筭學教程講本

三角學

筭學教程講本巻之五

三角學

第一　第二教

總論

凡そ三角形を幾何學に於て論するか如く之を合成する所の六元中の三元を知り以て之を作る事を得るなり但し知る所の三元は能く其形を合成すへき者なるか或は一元は他の二元より成らさる者なり

故に三邊を知るとも其一邊他の二邊の和に等しきか或は之より大なる時は三角形を作る能はす又三角を知るとも三角形を決定する能はす其故は三角の關係に因れは三角を知るは惟二元を知るに等しけれはなり而して此の如き

問題は不定なる者なり圖上に於て三角形を作るの法は概畧の者に非されは之を求むる能はす因て之に代ふるに數上の計算を以てし此法は欲する所に從て精密の者を得るなり

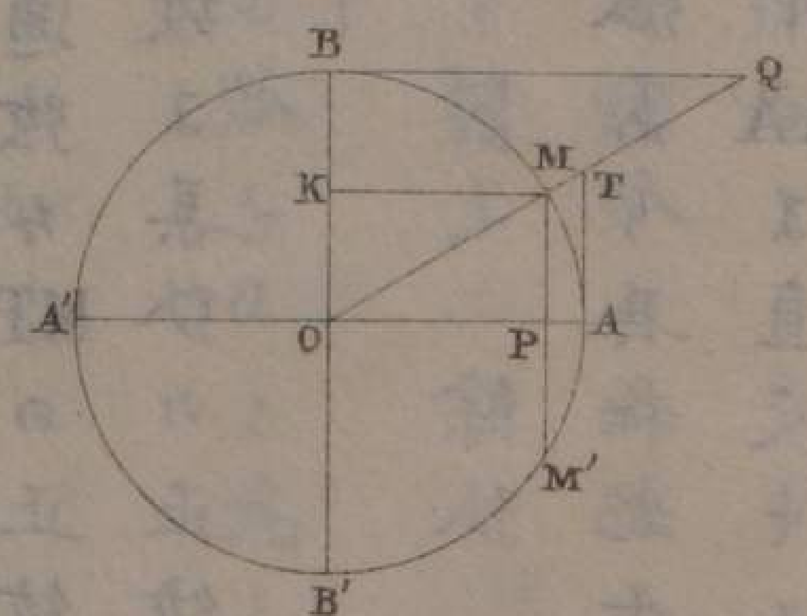
三角學は知る所の者を以て三角形の諸分を計算するの法を論するを趣旨とし又之を三角形の解法といふ

三角學は八線と名くる所の線を以て角に代へて其目的を達する者なり但し其線は角と比例を為す者に非らす然れとも角に關係する所の計算に於ては簡便の方法を以て其角を顯す事に適當するなり

弧の八線の定說

第一圖任意の半径を以て作れる圓周あり其上にAMの弧を設け此一端のMより他の一端のAを過くるOAの半径上にMPの垂線を作る時は之をAMの弧の正弦と謂ふ

又AMの弧の一端のAより無限の切線を作り他の一端のMを過くるOMの半径の引長線とAの點の間に在るATの一分をAMの弧の正切と謂ふ



又正切の一端と中心の間に在る半径の引長線のOTの一分をAMの弧の正割と謂ふ

AMの弧をaと為し正弦正切及ひ正割を*sin.* *tang.* *sec.*にて示す時は左の如し

$$MP = \sin a$$

$$AT = \tan a$$

$$OT = \sec a$$

又MPの正弦を引長して圓周とM'の點に遇はしむる時はMM'の通弦はMPの正絃の二倍にしてMAM'の弧はAMの弧の二倍なり故に其弧の正絃は其二倍の弧にて張る所の通弦の半に等し

餘弧

二弧あり其和九十度に等しき時は彼を此餘弧と謂ふ

若しAA'は直交するBB'の中径を作る時はBMの弧はAMの弧の餘弧なり

BMの餘弧の正弦正切及び正割をAMの弧の餘弦餘切及び餘割と謂ふ

AMの弧をaと為し餘弦餘切及び餘割を$\cos.$ $\cot.$ $\operatorname{cosec}.$にて示す時は左の如し

$$MK = \cos a$$

$$BQ = \cot a$$

$$OQ = \operatorname{cosec} a$$

又一般に示す所の式は左の如し

$$\cos a = \sin(90^\circ - a)$$

$$\cot a = \tan g(90^\circ - a)$$

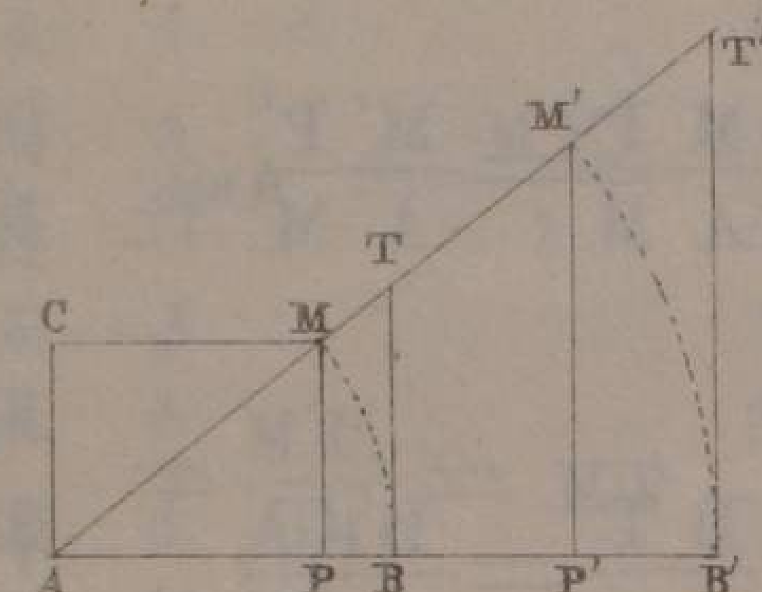
$$\mathrm{cosec}\, a = \sec(90^\circ - a)$$

MKの餘弦はPOに等し故に餘弦は正弦の底と中心の間に在る半径の一分に等し

又弧の一端と正弦の底の間に在るAPの距離をAMの弧の正矢と謂ひ而してBKを餘矢と謂ふ但し其二線は此書中之を用ひす

八線は其線と半径の比なりと注意せる事

角の八線



(第二圖)Aの一角あり其二邊の間にはBM B'M'等の無數の弧を作る事を得而して其正弦は各不等なる者なり故に角を知りて決定すへき者は弧の正弦に非らすして弧の正弦と半径の比なり其故は相似の三角形より$\frac{MP}{AM}=\frac{M'P'}{AM'}$の式を得て即ち角に容る弧の正弦と半径の比は常數なれはなり是を以て角を知れは其比を求むる事を得又之を反言せる事を得るなり

設使は其比を三分の二と為せる時はAの角を作る事を得るなり其法は任意の半径を以てAB'の直線上にBMの弧を作り

Aの點よりABの上に半徑の三分の二に等しくACの曲線を作りAB'に平行してCMを作りBMの弧に交らしめ而してMABの角を作り以て求むる所の角を得るなり

前法は餘弦正切等にも亦之を施せる事を得るなり

故に計算に用ふる所の八線は其不名値に非らずして其半徑との比なりと注意せるなり即ち左の如し

$$\sin A = \frac{MP}{AM} = \frac{M'P'}{AM'}$$

$$\mathrm{tang}\,A = \frac{BT}{AB} = \frac{B'T'}{AB'}$$

etc.

此比を計算に用ふるには八線を定むる所の圓形の半徑を一とせるを可とし其故は諸線の値は半徑との比に同しくなればなり即ちAMの半徑を一と為せる時は左の如し

$$\sin A = \frac{MP}{1}$$

$$= \frac{M'P'}{AM'} = MP$$

$$\mathrm{tang}\,A = \frac{BT}{1}$$

$$= \frac{B'T'}{AB'} = BT$$

etc.

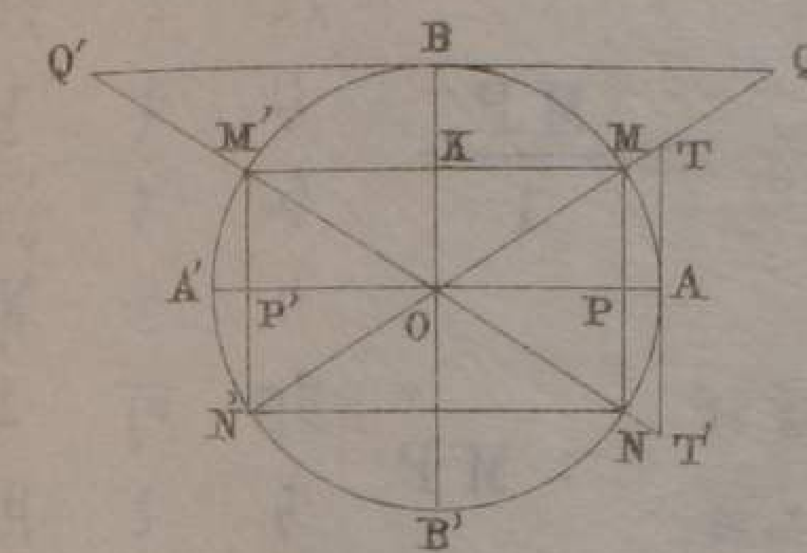
此法は角の八線即ち其角に容る諸弧の八線と半徑の比に施せる事を得るなり而して其比は同一に歸し即ち半徑を一と為して測る所の諸線の數なり

是より以下は弧の諸線をして之に應せる角の諸線と為さしめんか為めに半徑を一と定む而して設使は某弧の正切を

以て之を論ずる時は真線に非ずして二線の比なりと會得せるなり

八線の變化

反對の方向を示せる正負の用法



(第三圖)

半径を一と為せる所の圓形あり一遊點を設け原點と名くるAの一點より之を圓周上に運動せしむる時は變化せる所の弧を生じ而して遊點ABA'の方向に運動せる時は其弧を正と為し又之に反してAB'A'の方向に運動せる時は其弧を負と為せ

正弦

角の八線は其角に關係して倶に變化し故に之を圓函數と謂ふ

若し遊點Mに至る時はMPはAMの弧の正弦にして又AOMの角の正弦なり

弧0°より90°に至るまでは正弦は零より増大して其極大の1に至る迄變化し又弧90°を過ぎて180°に至るまでは正弦はまた前と同じ値を以て復歸し即ち1より減小して0に至るまで變化せるなり

弧180°より小なる時は正弦はOBの上に於て之を測り之を正と為し又弧180°を過ぎて遊點N'に至りABN'の弧を為せる時はN'P'の正弦は反對の方向即ちOB'の上に於て之を測り之を負と

為す而して弧270°に至る時は正弦は極小にして即ち-1なり故に正弦は中心より起りてBB'の中径上に於て之を測り而してOBに在りては正にしてOB'に在りては負なりAMの弧30°に等しき時はMPの正弦は60°の弧のMNの弦の半にして即ち圓形に内容する正六角形の一邊の半なり故に $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ を得又AMの弧四十五度に等しき時はMPの正弦は圓形に内容する正方形の一邊の半なり故に $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ を得るなり

正切

正切はAの點より起りてTT'の無限切線上に於て之を測り而してATの方向に在るを正と為しAT'の方向に在るを負と為す故にAMの弧の正切は$+AT$にしてAM'の弧の正切は$-AT'$なり

弧0°より45°に至るまでは正切は0より増大して1に至るまで變化しAOMの角45°となる時はAOTは二等邊三角形を為すなり故に $\tan g\,45^\circ=1$ を得又弧45°を過る時は正切は更に増大し而して90°に近接する時は最大の値を有するに至るなり

又弧90°に達する時は正切を定むる所の半径はTT'に平行するを以て正切の長さ限る能はず之を無窮といふ

又弧90°を過ぐる時は正切は不名値に於ては最大なる所の負の値を有し180°に至りて再ひ0となるなり

故ニ正切ハ0°と180°の間ニ於て−∞より+∞ニ至るまての凡ての値を有し即ち正或ハ負の如何なる數を設くるとも0°より180°の間ニ於て之を正切とする所の角を得るなり

正割

若し遊点Aの点より起りてAMの弧を為す時ハOTの正割ハ中心より遊点の位置ニ向て半径を引長したる者なり之を正と為し又遊点M′ニ至りABM′の弧を為す時ハOT′の正割ハ中心より遊点の位置ニ反して半径を引長しなる者なり之を負と為す

弧0°より90°ニ至るまてハ正割ハ+1より増大して+∞ニ至り又弧90°より180°ニ至るまてハ正割ハ−∞より増大して−1ニ至るまて變化するなり

餘弧の原點

餘弧ハBを以て原點と為し而してBAB′の方向ニ在るを正と為し反對の方向ニ在るを負と為す故ニ90°より小なるAMの弧の餘弧ハ+BMニして90°より大なるABM′の弧の餘弧ハ−BM′なり

餘弦

餘弦ハ餘弧の正弦ニして中心より起りAA′の中径上ニ於て之を測り而してOAの方向ニ在るを正と為しOA′の方向ニ在るを負と為す餘弦も亦正弦ニ於るの如く−1より+1ニ至るまて變化するなり

餘切

餘切ハ餘弧の正切ニしてBの點より起りQQ′の切線上ニ於て之を測り而してBQの方向ニ在るを正と為し之ニ反して

BQ′の方向に在るを負と為す餘切も亦正切に於るが如く $-\infty$ より $+\infty$ に至るまで變化するなり

餘割

餘割は餘弧の正割にして中心より起り餘弧を為す所の遊點の位置に向て半径を引長する者を正と為し之に反して引長する者を負と為す

二並角の八線の關係

二弧或は二角あり其和百八十度に等しき時は彼を此並弧或は並角と謂ふ

（第三圖）AM の弧あり AA′ に平行して MM′ を作る時は A′M′ の弧は ABM′ の弧の並弧なり然るに A′M′ は AM に等しきを以て AM の弧も亦 ABM′ の弧の並弧なり

