

$$s_s' = s_s'', \tag{17}$$

故以上敘述可以證明。是以，作用於元素上之四切應力之任一切應力，可單用 s_s 表之。

由以上討論，可知切應力不可單獨存在，但在與前切應力平面成直角之平面上，誘導一相等之切應力。

14. 在二垂直方向內張力及壓力之馬氏圓。——在任何平面上

註 4. 此關係已在 67 題，及 12 節末段中述過。其關係恆如此節說明之。

(如圖 39 之平面 pq) 之應力條件, 甚易用一圖形表示之, 在此圖中分應力 s_n 及 s_s , 可用一點之座標表之, 而此點之位置, 視決定剖面 pq 方向之角度 ϕ 而定。此圖為可能, 因對於每角度 ϕ , 必有相當之一定正應力 s_n , 及一定之切應力 s_s : 見 (14) 及 (15) 式。因當 ϕ 值改變時, s_n 及 s_s 之值繼續變換, 在 s_n-s_s 圖中之諸點, 可定一曲線, 此曲線以後可證明為一圓 (圖 43)。

先將垂直於 x 及 y 軸 (圖 39) 之剖面開始, 且思及在此二平面上無切應力, 於是表示作用於此二面之應力之諸點, 將在 s_n 軸上, 令 A 及 B 為此二點。於是用某種比例尺, $\overline{OA} = s_x$, 及 $\overline{OB} = s_y$, 表示在數斜

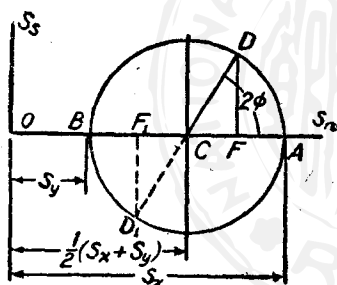


圖 43.

面上諸應力之點之座標, 可將各 ϕ 之值代入 (14) 及 (15) 求之, 此諸點亦可繪於 s_n-s_s 圖上。設如是繪出, 則諸點將位於一圓上, 其直徑為 AB , 如圖 43 所示。今將證明諸點之軌跡, 實在即為此圓。

圓上一點 D , 表示在任何平面 pq 上之正應力及切應力, 此平面之法線與 x 軸成角度 ϕ 。欲求此 D 點, 僅需自 A 點在逆時針方向 (註 5) 量一弧 AD , 其所對之角度為 2ϕ 。於是, 由圖,

$$\begin{aligned}\overline{OF} &= \overline{OC} + \overline{CF} = \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2\phi \\ &= s_x \cos^2 \phi + s_y \sin^2 \phi,\end{aligned}$$

註 5. 以逆時針方向所量之角, 作為正。

$$\overline{DF} = \overline{CD} \sin 2\phi = \frac{s_x - s_y}{2} \sin 2\phi.$$

將點 D 之座標，與(14)及(15)式相比，即可證明 D 確實表示平面 pq 上之應力條件。當剖面 pq 對垂直於圖 39 平面之軸，在逆時針之方向而轉動，且當 ϕ 自 0° 變至 90° ，點 D 自 A 移至 B ；由此可以證明，上半圓可決定在此極限內各 ϕ 值之應力變化。

欲求與平面 pq 成直角之平面上之應力，角 ϕ 應增加 90° ，或角 2ϕ 增加 180° 。此與延長半徑 CD 至點 D_1 ，或將 CD 再轉過角度 180° 相當。是以下半圓表示斜面上應力之條件，此斜面之 ϕ 自 90° 變至 180° ，如此之圓，稱為馬氏圓 (Mohr's circle)。

自馬氏圓可推得若干重要應力關係。例如，因 $\overline{D_1F_1} = \overline{DF}$ ，在二垂直剖面上之切應力之數值為相等，此與 13 節之結果相符。至於在此平面上之正應力 s_n 及 s_n' ，由圖 43 知

$$\overline{OF_1} + \overline{OF} = 2\overline{OC},$$

即

$$s_n + s_n' = s_x + s_y. \quad (18)$$

當角 ϕ 變化，二垂直剖面上正應力之和，仍為一定。

當 s_x 及 s_y 之一或二者為壓力，仍可用同樣圖解法，僅需在 s_n 軸之負值之一邊上，取長度以示壓力。例如，在圖 44 中，在二垂直方向之合壓力，可用直徑為 AB 之圓圖示之。角 2ϕ 自此點量起，此點即表示 ϕ 為零之平面之應力條件。在簡張力之例中， $s_x = s$ ， $s_y = 0$ ，於是馬氏圓將如圖 45 所示。此甚易見，點 D 之座標 \overline{OF} 及 \overline{DF} ，各示(11)式及(12)式之右邊。在 x 方向受簡壓力之例中，馬氏圓之位置，將如

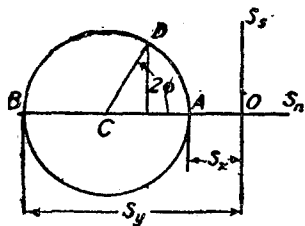


圖 44.

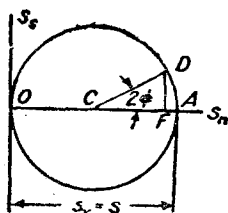


圖 45.

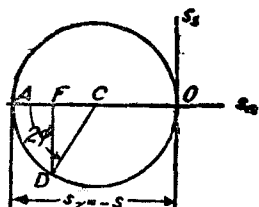


圖 46.

圖 46 所示。應用以上圖解法，對於任何應力 s_x 及 s_y 之值，其作用於元素（如圖 41 所示）面上之應力，均直接可以求得。

欲判斷斜剖面上正應力之符號，正應力將作為張力，負應力作為壓力。至於切應力，其方向恆不甚重要，而僅其數值則在實用上有用。但在數例中，其方向亦應考究者。於是，當切應力生順時針方向之偶力，則切應力之方向作為正，如圖 41 中元素 $abcd$ 之邊 ab 及 cd 上所示者。在反對方向之切應力，作為負。正切應力與馬氏圓之上半圓相當，而負切應力與下半圓相當。

習 題

題 65, 66, 69, 70 至 74 可指定用馬氏圓解之。

15. 平面應力總例之馬氏圓。(註 6)——以同一方法可用馬氏圓解平面應力之一般問題，此問題除有二垂直方向內之張應力或壓應力外，又有切應力之存在。例如，此應力系作用於元稜柱形 $abcd$ 之各面上（圖 41）。想像將此稜柱形割出，表示於圖 47 中，此應力系均作

註 6. 當作用於受應力物體元素上之諸應力，均平行於一單平面，如 xy 平面，此元素稱為受平面應力或二度應力 (two-dimensional stress)。

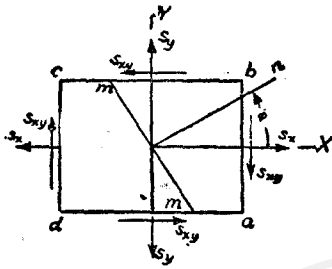


圖 7.

用於其上。今用馬氏圓欲求主應力及主平面，又欲求任何斜面或剖面 mn 上之正應力及切應力，此斜面垂直於平面 xy ，其法線與 x 軸成角度 ϕ 。

在 14 節中，已知主應力 s_x 及 s_y ，由此構造馬氏圓；在任何斜面 pq (圖 19) 上之正應力及切應力，用適當點

D 之座標表示之(圖 43)。垂直於平面 pq 之平面 $p'q'$ (未畫出)上之分應力，用點 D_1 表之。在此節中用反法：在此已知互相垂直平面 ab 及 bc 上之正應力及切應力，需求主應力及主平面。即，先定 D 及 D_1 之位置，再以 DD_1 為直徑，作馬氏圓。

根據上述總原理，其詳細作法如下。沿 s_n 軸(圖 48)量出應力 s_x 及 s_y ，得點 F 及 F_1 。在圖 47 之 x 平面上(垂直於 x 軸之平面)，又有切應力 s_{xy} 之作用，圖中所示者為正值。(註 7)在 s_x 軸之正方向內，量出此正切應力 s_{xy} ，得 FD 。在 y 平面上作用有相等而相反之切應力 $-s_{xy}$ (見 13 節)，將此在負方向量出，得 F_1D_1 。此直徑 DD_1 決定馬氏圓。

最大及最小正應力，在圖 48 中，各以 OA 及 OB 表之。最大正應力之平面(一主平面)，如下法求之。點 A 表示在此主平面上之應力

註 7. 在此章中，以 s_{xy} 表示 x 平面上之切應力，所以與作用於任何斜面上之一般切應力 s_s 區別也。 s 下端第一字 x ，表示此切應力所作用之平面，下端第二字 y 表示此應力作用在平行於 y 軸之方向。同理， s_{yx} 表示在 y 平面上而在 x 方向之切應力。由 13 節， s_{xy} 之數值，等於 s_{yx} ，故常用同一記號 s_{xy} 以表示此二應力。在此題以下之敘述中，假定已知 s_{xy} 作用於 x 平面上。

當有數已知應力為負值時，其馬氏圓之用法，將在以下例題中說明之。

以上討論，已限於應力 s_x, s_y 及 s_{xy} 均等布於尺寸有限之矩形平行六面體面上之例。然當一物體受平面應力，及 s_x, s_y 及 s_{xy} 不等布時，欲求作用於經過一點而垂直於 xy 平面之任何斜面上之應力，亦可用同一方法及方程式，以求合成應力。欲證明此原理之伸展，僅需以一（無限小）元素替代此有限尺寸之元素，使此元素上 s_x, s_y 及 s_{xy} 諸量無明顯之變化即可。

例 題

75. 在受應力物體內之一點，有下列應力作用於其上： $s_x = -500$ 磅/方吋； $s_y = 1,500$ 磅/方吋； $s_{xy} = -s_{yx} = 1,000$ 磅/方吋。試用馬氏圓，求作用於下列各平面上之正應力，切應力，及總應力之大小，(a) 在主平面上，(b) 最大切應力之平面上，(c) 其法線與 x 軸成 $+35^\circ$ 角度之平面上，(d) 與 (c) 中平面成直角之平面上。

解。——(a) 照比例尺，自原點 O (圖 49) 在負方向內，作 $s_x = -500$ ，得 OF 。自點

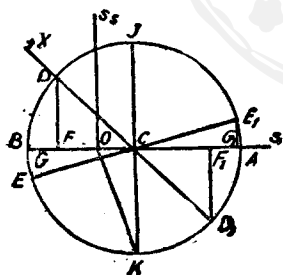


圖 49.

F ，在 s_s 之正方向作 $s_{xy} = +1,000$ ，得 FD 。 x 軸之正端，即由此點角度者，為在 D ，以 $+X$ 記之。

同理，照比例尺，自原點正方向，作 $s_y = +1,500$ ，得 OF_1 ，於是在 s_s 之負方向作 $s_{yx} = -1,000$ ，得

F_1D_1 。注意設 x 平面上之 s_{xy} 為正，在 y 平面之 s_{yx} 必為負，因已知在互成直角平面上之切應力之數值相等，其符號恆相反。 DD_1 為馬氏圓之直徑，其圓心在 C ，故今可作圓。根據 15 節， OA 表示最大正或張應力，量得 1,910；故 (s_n) 最大 $-1,910$ 磅/方吋。此平面上之切應力，以點 A

之縱座標表之，其值為零。角 DCA 或 $2\phi_a = -135^\circ$ ；故 $\phi_a = -67\frac{1}{2}^\circ$ 。同理， OB 表示

最大負或壓應力，量得 915 ；故 (s_n) 最小 $= -915$ 磅/方吋。角 DCB 或 $2\phi_0 = +45^\circ$ ；故 $\phi_0 = 22\frac{1}{2}^\circ$ 。

(b) OJ 及 OK 表示最大切應力，量之得 $1,410$ ；故 (s_s) 最大 $= 1,410$ 及 (s_s) 最小 $= -1,410$ 磅/方吋。在此二平面上之正應力，為 OC 所示者；故 $s_n = s_n' = 500$ 磅/方吋。此諸平面之法線與 x 軸所成角度，為 $\phi = -22\frac{1}{2}^\circ$ 及 $\phi' = +67\frac{1}{2}^\circ$ 。總應力 S 或 S' 之大小，以線 OJ (未畫) 或 OK 表之，得 $S = S' = 1,405$ 磅/方吋。其理由為

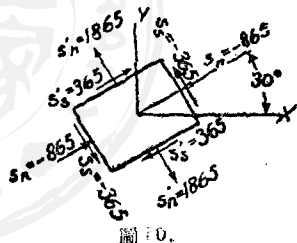
$$S = \sqrt{s_n^2 + s_s^2},$$

此以直角三角形 OCK 之對邊 OK 表之。

(c) 欲求法線與 x 軸成角度 $\phi = +30^\circ$ 之平面上之應力，於馬氏圓內自 $+X$ 在正或逆時針方向內，取等於 $2\phi = +60^\circ$ 之角度 DCE 。 OG 表示正應力， $s_n = -835$ 磅/方吋； GE 表示切應力， $s_s = -335$ 磅/方吋。自對角線 OE (未畫) 量總應力，得 $S = 940$ 磅/方吋。

(d) 同理，與上平面成直角之平面上之分應力，為點 E_1 之座標所示者，得 $s_n' = +1,835$ 及 $s_s' = 335$ 磅/方吋。

由(c)及(d)二部之結果，可畫出作用於元稜柱體上之應力系(圖 59)，此元稜柱體之四邊，即為平行於(c)及(d)二部內平面之平面所圍成者。



習 題

76. 用馬氏圓，求 16 節內所載(21)至(24)之公式。

77. 求剖面 pq (圖 59a) 之方向，使 $s_n = \frac{1}{2}(s_x + s_y)$ 。

答： 45° 。

78. 在二等張力 $s_x = s_y = s$, 或二等壓力 $s_x = s_y = -s$ 之例中, 求馬氏圓。

79. 一元素受壓力 $s_x = 5,000$ 及 $s_y = 3,000$ 及 $s_{xy} = 1,000$ 磅/方吋之作用, 求主應力之大小及方向。

80. 承前題, 設 $s_x = -5,000$ 磅/方吋, 而非為 $+5,000$, 試求主應力之大小及方向。

答: $3,120$ 在 $-82^\circ 59'$; $-5,120$ 在 $7^\circ 01'$ 。

81. 在受應力物體內一點上, 有下列應力作用之: 一張應力, $s_x = 500$ 磅/方吋; 一壓應力, $s_y = -1,040$ 磅/方吋; 及一切應力 $s_{xy} = 417$ 磅/方吋, 試求 75 題所列之各項, 惟在 (c) 中用 $\phi = \tan^{-1} \frac{8}{3}$ 。

答: (a) $75^\circ 46'$ 及 $165^\circ 46'$; $-1,110$ 及 $+602$ 。

(b) $20^\circ 46'$ 及 $120^\circ 46'$; $s_c = +875$ 及 -875 。

(c) $s_n = -187$; $s_t = +510$ 。

(d) $s_n' = +445$; $s_t' = -510$ 。

82. 已知 $s_x = 0$, $s_y = 4,000$, $s_{xy} = 0$, 問在 $\phi = -10^\circ$ 之平面上之 s_n 及 s_t 值爲若干?

答: $s_n = +1,000$ 及 $s_t = +1,730$ 。

83. 已知 $s_x = 0$, $s_y = 8,000$, $s_{xy} = -3,000$, 求其主應力及其相當平面。

16. 由平衡條件所得之平面應力總例之方程式。——在一平面上之合成應力之總方程式, 可不用馬氏圓, 而用與 12 節第二法相仿之靜力平衡條件求之。

設自受應力物體中, 割出一元稜柱體, 其上所作用之單位應力, 如圖 51 所示, 而此稜柱體之對角平面 pq 之法線, 與 x 軸成角度 ϕ 。將圖 52 中之元三角形稜柱體分離, 作爲自由體。今任何面上之總力, 等於該面上之單位應力與該面面積之積。在 s_n 方向總合諸力之分力, 得

$$s_n A = s_x A \cos \phi \cos \phi + s_y A \sin \phi \sin \phi - s_{xy} A \cos \phi \sin \phi - s_{xy} A \sin \phi \cos \phi$$

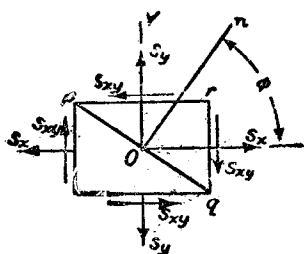


圖 51.

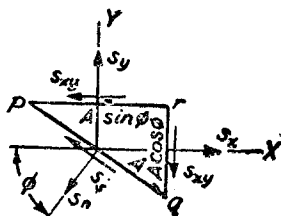


圖 52.

此化至

$$s_n = s_x \cos^2 \phi + s_y \sin^2 \phi - 2s_{xy} \sin \phi \cos \phi \quad (21)$$

$$= \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{s_x - s_y}{2} \cos 2\phi - s_{xy} \sin 2\phi. \quad (21a)$$

同理, 可得 s_s 之公式, 即,

$$s_s = (s_x - s_y) \sin \phi \cos \phi + s_{xy}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \quad (2)$$

$$= \frac{(s_x - s_y)}{2} \sin 2\phi + s_{xy} \cos 2\phi. \quad (22a)$$

將 s_n 之公式 (21a) 式, 對 ϕ 求其微分, 而將此式之微係數等於零, 則可定最大或最小正應力之平面. 結果得下式, 以定角度 2ϕ :

$$\tan 2\phi = -\frac{2s_{xy}}{s_x - s_y}. \quad (23)$$

同理, 最大切應力之平面, 可用下式定之

$$\tan 2\phi = \frac{s_x - s_y}{2s_{xy}}. \quad (24)$$

用 (23) 式可定 2ϕ 之二值, 此值在 0° 至 360° 之間, 且因二值之正切值相同, 故二者相差 180° . 於是 ϕ 值相差 90° , 此指明主應力發

生於相距 90° 之二面上。

決定最大切應力平面位置之(24)式，同樣可定 0° 至 360° 間 2ϕ 之二值。於是 ϕ 之值相差 90° ，此指明最大切應力之平面相距 90° 。

將(22a)式之 s_x 等於零，解 $\tan 2\phi$ ，可求切應力為零之平面，

$$\tan 2\phi = -\frac{2s_{xy}}{s_x - s_y}$$

此式與以上定主平面之(23)式相同。故可得結論，最大及最小正應力，發生於切應力為零之平面上。

注意(23)式之 $\tan 2\phi$ ，為(24)式 $\tan 2\phi$ 之負倒數，此甚明顯， 2ϕ 之值相差 90° 。故最大切應力平面，與主應力平面成 45° 之角。

將(23)及(24)式所示之 2ϕ 值，各代入 s_n 及 s_s 之公式中，(21a)及(22a)式，可得主應力及最大切應力之公式。其結果為：

$$(s_n)_{\substack{\text{最大} \\ \text{最小}}} = \frac{s_x + s_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + s_{xy}^2} \quad (25)$$

$$(s_s)_{\text{最大}} = \pm \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + s_{xy}^2} \quad (26)$$

讀者應注意，自(25)式可得 $(s_n)_{\substack{\text{最大} \\ \text{最小}}}$ 之二值，一應力與(23)式所定二平面之一相

當，他應力與他平面相當。欲求所算得應力之一究作用於何平面，應將 2ϕ 值之一代入(21a)，以計其相當應力。於是其他應力與 2ϕ 之第二值相當。

17. 簡張力例中之應變分析。——在4節中，已討論受張力桿內之軸伸長。由試驗知此桿之軸伸長，恆與側收縮相伴而生，且在彈性極限內，其比

$$\mu = \frac{\text{單位側收縮}}{\text{單位軸伸長}} \quad (27)$$

對一定桿爲一定。此常數 μ 稱爲柏生比 (Poisson's ratio)，此比由法數學家柏生用材料結構之分子理論，分析求得，故以其名名此比也。在各方向彈性性質相同之材料，即所謂各向同性材料 (isotropic materials)，柏生求得 $\mu = \frac{1}{4}$ 。由結構金屬(註8)之側收縮試驗，知 μ 之值，與柏生所示者相差不遠。在結構鋼之例，在此書中 μ 將作爲 0.3。

已知材料之柏生比，受張力桿之尺寸改變及體積改變，均可計算。桿之長度，將以 $(1+e) : 1$ 之比增加，其側尺寸將以 $(1-\mu e) : 1$ 之比減小；故其剖面積以 $(1-\mu e)^2 : 1$ 之比減小，於是，桿之體積，將以 $(1+e)(1-\mu e)^2 : 1$ 之比改變，設思及 e 爲一小量，其冪可略去，則上式變爲 $(1+e-2\mu e)$ 。於是其單位體積之膨脹爲 $e(1-2\mu)$ 。當材料受張力時，其體積不致有何減小，故 μ 必小於 0.50。如橡皮及石蠟等材料， μ 近於上述極限，而在伸長時該材料之體積仍大約一定。但在另一方面，如混凝土等材料，其 μ 值甚小 ($\mu = \frac{1}{8}$ 至 $\frac{1}{12}$)，而在軟木之例中，其 μ 可視作等於零。

以上關於在伸長時之側收縮之討論，倘稍改變，可應用至壓縮之例。縱收縮將與側膨脹相伴而生，而在計算此膨脹時，可用伸長例中之 μ 值。

習 題

84. — 鋼桿直徑 2 吋，當載荷增加 132,000 磅，規長 8 吋內增長 0.0112 吋，而其

註 8. 此等材料可視作各向同性。

直徑減小 0.00084 吋。問其彈性係數及泊生比各若干？

85. 一鋼桿直徑 3 吋，設加軸向壓應力 30,000 磅/方吋，且假定泊生比 $\mu = 0.3$ 及 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋。求直徑之增減。 答：增加 0.0009 吋。

86. 由在三互相垂直方向之單位線應變 e_x, e_y 及 e_z 所生之單位體積增加，為 $e_x + e_y + e_z$ ，試證之。

87. 一石柱形桿，受端力 P 及其本身重量作用而伸長，求其體積之增加。

$$\text{答：} \frac{Al(1-2\mu)}{E} \left(\frac{P}{A} + \frac{\rho l}{2} \right).$$

18. 在二垂直方向之張力或壓力之應變。——設一桿作矩形平行六面體，在二垂直方向 x 及 y (圖 39) 內，受張力之作用，於是在一方向之伸長，不獨視此方向之張應力而定，且與垂直方向內之應力亦有關係。張應力 s_x 在 x 軸方向內所生之單位伸長為 s_x/E ，張應力 s_y 將在 x 方向內生側收縮，其值等於 $\mu s_y/E$ ；於是設二應力 s_x 及 s_y 同時作用，其在 x 方向內之單位伸長將為

$$e_x = \frac{s_x}{E} - \mu \frac{s_y}{E}. \quad (28)$$

同理，在 y 方向內，得

$$e_y = \frac{s_y}{E} - \mu \frac{s_x}{E}. \quad (29)$$

在二張力相等之特例中， $s_x = s_y = s$ ，得

$$e_x = e_y = \frac{s}{E} (1 - \mu). \quad (30)$$

由(28)及(29)式，應力 s_x 及 s_y ，可視為單位應變 e_x 及 e_y 之函數，得下式：

$$\epsilon_x = \frac{(e_x + \mu e_y)E}{1 - \mu^2}; \quad \epsilon_y = \frac{(e_y + \mu e_x)E}{1 - \mu^2}. \quad (31)$$

習 題

88. 一混凝土正方體，在二垂直方向內受壓力，其排列如圖 3。設此正方體每邊 4



圖 3.

吋，壓應力等布於各面， $\mu = 0.1$ 及 $P = 20,000$ 磅，求其體積之減小，略去鉸之阻力。指示。——見習題 83 之結果。

答. -0.000707 /單位體積。

89. 今有一銅桿，其應力條件與習題 79 所示者同，求其最大正應力方向內之單位伸長。

答. $e = 15'.6 \times 10^{-6}$ 。

第三章

切，鉚釘接及薄壁圓筒內之應力

19. 純切；切應變。——令一張應力 s_x 及一大小相同之壓應力 s_y ，作用於矩形稜柱體上，如圖 54a 所示。考究稜柱體內之正方元素 $abcd$ ，此元素各面與稜柱體面成 45° 。用馬氏圓(圖 55)，或 12 節之 (14) 及 (15) 式，得此等斜面上之正應力為零，其切應力為 $s_s = s_x = -s_y$ 。故設將元素如 $abcd$ 視作分離，則此將在平衡狀態，且僅有等強度之切應力作用於其上(見圖 54b)。此種應力狀態，稱為純切(pure

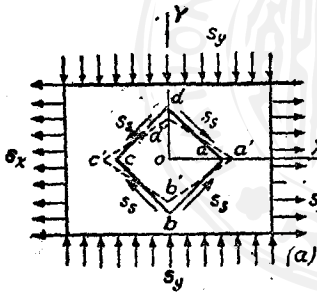


圖 54.

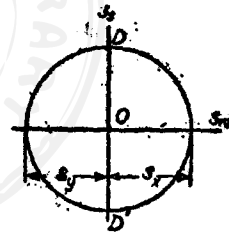


圖 55.

shear). 設剖面不復與 x 軸成 45° ，則正應力與切應力，將均存在。其大小可用常法由此例之馬氏圓求之。

今考究元素 $abcd$ 之變形。因無正應力作用於此元素之各邊，在

變形時長度 ab , ad , bc 及 dc 將不改變, 但水平對角線 ac 將伸長, 而直立對角線 db 將收縮, 故正方形元素 $abcd$ 在發生變形後, 將變為菱形, 如圖 54 以虛線所示者。 a 處之角度, 在變形前為 90° , 今變為小於 $\frac{\pi}{2}$, 言 $\frac{\pi}{2} - \gamma$, 而同時 b 處之角度增加, 變為 $\frac{\pi}{2} + \gamma$. 小角 γ 決定元素 $abcd$ 之變形, 此稱為切應變 (shearing strain).

此應變可如下摹想之. 將圖 54 之元素 $abcd$ 轉過 45° , 使之在圖 56 之位置. 在切應力 s_s 生變形後, 此同一元素之位置, 如虛線所示. 因角度 γ 甚小, cd' 可假定等於 dc , 又可用 γ 替代 $\tan \gamma = \overline{dd'}/\overline{dc}$. 於是切應變 (即以角 γ 所示者), 可視作等於比 $\overline{dd'}/\overline{dc}$, 或邊 ad 對於邊 bc 之滑動 $\overline{dd'}$, 除以兩邊間之距離. 應注意欲在圖 56 中所假定之方塊邊上均勻施加切應力, 殊難於摹想. 鉚釘及螺釘 (圖 57) 等元素之

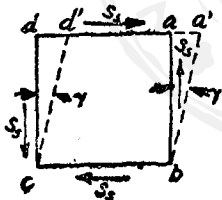


圖 56.

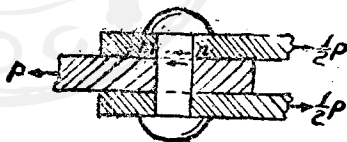


圖 57.

實際切計算, 僅為近似法, 蓋如剖面 mn 上之切應力分布, 恆假定均勻也。

由柔韌材料之純切試驗, 可得類似張力及壓力之虎克定律, 即在切比例極限以內, 切應力與切應變成正比. 以算式表之,

$$s_s = G\gamma, \quad (32)$$

式中 G 爲一常數，稱爲切彈性係數(modulus of elasticity in shear) 有時稱爲剛性係數(modulus of rigidity)。 G 如 E 以磅/方吋表之。

此切應力與切應變間之比例性，又可由理論方面創立之。欲求此，先考究直角三角形 oab ，此爲元素 $ab \cdot d$ (圖 51) 之一部分。在變形時，此三角形邊 ao 之伸長及邊 ob 之收縮，可由(28)及(29)式得之。注意在此例中， $s_x = -s_y = s_s$ ，得

$$e_x = \frac{s_s(1+\mu)}{E}; \quad e_y = -\frac{s_s(1+\mu)}{E}.$$

於是

$$\overline{oa'} = \overline{oa} \left[1 + \frac{s_s(1+\mu)}{E} \right]; \quad \overline{ob'} = \overline{ob} \left[1 - \frac{s_s(1+\mu)}{E} \right],$$

而由直角三角形 $oa'b'$ ，得

$$\tan oa'b' = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\overline{ob'}}{\overline{oa'}} = \frac{1 - \frac{s_s(1+\mu)}{E}}{1 + \frac{s_s(1+\mu)}{E}}. \quad (a)$$

又自三角衡，

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}},$$

因在切應變所發生之小角 γ ， $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$ 。將此代入(a)式，得

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{s_s(1+\mu)}{E},$$

或用記號

$$\frac{E}{2(1+\mu)} = G, \quad (33)$$

得

$$\gamma = \frac{s_s}{G}. \quad (32)$$

故切應變與切應力 τ 成正比，而與剛性係數 G 成反比，此 G 視材料之彈性性質而定。

(33)式甚為重要，因其連絡三彈性常數 E , G 及 μ 也。設已知 E 及 μ , G 可由(33)式計算之。例如，在鋼之例中，

$$G = \frac{30 \times 10^6}{2(1 + 0.3)} = 11.5 \times 10^6 \text{ 磅/方吋。}$$

在下章中，將述切彈性係數，可由圓軸之扭轉試驗決定之。於是由張力試驗得 E 後，自(33)式可計量 μ 矣。欲在張力試驗中，量側收縮，以直接測定 μ ，殊為複雜，因收縮甚小，欲精確測定，必用甚為靈敏之儀器。

習 題

90. 在圖 54, $s_x = 20,000$ 及 $s_y = -20,000$ 磅/方吋。求立方體元素 $abcd$ 之切應變 γ ，及柏生比。 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋，及 $G = 12 \times 10^6$ 磅/方吋。

答。 0.00137 弧度； $\mu = 0.25$ 。

20. 切力對於簡單問題之若干應用。——除以後將論之簡扭轉外，在實用上罕遇純切作用。然有許多問題，恆根據簡切之假設而解決之，雖如是所得之值為近似者。其差誤由於數個原因。通常恆有若干彎曲存在，其本身之嚴重可與切同。於是，在切作用之下，其切應力罕能等布於全面積。然照慣例，此節及下節所論螺釘接之問題解法中，此等因數將略去之。在此等解法中，假定平均單位切應力， $s_s = P/A$ ，等於最大切應力。

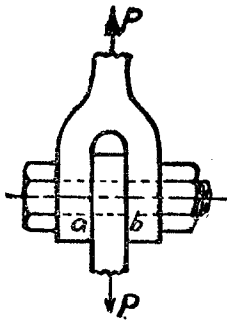


圖 58.

習 題

91. 圖 58 中之力 P 為 $20,000$ 磅。設螺釘之許可 $s_s = 10,000$ 磅/方吋，其最小直徑該若干？

解。——假定牽力 P 之一半，作用於螺釘剖面 a 處，其

他一半作用於 b 處，故其切力 F 為 10,000 磅。因 $s_s = F/A$ ，其所需面積為 1 方吋，其所求直徑為 1.13 吋。

此解答僅屬近似，其原理一部分已在前述過。在計算時已假定牽力 P ，由 a 及 b 處二剖面分負之；但在實際上不能確實如是。又甚明顯有若干彎曲作用之存在，此作用可使切應力之分布不均勻，使最大切應力大於平均值。又，設螺釘孔有許多餘隙，於是彎應力可證明為嚴重之函數。

92. 鍋爐板厚 $\frac{1}{2}$ 吋，設此材料之極限切強度為 42,000 磅/方吋，欲經過此板壓穿直徑 1 吋之孔，問需力若干？

答. 61,000 磅。

93. 圖 59 示一種柱體，今沿對角面將此分為兩半，於是用直徑 1 吋之釘連接之。對

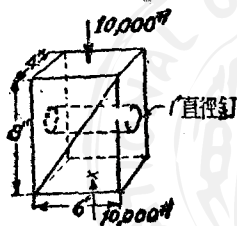


圖 59.

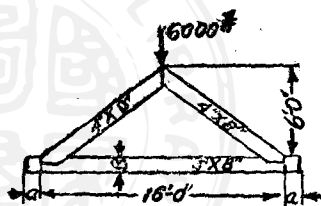


圖 60.

角面間之摩擦係數為 0.25。問釘所受切應力之平均強度該若干？

答. 6,720 磅/方吋。

94. 圖 39 示一構架，設平行於木紋之許可切應力為 120 磅/方吋，求距離 a ，使梁凹口以外之部分不致切去，略去摩擦效應。

21. 受壓容器之鉚釘接之強度。——在飯梁，構架，蒸汽鍋爐，水櫃，水管等結構工作中，恆用鉚釘接以接合各部分，雖此等工作今漸漸多用銲接法。在此節及附帶之例題中，將簡述鉚釘鍋爐接，而在計算其強度時，則用美國機械工程師學會鍋爐法規所採用之方法。(註 1)

註 1. 24 節中所述計算結構工作內鉚釘接強度之方法，有時可用至鍋爐接。

鍋爐及其他受壓容器之鉚釘接，可分二種，即搭接(lap joints)及對接(butt joints)，圖 61 示此種接之常用式樣。在搭接中，二板互相重疊，而以一、二、或三行鉚釘接合之。在對接中，二板互相對立，以二蓋

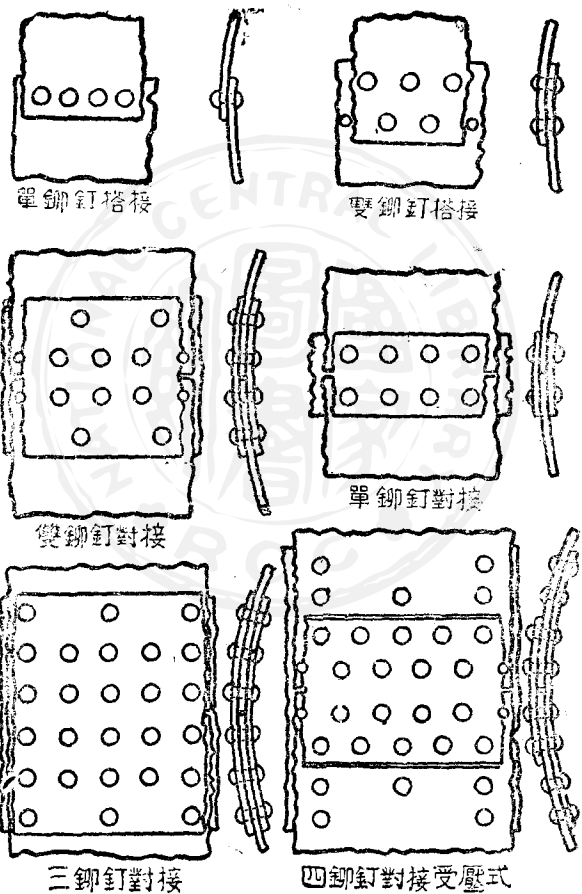


圖 61.

飯(有時僅一塊)連結之,而每主飯及蓋飯,用一至四行之鑄釘接合之。

二蓋飯之寬可以相等,但有時其寬不同,如圖 51 所示四鑄釘對接之情形。其一蓋飯較他蓋飯稍狹,不致十分影響接之強度,而反可允許在鑄釘最密處蓋飯斜邊對主飯之填縫(caulking)。如是所成之接,較在鑄釘相隔稍稀之外行處填縫之結果,更為緊密。因此原因,如是排列組成平常所謂之接之受壓式(pressure type of joint),用於受壓之容器,使得最大之緊密度。此短蓋飯置於鍋爐之外邊,使易於填縫。

數個定義。——釘距(pitch)為在同行內釘中心與釘中心間之距離。當各行用各種釘距時,最大釘距用於外行,此稱為長釘距;最小釘距用於內行,此稱為短釘距;而中間釘距(設有此種釘距,如在圖 61 所示四鑄釘對接)則稱為中釘距。各行間之距離,稱為後釘距(back pitch)。

反復面(repeating section)包括一鑄釘羣,其樣式沿接之長度而反復。此種反復面之長度,等於長釘距,而通常為一接所算之強度,為在如此剖面長度內所生之強度。

任何已知式樣接之相對強度,可用其效率指定之,其定義為

$$\text{效率} = \frac{\text{接之強度}}{\text{未鑄接之強度}} \quad (24)$$

一接之強度,係根據其極限強度計算之;欲求其安全工作強度,應用“5”或較大之安全因數。

所鑽或所壓鑄釘孔之直徑,恆較鑄釘直徑大 $\frac{1}{16}$ 吋;打入之鑄釘,假定完全填滿釘孔。是以,在計算鑄釘鍋爐接時,可將鑄釘之直徑視作等於釘孔之直徑。

鉚釘接破壞之方法。——鉚釘接之主要破壞式樣，有下列數種：

(a) 在單切(single shear)或雙切(double shear)中之鉚釘切去，如圖 62a 或 b 所示。

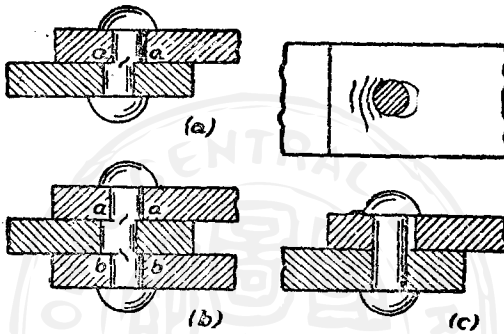


圖 62.

(b) 在鉚釘孔處板之壓破，此由於鉚釘圓柱形面與孔面間之相互壓力所致，如圖 62c 所示，或鉚釘本身亦如板一樣壓破。

(c) 鉚釘孔間板之扯破(tearing)，如圖 63a 及 b 所示。設其後釘距至少為鉚釘直徑之 $1\frac{3}{4}$ 倍，則第二種沿對角線之破壞，不致發生。

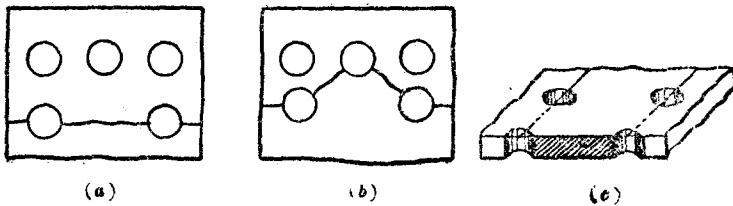
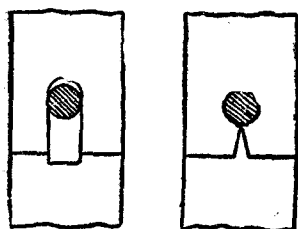


圖 63

(d) 由鑄釘孔與板邊間板之切去或扯破，各如圖 61a 及 b 所示，



(a) 圖 61. (b)

亦可發生破壞。設鑄釘中心與板邊間之距離，為鑄釘直徑之 $1\frac{3}{4}$ 至 2 倍，則此種破壞不致發生。在以下各題中，將假定此距離甚大，足以防止此種破壞。

對於此各種破壞所發生之抵抗，

有下列名稱及定義。鑄釘之單切強度：

為對於經過單鑄釘剖面（如在 $a-a$ ，圖 62a）之切之抵抗。雙切強度：為對於經過二剖面（如 $a-a$ ， $b-b$ ，圖 62b）之切之合成抵抗，此恆假定為單切值之二倍。鑄釘孔間板之張強度：此為經過圖 63c 陰影面積之極限張強度。壓破、承或壓強度：為對孔壁壓破之抵抗，此壓破由於鑄釘對於孔壁之壓力；或反之。其大小假定等於圓柱形孔之投影面積（投影面積 = 孔直徑 × 板厚），與材料極限壓強度之積。

然破壞之作用，實較以上列舉簡單元素所示者，更為複雜。在前節已述過，於鑄釘接之鑄釘或機械部分中，罕見純切作用之存在，而常常近乎與彎曲相伴，此彎曲常可為決斷之因數。其切應力亦不能等布於剖面上，如平常所假定者。尤其在搭接中，鑄釘又有受若干張力之可能。然最重要之事實，為鑄釘冷卻收縮，使數板緊接。因鑄釘長度之收縮，在鑄釘內可生出等於屈點之初張應力，又在板間可引入大而未知之摩擦力。又，因直徑之收縮，使打入鑄釘之直徑較孔為小，故在開始切以前，必發生若干滑動。因鍋爐接倘有幾分滑動，將發生漏泄，故歐洲之工程師恆設計此等接合，使能抵抗滑動。然用此法所得尺寸大小，與根據美國及英國工程師所用強度計算法所得結果，相

差無幾。因以上各種理由，在下例題中所述鑄釘鍋爐接之計算法，祇可視為近似者耳。

例 題

如非特別說明，恆用美國機械工程師學會鍋爐法規內所述之極限單位應力。

張應力， $s_t = 55,000$ 磅/方吋。

切應力(單切)， $s_s = 44,000$ 磅/方吋。

切應力(雙切) $= 88,000$ 磅/方吋。

壓應力， $s_c = 95,000$ 磅/方吋。

95. 一單鑄釘搭接(見圖 61)之尺寸如下：板厚 $= \frac{1}{4}$ 吋；釘距 $p = 1\frac{5}{8}$ 吋；鑄釘孔之直徑 $= \frac{11}{16}$ 吋。求其強度，破壞方法及效率。用上載美國機械工程師學會所定之極限應力。

解。——今計算接長 $1\frac{5}{8}$ 吋之強度。

先考究可扯破鑄釘孔間板之載荷。減去一鑄釘孔，其受張力之淨面積(見圖 62c 之陰影面積)，為 $(1\frac{5}{8} - \frac{11}{16})\frac{1}{4} = 0.234$ 方吋。其扯破抵抗為 $55,000 \times 0.234 = 12,900$ 磅。

一鑄釘之剖面積為 0.3712 方吋，其對於切之抵抗為 $s_s A = 44,000 \times 0.3712 = 16,330$ 磅。因接長 $1\frac{5}{8}$ 吋內之總力，用一鑄釘由一板傳至他板，根據鑄釘之切去，所得此接長將負之極限載荷，為 $16,330$ 磅。

最後考究在一鑄釘前之板壓破抵抗。鑄釘之承面積，假定等於鑄釘之投影面積，或 $\frac{11}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{64}$ 方吋。故在一鑄釘前之壓破抵抗為， $\frac{11}{64} \times 95,000 = 16,320$ 磅。故根據壓破所得之接強度，為 $16,320$ 磅。

其破壞方法，為遭遇最小抵抗之方法，即，為鑄釘孔間之板扯破，其強度為 $12,900$

磅。實心鐵長 $1\frac{5}{8}$ 吋之強度, 爲 $1\frac{5}{8} \times \frac{1}{4} \times 55,000 = 22,300$ 磅。故其效率爲 $12,900 / 22,300 = 0.578$ 或 57.8%。

倘用較大之釘距, 而不改變其他尺寸, 即使張強度等於已得 16,320 磅之壓破強度, 可改進其效率。

決定新釘距 p 之方程式爲

$$\left(p - \frac{11}{16}\right) \frac{1}{4} \times 55,000 = 16,320,$$

由此 $p = 1\frac{7}{8}$ 吋。長 $1\frac{7}{8}$ 吋之實心鐵之強度, 爲 25,800 磅。其新效率爲 $16,320 / 25,800 = 0.633$ 或 63.3%。

93. 求圖 65 之受壓式三釘對接之破壞方法, 極限強度及效率。

長釘距 = $7\frac{1}{2}$ 吋。

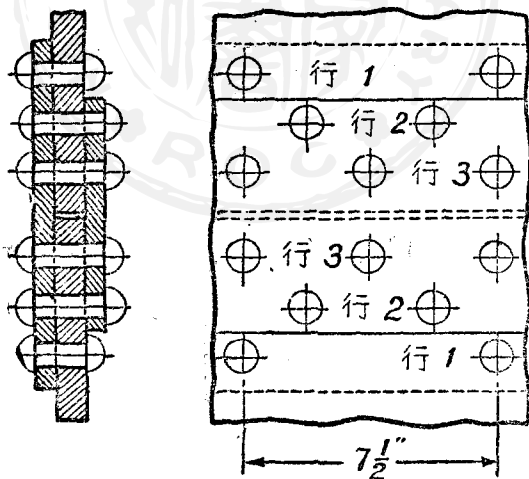


圖 65.

鑄釘孔直徑 $= 1\frac{1}{16}$ 吋。

主鋸厚 $= \frac{1}{2}$ 吋。

蓋鋸厚 $= \frac{3}{8}$ 吋。

解。——以下為根據反復而長度 $= 7\frac{1}{2}$ 吋所得之強度。

未加鑄釘鋸之強度 $= 7\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 55,000 = 206,000$ 磅。

各行中破壞之可能方法。

第 1 行。 扯破鑄釘孔間之鋸； $\left(7\frac{1}{2} - 1\frac{1}{16}\right) \frac{1}{2} \times 55,000 = 177,000$ 磅。

單切一鑄釘； $\frac{\pi}{4} \left(1\frac{1}{16}\right)^2 \times 44,000 = 59,000$ 磅。

壓破一鑄釘前之蓋鋸； $\frac{1}{16} \times \frac{3}{8} \times 95,000 = 37,000$ 磅。

第 2 行。 扯破鑄釘孔間之主鋸(減去二鑄釘孔直徑)；

$$\left(7\frac{1}{2} - 2\frac{1}{8}\right) \frac{1}{2} \times 55,000 = 147,500 \text{ 磅}$$

雙切二鑄釘； $2 \times \frac{\pi}{4} \left(1\frac{1}{16}\right)^2 \times 88,000 = 153,000$ 磅。

在二鑄釘背後壓破主鋸； $2 \times 1\frac{1}{16} \times \frac{1}{2} \times 95,000 = 101,000$ 磅。

第 3 行。 與第 2 行之各項同。

又扯破鑄釘孔間之二蓋鋸；

$$\left(7\frac{1}{2} - 2\frac{1}{8}\right) \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right) \times 55,000 = 221,000 \text{ 磅。}$$

至其他破壞元素，凡其抵抗顯明較上述者大，及其對於全接破壞之貢獻相同者，均未列入上表。此等元素如第 1 行中蓋鋸之扯破或主鋸之壓破；第 2 或 3 行中各蓋鋸之壓破等是。

全接破壞之可能方法 —— 一般 接不因外行內板之扯破而破壞, 必有二行或二行以上之同時破壞。觀察上列破壞元素, 即在四鉚釘銜接之複雜例中, 其可能之組合可化至不超過五個。欲明瞭如何實在作成此等組合, 以得完全破壞, 讀者宜在心中作成一圖, 以示接之折斷或鬆弛情形。下列各情形 表示一可能之完全破壞。

I. 扯破主板, 行 1..... 177,000 磅。

II. 設接不在行 1 中扯破而破壞。於是此接之破壞, 一部分可由於該行中鉚釘之切去或壓破, 而取二者之較小者。

壓破蓋板, 行 1..... 37,900 磅。

扯破主板, 行 2..... 147,600

總計 185,500 磅。

III. 壓破蓋板, 行 1..... 37,900 磅。

壓破主板, 行 2..... 101,600

壓破主板, 行 3..... 101,600

總計 239,900 磅。

IV. 扯破各蓋板, 行 3..... 221,000 磅。

故破壞方法為情形 I 所示者, 其對扯破主板之抵抗僅為 177,000 磅,

$$\text{效率} = \frac{177,000}{206,000} = 85.8\%$$

設改變一個尺寸, 則可改進接之效率。例如, 在上述之接中, 如情形 III 所示, 有過多之鉚釘面積, 故可將鉚釘直徑減小, 直至情形 III 與情形 I 同樣小, 而不影響其強度。或將情形 I 之釘距增加, 直至其抵抗與情形 III 者相等, 即 239,900 磅。今解下列方程式, 以求新釘距 p

$$\left(p - 1\frac{1}{16}\right) \frac{1}{2} \times 55,000 = 239,900,$$

由此, $p = 9.79$ 吋。根據此 p 值所得之效率, 為 89.2%。

習 題

下列各題 指定用美國機械工程師學會鍋爐法規法解之(雖可用 24 節所論之法)。

97. 一箱以 $\frac{3}{8}$ 吋之鋼板製成，以搭鑄釘接連之。鑄釘孔直徑 $\frac{7}{8}$ 吋，共排成三行，二外行之釘距等於 $5\frac{1}{4}$ 吋，中之釘距為 $2\frac{5}{8}$ 吋。求反復面上之許可載荷，此接破壞之方法及效率。假定其工作應力如下： $s_s=10,000$ ； $s_t=16,000$ ； $s_c=20,000$ 磅/方吋。

98. 一雙鑄釘對接，如圖 61 所示者，其鑄釘孔直徑 $=\frac{15}{16}$ 吋；外行之鑄釘距 $=5\frac{3}{4}$ 吋，內行之鑄釘距 $=2\frac{7}{8}$ 吋；主板厚 $=\frac{1}{2}$ 吋，蓋板厚 $=\frac{7}{16}$ 吋。

(a) 用美國機械工程師學會所定之應力值，求破壞方法，反復面之強度，及效率。

(b) 設上接為受壓式，則其結果何如？

答. (a) 152,400 磅. 83.7%.

(b) 119,400 磅. 75.5%.

99. 一受壓式之雙鑄釘對接，其主板厚 $\frac{1}{2}$ 吋，蓋板厚 $\frac{7}{16}$ 吋，長釘距 $4\frac{7}{8}$ 吋，短釘距 $2\frac{7}{16}$ 吋，鑄釘孔直徑 $\frac{15}{16}$ 吋。用美國機械工程師學會之極限應力，求破壞方法，強度及效率。

100. 一受壓式之四鑄釘對接，如圖 61 所示者，其尺寸如下：

	(a)	(b)
長釘距	10 吋.	17 吋.
主板厚	$\frac{5}{8}$ 吋.	$\frac{5}{8}$ 吋.
蓋板厚	$\frac{1}{2}$ 吋.	$\frac{5}{8}$ 吋.
鑄釘孔直徑	1 吋.	1 吋.

用下列極限應力：

$s_t=58,000$ ； $s_s=42,000$ ； $s_c=95,000$ 磅/方吋。假定雙切強度 $=1.85s_s$ 。

求其破壞方法，反復面之強度及效率。

答. (a) 524,000 磅. 效率 91%.

101. 二鋼條各寬 3 吋，以對接連之，如圖 66 所示。求其強度及效率。其極限單位

應力為: 張力, 58,600; 單切, 42,600; 雙切, 78,600; 壓力, 95,000 磅/方吋。(註: 此接性質不合實際, 惟可作甚優之例題, 以為選擇可能被壞所需之分析耳。) 所載直徑為孔之直徑。
 答: 65,000 磅。 效率 = 75.8%。

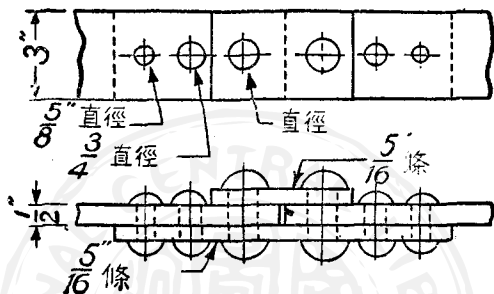


圖 06.

22. 鉚釘鍋爐接之應力分析。——在前節中, 已知極限應力, 於是由此值計算破壞鉚釘接之載荷。然有時已知載荷, 而欲計算接中各部內所生之應力。作此計算常用之法, 在下例題中說明之。

例 題

102. 在 96 題內之三鉚釘對接 (在此題中, 其蓋板寬相等), 設反復面上之載荷為 35,000 磅, 求接內所生之切應力及承(壓破)應力。又求三行內主板及蓋板淨剖面內之張應力。

解。——假定各鉚釘擔負相等之載荷部分。在此接之反復面內, 三行中有 5 鉚釘受雙切, 各鉚釘負載荷 $35,000/5=7,000$ 磅。

一鉚釘內之切應力為

$$s_s = \frac{7,000}{2 \times \frac{\pi}{4} \left(1 \frac{1}{16}\right)^2} = 3,900 \text{ 磅/方吋。}$$

在一鉚釘背後主板內之承應力為

$$s_c = \frac{7,000}{1\frac{1}{16} \times \frac{1}{2}} = 13,200 \text{ 磅/方吋.}$$

在行 1, 經過主板之淨剖面, 傳遞全部載荷; 其張應力為

$$s_t = \frac{35,000}{\left(7\frac{1}{2} - 1\frac{1}{16}\right)\frac{1}{2}} = 10,900 \text{ 磅/方吋.}$$

因行 1 內之一釘釘, 已傳 7,000 磅至蓋板. 故經過行 2 淨剖面所傳之載荷, 祇剩 35,000 - 7,000 = 28,000 磅. 此處之結果張應力為

$$s_t = \frac{28,000}{\left(7\frac{1}{2} - 2\frac{1}{8}\right)\frac{1}{2}} = 10,400 \text{ 磅/方吋.}$$

因行 1 及 2 內之三釘釘, 已傳 21,000 磅至蓋板, 僅餘 14,000 磅應由行 3 之淨剖面傳遞, 故此處之張應力為 5,200 磅/方吋.

用同樣方法, 可求蓋板內之應力. 例如, 在行 1 內, 釘釘所傳過之 7,000 磅, 必依次由行 1 之蓋板淨剖面負之. 各蓋板擔負此載荷之半, 或 3,500 磅. 行 1 蓋板淨剖面內之張應力為

$$s_t = \frac{3,500}{\left(7\frac{1}{2} - 1\frac{1}{16}\right)\frac{3}{8}} = 1,450 \text{ 磅/方吋.}$$

同理, 得行 2 及 3 處之張應力, 各為 5,220 及 8,180 磅/方吋.

習 題

在下列各釘釘接, 其所受載荷已註明, 求接內所生應力.

103. 95 題之單釘釘搭接: 每吋長度內之載荷 = 2,000 磅.

104. 98 題之雙釘釘對接: $5\frac{3}{4}$ 吋長度內之載荷 = 10,000 磅.

105. 100(a) 題之四釘釘對接: 每吋長度內之載荷 = 10,000 磅.

23. 薄壁圓筒及球內之應力.——計算此等應力之慣用公式, 均根據近似假定, 即均勻內壓力在薄壁圓筒及球內所生之周應力, 假定

均勻分布於全厚。即使圓筒壁厚大至為內半徑之0.1時，如是所得之應力，僅較用正確公式所得值小5%。用微積分求薄壁圓筒公式之方法，已載於9節中；今下述一較簡之求法。

圖 67a 示一半圓筒，內受強度 p 之均勻內壓力，求其對縱接長 l 所生之總力或環箍張力 P 。圖 67b 表示一薄壁圓筒之剖面，上有內壓力作用着；而圖 67c 表示此圓筒之下半部，且想像盛以某固體如鉛，以為說明之用。在圖 67b 及 c 內，因圓筒上部所受載荷相同，故作用於元素上 A 處之環箍張力必相等。設將圖 67c 之圓筒上下部分，分

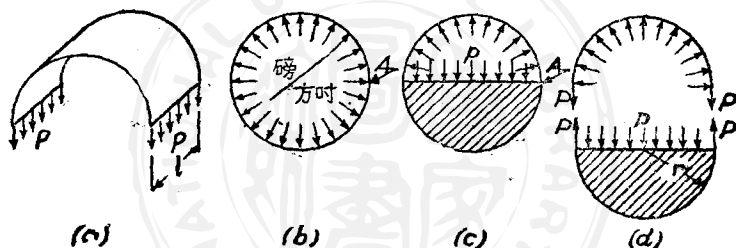


圖 67.

別表示之，如圖 67d 所示，則力 P 甚易由下部之靜力平衡條件算之。所盛固體無論為圖示之鉛，或為薄壁圓筒內之實在流體，其重量將略去。

$$2P = p \times \text{投影面積} = p \times 2rl, \quad (35)$$

故

$$P = prl. \quad (35a)$$

由此易知厚為 t 之壁內單位張應力為

$$\epsilon_t = \frac{P}{A} = \frac{prl}{tl} = \frac{pr}{t}. \quad (36)$$

(35)式之應用，甚為廣大，故讀者應將此式作為基本，而不應將(36)式作基本。

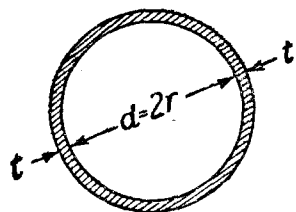


圖 68.

圓筒內之單位軸應力，為周應力之半，此甚易證明之。在圓筒頭上之總端壓為 $p\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)$ 。擔負圓筒壁上總軸牽力之金屬剖面積，為環之面積(圖 68)，或約等於 $(\pi d)t$ 。故單位軸應力 s_t 為

$$s_t = \frac{p\left(\frac{\pi d}{4}\right)}{\pi d t} = \frac{p d}{4 t} = \frac{p r}{2 t}, \quad (37)$$

此為(36)式所表周應力之半。

設鍋爐板不成整塊，而在縱向有縱接(見圖 69)，或沿鍋爐有周接，則接效率必算入。因已知在周接上之應力，為縱接應力之半，故周接之效率，可低至為縱接之半：此說明何故鍋爐之周接式樣較縱接簡單也。

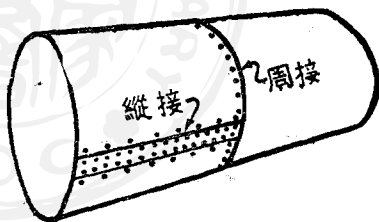


圖 69.

用求薄壁圓筒內周應力之相同方法，可得薄空心球內之張應力公式：

$$s_t = \frac{p r}{2 t}. \quad (38)$$

習 題

106. 一直立管或水櫃之內直徑為 16 呎，設受 100 呎之水頭，且其許可應力 $s_t =$

16,000 磅/方吋，問其底剖面之厚該若干？假定電鍍縫與整塊金屬板同樣堅強。

解。——因水每立方呎重 $62\frac{1}{2}$ 磅，其在每方呎上之壓力，等於剖面為一方呎高為 100 呎之水柱之重。故 $p = 48.4$ 磅/方吋。高為 1 吋直徑為 16 吋或 192 吋之剖面內之總環繞張力，可用(36a)式求之，

$$P = prl = 48.4 \times \frac{192}{2} \times 1 = 4,170 \text{ 磅。}$$

其單位應力

$$s = \frac{P}{A} = \frac{4,170}{1 \times t}$$

由此

$$t = \frac{4,170}{1 \times 18,000} = 0.230 \text{ 吋。}$$

107. 三釘釘對接，由 $\frac{1}{2}$ 吋厚之鋼爐板製成，其釘距為 10 吋。此 10 吋長度對破壞之抵抗力為 264,000 磅。將此作為縱接，問此鋼爐(直徑 60 吋)能抵抗安全壓力若干？設鋼之極限張強度為 55,000 磅/方吋，欲安全抵抗此壓力，問周接之效率該若干？

解。——在長 10 吋之接中，設安全因數為 4，其安全環繞張力為

$$P = \frac{264,000}{4} = 66,000 \text{ 磅。}$$

因 $P = prl$, $p = 220$ 磅/方吋。

欲得周接所需之效率，讀者應記得，接之實在強度，等於根據整塊金屬板之強度乘以效率，且將此實在強度與軸牽力相等。用安全因數 4，得方程式

$$(60\pi) \left(\frac{1}{2} \right) \times \frac{55,000}{4} \times \text{效率} = \frac{\pi}{4} (60)^2 \times 220,$$

由此

$$\text{效率} = 0.48 \text{ 或 } 48\%.$$

108. 設標準管之許可張應力為 16,000 磅/方吋，問下列各管，可負安全內壓力若干？

標名尺寸	6 吋.	2	$\frac{1}{2}$
內直徑	6.065 吋.	2.067	0.622
外直徑	6.625 吋.	2.316	0.810

109. 設一鉚接鋼水管直徑 5 呎，板厚 $\frac{1}{2}$ 吋，許可應力 $s_t = 15,000$ 磅/方吋，問可安全抵住水頭若干？

110. 承前題，設管上有一縱鉚釘接，其效率為 85%，試解之。

111. 一鋼爐直徑 9 呎，主板厚 $\frac{5}{8}$ 吋，其縱接為四鉚釘對接，其反面（長 16 吋）之破壞總載荷，為 584,000 磅。周接之效率為 40%，設張應力為 58,000 磅/方吋，許用安全因數 5。試計算安全內壓力。 答：161 磅/方吋。

112. 一螺旋(spiral)鉚釘水管，直徑 40 吋，用厚 $\frac{1}{2}$ 吋之鋼板製之。此螺旋縫為單鉚釘搭接，其鉚釘直徑為 $\frac{3}{4}$ 吋，每鉚釘之安全切抵抗為 5,000 磅。螺絲距為 7 呎。設水壓力為 160 磅/方吋，問鉚釘距若干？假定無壓壓力。 答：2.81 吋。

113. 圓柱形鋼箱受內壓力，設張應力為 6,000 磅/方吋， $\mu = 0.3$ 及 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋，求其所增體積，略去兩端之變形。（指示：見 18 節。） 答：1.00038 : 1。

114. 一球壳受壓力，其張應力為 $s_t = \frac{pr}{2t}$ ，如 23 節所述，試證之。

115. 一“Horton sphere”球形貯氣器，直徑 50 呎，用 $\frac{1}{2}$ 吋板製之。其周接之效率為 75%。設許可 $s_t = 16,000$ 磅/方吋，問安全內壓力若干？ 答：38.4 磅/方吋。

24. 結構工作中之鉚釘接。——結構式樣，如板，角，槽鐵及工字梁等，用結構鉚釘接連接之。在圖 70 及 71 中，為此種接合之例。結構接之設計，含有若干要點，此與受壓容器之鉚釘接所不同或其所全無者。

當二板相接時，可作圖 71 所示之形式。今述計算此接強度之常

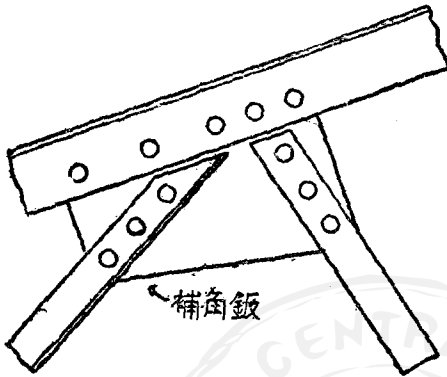


圖 70.

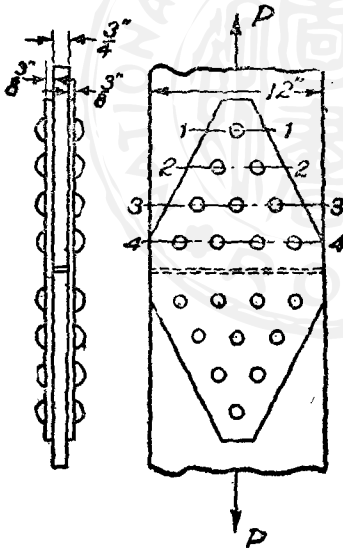


圖 71.

用方法如下。假定單切之工作應力為 10,000 磅/方吋, 壓或承工作應力為 20,000 磅/方吋, 以及張工作應力為 16,000 磅/方吋。未打鑄釘之標名直徑為 $\frac{7}{8}$ 吋。此標名直徑, 所以用之求切及承載荷者。然在計算飯或接飯對於扯破之抵抗時, 假定鑄釘孔之直徑, 較未打鑄釘大 $\frac{1}{8}$ 吋。實際所鑽或所壓孔之直徑, 較未打鑄釘大 $\frac{1}{16}$ 吋, 而其他 $\frac{1}{16}$ 吋則所以抵償壓孔時, 孔邊金屬可能所受之傷害。

在計算結構工作中之鑄釘接時, 其基本假設為各鑄釘負相等載荷。用此假定, 今可根據接各元素之工作

應力, 以算各種總載荷 P 。

根據十鑄釘之雙切, 所得之載荷 P

$$= 2 \times 10 \times 0.6013 \times 10,000 = 120,200 \text{ 磅.}$$

根據十鉚釘之承壓力，所得之載荷 P

$$= 10 \times \frac{7}{8} \times \frac{3}{4} \times 20,000 = 131,200 \text{ 磅.}$$

經過飯剖面 1-1，擔負全載荷 P 。根據工作應力及此剖面之淨面積，所得之 P 值為

$$P = 16,000(12-1)\frac{3}{4} = 132,000 \text{ 磅.}$$

因行 1-1 中之一鉚釘，傳 $\frac{1}{10}P$ 至鋼條，而 $\frac{9}{10}P$ 則由 2-2 處之淨剖面擔負，且不使超過其安全工作應力。於是

$$\frac{9}{10}P = 16,000(12-2)\frac{3}{4}, \text{ 由此 } P = 133,300 \text{ 磅.}$$

同理， $\frac{7}{10}P$ 由在剖面 3-3 處之飯擔負。於是

$$\frac{7}{10}P = 16,000(12-3)\frac{3}{4}, \text{ 由此 } P = 154,300 \text{ 磅.}$$

在內行 4-4，各接飯擔負 $\frac{1}{2}P$ 。於是

$$\frac{1}{2}P = 16,000(12-4)\frac{3}{8}, \text{ 由此 } P = 96,000 \text{ 磅.}$$

故安全載荷為如是所得之最小者，即， $P = 96,000$ 磅。

原來 12 吋飯之強度為 $12 \times \frac{3}{4} \times 16,000 = 144,000$ 磅。

效率為 $\frac{96,000}{144,000} = 66.7\%$ 。

各行處之鋼條假定已足夠寬廣，使其淨剖面內所生之張應力，不致超過其安全工作應力。其所需寬度，可如下計之。例如，經過單鋼條行 2 處，必傳遞 $\frac{96,000}{2}$ 之 $\frac{3}{10}$ ，或 14,400 磅。此剖面之總最小寬度 b ，可自下式求之

$$14,400 = 16,000(b-2)\frac{3}{8},$$

由此 $b=4.40$ 吋。

欲使一接各鑄釘所受應力相等，其最要原則，為所連各桿之作用線，必經過鑄釘羣之質心。此可甚易證明如下。考究圖 72 之接，此接自槽鐵傳張力 P 至板。假定各鑄釘內應力相等，且載荷在同一方向。於是其合力為 $P=A_1s+A_2s+A_3s+\dots+A_ns$ ，式中 A_n 表示任何鑄釘之面積， s 為鑄釘內之單位應力。對任意原點 O 求力矩之和，可定合力 P 之作用線。於是 $Pg_r=(A_1s+A_2s+A_3s+\dots) y_r=A_1sy_1+A_2sy_2+A_3sy_3+\dots$ ，式中 y_r, y_1, y_2, y_3 等各表示合力 P 及在 1, 2 等上鑄釘載荷之力臂。於是

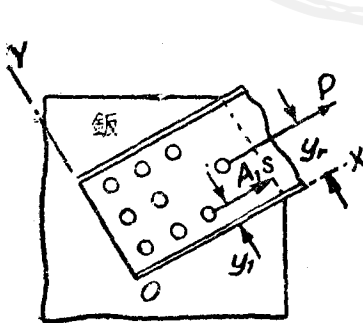


圖 72.

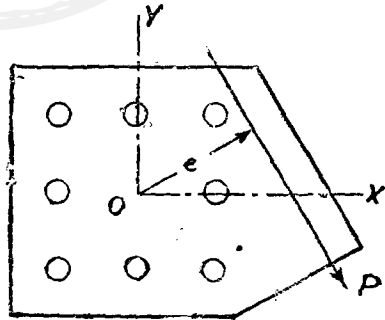


圖 73.

$$y_r = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \dots}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots} = \frac{\sum Ay}{\sum A},$$

此為定鋤釘面積羣之質心之公式。設欲各鋤釘所受應力相等， P 必經過鋤釘羣之質心。

在另一方面，設力 P 不經過鋤釘羣之質心，於是各鋤釘所受應力不等，其應力如下求之。圖 73 表示此種情形。在鋤釘羣之質心上取原點 O 。已知力 P ，與經過質心之相等而平行之力 P ，及力矩為 Pe 之順時針方向之偶力相當。在質心之力 P ，平均分配於“ n ”鋤釘，在各鋤釘上生力 $\frac{P}{n}$ ，作用於與 P 平行之方向。因偶力關係，板將對某點旋轉。假定此點為 Q (圖 74)，其座標為 x_1 及 y_1 。令 r 為任何鋤釘至 Q 之距離。任何鋤釘之扭歪，可假定與其至 Q 之距離 r 成比例，又設發生彈性作用，其單位應力亦與 r 成比例，此可以 kr 表之。此常數 k 為距質心單位距離處之應力。在面積為 A 之鋤釘上之力，為 krA 。此力之方向垂直於半徑 r 。此力之 x 分力為

$$\frac{y - y_1}{r} \cdot krA = (y - y_1)kA.$$

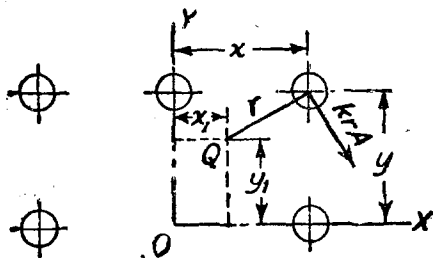


圖 74.

欲使各力之合力爲一偶力, $\Sigma X=0$ 及 $\Sigma Y=0$. 應用 $\Sigma X=0$,

$$\Sigma(y-y_1)kA=0.$$

於是, 因 y_1 爲常數, $\Sigma yA=y_1\Sigma A$. 但因原點取於鑄釘羣之質心, ΣyA 爲零. 於是 $y_1=0$. 同理, $x_1=0$. 故由此可知作用於接上之偶力之旋轉中心, 乃在質心.

欲求 k , 可用下列條件, 即各鑄釘載荷對於 O 之力矩之和, 等於 P 對於 O 之力矩.

$$Pe = \Sigma r \cdot krA = k\Sigma r^2A = k\Sigma(x^2 + y^2)A.$$

故 kA 或

$$F_0 = \frac{Pe}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}, \quad (39)$$

式中 F_0 表示距 O 單位距離之一鑄釘上之力. 偶力在任一鑄釘(距 O 之距離爲 r)上所生之載荷部分爲 F_0r , 且垂直於 r . 用向量組合作用於鑄釘羣質心上之 P 所生之部分 $\frac{P}{n}$, 與方纜所得之力 F_0r , 可得鑄釘上之總力.

今舉一數值例題, 令求發生於接上(圖 75)之最大鑄釘載荷. 取原點於質心,

$$\Sigma x^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 0 + 0 + \dots + (-3)^2 + (-3)^2 + \dots - 9).$$

$$\Sigma y^2 = 2(3)^2 + 3(3)^2 + 3(0)^2 + 2(-3)^2 + 3(-6)^2 = 270.$$

$$F_0 = \frac{Pe}{\Sigma x^2 + \Sigma y^2} = \frac{(80,000)(\text{吋})}{90 + 270} = 833 \text{ 磅, 在一吋處.}$$

受惡劣載荷之鑄釘在 A 處: 力矩 Pe 在此鑄釘內所生之載荷爲 $F_0r = 833\sqrt{3^2 + 6^2} = 5,600$ 磅.

其直接載荷爲 $\frac{P}{n} = \frac{60,000}{16} = 4,000$ 磅。此二載荷（示於圖 73 中）用向量相加。

$$\Sigma X = 4,000/\sqrt{2} + 5,600(2/\sqrt{5}) = 7,830,$$

$$\Sigma Y = 2,800 + 5,600(1/\sqrt{5}) = 5,330.$$

A 上之合力 $= \sqrt{5,330^2 + 7,830^2} = 9,480$ 磅。

以上僅討論結構接設計所用之主要理論及計算。又有不少其他實際之考究，常爲設計所遇者，然在此不能詳論，僅略提之。

例如，以上未曾考究摩阻力，及何故美國工程師略去之。又未討論何故在各桿及接板部分內之應力，愈均愈佳。在斜穿(staggered)釘之例，其計算淨剖面之法，亦未論及。

設計者必將釘置於距邊較遠處，使不發生邊與釘間板之局部破壞。

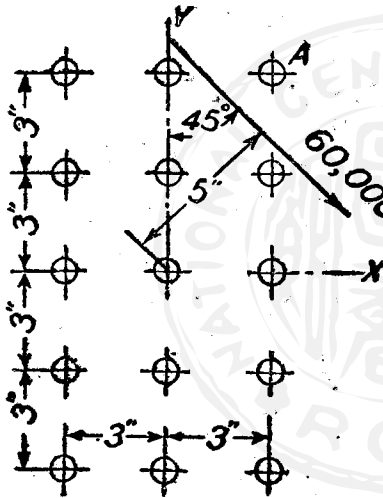


圖 75.

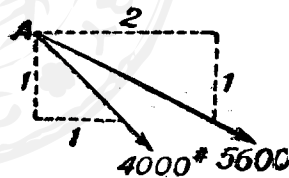


圖 76.

壞，但又不宜距邊太遠，致接失去不透水性。對於板厚定釘之直徑時，有一定規則，對於釘最大距，亦有要求。有時在設計中，若干釘受張力，此必考究及之。

以上提及之問題，可以警告無經驗者，使對於某數項，不可忽視。欲知此等問題之較詳解答，讀者可參考結構設計。

習 題

116. 在圖 71 中，當 $P = 96,000$ 磅，求各行處之鋼條寬，使淨剖面內之應力，不超

過 16,000 磅/方吋。

117. 在圖 71 中所示之鑄釘接, 求鑄釘內之最大切應力, 與板內之最大承應力及張應力, 設 $P=100,000$ 磅。

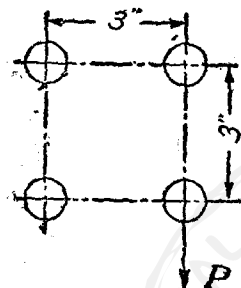


圖 77.

均受單切。

121. 設力 $P=40,000$ 磅(圖 73), 與 y 軸成 30° , $e=6$ 吋, 在 x 及 y 方向之鑄釘相距 4 吋, 問受最惡劣應力之鑄釘上有載荷若干? 受最少應力之鑄釘上有載荷若干?

答. 11,960 磅及 2,590 磅。

118. 一鑄釘接如圖 71 所示, 惟除去行 1, 求此接之安全載荷及效率, 用 24 節所載之工作應力。

119. 假定圖 72 所示之槽鐵, 與寬 12 吋厚 0.2 吋之板相當. 設用標名直徑為 $\frac{3}{4}$ 吋之鑄釘, 其排列如圖所示. 求可傳至補魚板之載荷 P . 用 24 節所載之工作應力。

答. $P=27,000$ 磅。

120. 設受應力最惡劣之鑄釘(圖 77), 可以受應力至 10,000 磅/方吋, 問可負偏載荷 P 若干? 鑄釘直徑為 $\frac{7}{8}$ 吋,

第四章

扭轉

25. 圓軸之扭轉 今考究一圓軸，其上端固定，下端以偶力扭轉之(圖 78a)。由表面之測量，可知軸之圓剖面在扭轉時，仍為圓形，且設其扭角不大，其直徑及剖面間之距離，均不改變。

隔離一圓板，如圖 78b，其應變狀態如下：其底對其頂有角 $d\phi$ 之

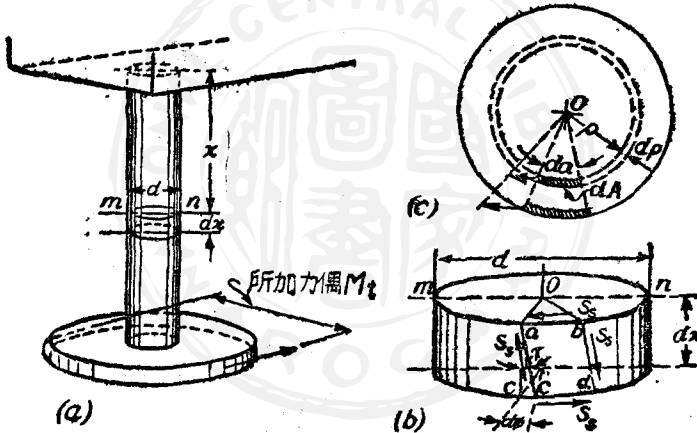


圖 78.

轉動，而 ϕ 所以度剖面 mns 對固定端之轉動者也。圓板表面元素 abd 之邊，在應變前為直立，其應變後之形狀如圖 78b 所示。其邊之長仍

無主要之變化，僅其各隅之角度改變。此元素在純切之狀態中（見 19 節），切應變之大小，可由小三角形 cac' 求之：

$$\gamma = \frac{cc'}{ac}$$

因 cc' 為半徑等於 $\frac{d}{2}$ 之小弧，其所對角度為 $d\phi$ ， $cc' = \left(\frac{d}{2}\right)d\phi$ 。於是

$$\gamma = \frac{cc'}{ac} = \frac{(d/2)d\phi}{dx} \quad (a)$$

當軸受端扭矩之扭轉，扭角與其長度成正比，商 $\frac{d\phi}{dx}$ 為一定。此表單位軸長之扭角，可稱為 θ 。於是，由 (a)，

$$\gamma = \frac{1}{2}\theta d.$$

切應力（即作用於元素各邊而生上述切應變者）之方向，如圖所示。各切應力之大小，由 (32) 式， $s_s = G\gamma$ ，為

$$s_s = \frac{1}{2}G\theta d. \quad (40)$$

以上所論者，為軸表面上之一元素之應力狀態。

至於軸內之應力狀態，應作假設，即不但軸剖面之圓邊界仍不扭歪，且剖面本身仍為平面，在轉動時此剖面如絕對剛硬者；即，各直徑本身仍為平直，且均轉過同一角度。由圓軸試驗，知根據此假設所創之理論，與試驗結果甚為符合。軸表面上元素 $abcd$ （圖 78b）之討論，亦適合於內圓筒表面上之相似元素（圖 78e），此筒之半徑 ρ 替代 $\frac{d}{2}$ 。

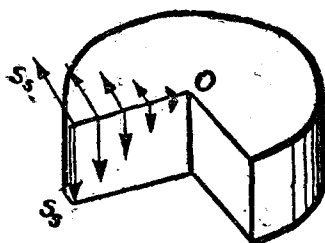


圖 79.

此元素在徑向之厚，作為甚薄，於是此元素亦受純切，其邊上之切應力為

$$s_s = G\rho\theta. \quad (b)$$

此表示切應力與至軸中心之距離 ρ ，成正比例。圖 79 示此應力之分布，其最大應力在軸之外表面上。

在柔韌材料，在此外表面最先發生塑性流(plastic flow)，在縱切弱於側切之材料，例如，木紋平行於中心軸之木軸，則作用於軸向剖面內之切應力，先破裂。此破裂現於縱方向之軸表面上。在張力弱於切力之材料，例如，鑄鐵圓軸或圓粉筆塊，其破裂恆沿螺旋線發生，此線與軸之中心成 45° 之傾斜角(圖 80)。此解釋甚簡易。純切之狀態，與一方受張力，他垂直方向受壓力之狀態相當(見圖 54)。自擲轉軸之外層，截下一矩形元素，其各邊與中心軸成 45° ，則將受圖 80 所示之應力，所示張應力，可生上述之螺旋線破裂。

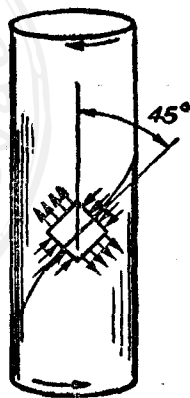


圖 80.

