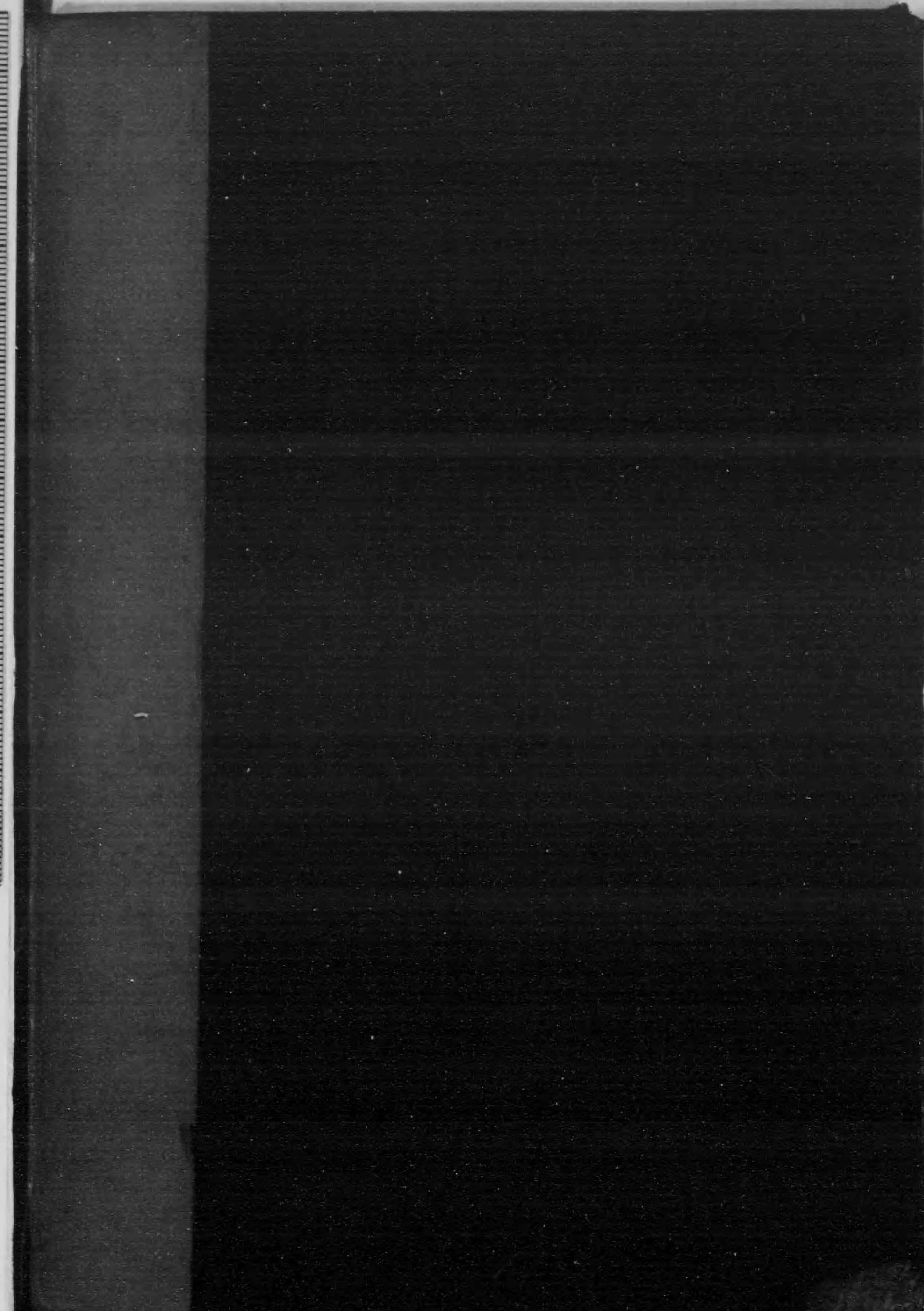
始



ローレンツ著

(H. A. LORENTZ)

# 物理學

上卷

理學士　桑木彧雄譯



東京

合資會社

冨山房發行

(大正二年)

# PREFACE.

The text-book of which a translation is here presented to the Japanese reader, is the outcome of the lectures on elementary physics which I have given for many years in the University of Leiden. It is intended to be mainly an introduction into the general ideas and methods of modern physics; these have a prominent place in it and I have tried to give a clear account of them, omitting many facts and experimental details which I considered to be of secondary importance. Such a course could be taken, because the lectures and the laboratory work afforded an opportunity for supplying the defect. Moreover, I expected my readers to turn to some more complete work whenever they wanted information about special subjects.

I should be very happy if the book might be found to be of some use to the students of a country with which mine has had friendly relations during several centuries

My hearty thanks are due to Professors Nagaoka and Kuwaki for the care they have bestowed on the translation.

Leiden, March 1912.

H. A. Lorentz



# 譯　者　序

従來物理學通論は概ね二流三流の物理學者の著しゝもの多く、一流の學者の手に成りしものは殆ど無しと云ふも不可なきが如し。ウィリヤム・タムソンとテイトとが著しゝ物理學は、最初物理學全部に亙る豫定なりしも、遂に力學を論じたるのみにて止みたり、然れども此書の難讀たる既に定評ありて玆に喋々するの要なし。近頃ジエー・ジエー・タムソンとポインチングの著せる通論は最良の書なりと雖、實驗と理論と錯綜するを以て、讀者は其全般を概觀するに苦み、且つ豫め微積分を學ぶの要あり。本邦には既に諸名家の著書あり、而してリーッケ及びワルブルヒ等の著書も亦譯述せられたれば、實驗物理學を學ぶには其書に乏からずと雖、之と羽翼相待つべき物理學の理論を平易に通覽すべきものなし。是獨り本邦に於ける缺陷なるのみならず、歐米に於ても亦其弊を感じたり。然れども此缺陷を補ふは、到底二流三流の物理學者が企及すべきにあらず、物理學界の泰斗にあらざれば之を著す能はざるは、識

者を待たずして既に明なるところなり。斯の如き碩學は常に獨創的の研究に耽り、教科書程度の書を著しゝもの稀にして、啻にローレンツ先生の物理學あるのみ。先生は電子論の啓發者なり。十九世紀の末葉より廿世紀の初葉に於て、物理學が大變革を來し、近年に至り、其概念に於て十年前と大なる懸隔あらんとするに際し、革命者には筆頭先生を置かざるべからざるは、現今の物理學趨勢に明なるものゝ均く首肯するところにして、爰に贅するを用ゐず、特に先生が主張したる所謂ローレンツ變換は、アインシュタインが相待律を發表したる根據となり、久く確定せりと思へるニウトンの力學原則亦根柢より搖撼するの傾向を示し、吾人は電子論と相待律等を先驅として、將に物理學の基礎を改めざるべからざるの域に達せんとす。而して先生の偉大なる功績は、專門家にあらざれば容易に判定し難しと雖、其物理現象を解釋する雄大なる手腕は、其講義にも現はれ、ライデン大學初級學生に授けたる其平易なる講義錄に、物理學の基本的原理を一貫して之を示したり。先生も亦本書の能く此目的を達し、諸國語に飜譯せらるゝを喜び、譯者の一人(長岡)が明治四十三年十



一月先生を訪問せる際、之を邦語に譯するの意無きかを糺せり、而して昔時蘭學者が西洋文明を荷蘭より導きたる如く、其講義が復日本に於る物理學を進步せしむる一助となるを得ば幸甚なりとの先生の意は、序文に明なり。又先生は歐洲各國に流布せる原書或は飜譯書等に未だ載せざる補正數十頁を送り、特に此書に於て最近の事實と推理とに就き追加するところありたり。譯者等も亦先生と意見を同うし、其明快なる講義が、從來物理學通論の極めて錯綜せしに似ず、榛莽を刈りて通路を闢きたるが如き觀あるを以て、讀者が本書に依り物理學を概觀することを得ば幸甚なりとす。

本書を繙讀するには先づ實驗物理學を通讀したる後に於てすべし、又之を教科書に用ゐるときは、教員は本書に記する事實に該當する實驗を學生に示すを以て至當とす、一度之を示したる後は、本書を讀ましめて推理力を發達せしむれば、後來自然現象の蘊奧を探る方法を悟ること容易なるべし、即ち現時學生が徒に暗記を努めて、其の學習せし事實を咀嚼する能はざる通弊を矯むるに大效あるを疑はず。

本書中の術語は成るべく在來の譯語を用ゐた

るも、間々差違無きにあらず、故に各節英譯を付し、之に該當する語意を明にす。

下卷を譯述するに當り、中村清二田丸卓郎兩博士が有益なる助言を與へ校正を閲讀せられたると、松下德二郎君が筆記に從事せられたるとを謝す。

大正二年四月　　　　譯　者

# 上卷目次

# 數學緒論 (Mathematical Introduction.)

**一 測定の結果を表に總括すること** (Summarizing the Results of Measurements in a Table.) 是書の本題に入るに先だち書中屢用ゐる數學的考察並に其方法の一二に就て述ぶべし。先づ簡單なる例より始む。

一物體を熱し或は冷し即ち其溫度を上げ或は下ぐれば物體の占むる容積は變化を受く。此現象を研究せんとせば先づ溫度を同うせる二回の實驗に於て容積の値も亦同じきや否を驗知するを要す。實際に其然るを知る、依て種々の溫度に就て測定せる結果を二行より成れる表に排列し得。第一行に觀察せる溫度を記入し、各溫度の右に夫れに相當せる容積を記す。

此仕方にて水に就て次の表を得。

| 溫度 | 容積 | 溫度 | 容積 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 11,2 | 1,000251 |
| 0,9 | 0,999978 | 12,7 | 1,000352 |
| 2,1 | 0,999923 | 15,0 | 1,000706 |
| 5,2 | 0,999885 | 17,4 | 1,001057 |
| 7,2 | 0,999953 | 19,2 | 1,001419 |
| 9,1 | 1,000081 | | |

表中、溫度はセルシウスの度盛にて與へ、又茲に研究せる水量が零度に於て占むる容積を容積の單位として選べり。

**二 常數と變數 函數** (Constant and Variable Quantities. Functions.) 前述の溫度並に容積の如く種々の値を占め得る量は變量又變數と名けらる。此に對して、不變或は恒常の量又常數とは、例ば直徑と圓周との比、又は一物體が地球表面上一定の場所に於て有する重量の如きを云ふなり。

各溫度に各一定の容積が相當し又後者が溫度と共に變ずと云ふ事を表はすに、容積は溫度に關係す、又は容積は溫度の函數なりと云ふ。溫度は獨立變數、容積は關係的變數と名けらる。

此記號は凡ての同樣の場合に用ゐらる。

即ち振子が一振動をなす時間は振子の長さの函數なり。含水アルコール一立の重量は其中に含めるアルコールと水との量の比の函數なり。同樣に、或數の對數は其數の函數、又或角度の正弦は其角度の函數と名け得べし。

一函數は獨立變數の凡ての任意値に對する値知らるれば既知函數となる。

既知函數は凡て表を以て顯はし得べし。前節に掲げし表、又對數及正弦の表も其例なり。

**三　函數の代數的表出** (Algebraic Representation of a Function.)

$x$ が變數なれば、$x$ を含める凡ての代數式並に三角法式、例ば $3x+5$, $x^2-4x+6$, $\sqrt[3]{x^2}$, $e^x$, $\sin x$, $\operatorname{tg}(ax+b)$ の如きは皆 $x$ の函數なり。

或函數の諸値を測定によりて求め得て、夫等を表に排列せば其函數が前揭の如き式にて表出し得らるや否やを容易に研究し得。

第一節に記せる一水量の容積諸値に就て之を試むべし。先づ $7{,}2^\circ$ より $19{,}2^\circ$ に至る溫度間に考を限る。

相次げる同間隔の溫度の間に於て水の膨脹が毎次同大なりとすれ



ば所求の式は最簡單なり。然れば $7{,}2^\circ$ より $19{,}2^\circ$ に熱せるための容積增加の全量は $0{,}001466$ に等しきが故に毎一度に於ける膨脹は

$$\frac{0{,}001466}{12}=0{,}0001222$$

ならざるべからず。今 $7{,}2^\circ$ と $19{,}2^\circ$ との間の任意の一溫度を $t$ にて、又是に相當せる容積を $v$ を以て記せば

$$v=0{,}999953+0{,}0001222(t-7{,}2)$$

なるべし。此式の第一項は $7{,}2^\circ$ に於ける容積を、又次項は $7{,}2^\circ$ より $t^\circ$ に熱せるための膨脹を表はす。

之を展開して

$$v=0{,}9990732+0{,}0001222\,t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

を得。此範式は一の假定より演繹せられしものなる故、是が實際に觀察の結果を表出せるや否を研究せざるべからず。此目的を以て、方程式中に順次に $t=9{,}1;\ 11{,}2;\ 12{,}7;\ 15{,}0;\ 17{,}4$ と置き、斯して得る $v$ の値を實驗的測定の値と比較す。結果は次表に排列せり、表の組立に就ては說明を要せざるべし。

| 溫度 | 容積 | | 差 |
|---|---|---|---|
| | 測定値 | 計算値 | 測値−計値 |
| 7,2 | 0,999953 | 0,999953 | 0 |
| 9,1 | 1,000081 | 1,000185 | −104 |
| 11,2 | 1,000251 | 1,000442 | −191 |
| 12,7 | 1,000352 | 1,000625 | −273 |
| 15,0 | 1,000706 | 1,000906 | −200 |
| 17,4 | 1,001057 | 1,001199 | −142 |
| 19,2 | 1,001419 | 1,001419 | 0 |

斯して簡單なる範式 (1) は觀察を表出するに不完全なること明かなり。尙他の仕方に依りても其の基ける假定の正確ならざるを示し得べし。此の假定よりせば、相次げる何れの二個の觀察よりするも

溫度一度の上昇に依れる容積の增加を求め得べきなり。假定が正しければ、斯して見出し得たる數は凡て互に等しからざるべからず。然るに實際には是等の數の益增加するを見る。 7,2° と 9,1° との間には此數 0,00009 なるに 17,4° と 19,2° との間に於ては 0,00020 なり。

範式 (1) に依りて計算せる値が悉く大に過ぎたるは此理由に依れり。 例ば此式を 13,2° の溫度、即ち兩端の溫度 7,2° と 19,2° との中央の溫度に應用せば求め得る容積の値は 7,2° と 19,2° とに相當する値の平均なり。 然れども實際には容積は 7,2° より 13,2° に至る間には 13,2° より 19,2° に至る間よりも增加少なきなり。 故に 13,2° に於ける實際の値は 0,999953 と 1,001419 との平均よりも小なり。

四　一層複雜なる形の方程式に依らば範式 (1) よりも良好なる結果を得べきかを考究すべし。

$$v=a+bt+ct^2$$

と置けば係數 $a, b, c$ は三個の溫度に於て測定上見出せる容積の値を $v$ が示す樣に定め得べきなり。 例ば 7,2°, 12,7° 及 19,2° を取るとせば次の三方程式滿足せられざるべからず、

$$a+\ 7{,}2\,b+(\ 7{,}2)^2c=0{,}999953$$

$$a+12{,}7\,b+(12{,}7)^2c=1{,}000352$$

$$a+19{,}2\,b+(19{,}2)^2c=1{,}001419$$

即ち

$$a=1{,}0001286\ ;\ b=-0{,}00007935\ ;\ c=0{,}000007633$$

ならざるべからず。

又範式に依り



$$v=1{,}0001286-0{,}00007935\,t+0{,}000007633\,t^2\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

の方程式に依りて計算せる値と測定上の値とを比するに次の如し。

| 溫度 | 容積 | | 差 |
|---|---|---|---|
| | 測定値 | 計算値 | 測値一計値 |
| 7,2 | 0,999953 | 0,999953 | 0 |
| 9,1 | 1,000081 | 1,000039 | +42 |
| 11,2 | 1,000251 | 1,000197 | +54 |
| 12,7 | 1,000352 | 1,000352 | 0 |
| 15,0 | 1,000706 | 1,000656 | +50 |
| 17,4 | 1,001057 | 1,001059 | − 2 |
| 19,2 | 1,001419 | 1,001419 | 0 |

是に見る如く範式 (2) に於ては觀測との一致は (1) に於けるよりも著しく良好なり、若し方程式の形が

$$v=a+bt+ct^2+dt^3,\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

にして四個の常數を用ゐるとせば一致は一層良好なるべし。是れ本來然るべきなり、何となれば、範式 (1) によりては二個、又範式 (2) によりては三個の觀測に就て精密に結果を示し得、常に範式中の常數の數と同數の觀測に就て一致を得ればなり。故に常數の數を充分に增加するに依りて任意多數の測定の結果を精密に表出し得べきなり。故に今中間に在る測定に就て範式の與ふる結果が觀測の與ふるものと異なること常數の數を增加する程減少するは怪しむに足らず。

先きに範式 (2) 中の常數を定めしとき、三個の觀測は隨意に選び、即ち 7,2°, 12,7° 及 19,2° の溫度に於けるものを取り、範式が是等の觀測の結果と精密に一致する樣にせり。然れども方程式が獨立變數の何れの値に於ても觀測と一致せざるも觀測全體との一致が出來得る限り良好なるを得る樣に是等の係數（即ち常數）を定むる數學上の

一方法あり。夫に就て玆に詳說する能はざれども其方法によりて一定量の水の容積を第一節の表中の凡ての溫度に於て充分精密に表出する樣なる (3) の形の範式を求めて次に揭げたり。$0^{\circ}$ に於ける容積を單位とせる故 $a=1$ と置けり、$b$, $c$ 及 $d$ は他の諸溫度に於て測定値と計算値との差が全體として出來得る丈小なる樣に定めたるものなり。

$$v=1-0{,}00006105\,t+0{,}000007718\,t^2$$
$$-0{,}0000000373\,t^3 \qquad (4)$$

如何なる程度に是が諸觀察を表出せるかは次の表により示さる。

| 溫度 | 容積 | | 差 |
|---|---|---|---|
| | 測定値 | 計算値 | 測値−計値 |
| 0,9 | 0,999978 | 0,999951 | +27 |
| 2,1 | 0,999923 | 0,999905 | +18 |
| 5,2 | 0,999885 | 0,999886 | − 1 |
| 7,2 | 0,999953 | 0,999947 | + 6 |
| 9,1 | 1,000081 | 1,000055 | +26 |
| 11,2 | 1,000251 | 1,000232 | −19 |
| 12,7 | 1,000352 | 1,000393 | −41 |
| 15,0 | 1,000706 | 1,000695 | +11 |
| 17,4 | 1,001057 | 1,001078 | −21 |
| 19,2 | 1,001419 | 1,001409 | +10 |

**五　實驗的並に理論的範式** (Empirical and Theoretical Formulae.) (2) 及 (4) の方程式の如き範式は諸觀測の結果を出來得る丈良く描出すと云ふ外何等他の目的なく之を實驗的範式と稱す。此式の形は種々の現象に於て互に甚相違せるものなるべし。之に反して現象の本質並に現象を支配する法則に於ける洞察、即ち或理論に基ける範式は理論的範式と名けらる。方程式 (4) も亦若し水に於て溫度の上昇のため何が變化するかを知り又夫よりして容積の式は不變なる一項の外 $t$ の一乘二乘三乘四乘冪の諸項を有せざるべからざるを演



繹し得たりとせば是も亦一の理論的範式たるべし。

初め一の實驗的範式として設けたるものが後に至り或理論より演繹せらるゝこともあり得るなり。特に範式の形が簡單にて且つ觀測を極めて良く描出せる場合に、斯かること可能なり。之に反し方程式と觀測との一致が唯だ方程式中の常數の數の多きによりてのみ得らるゝ如きに於ては、其方程式が他日理論的範式と爲さるゝに至ることは蓋し確らしからず。恐らくは、若し現象を一層良く理解せるに於ては、夫等は全く形を異にせる遙に簡單なる理論的範式にて代へらるゝに至るべきなり。又極めて複雜なる方程式は實驗的範式としても其價値甚小に、或は全然無とすべし、何となれば關係的變數の大さは此の如き方程式に依ると同樣の程度に、表よりして見出し得べければなり。

又實驗的並に理論的關係が觀察と悉皆一致するにあらずとも夫等を用ゐることあり。或目的には測定の結果の粗雜なる表出にても充分なるあり。又或理論的範式が實際と僅小の差異を示せりとも、其爲に之を演繹せる理論を全然拋棄せざるべからずとは云ふべからず。理論が主要の點に於て正くして、夫よりも輕微の點を考量せざりしと云ふ事もあり得べきなり。

**六　挿入** (Interpolation.) 獨立變數の値が恰も測定せる中に非ざるも觀測したる値の間に狹まれる樣なるとき、是に對する關係的變數の値を求むる事往々あり。適當なる實驗的範式を設け得られば之を求むるは容易なり。唯、式中に置換するを要するのみなればなり。例ば範式 (4) は次の諸數を與ふ。

| 溫度 | 容積 | 差 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | |
| 1 | 0,999947 | −53 |
| 2 | 0,999908 | −39 |
| 3 | 0,999885 | −23 |
| 4 | 0,999877 | − 8 |
| 5 | 0,999883 | + 6 |
| 6 | 0,999903 | +20 |
| 7 | 0,999938 | +35 |
| 8 | 0,999986 | +48 |
| 9 | 1,000040 | +54 |
| 10 | 1,000124 | +84 |

特に注意すべきは、實驗函數が獨立變數の或局限內の値に於て觀測を良く表出するものが必しも此局限以外の値に對しても亦然りとせざることなり。例ば、方程式 (2) の演繹に於ては、溫度を 7,2° と 19,2° との間に限れるなり、此方程式が $t=0°$ 又は $t=30°$ に於て正確なる容積を與ふるや否は全然不定なり。實際に範式より $t=0$ に於て $v=1{,}000129$ を與ふるも實は $v=1$ ならざるべからざるなり。

又實驗範式を用ゐずして直接に表によりて挿入し得るなり。例ば對數表の使用にあたり、相互に關係せる二量が小變化をなすときは一方の增加と他方の增加と相比例すと見得と云ふに基ける著名の原則に從へるなり。

此仕方に依りて第一節の表より 10° に於ける水の容積を算出するには次の如くす。溫度が 9,1° より 11,2° に即ち 2,1° 上れば容積は 0,000170 丈增加す、夫より少き變化 9,1° より 10° 即ち 0,9° の增加に於て容積の增加は

$$\frac{0{,}000170\times 0{,}9}{2{,}1}=0{,}000073$$

なり。從て、所求の容積は次の如し。

7 : 10
64 : x



$$1{,}000081+0{,}000073=1{,}000154$$

此結果は先に範式 (4) より演繹せる値と異なれり、是等二個の値に就ては後者即ち 1,000124 を選ぶべしとす。此計算は、水は等しき溫度上昇每に等しき膨脹をなすと云ふ假定に基けり、然るに此假定の正確ならざるは既知の如ければなり。讀者は又上述の挿入に次の事を注意すべし、即ち二個の觀測結果の間に挿入せんとして、是等二結果を範式 (1) の形の一方程式にて表し、其方程式の獨立變數の値に、今其函數値を求めんとする値を置換したるものなりと知るべし。又三節に於ては $t=7{,}2°$ 及 $t=19{,}2°$ の間へ上述の $t=9{,}1°$ 及 $t=11{,}2°$ の間に於けると同樣の挿入をなしたるものと云ひ得べし。

又今過大の結果を得たるは既に三節に述べたる事により明かなり。又上述の挿入法は此に用ゐる獨立變數の値が互に近き程目的に適するは、演繹せる諸數字よりして之を見るべし。

挿入を容易にし且つ函數の變化の狀を能く通覽せしむるため、獨立變數が等差にて進める表に其函數の相次げる諸値の差を掲ぐるもの往々あり。普通の對數表に又此節の表にも之を添へたり。

**七** 上述の簡單なる原則に依れるよりも一層精密なる挿入をなさんとせば、其函數の表中相次げる値を二個ならず三個を用ゐ、之等を (2) の形の範式によりて表出すべし。例ば 10° に於ける水の容積を求めんとするに

$$v=a+bt+ct^2$$

の方程式に於て諸係數を次の如く定む、即ち $t=9{,}1,\ 11{,}2$ 及 $12{,}7$ に就て容積が第一節に與へたる値を占むる樣になし、然る後此に $t=10$ と置くべきなり。

此計算は表中獨立變數の値が等差を以て進める場合には最簡單なり。

此變數の相次げる三値を $x$, $x+p$ 及 $x+2p$ とし、此に相當せる函數の値を $y_1$, $y_2$ 及 $y_3$ とす。今獨立變數の $x+q$ の値に對する函數の値を求むと假定すべし、但 $q<2p$ とす。

先つ $y_2-y_1$ 及 $y_3-y_2$ なる差を作り之等を $(\Delta y)_1$ 及 $(\Delta y)_2$ と記す。

又 $(\Delta y)_2-(\Delta y)_1$ の差を作り $(\Delta^2 y)$ と記し之を第二次の差と名く。此の如き差に凡て第一の差の次の行に置くものとす。然れば求むる函數の値は次の如し

$$y_1+\frac{q}{p}(\Delta y)_1+\frac{1}{2}\ \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p}-1\right)\Delta^2 y \dots\dots\dots\dots (5)$$

例ば前節の表よりして $8,5°$ に於ける容積の値を見出さんとせば即ち

$$\frac{q}{p}=0,5,\qquad y_1=0,999986,\qquad (\Delta y)_1=0,00005\dot{4},\qquad \Delta^2 y=0,000030$$

にして (5) の式は容積に就て 1,000009 を與ふるなり。

勿論 (5) の中 $y_1$, $(\Delta y)_1$ 及 $\Delta^2 y$ は時として負數なることあるべし。

**八** 前諸節に於て述べたる如き計算に於て觀測の結果が決して凡て皆完全に精密なるものにあらざるは忘るべからず。第一節の諸數に於ては誤差は一方向にも、又他の方向にもあり、即ち諸數は幾分、過大又は過小なり。觀測をなしたる狀況を考に入れ並に種々の測定を相比較せば、此誤差に就て其有し得る最高値如何に關し論じ得べし。

範式と觀測との一致は測定値と範式より計算せる値との差が誤差の有し得る大さより大ならざるを以て充分なりとすべし。

此大さと、測定の結果を表す數を小數何位まで記すべきかとは相關係せり、確實ならざる小數を許多與ふることは避けざるべからず。例ば一の線の長さを糎まで精密に知れりとせば、粍の百分一を示す數字を加ふるは啻に無用の勞なるのみならず却て精密度に就て誤れる外見を與ふるなり。



全然確實なる小數より最高一位丈多く與ふるを適當とす。

精密に知られざる諸數より計算によりて他の數を導けば後者に於ても亦完全なる正確は期し得べからず。されば第一節に與へたる容積の値より、中間の溫度に對する値を挿入法に依りて小數七位まで精密に見出すことは決して可能ならざるなり。故に六節に於て $0,000170\times 0,9$ を 2,1 にて除して小數第六位より以上を出さゞりしなり。

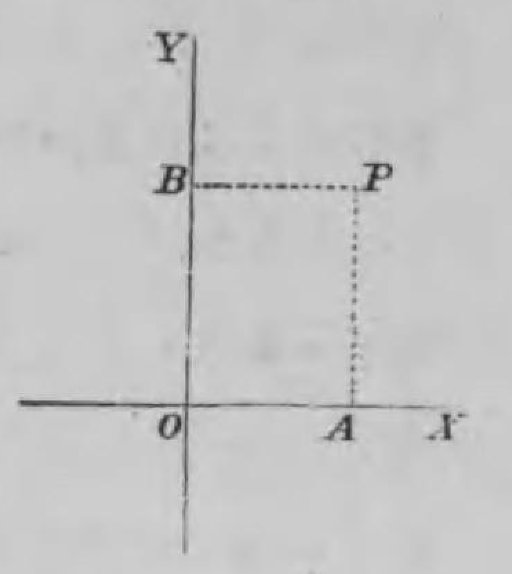
一數に於て小數若干を取去らんとせば保留する最後の數字の次の數字が 5 よりも大ならば前者に 1 を加へざるべからず。例ば 0,186 を省略して表すには 0,18 よりは 0,19 が一層精密なるべし。

**九 函數の經過の圖式的表出** (Graphical Representation of the Course of a Function. Coordinates.) 一函數の經過即ち其變化の有樣は表に依る外、圖によりても亦之を表出し得べし。此圖式的表出は屢用ゐらる、其の基く所は、如何なる種類の量も其値を直線の長さにて表はし得と云ふにあり。量自身が線ならば、其儘の大さ又は縮小或は擴大の尺度に於て圖に記入し得らるべし。他の種類の量を表出せんには先づ之を或一定の單位にて表はしたる後、或任意の長さの線 $a$ にて此單位を表出せしむる樣になすべし、量が $p$ 單位を有すとせば所求の表出は $a$ 線の $p$ 倍なる一線なり。

一函數の經過の幾何的像を得るには獨立變數並に此に相當せる函數の諸値を線として表すべし。凡て此等の線を圖上に於て、何れの線が何れの變數に關係するかを區別し得る樣にし又每回何れの二線が互に相關聯せるかを明かにせしむ。

通常次の方法に依る。一直線 $OX$ 上に (第一圖) 一定點 $O$ を取

第一圖




り $OA$ の線にて獨立變數の一值を表はさしめ、$O$ より $OX$ の上に此長さを切るべし。次に $AP$ 線にて其函數值を示す樣に取り、之を $A$ に於て $OX$ に垂直に立つべし。然れば $P$ 點は其位置によりて二變數の相互關聯の値を表示するものなり。是等諸值の各別の組合せに連れて各別の、然かも何れも全く一定せる點を與ふるなり。

又勿論 $P$ 點は次の如くにするも得らる。即ち $OX$ に垂直に第二の固定の直線 $OY$ を引き、此上に $OB$ なる長さを函數の値を表はす樣に取り、$B$ 點より $OX$ に平行なる一線を引き $AP$ を切らしめ所求の點 $P$ を得べきなり。

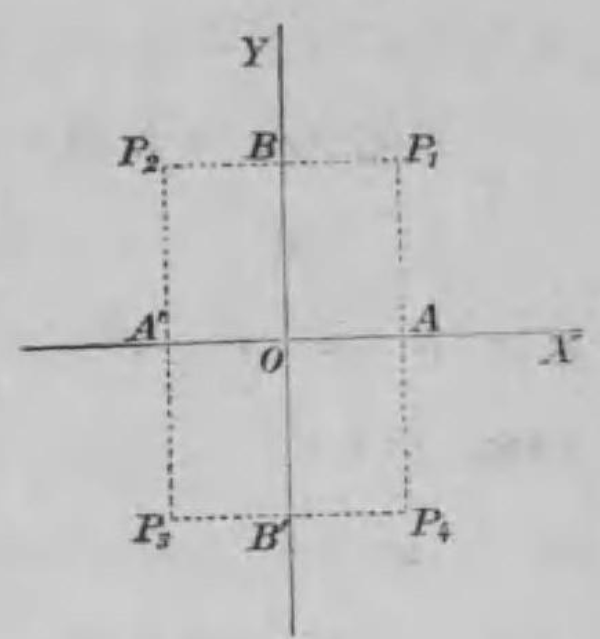
$P$ 點の位置を見出さしむる二直線 $OA$ 及 $AP$ 又は $OA$ 及 $OB$ を點の座標と名け、固定の線 $OX$, $OY$ を座標軸とし、$O$ 點を座標の原點となす。先づ $OX$ 上に一變數の値に相當する長さを切れるにより $OA$ を橫座標と名け、之に相應する垂線 $AP$ を縱座標と名く。$OX$ 及 $OY$ の二線を座標の橫軸縱軸として區別す、或は又此等に各其軸上に取れる線片の意味に相當する名を與へ得べし。

或線上の諸點が各其橫坐標と縱坐標とによりて一組の相關聯せる變數の値を與ふとせば其線の經過は此等變數間に存する關係を表示するなり。

例を擧げ之を說明する前尙注意すべきは、$O$ の何れの側に $OA$, $OB$ の長さを取るべきかを知りて初めて $P$ 點を完全に定め得らるゝことなり。是が明かならざれば所與の線片の長さにて一點ならず



第二圖




して四點 $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$（二圖）を得べきなり。

然れども此の如きは何等困難を來さず、却て變數に就て獨り值のみならず、符號をも圖中に示し得るの利を與ふるなり。

種々の量の方向又其取る意義に從て之を如何樣に正或は負と見做すべきかは明瞭なり。水平面よりの一點の距離は點が平面より上に在るときに之を正と名くれば平面より下に在るときは負となすべきなり。負の容積增加と云ふは容積の減少の意味なり。零度より上又下の溫度、熱の入と出、相互反對の方向の廻轉運動等、是等は皆 + 及 − の符號によりて各區別せらるべきなり。

圖式的表出に於ては各軸上一方向を正と選び、變數の符號の如何に從ひ之を表はす長さを $O$ より一方向或は他の此に反對の方向に取るなり。次の諸圖に於ては右方へと上方へとの方向を正と選ぶべし。

**一〇　例** (Examples.)　先づ次の函數の圖式的表出を例として說明すべし。

$$y=2+x-x^2 \qquad\cdots\cdots(6)$$

獨立變數 $x$ に就て次の諸值

$$-1;\ 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 3;$$

を置けば

$$y=0;\ 2;\ 2{,}25;\ 2;\ 1{,}25;\ 0;\ -4;$$

を得べし。

今次の如くす(三圖)。

$OF=1$

$Og=2$

$OA=0{,}5$; $Aa=2{,}25$

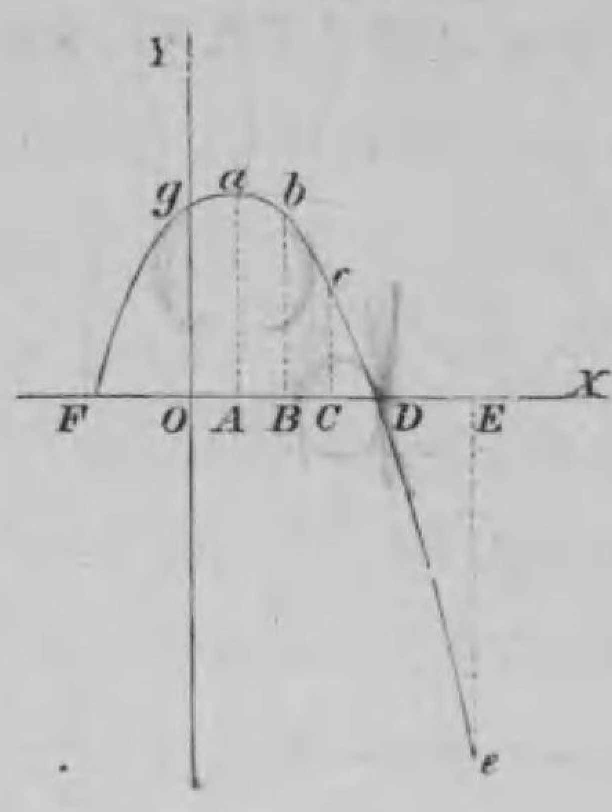
$OB=1$; $Bb=2$

$OC=1{,}5$; $Cc=1{,}25$

$OD=2$

$OE=3$; $Ee=4.$

第三圖




然れば $F, g, a, b, c, D, e$ 諸點を過ぐる樣引きたる曲線は所求の幾何學的表出なり。

逆に、關係(6)は曲線の性質を代數的に觀察して定むるの用をなす。之を此線の方程式と名く。

第一節に水の容積變化に就て示せる結果を圖式的に表出するには先づ $1^\circ$ の溫度差に相當する一線を選び、溫度を橫軸として表はすべし。縱軸としては第一節に與へたる容積の値に比例する長を取るべし。縱座標間の差の分明なることを望むべきが故に此場合には容積の値は大なる尺度にて表はさゞるべからずして、之を圖に記載せば不便宜なる大さを得べきなり。此困難を避くるには縱軸に容積其儘を置かず1との差を置くべし、即ち $-22, -77, -115, -47, +81, +251$ 等の數に相當するものなり。是等の點を過ぎ曲線 $OB$(四圖)引かる。

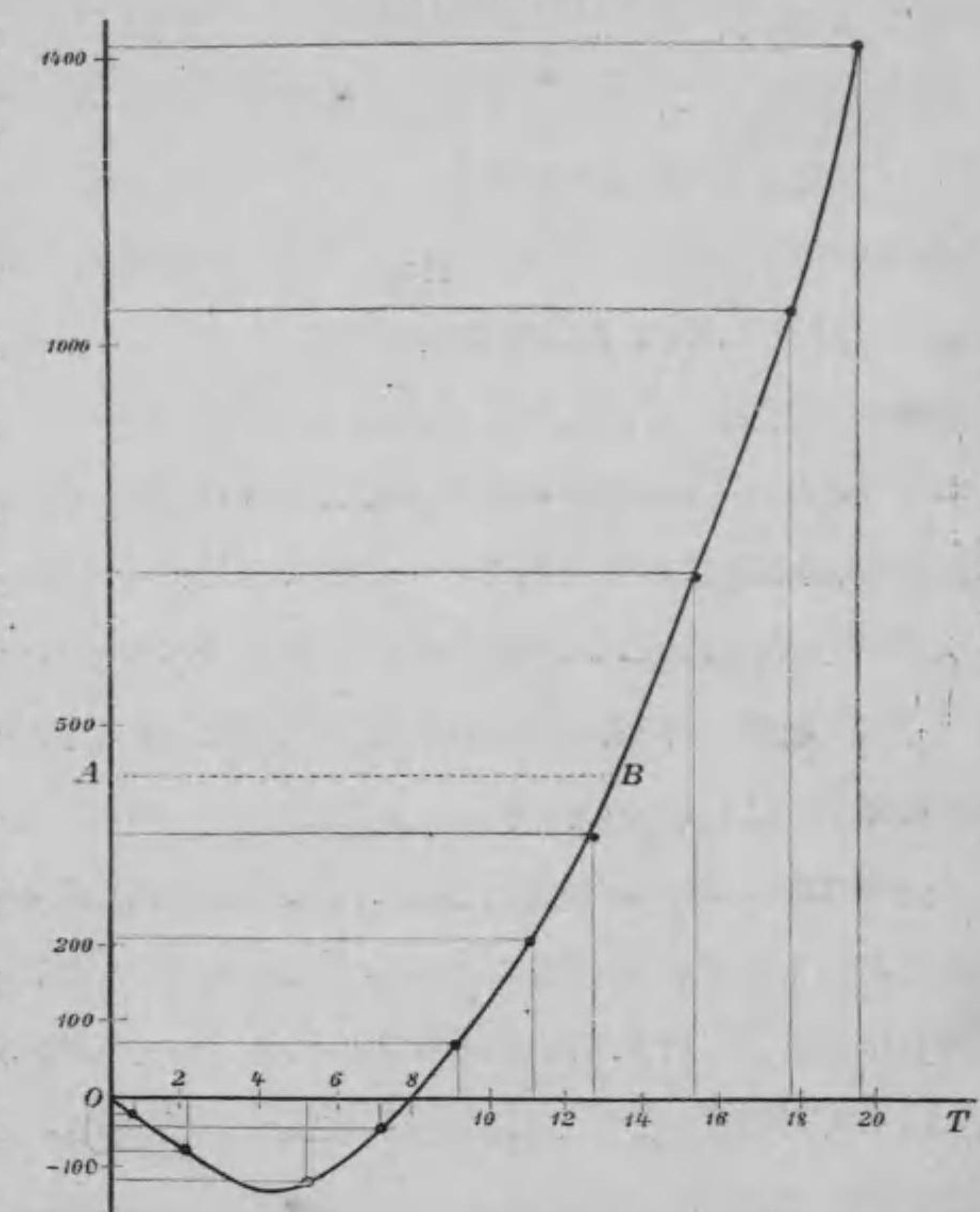
作圖を最容易ならしむるは許多の小平方形に罫を引ける紙を用ゐ



るに在り。此の如き紙は購ふを得べし。

一個々の觀測を表示せる諸點を過ぎ一の曲線を引けば觀測上得られざりし函數の値を圖よりして求め得らるべし、此爲めには圖上所與の橫軸に相當する縱軸の長さを測るべきなり。即ち圖に依りて圖式的に挿入し得らるゝなり。

第四圖




又所與の大さの容積を有する溫度を求むる如き問題も簡單に解き得らるべし。圖上、$A$ 點が此容積に相當すとせば $AB$ は其溫度を與ふ。此圖よりして知り得らるゝ如く容積の若干の値に對しては此問題に對し二個の解答を與ふるなり。

測定に於ける誤差は圖中觀測を表示せる諸點を過ぐる曲線が其一

樣なる經過に小なる偏倚をなすによりて顯はる、蓋し此の如き偏倚が實際に相當せずと假定すべしと信ずるなり。此場合に曲線は出來得る丈一樣に走り、又同時に出來得る丈充分に凡ての所與の點に沿て、然れども必しも是に於て凡ての點を經過することなき樣之を引くべし。是がためには勿論諸點は一部分、曲線の一側に在り又一部分他側に在らざるべからず。斯樣にして圖式的表出によりて誤差を分明ならしめ得べし、然れども勿論是に於て曲線が諸點よりの隔りは何れも各測定に相應すと信ぜらるゝ精密の度と一致せざる樣ならざるべきを注意せざるべからず。

四圖の線の形を見れば 12,7° に於ける容積の測定値は稍過小なること確らしきなり(6 頁の表參照)。

**一一 上昇及下降の線 極大極小** (Ascending and Descending Lines. Maxima and Minima.) 獨立變數の増加と共に函數が增加せば圖式的表出に於ては右方に上昇せる線を得。之に反し獨立變數の增加するとき函數が減少せば線は下降するなり。第一の場合の例は五、六及七圖に、後者の例は八、九、一〇圖に見る。圖中獨立變數は普通の如く $OX$ 軸上の線片に依り表出せり。

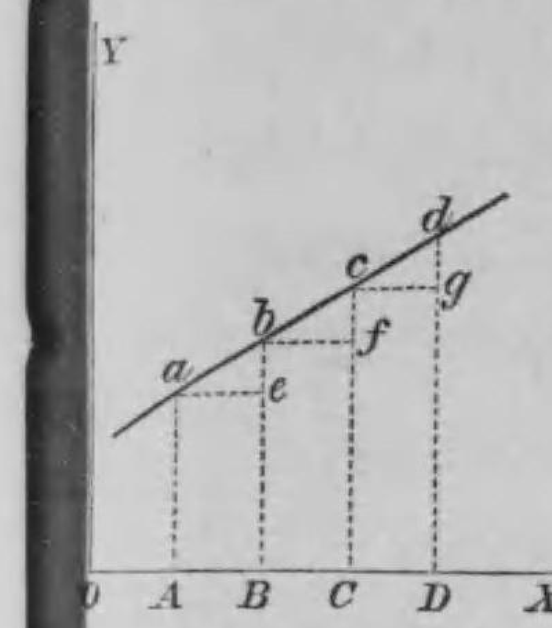
此軸上に $A, B, C, D$ 諸點を順に互に等距離に取る。$Aa$, $Bb$, $Cc$, $Dd$ の縱坐標を引き、又線片 $ae$, $bf$, $cd$ (五及六圖)或は $be$, $cf$, $dg$ (八圖)を $x$ 軸に平行に引く。然れば $be$, $cf$, $cg$ (五及六圖)或は $ae$, $bf$, $cg$ (八圖)の諸線片は此函數が獨立變數の等しき增加 $AB$, $BC$, $CD$ によりて受くる變化を表す。

是等の線片が互に等しければ線は直線なり(五及六圖)。此の如き線は獨立變數の變化と函數の變化とが常に相比例する如き函數を表

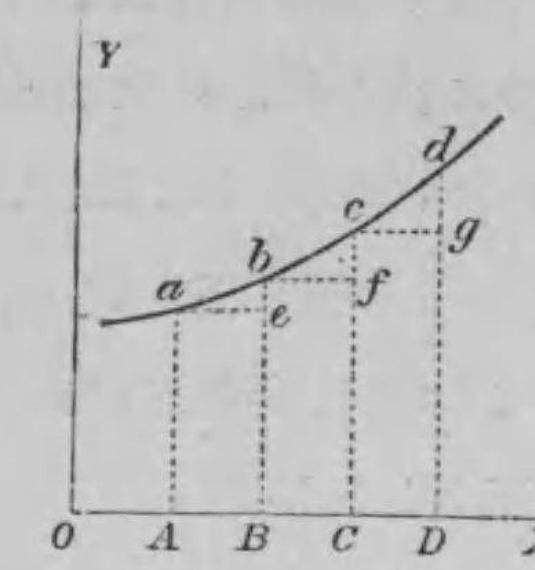


出す又或は此函數は絕えず同じ速さにて變化すと云ふなり。此種の函數を直線的と名く。

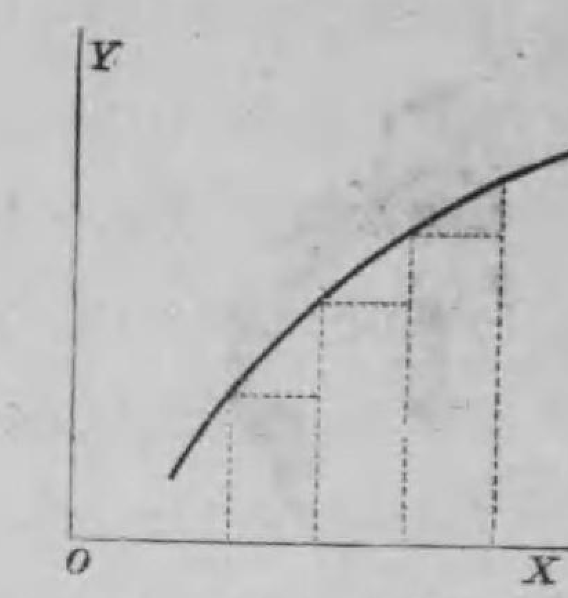
第五圖



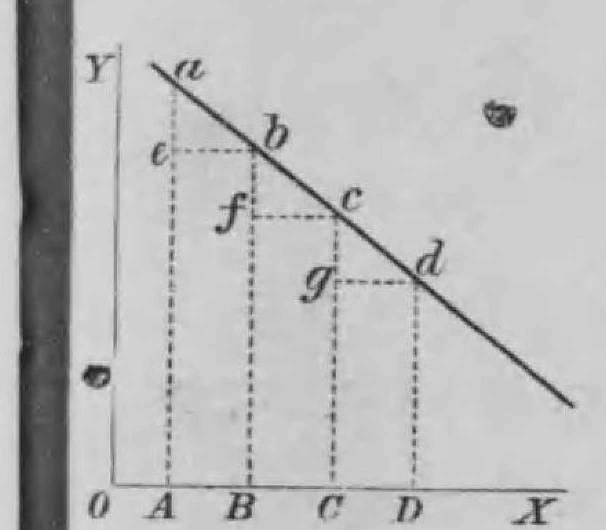

第六圖



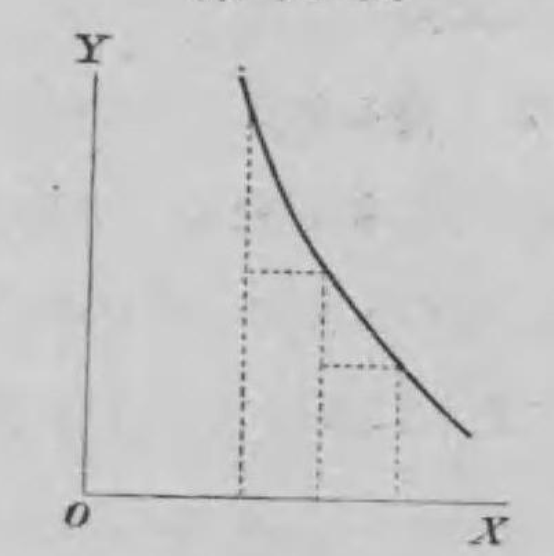

第七圖



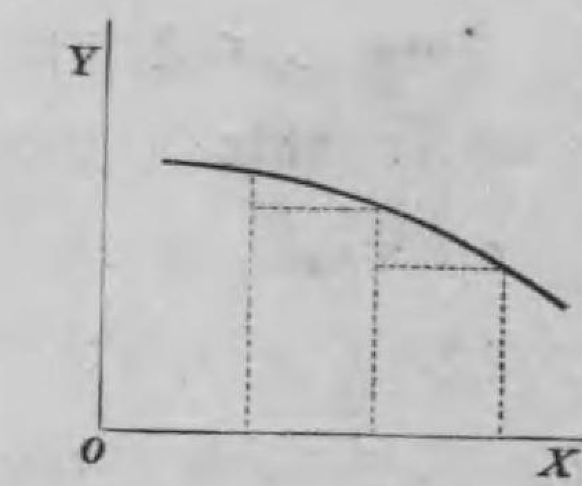

第八圖




第九圖




第一〇圖




又是により三節中に置きたる假定は四圖中の線の一部分を直線と見做せるに基づけるを知るなり。又其節中に計算せる容積の値が 7,2° 及 19,2° の溫度の間に於て過大なるべきは圖よりして直に知り得。

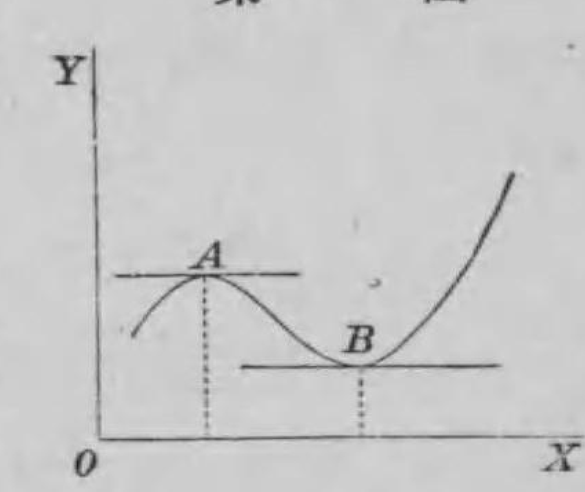
六圖の如く、上昇せる曲線の凸部を橫軸に向くるものに於ては $be$, $cf$, $dg$ なる線片は右方の程長さを增せり、茲に線片長き程上昇は速かなりと云得べし。之と反對なるは七圖の線に於ける如く其凹部を $OX$ の軸に向くるものなり、此の如き差は九及一〇圖の諸線に於

