大學叢書

工程數學

尹伯平
尹仲容 合譯

商務印書館發行

中華民國三十年二月初版
中華民國三十七年一月三版

(51251平)

大學叢書(教本) 工程數學一冊
The Mathematics of Engineering

平裝 定價國幣貳拾元
印刷地點外另加運費

原著者 Ralph E. Root
譯述者 尹伯平 尹仲容
校訂者 顏任光
發行人 朱經農 上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館 各地

(本書校對者王永榜)

大

原 序

本書爲應美國海軍大學研究所（Postgraduate School, United States Naval Academy）學生數學的需要，經著者十三年之努力所產生。開始時，著者編著數章以補充當時用作教本之某標準微積分學之不足，以後復寫數章以代替教本上之某數章，就學者之所需，逐漸增加，遂成此書。自 1923 年以來，卽以油印本在海軍大學研究所用作教科書，其形式與現今付印者大致相同。所中學生預備專攻之工程科各異，有機械，電機，土木工程，航空工程，無線電通信，氣象，海軍建築工程，及數種軍械工程等科。每組學生最後分別送至以該組學生所攻各專科見長之大學或專門學校修習一年或數年。故此處所選教材若果適於海軍學生，則著者必認識工程教育之趨勢，一般近代工程師所需之數學知識當不出此書範圍。

或以爲第五章與第七章可略去，因讀本書之學生應早了解此二章內容。但著者過去發現此二章能以極短時間令學生溫習一遍，爲益匪小。善教者且可以第七章爲初等解析幾何教本，但此章與第五章均係將學生已學各點作簡明扼要之重述。或有人願保留供參考之用。微積分初步亦係溫習性質，研究所學生習此書時已先讀初等微積分學，其他學校情形當有與此相同者。

本書敍述較高深部分恐不甚合一般數學家之胃口，因所論不甚詳盡。但本書包括題材甚廣，每題僅就最合工程師所需者討論，故只能作簡略之敍述。

陳述命題與證明命題之謹嚴本書不能處處一致。但仍力求其精密妥當，俾讀者充分了解，不致誤用所舉諸原則。在淺近部分，證明或甚詳盡，或僅舉大略，或僅有提示，或全部略去。對於高深之部分，則更注意於正確解釋，而稍忽略數學的謹嚴性之發揮。爲簡便計，較難

之命題多述而不證，求其能致用足矣。

凡教科書自須留教師補充之部分，編輯本書時，亦假定學生能藉教室內之討論獲益。若未讀大學一年級數學課程，必須取代數學，三角學，及解析幾何學之標準教本預備充分始能閱讀本書。讀畢此書後，欲作進一步之研究，可讀 Wilson 氏 "Advanced Calculus", Osgood 氏 "Advanced Calculus", Goursat-Hedrick 二氏 "Mathematical Analysis" 及其他關於或然率，最小二乘冪法，福利 (Fourier) 氏級數，諸函數分析，及微分方程式等之專書。本書章末多列有參考書目，俾學者自由選讀，一方面足以補充各章所論，一方面得知與此有關之題材。

本書爲工程師而作，編輯時力求其便用便查，但此書並無手册 (Handbook) 之性質。讀者必須另備工程學方面之手册及數學表。對數表，三角函數表，指數函數表，或然率積分表，簡單積分表，均爲不可少之工具。能備雙曲線函數表，自然對數表，橢圓積分表等更妙。

爲保持工程師之觀點且維持其興趣起見，藉以說明之例題多採工程上之專門問題，但除用以說明當前數學問題與實際問題的關係外，本書初不欲侵及他科之範圍。多數實用習題之選擇亦同此目的。題中敍述頗詳，俾學生不必查考其他專門書籍卽可運用數學原則以解題。研究所學生讀此書時，同時習力學及工程各科。但力學課程如先習畢，數學課程與其他工程科目平行研讀實較便利。

研習本書至相當標準，約須上課 125 至 150 次。程度優良學生自可略去淺近部分。全部習題固非任何學生所能演畢，但著者謹以至誠忠告讀者，至低限度須將全部習題閱讀一遍，因習題中包括豐富之教材，其排列由簡及繁，非完全閱讀無以得其線索也。

習題或自擬或採自他書，不復列舉書名。著者甚感合作同志有價值之批評與指示。Brumble, Rawlins 二教授曾採用此書之油印本數年，對此書貢獻尤多。在校或畢業同學，著者敬謝其改正書中或習題中之誤點。海大研究所當局之勉勵與合作，及其傳達畢業生對此書之批評，著者亦謹於此申謝。

Ralph. E. Root. 19[illegible]7 年。

目 次

工程數學

第一章　函數及其記法,函數之圖形

第一節　函數關係及其記法

量(quantity)之意義爲人所熟知。量皆有值，表量之值，或以不名數 (abstract number) 或於數後附通用之單位。在討論某問題時，量之值始終不變者，謂之常量或常數 (constant)，如討論時量可變動,或可有不同之值,則謂之變量或變數(variable)。例如以桶盛水，水由一管洩出,可任意以立方呎,立方吋,磅,噸,加侖等表水之量。計算時只用不名數,算得之結果仍須附以適當之單位。設討論桶水洩盡所需之時間,或水面低落之速率，則水量當視作變量，而桶之尺寸則爲常量。如討論水面在一定高度時，桶內各點之壓力，則桶內之水應視爲常量,而水面下各不同深度之壓力爲變量。

變量與常量之不欲標出其特值者可以字母或記號代之。量與量每有相互發生關係者，如此量有定值時彼量亦隨之而定。設變量 y 與變量 x 相關，當 x 定後 y 僅有一個對應值，則 y 稱爲 x 之單值函數 (single valued function)。如對於同一 x 值，y 有二個或若干個對應值，則 y 稱爲 x 之雙值或多值函數(double or multiple valued function)。單值多值雖不同，而 y 爲 x 之函數則一。在上述之例中，若桶之尺寸及管之大小已定,則水洩盡所需之時間視水之深淺而定，故時間爲深度之函數。若水之深度及管之大小已定，且桶係圓柱體，則所需時間爲圓柱體半徑之函數。故洩水所需之時間爲水之深度，管之大小，及桶之尺寸三量之函數。事實上引人注意之多種量往往爲數

個變量之函數。若將某一變量以外之其他變量均予以定值，則所欲論之量可視爲某一變量之函數，從而察出此二量間之關係。

函數關係可用各種方法確定之或說明之。最簡單者，即定一規律，藉以計算對應於 x 各值之 y 值。例如

$$y=3x+3;\quad y=\sqrt{6-x^2};\quad y=\frac{x^2-4}{x+3}$$

各式均由 x 值計算 y 值之規律也。說明 y 與 x 之幾何的或物理的關係，亦爲確定函數關係之一法，例如 y 爲球之體積，x 爲其半徑，或 y 爲某梁(beam)之彎距(deflection)，x 爲梁之擔負(load)，或 y 爲某管洩水之速度。x 爲水頭(head) 皆是也。將 x 與 y 之各組對應值列表，亦足表函數之關係，如習見之對數表，三角函數表是。第四法以圖形表函數之關係，就圖可推出對應於 x 各值之 y 值。設僅欲表示函數關係，而不欲說明其關係之如何，或函數之關係已定欲以記號表之，常用之記法爲

$$y=f(x),\quad y=F(x),\quad y=\phi(x)\text{等:}$$

讀作 y 爲 x 之 f 函數；或 y 等於 x 之 f；y 等於 x 之 F；y 等於 x 之 ϕ。f, F, ϕ 等字母表示不同之函數。

設變數 y 爲變數 x 之函數，則 x 爲自變數 (independent variable)，y 爲因變數 (dependent variable)。函數之觀念含有二要素：(1)自變數僅能在某一組數內任取一值，此一組數稱爲自變數之變程(range)。(2)變數間必有對應律(law of correspondence)藉以在自變數變程內定因變數之值。苟無對應律，或自變數不在其變程內，雖有函數記法，亦無從確定此函數之特性。

