初中複習叢書

算　學

上　册

陳嶽生編

商務印書館發行

初中複習叢書

算　　學

上　冊

陳嶽生編

商務印書館發行

初中復習叢書編輯大意

一、本叢書係根據最近教育部頒佈之初級中學課程標準，及本館初中復興教科書分科編輯而成。

二、本叢書編著綱要，表解與圖解並用，務使讀者對於每一科的基本知識，有具體的了解。

三、本叢書搜集近年來全國各省市初中會考試題，按題作答，分析清楚，更可幫助讀者對升學會考作相當的準備。

四、本叢書除參考各教科書編纂外，更於東西文參考書中搜求新穎的解題方法，故益完備。

五、本叢書爲供讀者需要，匆促出版，內容或有忽略脫漏之處，如蒙讀者來函更正，尤所歡迎。

目　次

第一篇　算術

第一章　基本知識

第二章　問題解法示例

第二篇 代數

第一章 式子的變化

第二章 等式恒等式與方程式

第三章　函數與公式

第四章　應用問題

第五章　計算工具

初中複習叢書

算　學

上　册

第一篇　算術

第一章　基本知識

I. 整分小數四則混合計算:——

(A) 方法與規則:

a. 算式中各步運算,自左到右,先乘除,後加減.

b. 凡連加,連減,連乘,連除,若無括弧,次序都可以調換,得數不變.

c. 連加與連減混合計算,若無括弧,可將加法合併先算,再算減法,得數相同.

d. 連乘與連除混合計算,若無括弧,可將乘法合併先算,再算除法,得數不變.

e. 有括弧的式子,必須先把括弧中的運算做好,再去括弧.

f. 凡連減,可將各減數連加,併作一次減.

g. 凡連除,可將各除數相乘,併作一次除.

h. 凡兩數相除,有時寫作分數式,較爲便利.

i. 整數可以當做分母是 1 的假分數.

j. 分數與小數混合計算,可將小數化爲分數,或將分數化爲小數;但遇循環小數,必須化成分數.

k. 整數與小數混合計算,與整數四則相同,惟須注意小數點的位置.

l. 同分母分數相加減,將原分子加減做和或差的分子,原分母做和或差的分母.

m. 異分母分數相加減,把各分數通分,化成同分母分數,再加減.

n. 分數相乘,將分子與分子,分母與分母,各別相乘.

o. 分數相除,將除數的分母與分子對調,改作乘法.

p. 帶分數加減,可將整數部與分數部,分別計算.

q. 帶分數乘除,可先化爲假分數,再計算.

r. 凡最後得數中有假分數,必須化成帶分數.

s. 凡最後得數中的分數,必須約成最簡分數.

t. 凡指明小數算到第幾位,可多算一位,四捨五入.

u. 運算時,能用簡捷方法最好.

v. 四則運算中各數,成下列的關係:

$$(一)加法\begin{cases}1.\ 被加數+加數=和\\2.\ 和-加數=被加數\\3.\ 和-被加數=加數\end{cases}$$

$$(二)減法\begin{cases}1.\ 被減數-減數=差\\2.\ 差+減數=被減數\\3.\ 被減數-差=減數\end{cases}$$

$$(三)乘法\begin{cases}1.\ 被乘數\times乘數=積\\2.\ 積\div乘數=被乘數\\3.\ 積\div被乘數=乘數\end{cases}$$

$$(四)除法\begin{cases}1.\ \dfrac{被除數}{除數}=商+\dfrac{餘數}{除數}\\2.\ 商\times除數+餘數=被除數\\3.\ \dfrac{被除數-餘數}{商}=除數\\4.\ 被除數-商\times除數=餘數\end{cases}$$

以上各式,都從代數與幾何中所用等量公理得來.

w. 通分是用最小而適宜的不同各數,分別乘各分數的分子與分母,使分母等於原來各分母的最小公倍數.約分是用分子分母的最大公約數,同時除分數的分子與分母.

x. 諸數的最大公約數,等於諸數公共質因子最低冪的連乘積.諸數的最小公倍數,等於諸數一切質因子最高冪的連乘積.所以求簡單數目的大公約與小公倍,第一步是劈因數.

y. 簡捷算法與劈因數,循環小數與分數互化法,小數點定位法,均載商務書館出版的復興初中算術,或現代初中算術,或其他.

(*B*) 演算示例:

1. 求下式 X 所表示之數.

$$X=1\frac{5}{6}\div\left[\left(3\frac{1}{14}-\frac{4}{21}\right)\times 1\frac{1}{6}\right]$$ (滬 23)

[解] $$X=\frac{11}{6}\div\left[\left(3\frac{3}{42}-\frac{8}{42}\right)\times\frac{7}{6}\right]$$

$$=\frac{11}{6}\div\left(2\frac{37}{42}\times\frac{7}{6}\right)=\frac{11}{6}\div\left(\frac{121}{42}\times\frac{7}{6}\right)$$

$$=\frac{11}{6}\div\frac{121\times 7}{42\times 6}=\frac{11}{6}\times\frac{6\times 6}{121}=\underset{\sim}{\frac{6}{11}}$$

2. $\dfrac{2\frac{3}{5}\times\frac{9}{11}}{3\frac{5}{7}\div 4\frac{1}{8}}=?$ (浙 21 覆)

〔解〕 $\dfrac{2\frac{3}{5}\times\frac{9}{11}}{3\frac{5}{7}\div 4\frac{1}{8}}=\dfrac{\frac{13}{5}\times\frac{9}{11}}{\frac{26}{7}\div\frac{33}{8}}=\dfrac{\frac{13\times 9}{5\times 11}}{\frac{26\times 8}{7\times 33}}$

$=\dfrac{13\times 9}{5\times 11}\times\dfrac{7\times 33}{26\times 8}=\dfrac{13\times 9\times 7\times 33}{5\times 11\times 26\times 8}=\dfrac{189}{80}$

$=2\dfrac{29}{80}$

3. 將 $425\div 3\frac{2}{5}+4\frac{7}{12}\times 2\frac{3}{11}-10\frac{5}{24}$ 簡單之. (川一屆)

〔解〕 $425\div 3\frac{2}{5}+4\frac{7}{12}\times 2\frac{3}{11}-10\frac{5}{24}$

$=425\div\frac{17}{5}+\frac{55}{12}\times\frac{25}{11}-10\frac{5}{24}$

$=425\times\frac{5}{17}+\frac{55\times 25}{12\times 11}-10\frac{5}{24}$

$=\frac{425\times 5}{17}+\frac{5\times 25}{12}-10\frac{5}{24}$

$=125+\frac{125}{12}-10\frac{5}{24}=125+10\frac{5}{12}-10\frac{5}{24}$

$=125\frac{5}{12}-\frac{5}{24}=125\frac{10}{24}-\frac{5}{24}=125\frac{5}{24}$

4. $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=?$$ (湘五屆)

[解] $$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3+2}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=\underline{1}$$

5. 求 $(2.425\times1.6+10.4\div0.26)\times4.32-3.32$ 之值.

[解] 原式 $=(3.88+40)\times4.32-3.32$

$=43.88\times4.32-3.32$

$=189.5616-3.32=\underline{186.2416}$

6. $(575+567-71\times2)\times37+35\div2\div5\times4\times91\times25=?$

[解] 原式 $=(1142-142)\times37+35\times4\times25\times91\div10$

$=1000\times37+35\times9100\div10$

$=37000+35\times910$

$=37000+31850=\underline{68850}$

7. 求 $13856\div284\times251$ 至小數二位.

[解] $13856\div284\times251=13856\times251\div284$

$=3477856\div284$

$=\underline{12245.97}$

8. 化簡 $0.0\dot{5}\dot{1}+2.3\dot{4}\dot{7}-2.\dot{6}6\dot{5}+0.\dot{3}9\dot{2}$.

[解] $0.0\dot{5}\dot{1}+2.3\dot{4}\dot{7}+0.\dot{3}9\dot{2}-2.\dot{6}6\dot{5}$

$$=0.0\dot{5}15151\dot{1}+2.3\dot{4}74747\dot{7}$$

$$+0.\dot{3}92392\dot{3}$$

$$-2.\dot{6}65665\dot{6}$$

$$=2.7\dot{9}13822\dot{2}-2.6\dot{6}56656\dot{6}$$

$$=\underline{0.1\dot{2}57166\dot{6}}$$

9. $0.3\dot{9}3611\dot{7}\div0.\dot{1}\dot{8}=?$

[解] $0.3\dot{9}3611\dot{7}\div0.\dot{1}\dot{8}=\dfrac{3936117-3}{9999990}\div\dfrac{18}{99}$

$$=\frac{3936114}{9999990}\times\frac{99}{18}=\frac{218673}{101010}$$

$$=\frac{72891}{33670}=2\frac{5551}{33670}=2\frac{5551\div7}{33670\div7}$$

$$=2\frac{793}{4810}=\underline{2\frac{61}{370}}$$

II. 複名數：——

(A) 本國標準制與市用制：

a. 標準制長度表

公　里	公　引	公　丈	公　尺	公　寸	公　分
1000公尺	100公尺	10公尺	10公寸	10公分	10公釐

b. 市用制長度表

市里	市引	市丈	市尺	市寸	市分
150丈	10市丈	10市尺	10市寸	10市分	10市釐

c. 1公尺=3市尺,1公里=2市里.

d. 標準制面積表

平方公里	公頃	公畝	平方公尺	平方公寸	平方公分
10000公畝	100公畝	100平方公尺	100平方公寸	100平方公分	100平方公釐

e. 市用制面積表

平方市里	市頃	市畝	平方市尺	平方市寸	平方市分
375市畝	100市畝	6000平方市尺	100平方市寸	100平方市分	100平方市釐

f. 1公畝=0.15市畝,1方公里=4方市里,

1市畝=10市分,1市分=10市釐.

g. 標準制體積表

立方公尺	立方公寸	立方公分
1000立方公寸	1000立方公分	1000立方公釐

h. 市用制體積表

立方市尺	立方市寸	立方市分
1000立方市寸	1000立方市分	1000立方市釐

i. 1立方公尺=27立方市尺,

1立方公寸=27立方市寸.

j. 標準制容量表

公秉	公石	公斗	公升	公合	公勺
1000公升	100公升	10公升	10公合	10公勺	10公撮

k. 市用制容量表

市石	市斗	市升	市合	市勺
10市斗	10市升	10市合	10市勺	10市撮

l. 1公升=1市升=1000立方公分=27立方市寸.

m. 標準制重量表

公斤	公兩	公錢	公分	公釐	公毫
1000公分	100公分	10公分	10公釐	10公毫	10公絲

n. 市用制重量表

引	石	斤	兩	錢	分	釐
200斤	100斤	16兩	10錢	10分	10釐	10毫

o. 1公斤=2市斤,1公分=3.2市分.

p. 幣制:——1圓=10角=100分=1000釐.

q. 時間進位表

年	日	小時	刻	分
365日	24小時	4刻	15分	60秒

閏年=366日,1年=12月,每月日數如下:

31; 28(平), 29(閏); 31; 30; 31; 30; 31; 31; 30; 31; 30; 31.

r. 角度單位表

一　周	直　角	度	分
4直角	$90°$ (度)	$60'$ (分)	$60''$ (秒)

s. 經度差與時差關係表

經　差	$1°$	$1'$	$1''$	$15°$	$15'$	$15''$
時　差	4分	4秒	$\frac{1}{15}$秒	1小時	1分	1秒

(*B*) 英美制及其他各國制:

見商務出版復興初中算術,萬有文庫各國權度,請參閱該二書.

(*C*) 方法與規則:

a. 同類複名數相加減,將各同名數分別加減;遇有盈不足,可將小名化成大名進位,或大名化成小名退位.

b. 複名數乘法,將乘數分乘被乘數各級單位,再從小名到大名進位.

c. 複名數除法: (一) 除數是不名數,分除被除數各級單位,從最高級起,有餘改作小名退位.(二)除數是名數,將被除數與除數,都化作最低級單名數,再除.

(*D*) **演算示例:**

1. 18里8引7丈+7里12引+16里8引

=41里28引7丈=<u>42里13引7丈</u>

2. 5日13時25分36秒−2日21時36分12秒

=4日36時85分36秒−2日21時36分12秒

=<u>2日15時49分24秒</u>

3. 29日12時44分3秒×12

=348日144時528分36秒

=348日152時48分36秒

=<u>354日8時48分36秒</u>

4. 11頃50畝4分÷2頃87畝6分

=11504分÷2876分=<u>4</u>

5. $75°15'12'' \div 12 = \dfrac{75°15'12''}{12}$

$$= 6°\frac{3°15'12''}{12}$$

$$= 6°\frac{195'12''}{12} = 6°16'\frac{3'12''}{12}$$

$$= 6°16'\frac{192''}{12} = \underline{6°16'16''}$$

III. 比例與百分法:——

(*A*) **規則與方法:**

a. 表示 a 是 b 的幾倍或幾分之幾,寫成 $a:b$,這叫做比;所以比是一個分數,分數 $\frac{a}{b}$ 的值就是比值.

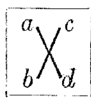
b. 兩個比相等,成功單比例;單比例就是兩個分數相等的式子.例如 $a:b=c:d$,可以寫做

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

c. 比例式中,在兩端的兩數 a 與 d,叫做外項,在中間的兩數,叫做內項.外項相乘的積,等於內項相乘的積;這叫比例原理.

d. 把比例寫成分數式,那麼比例原理可以改成"分子分母交义乘積相等",即

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\quad a\times d=b\times c$$



e. 四數成比例,其中間若有一項不知道,可用 x 代替該數,利用比例原理,或交义乘法,求得 x 的數值.例如

已知 $\frac{a}{x}=\frac{c}{d}$,求 x.

利用交义乘法, $ad=cx$.

依乘法關係式, $x=\frac{ad}{c}$.

f. 幾個比連乘,叫做複比;一個單比與複比相等,叫做複比例.用式子寫,就是

$$\left.\begin{matrix} a:b \\ c:d \\ e:f \end{matrix}\right\} = g:h,\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{g}{h}.$$

所以解複比例,可將諸比相乘,化成一個分數,再照單比例求解.

g. 有二量 P, B, 使它們的比 $\frac{P}{B}=\frac{r}{100}$, 叫做百分法,寫成 $P/B=r\%$, 這 % 就是 $\frac{1}{100}$.

h. 若有 P, B 二量 $P/B=r\%$, 那麼 P 叫做子數, B 叫做母數, $r\%$ 叫做百分率.命 $r\%=R$, 就有

$$P/B=R,\quad P=BR,\quad B=P/R.$$

i. 計算百分率,可照下式:

$$\frac{P}{B}=\frac{100\,P}{100\,B}=\frac{100\,P}{B}\%.$$

j. 求母數,可照下面的簡法:

已知百分率 $r\%$, 子數 P, 祇須用 r 除 P, 再把商的小數點退右兩位.

k. 百分率小數互化法:

從百分率化小數,取去 % 號,把小數點移左兩

位.從小數化百分率,把小數點移右兩位,後面加上%號.

l. 百分率分數互化法:

從百分率化分數,把$r\%$改寫成$\frac{r}{100}$,約分.從分數化百分率,照上面第i款計算.

m. 求連比的方法,可用下例說明:

已知 $a:b=13:14$, $b:c=21:16$, $c:d=6:7$,

求 $a:b:c:d$ 的連比,可照下式

$$\begin{array}{lll}
13\times3\times3 & & \\ \cline{1-1}
14\times3\times3= & 21\times2\times3 & \\ \cline{2-2}
& 16\times2\times3= & 6\times16 \\ \cline{3-3}
& & 7\times16
\end{array}$$

第一步: 14與21的最小公倍數是42,所以用3乘第一比的分子分母,用2乘第二比的分子分母,使第一比分母=第二比分子=42.

第二步: 第二比的分母 $16\times2=32$, 32與6的最小公倍數是96,所以用3乘第一,第二比的分子分母,用16乘第三比分子分母,使第二比分母=第三比分子=96,第一比分母=第二比分子=126

於是 $a:b:c:d=117:126:96:112$.

(B) 演算示例:

1. 解比例 $4\frac{1}{3}:x=2\frac{1}{5}:\frac{11}{13}$. (滬 23)

[解] $$x\times2\frac{1}{5}=4\frac{1}{3}\times\frac{11}{13}$$

$$x=4\frac{1}{3}\times\frac{11}{13}\div2\frac{1}{5}=\frac{13}{3}\times\frac{11}{13}\div\frac{11}{5}$$

$$=\frac{13}{3}\times\frac{11}{13}\times\frac{5}{11}=\underset{\smile}{\frac{5}{3}}.$$

2. 解比例 $$\left.\begin{matrix}6:7\\20:x\\252:270\end{matrix}\right\}=8:9$$

[解] $$\frac{6}{7}\times\frac{20}{x}\times\frac{252}{270}=\frac{8}{9}$$

$$\frac{6\times20\times252}{7\times x\times270}=\frac{8}{9}$$

$$\frac{16}{x}=\frac{8}{9}$$

$$8x=16\times9,\quad x=\frac{16\times9}{8}=\underset{\smile}{18}$$

3. 已知甲:乙=3:4, 乙:丙=5:6, 丙:丁=8:9, 求甲:乙:丙:丁的連比.

[解]
$$\begin{array}{lll} 3\times5 & & \\ \overline{4\times5}= & 5\times4 & \\ & \overline{6\times4}= & 8\times3 \\ & & \overline{9\times3} \end{array}$$

$\therefore$ 甲:乙:丙:丁$=\underline{15:20:24:27}$

4. 已知子數$=22.5$,百分率5%,求母數.

[解] 母數$=22.5\div5\times100=\underline{450}$

5. 化$\dfrac{6}{125}$爲百分率.

[解] $\dfrac{6}{125}=\dfrac{6\times100}{125}\%=\dfrac{24}{5}\%=\underline{4.8\%}$

IV. 整數性質:——

(*A*) **方法與規則:**

a. 二數相乘之積,等於二數的最大公約數,與最小公倍數相乘之積.

b. 不易劈因數的各數,可用輾轉相除法求最大公約數.法見商務書館出版,現代初中算術,或其他教科書.

c. 甲數是乙數的倍數,乙數是丙數的倍數,則甲數也是丙數的倍數.

d. 甲數是乙數的約數,乙數是丙數的約數,則甲數也是丙數的約數.

e. 甲數是丙數的倍數,乙數也是丙數的倍數,則甲乙兩數的和或差,仍是丙數的倍數.

f. 丙數是甲數的約數,丙數又是乙數的約數,則丙數又是甲乙和或差的約數.

g. 以各數最大公約數除各數,所得的商是互質數.

h. 兩互質數的公倍數,是兩互質數乘積的倍數.

i. 驗質因數的簡單方法:

(1) 一數的末位是 0 或偶數,該數必有質因數 2; 如 38, 50 等等, 都有質因數 2.

(2) 一數的數字和,是 3 的倍數,該數必有質因數 3; 如 13452, 卽有質因數 3, 因爲

$$1+3+4+5+2=15=3\times5.$$

(3) 一數的末位是 5 或 0, 該數必有質因數 5; 如 $135=5\times27$, $280=5\times56$.

(4) 一數分做三位一節,將各節隔一相加,再將所得兩組和相減,若差數是 7 的倍數,該數必有質因數 7; 例如 1564192 必有質因數 7, 因 $564-(192+1)=564-193=371=7\times53$, 而 $1564192=7\times223456$. 又如 30492 也有質因

數 7, 因 $492-30=462=7\times 66$. 三位及三位以下的數,從原數減去末位數字的 21 倍,若差數是 7 的倍數,該數必有質因數 7.

(5) 一數的數字,隔一位相加的兩和,再相減,其差數若是 0 或 11 的倍數,該數必有質因數 11; 如 $91828=11\times 8348$, 而 $(9+8+8)-(1+2)=25-3=22$.

j. 驗倍數的簡單方法:

(1) 一數的末二位是 4 的倍數或 0, 該數必是 4 的倍數; 如 $1324=4\times 331$, 而 $24=4\times 6$, 又如 $4300=4\times 1075$.

(2) 一數的數字和是 9 的倍數,該數必是 9 的倍數; 如 $83421=9\times 9269$, 而 $8+3+4+2+1=18$.

(3) 一數的末三位是 8 的倍數,或都是 0, 該數必是 8 的倍數; 如 37184 必是 8 的倍數, 因 $184=8\times 23$.

(4) 一數的末二位是 25 的倍數, 或都是 0, 該數必是 25 的倍數; 如 $2175=25\times 87$, 而 $75=25\times 3$.

k. 完全平方數的平方根,其質因數各冪的指數,等於原平方數質因數各冪的指數之半.完全立方數的立方根,其質因數各冪的指數,等於原立方數各冪指數的三分之一.

(*B*) 演算示例:

1. 求 2021 與 6407 的最大公約數(即 *G. C. M.*, 或 *H. C. F.*)與最小公倍數(即 *L. C. M.*).

[解] 依輾轉相除法,求得二數的 *G. C. M.* 是 43. 設 x 是二數的 *L. C. M.*

$$2021 \times 6407 = 43\,x$$

$$\therefore\ x = \frac{2021 \times 6407}{43} = 301129$$

2. 求 1085, 465, 9703, 651 的 *G. C. M.*

[解] 先求 465, 651 的 *G. C. M.* = 93,

再求 93, 1085 的 *G. C. M.* = 31,

又求 31, 9703 的 *G. C. M.* = 31,

所以原四數的 *G. C. M.* = 31.

3. 求 354, 531, 649 三數的最小公倍數.

[解] 先求得 354, 531 的 *G. C. M.* = 177,

所以這兩數的 *L. C. M.* $= \frac{354}{177} \times 531$

$= 1062.$

再求得1062與649的$G.C.M.=59$,

所以三數的 $L.C.M.=\frac{649}{59}\times 1062=\underset{\sim\sim\sim}{11682}$.

4. $\sqrt{379456}=?$

[解] $\sqrt{379456}=\sqrt{2^6\times 7^2\times 11^2}=2^3\times 7\times 11$

$=\underset{\sim\sim}{616}$

5. $\sqrt[3]{91.125}=?$

[解] $91.125=91125\times 0.001$,

$0.001=0.1^3$,

$\therefore \sqrt[3]{91.125}=\sqrt[3]{91125\times 0.001}$

$=\sqrt[3]{3^6\times 5^3\times 0.1^3}$

$=3^2\times 5\times 0.1=\underset{\sim}{4.5}$

V. 開方:——

(*A*) **方法與規則:**

a. 平方數的小數點每進退二位,平方根的小數點進退一位.

b. 立方數的小數點每進退三位,立方根的小數點進退一位.

c. 開平方的方法如下:

(1) 從小數點起,向左向右,每二位分做一段.

(2) 求左邊第一段中的最大整平方根,叫初商,寫在第一段的上面.

(3) 從第一段減去初商的平方,接寫第二段,叫次商實.

(4) 初商乘10,再用2乘,叫廉法;用廉法試除次商實,得次商,寫在第二段上面.

(5) 廉法上加次商,叫廉隅共法.

(6) 用次商乘廉隅共法,從次商實減去,接寫第三段,叫三商實.

(7) 把初次商乘10,再用2乘,做廉法,去除三商實,得三商,寫在第三段上面.

(8) 廉法上加三商,做廉隅共法.

(9) 以下照樣循環,由三商而四商五商,開完或開到所需的小數位數爲止.

d. 開立方的方法如下:

(1) 從小數點起,向左向右,每三位分做一段.

(2) 求左邊第一段中的最大整立方根,叫初商,記在第一段上面.

(3) 從第一段減去初商的立方數,接寫第二段,叫做次商實.

(4) 300倍初商的平方數(即初商當做幾十,自乘再乘3),叫做方廉.

(5) 用方廉試除次商實,得次商,寫在第二段上面.

(6) 30倍初商次商的乘積,叫做長廉.將次商自乘,叫做隅.方廉+長廉+隅,叫做廉隅全法.