ても認むべし。

一の曲線は又交互に上昇し又下降し得るなり。三圖(14 頁)に於ては獨立變數の增加と共に $a$ 點に於て上昇より下降に變せり。此の如き點を線の極點と稱す。横坐標 $OA$ によりて表さるゝ $x$ の値に就て函數は直に前、並に直に後の値よりも大なる値を有す。之を函數が極大となれりと云ひ表はす。之に反して極小と云ふは函數が直前並に直後の値よりも小なる値を有する場合なり。例ば水の容積は殆 $4°C$ に於て極小となる(四圖參照)。

一一圖に於ては極大と極小とあり。又此圖によりて一函數が極大に達したる後更に新なる上昇に依て此極大よりも一層大なる値に到達するを得るを見るべし。即ち極大と云ふは必しも函數の凡ての値の中の最大なるものゝ謂に非ず、故に上の如くに直に前並に直に後の値に關して述ぶること必要なり。

第一一圖




往々簡單なる計算によりて函數の極大又は極小に相當する獨立變數の値を見出し得。

$$ax^2+bx+c$$

の式に於て $a$ を正數と假定せんに例ば之を

$$\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

と書き改め得べし。此式は變數 $x$ の

$$-\frac{b}{2a}$$



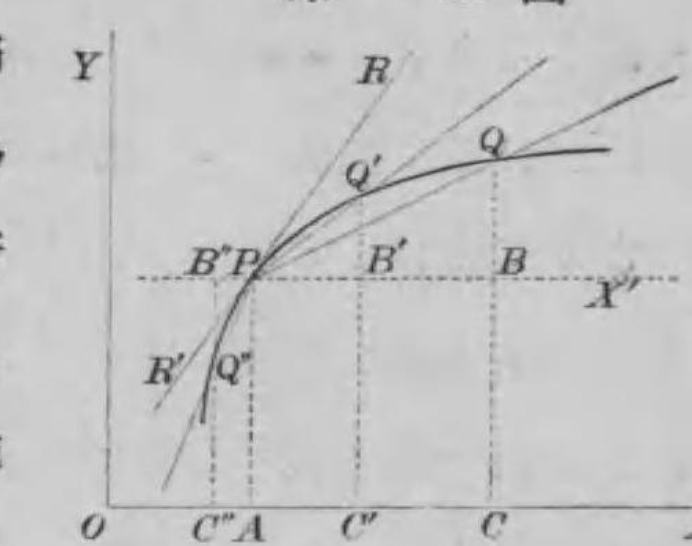
の値に於て極小となるべし。第一項は此場合には零となれども他の凡ての $x$ の値に就ては正數にして、第二項は常に同一値を有すればなり。

$x^2$ の係數が負なる場合にも同樣の推理は少しく變化すれば應用せらるゝなり。此場合には極大を得(一〇節の例參照)。

$a$, $b$ 及 $c$ の値が與へられたる場合の計算は讀者に委ぬべし。

**一二　切線　法線** (Tangents. Normals.)　一曲線の或一點に於ける方向は其點に於ける切線によりて示さる。$P$ (一二圖)を此點とし $Q$ を線上第二の點とし、$PQ$ を連結線とす。$P$ 點を固定し、$Q$ 點の代りに、他の $P$ に一層近き $Q'$ 點を取るとせば、割線は $PQ'$ なる新方向を得。$Q$ が曲線上 $P$ の方に移動すれば割線は $P$ の周に廻轉しつゝ益一定方向の一線 $R'R$ に近づく。此線を切觸線又は切線と名く。同樣に他の側より $Q''$ の點を $P$ に近かしむるも此切線を得べし。

第一二圖

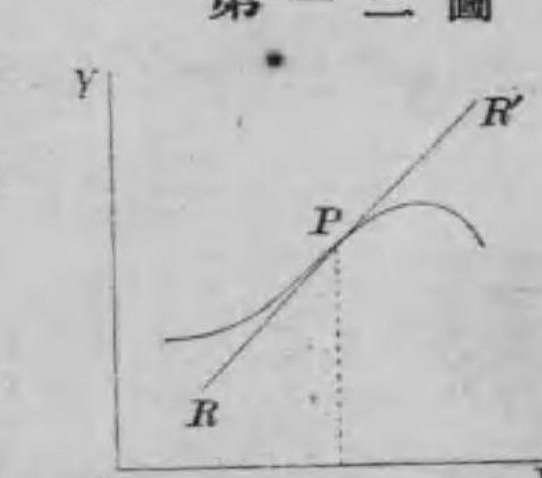



曲線上縱坐標が極大又は極小となれる諸點に於ける切線は一一圖に於ける如く横坐標軸に平行なり。

一の切線が一曲線上一點以外尚數多の點に於て共通に切觸し得ることは一八圖及二四圖の諸線の例に見るべし。

又切觸點自身に於て切線が曲線を過ぐるを得べし。一三圖は其例なり。此曲線

第一三圖



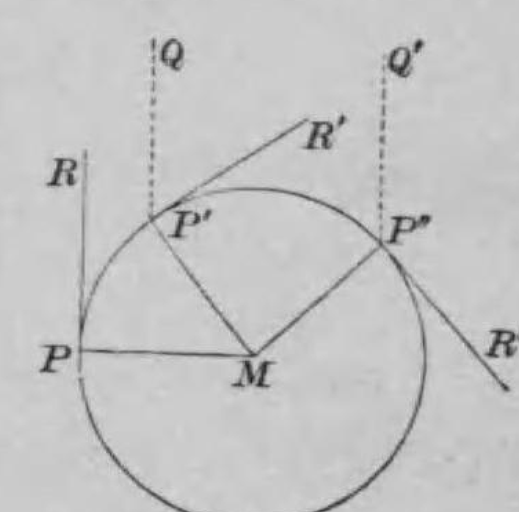
の $P$ の兩側は $RR'$ の反對の側に在れども $RR'$ は曲線に切觸せり。曲線が $P$ の一方に於て凸、他方に於て凹部を $OX$ 軸に向くるに依れるなり。$P$ の如き點を轉回點と名く。

切觸點に於て切線に垂直或は所謂、曲線に垂直に引ける線を法線と名く。

**一三　曲率の測度** (Measure for the Curvature.) 一點を一曲線上に動かしめ、絶えず此點に於て切線を引き且運動の方向と同じ側に之を引けりと假定す。此切線が廻轉する角度によりて曲線上動點の經過せる部分に關する方向變化の大さを測る、即ち所謂、此部分の曲率を測るなり。

一四圖に於て圓弧 $PP'$ 及 $PP''$ の曲率は $QP'R'$ 及 $Q'P''R''$ の角度によりて表はさる。$PR$, $P'R'$ は切線なり、又 $P'Q$ 及 $P''Q'$ は $PR$ に平行に引けり。同一圓上の等しき弧は同じ曲率を有すること明かなり。然れども異なれる圓に於て同長の弧を取れば、容易に、小なる圓に屬する弧に於て方向變化最大なるを見る。是によりて小圓は大圓よりも曲率大なりと云ふ。

第一四圖




任意の曲線が一定位置に於て有する曲率は線上此位置に於て圖形の大さに比して甚小なる一線片を取り此小部分の方向變化を考察して其概念を得べきなり。之を他の位置に在る同長の第二の小弧の方向變化と比較すべし。例ば各一粍の長さの二弧に就て $P$ 及 $Q$ の二點に於て方向變化が夫々 $2^\circ$ 及 $1^\circ$ なりとせば線は $P$ に於て $Q$ に於

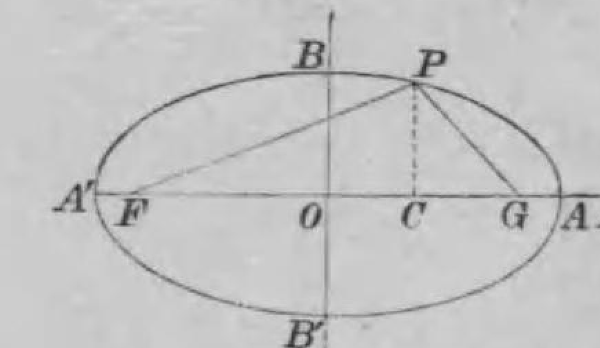


けるよりも強く彎曲せりと云ふ。例ば三圖に於ては $a$ に於ける曲率は $D$ に於けるよりも大なり。

一圓周上一粍の長さの弧が上述 $P$ 點に於ける同長の弧と同じく $2^\circ$ の曲率を有したる場合に其圓の半徑を算出するを得べし。計算は簡單にして答は $180/2\pi$ 粍なり。此半徑を有する圓が曲線の凹側に於て $P$ 點に觸るゝ樣に在れば $P$ を過ぐる任意の凡ての圓の何れよりも曲線に密に沿へるなり此の如き圓を曲率圓と名く。其半徑を此曲線の $P$ 點に於ける曲率半徑と名く。

**一四　特殊の曲線** (Special Curves.) 楕圓(一五圖)は其線上各點に於て、二定點 $F$ 及 $G$ よりの距離の和が同大なりと云ふ性質を有する曲線なり。即ち $P$ を其任意の一點とすれば次の如くならざるべからず。

第一五圖




$$PF+PG=AF+AG=A'F+A'G$$

楕圓を作るには一絲の兩端を $F$ 及 $G$ に固定し鉛筆にて絲を常に緊張せしむる樣にし、鉛筆の尖端を $P$ に置けるとき、絲が折線 $FPG$ に沿て走る樣に鉛筆を動かすべし。絲が $F$ 及 $G$ に於て固定すれば斯樣にして楕圓を唯一度に書き終る能はず、鉛筆を $P$ より $A$ に動かせば絲の $F$ の方の部分が $G$ に於ける留針に引きかゝるなり。之を避くるには絲の長さを $FPG$ 三角形の周圍に等しく取り、其兩端を結び、$F$ 及 $G$ の二の留針を周らす樣に置くべし。此絲を鉛筆にて張り、上述の三角形の周圍に沿て走る如くすべし。

$F$ 及 $G$ の二點を焦點と云ひ、是等の點より楕圓上任意の一點に引ける線を焦線と云ふ。

二焦點を過ぎ引きたる直線 $AA'$ は楕圓を二個の相合の部分に分ち、此線を境として之を折ればー方の部分が他方のものに重なり合ふべし。楕圓上任意の點 $P$ に相當して第二の點あり、$P$ より $AA'$ へ引ける垂線の延長上 $AA'$ より $P$ と同距離に在り、之を楕圓は $AA'$ に關して對稱的なりと云ふ。

楕圓は又 $FG$ の中點に於て垂直に立てる $BB'$ 線に關しても亦同樣に對稱なり。

$AA'$ 及 $BB'$ を軸と名く、之等を區別するため、$AA'$ を長軸、$BB'$ を短軸と云ふ。兩者の差は焦點 $F$ 及 $G$ が $A'$ 及 $A$ に近き程大なり。

兩軸の交はる $O$ 點は中心點なり、此點を過ぎて引ける凡ての弦は此點にて二等分せらる。

$A, A', B, B'$ は頂點なり。

方程式

$$PF+PG=AF+AG$$

よりして、今 $AG=A'F$ なる故、

$$PF+PG=AF+A'F=AA'$$

を得、即ち各點に於て二焦線の和は長軸に等しきなり。

短軸の一端、例ば $B$ を $F$ 及 $G$ と結べば

$$BF=BG$$

今又

$$BF+BG=AA'$$

なるべき故に

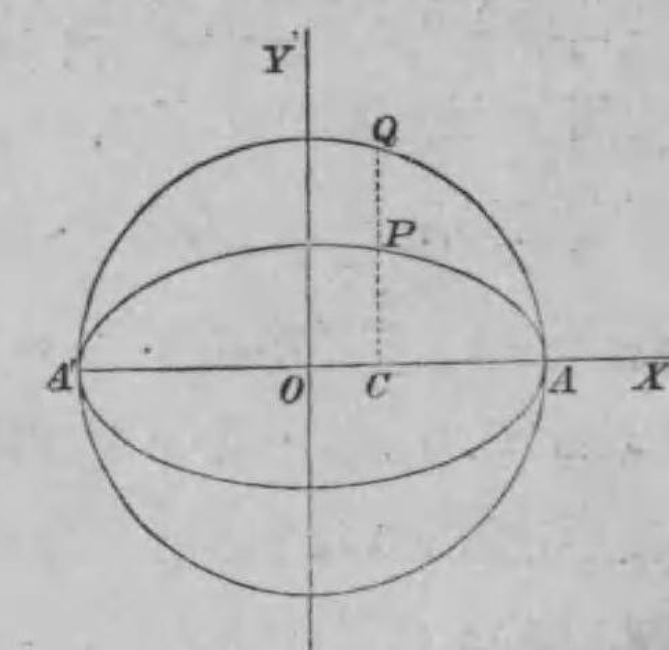
$$BF=BG=OA$$



を得、是は二軸即ち $A, A', B$ 及 $B'$ の諸點が與へられたるとき、二焦點の位置を定むるに用ゐ得べし。

**一五 楕圓と圓との關係 楕圓の切線** (Relation between the Ellipse and the Circle. Tangents to the Ellipse.) 一五圖に於ける如く $OA, OB$ の二線を坐標軸に取れば楕圓の定義よりして所與の一橫坐標 $OC$ に屬する縱坐標 $CP$ の大さを知るを得。同じ計算は楕圓の長軸を直徑とせる圓よりするも(一六圖)導き得べし。縱坐標 $CQ$ 及 $CP$ の比は $AA'$ 上 $C$ 點を何所に取るも常に同じきことを知るなり。又同樣なる關係は短軸を直徑とせる圓と其楕圓との間にも成立す、即ち此軸の任意の點に於て垂線を立つれば此點より楕圓及圓と垂線との交點夫々への距離の比が不變なり。

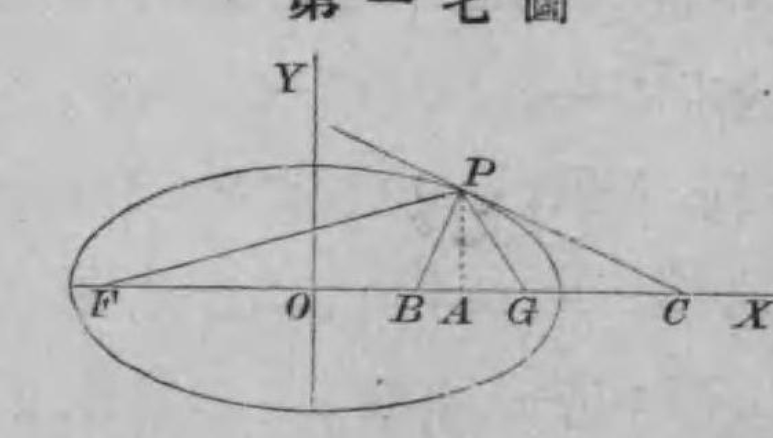
第一六圖




此故に圓に一直徑を引き此直徑と圓上諸點との距離を凡て同じ比に縮少し或は增大せば一の楕圓を得べし。

前節に與へたる楕圓の定義により或は玆に云へる圓との關係よりして此曲線の凡ての性質を演繹し得べし。其中最も重要なるは次のものなり。

第一七圖

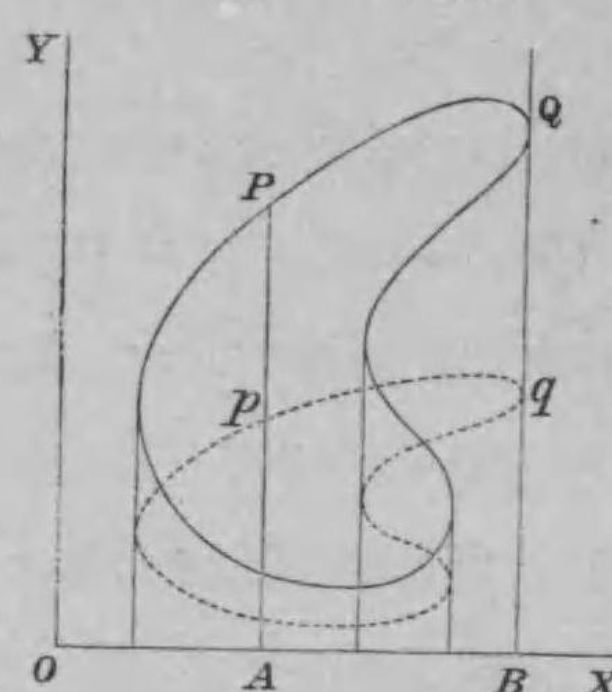



切線 $PC$(一七圖)は切觸點へ引きたる焦線 $FP$ 及 $GP$ と同じ角度をなす。法線 $PB$ は此等焦線間の角を二等分す。

楕圓は長軸の端の點に於て曲率最大なり、短軸の端に於て最小なり。

**一六 圖形の一方の延長と收縮** (One-sided Extension and Contraction of Figures.) 凡ての平面圖形に就て恰も圓より楕圓を得ると同樣なる形狀の變化を與へ得べし。

第一八圖




此が爲めには圖の平面に於て一直線 $OX$ (一八圖)を引き圖形の $P, Q$ 等の諸點より $OX$ 上に垂線 $PA, QB$ 等を引き是等垂線上に新に $p, q$ 等の點を其割合

$$\frac{Ap}{AP}=\frac{Bq}{BQ}=etc.$$

なる樣に取る。$p, q$ 等の諸點は新なる圖形を定むるなり。

此圖形は $OX$ に垂直なる凡ての大さを當初のものより皆同じ割合に縮少して得たるものなりと云ひ得べし。$OX$ に平行なる諸線の長さは不變なり。

此の如き形狀の變化は一方の收縮と名け得べし、反對に $PQ\ldots$ は $pq\ldots$ よりして一方の延長によりて得らる。

是等の形狀變化の例は函數の圖式的表出に於ても見るを得。此にありては諸變數の諸單位を表はす諸線片は隨意に選ぶことを得。今是等の線片に一定の選擇をなして圖形を引き、次に再度の作圖に於て或單位を表はす線片に先きと異れる長さを與へたりとすれば最初の作圖より一方の延長或は收縮によりて得べき、新なる線を生ずべきなり。



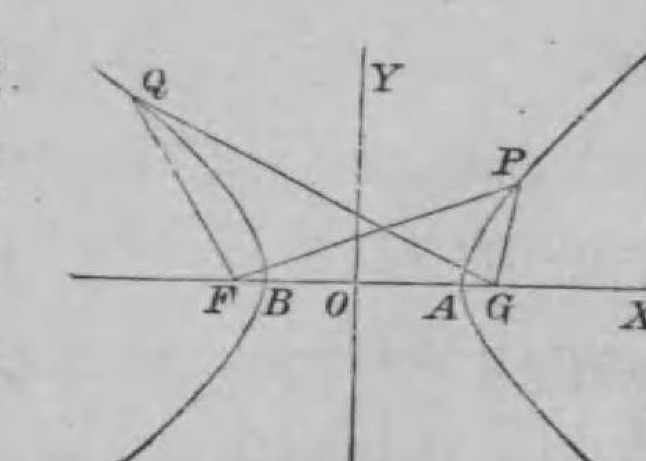
一圖形に於て互に直角なる二直線 $OX$ 及 $OY$ を引けば圖形を先づ $OX$ の方向に、次に $OY$ の方向に一方の延長を得べし。每回之を同じ割合になし、即ち大さを先づ一方向に、次に他の方向に共に同じ割合に變化すとせば結局最初のと相似なる一圖形を得るなり。

一平面上に在る圖形を此平面と一定の角度をなせる平面に投影すれば二平面の交線に平行なる線は凡て投影圖形に於ても同じ長さを有す。又交線に直角なる凡ての線は同じ割合に縮少せらる。故に投影圖形は當初の圖形より一方の收縮によりて生じ得る一圖形なり。例ば圓は楕圓を其の投影圖形として有するなり。

此結果により廻轉圓壔を任意一平面にて截斷せる面は楕圓なることを證し得べし。

**一七 双曲線** (Hyperbola.) 双曲線(一九圖)は各點 $P$ が二定點 $F$ 及 $G$ よりの距離の差同大なりと云ふ性質を有す。是等の點を焦點と云ひ、$FP$ 及 $GP$ の諸線を焦線と云ふ。

第一九圖




此曲線は全然相互隔離せる二部分(枝)より成り、各枝は兩方向に無限に擴る。此等焦點を連結する $FX$ 線は一對稱軸なり、$FG$ の中點に於て垂直に立てる $OY$ 線も亦同樣なり。

又 $FG$ 線が双曲線を切れる $A$ 及 $B$ 二點間の距離が焦線の不變の差に等しきを證明し得。

曲線の二枝に就ては一方の諸點は $F$ よりも $G$ に近く、他方のは $G$ よりも $F$ に近しと云ふ差あり。$P$ 及 $Q$ 點に就ては例ば次の

如し。

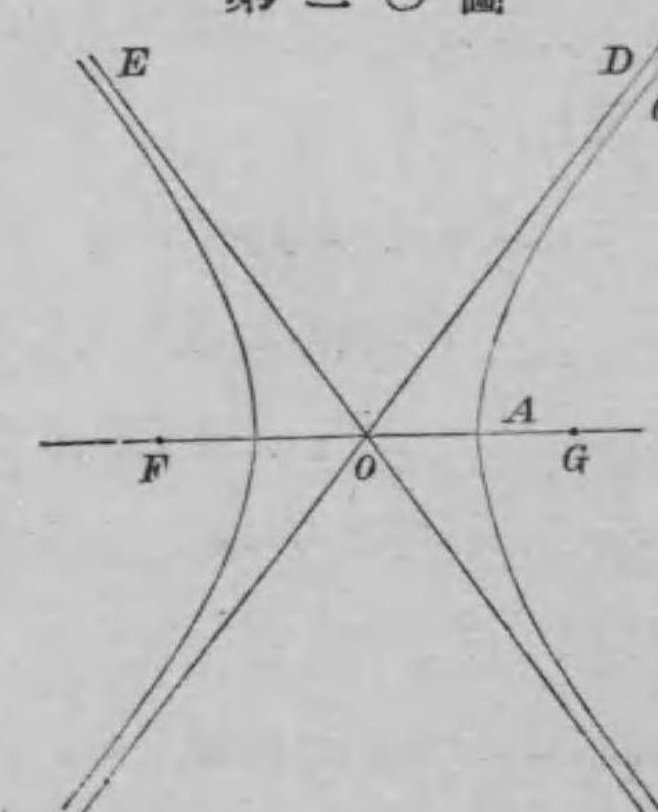
$$PF-PG=AB \quad 及 \quad QG-QF=AB$$

双曲線に於ては平面の何れの部分も凡ての方面に於て限ると云ふを得ず。圓及楕圓の如く元へ歸る諸線は平面を限るを得るなり。此等は閉曲線と稱せらる。

又折線に於ても閉と閉ならざるとを區別し得べし。一多角形の周邊は閉折線なり。

双曲線の顯著なる性質にて記載すべきもの尙一つあり。二焦點の中點なる$O$點を通じて(二〇圖)一直線$OD$を引くに双曲線の$AC$枝は$OD$直線に決して到達せず、然れども此に益近づき、線を充分に延ばせば$OD$よりの其距離望む限り小くなし得る樣なるを得。此$OD$線を漸近線と名く、尙第二の漸近線$OE$あり。

第二〇圖




他の曲線に於ても漸近線あるもの若干あり。讀者は今漸近的近似なる語の意味を了解せるなるべし。

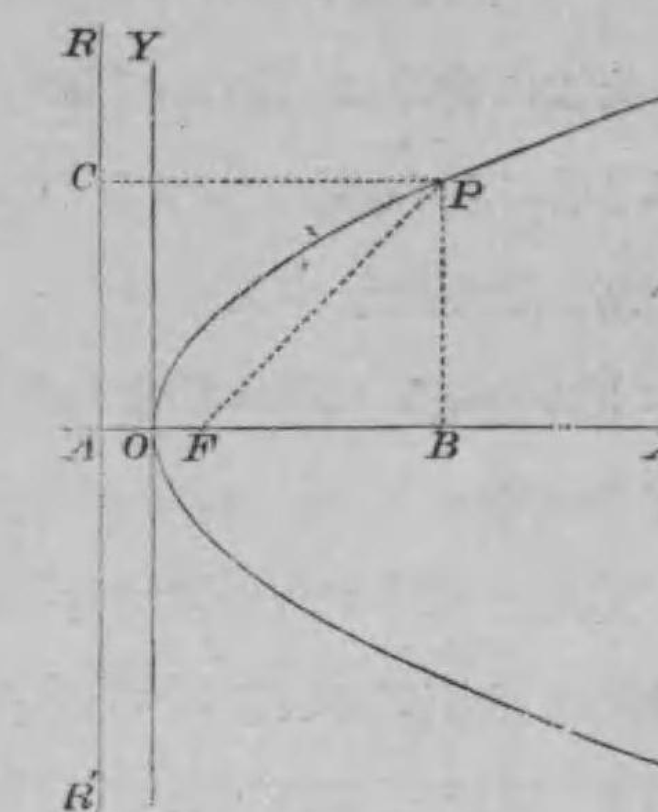
**一八　拋物線** (Parabola.)　拋物線(二一圖)は一直線$RR'$よりと一點$F$よりとの距離が相等しき凡ての點の幾何學的位置なり。$RR'$は準線又は導線と云ひ、$F$は焦點、$FP$は焦線なり。

此線は一枝より成り、其兩方向に無限に擴がれり。$F$を通じて準線に直角に引ける$AX$線は一の對稱軸なり。$O$點は此軸が拋物線



を切る所にして之を頂點と稱す。此點に於ける切線は$OX$に垂直なり。

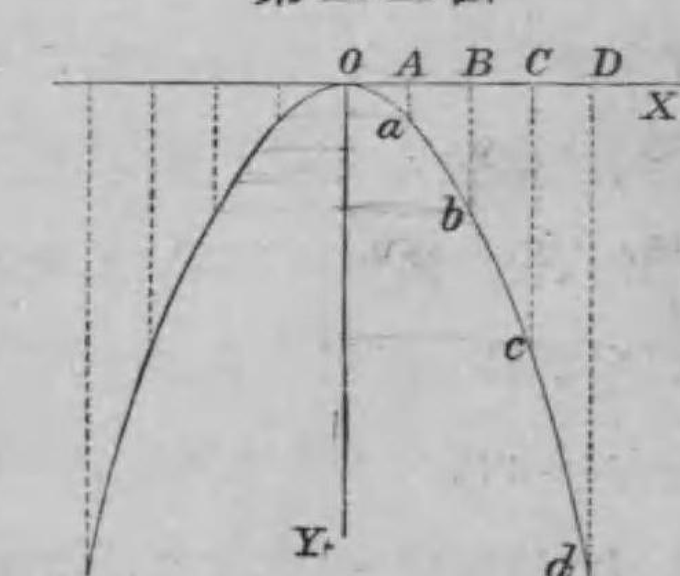
第二一圖




$OX$及$OY$を坐標軸に取れば所與の定義よりして曲線上任意の點の座標$OB$及$BP$間に簡單なる關係を得。即ち横坐標を表はす數の平方根に縱坐標が比例せることなり。$B$より$O$までの距離が四倍すれば垂線$BP$は二倍するなり。

是よりして又縱坐標が横坐標の自乘に比例する曲線は拋物線なりと云ひ得。二二圖は其說明をなす。是に於て$OX$を横坐標軸とし$OA$, $AB$, $BC$, $CD$の長さを相等しく取れり。一の縱坐標$Aa$は任意に選べり、其他は次の如く定めらる。

第二二圖



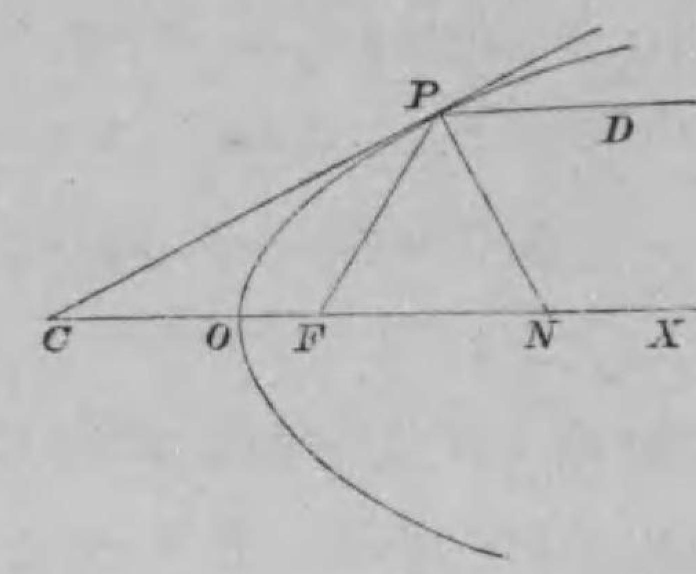

$$Bb=4Aa,\quad Cc=9Aa,\quad Dd=16Aa \quad 等$$

$dcbaO$の線が$O$の他側に於て如何樣に連續するかは圖よりして容易に知るを得べきなり。

拋物線に於ける切線$PC$は(二三圖)軸$CF$及焦點へ引ける焦線$FP$と同じ角度をなす。是に依て切觸點より軸に平行に引ける線と焦線との間の角度は法線$PN$によりて二等分せらるゝを知る。

楕圓、双曲線及拋物線は圓錐面を平面にて切りて作り得べし。此故に是等の三曲線は圓錐曲線と名けらる。

第二三圖




**一九 週期函數 波線** (Periodic Functions. Wave-Lines.)

函數

$$y=\sin x$$

の圖式的表出に就て述ぶべし。先づ角度を必しも度及其分數にて表はさず往々所謂「弧度」にて表はせることを説明すべし。即ち角度が其角の頂點を中心とし單位の長さを半徑として描ける圓弧の長さを表す數によりて示さるゝなり。弧度にては $360^\circ$ の角は $2\pi$ にて、一直角は $\frac{1}{2}\pi$ 又 $360^\circ/2\pi=57^\circ 17'$ の角が 1 なる數にて表はさるゝなり。

角が $0^\circ$ より $360^\circ$ に即ち 0 より $2\pi$ に増す間に正弦の受くる諸變化は人皆知れり。$360^\circ$ より大なる角並に負角に就ては三角術に於て既に知れる如し、角が $360^\circ$ 即ち $2\pi$ 丈増せば正弦は再び同じ値を占むべし。

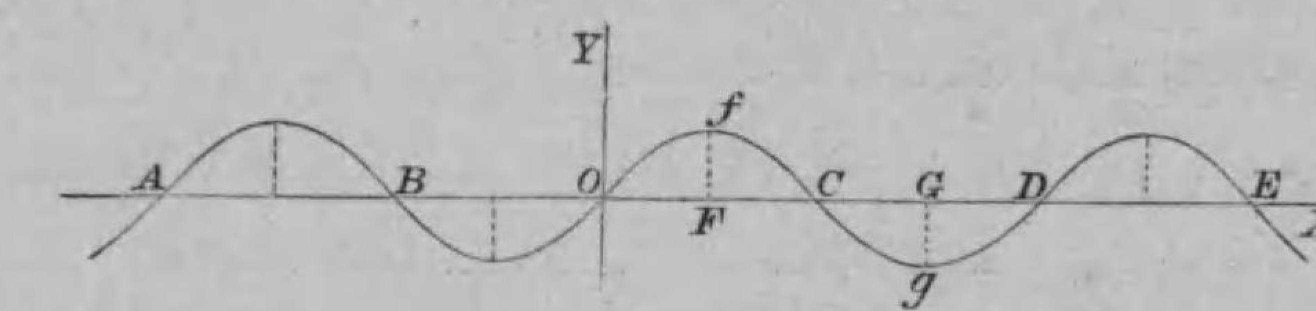
獨立變數が一定の大さ丈増せるとき常に再び同一値を占むる函數は週期的と名けらる。此の一定の大さを週期と云ふ。即ち $\sin x$ の週期は $2\pi$ なり。

**二〇** 角度が度に於て表はさるれば正弦の變化を圖式的に表出するには先づ $1^\circ$ の角を示す一の直線を選ばざるべからず。既に假定せる如く弧度を用ゐるとせば是に就て選べる單位の線の $\frac{1}{2}\pi$ 倍の直線が一直角を表はすべし。



所求の圖式的表出を示せる二四圖に就ては別に細説を要せざるべ

第二四圖




し。$x=0$ に於て正弦も亦零なるが故に曲線は原點を過ぐ。線は又横軸を $C, D, E$ 等 $B, A$ 等、次の如き間隔に在る諸點にて切る。

$$AB=BO=OC=CD=DE=\ldots\ldots=\pi$$

是等の諸點の間に於て曲線は交互に横軸の上又は下に横はれり。正弦が零に等しくなる度毎に其符號を變ずるが故なり。縱座標は $O$ 及 $C$, $C$ 及 $D$ 等の中央に在る諸點に於て最大の正及負の値を占む、即ち是等の點は $x=\frac{\pi}{2}(90^\circ)$, $\frac{3\pi}{2}(270^\circ)$ 等に相當す。作圖に於ては $O, f, C, g, D\ldots\ldots$ 以外の數多の點を定むるを要す。例ば横座標 $\frac{1}{3}OF$ なる一點を取れば其縱座標は $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ なり。$\frac{1}{2}OF$ の横座標に相當する縱座標は $=\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}=0{,}707.$

正弦の性質よりして $Ff$ は其線の $OfC$ の片に就て對稱軸にして、又 $CgD$ の片は $OfC$ と相合的なり。$OfCgD$ の片が作らるれば曲線全部知らるゝこととなる、何となれば右にも左にも此片が常に反覆せらるればなり、其一部分を圖に於て見るが如し。$A$ より $O$ に至る片は $O$ より $D$ に至る片と完全に一致す。

又正弦は週期函數なるが故に其諸變化を表出せる線は同樣の部分を連續的に相接續せるものなるべし。

**二一** 函數

$$y=a\sin x$$

の圖式的表出は $a$ を正數とせば二四圖に於ける凡ての縱座標を $a$ 倍大ならしむるに依りて得べきなり。即ち此圖形は $Oy$ の方向に於て一方の延長又は收縮をなせるなり。

函數

$$y=\sin 2x \quad \cdots\cdots(7)$$

を表出せんとせば此函數は次の $x$ の諸値即ち

$$0,\quad \frac{1}{2}\pi,\quad \pi,\quad \frac{3}{2}\pi \quad \text{等}$$

に於て零となるものなるを知らざるべからず、何となれば此等の値に於ては其二倍の角度が正弦を零となさしむるものなればなり。

方程式 (7) の線が $x$ 軸を切る諸點の相互距離は二四圖に於ける $OC$ 等の距離の二分一に等しきなり。此線は二四圖に依りて示されたる線を $OX$ の方向に一方の收縮をなして得らるゝなり。

同じ事は常數 $k$ を 1 より大なりとせば

$$y=\sin kx$$

なる函數を表出する線に於ても適用せらるゝなり。若し $k$ が 1 より小なれば二四圖の一方の延長によりて得べきなり。例ば $\sin\frac{1}{3}x$ なる函數は $x=0,\ 3\pi,\ 6\pi$ 等に於て零となるなり。

斯くして

$$y=a\sin kx$$

なる函數を如何に表出すべきかは容易に知り得べし。

最後に函數

$$y=a\sin(kx+p) \quad \cdots\cdots(8)$$

に於て $p$ を一常數とし之を考ふるには、先づ $y$ は次の値



$$kx+p=0,\quad \pi,\quad 2\pi,\quad 8\pi \quad \text{等}$$

即ち

$$x=-\frac{p}{k},\quad -\frac{p}{k}+\frac{\pi}{k},\quad -\frac{p}{k}+2\frac{\pi}{k},\quad -\frac{p}{k}+3\frac{\pi}{k}$$

等の値に於て零となることを知らざるべからず。

即ち $x$ 軸との交點は互に $\pi/k$ の距離に於て在り、$x$ が增大せるとき $y$ が負の値より正に變ずる諸點の一は橫座標 $-p/k$ を有するなり。$x$ 軸より其最大の偏倚は $+a$ 及 $-a$ なり。(8) の圖式的表出を得るには先づ二四圖の線を $OY$ の方向に於て一方に延長又は收縮せしめざるべからず、是によりて $Ff$, $Gg$ 等の長さに $a$ なる値を與ふるなり。然る後に同樣なる作圖を $x$ 軸の方向に行ひ、是等の軸との交點相互の距離を $\pi/k$ になすなり。最後に線が右方に上り行きて $x$ 軸を切る諸點の一を $x$ 軸に沿ふて變位せしめ、原點より其點の距離 $-p/k$ なる樣になさゞるべからず。

余弦は正弦と同樣なる線にて表出せらる。即ち $\cos\varphi=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$ なり。又函數

$$y=a\cos(kx+q)$$

に就て玆に $q$ を常數とせば、之を

$$y=a\sin\left(kx+q+\frac{1}{2}\pi\right)$$

と書き得るなり。

今 $q+\frac{1}{2}\pi$ を $p$ と記せば函數 (8) の場合に復歸するなり。

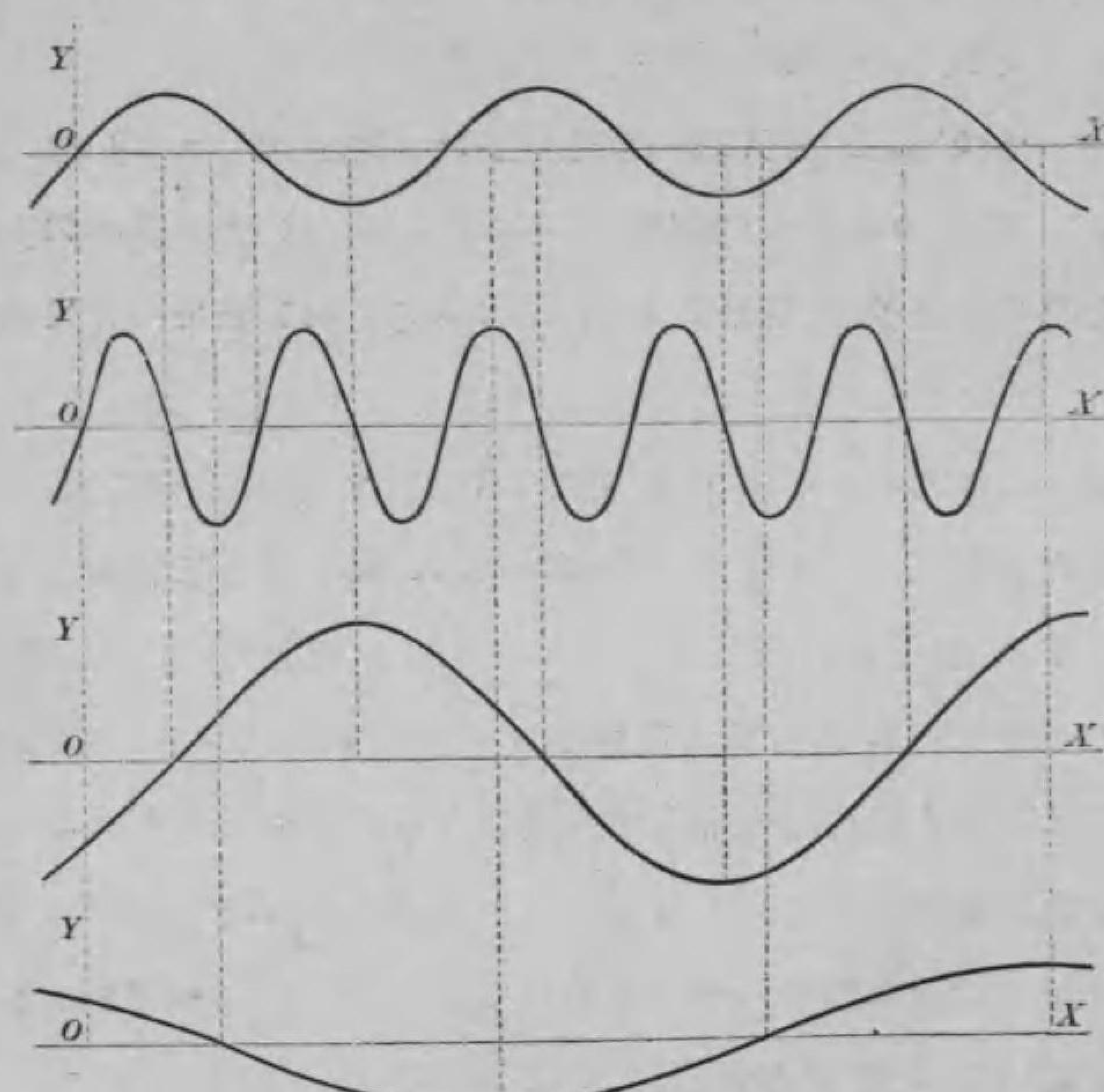
上來述べたるは二五圖が之を說明せり。圖中の諸曲線は次の方程式を有す。

$$y=\sin x,$$

$$y=1{,}5\sin 2x,$$

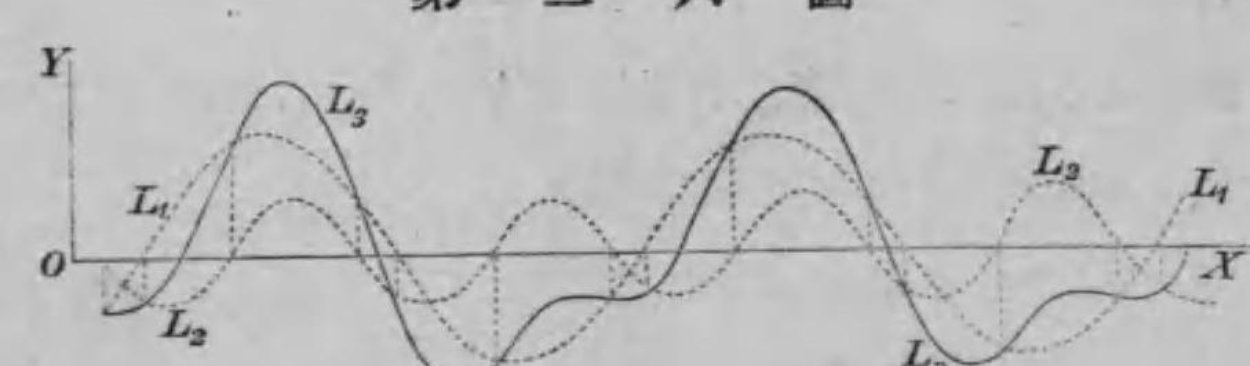
$$y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\pi\right),$$
$$y=\cos\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}\pi\right).$$

第二五圖




上述よりも稍簡單ならざる一週期函數は二六圖の $L_3$ の線に於て表出せらる。横坐標が一定の大さ（週期）を增す毎に常に同じ縱坐

第二六圖






標に戻る、即ち此曲線も亦等しき部分の相接續せる一群より成る。然れども是は二四圖及二五圖に於けるよりは稍簡單ならざる形狀を有せり。

週期函數を表出する諸線を波線と云ふ。二四圖及二五圖に表出せるものは簡單なる波線或は正弦線と稱す。

**二二 空間に於ける圖形 投影 坐標** (Figures in Space. Projections. Coordinates.) 物體又は空間に於ける圖形は透視畫法によりて描寫するを得。然れども多くの場合に投影畫圖が一層有利なり。

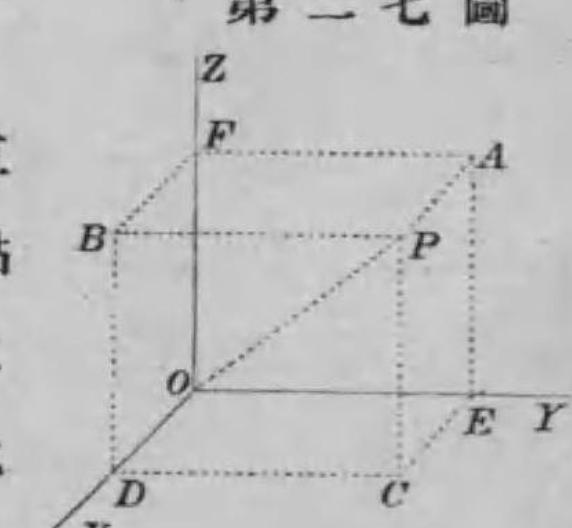
投影する平面としては屢水平なるを取る、之を水平投影と云ふ。是は空間圖形を恰も其より上の非常の遠距離に在る觀察者に見ゆる如くに寫せるものなり。

圖形の位置を定むるには投影のみにては固より充分にあらず、此外に尙圖形各點の投影平面よりの高さを示さゞるべからず。

是が爲には各點の投影に此高さを示す數を附記するも可なり。又他の方法は畫法幾何學に於て用ゐらるゝものにして投影面に直角なる一平面上に第二の投影を描くなり。

又空間に於ける諸點の位置は其等の坐標によりて定め得べし。

第二七圖




二七圖に於て $OX$, $OY$, $OZ$ は互に直角なる固定の三直線なり。任意の一點 $P$ よりして平面 $YOZ$, $ZOX$, $XOY$ に垂線 $PA$, $PB$, $PC$ を引く。$P$ の位置は此三垂線の長さにより且少くも尙其外に

上述の平面の何れの側に其點が存在し、即ち夫等平面にて作らるゝ三面角八個の何れに其點が在るかを知れば定めらるゝなり。

上述の固定の線を坐標軸と云ひ、平面 $YOZ$, $ZOX$, $XOY$ を坐標平面、距離 $PA$, $PB$, $PC$ を點の坐標と云ふ。

一の直角平行面體を作り相對立せる其二角點を $O$ 及 $P$ とし、其三稜邊を坐標軸に沿て取るとせば $P$ の坐標として、$PA$, $PB$, $PC$ の垂線の代りに $O$ 點に集合せる平行面體の稜を取り得べきなり。各稜に就て $O$ より何れの方向に其の走れるかは符號によりて示さるべし。

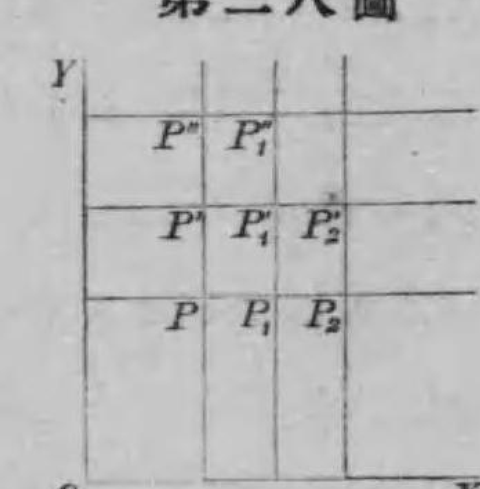
一點の坐標と原點及其點の距離との間に次の簡單なる關係あり。

$$OP^2 = OD^2 + OE^2 + OF^2$$

點の位置が其坐標によりて定めらるゝは根本的には投影の方法と同一なるは容易に知り得べし。二坐標 $OD$ 及 $OE$ は普通の方法にて $XOY$ 平面に於ける $C$ の位置を定む、即ち此平面に於ける $P$ の投影を定む。斯して第三の坐標は平面より $P$ 點の距離を與ふるなり。

**二三　二獨立變數の函數　表面に依る圖式的表出** (Functions of two Independent Variables. Graphical Representation by a Surface.)　固定せる一水平面上に坐標軸 $OX$ 及 $OY$ を取る(二八圖)。此平面の上方に任意の一曲面を想像す。今平面上任意の點 $P$ に於て垂線を立つるに、其の曲面を切る點までの長さは二個の獨立變數に關係せる一の量なり。即ち垂線の長さは

第二八圖






$XOY$ 平面に於ける $P$ の兩坐標知らるれば定まる、然れども是等兩坐標は互に獨立に種々の値を占め得べきなり。例ば橫坐標に或一つを選べりとするも縱坐標に就ては種々の値可能に、即ち $P$, $P'$, $P''$ の如き種々の點可能にして、是等の點に於て皆垂線は夫々異なりし長さを有すべし。同樣に $P$ より $P_1$ 及 $P_2$ に移るにより垂線の長さ變ず、即ち縱坐標同くして橫坐標變ぜるものなり。

凡て代數的又は三角術的式に於て二變數の存在する場合、例ば $2x^2+3xy+4y^2$, $\sin(x+y)$ の如きは一變數の値並に他の變數の値に關係せり。

物理學上の問題に於ても亦此の如き場合生ず。一氣體量の容積は氣體の溫度及其受くる壓力に關係す。容積を溫度及壓力の種々の値に就て測定せば其結果は二重の見出しを有せる一表に結合し得べし。例ば容積の値に就て、同じ壓力にて異れる溫度に屬するものを橫に並列し、之に反して同じ溫度にて異れる壓力に相當する容積の値を縱に並ぶる如きなり。

各測定の結果は空間に於ける一點の位置によりて示され得べし。此爲には九節に示せる方法に依り溫度、壓力及容積を夫々線にて表し、點の選び方は各點其三坐標が各觀測にて與へらるゝ溫度、壓力及容積を夫々示す樣にす。又同じ事に歸すれど一平面上に（二八圖）一點 $P$ を選び其橫坐標並に縱坐標が一測定に於ける溫度及壓力に比例する樣にし、然る後 $P$ に於て此平面に一垂線を立て其の長さによりて容積の測定値を表さしむ、然らば此垂線の端が即ち求むる所の點なり。

九節に於て個々の觀察の結果を表はせる諸點を過ぎ一の曲線を引

きたると同樣に、上述の如くして見出したる諸點を過ぎて一の表面を作り得べし。此表面は一般に彎曲せり、是に依りて一變數が他の二變數の値の與へられたるとき如何なる値を有するかを直に識認せしむべし。

然れども實際に一の表面を作るは困難なるが故に、此方法の利用は極めて狹まし。屢他の方法を取るなり、上述の例に就て云はゞ數多の曲線を作り夫等が各一定溫度に於ける壓力と容積との間の關係を示すが如きなり。