設 y 爲 x 之函數，則當 x 在某變程內，y 有對應之值。此一組 y 值亦可視爲 y 之變程，在此變程內，x 亦可視爲 y 之函數。在 y 之變程內任取一 y 值，其對應 x 值，即原先藉以求得此 y 值之 x 值也。故自變數與因變數之關係可以互易，惟 y 雖爲 x 之單值函數，x 仍可爲

y之多值函數。

第二節　函數之分類

函數可按自變數變程之性質分類如下：

(1)分立變數(discrete variable)之函數　例如幾何級數之首項為a，公比為r，則級數前n項之和為項數n之函數，

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

式中自變數n祇能為1，2，3等分立值，其變程為全部正整數。他如某市人口為時間（以年計）之函數；木樁入地之深度為捶擊次數之函數，皆屬此類。

(2)連續變數(continuous variable)之函數　此為更重要之一類。在上列級數求和公式內，設a與n為定值，則s為變數r之函數，r可為任何實數。實數中無有不可為r者，換言之，即r之變程內無隔斷之處，故r謂之連續變數。在下列各式內，

$$y=sin^{-1}x\ ,\quad y=\sqrt{4-x^2}\ ,\quad y=log\ x$$

變數x皆為連續變數，若y之值以實數為限則第一例之變程為自-1至$+1$之一切實數（包括±1在內），第二例之變程自-2至$+2$，第三例之變程則包括全部正實數。

實數一名詞，所以別於複數(complex number)，複數者含負數偶次方根之數也。數既有實有複，函數亦有實變數函數與複變數函數之別。複變數函數為高等數學中重要之一門，本書雖論複數，但對於函數之研究，則大都限於自變數變程之為實數者。

以對應律之性質為函數分類之根據較上述分類法更為重要。此法視因變數如何由自變數求出以為分類之標準。

(1)代數函數　在此類函數中將自變數x作有限次數之算術運算即得y之值。代數函數復可分為：

(a)有理代數函數 (rational algebraic functions) 運算僅包括加減乘除者屬於此類。多項式(polgnomials)爲此類之特例，式中僅有加減乘而無除。加減乘除謂之有理運算。茲舉此類函數之例如下：

$$x^3-\frac{5}{3}x+9\text{（多項式）。}\quad \frac{x-2}{x+5},\quad x^4-\frac{6}{x}$$

(b)無理函數(irrational functions) 此類除加減乘除外，多一開方之運算

$$\sqrt{x+1},\ \sqrt[3]{1-x^2},\ x+\sqrt{1-x},\ \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\text{等。}$$

(2)超越函數(transcendental functions) 此爲非代數的函數，不能以有限次數的運算求得函數之値。此類函數雖完全能用數學術語確定之，但根據此等函數定義祇能求得計算函數近似値之法（近似之程度則可隨人之所欲）。此類函數每有一定之名稱與記法，其値並列爲表以便查。重要之超越函數有：

(a)三角函數 如 $\sin x$, $\cos 2x$, $\tan\frac{1}{2}x$ 等。

(b)反三角函數 如 $\sin^{-1}x$, $\sec^{-1}x$ 等。

(c)指數函數 如 10^x, e^{2x} 等。

(d)對數函數 如 $\log x$, $\log(1-x^2)$等。

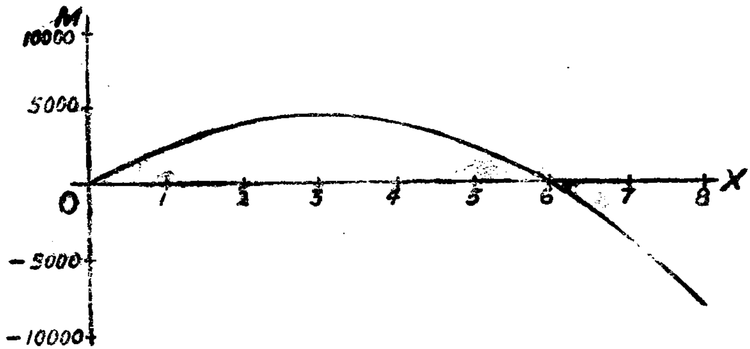
(3)經驗函數(empirical functions) 此類函數之定義不能用數學術語表出。其函數關係（卽對應律）藉科學之術語如物理學，醫學，社會學，經濟學中之術語以確定之。對應於各個不同之自變數之函數値，係以量度，觀察，或計數定之，通常僅能得其近似値。每組因變數自變數之値或列表或繪圖以記錄之，有時經驗函數可與某代數函數或超越函數相近，爲便於運算起見卽以之代替經驗函數。此類函數至爲重要，本書於第十三章內詳論之。

第三節　簡單函數之圖形

本節討論不以圖形表示之函數應如何就其式以繪出函數圖形之法。欲製函數之圖形必假設函數值已列成一表，或已知藉以求函數值之對應律。如函數尚未列成一表，繪圖之第一步即據對應律，選擇適當之自變數以求對應之函數值，製成一表。第二步為選定自變數之比例尺，繪於一水平線上，此線謂之橫坐標軸（axis of abscissas）。單位之選擇以能使變數之變程或其待研究之部分在繪圖紙上有適當之長度。第三步為選定因變數之比例尺，繪於一垂直線上，此線謂之縱坐標軸（axis of ordinates）。單位之選擇須使函數之極端值能繪於紙上。兩變數所代表之量性質各異，故縱橫坐標軸上之單位無甚重要之關係，但遇一部分幾何問題，則二軸上宜用相同之單位。第四步即以紙上之點代表表上各組相對應之數值，每點之位置正對縱橫二坐標軸上該點所代表之一組數值之處。如製表時自變數選擇適當，則以線連接諸點，即得函數之圖形。圖上沿水平方向量得之值曰橫坐標（abscissa），沿垂直方向量得之值曰縱坐標（ordinates）。

茲以第二節所舉各函數為例以說明之。關於分立變數之函數可捨而不論，蓋此等函數，按上法製得之點，各各獨立，無須以線連之，為醒目起見，不妨以若干段直線連接之，如是而已。對於連續函數，則問題不如是之簡單，茲就前述連續函數之分類法，依次討論之。

(1)代數函數　設 $y=f(x)$，而 $f(x)$ 為 x 之代數函數。此二變數之變程或囿於一部分之實數，或推至於無限大，或有正有負。將各值列表後，則應注意各點可以顯出，且可為選定 x,y 在圖上比例尺之助。



第 1 圖

例：設有長 8 呎之梁，固定其一端，而支柱其他端，其擔負爲每呎 1,000 磅。其彎曲矩(M)可以下列公式表之：

$$M=3000x-500x^2$$

式內 x 爲自支柱端之距離（以呎爲單位），M 之單位爲磅呎。將各值列表，x 之變程自 0 至 8，在此變程內，M 之變程爲 -8000 至 4500。故選擇比例尺俾函數之關係得以顯出，頗屬易事。表上各點標出後，以光滑之曲線連之，假定由其他 x 值計算而得之一組 x, M 值亦可以曲線上一點表之。

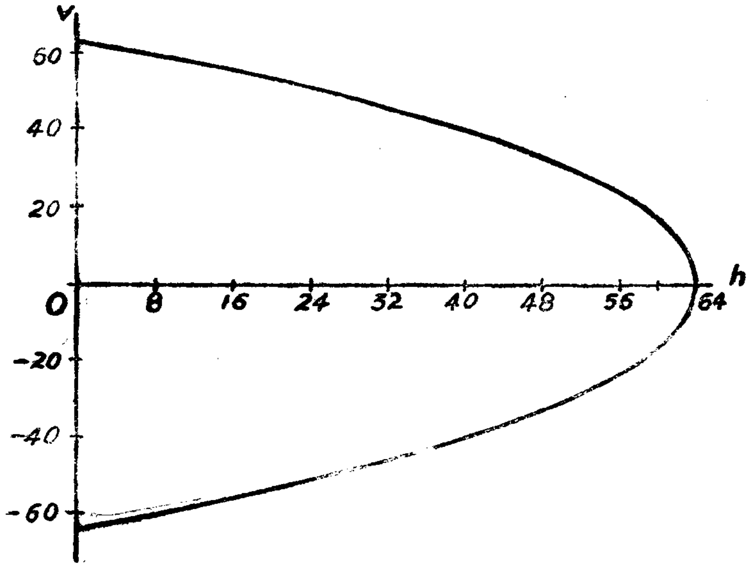
x………	0	1	2	3	4	5	6	7	8
M………	0	2500	4000	4500	4000	2500	0	-3500	-8000

例 2. 向上拋球，其初速度(initial velocity)爲每秒 64 呎，試以球與出發點距離 h 之函數表速度 v。設重力加速度 g 爲向下每秒每秒 32 呎，則

$$v=\sqrt{v_0^2-2gh}=\sqrt{4096-64h}$$

式中 v 爲速度（單位爲每秒呎），h 爲球高出出發點之距離（單位爲呎）。令 h 之值爲 8 之倍數，則計算較易，h 之最大值以 64 爲限，h 之負值可捨而不論。h 在 56 與 64 之間 v 變動極速，故表中加 $h=60$, $v=\pm16.0$。表內 $h=8,24,40$ 之對應 v 值卽不算出，亦無損於

圖形之準確性,速度爲 h 之雙値函數,其負數表示球下落時在距離爲 h 之速度。



第　2　圖

比例尺之選擇亦非難事。

h ……	0	8	16	24	32	40
v ……	± 64	± 59.8	± 55.4	± 50.6	± 45.1	± 39.2
h ……	48	56	60	64	-8	
v ……	± 32.0	± 22.6	± 16.0	0.0	± 67.7	

