新課程標準 師範 學校適用
鄉村師範

算學

(3)

解析幾何學

全一冊

編者 雷琛

上海中華書局印行

新課程標準師範適用
解析幾何學（全一冊）

實價 1.70

民國二十五年七月發行
民國二十五年七月初版

編者 雷琛
發行者 中華書局有限公司 代表人 陸費逵
印刷者 中華書局印刷所 上海澳門路
總發行處 中華書局發行所 上海福州路
分發行處 各埠中華書局

（一〇五五四）

新課程標準師範適用

解析幾何學

編輯大意

1. 本書遵照教育部最近頒布師範學校課程標準編輯,供師範學校教學解析幾何之用。

2. 本書所選教材,理論應用,雙方兼顧,排列順序,由淺入深,並尊重標準之精神,力主需要顯明,以期用此書者收效較多。

3. 本書內容共分十章,第一章講授直角坐標法,第二章注重軌跡與方程式之關係,第三章至第八章詳述直綫與錐綫之範式及應用,末兩章略授極坐標法及高等平面曲綫之概要。各章中對於理法之解釋,範式之求法,證題之步驟,解法之討論,皆反覆申說,極易領會。

4. 本書習題豐富,分配適宜,務使學者於已習之理法,在習題中皆有應用之機會,以期學者養成理解正確運算純熟之習慣。

5. 本書對於代數幾何三角等科與解析幾何相關之處,隨時加以聯絡,俾學者易於了解而

收貫通之效。

6.本書所用算學名詞依照科學名詞審查會之已審定者,其未備者,則採用最近通行之名詞,且各名詞初見之時,附有英名,以便學者中英對照。

7.本書編輯,本著者多年教學之經驗,採歐美名著之精華,措辭淺顯,體例井然,於學者事半功倍之效,差敢自信。惟課餘之暇,倉卒執筆,紕漏之處,容或難免,尚乞高明指正。

中西名詞對照表

(一) 中西對照

十畫

十一畫

十二畫

十三畫

十四畫

十五畫

十六畫

十七畫

十八畫

二十三畫

(二) 西　中　對　照

新課程標準師範適用

解析幾何學

目次

第一章　坐標的基本觀念和應用

第二章　軌跡和方程式

第三章　直綫

第四章 圓

第五章 圓錐截綫

I 總論

II 拋綫

III 橢圓

IV 雙曲綫

第六章　切綫　法綫　弦

第七章　移軸法

第八章 二次式軌跡總論

第九章 極坐標

第十章 高次平面曲綫

新課程標準師範適用

解析幾何學

第一章

坐標的基本觀念和應用

1. 解析幾何學的目的　形和數是算學中兩大基本觀念,就中等算學各分科而言,有討論數量運算的,有論證圖形性質的。所以學習這種分科以後,對於計算和作圖的技能,形象和數量的知識,已增進了不少。可是要深切了解各科呼應一貫的性質和相互爲用的方法,必須繼續研究形和數聯絡的學科——解析幾何學(Analytic geometry)。

解析幾何學是一方面用方程式顯明幾何圖形的性質,另一方面用幾何圖形表示方程式的變跡;換句話說,就是把形和數充分聯絡起來。聯絡的方法是根據法人狄卡德(Descartes)創造的坐標法(Coördinate system)。

2. 方向綫　數分了正負,數的領域便擴大;

綫分了正負方向,形和數便可聯絡。凡直綫確定了方向的,叫做**方向綫**(Directed line)。指定一方向爲正,他的反對方向便是負。通常自左向右爲**正向**(Positive direction),自右向左爲**負向**(Negative direction),正向用→表示。譬如方向綫 AB 長 4

公寸,那麼

$$AB=4,\quad BA=-4。$$

就是 $$AB=-BA,$$

或 $$AB+BA=0。$$

如果方向綫 AB 內另有一點 C,那麼

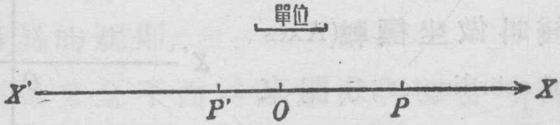
$$AB=AC+CB=AC-BC。$$

所以圖形中有了方向綫,列式運算的時候,須特別注意綫上的方向和文字的次序,不像初等幾何裏,AB 綫和 BA 綫是沒有分別,可以隨意記的。

3. <u>坐標</u>　坐標種類很多,是解析幾何學的基本要素,也可以說是研究本科的出發點。效用

的宏大,可想而知,本書分別詳述他的方法於後。

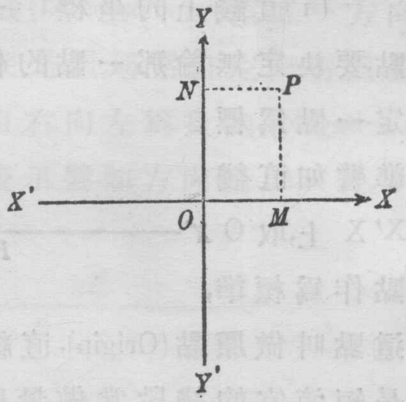
(i)直綫上的坐標　一直綫上有無限數的點,要決定無論那一點的位置,必須在這綫上先定一點爲標準。譬如直綫X′X上,取O點作爲標準,

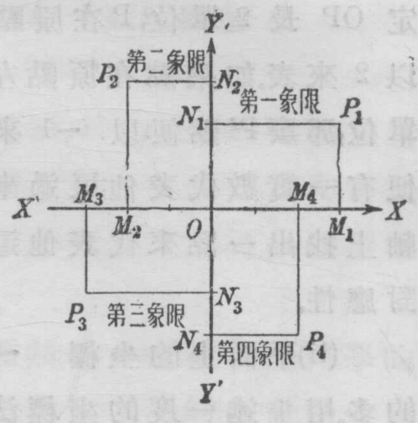


這點叫做原點(Origin),直綫叫做軸(Axis);再取一長短適宜的綫段,當做量度距離的單位。根據上節正向負向的原則,定原點右方左方各綫段的正負。設軸上有一點P,用單位量度O到P的距離,這OP的長叫做P點的坐標(Coördinate)。假定OP長2單位,P在原點右方,那麼P點便可以2來表。如果點在原點左方,像P′點,OP′長1單位,那麼P′點便以 −1 來表。可知軸上有一點,便有一實數代表他;反過來說,有一實數,便可在軸上找出一點來代表他。這就是點和數的一一對應性。

(ii)平面上的坐標　一平面上的點,更無限的多。用上述一度的坐標法,尙無濟於事,須做經

緯綫的制度,推廣到二度的坐標。取正交於O點的兩方向直綫X'X, Y'Y作爲標準綫,O點也叫做原點,兩直綫叫做**坐標軸**(Axes of coördinates);分開來說,X'X綫叫 x 軸或**橫軸**(Axis of abscissas), Y'Y綫叫 y 軸或**縱軸**(Axis of ordinates)。設平面內有一點P,從P作平行於兩軸的直綫,那麼P到 y 軸的距離,即NP或OM,叫做P點的**橫坐標**(Abscissa),P到 x 軸的距離,即MP或ON,叫做P點的**縱坐標**(Ordinate)。兩者合稱爲P點的坐標,通常記做P(x,y),橫坐標 x 恆記在縱坐標 y 的前面。若同時有幾點,須用不同文字來





代表,如上圖裏P_1, P_2, P_3, …各點,可記做$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$,……。

坐標面上的綫段,凡平行於橫軸或縱軸的,都是方向綫段,並且向右向上爲正,向左向下爲負,是一定不易的規則。

兩坐標軸分全平面爲四部份,各部份叫做象限(Quadrant)。依反鐘向的次序名爲第一、二、三、四象限,如上圖所示。點在各象限內,坐標的正負,是根據上述規則決定,結果如上表。

象限＼坐標	第一	第二	第三	第四
橫	正	負	負	正
縱	正	正	負	負

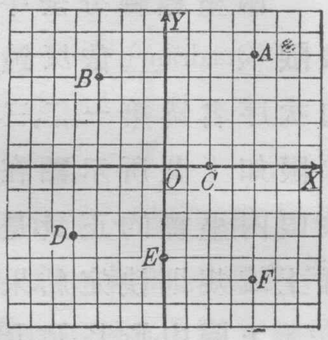
上圖中P_1,P_2,P_3,P_4四點,容易看出他們的坐標量,記做$P_1(3,2)$,$P_2(-2,3)$,$P_3(-3,-2)$,$P_4(2,-3)$。可知平面上任意一點,實數裏必有一對相當的數值代表他,好像地球上無論那一處,總有一定的經緯度;反過來說,每一對實數值,平面上必可尋出相當的一點代表他,好像知道了某處的經緯度,必能覓得所在的地方。

〔注意一〕坐標軸有正交和斜交兩種正交的叫直角坐標(Rectangular coördinates),斜交的叫斜角坐標(Oblique coördinates)。本書爲運算簡便起見,採用正交的一種。

〔注意二〕 畫解析幾何裏的圖形,用印好的方格紙最爲簡便。

〔例題一〕 定兩點(4,5),(−3,4)的位置。

〔解〕 在方格紙上,先定 x 軸和 y 軸,並以每格當 1。因第一點的坐標都是正,便在 x 軸上從原點 O 起向右取 4 格,由此向上取 5 格,記一小點,如右圖中 A 點;第二點的橫坐標是負,縱坐標是正,便在 x 軸上從 O 點起向左取 3 格,由此向上取 4 格,記一小點,如上圖中 B 點。故 A, B 就是所有的兩點。



〔例題二〕 記出上圖中C,D,E,F 各點的坐標。

〔解〕 做前題每格當 1,看圖上各點距離兩軸的格數。依坐標符號的規則,便得 C (2,0), D(−4,−3), E (0,−4), F(4,−5)。

習題一

1. 定下列各點的位置:(2,5), (−3,0), (−3,−4), (0,−2),

$(6,-3)$, $(5,0)$, $\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$, $(\sqrt{12},-\sqrt{18})$。

2. y 軸上各點的橫坐標是怎樣？ x 軸上各點的縱坐標是怎樣？ 原點的坐標是怎樣？

3. 三角形的三個頂點是：(a) $(3,-1)$, $(-2,5)$, $(-8,-4)$。(b) $(3,5)$, $(0,0)$, $(6,7)$。試把圖形畫出來！

4. 有 $(-3,6)$, $(0,-3)$, $(5,-3)$, $(2,6)$ 四點，如果把兩點順次聯結，成了一個什麼圖形？

5. 設一動點平行於 x 軸移動，他的縱坐標變動麼？橫坐標呢？ 如果平行於 y 軸移動，坐標是怎樣？

6. 求一動點的軌跡，已知(a)他的橫縱坐標恆等；(b)橫縱坐標同值異號。

7. 有一正方形，邊長是 a，兩對角綫的交點在原點。已知(a)邊與軸平行；(b)兩對角綫在兩軸上；試照這兩種情形分別求各頂點的坐標。

8. 有等邊三角形，一頂點在原點，設若(a)他的對邊平行於 y 軸；(b)他的隣邊在 x 軸上；求各頂點的坐標。

9. 設菱形的一角是 $60°$，兩頂點是 $(0,0)$ 及 $(a,0)$，其餘兩頂點是(a)均在第一象限內；(b)一頂點在第二象限內；求這兩頂點的坐標。

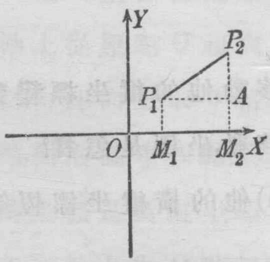
10. 設正六角形的一邊是 a，他的中心在原點，一對

角綫與 x 軸相合,求各頂點的坐標。

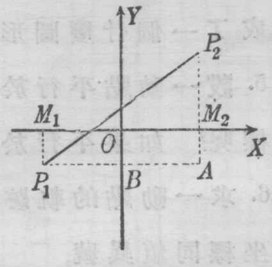
4. 兩點間的距離 定理 設 l 或 P_1P_2 爲任意兩點 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 間的距離,則

$$l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (I)$$

證 過 P_1,P_2 作平行於兩軸的直綫,得直角



(圖 一)



(圖 二)

三角形 P_1AP_2。

因 $P_1A=OM_2-OM_1=x_2-x_1$,

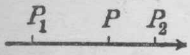
$AP_2=M_2P_2-M_1P_1=y_2-y_1$,

$\overline{P_1P_2}^2=\overline{P_1A}^2+\overline{AP_2}^2$。

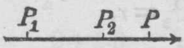
故 $l=P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$。

〔注意〕 兩點無論同在那一個象限或在不同象限內,上面的公式都可通用。學者試就圖二或其他種種不同位置證明之。

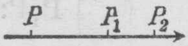
5. 直線的分點　設P_1,P_2爲一方向綫上的兩定點,P爲第三點。無論P點在P_1P_2內或外,總



(圖一)



(圖二)



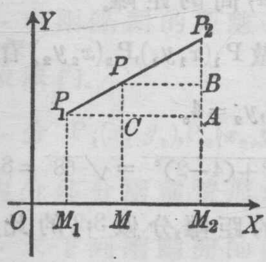
(圖三)

是P_1P_2被這點分做P_1P,PP_2兩部分,所以P點叫做P_1P_2的**分點**(Point of division)。根據幾何學上的定義,P點在P_1P_2內如圖一,叫做**內分**(Internal division),在P_1P_2外如圖二,圖三,叫做**外分**(External division)。不拘內分或外分,兩綫段的比通常記做$\dfrac{P_1P}{PP_2}=r$。

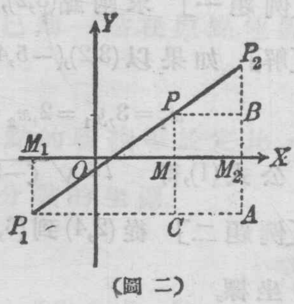
定理　設$P(x,y)$爲自$P_1(x_1,y_1)$到$P_2(x_2,y_2)$的聯綫上分點,則

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r},\ y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}。\qquad \text{(II)}$$

證　自P_1,P_2,P各點作平行於兩軸的直綫,



(圖一)



(圖二)

不拘圖一或圖二,得兩相似三角形 PP_1C, P_2PB.

故 $\quad P_1P:PP_2=P_1C:PB$。

但 $\quad P_1P:PP_2=r$,

$\quad P_1C=OM-OM_1=x-x_1$,

$\quad PB=OM_2-OM=x_2-x$。

$\therefore \quad x-x_1:x_2-x=r$,

解之得 $\quad x=\dfrac{x_1+rx_2}{1+r}$。

用同法得 $\quad y=\dfrac{y_1+ry_2}{1+r}$。

推論 若P爲P_1P_2的中點,則$r=1$,故P點的坐標是 $\quad \boldsymbol{x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\ y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)}$。 (III)

〔注意〕 內分時P_1P和PP_2同向,r是正值,外分時P_1P和PP_2異向,r是負值。所以直線的分點究竟是內分點還是外分點,看r的正負便可斷定。

〔例題一〕 求兩點(3,2),(−5,4)間的距離。

〔解〕 如果以(3,2),(−5,4)當做$P_1(x_1y_1)$,$P_2(x_2y_2)$看,

那麼 $\quad x_1=3, y_1=2, x_2=-5, y_2=4$。

代入公式(I),得 $\quad l=\sqrt{(-5-3)^2+(4-2)^2}=\sqrt{68}=8.2$。

〔例題二〕 從(2,4)到(6,−8)的距離,分做3:2的比,求分點的坐標。

〔解〕 倣前題 $x_1=2, y_1=4, x_2=6, y_2=-8$。

已知 $r=\frac{3}{2}$。

代入公式 (II), 得 $x=\frac{2+\frac{3}{2}\cdot 6}{1+\frac{3}{2}}=4.4,$

$$y=\frac{4+\frac{3}{2}(-8)}{1+\frac{3}{2}}=-3.2。$$

〔例題三〕 從(3,2)到(5,−6)的直綫延長到一點使倍於原長,求這點的坐標。

〔解〕 依題意 (5,−6) 是直綫延長後的中點,他的一端是 (3,2), 又一端就是所求的點。由公式(III),得

$$5=\frac{1}{2}(3+x_2), \quad -6=\frac{1}{2}(2+y_2)。$$

$$\therefore \quad x_2=7, \quad y_2=-14。$$

故所求的點是(7,−14)。

習 題 二

1. 求兩點間的距離公式,已知一點在原點,他點在任一象限內。

2. 分 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 兩點的聯綫等於定比 $m:n$。試依內分外分兩種情形,求出分點的坐標。

3. 求下列兩點間的距離:

(a) (−2,−4), (−5,−8)。 (b) (7,2), (−7,−2)。

(c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $(-2,2)$。 (d) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$, $\left(-2, \frac{7}{6}\right)$。

4. 求兩三角形各邊的[illegible]已知各頂點是

(a) $(4,8)$, $(1,4)$, $(-4,-8)$; (b) $(-3,1)$, $(7,-2)$, $(-6,5)$。

5. 已知兩三角形的頂點是(a) $(2,-2)$, $(-1,-1)$, $(1,5)$; (b) $(5,5)$, $(-7,3)$, $(0,-2)$。指出那個是直角三角形?那個是兩等邊三角形?

6. 證明 $(-3,8)$, $(-7,6)$, $(-3,-2)$, $(1,0)$ 是長方形的頂點。

7. 分 $(5,6)$, $(13,-10)$ 的聯綫爲 $3:5$ 的比,求分點的坐標。

8. 設直綫 AB 延長至 C,使 $AB:BC=4:7$。已知 A, B 是 $(5,4)$, $(6,-9)$,求 C 點的坐標。

9. 設兩等邊三角形的底邊是 $(3,-9)$, $(6,-4)$ 的聯綫,頂點是 $(-8,1)$, 求他的高。

10. 設圓心在 $(5,5)$,直徑的一端是 $(6,-2)$, 求他端。

6. <u>直綫的斜度</u> 定義 一直綫與 x 軸正向的交角叫做傾角 (Inclination)。這種角的正切叫做斜度 (Slope)。

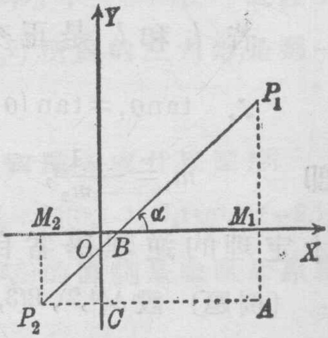
設直綫的傾角爲 α, 則他的斜度是 $\tan\alpha$,常用 m 代表他,就是 $m=\tan\alpha$。所以 m 是正值時, α 是銳角, m 是負值時, α 是鈍角;反過來說,也是合理

的。

定理一　直綫經過兩點$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$的斜度是

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}. \qquad \text{(IV)}$$

證　設P_1,P_2兩點在第一、三象限內。從這兩點作平行於兩軸的直綫。由圖得



$$m=\tan\alpha=\frac{M_1P_1}{BM_1}$$

$$=\frac{AP_1}{P_2A},$$

$$AP_1=AM_1+M_1P_1=M_1P_1-M_2P_2=y_1-y_2,$$

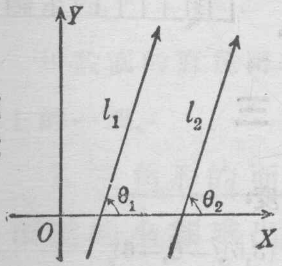
$$P_2A=P_2C+CA=OM_1-OM_2=x_1-x_2。$$

故
$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}。$$

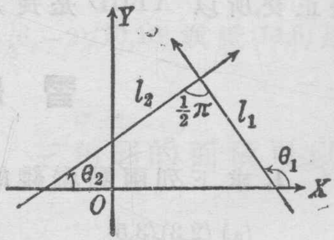
定理二　兩直綫平行，斜度必相等。兩直綫正交，斜度是互爲負逆數。逆理都眞。

證　設m_1,m_2爲兩方向直綫l_1,l_2的斜度。

(圖一)



(圖二)



因 l_1 和 l_2 是平行綫(圖一),所以 $\theta_1=\theta_2$。等角的正切必相等,

$$\therefore \quad m_1=m_2。$$

若 l_1 和 l_2 是正交(圖二),則 $\theta_1=\theta_2+\frac{\pi}{2}$。

$$\therefore \quad \tan\theta_1=\tan\left(\theta_2+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot\theta_2=-\frac{1}{\tan\theta_2}。$$

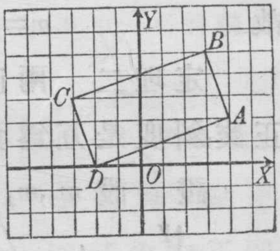
即 $\quad m_1=-\frac{1}{m_2},\quad$ 或 $m_1m_2=-1$。

本定理的逆理,學者自證之。

〔例題〕 設 A(4,2), B(3,5), C(−3,3), D(−2,0) 爲四邊形的頂點試用本節定理證明他是長方形。

〔解〕 求 DA, AB 的斜度,得

$$m_1=\frac{0-2}{-2-4}=\frac{1}{3},\quad m_2=\frac{2-5}{4-3}=-3。$$



同法求得 CB, DC 的斜度是 $\frac{1}{3}$, −3。對邊的斜度都等,隣邊的斜度互爲負逆數,可知對邊是平行,隣邊是正交,所以 ABCD 是長方形。

習題三

1. 求下列兩點聯綫的斜度:

(a) (2,3),(3,5)。　　(b) (3,5),(−6,−6)。

(c) (0,−4),(−3,1)。 (d) (a+b,c),(a,b+c)。

2. 求三角形各邊的斜度,已知他的頂點是

(a) (−2,2),(4,2),(1,5)。 (b) (1,1),(−1,−1),(5,−5)。

3. 用斜度公式證明三點(2,3),(6,−3),(2,9)在一直綫上。

4. 聯結三點 (−1,4),(0,6),(3,2) 所成的三角形,是那一種三角形?

5. 順次聯結下列每組的四點,各成什麼圖形?

(a) (0,−1),(2,1),(0,3),(−2,1)。 (b) (0,−1),(2,1),(0,3),(−2,1)。

6. 試證經過兩點(6,−3),(2,8)的直綫是垂直於原點與(11,4)的聯綫。

7. 試證(a,b),(c,−d)的聯綫平行於(−a,−b),(−c,d)的聯綫。

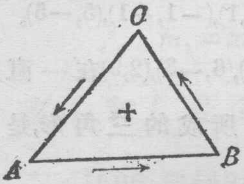
8. 試證以(−1,0),(3,1),(2,5),(−6,3)為頂點的四邊形,有兩角是直角。

9. 已知平行四邊形的三頂點是(1,6),(2,5),(4,−2),求第四頂點。

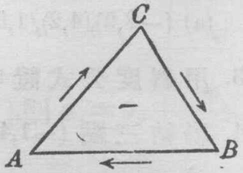
10. 設圓的直徑兩端是(6,−2),(10,10),試證(14,6)是圓周上的一點。

7. 三角形的面積 三角形的面積可以從各頂點的坐標求出。

直線有正負,面積也有正負。譬如有三角形ABC,看下面圖一,依頂點A, B, C的次序繞周界



(圖　一)



(圖　二)

移動,圖形常在左側面積是正量。再看上面圖二,移動的方向已反,圖形常在右側面積便是負量。

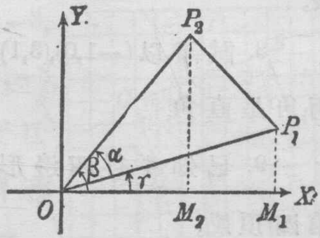
定理一　設三角形的頂點是原點和$P_1(x_1, y_1)$及$P_2(x_2, y_2)$兩點,則他的面積是

$$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)。\qquad (V)$$

證　設$\angle P_1OP_2 = \alpha$,

$\angle XOP_2 = \beta$,

$\angle XOP_1 = \gamma$。



由圖得　$\alpha = \beta - \gamma$。

根據三角形的面積公式:

$$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}OP_1 \cdot OP_2 \sin\alpha,$$

得

$$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}OP_1 \cdot OP_2 \sin(\beta - \gamma)$$

$$= \frac{1}{2}OP_1 \cdot OP_2(\sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta)。\qquad (1)$$

作 P_1M_1、P_2M_2 平行於 y 軸。

因 $$\sin\beta=\frac{M_2P_2}{OP_2}=\frac{y_2}{OP_2},\ \cos\beta=\frac{OM_2}{OP_2}=\frac{x_2}{OP_2},$$

$$\sin\gamma=\frac{M_1P_1}{OP_1}=\frac{y_1}{OP_1},\ \cos\gamma=\frac{OM_1}{OP_1}=\frac{x_1}{OP_1}。$$

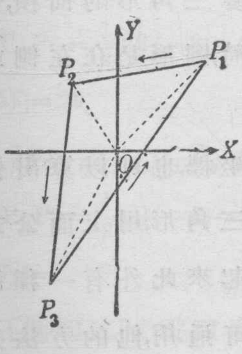
代入(1)式,再化簡,得

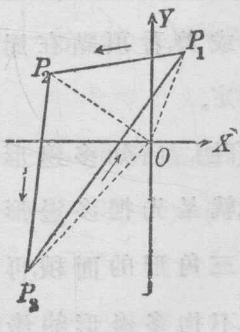
$$\triangle OP_1P_2=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)。$$

定理二　設三角形的項點是 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,$P_3(x_3,y_3)$,則他的面積是

$$\triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3)。\qquad \text{(VI)}$$

證　從原點到各項點作聯綫,所成的三角形各有一項點在原點。





由定理一，　$\triangle OP_1P_2=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$，　(1)

$$\triangle OP_2P_3=\frac{1}{2}(x_2y_3-x_3y_2),\qquad (2)$$

$$\triangle OP_3P_1=\frac{1}{2}(x_3y_1-x_1y_3)。\qquad (3)$$

上面左圖原點在三角形內，故

$$\triangle P_1P_2P_3=\triangle OP_1P_2+\triangle OP_2P_3+\triangle OP_3P_1。$$

右圖原點在三角形外，故

$$\triangle P_1P_2P_3=\triangle OP_1P_2+\triangle OP_2P_3-\triangle OP_1P_3,$$

因為由(3)式求得 $\triangle OP_1P_3$ 的面積是負，就是

$$\triangle OP_1P_3=-\triangle OP_3P_1,$$

所以不拘原點在三角形內或外，$\triangle P_1P_2P_3$ 的面積總是把(1),(2),(3)各式右邊加起來，得

$$\triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3)。$$

〔注意〕用上面兩種公式計算三角形的面積，結果是正或負，看頂點在周界上移動時，圖形是在左側或右側而定。

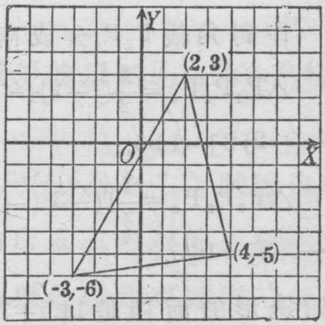
〔註〕已知多邊形各頂點的坐標，也可以算出他的面積。就是先把多邊形分成幾個三角形，用上面公式算出各三角形的面積，再把各積加起來。此外有一種簡便算法，不拘多邊形的邊數多少，都可通用，他的方法是：(一)

把頂點的橫縱坐標順次分寫左右兩行,末一列須和第一列同,像右面的排列法;(二)把各橫坐標乘下一列縱坐標的各積相加,(三)把各縱坐標乘下一列橫坐標的各積相加,(四)把前後兩結果的差折半。

$$\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ \vdots & \vdots \\ x_1 & y_1 \end{array}$$

〔例題一〕 已知三角形的頂點是(2,3),(−3,−6),(4,−5),求他的面積(正負兩解)。

〔解〕 設 P_1, P_2, P_3 順次表各頂點,則



$$x_1=2, y_1=3,$$

$$x_2=-3, y_2=-6,$$

$$x_3=4, y_3=-5。$$

代入公式(VI),

$$\triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}[2\cdot(-6)-(-3)\cdot3+(-3)\cdot(-5)-4\cdot(-6)+4\cdot3-2\cdot(-5)]=29。$$

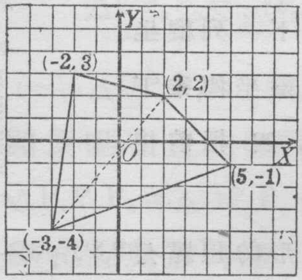
如果設 P_1, P_2, P_3 表(2,3),(4,−5),(−3,−6)各點,則

$$\triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}[2\cdot(-5)-4\cdot3+(-5)\cdot(-6)-(-3)\cdot(-5)+(-3)\cdot3-2\cdot(-6)]=-29。$$

〔例題二〕 設四邊形的頂點是(−2,3),(−3,−4),(5,−1),

(2,2),求他的面積,試用兩種方法去解。

〔解一〕



$$\begin{array}{rr} -2 & 3 \\ -3 & -4 \\ 5 & -1 \\ 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{array}$$

設各頂點順次命為P_1, P_2, P_3, P_4各點。

作對角綫P_2P_4分成兩個三角形$P_1P_2P_4, P_2P_3P_4$。

$\triangle P_1P_2P_4=\frac{1}{2}[(-2)\cdot(-4)-(-3)\cdot 3+(-3)\cdot 2-2\cdot(-4)+2\cdot 3-(-2)\cdot 2]=14\cdot 5,$

$\triangle P_2P_3P_4=\frac{1}{2}[(-3)\cdot(-1)-5\cdot(-4)+5\cdot 2-2\cdot(-1)+2\cdot(-4)-(-3)\cdot 2]=16\cdot 5,$

故四邊形的面積是$14.5+16.5$或31。

〔解二〕　用§7的註裏簡便方法,把頂點的坐標排列如上圖的右邊,依法解得四邊形的面積是

$\frac{1}{2}[\{(-2)\cdot(-4)+(-3)\cdot(-1)+5\cdot 2+2\cdot 3\}-\{3\cdot(-3)+(-4)\cdot 5+-1)\cdot 2+2\cdot(-2)\}]=31$。

習　題　四

1. 用幾何上面積定理求出公式(V)。

2. 用§7的註裏簡便方法求出公式(VI)。

3. 求三角形的面積,已知各頂點是:

(a) (8,3),(−2,3),(4,−5); (b) (−4,3) (−1,−2),(−3,−1)。

4. 用三角形的面積公式可以證明下列兩組的點各在一直綫上麼?

(a) (1,−2)(6,1)(−4,−5);(b) (0,−b),(1,a−b),(a,a−b)。

5. 設四邊形的頂點是 (1,2),(−2,3),(−3,−4),(4,−5), 求他的面積。

6. 試用簡便方法從多邊形的頂點 (4,1), (2,3), (0,4), (−2,3),(−4,1), 算出他的面積。

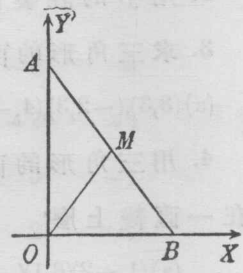
7. 設三角形的頂點是(2,6),(−4,3), (−2,7), 試證他的面積是四倍於聯結各邊中點所成三角形的面積。

8. 若聯結前題裏各頂點與中綫的交點,則三個三角形面積各等於多少? 是不是等積?

8. <u>幾何學上的應用</u> 平面幾何學上許多定理,可應用上面各節裏的方法去證明,不過要注意圖形的位置與兩軸怎樣關聯,可使解法簡捷。

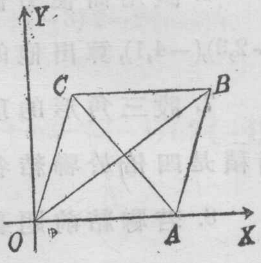
〔例題一〕 直角三角形斜邊的中點距各頂點相等。

〔解〕 設M爲直角三角形AOB斜邊的中點,a,b爲夾直角的兩邊,使與兩軸相合,則各頂點是$(0,b)$,$(0,0)$ $(a,0)$。由公式(III),得M點的坐標是$\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$,由公式(I)得 $OM=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$。同法求得BM,MA各等於$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$。故M點距A,O,B各頂點都等。



〔例題二〕 平行四邊形的對角綫互爲平分。

〔解〕 設平行四邊形 OABC 的一邊在 x 軸上,一頂點在原點。又設頂點A,C的坐標是(a,o) (b,c),則頂點B的坐標是$(a+b,c)$。由公式(III),得對角綫OB,AC中點的坐標各等於$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$,可知兩中點合成一點,就是兩對角綫互爲平分。



習題五

1. 長方形的對角綫是相等而且互爲平分。

2. 三角形兩邊中點的聯綫是平行於第三邊,又等於第三邊的一半,

3. 梯形的中綫是平行於兩底,又等於兩底和的一半。

4. 順次聯結四邊形各邊的中點,成一平行四邊形。

5. 四邊形對邊中點的聯綫互為平分。

6. 同底等高的三角形面積相等。

7. 若自三角形兩頂點到對邊中點的聯綫是相等,這三角形是兩等邊。

8. 三角形中對銳角一邊的正方形等於其他兩邊的正方形的和減去這兩邊中的一邊和他邊在這邊上射影相乘積的二倍。

9. 三角形兩邊平方的和等於第三邊一半與這邊上中綫二者平方和的二倍。

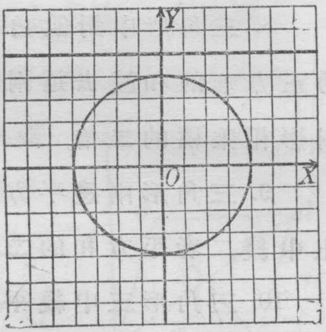
10. 三角形三中綫平方的和等於各邊平方和的四分之三。

第二章

軌跡和方程式

9. 軌跡　平面上一點,若依固定條件連續運動,則他所行的途徑,叫做這點的軌跡(Locus of a point)。

舉例　(a)設有一動點距 x 軸恆爲 5,則他的軌跡是平行於 x 軸,且在軸的上側相距爲 5 的一直綫。



(b)設有一點繞原點運動,且相距恆爲 4,則他的軌跡就是把原點做圓心 4 做半徑的圓周。

凡軌跡不拘直綫或圓周或其他形狀的綫,本書總稱他爲曲綫(Curve)。

10. 常數,變數,函數　在解析幾何學裏,數分常數(Constant)變數(Variable)兩種,常數的值一定不變,變數的值時時改動。在上節舉例(b)中,距離 4 是常數,動點的橫縱坐標都無定值,就是變數,

通常用 x, y 等代表。

當兩變數 x, y 有某種關係,可使 y 的值隨着 x 的值而定,就是說令 x 為某值時,便可求出 y 的相當值, y 便叫做 x 的函數(Function)。如果 x 的值隨着 y 的值而定,那麼 x 便叫做 y 的函數。

〔註〕 常數分兩種,一叫絕對常數(Absolute constant),如 $3, -4, \sqrt{5}, \pi$ 等;一叫未定常數(Arbitrary constant),如討論兩直綫平行或垂直時的斜度 m_1, m_2 等。變數也分兩種,自變數(Independent variable)和因變數(Dependent variable)。當 y 是 x 的函數時, x 叫自變數, y 叫因變數。

11.求軌跡的方程式　我們已經知道軌跡是由一動點依固定條件運動而成,並且常用兩變數 x, y 代表這動點的坐標,所以如果把動點的運動條件和解析幾何裏的基本公式聯絡起來,便可排成方程式,這就是叫做軌跡的方程式(Equation of the locus)。

求軌跡方程式,要注意下列兩事:

(一)軌跡上各點的坐標必須適合他的方程式。

(2)適合軌跡方程式各組的對應值,必爲這軌跡上各點的坐標。

下面是軌跡方程式的求法:

(一)令$P(x,y)$爲軌跡上的任一點。

(二)寫出固定的運動條件。

(三)聯絡P點坐標和運動條件列成方程式,再把他化簡。

〔例題〕 設一動點與兩定點$P_1(3,2)$,$P_2(-1,5)$的距離恆等,求動點的軌跡方程式。

〔解〕 (一)設$P(x,y)$爲軌跡上任一點。

(二) 運動條件是　$P_1P=P_2P$。

(三) 由公式(I),　$P_1P=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$,

$P_2P=\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}$,

$\therefore\ \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}$。

化簡,得　$8x-6y+13=0$,

這就是所求方程式。

〔註〕 求得的軌跡方程式,要知道他是不是滿足了固定條件,卽依上述兩法試驗,其實第一法和原方程式求法一樣,第二法就是逐步逆推上面的求法。

習題六

求下面各題的軌跡方程式:

1. 一動點距(a) x 軸恆等於6;(b) y 軸恆等於4。

2. 把前題裏的兩個數值各加負號。

3. 一動點距下列每組的兩定點恆等:

(a) (0,0),(4,0); (b) (5,−3),(−4,2)。

4. 一動點距(a)原點恆爲3;(b)(2,3)恆爲6。

5. 一動點距下面每組裏的點與直綫恆等:

(a) (−3,0),$x=3$; (b) (4,3),$y=6$。

6. 一點運動時距(1,0)是距直綫 $x=4$ 的一半。

7. 一動點距(3,2)恆二倍於距 y 軸。

8. 一點在一直綫上運動,已知這直綫的斜度是 $\frac{1}{3}$,又經過(−4,−2)。

9. 一點在經過兩點(2,−5),(−1,9)的直綫上運動。

10. 三角形的頂點是一動點與原點及(1,0),他的面積是3。

12. <u>求方程式的軌跡</u> 軌跡和方程式互求,是解析幾何裏的中心問題,目的無非是藉圖形來闡明函數的變化。從已知動點的運動條件,求他的軌跡方程式,上節已經說過,現在是從方程式求出他的軌跡,或者說作方程式的曲綫。這與

代數裏求方程式的圖解方法相似,不過範圍較廣。

設有方程式 (a) $x=5$, (b) $x^2+y^2=25$。

這兩式的軌跡是很顯明的,(a)式是平行於 x 軸,且在軸的上側相距爲 5 的一直綫;(b)式是以原點爲圓心 5 爲半徑的圓周。像下面(c),(d)兩方程式,他們的軌跡就沒有這樣容易觀察出來。

(c) $3x+y=4$, (d) $y^2+8x=2y+15$。

作這類方程式的曲綫,先要明白下面的定義和定理。

定義 凡含兩變數的方程式,他的軌跡是一曲綫或數曲綫,綫上各點的坐標都適合於原方程式。

定理 改變方程式的形狀(如移項,乘以常數等),絕不影響於他的軌跡。

由是得方程式軌跡的求法,如下:

(一)化原方程式爲 $y=f(x)$,或 $x=f(y)$。

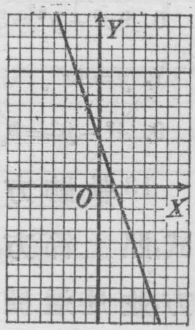
(二)令 x 或 y 等於某實數值,算出 y 或 x 的對應值,再把各組的值順次列成一表。

(三)依表中各組的值定各點,如果已經顯出

軌跡的大概形狀,便用曲綫聯結各點。

〔例題一〕 作方程式 $3x+y-4=0$ 的軌跡。

〔解〕(一) $y=-3x+4$。



(二) 令 $x=1$,則 $y=1$;

$x=2$ 則 $y=-2$。

仿此算出 x,y 的種種對應值成下表:

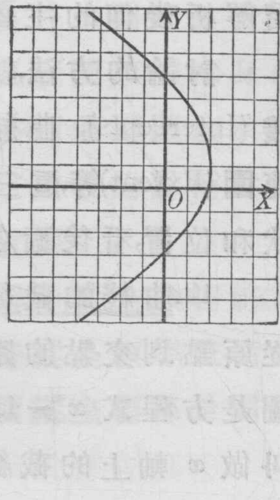
x	-2	-1	0	1	2	3
y	10	7	4	1	-2	-5

(三) 依求得的值定各點,再聯結起來,便是所求的軌跡。

〔例題二〕 作方程式 $y^2+8x=2y+15$ 的軌跡。

〔解〕(一) $x=\frac{1}{8}(15+2y-y^2)$。

(二) 令 $y=1,3,5\cdots\cdots$,求 x 的各對應值,結果如下:



y	-5	-3	-1	1	3	5	7
x	$-2\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	0	$-2\frac{1}{2}$

(三) 定表中各點的位置,用曲綫聯結起來,便是所求的軌跡。

習 題 七

求下列各方程式的軌跡:

1. $2x+y+2=0$。 2. $20x-15y=1$。

3. $x^2+y^2=25$。 4. $x^2+y^2=2y$。

5. $9x^2+y^2=36$。 6. $25x^2+16y^2=400$。

7. $y=4x^2$。 8. $y^2-2y=x-3$。

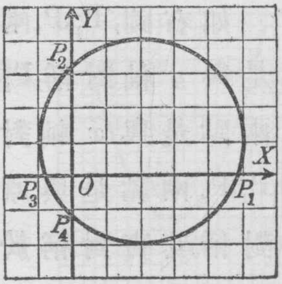
9. $x^2-y^2=9$。 10. $4x^2-y^2=4$。

13.<u>軌跡方程式討論</u> 含兩變數的軌跡方程式,照上節方法畫成的曲綫,難免有不準確的地方,並且這種曲綫的形狀和性質,前面未曾講過,不能辨別孰正孰誤,所以我們對於軌跡方程式應當加以精密的討論;換句話說,就是未曾作圖以前,須細細研究各種曲綫的性質。這本是學習解析幾何的主要目的之一。

討論的方法,就是從方程式研究曲綫的截綫 (Intercepts), 曲綫的對稱 (Symmetry) 曲綫的範圍 (Extent)等,這三種都是關於决定曲綫的形狀和位置,看後面各節便知。

14.<u>曲綫的截綫</u> 若曲綫與坐標軸相交,則從原點到交點的距離,叫做曲綫的截綫。例如下圖是方程式 $x^2-4x+y^2-2y=4$ 的軌跡;OP_1和OP_3叫做 x 軸上的截綫,就是交點 P_1,P_3 的横坐標;

OP_2和OP_4叫做 y 軸上的截綫,就是交點 P_2,P_4 的縱坐標。由是得截綫的求法如下:



(a)求 x 軸上的截綫,令 $y=0$,解 x。

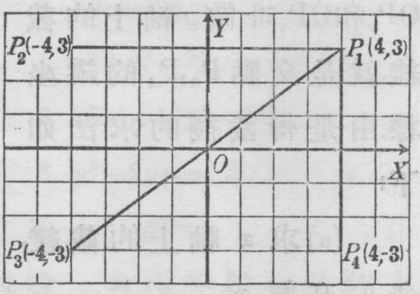
(b)求 y 軸上的截綫,令 $x=0$,解 y。

〔注意一〕 令 $y=0$ 或 $x=0$ 解 x 或 y 時,如果得到虛數,就是曲綫不與 x 軸或 y 軸相交。

〔注意二〕 無常數項的方程式,x 和 y 同時可以等於 0,就是曲綫必經過原點。

15.<u>曲綫的對稱</u> 幾何裏許多圖形具有綫對稱或心對稱的,不過當時只就圖形的本身而言,現在討論到方程式的軌跡,須兼顧圖形與坐標軸及原點的關係,所以決定曲綫的對稱,還要看他的位置。下面定理是很重要。

定理 兩點與 x 軸對稱時,橫坐標等值,縱坐標同值異號;與 y 軸對稱時,縱坐標等值,橫坐標同值異號;與原點對稱時,橫縱坐標都是同值異號。

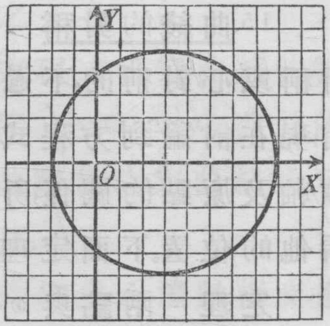


如右圖，P_1，P_2兩點是與 y 軸對稱，P_1，P_4 兩點是與 x 軸對稱，P_1，P_3 兩點是與原點對稱。其實對稱於原點的兩點，也必對稱於兩軸。

根據上面定理可以考察出軌跡的對稱性。

(一)以 $-y$ 代 y，如果不影響於方程式，曲綫必與 x 軸對稱。

例如方程式 $x^2-6x+y^2=16$，若以 $-y$ 代 y，結果與原方程式無異，可知曲綫對稱於 x 軸。適合這種情形的代數方程式，y 無奇次方。

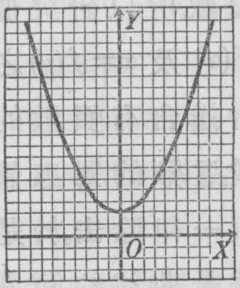


〔註〕 常數當做 x^0 或 y^0，屬於偶次方。

(二)以 $-x$ 代 x，如果不影響於方程式，曲綫必與 y 軸對稱。

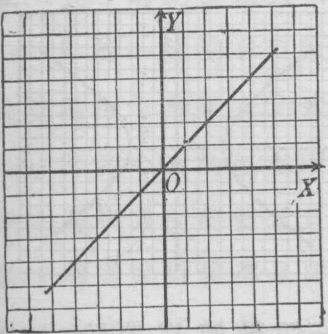
例如方程式 $x^2=4y-8$，若以 $-x$ 代 x，原方

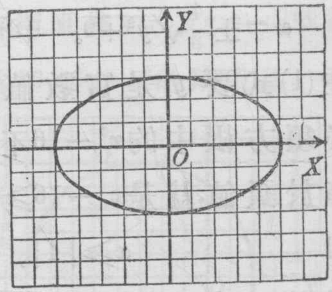
程式不變,可知曲綫對稱於 y 軸。合於這種條件的代數方程式,x 無奇次方。



(三)以 $-x$ 代 x, $-y$ 代 y, 如果不影響於方程式,曲綫必與原點對稱。

例如方程式(a) $x=y$; (b) $9x^2+25y^2=225$, 若以 $-x$ 代 x, $-y$ 代 y, 兩方程式不變,可知各曲綫





都對稱於原點。合於這種情形的代數方程式,各項都是奇次方,或者都是偶次方。

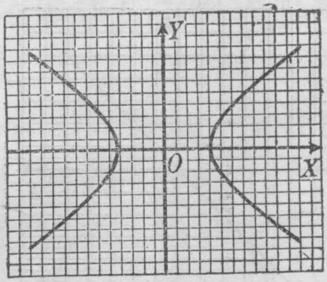
16.<u>曲綫的範圍</u> 點的坐標量既然都是實數,沒有虛數,那麼從方程式解兩變數的時候,數值便有限制,就是每組的對應值裏,決不能有一

虛數。所以研究曲綫的範圍,先化方程式爲 $y=f(x)$ 及 $x=f(y)$ 之形,再令 x 或 y 爲實數值。如果右邊含有負數的偶次方根,則 y 或 x 便等於虛數。這類的對應值决不是曲綫上點的坐標量,必須一律除去。於是考察出 x 或 y 的實數值界限,就是曲綫的範圍。舉例說明如下:

設有方程式 $9x^2-16y^2-144=0$,求他的軌跡範圍。化原方程式爲

$$y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16},\quad(1)$$

$$x=\pm\frac{4}{3}\sqrt{y^2+9}。\quad(2)$$



在(1)式要 y 是實數值必須方根中的 x^2-16 不等於負值,就是 $x^2-16\geqq 0$,

即 $$x\geqq|4|。$$

所以 x 在 $+4$ 與 -4 間的一切數值,都要除去。由此可知軌跡曲綫分爲左右兩枝,一在直綫 $x=4$ 的右邊,一在直綫 $x=-4$ 的左邊。在(2)式設 y 爲任何數,y^2+9 總是正值,所以 y 沒有除去的數。總之 x 遞增,y 隨着遞增,兩枝曲綫各趨於無窮遠處。

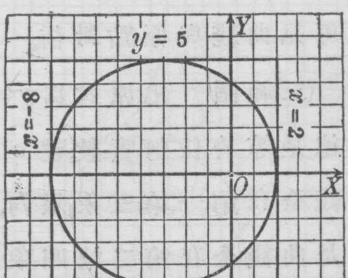
〔例題一〕討論方程式$x^2+y^2+6x-16=0$,並作軌跡的曲綫。

〔解〕(一)截綫　令$y=0$,則$x=2,-8$;令$x=0$,則$y=\pm 4$,故知曲綫交x軸於兩點$(2,0),(-8,0)$,交y軸於兩點$(0,4)$,$(0,-4)$。

(二)對稱　原方程式不含y的奇次方,故曲綫對稱於x軸。

(三)範圍　$x=3\pm\sqrt{25-y^2}$, (1)　$y=\pm\sqrt{16-6x-x^2}$。(2)

在(1)式,y的絕對值大於5時,$25-y^2$是負值,故$y>5$或$y<-5$的一切值必須除去。作兩直綫$y=5$及$y=-5$,就是曲綫的上下界限。在(2)式,因爲$16-6x-x^2$的兩根是$x=2$,$x=-8$。若令x的值在兩根之間,根式內的值是負數,y的對應值便都是虛數。故2與-8間的一切數值,都要除去。作兩直綫$x=2$及$x=-8$,就是曲綫的左右界限。總之方程式的軌跡是完全在四直綫所成正方形內。



從(2)式算出各對應值如下表:

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	0	±3	±4	±4.6	±4.9	±5	±4.9	±4.6	±4	±3	0

畫出各點,用曲綫聯成的圖形是一個正圓。

〔例題二〕 設有方程式 $xy=a$, 討論他的軌跡。

〔解〕 原方程式含有未定常數 a,他的軌跡雖然隨着 a 值而變動,可是根據方程式討論的方法,不難求出這類曲綫的普遍性。設 a 除 0 外等於任何實數,討論如下:

(一)截綫 令 $x=0$ 則 $y=\frac{a}{0}=\infty$; 令 $y=0$, 則 $x=\frac{a}{0}=\infty$。可見曲綫經過兩軸是在無窮遠處。

(二)對稱 同時以 $-x$ 代 x 及 $-y$ 代 y, 結果與原式無異,可見曲綫與原點對稱。

(三)範圍 化原式爲 $y=\frac{a}{x}$, $x=\frac{a}{y}$,可見 x 或 y 除 0 外,總是等於任何實數。設 a 爲正值, x 與 y 必同號,就是曲綫全在第一、第三象限內。設 a 爲負值, x 與 y 必異號,就是曲綫全在第二、第四象限內。x 的絕對值漸漸變大,趨於無極, y 的絕對值就漸漸變小,趨近於 0。反過來說, y 的絕對值漸漸變大, x 的絕對值就漸漸變小,趨近於 0。故曲綫在第一、第三象限內,或者在第二、第四象限內,都與原點對稱,伸至無窮遠處,與兩坐標軸無限接近,但

終不能相截。

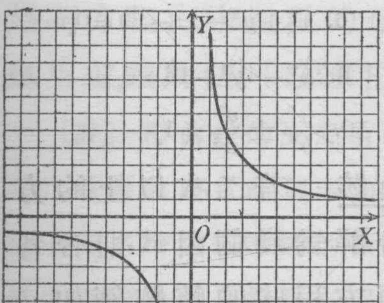
如果$a=0$,則$x=0$, $y=0$,兩枝曲綫就與兩軸相合。

設$a=10$,算出x與y的對應值如下:

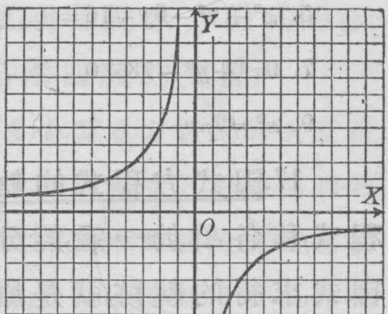
x	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10
y	±10	±5	$\pm3\frac{1}{3}$	$\pm2\frac{1}{2}$	±2	$\pm1\frac{2}{3}$	$\pm1\frac{3}{7}$	$\pm1\frac{1}{4}$	$\pm1\frac{1}{9}$	±1

設$a=-10$,各組的對應值如下:

x	∓1	∓2	∓3	∓4	∓5	∓6	∓7	∓8	∓9	∓10
y	±10	±5	$\pm3\frac{1}{3}$	$\pm2\frac{1}{2}$	±2	$\pm1\frac{2}{3}$	$\pm1\frac{3}{7}$	$\pm1\frac{1}{4}$	$\pm1\frac{1}{9}$	±1



(圖 一)



(圖 二)

用曲綫聯結第一表中各點,得上面第一圖;聯結第二表

中各點,得第二圖。假如設 x 的連續各值相差小於 1,畫成的曲綫,尤見準確。

〔註〕 在例題討論中,曲綫在無窮遠處與兩坐標軸無限接近,但總不能相截,兩坐標軸在這種情形時,叫做曲綫的幾近綫(Asymtotes)。

習題八

試就下列各方程式,討論他的軌跡,並作曲綫:

1. $x^2+y^2=25$。　　2. $x^2-4y=0$。

3. $y^2=9x$。　　4. $xy+y-8=0$。

5. $x^2+y^2-6y-16=0$。　　6. $x^2+y^2-4x-29=0$。

7. $9x^2+y^2-18=0$。　　8. $x^2-4y^2-16=0$。

9. $x^2=2py$。　　10. $\frac{x^2}{b^2}\pm\frac{y^2}{a^2}=1$。

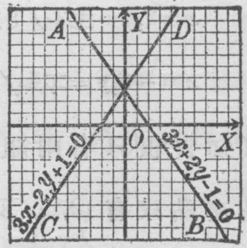
17. 因式方程式的軌跡　若二次以上的方程式,移各項於一邊,能分解爲幾個因式,則合各因式求得的軌跡,就是原方程式的軌跡。例如

$$9x^2-4y^2+4y-1=0,$$

可分解爲　$(3x+2y-1)(3x-2y+1)=0,$

即　$$3x+2y-1=0, \tag{1}$$

$$3x-2y+1=0. \tag{2}$$



照§13的方法作(1),(2)兩式的軌跡,如右圖中 AB,CD 兩直綫。故 $9x^2-4y^2+4y-1=0$ 的軌跡是包含這兩直綫。

由此可知,一個方程式若以變數因式去乘或除,或者兩邊各自乘等等,就要改變他的軌跡。

18.<u>兩曲綫的交點</u>　兩方程式的軌跡,若是相交的曲綫,則交點的坐標量必適合於這兩個方程式。代數裏解聯立方程式,就是求適合於這幾個方程內未知數的值,或者說求方程式的根。應用這種解法,可以求出兩曲綫的交點。

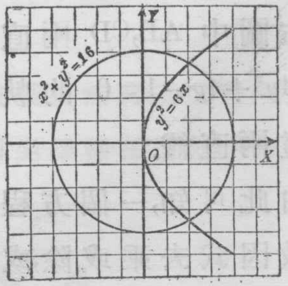
〔註〕兩曲綫的交點有多少,要看方程式的次數而定。代數裏說過,含兩個未知數的兩聯立方程式,他們的根不得多於兩式次數的積數,可知兩曲綫的交點,也不得多過於此。而且解兩方程式,有時不能都得實根,有時竟完全得着虛根,所以兩曲綫的交點往往比兩方程式的根數少,或者竟沒有交點。

〔例題〕求兩曲綫 $x^2+y^2=16, y=6x$ 的交點。

〔解〕照聯立方程式解法,得

$x=2, y=\pm 2\sqrt{3}$;

$x=-8, y=\mp 4\sqrt{-3}$。



可知實根只有兩組,就是交點只有 $(2, 2\sqrt{3})$, $(2, -2\sqrt{3})$ 兩點。從右圖也可以看出兩曲綫只相交於兩點。

19.<u>沒有軌跡的方程式</u> 我們已經知道只有實數是用做點的坐標,如果方程式裏的變數,用虛數代入,方能適合,那麼這式便不能求出軌跡。譬如有一個方程式,含變數的各項都是偶次方,並且項前都是正號,如果各項的和等於負數,便可斷定他沒有軌跡。

〔例題〕 證明方程式 $x^2-2x+2y^2+8y+14=0$ 是沒有軌跡。

〔解〕 化原式為 $(x-1)^2+2(y+2)^2+5=0$, 無論 x 與 y 是任何實數, $(x-1)^2$ 及 $(y+2)^2$ 必都是正值。但是三個正數的和等於 0, 是絕對不可能的,所以 x 或 y 一定是虛數,由此可斷定原方程式是沒有軌跡。

習題九

1. 下面各方程式的軌跡怎樣求法? 試作圖以顯明其軌跡是由數曲綫合成的:

(a) $(x^2+y^2-16)(x-y)=0$。　(b) $x^3y=4xy^3$。

(c) $x^2-4xy+4y^2=0$。　(d) $x^2-4xy+4y^2=1$。

2. 求上題裏各方程式的曲綫交點。

3. 下面各組方程式的軌跡,求交點的坐標,並作曲綫:

(a) $2x+3y=0, 6x+6y+1=0$。

(b) $x^2+y^2=5, x+3y=5$。

(c) $x^2+y^2=6, x^2+y^2-4x+2=0$。

(d) $y=3x^2+5x+7, 4x+y=1$。

(e) $xy=4, x^2+y^2=9$。

(f) $y=x, y^2+6x-7y=0$。

4. 證明下面各方程式是沒有軌跡的:

(a) $x^2+6x+y^2-4y+17=0$。

(b) $x^2-3x+y^2+4y=-7$。

(c) $x^4+4y^2+4=0$。

(d) $x^2+4xy+4y^2+16=0$。

5. 討論下面各方程式裏 k 值的範圍,以定他的軌跡可以存在與否:

(a) $x^2+9y^2=k^2-4$。

(b) $x^2-4x+y^2+8y+k=0$。

(c) $x^2+4x+y-6y-k=0$。

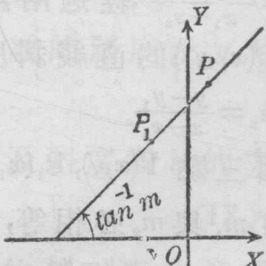
(d) $x^2-9y^2+k=0$。

第三章

直綫

20.決定直綫的條件　設有一動點,運動的方向始終不變,則他的軌跡是一直綫。依幾何公理,兩定點就能決定一直綫,並且從這條公理又推論出公有兩點的兩直綫是合而為一,可知要確定一直綫的位置,必須知道與這直綫相關的兩個幾何條件,而且也無須再多。推廣說起來,這兩個條件可以不限定是綫上兩點。譬如一點與斜度,或者斜度與一軸上的截綫,或者兩軸上的截綫,都可以決定直綫的位置,他的方程式求法,見後面各節。

21.直綫範式一　已知一直綫的斜度及綫上一定點,求他的方程式。



定理　直綫經過定點$P_1(x_1,y_1)$及斜度為m的方程式是$\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}$。(VII)

證　設$P(x,y)$是直綫上的任一點。由公式(IV),得經

過 P,P_1 兩點的直綫斜度是

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1},$$

即 $$y-y_1=m(x-x_1)。$$

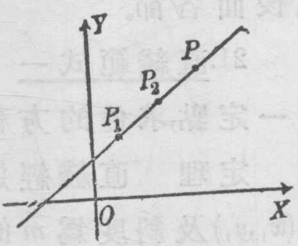
[注意] 若 $m=0$,則 $y-y_1=0$,即 $y=y_1$,這是平行於 x 軸的直綫方程式。若 $m=\infty$,則 $x-x_1=\frac{y-y_1}{\infty}=0$,即 $x=x_1$,這是平行於 y 軸的直綫方程式。若定點爲原點,則 $y=mx$,這是過原點的直綫方程式。

22. 直綫範式二　已知一直綫上的兩定點,求他的方程式。

定理　直綫經過兩定點 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 的方程式是 $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$。　(VIII)

證　設 $P(x,y)$ 是直綫 P_1P_2 上任一點。由公式(IV),得經過兩點 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 的直綫斜度是 $m_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$,經過兩點 $P(x,y)$,$P_1(x_1,y_1)$ 的直綫斜度是

$m_2=\frac{y-y_1}{x-x_1}$。



因三點 $P(x,y)$, $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ 同在一直綫上,斜度 m_1 與 m_2 必相等,

故 $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

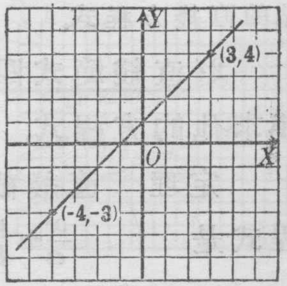
〔注意〕若化上式爲 $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$,則與公式(VII)同形,種種特例也與前節注意中情形相同。

〔例題〕求經過(3,4),(−4,−3)的直綫方程式。

〔解〕由公式(IV),得經過(3,4),(−4,−3)的直綫斜度 $m=1$。

令 $x_1=3, y_1=4$,代入公式(VII),得

$$y-4=x-3,$$



即 $\quad x-y+1=0$。

或者令 $x_1=3, y_1=4$,

$$x_2=-4, y_2=-3,$$

代入公式(VIII),得

$$\frac{y-4}{x-3}=\frac{4+3}{3+4}=1,$$

化簡得 $\quad x-y+1=0$。

結果與前相同,故 $x-y+1=0$ 是所求的方程式。

驗算 $\quad 3-4+1=0, -4+3+1=0$。

23.<u>直綫範式三</u> 已知直綫的斜度及 y 軸上的截綫,求他的方程式。

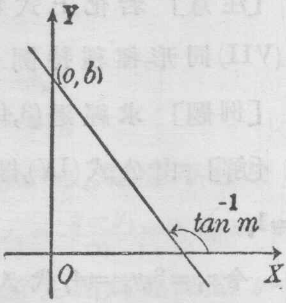
定理　直綫截 y 軸於 b 及斜度爲 m 的方程式是 $\qquad \boldsymbol{y=mx+b}$。　　(IX)

證　設 $P(x,y)$ 是直綫上的任一點。由公式

(VII),得

$$y-b=m(x-0),$$

即　　$$y=mx+b。$$

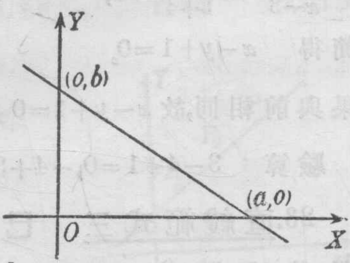


〔注意〕 若 $m=0$,則 $y=b$。這是平行於 x 軸的直綫方程式。若 $b=0$,則 $y=mx$,這是過原點的直綫方程式。

24.直綫範式四　已知直綫在兩軸上的截綫,求他的方程式。

定理　直綫截 x 軸於 a 及 y 軸於 b 的方程式是　$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1。\qquad \text{(X)}$$

證　設 $P(x,y)$ 是直綫上的任一點。由公式(IV),得經過兩點 $(a,0)$,$(0,b)$ 的直綫斜度是



$$m=\frac{0-b}{a-0}=-\frac{b}{a}。$$

由公式(VII)得 $y-b=-\dfrac{b}{a}(x-0)$,

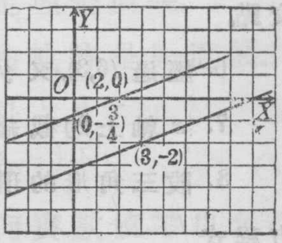
化爲　　$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1。$$

〔注意一〕 若 a 或 b 等於 0,則直綫與 x 軸或 y 軸相合。

〔注意二〕 設 $x=0$, 則 $y=b$。設 $y=0$, 則 $x=a$。代數裏一次方程式圖解常常利用這樣解法,求出直綫與坐標軸的兩交點,經過這兩點作一直綫。

〔例題〕 設一直綫經過 $(3,-2)$ 並與兩軸上截綫為 $2, -\frac{3}{4}$ 的直綫平行,求其方程式。

〔解〕 由公式(VII)得 $y+2=m(x-3)$。 (1)



由公式(X),得 $\frac{x}{2}+\frac{y}{-\frac{3}{4}}=1$,

即 $y=\frac{3}{8}x-\frac{3}{4}$。 (2)

要(1),(2)兩式的直綫平行,必須斜度相等。(2)式的斜度是 $\frac{3}{8}$,代(1)式中 m, 得 $y+2=\frac{3}{8}(x-3)$,

化簡得 $3x-8y-25=0$, 就是所求的方程式。

習題十

1. 試用幾何定理,求出四種直綫方程式。

2. 求直綫方程式,適合下列各組條件:

(a) $m=\frac{3}{5}$, 經過$(3,-2)$。 (b) $m=-\frac{5}{6}$, 經過$(-7,3)$。

(c) 經過$(-1,0)$,$(-3,-4)$。 (d) 經過$(-2,-7)$, $\left(-\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$。

(e) $m=\frac{1}{2}$, $b=6$。 (f) $m=-2$, $b=3$。

(g) $a=-6, b=-\frac{3}{2}$。 (h) $a=\frac{6}{5}, b=-2$。

3. 求上題裏(c),(d),(g),(h)各直綫方程式的斜度。

求下面各直綫方程式,並作圖:

4. 經過$(2,6)$,並且(a)平行於兩點$(4,3)$,$(-1,3)$的聯綫;(b)垂直於這兩點的聯綫。

5. 經過原點及兩直綫$2x+2y+7=0$,$x-5y-8=0$的交點。

6. 經過$(6,3)$,又y軸上的截綫是5.

7. x軸上的截綫是3,又平行於直綫$x-4y+2=0$。

8. 設三角形的頂點是$(-3,2)$,$(3,-2)$,$(0,-1)$,求各邊的方程式。

9. 於上題的三角形,求各邊中點聯綫的方程式。

10. 設平行四邊形的兩邊是$2x+3y-7=0$,$x-3y+4=0$,求其餘兩邊的方程式,若一頂點是$(3,2)$。

11. 兩等邊三角形的底邊是兩點$(4,1)$,$(5,-2)$的聯綫,求頂點的軌跡方程式。

12. 設圓半徑為10,圓心為$(7,1)$及$(-7,-3)$,作兩圓,求公弦的方程式,並求弦的長,

13. 已知一直綫經過$(1,3)$與兩軸所成三角形的面積是8,求他的方程式。

14. 一圓切直綫 $y=2x+3$ 於 $(2,-1)$，求圓心的軌跡方程式.

25. 一次方程式　定理一　直綫方程式是一次方程式。

證　從§21到§24各節裏求得的直綫方程式，形式雖然不一，但是就方程式的次數而論，都屬於一次的，由此可斷定本定理是眞確。

定理二　一次方程式的軌跡是一直綫。

證　普通一次方程式是

$$Ax+By+C=0。\qquad (1)$$

其中未定常數A,B,C代表任何實數值，零也包括在內。當　$B\neq 0$ 時，解 y，得

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}。$$

這式與 $y=mx+b$ 同形，所以(1)式的軌跡，可以說是截 y 軸於 $-\frac{C}{B}$ 及斜度為 $-\frac{A}{B}$ 的一直綫。

若化(1)式為 $\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$，

則與 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 同形，所以(1)式的軌跡，也可以說是截 x 軸於 $-\frac{C}{A}$ 及 y 軸於 $-\frac{C}{B}$ 的一直綫。

若 $A=0$，則(1)式變為 $y=-\frac{C}{B}$，這是代表平

行於x軸的一直綫。

若$B=0$,則(1)式變爲 $x=-\frac{C}{A}$,這是代表平行於y軸的一直綫。

總之,從各方面證明,都能確定一次方程式的軌跡是一直綫。因此一次方程式常常叫做直綫方程式。

26.兩個一次式的關係　定理一　含兩變數的兩個一次方程式,若變數的係數成比例,則他們的軌跡是兩平行綫。

證　設兩個一次方程式是

$$Ax+By+C=0,$$

$$A'x+B'y+C'=0。$$

解y,得　$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$,　$y=-\frac{A'}{B'}x-\frac{C'}{B'}$。

這兩方程式都與$y=mx+b$同形,

故　$m=-\frac{A}{B}$,　$m'=-\frac{A'}{B'}$。

已知　$A:A'=B:B'$,　即　$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$。

由是得　$m=m'$。

斜度既然相等,兩直綫必平行。

定理二　設有兩個一次方程式

$$Ax+By+C=0,$$

$$A'x+B'y+C'=0。$$

若 $A'A=-BB'$,則他們的軌跡是正交的兩直綫.

證　做前法,從兩方程式解 y,得

$$m=-\frac{A}{B}, \quad m'=-\frac{A'}{B'}。$$

於是 $$mm'=\left(-\frac{A}{B}\right)\left(-\frac{A'}{B'}\right)=\frac{AA'}{BB'}。$$

已知 $$AA'=-BB',$$

$$\therefore \quad mm'=-1。$$

斜度既然是互為負逆數,兩直綫必正交。

定理三　設有兩個一次方程式

$$Ax+By+C=0,$$

$$A'x+B'y+C'=0。$$

若 $A:A'=B:B'=C:C'$, 則兩式代表同一直綫.

證 $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$, 即 $m=m'$.

$\frac{C}{B}=\frac{C'}{B'}$, 即 $b=b'$.

兩式代表的直綫,斜度既然相等,並且公有一點 $(0,b)$, 必合為一直綫.

上面三條定理的逆理都眞確,學者自證之。

從兩個一次方程式的係數關係,得結論如

下:

(a)若$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$,或$\frac{A}{B}=-\frac{B'}{A'}$,則兩直綫相交或垂直。

(b)若$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$,則兩直綫平行。

(c)若$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$,則兩直綫相合。

習題十一

1. 試從下面各組方程式的係數,決定他們的軌跡關係:

(a) $2x+6y-7=0$。 $6x+18y+5=0$。

(b) $2x+5y-3=0$。 $2x-5y-8=0$。

(c) $x-3y-8=0$。 $12y-4x+32=0$。

(d) $x+2y-5=0$。 $2x+y-7=0$。

2. 證明兩方程 $2Ax+By+D=0$, $Bx+2Cy+F=0$ 的軌跡相交於一點,若 $B^2-4AC\neq0$。

3. 求三直綫交於一點的必要條件。

〔暗示〕兩綫交點的坐標代入第三直綫方程式。

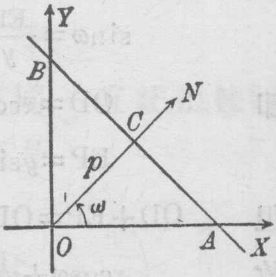
4. 設三角形的頂點是$(0,0)$,$(a,0)$,(b,c),求證

(a)各邊的平分垂綫交於一點。

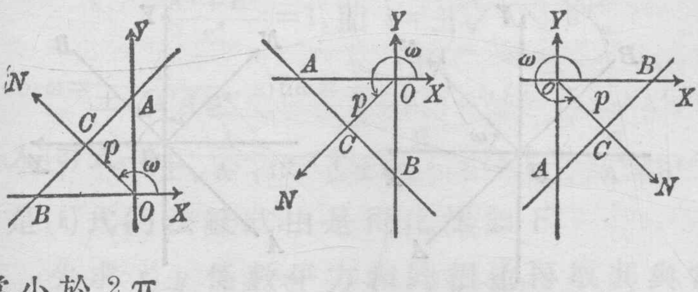
(b)各邊的中綫交於一點。

(c)自頂點到對邊的垂綫交於一點。

27.<u>直綫範式五</u>　前面四種直綫方程式,各含兩個未定常數,總是關於直綫的斜度及經過的點。此外還有一種,是從**法綫**(Normal)求出來,所以又叫做直綫的**法綫式**(Normal form)。



設AB爲任一直綫,ON爲自原點O與AB正交於C點的直綫。這就是叫做法綫。法綫自O向N,或者說向AB綫,恆爲正向。ON與OX的交角XON,以反鐘向旋轉而成的爲正,如上圖及下面三圖所示。距離OC及交角XON通常用p及ω來代表。p恆爲正值,ω常小於2π。

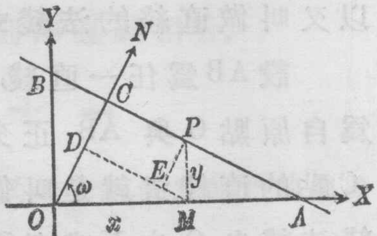


定理　直綫的法綫方程式是

$$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0。\qquad \text{(XI)}$$

證 設P(x,y)為直綫(如下圖中AB綫)上任一點。作PM⊥OX,MD⊥ON,PE⊥MD。

因∠EMP=∠XON=ω,



由三角法,$\cos\omega=\dfrac{OD}{x}$,

$$\sin\omega=\frac{EP}{y}。$$

即 $OD=x\cos\omega$,

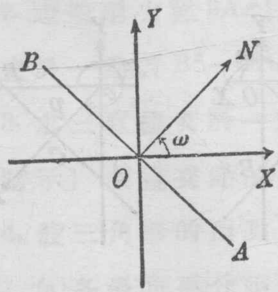
$EP=y\sin\omega$。

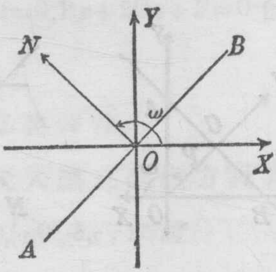
但 $OD+EP=OD+DC=p$。

故 $x\cos\omega+y\sin\omega=p$,

或 $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$。

[注意] 假使$p=0$,則$x\cos\omega+y\sin\omega=0$。





AB綫變做通過原點的直綫,如上面兩圖。這時法綫ON

的方向,取向上爲正,ω 常小於 π。

28.<u>各式互化法</u> 從普通一次方程式

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0, \tag{1}$$

變爲 $y=mx+\mathrm{b}$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

等形,化法極易。如果要化爲

$$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0, \tag{2}$$

須照下述方法。

上面(1),(2)兩式,既然代表同一直線,根據§26定理三,推得對應係數的關係是

$$\frac{\mathrm{A}}{\cos\omega}=\frac{\mathrm{B}}{\sin\omega}=-\frac{\mathrm{C}}{p}。$$

令 r 代表上式的公比,則

$$\cos\omega=\frac{\mathrm{A}}{r},\quad \sin\omega=\frac{\mathrm{B}}{r},\quad p=-\frac{\mathrm{C}}{r}。$$

因 $\sin^2\omega+\cos^2\omega=1$,

故 $\dfrac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}{r^2}=1$, 即 $r=\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}$。

$$\therefore \cos\omega=\frac{\mathrm{A}}{\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}},\ \sin\omega=\frac{\mathrm{B}}{\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}},\ p=-\frac{\mathrm{C}}{\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}。$$

代入(2)式,得 $\dfrac{\mathrm{A}}{\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}x+\dfrac{\mathrm{B}}{\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}y+\dfrac{\mathrm{C}}{\pm\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}=0$。

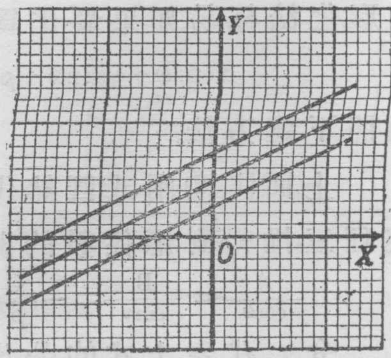
這是(1)式的法綫式,由是得化法如下:

先求 x, y 係數平方和的根值,再取其與常數項異號的值除原方程式各項。

〔注意〕根式前雙號取與 C 異號,就是使常數項移到右邊恆爲正。若 $C=0$,則取與 B 同號。

〔例題〕求距離直綫 $x-2y+10=0$ 爲 $\sqrt{5}$ 的軌跡。

〔解〕化原式爲法綫式 $-\dfrac{x}{\sqrt{5}}+\dfrac{2y}{\sqrt{5}}-\dfrac{10}{\sqrt{5}}=0$, (1)



便知這直綫距原點是 $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$。因所求的軌跡是(1)式的平行綫,距原點是 $\dfrac{10}{\sqrt{5}}\pm\sqrt{5}$,故他的方程式是

$$-\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}\pm\sqrt{5},$$

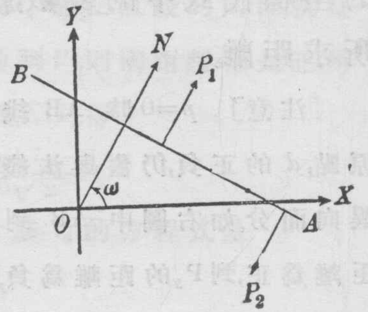
化簡得 $2y-x=10\pm5$,

即 $2y-x=15$ 及 $2y-x=5$。

〔注意〕由上面例題解法,可以推出兩平行綫間的距離求法,就是兩綫在原點同側,距離等於兩法綫式中 p 與 p' 的和,兩綫在原點異側,距離等於 p 與 p' 的差。

29.點與直綫的距離 假設 AB 爲定直綫,$P_1(x_1,y_1)$ 爲定點,與原點在 AB 的異側,則自 AB 到 P_1 的垂直距離與法綫 ON 同向,就是正值。假如有一點 P_2 與原點在 AB 的同側,則 AB 到 P_2

距離與 ON 異向,便是負值,看右圖便知。



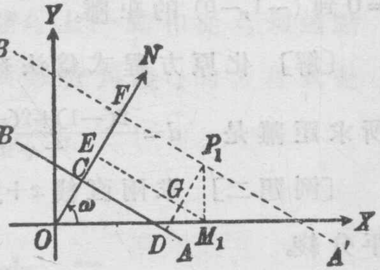
定理 自直綫

$Ax+By+C=0$

到 $P_1(x_1,y_1)$的距離是

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}。\quad \text{(XII)}$$

根式前雙號,取與 C 異號。



證 化直綫AB的方程式為法綫式:

$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$。

作平行綫及垂綫,如右圖中虛綫。

$$OE=OM_1\cos\omega=x_1\cos\omega,$$

$$EF=GP_1=M_1P_1\sin\omega=y_1\sin\omega,$$

$$OF=OE+EF=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega。$$

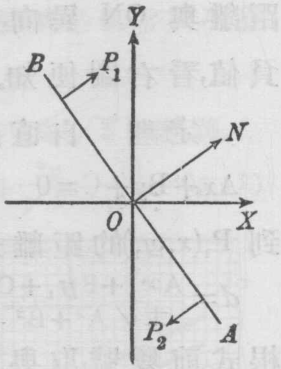
因 $d=DP_1=OF-OC,$

即 $d=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega-P,$

故 $d=\dfrac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$。

由是得一直綫到一點的距離求法:

化原方程式為法綫式,這式的左邊以定點



的坐標代式中的變數,就是所求距離。

〔注意〕 $p=0$時, AB 綫通過原點, d 的正負,仍舊與法綫同向異向而分。如右圖中 AB 到P_1的距離爲正,到P_2的距離爲負。

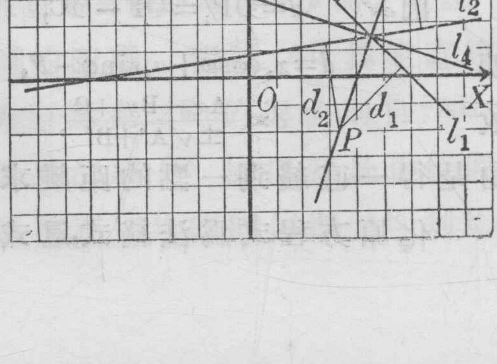
〔例題一〕 求直綫 $2x+2y+1=0$ 到 $(-1,-5)$ 的距離。

〔解〕 化原方程式爲法綫式: $\frac{2x+2y+1}{-\sqrt{8}}=0$。

所求距離是 $d=\frac{2(-1)+2(-5)+1}{-\sqrt{8}}=\frac{11}{\sqrt{8}}=\frac{11}{4}\sqrt{2}$。

〔例題二〕 求兩直綫 $x+y-2=0$, $x-7y+2=0$ 交角的平分綫。

〔解〕 設 l_1, l_2 代表原有兩直綫, P(x,y)爲動點在交角的平分綫上。依幾何理,兩直綫交角的平分綫有二,並且都是兩邊等距離的軌跡。如右



圖P點與原點無論對於l_1或l_2都在直綫的同側,就是距離d_1,d_2都是負。如果P移動到P′,則兩距離都是正,所以d_1,d_2總是同値同號。由公式(XII),得

$$d_1=\frac{x+y-2}{\sqrt{2}},\quad d_2=\frac{-x+7y-2}{5\sqrt{2}}。$$

故P點軌跡或者說交角平分綫l_3的方程式是

$$\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}=\frac{-x+7y-2}{5\sqrt{2}},$$

卽　$3x-y=4$。

同理從l_1到另一分角綫l_4上一點和從l_2到這點的兩個距離,總是一正一負。所以分角綫l_4的方程式是

$$\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}=-\left(\frac{-x+7y-2}{5\sqrt{2}}\right),$$