**二四　特殊表面** (Special Surfaces.)　初等數學に於て論ずる以外の若干の表面に就て知る事も亦必要なり。

壔面は一直線が常に其方向を同じくしつゝ所與の一曲線に沿ふて運動して描けるものなり。此曲線を準線と云ひ、直線を母線と云ふ。準線が閉曲線なれば壔面は管狀となる。

此の如き壔面と互に平行なる二平面とにて限られたる物體は一の壔なり。廻轉壔は其特別の場合なり。

壔の容積は壔面を上記の平面の一にて截りたる部分(基面)の大さに二平面の距離(高さ)を乘じて求めらる可し。

錐面は一直線が常に一定點(尖點)を過ぎ、且所與の一曲線(導線)に沿ふ樣に動きて描けるものなり。曲線が閉曲線なれば錐面と一平面とにて一物體を限り得、之を錐と名く。廻轉錐(圓錐)は其特別の場合なり。

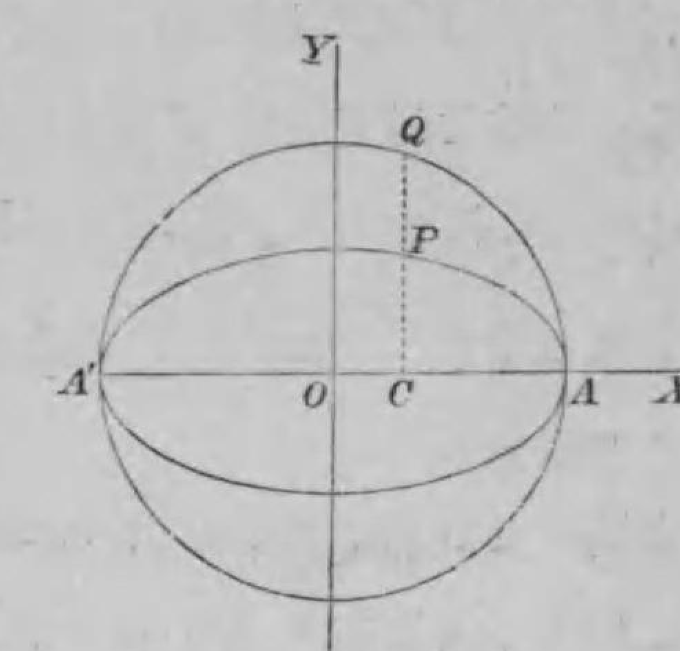
錐の容積は錐面を上記の平面にて截りたる部分(底面)の大さに尖點より底面へ引ける垂線(高さ)の三分一を乘じて得らる。

圓錐斷面を其一對稱軸の周に廻轉せしめて重要なる表面を得べ



し。楕圓を其長軸又は短軸の周に廻轉せしむれば種々の形の廻轉楕圓體を得。

第二九圖




二九圖(一六圖と同圖)の曲線を $OY$ の周に廻轉せしむれば一の球と一の廻轉楕圓體とを得、兩者共に $OA$ を過ぎて描ける平面を共通の赤道面となせり。此等の表面を $OY$ に平行なる一線にて切れる二點の赤道面よりの距離が互に一定の比にあることも容易に知り得べし。

空間内の圖形は一六節に述べたる平面圖形の形狀變化に相當し一方の延長或は收縮を受け得べきなり。或所定の方向に於て此の如き延長或は收縮を得る爲には先づ此方向に直角なる一平面を取り、圖形の各點を此平面の垂線上近づかしめ或は遠ざからしむるに、其關係が平面より點の當初の距離と新距離との間に圖形上凡ての點に就て皆同じ比が成立する如くならしむるなり。此平面に平行なる線は凡て長さに於て變化なかるべし。

二九圖を見て知り得らるゝが如く、一方の收縮に依てのみならず、又延長によりても一の球よりして廻轉楕圓體を得べきなり。今一の球が三個の互に直角なる方向に於て上述の如き延長或は收縮を受くれば稍簡單ならざる一表面を得べし。又前述三方向の中の二個に於て不同の度に形狀變化をなさしめしときにも同樣なり。此方法によりて生じたる表面は上述の廻轉面と同樣に之を一平面にて切れば

一の楕圓——平面の或位置に於ては一の圓——を得べき性質を有す。故に之を楕圓體と名く。球の中心は圖形の變化の際其位置を變せず、又新表面に於ても此點を過ぐる凡ての弦を二等分する性質を有す。故に之を楕圓體の中心と名く。

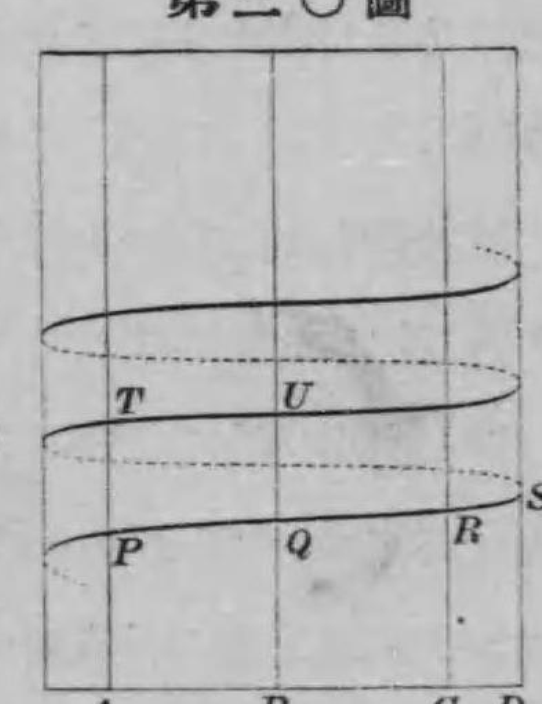
凡て此點を過ぐる線(直徑)の中、延長又は收縮の方向に在る諸線には特別の關係あり、此等を楕圓體の軸と名く。此等の軸二個を過ぐる一平面は一の對稱平面なり、即ち此に直角なる凡ての弦を二等分す。

上述の延長或は收縮に於て三個の中二個が互に等しければ楕圓體の二軸も亦同長なり、然れば表面は一の廻轉楕圓體なり。之に反して三軸が凡て異なれる楕圓體は三軸的と稱す。

**二五　曲面上の線　螺線** (Lines on Curved Surface. Helix.) —曲面を一平面にて切りて得る曲線に就ては既に屢記載せり。是等の切斷面は表面の形に關して觀念を得る爲めに屢用ゐらる。特に互に平行なる數多の平面にて切れるもの此目的に適當せり。

又曲面上には一平面内に横はらざる線を引き得べし。其一例は圓壔の曲面上に作り得る螺線なり。

第三〇圖




圓壔面上に一母線が(三〇圖)順々に $AP$, $BQ$, $CR$ の諸位置を占め(圖は圓壔の軸を過ぐる一平面に於ける投影を表す)線上の點が各一の圓を畫く樣に動く。同時に一動點が母線に沿ふて動き其運動は母線と同じ進みをなし即ち線が同じ長さを走れる



時間に於て點も亦同じ距離を進む樣に移動せりとす。然れば其動點は一の螺線を畫くべし。三〇圖に於て $AP$, $BQ$, $CR$ は互に等距離に在る三母線なり、$ABC$ は軸に直角なる一平面、$PQR$ は螺線なりとすれば、$BQ-AP=CR-BQ$ ならざるべからず。

母線の運動並に此線上點の運動も限りなく續け得らるべきが故に、螺線は圓壔の周りの同樣なる卷の接續に依りて得らるゝなり。相接續せる二卷線は諸母線より等しき長さ $PT$, $QU$ 等を切る。此等の長さを螺線の歩みと稱す。

螺線の如く一平面上に在らざる曲線は二重屈曲の線と名けらる。

**二六　切觸平面　法線　曲面の曲率** (Tangent Planes. Normals. Curvature of Curved Surfaces.) 曲面の一點 $P$ を過ぎて凡て其面上に横れる數多の曲線を引けりとすべし。各線に就て $P$ 點に於ける切線を考ふ。此等の切線は或特別の場合(錐の尖點)を除けば凡て一平面内に在り。此平面を其曲面の $P$ 點に於ける切觸平面と名け、$P$ に於て此切觸平面に直角に引きたる線を法線と名く。

壔面及錐面に於ては一平面によりて唯一點のみに於て觸れず、母線の凡ての點に於て觸るゝなり。凡て是等の點に於ては法線は同じ方向を有す。

廻轉表面に於ては一點 $P$ に於ける切觸平面は此點及軸を過ぐる平面(子午面)に直角なり。$P$ に於ける法線は此子午面内に在りて一般に軸と交はれり。$P$ 點を一の平行圓(緯度圈)上に移動せしむるとも此軸を切る點は同一なり、平行圓とは軸に直角なる平面にて曲面を切りて生ずる圓なり。

彎曲せる一表面上の一定點 $P$ に於ける曲率を定むるには此點を

過ぎて法線を引き此線を過ぐる數多の平面を作り、是等の平面が曲面を切る諸線即ち所謂法線截線が $P$ に於て幾何の曲率を有せるかを考ふべきなり。

唯だ球のみに於ては任意の點を過ぐる法線截斷の曲率が凡て同大なり、他の表面にては一般に或截線と他の截線とに彎曲の强弱あるべし。夫等の中に於て彎曲最强きと最も弱きとの二截線互に垂直なることを證明し得。此等の二截線の曲率半徑を此點に於ける曲面の主曲率半徑と名く。

一の壔面及錐面に於ては最小の彎曲は零に等し、即ち二法線截線の一は母線に合するなり。

又多くの表面に於て之を其の一法線上若干距離の點より觀察すれば法線截線が其法線の脚點に於て凡て凸或は凡て凹の側を向くるを見るべし。然れども他の場合もあり。例ば一の鞍を上方より見れば同樣の法線截線に於て若干には凸面を見て他には凹面を見るなり。一九圖に於ける双曲線を $OY$ 線の周に廻轉せしめて得る表面に於ても亦同樣なり。

**二七　ヴェクトルの合成** (Composition of Vectors.) 物理學に於て論ずる量の或ものは其大さを知れば完全に定まるも、或他の量に於ては大さのみならず其方向を示さゞるべからざるなり。速度並に力は此種の量なり、一般に此等の量をヴェクトルと名くべし。一のヴェクトルは常に一の直線にて之を表出することを得、其直線はヴェクトルの方向を有し其の長さは九節に示せる方法に依りてヴェクトルの大さを示すものとするなり。此の如き線は夫自身も亦ヴェクトルと名けらるべきなり、故にヴェクトルを論ずるときは屢之を表出す

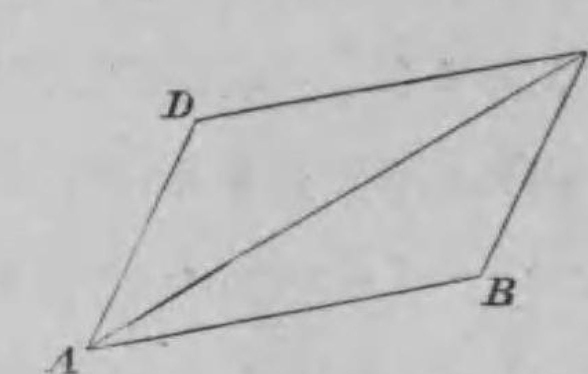


る線を眼中に置く。

一ヴェクトルを記載するには其線を引き始むる點を第一に記載す、故にヴェクトル $AB$ と云ふとヴェクトル $BA$ と云ふとは同一ならざるなり。

一ヴェクトルを或他の始點より引くとも其方向及大さ不變なればヴェクトル自身は相等しと云ふなり。

第三一圖




三一圖に於て $ABCD$ を一平行邊形とすればヴェクトル $AD$ 及 $BC$ は相等しとするなり。

二ヴェクトルを合成するとは第二の $BC$ の始點を第一の $AB$ の終點に置き第一の始點 $A$ と第二の終點 $C$ とを直線 $AC$ にて結ぶを云ふなり。此 $AC$ は「二個の所與のヴェクトルの合成に依りて」得たるヴェクトルなり、之を $AB$ 及 $BC$ の合ヴェクトル又合成と云ふ。之に對して $AB$ 及 $BC$ を $AC$ の分ヴェクトル又成分と名く。

$A$ より $AD$ 線を $BC$ に平行に且等しく引けば $D$ を $C$ にて結び一平行邊形を得。故に又次の如く云ひ得、即ち二ヴェクトルを合成する爲めには夫等の始點を合一し、二ヴェクトルを二邊として一平行邊形を描き、是に於て二ヴェクトルの始點より對角線を引きて得べしと。

此の如くして得る圖形はヴェクトルの平行邊形と云ふ。二ヴェクトルの大さ及其互になす角度が與へらるれば合成及其と成分とのなす角は簡單なる三角術計算によりて求むることを得。

合成に就て與へたる規則よりして尙ほ次のことを得、同一方向の

二ヴェクトルの合成は又其れと同じ方向を有し二成分の和に等し。

之に反し二ヴェクトル互に反對の方向を有するものゝ合成は兩者の差に等し。此場合に於ては合成の方向は兩成分の大なる方の方向に一致す。互に反對の方向にあるヴェクトルが相等しければ合成は零に等し。

同一直線に平行なる諸ヴェクトルが其一側或は他の側に向けるを示すため＋及－の符號にて之を區別すれば此の如き二ヴェエクトルの合成は夫等の代數和に等し。

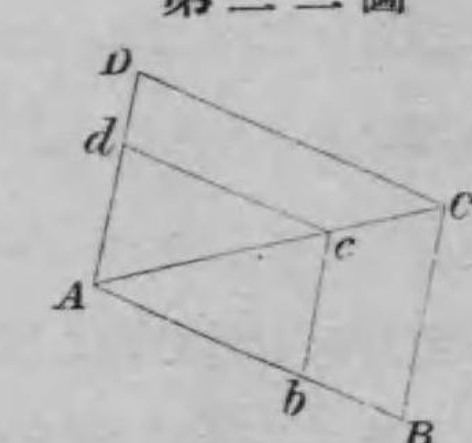
一ヴェクトルの分解は合成の反對なり。即ち是は合成すれば所與の一ヴェクトルを與ふる如き二ヴェクトルを求むることなり。一ヴェクトルは種々多樣の仕方に他の二ヴェクトルに分解せられ得べきは容易に知ることを得べし。二成分の方向を隨意に選び得べく又或は一の成分には方向及大さを始めより與ふることを得べし。平行邊形の作圖に依りて第一の場合には各成分の大さ、第二の場合には第二の成分の方向及大さを求め得らるゝなり。

**二八** 平行邊形 $ABCD$ (三二圖)の諸邊に於て $Ab$ 及 $Ad$ を

$$\frac{Ab}{AB}=\frac{Ad}{AD}$$

なる樣に取り、是等の長さを邊として一平行邊形 $Abcd$ を畫けば、其角點 $c$ は對角線 $AC$ 上に在り、然れば

第三二圖




$$\frac{Ac}{AC}=\frac{Ab}{AB}$$

故に合成せる二ヴェクトルに於て方向を不變になして大さを同じ比に變せしむれば、合成のヴェクトルも亦前と同じ方向を有し、其大さは



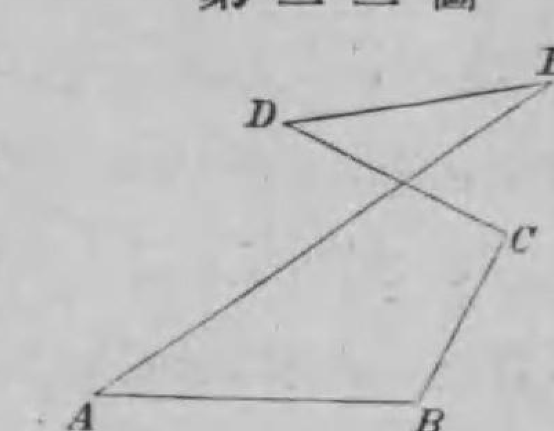
成分と同じ割合に變ずるなり。

**二九 二個以上のヴェクトルの合成** (Composition of more than two Vectors.) 任意に數多のヴェクトルの合成と云ふは次の運算なり。即ち第二のヴェクトルの始點を第一の終點に置き、第三の始點を第二の終點に置く等の如くし、最後に第一の始點より最後の終點へ連結するなり。

三三圖に於ては $AE$ がヴェクトル $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ の合成なり。又此圖形は必しも一平面內に在るを要せず。

合成の規則は又次の如く表はすことを得。即ち第二のヴェクトルを第一のと合成したる後合成 $AC$ (圖上に示さず)を第三のヴェクトル $CD$ と合成し、斯して得る $AD$ を第四のヴェクトルと合成する等なり。

第三三圖

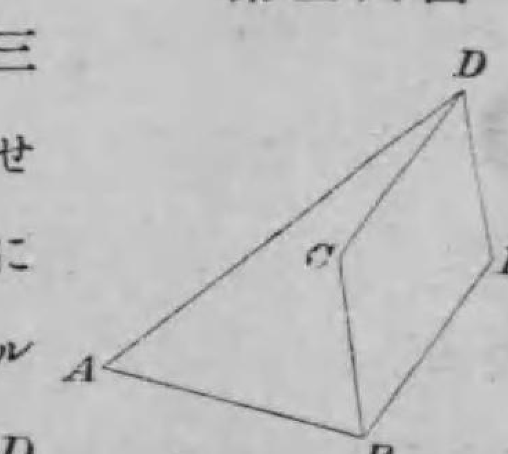



合成すべき凡てのヴェクトルの始點を同一點に置くとせば此作圖には毎回新しきヴェクトル平行邊形を用ゐることゝなるなり。

任意數多のヴェクトルが皆同一直線に平行なれば、其合成は諸成分の代數和に等し。

數多のヴェクトルの合成に於て其結果は此等を合一する順序に無關係なり。例ば三四圖に於て、是も亦一平面內に在るを要せざれど先づ $AB$ を第二のヴェクトル $BE$ に合成し、其合ヴェクトルを第三のヴェクトル $ED$ に合すれば $AD$ を得。又 $BE$ 及 $ED$

第三四圖



を邊として一平行邊形を造れば $BC$ は第三のヴェクトル $ED$ に等しく、$CD$ は第二の $BE$ に等し。是により先づ $AB$ を第三のヴェクトルに合成したる後其合ヴェクトル $AC$ を第二のに合成するも亦 $AD$ を得べし。

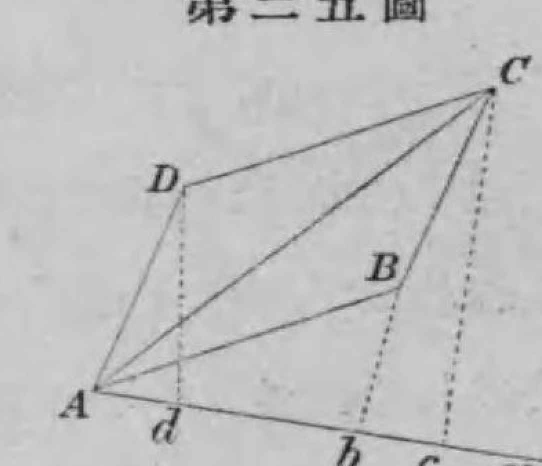
三個のヴェクトル $OD$, $OE$ 及 $OF$ (二七圖)が一平面にあらざるも同一の始點を有すとせば其合ヴェクトルは $OD$, $OE$, 及 $OF$ を邊として作れる平行面體の對角線 $OP$ なり。逆に所與の一ヴェクトルを他の三方向に分解するには此ヴェクトルを對角線とし、是等三方向を諸邊の方向とせる一平行面體を作らざるべからず。

此仕方により空間に於ける諸ヴェクトルの觀察を所定の三方向に於ける其分ヴェクトルの觀察に歸することを得るなり。是等三方向としては通常互に直角なるものを選ぶ。

**三〇 ヴェクトルの投影と其合成の投影との關係** (Relation between the Projections of Vectors and the Projection of their Resultant.) 一ヴェクトルの一直線上に於ける投影は夫自身又一ヴェクトルと考へらるべく、又實に其始點は所與のヴェクトルの始點の投影なり。三五圖に於て例ば $Ad$ は $AX$ 上 $AD$ の投影なり、然れども $DA$ の投影は $dA$ なり。

三五圖及三六圖に於て $AC$ はヴェクトル $AB$ 及 $AD$ の合成なり。$AX$ は $B$, $C$ 及 $D$ の諸點を投影せる一直線なり。此直線は $ABCD$ 平面に在るを要せず、又垂線 $Bb$, $Cc$, $Dd$ は互に平行なるを要せざるなり。

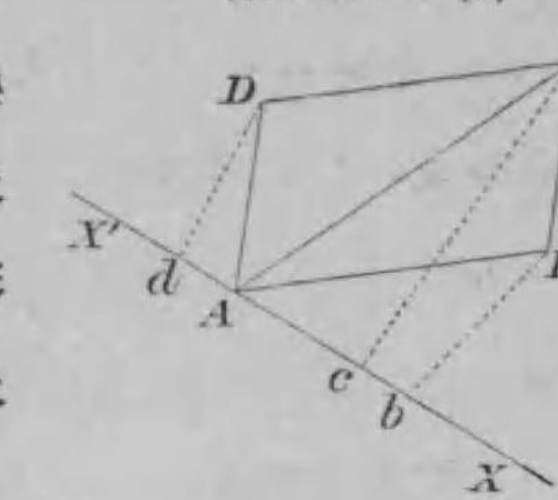
第三五圖






明かに合ヴェクトル $Ac$ は $Ab$ 及 $bc$ の代數和にして又 $bc$ は $Ad$ にて置換せられ得べし。即ち $Ac$ は $Ab$ 及 $Ad$ の代數和なり、換言せば平行邊形の對角線 $AC$ の投影は二邊 $AB$ 及 $AD$ の投影の代數和なり。

第三六圖




**三一 諸小量の計算** (Calculaticns with Small Quantities.) 物理學上の問題に出づる量には其甚小なるため充分大なる羃數に於ける其乘羃は省略し得べきことあり。如何なる乘羃が是がために充分に小なりとするかは勿論求むる精密の度に關係す。故に或小量の第二羃が既に省略し得らるゝことあり、又或は第二羃は尚計算に保留せざるべからずして第三羃の項が始めて省略し得べきこともあるべし。

一小量 $\delta$ を有せる種々の式は $\delta$ の昇羃數にて進む級數に展開し得べし。$(1+\delta)^2$, $(1+\delta)^3$ の如き形は項數有限なる級數を與ふ、他の場合には

$$a+b\delta+c\delta^2+d\delta^3+etc. \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

の形の無限級數を得、此中、係數 $a$, $b$, $c$, $d$……の値は何等かの規則にて定めらる。

各無限級數に於て其或若干項の和を取るに、此項數を益増加せるとき、此和が如何樣の變化を受くるかを研究し得。是に於て二個の場合を生ずべし。唯充分數多の項を取るによりて其和を望む限り近かしめ得る樣なる一定數の存在するか或は此の如き數の存在せざるかなり。第一の場合に於ては級數は收斂すと云ひ、如上の定數を其

和と云ふ。第二の場合に於ては級數は發散し一定有限の量を表出する用をなさゝるなり。

級數

$$1+2+3+4+etc$$

は發散級數の一例なり。之に反し級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+etc.$$

は收斂し其和 2 なり。

一級數は其諸項が第一項以後或は若干項以後益減少する場合にのみ收斂し得るなり。然れども諸項が減ずる級數が凡て皆收斂するにあらず、其收斂のためには減少が充分速に進まざるべからず。(10) の形の級數に於ては $\delta$ が充分に小なれば此の如き場合となる、此量が甚小なれば全級數は最初の三項の和或は又最初の二項の和にて置換するを得べし。

次なるは一小量 $\delta$ を有せる式の展開の例なり。

$$\frac{1}{1+\delta}=1-\delta+\delta^2-\delta^3+etc.$$

$$\frac{1}{1-\delta}=1+\delta+\delta^2+\delta^3+etc.$$

$$\sqrt{1+\delta}=1+\frac{1}{2}\delta-\frac{1}{8}\delta^2+\frac{1}{16}\delta^3-etc.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-\delta)^2}}=1+\frac{2}{3}\delta+\frac{5}{9}\delta^2+\frac{40}{81}\delta^3+etc.$$

是等の級數は $\delta<1$ なれば凡て收斂す、展開せんとする諸式の代りに順に $(1+\delta)^{-1}$, $(1-\delta)^{-1}$, $(1+\delta)^{\frac{1}{2}}$, $(1-\delta)^{-\frac{2}{3}}$ と書き然る後ニュートンの二項法を應用すれば以上の諸級數を得べし。最初の二範式は又除算によりても得らるべし。



若し $\delta$ が甚小なれば是等四式は $1-\delta$, $1+\delta$, $1+\frac{1}{2}\delta$, $1+\frac{2}{3}\delta$ と書き得べく、一般に

$$(1\pm\delta)^n=1\pm n\delta$$

を得。

又屢一式が二個以上の量を有し夫等の第二次以上の羃及夫等の中任意二個の積が省略し得べき程小なることあり。$\delta$ 及 $\delta'$ が此の如き量なりとせば例ば次の如し

$$(1+\delta)(1+\delta')=1+\delta+\delta'$$

及

$$\frac{1+\delta}{1+\delta'}=1+\delta-\delta'$$

三二　甚小なる角の正弦に就ては圖に依りて容易に知り得る如く此角に角點を中心として半徑 1 を以て描ける其弧の長さ、即ち角度自身を弧度にて表せる數を以て正弦を表はす數となし得べし。甚小なる角の正切は其正弦に等しく、又其余弦は 1 に等しとし得べし。

又無限級數を應用して以上よりも一層精密なるを得べし。角度 $\delta$ を弧度にて表せば $\delta$ の凡ての値に就て次の如くなるを證し得。

$$\sin\delta=\delta-\frac{\delta^3}{1.2.3}+\frac{\delta^5}{1.2.3.4.5}-\frac{\delta^7}{1.2\ldots7}+etc.$$

及

$$\cos\delta=1-\frac{\delta^2}{1.2}+\frac{\delta^4}{1.2.3.4}-\frac{\delta^6}{1.2\ldots6}+etc.$$

**三三　絶對並に相對誤差 (Absolute and Relative Errors.)**　測定に入れる誤差は一般に小にして、其第二羃並に夫等二個の積は省略し得らるべし、是によりて是等の誤差に關する計算は省約せらるゝなり。 近似計算

一量の値を直接の測定により或は諸測定の與ふる材料に基ける計

算によりて演繹せるものを見出値と名くべし。量の此値と眞實の値との差は絕對誤差なり。相對誤差とは絕對誤差を見出値にて除したる商を云ふ。相對誤差は又絕對誤差が見出値の幾何百分率に相當するかを云ふに依りて示し得べし。

絕對誤差は又單に誤差と名けらる。

取扱へる諸量自身を正なりと假定すべし。之に反して誤差は正或は負なるを得べし。見出値が眞實値より大なるときに誤差を正と名くべし、即ち眞實値を見出値より引きて絕對誤差を得。相對誤差は絕對誤差と同一符號を有す。

**三四 或他の量に關係する一量の誤差** (Error of a Quantity, which depends on another Quantity.) 測定より演繹して得たる量に運算を施せば、其結果は或度に於て不精密なり。其不精密の度は $a$ 自身の誤差に關係し、又其小なるに於ては一般に是に比例すとなし得べし。結果に於ける誤差は $a$ に於ける誤差と同時に符號を變ず。運算は $a$ が過大なれば結果も亦過大にして、$a$ が過小なれば結果も亦同樣なるが如くなるべし。然れども結果と眞實値との相違が $a$ 量と反對の方向に在ることもあり得べし。

簡單なる場合に於て誤差の限定に用ゐらるゝ二三の規則を擧ぐべし。$a$ を以て測定より演繹せる量とし、$p$ を以て精密に知られたる數とす。規則は和と差とに於て絕對誤差を求め、積と商とに於て相對誤差を求むるもの最簡單なり。

$a+p$ 或は $a-p$ に於ける絕對誤差は $a$ に於ける誤差と同大なり、$p-a$ に於ける誤差も亦同一値を有すれども符號は反對なり。

$pa$ の積に於ては相對誤差は $a$ に於けると同大なり、絕對誤差は



$a$ に於けるの $p$ 倍なり。

又 $p/a$ に於ては相對誤差は $a$ に於けると同大なり、然れども此分數及 $a$ 自身に於ける誤差の符號は互に反對なり。今 $\delta$ が $a$ の相對誤差ならば其眞實値は $a(1-\delta)$ なり。商の見出値が $p/a$ なれば其眞實値は

$$\frac{p}{a(1-\delta)}=\frac{p}{a}(1+\delta).$$

故に此商に於ける絕對誤差は $-p\delta/a$ なり、此數を $p/a$ にて除して相對誤差 $-\delta$ なるを知る。

冪 $a^p$ に於ては相對誤差は $a$ に於けるよりも $p$ 倍大なり。冪の見出値は即ち $a^p$ なり、眞實値は $a^p(1-\delta)^p=a^p(1-p\delta)$ なり、故に相對誤差は $p\delta$ なり。即ち $p$ の値大なれば冪に於ける相對誤差は $a$ 自身に於けるよりも著しく大なるを知るなり。

同樣なる推理に依りて $\sqrt[p]{a}$ に於ける相對誤差は $a$ 自身に於けるの $p$ 分一なるを證明し得。

一角の大さを弧度にて表はし $a$ とし其誤差を $\alpha$ とせば三角函數に於ける誤差は容易に示し得べし。例ば正弦の見出値が $\sin a$ なれば眞實値は $\sin(a-\alpha)=\cos\alpha\sin a-\sin\alpha\cos a$ なり、又此の代りに $a-\alpha\cos a$ と書き得べし。故に正弦に於ける誤差は $\alpha\cos a$ なり。角度に一定の誤差あれば正弦に於ける誤差は角度が $\frac{1}{2}\pi$ に近ければ小にして、零に近ければ大なり。

勿論各函數に於て獨立變數の眞實値を知れりと假定せば其眞實値と見出値とにて函數の値を計算して函數の誤差を求め得べし。小なる等差にて進む獨立變數の諸値に對する函數の値を一の表に示せば差の行(六節)が參考となる。即ち對數表に於ては數に於ける或誤差に相當して對數に於ける誤差如何は容易に知り得るなり。

**三五 精密に知られざる二量に關係する一量の誤差** (Error of a Quantity, which depends on two other quantities not exactly known.)

測定より導ける二量を相加ふれば其結果に於ける絶對誤差は二量に於ける誤差の代數和に等し。又同様に二量の差に於ける絶對誤差は兩者の誤差の差に等し。

二量の積に於ても亦同様に相對誤差に就て簡單なる規則あり。即ち $a$ と $b$ とが二量の見出値にて $\delta$ と $\varepsilon$ とが相對誤差なりとすれば眞實値は夫々

$$a(1-\delta) \quad 及 \quad b(1-\varepsilon)$$

なり。眞實の積は

$$ab(1-\delta)(1-\varepsilon)=ab(1-\delta-\varepsilon)$$

なり、又見出値が $ab$ なるが故に相對誤差は

$$\delta+\varepsilon$$

なり、即ち二因子の相對誤差の和に等し。

之に反して $a$ 及 $b$ の商に於ける相對誤差は夫等二量の相對誤差の差に等し。

以上の諸定理は一般なる一定理の特別の場合なり。

一量 $c$ が或仕方にて $a$ 及 $b$ に關係し、即ち $a$ 及 $b$ よりして算出し得らるべきものなりとす。然れば $b$ が正確なりとも $a$ に或誤差 $\alpha$ ありとすれば、$c$ に於ても亦誤差 $\alpha$ に比例せる、或一定の大さの誤差を含有せるなり。同様に又 $a$ に誤差なしとせば、$b$ に於ける誤差 $\beta$ は $c$ に於て其結果を認め得べし。是等二個の場合に於て $c$ の含める誤差を部分誤差と名け得。$a$ と $b$ とに同時に夫々誤差 $\alpha$ 及 $\beta$ ありとせば $c$ に於ける誤差は $\alpha$ 及 $\beta$ なる誤差より來る部分誤差の代數和に等し。此定理は $c=ab$ 或は $c=a/b$ なる場合に於ては讀者の容易に證明し得べきなり。



又此定理は $c$ に於ける全體の誤差並に部分誤差が相對誤差なるときにも、又絶對誤差なるときにも等しく適用するなり。

**三六　可能誤差 (Possible Error.)**　前述の考察に依り、計算の結果に於ける誤差は計算の材料に於ける凡ての誤差の大さ及方向知らるれば定め得らるべし。然れども一般に一測定の結果に於ける誤差に就ては其大さを知らず、又實に其結果が過大なるか過小なるかも之を知らざるなり。

今或測定に於て、其結果が過大にも出で得、同様に又過小にも出で得べき様なるものなりと假定すべし。又各測定に於て、是以上には誤差の大さが確に上らずとする或數與へられ得と假定すべし。此數を最大可能の或は單に可能の誤差と名く。常に之を正の一數にて示すべし。$a$ が一量の見出値にして、又可能誤差が $\alpha$ なりとすれば其意味は此量の眞實値は確に $a-\alpha$ と $a+\alpha$ との間に在りと云ふことなり。

二量 $a$ と $b$ との和に於ける可能誤差が $a$ と $b$ との可能誤差の和に等しきは容易に知り得。然れども特に注意すべきは $a$ 及 $b$ の差に於ける可能誤差も亦二數の可能誤差の和に等しきことなり。即ち $\alpha$ と $\beta$ とを二量の誤差とすれば一量が $\alpha$ 丈過大にして他が $\beta$ 丈過小なることあり、又或は第一量が $\alpha$ 丈過小に第二が $\beta$ 丈過大なることもあり得べし。是等二個の場合に於て差に於ける誤差は $\alpha+\beta$ なるべし。

$a$ 及 $b$ が其差甚小なりとすれば此誤差 $\alpha+\beta$ は $a-b$ の値に比較して著大なるを得べし。故に比較的甚大なる二量の測定よりして其差に當る一量を幾分の精密度を以て見出さんとするは困難なり。

商 $a/b$ に於ては差に於けると同様なる推理を應用し得べし。是に於て可能相對誤差は $ab$ なる積に於けると同様に $a$ 及 $b$ の可能相對誤差の和に等し。例ば $a$ に於て 1%、$b$ に於て 2% の誤差あり得とすれば $a/b$ は 3% の大さまでの不正確あり得べきなり。

一般に一量 $c$ が $a$ 及 $b$ に關係せるとき其可能誤差を見出すには $a$ 及 $b$ の可能誤差に相當する $c$ に於ける部分誤差を計算し、是等の部分誤差を同符號にして互に加ふべし。最都合惡き場合には $a$ 及 $b$ に於ける誤差が其のあり得べき最大の値を有し、又同時に是等が兩つながら $c$ を過大にし或は兩つながら $c$ を過小にする如き方向を有することも可能なればなり。

然れども是等は凡て $a$ 及 $b$ が互に獨立なる測定によりて得らるゝときにのみ適用するなり。二個の量が同じ研究よりして導かるゝならば、$a$ の値過大に見出さるれば $b$ も亦過大ならざるべからざることも可能なり、此場合には $a-b$ に於ける可能誤差は勿論 $\alpha+\beta$ よりも小なるべし。

最後に尚注意を要するは二量 $a$ 及 $b$ が互に獨立なるときは兩者に於てあり得べき最大の誤差を同時になすと云ふは考へ得べきも然かも確らしからざることなり。即ち實際 $c$ なる量に於ける誤差が先に計算したる大さなりと豫期すべからず。今玆には詳述し能はざるも或考察により是等の事情を計算に入れ得るなり。然れども簡單なる研究に於ては既述の仕方によりて結果に附記すべき精密度に就て滿足なる觀念を得るなり。

**三七 例** (Example.) 今

$$c=\frac{a}{a-b}$$



に於て $a$ 及 $b$ は正にして、$a>b$ とす。先づ $b$ なる數は正確とす、$a$ には誤差 $\alpha$ ありて其大さ並に方向既知と假定す。然れば分母に於ける誤差は $\alpha$ なり。分子及分母に於ける相對誤差は $\alpha/a$ 及 $\alpha/(a-b)$ なり、故に此分數に於ける相對誤差は

$$\frac{\alpha}{a}-\frac{\alpha}{a-b}=-\alpha\frac{b}{a(a-b)}\text{.....................}(11)$$

之に反し、量 $a$ が精密に知られ、$\beta$ を $b$ の誤差とし、方向及大さに於て與へられたりとせば、分母に於て誤差は $-\beta$、分母の相對誤差は $-\beta/(a-b)$ にして、分數の相對誤差は

$$+\frac{\beta}{a-b}\text{..............................}(12)$$

なり。

$a$ と $b$ とに於て同時に誤差 $\alpha$ 及 $\beta$ ありとせば、$c$ の相對誤差は (11) 及 (12) の代數和なり、即ち

$$-\alpha\frac{b}{a(a-b)}+\frac{\beta}{a-b}$$

之に反して $\alpha$ 及 $\beta$ が $a$ 及 $b$ の可能誤差にして符號正とすれば $c$ の可能相對誤差は

$$\alpha\frac{b}{a(a-b)}+\frac{\beta}{a-b}$$

なり。

**三八 極限値** (Limiting Values.) 三一及三二節に於て近似の計算に就て論じたるが尚他の方法により甚小の量に就て運算し、實に其結果が完全に精密なるを得る如きものあり。

此方法の概念を得る爲に先づ極限値と名くるものを考ふ。

一量を想像し夫が何等かの原因よりして變化するものとす。此量が此變化により益或一定數に近づき、又實に望む丈夫に近づかしめ

得べしとす、然れば此一定數は此變數の極限値と名けらる。

一收歛無限級數(三一節)の和とは其若干項の和が其項數を絕えず增加せるとき近づく極限値を云ふなり。又一分數に於て其分母と分子とが變數の或値に就て同時に零となるものも亦他の一例なり、例ば次の分數の $x=2$ に於けるものゝ如きなり。

$$y=\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$$

今 0/0 の式は凡ての任意の數を意味し得べし、然れども $x$ を絕えず 2 の値に近かしむれば、$y$ に於て一定の極限値存在せるなり。$x=2,5,\ 2,4,\ 2,3,\ 2,2,\ 2,1$ に就て $y=0,636,\ 0,630,\ 0,623,\ 0,615,\ 0,608$ なり。$y$ の極限値は 0,6 なり。此値は分數の分子及分母を $x-2$ にて除し得ることを知れば得らる、此除算は $x-2$ が如何に小なりとも亦可能なるなり。故に分數は $x$ と 2 とを如何に僅か異ならしむるとするも $x+1/x+3$ と同し値を有す、即ち此分數が $x=2$ に於て占むる値に近かざるべからざるなり。

又

$$\frac{\sin x}{x}$$

の比は、$x$ を弧度にて表せば、$x$ を絕えず減少するによりて 1 なる値に益近づく。$x<\frac{1}{2}\pi$ なる $x$ の凡ての正の値に就て圖に依りて

$$\sin x<x<\mathrm{tg}\,x$$

なるを知る。$\sin x$ にて除すれば

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

今 $x=0$ に於て $\cos x=1$ なるが故に $\sin x/x$ は 1 を極限値とせざるべからざるなり。



**三九　無限小の二量の比** (Ratio of two infinitely small Quantities.)
前節の例によりて、二個の量が共に零に近づくとき其等二量の比が一定の極限値を有し得るを示せり。尙次の仕方にて又之を說明し得。一二圖(一二節)に於て曲線上 $P$ 點より $Q$ 點に移れば二坐標は共に增加す、$PX'$ を $OX$ に平行に引けば此等の增加は $PB$ 及 $BQ$ にて示さる、此等を $\Delta x$ 及 $\Delta y$ と記すべし。[1] 即ち

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mathrm{tg}\,QPB.$$

$Q$ 點が $P$ 點に近づけば $\Delta x$ 及 $\Delta y$ は減少す、然れども此間常に是等二量の間に一定の比成立つなり。例ば $\Delta x=PB'$ となれば、$\Delta y=B'Q'$ にして

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mathrm{tg}\,Q'PB$$

なり。

$Q$ より $P$ の方へ此運動が益進行し、是と共に割線が切線 $PR$ に、從て角 $QPB$ が角 $RPX'$ に近づき、$\Delta x$ 及 $\Delta y$ の比は二量が益小くなれば此 $RPX'$ 角の正切に近かざるべからず。極限値を普通の如く "*Lim*" ("*Limes*" の略字、極限値の意)と記せば次の如く表はし得。

$$\mathop{\mathit{Lim}}_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mathrm{tg}\,RPX'.$$

此結果は重要なり、何となれば曲線の各點に就て $y$ を $x$ の函數として與ふれば、是によりて直に切線の方向を定め得べければなり。即ち此時には一點 $P$ を選べば $\Delta x$ の凡ての値に就て $\Delta y$ の値及 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ なる比の値が夫々如何なるかを示し得べきなり。此比の近づくべき極限値を見出すは數學計算上の問題なり。

[1] $\Delta$ なる文字は玆に因子を表すに非ずして、「の增加」と云ふ言葉の代りの記號なり。

此例に於ける $\varDelta x$ 及 $\varDelta y$ の如く値零に近づく諸量を無限小と名く。凡て無限小なる二量の比とは此比が近づく極限値を云ふなり、變量の無限小の增加は此量の微分と云ひ又其比を微係數と云ふ。

是等微分及其比は屢用ゐられ略記號法あり。即ち思考上零に近づかしむる增加を示すに、記號 $\varDelta$ を $d$ に代へ、又比の前の記號 $Lim$ を去るなり、無限小の量を取扱へりと云ふ事情が既に或極限値を論せるものなるを含めばなり。即ち

$$Lim\varDelta x=0 \text{ に於ける } Lim\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$$

なる煩雜の式は

$$\frac{dy}{dx}$$

と云ふ簡單なる式に代へらるゝなり。

**四〇　微係數を定むること** (Determination of the Differential Cœfficients.)　二三の簡單なる場合に就て函數の微係數を計算すべし、所謂、函數を微分すべし。

$a$)　先づ次の函數を考ふ

$$y=x^2.$$

初め獨立變數が一定値 $x_1$ を有し然る後或增加 $\delta$ を受けしとせば、初め $y$ は $x_1^2$ にして次に $(x_1+\delta)^2$ なり。即ち $y$ の增加は

$$\varDelta y=(x_1+\delta)^2-x_1^2=2x_1\delta+\delta^2.$$

なり、又

$$\varDelta x=\delta$$

なるにより

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=2x_1+\delta.$$



今 $\delta$ を益小くせば此式は極限値 $2x_1$ に近づく、之を次の範式にて表はす

$$\frac{dy}{dx}=2x_1.$$

又或は $x_1$ の代りに $x$ と書けば

$$\frac{dy}{dx}=2x.$$

即ち

$$\frac{d(x^2)}{dx}=2x.$$

$b$)　$y=x^m.$

の微係數は $m$ が或る任意の正の整數なれば次の如くして見出さる。此函數に於ては

$$\varDelta y=(x_1+\delta)^m-x_1^m$$

即ち第一項を展開せる結果

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=mx_1^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}x_1^{m-2}\delta+etc.$$

第一項を除きて凡ての項は $\delta$ 或は其乘冪を因子として含めるが故に凡て是等の項は零に近づく。故に次の式を得、

$$\frac{dy}{dx}=mx_1^{m-1}.$$

或は

$$\frac{d(x^m)}{dx}=mx^{m-1}.$$

$x$ の或冪を微分するには指數を 1 丈け減じ、同時に以前の指數にて乘すべきなり。

此規則は又 $m$ が負數若くは分數なる場合にも應用し得らるゝことを證明し得。即ち函數

$$\frac{1}{x^2}=x^{-2}.$$

の微係數は次の如し

$$-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

*c*) 最後の例として

$$y=a\cos(nx+p)$$

を取る。此中 $a$, $n$ 及 $p$ は常數にして角 $nx+p$ は弧度にて表せりとす。$x_1$ 及 $\delta$ が又上述と同じ意味を有せりとせば

$$\Delta y=a\cos[n(x_1+\delta)+p]-a\cos(nx_1+p)$$

又三角術上旣知範式により

$$\Delta y=-2a\sin\left[n\left(x_1+\frac{1}{2}\delta\right)+p\right]\sin\frac{1}{2}n\delta.$$

是によりて次の如し

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=-\frac{2a\sin[n(x_1+\frac{1}{2}\delta)+p]\sin\frac{1}{2}n\delta}{\delta}\\&=-an\sin[n(x_1+\tfrac{1}{2}\delta)+p]\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}n\delta}{\frac{1}{2}n\delta}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

今 $\delta$ を絶えず減少せしむれば角 $\frac{1}{2}n\delta$ も亦零に近づく、故に(三八節)

$$Lim\frac{\sin\frac{1}{2}n\delta}{\frac{1}{2}n\delta}=1$$

又極値限に於ては式(13) の第一因子に於て量 $\delta$ が消滅する故に結局

$$\frac{dy}{dx}=-an\sin(nx_1+p).$$

即ち

$$\frac{d[a\cos(nx+p)]}{dx}=-an\sin(nx+p).$$

同様に次の式を見出し得

$$\frac{d[a\sin(nx+p)]}{dx}=an\cos(nx+p).$$

*d*) 讀者の又容易に知り得るは、函數が不變の一因子を含めば先づ之を去りて函數を微分し、其結果を此因子にて乘じ得ること、又數



項より成れる式の微係數は各項を夫々微分し、其の各結果を各項の有せると同じ符號を附し相並ぶれば求め得らるゝことなり。其中或項不變なれば微係數に於ては其項は消滅すべし、此項は函數の變化に何者も加へざればなり。

$3x^2$ の微係數は

$$3\times 2x=6x$$

又 $1+2x-6x^2+5x^3$ の微係數は

$$2-6\times 2x+5\times 3x^2=2-12x+15x^2.$$

**四一 函數の極大或は極小** (Maximum or Minimum of a Function.)

一函數の獨立變數の增加及減少に伴へる變化を考察して此函數を極大或は極小ならしむる獨立變數の値を定むるを得べきなり。之を說明するため次の函數を考ふ。

$$y=2+x-x^2.$$

一〇節に於て三圖の曲線にて表はしたる函數なり。

又獨立變數に先づ一定値 $x_1$ 次に一小增加 $\delta$ を與ふれば、$y$ は先に

$$2+x_1-x_1^2$$

にして、次に

$$2+(x_1+\delta)-(x_1+\delta)^2$$

となる。是等より減算に依りて

$$\Delta y=(1-2x_1)\delta-\delta^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

即ち

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1-2x_1-\delta$$

$\delta$ を益小くせば此式は益 $1-2x_1$ の値に近づく、即ち

$$\frac{dy}{dx}=1-2x_1 \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

前節の規則に依り此結果を導き得.又是よりして三圖の曲線の各點に於ける切線の方向定めらるゝなり、何となれば三九節に於て知れる如く $\frac{dy}{dx}$ の値は切線が $x$ 軸となす角の正切を與ふればなり。例ば $g$ 點に於ては $x=0$ にして正切は 1 なり、即ち其角度は 45° に等し。

最高點 $a$ に於ては切線は $x$ 軸に平行なり。即ち是等二線間の角度は零なり。故に $x_1$ に $a$ の横坐標を取れば又 $dy/dx=0$ ならざるべからず。實際に $OA=0,5$ にして、$x_1$ の此値に對しては式 (15) は零に等し。

$a$ 點を出發點として横坐標に增加 $\delta$ を與ふれば、$y$ の增加は (14) に依て

$$\Delta y=-\delta^2$$

なり、又 (14) の誘導に於て $\delta$ の二乘冪を省略せば

$$\Delta y=0$$

なるべし。

曲線の $a$ 點に於て一小弧.例ば 0,01 粍の長さの弧を取れば、$OX$ に平行なる一小直線と著しき差なきことは圖よりして又之を知る。

$a$ 點に於て函數は極大なり。然れども縦坐標が極小なるときにも切線は $x$ 軸に平行なり(一一節一一圖)又是にも上述と同樣の考察を適用し得べし。

一般に次の如く云ふを得。

獨立變數の或値に就て函數が極大或は極小となるとき此函數の微係數は零なり、或は又、



$\delta$ の自乘以上の冪を省略して、獨立變數の增加 $\delta$ に依て得る一函數の變化を計算せば、茲に取れる函數値が極大或は極小なりしとき此變化は零なり。

又之を次の如く表し得。一函數が極大或は極小なれば獨立變數の無限小の變化によりて變ることなし。

今變化を無限小と名くるは、其二次以上の冪が第一冪に比して消去し得らるべき程小なりと考ふべきを云へるなり。

一一節に論じたる一般なる函數

$$ax^2+bx+c$$

の微係數は

$$2ax+b.$$

にして

$$x=-\frac{b}{2a}$$

に於て零に等し.獨立變數の此値に於て函數が極小なることは既に知れり。

**四二 無限に數多の無限小の量の和** (Sum of an infinitely large number of infininitely small Quantities.) 一の和に於て凡ての項が零に近づき、同時に項の數が絶えず增加すれば此和が一定の極限値を有する場合あるべし。

幾何學上の例を考ふべし。

一角錐を其底面に平行にして且互に等距離に在る許多の平面にて薄き層に分ち、各層に於て夫れと上方基面及高さを共通にせる柱體を造れば、凡ての是等の柱體の和は角錐の容積より小なり。然れども若し此等平面の數を無限に增加せば、角錐の容積を極限値とな