此二並弧に於て之を論ずるに MP M′P′ の正弦は同號にして相等しく OQ OQ′ の餘割は亦之に同じ又 OP −OP′ の餘弦は異號にして相等しく正切正割餘切は亦之に同じ此關係を示す式は左の如し

$$\sin(180^\circ-a)=\sin a$$

$$\cos(180^\circ-a)=-\cos a$$

$$\mathrm{tang}(180^\circ-a)=-\mathrm{tang}\,a$$

$$\cot(180^\circ-a)=-\cot a$$

$$\sec(180^\circ-a)=-\sec a$$

$$\mathrm{cosec}(180^\circ-a)=\mathrm{cosec}\,a$$

異號の二等弧の八線の關係

（第三圖）AM AN の異號の二等弧に於て之を論するにOPの餘弦は二弧俱に之を有しOT OT′の正割は同號にして相等しく又正弦正切餘切餘割は異號にして相等し此關係を示す式は左の如し

$$\sin(-a)=-\sin a$$

$$\cos(-a)=\cos a$$

$$\tan g(-a)=-\tan g\,a$$

$$\cot(-a)=-\cot a$$

$$\sec(-a)=\sec a$$

$$\operatorname{cosec}(-a)=-\operatorname{cosec} a$$

一角の八線の關係

一角の八線の關係を示すに五式あり

（第三圖）AMの弧をaと為す時はMOPの直三角形に於て左の式を得

$$MP^2+OP^2=OM^2$$

$$\sin^2 a+\cos^2 a=1 \quad (1)$$

此關係は正弦を知る時は餘弦を計算する事を得又之を反言すれは事を得るなり

又AOT MOPの相似三角形に於て左の式を得

$$\frac{TA}{MP}=\frac{AO}{OP}$$

$$tang\ a=\frac{\sin a}{\cos a} \qquad (2)$$

此關係は正切は正弦と餘弦の比なる事を示せる者なり

又其三角形に於て左の式を得

$$\frac{OT}{OM}=\frac{OA}{OP}$$

$$\sec a=\frac{1}{\cos a} \qquad (3)$$

此關係は正割は餘弦を以て一を除したる者に等しき事を示せる者なり故に正割は餘弦と同号なり

又BOQ MOKの相似三角形に於て左の式を得

$$\frac{BQ}{MK}=\frac{OB}{OK}$$

$$\cot a=\frac{\cos a}{\sin a} \qquad (4)$$

此關係は餘切は餘弦と正弦の比なる事を示せる者なり

又其三角形に於て左の式を得

$$\frac{OQ}{OM}=\frac{OB}{OK}$$

$$cosec\ a=\frac{1}{\sin a} \qquad (5)$$

此關係ハ餘割ハ正弦ヲ以テ一ヲ除シタル者ニ等シキ事ヲ示セル者ナリ故ニ餘割ハ正弦ト同号ナリ

以上ノ五式ハ角ノ大小ニ關ラス一般ニ八線中ノ一線ヲ知リテ同角ノ他ノ諸線ヲ計算スルニ用フル者ナリ

正切餘切ノ關係

第三圖AOT BOQノ相似三角形ニ於テ左ノ式ヲ得

$$\frac{AT}{BO}=\frac{OA}{BQ}$$

$$\frac{tang\ a}{1}=\frac{1}{cot\ a}$$

$$tang\ a\times cot\ a=1 \qquad (6)$$

此式ハ(2)(4)ノ二式ヲ相乘スルトキハ亦之ヲ得ルナリ

正切ノ函數ヲ用フル正弦餘弦ノ式

第三圖AOT MOPノ相似三角形ニ於テ

$$\frac{AT}{MP}=\frac{OT}{OM}$$

$$\frac{tang\ a}{sin\ a}=\frac{sec\ a}{1}$$

ヲ得又OATノ直

三角形ニ於て

$$OT = \sqrt{OA^2 + AT^2}$$

$$\sec a = \sqrt{1 + \tan g^2 a}$$

を得此二式より左の正弦の式を得

$$\sin a = \frac{\tan g\, a}{\sqrt{1+\tan g^2 a}} \quad (7)$$

$$\frac{\tan g\, a}{\sin a} = \frac{\sqrt{1+\tan g^2 a}}{1}$$

又其三角形ニ於て

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OM}{OT}$$

$$\frac{\cos a}{1} = \frac{1}{\sec a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\tan g^2 a}}$$

を得之より左の餘弦の式を得

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\tan g^2 a}} \quad (8)$$

活用

$\sin 30° = \frac{1}{2}$ は既に之を知るなり故に前の諸式を用ひて30°の弧の他の諸線を計算し並に60°の餘弧の諸線を計算する事左の如し

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30° = \tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \operatorname{cosec} 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} 30° = \sec 60° = 2$$

又 $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を知る故に45°の弧の他の諸線を計算する事左の如し

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

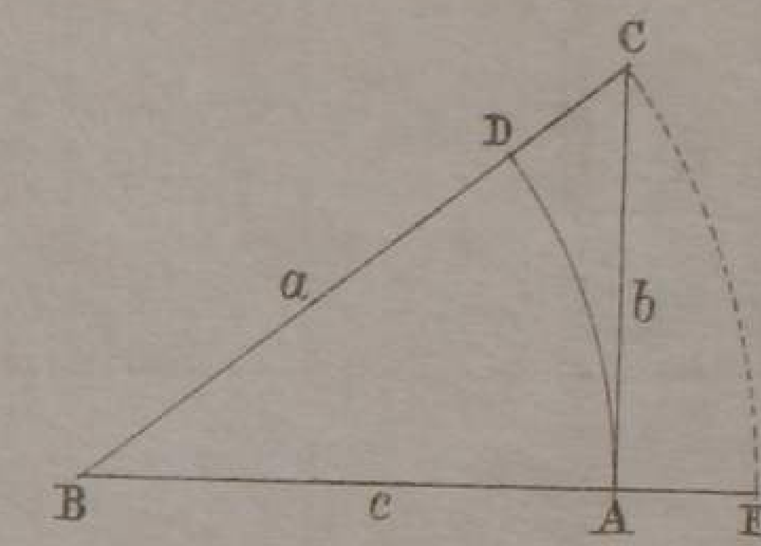
$$\tan 45° = \cot 45° = 1$$

$$\sec 45° = \operatorname{cosec} 45° = \sqrt{2}$$

第三款

直三角形或は斜三角形の邊角の關係

(第四圖)ABCの三角形ありAを直角と為せ三角形の三角を示せるにはABCを以てし相對せる三邊を示せるにはabcを以てし即ちaは斜邊なりBを中心と為しBCを半径と為してCEの弧を作る時はCAの弦線とBCの半径の比はBの角の正弦なり因て左の式を得



$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$b = a \sin B \quad (1)$$

又同法を以て左の式を得

c

$$C = a \sin C \quad (2)$$

故に直三角形に於て一鋭角の正弦は對邊と斜邊の比に等しく而して直角の一邊は對角の正弦を以て斜邊に乘したる者に等し

又BAの邊とBCの半径の比はBの角の餘弦なり因て左の式を得

Bを中心と為しABを半径と為してADの弧を作る時はACの正切とABの半径の比はBの角の正切なり因て左の式を得」

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

$$b = c \tan B \quad (1)$$

又同法を以て左の式を得

$$c = b \tan C \quad (2)$$

C

又同法を以て左の式を得

$$\cos B = \frac{BA}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$c = a \cos B \quad (3)$$

$$b = a \cos C \quad (4)$$

故に直三角形に於て直角の一邊を鄰角の餘弦を以て斜邊に乗じたる者に等し

故ニ直三角形ニ於テ直角の一邊ハ對角の正切を以テ直角の他の一邊ニ乘したる者ニ等し

推論　B C の二銳角ハ互ニ餘角なるを以テ

$$\tan B = \cot C$$

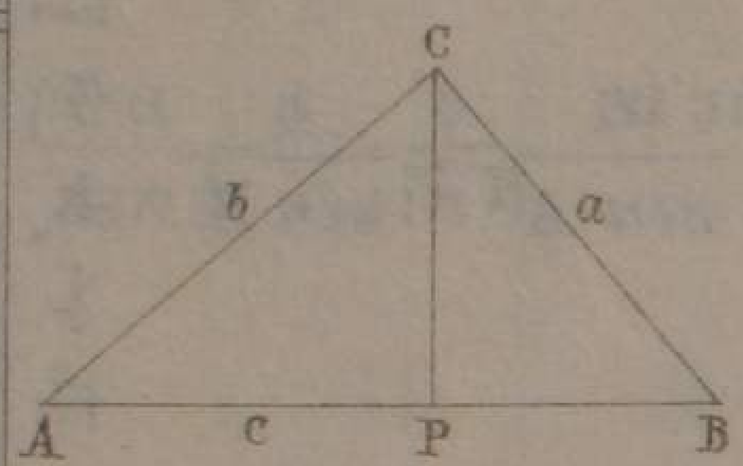
$$\tan C = \cot B$$

を得

此餘切を以テ前二式の正切ニ代ふる時ハ左の二式を得

$$b = c \cot C \quad (3)$$

$$c = b \cot B \quad (4)$$



故ニ直三角形ニ於テ直角の一邊ハ鄰角の餘切を以テ直角の他の一邊ニ乘したる者ニ等し

斜三角形ニ於テ三邊ハ各對角の正弦と比例を爲す事

（第五圖）ABC の三角形ありCの角頂よりABの對邊上ニCPの垂線を作る時ハ本形を分つて二個の直三角形と爲し各形ニ於てCPの邊ハ對角の正弦を以て斜邊ニ乘したる者ニ等し

因て

$$CP = b \sin A$$

$$CP = a \sin B$$

を得之より

$$a \sin B = b \sin A$$

を得化して左

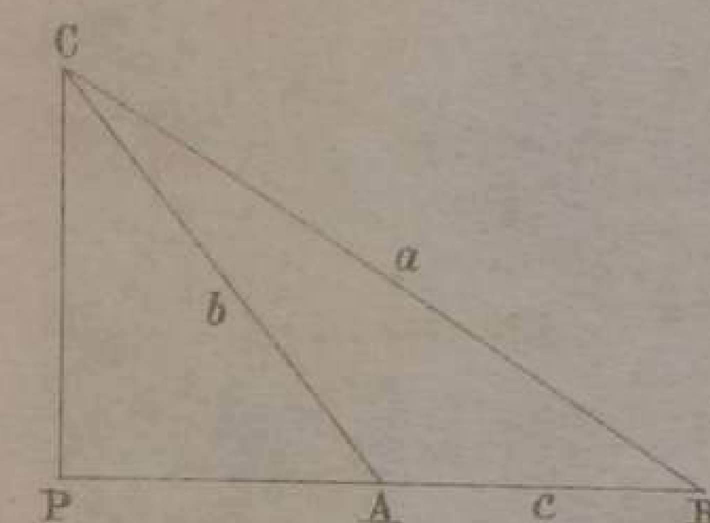
の比例式を得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

（第六圖）ABCの三角形ありAを鈍角と為す時はCPの垂線は三角形の外方に在り而してCPBの直三角形に於ては前に同しく

$$CP=a\ \sin B$$

を得又CPAの直三角形に於てはCAPの鋭角はABCの三角形のCABの鈍角の並角に



して其正弦は相同しきに因り亦前に同しく

$$CP=b\ \sin CAP$$

$$=b\ \sin A$$

を得之より

$$a\sin B=b\sin A$$

を得故に何れの時に於ても左の二個の比は相等し

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

又Aの點より對邊上ニ垂線を作る時ハ

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

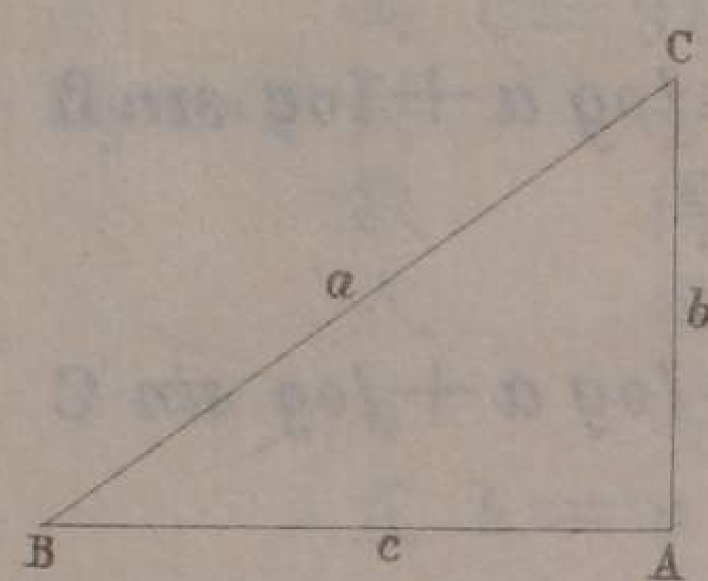
を得故ニ斜三角形ニ於て恒ニ左の式を得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

此三個の比の相等式ハ即ち此設論を生ずる者なり

第四教　直三角形の解法

（第七圖）直三角形ニ於て恒ニ直角を知るを以て一邊と一鋭角或ハ二邊を知る時ハ解法を行ふ事を得るなり但し知る所の二元中ニ斜邊を有すると或ハ有せざるとニ從て又各汲二種ニ分つ