(7) 用次商乘廉隅全法,從次商實減去,接寫第三段,叫做三商實.

(8) 再300倍初次商的平方,做方廉,試除三商實,得三商,寫在第三段上面.

(9) 以下照前循環,直到開完,或開到所需小數位數爲止.

e. 分數開平方或開立方,可將分子分母分別開方;若分子分母有一不是完全平方或完全立方數,可將分數化做小數,再開方.

f. 開立方求第二次的方廉,有一簡單法則: 100×(第一廉隅全法+第一長廉+第一隅2倍)=第二方廉.所以求第二方廉,可利用以前各數.

(B) 演算示例:

1. 求 4944.9024 的平方根.

		7　0.　3　2 [答]
		49　44.　90　24
		49
2×700	$=1400$	44　90
	$+\ 3$	
	1403	42　09
2×7030	$=14060$	2　81　24
	$+\ \ 2$	
	14062	2　81　24

第一廉法 140, 因爲比次商實 44 大, 所以次商是 0, 而初次商是 70. 在 44 後面接寫第三段 90, 得 4490, 就是三商實.

2. 求 97781.036543 的立方根.

			4　6.　0　7 [答]	
			97　781　036　543	
			64	………… 4^3
3×40^2		$=4800$	33　781	
3×40	$\times6$	$=720$		
+	6^2	$=36$		
		5556	33　336	………… 5556×6
300×460^2		$=63480000$	445　036　543	
30×460	$\times7$	$=96600$		
+	7^2	$=49$		
		63576649	445　036　543	………… 63576649×7
			0	

第二方廉 $=634800=100\times(720+36+5556+36)$.

第二章

問題解法示例

I. 解問題的要點:——

(*A*) 先看問題中何數已經知道,何數尚未知道,再求彼此間的關係.

(*B*) 求關係的步驟,總是先看某兩數的和,或積,或差,或商,是代表問題中的什麼數量,考慮其與問題中各數有何關係.

(*C*) 問題中的某數,有時是若干數的和或差,或積,或商;注意於此,就可得解法的頭緒.

(*D*) 有時作略圖,以線的長短,正方或長方的大小,表示問題中未知及已知數量,也可以發見解題的線索.

(*E*) 求到答數後,須細細察驗它是否適合問題中的關係.

(*F*) 有公式可以運用的問題,祇須認定各數,代入

公式.

(G) 算術問題,千變萬化,決非本書所能盡行包括.但如把模範問題熟習之後,再多多參閱各種書籍,自然可以“舉一隅而三反”.

II. 應用四則的問題:——

(A) 龜鶴算問題:

1. 有一工人,搬運玻璃器100個,每運到一個,可得工銀壹角五分,損壞一個,賠償銀貳角,最後此工人共得銀八元七角,問此工人運到玻璃器幾個?損壞幾個? (滬23)

〔解〕 若此工人所運玻璃器,未曾破壞,應得工銀 $100\times0.15=15$ 元. 今得 8.7 元,故少得 $15-8.7=6.3$ 元. 此少得之數,即係少得的工銀,與賠銀的和,再乘破壞的件數. 故知損壞件數 $=6.3\div(0.15+0.2)=18$, $100-18=82$.

答: 運到82個,損壞18個.

2. 中華呢廠的會計周先生,向銀行支銀 1000 元,計五元一元鈔票共320張,預備發給工錢,問兩種鈔票,各有幾張?

〔解〕 若320張都是 5 元鈔票,那麼共應值洋 1600

元.現在祇有1000元,少去600元.此600元之數,就等於若干壹元鈔票,換去5元鈔票的差數.每張五元票,換成一元票,少去(5-1=)4元.故知壹元票張數=600÷4=150張 而5元票數=320-150=170張.

(B) 行程問題:

1. 甲每日行路52里,乙每日行路78里,今甲先行2日,乙自後追之,問幾日可追及? (北平)

[解] 甲先行2日,卽在乙前(52×2=)104里.乙每日可比甲多走(78-52=)26里.今乙追及甲,則必多行104里.故追及日數=104÷26=4日.

2. 東西兩地,相距24里,脚夫二人,在此兩地來往,甲1日行7里,乙1日行5里;今兩人相向而行,問第三次相遇,在出發後幾日?

[解] 第一次相遇後,各人到對方,共行畢全路程2次;第二次相遇後,各人返回原地,又共行畢全路程2次;第三次相遇時,二人均在半路,共行全路程1次.故二人自出發到第三次相遇,共行全路程(3×2-1=)5次.二人每日共行(7+5=)12里.故所求日數=

$24\times(3\times2-1)\div(7+5)=10$ 日.

3. 某人預計時刻,走到某地.若每小時走2里,則遲到4小時,每小時走2.5里,則早到2小時.求兩地的距離.

[解]　$[(2\times4)+(2.5\times2)]\div(2.5-2)=26=$此人預計時刻.

故距離$=2\times(26+4)=60$ 里.

(C)　倍和與倍差問題:

1. 男二十人,女十五人,童子十二人,共做工三十日,得工資396.9元,他們的工資分配標準,係各按力量平均,今知男子力量二倍於女子,而童子力量僅爲男子之三分之一,求男女及童子每人每日各得多少?　(閩)

[解]　男子20人所得工資,等於女子40人的工資,童子12人的工資,等於男子4人的工資,卽女子8人的工資,故知女子每人每日工資$=396.9\div(15+40+8)\div30=6.3\div30=0.21$ 元.男子每人每日工資$=0.21\times2=0.42$ 元.童子每人每日工資$=0.42\div3=0.14$ 元.

2. 父年50歲,子年14歲,問幾年後,父年方爲子年

的3倍.

［解］ 父年與子年的差是 $(50-14=)36$ 歲.因父年是子年的3倍,所以

$36=$子年的$(3-1)$倍.

$\therefore$ 子年$=36\div(3-1)=18.$

$18-14=4$,故知在4年後.

(*D*) **盈不足問題:**

1. 桃若干個,分給童子若干人,若每人給6個,則可餘16個,若每人給8個,則不足12個.求桃數與童子之數. (浙22)

［解］ 起初盈餘16個,後來不足12個,故知前後相差$(16+12=)28$個.但是第二次每人多分$(8-6=)2$個,所以人數$=28\div2=$14人,桃數$=6\times14+16=$100個.

2. 張師母在路上遇見許多乞丐,想把袋中銅元分給他們.她先想最老的三人,每人給4個,另外各給3個,那麼可剩9個;再想最小的二人,每人給3個,另外各給5個,那麼祇剩2個.問乞丐幾人,她有銅元幾個?

［解］ 若最老的每人也給3個,那麼可剩12個;若

最小的每人也給5個,就要少2個了.所以

$[9+(4-3)\times3+(5-3)\times2-2]\div(5-3)=7,$

$7\times3+3(4-3)+9=33,$

答: 乞丐7人,銅元33枚.

(*E*) **和差算問題:**

1. 水程120里,順流划行,10時可到,逆流划行,則需20時.求河流速度與划行速度.　　(浙21)

[解] 此船順流每時划行$(120\div10=)12$里,

逆流每時划行$(120\div20=)$ 6里.

順流速度=划速＋水速

逆流速度=划速－水速

故知划行速度$=(12+6)\div2=9,$

水流速度$=(12-6)\div2=3,$

答: 河流速度每時3里,

划行速度每時9里.

2. 甲乙兩人,同時在同地出發.若依反對方向走,3分鐘後相隔2400公尺.若依同方向走,2分鐘後,甲比乙超出120公尺.求甲乙兩人的速度.

[解] 3分鐘後相隔2400公尺,1分鐘相隔(2400

$\div 3=)800$ 公尺＝甲乙速度和. 2 分鐘後,甲超出 120 公尺, 1 分鐘當超出 $(120\div 2=)60$ 公尺＝甲乙速度差. 所以

甲速度 $=(800+60)\div 2=$ 430 公尺,

乙速度 $=(800-60)\div 2=$ 370 公尺.

(*F*) 定和問題:

1. 哥哥儲蓄銅元 38 個,弟弟儲蓄銅元 26 個;問哥哥給弟弟幾個,那麼二人所有的銅元相等.

[解] 哥哥與弟弟的銅元,無論如何授受,總和始終不變,等於 $(38+26=)64$ 個. 題言二人所有的相等,每人應有 $(64\div 2=)32$ 個. $38-32=6$, 故知哥哥應給弟弟 6 個.

2. 有水缸兩隻,甲缸盛水 9 石 6 斗,乙缸盛水 9 斗,今從甲缸流入乙缸,每小時 6 斗,問幾小時後,乙缸的水是甲缸的 3 倍.

[解] 甲乙兩缸之和是定數,卽其和是 $96+9=105$ 斗. 現在要使乙缸的水是甲缸的 3 倍,則甲乙兩缸和便是甲缸的 4 倍,所以 $105\div 4=26.25$ 斗,就是這時候甲缸應餘的水量. 於是甲缸流入乙缸的水量 $=96-26.25=69.75$ 斗. 但是

每小時流入6斗,所以 $69.75\div6=11.625$ 小時 $=11$ 小時37.5分,即所求的時間.

(*G*) **定差問題:**

1. 祖父69歲,孫兒3人,長5歲,次3歲,幼1歲.問幾年之後,祖父年齡是三孫年齡和的4倍.

〔解〕祖父每年增加1歲,三孫每年共增3歲,所以祖父年齡的3倍,與三孫年齡和的差,一定不變.今祖父年齡是三孫年齡和的4倍,所以祖父年齡的3倍,就是三孫年齡和的12倍,於是此差=三孫年齡和的$(12-1)$倍.現知此差$=3\times69-(5+3+1)=207-9=198$. $198\div11=18$=那時的三孫年齡和,故知三孫年齡共增 $18-(5+3+1)=9$, $9\div3=3$. 故知在3年之後.

2. 甲乙二水櫃,甲櫃有水100升,乙櫃有水65升今甲櫃每分流出2升,乙櫃每分流出3升,問幾分鐘之後,甲櫃水是乙櫃水的4倍?

〔解〕設想有甲櫃三只,則每分共流出水6升,又設想有乙櫃2只,則每分亦共流出水6升,所以甲櫃水量的3倍,與乙櫃水量的2倍之

差,是不變的數目.現在說甲櫃水量是乙櫃的4倍,則甲櫃的3倍,卽乙櫃的$(4\times3=)12$倍,甲乙差就是乙櫃的$(12-2=)10$倍.現在知此差$=3\times100-2\times65=300-130=170$, $\therefore 170\div10=17$升=該時乙櫃中所餘水量. $65-17=48$升,是乙櫃流出量. $48\div3=16$分,故知在16分後.

(*H*) **差數累減問題:**

1. 東倉有米1000石,西倉有米800石,今每日由東倉取出12石,西倉取出8石.問若干日後,兩倉之米相等. (川一屆)

[解] 東西倉米量本相差$(1000-800=)200$石.兩倉相等,則此差數已累次減去.現在東倉每日比西倉多取出$(12-8=)4$石.故知所求日數$=200\div4=50$日.

2. 趙君有銀300元,每月儲蓄銀20元;錢君有銀200元,每月儲蓄銀30元;問經過幾個月之後,兩人存銀纔相等?這時兩人各有銀幾元?

[解] 與上題同理,得算式

$$(300-200)\div(30-20)=10,$$

$$300+20\times10=500,$$

$$200+30\times10=500.$$

答：　再過10個月相等,此時各有500元.

(*I*)　**和數累增問題：**

1.　甲的錶每天快15秒,乙的錶每天慢9秒.今甲乙二人於某日正午對準後,到5天後正午時,二錶所指時刻,相差多少?

[解]　甲錶快15秒,乙錶慢9秒,結果每隔1天,相差$(15+9=)24$秒.故得$5\times(15+9)=24\times5=120$秒.卽相差2分鐘.

(*J*)　**雙重倍和與雙重倍差問題：**

1.　牛羊各一頭的共價,是70元;同種類的牛2頭,羊三頭,共價160元.問牛羊各一頭價多少?

[解]　牛二頭羊二頭的價是$70\times2=140$元.所以羊一頭的價是$160-140=20$元.牛一頭的價$=70-20=50$元.

2.　甲乙兩人同件乘火車,所帶行李共計350斤.若一人獨帶,須貼運費1.55元.若二人分帶,則甲須貼運費0.75元,乙須貼運費0.6元.問每人至多帶行李幾斤,可以不貼運費?

[解] 分帶時，兩人共貼運費 $(0.75+0.6)=1.35$ 元. 故較獨帶時少出 $(1.55-1.35=)0.2$ 元. 這就是規定一人應帶斤數的運費. 於是 1.55 元 +0.2 元 =1.75 元，便是 350 斤都出運費的共價. 所以 $1.75\div350=0.005$ 元 =1 斤的運費. 不加運費的斤數 $=0.2\div0.005=40$. 卽行李至多每人帶 40 斤.

(K) 歸一法問題：

1. 有一本稿子，本來用 6 人 30 日可以排完；現在要 10 日排完，該用幾人？

[解] 6 人 30 日排完，1 人須 $(30\times6=)180$ 日排完. 10 日排完須用 $(180\div10=)18$ 人.

2. 工人 6 名，15 天開溝一條，長 80 公尺，寬 6 公尺，深 4 公尺；另有一溝，長 240 公尺，寬 8 公尺，深 6 公尺，用工人 18 名，問幾天開成？ (皖)

[解] 工人每名每天可開溝

$(80\times6\times4\div15\div6)$ 立方公尺，

18 名每天開溝

$80\times6\times4\div15\div6\times18=(16\times4\times6)$ 立方公尺，

$(240\times8\times6)\div(16\times4\times6)=30$ 日.

(*L*) **還原問題:**

1. 某數4倍,除以5,得商減去50,再加40,結果得70.問原數是多少?

[解] 所求數$=(70-40+50)\times 5\div 4=100$.

(*M*) **方陣問題:**

1. 有兵若干人,排成空心方陣,最外一層,每邊32人,共排4層.求兵數.

[解] 若此方陣中心不空,應有人數

$$32^2=1024$$

但是中間空去的部分,若欲填滿,每邊須有$(32-4\times 2=)24$人,因為共有4層,兩頭須減8人.所以這填補的小方陣,人數$=24^2=576$.於是$1024-576=448$人,即為所求兵數.

2. 有兵若干人,排成方陣,多50人.若在這方陣外面,再加一層,不足14人.求兵數.

[解] 周圍一層的人數$=50+14=64$人,減去四角的4人,$64-4=60$,這60就是原方陣每邊人數的4倍.於是原方陣一邊人數是$60\div 4=15$.故所求兵數$=15^2+50=275$人.

(*N*) **植木問題:**

1. 縱 23 丈橫 25 丈 5 尺的長方地,在其四周及四角,每隔 5 尺,種樹一株,問共需幾株?

[解] 一角的樹,加入橫排,第二角的樹加入縱排,就得

$230 \div 5 = 46 =$ 縱排樹數,

$255 \div 5 = 51 =$ 橫排樹數,

於是總樹數 $= (46 + 51) \times 2 = 194$.

(O) 平均問題:

1. 貨物一宗,由原產地買進,每百斤價 17 元,共買進 350 斤,去運費 2 元.現在欲賣去,得 20 元的利益,問平均每斤賣價多少?

[解] 17 元 $\div 100 = 0.17$ 元 $=$ 每斤原價.

$\therefore$ $(20 + 2) \div 350 + 0.17 = 0.233$ 元, 即 2 角 3 分 3 釐,是賣出每斤之價

2. 某學校舉行入學試驗,其合格者之中,從第一名到第七名,平均分數是 92.5,從第一名到第八名的平均分數是 90.5.求第八名的分數.

[解] 第一名到第七名的總分數,合計

$$92.5 \times 7 = 647.5$$

第一名到第八名的總分數,合計

$$90.5\times 8=724$$

$\therefore$ $724-647.5=76.5$, 就是第八名所得的分數.

(P) 代換問題:

1. 米4石之價,與麥7石之價等,麥3石之價,與豆2石之價等,今以銀170元,買米麥豆各5石,問米麥豆各一石之價若干?　(贛22)

[解] 米麥豆各一石的共價,是$(170\div 5=)34$元.所以米麥豆各4石的共價,是$(34\times 4=)136$元.但米4石之價,等於麥7石之價,而豆4石之價,等於麥$(3\times 4\div 2=)6$石之價,故米麥豆各4石之價,等於麥$(7+4+6=)17$石之價,所以麥價$=136\div 17=$8元,米價$=7\times 8\div 4=$14元,豆價$=3\times 8\div 2=$12元.

2. 男5人,女6人,工資27元.男2人,女3人,工資相等.求男女各一人工資.

[解] 女6人的工資=男4人的工資,所以

男工資$=27\div(5+4)=$3元,

女工資$=3\times 2\div 3=$2元.

(Q) 連續數問題:

1. 五連續數之和,等於65,求最小數.

[解] 第二數比第一數大 1, 第三數比第一數大 2, 第四, 五兩數, 比第一數大 3, 4. 故於 65 中減去 $(1+2+3+4)$, 就是最小數的五倍.

$[65-(1+2+3+4)]\div 5=\underline{11}$, 爲最小數.

III. 應用分數的問題:——

(*A*) **一般要點:** 凡解含有分數的問題, 須注意下列各要點; 若對於這幾點有深切的認識, 有透徹的了解, 那麼問題的答數, 就不難求得了.

1. 先把問題熟讀, 然後察出題中已知數有幾個, 未知數有幾個, 而用 1 代表未知數之一, 再從題中所示數理關係, 求得其餘未知數的代表分數. 所選(用 1 代表)的未知數, 須使運算簡便; 解題旣多, 自然熟能生巧, 知道如何選擇.

2. 含有分數的問題, 其中之數, 不論已知未知, 可以分成實在數與代表數二類; 實在數大概都是整數, 有時也可爲帶分數與分數; 代表數大概都是分數, 有時也可爲簡單整數, 或簡單帶分數. 分數問題解法的最後結果, 卽在求得某量的代表數, 相當於某實在數; 於是(某實在數÷代表數), 卽等於某量, 而問題就此解決.

3. 題中的代表數,有時所代表者不是同量,必須就題意所示的關係,化成同量代表數,所用的運算,不外乎乘與除.

4. 同量代表數可以加減,其和差仍爲該量代表數,相當於所代表實在數的和差.

5. 異量代表數決不可以加減,必須先化成同量代表數,然後可以加減.

6. 代表數與實在數,決不能相加減,所以這兩類數目,必須嚴格地分別清楚.

7. 二同量代表數相乘,等於原量平方數的代表數;二同量代表數相除,等於第三種實在數,有時即爲得數.

8. 某量代表數,與該量相乘,即得其代表的實在數.

9. 代表數用一數去乘它或除它,仍爲原量代表數,相當於其所代表實在數,被同數乘或除.

10. 各量加減時,都須化成同單位;答數的單位,必須留意,不可弄錯.

11. 分數問題,雖然千變萬化,但是基本的要素,不外乎三種:

(a) 已知異量代表數,化成同量代表數,相當於某實在數.

(b) 已知各代表數,就題意求其倍分和差,相當於某實在數.

(c) 已知兩代表數,求其相除之商.

12. 分數問題,有時祇論及分數的變化;這一類問題,可利用約分通分原理,求其解答.

(E) 模範問題舉例:

1. 有一馬路,已成七分之五,尚有一百尺則在建築中,問此路全長若干? (贛 23)

[解] 以1代表此路的全長尺數,

$1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}=$全路代表數,相當於建築中之餘路

(同量代表數相減,得差仍爲原量代表數,相當於所代表實在數之差.)

全路之 $\frac{2}{7}$ 相當於100尺,

$\therefore\ 100\div\frac{2}{7}=100\times\frac{7}{2}=350$ 尺,

(實在數÷某量代表數=某量.)

答: 全路長350尺.

2. 一工程,甲乙二人合作,10日可成,甲一人獨作,

14日可成,問二人合作4日後,所餘工程令乙一人獨作,幾日可成?　(北平)

[解]　令1代表全工程,則 $\frac{1}{10}$=全工程代表數,相當於甲乙二人每日共作工程,

但甲一人獨作,每日作全工程的 $\frac{1}{14}$,

$\therefore \frac{1}{10}-\frac{1}{14}=\frac{2}{70}=\frac{1}{35}$=全工程代表數,相當於乙獨作每日所作工程,

(同量代表數的差,仍爲原量代表數,相當於所代表實在數的差.)

$\frac{1}{10}\times 4=\frac{2}{5}$相當於二人合作4日的工程,

(代表數用一數去乘,相當於其所代表實在數,被同數乘.)

$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$=全工程代表數,相當於所餘工程,

(同量代表數相減,………)

$\frac{3}{5}\div\frac{1}{35}=\frac{3}{5}\times\frac{35}{1}=21$日.

(乙每日作全工程 $\frac{1}{35}$, 21日可作 $\frac{3}{5}$.)

答:　須再作21日可成.

3. 甲所有銀爲乙所有銀之 $\frac{3}{5}$,乙較甲多600元,問

兩人各有銀若干? (湘二屆)

[解] 命1代表乙所有銀元數,

則 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$=乙銀代表數,相當於乙比甲多的元數,

∴乙所有銀之$\frac{2}{5}$,相當於600元,

於是 $600\div\frac{2}{5}=600\times\frac{5}{2}=1500$ 元,

$1500-600=900$ 元.

答: 甲有銀900元,乙有銀1500元.

4. 甲乙丙三數連乘積爲$\frac{7}{48}$甲乙之積爲$\frac{1}{4}$,乙丙之積爲$\frac{7}{16}$,求各數. (皖)

[解] 此題中都是實在數,僅運算方法,屬於分數而已.

$\frac{1}{4}\times\frac{7}{16}=\frac{7}{64}$=甲×乙×乙×丙之積,

∴ $\frac{7}{64}\div\frac{7}{48}=\frac{7}{64}\times\frac{48}{7}=\frac{3}{4}$=乙數,

$\frac{1}{4}\div\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$=甲數,

$\frac{7}{16}\div\frac{3}{4}=\frac{7}{16}\times\frac{4}{3}=\frac{7}{12}$=丙數.

答: 甲數$\frac{1}{3}$,乙數$\frac{3}{4}$,丙數$\frac{7}{12}$.

5. 某廠有男女工人共 140 人，男工是女工的 $1\frac{1}{3}$ 倍；那麼男女工各有幾人？

［解］ 命 1 代表女工人數，則

$1+1\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}=$女工人數代表數，相當於男女工總數，

（同量代表數之和，仍爲原量代表數，相當於所代表實在數的和。）

$\therefore\ 140\div2\frac{1}{3}=140\times\frac{3}{7}=60$ 人．

$140-60=80$ 人，

答： 男工 80 人，女工 60 人．

6. 用繩掛錘，測河水的深，起初垂下 $\frac{2}{3}$，還未到河底；再垂下所餘的 $\frac{1}{2}$，纔達河底；量餘剩的繩，長 3 尺 5 寸；那麼繩長和河深，各是多少．

［解］ 命 1 代表繩長寸數，則

$\frac{2}{3}=$繩長代表數，相當於第一次沈入河中的實在寸數，

$\frac{1}{2}=$第一次餘繩代表數，相當於第二次沈入河中的實在寸數，

故 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{1}{2}$ 是異量代表數，

但知 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}=$ 全繩代表數,相當於第一次

餘繩實在寸數.

故 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}=$ 全繩代表數,相當於第二次沈

入河中實在寸數,

於是 $1-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}=$ 全繩代表數,相當於最後

所剩35寸實在數,

$\therefore\ 35\div\frac{1}{6}=35\times6=210=$ 繩長寸數,

$210-35=175=$ 河深寸數,

答: 繩長2丈1尺,河深1丈7尺5寸.