(2)超越函數　玆論前述之四種重要超越函數。

(a)三角函數　三角函數內之自變數可視爲一角,與他量比較計算時,其單位爲弧度(radian),通常視之爲不名數。三角函數如 $\sin x$, $\tan x$, 等施於實用時,x 除角度外尙可爲時間距離等。例如,擺(pendulum)之角位置(angular position)之近似公式爲:

$$\theta=\theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{L}}\, t$$

式內 θ 爲擺與垂直線所成之角，θ_0 爲 θ 之初值，g 爲重力加速度，L 爲擺之長，而 t 爲擺起始振動後之時間（秒爲單位）。此處 cos 後諸量包含有 g, L, t, 無一爲角度。三者之值固定，則得一量之餘弦，此量以弧度爲單位，並可照下式化爲度：

$$180°=\pi=3.1416 \text{ 弧度}$$

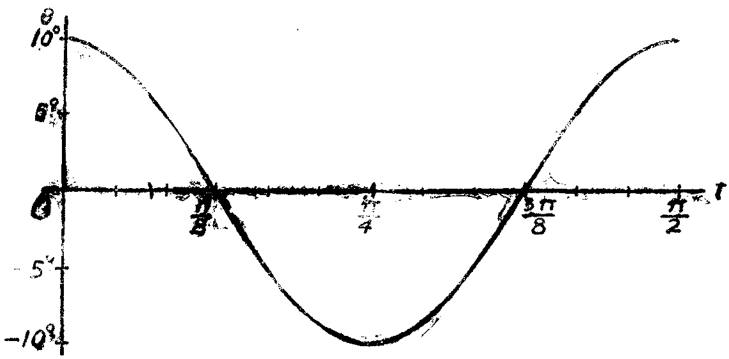
茲舉例以明製圖之法，繪 θ 爲 t 之函數，以 $\theta_0=10°$，$L=\frac{1}{16}g$，則

$$\theta=10° \cos 4t$$

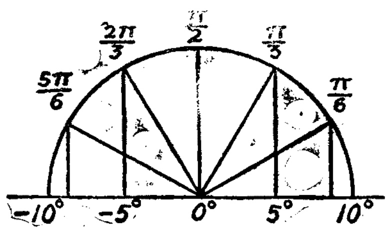
計算 θ 之值時。宜依次令 $4t$ 等於 $\frac{\pi}{6}$（即 30°）之倍數。蓋此函數當 $4t$ 達 2π 後，周而復始，相當於一次擺動；又 π 至 2π 間之餘弦與 0 至 π 間之餘弦等值而異號，故祇須計算至 $4t$ 等於 π 之 θ 值即足。茲將 t, $4t$, $\cos 4t$ 及 θ 之值合列一表，俾便計算。選擇 t 之比例尺時，應能表示擺完全振動一次，（即擺動來回各一次之謂），選 θ 之比例尺時，應能顯示曲線之性質。

t………	0	$\pi/24$	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$5\pi/24$	$\pi/4$
$4t$ ……	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$\cos 4t$…	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
θ……	10°	8.66°	5°	0°	$-5°$	$-8.66°$	$-10°$

$\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{4}$ 諸倍數之三角函數，可無須查三角函數表即易知其值。在任何題內欲知三角函數之值，或用表，或依其定義，以圖解法求之。例如繪第三圖時，可先繪一圓，其半徑照第三圖比例尺等於 $\cos 4t$ 之係數 10°。在圓周上標出 $4t$ 之值，則各半徑在水平線上之投影



第 3 圖



第 4 圖

(projection) 卽 θ 之對應值。第四圖示擺動一次，卽 $4t$ 自 0 至 π，之圖解法。

任何三角函數之圖形可以類似上述之方法繪之。所有三角函數均具週期性，卽當自變數遞增時，函數之値週而復始，故繪圖時繪其一週卽足矣。

(b)反三角函數　繪反三角函數之圖形，通常先將其變換爲三角函數，較爲便利。

設

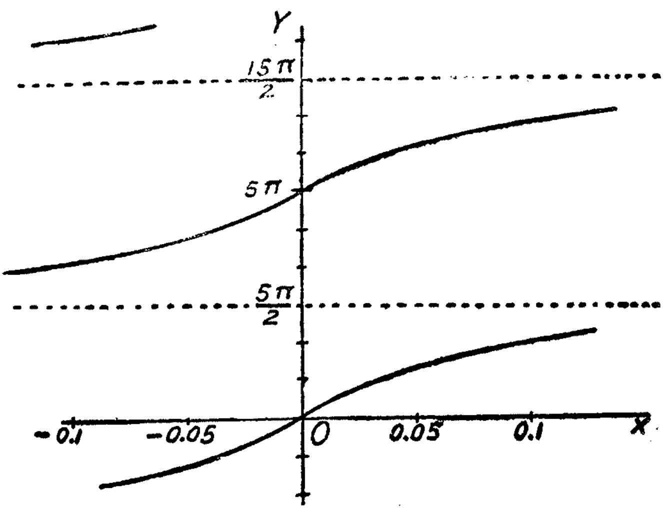
$$y=5\ tan^{-1}\ 13x,$$

可書爲

$$x = \frac{1}{16} \tan \frac{y}{5}$$

計算數值列表時，可視 y 爲自變數。製圖時，仍以 x 爲橫坐標，y 爲縱坐標，故圖繪就後，x 仍可視爲 y 之函數，（參看第5圖）。正切函數之性質可由其幾何定義察知，否則欲繪出其曲線，表內必須多列若干個數值方可。茲倣上述製餘弦圖形例，就正切之幾何定義，以圖

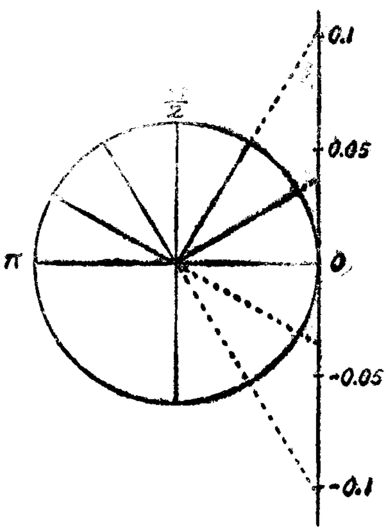
y ········	0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{25\pi}{6}$	5π
$\frac{y}{5}$ ······	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\tan \frac{y}{5}$ ···	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
x ········	0	0.036	0.108	∞	-0.108	-0.036	0



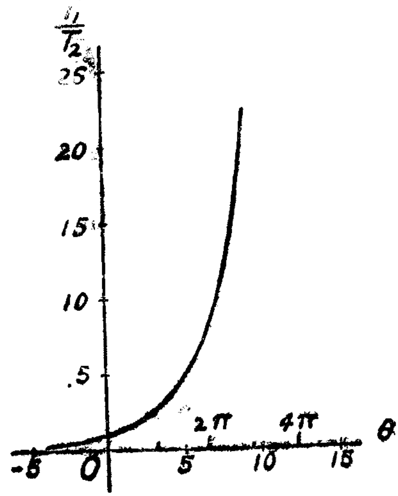
第 5 圖

解法求函數之各值，如第 6 圖所示。先繪一以$\frac{1}{16}$爲半徑之圓，在圓周上標出$\frac{y}{5}$之值，則半徑延線與 0 點上所作切線之截距卽 x 之對應值。切線及半徑之比例尺應與圖形內 x 之比例尺相同。此曲線具間斷性，當 y 爲水平虛線所示之值時，x 趨於無限大，且經過此值時，x 由正變負。此等虛線謂之曲線之漸近線(asymptote)。凡曲線上一動點沿曲線無限定的離開原點時，若與另一直線無限定的接近，則此直線稱爲曲線之漸近線。其他反三角函數之圖形均可倣此繪出。

(c)指數函數　在指數函數內，自變數在指數上。如選擇自變數適當，俾指數之值皆爲正整數，則函數之值可用乘法求得。若指數非



第 6 圖



第 7 圖

整數，或雖爲整數而計算甚繁，可利用印就之指數函數表以求函數之值。

設以繩或皮帶纏於滑車或絞盤上，繩兩端張力恰足使繩開始滑

動，則 $\frac{T_1}{T_2}=e^{\mu\theta}$，式中 T_1 爲較大張力，T_2 爲較小張力，μ 爲摩擦係數，θ 爲張於繩上滑車或絞盤之中心角，$e=2.71828+$。此數爲自然對數或納氏對數之底 (the natural or naperian base)，e 爲其標準記法。凡用此數爲底之指數函數具有數種特點，爲用他數爲底之指數函數所無，此點以後，當再詳論，設 $\mu=\frac{1}{3}$ 繪圖以示 $\frac{T_1}{T_2}$ 爲 θ 之函數。令 θ 等於 3 弧度之倍數，則指數皆爲整數，便於計算。角之負值在本題內殊無意義，但表內仍列一負值以便繪近 $\theta=0$ 處之曲線（第 7 圖）。