故ニ直三角形の解法ニ四種あり

第一　aの斜邊及ひBの鋭角を知りてCの角及ひbとcの二邊を求むる事

此三角形を恒ニ作り得へき者なり

先つ $C=90°-B$ を得次ニ

$$b=a\sin B$$
$$c=a\sin C$$

の式ニ因て b c の二邊を定むるなり對數を以て之を計算する式は左の如し

$$\log b=\log a+\log\sin B$$

$$\log c=\log a+\log\sin C$$

第二 b の邊及ひ B の鋭角を知りて C の角及ひ a c の二邊を求むる事

此三角形は恒ニ作り得へき者なり

又 $C=90°-B$ を得次ニ $b=a\sin B$ 即ち

$$a=\frac{b}{\sin B}$$

の式ニ因て a の斜邊を定むるなり此對數式は左の如し

$$\log a=\log b-\log\sin B$$

又cの邊ハ

$$c=b\ tang C$$

或ハ

$$c=b\ cot B$$

の式に因て求むる事を得るなり

第三　aの斜邊及ひbの邊を知りてcの邊及ひBCの二角を求むる事

此三角形ハ $a>b$ なる時ハ作り得へき者なり

先つ

$$b=a\ sin B$$

即ち

$$sin B=\frac{b}{a}$$

の式に因てBの角を求むるなり此對數式ハ左の如し

$$log\ sin B=log\ b-log\ a$$

次に

$$C=90°-B$$

を得但し

$$cos\ C=\frac{b}{a}$$

の式に因れハ直にCの角を求むる事を得るなり又cの邊ハ

$$c=a\ sin\ C$$

の式に因て求むる事を得るなり

又直三角形の性質ニ因れバ

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(a+b)(a-b)}$$

即ち

$$\log c=\frac{\log(a+b)+\log(a-b)}{2}$$

を以て直ニcの邊を求むる事を得るなり

注意　aの斜邊とbの邊の差最小なる時ハ$\frac{b}{a}$の比ハ一ニ密近するなり故ニ角度を求むるニ

$$\sin B=\frac{b}{a}$$

$$\cos C=\frac{b}{a}$$

の式を用ふる時ハBハ九十度ニ近くCハ0度ニ近きを以て精密なる者を得る能ハす此時ニ於てハ正切を以て角度を定むるを可とす即ち

$$tang\, C=\frac{c}{b}$$

$$c=\sqrt{(a+b)(a-b)}$$

の二式より

$$tang\, C=\frac{\sqrt{(a+b)(a-b)}}{b}$$

又

$$\log tang\, C=\frac{\log(a+b)+\log(a-b)}{2}-\log b$$

を得以て之を計算するなり

第四　bcの二邊を知りてaの斜邊及ひBCの二角を求

むる事

先つ $\tan B = \dfrac{b}{c}$ 或は $\tan C = \dfrac{c}{b}$ の式に因てB或はCの角を計算するなり此對數式は左の如し

$$\log \tan B = \log b - \log c$$

$$\log \tan C = \log c - \log b$$

角を求め得る $b = a \sin B$ 即ち $a = \dfrac{b}{\sin B}$ の式に因て斜邊を計算するなり

此對數式は左の如し

$$\log a = \log b - \log \sin B$$

面積

直三角形の諸元を知る時は面積のSは $S=\dfrac{bc}{2}$ の式に因て求むる事を得るなり此對數式は左の如し

$$\log S = \log b + \log c - \log 2$$

活用

直三角形あり $b=591^{\mathrm{m}},13$ $B=41^\circ\,8'\,40''$ を以て他の諸分を計算する事左の如し

先つ 90° を化して $89^\circ\,59'\,60''$ と為し之よりBの角を減しCの角を得るなり即ち $C=48^\circ\,51'\,20''$ なり

aの計算

$$a=\frac{b}{\sin B}$$

$$\log a=\log b-\log \sin B$$

$$\log \sin B=\bar{1},81820$$

$$-\log \sin B=1-0,81820=0,18180$$

$$\begin{aligned}\log b&=2,77168\\ -\log \sin B&=0,18180\\ \hline \log a&=2,95348\\ a&=898^{m},42\end{aligned}$$

cの計算

$$c=b\,\mathrm{tang}\,C$$

$$\log c=\log b+\log \mathrm{tang}\,C$$

$$\begin{aligned}\log b&=2,77168\\ \log \mathrm{tang}C&=0,05857\\ \hline \log c&=2,83025\\ c&=676^{m},47\end{aligned}$$

第五數

三角形の一邊及ひ二角を知りて他の諸分並に面積を求むる事

設使はcの邊及ひA Bの二角を以て他の諸分を計算せんとす但し此三角形を知る所の二角の和180°より小なる時を作る事を得るなり

先つ

$$C=180°-(A+B)$$

の式に因て他の一角を得次に

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

即ち

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$

の式に因てaの邊を得又

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

即ち

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}$$

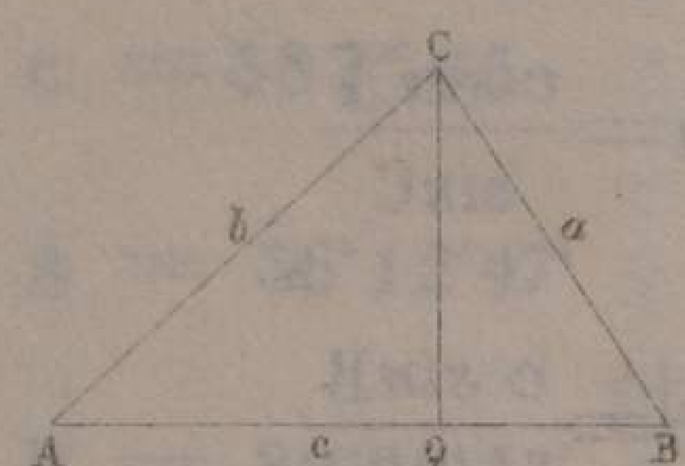
の式に因てbの邊を得るなり其對數式は左の如し

$$\log a = \log c + \log \sin A - \log \sin C$$

$$\log b = \log c + \log \sin B - \log \sin C$$

面積

第八圖ABCの三角形ありCの角頂より底の上にCQの垂線を作る時は其面積のSは$\frac{AB \times CQ}{2}$に等し然るにCAQの直三角形に



於て

$$CQ = b \sin A$$

を得因て

$$S = \frac{bc \sin A}{2}$$

を得

故に三角形の面積は二邊及ひ其間角の正弦の積の半に等し

又其式に於てbに代ふるに$\frac{c \sin B}{\sin C}$を以てする時は

$$S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

を得

此式は一邊と三角の函數を以て三角形の面積を求むる者

なり但し以上の二式を倶に對數を用ひて計算する事を得るなり

活用

三角形あり

$$c=587^{m},65$$

$$A=56^{\circ}12'47''$$

$$B=80^{\circ}39'43'$$

を以て之を解き並に面積を計算する事左の如し

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}$$

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}$$

$$S=\frac{c^2\sin A\ \sin B}{2\sin C}$$

計算の表

$$c=587^{m},65$$

$$A=56^{\circ}12'47''$$

$$B=80^{\circ}39'43'$$

$$180^{\circ}=179^{\circ}59'60''$$

$$A+B=136^{\circ}52'30''$$

$$C=43^{\circ}7'30''$$

$$\log c=2,76912$$

$$\log\sin A=\bar{1},91966$$

$$\log\sin B=\bar{1},99420$$

$$\log\sin C=\bar{1},83479$$

a の計算

$$\begin{aligned}\log c&=2,76912\\ \log\sin A&=\bar{1},91966\\ -\log\sin C&=0,16521\\ \hline \log a&=2,85399\end{aligned}$$

$$a=714^{m},48$$

b の計算

$$\begin{aligned}\log c&=2,76912\\ \log\sin B&=\bar{1},99420\\ -\log\sin C&=0,16521\\ \hline \log b&=2,92853\end{aligned}$$

$$b=848^{m},26$$

Sの計算

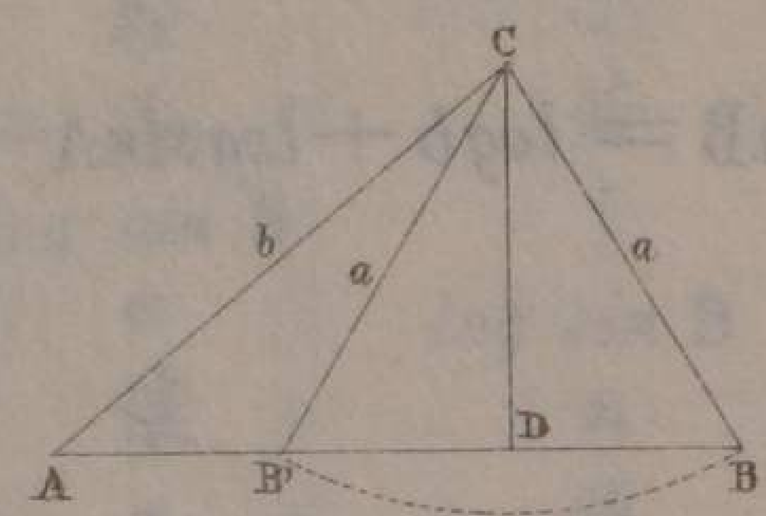
$$2\log c = 5{,}53824$$
$$\log\sin A = \bar{1}{,}91966$$
$$\log\sin B = \bar{1}{,}99420$$
$$-\log\sin C = 0{,}16521$$
$$-\log 2 = \bar{1}{,}69897$$
$$\log S = 5{,}31628$$

$$S = 207148^{m.car}$$

第六款

三角形の二邊及ひ一對角を知りて他の諸分並ニ面積を求むる事

設使ハaｂの二邊及ひaの邊ニ對する所のAの角を以て他のCの邊及ひBCの二角を計算せんとは



第九圖幾何學ニ因て知る所の角ニ等しくAの角を作り其一邊上ニ於てbニ等しくACを取り而してCを中心と為しaを半径と為して弧を作る時ハ此弧と他の一邊の交る處ハ即ち三角形の他の角頂を定むる者なり

若し其弧BB'の二點ニ交る時ハ二個の答解を有す蓋し一點より一直線上ニ二個の等しき線を作り得れハなり又其弧ABの邊ニ切する時ハ一個の答解を有し又其弧ABの邊ニ交らさる時即ちaの邊CDの垂線より小なる時ハ此問題ハ成らさる者なり

右の計算に於てハ先つ $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$ 即ち $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$ の式に因て b の邊に對する所のBの角を求むるなり此對數式ハ左の如し

$$\log\sin B=\log b+\log\sin A-\log a$$

Bの角の正弦ハ一より小なるを以て其對數ハ必ス負なり

故に若し $\log\sin B$ の値正なる時ハ此問題ハ成らさる事を知るなり

又即ち $\log\sin B$ の値正なる時ハ $a<b\sin A$ にして又CADの直三角形より $CD=b\sin A$ を得故に $a<CD$ を得是れ幾何學に因て説く所の者に合ス

若し $\log\sin B$ の値0なる時ハ $\sin B=1$ にして即ち $B=90°$ なり

又 $\log \sin B$ の値負なる時はBの角は二個の値を有し即ち一は表より得る所の鋭角にして一は其並角なり其故は二並角の正弦は相同しけれはなり

此二個の値は倶に用ふへきか或は表より得る所の鋭角のみを用ふへきかを論するに若し知る所のAの角鈍角なる時はBの角は鋭角に限れり

又 $A<90°$ なる時は $a>b$ 或は $a<b$ なる事あり

若し $a>b$ なる時は $A>B$ なるを以てBの角は鋭角のみを用ひ又

$a<b$ なる時は $A<B$ なるを以てBの角は鋭鈍倶に用ふる事を得是を二個の解法を有する者なり

Bの角を求め得は $C=180°-(A+B)$ の式に因てCの角を得又

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$$

即ち

$$c=\frac{a \sin C}{\sin A}$$

の式に因てcの邊を得るなり

二弧の解法を有する時は $C'=180°-(A+B')$ の式に因て他の三角形の C' の

角を得

$$\frac{c'}{\sin C'}=\frac{a}{\sin A}$$

即ち

$$c'=\frac{a\sin C'}{\sin A}$$

の式に因て c' の邊を得るなり

試検

（第九圖）二個の解法を有する時ハ

$$AD=b\cos A$$

を計算し而して

$$AD=\frac{AB+AB'}{2}=\frac{c+c'}{2}$$

に合するや否を試むへし或ハ BCB' の二等邊三角形に於て

$$BB'=2a\cos B$$

を計算し而して

$$BB'=c-c'$$

に合するや否を試むへし

面積

三角形の諸元を知る時ハ

$$S=\frac{bc\sin A}{2}$$

の式に因て第一の面積を得

$$S=\frac{bc'\sin A}{2}$$

の式に因て第二の面積を得るなり

活用

三角形あり

$$a=87^{m},45$$

$$b=98^{m},60$$

$$A=60^{\circ}25'30''$$

を以て之を解き並に面積を計算する事左の如し

此三角形に作り得へき哉否を試みんか為めにBの角を計算す但し作り得へき時に二個の解法を有せり其故に $A<90°$ $a<b$ なれはなり

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}$$

$$\begin{aligned}\log b &= 1{,}99388\\ \log\sin A &= \bar{1}{,}93937\\ -\log a &= \bar{2}{,}05824\\ \hline \log\sin B &= \bar{1}{,}99149\end{aligned}$$

$$B=78°41'40''$$

$$B'=180°-B=101°18'20''$$

$$C=180°-(A+B)=B'-A=40°52'50''$$

$$C'=180°-(A+B')=B-A=18°16'10''$$

$\log\sin B$ の値は負數を得るを以て此三角形を作り得へき事を決定し而して表よりBの鋭角を得此並角を以てB'の鈍角を得るなり

c の計算

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

$$\begin{aligned}\log a &= 1{,}94176\\ \log\sin C &= \bar{1}{,}81590\\ -\log\sin A &= 0{,}06063\\ \hline \log c &= 1{,}81729\end{aligned}$$

$$c=65^{m},66$$

c' の計算

$$c'=\frac{a\sin C'}{\sin A}$$

$$\begin{aligned}\log a &= 1{,}94176\\ \log\sin C' &= \bar{1}{,}49622\\ -\log\sin A &= 0{,}06063\\ \hline \log c' &= 1{,}49861\end{aligned}$$

$$c'=31^{m},52$$

Sの計算

$$S=\frac{bc\,\sin A}{2}$$

$$\begin{aligned} \log b &= 1{,}99388 \\ \log c &= 1{,}81729 \\ \log\sin A &= \bar{1}{,}93937 \\ -\log 2 &= \bar{1}{,}69897 \\ \hline \log S &= 3{,}44951 \end{aligned}$$

$$S=2815^{m.car},20$$

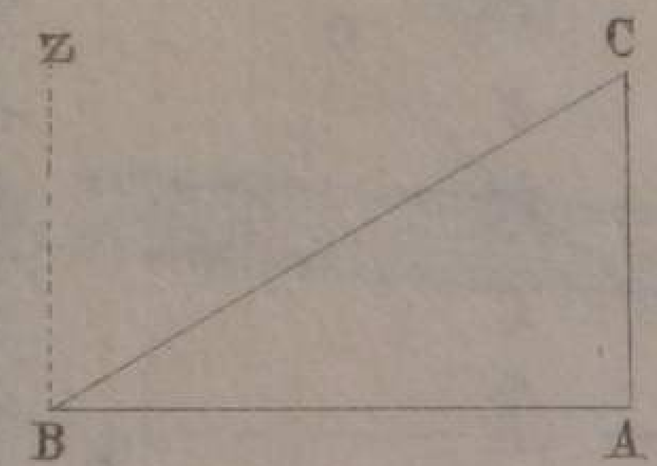
ACB′の面積も亦同法を以て計算せるなり

第七第八教

平面測圖の諸問題に於る三角學の活用

第一問題　鎖鏈を以て斜地の上に測る所の基線を平線に化し及び其二端の高低の差を計算せる事

(第十圖)斜地の上に $BC=658^{m},75$ の距離を測り次にBCの線と垂線の間角の $CBZ=84°8'$ を測りABの平線及びBCの二端の高低の差を求めんとに