化簡得　$x+3y=3$。

習題十二

1. 求適合於下列各組條件的直綫方程式:

(a) $p=6,\ \omega=\frac{1}{4}\pi$。　(b) $p=5,\ \omega=\frac{5}{6}\pi$。

(c) $p=4,\ \omega=\frac{1}{3}\pi$。　(d) $p=3,\ \omega=0,\ \frac{1}{2}\pi,\ \pi$。

(e) $p=6,\ \omega=\frac{5}{12}\pi$。〔暗示〕$\sin\frac{5}{12}\pi=\cos\frac{1}{12}\pi=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{1}{6}\pi}{2}}$

2. 化下列各方程式爲法綫式:

(a) $y=-\frac{8}{15}x+\frac{4}{5}$。　(b) $\frac{x}{\frac{25}{6}}+\frac{y}{-\frac{25}{8}}=1$。

(c) $x+2y+5=0$。　(d) $12x+5y=0$。

3. 試以兩軸上截綫 a, b 表示 p 及 $\tan\omega$ 的值。

4. 試以 $Ax+By+C=0$ 裏的 A,B 表示 $\tan\omega$ 的值。

5. 設 α 爲一直綫的傾角,試證 $\tan\omega=-\cot\alpha$。

6. 求下列兩組平行綫間的距離:

(a) $y=3x+5$,　(b) $6x+9y=0$,

$y=3x-5$。　$4x+6y=-8$。

7. 求從直綫 $2x-5y+23=0$ 到兩直綫 $3x-y-2=0$, $5x+y-12=0$ 交點的距離。

8. 設三角形的頂點是$(-7,8)$,$(-7,-6)$,$(1,-4)$,求三角形的高。

9. 求兩直綫 $2x+y=1$,$x+y=2$交角的平分綫。

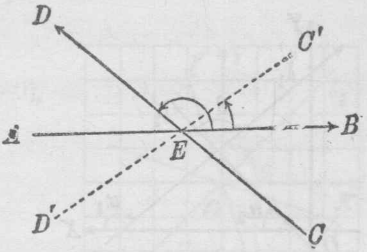
10. 設一圓切於兩直綫 $3x-2y-9=0$,$3x-2y-16=0$,求圓心的軌跡。

11. 於上題的兩直綫,求動點的軌跡,使距第一綫二倍於距第二綫。

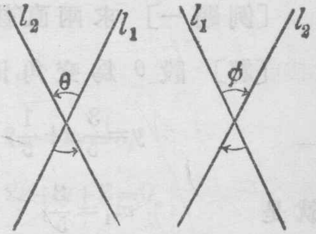
12. 求 8 題裏三角形各內角的分角綫,再證明三個分角綫交於一點。

30.<u>兩直綫的交角</u>　解析幾何裏講到直綫,總是指方向綫,故兩直綫的交角恆指兩正向綫

段所成的角。如右圖中 AB, CD 的交角是 $\angle$BED。設若 CD 綫繞 E 點從 EB 位置旋轉到和 EA 相合,



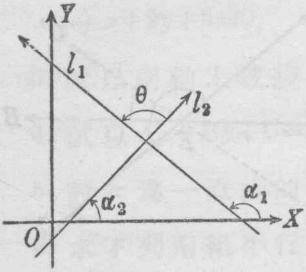
則 $\angle$BED 從 0 漸漸變大到 π 為止,此後再旋轉, CD 上的正向變成 EC′, 其間的角是 $\angle$BEC′,所以交角的值恆在 0 與 π 之間。不過遇到方程式代表的直綫,他的正負方向不得而知時,這種直綫的交角,通常只求銳角的絕對值。若指定所求的角是從直綫 l_1 旋轉到他直綫 l_2 而成,則角有等值異號兩種,隨 l_1 旋轉時是反鐘向或同鐘向而定。如上圖 θ 是正角,ϕ 是負角。

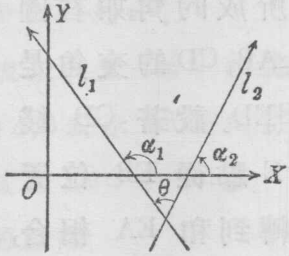


定理　已知兩方向綫的斜度是 m_1, m_2, 並且以 m_1 為較大傾角的斜度,則兩直綫的交角 θ 是

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}。\qquad \text{(XIII)}$$

證　設方向綫 l_1, l_2 的傾角是 α_1, α_2,並以 α_1 大於 α_2。





由圖得$\alpha_1=\theta+\alpha_2$，卽$\theta=\alpha_1-\alpha_2$。

由三角法，$\tan\theta=\tan(\alpha_1-\alpha_2)=\dfrac{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}$。

已知 $\tan\alpha_1=m_1$，$\tan\alpha_2=m_2$，

代入上式得 $\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$。

〔例題一〕 求兩直綫$5y-3x=1$，$x+4y=5$的交角。

〔解〕 設θ爲交角，化兩個方程式爲

$$y=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5},\qquad y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}。$$

就是 $$m_1=\frac{3}{5},\qquad m_2=-\frac{1}{4}。$$

代入公式(XIII)，得 $\tan\theta=\dfrac{\frac{3}{5}+\frac{1}{4}}{1+\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)}=1$。

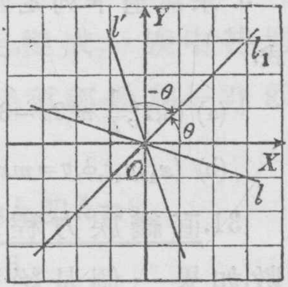
$$\therefore\ \theta=45^\circ。$$

〔例題二〕 經過(0,0)的直綫l與直綫$x=y$成θ角，已知 $\tan\theta=2$，求直綫l的方程式。

〔解〕 設θ角爲正角，因 $\tan\theta=2$，$m_1=1$。

代入公式(XIII)，得 $2=\dfrac{1-m_2}{1+m_2}$，

即　$m_2=-\frac{1}{3}$。



由公式(VII),得$y-0=-\frac{1}{3}(x-0)$,

即　$x+3y=0$。

設 θ 角爲負角,則

$$\tan\theta=-2$$

做上法,得　$m_2=-3$。

$$\therefore\ y-0=-3(x-0),$$

即　$$3x+y=0。$$

習題十三

1. 求下列兩直綫的交角:

(a) $3x+y=6$,　　(b) $2x-4y=5$,

$2x-3y+7=0$。　　$2x+y+3=0$。

2. 求直綫 $3x-y+2=0$ 與直綫 $2x+y-2=0$ 所成的角,再求第二直綫與第一直綫所成的角,試證這兩角互爲餘角。

3. 設三角形的各邊是 $x-3y-4=0$, $3x-2y+1=0$, $x-y+3=0$, 求各內角。

4. 設三直綫 $2x-3y-6=0$,$3x+4y-12=0$,$x-3y+6=0$ 圍成一個三角形,求他的一個外角及兩個內對角。

5. 求經過下列定點及與定直線成定角的直線方程式:

(a) $(2,1), \frac{1}{4}\pi, 2x-3y+2=0$。

(b) $(x_1, y_1), \phi, y=mx+b$。

31.直線族方程式　直線方程式常含兩個常數,如果一個是絕對常數,一個是未定常數,這方程式就是代表一族直線,所以通常叫做**直線族** (System of straight lines)。那個未定常數叫做**參變數** (Parameter),常用k代表他。

譬如　$$4x+3y=5, \tag{1}$$

不含參變數,只能代表一直線。

若　$$4x+3y=k, \tag{2}$$

則代表(1)式的一族平行綫。因爲直綫雖然隨着k值的不同,變化他的位置,但是(1),(2)兩式的直綫斜度恆等,所以總是平行綫。同理推得

$$3x-4y=k, \tag{3}$$

是代表(1)式的一族垂直綫。因爲(1),(3)兩式的直綫斜度是互爲負逆數,

像　$$x\cos k+y\sin k-1=0$$

也是代表距原點爲 1 的一族直綫。

上面各族直綫,如果加以限制,或者說須適合某條件,則可使 k 值一定,變成一族中特別的一直綫。譬如說(2)式的直綫須經過 $(3,-2)$, 即以 3 代 x, -2 代 y, 得

$$4\cdot3+3(-2)=k, \text{即} k=6。$$

$$\therefore\ 4x+3y=6。$$

這就是直綫經過 $(3,-2)$ 又平行於直綫 $4x+3y=5$ 的方程式。

32. <u>過兩直綫交點的直綫族</u>　設有兩方程式,聯立解出變數的值,代入公式(VII),便是過兩直綫交點的直綫族方程式。若用下面定理,解法便捷得多。

定理　設 $l_1(x,y)=0$ 及 $l_2(x,y)=0$ 爲相交兩直綫 l_1 及 l_2 的方程式, k 爲未定常數,則

$$l_1(x,y)+k\cdot l_2(x,y)=0,$$

是代表經過兩直綫交點的直綫族。

證　設 $P(a,b)$ 爲兩直綫 l_1 及 l_2 的交點,就是各直綫上的一點。所以在已知兩直綫方程式中,各以 a 代 x, b 代 y, 必能適合。於是得 $l_1(a,b)=0$, $l_2(a,b)=0$, 所以不論 k 值怎樣,總是

$$l_1(a,b)+k\cdot l_2(a,b)=0。$$

可知P點在 $l_1(x,y)+k\cdot l_2(x,y)=0$ 一族中任一直綫上。所以叫他是代表經過兩直綫 l_1 及 l_2 交點的直綫族。

〔例題〕 求經過兩直綫 $2x-3y+2=0, 3x-4y-2=0$ 的交點並平行於直綫 $5x-2y+3=0$ 的直綫方程式。

〔解〕 $2x-3y+2+k(3x-4y-2)=0$。

化爲 $$(2+3k)x-(3+4k)y+(2-2k)=0。\qquad (1)$$

這直綫的斜度是 $\frac{2+3k}{3+4k}$，當與直綫 $5x-2y+3=0$ 的斜度 $\frac{5}{2}$ 相等。

$$\therefore\ \frac{2+3k}{3+4k}=\frac{5}{2}。$$

解得 $$k=-\frac{11}{14}。$$

代入(1)式， $$\left(2-\frac{33}{14}\right)x-\left(3-\frac{44}{14}\right)y+\left(2+\frac{22}{14}\right)=0,$$

化簡， $$5x-2y-50=0。$$

這就是所求直綫方程式。

習題十四

1. 求適合於下列各條件的直綫族方程式:

(a) 經過 $(5,-1)$。 (b) 斜度 $m=-\frac{2}{3}$。

(c) y 軸上截綫 $b=-2$。(d) x 軸上截綫 $a=-3$。

(e) 兩軸上截綫 $a+b=5$。(f) 與原點的距離 $p=13$。

(g) 平行於 $3x+5y+7=0$。(h) 垂直於 $5x-2y+4=0$。

(i) 經過 $2x+y+1=0, x-2y+1=0$ 的交點。

2. 於上題裏的直綫族,求適合下列條件的直綫方程式:

(a) 直綫的傾角 $\alpha=\frac{1}{3}\pi$。 (b) 經過 $(-3,-4)$。

(c) 平行於 $2x-5y+1=0$。 (d) $\cos\omega=\frac{1}{2}\sqrt{3}$。

(e) 斜度 $m=\frac{2}{3}$。 (f) $\sin\omega=\frac{1}{2}$。

(g) 距原點 7。 (h) 經過 $(-5,-7)$。

(i) 平行於 $3x-7y-4=0$。

3. 設四直綫 $x+3y+2=0, x+3y-5=0, 3x-2y=0, 3x-2y-16=0$ 圍成一個平行四邊形,求兩對角綫方程式。

4. 求兩軸上截綫的差是 3 與兩軸成三角形面積爲 2 的直綫方程式。

5. 求經過 $(-2,2)$ 與兩軸成三角形面積爲 1 的直綫方程式。

6. 求經過兩直綫 $x-y=0, x+y-3\frac{3}{7}=0$ 交點與兩軸成三角形周界爲 12 的直綫方程式。

第四章

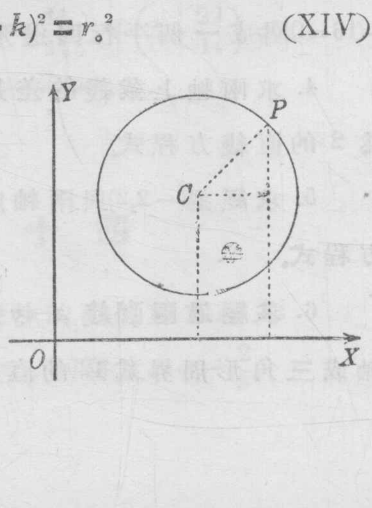
圓

33.圓　假如動點的運動方向,時時變換,則產生的軌跡是曲線,不是直線,譬如一動點繞一定點運動,其間的距離恆等,這動點的軌跡便是一種曲線,叫做圓。那定點叫圓心,定距離叫半徑。

34.圓的範式　圓心和半徑是圓的成立要素,要決定圓的位置,必須知道圓心的坐標,要決定圓的大小,必須知道半徑的長度。從這兩種要素,再把動點的坐標介紹進去,排成方程式,叫做圓方程式的範式。

定理　以$C(h,k)$做圓心r做半徑的圓方程式是　$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。　(XIV)

證　設$P(x,y)$為圓周上任一點。



由公式(I),得

$CP=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$。

$\therefore\ \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$,

即　$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。

推論一　若圓心在 x 軸上,則 $h=0$,圓方程式是 $$x^2+(y-k)^2=r^2。$$

推論二　若圓心在 y 軸上,則 $k=0$,圓方程式是 $$(x-h)^2+y^2=r^2。$$

推論三　若圓心在原點,則 $h=k=0$,圓方程式是 $$x^2+y^2=r^2。\qquad (XV)$$

推論四　若原點在圓周上,則 $h=r, k=0$,圓方程式是 $$(x-r)^2+y^2=r^2,\text{即}\quad x^2+y^2=2rx。$$

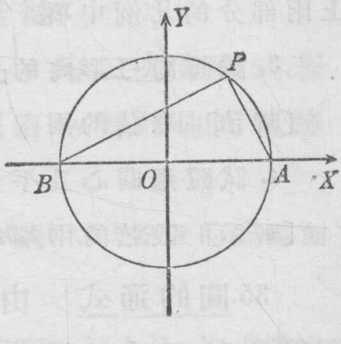
〔例題〕試證半圓內的圓周角是直角。

設 $P(x,y)$ 爲圓周上任一點,r 爲半徑,圓心在原點,直徑 AB 在 x 軸上。

求證　$\angle BPA$ 爲直角。

證　如圖,直徑兩端 A,B 的坐標是 $(r,0)$, $(-r,0)$。AP 的斜度 $m_1=\dfrac{y}{x-r}$,

BP 的斜度 $m_2=\dfrac{y}{x+r}$。



$$m_1m_2=\frac{y^2}{x^2-r^2}$$

但 $\qquad x^2+y^2=r^2,$

或 $\qquad y^2=r^2-x^2。$

$$\therefore m_1m_2=\frac{r^2-x^2}{x^2-r^2}=-1。$$

可知 AP 與 BP 互爲垂直,

就是 ∠BPA 爲直角。

習題十五

1. 求適合下列條件的圓方程式,並作圖:

(a)圓心是 $(-1,-3)$, 半徑是 1。

(b)圓心是$(2,5)$,切於 x 軸。

(c)圓心是 $(-2,0)$,切於 y 軸。

(d)半徑是 5,切於兩軸。

(e)圓心是$(3,3)$,經過原點。

(f)圓心是$(5,2)$,經過$(6,-1)$。

(g)直徑的兩端是$(2,2)$,$(0,-5)$。

(h)圓心是$(4,3)$,切於 $y=2x$。

2. 試證從圓周上一點到直徑的垂綫是所分直徑上兩部分的比例中項。

3. 試證同弓形內的一切圓周角相等。

〔暗示〕取弦的兩端爲(c,d),$(-c,d)$,再用交角公式。

4. 試證過圓心且平分一弦的直綫是垂直於此弦。

〔暗示〕設弦的兩端爲$(-r,0)$, (b,c)。

35. 圓的通式　由上節知道圓方程式是含兩變數的二次式,不過二次式的軌跡,並非一定

是圓,下面就是研究怎樣的二次式方才是代表圓的。

展開圓的範式: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$,

再移項,得　$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$。

與含兩變數的完全二次式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

逐一比較,可知上式中A及C是等值等號,並且B等於零時,就是二次式能化成為

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

形狀的,才是代表圓,常常叫做圓的通式。

若化(1)式為

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F),$$

便與圓的範式同形,容易看出圓心是$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$,半徑是$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$。由是得

定理　含兩變數x及y的二次方程式,若x^2及y^2的係數相等,並且沒有xy項,則他的軌跡是圓。

〔注意〕圓心的位置,與(1)式中D,E,F各數的關係如下:

D=0,圓心在y軸上,E=0,圓心在x軸上,D=E=0,圓心

在原點，$F=0$，原點在圓周上。

36.圓的判別式　要判斷方程式

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \quad (1)$$

有沒有軌跡，看 D^2+E^2-4F 的值是正數，還是零，或負數而定。

(a)如果 D^2+E^2-4F 是正數，就是 $D^2+E^2>4F$，則半徑必是實數，故(1)式的軌跡是以 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ 做圓心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 做半徑的一個圓。

(b)如果 D^2+E^2-4F 等於零，就是 $D^2+E^2=4F$，則半徑也等於零，故(1)式的軌跡只有一點 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，就是圓心，通常叫做點圓(Point circle)。

(c)如果 D^2+E^2-4F 是負數，就是 $D^2+E^2<4F$，則半徑便是虛數，故(1)式沒有軌跡。

因此 D^2+E^2-4F 叫做圓方程式的判別式(Discriminant)

〔例題〕求圓 $3x^2+3y^2+5x+6y+1=0$ 的圓心及半徑。

〔解〕以 3 除原式各項，並移常數項於右邊，

$$x^2+y^2+\frac{5}{3}x+2y=-\frac{1}{3}。$$

配方，$$x^2+\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2+y^2+2y+1=-\frac{1}{3}+\frac{25}{36}+1=\frac{49}{36},$$

即 $$\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+(y+1)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2$$

故圓心是$\left(-\frac{5}{6}, -1\right)$,半徑是$\frac{7}{6}$。

習題十六

1. 作下列各圓:

(a) $(x+3)^2+(y-4)^2=25$。

(b) $x^2+y^2-6x-2y+9=0$。

(c) $x^2+y^2=6x$。

(d) $x^2+y^2+5=6y$。

(e) $2x^2+2y^2-16x-20y=0$。

(f) $3x^2+3y^2+5x+6y+2=0$。

(g) $6x^2+6y^2-2x-y-10=0$。

(h) $x^2+y^2-24x+10y+169=0$。

2. 用視察法決定上題裏的圓那一個圓心是(a)在 x 軸上;(b)在 y 軸上;(c)通過原點。

3. 下面兩方程式,如果要求出軌跡,則 k 值的範圍怎樣?若代表點圓,則 k 等於多少?

(a) $x^2+y+kx+6=0$。 (b) $x^2+y^2+ky+8=0$。

4. 求證下列兩組的圓是相切的,并作圖:

(a) $x^2+y^2-4y-4=0$, $x^2+y^2+2x+10y+8=0$。

(b) $x^2+y^2-10x-8y-4=0$, $x^2+y^2-2x-4y=0$。

5. 求切於直綫 $4x+3y-7=0$ 及圓心在原點的圓方程式。

6. 設一動點與兩點 $(0,0)$,$(1,0)$ 距離的平方和是常數,求他的軌跡方程式。

7. 設兩定點的距離是 $2a$,求動點與兩定點距離平方和是 $4a^2$ 的軌跡。

8. 設定長直綫的兩端移動於兩軸上,求中點的軌跡。

9. 一動點距一定點是 k 倍於距他一定點,求動點的軌跡。

10. 若一動點與正方形各邊或各頂點距離的平方和是常數,求證軌跡是圓。

11. 設三角形底邊的長度和位置都有一定,並知

(a) 頂角是 $60°$;

(b) 頂角是 $45°$;

(c) 頂角是定角;

(d) 其他一邊上的中綫是定長;

求證頂點的軌跡是圓。

12. 從直徑的一端作無數的弦,各引長一倍,試證這些直綫的一端都在一個圓周上。

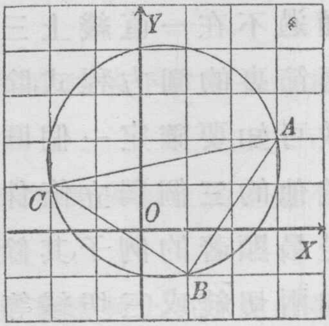
37. 決定圓的三條件　在平面幾何裏說過，通過不在一直綫上三點的圓，有一無二，再看前兩節裏的圓方程式，除特例外，都含三個未定常數，可知要確定一個圓的圖形或方程式，必須知道他的三個獨立條件。像不在一直綫上的三點是最顯著的例子，其餘如兩點和一切綫，或一點和兩切綫，或三切綫等，都可以確定一個圓的。有時因爲條件的界限不嚴，以致可作的圓不止一個。譬如說切於三角形的各邊，只有一個內切圓，若說切於相交的三直綫，便有四個圓了。

從已知條件列成三個聯立方程式，含有未定常數 h, k, r，或 D, E, F，依法解出各未定常數的值，再代入圓的範式或通式，便得適合於已知條件的圓方程式。或者根據幾何定理及應用前三章裏的公式，求出圓心和半徑，也可得圓方程式。不過解法沒有一定，隨問題的情形自己去探求，舉例說明如下：

〔例題〕 求三角形 A(3,2), B(1,−1) C(−2,1)的外切圓方程式。

〔解一〕 假定 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$　(1)

爲所求圓方程式。因爲三角形的各頂點都在外切圓周上,所以A,B,C各點的坐標量必適合於(1)式,依次代入,得下面三個方程式:



$$3D+2E+F=-13,$$

$$D-E+F=-2,$$

$$-2D+E+F=-5。$$

聯立解得$D=-1,E=-3,F=-4$,再代入(1)式,得

$$x^2+y^2-x-3y-4=0。$$

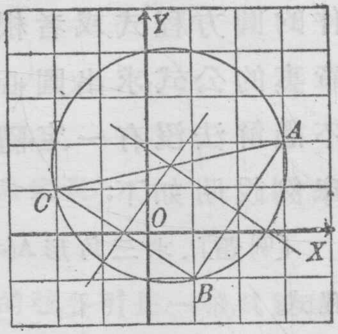
便是所求的外切圓方程式。

［解二］ 依幾何理,三角形外切圓心是各邊平分垂綫的交點,設圓心是(h,k),由公式(I)得AB邊的平分綫是

$$\sqrt{(h-3)^2+(k-2)^2}=\sqrt{(h-1)^2+(k+1)^2},$$

化簡得　$4h+6k=11$　(1)

同法求得BC邊的平分綫是　$6h-4k=-3$。　(2)



解(1),(2)兩式,得$h=\dfrac{1}{2}$, $k=\dfrac{3}{2}$。

可知圓心是$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$。求其與任一頂點的距離得$\dfrac{\sqrt{26}}{2}$,就是半徑,故三角形ABC的外切圓方程式是

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{26}{4},$$

即 $$x^2+y^2-x-3y-4=0。$$

〔註〕 本題也可用圓的範式去解,就是$(3-h)^2+(2-k)^2=r^2$, $(-2-h)^2+(1-k)^2=r^2$,$(1+h)^2+(-1-k)^2=r^2$, 聯立解得 $4h+6k=10$,$6h-4k=-3$。這兩式與上面求得的相同。

習題十七

1. 求經過下列各點的圓方程式:

(a) $(6,-5)$,$(-2,1)$,$(4,-1)$。 (b) $(-5,0)$,$(0,4)$,$(2,4)$。

(c) $(6,-5)$,$(4,-3)$,$(-2,-1)$。 (d) $(1,1)$,$(1,3)$,$(9,2)$。

2. 求下列三角形的外切圓方程式,已知各邊是

(a) $x=5$, $y=-3$, $x-2y=7$。

(b) $x+y-3=0$,$x-2y+6=0$,$x+2=0$。

3. 求下列三角形的內切圓方程式:

(a) 頂點是$(4,5)$,$(3,-2)$,$(1,-4)$。

(b) 各邊是 $y-3=0$, $3x-4y-9=0$, $12x+5y+9=0$。

4. 求下列各條件所決定的圓方程式:

(a) 經過 $(2,2)$, $(4,3)$, 圓心在 y 軸上。

(b) 經過$(0,1)$, $(-6,3)$, 圓心在直綫 $x+2y=22$ 上。

(c) 經過$(-3,-1)$,$(1,1)$, 切於直綫 $4x+3y+25=0$。

(*d*) 經過$(7,$ [illegible]$)$,切直線 [illegible]$x+y=7$ 於$($[illegible]$,1)$。

(*e*) 切於兩直線$x+3y=5$,$x+3y=3$,圓心在直線$2x+y+1=0$上。

(*f*) 經過$(4,-1)$,切圓$x^2+y^2-2x-6y+5=0$於$($[illegible]$,2)$。

38.<u>圓的切綫方程式一</u> 依幾何理,過圓周上一點,只可作圓的一切綫。這種切綫有一特性,就是垂直於過切點的半徑,由此可求出他的方程式。

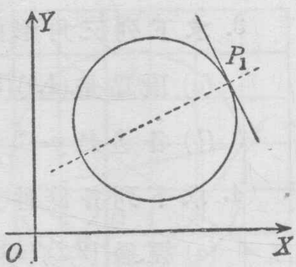
定理 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$圓周上一點$P_1(x_1,y_1)$的切綫方程式是

$$(x-h)(x_1-h)+(y-k)(y_1-k)=r^2。\qquad \text{(XIV)}$$

證 過圓心(h,k)及圓周上定點$P_1(x_1,y_1)$的直綫是 $y-y_1=\dfrac{y_1-k}{x_1-h}(x-x_1)$。

垂直於這直綫的切綫必爲

$$y=-\frac{x_1-h}{y_1-k}x+b。\quad (1)$$



因$P_1(x_1,y_1)$是切綫上一點,故

$$y_1=-\frac{x_1-h}{y_1-k}x_1+b。$$

與(1)式相減,得 $y-y_1=-\dfrac{x_1-h}{y_1-k}x+\dfrac{x_1-h}{y_1-k}x_1$,

即　$y_1y-ky-y_1^2+ky_1+x_1x-hx-x_1^2+hx_1=0$。(2)

因 $P_1(x_1,y_1)$ 也是圓周上一點,必適合於圓方程式,故

$$(x_1-h)^2+(y_1-k)^2=r^2,$$

即　$$x_1^2-2hx_1+h^2+y_1^2-2ky_1+k^2=r^2。$$

與(2)式相加,得

$$x_1x-hx-hx_1+h^2+y_1y-ky-ky_1+k^2=r^2,$$

$$\therefore\ (x-h)(x_1-h)+(y-k)(y_1-k)=r^2。$$

推論　$x^2+y^2=r^2$ 或 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 圓周上一點 $P_1(x_1,y_1)$ 的切綫方程式是

$$x_1x+y_1y=r^2$$

或　$$x_1x+y_1y+\frac{1}{2}D(x_1+x)+\frac{1}{2}E(y_1+y)+F=0。$$

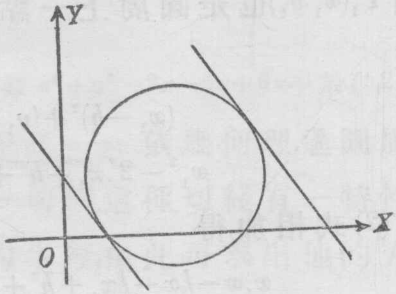
39. 圓的切綫方程式二　已知圓方程式及切綫斜度,求切綫方程式,可從二次式的等根求法推出。

定理　圓 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 的切綫斜度爲 m 的切綫方程式是

$$y-k=m(x-h)\pm r\sqrt{1+m^2}。\qquad\text{(XV)}$$

證　設 $y=mx+b$ 爲所求切綫,代入圓的範式,得　$$(x-h)^2+(mx+b-k)^2=r^2。$$

這二次式的兩根是直綫與圓公有兩點的橫坐標。要使兩點合而爲一,就是那直綫不爲圓的割綫變成切綫,必令兩點的坐標量相等。展開上式,並整理,得



$$(1+m^2)x^2+2(mb-mk-h)x+h^2+k^2+b^2-2bk-r^2=0。$$

根據二次式等根時判別式b^2-4ac等於0的理,令

$$4(mb-mk-h)^2-4(1+m^2)(h^2+k^2+b^2-2bk-r^2)=0。$$

化簡,再整理,得　$b^2-2(mh-k)b=r^2(1+m^2)$。

解 b,得　$b=-(h-k)\pm r\sqrt{1+m^2}$。

$$\therefore\ y=mx-(mh-k)\pm r\sqrt{1+m^2}。$$

即　$y-k=m(x-h)\pm r\sqrt{1+m^2}$。

推論　設m爲切綫斜度,則

$x^2+y^2=r^2$, 或 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

的切綫方程式是　$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$,

或　$y=mx-\frac{1}{2}(E-mD)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(D^2+E^2-4F)(1+m^2)}$。

[注意一] 公式中根號前的雙號,表示適合於已知斜度的切綫有二。因爲斜度相同,所以兩切綫是平行綫。

〔注意二〕 本節定理也可用切綫的特性去證,或者用下法。

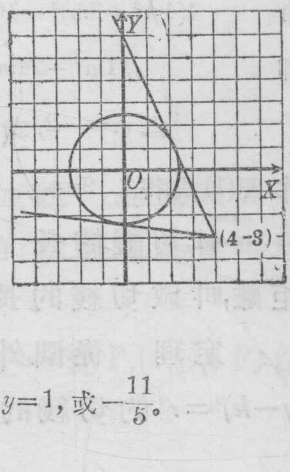
假定 $P_1(x_1,y_1)$ 是切點,從公式 (IV), 得 $m=\frac{x_1-h}{y_1-k}$, 與 $(x_1-h)^2+(y_1-k)^2=r^2$ 聯立解得 $x_1=h\pm\frac{r}{\sqrt{1+m^2}}$, $y_1=k\pm\frac{r}{\sqrt{1+m^2}}$。再代入公式(XIV),便得所求的切綫方程式。

40. 圓的切綫方程式三 從圓外一點可作圓的兩切綫,這種切綫方程式的求法有數種,或先求得切點的坐標,代入 §38 裏公式,或先求得切綫的斜度,代入 §39 裏公式,都可得着一個公式。不過式子太繁,很難記憶,應用也不便利,反而覺得由題直接算出爲便。舉例說明三種算法如下:

〔例題〕 求從(4,−3)到圓 $x^2+y^2=5$ 的切綫方程式。

〔解一〕 假定 $P_1(x_1,y_1)$ 爲切點,則切綫方程式是

$$x_1x+y_1y=5。\qquad(1)$$



因這切綫須經過(4,−3),

$$\therefore 4x_1-3y_1=5,\qquad(2)$$

但 $P_1(x_1,y_1)$ 也在圓周上,

$$\therefore x_1^2+y_1^2=5。\qquad(3)$$

(2),(3)兩式聯立解得 $x=2$,或 $-\frac{2}{5}$, $y=1$,或 $-\frac{11}{5}$。

代入(1)式,得 $2x+y-5=0$,

或 $2x+11y+25=0$。

這都是所求的兩切綫方程式。

〔解二〕 由公式(XV),得 $y=mx\pm\sqrt{5}\sqrt{1+m^2}$。 (1)

因這切綫須經過(4,−3),

所以 $-3=4m\pm\sqrt{5}\sqrt{1+m^2}$,

化簡得 $11m^2+24m+4=0$,

解上式,得 $m=-2$,或$-\frac{2}{11}$。

代入(1)式,得 $2x+y-5=0$, $2x+11y+25=0$。

〔解三〕 由公式(VII),得 $y+3=m(x-4)$, (1)

上式與$x^2+y^2=5$聯立解x,再化簡,得

$$(m^2+1)x^2-2(4m^2+3m)x+4(4m^2+6m+1)=0。$$

令 $4(4m^2+3m)^2-16(m^2+1)(4m^2+6m+1)=0$,

即 $11m^2+24m+4=0$,

$$\therefore m=-2,\text{或}-\frac{2}{11}。$$

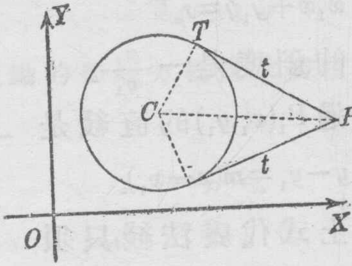
代入(1)式,得 $2x+y-5=0$, $2x+11y+25=0$。

41.切綫的長 從圓外一點到切綫的切點距離,叫做切綫的長。

定理 從圓外一點$P_1(x_1,y_1)$到圓$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$的切綫的長t是

$$t^2=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2。\qquad\text{(XVI)}$$

證　設C爲圓心,T爲切點,則ΔP_1TC是直角三角形。



$$\overline{P_1T}^2=\overline{CP_1}^2-\overline{CT}^2。$$

由公式(I),得

$$CP_1=\sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2}。$$

但 $P_1T=t$, $CT=r$。

$$\therefore\quad t^2=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2。$$

由是得切綫長度的求法,如下:

移圓方程式各項於左邊,以圓外一點的坐標量代入,再開平方,便是切綫的長。

推論　若圓方程式是　$x^2+y^2=r^2$,

或　$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

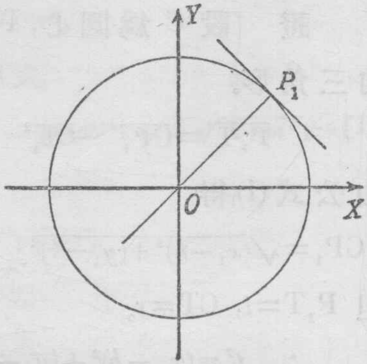
則　$t^2=x_1^2+y_1^2-r^2$,

或　$t^2=x_1^2+y_1^2+Dx_1+Ey_1+F$。

42.<u>圓的法綫方程式</u>　定義　通過圓周上一點的直綫,若與切於這點的切綫垂直,便叫做圓在該點的法綫(Normal)。

定理　$x^2+y^2=r^2$圓周上一點$P_1(x_1,y_1)$的法綫方程式是　$y=\frac{y_1}{x_1}x$。

證　切於 $x^2+y^2=r^2$ 圓周上一點 $P_1(x_1,y_1)$ 的切綫是



$$x_1x+y_1y=r^2。$$

他的斜度是 $-\dfrac{x_1}{y_1}$。

經過 $P_1(x_1,y_1)$ 的直綫是

$$y-y_1=m(x-x_1)。$$

要上式代表法綫,只須令 $m=\dfrac{y_1}{x_1}$

因法綫與切綫是互爲垂直。

$$\therefore\ y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1),$$

即
$$y=\frac{y_1}{x_1}x。$$

上式是過原點的直綫,故圓的法綫必通過圓心。

推論　若圓方程式是 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, 或 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, 則法綫方程式是

$$y=\left(\frac{y_1-k}{x_1-h}\right)x,\quad 或\ y=\frac{y_1+\frac{1}{2}E}{x_1+\frac{1}{2}D}x。$$

習題十八

1. 求經過下列圓周上定點的切綫及法綫方程式.

(a) $9x^2+9y^2=5$, $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$。

(*b*) $x^2+y^2+2x-6y+2=0$, $(1,1)$。

(*c*) $x^2+y^2-x+3y=0$, $(0,0)$。

(*d*) $x^2+y^2-y=0$ $(0,1)$。

2. 求經過下列圓外定點的切綫方程式及切綫的長:

(*a*) $x^2+y^2=20$, $(-6,-2)$。

(*b*) $2x^2+2y^2+8y=1$, $(0,4)$。

(*c*) $3x^2+3y^2+5x-y+2=0$, $(0,0)$。

(*d*) $x^2+y^2-4x+4y=2$, $(4,2)$。

3. 求經過上題裏各切點的法綫方程式。

4. 求適合下列條件的切綫方程式。

(*a*) $2x^2+2y^2=13$, 平行於 $x-5y=1$。

(*b*) $x^2+y^2+10x-6y=2$, 平行於 $2x-y=0$。

(*c*) $a^2+y^2=10$, 垂直於 $2x-3y=5$。

(*d*) $x^2+y^2-4x+6y-4=0$, 垂直於 $4x+y=0$。

5. 求經過兩直綫 $2x+3y=21$, $5x-2y=5$ 的交點並切於圓 $x^2+y^2+4x-6y+3=0$ 的切綫方程式及切綫的長。

6. 求切於圓 $x^2+y^2=20$ 的直徑兩端並斜度為 2 的切綫方程式。

7. 求切於圓 $2x^2+2y=x$ 並平行於 y 軸的切綫方

程式。

8. 證明直綫 $4x-3y=17$ 是圓 $x^2+y^2+4x=21$ 的切綫。

9. 證明過原點又切於圓 $x^2+y^2+Dx+Ey=0$ 的切綫是 $Dx+Ey=0$。

10. 已知下列的圓與直綫相切,求 k 值:

(a) $x^2+y^2+2k=0, y-x=1$。

(b) $x^2+(y-k)^2=1, x+2y=0$。

(c) $x^2+y^2=2y, kx+y+2=0$。

11. 求下列兩圓的公切綫方程式:

(a) $x^2+y^2-6x-8y=0, x^2+y^2=25$。

(b) $x^2+y^2-4x-2y=10, 4x^2+4y^2-24x-4y=23$。

12. 已知一直綫的截綫在 y 軸上二倍於在 x 軸上,並切於圓 $x^2+y^2+4x=0$,求直綫方程式。

43.根軸 設有兩個圓方程式

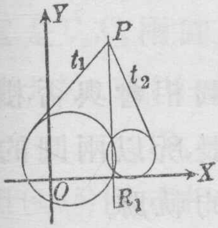
$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0, \qquad (1)$$

$$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0, \qquad (2)$$

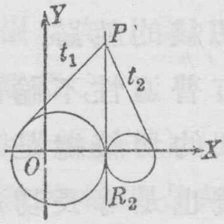
照聯立方程式解法,把兩式相減,得

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0。$$

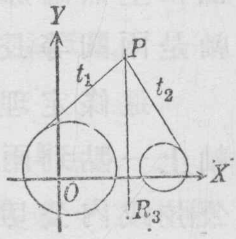
這是一次式,必代表一直綫。那直綫叫做兩圓的根軸(Radical axis)。兩圓如果相交,根軸就是公弦,



(圖一)



(圖二)



(圖三)

像圖一裏直綫 PR_1。如果相切,根軸就是內公切綫,像圖二裏直綫 PR_2。如果兩圓沒有相會的點,根軸是圖三裏直綫 PR_3。這直綫對於兩圓有怎樣關係,看下面定理,便可明白。

定理一　兩圓方程式聯立消去 x^2 及 y^2 後的結果,是兩圓等長切綫的軌跡方程式。

證　取圓方程式如上面(1),(2)兩式。設 $P_1(x_1,y_1)$ 是圓外一點,t_1 及 t_2 是從 P_1 到兩圓切綫的長。由公式(XVI),得 $t_1^2=x_1^2+y_1^2+D_1x+E_1y_1+F_1$,

$$t_2^2=x_1^2+y_1^2+D_2x_1+E_2y_1+F_2。$$

相減,得 $t_1^2-t_2^2=(D_1-D_2)x_1+(E_1-E_2)y_1+F_1-F_2。$

已知 $t_1=t_2$, 即 $t_1^2-t_2^2=0。$

$$\therefore\ (D_1-D_2)x_1+(E_1-E_2)y_1+F_1-F_2=0。$$

可知 P_1 點的坐標適合於根軸方程式。反過來說,

根軸上無論那一點到兩圓切綫是等長,所以根軸是兩圓等長切綫的軌跡。

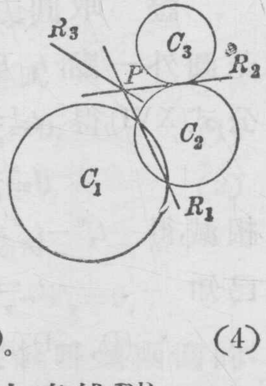
這條定理有普遍性,不論兩圓相會與否,根軸上一點到兩圓的切綫總是等長,所以兩圓的公弦或內公切綫也是等長切綫的軌跡。

定理二　兩圓的根軸與聯心綫是正交。

證　經過兩圓心$\left(-\frac{1}{2}D_1, -\frac{1}{2}E_1\right)$,$\left(-\frac{1}{2}D_2, -\frac{1}{2}F_2\right)$的直綫斜度是$\dfrac{-\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_2}{-\frac{1}{2}D_1+\frac{1}{2}D_2}$,即$\dfrac{E_1-E_2}{D_1-D_2}$。但根軸的斜度是$-\dfrac{D_1-D_2}{E_1-E_2}$,可知兩個斜度是互爲負逆數,所以兩圓的根軸與聯心綫必正交。

定理三　三個圓的根軸交於一點。

證　設三個圓C_1, C_2, C_3的方程式是



$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0, \quad (1)$$

$$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0, \quad (2)$$

$$x^2+y^2+D_3x+E_3y+F_3=0。 \quad (3)$$

(1)−(2),

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0。 \qquad (4)$$

這是C_1, C_2兩圓的根軸,如上圖中直綫PR_1。

(2)−(3), $(D_2-D_3)x+(E_2-E_3)y+F_2-F_3=0$。 (5)

這是C_2,C_3兩圓的根軸,如上圖中直綫PR_2。

(4)+(5), 或(1)−(3),都得

$$(D_1-D_3)x+(E_1-E_3)y+F_1-F_3=0。$$

但(4),(5)兩式相加後的結果是經過第一,二兩根軸交點的直綫,(1),(3)兩式相減後的結果,是C_1,C_3兩圓的根軸,如上圖中直綫PR_3。兩種結果既然相同,就是第三根軸必通過前兩根軸的交點,所以三圓的根軸交於一點。

三圓的根軸交點叫做**根心** (Radical center)。

〔注意〕 同心圓沒有根軸,三個圓的圓心同在一直綫上沒有根心。

〔例題〕 求下面三個圓的根心,並作圖顯明三個根軸交於一點:

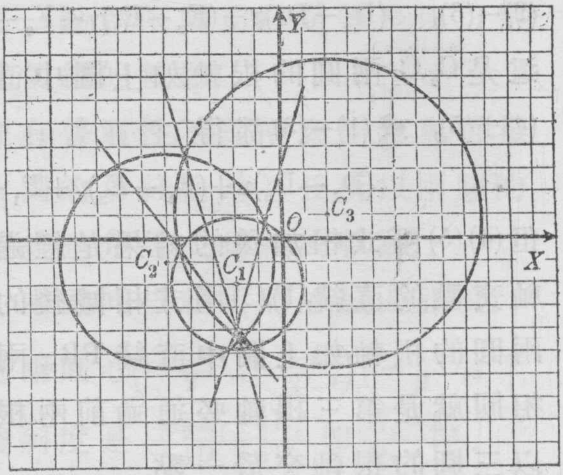
(1) $x^2+y^2+2x+2y=0$,

(2) $x^2+y^2+5x+y+1=0$,

(3) $x^2+y^2-2x-y-10=0$。

〔解〕 化三式爲圓的範式,容易看出圓心及半徑,作三圓如下圖中C_1,C_2,C_3。

(2)−(1), $3x-y+1=0$。



這是C_1,C_2兩個圓的根軸PR_1。

(2)−(3),

$7x+2y+11=0$。

這是C_2,C_3兩個圓的根軸PR_2。

(1)−(3)

$4x+3y+10=0$。

這是C_1C_3兩個圓的根軸PR_3。

聯立解任何兩根軸方程式,總是得$x=-1, y=-2$。

可知三根軸交於一點$(-1,-2)$,就是根心。

習題十九

1. 求下列兩組圓的公弦方程式及公弦的長:

(a) $x^2+y^2+4x+6y=7$, $x^2+y^2-2x-6y+5=0$。

(b) $x^2+y^2-2x+4y=4$, $2x^2+2y^2-4+6y=7$。

2. 有相交兩圓$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$,$(x-k)^2+(y-h)^2=r^2$,求公弦的長。假如兩圓要變成相切,h, k, r須有怎樣關係?