すべきなり、簡單にする爲め「極限値」なる語を去りて次の如く云得べし、角錐の容積は無限小の高さを有せる無限に數多の柱體の和に等しと。

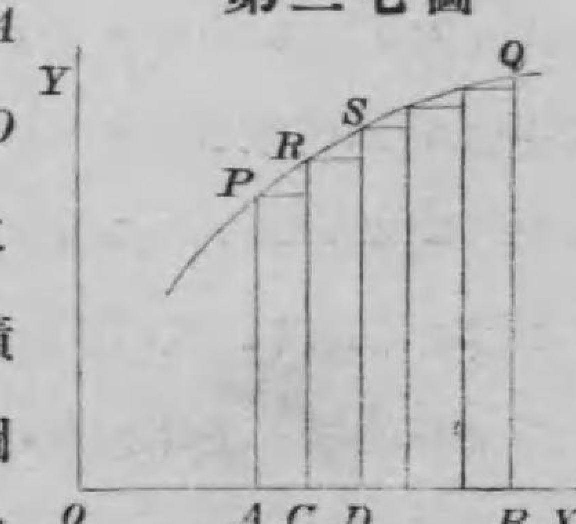
此方法は多くの他の場合に應用せらる。計算すべき一量を許多の數に、例ば $n$ 個の小部分に分ち、各部分の代りに夫れと僅かの差異あるものを置く。今此の如くにしてなす差の和が $n$ なる數の增加に依りて零に近づけば、$n$ 個の部分に置換せる $n$ 個の量の和の極限値が求むる値を與ふるなり。

例ば一曲線の長さを計算せんとせば之を數多の小弧に分ち、各弧を其弦にて置換す。其小區分の數を絶えず增加するによりて是等の凡ての弦の和の得る極限値が即ち求むる長さなり。

初等幾何學にては此仕方にて圓周を見出すなり。

尙他の例を擧ぐべし。一圖形が(三七圖)所與の一曲線 $PQ$、横座標軸 $OX$ 及二坐標 $AP$ 及 $BQ$ に依りて限らる、其容積を計算せんとせば $A$ 及 $B$ の間に在る $OX$ の片を $AC$, $CD$ 等數多の部分に分ち、夫等區分の諸點に於て縱坐標を立つ。然れば求むる容積は $APRC$, $CRSD$ 等の帶片に分たる。圖に依りて知り得る如く之等を矩形にて置換す。然れば直に是等の矩形の區分の數を絶えず增加せば其和の極限値が求むる容積なるを知る。

第三七圖

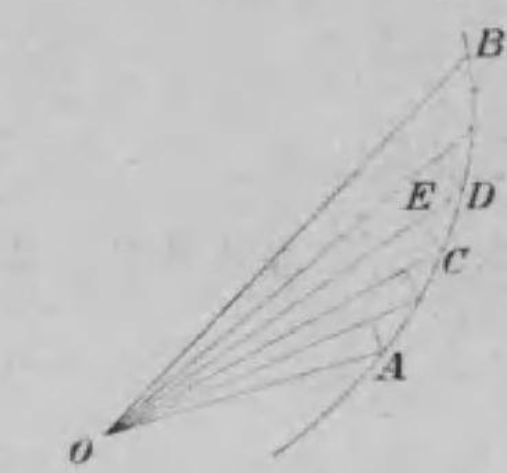



扇形 $OAB$ (三八圖)、即ち $OA$ 及 $OB$ 二「導線」及所與の一曲線にて限られたるものは $OA$ 及 $OB$ 間の數多の導線にて $OCD$ の如



き小扇形に分たるべし。是等は各 $OCE$ の如き圓扇形にて置換せらるべく、是等の圓扇形の和の極限値が $AOB$ の面積なり。

第三八圖




凡て上述の如きは尙簡單に次の如く云表し得。即ち一曲線の長さは無限に數多の無限小の弦の和なり、三七圖にて $APQB$ の面積は無限小の矩形無限數の和にて見出さる、又三八圖に於ては無限小の圓扇形に就て同樣に取扱ふべしと云ふなり。

一量を無限小の部分に分てるとき各部分を此量の單元と名く。

上述の計算法の利とする所は是等の單元を他の一層容易に値を見出し得べき無限小の量にて置換するに在り。是によりて問題は他の一層簡單なるものに歸するなり。例ば角錐の容積の限定は數多の柱體の容積の限定に、一曲線にて限られたる一圖形(三七圖)の面積の計算は數多の矩形の和を定むる問題に歸するなり。

又物理學上の問題に於ても屢同樣なる方法を應用す、何となれば複雜なる現象を分解に依りて簡單なるものに導き得べければなり。例ば一溶液が諸點に於て其濃度を異にせる場合には溶液の占むる空間を小部分例ば小直平行面體に分ちて、凡て此等の小部分內にては濃度が何所も同樣にて、唯だ一小部分より他の小部分へ移る時に飛躍的に變ずと假定し得べし。同樣に、强さ一樣ならざる電流が若干時間に一導線中に起せる熱の發生に就て考ふるときには、全體の時間を小部分に分ち、各小部分間の熱の發生を、恰も電流が此部分の初めに於て有したる强さを保續せるが如くにして計算し得べし。是に

よりて得る結果は區分が小なる程益精密なり。區分の數が益增加せる場合に於ける此結果の極限値が事實に相當すべきなり。

上述の如く和の極限値，所謂積分を定むる高等數學の方法に就ては玆には論せざるべし，此の如き計算の可能なることを知るに止む，之を遂行するは數學者に委ね得べきなり。



# 第一章

## 運動及力 (Motion and Force.)

**四三　點及物體等の運動** (Motion of Particles and Bodies.)　物體及其部分等の位置の變化は物理學にて論ずる諸現象の中最も簡單なるものなり。此現象を支配する法則は，他の一見全く種類を異にする如き多くの現象が究極には運動に歸し得べきが爲，益重要なり。故に先づ運動を講說する力學より論じ始むべし。

一點が動けば一の直線又は曲線を畫く，之を其點の道と名く。

一物體の運動に於ては其の諸點の經過する道を夫々差別せざるべからず，夫等の間に大なる相違あり得べければなり。

例ば一量の水の波動に於ては水の各微部分の位置の變化を順々に觀察せざるべからず。同じ瞬時に於て或者は高き，或者は低き位置に在るなり。又液體が器の一孔より流出する場合には，液體各微部分が此孔に達し是より出る道が夫々如何なる曲線をなすかを考へざるべからず。

固體に於ては各部分の運動の相違は液體又は氣體に於ける如く大なる能はず。然れども廻轉せる獨樂又は高く拋上げられたる棒の如きもの丶諸點は夫々大に相異れる道を走れるなり。

**四四　質點** (Material Points.)　又多くの場合に於ては一物體の運動に就て其物體中一點の位置の變化を知りて充分なる觀念を得

ることあり。物體の凡ての點が皆同樣に進行する（平行變位の）場合あり、又唯一點の道のみを知りて滿足して、他諸點の運動の詳細は省みざるを得る場合もあり。例ば彈丸の運動の研究は其一點の道のみの注意を以て始むべきが如し。一物體が此の如く或る單一の點にて代へ得らるゝとき、之を質點と名く。

**四五 時間** (Time.) 一點の道を知り得たらば次に、其點が一定の瞬時に於て占むる位置、並に夫が一位置より他へ運動するに要する時間を考ふべし。時點(時刻)は時間の計算の始點とする或一定の瞬時の後經過したる單位時間の數によりて示さる。若し此の時點が始點よりも先なれば、夫より始點に至る迄に經過する單位時間の數にて表はすなり。是等の單位時間の數を $t$ にて記す。$t$ は時間の計算の始點より後の時點に就ては正の量、始點より前の瞬時に就ては負量とすべし。

時間の單位としては秒を用ゐるべし。

時間の計算の始とする瞬時としては多くは運動の始まる時點を選び得るなり。

接續せる各瞬時に於て一點が占むる諸位置を定むるは、多くの天體の如き遲緩なる運動をなすものは是等位置の觀察に要する時間の中に其の場處が著しく變せざる故に之を爲すも容易なり。然れども速なる運動に於ては如何樣かの工夫を用ゐざるべからず。

**四六 一樣なる運動 速度** (Uniform Motion. Velocity.) 前述の如き觀察の結果は種々の方法により直觀せしめ得べし。例ば道を一つの圖に寫し必要に應じ或は之を縮圖とし又は擴大圖とするを得べく、又圖上の各點に並べて、物體が其等の點に達したる時刻を示す



數字を書入れ得べし。

運動が一樣なりとは、任意に選びたる同大の時間に同大の距離を經過せるを云ふなり。三九圖は此の如き運動を表はし、0, 1, 2, 3, 4 の諸點は互に同距離に在り。

第三九圖


一樣なる運動に於ける速度は一單位の時間に經過せる距離にて測る。

又屢此の如き場合に、速度は單位時間に經過する距離なりとも云ふなり。

一樣なる運動の速度は絕えず同大なり。

一樣なる運動の定義の中には特に、任意に選びたる同大の時間と云ふことを含めり。物體は每秒に同距離進むのみならず、每半秒每十分一秒等に於ても然らざるべからず。故に三九圖に示せし運動が眞に一樣なるならば $1/2$, $1\,1/2$, $2\,1/2$ 等を記すべき諸點は 0, 1, 2, 3 の諸點夫々の正しく中央に在らざるべからず。

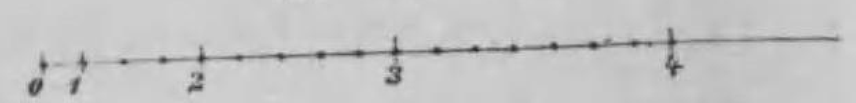
故に四〇圖に示せし運動は全一單位時間に經過せし距離のみを比せば一樣なるが如くなれど實は然らざるなり。

第四〇圖


**四七 自由落下 加速並に減速の運動** (Free Fall. Accelerated and Retarded Motion.) 物理學的概念の發展に於て物體の落下より其擾亂的影響を出來得る丈除去せるもの(自由落下)は特に重要なるものなり。是等の影響は多くは空氣の作用なり。次に於ては之等を除きしものと假定すべし。

然れば觀察によりて第一に、凡ての物體が皆互に遲速なく落つること、第二に、接續せる同大時間内に經過せる距離は落下の始まれる瞬時より勘定して互に 1, 3, 5, 7 等の數比に在るを知る。一落體の運動を此法則に相當し四一圖に示せり 線は垂直の位置に在るものと考ふべし。

第四一圖



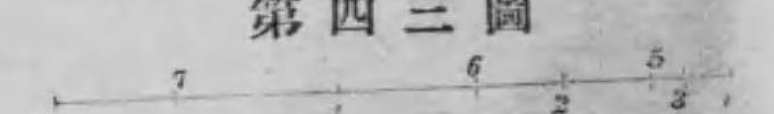
相次げる同大時間内に絕えず益大なる距離を經過せる故、この運動は加速せるものと名けらる。同大の時間に經過せる距離が絕えず益減少せば運動は減速せられしなり。

**四八　往復運動** (To- and fro Motion.) 又往々一點の運動の方向が轉回し、即ち其道に沿ふて逆に戻ることあり。例ば垂直に抛上げられたる物體の如きものなり。其運動は四二圖に示さる、線は垂直の位置に在りて、0 點が下に在るものと考ふ。圖は又、時點 4 に於て運動方向を轉回せる後は上昇の際一秒間に經過せる距離各部分を落下の際再び各一單位時間に經過すと云ふ特殊の狀態を示せり。

第四二圖

此特性は四三圖に示せる運動には存せず。

第四三圖



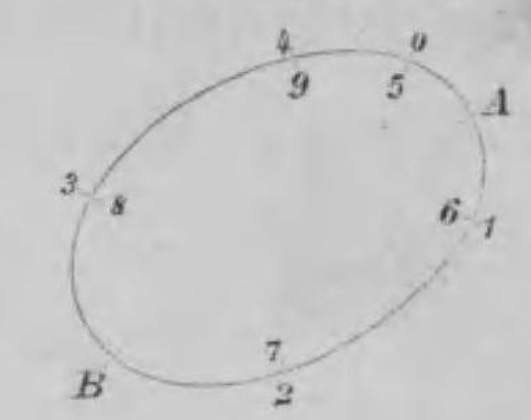
**四九　閉道の上の運動** (Motion in a Closed Path.) 一點が一閉曲線上を常に同方向に進めば幾回も循環をなすなり。道の上の或任意の點より同じ點まで復歸するに要する時間を循環時間と稱す。

四四圖に示せる場合は點が五單位時間にて出發點に復歸せし後、次の循環を再び同樣に行へるものなり。此の如ければ此の運動に一



定の循環時間あり、即ち何れの循環に於ても等しく、其の一周に要する時間を云ふなり。此時間は循環の始點に $A$ を取るも $B$ を取るも同じ。

第四四圖



閉線上循環時間不變なる運動の最簡單の例は一樣なる運動なり。

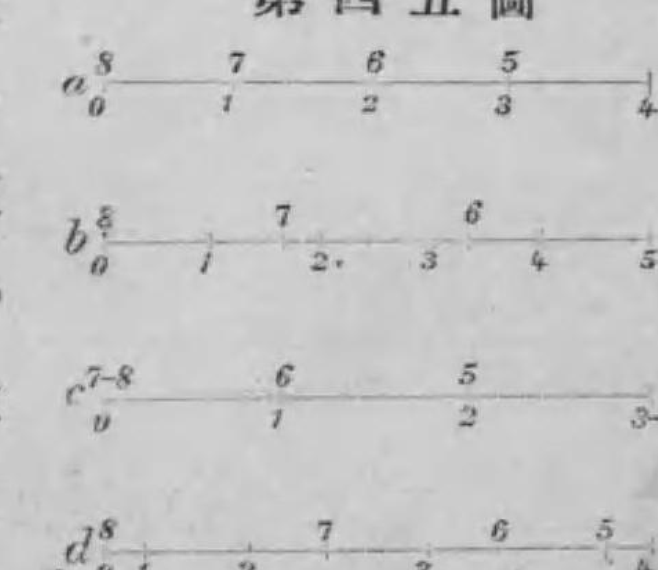
上記の如く一定時間の經過の後常に同じ樣に繰返さるゝ運動を週期的と稱し、其の時間を週期と名く。循環時間不變なる運動に於ては「循環時間」と「週期」との二語の意味相同じ。

**五〇　振動** (Vibrations.) 不閉線上の運動も亦週期的なるを得べし。例ば一點が二個の限點の間に往復し、其往復の運動が每回同樣なる場合の如きなり。此の如き運動を振動と云ふ。一般に振動と云へば全一往復運動の意味なり。是に要する時間を振動時間と云ふ。

特に一直線上の振動を觀察すべし。

同じ轉回點の間に於て又同じ振動時間に於て、運動は種々の有樣に起り得べし。即ち種々の振動の形が可能なりと云得べし。四五圖 $a$, $b$, $c$, $d$ は之を說明す。第一のは往と復と速度同じき一樣なる運動なり。$b$ 圖のも亦一樣なれど右に向へるは左に向へるのよりも遲緩なり。$c$ 圖に示せる運動が、$a$ 圖に於けると異れるは點が道の兩端にて每回一單位時間づゝ靜止せることなり。最

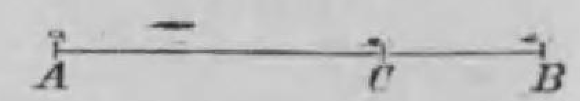
第四五圖



後に $d$ 圖にては二つの運動共に加速せり。

凡て是等の場合に於て振動の時間は、點が道の一端より發して往復する時間なるのみならず、任意の點 $C$ (四六圖)より先づ一端 $A$ に行き、次に他端 $B$ に歸りて遂に再び其出發點に達するまでの時間なり。

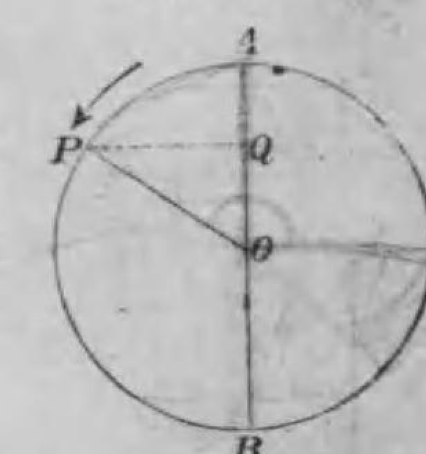
第四六圖




**五一 簡單振動** (Simple Vibrations.) 特に重要なる振動の形に就て述ぶべし。

一點 $P$ (四七圖)が一圓周上に動くとき一定の直徑 $AB$ 上に於ける此點の投影 $Q$ は其兩端 $A$ 及 $B$ の間に往復す。 $P$ 點が同様なる循環を續くれば此投影は規則正しき振動をなすなり。 明かに $Q$ の振動時間は $P$ の循環時間に同じ。

第四七圖




$P$ が一様なる運動をなせる場合に $Q$ の振動を簡單と名く。 固より圓と $P$ 點とが在らずとも $Q$ の運動が此の如き簡單振動たるを得。 即ち $Q$ 點の運動は、一様に圓周上に動ける或他の點の投影と看られ得るなり。

此圓の平面內任意の線上に $P$ を投影したるものが $Q$ 點と同様に動けることは容易に理解し得べし。約言せば、

簡單振動は一様なる圓運動(圓上の運動)を圓の平面內の一直線上に投影せるものなり。

第四八圖


四八圖は簡單振動を尚詳細に説明す。圓上 0, 1, 2, 3 等の諸點は互に等距離に在り。勿論一層詳細に運動を觀察し、以上と同様の仕



方にて振動時間の例ば十六分一づゝ隔てる各瞬時に於て點の位置を示し得べし。

簡單振動の次の性質は特に注意すべきなり。

*a*) 道の二分一 $AO$ 又は $BO$ (四七圖)の一を何れの方向にても點が之を過るに振動時間の四分一を要す。

*b*) 道の中、何れの部分も往の時と復の時とにて點が之を經過するに要する時間相同じ。

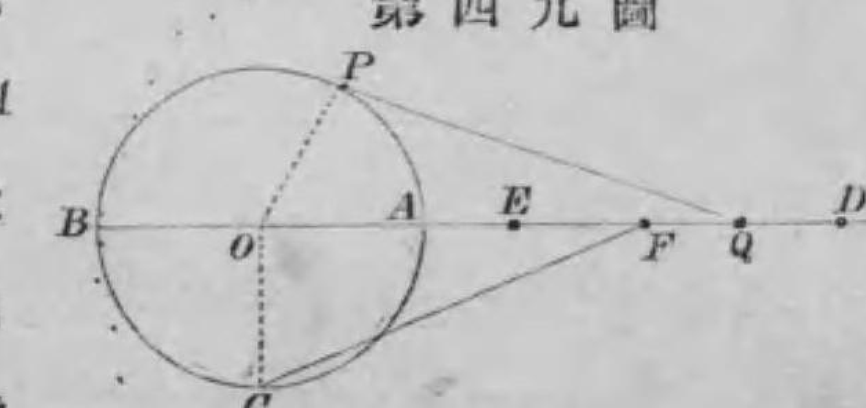
*c*) 半振動時間を隔てる二瞬時に於ては振動點は $O$ 點より互に反對の側の同じ距離に在りて相反對の方向に動きつゝあるべし。

*d*) 振動點が $O$ 點に近づく間、運動は加速し、$O$ より遠かれるとき減速す。

道の二分一の長さの距離 $OA$ を振動距離又振幅と名く。

**五二 二點の運動間の連結の他の例** (Another Example of the Connection between the Motions of two Points.) 前節に於て $Q$ の運動は $P$ 點の運動によりて定めらる。是と同様なるは多くの機械に於て一點を或何等かの目的に必要なる様に動かすため、一定の運動をなせる或他の點に連結して之を强制することなり。其一例は四九圖に示さる。

第四九圖




$P$ 點は圓周上に一様なる運動をなし、$Q$ は直徑 $BA$ の延長線上に於て $PQ$ なる距離が不變の長さ $l$ を有する様に動かざるべからずとす。 或は不變なる長さの一直線 $PQ$ の一端が一様に圓周上に動

き、他端が直線 $BD$ 上に滑べるとも云ふべし。

$Q$ 點は $D$ 及 $E$ 二點の間に往復す、是等二點は $AD=BE=l$ として之を得。此往復運動が簡單振動ならざるは或瞬時に於ける $Q$ の位置を定むれば直に知らるべし。即ち $P$ 點が $A$ 及 $B$ に占むる二つの瞬時の中央の一瞬時に就て之を定むるに、半圓 $BA$ を $C$ にて二分し、$F$ を $CF=l$ なる點とせば、$F$ 點は $ED$ の中央に在らず。$Q$ の運動が簡單振動なりとせば恰も中央に在るべきなり。

**五三　範式にて一點の運動の表出** (Representation of a Motion of a Particle by a Formula.)　道の上に一定點 $O$ を假定し、動點の占むる位置を其道に沿ふて $O$ より測れる距離 $s$ にて定む。此距離は $O$ の一方又は他方に在るに從ひ正又は負とすべし。

運動の進み行く間に於て $s$ は明かに時間 $t$、即ち時間の計算の始めの瞬時の後經過せる時間の函數なり。$s$ が $t$ の如何なる函數なるかを知れば運動は明瞭になる。換言せば一變數が他變數に如何なる法則に從ひ關係するかを知ればなり。此の如くして毎瞬間に於ける點の位置は與へらるべきなり。

變數間の關係は又表によりても示さる(一節參照)。即ち點の位置を觀察せる時刻を第一行に記し、$s$ に就て得たる値を第二行に入るゝなり。

$s$ と $t$ との關係は又範式によりても表はさるべし、出來得る丈良く觀察に合ふ實驗的範式により、又或は或特殊の運動の定義より導かるゝ方程式に依ることもあり得べし。

前數節に述べたる如き運動に就ては容易に此の如き方程式を設くるを得べし。



**五四**　$a$) **一樣なる運動** (Uniform Motion.)　時間 $t$ を計算し始むる瞬時に於て物體が占むる點を $O$ とす。又運動の方向は $s$ を正號に計算する側にありと假定す。速度を $v$ とす。この運動の定義により直に

$$s=vt$$

を得。此範式は負の側の運動には、速度に負號を附せば適用せらるゝなり。

或は $O$ 點を、上記以外に選ぶことあり。然れば $t=0$ に於て物體は $O$ より或距離 $a$ に在り。即ち $t$ 時刻に就ては

$$s=a+vt$$

となる。此範式に於ては $v$ も $a$ も共に正或は負なるを得。

$b$) **自由落下** (Free Fall.)　時間 $t$ は運動の始まりし瞬時より、又 $s$ は物體が落されし點より始めて下方に計算せりとなす。第一の單位時間に經過せる距離を $a$ と記す。然れば第二、第三、第四等の單位時間に經過せる距離は(四七節)夫々 $3a$, $5a$, $7a$ 等なり。是によりて第一單位時間の二倍、三倍、四倍の時間にては $4a$, $9a$, $16a$ の距離を行くことを知る。斯して一般に $t$ が整數なれば

$$s=at^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

となる。

觀察によりて、$t$ が整數によりて表はされずとも同じ關係あるを知る。例ば 2,5 秒に經過せる距離は 6,25$a$ なり。

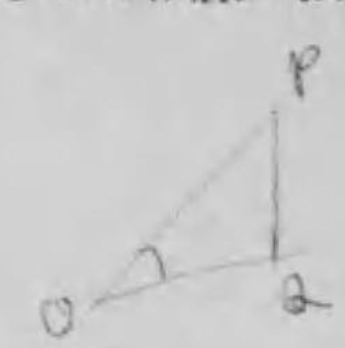
$c$) **簡單振動** (Simple Vibration.)　四七圖にて $s$ を以て、道の中央よりの動點 $Q$ の距離 $OQ$ を表はし、$Q$ が $O$ より上方に在るとき $s$ を正なりとす。時間 $t$ は $P$ が $A$ に在りたる瞬時より計算し、循

環時間即ち振動時間を $T$ と記す、是は時間 $t$ の變數たるに反して一の常數なり。振幅を $a$ とす、又角度は弧度にて表はす。

$P$ 點が $t$ 時間に弧 $AP$ を經過したりとせば

$$\angle AOP=2\pi\frac{t}{T}$$

となる、$P$ が一様なる運動をなし、$P$ と $O$ との連結線が振動時間 $T$ に於て角度 $2\pi$ を畫くとして知らる。




尚又

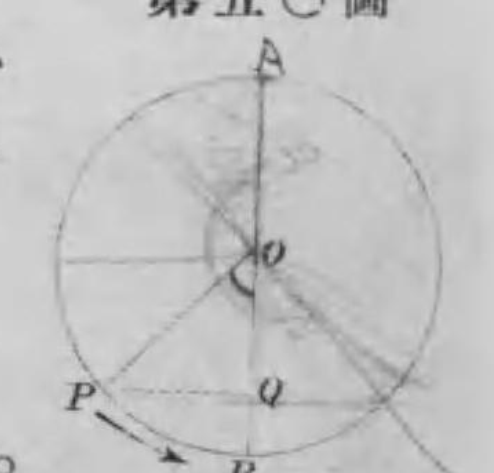
$$OQ=OP\cos AOP$$

なるにより

$$s=a\cos 2\pi\frac{t}{T}\text{..........................}(2)$$

上述に於ては $t<\frac{1}{4}T$ と假定せるも範式は $t$ の凡ての値に適用せらるべし。例ば $t$ が $\frac{1}{4}T$ と $\frac{1}{2}T$ との間に在れば $P$ 及 $Q$ は五〇圖に於ける如き位置を占む、$OQ$ の長さは $a\cos BOP$ なり。今 $s$ が負なる故

第五〇圖




$$s=-a\cos BOP=a\cos AOP$$

を得、$AOP$ の代はりに又 $2\pi\frac{t}{T}$ と書き得べし。

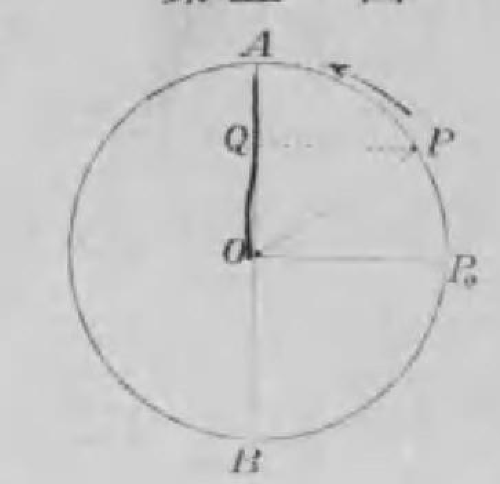
他の特別の場合も亦同様に取扱ひ得べし。唯尚注意すべきは範式(2)が $t>T$ の時、即 $t$ が振動時間の幾倍なるかの時にも適用せられ得ることなり。此範式は、振動時間の經過後毎回 $s$ が再び同値を占むることを表はせり、何となれば $t$ が $T$ だけ増せば角度 $2\pi\frac{t}{T}$ は $2\pi$ を増し餘弦は再び其の同じ値に歸ればなり。

恰も餘弦が一の週期函數なる故、範式は一の週期的運動を表はし得るなり。



$d$) 範式(2)は $t=0$ の時に振動點が $A$(四七圖)に在らずとせば其形を變ず。例ば此瞬時に於て $O$ に在りとし正の側の方に動かんとせりと假定せば $P$ 點は(五一圖) $P_0$ に在り。$t$ 時間に $P_0P$ 及 $OQ$ の距離が經過せられしならば

第五一圖




$$OQ=OP\sin P_0OP$$

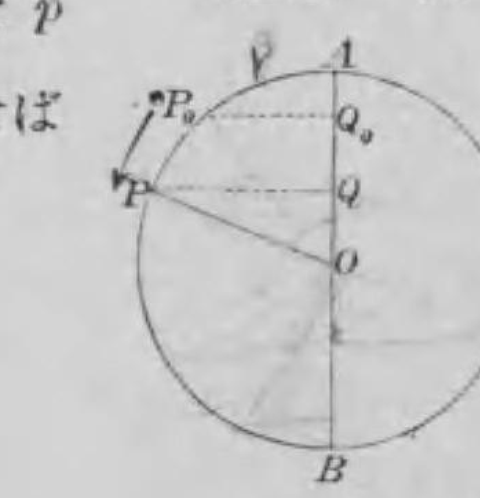
にして即ち

$$s=a\sin 2\pi\frac{t}{T}$$

此方程式も亦 $t$ の凡ての値に適用せらるべし。

圓の上に動ける點(五二圖)が $t=0$ の瞬時に $P_0$ に在りとし、半徑を 1 として弧 $AP_0$ を $p$ にて記し、$P$ 及 $Q$ が時間 $t$ に相當すとせば

第五二圖




$$\angle AOP=2\pi\frac{t}{T}+p$$

即ち

$$s=a\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+p\right)$$

なり。

### 五五　運動の圖式的表出 (Graphical Representation of a Motion.)

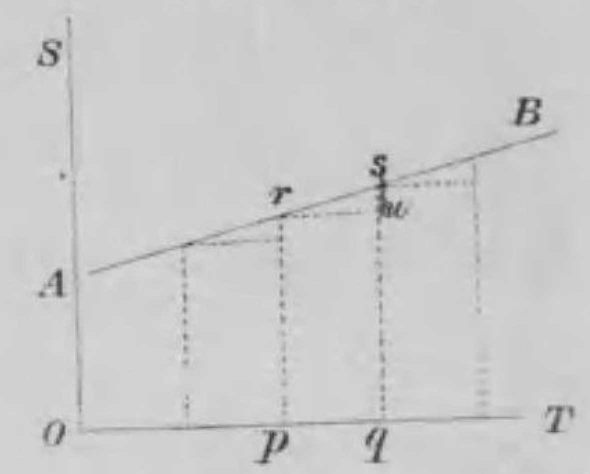
$s$ と $t$ との間の關係は九節に述べたる方法に依り $t$ を横軸にて、$s$ を縱軸にて表はせば圖に依りて示すことを得るなり。圖上の點は $t$ 及 $s$ 一對の値に相當して與へられ、運動の種類は此の如き諸點によりて畫く直線若くは曲線にて表はさる。横軸と縱軸とを時間の軸、距離の軸と名づけ、圖上には $T$ 及 $S$ の文字にて區別すべし。

$a$) **一様なる運動** (Uniform Motion.) 此運動にては時間の同じ増

加に就て距離も同量づゝ增加す。故に圖式的表出に於て縱軸の變化が橫軸の變化に比例せざるべからず。從て一樣なる運動は直線にて表出せらる。

五三圖に表はしたる運動にては零の時刻にて $s$ が既に $OA$ なる値を有せり。移動は正の側に向へり、即 $s$ は增加す。$pq$ が單位時間を示すとせば $ps$, $qr$ なる縱座標の差 $su$ は單位時間に於ける $s$ の增加にして即ち速度を測るものなり。其の大なる程、この線が時間の軸となす角は益大となる。

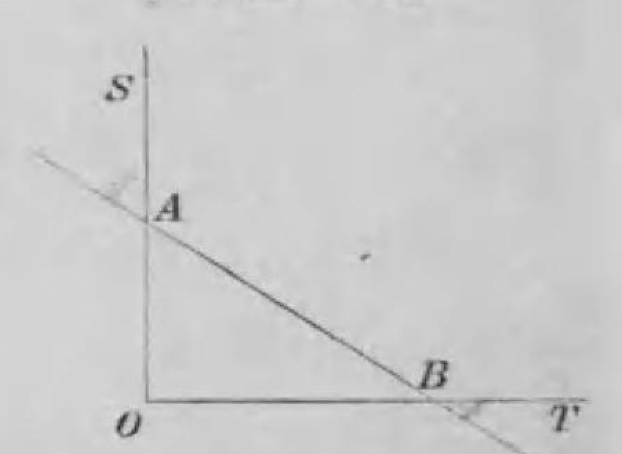
第五三圖




$t=0$ に於て又 $s=0$ なれば直線は座標の原點を過ぐべし。

五四圖は距離 $s$ が $t=0$ の時刻にて $OA$ の値を有し、其後減じ行く場合に當る。$OB$ によりて示されし時刻にて $s=0$ なり、此時動點は道の中 $s$ の計算の原點に達せるなり。

第五四圖



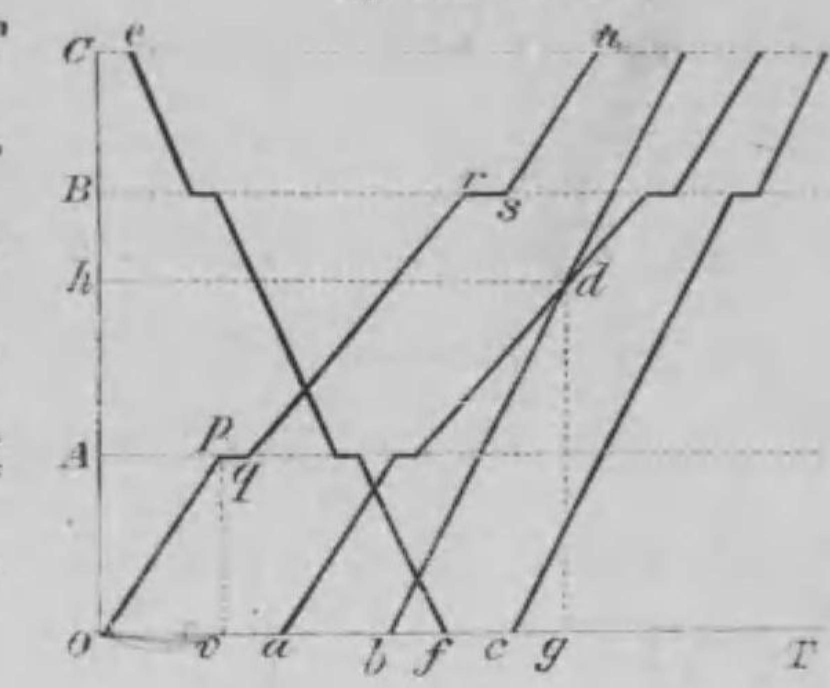

又圖式法を用ゐて、數多の物體が同じ道を運動せるものゝ觀念を得べし。例ば一の鐵道線路に四個の停車場ありとし、一方の端の停車場より距離を測る。距離の軸上(五五圖)第一より第二、第三、第四の停車場までの距離を $OA$, $OB$, $OC$ にて示す。簡單に、停車場を $O$, $A$, $B$, $C$ の文字にて記す。

各一列車の進行は一線にて與へらるべし。例ば $Opqrs$ 線は列車が $t=0$ の時刻に $O$ より出發し一樣なる運動にて $A$ の方に行き其所へ $Ov$ にて示す時刻に於て着し、$pq$ の長さにて示さるゝ時間停車



したる後、前よりは小なる速度にて進み(即ち $qr$ が $OT$ となす角は $op$ のなすより小なり) $B$ にて又 $A$ に於けると同時間停車し、遂に $B$ より $C$ へ $OA$ を進みしと同じ速度にて進行せる ($su$ は $op$ に平行なり)を示す。

第五五圖




$a$ より發せる線は前述の列車と全く同樣に進行せるも $Oa$ にて示さるゝ丈遲れて $A$ を出發せるものに當る。$b$ より始まれる線は列車が前二者よりは大なる速度にて $O$ より $C$ に行き中間の停車場に停車せざるを示す。尙 $O$ より發して $B$ のみに停車せる列車の進行を示せり。又 $ef$ 線は $C$ より $O$ の方に向へる運動を表はせり。

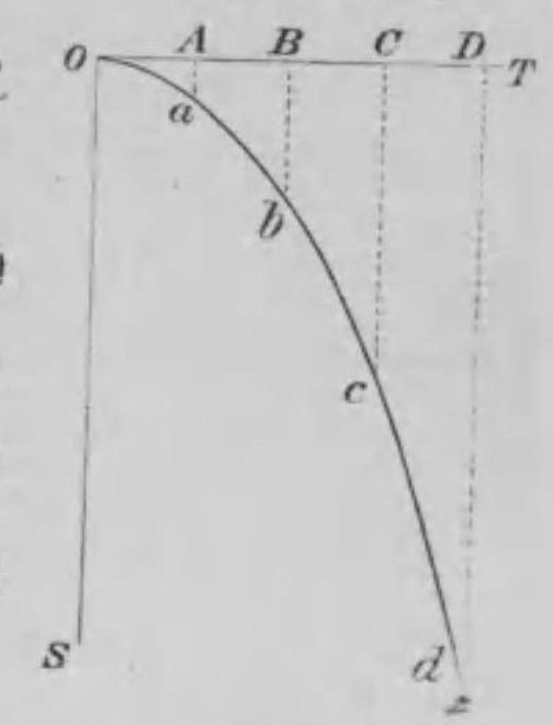
圖が一旦造り得らるれば夫よりして種々詳細の點を見出し得べし。列車が何時某の地點を通過するかは、距離の軸上相當の點より $OT$ に平行なる一線を引きて知らる。又 $OT$ に對する垂線にて圖上の線を切れば、各列車が一定瞬時に於て占むる場所を知り得るなり。

$d$ 點に於ける如く二線の相切るは、一列車が他列車に追付くを示し、其時刻は $d$ の座標 $og$ にて、場所は $OC$ に於ける投影 $h$ にて定めらる。又列車の交叉も圖にて示さるゝなり。

$b)$ **自由落下** (Free Fall.) 五六圖の曲線は五四節に範式 (1) にて表はせるものを圖示せるなり。$OA$, $AB$, $BC$, $CD$ が單位時間に相當せば $Aa=a$, $Bb=4a$, $Cc=9a$, $Dd=16a$ なり。縱座標は橫座標

の自乘に比例せる故、線は一の拋物線なり(一八節)。一般に曲線は凡て一樣ならざる運動を表出するなり。

第五六圖

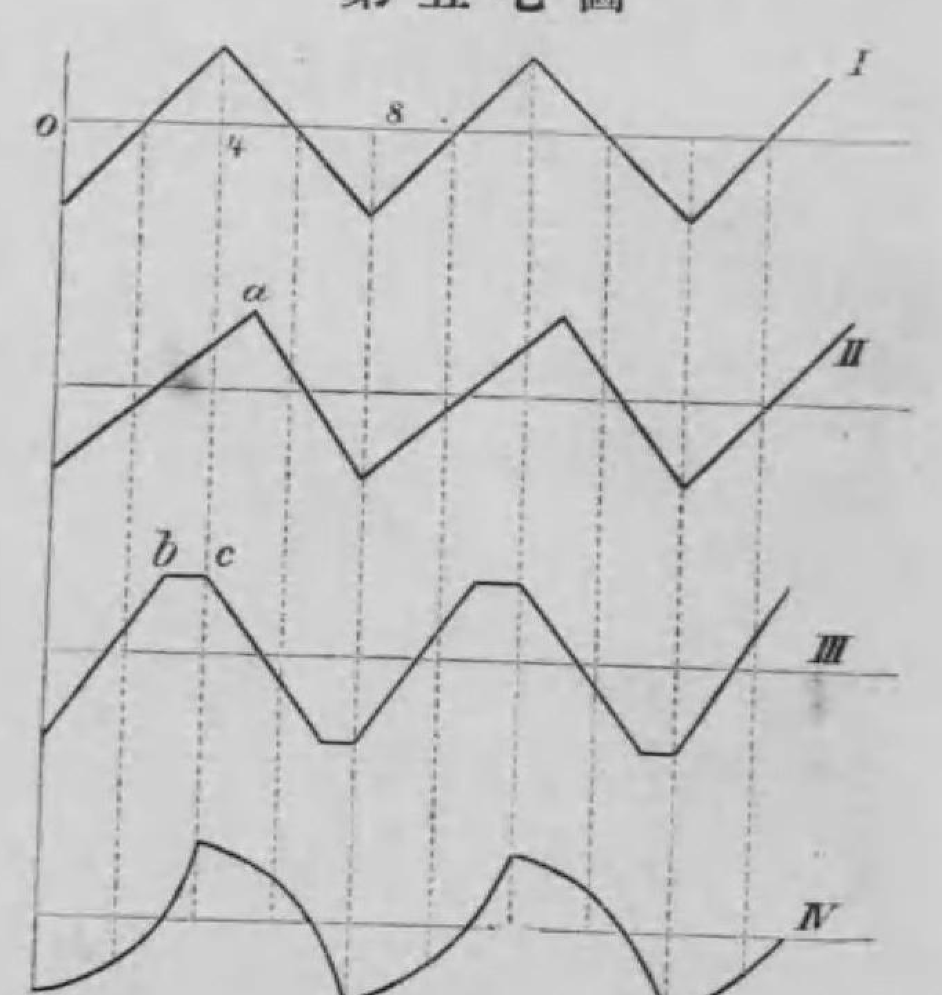



$c$) **振動** (Vibrations.) 此運動にては振動時間の經過毎に常に道の同じ點に達するなり。此性質は圖式的に、橫座標が振動時間に相當する値だけ增す毎に同じ縱座標を繰返す事によりて示さる。

故に振動の圖式的表出は一の波線なり。種々の振動の形は種々の形狀の波線に相當す。

五七圖は之を示す。$I$, $II$, $III$ 及 $IV$ の諸線は四五圖 $a$, $b$, $c$ 及 $d$ にて示せる運動に相當す。四五圖の水平距離は縮小して五七圖に垂直距離に複寫せられ、四五圖の「右」が五七圖の「上」に相當す。後圖の各線に於て水平直線が時間の軸として引かれ、其高さは波線が其直線の上方と下方とに同距離に在りとするなり。縱座標は振動點の道の中央よりの距離を表はす。圖は更に說明を要せざるべし。

第五七圖




簡單振動の圖式的表出は容易に五一節の定義によりて導き得。例



ば 1/16 振動時間相隔つる諸瞬時に就て振動點が $O$ の一方或は他方に占むる距離を定め得べく、然れば是等の距離が圖上に等距離に於て立てる正又は負の縱座標として用ゐらるゝなり。

此作圖は讀者に委ぬべし。

簡單振動を表はす線は簡單波線卽ち正弦線なり(二五圖)。

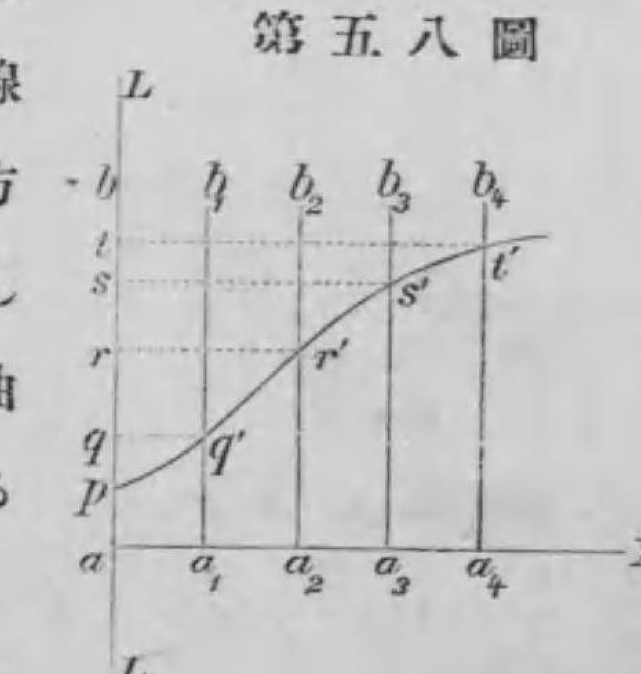
卽ち五四節の範式中 $c$ 及 $d$ を文字 $t$ 及 $s$ 又は $x$ 及 $y$ に代ふれば二一節の方程式と同じ形を得べし。

終りに尙注意するは、振動が各波線にて示さるゝ如く逆に波線も亦或振動の假像と見られ得ることなり。例ば二六圖にて曲線 $L_3$ に縱座標若干を互に等距離に引くべし。一點が一直線上に動き線上の一定點よりの其距離、同大時間を隔てし各瞬時に於て前記縱座標と同大なる樣に動くとなし得べし。

**五六　運動の記錄** (Records of Motions.) 精密に或は略ぼ一直線上に於て動ける物體に筆を固着せしめば、筆に對立せる平面へ物體の運動を圖示すべき線を記錄し得べし。

卽ち(五八圖) $LL$ を空間內、筆の動ける線とし、平面が例ば筆に對立せる一枚の紙なりとし此面は靜止すとせば面上 $LL$ に重なれる一の直線記さるべし。されど此平面が $Xa$ の方向卽ち $LL$ に直角に右より左へ移動し且つ一樣なる運動をなすとせば一の曲線 $pq'r's't'$ を得べし。是れ亦求むる圖式的表出なり。

第五八圖




之等を知悉する爲、紙上に等距離を

隔て、$aX$ に直角なる線 $ab, a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3$ 等を考ふ。初めに $ab$ が固定線 $LL$ と重なれば若干時の後 $a_1b_1$ 來り、二倍時間の後 $a_2b_2$ 來る等なり。是に於て $a_1a_2$ 等は順次に、初め $a$ が占めたりし $LL$ 上の點に來る。

$ab, a_1b_1, a_2b_2$ 等の諸線が曲線を $p, q', r', s', t'$ にて切るとし $q'q, r'r, s's$ 等を $Xa$ に平行に引けば $LL$ 上筆が各時刻に相當して占むる諸點を見出し得。$ap, aq, ar$ 等の長さは筆が是等の瞬時に於て $LL$ 線上固定點 $a$ より隔たれる距離なり、圖上に示せる曲線の各縱座標に等し。

此方法を少しく改むれば實用に供し得べし。即ち一紙葉を廻轉圓筒の上に卷き(矩形の紙を圓筒に卷きて兩端を重ね合すなり)、此圓筒を其軸の周に一樣に廻轉せしむ。此間に、筆を附せる物體が母線の方向に動く。紙面に一線が畫かる。紙を母線の方向に切り、一平面に展開せば、五八圖の $pq'r'$ の線に一致すべし、但し圓筒面上一點の速度が五八圖に於ける平面の變位の速度と同大なりとするなり。

筆として用ゐるものは場合によりて種々異る。多く用ゐらるゝは剛き毛、細き金屬の尖、其他同樣のものなり、紙は面滑かに且白色なるを要し是に焔にて煤を被す。煤は尖端にて容易に拂掃せられ、細き白線を殘す、煤を紙上に適宜の方法にて定着せしめば線も保存し得べし。又寫眞術を應用し得、即ち感光紙を用ゐれば紙の一點へ向けたる光線が恰も「筆」の役目をなすなり。

**五七 圖式法の應用** (Applications of Graphical Method.) 以上の如き方法にて自由落下の法則を研究するに、是に於ては廻轉圓筒が



直立の位置に在りて、筆を備へし物體が是に沿て落つる樣になす。適當の方法にて筆は唯垂直方向にのみ動き、又常に圓筒に對して柔かに壓す樣になすべし。初に圓筒が廻轉するのみとし、又物體を落下せしむるのみとし、水平及垂直の二直線を得べく、次に兩者を結合せる本來の實驗にて此等二直線の交點より出發する一曲線を得べし。最後に紙を再び展開し、水平線を横軸とし、垂直線を縱軸とし、各横座標に相當する縱座標を相互に比較すべし。是よりして縱座標は横座標の自乘に比例し、即ち線は一の抛物線なるを示す、五五節 $b$ に依り然るべきが如し。

振動的運動の研究にも屢圖式法用ゐらる。振動せる物體例ば發音せる物體に一細片を固着せば廻轉圓筒上に一波線を畫き、點が幾何距離の間を往來し、又圓筒の一廻轉の間に何回振動するかを示すのみならず、又其形狀にて物體の振動形を表はすなり。例ば振動せる音叉は二〇及二一節に記せる如き線を畫くことを示し、又是よりして音叉の振動は簡單振動なることを知る。

以上の場合は皆、運動が餘り速かにて直接の觀察が困難なる如きものを圖式的に研究せるものなり。又同樣に此方法は緩漫なる位置の變化にも應用せらる。極めて緩漫にて觀察者の耐え得ざる如き運動にも然り。海面の上昇、沈降、晴雨計の高さの變化の如きは或裝置により、一度之を動せば其儘にて長時間持續し、連續的に記錄する故、運動を毫も脫さゞるを得るなり。

多くの場合には運動を研究せんとする物體の爲めに筆を運動せしむるに何等かの工夫を用ゐること必要なり。固より筆を常に直接に物體に固定するを要せず、若干の距離を隔つとも物體の運動が筆

に傳はる樣になすを得べし。此の如きは屢生理學者が動物體に於ける運動を圖式的に表示するに應用せり。

狹き範圍内に起れる運動を圓筒の周圍より以上に記錄を續くる簡單なる方法あり。されど其爲に、例ば波線が既記の部分と後に畫く部分と相重なり合ふことなからしめんとす。即ち圓筒を廻轉せしむると同時に軸の方向に一樣なる速度にて之を變位せしむるなり。筆が靜止せば螺線が畫かる。筆が往復運動せば一の波線を得て、點は交互に螺線の一方及他方に在るべし。紙を平面に展開せば螺線は母線に斜なる一直線を與へ、前進せる圓筒上に生ずる波線も亦同樣の位置に在るべし。

**五八　時間の測定に圖式法の應用** (Application of the Graphical Method to the Measurement of Time.)　音叉の振動を一圓筒上に記すとき圓筒に時計仕掛にて既知速度の一樣なる運動を與ふれば、圓筒周圍上に得たる線が示す波の數よりして一秒に於ける振動數を知り、從て振動時間を得べし。又筆が動きて圓筒上に記す諸線の各部分を經過する時間は夫々の部分の端の點を過ぐる二母線の距離よりして之を見出し得べし。

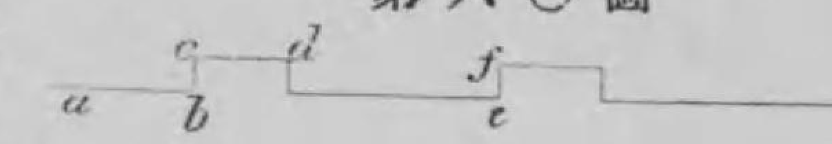
一樣に廻轉せる圓筒によりて一現象の時間或は二現象間の時間を測る種々の方法あり、例ば圓筒に對し筆を置き其儘にては表面の煤に觸れず或瞬時に圓筒に直角に壓す樣にし、時間的間隔を求むる二の瞬時に之を壓せば二個の點を得、是等の距離を測りて時間を知る。又筆を圓筒に壓す代りに之を固定して、其端より圓筒へ電氣火花を放ちて其點の煤を去る樣にもなし得。或は又筆を絶えず圓筒に觸るゝも母線の方向に少しく移動し、然る後直に舊位に復する樣