CBZの角より $CBA=5°52'$ を定むる時はCBAの直三角形に於てBCの斜邊とBの鋭角を知る事を得故に $AB=BC\cos B$ 及び $AC=BC\sin B$ の式に因り對數を

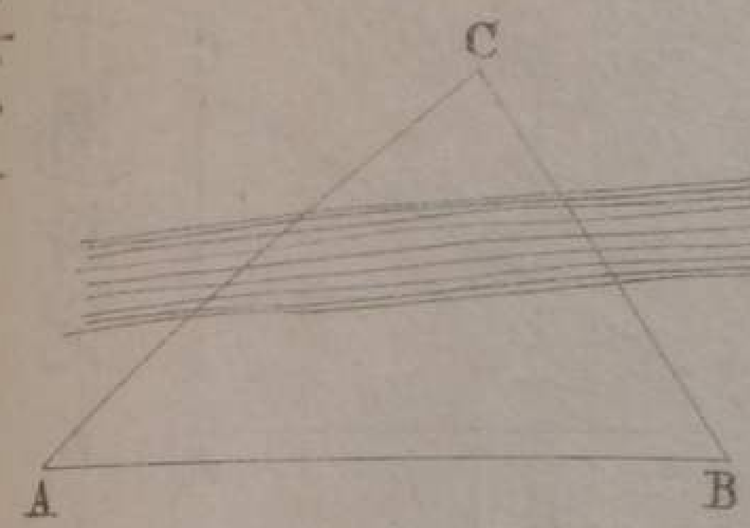
用ひて之を計算せる時は

$AB=655^{m},30$

$AC=67^{m},33$

を得るなり

一　第二問題　一點より近接し難き一點に至るまでの距離を定むる事



（第十一圖）Aの點より近接し難きCの一點に至るまでの距離を求めんとし但し其二點を相見るを得へき者なり

Aの點より起りてABの基線を精密に測り次にAC BCの二視線と基線とに為せる所のAB の二角を測るなり而して其基線を撰定せるには三角形の各角をして六十度の前後ならしむる事を注意すへし是に於てABCの三角形を一邊及ひ二角を知る故に先つCの角を求め而して

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$$

の式に因り求むる所のACを計算せるなり今

$AB=247^{m},49$

$A=62°41'$

$B=59°42'$

を以て計算せる時を

$C=57°37'$

$AC=253^{m},03$

を得るなり

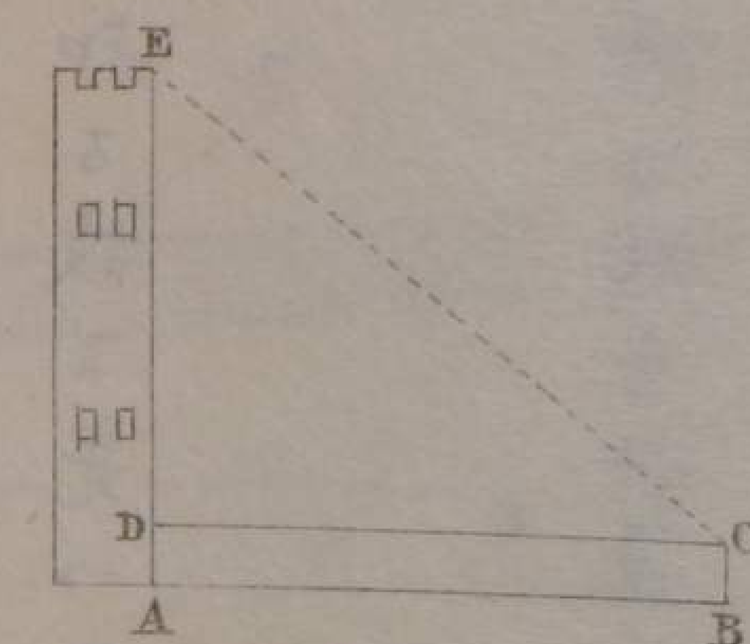
第三問題　底に近接せるを得へき所の塔の高さを測

る事

（第十二圖）塔の底より起りてABの基線を水平に測り其長をして聽測せるAEの高に等しからしめ而してBに測器を置きCEの覘線とCDの平線の間のDCEの角を測るなり是に於てDCEの直三角形ちDCの邊即ちABとCの鋭角を知る故に

$$DE = CD\ tang\ DCE$$

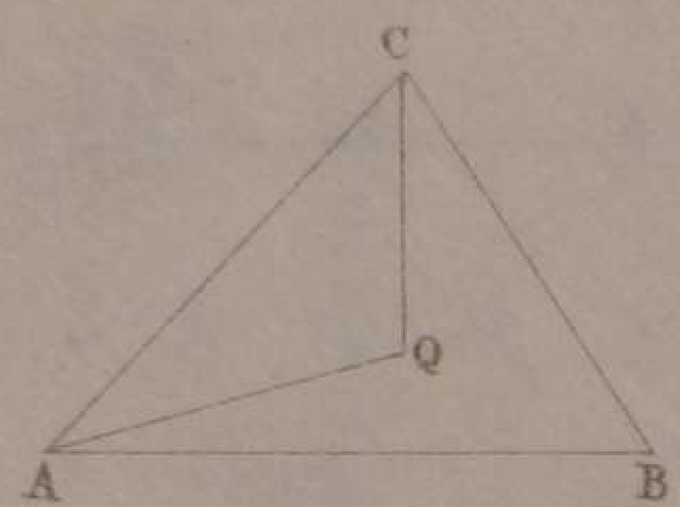
を得之に測器の水平より塔の底に至るまでのADの距離を加へ以てAEの塔の高さを得るなり但しAD即ちBCを直に測り得へき者なり



若しCDの平線Aの點の下に在る時はDEよりADを減し以て其高さを得るなり

第四問題　其地の水平上に於る山の高さを測る事

（第十三圖）Aの點を過くる平地の上に於るCの山頂の高さを求むるにはAの點より起りてABの基線並にCAB CBAの二角を測りABCの三角形に於てACの邊を計算し而してAQの平線とACの覘線の間のCAQの角を測る時はCAQの直三角形に於てACの斜邊とCAQの角を知る故に求むる所のCQの高さを計算せる事を得るなり

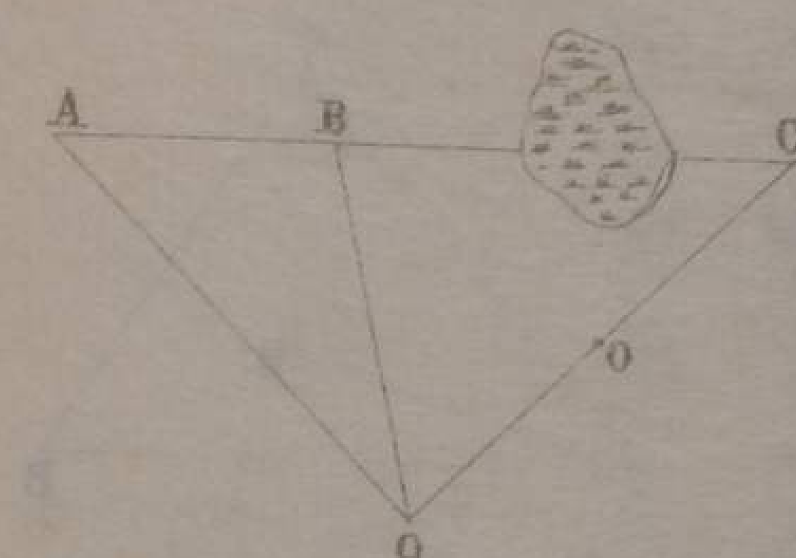


注意　此問題は屋背の高さを測るに活用せるなり

第五問題　望見を遮る所の障碍物を越へて一直線を

引長する事

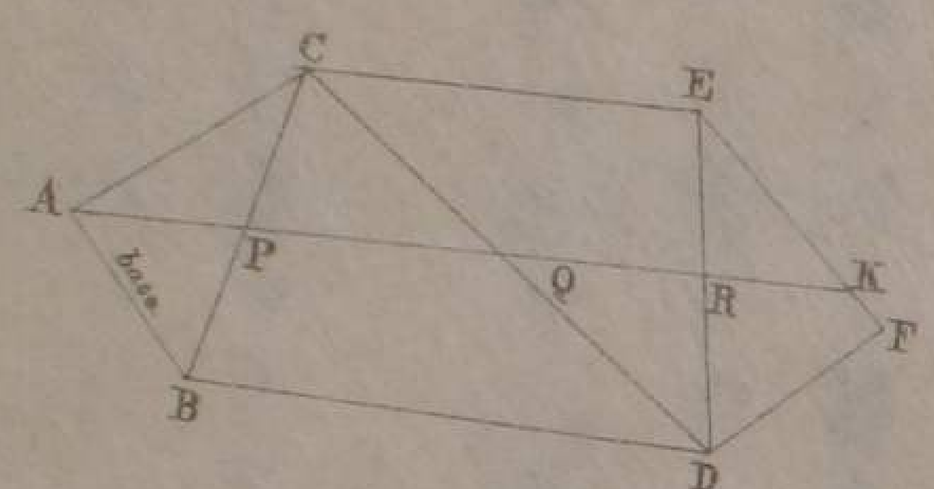
（第十四圖）ABの線あり望見を遮る所のMの障碍物を越へて之を引長せんとするにはABの直線とMの障碍物と及ひ引長線の達すへき地の一分とを望見すへき所にQの點を設けABの線及ひQABQBAの二角を測りABQの三角形に於てBQの邊を計算し次にQの點より障碍物を越へたる地の一分に向てQOの線を設けBQOの角を測り而してOQの線とABの引長線の交る所をCとなせる時はBQCの三角形に於てBQの邊及ひ二角を知る故にQCの邊並にQCBの角を計算する事を得て即ち此問題を解く者なり



第六問題　三角學に因り地上に於て線の長さを測る事

三角形の作法

（第十五圖）AKの線あり此長さを測らむとするには先つ精撰の直界尺を以てABの任意の基線を精密に測りABの二點よりAKの線の他傍に向てCの點を設けCAPCABABCの三角を測る時はABCの三角形を知る事を得而してACの邊に於てACBの角を計算する時はCAPの三角形に於てACの邊と二隣角を知る事を得APPCの二邊とPの角を計算する事を得るなり次にBCの二點よりDの點を設



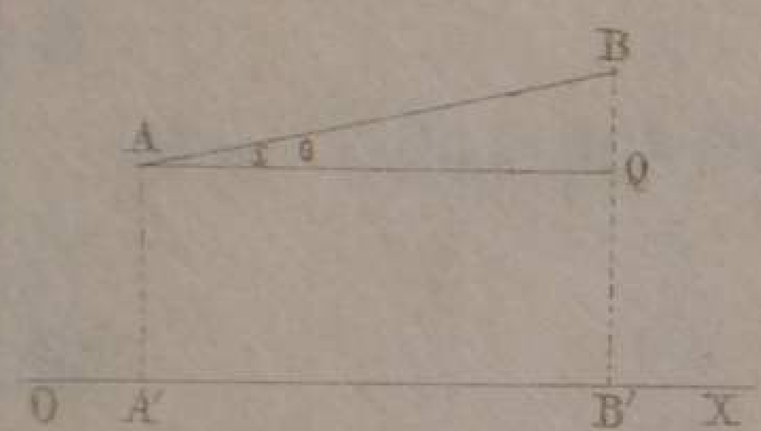
けてBCD CBDの二角を測る時ハDCの邊を計算する事を得又CPQの三角形ニ於てCPの邊と二隣角を知りPQ CQの二邊とQの角を計算する事を得るなり又同法を以て他のEの點を設くる時ハDQRの三角形を解く事を得るなり其故ハ $DQ=CD-CQ$ の邊と二隣角を知り得るなり逓次此の如くしてAP PQ QR等の諸分をもとめ其和を以てAKの長さを得るなり

圖根の作法

前題ニ示せるか如く逓次ニ公共の一邊を用ひ且つ測るへき一線ニ跨る所の諸三角形の綱形を作る者あり之を三角形の作法と謂ふ但し之を測るニハ一基線及ひ諸角ニ非されハ用ひす是れ最も精密を要せれハなり此法ハ圖根の作法ニ用ふる事を得即ち測るへき所の地ニ於て適宜ニ設けたるABC等の諸點の位置を精密ニ定め然る後其中間の諸點を設くる為めニ用ふる事を得るなり

第九教

畫形影



（第十六圖）平面上ニ於てABの直線及ひOXの軸あり其直線のABの二端より軸の上ニAA' BB'の垂線を作る時ハA'B'の軸の一分ハOXの軸ニ於るABの直線の畫形影なり
A'B'の畫形影ハ直線と軸の間ニ在るθの鋭角の餘弦を以てABの直線ニ乗したる