此題亦可照下式計算:

$$\text{繩長}=35\div\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=35\div\frac{1}{6}=210.$$

7. 甲4時做某事的 $\frac{2}{3}$, 乙1時做餘業的 $\frac{3}{4}$, 丙再做 $\frac{1}{3}$ 時完工;問三人合做,要幾時完工?

〔解〕 命1代表該事,則

$\frac{2}{3}\div4=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}=$ 該事的代表數,相當於甲1時

所作的工,

$\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}=$ 該事的代表數,相當於

乙1時所作的工,

(異量代表數,化爲同量代表數.)

$1-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$=原事代表數,相當於丙 $\frac{1}{3}$ 時所作的工,

$\frac{1}{12}\times 3=\frac{1}{4}$=原事代表數,相當於丙 1 時所作的工,

(化成同單位)

於是 $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$=原事代表數,相當於三人合作1時的工程,

$\therefore\ 1\div\frac{2}{3}=1\times\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ 時=三人合作時數.

8. 有線一條,三折比四折長15尺,那麽線長幾尺?

[解] 命1代表線長尺數,則

三折每段 $=\frac{1}{3}$, 四折每段 $=\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$=線長代表數,相當於三折比四折所長實在尺數,

$\therefore\ 15\div\frac{1}{12}=15\times 12=180$ 尺,

答: 線長18丈.

9. 某人用每石 9 元的大豆,去換每石12元的白米,少得5石;問他的大豆有幾石?

〔解〕 大豆每石,可換米$\left(\frac{9}{12}=\right)\frac{3}{4}$石,

故命1代表他的大豆石數,則

$\frac{3}{4}$=大豆石數代表數,相當於所換米的石數,

$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$=大豆石數代表數,相當於少去石數,

$\therefore\ 5\div\frac{1}{4}=5\times4=\underset{\sim\sim}{20}$ 石=大豆石數.

10. 一水池,上有甲乙二管注水,下有丙管漏水;空池時,開甲管2時可注滿,開乙管$2\frac{3}{4}$時也可注滿;滿池時,開丙管$1\frac{5}{6}$時可漏完;問空池時三管齊開,過幾時可滿?

〔解〕 命1代全池水量,則

$\frac{1}{2}$=池水代表數,相當於甲管每小時注水量.

$\frac{1}{2\frac{3}{4}}=\frac{4}{11}$=池水代表數,相當於乙管每小時注水量,

$\frac{1}{1\frac{5}{6}}=\frac{6}{11}$=池水代表數,相當於丙管每小時漏水量,

$\therefore\ 1\div\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{11}-\frac{6}{11}\right)=3\frac{1}{7}$ 時,

答: 三管齊開,過 $3\frac{1}{7}$ 時可滿.

11. 長江輪船載客,從上海經南京安慶到漢口,在南京上岸的,是船客總數的$\frac{1}{3}$,又添新客73人;在安慶上岸的,是這時船客的$\frac{3}{5}$,又添新客80人;到了漢口,船客都上岸,人數恰好是上海乘客的$\frac{1}{2}$,問上海乘客有幾人?

[解] 命1代表上海乘客人數,則

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=$上海客代表數,相當於南京未上岸上海客人數,

$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{15}=$上海客代表數,相當於安慶未上岸上海客人數,

$73\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{146}{5}=$安慶未上岸南京客實在人數(此數雖非整數,但與上海留船客分數相合,即成整數.),

$\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{30}=$上海客代表數,相當於漢口上岸安慶客80人,以及南京餘客$\frac{146}{5}$人實在數.

$$\therefore \left[73\times\left(1-\frac{3}{5}\right)+80\right]\div\left[\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{146}{5}+80\right)\div\frac{7}{30}=\frac{546}{5}\times\frac{30}{7}=468,$$

答: 上海乘客有468人.

12. 有甲乙二船夫,甲逆流沿某河划船,6小時可達目的地,回來須費4小時.乙逆流行同距離,須費12小時,問乙順流行此距離,須費幾小時?

[解] 令1代表此距離,則

$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\div 2=\frac{1}{24}=$原距離代表數,相當於水流每小時速度,

$\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{6}=$原距離代表數,相當於乙順流每小時速度,

$\therefore\ 1\div\frac{1}{6}=$6小時$=$乙順流所需時間.

13. 五點鐘以後,兩針成直角在什麼時候?

[解] 此題可不用代表數.

5點鐘時,短針在長針前25小格;兩針成直角,須隔15小格:故長針須追近短針(25−15=)10小格,或追出(25+15=)40小格.現在長針每小時走60格,短針每小時走5小格,即

長針每分鐘走 1 小格，短針每分鐘走 $\frac{1}{12}$ 小格，故長針每分鐘比短針多走 $\left(1-\frac{1}{12}=\right)\frac{11}{12}$ 小格.

$$\therefore\ 10\div\frac{11}{12}=10\times\frac{12}{11}=10\frac{10}{11},$$

$$40\div\frac{11}{12}=40\times\frac{12}{11}=43\frac{7}{11},$$

答：一次在 5 時 $10\frac{10}{11}$ 分，二次在 5 時 $43\frac{7}{11}$ 分.

註：若求兩針相重，即爲追及；若求兩針成一直線，即爲追出 30 小格.

14. 父與三子年齡之和，共八十六歲；長子比父年的 $\frac{1}{3}$ 多 3 歲，次子比父年的 $\frac{1}{4}$ 多 1 歲；幼子恰等於父年的 $\frac{1}{8}$；問 4 人的年齡各幾歲?

[解] 命 1 代表父的歲數，則

長子年齡減 3 歲 = 父年的 $\frac{1}{3}$,

次子年齡減 1 歲 = 父年的 $\frac{1}{4}$,

幼子年齡 = 父年的 $\frac{1}{8}$,

$\therefore\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{41}{24}$ = 父年代表數，相當於四人年歲和減去 4 歲,

$\therefore (86-4)\div\frac{41}{24}=82\times\frac{24}{41}=48=$父年,

$48\times\frac{1}{3}+3=19=$長子年,

$48\times\frac{1}{4}+1=13=$次子年,

$48\times\frac{1}{8}=6=$幼子年.

15. 有分數,其分子加1,則爲$\frac{1}{3}$,若於其分母加1,則爲$\frac{1}{4}$,求此分數. (漢口)

[解] $\frac{1}{3}$是原分數分子加1後,約分而得的分數,故若以甲數乘$\frac{1}{3}$的分子與分母,而由乘後的分子減1,卽得原分數.$\frac{1}{4}$是原分數分母加1後,約分而得的分數,故若以乙數乘$\frac{1}{4}$的分子分母,而從乘後的分母減1,也得原分數.於是此題可以改成下題:

甲數的3倍,等於乙數的4倍減1,甲數等於乙數加1,求甲,乙二數.

故知甲數的4倍=乙數的5倍,

今命1代表乙數,則

$\frac{5}{4}$=乙數代表數,相當於甲數,

$\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}=$乙數代表數,相當於甲數大於乙數的實在數,

$\therefore\ 1\div\frac{1}{4}=4=$乙數,

$\therefore\ \frac{1\times4}{4\times4-1}=\frac{4}{\underset{\smile}{15}}=$原分數.

16. 在分數 $\frac{19}{37}$ 的分母與分子中,各加一相同的數,可以約成 $\frac{4}{7}$. 求所加的一數.

[解] 分子分母同加一數,母子差應當不變,

原分數的母子差$=37-19=18$,

故 $\frac{4}{7}$ 在未約分前,母子差也是18,

但現在母子差$=7-4=3$,

$18\div3=6$,

$\therefore$ 未約分以前的分數$=\frac{4\times6}{7\times6}=\frac{24}{42}$,

故所求數$=42-37=\underset{\smile}{5}=24-19$.

IV. 應用比例的問題:——

(A) **一般要點:** 解比例問題,須注意下列各要點:

1. 同類量方可相比.

2. 兩數量相比,必須化成同單位.

3. 比例的正反,可照下面的規則決定.

甲量增大幾倍,乙量也增大幾倍,則甲量與乙量成正比例;甲量增大幾倍,乙量反縮小幾倍,則甲乙二量成反比例.最好於排比例式之前,先將題中各數量,依先後次序排好,先定一量爲主,用箭頭→表示由小變大,用箭頭←表示由大變小;然後看他量,也用箭頭表示變化,若箭頭方向相反,卽成反比例;方向同,卽成正比例.

4. 解複比例問題,可將各比化成複比,照單比例的解法演算.

(*B*) 單比例問題示例:

1. 有一工程14人作之,15日可成.今欲以10日成之,問須用若干人? (湘二屆)

[解]

$$\begin{array}{ccccc} 14\text{人} & \downarrow & 15\text{日} & \uparrow & \\ & & & & (\text{反比例}) \\ x\text{人} & \downarrow & 10\text{日} & \uparrow & \\ (\text{人數增多}) & & (\text{日數減少}) & & \end{array}$$

$$\therefore \frac{14}{x}=\frac{10}{15},\quad x=\frac{14\times 15}{10}=21\text{人},$$

答: 須用21人.

2. 有一工程,用12人合作35日,已成工程之半,後

加 3 人作之,問全工程作成,共須幾日?

(湘五屆)

[解]　第一次12人作工程之半,第二次15人亦作工程之半,若命第二次完工日數爲x,則

$$\frac{12}{12+3}=\frac{x}{35},\quad \therefore\ x=\frac{12\times 35}{15}=28,$$

$28+35=\underset{\sim\sim\sim}{63\text{日}}=$全工程共需日數.

3. 火車每 3 分鐘可行 5 里,今從甲站到乙站,共行 1 時半.問甲乙兩站的距離是幾里?

(湘四屆)

[解]
$$\begin{array}{ccccc} 3\text{分} & \bigg\downarrow & 5\text{里} & \bigg\downarrow & \\ 90\text{分} & & x\text{里} & & (\text{正比例}) \\ (\text{時間增加}) & & (\text{距離增加}) & & \end{array}$$

$$\therefore\ \frac{3}{90}=\frac{5}{x};\quad x=\frac{5\times 90}{3}=\underset{\sim\sim\sim}{150\text{里}}.$$

4. 做一件工程,36 日只做成$\frac{3}{10}$,那麼要再做幾日,纔可以成功?

[解]　已做成$\frac{3}{10}$,尙須做$\left(1-\frac{3}{10}=\right)\frac{7}{10}$,若$x=$再做日數,那麼

$$\frac{3}{10}:\frac{7}{10}=36:x,\quad x=\frac{7\times 36}{3}=\underset{\sim\sim\sim}{84\text{日}}.$$

5. 張王李三商人,合股開店,其本銀之比,張比王若3:2,王比李若4:3,現知李之本銀為750元,問張之本銀若干? (皖)

[解] 先化成連比,得

張本銀:王本銀:李本銀$=6:4:3$,

$\therefore\ x:750=6:3,\ x=1500,$

答: 張之本銀1500元.

(*C*) 複比例問題示例:

1. 米5石6斗,可供兵士50人吃8日,若兵數加多25人,米為25石2斗,問能吃若干日.

(北平)

[解]

56斗	↓	50人	↑	8日	↓
252斗	↓	75人	↑	x日	↓

(米量增多) (日數增多)

(人數減少) (日數增多)

$$\therefore\ \frac{56}{252}\times\frac{75}{50}=\frac{8}{x},\qquad \therefore\ x=\frac{252\times50\times8}{56\times75}=24\text{日}.$$

2. 織工6人,每日工作8時,10日可得工資18元,今有織工4人,每日工作9時,問15日可得工資多少? (浙21覆)

[解]

6人 ↓	8時 ↓	10日 ↓	18元 ↓
4人	9時	15日	x元

$$\therefore \frac{6}{4}\times\frac{8}{9}\times\frac{10}{15}=\frac{18}{x},$$

$$\therefore x=\frac{18\times4\times9\times15}{6\times8\times10}=20.25,$$

答: 可得工資20元2角5分.

(*D*) **配分比例問題示例:**

1. 甲乙丙三人分金460元,其所得之比,依次爲6:8:9問各得若干元?　(浙21)

[解] 比的總數是 $6+8+9=23$, 各人比數是6, 8, 9.

$$23:6=460:x,\quad \therefore x=\frac{6\times460}{23}=120;$$

$$23:8=460:x,\quad \therefore x=\frac{8\times460}{23}=160;$$

$$23:9=460:x,\quad \therefore x=\frac{9\times460}{23}=180.$$

答: 甲得120元,乙得160元,丙得180元.

2. 張王李三人,合著一部書,工作的比,張和王如4:9,王和李如12:5;後來把這部書的版權讓去,共得3350元,假使照工作的比分派,各得多少?

[解] 先求得連比如下:

張作:王作:李作$=16:36:15$,

$16+36+15=67$,

$$\therefore\ 3350\times\frac{16}{67}=800,\quad 3350\times\frac{36}{67}=1800,$$

$$3350\times\frac{15}{67}=750.$$

答: 張得800元,王得1800元,李得750元.

(E) 連鎖比例問題示例:

1. 甲 3 日的工程,乙須 4 日做完,乙 5 日的工程,丙須 7 日做完,問丙 9 日的工程,甲須幾日做完?

[解] (甲) 3 —— 4 (乙)

(乙) 5 —— 7 (丙)

(丙) 9 —— x (甲)

$$x=\frac{3\times5\times9}{4\times7}=4\frac{23}{28}.$$

答: 甲須做 $4\frac{23}{28}$ 日.

2. 米 3 石之價,等於麥 5 石之價,麥 7 石之價,等於粟 4 石之價;今以米30石換粟與麥,已得粟20石,問再得麥幾石,可不受損失.

[解] 命 $x=$米30石可換粟的石數,

則依連鎖法得式如下：

$$\begin{array}{llll}
(\text{米})\ 3 & \text{———} & 5\ (\text{麥}) \\
(\text{麥})\ 7 & \text{———} & 4\ (\text{粟}) \\
(\text{粟})\ x & \text{———} & 30\ (\text{米})
\end{array}$$

$$\therefore\ x=\frac{5\times4\times30}{3\times7}=28\frac{4}{7}$$

$28\frac{4}{7}-20=8\frac{4}{7}$＝少換粟的石數，若照此數換麥，就可不受損失；故得

$$4:8\frac{4}{7}=7:x,\quad x=\frac{60\times7}{7\times4}=15.$$

答：須再得麥15石.

(*F*) **混合比例問題：** 混合比例問題，實屬代數範圍，惟兩種物品混合，算術尚可解決，以本書祇講兩種物品的混合.

1. 甲種酒每升7角，乙種酒每升5角5分，依3:2的比混合時，每升應售若干，可不吃虧？

[解]　$7\times3=21$　　$32\div(3+2)=6.4$,

$\underline{5.5\times2=11}$　　答每斤應售6角4分.

$\qquad\qquad 32$

2. 甲種糖每斤2.5角，乙種糖每斤1.4角；問兩種糖依如何之比混合，則每斤之價是1.7角？

[解]

平均價	原價	損益	混合比
17分	甲25分	損8分	3
	乙14分	益3分	8

答: 甲乙二種糖,須依3:8之比混合.

V. 應用百分法的問題:——

(A) 一般要點: 解百分法的問題,須注意下列各要點:

1. 百分率是一個特別分數(即分母常爲100的分數),所以本章所示分數應用問題解法各要點,也適用於百分法問題.

2. 解百方法問題,須辨別何數是母數,何數是子數,母子切不可誤認.

3. 百分計算問題雖多,但將其門類劃分,結果不出下列五種:

(a) 求百分率　　(b) 求子數

(c) 求母數　　(d) 求母子和

(e) 求母子較

4. 上述五種算法,根據下列三公式:

(a) 母數×百分率=子數,

(b) 母數×(1+百分率)=母子和=母數+子數,

(c) 母數×(1－百分率)＝母子較＝母數－子數.

(*B*) 普通問題示例:

1. 今年綢價,是去年的72%,問今年每尺賣9角的綢,去年要賣多少?

[解] 去年的綢價是母數,今年的綢價是子數,

$$\therefore\ 0.9\div 72\% = 1.25,$$

答: 去年要賣1.25元.

2. 某市現在人口的5%,是前十年間所增加的,問這所增的人口,是十年前人口的百分之幾?

[解] 命1代表現在人口數,則

$\frac{5}{100}$相當於前十年間所增人口數,

$1-\frac{5}{100}=\frac{95}{100}$相當於十年前的人口數,

以後者爲母數前者爲子數,求百分率,

於是 $\frac{5}{100}\div\frac{95}{100}=\frac{5}{95}=\frac{500}{95}\%=5.3\%$,

答: 前十年所增人口,是十年前人口的5.3%.

(*C*) 賺賠問題示例:

1. 貨物一宗,售得洋440元,虧本1成2分.問原價

幾元?

[解] 原價是母數,虧去的是子數,所以440元是母子較,於是得

原價 $=440\div(1-12\%)=440\div88\%$

$$=440\times\frac{100}{88}=500.$$

答: 原價500元.

2. 某商品定價比原價增8%,若賣價比定價減2%,尚可獲利8.76元.問原價多少?

[解] 命1代表原價,則

$1\times(1+8\%)=1+8\%$ 相當於定價,

$(1+8\%)\times(1-2\%)$ 相當於賣價,

$(1+8\%)\times(1-2\%)-1$ 代表所賺利益,相當於 8.76元,

$$\therefore\ 8.76\div[(1+8\%)\times(1-2\%)-1]$$

$$=8.76\div\left(\frac{108}{100}\times\frac{98}{100}-1\right)$$

$$=8.76\div\left(\frac{1323}{1250}-1\right)=8.76\div\frac{73}{1250}$$

$$=8.76\times\frac{1250}{73}=150,$$

答: 原價150元.

3. 有鐘一隻,如賣 6 元,要虧本 20%;現在要賺 15%,該賣多少?

[解] $6\div(1-20\%)=$原價,所以得

$6\div(1-20\%)\times(1+15\%)=8.625$,

答: 該賣8.625元.

(D) 佣金問題示例:

1. 有中人替人說買賣,約定從賣主取佣錢3%,從買主取佣錢2%;從兩方所得佣錢,相差13.5元,問買主出錢多少?

[解] $13.5\div(3\%-2\%)=$成交價格,

(雙方佣錢,都照成交價格計算,這兩個百分率的母數相同,換句話說,是同量代表數,所以可相減.)

$\therefore\ 13.5\div(3\%-2\%)\times(1+2\%)=1377$,

答: 買主出1377元.

2. 某人有布 300 疋,每疋以 3 元賣出,把 4% 的佣錢送給中人,再用實收到的錢,買每疋價 2 元的布,又出佣錢 8%,問此人買進的布,共有幾疋?

[解] $3\times300=900$元……賣值,

$900 \times (1-4\%) = 864$ 元……實收售款,

這864元買布,連佣金在內,是母子和,

$\therefore\ 864 \div (1+8\%) = 800$ 元……買布值,

$800 \div 2 = 400$……買入疋數.

答: 此人買進布400疋.

(*E*) **折扣問題示例:**

1. 賣書一本,定價1.24元,先打八五折,再打九折,折實是多少?

[解] $1.24 \times 85\% \times 90\% = 0.9486$,

答: 折實九角四分八釐六.

2. 某書定價4.5元,實價只賣3.6元.問打幾扣?

[解] 3.6是母子較,4.5是母數,但

母子較÷母數=1－百分率,

∴ 百分率=1－(母子較÷母數),

即 $1-(3.6 \div 4.5) = 20\%$,

答: 打二扣.

(*F*) **保險問題示例:**

1. 華興商店,房屋值銀67500元,商品值銀25000元,照80%做保額,向公司保火險,保費照12%打二五折;該付保費多少?

[解]　$(67500+25000)\times80\%\times12\%\times25\%=2220$ 元,

答: 該付保費2220元.

2. 6000元的貨物,裝船運往外埠,照價值80%保水險,保費5%; 不幸貨船觸礁沈沒,保險公司照保額賠償;問貨主與公司,各損失多少?

[解]　$6000\times80\%=4800$ 元……保額

$4800\times5\%=240$ 元……保費

$6000+240-4800=1440$ 元……貨主損失

$4800-240=4560$ 元……保險公司損失

(G) 稅捐問題示例:

1. 某人有地1500畝,每畝應納土地捐洋5分,又教育附稅20%. 問共應納洋幾元?

[解]　$0.05\times1500\times(1+20\%)=90$,

答: 應納洋90元.

2. 絨布10000碼進口,每碼價洋4角8分;若照海關稅則,繳進口稅12.5%, 問應繳洋多少元? 若欲於售出時,獲利25%, 問每碼須售洋多少?

[解]　$10000\times0.48\times12.5\%=600$,

答: 應繳稅銀600元,

$$0.48\times(1+25\%)+\frac{600}{10000}=0.66,$$

答: 每碼應售洋6角6分.

(*H*) 單利息問題示例:

1. 計算單利息依據什麼公式?

答: $I=P\times r\times n$ ······························(1)

$A=P\times(1+r\times n)$ ······························(2)

式中 I=利息, P=本金, r=利率, n=期數,

A=本利和.

2. 年利1分,月利1分,日利1分,各有什麼意義?

答: 年利1分是10%, 月利1分是1%,

日利1分是0.01%.

3. 三月一日買進裁兵公債5000元,每百元市價42元,到六月底中籤還本,又照年利5釐得半年利息.問照買本計算,合月利率多少?

[解] $5000\times42\%=2100$ 元······買本

$5000\times5\%\times\frac{1}{2}=125$ 元······利息

$5000-2100=2900$ 元······中籤得銀

$2900+125=3025$ 元······共得銀

根據上述公式

$$I=P\times r\times n,$$

得　$$r=I\div(P\times n),$$

現在求月利率,共經4個月,所以得

$$3025\div(2100\times 4)=36\%,$$

答:　合月利率36分.

4. 某公司資本300萬元,某年純益金845700元,先提10%做公積,再發股東的官利8%.餘下來的,再照十成分派.股東得5成,職工得4成,餘1成做公共事業;那麼股東共得多少,職工共得多少?股息年利率是多少?

〔解〕 $845700\times\dfrac{90}{100}-3000000\times\dfrac{8}{100}=521130$ 元

(發去官利後餘款)

$521130\times\dfrac{50}{100}+3000000\times\dfrac{8}{100}=500565$ 元

(股東所得官紅利)

$521130\times\dfrac{40}{100}=208452$ 元　(職工花紅)

$500565\div3000000=16.7\%$　(股息利率)

答: 股東共得官利紅利500565元,

職工共得花紅208452元,

股息合年利一分六釐七.

5. 借去本銀1350元,年利率6釐,後來收回,得利息135元.問期限是幾年幾月?

[解] 從公式 $I=P\times r\times n$,

得 $n=I\div(P\times r)$,

$\therefore\ 135\div(1350\times 6\%)=1\frac{2}{3}$年,

答: 期限是1年8月.

6. 借出款項一宗,照日利2分計算,150日共得利息24元,問本銀多少?

[解] 從公式 $I=P\times r\times n$,

得 $P=I\div(r\times n)$,

$\therefore\ 24\div(0.02\%\times 150)=800$,

答: 本銀800元.

7. 向人借洋200元,月利率7釐,過2月6日還清,問應付本利洋共幾元?

[解] 依公式 $A=P(1+r\times n)$,得

$$200\times\left(1+0.7\%\times 2\frac{6}{30}\right)=203.08,$$

答：應付本利洋203元8分.

(I) 複利息問題示例：

1. 計算複利息,根據什麼公式？

答：
$$A=P\times\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt},$$

式中 A 是本利和, P 是本金, r 是利率, t 是年數, n 是每年轉複利的期數. 在算術裏面,祇可解決下面的四種問題：

(a) 已知 P, r, n, t; 求 A (用上面的公式).

(b) 已知 A, r, n, t; 求 P, 用下面的公式

$$P=A\div\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

(c) 已知 P, r, n, t; 求利息 I,

$$I=P\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}-1\right].$$

(d) 已知 I, r, n, t; 求 P,

$$P=I\div\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}-1\right].$$

求 r 與時期,算術中借複利表的幫助,也可以求出近似的數值來. 此項算法,可參閱"復興初中算術",本書不贅.