θ …………	-3	0	3	6	9
$\frac{T_1}{T_2}$ ……	0.368	1.0	2.718	7.389	20.086

圖內 θ 之比例尺上標出 π 之倍數。以便表示張於繩上之中心角爲若干度，或繩繞絞盤上之轉數，當 θ 增大時，$\frac{T_1}{T_2}$ 增加極速，故知絞盤上繞繩數周後，雖以大力曳繩，只須他端施以小力，即可使之不滑動。就滑車言，則 θ 之値常在 π 左右，故於 $\mu=\frac{1}{3}$ 時，$\frac{T_2}{T_1}$ 之値約在 2 與 3 之間。

(d) 對數函數　對數函數爲指數函數之反函數，故可變換爲指數函數，以處理之，或於對數表內查出其函數之値。

今有函數

$$y=log_{10}x^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}log_{10}x, \tag{1}$$

則

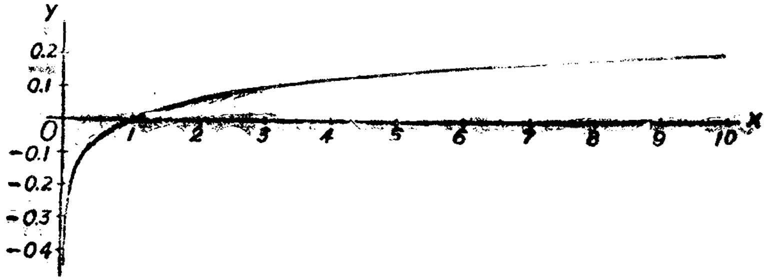
$$x=10^{5y}=e\,log_e^{10\cdot 5y} \tag{2}$$

欲知由(1)何以能推出(2)，只須求(2)式中三項之對數，得

$$log_{10}x=5y\,log_{10}10=log_e 10.5y\,log_{10}e \tag{3}$$

依對數定義，

$$log_{10}10=1 \text{ 而 } log_e 10 - log_{10}e=1,$$



第 8 圖

故(3)等於(1)，可見由(1)可推出(2)。數值表可由下式計算之。

$$x=10^{5y},$$

計算 x 之值時可令 y 爲$\frac{1}{5}$之倍數。

y ……	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$.
x ……	0.001	0.01	0.1	1	10	100

據表製曲線如第 8 圖所示。y 可有負值而 x 則恆爲正。Y 軸爲曲線之漸近線。欲使曲線稍準確應於 $x=\theta.1$ 及 $x=10$ 之間，多求數點。

習　題　一

1. 試說明球之體積爲其半徑之有理代數函數，但爲其面積之無理代數函數。

2. 矩形之固定寬度爲 12 呎，試表明其對角線爲長度之函數。並繪此函數之圖形。

3. 設矩形一邊長 10 呎，試表示兩對角線間之角爲他邊長度之函數，並繪此函數之圖形。

4. 以華氏溫度計上度數爲百分溫度計 (centigrade) 上度數之函

數，並繪圖以明之。

5. 以 $f(x)$ 代函數 x^2-3x+2，求 $f(0)$；$f(2)$，$f(-3)$，$f(2y)$，$f\left(\frac{x}{2}\right)$。

6. 設 $\phi(x)=\frac{1-x}{1-2x^2}$，而 $u=x^2+1$，證 $\phi(u)=\frac{x^2}{2x^4+4x^2+1}$

7. 設 $f(x)=\frac{1}{4}x^2$，證 $f(m+n)-f(m-n)=mn$

8. 設 $F(x)=e^{6x}$，證 $\frac{F(u)}{F(v)}=F(u-v)$。

9. 設 $f(x)=sin\ x+a\ cos\ x$，且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=o$，求定 a 之值。

10. 下列數據(data)得自鑄鐵樣品之壓力試驗。L 為樣品截面上之擔負（每平方吋千磅為單位），x 為壓縮量以樣品長度每吋縮短千分之一吋為單位。

L ········	8	12	16	20	24	28
x ·········	0.5	0.82	1.12	1.43	1.75	2.1
L ·········	32	36	40	44	48	49.8
x ······	2.48	2.94	3.5	4.3	5.4	6

繪圖以示 L 為 x 之函數。

11. 依所示 x 之變程，繪下列函數之圖：

(a) $y=x^2-\frac{1}{x}$；$x=\frac{1}{10}$ 至 $x=4$。

(b) $y=cos\ \frac{x}{2}$；$x=0$，至 $x=4\pi$

(c) $y=cot^{-1}x$：$x=-10$ 至 $x=10$，取 y 之最小正值。

(d) $y=3e^{-10}x$；$x=-0.1$ 至 $x=0.4$。

(e) $y=log_{10}(1+x)$；$x=0$ 至 $x=10$.

12. 某來復引擎(reciprocating engine)，其曲柄(crank)在各角位時活塞(piston)地位如下表所列。

曲柄角……	0	20°	40°	60°	80°
活塞地位……	0	3.75	14.3	29.7	47.5
曲柄角……	100°	120°	140°	160°	180°
活塞地位……	64.8	79.7	90.9	97.7	100

曲柄角位以離不動中心(dead centre)地位之角度表之，活塞地位則以來復動作開始時，動程(stroke)全長之百分長度表之。繪圖形以示活塞之位移(displacement)爲曲柄角位之函數。設曲柄之半徑爲一呎，每分鐘旋轉 120 次，且角速度不變，試估計活塞在動程中央時之速度。

第四節　複合函數之圖形

複合函數(compound function)者，前述簡單函數二個或多個以某種法則合併而成之函數也。茲分爲二部分討論之。

(1)縱坐標之合併　設函數之值可由二個或若干個簡單函數之值用加減乘除求得，則可先繪各簡單函數之圖形，然後就圖形上諸縱坐標之值施以運算。各簡單函數縱橫坐標應取同一比例尺。但計算各簡單函數之值時，選擇自變數可各就其便，不限取相同之自變數。設欲繪下列，函數之圖形

$$y=\sin\ 2x+2e^{-\frac{x}{4}}\cos x$$

式內有三簡單函數，

$$y_1=\sin\ 2x,\ \ y_2=\cos\ x\ \ y_3=2e^{-\frac{x}{4}}$$

繪 y_1 之圖形時，計算下列數值。

x ……	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
y_1 ……	0	0.5	0.866	1.0	0.866	0.5	0

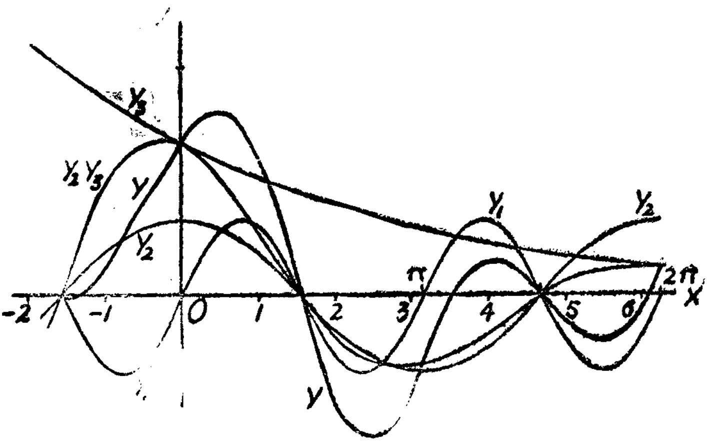
繪 y_2 圖形時，得值如下：

x ……	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$

y_2……	1	0.866	0.5	0	-0.5	-0.866	-1

繪 y_3 另選適宜之 x 值。

x ……	-2	0	2	4	6
y_3……	3.298	2.000	1.214	0.736	0.446



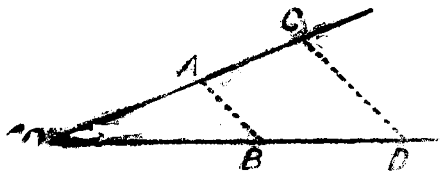
第 9 圖

求 y_3 之表內所列 x 變程，足使原點右有 y_2 之全波，原點左亦有 y_2 之一部份 變程擴張，自屬更佳，但比例尺縮小後，反不能表現各曲線之特點。y_1，y_2，及 y_3 三圖形繪成後，取對應於同一 x 值之 y_2 及 y_3 相乘以製 $y_2 y_3$ 之圖形。選 x 時當使 y_2 及 y_3 爲整數或簡單分數如 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ 等，以便計算。最後將 y_1 及 $y_2 y_3$ 二圖形之縱坐標相加，繪出 y 之圖形（第 9 圖）