若ニ等し其故ハOXニ平行して AQヲ作る時ハABQの直三角形ニ於て

$$AQ = AB\cos BAQ = AB\cos\theta$$

ヲ得而して

$$AQ = A'B'$$

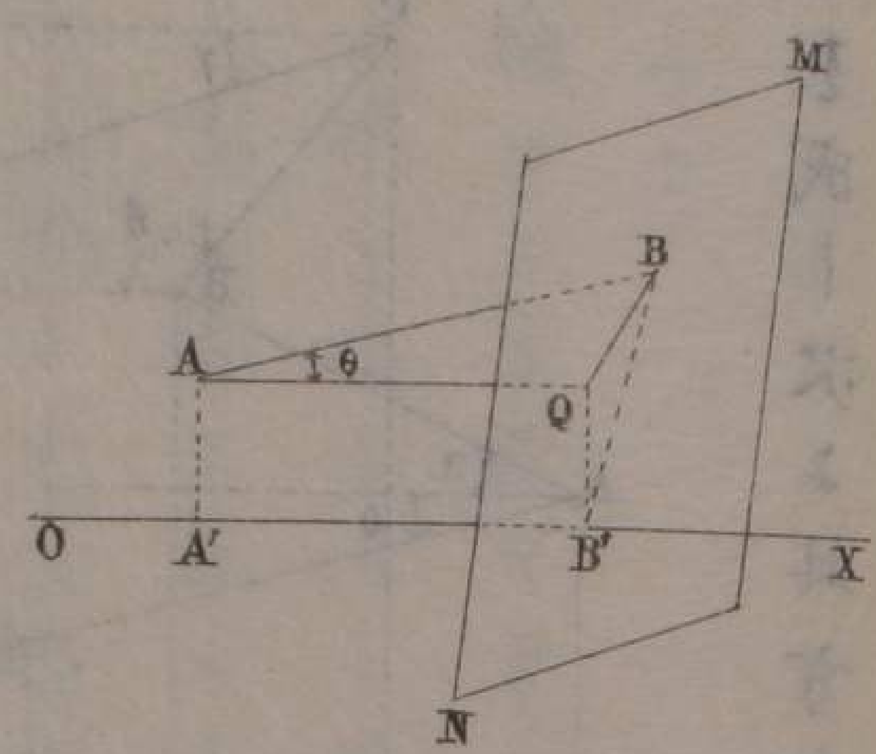
なる故

$$A'B' = AB\cos\theta$$

ヲ得れハなり

其設論ハ直線及ヒ軸ヲ同し平面上ニ有せさる者ニも亦用ふる事ヲ得るなり

(第十七圖) ABの直線のA Bの二端より軸ニ直交せる二平面ヲ作る時ハOXの軸ニ於るABの畫形影ハA'B'なり又軸ニ平行してMNの平面ニ達せるAQの線ヲ作りBQヲ聯合せる時ハABQの直三角形ニ於て



$$AQ = AB\cos\theta$$

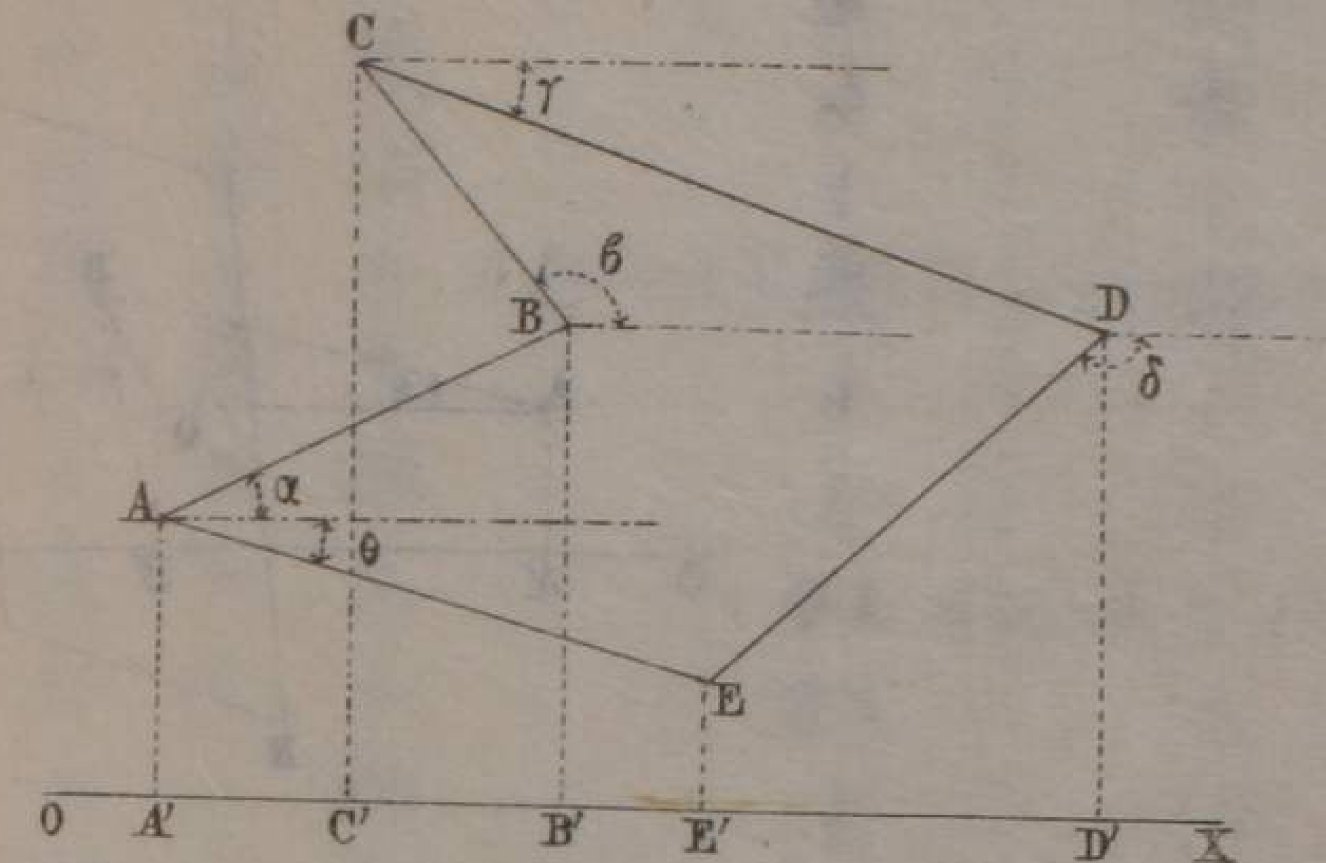
ヲ得但しθハ直線と軸の間の鋭角なり然るニAQ A'B'ハ平行二平面の間ニ在る平行線ニして相等し故ニ亦

$$A'B' = AB\cos\theta$$

ヲ得るなり

軸ニ於る多角形の周邊の畫形影

第十八圖 空間に於てAの點よりEの點に至れるABCDEの折線



あり一遊點を設け之をAよりEに至るまで折線上に行動せしむる時はOXの軸に於て其遊點の畫形影を得るなり

此畫形影は遊點折線の各邊を行動せるに從て相反せる二個の方向に行動す即ち遊點AよりBに至りBよりCD等に至る時は畫形影は先づ左方より右方に行動してA'B'の長さを成し次に此方向に反してB'よりC'に至り又先の方向に復してC'よりD'に至り又此方向に反してD'よりE'に至るなり

今軸の上に於てAの點より左方にmの任意の距離を測りOの點を設く但し此點を定むるに遊點の畫形影をして悉く其右方に在らしむるなり是に於て遊點の畫形影よりOの定點に至るまでの距離を測るに始めに其畫形影はA'の處に在りて之よりOの點に至るまでの距離はmなり而して其畫形影相反せる二個の方向に於てA'B' B'C' C'D' D'E'の長さを行動せる時は左方より右方に行動して生せる所の長さは其距離を增大せる故正にして又右方より左方に行動して生せる所の長さは其距離を減小せるを以て負なり故に終りに其畫形影はE'の處に在りて之よりOの點に至

るまでの距離を

$$m+A'B'-B'C'+CD'-D'E'$$

なり

又遊點AEの直線に從てAより直にEに至る時は其畫形影はA'E'の長さを爲し而して此長さは左方より右方に行動して生ずるを以て正なり故に終りには其畫形影は亦E'の處に在りて之より0の點に至るまでの距離は $m+A'E'$ なり因て左の式を得

$$m+A'E'=m+A'B'-B'C'+CD'-D'E'$$

二邊よりmを減し下の式を得

$$A'E'=A'B'-B'C'+CD'-D'E' \quad (1)$$

故に空間の一點より他の一點に至るまで遊點に因て生ずる所の折線ありて其遊點の畫形影一個の方向に行動して生ずる長さを正と爲し反對の方向に行動して生ずる長さを負と爲す時は折線の諸邊の畫形影の和は常數にして折線の二端を聯合する所の直線の畫形影に等し

若し其遊點多角形を生ずる時は其二端相合するを以て之を聯合する所の直線は０となり因て此畫形影も亦０となるなり故に左の論を得

某軸に於る多角形の諸邊の畫形影の和は恒に０に等し

設論の解式

折線の各邊の畫形影の長さ及ひ記號は其各邊と軸の間の鋭角或は鈍角の餘弦に因て容易に知る事を得るなり

（第十八圖）ABCDE の折線あり各邊と軸の間角を α β γ δ と為し AE の直線と軸の間角を θ と為せ但し其角は悉く正の畫形影の方向即ち OX の方向より測る者なり是に於て各邊及ひ直線の畫形影を測るに AB の畫形影の A'B' は α の角鋭角なる故 $AB\cos\alpha$ を以て長さ及ひ記號を知る事を得又 BC の畫形影の $-B'C'$ は BC と軸の間の鋭角の餘弦を以て $-BC$ に乗したる者に等し然るに其鋭角と β の並角とは異號にして相等しき故此角を以て彼角に代ふる時は亦 $BC\cos\beta$ を以て B'C' の長さ及ひ記號を知る事を得るなり而して負の畫形影を生ずる所の邊は軸と鈍角を為す事を注意する時は同法を以て

$$C'D' = CD\cos\gamma$$

$$-D'E' = DE\cos\delta$$

$$A'E' = AE\cos\theta$$

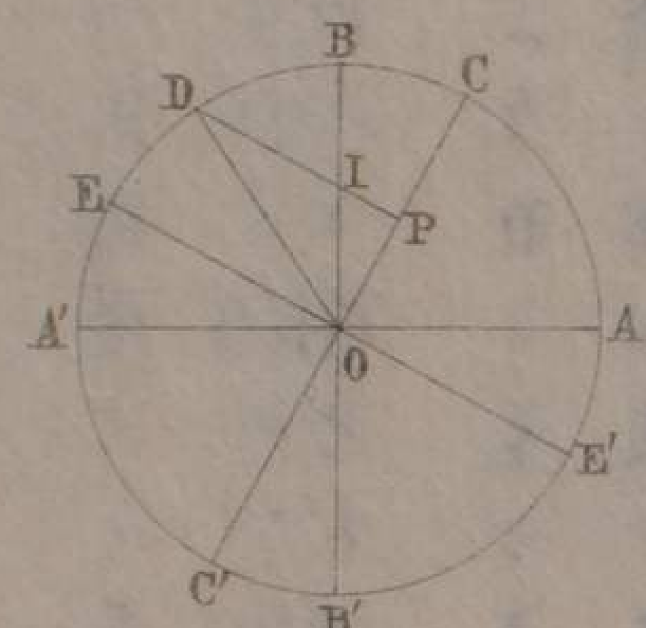
を得

此各の値を(1)式に用ふる時は左の式を得

故に多角形の一邊の畫形影は他の諸邊の畫形影の和に等し

二弧の正弦餘弦を知りて其二弧の和及ひ差の正弦餘弦を求むる事

(第十九圖)



知る所の二弧をa bと為し半徑を一と為せる所の圓周に於てAの原點よりaに等しくACを截取し其一端のCよりbに等しくCDを截取る但し其弧を測るには其正負に從て或はABA'の方向に於てし或は反對の方向に於てせるなり此の如くせる時はADの弧は即ち$a+b$なり又DよりCC'の中徑上にDPの垂線を作

$$AE\cos\theta = AB\cos\alpha + BC\cos\beta + CD\cos\gamma + DE\cos\delta \quad (2)$$

る時は此線は $\sin b$ にしてD點CA'C'の半圓周上に在れば正なり
CA'C'の半圓周上に在れば負なり又OPの距離は $\cos b$ にしてP點
OCの上に在れば正なりOC'の上に在れば負なり
OよりDに至るまでODの直線及びOPDの折線あり今A'Aの軸
に於る此二線の畫形影を測るにA'Aの方向を正と為し且つ
其方向より諸角を測る時は軸に於るODの直線の畫形影は

DOA

$OD \cos \cancel{DAO} =$
$OD \cos(a+b)$
にして
$OD=1$
なる故
$\cos(a+b)$
なり

又遊點OPDの折線上に行動する時はOP PDの二分の畫形影を

得而してOAの軸に於るOPの一分の畫形影は恒に $\cos b \ \cos a$ なり其
故はOAの軸とOCの間の角を a にして $\cos b$ はOPの距離OCの上
に在る時は正となりOC'の上に在る時は負となればなり又