2. 本金2000元,年利率六釐,每年複利一次,問滿二年後之本利和多少? (滬23)

[解] $A=2000\times(1+6\%)^2=2000\times1.06^2$

$=2000\times1.1236=2247.2,$

答: 本利和2247.2元.

3. 本金800元,年利9釐,每四個月計算複利,一年後,可得利息幾元?

[解] $I=800\times\left[\left(1+\frac{9\%}{3}\right)^3-1\right]=800\times(1.03^3-1)$

$=800\times(1.092727-1)=74.18,$

答: 可得利息74.18元.

4. 借出本銀450元,照年利率8%,每年結算複利一次.問3年5月的本利和是多少?

[解] $450\times(1+8\%)^3=$三年後的本利和,

$\therefore\ 450\times(1+8\%)^3\times\left(1+8\%\times\frac{5}{12}\right)$

$=450\times(1.259712)\times\left(1+\frac{1}{30}\right)$

$=450\times1.259712\times\frac{31}{30}$

$=1.259712\times15\times31=585.77,$

答: 本利和是585.77元.

5. 放款一宗,年利6釐,每年複利一次,2年後收回本利和5618元.問此款有多少?

[解] $P=5618\div(1+6\%)^2$

$=5618\div1.1236=5000,$

答: 此款是5000元.

6. 放款一宗,年利5釐,每半年轉複利一次,一年後得息銀405元.問此款是多少?

[解] $P=405\div\left[\left(1+\frac{5\%}{2}\right)^2-1\right]$

$=405\div[(1+2.5\%)^2-1]$

$=405\div(1.025^2-1)$

$=405\div0.050625=8000,$

答: 此款是8000元.

VI. 應用整數性質的問題:——

(A) 一般要點: 凡解關及約數與倍數的問題,須注意下列各點:

1. 約數與倍數的基本原理是解題的根據.

2. 質因數檢驗法,大有幫助.

3. 各數量須化成同單位,再求大公約與小公倍.

4 遇有開方運算,可利用分解因數法,以求簡捷

(*B*) 模範問題舉例:

1. 兵士105人,馬84匹,分駐若干營房,令每房兵馬之數各相等,則須營房若干?且每處兵馬之數各若干? (贛22)

[解]
$$\begin{array}{r|rr} 3 & 105 & 84 \\ \hline 7 & 35 & 28 \\ \hline & 5 & 4 \end{array} \qquad 3\times7=21,$$

3, 7, 21, 都是105與84的公約數,

故可分駐3處,或7處,或21處,

即須營房3座,或7座,或21座.

每房兵馬數,也有三種如下:

分3處, 兵35人, 馬28匹;

分7處, 兵15人, 馬12匹;

分21處, 兵5人, 馬4匹.

2. 長1尺8寸2分,橫1尺3寸的紙,要切成若干同大的正方形,沒有一些廢紙,而且面積又是最大,問可切成幾塊?每塊的一邊長多少?

[解]
$$\begin{array}{r|rr} 2 & 182 & 130 \\ \hline 13 & 91 & 65 \\ \hline & 7 & 5 \end{array} \qquad 2\times13=26, \quad 7\times5=35$$

答: 正方每邊2寸6分可切35塊.

3. 用長12尺,寬9寸的板,拚成一個正方形,至少須用板幾塊?

[解]

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 120 & 9 \\ \hline & 40 & 3 \end{array}$$

最小公倍數 $=3^2\times40=360$

$360\div120=3,\quad 360\div9=40,\quad 40\times3=120$

答: 至少須用板120塊.

4. 碁子一盤,分做若干堆,每堆12粒,多7粒;每堆18粒,少11粒;每堆20粒,少13粒.問這盤碁子至少有幾粒?

[解] 每堆18粒,少11粒,也是餘7粒;

每堆2J粒,少13粒,也是餘7粒;

所以這堆碁子拿掉7粒,就可以分成12粒,18粒,20粒一堆而無餘.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 12 & 18 & 20 \\ \hline 2 & 6 & 9 & 10 \\ \hline 3 & 3 & 9 & 5 \\ \hline & 1 & 3 & 5 \end{array}$$

$2^2\times3^2\times5=180$

$180+7=187$

答: 這堆碁子至少有187粒.

5. 有銅元一包,看上去不滿100個;3個一數多1個,5個一數多2個,7個一數多6個;問這

包銅元有幾個?

[解]　$(5\times7)\times2=70=3\times23+1$

$\therefore$ 70是3個一數多1,而5和7都數得盡的最小數.

$(3\times7)\times2=42=5\times8+2$

$\therefore$ 42是5個一數多2,而3和7都數得盡的最小數.

$(3\times5)\times6=90=7\times12+6$

$\therefore$ 90是7個一數多6,而3和5都數得盡的最小數.於是

$70+42+90=202$ 便是3除餘1,5除餘2,7除餘6的數目.題言不滿100,故須減去3,5,7的 $L.C.M.$ 但3,5,7,的 $L.C.M.=105$,

$\therefore$ $202-105=97$.

答:　這包銅元有97個.

6. 三人繞一圓場跑,甲15分鐘繞1轉,乙11分鐘繞1轉,丙9分鐘繞1轉.若三人同時自同地同向出發,間隔幾時後,又可相會?相會時各已跑過多少轉?

[解]　三人相會,並不一定在原出發點,所以並不

是簡單的小公倍問題.從題目,知

甲每分鐘走$\frac{1}{15}$轉,

乙每分鐘走$\frac{1}{11}$轉,

丙每分鐘走$\frac{1}{9}$轉,

故乙追及甲,即兩人所行相差 1 轉,於是所需的時間是

$$1 \div \left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)=\frac{165}{4}\text{分},$$

丙追及乙所需的時間,是

$$1 \div \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)=\frac{99}{2}\text{分},$$

故知三人相會的時間,是 $\frac{165}{4}$ 與 $\frac{99}{2}$ 的最小公倍數,即 $\frac{165}{4}$ 與 $\frac{198}{4}$ 的 *L. C. M.*, 即 $\frac{495}{2}$.

答: 隔 4 小時 7 分 30 秒後,三人又可相會

$$\text{甲所行轉數}=\frac{495}{2}\times\frac{1}{15}=16\frac{1}{2},$$

$$\text{乙所行轉數}=\frac{495}{2}\times\frac{1}{11}=22\frac{1}{2},$$

$$\text{丙所行轉數}=\frac{495}{2}\times\frac{1}{9}=27\frac{1}{2}.$$

7. 兩數最小公倍數是105，最大公約數是7；兩數都比7大.求這兩數.

[解] 兩數相乘的積是

$$105\times7=15\times7\times7,$$

因爲都比7大,所以兩數是21, 35

8. 有二位數,十位數字是個位數字的3倍,若從此數減54,那麼位次顚倒.求這數.

[解] 二位數與其倒位數的差,等於數字差的9倍.所以

$$54\div9=6=\text{數字差},$$

於是 $6\div(3-1)=3=\text{個位數字}$,

$$3\times3=9=\text{十位數字},$$

答： 此數是93.

9. 有二位數,本數和倒位數相加,是143；而數字相乘,得40.求這數.

[解] 二位數與倒位數的和,是數字和的11倍.所以 $143\div11=13=\text{數字和}$,

但 $40=2^3\times5=8\times5$, 而 $8+5=13$,

故此數是85,或58.

10. 甲乙二數的積是210,乙丙二數的積是315,甲

丙二數的積是294.求此三數.

[解]　$210\times315\times294=(甲\times乙)\times(乙\times丙)\times(甲\times丙)$

$$=(甲\times乙\times丙)^2,$$

$\therefore\ \sqrt{210\times315\times294}=$甲乙丙的積

$=\sqrt{2\times3\times5\times7\times3^2\times5\times7\times2\times3\times7^2}$

$=\sqrt{2^2\times3^4\times5^2\times7^4}=2\times3^2\times5\times7^2$

$=4410,$

$\therefore\ 4410\div315=\underline{14}=$甲數,

$4410\div294=\underline{15}=$乙數,

$4410\div210=\underline{21}=$丙數.

11. 有一數,他的 $\frac{1}{6}$ 和 $\frac{7}{8}$ 的乘積,是524244;試求這數是多少?

[解]　這數 $=\sqrt{524244\times6\times\frac{8}{7}}$

$=\sqrt{74892\times6\times8}=\sqrt{2^6\times3^2\times6241}$

$=\sqrt{2^6\times3^2\times79^2}=2^3\times3\times79$

$=\underline{1896}.$

12. 有兵許多人,可排成每面970人,厚9列的中空方陣;現在要排成一個實心方陣,那麼前面一列的人數是多少?

[解] $\sqrt{(970-9)\times 9\times 4}=\sqrt{2^2\times 3^2\times 31^2}$

$=186$

答: 前面一列186人.

13. 富君有銀10000元,買國貨公司股票,股數與每股元數相等,買了還剩396元;問他買了幾股?

[解] $10000-396=9604$元=股票總值,因股數和每股元數相等,

$\therefore$ 所買股數$=\sqrt{9604}$

$=\sqrt{2^2\times 7^4}$

$=2\times 7^2=98.$

14 有銀一宗,分給甲乙丙三人;使甲比乙如1:2,乙比丙如3:4;三人所得元數連乘積是3888;問三人各得多少?

[解] 甲:乙:丙=3:6:8

今命甲的元數三分之一等於某數,

則 甲所有元數=某數3倍,

乙所有元數=某數6倍,

丙所有元數=某數8倍,

$\therefore$ 某數$=\sqrt[3]{3888\div(3\times 6\times 8)}=3,$

$\therefore$ 甲得 $3\times3=9$ 元,

乙得 $3\times6=18$ 元,

丙得 $3\times8=24$ 元.

15. 趙,錢,孫三人所有銀的比,成連比例;趙有 600 元,孫有 2400 元,問錢有幾元?

[解] $600:x=x:2400$,

$\therefore\ x=\sqrt{600\times2400}=1200$,

答: 錢有 1200 元.

第二篇 代數

第一章 式子的變化

I 整式的運算:——

(A) 一般要點: 對於整式的運算,須注意下列各要點:

1. 凡數式相加,或兩式相減,可把加式或減式,看做一個大括弧,聯寫起來,照去括弧的方法,除去括弧後,合併相似項.

2. 式中各項前的加減號,是屬於該項的正負號.

3. 各式通常總按某文字的降冪序排列.

4. 一文字的式子,或兩文字的齊次式,互相乘除時,可利用分離係數法.

5. 一式被二項式所除,常可利用綜合除法.

6. 兩式相乘或相除,常可利用特別恆等式如下:

(a) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

(b) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

(c)　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$.

(d)　$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

(e)　$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

(f)　$(ax+b)(px+q)=apx^2+(aq+bp)x+bq$.

(g)　$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

(h)　$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$.

(B) 模範題示例:

1. 化簡

$$(x+y)(y-z)(z-x)-[z(x^2+y^2)-\{x(y^2+z^2)$$
$$+y(z^2+x^2)\}].$$

[解]　原式 $=x(y-z)(z-x)+y(y-z)(z-x)$

$$-z(x^2+y^2)+x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)$$

$$=x(yz-z^2-xy+xz)+y(yz-z^2-xy+xz)$$

$$-z(x^2+y^2)+x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)$$

$$=x^2z+y^2z-xy^2-xz^2-yz^2-yx^2$$

$$+2xyz-x^2z-y^2z+xy^2+xz^2+yz^2+yx^2$$

$$=\underline{2xyz}.$$

2. 求 $(2y^4+3x^4-5xy^3-4x^2y^2)(2x^2-3y^2-xy)$ 的積.

[解] 先依 x 的降冪序排列,再利用分離係數法:

$$
\begin{array}{r}
3+0-\ 4-\ 5+\ 2 \\
\times)\qquad 2-\ 1-\ 3 \\
\hline
6+0-\ 8-10+\ 4 \\
-3+\ 0+\ 4+\ 5-\ 2 \\
-\ 9+\ 0+12+15-6 \\
\hline
6-3-17-\ 6+21+13-6
\end{array}
$$

$\therefore$ 積 $=6x^6-3x^5y-17x^4y^2-6x^3y^3+21x^2y^4+13xy^5-6y^6$

3. $(x^3+x^4-16x-4-9x^2)\div(4+x^2+4x)=?$

(浙 22)

[解] 先依降冪序排列,再用分離係數法:

$$
\begin{array}{r|l}
1+1-\ 9-16-4 & 1+4+4 \\
\cline{2-2}
1+4+\ 4 & 1-3-1 \\
\cline{1-1}
-3-13-16 & \\
-3-12-12 & \\
\cline{1-1}
-\ 1-\ 4-4 & \\
-\ 1-\ 4-4 & \\
\cline{1-1}
\end{array}
\qquad \therefore\ 商=x^2-3x-1.
$$

4. 求 $(8x^6-6x^5+4x^4+9x^3-9x^2-4x+3)\div(4x-3)$ 的商.

[解] 此式可利用綜合除法.

原式$\div(4x-3)=$原式$\div\left[4\left(x-\frac{3}{4}\right)\right]$, 故得

$$\begin{array}{r|l} & 8-6+4+\ \ 9-9-4+3 \ \big|\ \tfrac{3}{4} \\ & \quad +6+0+\ \ 3+9+0-3 \\ \hline 4 & 8+0+4+12+0-4+0 \\ \hline & 2+0+1+\ \ 3+0-1 \end{array}$$

$\therefore$ 商 $=2x^5+x^3+3x^2-1.$

5. $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)=?$

［解］ 原式 $=(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)=(a^4-1)(a^4+1)$

$$=a^8-1.$$

6. 化簡：$(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2).$

［解］ 原式 $=[(x)^2+x(2y)+(2y)^2][(x)^2-x(2y)+(2y)^2]$

$$=(x)^4+(x^2)(2y)^2+(2y)^4$$

$$=x^4+4x^2y^2+16y^4.$$

7. 化簡：$(a^2+2ab+b^2+c^2)(a^2+2ab+b^2-c^2).$

［解］ 原式 $=[(a+b)^2+c^2][(a+b)^2-c^2]$

$$=(a+b)^4-c^4$$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4-c^4.$$

8. 化簡：$\dfrac{(3a-2b)^3+(2a+b)^3}{5a-b}.$

［解］ 原式 $=\dfrac{(3a-2b)^3+(2a+b)^3}{(3a-2b)+(2a+b)}$

$$
\begin{aligned}
&=(3a-2b)^2-(3a-2b)(2a+b)+(2a+b)^2\\
&=9a^2-12ab+4b^2-6a^2+ab+2b^2\\
&\qquad\qquad+4a^2+4ab+b^2\\
&=\underline{7a^2-7ab+7b^2}.
\end{aligned}
$$

II. 分解整式的因子:——

(A) 一般要點: 分解因子,須注意下列各點:

1. 第一步,須將各項的公共單項因子析出.

2. 第二步,再依劈因子公式,或用分羣方法,分解括弧中的因子.

3. 第一項前有負號,先析出公共因子 (-1),再將括弧中式子劈因子,較為便利.

4. 分羣,析出公共因子 (-1) 時,注意括弧內各項的符號,須正負對調.

5. 分羣有時須將一項析成兩項;有時須在原式中加減同項;惟須不變原式之值,且須合於劈因子公式.

6. 將前節所舉特別恆等式倒寫,就是劈因子公式.

7. 每一因子,必須分解到不能再分解為止.

8. 剩餘定理與綜合除法,可以幫助我們劈因子.

(B) 模範題示例:

1. 分解下列各式爲質因式:

(a) $ax-by-bx+ay$.

(b) a^6-b^6

(c) $2ac+2bd-a^2+b^2-c^2+d^2$.

(d) $x^4+y^4+x^2y^2$.　(北平)

[解] (a) 原式$=(ax+ay)-(bx+by)$

$$=a(x+y)-b(x+y)=\underline{(a-b)(x+y)}.$$

(b) 原式$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$=\underline{(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}$$

(c) 原式$=-[a^2-2ac+c^2-b^2-2bd-d^2]$

$$=-[(a^2-2ac+c^2)-(b^2+2bd+d^2)]$$

$$=-[(a-c)^2-(b+d)^2]$$

$$=-[(a-c)+(b+d)][(a-c)-(b+d)]$$

$$=-\underline{(a+b-c+d)(a-b-c-d)}.$$

(d) [解] 依公式,

原式$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

[別解] 原式$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$

$$=\underline{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}.$$

2. 分解 $2x^3-7x^2+7x-2$ 的因子.

［解］ 使原式中 $x=1$, 則原式$=0$, 故原式有因子 $(x-1)$. 利用綜合除法, 知

$$原式=(x-1)(2x^2-5x+2)$$

$$=(x-1)(2x-1)(x-2).$$

3. 分解 x^4-11x^2+1 的因子.

［解］ $$原式=x^4-2x^2+1-9x^2$$

$$=(x^2-1)^2-(3x)^2$$

$$=(x^2+3x-1)(x^2-3x-1).$$

4. 分解 a^4+4 的因子.

［解］ $$原式=a^4+4a^2+4-4a^2$$

$$=(a^2+2)^2-(2a)^2=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2).$$

5. 分解 $9a^2+6ab-4c^2+4cb$ 的因子.

［解］ $$原式=9a^2+6ab+b^2-b^2+4cb-4c^2$$

$$=(9a^2+6ab+b^2)-(b^2-4bc+4c^2)$$

$$=(3a+b)^2-(b-2c)^2$$

$$=(3a+2b-2c)(3a+2c).$$

6. 分解 $x^3-y^3+z^3+3xyz$ 的因子.

［解］ $$原式=x^3+(-y)^3+z^3-3x(-y)z$$

$$=(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx).$$

7. 分解 $x^4-30x^3y+300x^2y^2-1000xy^3$ 的因子.

[解] 原式$=x(x^3-30x^2y+300xy^2-1000y^3)$

$=x[x^3-3(x^2)(10y)+3(x)(10y)^2-(10y)^3]$

$=\underline{x(x-10y)^3}.$

8. 分解 $x^4-18ax^3+85a^2x^2-36a^3x+4a^4$ 的因子.

[解] 原式$=(x^2-9ax+2a^2)^2.$

$x^2=\sqrt{x^4}$, $2a^2=\pm\sqrt{4a^4}$, 因第二項,第四項同號,所以 $2a^2$ 取正根.

$-9ax=(-18ax^3)\div(2x^2)=(-36a^3x)\div(4a^2).$

$(-9ax)^2+2(2a^2)(x^2)=\underline{85a^2x^2}.$

9. 分解 $6x^4+5x^3-12x^2-5x+6$ 的因子.

[解] 原式$=(6x^4+5x^3-6x^2)-(6x^2+5x-6)$

$=x^2(6x^2+5x-6)-(6x^2+5x-6)$

$=(x^2-1)(6x^2+5x-6)$

$=\underline{(x-1)(x+1)(2x+3)(3x-2)}.$

10. 分解 $a^4+a^3+a^2+2$ 的因子.

[解] 原式$=(a^4+a^2+1)+(a^3+1)$

$=(a^2+a+1)(a^2-a+1)+(a+1)(a^2-a+1)$

$=(a^2-a+1)[(a^2+a+1)+(a+1)]$

$=\underline{(a^2-a+1)(a^2+2a+2)}.$

11. 分解 $(2x+3y)^2-(x-4y)^2$ 爲因數式. (浙 22)

[解] 原式 $=[(2x+3y)+(x-4y)][(2x+3y)-(x-4y)]$

$$=\underline{(3x-y)(x+7y)}.$$

12. 求下列各式的最低公倍數.

$x^2-4x+3,\quad x^2+4x-5,\quad x^3-6x^2+9x.$ (粤)

[解] $x^2-4x+3=(x-1)(x-3),$

$x^2+4x-5=(x-1)(x+5),$

$x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2,$

$\therefore\ L.C.M.=\underline{x(x-1)(x-3)^2(x+5)}.$

13. 求下列各式的最高公約數.

$3x^2-6x+3,\quad 6x^2+6x-12,\quad 12x^2-12.$

[解] $3x^2-6x+3=3(x-1)^2,$

$6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2),$

$12x^2-12=12(x-1)(x+1).$

$\therefore\ H.C.F.=\underline{3(x-1)}.$

14. 求 $8a^3-b^3$ 的因子. (浙 21)

[解] 原式 $=(2a)^3-b^3=\underline{(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)}.$

III. 分式的運算:——

(A) 一般要點: 代數中分式的運算方法,與算術中分數全同,不過分母分子是代數式罷了.在

運算的時候,分子須當做整個數目看,最好加上括弧,以免錯誤.

(*B*) 模範題示例:

1. 試求下式的結果

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{2}{x(x-1)}.\qquad\text{(滬 23)}$$

[解]　原式$=\dfrac{x(x-1)+x+2(x+1)}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{x^2-x+x+2x+2}{x(x^2-1)}$

$$=\underline{\frac{x^2+2x+2}{x^3-x}}.$$

2. 化簡下列各式:

(*a*)　$\dfrac{x^2-5xy+4y^2}{x^2-16y^2}.$

(*b*)　$\dfrac{2x+1}{x^2-1}+\dfrac{4}{x^2-3x+2}.$　(河北 22)

[解]　(*a*)　原式$=\dfrac{(x-y)(x-4y)}{(x+4y)(x-4y)}=\underline{\dfrac{x-y}{x+4y}}.$

(*b*)　原式$=\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{4}{(x-1)(x-2)}$

$$=\frac{(2x+1)(x-2)+4(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$=\frac{2x^2-3x-2+4x+4}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$=\underline{\frac{2x^2+x+2}{x^3-2x^2-x+2}}.$$

3. 試簡單 $\dfrac{x^3-1}{4x^2-9}\times\dfrac{(2x-3)^2}{x^2+x+1}$. (湘二屆)

[解] 原式 $=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(2x-3)(2x+3)}\times\dfrac{(2x-3)^2}{x^2+x+1}$

$$=\frac{(x-1)(2x-3)}{2x+3}=\frac{2x^2-5x+3}{2x+3}.$$

4. 化簡 $\dfrac{a+b}{a-b}\div\dfrac{a^2+b^2+2ab}{a^2-b^2}$. (湘五屆)

[解] 原式 $=\dfrac{a+b}{a-b}\times\dfrac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}=1.$

5. $\dfrac{5}{x^2-14x+45}-\dfrac{3}{x-5}-\dfrac{2}{x-9}=?$ (浙 21)

[解] 原式 $=\dfrac{5}{(x-5)(x-9)}-\dfrac{3}{x-5}-\dfrac{2}{x-9}$

$$=\frac{5-3(x-9)-2(x-5)}{(x-5)(x-9)}=\frac{42-5x}{x^2-14x+45}.$$

6. 化簡: $\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\dfrac{x-1}{x}}}$.

[解] 原式 $=\dfrac{x}{x-\dfrac{x(x+2)}{x(x+2)-(x-1)}}=\dfrac{x}{x-\dfrac{x^2+2x}{x^2+x+1}}$

$$=\frac{x(x^2+x+1)}{x(x^2+x+1)-(x^2+2x)}=\frac{x(x^2+x+1)}{x^3-x}$$

$$=\frac{x(x^2+x+1)}{x(x^2-1)}=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}.$$

IV. 指數式的運算:——

(A) **一般要點**: 指數式的運算,悉按以下各定義與各定律:

1. $a^0=1,\quad a^{-n}=\dfrac{1}{a^n},\quad a^{\frac{q}{p}}=\sqrt[p]{a^q},$

$$a^{-\frac{q}{p}}=\frac{1}{\sqrt[p]{a^q}}.$$

2. $a^m\cdot a^n\cdot a^l=a^{m+n+l}.$

$(a^m)^n=a^{mn}.$

$a^m\div a^n=a^{m-n}.$

$(abc)^n=a^nb^nc^n.$

$(a/b)^n=a^n/b^n.$

式中m, n, l可有一切正負整分數之值.