今求所加扭偶力 M_t 與此所生應力之關係。由底與假想剖面 mn 間軸部分之平衡，可得一結論，即分布於剖面 mn 上之切應力在靜力學上與一偶力相當，此偶力與扭矩 M_t 相等而相反。每面積元

素 dA (圖 78c) 之切力 $= s_s dA$ 。此力對於軸中心軸之力矩，由 (b) 式為 $(s_s dA)\rho = G\theta\rho^2 dA$ 。在全剖面積上，總合此各元素上之力矩，得對於軸中心軸之總力矩 M_t ；即，

$$M_t = \int_{\rho=0}^{\rho=d/2} G\theta\rho^2 dA = G\theta \int_{\rho=0}^{\rho=d/2} \rho^2 dA = G\theta I_p, \quad (c)$$

式中 I_p 爲圓剖面之慣極矩。在直徑爲 d 之圓， $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ ；

$$\therefore M_t = G\theta \frac{\pi d^4}{32},$$

及
$$\theta = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{M_t}{G} \frac{32}{\pi d^4}. \quad (41)$$

故 θ ，軸單位長度之扭角，與所加扭矩成正比，與切係數 G 及直徑之四次冪成反比。設軸長 l ，其總扭角將爲

$$\phi = \theta l = \frac{M_t l}{GI_p}. \quad (42)$$

此式在理論之試驗證實中，頗爲有用，此式已經許多試驗之校對，由此可證明在求此理論時所作之假定。讀者應注意者，即扭轉試驗恆用以測定材料之切係數。設已測得扭矩在已知軸內所生之扭角， G 之大小甚易由(42)式求之。

單位長度之扭角，與扭矩成正比，此可以方程式表之

$$\theta = \frac{M_t}{C},$$

式中 C 爲一常數，稱爲軸之扭轉剛性(torsional rigidity)。

在圓軸之例(41式)， $C = GI_p$ 。

在矩形軸之例(49式)， $C = \beta bc^3 G$ ，式中 β ， b 及 c 爲如 27 節所定者。

將(41)式之 θ 代入(40)式，可得計算實心圓軸扭轉之最大切應力

$$(\sigma_s)_{\text{最大}} = \frac{M_t d}{2I_p} = \frac{16M_t}{\pi d^3} \quad (43)$$

即，此應力與扭矩 M_t 成正比，而與軸直徑之立方成反比。

在實際應用上，軸直徑必自其所傳馬力計算之。已知馬力 hp ，每分鐘之轉速 n ，及扭矩 M_t 之吋磅數，連結各量間關係之公式可如下求之。假想起重圓筒絞起一索，索內受等牽力 P 。令圓筒軸至索中線之距離（以吋計）為 r ，且令圓筒每分鐘轉 n 次。在一分鐘內， $\frac{2\pi r n}{12}$ 呎之索將絞至圓筒上，因功 = 力乘距離，故對力 P 每分鐘所作總功為 $\frac{2\pi r n P}{12}$ 。因一馬力之定義為每分鐘作 33,000 呎磅之功率，故轉動圓筒所需之馬力為

$$hp = \frac{2\pi r n P}{12 \times 33,000} \quad (d)$$

但積 Pr 為力 P 對圓筒軸所生之扭矩 M_t 。重排 (d) 式，且將 $M_t = Pr$ 代入，得

$$M_t = \frac{15 \times 33,000 \times hp}{2\pi n} = \frac{63,000 hp}{n} \quad (44)$$

此根據起重圓筒所得之特殊公式，亦可應用至其他各例，如加扭矩或偶力 M_t 於圓筒，軸，帶輪或任何轉動物體，或用圓筒等加 M_t 之例。欲得軸內之最大切應力，此 M_t 之值必代入 (43) 式，欲得扭角，此 M_t 必代入 (42) 式。

習 題

122. 一實心圓軸（圖 81），設法支持之，使彎應力可略去。設 $G = 12 \times 10^6$ 磅/方吋，

求兩端間之最大 ϵ_s 及扭轉之度數。

解。——10 呎長度內之扭矩 M_t ，可由(44)式算之，

$$M_t = 63,000 \frac{hp}{n} = 63,000 \times \frac{10}{620} = 6,000 \text{ 吋磅。}$$

其所生最大切應力，可由(43)式求之，

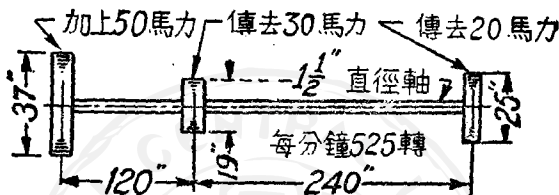


圖 81。

$$\epsilon_s = \frac{1^s M_t}{\pi d^3} = \frac{1^s \times 6,000}{\pi \times \left(1\frac{1}{2}\right)^3} = 9,000 \text{ 磅/方吋。}$$

同理，由軸右部中 20 hp 所生之扭矩及應力，求得各為 2,400 吋磅及 3,620 磅/方吋。

扭角為軸二部分中扭角之和，而各扭角可用(40)或(42)式求之。用後一式，得 ϕ 為

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{M_t' l_1}{G I_p} + \frac{M_t'' l_2}{G I_p} \\ &= \frac{6,000 \times 120}{12 \times 10^6 \times 0.497} + \frac{2,400 \times 240}{12 \times 10^6 \times 0.497} = 0.217 \text{ 弧度} = 12.45^\circ. \end{aligned}$$

上式中所用之 I_p 值，由圓面積慣矩之公式求之，

$$I_p = \frac{1}{2} \pi r^4 = 0.497 \text{ 吋}^4.$$

123. 用(40)式，求上題之 ϕ 。

124. 一實心圓軸直徑 2 吋，設其最大切應力為 8,000 磅/方吋，求其所傳之扭矩。

設 $G = 11\frac{1}{2} \times 10^6$ 磅/方吋，其每呎之扭轉若干？

125. 一鋼軸($G=12 \times 10^6$ 磅/方吋)有如是之尺寸,當扭角為 90° 時,其最大切應力等於 13,500 磅/方吋.求 $\frac{l}{d}$ 之比. 答. $\frac{l}{d}=668.$

126. 一鋼軸直徑 2 吋($G=12 \times 10^6$ 磅/方吋),設當扭角為 6° 時,其最大切應力等於 13,500 磅/方吋,求軸長.

127. 設一軸之 $G=12 \times 10^6$ 磅/方吋, $(s_s)_w=3,000$ 磅/方吋,最大許可每呎之扭轉為 $\frac{1}{12}$. 求其直徑,使在此直徑以下,則軸之扭角(非最大應力)為設計之控制因數.

答: $d=4.12$ 吋; 當 $d < 4.12$ 吋, 扭角為設計之控制因數.

128. 一實心圓軸之最大許可切應力(s_s)_{最大}, 今以每分鐘 n 轉傳遞馬力 hp . 其所需直徑可用下式求得, 試證明之.

$$d = 68.5 \sqrt[3]{\frac{hp}{n(s_s)_{\text{最大}}}}$$

129. 一機械之馬力為 200 hp, 轉速 $n=120$ 轉/分鐘, 其工作應力 $s_s=3,000$ 磅/方吋, 求軸直徑 d .

130. 設軸之 $d=3$ 吋, $n=120$ 轉/分鐘, $G=12 \times 10^6$ 磅/方吋, 相距 25 呎, 二剖面間所求得之扭角為 $\frac{1}{15}$ 弧度, 求此軸所傳之馬力. 答. $hp=646.$

131. 一軸直徑 $\frac{3}{2}$ 吋, 以每分鐘 45 轉旋轉. 設最大 $s_s=4,500$ 磅/方吋, 求所傳動力.

132. 100 hp. 由帶輪輸送至 16 呎之軸上, 此帶輪距左端 8 呎, 距右端 10 呎. 自軸左端之帶輪傳去 70 hp; 而在右端帶輪傳去 30 hp. 此軸以每分鐘 100 轉旋轉, 其排列有一定方法, 能消除軸內之彎曲. (a) 設 s_s 不超過 10,000 磅/方吋, 求軸直徑. (b) 設用直徑 4 吋, 求兩端相差之角度. 用 $G=12 \times 10^6$ 磅/方吋.

133. 圖 82 示一軸及司門室. 齒輪之齒距直徑為 $7\frac{1}{2}$ 吋; 各齒輪上有向下之切線力 20,000 磅作用之. 假定其許可切應力為 12,000 磅/方吋, $G=12 \times 10^6$ 磅/方吋. 求



圖 82.

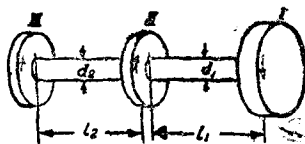


圖 83.

所需軸之均勻直徑。在右側門未舉起前，司門室內之齒輪已轉過若干度？

答. $d = 4.57$ 吋, $\phi = 22^\circ$.

134. 帶輪 I 傳遞 500 hp., 200 l.p. 傳至帶輪 II, 300 hp. 傳至帶輪 III (圖 83). 求直徑 d_1 及 d_2 之比, 使軸之二部生同一最大應力. 求此二部內扭角之比.

答. $\frac{d_1}{d_2} = \frac{3}{\sqrt{5}}$. $\phi_1 : \phi_2 = \frac{l_1}{l_2} \frac{3}{\sqrt{5}}$.

135. 承前題, 設 $n = 120$ 轉/分鐘, $(s_s)_{\text{最大}} = 3,000$ 磅/方吋, $G = 11 \frac{1}{2} \times 10^6$ 磅/方吋, $l_1 = 6$ 呎, $l_2 = 4$ 呎, 求軸直徑及其扭角.

136. 一鋼軸兩端固定 (圖 84), 在中間剖面 mn 處, 受扭矩 M_t 之作用. 設已知工作應力 s_s , 求其扭角.

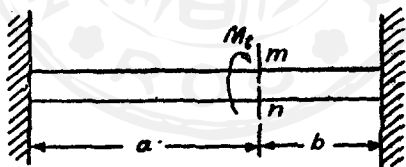


圖 84.

解. —— 軸二部之扭角相等; 故用(42)式, 其扭矩與軸二部分長度成反比. 設 $a > b$, 則較大扭矩在軸之右部, 其大小為 $\frac{M_t a}{(a+b)}$. 將此代入(43)式之扭矩, 得

$$d = \sqrt[3]{\frac{16aM_t}{(a+b)\pi s_s}}$$

今其扭角可由(42)式或(40)式求之,

$$\phi = \frac{32 M_t}{\pi G d^4} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{2 b s_\theta}{G d}$$

137. 一軸固定於兩端(圖 85), 於中間剖面 m 及 m_1 上, 加扭矩 M_t' 及 M_t'' , 求各部內之扭矩。

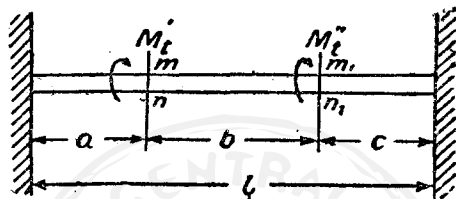


圖 85.

26. 空心軸之扭轉。——由以前關於實心軸之討論, 可見僅軸外表面上之材料, 可受力至指定之工作應力極限。表面以內材料所受應力較低, 而在重量減少甚為重要之例中, 例如, 飛機之螺旋槳, 宜用空心軸。在討論空心軸之扭轉時, 可作同樣之假定, 如在實心軸然。於是切應力之總公式, 與前節(b)式所示者同。然在計算切應力之力矩時, 半徑 ρ 自內孔之半徑(以 $\frac{1}{2}d_i$ 表之), 變至軸之外半徑(如前以 $\frac{1}{2}d$ 表之)。於是, 前節之(c)式, 必以下式代之:

$$M_t = G\theta \int_{\frac{1}{2}d_i}^{\frac{1}{2}d} \rho^2 dA = G\theta I_p,$$

式中 $I_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_i^4)$ 為環剖面之慣極矩。於是

$$\theta = \frac{32 M_t}{\pi (d^4 - d_i^4) G} = \frac{M_t}{G I_p}, \quad (45)$$

其扭角將爲

$$\phi = \theta l = \frac{M_t l}{GI_p} \quad (46)$$

將(45)式代入(40)式,得

$$(s_s)_{\text{最大}} = \frac{16M_t}{\pi d^3 \left(1 - \frac{d_i^4}{d^4}\right)} = \frac{M_t d}{2I_p} \quad (47)$$

由(46)及(47)式,設 $d_i = \frac{1}{2}d$, 則其扭角及最大應力, 將較直徑 d 之實心軸之扭角及應力, 增加 6%, 而軸之重量減少將爲 25%。

習 題

138. 一空心鋼軸, 內直徑爲外直徑之 $\frac{2}{3}$, 負扭矩 1,160,000 吋磅, 設其應力可至 12,000 磅/方吋, 求其外直徑。設 $G = 12 \times 10^6$ 磅/方吋, 求 14 呎長軸之扭角度數。

答. $d = 8.25$ 吋. $\phi = 2.30^\circ$.

139. 一空心圓軸, 外直徑 6 吋, 內直徑 4 吋, 設許可 $s_s = 8,000$ 磅/方吋, 求可加之最大安全扭矩。設 $G = 12 \times 10^6$ 磅/方吋, 問長度 16 呎內之扭角若干?

140. 一實心軸之外直徑及最大許可切應力, 與 139 題中之空心軸同, 問其扭矩, 單位長度之重量及扭角, 各增加若干?

141. 一空心鋼管, ABC , 長 9 呎, 外直徑 1 吋, 內直徑 0.9 吋. A 在左端, B 在 A 右 3 呎, C 在右端. 在 A 處向軸上加入扭矩 15 呎磅, 在 B 處取去 5 呎磅, 在 C 處取去 10 呎磅.

(a) 根據許可 $s_s = 10,000$ 磅/方吋, 求實在應力與許可應力之比.

(b) 用 $G = 12 \times 10^6$ 磅/方吋, 問全軸扭轉若干度?

答. (a) 0.267. (b) 2.14° .

142. 舟上之空心螺旋槳軸, 以每分鐘 100 轉. 傳遞 8,000 hp., 其工作應力爲 5,500

磅/方吋。設 $\frac{d}{d_i} = 2$ ，求 d 。

143. 一空心圓柱形鋼軸，外直徑 10 吋，內直徑 6 吋，受應力至 8,000 磅/方吋。問在每分鐘 1,000 轉可輸送馬力若干？求軸長 100 呎內之扭角度數。設該軸改為實心，其外直徑相同，求所增堅強之百分數。 $G = 12 \times 10^6$ 磅/方吋。

答。21,700 hp. 9.17°. 14.6%。

27. 矩形剖面軸。——矩形剖面軸之扭轉問題，因扭轉時剖面發生翹曲，故甚為複雜。今用一橡皮矩形桿，在其面上描小方形，即可試驗此翹曲。由圖 8，可知在扭轉時，原垂直於桿軸之線，均變為彎曲。此表示上述小方形之變形，沿此剖面之邊而變化，在中心之值為最大，在各角為零。故可知切應力隨此變形而變動，即在剖面每邊之中心為最大，各角上為零。由此問題之考究，（註 1）知最大切應力發生於矩形剖面較大一邊之中心，其值如下式所示：

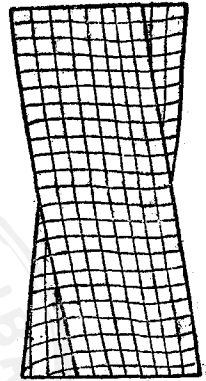


圖 8. (註 2)

$$(\tau_s)_{\text{最大}} = \frac{M_t}{abc^2}, \quad (48)$$

式中 b 為矩形剖面之長邊， c 為短邊，而 a 為一數目因數，視 $\frac{b}{c}$ 之比而定。下表 1 示若干 a 之值。有可注意者，即最大應力大小之相當正確值，可用下列近似式算之：

$$(\tau_s)_{\text{最大}} = \frac{M_t}{bc^2} \left(3 + 1.8 \frac{c}{b} \right). \quad (48a)$$

矩形剖面例中單位長之扭角，可用下式求之：

$$\theta = \frac{M_t}{\beta bc^2 G}. \quad (49)$$

註 1. 此完全解法出於 d: Saint Venant, *Mém. des Savants étrangers*, t. 14 (1855).

註 2. 此圖採自 Bach's "Elastizität und Festigkeit."

數目因數 β 之值，載於下表第三行。

表 1.

矩形剖面軸扭轉之數據

$\frac{b}{c}$	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4.00	6	8	10	∞
α	.208	.231	.239	.246	.258	.267	.282	.299	.307	.313	.313
β	.141	.193	.214	.229	.249	.263	.281	.299	.307	.313	.313

由上表可知在甚狹之矩形剖面例中，如片金屬之薄條， α 及 β 等於 $\frac{1}{3}$ ，於是最大切應力及單位長之扭角方程式變為

$$(s_s)_{\text{最大}} = \frac{3M_t}{bc^2}, \quad (50)$$

$$\theta = \frac{3M_t}{bc^3G}. \quad (51)$$

此二式在實際上甚重要，因不特可用之狹矩形，且可用之求剖面寬甚小例之近似解法。例如，如圖 87a 及 b 所示等厚之剖面例，將中心線之展開長度，代(51)式中之 b (即在圖 87a 所示之例， $b = \phi r$ 。而在圖 87b 所示例， $b = 2a - c$)，即可由此式求扭角。第一剖

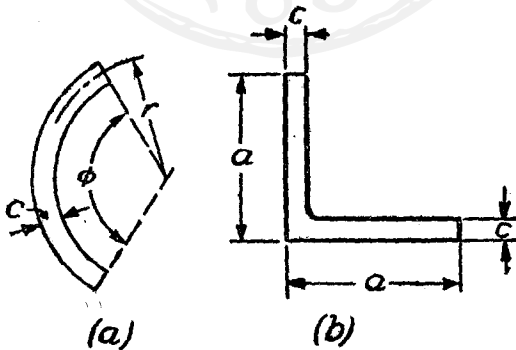


圖 87.

面之最大應力，可由(50)式求之。在角剖面(圖 87b)，其最大應力在凹角之角上。(註 3)將(50)式所示之應力，乘以應力集中因數，即得此最大應力。用皂膜試驗，已得此因數隨內圓角半徑 r 與厚 c 之比而變：此因數之值載於下表中。(註 4)

$\frac{r}{c}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
因數	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	2	$1\frac{3}{4}$

28. 螺旋簧(閉盤)。——假定圓剖面螺旋簧(helical spring)，受軸力 P 之作用(圖 88a)，且任何一圈近乎在垂直於螺旋軸之平面上。今考究簧上部(即以軸剖面為界者，如 mn ，圖 88b)之平衡，由靜

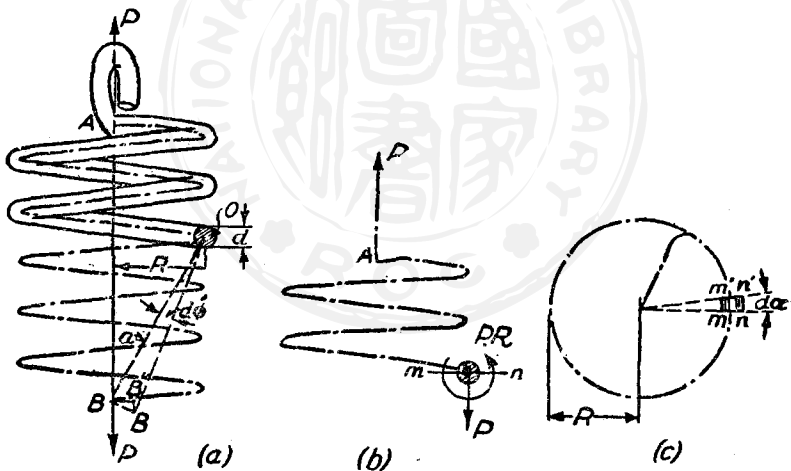


圖 88.

註 3. 上法僅適用於可自由翹曲之結構形之剖面。設在扭轉時阻止剖面或數剖面之翹曲，於是突緣有彎曲，此對於扭角及所生最大應力，有頗大之效應。欲知此效應之討論，見 Timoshenko's "Strength of Materials," Vol. 1, p. 282.

註 4. 見 P. A. Cushman 之論文, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., 1932.

力方程式可得結論，即在圈剖面 mn 上之應力，可化為經過剖面中心之切力 P ，及作用於一在剖面平面內大小為 PR 之逆時針方向之偶力，此 R 為包含簧中心線之圓筒面之半徑，此偶力 PR 扭轉簧圈，生一(43)式所示之最大切應力，在此處變為

$$s_s' = \frac{16PR}{\pi d^3}, \quad (a)$$

式中 d 為簧圈剖面 mn 之直徑，在此扭轉所生之應力上，重疊切力 P 所生之應力。為近似計，此切力假定等布於剖面上；其相當切應力將為

$$s_s'' = \frac{4P}{\pi d^2}. \quad (b)$$

在點 m ， s_s' 及 s_s'' 方向相同，故此處發生最大切應力，其大小為

$$(s_s)_{\text{最大}} = s_s' + s_s'' = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R}\right). \quad (52)$$

由上式可知，括弧內之第二項表示切力之效應，此隨比 $\frac{d}{R}$ 而增加。

在重螺旋簧中，如鐵路車輛所用者，此甚屬重要。因此項關係，圈內邊諸點如 m ，所處狀態，較諸點如 n 不利，因在 n 點之切應力 s_s' 及 s_s'' 作用於相反方向也。由重簧之經驗，知破裂恆開始於圈之內側。

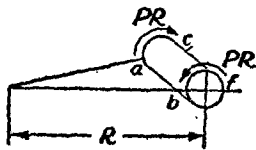


圖 89.

又有另一理由，可推測圈內側之較高應力。在計算扭轉所生應力時，用(a)式，此式為根據圓柱形桿而來。在實際上，簧之每一元素，均在圖 89 所示之狀態中。由此圖可知，設剖面 bf 因扭轉而對 ac 旋轉， b 點

對 a 之變位，與 f 點對 c 之變位相同。因距離 ab 小於距離 cf 之事實，在內側 ab 上之切應變，將較外側 cd 上者大，故偶力 PR 在 b 所生之切應力，將較 f 上者大。將此計入，又加上切力之效應，可用下式（註 5）替代（52）式，以算最大切應力：

$$(s_s)_{\text{最大}} = \frac{16PR}{\pi d^3} \left(\frac{4m-1}{4m-4} + \frac{.615}{m} \right), \quad (53)$$

式中
$$m = \frac{2R}{d}.$$

由此可知括弧內之改正因數隨 m 之減少而增加；例如，在 $m=4$ 之例中，此因數約為 1.40，當 $m=10$ ，此因數等於 1.14。

在計算簧之撓度時，恆僅計圈扭轉之效應。在求二相鄰剖面 mn 及 $m'n'$ 間（圖 88c）一元素之扭角，用（42）式，將 $Rd\alpha$ 代 l ，得

$$d\phi = \frac{F \cdot R \cdot Rd\alpha}{I_p G}.$$

因為此扭轉，簧之下部對點 O （圖 88a）旋轉，力 P 之作用點 B ，將描小弧 $BB' = ad\phi$ 。假想除 mn 及 $m'n'$ 間之元素外，簧之全部均作剛硬，則甚易畫出 B 之移動。此縱分變位為

$$d\delta = B'B'' = BE' \frac{R}{a} = Rd\phi = \frac{PR \cdot d\alpha}{I_p G}. \quad (c)$$

在簧之全長度上，總加每元素 $mnm'n'$ 所生之撓度 $B'B''$ ，可得簧之全撓度。於是

註 5. 欲知此式之來由，見 A. M. Wahl, "Stresses in Heavy Closely Coiled Helical Springs," Trans. A. S. M. E., 1929, Vol. 51, paper no. APM-51-17. 該文之作者又用試驗在圈表面上作度量，以定其應力。

$$\delta = \int_0^{2\pi n} \frac{PR^3}{I_p G} d\alpha = \frac{64nPR^3}{d^4G}, \quad (54)$$

式中 n 表示圈數。一全轉內之淨水平變位爲零。

遇不爲圓剖面之簧，設不用(42)及(43)式，而用與此剖面形狀相當之方程式，上述方法可用以算其應力及撓度。例如，在矩形剖面之例中，宜用(48)及(49)式。

習 題



圖 90.

144. 設 $P=250$ 磅, $R=4$ 吋, $d=.8$ 吋, 圈數爲 20, $G=12 \times 10^6$ 磅/方吋, 用適當之改正因數, 求螺旋簧之最大應力及伸長。

答. (s_s) 最大 = 11,400 磅/方吋; $\delta = 1.17$ 吋.

145. 承前題, 設其工作應力爲 $s_s=20,000$ 磅/方吋, 問簧之極限載荷若干? 在此極限載荷, 問簧之撓度若干?

146. 二螺旋簧, 材料相同, 剖面爲等圓形, 長相等, 如圖 90 裝配之, 於二平行板間壓縮之。設 $d=0.5$, $P=100$ 磅, 求各簧之最大應力。

用(53)式. 答. 2,860 及 5,380 磅/方吋.

第五 章

切 力 及 彎 矩

29. 梁之定義及載荷之式樣。——凡桿之受軸平面內之力或偶力之作用，而大半生桿之彎曲者，謂之梁 (beam)。梁恆依其支持及載荷之情形而分類如下。

簡梁。兩端自由支持之梁，稱為簡梁 (simple beam)。圖 91a 示一簡梁，靜止於二支座上，側面 (即，垂直於梁軸) 負單集中載荷。支座

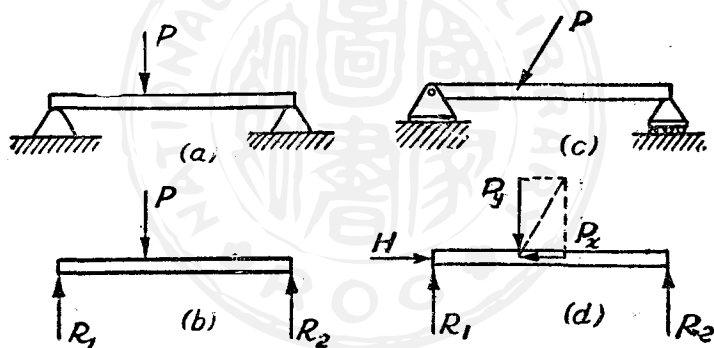


圖 91.

所生反動力，假定垂直，如力矢 R_1 及 R_2 (圖 91b) 所示。圖 91c 示一簡梁，受斜力 P 之作用。此力有垂直或側分力 P_y 及水平分力 P_x 。在此情形，支座之一必為鉸而不可動之支座，使可抵抗壓力 P_x 。反動力元

素之數爲三，以 H, R_1 及 R_2 在圖 91d 中表之。此諸梁之反動力，可應用靜力平衡之條件求之；即，在圖 91b 用 $\Sigma M = 0$ 及 $\Sigma Y = 0$ ，在圖 91d 用 $\Sigma M = 0, \Sigma Y = 0$ 及 $\Sigma X = 0$ 。

純彎曲梁。 當一梁或梁之一部僅受偶力之作用，則謂此梁受純彎曲。以後可知在此種梁之剖面上，無切力作用之。圖 92a 示一梁受端偶力之作用，此端偶力在此書中以曲矢表之。此諸端偶力可以二法作用之，如圖 92b 及 c 所示。圖 97a 梁之中間部分，亦受純彎曲。

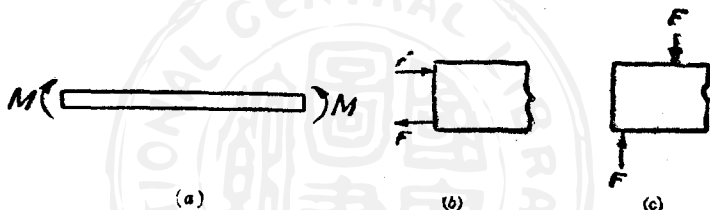


圖 92.

肱梁。 設梁僅支持於一端，如圖 93a 所示固定於牆內者，或如圖 93c 所支持者，此謂之肱梁 (cantilever beam)。

在圖 94a，示一肱梁，在右端受一偶力之作用。在固定端之力系性質，殊爲複雜，但此與另一偶力相當，此另一偶力如下生成。在牆上，石土在梁左端所生壓力之分布，大約如圖 94b 所示。在固定端頂部及底部諸壓力之合力，爲由二等力 F 所組成之偶力。在靜力平衡時，此偶力之力矩，必與右端偶力之力矩相等而相反。

在肱梁(圖 93a)固定端之力系，與一偶力 M 及一垂直反動力 R (如圖 93b 自由體所示者)相當。反動元素 M 及 R 之大小，由平衡條

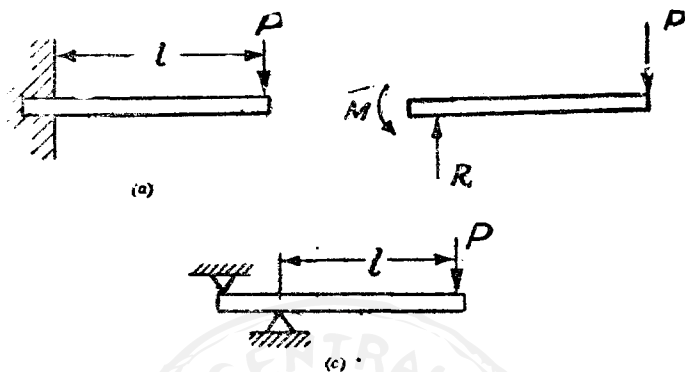


圖 93.

件, $\Sigma M=0$ 及 $\Sigma Y=0$ 求之。

梁有懸臂者。一梁可自由支持於二點, 且其一端 (或二端) 可伸過支座, 如圖 95; 則此梁稱為有懸臂之梁 (beam with overhanging end)。

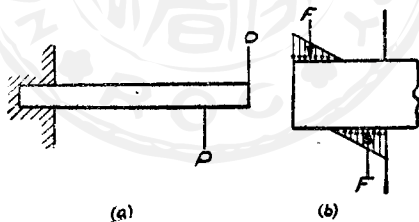


圖 94.

靜力不定梁。梁之兩端又可固定於牆中, 或一端固定而他端自由支持; 或可靜止於若干支座上。此種梁為靜力不定 (statically indeterminate), (即, 支持力或反動力之大小, 不能僅用靜力學決定之), 此將在第八章中論之。

載荷式樣。集中力及端偶力之載荷，已在上討論。載荷常常分佈於梁長度之一部分，或全長度。設分佈載荷在梁上之強度均勻（如

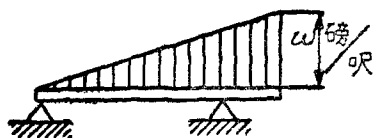


圖 95.

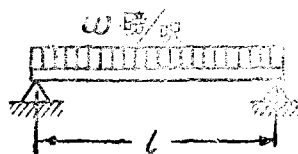


圖 96.

圖 96)，此稱為等布載荷 (uniformly distributed load)，或分佈載荷之強度可變動，如圖 95 之均勻變動載荷 (uniformly varying load)。

欲求一分佈載荷所生之反動力，僅將一相當集中力替代此載荷，且作用於此載荷之重心即可。於是可應用靜力平衡條件，如在集中力之情形中。

此種載荷又可有各種不同之組合。此種載荷恆皆作用於一平面內，此平面稱為載荷平面。

30. 切力及彎矩。——當一梁受彎曲，即生內應力。欲求此內應力之大小，宜知作用於梁各剖面上之彎矩 (bending moment) 及切力

(shearing force) (其定義在下述之)。本章要旨在求彎矩及切力；在下章則詳論所生之應力。

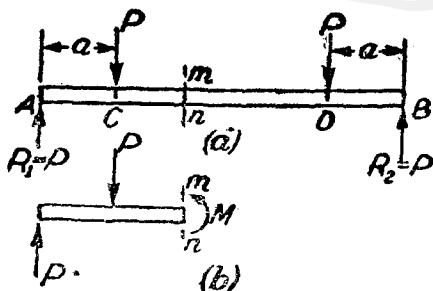


圖 97.

先考究一梁，如圖 97 所示者，其中間部分 CD 受純彎曲；即，無切力之存在者。設在



圖 98.

某剖面如 mn 截斷此梁，則此二部分可用底部之鏈及頂部之輓而連接之，如圖 98a 所示。鏈甚明顯受張力，而輓受壓力，故梁右部對左部之作用，與圖 98b 所示之力系相當。因無其他水平力作用於左部，張力 T 等於壓力 C ；因此，力 C 及 T 組成一偶力，其力矩恆稱為抗矩 (resisting moment)，實在作用於未截斷梁內剖面 mn 之內力，分布於全剖面上 (其分布情形以後可知)，然其合力亦為一偶力，適與圖 98b 所示者同。此內抗矩必與外力對於剖面 mn (註 1) 之力矩成平衡。此外力矩恆稱為彎矩 (bending moment)。

在純彎曲之上例中，內力垂直於剖面，且無切分力。然，一般而論，當梁受垂直於梁軸之側載荷系之彎曲，切力及正力均生於剖面上。今考究圖 99 之梁，此梁截斷於剖面 mn 上，

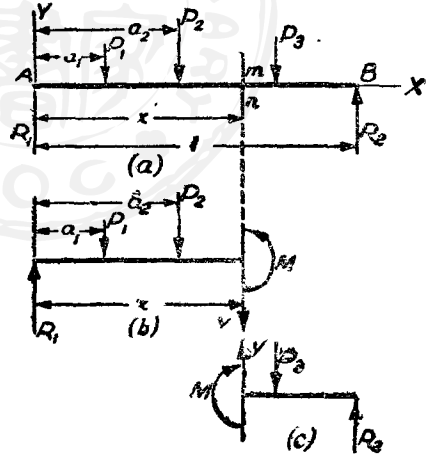


圖 99.

註 1. 更精細述之，“對於垂直在載荷平面而經過剖面 mn 質心之軸。”至於軸之選擇，見 34 節。

以繪出此諸切力之存在。設 R_1 大於 $P_1 + P_2$ ，於是甚易想像梁之左部有經過右部向上滑動，及順時針方向轉動之傾向。圖 98a 中之鏈及輓，可用以阻止一部對他部之轉動。欲阻止相對滑動，應另用方法，如圖 100a 所示之槽桿，此桿將對左部生向下之力。故作用於剖面上之合力系，為圖 100b 所示者，即，由等力 T 及 C 所組成之抗矩，及內切力 V 。此內切力 V 實為作用於剖面 mn 上之切應力之合力，此切應力之分布將在 36 節中述之。由梁左部之靜力平衡條件(圖 99b)，力



圖 100.

V 與力 R_1, P_1 及 P_2 之代數和 V 相等而相反，而大小為 M 之抗偶力，平衡力 R_1, P_1 及 P_2 對於剖面 mn 之力矩 M 。於是

$$V = R_1 - P_1 - P_2, \quad (a)$$

$$M = R_1 x - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2). \quad (b)$$

在剖面 mn 一邊梁上諸垂直力之代數和 V ，稱為剖面 mn 上之切力，而同力之力矩 M ，稱為剖面 mn 上之彎矩。

設不考究梁之左部，而考究右部，其切力 V 及偶力 M 之大小，將與以上相同，惟方向相反(圖 99c)。此可由下列事實得之，即作用於梁上之載荷 P_1, P_2, P_3 ，與反動力 R_1 及 R_2 成平衡；故諸力對於 xy 平面內任何一點之力矩，及諸力之和，必等於零。於是作用於梁左部諸力對於剖面 mn 上之力矩，必與作用於梁右部諸力對於同剖面之力矩相等而相反。又作用於梁左部之諸力之代數和，必與作用於梁右部之諸力之代數和相等而相反。

在以下討論中，設彎矩及切力之方向，如圖 99b 及 c 所示者，則作為正，即，設彎矩生向上凹之梁彎曲，則為正，設梁右部對左部有向下切去之傾向，則此切力為正。見圖 101。

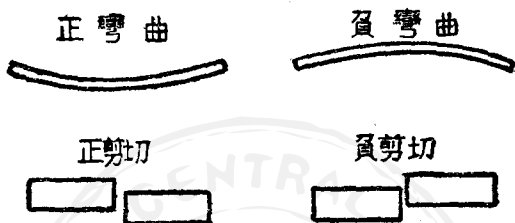


圖 101.

今有一相當而更簡之規則，可決定作用於剖面上彎矩之符號，即向上之外力，對於剖面生正力矩；向下力生負力矩。例如，在圖 99 中， R_1 所生力矩為 R_1x ，因 R_1 向上作用，故為正。 P_1 所生力矩為 $P_1(x-a)$ ，因 P_1 向下作用，故為負。此諸符號與 (b) 式相當項之符號一致。作用於剖面上總彎矩之為正為負，視各項之和為正為負而定。

今考究一梁元素，此用相距 dx 之二相鄰剖面 mn 及 pq 所割出（圖 102a）。假定在剖面 mn 上有一正彎矩及一正切力，梁左部對元

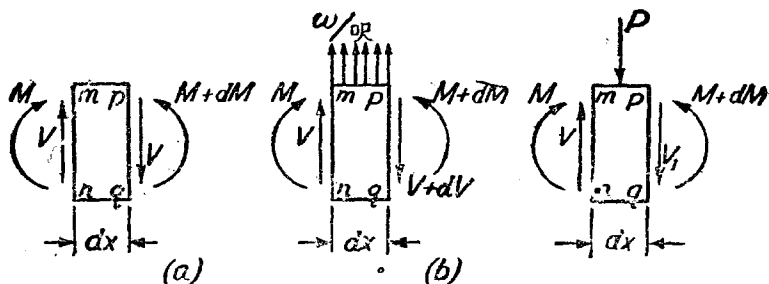


圖 102.

素之作用，可用力 V 及偶力 M 表之，如圖 102a 所示。同樣，假定在剖面 pq 上，彎矩及切力為正，梁右部對元素之作用，以所示之偶力及力表之。設無力作用於剖面 mn 及 pq 間之梁上，又設略去梁元素之重，則二剖面上之切力相等。由元素對於力矩之平衡，彎矩之增加 dM ，等於二相等而相反力 V 所表示之偶力之力矩，即，

$$dM = V dx,$$

或
$$\frac{dM}{dx} = V. \quad (55)$$

由是，在載荷間之梁各部分上，切力為彎矩對 x 之改變率。

當一連續載荷分布於梁上，其在梁單位長度之大小，稱為其強度 (intensity)，以 w 表示之，此 w 可以變動。於是二相鄰剖面 mn 及 pq (圖 102b) 間之載荷，為 $w dx$ 。今需下列 (56) 式書作正號；故在求該式時，可將向上力作為正，向下力作為負。由作用於元素上諸垂直力之平衡，

$$V - (V + dV) + w dx = 0,$$

由此
$$\frac{dV}{dx} = w. \quad (56)$$

今取作用於元素上諸力之力矩，得

$$dM = V dx + w dx \left(\frac{dx}{2} \right),$$

右邊第二項為二次之小量，可略去之，故又得 (55) 式。

設一集中載荷加於相鄰剖面 mn 及 pq 間 (圖 102c)，切力之大小，將有突然之改變。令 V 表示 mn 以左之切力， V_1 為 pq 以右之切

力，於是由元素 $mnpq$ 之平衡，得

$$F_1 = V - P.$$

今，由(55)式，可得結論，即在集中力作用點上，微係數 $\frac{dM}{dx}$ 之大小，有突然之改變，因在此點上 V 突然改變也。

31. 切力及彎矩之方程式及圖。——以後可知最大切應力，發生於切力最大之剖面上，而最大正應力 s_x ，發生於彎矩最大之剖面上。故切力及彎矩沿梁之變動，有研究之必要。可書切力及彎矩方程式，以表示此種變動，或可用圖形表之。在圖示法中，橫座標表示沿梁各剖面之位置，縱座標表示切力或彎矩之值。此種圖各稱為切力圖及彎矩圖。

例如，今考究一簡支持梁，上負單集中載荷 P (圖 103)。此例之反動力為

$$R_1 = \frac{Pb}{l}; \quad R_2 = \frac{Pa}{l}.$$

在 P 以左任何剖面 mn ，由 mn 及 R_1 間梁部分之平衡，可得結論

$$V = R_1 \quad \text{及} \quad M = R_1 x = \frac{Pb}{l} \cdot x. \quad (a)$$

切力及彎矩生切變位及彎曲，如圖 101 中標記“正”之情形，故其值為正。由此可知在載荷以左諸剖面上，切力恆為一定，而彎矩則直接隨 x 變動。當 $x=0$ ，彎矩為零，當 $x=a$ ，即，在加載荷之剖面上，其彎矩等於 $\frac{Pab}{l}$ 。其相當圖，在圖 103b 及 c 中各以直線 $A'C'$ 及 AC 表

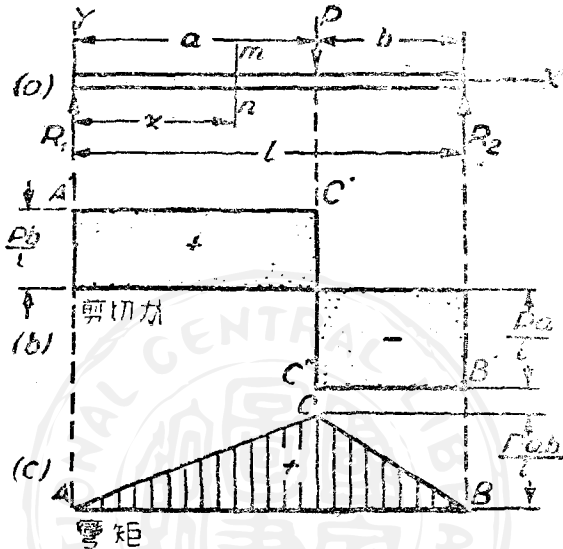


圖 103.

之。在載荷 \$P\$ 以右之剖面上，由梁左部之平衡得

$$V = \frac{Pb}{l} - P; \quad M = \frac{Pb}{l}x - P(x-a). \quad (5)$$

此梁部分之切力均為一定，且為負。在圖 103b 中，此力以平行於 \$x\$ 軸之線 \$C'B'\$ 表之。彎矩為 \$x\$ 之一次函數，當 \$x=l\$，其值為零。在此梁中，彎矩均為正，其在 \$P\$ 及 \$R_2\$ 間之變動，以直線 \$CB\$ 表之。在載荷 \$P\$ 處，切力之大小有突然之改變，自正值 \$\frac{Pb}{l}\$ 變至負值 \$-\frac{Pa}{l}\$，在此彎矩圖之斜度，亦有尖銳之改變。圖 103b 之斷線 \$A'C'C'B'\$，及圖 103c 之斷線 \$ACB\$，各表示梁全長度之切力及彎矩圖。此種 (a) 及 (b) 中 \$V\$ 及 \$M\$ 之方程式，恆各稱為切力及彎矩方程式。

設數側力作用於梁上(圖 104),由同理可知沿二載荷間梁之每一部分,其切力仍為一定,其彎矩則根據直線定律變動,切力圖在圖 104(a)中,以斷線 $A'C'C''D'D''E'E''B'$ 表之,而彎矩圖在圖 104(b)中,以斷線 $ACDEB$ 表之,由此可知在每一載荷之下,切力及力矩線之斜度均突然改變。

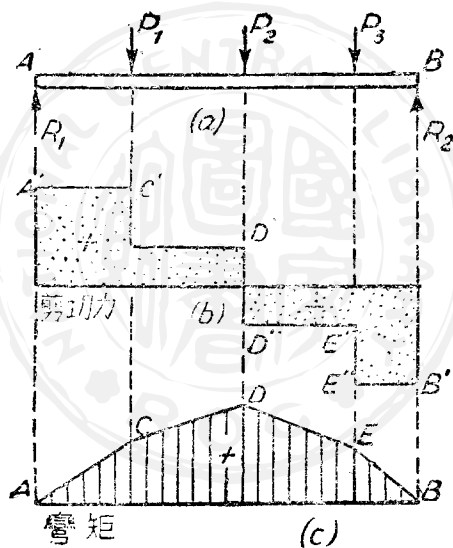
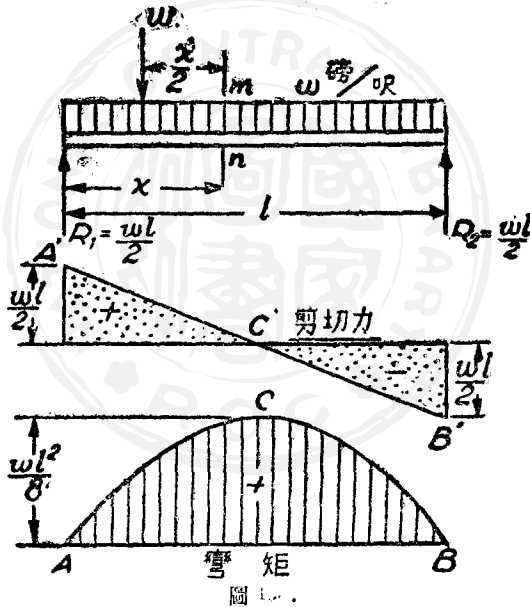


圖 104.

因最大彎應力發生於彎矩最大(數目的)之剖面上,此等剖面在實際應用上甚為重要。彎矩 $M=f(x)$ 在一點 x 為最大或最小之條件,為該點之斜度 $\frac{dM}{dx}$ 等於零,或改變符號。因 $V=\frac{dM}{dx}$ (見 55 式),由切力圖定 V 改變符號處之 x 值,或切力 V 為零處之 x 值,甚易求

得最大彎矩之剖面。在此等各剖面所算得 M 之值中，選擇 M 數值為最大者。圖 103 中之點 C ，及圖 104 中之點 D ，定危險剖面，在此面上發生最大彎矩。

今考究一簡支持梁之例，其上負強度 w 之等布載荷(圖 105)。其反動力均等於 $\frac{wl}{2}$ 。在距左支座距離 x 處，取任何剖面 mn ，考究此剖



面以左之梁部分，作用於此部分上之力，為反動力 $\frac{wl}{2}$ 及等布載荷，此等布載荷在計算彎矩及切力時，可在距剖面 mn 距離 $\frac{x}{2}$ 處以其合力 $w x$ 代之。於是切力及彎矩方程式為

$$V = \frac{wl}{2} - wx; \quad M = \frac{wl}{2}x - w\frac{x^2}{2}.$$

其切力圖，以斜線 $A'C'B'$ 表之。在梁各剖面上之彎矩，均爲正，在 $x=0$ 及 $x=l$ 處爲零，在 $x = \frac{l}{2}$ ，有最大值 $\frac{wl^2}{8}$ 。其彎矩圖以拋物線 ACB 表之，此線之縱軸在梁之中心。

設集中及分布載荷同時作用於梁上，集中載荷及分布載荷之切力或彎矩圖，可分別作之，於是相加其相當縱座標之代數值，則得結果圖形。

在桁梁之例中（圖 106），可用計算簡支持梁彎矩及切力之同一

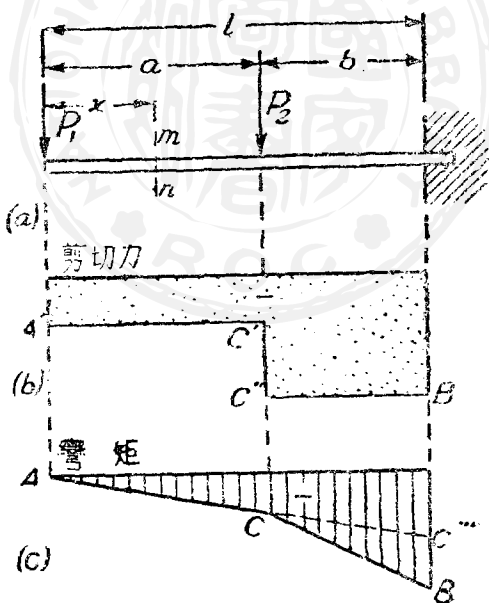


圖 106.

方法，在梁左部中任何剖面 mn (圖 106*a*)，

$$V = -P_1 \quad \text{及} \quad M = -P_1x,$$

在梁右部中任何剖面，

$$V = -P_1 - P_2; \quad M = -P_1x - P_2(x-a).$$

依照圖 101 所立之規則，此例中之切力及彎矩將均為負，即，其相當線 $A'C'C''B'$ 及 ACB (圖 106) 各有負縱座標，其彎矩之最大值發生於固定端(當 $x=l$)，其值等於 $-(P_1l + P_2b)$ 。

32. 決定切力及彎矩圖之另法。——在以前，切力及彎矩圖根據先前所得之切力及彎矩方程式而作之。平常恆用下法作圖，至少就其主要性質而言，實較為方便，即，先(不必用正式之方程式)作切力圖，於是，用切力及彎矩圖間存在之幾何關係之考究，作彎矩圖。彎矩之最大數值，最好由對於力矩之平衡條件計算之。

今舉一例，以說明此法，試考究圖 107 之梁，在 A ，力 1,000 磅生負切力 1,000 磅。在第一 2 呎中，無其他力作用之，故切力縱座標仍為一定，其值為 -1,000 磅。在 B ， R_1 使切力增加 2,480 磅，其切力縱座標變為 +1,480 磅，且仍保持此值，直至點 C 為止。自 C 開始，有均勻載荷 400 磅之效應，因此每向右行一呎，其切力縱座標即減小 400 磅。在點 D ，切力之縱座標已減少 $8 \times 400 = 3,200$ 磅，故變為 -1,720 磅，其數值等於 R_2 ，此乃應當如是者。在以上分析時，即繪切力圖，其結果示於圖 107*b* 中。

當借切力圖作彎矩圖時，讀者應深明切力及彎矩間關係之意義；即， $V = \frac{dM}{dx}$ (見 55 式)。以文字述之，此公式意義為彎矩圖之斜度，與切力圖之縱座標成比例。用此方法，可求彎矩圖上每一點之切線之斜度，且可決定彎矩圖之大概形狀。例如，一正切力縱座標，表示彎矩圖之切線斜度為正；即，此切線向上右方傾斜也。

由此種考究，可核對下列關係。當梁載荷及反動力僅為集中力時，彎矩圖包括諸直線，其傾斜度與剪力成比例。當載荷等布時，其剪力圖之相當部分包括傾斜直線，而彎矩圖之相當部分為一拋物線弧。拋物線（此拋物線弧為其一部分）之對稱縱軸，經過相當剪力線（在必需時可延長之）截 x 軸之點，而其他事實，應鄭重申說者，第一，設剪力圖之縱座標有突然之改變（此發生於集中載荷之下），彎矩圖之線或曲線相交成角。設剪力突然改變符號，此彎矩圖中有會切點

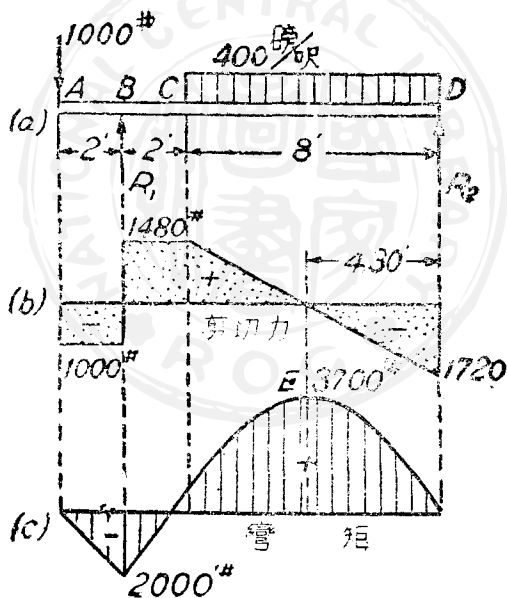


圖 107

(cusp)。第二，設剪力縱座標漸漸改變，如點 C （見圖 107），則相遇於此點之力矩圖之二部，有一共同切線。

今應用此諸關係，至上述問題，由已作切力圖之考究，可作力矩圖一般之形式。A 處之力矩，明顯為零。由 A 至 B，有一定大小之負切力縱座標，故先二彎矩曲線之斜度為一定，此必為負斜度之直線。在 B，切力圖之縱座標有突然之改變，自值 $-1,000$ 變至 $+1,480$ ，故力矩圖之切線自負斜度變至多少較大之正斜度，故在 B 形成一會切點。由 B 至 C 之力矩圖，亦為一正斜度之直傾斜線。自 C 至 D，有均勻減減之切力縱座標，因此力矩曲線正斜度漸減，而在 E 點力矩縱座標達一最大值。自 E 至 D，負切力縱座標均勻遞增，故力矩曲線之相當部分，有隨 x 遞增之負斜度。此曲線（前已述過）為一拋物線。右端之力矩甚顯明為零。

此分析定力矩曲線之普通形式：倘未計算者，為 B 及 E 之可能最大彎矩。將 B 以左之梁部分取出作為自由體，作用於 B 之總外力矩，為 $-1,000 \times 2 = -2,000$ 呎磅。其他可能之最大彎矩在 E，此處之切力為零，E 自右端之距離，甚易如下求之。在 D 之切力為 $1,720$ 磅，當向左前進，此以每呎 400 磅之率改變；故，在切力變為零以前，必前進 $\frac{1,720}{400} = 4.30$ 呎。E 之力矩，最好用在 E 以右所隔離之梁部分計算之。其力矩

$$M = +1,720 \times 4.30 - 400 \times \frac{(4.30)^2}{2} = +3,760 \text{ 呎磅.}$$

反曲點 (point of contraflexure or inflection) 在彎曲梁自向下凹變為向上凹 (或相反)，而改變其形式之處，此發生於彎矩改變符號之處；在此例，距左端 A 點 $x = 3.35$ 呎處。

切力及彎矩圖亦可用圖積分法求之，今略述如下。假定向上載荷為正，向下載荷為負，求 (56) 式 $\frac{dV}{dx} = w$ 之積分，得

$$V = \int_{x=0}^{x=x_1} w dx. \quad (57)$$

由此可知，設繪梁上之載荷，而將集中載荷及反動力作為分布於甚小長度 Δx 之上，於是任何點 x_1 之切力，為左端與 $x = x_1$ 處剖面間載荷

強度之面積。各切力縱座標，可如此法計算之。

同理，因 $\frac{dM}{dx} = V$ (55 式)，

$$M = \int_{x_0}^{x-x_1} V dx, \quad (58)$$

而在任何點 x 之彎矩，等於原點或左端之彎矩，加 $x=0$ 及 $x=x_1$ 間切力圖之面積。例如，在圖 107，其最大彎矩（發生於 $x=7.70$ 呎處），等於左端之零力矩，加左端與 $x=7.70$ 間之切力圖面積，即， $M_{\text{最大}} = 0 + (-1,000)(2) + (1,480)(2) + \frac{1}{2}(1,480)(3.70) = 3,700$ 呎磅。

習 題

在例 147—151，於梁左端取原點，書切力及彎矩方程式（以 x 表之）；大略用比例尺，繪切力及彎矩圖，標出最大正及負切力之值，及最大正及負彎矩之值。

147. 懸梁長 l ，支持於右端，於自由端負集中載荷 P 。答。最大彎矩 $= -Pl$ 。

148. 懸梁之端有偶力。圖 108。



圖 108。

149. 懸梁長 l ，支持於右端，全長度上負強度每單位長 w 磅之均勻載荷。

答。最大彎矩 $= -\frac{wl^2}{2}$ 。

150. 懸梁長 l ，支持於右端，在梁之左半，負總等布載荷 W 磅。

151. 桁梁負載荷，如圖 109 所示。

152. 梁自由支持於兩端，跨度 l ，在中心負集中載荷 P 。

答. 最大力矩 $-\frac{Pl}{4}$.

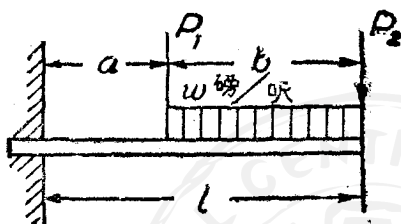


圖 109.

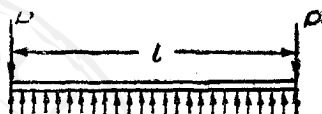


圖 110.(註 2)

153. 梁自由支持於兩端，跨度 l ，負二集中載荷 $\frac{1}{2}P$ ，此載荷對稱置於梁上，各距其頂端之距離為 a 。

154. 梁自由支持於兩端，跨度 l ，負一總載荷 W ，此載荷等布於梁之左半部。

答. 最大切力 $-\frac{3}{4}W$; 最大力矩 $-\frac{9}{64}Wl$.

155. 梁長 l ，沿其長度均勻支持之，於其各端負二集中載荷 P ，如圖 110 所示。

156. 梁長 l ，中心負一集中載荷，以等布力或反動力支持之。見圖 111。

答. 中心之最大力矩 $-\frac{Pl}{8}$.

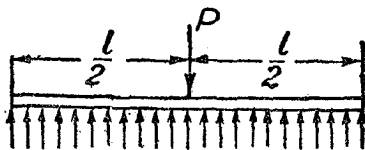


圖 111.

157. 梁自由支持於兩端，跨度 l ，負一總載荷 W ，此載荷均勻遞增，在左端為零，右

註 2. 等布反動力之例(如圖 110 及 111 所示者)，如浮木枋上或船身上所受之水壓力。

端之值最大。(圖 112).

解。——爲計算反動力計，載荷 W 視若作用於三角載荷圖之質心，故其反動力爲

$$R_1 = \frac{W}{3} \quad \text{及} \quad R_2 = \frac{2W}{3}.$$

每單位長之平均載荷強度爲 $\frac{W}{l}$.

右端之強度，爲平均值之二倍，或 $\frac{2W}{l}$.

距左端距離 x 之任何剖面 A 之強度，

與右端強度 $\frac{2W}{l}$ 之比，爲 x 與 l 之

比；故 A 處之強度爲 $\frac{x}{l} \left(\frac{2W}{l} \right)$ ，而在

x 長度上之平均強度，爲此值之二分之一，或 $\frac{Wx}{l^2}$ 。在此部分上之總載荷爲

$\left(\frac{Wx}{l^2} \right) x$ ，爲計算作用於 A 之切力及

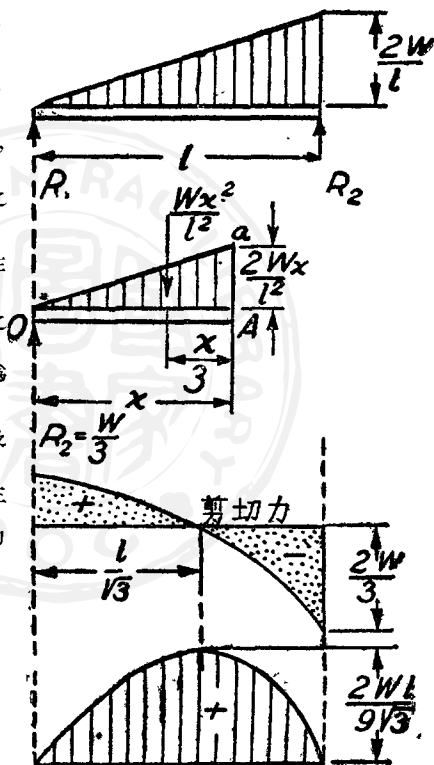
彎矩計。此總載荷可視若作用於載荷三角形 (aA) 之質心上，故 A 處之切力爲

$$V = R_1 - \frac{Wx^2}{l^2} = W \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} \right).$$

A 處之彎矩爲

$$M = R_1 x - \frac{Wx^2}{l^2} \cdot \frac{x}{3}$$

$$= \frac{Wx}{3} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right).$$



彎 矩

圖 112.

其切力圖爲一拋物線，力矩圖爲三次方程式之曲線。最大彎矩發生於切力爲零之處；

即在 $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ 處，最大力矩爲 $\frac{2Wl}{9\sqrt{3}}$ 。

158. 圖 113 示一梁 負均勻變動載荷，在右端之強度為 7,500 磅/呎，在左端為零。

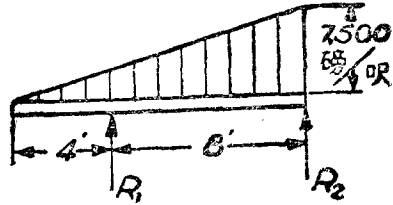


圖 113.

159. 該梁長 l ，支持於左端，其載荷自固定或左端 w 磅/呎之強度均勻遞減，至右或自由端為零。

答. 最大切力 $= \frac{1}{2}wl$; 最大力矩 $= -\frac{wl^2}{6}$.

160. 梁自由支持於兩端，其載荷向中心均勻遞增，如圖 114 所示。

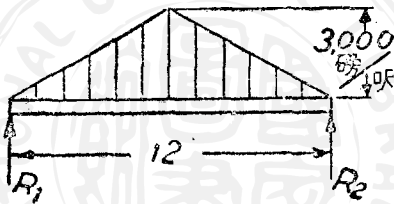


圖 114.

161. 一梁負等於 12,000 磅之三角形載荷 ADB ，設 $l=12$ 呎， $d=3$ 呎(圖 115)；求其最大之大小。

答. 最大力矩 $= 22,400$ 呎磅。

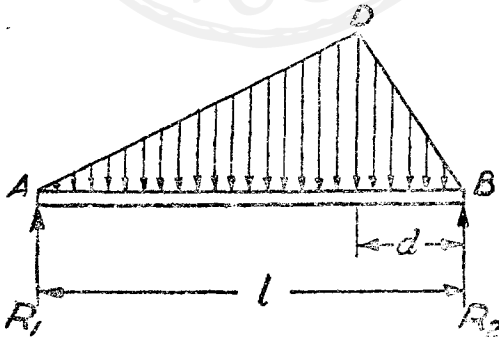


圖 115.

例題 162—170, 172—174, 可作為書寫剪力及彎矩方程式之外加練習。由此方程式或用 32 節所建議之方法(究用何法, 由教師指定之), 作剪力及彎矩圖。在圖上標出剪力及彎矩之最大值。

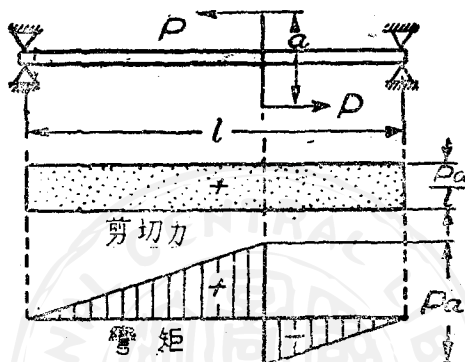


圖 116.

162. 梁長 l , 在支座間加偶力, 圖 116.

163. 梁有一剛硬之向上臂, 如圖 117 所示。臂上負一軸向載荷 P , 此梁鉸於左端, 自由支持於右端。略去軸壓力。

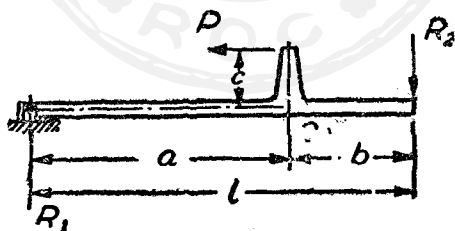


圖 117.

164. 有懸臂之梁, 鉸於左端, 在右端加偶力。見圖 118.

165. 一梁有二懸端; 二端有相等而相反之載荷 P , 如圖 119 所示。

答。支座上之最大力矩 $-Pc$ 。

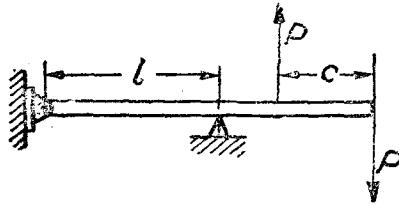


圖 118

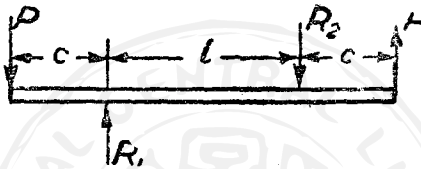


圖 119

166. 一有懸臂之梁，載荷如圖 120 所示。

167. 梁長 18 呎，支持於距各端 4 呎之二點上，二端各負載荷 2,000 磅，二支座間負 100 磅/呎之均勻載荷。

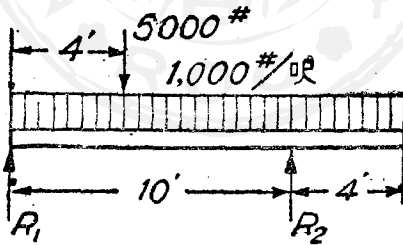


圖 120

168. 一梁有懸端，負對稱載荷，如圖 121 所示，求反曲點 ($M=0$)。

答. 最大力矩 $= -\frac{1}{2}Wa$ (在支座上) 或 $\frac{1}{4}Pl - \frac{1}{2}Wa$ (在中心)，此視 $\frac{P}{W}$ 是否小於抑大於 $\frac{1}{2}l$ 而定。設 $\frac{W}{P} < \frac{l}{2}$ ，反曲點在距支座 (向中心方向) 距離 $= \frac{W}{P}a$ 處。

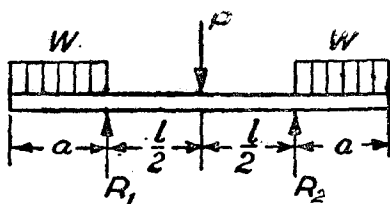


圖 121.

169. 一梁有二相等懸臂(圖 122), 負等布載荷. 設梁長度 l 為一定, 求支座間最有利之距離 d .

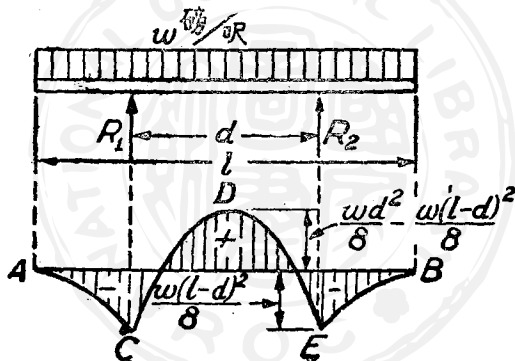


圖 122.

解。——在最有利之條件中, 中心之彎矩數值, 等於支座上之彎矩; 何故?

於是

$$d = .585l.$$

線 $ACDEB$ (包括三拋物線, 其頂點各在 A , D 及 B) 表示彎矩圖。

170. 梁長 20 呎, 支持於左端及距左端 15 呎之一點上. 自左端起 5 呎長度上, 負 1, 000 磅/呎之等布載荷; 距左端 10 呎處負 3,000 磅之集中載荷; 在右端負其他 2,000 磅之集中載荷.

171. 圖 123 示一梁, 求切力及彎矩方程式. 求 $x=0, 3, 6, 9, 12, 16$ 及 20 呎

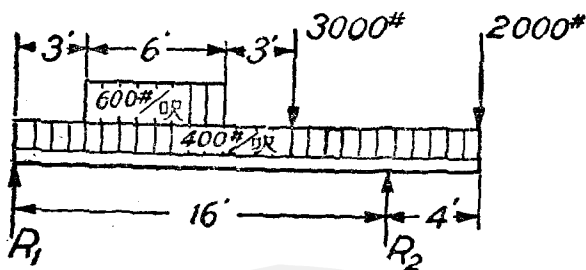


圖 123.

處切力及彎矩之數值。作切力及彎矩圖。

此題亦可用下法解之。所示載荷系可分三單獨系：即，在全長度上之均勻載荷 400 磅/呎，自 3 呎至 9 呎上之均勻載荷 600 磅/呎，及二集中載荷 3,000 及 2,000 磅。可作各單獨系之切力及彎矩圖，於是組合此等縱座標，即得諸載荷共同作用時之圖矣。

答。最大正彎矩發生於 $x=7.3$ 呎處，其值等於 23,900 呎磅。最大負彎矩在 R_2 之上，等於 -11,200 呎磅。

172. 梁有一懸端，一集中反動力，及一等布反動力，如圖 124 所示。

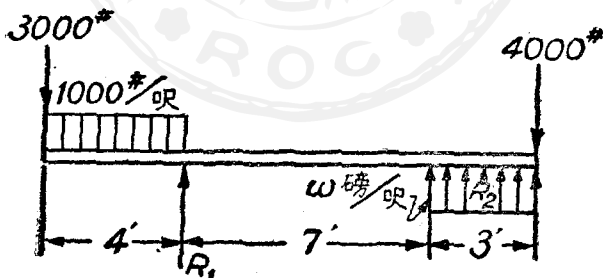


圖 124.

答。分布反動力之強度 = 784 磅/呎。最大力矩在 R_1 之上，其值 = -20,000 呎磅。

173. 一梁有一無摩擦滾，如圖 125 支持之。上負 1,000 磅/呎之均勻載荷。

答. 最大正力矩 = 1,390 呎磅, 在 $x = 8.33$ 呎處. 最大負力矩 = -8,000 呎磅, 在 R_1 及 R_2 之上.

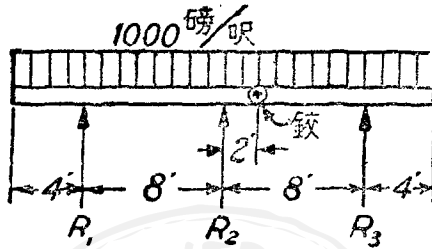


圖 12.

174. 一梁有一無摩擦鉸, 如圖 126 所示. 此梁支持於三點上, 負三所示之載荷.

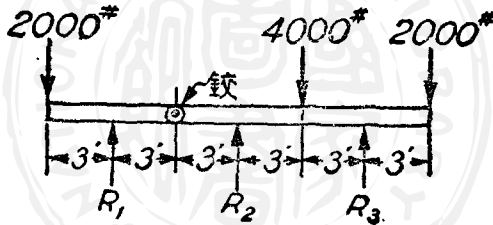


圖 126.

33. 動載荷. ——當一組集中載荷移動於梁上, 決定在此載荷系下所生之最大切力及最大彎矩, 為在實際上殊關重要之問題. 在一組集中載荷中, 最大彎矩發生於一載荷之下. 於是, 在一組動載荷之

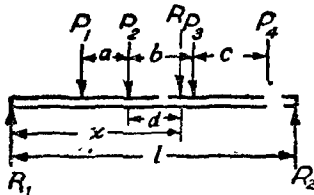


圖 127.

例中, 必觀察發生於各載荷下之最大彎矩, 並選擇諸值之最大者, 以控制梁之設計.

P_1, P_2, P_3 及 P_4 (圖 127) 表示此一組載荷, 此組整個 (即, a, b, c 為固

定距離)移過跨度 l 。第一,應求諸載荷之位置,使可在一載荷下(如 P_2)之彎矩為最大,第二,在此位置時,求 P_2 下之力矩大小,令 R 為跨度上之合載荷, \bar{d} 為此合載荷 R 距 P_2 之定距離,而 x 為此合載荷距左支座之變動距離。

左反動力 $R_1 = \frac{l-x}{l}R$, 因此 P_2 下之力矩為

$$M_2 = \frac{l-x}{l}R(x-\bar{d}) - P_1a.$$

使 $\frac{dM_2}{dx} = 0$, 得使 M_2 為最大之 x 值為 $x = \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}\bar{d}$ 。有可注意者, 即無論 P_2 以左有多少載荷, 可得同樣 x 之值, 因其 P_1a 形式力矩項對變數 x 之微係數, 均為零也。

以上 x 之代數公式, 可總括成下列有用之總規則: 當一特殊載荷與在跨度上諸載荷之合載荷間之平分線, 與跨度中心相符時, 則此特殊載荷下之彎矩達最大值。

欲求 P_2 下之最大力矩, 此 x 值可代入 M_2 之方程式中。

當諸載荷之一在支座上, 則生最大切力。各載荷在支座上所生之反動力之最大值, 等於最大切力。

習 題

175. 一起重機之車, 位於一梁上, 如圖 128 所示, 求起重機最不利之位置。設每輪之壓力為 $P=10,000$ 磅, $l=24$ 呎, $a=3$ 呎, 求最大 M 。梁重略去不計。

176. 一蒸汽機重 11 噸, 輪距 11 呎, 後輪負其載荷之 9 噸。問在 14 呎跨度內生最大力矩及最大切力若干? 答. 最大力矩 $\approx 31\frac{1}{2}$ 噸。最大切力 ≈ 9.45 噸。

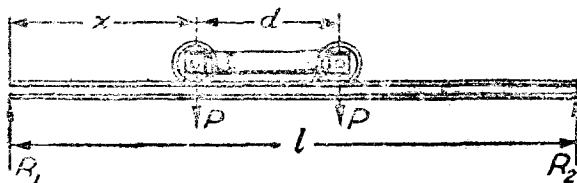


圖 128.

177. 圖 129 表示大西洋式機車之輪載荷，求 29 呎跨距內之最大彎矩及剪力。

答. 最大力矩 = 4,115 呎噸；最大剪力 = 55.8 噸。

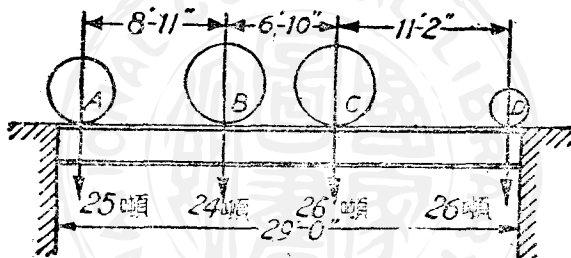


圖 129.

第六章

梁內應力

34. 彎曲中之正應力。——在 30 節已述過，當梁受純彎曲（即，僅受端偶力之作用）時，其內應力垂直於剖面。設有側力存在，於是在剖面上恆有一組之切力及一組之正力。本章目的，在研究此等內力之分布及計算其強度。此二種應力之考究，將完全分別論之。正應力（有時稱彎曲，或纖維應力）之問題，將先論之。

於是，想像一梁受純彎曲，欲求剖面上此等內力之分布，必需考究桿之變形。在桿有對稱縱平面且外彎偶力作用於此平面內之簡單情形中，彎曲將發生於此同一平面內。設桿為矩形剖面，在其邊上作垂線 mm 及 pp ，由直接試驗知此線在彎曲時仍為直線，且此線轉動後，仍垂直於桿之縱纖維（註 1）（圖 130）。下列彎曲理論，係根據假設而來，即不但此等線如 mm 仍為直線，且（1）原為平面之桿之完全側剖面，在彎曲後，仍為平面且垂直於桿之縱纖維。其他假設為（2）材料為均質，且服從虎克定律，（3）每一縱纖維作用時，與他纖維無關，即，纖維間無側壓力或切應力存在，（4）梁為平直且剖面均勻，及（5）張力之彈性係數與壓力者相等。

註 1. 為便利計，桿可想像由細縱桿或纖維所組成。

由試驗知根據此假設所得桿撓度及縱纖維之應變，甚為正確。由第一假設，可推知在彎曲時，剖面 mm 及 pp 對垂直於彎曲平面之軸作相對之轉動，使在凹邊之縱纖維伸長，而凹邊者收縮。線 nq 為面之軌跡，在此面內之纖維在彎曲時不受應變。此面稱為中立面 (neutral surface)，其與任何剖面之交線，稱為中立軸 (neutral axis)，平行於 mm 作線 qs (圖 130a)，可求在中立面以下距離 y 處之任何纖維之伸長 st ，以 ρ 表示桿彎曲軸之曲率半徑，(註²)用三角形 nOq 及 tqs 之相似性質，得纖維 st 之單位伸長為

$$e_s = \frac{st}{nq} = \frac{qs}{nO} = -\frac{y}{\rho}. \quad (a)$$

(a)式需加負號，當其在張應變時(與圖中之 st 相當)， y 之負值(圖 130a 中之 st)能使 e_s 為正。由此式可知縱纖維之應變，與其距中立面

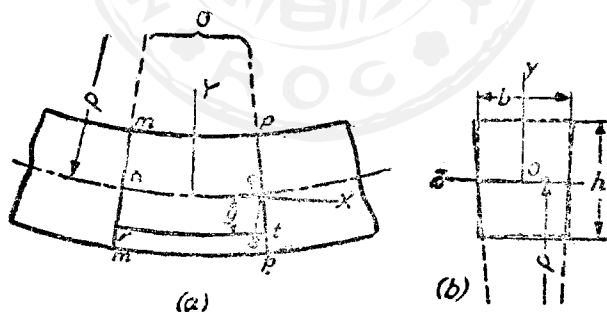


圖 130.

註²。桿軸為經過諸剖面質心之線， O 表示曲率中心，曲率之為正為負視其曲線之凹邊向上抑凹邊向下而定。

之距離 y 成正比,而與曲率半徑成反比。(註 3)

由縱纖維之應變,根據虎克定律 $\epsilon_x = E e_x$,可推得其相當應力

$$\sigma_x = -\frac{E y}{\rho} \quad (\text{註 4}) \quad (59)$$

此應力之分布,如圖 131 所示。在任何纖維內之應力,與其距中立

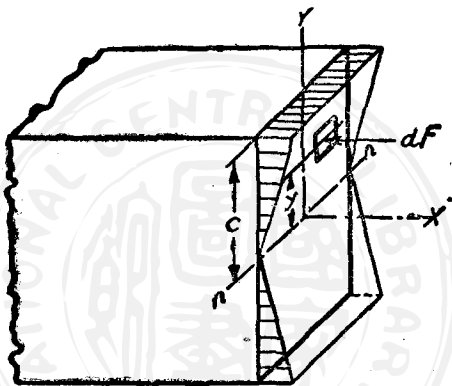


圖 131.

註 3. 由試驗知桿之側收縮與凸邊纖維內之縱伸長相伴而生,如在簡單張力之例中;桿之側伸長,與凹邊之縱收縮相伴而生,如在簡單壓力之例中(見 17 節)。此改變各剖面之形狀,矩形剖面之垂直邊變為互相傾斜,如圖 130b 所示。在側方向內之單位應變為

$$\epsilon_z = -\mu e_x = +\mu \frac{y}{\rho} \quad (b)$$

式中 μ 為泊生比。因為此種變形,在剖面內之各直線(平行於 z 軸),變為彎曲,使之仍垂直於剖面之兩邊,因其曲率半徑 $\rho' = \frac{y}{\epsilon_z}$,由此自(b)式得

$$\rho' = \frac{1}{\mu} \rho.$$

註 4. 如在第二章,張應力作正,壓應力作負。

軸 mn 之距離成正比。(59)式內之二未知數，即中立軸之位置與曲率半徑 ρ 。今可自下列條件決定之，即分布於任何剖面上之力，必生成一抗偶力，以抵抗外偶力 M (見 30 節)。

令 dA 表示距中立軸 y 處剖面之元面積(圖 131)。作用於此元面積之力，為應力(59式)與此面積 dA 之積，即，

$$dF = -\frac{E y}{\rho} dA.$$

因各種如是分布於剖面上之正力，表示與一偶力相當之力系之事實，此諸力之結果必為零，因此

$$\int -\frac{E y}{\rho} dA = -\frac{E}{\rho} \int y dA = 0.$$

因常數項 $\frac{E}{\rho}$ 不為零， $\int y dA = 0$ 。今 $\int y dA$ 表示剖面面積對於中立軸之力矩。以代數表之， $\int y dA = \bar{y}A$ ，式中 \bar{y} 為自中立軸至面積質心之距離。於是 $\bar{y}A = 0$ ，且因 A 不為零， $\bar{y} = 0$ 。故其中立軸經過剖面之質心。

上述元素上之力對於中立軸之力矩為(註 5)

$$dM = -y dF = -y \left(-\frac{E y}{\rho} dA \right).$$

總括此種在剖面上之力矩，且將其結果等於外力之力矩 M ，可得下列決定曲率半徑 ρ 之方程式：

註 5. 因在圖 131 中， y 為正， dF 為壓力(負)，又因 dF 對於 $n-n$ 之力矩為正，故在公式 $dM = -y dF$ 中，必加一負號。

$$M = \int \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{EI_Z}{\rho} \quad \text{或} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_Z}, \quad (60)$$

上式中 $I_Z = \int y^2 dA$

爲剖面對於中立軸 Z 之慣矩。由(60)式可知曲率 $\frac{1}{\rho}$ 與彎矩成正比，而與量 EI_Z 成反比，此 EI_Z 稱爲桿之彎曲剛性(flexural rigidity)。自(59)及(60)式消去 ρ ，得下列應力方程式：

$$s_x = - \frac{My}{I_Z}. \quad (61)$$

在(61)式中，當 M 生桿向下凸之撓曲，則作爲正，如圖 130 所示； y 向上爲正。

最大張及壓應力發生於最外之纖維上，此等最大應力可用(61)式求之，

$$(s_x)_{\text{最大}} = - \frac{Mc}{I_Z}, \quad (c)$$

式中 c 爲至所考究最外纖維距離之時數。當中立軸爲一對稱軸，則張纖維及壓纖維之 c 相同。

在此書許多工作中，設將 s_x 及 I_Z 之下端之 x 及 Z 除去，且將負號略去，則亦不致混淆。如是可將公式(c)變爲簡單，且使之與美國實際工程師所用者相符，即，

$$s = \frac{Mc}{I}. \quad (62)$$

式中意義， s 爲平行於梁縱軸之正應力， M 爲彎矩之時磅數， c 爲至

最外纖維距離之時數， I 為剖面對於中立軸之慣矩，以吋⁴之單位表之。設欲定一應力之為張力或壓力，則可用圖畫，察纖維受彎曲作用後伸長抑收縮，即可迅速決定之。

量 $\frac{I}{c}$ 稱為剖面係數 (section modulus)，恆以 S 或 Z 表之，其單位為吋³。(62)式可表示如次

$$s = \frac{\text{彎矩}}{\text{剖面係數}}. \quad (63)$$

在矩形剖面之例中(圖 1305)，得

$$I = \frac{bh^3}{12}; \quad \frac{I}{c} = \frac{bh^2}{6}.$$

在直徑為 d 之圓剖面例中，

$$I = \frac{\pi d^4}{64}; \quad \frac{I}{c} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

結構設計所用剖面之 I 及 $\frac{I}{c}$ ，均載於手冊中。

(61)式之來由，根據矩形剖面之例而得。此甚明顯，該結果亦可適用於有一對稱縱平面之任何剖面。設外彎偶力作用於此平面內，其內偶力必亦作用於此平面內。內力對於水平軸之力矩(如圖 131 所示者)，以外偶力平衡之。此諸力對於垂直軸之力矩，必定且實在互相消去，因此軸一邊諸力之力矩適為他邊相當力之力矩所平衡。

此諸結果，亦可適用至無此種對稱平面之例中，但彎偶力必作用於包含剖面二主軸之一之軸平面內。此等平面稱為彎曲主平面。

當無對稱平面，但彎偶力作用於經過一剖面主軸之軸平面之內

(圖 132 內之平面 XY), 由 (61) 式所得之應力分布, 可滿足各平衡條件. 此分布對水平軸生一偶力, 以平衡外偶力. 對垂直 y 軸, 此分布生一合力矩:

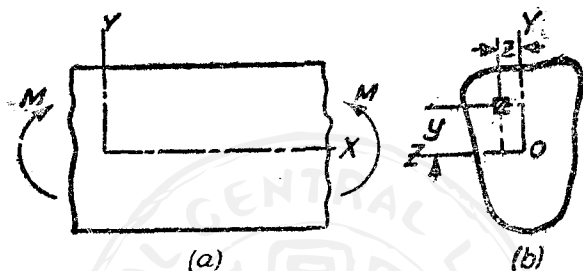


圖 132.

$$M_y = \int r \frac{E\sigma}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int yz dA.$$

此積分爲剖面之慣性積, 設 Y 及 Z 爲剖面之主軸, 則其值爲零. 故此偶力爲零, 又因所加偶力對於 y 軸之分偶力爲零, 故可滿足平衡條件.

此節公式, 根據梁僅受純彎曲而來. 然由更正確之分析, 知剖面上之正彎力分布, 不受側載荷所生切力之影響. 故在受側載荷作用下之常遇彎曲例中, 載荷既生正分應力, 又生切分應力, 上述正應力之公式亦可適用.