OAに於るPDの一分の畫形影は恒に
$\sin b \cos(90°+a)$
なり其故はOCに直立

してOEを作る時はOAの軸とPDに平行する線の間の角は $90°+a$

にして $\sin b$ は PD の垂線 OE の上に在る時は正となり OE′ の上に在る時は負となれはなり

又其弧の餘弦は餘弧の正弦に等しく且つ $90°+a$ の餘弧は $-a$ に等しきを以て

$$\cos(90°+a) = \sin(-a) = -\sin a$$

を得故に PD の一分の畫形影は又恒に $-\sin a \sin b$ に等し

是に於て OD の直線の畫形影は OPD の折線の畫形影に等しき事を注意する時は左の式を得

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (1)$$

此式はabの正負大小に關らず一般に用ふべき者なり因て其式中bに代ふるに−bを以てする時は

$$\cos(a-b)=\cos a\cos(-b)-\sin a\sin(-b)$$

を得

$$\sin(-b)=-\sin b$$

$$\cos(-b)=\cos b$$

なる故化して左の式を得

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\qquad(2)$$

又(1)式中aに$90°$を加ふる時は

$$\cos(90°+a+b)=\cos(90°+a)\cos b-\sin(90°+a)\sin b$$

を得而して$90°+a+b$の餘弧は$-(a+b)$にして$90°+a$の餘弧は$-a$なる故

$$\cos(90°+a+b)=\sin-(a+b)=-\sin(a+b)$$

$$\cos(90°+a)=\sin(-a)=-\sin a$$

$$\sin(90°+a)=\cos(-a)=\cos a$$

なり故に

$$-\sin(a+b)=-\sin a\ \cos b-\sin b\ \cos a$$

を得各

項の記号を變して左の式を得

$$\sin(a+b)=\sin a\ \cos b+\sin b\ \cos a \qquad (3)$$

又此式中bに代ふるに−bを以てする時は

$$\sin(a-b)=\sin a\ \cos(-b)+\sin(-b)\ \cos a$$

を得化して左の式を得

又(3)式を(1)式に於るが如く圖上に於て直に求むる事を得るなり即ちOBの軸に於るODの直線及びOPDの折線の畫形影を測り而してOBの方向より諸角を測る時はODの直線の畫形影を $OD\cos DOB$ にして $DOB=a+b-90^\circ$

$\cos DOB=\cos(a+b-90^\circ)=\cos(90^\circ-(a+b))=\sin(a+b)$

$OD=1$ なる故 $\sin(a+b)$ なり又 OP の一分の畫形影を $OP\cos POB=\cos b\cos(90^\circ-a)=\cos b\sin a$ 又 DP の一分の畫形影を $DP\cos DIB=\sin b\cos a$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a \quad (4)$$

以上の四式は即ち本題を解く者なり

なり但しDIB COAの二角は各邊互に直立せる故相等し是に於てODの直線とOPDの折線の畫形影は相等しき事を注意せる時は左の式を得

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$

此式も亦他の三式に化せる事を得るなり

二弧の正切を知りて其二弧の和及ひ差の正切を求むる事

設使は $\tan g\,a$ $\tan g\,b$ を以て $\tan g(a+b)$ 及ひ $\tan g(a-b)$ を計算せんとし

$$\tan g(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

の式中 $\sin(a+b)$ $\cos(a+b)$ に代ふるに前に得る所の値を以てする

時ち

$$tang(a+b) = \frac{sin\,a\ cos\,b + sin\,b\ cos\,a}{cos\,a\ cos\,b - sin\,a\ sin\,b}$$

を得 $cos\,a\ cos\,b$ を以て與分數の分母子を除せる時ち左の式を得

$$tang(a+b) = \frac{\frac{sin\,a}{cos\,a} + \frac{sin\,b}{cos\,b}}{1 - \frac{sin\,a}{cos\,a} \times \frac{sin\,b}{cos\,b}}$$

$$tang(a+b) = \frac{tang\,a + tang\,b}{1 - tang\,a\ tang\,b} \qquad (5)$$

又 $tang(a-b)$ を前ニ得る所の(2)式を以て(4)式を除して之を得る

なり然れとも(5)式を一般に用ふへき着なる故此式中bに代ふるに−bを以てする時も亦之を得るなり即ち左の式の如し

$$tang(a-b)=\frac{tanga-tangb}{1+tanga\,tangb} \quad (6)$$

第十款

sin 2a cos 2a 及ひ tang2a の式

前に得る所の(3)(1)(5)の三式中$b=a$と為す時は左の式を得

$$\sin 2a=2\sin a\ \cos a \quad (7)$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a \quad (8)$$

$$tang2a=\frac{2\,tanga}{1-tang^2 a} \quad (9)$$

此三式は一角の正弦餘弦及ひ正切の函數を以て其倍角の正弦餘弦及ひ正切を求むへき者なり

$\sin\frac{1}{2}a$、$\cos\frac{1}{2}a$ 及ひ $\tang\frac{1}{2}a$ の式

$$\cos^2 a+\sin^2 a=1$$

$$\cos^2 a-\sin^2 a=\cos 2a$$

の二式中 $\frac{1}{2}a$ を以て a に代ふる時は

$$\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}a=1$$

$$\cos^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}a=\cos a$$

を得

此二式を相加へて左の式を得

$$2\cos^2\frac{1}{2}a=1+\cos a$$

$$\cos\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \quad (10)$$

又前の二式を相減して左の式を得

$$2\sin^2\frac{1}{2}a=1-\cos a$$

$$\sin\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \quad (11)$$

又(10)式を以て(11)式を除して左の式を得

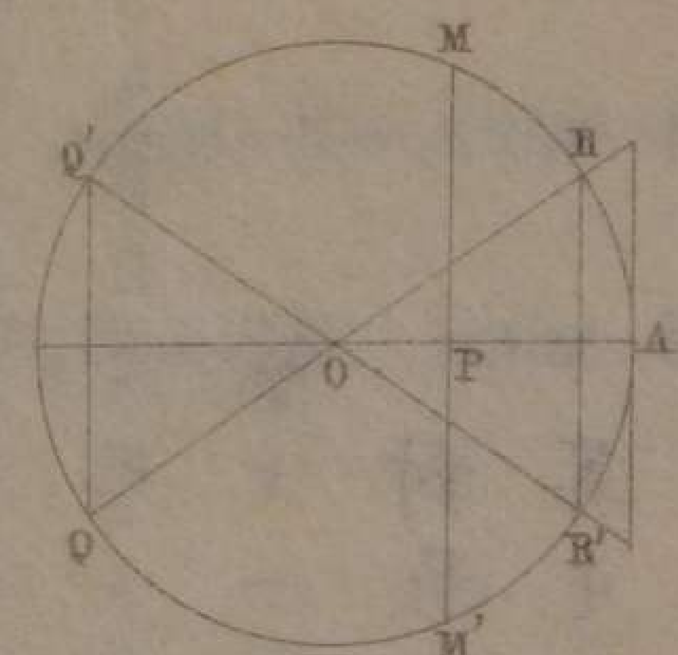
$$\tan g\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \quad (12)$$

以上の三式を一角の餘弦を知りて其半角の正弦餘弦及ひ正切を計算するに用ふる者なり

又其三式に於ては $\sin\frac{1}{2}a$ $\cos\frac{1}{2}a$ 及ひ $\tan g\frac{1}{2}a$ は各異号にして相等しき二個の値を有し是れaの弧の餘弦のみを以て之を計算せるに係れるなり

R R'

(第二十圖)設使ち知る所の餘弦をOPと為せる時は前の三式を以てOPを餘弦と為せる所の諸弧即ちM及ひM'に達する所の諸弧の半の正弦餘弦及ひ正切を求むる事を得而してAM AM'の二弧の中央をR R'と為しRQ R'Q'の二中徑を作る時はM及ひM'に達する所の弧に一圓周を加減せし者の半は其弧の半に半圓周を加減せし者なる故其諸弧の半はR R' Q Q'の四點中の一點に達し即ち此正弦餘弦及ひ正切は異号にして相等しき者なり



若し$\cos a$を知る時は$\sin\frac{1}{2}a$ $\cos\frac{1}{2}a$及ひ$\tang\frac{1}{2}a$の記号は$\frac{a}{2}$の値に從て容易に知る事を得るなり此時に於ては求むる所の式は不定に非さるなり

第十一教

對數を以て二正弦或は二餘弦の和及ひ差を計算する事

$\sin(a+b)$ $\sin(a-b)$を求むる所の(3)(4)の二式に於て二邊を相加へ或は相減する時は左の二式を得

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b$$

$$\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\sin b\cos a$$

又$\cos(a+b)$ $\cos(a-b)$を求むる所の(1)(2)の二式に於て二邊を相加へ或は相減する時は左の二式を得

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$$

$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\sin a\sin b$$

令

$$a+b=p$$
$$a-b=q$$

と為る時は之を加減して

$$a=\frac{p+q}{2}$$
$$b=\frac{p-q}{2}$$

を得之を前の四式に用ふる時は左の四式を得

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q) \qquad (13)$$

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q) \qquad (14)$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q) \qquad (15)$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q) \qquad (16)$$

以上の四式は二正弦或は二餘弦の和或は差を積に變じ而して對數を以て之に計算するに用ふる者なり

設使ば對數を以て $\sin 47+\sin 25^\circ$ を計算せんとするときは

$$p=47^\circ$$

$$q=25^\circ$$

と為し

(13)式に因りて左の式を得

$$\sin 47^\circ+\sin 25^\circ=$$

$$2\sin\frac{1}{2}(47^\circ+25^\circ)\cos\frac{1}{2}(47^\circ-25^\circ)$$

$$=2\sin 36^\circ\cos 11^\circ$$

此式は對數を以て計算すべき者なり

設論

(14)式を以て(13)式を除する時は左の式を得

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{2\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q)}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(p+q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)}\times\frac{\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)}$$

$$=\tan g\frac{1}{2}(p+q)\times\cot\frac{1}{2}(p-q)$$

$$=\tan g\frac{1}{2}(p+q)\times\frac{1}{\tan g\frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q}=\frac{\tan g\frac{1}{2}(p+q)}{\tan g\frac{1}{2}(p-q)}\quad(17)$$

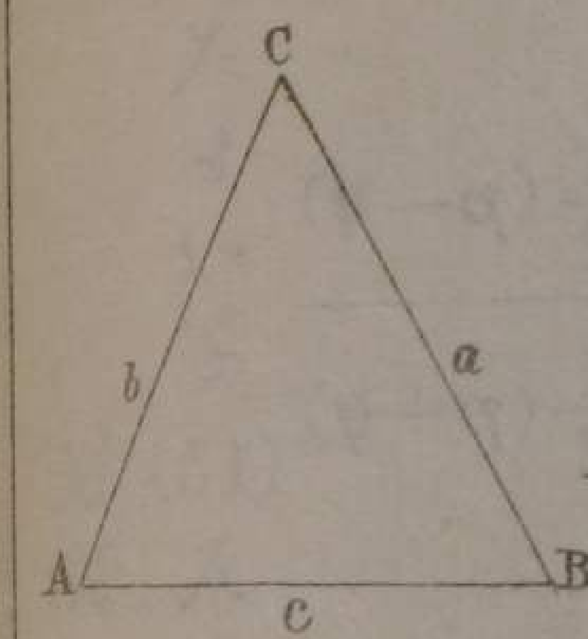
故に左の論を得

二角の正弦の和と差の比は其二角の半和の正切と半差の正切の比に等し

第十二款　斜三角形の邊角の關係

第一設論　三角形に於て二邊の和と差の比は之に對する二角の半和の正切と半差の正切の比に等し

(第二十一圖) ABCの三角形ありABCを以て三角を示しabcを以て三邊を示す時は



$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$$

の式を得

比例式の原理に因りて之を化する時は

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

を得然るに前の設論に因れは

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)}$$

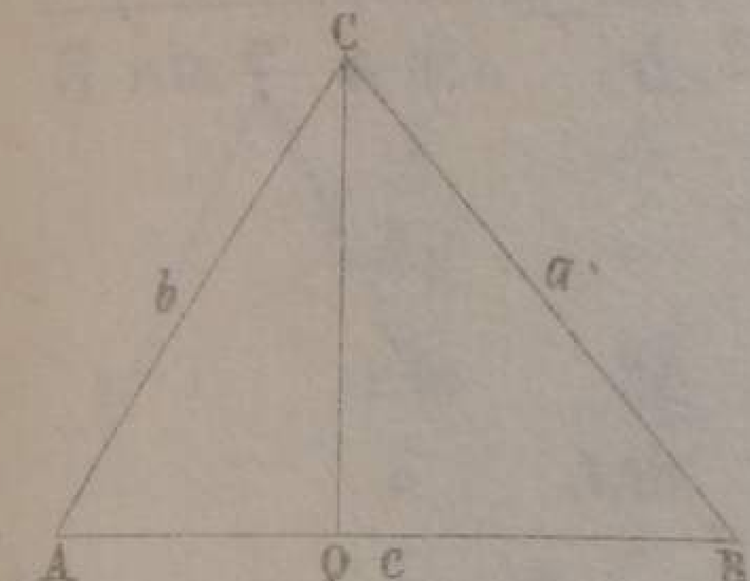
なる故左の式を得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)} \quad (1)$$

第二設論　三角形に於て一邊の二方は他の二邊の二方の和より此二邊と間角の餘弦の積の二倍を減したる者に等し

第二十二圖　ABCの三角形ありAの角に對する所のaの邊を以て之を論せんとす

第一　Aを鋭角と為し而してCQの垂線を作る時は幾何學



に因て

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AB\times AQ$$

を得又CAQの直三角形より

$$AQ=AC\cos A$$

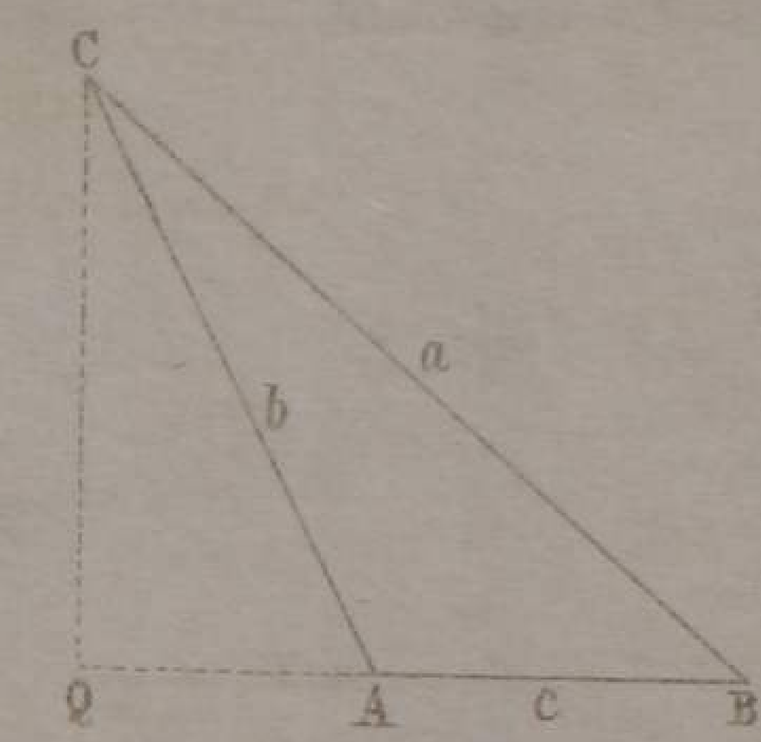
を得此値を前の式に用ひ且つa b cを以て三邊に代ふる時は左の式を得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad (2)$$