3. 用視察法決定下列各組圓的關係,並求他們的根軸方程式:

(a) $x^2+y^2=x,\ 2x^2+2y^2-10y+11=0$。

(b) $x^2+y^2+6x=16,\ x^2+y^2-10x+16=0$。

(c) $x^2+y^2-6x-5y+9=0,\ x^2+y^2+4x+2y+4=0$。

4. 證明前兩題裏的公弦或公切綫或根軸各垂直於聯心綫,

5. 求下列三圓的根心:

$x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2+8x+6y+24=0$。

6. 從那一點到下列三圓的切綫是等長?

$x^2+y^2+3x+2y=6,\ x^2+y^2-3x+2y=-2,\ x^2+y^2-4x-8y=-12$。

7. 過原點作下列三圓的切綫,從各切點到原點的距離怎樣? 原點是三圓的什麼點?

$x^2+y^2-3x+2y=5,\ x^2+y^2=5,\ 2x^2+2y^2+3x-4y=10$。

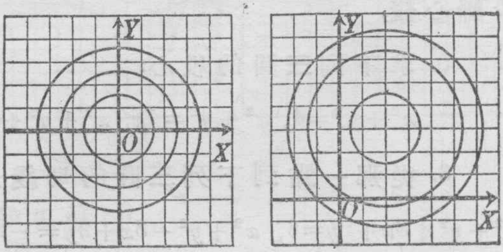
8. 兩等圓的根軸是聯心綫的什麼綫?

9. 求兩個點圓的根軸。

10. 一動點 P 到定點 P_1 的距離恆 k 倍於到他定點 P_2 的距離。證明 k 值變動時,若不等於 -1,根軸是永久不變的。

44.<u>圓族方程式</u>　圓族與直綫族的意義相彷,就是圓方程式裏的三個未定常數 h, k, r 或 D, E, F 裏有一個當做參變數,那方程式可以代表無數的圓,叫做圓族方程式。常見的有兩種,分述於下:

(a)同心圓族　就是各圓心都在一定點,半徑不等的一族圓,幾何裏叫做同心圓。像 $x^2+y^2=r_1^2$



或　$(x-2)^2+(y-3)^2=r_1^2$

是代表圓心在原點或 (2, 3) 的圓族方程式。

(b)同根軸的圓族　就是各圓的根軸是同一直綫,聯心綫是與根軸正交。要明白這種圓族的意義,須看下面的定理。

定理一　設有兩圓 $C_1(x,y)=0$, $C_2(x,y)=0$, 則

$$C_1(x,y)+kC_2(x,y)=0 \qquad (1)$$

的軌跡,除 $y=-1$ 外,必定是圓。

證　設 $C_1(x,y)=x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$.

$$C_2(x,y)=x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0,$$

則 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$。

整理上式,再以 $k+1$ 除各項,得

$$x^2+y^2+\frac{D_1+kD_2}{k+1}x+\frac{E_1+kE_2}{k+1}y+\frac{F_1+kF_2}{k+1}=0。$$

這與圓的通式同形,便知他的軌跡是圓。

如果 $k=-1$, (1)式就是 C_1,C_2 兩圓的根軸。

定理二 $C_1(x,y)+kC_2(x,y)=0$ 是同根軸的圓族方程式。

證 若兩圓 C_1,C_2 是相交,設 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 為兩交點。以交點的坐標量代入兩圓方程式,必能適合。

就是 $C_1(x_1,y_1)=0,\quad C_2(x_1,y_1)=0,$

或 $C_1(x_2,y_2)=0,\quad C_2(x_2,y_2)=0$。

因為 $0+k\,0=0,$

所以 $C_1(x_1,y_1)+kC_2(x_1,y_1)=0,$

或 $C_1(x_2,y_2)+kC_2(x_2,y_2)=0$。

總之,不論 k 值怎樣,除 -1 外,

$$C_1(x,y)+kC_2(x,y)=0 \qquad (1)$$

必是經過 P_1,P_2 兩點的圓。這兩交點在 C_1,C_2 兩圓

的公弦上,所以(1)式可斷定他是代表同公弦的圓族。

若兩圓既不相交,又不相切,(1)式仿定理一裏的化法,得

$$x^2+y^2+\frac{D_1+kD_2}{k+1}x+\frac{E_1+kE_2}{k+1}y+\frac{F_1+kF_2}{k+1}=0,$$

與 C_1,C_2 兩圓的任一方程式相減總是得

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0,$$

與 C_1,C_2 兩圓的根軸相同,可知 k 值即使變化,根軸是一定的。

兩圓的公弦或公切綫,概括說起來,都叫根軸,故(1)式除 $k=-1$ 外,是代表同根軸的圓族。

〔例題〕 求下面兩圓的根軸,並作圖顯明同根軸圓族的關係:

$$(1)\ x^2+y^2+4x-96=0,$$

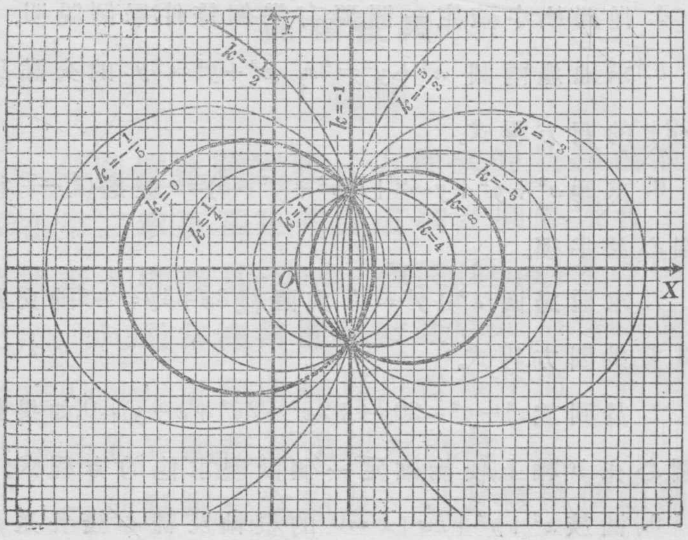
$$(2)\ x^2+y^2-21x+54=0。$$

〔解〕 (1),(2)兩式相減,得 $25x-150=0$, 即 $x=6$。這是在 y 軸右邊 6 單位的一平行直綫,就是兩圓的根軸。由定理二知道與兩圓同根軸的圓族是

$$x^2+y^2+4x-96+k(x^2+y^2-21x+54)=0。\qquad(3)$$

先從(1),(2)兩式,求出圓心和半徑,畫兩圓,如下圖中

粗綫圓,再設 $k=\frac{1}{4},1,4,-\frac{1}{5},-\frac{1}{2},-1,-\frac{5}{3},-3,-6$,順次代



入(3)式,依法畫出各圓,如上圖中細綫圓,都通過原有兩圓的交點 (6,6), (6,−6), 圓心綫就是 x 軸,

看圖便知 k 趨近於−1時,圓變成無限大,以根軸為極限。

習題二十

1. 設 $C(x,y)=0$ 代表一圓, $l(x,y)=0$ 代表一直綫,則方程式 $C(x,y)+k\cdot l(x,y)=0$ 的軌跡是什麼?

2. 那一種圓族沒有根軸?舉例說明。

3. 試述圓族 $C_1(x,y)+k\cdot C(x,y)=0$ 的性質。

4. 從圓族中確定一圓,要有幾個條件?舉例說明。

5. 求通過兩圓 $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=2y$ 的交點及 $(1,-2)$ 的圓方程式。

6. 求圓 $x^2+y^2+y-2+k(x^2+y^2-5)=0$ 經過 $(2,-2)$ 後的圓心及半徑。

7. 求通過圓 $x^2+y^2=25$ 與直綫 $3x+4y=-1$ 的交點及 $(3,2)$ 的圓方程式。

8. 於圓族 $x^2+y^2-20y+k(2x^2+2y^2+x+y)=0$,如果指定圓心在 x 軸上,便能確定一個圓麼?求他的方程式。

9. 圓族 $x^2+y^2+kx+F=0$ 的根軸及聯心綫各是什麼綫?若 k 值變,F 值不變,各圓是同屬於一族麼?

10. 前題的圓族是有兩交點或相切或不相交,可以從 F 是正值或零或負值決定麼?作圖顯明這三種情形。

11. 從 $C_1(x,y)+kC_2(x,y)=0$ 上任一點到 $C_1(x,y)=0$ 及 $C_2(x,y)=0$ 各作切綫 t_1 及 t_2,求證 $t_1{}^2:t_2{}^2=-k$。

12. $C_1(x,y)+kC_2(x,y)=0$ 的圓心 C_3 在兩圓心 C_1 及 C_2 的聯心綫上,求證 C_3 分 C_1C_2 爲兩部分的比值就是 k。

第五章

圓錐截綫

I 總論

45.圓錐截綫定義 方程式的軌跡,種類很多,在第二章裏常見的,除直綫及圓外,還有三種曲綫,就是**抛綫** (Parabola) **橢圓** (Ellipse) 及**雙曲綫** (Hyperbola),通常總稱**圓錐截綫**(Conic sections),簡稱**錐綫** (Conics)。這類曲綫可以當做平面上動點的軌跡,他的定義,概括說起來,就是

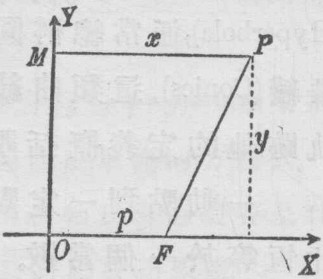
一動點到一定點及一定直綫兩個距離的比恆等於一個常數。

那定直綫叫做**準綫** (Directrix),定點叫做**焦點** (Focus),是不在準綫上的點,常數叫做**離心率** (Eccentricity),總是大於0,常用 e 代表他。通過焦點的直綫,若垂直於準綫,就是錐綫的**主軸**(Principal axis),若平行於準綫,必交錐綫於兩點。這兩點的聯綫叫做**正焦點弦**(Latus rectum),也稱**通徑** (Parameter)。自錐綫上一點到焦點的距離,叫這點的**焦點半徑**(Focul radius)。

〔註〕　抛綫與橢圓及雙曲綫都可以從一平面與正圓錐(Right circular cone)相截而得,故總稱圓錐截綫,詳見§§ 54, 63, 75。

46.<u>錐綫方程式</u>　根據上面錐綫定義,求出他的方程式,如下:

設P(x,y)是錐綫上任一點,p 是焦點到準綫的距離,取 y 軸做準綫,x 軸做錐綫的主軸,焦點的坐標就是$(p,0)$。如右圖,



$$FP=\sqrt{(x-p)^2+y^2},$$

$$MP=\pm x。$$

由定義,得 $FP=e\cdot MP$。

$$\therefore\ \sqrt{(x-p)^2+y^2}=\pm x。$$

兩邊平方,再整理,得錐綫方程式

$$(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0。$$

這是二次方程式,由是得重要

定理　錐綫方程式是二次式。

從上式中x^2的係數,可以分別出三種錐綫,如下:

若 $1-e^2>0$, 即 $e<1$, 錐綫是橢圓。

若 $1-e^2=0$, 即 $e=1$, 錐綫是抛綫。

若 $1-e^2<0$，即 $e>1$，錐綫是雙曲綫。

〔注意〕動點到焦點及準綫的距離都是絕對量，不是方向量，故 FP 等式右邊根號前不加雙號，橫坐標 x 有正有負，隨動點所在的象限而定，用雙號使 MP 恆等於正量。

47. 錐綫小史　圓錐截綫是公元前四世紀時柏拉圖(Plato)的弟子孟尼哥馬(Meneachimus)所發見，到狄卡德發明解析幾何學，相距幾二千年。其間歐幾里得(Euclid)，亞基默特(Archimedes)等數理大家，研究錐綫，都有著述。在公元前三世紀末葉，阿頗羅尼(Apollonius)才證明各種錐綫，都可以從同一圓錐截得，只須改變截面對於圓錐基綫的傾角，并定拋綫、橢圓、雙曲綫等名稱，又發見橢圓及雙曲綫的焦點。約在公元四世紀初，巴普司(Papus)專心致力算學，整理昔賢著述，首先發見拋綫的焦點，並且把錐綫視為平面上的軌跡，構成邏輯的原則，像§45裏的錐綫定義，就是根據他的原則而來。總觀上述諸希臘數理大家，錐綫性質，各有貢獻，大有功於後學。克伯爾(Kepler)，牛頓(Newton)諸氏，即藉此確定了宇宙間許多行星

的運動定律.近世紀來,在物理機械工程等方面,應用錐綫定理的地方日多,希望讀者努力研究本科,爲進修高深數理的基礎.

習題二十一

求下列錐綫方程式:

1. 焦點在 (0,0), 準綫 $x=2, e=1$。

2. 焦點在 (0,0), 準綫 $y=3$, $e=\frac{1}{3}$。

3. 焦點在 (1,0), 準綫 $x+4=0, e=\sqrt{2}$。

4. 焦點在 (−2,4), 準綫 $y+4=0$, $e=2$。

5. 焦點在 (1,1), 準綫 $x=0, e=\frac{1}{2}$。

6. 焦點在 (−1,−3), 準綫 $2x-y=3, e=\frac{2}{3}$。

7. 一動點到直綫 $3x-y=6$ 的距離恆二倍於到定點(2,4) 的距離,求動點的軌跡方程式。

8. 若錐綫的準綫平行於坐標軸,證明他的方程式不含 xy 項。

9. 證明一直綫與錐綫的交點不能多過於兩點。

10. 證明兩錐綫的交點不能多過於四點

II 拋綫

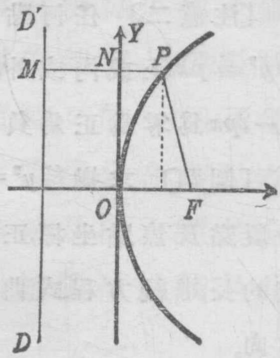
48.抛綫定義　一動點到一定點與一定直綫兩個距離的比等於 1,這動點的軌跡叫抛綫。或者說抛綫是一動點距一定點恆等於距一定直綫的軌跡。這兩種意義是一樣的,因爲兩個距離的比等於 1,就是距定點與定直綫恆等。

在抛綫裏,定點與定直綫叫做焦點與準綫,過焦點垂直於準綫的直綫叫抛綫軸。由定義知道抛綫與軸只交於一點,就是在焦點到準綫的距離正中,這點叫抛綫項點(Vertex)。

49.抛綫範式一　以 x 軸爲抛綫主軸,原點爲項點,p 爲焦點到準綫的距離,抛綫方程式是

$$y^2=2px。\qquad\text{(XVII)}$$

證　如下圖,$P(x,y)$爲抛綫上任一點,$F\left(\frac{1}{2}p,0\right)$爲焦點。因項點距準綫與距焦點相等,故準綫 DD′ 是



$$x=-\frac{1}{2}p。$$

$$FP=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},$$

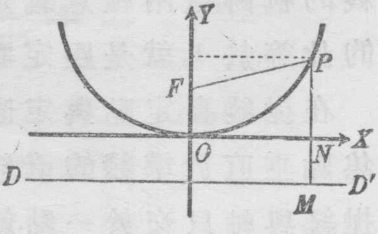
$$MP=MN+NP=\frac{1}{2}p+x。$$

因　　$FP=MP$。

$$\therefore\quad \sqrt{(x-\tfrac{1}{2}p)^2+y^2}=\tfrac{1}{2}p+x。$$

化簡,得 $y^2=2px$。

推論　如下圖,取 y 軸爲拋綫軸,頂點仍在原點。



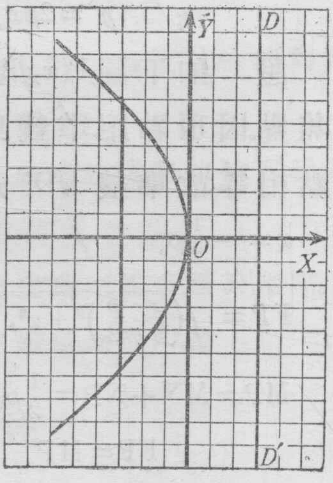
焦點是 $\left(0,\dfrac{1}{2}p\right)$,

準綫是 $y=-\dfrac{1}{2}p$,

拋綫方程式是

$x^2=2py$。

〔注意一〕於錐綫通式 $(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0$,令 $e=1$, 得 $y^2-2px+p^2=0$, 即 $y^2=2p\left(x-\dfrac{1}{2}p\right)$。若拋綫軸不變,把拋綫移動,使頂點與原點相合,則各點的縱坐標 y 不變,橫坐標 x 減 $\dfrac{1}{2}p$, 即得 $y^2=2px$。



〔注意二〕任何點在拋綫 $y^2=2px$ 上或內或外,隨着 y^2-2px 爲零爲正爲負而定。

〔例題〕求拋綫 $y^2=-6x$ 的頂點及焦點坐標,正焦點弦的長,準綫方程式,曲綫的方向。

［解］ 與範式 $y^2=2px$ 比較,知道頂點是(0,0),拋綫軸是 x 軸,$2p=-6,p=-3$。

所以焦點是$\left(-\frac{3}{2},0\right)$,正焦點弦長$2p=6$,準綫是 $x=\frac{3}{2}$。

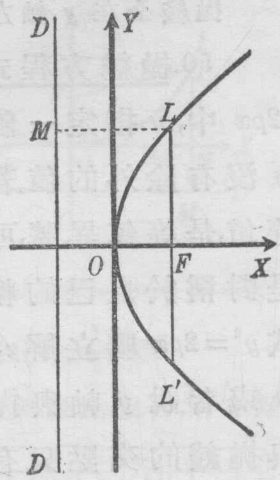
拋綫全在 y 軸左邊,向左伸至無窮遠處。

50.<u>拋綫方程式討論</u> 在拋綫方程式 $y^2=2px$ 中,y 指定一值,不拘正負,x 總得實數,所以 y 沒有除外的值。若 x 指定一值,y 便有兩個對應值,是等值異號,可知拋綫對稱於 x 軸,實在就是對稱於自己的軸。y 軸方程式 $x=0$ 與拋綫範式 $y^2=2px$ 聯立解 y, 得 $y^2=0$,就是 y 有兩次等於 0,或者說 y 軸與拋綫的兩交點是相合點,x 軸與拋綫的交點只有一個有限點 (Finite point),就是頂點 (0,0), 其他交點在無窮遠處。

p 與 x 必須同號,否則沒有實點。p 爲正值時,x 的一切負值,求得 y 的對應值,都是虛數,故曲綫全在頂點右邊。p 爲負值時,x 的一切正值,求得 y 的對應值,都是虛數,故曲綫全在頂點左邊。看 p 值的正負,便能决定曲綫是向右還是向左。x 增加無限,同時 y 也增加無限,故拋綫是伸長到無窮遠處。

拋綫$x^2=2py$的討論,和上面一樣,不過曲綫是向上或向下。

51.正焦點弦　過焦點F與拋綫軸正交的弦,如右圖中LL′綫,就是正焦點弦,因爲L是拋綫上的點,距焦點及準綫相等,所以

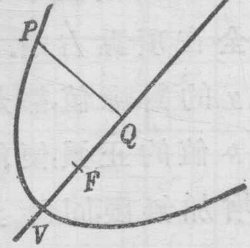


$$FL=ML=p。$$

或　$$LL'=2p。$$

就是正焦點弦的全長四倍於頂點到焦點的距離,也可以說是等於拋綫範式中一次項的係數。

52.拋綫範式二　如下圖,不拘拋綫在任何位置,設V及F爲頂點及焦點,P爲曲綫上任一點。作PQ垂直於軸VQ。垂綫QP,頂點到垂綫足及到焦點的兩個距離VQ,VF,就是相



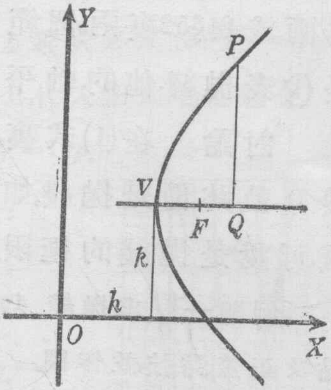
當於 $y^2=2px$ 裏的 $y, x, \frac{1}{2}p$。

$$\therefore \overline{QP}^2=4VF \cdot VQ_{\circ} \qquad (1)$$

不論拋綫的位置怎樣,上式恆眞。由是得

定理 若拋綫軸平行於 x 軸,頂點是(h,k),距焦點是 $\frac{1}{2}p$,則拋綫方程式是

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2=2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h}) \qquad \text{(XVIII)}$$



證 設 $P(x,y)$ 爲拋綫上任一點,則 $QP=y-k$, $VQ=x-h$, $VF=\frac{1}{2}p$。

代入(1)式,得

$$(y-k)^2=2p(x-h)_{\circ}$$

推論 若拋綫軸平行於 y 軸,則拋綫方程式是 $(x-h)^2=2p(y-k)$。

53.<u>拋綫通式</u> 從拋綫範式可以推出怎樣二次式是代表拋綫。

定理 含兩變數 x 及 y 的二次式,沒有 xy 項,且只含一個平方項。他的軌跡是以平行於一坐標軸爲軸的拋綫。

證 依題意,設二次式爲

$$Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (1)$$

或
$$Ax^2+Dx+Ey+F=0。 \qquad (2)$$

以 C 或 A 除全式,再配方,得

$$\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-\frac{D}{C}\left(x+\frac{F}{D}-\frac{E^2}{4CD}\right),$$

或
$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2=-\frac{E}{A}\left(y+\frac{F}{E}-\frac{D^2}{4AE}\right)。$$

這兩式與§52裏兩個範式同形,故知(1),(2)兩式都是代表拋綫,他的軸平行於 x 軸或 y 軸。

討論　在(1)式裏,E 或 F 等於 0,或同時等於 0,軌跡仍是拋綫。如果D=0,則軌跡是兩平行綫,可說是拋綫的極限。在(2)式裏,也有同樣情形。

〔例題一〕 求拋綫 $4y^2-24x-12y-15=0$ 的頂點,焦點及正焦點弦,並作圖。

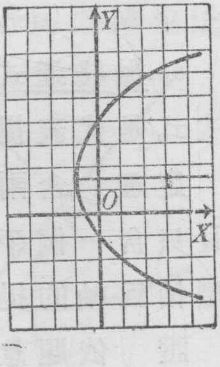
〔解〕 化原式爲範式:

$$\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=6(x+1),$$

可知頂點是$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$,

拋綫軸平行於 x 軸,

$$2p=6, p=3。$$



正焦點弦的長是 6。

焦點是$\left(-1+\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$,即$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$。

頂點及正焦點弦的兩端都是拋綫上的點,再從方程式算出幾組對應值,定各點的位置,就能聯成一個拋綫,如上圖。

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$\frac{3}{2}\pm\sqrt{3}$,	$\frac{3}{2}\pm\sqrt{6}$,	$\frac{3}{2}\pm 3$,	$\frac{3}{2}\pm 2\sqrt{3}$,	$\frac{3}{2}\pm 3\sqrt{2}$,	$\frac{3}{2}\pm 2\sqrt{6}$

〔例題二〕 拋綫軸平行於 y 軸,頂點在 x 軸上,經過兩點 $(3,1)$, $(5,9)$, 求拋綫方程式,

〔解〕 依題意所求拋綫方程式必與 $(x-h)^2=2py$ 同形。因兩點 $(3,1)$, $(5,9)$ 都在拋綫上,代入上式,必能適合。

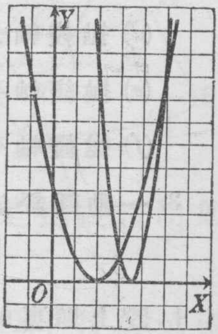
$$(3-h)^2=2p,\qquad (5-h)^2=18p。$$

解得 $h=2$, 或 $\frac{7}{2}$,

$p=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{8}$,

$$\therefore\ (x-2)^2=y,$$

或 $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{4}y$。



可知適合於本題的拋綫有二。仿前題作法,得右圖。

習題二十二

1. 就下列方程式,求拋綫的頂點,焦點,正焦點弦,並作圖:

(a) $y^2=36x$。 (b) $100x^2+y=0$。

(c) $y^2=3(x+2)$。 (d) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-\left(y+\frac{3}{4}\right)$。

(e) $y^2+4x+6y+9=0$。 (f) $x^2+8y+10=0$。

(g) $3y^2-5x+7y-2=0$。 (h) $2x^2+4x+2y+5=0$。

2. 求適合下列條件的拋綫方程式:

(a) 頂點在$(-2,1)$,拋綫軸平行於 x 軸,經過$(2,2)$。

(b) 頂點在 x 軸上,拋綫軸平行於 y 軸,經過$(3,1)$,$(5,9)$。

(c) 頂點在直綫 $x=2$ 上,拋綫軸平行於 x 軸,正焦點弦是 6, 經過$(8,3)$。

(d) 拋綫軸是 $x=3$,經過$\left(2,-\frac{9}{2}\right)$,$(5,-6)$。

(e) 拋綫軸平行於 y 軸,經過$(0,0)$,$(1,3)$,$(4,-2)$。

(f) 拋綫軸平行於 x 軸,經過$(-1,1)$,$(8,2)$,$(-4,-2)$。

3. 一動圓經過一定點及切於一定直綫,求圓心軌跡。

4. 設上題裏的定點是$(2,1)$,定直綫是 $x=10$,求軌跡方程式。

5. 一動圓切直綫 $x=2$ 及圓 $x^2+y^2=10$,求圓心的軌跡。

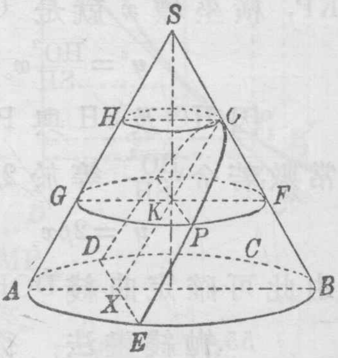
6. 證明拋綫 $y^2=2px$ 上任一點到焦點的距離是 x

$+\frac{p}{2}$。

7. 等邊三角形內切於拋綫 $y^2=2px$,一頂點在原點,求邊長。

8. 證明拋綫軸與準綫的交點到正焦點弦兩端的聯綫是正交。

54.截圓錐爲拋綫法　過正圓錐 S-ABC 的頂點 S 及底面直徑AB的平面,必垂直於底面及平行於底面的一切截面。又通過那些截面的中心,作一平面垂直於SAB 平面,且平行於圓錐的基綫 SA。這平面與圓錐相截的曲綫,即 DOE,就是拋綫。證明如下:



SAB 與DOE兩平面的交綫OX平行於SA。過曲綫DOE上任一點 P 及與圓錐基綫SB的交點 O 各作一平面,平行於底面,與 SAB 平面交於FG, OH 兩直綫。這兩直綫都是兩圓截面的直徑。交綫KP是垂直於 SAB 平面,就是垂直於這平面上

過足點K的兩直綫OX及FG。

$$\overline{KP}^2=GK\times KF,\quad GK=HO,\quad \frac{KF}{KO}=\frac{HO}{SH}。$$

即　$$\overline{KP}^2=HO\times KF,\quad KF=\frac{HO}{SH}OK。$$

$$\therefore\ \overline{KP}^2=\frac{\overline{HO}^2}{SH}OK。$$

把O做原點，OX做x軸，P點的縱坐標y就是KP，橫坐標x就是OK。代入上式，得

$$y^2=\frac{\overline{HO}^2}{SH}x。$$

因HO及SH與P點的位置無關，可以當做常數，若令$\frac{\overline{HO}^2}{SH}$等於$2p$，上式就變做

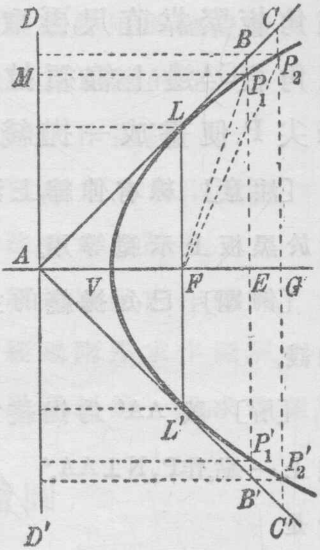
$$y^2=2px。$$

由此可確定曲綫DOE是拋綫。

55. <u>拋綫畫法</u>　從拋綫定義及作方程式圖象的方法，可以推出已知焦點及準綫或正焦點弦的畫拋綫法。

(a)幾何畫法　於一直綫上定F點爲焦點，截AF等於焦點到準綫的已知距離，平分AF於V，就是拋綫的頂點。作$LL'\perp AF$，使$FL=FL'=AF$。從A過L或L'各作一直綫。在AL上任取一點B，作$BB'\perp AF$於E點。以F爲圓心，BD爲半徑，截BB'於

P_1,P'_1兩點。仿此作CC′等垂線,截得P_2,P'_2等點。聯結P_2,P_1,L,V,L′,P'_1,P'_2各點的曲線就是拋線。



證　聯結FP_1,作DD′⊥AF,$P_1M \parallel AF$。

因△AFL和△AEB是相似。

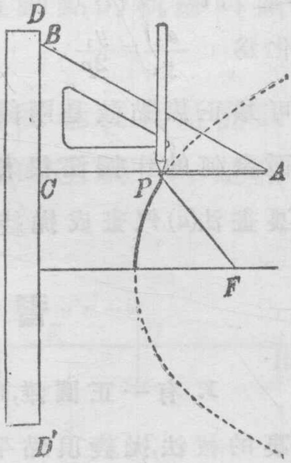
$$\therefore \frac{FL}{AF}=\frac{EB}{AE}=\frac{FP_1}{MP_1}。$$

因 FL＝AF,即$\frac{FL}{AF}=1$。

$$\therefore \frac{FP_1}{MP_1}=1,\text{或 } FP_1=MP_1。$$

即P_1點距焦點及準線相等。P'_1與P_1是對稱點,故P_1,P'_1是拋線上的兩點,仿此可證明P_2,P'_2等點都在拋線上。

(b)機械畫法　置直尺的一邊與準線DD′密合,取一根細線與三角板的一邊CA等長,一端固定於銳角頂A,他端固定於焦點F。把這

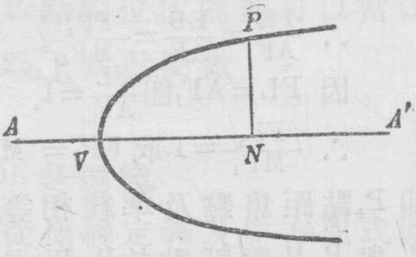


三角板緊靠直尺,再取一鉛筆尖P緊貼這線於三角板CA邊上,線須拉緊。當三角板沿直尺滑動,筆尖P便畫成一拋綫。因移動時FP恆等於CP。

〔注意〕 線有伸縮,上法畫成的曲綫,不能精確,只適宜於黑板上示範等用。

〔例題〕 已知拋綫的主軸,頂點及曲綫上一點。求作拋綫。

〔解〕 設AA′為拋綫主軸,V為頂點,$P_1(x_1,y_1)$為曲綫上一點。作$P_1N\perp AA'$。



於是

$$VN=x_1,\quad NP_1=y_1。$$

因 $y_1{}^2=px_1$,

化為 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{y_1}{2p}$

可知正焦點弦是兩綫段x_1及y_1的第三比例項。根據平面幾何的作圖法,很容易求出正焦點弦的長,再用§55裏畫法(a),便畫成拋綫。

習題二十三

1. 有一正圓錐,高1公尺,底面直徑8公寸,照§54裏的截法,拋綫頂點平分圓錐的基綫,求正焦點弦的長。

2. 照§54裏方法,從正圓錐截得兩個抛綫,證明正焦點弦的比等於頂點到圓錐頂點距離的比。

3. 抛綫的正焦點弦是10,求作抛綫。

4. 抛綫頂點到焦點的距離是2,求作抛綫。

5. 完成例題中抛綫畫法,並加以證明。

6. 已知抛綫的準綫及經過兩點,求作圖解。

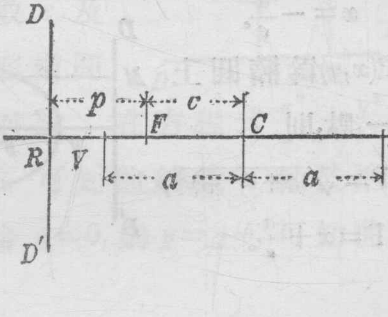
7. 已知抛綫的焦點及經過兩點,求作圖解。

8. 已知抛綫的軸與焦點及經過一點,求作圖解。

III 橢圓

56.<u>橢圓定義</u>　一動點到一定點與一定直綫兩個距離的比小於1,這動點的軌跡叫做橢圓。

設F及DD′爲定點及定直綫,就是橢圓焦點及準綫。通過F點作準綫的垂綫FR,是橢圓的主軸。



因$e<1$,綫段FR分成兩部分的比等於e,就有內分外分兩種。所以

曲線經過主軸有 V,V′ 兩點,在 F 的兩側,叫做橢圓的頂點。VV′ 的中點 C 叫做橢圓心。

令 $RF=p$, $VC=CV'=a$, $FC=c$。

由定義, $VF=e\cdot RV$, $V'F=e\cdot RV'$。

即　$a-c=e(c+p-a)$, $a+c=e(c+p+a)$。

相加,再以 2 除,　$a=e(c+p)$,　或 $c+p=\dfrac{a}{e}$。

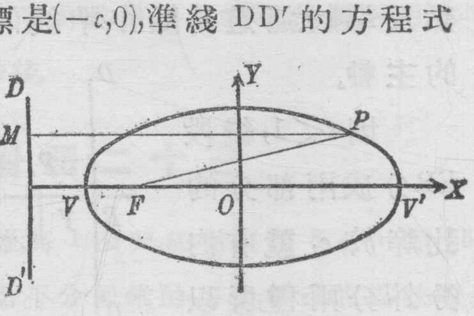
相減,再以 2 除,　$c=ae$。

故橢圓心到頂點的距離是 ae,到準綫的距離是 $\dfrac{a}{e}$。

57.<u>橢圓範式一</u>　定理　以 x 軸爲主軸,原點爲心,橢圓方程式是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$。　(XIX)

其中 $b^2=a^2-c^2$, a 及 c 代表心到項點及焦點的距離。

證　如下圖,焦點 F 及準綫 DD′ 在 y 軸左側,所以 F 點的坐標是 $(-c,0)$,準綫 DD′ 的方程式是 $x=-\dfrac{a}{e}$。



設 $P(x,y)$ 爲橢圓上任一點,則

$FP=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$,

$MP=x+\dfrac{a}{e}$。

但 $FP=e\cdot MP$,

$c=ae$。

$\therefore \sqrt{(x+c)^2+y^2}=\frac{c}{a}\left(x+\frac{a^2}{c}\right)=\frac{c}{a}x+a$。

兩邊平方,再整理,得

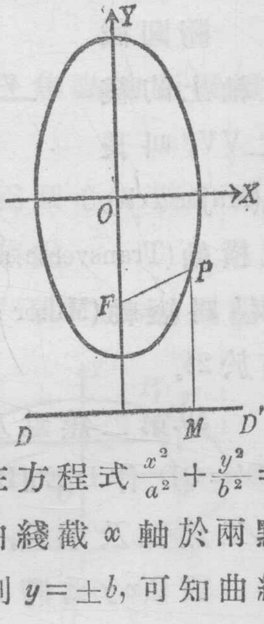
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)。$$

已知 $b^2=a^2-c^2$。

$\therefore \quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$

卽 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

推論 若橢圓心仍在原點,焦點改在 y 軸上,y 軸便是主軸。



F 的坐標是 $(0,-ae)$,

準綫方程式是 $y=-\frac{a}{e}$。

仿上法,求得橢圓方程式

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1。$$

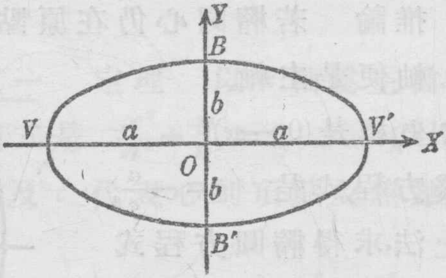
可知橢圓的主軸變換,影響於方程式,只有兩變數 x 及 y 互易,與拋綫的情形相同。