35. 梁剖面之各種形式.——由上節之討論, 可知受純彎曲之桿內之最大張或壓應力, 與最外纖維距剖面中立軸之距離成正比. 故設材料之張強度與壓強度相同, 應以選擇質心在梁深度中心之剖面形式, 較爲合理. 在此情形, 可得伸長纖維及壓縮纖維之同一安全因

數。故對結構鋼等在張力及壓力中約有同一屈點之材料，恆選擇對稱於中立軸之剖面。設剖面不對稱於上述之軸，如鐵軌剖面，則材料恆分布於頂及底上，使其質心近於高度之中心。

在材料有低張強度，而有高壓強度之例中，如鑄鐵或混凝土，則梁之剖面應不對稱於中立軸，但自中立軸至最外伸長纖維及至最外壓縮纖維之距離 c_1 及 c_2 之比，應與該材料張強度與壓強度之比相同。在此情形，可得相等之張強度及壓強度。例如，在 T 剖面中，此剖面之質心，用突緣及腹板之適當分配，可沿剖面之高度置於任何指定之位置上。

設彎矩一定，最大應力視剖面係數而定，有可注意者，在若干例中增加面積，不能減少此應力。例如，今有一方形剖面桿，以作用於經過剖面對角線之垂直平面內之偶力彎曲之，設削去頂及底之角，則可得較低之最大應力。

在設計受純彎曲之梁，不獨應滿足強度之條件，且又應滿足梁重之經濟條件。設二剖面有相同之剖面係數，即，以同一安全因數滿足強度之條件，則面積較小者較為經濟。

在比較剖面之各種形式，試先考究深為 h 而寬為 b 之矩形剖面。其剖面係數為

$$\frac{I}{c} = \frac{bh^3}{6} = \frac{1}{6} Ah, \quad (a)$$

式中 A 為剖面之面積。由此可知，設增加其深度 h ，則矩形剖面漸變經濟。然，增加有一極限，當剖面漸狹，則發生梁穩定問題，甚狹矩形剖面梁之破壞，可不因為材料強度之超過，而因為側皺縮。

在圓剖面之例中，

$$\frac{I}{c} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{1}{8} Ad. \quad (b)$$

將圓剖面與面積相同之方剖面相比，正方形之邊 h 將為 $h = \frac{d\sqrt{\pi}}{2}$ ，由 (a) 式得正方形之剖面係數為

$$\frac{I}{c} = .147Ad.$$

將此值與 (b) 相比，知正方形剖面較圓剖面稍為經濟。

由沿剖面深度之應力分布之考究 (圖 131)，可推得一結論，即在經濟設計中，大部分梁材料距中立軸之距離，應愈遠愈佳。此在工字梁中實行，即將大部分之材料，置於突緣中。同時，因其闊突緣之關係，一工字梁對側皺縮，恆較同深且同剖面係數之矩形剖面梁，尤為穩定。

梁之側撓度。(註 6)——在房屋之平常建築中，用地板系或在適當間隔處用繫桿，或用其他方法，固定梁之壓縮突緣，以防止側撓度，在此情形之下，可用完全算得之載荷。在另一方面，當無側縛撐，則必減少壓縮突緣內之許可應力，以免此突緣之皺縮。美國鋼鐵構造學會規定根據下列公式，以定壓應力如何隨跨度長與突緣寬比， $\frac{l}{b}$ ，之增加而減少：

$$s_c = \frac{20,000}{1 + \frac{\left(\frac{l}{b}\right)^2}{2,000}}$$

當 $\frac{l}{b} < 15$ ， s_c 用 18,000 磅/方吋， $\frac{l}{b}$ 之最大許可比 = 40。此種

註 6. 欲知此及其他與梁之結構設計有關之因數，見 Carnegie Pocket Companion, 1934 Edition, pp. 182-189, 或 A. I. S. C. handbook, Steel Construction.

公式在柱問題中討論之(75節)。

近年來市上有關突緣工字梁之新形式,如培司來(Jethlehem)梁,和梁,康奈其(Carnegie)梁等,此種梁剖面之優點,由康奈其公司總括如下:

1. CB 剖面內之金屬效率分布更高,此使一定重量及深度之梁強度更大。
2. CB 剖面之闊突緣,能使側剛硬性更大,故在無側支撐之長梁中,可用較高之單位應力。
3. 此系中包括標準工廠中所不能出產之柱,故可以圓剖面替代效率較低之組合剖面。

由此特點,可知其價值及經濟矣。

在設計及選擇梁剖面時,恆參考各鋼公司所出手冊, (註7)以求結構形式之性質,讀者在上工程課時,應學習應用若干種手冊,此非用以替代腦筋之思考,但用以幫助選擇結構形式,如梁,槽鐵,角鐵,柱剖面等,有許多手冊中,包括關於木梁及柱之有價值之報告及其許可應力。

若干結構形式,如工字梁及槽鐵,恆用標名深度之時數及每呎之重量,以規定之,例如 8"18.4 磅工字梁深 8 吋,每呎重 18.4 磅。在選擇此等剖面時,恆應選擇現有尺寸 (stock size),因大部鋼堆棧中能供給此等現貨之尺寸也,習題 185 說明如何選擇一梁,以負一定之載荷。

習 題

為簡便計,在解決習題時,如非說明與此相反,梁重可以略去。然,在實際工作時,

註 7. 如: Pocket Companion by the Carnegie Steel Co., Steel Construction by the American Institute of Steel Construction, 等,此書習題中所需形式之性質,載於附錄 B 之表中。

梁重應當算入。

178. 圖 133 示一橫單軸，設 $c=13.5$ 吋，軸直徑 d 為 10 吋，每軸頸彈簧所支持之載荷 P 為 23,000 磅。

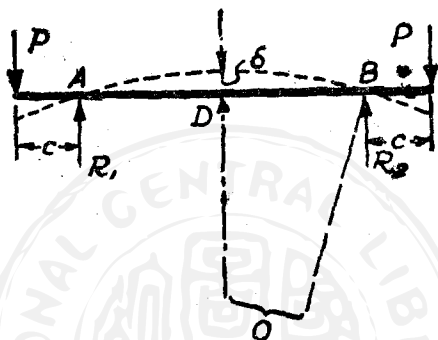


圖 133.

解。——作用於軸中間部分之彎矩為 $M=Pc=23,000 \times 13.5$ 磅吋。由(63)式，其最大應力

$$s_{\text{最大}} = \frac{M}{I} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32 \times 23,000 \times 13.5}{\pi \times 10^3} = 3,800 \text{ 磅/方吋。}$$

179. 承前題，設材料為鋼，二軸頸間之距離為 50 吋，求曲率半徑 ρ 及軸之撓度。

解。——將 $\nu = \frac{d}{2} = 5$ 吋， $s_{\text{最大}} = 3,800$ 磅/方吋代入(59)式，可求曲率半徑 ρ 。

於是

$$\rho = \frac{E}{s} \cdot \frac{d}{2} = \frac{30 \times 10^6 \times 5}{3,800} = 41,000 \text{ 吋。}$$

今計算 δ (圖 133)，撓度曲線為一圓弧 (半徑為 ρ)， \overline{DB} 為直角三角形 DOB 之一邊。此處 O 為曲率中心。故

$$\overline{DB}^2 = \rho^2 - (\rho - \delta)^2 = 2\rho\delta - \delta^2.$$

δ 與半徑 ρ 相比，為值甚小，上式之 δ^2 可以略去，於是

$$\delta = \frac{DB^2}{2\rho} = \frac{50^3}{8 \times 41,900} = 0.0104 \text{ 吋.}$$

180. 一標準 30 吋桁梁，如圖 184 支持之，懸臂上負等布載荷 10,000 磅/呎。設 $L = 9,150$ 吋⁴，求梁中間部分之最大應力及梁中心之撓度。

答. $\sigma_{\text{最大}} = 9,840$ 磅/方吋; $\delta = 0.137$ 吋.

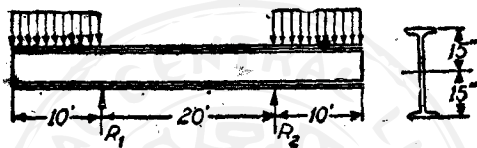


圖 184.

181. 承前題，假定梁用木製，其剖面為 12×12 吋之正方形，分布載荷之強度為 10,000 磅/呎，試解之。

182. 一鋼線直徑 $d = \frac{1}{32}$ 吋，捲於直徑 $D = 20$ 吋之滑輪上，求線內所生最大應力。

解。——由 §4 節(a)式，因彎曲所生之最大伸長為

$$e = \frac{\frac{d}{2}}{D} = \frac{1}{32 \times 20},$$

其相當張應力為

$$\sigma_{\text{最大}} = Ee = \frac{30 \times 10^6}{2 \times 20} = 45,000 \text{ 磅/方吋.}$$

183. 一鋼尺剖面為 $\frac{1}{32} \times \frac{1}{4}$ 吋，長 10 吋，兩端以偶力彎曲之，使成 60° 之圓弧。求最大應力及撓度。

答. $\sigma_{\text{最大}} = 49,100$ 磅/方吋; $\delta = 1.26$ 吋.

184. 承前題：設中心之最大撓度為 1 吋，求最大應力及加於兩端之偶力大小。

18. 一梁長 20 自由支持於兩端，負一等布載荷 8 磅呎(包括梁重)。選一適當之梁如下所建議者，以負此載荷。(a) 矩形剖面，材料道格拉斯樺，工作應力 $s_w = 1,200$ 磅/方吋，深 h 為寬 b 之 1.2 倍。(b) 美國標準工字梁之最淺者；最輕者。 $s_w = 18,000$ 磅/方吋。(c) 鋼梁，康奈其梁剖面。假定 s_w 為 (b) 所述者。

解。——其最大彎矩(見圖 107) 為 $\frac{w l^2}{8}$ 。

$$M_{\text{最大}} = \frac{48 \times 20^2}{8} = 24,000 \text{ 呎磅或 } 288,000 \text{ 吋磅。}$$

(a) 因 $s = \frac{M}{I} \frac{c}{c}$ ，式中 M 用吋磅，其剖面係數

$$\frac{I}{c} = \frac{288,000}{1,200} = 240 \text{ 吋}^3。$$

以矩形剖面之尺寸表之，

$$\frac{I}{c} = \frac{bh^3}{6} = \frac{b(1.2b)^3}{6} = 0.24b^3。$$

於是 $0.24b^3 = 240$ 及 $b = 10$ 吋， $h = 1.2b = 12$ 吋。

(b) 鋼之彎曲許可應力為 18,000 磅/方吋，故在此例中， $\frac{I}{c} = \frac{288,000}{18,000} = 16 \text{ 吋}^3$ 。

在結構鋼手冊中參考標準工字梁剖面之要素，知 8'' 23 磅工字梁， $\frac{I}{c} = 16.0$ ，為最淺之梁，其剖面係數等於或大於 16.0。同理，可求得 5'' 21.8 磅工字梁為梁重最輕，且其有所需剖面係數者。

(c) 其應力與 (b) 部同，故需相同之剖面係數 16.0 吋³。可用 8'' \times 5 $\frac{1}{4}$ 19 磅者

$\frac{I}{c} = 16.0 \text{ 吋}^3$ 之康奈其梁剖面。

186. 一 8 吋 \times 12 吋之矩形木梁，載荷情形如 106 題所示，問梁內生應力若干？

答。 $s_{\text{最大}} = 1,200$ 磅/方吋。

87. 14''87 磅康奈其梁剖面 (CB 145) 之跨長 16 呎, 自由支持, 問可負許可運均勻載荷若干? $s_w = 18,000$ 磅/方吋。

118. 選擇二最淺之康奈其梁, 以共同負擔 177 題中之動載荷, 且許可 25% 外加載荷, 以管衝擊效應, 二梁相並而置, $s_w = 18,000$ 磅/方吋。

189. 肱梁長 12 呎, 頂端負一集中載荷 2,000 磅。設用 $s_w = 1,300$ 磅/方吋之長葉松, 且深 h 等於 $1\frac{1}{2}$ 倍寬 b , 求 b 及 h 。 答. $b = 8.4$ 吋; $h = 12.6$ 吋。

190. 選擇二槽鐵, 將此相並而置, 以作 159 題中之肱梁, $l = 9$ 呎, $w = 2,400$ 磅/呎 $s_w = 18,000$ 磅/方吋。 答. 每梁之 $\frac{I}{c} = 10.8$ 吋³, 用二 10''15.3 磅槽鐵。

191. 一標準工字剖面肱梁, 負均勻載荷 300 磅/尺, 在頂端加集中載荷 500 磅, 設長為 5 呎, $s_w = 15,000$ 磅/方吋, 求剖面所需尺寸。

192. 圖 135 示一梁, 設 $l = 24$ 呎, $P = 2,000$ 磅, $w = 400$ 磅/呎, $s_w = 15,000$ 磅/方吋, 試作彎矩圖及切力圖, 及求所需之標準工字梁。

答. $\frac{I}{c} = 15.4$ 吋³, 用 8''28 磅工字梁。

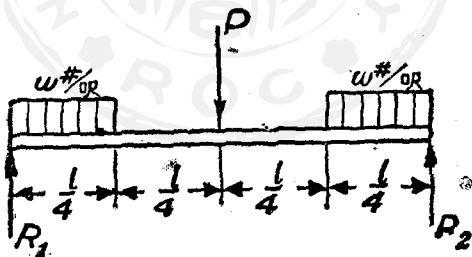


圖 135.

193. 設 $s_w = 15,000$ 磅/方吋, 試求一標準工字梁, 以支圖 135 所示之載荷。

194. 起重機之鋼軌 (圖 137), 以二標準工字梁支持之。設 $s_w = 15,000$ 磅/方吋, $l = 30$ 呎, $a = 12$ 呎, $d = 6$ 呎, 起重機之重 $W = 10,000$ 磅, 起重機所舉之載荷 $P = 2,000$ 磅, 求起重機最不利之位置, 其相當最大彎矩, 及工字梁之尺寸。載荷作用於二工字梁

間之中心平面內，且平均分配於二梁上。

答。每梁之 $\frac{I}{c} = 59.6$ 吋³

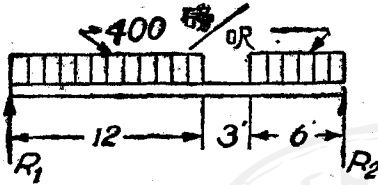


圖 126.

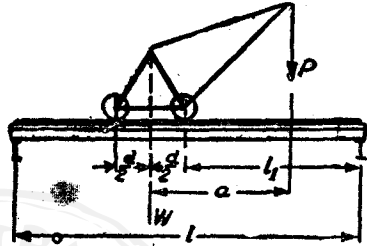


圖 137.

195. 一圓木梁支持於 C ，在 A 繫於基礎上(圖 128)，沿 BC 部分負一等布載荷 $w = 300$ 磅/呎。設 $s_w = 1,200$ 磅/方吋， $a = 3$ 呎， $b = 5$ 呎，試作彎矩圖，及求所需直徑。
答。 $d = 8.2$ 吋。

196. 假定作用於鑄釘上之載荷分布，如圖 139 所示，求鑄釘內之彎應力。鑄釘之直徑 $d = \frac{3}{4}$ 吋， $h = \frac{1}{4}$ 吋， $h_1 = \frac{3}{8}$ 吋， $P = 10,000$ 磅。

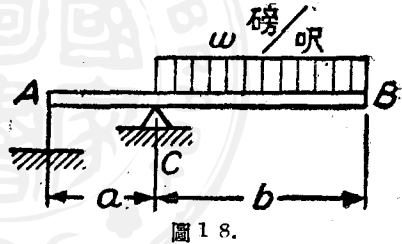


圖 128.

答。 $s_{\text{最大}} = 26,600$ 磅/方吋。

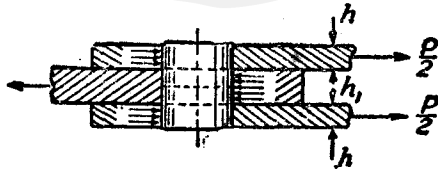


圖 139.

197. 木堤(圖 140)用矩形剖面之直立樁所築成，其尺寸 $h = 1$ 呎，支持於兩端。設樁長 $l = 18$ 呎，求 $s_{\text{最大}}$ 。
答。 $s_{\text{最大}} = 973$ 磅/方吋。

198. 木堤用水平板築成，其後背以固定於下端之柱支持之(圖 141)。設 $l = 6$ 呎，

$d=3$ 呎, $s_w=500$ 磅/方吋, 求方剖面柱之尺寸, 作彎矩及剪力圖。

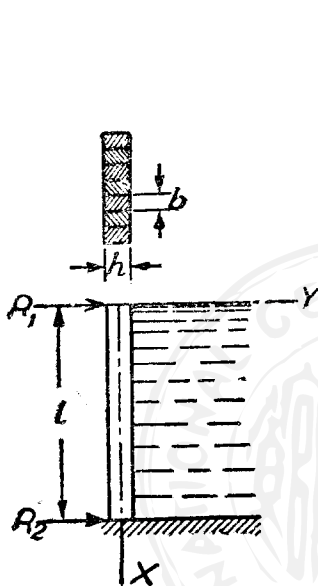


圖 140.

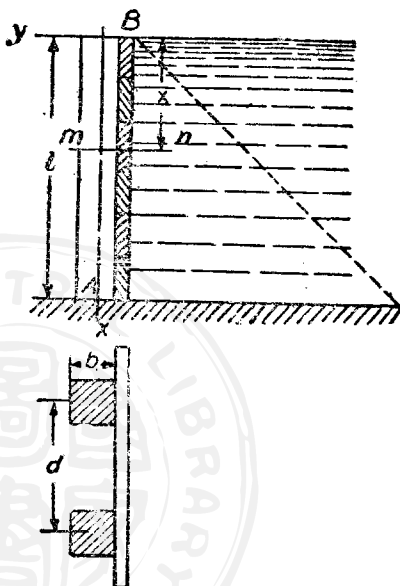


圖 141.

199. 設地板載荷為 50 磅/方呎, 地板小桁之跨度為 16 呎, $s_w=1,000$ 磅/方吋, 問各 $11' \times 8''$ 地板小桁中心應相隔距離若干? 答: 13.3 吋。

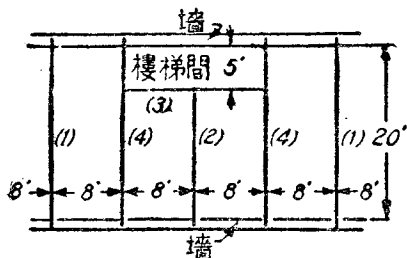


圖 142.

200. 圖 142 表示廠房建築之地板架平面, (1) 與 (4) 為鋼梁, 其兩端支持於相距 20 呎之牆上. (3) 為鋼梁, 位於二梁 (4) 之間. (2) 為一梁, 一端支於牆上, 他端支於橫梁 (3) 上. 梁上加 $2\frac{3}{4}$ 呎之板, 作為地板, 地板負 150 磅/方呎之載荷. 梁 (3) 僅負梁 (2) 之反動力, 但不

負直接地板載荷，設 $s_w = 18,000$ 磅/方呎，計算注數字之梁之剖面係數，及選擇適當之
 惠奈其梁剖面。假定地板每隔 8 呎即自由支持於梁上，求板內所生最大纖維應力。

261. 圖 143 示一地板架之平面，(16)及(17)為桁，負擔橫梁所生之集中載荷，(15)
 不負分布載荷，僅負(12)所生之反動力，設 $s_w = 16,000$ 磅/方呎，求所需之剖面係數，

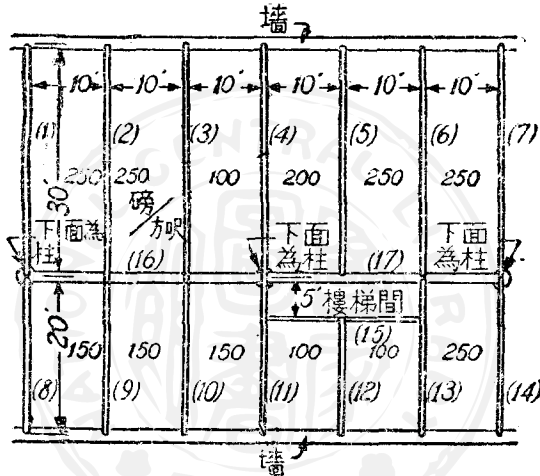


圖 143.

選擇適當鋼梁，以負此載荷。各室間之每方呎之載荷，示於圖中。

答. 數梁所需之剖面係數為：1—105.5, 2—211, 11—51.7, 12—21.1, 15—28.1, 17—162.5 吋³。

202. 自直徑 d 之大木中，鋸一矩形梁，設欲得對純彎曲強度最大之梁，問 $\frac{h}{b}$ 之比
 該若干？

答. $\frac{h}{b} = \sqrt{2}$.

203. 一鐵梁之剖面，如圖 144 所示，欲使其最大張應力為最大壓應力之三分之
 一，問突緣之寬 a 該若干？梁深 $h = 4$ 吋，腹板及突緣之厚 $t = 1$ 吋。假定受壓力之 E
 受張力之 E 。

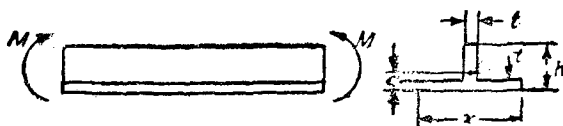


圖 144.

解。——欲滿足此條件 梁應有一定尺寸，使質心距底邊之距離，能滿足方程式 $c = \frac{1}{4}h$ 。於是 $x=9$ 吋。

204. 一槽鐵受端偶力 M 之作用，如圖 145 所示。設 $t=2$ 吋， $h=10$ 吋， $b=24$ 吋，求 σ_{\max} 與 σ_{\min} 之比。



圖 145.

205. 今有三梁 長度相同，受相同 M 及 σ_{\max} ，其剖面各爲圓，方及矩形 ($h=2b$)，求三梁重量之比。

答. 1.119 : 1 : .793.

206. 圖 146 示一梁，其 $I_{0-0}=97$ 吋⁴， $\bar{v}=3\frac{1}{2}$ 吋。設張力之 $s_w=6,000$ 磅/方吋，壓力之 $s_c=10,800$ 磅/方吋，求 W 之最大安全值。

答. $W=14,700$ 磅。

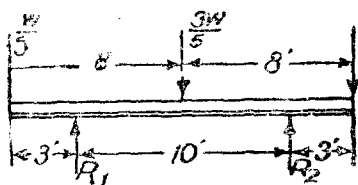


圖 146.

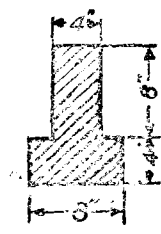


圖 147.

207. 長 20 呎之梁，負三相等集中載荷；載荷相距 5 呎，中間之載荷在 20 呎跨度之中心。梁剖面為一倒 T 形，如圖 147 所示。設該梁兩端自由支持，求其能負載荷之最大値。設將剖面倒置，問可多負載荷否？張力之 $s_w=1,200$ 磅/方吋 壓力之 $s_w=2,000$ 磅/方吋。

36. 彎曲中之切應力。——在 30 節之討論中，已知在梁受側載荷彎曲之例中，在梁之任何剖面（圖 99） mn 內，不獨生正應力 s_x ，且生切應力 s_s 。此諸切應力有一定大小，其和等於切力 V （圖 148）。在

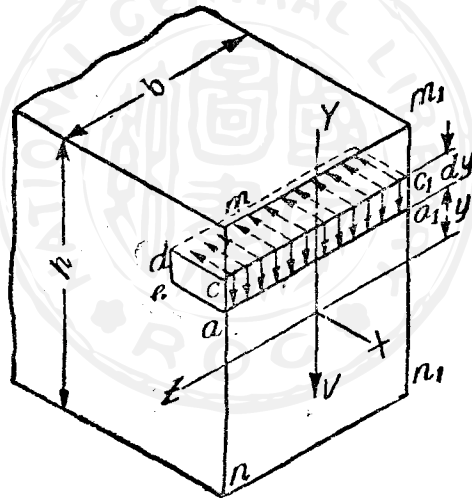


圖 148.

考究其在剖面面積上之分布定律，先討論矩形剖面之簡例。在此例中，最自然之法，為假定在剖面每點上之切應力 s_s ，平行於切力 V ，即，平行於剖面之邊 mn 。其第二假設，為將切應力之分布，視作等布於梁寬 c_1 之上。由此二假設，可完全決定切應力之分布。由此問題之

更精確考究，知如是所得之近似解法，已頗正確，而在狹矩形 (h 較 b 大，圖 148)，則簡直與正確解法相符合。

在 13 節中，已知作用於平面內一點之切應力，有一垂直於此平面而經過同一點之相等切應力伴之。故平行於中立平面之平面內及剖面之平面內，均有切應力之存在：其存在可以簡單之試驗說明之。取二相等矩形桿，置於一處，如圖 149 所示，兩端自由支持，以一集中

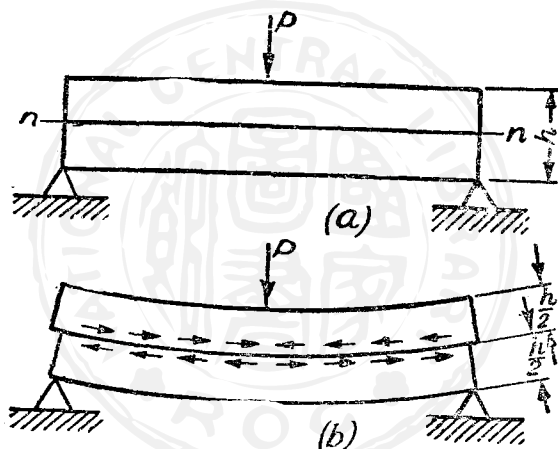


圖 149.

載荷 P 彎曲之。設二桿間無摩擦力，則每桿之彎曲，與他桿之彎曲無關；每桿上部縱纖維受壓縮，下部縱纖維受伸長，此情形如圖 149b 所示。上桿下部縱纖維對下桿之上部纖維生滑動。在深 h 之實心桿（圖 149a），沿中立面 mn 將有水平切應力，其大小適足阻止桿上部對於下部之滑動，如圖 149b 所示。因為此滑動之阻止，深 h 之單桿，較各深 $\frac{h}{2}$ 之二桿更為剛硬堅強。在實際上，在組成木梁中，有時用鍵 a, b, c ,

……，以阻止滑動(圖 150a)。由鍵四週之隙隙，可決定組成梁例中滑動之方向，因此可決定在實心梁例中中立面上切應力之方向。

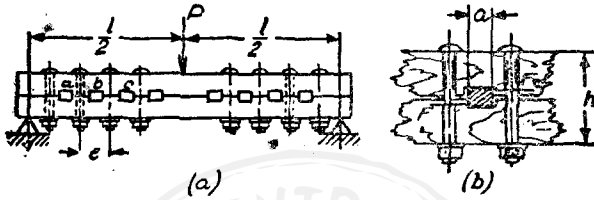


圖 150.

此水平(或縱)切應力,甚易自元素 mm_1pp_1 之平衡條件計算之,此元素為用兩相鄰剖面 mn 及 m_1n_1 ,與水平面 pp_1 自梁中所割出者(圖 151a 及 b)。在 x 軸方向作用於此元素之力,僅為邊 pp_1 上之切應力 s_x ,及邊 mp 及 m_1p_1 上之正應力。設剖面 mn 及 m_1n_1 上之彎矩相等,即,在純彎曲之例,則在邊 mp 及 m_1p_1 上之正應力 s_x 將相等,且二者互相平衡。於是切應力 s_x 必等於零。

今考究變動彎矩之更總括之情形,以 M 及 $M+dM$, 各表示剖

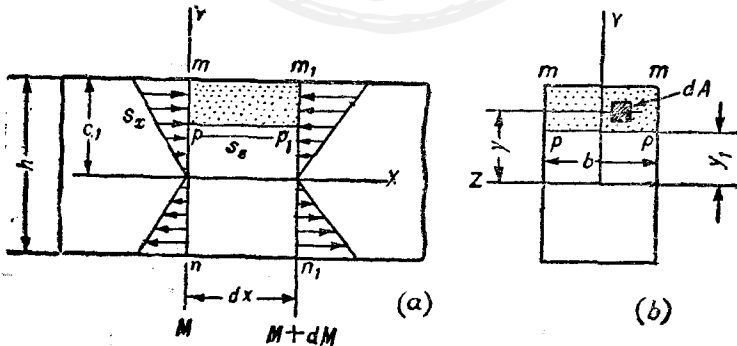


圖 151.

面 m_n 及 $m_1 n_1$ 內之力矩。於是作用於邊 m_p 之元面積 dA 上之正力，將為(61式)

$$s_x dA = \frac{My}{I} dA.$$

分布於元素之邊 m_p 上諸力之和，將為

$$\int_{v_1}^{c_1} \frac{My}{I} dA. \quad (a)$$

同理，作用於邊 m_p 上之正力之和為

$$\int_{v_1}^{c_1} \frac{(M + dM)y}{I} dA. \quad (b)$$

作用於元素之底邊 p_p 上之切應力 s_s 所生之力為

$$s_s b dx. \quad (c)$$

(a), (b)及(c)所示之力，必成平衡：

$$s_s b dx = \int_{v_1}^{c_1} \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int_{v_1}^{c_1} \frac{My}{I} dA,$$

由此

$$s_s = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{Ib} \int_{v_1}^{c_1} y dA,$$

或，用(55)式，

$$s_s = \frac{V}{Ib} \int_{v_1}^{c_1} y dA. \quad (64)$$

此式內之積分意義，甚為簡單。此表示剖面陰影部分(圖 151b)，即所求切應力作用層以上(或以下)之剖面部分，對於中立軸 Z 之力矩。

此力矩以 Q 表之，其值恆為正。(64)式變為

$$s_s = \frac{V}{Ib} Q. \quad (64a)$$

因 13 節關係，用(64)及(64a)式可得一點上之縱及水平切應力。在矩形剖面，圖 152a，

$$dA = bdy,$$

其積分變為

$$\int_{y_1}^{h/2} by \, dy = \left[\frac{by^2}{2} \right]_{y_1}^{h/2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (d)$$

設陰影部分之面積 $t \left[\left(\frac{h}{2} \right) - y_1 \right]$ ，乘以其質心距中立軸之距離 $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right) + y_1 \right]$ ，可得此相同結果。

將(d)代入(64)式，得矩形剖面之切應力

$$s_s = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right). \quad (65)$$

由此式可知由梁頂至底之切應力 s_s 不均勻分布，當 $y_1 = 0$ 處，即在中立軸之諸點上，發生 s_s 之最大值；由(65)式及 $I = \frac{bh^3}{12}$ ，得此最大值為

$$(s_s)_{\text{最大}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{bh}. \quad (66)$$

故矩形剖面例中之最大切應力，較其平均切應力（以剖面積除剪力，即得）大 50%。

在剖面之頂及底， $y_1 = \pm \frac{h}{2}$ ，由(65)式得 $s_s = 0$ 。（65)式之圖形

(圖 152b) 表示切應力沿梁深度之分布，依照拋物線定律。此拋物線所圍陰影面積，乘梁寬 b ，得 $\frac{2}{3}(s_s)_{\text{最大}}hb = V$ ，此結果乃應得者。(註 8)

此等切應力之自然結果為切應變，此應變使原為平正之剖面變為翹曲，今在矩形橡皮塊之一端加一力彎曲之(圖 153)，而在其邊上繪垂直線，則甚易說明此翹曲。虛線所示之線，不復為直線，但已變

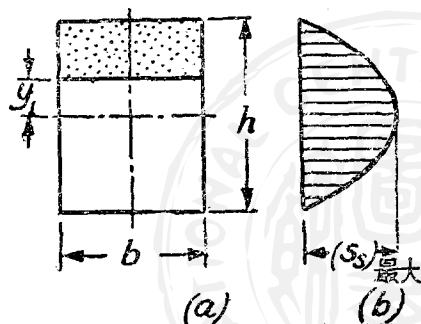


圖 152.

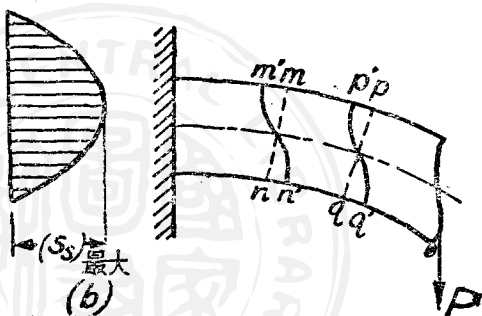


圖 153.

為曲線，故最大切應變發生於中立面上。在點 m' 、 p' 、 n' 、 q' 上，切應變為零，故曲線 $m'n'$ 及 $p'q'$ 在彎曲後，垂直於桿之上面及下面。在中立面上，曲線 $m'n'$ 及 $p'q'$ 之切線與正剖面 mn 及 pq 間之角度，等於 $\gamma = (s_s)_{\text{最大}}/G$ 。設沿梁之切力一定，則各剖面之翹曲相同，故 $mm' = pp'$ ， $nn' = qq'$ ，且彎矩在縱纖維內所生伸長或收縮，不受影響。此事實可說明此處 (G1) 式之適用(此式原為純彎曲所求，且根據桿剖面在彎曲時仍為平面之假設者)。

由此問題更精確之考究，知設分布載荷作用於梁上，且切力沿梁

註 8. 見關於圖示之討論，37 節。

連續變動，此剖面之翹曲，不致十分影響縱纖維內之應變。在集中載荷之例中，載荷附近之應力分布，頗為複雜，但此對直線定律之偏差僅屬局部者。

習 題

關於切應力之外加習題，載於本章之末。

203. 圖 154 示一木矩形梁，設 $b=8$ 吋， $h=10$ 吋， $s_w=300$ 磅/方吋， $(s_s)_w=200$ 磅/方吋， $a=1.5$ 呎，求載荷 P 之極限值。

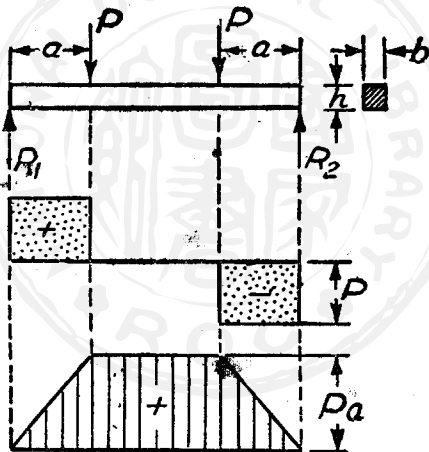


圖 154.

解。——圖 154 中示彎矩及剪力圖。

$$V_{\text{最大}} = -P; \quad M_{\text{最大}} = -Pa.$$

由(63)及(66)式，

$$\frac{Pa}{I} = s_w \quad \text{及} \quad \frac{3}{2} \frac{P}{bh} = (s_s)_w$$

母

$P=5,930$ 磅 及 $P=10,700$ 磅

故 $P=5,930$ 磅為載荷 P 之極限值。

219. 圖 15 示一梁，求其最大正應力 s 及中立面內之最大切應力 s_s 。

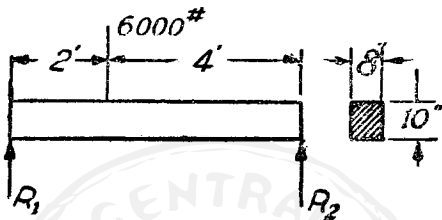


圖 15.

210. 一矩形梁負均勻載荷 (圖 105), 設 $l=5$ 呎, 每呎之載荷 $w=1,000$ 磅, 剖面深 $h=10$ 吋, 寬 $b=8$ 吋, 求中立面內之最大切應力。 答: 56.8 磅/方吋。

37. 工字梁內之切應力分布。——在考究工字梁 (圖 156) 腹板剖面內之切應力分布時, 可作與矩形剖面相同之假設; 即, 切應力平行於切力 V , 且等布於腹板之厚 b_1 上。參考 (64a) 式之由來, 知此式既可適用於矩形剖面, 又可用於此例, 至少可求腹板內之應力。故工字梁或 T 形梁腹板內任一點上之切應力大小, 為

$$s_s = \frac{V}{I b_1} \cdot Q, \quad (64b)$$

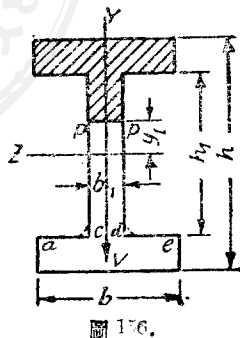


圖 156.

式中 V 為作用於剖面上之垂直切力, I = 全剖面之慣矩, b = 切應力所作用層, 如 pp 之寬, Q = 該層以上陰影面積, 對於中立軸之靜力矩。

應力 s_x 之公式，可如下求之。線 pp 上諸點距中立軸之距離為 y_1 (此處剖面之寬為 b_1)，其陰影部分對於中立軸 z 之力矩為

$$Q = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right).$$

代入(64b)式，得
$$s_x = \frac{V}{b_1 I_z} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \right].$$

故沿腹板深度之切應力，依照拋物線定律而變動。

單獨以腹板面積除完全切力 V ，可得工字梁例中 (s_x) 最大甚佳之近似值，此根據下列事實而來，即分布於腹板剖面上之切應力，生一幾等於 V 之力，此即腹板近乎擔負完全切力，而突緣在傳遞中僅有次要部分。

在考究切應力在突緣剖面上之分布，不復可假定沿剖面寬度上無變化，例如，沿突緣之邊界 ac 及 de 處之水平面 ae (圖 156)，其切應力 s_x 必為零，因在突緣內面上之相當之等值應力 s_x 為零 (見 13 節)。然在 cd 部分，其切應力不為零，但其值與以上腹板內所計得最小切應力之大小相同。此表示在腹板及突緣之相連處 cd ，其切應力之分布，依照較初步分析更複雜之定律。欲消除點 c 及 d 處之應力集中，恆以內圓角替代尖角，如圖中虛線所示者。故在突緣之例中，(64)或(64b)式所示之 s_x 值，表示在層上之平均切應力。然，在實際計算時，將切應力視作等布於剖面寬度上之每一點，已甚滿意，——僅在突緣內應力不如是分布，但因為值頗小，此應力不重要。

有時切應力分布之圖示，甚為有用，尤在畫出及計算腹板所負總垂直切力之百分數。圖 1.7b 表示圖 1.7a 剖面之切應力分布。剖面內每點之應力縱座標 (畫於水平方向)，用(64b)式計算之。今其在剖面上之總垂直切力，用下式求之

$$V = \int_{-h_2}^{+h_1} s_s b \, dy,$$

式中 b 為剖面之變動寬度。設以 $s_s b$ 作為縱座標， y 為橫座標，而作一圖，如圖 157c，於是 157c 曲線下之面積表示總剪力 V 。

同理，圖 (圖 157c) 任何部分下之面積，表示剖面相當部分所負之剪力，於是面積 m, p, q, r, n 與全圖面積之比，表示腹板所負垂直剪力之部分。

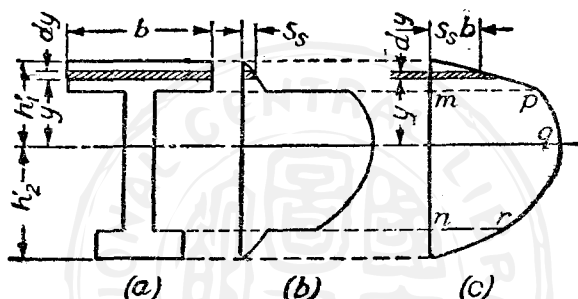


圖 157.

以前所考究梁剖面內之最大切應力，發生於中立軸上。此不盡然，例如，在三角形或菱形剖面，或如 214 題之剖面中。

在考究圓形(註 9)或三角形剖面上之分佈時，倘假定切應力平行於剪力 V ，似無根據。例如，可以證明在沿邊界剖面上之諸點，其切應力正切於邊界。邊界以內諸點上之切應力，亦可傾斜於 V 。沿剖面水平線上諸點之切應力之垂直分力，可假定相等，而不致十分差誤。因此假設完全與矩形剖面所作之假設相符合，(64)式可用以計算此分應力。

習 題

211. 在圖 153 所示之工字梁腹板剖面中，設 $b=5$ 吋， $b_1=\frac{1}{2}$ 吋， $h=12$ 吋， h_1

註 9. 見 Timoshenko's "Strength of Materials," Vol. 1, Art. 29.

$-10\frac{1}{2}$ 吋, $V=30,000$ 磅, 求腹板內切應力之最大及最小值, 求腹板所傳之剪力 V_1 .

答. (s_s)_{最大} = 5,870 磅/方吋,

(s_s)_{最小} = 1,43 磅/方吋,

$$V_1 = .945V.$$

212. 設 $V=1,600$ 磅, 求 T 形梁(圖 158)腹板內之最大切應力.

213. 今有一梁, 其剖面為三角形, 深 h , 底 b , 有一對稱之垂直軸, 試求最大切應力之垂直分力及其位置之公式, 其最大垂直剪力為 V .

答. 最大垂直分應力為 $\frac{5V}{bh}$, 位於高之中點上.

214. 一梁長 18 呎, 自由支持於距各端 4 呎處, 其剖面如圖 159 所示, 此梁負每呎 1,000 磅之等布載荷, 求最大切應力之強度, 如圖 157b, 繪切應力分布圖.

答. 227 磅/方吋.

215. 一梁(圖 160)之許可彎應力為 1,215 磅/方吋, 許可切應力為 165 磅/方吋, 求此梁能負之安全載荷 W . 中立軸在底之上 6 吋, $I=178$ 吋⁴.

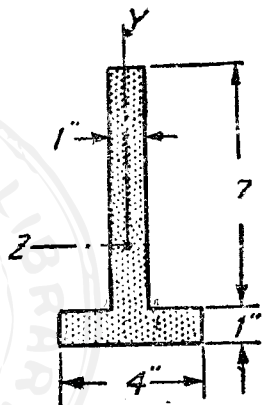


圖 158.

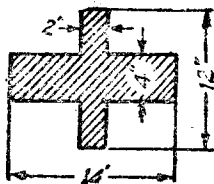


圖 159.

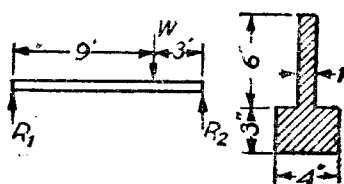


圖 160.

33. 彎曲中之主應力。——設已知一剖面上之彎矩 M 及剪力

V , 則剖面上任何點之正應力 s_x 及切應力 s_{xy} , (註¹⁾ 甚易用 (61) 及 (64a) 求之, s_x 之最大數值, 在距中立軸最遠之纖維內, 而 s_{xy} 之最大值恆在中立軸上。在大部分例中, 僅將如是所得 s_x 及 s_{xy} 之最大值用於設計中, 而定梁剖面之尺寸, 以滿足條件

$$(s_x)_{\text{最大}} \equiv s_w \quad \text{及} \quad (s_{xy})_{\text{最大}} \equiv (s_s)_w.$$

在此假定材料對張力及壓力之強度相同, 二者之 s_w 亦同。設不然, 則張力強度及壓力強度, 必分別滿足之, 得

$$(s_x)_{\text{最大}} \equiv s_w \text{ (受張力)}; \quad (s_x)_{\text{最小}} \equiv s_w \text{ (受壓力)}.$$

然有若干例, 有需更詳之應力條件之分析者。今舉簡單支持而中心負載荷之梁為例 (圖 161a), 以說明分析所用之方法。一點 A 在中立軸下而位於剖面 mn 內, 其應力 s_x 及 s_{xy} 之大小, 用 (61) 式 $s_x = -\frac{My}{I}$, 及 (64a) 式 $s_{xy} = \frac{VQ}{Ib}$ 求之。

在點 A 自梁割出一極微之元素, 作用於元素上之諸應力, 示於圖 161b, 應力之方向甚易自 M 及 V 之方向定之。在如此微元素, 元素上各點應力 s_x 及 s_{xy} 之變化, 可以略去, 故可假定該元素在均勻應力之狀態中, 即, 元素上之量 s_x 及 s_{xy} , 均可作為相同。如此應力之狀態, 在圖 47 中以有限尺寸之元素說明之。

由以前討論 (見 14 節), 知由受應力物體中割出元素各邊上之應力, 隨諸邊之方向而異, 且可定元素之方向, 僅使存在正應力 (見 15 節)。於是此邊之方向, 稱為主方向, 而其相當應力為主應力。以 $s_y = 0$ 代入 (25) 式, 得諸應力之大小

註 1. s_{xy} 與 s_{yx} 同 見 10, 17 節, 又見 15 節之註 7.

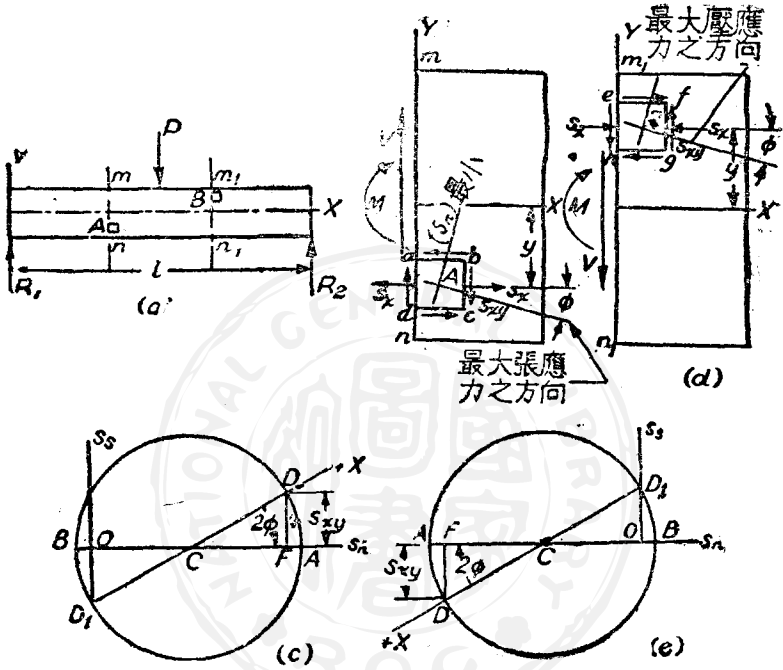


圖 151.

$$(s_n)_{\text{最大}} = \frac{s_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s_x}{2}\right)^2 + s_{xy}^2} \quad (67)$$

應注意者，即 (s_n) 最大恆為張力， (s_n) 最小恆為壓力。任何一點之最大切應力，可自(26)式得之：

$$(s_s)_{\text{最大}} = \sqrt{\left(\frac{s_x}{2}\right)^2 + s_{xy}^2} \quad (68)$$

上述最大應力，可用馬氏圓求之。A 點(圖 161b)元素 $abcd$ 之馬氏圓，示於圖 161c 中。在此作圖中，以 \overline{OA} 示 $(s_n)_{\text{最大}}$ ，以 \overline{OB} 示 $(s_n)_{\text{最小}}$ 。

與 (s_n) 最大相當之角度 2ϕ ，亦自此圓求之，而 (s_n) 最大之方向，自 x 軸(圖161b)在順時針方向量 ϕ 而求之， (s_n) 最小當然垂直於 (s_n) 最大。

在載荷 P (圖161a)右邊取一剖面 m, n_1 ，而考究中立軸以上之 B 點，作用於 B 處元素 $efgh$ 上應力之方向，示於圖161d。其相當馬氏圓，示於圖161e。

設在中立軸面上取一點，於是 s_x 等於零。在此點之元素，在純切之狀態中，主應力之方向，與 x 及 y 軸成 45° 。

今可作二正交曲線系，其每點上之切線，在此點上主應力之方向內，此種曲線，稱為應力之常角截軌道(trajectories of the stresses)。圖162示受端載荷之矩形肋梁之應力常角截軌道，諸曲線均以 45°

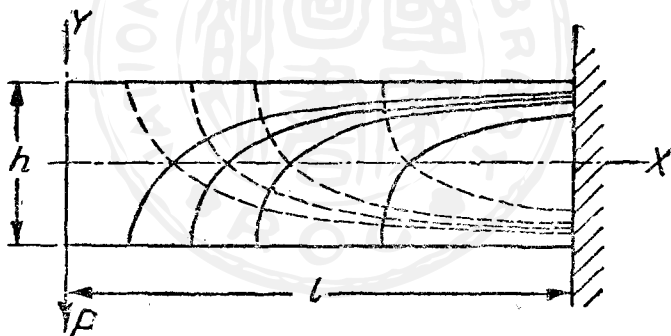


圖 162.

與中立面相交，而在切應力 s_{xy} 為零之諸點上，即，在梁之頂面及底面諸點上，曲線有水平或垂直切線。表示 (s_n) 最大張力方向之常角截軌道，以實線表之，而其他常角截軌道系，以虛線表之。圖163表示受均勻載荷之簡支持矩形梁上數剖面之常角截軌道，及 s_x 及 s_{xy} 之應力分布圖。此甚明顯在跨度中心(該處彎矩 M 為最大)之 s_x 值最

大,而在支座上(該處切力最大) s_{xy} 為最大. 在設計梁時,所需要者為 s_n 之最大數值. 由(67)式,可知在受張力之最外纖維中(該處切力為零),其縱正應力 s_x 變為主應力. 在近於中立軸之纖維中,其縱纖維應力 s_x 小於最外纖維中者;然此又有切應力 s_{xy} , 此應力 s_x 及 s_{xy} 在此點上共同作用,可生一主應力(如 67 式所示者),此主應力之數值,或可大於最外纖維上之應力. 然在矩形或圓剖面之梁中,其切

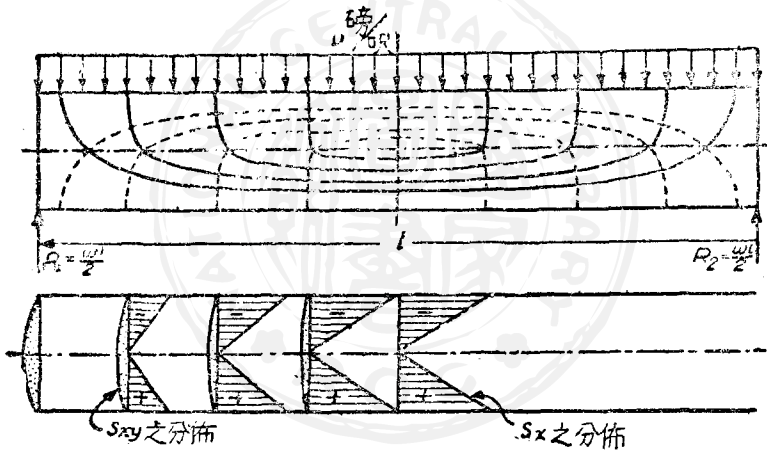


圖 163.

應力 s_{xy} 繼續沿梁深度變化,故不致發生上述情形,即,在彎矩最大剖面最外纖維上,所算得之應力 (s_n) 最大,即為作用於梁內之最大應力. 然在工字梁之例中,在突緣及腹板相連處,切應力之大小有突然之改變(見 37 節),由(67)式所算之最大應力,或可大於最外纖維中之張應力 (s_x) 最大,故此應在設計中計算之. 今舉圖 161a 所示之例,以說明之,此梁為工字剖面,其尺寸如 211 題所示,長 $l=2$ 呎, $P=$

60,000 磅。於是 $M_{\text{最大}} = 30,000$ 呎磅, $V_{\text{最大}} = 30,000$ 磅。由(62)式, 最外纖維內之張應力為

$$(\sigma_x)_{\text{最大}} = \frac{30,000 \times 12 \times 6}{286} = 7,550 \text{ 磅/方吋。}$$

今在突緣及腹板相連處之一點, 得下列正及切應力值:

$$\sigma_x = \frac{7,550 \times 10 \frac{1}{2}}{12} = 6,610 \text{ 磅/方吋;}$$

$$\sigma_{xy} = 4,430 \text{ 磅/方吋。}$$

於是, 由(67)式, 其主應力為

$$(\sigma_n)_{\text{最大}} = 8,830 \text{ 磅/方吋。}$$

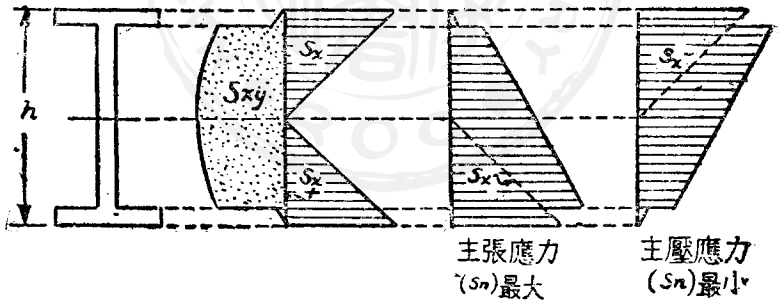


圖 164。

由此可知, 在突緣及腹板相連處之 $(\sigma_n)_{\text{最大}}$, 大於最外纖維上之張應力, 故在設計中應計入。沿梁深度 $\sigma_x, \sigma_{xy}, (\sigma_n)_{\text{最大}}$ 及 $(\sigma_n)_{\text{最小}}$ 之變化, 示於圖 164 中。

習 題

216. 在圖 162 之肋梁中，設深 $h=8$ 吋，寬 $b=4$ 吋， $P=2,000$ 磅，一點在中立軸下 2 吋，其剖面距載荷端 3 呎，求此一點上之 (s_n) 最大及 (s_n) 最小，求此點上 (s_n) 最大與 x 軸間之角度。

解。—— $s_x = -844$ 磅/方吋； $s_{xy} = 70.8$ 磅/方吋； (s_n) 最大 $= 5.7$ 磅/方吋； (s_n) 最小 $= -849.7$ 磅/方吋， (s_n) 最大與 x 軸間之角度為 $87^\circ 15'$ (順時針方向)。

217. 一直均布載荷矩形梁，支於兩端(圖 163)，求距左支座 1 呎剖面處中立軸上之 (s_n) 最大及 (s_n) 最小，其剖面尺寸與上題同； $w=1,000$ 磅/呎； $l=10$ 呎。

218. 在圖 164 所示工字梁，設突緣與腹板相連處之 (s_x) 最大，等於 (s_n) 最大，求此梁之長。
答。 $l=39.8$ 吋。

219. 一梁長 5 呎，自由支持於兩端，其矩形剖面寬 6 吋，深 12 吋，在中心負集中載荷 11,520 磅。求下列剖面內諸點上主應力及最大合成切應力之大小及方向。剖面 $a-a$ 適在 R_1 之右，距 R_1 之距離為零。剖面 $b-b$ 在 R_1 之右 $1\frac{1}{4}$ 呎，剖面 $c-c$ 適在載荷 11,520 磅之左，距此載荷之距離為零。在以上三剖面之中，自底面起取相距兩吋之七點。所有計算，可排列成表。又繪 $a-a$ 與 $c-c$ 間深部分之三大圖，且各以矢頭略依比例尺表示下列合成應力之方向及大小，圖 1. 主張應力，圖 2. 主壓應力，圖 3. 最大切應力。

在近載荷及反動力作用點處，應力分布恆較以上所得者更為複雜。

39. 組成梁內之應力。——在實際工程中，恆用組成梁，梁內之應力，恆根據梁各部剛接之假設計算之。於是其計算包括 (a) 梁之設計，如設計整塊梁然；(b) 元素或連接(此連接梁之各部分者)之設計及間隔。在第一項中，可用整梁之公式，而用減小剖面以許讓鏤釘孔，螺釘，槽等之效應。連接各元素所需之計算，說明如下。

組成木梁內之應力。

先考究圖 165a 之組成木梁。假定梁二部間所用之鍵，十分堅強，足以抵抗剪力 F (圖 165b)，於是可用(62)式計算纖維應力 (s_x) 最大。欲計鍵槽及螺釘孔對剖面之減弱效應，僅剖面之陰影部分(圖 165c)應計入。於是

$$I = \frac{(b-d)}{12} [(h)^3 - (2f)^3].$$

在計算作用於每鍵上之剪力 F 時，假定此力等於分布於整梁中立面面積 eb 上之剪力，此 b 為梁寬度， e 為鍵中點間之距離(見圖

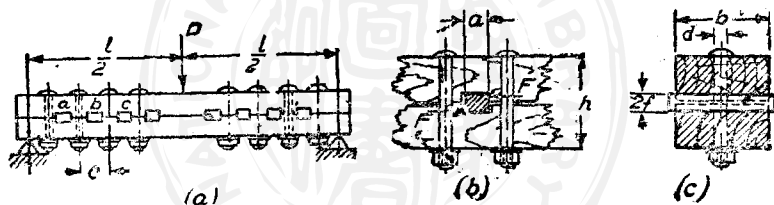


圖 165.

165a)。於是用(66)式，且在此例中視梁深等於 h ，得

$$F = eb \cdot \frac{3}{2} \frac{V}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Ve}{h}.$$

鍵之大小，及鍵間之距離 e ，應選擇適當，使能有充分強度，以抵抗鍵之切去，及抵抗木在鍵及鍵槽側邊之壓破。在如此計算中，恆作粗假定，即切應力等布於鍵之中間剖面 $a \times b$ 上，而在鍵側邊上之壓力等布於面積 $f \times b$ 上。於是以前 $(s_s)_w$ 表示鍵之工作切應力，以前 $(s_c)_w$ 表示鍵木或鍵槽之側壓之工作應力，於是可得下列設計鍵之方程式：

$$\frac{F}{ab} \leq (s_s)_w; \quad \frac{F}{bf} \leq (s_c)_w.$$

又木梁沿二鍵間之纖維，應有充分強度，以抵抗切去。此切力又等於 F ，抗面積為 $b \times (e-a)$ 。以 $(s_s')_w$ 表示梁材料沿纖維之工作切應力，其強度條件變為

$$\frac{F}{b(e-a)} \leq (s_s')_w.$$

在鍵以外，尚有螺釘（圖 165a），以連接梁之各部；設旋緊螺釘，則在梁各部間生摩擦力，在計算中此摩擦力恆略去，因木經年收縮，其總切力將由鍵負擔也。由試驗知此種組成梁，遠較同尺寸之整梁軟弱。（註 11）

組成工字梁內之應力

在計算組成工字梁內纖維應力 s_x 時，恆假定鉚釘孔均在梁之一剖面內（圖 166b），（註 12）而在計算 I 時（用 62 式），減去直徑之剖面，如是以計算鉚釘孔之減弱效應。

當全腹板為鉚釘孔減弱時（如圖 166b 所示），有時可用下法計算其切應力。由圖可知腹板之剖面，因孔之關係，以 $\frac{(e'-d)^2}{e'}$ 之比減少，此 e' 為孔中心間之距離， d 為孔之直徑。於是平均切應力 s_s 以 $\frac{e'}{(e'-d)}$ 之比增加，故此比包括於 (64b) 式之右邊，作為計算組成工字梁腹板內 s_s 之因數。於此種情形應用 (64b) 式，當算 I 時，不必減

註 11. 由 E. Kidwell 教授在 College of Mines, Michigan 所作試驗，知組成木梁之強度，約為同尺寸整梁強度之百分之 75。

註 12. 直立腹板內之孔，存在於直立助力板釘於指上之剖面上。

少鑄釘孔。應注意者，此種計算鑄釘孔之減弱效應，僅為近似法。近孔處之實在應力分布，甚屬複雜。在孔邊之應力集中之討論，在 10 節中已述過數種。

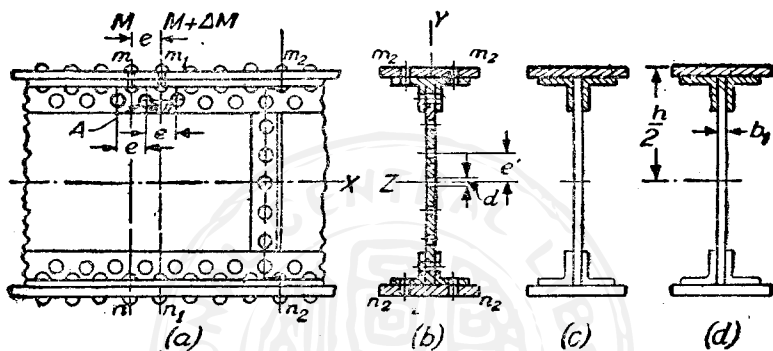


圖 166.

在計算作用於一鑄釘(如鑄釘 A ，圖 166a)上之切力，試考究二剖面 mn 及 m_1n_1 。因此二剖面內彎矩之差，在剖面 mn 及 m_1n_1 上之正應力 s_x 將不同，於是梁突緣(如圖 166c 以陰影所示者)有沿腹板滑動之傾向。此滑動以摩擦力及鑄釘 A 阻止之。略去摩擦力，作用於鑄釘上之力，等於作用於突緣剖面 mn 及 m_1n_1 上之力之差。在剖面 mn 內突緣內之力為(見 a 式，36 節)

$$\frac{M}{I} \int y dA,$$

上式積分應及於突緣之陰影剖面面積上。同理，於剖面 m_1n_1 得

$$\frac{(M + \Delta M)}{I} \int y dA.$$

於是鑄釘 A 自突緣傳至腹板之力，將爲

$$F = \frac{\Delta M}{I} \int y dA. \quad (a)$$

用(55)式， $\frac{dM}{dx} = V$ ，且將鑄釘間之距離 e 替代 dx 得

$$\Delta M = Ve,$$

式中 V 爲在鑄釘 A 處梁剖面內之切力。代入(a)式得

$$F = \frac{Ve}{I} \int y dA = \frac{Ve}{I} \cdot Q. \quad (69)$$

此式內之積分，或 Q ，爲突緣陰影剖面(圖 166c)對於中立軸 Z 之力矩， I 爲梁全剖面未減去鑄釘孔之慣矩。

由此甚明顯，欲得突緣沿腹板之滑動，鑄釘之二剖面必切去。假定此力等布於二剖面上，鑄釘內之切應力，甚易計算。

力 F 有時沿平面 ab (見圖 166a) 在梁腹板內發生頗大之切應力 ϵ_s ，故此必計入。假定此應力等布，以面積 $b_1(e-d)$ 除 F ，得

$$\epsilon_s' = \frac{V}{b_1 I} \cdot \frac{e}{e-d} \cdot Q. \quad (b)$$

在此自突緣傳至腹板之力 F 所生應力外，因腹板之彎曲，沿同一平面 ab ，有切應力 ϵ_s'' 之作用。此等應力之大小，可用以上(b)式求之，而將在平面 ab 以上之腹板矩形剖面之部分，對於中立軸 Z 之靜力矩，作爲 Q 。用此法得沿平面 ab 腹板內之切應力 ϵ_s 之方程式：

$$\epsilon_s = \epsilon_s' + \epsilon_s'' = \frac{V}{b_1 I} \cdot \frac{e}{e-d} \cdot Q, \quad (70)$$

式中 Q 今為圖 166d 所示剖面陰影部分對於中立軸之靜力矩。已知 e_x 及 e_y 後，沿 ab 諸點之主應力之大小及方向，均可計算矣（見 38 節）。

由以上討論，可知在計算組成工字梁中應力時，已作數假定，使計算簡單化。此多少減少算得應力之正確性，故此事實任選擇組成工字梁之工作應力時，應該考究。（註 13）

習 題

220. 一組成木梁（圖 165a）由二矩形剖面樑組成，此二樑以鑰連接之。設載荷 $P=5,000$ 磅， $b=5$ 吋， $h=16$ 吋， $a=3$ 吋， $2f=2\frac{1}{2}$ 吋，及 $e=11$ 吋，求作用於鑰上之切力，鑰內之切應力，及鑰側邊每單位面積上之壓力。

答： $F=2,560$ 磅； $s_s=172$ 磅/方吋； $p=413$ 磅/方吋。

221. 今有一桁，其腹板厚 $\frac{1}{2}$ 吋，高 50 吋，其突緣由二對 6 吋 \times 6 吋 \times $\frac{1}{2}$ 吋之角鐵組成，無蓋板；求中立軸上之切應力。在剖面上之總切力為 150,000 磅。假連接突緣至腹板之鋼釘直徑為 1 吋，釘距 $e=4$ 吋（圖 16c），求鋼釘內之切應力。

解。——由已知尺寸，

$$I = \frac{1}{2} \times \frac{50^3}{12} + 4(19.9 + 5.75 \times 23.32) = 17,830 \text{ 吋}^4.$$

一半剖面對於中立軸之力矩為

$$Q = \frac{1}{2} \times 25 \times \frac{25}{2} + 2 \times 5.75 \times 23.3 = 155 + 268 = 424 \text{ 吋}^3$$

在此計算中， 5.72 吋^2 為一角之剖面面積， 19.9 吋^4 為一角剖面對於經過其質心之

註 13. 由試驗知工字梁恆因壓突緣或腹板之皺縮而發生破壞（見 H. F. Moore, University of Illinois, Bulletin 68, 1913）。

軸(此平行於梁之中立軸)之慣矩, 23.3 吋為每角質心距梁中立軸 Z 之距離。此等數據, 均可直接自手冊中檢得。今由(6'a)式得

$$(s_s)_{\text{最大}} = \frac{150,000 \times 424}{\frac{1}{2} \times 17,800} = 7,170 \text{ 磅/方吋.}$$

設計算助力鐵之鑄釘孔對於腹板之減弱效應, 於是

$$(s_s)_{\text{最大}} = \frac{e}{e-d} \cdot 7,170 = \frac{4}{3}(7,170) = 9,560 \text{ 磅/方吋.}$$

由(69)式, 一腹板鑄釘所傳之力 F 為

$$F = \frac{150,000 \times 4 \times 2 \times 8}{17,800} = 9,080 \text{ 磅.}$$

鑄釘內之切應力為

$$s_s = \frac{9,080}{2 \times 0.7854} = 5,750 \text{ 磅/方吋.}$$

222. 承前題, 求平面 ab (圖 167a) 上諸點之最大正應力(主應力); 此平面 ab 距中立軸 $2\frac{1}{2}$ 吋, $V=150,000$ 磅, 彎矩為 $3,000,000$ 吋磅。
答. 6,160 磅/方吋。

223. 圖 167 示一梁, 用二軌組成, 設一軌之剖面積為 $A=10$ 方吋, 自軌底至其質心之距離 $=3$ 吋, 軌剖面對於經過其質心 c 之軸(平行於 Z 軸)之慣矩為 40 吋⁴, 鑄釘間之距離 $e=6$ 吋, 切力 $V=5,000$ 磅, 求連接二軌之鑄釘內之切力。

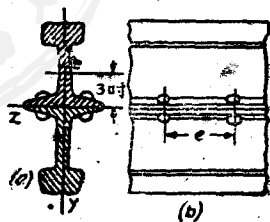


圖 167.

第六章之外加習題

224. 圖 168 所示盒式桁, 由二 $12'' \times 35$ 磅槽鐵所組成。在此等槽鐵之頂及底上, 加三變動長度之蓋板; 蓋板剖面為 $\frac{1}{4}$ 吋 \times 10 吋。設 $s_w=16,000$ 磅/方吋, 求該桁能負

之安全均勻載荷 w (以磅/呎計), 及每蓋板之最小長度。爲簡便計, 不必減去鋤釘孔。

解。——僅二槽鐵之剖面係數爲 $\frac{I}{c} = 59.6$ 吋³, 二槽鐵之 I + 頂及底上 1 蓋板之 $I = 545.2$ 吋⁴。

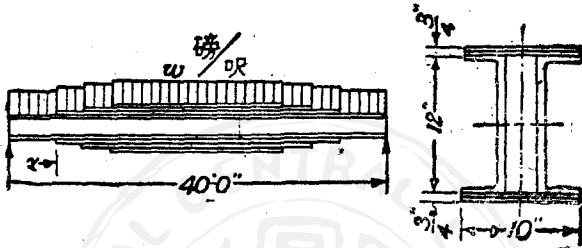


圖 168.

以上剖面之剖面係數, $\frac{I}{c} = \frac{545.2}{6 \frac{1}{4}} = 87.2$ 吋³。

槽鐵及 2 蓋板, $\frac{I}{c} = 115.1$ 吋³。

槽鐵及 3 蓋板, $\frac{I}{c} = 143.4$ 吋³。

抗力矩, $M = \frac{sl^2}{c}$ 。

僅槽鐵, $M = 16,000 \times 59.6 = 953,000$ 吋磅 = 79,500 呎磅。

槽鐵 + 1 蓋板, $M = 116,300$ 呎磅。

槽鐵 + 2 蓋板, $M = 153,500$ 呎磅。

槽鐵 + 3 蓋板, $M = 191,000$ 呎磅。

最大載荷每呎之磅數, 根據諸蓋板均用於中心剖面 (此處彎矩最大) 而來, 此由 M

$= \frac{wl^2}{8}$ 計算之。

因是,

$$\frac{w(40)^2}{8} = 191,000,$$

因此

$$w = 955 \text{ 磅/呎.}$$

於是

$$R_1 = R_2 = 19,100 \text{ 磅.}$$

決定最長蓋板長度之法如下。僅由槽鐵組成之剖面，可不用加強板，向中心方向延伸距離 x ，直至作用之力矩，達安全抗矩 79,500 呎磅之一點而止。將距離 x 處彎矩，等於 79,500 呎磅，得 x 。

$$19,100x - \frac{955x^2}{2} = 79,500,$$

$$x = 4.7 \text{ 或 } 35.3 \text{ 呎.}$$

由此變換可得第一蓋板開始及停止之距離。此蓋板之長度為 $40 - 2 \times 4.7 = 30.6$ 呎。同理，得第二及第三蓋板之長度，各為 25.0 及 17.6 呎。

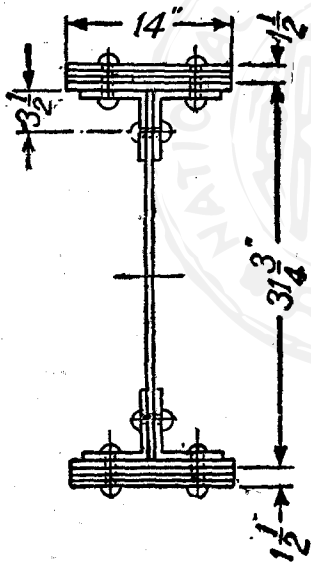


圖 169.

225. 圖 159 所示鋼釘板桁，由一 $30'' \times \frac{1}{2}''$ 腹板，四 $6'' \times 6'' \times \frac{1}{2}''$ 角鐵，及二 $1'' \times \frac{5}{8}''$ 及於桁全長度 60 呎之板所組成。在頂及底上又用三變動長度 $1'' \times \frac{1}{2}''$ 之蓋板。倘不減去鋼釘孔，及不計三組蓋板，其剖面積為 35.5 方呎， $\frac{I}{c} = 6.9.7$ 吋³。略去桁重。 $w = 16,000$ 磅/方呎。桁本身長 60 呎，自由支持於兩端，負五大小各為 W 之集中載荷。載荷置於對稱中心之位置，各相隔 10 呎。各在剖面之上部及下部中，在突緣及蓋板減去二 $\frac{7}{8}''$ 鋼釘孔，在腹板內減去一 $\frac{7}{8}''$ 孔。試

計算此桁能負之安全 W 值，及支座至各蓋板開始處之距離 x_1, x_2, x_3 。此等蓋板之長度適當，使在任何剖面上，不超過以上所述 15,000 磅/方呎之纖維應力。

答. $W=31,630$ 磅; $x_1=8.93$ 呎, $x_2=13.20$ 呎, $x_3=13.25$ 呎

226. 一木梁長 12 呎, 自由支持於兩端, 負一等布載荷, 其剖面寬 6 吋, 深 12 吋. 設最大彎曲應力 s 為 1,200 磅/方吋, 求最大切應力之強度.

227. 一梁長 11 呎, 剖面為 8 吋 \times 12 吋, 支持於距一端 2 呎處及距他端 3 呎處. 此梁負總等布載荷 W 磅, 又在兩支座之中心點上負集中載荷 $4W$ 磅. 此梁為長葉松: $s_w=1,300$ 磅/方吋, $(s_s)_w=120$ 磅/方吋. 求 W .

答. 3,360 磅. (設根據 s_w , 則為 4,170 磅.)

228. 一 6 吋 \times 10 吋木梁, 自由支持於兩端, 跨度為 15 呎. 此梁負一集中載荷, 梁內生最大彎應力 1,200 磅/方吋, 及最大切應力 100 磅/方吋. 求載荷 W 及其距左支座之數.

答. 4,800 磅, 在 $2\frac{1}{2}$ 呎處.

229. 一康奈其梁剖面, 其大略尺寸, 如圖 170 所示. $I_{1-1}=339.2$ 吋⁴. 設 $(s_s)_w=6,700$ 磅/方吋, 求總均勻載荷 W . 設 $s_w=18,600$ 磅/方吋, 求兩端自由支持而負此總均勻載荷 W 之最大許可梁跨度.

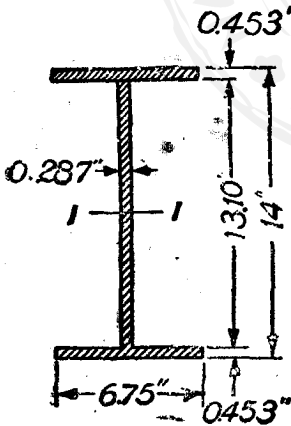


圖 170.

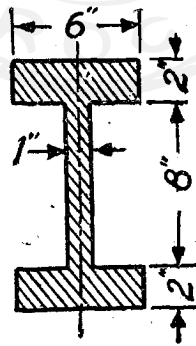


圖 171.

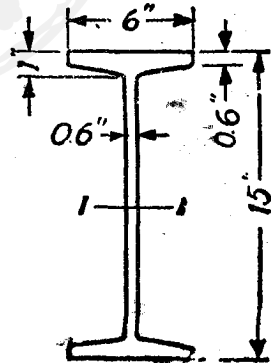


圖 172.

230. 一梁剖面如圖 171 所示, 長 18 呎, 自由支持於距各端 4 呎處. 設許可 $s_w=$

1,000 磅/方吋，求此梁能負之等布載荷 w (以磅/呎計)。

241. 一美國標準 15'' 8.8 磅工字梁剖面之大略尺寸，如圖 173 所示。設總垂直切力 $V=50,000$ 磅，求頂面下 0.6 吋，1 吋， $3\frac{1}{2}$ 吋， $5\frac{1}{2}$ 吋諸點上及中立軸上之切應力之平均強度。試繪沿梁深之切應力分布。求腹板所負總切力之百分數。

解。——由計算， $I=604$ 吋⁴。在頂面下 1'' 處之切應力(又在底面以上 1'' 處)為

$$s_s = \frac{VQ}{Ib} = \frac{50,000}{604 \times 0.6} \left[7.2 \times 3.6 + 0.24 \times 3.7 + \frac{0.4 \times 5.4}{2} \times 6.77 \right] = 1,800 \text{ 磅/方吋。}$$

同樣得其他應力為：在頂面為 0；在 0.6'' 為 358；在 $3\frac{1}{2}$ '' 為 5,900；在 $5\frac{1}{2}$ '' 為 6,900；在中立軸上為 6,560 磅/方吋。

於是可依 37 節所建議之圖示法，繪其應力。與工字梁腹板相當之 $s_s b$ 區部分下之面積，為 46,600 磅，或為總垂直切力 50,000 磅之 93.2%。

232. 圖 173 示一 6 吋 \times 12 吋之矩形梁，求沿 3 呎長度 $a-b$ 及沿 1 呎長度 $b-c$ 之總縱切力。

答。9,000 磅及 1,500 磅。

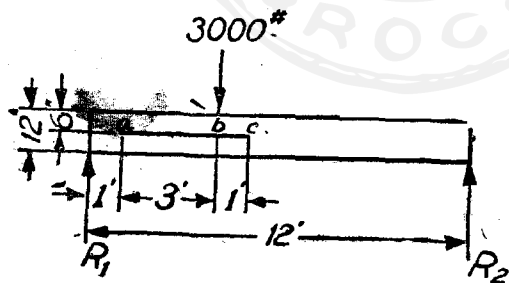


圖 173.

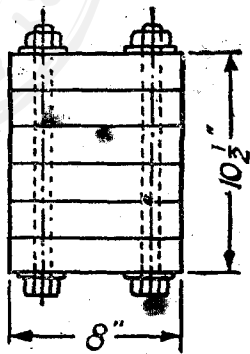


圖 174.

233. 一梁之剖面作菱形，其垂直對角線高 10 吋，水平對角線寬 8 吋。設 $V=10,000$ 磅，每隔一吋求剖面水平線上之切應力垂直分力。

答. 自中心向外, 430, 448, 432, 352, 268 及 0 磅/方吋。

234. 一梁之剖面如圖 174 所示, 自由支持於兩端, 長 12 呎。此梁用六塊木板 8 吋 \times 1 $\frac{3}{4}$ 吋組成, 諸板以直徑 $\frac{3}{4}$ 吋之成對螺釘釘之, 而此螺釘沿梁長之間隔為 12 吋, 第一對位於距一端 3 吋處。設該梁負等布載荷, 其最外纖維應力為 1,200 磅/方吋, 求螺釘上之應力。設定螺釘負完全切力, 而略去木板間摩擦力效應。又假定此螺釘不致壓破或斷去木板。

答. 在最外一對螺釘, $s_s = 1,000$ 磅/方吋。

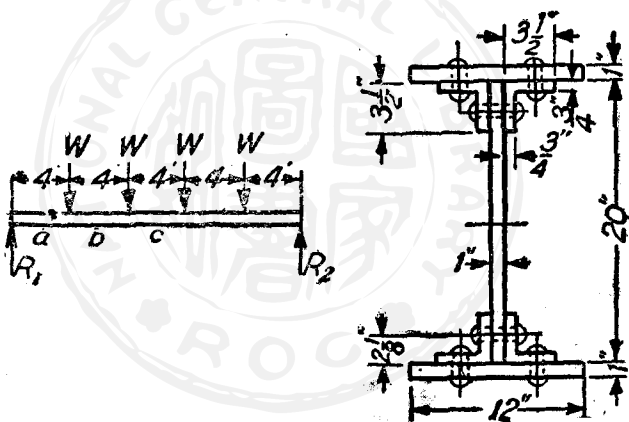


圖 175.

235. 一梁(圖 175)長 20 呎, 自由支持於兩端, 負四集中載荷, 各載荷之大小為 W 對稱置於梁上, 相隔各為 4 呎。此梁為組合梁, 其剖面如圖所示。設 $s_w = 16,000$ 磅/方吋, 求各 W 之大小, 試繪一圖, 以示切應力之分布。問最大切應力若干? 設所用鋼釘直徑為 $\frac{7}{8}$ 吋, 其單切強度 = 8,000 磅/方吋。問在部分 a, b, c 處, 突變處鋼釘之間隔及腹板鋼釘之間隔該若干?

第七章

梁之撓度

40. 總論。——梁之撓度(deflection of beams)問題,甚為重要,蓋不特撓度本身之大小,時常需要,且在解決靜力不定梁之問題時,梁撓度之思考,決不可少,此當在第八章述之。

本章討論數種方法,以求撓度,其最老而原理最簡明者,為二次積分法(double integration method),第二法為面積力矩法(area-moment method),此法近日頗為通行,此二法各分節述之,又有一節鉸及重疊法(method of superposition),此法利用少數簡單彎曲及撓度問題之結果,以解決更為複雜之問題,所以補充上述二法者也。讀者在解一問題時,常可研究出一法之優點,可遠勝於他法。

41. 由彈性曲線微分方程式之二次積分,以求撓度。——在 34 節中已得稜柱形梁受彎曲後之撓度曲線曲率為

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}, \quad (60)$$

式中 M = 彎矩,作用於經過問題中一點之剖面上, I = 此剖面對於中立軸之慣矩,為此原均勻梁受端偶力(即所謂純彎曲 pure bending)而彎曲時所求得之公式,此例中 M 沿全梁長之值,均為一定;

故其曲率半徑為一定，其撓度曲線為一圓弧。

遇受橫載荷之棧柱形梁，設剪力效應略去不計，(註¹)則此式亦可適用，惟此處 M 沿全梁長之值不等，其撓度曲線之曲率亦不等。

欲求彎曲梁上一點，對於原位置之撓度，必將(60)式中之 $\frac{1}{\rho}$ 用沿梁 x 處之撓度 y 表之。茲將與 $\frac{1}{\rho}$ 相當之公式，求之如下。用圖 176 所示座標軸之位置，在撓度曲線上任何一點 m ， $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ 。在工程結構所用梁，角 θ 之值恆甚小，故得良好近似值 $\tan \theta = \theta$ 及 $d\epsilon \approx dx$ 。於是

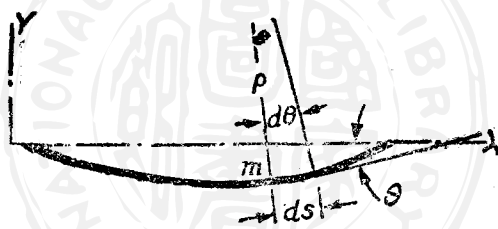


圖 176.

$$\theta = \frac{dy}{dx} \quad \text{及} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (a)$$

註 1. 由剪力所生之撓度，在 52 節中論之。

註 2. 曲率之有名正確公式為

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 與 1 相較，其值甚小，故在上式中略去，此與 $\frac{d\theta}{dx} \approx$ 甚小之假設相符，故其平方可略去。

由圖 176, $\rho d\theta = ds = dx$; 故 $\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$. (註 2)

$\frac{1}{\rho}$ 之值, 在 (60) 式中亦已求得, 即, $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$. 使二值相等, 則得撓度曲線之微分方程式:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M. \quad (71)$$

此式之符號, 用下列慣例擇定之. 設彎矩使梁向上凹, 則其符號為正 (見 30 節); 設用圖 176 之座標軸, 在如此彎曲情形, 其二次微分 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 為正. 故在 (71) 式中用正號.

此處再可述者, 即設將 (71) 式繼續微分, 且用 (55) 及 (56) 式, 可得下列二式:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{V}{EI}, \quad (72)$$

及
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w}{EI}. \quad (\text{註 3}) \quad (73)$$

42. 均勻載荷梁之撓度——二次積分法.——上述 (71) 式, 可普遍應用於彎曲問題. 今先研究一梁, 其載荷均勻, 兩端支持 (圖 177). 其載荷強度, 每單位長度為 w , 故在任何剖面 mns 之彎矩為

$$M = \frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2},$$

而 (71) 式變為

註 3. 如 (56) 式中所示. 設 (73) 式之 w 向上作用, 其號為正. 在本書他處, 則 w 在其作用方向作為正.