第二（第二十三圖）Aを鈍角と為せる時は幾何學に因て

$$BC^2=AC^2+AB^2+2AB\times AQ$$

を



得又CAQの直三角形より

$$AQ=AC\cos CAQ$$

を得然るに

$$CAQ=180°-A$$

$$\cos CAQ=-\cos A$$

よりして亦

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

を得故に此相等式を一般に用ふへき者なり」

若しAを直角と為す時は $\cos A=0$ なるをして(2)式より $a^2=b^2+c^2$ を得是を直三角形の性質に合するなり

又(2)式は三邊と一角の關係を示せるか故に此式を化して

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

と為す時は即ち三邊の函數を以てAの角を求むる事を得るなり

又同法を以て左の二式を得

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

三邊の函數を以て一角を定むる所の式を化する事

斜三角形の各角と對邊の比例並に前の二個の設論を知る時は之を解く事を得るなり然れとも三邊の函數を以て一角を定むる所の式は對數を以て之を計算する能はす故に此式を化するの法を示す

$\cos A$ の函數を以て $\sin\frac{1}{2}A$ を求むる所の

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

の式に於て $\cos A$ に代ふるに

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

式を以てする時は

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}$$

を得然るに

$$(b-c)^2=b^2+c^2-2bc$$

$$-(b-c)^2=-b^2-c^2+2bc$$

なれ

る故

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

を得又

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

を得蓋し二數の二方の差は其二數の和と差の積に等しければなり是に於て三角形の周邊を $2p$ と爲す時は

$$a+b+c=2p$$

$$a+b-c=2p-2c$$

$$a-b+c=2p-2b$$

$$b+c-a=2p-2a$$

なる故之を前の式に用ひて左の式を得

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad (1)$$

此式は對數を用ひて計算する事を得而して三邊の函數を以て一角の半の正弦を求むる事を得るなり

又

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

の式中 $\cos A$ に代ふるに其値を以てする時は

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

を以てする時ハ左の式を得

$$=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

を得而して $b+c+a$ $b+c-a$ ニ代ふるニ $2p$ $2p-2a$

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad (2)$$

此式も亦對數を用ひて一角の半を計算する事を得るなり

又(2)式を以て(1)式を除する時ハ左の式を得

$$\tan g\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad (3)$$

此式も三邊の函數を以て一角の半の正切を定むへき者なり

又前ニ得る所の $\sin 2A=2\sin A\cos A$ の式ニ於てAニ代ふるニ $\frac{1}{2}A$ を以てす

る時ハ

$$\sin A = 2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$$

を得又此式中

$\sin\frac{1}{2}A$

$\cos\frac{1}{2}A$

ニ代ふるニ前ニ得る所の値を以てせる時ハ左の式を得

$$\sin A = 2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 \times c^2}}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (4)$$

此式ハ三邉の函數を以て一角の正弦を定むへき者なり

第十三第十四教

斜三角形の解法

斜三角形ニ亦直三角形ニ於るか如く四種の解法を有し即ち第一ニ一邉と二角第二ニ二邉と一對角第三ニ二邉と其間角第四ニ三邉を知る者なり然るニ第一第二種ハ既ニ之を示せるを以て次ニ第三第四種を示す

二邉と其間角を知りて他の諸分並ニ面積を求むる事

設使ハ a b の二邉及ひ C の間角を以て A B の二角及ひ c の邉を計算せんとす但し此三角形ハ恒ニ作り得へき者なり

先つＡＢの二角を定めんとするに其半和を $A+B=180^\circ-C$ $\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{1}{2}C$ より直に知り得へきを以て尚其半差を求むれは可なり之を求むるには前の設論より左の式を設く但し a は b より大なる者とす

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tang\frac{1}{2}(A+B)}{tang\frac{1}{2}(A-B)}$$

此比例式に於ては第四率の他は悉く知り得る者なり故に之を化して左の式を得

$$tang\frac{1}{2}(A-B)=\frac{(a-b)\,tang\frac{1}{2}(A+B)}{a+b}=\frac{(a-b)\,cot\frac{1}{2}C}{a+b}$$

$$log\,tang\frac{1}{2}(A-B)=log(a-b)+log\,cot\frac{1}{2}C-log(a+b)$$

ＡＢの二角の半和及ひ半差を知る時は之を加減して其二角を得るなり設使は半和をＰと為し半差をＱと為す時は左の式を得但しＡ＞Ｂなり

$$\frac{A+B}{2}=P$$

$$\frac{A-B}{2}=Q$$

$$A=P+Q$$

$$B=P-Q$$

二角を求め得は

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$$

即ち

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

の式に因てｃの邊を得るなり

又面積は

$$S=\frac{ab\sin C}{2}$$

の式に因て計算するなり

三邊を知りて三角並に面積を求むる事

知る所の三邊をａｂｃと為す但し此三角形の最大の一邊他の二邊の和より小なる時は作る事を得るなり

三角を求むるには先つ前に得る所の

$$\tan g\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

の式に因て $\frac{A}{2}$ の角を計算するなり其對數式は左の如し

$$\log \tan\frac{A}{2}=\frac{\log(p-b)+\log(p-c)-\log p-\log(p-a)}{2}$$

$\frac{A}{2}$ の角を求め得て之を二倍して A の角を得次に同法を以て

$$\tan\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\tan\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

の二式より B C の二角を得るなり

此三角を正切に因て之を求むるは簡便なりとす其故は p $p-a$ $p-b$ $p-c$ の四數の對數を用ひて悉く之を計算し得ればなり若し正弦に因て之を求むる時は六數の對數を用ひ又餘弦に因て之を求むる時は七數の對數を用ひさるへからす

又

$$\tan\frac{1}{2}A,\quad \tan\frac{1}{2}B,\quad \tan\frac{1}{2}C$$

を定むる所の各平方根は虚なる事なし其故にaを以て三邊中の最も大なる者と為せし時に $a<b+c$ にして此二邊にaを加ふる時は

$$2a<a+b+c$$
$$2a<2p$$
$$a<p$$

を得故に又

$$b<p$$
$$c<p$$

にして即ち $p-a$ $p-b$ $p-c$ は悉く正なれはなり

又三角を各別に計算せし時に得る所の値の和は 180° に等しからさるを得す是れ試驗の簡法なり

面積

$$S=\frac{bc\sin A}{2}$$

の式中 $\sin A$ に代ふるに前に得る所の

$$\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

の値を以てする時は左の式を得

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

此式は三邊の函數を以て三角形の面積を求むへき者なり

而して左の如く之を誦せ

三角形の面積は半周邊と之より各一邊を減したる者の積の平方根に等し

活用

第一　三角形あり

$a=3469^{m}$

$b=2653^{m}$

$C=68^{\circ}43'28''$

を以て之を解き並に面積を計算する事左の如し

$a+b=6122^{m}$

$a-b=816^{m}$

$\frac{C}{2}=34^{\circ}21'44''$

$\frac{A+B}{2}=55^{\circ}38'16''$

$\frac{A-B}{2}$ の計算

$$tang\frac{A-B}{2}=\frac{(a-b)\cot\frac{1}{2}C}{a+b}$$

$$\begin{aligned}\log(a-b)&=2{,}9116902\\ \log\cot\tfrac{1}{2}C&=0{,}1651050\\ -\log(a+b)&=\bar{4}{,}2131067\\ \hline \log tang\frac{A-B}{2}&=\bar{1}{,}2899019\\ \frac{A-B}{2}&=11^{\circ}\ 1'\ 51''\\ A&=66^{\circ}\ 40'\ 7''\\ B&=44^{\circ}\ 36'\ 25''\end{aligned}$$

S の計算

$$S=\frac{ab\sin C}{2}$$

$$\begin{aligned}\log a&=3{,}5402043\\ \log b&=3{,}4237372\\ -\log\sin C&=\bar{1}{,}9693442\\ -\log 2&=\bar{1}{,}6989700\\ \hline \log S&=6{,}6322557\\ S&=4288009^{m.car.}\end{aligned}$$

c の計算

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

$$\begin{aligned}\log a&=3{,}5402043\\ \log\sin C&=\bar{1}{,}9693442\\ -\log\sin A&=0{,}0370487\\ \hline \log c&=3{,}5465972\\ c&=3520^{m},44\end{aligned}$$

第二 三角形あり $a=567^m,37$ $b=419^m,85$ $c=354^m,63$ を以て之を解き並に面積を計算せる事左の如し

計算の表

$$a=567,37$$
$$b=419,85$$
$$c=354,63$$
$$2p=1341,85$$
$$p=670,925$$
$$p-a=103,555$$
$$p-b=251,075$$
$$p-c=316,295$$

$$\log p=2,8266740$$
$$-\log p=\bar{3},1733260$$
$$\log(p-a)=2,0151711$$
$$-\log(p-a)=\bar{3},9848289$$
$$\log(p-b)=2,3998035$$
$$-\log(p-b)=\bar{3},6001965$$
$$\log(p-c)=2,5000924$$
$$-\log(p-c)=\bar{3},4999076$$

Aの計算

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\log(p-b)=2,3998035$$
$$\log(p-c)=2,5000924$$
$$-\log p=\bar{3},1733260$$
$$-\log(p-a)=\bar{3},9848289$$
$$0,0580508$$
$$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}A=0,0290254$$
$$\frac{1}{2}A=46^\circ 54' 47'',6$$
$$A=93^\circ 49' 35''$$

Cの計算

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{p(p-c)}}$$

$$\log(p-b)=2,3998035$$
$$\log(p-a)=2,0151711$$
$$-\log p=\bar{3},1733260$$
$$-\log(p-c)=\bar{3},4999076$$
$$\bar{1},0882082$$
$$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}C=\bar{1},5441041$$
$$\frac{1}{2}C=19^\circ 17' 29'',5$$
$$C=38^\circ 34' 59''$$

Bの計算

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\log(p-a)=2,0151711$$
$$\log(p-c)=2,5000924$$
$$-\log p=\bar{3},1733260$$
$$-\log(p-b)=\bar{3},6001965$$
$$\bar{1},2887860$$
$$\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}B=\bar{1},6443930$$
$$\frac{1}{2}B=23^\circ 47' 42'',9$$
$$B=47^\circ 35' 26''$$

試驗

$$A=93^\circ 49' 35''$$
$$B=47^\circ 35' 26''$$
$$C=38^\circ 34' 59''$$
$$A+B+C=180^\circ 0' 0''$$

Sの計算

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\log p = 2,8266740$$
$$\log(p-a) = 2,0151711$$
$$\log(p-b) = 2,3998035$$
$$\log(p-c) = 2,5000924$$
$$9,7417410$$

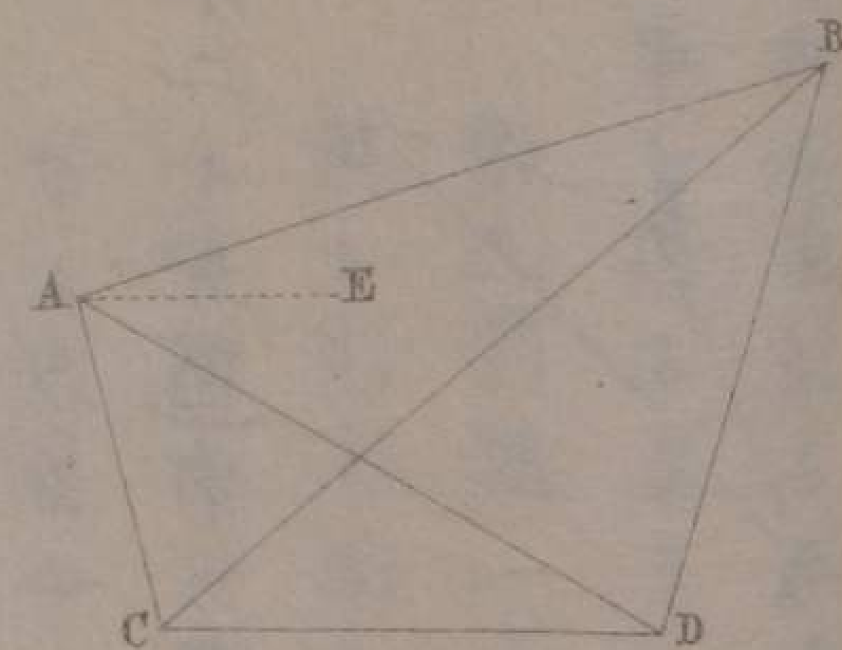
$$\log S = 4,8708705$$
$$S = 74279^{m.car},77$$

第十五第十六教

平面測圖の諸問題に於る三角學の活用

第七問題　望見せへくして近接せへからさる二點の距離を求むる事

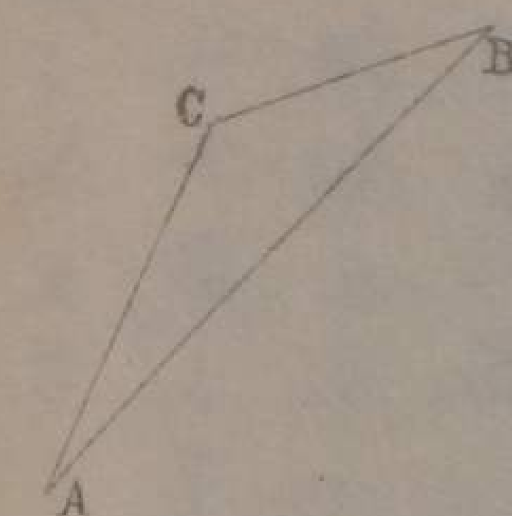
（第二十四圖）ABの二點の距離を求むるには先つ此二點を望見し得る處にCDの基線を測りCに測器を置きCA CBの硯