計算 y_1 及 y_2 各值時，令 x 依次等於 π 之分數或倍數，計算 y_3 時則與 x 以整數值，故圖內 x 軸上，同時標出 $\frac{\pi}{2}$ 之倍數及若干個整數。

上例說明如何就圖形縱坐標施乘法加法，倣此，圖形上亦可施減法除法。加減之可用圖解，至爲簡明。乘除或據圖估計其值後，再作

數字運算，或用圖解以求之。設第 10 圖內 AB 與 CD 平行，則 $\frac{OD}{OC}=\frac{OB}{OA}$。



第 10 圖

欲求 y_1y_2 之積，令 $OA=1$，$OB=y_1$，$OC=y_2$，則 $OD=y_1y_2$。

欲求 $\frac{y_1}{y_2}$ 之商，令 $OB=1$，$OA=y_2$，$OC=y_1$，則 $OD=\frac{y_1}{y_2}$。

設所有一簡單函數之值可選同一自變數計算，而無不便時，則各表可併而為一，此複合函數可由表內數值直接計算，於是可以式示法代圖解法。計算時應充分利用計算尺，冪數表，根數表，倒數表，及他種數據表，不但可節省時間，且獲得準確之結果。

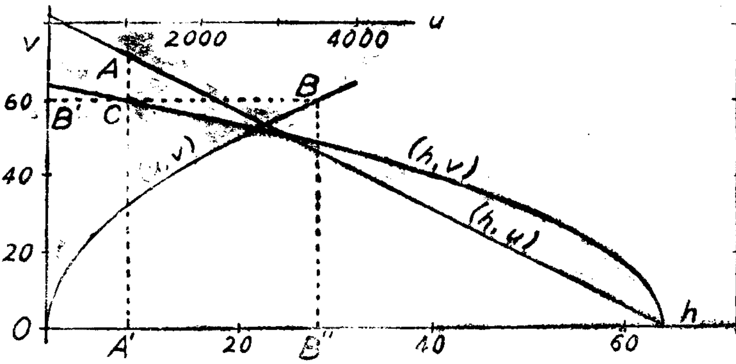
(2)函數之函數。圖解消去法　以前所舉之函數，如

$$V=\sqrt{4096-64h},\quad \theta=10^\circ\cos 4t,\quad x=10^{5v}$$

皆可視為函數之函數。設令 $v=\sqrt{u}$，或 $v^2=u$，而 $u=4096-64h$，則 u 謂之助變數(auxiliary variable)或參數(parameter)。兩式內消去 u，仍得 V 與 h 之原式。欲製圖表 V 為 h 之函數，可先繪 v 與 u 及 u 與 h 之圖形以得之。就 V 與 u 之關係得下表，

V……0	±10	±20	±30	±40	±50	±60
u……0	100	400	900	1600	2500	3600

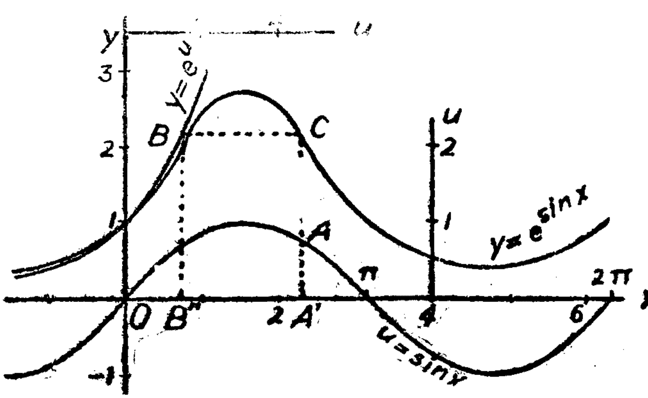
u 與 h 為直線，由 $h=o$，$u=4096$；$h=64$，$u=o$，二組值可決定直線之位置。第 11 圖僅示 V 之正值。三曲線皆繪於一處，以省地位。表明(V,u)關係之比例尺在上，表明(u,h)關係之比例尺在右。



第 11 圖

v 為 u 之函數及 u 為 h 之函數之二圖形繪就後，自易繪 v 與 h 之圖形。任意取 h 值如 OA' 其對應 u 值為 $A'A$。以 $OB''=A'A$，則 $B''B$ 為對應之 V 值，以 $A'C=B'B$，則 C 點為所求圖形上之一點。

就此例及上列之各函數而言，此法較之前述簡單繪圖法，並無若何優越之點，但遇某種函數，則此法殊為便利。例如 $y=e^{\sin x}$，以 $y=e^u$ 而 $u=\sin x$，用上述方法繪圖，成第 12 圖。因 $\sin x$ 不能大於 $+1$



第 12 圖

或小於 -1，故 u 之變程固定，而 y 亦不能大於 e 或小於$\frac{1}{e}$。此函數係週期的，自 $x=2\pi$ 至 $x=4\pi$ 之值，或自 $2n\pi$ 至 $(2n+2)\pi$ 之值，與 $x=0$ 至 $x=2\pi$ 之值完全相同。

習　題　二

1. 繪下列各函數之圖形：

(a) $y=2\cos x+5\sin x$;

(b) $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$;

(c) $y=e^{-\frac{1}{5}x}(3\sin x-2\cos x)$;

(d) $y=e^{2x}-e^{-2x}$;

(e) $y=2e^{x}+3e^{3x}$。

2. 設 PQ 爲平面上有定長之線段。如 Q 循平面上一直線移動，P 可循一稱爲引線弧(tractrics)之曲線移動，俾 PQ 恆爲曲線之切線。如令 Y 軸爲 Q 移動所循之直線，移動開始時，Q 在原點上，P 在 x 軸上，則曲線之方程式爲

$$y=a\log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)-\sqrt{a^2-x^2}$$

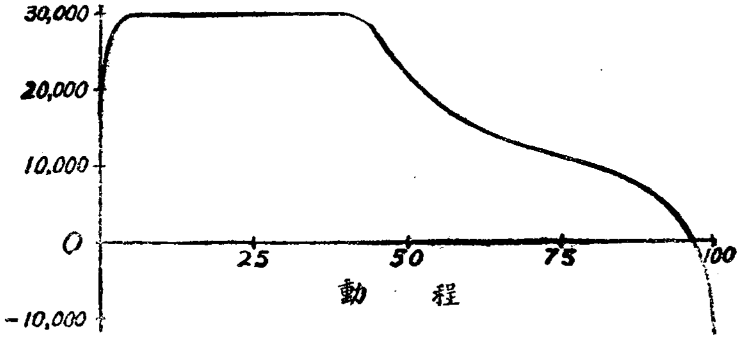
令 $a=2$，求繪此曲線。

3. 習題一，題 12 內之引擎活塞所受蒸汽壓力之合力 F 可視爲活塞位移之函數。其形如下圖所示。F 之單位爲磅，位移則以全動程之百分率表示之。此圖僅示向前之動程。習題一(12)以動程爲曲柄角度之函數。試就此二函數，求以力 F 爲曲柄角之函數之圖形。

4. 欲求上述引擎活塞之推力，須從 F 內減去用以加速活塞及活塞桿之力 Q。以 Q 爲曲柄角度 θ 之函數，其近似方程式爲

$$Q=5000(\cos\theta+\tfrac{1}{4}\cos 2\theta)。$$

用上題之結果，以繪圖表示 P 爲曲柄角度 θ 之函數自 $\theta=0$ 至 $\theta=180°$。



第 12 圖 下

5. 由下列方程式確定之函數 y，

$$y=tan^{-1}u,\ \ n=\tfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}),$$

稱爲 x 之古氏函數(Gudermannian)。以 u 爲助變數，繪此函數之圖形。此函數之標準記號爲

$$y=gd\ x,$$

多種數學表及物理表內皆有此函數之數值表，學者可用以校驗所得之結果.