58.<u>橢圓方程式討論</u> 在方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中,令 $y=0$, 則 $x=\pm a$, 可知曲綫截 x 軸於兩點 $(\pm a, 0)$, 在 y 軸兩側。令 $x=0$, 則 $y=\pm b$, 可知曲綫

截 y 軸於兩點 $(0,\pm b)$，在 x 軸兩側。

解 y，得 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$。要 y 是實數，x 的絕對值小於 a 的須一律除去。解 x，得 $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$，$y$ 的絕對值小於 b 的，也須一律除去。所以橢圓是閉曲綫(Closed curve)，完全在以四直綫 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 爲邊的長方形內。

以 $-x$ 代 x，$-y$ 代 y，都不影響於方程式，就是橢圓對稱於兩軸及原點。過對稱心的弦都是兩等分。



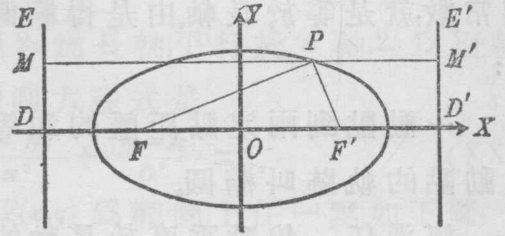
橢圓截主軸上的綫段 VV′ 叫長軸(Major axis)，或橫軸(Transverse axis)，等於 $2a$，截 y 軸上的綫段 BB′ 叫短軸(Minor axis)，或共軛軸(Conjugate axis)，等於 $2b$。

59. <u>第二焦點及準綫</u>　於 OV′ 上取 OF′＝OF，OD′＝OD。作 D′E′∥DE。那 F′ 點及 D′E′ 綫是橢圓的第二焦點及準綫。

設 $P(x,y)$ 爲橢圓上任一點，作 F′P，PM′⊥D′E′

令　　$F'P=e\cdot PM'$。

以相當值代入上式,得



$\sqrt{(c-x)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x$。兩邊平方,再整理,

得　$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1。$$

這與§57裏所得相同,可知 P 到 F′ 與 M′ 兩個距離的比也是等於 e。故橢圓有兩個焦點$(\pm ae,0)$及兩個準綫$x=\pm\frac{a}{e}$。

推論　橢圓的心到任一焦點的距離,總有

$$c^2=a^2-b^2$$

的關係。所以取短徑的一端爲圓心,a 做半徑,畫圓弧,截長軸上兩點,就是兩焦點。

60.<u>焦點半徑,正焦點弦</u>　設 $P_1(x_1,y_1)$ 爲橢圓上任一點,則FP_1及$F'P_1$爲兩個焦點半徑。

$F'P_1=e\cdot P_1M'=a-ex_1$,

$FP_1\ =e\cdot P_1M=a+ex_1$,

$F'P_1+FP_1=2a$。

故橢圓上任一點到兩焦點距離的和是一個常數,就是等於長軸。由是得橢圓的新定義,如下:

一動點到兩定點距離的和等於一個常數,這動點的軌跡叫橢圓。

經過任一焦點垂直於長軸的弦,是橢圓的正焦點弦,他的長度求法,如下:

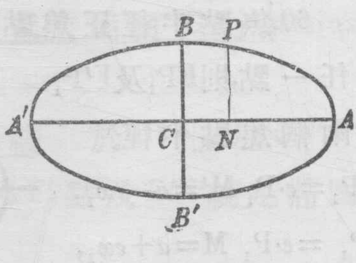
在橢圓範式裏,令$x=\pm c$,得$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

因 $c^2=a^2-b^2$, $\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}$,

開方 $\frac{y}{b}=\pm\frac{b}{a}$,即 $y=\pm\frac{b^2}{a}$。

故正焦點弦的全長是$\frac{2b^2}{a}$。

61.橢圓範式二　設直綫AA′及BB′爲橢圓的長短二軸,相交於C。從曲綫上任一點P作長軸的垂綫NP。看右圖便知CA及CB是相當於$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$裏的$a$及$b$,CN及NP是相當於$x$及$y$,所以



$$\frac{\overline{CN}^2}{\overline{CA}^2}+\frac{\overline{NP}^2}{\overline{CB}^2}=1。\qquad(1)$$

這方程式是橢圓的普遍性,並沒有把坐標介紹進去。由是得

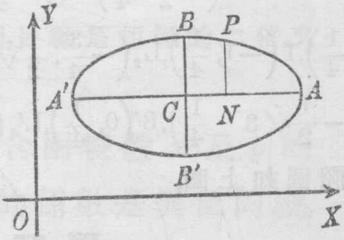
定理　以$2a$爲長軸,平行於 x 軸,$2b$爲短軸,(h,k) 爲心的橢圓方程式是

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1。\qquad \text{(XX)}$$

證　設 $P(x,y)$ 爲橢圓上任一點。如下圖,

$CA=a,\quad CB=b,$

$CN=x-h$。$NP=y-k,$



代入 $\frac{\overline{CN}^2}{\overline{CA}^2}+\frac{\overline{NP}^2}{\overline{CB}^2}=1,$

得 $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1。$

推論　若長軸平行於 y 軸,則 $CN=y-k, NP=x-h$, 故橢圓方程式是

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1。$$

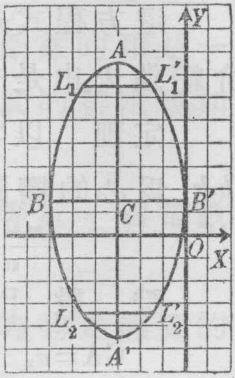
〔例題〕 求橢圓 $4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=1$ 的心,兩焦點,長短軸及正焦點弦。

〔解〕 化原式爲 $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{\left(y-\frac{1}{4}\right)^2}{1}=1,$

可知橢圓心是 $\left(-\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\right)$,

長軸是 $2a=2$, 平行於 y 軸;

短軸是 $2b=\frac{1}{2}\times 2=1;$



$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}$

$=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$。

兩焦點是 $F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\right)$

及 $F'\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)$;

正焦點弦的長是 $\frac{2b^2}{a}=\frac{1}{2}$。

由是得 $A\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$,$L_1\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\right)$,$B\left(-1,\frac{1}{4}\right)$,$L_2\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)$ $A'\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$,$L'_2\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)$,$B'\left(0,\frac{1}{4}\right)$,$L'_1\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\right)$八點,可作一橢圓如上圖。

習題二十四

1. 求下列橢圓方程式,已知心在原點,焦點在(1) x 軸上,(2) y 軸上。

(a) $a=8, b=6$。　　(b) $e=\frac{1}{2}, p=3$。

(c) $c=3, e=\frac{2}{5}$,　　(d) $c=5, b=12$。

從下列方程式求橢圓的心,焦點,頂點,正焦點弦及準綫,並作圖:

2. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$。　　3. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$。

4. $\frac{x^2}{5}+\frac{(y+3)^2}{3}=1$。　　5. $(x-2)^2+\frac{y^2}{3}=1$。

6. $\dfrac{(x-1)^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{(y+2)^2}{\frac{3}{4}}=1$。

7. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{(y-\frac{1}{2})^2}{4}=1$。

8. 證明橢圓的正焦點弦是長短軸的第三比例項。

9. 從§60裏橢圓新定義求出方程式。

10. 從錐綫通式導出橢圓範式。

11. 設橢圓心在原點,兩軸與坐標軸相合,經過兩點$(\sqrt{7},0)$, $(2,1)$,求橢圓方程式。

12. 對稱於兩坐標軸的橢圓,長軸是短軸的二倍,又經過$(2,1)$,求橢圓方程式。

62.<u>橢圓通式</u> 定理 含兩變數 x 及 y 的二次式,沒有 xy 項,且 x^2 及 y^2 的係數是異值同號。他的軌跡是以平行於坐標軸爲軸的橢圓。

證 依題意,設二次式爲

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0。\qquad(1)$$

配方, $$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F=\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC}。$$

令 $$\frac{CD^2+AE^2-4ACF}{4AC}=k,$$

上式化爲

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{A}}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{k}{C}}\right)^2}=1.$$

這與橢圓範式二同形,所以(1)式的軌跡是橢圓。看$\sqrt{\frac{k}{A}}$大於或小於$\sqrt{\frac{k}{C}}$,可以斷定長軸是平行於x軸或y軸。

討論　如果$D=E=0$,F是負值,A與C是同號異值,則　$Ax^2+Cy^2+F=0$,與橢圓範式一同形。

如果$A=C$,則$\frac{k}{A}=\frac{k}{C}=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$。

由§57,　$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{k}{A}-\frac{k}{C}}=0$。

$$e=\frac{c}{a}=\frac{0}{\sqrt{\frac{k}{A}}}=0,\quad \frac{a}{e}=\frac{\sqrt{\frac{k}{A}}}{0}=\infty。$$

可知x^2與y^2的係數相等,兩軸便等長,兩焦點與心相合,準綫在無窮遠處,橢圓就變成圓。他的圓心是$\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2A}\right)$,半徑是$\frac{1}{2A}\sqrt{D^2+E^2-4AF}$。所以圓是橢圓的一種極限,因此圓也可列入錐綫內。

如果$F=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}$,則$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{C}+\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{A}=0$,只有一點$\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)$能適合於這方程式。這也是橢圓的極限,叫做點橢圓(Point ellipse)。

如果$F>\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}$,則兩平方的和等於負值,只有$x$及$y$是虛數時能適合於這種方程式。

所以(1)式沒有軌跡,或叫他是虛橢圓 (Imaginary ellipse)。

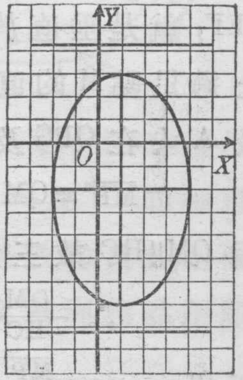
〔例題〕 化方程式$25x^2+9y^2-50x+36y-164=0$爲橢圓範式,并求準綫方程式。

〔解〕 把原方程式移項,再配方,

$$25(x^2-2x+1)+9(y^2+4y+4)=225,$$

即 $$25(x-1)^2+9(y+2)^2=225。$$

以225除全式,$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{25}=1$。



這是橢圓範式,心在$(1,-2)$,

長軸平行於y軸。

$a=5,\ b=3,\ c=\sqrt{5^2-3^2}=4$。

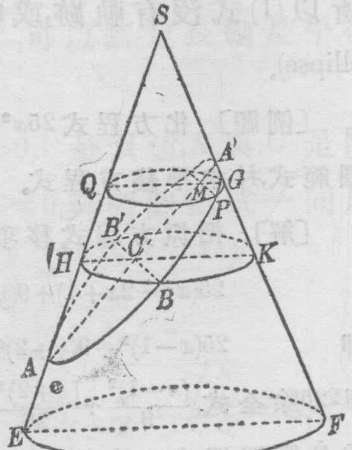
$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5},\ \dfrac{a}{e}=\dfrac{25}{4}$。

兩準綫方程式是$y=\dfrac{25}{4}-2=\dfrac{17}{4}$

及 $y=-\left(\dfrac{25}{4}+2\right)=-\dfrac{33}{4}$。

63.<u>截圓錐爲橢圓法</u> 設S爲正圓錐,仿照§54裏的方法,作一平面垂直於SEF平面不與任何基綫平行,須截兩基綫 SE 及 SF,A 及 A′爲截點。這平面與圓錐相截的曲綫 APA′,就是橢圓,證明如下:

AA′ 是平面垂直於 SEF 的交綫,通過交綫



的中點 C 及任一點 M,各作一平面平行於底面,與 SEF 相交於 HK 及 QG。這兩交綫是圓截面的直徑。

兩平面 QPG, APA′ 的交綫 MP 是垂直於 SEF, 就是垂直於這面上過足點 M 的直綫 MG 及 AA′。在 QPG 及 HBK 兩圓內,

$$\overline{MP}^2=QM\times MG,\quad \overline{CB}^2=HC\times CK。$$

因 QM∥HC, 故三角形 QMA 及 HCA 是相似。

$$\therefore\ \frac{QM}{HC}=\frac{AM}{AC},\quad \frac{MG}{CK}=\frac{MA'}{CA}.$$

所以 $$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{CB}^2}=\frac{AM}{AC}\times\frac{MA'}{CA'}。\qquad(1)$$

以 AA′ 及 BB′ 當做 x 軸及 y 軸。令 $CB=b, AC=CA'=a$, P 點的橫坐標 $x=CM$, 縱坐標 $y=MP$。

$$\therefore\ AM=a+x,\quad MA'=a-x。$$

代入 (1) 式,得 $$\frac{y^2}{b^2}=\frac{(a+x)(a-x)}{a^2},$$

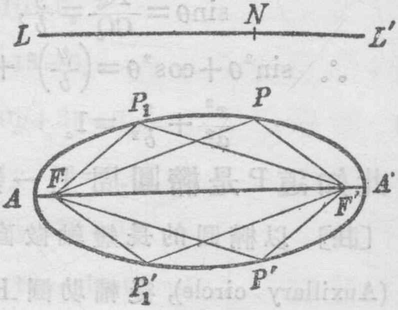
即 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。$$

故截綫APA′是橢圓。

64.<u>橢圓畫法</u> 已知長軸與兩焦點,或長短兩軸,都可以畫出橢圓。

(*a*)幾何畫法

(一)設綫段LL′為長軸的長,N為綫上任一點,F及F′為兩焦點。以F,F′為圓心,LN,NL′為半徑,畫圓弧,得交點P,P′,P_1,P_1′。若N點在綫段LL′上向左或向右移動,可得LN及NL′的種種長度,仿前當做半徑畫弧,可得無數的交點,用曲綫聯結各點,便成橢圓。因任一交點到焦點距離的和恆等於長軸。



(二)設AA′,BB′為長短兩軸相交於C,以C為圓心,CA及CB為半徑,各作一圓。通過C任作一直綫,與大小兩圓周交於R及Q。作RN⊥AA′,QP⊥RN。

兩垂綫的交點P,就是橢圓周上一點。仿此可得無數的交點,用曲綫聯結,便成橢圓。證明如下:

設$\angle ACR=\theta$,P點的坐標是(x,y)。作$QT\perp AA'$。

$$\sin\theta=\frac{TQ}{CQ}=\frac{y}{b},\quad \cos\theta=\frac{CN}{CR}=\frac{x}{a},$$

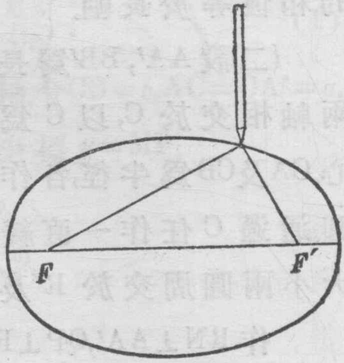
$$\therefore\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^2;$$

即
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。$$

因此知道P是橢圓周上一點。

〔註〕以橢圓的長短軸做直徑的圓叫橢圓的**輔助圓** (Auxillary circle),從輔助圓上一點R到長軸的垂綫交橢圓於P點,所成$\angle ACR$叫做橢圓上R點的**離心角** (Eccentric angle)。

(b)機械畫法　取一根細線與要畫的橢圓長軸是等長,兩端各固定於一個焦點上,以鉛筆尖P緊張這線,使線常直,移動於焦點的同一平面上,便畫成一個橢圓。因筆尖在任何位置,與兩焦點距離的和,恆等於長軸。故動點的軌跡是橢圓。



習題二十五

求作下列各方程式的軌跡:

1. $x^2-6x+y^2+8y-10=0$。

2. $x^2-6x+4y^2+8y+13=0$。

3. $4x^2+5y^2+16x-20y+31=0$。

4. $16x^2+4y^2-16x-4y-11=0$。

5. $3x^2+7y^2-12x+28y+19=0$。

6. $48x^2+12y^2-48x+12y-1=0$。

7. 試就方程式 $x^2-6x+4y^2+8y+k=0$ 討論 k 值的範圍。

8. 一動點到兩點$(0,3)$,$(0,-3)$的距離和是 8,求動點的軌跡。

9. 若一平面截正圓柱不與底面平行或垂直,則截綫是橢圓。

試畫出下面各橢圓,並加證明:

10. 已知兩焦點及經過一點。

11. 已知一焦點與他的對應準綫及經過一點。

12. 已知中心及兩準綫及離心率。

13. 已知兩焦點的距離及長軸。

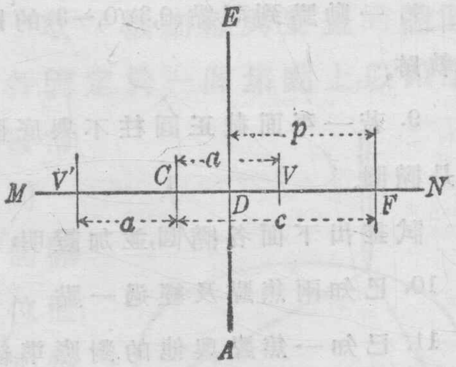
14. 已知離心率可以畫出橢圓嗎?設 $e=\frac{4}{5}$, $p=10$, 用幾何作法畫出橢圓。

IV 雙曲綫

65. 雙曲綫定義　雙曲綫與橢圓雖同屬於有心錐綫(Central conics),但是因為離心率大於 1 和小於 1 的不同,所以產生的曲綫,形狀絕不相似。

定義　一動點到一定點與一定直綫兩個距離的比大於 1,這動點的軌跡叫做雙曲綫。

如圖,設定直綫AE為準綫,定點 F 為焦點。過 F 垂直於AE的直綫 MN, 叫雙曲綫的主軸。因 $e>1$, 所以焦點到準綫的距離 DF 分為兩部分的比等於 e,



有內外兩分點 V 及 V′,就是雙曲綫的兩頂點,在準綫AE的兩側。C 是兩頂點間的中點,叫做雙曲

綫的心。

令$DF=p$, $VC=CV'=a$, $CF=c$。

由定義，$VF=e\cdot DV$, $V'F=e\cdot V'D$,

即　$c-a=e[a-(c-p)]$, $c+a=e[a+(c-p)]$。

相減，再以 2 除，$a=e(c-p)$，或 $c-p=\frac{a}{e}$。

相加，再以 2 除，$c=ae$。

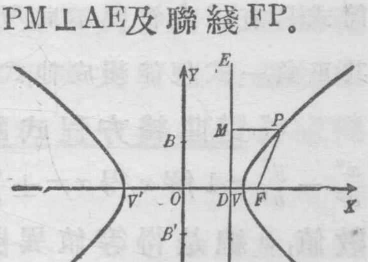
66. 雙曲綫範式一　定理　以 x 軸為雙曲綫主軸，原點為心，雙曲綫方程式是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{XXI}$$

其中 $b^2=c^2-a^2$, c 及 a 是心到項點及焦點的距離。

證　如下圖，焦點 F 是 $(c,0)$，準綫 AE 是 $x=\frac{a}{e}$。

設 $P(x,y)$ 為曲綫上一點。作 $PM\perp AE$ 及聯綫 FP。



由定義，$FP=e\cdot MP$。

但　$FP=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$,

$MP=x-\frac{a}{e}$。

所以

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=e\left(x-\frac{a}{e}\right)。$$

因　$e=\frac{c}{a}$。

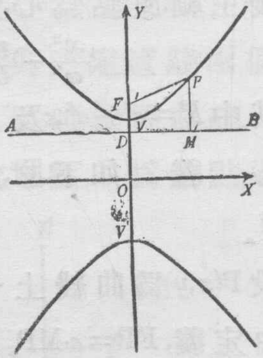
代入上式，化為　$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$, (1)

與§57裏求橢圓範式時所得的結果相同,但是雙曲綫裏 $e>1$, $a^2-c^2=a^2-a^2e^2=a^2(1-e^2)$ 必爲負值,不能等於一個實數的平方,所以令 $b^2=c^2-a^2$,代入(1)式,得

$$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2,$$

即 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1。$$

推論 若以 y 軸做雙曲綫的主軸,心仍在原點,上式中 x 與 y 必互易位置,變成 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$。他的焦點 F 是 $(0,c)$,準綫AE是 $y=\frac{a}{e}$。



［注意］兩種有心曲綫的最簡式,只有 b^2 的符號不同,所以反其正負,一式便能變成他式。

67.<u>雙曲綫方程式討論</u> 從雙曲綫方程式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 解 x,得 $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$。$y$ 每指定一實數值,x 總是得等值異號的兩實數值,所以 y 沒有除外的值。設 $y=0$,則 $x=\pm a$, 可知曲綫截 x 軸於 $(a,0)$ $(-a,0)$ 兩實點,且在 y 軸兩側,就是雙曲綫的項點。因 y 的絕對值增加無限,x 的絕對值也

隨着增加無限,所以曲綫離 x 軸愈趨愈遠,不能再得交點。

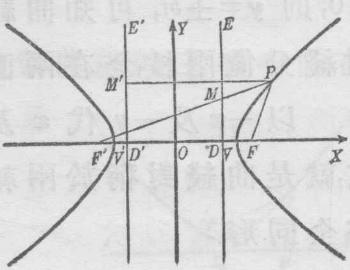
從方程式解 y,得 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$。$x$ 指定一實數值,y 雖然也有兩個對應值,但是要不得虛數,x 在 $+a$ 與 $-a$ 間的一切數值,須一律除去。設 $x=0$,則 $y=\pm bi$,可知曲綫不與 y 軸相截,所以雙曲綫分做兩枝,全在兩直綫 $x=a, x=-a$ 以外。

以 $-x$ 及 $-y$ 代 x 及 y,都沒有影響於方程式,就是曲綫對稱於兩軸及原點,所以兩枝曲綫完全同形。

曲綫截 x 軸上綫段 V′V 的長等於 $2a$,叫做主軸。以 V 或 V′ 爲圓心,c 爲半徑,畫圓弧,截 y 軸上 B,B′ 兩點。綫段 B′B 的長等於 $2b$,叫做共軛軸 (Conjugate axis)。曲綫始終不與共軛軸相截,好像與他沒有關係,其實在方程式中與主軸有同樣的重要。

$b^2=c^2-a^2$,即 $c^2=a^2+b^2$,可知中心到焦點距離大於任一軸的一半,並且 a 不能限定大於 b 或小於 b。因此長軸和短軸的名稱,不適用於雙曲綫。

68.第二焦點及準綫　雙曲綫既然同橢圓一樣,對稱於兩軸及中心,就可以推想出焦點及準綫也必對稱。如下圖,在主軸上取 $OF'=OF$,$OD=OD'$。作 $D'E'$ 垂直於主軸,那 F' 點及 $D'E'$ 綫就是第二焦點及準綫。



因 $F'P=e\cdot M'P$。

但 $F'P=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$,

$M'P=x+\dfrac{a}{e}$,

$e=\dfrac{a}{c}$。

$\therefore (x+c)^2+y^2=\left(\dfrac{c}{a}x+a\right)^2$。

仿 §66 化法,結果也是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1。$$

故知雙曲綫有兩焦點 $(\pm c,0)$,兩準綫 $x=\pm\dfrac{a}{e}$。

69.焦點半徑及正焦點弦　從雙曲綫上任一點 P 到焦點 F 或 F′ 的距離,也叫焦點半徑。看 §68 裏的圖,便知

$$FP=e\cdot MP=e\left(x-\frac{a}{e}\right)=ex-a,$$

$$F'P=e\cdot M'P=e\left(x+\frac{a}{e}\right)=ex+a。$$

相減, $F'P-FP=2a$。

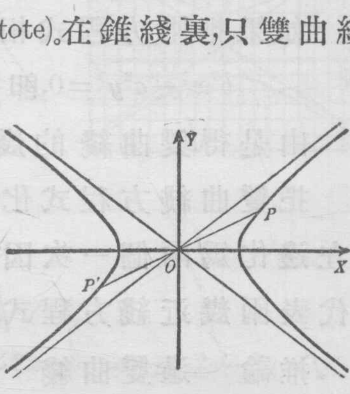
故知雙曲綫上一點到兩焦點距離的差是一個

常數,等於主軸的長。由是得雙曲綫的新定義,如下:

一動點與兩定點距離的差恆等於一個常數,這動點的軌跡叫做雙曲綫。

求雙曲綫的正焦點弦,同橢圓裏求法一樣,而且全長也是等於$\frac{2b^2}{a}$。

70.幾近綫 設一曲綫與其他一綫,在無窮遠處是無限接近,但是永久不會相遇,這綫就叫做曲綫的幾近綫(Asymptote)。在錐綫裏,只雙曲綫有幾近綫,說明如下:



如右圖,過雙曲綫中心O作一直綫,截左右兩枝曲綫於P′,P兩點。若P′P直綫繞O點旋轉,使不與曲綫相截,但是在無窮遠處,與曲綫無限接近,這直綫就叫做雙曲綫的幾近綫。

定理 雙曲綫$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的兩幾近綫是

$$bx+ay=0 \text{ 及 } bx-ay=0。$$

證 設$y=mx$為過原點或者說過雙曲綫

中心的直綫,與$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$聯立解$x$,

$$得\ x=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}。$$

這是上圖裏交點P,P′的橫坐標。要P,P′移到無窮遠處,x必須變成無窮大。因上式中分子是常數,與交點P或P′的位置無關。所以要$x=\infty$,必令分母等於0,就是$b^2-a^2m^2=0$,即$m=\pm\frac{b}{a}$。

可知幾近綫是$y=\pm\frac{b}{a}x$,

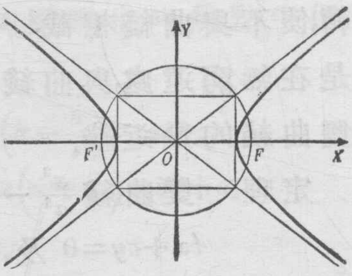
即 $$lx+ay=0\ 及\ bx-ay=0。$$

如果把兩方程式相乘,就得

$$b^2x^2-a^2y^2=0,即\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0。$$

由是得雙曲綫的幾近綫求法,如下:

把雙曲綫方程式化爲範式,右邊的1代以0,左邊化爲兩個一次因式,令各因式等於0,就是代表兩幾近綫方程式。



推論　過雙曲綫兩軸的各端作直綫,平行於其他一軸,成一長方形,引長他的對角綫,就是兩幾近綫。若以雙曲綫的中心爲圓心對角綫爲直徑畫圓,必通過

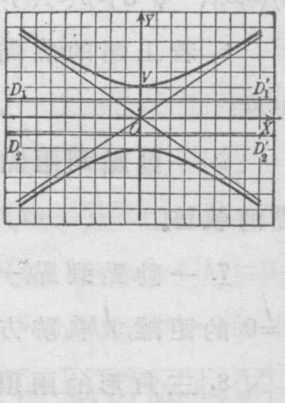
雙曲綫的兩個焦點。

〔註〕 曲綫的幾近綫不限定是直綫,不過在初等解析幾何裏,幾近綫總是直綫。

〔例題〕 求雙曲綫$4x^2-9y^2+36=0$的頂點、焦點離心率、正焦點弦、準綫及幾近綫。

〔解〕 化原式爲 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$,

便知主軸在y軸上。



$a=2,\quad b=3,$

$c=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13},$

$\frac{2b^2}{a}=\frac{18}{2}=9,$

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$。

兩頂點是$(0,2),(0-2)$。

兩焦點是$(0,\sqrt{13}),(0,-\sqrt{13})$。

兩準綫是$y=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm\frac{4}{13}\sqrt{13}$。

兩幾近綫是$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=0$, 即 $2x+3y=0$ 及 $2x-3y=0$。

習題二十六

1. 求作下列方程式的圖象,并求準綫及幾近綫:

(a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$。　(b) $\frac{y^2}{15}-\frac{x^2}{9}=1$。

(c) $x^2-9y^2=9$。　(d) $25x^2-15y^2=144$。

2. 以原點爲心, x 軸爲主軸,求雙曲綫方程式,已知

(a) $a=5,\ e=\frac{4}{3}$。 (b) $b=3,\ c=3$。

(c) $b=4,\ e=2$。 (d) $c=\sqrt{5},\ e=\frac{1}{2}\sqrt{5}$。

3. 求雙曲綫兩軸的比及方程式,已知頂點在中心與焦點間的距離正中。

4. 雙曲綫的中心在原點,焦點在 x 軸上,經過兩點:(a) $(3,2),(-\sqrt{3},1)$; (b) $(3,0),(5,-4)$; 求他的方程式。

5. 若上題的焦點在 y 軸上,兩個雙曲綫方程式是怎樣?

6. 一動點到兩點 $(13,0),(-13,0)$ 距離的差是 24,求動點的軌跡。

7. 一動點到點 $(-5,0)$ 的距離是 4 倍於到直綫 $16x+5=0$ 的距離,求軌跡方程式。

8. 三角形的兩頂點在 $(4,0)$ 及 $(-4,0)$,其餘兩邊斜度的積是 9,求第三頂點的軌跡。

71. 雙曲綫範式二 仿§60裏的方法,求得雙曲綫有

$$\frac{\overline{CN}^2}{\overline{CA}^2}-\frac{\overline{NP}^2}{\overline{CB}^2}=1。\qquad(1)$$

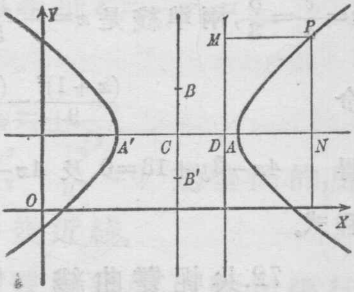
的幾何性,由是可以推出中心不在原點的雙曲綫方程式。

定理 以 $2a$ 爲主軸,平行於 x 軸, $2b$ 爲共軛

軸，(h,k)爲心的雙曲綫方程式是

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1。\qquad \text{(XXII)}$$

證 如右圖，$CA=a$，$CB=b$，$CN=x-h$，$NP=y-k$。代入(1)式，得



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1。$$

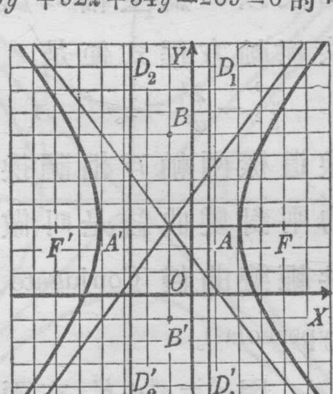
推論一 主軸在y軸上，雙曲綫方程式是 $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$。

推論二 上面兩種雙曲綫的幾近綫是

$$b(x-h)+a(y-k)=0 \text{ 及 } b(x-h)-a(y-k)=0,$$

或 $$b(y-k)+a(x-h)=0 \text{ 及 } b(y-k)-a(x-h)=0。$$

〔例題〕 求雙曲綫 $16x^2-9y^2+32x+54y-209=0$ 的中心、焦點、頂點的坐標、及幾近綫、準綫的方程式。



〔解〕 把原式配方，

$$16(x+1)^2-9(y-3)^2=144,$$

即 $$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=1。$$

與範式比較，知道中心是$(-1,3)$，主軸平行於x軸。

因 $a=3$, $b=4$,兩頂點是$(2,3)$,$(-4,3)$。

$c=\sqrt{3^2+4^2}=5$,兩焦點是$(4,3)$,$(-6,3)$。

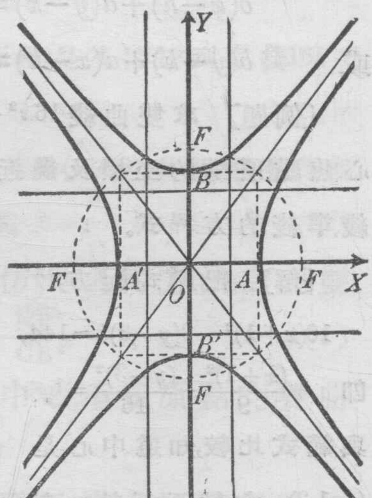
$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$,兩準綫是$x=-\frac{14}{5}$,$x=\frac{4}{5}$。

令
$$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=0,$$

得 $4x-3y+13=0$ 及 $4x-3y-13=0$,就是兩幾近綫方程式。

72.共軛雙曲綫 雙曲綫兩軸長短的關係,是沒有限制,故一個雙曲綫的主軸與共軛軸,可以當做另一個雙曲綫的共軛軸與主軸。譬如主軸是$2a$,共軛軸是$2b$,方程式是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$。如果以$2b$為主軸,$2a$為共軛軸,方程式便是

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1。$$



像這樣兩軸互相調換的兩對雙曲綫是叫做**共軛雙曲綫**(Conjugate hyperbolas)。

因 $c^2=a^2+b^2$, 在兩

個雙曲綫裏是一樣的,所以中心到四個焦點的距離是相等,就是$(\pm c,0),(0,\pm c)$。

設e_1, e_2為兩個離心率,則$e_1=\frac{c}{a}$,$e_2=\frac{c}{b}$。

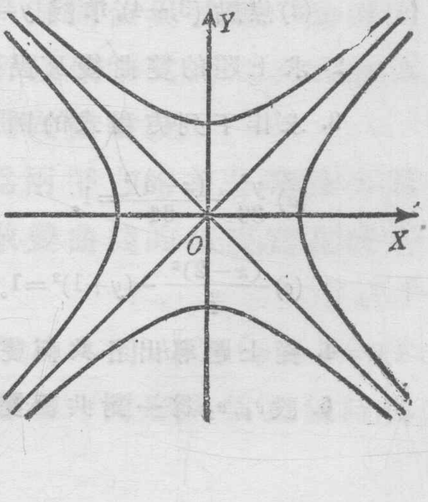
就有 $$e_1:e_2=b:a。$$

兩準綫是 $$x=\pm\frac{a}{e_1},\ y=\pm\frac{b}{e_2}。$$

因 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ 與 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$ 是全同的,所以共軛雙曲綫有共同的幾近綫。

推論　過一對共軛雙曲綫的頂點,作平行於軸的直綫,成一長方形,他的外切圓必通過四個焦點。

73.<u>正雙曲綫</u>　兩軸等長的雙曲綫,叫做正雙曲綫(Equilateral hyperbola)。於$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$中,令$a=b$,則$x^2-y^2=a^2$,就是正雙曲綫。他的共軛雙曲綫$y^2-x^2=a^2$,也是正雙曲綫。



因$a=b$,

$c=a\sqrt{2}$,$e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$。

兩幾近綫是$x^2-y^2=0$, 即$x-y=0$ 及

$x+y=0$。這是第一,二兩象限的分角綫,所以正雙曲綫的幾近綫是互爲垂直,因此又叫做直角雙曲綫(Rectangular hyperbola)。

〔注意〕 正雙曲綫的離心率是常數,等於$\sqrt{2}$。如果$e>\sqrt{2}$, $a^2<b^2$;如果$e<\sqrt{2}$, $a^2>b^2$。看e比$\sqrt{2}$的大小,可以決定兩軸的長短。

習題二十七

1. 求下列各雙曲綫的中心、兩軸及正焦點弦:

(a) 焦點$(6,2)$, 準綫$x=12, e=2$。

(b) 焦點$(4,0)$, 準綫$x=0, e=\frac{3}{2}$。

(c) 焦點$(-2,3)$, 準綫$y=-1, e=\frac{3}{2}$。

(d) 焦點$(3,-4)$, 準綫$y=0, e=\frac{4}{3}$。

2. 求上題的雙曲綫及幾近綫方程式,並作圖。

3. 求作下列方程式的圖解:

(a) $\dfrac{y^2}{36}-\dfrac{(x-4)^2}{64}=1$。　(b) $\dfrac{(y-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}}=1$。

(c) $\dfrac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}}-(y+1)^2=1$。(b) $\dfrac{(y-0.3)^2}{1.2}-\dfrac{(x-0.4)^2}{0.8}=1$。

4. 從上題導出各共軛雙曲綫方程式,並作圖。

5. 設e_1, e_2爲一對共軛雙曲綫的離心率,證明

$$e_1^2+e_2^2=e_1^2e_2^2。$$

6. 證明正雙曲綫上一點到中心的距離是兩焦點半徑的比例中項。

74. <u>雙曲綫通式</u> 雙曲綫與橢圓兩種範式,除一個平方項的係數異號外,其餘沒有不同。由是推得

定理 含兩數 x 及 y 的二次式,沒有 xy 項,且 x^2 及 y^2 的係數是異號。他的軌跡是以平行於坐標軸爲軸的雙曲綫。

證 依題意,設二次式爲

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{1}$$

其中 A 及 C 必異號。仿§62的化法,結果與雙曲綫範式二同形。若 A 與 C 是同值異號,從§73知道(1)式是代表正雙曲綫。所以像(1)式的二次式,除 A 及 C 是同號外,總是代表雙曲綫。

討論 化(1)式爲兩平方的差,若等於 0,則代表相交兩直綫,叫做雙曲綫的極限,實在就是幾近綫。

如果 D 及 E 各等於 0,則 $Ax^2+Cy^2+F=0$。F 爲負值時,與雙曲綫範式一同形。F 爲正值時,與

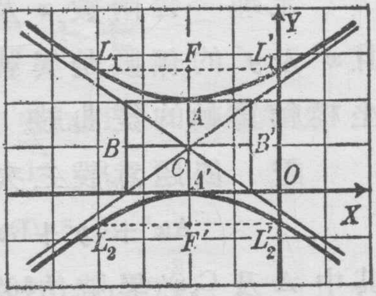
§73 裏共軛雙曲綫同形。F為0時,變成通過原點的兩直綫,就是§70裏的幾近綫。

〔例題〕 求作 $x^2-2y^2+4x+4y+4=0$ 的圖解。

〔解〕 把原式配方, $(x+2)^2-2(y-1)^2=-2$。

以 -2 除全式, $\dfrac{(y-1)^2}{1}-\dfrac{(x+2)^2}{2}=1$。

這是中心在 $(-2,1)$ 主軸平行於 y 軸的雙曲綫。



因 $a=1$, $b=\sqrt{2}$。

頂點A及A′是 $(-2,2)$ 及 $(-2,0)$。

$c=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$

焦點 F,F′ 是 $(-2,2+\sqrt{3})$, $(-2,-\sqrt{3})$。

正焦點弦 L_1L_1' 或 L_2L_2' 是 $\dfrac{2b^2}{a}=4$。

L_1,L_1' 是 $(-4,2+\sqrt{3}),(0,2+\sqrt{3})$,

L_2,L_2' 是 $(-4,-\sqrt{3}),(0,-\sqrt{3})$。

從頂點及正焦點弦兩端的坐標,可以決定兩枝曲綫的略形,再從方程式求出 x 及 y 的幾組對應值,就能聯成雙曲綫,如上圖。

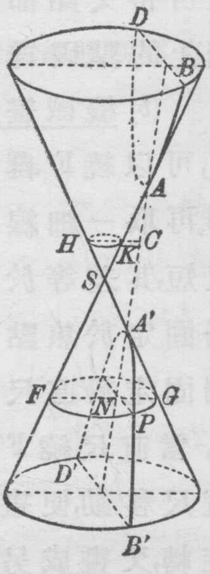
x	-5	-3	-1	1
y	$1\pm\frac{1}{2}\sqrt{22}$	$1\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$	$1\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$	$1\pm\frac{1}{2}\sqrt{22}$

75.截圓錐爲雙曲綫法　截正圓錐的一平面與底面的傾角,若大於圓錐的底角,必截圓錐的上下兩面,並且這兩個截面的曲綫,如下圖中B′A′D′及BAD,就是雙曲綫的兩枝,證明如下:

仿§63的作法,取 C 爲原點, AA′ 爲 x 軸。

$$\overline{NP}^2 = FN \times NG, \qquad (1)$$

$$\frac{FN}{KC} = \frac{AN}{AC}, \quad \frac{NG}{HC} = \frac{A'N}{CA'}。$$



上兩式代入(1)式,得

$$\overline{NP}^2 = \frac{AN \times A'N}{AC \times CA'} \times KC \times HC。\quad (2)$$

設 $AC = CA' = a$, $KC \times HC = b^2$。

$NP = y$, $CN = x$,

則　$AN = x + a$, $A'N = x - a$。

代入(2)式,

$$y^2 = \frac{(x+a)(x-a)}{a^2} \times b^2 = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2},$$