線と基線の間のACD BCDの二角を測り又Dに測器を移しDB DAの硯線と基線の間のBDC ADCの二角を測る時はBCDの三角形に於てCDの邊と二隣角を知る故BCの邊を計算する事を得又ACDの三角形に於てCDの邊と二隣角を知る故ACの邊を計算する事を得るなり是に於てACBの角を測る時はACBの三角形にACBCの二邊とACBの間角を知る故之を解く事を得而してABの距離を求むる事を得るなり但しABCDの四點同平面上に在る時はACBの角はACDとBCDの二角の差なり若し測る所のACBの角ACDとBCDの二角の差に等しき時はAB CDの四點は同平面上に在り而してAの點よりCDの基線

に平行せるにAEの線を作る時はBAEの角はBACとCAEの二角の差なり然るにBACの角は既に解く所の三角形に於て之を得又CAEの角はACDの角の並角なり故に近接し難きABの線と基線の間のBAEの角を知る事を得而してCの點或は他の諸點よりABに平行せる線を作る事を得るなり

第八問題　近接し難き三點を知りて此三點は一直線中に在るやを探鑿せる事

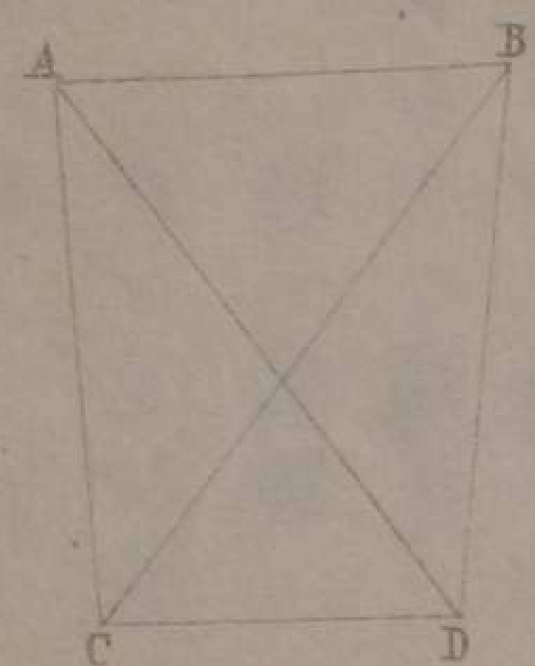


（第二十五圖）前の問題に因て各三點の距離のAB BC ACを測り而して

$$AB=AC+BC$$

なる時は其三點は一直線中に在り否らさる時は三角形を為せるなり但し此三角形は三邊を知る故容易に三角及ひ面積を計算しる事を得るなり

第九問題　近接し難きABCDの四點を知りて此四點は同平面上に在るやを探鑿し而して同平面上に在る時は其四點にて為せる所の四角形は圓形に内容せるやを探鑿せる事



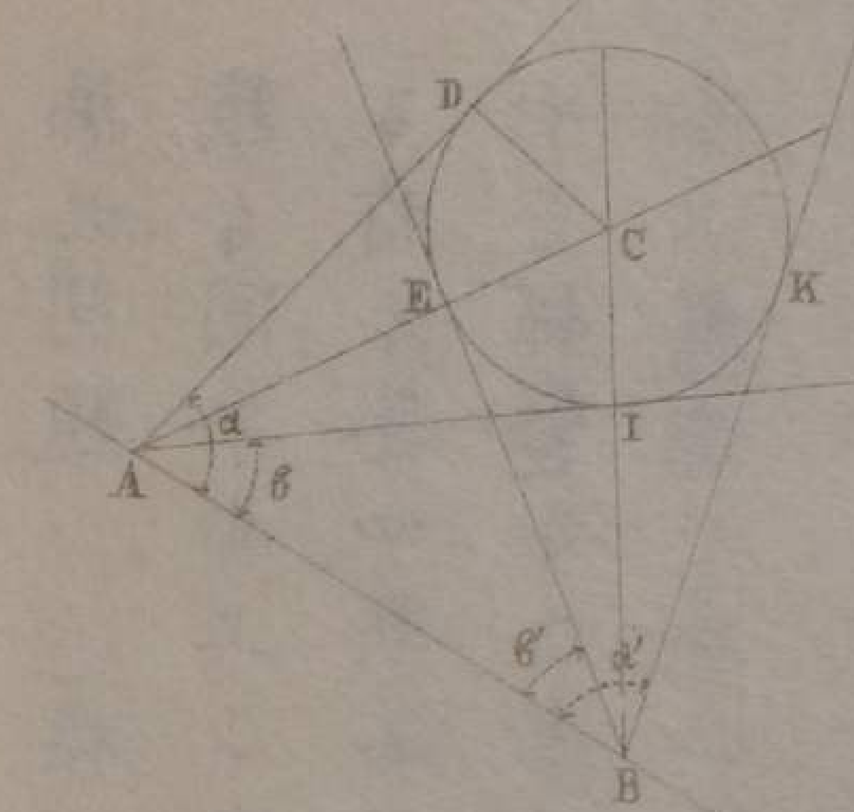
（第二十六圖）先つ各二點の距離を計算し次に三邊を知る所の諸三角形に於てACD ACB BCDの三角を計算し而して

$$ACD=ACB+BCD$$

なる時はABCDの四點は

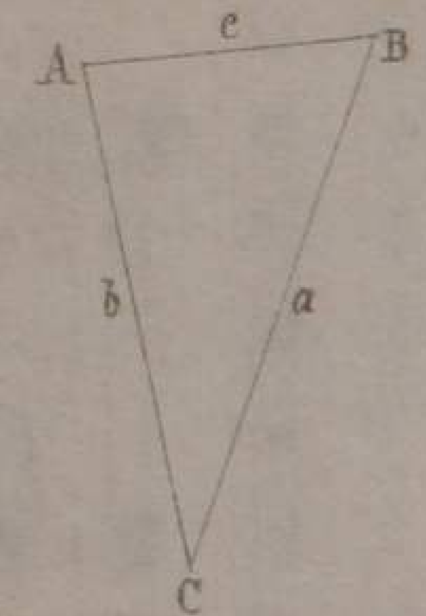
同平面上に在り又CAD CBDの二角を計算し而して此二角相等しき時は其四點は同圓周上に在るなり

第十問題　近接し難き圓柱塔の半徑を定むる事



(第二十七圖)先つABの基線を測りAの點に於て塔に切せる二視線と基線の間のDAB IABの二角を測り之をαβと為せる時は此二角の差即ちDAIの角の平分線は塔の中心を過き而して此平分線と基線の間のCABの角は$\frac{\alpha+\beta}{2}$に等し次にBに於てKBA EBAの二角を測り之を$\alpha'\beta'$と為せる時はCBAの角は$\frac{\alpha'+\beta'}{2}$に等し今ABCの三角形に於てABの邊と二隣角を知る故ACの邊を計算せる時は又ACDの直三角形に於てACの斜邊を知る事を得而してCADの鋭角は$\frac{\alpha-\beta}{2}$に等し故にCDの半徑を求むる事を得るなり

第十一問題　知る所のABの二點よりCの點に至迄るbaの距離を知り地上に於て再ひCの點を定むる事



(第二十八圖)先つABの距離を測り之をCと為せる時はABCの三角形に於て三邊を知る故Aの角を計算する事を得るなり是に於てACの方向を定め此方向中にAC即ちbの距離を測るなり設令は

$a=9459^{m},31$
$b=8032^{m},29$
$c=8242^{m},58$

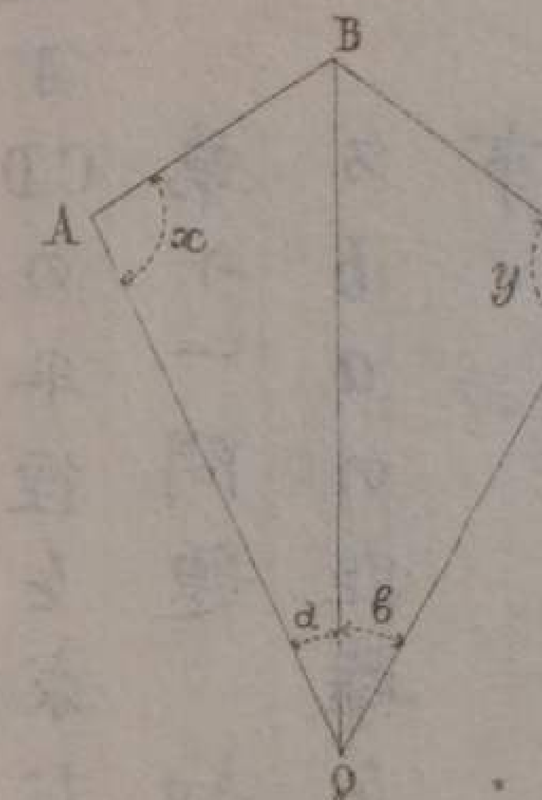
を知る時は

$A=71^{\circ}3'34''$

を得之よりCの點を得るなり

第十二問題　平地に在る所のＡＢＣの三點を圖上に載せたる時他のＱの點を定むる事但し此點よりAB BCの距離を見る所の二角を既に測りて之を知る者なり

（第二十九圖）Ｑの點よりAB BCの距離を見る所のAQB BQCの二角をαβと為せ



圖上に於て此問題を解くにはABを通弦と為して知る所のαの角を内容せへき圓分を作り又BCを通弦と為して知る所のβの角を内容せべき圓分を作る時は此二弧はB及ひＱの二點に交り即ち求むる所のＱの點を得るなり其故は此二弧の交點は知る所の角に於てAB BCの距離を見る事を得ればなり

此圖上の解法は精密なる者と為すを能はず故に三角學に於て此問題を解くへし其法はABQ CBQの二角及ひBQの距離を計算し以てＱの點を求めんとするなり

知る所のAB BCの距離をa bと為しABCの角をBと為し又知らさる所のBAQ BCQの二角をx yと為す時は此x yを知れはABQ CBQの三角形を解く事を得即ち本題を解く事を得べし故に先つx yの二角を求めんとす

A B C Dの四點は同平面上に在る者と定むる時は此四點にて為す所のABCQの四角形に於て左の式を得

$$x+y=360°-(B+\alpha+\beta)$$

$$\frac{x+y}{2}=180°-\frac{B+\alpha+\beta}{2} \qquad (1)$$

此式ニ因リテx yノ半和ヲ知ル事ヲ得ルナリ故ニ又其半差ヲ求メントス

ABQ 及ヒ BCQ ノ三角形ニ於テ左ノ式ヲ得

$$\frac{BQ}{\sin x}=\frac{a}{\sin\alpha}$$

$$BQ=\frac{a\sin x}{\sin\alpha} \qquad (2)$$

$$\frac{BQ}{\sin y}=\frac{b}{\sin\beta}$$

$$BQ=\frac{b\sin y}{\sin\beta} \qquad (3)$$

又(2)(3)ノ二式ヨリ

$$\frac{a\sin x}{\sin\alpha}=\frac{b\sin y}{\sin\beta}$$

ヲ得之ヲ簡化シテ

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{b\sin\alpha}{a\sin\beta}$$

又

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}$$

ヲ得然ルニ前ノ設論ニ因レハ

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\tan\frac{1}{2}(x-y)}{\tan\frac{1}{2}(x+y)}$$

ナル故

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(x-y)}{\tan\frac{1}{2}(x+y)}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{b\sin\alpha+a\sin\beta}$$

ヲ得$b\sin\alpha$ヲ以テ之ヲ

除して左の式を得

$$\frac{\tan g\frac{1}{2}(x-y)}{\tan g\frac{1}{2}(x+y)}=\frac{1-\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}{1+\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}}$$

今

$$\tan g\,\varphi=\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}$$

と為す時はφの角は之より求むる事を得而して前式は左の如く変ん

$$\frac{\tan g\frac{1}{2}(x-y)}{\tan g\frac{1}{2}(x+y)}=\frac{1-\tan g\,\varphi}{1+\tan g\,\varphi}=\tan g(45^\circ-\varphi)$$

$$\tan g\frac{1}{2}(x-y)=\tan g\frac{1}{2}(x+y)\times\tan g(45^\circ-\varphi)\quad(4)$$

此式に因れる對數を以てxyの半差を計算する事を得而して其半和は(1)式に於て既に之を知る故即ちxyの角を得るなり

ハ容易ニ知ることを得又

是ニ於テACの點ニx yの角を作る時は此二方向の交る處は即ち求むる所のQの點なり而してABQ CBQの二角を知る時はBQの距離は(2)或は(3)式より求むる事を得るなり

若し$\alpha+\beta+B=180^{\circ}$なる時はQの點の位置は不定なる者なり其故はABCQの四角形は圓形に内容する事を得而してAB BCを通弦と為す所の二圓分は全く相合すればなり又前の式を以て之を論ずる時は

$$x+y=180^{\circ}$$

$$\frac{x+y}{2}=90^{\circ}$$

$$tang\,\frac{1}{2}(x+y)=\infty$$

にして又

$$\sin x=\sin y$$

$$a\sin\beta=b\sin\alpha$$

$$tang\,\varphi=1$$

$$\varphi=45^{\circ}$$

$$tang(45^{\circ}-\varphi)=0$$

なる故(4)式變して

$$tang\,\frac{1}{2}(x-y)=\infty\times0=\frac{0}{0}$$

となればなり

注意　此問題は地圖或は海圖の作法に活用する者なり設使は島嶼或は岩礁ありて之より海濱を望見すへき時之を圖上に載せんとするには濱上にABCの三點を設け而してAQB BQCの二角を測る時は即ち其位置を定むる事を得るなり又平面測圖に於ても知らさる所のQの點より知る所の三點を望見すへき時は亦同法を施す事を得るなり

筭學教程講本卷之五終