第二章　極限與連續性

第五節　函數之極限

在數學中極限(limit)之觀念至爲重要，茲述其定義如下：

設有變數 u，按一定之規律變值，若 u 與一常數 k 相差之數值可使小於且此後恆小於任何預定之正數，則稱 u 按此規律變值，趨近於 k 且以之爲極限。

例如圓內接 n 邊正多邊形之面積，當 n 無限增大時，趨近於圓之面積且以之爲極限。此處 u 爲多邊形之面積，變值之規律卽多邊形必須等邊等角，且內接於圓內，邊數則可超過任何可指明之數，常數 k 卽圓之面積也。充分增大 n 可使 $k-u$ 小於且此後恆小於任何指定之面積。

多邊形按他種規律變值，亦可趨近於此同一極限值 k 者。例如多邊形可外切於圓，以代內接；或指定 n 爲偶數時內接，n 爲奇數時外切。後例之多邊形面積，時而較大於其極限時而較小於其極限。由此可知極限並非變數永不能達到或超過之界限。變數趨於極限時，可等於或超過之，但終須逐漸趨近此極限，較任何不與極限相合之定數爲更近。

在討論各種極限之前，宜先確定數種符號之定義。符號$<$及$>$分別讀爲『小於』及『大於』且可與等號合併而成$\leqq$（小於或等於）及$\geqq$（大於或等於）。後二者或簡寫爲$\leq$及$\geq$。符號$\neq$讀爲『不等於』或『不同於』。$|x|$ 讀爲『x 之絕對值』卽僅指 x 之數值而不問其正負號之謂。

如有某變數 u 隨 n 而變，則於下列數列內

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\cdots\cdots\cdots u_n,\cdots\cdots\cdots$$

欲說明當 n 無窮增大時，u 趨近於 K，且以之爲極限，可書爲

$$\lim_{n\to\infty} u_n = K$$

如關係式(1)能成立，則下列條件爲必要且爲充分：

預定一正數 ϵ，能求得一數 m，俾 $n>m$，則 $|u_n-k|\leqq\epsilon$。

條件所以稱爲必要者，蓋條件不滿足，則(1)不能成立；條件又爲充分，蓋條件既滿足，則(1)必能成立也。就適所論之變值規律而言，此條件可視爲極限一般之量的確切定義。

例如數列

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\frac{n}{n+1},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

之極限爲 1。此處 $u_n=\frac{n}{n+1}$，而 $\left|u_n-1\right|=\frac{1}{n+1}$，故預設一正數 ϵ 後，令 $m>\frac{1}{\epsilon}$，如 $n>m$，則

$$\left|u_n-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}<\frac{1}{m}<\epsilon$$

n 爲分立變數，茲一論連續自變數 x 之函數之極限 凡稱 x 趨近於 a 時，其函數 $f(x)$ 趨近於其極限 b 可書爲

$$\lim_{n\to a} f(x)=b \tag{2}$$

以極限之一般定義施於此處，則 $f(x)$ 即相當於變數 u；變值規律即包含於 $f(x)$ 之形式及『x 趨近於 a』一語內。式(2)表 a 爲 x 變程中之一值，或 a 與 x 之變程相關，俾 x 可與 a 近至所欲近；且表示使 x 趨近於 a 則可使函數 $f(x)$ 趨近於 b 且以之爲極限。

如關係式(2)能成立，則下列條件爲必要且爲充分：

預定一正數 ϵ，能求得一正數 δ，俾 $|x-a|\leqq\delta$，且 $x\neq a$，則 $|f(x)-b|\leqq\epsilon$。

條件內舉出 $x \neq a$，故可不論 $x=a$ 時 $f(x)$ 之值 $f(a)$。此值或等於或不等於 b，但不宜將 $f(a)$ 之值與 $f(x)$ 所趨之極限值相混。

設上述必要及充分之條件能適合，又設數列

$$x_1,\ x_2,\ x_3\cdots\cdots x_n\cdots\cdots,$$

中無一項等於 a 者，但當 n 無限增大時，x_n 趨近於 a 而以之爲極限，則對應數列

$$f(x_1),\ f(x_2),\cdots\cdots f(x_n)\cdots\cdots$$

當 n 無限增大時，趨近於 b 而以之爲極限。但此數列極限之存在尙不足以盡式(2)所欲表達之意義，蓋由定義，只須適合 $|x-a| \leqq \delta$ 且不等於 a 之 x 值即可，固不限於在某特殊數列中取 x 之值也。但在此特殊數列中，取 x 之值，自能適合極限存在之條件，故對應於此數列之函數值數列自必趨近於 b 而以之爲極限。

若不論 x 爲何數，$f(x)$ 恆等於常數 b，則(2)式能成立之條亦合，此點亦宜注意。

有時僅就 x 歷經大於 a 之值，以趨近於 a 時，論 $f(x)$ 所趨之極限。若依此變値規律，$f(x)$ 趨近於極限 b，則可書爲

$$\lim_{x\to a+} f(x) = b \tag{3}$$

倣此，若 x 歷經小於 a 之值，以趨近於 a 時，$f(x)$ 趨近於極限 b；則可書爲

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b \tag{4}$$

(3)與(4)能成立之必要及充分條件與(2)能成立之條件同，惟對於(3)，$x \neq a$ 應改爲 $x>a$ 對於(4)，$x \neq a$ 應改爲 $x<a$。

(3)與(4)型之極限每稱爲單向極限(unilateral limits)，前者稱爲右向(right handed)極限，後者稱爲左向(left handed)極限，蓋據函數之圖形命名也。

若 x 無限增大時，$f(x)$ 趨近於 b 以爲極限，可書爲

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \tag{5}$$

(5)式能成立之必要且充分之條件爲；

預定正數 ϵ，可求得一正數 m，俾 $x>m$，則 $|f(x)-b|\leqq\epsilon$。

倣此，若 x 歷經負數，而數值無限增大時，$f(x)$ 趨近於 b 以爲極限，則可書爲

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \tag{6}$$

(6)式能成立之必要且充分之條件與(5)能成立之條件同，惟 $x>m$ 須改爲 $x<m$。

解極限問題時，常遇某數種基本關係，亟宜首先敍述並證明之。令 u，v，y 表自變數 x 之三個函數，x 依(2)至(6)式所表諸變值律之一變值。此等關係式應用於分立變數 n 亦同等有效。

設 u 趨近於極限 b，v 趨近於極限 c，

(一)若 $y=u+v$ 則 y 趨近於極限 $b+c$。

(二)若 $y=uv$ 則 y 趨於此極限 bc。

(三)若 $y=\frac{u}{v}$ 而 $c\neq o$，則 y 趨近於極限 $\frac{b}{c}$。

玆假設 x 依(2)式變值以證明(一)。由題，設預定 ϵ_1 及 ϵ_2 二正數，可求得 δ_1 及 δ_2 二正數俾適合 $|x-a|\leqq\delta_1$，及 $x\neq a$ 之 x 值能使 $|u-b|\leqq\epsilon_1$，適合 $|x-a|\leqq\delta_2$ 及 $x\neq a$ 之 x 值能使 $|v-c|\leqq\epsilon_2$，前據以證明，預定正數 ϵ 後，可求得一正數 δ，俾適合 $|x-a|\leqq\delta$ 及 $x\neq a$ 之 x 值可使 $|y-(b+c)|\leqq\epsilon$。ϵ 預定後，令 $\epsilon_1=\epsilon_2=\frac{1}{2}\epsilon$，又令 δ 等於 δ_1 及 δ_2 之較小者，則凡適合 $|x-a|\leqq\delta$ 及 $x\neq a$ 之 x 值皆能使

$$|u-b|\leqq\frac{1}{2}\epsilon,$$

$$\left|v-b\right| \leqq \frac{1}{2}\epsilon,$$

此二不等式相加後，以 y 代 $u+v$ 得

$$|y-(b+c)| \leqq \epsilon。$$

若令 x 依(3)，或(4)式所示之變值律變值，則證明中須分別以 $x>a$ 或 $x<a$ 代 $x\neq a$。若 x 依(5)或(6)式所示之變值律變值，則須視 m 可否求得，而不必求 δ。茲令 x 依(5)式所示之變值律變值以證明(二)。

由題設，預定二正數 ϵ_1，ϵ_2 後，可求得 m_1 與 m_2 二數俾適合 $x>m_1$ 之 x 值能使 $|u-b|\leqq\epsilon_1$，又適合 $x>m_2$ 之 x 值能使 $|v-c|\leqq\epsilon_2$。茲欲證者，即預定正數 ϵ 後可求得 m 俾適合 $x>m$ 之值能使 $|y-bc|\leqq\epsilon$。令 $u=b+u'$ 且 $v=c+v'$，則

$$y=uv=bc+bv'+cu'+u'v'.$$

於此有三種不同情形。

第一，當 $b=o$ 及 $c=o$ 時，應證明 y 之極限為零。此時 $y=u'v'$，且預定 ϵ 後可求得 m_1 及 m_2 二數，俾適合 $x>m_1$ 之 x 值使 $|u'|=\epsilon^{\frac{1}{2}}$，又適合 $x>m_2$ 之 x 值可使 $|v'|=\epsilon^{\frac{1}{2}}$。若令 m 等於 m_1 與 m_2 中之較大者，則 $x>m$ 後，將有 $|y|\leqq\epsilon$.