(B) **模範題示例**:

1. 簡化 $\left(x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{11}}\right)^{\frac{33}{5}}.$ (河北22)

[解] 原式$=\left(x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{11}}\right)^{\frac{33}{5}}=x^{\frac{25}{33}\times\frac{33}{5}}=\underset{\sim}{x^5}.$

2. 用分數指數簡約以下各式:

(a) $\sqrt{a^3b^{-2}}\div\sqrt[3]{a^{-4}b^5}.$

(b) $\sqrt[3]{a^6b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}}\times\left(a^4bc^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$

(c) $6\sqrt[3]{\dfrac{2x}{3a^2}}.$

[解] (a) 原 式 $=(a^3b^{-2})^{\frac{1}{2}}\div(a^{-4}b^5)^{\frac{1}{3}}$

$$=a^{\frac{3}{2}}b^{-1}\div(a^{-\frac{4}{3}}b^{\frac{5}{3}})$$

$$=a^{\frac{3}{2}-(-\frac{4}{3})}b^{-1-\frac{5}{3}}=a^{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}b^{-\frac{8}{3}}$$

$$=\underline{a^{\frac{17}{6}}b^{-\frac{8}{3}}}.$$

(b) 原 式 $=(a^6b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\times(a^4bc^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}$

$$=a^2b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{6}}\times a^{-2}b^{-\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{6}}$$

$$=a^{2-2}b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}}=a^0b^0c^0=\underline{1}.$$

(c) 原 式 $=6\dfrac{\sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{3a^2}}=6(2x)^{\frac{1}{3}}(3a^2)^{-\frac{1}{3}}$

$$=6\times2^{\frac{1}{3}}\times3^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\underline{2^{\frac{4}{3}}\cdot3^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}}.$$

3. $\left(a^{\frac{4}{3}}-2+a^{-\frac{4}{3}}\right)\left(a^{\frac{4}{3}}+2+a^{-\frac{4}{3}}\right)=?$

[解] 原 式 $=\left[a^{\frac{4}{3}}-2\left(a^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)+a^{-\frac{4}{3}}\right]$

$$\times\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^2+2\left(a^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)+\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^2\right]$$

$$=\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}\right)^2\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$=\left(a^{\frac{4}{3}}-a^{-\frac{4}{3}}\right)^2=\underline{a^{\frac{8}{3}}-2+a^{-\frac{8}{3}}}.$$

4. $(64x^{-1}+27y^{-2})\div\left(4x^{-\frac{1}{3}}+3y^{-\frac{2}{3}}\right)=?$

[解]　原式$=\left[\left(4x^{-\frac{1}{3}}\right)^3+\left(3y^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]\div\left(4x^{-\frac{1}{3}}+3y^{-\frac{2}{3}}\right)$

$$=16x^{-\frac{2}{3}}-12x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+9y^{-\frac{4}{3}}.$$

V.　根式的運算:——

(A)　一般要點:　對於根式的運算,須注意下列各點:——

1. 根式的一切變化,都根據下述五原理:

(a)　$(\sqrt[m]{a})^m \rightleftarrows \sqrt[m]{a^m} \rightleftarrows a.$

(b)　$\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b} \rightleftarrows \sqrt[m]{ab}.$

(c)　$\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \rightleftarrows \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}.$

(d)　$\sqrt[mn]{a^n} \rightleftarrows \sqrt[m]{a}.$

(e)　$\sqrt[mn]{a} \rightleftarrows \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$

2. 祇有相似根式,纔能夠加減其係數,併成一個根式.

3. 任意兩根式,都可以相乘或相除,根指數不同的,必須先化成同指數.

4. 凡分母裏的根式,必須化去其根號,以便運算.

(B)　模範題示例：

1. 簡化：$\sqrt{48}-\sqrt{12}+\sqrt{3}$.　　　　(河北 22)

[解]　原式 $=\sqrt{4^2\times 3}-\sqrt{2^2\times 3}+\sqrt{3}$

$$=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}.$$

2. 將 $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ 簡單之　　　　(成都一屆)

[解]　原式 $=\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}$

$$=\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}=\frac{9\times 2+12\sqrt{2}\sqrt{3}+4\times 3}{9\times 2-4\times 3}$$

$$=\frac{30+12\sqrt{6}}{6}=5+2\sqrt{6}.$$

3. $(7-3\sqrt{6})(9+7\sqrt{6})=?$　　　　(浙 21)

[解]　原式 $=63-27\sqrt{6}+49\sqrt{6}-3\times 7\times 6$

$$=22\sqrt{6}-63.$$

4. $\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}\times\sqrt[3]{\dfrac{6}{5}}=?$

[解]　原式 $=\sqrt[3]{\dfrac{4\times 6}{5\times 5}}=\sqrt[3]{\dfrac{2^3\times 3\times 5}{5^2\times 5}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{5^3}}$

$$=\frac{2\times\sqrt[3]{15}}{5}=\frac{2}{5}\sqrt[3]{15}.$$

5. 化簡：$\dfrac{\sqrt{2x^3}\sqrt[3]{4x^3y}}{\sqrt[4]{8x^2y^5}}$.

［解］ 原式$=\dfrac{x\sqrt{2x}\cdot x\sqrt[3]{2^2y}}{y\sqrt[4]{2^3x^2y}}=\dfrac{x^2\sqrt[12]{2^6x^6}\sqrt[12]{2^8y^4}}{y\sqrt[12]{2^9x^6y^3}}$

$$=\frac{x^2}{y}\times\sqrt[12]{\frac{2^{14}x^6y^4}{2^9x^6y^3}}=\frac{x^2}{y}\sqrt[12]{32y}.$$

6. 化去下列各式分母中的根號：

$$(a)\ \frac{15}{\sqrt{6}},\quad (b)\ \frac{5}{\sqrt[3]{2}},\quad (c)\ \frac{3\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{243}}.$$

［解］ (a) 原式$=\dfrac{15\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{15\sqrt{6}}{6}=\dfrac{5}{2}\sqrt{6}.$

(b) 原式$=\dfrac{5\times\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\dfrac{5}{2}\sqrt[3]{4}.$

(c) 原式$=\dfrac{3\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{3^5}}=\dfrac{3\sqrt[3]{5}}{6\sqrt[3]{3^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{3^2}\times\sqrt[3]{3}}$

$$=\frac{\sqrt[3]{5\times3}}{2\sqrt[3]{3^3}}=\frac{1}{6}\sqrt[3]{15}.$$

7. 簡化：$\dfrac{2\sqrt{15}+8}{5+\sqrt{15}}\div\dfrac{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$.

［解］ 原式$=\dfrac{2(\sqrt{15}+4)}{5+\sqrt{15}}\times\dfrac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{2(4\sqrt{3}-3\sqrt{5})}$

$$=\frac{4+\sqrt{15}}{5+\sqrt{15}}\times\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$$

$$=\frac{(4+\sqrt{15})(5-\sqrt{15})}{25-15}$$

$$\times\frac{(5\sqrt{3}-3\sqrt{5})(4\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{48-45}$$

$$=\frac{20+\sqrt{15}-15}{10}\times\frac{60+3\sqrt{15}-45}{3}$$

$$=\frac{(5+\sqrt{15})(15+3\sqrt{15})}{30}=\frac{(5+\sqrt{15})^2}{10}$$

$$=\frac{25+10\sqrt{15}+15}{10}=\frac{40+10\sqrt{15}}{10}=\underline{4+\sqrt{15}}.$$

8. 化簡：$\dfrac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

［解］ 原式$=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}+\dfrac{(2-\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}$

$$=\frac{2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+3}=\frac{(3\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-3)}{3-9}$$

$$=\frac{9-10\sqrt{3}+3}{-6}=\frac{10\sqrt{3}-12}{6}=\underline{\frac{1}{3}(5\sqrt{3}-6)}.$$

9. 化簡：$\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}-\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

［解］ 原式

$$=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})-(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{[1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2]-[1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2]}{(1+\sqrt{2})^2-3}$$

$$=\frac{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-1+(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{1+2\sqrt{2}+2-3}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{2\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{3}.$$

VI. **虛數的運算:——**

(*A*) **一般要點:** 對於虛數的運算,祇須注意下列各特性:

1. $i^{4n+1}=i=\sqrt{-1}.$

2. $i^{4n+2}=i^2=-1.$

3 $i^{4n+3}=i^3=-\sqrt{-1}.$

4. $i^{4n}\quad=i^4=+1$

5. $\sqrt{-k}$必須化成$\sqrt{k}\,i$的形式,再行運算.

(*B*) **模範題示例:**

1. 化簡: $3\sqrt{-25}+\sqrt{-1}-2\sqrt{-9}.$

[解] 原式$=3\sqrt{5^2(-1)}+\sqrt{-1}-2\sqrt{3^2(-1)}$

$$=15\sqrt{-1}+\sqrt{-1}-6\sqrt{-1}=10\,i.$$

2. 求 $(7-\sqrt{-3})(5+\sqrt{-6})=?$

[解] 原式$=(7-\sqrt{3}\,i)(5+\sqrt{6}\,i)$

$$=35-5\sqrt{3}\,i+7\sqrt{6}\,i-\sqrt{18}\,i^2$$

$$=35-5\sqrt{3}\,i+7\sqrt{6}\,i+3\sqrt{2}$$

$$=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{35+3\sqrt{2}-(5\sqrt{3}-7\sqrt{6})i}.$$

注意: $\sqrt{-3}\times\sqrt{-6}\neq\sqrt{(-3)(-6)}=\sqrt{18}$.

3. 化簡: $\dfrac{-2+3\sqrt{2}i}{-2-3\sqrt{2}i}$.

［解］ 原式$=\dfrac{(-2+3\sqrt{2}i)^2}{(-2)^2-(3\sqrt{2}i)^2}=\dfrac{4-12\sqrt{2}\,i+18\,i^2}{4-18\,i^2}$

$$=\frac{4-18-12\sqrt{2}i}{4+18}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{11}(-7-6\sqrt{2}i)}.$$

VII. 開平方與開立方:——

(*A*) 一般要點: 代數式開平方,或開立方,根據下列恆等式,逐步演算:

1. $a^2+b(2a+b)\equiv(a+b)^2$.

2. $a^3+b(3a^2+3ab+b^2)\equiv(a+b)^3$.

(*B*) 模範題示例:

1. 求 $4x^{\frac{3}{2}}-12x^{\frac{3}{4}}+25-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}}$ 的平方根.

［解］ 將原式改書爲

$$4x^{\frac{6}{4}}-12x^{\frac{3}{4}}+25x^0-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{6}{4}}.$$

$$
\begin{array}{rl}
\text{根:} & \pm(2x^{\frac{3}{4}} - 3x^0 + 4x^{-\frac{3}{4}}) \\
 & \overline{\left| 4x^{\frac{6}{4}} - 12x^{\frac{3}{4}} + 25x^0 - 24x^{-\frac{3}{4}} + 16x^{-\frac{6}{4}} \right.} \\
a^2 = & \left| 4x^{\frac{6}{4}} \qquad\qquad (- \right. \\
2a+b = 4x^{\frac{3}{4}} - 3x^0 & \left| -12x^{\frac{3}{4}} + 25x^0 \right. \\
\times \quad b = \qquad -3x^0 & \\
b(2a+b) = & \left| -12x^{\frac{3}{4}} + 9x^0 \quad (- \right. \\
2a+b = 4x^{\frac{3}{4}} - 6x^0 + 4x^{\frac{3}{4}} & \left| 16x^0 - 24x^{-\frac{3}{4}} + 16x^{-\frac{6}{4}} \right. \\
b = \qquad 4x^{-\frac{3}{4}} & \\
b(2a+b) = & \left| 16x^0 - 24x^{-\frac{3}{4}} + 16x^{-\frac{6}{4}} \quad (- \right.
\end{array}
$$

∴ 原式的平方根是 $\pm(2x^{\frac{3}{4}} - 3 + 4x^{-\frac{3}{4}})$.

2. 求 $x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x - 1$ 的立方根.

[解] 將原式寫成 $x^6 - 3x^5 + 0 + 5x^3 + 0 - 3x - 1$.

$$
\begin{array}{rl}
\text{根:} & x^2 - x - 1 \\
 & \left| x^6 - 3x^5 + 0 + 5x^3 + 0 - 3x - 1 \right. \\
a^3 = & \left| x^6 \qquad\qquad (- \right. \\
3a^2 = 3x^4 & \left| -3x^5 + 0 + 5x^3 \right. \\
3ab = \quad -3x^3 & \\
b^2 = \qquad x^2 & \\
(3a^2 + 3ab + b^2) = 3x^4 - 3x^3 + x^2 & \\
b(3a^2 + 3ab + b^2) = & \left| -3x^5 + 3x^4 - x^3 \qquad (- \right. \\
3a^2 = 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 & \left| -3x^4 + 6x^3 + 0 - 3x - 1 \right. \\
3ab = \quad -3x^2 + 3x & \\
b^2 = \qquad +1 & \\
3a^2 + 3ab + b^2 = 3x^4 - 6x^3 + 0 + 3x + 1 & \\
b(3a^2 + 3ab + b^2) = & \left| -3x^4 + 6x^3 + 0 - 3x - 1 \right.
\end{array}
$$

∴ 原式的立方根是 $x^2 - x - 1$.

3. 求 $7 + 4\sqrt{3}$ 的平方根.

[解] 原式 $= 7 + 2\sqrt{12} = 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{4} + 4$

$$=(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2=(2+\sqrt{3})^2,$$

$\therefore$ 平方根 $=\pm(2+\sqrt{3})$.

4. 求 $6-\sqrt{35}$ 的平方根.

[解] 原式 $=\frac{1}{2}(12-2\sqrt{35})=\frac{1}{2}(7-2\sqrt{7}\sqrt{5}+5)$

$$=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})\right]^2.$$

$\therefore$ 平方根 $=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{14}-\sqrt{10})$.

5. 求 $15+2\sqrt{56}$ 的平方根.

[解] 原式 $=8+2\sqrt{8}\sqrt{7}+7$,

$\therefore$ 平方根 $=\pm(\sqrt{8}+\sqrt{7})=\pm(2\sqrt{2}+\sqrt{7})$.

6. 簡化: $\frac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}$.

[解] 原式 $=\frac{\sqrt{12+2\sqrt{27}}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3^2+2\times3\sqrt{3}+3}}{1+\sqrt{3}}$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{(3+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{1-3}=\frac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}.$$

註: 此題僅取正根.

第　二　章

等式恆等式與方程式

I. 一般要點:——

1. 代數學中關於等式,恆等式,及方程式的問題,都是"已知第一組相等關係,求證或找尋第二組相等關係".

2. 證明的方法,找尋的手續,都由下列公理而來:

(a) 等於同量之量互等.

(b) 等量加等量,和相等.

(c) 等量減等量,差相等.

(d) 等量乘等量,積相等.

(e) 等量除等量,商相等.

(f) 一量可用它的等量來代替.

(g) 等量的同次乘方相等.

(h) 等量的同次方根相等.

3. 除上述公理外,所根據的,還有兩條原理如下:

(a) 一數與零乘,積等於零.

(b) 若干數的連乘積等於零,則至少有一個因數是零.

4. 方程式的兩端,決不能用零去除,否則就要謬誤百出的.

5. 恆等式中的字母,無論給以何值,兩端常相等.

6. 方程式的未知數,祇能用求得的根代替,原式兩端纔相等.

7. 方程式的兩端,用含有未知數的式子去乘,有時發生增根之弊,務須留意;宜將所得各根,逐一代入原方程式覆驗.

8. 方程式的兩端,決不能用含有未知數的式子去除,因為要發生減根之弊.

9. 解方程式,最後若得 $a=0$, 或 $0=0$ 的關係,則原方程式為不可能或不定.

10. 方程式與恆等式的等號,最好宜有區別,通常用 $\equiv$ 表示恆等式的相等關係.

II. 恆等式的證明:——證明恆等式的問題,大概用三種方法:(一)隨意用數值代入,(二)用乘法,(三)用劈因數法.今舉模範例題於下:

1. 證明下列各恆等式:

(a) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\equiv(ax+by)^2+(ay-bx)^2.$

(b) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3\equiv3(a+b)(b+c)(c+a).$

(c) $(a+b+c)(ab+bc+ca)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc.$

[解] (a) 右端 $\equiv a^2x^2+2\,abxy+b^2y^2$

$$+a^2y^2-2\,abxy+b^2x^2$$

$\equiv a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2$

$\equiv a^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+b^2x^2$

$\equiv a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)$

$\equiv(a^2+b^2)(x^2+y^2).$

故原式不誤.

(b) 令 $a=0,\ b=1,\ c=2$, 代入原式左端,

$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

$=(1+2)^3-1-2^3=18,$

代入原式右端,

$3(a+b)(b+c)(c+a)=3\times1\times3\times2=18.$

故原式是恆等式.

(c) 左端 $\equiv a^2b+ab^2+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c+3\,abc,$

右端 $\equiv a^2b+ab^2+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c+3\,abc,$

故原式不錯.

2. 證 $1+x-x^n-x^{n+1}$ 能被 $(1-x^2)$ 整除.

[解] 此題無異於證明

$$1+x-x^n-x^{n+1}\equiv(1-x^2)Q \qquad (Q\text{ 表 }x\text{ 的式子})$$

原式左端 $\equiv(1+x)-(x^n+x^{n+1})$

$$\equiv(1+x)-x^n(1+x)$$

$$\equiv(1+x)(1-x^n)$$

當 $x=+1$ 時, 左端 $=0$, 右端 $=0$; $x=-1$ 時, 左端 $=0$, 右端等於 0. 故原式可被 $(1-x^2)$ 整除.

III. 等式的證明:——關於等式的證明,常利用已知恆等式.今舉模範例題於下:

1. 若 $a+b+c=0$, 證明 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

[解] $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$\equiv(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),$$

令 $a+b+c=0$, $\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc=0$,

即 $\qquad a^3+b^3+c^3=3abc.$

2. 若 x^2+px+q, $x^2+p'x+q'$ 的最大公約數是 $x+a$, 證明 $a(p-p')=q-q'$.

[解] 根據剩餘定理, 命 $x=-a$,

$$a^2-pa+q=0=a^2-p'a+q'$$

$$\therefore\ pa-p'a=q-q'$$

即　$$a(p-p')=q-q'.$$

3. 若 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$, 證明 $(x+y+z)^3=27\,xyz$.

[解] $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$, $\therefore\ x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=-z^{\frac{1}{3}}$, 兩端求立方,

$\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^3=-z$, 即 $x+3\,x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})+y=-z$,

即　$$x-3\,x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}+y=-z,$$

$$\therefore\ x+y+z=3\,x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\ (x+y+z)^3=27\,xyz.$$

別解. 由第1題, 知 $x+y+z=3\,x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$,

$$\therefore\ (x+y+z)^3=27\,xyz.$$

4. 若 $b^2=ac$, 證明 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}=b^4$.

[解] 原式左端 $=\dfrac{a^2+ac+c^2}{a^{-2}+a^{-1}c^{-1}+c^{-2}}$

$$=\frac{a^2c^2(a^2+ac+c^2)}{a^2c^2(a^{-2}+a^{-1}c^{-1}+c^{-2})}$$

$$=\frac{a^2c^2(a^2+ac+c^2)}{c^2+ac+a^2}=a^2c^2=b^4.$$

原式得證.

IV. 比例的變化:——證明比例的變化,大都利用前述之等量公理,以及下列各定理:

a. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. (倒比定理)

b. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$. (交比定理)

c. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$.

(合比定理)

d. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$.

(分比定理)

e. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$. (合分比定理)

f. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\cdots\cdots$.

則 $\frac{a+c+e+g+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots$

(配比定理)

(算術中的配分比例,卽從此理而來.)

以上各定理,證法見各教科書,本書不復贅,玆舉模範例題於下:

1. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 證明 $(a+b)^2/(c+d)^2=ab/cd$.

［解］ $\because\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \therefore\ \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\ \frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d},$

但 $\frac{b}{d}=\frac{a}{c},\ \therefore\ \frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c},\ \therefore\ \frac{(a+b)^2}{(c+d)^2}=\frac{ab}{cd}.$

2. 若 $\frac{x+y}{y+z}=\frac{y+z}{z+x}$, 證明 $\frac{y+z}{z+x}=\frac{z-x}{x-y}.$

［解］ $\frac{y+z}{x+y}=\frac{z+x}{y+z},\ \frac{y+z-x-y}{x+y}=\frac{z+x-y-z}{y+z}$

$\frac{z-x}{x+y}=\frac{x-y}{y+z},\ \frac{z-x}{x-y}=\frac{x+y}{y+z},$

$\therefore\ \frac{y+z}{z+x}=\frac{z-x}{x-y}.$

3. 若 $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}=\frac{2}{3}$, 證明 $x+y+z=0.$

［解］ $\frac{x+y+z+2}{b-c+c-a+a-b+3}=\frac{2}{3}=\frac{x+y+z+2}{3}$

$$\therefore\ 2=x+y+z+2,$$

即 $$x+y+z=0.$$

V. 一元一次方程式的解法:——

1. 解方程式

$$\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{3}\left\{x-\frac{1}{4}\left(x-\frac{x-\frac{1}{6}x}{5}\right)\right\}\right]=53.$$

［解］
$$\frac{1}{2}\left[x-\frac{x}{3}+\frac{x}{12}-\frac{x-\frac{x}{6}}{60}\right]=53.$$

$$\frac{2x}{3}+\frac{x}{12}-\frac{6x-x}{360}=106.$$

$$240x+30x-6x+x=106\times360$$

$$\therefore\ x=\underset{\sim\sim}{144}.$$

2. 解方程式: $(x-1)^2+4(x-3)^2=5(x+5)^2$.

［解］ $x^2-2x+1+4x^2-24x+36=5x^2+50x+125.$

$$5x^2-26x+37=5x^2+50x+125.$$

$$-76x=88.$$

$$\therefore\ x=-\frac{88}{76}=-\frac{22}{19}=-1\frac{3}{19}.$$

VI. 聯立一次方程式:——解法有四種:(一)加減消去法,(二)代入消去法,(三)比較消去法,(四)行列式法.其中以(一),(四)爲最通用,(二)最不通用.玆舉模範例題如下:

1. 解聯立方程式:

$$4x+3y-2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x-5y+7=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(閩)

［解］ (用加減法)

$$(2)\times2\qquad 4x-10y=-14\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$(3)-(1)$ $\qquad -13\,y=-16, \qquad \therefore\ y=\frac{16}{13}.$

代入(1) $\qquad 4\,x+\frac{48}{13}-2=0,$

$$4\,x=-\frac{22}{13}, \qquad \therefore\ x=-\frac{11}{26}.$$

答: $x=-\frac{11}{26},\quad y=\frac{16}{13}.$

2. 解次之聯立方程式:

$(1)\cdots\cdots\cdots\cdots x+3\,y=11$

$(2)\cdots\cdots\cdots\cdots 2\,x-y=1$ 　　(湘二屆)

〔解〕(用代入法)從(1),得 $x=11-3\,y$, 代入(2),得

$2(11-3\,y)-y=1,\ \ 22-6\,y-y=1,$

即 $-7\,y=-21,\ \therefore\ y=3;$

以 y 值代入(2),

$2\,x-3=1,\ 2\,x=4,\ \therefore\ x=\mathbf{2}.$

答: $x=2,\quad y=3.$

3. 試解下列之聯立方程式:

$x+3\,y=3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$3\,x+5\,y=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(浙22)

〔解〕(用比較法)從(1),得 $x=3-3\,y,$

從(2),得 $x=\dfrac{1-5y}{3}$,

$$\therefore\ 3-3y=\frac{1-5y}{3},$$

兩端乘3, $9-9y=1-5y$, $-4y=-8$, $\therefore\ y=2$.