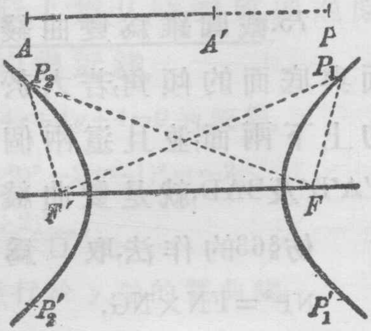
即　$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1。$$

故截綫B′A′D′及BAD是雙曲綫。

76.雙曲綫畫法　已知兩焦點及主軸,可以畫出雙曲綫,仿橢圓畫法,分爲兩種:

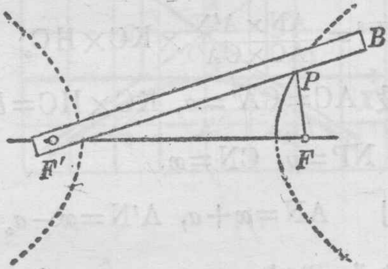
(a)幾何畫法　設綫段 AA′ 等於主軸的長

度 $2a$,F 及 F′ 爲兩焦點。把 AA′ 任意引長到 P,以 F,F′ 爲圓心,AP,A′P 爲半徑,畫圓弧,得四交點, P_1,P_1',P_2,P_2'。照此畫法所得交點都是雙曲



綫上的點。因爲兩個焦點半徑的差恆等於 $2a$。

(b) 機械畫法　取直尺的一端固定於焦點 F′,可以繞 F′ 自由旋轉。再取一細線比直尺短,其差等於 $2a$,一端固定於焦點 F,他端固定於直尺一端



B, 當直尺繞 F′ 旋轉時,取鉛筆尖 P 引這線緊隨直尺移動,便畫成一枝雙曲綫。同法,直尺繞 F 點旋轉,又畫成另一枝雙曲綫。因直尺旋轉時 F′P 及 FP的差恆等於 $2a$。

習題二十八

1. 從下列兩方程式各求 a^2,b^2,ae,$\frac{b^2}{a}$,$\frac{a}{e}$的值:

(a) $5x^2-10y^2-17x-35y=0$。

(b) $7(x-2)^2-3(y-3)^2=39$。

2. 求作下列方程式圖解:

(a) $x^2-y^2-6x-6y=0$。

(b) $3x^2-4y^2-6x-8y+7=0$。

(c) $3x^2-4y^2-24x+16y-52=0$。

3. 設一直綫平行於雙曲綫的幾近綫,證明這直綫與雙曲綫相交只能有一實點。

4. 求作正雙曲綫,已知曲綫上一點。

第六章

切綫　法綫　弦

77. <u>錐綫與直綫的交點</u>　直綫與圓相交的條件,已在第四章裏講過,現在再研究直綫與三種錐綫交點的限制。

定理　一直綫與同平面上一錐綫相交,至多有兩實點。

證　設直綫爲　$y=mx+k,$　(1)

錐綫爲抛綫　$y^2=2px$。　(2)

聯立解兩方程式,可以求出交點的坐標。從(1),(2)兩式消去 y,得

$$m^2x^2+2(mk-p)x+k^2=0。$$

這式的根,就是交點的横坐標,代入(1)式,得對應的縱坐標。若 $m=0$,則(1)式的直綫必平行於 x 軸,就是平行於抛綫主軸,只能交於一點。若 $m\neq0$,則(3)式的兩根是不等或相等的實數,或是虛數,隨着

$$p-2nk>0,=0,<0 \qquad (3)$$

而定。所以直綫與抛綫的交點,最多不得過兩實

點,有時切於一點,有時絕不相遇。

設錐綫為橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

與(1)式聯立解 x,得

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mkx+a^2(k^2-b^2)=0。\tag{4}$$

這式的兩根代入(1)式後,得到的對應值,就是交點的坐標,不過兩根隨着

$$a^2m^2+b^2-k^2>0,=0,<0,\tag{5}$$

得到兩個不同實數,或兩個相等實數,或兩個虛數。因此直綫與橢圓相交於不同兩點,或合同兩點,——就是一點,或兩虛點——就是不相交。

設錐綫為雙曲綫 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,

求曲綫與直綫的交點坐標,只須把 $-b^2$ 代(4)式裏的 b^2,得

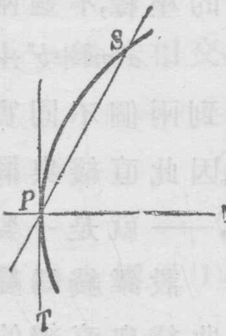
$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mkx+a^2(k^2+b^2)=0,$$

除 x^2 的係數等於 0 外,上式為二次式。若 $a^2m^2-b^2=0$,則(2)式的直綫平行於幾近綫;$k\neq 0$ 時,交雙曲綫於一點;$k=0$ 時,那直綫就是一個幾近綫,當然不能與曲綫相交。若 $a^2m^2-b^2\neq 0$,則直綫與雙曲綫相交於兩點,或一點,或不相交,全憑下面的情形來決定:

$$k^2-a^2m^2+b^2>0,=0,<0。\qquad (6)$$

推論　若 $p-2mk=0$, 或 $a^2m^2+b^2-k^2=0$, 或 $k^2-a^2m^2+b^2=0$, 則(1)式的直綫,就是拋綫或橢圓或雙曲綫的切綫。

78. 曲綫的切綫及法綫　一直綫截曲綫於兩實點,如右圖中PS綫,叫做割綫(Secant)。如果S點沿曲綫向P點移動,就是PS繞P點旋轉,使S漸漸趨近於P,到極限時,S與P合爲一點,PS綫到了圖中PT的位置,就叫做切於曲綫P點的切綫。

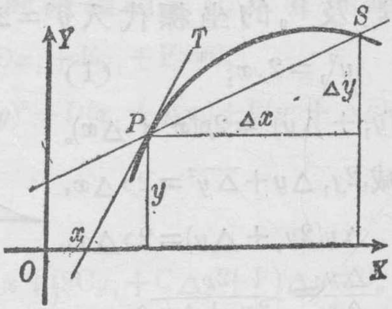


過切點P垂直於切綫PT的直綫PN,叫做P點的法綫。

79. 切綫的斜度求法　切綫既然是割綫的極限,則割綫斜度的極限,就是切綫斜度。

設 $P(x,y)$, $S(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 爲曲綫上兩點,其中 Δx 及 Δy 表示S點比P點所增減的坐標量。求割綫PS的斜度,通常用公式(IV),得 $m=\dfrac{y+\Delta y-y}{x+\Delta x-x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。當S趨近於P, Δx 及 Δy 就各趨近於0,到

極限時,S 與 P 相合,得 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{0}$。這不定式(Indeterminate form)的求值法,在本科範圍以外,於是從另一方



面着想,以救濟不定式 $\frac{0}{0}$ 求值的窮。因為 S 及 P 都在一個曲綫上,這兩點的坐標量,必適合於他的方程式,順次代入後,兩式相減,可以求出割綫 PS的斜度 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$。再從這斜度等式裏,令 Δx 及 Δy 各等於 0,便是切綫 PT 的斜度。

80.<u>錐綫的切綫方程式一</u> 已知錐綫方程式及切綫的切點,應用上節切綫斜度求法及公式(VII),便能求出切綫方程式。

定理一 已知切點為 $P_1(x_1,y_1)$,拋綫 $y^2=2px$ 的切綫方程式是

$$y_1y=p(x+x_1); \qquad \text{(XXIII)}$$

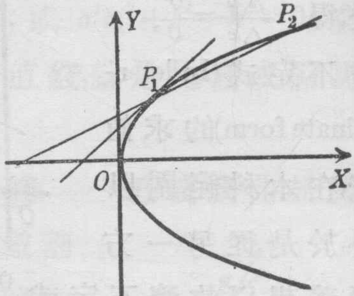
橢圓及雙曲綫 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ 的切綫方程式是

$$\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}=1。 \qquad \text{(XXIV)}$$

證 設 $P_2(x_1+\Delta x_1,y_1+\Delta y)$ 為拋綫上一點。

以P_1及P_2的坐標代入$y^2=2px$,得

$$y^2_1=2px_1 \qquad (1)$$



及$(y_1+\Delta y)^2=2p(x_1+\Delta x)$。

相減,$2y_1\Delta y+\overline{\Delta y}^2=2p\Delta x$,

即　$\Delta y(2y_1+\Delta y)=2p\Delta x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2p}{2y_1+\Delta y}。$$

這是割綫 P_1P_2 的斜度。

如果P_2趨近於P_1,則Δx及Δy各趨近於0,得$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的極限。所以

切綫 P_1T 的斜度$m=\frac{2p}{2y_1+0}=\frac{p}{y_1}$。

由公式(VII),得　$y-y_1=\frac{p}{y_1}(x-x_1)$,

即　$y_1y-y_1{}^2=px-px_1$。

以(1)式代入,再整理,得

$$y_1y=p(x+x_1)。$$

其餘兩種切綫方程式,學者可以用同法求得。

定理二　切於錐綫$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$上一點$P_1(x_1,y_1)$的切綫方程式是

$$Ax_1x+Cy_1y+D\frac{x+x_1}{2}+E\frac{y+y_1}{2}+F=0。\text{(XXV)}$$

證　設$P_2(x_1+\Delta x,y_1+\Delta y)$爲鄰接於$P_1$的曲

綫上一點。把P_1及P_2的坐標順次代入原方程式,

$$Ax_1^2+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0,$$

$$A(x_1+\Delta x)^2+C(y_1+\Delta y)^2+D(x_1+\Delta x)+E(y_1+\Delta y)+F=0。$$

兩式相減,得

$$(2Ax_1+A\Delta x+D)\Delta x+(2Cy_1+C\Delta y+E)\Delta y=0。$$

由是得割綫P_1P_2的斜度,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2Ax_1+A\Delta x+D}{2Cy_1+C\Delta y+E}。$$

如果令Δx趨近於0,Δy也隨着趨近於0,就得切於P_1點的切綫斜度

$$m=-\frac{2Ax_1+D}{2Cy_1+E}。$$

由公式(11),得 $$y-y_1=-\frac{2Ax_1+D}{2Cy_1+E}(x-x_1),$$

$$2Ax_1x+2Cy_1y+Dx+Ey=2Ax^2{}_1+2Cy^2{}_1+Dx_1+Ey_1。$$

因 $$2Ax^2{}_1+2Cy^2{}_1=-2Dx_1-2Ey_1-2F,$$

故 $$2Ax_1x+2Cy_1y+Dx+Ey=-Dx_1-Ey_1-2F,$$

移項再以2除,得

$$Ax_1x+Cy_1y+D\frac{x+x_1}{2}+E\frac{y+y_1}{2}+F=0。$$

由是從切點$P_1(x_1,y_1)$求錐綫的切綫,得通法如下:

把x_1x,y_1y,$\frac{1}{2}(x+x_1)$及$\frac{1}{2}(y+y_1)$代錐綫方程式

中的x^2, y^2, x及y,原式便變成切綫方程式。

推論　切點爲$P_1(x_1,y_1)$,抛綫$(y-k)^2=2p(x-h)$的切綫方程式是

$$(y_1-k)(y-k)=p(x+x_1-2h),$$

橢圓及雙曲綫$\frac{(x-h)^2}{a^2}\pm\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$的切綫方程式是

$$\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}\pm\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1。$$

〔注意〕公式(XXV)是已知切點求錐綫上切綫的通式,其餘從範式求切綫,都可由此導出。

〔例題〕求切於曲綫$x^2-3y^2-5x+y+28=0$上一點(1,3)的切綫方程式。

〔解〕依公式(XXV),化原式爲

$$x-9y-5\frac{x+1}{2}+\frac{y+3}{2}+28=0,$$

化簡,得所求切綫方程式,

$$3x+17y=54。$$

81.錐綫的切綫方程式二　已知錐綫方程式及切綫斜度,有兩種方法,可以求出切綫方程式。

定理　以m爲切綫斜度,抛綫$y^2=2px$的切綫方程式是

$$y=mx+\frac{p}{2m};\qquad\text{(XXVI)}$$

橢圓及雙曲綫 $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ 的切綫方程式是

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2\pm b^2}。\quad\text{(XXVII)}$$

證　第一法　假定切綫爲 $y=mx+k$, (1)

代入拋綫方程式,求他的等根,須令判別式等於0,解出 k 值;或直接從§77裏(3)式 $p-2mk=0$,都得

$$k=\frac{p}{2m}。$$

代入(1)式,　$y=mx+\frac{p}{2m}$。

第二法　假定 $P_1(x_1,y_1)$ 爲切點,則切於這點的切綫是　$y_1y=p(x+x_1)$。　(1)

他的斜度 $\frac{p}{y_1}$ 當與已知斜度相等.

$$\therefore\ m=\frac{p}{y_1}。\quad(2)$$

因爲 $P_1(x_1,y_1)$ 是拋綫上一點,所以

$$y_1{}^2=2px_1。\quad(3)$$

聯立解(2),(3)兩式,得

$$x_1=\frac{p}{2m^2},\qquad y_1=\frac{p}{m}.$$

代入(1)式,　$\frac{p}{m}y=p\left(x+\frac{p}{2m^2}\right)$,

即　$y=mx+\frac{p}{2m}$。

用同法可以求出橢圓及雙曲綫的切綫方程式,學者分別求之,

視察前面三種切綫方程式,知道拋綫只有一切綫,椭圓有兩切綫,因斜度相同,必互相平行;雙曲綫的切綫或有或無,隨 m 與 $\frac{b}{a}$ 的大小關係決定。若 $|m|>\frac{b}{a}$,有兩切綫;若 $|m|<\frac{b}{a}$,便沒有切綫;若 $m=\pm\frac{b}{a}$, 只有一切綫,不過切點在無窮遠處,實在就是幾近綫。

推論　設 m 爲切綫斜度,則拋綫 $(y-k)^2=2p(x-h)$ 的切綫方程式是 $y-k=m(x-h)+\frac{p}{2m}$, 椭圓及雙曲綫 $\frac{(x-h)^2}{a^2}\pm\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ 的切綫方程式是

$$y-k=m(x-h)\pm\sqrt{a^2m^2\pm b^2}。$$

〔注意〕 雙曲綫與椭圓的範式,只有 b^2 前面的符號不同,所以兩種切綫方程式,也是只有這一項的符號相反。

〔例題〕 求切於雙曲綫 $x^2-2y^2+x-5y-3=0$, 且垂直於直綫 $x-y=1$ 的切綫方程式。

〔解〕 化直綫方程式爲

$$y=x-1,$$

可知所求切綫的斜度是 -1。

化雙曲綫方程式爲

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{8}}-\frac{\left(y+\frac{5}{4}\right)^2}{\frac{1}{16}}=1.$$

由本節推論中公式,得 $y+\frac{5}{4}=-\left(x+\frac{1}{2}\right)\pm\sqrt{\frac{1}{8}(-1)^2-\frac{1}{16}}$。

整理上式,得 $x+y=\pm\frac{1}{4}-\frac{7}{4}$。

故 $x+y+2=0$ 及 $2x+2y+3=0$,

是所求切綫方程式。

82.<u>錐綫的切綫方程式三</u> 從錐綫外一點到錐綫的切綫,可以仿照前節中第二法求得。不過公式太繁,茲述通法於下:

設 $P_1(x_1,y_1)$ 爲錐綫 $f(x,y)=0$ 外一點。

假定 $P_2(x_2,y_2)$ 爲切點,則切於這點的切綫方程式是

$$f'(x,y,x_2,y_2)=0。\tag{1}$$

這切綫必經過 $P_1(x_1,y_1)$,所以

$$f'(x_1,y_1,x_2,y_2)=0。\tag{2}$$

因爲切點在錐綫上,所以

$$f(x_2,y_2)=0。\tag{3}$$

聯立(2),(3)兩式解 x_2,y_2,把所得的值代入(1)式,便是所求切綫方程式。

〔例題〕 求經過點(4,3)到拋綫 $y^2=2x$ 的切綫方程

式。

〔解〕 假定切點是$P_1(x_1,y_1)$,則切綫方程式是

$y_1y=x+x_1$。 (1)

因爲(4,3)在這切綫上,所以 $3y_1=4+x_1$。 (2)

又因$P_1(x_1,y_1)$在拋綫上,所以 $y_1^2=2x_1$。 (3)

聯立解(2),(3)兩式,得 $x_1=2$或8, $y_1=2$或4。

可知拋綫上有兩切點(2,2),(8,4),代入(1)式,得兩切綫方程式:

$$x-2y+2=0,\qquad x-4y+8=0。$$

習題二十九

求下列1,2兩題的曲綫斜度:

1. 已知切點在(x_1,y_1):

(a) $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。 (b) $(y-k)^2=2p(x-h)$。

(c) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$。 (d) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$。

2. (a) $y^2+3x+2y=0$, 切點在(−1,1)。

(b) $x^2+3y^2-2x-6y-9=0$, 切點在(0,3).

(c) $x^2-3y^2-5x+y+28=0$, 切點在(1,3)。

求下列錐綫的切綫方程式:

3. (a) $(x+1)^2=2(y-3)$, 切點在(1,5)。

(b) $y^2-6x+5y+1=0$,　垂直於 $x+3y=5$。

(c) $2y^2-3x+4y+3=0$,　經過 $(11,4)$。

4. (a) $4x^2+y^2=8$, 切點在 $(1,-2)$。

(b) $x^2+4y^2+4x+6y=0$, 平行於 $2x+3y=1$。

(c) $10x^2+2y^2=7$, 經過 $(-2,-1)$。

5. (a) $x^2-3y^2-5x+y+28=0$,　切點在 $(1,3)$。

(b) $3x^2-2y^2+5=0$,　垂直於 $4x+2y=3$。

(c) $x^2-y^2-2x-2y+4=0$, 經過 $(0,1)$。

6. 已知拋綫的頂點是 $(2,1)$, 主軸平行於 x 軸,切於直綫 $y=x+1$, 求拋綫方程式。

7. 證明從有心錐綫的切綫上一點到兩焦點距離的乘積是常數。

8. 證明拋綫的正焦點弦兩端的切綫是互爲垂直。

9. 前題的正焦點弦改爲過焦點的任意弦,結果怎樣?

10. 錐綫正焦點弦兩端的切綫,證明交點在準綫上。

11. 橢圓及雙曲綫的焦點若兩兩相合,則切於兩曲綫交點的切綫,是互爲垂直。

12. 設錐綫上兩切綫是互爲垂直,求交點的軌跡。

83. 錐綫的法綫方程式　經過錐綫上一點

的法綫,是與切於這點的切綫垂直,所以法綫的斜度,就是切綫斜度的負逆數。由此可以推出法綫方程式。

定理　通過拋綫$y^2=2px$上一點$P_1(x_1,y_1)$的法綫方程式是

$$py=-y_1(x-x_1-p)。\qquad \text{(XXVIII)}$$

通過橢圓及雙曲綫$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$上一點$P_1(x_1,y_1)$的法綫方程式是

$$\frac{a^2x}{(a^2\mp b^2)x_1}\mp\frac{b^2y}{(a^2\mp b^2)y_1}=1。\qquad \text{(XXIX)}$$

證　因爲P_1點的切綫斜度是$\frac{p}{y_1}$,所以經過這點的法綫斜度是$-\frac{y_1}{p}$。由公式(VII),得

$$y-y_1=-\frac{y_1}{p}(x-x_1),$$

即
$$py=-y_1(x-x_1-p)。$$

橢圓及雙曲綫的法綫方程式,都可仿此證明。

〔例題〕　求$x^2+2y^2=18$上一點$(4,-1)$的法綫方程式。

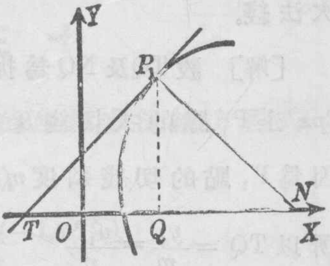
〔解〕　化原式爲$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$,

便與橢圓範式同形。故經過$(4,-1)$的法綫方程式是

$$\frac{18x}{4(18-9)}-\frac{9y}{-(18-9)}=1,$$

即 $$x+2y=2。$$

84.<u>錐綫的次切綫和次法綫</u> 設經過錐綫上一點P_1的切綫和法綫,交x軸於T和N兩點。自P_1點到T點或N點的距離,就是綫段P_1T, P_1N, 通常叫做P_1點的切綫,法綫的長。P_1T在x軸上的射影是TQ叫做次切綫(Subtangent),P_1N在x軸上的射影是NQ,叫做次法綫(Subnormal)。



定理 以m爲過錐綫上一點$P_1(x_1, y_1)$的切綫斜度,這點的次切綫和次法綫的長等於$\frac{y_1}{m}$和my_1。

證 如上圖,在直角三角形TQP_1內,

$$\tan QTP_1=\frac{QP_1}{TQ}, \text{即 } m=\frac{y_1}{TQ}.$$

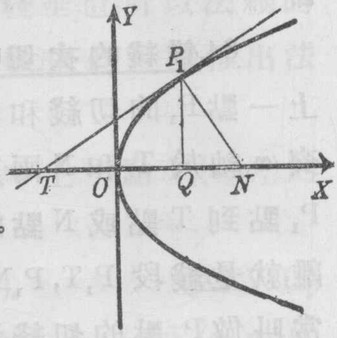
$$\therefore \text{次切綫TQ的長}=\frac{y_1}{m}.$$

在直角三角形NQP_1內,$\tan QNP_1=\frac{QP_1}{NQ}$。

但NP_1的斜度是$-\frac{1}{m}$,故$-\frac{1}{m}=\frac{y_1}{NQ}$,即$NQ=-my_1$。

$$\therefore \text{次法綫QN的長}=my_1.$$

〔例題〕 設切點爲$P_1(x_1,y_1)$，求抛綫、橢圓、雙曲綫的次切綫和次法綫。



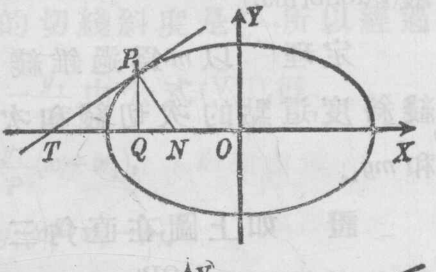
〔解〕 設TQ及NQ爲抛綫$y^2=2px$上P_1點的次切綫及次法綫。

因爲P_1點的切綫斜度$m=\dfrac{p}{y_1}$，

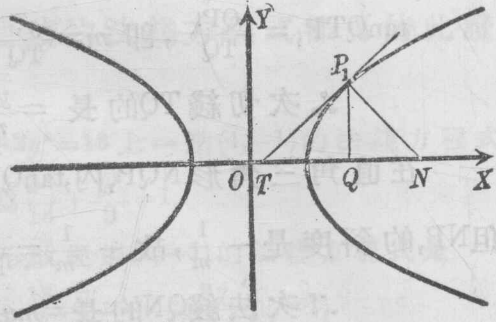
所以$TQ=\dfrac{y_1}{m}=\dfrac{y_1^2}{p}$

$=\dfrac{2px_1}{p}=2x_1$。　　$QN=my_1=p$。

可知抛綫的次切綫，被頂點平分，次法綫等於正焦點弦的一半。



設TQ及NQ爲橢圓及雙曲綫$\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1$上$P_1$點的次切綫及次法綫。



因爲這兩種錐綫上P_1點的切綫斜度$m=\mp\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$，

所以次切綫 TQ

$=\dfrac{y_1}{m}=\mp\dfrac{a^2y_1^2}{b^2x_1}$

$$=\frac{b^2(x^2-a^2)}{b^2x_1}=\frac{x^2-a^2}{x_1},$$

次法綫 $QN=my_1=$ ⊐ b^2x

習 題 三 十

1. 已知下列錐綫上一點的坐標,求法綫方程式:

(a) $y^2-3x-y+1=0$, $(1,2)$。

(b) $4x^2+y^2+13x+b=0$, $(-1,\sqrt{3})$。

(c) $2x^2-y^2+4=0$, $(4,6)$。

2. 已知下列錐綫及切綫方程式,求法綫方程式:

(a) $3y^2-x+7y+5=0$, $192x-144y=335$。

(b) $x^2+4y^2=8$, $x-2y-4=0$。

(c) $x^2-2y^2+x-5y-3=0$, $x+y+2=0$。

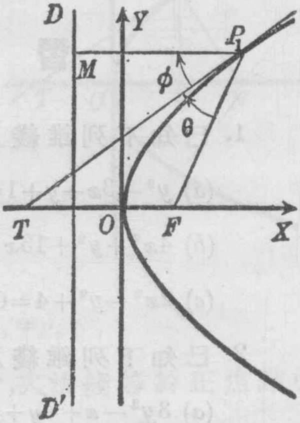
3. 求前兩題裏各錐綫的次切綫及次法綫。

4. 拋綫 $y^2=2px$ 上那一點的法綫可以等於次切綫長的二倍?等於次切綫及次法綫的差?

85.錐綫的切綫性質　定理一　拋綫的切綫平分焦點半徑與過切點平行於主軸的直綫所成的角。

證　如下圖,設 $P_1(x_1,y_1)$ 爲拋綫 $y^2=2px$ 上切綫 P_1T 的切點,$F\left(\frac{1}{2}p,0\right)$ 爲焦點,FP_1 爲焦點半

徑，P_1M 爲過切點 P_1 平行於拋綫軸——就是 x 軸——的直綫，截準綫 DD' 於 M，與 FP_1 成 FP_1M 角。



切綫 P_1T 的方程式是

$$y_1y=p(x+x_1),$$

焦點半徑 FP_1 的方程式是

$$y=-\frac{y_1}{\frac{1}{2}p-x_1}\left(x-\frac{1}{2}p\right)。$$

這兩綫的斜度是 $\frac{p}{y_1}$ 及

$$-\frac{y_1}{\frac{1}{2}p-x_1},$$

代入兩直綫的交角公式，得

$$\tan\theta=\frac{\frac{p}{y_1}+\frac{y_1}{\frac{1}{2}p-x_1}}{1-\frac{py_1}{y_1(\frac{1}{2}p-x_1)}}=\frac{p^2-2px_1+2y_1^2}{py_1-2x_1y_1-2py_1}。$$

P_1 是拋綫上的點，以 $y_1^2=2px_1$ 代入上式，得

$$\tan\theta=-\frac{p^2+2px_1}{py_1+2x_1y_1}=-\frac{p}{y_1}。$$

MP_1 與 x 軸異向而平行，斜度是 0。由是得

$$\tan\phi=\frac{0-\frac{p}{y_1}}{1+0\times\frac{p}{y_1}}=-\frac{p}{y_1}。$$

$$\therefore \tan\theta=\tan\phi。$$

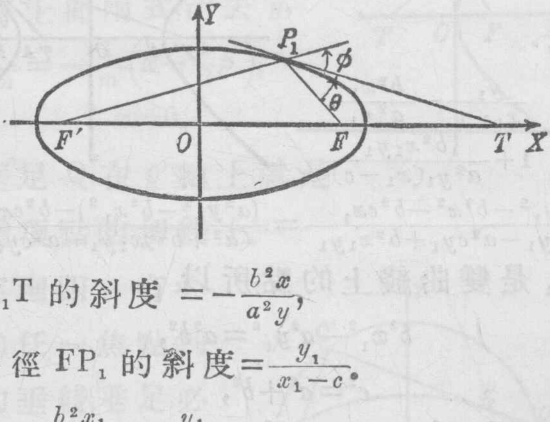
因爲 θ 及 ϕ 各小於 π，所以 $\theta=\phi$，就是切綫 TP_1

平分FP_1M角。

定理二 橢圓或雙曲綫的切綫,平分兩焦點半徑的外角或內角。

證 設$P_1(x_1,y_1)$爲橢圓或雙曲綫$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$上切綫 P_1T 的切點。

橢圓



切綫 P_1T 的斜度 $=-\frac{b^2x}{a^2y}$,

焦點半徑 FP_1 的斜度$=\frac{y_1}{x_1-c}$。

$$\tan\theta=\frac{-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}-\frac{y_1}{x_1-c}}{1-\frac{b^2x_1y_1}{a^2y_1(x_1-c)}}=\frac{-b^2x_1{}^2+b^2cx_1-a^2y^2}{a^2x_1y_1-a^2cy_1-b^2x_1y_1}$$

$$=\frac{b^2cx_1-(b^2x_1{}^2+a^2y_1{}^2)}{(a^2-b^2)x_1y_1-a^2cy_1}。$$

因爲P_1是橢圓上的點,所以

$$b^2x_1{}^2+a^2y_1{}^2=a^2b^2。$$

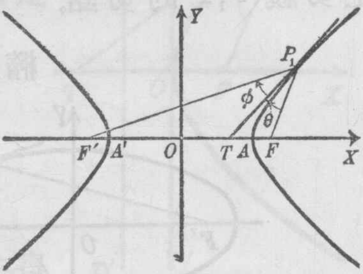
又 $$c^2=a^2-b^2,$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{b^2cx_1 - a^2b^2}{c^2x_1y_1 - a^2cy_1} = \frac{b^2}{cy_1}.$$

用同法求得 $\tan\phi = -\dfrac{b^2}{cy_1}$。

$$\therefore \tan\theta = \tan(-\phi)。$$

雙曲綫



切綫 P_1T 的斜度 $= \dfrac{b^2x}{a^2y_1}$,

焦點半徑 FP_1 的斜度

$= \dfrac{y_1}{x_1 - c}$。

$$\tan\theta = \frac{\dfrac{y_1}{x_1-c} - \dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}}{1 + \dfrac{b^2x_1y_1}{a^2y_1(x_1-c)}}$$

$$= \frac{a^2y_1{}^2 - b^2x^2 - b^2cx_1}{a^2x_1y_1 - a^2cy_1 + b^2x_1y_1} = \frac{(a^2y_1{}^2 - b^2x_1{}^2) - b^2cx_1}{(a^2+b^2)x_1y_1 - a^2cy_1}.$$

因為 P_1 是雙曲綫上的點,所以

$$b^2x_1{}^2 - a^2y_1{}^2 = a^2b^2,$$

又 $$c^2 = a^2 + b^2,$$

$$\tan\theta = \frac{a^2b^2 - b^2cx_1}{c^2x_1y_1 - a^2cy_1} = -\frac{b^2}{cy_1}.$$

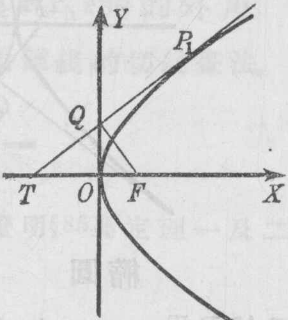
用同法求得 $\tan\phi = \dfrac{b^2}{cy}$。

$$\therefore \tan(-\theta) = \tan\phi。$$

因 θ 及 ϕ 都小於 π,故兩角的絕對值相等,就是切綫 P_1T 在雙曲綫上平分 $F'P_1F$ 角,在橢圓上平分他的外角。

定理三　從拋綫的焦點到切綫的垂綫,垂足必在項點的切綫上。

證　如圖,FQ是從拋綫$y^2=2px$的焦點F到切綫P_1T的垂綫,Q是垂足。



切綫P_1T: $y=mx+\dfrac{p}{2m}$。

垂綫FQ: $y=-\dfrac{1}{m}\left(x-\dfrac{1}{2}p\right)$。

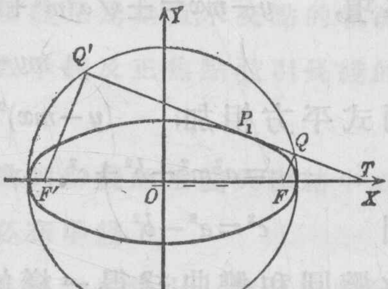
聯立解上面兩式,消去y,

$$mx+\frac{p}{2m}=-\frac{1}{m}\left(x-\frac{1}{2}p\right)。$$

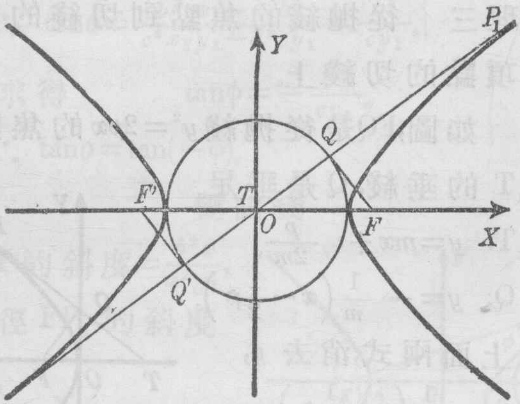
化簡,　$x=0$。

可知垂足Q在y軸上,就是在拋綫項點的切綫上。

定理四　有心錐綫的任一焦點到切綫的垂綫,垂足必在橢圓長軸或雙曲綫主軸爲直徑的圓周上。



證　設FQ及$F'Q'$是從有心錐綫$\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1$的焦點F及F′到切綫$P_1T$的垂綫,Q及Q′是垂足。



橢圓　　　　　　雙曲綫

切綫 P_1T: $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$, $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$,

垂綫 FQ: $y=-\dfrac{1}{m}(x-c)$。

移項, $y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$, $y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$,

$$my+x=c。$$

兩式平方相加, $(y-mx)^2+(my+x)^2$

$=a^2m^2+b^2+c^2$。　　$=a^2m^2-b^2+c^2$。

因 $c^2=a^2-b^2$。　　$c^2=a^2+b^2$。

故橢圓和雙曲綫得一樣的結果:

$$(y-mx)^2+(my+x)^2=a^2m^2+a^2,$$

即 $(1+m^2)y^2+(1+m^2)x^2=a^2(1+m^2)$。

$$\therefore x^2+y^2=a^2。$$

由此可知切綫 P_1T 與垂綫 FQ 的交點 Q, 在半徑爲 a 的一個圓周上。

推論 P_1 點的法綫平分拋綫裏 FP_1M 角的補角,橢圓裏 $F'P_1F$ 角,雙曲綫裏 $F'P_1F$ 角的外角。

〔注意〕 從本節定理可以推出錐綫的切綫畫法。

習題三十一

1. 不用兩直綫的交角公式,證明§85裏定理一及二。

2. 證明§85裏推論。

3. 證明拋綫上互相垂直兩切綫的交點必在準綫上。

4. 設有心錐綫上兩切綫互爲垂直,求交點的軌跡。

5. 拋綫上任一切綫截準綫及正焦點弦引長綫的點,距焦點等遠。

6. 從有心錐綫的焦點到切綫的垂綫與聯結中心及切點的直綫相交的點,必在準綫上。

7. 從有心錐綫的兩焦點到切綫上一點的兩距離相乘積是常數。

8. 從一點 $P_1(x_1, y_1)$ 到錐綫作兩切綫,求過兩切點的直綫方程式。

9. 若雙曲綫的一切綫截兩個幾近綫於T_1及T_2兩點,證明切點是綫段T_1T_2的中點。

10. 若一直綫截雙曲綫於P_1及P_2兩點,又截兩幾近綫於Q_1及Q_2兩點,證明兩綫段P_1Q及P_2Q相等。

11. 雙曲綫的一切綫與兩幾近綫所成三角形的面積是常數。

12. 已知拋綫的焦點及準綫或頂點的切綫,求作拋綫。

13. 已知拋綫外一點與焦點及準綫,求作切綫。

14. 從有心錐綫上或外一點求作錐綫的切綫。

86. 錐綫的直徑　圓的直徑若與許多平行弦正交必平分各弦,換句話說,圓內一組平行弦中點的軌跡是直徑。把這意義推廣到錐綫,除去正交的限制,得定義如下:

錐綫的一族平行弦中點軌跡叫做直徑。

定理　設m為平行弦的斜度,

則拋綫$y^2=2px$的直徑是

$$y=\frac{p}{m};\qquad\text{(XXX)}$$

橢圓及雙曲綫　$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ 的直徑是

$$y=\mp\frac{b^2}{a^2m}x。\qquad\text{(XXXI)}$$

證 設拋綫的平行弦族方程式是

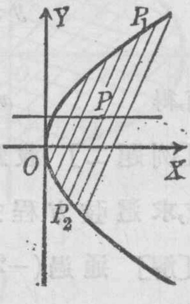
$$y=mx+k, \tag{1}$$

與拋綫方程式$y^2=2px$,聯立消去y,得

$$m^2x^2+(2mk-2p)x+k^2=0。$$

這二次式的根,是弦與拋綫交點的橫坐標。假定兩根是x_1,x_2,依二次式根與係數的關係,得

$$x_1+x_2=-\frac{2mk-2p}{m^2}。 \tag{2}$$



設$P(x,y)$爲平行弦族中任一弦的中點,由公式(III),得

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)。$$

以(2)式代入上式, $x=-\dfrac{mk-p}{m^2}$。

解k, $$k=\frac{p-m^2x}{m}。$$

代入(1)式, $$y=mx+\frac{p-m^2x}{m},$$

即 $$y=\frac{p}{m}。$$

學者可用同法證明有心錐綫的直徑定理。

推論 拋綫的直徑是平行於主軸的直綫,橢圓及雙曲綫的直徑是通過中心的直綫。

〔例題一〕 橢圓 $x^2+2y^2+7x+3y-5=0$ 的一族弦平行於直綫$2x+y=3$,求直徑方程式。

〔解〕 化橢圓方程式為

$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{147}{8}}+\frac{\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{147}{16}}=1。$$

因平行弦族的斜度 $m=-2$,

故知直徑方程式是

$$y+\frac{3}{4}=-\frac{\frac{147}{16}}{\frac{147}{8}(-2)}(x+2),$$

化簡,得 $$x-8y+1=0。$$

〔例題二〕 設點$(-2,3)$平分拋綫 $y^2+4x-y+1=0$ 的一弦,求這弦方程式。

〔解〕 通過$(-2,3)$的直綫方程式是

$$y-3=m(x+2), \tag{1}$$

即 $$x=\frac{y-3-2m}{m}。$$

代入原方程式, $$y^2+4\left(\frac{y-3-2m}{m}\right)-y+1=0,$$

化簡, $$my^2+(4-m)y-12-7m=0。$$

這二次式的兩根 y_1 及 y_2,就是(1)式的直綫與拋綫交點的縱坐標。把那直綫當做拋綫的弦,平分於$(-2,3)$,由是

得 $$3=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=-\frac{1}{2}\left(\frac{4-m}{m}\right),$$

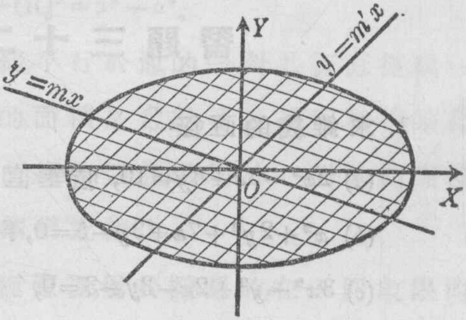
即 $$m=-\frac{4}{5}。$$

代入(1)式,得　$$y-3=-\frac{4}{5}(x+2),$$

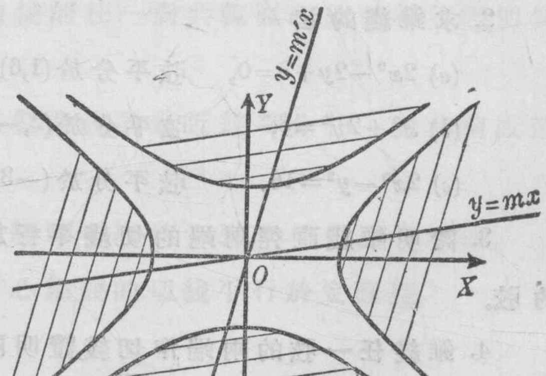
即　$$4x+5y=7,$$

就是所求弦方程式。

87.<u>有心錐綫的共軛直徑</u>　照錐綫直徑的定義,平行於橢圓或雙曲綫直徑的弦族,他的中點軌跡也叫做直徑。兩直徑有這樣關係的,叫做共軛直徑。



設 m 及 m' 爲前後兩平行弦族的斜度,由上節公式,知道兩個共軛直徑的斜度關係,在橢圓裏,



$$m'=-\frac{b^2}{a^2m},\quad 即\ m'm=-\frac{b^2}{a^2}。$$

在雙曲綫裏， $m'=\frac{b^2}{a^2m}$, 即 $m'm=\frac{b^2}{a^2}$。

可知有心錐綫的直徑是他的共軛直徑平分一個弦族裏的一弦。

習題三十二

1. 求錐綫的直徑:

(a) $2x^2-3x+6y=10$, 弦垂直於直綫 $3x+2y=10$。

(b) $x^2+2y^2+7x+3y-5=0$,平行弦族的斜度是-2。

(c) $3x^2-y^2+2x-3y-3=0$, 弦平行於共軛軸。

(d) $3x^2-y^2-x-2y=0$, 平行弦族是 $2x+3y=k$。

2. 求錐綫的弦:

(a) $2x^2-2y+3=0$, 弦平分於(1,6)。

(b) $x^2+2y^2=8$, 弦平分於(2,−1)。

(c) $2x^2-y^2=16$, 弦平分於(−3,1)。

3. 證明錐綫直徑兩端的切綫平行於這直徑平分的弦。

4. 錐綫任一弦的兩端作切綫,證明兩切綫交點必在平分這弦的直徑上。

5. 證明橢圓的長軸大於其他直徑。

6. 設$2a$及$2b$爲橢圓的長短軸，$2a_1$及$2b_1$爲一對共軛直徑，證明 $a^2{}_1+b^2{}_1=a^2+b^2$。

7. 設O爲雙曲線中心，他的一直徑截雙曲線於P，共軛直徑截共軛雙曲線於Q，證明

$$\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2=a^2-b^2。$$

8. 作橢圓的切線，平行於他的一對共軛直徑，成一平行四邊形，證明他的面積是常數，等於長短軸相乘積。

9. 一對共軛雙曲綫的切綫，若切於一對共軛直徑的兩端，必相交於一個幾近綫上。

10. 證明一對共軛直徑，屬於橢圓的，在不同象限內，屬於雙曲綫的，在同象限內。

11. 設雙曲綫的任一對共軛直徑總是相等，證明他是正雙曲綫。

12. 證明正雙曲綫的幾近綫平分任一對共軛直徑所夾的角。

13. 已知拋綫兩切綫的切點，求作焦點與準綫。

14. 求作有心錐綫的切綫平行於定直綫。

第七章

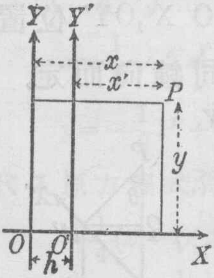
移軸法

88.移軸的目的 比較兩種錐綫範式,可知二次式的繁簡,完全由於坐標軸與錐綫相關的位置。如果要把繁式化簡,只有移動坐標軸。動點的坐標量,雖然因此改變,但是運動的條件,却未曾變動,所以移軸決不影響於曲綫的形狀。本章就是研究移軸的方法,以達到化繁式爲簡式的目的。

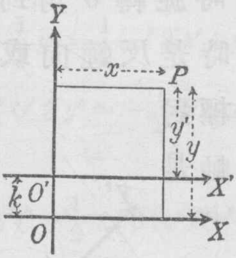
89.兩種移軸法 改變坐標軸位置的方法,叫做**移軸法**(Transformation of axes)。這種方法,可分兩種:(一)移動原點,新軸平行於舊軸,叫做**平行移軸法**(Translation of axes);(二)原點不動,兩軸同時旋轉若干度,叫做**旋轉移軸法**(Rotation of axes)。總之,只把坐標軸移動,並沒有改變曲綫的位置。

90.平行移軸法 設 x 軸不動,y 軸從OY平行移到O′Y′位置,令其間的距離 $OO'=h$,如圖一。設 y 軸不動,x 軸從OX平行移到 O′X′ 位置,令其

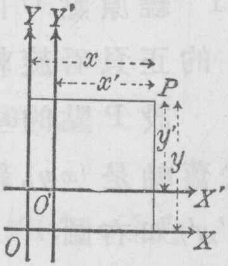
間的距離 $OO'=k$,如圖二。設兩軸都移動,從 OY, OX平行移到 $O'Y'$,$O'X'$ 位置,其間的兩距離是 h, 及 k,如圖三。$O'X'$,$O'Y'$ 及OX,OY 叫做新舊坐標軸,O' 及 O 叫新舊原點。h 及 k 是新原點對於舊



(圖 一)



(圖 二)



(圖 三)

軸的坐標量,他的正負隨 y 軸及 x 軸移動時向右或向左及向上或向下來決定。設平面上P點的坐標對於舊軸是 (x,y),新軸是 (x',y'),便得下面的關係式:

$$\left.\begin{aligned} x&=x'+h,\\ y&=y'+k。\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXXII)}$$

這叫做平行移軸公式。

〔例題〕 求曲綫 $7x^2+5y^2-28x+80y+172=0$ 的坐標軸平行移到新原點 $(2,-5)$ 的方程式。

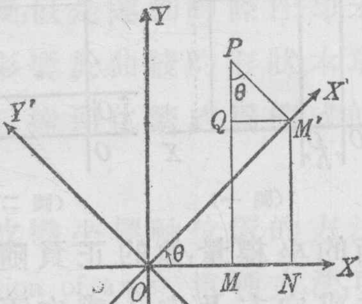
〔解〕 命 $x=x'+2$,　$y=y'-5$,代入原方程式,得

$$7(x'+2)^2+8(y'-5)^2-28(x'+2)+80(y'-5)+172=0.$$

展開,再化簡, $7x'^2+8y'^2-56=0,$

即 $\dfrac{x'^2}{8}+\dfrac{y'^2}{7}=1.$

91.旋轉移軸法　設橫縱兩坐標軸,從 OX, OY 繞原點 O 同時旋轉 θ 角,到 OX′,OY′ 位置。θ 的正負看旋轉時是反鐘向或同鐘向而定。



設 P 點的坐標對於舊軸是 (x,y),新軸是 (x',y')。如右圖,

$OM=x,\quad MP=y,$

$OM'=x',\quad M'P=y'$。

因爲 QPM′ 角的兩邊各垂直於 θ 角的兩邊,故 $\angle QPM'=\theta$。

由三角函數定義, $QM'=y'\sin\theta,\ QP=y'\cos\theta,$

$ON=x'\cos\theta,\ NM'=x'\sin\theta$。

但 $x=OM=ON-QM',\ y=MP=NM'+QP$。

所以 P 點的新舊坐標量有下面的關係:

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\theta-y'\sin\theta\\ y&=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{aligned}\right\}\qquad\text{(XXXIII)}$$

這兩式叫做旋轉移軸公式。

〔例題〕 求曲綫 $y^2+2\sqrt{3}\,xy-x^2-64=0$ 的坐標軸旋轉 $-\frac{1}{6}\pi$ 角的方程式。

〔解〕 $\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)=-\sin\frac{1}{6}\pi=-\frac{1}{2}$,

$\cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right)=\cos\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{3}$。

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x'+\frac{1}{2}y'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x'+y'),$$

$$y=-\frac{1}{2}x'+\frac{1}{2}\sqrt{3}\,y'=-\frac{1}{2}(x'-\sqrt{3}\,y')。$$

代入原方程式,得

$$-\frac{1}{4}(x'-\sqrt{3}\,y')^2-\frac{1}{2}\sqrt{3}(\sqrt{3}\,x'+y')(x'-\sqrt{3}\,y')-$$

$$\frac{1}{4}(\sqrt{3}\,x'+y')^2-64=0。$$

化簡, $8y'^2-8x'^2-256=0$,

即 $y'^2-x'^2=32$。

習題三十三

1. 求下列各點平行移軸後的新坐標量:

(a) (2,3),(5,−2),(0,0), O′(−2,5)。

(b) (3,4),(−1,−2),(−5,6), O′(3,4)。

2. 求下列各點旋轉移軸後的新坐標量:

(a) (3,5),(1,3),(4,−2), $\theta=\frac{1}{4}\pi$。

(b) (2,4),(3,−5),(−4,6), $\theta=-\frac{1}{6}\pi$。

3. 求下列各方程式平行移軸後的新方程式,並作圖:

(a) $y=mx+b$, $O'(0,b)$。

(b) $3x-2y=6$, $O'(2,3)$。

(c) $2x^2+2y^2+2x-4y+3=0$, $O'\left(-\frac{1}{2},1\right)$。

(d) $y^2-8x-6y-7=0$, $O'(3,-2)$。

(e) $7x^2+8y^2-25x+82y+172=0$, $O'(2,-5)$。

(f) $4x^2-y^2-8x+4y+4=0$, $O'(1,-2)$。

4. 求下列各方程式旋轉移軸後的新方程式,並作圖:

(a) $xy-7x+3y=45$, $\theta=\frac{1}{4}\pi$。

(b) $x^2+4xy+y^2=76$, $\theta=\frac{1}{4}\pi$。

(c) $x^2+2xy-y^2+2x-12=0$, $\theta=\frac{1}{4}\pi$。

(d) $29x^2-24xy+36y^2=180$, $\theta=\sin^{-1}\frac{3}{5}$。

(e) $9x^2-24xy+16y^2-6x+15y=0$, $\theta=\cos^{-1}\frac{3}{4}$。

(f) $59x^2-24xy+66y^2+72x-396y+444=0$, $\theta=\tan^{-1}\frac{3}{4}$。

92. 二次式化簡法一 移軸的目的是化簡二次式,不過要注意那一種二次式,應當用那一種移軸法。如果原方程式的軌跡,主軸平行於坐

標軸;換句話說,就是含兩變數 x 及 y 的二次式,沒有 xy 項的,可以用平行移軸法化簡。

(一)已知新原點　把新原點坐標量代公式(XXXII)中 h 與 k,再把這結果代入原方程式,解法已見§90裏例題。

(二)求出新原點　解法有兩種: (a)把原式配方,與錐綫範式二比較,便知道拋綫項點及有心錐綫中心的坐標,把他當做新原點的坐標;(b)把平行移軸公式直接代入原方程式,整理後,若兩個新坐標各有平方項,令一次項係數都等於零;若新坐標的平方只有一項,把這坐標的一次項係數及常數項各等於零,由此求出新原點的坐標,舉例說明如下:

〔例題一〕 化簡方程式 $12x^2-4y^2-12x-8y+11=0$。

〔解一〕 把原式配方,

$$12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-4(y+1)^2+12=0, \tag{1}$$

即 $$\frac{(y+1)^2}{3}-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{1}=1。$$

與雙曲綫範式比較,知道他的主軸平行於 y 軸,中心在 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$,把他當做新原點就是

$$h=\frac{1}{2},\quad k=-1。$$

$$\therefore\ x=x'+\frac{1}{2},\quad y=y'-1。$$

代入(1)式，　$12x'^2-4y'^2+12=0,$

即　$3x'^2-y'^2+3=0。$

〔解二〕 把 $x=x'+h,\ y=y'+k,$ 代入原式，

$$12(x'+h)^2-4(y'+k)^2-12(x'+h)-8(y'+k)+11=0。$$

展開再整理，得

$$12x'^2-4y'^2+12(2h-1)x'-8(k+1)y'+12h^2-8k^2-12h-8k+11=0。\quad(1)$$

令 x' 及 y' 的一次項係數等於0，就是

$$12(2h-1)=0,\quad 8(k+1)=0。$$

解得　$h=\frac{1}{2},\quad k=-1。$

代入(1)式，再以4除，也得

$$3x'^2-y'^2+3=0。$$

〔例題二〕 化簡 $y^2+6y-3x+6=0$。

〔解一〕 把原式配方，　$(y+3)^2=3(x+1)。\quad(1)$

與拋綫範式比較，知道主軸平行於 x 軸，頂點在 $(-1,-3)$。把 x 軸平行移到與主軸相合，使新原點在頂點，就是

$$h=-1,\quad k=-3。$$

$$\therefore\ x=x'-1,\quad y=y'-3。$$

代入(1)式，　$y'^2=3x'。$

〔解二〕 把 $x=x'+h,\quad y=y'+k$, 代入原式,

$$(y'+k)^2+6(y'+k)-3(x'+h)+6=0,$$

即 $$y'^2+2(k+3)y'-3x'+k^2+6k-3h+6=0。\quad (1)$$

令 y' 項的係數及常數項等於 0, 就是

$$2(k+3)=0,\quad k^2+6k-3h+6=0。$$

解得 $$h=-3,\quad h=-1。$$

代入(1)式, $$y'^2=3x'。$$

視察上面兩個例題的原式和新方程式(未約以前), 知道平行移軸對於二次項絕無變動, 所以

$$\mathrm{C}y^2+\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+\mathrm{F}=0,$$

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+\mathrm{F}=0,$$

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{C}y^2+\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+\mathrm{F}=0,$$

都能化簡為

$$\mathrm{C}y'^2+\mathrm{D}'x'=0,$$

$$\mathrm{A}x'^2+\mathrm{E}'y'^2=0,$$

$$\mathrm{A}x'^2+\mathrm{C}y'^2+\mathrm{F}'=0。$$

習題三十四

1. 把下列各方程式的坐標軸平行移到新原點 (h,k), 用兩種方法求出 h 及 k 的值, 並求新方程式:

(a) $5x^2-y^2-8x-5y-10=0$。

(b) $5x^2+y^2-8x-5y-10=0$。

(c) $3y^2-7x-10y-5=0$。

(d) $4x^2-6x-y^2-8y-10=0$。

(e) $4x^2-6x+8y-10=0$。

(f) $4x^2+4y^2-8x-5y-10=0$。

2. 下列各式化簡後,再作圖:

(a) $x^2+y^2+4x-8y+1=0$。

(b) $x^2-y^2+2x=0$。

(c) $x^2+2y^2+4x+4y+1=0$。

(d) $9x^2+4y^2-36x-8y+4=0$。

(e) $9x^2-4y^2-36x+8y-4=0$。

(f) $y^2-10x+2y-11=0$。

(g) $3xy-2x-4y-3=0$。

(h) $y^2-2xy+3x=2$。

3. 求適合下列條件的錐綫方程式,再化成最簡範式:

(a) 拋綫的頂點(3,3),焦點(−2,3)。

(b) 橢圓長軸等於 4,兩焦點(5,2)及(−1,2)。

(c) 雙曲綫的主軸等於 6,兩焦點(−2,0)及(6,0)。

(d)拋綫的主軸在 x 軸上,頂點(6,0),經過(0,4)。

(e)橢圓短軸等於 $\sqrt{7}$,兩頂點(−2,0)及(5,0)。

(f)雙曲綫的共軛軸等於6,兩頂點(1,2)及(−5,2)。

4. 化簡下列各動點的軌跡方程式,並作圖顯明新舊軸的關係:

(a)一動點距定點(1,1)等於距定直綫 $x=4$。

(b)一動點與定點(3,3)及定直綫 $2x+5=0$ 兩個距離的比是1:3。

(c)一動點與兩定直綫 $x+3y=6, x+y=5$ 距離的乘積恆等於 $4\sqrt{5}$。

93.<u>二次式化簡法二</u> 錐綫的主軸若不平行於坐標軸,他的方程式就有兩變數相乘積的一項。如果要消去這項,只須旋轉兩軸,使橫軸或縱軸與曲綫的主軸平行或相合。這種化簡法,一定要用旋轉移軸公式,所以先要知道角的旋轉量。

(一)已知旋轉角 求出旋轉角的正弦和餘弦值,代公式(XXXIII)中 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$,再把這結果代入原方程式,像§91裏的例題解法。

(二)求出旋轉角 把公式(XXXIII)直接代入

原方程式,令兩變數相乘積項的係數等於零,便得旋轉角的公式。詳細求法如下:

設二次式爲

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0。$$

把公式(XXXIII)代入上式,得

$$A(x'\cos\theta-y'\sin\theta)^2+B(x'\cos\theta-y'\sin\theta)(x'\sin\theta+y'\cos\theta)$$
$$+C(x'\sin\theta+y'\cos\theta)+D(x'\cos\theta-y'\sin\theta)$$
$$+E(x'\sin\theta+y'\cos\theta)+F=0。$$

展開,再整理,得

$$(A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)x'^2$$
$$+(A\sin^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta)y'^2$$
$$+[-2A\sin\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2C\sin\theta\cos\theta]x'y'$$
$$+(D\cos\theta+F\sin\theta)x'+(-D\sin\theta+E\cos\theta)y'+F=0。$$

令 $-2A\sin\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2C\sin\theta\cos\theta=0$

即 $2\sin\theta\cos\theta(C-A)+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0$。

因 $2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$, $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos2\theta$。

代入上式, $(C-A)\sin2\theta+B\cos2\theta=0$。

即 $$\tan2\theta=\frac{B}{A-C} \qquad \text{(XXXIV)}$$

A, B, C 的值不拘怎樣,2θ 總有一值在 π 與 0 之間,就是旋轉角 θ 恆小於 $\frac{1}{2}\pi$。

推論　如果 $B=0$,則 $\theta=\frac{1}{2}\pi$ 或 0,可知化簡不含 xy 項的二次式,不用旋轉移軸法。如果 $A=C$,則 $\theta=\frac{1}{4}\pi$,可知兩平方項係數相同時,不拘 xy 項的係數怎樣,旋轉角恆等於 $\frac{1}{4}\pi$。

〔例題一〕 用旋轉移軸法化簡下式:

$$13x^2+10xy+13y^2-42x+6y=27。$$

〔解〕 $A=C=13,\quad \theta=45°$。$\sin\theta=\cos\theta=\frac{1}{2}\sqrt{12}$,

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'-y'),\ y=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'+y')。$$

代入原式,

$$\frac{13}{2}(x'-2y')^2+\frac{10}{2}(x'-y')(x'+y')+\frac{13}{2}(x'+y')^2-\frac{42\sqrt{2}}{2}(x'-y')$$
$$+\frac{6\sqrt{2}}{2}(x'+y')^2=27。$$

化簡,得 $18x'^2+8y'^2-18\sqrt{2}\,x'+24\sqrt{2}\,y'=27$。

〔例題二〕 化簡 $3x^2+6xy-5y^2=100$。

〔解〕 $A=3,\ B=6,\ C=-5$。

$$\tan 2\theta=\frac{6}{3+5}=\frac{3}{4},\quad \cos 2\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan 2\theta}}=\frac{3}{4},$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)}=\frac{3}{10}\sqrt{10},$$

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)}=\frac{1}{10}\sqrt{10},$$

$$x=\frac{3}{10}\sqrt{10}x'-\frac{1}{10}\sqrt{10}y'=\frac{1}{10}\sqrt{10}(3x'-y'),$$

$$y=\frac{1}{10}\sqrt{10}x'+\frac{3}{10}\sqrt{10}y'=\frac{1}{10}\sqrt{10}(x'+3y')。$$

代入原式，

$$\frac{3}{10}(3x'-y')^2+\frac{6}{10}(3x'-y')(x'+3y')-\frac{5}{10}(x'+3y')^2=100,$$

化簡得 $2x'^2-3y'^2=50$。

把新方程式各與原式比較，便知旋轉兩軸，不但消去 xy 項，並且變動平方項的係數，只有常數項（未約以前）不變，所以 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$,

恆可化爲 $A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0$。

習題三十五

1. 求證一次式 $Ax+By+C=0$ 的坐標軸旋轉 θ 角後，可化爲 $x'=C'$ 或 $y'=C'$。

2. 求 $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$ 的坐標軸旋轉 ω 角後的新方程式。

3. 用旋轉移軸法消去 $x^2+y^2-2x-2y=0$ 裏 y 項。

4. 旋轉 $x^2-2x+4y=0$ 的兩軸，可以消去 x^2 項嗎？

5. 圓 $x^2+y^2=r^2$ 的坐標軸旋轉任何角，影響於他的方程式嗎？

6. 消去下列各式裏 xy 項：

(a) $xy=2$。 (b) $2xy-x-5=0$。

(c) $xy+4y-3=0$。 (d) $xy-6x-8y+20=0$。

(e) $4xy-3y^2=8$。　(f) $5x^2-6xy+5y^2=8$。

(g) $(x-y)^2=2(x+y)$。　(h) $19x^2+6xy+11y^2=20$。

94. <u>二次式化簡法三</u>　含兩變數的完全二次式,用平行移軸法,只能消去一次項;用旋轉移軸法,只能消去兩變數相乘積項。可知要把他化成最簡的錐綫範式,須兩法兼用。不過二次式的軌跡,如果是有心錐綫,不拘先用那一種移軸法都可,如果是抛綫,必先轉軸。有時錐綫的種類,不能從視察辨別出來,轉軸後再平行移軸,最爲妥當。

〔例題一〕 化 $9x^2-24xy+16y^2-18x-101y+19=0$ 爲最簡式。

〔解〕 先旋轉兩軸令　$A=9$,　$B=-24$,　$C=16$。

$$\tan 2\theta=\frac{-24}{-9-16}=\frac{24}{7},\quad \cos 2\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}}=\frac{7}{25},$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\cos 2\theta}}=\frac{4}{5},\quad \sin\theta=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)}=\frac{3}{5}。$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{5}(4x'-3y'),\qquad y=\frac{1}{5}(3x'+4y')。$$

化原式爲　$(3x-4y)^2-18x-101y+19=0$,

以上兩式代入,整理後,得

$$25y'^2-75x'-70y'+19=0。$$

次平行移軸,把上式配方,

$$\left(y'-\frac{7}{5}\right)^2=3\left(x'+\frac{2}{5}\right)。$$

可知兩軸要移到新原點$\left(-\frac{2}{5},\frac{7}{5}\right)$。

令　$x'=x''-\frac{2}{5},\quad y'=y''+\frac{7}{5}$。

代入上式,　　$y''^2=3x''$。

這是拋綫的最簡式,

〔例題二〕 化$x^2+24xy-6y^2+4x+48y+34=0$爲最簡式。

〔解〕 先平行移軸, 令$x=x'+h, y=y'+k$, 代入原式,

$(x'+h)^2+24(x'+h)(y'+k)-6(y'+k')^2+4(x'+h)+48(y'+k)+34=0$。

展開再整理,得

$$x'^2+24x'y'-6y'^2+(2h+24k+4)x'+(24h-12k+48)y'$$
$$+h^2+24hk-6k^2+4h+48k+34=0。\qquad(1)$$

令 $2h+24k+4=0,\ 24h-12k+48=0$。

聯立解得　$h=-2,\quad k=0$。

代入(1)式,　$x'^2+24x'y'-6y'^2+30=0$。　(2)

次旋轉移軸,令　$A=1,\quad B=24,\quad C=-6$。

$\tan 2\theta=\frac{24}{1+6}=\frac{24}{7},\qquad \cos 2\theta=\frac{1}{\sqrt{1+tan^2 \theta}}=\frac{7}{25},$

$$\cos 2\theta=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)}=\frac{4}{5},\quad \sin\theta=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)}=\frac{3}{5}$$

$$x'=\frac{1}{5}(4x'-3y'),\qquad y'=\frac{1}{5}(3x'+4y')。$$

代入(2)式, $\frac{1}{25}(4x''-3y'')^2+\frac{24}{25}(4x''-3y'')(3x''+4y'')$,

$$-\frac{6}{25}(3x''+4y'')+30=0,$$

$$10x''^2-15y''^2+30=0,$$

即 $$\frac{y''^2}{2}-\frac{x''^2}{3}=1。$$

這是原點為中心 y 軸為主軸的雙曲綫。

如果先旋轉兩軸,原式化成 $10x'^2-15y'^2+32x'-36y'+30=0$,再平行移軸,得 $3y''^2-2x''^2=6$,結果與前同。

〔注意〕 移動坐標軸,不影響方程式的次數。因為移軸時,新舊坐標量的關係式是

$$x=x'+h \text{ 及 } y=y'+k;$$

或 $$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \text{ 及 } y=y'\sin\theta+x'\cos\theta。$$

彼此都是一次式。設方程式的最高次項是 Ax^my^n,就是 $m+n$ 次。以上面的關係式代入,仍舊是 $m+n$ 次。所以從原式導出的新方程式,次數決不會昇高,也不會降低。如果移軸可以降低方程式的次數,那麼還原兩軸的位置,得的方程式,不能與原式同次了。

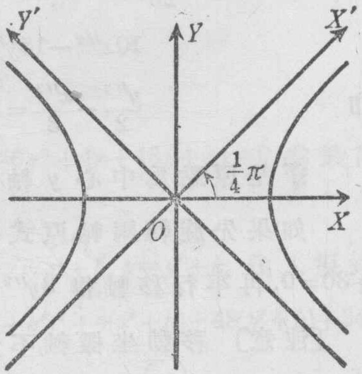
95.正雙曲綫的特例 正雙曲綫的幾近綫

是互爲垂直,可以當做坐標軸。由是得

定理　以幾近綫爲坐標軸的正雙曲綫方程式是　　$2xy+a^2=0$。

證　因正雙曲綫　$x^2-y^2=a^2$　(1)

的幾近綫是象限的分角綫,所以坐標軸旋轉$\frac{1}{4}\pi$,便與原幾近綫相合。



$\sin\frac{1}{4}\pi=\cos\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{2}$。

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'-y'),$$

$$y=\frac{1}{2}\sqrt{2}(x'+y')。$$

代入(1)式,　$\frac{1}{2}(x'-y')^2-\frac{1}{2}(x'+y')^2=a^2$,

即　　$2x'y'+a^2=0$。

這是舊幾近綫爲新坐標軸的正雙曲綫方程式,$Bxy+F=0$是他的範式。

推論　方程式 $Bxy+Dx+Ey+F=0$ 的軌跡必是正雙曲綫,因爲坐標軸旋轉$\frac{1}{4}\pi$,便化爲

$$Bx'y'+F=0。$$

習題三十六

1. 化下列各式爲最簡式,再作圖:

(a) $9x^2+24xy+4y^2+90x-130y=0$。

(b) $11x^2-24xy+4y^2+6x+8y-10=0$。

(c) $3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2-8x+8\sqrt{3}y+4=0$。

(d) $5x^2+8xy+5y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0$。

(e) $4x^2-24xy+11y^2+72x-116y+204=0$。

(f) $3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2-(8+12\sqrt{3})x+(12-8\sqrt{3})y-12=0$。

2. 下列各式的軌跡是什麼?

(a) $2x^2+4xy+4y^2+2x+3=0$。

(b) $41x^2+24xy+9y^2-60x-45y+50=0$。

(c) $2x^2+6xy+10y^2-2x-6y+19=0$。

(d) $13x^2+10xy+y^2-2x-10y-11=0$。

3. 求適合下列條件的方程式,化簡後,再作圖:

(a) 焦點 $(3,2)$, 準綫 $x+y=0, e=1$。

(b) 焦點 $(-1,-3)$, 準綫 $2x-y=3, e=\frac{2}{3}$。

(c) 焦點 $(-6,0)$, 準綫 $3x-2y+1=0, e=3$。

4. 證明方程式 $x^{\frac{1}{2}}\pm y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 的軌跡是拋綫,並作圖。

5. 求正雙曲綫 $2xy=3$ 的切綫及法綫,已知切點是 $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$。

6. 求正雙曲綫$xy=-3$的切綫平行於直綫$x-2y+3=0$。

7. 求正雙曲綫 $xy=4$ 的切綫,經過點$(3,-4)$。

8. 把下面求得的雙曲綫方程式化爲最簡式,再求他的幾近綫方程式:

(a) 經過$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,兩幾近綫$3x-y+6=0$,$x+4y=6$,

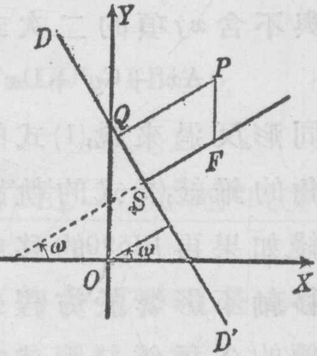
(b) 切於直綫$y=2x-5$,兩幾近綫$x+y=0$,$3x-y=5$,

(c) 切於 x 軸,兩幾近綫$x-3y=1$,$x+y=0$。

第八章

二次式軌跡總論

96.<u>錐綫方程式與二次式</u> 設 $F(m,n)$ 是焦點，$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$ 是準綫 DD'，$P(x,y)$ 是錐綫上任一點。聯結 FP，再作 PQ，FS 垂直於 DD'。那 FS 就是錐綫的主軸，與 x 軸成 ω 角。



依錐綫定義，

$$\sqrt{(x-m)^2+(y-n)^2}=e(x\cos\omega+y\sin\omega-p).$$

上式展開再整理，得

$$\left.\begin{aligned}&(1-e^2\cos^2\omega)x^2-2e^2\sin\omega\cos\omega xy+(1-e^2\sin^2\omega)\\&y^2+(2e^2p\cos\omega-2m)x+(2e^2p\sin\omega-2n)y+m^2+n^2\\&-e^2p^2=0。\end{aligned}\right\}(1)$$

這是錐綫通式，與含兩變數 x 及 y 的完全二次式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0。\qquad(2)$$

同形，所以不拘那一種錐綫，在任何位置，他的方程式是二次式。如果照§91的移軸法，使主軸與 x

軸平行,則　$\omega=0,\quad \sin\omega=0,\quad \cos\omega=1$。

代入(1)式,得

$$(1-e^2)x^2+y^2+(2e^2p-2m)x-2ny+m^2+n^2-e^2p^2=0。\tag{3}$$

與不含 xy 項的二次式

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0\tag{4}$$

同形。反過來說,(1)式的軌跡是主軸與 x 軸成傾角的錐綫,(2)式的軌跡是主軸與 x 軸平行的錐綫。如果再用§90的移軸法,(3)式還可以化簡。但是移軸不影響於方程式的次數,所以第五章裏最簡的各種錐綫範式,也是二次式。並且詳細討論過像(4)式一類的二次式,除特例外,他的軌跡總是錐綫。

97.二次式軌跡的變態　在§§53,62,74各節裏,從二次式各項係數的特別值,推論出他的軌跡,有時只有一點或一直綫,有時爲兩直綫,或者竟沒有軌跡:這些特例,叫做二次式軌跡的變態(Degeneration),或者叫做錐綫的變態。

98.二次式軌跡是直綫的條件　二次式的軌跡如果是直綫,那原方程式必能分解成兩個

一次因式。不過二次式能够這樣分解的,是他的特例,所以有

定理　若二次式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

的軌跡是直綫,則

$$4ACF+BDE-AE^2-CD^2-FB^2=0。$$

證　從原式解y,得

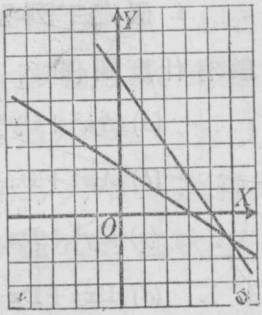
$$y=\frac{-(Bx+E)\pm\sqrt{(B^2-4AC)x^2+(2BE-4CD)x+E^2-4CF}}{2C}.$$

要上式是有理整式,根號裏的各項必須是完全平方。依二次式等根的理,令

$$(2BE-4CD)^2-4(B^2-4AC)(E^2-4CF)=0.$$

化簡,　$4ACF+BDE-AE^2-CD^2-FB^2=0$。

上式左邊各項叫做二次式軌跡是直綫的判別式,常以Σ代他。



〔例題〕 求方程式$6x^2+13xy+6y^2-7x-8y+2=0$的軌跡。

〔解〕 $A=6, B=13, C=6, D=-7, E=-8, F=2$。

$4ACF+BDE+AE^2-CD^2-FB^2$

$=288+728-384-294-338=0$。

可知原方程式的軌跡是直綫,所以能够分解爲

$(2x+3y-1)(3x+2y-2)=0$。

作兩直綫 $2x+3y-1=0$,$3x+2y-2=0$ 的軌跡,如上圖。

習題三十七

1. 從錐綫通式導出下列各方程式:

(a) $w=\frac{1}{4}\pi, m=3, n=2, p=0, e=1$。

(b) $w=\frac{3}{4}\pi, m=1, n=1, p=\frac{9}{5}\sqrt{5}-1, e=\frac{\sqrt{5}}{3}$。

(c) $w=0, m=1, n=0, p=4, e=\sqrt{2}$。

2. 證明下面兩方程式軌跡的形狀和位置都相似:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+D'x+E'y+F'=0。$$

3. 二次式的坐標軸旋轉後,Σ值變動麼?

4. 假定下列方程的軌跡是錐綫的變態,各未定常數有什麼關係?

(a) $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$。

(b) $Ax^2+Dx+Ey+F=0$。

(c) $Cy^2+Dx+Ey+F=0$。

(d) $Bxy+Dx+Ey+F=0$。

5. 指出下列各方程式的軌跡,那一個是直綫,並求出直綫方程式:

(a) $4y^2+5xy+x^2+2y+x-2=0$。

(b) $3y^2-8xy+3x-1=0$。

(c) $y^2-x^2-2y+1=0$。

(d) $xy-ay-bx+ab=0$。

(e) $y^2+4xy+4x^2-4=0$。

(f) $xy+x^2-y+9x-10=0$。

99.二次式的不變式　含二次項係數的式,如果移軸後,他的值仍舊不變,叫做二次式的不變式(Invariant)。

定理　$A+C$ 及 B^2-4AC 是二次式的不變式。

證　A,B,C 是二次方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0。\qquad (1)$$

的二次項係數。在§92裏說過,平行移軸,二次項絕無變動,可知 $A+C$ 及 B^2-4AC 的值不變。

若(1)式的坐標軸,旋轉 θ 角,二次項係數雖然改變,但是從§93知道新舊兩方程式的二次項係數,有下面的關係:

$$A'=A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta,$$

$$B'=2(C-A)\sin\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta+\sin^2\theta),$$

$$C'=A\sin^2\theta-B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta。$$

由是可以證明轉軸後,$A+C$及B^2-4AC的值不變。

$$A'+C'=A\cos^2\theta+A\sin^2\theta+C\sin^2\theta+C\cos^2\theta$$

$$=A(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+C(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$

$$=A+C。$$

$$B^{2\prime}-4A'C'=B^2(\sin^4\theta+\cos^4\theta)-2(AC-B^2)\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$-4AC(\sin^4\theta+\cos^4\theta)=(B^2-4AC)\sin^4\theta$$

$$+(B^2-4AC)\cos^4\theta+2(B^2-4AC)\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=(B^2-4AC)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2=B^2-4AC。$$

100. 二次式軌跡的判別式　從任何二次式,要分別出他的軌跡,是那一種錐綫,看下面定義便知。

定理　方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的軌跡是拋綫、橢圓、雙曲綫,隨 $B^2-4AC=0,<0,>0$ 而定。

證　我們已經知道錐綫從離心率 $e=1,<1,>1$, 可以分別出拋綫、橢圓、雙曲綫,現在把§96裏錐綫通式完全與二次式比較,知道

$A=1-e^2\cos^2\omega, B=-2e^2\sin\omega\cos\omega, C=1-e^2\sin^2\omega$。

$$B^2-4AC=4e^4\sin^2\omega\cos^2\omega-4(1-e^2\cos^2\omega)(1-e^2\sin^2\omega)$$
$$=4e^2\cos^2\omega+4e^2\sin^2\omega-4$$
$$=4e^2(\cos^2\omega+\sin^2\omega)-4=4e^2-4=4(e^2-1)。$$

若$e=1$,則$B^2-4AC=0$。

若$e<1$,則$B^2-4AC<0$。

若$e>1$,則$B^2-4AC>0$。

所以決定二次式的軌跡是抛綫,或橢圓,或雙曲綫,只要看B^2-4AC的值是零或負數或正數。

因為B^2-4AC可以分別出錐綫的種類,所以叫做二次式軌跡的判別式,常用Δ代他。

推論 令 $B^2-4AC=0$ 的意思,就是要$Ax^2+Bxy+Cy^2$ 成功完全平方,所以代表錐綫的完全二次式,必有$(A'x+C'y)^2+Dx+Ey+F=0$形狀。

〔例題〕 決定下列方程式的軌跡種類:

(a) $y^2-2xy+x^2+8x-16=0$。

(b) $5x^2+2xy+5y^2-12x+2y=0$。

(c) $y^2+2xy-2x^2-4y-x+10=0$。

〔解〕 (a) $B^2-4AC=4-4=0$, 軌跡是抛綫。

(b) $B^2-4AC=4-4\times5\times5=-96$, 軌跡是橢圓。

(c) $B^2-4AC=4-4\times(-2)=12$,軌跡是雙曲綫。

習題三十八

1. 決定下列錐綫的種類:

(a) $3y^2+6xy+4x^2-8y=0$。

(b) $4xy-16=0$。

(c) $x^2+2xy+y^2-y+1=0$。

(d) $y^2-1+3x=(x-y)^2$。

(e) $25x^2-8xy+y^2+6y-2x+49=0$。

(f) $6x^2-5xy+y^2+5y-11x+4=0$。

2. 證明$(A-C)^2+B^2$是二次式的不變式。

3. 二次式$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$,如果是代表有心錐綫,恆可化簡爲$A'x'^2+C'y'^2+F'=0$,證明

$$A'=\frac{1}{2}(A+C\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}),$$

$$C'=\frac{1}{2}(A+C\mp\sqrt{(A-C)^2+B^2})。$$

上式中複號怎樣決定?

4. 根據上題公式,化

$5x^2+2xy+5y^2=12$爲最簡式。

5. 一次式$Ax+By+C=0$有沒有不變式?