第二，令因變數之一趨近於零而其一則否，例如 $b=o$ 而 $c\neq o$，於此應證明 y 之極限仍為零。此處，$y=cu'+u'v'$。u'，v' 既各趨近於零則依上列證明，其積亦趨近於零。故只須證明 cu' 趨近於零。泛定 ϵ 後，可求得 m，俾適合 $x>m$ 之 x 值可使 $|u'|\leqq\frac{\epsilon}{|c|}$，亦即使 $|cu'|<\epsilon$。cu' 與 $u'v'$ 既皆趨近於零則按關係(一)，知 y 趨近於零。

第三，設 $b\neq o$，$c\neq o$，則 $y-bc=bv'+cu'+u'v'$。倣上例可證明右端三項各趨近於零，故案關係(一)知其和 $y-bc$ 亦趨近於零，由此知 y 趨近於 bc。

欲證明（三），可先證$\frac{1}{v}$之極限爲$\frac{1}{c}$。按

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{c}=\frac{1}{vc}(v-c)。$$

預定正數 ϵ，由題設可得 x 之值使

$$\left|v-c\right| \leqq \frac{\epsilon c^2}{2},$$

且可同時使

$$\left|v-c\right| \leqq \left|\frac{c}{2}\right|$$

由後式可得$\left|v\right| \geqq \left|\frac{c}{2}\right|$，於是

$$\left|\frac{1}{v}\right| \leqq \left|\frac{2}{c}\right|$$

或

$$\left|\frac{1}{vc}\right| \leqq \left|\frac{2}{c^2}\right|。$$

於是得

$$\left|\frac{1}{v}-\frac{1}{c}\right| \leqq \left|\frac{1}{vc}\right| \cdot \left|v-c\right| \leqq \epsilon。$$

因 $y=u.\frac{1}{v}$，故按（二）知 y 之極限爲 $\frac{b}{c}$。

習 題 三

1. 證 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+3x}{2-4x}=\frac{1}{2}$，逐步註明（一），（二），（三）等關係之應用。

2. 求證 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+3x}{2-4x}=-\frac{3}{4}$。（提示：分子分母皆以 x 除之。）

3. 求證 $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$。（表明 δ 之值隨預定之 ϵ 而定）。

4. 當 x 無限增大時，$\cos x$ 並不趨近於一極限，試證明之。

5. 求證 $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x} = 0$。（$\epsilon$ 經預定後，令 $m = \log \epsilon$，卽得有效之 m 值）。

6. 證明 $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x} \cos x = 0$。

7. 證明 $\lim\limits_{x\to \pi} \sec x \cos 2x \sin\frac{1}{2}x = -1$。

8. 若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，則不論 k 爲何數，$f(x)$ 爲何函數，皆有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(kx)$，試證明之。

9. 設 $y = \sin\frac{\pi}{2x}$，求證：

(a)若 x 歷經數列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ \frac{1}{2n},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

中各值時，則對應數列

$$y_1,\ y_2, \cdots\cdots\cdots\cdots y_n, \cdots\cdots\cdots\cdots$$

以零爲極限。

(b)若 x 歷經數列

$$1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{9},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ \frac{1}{4n-3},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

中各值時，則對應數列以 1 爲極限。

由 (a) 與 (b)，證明 x 趨近於零時，y 並不趨於一極限。

10. 設 $y = f(x)$，令 x 歷經某數列之值，俾

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

並設 y 之對應數列以 b 爲極限，卽

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b,$$

試做題 9 證法，證明如 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，則其值必等於 b。

11. 明示條件(3)，(4)如能同時適合，即等於條件(2)。

12. 設 $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$，$\lim\limits_{u\to 1} \log u = 0$，求證 $\lim\limits_{x\to 0} \log \cos x = 0$。

13. 設 $u=f(x)$，$y=F(u)$，並設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k$，$\lim\limits_{u\to k} F(u)=b$，

試做上題證法，證明 $\lim\limits_{x\to k} y=b$。

14. 設不論 x 爲何值，恆有 $f_1(x)\leqq f_2(x)$，並設

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=b, \qquad \lim_{x\to a} f_2(x)=c,$$

求證 $b\leqq c$。

第六節　無囿變值

上節曾列舉函數趨於極限之條件。函數中有不趨於一極限，但仍循一定規律變值者，玆於本節論之。

設 x 趨近於 a 時，函數 $f(x)$ 之值遞增以至可超過任何定值，如此則稱，x 趨近於 a 時，$f(x)$ 變爲無限大 (infinite)。其習用之記法爲

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \tag{1}$$

此關係式能成立之必要及充分之條件爲：

預定一數 h 後，可求得一數 δ，俾適合 $|x-a|\leqq\delta$ 及 $x\neq a$ 之 x 值可使 $f(x)>h$。

由(1)之形式觀之，照前例應釋爲『當 x 趨近於 a 時，$f(x)$ 之極限爲正無限大，』實則 $f(x)$ 並無極限。是故(1)式之記法雖稍涉含混，讀者應知此爲無囿變值 (unbounded variation) 之一種，其涵義盡在適所舉之必要及充分條件內。

因無囿變值頗有類似極限關係之處，故用記號∞表函數之所趨，並稱之爲『無限大』視之彷彿如一數，不無便利之處。但∞並不代表何數，此記號此名稱所表者爲一理想的元素(ideal element)，此元素能適合數種類似代數關係式之式，故表以代數記號。此等關係式當於下文述及。

其他無囿變值之例可以下列諸式表之：

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \tag{2}$$

$$\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty \tag{3}$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = +\infty \tag{4}$$

$$\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty \tag{5}$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty \tag{6}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \tag{7}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \tag{8}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \tag{9}$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \tag{10}$$

讀者當能倣前例寫出上列各式之必要及充分之條件。實則在(1)式能成立之條件中，改$f(x)>h$爲$f(x)<h$即得(2)之條件；改$x\neq a$爲$x>a$即得(3)之條件。(7)能成立之條件爲：

預定一數h後，可求得一數m，俾適合$x>m$之x值能使$y>h$。

前節曾以記號∞表自變數變值之方式，此節復以∞表因變數之變值，但在陳述此等關係式能成立之必要及充分條件中，祇用普通數字及代數關係式而不涉及『無限大』之觀念。此等條件可視爲理想元素∞之定義；此元素如具有何種特性，必係根據上述條件所推出

者。

在第 5 節基本關係(一)(二)(三)內，函數 u, v 所趨之極限 b, c 係指一切有限數而言〔除關係(三)中 $b\neq o$ 外，o 亦包括在內〕。若 u, v 中有一或二者俱變為無限大，此關係(一)(二)(三)應呈何狀，不可不於此一論及之。至自變數則仍為 x，且仍依上列(1)-(10)或前節(2)-(6)之規律變値。

(一)′ 設 $y=u+v$,

(a) 若 $lim\ u=b$, $lim\ v=\pm\infty$ 則 $lim\ y=\pm\infty$,

(b) 若 $lim\ u=+\infty$, $lim\ v=+\infty$ 則 $lim\ y=+\infty$.

(c) 若 $lim\ u=-\infty$, $lim\ v=-\infty$ 則 $lim\ y=-\infty$。

在(a)內，u 之極限 b 可為正數，可為負數，亦可為零。(a)能成立蓋根據下列事實：卽預定 ϵ 及 h 後，令 x 變値，如能使 $u>b-\epsilon$, $v>h$ 卽能使 $y>h+b-\epsilon$。又預定 h 及 ϵ 時，h 恆表大數而 ϵ 表小數，故知 y 可使大於任何數。在(a)內如令 u, v 互換，結論仍同，蓋 $u+v=v+u$ 也。

讀者不難證明(b)與(c)，其中 u, v, y，三變數均變為同向無限大，正則俱正，負則俱負。若 u, v 變為異向無限大，一正一負，則非對 u, v 二函數之特性更加明瞭，無從決定 y 若何變値。

由(一)′及前節之(一)，得式如下：

$$(a)\ a\pm\infty=\pm\infty;\qquad (b)\ \infty+\infty=\infty。\tag{11}$$

此等適合於理想元素 ∞ 之關係式與代數關係式相似，但愼勿以為此卽代數關係式也。例如將(11)式中(a)，(b)二式移項得 $\mp a=\infty-\infty$，與 $\infty=\infty-\infty$。若視此二式為代數式，此等結果實屬矛盾。$\infty-\infty$ 蓋為一不定式(Indeterminate form)；卽上述 u, v 為異向無限大所呈之形，其値非明瞭 u, v 之性質，無從決定其値。