に裝置し得べし。然れば五九圖に畫ける如き線を得、$b$ 及 $e$ 二點の距離は筆の移動せしめられし二瞬時の間の時間を測り、尙 $cd$ の長さによりて其新位置に止まれる時間を得。$bc$ 及 $ef$ の斜なるは筆の移動の間圓筒が少しく尙廻轉を進めし結果なり。筆の移動が甚速なれば $bc$ 及 $ef$ は(六〇圖)殆 $ab$ に直角なり。

第五九圖


第六〇圖

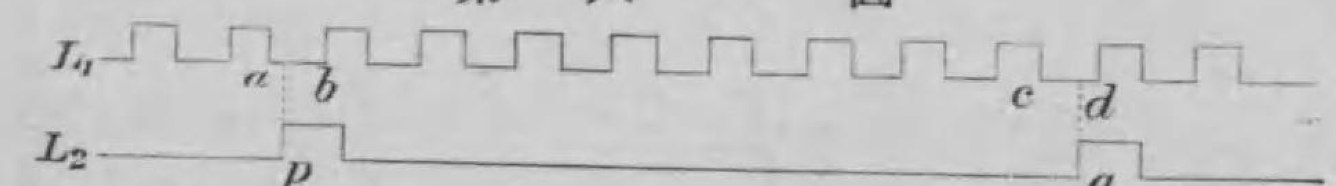



**五九　記時機** (Chronograph.)　圓筒が一樣なる速度にて廻轉せずとも、其表面上に記錄せる現象經過の時間は是と同時に第二の現象の、既知の時間を隔てゝ繰返せるものを畫けば知るを得べし。

次の諸例にては圓筒は直立せるものと假定す。

$a$) 圓筒と絶えず接觸せる筆を時計仕掛にて一秒毎に短時間上方に動かせば六一圖 $L_1$ の如き線を得。今第二の筆にて $L_2$ を畫き第一の直下に在りとし、$p$ 及 $q$ にて或時間の始と終とを記錄すとせば、$p$ 及 $q$ を通じ垂直線を引きて此時間の長さを $L_1$ の上にて讀取り得べし。一秒の間に圓筒の運動が一樣なりと假定せば是よりして秒の分數も定め得べし。圖に於ては經過の時間は 8,3 秒なり。

第六一圖




$b$) 音叉の一秒間の振動數は振動を記す筆の直下に第二の筆が圓

筒上に既知の時間に於て六一圖の $p$ 及 $q$ の如きか或は其他の記號を附するに依りて之を知るべし。

$c$) 短小の時間は一秒間の振動數既知の音叉に對比して測らる。六二圖に於て $ab$ が研究せんとする現象の時間を表はし、其上の線が音叉の與ふるものにて時間を測るとす。二個の筆が同一垂直線上に在るを最良とす、$ab$ にて示されし時間は 4,8 振動時間に當る。

第六二圖


叉下の筆も振動體に結ばるれば、後者の振動時間は同時間に於て二個の筆が幾何の波を畫くかにて知り得べし。

$d$) 此方法の一變化は時間を測らんとする各瞬時に於て、既知の週期にて振動せる筆より電氣火花を圓筒に放たしむるなり。然れば六三圖の如き圖を得べし。

第六三圖

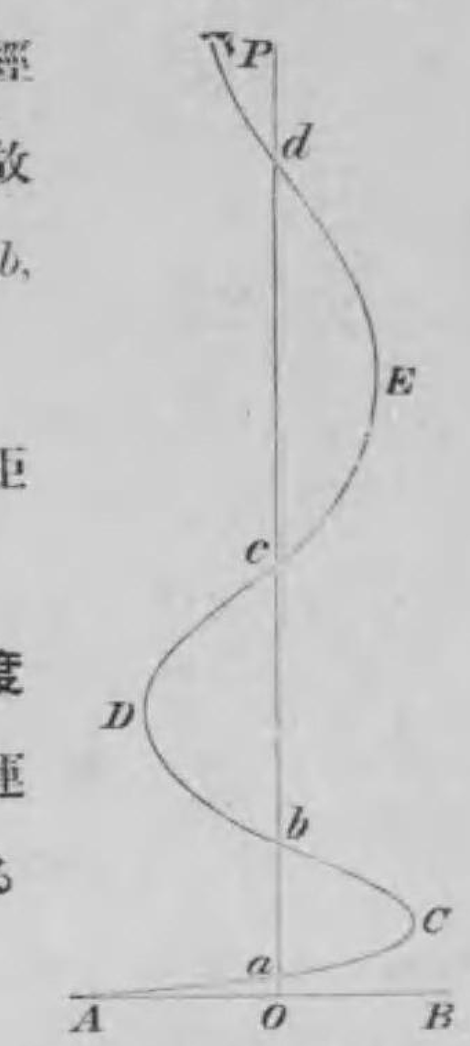
廻轉する圓筒上或は移動する紙帶に定時刻に相當する記號を附する裝置を記時機と稱す。

**六〇　物體の落下を圖式的に表出する他の方法** (Another Method of obtaining a Graphical Representation of the Falling of a Body.) 振動せる發條の端に筆を附し之を放置せば「平衡位置」$O$ 點(六四圖)に在り、之を $A$ の方へ動かして放てば水平線 $AB$ 上に往復運動す。此筆は常に一直立板に觸れ、板は $PO$ の方向に落下し得とす。此落下の間に筆が靜止せば板の上に $OP$ 線を畫く。板と筆と共に動き叉筆を $A$ にて放ちたる瞬時に板を落し初めたりとせば、$ACDE$



の線を得。此線が切る $a, b, c, d$ 諸點間の距離は筆が平衡位置を過ぐる各瞬時の間に板が經過せる道程なり。是等の瞬時が同間隔に在る故自由落下の法則(五四節 $b$)により知る如く $ab, bc, cd$ は一の算術級數をなすべし。

第六四圖




線の形狀よりして發條の其平衡位置よりの距離が漸次に減少するを見る。

**六一　一樣ならざる運動に於ける速度** (Velocity in a non-uniform Motion.) 此の如き運動にては先づ或時間內の平均速度を云ひ、然る後或る一瞬時に於ける速度に就て云ふ。

或時間內の平均速度とは物體が其時間に於て實際に經過したると同じ距離を一樣なる運動にて經過する場合に有すべき速度を云ふなり。故に平均速度は道程を時間にて除して得らるゝなり。

一定瞬時に於ける速度とは此瞬時に次ぐ或時間內の平均速度が其時間の長さの値を零に近づかしめしときに近づくべき極限値なり。

之を又次の如く云得べし。即ち、一定瞬時に於ける速度は無限小の時間に經過せる距離を其時間にて除して見出さると。

時間が甚小なれば其場合の平均速度は上記の極限値との差僅小にて、近似値として其代りに用ゐらるべし。例ば汽車が一分間に 1200 米の距離を進行したるとき、此の一分の初めに於ける速度を毎秒 20 米とするも著しき差はなかるべし、併し 30 分間に 32400 米の道程を經過せるを觀察せるのみによりて初速度が

$$\frac{32400}{30\times 60}=\text{每秒 18 米}$$

なりと假定せば恐らく誤謬著大なるべし。

運動の圖式的表出は前述のことを説明すべし。先づ五三圖の直線に示されたる如き一様なる運動にては、速度は $AB$ が $OT$ となす角の正切にて與へらるゝは容易に知らる、又一二圖の曲線によりて表示せらるゝ如き運動に於ては $OX$ を時間の軸とし $OY$ を距離の軸とせば $AC$ によりて表はさるゝ時間に於ける平均速度は $\mathrm{tg}QPX'$ にて定めらる。即ち $BQ$ は經過の距離にして、從つて $BQ/AC$ は平均速度なり。$AC'$ 時間の平均速度は $\mathrm{tg}Q'PX'$ にて與へられ、$A$ の示す瞬時に於ける速度は切線 $PR$ が $PX'$ となす角度の正切にて與へらる。

**六二　運動の法則が與へられたる場合の速度の計算** (Calculation of the Velocity, when the Law of Motion is given.)　距離 $s$ を時間 $t$ にて表出し一定時刻 $t$ に於ける速度 $v$ を求めんとす。此瞬時に續ける微小時間 $\Delta t$ を觀察す。其の終にて時刻は $t+\Delta t$ なり。$s$ を $t$ の函數として表出せる範式に、$t$ の代りに之を置けば、新時刻にて $s$ の値幾何なるかを知るべし。

斯して範式よりして時刻 $t$ に於けると $t+\Delta t$ に於けるとの $s$ の二値を算出す。是等の差を $s$ の增加と名け $\Delta s$ と記すべし、是れ $\Delta t$ 時間に經過せる道程なり。即ち $\Delta t$ 時間内の平均速度は

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

なり。時刻 $t$ に於ける眞の速度は此比が $\Delta t$ の益小なる時に近づく極限値なり。故に次の如く記す(三九節)。



$$v=Lim\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}.$$

$\Delta t$ の減小に於ては $t$ 自らは不變とせざるべからず。即ち此量は豫め固定せられ、速度を求むる瞬時を與ふるなり。

即ち $s$ を時間 $t$ の函數として與ふれば速度は微分法（四〇節）によりて見出さる。是に於て $dt$ を時間の正の增加とせば $ds$ が正又は負となることは時間微部分 $dt$ の終に於ける動點の位置が $dt$ の始に於ける其位置に比して $s$ を正と計算する側に在るか或は其反對の側なるかに從ひて定まるなり。故に所與の範式によりて計算せらるゝ速度 $v$ は運動の方向が $s$ を正とする方向に一致するとき正にして、反對の場合に負なり。

**六三　自由落下に於ける應用　一様なる加速運動　加速度** (Application to the free Fall. Uniformly accelerated Motion. Acceleration.)　範式 (1) (五四節 $b$) の應用せらるゝ落體に於ては $t+\Delta t$ 時間に經過する距離は $a(t+\Delta t)^2$ なり。夫よりして

$$\Delta s=a(t+\Delta t)^2-at^2=2at\Delta t+a(\Delta t)^2$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=2at+a\Delta t$$

及　$$v=2at \text{..............................(3)}$$

を得。即ち、自由落下に於ては速度は運動の經過せる時間に比例す。或は又相續ける同大時間内に速度は每回同量だけ增す。

此の如き運動は一様に加速せりと稱せらる。加速度とは單位時間に於ける速度の增加を云ふ。

固より自由落下が唯一の一様なる加速運動にあらず。凡ての方向に又 $a$ の凡ての値に就て方程式 (1) の相當する運動を考へ得べし。

第一秒に經過する距離の代りに加速度を導きて一樣なる加速運動を詳記するに用ゐ得。方程式 (3) により加速度は $2a$ なり。自由落下にては通常之を $g$ と記す。然れば範式 (3) と (1) とは

$$\begin{cases} v=gt. & \dots\dots\dots\dots(4) \\ s=\frac{1}{2}gt^2 & \dots\dots\dots\dots(5) \end{cases}$$

となる。

此範式に依りて物體が $s$ なる高さより落下したるときに得る速度を計算し得べし。(5) よりして落下の時間に就て

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}} \dots\dots\dots\dots (6)$$

(4) より終速度

$$v=\sqrt{2gs} \dots\dots\dots\dots (7)$$

を得。

自由落下に於ける加速度の測定は其最精密の値は落體を直接に觀察するも得べからず、後に學び知るべき他の方法に依る。

凡ての物體が遲速の相異なく落つる故、$g$ は凡ての物體に就て同大なるなり。然れども地球表面上各地點にて加速度の値異なるを見出せり。極に近づくに從ひ物體が速に落ち、即ち $g$ の値大なり。$g$ の値若干を次に擧ぐ。長さの單位として糎、時間の單位として秒を取る。

| 緯度 | 0° | 45° | 52° | 90° |
|---|---|---|---|---|
| 落下加速度 | 978,1 | 980,6 | 981,2 | 983,1 |

$g$ の値はケーニヒスベルグにて 981,4, 伯林にて 981,2、維納にて 980,8 (東京にて 979,8) なり。



**六四 垂直に抛上げられし物體** (Body projected vertically upwards.) 既に四八節に記せし如く物體が初め上昇せしめられ、然る後落下するとき其運動が四二圖 (68 頁) にて表はさるゝ性質を有すること觀察の敎ふる所なり。夫れよりして次のこと出づ。

*a*) 物體の速度は運動の轉回する時刻の前と後同時間に在る二瞬時に於ては同大なり。例ば四二圖にて時刻 1 と 1,0001 との間に經過せる距離は 6,9999 と 7 との時刻の間に經過せるものに同じ。

*b*) 落下の間に速度は毎秒 $g$ 丈增加する故、上昇の間には毎秒 $g$ 丈減少せざるべからず。例ば四二圖にて 1 及 2 兩瞬時に於ける速度の差は 7 及 6 兩瞬時に於ける速度の差に等しきなり。

垂直に抛上げられし物體は相續ける同時間に速度毎回同量丈減少する故此の如き物體の運動は一樣に減速すと稱す。

*c*) 物體が速度 $v_0$ にて垂直に抛上げらるれば、速度が毎秒 $g$ 丈減ずる故

$$t=\frac{v_0}{g} \dots\dots\dots\dots(8)$$

秒の後には速度は零に等しかるべし。是は上昇に要する時間にして又同時に落下に要する時間なり。

物體が達する高さ $h$ は又落下の際 (8) の時間に經過する距離なり。故に範式 (5) により

$$h=\frac{v_0^2}{2g} \dots\dots\dots\dots(9)$$

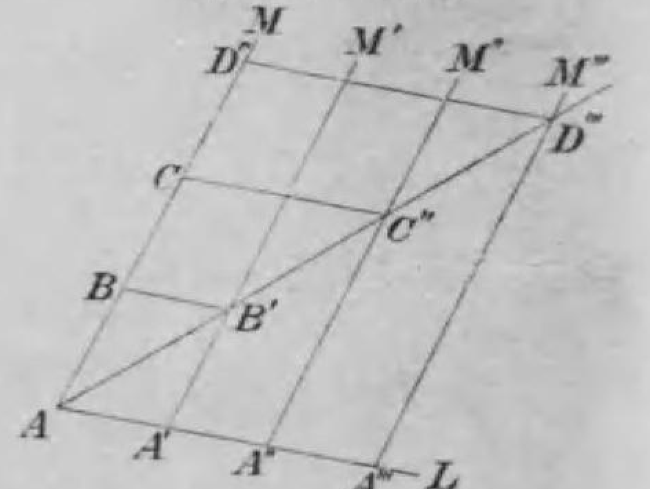
を得。

**六五 二速度の合成** (Composition of two Velocities.) 一平面、例ば船の甲板が、其平面内の一方向に不變速度にて動き、平面上に一物體が動けりとす、例ば球が舟の甲板上に轉せりとす。物體が同時間

目每に占むる平面上の諸點を見るべし、是等の點の位置は此平面上に立ちて其運動に隨伴し、然かも恐らく夫に就て何等覺知することなかるべき觀察者に見掛上此物體が有すと目せらるべき運動を定むるなり。此運動を此平面に關する物體の相對運動と稱す。然れども此河或は海の岸と不離に連結せる空間を考へ、物體が此空間の諸點を順次に過ぐるを注意し得べし。斯樣にして岸に關する相對運動の觀念を得。遂に例ば太陽と不離に連結し、地球が其中に動ける如き空間を考へ、此空間に於ける前述の球の運動を論ずるを得べし。

此考察に依て、凡て物體の運動に就て云へるときは常に他の一個又は數多の對象に對せる運動を考ふること明なり。故に一定の物體を不動のものと考察すること便宜なり。此物體に關する運動を絕對運動と稱す。是書中には吾人の周圍に在りて地球と不離に連結せる諸物體を靜止不動と見るべし。上述の例にては岸に關する運動を「絕對運動」と解すべし、船の運動とは岸に對する其の位置變化を云ふ、船の上の球の運動は「相對」の語にて區別す。

第六五圖




此相對運動が平面上一直線の方向に不變速度にて起りたりとす。此線を六五圖に $AM$ にて記す。$A, B, C, D$ は線上等距離に在る諸點にて是等の點を物體が各 1 なる間隔時間にて相續ける瞬時毎に、即ち 0, 1, 2, 3 の瞬時に於て占むるなり。今平面の移動に於て線自身の運動を見るに、此移動が $AL$ の方向に速度 $AA'$ を以て起れりと假定す。線が時刻 0 にて $AM$ なる位置を有せりとせば、1, 2, 3 の瞬時に於ける $A$ の位置



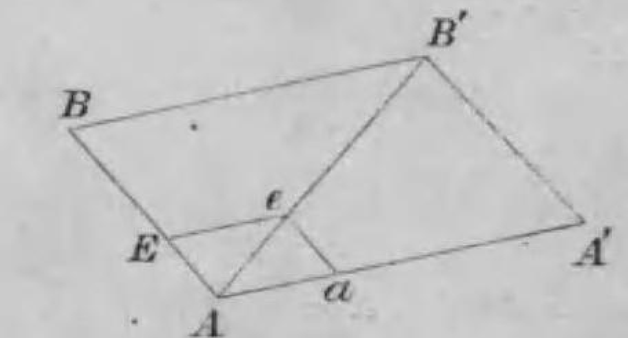
は $A', A'', A'''$ にて表はさる、$A'A''=A''A'''=AA'$ とす。線は夫自身に平行に進行する故、順次に $A'M', A''M'', A'''M'''$ の位置を占むべし。

物體が時刻 0 に於て此空間の $A$ 點に在れば、時刻 1 に於ては夫は $A'M'$ 上 $B$ が來るべき點、即ち $B$ より $AL$ に平行なる線を引きて得る $B'$ 點に在るべし。即ち $AM$ の凡ての點は同じ方向に移動す。圖によりて、2 及 3 の瞬時に於ける點の位置 $C''$ 及 $D'''$ も是と同樣に見出さるゝを知る。$A, B', C'', D'''$ が一直線上に在るは容易に知らる。是が實際に物體の道なることは 0 及 1, 1 及 2 等の瞬時の間の諸時點にて有する位置を觀察して之を知るべし。又 $AB'=B'C''=C''D'''$ なり。是は $AB, BC$ 等 $AA', A'A''$ 等が單位時間に於ける道程ならず、任意同大時間に於けるものとするも同樣なるが故に此物體の絕對運動は一樣なり。

此運動の速度は $AB'$ なり。明かに此速度は平面の速度 $AA'$ と平面に關して物體の有する速度 $AB$ とを、二七節にヴエクトルの合成に就て與へたる法則に從ひ合成して得らるべし。

此結論は、平面上の物體の運動並に平面の $AL$ 方向の移動の速度が變化する場合にも得らる。甚小なる(本來は無限小)時間には、是等二つの運動を共に一樣と見なし得べし。

第六六圖




今(六六圖) $A$ を以て物體が空間內或瞬時に占むる位置とし、平面が靜止せるとき物體が或甚小時間の後に達すべき位置を $E$ とす。此小時間に $A$ 點は $a$ に、線 $AE$ は $ae$ に至りたりとすれば平行邊形

$AacE$ の角點 $e$ は空間內物體の新位置なり。

$Aa, AE, Ae$ 諸線は夫々同一の甚小時間に相當する平面の運動、物體の相對運動及絕對運動を表はす。是等の運動に相當する諸速度は是等三線の方向を有し、又夫等の長さに比例する大さを有せざるべからず。是によりて(二八節)第三の速度は他の二速度を $AA'$ 及 $AB$ の邊とせる平行邊形の對角線 $AB'$ にて表はさるゝなり。

上述の如き物體に就ては、普通に一物體が二速度を同時に有すと云ふなり。二速度とは即ち平面に關する相對速度と此平面の速度となり。

此云方に從ひ「一物體が二速度を有す」と云へば常に是等二速度を二七節の法則にて合成して得る速度を其物體が有するものなるを理解すべし。

「速度の平行邊形」「合速度」「速度の分解」「分速度」なる名は二七節所述により更に說明を要せざるべし。唯次の點を記すべし。

*a*) 合成すべき二速度が同一或は反對の方向を有せば、合速度は夫等の和又は差に等し。是は一物體が一平面上或方向に動きて其間に此平面が是と同一或は反對の方向に移動せるを觀察せば容易に知らるべし。

二個の互に反對にて同大なる速度の合成は零なり。竿にて舟を進むる人の體は其一例なり。

斯く反對方向の二速度の合成或は合一に就て知り得たれば、垂直に拋上げたる物體(六四節)の速度の變化を次の如く記載し得べし。

垂直に上昇する物體は——落體も亦——每秒に其旣有の速度へ向下方に垂直の速度 $g$ を加ふ。



*b*) 一物體は又二個以上の速度を同時に有し得べし。之等をヴェクトルの法則によりて合成すべきなり。例ば一の落下せる石は地球に關して旣知の如き運動をなす、然れども尙其上に地球の自轉に伴ひ、又太陽の周りの進行運動又宇宙に於ける全太陽系の運動に伴ふなり。

**六六 任意なる直線運動に於ける加速度** (Acceleration in an arbitrary rectilinear Motion.) 一般に此の如き運動に於ける速度は每單位時間に於ける速度の變化にて測らる、無限小の時間に速度の受くる變化より演繹するなり。即ち無限小の時間に於ける速度の變化を此時間の長さにて除して加速度を計算するなり。無限小の時間を $dt$ にて又此時間に速度 $v$ の變化を $dv$ にて記せば加速度は

$$q=\frac{dv}{dt} \qquad \text{(10)}$$

なり。$v$ が時間 $t$ の函數として與へらるれば直に計算し得べし。

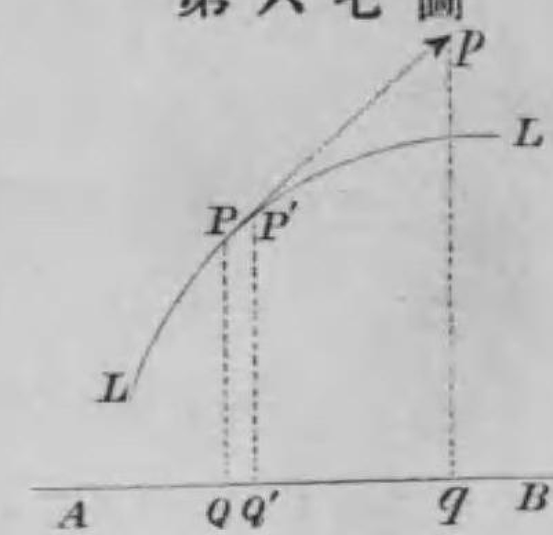
此範式に就て尙次の點を注意す。一點の道に於て一定の方向を正と選べば、速度 $v$ の符號は(六二節)運動の方向を示す、又 $q$ の値も負又は正なるを得べし。夫に相當して加速度の有し得る方向異れり。$q$ が正なれば、其意味は $dt$ 時間の終に於ける速度を得るには、其時間の初めに於ける速度に正方向の無限小の速度を加ふべしと云ふなり。$q$ が負なれば、點の旣有の速度に加ふる無限小の速度が負方向を有するを示す。

$q$ 及 $v$ が同符號を有し、即ち加速度と速度とが同方向を有せば、運動は文字通りの意味にて加速せるなり。之に反して $q$ と $v$ とが反對の符號を有せば減速せらるゝなり。

**六七 一點の速度と其一定直線上の投影との間の關係** (Relation

between the Velocity of a Particle and that of its Projection on a fixed straight Line.）二個の物體が相互に一方の運動が他方の結果なる様に連結せらるれば、夫等の同時刻に於ける速度も亦互に相關係す。四九圖に於て $Q$ 點の速度は $P$ 點の速度に關係す、同様に一蒸汽機關の凡ての部分の速度は喞子の速度によりて定めらるゝなり。是が往復運動する時間に增減あれば、機關內凡ての速度が同じ割合に變ずるなり。

第六七圖




今一點 $P$（六七圖）が曲線 $L$ の上に動けりと考へ、之を各瞬時に於て直線 $AB$ 上に投影すべし。然れば $P$ が無限小の距離 $PP'$ を進行する間に投影 $Q$ が $QQ'$ だけの長さを進む。$P$ と $Q$ との速度は $PP'$ と $QQ'$ との比に相關係せるなり。

各點に於て速度を一の直線にて表示し之を運動の方向に引き、其長さが速度の大さを示すとす。このヴェクトル（二七節）は $P$ に於ては $P$ 點にて道に接する線の方向に在り、$Q$ に於ては $AB$ の方向に在り。

$Pp$ が $P$ の速度なれば、$Q$ の速度即 $Qq$ は $PP'$, $QQ'$ 及 $Pp$ の第四比を求めて得べきなり。無限小の弧 $PP'$ は切線と重なるにより、第四比は $p$ を $AB$ 上に投影して得べし。即ち次の規則を得。一點の投影の速度は點の速度の投影なり。

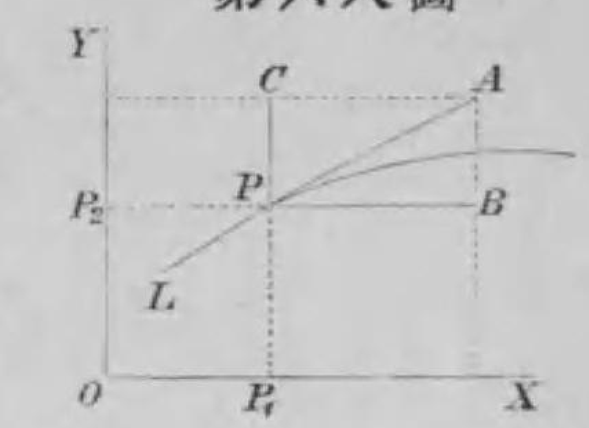
$P$ が道の中の一點にて、切線が $AB$ に平行なる點とせば、此場合の投影の速度は $P$ の速度と同大なり。其他の場合には凡て前者が小なり。道に於ける切線が $AB$ に直角なれば投影の速度は零に等し。



上述は道と直線とが同一平面內に在らざるときにも適合するなり。

**六八　一平面內の曲線運動の二つの直線運動に於ける分解**（Resolution of a uniplanar curvilinear Motion in two rectilinear Motions.）曲線 $L$ の上に動ける $P$ 點を道と同平面に在る二線、例ば互に直角なる座標軸 $OX$ 及 $OY$（六八圖）の上に投影すべし。$P_1$ 及 $P_2$ 二投影は $OX$ 及 $OY$ の上に動く。其の如何様なるかを知れば又各瞬時に於ける $P$ の位置を定め得べし。

第六八圖




普通云ひて、$P$ 點は同時に二投影の運動即ち此圖上右方の運動と上方の運動とを有すとなす。

故に點の速度は各投影が同瞬時に有する速度を合成したるものなり。速度 $PA$ を $PB$ 及 $PC$ に、即ち $OX$ 及 $OY$ に平行に分解せば、是等の分速度は $PA$ を二軸に投影したるものに等しく、即ち前節により $P_1$ 及 $P_2$ の速度に夫々等し。

空間內一點の運動は凡て互に直角なる三軸の上に其投影が動けるものとして記載し得。各瞬時に於ける點の速度は投影の速度を合成して見出し得べし。

**六九　簡單振動に於ける速度及加速度**（Velocity and Acceleration in a simple Vibration.）簡單振動の速度を、其定義に從ひ一様なる圓運動の投影なりとして之を求むべし。四七圖（70 頁）にて圓周を廻る $P$ 點は一様なる速度 $2\pi a/T$ を有す（74 頁）。$Q$ 點は中央點 $O$ を過る瞬時に於て此速度を有するなり。之に反し、$A$ に於て並に $B$ に於ては、$Q$ 點の速度は一瞬間零に等しきなり。

或任意の點 $Q$ に於ける速度を見出すには、$2\pi a/T$ に尙 $P$ の運動方向が $OA$ となす角度の余弦を乘せざるべからず。此角は $OA$ と $OP$ とのなす角より $\frac{1}{2}\pi$ 丈大なり。故に運動を範式 (2) にて表はせば求むる速度は

$$v=\frac{2\pi a}{T}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\frac{1}{2}\pi\right)=-\frac{2\pi a}{T}\sin 2\pi\frac{t}{T}\quad\text{.............(11)}$$

なり。是に依り此範式が速度の方向に於ける變化を正しく表出するを容易に證し得べし。

(11) よりして加速度 $q$ を誘出し得べし。計算を省きて其結果のみを次に擧ぐ。

$$q=-\frac{4\pi^2 a}{T^2}\cos 2\pi\frac{t}{T}\quad\text{.............................(12)}$$

之を方程式 (2) (74 頁) に比するに加速度は動點の距離を $O$ より測りしものに一定の因子を乘じて見出さるゝを見るなり。即ち

$$q=-\frac{4\pi^2}{T^2}s\quad\text{..........................................(13)}$$

負號は加速度が常に $O$ に向へるを意味す、是も亦容易に解せらるべし。即ち速度に就て前述により直に、$A$ 又は $B$ より $O$ の方へ向へる運動は加速し、$O$ より離るゝ運動は減速するを知るなり。

(13) に示せる加速度と距離 $s$ との互に比例せることは簡單振動の重要なる特徴なりとす。

(11) は函數 $s=a\cos(2\pi t/T)$ を四〇節 $e$ に示せし仕方にて微分して之を得べく、又加速度 (12) は速度の値 (11) を微分して見出さるゝなり。

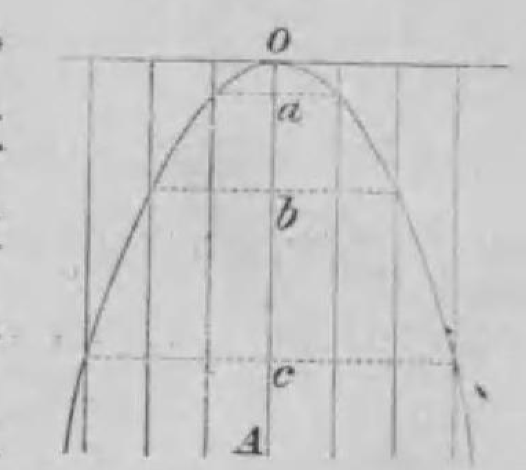
**七〇 任意の方向に拋上げられたる物體の運動** (Motion of a Body projected upwards in an arbitrary Direction.) 不變なる速度にて



水平の方向に進行せる人ありて、其人が自身の運動を顧みずして垂直と思ふ一方向に球を拋げ得べけん。其人は球が垂直に上昇し又再び下降すと見え、即ち之を若干時の後に手にて捕へ得べし。同樣に船が不變速度にて動けるとき、其上に在る人球を落し、或は垂直に拋上げて舟が靜止せざるために依る運動を認むることなきを得べし。

即ち次の如く云得。不變速度にて水平の方向に移動せる垂直線上地球表面に近く且自由なる物體は、靜止せる線上に於けると同樣に上昇又落下し得べし。

第六九圖




六九圖には同間隔時間にて相續ける若干瞬時に於ける直立線の諸位置を示せり。$OA$ は物體が最高位に達したる時に於ける位置なり。此時に物體が $O$ に在りたりと假定す。$OA$ 上物體の投影は垂直に拋上げられ又落下せる物體と同じ運動をなすなり。垂直線が圖に示されし種々の位置に來る各瞬時に於て上記の投影が占むる場所を $a$, $b$, $c$ とす (四二圖參照、68 頁)。圖に於ては物體が空間內順次に占むる場所を定めあり、其方法は更に說明を待たざるべし。是等の位置を凡て過ぐる曲線が即ち物體の實際の道にして一の拋物線なり。

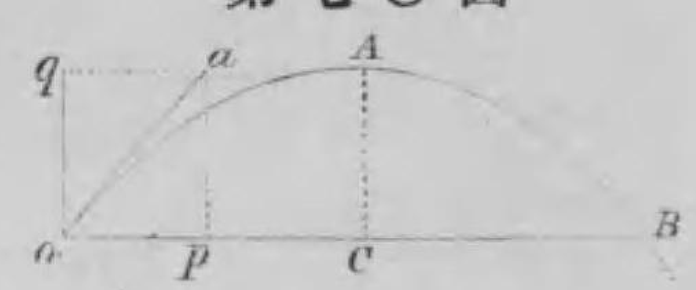
船中の觀察者が見掛上垂直に上方に拋げたる球は、實際には、手を離れたるときの其速度は、觀察者が球に垂直方向に與へたる速度と船の水平速度とを合成して得べきものなり。球は手を離れし後は全く自由なり。故にこゝに得たる同じ運動は、又速度が斜の方向に在るとき、例ば靜止せる觀察者が斜の方向に球を拋げたるときにも現

はるべきものなり。

即ち任意方向に抛げられたる物體は抛物線を畫く。其水平投影の運動は一樣にて、垂直投影の運動は垂直に抛上られし物體の運動と同じ。

$O$ 點(七〇圖)に於て一物體が初速度 $Oa=v_0$ を以て抛上げられ其方向は水平面と角度 $\alpha$ をなせりとす。$v_0$ を水平分速度 $Op=v_0\cos\alpha$ と垂直分速度 $Oq=v_0\sin\alpha$ とに分解せば前者は物體が水平方向に有する一樣なる運動の速度なり。垂直方向に於ける運動は初速 $Oq$ にて垂直に抛上られたる物體の運動と同一なり。是等より抛物線 $OAB$ 上運動の凡ては演繹せらるべし。

第七〇圖




速度 $v_0\sin\alpha$ にて上昇する物體は(六四節)高さ

$$v_0^2\sin^2\alpha/2g$$

に達す、是は抛物線の最高點より水平線 $OB$ に引ける垂線 $AC$ の長さなり。上昇の時間は(六四節)

$$v_0\sin\alpha/g$$

此時間に水平方向に經過する距離は

$$OC=\frac{v_0\sin\alpha}{g}\cdot v_0\cos\alpha=\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

$AB$ に沿へる落下は $OA$ 上の上昇と同時間を經、是よりして

$$OB=2OC=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$$

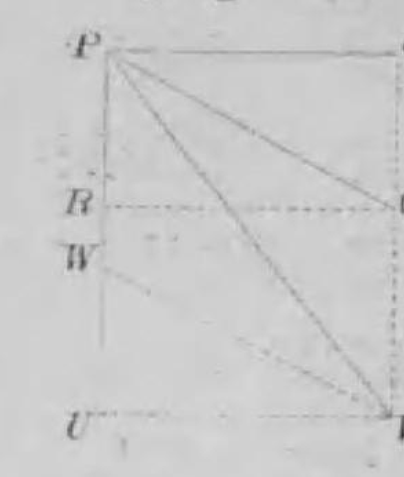
此範式の結果。一物體を $OB$ と角 $\alpha$ をなす方向及同じく $90°-\alpha$ をなす方向に共に同速度にて抛上ぐるに、到達の距離 $OB$ は兩つの場合にて相同じ。此距離は $\alpha=45°$ のとき最大なり。



**七一　抛物運動に於ける速度の變化** (Change of Velocity in the parabolic Motion.) 上述の如くに一抛物線を進行する物體の速度は各瞬時に於て水平と垂直との部分に分解せらるべし。前者は不變なれど、後者には毎秒、垂直に下方に向へる速度 $g$ を加ふるなり。

速度の變化を概觀するため一補助圖(七一圖)上常に同一點よりして各瞬時に於ける物體の速度を表はすヴェクトルを引くべし。

第七一圖



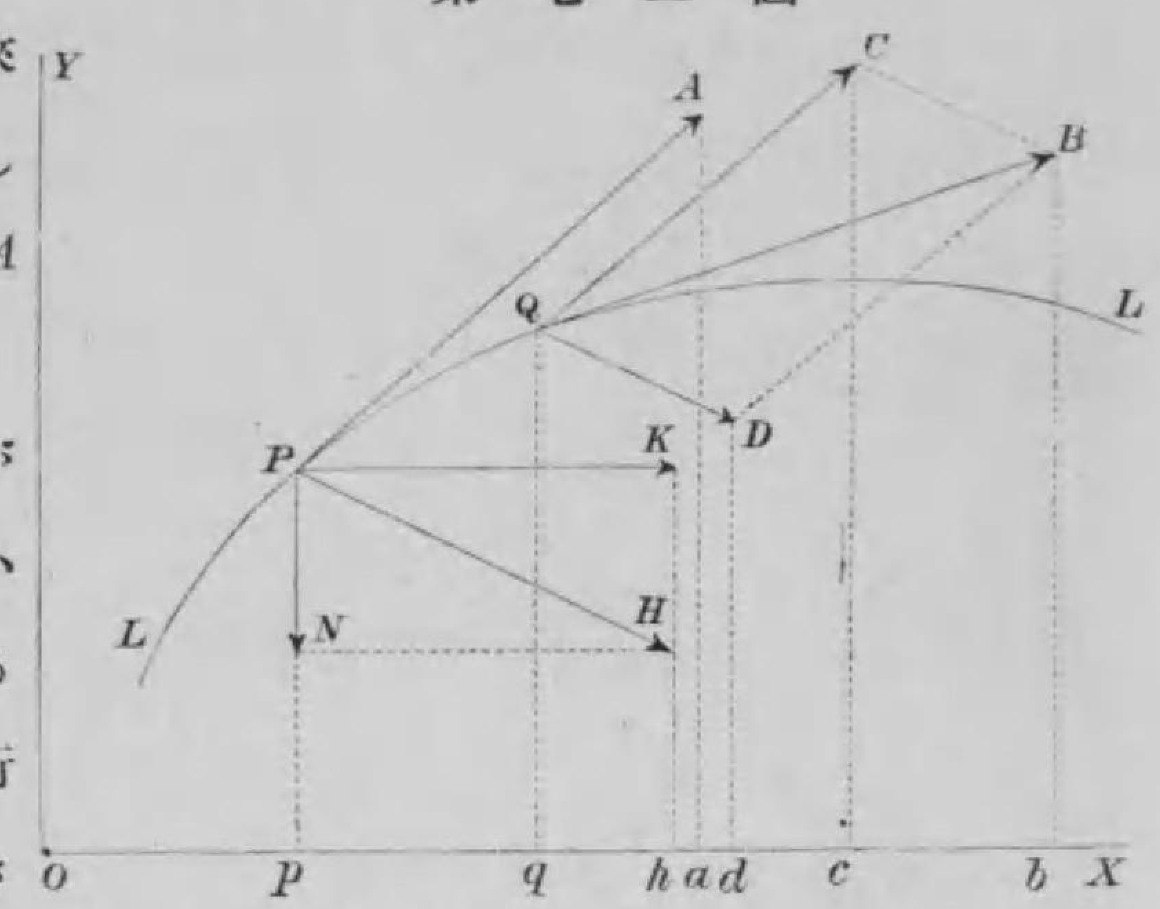

今一定瞬時に於ける速度が $PQ$ にて其分速度 $PR$ 及 $PS$ なれば、$RU=g$ とせば $PU$ 及 $PS$ は夫々一秒を經過せる後の分速度を表はすべし。然れば實際の速度は $PV$ なり。是は又 $PQ$ よりしても直接に $PW=g$ なる垂直に下方のを是に合成して得らるべきなり。

此の如き圖は又速度が初めに上方に斜に向へる場合に就ても作り得るなり。即ち物體は抛物線に於て昇る間にも降る間にも毎秒下方に向へる速度 $g$ を得て之を既有の速度に合成するものなるを知るべし。

$t$ 秒間に於て物體は既有の速度に速度 $gt$ を增す、即ち或一時刻に於ける速度を知れば後の任意時刻に於ける速度を直接に平行邊形の作圖にて見出し得るなり。この $t$ は分數なるを得、小なる時間の中にも常に物體は此小時間に比例し且下方に向へる速度を加ふるなり。

**七二　曲線運動に於ける加速度** (Acceleration in a curvilinear Motion.) 曲線 $LL$ (七二圖)上に如何樣にか動ける一物體を考察すべし。一定瞬時に於て物體は $P$ に在りて速度 $PA$ を切線の方向

第七二圖




に有せり。微小時間 $\tau$ の後 $Q$ へ來り速度 $QB$ を有し其大さ一般に $PA$ と異れりとす。

大さと方向とが不變なれば此微小時間の終に於ける速度は $PA$ に平行にして且等しき $QC$ にて表はさる。一の平行邊形を造り、$QB$ を對角線とし $QC$ を其一邊とせば他邊 $QD$ は物體が $\tau$ 時間に於て既存の速度に加ふべき速度を示す。此速度を微小時間の長さ $\tau$ にて除すれば物體が毎單位時間に加ふる速度を得、之を $\tau$ 時間内の平均加速度と名け得べし。$QD$ の方向を有すとす。

$P$ 點に於ける加速度とは此平均加速度が時間 $\tau$ の値零に近づきしとき近づく極限値を云ふなり。此加速度の方向は $QD$ の方向が近づく極限にて、加速度の大さ $q$ は $QD/\tau$ の比の極限値なり。加速度は適當なる方向の、又其長さに依り $q$ の値を示すヴェクトル $PH$ にて表出し得べし。

加速度 $q$ が $PH$ の方向に在りと云へば、夫は物體が無限小の時間 $\tau$ に於て其既有の速度へ速度 $q\tau$ を $PH$ の方向に加ふと云ふ意味なり。

故に前節に見出せるは、物體は拋物運動にては垂直に下方に向へ



る加速度 $g$ を有すとして表出せらるべし。

以上の考察に於て道は一平面に在るを要せざることも亦注意すべし。空間内の任意運動に於ても亦加速度は前述の如くに定義せらるべし。其外此定義に伴ひて曲線運動にては「加速度」と云ふ語が其字義の様に用ゐられざるは容易に知るを得。此の語にて必しも常に速度の大さの増加を考ふるにあらざるなり。

**七三　分加速度** (Components of Acceleration.)　前節に述べたりし線 $LL$ が一平面に在りと假定すべし。又互に直角なる二座標軸 $OX$ 及 $OY$ を假定し、考察せる質點並に其の各速度を表示する諸ヴェクトルを是等の軸に投影す。既知の如く各瞬時に於て速度の $OX$ 上の投影は此軸上點の投影が動く速度に同じ。後者は前述二瞬時にて $pa$ 及 $qb$ なり。$pa$ の代りに $qc$ を置き得る故に速度の増加は $cb$ により、從つて又 $qd$ 即ち $QD$ の投影によりて表示せらる。是により容易に、$\tau$ 時間に於ける投影の平均加速度は $qd$ の方向と $qd/\tau$ の大さとを有し、曲線上に動ける點の平均加速度の投影なるを知るべし。同じ關係は又是等平均加速度の極限値の間に、即ち一定瞬時に於ける加速度間に存せざるべからず。此加速度は一點に就て $PH$ にて示さるれば、投影に於ては $ph$ にて表示せらる。

ヴェクトル $PH$ を $PK$ 及 $PN$ の部分に座標軸に平行して分解せば、是等は考察せる點の投影の加速度を表出することも亦知らるべし。

物體が同時に $OX$ と $OY$ との方向に運動すと云ふ表出に相當して、又物體が同時に $PK$ 及 $PN$ の加速度を有せりと云ひ得るなり。

一般に一物體が二個或は夫以上の加速度を有すと云ふは、是等の

加速度をヴェクトルに適用する規則に從ひて合成せば實際の加速度を得と云ふ意味なり。

前述の事を空間内任意の線上の運動に擴張するも難事にあらず。是に於ては互に直角なる三座標軸に投影すべし。

**七四　外の影響を受けざる物體の運動** (Motion of a Body under no external Influences.)　今迄には唯だ諸運動の觀察及記載に就てのみ述べたり。然れども物理學者は又物體の位置の變化の原因を見出し、或は少なくも、是等が種々の事情に如何に關係するかを究むることを望めり。一小紙片が其上方に在る一硝子棒を絹切れにて摩擦したるもの、即ち帶電せしめられしもの丶方に上昇するを見れば誰しも此硝子棒の存在を以て紙片の運動の原因として認むるなるべし。紙片は硝子棒に牽引せられたりと云ふべし。是は實は一の云方に過ぎざるなり、然れども此棒を紙の上に持來るにあらざれば紙が上昇せずと云ふ事實に注意せしむるの利あるなり。

又何處にても物體が地球の中心の方に落つることを知れば、地球の存在を以て是等の運動原因と考察せざる能はざるべし。

一物體が靜止の狀態より運動の狀態に移る凡ての場合に於て、結局何等か或他の物體を見出し、其の存在又は狀態を以て運動の原因として考察し得らる丶に至るなり。

一物體が凡ての外の影響より自由なれば、若し夫が靜止すれば、永久其靜止狀態を續くべし。

此の如く夫自身の儘に自由なる物體が若し或速度を有したらば如何なるかを見るため、水平なる床上に在る球を觀察すべし。明に此球には何等運動を惹起し得べき影響作用せざるなり。今此球を槌にて



打ちて運動を始しめ、此打擊の後、即ち元來の運動の原因の働きが止みたる後に起るものに就て考察すべし。球は一直線を畫きて或距離進行したる後靜止するに至る、此距離は床及球の表面の性質に關係す。兩者を滑かにする程、運動は永續す。即ち表面の凹凸は運動を止むる原因にて、若し凹凸を全然除去するを得ば球は不斷に同じ速度を以て進行すべしと云ふ觀念を得べし。

是等及同樣の諸現象より次の定理を導けり。何等外界より影響働かれざる一物體が或速度を有せば永久に其速度を同じ方向に同じ大さに持續す、物體は一樣なる直線運動をなすべし。

此法則の正確なるを認むるに至るは、運動せる一物體より凡ての外部の影響を除き得るの故にあらずして、益是等影響を除去するに從ひ運動は益一樣に近づくが故にて、又一樣なる運動よりの偏倚を見れば必ず夫に對する原因を求め得べきの故に依るなり。

法則には物體が直線に動くことを表出せり。方向の凡ての變化に就て各其原因を見出し得べきなり。誰も、地球より發する影響ありて其爲めに月が地球の周りに圓狀に動くことを疑はざるべし。

**七五　力　重力** (Forces. Gravity.)　物理現象を簡單に又明瞭に記載するために、前節に述べたる外部の影響なるものに或名を與ふること必要なり。斯くして、物體が運動を始め或は既存の運動が速度又は方向に於て變化を受くるを見るとき、物體に一の力が働き、夫が運動又は運動の變化の原因として考へらると云ふなり。

力には各一定の方向と一定の大さとを有せしむ。

之を尙詳細說明するため、再び、一垂直線上を昇り或は降り或は七〇節に考察せる拋物線を畫ける一物體に就て考ふべし。既知の如く

凡て是等の場合には垂直下方に同一加速度 $g$ あり。今或る餘り大ならざる空間、例ば一室内に之を限れば、此空間凡ての所にて運動は同じ仕方に起り得るなり。是等の凡てよりして、物體が、何處に在りても、又靜止せるも、或は既に何れかの方向に或速度を有せるも、等しく皆一の垂直に下方に向へる不變なる力の下に在り、又此力の作用は恰も此加速度に存せりと云ふ考を得。此力を重力と名く、即ち

絶えず同じ方向に又同じ大さにて働ける重力は物體が動ける間、相續ける同大時間毎に垂直に下方に向へる同大の速度を其既存の速度に加ふるなり。又加はる速度は毎秒 $g$ に等し。

此様の云方は又他の場合にも用ゐらる。物體が一様なる直線運動ならざる運動をなせば常に加速度の方向に働ける力、換言せば物體が一微小時間に於て既存の速度に加はる速度の方向に働ける或力ありと云ふべし、或は逆に、力の作用は常に物體に各微小時間に於て力の方向に或速度を與ふるに在りて、夫は六五節の規則に從ひて既存のものと合成せらるべしと云ふべし。

力が恰も運動の方向に作用せば運動は加速せらる、之に反し力が運動に反對に向へば減速せらる。

力の方向が既存の速度のと異れば道は屈曲す。例ば七二圖(七二節)の場合にて其の運動を實際に生ずるには $PH$ の方向に力の作用存在せざるべからず。

前述の如きは種々の力に就て知れば、多くの點よりして尙補足し得べし。今は次の事を注意すべし。

*a*) 多くの他の言葉も然る如く、「力」と云ふ語も必しも常に同じ意味に用ゐられず。或物理學者は屢「自然力」なる語を云ふも其意味稍不定なり。然れども何等か概念上の錯雜を生ずべしとせば、常に「力」といふ語に上述以外何等他の意味を與へざれ。



此教科書にては此語は唯一度他の意味に用ゐらる。[1]

*b*) 一物體が不變速度にて一直線上に動ける場合凡てを綜合して何等力が作用せずとは必しも常に云ふ能はざるべし。但是は物體が速度を得たるとき、其上に或力が作用したりと云ふとは稍別事なり。「凡てを綜合して」と云ひたるは今直に學ぶべきが如く、二つ或は夫以上の力が物體に働き相互に打消すことを得べきが故なり。

*c*) 前述に於ては速度が僅かづゝ生じ或は漸次に變化する場合に就てのみ論じたり。唯此の如き場合にのみ既述の意義に於ての力に就て云得るなり。換言せば、力が物體に或速度を與ふるには其速度小なりとも、是に若干の時間を必要とするなり。速度が一見俄に生じたる如き多くの場合にも尙精細に考察せば瞬時的にあらずして或甚だ短き時間に於て其與へられたるを示すなり。

**七六　力に關する尙他の例** (Further Examples of Forces.) *a*) 人の或は動物の筋力により物體に運動を起さしめ又は既存の速度を增し或は減じ得べし。橇を運動せしめんとせば、若干時間人は之に加速運動を與ふるなり。

*b*) 既に七四節に電氣的牽引に就て記したり。同様に帶電せる二硝子棒を取り其一を可動とし之を放置せば他片より離るゝ様の一速度を得るなり。即ち電氣的反撥が起る。

*c*) 牽引反撥の例は磁石にも見る。

[1] 即ち電氣學に於て「電動力」と云ふ言葉を用ゐるときなり。

棒狀或は針狀磁石（磁針）を絲にて吊し、或は一尖端上に小帽子を附して置き、其長の中心點の周りに水平面上に廻轉し得る樣になすべし。其儘に放置せば一定の位置を取り一端は殆ど北方に向くべし。此端を北極、他端を南極と名く、磁石の方向は星學上或は地理學上の子午線とは一致せず、西部及中部歐洲にては此北極は子午線より西にふる（日本にても西）、磁石の安置する垂直平面を磁氣子午線面と云ひ、此平面が星學上の子午線面となす角を方位角と云ふ。