6. 設$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$的坐標軸移到

新原點(h,k)，化成為 $Ax^2+Bxy+Cy^2+F'=0$。證明 $F'=\frac{\Sigma}{\Delta}$

101. 錐綫族方程式　根據直綫族及圓族定理,可得錐綫族方程式。

定理　設有兩錐綫

$$A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0 \quad (1)$$

及 $$A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2=0, \quad (2)$$

則 $$A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1$$

$$+k(A_2x^2+B_2xy+C_2y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0, \quad (3)$$

也是代表錐綫。

證　整理(3)式,得

$$(A_1+kA_2)x^2+(B_1+kB_2)xy+(C_1+kC_2)y^2$$

$$+(D_1+kD_2)x+(E_1+kE_2)y+(F_1+kF_2)=0。\quad (4)$$

這是二次式,他的軌跡是錐綫。如果(1),(2)兩錐綫相交,(3)式就是代表經過交點的錐綫族。

推論　如果 k 等於某值時,$\Sigma=0$,則(4)式叫做錐綫族的變態。

〔例題〕討論錐綫族$\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{4-k}=1$,並作 $k=-3$, 0,3,5,7,8 時的圖解。

〔解〕$k<4$ 時,軌跡是橢圓,焦點是$(\pm\sqrt{5},0)$。

$k=4$ 時,原式變為 $y=0$,軌跡是直綫,與 x 軸相

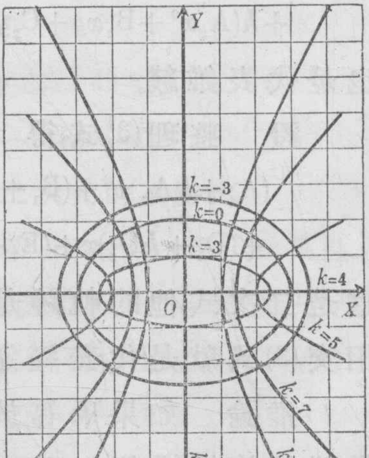
合。

$4<k<9$ 時,軌跡是雙曲綫,焦點也是$(\pm\sqrt{5},0)$。

$k=9$ 時,原式變爲$x=0$,軌跡是直綫,與 y 軸相合。

$k>9$ 時,原式變爲平方的和等於負數,就是沒有軌跡。

這錐綫族方程式,除變態外,是代表同焦點的橢圓及雙曲綫。



設 $k=-3,\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{7}=1$。

$k=0,\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$。

$k=3,\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{1}=1$。

$k=5,\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{6}=1$。

$k=7,\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1$。

$k=8,\ \dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{4}=1$。

觀右圖可知 k 值遞增,趨近於 4 橢圓漸扁。達到極限便與 x 軸相合。k 值遞減,趨近於 4,雙曲綫也漸扁,達到極限,也與 x 軸相合。k 值遞增,趨近於 9,兩枝曲綫漸漸與 y 軸接近,達到

極限,便與 y 軸相合。

102. 二次式軌跡性質結論　在解析幾何裏,研究代數方程式的目的,是要知道他的軌跡性質。一次式是代表直綫,二次式是代表錐綫,前面已經反覆證明。現在再把二次式軌跡的種種性質,作一結論,如下:

設有二次式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (1)$$

第一要考察出錐綫的定點——焦點——是不是在定直綫——準綫——以外,就是決定錐綫有沒有變態;第二要考察出兩距離的比值——離心率 e——比 1 大小怎樣,就是決定那一種錐綫。解決這兩個問題,要用下面的判別式:

變態的判別式　$\Sigma=4ACF+BDE-AE^2-CD^2-FB^2$

種類的判別式　$\Delta=B^2-4AC$。

若 $\Sigma\neq0$, 則(1)式的軌跡是錐綫的一種,細分起來,有

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\neq0\\ \Delta=0\end{array}\right\}\text{錐綫是}\left\{\begin{array}{l}\text{有中心——橢圓或雙曲綫;}\\ \text{無中心——拋綫。}\end{array}\right.$$

$$\text{有心錐綫}\begin{cases}\Delta<0\begin{cases}\Sigma\text{與 A,C 異號——橢圓,}\\ \Sigma\text{與 A,C 同號——無軌跡,}\end{cases}\\ \Delta>0\text{——雙曲綫。}\end{cases}$$

I 有心錐綫

依平行移軸法把(I)式的原點移到新原點(h,k),使 $h=\dfrac{2AE-BD}{B^2-4AC}$, $k=\dfrac{2CD-BE}{B^2-4AC}$。便能消去一次項,變成

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+F'=0。\qquad (2)$$

因爲移軸不變曲綫的形狀,所以仍舊可用上法來區別軌跡性質。並且(2)式裏 A′,C′ 都不等於 0, Σ 就不會等於 0。只有 A′,C′,F′ 同號時,沒有軌跡。如果再依旋轉移軸法,把兩軸同時旋轉 θ 角,使

$$\theta=\frac{1}{2}\tan\frac{B}{A-C},$$

則(2)式裏 xy 項便消去,變成

$$A'x''^2+C'y''^2+F'=0。\qquad (3)$$

這是最簡的有心錐綫方程式。A′及C′ 都不等於 0,他的判別式也化爲

$$\Sigma=4A'C'F',\ \Delta=-4A'C'。$$

(1) $\Delta<0$。 Δ是負值,A'與C'必同號。

(*a*) $\Sigma<0$, F'必與A',C'異號,(3)式的軌跡是橢圓,若$A'<C'$,主軸在x軸上;若$A'>C'$,主軸在y軸上。

(*b*)除A',C'同值外,其餘與(*a*)同,(3)式的軌跡是圓。

(*c*) $\Sigma>0$,F'必與A',C'同號,(3)式沒有軌跡。

(*d*) $\Sigma=0$,必$F'=0$,(3)式的軌跡是一點,叫做點橢圓。

(2) $\Delta>0$ Δ是正值,A'與C'必異號。

(*a*) $\Sigma\neq0$,(3)式的軌跡是雙曲綫,若F'與A'異號,主軸在x軸上;若F'與C'異號,主軸在y軸上。

(*b*)除A'與C'同值外,其餘與(*a*)同,(3)式的軌跡是正雙曲綫。

(c) $\Sigma=0$,必$F'=0$,(3)式的軌跡是交原點的兩直綫。

II 無心錐綫

拋綫的中心在無窮遠處,就叫沒有中心的錐綫。先把兩軸同時旋轉θ角,使

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{B}{A-C},$$

則(2)式裏xy項與x^2項或y^2項同時消去,變成

$$C'y'^2+D'x'+E'y'=0, \qquad (4)$$

或

$$A'x'^2+D'x'+E'y'+F=0。 \qquad (5)$$

(1) $\Sigma \neq 0$。(4)式與(5)式的軌跡是拋綫,主軸平行於 x 軸或 y 軸,他的頂點是

$$\left(\frac{E'^2-4CF}{4CD}, -\frac{E'}{2C}\right),\text{或}\left(-\frac{D'}{2A}, \frac{D'^2-4A'F}{4A'E'}\right)。$$

(2) $\Sigma=0$。在(4)式裏,$D'=0, y'=\dfrac{-E'\pm\sqrt{E'^2-4C'F}}{2C'}$

(a) $E'^2<4C'F$,沒有軌跡。

(b) $E'^2>4C'F$,軌跡是平行於 x 軸的兩直綫。

(c) $E'^2=4C'F$,軌跡是平行於 x 軸的一直綫。

在(5)式裏,$E'=0, x'=\dfrac{-D'\pm\sqrt{D'^2-4A'F}}{2A}$。變態的情形與上相仿。

如果再用平行移軸法,使新原點移到頂點,則(4),(5)兩式變成

$$C'y''^2+D'x''=0, \tag{6}$$

或

$$A'x''^2+E'y''=0。 \tag{7}$$

這是拋綫的最簡式,係數都不等於0。看 C' 及 D' 異號或同號,定拋綫在 y 軸右側或左側。同理定拋綫在 x 軸上側或下側,須看 A' 及 E' 異號或同號。如果 D' 或 E' 等於 0, 則 $y''=0$ 或 $x''=0$,軌跡就是直綫,與 x 軸或 y 軸相合。如果 C' 或 A' 等於 0,兩式各變成一次式,也得 $x''=0$ 或 $y''=0$。

〔例題〕 判別下列二次式的軌跡性質:

(a) $9x^2-24xy+16y^2-3x+4y-16=0$。

(b) $15x^2+16xy+4y^2-4x-4y-3=0$。

〔解〕 (a) $A=9, B=-24, C=16, D=-3, E=4, F=-16$。

$\Sigma=-9216+288-144-144+9216=0$。

$\Delta=576-576=0$。

因爲 $\Sigma=0, \Delta=0$,F 與 A 或 C 是異號,所以軌跡屬於拋綫的變態,就是兩平行綫。

(b) $A=15, B=16, C=4, D=-4, E=-4, F=-3$。

$\Sigma=720+256-64-240+768=0$。

$\Delta=256-240=16$。

因爲 $\Sigma=0, \Delta>0$,所以原式的軌跡是雙曲綫的變態,就是相交兩直綫。

習題三十九

1. 討論下列錐綫族方程式的軌跡性質:

(a) $9x^2+4y^2-25+k(x^2+y^2-25)=0$。

(b) $y^2-2x+k(4y^2-x^2-1)=0$。

(c) $9x^2-4y^2-25+k(16x^2+9y^2-144)=0$。

(d) $2x^2+2xy+y+8x+8y+k(2x^2+y^2+8x)=0$。

(e) $x^2=k(2y+k)$。

(f) $\frac{y^2}{16-k}-\frac{x^2}{9-k}=1$。

2. 求上題裏各方程式軌跡成變態時的 k 值:

3. 就下列二次式,說明他的軌跡性質:

(a) $6x^2+13xy+6y^2-7x-8y+2=0$。

(b) $4x^2-2xy-2y^2+4x+5y+5=0$。

(c) $6x^2-4xy+9y^2-40x+30y+55=0$。

(d) $y^2+2xy+x^2+2y-7x-8=0$。

(e) $41x^2+24xy+34y^2-90x+120y+225=0$。

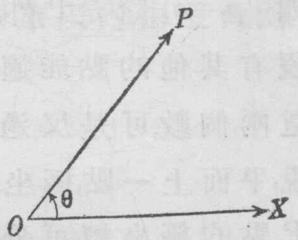
(f) $x^2+2xy+y^2+x+2y+2=0$。

第九章

極坐標

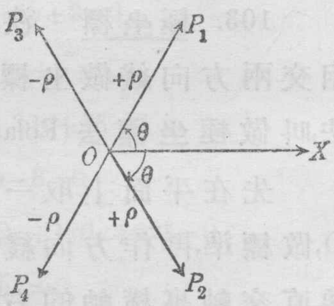
103. 極坐標　決定平面上點的位置,除取相交兩方向綫做坐標軸外,還有一種常用的方法,叫做極坐標法(Polar system),說明於下:

先在平面上取一點O,做標準,再作方向綫OX,像直交軸裏橫軸的右半軸。這O點叫做極點(Pole),也稱原點,OX叫做極軸(Polar axis),或稱首綫(Initial line)。設平面上有一點P,如果知道距離OP及與極軸OX的交角,則P點的位置便確定了。這個距離OP叫做動徑(Radius vector),交角XOP叫做變角(Victoral angle),通常用ρ, θ來代表,合稱爲P點的極坐標(Polar coördinates),恆記爲(ρ,θ)。

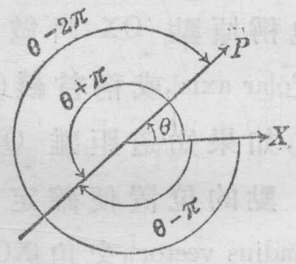


動徑ρ及變角θ,像直交坐標軸裏橫縱坐標一樣,也有正負區別。θ角從極軸依反鐘向旋轉而成的爲正,否則爲負。如XOP_1角爲正,XOP_2角

爲負。距離 ρ 在 θ 角的終綫(Terminal line)上取得的爲正,在他的延長綫上取得的爲負。如 OP_1 爲正,OP_4 爲負。所以P_1,P_4兩點的極坐標就是(ρ,θ),$(-\rho,\theta)$。ρ 及 θ 定了正負以後,適合一對極坐標量的點,有一無二。譬如 $(\rho,-\theta)$ 除是P_2外,決沒有其他的點能適合這兩個數。可是反過來說,平面上一點,極坐標可以有無限數。像下圖中

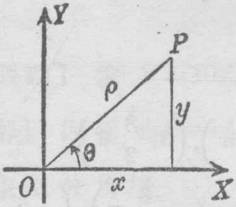


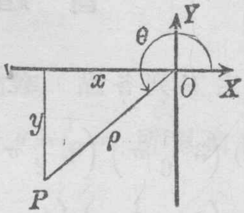
P 點的極坐標,可分兩組,一組是$(\rho,\theta\pm 2n\pi)$,一組是$(-\rho,\theta\pm 2n\pi)$,其中 n 代表任何正整數。就是角的絕對值限制在2π以內,一點的極坐標,也有四對。如 (ρ,θ),$(\rho,\theta-2\pi)$,$(-\rho,\theta+\pi)$,$(-\rho,\theta-\pi)$。



104. <u>兩種坐標的關係</u> 定理 設平面上有一點 P,直交坐標是(x,y),極坐標是(ρ,θ)。如令原點及 x 軸右半與極點及極軸相合,則

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta \\ y&=\rho\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XYXV)}$$





證　P 點不拘在那一個象限內,由三角函數定義,得

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho},\quad \sin\theta=\frac{y}{\rho}。$$

卽　$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta$。

推論　$\rho^2=x^2+y^2, \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$。

$$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

［例題一］ 化 $x^2-y^2=a^2$ 爲極方程式。

［解］ 以　$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,$

代入原式,得　$\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta=a^2,$

$$\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=a^2,$$

$$\rho^2\cos2\theta=a^2。$$

［例題二］ 化 $\rho=2a\cos\theta$ 爲直交坐標方程式。

［解］ 以　$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$

代入原式,得　$\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{2ax}{\sqrt{x^2+y^2}},$

$$x^2+y^2=2ax。$$

習題四十

1. 定下列各點的位置:

(a) $\left(3,\frac{1}{6}\pi\right),\left(6,\frac{1}{2}\pi\right),\left(8,\frac{3}{4}\pi\right),\left(3,\frac{3}{2}\pi\right),$

$\left(6,-\frac{1}{2}\pi\right),\left(4,-\frac{5}{6}\pi\right),\left(-8,-\frac{3}{4}\pi\right),\left(-5,\frac{2}{5}\pi\right)。$

(b) $\left(3,\sin^{-1}\frac{1}{2}\right),\left(-1,\cos^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{2}\right),\left(2,\tan^{-1}\sqrt{3}\right)。$

2. 證明下列兩點對稱於極點:

(a) $(\rho,\theta),(-\rho,\theta)$。　(b) $(\rho,\theta),(\rho,\theta+\pi)$。

3. 證明兩點$(\rho,\theta),(\rho,-\theta)$是對稱於極軸.

4. 證明兩點$(\rho_1,\theta_1),(\rho_2,\theta_2)$的距離是

$$\sqrt{\rho_1{}^2+\rho_2{}^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)}。$$

5. 求下列各式變換坐標軸後的方程式:

(a) $\rho=1+\sin\theta$。　(b) $\rho\cos\theta=5$。

(c) $3x-4y=1$。　(d) $3y-4x=2$。

(e) $\rho^2\sin 2\theta=3$。　(f) $\rho=2a\sec\theta\tan\theta$。

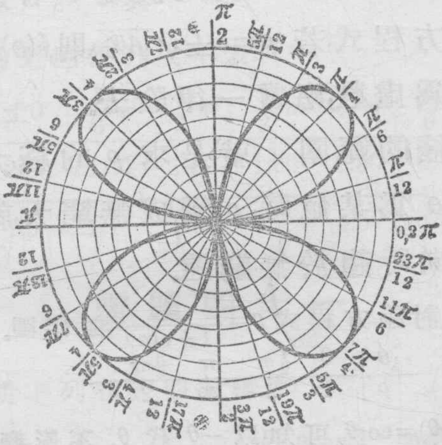
105. 求極方程式的軌跡　含兩變數ρ及θ的方程式,叫做極坐標方程式,簡稱極方程式。求這類方程式的軌跡,先化原式為$\rho=f(\theta)$,再設

θ等於種種的值,求ρ的對應值,列成一表。在極坐標面上定出各點,聯以曲綫,便是所求軌跡圖象。

〔例題〕 求 $\rho=10\sin2\theta$ 的圖解。

〔解〕 因為 $\sin2\theta=\sin(\pi-2\theta),\theta=\frac{1}{4}\pi$, 所以曲綫是對稱於象限分角綫。

θ	$-\frac{1}{4}\pi$	$-\frac{1}{6}\pi$	$-\frac{1}{12}\pi$	0	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$
$\sin2\theta$	−1.00	−0.87	−0.50	0	0.50	0.87	1.00
ρ	−10	−8.7	−5.0	0	5.0	8.7	10



106. <u>極方程式軌跡討論</u> 討論極方程式軌跡的方法,與§14相仿。

(a)曲綫的截綫　令 θ 等於 $0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$,從原方程式解得 ρ 的對應值,就是曲綫經過極軸及 $\frac{1}{2}\pi$ 軸 —— 通過極點垂直於極軸的直綫 —— 的點到極點的距離,我們叫他截綫。

(b)曲綫的對稱　要知道極坐標方程式的軌跡有沒有對稱性,須仿§16的驗法,就是

$$\text{以}\left.\begin{array}{l} -\rho\text{ 代 }\rho \\ -\theta\text{ 代 }\theta \\ \pi-\theta\text{ 代 }\theta \end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{不影響原方程式,} \\ \text{曲綫對稱於}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{極點;} \\ \text{極軸;} \\ \frac{1}{2}\pi\text{ 軸。}\end{array}\right.$$

(c) θ 值的限制　就是决定 θ 有沒有除外的值,解原方程式,若 $\rho=a\pm\sqrt{f(\theta)}$,則 $f(\theta)<0$ 的 θ 值,常使 ρ 爲虛數,應當一律除去。

(d)曲綫的範圍　就是求 ρ 的極大值與極小值。如果 θ 爲某值時,ρ 變成無窮大,就知道曲綫在某方向時趨於無窮遠。

〔例題〕 討論方程式 $\rho=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$,並作圖。

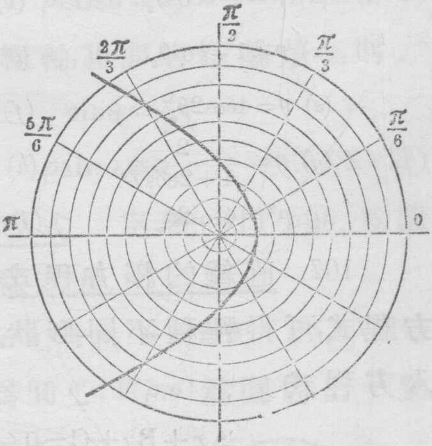
〔解〕 (a)

θ	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$
ρ	1	2	∞	2

(b) $\cos(-\theta)=\cos\theta$,可知以 $-\theta$ 代 θ,不影響原方程式,曲綫必對稱於極軸。

(c)原方程式不含根式,θ 便沒有除外的值。

(*d*) 若$1+\cos\theta=0$,則$\rho=\infty$,就是$\theta=\pi$時,曲綫趨於無窮遠。



要知道ρ的極小值,須求$1+\cos\theta$的極大值。$\cos\theta$沒有大過於1,就是$1+\cos\theta$的最大值是2,所以$\rho=1$,是極小值。

曲綫既然對稱於極軸,只須求θ在0與π間各組的對應值,列成下表:

θ	± 0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$1+\cos\theta$	2.00	1.87	1.50	1.00	0.50	0.13	0
ρ	1.0	1.1	1.3	2.0	4.0	15.0	∞

習題四十一

1. 說明下列各式的對稱性:

(*a*) $\rho=\sin\theta$。 (*b*) $\rho=a(1-\cos\theta)$。

(*c*) $\rho=a\cos 2\theta$. (*d*) $\rho=a\sin^2\theta$。

(*e*) $\rho=\sin^2\dfrac{\theta}{2}$。 (*f*) $\rho^2=\cos\theta-a$。

2. 討論下列方程式,並作圖:

(a) $\rho=-8\cos\theta$。 (b) $\rho\sin\theta=5$。

(c) $\rho=1-\cos\theta$。 (d) $\rho=1+2\cos\theta$。

(e) $\rho=4\cos2\theta$。 (f) $\rho=9\cos3\theta$。

(g) $\rho=\dfrac{2}{1+2\cos\theta}$。 (h) $\rho=\dfrac{1}{2-3\cos\theta}$。

(i) $\rho^2=4\cos2\theta$。 (j) $\rho=4\cot\theta\cos\theta$。

107. 直綫的極方程式 用極坐標求直綫方程式,可得種種不同形狀。設以公式(XXXV)代入方程式

$$Ax+By+C=0,$$

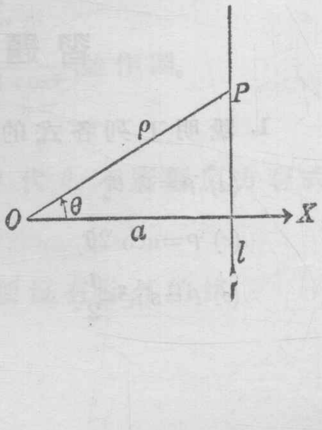
卽得直綫的普通極方程式

$$\rho(A\cos\theta+B\sin\theta)+C=0。$$

這式沒有原式簡單,用處很少。直綫的法綫式,也可以用同法化爲極方程式

$$\rho\cos\theta\cos\omega+\rho\sin\theta\sin\omega-p=0,$$

卽 $$\rho\cos(\theta-\omega)-p=0$$



若直綫垂直或平行於極軸,可得很簡的式。譬如直綫 l 垂直於極軸OX,離極點O爲 a, $P(\rho,\theta)$爲這

直綫上任一點。由圖得　$\cos\theta=\frac{a}{\rho}$,

即　　$\rho\cos\theta=a$。　(XXXVI)

若直綫平行於極軸,其間的距離是 c,則

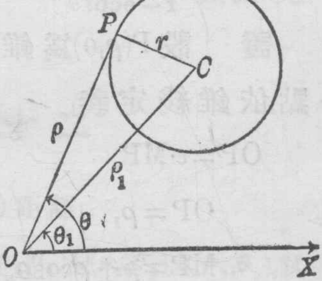
$$\sin\theta=\frac{a}{\rho},$$

即　　$\rho\sin\theta=a$。　(XXXVII)

108. <u>圓的極方程式</u>　定理　以 (ρ_1,θ_1) 爲圓心 r 爲半徑的圓方程式是

$$\rho^2-2\rho_1\rho\cos(\theta-\theta_1)+\rho_1^2-r^2=0。\quad\text{(XXXVIII)}$$

證　設 $C(\rho_1,\theta_1)$ 爲圓心, $P(\rho,\theta)$ 爲圓周上一點。在三角形 OCP 內, $OC=\rho_1$, $OP=\rho$, $\angle COP=\theta-\theta_1$ 或 $\theta_1-\theta$,隨 P 點位置而變化。



但　$\cos(\theta-\theta_1)=\cos(\theta_1-\theta)$。

根據餘弦定律,

$r^2=\rho_1^2+\rho^2-2\rho_1\rho\cos(\theta-\theta_1)$,

移項,　　$\rho^2-2\rho_1\rho\cos(\theta-\theta_1)+\rho_1^2-r^2=0$。

推論一　若圓心在極軸上,圓方程式是

$$\rho^2-2\rho\rho_1\cos\theta+\rho_1^2-r^2=0。$$

推論二　若圓周通過極點,圓方程式是

$$\rho-2r\cos(\theta-\theta_1)=0。$$

推論三　若圓心在極軸上,圓周通過極點,圓方程式是　$\rho=2r\cos\theta$。

推論四　若圓切於極軸的極點,圓方程式是　　$\rho=r2\sin\theta$。

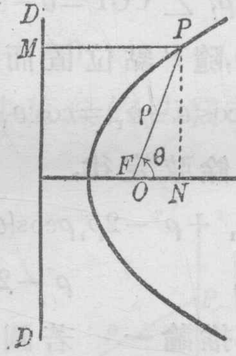
推論五　若圓心在極點,圓方程式是

$\rho=r$。

109. 錐綫的極方程式　定理　設極點在錐綫的焦點,極軸垂直於準綫,p 爲焦點到準綫的距離,則錐綫的極方程式是

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta} \qquad \text{(XXXIX)}$$

證　設 $P(\rho,\theta)$ 爲錐綫上一點。依錐綫定義,



$OP=e\cdot MP$。

但　$OP=\rho$,

$MP=p+\rho\cos\theta$。

所以　$\rho=e(p+\rho\cos\theta)$,

即　$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$。

推論　若準綫平行於極軸,則錐綫的極方程式是　$\rho=\dfrac{ep}{1-e\sin\theta}$。　(XXXX)

〔例題〕 設 $e=4$, 準綫平行於極軸,通過 $\left(3,\dfrac{1}{2}\pi\right)$, 求

雙曲綫方程式。

〔解〕 由公式(XXXVII), $\rho=3\sin\frac{1}{2}\pi=3$, 及 $e=4$, 代入公式(XXXX),得 $\rho=\dfrac{12}{1-4\sin\theta}$。

110. 用極坐標求軌跡方程式 求軌跡方程式,前數章裏都用直角坐標,為什麼現在要改用極坐標?用極坐標有什麼便利?這是因為許多軌跡的性質,合宜於用極坐標,比用直角坐標,方程式容易求得,並且可以利用三角函數公式,常使方程式呈簡單形狀。不過這種軌跡曲綫大都不屬於圓及錐綫等,他的極方程式求法,詳見下章。

習題四十二

1. 求兩點(ρ,θ),(ρ_2,θ_2)間的距離

2. 設三角形的頂點是$P(\rho_1,\theta_1)$,$Q(\rho_2,\theta_2)$,$R(\rho_3,\theta_3)$,試證三角形PQR的面積是

$$\frac{1}{2}\{\rho_1\rho_2\sin(\theta_1-\theta_2)+\rho_2\rho_3\sin(\theta_2-\theta_3)+\rho_3\rho_1\sin(\theta_3-\theta_1)\}。$$

3. 求過兩點(ρ_1,θ_1),(ρ_2,θ_2)的極方程式。

4. 求直綫$\rho=\dfrac{4}{2\sin\theta-3\cos\theta}$與極軸的交角。

5. 求兩直綫$\rho\sin\theta+2\rho\cos\theta=a$,$\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta=2a$的交

點。

6. 求橢圓及雙曲綫的極方程式,設極點在中心,或右焦點,或左焦點,主軸在極軸或$\frac{1}{2}\pi$軸上。

7. 求拋綫的極方程式,設極點在頂點,主軸在極軸,或$\frac{1}{2}\pi$軸上。

8. 依下列條件,求錐綫的極方程式,焦點在極點:

(a) $e=1$, 準綫垂直於極軸,通過$(3, \pi)$。

(b) $e=\frac{4}{5}$, 準綫平行於極軸,通過$\left(2, \frac{1}{2}\pi\right)$。

(c) $e=\frac{3}{2}$, 準綫垂直於極軸,通過$(-3, 0)$。

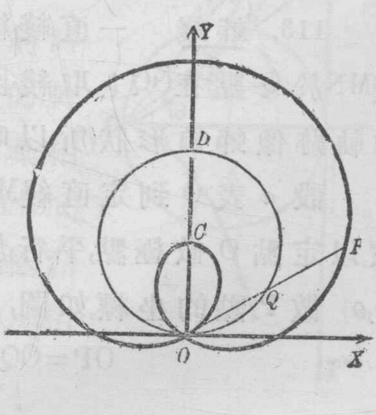
第十章

高次平面曲綫

111. 曲綫的種類　曲綫上點的坐標關係,可以用代數函數表示的,叫**代數曲綫** (Algebraic curve), 必須用超越函數 (Transcendental function)表示的,叫超越曲綫;這就是曲綫的兩大類。二次以上代數曲綫及超越曲綫,總稱**高次平面曲綫** (Higher plane curves),其中所包很廣,理論漸深,本章只討論淺顯而重要的幾種,以示向上探求的興趣。

I 代數曲線

112. 心形綫　過圓周上O點,任意作OQ弦,引長到P,使QP恆等於圓半徑。這P點的軌跡與心臟的形狀相似,所以叫做**心形綫**(Cardioid)。



設 C 爲圓心, r 爲半徑,圓周上 O 點爲極點,在 O 點的切綫爲極軸, (ρ,θ) 爲 P 點的極坐標,如圖,

$$OP=OQ+QP。$$

但 $$OP=\rho,\ QP=r。$$

$$OQ=OD\cos QOD=OD\sin XOQ=2r\sin\theta。$$

故得 $$\rho=2r\sin\theta+r,$$

卽 $$\rho=r(1+2\sin\theta)。$$

上式若換用直角坐標,便成

$$(x^2+y^2-2ry)^2=(x^2+y^2)r^2。$$

可知心形綫是四次式代數曲綫的一種。這曲綫可以用來解任意角三等分問題——幾何三大難題之一。

113. <u>蚌綫</u>　一直綫繞定點 O 旋轉,交定直綫MN於 Q 點,在OQ上取綫段QP等於定長。這 P 點的軌跡像蚌類形狀,所以叫做蚌綫(Conchoid)。

設 a 表 O 到定直綫MN的距離, b 表定長綫段。以定點 O 做極點,平行於MN的 OX 綫做極軸, (ρ,θ) 做 P 點的坐標。如圖,

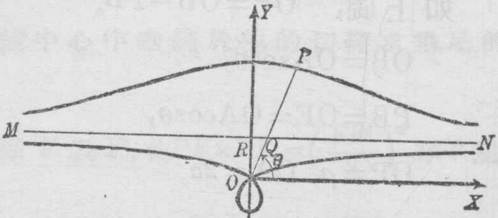
$$OP=OQ+QP。$$

但$OQ=OR\csc\theta$,

$OP=\rho, OR=a$,

$QP=b$。

$\therefore\ \rho=a\csc\theta+b$。

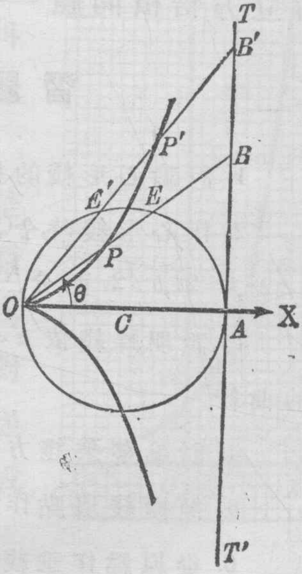


若以MN及OY做 x 軸及 y 軸,他的方程式是

$$x^2y^2=(y+a)^2(b^2-y^2)。$$

可知蚌綫也是四次式代數曲綫的一種,並且也可以用來解三等分任意角的問題。

114. <u>蔓葉綫</u>　在定圓直徑 OA 的一端 A 作切綫 TT′, 又從他端 O 任作一割綫,交圓周及切綫於 E 及 B 兩點。當割綫繞 O 點旋轉時取OP恆等於EB。這 P 點的軌跡形狀與蔓生植物的葉相像,所以叫做蔓葉綫 (Cissoid)。



設直徑OA等於 $2a$,極點在O 點,極軸OX與直徑OA相合,(ρ,θ) 是 P點的坐標。

如上圖, $OP=OB-PB$.

但 $OB=OA\sec\theta$,

$PB=OE=OA\cos\theta$,

$OP=\rho$, $OA=2a$。

所以 $\rho=2a\sec\theta-2a\cos\theta$,

即 $\rho=2a\tan\theta\sin\theta$。

他的直交軸方程式是

$$x^3=(2a-x)y^2,$$

屬於三次式代數曲綫的一種。這曲綫可以用來解立方倍積問題——幾何三大難題之一。

習題四十三

1. 討論心形綫的極方程式:

2. 作心形綫時,令QP等於任意綫段 b,說明曲綫依 $b<2r, b=2r, b>2r$ 而分三種不同形狀。

3. 說明蚌綫依 $a<b, a=b, a>b$ 可分三種不同形狀的曲綫。

4. 討論蔓葉綫方程式。

5. 從拋綫頂點作垂綫於他的切綫,求垂足的軌跡。

6. 從原點作垂綫於拋綫 $x^2=2p(y+p)$ 的切綫,求垂

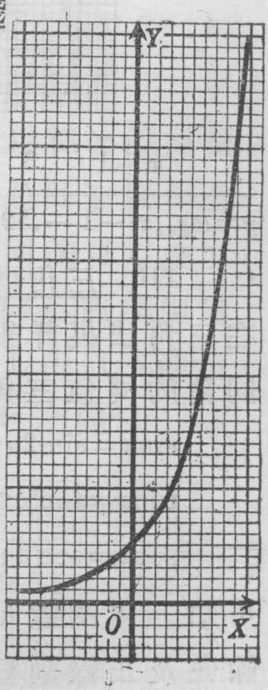
足的軌跡。

7. 從正雙曲綫中心作垂綫於他的切綫,求垂足的軌跡。

8. 設有兩定點 F 及 F′, 使 $PF \times PF' = \left(\frac{FF'}{2}\right)^2$, 求 P 點的軌跡。

II 超越曲線

115. <u>指數曲綫和對數曲綫</u>



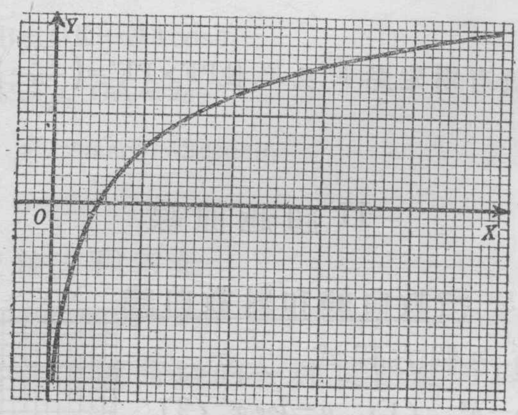
設有兩個方程式

$y = b^x$, (1) $y = \log_b x$。(2)

(1)式叫做指數方程式,(2)或叫做對數方程式。這兩式可改記爲 $x = \log_b y$, $x = b^y$。

所以指數函數與對數函數是互爲逆函數。b 叫做對數底,原可以大於 1 的任何數,現在爲簡便起見,乃取 $b = 10$,就是常對數 (Common logarithm) 的底。各從方程式求 x, y 的對應值,列成一表,再依表各作曲綫。

x	$-.8$	$-.6$	$-.4$	$-.2$	0	.2	.4	.6	.8	1
$y=10^x$	.16	.25	.4	.63	1	1.58	2.51	3.98	6.31	10



x	.1	.3	.5	.7	.9	1	3	5	7	9	10
$y=\log_{10}x$	-1	$-.52$	$-.30$	$-.15$	$-.05$	0	.48	.70	.85	.95	1

116. 三角函數曲綫　三角函數的性質,已在三角法裏詳細講過,無論 n 代表什麼整數,不同角的同值三角函數,恒有下面的關係:

$$\sin x=\sin(2n\pi+x),\qquad \cos x=\cos(2n\pi+x),$$

$$\tan x=\tan(n\pi+x),\qquad \cot x=\cot(n\pi+x),$$

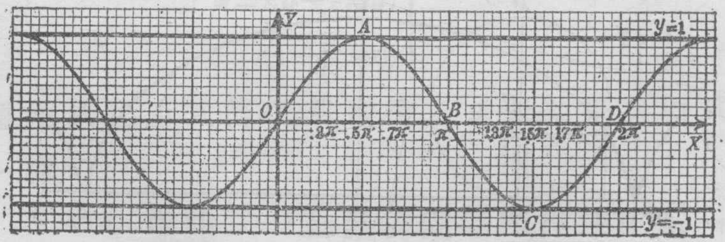
$$\sec x=\sec(2n\pi+x),\qquad \csc x=\csc(2n\pi+x)。$$

可知三角函數是有週期性(Periodicity)的函數。正餘弦及正餘割經過週期(Period) 2π,正餘切經過

週期 π,函數的值循環不止的重複。因此研究三角函數曲綫,求出一個週期內各角的函數值,便能決定曲綫的形狀。譬如從方程式 $y=\sin x$,先設 x 的值從 0 起到 2π,遞差 $\frac{1}{10}\pi$,當做曲綫上點的橫坐標。再查正弦表,得 y 的對應值,當做縱坐標。因爲 $\sin x=-\sin(\pi+x)$,所以 π 到 0 的正弦值加上負號,便是 π 到 2π 的正弦值。

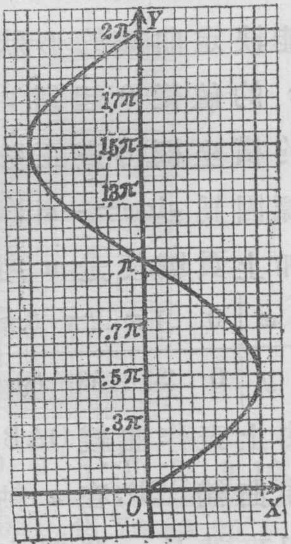
x	0	$.1\pi$	$.2\pi$	$.3\pi$	$.4\pi$	$.5\pi$	$.6\pi$	$.7\pi$	$.8\pi$	$.9\pi$	π
y	0	.31	.59	.81	.95	1.00	.95	.81	.59	.31	0

由上表作曲綫 OAB,在 x 軸上側。再從 y 的負值,作曲綫 BCD,在 x 軸下側。兩曲綫是同形反向,合起來就是一週期的正弦曲綫。用同法可以在 y 軸右側或左側,連續作無限數的同形曲綫。因爲正弦的極大及極小值是 $+1$ 及 -1,所以下圖中正弦曲綫恆在兩直綫 $y=1$, $y=-1$ 之間。



其他三角函數都可仿此畫出各曲綫。

117. <u>逆三角函數曲綫</u>



$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ $\tan^{-1}x$等,叫做逆三角函數。

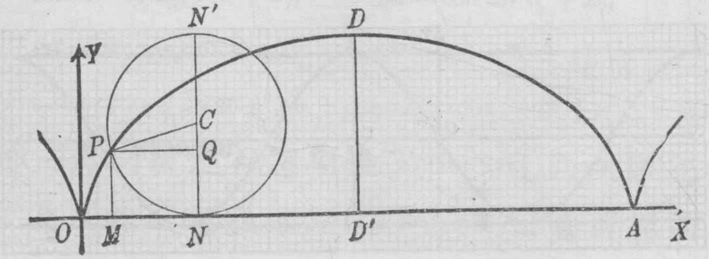
設 $y=\sin^{-1}x$, $y=\tan^{-1}x$。

就是 $x=\sin y$, $x=\tan y$。

所以逆三角函數曲綫,關於週期、範圍、形狀等,都與三角函數曲綫完全相同,不過兩軸互易罷了。右圖是逆正弦曲綫圖。

118. <u>擺綫</u> 一動圓沿定直綫旋轉,這圓周上一定點的軌跡叫做擺綫(Cycloid)。

設C爲圓心,r爲半徑,P爲圓周上一定點



x 軸爲定直綫。C 圓開始旋轉時,令 P 點與原點 O 相合,等到旋轉一周,P 點過 x 軸於 A,即成一擺綫ODA。那OA的長等於圓周,就是 $2\pi r$,叫做擺綫底(Cycloidal base)。DD′是底的中點垂綫,等於圓的直徑,就是 $2r$,叫做擺綫軸(Cycloidal axis)。如果 C 圓再旋轉一周,又成一個擺綫,與第一個全同.

如圖,C 圓旋轉到NPN′位置,

$$OM=ON-MM=ON-PQ。$$

設 (x,y) 爲 P 點的坐標, $OM=x$,

$ON=PN$ 弧 $=r\text{vers}^{-1}\dfrac{NQ}{r}=r\text{vers}^{-1}\dfrac{y}{r}$,

$PQ=\sqrt{NQ\times QN'}=\sqrt{y(2r-y)}$。

$$\therefore\ x=r\text{vers}^{-1}\frac{y}{r}-\sqrt{y(2r-y)}。$$

這是擺綫方程式。如果增加一個變數,令 $\angle PCN=\theta$, 則

$ON=PN$ 弧 $=r\theta$, $\quad PQ=r\sin\theta$, $CQ=r\cos\theta$。

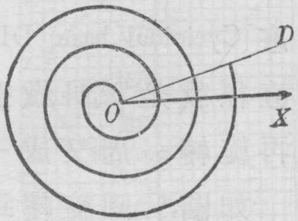
$$\therefore\ \left.\begin{aligned}x&=r(\theta-\sin\theta)\\ y&=r(1-\cos\theta)。\end{aligned}\right\}$$

這兩式比上式簡便,其實消去 θ 後,結果與原式一樣。

119. <u>螺綫</u> 一動點依固定條件運動於一

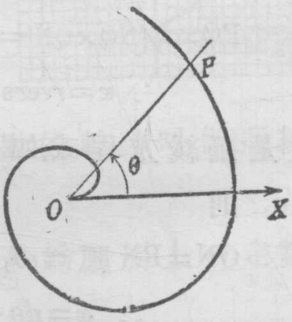
直綫上,這綫以等速度繞一端旋轉,那動點的軌跡叫做螺綫 (Spiral)。

如圖,直綫OD以等速度繞 O 點旋轉,綫上動點 P 依固定條件向外或向內運動,直綫旋轉一周,成一匝螺綫(Spire),旋轉兩周,成二匝,照此類推。



螺綫的通式是 $\rho=a\theta^n$, 隨 n 值變動而成種種不同形狀。譬如 $n=1$, 就是**亞基默特螺綫**(Archmedes spiral), 他的定義如下:

一直綫以等速度繞極點,動點在這綫上也以等速度從極點向外運動,就是動徑與變角成正比例。



設 $P(\rho,\theta)$爲曲綫上任一點, a 是直綫繞極點 O 一周,動點在這綫上所行的距離, 2π 是繞極一周的旋轉量。

依定義, $\rho:a=\theta:2\pi$,即 $\rho=\frac{a}{2\pi}\theta$。

這是亞基默特螺綫的極方程式。

習題四十四

I. 討論下列各方程式:

(a) $y=\sin x$。 (b) $y=\tan x$。

(c) $y=\sec x$。 (d) $y=b^x$。

(e) $y=\log_a x$。 (f) $y=\sin^{-1}x$。

2. 作下列方程式的曲綫:

(a) $y=\cos x$。 (b) $y=\cot x$。

(c) $y=\csc x$。 (d) $y=\cos^{-1}x$。

(e) $y=\cot^{-1}x$ (f) $y=\csc^{-1}x$。

(g) $y=e^x$,e是納對數底。 (h) $y=\log_e x$。

3. 討論第二題裏各方程式。

4. 設擺綫的頂點在原點,擺綫軸爲 y 軸。求擺綫方程式。

5. 若動圓外切或內切於定圓而旋轉,則動圓周上一定點的軌跡,叫做外擺綫(Epicycloid)或內擺綫(Hypocycloid)。試證

$$x=(R+r)\cos\theta-r\cos\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta,$$

$$y=(R+r)\sin\theta-r\sin\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta;$$

及 $$x=(R-r)\cos\theta+r\cos\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta,$$

$$y=(R-r)\sin\theta-r\sin\left(\frac{R+r}{r}\right)\theta;$$

是外擺綫及內擺綫的方程式。R及 r 表示定圓及動圓半徑。