以 y 值代入(1), $x+6=3$, $\therefore\ x=-3$.

答: $x=\underset{\smile}{-3}$, $y=\underset{\smile}{2}$.

4. 求解下式:
$$\begin{cases}2x-y=7\\3x+2y=21\end{cases}$$
(湘三屆)

[解] (用行列式法)

$$x=\frac{\begin{vmatrix}7 & -1\\21 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{vmatrix}}=\frac{2\times7-(-1)\times21}{2\times2-(-1)\times\ 3}=\frac{35}{7}=5,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 7\\3 & 21\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{vmatrix}}=\frac{42-21}{7}=\frac{21}{7}=3.$$

答: $x=\underset{\smile}{5}$, $y=\underset{\smile}{3}$.

5 解聯立方程式:

$$\begin{cases}\dfrac{2}{y}=10-\dfrac{1}{x}\\[2mm]\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=20\end{cases}$$
(北平)

[解]　令 $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$, 代入原方程式系,得

$$2v=10-u \cdots\cdots (1)$$

$$4u+3v=20 \cdots\cdots (2)$$

(1) 移項　$u+2v=10 \cdots\cdots (3)$

(3)×4　$4u+8v=40 \cdots\cdots (4)$

(4)−(2)　$5v=20$,

$$\therefore\ v=4,\quad \frac{1}{y}=4,\quad \therefore\ y=\frac{1}{4}$$

以 v 值代入 (3), $u+8=10$, $u=2$, $\therefore\ x=\frac{1}{2}$.

答:　$\underline{x=\frac{1}{2}}$,　$\underline{y=\frac{1}{4}}$.

6. 解次之聯立方程式:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \cdots\cdots (1) \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(湘四屆)

[解]　(1)+(2)　$\frac{2}{x}=\frac{6}{6}=1$,　$\therefore\ x=2$.

(1)−(2)　$\frac{2}{y}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,　$\therefore\ y=3$.

答:　$x=\underline{2}$,　$y=\underline{3}$.

7. 解聯立方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{6} \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

(湘五屆)

〔解〕 (1) 式兩端乘 xy,

$$2y+3x=2xy \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(2) 式兩端乘 $6xy$,

$$18y-12x=5xy \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$(3)\times 4$ $\quad 8y+12x=8xy \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

$(4)+(5)$ $\quad 26y \quad =13xy$

即 $\quad 13xy-26y=0, \quad 13y(x-2)=0,$

但 $13\neq 0$, y 不能等於 0, 因若等於 0, 則 (1) 式變爲 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{0}=\infty$, 與原方程式不合.

$$\therefore\ x-2=0, \quad x=2.$$

以 x 之值代入 (1), 得 $y=3$.

答: $\underline{x=2}$, $\underline{y=3}$.

8. 解聯立方程式:

$$x+y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$y+z=9 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$z+x=5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

[解]　(1)+(2)+(3)　$2x+2y+2z=18 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(4)÷2　$x+y+z=9 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

(5)−(2)　$x=0,$

代入 (1), $y=4$; 以 y 值代入 (2), $z=5$.

答:　$x=\underline{0}$,　$y=\underline{4}$,　$z=\underline{5}$.

9. 解聯立方程式:

$$x-\quad y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$3y-4z=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$4z-5x=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

[解]　(2)+(3)　$3y-5x=9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(1)×3　$3x-3y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

(4)+(5)　$-2x=12$,　∴ $x=-6$.

以 x 值代入 (1), 得　$-6-y=1$,　∴ $y=-7$.

以 y 值代入 (2), 得　$-21-4z=7$,　∴ $z=-7$.

答:　$x=\underline{-6}$,　$y=\underline{-7}$,　$z=\underline{-7}$.

10. 解聯立方程式:

$$\begin{cases} x-2y+2z=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 2x-3y+\quad z=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ 3x-\quad y+2z=9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

[解]　(2)×2　　$4x-6y+2z=2$ ………………… (4)

(4)−(1)　　$3x-4y=0$ ………………… (5)

(4)−(3)　　$x-5y=-7$ ………………… (6)

(6)×3　　$3x-15y=-21$ ………………… (7)

(5)−(7)　　$11y=21,\quad \therefore\ y=\frac{21}{11}.$

以y值代入(6),　　$x-\frac{105}{11}=-7,\quad \therefore\ x=\frac{28}{11}.$

以x,y之值代入(2),

$$\frac{56}{11}-\frac{63}{11}+z=1,\quad \therefore\ z=\frac{18}{11}.$$

答:　$x=\frac{28}{11},\quad y=\frac{21}{11},\quad z=\frac{18}{11}.$

VII. 一元二次方程式的解法:——解一元二次方程式,有三種方法:(一)配方解法,(二)劈因子解法,(三)公式解法.茲舉模範例題如下:

1. 用兩種不同的方法,解下列方程式:

$$x^2-3x-40=0$$ (河北 22)

[解]　用劈因數法,將左端劈因子,得

$$(x+5)(x-8)=0$$

$\therefore\ x+5=0,\ x=-5,$ 或 $x-8=0,\ x=8.$

答:　$x=\underline{-5}$, 或 $\underline{8}$.

用配方法,將原方程式移項,

$$x^2-3x=40$$

左端配成平方,

$$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=40+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

即
$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=40+\frac{9}{4}=\frac{169}{4}$$

兩端開方,　$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{13}{2}$

$$\therefore\ x=\frac{3}{2}\pm\frac{13}{2}=\underset{\smile}{8}\text{ 或 }\underset{\smile}{-5}.$$

2. 求 $3x^2-4x+1=0$ 的兩個根.　(閩)

[解] 用公式,　$ax^2+bx+c=0$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

將所與方程式各項係數與常數項,代入式中,得
$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times3\times1}}{2\times3}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\frac{4\pm2}{6}=\frac{2\pm1}{3}$$

$$=\underset{\smile}{1},\text{ 或 }\underset{\smile}{\frac{1}{3}}.$$

3. 解方程式:

$$(x-6)(x-5)+(x-7)(x-4)=10.$$　(湘三屆)

［解］ 行乘法，

$$x^2-11x+30+x^2-11x+28=10,$$

移項合併， $2x^2-22x+48=0,$

除以2， $x^2-11x+24=0,$

劈因子， $(x-3)(x-8)=0,$

$$\therefore\ x=\underset{\sim}{3},\ 或\ \underset{\sim}{8}.$$

4. 解二次方程式：

$$2x^2-7x+3=0. \qquad (浙\ 21)$$

［解］ 劈因子， $(2x-1)(x-3)=0,$

$$\therefore\ x=\underset{\sim}{\frac{1}{2}},\ 或\ \underset{\sim}{3}.$$

5. 解方程式 $x^2-3x=0.$ （湘四屆）

［解］ 劈因子， $x(x-3)=0,$

$$\therefore\ x=\underset{\sim}{0},\ 或\ \underset{\sim}{3}.$$

6. 解二次方程式：

$$2x(x-4)-5=6x^2-8.$$

［解］ 行乘法， $2x^2-8x-5=6x^2-8,$

移項合併， $4x^2+8x-3=0,$

由公式， $x=\dfrac{-8\pm\sqrt{64+48}}{8}=\dfrac{-8\pm\sqrt{112}}{8}$

$$=\frac{-8\pm4\sqrt{7}}{8}=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{2}.$$

答:　$x=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{-1+\frac{1}{2}\sqrt{7}}$, 或 $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{-1-\frac{1}{2}\sqrt{7}}$.

7. 解方程式:　$x^2-6x+13=0.$

[解] 由公式,　$x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{-16}}{2}$

$$=\frac{6\pm4i}{2}=3\pm2i.$$

答:　$x_1=\underset{\sim\sim\sim}{3+2i}$,　$x_2=\underset{\sim\sim\sim}{3-2i}$.

註: 凡二次方程式,總有兩個根;這兩根可用 x_1 與 x_2 來區別,有時也用希臘字母 α 與 β 來表示.

VIII. 聯立二次方程式的解法:——

(*A*) **一般要點:** 解聯立二次方程式,若就普遍的情形來說,須化成一元三次或一元四次方程式,不在初中程度之內.本書只講幾種特別形式,都可以化成一元二次方程式,再求解答.在解的時候,須注意下列各點:

1. 一次與二次聯立,應有二組解答,但有時如一式能將他式整除,則祇有一組解答.

2. 二次與二次聯立,最多可有四組解答.

3. 各組解答,必須分別清楚,不可混亂.

4. 所得各組解答,必須同時適合兩方程式,纔是眞正解答.

(**B**) 模範題示例:

1. 解方程式: $2y-3x=1$ ………………… (1)

$13x^2-8xy+3=0$ ………………… (2)

[解] 從 (1), 得 $y=\dfrac{3x+1}{2}$, 代入 (2), 得

$$13x^2-8x\left(\frac{3x+1}{2}\right)+3=0.$$

整理化簡後,得 $x^2-4x+3=0$,

$$\therefore\ x=1,\quad x=3.$$

若 $x=1$, 則 $y=\dfrac{3+1}{2}=2$,

若 $x=3$, 則 $y=\dfrac{9+1}{2}=5$.

答: $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$

2. 解方程式: $x^2+y^2=34$ ………………… (1)

$x+y=8$ ………………… (2)

(皖)

[解] (1)×2 $2x^2+2y^2=68$ ………………… (3)

(2) 自乘 $x^2+2xy+y^2=64$ ………………… (4)

(3)−(4) $x^2-2xy+y^2=4$ ………………… (5)

(5) 開方 $x-y=\pm 2$ ………………… (6)

$\dfrac{(6)+(2)}{2}$，得 $\left.\begin{array}{l}\underline{x=5}\\ \underline{y=3}\end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l}\underline{x=3}\\ \underline{y=5}\end{array}\right\}$

代進(2)，得

3. 解方程式：

$$x^2-y^2=24 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x-y=4 \cdots\cdots\cdots (2)$$

[解]　(1)÷(2)

$$x+y=6 \cdots\cdots\cdots (3)$$

$\dfrac{(2)+(3)}{2}$，$x=\underline{5}$，代入(3)，$y=\underline{1}$.

4. 解方程式：

$$x-y=1 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$xy=30 \cdots\cdots\cdots (2)$$

[解]　$(1)^2$

$$x^2-2xy+y^2=1 \cdots\cdots\cdots (3)$$

(2)×4

$$4xy=120 \cdots\cdots\cdots (4)$$

(3)+(4)

$$x^2+2xy+y^2=121 \cdots\cdots\cdots (5)$$

(5)開方

$$x+y=\pm 11 \cdots\cdots\cdots (6)$$

$\dfrac{(6)+(1)}{2}$，得 $\left.\begin{array}{l}\underline{x=6}\\ \underline{y=5}\end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l}\underline{x=-5}\\ \underline{y=-6}\end{array}\right\}$

代入(1)，得

5. 解方程式：

$$2x^2+3y^2=21 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$3x^2-4y^2=23 \cdots\cdots\cdots (2)$$

[解]　命 $x^2=u$，$y^2=v$，代入原方程式系，得

$$2u+3v=21 \cdots\cdots\cdots (3)$$

$$3u-4v=23 \cdots\cdots\cdots (4)$$

照聯立一次方程式解法，解得

$$u=x^2=9, \quad v=y^2=1.$$

$$\therefore \left.\begin{matrix}\underset{\sim\sim}{x=3}\\ \underset{\sim\sim}{y=1}\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\underset{\sim\sim}{x=3}\\ \underset{\sim\sim}{y=-1}\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\underset{\sim\sim}{x=-3}\\ \underset{\sim\sim}{y=1}\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\underset{\sim\sim}{x=-3}\\ \underset{\sim\sim}{y=-1.}\end{matrix}\right\}$$

四組數值,代入原式都合.

6. 解
$$\begin{cases} x^2+xy+2y^2=44 \cdots\cdots\cdots (1)\\ 2x^2-xy+y^2=16 \cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$$

[解] (1)×4 $\qquad 4x^2+4xy+8y^2=176\cdots\cdots\cdots(3)$

(2)×11 $\qquad 22x^2-11xy+11y^2=176\cdots\cdots\cdots(4)$

(4)−(3) $\qquad 18x^2-15xy+3y^2=0\cdots\cdots\cdots(5)$

劈因子 $\qquad (6x-3y)(3x-y)=0\cdots\cdots\cdots(6)$

$$\therefore y=2x, \text{ 或 } y=3x.$$

用 $y=2x$ 與 (1) 聯立,解得 $\qquad x=\pm 2,$

代進 $y=2x$, 得 $\qquad y=\pm 4.$

因 $y=3x$ 與 (1) 聯立,解得 $\qquad x=\pm\sqrt{2},$

代進 $y=3x$, 得 $\qquad y=\pm 3\sqrt{2},$

答: 有四組根: $\underset{\sim\sim}{(2,\ 4)}$, $\quad \underset{\sim\sim}{(-2,\ -4)}$,

$\underset{\sim\sim}{(\sqrt{2},\ 3\sqrt{2})}$, $\underset{\sim\sim}{(-\sqrt{2},\ -3\sqrt{2})}$

7. 解
$$\begin{cases} 2xy-13x-8y=-49 \cdots\cdots (1)\\ 3xy-9x-19y=-77 \cdots\cdots (2)\end{cases}$$

[解] (1)×3−(2)×2, $\qquad -21x+14y=7$

即 $$3x-2y=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

從 (3), $y=\dfrac{3x+1}{2}$, 代入 (1), 得

$$x(3x+1)-13x-4(3x+1)=-49,$$

即 $$x^2-8x+15=0,$$

$$\therefore\ x=3,\ 或\ x=5.$$

分別代入 (3), 得 $y=5$, 或 $y=8$

答: $\underline{x=3,\ y=5}$; $\underline{x=5,\ y=8}$.

8. 解 $$\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=70 & \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 6x^2+\ \ xy-y^2=50 & \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

[解] 這兩式裏面,沒有一次項,叫齊次聯立方程式.這一類聯立二次方程式,除上面 (6) 題所示消去常數法外,還有一法.命 $y=mx$, 原題變成 $$2x^2+3mx^2+m^2x^2=70 \cdots\cdots\cdots\cdots (1')$$

$$6x^2+\ \ mx^2-m^2x^2=50 \cdots\cdots\cdots\cdots (2')$$

從 (1′), 得 $$x^2=\frac{70}{m^2+3m+2}$$

從 (2′), 得 $$x^2=\frac{50}{-m^2+m+6},$$

$$\therefore\ \frac{70}{m^2+3m+2}=\frac{50}{-m^2+m+6} \cdots\cdots\cdots (3)$$

去分母,整理後,得 $$3m^2+2m-8=0 \cdots\cdots (4)$$

解 (4), $m=4/3$, 或 $m=-2$.

用 $m=4/3$ 代入 (1′), 得 $x=\pm 3$,

代入 $y=mx$, 得 $y=\pm 4$.

用 $m=-2$ 代入 (1′), 得 $0=70$, 不能成立.

故得二組解答: (3, 4), (−3, −4).

9. 解 $$x^2-xy+y^2=7 \cdots\cdots (1)$$

$$x^2+xy+y^2=19 \cdots\cdots (2)$$

[解] 命 $x=u+v$, $y=u-v$, 代入原方程式系, 得

$$\begin{cases}(u+v)^2-(u+v)(u-v)+(u-v)^2=7\\(u+v)^2+(u+v)(u-v)+(u-v)^2=19\end{cases}$$

即 $$u^2+3v^2=7 \cdots\cdots (3)$$

$$3u^2+v^2=19 \cdots\cdots (4)$$

(4) × 3 $$9u^2+3v^2=57 \cdots\cdots (5)$$

(5) − (3) $$8u^2=50$$

$$\therefore\ u=\pm\frac{5}{2}$$

以 u 之值代入 (3), 得 $v=\pm\dfrac{1}{2}$.

$$\therefore\ \begin{aligned}x=u+v=&\begin{cases}3\\2\end{cases}\begin{cases}2\\3\end{cases}\begin{cases}-2\\-3\end{cases}\begin{cases}-3\\-2\end{cases}\\y=u-v=&\end{aligned}$$

註: 兩式中 x^2 與 y^2 的係數相同, 纔可用此法.

10. 解聯立方程式：　$x^2+y^2=74$ ……………… (1)

$xy=35$ ……………… (2)

［解］ $\sqrt{(1)+(2)\times 2}$,　$x+y=\pm 12$ ……………… (3)

$\sqrt{(1)-(2)\times 2}$,　$x-y=\pm 2$ ……………… (4)

若：$x+y=12$,　$x-y=2$;　則：$x=7$,　$y=5$;

$x+y=12$,　$x-y=-2$;　$x=5$,　$y=7$;

$x+y=-12$,　$x-y=2$;　$x=-5$, $y=-7$;

$x+y=-12$,　$x-y=-2$;　$x=-7$, $y=-5$.

四組根都適合原方程式系.

IX. 無理方程式的解法：——解無理方程式時，常發生增根，所以求得的根，須逐一代入原方程式覆驗.覆驗的時候，開方概取正根.茲舉模範例題於下：

1. 解次之無理方程式：

$$7-\sqrt{x-4}=3.$$ (湘四屆)

［解］ 移項　$\sqrt{x-4}=4.$

兩端平方　$x-4=16$, $\therefore\ x=20$

代入原式，$7-\sqrt{20-4}=7-\sqrt{16}=7-4=3.$

答：$x=20.$

2. 解方程式：　$x+\sqrt{x+1}=5.$

［解］移項　　$\sqrt{x+1}=5-x$

兩端平方　　$x+1=25-10x+x^2$

即　　$x^2-11x+24=0$, $\therefore$ $x=8$, 或 3.

代入原式,　$8+\sqrt{8+1}=8+3=11\neq 5$;

$3+\sqrt{3+1}=3+2=5$.

故所求根　　$x=3$.

3. 解方程式:　　$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+1}$.

［解］兩邊平方,　$x+x+1+2\sqrt{x^2+x}=2x+1$,

即　　$2\sqrt{x^2+x}=0$, $\therefore$ $\sqrt{x^2+x}=0$,

兩邊平方,　　$x^2+x=0$, $x(x+1)=0$,

$\therefore$ $x=0$, 或 $x=-1$.

代入原方程式,

$$\sqrt{0}+\sqrt{0+1}=1,$$

$$\sqrt{2\times 0+1}=1;$$

$$\sqrt{-1}+\sqrt{-1+1}=\sqrt{-1},$$

$$\sqrt{2(-1)+1}=\sqrt{-1}.$$

故 $x=0$, $x=-1$ 都是原方程式的根.

4 解　　$\sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+11}=0$.

［解］移項,　　$\sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}=2\sqrt{x+11}$,

兩端平方，

$$2x+24-2\sqrt{x^2+24x+80}=4(x+11),$$

移項後除以2，

$$-\sqrt{x^2+24x+80}=x+10,$$

兩端再平方，

$$x^2+24x+80=x^2+20x+100$$

$$4x=20,\quad\therefore\ x=5.$$

代入原式，

$$\sqrt{5+4}-\sqrt{5+20}-2\sqrt{5+11}$$

$$=3-5-8=-10\neq 0.$$

答：原式無根.

X 特殊方程式的解法：——這裏所謂特殊方程式，便是可以劈成一次因子式的高次方程式，準二次方程式，倒數方程式，以及指數方程式.茲舉模範例題於下：

1. 解方程式：　$x^3-7x+6=0.$

［解］劈因數(用剩餘定理及綜合除法)，得

$$(x-1)(x-2)(x+3)=0.$$

答：共有三根，是 $x=1,\ 2,\ -3.$

2. 解方程式：　$x^4-7x^2-8=0.$

［解］ 令 $x^2=u$, $\quad u^2-7u-8=0$,

$$(u-8)(u+1)=0, \therefore u=8, \text{或} -1.$$

$$\therefore x=\underline{\pm 2\sqrt{2}},\ \underline{\pm i}.$$

3. 解方程式: $\quad x^3-1=0$.

［解］ 劈因子 $\quad (x-1)(x^2+x+1)=0$,

若 $x-1=0$, 則 $x=1$;

若 $x^2+x+1=0$, 則 $\quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$$

答: $x=\underline{1}$, $\underline{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$, $\underline{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$.

註: 這題無異於求 1 的立方根, 可知 1 的立方根有三個. 由此推知 1 的 n 次根有 n 個. 通常用 $1, \omega, \omega^2$ 來表示. 因若

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{則} \ \omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

若 $\quad \omega=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 則 $\omega^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

4. 解 $\quad (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24=0$.

［解］ $\quad (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-24=0$,

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24=0,$$

命 $\quad x^2+5x+4=u$,

$$u(u+2)-24=0,$$

即　$$u^2+2u-24=0,$$

$$(u+6)(u-4)=0,\ \therefore\ u=4,\ 或\ -6.$$

$u=4$，　則　$x^2+5x=0$, $\therefore\ x=\underset{\sim}{0}$, 或 $\underset{\sim\sim}{-5}$;

$u=-6$, 則　$x^2+5x+10=0$, $\therefore\ x=\underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{-5\pm\sqrt{15}i}{2}}$.

5. 解方程式：　$x^{\frac{4}{3}}-10x^{\frac{2}{3}}+9=0$,

[解]　命 $x^{\frac{2}{3}}=u$,　$u^2-10u+9=0$

$$(u-1)(u-9)=0,\ \therefore\ u=1,\ 或\ 9.$$

若 $u=1$, 則　$x^{\frac{2}{3}}=1$, $\therefore\ x=1^{\frac{3}{2}}=\underset{\sim\sim}{\pm 1}$;

若 $u=9$, 則　$x^{\frac{2}{3}}=9$, $\therefore\ x=9^{\frac{3}{2}}=\underset{\sim\sim}{\pm 27}$.

四根都適合原方程式.

6. 解方程式：　$x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

[解]　$$(x^4+1)+(x^3+x)-4x^2=0,$$

用 x^2 除全式，得

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

命　$x+\dfrac{1}{x}=u$, 則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=u^2-2$,

$$\therefore\ u^2+u-6=0,$$

$$(u-2)(u+3)=0,\ \therefore\ u=2,\ 或\ -3.$$

若 $u=2$, 則 $x^2-2x+1=0$, $x=1$;

若 $u=-3$, 則 $x^2+3x+1=0$,

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

答: $x=\underset{\sim}{1},\ \underset{\sim}{1},\ \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{-3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}},\ \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}.$

7. 解方程式: $2^{2x}-3\cdot 2^{x+2}+2^5=0.$

[解] $2^{2x}-12\cdot 2^x+32=0.$

即 $(2^x-4)(2^x-8)=0$, $\therefore\ 2^x=4$, 或 8.

$\therefore\ x=\underset{\sim}{2}$, 或 $\underset{\sim}{3}$.

8. 解方程式: $2^x+3^y=17,\ 2^{x+2}-3^{y+1}=5.$

[解] 將原方程式系改成

$$2^x+3^y=17,\ 4\cdot 2^x-3\cdot 3^y=5,$$

命 $2^x=u$, $3^y=v$, 得

$$u+v=17,\ 4u-3v=5,$$

解聯立方程式, 得 $u=8$, $v=9$.

$\therefore\ x=\underset{\sim}{3},\ y=\underset{\sim}{2}.$

XI. 分數方程式的解法:——

(*A*) 一般要點: 解分數方程式, 須注意下列各點:

1. 須將各項移在左端, 使右端為 0, 然後將左端

各項相加,約分,再使分子等於零,求解.如此,便無增根之弊.

2. 若用各分母的最低公倍式乘,求得之根,須逐一代入原方程式的各分母,其使分母等於零的,須棄掉不用.但有時連眞根都丟掉.