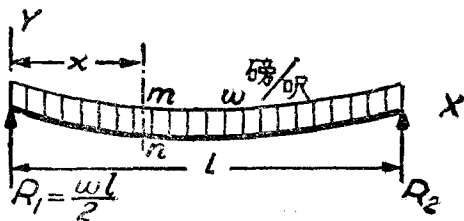


圖 177.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{wl}{2} x - \frac{wx^2}{2}.$$

兩邊各乘 dx ，求其積分，得

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wl}{4} x^2 - \frac{wx^3}{6} + C_1, \quad (a)$$

式中 C_1 為積分常數，可由問題之邊界條件，以決定之。由對稱關係，

在跨度中心之斜度為零。當 $x = \frac{l}{2}$ ， $\frac{dy}{dx} = 0$ ，得

$$C_1 = -\frac{wl^3}{24},$$

而(a)式即變為

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wlx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} - \frac{wl^3}{24}.$$

第二次積分，得

$$EI y = \frac{wlx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wl^3 x}{24} + C_2. \quad (b)$$

此新積分常數 C_2 ，可由支座撓度為零之條件決定之，即，於(b)式中，

當 $x=0$ ， $y=0$ ，故 $C_2=0$ 。由(b)式，其撓度曲線變為

$$y = \frac{-w}{24EI} (l^3x - 2lx^2 + x^3).$$

一點之負 y 值，表示撓度曲線上之此點位於 x 軸之下；其正值表示在其上。有時祇需撓度之大小，其符號可不管；倘用是法，則撓度以 δ 表示之。其方向之上或下，由載荷之情形決定之，倘用面積力矩法，則用特別規則以定符號。

其最大數值撓度 δ ，發生於中心，此處斜度 $\frac{dy}{dx} = 0$ 。以 $x = \frac{l}{2}$ 代入

上式，則得此值

$$\delta = \frac{5wl^4}{384EI}. \quad (74)$$

在算撓度之數值時，各數量應均以同一基本單位表之；如用磅及吋，例如，當將數值代入上式， w 之單位應作磅/吋， l 作吋， E 作磅/方吋， I 作吋⁴；於是撓度 y 作吋。(註⁴)

43. 集中載荷梁之撓度 —— 二次積分法。—— 今舉第二例題，以說明二次積分法之應用法，與積分常數之決定，研究圖 178 所示之梁。在此題中，梁重略去不計，以後倘不另說明，梁重恆不計。

其座標軸，如圖所示。因彎矩用不同二式表示，一式用於 $x=0$ 至 $x=a$ 之部分，第二式用於 $x=a$ 至 $x=l$ ，故必立二個微分方程式，以適合二部分。

第一微分方程式(適用於 $0 < x < a$) 為

註 4. 設用廣義分析原理，可知在任何撓度公式中， w 可仍作磅/吋， l 作吋， E 作磅/方吋， I 作吋⁴；右邊乘一函數 1.728，則 y 作吋。此法優點，在使計算中之數字數量，較為細小。

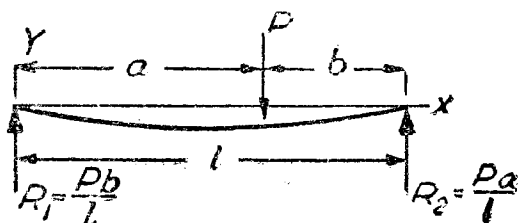


圖 178.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Pb}{l} x. \quad (a)$$

經二次積分後，得：

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1. \quad (b)$$

$$EI y = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2. \quad (c)$$

第二微分方程式(適用於 $a < x < l$) 爲

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Pb}{l} x - P(x-a). \quad (d)$$

經二次積分後，得

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{P(x-a)^2}{2} + C_3. \quad (e)$$

$$EI y = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{P(x-a)^3}{6} + C_3 x + C_4. \quad (f)$$

欲決定以上四積分常數，在各端及兩部分力矩式不同邊界處之物理條件或拘束，必詳爲考慮。在靜力可定樑，其獨立端或邊界條件之數目恆等於積分常數及其他未知常數之數目。此等條件，常包括斜

度與撓度之敘述。(註5)

今繼續解決上題，以敘述若干較為常用之邊界條件。

(1) 當 $x=0, y=0$ ，將此代入(c)式，得 $C_2=0$ 。

(2) 當 $x=a$ ，由(b)所得之斜度，必等於由(e)所得之值，故當 x 改為 a 時，(b)，(e)兩式之右邊必相等。故 $C_1=C_3$ 。

(3) 當 $x=a$ ，由(c)及(f)所得之撓度相等，即 $x=a$ 時，(c)，(f)二式之右邊相等。故 $C_2=C_4=0$ 。

(4) 當 $x=l, y=0$ ，由(f)，得

$$0 = \frac{Pb}{l} \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{Pl^3}{6} + C_3l.$$

故

$$C_3 = \frac{Pb}{6}(b^2 - l^2).$$

將所得常數值代入(c)及(f)，得在 $x=0$ 與 $x=a$ 間任何一點之撓度為

$$EIy = \frac{Pb}{6l} [x^3 - (l^2 - b^2)x], \quad (75)$$

而 $x=a$ 與 $x=l$ 間任何一點之撓度為

$$EIy = \frac{Pb}{6l} \left[x^3 - \frac{l}{b}(x-a)^3 - (l^2 - b^2)x \right]. \quad (76)$$

設 $a > b$ ，其最大撓度，發生於 $x=0$ 與 $x=a$ 之間，其位置可由(b)式得之，即將 $\frac{dy}{dx} = 0$ ，以解 x 。於是

註5. 在立此等邊界條件時，讀者應正確畫出所存在之物理條件，不可作不確敘述。例如，如非確知零斜度確實存在，應留意不可隨意假定撓度曲線上一點之斜度為零。特別如梁之懸端，切不可隨意假定相鄰支座處之斜度為零。

$$x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}. \quad (77)$$

將此 x 之值，代入(75)式，得其最大撓度，

$$\delta_{\text{最大}} = \frac{Pb}{9\sqrt{3}EI} (l^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (78)$$

44. 撓度之面積力矩解法。——面積力矩法(註6)為上述二次積分法之更改法。因欲使此敘述完全與前法無關，41節之小部分，有在此重述之必要。

在34節中，已得稜柱形梁在彎曲時之撓度曲率為

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}, \quad (60)$$

式中 M = 剖面上之彎矩，此剖面乃經過問題中一點者， I = 剖面對於中立軸之慣矩。此原為均勻梁受端偶力(即所謂純彎曲)而彎曲時所求得之公式。此例中 M 沿全梁長之值，均為一定；是以，其曲徑為一定，其撓度曲線為一圓弧。

遇受橫載荷之稜柱形梁，設切力效應略去不計(註7)，則此式亦可適用。惟此處 M 沿全梁長之值不等，其撓度曲線之曲率亦不等。

今所討論之問題，即有一已知載荷系及支座系，欲求彎曲梁上任何一點對其原位置所生之撓度。在圖179中， AB 表示撓度曲線之一部分， A_1B_1 表示其相當之彎矩圖。兩相距 ds 之相鄰剖面，在彎曲後，

註6. 面積力矩法在1808年創自馬爾(Otto Mohr)；後在1873年又單獨創自密芝根大學教授格林(C. E. Green)，惟其形式稍不同耳。共軛梁法(見48節)；亦創自馬爾。

註7. 因切力所生之撓度，在52節討論之。

將相交成一角 $d\theta$ ，於是，由(60)式及公式 $ds = \rho d\theta$ ，得

$$d\theta = \frac{1}{\rho} ds = \frac{M}{EI} ds.$$

在一般結構用梁，其曲率甚小， dx 可代 ds 。於是

$$d\theta = \frac{1}{EI} (M dx). \quad (a)$$

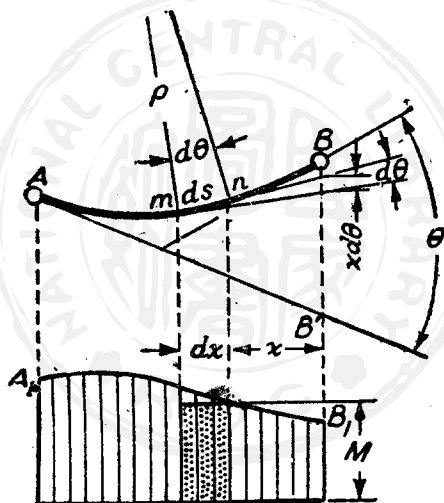


圖 179.

自圖形解釋之，即撓度曲線上兩相連續半徑或切線，所夾之角 $d\theta$ ，等於彎矩圖之陰影元素面積 $M dx$ (註 8)，除以彎曲剛性 EI 。每元素各如是，在 A 與 B 兩處切線間之角度 θ ，將 (a) 式所示之元素角總加之，

註 8. 用廣表校對之： $d\theta$ 之單位作弧度，即為一純數， $M dx$ 作吋磅 \times 吋， EI 作 (磅/方吋) \times (吋)⁴。

即得。於是

$$\theta = \int_A^B \frac{M dx}{EI}. \quad (79)$$

此積分以文字表之，得第一面積力矩定理：即，撓度曲線上 A 與 B 兩點上切線間之角度，等於此相當垂線間之彎矩圖，除以該梁之彎曲剛性 EI 。正力矩圖所成之面積，作為正號；負力矩圖作為負號。正號淨面積表示右側切線，與左側切線成正或逆時針方向之角度。

今再求 B 點距 A 點切線 AB' 之距離。應知撓度曲線為一平曲線，上述距離，可沿垂線 BB' 度之。在 m 及 n 處兩相連續切線間之梁元素 mn ，因彎曲對此距離 BB' 所生之貢獻，等於

$$x d\theta = x \frac{M dx}{EI}.$$

以圖形解釋之，此為陰影面積 $M dx$ 對於經過 B 之垂線之力矩，除以 EI 。積分之，得總撓度 BB' ：

$$\delta = \int_A^B \frac{M x dx}{EI}. \quad (80)$$

此積分以文字表之，得第二面積力矩定理：即，設 A 與 B 為撓度曲線上之兩點， B 距 A 處切線之距離，等於 A 與 B 兩點間力矩圖面積，對於經過 B 之垂線之力矩，除以彎曲剛性 EI 。正力矩圖面積之力矩為正，此正面積力矩生正撓度。正撓度者， B 點位於切線之上之謂也。當力臂伸至 A 與 B 兩點間之彎矩圖內，則此力臂為正。

面積及力矩圖面積之第一或靜力矩，可用積分求之，或幾各處均可用少數關於面積及質心公式求之。已知質心位置後，一面積之第

一力矩，即等於其質心距力矩軸之距離，乘其面積。圖 180 示各種重要公式。

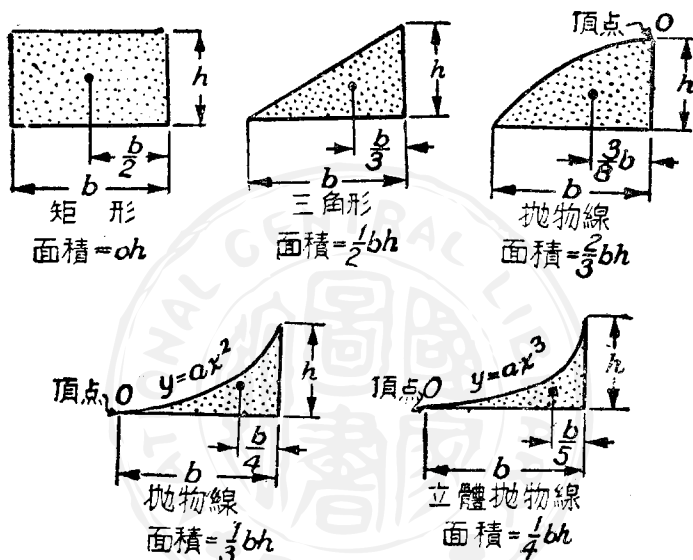


圖 180.

45. 肱梁之撓度 —— 面積方矩法。—— 今論肱梁，其自由端負一集中載荷（圖 181a），其彎矩圖如圖 181b 所示。因其固定端 A 之切線仍為固定且水平，撓度曲線上各點至此切線之距離，即其實在撓度。在撓度曲線 B 點之切線，與 A 點切線所成之角度 θ_b ，稱為 B 點對於 A 點之角撓度 (angular deflection)。於是，由第一定理，(註 9)

註 9. 此計算角撓度之數字值。此角撓度之方向，可直接由載荷之條件知之。或：因面積 $\triangle A_1 B_1$ 為負，(S1)式中之 cb 實為負數。設此負號用第一定理解釋之，即 B 點切線對 A 點切線作順時針方向之角度。

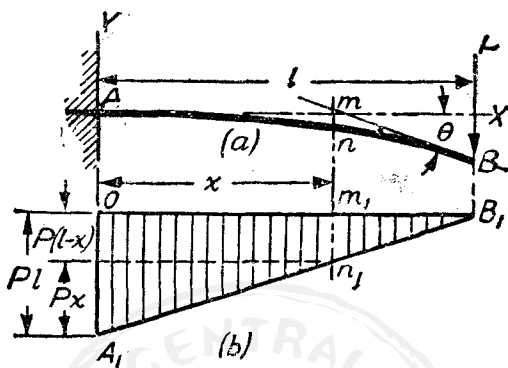


圖 181.

$$\theta_b = (Pl) \left(\frac{l}{2} \right) \frac{1}{EI} = \frac{Pl^2}{2EI} \quad (81)$$

撓度 δ 由第二定理算之，即等於負面積 OA_1B_1 對於經過 B_1 之垂線之力矩，除以 EI ，於是

$$\delta = \left(-Pl \cdot \frac{l}{2} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) \frac{1}{EI} = -\frac{Pl^3}{3EI} \quad (82)$$

其負號表示 B 點位於切線 AX 之下。

在任何剖面如 mn ，其對於 A 處之角撓度，等於圖 181b 之面積 m, n, A, O ，除以 EI 。在平曲線之例，如梁之撓度曲線，其角撓度可作為等於曲線之斜度，得

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{Pl^2}{2EI} \left[1 - \frac{(l-x)^2}{l^2} \right] \quad (83)$$

在同一剖面之撓度 y ，等於面積 $m_1n_1A_1O$ 對於 m_1n_1 之力矩，除以 EI （見第二定理），分割此面積為矩形及三角形，如圖所示，得

$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{1}{EI} \left[P(l-r) \frac{x^2}{2} + \frac{Px^2}{2} \cdot \frac{2x}{3} \right] \\
 &= -\frac{Pr^2}{6EI} (3l-x). \tag{84}
 \end{aligned}$$

設桁梁受強度 w 之均勻載荷(圖 182a), 距固定端 x_1 之任何面 mn 上之彎矩, 爲

$$M = -\frac{w(l-x)^2}{2}.$$

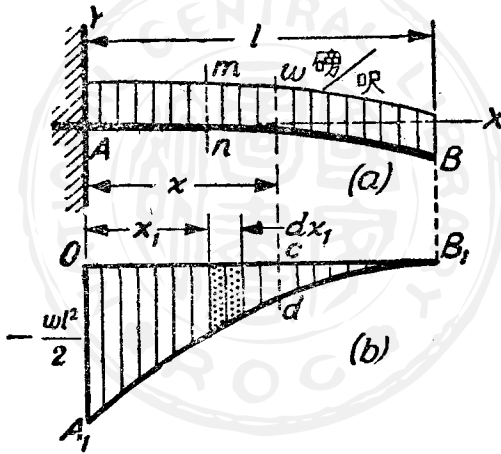


圖 182.

距支座 x 之任何剖面處之斜度, 由第一定理, 爲面積 $O A_1 d c$, 除以 EI ; 用(79)式, 得

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} \int_0^x \frac{w(l-x_1)^2}{2} dx_1 \\
 &= -\frac{w}{EI} \left(lx - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} \right). \tag{85}
 \end{aligned}$$

在上式中以 l 代 x , 可得其端斜度,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{wl^3}{6EI}. \quad (86)$$

距固定端 x 之任何剖面處之撓度, 爲面積 OA_1dc 對於垂線 cd 之力矩, 除以 EI (圖 182b). 此陰影元素面積之力矩爲

$$-(x-x_1)\frac{w(l-x_1)^2}{2}dx_1,$$

其總力矩爲此式對於 x_1 自 $x_1=0$ 至 $x_1=x$ 之積分. 於是

$$y = -\frac{1}{EI} \frac{w}{2} \int_0^x (x-x_1)(l-x_1)^2 dx_1.$$

積分後, 得距支座 x 之任何剖面處之撓度,

$$y = -\frac{w}{2EI} \left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right). \quad (87)$$

當 $x=l$, 得端撓度

$$\delta_{\text{最大}} = \frac{wl^4}{8EI}. \quad (88)$$

(85)及(87)式之結果, 倘不用積分, 可用圖 180 所示相當面積與質心距離公式, 如下求之.

在拋物線弧 A_1d 下之面積, 等於面積 OA_1dB_1 . 減去面積 cdB_1 , B_1 爲拋物線弧之頂. 用第一定理, 及其符號規則,

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{l}{3} \frac{wl^2}{2} - \left(-\frac{l-x}{3} \cdot \frac{w(l-x)^2}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{w}{2EI} \left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right). \end{aligned}$$

負號表示 x 點之切線，與 A 處切線，作順時針之角度。

用第二定理及其符號規則， EI 乘 x 處之撓度，等於面積 A_1Ocd 對於垂線 cd 之力矩，自面積 $O A_1dB_1$ 對於 cd 之力矩，減去面積 cdB_1 對於 cd 之力矩，即可迅速得此結果。嚴格遵循符號規則，因彎矩為負，故面積為負； A_1Ocd 之力臂伸入面積 A_1Ocd ，其符號為正，而由 cd 伸至反對方向（此處即向右）之力臂，其符號為負。於是

$$EIy = \left(-\frac{l}{3} \cdot \frac{wl^2}{2}\right)\left(x - \frac{l}{4}\right) - \left(-\frac{l-x}{3} \cdot \frac{w(l-x)^2}{2}\right)\left(-\frac{l-x}{4}\right).$$

此可化至(87)式，即

$$y = -\frac{w}{2EI} \left(\frac{l^3x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right), \quad (87)$$

其負號表示 B 點在彈性曲線 A 點切線之下。

46. 受集中載荷之梁撓度 —— 面積力矩解法。—— 在開始時，將彎矩圖分為數部，在此例及他例中，此方法甚為有用。每載荷所生之彎矩圖部分，分別畫之，如圖 183 所示。其左反動力 $\frac{Pb}{l}$ ，生正彎矩，在點 x 之力矩，等於 $\left(\frac{Pb}{l}\right)x$ ，此力矩圖之相當部分，以三角形 DFE 表之。載荷 P 所生之彎矩圖，以三角形 GHE 表之。此二分離部分之和，適與常用彎矩圖（如圖 103 所示）相當，倘求縱座標之代數和，即可證明之。

撓度 y 祇可用下列間接法求之。右端自切線 AB' 之撓度 BL' ，用第一定理求之，即計算兩面積 DFE 及 GHE 對於 HEF 之力矩。

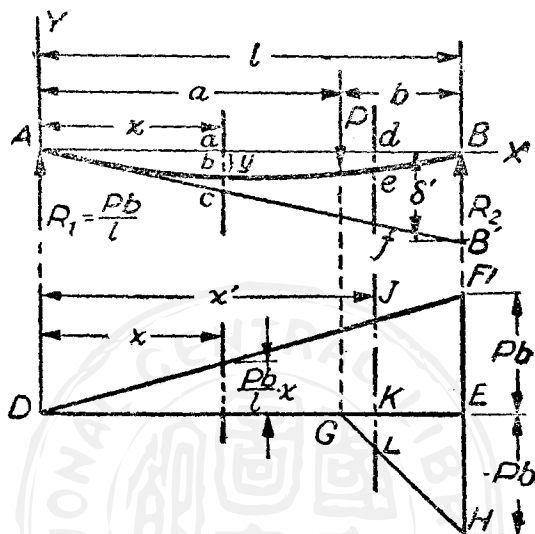


圖 183.

$$EI\delta' = \left(\frac{Pb}{2} \cdot l\right)\left(\frac{l}{3}\right) + \left(-\frac{Pb}{2} \cdot b\right)\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{Pb}{6}(l^2 - b^2).$$

距左端 x 處之距離 \overline{ac} ，由比例求之，得 $\overline{ac} = \frac{x}{l} \cdot \delta'$ 。在載荷左邊任何一點 b 自切線 AB' 之撓度，可再應用第二定理求之。

$$EI \cdot \overline{bc} = \left(\frac{Pb}{l} \cdot x\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{Pbx^3}{6l}.$$

所欲求自 x 軸 AB 之撓度 y ，為 \overline{ac} 與 \overline{bc} 之差；此差為正，但 y 為向下或負，故其前應加一負號。

$$y = -\frac{1}{EI} \left[\frac{x}{l} \cdot \frac{Pb}{6}(l^2 - b^2) - \frac{Pbx^3}{6l} \right]$$

$$= -\frac{Pbx}{6EI}(l^2 - b^2 - x^2). \quad (75)$$

在載荷 P 右側任何一點之撓度，可用同法求之，惟在求 $e\bar{f}$ 時，應求三角形 DJK 及 GKL 對於 JKL 之力矩，其結果即 43 節(76)式所示者。

當彈性曲線上切線之斜度為零，即發生最大撓度。任何一點之斜度 $\frac{dy}{dx}$ ，可求(75)或(76)式中 y 式之微分，將其結果等於零，即可解得至切點之距離 x ，或零斜度之點，可用下法求之。A 處切線與水平所成角度 θ 之數值，為

$$\theta = \frac{\delta'}{l} = \frac{Pl(l-b)}{6EI}. \quad (89)$$

彈性曲線上水平切線，亦與切線 AB' 成角度 θ 。此水平切線與 AB' 所成之角，根據第一定理，等於二切點如 A 與 b 間所含之力矩圖面積，除以 lE 。故

$$\theta = \frac{Pb(l-b)}{6EI} = \left(\frac{Pb}{l} \cdot x\right) \left(\frac{x}{2}\right) \frac{1}{EI},$$

由此式，得至最大撓度點之距離 x 為

$$x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}. \quad (77)$$

將此 x 之值，代入(75)式，得其最大撓度：

$$\delta = \frac{Pb}{9\sqrt{3}EI}(l - b^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (78)$$

47. 梁有一懸端者之撓度 —— 面積力矩法。—— 梁有懸端者，可迅速應用面積力矩法解之。假設有一受載荷之梁，如圖 184 所示。其左反動力 $R_1 = w \left(1 - \frac{l}{2a}\right)$ ，其力矩圖分別畫之，茲考慮二支座間任何剖面上之彎矩，三角形 efg 表示反動力 R_1 所生之（正）彎矩圖，拋物線面積 efh 為均勻載荷所生之（負）彎矩圖。欲求懸端之彎矩圖，其最簡單之計算法，為將彎矩用欲求彎矩剖面之右邊載荷表之。此部分之力矩圖，以拋物線形面積 fjk 表之。

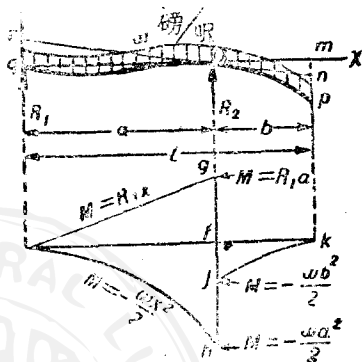


圖 184.

今可如下法計算其自由端之撓度。假想於右支座之彈性曲線上，作一切線 om ，所需之撓度 \overline{mp} 等於 $\overline{mn} + \overline{np}$ ，今 \overline{np} 為 p 點自 o 點切線 om 之撓度，此可應用第二定理求之。故 $EI \times \overline{np}$ 等於面積 fjk 對於 k 之力矩。

$$EI \times \overline{np} = \left(-\frac{wb^2}{2}\right) \left(\frac{b}{3}\right) \left(\frac{3b}{4}\right) = -\frac{wb^4}{8}$$

其負號表示 p 點位於切線之下。

倘已知 \overline{mq} ，距離 \overline{mq} 可自相似三角形 oqr 及 oms 求之。今 \overline{mq} 可用第二定理求之，此等於 efc 及 chf 對於 e 之第一力矩，除以彎曲剛性 EI ，故

$$EI \times \overline{mq} = (R_1 a) \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{wa^2}{2}\right) \left(\frac{a}{3}\right) \left(\frac{3a}{4}\right) = \frac{R a^3}{3} - \frac{wa^4}{8}$$

於是，用比例，

$$\frac{\overline{mn}}{a} \cdot \overline{q} = \frac{1}{EI} \left[\frac{R_1 a^2 b}{3} - \frac{w a^2 b}{8} \right].$$

其撓度

$$\overline{mp} = \overline{mn} + \overline{np} = \frac{1}{EI} \left[\frac{R_1 a^2 b}{3} - \frac{w a^2 b}{8} - \frac{w b^3}{8} \right].$$

將以前所得之 R_1 代入，注意 $l = a + b$ ，且變換其符號，使撓度變為正數量，得撓度 \overline{mp} 之數字值為

$$\delta = \frac{wbl}{24EI} (3b^2 + ab - a^2).$$

兩支座間任何點之撓度，可用上例及 46 節之同一原理求之。

48. 撓度之共軛梁法。——此為面積力矩法之變易。今用此法之原理，以求自由支持而受一單獨集中載荷之梁撓度。此問題在 46 節中，已用面積力矩法解過，故在此可常引證之。

先作梁(圖 185*v*)之彎矩圖。今想像一梁 $A_1 B_1$ ，如圖 185*b* 所示，此稱為共軛梁，此梁兩端支持，上載彎矩圖 $A_1 C_1 B_1$ 所示之分布載荷。此載荷在左支座所生之反動力 R_1' 為

$$R_1' = \left[\frac{Pb(l-b)}{l} \cdot \frac{l}{2} \right] \left[\frac{l+b}{3} \right] \frac{1}{l} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}. \quad (a)$$

此式與(89)式相比，可知實在梁支座 A 之斜度，等於想像梁 $A_1 B_1$ 之 A_1 處反動力除以 EI ，此想像梁支持於兩端，跨度 l 與實在梁相同，其所載分布載荷，為實在梁之彎矩圖。欲求梁任何剖面 mn 處之斜度，僅自支座 A_1 上之角度 θ_1 ，減去 A_1 處切線與剖面 mn 處切線所成之

角度 θ ，即得；於是應用(89)式，及第一面積力矩定理，

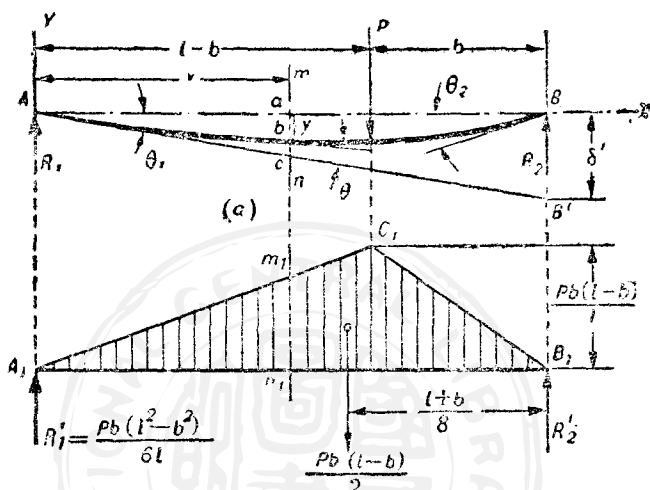


圖 185.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6EI} - \frac{\text{面積 } \triangle Amn}{EI} = \frac{1}{EI} (R_1' - \text{面積 } \triangle Amn).$$

括弧內第一項為共軛梁 A_1B_1 之左支座之反動力，第二項為共軛梁上在剖面 m_1n_1 以左之載荷。故，括弧內所表示者，為共軛梁上剖面 m_1n_1 處之切力。是以在任何剖面 mn 處之實在梁斜度，等於共軛梁之相當剖面上之切力，除以 EI 。

欲求載荷以左梁上任何剖面 mn 處之撓度 y ，可依 46 節進行。自圖可知

$$y = \overline{bc} - \overline{ac}. \quad (b)$$

$$\text{今 } \overline{ac} = x\theta = x \frac{Pb(l-b)}{6EI} = \frac{R_1'x}{EI}, \quad [\text{用(a)式}]$$

用第二面積力矩定理，

$$\frac{1}{l \cdot c} = \frac{(\text{面積 } \triangle A \cdot m \cdot n)}{EI} \left(\frac{x}{3} \right).$$

將上值代入(b)，得

$$y = - \frac{1}{EI} \left(R_1' x - \text{面積 } \triangle A \cdot m \cdot n \cdot \frac{x}{3} \right).$$

括弧內所示意義，甚為簡單，此表示其共軛梁上剖面 m, n 處之彎矩，故兩端支持梁任何一點之撓度，等於共軛梁同一剖面上矩彎，除以 EI ，由此式可迅速求得所需之撓度方程式，

$$y = - \frac{P_1' x}{6EI} (l - b' - x'),$$

此式當然與(75)式相符。

使微係數 $\frac{dy}{dx}$ 等於零，或尋其共軛梁中切力等於零之剖面（因前

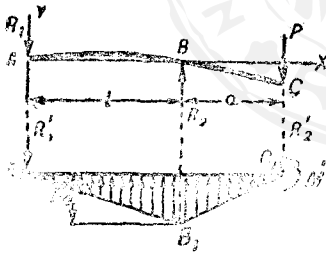


圖 181.

已述過，在任何剖面之實在梁斜度，等於相當剖面處之共軛梁切力，除以 EI ），可求最大撓度之點，此最大撓度點之位置及數值，與 46 節所示者同。

有懸臂之梁，亦可用共軛法解決之。在圖 186a 所示之例，其相當之共軛梁，負有向上之三角載荷 A, B, C 。

欲自共軛梁上之彎矩及切力，求此實在梁之撓度及斜度，共軛梁支座之性質，必用此節之定理決定之。此實在梁 O 端之撓度及斜度不等於零，故在共軛梁之 C_1 端，必有某偶力 M' 及某反動力 R_1' 之存在。

實在梁 A 端之撓度爲零，但其斜度不等於零；故在其輓梁之 A_1 端，必有反動力 R_1' 而無力矩。今欲求之數量有三，即 R_1' 、 R_2' 及 M' ，而靜力方程式僅二，另一方程式，可自實在梁 B 處之撓度爲零之條件求之；故其輓梁 B_1 處之彎矩，必等於零。用此條件，可得下列方程式，以定 R_1' ，

$$R_1'l - \frac{Pal}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0.$$

於是其他數量 R_2' 及 M' ，自靜力方程式求之，此題以後之討論，與兩端支持梁之例相同。

49. 簡單載荷之撓度公式概要。——在此章以後各節及下章，需簡單載荷之撓度處甚多。爲便利計，此等撓度公式總列於附表中。其中數公式已於前數頁中求得，其他公式可用同法求之及證之。

當撓度 δ 向下，假定爲正， θ 之值如圖所示者爲正。設一載荷或偶力作用之方向，與表中所示者相反，則 δ 及 θ 之符號相反。

50. 用重疊法求撓度。——將部分效應相加，以求總效應之法，稱爲重疊法。在研究梁之彎曲，常用此法，此法卽利用少數以前數法所得之簡單撓度問題，以求較爲複雜之問題。是以，此重疊法非獨立方法，而爲以前一二法之輔助法也。

此法之真實，可簡單證之如次：設數載荷作用於同一梁上，任何剖面上之彎矩 M ，等於各載荷在此分別所生諸彎矩 M' 、 M'' ，等之和，(註 10) 卽 $M = M' + M'' + \dots$ 。設以其相當公式 $EI \frac{d^2y}{dx^2}$ ，等(見 7)

註 10. 此敘述之證明法，已在 49 節之第一段述過。

式) 替代諸力矩之值, 得

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = EI \frac{d^2 y'}{dx^2} + EI \frac{d^2 y''}{dx^2} \dots$$

對 x 積分二次,

$$EI y = EI y' + EI y'' + \dots$$

故任何一點之撓度, 等於各量荷在此點所生諸撓度之和。連續載荷之例, 可視作多數集中載荷之極限, 此集中載荷即分布載荷所分成者。故, 設各分別載荷與此載荷所生之分別撓度, 成一直線關係, (註 11) 此法均可適用。

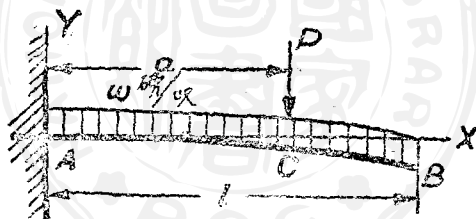


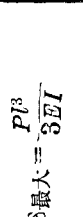
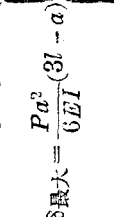
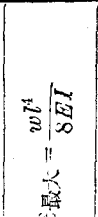
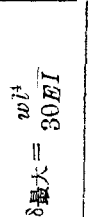

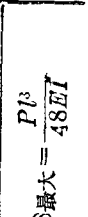
圖 18.

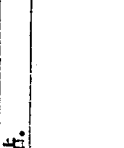
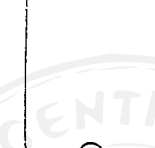
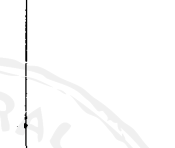
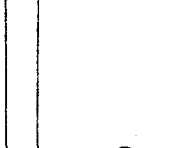
用面積力矩法, 亦可將此證明書出, 蓋彎矩曲線下之面積之力矩 M , 等於 M' , M'' 等曲線下面積之力矩之和, 此等力矩均對經過撓度點之垂線求之。

今研究圖 187 之懸梁, 以示此法之第一應用, 此梁負一等布載荷及一集中載荷 P . 用 49 節, P 在 P 以左任何一點所生之撓度為

$$\delta_1 = \frac{Px^2}{6EI} (\delta a - x),$$

註 11. 欲知重疊原理不能應用之例, 見 72 節之末段。

49 節	自由端之斜度	任何剖面處之撓度,以 x 表之; δ 向下為正.	最大撓度
1. 懸梁——	集中載荷 P 加於自由端.		
	$\theta = \frac{Pl^3}{2EI}$	$\delta = \frac{Px^2}{6EI}(3l-x)$	$\delta_{\text{最大}} = \frac{Pl^3}{3EI}$
2. 懸梁——	集中載荷 P 加於任何一點.		
	$\theta = \frac{Pa^2}{2EI}$	$\delta = \frac{Px^3}{6EI}(3l-x)$ 適用於 $0 < x < a$. $\delta = \frac{Pa^2}{6EI}(3x-a)$ 適用於 $a < x < l$.	$\delta_{\text{最大}} = \frac{Pa^2}{6EI}(3l-a)$
3. 懸梁——	w 磅/呎之等布載荷, 加於全梁.		
	$\theta = \frac{wl^3}{6EI}$	$\delta = \frac{wx^2}{24EI}(x^2 + 6l^2 - 4lx)$	$\delta_{\text{最大}} = \frac{wl^4}{8EI}$
4. 懸梁——	均變載荷: 最大強度為 w 磅/呎.		
	$\theta = \frac{wl^3}{24EI}$	$\delta = \frac{wx^2}{120EI}(10l^3 - 10l^2x + 5l^2x^2 - x^3)$	$\delta_{\text{最大}} = \frac{wl^4}{30EI}$
5. 懸梁——	偶力 M 加於自由端.		
	$\theta = \frac{Ml}{EI}$	$\delta = \frac{Mx^2}{2EI}$	$\delta_{\text{最大}} = \frac{Ml^2}{2EI}$
6. 兩端自由支持梁——	集中載荷 P 加於中心.		
	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{Pl^2}{16EI}$	$\delta = \frac{Px}{12EI} \left(\frac{3l^2}{4} - x^2 \right)$ 適用於 $0 < x < \frac{l}{2}$	$\delta_{\text{最大}} = \frac{Pl^3}{48EI}$

49 節	兩端之斜度	任何剖面處之撓度, 以 x 表之; δ 向下為正.	最大及中心撓度
<p>7. 兩端自由支持梁——集中載荷 P 加於任何一點.</p>  <p>左端, $\theta_1 = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6EI}$</p> <p>右端, $\theta_2 = \frac{Pa(2l - b)}{6EI}$</p> <p>$R_1 = \frac{Pl}{l}$, $R_2 = \frac{Pa}{l}$</p>	<p>在載荷 P 之左側: $\delta = \frac{Pbx}{6EI} (l^2 - x^2 - b^2)$</p> <p>在載荷 P 之右側: $\delta = \frac{Pab}{6EI} \left[\frac{l}{b}(x-a)^3 + (l^2 - b^2)x - x^3 \right]$</p>	<p>$\delta_{\text{最大}} = \frac{Pb(l^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EI}$</p> <p>在 $x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$.</p> <p>在中心, 設 $a > b$, $\delta = \frac{Pb}{48EI} (3l^2 - 4b^2)$</p>	
<p>8. 兩端自由支持梁——w 磅呎之等布載荷.</p>  <p>$\theta_1 = \theta_2 = \frac{wl^3}{24EI}$</p> <p>$R_1 = \frac{wl}{2}$, $R_2 = \frac{wl}{2}$</p>	<p>$\delta = \frac{wx}{24EI} (l^3 - 2lx^2 + x^3)$</p>	<p>最大 $= \frac{5wl^4}{384EI}$</p>	
<p>9. 兩端自由支持梁——偶力 M 加於右端.</p>  <p>$\theta_1 = \frac{Ml}{6EI}$</p> <p>$\theta_2 = \frac{Ml}{3EI}$</p> <p>$R_1 = \frac{M}{l}$, $R_2 = \frac{M}{l}$</p>	<p>$\delta = \frac{Mlx}{6EI} \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$</p>	<p>最大 $= \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$</p> <p>在 $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$.</p> <p>在中心, $\delta = \frac{Ml^2}{16EI}$.</p>	
<p>10. 兩端自由支持梁——偶力 M 加於左端.</p>  <p>$\theta_1 = \frac{Ml}{3EI}$</p> <p>$\theta_2 = \frac{Ml}{6EI}$</p> <p>$R_1 = \frac{M}{l}$, $R_2 = \frac{M}{l}$</p>	<p>$\delta = \frac{Mx}{6EI} (l - x)(2l - x)$</p>	<p>最大 $= \frac{Ml^2}{9\sqrt{3}EI}$</p> <p>在 $x = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) l$.</p> <p>在中心, $\delta = \frac{Ml^2}{16EI}$</p>	

而均勻載荷所生之撓度爲

$$\delta_2 = \frac{wx^2}{24EI} (x^2 + 6l - 4x).$$

A 與 C 間任何一點之總撓度，爲二者之和，即 $\delta = \delta_1 + \delta_2$ 。

P 對 P 以右任何剖面處所生之撓度，爲

$$\delta_3 = \frac{Pa^2}{6EI} (3x - a).$$

載荷 P 與自由端間任何一點之總撓度，爲

$$\delta = \delta_2 + \delta_3.$$

將 $x=l$ 代入上式，或將分布載荷 w 磅/呎及集中載荷 P 於自由端分別所生之撓度相加，可得自由端之總撓度。

$$\delta = \frac{wl^3}{8EI} + \frac{Pa^2}{6EI} (3l - a).$$

今再舉第二例，以說明如何用單載荷之結果及重疊法，以求受等布載荷（圖 188）之簡單支持梁上，任何一點之撓度。由 49 節第 7 類，

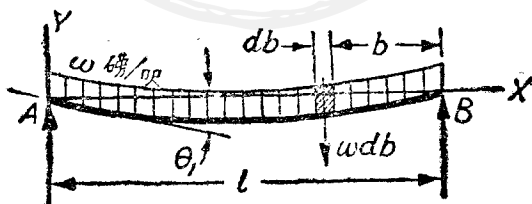


圖 188.

圖中所示元素載荷 wdb ，於支座 A 所生之偏角爲

$$d\theta_1 = \frac{wbdb(l^2 - b^2)}{6EI}.$$

當 b 自 0 變至 l , 此等元素之和為其總偏角 θ_1 .

$$\theta_1 = \int_0^l \frac{wb db (l^2 - b^2)}{6lEI} = \frac{wl^3}{24EI}.$$

中心之撓度, 可由 49 節第 7 類中心撓度之公式計之, 此公式為假定載荷在中心右側而來. 設載荷在中心左側, 此式亦可應用, 但此時 b 為載荷至左支座之距離. 任何在中心右側元素載荷 wdb , 在中心生一撓度

$$d\delta = \frac{wbdb}{48EI} (3l^2 - 4b^2).$$

總括中心右側元素載荷所生之撓度, 且注意左半梁上載荷於中心所生之撓度, 與右半梁上載荷所生者同, 得

$$\delta = 2 \int_0^{l/2} \frac{wbdb}{48EI} (3l^2 - 4b^2) = \frac{5}{384} \frac{wl^4}{EI}.$$

重疊法之最後例題, 為求有懸端之梁之撓度. 將此兩支座間之梁分成一部作為兩端支持之梁, 懸掛部分, 作為弦梁, 於是此梁化為表中所列之種類. 其任何剖面之梁撓度, 用重疊法以求之. 今舉一例, 一有懸臂之梁, 上加等布載荷 w (圖 189), 討論其彎曲. 此梁分為 AB 與 BC 二部, 懸臂對於支座間梁部分之作用, 可以切力 wa 及偶力 $M = \frac{wa^2}{2}$ 代之. 此切力直接傳至支座, 故僅偶力 $\frac{wa^2}{2}$ 需算耳. 於是支座間任何剖面處之撓度, 等於載荷 w 所生之撓度 (圖 189b), 減去偶力 $\frac{wa^2}{2}$ 所生之撓度之絕對值. 用 49 節第 8 及 9 二類之撓度方程式,

$$\delta = \frac{wx}{24EI} (l^3 - 2lx^2 + x^3) - \frac{wa^2lx}{12EI} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

用 49 節第 8 及 9 二類之斜度公式，可得 B 處剖面之轉角，設順時針方向之轉動為正，得

$$\theta_2 = \frac{wa^2l}{6EI} - \frac{wl^3}{24EI}.$$

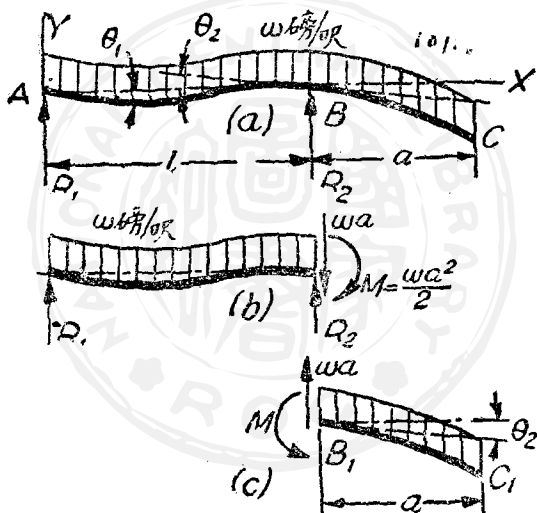


圖 180.

懸臂任何剖面處之撓度(圖 189c)，等於因剖面 B 轉動而生之撓度

$$\theta_2 x = \left(\frac{wa^2l}{6EI} - \frac{wl^3}{24EI} \right) x$$

加以懸梁之撓度(49 節, 第 3 類), 上式 x 之原點, 為 B 或 B_1 。

習 題

下列各題，由教師指定前述方法解之。

256. 用二次積分法或面積力矩法，證明 49 節中任何一類之結果。

257. 肘梁長 l ，由自由端起，一半長度上加等布載荷 w 磅/呎，求梁端之最大撓度。

258. 兩端支持梁之兩端，加以不相等而方向相反之偶力 M_1 及 M_2 ，求撓度曲線之方程式，及各端之轉角。

$$\text{答. } EIy = -\frac{M_1 l(l-x)}{6} \left[1 - \left(\frac{l-x}{l} \right)^2 \right] - \frac{M_2 lx}{6} \left(1 - \frac{x}{l} \right);$$

$$\theta_1 = \frac{(2M_1 + M_2)l}{6EI}, \quad \theta_2 = \frac{(M_1 + 2M_2)l}{6EI}.$$

259. 設 258 題中，梁之反曲點在離左支座 $\frac{l}{3}$ 處，求 M_1 與 M_2 必需所成之比。

$$\text{答. } M_2 = -2M_1.$$

260. 一梁自由支持於兩端，有偶力 Pc 彎曲之，如圖 190 所示，求撓度曲線之方程式，及梁兩端之斜度。

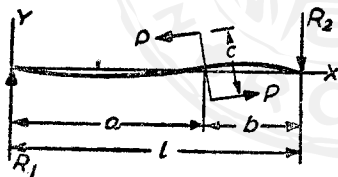


圖 190.

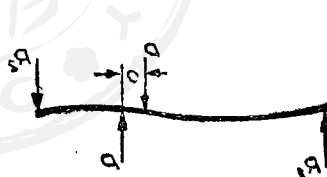


圖 191.

$$\text{答. } EIy = \frac{Pc x^3}{6l} - \frac{Pc x}{2l^2} \left[a^2 \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^3 \right] \text{ 適用於跨度 } a;$$

$$\theta_1 = \frac{Pc}{2l^2} \left[a \left(b + \frac{a}{3} \right) - \frac{2}{3} b^3 \right],$$

$$\theta_2 = \frac{Pc}{2l^2} \left[\frac{2}{3} a^3 - b^2 \left(a + \frac{b}{3} \right) \right].$$

此題又可將偶力 Pc 轉至圖 191 所示位置而解之。應用 49 節，第 7 類，令 c 近零。

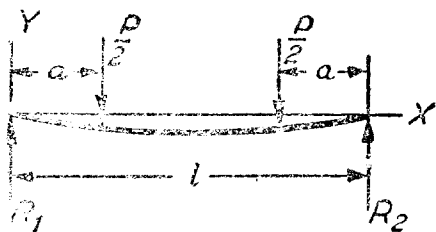


圖 192.

242.

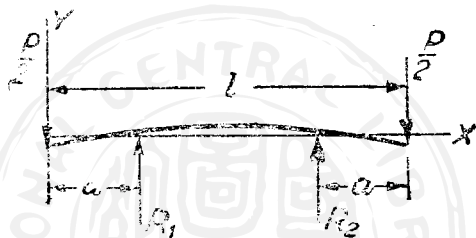


圖 191.

243.

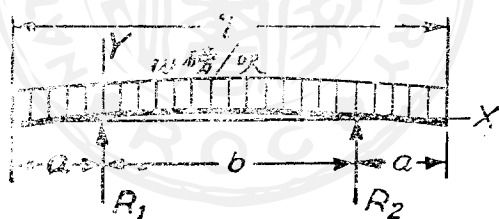


圖 193.

答. 於中心, $\delta = \frac{5nb^4}{38EI} - \frac{qa^2b^2}{4EI}$ 向下.

於各端, $\delta = \frac{qa^2}{24EI} (6b - 6a^2b - 2a^3)$ 向上.

244. 欲使 243 題中之梁彎矩最小, 求懸臂之長度, 且求在此條件下之中心撓度.

答. $a = 0.207l$,

$\delta = 0.609 \times 10^{-3} \left(\frac{q l^4}{EI} \right)$ 在中心, 向下.

而同時 $P\alpha$ 積上大小仍一定.

在 241—243 各題中, 試求所示各梁之撓度曲線方程式及最大撓度, 於支座水平面上擇定斷點.

241. 見圖 192.

答. $\delta = \frac{Pa}{3EI} \left(\frac{2}{3}l - a \right)$.

245. 求圖 195 所示梁之兩個撓度曲線方程式。

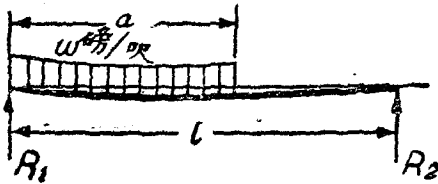


圖 195.

246. 一有懸臂之梁，在第一例中，一端加力 P (圖 196a)，在第二例中，同樣力加於跨度中心，圖 196b)，第一例中 D 點之撓度，等於第二例中 C 端之撓度，試證之。(此為馬克司惠爾定理之特例。)

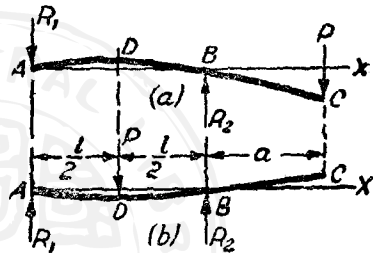


圖 196.

247. 在 175 題中，當載荷在生最大彎矩位置時，求梁中心之撓度。

答. $\delta = -\frac{P}{192EI} (8l^3 - 18ld^2 + d^3)$.

248. 圖 197 示二肱梁，其所負均勻載荷之強度相等，問二梁端撓度之比為何？

答. 7 比 41.

249. 圖 198 示一肱梁，求其端撓度。

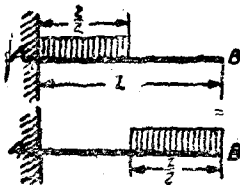


圖 197.

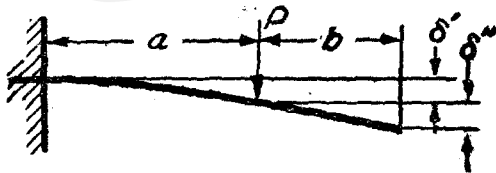


圖 198.

解. 一部分撓度 δ' ，為集中載荷 P 在長 a 之肱梁端所生者：由 49 節之公式， $\delta' = -\frac{Pa^3}{6EI}$ ， b 部分不受任何彎矩，故仍直，其外加撓度 δ'' ，等於此直部分之斜度，乘以距

離 b 。此斜度與長為 a 之肢梁端之斜度相同，其值為 $\theta = \frac{Pa}{2EI}$ ，故得外加撓度為 $\delta'' =$

$\left(\frac{Pa}{2EI}\right)b$ ，其總撓度為

$$\delta = \delta' + \delta'' = \frac{Pa^2}{6EI}(2a+3b) = \frac{Pa^2}{6EI}(2l+b) = \frac{Pa^2}{6EI}(3l-a).$$

250. 一梁長 l ，有等長懸臂(見圖 199)，兩端各加等力 P 。求距離 x ，使(1)中心之撓度，等於各端之撓度，(2)中心撓度值最大。 答：(1) $x = .152l$ ；(2) $x = \frac{l}{6}$ 。

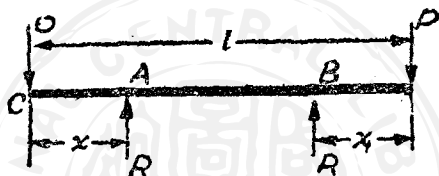


圖 199.

251. 一 12 吋 40.8 磅之標準工字梁，長 14 呎，一支座在梁端，一支座離他端 5 呎處，所負等布載荷之總量，為 36,000 磅。求 (a) 最大纖維應力，及 (b) 懸臂頂端之撓度時數。 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋。

答：(a) 8,000 磅/方吋。

(b) $\delta = 0.062$ 吋，向下。

252. 肢梁長 8 呎，自固定端起至長 5 呎處，負等布載荷 1,000 磅/呎，在自由端又負集中載荷 2,000 磅。設 $s_w = 16,000$ 磅/方吋，試證欲負此載荷，應用 10 吋 25.4 磅之標準工字梁。設 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋， $l = 122.1$ 吋，求其最大撓度。

253. 如圖 200，試求載荷 P 處之斜度及撓度公式。

答： $\delta = \frac{Pab^2}{2EI}$ 。

254. 選擇一木梁(圖 201)，以負圖中所示載荷，設其闊為 $4\frac{1}{2}$ 吋，共許

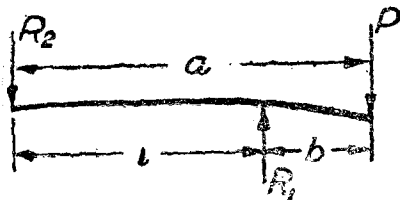


圖 200.

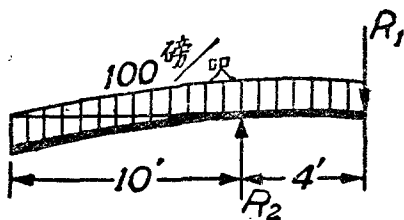


圖 201.

可纖維應力為 1,250 磅/方吋。設 $E=1.5 \times 10^6$ 磅/方吋，求其左端之撓度。

255. 圖 202 示一負載荷之梁，求三段各段中最大撓度之位置及數值。假定 $I=253.2$ 吋⁴ 及 $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋。

答。在 $x=3.18$ 呎， $v=-0.00963$ 吋。

在 $x=7.58$ 呎， $v=+0.0090$ 吋。

在右端， $v=-0.191$ 吋。

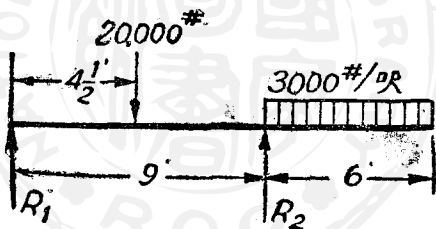


圖 202.

256. 工字鋼梁長 20 呎，自由支持於兩端，負一分布載荷，在左端之強度為 2,000 磅/呎，右端之強度為 1,000 磅/呎，其間之變動均勻。設 $I=441.8$ 吋⁴，及 $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋，求其最大撓度。

答。 $\delta_{\text{最大}} = -0.468$ 吋，於 $x=9.83$ 呎處。

257. 一長 30 呎之工字鋼梁，支持於三分之一處之二點上，各端各加載荷 P ，中心加載荷 $4P$ 。設 $P=1,000$ 磅， $I=36.2$ 吋⁴，及 $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋，求中心之撓度。

答。 $\delta = 0.003$ 吋，向上。

258. 一工字鋼梁長 20 呎，自由支持於兩端，上載二集中載荷。一為 10,000 磅，置於距左端 4 呎處；一為 20,000 磅，置於距右端 6 呎處。設 $I=757$ 吋⁴， $E=30 \times 10^6$

磅/方吋，求各載荷下之撓度，與最大撓度之數值及位置。

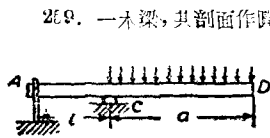


圖 203.

259. 一木梁，其剖面作圓形，支持於 A 及 C ，如圖 203 所示，懸臂 CD 上負 w 磅/呎之等布載荷。設 $l=3$ 呎， $a=3$ 呎， $w=300$ 磅/呎， $sc=1$ ， 200 磅/方吋，及 $E=1\frac{1}{2} \times 10^6$ 磅/方吋，求剖面之直徑及 D 點之撓度。

答. $d=8.19$ 吋; $\delta=0.422$ 吋.

260. 懸梁長 10 呎，負等布載荷，求距自由端 2 呎處之撓度。此梁為 6 吋 $14\frac{3}{4}$ 磅之工字梁 ($I=23.8$ 吋⁴)：其應力為 15,000 磅/方吋， $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋。

答. $\delta=0.472$ 吋.

261. 求圖 141 所示之柱頂之撓度。用 $E=1.5 \times 10^6$ 磅/方吋。

答. $\delta=0.070$ 吋.

262. 圖 195 示一梁，設 $l=20$ 呎， $a=12$ 呎， $w=1,000$ 磅/呎， $I=199.4$ 吋⁴，及 $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋，求最大撓度之位置及大小。

答. $\delta_{\text{最大}}=0.397$ 吋，在 $x=9.48$ 呎處。

263. 二矩形木梁，左端(圖 204)夾緊，右端以螺釘旋緊，使梁彎曲。設梁之工作應力及螺釘之工作應力，同時達到，求螺釘之直徑 d 。梁長 $l=3$ 呎，深 $h=8$ 吋，闊 $b=6$

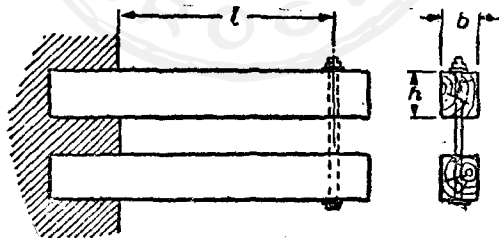


圖 204.

吋，木之 $sw=1,500$ 磅/方吋，木之 $E=1.5 \times 10^6$ 磅/方吋。當螺釘內張應力為 12,000 磅/方吋時，求梁之撓度。

答. $d=0.470$ 吋; $\delta=0.6864$ 吋.

234. 設載荷 P , 沿桿 AB 滾動, P 之位置恆在同一水平面上, 求桿軸在彎曲時之方程式。(圖 205)

答. $y = + \frac{Px^3}{3EI}$

255. 49 節第 5 類所示之梁, 設已知其工作應力 s_w , 求其安全撓度. 其剖面深 h . 再求 49 節第 1 類受端載荷之筋梁安全撓度.

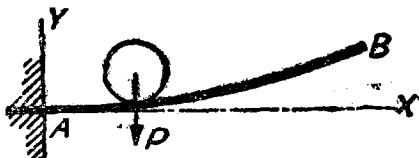


圖 205.

答. (b) $\delta = \frac{2}{3} \frac{s_w l^2}{Eh}$

266. 二木板之厚不同, 一為 h_1 , 一為 h_2 , 互相重疊, 擔負一等布載荷, 如圖 206 所示. 求兩板內最大應力之比.



圖 206.

解. ——各板之撓度曲線及曲率相同; 故二者彎矩之比, 與二者剖面慣矩之比相同, 即, 成 $h_1^3 : h_2^3$ 之比. 二者剖面係數成 $h_1^2 : h_2^2$ 之比; 故二者最大應力成 $h_1 : h_2$ 之比.

267. 一鋼桿 AB , 有若干初曲率, 為力 P (圖 207) 平直後, 此桿沿剛平面 MN 上生一等布壓力. 設 $l=20$ 吋, $\delta=.1$ 吋, 桿剖面為每邊 1 吋之正方形, 求使桿平直所需之力 P , 及桿內所生之最大應力. $E=50 \times 10^6$ 磅/方吋.

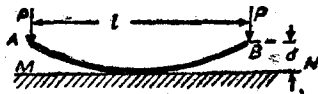


圖 207.

指示. ——欲得等布壓力, 桿之初曲率, 必與

簡單支持而負強度 $\frac{2P}{l}$ 之等布載荷之梁撓度曲線相同.

答. $P=1,200$ 磅; $\sigma_{\text{最大}}=23,000$ 磅/方吋.

11. 變剖面梁。——以前所論者，為稜柱形梁，用此假設所得計算應力及撓度之基本方程式，對於變剖面梁，亦可應用。(註 12)

第一例，論等強度梁之撓度，即，一梁之剖面係數沿梁之變化，與其彎矩成比例。於是，由(63)式，其最大纖維應力， $\sigma_{\text{最大}} = \frac{M}{\left(\frac{I}{c}\right)}$ ，沿梁之各點為一定，可使之等於 s_w 。此條件對於所用材料，甚為有利，因祇用適當面積，以滿足強度之條件也。

圖 208 示一負端載荷之肋梁，距載荷 x 之剖面上之彎矩，其數值等於 Px 。欲得等強度之梁，其剖面係數必與 x 成比例。此條件可用數法滿足之。

第一例題，討論矩形剖面之例，其闊 b 一定，深 h 變動。因各剖面上之 $\sigma_{\text{最大}}$ 為一定，故取自由端 x 之任何剖面上之 $\sigma_{\text{最大}}$ ，必等於固定端之 $\sigma_{\text{最大}}$ 。於是

$$\sigma_{\text{最大}} = \frac{M}{I} = \frac{Px \cdot c}{bh^3} = \frac{cPl}{bh^3} \quad (a)$$

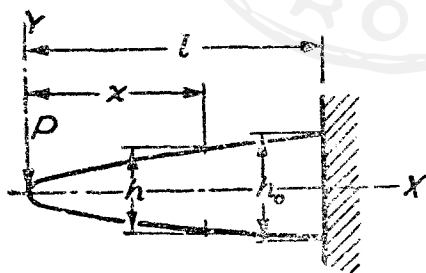


圖 208.

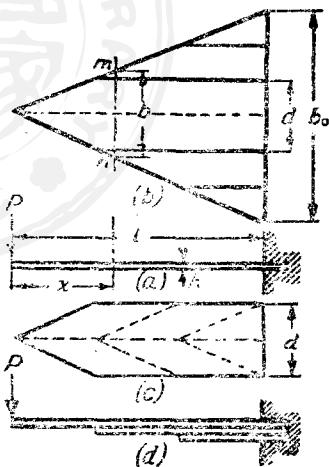


圖 209.

註 12. 欲知其正確解法，見 Timoshenko's "Strength of Materials," Vol. I, 18 節。

式中 h_0 為固定端之梁深度，由此方程式得

$$h^2 = \frac{h_0^2 x}{l}$$

由此可知此例之梁深度，依照拋物線形定律而變化，在載荷端，其剖面面積為零。在得等強度梁形時，切應力略去不計，故得此結果。在實際應用時，此應力必算入，上述形式，在載荷端處，宜稍改變，使有充分剖面面積，以傳此切力。

I 為變動慣矩，依 x 而變遷，於是梁端之撓度，可由二次積分法或面積力矩法求之。以下解法，乃用面積力矩法。

$$\delta = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{12Px^2 dx}{Ebh^3} = \frac{12Pl^2}{Ebh_0^3} \int_0^l \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \frac{Pl^3}{EI_0} \quad (b)$$

式中 $I_0 = \frac{bh_0^3}{12}$ 表示固定端剖面之慣矩。與 49 節第 1 類相比，知此撓度，為與柱形梁彎曲剛性為 EI_0 ，受同一載荷，撓度之二倍。即，此桿有相同之強度，但不及柱形梁剛強。

第二例，討論矩形剖面之桁梁，其深度 h 一定，闊 b 變動（圖 209）。因三角形梁之剖面係數及慣矩 I ，隨 x 增加之比例，與彎矩增加之比例同，其最大應力 $s_{\text{最大}}$ 及曲率（見 60 式）沿梁恆為一定，其曲率半徑可如下求之（見 59 式）：

$$s_{\text{最大}} = \frac{hE}{2\rho} \quad (c)$$

撓度小時，圓弧之端撓度等於

$$\delta = \frac{l^2}{2\rho} = \frac{Pl^3}{2EI_0} \quad (d)$$

因 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_0}$ ，將 (c) 代入 (d)，得

$$\delta = s_{\text{最大}} \frac{l^2}{hE} \quad (e)$$

由此式可知在此種等強度之肋梁，其頂端之撓度，與長度之平方成正比，與深度成反比。此結果可用以計算片簧內之近似應力及撓度。上述三角形板想像分為數條，如圖 209c, d 排列之。求第一次近似值時，其初曲率及條間之摩擦，可略去不計，於是(e)式可視為相當正確。

習 題

268. 一鋼板之形，如圖 210 所示，一端固定，他端加一力 P ，求頂端之撓度。

$$\text{答. } \delta = \frac{17Pl^3}{6EI} = \frac{3Pl^3}{Ebd^3}$$

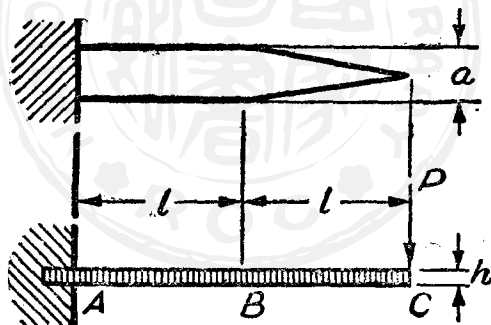


圖 210.

269. 求車片簧(圖 209)之闊 d ，及其撓度，設 $P=6,000$ 磅， $h=\frac{1}{2}$ 吋， $l=24$ 吋， $s_0=70,000$ 磅/方吋，及片數 $n=10$ 。

$$\text{答. } d=1.94 \text{ 吋; } \delta=2.69 \text{ 吋.}$$

270. 將圖 11 所示軸之中心撓度及端斜度，與等長但剖面一定之軸（其慣矩等於

I_0 ）之數值，互相比較。取 $I_1:I_0=2$ 。

$$\text{答. } \text{撓度成比 } \frac{9}{13} \frac{1}{l}$$

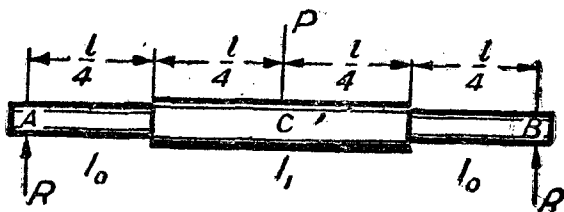


圖 211

271. 求片簧之最大撓度，設 $l=33$ 吋， $h=\frac{1}{2}$ 吋， $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋， $c_{10}=60,000$ 磅/方吋。

52. 切力對於梁撓度之效應。——以前所論(見 41 或 44 節)，僅計算彎矩作用所生之撓度。切力對於相鄰剖面上之互相滑動作用，能生外加之撓度。因切應力不等布之結果，原為平面之剖面，變為曲面，如圖 212 所示，此圖係示切力單獨所生之彎曲。(註 13) 質心處之剖面元素，仍為垂直，惟互相滑動；(註 14) 故切力單獨所生撓度曲線之斜度，於每剖面等於此剖面質心之切應變。以 y_1 表示切所生撓度，得每剖面之斜度公式如下：

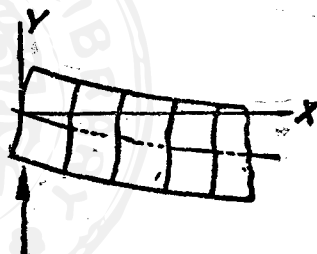


圖 212.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{(s_s)y_1}{G} = -\frac{kV}{AG}, \quad (a)$$

式中 $\frac{V}{A}$ 為平均切應力 s_s ， G 為切彈性係數， k 為一數值因數，欲得剖

註 13. 彎矩所生變形，即包括相鄰剖面之相對轉動，已除去。

註 14. 此假設假定纖維間無壓力之存在，見 Timoshenko's "Theory of Elasticity," 第 42 頁。

面質心上之切應力，必將平均切應力乘此因數。設剖面為矩形， $k = \frac{3}{2}$ （見 66 式）；剖面為圓形， $k = \frac{4}{3}$ 。設梁上有連續載荷，切力 V 為一連續函數，此函數可對 x 微分，於是，切單獨所生之曲率，為

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{k}{AG} \frac{dV}{dx} = + \frac{k}{AG} w.$$

此曲率與彎矩所生曲率（見 71 式）之和，為

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left(M + \frac{kEI}{AG} w \right) \quad (90)$$

在求各題之撓度時，倘欲將切力效應計入，則宜用此式，而不用 (71) 式。已知 M 及 w 為 x 之函數，(90) 式可迅速積分矣。（註 15）

此例倘用共軛梁解法，亦甚便利，惟想像載荷圖之縱座標不僅用 M ，而應取

$$M + k \frac{EI}{AG} w. \quad (b)$$

例如，討論一簡單支持之梁，負均勻載荷（圖 213），其任何剖面 x 處之彎矩為

$$M = \frac{wl}{2} x - \frac{wx^2}{2}. \quad (c)$$

共軛梁上之載荷，包括二部：(1) 為 (b) 式之第一項，即拋物線形彎矩圖（圖 213b）所示者，(2) 為 (b) 式之第二項，即 $k \left(\frac{EI}{AG} \right) w$ ，因 w 為一定，此為等布載荷，如圖 213c 所示。

切力在任何剖面處所生之外加撓度，為此種載荷在共軛梁上該剖面處之彎矩，除以 EI ，於是梁中心之外加撓度為

$$\delta_1 = \frac{1}{EI} \left(k \frac{EI}{AG} w \right) \frac{l^3}{8} = \frac{kl^3 w}{8AG}.$$

註 15. 切應力所生撓度，亦可用應變能法求之：見 Timoshenko's "Strength of Materials," Vol. 1, 67 節。

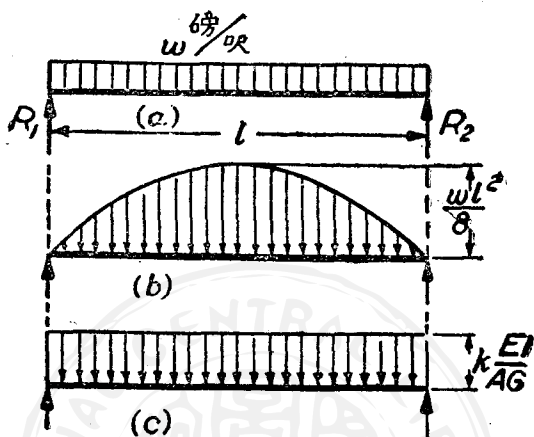


圖 213.

將此加於彎矩所生之撓度(見 49 節, 第 8 類), 得總撓度

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{wl^4}{EI} + \frac{kl^2w}{8AG} = \frac{5}{384} \frac{wl^4}{EI} \left(1 + \frac{48k}{5} \cdot \frac{r^2}{l^2} \cdot \frac{E}{G} \right), \quad (d)$$

式中 $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ 為剖面對於 z 軸之迴轉半徑。

深度為 h 之矩形剖面, $r^2 = \frac{1}{12}h^2$, $k = \frac{3}{2}$. 使 $\frac{E}{G} = 2(1+\mu) = 2.6$ (見 33 式). 由

(d)得

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{wl^4}{EI} \left(1 + 3.12 \frac{h^2}{l^2} \right).$$

由此可知, 設 $\frac{l}{h} = 10$, 切力對於撓度之效應, 約為百分之 3. 當比 $\frac{l}{h}$ 減小, 此效應增加.

工字梁之因數 k , 恆大於 2, 當梁短小, 切力效應較大. 用(64b)式及圖 156, 得

$$\frac{kV}{A} = \frac{V}{b_1 I} \left[\frac{\delta h^2}{8} - \frac{h_1^2}{8} (b - b_1) \right],$$

由此

$$k = \frac{A}{b_1 I} \left[\frac{\delta h^2}{8} - \frac{h_1^2}{8} (b - b_1) \right]. \quad (e)$$

例如，設 $h=24$ 吋， $A=31.0$ 方吋， $I=2,810$ 吋⁴，腹板厚 $b_1=\frac{5}{8}$ 吋， $l=3h$ 。於是由 (e) 式，得 $k=2.42$ 。代入 (d) 式，得

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{wl^4}{EI} \left(1 + \frac{48}{5} \times 2.42 \times \frac{2,810}{31 \times 144} \times 2.5 \right) \times 1.265 \frac{Fwl^4}{684 EI}$$

此例中切所生之外加撓度，為彎矩所生撓度之百分之 26.5，故必計入。

在以上討論中，梁剖面均假定可以自由翹曲，如圖 212 所示。受平均載荷之梁，為能大略滿足此條件之一例。此種梁中心之剪力為零，故此處無翹曲。由中心向左或向右行，其翹曲漸次隨剪力而遞增。故可滿足對於中心剖面之變形對稱條件。設中心加集中載荷，其條件不同；欲知此例及他例之討論，見魏木生可氏“材料力學”，卷一，第 40 及 67 節。

53. 當載荷不平行於二彎曲主平面時，梁內之應力及撓度。——先討論肱梁之簡單例題，其剖面有二對稱軸（圖 214）。頂端之載荷

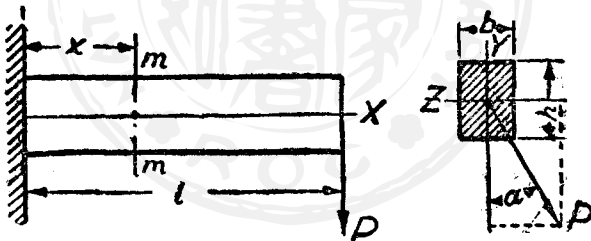


圖 214.

P ，垂直於梁軸，與剖面主軸 Y 成 α 之角度。在計算梁應力及撓度時，將用重疊法。沿剖面之二主軸方向，分解 P 為二分力 $P \cos \alpha$ 及 $P \sin \alpha$ 。各分力所生撓度，可用對稱平面內彎曲之理論求之。於是，其總撓度用重疊法得之。在肱梁任何剖面 mm 上之二分彎矩絕對數值，對於 z 軸者為 $M_z = (P \cos \alpha)(l-x)$ ，對於 y 軸者，為 $M_y =$

$(P \sin \alpha)(l-x)$. 由二分力類與 y 及 z 軸之方向, 可知力矩 M_z 在正 y 處生張力, M_y 在正 z 處生張力. 於是在剖面上任何一點 $Q(y, z)$ 之正應力 s_x , 爲 M_z 及 M_y 分別所生應力之和. 故得方程式

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{(P \cos \alpha)(l-x)y}{I_x} + \frac{(P \sin \alpha)(l-x)z}{I_y} \\ &= P(l-x) \left[\frac{y \cos \alpha}{I_x} + \frac{z \sin \alpha}{I_y} \right]. \end{aligned} \quad (a)$$

設取諸點, 其座標能使 (a) 式括弧內之式等於零, 則得中立軸. 故中立軸之方程式爲

$$\frac{y \cos \alpha}{I_x} + \frac{z \sin \alpha}{I_y} = 0. \quad (b)$$

此爲一軸, 經過剖面之質心, 與 z 軸成角度 β (見圖 215), 由 (b) 式得 β 值

$$\tan \beta = -\frac{y}{z} = \frac{I_x}{I_y} \tan \alpha. \quad (c)$$

普通可知 $\tan \beta$ 不等於 $\tan \alpha$; 故中立軸 mn 不垂直於彎力平面, 而垂直於 mn 之撓度曲線平面, 不與彎力平面相符合. 僅當 $\tan \alpha = 0$ 或 ∞ , 或 $I_x = I_y$ 時, 此二面始相符合. 在前兩種情形, 彎力平面與彎曲主平面之一相符合. 在後種情形, 因二主慣矩相等, 任何二垂直方向, 可作爲剖面之二主軸. 當 $\frac{I_x}{I_y}$ 爲一大數時, 即

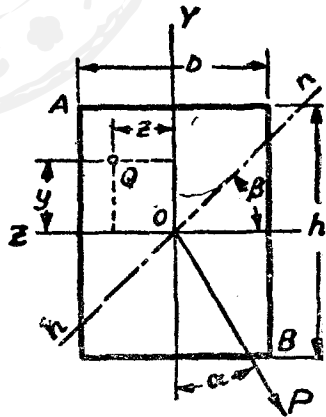


圖 215.

當在 xy 平面內之梁剛性，遠較 xz 平面內之剛性為大時， $\tan \beta$ 較 $\tan \alpha$ 為大，而當 α 甚小時， β 可近 90° ，此時中立軸與縱軸相近。撓度將主要在 xz 平面內，即有在最大撓曲性面內撓曲之傾向。此可用薄尺簡單表示之。倘彎力對最大剛性平面稍有偏差，則在垂直方向發生彎曲。此又可用下法表示之，即將力 P （圖 214）分為二分力，然後計算各分力所生之撓度。設肱梁在水平面內之彎曲剛性，遠較在垂直平面內者為小，則一小水平分力，所生水平撓度，遠較在垂直平面內者為大；故總撓度將主要在最大撓曲性平面內。

當中立軸方向已定，最大正應力之點，為距中立軸最遠者。在所舉例題，最大張力在 A 點，而最大壓力在 B 點。將 $x=0; y=\frac{h}{2}; z=\frac{b}{2}$ ，代入(a)式，得

$$(s_x)_{\text{最大}} = Pl \left(\frac{h \cos \alpha}{2I_z} + \frac{b \sin \alpha}{2I_y} \right). \quad (d)$$

B 點之壓應力大小，與此值同。上述應用於有二對稱平面而有端載荷之肱梁方法，亦可用之於兩端支持而負數載荷之梁。將每力沿剖面之二對稱軸方向，分成二分力，於是此問題即化為在二主平面內之梁彎曲簡單問題。其總撓度，可將主平面內二撓度重疊，即得。

設一梁剖面祇有一對稱軸，或全無對稱軸，欲得彎曲而無扭轉，則力必加於平行於梁軸之線內，且經過扭轉中心。^(註 16)

註 16. 欲知扭轉中心之討論，見 Timoshenko's "Strength of Materials," Vol. I, 41 節。

習 題

272. 一矩形木梁，負強度 w 之等布載荷，兩端支持於圖 216 所示位置。設梁長 l

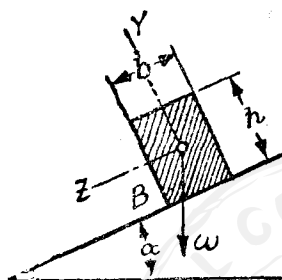


圖 216.

$= 10$ 呎， $w = 200$ 磅/呎， $h = 8$ 吋， $b = 6$ 吋， $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ ，求中心之最大正應力及垂直撓度。

解。——中心之最大彎矩為

$$M_{\text{最大}} = \frac{wl^2}{8} = \frac{200 \times 10^2}{8} = 2,500 \text{ 呎磅} = 30,000 \text{ 吋磅。}$$

在主平面內之分彎矩為 $M_z = M_{\text{最大}} \cos \alpha = 3,000 \times \frac{3}{4} = 22,500$ 吋磅，及 $M_y = M_{\text{最大}} \sin \alpha = 3,000 \times 0.316 = 9,500$ 吋磅。

B 點之最大壓應力為

$$(s_z)_{\text{最大}} = \frac{6 \times 22,500}{bh^2} + \frac{6 \times 9,500}{hb^2} = 543 \text{ 磅/方吋。}$$

在二主平面內之中心撓度為

$$\delta_y = \frac{5}{84} \frac{wl^4 \cos \alpha}{EI_z} \quad \text{及} \quad \delta_z = \frac{5}{384} \frac{wl^4 \sin \alpha}{EI_y}$$

中心之垂直撓度為

$$\delta = \delta_y \cos \alpha + \delta_z \sin \alpha = \frac{5}{384} \frac{wl^4}{EI_z} \left(\cos^2 \alpha + \frac{I_z}{I_y} \sin^2 \alpha \right) = 0.117 \text{ 吋} \times 1.08 = 0.126 \text{ 吋。}$$

273. 設上題中支座間之距離為 5 呎，且該梁有二懸臂，長各 2 呎，試解之。

274. 一 Z 剖面之肋梁（圖 217），頂端負垂直載荷 $P = 400$ 磅。求最大正應力 s_z ，及頂端撓度之縱橫部分。各尺寸已載於圖中。 $\alpha = 15^\circ 40'$ ，主慣矩 $I_z = 35.1$ 吋⁴，及 $I_y = 4.06$ 吋⁴。腹板及突緣之厚 $= \frac{1}{2}$ 吋。 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋。

答. 最大 $s_x = 5,140$ 磅/方吋, 於 B 點; $\delta_{\text{縱}} = 0.153$ 吋; $\delta_{\text{橫}} = 0.682$ 吋.

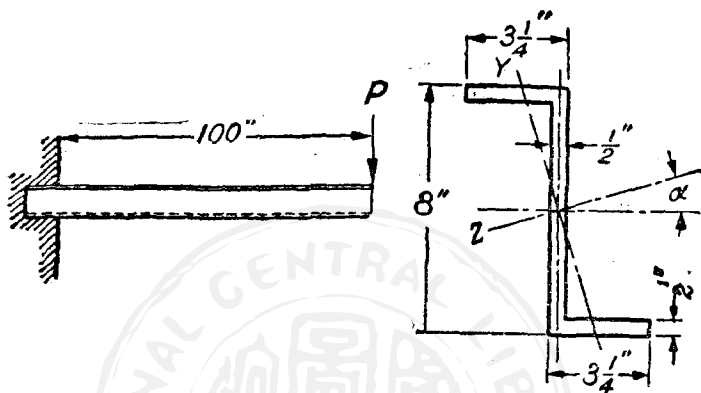


圖 217.

275. 一矩形剖面眩梁, 在頂端以力 F 彎曲之. 設角度 α (圖 214) 自 0 變至 2π , 問載荷端描畫何種曲線?

答. 此曲線為一橢圓, 其半軸為 $\frac{Pl^3}{3EI_x}$ 及 $\frac{Pl^3}{3EI_y}$.

第八章

關於彎曲之靜力不定問題

51. 多衍拘束。——在以前討論中，已論及三種梁：(a) 懸梁，(b) 兩端支持梁及(c) 梁有懸臂者。在此三種例中，其支座處之反動力，可用靜力學之基本方程式求之；故此類問題，為靜力可定 (statically determinate)。今將討論梁彎曲問題，在此問題中，所有靜力方程式不足以求各支座之反動力，故必根據梁撓度之考慮，以得外加方程式。此種問題，稱為靜力不定 (statically indeterminate)。

今討論梁各種不同式之支持。圖 218a 所示支持，稱為鉸釘活動

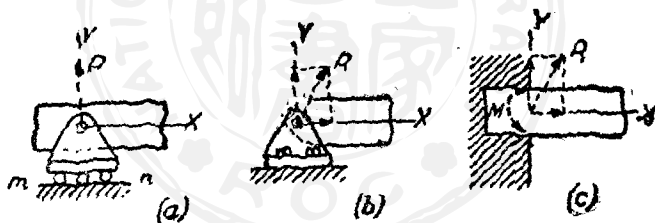


圖 218.

支座 (hinged movable support)。略去鉸內及輾 (rollers) 內之摩擦，則在此式支座之反動力，必經過鉸中心，且必垂直於輾所滾動之平面 mn 上。故反動力之加力點及方向，均屬已知。所仍屬未知之元素，乃

爲反動力之大小。

圖 218b 示一鉸而不可動之支座(hinged immovable support)。在此例中，其反動力必經過鉸中心，但此力在圖平面內可有任何方向。欲求之未知數有二，即反動力之方向及其大小，或其相當者，爲反動力之垂直及水平分力。

圖 218c 示固定端(built-in end)。在此例中，不獨反動力之方向與大小爲未知，且其加力點亦爲未知。分布於固定剖面處之反動力，可以一作用於剖面質心之力 R 及一偶力 M 代之。故欲求之未知數有三，即反動力 R 之二分力，及偶力 M 之大小。一梁受同一平面內之橫載荷時，有三靜力方程式，可用以定支座反動力，即，

$$\Sigma X = 0; \quad \Sigma Y = 0; \quad \Sigma M = 0. \quad (a)$$

設梁支持後，僅有三未知反動元素，則此未知數可由 (a) 式求之；故此問題爲靜力可定。此三元素適足使梁保持不動。當反動元素數大於三，則謂有多衍拘束，而此問題爲靜力不可定。

梁僅支持於一點，即固定端。在此例，前已言之，其未知反動元素數爲三，此可用靜力方程式定之。在兩端支持梁，及有懸臂之梁，常假定一支座爲不可活動鉸，而另一支座爲活動鉸。在此情形，仍祇三未知反動元素，此可由靜力方程式求之。

設梁兩端均有不可活動鉸(圖 219)，此問題變爲靜力不可定。每端有未知元素二，即反動力之二分力，而欲求此四未知數，僅可得三方程式 (a)。故有一多衍拘束，欲求其反動力，必考慮此梁之撓度。當撓度與梁長度相比而甚小時，水平分力 H 所生之張應力，與彎曲應

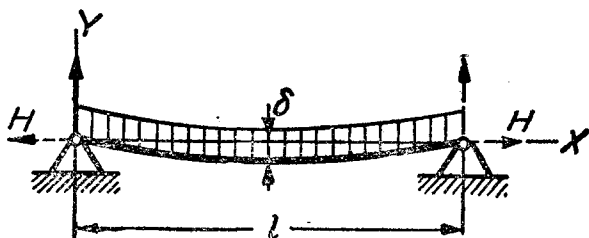


圖 219.