方位角は今アムステルダムにて 13,5° ボンにて 12,4° 伯林にて 9,3° ケーニヒスベルグにて 5,5° 維納にて 7,8°（東京にて 4,35°）每年約 0,07° を減少するなり。

一磁石が上記の位置を占めたるとき其一端に或他の磁石の一極を若干間隔に於て對立せしむれば前者は運動を起す。然れば一磁極が他へ力を作用せりと云はざるべからず、其方向は次の規則にて定めらる。

二異名極（一北極及一南極）は相引き、二同名極（二北極或は二南極）は互に斥く。

又鐵の一片を磁針の一極の近傍へ持來れば之に働く力あり。鐵は兩磁極共に引き又逆に兩磁極よりも引かる。

最後に尙——近傍に一の鐵、一の磁極なきとき——磁針を磁氣子午線面より遠けしとき、之を其平面の方に追ふ力あるに就て述ぶべし。是等諸力を地球の影響と見做すべき凡ての理由あり、即ち之を地球磁力と名く。

*d*) 力の特別なる種類は、物體が運動にあるとき初て生ずるものにて、又常に運動に反對の方向に在る力なり。運動を起せる力の止



みたる後、水平面上に滑り或は轉がれる物體の運動が減速するとき、之を摩擦の力に歸するなり。又液體或は氣體中に動ける物體に於ては、周圍の物質より所謂抵抗が運動に反對するなり。

**七七 糸の張力或は支持面の抵抗にて消去せらるゝ力の作用** (The Action of Force cancelled by the Tension of a String, or by the Resistance of a Supporting Surface.) 物體が絲にて吊さるれば重力は前記の作用をなさず。然れども尙詳細に考察せば先づ絲が常に稍延長するを示す。此延長は護謨絲ならば直に目擊せらる。又針金にても數瓩の重量を負荷せば適當の方法にて觀察せらるべし。此の如き現象の研究は、絲が如何に太く又物體が如何に輕くとも常に或延長起ると考ふるに至らしむるなり。

延長せられたる針金は再び最初の長に戻らんとするを示す。從つて夫に繫れる物體を上方に動かさんとするなり。物體を初め手にて稍下方へ引きて然る後之を放つとき實際に然るなり。

故に針金は物體に上方への力を働かすとなさゞるべからず。物體が今占むる靜止の狀態は二力之に働き、一が上方に他が下方に向へるに原因せるを示す。

二力が物體に働き是に運動を與へざるを是等が互に平衡にあり又は互に消去する（釣合ふ）と云ふ。

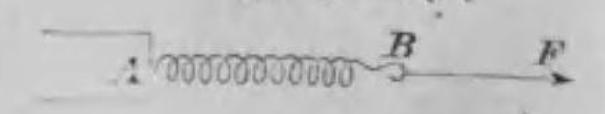
絲が是に繫かれる物體に働く力を絲の張力と云ふ。此力は絲が伸びたる後再び縮まんとする働きにより生じたるを表はさんために又之を彈力と名く。此名稱は一般に物體が形或は大さの變化を受けて元の狀態に復歸せんとする場合に働く力を名くるに用ゐらる。

絲は垂直以外の方向にも亦張らるべし。一端を固定し他端を任意

の方向に引張し得。張力は常に絲の長に沿ふ方向を有するなり。

又絲の代りに螺線狀に卷きたる金屬線 $AB$ (七三圖)を用ゐるを得るなり。是には大ならざる力に依りても容易く其延長を觀察し得るの利あり。

第七三圖




前述の如き觀察は物體が水平面上例ば机上に靜止せるが如きものにも應用せらるゝなり。木板は少しく壓され、再び其原形を復せんとし、物體に力を作用し、此力が重力と釣合ふなり。此力を支持面の抵抗と名く。

**七八　力の作用點** (Point of Application of a Force.) 絲の一端を物體の一點に固定せしめ其絲を引けば力を働かし得、之を力が此固定點に於て作用すと稱す。又他の力に於ても作用點なるものを云ふなり。鐵片或は近傍に在る磁石は例ば磁針の極に働くなり。

重力が物體に働けるは其單一の點に於て作用せるにあらず。是は物體を組成する凡ての物質微部分に作用せる甚多くの力より成ると見得るなり。

**七九　力の平衡** (Equilibrium of Forces.) 二力の相等しと云ふは、第一に、是等が同じ物體――或は等しき物體――に働き、同じ作用、即ち速度の同じ變化(七五節)又は同じ形狀變化(七七節)を生ずるとき、第二に、是等が同じ狀態に在る等しき物體によりて働かるゝものなるとき又第三に、是等が同じ點に反對の方向に働き相互に釣合ふときなり。

是等何れの特徴を定義とし用ゐるとも相互に決して撞着することなきを知る。



例ば一物體に螺旋發條の一端を結び、手を以て其他端を引きて物體に力を働かしめ得。發條延長の度が物體に働ける力を定むること明かなり。今二個の相等しき發條ありて一個づゝ之を同一物體に結びて引くに兩度共發條の延長同大なりしならば物體に同じ作用を働かせしなり。是により第二の定義に依りて等しと名くべき二力は第一の定義に依るも亦然るを知る。

是等二發條を一物體の同一點に固く結び、然かも之等を互に反對の側に引きて是等の發條が同大の延長をなせるときは物體は靜止す。此故に第二の定義により等しき二力は第三の定義に依るも亦相等しきなり。

固より第三の定義は同一物體に働ける諸力に應用すべく、第二のは種々の物體に作用せる諸力にも亦應用し得べし。

上記の螺旋發條の實驗に就て尙一二の注意すべきものあり。

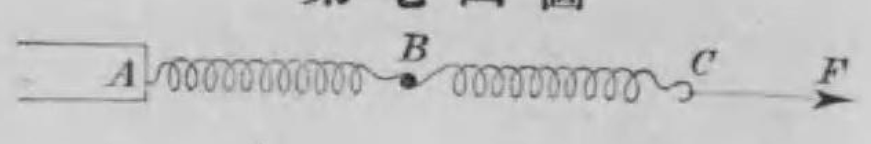
先づ發條を逆の位置に於て用ゐ得べし、即ち初に手にて引きたる端を物體に固定するなり。然る後發條を第一回の時と同じ丈延長する樣に引くときは其固定せる物體に於ける作用も亦前と同じ。即ち發條は此物體を第一の實驗に於けると同じ强さに引くなり。故に次の如く云得、延長せる發條(又延長せる絲に於ても同じ)は其兩側に於て同じ力にて收縮せんとす。

又力 $F$ 不可動の物體 $A$ (七三圖)に固定せる發條 $AB$ の端に力 $F$ を作用せしめば發條の $B$ 部分には相反せる二力作用せるなり。即ち左方には發條自身の張力作用す。釣合が成立ち、即ち力 $F$ の能ふ丈發條が延長したりとせば二力は互に等しからざるべからず。即ち、或力にて延長せられたる一發條の張力は此力に等し。

今此の $F$ 力に等しき張力にて螺旋發條が物體 $A$ に作用す、換言せば、$F$ 力は其大きを變ふることなくして發條を固定せる物體に傳達せられたるなり。

是は七四圖に示す如く二發條 $AB$ 及 $BC$ を用ゐる實驗によりて證し得。發條 $BC$ は七三圖に於ける發條 $AB$ に等しと假定す。今七三圖及七四圖の二つの場合に於て等しき力 $F$ を作用せしむ。此等の力の相等しきは第一の場合に於ける發條 $AB$ が第二の場合の發條 $BC$ と同様に延長せらるゝにて知るべし。然れば二つの場合に於て $A$ 物體に於ける作用も亦同じ。七四圖に挿入せる發條 $AB$ は $BC$ の張力を物體 $A$ に傳達せり。

第七四圖




前述に依りて七四圖の如き場合に於ては多くの力が凡て互に相等しきなり。$C$ 點を手にて右方に引けば手は發條によりて左方に引かる。之に反し $BC$ は $AB$ に右方に向へる力を作用し、$BC$ 自身は $B$ に於て左方への力を受く。且一發條が他を引くことのみならず、同一發條を其長に直角なる平面にて思考上二分せば、其二部分間に同じ作用の存在することを考ふべきなり。

凡て是等よりして如何なる物體に力が作用し又如何なる物體によりて夫が作用せらるゝかを明に示すこと常に必要なるを知る。

又勿論同一物體に或は一物體の同一部分に作用する諸力のみが互に釣合ふを得。

此の如き注意は又他の場合にもなし得べし。一物體を一水平面に立てる垂直の柱の上に置けば柱は壓縮せられ、其彈性によりて兩側



に力を作用す。上方には此物體に作用し且其重量と釣合に在る力、下方には支臺を物體が直接其上に靜止せると同様に下壓する力作用す。柱は物體が其上端に作用せる力を下臺に傳達せり。

**八〇　作用及反作用の相等しきこと** (Equality of Action and Reaction.) 前節に述べたる物體は其の立てる柱に下方に向ける壓を働かせ、又夫自らは柱によりて同大の力を以て上方に壓せらるゝなり。同様なる同大且反對なる二力が柱と支臺との間にも働けり。

一般に一物體が或他の物體に力を作用せるとき、後者が又反對の方向に前者に力を働かせざること決してあらざるなり。是等の力を區別して作用及反作用と云ひ、夫等が常に同大なるを知るなり。例ば帶電體相互或は磁石相互に働く引力及斥力は此法則に從ふ。一帶電體 $A$ が一螺旋發條にて吊され、其下に在る或他の $B$ により引かるれば、$A$ と $B$ とを夫等相對位置の不變なる樣に取替ふとも、發條の延長に依りて此等の力の同大なること示し得らるべし。

作用と反作用との相等しきは多くの場合に實證せらるゝ故、是等の力の一が尚未だ全く實證せられざる場合にも亦之を假定するなり。例ば一帶電體が速かに動けば一磁石の極に働くを觀察せり、後者が前者に働くことは未だ實驗的證明なけれども亦是が假定を敢てするなり。

**八一　作用及反作用相等の結果** (Consequences of Equality of Action and Reaction.) 物體は外力の是に働くに非れば運動せしめ能はずと云ふ規則に生物は例外をなす如く見え、吾人は自ら吾人の身體に此の如き原因なくして進行又は上昇の運動をなさしめ得る樣に見ゆるなり。然れども更に考察せば其の然らざるを知る。

吾人が階段踏段の上に佇立するときは吾人は之を壓し恰も其反作用にて吾人の體重と平衡が保たるゝなり。然れども階段を昇るためには踏段を更に強く下方に壓し、早く昇る程強く足にて踏段を打つなり、此結果として得る反作用の大なるにより吾人の身體に上方への速度を與ふるなり。

水平の床を進むときは床の面の粗にして平滑ならざるを利用するなり。自ら後へに床を壓することは誰しも觀察し得べけん、床の反作用が物體を前進せしむるに働くなり。完全に平滑なる床にては是等水平なる力は存在し得べからずして、進行は不可能なり。

此床が充分に粗にて又可動なれば後方に動くべし。此點に種々の應用あり。一例を擧ぐれば舟を棹にて進ましむる人は足にて舟を後方に推せり。人自らは舟の甲板により前方に推さる、然れども人が同じ位置に止まれるは、そが陸に向ひ推せる棹よりして彼に恰も反對の力を働かせる故なり。

櫂、車輪又は螺旋にて舟を進行せしむるは、水に後方への力を働かすにあり。是によりて起る反作用が舟に働けるなり。

魚の泳ぎ、鳥の飛ぶも以上の舟車等と若干の類似あり。鳥が上昇に要する反作用は鳥が翼を打下せる間に生ず。翼を上ぐるときは下方への力働くも、運動の速度並に翼の動作が打下に於て打上よりも大なる抵抗を空氣が呈する樣にするなり。

凡ての作用が皆反作用を伴なふ最後の例として、一物體を一表面例ば机板の上を引行くとき是が摩擦抵抗を受くる場合を擧げん。此場合、物體は此摩擦に等しき力を以て板を引行かんとせるなり。

**八二　力の計量** (Measure of Forces.)　力の大さを數にて示すには先づ如何なる法則にて二力の比を定むるかを一定せざるべからず、又次に一定の力を單位として選まざるべからず。既に七五節に於て、力の作用は夫が物體に與ふる速度の變化、即ち加速度に在ることを知れり。故に力を此加速度に比例すとして見るは解し易し。然れども先づ力の大さを其の或螺旋發條に生ぜしむる延長にて定むる方寧ろ一層分明なるべし。斯くするも先の見方と毫も矛看せざるは直に示すべし。



物體に働く重力の大さを物體の重量と名く。種々の物體の重量を比するには一螺旋發條の上端を固定せる鈎に吊し、下端に一の皿を備へ、其上に、研究すべき物體を置くべきなり。

二個の物體が發條を同じ丈延長せば夫等が互に同じ重量を有すること明かなり。發條を最大に延ばす物體は最大の重量を有すとすべし。

今物體數多、例ば同容積の銅塊數多ありて何等其間に區別を認め得べからずとす。之等を順に皿の上に載するに毎回同じ延びを得ば各塊は又相等しき重量を有せり。今銅塊を一個二個三個等づゝ順に皿の上に置けば延びは益大なり。是等の場合に發條を延ばす力が夫々 1, 2, 3 等の比に在りと考ふ——然か考へて何等矛盾を生ぜず——又或銅塊の容積が前述の塊の容積の二倍或は三倍なれば其作用も亦其の二倍或は三倍なるべし、故に同じ物質より成る物體の重量は其容積に比例す。

斯して螺旋發條に依りて種々の重量又は其他の力の比を如何樣にして定め、又如何にして凡てを一定の單位にて表はし得るかを明かにせり。

力の單位としては先づ一立方糎の水の $4^\circ C$ 即ち一水量が最小の容積を有する温度(六節)に於ける重量を取る。此重量單位を一瓩の重量又は單に一瓩と名く。

六節の表に依りて容易に或他の温度に於ける一立方糎の水の重量を算出し得べし。$4^\circ$ より $10^\circ$ まで熱すれば一定量の水に就て容積は $\frac{1,000124}{0,999877}$ 倍大となる。一物體の重量は之を熱するも變らざることを知るにより $10^\circ$ の水 $\frac{1,000124}{0,999877}$ 立方糎の重量は又常に一瓩ならざるべからず、是よりして其の一立方糎は $\frac{0,999877}{1,000124}=0,99975$ 瓩なることを知る。

例ば一鉛塊の重量を瓩にて表はさんとせば此鉛にて生ずると同じ延びを得るには幾何立方糎の水を皿中に容るべきかを知れば充分なり。又同様に、手にて發條の下端に働かしむる力、發條に吊されし物體に垂直方向に働く電氣或は磁氣の引力も瓩の倍數或は分數にて表はさるべし。

一物體の重量は螺旋發條に依るよりは天秤に依る方一層精密に定め得べきは更に云ふを俟たず。然れども以上の觀察に於て發條を用ゐることを假定するは是によりて種々の他の力を容易に測り得る故なり。

實際には物體の重量を直接に若干容積の水の重量と比較せず、却て直接若くは間接に一水量と比較したる「分銅」即ち金屬塊と比較するなり。故に水若干量の占むる容積を毎回測ることを要せず、此に大なる利あり、精密に此の如き容積を測定するは困難なればなり。其困難なるが故に可能なる場合には容積を秤量に依りて測定する



程なり、例ば一器の内容積を測るに其の容るゝ水或は水銀の量を秤りて知る如きなり。

一分銅を定容積の一水量と比較するは米突法の導入によりて實施せられたり。其とき白金の一塊を $4^\circ C$ の水一立方糎と出來得る丈同じ重量を有する樣に造り、此塊が標準瓩として今尚保存せられ其の精密なる寫しが數多造られ、吾人の使用する分銅は凡て是と直接又は間接に比較せるなり。

一層精密なる研究により此標準瓩は一立方糎の水の重量と少しく差あるを知りたれど瓩は變ぜられざりしなり、即ち今は $4^\circ C$ 一立方糎の水が一瓩の重さありと云ふは全然正確とはなし得ず。

米突に就ても同樣の關係あり。十九世紀の終頃、一の測量棒を造り地球周圍の四千萬分一に出來得る丈近きものとせり。此標準米突は保存せらる、又其後地球周圍の一層精密なる測定の結果は前に得たるものと少しく差あるを知るに至れり。

一瓩と $4^\circ C$ に於る一立方糎の水の重量との差は兎に角微少なれば此書中には凡ての場合に其差を省畧すべし。

**八三　等質及不等質の物體　比重** (Homogeneous and Heterogeneous Bodies. Specific Gravity.)　一物體或は一物質を等質と云ふは、其性質が其の各點に於て皆同一なるを云ひ、或は尚精密に云へば、同容積同形同位置の小部分を其物體の各所より取出すに夫等の性質全く一致する場合を云ふなり。

液體及氣體は一般に等質と目せられ得べし、結晶せる固體も然り。木材が等質性を缺けるは既に表面の觀察にても知らる、硝子や金屬は一層等質なり、然れども是等の物質は完全に等質にはあらず、夫等の製作上よりして表面の層と深き部分とは性質異れり。

等質なる又は吾人が等質と觀察する物質に於て比重と稱するは此物質の或容積の重量が同容積の或一定物質の何倍なるかの數を云

ひ、此一定物質に凡て他物質が比較せらるゝなり。此一定物質としては大抵 $4°C$ の水を選ぶ。故に、一物質の比重は其物質一立方糎の重さを瓦にて表はせしものを與ふるなり。

**八四 力及其の一物體に與ふる速度の大さの關係** (Relation between the Magnitudes of the Forces and the Velocities given by the Forces to a Body.) 力の大さは夫が一物體を運動せしむる間に於て種々の方法により之を定め得るなり。例ば物體を螺旋發條にて水平面上に引き得、發條の延長は各瞬時に於て物體に働ける力を測る。又帶電體に於ては、其靜止せる間には、種々の距離に於て夫等が互に働ける力を測り得べく、然れば其の動ける間には其距離よりして力の大さを知り得べきなり。所與の二帶電體間の作用は是等に與へ得る運動に無關係にして唯夫等の相對的位置にのみ關係すと云ふ假定に充分の理由あればなり。

同一物體に種々の力を作用せしめて毎回力の大さ並に物體の速度の變化を驗し次の法則を見出せり。

一 種々の力を順に一物體に作用せしめ、各力が或時間同じ方向に同じ大さにて作用すとせば、夫等が物體に單位時間に與ふる速度即ち加速度は作用せる力に比例す。

此法則により、地球表面上落體の加速度 $g$ の値に種々ある（六三節）は重力が一所に於て強く他所に於て弱く働けりと云ふ事項に歸せざるべからず。故に同じ物體の重量は同じ螺旋發條に極の近傍にては赤道の近傍に於けるよりも大なる延長を與ふること疑なきなり。

上記の法則を知れば八二節に記したる二個の見方が互に矛盾せざ



ること明かなるべし。

**八五 運動せしめらるべき物質量の影響** (Influence of the Quantity of Matter, which is to be put in Motion.) 第二の等しく重要なる法則は次の如し。

二、同一の力が常に方向と大さとを變へずに順に種々の物體に働けば、是等が單位時間に得る速度は是等の有する物質の量に逆比例す。

比較すべき諸物體が同じ物質より成り、例ば銅より成るとせば、是等の含む物質の量は明かに容積に比例すべし、又毎立方糎が同重なる故重量にも比例す。此の如き物體に就ては凡ての物體は同じ速さに落下すと云ふ事を考ふれば、第二法則は第一法則より導き得べきなり。例ば銅の一塊が他塊より二倍大なりと假定し、重量を $K$ 及 $2K$ にて記すべし。是等の力により二塊が落下せしめられ毎秒に速度 $g$ を得。今大なる方の銅塊に $K$ なる力、即ち其重量の二分一に等しき力を作用せしむ。例ば此塊を平滑なる水平面上に $K$ なる力にて引きたりとすれば、第一法則により此塊は單位時間に速度 $\frac{1}{2}g$ を得べし。即ち小塊に速度 $g$ を與ふる力 $K$ は大塊には速度 $\frac{1}{2}g$ を與ふるなり。

二塊に同じ力 $F$ を作用すれば、小塊が一秒に得る速度は第一法則により

$$\frac{F}{K}g$$

にて、又大塊が得るは

$$\frac{F}{2K}g$$

にて、即ち第二法則を滿足するなり。

種々の物質より成る物體に就て此法則が意味を有するためには、先づ如何なる標準にて夫等の含む物質の量を相互比較すべきかを一定せざるべからず。今吾人は例ば銅の一塊と鐵の一塊とあれば、其等が地球上同じ場所にて同じ目方を有する場合には夫等は同じ物質量を有すと云ふに一致せり。重量 $K$ の一銅塊と重量 $2K$ の一鐵塊とは、此見方によれば互に一と二との比に在る物質量を有するなり。此物體の上にも亦以上の結果を應用し得べし、故に此場合に於ても亦法則は成立するなり。

一物體の物質量を質量と名く。種々の物體の質量は既記の如く、地球上同じ場所に於ける其等の重量に比例するなり。故に天秤は質量を相互に比較すべき器械なり。然れども重量と質量との概念は嚴密に區別せざるべからず。一物體の重量は夫れが地球に引かるゝ力なり。是は觀察を地球の極に近く或は赤道に近くなすかにより大或は小なり。之に反し質量は物體を地球上一所より他所に移すとも變らず、二個の物體の質量は重力の全く作用せざる實驗に於ても比較し得べし、例ば夫等の物體を一螺旋發條にて水平面上に引き、毎回一定の延長に伴ふ加速度を測りて知り得。

**八六 運動の現象に於ける質量の影響の例** (Example of Influence of Mass on the Phenomena of Motion.) 一物體の質量が大なれば大なる程同一の力が是に一定の速度を生ずるに一層長き時間を要するなり。又既に存在せる速度を打消すために、一力の働くべき時間は大質量の物體にては小質量の物體より長きなり。物體が此場合に於て相次げる時限内に運動に反對の向に得る速度、換言せば速度の減少は又質量に逆比例す。



七六節の磁石を水平面内廻轉運動にて其の平衡位置より動かし、之を放ちしとせば、平衡位置の方に一の加速運動をなすべし。そは此位置を通越すべし、然れば之を磁氣子午線に置かんとする力が常に働けるにより直に減速運動を生ず。若干時間の後速度は零となる、是に於て磁石は再び平衡位置に向ひ、更に新に此位置を通過す。約言せばそは或角度間を彼方此方に振動するなり。

端の位置より平衡位置に行く時間は平衡位置より夫へ行く時間に恰も等し。尙又振る角度余り大ならざる間は、振動が大なるも小なるも同じ時間に於て之をなすを知れり。是に就ては後に述ぶべきが又今特に注意するは磁石へ其中心より兩側に同距離の點に同じ二銅塊を附すれば、振動が遲緩になることなり。

銅棒は之を廻轉せしむるも磁氣子午線に於て靜止することなき故此實驗にては何等運動に影響する樣の力是等銅塊に働かずと假定せざるべからず。されば振動時間の增加は棒の質量の增加によりてのみ起りしものならざるべからず。

此の增加が實際斯樣の結果を生せざるべからざるは次の樣にして直に知り得。即ち相等しき磁石二個を取り、第一のには何も附けず、第二のには銅塊を附し之等を廻はし、夫々平衡位置と同大の角度をなす樣にして然る後同時に放たしむとす。働ける力は兩者にて同じく、然るに第二の磁石は質量大なる故同じ時間に比較的僅かの速度を得べく、第一の磁石よりは遲く平衡位置に達すべし。

同樣の現象は發音體、例ば振動せる音叉に於ても觀察し得べし、音叉の端は交互に內方へ曲り、又外方へ平衡位置より遠かるべし。鋼の彈性により常に各微部分を平衡位置の方に追ひ、此位置に近くと

き加速度ありて、遠かるとき減速度を有す。音叉の端に銅片、護謨環等の如きものを附し彈性を變ふることもなからしめば、振動は遲緩になり、例ば廻轉圓筒の上に其變化を記錄し得べし(五七節)。

**八七　力及質量の單位** (Units of Force and Mass.) 幾何學に於ては長さの單位と容積の單位とを兩者共に隨意には選ばず、前者を定むれば後者には此長さの單位に等しき邊を有する正立方體を取るなり。是によりて容積計算の規則は然らざる場合よりは簡單になる。若し長さの單位を米とし容積の單位を立方呎とせば直平行面體に於て其の長、幅、高の數を相互に乘ずるとも容積を示す數を得ざるべし。

同樣に一力が一質量に働く作用を計算するには、力の單位と質量の單位との間に一定の關係成立すとせば簡單なるべし。

是等の單位は力の單位が質量の單位に加速度 1 を與ふる樣に選ぶ、即ち其力は單位時間單位質量に働きて速度 1 を生ずるなり。

然れば一力 $K$ が質量 1 に働けば加速度は第一法則(八四節)に從ひ $K$ なり。又同じ力が質量 $m$ に働けば第二法則(八五節)により加速度は

$$q=\frac{K}{m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

なり。

言葉にて表はせば次の如し。加速度を與ふる數は力及質量を表はす二數の商に等し。或は一層簡單に此の如き場合に屢用ゐる如く、加速度を得るには力を質量にて除さゞらるべからずと云ふべし。

範式 (14) は又

$$K=qm$$



の形に書き得べし。

此關係を落體に應用せば、$K$ は物體の重量となる、之を $P$ と名くべし、$q$ は前に云へる加速度 $g$ なり。重量と質量との數値の間には即ち次の關係あるなり。

$$P=gm \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

力及質量の單位の間に以上の關係成立てば、夫等の單位が「互に適合す」と云ふべし。是は種々の方法にて可能なり、例ば、

$a$) 時間の單位が秒、長さの單位が米、力の單位が一瓩の重量。此場合には質量の單位は一瓩中の物質の量にあらず、何となれば此者を落下せしむるに此力の單位は加速度 1 を與へずして加速度 $g$ (9,80) を與ふるを見るなり。一瓩の重量に等しき力が一瓩の $g$ 倍に等しき質量に働けば加速度 1 を生ず、故に此物質の量を以て質量單位に選ぶべきなり。以上は又範式 (15) よりも出づべし、$m=1$ なれば $P=g$ ならざるべからざればなり。

$b$) 時間及長さの單位は上記の如く、質量單位を一瓩の質量とす。簡單なる推理により、又或は範式 (15) によりても、此場合には力の單位としては、一瓩の重量より $g$ 倍小なる力を取らざるべからざるを知るべし。

勿論又單位として上記の單位の分數或は數倍のものを用ゐ得べく、夫により單位の系統の種類を變ふることはなかるべし。

($b$) に與へたる方法にて單位を選ぶことには次の理に基く利あり。水一立方粉の質量は凡ての場所に於て同じ。故に單位を第二の方法にて選べば、凡ての物理學者は同じ質量を取扱ひ、又同じ力の單位を取扱ふ、後者は質量の單位に關係すればなり。之に反し、水一立方粉

の重量は至る所同じきを得ず、故に (a) の系統は一般に精密なる測定に用ゐるには適當せず。

相互一致せる單位の系統にて、質量の單位を一瓩或は其の簡單なる分數とせるものは、初め電氣及磁氣の現象の研究に於て導かれたり。現今多くの物理學者は長さの單位に糎、質量の單位に瓦を取り、時間は秒にて表はせり。此 *cm. gm. sec.* 系或は $C-G-S$ 系と記すものに於ては、重力の加速度は 980 にて表はさる、力の單位はダインと名け、一瓦の重量の九百八十分の一なり、一瓱の重量より稍大なり。其は上記と同樣の推理にて見出さる。

今後數字上の計算にては他の記載なき限り $C-G-S$ 系を用ゐるものと知るべし。然れども相互一致せる單位の應用に基ける種々の範式も亦同樣に適用す、例ば (a) 又は (b) に記せる單位に於ける如きを云ふなり。

除外例として一瓦或は一瓩の重量を力の單位とし、又糎以外の長さの單位も用ゐることあるべし。

尚注意すべきは「瓦」と云ふ言葉を或は「質量」或は「一瓦の重量」を表はすに用ゐることなり。是よりする混雜は少しく考慮せば生することなかるべし。

**八八　密度 (Density.)**　一物質の密度とは其單位容積の質量のことなり。$C-G-S$ 系に於ては、密度は一立方糎に幾瓦あるかを示す數にて表はさる。即ち $4^\circ$ の水に關する比重と同數なり。

物質の密度は又屡或物質の密度の幾倍なるかの數にて表はさる。後の物質に凡ての物質を比較するなり。此數は同時に此一定物質に關する比重を示す。



**八九　一質點の運動の問題 (Problem on the Motion of a Material Point.)**　質點と見なさるゝ一物體の運動は二樣の問題に導くなり。運動を觀察に依りて學び夫に作用せる力を推論し或は又一定の或運動に必要なる力を研究せざるべからざること屡あり。此目的のためには先づ加速度を見出す(六六及七二節)。力は是と同じ方向を有し、其大さは加速度の大さに質量を乘じて見出さる。

他の場合には各瞬時に於て物體に働ける力を知り、是によりて運動を定むるなり。是は運動の觀察の始の瞬時に於ける位置及速度が與へらるれば可能なり。問題を解くに當り、一般に力が方向及大さを變ずる樣の場合には、時間を無限小の部分に分ちて之を爲すなり。

a)　直線運動　力が常に同じ方向を有し、且つ物體が初に靜止せるか、或は初速度が力の方向又は夫と反對の方向に在る場合には、道は一の直線なり。

時間を極めて小なる部分に分つ。先づ此小なる各部分内にて力が其小時間の初に於けると同じ大さを有し、即ち力は漸次ならずして小飛躍を以て變るとすべし。$m$ が物體の質量にて $\tau$ なる小時間の初に於ける力 $K$ なりとせば、此時間の經過と共に物體は

$$\frac{K}{m}\tau \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

なる速度の増加又は減少を得。

此範式によりて、$\tau$ 時間の終に於ける速度は其初の速度より導かる。即ち運動の觀察を始めし瞬時の速度よりして、第一、第二、第三等の部分の各時間の終に於ける速度を見出し得べく、從て或任意瞬時に於ける速度を得。此結果は時間微部分を小さく選ぶ程精密になるべし。眞の結果は時間微部分を益小にせるとき速度として見出

す値の近づく極限値なり。更に簡單に表はせば、時間を無限小の部分に別ち各部分間に力を不變と見做すものと云ふべし。

運動の全程に就て速度が知らるれば、各瞬時に於ける物體の位置も亦見出さるゝなり。此問題にては小時間 $\tau$ の間運動は一樣なるものと見なす、故に經過の道程は速度に $\tau$ を乘じて得らるべし。相續ける無限小の時間に就て之をなせば、或瞬間より他の瞬間へ物體の位置の變化するを追ひ得べきなり。

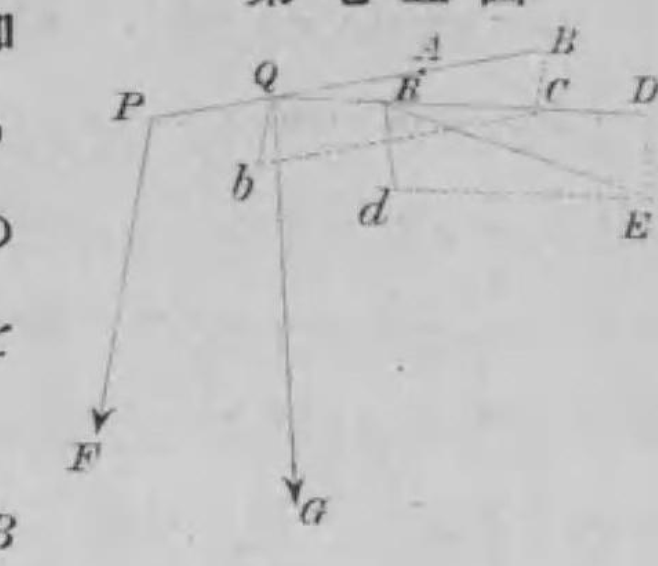
多くの場合に、物體に働く力は物體の占むる位置に關係するなり。此の場合には速度の計算と位置を定むることゝを別つこと能はず、二つの問題を同時に取扱はざるべからず。$P$ を以て物體の最初の位置とす。第一の小時間に或道を行く、そは初速度よりして見出さるべし。然れば此小時間の終に達したる位置 $Q$ を知るなり。同時に最初の位置 $P$ に於て物體に働ける力よりして此小時間の終に於ける速度を見出し得べし。此新速度により第二の小時間に經過せらるゝ道を計算し得。是と同時の速度の變化は、第二小時間の初、即ち第一小時間の終に於ける力が既知の $Q$ の位置によりて定めらるゝにより、夫よりして見出し得らる。斯して尙後のものを定め得。

*b)* 曲線運動　次に力が種々の仕方に方向と大さとを變じ又物體は任意の初速度を有し其方向は必しも力の方向と一致せずとすべし。

$P$（七五圖）を物體の最初の位置とし、$PA$ が初速度、$PF$ が最初に物體に働ける力とす。時間を無限小の部分に別ち、之を $\tau$ と記す。第一小時間に經過せる道程 $PQ$ は速度 $PA$ より計算せらる。今物體に何等の力働かざれば、$Q$ に於ける速度は $QB=PA$ なるヴェクトルにて表はさる。然れども實際には物體は此速度に尙他の $Qb$ なるものを加ふ。$\tau$ の時間の間力の方向は不變なりとする故、そは $PF$ に平行なり。$Qb$ の大さは範式 (16) により與へらる、$K$ を $PF$ の力とす。



第七五圖




物體が $Q$ に於て有する速度は $QB$ 及 $Qb$ の合成 $QC$ なり。此合速度よりして第二の小時間の後の物體の位置 $R$ を得。其時の速度 $RE$ は $RD=QC$ を速度 $Rd$ と合成して得らる、$Rd$ は物體が $Q$ に在るとき之に働ける力 $QG$ の結果なり。

斯樣にして $P, Q, R$ 等の互に無限小の間隔に在る一列の位置を定むべく、斯くして又全道程を學び知るべし。

力が方向に於ても大さに於ても變せざる場合には、物體が一樣なる加速若くは減速運動をなし、直線運動をなし、又は拋物線を畫くは、更に詳述の要なかるべし。

**九〇　力の合成** (Composition of Forces.)　二個或は夫以上の運動の原因が同時に一質點に働くこと屢あり。經驗により此時に點が一小時間に於て得る速度は是等の力が個々に是に働きて生ずべき諸速度の合成なるを知る、或は又（六五節參照）點は是等の諸速度を同時に受くと云ひ得。　0 Ex.

一質點 $P$（七六圖）にヴェクトル $PA$ 及 $PB$ にて表はさるゝ二力のみ作用したりと假定す。是等の力が各個に作用したる場合に無限小の時間 $\tau$ に於て點に與ふべき速度は、質量を $m$ とせば各

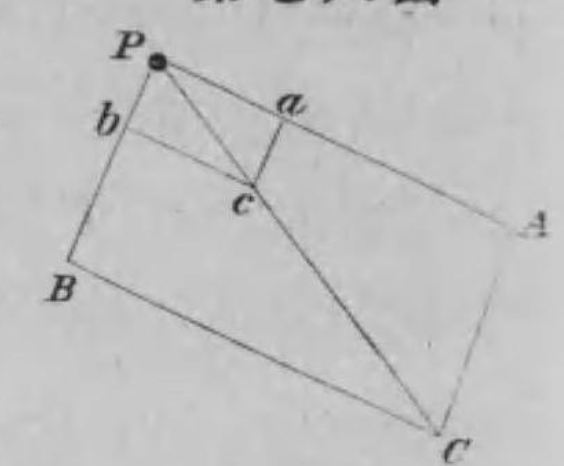
$$Pa=\frac{PA}{m}\tau \quad 及 \quad Pb=\frac{PB}{m}\tau$$

によりて表はさる。實際に點は $Pa$ 及 $Pb$ にて作れる平行邊形の對角線 $Pc$ によりて表はさるゝ速度を得。然れども點に單一の力が $Pc$ の方向に且

$$PC=\frac{Pc\times m}{\tau}$$

の大さにて働きて $\tau$ 時間に前と同じ速度を生じ得べし。

第七六圖




上の記號より

$$PA:PB:PC=Pa:Pb:Pc$$

を得。夫よりして(二八節) $PC$ は $PA$ 及 $PB$ を邊とせる平行邊形の對角線なるを知る。故に

同一點に働ける二力は單一の力により代へられ得。之を表はすヴェクトルは所與の二力を表はす二ヴェクトルを二七節の規則に從ひ合成して得らる。「力の平行邊形」「二力の合成」「力の分解」及「分力」「合力」なる言葉は今別に說明を要せず、又一質點に作用せる任意數多の力が單一の合力に合成せらるゝこと、並に同一直線上に作用せる諸力の合成の簡單なる規則の如きも同樣なり。

二力が同大にて反對の方向に向へば、共合力零にて、即ち既知の如く互に平衡に在り。

第七七圖


三力が平衡に在るは第三の $PC$ (七七圖) が他の二力 $PA$ 及 $PB$ の合力に等しく且反對なるとき可能なり。然れば又



$PA$ は $PB$ 及 $PC$ の合力に等しくして且反對なり。

此節の初の所述により、二力或は三力の平衡は又夫等が一微小時間に質點に與ふる諸速度が互に消去するものとして考へ得べし。但多くの場合に稍技巧的なる考方なり。

尙注意すべきは、力の平行邊形の定理に至れる考察は質點が $\tau$ 時間の初に於ける既有の速度に無關係なることなり。此速度の方向及大さが如何樣なるも、點は常に此外に尙 $Pa$ 或は $Pb$ (七六圖)の速度を何れかの力が働くに從ひて夫々得べきなり、二力同時に作用せば既有の速度に $Pc$ にて表はさるゝ速度を加ふべし。

同時に一質點に働ける二力が夫等が單獨に働ける場合に生ずると同じ速度を是に與ふるは既述の如く經驗より導かる。然れども此定理の正否は單一の實驗にて證明する能はず。此定理が例ば糸の引張にて證せらるとも夫よりして磁極の牽引反撥に於ても亦適用すべしとは決して云ふを得ず。故に法則は種々の力の種類に就て特別に證せざるべからず。然れども此の如きは常に直接に試みられず、夫にも拘らず此法則の正確なるを思ふは是より引出す結果が凡て實際と一致するが故なり。

此章に述べたる他の諸定理に就ても同樣なり。同一の物體に力が與ふる加速度は力の大さに比例すと云ふを簡單なる實驗によりて直接に之を證するは大抵の場合に容易ならず。此の如き根本定理は容易なる實驗若干に依りて之を得しにあらずして、自然現象の長き研究の結果として是に達せしなり。

**九一　互に直角なる二方向に運動及力の分解** (Resolution of the Motion and the Force to two mutually perpendicular Directions.)

七八圖に於て $LL$ は $XOY$ 平面内に動ける一質點の道を表はす、$PH$ は一定瞬時に於ける加速度、$PF$ は $PH$ と同方向に此瞬時に於て作用せる力なり。質量を $m$ にて記せば

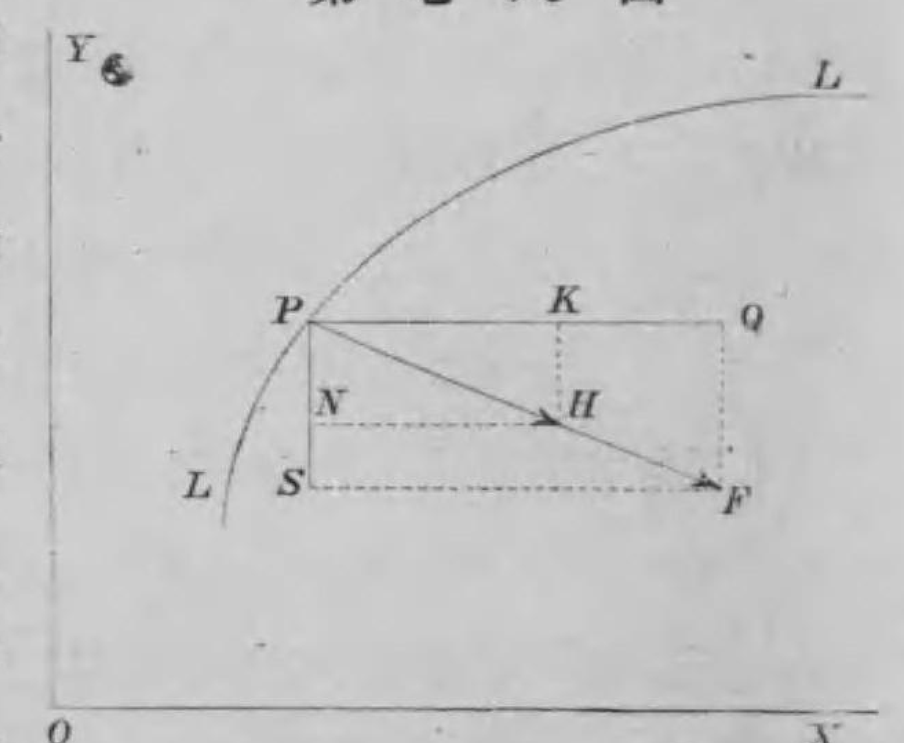
$$PF=m\times PH$$

今加速度を座標軸に平行に $PK$ 及 $PN$ の部分に分ち、又同様に力を $PQ$ 及 $PS$ の部分に分てば

$$PQ=m\times PK \quad 及 \quad PS=m\times PN$$

なり。

第七八圖




然れども $PK$ は $OX$ 方向に於ける物體の運動、即ち此軸上の投影の運動に於ける加速度なるは既に知れり。物體が唯此運動のみを有したりしならば、此投影と同じ運動をなし、即ち是に $PQ$ の力作用せざるべからず。$OY$ 方向に於ける運動も亦同樣なり。是により

曲線運動に於て働かざるべからざる力は、物體が $OX$ 方向のみ又は $OY$ 方向のみの運動ありたるとき働くべき諸力を合成して見出さるべし。

是と同樣の定理は空間内物體の運動を互に直角なる三座標軸に關し考察するも亦得べきなり。

此章次の諸節に於て上述の根本定理を一二の運動現象に應用すべし。



**九二　落體並に垂直に上昇する物體の詳論** (Closer Observations of a Body falling or rising vertically.)　八九節に於て、一物體の速度を各瞬時に就て知れば一定時間に經過せる道程を計算し得ることを示せり。運動が一樣に加速し或は減速せば、此計算は特に簡單なるべし。即ち觀察せる時間を無限多の等部分に別ち、各時限に於て其時限の初に物體が有せる速度にて經過せる道程を計算せば、結果は算術級數をなすべし。時間部分の數を $n$ とし、$v_0$ を時間 $\vartheta$ の初に於ける速度とし、$v_1$ を其終に於ける速度とせば、此級數の第一項は $v_0\frac{\vartheta}{n}$ にして最後の項は $\left[v_1-\frac{v_1-v_0}{n}\right]\frac{\vartheta}{n}$ なり。故に和は次の如し。

$$\frac{1}{2}n\left\{v_0\frac{\vartheta}{n}+\left[v_1-\frac{v_1-v_0}{n}\right]\frac{\vartheta}{n}\right\}=\frac{1}{2}(v_0+v_1)\vartheta-\frac{v_1-v_0}{2n}\vartheta.$$

$n=\infty$ なる場合の其極限値は

$$s=\tfrac{1}{2}(v_0+v_1)\vartheta$$

なり、即ち

一樣なる加速又は一樣なる減速の運動に於ては、經過の道程は經過の時間に其初速度及終速度の和の二分一(平均)を乘じて求めらる。

落體が其運動の觀察の初の瞬時に於て既に速度 $v_0$ を有せば、重力の作用により $t$ 時間の後の速度は

$$v_t=v_0+gt$$

にて、此時間に經過せる道程は

$$s=\tfrac{1}{2}(v_0+v_t)t=v_0t+\tfrac{1}{2}gt^2$$

なり。物體が初速度 $v_0$ にて垂直に拋上らるれば、其速度零となるまでに

$$\frac{v_0}{g}$$

秒を要す(六四節)。此時間に於ける初速度及終速度の平均が $\frac{1}{2}v_0$ なる故に物體の上昇する高さは

$$\frac{1}{2}v_0\times\frac{v_0}{g}=\frac{v_0^2}{2g}.$$

なり。

此結果は既に先に(六四節)見出したるものにて、此中に初速度の自乘あり。例ば初速度を二倍せば物體は二倍長の時間上昇し、且此時間に二倍大の平均速度を以て動くべき故なり。

**九三 上方又は下方に動く一水平面上物體の壓力** (Pressure of a Body on a horizontal Plane, which moves upwards or downwards.) 平面が上方に加速運動をなし、一定瞬時に於ける其加速度 $a$ なりと假定す。然れば平面上に在る物體も同大の加速度を有す。其質量 $m$ なれば凡てを總和して、上方に

$$am$$

にて表さるゝ一力作用せざるべからず。物體には第一に重量 $P$ 作用し、且第二に平面より上方に向へる抵抗作用せり、後者を $x$ と名くべし。即ち

$$x-P=am,$$

$P=gm$ なる故に

$$x=\left(1+\frac{a}{g}\right)P.$$

作用及反作用の相等しきにより、物體が平面に於ける壓力も是と同値を有す。平面が上方に減速又は一様の運動をなし、或は下方に動く場合は之を讀者に委ぬべし。唯是に於て壓力の定めらるゝ仕方の特別なるを注意すべし。壓力は平面を如何に壓するかにて定められず、却て物體の運動を知るに依て定めらるゝなり。



壓力と同様なるは糸の張力に於ける多くの場合にもあり。張力が豫め與へらるゝにあらずして、其狀態よりして定めらる。平面は夫が物體に作用する力上記の値を有するまで壓せらる、此値に達すれば物體は平面と同じ運動をなし平面は壓せらるゝことなし。

**九四 アツトウツドの機械** (Atwood's Machine.) 水平軸の周りに廻轉し得る滑車に絲を掛け、絲の兩端に錘を附し、是等の錘の重量相等しからず、右を $P$, 左を $P'$ とす。絲は滑車の上に滑らず、又 $P'>P$ と假定す。滑車の右及左に於ける絲の張力を夫々 $S$ 及 $S'$ と名く。今是等の錘を放てば、次に示す如き一の加速運動を生ず。

右方の錘が上昇する故、$S>P$ なるべし、何となれば此錘に働く力は單に重力 $P$ 及張力 $S$ のみなればなり。之に反して左方には $S'<P'$ なるべし。且 $S'>S$ なるべし、何となれば是等の張力の差が滑車に加速廻轉運動を與ふるものなればなり。故に

$$P<S<S'<P'$$

なり。張力 $S$ 及 $S'$ の間には次の如き調整行はる。即ち錘及滑車の運動の間に $S-P$, $S'-S$, $P'-S'$ の諸差が恰も絲の長さを變せざるに必要なる値を有するが如くなるべし。此「調整」が行はるゝ有様を知る爲、錘が放たれたる瞬時に於ては尙 $S=P$ なりと假定す。然れば右方の錘は一瞬間靜止して、其間に滑車は既に廻轉し始むべし。是に依て右方の絲に小なる伸びを生ずべく、$S>P$ となるべし。或は、若し $S'$ が $S$ より遙に大なりとせば、滑車の廻轉は直に加速し、其結果右方の絲の伸びと左方の絲の縮りとを少しく生ずべし。是に依りて $S'-S$ なる差は減少す。

簡單の爲に滑車の質量が錘に比し遙に小なりと假定すべし。然れ

ば張力は、$S'-S$ が $S-P$ 及 $P'-S'$ 即ち兩錘に働ける二力を表はせる差よりも遙に小なる様調整すべし。然れば $S'-S$ なる差を省略し得べく、是等二力を

$$S-P \quad 及 \quad P'-S$$

と置き得べし。今是等の力は錘等に夫々上方と下方との同大の加速度を與ふる故に、力は夫等の質量即ち重量に比例すべし。故に

$$(S-P):(P'-S)=P:P'$$

之よりして

$$S=\frac{2PP'}{P'+P}$$

又是に依りて錘 $P$ を上方に動かす力は

$$S-P=\frac{P(P'-P)}{P'+P}$$

又錘の得る加速度は次の如し。

$$g\frac{P'-P}{P'+P}$$

**九五 物體落下に於ける空氣の抵抗の影響** (Influence of the Resistance of Air on the Fall of a Body.) 物體が空氣中を進行すれば抵抗(七六節)を受く、運動が速なる程抵抗益大なり。一物體を落下せしむるに、始の小時間に於ては速度尙小に空氣の抵抗は省略し得べし。故に最初は眞空中に於けると同様なる等加速運動をなすべし。然れども速度の增加と共に抵抗も亦增加す。物體に働く力の總和、即ち重量と抵抗との合成は減少す。運動は實に尙加速しつゝあり、然れども相次げる等しき小時間に於ける速度の增加は益減ずべし。此の如くして進み、遂に或速度に至り、夫に基く抵抗が物體の重量に等しきに至るべし。然れば二力が互に釣合ひ、即ち速度



は不變となる。其後物體は此の等速運動を續く、恰も抵抗が絕えず重量と釣合にあるべければなり。雨滴は地球表面の近傍に於て此の如き等速運動をなす。

終速度の大さ及是に至る時間の長さは、一部分重量に又他方に於て抵抗の大さに關係す。重力は物體の各實質微部分に悉く作用すれども、抵抗は表面上に在る部分のみに作用す。是によりて二個の物體が重量を等しくするも、表面を異にせば其中大なる表面を有するものが小なる終速度を得るを知るべし。即ち $v$ を以て此速度の値とし、是に於て此物體が空氣の抵抗と重力とを相平均せしむるものとせば、他の表面小なる物體に於ては同一速度に達したるときにも抵抗は尙ほ重量よりも小なり。故に後者に於ては速度 $v$ に於て尙ほ加速を止めざるなり。