(*B*) 模範題示例:

1 解次之分數方程式:

$$\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{8}{4x^2-1}=\frac{2x-1}{2x+1}.\qquad\text{(成都一屆)}$$

［解］ 移項 $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{8}{4x^2-1}-\dfrac{2x-1}{2x+1}=0,$

各項相加 $\dfrac{(2x+1)^2-8-(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)}=0$

$$\therefore\ (2x+1)^2-(2x-1)^2-8=0$$

即 $8x-8=0,\ \therefore\ x=1.$

答: $x=1.$

2. 解分數方程式

$$\frac{2x-2}{2x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x-1}{(x+1)(2x+1)}.\qquad\text{(粵)}$$

［解］ 移項 $\dfrac{2x-2}{2x+1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x-1}{(x+1)(2x+1)}=0,$

相加 $\dfrac{(2x-2)(x+1)-(2x+1)-(x-1)}{(x+1)(2x+1)}=0$

即 $$\frac{2x^2-3x-2}{(x+1)(2x+1)}=0,$$

即 $$\frac{(x-2)(2x+1)}{(x+1)(2x+1)}=0,\ \frac{x-2}{x+1}=0,$$

$$\therefore\ x-2=0,\ x=2.$$

答: $x=\underset{\smile}{2}.$

註: 此題若用去分母法,就要得假根

$$x=-\frac{1}{2}.$$

3. 解分數方程式

$$\frac{1}{x^2-4}-\frac{3}{2-x}=1+\frac{1}{6+3x}.$$

[解] 移項 $$\frac{1}{x^2-4}-\frac{3}{2-x}-\frac{1}{6+3x}-1=0$$

即 $$\frac{1}{(x-2)(x+2)}+\frac{3}{x-2}-\frac{1}{3(x+2)}-1=0$$

合併 $$\frac{3+9(x+2)-(x-2)-3(x-2)(x+2)}{3(x-2)(x+2)}=0$$

即 $$\frac{3+9x+18-x+2-3x^2+12}{3(x-2)(x+2)}=0,$$

即 $$\frac{3x^2-8x-35}{3(x-2)(x+2)}=0,\quad \frac{(3x+7)(x-5)}{3(x-2)(x+2)}=0,$$

$$\therefore\ (3x+7)(x-5)=0,\ \therefore\ x=\underset{\smile}{5},\ \text{或}\ -\underset{\smile}{\frac{7}{3}}.$$

兩根代入原方程式,都合.

4. 解分數方程式

$$\frac{x}{x-5}+\frac{1}{x-2}=\frac{3}{x-5}-\frac{3}{(x-2)(x-5)}.$$

[解]　移項，$\frac{x}{x-5}+\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x-5}+\frac{3}{(x-2)(x-5)}=0$

即　$\frac{x-3}{x-5}+\frac{x-2}{(x-2)(x-5)}=0$

即　$\frac{x-3}{x-5}+\frac{1}{x-5}=\frac{x-2}{x-5}=0$，$\therefore\ x-2=0$，$x=\underset{\sim}{2}.$

註：此題若用去分母法，就要連眞根都丟掉.

5. 解

$$\begin{cases}\frac{3x+1}{2}=y+1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\[2ex] \frac{x+y}{y-x}=6 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)\end{cases}$$

(贛 23)

[解]　(1) 去分母，　$3x+1=2y+2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$

(2) 去分母，　$x+y=6y-6x \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

整理後，得　$3x-2y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

$7x-5y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

解 (5), (6), 得　$x=\underset{\sim}{5},\ y=\underset{\sim}{7}.$

註：此題用去分母法，不致生假根，因分子與分母，顯見無公共因子. 凡去分母後，得聯立一次方程式，常無假根.

6. 解
$$\begin{cases} 1+\dfrac{y}{x}-\dfrac{2y}{x+y}=\dfrac{2y^2}{x^2+xy} \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 5x+4y=27 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

[解] (1)移項,得

$$1+\frac{y}{x}-\frac{2y}{x+y}-\frac{2y^2}{x^2+xy}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

即 $$\frac{x^2+xy+xy+y^2-2xy-2y^2}{x(x+y)}=0$$

即 $\dfrac{x^2-y^2}{x(x+y)}=0$, 即 $\dfrac{x-y}{x}=0$, $\therefore\ x-y=0 \cdots\cdots (4)$

解 (2), (4) 聯立方程式,得 $x=3$, $y=3$.

註: 此題若用去分母法,即得另一組假根 $x=27$, $y=-27$.

凡去分母後,得聯立二次方程式,往往發生假根.

7. 解方程式: $\dfrac{x-8}{x-10}+\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{x-5}{x-7}+\dfrac{x-7}{x-9}$.

[解] 先將原方程式變成

$$1+\frac{2}{x-10}+1+\frac{2}{x-6}=1+\frac{2}{x-7}+1+\frac{2}{x-9}$$

即 $$\frac{1}{x-10}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-9}$$

移項,相減, $$\frac{1}{(x-10)(x-9)}-\frac{1}{(x-6)(x-7)}=0$$

即　$(x-6)(x-7)-(x-10)(x-9)=0,$

解這方程式,得　$x=8.$

XII. 一次不等式的解法:——解不等式,本須另立一章,但因內容甚少,所以附於本章.下述公理,是解一次不等式的根據:

a. 不等量加減等量,和或差仍不相等,大者仍大.

b. 不等量被正的等量乘或除,積或商仍不相等,大者仍大.

c. 不等量被負的等量乘或除,積或商仍不相等,原來大者反小.

d. 甲>乙,乙>丙,則甲>丙.

茲舉模範例題於下:

1. 解不等式　$5x-\frac{1}{4}>7+\frac{17x}{3}.$

[解] 用正數12乘兩端,得

$$60x-3>84+68x,$$

移項　$60x-68x>84+3,$

即　$-8x>87,$

用(-8)除,　$x<-\frac{87}{8}.$

2. 求適合　$\frac{3x}{4}>\frac{x}{5}+1,\ \frac{7}{5}x-1<\frac{2x}{3}+2$

二不等式的x之正整數值.

［解］ 從第一式, 得　$x>\frac{20}{11}$;

從第二式, 得　$x<\frac{45}{11}$; $\therefore\ x=2,\ 3,\ 4.$

答: $x=2,\ 3,\ 4.$

XIII. 二次方程式根的判定:——判定二次方程式的根,是實是虛,是否相等,根據下面的判定式:

二次方程式　$ax^2+bx+c=0$,

若 $\begin{cases} b^2-4ac>0 \\ b^2-4ac=0 \\ b^2-4ac<0 \end{cases}$ 則 $\begin{cases} \text{兩根實數不等.} \\ \text{兩根實數相等.} \\ \text{兩根虛數不等.} \end{cases}$

今舉模範題於下:

1. 設方程式 $a(1-x^2)+2bx+c(1+2x)=0$ 有等根,則a, b, c間之關係若何?　(贛22)

［解］ 整理原方程式,

$$a-ax^2+2bx+c+2cx=0$$

$$-ax^2+2(b+c)x+(a+c)=0$$

因有等根, $\therefore\ [2(b+c)]^2-4(-a)(a+c)=0$

即 $$4(b+c)^2+4a(a+c)=0$$

除以4 $$(b+c)^2+a(a+c)=0$$

$$b^2+2bc+c^2+a^2+ac=0$$

$$\therefore\ \underline{a^2+b^2+c^2+ac+2bc=0}.$$

2. k 是什麼數,則 $5x^2+4x+2k-3=0$ 可有實根?

[解] $$b^2-4ac=16-4\times5(2k-3),$$

若有實根,則須 $16-40k+60>0$,

即 $$-40k>-76,\ \therefore\ k<\frac{19}{10}.$$

答: $\underline{k\text{ 須小於 }\frac{19}{10}}.$

3. k 是什麼數,$(1-2k)x^2-3x+3=0$,有二虛根?

[解] $$9-4\times3(1-2k)<0,$$

即 $$9-12+24k<0,\ \therefore\ k<\frac{1}{8}.$$

4. $x^2-2(m-6)x-2m^2+5m+26=0$ 有等根,$m=$?

[解] $$[-2(m-6)]^2-4(-2m^2+5m+26)=0,$$

即 $$4(m^2-12m+36)+8m^2-20m-104=0$$

即 $$12m^2-68m+40=0,\ 3m^2-17m+10=0$$

$$(3m-2)(m-5)=0,\ \therefore\ m=\underline{5},\text{ 或 }\underline{\frac{2}{3}}.$$

XIV. 二次方程式根與係數的關係:——二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根,是 α 與 β, 則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a},\ \alpha-\beta=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a},$$

茲舉模範例題於下:

1. 已知兩根是 $-3, \frac{1}{4}$, 作此二次方程式.

[解] $$-3+\frac{1}{4}=-\frac{b}{a},\quad \therefore\ \frac{b}{a}=\frac{11}{4};$$

$$(-3)\times\frac{1}{4}=\frac{c}{a},\qquad \therefore\ \frac{c}{a}=-\frac{3}{4};$$

於是所求方程式是 $x^2+\frac{11}{4}x-\frac{3}{4}=0,$

即 $\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{4x^2+11x-3=0.}$

2. 方程式 $x^2-6x+k=0$ 的兩根之差若是4,求 $k=?$

[解] $$\alpha-\beta=4=\sqrt{36-4k},\quad \therefore\ 36-4k=16,$$

$$\therefore\ 4k=20,\ k=\underset{\sim}{5.}$$

3. 若 α, β 是 $2x^2+4x-1=0$ 的兩根,試不解方程式,求 $\alpha^3-\beta^3$ 的數值.

[解] $$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

$$=(\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta]$$

$$=\frac{\sqrt{16+8}}{2}\times\left(4+\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{2}\times\frac{9}{2}$$

$$=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{9}{2}\sqrt{6}.}$$

XV. 求係數與求比值:——此類例題如下:

1. 若 $3x+4\equiv a(x+2)+b(x-1)$, 求 $a=?$ $b=?$

[解] 命 $x=0$, 則 $2a-b=4$;

命 $x=1$, 則 $3a\quad=7$,

$$\therefore\ a=\underset{\frown}{\frac{7}{3}},$$

代入第一方程式; $\therefore\ b=\underset{\frown}{\frac{2}{3}}.$

2. 若 $x-3$ 是 $2x^3+mx^2-3x-36$ 的因數, $m=?$

[解] $x=3$, $54+9m-9-36=0$,

$$9m+9=0,\ \therefore\ m=-1.$$

3. $x:y:z=2:3:4$, 求

$$(x^3+y^3+z^3-3xyz):(x+y+z)^3=?$$

[解] $\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{y}=\dfrac{4}{z}=\dfrac{9}{x+y+z}$

$$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x+y+z)^3}$$

$$=\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{(x+y+z)^3}$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}{(x+y+z)^2}$$

$$=\frac{2^2}{9^2}+\frac{3^2}{9^2}+\frac{4^2}{9^2}-\frac{2\times3}{9^2}-\frac{3\times4}{9^2}-\frac{2\times4}{9^2}$$

$$=\frac{4+9+16-6-12-8}{81}=\frac{3}{81}=\underset{\frown}{\frac{1}{27}}.$$

XVI. 文字方程式的解法:——與數字方程式全同,不過求到答數後,須加以討論,纔知道不能與不定的特別情形.此項討論,本書不贅,讀者可參閱代數教科書,現在僅舉二例題如下:

1. 解方程式 $x^2+6ax+8a^2=0.$

[解] 由公式 $x=\dfrac{-6a\pm\sqrt{36a^2-32a^2}}{2}$

$$=\frac{-6a\pm 2a}{2}=-3a\pm a.$$

不問 $a=$ 何數,本題常成立.

2. 解方程式 $\dfrac{a(a-x)}{b}-\dfrac{b(b+x)}{a}=x.$

[解] 去分母,移項,整理,

$$(a^2+ab+b^2)x=a^3-b^3$$

$$\therefore\ x=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b$$

討論: (1) $a=0$, 或 $b=0$, 本題不成立.

(2) $a=0,\ b=0$, 本題也不成立.

(3) $a\neq 0,\ b\neq 0$, 本題常成立.

因若 $a=b$, 則 $(a-b)^2=0$, 即 $a^2+b^2=2ab$;

若 $a\neq b$, 則 $(a-b)^2>0$, 即 $a^2+b^2>2ab$;

故 $a^2+b^2>ab$, 即 $a^2+ab+b^2>0$.

第 三 章

函數與公式

I. 函數之值:——凡代數式,都可以當做各字母的函數,因爲未知數 x, y, z 等是變數,而 a, b, c 等雖然代表已知數,也是未定常數.函數的記法,是 $F(\quad)$,或 $f(\quad)$.茲舉求函數之值的例題於下:

1. 設 $a=1, b=2, c=-3$, 求 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之值.

[解] 此題可寫成:

已知 $f(a, b, c)=a^3+b^3+c^3-3abc$, 求 $f(1, 2, -3)$.

$$f(1, 2, -3)=1^3+2^3+(-3)^3-3(1)(2)(-3)$$

$$=1+8-27+18=0.$$

2. $f(x)=x^4-3x^3-8x^2+5x+3$, 求 $f(3)$.

[解] 此題可以利用剩餘定理,

$$\begin{array}{r|l}
1-3-8+\ 5+\ 3 & \underline{3} \\
+3+0-24-57 & \\
\hline
1+0-8-19\ \boxed{-54} &
\end{array}$$

$\therefore f(3)=-54.$

3. $F(x)=2x^4+7x^3-14x-4$, 求 $F\left(-\frac{1}{2}\right)$.

[解] 此題仍利用剩餘定理求值.

$$\begin{array}{l|l} 2+7+0-14-\ 4 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0-1-3+\frac{3}{2}+\frac{25}{4} & \\ \hline 2+6-3-\frac{25}{2}\ \boxed{+\frac{9}{4}} & \end{array}$$

$\therefore\ F\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$.

4. $F(x, y)=3x^3-6x^2y+7xy^2-2y^3$, 求 $F(4, 2)$.

[解] 此題也可以利用剩餘定理求值.

$\because\ x:y=4:2=2:1$, $\therefore\ x=2y$.

$$\begin{array}{l|l} 3-6y+7y^2-\ 2y^3 & 2y \\ \hline \quad +6y+\ \ 0+14y^3 & \\ \hline 3+\ \ 0+7y^2\ \boxed{+12y^3} & \end{array}$$

$\therefore\ F(4, 2)=12(2^3)=96$.

II. 正變與反變:——正變與反變,原是特殊形式的函數與變數的關係,茲述基本定理如下:

a. 正變: 若 $y \propto x$, 則 $y=kx$; k 是常數.

b. 反變: 若 $y \propto \frac{1}{x}$, 則 $y=\frac{k}{x}$; k 是常數.

c. 聯變: (1) 若 y 值固定, $z \propto x$; x 值固定, $z \propto y$;

則 x, y 均變時, $z \propto xy$, 而 $z=kxy$.

(2) 若 y 值固定, $z \propto x$; x 值固定, $z \propto \frac{1}{y}$;

則 x, y 均變時, $z \propto \frac{x}{y}$, 而 $z = k\frac{x}{y}$.

(k = 常數)

d. 平方變: (1) 若 $y \propto x^2$, 則 $y = kx^2$.

(2) 若 $y \propto \frac{1}{x^2}$, 則 $y = \frac{k}{x^2}$.　　(k = 常數)

註: k 之值, 可由變數與函數一組相當值決定.

茲舉模範例題如下:

1. 二物體間的吸引力, 與二物體的質量成正變, 與二者的距離平方成反變. 今知太陽質量是地球質量的 33×10^4 倍, 兩天體相距 93×10^6 哩, 吸引力是 36×10^{17} 噸. 若地球質量是月球的 81 倍, 而月地相隔 24×10^4 哩, 求月地相吸引的力.

[解] 命 F 代表吸引力, m 與 M 表兩物體質量, d 表距離, 則 $F \propto \frac{mM}{d^2}$, 即 $F = k\frac{mM}{d^2}$.

$$36 \times 10^{17} = k\frac{33 \times 10^4 m^2}{93^2 \times 10^{12}}, \quad (m = \text{地球質量})$$

$$\therefore\ k=\frac{93^2\times36\times10^{29}}{33\times10^4m^2}=\frac{93^2\times36\times10^{25}}{33\,m^2}.$$

$$故\quad F=\frac{93^2\times36\times10^{25}}{33\,m^2}\times\frac{\frac{1}{81}m^2}{24^2\times10^8}$$

$$=\frac{93^2\times36\times10^{25}}{33\times81\times24^2\times10^8}=\frac{93^2\times4\times10^{17}}{33\times9\times24^2}$$

$$=\frac{93^2\times10^{17}}{33\times9\times144}\doteq2\times10^{16}\ 噸.$$

III. 公式的代換:——

(*A*) **一般要點:** 公式本是一種普遍應用的特殊方程式,也可以說是一種特殊函數,所以關於公式代換的問題,解決起來,不是解方程式,便是求函數之值.茲將屬於初等代數學範圍,而應記憶的公式列下,望讀者牢記勿忘.

1. 關於代數學本身的:

(*a*) 二次方程式求根公式(已見前,不再錄)

(*b*) 等差級數公式(又名算術級數)

(1)　$l=a+(n-1)d.$

(2)　$S=n(a+l)/2.$

(3)　$S=[2na+n(n-1)d]/2.$

式中 a 是首項, d 是公差, l 是末項, S 是級數之和, n 是項數.

(*c*) 等比級數公式(又名幾何級數)

(1)　$l = ar^{n-1}$

(2)　$S = a(r^n - 1)/(r-1).$　$(r>1)$

　　$= a(1-r^n)/(1-r).$　$(r<1)$

(3)　$S = (rl - a)/(r-1).$　$(r>1)$

　　$= (a - rl)/(1-r).$　$(r<1)$

式中 a, l, n, S 的意義同前, r = 公比.

(*d*) 無窮等比級數求和公式

$$S_\infty \doteq \frac{a}{1-r}.$$

(*e*) 排列公式

(1)　${}_nP_n = \underline{|n}.$

(2)　${}_nP_r = \underline{|n} \,/\, \underline{|n-r}.$

式中 $\underline{|n}$ 也可寫做 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots\cdots\cdots (n-1) \cdot n.$

$\underline{|0} = 1.$

(*f*) 配合公式

(1)　${}_nC_r = \underline{|n} \,/\, \underline{|r}\,\underline{|n-r}.$

(2)　${}_nC_{n-r} = {}_nC_r.$

(g) 二項級數公式.

$$(x+a)^n=x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}a^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^{n-3}a^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^{n-r}a^r$$

$$+\cdots\cdots+nxa^{n-1}+a^n.$$

式中n是正整數,其項數是$n+1$.

2. 關於應用方面的.

(a) 溫度互化公式

(1) $$C=\frac{5}{9}(F-32)$$

(2) $$F=\frac{9}{5}C+32.$$

式中C表攝氏度數,F表華氏度數.

(b) 運動公式

(1) (等速度) $s=vt$

(2) (等加速度) $s=vt+\frac{1}{2}at^2$

(3) (自由落下體) $s=\frac{1}{2}gt^2$

s表距離,v表速度,a表加速度,t表時間.

(以公尺計, $g=9.8$; 以英尺計, $g=32$.)

(4) (擺的週期) $$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

$\left(l \text{ 以公分計}, g=980, \pi=\frac{22}{7}, \text{ 或 } \frac{355}{113}, \text{ 或 } 3.1416.\right)$

(c) 面積公式

(1) (三角形)　$A=\frac{1}{2}bh.$

(2) (長方形)　$A=bh.$

(3) (平行四邊形)　$A=bh.$

(4) (正方形)　$A=a^2.$

(5) (梯形)　$A=\frac{1}{2}(a+b)h.$

以上A表面積,a, b表底,h表高.

(6) (商高定理)　$a^2+b^2=c^2.$

(a, b是夾直角的二邊,c是斜邊.)

(7)　$A=\pi r^2$,　$C=2\pi r.$

(A是圓面積,C是圓周,r是半徑.)

(d) 利息公式

(1) (單利息)　$A=P(1+rt).$

(2) (整存整付)　$A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$

(A是本利和,P是本金,r是年利率,n是每年轉複利的期數,t是年數.)

(3) (零存整付)

$$A=\frac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}.$$

(A 是本利和,a 是每期初存入本金數,r 是每期轉複利的利率,n 是期數.)

(4) (整存零付)

$$a=\frac{Pr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

(P 是本金,a 是每期所付本息數,r 是每期轉複利的利率,n 是期數.)

以上一切公式,其成立的來由,見代數教科書,幾何教科書,物理教科書,讀者可自己參考,本書不復贅.

(B) **模範問題舉例:**——凡公式中的數量,未知的只有一個,其餘都是已知的,那麼祇要將已知數代入公式,結果變成求函數之值,或解一元方程式.若未知的有兩個或兩個以上,則除代入公式外,尚須照其他數理關係,列成聯立方程式.此處所示例題,屬於前一種;後一種包括於第四章應用問題之內.又,利息公式須用對數計算,所以歸入第五章計算工具之內.

1. 求自鳴鐘一晝夜共打幾下.

[解] $S=12(1+12)/2=78,\ 78\times2=156.$

答：　共打 156 下.

2. 一等差級數的初項是 13, 第二項是 11, 和是 40 求項數.

[解]　代入公式　$S=[2na+n(n-1)d]/2$, 得

$$80=26n+n(n-1)(-2)$$

即　$$2n^2-28n+80=0,$$

$$n^2-14n+40=0,\ \therefore\ n=4,\ 或\ 10.$$

註：n 必須等於正整數.

3. 一等比級數首項是 3, 公比是 2, 總和是 189, 求項數.

[解]　由公式　$S=a(r^n-1)/(r-1)$, 得

$$189=3(2^n-1)/(2-1),$$

即　$$189=3(2^n-1),$$

$$\therefore\ 2^n-1=63,\ 2^n=64,\ n=6.$$

註：等比級數的項數, 也一定是正整數.

4. 抽氣機每次從玻璃管中抽出管內空氣的 $\frac{1}{2}$, 問連抽八次後, 共抽出空氣多少?

[解]　初項是 $\frac{1}{2}$, 公比是 $\frac{1}{2}$, $n=8$, $r<1$,

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\div\frac{1}{2}$$

$$=1-\frac{1}{2^8}=1-\frac{1}{256}=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{255}{256}}.$$

5. 化 $1.3\dot{5}\dot{4}$ 爲分數.

[解] $$1.3\dot{5}\dot{4}=\frac{13}{10}+\frac{54}{10^3}+\frac{54}{10^5}+\frac{54}{10^7}+\cdots\cdots \quad \text{(到無窮)}$$

$$=\frac{13}{10}+\frac{54}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\cdots\cdots\right)$$

括弧中的數,是無窮等比級數,首項=1,

$$r=\frac{1}{10^2}$$

$$\therefore\ 1.3\dot{5}\dot{4}=\frac{13}{10}+\frac{54}{10^3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{13}{10}+\frac{54}{990}$$

$$=\frac{1354-13}{990}=\frac{1341}{990}=\underset{\sim\sim\sim}{1\frac{39}{110}}.$$

6. 從 26 字母中,取 3 個字母,排列成字,排法共有幾種?

[解] $${}_{26}P_3=\underline{|26}\,/\,\underline{|26-3}=26\times25\times24=15600.$$

答: 共有 15600 種.

7. 水手 12 人,分乘六槳的游艇兩艘,求其分乘的方法.

〔解〕　$_{12}C_6=\dfrac{\underline{|12}}{\underline{|6}\ \underline{|12-6}}=\dfrac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$

$=924.$　　　答：有 924 種方法.

8. 利用二項級數求$(1.05)^4$.

〔解〕　$(1.05)^4=(1+.05)^4=1+4\times.05+\dfrac{4(4-1)}{\underline{|2}}\times.0025$

$+\dfrac{4(4-1)(4-2)}{\underline{|3}}\times.05^3+.05^4$

$=1+.2+6\times.0025+4\times.000125+.00000625$

$=1+.2+.015+.0005+.00000625$

$=1.21550625.$

9. 華氏14°,相當於攝氏幾度?