力相比，恆甚小，可略去。一般習慣計算支持梁時，假定二支座之一為活動鉸，雖然許鉸自由運動之特種設備，在實際上僅在長跨度橋樑用之，此習慣由以上敘述，可證明合理。故在此章所述，亦假定無水平反動力作用於支座。

以下所論關於彎曲之靜力不定問題中，於二次積分解法及面積力矩解法，僅略述之，而重疊法則言之頗詳，在此法中，組合靜力可定之例，以滿足支座之條件而得解法。

55. 靜力不定梁之二次積分解法。——今舉固定於一端而自由支持於他端之梁，如圖 220a 所示，以說明之。假定此梁在水平方向固定於左壁內，且二支座在同一水平面內。力作用於固定支座處之正確情形，殊為複雜，但其效應與一垂直力 R_1 及偶力 M (圖 220b) 相當。於是，有三未知反動力元素 R_1, R_2 及 M ，但僅可得二靜力平衡方程式，即， $\Sigma Y = 0$ ，及 $\Sigma M = 0$ 。(因假定在左支座處無水平反動力，故 $\Sigma X = 0$ 已包含在內矣。)此處所用二次積分法，其與前章不同處，除四未知積分常數外，尚有三未知數 R_1, R_2 及 M_1 加入解法中。欲求此七未知數，需立七條件方程式。在書微分方程式， $EI\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) =$

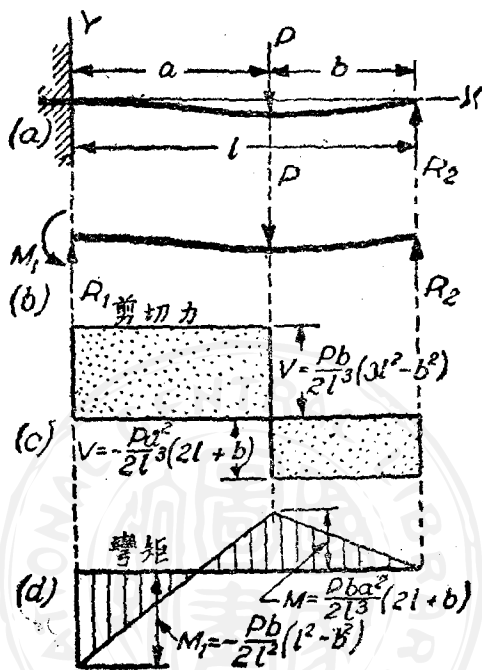


圖 220.

M ，中之力矩式時，應注意 M_1 為負量，因如圖所示，其作用在使梁向下凹也。

自 $x=0$ 至 $x=a$,

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M_1 + R_1 x, \quad (a)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -M_1 x + R_1 \frac{x^2}{2} + C_1. \quad (b)$$

$$EIy = -M_1 \frac{x^2}{2} + R_1 \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2. \quad (c)$$

自 $x=a$ 至 $x=l$,

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_1 + R_1 x - P(x-a). \quad (d)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -M_1 x + R_1 \frac{x^2}{2} - P \frac{(x-a)^2}{2} + C_3. \quad (e)$$

$$EIy = -M_1 \frac{x^2}{2} + R_1 \frac{x^3}{6} - P \frac{(x-a)^3}{6} + C_3 x + C_4. \quad (f)$$

以上諸式中，共有六未知常數， M_1, R_1, C_1, C_2, C_3 及 C_4 。其所需之六個解決條件為：

- (1) 當 $x=0$, (b) 內之 $\frac{dy}{dx} = 0$, 得 $C_1 = 0$;
- (2) 當 $x=0$, (c) 內之 $y = 0$, 得 $C_2 = 0$;
- (3) 當 $x=a$, (b) 內之 $\frac{dy}{dx} =$ (e) 內之 $\frac{dy}{dx}$, 得 $C_1 = C_3 = 0$;
- (4) 當 $x=a$, (c) 內之 $y =$ (f) 內之 y , 得 $C_2 = C_4 = 0$;
- (5) 當 $x=l$, (f) 內之 $y = 0$, 得 $-\frac{M_1 l^2}{2} + R_1 \frac{l^3}{6} - P \frac{(l-a)^3}{6} = 0$;
- (6) 當 $x=l$, (d) 內之 $M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, 得 $-M_1 + R_1 l - P(l-a) = 0$.

此最後條件，換言之，為對於右端之 $\Sigma M = 0$ 。

(5) 及 (6) 所示條件方程式，可用以解決未知數 M_1 及 R_1 。聯立解之，

$$R_1 = \frac{Pb(3l^2 - b^2)}{2l^3}, \quad (g)$$

$$M_1 = \frac{Pb(l - b)}{2l}. \quad (h)$$

M 之絕對值，如上法得之。圖示之偶力 M ，為負偶力，因其單獨作用在使彈性曲線彎曲向下凹也。(h)式內 M_1 之正值，僅暗指圖示之方向為正確，故左支座之彎矩，實為負值也。

第七未知數 R_2 ，可用 $\Sigma Y = 0$ 求之。

$$R_2 = P - R_1 = \frac{Pa^2}{2l^3}(2l + b). \quad (i)$$

於是可畫切力及彎矩圖，如圖 220c 及 d 所示。

其最大正力矩，發現於載荷之下，其大小求得

$$M = \frac{Pba^2}{2l^3}(2l + b). \quad (k)$$

53. 靜力不定梁之面積力矩解法。——今用面積力矩法，以解三問題，其一為前節已述者。在第一例題，其梁固定於一端，自由支持於他端，如圖 221a 所示。在左端畫(水平)切線，且畫部分力矩圖，如圖 221b，以 R_2 為單獨未知數。右端對於左端切線之撓度為零；故由第二面積力矩定理，力矩圖對於右端之第一力矩，必為零。是以

$$(R_2 l) \left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{2l}{3} \right) - (Pa) \left(\frac{a}{2} \right) \left(\frac{2a}{3} + b \right) = 0,$$

由此

$$R_2 = \frac{Pa^2}{2l^3}(2l + b).$$

由 $\Sigma Y = 0$ ，得

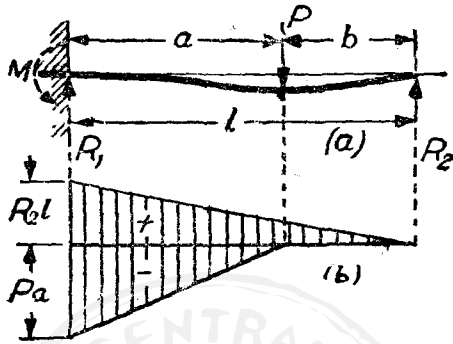


圖 221.

$$R_1 = \frac{Pb}{2l^3}(3l^2 - b^2).$$

由對於固定端 $\Sigma M = 0$, 得此端之力矩爲

$$M_1 = \frac{Pb}{2l^3}(l^2 - b^2).$$

載荷 P 下之力矩爲

$$M = \frac{Pba^2}{2l^3}(2l + b).$$

此梁之習慣彎矩圖, 如圖 221f 所示.

在第二例題中(圖 222), 梁支於三支座上, 右支座在其他二支座水平面下 $\frac{1}{4}$ 吋. 此梁爲木製, 其剖面爲 10 吋 \times 12 吋. $E = 1.5 \times 10^6$ 磅/方吋. 在中心支持上繪切線, 如圖 222b 中 mq 所示之位置. 繪部分力矩圖, 如圖 222c 所示. 用力矩圖, 或對中心支座取 $\Sigma M = 0$, 可知 $R_1 = R_3$.

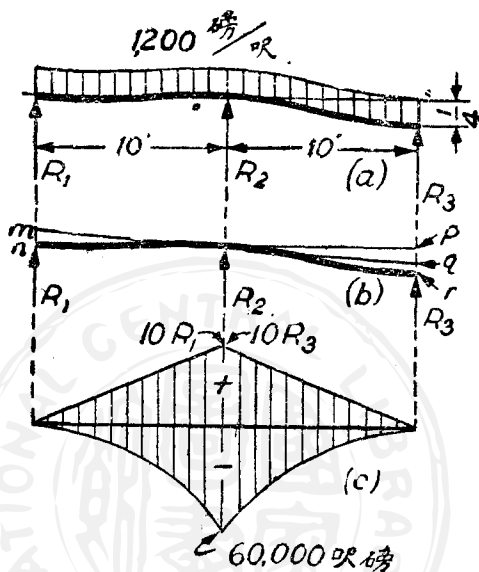


圖 222.

右端之全撓度為

$$pq + qr = -\frac{1}{4}. \quad (a)$$

qr 及 mn ($mn = pq$), 可應用第二面積力矩定理求之。因 n 及 r 均在切線 mq 之下, mn 及 qr 均為負。將所得 pq 及 qr 代入 (a) 式, 得

$$\left[\frac{10R \times 10}{2} \times \frac{20}{3} - \frac{60,000 \times 10}{3} \times \frac{30}{4} \right]$$

$$+ \left[\frac{10R_3 \times 10}{2} \times \frac{20}{3} - \frac{60,000 \times 10}{3} \times \frac{30}{4} \right] = \frac{E \left(-\frac{1}{4} \right)}{1,728}$$

因 $R_1 = R_3$, 上式可以解決, 得 $R_1 = R_3 = 4,030$ 磅。

由 $\Sigma Y = 0$, 得 $R_2 = 15,940$ 磅。

最大彎矩及應力, 今可計算之: 最大正力矩發生於 $x = 3.36$ 呎處, 其值為 $6,770$ 呎磅; 最大負力矩發生於中心支座, 其值為 $-19,700$ 呎磅。其最大彎應力為 985 磅/方吋。

既得反動力元素後, 用平常面積力矩法, 任何撓度均可求矣。

今更舉一例, 以說明面積力矩法對於靜力不定梁之應用。一梁兩端固定, 其全長度均負等布載荷 w 磅/呎 (圖 223a)。此處端力矩, 為說明計, 故意假定為正。 M_1 之結果為負, 則表示生負彎曲。因載荷

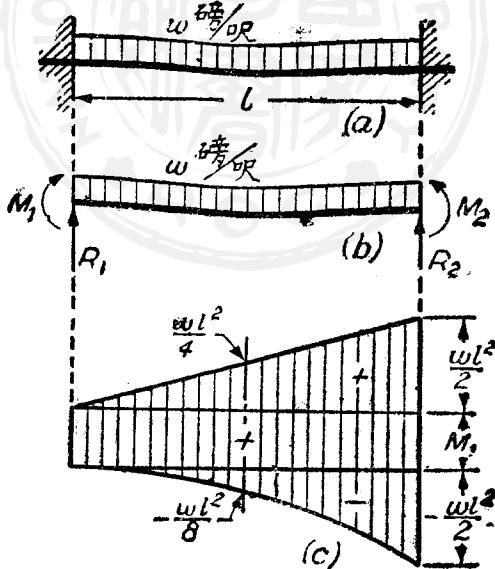


圖 223.

之對稱，與支座在同一水平面內之關係， $R_1 = R_2$ ，又因 $\Sigma Y = 0$ ， $R_1 = \frac{wl}{2}$ 。同理， $M_1 = M_2$ 。其力矩圖分爲部分，如圖 223c 所示。

因在兩端所繪切線間之角度爲零，故由第一面積力矩定理，知彎矩圖之全面積爲零。

$$\left(\frac{wl^2}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right) + M_1 l - \left(\frac{wl^2}{2}\right)\left(\frac{l}{3}\right) = 0,$$

由是， $M_1 = -\frac{wl^2}{12}$ 。

中心之力矩爲

$$M = -\frac{wl^2}{12} + \left(\frac{wl}{2}\right)\frac{l}{2} - \frac{w\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = +\frac{wl^2}{24}.$$

用第二面積力矩定理，且在左支座繪一切線，則中心之撓度，等於左端及中心間所含彎矩圖之面積，對於中心之第一力矩，除以彎曲剛性 EI 。

$$\begin{aligned} EIy &= \left(\frac{wl^2}{4}\right)\left(\frac{l}{4}\right)\left(\frac{l}{6}\right) - \left(\frac{wl^2}{12}\right)\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{4}\right) - \left(\frac{wl^2}{8}\right)\left(\frac{l}{6}\right)\left(\frac{l}{8}\right) \\ &= -\frac{wl^4}{384}. \end{aligned}$$

習 題

下列各題，專以二次積分法或面積力矩法解決之。各題又可用 57—59 節所述之重疊原理解決之。如非說明與此相反，此章問題均假定各梁支座在同一平面上。

27. 一梁固定於兩端，負等布載荷，用二次積分法，求 59 節中之公式。

277. 用面積力矩法，解 276 題，即用二彎矩圖，一為兩端自由支持而負等布載荷 w 磅/呎之梁彎矩圖，一為端偶力 $M_1 = M_2$ ，作用於兩端之梁彎矩圖。

278. 一梁長 l ，兩端固定，在中間三分之一部分加等布載荷 w 磅/呎。求最大正及負彎矩，繪彎矩圖。
答. 最大正 $M = \frac{19}{648} w l^2$ 。

279. 圖 224 示一梁，兩固定端在水平方向，且在同一水平面內。求反動力，求壁上及載荷 P 下之彎矩。

280. 求反動力及固定端處之端偶力(圖 225)。兩支座在同一水平面內，固定部分在水平方向。
答. $R_1 = 6,930$ 磅; $R_2 = 5,070$ 磅。

$$M_1 = -19,160 \text{ 呎磅。}$$

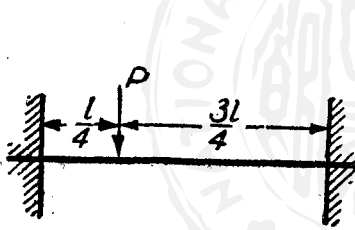


圖 224.

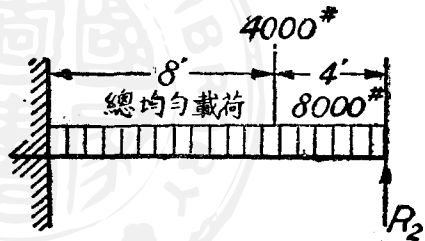


圖 225.

281. 一梁長 16 呎，兩端固定在水平方向，且在同一水平面內。梁之左半部負等布載荷 1,200 磅/呎。求反動力之值，壁上之拘束偶力，及最大正彎矩之值。繪切力及彎矩圖。

282. 一梁長 l ，中心負一單集中載荷 P ，其兩端固定於水平方向。其右支座在左支座之水平面下距離 δ_2 處。求其反動力之公式，固定端及中心之彎矩公式。

$$\text{答: } R_1 = \frac{P}{2} + \frac{12EI\delta_2}{l^3}, M_1 = \frac{Pl}{8} + \frac{6EI\delta_2}{l^2}, \text{ 中心 } M = \frac{Pl}{8}.$$

283. 在上題中，設用一 8'' 18.4 磅工字梁，求兩端及中心之彎矩，及計其最大纖維應力。令 $\delta_2 = \frac{1}{4}$ 吋， $l = 15$ 呎， $P = 1,500$ 磅， $I = 56.9$ 吋⁴， $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋。求其

最大撓度之位置及大小。

答. $M_1 = -15,020$ 呎磅. $R_1 = 3,150$ 磅. 中心 $M = +8,440$ 呎磅. $s = 12,58$ 磅/方吋. 最大撓度 $= 0.252$ 吋. 在 $x = 12.52$ 呎處.

284. 一木梁之剖面為 $10'' \times 12''$, 其載荷如圖 226 所示. 求 R_1, R_2 及 R_3 之大小, 與最大正彎矩及負彎矩之大小(以呎磅計). 支座均在同一水平面內.

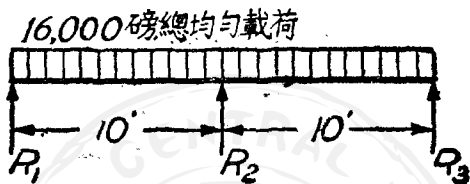


圖 226.

答. $R_1 = R_3 = 3,000$ 磅; $R_2 = 10,000$ 磅. 最大正力矩 $= 5,625$ 呎磅, 在距端 $3\frac{3}{4}$ 呎處. 最大負力矩 $= -10,000$ 呎磅, 在 R_2 上.

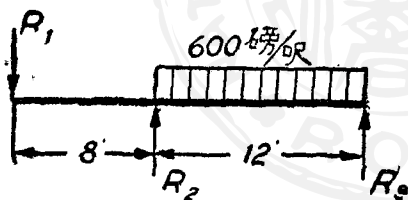


圖 227.

285. 圖 227 示一梁, 其三支座均在同一水平面內. 求反動力, 繪剪力及彎矩圖. 標出諸最大彎矩.

286. 圖 228 示一矩形梁, 其各支座均在同一水平面內, 求反動力及最大彎矩之大小. 設梁為木製, $s_w = 1,200$

磅/方吋, 剖面為 8 吋 \times 12 吋, 問其總安全載荷若干(梁重在內)?

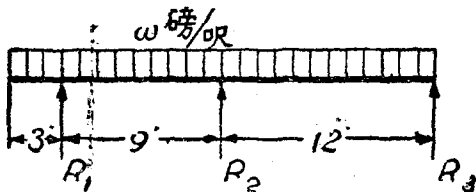


圖 228.

答: $R_1 = 5.48w$, $R_3 = 4.82w$; 最大 $M = -13.7w$ 呎磅, 在支座 R_2 上; $w = 1,400$ 磅/呎。

57. 靜力不定問題之重疊解法: 梁一端固定, 他端自由支持。——此題在 55 及 56 節中, 已由他法解過, 今用重疊法解之。因在左端有三未知反動元素, 在右端有一未知反動元素, 此題為靜力不定, 其多衍拘束數為一。在此題解法中, 梁之左端 A 有拘束, 使之受彎曲而不轉動, 今將此拘束作為多衍, 移去此拘束, 得靜力可定問題, 如圖 229b 所示。靜力不定偶力 M_1 所生彎曲, 分別討論之, 如圖 229d 所示。故甚為明顯, 圖 229a 所示梁之彎曲, 可組合 (b) (d) 而得之。僅需糾正支座上偶力 M_1 之大小, 使滿足下列條件

$$\theta_1' = \theta_1'' \quad (a)$$

故力 P 在梁左端所生之轉動, 適為 M_1 所消去, 是以, 可滿足固定端零斜度之條件。欲求靜力不定偶力 M_1 , 僅需將已知 θ_1' 及 θ_1'' 之值 (49 節第 7 及 10 類), 代入 (a) 式。於是

$$\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6EI} = \frac{M_1 l}{3EI}$$

由此 (註 1)
$$M_1 = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{2l^2} \quad (b)$$

組合情形 (b) 及 (d) 之彎矩圖 (c) 及 (e), 可得彎矩圖, 如圖 229f 陰影面積所示者, 其數值最大之彎矩, 在 A 處或 D 處。

在左端取力矩, 使 $\Sigma M = 0$, 可求反動力 R_2 , 於是用 $\Sigma Y = 0$, 得 R_1 。

註 1. M 之絕對值用此法得之。此力矩之符號為負, 因使梁向下彎曲也。

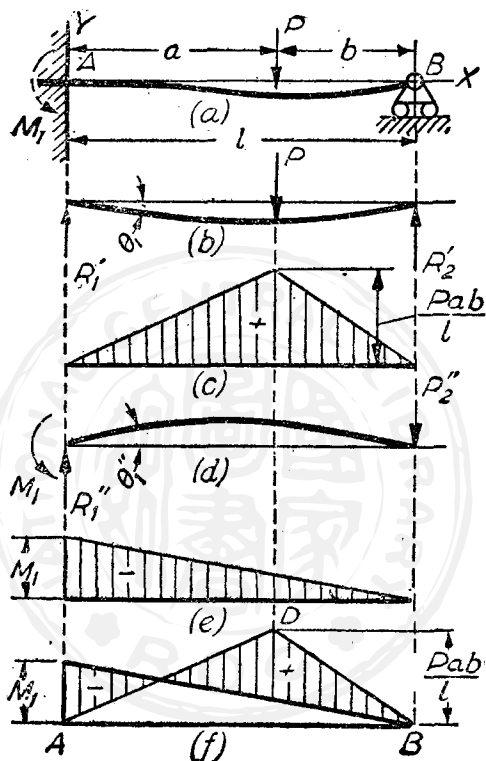


圖 229.

載荷 P 在任何一點所生之撓度，減去偶力 M_1 在此點所生撓度，得此點之撓度。此種情形之撓度曲線方程式，可逕由 49 節中得之。

例如，設 $b < \frac{1}{2}l$ ，求跨度中心之撓度。由 49 節之第 7 及 10 類，

$$\delta = \frac{Pb}{48EI} (3l^2 - 4b^2) - \frac{M_1 l^2}{16EI},$$

或，將(b)式之 M_1 代入，

$$\delta = \frac{Pb}{93EI} (3l^3 - 5b^2).$$

倘將 R_2 作為多衍元素，暫時移去之，可得反動元素之相同結果。今得一肱梁在距自由端 b 處負載荷 P 。由 49 節第 2 類，其自由端之撓度為

$$\delta = \frac{Pa^2(3l-a)}{6EI}.$$

反動力 R_2 單獨作用時，在自由端所生之撓度，可由 49 節第 1 類得之，其值為

$$\delta = \frac{R_2 l^3}{3EI}.$$

此甚明顯，圖 229a 所示之彎曲，可組合此二者以求之。僅需糾正 R_2 ，使自由端之總撓度為零。於是

$$\frac{R_2 l^3}{3EI} - \frac{Pa^2(3l-a)}{6EI} = 0,$$

由此

$$R_2 = \frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3}.$$

R_1 及 M_1 於是可用靜力平衡條件求之。

已得單集中載荷之解法，用重疊原理以稍引伸上述理論，則可解同樣支座而負其他式樣橫載荷之梁問題。今舉圖 230 之例，以說明之。任何載荷元素 $w dx$ 在支座 A 所生之力矩，可由(b)式得之，即將 $w dx$ 代 P ， x 代 b 。支座之總力矩 M_1 為

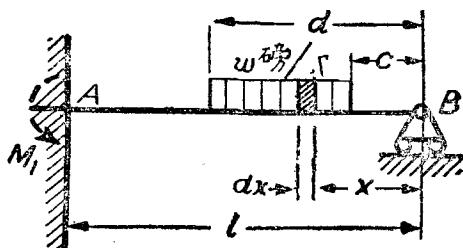


圖 230.

$$M_1 = \int_c^d \frac{wx \, dx (l^2 - x^2)}{2l^2} = \frac{w}{2l^2} \left[\frac{l^2(d^3 - c^3)}{2} - \frac{d^4 - c^4}{4} \right]. \quad (c)$$

設載荷滿布全梁，如圖 231a，於是將 $c=0, d=l$ 代入 (c) 式，得

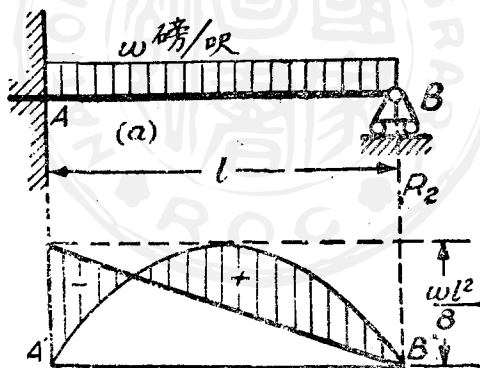


圖 231.

$$M_1 = \frac{wl^2}{8}. \quad (d)$$

自均勻載荷之拋物線彎矩圖，減去偶力 M_1 之三角形彎矩圖，則得其彎矩圖 (圖 231b)。由此圖可知固定剖面之彎曲應力為最大。自均勻載荷在任何一點所生之撓度 (見 49 節，第 8 類)，減去偶力 M_1 在此同點

所生之撓度(見 49 節, 第 10 類), 則得此點之撓度. 用此法, 得跨度中心之撓度爲

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{wl^4}{EI} - \frac{M_1 l^2}{16EI} = \frac{wl^4}{192EI}. \quad (e)$$

習題

287. 圖 231 示等布載荷之梁, 求其最大撓度. 答. $\delta_{\text{最大}} = \frac{wl^4}{183EI}$.

288. 求圖 231 所示梁之右支座反動力, 將此反動力作爲多餘拘束.

289. 一梁負載荷, 如圖 232 所示. 求力矩 M_1 , 與支座上之反動力 R_1 及 R_2 .

答. $M_1 = \frac{wl^2}{8} + \frac{7}{120} w_1 l^2$. $R_1 = \frac{5}{8} wl + \frac{9}{20} w_1 l$. $R_2 = \frac{3}{8} wl + \frac{11}{40} w_1 l$.

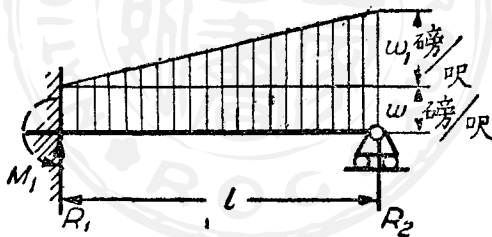


圖 232.

290. 一受均勻載荷之梁, 如圖 231 所示, 其支座 B 爲有彈性者, 一向下力 k 可使此支座下降單位距離, 求支座 B 上之反動力 R_2 . 答. $R_2 = \frac{3}{8} wl \frac{1}{1 + \frac{3EI}{kl^3}}$.

291. 一負均勻載荷之梁, 支持於三等距離之點上, 繪其彎矩圖.

建議. ——因對稱條件, 其中心剖面受彎曲而不轉動, 故梁之每一半, 與一端固定而他端支持之梁條件相同.

292. 圖 233 示一梁 求 C 端之撓度.

解。——以偶力 Pa 代替懸臂之作用，於是重疊(b)及(c)之情形(如圖 233)，則得
 支座間之梁彎曲，其靜力不定偶力 M_1 可由方程式 $\theta_1 = \theta_1'$ 得之，或

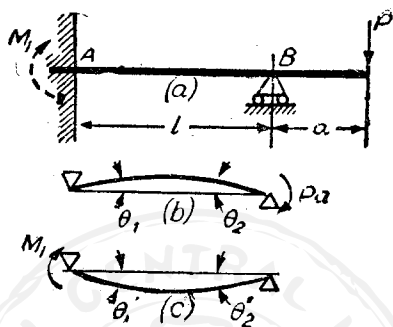


圖 233.

$$\frac{Pal}{6EI} = \frac{M_1 l}{EI},$$

由此 $M_1 = \frac{Pa}{2}$ ，C 點之撓度為

$$\delta = \frac{Pa^3}{6EI} + a(\theta_2 - \theta_2') = \frac{Pa^3}{6EI} + \frac{Pa^2 l}{EI}.$$

右邊的第一項，表示懸梁之撓度，第二項表示因 B 點剖面轉動後所生之撓度。

293. 將 B 點反動力作為多衍拘束，試解前題。

58. 兩端固定梁。——在此例中，有六反動元素(每端有三)，即，此問題有三靜力不定元素。但在一般梁中，其反動力之水平分力，可以略去(見 54 節)，由此靜力不定量之數減至二個。將支座處之力矩 M_1 及 M_2 ，作為靜力不定量。於是，組合圖 234b 及 c 所示之二靜力可定問題，則得受單集中載荷 P (圖 234a)之解矣。此甚明顯，設糾正偶力 M_1 及 M_2 ，使

$$\theta_1' = \theta_1''; \quad \theta_2' = \theta_2''.$$
(a)

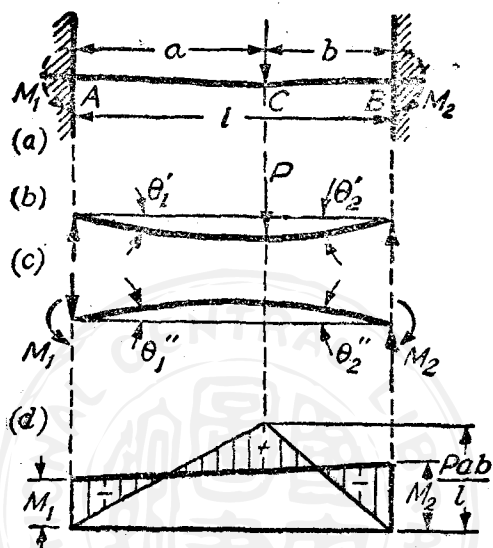


圖 234.

則梁 AB 之固定端條件，可以滿足矣。自此二方程式，可得二靜力不定偶力。用 49 節第 7 類受單集中載荷之公式，及 49 節第 10 類受偶力之公式，(a) 式變為

$$\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6EI} = \frac{M_1 l}{3EI} + \frac{M_2 l}{6EI},$$

$$\frac{Pab(2l - b)}{6EI} = \frac{M_1 l}{6EI} + \frac{M_2 l}{3EI},$$

由此

$$M_1 = \frac{Pab^2}{l^2}; \quad M_2 = \frac{Pa^2b}{l^2}. \quad (b)$$

組合 (b) 及 (c) 二情形之彎矩圖，得圖 234d 所示之彎矩圖。其最大正

彎矩，在 C 點載荷之下，其大小可自圖 234d 得之，且可用下式表之：

$$M_c = \frac{Fab}{l} - \frac{M_1 b}{l} - \frac{M_2 a}{l} = \frac{2Pa^3b^2}{l^3} \quad (c)$$

由圖 234d，可知數值最大之彎矩在 C 點或在較近之支座上。遇動載荷，即 b 變化，假定 $b < \frac{l}{2}$ ，則將 $b = \frac{l}{3}$ 代入 (b) 式，得 M_3 之最大值。此最大值等於 $\frac{4}{27} Pl$ 。當 $b = \frac{l}{2}$ ，則載荷下之彎矩為最大，由 (c) 式，此最大值等於 $\frac{1}{8} Pl$ 。故遇動載荷，其最大力矩在梁端。

用重疊法，組合載荷 P 在任何一點所生之撓度，及偶力 M_1 及 M_2 在此點所生之撓度，則得此點之撓度。

已得單集中載荷 P 之解答，於是用重疊法，如圖 230 情形已用者，即可解任何式樣之橫載荷矣。

習 題

294. 一梁負均勻載荷，兩端固定(圖 235)，試繪其彎矩圖。

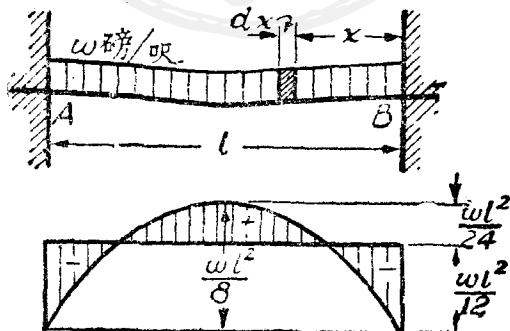


圖 235.

295. 圖 236 示一梁，求其兩端之力矩。

$$\text{答. } M_1 = -\frac{wl^2}{20}, \quad M_2 = -\frac{wl^2}{30}.$$

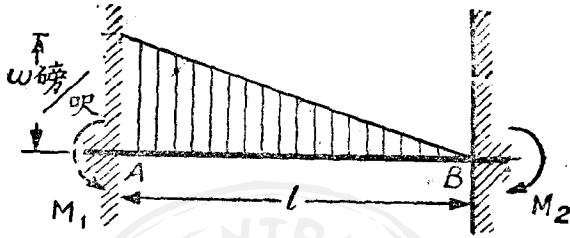


圖 236.

296. 圖 37 示一梁，兩端固定，以偶力 Pc 彎曲之，試用 240 題之解答及 49 節第 9 及 10 類，求其反動力矩 M_1 及 M_2 。

297. 圖 234 所示之梁，設在支座下降距離 δ ，試求 A 處之垂直反動力及反動偶力。

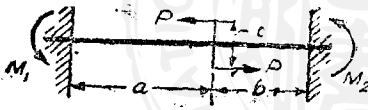


圖 237.

解。——移去支座 A ；將此梁作為懸梁，固定於 B 端。負載荷 P ，於是可得 A 點之撓度及斜度 θ 。今於 A 加一向上反動力 R_1

及一順時針方向之力矩 M_1 ，二者之大小，適足消去斜度 θ ，且使結果撓度等於 δ 。解此對聯立方程式，得

$$M_1 = -\frac{6EI\delta}{l^2} - \frac{Pab^2}{l^2},$$

及

$$R_1 = -\frac{12EI\delta}{l^3} + \frac{Pb^2}{l^3} \left(3 - \frac{2b}{l}\right).$$

59. 在三支座上之梁。——在三支座梁之情形中（圖 238a），有一靜力不定反動元素。令中間支座之反動力為此靜力不定元素。於是，用重疊法，組合圖 238(b) 及 (c) 所示情形，則可得情形 (a) 之解答。載荷 P 在 C 所生撓度 δ ，必為反動力 R_2 所生之撓度消去，用此條件

可求中間反動力 R_2 。用 49 節第 7 類之撓度方程式，得下列方程式，以求 R_2 。

$$\frac{Pbl_1[(l_1+l_2)^2-b^2-l_1^2]}{6(l_1+l_2)EI} = \frac{R_2l_1^2l_2^2}{3(l_1+l_2)EI}$$

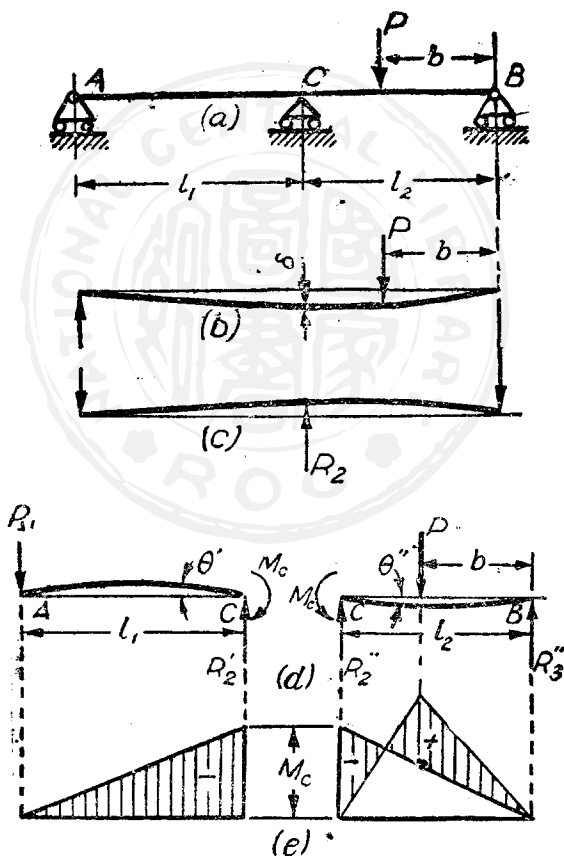


圖 2.8.

由此

$$R_2 = \frac{Pb[(l_1 + l_2)^2 - b^2 - l_1^2]}{2l_1 l_2^2} \quad (a)$$

設 P 作用於梁之左邊跨度，可用同樣方程式，惟距離 b 必自支座 A 度之， l_1 及 l_2 必互相交換。當 $l_1 = l_2 = l$ ，由 (a)，

$$R_2 = \frac{Pb(3l^2 - b^2)}{2l^3} \quad (b)$$

已得單載荷 P 之解答後，任何他種載荷，可用重疊法求之。

此題可用他法解之。想像梁在 C 處分為二部，圖 28d，且令 M_c 表示此剖面上原來梁之彎矩大小。用此法，此題化為二簡單支持梁，如 (d) 所示，此二梁均為靜力可定者。由支座 C 處之撓度曲線連續條件，可求 M_c 之大小。由此 $\theta' = \theta''$ ，用 49 節第 9, 7 及 10 類之斜度方程式，故得

$$\frac{M_c l_1}{3EI} = \frac{Pb(l_2^2 - b^2)}{6l_2 EI} - \frac{M_c l_2}{3EI}$$

由此

$$M_c = \frac{Pb(l_2^2 - b^2)}{2l_2(l_1 + l_2)} \quad (c)$$

其彎矩圖，用陰影面積示於圖 28e 中。

習 題

288. 在前節之梁，由 (a) 式及 $\Sigma M = 0$ 所得彎矩 M_c 之大小，與 (c) 式所示者相同，試證之。

289. 一梁支於三支座上(圖 28e)，其上滿載強度 w 之等布載荷。求支座 C 上之彎矩。

暗示：應用重疊法，如 57 節所述者，將 wdb 代 59 節 (c) 式之 P ，沿各跨度求其積分，得

$$M_c = \frac{w}{8} \cdot \frac{l_2^3 + l_1^3}{l_2 + l_1}$$

設二跨度相等，即 $l_1 = l_2 = l$ ，

$$M_c = \frac{wl^2}{8}.$$

M_c 柱負彎曲。

300. 一梁支於等距離之三支座上，負強度 w 之等布載荷。設中心支座下垂距離 δ ，問對於中心反動力有何效應？

答. $R_2 = \frac{\delta}{8} \cdot 2wl = \frac{C\delta EI}{l^3}$.

60. 解連續梁之三力矩定理。——在連續梁支於許多支座上之情形中（圖 239），一支座恆作為不活動鉸，而其他支座作為輾上鉸。在此種排列，每中間支座僅有一未知反動元素，即垂直反動力之大小；故其靜力不定元素之數，等於中間支座數（見 54 節）。例如，如圖 239 之情形，其靜力不定元素數為四。以前各節所示方法，亦均可應用於此；即，其多衍支座可以移去，而作為靜力不定反動元素，或此連續梁可在各支座處截斷，而將作用於原梁支座之彎矩作為靜力不定元素。但設支座數甚多，則第二法最為簡便。

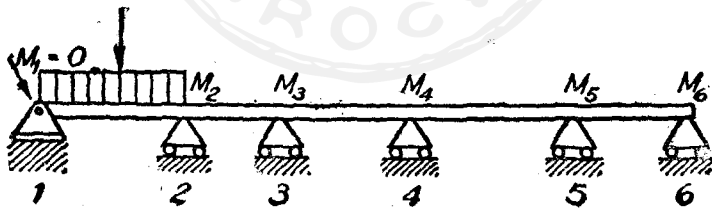


圖 239.

令圖 240 表示連續梁之任何相鄰二跨度，此二跨度以 1 及 2 表之，在支座 A , B 及 C 處截斷。令 M_A , M_B 及 M_C 表示在諸支座上之彎矩。諸彎矩之方向，視梁之載荷而定。今假定如圖所示之方向，為正

彎矩。(註²)此甚明顯，設已知支座上之彎矩，則連續梁問題，可化爲若干簡支持梁，此簡支持梁之數等於連續梁內之跨度數。在計算彎矩 M_A , M_B 及 M_C 時，可用在支座上撓度曲線連續性之條件。在任何支座 B ，設

$$\theta' = -\theta'', \quad (\alpha)$$

則可滿足連續性之條件。設此轉動之方向，與其相當偶力 M_B 之方向相同，則其梁端之轉角假定爲正。此等轉角之總公式，可用面積力矩法或其軛梁法求之。(註³)

將左邊跨度 1 作爲簡支持梁，此跨度上實在載荷所生之彎矩圖面積，以 A_1 表之；令 \bar{a}_1 及 \bar{b}_1 ，各表示力矩圖重心 C_1 距支座 A 及 B 之水平距離。同法， A_2 , \bar{a}_2 , \bar{b}_2 及 C_2 應用於右邊跨度 2 中之相似數量。根據第二面積力矩定理， A 自 B 點切線之撓度爲

$$\delta = \frac{A_1 \bar{a}_1}{EI},$$

故 B 對於水平面之斜度爲

$$\theta' = \frac{\delta}{l_1} = \frac{A_1 \bar{a}_1}{l_1 EI}.$$

在載荷所生撓度外，左跨度 1 爲偶力 M_A 及 M_B 所彎曲，由 49 節第 9 及 10 類，此等偶力在支座 B 處剖面所生轉動爲

註 2. 設最後所得數力矩之符號爲負，則此表示此數力矩之方向，與圖中所示者相反，且此數彎矩爲實在負力矩，即，此力矩能使凹面向下彎曲。

註 3. 三力矩定理，亦可用二次積分法求之，但上述之法較爲簡捷，且可直接求得 (99) 式之形式，此式可應用至任何式樣之載荷。

$$\frac{M_B l_1}{3EI} + \frac{M_A l_1}{6EI}$$

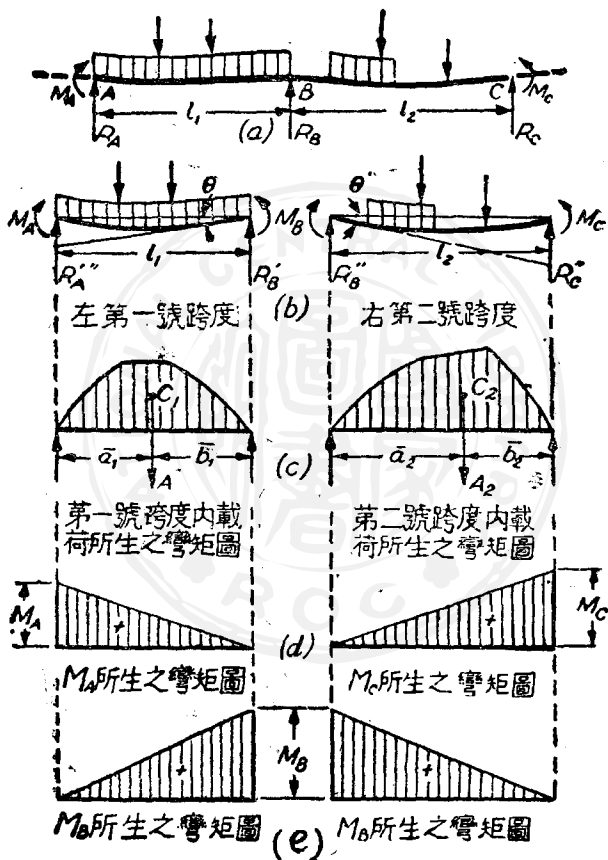


圖 240. (註 4)

註 4. 圖 240 中之彎矩圖，表示圖中所示載荷，或端力矩及相伴而生之反動力之組合效應。

於是其總轉角爲

$$\theta' = \frac{M_B l_1}{3EI} + \frac{M_A l_1}{6EI} + \frac{A_1 \bar{a}_1}{l_1 EI} \quad (91)$$

對於跨度 2, 用同法得

$$\theta'' = \frac{A_2 \bar{b}_2}{l_2 EI} + \frac{M_B l_2}{3EI} + \frac{M_C l_2}{6EI} \quad (92)$$

將(91)及(92)代入(a)式, 得

$$M_A l_1 + 2M_B(l_1 + l_2) + M_C l_2 = -\frac{6A_1 \bar{a}_1}{l_1} - \frac{6A_2 \bar{b}_2}{l_2} \quad (93)$$

此即著名之三方矩方程式, 可以應用至各種式樣之載荷. 此甚明顯, 此等方程式之數, 等於中間支座之數, 故解諸聯立方程式, 即可得支座上之彎矩.

在開始時, 假定連續梁之兩端爲自由支持. 設一端或兩端均固定, 於是靜力不定量, 將較中間支座之數多, 故在(93)式外, 更需其他方程式, 以表示固定端無轉動之條件. 其實, 此種方程式前已求得. 例如, (92)式表示任何支座上彈性曲線之切線, 與 x 軸所成之角度. 此方程式以支座右邊之跨度及載荷表之, 故使 $\theta'' = 0$, 即可應用於固定左端(見習題 305). 同樣, 使 $\theta' = 0$, (91)式即可用於固定右端. 斜度方程式(98), (99), (101), (102)亦可替代方程式(91)及(92).

已求得各支座上之力矩後, 將圖 239 之連續梁作爲自由體, 即可得各反動力. 支座 2 之彎矩 M_2 , 可以作用於支座 2 以左之諸力求之. 於是

$$M = M + R_1 l - (\text{左跨度上諸載荷對於支座 2 之力矩}),$$

由此 R_1 可以求得。同樣，求得 R_1 後，可以求 R_2 ，於是可求 R_3 。

應用自由體法，又可求得與支座相鄰處之垂直切力。令 V_A 為適在支座 A 右之垂直切力， V_{-B} 為適在支座 B 左之垂直切力。隔離跨度 AB 或 l_1 ，如圖 241 所示。 P_1 表示諸集中載荷之任何載荷，此諸載荷即作用於該跨度者。

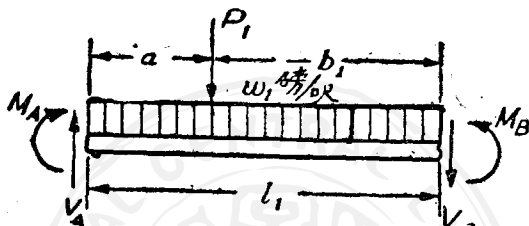


圖 241.

由力矩對於右端之平衡，

$$V_A l_1 + M_A - \sum P_1 b_1 - \frac{w_1 l_1^2}{2} - M_B = 0,$$

由此

$$V_A = \frac{M_B - M_A}{l_1} + \frac{w_1 l_1}{2} + \frac{\sum P_1 b_1}{l_1}. \quad (94)$$

同樣

$$V_{-B} = \frac{M_B - M_A}{l_1} - \frac{w_1 l_1}{2} - \frac{\sum P_1 a_1}{l_1}. \quad (95)$$

在跨度 BC 或 l_2 ，同樣可得

$$V_B = \frac{M_C - M_B}{l_2} + \frac{w_2 l_2}{2} + \frac{\sum P_2 b_2}{l_2}. \quad (96)$$

此諸垂直切力，在作切力圖，甚為方便，此垂直切力又可用以求反動力。例如，

$$R_B = V_B - V_{-B}.$$

三力矩方程式之常用方式(雖不甚普通)，恆應用至特種載荷式樣，此可由(93)式求之。例如，設強度 w_1 之均勻載荷作用於跨度 1， w_2 作用於跨度 2，各跨度自由支持，如圖 240b 所示，則其彎矩圖為

拋物線，其最大縱座標各為

$$\frac{w_1 l_1^2}{8} \quad \text{及} \quad \frac{w_2 l_2^2}{8}.$$

其拋物線形部分之面積各為

$$A_1 = \frac{2}{3} l_1 \cdot \frac{w_1 l_1^2}{8} \quad \text{及} \quad A_2 = \frac{2}{3} l_2 \cdot \frac{w_2 l_2^2}{8}.$$

其質心各在

$$\frac{l_1}{2} \quad \text{及} \quad \frac{l_2}{2} \quad \text{處.}$$

將此等面積及質心距離代入(93)式右端，得等布載荷之三力矩方程式：

$$M_A l_1 + 2M_B(l_1 + l_2) + M_C l_2 = -\frac{w_1 l_1^3}{4} - \frac{w_2 l_2^3}{4}. \quad (97)$$

(91)及(92)之斜度方程式，今變為

$$\theta' = \frac{M_A l_1}{6EI} + \frac{M_B l_1}{3EI} + \frac{w_1 l_1^3}{24EI}, \quad (98)$$

$$\text{及} \quad \theta'' = \frac{M_C l_2}{6EI} + \frac{M_B l_2}{3EI} + \frac{w_2 l_2^3}{24EI}. \quad (99)$$

用求(97)式之同樣手續，可得集中載荷之三力矩方程式，即，

$$\begin{aligned} M_A l_1 + 2M_B(l_1 + l_2) + M_C l_2 = & - \sum \frac{P_1 a_1}{l_1} (l_1^2 - a_1^2) \\ & - \sum \frac{P_2 b_2}{l_2} (l_2^2 - b_2^2), \end{aligned} \quad (100)$$

式中 P_1 表示作用於左跨度 1 之數集中載荷之任何個， a_1 為此載荷

距左支座 A 之距離，同樣， P_2 表示右跨度 2 之任一載荷， b_1 爲此載荷距右支座 C 之距離，其相當之斜度方程式爲

$$\theta' = \frac{M_A l_1}{6EI} + \frac{M_B l_1}{3EI} + \sum \frac{P_1 a_1}{6l_1 EI} (l_1^2 - a_1^2), \quad (101)$$

及

$$\theta'' = \frac{M_C l_2}{6EI} + \frac{M_B l_2}{3EI} + \sum \frac{P_2 b_2}{6l_2 EI} (l_2^2 - b_2^2). \quad (102)$$

在上述三力矩方程式中，假定各跨度之梁剖面之慣矩相同。設慣矩不同，(91)式內之 I 可以 I_1 代之，(92)式內之 I 可以 I_2 代之，如前代入(a)式，則得較爲總括之三力矩方程式：

$$\frac{M_A l_1}{I_1} + 2M_B \left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2} \right) + \frac{M_C l_2}{I_2} = -\frac{6A_1 \bar{a}_1}{l_1 I_1} - \frac{6A_2 \bar{b}_2}{l_2 I_2}. \quad (103)$$

習 題

以下諸題，應用三力矩方程式及附帶斜度方程式解之。此章以前數題，亦可用此法解之。

3.1. 設支座 A, B 及 C (圖 240) 不在同一水平面內，支座 A 高出中間支座 B 之水平面距離 h_A ，而支座 C 高出支座 B 距離 h_C ，試證等布載荷及集中載荷同時作用時，其三力矩方程式及斜度方程式爲：

$$\begin{aligned} M_A l_1 + 2M_B(l_1 + l_2) + M_C l_2 - \sum \frac{P_1 a_1}{l_1} (l_1^2 - a_1^2) \\ - \sum \frac{P_2 b_2}{l_2} (l_2^2 - b_2^2) - \frac{w_1 l_1^3}{4} - \frac{w_2 l_2^3}{4} + \frac{6EIh_A}{l_1} + \frac{6EIh_C}{l_2}, \end{aligned} \quad (104)$$

$$EI\theta' = \frac{M_B l_1}{3} + \frac{M_A l_1}{6} + \sum \frac{P_1 a_1}{6l_1} (l_1^2 - a_1^2) + \frac{w_1 l_1^3}{24} - \frac{EIh_A}{l_1} \quad (105)$$

$$EI\theta'' = \frac{M_B l_2}{3} + \frac{M_C l_2}{6} + \sum \frac{P_2 b_2}{6l_2} (l_2^2 - b_2^2) + \frac{w_2 l_2^3}{24} - \frac{EIh_C}{l_2}. \quad (105')$$

302. 一連續梁有三等跨度，各負強度為 w 之等布載荷（圖 242），求其彎矩圖及剪力圖。

解。——應用(97)式至第一及第二跨度，且注意支座 1 上之彎矩為零，得

$$4M_2l + M_1l = -\frac{wl^2}{2}. \quad (a)$$

由對稱條件，得 $M_2 = M_3$ 。於是，由(a)， $M_2 = -\frac{wl^2}{10}$ 。其彎矩圖以陰影面積表示 如圖 24c。求對於支座 2 之總力矩 得支座 1 之反動力；

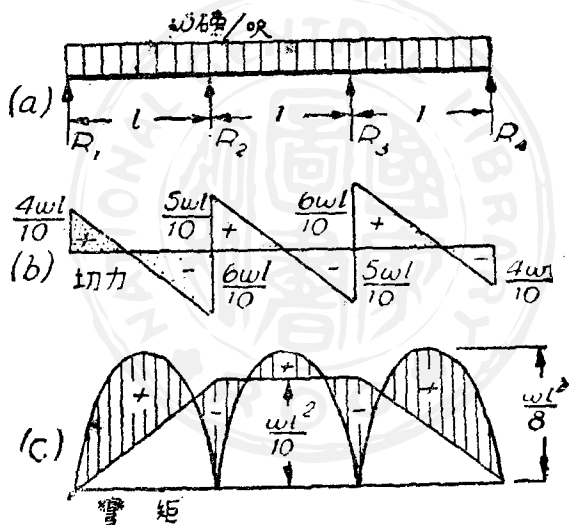


圖 24.

$$M_2 = -\frac{wl^2}{10} = R_1l - \frac{wl^2}{2},$$

由此 $R_1 = \frac{4}{10}wl$ 。因對稱關係， $R_1 = R_4 = \frac{4}{10}wl$ 。反動力 R_2 可由對於支座 3 之力矩和求之；

$$M_3 = -\frac{wl^2}{10} - R_1(2l) - \frac{w(2l)^2}{2} + R_2(l),$$

由此 $R_2 = \frac{11}{10}wl$. 其切力圖如圖 242b 所示, 其最大正力矩在距梁端 $\frac{4}{10}l$ 處, 此處之切力為零. 其數值最大彎矩在中間支座上.

303. 圖 243 示一連續梁, 求支座上之彎矩及其反動力. 反動力可向上或向下作用.

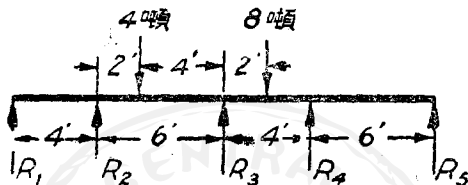


圖 243.

答. $M_2 = -1.54$ 呎噸; $M_3 = -3.74$ 呎噸; $M_4 = -1.65$ 呎噸.

反動力為 $R_1 = -0.58$ 噸; $R_2 = 2.09$ 噸; $R_3 = 6.22$ 噸; $R_4 = 3.75$ 噸; $R_5 = -0.275$ 噸. 支座上之力矩為負, 生向上凸出之彎曲.

304. 圖 244 示一連續梁, 設 $P = ul$ 及 $b = \frac{l}{4}$, 試作彎矩圖及切力圖.

解. ——在此題中, 第一跨度之想像載荷為 $A_1 = \frac{ul^3}{12}$, 第二跨度 $A_2 = 0$, 第三跨

度

$$A_3 = \frac{Pb(l-b)}{2}; \quad a_3 = \frac{2l-b}{3}; \quad b_3 = \frac{l+b}{3}.$$

代入(93)式, 得下列求彎矩 M_2 及 M_3 之方程式.

$$4M_2l + M_3l = -\frac{ul^3}{4},$$

$$M_2l + 4M_3l = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{l}.$$

由此

$$M_2 = -\frac{49}{930}ul^2; \quad M_3 = -\frac{44}{930}ul^2.$$

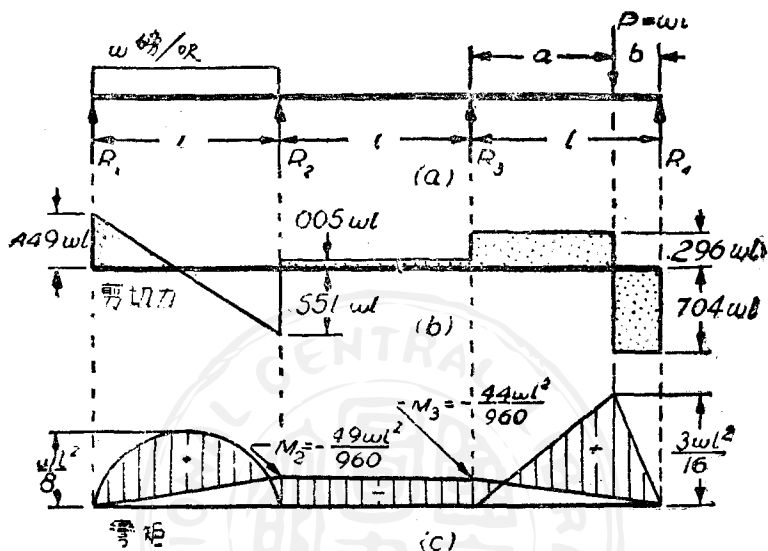


圖 244.

此力矩均為負，故其力矩圖如圖 244c 所示。求得各跨度之支座反動力後，又可得切力圖（圖 244b）。梁第一跨度支座 1 及 2 所受壓力為

$$\frac{wl}{2} + \frac{M_2}{l} = 0.449wl \quad \text{及} \quad \frac{wl}{2} - \frac{M_2}{l} = 0.551wl.$$

梁第二跨度支座 2 及 3 所受壓力為

$$\frac{-M_2 + M_3}{l} = 0.005wl \quad \text{及} \quad \frac{-M_3 + M_2}{l} = -0.005wl,$$

而第三跨度支座 3 及 4 所受壓力為。

$$\frac{Pb}{l} - \frac{M_3}{l} = 0.293wl \quad \text{及} \quad \frac{Pa}{l} + \frac{M_3}{l} = 0.704wl,$$

由此可得切力圖，如圖 244b 所示。

905. 圖 215 示一連續梁，求其彎矩圖。

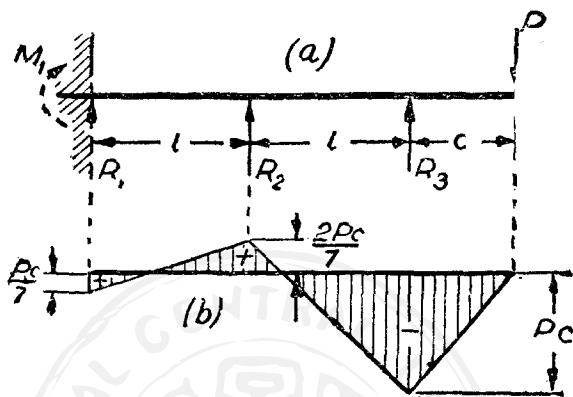


圖 247.

解。——(9)或(10)式在此題變為

$$M_1 l + M_1 l + M l = 0.$$

今, $M_3 = -Pc$, 而固定端(支座1)之斜度條件, 由(99)或(102)式, 為

$$\frac{M_1 l}{EI} + \frac{M l}{EI} = 0.$$

由以上二式, 得 $M_1 = -\frac{1}{7}Pc$; $M_2 = +\frac{2}{7}Pc$; $M_3 = -Pc$. 其彎矩圖如圖 24 b 所示.

306. 一連續梁有七等跨度, 僅中心跨度上負強度 w 磅/尺之等布載荷, 求各支座上之彎矩.

307. 設使支座上之力矩相等, 試用三力矩定理, 求懸臂之長度 x_1 及 x_2 (圖 246), 求三反動力.

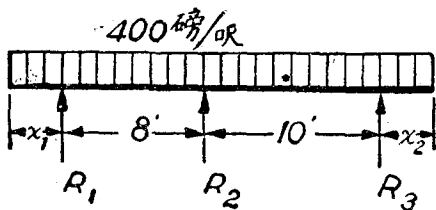


圖 246.

暗示：先解力矩 M_1, M_2 及 M_3 ，於是求懸臂。

在下列各題，求各支座上之彎矩及反動力。作切力及彎矩圖，且註出其數值。

308. 有四支座，均在同一水平面內(圖 247)。

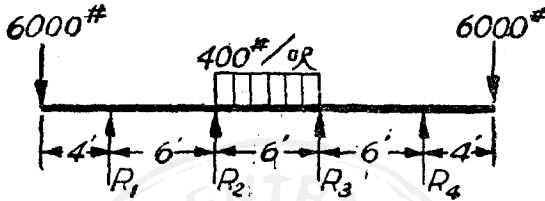


圖 247.

答. $M_2 = M_3 = 4,680$ 呎磅; $R_1 = R_4 = 11,680$ 磅; $R_2 = R_3 = 3,320$ 磅。

309. 各支座均在同一水平面內 左端固定於牆中，使此處斜度為零(圖 248)。

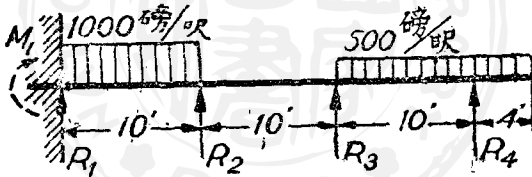


圖 248.

310. 右端支座下垂 $\frac{1}{4}$ 吋(圖 249), $I = 405.5$ 吋⁴。

答. $M_1 = 16,920$ 呎磅; $M_2 = -47,100$ 呎磅; $R_2 = 18,200$ 磅; $R_3 = 3,120$ 磅。

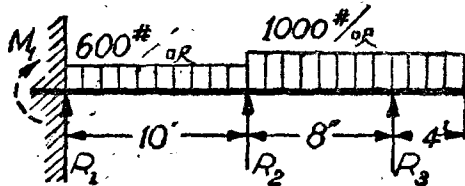


圖 249.

第八章之外加習題

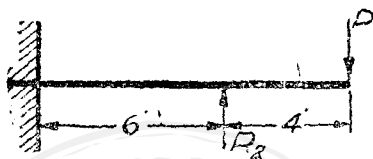
311. 求反動力 R_2 之大小 (圖 250).答. $R_2 = 2P$.

圖 250.

312. 設 $s_w = 1,215$ 磅/方吋, $(s_s)_w = 135$ 磅/方吋, 求此梁可負之安全載荷 P (圖 251). 求載荷 P 處之撓度, $E = 1.5 \times 10^6$ 磅/方吋, $I = 1.8$ 吋⁴.

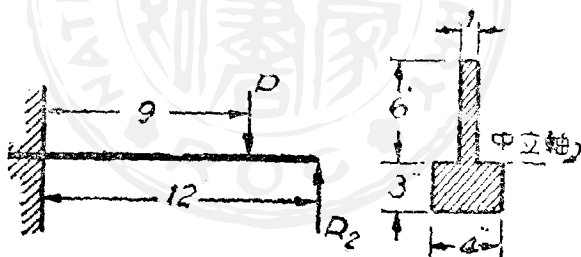
答. $P = 76$ 磅, $\delta = 0.123$ 吋.

圖 251.

313. 一木梁之自由跨度 12 呎, 各端固定於水平方向 且在同一水平面內, 於距固定端 3 呎處, 各負集中載荷 300 磅, 而於中心負第三載荷 800 磅. 此矩形剖面之闊為深之半. 設 $s_w = 750$ 磅/方吋, 求 b 及 h 之尺寸.

答. 3.94 吋 \times 7.88 吋; 用 4 吋 \times 8 吋之剖面.

314. 設 $s_w = 30,000$ 磅/方吋, 試選一工字梁, 使可安全負等力用於兩端固定梁上之載荷 (圖 252). 設 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋, 及 $I = 215.8$ 吋⁴, 求其最大撓度.

答. $M_1 = -37,500$ 呎磅.

最大 $\delta = 0.1054$ 吋, 在 $x = 7.1$ 呎處.

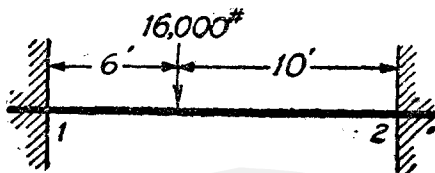


圖 252.

315. 一 12 吋 31.8 磅之工字梁 (圖 253), 部分拘束於兩端, 中心負一簡單集中載荷. 設撓度曲線之反曲點 (零力矩) 均在距固定端二呎處, 求梁內彎曲應力之最大強度, 及中心之撓度. 工字梁之剖面係數為 36.0 吋³.

答. $s = 8,000$ 磅/方吋.

$\delta = 0.114$ 吋.

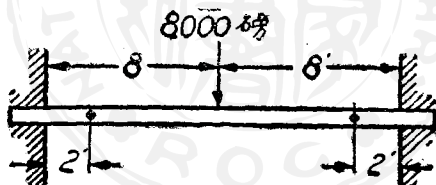


圖 253.

316. 一 8 吋 18.4 磅之工字梁, 長 15 呎, 負 300 磅/呎之等布載荷, 兩端固定於水平方向. 右支座較左支座低 $\frac{1}{4}$ 吋. 求支座上之反動力, 固定端之彎矩, 及最大彎曲應力. 求最大撓度之位置及大小. $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋, $I = 56.9$ 吋⁴.

答. $R_1 = 5,570$ 磅; $M_1 = -17,800$ 呎磅; 最大 $s = 15,000$ 磅/方吋;

δ 最大 $= 0.255$ 吋, 在 $x = 11.87$ 呎處.

317. 欲使反動力 (圖 254) 相等, 問懸臂 a 應與跨度 l 成何比例?

318. 圖 255 示一梁, 各支座均在同一水平面內, 求 R_1 , R_2 及 R_3 , 且作切力及彎

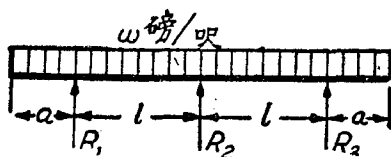


圖 254.

度, $\delta = 0.283$ 吋, 向下, 在距右端 5.3 呎處。

矩圖。設 $w = 16,000$ 磅/方呎, 試擇一適宜標準工字梁, 以負此載荷。各跨度最大撓度若干? $E = 3 \times 10^6$ 磅/方吋。

答. $R_1 = 1,286$ 磅, 向下; $R_2 = 8,140$ 磅, 向上; 用 7 吋 15.3 磅之工字梁。在左跨度, $\delta = 0.187$ 吋, 向上; 在右跨

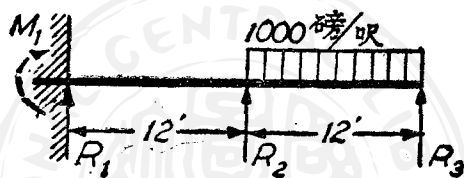


圖 255.

319. 圖 256 示一梁, 兩端固定, 各支座在同一水平面內, 求反動力, 作切力及彎矩圖。設 $w = 16,000$ 磅/方呎, 試擇一適槽鐵, 以負此載荷。

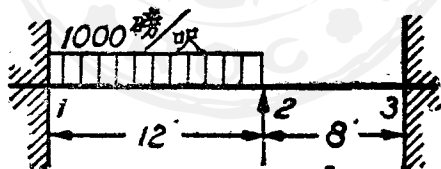


圖 256.

20. 一負端載荷之肋梁 AB (圖 257), 以短肋梁 CD (其剖面與 AB 同) 支持之。求梁間 C 處之壓力 F 。

解。——由在 C 處兩肋梁撓度相同之條件, 可得壓力 F 。用 49 節第 1 類之方程式, 得恆等式

$$\frac{Fl_1^3}{3EI} = \frac{Pl_1^2}{6EI}(3l - l_1) - \frac{Fl_1^3}{3EI},$$

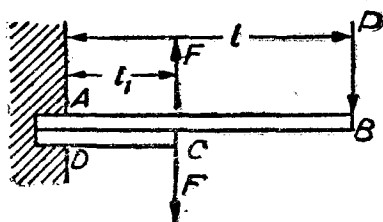


圖 257.

由此

$$F = \frac{3P}{4} \left(\frac{l}{l_1} - \frac{1}{3} \right).$$

應用第一面積力矩定理，至上肢梁及下肢梁之彎矩圖，可知上肢梁在 C 處之斜處，較下肢梁大。此表示僅在 D 及 C 兩點，兩肢梁接觸。

321. 8 吋工字梁長 10 呎，在距固定端 7 呎處以深 8 吋寬 3 吋之木梁支持之，如圖 258 所示。此木梁長 6 呎，兩端自由支持。鋼梁與木梁間之反動力，在木梁之中心。問兩梁間之反動力若干？所生之彎曲應力又若干？鋼之 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋，木之 $E = 1 \frac{1}{2} \times 10^6$ 磅/方吋。鋼梁之 $I = 58.4$ 吋⁴。

答。反動力 = 1,764 磅。木之 $s_{\text{最大}} = 1.93$ 磅/方吋。

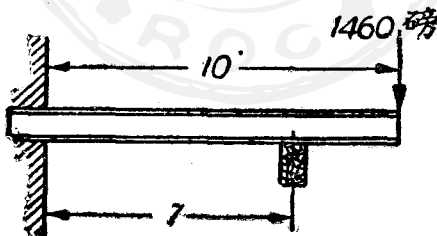


圖 258.

322. 圖 259 所示兩梁之材料相同，其排列及載荷如圖所示。上梁為 3 吋 \times 4 吋，下梁為 4 吋 \times 6 吋。求下梁之端所受之載荷。

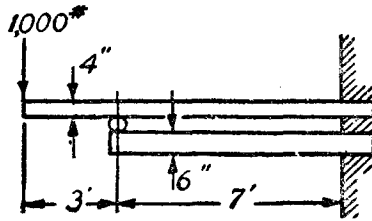


圖 259.

323. 二剖面相同之梁，如圖 260 排列之，共同負一載荷 P 。求反動力及各梁所負全載荷之若干。

答. 上梁負 $\frac{8}{35}P$.

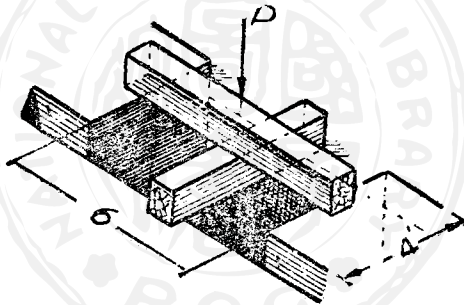


圖 260.

第九章

關於梁之特種問題

61. 當材料不遵虎克定律時之純彎曲。——以前所述純彎曲理論(見 34 節), 根據梁之平剖面經彎曲後仍為平面之假設而來, 即縱纖維之伸縮, 與其距中立面之距離成比例。於是, 用虎克定律, 可知正應力沿梁深度為直線變化。當鋼梁之變形在彈性極限以內, 則可應用此理論; 但當鋼梁之彎曲在屈點以外, 又遇由鑄鐵或混凝土等材料所製成桿之彎曲, 則應變與應力間不復成比例, 在此剖面上彎應力之分布, 甚為複雜。

由實驗結果, 知此等材料雖不遵虎克定律, 在彎曲時, 縱纖維內之應變, 可假定與其至中立面之距離成比例, 故從前方程式(見 34 節之(a)式)

$$e = -\frac{y}{\rho} \quad (1)$$

在此問題亦可適合。將 $y = -h_1$ 及 $y = h_2$ 代入(a)式, 可得最大伸長 e_1 及最大壓縮 e_2 , 式中 h_1 及 h_2 表示自中立面至受伸長及壓縮之最遠纖維之距離, 於是

$$e_1 = \frac{h_1}{\rho} \quad \text{及} \quad e_2 = -\frac{h_2}{\rho} \quad (b)$$

欲求應力之大小，必需知簡伸長及壓縮之應力與應變間之關係。此等關係用實驗決定之，且恆以伸長壓縮試驗圖表示之，如圖 261b 所示，設已知應變 e ，則由此圖可求應力 s 。設已知中立面之位置及曲率半徑 ρ ，則應變可由 (a) 式定之。在求此二未知數時，可用二靜力方程式：

$$\int_{-h_1}^{h_2} s dA = 0, \quad (c)$$

$$\int_{-h_1}^{h_2} sy dA = -M. \quad (d)$$

上式用文字表之，即梁剖面上之內力代表一偶力，而此偶力之力矩等於彎矩 M 。

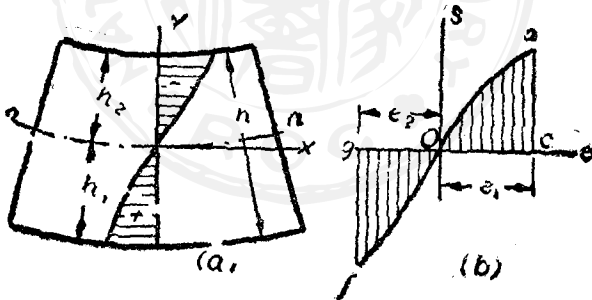


圖 231.

今舉一簡單例題，有一矩形剖面之梁，剖面寬 b ，故 $dA = bdy$ 。由 (a) 式知 $de = -\frac{dy}{\rho}$ ，得 $dA = bdy = -b\rho de$ 。代入 (c) 式，且隨即改換積分極限，得

$$-b\rho \int_{e_1}^{-e_2} s \, de = 0,$$

或
$$\int_0^{e_1} s \, de = \int_0^{-e_2} s \, de, \quad (c')$$

式中 s 由圖 261b 內之伸長壓縮圖求之。

決定中立軸位置之方法，今述之如下。假定最大伸長 e_1 之大小為若干，於是由 (c') 式定最大壓縮 e_2 。此方程式之意為圖 261b 內面積 Ogf 必等於面積 Oac ；此可用圖解法求之，其結果亦相當正確。已知 e_1 及 e_2 ，於是距離 h_1 及 h_2 可用下式求之（見 b 式）：

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{e_1}{e_2}; \quad h_1 + h_2 = h.$$

由此可知在一般情形中，中立軸之位置非特伸長壓縮圖之形狀，抑且特 e_1 之大小，由此亦特彎矩之大小。

已定中立軸之位置後，其相當彎矩之大小，可由 (d) 式求之。將 (a) 式之 $y = -\rho e$ 及 $cy = -\rho de$ 代入此式，得

$$b\rho \left[\int_0^{e_1} se \, de + \int_{-e_2}^0 se \, de \right] = M. \quad (d')$$

括弧內之式表示圖 261b 之陰影面積，對於經過 O 之垂線之力矩。對於每 e_1 之特殊值，可用數值法或圖形法求此力矩。由 (b) ， $\rho = \frac{h_1}{e_1}$ ，可求曲率半徑之大小。故用 (c') ， (d') 二式及圖 261b，可解不遵虎克定律材料之矩形梁內之應力分布問題。

設不用圖，而已知 s 及 e 間之關係，則 (c') ， (d') 二式可用代數法

解之。

習 題

324. 某材料不遵虎克定律，其應力應變曲線，已由伸長與壓縮實驗結果，得之如下。

$s=700$ 磅/方吋	800	900	1,000	1,100	1,200
$e=16 \times 10^{-6}$ 吋/吋	25	42	70	113	183

一梁之矩形剖面高 6 吋，寬 $\frac{1}{8}$ 吋，其外纖維所受應力為 1,075 磅/方吋，求所作用之彎矩。

答。 $M=18,700$ 吋磅。

325. 某材料之伸長與壓縮之應力應變曲線形式，為以方程式 $s = m e - n e^2$ 所示之拋物線形，式中 m 及 n 為經驗常數，由曲線之形狀決定之。在寬為 b 深為 h 之矩形梁之情形中，試證其彎矩為

$$M = \frac{bh^3}{6} e_1 m \left(1 - \frac{ne_1}{m} \right),$$

式中 e_1 為與一定最大應力相當之外纖維之應變。

62. 在屈點外之矩形鋼桿之彎曲。——在有明顯屈點之鋼之情形中，當屈服（圖 5a 中 B 處之水平部分）時材料之伸長，可大於彈性伸長許多倍。有時此伸長可大至百分之 1 至 $1\frac{1}{2}$ ，即較 $s_{y.p.} = 30,000$ 磅/方吋之鋼之屈點處彈性變形，大 10 至 15 倍。在此情形，其伸長壓縮圖，恆可用圖 262b 所示之直線 m_1m , mn 及 m_2n 表之，其結果亦可相當正確。假定一矩形梁彎曲至屈點以外時，其伸長之屈點 $s_{y.p.}$ 與壓縮之屈點相同，則其中立軸將在梁深度之中點。伸長之最大應變 e_1 ，將與壓縮之最大應變 e_2 相等。以 $s_{y.p.}$ 表示應變 $\frac{s_{y.p.}}{E}$ ，則因彎

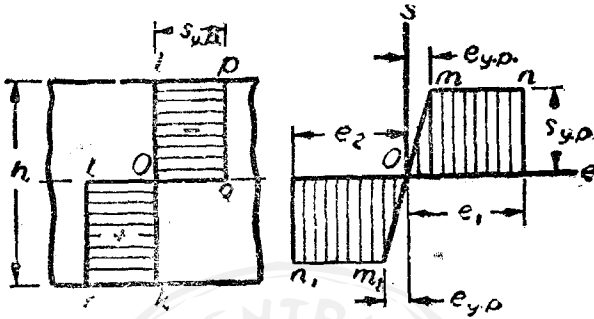


圖 262.

曲所生之應力，可以圖 262b 之陰影面積表之。假定某伸長 e ，即，某曲率 $\frac{1}{\rho} = \frac{2e}{h}$ ，其相當彎矩之大小，可用 61 節之 (d') 式求之。將圖 262b 陰影面積之力矩

$$s_{y.p.}e_1^2 - \frac{1}{3}s_{y.p.}e_{y.p.}^2 \quad (a)$$

代入 (d') 式，得計算彎矩之方程式

$$b\rho^2 s_{y.p.} (e_1^2 - \frac{1}{3}e_{y.p.}^2) = M. \quad (b)$$

設 e 遠較 $e_{y.p.}$ 為大時， $\frac{1}{3}e_{y.p.}^2$ 項可略去，而僅計 e_1^2 ，於是 (b) 式變為

$$b\rho^2 e_1^2 s_{y.p.} = M. \quad (c)$$

梁剖面上之應力分布，於是為二矩形，如圖 262a 所示，其相當彎矩之大小為

$$M = \frac{bh^3}{4} s_{y.p.}, \quad (d)$$

此式可直接自圖 262a 得之，或將 $e_1 = \frac{h}{2\rho}$ 代入(c)式，亦可得。以 $M_{y.p.}$

表示遠距纖維才至屈點時之彎矩大小，得(見 63 式) $s_{y.p.} = \frac{6M_{y.p.}}{bh}$ ，

而(d)式變為

$$M = \frac{3}{2} M_{y.p.} \quad (d')$$

當應變力關係如圖 262b 所示，則對於此彎矩值，屈服將繼續而不能增加其抗矩，惟當材料因伸長而發生硬化時，則屈服即停，因此時材料之抵抗力因之而增也。

63. 二不同材料之梁。——

有時梁由二種或多種材料製成。圖 263 示一簡單例，一木梁底部釘一鋼板，以加強之。假定在彎曲時，鋼與木間無滑動，則可應用實心梁之理論。根據此理論，縱纖維之伸長與壓縮，與其至中立軸

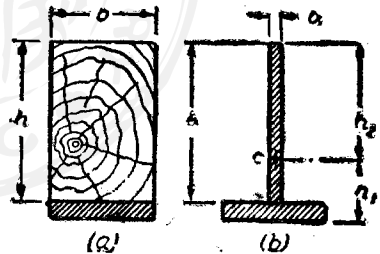


圖 263.

之距離成比例。但因木之彈性係數遠小於鋼，故在彎曲時梁之木製部分，相當於甚狹之鋼腹板，如圖 263b 所示。欲使伸長與收縮不變，曲率 $\frac{1}{\rho}$ 必不變。因木製部分內之內力之力矩 M 必不變。又因 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ ，故木製部分之 EI ，在變換前後應一定不變。因深度不變， I 將隨 b 而

變；故

$$b_1 = \frac{b \cdot E_w}{E_s} \quad (a)$$

用此方法，此問題化為 T 剖面鋼梁之彎曲，此可根據以前理論解決之。

例如，設有一簡單支持梁，長 10 呎，中心加載荷 1,000 磅。木製部分之剖面尺寸為 $b=4$ 吋， $h=6$ 吋，而在凸邊上以寬 1 吋厚 $\frac{1}{2}$ 吋之鋼板加強之。假定 $\frac{E_w}{E_s} = \frac{1}{20}$ ，用 (a) 式知其相當剖面為一高 6 吋而厚僅 $\frac{1}{20} \times 4$ 或 .20 吋之腹板，與一寬 1 吋厚 $\frac{1}{2}$ 吋之突緣，因鋼板大小仍不變也。最外纖維距中立軸（圖 263b）之距離為 $h_1=2.54$ 吋及 $h_2=3.96$ 吋。對於中立軸之慣矩為 $I=7.37$ 吋⁴，故最外纖維內之應力為（由 61 式）

$$s_{\text{最大}} = \frac{Mh_1}{I} = \frac{30,000 \times 2.54}{7.37} = 10,300 \text{ 磅/方吋,}$$

$$s_{\text{最小}} = -\frac{Mh_2}{I} = -\frac{30,000 \times 3.96}{7.37} = -16,100 \text{ 磅/方吋.}$$

將以上所得鋼內之應力 $s_{\text{最小}}$ ，乘以 $\frac{E_w}{E_s} = \frac{1}{20}$ ，則得實在梁之木內之最大壓應力。

習 題

326. 一梁之剖面如圖 261 所示，問能負安全彎矩若干？略去螺釘之孔。木之 $E =$

1,5 × 10⁶ 磅/方吋, $s = 1,200$ 磅/方吋, 鋼之 $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋, $s = 18,000$ 磅/方吋.

327. 一梁由木鋼二質組成, 如圖 255 所示, 長 16 呎, 自由支持於兩端, 求能負之安全等布載荷之磅/呎數. 用 326 題中之 E 及 s , 略去螺釘之孔.

328. 承前題, 在計算工字梁及木板之 I 時, 扣去螺釘孔之直徑 $\frac{9}{16}$ 吋, 試解之. 在螺釘孔處之突緣厚為 $\frac{7}{16}$ 吋.

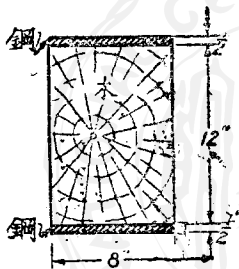


圖 264.

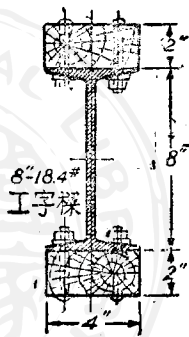


圖 265.

329. 一矩形木梁, 深 S 吋, 寬 C 吋, 在其頂以寬 2 吋厚 1 吋之鋼板加強之, 在其底以寬 C 吋厚 $\frac{1}{2}$ 吋之鋼板加強之. 略去螺釘之孔. 設用 326 題之 E 及 s , 試計其安全彎矩. 求木內所生之實在最大應力.

答. $M = 208,000$ 吋磅, $s_{木} = 555$ 磅/方吋.

64. 鋼筋混凝土梁內之應力. (註 1)——吾人均知混凝土之壓強度, 遠較其張強度為大, 故矩形混凝土梁, 將因凸邊之張應力而失敗.