同様に又同大同形なるも異れる重量を有せる二物體に就ては、重きものが大なる終速度を得るを證し得べし。

斯して一枚の紙又羽毛、雪片、パラシュートの如き物體は遲く落下するに、重き金屬球が空中にて殆ど自由落下の法則に從て動く所以を了解し得べし。

一物體の表面を增大する一方法は之を數片に分つに在り、是に依りて元來の表面に尙ほ新表面を增加す。故に相等しき二物體の一を小部分に分ち、之等を互に少しく隔て同時に落下せしむれば、運動は分たざる物體の落下よりは遙に遲緩なるべし。故に小なる物體は同じ物質の大なる物體よりも小なる終速度を得。

又是は一物體の凡ての廣延を2倍小にすれば、重量は8倍小くなり、然るに表面は僅に4倍小くなるを考ふるも理解し得らるべし。

甚小なる物體は唯僅小の終速度を得。靜止せる空中に於ては然も尙常に落下すべし。然れども空中に於ては常に流動運動あり、例ば溫度の差に基く如きものあり。今一小物體が靜止せる空中に於て得べき終速度が氣流の速度よりも小なれば、此小物體は氣流に飜弄せられ、彼方此方に逐はれ、即ち泛游すべし。空中に日光を通じて見るを得る無數の塵埃は即ち此場合なり。

茲に空氣中に於ける抵抗に就て云へる事は、又液體內の抵抗に就ても適用するなり。其他等しき狀態の下には液體內の抵抗は空氣に於けるよりも大なり。故に小なる物體は水中に於ては空中に於けるよりも一層容易に泛游するなり。細かに分たれたる沈澱は屢全く沈降せざるなり。

**九六　抵抗の大さ** (Magnitude of Resistance.)　甚だ小なる速度に於ては氣體或は液體が一物體に作用する抵抗 $w$ は速度 $v$ に比例す。速度增加すれば $w$ は一層速に增加し兩者の關係は稍精密に

$$w=av^2$$

なる形の範式にて表はし得べし。

次の例に依り空氣の抵抗の大さに關し觀念を得べし。半徑 $R$ の球が $0°C$ の空氣中に於て甚小なる速度 $v$ を以て動けば其の受くる抵抗は凡てを $C-G-S$ 單位にて表はせば

$$w=0{,}0035Rv$$

なり。此抵抗は小速度に於ては空氣の內部摩擦に歸すべく、是に就ては尙後に學ぶべし。

是は皮相的に考ふれば表面に比例する如きも、實は然らずして半徑 $R$ に比例せり。

速度一層大なれば內部摩擦は主要なるものならず、此場合に生ずる抵抗を理論的に定むるは頗る困難なり。茲に云得るは次の如きなり。一平面板が其法線の方向に於て余り小ならざる速度 $v$ を以て移動せば、其受くる抵抗 $w$ は稍近似的に實驗範式

$$w=kS\rho v^2 \qquad \text{(17)}$$



にて表はさる。此中 $S$ は板の面積、$\rho$ は周圍の氣體又は液體の密度なり。又 $k$ は實驗的に定めらるべき係數にて、其値は板の大さ及形狀に關係す。

作用反作用の相等しきに依りて中間物が平面に反對せらるゝ抵抗も亦 $w$ なり。

一平方粉より小なる表面に於ては $k$ は殆 0,6 なり。

此範式は又任意の形の物體に應用し得べし。其場合には物體の運動方向に直角なる平面上に於ける投影の大さを上述の $S$ とせざるべからず。又 $k$ は物體の形に關係する一係數なり。例ば球を或速度にて氣體或は液體の中にて動かすは、同じ樣に此球と半徑を等しくする圓板を是に直角の方向に動かすよりは僅かの力を要するのみなり。

前面に於て銳き角或は尖點をなせる物體に於ては、係數 $k$ は平面に於けるよりは遙に小なり。之に反して球椀形にして空側を前方に向くる物體に於ては平面に於けるよりは大なり。例ば實驗の示すにより傘の形を有せるパラシュートに於ては平面なるに比すれば、此の係數は殆二倍大なり。パラシュートを逆にすれば係數は平面に於けるものゝ殆 3/4 なり、每秒百米の速度にて動ける砲彈に於て $k$ は殆 0,4 なり。

一物體及其周圍の中間物との間の力は唯相對速度にのみ關係し得べきが故に、範式 (17) は又氣流或は液體の流が速度 $v$ を有し、靜止せる物體に働く力を表はす。此の如き範式に依りて例ば風車の翼に於ける風の作用或は水車の翼に於ける水流の作用を計算し得べし。

**九七　抵抗によりて運動を等速にする他の例** (Other Examples of Motion, which becomes uniform by Resistance.)　水平の道の上に引かるゝ車、叉軌道に依りて動ける舟に於て空中に於ける落下と同樣なる觀察をなすを得。道、水及空氣は抵抗を作用す。抵抗は速度と共に增加し、遂に運動せしむる力に等しくなるや否、運動は等速となる。運動始りし後最初の時間には力は運動を加速するに働くべし、然れども終速度が達せらるれば唯摩擦に勝つ丈の働をなす。

運動せしむる力を減じ或は止めしめ或は叉抵抗を增大するに依り

て運動を遲くするを得べし。荷の重き車を一定の速度にて水平面上に進行せしむるに輕き車に於けるよりも大なる力を要するは道の呈する抵抗が重力に依りて車が地面を壓すること强き程大なるの結果なり。

**九八　物體を打ち及投ぐること** (Striking and Throwing a Body.) 一の力が如何許の速度を生ずるかは又力の働ける時間に關係す。

故に一物體に或速度を與ふるに或一定の大さの力を要すと云ふを得ず。力の大さは所求の速度を生ずべき時間に關係す。

例ば質量 500 瓦なる球に毎秒 200 糎の速度を與へんとせば之を $\frac{200}{980}=0,204$ 秒落下せしむべきなり。此間物體に $500\times 980$ ダインの力働けり。然れども是よりも二倍大なる力を 0,102 秒間或は 200 倍の力を 0,00102 秒間此球に働かしむるも同じ速度を得べし。球を槌にて打ちて 200 糎の速度を與へたる場合には此速度よりしては力の大さも、又其働ける時間も知るを得ず。知り得るは唯二者の積が一定の値を有することのみなり。力 $K$ が時間 $\tau$ の間に質量 $m$ に速度 $v$ を與ふとせば範式 (14) により

$$K\tau=mv \qquad (18)$$

なり。

甚小なる時間作用し或は物體に速度を普通所謂急激に與ふる諸力に於ては積 $K\tau$ を打擊の大さと名く。

**九九　運動量** (Momentum.) 一質點が速度 $v$ を有すれば其方向に一ヴェクトルを引き、其大さは $v$ 及質量 $m$ の積を表はすものとし得。此ヴェクトルは運動の大さ或は量を測るものと考へ得べし、之を運動量と名く。



一質點が同時に二個の速度を有せる場合には、是等各速度に相當する二個の運動量を同時に有せりと云ひ得べし。實際の運動量は二速度の合成の規則と二八節の定理とを結合して、上述二運動量を二七節の記述に從て合成して見出し得べし。

一質點が力の作用によりて其既有の速度に或速度を加へたりと云ふ代りに、既有の運動量と合成すべき一新運動量を得たりと云ひ得。

此新量を入るゝの必要は次の定理に在りて、範式 (18) より直に之を得。

一定の時間不變の方向に働ける一定の力は、一定の運動量を生じ、質點の質量の大さの如何に關せず。

(18) に於て $\tau=1$ と置けば $K=mv$ なり、即ち

一力が單位時間に生ずる運動量は力と同じ數にて表はさる。

之に反して $\tau$ が甚だ小なりと假定し、又積 $K\tau$ を打擊と名くれば範式よりして次の事を得。

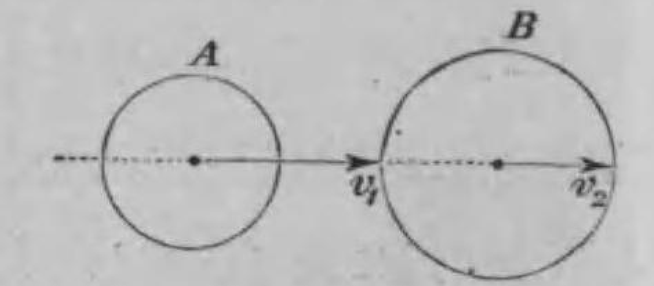
打擊は其生ずる運動量と同じ數にて表はさる。

**一〇〇　二物體の衝突** (Impact of two Bodies.) 互に力を作用せる二個の物體を其等の相互作用に放置せば、作用反作用相等の法則と八五節の定理とを結合して次の如きを知る。即ち相互作用の結果として是等の物體の各既有の速度に或時間內に於て加ふべき速度は、夫々方向互に反對にして、各質量に逆比例す。或は夫等の物體は等しくして反對なる運動量を得と云ふも結局同じ。

例ば $A$ 及 $B$（七九圖）を二個の球とし、夫等の質量 $m_1$ 及 $m_2$ とし、夫等の中心が同一直線上に同方向に動けりとす。$v_1$ を $A$ の速度とし、$v_2$ を $B$ の速度とし、$v_1>v_2$ とす。即ち $A$ は $B$ 球に追及すべ

し。第一の接觸の瞬時に於て、二球の中心は尙夫々上記の速度を有す。故に若干の時間、短時間とは云へ尙ほ互に相近づく。此の如きは二物體が接觸位置に於て壓縮せらるゝ場合にのみ可能なるべし。然れども是に依りて相互の反撥を生じ、$A$ の速度は減少し、$B$ の速度は增大すべし。依て若干時の後に二物體は同大の速度 $x$ を得。次に之を計算すべし。

第七九圖




$A$ の速度は $v_1-x$ 丈減少し、$B$ のは $x-v_2$ 丈增加す。是等の變化は夫等の質量に逆比例せざるべからず。故に

$$(v_1-x):(x-v_2)=m_2:m_1$$

$m_1(v_1-x)=(x-v_2)m_2$

是よりして

$$x=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$$

を得。

同じ結果は、衝突に依りて $A$ と $B$ とが等しくして且反對なる運動量を得、並に是等運動量の和が變化せずと考ふるも亦得らるべし。此考よりして

$$m_1x+m_2x=m_1v_1+m_2v_2.$$

衝突前二球が反對の速度を有したる場合にも同じ範式適合す。唯此時には＋及－の符號にて、運動が何れの側に向へるかを區別せざるべからず。$x$ の符號は同時に共通速度の方向を示す。若し二物體が衝突前に夫々質量に逆比例せる方向反對の速度を有したりしならば此共通速度は零なり。

上述は相衝突せる物體が球以外の或若干の形を有せるにも適用せらる。例ば二圓壔が夫等の軸を同一直線上に置きて動けるものに於けるが如し。



兩物體の速度が相等しくなりたる後、尙如何に變ずるかは今玆に述べざるべし。

**一〇一　簡單振動に要する力** (Force, which is necessary for a simple Vibration.)　一物體が $A$ 及 $B$ 二點(八〇圖)の間に簡單振動をなせるときには運動は道の中點 $O$ に近づく場合に常に加速し、此點より遠かる場合に常に減速す(六九節)。是に依て各瞬時に於て物體には $O$ 點の方に向へる一力働かざるべからざるを知る、此力は八九節に示せる方法に依りて計算し得べし。點が $AO$ 或は $BO$ の道の一を行ける間に此力は不變ならず、此場合には、一様なる加速又は減速運動を論ずるにあらざればなり。六九節に於て加速度に就て知れる結果により物體が $O$ より $s$ の距離に於て置かれたる瞬時に於て、此力は次の値を有すべし。

第八〇圖


$$K=\frac{4\pi^2 m}{T^2}s \quad \text{(19)}$$

此範式中 $m$ は質量を示す。

$T$ が小なる程力が大なるべき所以は容易に知るを得べし。今物體を先づ振動時間 $T$ にて、次に振動時間 $\frac{1}{2}T$ にて $AB$ 間に往復運動せしむれば、第二の場合には $A$ より $O$ への運動の間に第一の場合の二倍の速度を與ふるを要す、之を二分一の時間にてなさゞるべからざる故に、四倍大なる力を作用せしめざるべからざるは當然なり。同様に第二の場合に $O$ より $B$ への運動に於て速度を失ふに第一のよりも四倍大なる力を要することも明かなり。

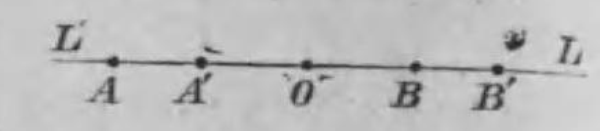
特に此範式に含まるゝ次の定理は重要なり。

一質點が簡單振動をなすには道の中央點よりの距離に比例せる力之に働かざるべからず。此力は道の兩端に於て最大なるべし、又物體が $O$ 點に近づくに從て減じ、$O$ を過ぐる時に於て零に等しかるべし。

**一〇二　所與の力の影響の下に於ける簡單振動** (Simple Vibration under the Influence of a given Force.) 上述の定理を逆にして次の如く云得。

直線 $LL$ (八一圖)上に動き得べき一物體に一力働き、其力が常に此線上一定點 $O$ に向ひ、且 $O$ よりの距離に比例せるとき、此物體を $LL$ 上の或點にて放ち又は $O$ 點を或速度にて過る樣にせば、$O$ 點の周りに一の簡單振動をなすべし。

第八一圖




物體が $O$ 點に在る時は是に何等の力作用せざる故に、此點は平衡位置なり。

一物體に働ける諸力の合力が一定點に向ひ且此點よりの距離に比例せる場合屢あり。恰も其故に簡單振動を屢生ずるなり。

此の如き諸力の働ける一質點の運動に於て重要なる一特質は其振動時間が點の平衡位置よりの振動距離の大小に關せず同一なる事なり。例ば質點を第一回に $A$ に於て、第二回に $A'$ に於て放つとも、夫が $O$ 點に達するに用ゐる時間毎回同じ。力が $O$ よりの距離に比例する故に、第一回には第二回に於けるよりも大なる力にて $O$ の方に動かしめらるゝなり。故に第一回に於ては大なる速度を得、恰も二回共 $O$ 點に同時間にて達する割合に之を得べし。



之を大小の諸振動が等時的なりと云ふ。

物體の質量及是に働ける力と $O$ よりの距離との不變なる比を知れば振動の時間は定まる。同一質量に就て $O$ の方に働ける力を增加せば振動速に相次ぎ、質量を增加せば反對の影響を生ずるは直に知り得べし。

$a$ を以て上述の不變なる比とし、即ち力は $as$ にて表はさるとす。然れば振動時間 $T$ は(一〇一節)

$$\frac{4\pi^2 m}{T^2}s=as$$

從て

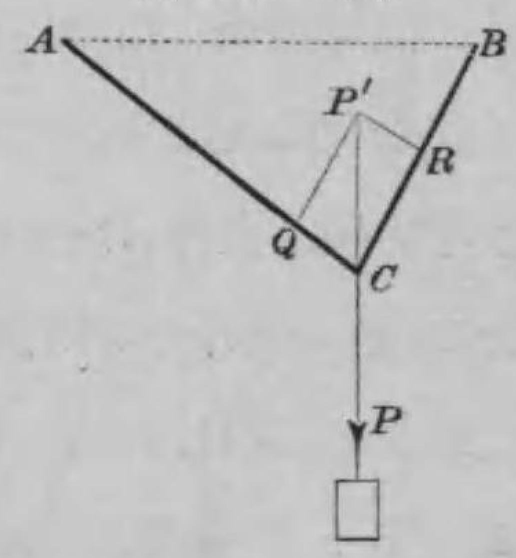
$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{a}}\text{ ..................... (20)}$$

なり。

此範式中に振幅の存在せざるによりて等時性の法則を得るなり。

**一〇三　力の平行邊形の定理の應用** (Applications of the Theorem of Parallelogram of Forces.) $a$) 二本の絲にて吊さるゝ物體 (Body, which is hanged by two Strings.) 一物體(八二圖)が一點 $C$ に吊され、$C$ 點は二本の絲 $CA$ 及 $CB$ にて定點 $A$ 及 $B$ に結べりとす。$C$ に三力作用す、即ち $CP$ にて表はさるゝ物體の重量、及二絲の張力 $AC$ 及 $BC$ なり。釣合成立せば、後の二力は $CP$ に等しくして反對なる合力を有せざるべからず。故に上方に垂直に $CP'=CP$ とし、且 $CP'$ を二絲の方向に $CQ$ 及 $CR$ に分解せば、是等の線は夫々張力を表はすべし。

第八二圖



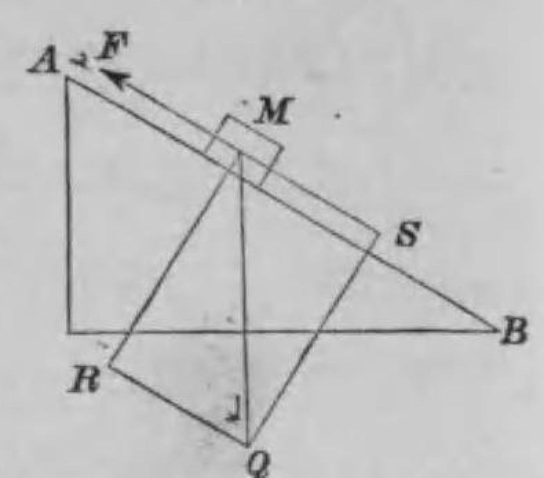

同じ事は又次の如く云ひ得、即ち力 $CP$ を絲の延長の方向に於ける二力に分解せば、是等の分力は $AC$ 及 $BC$ の張力を生ずるものな

り。

此の如き二樣の方法は多くの問題に於て可能なり。

*b*) 斜面上の平衡 (Equilibrium on an Inclined Plane.) 水平面と角 $\alpha$ をなせる一平面が此平面と直角なる一垂直面と線 $AB$ に於て切れりとす(八三圖)。$M$ を斜面上に在る一物體とす、ヴェクトル $MQ$ は物體の重量 $P$ を表はす。然れば $MQ$ を $AB$ に平行なる力 $MS$ 及 $AB$ に直角なる力 $MR$ に分解し得べし。

第八三圖




第二の力は何等運動を生ずる能はず。唯物體を斜面に對して壓するのみにして、斜面の抵抗にて消去せらる。分力

$$MS = P\sin\alpha$$

は物體を $AB$ の方向に下方に動かす力なり。$BA$ の方向に上方に働ける是と同大の一力 $F$ によりて物體を釣合に保ち得べし。

平面が完全に滑なれば、物體は $F$ の力に依り、若し $F$ が $P\sin\alpha$ より幾分大なりとすれば直に上方に運動すべし。$F=P\sin\alpha$ なる時にも亦物體が上方に或初速度を有すれば同じく然るべし。此意味に於て $P\sin\alpha$ の力が物體を斜面上に引上ぐるに充分なりと云得。

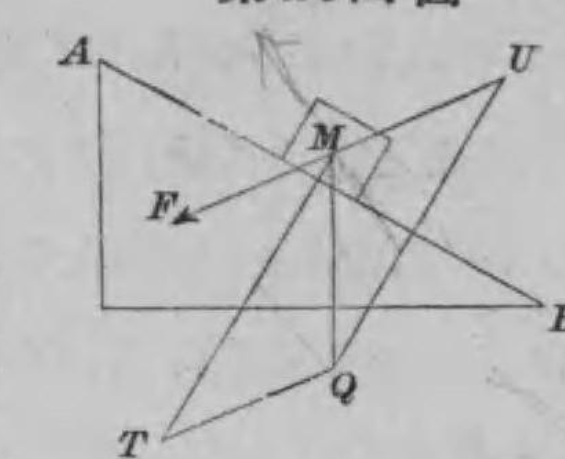
傾角小なれば此力は重量 $P$ よりも遙に小なり。此事屢應用せらるゝなり(船揚場、坂路)。

一物體は斜面上に於て八四圖の如く $BA$ 以外の方向に於ける一力 $F$ が働ける場合にも亦釣合に在るを得。例ば物體が $BA$ に平行ならざる絲に結ばれたる如き場合なり。平衡の條件を見出すに



は物體に三力の働けるを考へざるべからず、即ち重力、力 $F$ (絲の張力) 及平面によりて作用せらるゝ力なり。

第八四圖




完全に滑なる一表面上に靜止せる一物體は表面の方向に於て極めて些少の力働けば直に運動せしめらるべし。故に

完全に滑なる表面に依りて働かるゝ抵抗は法線の方向を有す。

是に注意せば上記の三力間の平衡條件を表はすべき諸力の平行邊形を見出すは容易なり。八四圖にて、$MQ$ は $AB$ に直角なる $MT$ と力 $F$ に反對なる $MU$ とに分解せらる。

*c*) 完全に滑なる任意の一表面上の平衡 (Equilibrium on any perfectly smooth Surface.) 此の如き表面上に在る物體に於ける平衡條件は一般に次の如く云表はす。即ち表面の抵抗を除きて是に働ける他の凡ての力の合力は表面の法線の方向に且表面より上の方に向はざるべからず。然れば抵抗によりて釣合を保ち得べし。

*d*) 斜面上の運動 (Motion on an Inclined Plane.) 八三圖の物體に重力及表面の法線抵抗の外何等の力働かざれば、$AB$ の方向に下降す、又 $BA$ の方向に於て或速度を得れば上昇す。是等の運動は不變なる一力 $MS$ (八三圖)の作用の下に起る、何となれば物體が $AB$ 上何れの點に在るも常に八三圖と一致せる力の平行邊形を作るべければなり。故に斜面上の運動は一樣に加速又は減速せらる。加速度は斜面上の物體の落下を自由落下と比較して求め得る如く、$g\sin\alpha$ なり。

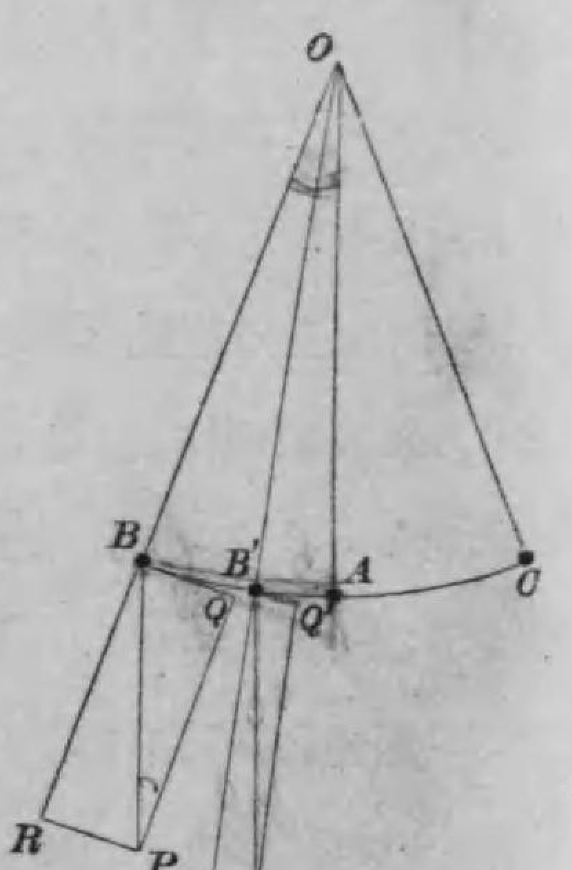
任意の曲面上に動ける物體にも同樣の觀察を適用し得。即ち毎瞬

時に於て重量を二力に分解し得、其一を法線の方向に、他を表面に沿へるものとすべし。分力の中後者は表面の上の運動を定む、又此運動は八九節の方法にて尚精密に研究し得べし。

*e*) 一物體を一本の絲にて一定點と結べば、是に働ける凡ての力の合力が絲の延長に於ける方向を有するとき釣合に在ること明なり。是に依て一本の絲にて吊されたる一物體は、一定の水平力にて其釣合の位置より幾何の距離に移動せらるべきかを演繹し得べし。

**一〇四　簡單即數學的振子** (Simple or Mathematical Pendulum.)　伸び得ざる一本の絲にて一物體を吊し、絲は質量を省略し得べき程細きものとすれば一の振子を得、後に述ぶべき裝置と區別して之を簡單振子又は數學的振子と名く。此振子を其平衡の位置 $OA$（八五圖）より $OB$ の位置に持來れば、物體の重量 $BP$ を二個の分力に分解し得べし、其一 $BR$ は絲の延長の方向に在りて、他の $BQ$ は是に直角にある樣にす。後者は物體を圓弧 $BA$ 上に下方に動かすものなり、又同樣に物體の或他の位置 $B'$ に就ても夫に相當せる力 $B'Q'$ を見出し得べし。物體が放たるれば加速運動にて $B$ より $A$ に行き $A$ の他の側の點 $C$ まで上る、$C$ は $A$ よりの距離 $B$ と同じ。然る後又 $B$ に戻る、約言せば物體は $B$ と $C$ との間に振動す。

第八五圖




八五圖に依り

$$BQ : B'Q' = \sin BOA : \sin B'OA$$



今振動の幅即ち $BOA$ 角が甚小なれば前式の代りに

$$BQ : B'Q' = 弧\ BA : 弧\ B'A.$$

と書き得べし。物體を圓弧上に釣合の位置 $A$ の方に動かす力は $A$ よりの距離に比例せる故に弧上の小振動は直線上の簡單振動と同樣なるべし。即ち一質點が一定曲線上に於て上述の如く牽制せらるゝ時は此線に沿て線上の一定點より測れる距離 $s$ が各瞬時に於て五四節の式 (2) にて定めらるゝ樣に動くべし。是が爲には一〇一節に於て示せる如き大さの力が曲線に沿ひ且定點に向て質點に働くことを要するなり。此定理の證明は玆には與へざるべし。

振動時間と云ふは振子が一極端位置より他の極端に動くに要する時間なり。充分に小なる振動に就ては此時間を次の範式にて與へ得。

$$\vartheta = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

此中 $l$ は振子の長さを表はす。

角 $AOB = 5°,\ 10°,\ 15°,\ 20°$ なれば上記の $\vartheta$ の値は 0,05, 0,19, 0,43, 0,76% 丈夫々過小なり。

八五圖に於て點 $B'$ の $OA$ よりの距離が $d$ に等しく、糸に吊さるゝ物體の質量が $m$ 即ち其重量 $mg$ なれば

$$B'Q' = mg\frac{d}{l}$$

是は又次の如く書き得べし。

$$B'Q' = mg\frac{弧\ B'A}{l}$$

一〇二節に於て見出せる如き、力と釣合位置よりの距離との比は以上に於ては

$$\alpha = \frac{m}{l}g$$

又 (20) に置換して

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

是よりして範式 (21) を得。

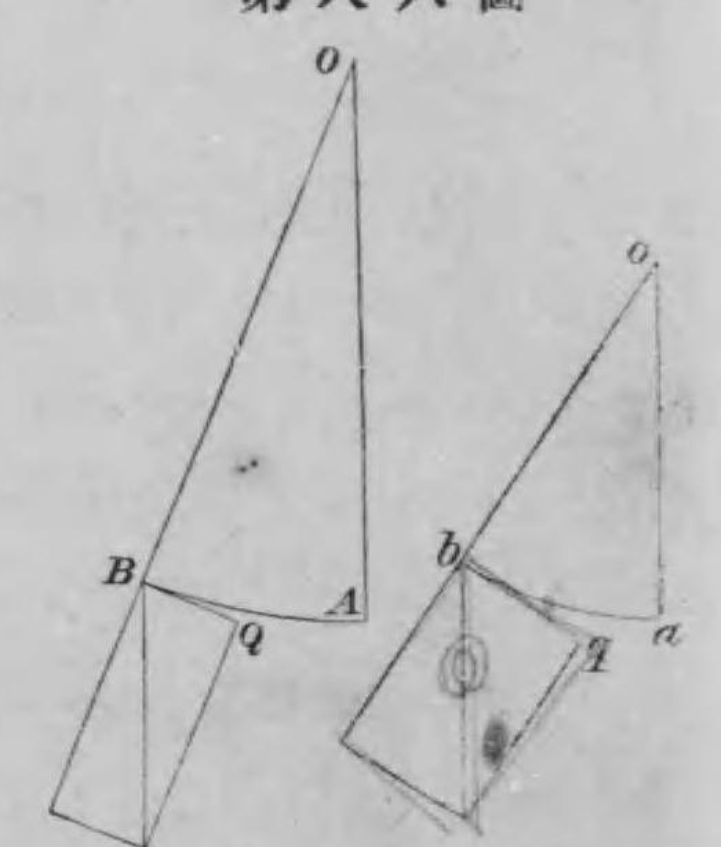
(21) の式の中に次の諸法則含まる。

$a$) 諸振動は大小となく唯其の充分に小くして此範式を應用し得らるゝ場合には皆同一時間に於て行はる。此等時性は既に一層一般に一〇二節に於て學べり。

$b$) 振動時間は絲に吊されたる物體の大さ並に性質に無關係なり。是れ各物體に就て凡て重量が質量に比例せることの結果なり。

$c$) 振子は短き程速に振動す。即ち長き振子と短き振子とが同じ重量を有すとして之等を釣合の位置より弧 $BA$ 及 $ba$ (八六圖)が同長なる樣に動かせば物體 $b$ を釣合の位置の方に動す力 $bq$ は他の此に相當せる力 $BQ$ よりも大なることは容易に知り得。故に兩振子を同時に放てば、短き方早く釣合位置に達すべきを知る。

第八六圖




$d$) 重力が强き程振動が速なるは容易に豫想し得べし。秒振子の長さ、即ち一秒に振動をなす振子の長さは極に於ては赤道に於けるよりは大なり。

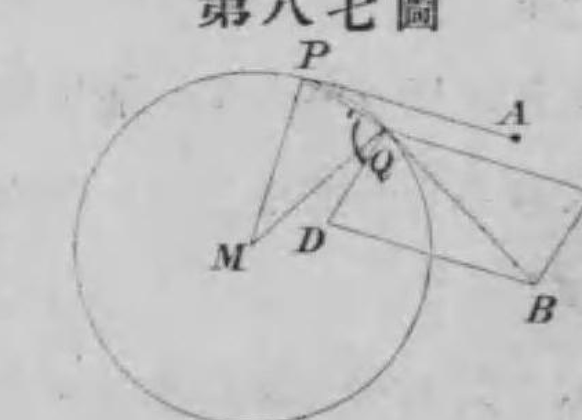
法則 ($a$) ($b$) 及 ($c$) の實驗的證明は大に重要なり。例ば重力の加速度が凡ての物質に就て同樣なるを證明することは、種々の物質より成る諸振子に就て觀察するより他に良法なきなり。



振子の長さ $l$ 及時間 $\vartheta$ を測れば範式(21)より $g$ を見出し得。重力の加速度の精密なる測定は此原理に依れり。然れども數學的振子を此に用ゐず、後に學ぶ如き他の振子を用ゐるなり。蓋し數學的振子は實現し得ざればなり、何となれば質量なく且延びざる絲並に又實際に單一點として見做し得べき物體は共に在り得ざればなり。吊されたる物體が顯著なる延長をなせば何を以て長さ $l$ となすべきかの問題が不定となる。

**一〇五　圓周上の等速運動に必要なる力** (Force, which is necessary for a uniform Motion in a Circle.) 質量 $m$ の一物體が不變速度 $v$ を以て半徑 $r$ なる一圓周上に(八七圖)動けりと假定す。此爲に物體に働くべき力は先づ七二節にて示せる方法にて加速度を求めて之を定め得べし。八七圖に於て七二圖と同じ記號を用ゐたる故、其節の所述は玆に繰返す必要なし。半徑 $MP$ 及 $MQ$ 及弦 $PQ$ を引けば三角形 $QBC$ に相似なる一三角形を得、何となれば $\angle BQC=\angle PMQ$ 及 $QB=QC$ なればなり。此相似よりして $CB$ 並に又同樣に $QD$ が $PQ$ に直角なることを得。今 $Q$ より $P$ に絶えず近づかしむれば、弦 $PQ$ の方向は $P$ に於ける切線の方向を其極限値となすが故に、$QD$ の方向は半徑 $PM$ の方向に近づく。即ち此運動に於ては物體が一無限小時間に於て其既有の速度に加ふべき速度は圓の中心の方に向けりと云ひ得べし。是に依りて加速度の方向定まる。

第八七圖




今其大さを計算するには上述の兩三角形の相似によりて

$$MP : PQ = QC : QD$$

を知る、從て

$$QD = \frac{QC}{MP} \times PQ$$

なり。

是は物體が無限小の時間 $\tau$ に於て得る速度なり。是に依りて加速度の大さは次の如し。

$$\frac{QC}{MP} \times \frac{PQ}{\tau}$$

然れども無限小の弦 $PQ$ は弧にて置換し得べく、然れば第二の因子は速度 $v$ に外ならす。依て加速度は

$$\frac{v^2}{r}$$

なり。

此結果よりして上述の如き運動に於ては絶えず圓の中心の方に向へる一力が必要なるを知る。此所謂求心力の大さは

$$K = \frac{mv^2}{r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

なるべし。

第八八圖


質量 $m$ の一物體 $Q$（八八圖）が $AB$ 線上に振動時間 $T$ にて簡單振動をなせりとす。第二の物體 $P$ が同じ質量を有し、$AB$ を直徑とせる圓周上に於て $Q$ が常に $P$ の投影なる樣に動けば $P$ は不變速度

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

を有すべし $(OA = r)$。然れば $P$ には中心の方向に

$$PF = \frac{4\pi^2 m}{T^2} r$$

の力働かざるべからす。物體 $Q$ に所求の運動を與ふるに要する力は $PF$ の投影 $QG$ なり。是に依り $OQ = s$ なれば力の値は一〇一節所與のものなり。

## 一〇六　廻轉運動に於ける現象 (Phenomena in Rotational Motion.)



上に考察せる物體が圓周の方向に或速度を有し然も是に何等力働かざれば物體は切線の方向に進行す。此事種々の實驗に於て示さる。

第八九圖


*a*) 一棒 $ab$（八九圖）に一球を貫き、球は棒の上に滑り得るものとし、此棒を一水平面内に $M$ 點の周りに廻轉し得べしとす。此運動が始まれば球 $c$ は $cd$ の方向に或速度を得、且少くも近似的に此線の方向に進行すべし。是に於て球は棒上 $M$ 點より遠かる、棒が例ば $a'b'$ の位置を占むれば球は $e$ に在るべし。

又 $c$ 球を絲にて $M$ 點に固定せしむとも、球は運動を始むると共に直に $M$ より稍遠かる。然れども是に依りて延長せる絲は球に一の張力を働かし、球をして $cd$ 線より外れしむる樣に作用す。延長は絲の張力と球を圓上に動かすに要する力とが恰も等しきに至るまで加はるなり。

絲の代りに發條を用ゐれば其受くる延びの測定にて範式 (22) の正確なるを證し得べし。

*b*) 棒 $ab$ 上に二個の球を貫き二球夫々 $M$ の兩側に在て一本の絲にて互に結び付けらる。棒を廻轉せしむれば二球の質量並に中心よりの夫等の距離に從て種々の現象認めらるべし。或場合には絲が或一定瞬時に於て其延長に依る張力が第一の物體を一圓周上に動かしむるに充分なるも第二の物體に同じ作用をなさしむるに不充分なることあるべし。然れば此第二の物體は尚中心より遠かり、爲に前者を中心の方に引くべく、故に結局兩物體は共に第二の物體が在りたる側に行くべし。

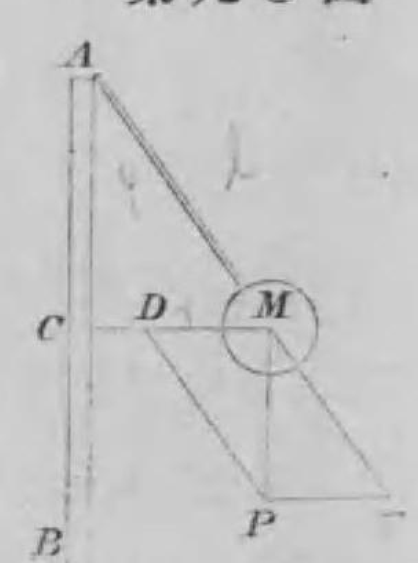
又或場合には絲の延長の增加に依りて一球を圓周上に動かすに充分なる張力を得、其張力が又他の球を中心より不變の距離に保ち得ることあり。此場合には二球は棒上に靜止すべし。

*c*) 又一物體を水平面上に在る圓狀の縁の內側に置きて切線速度を與へて、圓周上の運動を此に强制するを得べし。此場合に縁の抵抗が如何樣にして求心力をなし、又此抵抗が如何に生ぜらるゝかは容易に知るを得べし。

水平面上に圓上に疾走せんとせば人は脚にて平面を外方に壓すべし、是に依りて平面は中心の方に向へる必要なる力を人に作用するなり。

*d*) 垂直なる一の柱 $AB$ (九〇圖)が其自身の軸の周に廻轉し得棒 $AM$ が其下端に球 $M$ を有して柱に $A$ 點に於て固定し、且其點の周に廻轉し得るものとし、即ち棒は $ACM$ 平面內に動き得とす。軸が靜止せば球は $AB$ の柱に觸る。$AB$ の廻轉始まれば、球の中心は $MAC$ 平面に直角なる一速度を得。球は出來得る丈速度の方向に進まんとし、此爲に球は $AB$ より遠かり即ち同時に上昇せざるを得ず。

第九〇圖




垂直軸の周りの速度が一定なれば、$AM$ は此軸に關して一定の位置を占め、即ち $M$ は $C$ を中心として一圓を畫く。今重量 $MP$ を $AM$ の延長の方向に $ME$、並に $MC$ の方向に $MD$ に分解せば、第二の分力が即ち球を圓周上に運動せしむる力なり、此力の大さは範式 (22) にて定めらる。又是に依て單位時間に於ける $AB$ の廻轉の數を知れば $MAC$ の角度を計算し得べし。蒸汽機關



に用ゐらるゝ遠心調整機は二個の相等しく且各一球を有せる上述の如き棒より成り、此等が $AB$ の兩側に固定せらる。何等かの原因よりして $AB$ の速度が增加せば二球は高く上る、此運動は適當の裝置にて蒸氣の流入を減少するに用ゐらる。

廻轉の速度と傾角との間の上述の關係を見出す爲め九〇圖に於て $AM=l$, $\angle MAB=\varphi$, $MC=r$ と置く。球の質量 $m$ 並に一周時間 $T$ とせば速度は $2\pi r/T$ なる故に範式 (22) に依り次の如くなるべし。

$$MD=\frac{4\pi^2 mr}{T^2}=\frac{4\pi^2 ml\sin\varphi}{T^2}$$

又三角形 $DMP$ に於て $MP=mg$ なる故に

$$MD=mg\operatorname{tg}\varphi$$

$MD$ の此等の二値を比すれば

$$\cos\varphi=\frac{gT^2}{4\pi^2 l}$$

を得。此範式は又長さ $l$ の絲に吊さるゝ球が任意の大さの圓を畫く場合にも應用せらるゝは容易に實驗し得るなり。一周時間は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\varphi}{g}}$$

なり。圓の半徑が $l$ に比し甚小なれば $\cos\varphi=1$ と置くべし、即ち一周時間は同じ振子が一平面內に完全振動をなす時間と同大なり。

**一〇七　遠心力** (Centrifugal Force.)　一〇六節に所述の諸現象は往々之を或一力の作用に歸せしむるなり、即ち運動せる物體に働き且廻轉の中心の點より遠かる方向に向へる力なり。此の如き遠心力は實際には存在せず。物體が一圓周上に動かさるゝ場合には、中心の方に向へる力を要せり。此力の存在止めば物體は其道に於ける切線の方向に遠かる。是は此物體を中心より遠からしむる或力作用

するが故には非ずして、單に物體の有する速度の結果なり。

物體等の一體系に於て廻轉運動に依りて起る上記の諸現象は、又何等廻轉あらざる時にも、若し物體の上に廻轉の中心より遠かる方向に働ける力作用すれば、之を生じ得べきなり。例ば一〇六節 *a*) の實驗に於て棒を靜止せしむるも、物體 $C$ の上に中心より遠かる一力を作用せしむれば糸を延長せしめ得べし。又遠心調整機の二球は軸より水平に外方に向へる諸力に依りて軸より遠ざからしめ得らるべきなり。

其生ずる作用に關して廻轉と置換せしめ得べき力を遠心力と名け得べし。之を導入せば同時に廻轉運動を除外し得べきが故に、多くの問題は稍簡單に取扱ひ得るらべし。

單に思考上にのみ存在せる遠心力は、大さに於ては實際に存在せる求心力に等しきものとすべきは容易に知り得べし。

諸物體の任意一體系が一軸の周りに不變速度にて廻轉運動し、他に何等運動なきものと考ふ。各物質微部分は夫々一圓周を畫く、是等微部分各に働ける凡ての力の合力は夫々一〇五節に考察せる求心力 $K$ に等しからざるべからず。今廻轉が止めば、此等諸力 $K$ は各微部分を軸の方に近づかしめんとすべし。然れども此の如くならぬ樣即ち此等微部分が廻轉の間に占めたると同じ相對位置に在る樣にせんとせば各部分に力 $K$ に等しき遠心力を作用せしむれば之を得べきなり。

**一〇八 地球の自轉が重力の見掛の大さに及ぼす影響** (Influence of the Rotation of the Earth on the apparent Magnitude of the Gravity.) 地球の各點は 24 時間にて一圓周を畫き、其點より地軸に



下せる垂線其半徑なり。此結果地球表面上の諸物體に於て觀察せる諸運動現象には、各物體に上述の垂線の延長の方向に於て働ける一力あると同じ影響を生ずべし。此遠心力は (22) に依りて定めらるゝ値を有す。明かに赤道に於て最大にて兩極に於て零に等し。赤道に於ては此力は重力に反對の方向に在りて、他の場所にては重力の方向と鈍角をなす。

地球表面上の諸現象は地球が靜止に在りて、却て重力が赤道に於ては極に於けるよりは稍弱しとすると同じかるべし。六八節に所述の如き異れる緯度に於て、$g$ の値の不同なるは一部分是に依る、然れども是のみにて完全に說明することを得ず。此推論の示すところに依れば、$g$ の見掛の値は赤道に於て 978,1 なれば眞の値、即ち地球が靜止せるとき觀測せらるべき値は 981,5 ならざるべからず。然るに此値は兩極に於ける値よりも尙稍小なり。

今地球の赤道に於て或る高さより地面へ一物體を落下せしめたりと考ふべし。物體は地球に依りて引かれ、從て地球の中心の方に向へる加速度を得、之を $G$ と記すべし。今此物體に赤道に於ける切線の方向に或大速度 $v$ を與へ、是に働ける引力が恰も此物體を此の如くして地球の周りに圓周上に動かすに充分なりとする場合を考へ得。此場合には $r$ を地球の中心よりの物體の距離とせば

$$\frac{v^2}{r}=G \qquad 即 \qquad v=\sqrt{Gr}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

なるべし。即ち物體が此速度を有せば地面に近寄り來ることなし。此の如き橫方向の運動が是よりも一層速かなりとせば、引力は此物體を圓周上に動かす樣强制するに充分ならざるべし。物體は地球より遠かる、然れども圓の切線上に於てせずして切線と圓との間の一線上に於てすべし。

實際には凡ての物體は他の力を加ふることなくして、旣に橫方向の一速度を有せり。即ち地球の自轉の爲にして、此爲に赤道上の凡ての點の有する速度の大さは

$$\frac{2\pi r}{T}$$

にして、$T$ は廻轉時間を表はす、又 $2\pi r=4\times10^9$ 糎並に $T=24\times60\times60$ 秒なる故に速度は每秒 46300 糎なり。

此速度は (23) の與ふる値よりは著く小なり。故に重力作用は物體を圓周上に運動せしむるに充分なるのみならず、尙又物體を中心の方に近かしむ。即ち物體は落下するなり。

然れども地球の自轉は物體の落下に關する實驗の結果に一影響を呈するなり。

赤道上或場所に一垂直尺度を立て、物體を是に沿ふて落下せしむと想像すべし。物體を放ちたる瞬時に於ては物體も尺度も同樣に赤道に於ける切線の方向に一速度 $u$ を有す。此速度は兩者にて同大なり、故に物體と尺度との相對運動には是は何等影響あらず。

今物體は一微小時間 $\tau$ に此速度以外に尙垂直に下方に大さ $G\tau$ なる速度を得。然れども尺度も地球に固定し従て一圓周を畫く故に地球の中心の方に速度を得。此速度は $u^2\tau/r$ なり、即ち $u$ 及 $r$ の値を考ふれば

$$3{,}4\tau \text{ 糎}$$

なり。今此尺度に關する落體の相對運動、即ち物體が $\tau$ 時間に得る相對速度の外何者をも觀察する能はず。是は上記二速度の差なり、即ち物體は $\tau$ 時間に於て下方に向ひ速度

$$(G-3{,}4)\tau$$

を得。換言せば重力の加速度の觀測値は

$$g=G-3{,}4$$

なり。今(六三節) $g$ に就て 978,1 なる値を見出したる故に重力の眞の加速度は次の如し

$$G=g+3{,}4=981{,}5 \text{ 糎每秒每秒}$$

**一〇九** 地球の自轉は赤道に於ては一落體の加速度を其眞實値よりも小に見せしむると同樣に、一物體が水平面上に壓す力にも影響を有す。

之を知る爲に先づ地球が靜止せりと假想し赤道に於て水平面上に一物體が在りて地球より一力 $P$ にて引かると考ふ。今地球が運動せしめらるとせば物體は稍中心より遠ざかるべく、即ち之を載する平面に稍下壓を減ずることゝなる。即ち此平面が物體を上方に壓す力 $P'$ は稍減少すべし。二力の差 $P-P'$ が恰も物體を圓周上に運動せしむるに充分なるに至るまで此減少進むべし。然れば此差は加速度 $\frac{u^2}{r}$ を與へざるべからざる故に力 $P$ によりて加速度 $G$ が起され次の如くなるべし。



$$P:(P-P')=G:\frac{u^2}{r}$$

是よりして先に $u$, $r$ 及 $G$ に與へたる諸値に依りて

$$P-P'=\frac{1}{289}P;\quad P'=\frac{288}{289}P$$

を得。物體が其臺を壓す力 $P'$ を物體の見掛の重量と名くべし、$P$ は眞の重量なり。

極を除きては地球表面上凡ての點は圓を畫く故に又極を除きては何處にても上述の如き自轉の影響あり、然れども赤道よりの距離大なる程此影響小なり。

## 一一〇 太陽系內物體の運動 萬有引力 (Motion of the Body in the Solar System. Universal Gravitation.)

一物體 $A$ は靜止せる物體 $B$ より一〇五節に述べたる大さの一力にて引かるれば、$A$ は $B$ を中心として一圓周を畫き得。然れども一定中心の方に於ける引力の影響の下に又他の形の軌道をも畫き得べし。

觀察によりて諸惑星は太陽を一焦點とせる楕圓上に動けるを知る、此に於て速度は太陽よりの距離小なる程益大なり、故に一五圖(21頁)に於ける楕圓が一惑星の軌道を表し、$F$ が太陽の位置なりとせば速度は $A'$ に於て極大にて $A$ に於て極小なり。(實際には惑星の軌道は一五圖の楕圓よりは遙に圓に近し。)

速度の變化は觀察よりして知り、斯して惑星に働ける力を定め得べし。ニュートン(1643—1727)は此力が太陽の方に向ひ、即ち之を太陽に依る引力と名け得べく、又運動の間には太陽よりの距離の自乘に逆比例して其の變ずることを見出せり。

此結果に至る數學的考察は玆には論せず、唯實際に惑星 $P$（一五圖）が太陽 $F$ より牽引せらるれば $A$ より $B$ を經て $A'$ に行ける運動は加速し、又 $A'$ より $B'$ を經て $A$ に行く運動は減速することを注意するに止むべし。惑星は例ば $P$ に在りたる瞬時に續ける極微時間にては既に切線の方向に有せる速度に尙は焦線の方向に於ける一速度を加ふるなり。今圖よりして知るが如くに速度は互に鋭角をなす故に、合速度は始に切線の方向に有したる速度よりも大なり。

ニユートンは太陽が惑星に作用せる引力に關する上記の法則の外尙種々の惑星の運動を互に比較して他の一法則を加へたり。即ち同じ質量の二物質微部分が其一が一惑星に他が他の惑星に含まるれば夫等は太陽よりして太陽よりの距離の自乘に逆比例せる力にて引かるゝことを見出せり。

是はケプレルが見出したる事實、即ち二惑星の週期の自乘は夫等の軌道の長軸の二分一の三乘に比例せる事よりして出づ。

簡單の爲に二惑星が太陽の周りに $r_1$ 及 $r_2$ の半徑の圓上に動けりと假定すべし。$T_1$ 及 $T_2$ を週期とす。然れば一〇五節に從ひ一惑星の單位質量には次の力働く

$$K_1=\frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}$$

又他の惑星の單位質量には一力

$$K_2=\frac{4\pi^2 r_2}{T_2^2}$$

作用するなり。

$$T_1^2 : T_2^2 = r_1^3 : r_2^3$$

なる比例よりして即ち次の結果を得。

$$K_1 : K_2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2}$$

又他の物體を引くものは太陽のみに非ず。惑星が太陽の周りに動けると同樣に若干の惑星の周りには月或は衛星が動けり、是等は其周れる物體が發せる引力に依りて其軌道を保てるなり。ニユートンは凡ての現象を綜合して次の結論に達したり。凡て二箇の物質微部分の相互の距離に關して上述の樣に關係し且一物質微部分の質量並に他微部分の質量に比例する力を以て相引く、然れども此力は物質の性質及中間の空間に於ける物質に無關係なりと。



ニユートンの發達せしめたる此萬有引力の理論に從へば物體 $A$ が物體 $B$ より發する引力に依りて得る加速度は $B$ の質量に比例するも $A$ の質量には無關係なり。$A$ に働ける力の總和は $A$ の質量に比例す、故に加速度は此質量の大小に無關係なり。

地球表面の近傍に於て物質微部分に働ける重力は地球の凡ての部分より働かる、又種々の天體の物質間の引力と同種類なる無數の力の合力と考へ得べきなり。是は次の考察により確かめらる。