〔解〕　$C=\dfrac{5}{9}(F-32)=\dfrac{5}{9}\times(14-32)=\dfrac{5}{9}\times(-18)=-10.$

答：攝氏零下10°.

10. 一石從塔頂下墜,經 4 秒落到地面.塔高幾呎?

〔解〕　$S=16\,t^2=16\times16=256.$　　　答：256 呎.

11. 每秒擺動一次的擺,應長多少?

〔解〕　$1=\dfrac{44}{7}\times\sqrt{\dfrac{l}{980}},\ \sqrt{\dfrac{l}{980}}=\dfrac{7}{44},\ \dfrac{l}{980}=\dfrac{7^2}{44^2},$

$\therefore\ l=\dfrac{7^2}{44^2}\times980=25.$　　　答：約 25 公分.

第四章

應用問題

I. 一般要點:——解代數學中的應用問題,若能注意下列各點,則一題在手,就可以按題列式,不致茫無頭緒了.

1. 先將問題細讀,然後用 x 代表所求的未知數.若所求的未知數,不止一個,可用 x, y, z 等多元來代表.

2. 根據公式,將題中已知未知各數代入,列成方程式.或根據題中的意義,將言語直接譯成方程式.

3. 根據公式代入,若所求未知數不止一個,則必有另外的關係,可以將所求未知數列成第二,第三個方程式.

4. 根據題意直譯,若所求未知數祇有一個,則必有表兩數相等的一關係;若所求未知數有二

個,三個,則必有二或三種關係.

5. 若(3)與(4)的條件不全,則該問題即無一定答案.

6. 不論問題簡單複雜題中的未知數,總比所求的多;否則便成爲公式的代入了.但是除所求未知數以外的未知數,都是補助未知數;方程式的排列,大概靠這些補助未知數的關係.有時爲簡便明顯起見,可用 a, b, c 等代表這些補助未知數;等到列成方程式後,再把它們消去.有時爲簡便起見,竟可消去所求未知數,而解補助未知數的方程式,再由代入法而得所求未知數的數值.

7. 發生關係的補助未知數,總可以用所求未知數與已知數的代數式來表示;所以應該練習的,便是如何立這些代數式.立代數式的方法,也是根據公式,或根據題意直譯.

8. 立式所根據的公式,除前章所列舉的以外,大概還有下面的幾種:

(*a*) 價格×件數=總值.

(*b*) 消耗率×消耗者×消耗時間=消耗總量.

(c) 工程率×作工者×作工時間=工程總量.

(d) 工資率×作工者×作工時間=工資總額.

(e) 每秒步數×每步之長=速率.

(f) 有效速率=分速率的代數和.(幫助前進是正,反對前進是負.)

(g) 幾何學上簡單的關係.

9. 立式所根據的題意,即所謂題中所示的數理關係,大概不出下面幾種:

(a) 百分母子關係.

(b) 比例關係.

(c) 和差關係.

(d) 倍數關係.

(e) 和差積,和差商關係.

(f) 積商和,積商差關係.

(g) 除法餘數關係.

10. 列成方程式後,依法求解.解得的根,不止一個,須審題意,而把不合理的去掉.有時負根加以適當的解釋,也可合理.有時根雖祇有一個,但是不合題意;遇此情形,就是原題不合.但或因計算有誤之故,所以最好把方程式再細看一遍.

11. 列成的方程式,若是無理方程式,須把根號前的正負號活用,不可拘泥於定用正號.

12. 式中所有表示同一量的未知數,或代數式,或已知數,都須用同一單位,最要最要.

II. 模範問題:——現在依照上述各節,把模範題舉例於下:

1. 茶葉15斤,咖啡5斤,其價共計7.5元;咖啡15斤,茶葉5斤,其價共計6.5元.問茶葉及咖啡每一斤各值價若干?　(滬23)

[解] 令　x=茶葉每斤價格元數,
y=咖啡每斤價格元數.　(所求未知數)

則 $15x$=茶葉總值,
$5y$=咖啡總值.　(補助未知數)

於是得方程式

$$15x+5y=7.5\ (\text{元})$$　(和的關係)

照樣得第二方程式

$$5x+15y=6.5\ (\text{元})$$

解聯立方程式

$$x=0.4\quad y=0.3.$$

答: 茶葉每斤4角,咖啡每斤3角.

2. 某人有銀 2000 元,分兩處投資,一處之利率,爲百分之五,一處爲百分之七.若每年共得利銀 118 元,問每處投資各若干? (河北 22)

[解] 命 x=第一處投資元數,

y=第二處投資元數.

則 $\frac{5x}{100}=I_1$, $\frac{7y}{100}=I_2$, 但 $I_1+I_2=118$,

卽 $$\frac{5x}{100}+\frac{7y}{100}=118 \cdots\cdots (1)$$

又 $$x+y=2000 \cdots\cdots (2)$$

解聯立方程式,得

$x=\underset{\sim\sim\sim}{1100}$ (元), $y=\underset{\sim\sim\sim}{900}$ (元).

3. 某人作工若干日,共得工資 36 元,設每日工資增 2 角,則少作工 2 日,仍可得 36 元.問每日工資若干?共作工幾日? (北平)

[解] 設 x=每日工資角數, y=作工日數.

則 $$x\,y=360 \cdots\cdots (1)$$

(公式 d)

$$(x+2)(y-2)=360 \cdots\cdots (2)$$

(第二關係)

解聯立方程式,得 $x=18$, 或 -20 (不合理,棄去)

代入(1),得　　　　$y=20.$

答: 每日工資1元8角,共作工20日.

4. 一矩形,其二邊之和是17公尺,對角線的長是13公尺,求矩形面積.　　(皖)

[解] 設 x=矩形面積(所求未知數),

a=矩形的闊,則

$17-a$=矩形的長(補助未知數).於是

$$a(17-a)=x \cdots\cdots (1)$$

(矩形面積公式)

$$a^2+(17-a)^2=169 \cdots\cdots (2)$$

(商高定理)

解方程式(2),得 $a=5$ 或 12, 兩根皆合用,

代入(1),得　　$x=60$(平方公尺)

5. 小火輪往返於90里之河中,需13.5時,知水流之速率每時5里,求此輪之速率,及往返各需時間幾何?　　(漢口)

[解] 命 x=此輪之速率(每時若干里),

則　　$x+5$=順流速率,

$x-5$=逆流速率,　　(補助未知數)

(根據公式 f)

$$\left.\begin{aligned}於是\quad \frac{90}{x+5}&=t_1=順流時間\\ \frac{90}{x-5}&=t_2=逆流時間\end{aligned}\right\}(等速度運動公式)$$

但題言：$t_1+t_2=13.5$,

即　$\dfrac{90}{x+5}+\dfrac{90}{x-5}=13.5.$

解分數方程式,得 $x=15$,　$-\dfrac{5}{3}$(不合理,棄去)

於是　　$t_1=4.5$,　$t_2=9$.

答：　輪速每時 $\underbrace{15\text{里}}$,往返各需 $\underbrace{4.5\text{時}}$, $\underbrace{9\text{時}}$.

6. 直角三角形斜邊,爲短腰之 $\dfrac{5}{3}$,而兩腰之差爲 4.求兩腰各若干.　　(贛 23)

[解]　命 x=短腰長,y=長腰長(所求未知數)

則　　$y-x=4$ ………………………… (1)

(直譯題中差的關係)

但　　$\dfrac{5x}{3}$=斜邊長(補助未知數)

$$\therefore\ x^2+y^2=\frac{25}{9}x^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解聯立方程式,得 $x=12$,　$-\dfrac{12}{7}$(不合棄去).

代入(1),得　　$y=16$.

答：　兩腰各長 $\underbrace{12}$, $\underbrace{16}$.

7. 男女職工合計 1100 人，男工總員與女工總員，同時可成同一的工程. 若將男女工人數交換，則男工25日可成的工程，女工須36日做成. 問男工有幾人?

[解]　命 $x=$ 男工人數，則 $1100-x=$ 女工人數.

(補助未知數)

又命 $a=$ 男工每人每日所做工程，$b=$ 女工每人每日所做工程.

(補助未知數)

則　$ax=b(1100-x)$

但題又言　$36\,bx=25\,a(1100-x)$,

$\therefore\ 36\,abx^2=25\,ab(1100-x)^2$,

卽　$36\,x^2=25(1100-x)^2$.

解方程式，得　$x=500,\quad -5500$ (不合).

答：男工 500 人.

8. 長方形地一方，周圍長 22 尺；而長之 2 倍與寬之 3 倍之差爲 2 尺，問此地之長與寬各若干?

(滬 23)

[解]　命 $x=$ 長(尺數)，$y=$ 寬(尺數)，則

$2\,x+2\,y=22$ ………………………… (1)

(長方形對邊相等)

又依題意直譯,得

$$2x-3y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(積差關係)

解(1),(2)聯立方程式,得 $x=7$, $y=4$.

答: 長7尺,寬4尺.

9. 兵士一隊,初排一方陣,尙餘80人.改排一方陣,其每邊之人數,比前之一半多12人,則不足4人.求兵數. (粵)

[解] 命 x=兵數, a=第一方陣每邊人數,

(第一補助未知數)

則 $\frac{a}{2}+12$=第二方陣每邊人數

(第二補助未知數,商和關係)

於是 $$x-80=a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

(差的關係,正方面積)

$$x+4=\left(\frac{a}{2}+12\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(和的關係,正方面積)

由(1),(2),得 $a^2+80=\left(\frac{a}{2}+12\right)^2-4 \cdots\cdots\cdots (3)$

解(3),得 $a=20$, 或 -4 (不合).

以 $a=20$ 代入 (1), 得　$x=480.$

答:　兵數 480 人.

10. 有三數成等差級數, 其和爲 6, 其各數之平方和爲 14. 求各數.　(湘二屆)

[解]　命　$x=$第一數(所求未知數), d 爲公差(補助未知數),

則 $x+d=$第二數, $x+2d=$第三數(級數末項公式).

於是　$x+x+d+x+2d=6$　(第一關係)

即　$x+d=2$ ………………………… (1)

又依題意直譯

$x^2+(x+d)^2+(x+2d)^2=14$　(第二關係)

即　$x^2+2^2+(2+d)^2=14$

$x^2+2^2+2^2+4d+d^2=14$

$x^2+4d+d^2=6$ ………………………… (2)

解 (1), (2), 得 $d=1,\ -1.$ (兩根都合用)

以 $d=1$ 代入 (1), 得 $x=1$, 於是所求三數爲 1, 2, 3. 以 $d=-1$ 代入 (1), 得 $x=3$, 於是所求三數爲 3, 2, 1.

11. 二數之和爲 63, 大者比小者之 2 倍多 3, 試求此

二數. (湘三屆)

[解] 命 x=大數, y=小數, 於是依題意, 得

$$x+y=63 \cdots\cdots (1)$$

(直譯第一關係)

$$x-2y=3 \cdots\cdots (2)$$

(直譯第二關係)

解聯立方程式, 得 $x=43$, $y=20$.

12. 兎先逃50步, 狗去追它. 兎逃九步的路程, 狗只要追七步便到. 兎走六步的時刻, 狗却祇能追五步. 問狗追及兎時, 兎又逃了幾步?

[解] 命 x=兎又逃的步數, a=兎每步的長(第一補助未知數), b=狗每步的長 (第二補助未知數), m=兎每分鐘所走步數, n=狗每分鐘所走步數(第三,第四補助未知數). 於是

兎的速度 $=ma$.

狗的速度 $=nb$, (公式 e)

兎第二次所行的距離 $=ax$,

狗追及兎所行的距離 $=a(50+x)$,

於是 $\dfrac{ax}{ma}=\dfrac{a(50+x)}{nb}$ (因爲追及, 時間相等)

卽 $$\frac{nx}{m}=\frac{a(50+x)}{b} \cdots\cdots (1)$$

但題中說　$9a=7b$,　$\therefore \frac{a}{b}=\frac{7}{9}$

$$\frac{6}{m}=\frac{5}{n}, \quad \therefore \frac{n}{m}=\frac{5}{6}$$

於是以此二比值代入(1),即得

$$\frac{5x}{3}=\frac{7(50+x)}{9}$$

解方程式,得　$x=700$.

答:　兔又逃 700 步.

13.　一酒罎,底有一小孔,每日須漏出等量的酒,今在罎滿時,5 人日日舀飲,15 日飲盡;若 3 人日日舀飲,22 日飲盡.問無人舀飲時,這罎酒幾日漏盡?但衆人每日飲量相等;而且一面飲酒,罎底一面仍在漏酒.

[解]　命 $x=$ 所求漏盡日數;$a=$ 每日漏出量,$b=$ 每人每日飲量(補助未知數).

則

$$\left.\begin{aligned} 5\times15b+15a&=\text{酒罎總量}\\ 3\times22b+22a&=\text{酒罎總量}\\ ax&=\text{酒罎總量}\end{aligned}\right\}\quad(\text{公式}\,b)$$

$$\therefore\ ax=75b+15a=66b+22a$$

即

$$x=75\frac{b}{a}+15=66\frac{b}{a}+22$$

解聯立方程式$\left(\text{把 } \frac{b}{a} \text{ 當作 } y\right)$，得 $x=73\frac{1}{3}$.

答：無人舀飲，經 $73\frac{1}{3}$ 日漏盡.

14. 攝氏華氏二表度數相同，是什麼溫度？

[解] 在公式 $C=\frac{5}{9}(F-32)$ 中，命 $C=F=x$,

得 $x=\frac{5}{9}(x-32)$,

解方程式，得 $x=-40$.

答：兩表零下 $40°$.

15. 將一物體用每秒 v 呎的速度，垂直拋上，t 秒後此物離原處的距離是 $s=vt-16t^2$. 現依每秒 200 呎的速度，向上開放鎗彈，問過幾秒後，達 600 呎的高？

[解] 代入公式，$600=200t-16t^2$

即 $2t^2-25t+75=0$,

解方程式，得 $t=5,\ 7\frac{1}{2}$（兩根都合用）.

答：在 5 秒後與 7 秒半後.

16. 一個二位數，數字和是 10. 此數與其倒位數的積，是 2944. 求此數.

[解] 命 x=十位數字，y=個位數字，則

$x+y=10$ （第一關係）

$$(10x+y)(10y+x)=2944 \qquad \text{(第二關係)}$$

解方程式,得　$x=6$, 或 4; $y=4$, 或 6.

答: 此數為64, 或46.

17. 甲乙兩人,作400公尺的競走. 甲讓乙先走25公尺,尙比乙早到15秒; 若讓乙先走36秒, 則乙到時, 甲落後40公尺. 求各人走400公尺所需的時間.

[解] 命 $x=$ 甲所需秒數, $y=$ 乙所需秒數, 則

$\frac{400}{x}=$ 甲的速度, $\frac{400}{y}=$ 乙的速度(補助未知數)

但由題中第一關係, 知

$$\frac{400}{y}(x+15)=400-25 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

由題中第二關係, 知

$$\frac{400}{x}(y-36)=400-40 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解(1), (2), 得 $x=120$, $y=144$.

答: 甲需2分, 乙需2分24秒.

18. 一人用每小時一里的速度,從甲鎮走向8里遠的乙鎮.走一小時後,一馬車也從甲地動身向乙地.馬車追到此人,此人就乘馬車前進,前後共費5小時到乙地.求馬車每小時的速度

［解］ 命 x=馬車速度(每小時若干里).

馬車開行時,人在馬車前 1 里,故馬車追到人,費去 $\frac{1}{x-1}$ 小時,即馬車走 $\frac{x}{x-1}$ 里,離開乙地尚有 $8-\frac{x}{x-1}=\frac{7x-8}{x-1}$ 里. ∴ 人乘馬車後,馬車尚需走 $\frac{7x-8}{x-1}\div x=\frac{7x-8}{x(x-1)}$ 小時.因前後共費 5 小時, ∴ $\frac{1}{x-1}+1+\frac{7x-8}{x(x-1)}=5.$

解方程式,得　　$x=2.$

答: 馬車每小時走 2 里.

註: 此方程式用去分母法求解,卽得假根

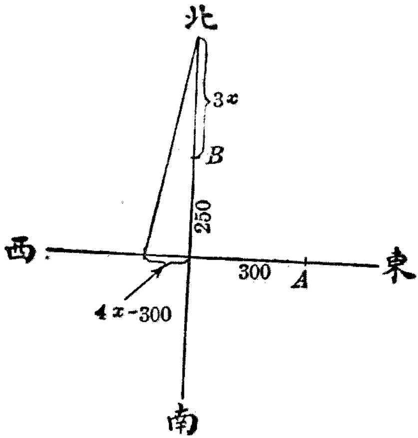
$$x=1.$$

19. A 用每秒4尺的速度,從東向西,B 用每秒3尺的速度,從南向北.今 A 在不到交义路口300尺的一處,B 在已過交义路口250尺的一處.求離今幾秒以後,A,B 可以相距380尺.

［解］ 命 x=所求秒數,則 A 又走 $4x$ 尺,B 又走 $3x$ 尺,如下圖,假定合題中的條件時, A 已過交义口.

於是:　　$250+3x=B$ 過交义口的路.

$4x-300=A$ 過交义口的路.



依商高定理：得

$$\sqrt{380^2-(250+3x)^2}=4x-300$$

解無理方程式，得 $x=18$，代入原式，得

$$\sqrt{51984}=228\neq 72-300=-228,$$

似乎不合；但若方根取負號，卽得

$$-\sqrt{51984}=4x-300=-228.$$

可見原方程式應寫成

$$-\sqrt{380^2-(250+3x)^2}=4x-300,$$

或 $$\sqrt{380^2-(250+3x)^2}=300-4x.$$

卽 A 尙未過交义口.

答： 在18秒之後.

第五章

計算工具

I. 圖解法:——代數學中的圖解法,可以表示函數的變化,及求一元方程式與二元聯立方程式的根,頗爲簡便明顯.其方法如何,讀者在教科書中都已習得,本書不復贅述,玆將應注意的要點列下,務須牢記:

a. 橫坐標與縱坐標的單位,雖可不同,但同一圖中的橫坐標與橫坐標,縱坐標與縱坐標,其單位切不可隨時變動.

b. 在橫軸與縱軸上,宜註明單位,但也祇須逢1逢5,或逢雙記明,不必全記.

c. 描點與畫線,必須非常小心,否則便要"差以毫釐,謬以千里"了.

d. 各象限內坐標的正負,不可弄錯.

e. 決定直線,祇要得 $(0, a)$, $(b, 0)$ 兩點;但是遇此兩

點很近時,須再尋一點.

f. 畫曲線須用雲形規,每三點一連,且須使其光滑,不可有過凹過凸,及鋒稜等等.其實畫曲線須決定種種特別點,方法非初中程度所及.

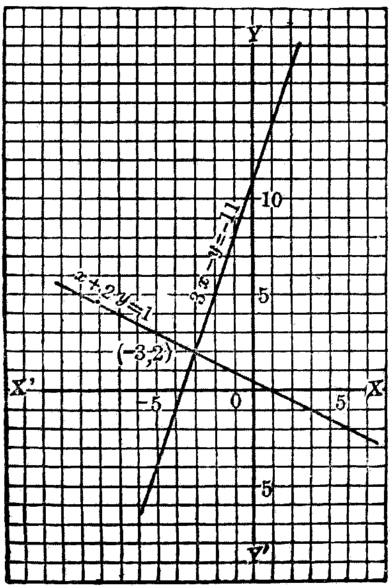
茲舉模範題數則於下:

1. 解下列方程系:

$$x+2y=1, \quad 3x-y=-11.$$

用圖線法覆驗結果.　(河北 22)

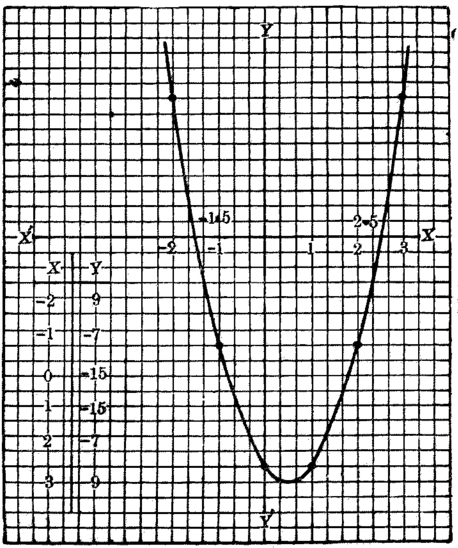
〔解〕 照解方程式法,得 $x=-3$, $y=2$.



用圖線法覆驗,得上圖.代表第一方程式的線,經過 (1, 0), (5, −2) 兩點;代表第二方程式的線,經過 (0, 11), $\left(-\frac{11}{3}, 0\right)$ 兩點.兩線交點是 (−3, 2),完全與解答合.

2. 用圖解法,求方程式 $4x^2-4x-15=0$ 的二根.

[解] 命 $y=4x^2-4x-15$, 描出 (−2, 9), (−1, −7), (0, −15), (1, −15), (2, −7), (3, 9) 各點,當拋物線如下圖.橫軸交點是 (2.5, 0), (−1.5, 0).



$\therefore$ 二根是 2.5, -1.5. 代入方程式,都合.

註: 凡二次函數,成 $y=ax^2+bx+c$ 的,其圖形都是拋物線.若 a 是負數,拋物線向下.

II. 對數計算:——繁複的乘除,乘方開方,利用對數計算,可以減少許多勞力.對數運算的方法,讀者可得自各種代數教科書,本書不復贅.但是下列各點,必須注意:

a. $\log(a\pm b)\neq\log a\pm\log b$, 必須先用平常方法,求得和差後,再求和差的對數.

b. $\dfrac{\log a}{\log b}\neq\log a-\log b$, 必須求得對數後,再行除法.

$$\therefore\ \log\left[\frac{\log a}{\log b}\right]=\log(\log a)-\log(\log b).$$

c. $\log\left(\dfrac{ab}{cd}\right)\neq\dfrac{\log a+\log b}{\log c+\log d}$, 原式應寫作

$$\log\left(\frac{ab}{cd}\right)=\log a+\log b-\log c-\log d,\ 方合.$$

d. 若 $\log n=3.0386$, 查表得 $n=1093$, 切不可寫作

$$\log n=3.0386\neq1093.$$

e. 負數沒有對數.若遇因子有負號的,可用 (-1) 乘它,算出結果後,再用 (-1) 乘好了.

玆舉模範題數則於下：

1. 解方程式 $5^x \cdot 7^{x+1} = 13^{2x+1}$.

[解] $x \log 5 + (x+1)\log 7 = (2x+1)\log 13$,

$$\therefore\ x = \frac{\log 13 - \log 7}{\log 5 + \log 7 - 2\log 13}.$$

查四位對數表，得 $x = -0.39$.

2. 存款1000元，按年利6%，存入銀行，十年為期，每年平均支付本息，問每年年底，可得款幾元？

[解] 由公式 $a = \dfrac{Pr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$，得

$$a = \frac{1000 \times .06 \times 1.06^{10}}{1.06^{10} - 1} = \frac{60 \times 1.06^{10}}{1.06^{10} - 1}.$$

用對數計算，

$$\log a = \log 60 + 10 \log 1.06 - \log(1.06^{10} - 1).$$

查四位表，求得 $a = 135.87$ 元.

註：$\log(1.06^{10} - 1) \neq 10 \log 1.06 - \log 1$.

3. (a) $\log_2 8 = ?$ (b) 若 $10^{1.5} = 31.62$, $\log_{10} 31.62 = ?$

(c) $\log_{16} 4 = ?$ (d) $n = \dfrac{1}{4}$, $\log_4 n = ?$

[解] (a) $8 = 2^3$, $\therefore \log_2 8 = 3$. (b) $\log_{10} 31.62 = 1.5$.

(c) $4 = 16^{\frac{1}{2}}$, $\therefore \log_{16} 4 = \dfrac{1}{2}$. (d) $\log_4 \dfrac{1}{4} = -1$.