註 1. 64 至 66 節中所用符號均採自美國聯合委員會 (Joint Committee) 之混凝土及鋼筋混凝土之標準說明 (Standard Specifications for Concrete and Reinforced Concrete), 在數處所用符號, 與此書他處所用者不同.

在凸邊加若干鋼桿，如圖 266 所示，可加強梁之強度不少。因混凝土能堅握鋼桿，鋼桿對混凝土在彎曲時，無滑動發生，故前節所述方法亦可用於此以計算彎曲應力。在實際上，恆定鋼桿之剖面面積，使鋼之屈服開始以前，凸邊之混凝土之強度已為勝過；而在負較大載荷時，鋼桿幾單獨負擔全部張力，故在計算圖 266 所示之鋼筋混凝土梁時，其一般之實際方法，為假定鋼負全部張力，而混凝土負全部壓力。

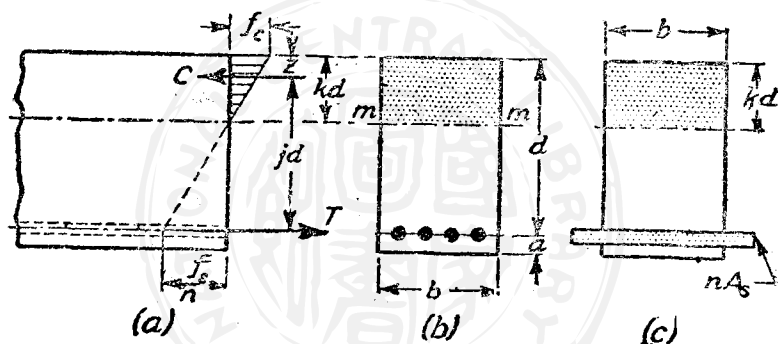


圖 236.

混凝土不遵虎克定律，其壓縮試驗圖之形狀，與圖 53 中之鑄鐵之圖形相似。當壓應力漸增，圖之切線之斜度漸減，即，混凝土之彈性係數隨應力之增加而遞減。在計算鋼筋混凝土梁內之應力時，在一般實用上恆假定混凝土能遵虎克定律，而取一較低之數值（較在小壓應力時由壓縮試驗所得之值為低），以抵償其變化係數。在鋼筋混凝土之說明中，有時假定 n ，鋼彈性係數對於混凝土彈性係數之比，為

$$n = \frac{E_s}{E_c} = 15.$$

將鋼面積 A_s 變換至混凝土面積 nA_s (此變換對於彈性而言為相當者), 其變換後之剖面, 如圖 266c 所示。因在彎曲時, 平剖面仍為平剖面, 又因假定虎克定律適用於混凝土, 故其應力分布依照直線定律。在此等條件下, 其中立軸將位於陰影剖面之質心上。此需要中立軸 mm 以上之陰影面積對於 mm 之第一力矩, 必等於中立軸以下陰影面積之力矩; 即,

$$(bkd) \frac{kd}{2} = nA_s (d - kd).$$

此式為 k 之二次方程式, 可用以求 k 之值。

設以
$$p = \frac{A_s}{bd}$$

代表鋼比 (即, 鋼面積 A_s 對於鋼中心以上之混凝土面積之比), 解上式, 得

$$k = \sqrt{2pn + (pn)^2} - pn. \quad (107)$$

今不用變換剖面之慣矩, 如上節然, 用下法較為直接而基本。作用於中立軸以上面積上之平均應力為 $\frac{f_c}{2}$, f_c 為混凝土內之最大單位壓應力。其總壓力 C 為 $\left(\frac{f_c}{2}\right) bkd$ 。當彎曲應力分布為直線時, 可以三角形表示應力之分布, 而壓力中心即在三角形之質心; 即, 在 $= \frac{1}{3}kd$ 。倘無軸力作用於梁上, 張力 T 必等於 C , 而此二力即組成一偶力, 其力矩為抗力矩, 等於 C 與力臂 jd 之積, 此 $j = 1 - \frac{k}{3}$ 。故根

據混凝土內最大應力 f_c 所得之彎矩 M_c 爲

$$M_c = \frac{f_c}{2} b k d (j d) = \frac{1}{2} f_c k j b d^2. \quad (108)$$

以生 f_c 之同一彎矩，或不能生鋼內之最大許可纖維應力 f_s ，故亦必根據 f_s 以求彎矩 M_s 。計算 M_s 所用之偶力爲 $T(jd)$ ，而 $T = f_s A_s$ 爲鋼內之力。於是

$$M_s = f_s A_s j d. \quad (109)$$

在決定所加之安全彎矩時，應用 M_c 及 M_s 二值之較小者。

設已知彎矩，而不知最大許可纖維應力，則已知彎矩所生之最大纖維應力值，可如上法計之，於是察其所得一值或二值是否已超過許可值。

爲使鋼防火計，梁及柱內之金屬筋，其距表面之最大距離，不可小於 $1\frac{1}{2}$ 吋。此法規規定在加強筋以下之混凝土之最低深度，如圖 266b 中之 a 所示。

在計算數值問題時，讀者應如上述用代數法計算之，不可僅代公式。如此解法耗時無多，而於練習基本原理之應用，獲益實不少也。

習 題

320. 設 $\frac{E_s}{E_c} = 15$, $A_s = 0.068bd$, 求中立軸距梁頂之距離(圖 266)。

答. $1d = 0.581d$.

321. 鋼筋混凝土梁長 10 呎，自由支持於兩端，其 $b = 10$ 吋， $d = 12$ 吋， $A_s = 1.17$ 方吋。設 $n = 15$ ，及 $f_c = 650$ 磅/方吋，求此梁中心能負之安全載荷。鋼內應力若干？試

計算下列二種情形：

(a) 設混凝土重略去不計；

(b) 設混凝土每立方呎重 150 磅。

332. 有一混凝土梁， $b=8$ 吋， $d=12$ 吋， $A_s=2$ 方吋， $n=\frac{E_s}{E_c}=12$ ， $f_c=830$ 及 $f_s=15,000$ ，求此梁能負之最大安全力矩之呎磅數。 答. 16,000 呎磅。

333. 今有一梁， $b=20$ 吋， $d=36$ 吋，鋼筋面積 $=7.2$ 方吋， $n=8$ ，所加彎矩為 2,500,000 吋磅，求混凝土及鋼內之應力。 答. $f_s=11,330$ 及 $f_c=508$ 磅/方吋。

65. 平衡鋼筋之混凝土梁之設計。——在前節及問題中，可知使在鋼筋混凝土梁之混凝土內生最大許可應力之彎矩，不一定能使鋼內應力至其安全極限，而在另一方面，或可過度引伸鋼筋，倘將彎矩降減，使鋼應力降至安全值，於是混凝土將未至其安全值。由經濟眼光而言，二者均不利，因鋼或混凝土之全強度未充分利用也。但在設計混凝土梁時，可以調整鋼剖面與混凝土剖面之比，使混凝土及鋼內之最大許可應力同時實現，於是此梁稱為有平衡鋼筋。在大部實際情形中，因設計條件關係，如可得筋之尺寸，等，僅可得近似之平衡鋼筋。

在理想平衡鋼筋，相當混凝土（此混凝土替代鋼筋，其面積為鋼之 n 倍）內之張應力為 $\frac{f_s}{n}$ ，而同時實在混凝土之最外纖維內之壓應力為 f_c 。見圖 266a。因此等應力與其至中立軸之距離成比例，

$$\frac{f_c}{kd} = \frac{\frac{f_s}{n}}{d-kd} \quad \text{或} \quad \frac{1-k}{k} = \frac{f_s}{nf_c} \quad (110)$$

k 一旦決定後，其他步驟完全與前節所述者同，茲以下列數值問

題說明之。

習題

384. 試設計一平衡鋼筋之混凝土梁，使支持 2,000,000 吋磅之彎矩。梁寬為 20 吋， $f_c = 16,900$ ； $f_s = 50,000$ ； $n = 15$ 。

解。——其變換面積及應力分布，如圖 237 所示。與原來鋼相當之混凝土變換面積

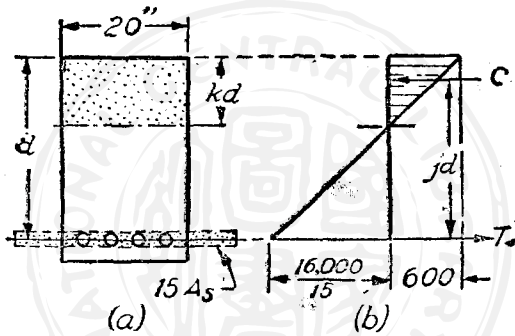


圖 237.

內之張應力，為鋼張應力之十五分之一，因其面積已乘十五倍也。假定應力強度之分布為一直線，如圖 237b 所示。由此圖中之相似三角形，可得下列關係，以定中立軸。

$$\frac{kd}{d} = \frac{600}{\left(\frac{16,000}{15}\right) + 600} \quad \text{或} \quad k = 0.36.$$

偶力之力臂為

$$d - \frac{kd}{3} = 0.88d.$$

在中立軸以上混凝土內之力為 $\left(\frac{600}{2}\right)(0.36d)(21) = 2,16 d$ 。其抗矩為 $(2,16 d)$

$\times (0.88d)$ ，此等於已知彎矩 2,000,000 吋磅。故 $d = 1,952$ ，由此 $d = 32\frac{1}{2}$ 吋。

當鋼筋平衡時 $T=C$, 故

$$16,000(A_s) = 2,100 \left(32 \frac{1}{2} \right)$$

由此

$$A_s = 4.39 \text{ 方吋.}$$

335. 設 $f_s = 12,000$, $f_c = 645$, $n = \frac{E_s}{E_c} = 15$, 求此鋼筋混凝土梁之鋼比 $p = \frac{A_s}{bd}$.

答. $p = 0.012$.

336. 設混凝土內之最大壓應力, 為鋼內張應力之二十分之一, 及 $n = 15$, 求鋼比 p .

337. 略去混凝土之重, 試設計一寬 10 吋之梁, 使負力矩 22,500 呎磅. $f_c = 750$ 及 $f_s = 12,000$. 用 $n = 12$. 問深 d 若干? 需鋼面積若干?

338. 一自由支持梁, 長 15 呎, 於中心負載荷 8,500 磅. 用鋼之經濟百分率, $d = 20$ 吋. 假定 $f_s = 16,000$, $f_c = 500$, $n = 15$, 求 b 及 A_s . 假定混凝土每立方呎重 150 磅, 試將梁重算入.

答 $b = 14.1$ 吋; $A_s = 1.41$ 方吋.

339. 混凝土梁長 20 呎, 自由支持於兩端, 負 1,000 磅/呎之等布載荷(梁重在內). 假定 $d = 2b$, 求此梁所需鋼面積. 及 b 與 d . 設混凝土每立方呎重 150 磅, 問此梁可負淨載重若干?

$$f_c = 600 \text{ 磅/方吋;}$$

$$f_s = 18,000 \text{ 磅/方吋.}$$

$$E_c = 2 \times 10^6 \text{ 磅/方吋;}$$

$$E_s = 30 \times 10^6 \text{ 磅/方吋.}$$

66. 鋼筋混凝土梁內之切應力. ——用 36 節之法, 研究兩相鄰剖面 mp 及 m_1p_1 (圖 268) 間之元素 $mmn.n_1$, 可得結論, 即最大切應力 s_s , 作用於中立面 nn_1 上. 以 dC 表示混凝土剖面 mp 及 m_1p_1 上之壓力之差, 中立面上之切應力 s_s , 可如下求之:

$$(s_s)_{\text{最大}} \cdot b \cdot dx = dC,$$

由此 $(s_s)_{\text{最大}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{dC}{dx}$. (a)

因彎矩為 $M = Cjd$, (a) 式變為

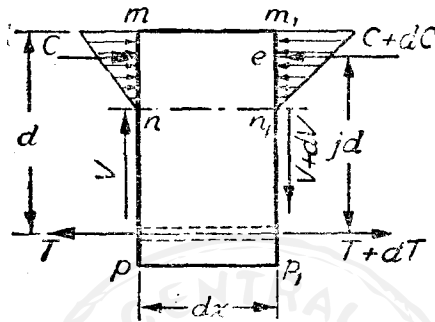


圖 268.

$$(s_s)_{\text{最大}} = \frac{1}{jbd} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{V}{jbd}, \quad (111)$$

式中 V 為所研究剖面上之切力。

在實際計算時，非惟應算中立面上之切應力，而鋼與混凝土接觸面上之切應力，亦甚重要。再研究圖 268 中元素 mpm_1p_1 ，由其對於 e 點之力矩之平衡，

$$Vdx = (T + dT - T)jd.$$

由此，得在兩剖面 mp 及 m_1p_1 之鋼桿內張應力之差 dT 為

$$dT = \frac{Vdx}{jd}.$$

此 dT 之差，以分布於鋼桿面上之切力平衡之。用 Σ_0 表示張力桿圓周之和之時數，桿面上之切應力為

$$s_s = \frac{dT}{\Sigma_j dx} = \frac{V}{jd\Sigma_0}. \quad (112)$$

將此式與(11)式相較，可知設 Σ_0 小於 b ，則此應力較中立面上之應

力爲大，欲增加 Σ 。而同時使鋼剖面積不變，僅增桿數而減其直徑可耳。

67. 曲桿內之彎應力。——在以下討論中，假定桿之中心線，(註²) 爲一平面曲線，且假定剖面在此平面內有一對稱軸。此桿受位於此對稱面內諸力之作用。今先討論一等剖面桿受純彎曲之例，此純彎曲爲兩端作用之偶力所生者(圖 269)。一正彎矩爲欲減小桿曲率之彎矩。此例之應力分布，用計算直桿之同樣假定求之，即桿橫剖面原爲平面且垂直於桿中心，在彎曲後亦如是。令 ab 及 cd 表示桿之二相鄰剖面，令 $d\phi$ 表示在彎曲前二剖面間之小角。經彎曲後，剖面 cd 對 ab 轉動，令 $\Delta d\phi$ 表示此小轉角。因此轉動，桿凸邊之縱纖維收縮，而在凹邊之纖維則伸長。設 $n-n$ 表示中立面，距此面 y (註³) 之任何纖維之伸長爲 $y(\Delta d\phi)$ ，而其相當單位伸長爲

$$e = \frac{y(\Delta d\phi)}{(r-y)d\phi}, \quad (a)$$

式中 r 表示中立面之半徑，(a) 式之分母爲彎曲前相鄰剖面間之纖維長度。假定縱纖維間無側壓力(註⁴)，距中立軸 y 處之彎應力爲

$$s_x = Ee = \frac{Ey(\Delta d\phi)}{(r-y)d\phi}. \quad (b)$$

由(b)式可知應力之分布，不復爲直線，如直桿然，但此依照雙曲線定律，如圖 269_b 所示。由分布於剖面上之正力和爲零之條件，可知中立

註 2. 中心線爲連結諸桿剖面質心之線。

註 3. 設 y 在向桿曲率中心之方向，則作爲正。

註 4. 用正確理論可證明有若干徑向壓力之存在，但對於應力 s_x 無重大效應，故可略去之。此在垂直於曲率平面方向之側壓力，於薄殼之彎曲，似較重要。

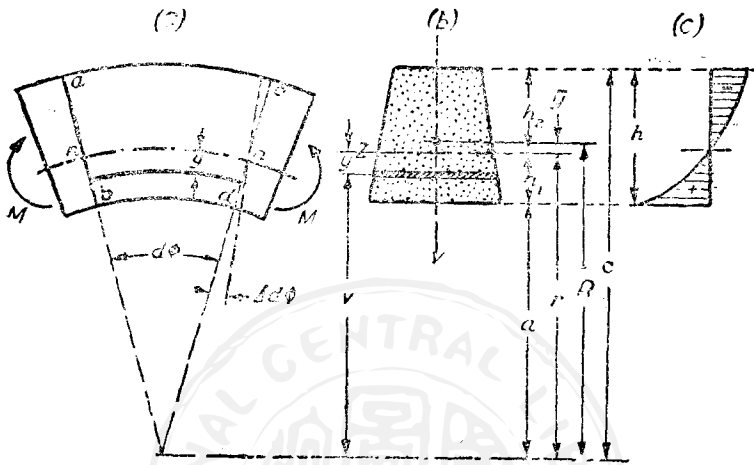


圖 269

軸由剖面之質心，向桿曲率中心遷移。在矩形剖面之例中，張力之陰影面積（圖 269c），必等於壓力之陰影面積；故最大彎應力作用於凹邊上。欲使最外纖維內之張應力與壓應力相等，必用質心偏近桿之凹邊之剖面形。

(b)式函有二未知數，即中立面之半徑 r ，及因彎曲所生之角變位 $\Delta d\phi$ 。欲求二者，必用二靜力方程式。第一方程式，根據分布於剖面上之正力和等於零之條件。第二方程式，根據諸正力之力矩等於彎矩 M 之條件。

$$\int s_x dA = \frac{E(\Delta d\phi)}{d\phi} \int \frac{y dA}{r-y} = 0. \quad (c)$$

$$\int s_x y dA = \frac{E(\Delta d\phi)}{d\phi} \int \frac{y^2 dA}{r-y} = M. \quad (d)$$

各式之積分應及於剖面之全面積。

由 (c) 式可求 r ，由此可求自剖面質心軸至中立軸之距離 \bar{y} (作為正量)。令 v 表示自曲率中心至任何元素 dA 之距離，於是 $y = r - v$ ，(c) 式可寫作

$$\int \frac{(r-v)dA}{v} = 0,$$

由此

$$r = \frac{A}{\int \frac{dA}{v}},$$

或

$$y = R - \frac{A}{\int \frac{dA}{v}}, \quad (113)$$

式中 R 為桿中心線之初曲率半徑。

用 (d) 式可得一公式，將纖維應力以彎矩表之。先將 (d) 式之積分如下化簡之：

$$\int \frac{y \cdot dA}{r-y} = - \int \left(y - \frac{ry}{r-y} \right) dA = - \int y dA + r \int \frac{y dA}{r-y}. \quad (e)$$

(e) 式右邊第一積分表示剖面積對於中立軸之力矩，第二積分由 (c) 式可知等於零。因此

$$\int \frac{y \cdot dA}{r-y} = - [A(-\bar{y})] = A\bar{y}. \quad (f)$$

於是 (d) 式變為

$$\frac{E(\Delta d\phi)}{d\phi} = \frac{M}{A\bar{y}}.$$

將此式代入(b)式,

$$s_x = \frac{My}{Ay(r-y)}. \quad (g)$$

最外纖維內之應力,即桿內之最大應力,爲

$$(s_x)_{\text{最大}} = \frac{Mh_1}{Aya} \quad \text{及} \quad (s_x)_{\text{最小}} = -\frac{Mh_2}{Ayc}, \quad (114)$$

式中 h_1 及 h_2 爲自中立軸至最外纖維之距離, a 及 c 爲桿之內半徑及外半徑.

以上所論者爲純彎曲之例,即桿僅受端偶力. 在較爲普通之例中,曲桿受在曲桿對稱平面內諸任何平面力系之作用,作用於任何剖面一邊桿部分上之諸力,可化爲一偶力及一作用於剖面質心上之力. 此偶力之力矩,等於諸外力對於剖面質心軸之力矩. 此偶力所生之應力,如上述方法求之,力可分解爲兩分力,一爲在桿中心線之切線方向內之縱力 N ,一爲在剖面平面內之切力 V . 縱力生張應力或壓應力,等布於剖面上,其大小等於 $\frac{N}{A}$. 欲得任何纖維內之總軸應力,應將上述之均勻應力之代數值加於偶力所生之應力上. 橫力 V 生切應力,此應力分布於剖面上之狀況,可視作與直桿同.(註5)

習 題

840. 一矩形剖面曲桿受純彎曲,設 $R=5$ 吋, $h=4$ 吋,求 $(s_x)_{\text{最大}}$ 與 $(s_x)_{\text{最小}}$ 之數目值之比. 答. $(s_x)_{\text{最大}}/(s_x)_{\text{最小}} = 1.76$.

註5. 此假定與狹矩形剖面桿之正確解答,甚爲符合.

241. 假定上題之剖面為圓形，試解之，又求 \bar{v} 。

答. $\bar{v} = 0.28$ 吋; (s_x) 最大 (s_x) 最小 -1.89 。

942. 圖 270 示 T 剖面，在純彎曲中欲使 (s_x) 最大及 (s_x) 最小之數目值相等，求此剖面之尺寸 b_1 。已知 $f_1 = 1$ 吋, $f_2 = 3$ 吋, $b_2 = 1$ 吋, $a = 3$ 吋。

答. $b_1 = 3.69$ 吋。

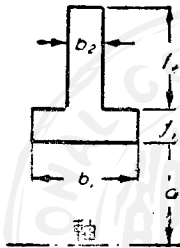


圖 270.

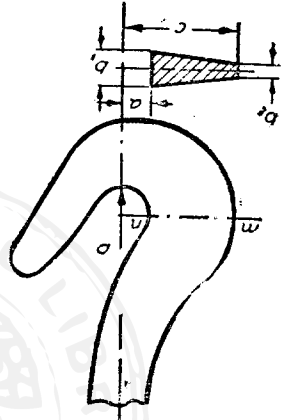


圖 271.

343. 圖 271 示一鉤。設 $P = 4,500$ 磅, $b_1 = 1\frac{5}{8}$ 吋, $b_2 = \frac{3}{8}$ 吋, $a = 1\frac{1}{4}$ 吋, $c = 5$ 吋。求梯形剖面 m 上之 (s_x) 最大及 (s_x) 最小。

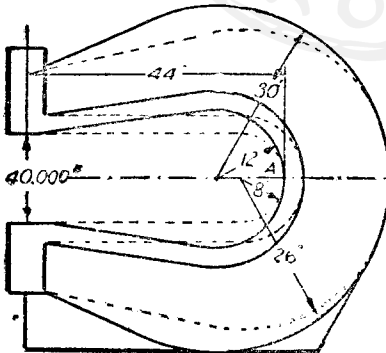
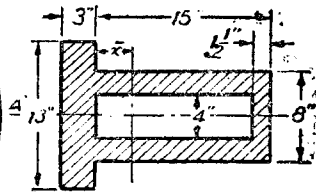


圖 272.



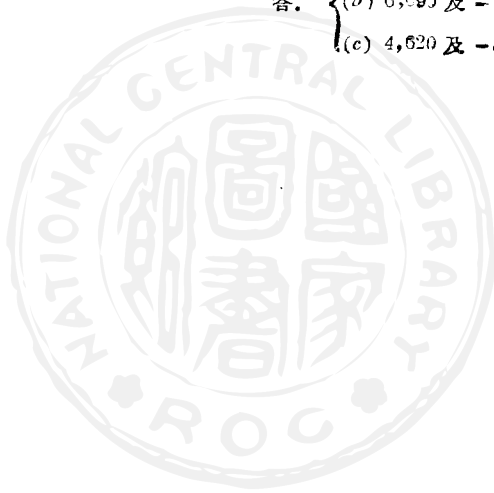
經過 A-A 之截面

344. 圖 272 之實線示壓穿機，喉之內半徑 = 12 吋，其外半徑 = 30 吋，設該機生壓力 4,000 磅，求 A 及 A' 處之應力，右圖示其剖面。

設虛線所示壓穿機之內半徑為 8 吋，外半徑為 26 吋，試求 A 與 A' 處之應力，其剖面與上同。

設喉半徑甚大，即根據應力直線分布之假設，問以上應力之值該若干？

答. $\left\{ \begin{array}{l} (a) 6,685 \text{ 及 } -4,340 \text{ 磅/方吋.} \\ (b) 6,690 \text{ 及 } -4,110 \text{ 磅/方吋.} \\ (c) 4,620 \text{ 及 } -5,490 \text{ 磅/方吋} \end{array} \right.$



第十 章

由直應力,彎應力及扭應力之組合 所生之應力

68. 扭轉與軸伸長或壓縮之組合。——前在討論扭轉時(見第四章),曾假定圓軸受簡扭轉。在實際應用上,常遇扭轉與伸長或壓縮,或扭轉與彎曲組合之例。例如,此種組合發現於螺旋槳軸與鑽孔器中。在扭轉與軸伸長之例中(圖 273),如飛機螺旋槳軸與水電發電機軸,由(43)式其扭轉切

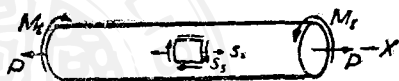


圖 273.

應力為 $s_s = \frac{M_t d}{2I_p}$, 而直應力為 $s_z = \frac{P}{A}$. 此二組應力作用於軸表面之一元素上, 如圖所示. 用(26)式, 其最大合切應力為

$$(s_s)_{\text{最大}} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{P}{A} \right)^2 + \left(\frac{M_t d}{2I_p} \right)^2}, \quad (115)$$

式中 P 為作用於剖面積 A 上之張力, M_t 為作用於實心或空心圓軸上之扭力之時磅數, d 為軸之直徑, I_p 為剖面積之慣極矩.

在扭轉與軸壓縮之例中, 長軸之皺縮傾向, 必須算入.

傳遞軸系設計法規(註1)將此計入，此建議將 s_x 代入上述公式求 $(s_s)_{\text{最大}}$ 以前，

先將直應力 $s_x = \frac{P}{A}$ 乘一因數 a ，於是扭力與軸壓力(非與張力)組合時，

$$(s_s)_{\text{最大}} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(a \frac{P}{A} \right)^2 + \left(\frac{M_t d}{2I_p} \right)^2} \quad (115)$$

其因數為

$$a = \frac{16,000}{16,000 - 69.3 \left(\frac{l}{r} \right)},$$

式中 l 為軸不支持長度之時數， r 為最小迴轉半徑： $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ 。根據直線柱公式 $\frac{P}{A} =$

$16,000 - 69.3 \left(\frac{l}{r} \right)$ ，使一長 l 之軸，至應力 “ $\frac{P}{A} = 16,000 - 69.3 \left(\frac{l}{r} \right)$ ” 磅/方吋時，

其所受之危險情形與使一甚短軸至應力 16,000 磅/方吋相同，故使一長軸受應力至 $\frac{P}{A}$

磅/方吋，與使無彎縮傾向之短軸受應力至 $a \left(\frac{P}{A} \right)$ 磅/方吋相當。

在以上二者情形中，其所需軸直徑，用嘗試法求之：其唯一注意點，即在不使(115)或(116)式之右側超過工作切應力。

習 題

245. 一直立水輪能發扭力 4,000,000 呎磅。其實心圓軸之直徑為 38 吋，此軸除傳遞此扭力至發電機外，又受 1,800,000 磅之軸張力。求所生之最大切應力。

解。

$$s_x = \frac{1.8 \times 10^6}{1,134} = 1,590 \text{ 磅/方吋。}$$

註1. Code for Design of Transmission Shafting, Amer. Soc. of Mech. Eng'rs., 1927, p. 5.

$$s_s = \frac{8 \times 106 \times 8}{2\pi(38)^4} = 4,470 \text{ 磅/方吋.}$$

$$(s_s)_{\text{最大}} = \sqrt{\frac{(1,590)^2}{4} + (4,470)^2} = 4,540 \text{ 磅/方吋.}$$

346. 一長度較短之鋼螺旋槳軸，直徑 7 吋，以每分鐘 150 轉之速轉動，且受 231 噸之軸壓力。設 $(s_s)_{\text{最大}}$ 不得超過 10,000 磅/方吋，受壓力之 $(s_n)_{\text{最大}}$ 亦不得超過 13,500 磅/方吋，求可傳之最大馬力。 答：770 馬力。

347. 一軸壓力 $P=20$ 噸，及一扭力矩 $M_t=6,000$ 呎磅，作用於半徑為 $1\frac{1}{2}$ 吋之短軸針上。在針內一點 A 距軸 $\frac{3}{4}$ 吋，求其上之主應力及其方向。

348. 今有一電力起重機，其所用(短)端壓螺旋之螺線根之直徑為 1.23 吋。端壓力為 29,700 磅，扭力為 4,700 吋磅，問所生最大正應力及切應力各若干？

349. 一實心圓軸以每分鐘 215 轉之轉速，傳遞 400 馬力，同時又受端壓力 12,000 磅。此軸在間隔 12 呎處堅硬支持之，其外直徑為 5 吋。求所生最大切應力。計算 α 時，假定 $l=12$ 呎。 答： $(s_s)_{\text{最大}} = 4,810$ 磅/方吋。

350. 承前題，設該軸為空心，其內直徑為 4 吋。試解之。

答： $(s_s)_{\text{最大}} = 9,160$ 磅/方吋。

69. 圓軸內彎曲與扭轉之組合。——在實際應用上，常有扭力矩與彎力矩同時作用之情形。用滑車，齒輪或飛輪傳至軸上之力，恆可化為一扭力及一彎力。此類簡單之例，如圖 274 所示。一實心軸固定於一端，他端加一垂直力 P ，此力離軸之距離為 R 。在中心 B 加二相等而相反之力 P ，此二力與已知力 P 平行，可知在此例可化為一偶力或扭力 $M_t=PR$ ，及一橫力 P ，二者均作用於自由端之中心。(註 2)

註 2. 在此問題中，軸與滑車之重略去。

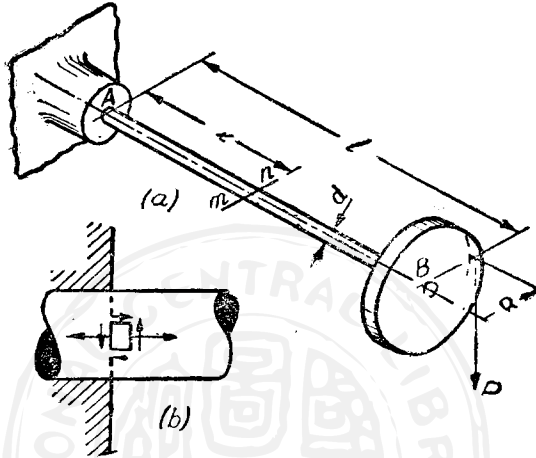


圖 274

此扭力沿軸之大小為一定,而 P 在任何剖面中所生之彎矩為

$$M = -P(l-x). \quad (a)$$

在討論軸中所生最大應力時,應考慮(1)扭力 M_t 所生之切應力, (2)彎矩 M 所生之正應力,及(3)切力 P 所生之切應力. 最大扭應力發生於軸之圓周上,其值為(見 43 式)

$$s_s = \frac{M_t r}{I_p} = \frac{16M_t}{\pi d^3}. \quad (b)$$

彎曲所生之最大正應力 s_x , 發生於固定端(因此處彎矩之數值最大)距中立軸最遠之纖維上;其值為

$$(s_x)_{\text{最大}} = \frac{M}{I} = \frac{32M}{\pi d^3}. \quad (c)$$

切力所生之應力，則僅屬次要。其最大值發生於中立軸上，此處彎曲所生之正應力為零；故最大合應力恆發生於應力(1)及(2)為最大之點，而在此例中生於固定端之頂及底面元素上。

圖 27. b 為固定端處軸一部分之上視圖，此表示一元素，及作用於其上之應力。由(25)式得此元素之主應力

$$(s_n)_{\text{最大}} = \frac{s_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_x}{2}\right)^2 + s_s^2}.$$

將(b)及(c)代入上式，且注意圓軸之 $I_p = 2I$ ，且 $\frac{I}{r}$ 為剖面係數之值，恆以 $\frac{I}{c}$ 或 S 表示之(見 31 節)，得

$$(s_n)_{\text{最大}} = \frac{1}{2S}(M + \sqrt{M^2 + M_t^2}) \quad (117)$$

$$= \frac{16}{\pi d^3}(M + \sqrt{M^2 + M_t^2}). \quad (117a)$$

同樣，再用(25)式，

$$(s_n)_{\text{最小}} = \frac{1}{2S}(M - \sqrt{M^2 + M_t^2}) \quad (118)$$

$$= \frac{16}{\pi d^3}(M - \sqrt{M^2 + M_t^2}). \quad (118a)$$

由上式可知，設其相當彎矩為

$$M_{\text{相當}} = \frac{1}{2}(M + \sqrt{M^2 + M_t^2}),$$

則 $(s_n)_{\text{最大}}$ 之值與簡彎曲中所得之值同。

在同一元素(圖 274b)上之最大切應力,由(26)式,爲

$$(s_s)_{\text{最大}} = \frac{1}{2S} \sqrt{M^2 + M_t^2} \quad (119)$$

$$= \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + M_t^2}. \quad (119a)$$

用柔韌金屬所製之軸系,恆用最大切應力以求軸之安全直徑.令 $(s_s)_w$ 爲工作切應力,且將此替代(119a)之 $(s_s)_{\text{最大}}$,於是其直徑必爲

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi (s_s)_w} \sqrt{M^2 + M_t^2}}. \quad (120)$$

以上所論,可展至空心軸之問題,設其外直徑爲 d ,內直徑爲 d_i .

於是

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\pi(d^4 - d_i^4)}{32d} = \frac{\pi d^3}{32} \left[1 - \left(\frac{d_i}{d} \right)^4 \right], \quad (121)$$

將此值代入(117), (118) 及(119), 即可求空心軸內之最大張應力, 壓應力及切應力矣. 設使 $(s_s)_{\text{最大}}$ 等於許可切應力, 用(119)式即可求空心圓軸之直徑. d 或 d_i 必屬已知, 或假定 d 與 d_i 之比.

設有數平行橫力作用於軸上, 則在計算每剖面所需之直徑時, 必計算每剖面上之總彎矩 M 及總扭力 M_t . 設作用於軸上諸橫力不平行, 則必將諸力所生之彎矩向量相加, 以求總彎矩 M . 此種計算之例題在下列 351 及 356 題討論之.

習 題

351. 圓軸直徑 $2\frac{1}{2}$ 吋, 負一直徑 30 吋重 500 磅之帶輪(圖 275). 設皮帶上部及下部之水平牽力各爲 1,750 磅及 250 磅, 求剖面 mn 處之最大切應力.

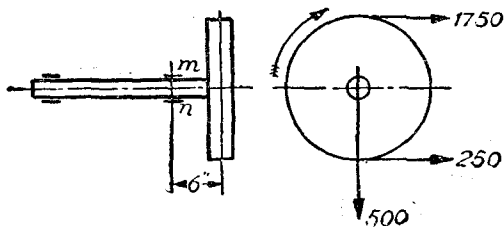


圖 275.

解。——在剖面 mn ,

$$M_t = (1,750 - 250)15 = 22,500 \text{ 吋磅.}$$

$$M = \sqrt{22,500^2 + 2,000^2} = 22,370 \text{ 吋磅.}$$

於是,由(119)式

$$(s_s)_{\text{最大}} = 8,570 \text{ 磅/方吋.}$$

352. 帶輪直徑 2 呎, 架於 2 吋之軸上, 此軸置於相距 8 呎之一對軸承中, 而帶輪距一軸承 3 呎. 動力由軸之 3 呎剖面處傳遞, 皮帶緊邊之張力為 300 磅, 鬆邊為 100 磅. 皮帶張力之方向平行. 求最大正(主)應力及最大切應力.

$$\text{答. } (s_n)_{\text{最大}} = 11,650 \text{ 磅/方吋.}$$

$$(s_s)_{\text{最大}} = 5,930 \text{ 磅/方吋.}$$

353. 一電動機電樞重 500 磅, 其圓軸為質心, 自由支持於相隔 20 吋之軸承中, 此電樞在二者之中心, 軸輪直徑 6 吋. 其中心懸掛於一軸承外 5 吋. 用軸上之垂直帶傳動, 以傳去動力, 帶之緊邊之總張力為 540 磅, 鬆邊為 180 磅. 設最大許可合切應力為 7,000 磅/方吋, 求所需之軸直徑.

$$\text{答. } d = 1.48 \text{ 吋.}$$

354. 圖 276 示一直立管, 在距管軸 3 呎處, 受一水平力

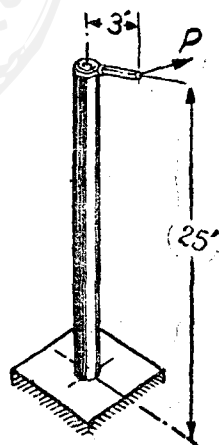


圖 276.

$P = 200$ 磅之作用。設 $\frac{I}{c} = 10$ 吋³, 求 (s_n) 最大及 (s_s) 最大。

355. 在圖 277 中, 二同在一平面內之力 F 相等。設軸直徑 2 吋, 最大正應力之極限為 12,000 磅/方吋, 最大切應力之極限為 8,000 磅/方吋, 求此二力之最大值。

答. $F = 554$ 磅。

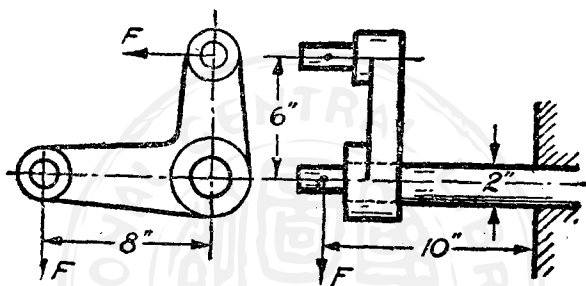


圖 277.

356. 一均勻實心圓軸 (見圖 278), 以每分鐘 220 轉之轉速, 自小齒輪及齒輪 D , 傳遞 30 馬力至皮帶輪 C 及 B , 在 C 處用去 10 馬力, 在 B 處將所剩 20 馬力傳去。

T_1 及 T_2 表示皮帶張力, 假定 $\frac{T_1}{T_2} = 3$, 皮帶以垂直方向離開皮帶輪 B , 而在皮帶輪 C 處之皮帶, 則以與水平成 60° 之向前傾斜離開, 假定工作切應力 $(s_s)_w = 6,000$ 磅/方吋, 求軸之直徑。

解。——由(44)式, D 處所加扭矩為

$$M_t = \frac{63,000 \text{ hp}}{n} = \frac{63,000 \times 30}{220} = 8,590 \text{ 吋磅。}$$

D 上之齒壓力為 $P = \frac{\text{扭矩}}{\text{半徑}} = \frac{8,590}{6} = 1,432$ 磅。

帶輪 C 取去之扭矩, 與每分鐘 220 轉之 10 馬力相當; 故 $M_t = 2,833$ 吋磅。以皮帶張力 T_1 及 T_2 表示帶輪 C 所傳去之扭矩 M_t , 得,

$$M_t = (T_1 - T_2)12 = (\frac{2}{3}T_2 - T_1)12 = 2,833.$$

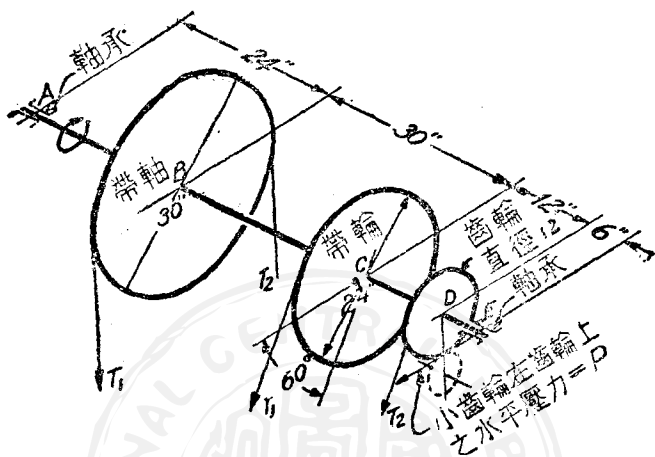


圖 278.

由此 $T_2 = 119$ 磅; $T_1 = 258$ 磅, C 點在皮帶方向之總牽力為 $T_1 + T_2 = 477$ 磅, C 點上水平分牽力 $= 477 \cos 60^\circ = 238$ 磅, 而其垂直分牽力 $= 477 \sin 60^\circ = 413$ 磅。

傳去 20 馬力之帶輪 B , 可用同法求之, $T_1 = 572$ 磅; $T_2 = 191$ 磅; $T_1 + T_2 = 764$ 磅。

圖 279a 表示在軸上生彎曲之載荷, 此載荷均作為經過軸之中心軸, 其反動力為: $A_h = 179$ 磅; $E_h = 1,490$ 磅; $A_v = 613$ 磅; $E_v = 564$ 磅。圖 279b 及 279c 示彎矩圖, 圖 279d 示扭矩之分布。

B, C 二點之應力情形, 似最惡劣, 而必再進一步考慮之, 在二互成直角平面內之力矩之總彎矩, 可用下式求之:

$$\text{總力矩} = \sqrt{M_{\text{垂直}}^2 + M_{\text{水平}}^2}$$

於是 $M_B = \sqrt{14,700^2 + 4,100^2} = 15,300$ 吋磅,

$$M_C = \sqrt{10,110^2 + 9,670^2} = 14,000$$
 吋磅。

根據 B 及 C 處之力矩及扭矩, 可由(120)式求得直徑。

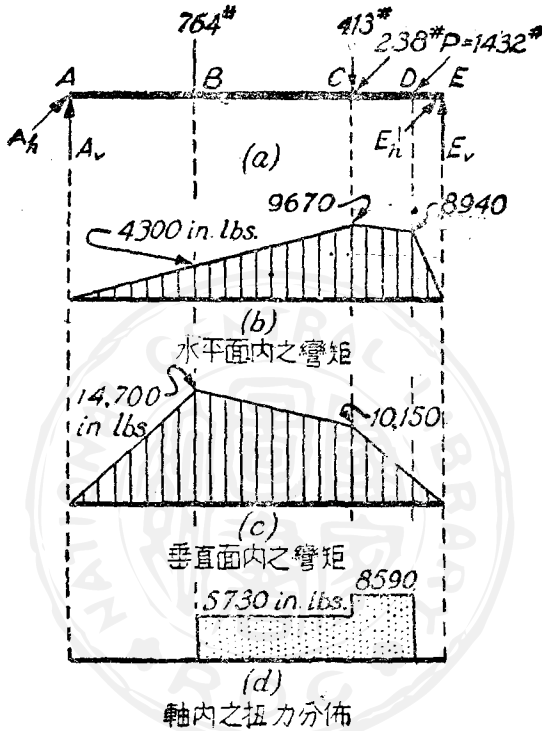


圖 10.

$$\text{在 } B, d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi(6,000)} \sqrt{15,500^2 + 11,000^2}} = 2.4 \text{ 吋.}$$

$$\text{在 } C, d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi(6,000)} \sqrt{14,000^2 + 8,900^2}} = 2.41 \text{ 吋.}$$

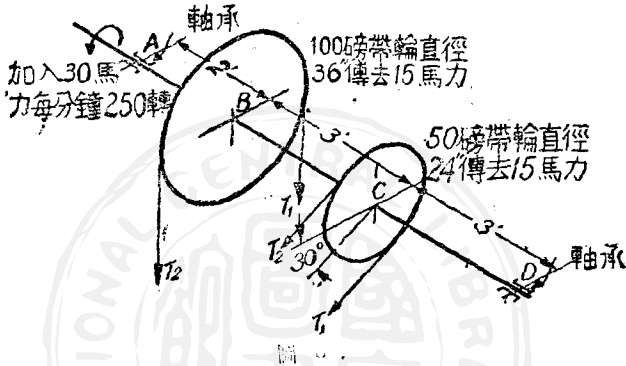
所用直徑，為二者之較大者：即，2.41 吋。

在此題與以前解法中，因反彎曲及振動載荷關係，所減少之工作應力，尚未計入。

(註 3)

37. 設工作切應力為 $(s_s)_w = 6,000$ 磅/方吋, 求圖 275 之軸直徑.

38. 如圖 280 所示條件, 求傳遞動力所需均勻實心圓軸之直徑. 假定 $\frac{T_1}{T_2} = 3$ 及 $(s_s)_w = 3,000$ 磅/方吋.



39. 一均勻軸 (圖 281) 負二相等帶輪, 此帶輪直徑 3 呎, 各重 500 磅. 左帶輪上之帶牽力在水平方向. $(s_s)_w = 3,000$ 磅/方吋. 求所需之軸直徑.

答. $d = 2.63$ 吋.

380. 設 $(s_s)_w = 6,000$ 磅/方吋, $\frac{d_i}{d} = \frac{2}{3}$, 其他尺寸及諸力, 如圖 281 所示. 求空心軸之外直徑. 答. $d = 2.83$ 吋.

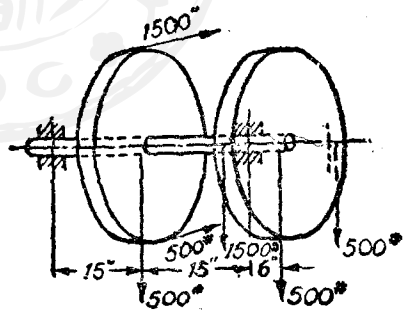


圖 281.

70. 壓縮或伸長與彎曲之組合. —— 在此假定稜柱形桿所

註 3. 欲知計入此等因數之方法, 見 Cod: for Design of Transmission Shafting.

荷諸力,均在其對稱面之一面內,而在以上討論中,諸力均為橫向,在此處則諸力沿桿軸可有分力。圖 282 示此類之簡單例,即一柱荷一傾斜力 P 。此力分解為一橫分力 N ,及一軸壓力 T ,而假定此柱較為剛強,其撓度甚小,在討論力 T 所生應力情形時,可以略去。於是任

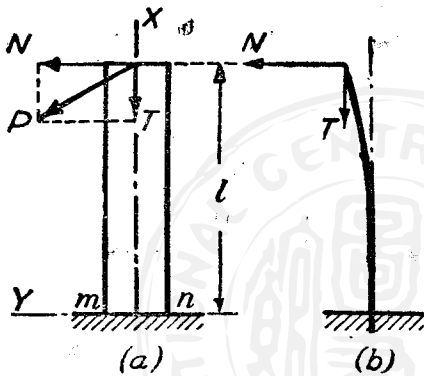


圖: 82.

何點之總應力,可將力 T 所生之壓應力,重疊於橫力 N 所生之彎應力以得之。在柔韌柱之例中,則因柱之撓度(圖 282b),壓力對彎曲頗有效應,此在以後再討論之(第十一章)。力 T 所生之應力,在柱各剖面上相等,其大小為 $\frac{T}{A}$, A 為剖面積。

彎應力隨力矩而變,頂點力矩為零,至底點增至最大值 Nl 。故危險剖面在固定端,此處距 z 軸距離 y 之一點之應力,為

$$\sigma_x = -\frac{T}{A} - \frac{Nly}{I_z} \quad (a)$$

例如,假定柱剖面為矩形 $b \cdot h$, h 平行於彎曲平面,得 $A = b \cdot h$, $I_z = \frac{bh^3}{12}$

最大壓應力在點 m 上,其值為

$$(\sigma_x)_{\text{最小}} = -\frac{6Nl}{bh^2} - \frac{T}{bh} \quad (b)$$

此應力之數值為最大。

在 n 點, 得

$$(s_x)_{\text{最大}} = \frac{6Nl}{bh^2} - \frac{T}{bh}$$

當力 P 不平行於二彎主面之一面時, 其橫分力 N 所生之彎應力, 可分解 N 為平行於二面之分力求之 (見 53 節之討論). 將此彎應力重疊於縱力所生之壓應力, 則得任何一點上之總應力.

習 題

361. 圖 283 示二圓木桿, 長 20 呎, 直徑 8 吋, 設鋼線 ABC 上之載荷 P 為 60 磅, 求桿內之最大壓應力. 各索纜 DF 內之張力為 $S=1,000$ 磅; $\tan \alpha = \frac{1}{10}$; $\sin \beta = \frac{1}{5}$; $DK=15$ 呎. K 端局部拘束.

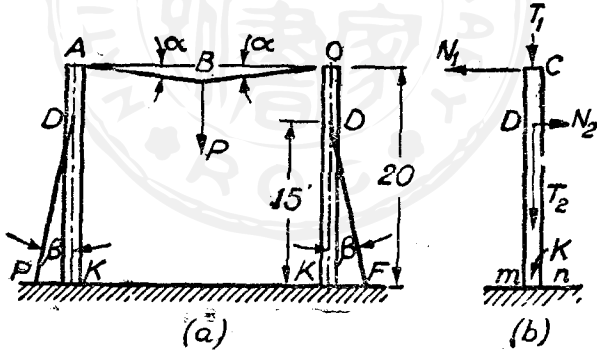


圖 283.

解. ——鋼絲 BC 內之力之分力 (圖 283b) 為 $N_1=300$ 磅; $T_1=36$ 磅. 索纜 DF 內之力之分力為 $N_2=200$ 磅; $T_2=98$ 磅. 最大彎矩在固定端, 其值為 $M_{\text{最大}}=36,000$ 吋磅. 在同剖面上之壓力為 $T_1+T_2=1,010$ 磅. m 點之最大壓應力為

$$s = \frac{4 \times 1,010}{\pi d^2} + \frac{52 \times 36,000}{\pi d^2} = 21 + 715 = 736 \text{ 磅/方吋.}$$

362. 圖 284 示矩形木梁, 設 $P=4,000$ 磅; 寬 = 8 吋; 深 = 10 吋. 此梁自由支持於 A , 而鉸釘於 B . 求梁內之最大張應力. 答. (s_x) 最大 = 590 磅/方吋.

363. 結構 ABC 支持一載荷 $P=2,000$ 磅(圖 285), 兩桿在 B 點用剛接合相連, A 點為不活動鉸, C 點為活動支座. 桿 AB 及 BC 之剖面為 10×10 吋之正方形. 求此結構內之最大壓應力. 答. 582 磅/方吋.

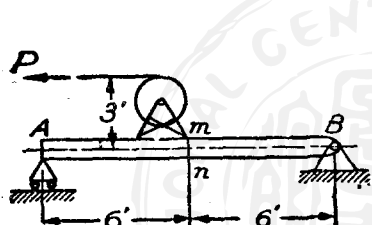


圖 81.

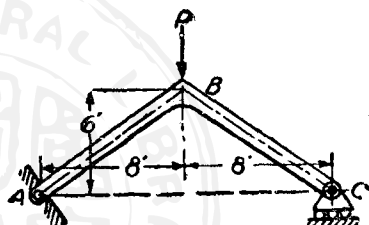


圖 85.

364. 磚牆支持沙壓力(圖 286). 設牆重為 150 磅/立呎, 沙之總側壓力為每碼牆 10,000 磅. 沿牆高之沙壓力分布, 依照直線定律, 如線 AB 所示. 求牆底之最大張應力及壓應力.

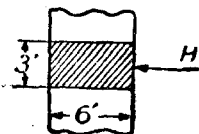
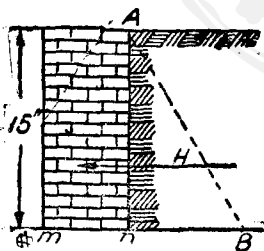


圖 87.

365. 承前題, 設欲使 n 處之應力為零. 求牆厚.

答. 80 吋.

366. 電力起重機之鼓軸, 受 $7,400$ 磅之軸張力及 $32,200$ 吋磅之彎矩. 根據 $11,000$ 磅/方吋之工作張應力, 計所需之軸直徑. 答. 直徑 = 3.20 吋.

367. 圖 282 示一桿, 長 6 呎, 直徑 12 吋. 設 P 之分力 N 與 T 相等, m 處之最大壓應力為 $1,000$ 磅/方吋, 求力 P 之大小. 答. $P=3,260$ 磅.

368. 圓桿 AB 長 l , 鉸於 B , 於 A 點以光滑垂直

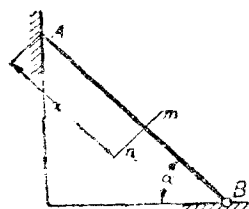


圖 287.

面(無摩擦)支持之,其所受作用爲自己重量,求壓應力最大之剖面 $m-m$ 之位置(圖 287).

答. $x = \frac{l}{2} + \frac{d}{8} \tan \alpha$.

71. 短柱之偏心載荷.——偏心載荷爲直應力與彎應力組合之特例.設桿長與其側尺寸相較,不爲甚大,則其撓度甚小,與其初

偏距 e 相較,可以略去不論;故可用重疊法.註如例如,試論壓縮之例,一縱力 P 作用於剖面之二主軸之一軸上,其偏距爲 e (圖 288).於是,設在剖面質心 O 上加二相等而相反之力 P ,因此二力結果爲零,故問題不因而而變.合力 P 爲軸壓力,能生直壓應力, $-\left(\frac{P}{A}\right)$,如圖 288b 所示,而偶力 Pe 在一主平面內生彎曲,其彎應力爲 $-\left(\frac{Pe y}{I_z}\right)$,如圖 288c 所示,於是其總應力爲

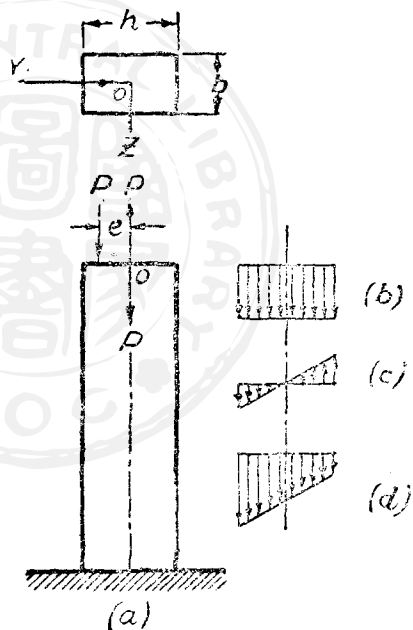


圖 88.

$$s_x = -\frac{P}{A} - \frac{Pe y}{I_z} \tag{122}$$

註上, 欲知長桿之偏心載荷, 見 76 節.

圖 288*d* 示此總應力之分布圖。在此假定最大彎應力較直應力小；於是桿之全剖面上均有壓應力。設最大彎應力較直壓應力大，則平行 z 軸有一零應力之線，此線分割面為二部，在右部上有張應力，而在左部上有壓應力。倘剖面為矩形，邊為 h 及 b (圖 288*x*)，(122)式變為

$$s_x = -\frac{P}{bh} - \frac{1^2 P e y}{bh^3}. \quad (a)$$

令 $y = -\left(\frac{h}{2}\right)$ ，得

$$(s_x)_{\text{最大}} = -\frac{P}{bh} + \frac{6Pe}{bh^3} = \frac{P}{bh} \left(-1 + \frac{6e}{h}\right), \quad (b)$$

令 $y = \frac{h}{2}$ ，

$$(s_x)_{\text{最小}} = -\frac{P}{bh} - \frac{6Pe}{bh^3} = -\frac{P}{bh} \left(1 + \frac{6e}{h}\right). \quad (c)$$

由此可知，當 $e < \frac{h}{6}$ ，剖面上之應力符號無變翻；當 $e = \frac{h}{6}$ ，由 (c) 式得最大壓應力為 $\frac{2P}{bh}$ ，而在矩形剖面對邊之應力為零；當 $e > \frac{h}{6}$ ，應力之符號變翻，使總公式 (a) 之 s_x 等於零，可得零應力線之位置，

$$y = -\frac{h^2}{12e}, \quad (d)$$

或，用 r_z 表示對於 z 軸之迴轉半徑，

$$y = -\frac{r_z^2}{e}. \quad (123)$$

由此可知，當偏距 e 增加，零應力線至質心 O 之距離減小。此討論亦

可應用至受張力之偏心載荷情形中。設載荷之作用點在慣主軸之一軸上，則(125)式可亦應用於他種形狀之剖面。

今討論一例，即 B (偏心壓力 P 之作用點)不在剖面之二主軸 y 及 z 軸之一軸上，如圖 289 所示。用 m 及 n 表示此點之座標，於是 P 對於 y 及 z 軸之力矩，各為 Pn 及 Pm 。剖面任何一點 F 之座標為 v 及 z ，用重疊法得此點之應力為

$$s_x = -\frac{P}{A} - \frac{Fmy}{I_z} - \frac{Pnz}{I_y} \quad (e)$$

式中右側第一項表示直應力，其他二項各為力矩 Pm 及 Pn 所生之彎應力。由此可知，沿剖面任何線之應力分布，均依直線定律。

將(e)式右側等於零，則得零應力線之方程式。

用記法 $\frac{I_z}{A} = r_z^2$ ， $\frac{I_y}{A} = r_y^2$ (式中 r_z 及 r_y 各為對於 z 軸及 y 軸之迴轉半徑)，得直線

$$\frac{my}{r_z^2} + \frac{nz}{r_y^2} + 1 = 0. \quad (f)$$

先將 $y=0$ 代入此式，

於是將 $z=0$ 代入，得

零應力線與 z 軸及 y 軸之交點 M 及 N (圖 289)。此二點之座標 v 及 u 為

$$v = -\frac{r_y^2}{n}, \quad u = -\frac{r_z^2}{m}. \quad (g)$$

習 題

369. 圖 290 示一方桿，在 mn 處之剖面積減小一半。求軸載荷 P 在此剖面上所生之最大張應力。

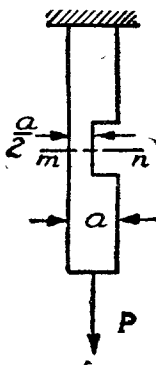
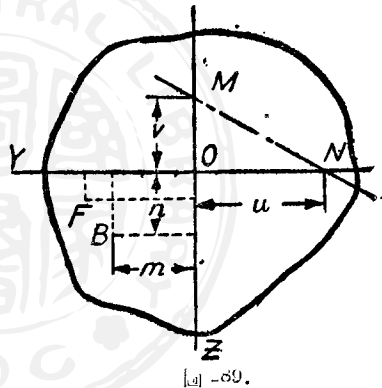


圖 290.



370. 承前題 假定得剖面為圓形，試解之。 答。 (s_x) 最大 = $9.14 \frac{P}{a^2}$ 。

371. 圖 29 示 T 剖面之梁，負一偏心載荷 P 。設 $d=1$ 吋， $h=5$ 吋， $b=1$ 吋， $P=4,000$ 磅，求梁內之最大張應力及壓應力。 答。 (s_x) 最大 = $1,117$ 磅/方吋；
 (s_x) 最小 = $-1,014$ 磅/方吋。

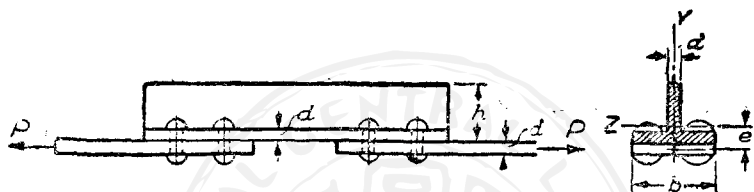


圖 291.

372. 圖 292 示一鉗，設 $P=200$ 磅， $b=3$ 吋，剖面 mn 係矩形，其大小為 1 吋 \times $\frac{1}{4}$ 吋，求此剖面上之最大張應力。

答。 (s_x) 最大 = $22,800$ 磅/方吋。

373. 承前題，欲使 (s_x) 最大 = $20,000$ 磅/方吋，問剖面 mn 之寬該若干？

374. 一剖面為 6 吋 \times 12 吋之短柱，負一壓載荷 $1,500$ 磅，此載荷置於距軸心 3 吋之點上，問所生最大纖維應力若干？生於何點？

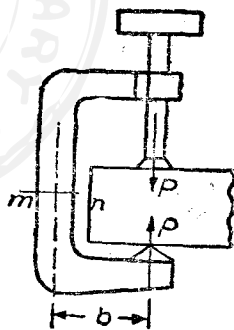


圖 292.

與同樣之最大應力，可用公式 $s_x = \frac{Mc}{I}$ 求得，試證之。

式中 M 為 P 對於斜中立軸 (圖 289 內之 MN) 之力矩， c 為極端纖維離 MN 之垂距， I 為剖面對於 MN 之慣矩。

答。 (s_x) 最大 = 435 磅/方吋，中立軸之 y 及 z 截距為 $y = -1$ 吋， $z = -2\frac{7}{9}$ 吋。

對於 MN 之 $I = 270$ 吋⁴。

第十一章

柱

72. 長柱。歐拉柱公式。——在前節中，已討論短柱或桿受偏心壓力之情形。但當壓縮構桿之長度遠較其橫尺寸大時，則其破壞非因直壓力，而因皺縮或側彎曲所致。此種直立之長壓縮構桿，稱為柱(columus)，其在對角位置者稱為斜柱或牽條(struts or braces)。

在討論斜柱或柱之時，如底端固定之柱(圖 293)，其撓度 δ 不能復如前節與偏距 e 相較而略去之。彎矩沿柱軸而變化，其在任何剖面 mn 上之大小為 $P(\delta + e - y)$ 。故其撓度曲線之微分方程式為(見 71 式)

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta + e - y). \quad (a)$$

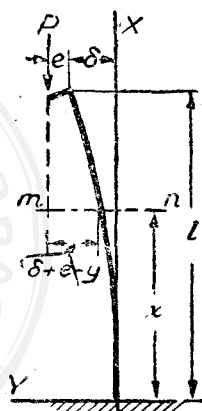


圖 293.

用記法

$$\frac{P}{EI} = k^2, \quad (b)$$

則得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = k^2(\delta + e).$$

(291)

此式可解之如下：先用 $2\left(\frac{dy}{dx}\right)$ 徧乘各項，而積分之，

$$2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx} + 2k^2y\frac{dy}{dx} = 2k^2(\delta + e)\frac{dy}{dx},$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + k^2y^2 = 2k^2(\delta + e)y + C_1.$$

使其適合固定端之邊界條件， $y=0$ 及 $\frac{dy}{dx}=0$ ，則 $C_1=0$ 。

重排列而積分之，

$$\frac{dy}{\sqrt{2k^2(\delta + e)y - y^2}} = k dx,$$

$$\cos^{-1}\left(1 - \frac{y}{\delta + e}\right) = kx + C_2. \quad (c)$$

由固定端之邊界條件 $x=0$ 及 $y=0$ ，得 $C_2 = \cos^{-1}1 = 0, 2\pi, 4\pi$ 等，用 C_2 之最小值，即 0 ，代入 (c) 式，得

$$y = (\delta + e)(1 - \cos kx). \quad (d)$$

將 $x=l$ 代入上式，得

$$(y)_{x=l} = \delta = (\delta + e)(1 - \cos kl),$$

由此可得自由端之撓度

$$\delta = e(\sec kl - 1) = e\left(\sec\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l - 1\right). \quad (124)$$

當偏距 e 值變動時，載荷 P 與其在自由端所生之撓度 δ 之關係，由圖 94(註 1) 表示之。

註 1. (124) 式及圖 94 僅適用於小撓度 (見 303 頁)。

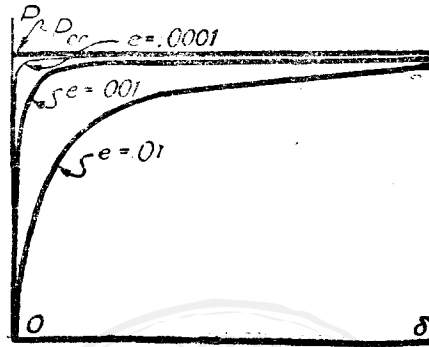


圖 294.

由此可知，當載荷接近某值（此稱為臨界載荷，用符號 P_{cr} 表示，其理由在下面討論之）時，各曲線均漸近於經過 P_{cr} 之水平線，同時 (124) 式所示之撓度變為無窮大。設偏距可減至零，則撓度 δ 亦將為零，直至載荷達 P_{cr} 為止，此時長柱可保留所給與之任何小撓度。設將此置於中心之載荷減去一小部分，使在臨界值之下，則此柱將復變為直；若將載荷增至 P_{cr} 之上，則撓度將繼續增加，直至發生破壞。故載荷 P_{cr} 之值，有一重要意義；即，此為柱所能負擔而不生皺縮之最大中心載荷。（註 2）

在決定此臨界載荷值時，由圖 294 知在任何一有限且固定之撓度 δ 情形之下，當偏距 e 漸近乎零，則載荷 P 漸近 P_{cr} 。因 $\frac{\delta}{e} = \sec \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l - 1$ ，當 e 漸近零，則 $\frac{\delta}{e}$ 之極限將變為無限大，於是 $\left(\sec \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l - 1 \right)$ 亦必為無限大。在上述條件下， P 即變為 P_{cr} ，而

註 2. 在此節及 3 節中，均假定桿甚為細長，故在皺縮時隨彎曲而生之應力，仍在比例極限內。至於較不細長之桿則在 74 節中討論之。

($\sec \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI} \cdot l - 1}$) 變為無限大。由此

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI} \cdot l} &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ 等} \\ &= (2n+1) \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (e)$$

式中之 n 為整數。將 $n=0$, 得滿足 (e) 式之 P_{cr} 之最小值。於是

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}, \quad (125)$$

此式即為歐拉柱公式，在此應應用於一端固定他端自由之柱，如圖 295a 所示。故此即為桿之臨界載荷，即，能使桿保持如圖 295b 所示稍彎形狀之最小載荷。

此臨界載荷公式，可用他法求之。假定載荷置於柱之中心（即 $e=0$ ），頂端之初變位為 δ ，則 (d) 式變為

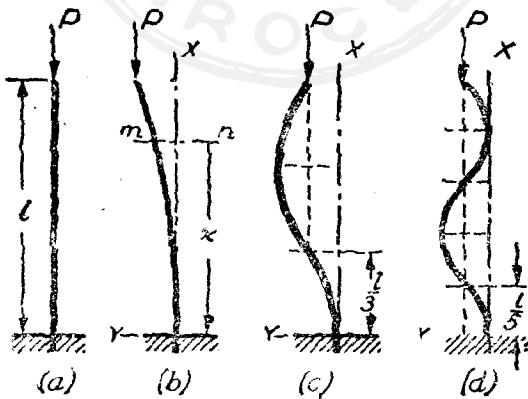


圖 29 .

$$v = \delta \left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot x \right). \quad (d')$$

在(d')式中,因當 $x=l$ 時, $v=\delta$,由此可求得發生撓度 δ 時之 P 值,於是 $\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l = 0$, 得 $\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 等,如(c)式然,因此 $P = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$, 與(125)式同,此值與 δ 值無關,由於下列之特性,此 P 值稱為臨界載荷 P_{cr} ,任何小於 P_{cr} 之載荷 P , 將使頂端之 v 不等於 δ , 但此與事實相反,如非 $\delta=0$, 故(d')式表示當 P 小於 P_{cr} , 撓度必為零,而當 $P = P_{cr}$, 則給與柱之任何撓度 δ , 均可保留。

以 $n=1, n=2 \dots$ 代入(c)式,得

$$P_{cr} = \frac{9EI\pi^2}{4l^2}, \quad P_{cr} = \frac{25EI\pi^2}{l^2}.$$

與此相當之撓度曲線,表示於圖 295c 及 d 中,如圖 295c 所示之形狀,其所需之力,較臨界值大九倍,而圖 295d 所示形狀,其所需之力,較臨界值大二十五倍,此種皺縮形式不安定,無實用意義,因當結構達(125)式之值時,即告壞破故也。

由(125)式可知,生皺縮之臨界載荷,不依靠材料之強度,但僅賴結構之尺寸及材料之彈性係數,有細長相等之二柱,一用高強度鋼製成,一用通常結構鋼製成,則在同一壓力下皺縮,雖二者之強度不同,而其彈性係數相同之故,由(125)式又可知增加 l , 可昇高柱之強度,增加 I 之法,可不改變其剖面積,但在可能範圍內將材料分布至距剖面主軸之最遠處,故壓縮構桿用管形剖面者較實心者為經濟,減小管剖面壁之厚度,而增加橫向尺寸,可以增加其穩定性,但管壁厚度有一最低限度,在此限度以下時壁之本身將不安定,於是柱將不整個皺縮,而其縱元素將皺縮,使壁呈皺紋,由以上討論,可知在許多情形之中,工程結構之破壞,非因一部分材料之缺乏強度,而應歸因於彈性之不安定也。

在一端固定之短柱例中，如圖 205a， $\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l$ 之最小，假定

$$\sec \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l = 1 + \frac{\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l\right)^2}{2} = 1 + \frac{Pl^2}{2EI},$$

其結果頗屬正確，上式為將 \sec 展開，取其前二項所得，於是(124)式成爲

$$\delta = \frac{Pel^2}{2EI}.$$

此與該梁受端偶力 Pe 彎曲之撓度公式，完全符合。

在長柱例中， $\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l$ 之最大，可用下列之近似公式：(註 3)

$$\delta = \frac{Pel^2}{2EI} \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (f)$$

此式之右邊第一因數表示一肢梁之自由端受偶力 Pe 所生之撓度，此撓度對於彎矩大小之效應，略去不論，第二因數爲撓度對於彎矩之效應，若使

$$\delta_0 = \frac{Pel^2}{2EI} \quad \text{及} \quad \alpha = \frac{P}{P_{cr}},$$

由 (f) 式，得

$$\delta = \frac{\delta_0}{1 - \alpha} \quad (g)$$

由此式所算得之數字結果，以與正確解法所得之值相較，如下表所列，可知在實際應用上，已屬正確。

$\sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l =$	0.1	0.5	1.0	1.5
正確之 $\delta =$	0.005e	0.139e	0.851e	13.1e
近似之 $\delta =$	0.005e	0.139e	0.840e	12.8e

註 3. 公式本源見 Timoshenko's Strength of Materials, Vol. II, Art. 5.

在此所論之例，有一要點應注意者，即壓力之大小與所生之撓度 δ 之間，無比例性之存在；故重疊法(50 節)不可用於此。一在軸向所加之力 P ，對於桿僅生壓力，但當此力與彎偶力 Pe 同時作用，則此力不僅生壓力，而又生外加彎曲。故其總變形不可用簡單之重疊法，重疊力 P 所生之軸向壓力與偶力 Pe 所生之彎曲而求得之。

73. 他種端條件之歐拉柱公式。——他種情形下之臨界載荷，可甚易用前例之解法求之。例如在兩端鉸釘之桿(圖 296)，由相對之關係知此桿兩邊之情形各與圖 295b 所示之全桿相同。故此例之臨界載荷可用 $\frac{l}{2}$ 代替(125)式中之 l ，而求得：

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (126)$$

此鉸端桿之例，在實際應用上時可遇到，此稱為稜柱形桿皺縮之基本例則。在固定端桿之例中(圖 291)，兩端有反動力矩，在皺縮時防止兩端之轉動。此壓力與此力矩之組合，與偏心作用之壓力 P 相當，圖 297。在 P 之作用線與撓度曲線相交處為反曲點，因此等點上之彎矩為零也。此二點與跨度之中心點，平分桿為四部分，每部分所處之情形，與圖 295b 所示者同。故用 $\frac{l}{4}$ 替代 l ，由(125)式可求得固定端桿之臨界載荷

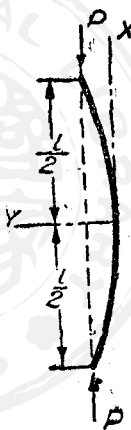


圖 296.



圖 297.

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}.$$

在以上之討論中，假定桿甚細長，故在皺縮時因彎曲而生之應力，仍在比例極限以內。72節(a)式僅可於此條件之下應用。今討論基本例則(圖 296)，以定上述臨界載荷公式應用之限度。以桿之剖面積 A 除(126)式，且令 $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ 為較小之迴轉半徑。於是壓應力之臨界值(註4)為

$$s_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 E \left(\frac{r}{l} \right)^2, \quad (127)$$

當 s_{cr} 依然在比例極限以內時，均可應用此式。若已知該材料之極限及其彈性係數 E ，則在各特殊情形下，比 $\frac{l}{r}$ (此表示桿之長細性) 之極限值，可用(127)式求之。結構鋼之比例極限為 30,000 磅/方吋， $E = 30 \times 10^6$ 磅/方吋，由(127)式求得

$$\frac{l}{r} = \sqrt{1,000\pi^2} \approx 100. \quad (a)$$

因此，當兩端鉸釘鋼桿之 $\frac{l}{r} \geq 100$ ，其臨界載荷可由(127)式計算之。

當 $\frac{l}{r} < 100$ ，在皺縮能發生前，其壓應力達比例極限，故以上根據完全彈性所得之方程式，不復適用矣。

註4. 本章所用臨界應力 s_{cr} ，默指適在破壞以前於柱內所生之直壓應力 $\frac{P_{cr}}{A}$ ，此破壞不問由於柱之彈性皺縮，或由於材料之過度加力。更可注意者，在皺縮發生以後，此應力之分布並不均勻，而 s 亦不復等於 $\frac{P}{A}$ 。

(127)式可用圖形表示之，如圖 298 之曲線 ACB 所示，以 $\frac{l}{r}$ 爲橫座標， s_{cr} 爲縱座標。此曲線之漸近線卽爲橫軸；卽，當桿之長細比

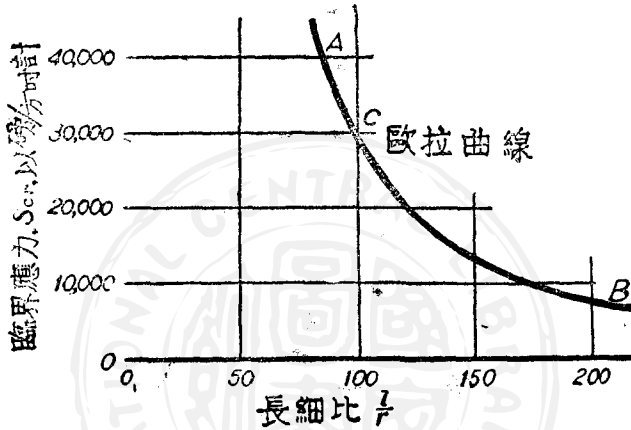


圖 298.

增加，其臨界應力無限減小。縱軸亦爲此曲線之漸近線，但當 s_{cr} 在材料之比例極限以下，此部曲線始可應用。例如，在以上結構鋼之例， C 點爲此曲線可以應用之最高極限。

在圖 295b 及 297 所示之例中，如上法求之，得

$$s_{cr} = \pi^2 E \left(\frac{r}{2l} \right)^2; \quad s_{cr} = \pi^2 E \left(\frac{r}{\frac{1}{2}l} \right)^2. \quad (b)$$

設將改良長度(modified length) l_1 替代桿長，則基本例方程式(127式)，亦可應用至此等例中。在一端固定他端自由之稜柱形桿情形中，其改良長度爲實長之二倍， $l_1 = 2l$ 。在兩端固定稜柱形桿之例中，其改

良長度為實長之半， $l_1 = \frac{1}{2}l$ 。因此臨界應力之方程式，可用下列形式表之：

$$s_{cr} = \pi^2 E \left(\frac{r}{\lambda l} \right)^2 = \pi^2 E \left(\frac{r}{l_1} \right)^2, \quad (c)$$

式中之“ λ ”隨桿端之情形而定，此有時稱為長度係數 (length coefficient)，以下所論者，僅研究皺縮之基本例。若遇桿皺縮之其他各例，則可將其改良長度替代其實長以求之。

於(124)式及第 295 頁關於臨界載荷之討論中，言其最大撓度 δ 依然不定，即，在此臨界載荷時，此桿可有任何小撓度。上述之理論僅適用於小撓度之時，因僅在此種撓度時，可用曲率之近似式 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 替代其正確式：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

在數種情形之下，此種撓度曲線之正確微分方程式之解法已求得，其結果表示無此類撓度之不定性，如前所述者。例如，當桿之兩端為鉸釘，其最大撓度之方程式為

$$\delta = \frac{l\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}} - 1} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{P}{P_{cr}} - 1 \right) \right], \quad (d)$$

此式表示當載荷在臨界值以上時，撓度之增加甚速。例如，假定載荷較 P_{cr} 大百分之一，由(d)式知其撓度為桿長 l 之百分之九。

上述載荷與撓度之關係，可用圖 299 之曲線 OAB 表示之，在此圖形中，縱座標表示載荷，橫座標表示撓度。當載荷小於 P_{cr} 時，其撓度為零。在此限度以外，則撓度隨載荷而增加甚速。

在實壓壓縮桿之側皺縮中，載荷位置是否適中之正確度，桿之平直及均勻度，對於載荷與撓度間之關係，甚為重大。普通之載荷撓度曲線，恆如圖 299 中之 CC 曲線。由

於一二方面之不正確，在小載荷時，撓度即開始，惟當載荷遠在臨界值以下時，撓度增加甚緩，及載荷漸近臨界值時，方遞增甚速。若桿之製造及載荷之加負愈正確，則此曲線愈與理論曲線 OAB 相近。

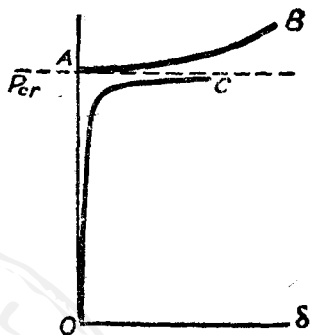


圖 200.

375. 一鋼桿之矩形剖面為 1 吋 \times 2 吋，兩端絞釘，受軸向壓力。設 $E=30 \times 10^6$ 磅/方吋，比例極限為 30,000 磅/方吋，求歐拉氏方程式能應用之最小長度，設長為 5 呎，求臨界應力之大小。

答 $l=8.9$ 吋。

$s_{cr}=6,800$ 磅/方吋。

376. 承前題，假定該桿之剖面為圓形，直徑 1 吋，兩端固定，試解之。

377. 一標準工字梁，長 6 呎，深 6 吋，每呎重 12.5 磅，兩端絞釘，求其臨界壓力。假定 $I=1.8$ 吋⁴。

答。 $P_{cr}=103,000$ 磅。

378. 一圓桿，直徑 1.185 吋，長 60.15 吋，兩端絞釘，其臨界壓力已由試驗求得為 7,850 磅，問其彈性係數若干？

379. 一桿下端固定，上端自由，求其臨界載荷(圖 300)。

解：——在壓縮時，生一側反動力 Q ，其撓度曲線之微分方程式

為

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -Py - Q(l-x).$$

此方程式之虛假解答為

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx - \frac{Q}{P}(l-x).$$

式中

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

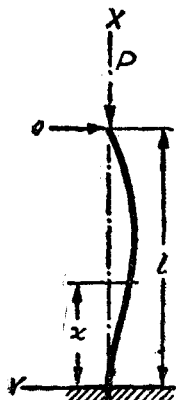


圖 300.

應用下列諸桿端條件，以求常數 C_1 及 C_2 ，以及未知反動力 Q ：

$$(v)_{x=0}=0; \quad (v)_{x=l}=0; \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0}=0.$$

由以上 v 之方程式，得

$$C_1 - \frac{Ql}{P} = 0; \quad C_1 \cos kl + C_2 \sin kl = 0; \quad kC_2 + \frac{Q}{P} = 0.$$

將以上第一及第三式中之 C_1 及 C_2 代入第二式，得：

$$\frac{Q}{P} \left[\frac{1}{k} \sin kl - l \cos kl \right] = 0.$$

在未達臨界載荷之前，因無皺縮現象發生，故 Q 為零。已達臨界載荷且皺縮發生時， Q [或 $\left(\frac{Q}{P}\right)$] 不復為零，故括弧內之式必為零。因此得下列之超越方程式，用以定出臨界載荷：

$$\tan kl = kl.$$

能滿足此方程式之 kl 之最小值，亦即 P 之最小值，為 $kl = 4.49$ 。因 $k^2 = \frac{P}{EI}$ ，

$$P_{cr} = k^2 EI = \frac{20.2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2},$$

即，在此例之改良長度為 $l_1 = 0.7l$ 。 Q 之值隨最大撓度 δ 而定。

【8】。一圓桿兩端鉸釘，長為 l ，慣矩為 I 。設此桿負一與其軸平行而偏心距為 e 之載荷 P ，在中心負一橫向載荷 Q 。試證明其最大撓度為

$$\delta = e \left(\sec \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} - 1 \right) + \frac{Q}{2P} \sqrt{\frac{EI}{P}} \tan \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} - \frac{Ql}{4P}.$$

74. 設計任何長度壓縮構桿之本則。(註 5) —— 在前節中，已討論柱及斜柱之有較大長細比 $\left(\frac{l}{r}\right)$ (即 $\frac{l}{r} > 100$) 者之臨界載荷及應力。

註 5. 又見 D. H. Young, "Rational Design of Steel Columns", 此文曾在 1931 年 7 月於美國機械工程師學會上宣讀。

在此節中，將討論長細比 $\frac{l}{r}$ 小於 100 之臨界載荷，其次討論選擇工作應力及公式之方法，以為設計各種長細比之壓縮構桿之用。

在兩端鉸釘情形下之歐拉氏柱公式已知為

$$s_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2},$$

此式為根據虎克定律而來，若 s_{cr} 不超過材料之比例極限時，方可應用。在 73 節中已知鋼之比例極限為 30,000 磅/方吋，設若長細比 $\frac{l}{r}$ 大於 100，則歐拉氏公式始可適用；而圖 298 所示之根據歐拉氏柱公式而作之 s_{cr} 及 $\frac{l}{r}$ 關係曲線亦僅適用於 $\frac{l}{r} > 100$ 。

由於更進一步之研究，註 3) 知求 s_{cr} 之歐拉氏公式可進而應用於較短之柱，而其 s_{cr} 又在材料之比例極限以上者，在此法中，將隨柱之長細性而變之減縮係數 E' ，替代恆係數 E 。用此法，可得一表示歐拉氏公式之引伸曲線(圖 301)。由直接試驗而得之結果，與此理論曲線頗相符合。在實用上， s_{cr} 之上極限，即為材料之屈點。欲達大於屈點之 s_{cr} 值，應注意防止屈點時之皺縮。在屈點等於 40,000 磅/方吋之鋼，當其 $\frac{l}{r} = 60$ 之時，則其 $s_{cr} = s_{y.p.}$ 。若長細比在二者之中間 ($60 < \frac{l}{r} < 100$)，可假定為一直線 CB (圖 302)，使連結 $\frac{l}{r} = 60$ 處之

註 3. 見 Timoshenk's Strength of Materials, Vol. II, Art. 37. 又見 W. R. Osgood, "The Double-Modulus Theory of Column Action," Civil Engineering, March, 1935.