$a$) 實際に物體は地球表面上に於て地球の凡ての部分より引かれ、物體の直下の部分並に地球の中心の近傍又は反對の側より引かれ之に働ける無數の力を單一の力に合成し得るなり。今地球が一の球にて又其密度が各點に於て不規則に變せずして中心より同距離に在る凡ての位置に於ては同大なりと假定せば、數學的考察に依りて、此の合力は中心の方に向ひ、又引力を作用せる全質量が此中心に合一せると同じ大さなるを知るべし。合力は又合成せらるゝ諸力と同樣に引かるゝ物體の質量に比例するなり、故に凡ての物體は同じ早さにて落下す。

$b$) 尙又——重力は實際に萬有引力の一例なるが故に——地球表面の近傍に於ける微部分に働ける此力又は月の同大の微部分が地球

より受くる引力は地球の中心よりの距離の自乘に逆比例せざるべからず。此中心點よりの月の距離は地球半徑の 60 倍なるが故に上記二力の前者は後者の 3600 倍なるべし。今一物體の加速度は毎秒毎秒 980 糎と置き得。又(一〇五節)月の加速度を計算し得べし。月の週期が 27 日 8 時間なることを考へ又地球の周圍を $4 \times 10^9$ 糎と置けば此加速度は 0,27 糎なり。是は實際に 980 糎の 1/3600 なるを知る。

今又落體の觀察上の加速度は(一〇八節)物體が地球自轉の影響より逃るゝとも尙種々の場所にて同じ値を有せざることを如何にして生ずるかを知り得べし。人の知る如く地球は精密に球狀ならずして極に於て扁平なり、其表面は一橢圓の其小軸の周りの廻轉にて得らるゝ廻轉橢圓體に殆ど近し。地軸は赤道の直徑よりは殆 1/300 小なり。今此の如き物體に就て表面上の一物體に於ける諸引力の合力を計算せば物體が極に在る場合には赤道に在るときよりも此合力大なるを知る。故に靜止せる地球に於ても亦各所凡て $g$ の値同じからざるを知る。

ニユートンの法則は太陽系の物體の運動に就て主要の關係を與ふるのみならず又此運動に於て觀察せらるゝ多くの微細の點を説明するに用ゐられ得。惑星が單に太陽よりのみ引かるゝならば一定の橢圓上にのみ動くべし、即ち其速度は簡單なる一法則に從て變ずべし。實際には此の如き運動の有樣との小偏倚無數に存在し現象は甚複雜なり。然れども各惑星は太陽よりのみならず又他の惑星より引かるゝことを考ふれば此等凡てを説明し得るなり。是には複雜なる數學的理論が必要なり、然れども其根底となるべき原則は甚簡單なり。或瞬時に於て太陽系の種々の物體の諸位置が知らるれば此等の各に就て他の凡てが是に作用せる力を與へ得べし。尙又一物體に働ける凡ての力を一力に合成し得べし。然れば此力の作用は八九節 $b$ に與へたる方法により定め得らるべし。



唯狹義に於ける物理學に係はるとも凡て此等に就て觀念を有するは重要なり、何となれば物理觀念の説明を試るに於て星學の方法が多くの關係に於て摸範として用ゐらるればなり。

最後に尙ほ記すべきは鋭敏なる機械を用ゐて直接に、一物體例ば鉛の一塊が他の物體にニユートンの理論に從ひ作用せる引力を實證するを得たることなり。實に此引力は物體の重量の百萬分の小さにあり得べきなり。

**一一一　分子及原子** (Molecules and Atoms.)　數世紀前既に或哲學者は自然物體は外見完全に等質なるが如きも數多の互に離隔せる極小微部分より成れるものなるを假定せり。此觀念の價値は甚大なり、何となれば物質の諸般の轉變に於て此等の小微部分自身は變せずして唯夫等の相互の位置を變ずるのみなりと考へ得べきが故なり。壓縮及冷却に依る物體の容積の減少、氣體の液體に凝縮、固體の水に於ける溶解、是等は小微部分間の間隙の故に依りて夫等の接近を來し又二物體の相互の貫通が可能なりと考ふれば滿足なる假像を造り得べきなり。同樣に、水素及酸素が化合して水を成すことも若し吾人の觀念中に於て水の中に水素及酸素の小微部分が互に相並列せるものなりとすれば多く怪むに當らざるべし。

吾人が諸現象に就て試る此の如き假像が高き度に於て實際と合一することは、微細にまで亙れる多くの説明に其の導けるにより並に

分子說の種々の預言の實證せらるゝにより之を知るなり。多くの物理學者は此の後者の開拓の爲に働きたり。是に於て物體の最小部分の數並に大さを測定することさへもなせり。此測定に從へば各物體の一立方粍中に在る分子の數は非常に大にして十億を遙に超ゆとせるが故に吾人が之等を一々知覺し能はざるは怪むべきに非ず。

化學者が元素又は單體と名くるは更に之を他の物質に分解し能はざる如き物質なり。此の如き物質は極て多數の等しき小微部分より成ると考へ得べし。此等を原子と名く。單體と同數の原子の種類を假定す。諸原子が諸化合物の生下の爲に合一し又是等化合物の最小微部分として見做すべき其群を分子と名く。此等の分子が尙大なる群に集り或現象に於て夫等の群が個體として現はるゝことも亦考へ得べし。然れども細かき分子組識は大抵の物體に於ては尙未知なり。

分子或は物體の微部分と云ふは吾人の論ずる諸現象に於て個々として獨立の作用をなし得る最小の物質なり。

**一一二 分子力 小微部分の運動** (Molecular Forces. Motions of small Particles.) 同一物體の種々の部分の間の連結(凝集)は同種類の分子が互に作用する引力を示し、粘着(附着)の現象例ば硝子棒が水にて濕ほさるゝ場合に認むる如きものに於ては異種類の微部分間に此の如き力が働けるを示す。化合物の成立は諸分子間の引力に基くとす。後に尙ほ往々一物體の微部分間に斥力も亦作用することあるを見るべし。

種々の現象例ば二物質の混合の如きに於ては諸分子の位置の變化が起れるは直に明かなり。尙ほ後に全體として靜止せる一物體の



微部分も亦運動、然かも大速度の運動をなせりと考ふべき理由あるを學ぶべし。即ち各物體を無數の質點の一體系と考へ、各相互に作用せる力の影響の下に動けりと考ふるなり。

此等の運動の根本的知識に就ては、吾人は尙ほ大抵の場合に於て何等知る所なきなり。唯或特別に簡單なる現象に於てのみ、最小部分の動作に就て精密なる考察を與へ得。然れども幸にして分子說を用ゐずして諸現象を記載し、又或程度まで之を理解し得るなり。

又分子說を用ゐるとも諸現象の「機關」の微細にまで立入ること常に必要なりとせず。多くの現象は相互に引き或は斥くる微部分の各體系の特別なる性質に無關係に適用する或一般なる定理によりて之を說明し得べし。此等の定理を次章に於て學ぶべし。

# 第二章

## 仕事及エネルギー (Work and Energy.)

**一一三 力の方向に於ける變位に關する仕事の定義** (Definition of the Work of a Displacement in the Direction of Force.) 一力を一物體或は諸物體の一系に作用するに依りて其物の位置、又之を成せる部分の相對的位置、或は又體系の狀態を種々の仕方に於て變化し得べし。吾人は物體を上げ、或は一端を固定せる螺旋發條を延ばし、又は一の橇に速度を與へ得、其他又一圓筒內の氣體を圓筒內方に喞子を壓して之を熱し得べし。凡て此等の場合に共通なるは一力を作用せる間に其作用點が或距離變位することなり。之に反して此點が靜止すれば何の變化をも生せず。例ば物體を手中に靜持し、或は一端を鈎に固定せる絲を引ける場合の如し。後の場合に絲に力の大さに相當して、手に持てる點の少しく變位するに依り延長を生せしめ得ば、望む丈の間此力を働かしめ、其間力が——若し常に同大なれば——更に之に變化を加ふることなきを得べし。

此の如き考によりて力の大さのみならず、又其作用點の變位に注意せしむるなり。兩者を綜合せば仕事と名けて、現今の物理學に於て重大なる意義を有する一量を導くに至る。



吾人が働かしめたる力の作用點が力の方向に變位したるときは、吾人は一の仕事をなし、又實に吾人が作用したる「物體に」仕事したりと云ふべし。先づ上記の諸例に於ける如く或る一の仕事が上げたる物體、又發條、橇、若くは氣體になされたる場合の如き、力が絕えず同じ方向を有し、運動が直線的なる場合を考ふべし。又先づ力の大さが不變なりと假定すべし。

仕事の大さは一方に變位の長さに、又他方に力の大さに比例すとす。之を假定して先づ仕事の單位を選定すれば、凡ての場合に於て仕事を一定の數にて表し得べし。

仕事の單位としては、力1を作用し、作用點が距離1變位したる場合になす仕事を選ぶ。

是よりして直に力 $K$ 單位並に變位が長さの $s$ 單位なれば、仕事は $Ks$ の積によりて表さるゝを知る。即ち力が力の單位、又作用點の道程が長さの單位なりしときに仕事が1の値を有すべし。從て仕事が力及道程に比例すとする假定に依りて力が $K$, 移動が 1 なれば仕事は $K$ 單位、又力が $K$ にして、動ける道程が $s$ 單位なれば $Ks$ 單位を有せざるべからず。斯して仕事に就て見出せる範式は

$$A=Ks \qquad \text{(1)}$$

なり。約言して、仕事は力と變位の道程との積なりと云ふ。

$C$-$G$-$S$ 系に於ける仕事の單位は力 1 ダイン、距離 1 糎なるときになせる仕事なり。此單位にエルグなる名を與ふ。

他の屢用ゐる單位は瓩米なり、之は一瓩の重量を力の單位とし、米を長さの單位となせるものなり。

1 瓩米は $981 \times 10^5$ エルグに等しきことは容易に知り得べし。

仕事の定義及其大さの計算に對する結果として次の諸點を注意すべし。

*a*)　日常の生活に於て「仕事」なる言葉は種々の身體上並に精神上の働を記すに用ゐらる。然れども大抵此等の大さに就て一定の數を與ふることは可能ならず。唯若干の簡單なる種類の働に於て可能なるのみなり。例ば人夫が荷物を或る高さまで上ぐと云ふ場合には、先づ其仕事を荷の重さに比例して表はす、且其荷を尙ほ1米高く上ぐる每に常に同樣の努力を要するが如き場合には仕事は高さに比例すともなし得べし。此の如き場合に於ては物理的意義に於ける仕事が又此の働を測るべし。

*b*)　定義に依りて仕事は力の大さ及經過せる道程の長さによりて定めらる。道程が幾何の時間にて經過せらるとも同樣なり。仕事は一定の道程が大速度にて又は小速度にて經過せらるとも全然同樣なり。

*c*)　又作用したる力の大さに就て云ふものとす。例ば重量 $P$ の物體を $P$ より大なる力 $K$ にて上げたる場合には(即ち運動は加速す)、高さ $s$ 上ぐるになされたる仕事は $Ps$ に非ずして $Ks$ なり。

*d*)　最後に、道程を若干の部分に分てば、仕事全量は是等各部分個々に相當せる仕事の和に等しきことは定義よりして之を知る。

是に依り更に定義を擴張して、作用せる力が絕えず變位と同方向を有すれども、變位の方向並に又力の大さが絕えず變ぜる場合をも含め得べきを知る。作用點の道程を無限小の部分に分ち、各微部分の經過の間には力が不變なりとす。斯して一極微距離の始點に於ける力を此極微の長さにて乘じ、此の如くにして得る凡ての積を加ふ。



不變なる一力の場合に於ては力の大さを道程の全長に乘じて結果を求め得べきは直に知るを得。例ば一機械を曲柄の廻轉にて運動せしめ、其畫く圓の方向に於て働ける力を $K$ なりとすれば、圓の半徑 $r$ ならば、一廻轉に於てなさるゝ仕事は $2\pi Kr$ なり。

**一一四　エネルギー** (Energy.)　上述に於ては種々の場合に吾人が自らなせる仕事に就てのみ云へり。然れども一物體に一力を作用するに、或人夫又は實驗者の外、或他の物體が之を壓し又は之を引きて是に力を働かしめ得べし。此場合に作用點が作用せる力の方向に變位せば第二の物體が第一の物體に仕事をなしたりと云ふ。其大さは前節の規則に依りて計算し得。

一端を固定し延長せる螺旋發條は其收縮によりて物體を引きて一の仕事をなし得べし。蒸氣は蒸氣機關に於て喞子を動かし之に仕事をなす。水流は其動かせる水車の翼に仕事をなす。

簡單の爲に三個以上の物體が互に力を作用せる場合を先づ考の外に置く。二個の物體が其一が他に仕事をなし、即ち夫等の一が「仕事する」方、即ち他働的の役目をなし、他が「仕事され」即ち受働的の役目をなす如き相反する關係に在りと假定す。

此の如き諸現象の觀察は次の重要なる一結果に導けり。物體は變化を受くることなくして決して仕事をなすことを得ず、又實に此變化は物體が更に一層仕事をなすに常に不適當なる樣に起る。前述の發條は實際に壓縮せられたる場合にのみ一の仕事をなし得べし。同樣に、例ば一喞子にて塞げる圓筒內の壓縮氣體が喞子を或距離外方に動かしたるときには、其仕事をなし得る能が減ずべきことも明かなり。

故に一物體が或時間或仕事をなしたる後に、再び其最初の狀態を占むると云ふことは不可能なり。若し是が可能なれば、又再び初めより開始し得べく、斯して物體を最初の狀態に復歸せしむる變化の一順を繰返すことによりて、望む限り多くの仕事をなし得べし。若し然れば吾人自らか或は他の仕方にてか仕事を之になすこともなくして絕えず物體を上げ得る樣なる一機械があり得べきなり。此所謂「永久運動」は往昔屢求められたり。多くの自然現象が尙僅に硏究せられたる間は此の如きものゝ可能も絕望とせられざりしなり。然れども物理學の今日の狀態に於ては確に之を妄想として說明し去り得べし。今日は上述の簡單なる場合に於てのみならず、又複雜なる、例ば電氣、磁氣、又は化學的作用の場合にも、一物體は或限られたる大さの仕事より以上をなし得ざることは確實なりとし得べし。又之を次の如く表はす。物體は一定の狀態に於ては一定の仕事能を有す。物體が實際に或仕事をなせば其仕事能、即ち所謂其エネルギーは此仕事に等しき丈の大さ減少す。

**一一五　エネルギーの保存** (Conservation of Energy.) 一物體に仕事がなされたるとき其物體が受くる變化に就て觀察すべし。簡單なる場合に於ては、此變化は恰も物體が自ら仕事をなせるときに受くる變化に反對なること明なり、此場合には物體は仕事をなすに始めよりは一層良好なる狀態に來る。螺旋發條――壓すれば縮小する――のエネルギーは仕事が之に加はり延長せるときに增加す。喞子を內方に壓して壓縮する氣體に就ても亦同樣なり。尙仔細に考察すれば、發條を或長さ延ばすに要する仕事は發條が後に再び最初の長さに收縮するときになす仕事に同大なり、即ち發條が延長に於て得



たる仕事能に同大なり。之を一般に、仕事が一物體になさるれば其物體のエネルギーは此仕事に等しき大さ丈增加すと云得べし。

前述の事を說明する爲に、先づ一端を固定せる一發條を壓縮して、他端を或所與の距離丈、例ば $A$ より $B$ に動かしたりと考ふ。壓縮の間に張力變ずるが故に、道 $AB$ を無限小の部分に分ち、(一一三節)各部分の長さを其部分に於て不變とする張力に乘せざるべからず。凡て是等の積を加ふれば發條が其動端を任意の物體に結べるときになす仕事を求め得。

然る後、手を以て引きて此端を $B$ より $A$ に戾したる場合を考ふ。是に於ては張力は以前と同樣なる諸値を逆に經過するなり。延長に用ゐるべき力が各瞬時に於て發條の張力に等しきを考ふれば、今道の無限小の部分の變位に於てなせる仕事は先きに同じ部分に相當したる張力の仕事と同大なること明なり。斯して又 $B$ より $A$ への變位に於て用ゐる全仕事は發條が $A$ より $B$ への壓縮に於てなしたる仕事に等しかるべし。

同樣なる推論は又氣體が或場合に壓縮せられ、或他の場合に其擴がれる間に自ら或仕事をなせるものに應用せらるべし。

上述の如き吾人の作用せる力と發條の張力との相等しきことに就ては後に尙ほ論ずべし。

前節並に此節の定理を結合せば重要なる一結果に達す。一物體 $P$ が一物體 $Q$ に或仕事 $A$ をなしたりと假定す。然れば $P$ の仕事能は大さ $A$ 丈減じ、$Q$ に於ては同じ大さ丈增加す。一物體及他物體の仕事能の和、即ち所謂、兩物體が諸共に有する仕事能は不變なり。尙ほ比喩的なる表出方に於ては、或る $A$ なる大さの量の仕事

能が物體 $P$ より $Q$ に移り行きたりと云ひ得べし。一物體が仕事 $A$ を或他の物體になすと云ふと、大さ $A$ なる仕事能を他物體に與ふと云ふとは同一事に歸着するなり。說明の爲に一螺旋發條が其の收縮せる間に他の發條を伸長せしむるを用ゐ得べし。或は又完全に閉塞せる圓筒を其內部を可動の喞子にて二部に分ち、初に是等兩部に氣體を容れ、種々の度に於て壓縮せりとせば、喞子は其兩側に作用せる力の差に依りて運動せしめらる。是に依りて仕事能は一側に增し他側に減ず。

相衝突せる二物體に於て又他の例を見る。一象牙球 $A$ が或速度にて右方に動き、同大同質の球 $B$ に衝突したりとす。$B$ は初め靜止に在りて、其中心は第一球の中心の動ける線上にありと假定すべし。然れば $A$ は衝突の後殆ど靜止し、$B$ は一速度を得、$A$ の初速に比して其の稍僅に小なるを示す。

玆に球 $A$ が $B$ に一の仕事をなせることは明なり。$A$ は接觸の短時間內に、右方に向へる一力を $B$ に作用す。此間に接觸點は少しく此方向に動く。此仕方にて仕事をなす能が $A$ 球に於ては其運動に基けること明なり。$A$ は又其速度と同時に此エネルギーを失ひ、$B$ は衝突の後には或他の物體に仕事をなし得るなり。

此の如き簡單なる場合より出發して漸々次の定理に達したり。凡ての自然現象に於ては、其の如何なる種類たり又如何に複雜せりとも、相互に作用せる物體の仕事能の總和は不變なり。如何なる根據より此エネルギー保存の法則を假定するに至りしかは考察の進むと共に明瞭になるべし。此法則は初てロバート、マイヤー(1842)により述べられ、又直に其後にヘルムホルツが一層嚴密なる形に之を

ma

$v=\frac{2mx}{x+y}$

at　v−at



表はしたるなり。又今加へたる種々の制限は後に至りて之を去るべし、然れども今先づ或る定まれる場合に於ける仕事能を考察すべし。

**一一六 運動のエネルギー** (Kinetic Energy.) 運動せる一物體が有する仕事能に就ては既に述べたり。區別のため此仕事能を運動の仕事能又は運動のエネルギーと名くべし。其大さを定むる爲に、質量 $m$ の一物體 $P$ が、絕えず之を運動せしむる力に働かるゝことなくして、一速度 $v$ を以て水平面上に動けりと考ふべし。是と絲にて結べる第二の物體 $Q$ を引くに之を用ゐ得べし。此事は $Q$ の運動が何等かの抵抗に働かるゝ場合に於ても亦可能なり。

$P$ がなし得る仕事を計算する爲に、$Q$ に作用せる力が絕えず同じ大さ $K$ を有せりと假定す。然れば $P$ には反對の方向に同大の一力作用す。從て此物體の速度は每秒 $K/m$ 丈減少すべく、即ち

$$v : \frac{K}{m} = \frac{mv}{K} \text{ 秒}$$

に於て全然失ひ盡さるべし。是によりて今運動が一樣に減速せる故に、力 $K$ の在る間の經過の距離として(九二節)

$$\frac{1}{2}v.\frac{mv}{K} = \frac{mv^2}{2K}$$

を得。又所求の仕事は此式と $K$ との積 即ち

$$A = \tfrac{1}{2}mv^2 \text{ ..........................(2)}$$

なり。斯くして運動のエネルギーの大さは $\frac{1}{2}mv^2$ なる式にて定めらる。

次に運動が全く消滅せるにあらずして、唯速度が $v'$ に減じたる場合に於て、物體がなせる仕事は

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv'^2$$

なる差に依りて定められ、即ち此仕事は運動エネルギーの減少に等しく、恰も一一四節の定理と符合せることを證すべし。先づ一不變力 $K$ の假定の下に之を證明し、次に不變ならざる力に於て之を考ふべし。

第一の場合に於ては速度は

$$(v-v'):\frac{K}{m}=\frac{m(v-v')}{K}\ \text{秒}$$

に於て $v'$ に下るべし。此時間に經過せる道程は(九二節)

$$\frac{1}{2}(v+v')\frac{m(v-v')}{K}=\frac{m(v^2-v'^2)}{2K}$$

なり。從て仕事は

$$A=\tfrac{1}{2}m(v^2-v'^2)\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

力が刻々に變ずれば、時間を無限小の部分に分ちて、其各に範式(3)を應用し得べし。然る後凡てを加へて再び或時間に於ける仕事全量は運動エネルギーの全減少に等しきことを知る。

又一一五節の第一定理も今證明するを得。即ち既に一速度 $v$ を有せる一物體に運動の方向に於て $t$ 秒間一不變力 $K$ を作用せば、加速度が $\frac{K}{m}$ なる故に、終速度は

$$v'=v+\frac{K}{m}t\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

にして、經過せる道程は

$$s=\tfrac{1}{2}(v'+v)t.$$

又吾人のなしたる仕事は

$$A=Ks=\tfrac{1}{2}(v'+v)Kt.$$

又 $Kt$ の代りに (4) より出づる値 $m(v'-v)$ を置換せば

$$A=\tfrac{1}{2}m(v'+v)(v'-v)=\tfrac{1}{2}mv'^2-\tfrac{1}{2}mv^2.$$



又此結果は力が $t$ 時間の經過の間に變ずる場合にも容易に之を敷衍し得べし。

尙ほ注意を要するは、一定瞬時に於ける運動のエネルギーの値は、此瞬時に於て或力が物體に作用すとも何の影響をも受けざることなり。之は物體が其なし得べき仕事を極て短時間内になし、其間に此力が何等の速度變化を生じ得ざりしと考ふれば、最容易に知り得べし。例ば一物體の仕事能は其の破壞し得る一枚の板の厚さにて判定し得べし。板を水平に置き一球を其上に墜落せしめて、板が破壞せらるや否やは、板に出會せしときの球の速度にのみ關係し、此現象の經過する短き時間内の重力の作用には關係せざるなり。

一定瞬時に於ける運動のエネルギーが此瞬時前に物體に作用し依て速度に影響を有したる諸力に關係せることは勿論稍別事なり。

終りに運動のエネルギーは運動の方向に無關係なることを示すべし。

一定の速度を有せる球は何等の方向にて動けりとも、例ば一板に對する其作用は常に板を球に直角に出會ふ樣になしさへすれば凡ての場合に同一なり。

今範式(2)を物體又は質點の一系の場合に擴張すべし。系内の物體又は質點は夫等固有の速度にて運動せりとす。質量 $m_1$, $m_2$ 等、並に任意種々の方向を有し得る諸速度 $v_1$, $v_2$ 等なれば、第一の質點は其運動の盡るまでに $\frac{1}{2}m_1v_1^2$ なる一仕事をなし得べく、第二のものは $\frac{1}{2}m_2v_2^2$ の仕事をなし得る等、其和

$$A=\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2v_2^2+etc.$$

にして、この代りに

$$A=\Sigma\tfrac{1}{2}mv^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

と書き得べく、之を以て全系の運動エネルギーを表はす。

**一一七　彈性的固體のエネルギー** (Energy of Elastic Solid Body.)

延長せる絲又は延長せる螺旋發條のなし得る仕事に就ては既に屢述べたり。一般に一固體の微部分を互に變位せしめ、即ち物體が「變形」せらるれば、夫等を最初の位置に戻す力を微部分相互に於て働かすべし。此爲に物體は夫と結べる他の物體を變位せしめ得べく、即ち之に或仕事をなし得べし。物體が之をなす能を失ふは物體が再び全く最初の狀態に復歸したるときなりとすべし。此場合に物體が完全に彈性的なりと名けて之を表はす。此際になす仕事全體は其の變形狀態に於て有せるエネルギーを測る。又變形が未だ完全に失はれず、即ち物體が尙ほ若干のエネルギーを有せる間はエネルギーの既往の減少は物體が其瞬時に至るまでになしたる仕事に等しきなり。逆に、物體に作用せしめたる諸力により之に形の變化を生せば、此とき物體に爲せる仕事は物體のエネルギーの增加に等しきなり。

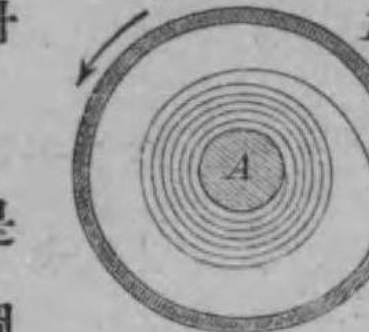
多くの時計仕掛に於ては齒車を動かす爲に彈性體のエネルギーを利用するなり。時計發條は稍長き板狀の薄き鋼鐵の帶なり。其自然の狀態にては平面螺旋(九一圖)の形を有する樣に造れり、之を筒 $B$ (發條筒)の內に入る。筒は少許の高さの圓筒の形を有し、其幾何學的軸、即ち圖の平面に直角に立てる線の周に廻轉し得。發條の一端は筒の內側に在りて、他端は小さき一圓筒 $A$ に固定す、$A$ の軸は筒の軸と一致すとす。此圓筒は發條筒の平底面上を僅の摩擦にて動き、又之に獨立に廻轉し得べしとす。後に

第九一圖




學ぶべき裝置に依りて $A$ 軸には唯一方向に於ける廻轉が可能なるのみなり、圖に於ては時計の針が進む方向に反對なる樣に廻轉すと考ふべし。

第九二圖




時計仕掛を卷き上ぐるには軸を廻轉せしむ。是に依りて發條は九二圖に示せる形を取る、九一圖に於けるよりも狹く $A$ の周りに卷けり。其彈性に依りて軸 $A$ は元へ戻らんと努む、而も夫は不可能なり、故に發條筒を矢にて示せる方向に運動せしめんとすべし。筒が斯樣にして得る廻轉が齒車仕掛に傳達せらる。

齒車仕掛に於ける抵抗の爲に發條筒は唯遲緩なる運動をなし得べし。又之を特に固定せずとも卷き上げは可能なり。短時間の間に發條に與へたるエネルギーが遙に長き時間の間仕事をなすに用ゐ得らるべし。

**一一八　完全なる彈性體の衝突** (Impact of Perfectly Elastic Bodies.) 一〇〇節に述べたる二球は完全に彈性的なりと假定せり。然れば其節に於て計算せる速度を得たる瞬時に於て其等の相互作用は尙ほ止まざるなり。即ち此瞬時に至るまで兩者の中心は絕えず相近ける故に、二球は接觸點の近傍に於て壓縮せらる。彈性に基ける反撥は尙ほ終らずして速度は尙ほ變化を受くるなり。兩者の終速度は既に一〇〇節に應用せる原則の外にエネルギーの保存の法則を用ゐれば計算し得べし。即ち二球の接觸が止めば再び最初の形を占むべし、唯だ速度並に又兩者の運動エネルギーが變化せり、然れども運動エネルギー全量は衝突後には再び衝突前と同大なり。

$m_1, m_2, v_1$ 及 $v_2$ を以て一〇〇節に於けると同一の諸量を記し、$x_1$ 及

$x_2$ を第一球及第二球の終速度とす。此等の速度は $v_1$ 及 $v_2$ と同樣に其の有せる方向に從ひ正又は負とすべし。

第一球は衝突によりて速度 $x_1-v_1$, 第二は速度 $x_2-v_2$ を夫等の既有の速度に加ふるなり。此等の速度變化は反對の符號を有す、其大さは質量に夫々逆比例すべし。即ち

$$m_1(x_1-v_1)=m_2(v_2-x_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

其他上述に依りて

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2v_2^2=\tfrac{1}{2}m_1x_1^2+\tfrac{1}{2}m_2x_2^2$$

即ち

$$\tfrac{1}{2}m_1(x_1^2-v_1^2)=\tfrac{1}{2}m_2(v_2^2-x_2^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

なるべし。今 $x_1$ 及 $x_2$ を計算せんには、先づ (7) を (6) にて除し、且 2 を乘すれば

$$x_1+v_1=x_2+v_2.$$

此方程式及 (6) よりして容易に次の値を得。

$$x_1=\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2}, \qquad x_2=\frac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2}$$

特別の場合。*a*) 今 $v_2=0$, 並に $v_1>0$ とす。然れば $x_2=\dfrac{2m_1v_1}{m_1+m_2}$ 及 $x_1=\dfrac{m-m_2}{m_1+m_2}v_1$. 是よりして質量が相等しくば第一球は靜止すべきを示す。又第二の球が第一球より小なる質量を有すれば、第一球は始めに動ける方向に進む。然れども第二球の質量が大なれば之に反對に退く。$m_2$ が $m_1$ に比して甚大なれば殆 $x_1=-v_1$ なり。

*b*) $m_1=m_2$ なれば $x_1=v_2$, $x_2=v_1$ なり、故に二球は夫等の速度を交換す。

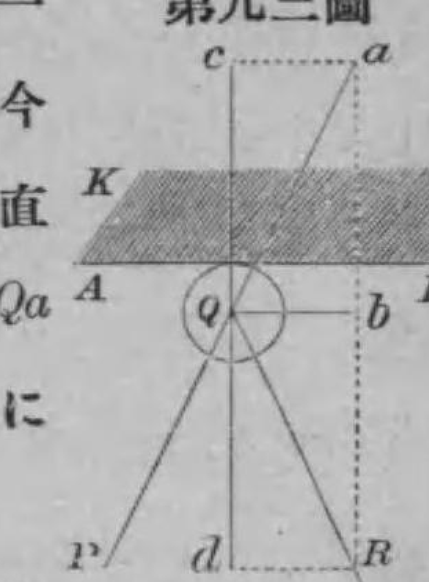
**一一九　彈性球の平面に於ける衝突** (Impact of an Elastic Sphere



on a Plane.) 球が板に直角の方向に衝突する場合は甚簡單なり。物體が兩つながら完全に彈性的にて又板の緣が固定せりと假定す。衝突の間に一の仕事もなさゞるなり(一一三節)、從て板及球の全エネルギーは不變なるべし。是よりして、二物體が遂に夫等の原形を復し、又板が少しも運動せしめられざりしと假定せば、球は最初と同大の運動エネルギーを有せることを知る。球は板よりして最初と等しき一速度にて又勿論板と直角の方向に於て反撥す。

又球が斜の方向例ば $PQ$ の方向に(九三圖)一不動彈性板 $K$ に會したる場合に生ずべき事は今容易に理解し得。此板が $AB$ を過ぎ圖の平面に直角なる平面にて限らると假定す。球の初速度 $Qa$ を $AB$ に平行なる $Qb$ と $AB$ に直角なる $Qc$ とに分解すべし。

第九三圖




以上と同じ推論に依りて衝突後球の速度が初速度に等しきことを證し得べし。又 $AB$ の方向に於ける速度 $Qb$ は不變なり。何となれば板は完全に平滑なりと見做し、唯だ法線の方向にのみ球に一力を作用し得べくして、板に沿へる方向には作用し能はずとするが故なり。前述兩者を結合せば、板に直角なる速度は $Qc$ に等しくして反對なる $Qd$ に變じ、運動の新方向 $QR$ は $AB$ 上の法線に $PQ$ と同大の角度をなすことを示す。

**一二〇　力の仕事の一般なる定義** (General Definition of Work of a Force.) 一物體が運動せしめらるゝ仕方は今まで此章に述べたる場合よりは分明ならざること屢あり。例ば帶電體が相互に「牽引」するとき、中間の空間に存在すれども而も吾人に不可視なる物質が

或る特殊の狀態に置かれて其爲に物體に力を作用し、又或度に於て、張れる發條に比し得べきものありて夫に依りて帶電體が運動せしめらると考ふべき理由あり。同様に、萬有引力は、落下物體に於けるも、天體に於けるも、此等を「中間質」或は「媒質」の作用と考へ、又是が例ば落下せる石に仕事をなし、夫によりて一一五節の定理に從ひ其物の仕事能を增加すと云ふことも考へ得らるゝなり。然れども此の如き不可視の媒質に於ける變化は、吾人に於ては、知覺し得べき彈性體の狀態に比し、之を論ずるに遙に容易ならざるなり。故に現象を記載して媒質に就て述べざるを屢利とするなり。然れば作用せる力にのみ注意し、此等の力の由て來れる機關に就ては述べざるなり。

又之に關聯して、動ける物體の上に一の仕事のなさるゝを之に力を作用せる媒質に依るとせずして、力自身に依りてなさると云ふ。又是は今までに論じたる如き稍簡單なる現象に於て應用し得べき表述方なり。

之を前提とせば、一一三節に於て仕事の定義を唯力の方向に於ける一變位に於てのみ與へたるを一般に應用せらるゝ様に擴張し得べし。是には仕事を其場合に從ひ正又は負と算すること必要なり。

變位が力と同じ方向なれば仕事を正となす。

*a*)　之に反して作用點が力に反對なる方向に動けば負の仕事と云ふ。又其大さは力と經過せる道程との積にて與へらる。斯して力 $K$, 距離 $s$ なれば、此場合には仕事は

$$-Ks$$

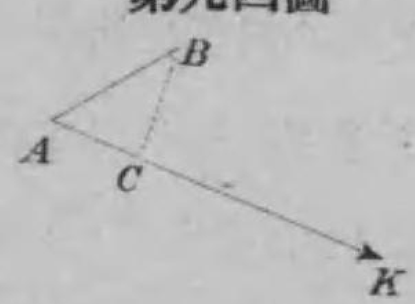
なり。



此仕方に依り負の仕事なる概念を得たる故に、先に物體がなせる仕事に就て述べたる場合に於て、同様に又（稍技巧的なるも）物體に爲されたる同大の負の仕事と云ふことを得るなり。即ち物體が其壓せる或他の物體に力 $K$ を作用し、作用點が此力の方向に距離 $s$ 丈移動せしならば、物體が仕事 $+Ks$ をなせる間に、物體に働ける $K$ に等しくして反對なる力は $-Ks$ なる仕事をなせるなり。

*b*)　一點の上に方向及大さに於て不變なる力 $K$ 働き、點が任意の變位 $AB$（九四及九五圖）を受くれば、仕事は力及力の方向に於ける變位の投影 $AC$ の積なり。又 $A$ より $C$ への變位が力の方向に一致すれば仕事は正にして、反對なれば負なり。

第九四圖




第九五圖


九四圖の場合に於ては仕事は

$$+K\times AC.$$

又九五圖の場合にては

$$-K\times AC.$$

兩式は

$$K\times AB\cos\theta$$

の形に綜合せらる。$\theta$ は變位が力の方向となす角度なり。

上述の事は又他の仕方にて表はし得。即ち仕事は力を變位の方向に投影せるものに變位を乘じ、其積を投影が變位と同方向又は反對の方向を有せるに從て、正又は負の符號を附せば見出さる、と。

*c*)　又 *b*) の所述により

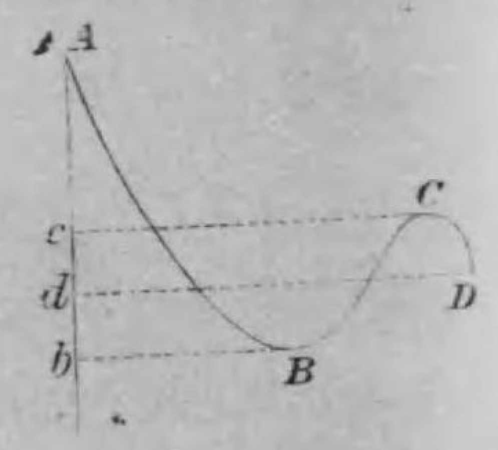
一力の仕事は作用點が力の方向に直角に動けば零なり。

$d$) 最後に力が絶えず大さ或は方向又は同時に方向及大さに於て變化し、作用點が任意の直線又は曲線を畫けりと假定すべし。然れば之を無限小の部分に分てば、各極微部分に於ては力が方向及大さに於て不變なりと見做し得べく、其爲せる仕事を上述の規則によりて定め得べし。是に於て道の各部分に就て力の方向及大さは其部分の始に於けるものを取らざるべからず。力の仕事とは斯くして道の種々の極微部分に就て得る結果の代數和を云ふなり。

例ば(63 頁三八圖)物體が $B$ より $A$ に行き、其間 $O$ に於ける不動の一物體よりして $O$ よりの距離に關係せる一力にて引かるれば、道の極微部分 $DC$ に就ては、夫が $OD$ の距離に在るときの引力を $DC$ の $OD$ 上の投影 $DE$ にて乘せざるべからず。又圖に示せる道の他の部分の投影に就ても同樣になすべきなり。

計算の結果は力が絶えず同じ方向及大さを保てる場合には簡單なり。例ば $Ab$ (九六圖)が力 $K$ の方向にて、$ABCD$ が作用點の道なりと假定すべし。然れば仕事は夫々次の如し。

第九六圖




道 $AB$ に於て，$+K\times Ab$,

〃 $BC$ 〃 ，$-K\times bc$,

〃 $CD$ 〃 ，$+K\times cd$,

即ち

〃 $ABC$ 〃 ，$+K\times Ac$

及 〃 $BCD$ 〃 ，$+K\times bd$.

一質點の任意の一運動に於ては、例ば重力の仕事は、重量と始點終點間の高さの差との積に等し、又實に此差は終點が始點より低きか高きかに從ひ正又は負の符號を有せざるべからず。



上述よりして尙ほ若干の注意を導く。

先づ「仕事」と云ふと「力の働」と云ふと同意義ならざること明なり。一物體が不變速度にて一圓を畫くに、物體に働かざるべからざる求心力は何の仕事もなさず、道の各極微部分は力の方向に直角なればなり。然れども求心力は「働」なきに非ず、各極微時間に於て物體に其既有の速度に尙一速度を與ふればなり。

又一般に、一質點の道を多くの部分に分てば、仕事は各極微部分に於ける仕事を計算し、結果を互に加へて見出さると云ふ定理（一一三節 $d$ 參照)適用するなり。

終りに諸定義は力及其作用點の運動のみに就て云ひ、此運動が此力自身に依りて生ぜらると云はざるに就て注意すべし。點は觀察せる力に無關係に或初速度を有し得べし、又觀察せる力の外に尙ほ同時に運動に影響を有せる他の諸力働き得べし。此の如き場合に於ては各個々の力に就て所與の規則に從ひ仕事を見出し得べきなり。

**一二一　數力の合成の仕事** (Work of the Resultant of many Forces.) 三五圖又は三六圖(44–5頁)にて $AC$ を以て $A$ 點に作用せる二力 $AB$ 及 $AD$ の合力とし、點は $AX$ の方向に無限小の變位 $\delta$ をなせりとす。三〇節に於て $AC$ の此方向に於ける投影は $AB$ 及 $AD$ 各の投影の代數和なるを知れり。之を表はせる方程式に $\delta$ を乘すれば次の定理を得。

合力の仕事は其一力の仕事と他の力の仕事との代數和なり。

此定理を二個以上の諸力に擴張し得べし。又常に道を無限小の部分に分ち、各部分に就て今見出せることを應用し得る故に、此定理は

凡ての運動に就て之を適用し得べし。

例ば一質點が二個の固定せる中心よりの引力の作用の下に一曲線を畫けりと假定すべし。是に於て第一の中心よりの引力 $K_1$ は方向及大さに於て絶えず變化すべし、第二の中心よりの引力 $K_2$ も同様なり。其間に於ける關係を知れば、道の各點に於て $K_1$ 及 $K_2$ の合力 $R$ を定め得べし。今一二〇節 $d$ に示せる仕方に依りて、道の各任意部分に就て夫々仕事を計算すれば

1. $K_1$ の仕事 $A_{K_1}$,
2. $K_2$ 　〃　 $A_{K_2}$,
3. $R$ 　〃　 $A_R$,

即ち

$$A_R = A_{K_1} + A_{K_2}.$$

**一二二　仕事と運動エネルギーとの關係** (Relation between the Work and the Kinetic Energy.)　一質點が唯一の力の影響の下に動けば任意の時間に於ける力の仕事は點の運動エネルギーの增加に等し。此定理は既に一一六節に於て運動の方向が力の方向と一致せる場合に就て證明したり。今其の一般に眞なるを知り得べし。一不變力 $K$ が運動に反對し、速度を減少せる場合には定理は簡單なり。然れば 170 頁に於ける如く論じ得べく、唯範式 (4) は

$$v' = v - \frac{K}{m} t$$

にて置換すべし、又力の仕事は

$$A = -Ks = -\tfrac{1}{2}(v'+v)Kt$$

にて與へらる。是よりして再び

$$A = \tfrac{1}{2}mv'^2 - \tfrac{1}{2}mv^2$$

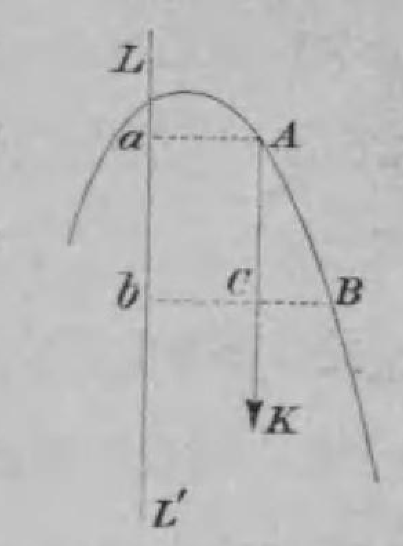


を得。

此方程式は今兩側共に負にして即ち證明すべかりし定理を表はせり。尙 170 頁既述の如き、運動エネルギーの減少は物體が自らなしたる仕事に等し、と云ふ定理と是とは密に相關聯せり。

又力と方向を異にせる運動の場合に就ては、先づ力が不變なる方向及大さを有する場合より始む。然れば既知の如く道は一拋物線なり (九七圖)。一線 $LL'$ への、即ち力 $K$ に平行なる方向への質點の投影は一樣に加速又は減速せる運動をなす。$LL'$ に直角なる分速度は一不變値 $w$ を有するなり。今 $t$ 時間に於て點が道の一部分 $AB$ を進み、又 $A$ 及 $B$ に於ける速度を $v$ 及 $v'$ にて、又 $u$ 及 $u'$ を以て $a$ 及 $b$ 點に於て投影の有せる速度を記すとせば

第九七圖




$$ab = \tfrac{1}{2}(u'+u)t.$$

又 $u'-u$ は點が $t$ 時間に於て既有の速度に加ふべき速度なる故に

$$K = \frac{m(u'-u)}{t}.$$

力の仕事は (一二〇節 $d$)

$$A = K \times ab,$$

是よりして

$$A = \tfrac{1}{2}m(u'^2 - u^2)$$

を得。又

$$v^2 = u^2 + w^2 \qquad 及 \qquad v'^2 = u'^2 + w^2$$

なる故に

$$A=\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv^2.$$

是よりして又容易に、點が觀察せる時間に於て力の作用に反對して拋物線を「昇る」場合にも亦然るを考へ得べし、然れば唯方程式の兩側は負なるのみなり。

終りに定理を方向及大さに於て任意に變化せる一力の影響の下の運動に擴張し得べし。即ち觀察せる時間を無限小の部分に分ち、各部分の間に力の方向及大さが變らざりしと假定し得べし。速度 $v$ と共に運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ も亦刻々に變化す。前記の範式に依りて、第一極微時間内に於ける力の（正又は負の）仕事は $\frac{1}{2}mv^2$ の（正又は負の）增加に等しと云得べし。

此の如き方程式を各極微時間に就て設け得べし。凡て是等の方程式を加ふれば次の定理を得。

力の全仕事は $\frac{1}{2}mv^2$ の全增加に等し。

**一二三　一つ以上の力の影響の下に於ける一質點の運動** (Motion of a Material Point under the Influence ol more than one Force.) 各瞬時に就て作用の諸力全體を單一の力に合成し得べし。然れば此一力の仕事は運動エネルギーの變化に等し。一二一節に證明せるものに依りて又次の如く云得べし。

運動エネルギーの增加は質點に働ける種々の力の仕事の代數和に等し、又屢之を凡て此等の諸力の全仕事に等しとも云ふ。

故に定理の應用に就ては諸力を先づ合成することを要せず。

多くの場合に於て諸力の一が絕えず運動の方向に直角にして、從て何の仕事もなさゞることに依りて事柄は尙簡單となる。

**一二四　應用** (Applications.) $a$) $A$ と $B$ とを二水平面とし、$A$



が $B$ の上方距離 $h$ に在りとす。一質點に重力が働き、$A$ の一點より任意の方向に速度 $v$ を以て發したるとき、其の $B$ 平面に到着したるときの速度 $v'$ は容易に計算し得べし。即ち $m$ が點の質量にて、$mg$ が其重量なれば、重力の仕事は $mgh$ なり。是によりて

$$\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv^2=mgh$$

なり。即ち

$$v'=\sqrt{v^2+2gh}$$

之に反して點が一速度 $v$ を以て下の平面より發して、上の平面に若し是が達したるならば、其際の速度は

$$v'=\sqrt{v^2-2gh}$$

此等の方程式に於ては、如何なる方向に運動が始り、又第二平面の如何なる點に出會すとも同一なり。例ば點を初速度 $v$ を以て $B$ 平面より垂直或は斜の方向に於て $A$ の方に昇らしめ、其畫く拋物線が恰も $A$ に頂點を有する樣に昇らしめ得べし。此等二個の場合に於て此平面に到着する速度 $v'$ は同一なるべし、然れども第一の場合には此速度垂直にして、次の場合には水平なり。

拋物運動に於ては物體は其道の上、頂點の兩側に於て同じ高さに在る二點に於ては同一速度を有す。

$b$) 完全に滑かなる斜面を距離 $s$ 落下したる一物體の終速度を定めんとす。先づ運動の時間 $t$ を定むべし。即ち傾角 $\alpha$ なれば、加速度は $g\sin\alpha$ なり。故に

$$s=\frac{1}{2}g\sin\alpha . t^2,\quad 即ち\quad t=\sqrt{\frac{2s}{g\sin\alpha}}.$$

是よりして終速度

$$v=g\sin\alpha\cdot t=\sqrt{2gs\sin\alpha}\quad\cdots\cdots(8)$$

を得。

此結果は容易に前節の定理を用ゐて求め得らるべし。即ち物體には重力及平面の抵抗作用す、然れども後者は運動の方向に直角なる故に何の仕事もなさず。 $m$ が質量なれば、重量は $mg$ にして、落下の高さを垂直の方向に $h$ とすれば、重力の仕事は $mgh$ なり。 従て

$$\tfrac{1}{2}mv^2=mgh$$

即ち

$$v=\sqrt{2gh}\qquad\text{.(9)}$$

$h=s\sin\alpha$ と置けば範式 (8) に同じ。

$c)$ 前述の方法は任意に曲れる完全に滑なる表面上、垂直の高さ $h$ 落下せる一物體に應用せられ得るの利あり。即ち此場合にも亦表面の抵抗は何の仕事もなさず。再び範式 (9)を得べし、即ち終速度は表面の形に無關係なるを知る、但終速度の方向並に運動に要する時間は種々なるべし。 $v$ は常に高さ $h$ の自由落下に於けると同大なり。是は又物體が延びざる絲に結び付けられたる場合(數學的振子)にも然り。 こゝに絲の張力は何の仕事もなさず、何となれば此力は物體が畫く圓弧に直角なればなり。

$d)$ 一本の絲に吊されたる此の如き物體、又は一曲面上に在らざるべからざる一物體が其一位置に於て速度 $v$ を有すれば、高さの差 $h$ なる任意の尙ほ低き位置に於て有する速度は

$$v'=\sqrt{v^2+2gh}$$

なり。 之に反して出發點よりも垂直の高さ $h$ 丈高き一點に於ける速度は

$$\sqrt{v^2-2gh}.$$



$h=0$ なれば $v'=v$ なり。 即ち數學的振子は其平衡の位置より同距離兩側に於て隔たれる二位置に於て同速度を有す。一位置より他へ移り行くに於て重力は初めに正の仕事、次に同大の負の仕事をなす。

斯くして若し運動が何の抵抗にも打勝つ事を要せざれば、數學的振子は平衡の位置の右及左に常に同じ振れを得べきを知る。

$e)$ 此の如き振子の物體が平衡の位置に在るとき、之に急に打擊を加へて小なる水平速度を與ふれば、其の昇る垂直の高さは同じ初速度にて垂直に抛上げられたる物體の昇る高さに等し。

**一二五　諸質點の系** (System of Material Points.) 一二二節の定理を個々の各點に應用して之等を加ふれば、系の任意運動に於て全運動エネルギーの增加(一一六節)は諸點に作用せる凡ての力の仕事の代數和に等しき事を知る。

計算に於ては諸力を任意に數群に分ち、先づ各群に就て仕事を定め得べし。 例ば先づ外力即ち外方より系に作用せる諸力を考へ、次に諸質點が相互に作用せる內力を觀察すべし。是に於て $K$ を $P'$ 點が $P$ 點に作用せる力とし、 $K'$ を $P$ が $P'$ に作用せる力とすれば、兩者の仕事を算入せざるべからざるを考へざるべからず。$K$ の仕事は $P$ の變位に關係し、之に反して $K'$ の仕事は $P'$ の變位に關係せり。

**一二六　重力の場合に於ける位置のエネルギー** (Energy of Position in the case of Gravity.) 今重量 $P$ の一物體が其運動の間常に一水平面 $V$ 例ば一机面より上に在る如きものゝ現象に就て研究すと假定す。 此平面上 $h$ なる高さに於て、文字 $A$ を以て記すべき一