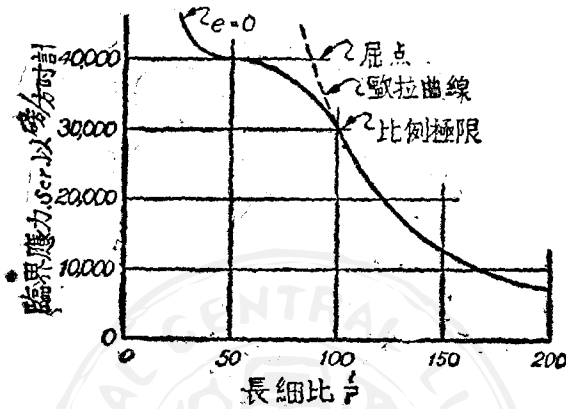


圖 301.

$s_{cr} = s_{y.p.}$ 及 $\frac{l}{r} = 100$ 處之 $s_{cr} = s$ 比例極限，可不用圖 301 之理論曲線。

當 $\frac{l}{r} < 60$ ，其臨界應力可視為一定，而等於 $s_{y.p.}$ 。故在圖 302 中用漸續線 DCB 及歐拉氏曲線，可求得任何長細比之柱之 s_{cr} 值。

在討論柱之工作應力時，必須考慮 $ABCD$ 線(圖 302)所示之臨界應力，一如在簡單張力之情形，必須考慮材料之最大強度者然。一等於臨界應力之壓應力，可使柱破壞，因而工作應力必須遠小於此臨界應力。其安全因數之大小，全視載荷 P 之可能意外增加(圖 296)，載荷中心作用之可能差誤，及柱之可能始初彎曲而定。最簡之法為先假定一定安全因數。例如，定安全因數為 2.5，及用圖 302 之臨界應力，得圖 303 內所示之 $ABCD$ 線，由此可得各長細比不同柱內之工作應力。

由實驗知，載荷作用之差誤及柱之初撓度之大小，恆隨柱之長細

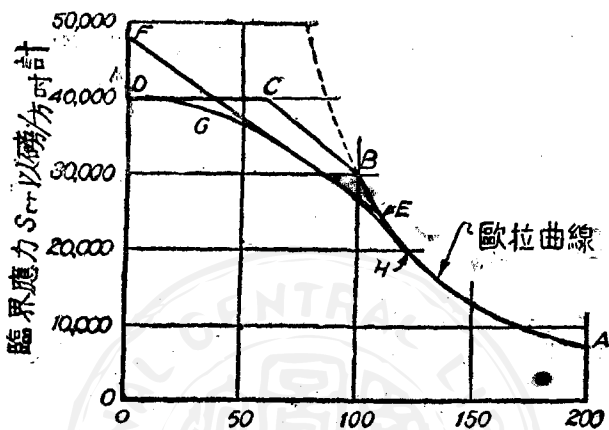


圖 302.

比而增加。故安全係數亦應隨柱之長細比而變更，且較為合理。例如，德國之橋樑法規上規定遇細長結構鋼柱 ($\frac{l}{r} > 100$)，安全因數用 3.5，短柱則安全因數用 2.0。在 $0 < \frac{l}{r} < 100$ 之間之柱，其安全因數依直線定律而變化。用此法，即可得各長細比之柱之工作應力表或曲線，如圖 303 內註有 EFGH 之線。此更變安全因數之理論，在 76 節中討論之。

75. 設計壓縮構桿之經驗公式。——在實際設計壓縮構桿之時，通常均用經驗公式以表示 s_{cr} 與 $\frac{l}{r}$ 間之關係。茲討論數式如下。

直線公式假定在比例極限以外， s_{cr} 與 $\frac{l}{r}$ 之關係，可用直線方程

式

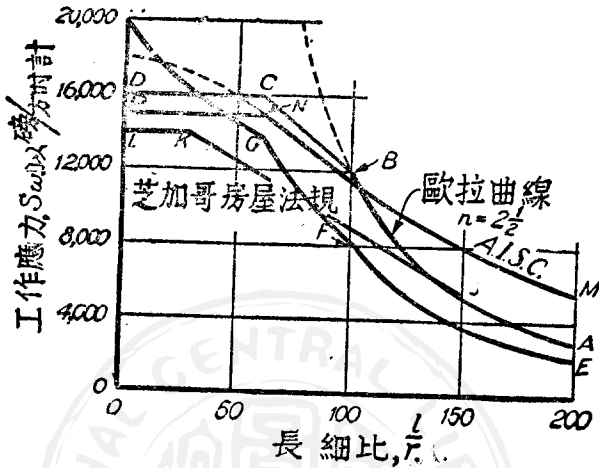


圖 303.

$$s_{cr} = a - b \frac{l}{r} \quad (a)$$

表示之，且所得之結果相當正確，式中 a 及 b 為常數，其數值依材料之物理性質而定。在兩端鉸釘之結構鋼桿，根據戴沫九 (Tetmajer) 及包興善 (Bauschinger) 之實驗，(a) 式變為

$$s_{cr} = 48,000 - 210 \frac{l}{r}. \quad (128)$$

此公式在圖 302 中以直線 EF 表之。由 E 點 ($\frac{l}{r} = 110$) 起，應用歐拉氏曲線 AE 。在實用上必須將屈點作為 s_{cr} 之上極限，同時規定 (a) 式中 $\frac{l}{r}$ 之下極限，如在上例中， $\frac{l}{r} = 38$ 為下極限。在此極限以下， s_{cr} 可使之等於屈點 40,000 磅/方吋。

美國所用之直線公式，不示臨界應力而恆示安全工作應力。下列所示者為芝加哥房屋建築法規中所定之公式，此為最常用之公式之一：

$$s_w = 16,000 - 70 \frac{l}{r} \quad (129)$$

此式應用於主要構桿之範圍，為 $30 < \frac{l}{r} < 120$ ，次要構桿則可高至 $\frac{l}{r} = 150$ 。當 $\frac{l}{r} < 30$ 時，用 $s_w = 14,000$ 磅/方吋。此芝加哥公式在圖 303 中用斷續線 JKL 表示之。

拋物線形公式，(註 7) 有時亦應用之，此式為約翰生 (J. B. Johnson) 教授所建議應用者，同時亦為哥平哈金大學奧司汀費爾特 (Ostenfeld) 教授所建議應用之公式：

$$s_{cr} = a - b \left(\frac{l}{r} \right)^2, \quad (5)$$

式中 a 及 b 為常數，其值視材料之機械性質而定，在選擇時常使 (b) 式所示之拋物線，與歐拉曲線相正切，且在桿甚短之時，使 $s_{cr} = s_{y.p}$ 。在兩端鉸釘之軟鋼柱例中， (b) 式可改為下列形式：

$$s_{cr} = 40,000 - 1.33 \left(\frac{l}{r} \right)^2. \quad (130)$$

此拋物線在 $\frac{l}{r} = 122.5$ 處，正切於歐拉曲線，且在短壓縮桿時，使 s_{cr}

註 7. 例如，此公式為美國商務部於 “Air-Worthiness Requirements of Aircraft” 中規定為設計柱之用。

$=4),000$, 爲圖 302 中曲線 DGB 所示。欲得工作應力, 用 $2\frac{1}{2}$ 至 3 之適當安全因數。若 $\frac{l}{r} > 122.5$, 則用歐拉公式(127)式。

直線公式及拋物線形公式之實際效應, 在使由甚短之柱所求得之臨界壓應力, 隨長細比值之增加而遞減之。冷金·戈登式(Rankine-Gordon type)之公式即爲一效應相同而求法不一之另一公式:

$$s_{cr} = \frac{a}{1 + b\left(\frac{l}{r}\right)^2}, \quad (c)$$

式中之 a 表示短桿之臨界壓應力, b 爲一常數, 其值視材料而定。若選得適宜之常數, 則於某限度內, 由此公式所得之結果與實驗相符合; 如結構鋼當 $\frac{l}{r} < 120$, a 可定爲 46,000 磅/方吋, b 可作爲 $\frac{1}{7,500}$ 。

美國鋼鐵構造協會之 1928 年法規內, 規定一求工作應力之冷金·戈登式之公式:

$$s_w = \frac{18,000}{1 + \frac{1}{18,000}\left(\frac{l}{r}\right)^2}, \quad (131)$$

此式適用於 $\frac{l}{r} > 60$ 之時。此式之應用範圍, 若爲主要構桿, $\frac{l}{r}$ 可高至 1.0, 次要構桿, $\frac{l}{r}$ 可高至 200; 若 $\frac{l}{r}$ 之比小於 60 時, 用 $s_w = 15,000$ 磅/方吋。此諸公式在圖 303 中, 以曲線 MNP 表示之。

在以上臨界應力討論中, 均假定鉸端。若將桿之改良長度(見 73

節)代替其實長,則以上所得之結果可應用至其他桿端條件之例。在
有剛節之構架壓縮構桿例中,一般實用上,常使弦桿之長度,即等於
兩節中心間之距離。在對角構桿之例中,其改良長度有時作為上述
理論長度之 0.8 倍。惟在實際上,由於桿端條件之太不一定,故結構
工程師常僅用一公式,以求各種不同端條件下之工作應力。芝加哥
及美國鋼鐵構造協會之公式,實亦根據鉸端條件而來。若或此公式
應用於桿端為局部固定或全部固定之時,僅須外加一安全因數即可
矣。(註 8)

關於鑄鐵柱,一九一七年之紐約房屋建造法規,規定工作應力

$$s_w = 9,000 - 40 \frac{l}{r}, \quad (132)$$

此式適用於 $0 < \frac{l}{r} < 70$, 式中之 l 為不支持長度,以吋計, r 為最小迴
轉半徑,亦以吋計。

關於矩形木柱,美國森林生產實驗室創立下列之公式。(註 9) 若
為短柱,其不支持長度(吋數)不超過最小橫尺寸 b (吋數)之十倍時,
則工作應力 $s_w = S$, S 之值載於附錄 A 表 II。

若為中等長度之柱, s_w 可用下列公式求之

$$s_w = S \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{l}{Kb} \right)^4 \right], \quad (133)$$

註 8 欲知各工作公式之詳細討論,可參考 Maurer and Withcy's Strength of Materials.

註 9. 見 1933 A. S. T. M. Standards, 或 1934 Edition of Carnegie Pocket Compendium.

式中之 S = 平行於木紋之安全壓應力, $K = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{6S}}$, E 爲木料彎曲時之彈性係數, 見附錄 A 表 II. K 爲 (133) 式所示之四次拋物曲線與歐拉曲線之切點之 $\frac{l}{b}$ 值: 在此點時, $s_w = \frac{2}{3}S$. 自 $\frac{l}{b} = 10$ 起, 至使 $s_w = \frac{2}{3}S$ 時之 $\frac{l}{b}$ 之比值, 即 $\frac{l}{b} = K$, 此式均可應用.

若爲矩形剖面之長柱, 則可用安全因數爲 3 之歐拉公式:

$$s_w = \frac{\pi^2 E}{36 \left(\frac{l}{b}\right)^2}. \quad (134)$$

已經乾燥之常用結構用木之 S , E 及 K 之值, 均見附錄 A 表 II. 欲知其他種類之木材, 或在他種溼氣條件下之數值, 可看該表下所述之參考書.

若爲圓木柱, 仍可用以上公式求之, 惟應用時應將一與圓柱剖面之迴轉半徑相同之方柱剖面之邊長, 代替公式中之最小橫尺寸 b . 因方形之迴轉半徑爲 $r = \frac{b}{\sqrt{12}}$, 圓之迴轉半徑爲 $r = \frac{d}{4}$, 故相當方柱之邊長爲圓柱直徑之 0.866 倍; 即, $b = 0.866d$.

習 題

381. 一結構鋼桿, 兩端鉸釘, 試用圖 302 之曲線 BCD 及安全因數 3, 求其安全壓力. $l = 3$ 呎, 剖面爲 2×2 吋之方形.

解. —— 由已知尺寸,

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577; \quad \frac{l}{r} = 36\sqrt{3} = 62.4;$$

由圖 302, 得 s_{cr} 爲 39,400 磅/方吋。

故安全載荷爲
$$P = \frac{39,400 \times 4}{3} = 52,500 \text{ 磅。}$$

382. 承前題, 設剖面爲直徑 4 吋之圓形, 試解之。

383. 一構樑兩端固定, 長 6 呎, 爲標準 3 吋 12.5 磅之工字剖面。試用圖 302 之 BCD 線及安全因數 3, 求安全壓力 P 。(暗示: 用改良長度 $\frac{1}{2}L$)

答. 48,100 磅。

384. 承前題, 假定一端固定, 他端鉸釘, 試解之。(見 379 題。)

385. 一平端之空心圓剖面鋼柱(見圖 297), 外直徑 12 吋, 厚 1 吋, 長 16 呎。問其能負中心安全載荷爲若干? 並用美國鋼鐵構造協會公式及芝加哥公式以算之。

386. 一 10 吋 15.3 磅之槽鋼, 長 6 呎, 作爲兩端鉸釘之柱, 問能負中心作用之安全載荷若干? 試比較由芝加哥公式, 拋物線形公式(用安全因數 $= 2\frac{1}{2}$) 及美國鋼鐵構造協會公式所得之結果。

答. 40,200 磅, 47,700 磅, 51,700 磅。

387. 一 6 吋 \times 6 吋 $22\frac{1}{2}$ 磅之 H 形梁, 用作爲柱, 兩端置活或鉸釘。剖面之要素見附錄 B 表 VI。試就四種不同之長度 5 呎, 10 呎, 13 呎 4 吋, 及 20 呎, 各用下列公式, 計算許可之同心載荷。

(a) 圖 303, $ABCD$ 線。

(b) 美國鋼鐵構造協會公式。

(c) 芝加哥直線公式。

(d) 拋物線形公式, (130) 式, 用安全因數 $= 2\frac{1}{2}$ 。

答.

	P 值			
類別	$l=6$ 吋	$l=10$ 吋	$l=13$ 吋 4 吋	$l=20$ 吋
(a)	105,000	87,200	56,700	25,100
(b)	99,000	83,000	67,300	42,500*

(c)	85,300	65,000	51,000
(d)	98,700	78,300	57,000

* 僅用作次要構桿。

188. 一柱長 25 呎，兩端固定，負一同心載荷 200,000 磅，試用美國鋼鐵構造協會公式擇一合式之康奈其梁剖面。

解。——在固定端之情形下，其改良長度為 $\frac{1}{2}l = 12.5$ 呎，由 (131) 式，

$$\frac{P}{A} = \frac{18,000}{1 + \frac{1}{8,000} \left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

將 P 及 l ，代入以上之美國鋼鐵構造協會公式中，

$$\frac{200,000}{A} = \frac{18,000}{1 + \frac{1.25}{r^2}} \quad (\alpha)$$

其解法可用嘗試法求之，即選擇一剖面，使此剖面之 A 與 r 能適合上列公式。假定用短柱公式 $\frac{P}{A} = 15,000$ ，則可得最小面積之值；因此 $A = 13.3$ 方呎。凡面積小於 13.3 方呎之剖面，均可不必嘗試。

今試用 12 吋 \times 10 吋 53 磅之剖面， $A = 15.57$ ，最小 $r = 2.48$ 吋， $\frac{l}{r} = 60.5$ ，此長細比在美國鋼鐵構造協會公式之適用限度以內。(a) 左邊所示之實在應力為 12,850 磅/方吋。右邊所示之安全應力為 14,970 磅/方吋。(注意，若 $\frac{l}{r}$ 小於 60，則在任何情形下，均用 15,000 磅/方吋之工作應力。)由此可知一較小之剖面，已可相當安全而又經濟。試用 12 吋 \times 8 吋 50 磅剖面， $A = 14.50$ 方吋，最小 $r = 1.93$ 吋， $\frac{l}{r} = 76.5$ 。由此 (a) 式之兩邊均得 13,600 磅/方吋。故所選用之剖面適合用。

倘若用康奈其手冊所載之許可同心載荷表，則此結果更易求得。

309. 柱長 10 呎，底端固定，頂端完全自由，如圖 29 α 所示，其所負同心載荷為 175,000 磅，試用美國鋼鐵構造協會公式，選一康奈其梁剖面。

890 試選一等角斜柱，使負對角構
桿內之壓力(圖 304)。設能用芝加哥公式
則用之，不能時則用歐拉公式，其安全因
數用 $2\frac{1}{2}$ 。

答. 3 吋 \times 3 吋 \times $\frac{1}{4}$ 吋角鐵。

391. 一柱長 18 呎，所負之同心載荷
為 10,000 磅。試用芝加哥公式選一壁厚
 $\frac{1}{2}$ 吋之空心鋼柱。

答. 外直徑 7.14 吋。

392. 一空心圓剖面之鑄鐵柱，外直
徑 10 吋，厚 1 吋，長 10 呎，問能負安全同心載荷若干？

393. 一柱長 12 呎，厚 1 吋，負同心載荷 17,000 磅。試用紐約房屋法規公式，選
一圓剖面之空心鑄鐵柱。

答. 外直徑 9 吋。

394. 一 12 吋 \times 10 吋之短葉松柱，設其長度為 (a) 6 呎，(b) 15 呎，(c) 25 呎，問
可負安全同心載荷若干？

答. (a) 106,000 磅； (b) 99,000 磅； (c) 58,500 磅。

395. 一橡木柱直徑 8 吋，設其長為 (a) 5 呎，(b) $12\frac{1}{2}$ 呎，(c) 20 呎，問可支持若
干安全同心載荷？

396. 一道格拉斯杉(Douglas fir)柱長 15 呎，剖面為矩形，支持一同心載荷 44,900
磅。假定剖面之 $h=1.2b$ ，試選一剖面。

答. 7.90 吋 \times 8.77 吋。用 $7\frac{1}{2}$ 吋 \times 9 吋。

397. 承前題，設為圓柱，試擇之。

暗示：先擇方柱，再求相當圓柱之直徑

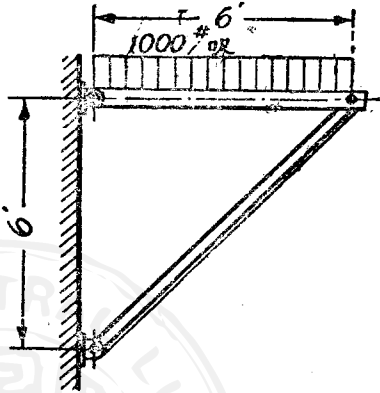


圖 304。

76. 柱之偏載荷。——柱上加載荷時，恆有不可免之偏載距存在（雖為量不大）。其次載荷作用之方向常與柱軸方向平行，而其偏載距有時常為一相當鉅大之已知值，如梁常架於柱上之架座上。研究及設計偏載荷柱之方法甚多，茲述三種方法如下。



圖 3-5.

圖 305 示一柱，負一偏載荷 P ，用與 72 節所用之類似方法，即可求得柱之最大撓度 δ 之絕對值（由 124 式）為

$$\delta = e \left(\sec \frac{kl}{2} - 1 \right), \quad (124a)$$

式中

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

其最大彎矩為

$$M_{\text{最大}} = P(e + \delta). \quad (a)$$

將上列(124a)式所示之 δ 值，代入(a)，得

$$M_{\text{最大}} = Pe \sec \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

其最大彎曲壓應力為

$$s_{\text{最大}} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{最大}} c}{I} = \frac{P}{A} + \frac{Pec \sec \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}}{I} \quad (b)$$

$$= \frac{P}{A} \left(1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{l}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right). \quad (135)$$

已知任何 P 及 e 之值，由此方程式，可求柱內之最大壓應力，但此應

力不可超過彈性極限。

由(135)式知最大應力不與載荷成比例，且由(135)式之右邊，知其增加較載荷為速，故在用(135)式以為設計或求許可載荷 P 之用時，不可僅將工作應力 $s_w = \frac{s_{y.p.}}{n}$ 替代 $s_{最大}$ (式中 n 為安全因數)，其理由見下列說明，設“安全因數”之定義為一比，將此比乘工作載荷可得一載荷，此載荷能生一等於屈服點應力，或在某種情形下，等於極限強度之應力，將安全因數 n 引入上式，得一根據屈服點應力而設計桿之公式：

$$s_{y.p.} = \frac{nP}{A} \left(1 + \frac{ce}{r^2} \sec \frac{l}{2r} \sqrt{\frac{nP}{EA}} \right). \quad (136)$$

將此式與(135)式相較，可知將 nP 替代根號中之 P ，能將 $s_{最大}$ 之增加較 P 為速之事實，特別算入。

上式所用 l 及 r 之值，為與軸 $m-m$ (圖 306) 相當者，此軸亦即為彎矩對之作用者，設此柱在平行於軸 $m-m$ (即垂直於載荷平面) 之方向內，無牽桿以防其撓曲，又設對於另一主軸 $n-n$ (位於載荷平面內) 之慣矩或迴轉半徑，為較對於軸 $m-m$ 者小，於是柱之強度，宜用考究置於中心載荷 P 之方法，亦同樣考究之，而用對於 $n-n$ 之(最小)迴

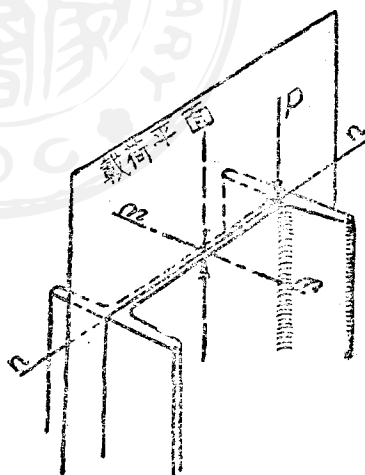


圖 306.

轉半徑。若剖面不對稱，應再考究在危險剖面處，張力纖維內之過應力。

在設計偏心載荷壓縮構桿時若已知 $P, e, l, s_y, p.$ 及 n ，則可用嘗試法求其剖面之尺寸，使其與(136)式合適。398 題即可作為計算之例。

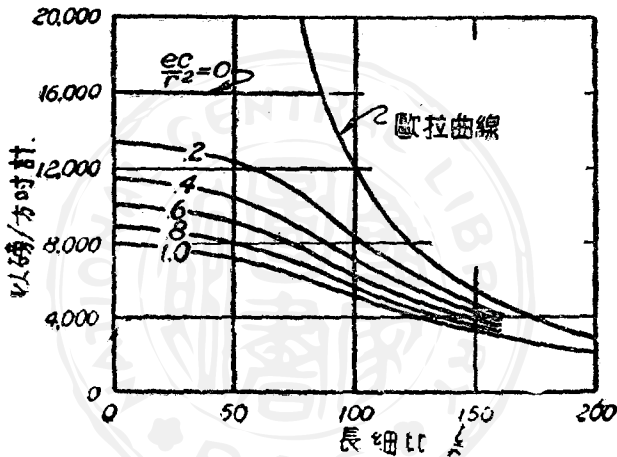


圖 307.

對於不同值之偏心比 $\frac{ec}{r^2}$ ，其單位載荷 $\frac{P}{A}$ 與長細比 $\frac{l}{r}$ 間之關係，可用曲線表示之。此等曲線見圖 307，均假定端條件為鉸釘，且 $n = 2 \frac{1}{2}$ 。由此曲線，能直接計算一與定偏距 e ，柱長 l ，及剖面性質所含之 c 及 r 相當之 P 或 $\frac{P}{A}$ 之值。此諸曲線又表示偏距對於細長柱載荷負量之效應，甚為輕微。

設一柱負數個載荷，且均如 P 作用於同一對稱軸上，則諸載荷之合力之大小及位置，可用靜力學方法定之；此合力及其自中立軸至作用點之距離，即可代替上列公式內之 P 及 e 。一外加於中心之載荷，即可用此法解之。見 398 題 (c) 法。

上述 (136) 式為由偏心載荷柱而來，但亦可應用於中心載荷柱之例中。因房屋建築與豎立之不完全，載荷之作用恆可有偏距及初撓度之存在。此種與完全條件之偏差，可假定隨柱長而增，且可假定其對於最大應力之效應與偏距 e 隨長 l 而增之比例相同。設假定 e 等於 $\frac{l}{400}$ ，則 (136) 式可變為

$$s_y \cdot P_c = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{l}{400} \cdot \frac{l}{r} \cdot \frac{c}{r} \cdot \sec \frac{l}{2r} \sqrt{\frac{nP}{EA}} \right] \quad (d)$$

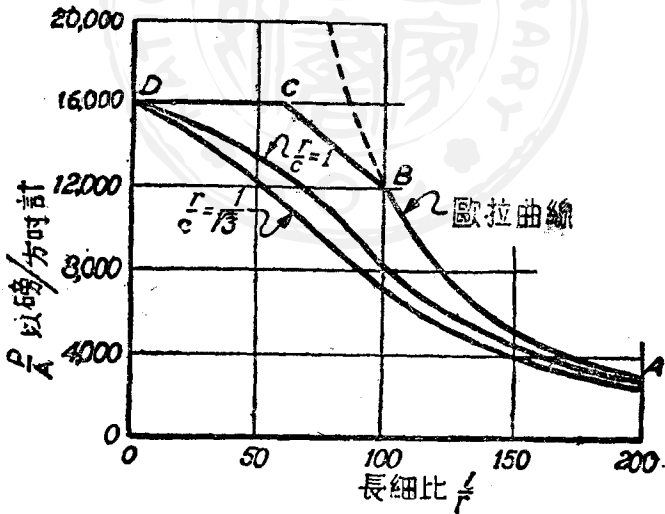


圖 308.

圖 308 中之二曲線即表示 $\frac{r}{c} = 1$ 及 $\frac{r}{c} = \frac{l}{\sqrt{3}}$ 時之 $\frac{P}{A}$ 與 $\frac{l}{r}$ 間之關係。在此二種情形下， $s_{y.p.} = 40,000$ 磅/方吋， $n = 2\frac{1}{2}$ 。將此結果與圖 302 中曲線 $ABCD$ 之縱座標相比較，可知當偏距 $e = \frac{l}{400}$ ，其組合剖面之 $\frac{r}{c} = 1$ 時，其安全因數對於其臨界應力在其非彈性境內之變化，為自 2.5 至 3.7。此結果可作為前節所述應用變安全因數之理論證實。

以上所述關於解決偏心載荷之合理方法，施用於設計問題之數目解答方面較為不便。為使此等方法簡單化起見，乃有各種近乎經驗性質之方法出現，以供應用。

以下所述之方法，為各種方法(註 10)中可算作最簡單而最守舊者。略去撓度對於載荷力臂之效應，其所生之實在應力為

$$s = \frac{\Sigma P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P + P_0}{A} + \frac{Pec}{I}, \quad (137)$$

式中各量之定義與前同。僅外加之 P_0 表示中心載荷。應特別注意者，即 I 為對於一軸之面積慣矩(此軸為對之發生彎曲者)。

今其實在應力 s 必不能超過其工作應力。設柱甚短，則如 16,000 或 18,000 磅/方吋之安全壓應力，可作為滿意之工作應力。然細長柱之應力，則因皺縮之危險，不得壓縮而達至此值，而僅可在此值之下。此所減少之應力數，即隨長細比而增加。此種減少之效應，可用

註 10. 欲知其他解法之討論，可看 Seely's Resistance of Materials, second Edition, Art. 80, 或 Laurson and Cox's Properties and Mechanics of Materials, Art. 185; 又 Slocum and Hancock's Strength of Materials, Art. 95.

各種中心載荷之柱公式，如前所述之美國鋼鐵構造協會公式或芝加哥公式，以計算之。在求公式中所用之長細比 $\frac{l}{r}$ 時，宜用最小迴轉半徑而可不管對何軸彎曲。其次應注意公式適用時之極限比 $\frac{l}{r}$ 。此方法在 398 題之解法中說明之。

在 1934 年版之“康奈其手冊”281 頁中載有與上述方法稍有改變之另一方法。此方法為根據下列理論而來。若將(157)式重行排列得

$$A = \frac{P + P_0}{s_w} + \frac{Pec}{r^2 s_w} \quad (e)$$

設無偏距且載荷置於中心，則 s_w 必為長 l 之柱之安全工作應力 s_c ，如用直線或冷金公式式所求得者。在另一方面，若偏距甚大，則 $\frac{(P + P_0)}{s_w}$ 與 $\frac{Pec}{r^2 s_w}$ 項相較，將覺甚小。故該柱近於在純彎曲之情況中，其工作應力 s_w 可作為彎曲之工作應力 s_b 。設偏距在此二極限中間（在二極限時亦可），則如康奈其手冊之法將(157)式表示，當更為正確：

$$A = \frac{P + P_0}{s_e} + \frac{Pec}{r^2 s_b} \quad (\text{註 11}) \quad (158)$$

習 題

398. 一柱長 25 呎，鉸端，負同心載荷 100,000 磅，及一偏心載荷 50,000 磅（在軸 2-2 上，距剖面中心 10 吋），試擇一康奈其梁剖面以支之。

(a) 用美國鋼鐵構造協會公式及(157)式之方法。

註 11. 將 s_c 及 s_b 二值用於此式之效應，與在(158)式之分母內用一應力之公共值之效應同，此公共值在 s_c 與 s_b 之間。視偏距之大小而定。此為 Niles and Newell's Airplane Structure，第十二章中所載陸軍航空隊“精密”法所用之相似式。

(b) 用“康奈共”方法，假定用美華鋼鐵構造協會公式計算 s_c 而 $s_b = 18,000$ 磅/方吋。

(c) 用正割公式，假定安全因數 $n = 2\frac{1}{2}$ ， $s_{y.p.} = 40,000$ 磅/方吋。

解。——(a)法。凡面積小於 $\frac{150,000}{18,000}$ 或 10 方吋者，不必式，因其最大應力將超過 18,000 磅/方吋，由(137)式

$$\frac{18,000}{1 + \frac{5}{r^2}} = \frac{150,000}{A} + \frac{500,000}{c}$$

此式用下列嘗試法解之：

試 14 吋 × 10 吋 81 磅剖面。

$$\frac{18,000}{1 + \frac{5}{(2.45)^2}} = \frac{150,000}{17.91} + \frac{500,000}{92.1}$$

安全應力 9,800 < 實在應力 13,810，故此剖面太小。

試 14 吋 × 12 吋 78 磅剖面， $A = 22.91$ ， $\frac{I}{c} = 121$ ，最小 $r = 3.0$ ，安全應力 11,000 > 實在應力 10,630。

試 14 吋 × 10 吋 74 磅剖面， $A = 21.75$ ， $\frac{I}{c} = 112.2$ ，最小 $r = 2.48$ ，安全應力 2,930 < 實在應力 11,350，故用 14 吋 × 12 吋 78 磅剖面。

(b)法。將已知值代入(158)式，

$$A = \frac{150,000}{s_c} + \frac{500,000c}{18,000r^2} = \frac{150,000}{s_c} + \frac{500,000}{18,000} \frac{A}{S}, \quad (f)$$

式中

$$s_c = \frac{18,000}{1 + \frac{1}{18,000} \left(\frac{500}{r} \right)^2},$$

且注意

$$\frac{c}{r^2} = \frac{Ac}{Ar^2} = \frac{Ac}{I} = \frac{A}{S}.$$

(b) 用“康奈共”方法，假定用美國鋼鐵構造協會公式計算 s_c 而 $s_b = 18,000$ 磅/方吋。

(c) 用正割公式，假定安全因數 $n = 2\frac{1}{2}$ ， $s_{y.p.} = 40,000$ 磅/方吋。

解。——(a)法。凡面積小於 $\frac{150,000}{15,000}$ 或 10 方吋者，不必試，因其最大應力將超過 15,000 磅/方吋。由(137)式

$$1 + \frac{5}{r^2} = \frac{150,000}{A} + \frac{50,000(I)}{c}$$

此式用下列嘗試法解之：

試 14 吋 × 10 吋 31 磅剖面。

$$1 + \frac{5}{(2.45)^2} = \frac{150,000}{17.94} + \frac{500,000}{92.1}$$

安全應力 9,800 < 實在應力 13,840，故此剖面太小。

試 14 吋 × 12 吋 78 磅剖面， $A = 22.91$ ， $\frac{I}{c} = 121$ ，最小 $r = 3.0$ ，安全應力 11,000 > 實在應力 10,650。

試 14 吋 × 10 吋 74 磅剖面， $A = 21.75$ ， $\frac{I}{c} = 112.2$ ，最小 $r = 2.48$ ，安全應力 2,930 < 實在應力 11,350，故用 14 吋 × 12 吋 78 磅剖面。

(b)法。將已知值代入(138)式，

$$A = \frac{150,000}{s_c} + \frac{500,000c}{18,000r^2} = \frac{150,000}{s_c} + \frac{500,000}{18,000} \frac{A}{S}, \quad (f)$$

式中

$$s_c = \frac{18,000}{1 + \frac{1}{18,000} \left(\frac{500}{r} \right)^2},$$

且注意

$$\frac{c}{r^2} = \frac{Ac}{Ar^2} = \frac{Ac}{I} = \frac{A}{S}.$$

在軸 2-2 上。設根據正割公式 (135 式) 設計, 用 $n=2\frac{1}{2}$, 問其所用屈點應力 $s_{y,p}$ 爲何?

$$A=42.62 \text{ 方吋}, c=7.44 \text{ 吋}, I_{1-1}=1,711 \text{ 吋}^4, r_{1-1}=6.34 \text{ 吋}, r_{2-2}=3.78 \text{ 吋}.$$

答. 41,200 磅/方吋。

400. 承前, 根據 (137) 式, 問柱內所生應力若干? 美國鋼鐵構造協會公式對此柱之許可工作應壓力若干?

答. 15,100 磅/方吋. 13,330 磅/方吋。

401. 一 10 吋 15.3 磅之槽鋼柱, 長 6 呎, 鉸端。設沿軸 1-1 上加一載荷 10,000 磅, 問此載荷距軸 2-2 之最大安全距離若干? 應置於軸 1-1 之何邊? 用 (137) 式及美國鋼鐵構造協會公式。

答. 3.35 吋在腹板之一邊(設張應力限於 18,000 磅/方吋, 則爲 2.4 吋)。

402. 一柱長 16 呎, 鉸端, 設負偏心載荷 $P=80,000$ 磅, 距中心 6 吋, 置於軸 2-2 上。試選一康奈其梁柱, 應用“康奈其”法解之。用美國鋼鐵構造協會公式求 s_c , 及假定 $s_b=18,000$ 磅/方吋。

403. 承前題, 試用正割公式解之, 用 $s_{y,p}=40,000$ 及 $n=2\frac{1}{2}$ 。

答. 10 吋 \times 10 吋 \times 19 磅 CB 剖面。

404. 一柱用鋼管製成, 外直徑爲 $3\frac{1}{2}$ 吋, 內直徑爲 3 吋, 長 12 呎。設載荷置於離中心 $1\frac{1}{2}$ 吋處, 問其安全載荷之值爲若干? 用芝加哥公式及 (13.) 式。

405. 一鑄鐵柱, 剖面空心而圓形, 外直徑 10 吋, 厚 1 吋, 長 10 呎。設偏距爲 4 吋, 問可負最大安全載荷若干? 用 (137) 式。

答. 71,850 磅。

406. 道格拉斯杉木柱, 剖面 6 吋 \times 10 吋, 長 12 呎, 載荷沿長軸之偏距爲 2 吋, 問可負載荷若干? 設在距載荷較遠之 10 吋邊內取去 4 吋, 使載荷適置於中心, 問可負安全載荷若干? 用 (137) 式。

答. 19,200 磅; 25,400 磅。

第十二章

應變能

77. 張力之彈性應變能。——在討論一桿受簡單張力時（見圖 21），知受漸增之載荷而伸長時，對此桿即已作功，而此功局部或完全變為應變之勢能 (potential energy of strain)。設應變仍在彈性極限以內，則所作之功，可完全變為勢能，而當變形桿之載荷逐漸除去時，此功可以恢復。

設載荷之最後大小為 P ，其相當之伸長為 δ ，其張力試驗圖可如圖 309 所示，在此圖中橫座標為伸長，縱座標為相當之載荷。 P_1 表示載荷之中間值， δ_1 為此所生之伸長。增加載荷 dP_1 ，使伸長增加 $d\delta_1$ 。在伸長時 P_1 所作之功，為 $P_1 d\delta_1$ ，如圖中陰影面積所示者。設將伸長時所增之 P_1 計入，則所作之功，當以梯形 $abcd$ 表示

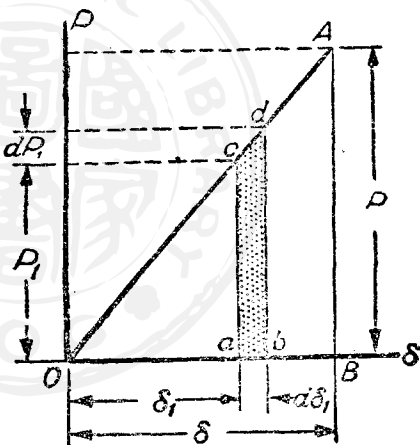


圖 309.

之。將載荷自 O 增至 P 所作之功，爲此等元素面積之和，如三角形 OAB 面積所示者。此表示應變時桿內所貯之總能 U 。於是

$$U = \frac{P\delta}{2}. \quad (139)$$

用(3)式，可得下列二式，以求稜柱形或圓柱形桿內之應變能或回彈力(resilience)：

$$U = \frac{P^2 l}{2AE}, \quad (140)$$

$$U = \frac{AE\delta^2}{2l}. \quad (140a)$$

第一式將應變能作爲載荷 P 之函數，第二式爲伸長 δ 之函數。設已知桿之尺寸，及彈性係數，則用力 P 之值，或伸長 δ 之值，可完全決定其應變能。

在實用上，單位體積內之應變能較爲重要；由(140)及(140a)式，此等於

$$u = \frac{U}{Al} = \frac{s^2}{2E} \quad (141)$$

或
$$u = \frac{Ee^2}{2}, \quad (141a)$$

式中 $s = \frac{P}{A}$ 爲張應力， $e = \frac{\delta}{l}$ 爲單位伸長。此桿每單位體積所能貯蓄之應變能之最大量（不發生永久變形），可將該材料之彈性極限代入(141)式中之 s 以求之，此值有時稱爲回彈係數(proof resilience or modulus of resilience)。

習 題

407. 一柱形鋼桿長 10 吋, 其所受壓力 $P=4,000$ 磅。(a) 設其剖面積為 4 方吋, (b) 設為 2 方吋, 求其應變能之大小。

答. (a) $U = \frac{2}{3}$ 吋磅.

(b) $U = 1\frac{1}{3}$ 吋磅.

408. 一直立均勻鋼桿, 長 100 呎, 剖面積為 1 方吋, 每立方呎之鋼重為 490 磅, 求因其本身重量所生應變能之大小。

409. 求下列各種材料不發生永久變形時, 每立方吋及每磅所能貯應變能之大小。材料為結構鋼, 工具鋼, 橡皮, 其比重各為 7.8, 7.8 及 0.93; 其彈性係數各為 3×10^6 , 30×10^6 及 150 磅/方吋; 其彈性極限各為 28,000, 120,000 及 300 磅/方吋。

答. 結構鋼, 工具鋼及橡皮每磅之 u 各為 46 吋磅, 850 吋磅及 8,900 吋磅。

410. 圖 13 所示習題中之各桿剖面相同, 彈性係數相同, 試將桿系之應變能等於載荷 P 所作之功, 以校對此題之解法。

411. 試將載荷所作之功, 等於二桿之應變能, 以校對 15 題。

412. 圖 310 (a) 及 (b) 示二圓桿, 假定剖面上之應力分布均勻, 試比較二者應變能之大小。

解. — 圓柱形桿 (圖 310(a)) 之應變能為

$$U = \frac{P^2 l}{2AE}.$$

槽桿 (圖 310(b)) 之應變能為

$$U_1 = \frac{7}{16} \cdot \frac{P^2 l}{2AE}.$$

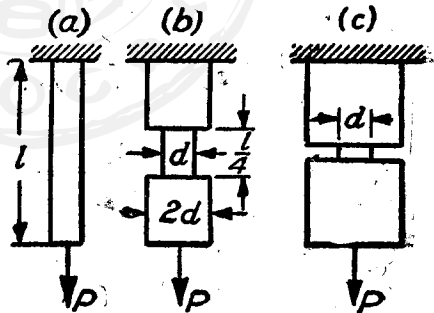


圖 310.

故

$$\frac{U_1}{U} = \frac{7}{16}$$

在一定之最大應力，槽桿內所貯能量，較均勻厚薄之桿小。如圖 310c 所示之桿，其槽甚狹，而外直徑甚大，雖其最弱處之直徑，等於圓柱形桿之直徑，然以甚少量之工作，即可使此桿之張應力，至危險極限。

78. 因撞擊所生之張力。——圖 311 示一簡單排列，使因撞擊而生張力。一重量 W 自高 h 落至突緣 mn ，在撞擊時直立桿 AB (固定於上端) 內即生伸長。設桿及突緣之質量，較落下體之質量小，則略去桿質量，及假定在撞擊時能無損失，可得一近似解法。在撞擊突緣以後，物體 W 繼續向下移動，使桿伸長。因桿之抵抗，物體之速度減少，直至為零。在此瞬間桿之伸長及其相當之張應力，均為最大，其大小可用重量 W 所作之總功變為桿內應變能之假設，以計算之。(註¹) 設 δ 表示最大伸長， W 所作之功為 $W(h+\delta)$ 。桿之應變能由 (140a) 式求之。於是計算 δ 之方程式為



圖 311.

$$W(h+\delta) = \frac{AE}{2l} \delta^2,$$

由此

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{1}{g} \delta_{st} v^2}, \quad (142)$$

式中 $\delta_{st} = \frac{Wl}{AE}$ 為載荷 W 在桿內所生之靜伸長， $v = \sqrt{2gh}$ 為在落體擊突緣 mn 時之速度。

註 1. 在實際上，一部分能將消失，其實在伸長，恆較根據上述假定所求得者小。

設高 h 遠較 δ_{st} 大，則此式化爲下列近似式

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{st} v^2}.$$

桿內之相當張應力(註²)爲

$$s = \frac{\delta E}{l} = \frac{E}{l} \sqrt{\frac{1}{g} \delta_{st} v^2} = \sqrt{\frac{2E}{Al} \cdot \frac{Wv^2}{2g}}. \quad (143)$$

根號內之式，與落體之動能，桿材料之彈性係數成正比，而與桿體積 Al 成反比。由此，此應力不獨可由剖面積之增加而減少，但增加桿長或減少彈性係數 E ，亦可減少應力。此與靜伸長之例，迥然不同，在靜伸長時其應力與伸長 l 及彈性係數 E 無關。

今考究 h 等於零之極端之例，即，物體 W 驟然加於支持 mn 上(圖 311)，其初速度爲零。在此例中，雖在桿開始伸長時無動能，然此題與桿受靜載荷之例大不同。在靜伸長例中，假定載荷逐漸作用，因此作用載荷與桿內之抗力，恆成平衡。在此等條件中，載荷之動能問題，全不加入。在載荷驟加之例中，在開始時，桿伸長及桿應力均爲零，而驟加載荷因其己重，即開始下降。在此運動中，桿之抗力漸增，當重量之垂直變位爲 δ_{st} 時，桿抗力適等於 W 。但在此時，載荷因變位 δ_{st} ，獲得若干動能；故載荷繼續下落，直至因桿抗力關係，速度等於零。在此條件下之最大伸長，可使 $v=0$ ，由(142)式得之。於是

$$\delta = 2\delta_{st}, \quad (144)$$

即，驟加載荷因動力條件，所生之撓度，爲漸加載荷所生者之二倍。

註²。 在此假定在撞擊時之應力分布情形，與受靜載荷時同。

以上所論撞擊，根據桿應力在比例極限以內之假定，在此極限以外，則此題較繁，因桿伸長不復與張力成正比也。假定張力試驗圖，與使桿應變之速度無關，於撞擊時在彈性極限以外之伸長，可用平常之張力試驗圖，如圖 312 所示者，決定之。在任何假定之最大伸長 δ ，其相當之面積 $OADF$ 表示生此伸長所需之功；此必等於重量 W 所作之功 $W(h+\delta)$ 。當 $W(h+\delta)$ 等於或大於張力試驗圖之總面積 $OABC$ 時，則落體可折斷該桿。

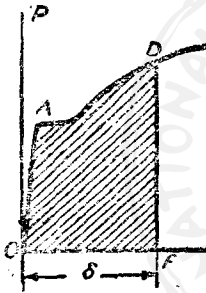


圖 312.

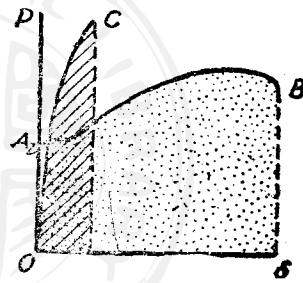


圖 313.

由此可知，桿形式之任何改變，凡足以減少圖之總面積 $OABC$ 者，亦減少桿對於撞擊之抗力。例如，如圖 310b 及 c 之槽桿，其金屬之塑性流 (plastic flow) 將集中於槽內，其總伸長及使折斷所需之功，遠較同圖之圓柱形桿小。此等槽桿對於撞擊甚為柔弱，雖其材料甚韌，然稍經震動即生斷折。凡構桿之有鑄釘孔或任何剖面之有銳變更者，對於撞擊之抗力亦甚薄弱。

一桿對於撞擊之抗力，又與材料之展性有關。此可由圖 315 之張力試驗圖見之。曲線 OAC ，表示材料有高強度而低展性者之載荷

稜形曲線，而曲線 OAB 為材料有較低強度而高展性者之曲線。較韌之材料，在斷折以前，能較稍不韌之材料吸收較多之能，倘比較 OAB 及 OAC 下之陰影面積，即可明白。由此，柔韌材料在震動載荷下，對於折斷之抗力較大。

習 題

413. 重量 10 磅，繫於直徑 $\frac{1}{8}$ 吋之鋼線上（圖 314），自 A 處以加速度 g 落下。當其頂端 A 驟然停止時，求線內所生應力。略去線之重量。問其應力何故與此載荷落下之高度 h 無關？

答。 $s = 221,000$ 磅/方吋。

414. 重量 $W = 1,000$ 磅，自高度 $h = 3$ 呎處，落至一直立木柱上，此柱長 10 呎，直徑 12 吋，下端固定。假定木之 $E = 1.5 \times 10^6$ 磅/方吋，且略去柱之質量及 δ_{st} ，試求柱內之最大壓應力。

答。 $s = 2,000$ 磅/方吋。



415. 重量 $W = 10,000$ 磅，繫於鋼索之一端（圖 314），以等速度 $v = 3$ 呎/秒下降。設索之上端驟停，問索內生應力若干？在撞擊時之索長為 $l = 10$ 呎，其淨剖面積為 $A = 2.5$ 方吋，及 $E = 15 \times 10^6$ 磅/方吋。

圖 314. 解。——略去索之質量，假定運動體之動能，完全變為鋼索之應變勢能，求索內最大伸長 δ 之方程式為

$$\frac{AE\delta^2}{2l} - \frac{AE\delta_{st}^2}{2l} = \frac{W}{2g}v^2 + W(\delta - \delta_{st}),$$

式中 δ_{st} 表示索之靜伸長。注意 $W = \frac{AE\delta_{st}}{l}$ ，解 δ ，

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\frac{Wv^2 l}{AEg}}.$$

在運動驟停時，索內張應力以下列之比面增加

$$\frac{\delta}{\delta_{st}} = 1 + \frac{v}{v_{st}} \sqrt{\frac{Wl}{AEg}} = 1 + \frac{v}{\sqrt{g\delta_{st}}}.$$

最後得

$$s = 20,700 \text{ 磅/方吋}$$

416. 準前題 設將一彈簧(每千磅載荷可伸長 2.5 吋)加於索與載荷間, 試解之。

答. $s = 7,200 \text{ 磅/方吋}$ 。

417. 如圖 311 所示之例, 在撞擊時桿內之最大應力為 30,000 磅/方吋, 求其高度 h 。假定 $W = 25 \text{ 磅}$, $l = 6 \text{ 呎}$, $A = \frac{1}{2} \text{ 方吋}$, $E = 30 \times 10^6 \text{ 磅/方吋}$ 。略去桿之質量。

79. 彎曲之彈性應變能。——先論純彎曲。一稜柱形桿一端固定, 他端加一偶力 M (圖 315) 以彎曲之, 其自由端之角變位為

$$\phi = \frac{Ml}{EI} \quad (a)$$

此變位與彎矩 M 成正比, 可用圖 316 所示者表示之。因偶力 M 轉過角 $d\phi$ 所作之功為 $Md\phi$, 在角變位 ϕ 中, 變彎矩 M 所作之功, 為圖中所示之面積, 桿內所貯之應變能, 等於所作之外功; 即,

$$U = \frac{M\phi}{2} \quad (145)$$

用 (a) 式, 此能可用二式表之:

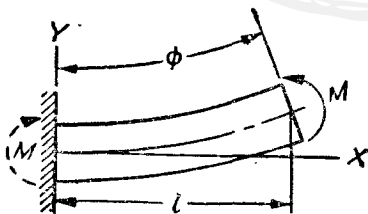


圖 315.

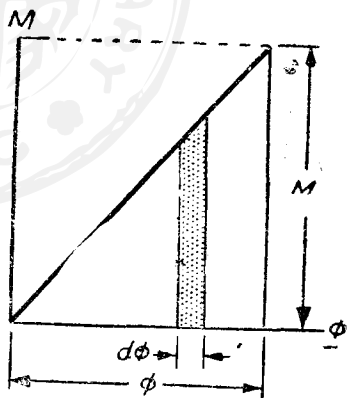


圖 316.

$$U = \frac{M^2 l}{2EI} \quad (146)$$

$$U = \frac{\phi^2 EI}{2l} \quad (146a)$$

又時以最大正應力 $s_{\text{最大}} = \frac{M_{\text{最大}} c}{I}$ 之函數表示勢能，較為有用。於是，在矩形桿之例，(146)式變為

$$U = \frac{1}{3} b h l \frac{s_{\text{最大}}^2}{2E}$$

在此例，其總能僅為各纖維均受應力 $s_{\text{最大}}$ (如在簡伸長中)時之能之三分之一。

在討論橫力彎曲時，切力之應變能可以略去(註³)，長 dx 之梁元素中所貯之能，由(146)及(146a)式，為

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EI} \quad \text{或} \quad dU = \frac{EI(d\phi)^2}{2dx}$$

此處彎矩 M ，為對於 x 之變數，而

$$d\phi = \frac{dx}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} dx$$

(見41節)，因此，梁內所貯之總能為

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (147)$$

或

$$U = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad (147a)$$

註3. 在短而深之梁中，切力之應變能不可略去，而應計入，欲知此題之討論，見 Timoshenko's Strength of Materials, Vol. 1, page 107.

例如，考究膠梁 AB (圖 317)，在任何剖面 m 上之彎矩為 $M = -Px$ ，代入 (147) 式，得

$$U = \int_0^l \frac{P^2 x^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 l^3}{6EI} \quad (b)$$

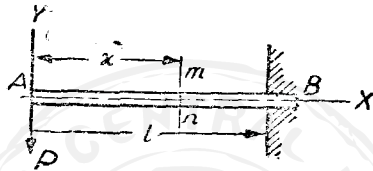


圖 317.

在矩形桿， $s_{\text{最大}} = \frac{6Pl}{bh^2}$ ，(b) 式可變成下式

$$U = \frac{1}{9} \frac{6Pl^3 s_{\text{最大}}^2}{2E} \quad (c)$$

此表示矩形膠梁，一端加載荷，不發生永久變形時，其中能貯之能量，為同一桿受純彎曲時之三分之一，而為同一桿受簡張力時之九分之一。

在設計彈簧時，此種考究，甚為重要，因彈簧必吸收一定量之能而不損壞，且其重量應愈輕愈佳。設使膠梁剖面變動，則所能吸收之能量，可以增加。例如，一均勻強度膠梁，剖面作矩形，深 h 一定 (圖 24b)，用同樣 P ， h 及 $s_{\text{最大}}$ 之值，其撓度較稜柱形桿大百分之五十，故其貯能量亦大百分之五十。同時，均勻強度桿之重量，為稜柱形桿之一半，故其每磅材料所貯能量為稜柱形桿之三倍。

回至 (b) 式，且使應變能等於載荷 P 在撓曲時所作之功，得

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 l^3}{6EI}$$

由此得端撓度爲

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI},$$

此與 49 節第一類符合。

習 題

418. 木製柱梁長 6 呎，其矩形剖面爲 5 吋 × 8 吋。負等布載荷 $w = 200$ 磅/呎。設 $E = 1.5 \times 10^6$ 磅/方吋，求其所貯能量。略去切力應變能。 答。 $U = 42$ 吋磅。

419. 承前題，設梁深爲 5 吋，寬 8 吋，問其應變能以何比增加？

答。 應變能以比 $\frac{8^3}{5^2}$ 增加。

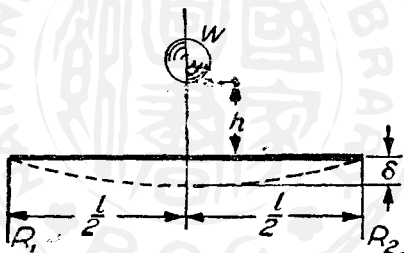


圖 318.

420. 二相同之桿，一桿簡單支持，他桿兩端固定，中心各加相等載荷，以彎曲之。問其所貯能量成何比？略去切力應變能。

421. 承前題，設各桿負等強度 w 之等布載荷，試解之。

422. 一梁受落體 W 撞擊後，其動力撓度，可用以前生張力之撞擊例中所用方法求解之。例如，一自由支持梁，其中心受自高 h 落下物體 W 之撞擊（圖 318），試證此梁之撓度爲

$$\delta = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + \frac{1}{g} \delta_{st} v^2}$$

式中
$$\delta_{st} = \frac{Wl^3}{48EI}, \quad v = \sqrt{2gh}.$$

假定梁質量可略去不論，且梁內應力不超過屈服點。

假定 h 遠較 δ_{st} 為大，試證矩形剖面之近似彎曲應力為

$$\epsilon_{\text{最大}} = \sqrt{\frac{Wv^2}{2g} \cdot \frac{18E}{Al}} = \sqrt{Wh \cdot \frac{18E}{Al}}.$$

423. 一簡單支持矩形木梁，長 9 呎，一物體重 40 磅，自高 $h = 12$ 呎處落下，撞擊梁之中心。設工作應力為 $s_w = 1,000$ 磅/方吋， $E = 1.5 \times 10^6$ 磅/方吋，求所需之剖面積。
答. $A = 120$ 方吋。

80. 卡斯之龍定理。——由各情形之應變能式，可創一甚簡之法，以求彈性體各點在變形時之變位。例如，在簡單張力例中(圖 2)，其應變能由(140)式為

$$U = \frac{P^2 l}{2AE}.$$

對 P 求此式之微係數，得

$$\frac{dU}{dP} = \frac{Pl}{AE} = \delta,$$

即，應變能對於載荷之微係數，為載荷作用點在其載荷方向內之變位。在桁梁受端載荷之例中，其應變能為[79 節(b)式]

$$U = \frac{P^2 l^3}{6EI}.$$

此式對於載荷 P 之微係數，為自由端之撓度 $\frac{Pl^3}{3EI}$ 。

當數載荷作用於一彈性體上時，可用同一計算變位之方法。例如，一梁中心有載荷 P ，一端加偶力 M 以彎曲之，其應變能為

$$U = \frac{1}{EI} \left(\frac{P^2 l^3}{96} + \frac{M^2 l}{6} + \frac{MPl^2}{16} \right).$$

此式對 P 之偏微係數，為載荷下之撓度，而對 M 之偏微係數，為偶力 M 作用端之梁轉角。

卡斯第龍定理 (theorem of Castigliano) 為諸結果之總敘述。設該系之材料遵守虎克定律，且於討論諸力作用時，在變形所生之小變位可略去之條件下，則變位為力之一次函數，此系之應變能為諸作用力之二次同次函數。(註⁴) 於是，應變能對於任一力之偏微係數，為與此力相當之變位。(註⁵) 此處“力”與“變位”為廣義的，即，各包括“偶力”及“角變位”。今考究一普遍例，如圖

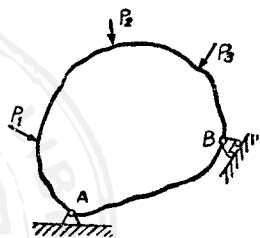


圖 319.

319 所示。假定應變能以諸力 P_1, P_2, P_3, \dots 等之函數表示之，得

$$U = f(P_1, P_2, P_3, \dots). \quad (a)$$

設使外載荷 P_n 得一小量增加 dP_n ，其應變能亦將增加，其新值為

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n. \quad (b)$$

但應變能之大小，與載荷加諸物體之次序無關。——此僅靠其最後數值。例如，可假定先加極微載荷 dP_n ，然後加載荷 P_1, P_2, P_3, \dots 。其最後之應變能之大小，仍與 (b) 式所示者同。其先加之載荷 dP_n 僅生一極微變位，故其所作相當之功，為二次之小量，此可略去。今加載

註 4. 見 Timoshenko's Strength of Materials, Vol. I, Art. 69.

註 5. 欲知例外，見 Timoshenko's Strength of Materials, Vol. I, Art. 74.

荷 P_1, P_2, P_3, \dots , 必注意其效應不因先加载荷 dP_n 而有所改變, 諸力所作之功仍等於 U . 但, 在加諸力時, dP_n 在 P_n 之方向內得若干變位 δ_n , 作功 $(dP_n)\delta_n$. 二功之式必相等; 故

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n}(dP_n) = U + (dP_n)\delta_n,$$

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n}. \quad (143)$$

此總定理之應用, 已於一梁受中心載荷 P 及一端受偶力 M 之彎曲例中論及(第 337 頁). 其他應用, 於 424 及 425 題中說明之. 在求構架撓度時, 此定理亦甚為有用. (註 6)

習 題

424. 一系包括二等長度且等剖面之稜柱形桿(圖 320), 負一垂直載荷 P . 求鉸 A 之垂直及水平變位.

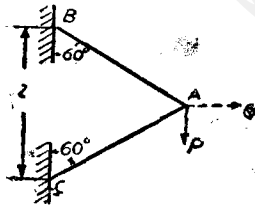


圖 320.

解。——由靜力學, 桿 AB 內之張力, 及桿 AC 內之壓力, 均等於 P . 故此系之應變能為

$$U = 2 \frac{P^2 l}{\sqrt{3} AE}.$$

A 之垂直變位為

$$\delta_v = \frac{dU}{dP} = \frac{2Pl}{AE}.$$

在求 A 之水平變位時, 加一水平假想載荷 Q , 如圖 32 用虛線所示者. 此系之應變能為

註 6. 欲知應用, 見 Timoshenk's Strength of Materials, Vol. I, pp. 321ff.

$$U = \frac{\left(P + \frac{Q}{\sqrt{3}}\right)^2 l}{2AE} + \frac{\left(P - \frac{Q}{\sqrt{3}}\right)^2 l}{AE}$$

此式對於 Q 之微係數，為 A 在 Q 方向因載荷 P 及 Q 而生之變位。最後使 Q 等於零，可以求得 P 單獨所生之水不變位。

$$\delta_h = \left(\frac{\partial U}{\partial Q}\right)_{Q=0} = \left(\frac{\partial Ql}{\partial AE}\right)_{Q=0} = 0.$$

425. 一梁兩端簡單支持(49 節之第 8 類)，負等布載荷，求中心之撓度。

解。——在中心加一假想載荷 Q ，此載荷以左之彎矩為

$$M = \left(\frac{wl}{2} + \frac{Q}{2}\right)x - \frac{wx^2}{2},$$

此梁二半段中之彎曲應變能為

$$U = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} \frac{M^2 dx}{EI}.$$

中心之撓度為

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} M \frac{\partial M}{\partial Q} dx.$$

在求積分前，積分中所有之 Q 值，可使等於零。

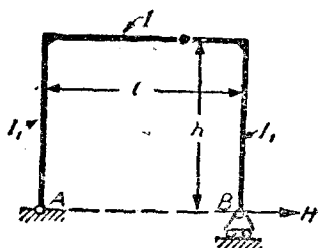


圖 1.

$$\delta = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{vl}{2}x - \frac{vx^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx = \frac{5}{981} \frac{vl^4}{EI}$$

426. 肋梁長 l , 自由端加垂直力 P 及偶力 M , 求該端之撓度及斜度。

$$\text{答. } \delta = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Ml^2}{2EI}, \quad \theta = \frac{Pl^2}{2EI} + \frac{Ml}{EI}$$

427. 圖 321 示一構架, 在支座 B 加一水平力 H , 求 B 點之水平變位。

$$\text{答. } \delta_h = \frac{2Hh^3}{3EI_1} + \frac{Hh^2l}{EI}$$

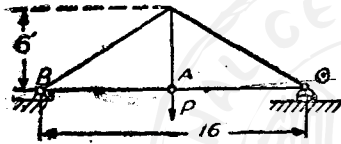


圖 322.

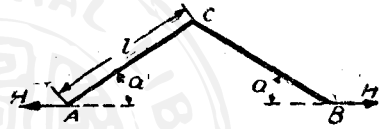


圖 323.

428. 圖 322 示一鋼架, 設 $P=2,000$ 磅, 壓縮桿之剖面積均為 5 方吋, 他桿均為 2 方吋, 求 A 點之垂直變位及 C 點之水平變位。

$$\text{答. } \delta_v = 0.00747 \text{ 吋}, \quad \delta_h = 0.00427 \text{ 吋}$$

429. 在圖 323 中, 力 H 作用於 A 及 B , 設桿 AC 及 BC 之尺寸相同, 僅桿之彎曲應算入, 問距離 AB 增加若干? 假定 α 甚大, 於是撓度對於彎矩大小之效應, 可以略去不計。

$$\text{答. } \delta = \frac{2}{3} \frac{Hl^3 \sin^2 \alpha}{EI}$$

81. 卡斯龍定理對於靜力不定問題解法之應用。——卡斯龍定理在解決靜力不定問題中, 亦甚為有用, 今考究諸題, 其支座之反動力可作為靜力不定量, 以 X, Y, Z, \dots 表示靜力不定反動力, 而該系之應變能為此諸力之函數, 在不可移動支座及在垂直於反動力方向中運動之支座, 其在反動力方向之變位為零; 因此用卡斯龍定理, 應變能對於未知反動力之偏微係數, 必等於零。由此

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Y} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Z} = 0; \dots \quad (149)$$

用此方法，有若干靜力不定反動力，即可得若干方程式。

此可證實(149)式表示函數 Π 為最小之條件，由此可知靜力不定反動力之大小，在使該系之應變能最小。此為應用於決定多衍反動力之最小功原理(principle of least work)。

今舉一例，以說明以上原理之應用。今考究一受等布載荷梁，一端固定，他端支持(圖 324)。此梁有一靜力不定反動力，將右支座之垂直反動力 X ，作為靜力不定量，此未知數由下式求之：



圖 324.

$$\frac{d\Pi}{dX} = 0. \quad (a)$$

由(147)式，該梁之應變能為

$$U = \int_0^l \frac{M dx}{2EI}, \quad (b)$$

式中

$$M = Xx - \frac{wx^2}{2},$$

其原點在右端 B 。

將(b)代入(a)，得

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dX} &= \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{dM}{dX} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(Xx - \frac{wx}{2} \right) x dx \\ &= \frac{1}{EI} \left(X \frac{l^3}{3} - w \frac{l^4}{8} \right) = 0,\end{aligned}$$

由此
$$X = \frac{3}{8} wl.$$

當靜力未知量為偶力時，最小功原理亦可應用。例如，在前題中，倘不將反動力 X 作為未知數，可將反動偶力 M_a 作為未知數以解決之。取原點於右支座，任何剖面上之彎矩為

$$M = \left(\frac{wl}{2} - \frac{M_a}{l} \right) x - \frac{wx^3}{2}.$$

當梁彎曲時，由實在梁左端不轉動之條件，應變能對於 M_a 之微係數，必等於零。由此，得

$$\frac{dU}{dM_a} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{dM}{dM_a} dx = -\frac{1}{EI} \left(\frac{wl^3}{24} - \frac{M_a l}{3} \right) = 0,$$

由此
$$M_a = \frac{1}{8} wl^2.$$

習 題

430. 一垂直載荷 P ，以一長 l 剖面積為 A 之直立桿 DB ，及二長 l 剖面積為 A_1 之相等斜桿支持之（圖 325）。求各桿內之力，又設欲使各桿內之力之數值相等，問 $\frac{A_1}{A}$ 之比該若干？

解。——此系為靜力不定。令 X 為直立桿內之張力，斜桿內之壓力各為 $\frac{P-X}{\sqrt{2}}$ ，

此系之應變能爲

$$U = \frac{X^2 l}{2AE} + \frac{(P-X)^2 l}{2A_1 E}$$

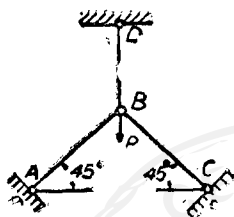


圖 325.

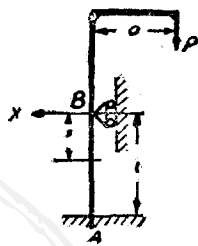


圖 326.

用最小功原理，得

$$\frac{dU}{dX} = \frac{Xl}{AE} - \frac{(P-X)l}{A_1 E} = 0,$$

由此

$$X = \frac{P}{1 - \left(\frac{A_1}{A}\right)} \quad (a)$$

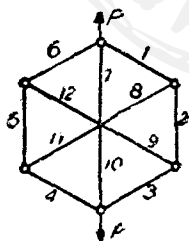


圖 327.

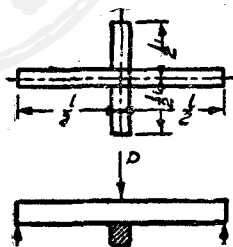


圖 38.

將 X 等於斜桿內之壓力，即，

$$X = \frac{P-X}{\sqrt{2}} \quad (b)$$

而以(a)之 X 值, 代入(b), 得

$$A_1 = \sqrt{2}A.$$

431. 求圖 326 所示系內之水平反動力 X .

$$\text{答. } X = \frac{3}{2} P \frac{\alpha}{l}.$$

432. 用最小功原理, 求圖 13 所示系之各桿內之力。

433. 假定各桿之尺寸及材料相同, 求圖 327 所示系之各桿內之力。

暗示. ——設截去一桿, 則剩餘各桿內之力, 可由靜力學求之; 故此系有一多衍桿。

令 1 爲多衍桿, 假想適在 P 之右截去 1, 而令 X 表示此桿內之未知力。於是六角形邊之各桿, 均受張力 X ; 桿 8, 9, 11 及 12 受壓力 X ; 而桿 7 及 10 受力 $P - X$ 。於是求得該系之應變能 U 。因截桿一部分對於他部分, 無相對變位, $\frac{dU}{dX} = 0$ 。 答. $X = \frac{P}{6}$ 。

424. 二剖面相同之梁, 互相交叉, 如圖 528 所示, 支持一載荷 P 。求梁間之壓力 X 。

$$\text{答. } X = \frac{Pl^3}{l^3 + l_1^3}.$$

第十三章

材料之機械性質^(註1)

82. 伸長試驗。——考究金屬機械性質之最常用方法，為伸長試驗。圖 329 示一所用之長圓柱試樣，在此圖中又示試驗機握緊器

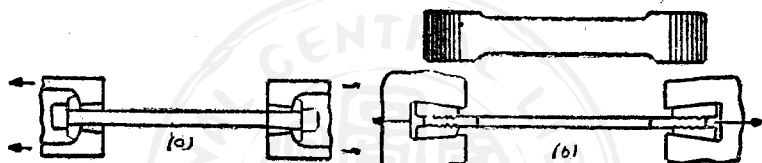


圖 329.

中之球座，此試驗機所以使試樣變形者。此球座所以使載荷作用於中心。圖 329b 示一扁平矩形試樣。規長(gaged length)之伸長 δ ，可用伸縮表(extensometer)度之。於是可繪載荷 P 對於伸長 δ 之圖形。例如，圖 330 表示一組含炭量不同之炭鋼試驗圖。此表示當含炭量增加時，鋼強度(strength)增加，但同時在折斷以前，其伸長減少，即，該材料失去展性(ductility)。以上諸圖形，乃鋼未曾受過熱處理者。由相似一組已受各不同熱處理之鋼之圖形，可得關於熱處理對於強度及展性之重要效應之有用知識。

註1. 此為 Timoshenko's Strength of Materials, Vol. II 第七章之撮要。

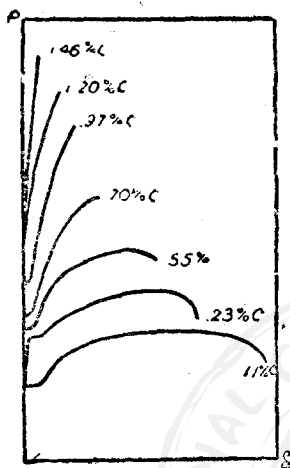


圖 30.

強度及展性，常為自伸長試驗中所得之二重要性質。平常求比例極限，屈點及極限強度，以定材料之強度。

比例極限及彈性極限，在平常應用中意義相同。然其意義實有不同。彈性極限為該材料所能生之最大應力，在完全除去應力後，無永久變形剩留。在另一方面，比例極限為材料所能生之最大應力，而不致偏離應力與應變之比例定律。以試驗許多材料之一般方法，在除去應力後，觀察其永久變形，可求彈性極限之值，但此與所得比例極限之值，相差無幾。故對此等材料，恆承認比例極限與彈性極限相當。在求比例極限時，應用靈敏伸縮表，以探出對於伸長試驗圖中比例性（即對直綫）之偏差。

他種測定比例極限之方法，已有建議。例如，不魯舍爾（1906年）之萬國材料試驗會議，規定比例極限為永久變形為百分之0.001時之張應力。最近有一趨向，使此永久變形之極限大小，增至百分之0.01。他種方法，即為測定約翰生之外觀彈性極限（Johnson's apparent elastic limit）者，此為變形率較初變形率大百分之50時之應力。此法在美國用之甚廣，尤在圖形無處含一直綫部分者，如軟銅，或常常如鑄鐵。

屈點為結構鋼等材料重要之性質。在此應力時，載荷並未增加，而試樣之伸長頗多（在軟鋼例中，有時大於百分之一），有時載荷之突

然減少，與此屈點相伴，於是伸長試驗圖之形狀，如圖 331 所示。在此情形中，在 a 及 b 處之載荷上極限及下極限，除以剖面面積，各稱為上屈點及下屈點。上屈點之位置易受試驗速度，試樣之式樣，及剖面之形狀等之影響。下屈點恆視作材料之真正性質，此可用作測定工作應力之根據。因在屈點時，材料之伸長稍大，故欲測定此點，可不必應用精密伸縮表。此可用數種簡單方法測定之。設當載荷均勻加上時，使試驗機之梁平衡，於是當至屈點時，此平衡梁可突然下降，或用簡單儀器如兩腳規，或直接用伸長試驗圖，亦均可測定屈點。在結構炭鋼，屈點之應力，約為極限應力之百分之 55 至 60。

有數種材料，無顯著之屈點；在此例中，有時將該材料呈一規定之極限永久變形（塑性伸長）時之應力，作為屈點。在 1933 年美國材

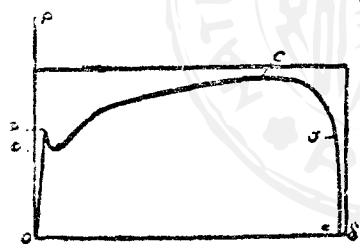


圖 331

料試驗學會標準，倘人無論材料有無顯著屈點，此應力可替代屈點，而此屈點可稱之為屈服強度 (yield strength)。對於此規定變形，規長之百分之 0.20 之值，已廣用於各金屬。所應注意者，即如此所定之屈點強度，不能表示材料之一定物理性質，且其位置隨任意選定之永久變形而定。在結構鋼有顯著屈點之

例中，在屈點時伸長之數，恆大於百分之 0.2，而其實在屈點，則與以上規定百分之 0.2 永久變形時之屈服強度相符合。

今將以上關於彈性極限及屈點之討論作一結論，讀者應注意在美國大部分工程師目光中，任何彈性極限或屈點應表示一極限應力，

在此以下，結構不致損壞，而過此則損壞矣。

試樣在折斷前所達之最大載荷（圖 331 中之 c 點），除以初剖面積，此所得之應力，恆規定為極限強度 (ultimate strength)。此量恆作為測定工作應力之根據。

伸長試驗圖 $Oacde$ (圖 331) 下之面積，表示折斷試樣所需之功。此量有時亦用作材料之特性。此不獨與強度有關，抑且靠材料之展性。

金屬之展性，恆視伸長試驗時試樣規長之伸長，及折斷時剖面之面積減少 (reduction of area) 而定之。

在塑性伸長之第一期，即自圖 331 之 a 至 c ，試樣沿全長均勻伸



長，而同時均勻橫收縮伴此均勻伸長而生，故試樣之體積，在實際上仍為一定。(註²) 在 c 點，張力達至最大值，而試樣再伸長時，則載荷隨之減少。在此期之塑性伸長，變形成為局部化，頸作用 (necking) 即開始，於是試樣作圖 332 所示之形。欲精確測定何時開始頸作用，及測定均勻伸長之大小與因頸作用所生伸長之大小，殊非易易。故在慣例上，恆

圖 3 2. 量試樣折斷後規長所增之總長度。在美國規長恆為 2 吋或 8 吋。伸長之定義，為此規長之總伸長與其初長度之比。在實際上，折斷時之伸長，恆用百分表之。設 l 為原來規長， δ 為總伸長，在折斷時伸長之百分數為

$$e = \frac{\delta}{l} (100)$$

註 2. 在小彈性變形，其體積確實改變，但倘與較大塑性變形相較，則可以略去。

此伸長率用以度量材料之展性。此百分伸長，隨試樣規長或規長與其直徑或剖面積之平方根之比而大為變化。

在折斷剖面處之面積減少，恆以原剖面積之百分數如下表之

$$\text{面積減少 \%} = \frac{A_0 - A_1}{A_1} (100),$$

式中 A_0 為剖面之初面積， A_1 為折斷處之最後剖面積。折斷處之剖面減少，與試樣尺寸之關係較少，不如伸長情形之大，但測定殊不易，尤在扁平試樣及薄片金屬。

在定屈服及極限強度時，計算應力所用之面積，作為原剖面積。圖 331 及圖 333 中之

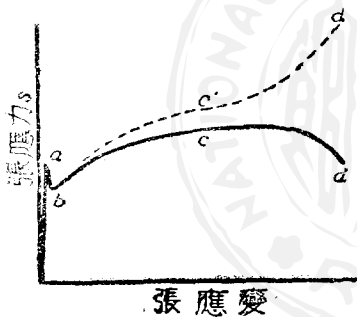


圖 333.

曲線 $Oabcd$ ，即用此法求得者。僅當伸長小時，此曲線始表示真正平均應力，伸長大時，欲得真正應力，必考究剖面積之減少，以原來剖面積與伸長試驗時每區間之變化剖面 A 之比 $\frac{A_0}{A}$ 。乘曲線 $Cabcd$ 之縱座標，得圖 333 之曲線 $bc'd'$ 。由此曲線，可知雖自 c 起，載荷減少，其真正應力繼續增加，而在折斷時之值為最大。或者在頸作用部分剖面上之應力

分布，毫不均勻。伸長試驗中之真正最大應力，或可較折斷時之載荷除以減少後之剖面積為大。

33. 壓縮試驗。——壓縮試驗之主要用處，為試驗脆材料如石，混凝土及鑄鐵。在試驗石塊，常用立方體或圓柱體試樣。混凝土試樣作圓柱體，其高等於二直徑。

在試驗機平面間壓縮此等試樣時，恆假定壓力平均分布於剖面上。雖二面能完全緊接，但實際應力分布，頗為複雜。因試樣與試驗

機壓縮頭間接觸面之摩擦力，可阻止在此等面處因壓縮而生之側膨脹，與此面相鄰之材料，最為有利。因以上關係，混凝土立方體試樣經壓縮試驗折損後之形式，如圖 334 所示者，與試驗機相接之材料，仍不變動，而四邊之材料，則被壓破。欲得混凝土等材料之真

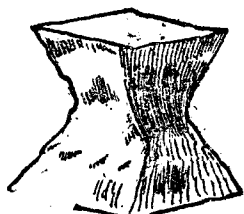


圖 334.

正壓縮抗力，接觸面處之摩擦作用，必設法消除或減小之。為達此目的，福潑爾(A. Föppl)將混凝土表面，蓋以石蠟。由此所得之極限強度大為減少，其破壞形式亦完全不同；一立方體破壞時，分割為平行於一側面之碎片。通常消除摩擦力效應之方法，為用一稜柱形試樣，其在壓縮方向之高度，為側尺寸之數倍。稜柱形之中心部分，於是接近均勻壓縮之條件。

由混凝土，石，及鑄鐵之壓縮試驗，知此等材料之比例極限甚低。在比例極限以外，變形之增加率，較載荷速，其壓縮試驗圖之形狀，如圖 335 所示。

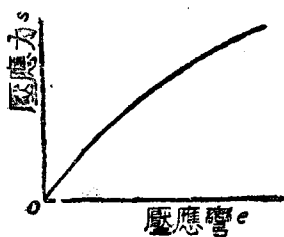


圖 335.

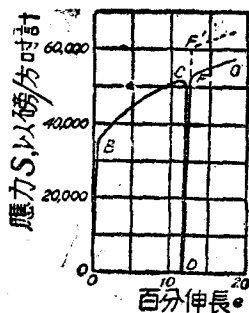


圖 336.

84. 應變硬化, 殘留應力, 及滯後作用。——吾人均知塑性變形能使軟鋼, 銅, 鋁等材料硬化, 其強度增加, 而同時其展性(如由簡單張力試驗中伸長或側收縮所示者)則減小。當柔韌材料受初屈點以外伸長時, 其屈點增加之現象, 亦可表示塑性變形之硬化效應。圖 336 示軟鋼之伸長試驗圖, 桿伸長至 C 點時, 除去載荷, 在此載荷除去之際, 材料大略依照一直綫定律, 如圖中綫 CD 所示。桿上再加載荷, 則得綫 DF , 沿此綫材料大略依照虎克定律, 在 F 點(此與以前載荷之 C 點相當), 曲綫突變其性質, 而描畫部分 FG , 此可視作曲綫 BC 之延長。此為由材料伸長所生之屈點昇高。設除去載荷後, 隔一時間, 如隔數日, 於是再加載荷時, 可得更高之屈點, 如 F' 處虛綫所示。

因塑性變形所生之硬化現象, 在許多技術過程中, 如在低溫度輾桿或抽管及絲, 用剪切鈹鋼, 抽及壓孔, 均可遇到。在以上各情形中, 材料受塑性變形之部分, 即硬化, 而其展性大減。欲免此不需要之應變硬化效應, 恆韌化(anneal)材料, 使重得初展性。

當材料過分變形後, 可生殘留應力(residual stress)。此應力之性質及可能性, 可用圖 337a 所示之三桿系說明之。假定三桿均為同一材料, 同一剖面積, 均知受載荷 P 作用後, 中心桿內之應力, 較斜桿內者為大(見 24 題)。設漸增載荷, 此桿將先至屈點, 其相伴之撓度等於 δ_1 。令直綫 OA (圖 337b) 表示此系在彈性條件下之載荷撓度圖。直立桿所負載荷 P 之部分, 可用至綫 OE 之縱座標求之, 表之, 而二斜桿所負 P 之部分, 可至綫 OF 之縱座標求之, 表之。因此, 例如, 由縱座標 HE 及 HG 之和, 可得縱座標 HA 。在 B , 直立桿已至其屈點, 不可復負載荷, 如橫綫 EQ (註 3) 所示。斜桿所負載荷, 可再隨撓度之增加而增加。於是, 全系之載荷撓度曲綫, 將循綫 AB , 此綫之縱座標為

註 3. 假定該材料有顯著之屈點, 且在屈服後, 可有相當之伸長, 而其應力不增。

線 EQ 及 GF 之縱座標之和。此繼續前進，直至斜桿在 F 處達屈點。此系在此點外之載荷撓度曲線，為 BB' 。

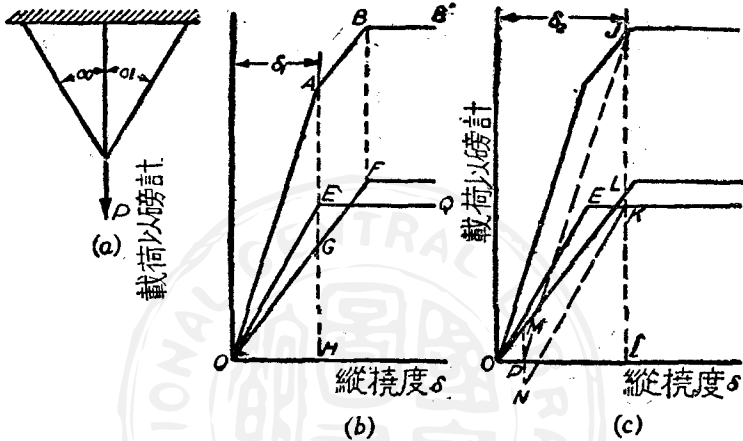


圖 337.

在此載荷過程，假定已至一點 J (圖 337c)，其相當撓度為 δ_2 。直立桿所負載荷 P 之部分為 IK ，斜桿所負載荷為 IL 。今設此系之載荷漸漸除去，變形即在反對方向進行，而各桿均受彈性作用(見圖 336)。直立桿之卸載荷圖為 KN ，平行於 OE ，而斜桿之卸載荷圖，則沿 LQ 回復。全系之載荷撓度圖，今可用 JP 表示之。當載荷完全除去，撓度 OP 仍在。在此撓度下，斜桿負一部分載荷，如 PM 所示，此為張力；直立桿負一相等部分，如 PN 所示，此為負載或壓力。此桿內之相當應力，稱為殘留應力。此應力吾人已知因中心桿之塑性變形而生。

設此系重加載荷，其載荷撓度圖，將與卸載荷之直線 PJ 相同，而此系之屈點，將昇至 J 點，與初載荷相當。在除去載荷後，設該系重加載荷，用一垂直力加於向上之方向，則桿內將生壓應力，此力與殘留應力重疊。因直立桿已有初壓縮，一小於與 A 點相當之力，足使中心桿達屈點(假定材料之壓力屈點與張力屈點同)。因此原載荷可使該系之屈點，在此載荷之方向昇高，而在相反方向，可降低屈點。是以，殘留應力之存在，可以說明何以因伸長而應變硬化之桿，受張力時之屈點較受壓力者高。

例如，當桿抽過牙鈹(die)時，在外週金屬之伸長，較中心者多，故生殘留應力。狹矩形剖面之銅桿抽過後，其距兩端較遠處之殘留應力分布，如圖 338a 所示。設沿長方向割斷此桿，則有彎曲發生，如圖 338b 所示。由此彎曲之測定，知銅桿抽過後所生之最大殘留應力之大小，與該材料在屈點之應力同序。(註⁴)此應力在實際上，甚為重要。此在施工時，能生不需要之撓曲，各種銅合金已經冷作而以後未經適當軋化，因而所生季裂(season cracking)，亦必歸因於殘留應力。



圖 338.

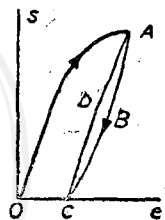


圖 39.

由觀察，知當張載荷加於一桿，不能隨時發生完全伸長，而有一種緩變(creep)，即，此桿在適當長時間內繼續漸漸伸長。此時間效應(time effect)視桿之材料，及所生應力之大小而定。在單結晶試樣之例中，(註⁵)當載荷在比例極限以內，其時間效應甚小，此可用熱力效應及電效應之考究，以說明之。

在不均質材料之例中，如商用金屬(由甚小之結晶組成，每立吋可含數百萬結晶)，其時間效應較大。此不可僅以熱原因說明之，而恆

註 4. 在 Westinghouse 電器公司研究室中，將已經抽過而面積減少百分之 15 之整流器銅桿，用直接測定法，知桿有應力 22,000 磅/方吋。

註 5. 在近年來已創製人單結晶之方法，故可得由一單結晶所成之較大張力試樣。

歸因於殘留應力，此殘留應力在方向不順之結晶中，繼續生滑動，於是在除去載荷後，若干時間內，在材料內生緩變。

設單結晶試樣之伸長，超過比例極限，直至結晶內發生滑動，於是除去載荷，再加載荷，則可得如圖 339 之應力應變圖。在重複載荷及卸載荷後，可至 C 處永久變形無顯著更改之條件。於是循環 $ABCD$ 為有“彈性”的。在每循環中所消散之能，為面積 $ABCD$ 所示，此值較以上所述可用熱或電原因解釋者大。用複結晶材料，如商用金屬，及非晶質材料如玻璃等，亦可得此種“線環”，此現象稱為彈性滯後作用 (elastic hysteresis)。滯後作用環之面積，表示每週所消散之能，此在實際上甚屬重要。因此能之大小，可定該材料之減震性質 (damping properties)。

85. 在高溫度之金屬之物理性質。(註⁵)——有許多工程結構部分，同時受應力及高溫度之作用。例如，此情形可在動力廠及化學工廠中遇之。因現代之趨向，在增加動力廠蒸汽之初溫度，故在高溫度之材料之強度問題，漸變重要，而在此項所作之研究，亦已甚多。由試驗，知受張力之金屬之極限強度，對於溫度甚有關係。圖 340 表示中炭鋼之極限強度及他種機械性質，如何隨溫度而變更。

設載荷在最高溫度作用經一長時間，例如，動力廠內之結構重量或蒸汽壓力，吾人必需關於時間效應之報告。由試驗，可知在此條件下，將發生一連續之變形，稱為緩變，此為設計時應加考慮之重要

註⁵。欲知詳情，見 1931 年 A.S.T.M. 及 A.S.M.E. 連同發出 “Symposium on the Effect of Temperature on Properties of Metals” 一文中所述及之論文與書籍。又見 Trans. A.S.M.E., 1933, Vol. 55, paper no. APM- 5-12.

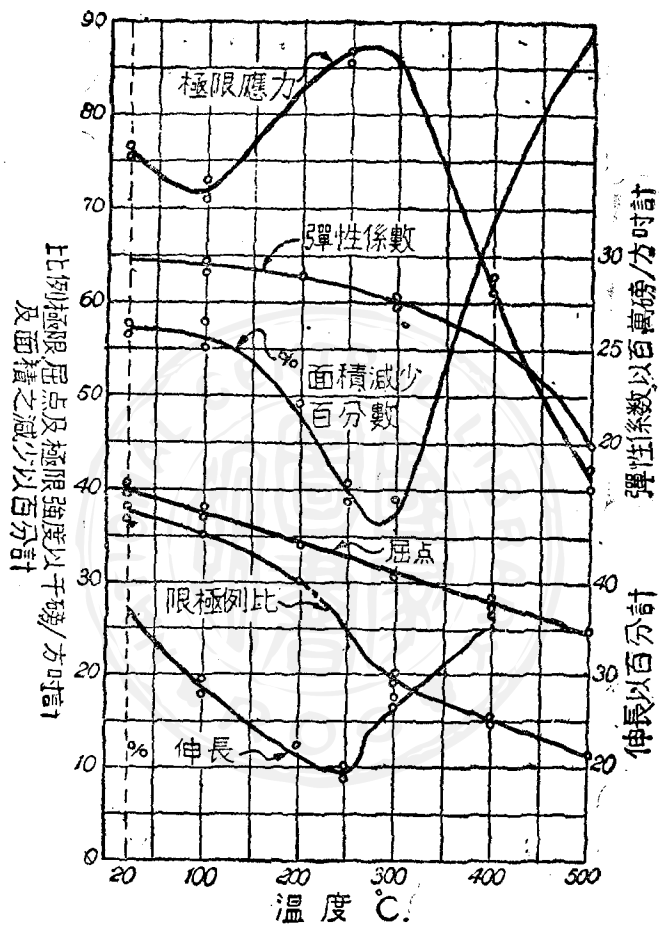


圖 340.

因數。在此一門之研究，雖已作不少，且現今尚在繼續進行，然在高溫度及延長載荷下之金屬性質之問題，仍不可謂已完全明瞭也。

此種大部分試驗，為材料受延長載荷後，漸次伸長之研究。在高

溫度之張力試樣，受有某種一定載荷及溫度，以研究受在此載荷下所進行之緩變。倘將此種實驗結果，畫成時間伸長圖，則得圖 341 所示之形式。圖之 OA 部分，表示所謂初伸長。在初時，伸長率漸漸減小，在 A 達一數值，此值經若干時間仍可保留一定，即，沿圖之 AB

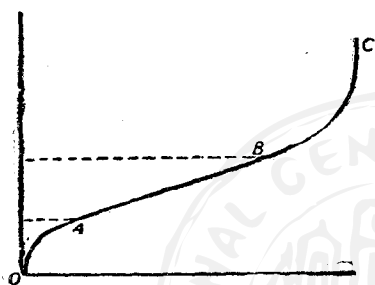


圖 341.

部分，在 B ，伸長率開始增加，最後在 C 點發生折裂。就實際上所遇之應力而論， OA 部分表示一較短之時間，而試樣之全壽命則在 AB 範圍之內。 AB 部分之斜度，表示在某應力及溫度時之伸長率，此對於實用上最為重要，因

結構之壽命，視此伸長率而定也。設張應力減少， AB 之斜度減小，但是否此可變為水平，即，是否有一極限緩變應力，在此應力該試樣可永遠抵抗應力及高溫度，則無一定確實之證據。故在此情形中，必假定結構之有用時期，及許可之畸變程度，然後根據此而設計之。其工作應力之選擇，在使此結構在全壽命中之畸變，不超過一定極限，此極限視結構之式樣而定。

86. 金屬之疲乏。——機器部分，恆受變應力，在此情形下，應知材料之強度。吾人均知，在重複載荷及卸載荷或反應力之下，以小於靜力試驗中所得之材料極限強度之應力，可以生破壞。而此等足生破壞之應力大小，又隨應力循環數之增加而減小。此種材料對於變應力之抗力之減少，稱為疲乏 (fatigue)，而用此種應力以試驗材料，稱為持久試驗 (endurance test)。

設 $\epsilon_{\text{最大}}$ 及 $\epsilon_{\text{最小}}$ 各為變應力之最大及最小值，於是其代數差

$$R = \epsilon_{\text{最大}} - \epsilon_{\text{最小}} \quad (a)$$

稱為應力範圍 (rang of stress)，設已知其範圍及最大應力，則循環可以完全決定。其平均應力為

$$\epsilon_m = \frac{1}{2}(\epsilon_{\text{最大}} + \epsilon_{\text{最小}}). \quad (b)$$

將反應力之循環重疊於穩定應力上，可得任何之變應力循環，即，

$$\epsilon_{\text{最大}} = \epsilon_m + \frac{R}{2}, \quad \epsilon_{\text{最小}} = \epsilon_m - \frac{R}{2}. \quad (c)$$

在持久試驗中，加載荷之方法，有種種不同。可使試樣受直接張力及壓力，受彎曲，受扭轉，或受數種之組合。最簡單之方法，為用反彎曲。圖 342 示一常用疲乏試桿之肋梁式樣。試樣之剖面，沿其長變

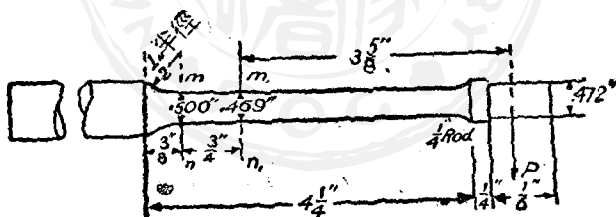


圖 342.

化，使其最大應力，生於剖面 mn 及 m,n 之間，且在此部分應力近於一定。用一大內圓角半徑，及增加近內圓角處之桿直徑，可以減少應力集中之效應。當試樣轉動時，載荷 P 恆向下。故應力每半轉改變符號，其應力循環數，等於機器之轉數。此應力完全為反應力，其平均應力為零，而應力範圍為 $\epsilon_{\text{最大}}$ 之二倍。用若干試樣，以各不同載荷 P 試

驗之，可得一曲線，如圖 343 所示。此處 $s_{\text{最大}}$ ，作為發生折斷所需循環數 n 之函數。此所示曲線，為試驗軟鋼所得者。在開始，當 n 增加， $s_{\text{最大}}$ 減少之速度甚速，但在 4 至 5 百萬循環後， $s_{\text{最大}}$ 幾無大變化，而此曲線接近水平漸近線 $s_{\text{最大}} = 27,000$ 磅/方吋。與此漸近線相當之應力，稱為受反應力試驗之材料之持久極限。

范朋 (W. Fairbairn) 根據實大鍛鐵梁之試驗，最先陳述有一極限應力，此應力可安全加至無窮次。今可作陳述，即大都承認大部分金屬有一定應力之極限範圍，此材料可支持之，雖循環數無窮，亦不

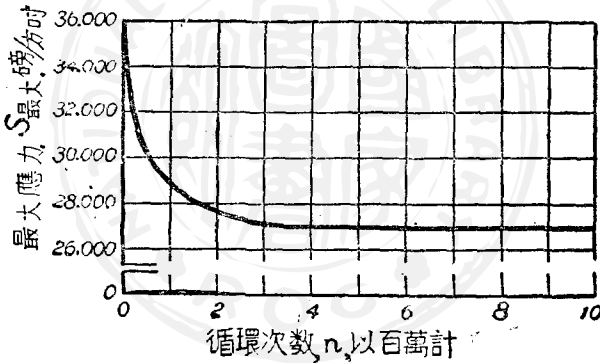


圖 343.

破壞 此陳述雖不可用直接試驗證明之，然所有試驗證據，均支持之。

在實際上甚屬重要者，為知如何 $s-n$ 曲線迅速接近漸近線，因創立此持久極限所需之循環數 視此而定。由試驗知含鐵金屬之相當正確持久極限，可根據 6 至 10 百萬循環創立之。在非含鐵金屬，則需較多之循環數。

在大部分之情形中，持久試驗之排列，僅在測定反應力（ $\sigma_{最大} = -\sigma_{最小}$ ）之持久極限，而在許多機械設計中，常有變應力，此應力非完全相反者，故必須知在此變應力下之持久極限。佛來爾（A. Wohler）為作系統研究疲乏現象之第一試驗家，彼指示生折斷所需之應力範圍 R ，隨平均應力 σ_m 之增加而減少。戈布（W. Gerber）根據此等試驗及包興蓋（Bauschinger）之工作，建議應力範圍 R 與平均應力 σ_m 間之關係，以拋物線定律表之。此在圖 344 以數曲線說明之，圖中平均應力（橫座標）及應力範圍（縱座標）以極限強度之分數表

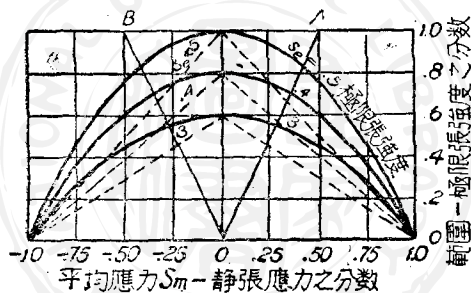


圖 344.

示之：每曲線與一完全反應力之特殊持久極限相當，而以此應力註在曲線上，由此可知，當應力完全反復時（ $\sigma_m = 0$ ），其範圍為最大，而當平均應力接近極限靜張力強度時，則範圍近於零。

今舉一例，設已知完全反應力之持久極限為極限強度之 40%，而應力之全範圍為 $R =$ 極限靜張強度之 75%；求此已知應力範圍之持久極限，其平均應力，為註“0.4”曲線上縱座標為 $R = 0.75$ 之一點之橫座標：即， $\sigma_m = 0.25$ 。其最大應力為 $\sigma_{最大} = \sigma_m + \frac{1}{2}R = 0.25$

圖 345 表示完全反復之持久極限為極限靜張強度 40% 時之情形。當持久極限 s_e 等於極限靜張強度三分之一時，在此特殊情形所繪與圖 345 相似之線 AOB 及 CEB ，稱為戈德曼圖 (Goodman's Diagram)。

87. 各種強度理論。——結構材料之物理性質，大半用試驗機使試樣受簡單之應力條件，而研究之。關於金屬強度之大半報告，由簡張力試驗得之，而脆材料如石或混凝土之強度，則大半用壓力試驗得之；關於材料之切強度亦有相當之報告。至所受應力條件較上述複雜時，僅在若干少數情形已經考究。欲得數根據，以測定設計中常遇合應力狀態之工作應力，已有各種強度理論之產生。此諸理論之目的，在用簡張力及壓力試驗所得之性質，創立定律，以預測受任何種類之合應力後何時發生破壞；此處破壞指屈服或實在折斷，何者先發生即指何者。

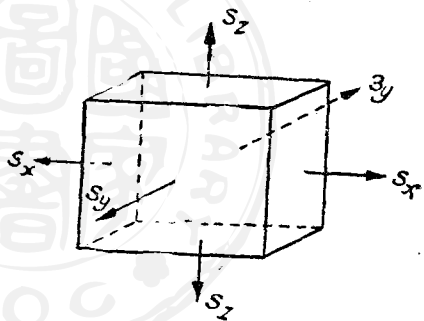


圖 346.

在最普遍情形中，一元素之應力狀態，可以三主應力 σ_x , σ_y , 及 σ_z (圖 346) 之大小定之。主應力之代數值間，假定有下列關係：

$$\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z, \quad (a)$$

式中張力為正，壓力為負。

最老之理論，即所謂最大應力理論，有時稱為冷金 (Rankine) 理論。將最大應力作為強度之標準，且假定在柔韌材料之例中，當最大

(或最小)主應力,等於受簡張力(或壓力)之材料之屈點時,此元素(如圖 346 所示)即開始屈服.屈服之條件爲

$$\sigma_x = \sigma_{y.p.} \quad (150)$$

或
$$\sigma_z = \sigma_{y.p.}', \quad (150a)$$

式中 $\sigma_{y.p.}$ 爲受張力之屈點, $\sigma_{y.p.}'$ 爲受壓力之屈點.有許多證據反駁此理論.例如,均知在簡張力之例中,沿與試樣軸傾斜之平面上,即在張力不爲最大之平面上,發生滑動.又在均勻且各向同性之材料,雖對於簡壓力之抵抗甚弱,但由試驗結果,知可支持甚大之水壓力而不屈服.此表示單獨最大張或壓應力,不能作爲屈服之條件.

他種強度理論,稱爲最大應變理論,此恆歸功於聖萬能德(Saint Venant).在此理論中,假定當最大單位應變(伸長)等於簡張力中發生屈服時之單位應變,或當其最小單位應變(壓縮)等於簡壓力中之單位應變,則該柔韌材料開始屈服.即由於 18 節(28)及(29)式相似方程式,得

$$\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = \frac{\sigma_{y.p.}}{E}, \quad (151)$$

或
$$\frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\sigma_{y.p.}'}{E}. \quad (151a)$$

亦有例證與此理論反背.例如,當一板在二垂直方向內受張力,由最大應變理論,知在屈服時之主應力 σ_x ,必較受簡張力例內之值爲高,因在每垂直方向內之伸長,由他垂直方向之張力關係,可減少若干

也。此結論不常為試驗所擁護(註7)。用受水壓力之試樣所作之試驗，亦與此理論反背。

最大切力理論，有時稱為蓋斯脫(Guest)理論，至少在 $s_{y.p.} = s_{y.p.}$ 之柔韌材料，與試驗更為符合。此理論假定當最大切應力等於簡張力試驗中屈點時之最大切應力，則開始屈服。因最大切應力等於最大及最小主應力之差之半，其屈服之條件為

$$\frac{1}{2}(s_x - s_z) = \frac{1}{2}s_{y.p.} \quad (152)$$

在機械設計中，今恆將最大切應力理論，用於柔韌之材料。此理論與試驗頗相合，其應用亦簡易。

此處所敘者僅先進理論之三。此三者為最老且最簡者。其他(註8)性質較精而應用較廣者，為馬爾(Mohr)所進一步發展之最大切應力理論，及最大應變能理論。後者經虎培兒(M. Huber)，馮索塞司(R. von Mises)及亨蓋(H. Hencky)三人改良後，已獲得不少之試驗證實。其表示屈服條件之方程式為

註7. 然 A. J. Becker 及 B. P. Haigh 在 1919 年之 Bournemouth meeting of the British Assn. for Adv. Science 所報告之試驗，表示當二主應力之符號相同時，可稍增受有雙軸應力之強度。當此二應力符號相反，則為最大切力理論所控制。又 Matsumura 及 Hamabe 之工作(見 Memoirs of the College of Engineering, Kyoto Imperial Univ., Vol. I, No. 2, Feb. 1915)似乎表示最大應變理論，與鑄鐵之試驗結果頗為相合。

註8. 此諸理論之敘述，可在下列文中得之，H. M. Westergaard, Jour. Franklin Inst., 1920; A. J. Becker, Bull. No. 85, Eng. Expt. Stat., Univ. of Illinois; A. Nadai, "Theories of Strength", Trans. A.S.M.E., 1933, APM-5-15. 又見 Timoshenko's "Strength of Materials", Vol. II, Art. 62, 及 Nadai's "Plasticity", Chaps. 12 & 13, McGraw-Hill Book Co., 1931.

$$(s_x - s_y)^2 + (s_y - s_z)^2 + (s_z - s_x)^2 = 2(s_{y.p.})^2. \quad (155)$$

今考一材料在純切力下受切應力 s_s 作用之例，以比較各種強度理論。因以前各式，以主應力 s_x , s_y 及 s_z 表之，不以 s_s 表示，故第一步應將此純切力例中之 s_s 表示 s_x , s_y 及 s_z 。由 19 節，在此情形時， $s_x = -s_z = s_s$ ，而 $s_y = 0$ 。假定材料受張力之屈服，與受壓力者相同，即， $s_{y.p.} = s_{y.p.}'$ ，且 $\mu = 0.3$ ，如鋼之 μ 值。則可知根據各種理論，當切應力 s_s 達下列簡張力之屈服應力之比例時，該材料將屈服。

根據最大應力理論，用(150)式，

$$s_s = s_{y.p.}$$

根據最大應變理論，用(151)式，

$$\frac{s_s}{E} - \frac{0.3}{E}(0 - s_s) = \frac{s_{y.p.}}{E},$$

由此

$$s_s = 0.77 s_{y.p.}$$

根據最大切應力理論，用(152)式，

$$s_s - (-s_s) = s_{y.p.}$$

由此

$$s_s = 0.50 s_{y.p.}$$

根據虎培及馮密察司及亨蓋理論，用(153)式，

$$(s_s)^2 + (s_s)^2 + (-s_s - s_s)^2 = 2(s_{y.p.})^2,$$

由此

$$s_s = \sqrt{\frac{1}{3}} s_{y.p.} = 0.577 s_{y.p.}$$

88. 工作應力。(註 9)——在設計中選擇足夠安全因數(註 10)之

註 9. 欲知關於工作應力之更詳參考，見 Trans. A.S.M.E., Vol. 55, 1933, paper nos. APM-55-12 至 APM-55-20.

註 10. 見 C. R. Soderberg: "Factor of Safety and Working Stress", Trans. A.S.M.E., Vol. 53, 1930, paper no. APM-52-2 及 "Working Stress", Trans. A.S.M.E., Vol. 55, paper no. APM-55-16. Soderberg 主張用名詞 "有用因數" (此為安全因數之倒數)，而不用 "安全因數"。

問題，在實際上最屬重要。設所取因數太低，所定工作應力太高，則結構在使用時將太弱。在另一方面，設工作應力太低，則結構過重，且不經濟。今舉一受張力之稜柱體桿之例，以討論各種因數，以爲選擇工作應力之用。設假定材料之屈服點爲測定工作應力之根據，於是

$$\frac{\sigma_{y.p.}}{n} = \frac{P}{A} \dots\dots\dots (a)$$

由上式可知其剖面面積視外載荷 P 之大小，材料之屈服點 $\sigma_{y.p.}$ ，及安全因數 n 而定。此因數，實可稱“不定因數”，之大小，顯然視吾人所知 (a) 式內各量（即外載荷及材料之物理性質）之正確程度，及此式所表示最大應力之正確程度而定。

在若干例中，可精知外載荷。例如，設已知水之深，則可確知作用於堤上之水壓力。設迴轉部分之角速一定，則可確知作用於其上之離心力。但在大半情形中，僅可知力之近似值，而結構之最不利之載荷條件，僅可根據長期之經驗以求之。例如，考究橋樑之設計。橋自身重量及經過該橋之車輛重，均可知其相當正確之值。但在設計橋時，應將動力效應計入。因均衡重量之關係，機車輪之壓力在軌上不等，其最大壓力較靜壓力大。在動及變載荷作用之下，橋樑將生擺動，在此條件下，求橋樑每桿內之力之問題，將甚複雜。他種作用於橋上之力而不能詳知者，爲風壓。此力之大小，恆根據由已有結構所得之經驗估計之。由以上討論，可以明知，設 (a) 式表示橋一桿之安全條件，力 P 不詳知，僅可用近似法估計之。此估計之正確程度，將影響其安全因數之大小。

$\sigma_{y.p.}$ 之大小，亦爲不確知之量。在同樣材料，此可有若干變更，而此變更視材料之均勻與否而定。是以，在均勻材料如鋼之情形中，其最自然之方法，爲取木、石等材料情形中稍低之安全因數。

在選擇安全因數時，又必考究公式本身之正確程度。在計算張力試樣之應力時，(a)式可謂甚屬真確。因特別注意使載荷作用於中心，及使載荷平均分布於最弱之剖面上。但如以橋樑之設計爲例，又可分別(a)式僅爲粗草之近似法，因根據節爲理想鉸之假設。如此樑之實在應力分布，距簡張力頗遠。因剛節關係，橋樑非但受直應力，且又受彎曲。其相當彎應力，有時爲量頗大：設不計算彎曲，而用簡單(a)式以求樑之剖面積，於是，增加安全因數，可抵消此例中(a)式之不正確程度。

由此討論，可知欲作關於安全因數大小之任何一定建議，殊爲不易，且此因數恆視設計者之經驗與判斷而定。

在下列討論中，假定諸力由過去實在經驗決定，而材料之物理性質乃屬已知者。於是考究各法，以求各種應力條件，對於選擇工作應力之效應。用此種知識，可設計一結構，使結構各部分之安全因數相同。由此可以明知，設欲使設計經濟，必滿足此後者之需求，因結構之極限強度，由最弱處之強度所決定也。

今開始討論應力恆爲一定之例，如僅受靜載荷之結構，或繼續以同速轉動之機器迴轉部分。應考究之第一問題，爲在求工作應力時，將屈點抑極限強度作爲極限應力。在柔韌材料之例中，如結構鋼，將屈點作爲求工作應力之根據，似較合理，因在屈點處所生不少之變形，在工程結構中所不許也。在脆材料之例中，如鑄鐵或混凝土，

恆取極限強度之若干部分作為工作應力。

已知柔韌材料之屈服點 $s_{y.p.}$, (註¹¹) 受張力或壓力之工作應力為

$$s_w = \frac{s_{y.p.}}{n}, \quad (b)$$

式中 n 為安全因數。在結構工程中, 此因數恆取作等於 2。設取最不利之載荷條件, 則此因數有時可降至 $1\frac{1}{2}$ 。(註¹²) 應注意者, 即當載荷靜止, 材料為柔韌, 則因孔及凹角所生之應力集中, 恆可不計, 且其最大應力, 可由簡單方程式, 如用於直應力, 純扭轉及簡單彎曲者, 以求之。

已定簡張力及壓力之工作應力, 他種任何應力條件之工作應力, 可根據最大切應力理論求之, 在純切力之例, 得

$$(s_s)_w = \frac{s_w}{2} = \frac{1}{2} \frac{s_{y.p.}}{n}. \quad (c)$$

在各令應力之例中, 必用此切力工作應力之大小, 即設計一結構, 使

$$\frac{s_x - s_z}{2} = (s_s)_w = \frac{1}{2} \frac{s_{y.p.}}{n}, \quad (d)$$

式中 s_x 及 s_z 各為最大及最小主應力, 故 (d) 式之左端表示最大切應力。例如, 在圓軸 (69 節) 之彎曲與扭轉組合之特例中, 得

$$\frac{s_x - s_z}{2} = (s_s)_w = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + M_t^2},$$

註 11. 假定受張力之屈服點, 與受壓力者同。

註 12. 有時分為兩種不同條件而計算之: (1) 一般服務載荷之條件, 及 (2) 意外條件 (在此假定最不利之可能載荷之條件)。第二條件, 可用較低之安全因數。

由此

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi (s_s)_w} \sqrt{M' + M_t^2}}$$

在脆材料之例中，受張力及壓力之工作應力，為

$$s_w = \frac{s_{\text{極限}}}{n_1}; \quad s_w' = \frac{s'_{\text{極限}}}{n_1} \quad (e)$$

式中 $s_{\text{極限}}$ 為受張力之極限強度， $s'_{\text{極限}}$ 為受壓力之極限強度， n_1 為安全因數。在混凝土或鑄鐵等材料，恆取較高之因數，在各種不同情形中，可用 4 至 8。在實際上，在脆材料之例中，恆用最大應力理論，即，如此決定其尺寸，使其最大張應力，不大於受簡張力之工作應力，而其最大壓應力，不大於受壓力之工作應力。在計算脆材料之此等最大張應力及壓應力時，遇應力（見 10 節）集中，必須計入。

在變應力之例中，工作應力之大小，恆根據持久試驗測定之。在柔韌材料之例，可用下法。任何直變應力，可分解為二部：(1) 一穩定平均應力

$$c_m = \frac{s_{\text{最大}} + s_{\text{最小}}}{2}$$

及 (2) 一反應力

$$s_r = \frac{s_{\text{最大}} - s_{\text{最小}}}{2}$$

將 c_m 作橫座標， s_r 作縱座標，任何變應力可用 c_m-s_r 平面中之一點表之，如圖 347 所示。在此圖中，令 A 表示靜張力試驗中之屈點 ($s_r = 0$)， B 為反應力之持久極限 ($c_m = 0$)。已有此二極限應力後，假定

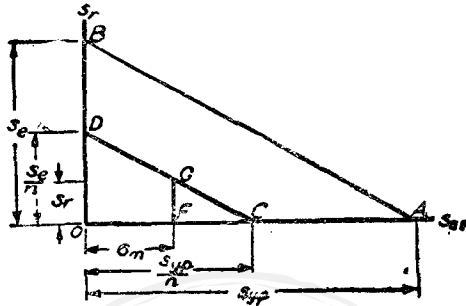


圖 347.

其他情形之極限應力條件，(註 13)以直線 AB 上之點表之。由 86 節之討論，倘與圖 344 之戈布拋物線及直線比較，可以明知此假設為在安全之一邊，設以安全因數 n 除 OA 及 OB ，可得決定直線 CD 之點，此平行於 AB ，表示安全應力之條件。由此線，可定任何比值 $\frac{s_r}{s_m}$ 之 s_m 及 s_r 之安全值。

例如，在用點 G 所表示之應力條件中， $s_m = OF$ ， $s_r = FC$ ，由相似三角形 GFC 及 DGC ，得

$$\frac{s_r}{\frac{s_y \cdot p_0}{n} - s_m} = \frac{s_e}{s_y \cdot p_0}$$

由此

$$\frac{1}{n} = \frac{s_r}{s_e} + \frac{s_m}{s_y \cdot p_0} \quad (154)$$

及

$$s_r = \frac{s_e}{n} \frac{1}{1 + \frac{s_e}{s_y \cdot p_0} \frac{s_m}{s_r}}; \quad s_m = \frac{s_y \cdot p_0}{n} \frac{1}{1 + \frac{s_y \cdot p_0}{s_e} \frac{s_r}{s_m}} \quad (155)$$

註 13. 極限應力條件之定義，為使生破壞，即，在許可極限以外之疲乏折斷或伸長，之應力條件。

今舉一例，以說明此諸式之應用。假定有稜柱形鋼桿，其 $s_{y.p.} = 42,000$ 磅/方吋，及 $s_e = 30,000$ 磅/方吋，今受自極限 0 變至 $s_{\text{最大}}$ 之反應力。於是，

$$s_r = s_m = \frac{s_{\text{最大}}}{2},$$

當 $n=2$ ，由(154)及(155)式，得

$$s_r = \frac{30,000}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{1.4}} = 8,750 \text{ 磅/方吋.}$$

$$s_m = \frac{42,000}{2} \frac{1}{1 + 1.4} = 8,750 \text{ 磅/方吋.}$$

及

$$s_{\text{最大}} = s_m + s_r = 17,500 \text{ 磅/方吋.}$$



附 表

公制英制對照表

長 度 表

公 制		英 制		
公 分 Centimeters	公 尺 Meters	吋 Inches	呎 Feet	碼 Yards
1	0.01	0.3937	0.0328	0.01094
100	1	39.37	3.281	1.0936
2,540	0.6254	1	0.68333	0.62778
80.48	0.3048	12	1	0.3333
91.44	0.9144	36	3	1

面 積 表

公 制		英 制		
方公分 Sq. Centimeters	方公尺 Sq. Meters	方吋 Sq. Inches	方呎 Sq. Feet	方碼 Sq. Yards
1	0.0001	0.1550	0.001076	0.0001193
10,000	1	1,550	10.7639	1.1960
6,452	0.0006452	1	0.006944	0.0007716
929	0.0929	144	1	0.1111
8,361	0.8361	1,296	9	1

體 積 表

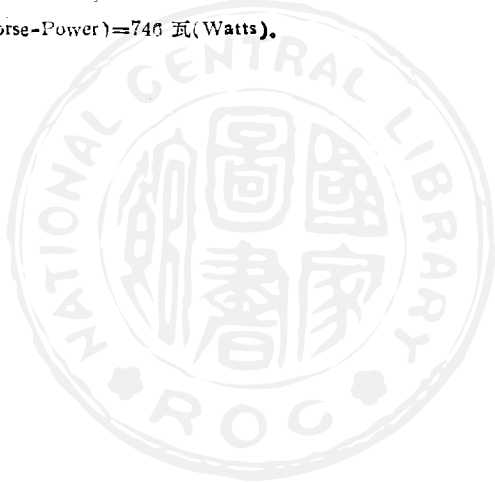
公 制		英 制		
立方公分 Cu. Centimeters	立方公尺 Cu. Meters	立方吋 Cu. Inches	立方呎 Cu. Feet	立方碼 Cu. Yards
1	0.00001	0.0610	—	—
1,000,000	1	61,024	35.315	1.308
16,387	0.0001639	1	0.0005787	0.000214
2,832	0.002832	1,728	1	0.03704
76,460	0.7646	46,656	27	1

重 量 表

公 制		英 制		
公 斤 Kg.	公 噸 Metric Tons	磅 Pounds	短噸(美制) Short Tons	長噸 Long Tons
1	0.001	2,204.6	0.001102	0.000812
1,000	1	22,046	1.1023	0.9842
0.4536	0.0004536	1	0.0005	0.0004 6
907.18	0.9072	200	1	0.8929
1,016.05	1.0160	2,240	1.1200	⁶⁶ 1

1 呎磅(Foot-Pound) = 13.825 公斤-公分(Kg.-Cm.).

1 馬力(Horse-Power) = 746 瓦(Watts).



附 錄 A

常用結構材料之物理性質表

及工作應力表

- 表 I. 常用金屬之平均物理性質。
- 表 II. 結構用木之平均物理性質及工作應力。
- 表 III. 房屋用石, 磚及混凝土之平均物理性質。
- 表 VI. 鋼, 鐵及石工之工作應力。

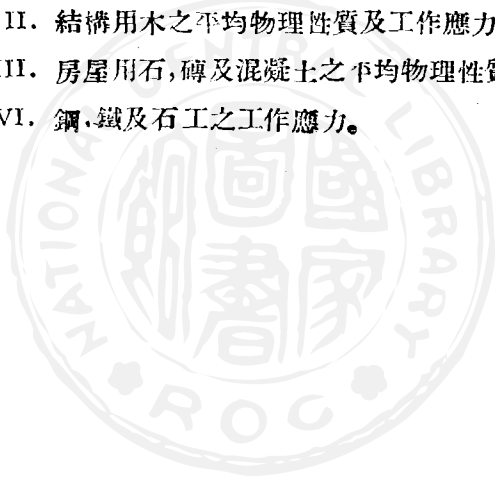


表 I
常用金屬之平均物理性質*

金 屬	密 度 磅/立方吋	線膨脹溫度 係數 ^{°F.}	比例極限 [†] 磅/方吋		極 限 強 度 磅/方吋		強 性 係 數 磅/方吋		在 2 吋 內之伸 長百分 數
			張力	切力	張力	切力	張力 E	切力 G	
錫, 純 (0.2% C.)	0.283	6.5 × 10 ⁻⁶	35,000	21,000	60,000	30,000	30 × 10 ⁶	12 × 10 ⁶	30
錫, 冷浸 (0.2% C.)	0.283		70,000	36,000	89,000		60,000	30 × 10 ⁶	18
錫, 熱浸 (0.8% C.)	0.283	7.3 × 10 ⁻⁶	120,000	42,000	120,000		105,000	30 × 10 ⁶	10
錫, 油浸 (0.8% C.)	0.283		120,000	72,000	180,000		150,000	30 × 10 ⁶	2
銀鋼 (2½% Ni.; 0.4% C.) (油浸)			160,000	96,000	285,000			50 × 10 ⁶	5
鐵鑄	0.278	6.7 × 10 ⁻⁶	30,000	18,000	50,000	60,000	40,000	27 × 10 ⁶	30
灰鑄鐵	0.260	6.0 × 10 ⁻⁶	6,000		20,000	80,000	\$	18 × 10 ⁶	微
灰質鑄鐵	0.268	6.2 × 10 ⁻⁶	20,000	10,000	50,000		40,000	18 × 10 ⁶	10
銅, 錫	0.322	9.2 × 10 ⁻⁶	8,000		20,000	45,000		12 × 10 ⁶	
銅, 硬抽	0.352	9.3 × 10 ⁻⁶	38,000	22,000	55,000			17 × 10 ⁶	4
銅, 鑄 (1.9% Al.)	0.095	12.8 × 10 ⁻⁶	9,000		12,000			10 × 10 ⁶	20
鉛, 硬抽	0.057	10.4 × 10 ⁻⁶	20,000		30,000			10 × 10 ⁶	4
黃銅, 鑄 (80% Cu; 40% Zn.)	0.300	10.4 × 10 ⁻⁶	25,000	15,000	60,000			13 × 10 ⁶	20
常用黃銅, 鑄	0.310	10.4 × 10 ⁻⁶	20,000		60,000			14 × 10 ⁶	20
青銅, 鑄 (9.5% Cu; 10% Sn.)	0.295	10.0 × 10 ⁻⁶	20,000		38,000	55,000		12 × 10 ⁶	10

*用各種不同之成分, 熱處理, 先前之冷作或抽引等, 可以大致其物理性質。

†極比例極限及彈性係數, 可假定與張力者相同, 但在鑄鐵之例中, 其極比例極限為 25,000 磅/方吋。

‡柔鋼材料之極限強 度, 為一不定量, 在上表中未載此強度之數值者, 在實用時可假定與張力之比例極限相同。

§在純切中, 鑄鐵之破壞由於對角張力。

表 II

結構用木之平準物理性質及工作應力

常用結構等級——繼續乾燥者

種類	密度 (乾燥) 磅/ 立方吋	彎曲, 磅/方吋		切, 磅/方吋		壓縮, 磅/方吋										
		比例 極限	彎折 係數	工作 應力	彈性 係數	平行於木紋		平行於木紋			垂直於 木紋 工作 應力					
						極限 應力	工作 應力	極限 應力	比例 極限	S 工作 應力		E 彈性 係數	K (見 76 節)			
紅柏	23	5,500	6,500	720	1.0 × 106	400	100	64	4,000	5,000	560	1.0 × 106	104	27.1	730	200
光頭扁柏	30	6,500	7,500	1,040	1.2 × 106	530	125	87	4,500	5,000	880	1.0 × 106	104	27.1	80	350
滑格拉刺松	30	6,500	10,500	1,200	1.6 × 106	500	125	72	3,500	5,000	880	1.6 × 106	106	27.5	840	325
洋松	26	6,300	10,000	1,040	1.4 × 106	400	75	60	4,500	5,000	72	1.4 × 106	106	28.3	600	300
白松	50	9,500	13,000	1,300	1.7 × 106	900	235	110	5,000	8,500	880	1.6 × 106	106	27.8	600	300
長葉松	34	6,500	11,000	1,400	1.6 × 106	800	180	103	4,000	8,300	1,025	1.6 × 106	106	25.8	900	380
短葉松	32	6,000	8,000	1,200	1.6 × 106	700	150	88	3,500	5,000	880	1.6 × 106	106	27.3	700	250
軟木	24	4,500	7,500	930	1.2 × 106	350	90	65	3,800	5,000	700	1.4 × 106	106	27.8	550	260
紅木	24	8,000	10,000	880	1.2 × 106	800	200	68	5,500	7,000	640	1.2 × 106	106	27.8	740	350
樺	24	8,000	10,000	880	1.2 × 106	800	200	68	5,500	7,000	640	1.2 × 106	106	27.8	740	350
落葉松	31	7,500	13,000	930	1.3 × 106	400	100	76	3,500	4,600	880	1.4 × 106	106	27.8	700	300

一種木材之物理性質，視其髓子之性質，乾燥等情
形，大有變化，啟用選過之木材，則上值可以增而百分之
20 或 25，設木材有時選用，或繼續應用，則大部分上值應
減少五分之一至三分之一，欲知詳情，見美國材料試驗學

會法規 D245-33.

上表之一部分，採自 1935 年之美國材料試驗學會標
準，且已得該會之允許者。

表 III
房屋用石, 磚及混凝土之平均物理性質

材 料	密 度 磅/立方呎	線膨脹之 溫度係數 /°F.	極限壓應力 磅/方吋	極限切應力 垂直於紋理 磅/方吋	彎曲之 彎折係數 磅/方吋	壓縮之 彈性係數 磅/方吋
花崗石	165	3.5×10^{-6}	20,000	2,300	1,600	7.5×10^6
石灰石	160	3.0×10^{-6}	10,000	1,400	1,200	8.4×10^6
大理石	170	4.0×10^{-6}	12,000	1,200	1,500	8.2×10^6
沙石	135	6.2×10^{-6}	10,000	1,700	1,500	3.3×10^6
泥板石	175	15,000	8,000	4.0×10^6
常用磚	125	4.0×10^{-6}	4,000	800	2.0×10^6
碎石混凝土*						
每包水泥加水 $\frac{7}{8}$ 加侖	150	6.0×10^{-6}	2,000	1,000 +	360	2.0×10^6
每包水泥加水 $\frac{6}{8}$ 加侖	150	6.0×10^{-6}	2,500	1,250 +	450	2.5×10^6
每包水泥加水 $\frac{6}{8}$ 加侖	150	6.0×10^{-6}	3,000	1,500 +	540	3.0×10^6

*為混凝土 28 日後之強度值. 其工作強度, 可作為 28 日強度之四分之一.

在該處之混凝土, 用等於壓強度之百分之 5 至 10 之切應力即可破壞之也.

†此直接切強度, 不可用於含有對角張力之梁中, 因

表 IV
鋼，鐵及石工之工作應力*
磅/方吋

材 料	張 應 力 (淨剖面)	壓 應 力 (短長 度無柱作用)	梁及鋼釘內 之 切 應 力	折 切 應 力	最 外 纖 維 內 之 彎 應 力
結構工作					
鋼、滾或磚	16,000-18,000	16,000-18,000	10,000-12,000	16,000-18,000
鋼鐵	12,000	10,000-12,000	6,000-9,000	12,000
鑄鐵	8,000	10,000-12,000	2,000-3,000	3,000†
鋼鋼釘及釘	20,000	10,000-12,000	2,000-25,000
機件§					
低炭鋼	13,000-17,000	18,000-17,000	8,000‡-12,000	13,000-17,000
中炭鋼	17,000-21,000	17,000-21,000	13,000-17,000	17,000-21,000
鑄鋼	8,000-13,000	13,000-17,000	6,000-12,000	10,000-15,000
鑄鐵	13,000	13,000	5,000	13,000
磨鐵	9,000-4,000	15,000	3,000-4,000	3,000-4,000
用水泥膠泥之石工					
第一級花崗石	600-800
石灰石及砂石	400
常用磚	175-250

*欲知木材及混凝土之工作應力，見表 II 及 III.

†受張力，受壓力之最外纖維內之應力，可加至 10,000 磅/方吋。

‡為縫槽無裕度，欲許可縫槽，用此值之四分之一。

§請應力僅指靜載荷而言，遇動力作用，至少減去一半。

||設置於石灰膠泥中，用諸值之百分之 60 至 70。

附 錄 B

關於慣矩之定義及定理

表 V. 常用剖面要素之之公式.

表 VI. 康奈其梁剖面之要素.

表 VII. 美國標準工字梁剖面之要素.

表 VIII. 美國標準槽鐵剖面之要素.

表 IX. 等角鐵剖面之要素.

答謝. 表 VI-IX 採自康奈其袖珍手冊, 且曾經康奈其鋼鐵公司之許可者.

慣 矩

一面積 A 對於在該面積平面內任何 x 軸之慣矩, 可用下列積分解明之

$$I_x = \int_A y^2 dA,$$

與上述 x 軸相當之迴轉半徑之定義, 爲

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}.$$

慣 極 矩

面積 A 對於垂直於面積平面之一軸之慣矩, 稱爲對於 O 點(此點爲軸與平面之相交處)之慣極矩. 此可用下列積分解明之

$$I_p = \int_A \rho^2 dA,$$

式中 ρ 爲元素 dA 距 O 點之距離.

一面積對於任何點 O 之慣極矩, 等於對於經過同一點之二垂直軸 X 及 Y 之慣矩和; 即,

$$I_p = I_x + I_y.$$

平 行 軸 定 理

設已知面積對於經過質心之 x 軸之慣矩,其對於任何平行 x' 軸之慣矩,可自下式求之

$$I_{x'} = I_x + Ad^2,$$

式中 d 爲二軸間之距離。此軸搬移之公式,在慣極矩之情形中,亦可適用。

慣 性 積

積 分

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

稱爲面積之慣性積,式中每面積之元素 dA , 乘其二座標之積,而積分則遍及於平面圖形之全面積 A 。

當一軸爲圖形之對稱軸, $I_{xy} = 0$ 。

表 V 載矩形之 I_{xy} 。

在圖 348 之直角三角形,其對於經過質心而平行於底及高之二軸之 $I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$ 。對於二邊之 $I_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{24}$ 。

設二軸轉過 180° , I_{xy} 之符號仍不變;設轉過 90° 或 270° , 其符號變。

設已知面積對於經過質心之 x 及 y 軸之慣性積,其對於平行 x' 及 y' 軸之慣性積,用下式求之

$$I_{x'y'} = I_{xy} + Acd,$$

式中 c 及 d 各為 y 與 y' 軸間及 x 與 x' 軸間之距離。

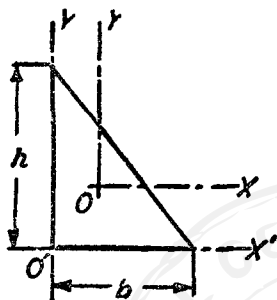


圖 38.

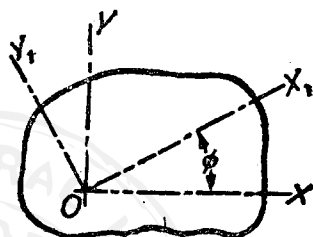


圖 349.

對於斜軸之慣矩

設已知 I_x, I_y 及 I_{xy} , 其對於任何斜軸 X_1 及 Y_1 (如圖 349 所示) 之慣矩為

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \phi + I_y \sin^2 \phi - I_{xy} \sin 2\phi,$$

$$I_{y_1} = I_x \sin^2 \phi + I_y \cos^2 \phi + I_{xy} \sin 2\phi.$$

對於二斜軸(其 X_1 軸與 x 軸成角度 ϕ) 之慣矩為最大或最小時, 其 ϕ 之值用下式決定之

$$\tan 2\phi = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}.$$

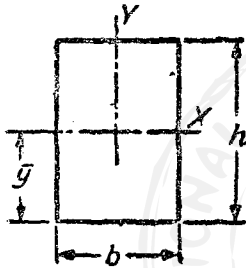
其主慣矩為

$$(I_{x_1})_{\substack{\text{最大} \\ \text{最小}}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}.$$

設以 s_x, s_y 及 c_{xy} 替代 I_x, I_y 及 I_{xy} , 則此諸公式與第二章中之合成應力公式相同, 故馬氏圖解可以求對於斜軸之慣矩。

表 V

常用剖面之要素



矩形, 力矩軸經過其質心。

$$A = bh$$

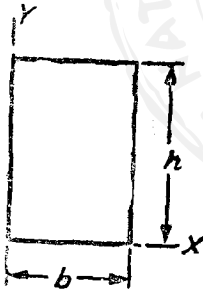
$$v = \frac{h}{2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = S_x = \frac{bh^3}{6}$$

$$r_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$I_{xy} = 0$$

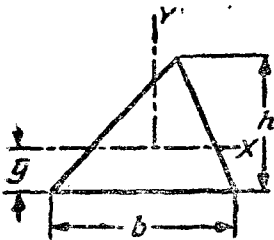


矩形, 力矩軸經過其底邊

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$r_x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{4}$$



三角形, 力矩軸經過質心且平行於底邊。

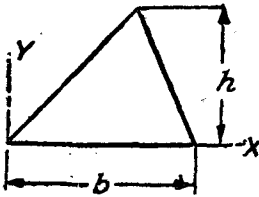
$$A = \frac{bh}{2}$$

$$v = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_x = S_x = \frac{bh^3}{24}$$

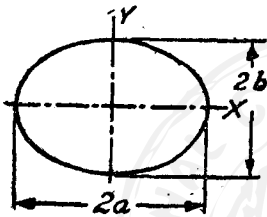
$$r_x = \frac{h}{\sqrt{18}}$$



三角形，力矩軸經過底邊。

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$r_x = \frac{h}{\sqrt{6}}$$



橢圓形，力矩軸經過直徑。

$$A = \pi ab$$

$$I_x = \frac{\pi ab^3}{4}$$

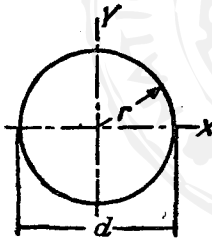
$$I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

$$\frac{I_x}{c} = S_x = \frac{\pi ab^2}{4}$$

$$\frac{I_y}{c} = S_y = \frac{\pi a^2 b}{4}$$

$$r_x = \frac{b}{2}$$

$$r_y = \frac{a}{2}$$



圓剖面，力矩軸經過直徑。

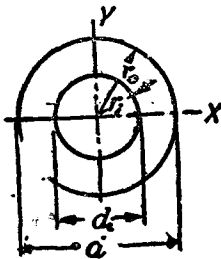
$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\frac{I_x}{c} = S_x = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$r_x = \frac{r}{2} = \frac{d}{4}$$

$$I_y = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$



空心圓剖面，力矩軸經過直徑。

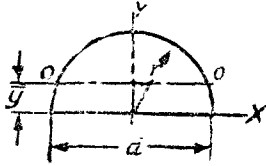
$$A = \pi(r^2 - r_i^2) = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_i^2)$$

$$r_x = \frac{\pi}{4}(r^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_i^4)$$

$$r_x = \frac{\sqrt{r^2 + r_i^2}}{2} = \frac{\sqrt{d^2 + d_i^2}}{4}$$

$$I_y = \frac{\pi}{2}(r^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_i^4)$$

半圓剖面，力矩軸經過邊界直徑。



$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi d^2}{8} \quad y = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128}$$

$$r_x = \frac{r}{2} = \frac{d}{4}$$

$$i_x = 0.1174$$

$$r_0 = 0.264r$$



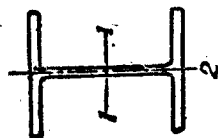


表 VI
康奈其梁剖面之要素

(概要)

剖面 目錄	標名 尺寸	剖面		每呎 重量		剖面 面積		突緣		軸 1-1			軸 2-2									
		深度	吋	磅	方吋	寬	吋	厚	吋	I	吋 ⁴	$\frac{I}{c}$	吋 ³	r	吋	I	吋 ⁴	$\frac{I}{c}$	吋 ³	r	吋	
																						吋
CB 131	33 x 11 $\frac{1}{2}$	33.0	125.6	36.78	11,509	0.85	0.70	634.7	38.4	13.14	188.2	32.7	2.2									
CB 201	30 x 10 $\frac{1}{2}$	30.0	132.6	38.88	10,681	1.00	0.616	873.1	37.9	12.17	185.0	31.1	1.13									
CB 272	27 x 14	26.88	145.0	42.68	13,965	0.97	0.600	541.3	40.2	11.26	46.9	18.3	3.0									
CB 271	27 x 10	26.84	91.0	26.77	9,933	0.71	0.483	312.9	22.3	10.81	169.0	21.8	2.02									
CB 243	24 x 14	24.56	130.0	34.10	14,063	1.055	0.628	473.5	38.5	10.38	452.5	64.3	3.20									
CB 242	24 x 12	24.31	120.0	35.29	12,088	0.930	0.566	363.3	29.1	10.15	254.0	42.0	2.68									
CB 241	24 x 9	24.29	94.0	27.63	9,031	0.872	0.516	283.0	22.9	9.85	102.2	22.6	1.92									
		24.16	87.0	25.68	9,025	0.807	0.480	246.7	20.4	9.82	92.9	20.6	1.91									
CB 212	21 x 9	21.29	103.0	10.27	9,071	1.010	0.608	268.0	21.3	8.66	119.9	26.4	1.99									
		21.14	16.0	28.21	9,038	0.935	0.575	208.8	10.7	8.60	100.3	24.2	1.97									
		21.24	73.0	21.46	8,285	0.740	0.465	160.9	15.0	8.64	66.2	15.0	1.76									
CB 211	21 x 8 $\frac{1}{2}$	21.00	63.0	18.52	8,210	0.620	0.410	134.9	12.8	8.52	53.8	13.0	1.70									
		20.91	19.0	17.35	8,230	0.575	0.390	124.6	11.3	8.47	49.2	12.0	1.68									
CB 163	18 x 11 $\frac{1}{2}$	18.32	105.0	30.86	11,792	0.911	0.534	183.2	13.2	7.75	231.0	39.2	2.73									
		18.22	65.0	24.97	8,818	0.911	0.626	142.9	13.1	7.67	99.4	23.5	2.0									
CB 162	18 x 8 $\frac{1}{2}$	18.00	70.0	20.56	8,760	0.751	0.438	115.3	9	7.49	78.5	17.9	1.95									
		17.87	64.0	18.80	8,718	0.686	0.403	104.6	8	7.41	70.3	16.1	1.93									
CB 163	16 x 11 $\frac{1}{2}$	16.16	88.0	2.87	11,502	0.795	0.504	123.2	6	6.87	185.2	32.2	2.67									
		16.32	78.0	22.92	8,163	0.875	0.529	104.2	6	6.74	87.5	20.4	1.95									
CB 162	16 x 8 $\frac{1}{2}$	16.16	71.0	20.89	8,543	0.795	0.483	93.6	9	6.70	77.9	18.2	1.93									

CB 161	16 ×	13.17	46.0	13.24	7.30.0	0.553	0.247	83.3	73.4	6.64	10.6	8.7	1.32
CB 165	14 × 1 1/2	15.87	56.0	10.59	6.592	14.281	0.245	456.3	46.3	6.49	22.1	6.3	1.45
CB 144	13 × 1 1/2	14.00	87.0	22.56	12.000	0.888	0.231	530.9	138.1	6.15	339.7	48.2	3.73
CB 143	14 × 1 1/2	14.66	78.0	22.94	12.000	0.818	0.238	851.2	121.1	6.19	397.9	39.5	3.02
CB 142	14 × 1 1/2	14.19	74.0	21.76	10.972	0.783	0.253	133.6	12.3	7.01	153.5	23.5	2.48
CB 141	14 × 1 1/2	13.90	61.0	20.00	10.040	0.718	0.248	724.1	103.0	6.62	191.2	24.1	2.46
CB 123	12 × 1 1/2	13.94	53.0	16.59	8.502	0.628	0.257	42.1	94.2	5.58	107.3	21.	2.25
CB 122	12 × 1 1/2	14.24	42.0	12.34	6.881	0.573	0.318	43.2	69.7	5.92	57.5	14.3	1.92
CB 121	12 × 1 1/2	14.12	38.0	11.47	6.773	0.543	0.313	185.3	54.6	6.87	34.6	7.3	1.49
CB 103	10 × 1 1/2	11.00	34.0	10.30	6.750	0.453	0.287	339.2	28.5	5.81	21.3	6.3	1.46
CB 102	10 × 1 1/2	12.19	59.0	14.71	8.077	0.341	0.371	594.5	61.7	5.18	36.4	14.0	1.56
CB 101	10 × 1 1/2	12.66	46.0	13.24	8.042	0.273	0.358	330.8	18.2	5.15	50.0	12.4	1.94
CB 83	8 × 8	11.94	39.0	11.77	8.603	0.240	0.224	31.1	31.9	5.13	44.1	11.9	1.49
CB 82	8 × 8	11.87	29.0	7.49	6.409	0.234	0.224	184.1	30.9	4.53	14.5	4.5	1.49
CB 81	8 × 8	11.4	74.0	16.88	1.98	0.618	0.338	404.7	64.1	4.19	107.9	2.7	2.53
CB 61	6 × 6	11.2	49.0	14.40	1.6	0.18	0.34	173.9	35.6	4.16	9.	8.	2.54
CB 60	6 × 6	11.2	4	0	13.24	8.22	0.25	268.3	39.1	4.35	33.	3.	2.02
CB 59	6 × 6	10.22	41.0	13.63	8.01	0.518	0.238	22.4	34.5	4.19	47.7	11.9	1.99
CB 58	6 × 6	10.22	29.0	8.33	6.793	0.06	0.184	117.3	37.8	4.59	13.2	6.2	1.34
CB 57	6 × 6	10.66	25.0	6.77	5.710	0.591	0.263	123.6	24.1	4.22	13.3	3.9	1.59
CB 56	6 × 6	9.20	21.0	6.19	5.710	0.591	0.263	103.3	21.5	4.14	9.7	3.4	1.25
CB 55	6 × 6	8.75	8.0	17.66	8.22	0.418	0.255	146.3	35.5	3.63	74.9	18.2	2.10
CB 54	6 × 6	8.12	35.0	10.30	8.027	0.493	0.335	123.9	31.1	2.59	42.5	10.6	2.03
CB 53	6 × 6	8.06	33.0	9.70	6.612	0.433	0.310	117.9	29.3	3.49	39.7	9.9	2.02
CB 52	6 × 6	8.60	31.0	9.12	8.030	0.433	0.288	109.7	27.4	3.47	37.0	9.2	2.01
CB 51	6 × 6	7.93	27.0	7.93	6.828	0.448	0.273	94.1	23.4	3.44	20.8	6.4	1.62
CB 50	6 × 6	8.09	19.0	5.69	6.560	0.338	0.245	82.5	20.8	3.42	18.2	5.6	1.51
CB 49	6 × 6	6.22	60.0	17.63	9.233	0.722	0.244	64.7	16.0	3.40	7.87	3.0	1.19
H 3	6 × 6	6.00	22.5	6.61	6.633	0.375	0.375	41.0	13.7	2.64	11.1	22.8	2.51
CBL 12	12 × 4	12.16	19.0	5.62	4.0.0	0.346	0.240	180.1	21.4	4.81	12.2	4.0	1.36
											3.67	1.83	0.81

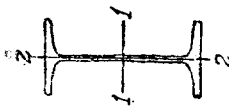


表 VII

美國標準工字梁剖面之要素

(摘要)

梁深 吋	每呎 重量	剖面 面積	突緣寬 吋	腹緣寬 吋	軸 1-1			軸 2-2		
					I 吋 ⁴	$\frac{I}{c}$ 吋 ³	r 吋	I 吋 ⁴	$\frac{I}{c}$ 吋 ³	r 吋
B 18	105.9	30.58	7.875	0.625	2811.5	264.3	9.53	78.9	10.0	1.50
B 1	95.0	27.19	7.83	0.583	2391.5	197.8	9.78	47.0	13.0	1.50
B 2	81.4	24.81	7.03	0.533	1531.7	150.2	7.78	47.0	13.3	1.58
B 3	65.4	23.21	7.060	0.600	1436.8	147.6	7.83	45.8	13.1	1.59
B 6	60.8	19.68	6.250	0.500	1169.5	118.9	7.83	27.9	8.9	1.51
B 7	42.9	12.49	5.00	0.590	619.0	81.2	6.87	26.0	8.7	1.21
B 8	55.0	16.04	5.630	0.410	441.8	18.9	5.95	14.5	5.3	1.08
B 9	46.0	13.10	5.355	0.810	319.3	53.2	4.66	17.3	6.2	1.04
B 10	40.8	11.84	5.250	0.460	284.1	47.3	4.77	14.8	5.5	1.06
B 11	35.0	10.50	5.078	0.428	227.0	37.8	4.72	13.8	5.3	1.8
B 12	21.8	9.26	5.000	0.350	215.8	36.0	4.83	10.9	3.9	0.99
B 13	25.4	10.22	4.844	0.584	145.8	29.2	3.78	8.5	3.4	0.91
B 14	18.4	6.71	4.639	0.310	122.1	24.4	4.07	6.9	3.0	0.97
B 15	18.4	5.94	4.660	0.270	64.2	16.0	3.69	4.4	2.1	0.81
B 16	14.75	4.43	3.663	0.260	56.9	14.2	3.26	3.8	1.9	0.84
B 17	12.5	3.61	3.330	0.243	36.2	10.4	2.83	2.7	1.5	0.78
B 18	10.0	2.87	3.000	0.230	21.8	7.3	2.43	1.8	1.1	0.72
B 19				0.210	12.1	4.8	2.05	1.2	0.82	0.65

表 VIII

美國標準精鐵剖面之要素

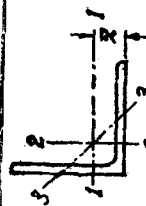
(撮要)



剖面	槽深	每呎重量	剖面面積	突緣寬	腹板厚	軸 1-1			軸 2-2		
						I	$\frac{I}{c}$	r	I	$\frac{I}{c}$	r
C 2	12	20.7	6.08	2.910	0.280	128.1	21.4	4.81	3.9	1.7	0.81
C 3	10	15.3	4.47	2.000	0.240	68.9	13.4	3.87	2.3	1.2	0.72
C 6	7	9.8	2.85	2.090	0.210	21.1	6.0	2.72	0.98	0.63	0.55

表 IX
等角鐵剖面之要素

(撮要)



剖面	尺寸	厚	每呎重量	剖面面積	軸 1-1 及 軸 2-2			軸 3-3	
					I	$\frac{I}{c}$	r	r 最小	
A 2	6x6	吋	19.6	5.75	19.9	4.66	1.86	1.68	1.18
A 7	3x3	吋	4.9	1.44	1.2	0.88	0.53	0.84	0.59

英 漢 索 引

- American Institute of Steel Construction, 美國鋼鐵構造協會, 131, 311
- American Society of Mechanical Engineers, 美國機械工程師學會, 57, 65, 277
- American Society for Testing Materials, 美國材料試驗學會, 12, 348, 377
- Analysis of strain, 應變分析, 49
- Angles, elements of equal leg, 等腰角鐵之要素, 300
- Areas of plane figures, 平面圖之面積, 179
- Bach, C., 柏赫, 90
- Bar of non-uniform section, 不等剖面桿, 7
- Bauschinger, J., 包興蓋, 309, 360
- Beams, 梁, 93
- boundary conditions, 邊界條件, 174
- built-in at both ends, 兩端固定梁, 232
- built-in at one end, freely supported at other, 一端固定他端自由支持梁, 227
- definition of, 梁之定義, 93
- lateral strain in, 梁內之側向應變, 125
- of parabolic shape, 拋物線形之梁, 205
- on three supports, 在三支座之梁, 235
- of two different materials, 二不同材料之梁, 230
- equivalent area method, 相當面積法, 261, 263
- of uniform strength, 等強度之梁, 24
- of variable cross section, 變剖面之梁, 204
- reinforced concrete, 鋼筋混凝土梁, 262
- Pecker, A. J., 貝克, 364
- Bending, 彎曲,
- beyond yield point, 在屈服點外之彎曲, 258
- combined with compression and tension, 彎曲與壓縮及伸長之組合, 283
- combined with torsion, 彎曲與扭轉之組合, 273
- moment, 彎矩, 93, 100
- and shearing force, relation between, 彎矩與切力間之關係, 103, 111
- diagrams, 彎矩圖, 104
- diagrams subdivided, 彎矩圖分為數部, 183
- equations, 彎矩方程式, 104

- sign of, 彎矩之符號, 102
- not in plane of symmetry, 不在對稱面內之彎矩, 210
- pure, 純彎曲, 93
- stresses in curved bars, 曲桿內之彎應力, 270
- theory of, 彎曲之理論, 123
- when material does not follow Hooke's law, 材料不遵虎克定律之彎曲, 255
- Boundary conditions, 邊界條件, 174
- Buckling, 皺縮
- of columns, 柱之皺縮, 296
- of compression flange of beams, 梁壓縮突緣之皺縮, 131
- Built-up I-beam, 組合工字梁, 179
- Built-up wooden beam, 組合木梁, 178
- Cantilever beam, 懸梁, 97
- Carnegie beam sections, 康奈其梁剖面, 132, 387
- Carnegie Pocket Companion, 康奈其珍手冊, 132, 322, 18
- Castigliano's theorem, 卡斯的龍定理, 337
- applied to statically indeterminate problems, 卡斯的龍定理對於靜力不定問題之應用, 341
- Centrifugal force, 離心力, 23
- Centroids, 質心, 179, 184
- Channels, elements of, 槽鐵之要素,
- Code, A. S. M. E. Boiler, 美國機械工程師學會鍋爐法規, 57, 62
- Coefficient of expansion, temperature, 溫度膨脹係數, 19, 378
- Coefficient, length-for columns, 柱之長度係數, 303
- Columns, 柱, 294
- approximate formula for deflection of long, 長柱撓度之近似公式, 299
- "exact" formula for deflection of long, 長柱撓度之正確公式, 303
- one end fixed, one free, 一端固定他端自由之柱, 291
- both ends fixed, 兩端固定柱, 300
- both ends hinged, 兩端鉸釘柱, 300
- empirical formula for, 柱之經驗公式, 308
- A. I. S. C., 美國鋼鐵構造協會之柱經驗公式, 311
- cast iron, 鑄鐵柱之經驗公式, 312
- Chicago, 芝加哥所用之柱經驗公式, 310
- Rankine-Gordon type, 冷金·戈登式之柱經驗公式, 311
- rectangular wooden columns, 矩形木柱之經驗公式, 312
- round wooden columns, 圓木柱之經驗公式, 313
- straight line, 柱之直線經驗公式, 303
- rational analysis for design, 柱設計之合理分析, 305
- tubular sections for, 柱之管形剖面, 308
- with transverse load, 柱受有橫載荷, 305

- Combined stresses, 合成應力, 32, 35
 equations for, 合成應力之方程式, 46
 notations for, 合成應力之記法, 43
 signs of, 合成應力之符號, 33, 42
 Compression test, 壓縮試驗, 350
 Concentration, stress, 應力集中, 25
 Concrete beam (see reinforced concrete beam), 混凝土梁(配鋼筋混凝土梁), 262
 Conjugate beam method for deflections caused by bending, 用共軛梁法計算彎曲所生之撓度, 187
 caused by shearing force, 用共軛梁法計算剪力所生之撓度, 218
 Continuous beams, 連續梁, 232, 238
 Contraction, unit, 單位收縮, 4
 Cover plates, length required, 蓋板所需之長度, 165
 Cracking, season, 季裂, 354
 Creep, 緩變, 354, 355
 Critical stress, 臨界應力, 301
 Curvature, radius of, 曲率半徑, 125, 133, 170
 Curved bars, bending stresses in, 曲桿內之彎應力, 270
 Cushman, P. A., 克希曼, 92
 Cylinders, stresses in thin-walled, 薄壁圓筒內之應力, 68

 Dangerous section, 危險剖面, 107
 Deflection, 撓度,
 caused by shearing force, 由剪力所生之撓度, 207
 caused by impact, 由撞擊所生之撓度, 329, 336
 formulas, summary of, 撓度公式概要, 191, 192
 lateral, 側撓度, 131
 of beams, 梁之撓度, 169
 by area-moment method, 梁撓度之面積力矩法, 173
 by conjugate beam method, 梁撓度之共軛梁法, 167
 by double integration, 梁撓度之二次積分法, 169
 by strain energy or Castigliano theorem, 梁撓度之應變能法或應用卡斯的龍定理, 118
 by superposition, 梁撓度之重疊法, 191
 Diagram, tensile test, 伸長試驗圖, 8
 Diagrams, bending moment and shearing force, 彎矩及剪力圖, 104
 relation between, 彎矩圖與剪力圖之關係, 110, 111
 Differential equation of elastic curve, 彈性曲線之微分方程式, 170
 Double integration method, 二次積分法, 169
 Ductility, 展性, 347
 Eccentric loading of columns, 柱之偏心載荷, 317

- approximate formulas for, 柱偏心載荷之近似公式, 321
- riveted joints, 鉚釘接之偏心載荷, 73
- short strut, 短柱之偏心載荷, 290
- Eccentricity ratio, 偏距比, 319
- Economy of cross sections of beams, 梁剖面之經濟, 1.0
- Efficiency of riveted joints, 鉚釘接之效率, 59
- Elastic body, definition, 彈性物體之定義, 2
- Elastic limit, 彈性極限, 8, 347
- Elasticity, 彈性, 2
- modulus of, 彈性係數, 5
- Elongation, 伸長
- of bar due to own weight, 因桿本身重量所生之伸長, 6
- percentage, 百分伸長, 9, 3.9
- unit, 單位伸長, 4
- Endurance test, 持久試驗, 357
- Energy of strain, 應變能, 323
- Equations, shearing force and bending moment, 切力及彎矩之方程式, 104
- Equation of three moments, 三力矩方程式, 241, 243, 244
- Euler's column formula, 歐拉柱公式, 297, 300
- Euler's curve, 歐拉曲線, 302, 3.7, 308, 309
- Expansion, unit volume, 單位體積膨脹, 50
- Factor of safety, 安全因數, 14, 3.5
- Fairbairn, W., 范朋, 359
- Fatigue of metals, 金屬之疲乏, 357
- Fiber stresses, 纖維應力, 123
- Fillet, stress concentration at, 內圓角處之應力集中, 27
- Flexure, theory of, 彎曲理論, 123
- Floor framing, 地板支架, 118
- Föppl, A., 福潑兒, 351
- Forest Products Laboratory column formula, 森林生產試驗室之柱公式, 3.2
- Framework, deflection of, 構架之撓度, 339
- Geber, W., 戈布, 350
- Girth joint, 厝接, 70
- Goodman's diagram, 戈德曼圖, 332
- Graphical integration for shear and moment diagrams, 切力及力矩圖之圖形積分法, 111
- Graphical representation of shearing stress distribution, 切應力分布之圖示法, 1.0
- Green, C. E., 葛林, 173
- Grooved bars, strain energy in, 槽桿內之應變能, 328, 331
- Haigh, B. P., 海氏, 364
- Hamabe, G., 哈馬培, 364
- Hencky, H., 亨蓋, 361
- Hollow shaft, torsion of, 空心軸之扭

- 轉, 88
- Hooke, Robert, 虎克 5
- Hooke's Law, 虎克定律, 5
- Hoop tension, 環箍張力, 23, 69
- Horizontal shearing stress, 水平切應力, 143
- Horse power in shafts, 軸內之馬力, 84
- Huter, M., 虎培兒, 364
- Hysteresis, 滯後作用, 352
- I-beam sections, elements of, 工字梁剖面之要素, 189
- I- beams, failure of, 工字梁之破壞, 162
- Impact, tension produced by, 因撞擊所生之張力, 329
- Inclined axes, moment of inertia about, 對於斜軸之慣矩, 383
- Inclined planes, stresses on, 在斜面上之應力, 32
- Inertia, moment of, 慣矩, 127, 381
polar moment of, 慣極矩, 381
product of, 慣性積, 382
- Isotropic materials, 各向同性材料, 50
- Johnson's apparent elastic limit, 約翰生之外觀彈性極限, 347
- Johnson, J. B., 約翰生, 310
- Joints, riveted, 鉤釘接, 57
- Keys and keyways, 鍵與鍵槽, 158
- Kidwell, E., 開特維, 159
- Lateral deflection of beams, 梁之側撓度, 131
- Last work, principle of, 最小功原理, 342
- Limit, elastic, 彈性極限, 8, 347
endurance, 持久極限, 357
proportional, 比例極限, 8, 347
- Loading, types of beam, 梁載荷之式樣, 99
- Longitudinal joint, riveted, 縱鉤釘接, 70
- Longitudinal shearing stress, 縱切應力, 143
- Lueders' lines, 陸特線, 35
- Materials, mechanical properties of, 材料之機械性質, 346, 375
- Matsumura, T., 馬相麻拉, 364
- Maxwell's theorem (special case), 馬克司惠爾定理(特例), 199
- Mechanical properties of materials, 材料之機械性質, 346, 375
- Mises, R. von, 馮密賽司, 364
- Modified length of columns, 柱之改正長度, 302
- Moduli of elasticity, relation between, 諸彈性係數間之關係, 55
- Modulus of elasticity (Young's), 彈性係數(楊氏), 5
- Modulus of elasticity in shear (modulus

- of rigidity), 切彈性係數(剛性係數), 55
- Modulus of resilience, 回彈係數, 327
- Modulus, section, 剖面係數, 128
- Mohr's circle, for combined stress, 合成應力所用之馬氏圓, 39
for moments of inertia, 慣矩所用之馬氏圓, 84
- Moment, bending and resisting, 彎矩及抗矩, 100
- Moment of inertia, 慣矩, 127, 381
- Moore, H. F., 莫爾, 162
- Moving loads, 動載荷, 120
- Nadai, A., 那台, 364
- Neutral axis or surface, 中立軸或中立面, 124
location of, 中立軸或中立面之位置, 126
- Normal stress, 正應力, 4, 34, 123
- Osgood, W. R., 奧司哥, 105
- Ostenfeld, A., 奧司汀費爾特, 310
- Parabolas, areas and centroids, 拋物線形之面積及質心, 79
Gerber's 戈布拋物線, 360, 370
- Parallel-axis theorem, 平行軸定理, 862
- Physical properties of
building stone, brick, concrete, 房屋用石, 磚, 混凝土之物理性質, 578
- common metals, 常用金屬之物理性質, 378
- structural timber, 結構用木之物理性質, 377
- Pitch of rivets in beams, 梁內釘距, 159
- Pitches in riveted joints, names of, 鉚釘接之釘距名稱, 59
- Plane stress, 平面應力, 42
- Planes, principal, 主平面, 18
- Pressure type of joint, 接之受壓式, 59
- Principal axes in bending, 彎曲主軸, 128
- Principal planes, 主平面, 38, 49
of bending, 彎曲主平面, 128
- Principal stresses, 主應力, 38
in bending, 彎曲主應力, 151
- Principle of least work, 最小功原理, 342
- Poisson's ratio, 柏生比, 50
- Potential energy of strain, 應變之勢能, 326
- Product of inertia, 慣性積, 18
- Profile sections, torsion of, 側剖面之扭轉, 91
- Proof resilience, 回彈係數(參考 modulus of resilience), 326
- Proportional limit, 比例極限, 8, 347
- Propositions, area-moment, 面積力矩定理, 178
- Radius of curvature, 曲率半徑, 125, 133, 173
- Ratio, eccentricity, 偏距比, 319

- Poisson's 柏生比, 50
 slenderness, 長細比, 301
 steel, 鋼比, 264
- Rational analysis for column design 柱設計之合理分析, 306
- Reactions of beams, 梁之反動力, 96
- Rectangular shaft, torsion of, 矩形軸之扭轉, 90
- Reduction in area, percentage, 面積之百分減小率, 9, 350
- Redundant constraints, 多衍拘束, 215
- Reinforced concrete beams, 鋼筋混凝土梁, 262
 designed for balanced reinforcement, 平衡鋼筋設計之鋼筋混凝土梁, 266
 Joint: Committee report, 聯合委員會之鋼筋混凝土梁報告, 262
 shearing stresses in, 鋼筋混凝土梁內之切應力, 268
- Residual stresses, 殘留應力, 352
- Resilience, proof, 回彈係數, 327
- Resisting moment, 抗矩, 100
- Rigidity, flexural, 彎曲剛性, 127
 modulus of, 剛性係數, 55
 torsional, 扭轉剛性, 83
- Ring, rotating, 轉環, 22
 stress in thin, 薄環內之應力, 22
- Riveted joint, boiler type, 鍋爐式之鉚釘接, 58
 eccentric loads, 受偏心載荷之鉚釘接, 76
 stress analysis, 鉚釘接之應力分析, 87
 structural type, 結構式之鉚釘接, 72
- Rivet holes, weakening effect of, 鉚釘孔之減弱效應, 158
- Rivets, condition for equal stress in, 鉚釘內等應力之條件, 73
- Safety, factor of, 安全因數, 11, 355
- Saint-Venant, B. de, 聖萬能德, 90, 363
- Secant formula for columns, 柱之正割公式, 293, 317
- Section modulus, 剖面係數, 128
- Section, elements of, 剖面之要素
 Carnegie beam, 康寧其梁剖面之要素, 387
 channel, 槽鐵剖面之要素, 390
 common, 常用剖面之要素, 384
 equal leg angle, 等腿角鐵剖面之要素, 390
 I-beam, 工字梁剖面之要素, 389
- Sections of beams, various shapes of cross, 梁剖面之各種形式, 129, 207
 wide flange I-beam, 寬突緣工字梁之剖面, 131
- Sections, selection of structural, 結構剖面之選擇, 132
- Set, permanent, 永久變形, 3, 11
- Shafting, code for design of, 軸系設計之法規, 276
- Shear, pure, 純切力, 53
- Shearing force, 切力, 101
 deflection due to, 因切力所生之撓度,

- 207
- diagrams, 切力圖, 104
- equations, 切力方程式, 104
- and load intensity, relation between, 切力與載荷強度間之關係, 104, 111
- signs of, 切力之符號, 102
- Shearing strain, 切應變, 54
- in beams, 梁內之切應變, 146
- Shearing stress, 切應力, 4, 33
- application to simple problems, 切應力對於簡單問題之應用, 53
- in bending, 彎曲中之切應力, 141
- in circular and triangular beam sections, 圓形及三角形梁剖面內之切應力 150
- in I-beams, 工字梁內之切應力, 148
- in reinforced concrete beams, 鋼筋混凝土梁內之切應力, 268
- planes of maximum, 最大切應力之諸平面, 48
- Shearing stress at right angles, relation between, 互成直角之切應力間之關係, 39
- Shock loading, 震動載荷, 328, 331
- Shrink fit, 冷縮裝配, 22
- Signs of deflection for area-moment method, 面積力矩法所用之撓度符號, 178, 185
- of shearing force and bending moment, 切力及彎矩之符號, 102
- of stress, 應力之符號, 33, 41, 125
- Simple beam, 簡梁, 93
- Slenderness ratio, 長細比, 301
- Soderberg, C. R., 蘇德波, 365
- Specifications, A.I.S.C. 美國鋼鐵構造協會之說明, 131
- Spheres, stress in thin walled, 薄壁球內之應力, 68
- Springs, energy stored in, 簧內貯能, 385
- helical, 螺旋簧, 92
- leaf type, 片簧, 206
- Statically indeterminate beams, 靜力不定梁, 215
- area-moment method of solution, 靜力不定梁之面積力矩解法, 220
- double integration method, 靜力不定梁之二次積分法, 217
- superposition method, 靜力不定梁之重疊解法, 227
- theorem of three moments, solution by, 靜力不定梁之三力矩定理解法, 238
- Statically indeterminate problems
- in tension, 具張力之靜力不定問題, 14
- solved by principle of least work, 靜力不定問題之最小功原理解法, 342
- Statical moment, 靜矩, 145, 148, 178
- Steel reinforcement, protection from fire, 鋼筋之防火, 265
- Strain, 應變, 3
- in simple tension, 簡張力所生之應變, 49

- shearing, 切應變, 54
- under biaxial stress, 兩軸向應力所生之應變, 51
- unit, 單位應變, 4
- Strain energy in bending, 彎曲之應變能, 333
- in beams due to shear, 梁內切力之應變能, 334
- in tension, 張力之應變能, 326
- beyond yield point, 在屈服點外之張力應變能, 331
- Strain hardening, 應變硬化, 352
- Strength theories, 強度理論, 362
- maximum shear theory (Guest's theory) 最大切力理論, 蓋氏理論, 364
- maximum strain theory (St. Venant theory), 最大應變理論, 聖萬能德理論, 363
- maximum strain energy theory, 最大應變能理論, 364
- maximum stress theory, 最大應力理論, 362
- Strength, ultimate, 極限強度, 9, 349
- yield, 屈服強度, 348
- Stress, 應力, 3
- combined, 合成應力, 35
- compressive, 壓應力, 4
- critical, 臨界應力, 301
- normal, 正應力, 4, 34, 123
- shearing, 切應力, 4
- tensile, 張應力, 4
- torsional, 扭應力, 81
- unit, 單位應力, 3
- working, 工作應力, 11, 365
- Stresses in beams, due to impact, 由撞擊所生之梁內應力, 336
- principal, 梁內主應力, 152
- shearing, 梁內切應力, 41
- Stresses, principal, 主應力, 38
- residual, 殘留應力, 352
- reversed, 反應力, 358
- Stresses, temperature or thermal, 溫度或熱應力, 19
- working—for columns, 柱之工作應力, 310
- steel, iron, masonry, 鋼, 鐵, 石工之工作應力, 379
- structural timber, 結構用木之工作應力, 377
- Structures, deflection of, 結構之撓度, 13, 16, 339
- Suddenly applied load, 驟加載荷, 330
- Superposition, method of, 重疊法, 190
- principle of, 重疊原理, 6
- Supports, kinds of, 支座種類, 96, 215
- Symmetry in bending, no plane of, 彎曲之對稱平面, 128, 210
- Temperature stresses, 溫度應力, 19
- Temperatures, physical properties at high, 在高溫度時之物理性質, 353
- Tensile test diagram, 伸長試驗圖, 8, 247

- Tension and compression, 張力及壓力, 1
- Tension, hoop, 環箍張力, 23, 69
- Tension test, 伸長試驗, 346
- Tetmajer, L., 戴沫九, 309
- Time effect, 時間效應, 354
- Torsion, 扭轉, 89
 combined with tension or compression, 扭轉與伸長或壓縮之組合, 276
 combined with bending, 扭轉與彎曲之組合, 278
- Trajectories, stress, 應力之常角截軌道, 154
- Theorem, Castigliano, 卡斯龍定理, 337
 parallel-axis, 平行軸定理, 182
 of three moments, 三力矩定理, 238
- Thermal stresses, 熱應力, 19
- Three moments, theorem of, 三力矩定理, 238
- Twist, angle of, 扭角, 81
 center of, 扭轉中心, 212
- Ultimate strength, 極限強度, 9, 249
- Uniform strength, beams of, 等強度之梁, 204
- Variable cross section, beams of, 變剖面之梁, 204
- Wahl, A. M., 范爾, 94
- Warping of cross sections, 剖面彎曲
 due to torsion, 扭轉所生之剖面彎曲, 90, 92
 of beams due to shear, 因切力所生之梁剖面彎曲, 92, 143
- Weibel, E. E., 范培, 27
- Westergaate, H. M., 威斯脫札, 394
- Wöhler, A., 佛來爾, 330
- Working stresses, 工作應力, 11, 365
 for variable stress, 不等應力之工作應力, 370
- Yield point, 屈服點, 9, 347
- Yield strength, 屈服強度, 348
- Young, D. H., 楊氏, 305
- Young's modulus, 楊氏係數, 5
 Thomas, 湯姆新, 5