相當於第 5 節之(二)，此處有

(二)′ 設 $y=uv$,

(a) 若 $lim\ u=b>o$, 且 $lim\ v=\pm\infty$, 則 $lim\ y=\pm\infty$,

(b) 若 $\lim u=b<o$，且 $\lim v=\pm\infty$，則 $\lim y=\mp\infty$，

(c) 若 $\lim u=+\infty$，且 $\lim v=\pm\infty$ 則 $\lim y=\pm\infty$，

(d) 若 $\lim u=-\infty$，且 $\lim v=\pm\infty$ 則 $\lim y=\mp\infty$。

上列諸命題之證明均極簡，由此可得下列諸適於理想元素∞之式：

$$\text{(a)}\ (\pm b)(\pm\infty)=\pm\infty;\quad \text{(b)}\ (\pm\infty)(\pm\infty)=\pm\infty \tag{12}$$

此處士號之應用，指左端兩號相同則右端取＋號，左端兩號相異則右端取－號。在(12)(a)內之 b 表不等於零之數。若 u 趨近於零，而 v 變爲無限大，則非更明瞭 u 與 v 之特性，無法察知 y 之變値。換言之，$0.\infty$ 亦爲一不定式。

(12)式非眞表示乘法，不過爲(二)′中各條之簡單記號而已。

相當於第 5 節之(三)，此處有

(三)′ 設 $y=\dfrac{u}{v}$，

(a) 若 $\lim u=b$ 且 $\lim v=\pm\infty$ 則 $\lim y=o$，

(b) 若 $\lim u=\pm\infty$ 且 $\lim v=b$，又 $v>o$ 則 $\lim y=\pm\infty$，

(c) 若 $\lim u=\pm\infty$ 且 $\lim v=b$ 又 $v<o$，則 $\lim y=\mp\infty$，

(d) 若 $\lim u=\pm b\neq o$ 且 $\lim v=o$ 又 $v>o$，則 $\lim y=\pm\infty$，

(e) 若 $\lim u=\pm b\neq o$，且 $\lim v=o$ 又 $v<o$，則 $\lim y=\mp\infty$。

在(a)內，極限 b 可正可負，亦可爲零。在(b)內，極限 b 或爲零或爲正數，蓋當 v 趨近於 b 時，v 之値以正數爲限。至在(c)內，v 之値僅限於負數，故 b 或爲零，或爲負數。在(d)內，v 歷經正數趨近於零，在(e)內，v 歷經負數趨近於零，至(d)與 c 內之 u，則當 v 趨近於零時，趨近於不等於零之正數或負數以爲其極限。

由此諸命題，可得下式

$$\text{(a)}\ \frac{b}{\infty}=0;\quad \text{(b)}\ \frac{\infty}{\mathrm{b}}=\infty;\quad \text{(c)}\ \frac{b}{0}=\infty。\tag{13}$$

在(三)內，若 u 與 v 之極限均爲零，或二者均變爲無限大，則非

確知 u, v 變値之規律,無從決定 y 之極限。故 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 皆爲不定式。

由上述諸節,可見確知 u, v 變値之趨勢,可推得 y 變値之趨勢。有時雖不能確知 u, v 若何變值,(例如 u 與 v 中有一不趨近於某極限,亦不變爲無限大,)但仍能推得 y 變値之趨勢者。此等實例均包括於下列命題內,此等命題之有效與應用,均顯而易見,故不再加解釋。

(一)″ 設 $y=u+v$, 而 m 爲任何數,

(a) 若 $u>m$ 而 $\lim v=+\infty$ 則 $\lim y=+\infty$,

(b) 若 $u<m$ 而 $\lim v=-\infty$ 則 $\lim y=-\infty$。

(二)″ 設 $y=uv$, 而 m 爲任何正數,

(a) 若 $|u|<m$ 而 $\lim v=o$, 則 $\lim y=o$,

(b) 若 $u>m$ 而 $\lim v=\pm\infty$, 則 $\lim y=\pm\infty$,

(c) 若 $u<-m$ 而 $\lim v=\pm\infty$, 則 $\lim y=\mp\infty$

(d) 若 $|u|>m$ 而 $\lim |v|=+\infty$, 則 $\lim |y|=+\infty$。

(三)″ 設 $y=\frac{u}{v}$ 而 m 爲任何正數,

(a) 若 $|u|<m$ 而 $\lim |v|=+\infty$, 則 $\lim y=o$;

(b) 若 $\lim u=\pm\infty$ 而 $o<v<m$, 則 $\lim y=\pm\infty$,

(c) 若 $\lim u=\pm\infty$ 而 $-m<v<o$, 則 $\lim y=\mp\infty$,

(d) 若 $\lim |u|=+\infty$ 而 $|v|<m$, 則 $\lim |y|=+\infty$,

(e) 若 $|u|>m$ 而 $\lim v=o$, 則 $\lim |y|=+\infty$。

習 題 四

1. 試舉適合

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

之函數 $f(x)$ 若干個。

2. 試舉適合

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=+\infty$$

之函數 $f(x)$ 若干個。

3. 求證

$$\lim_{x\to 2+}\frac{x}{x-2}=+\infty \text{ 及 } \lim_{x\to 2-}\frac{x}{x-2}=-\infty,$$

4. 以簡號表下列各式

(a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \tan x$;　　(b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \sec x$;

(c) $\lim_{x\to 0+} \cot x$;　　(d) $\lim_{x\to +\infty} \tan^{-1} x$;

(e) $\lim_{x\to 0-} \csc x$。

5. 試述本節(4),(5),(6)三式之必要且充分之條件。

6. 討論 $\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}}$ 及 $\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}}$，並繪 $y=e^{\frac{1}{x}}$ 之圖形，自 $x=-1$ 至 $x=1$。

7. (a) 示 $\lim_{x\to 0+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=1$，先以 $e^{\frac{1}{x}}$ 除此式之分子及分母。

(b) 示 $\lim_{x\to 0-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=-1$，先以 $e^{\frac{1}{x}}$ 乘此分數式之分子及分母。

(c) 繪(a)與(b)所舉函數之圖形。

8. 述本節(8),(9),(10)三式之必要且充分之條件。

9. 討論下列各式：

(a) $\lim_{x\to -\infty} e^{x}$;　　(b) $\lim_{x\to +\infty} e^{x}$;　　(c) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$;

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

10. 證(一)'內之(b)與(c)。

11. 討論下列各式:

(a) $\lim\limits_{x\to0+}(x+\cot x)$; (b) $\lim\limits_{x\to0-}(\cot x+\csc x)$;

(c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}(\tan x+x^2)$; (d) $\lim\limits_{x\to\pi-}(\sec x-\csc x)$。

12. 討論下列各式:

(a) $\lim\limits_{x\to0+}\cot x$; (b) $\lim\limits_{x\to0}\sin x$; (c) $\lim\limits_{x\to0+}\sin x\cot x$。

13. 討論下列各式:

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\sin x\tan x$; (b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\sin x\tan x$; (c) $\lim\limits_{x\to0+}\cot x\log x$;

(d) $\lim\limits_{x\to0-}e^x\cot x$; (e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sec^{-1}x\log x$。

14. 討論下列各式:

(a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^{-1}x}{\log x}$; (b) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\log x}{\sin x}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{an^{-1}x}$.

15. 參看(一)''示

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\cos x)=+\infty$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sec^2x+e^x)=+\infty$。

16. 參看(二)''示

(a) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=o$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-2\sec^2x)\log x=-\infty$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}|e^x\csc x|=+\infty$

17. 參看(三)''示

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\sec x}=o$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^x}{2-\cos x}=-\infty$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\cot x}{\sin\dfrac{1}{x}}\right| = +\infty$；　(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\log(1-x)}\right| = +\infty$。

第七節　函數之連續性

設一函數 $f(x)$ 於 $x=a$ 有定值，換言之卽依此函數之定義，$f(a)$ 有定值，並設

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

則此函數謂之於 $x=a$ 處有連續性(continuous)。如二條件中有一不能適合，卽謂函數間斷(discontinuous)於 $x=a$。設令 x 等於 a, b 二數間之任何數，恆能使某函數連續，則稱此函數在 a 至 b 之間隔內有連續性；若此函數於 $x=a$ 及 $x=b$ 時亦爲連續，則稱函數在 a 至 b 之封閉間隔上有連續性。

間斷性種類甚多，玆將應討論之重要各類述之如下：

第一，設可求得一數 K，使

$$\lim_{x\to a} f(x)=K,$$

而此函數於 $x=a$ 無確值，或雖有確值，而 $f(a)\neq K$，則謂此函數於 $x=a$ 有可移間斷性 (removable discontinuity)，蓋如修改此函數之定義加 $f(a)=K$ 之規定，則此函數於 $x=a$ 仍爲連續。此種間斷性可以 $x\csc x$ 及 $x\cot x$ 一類函數說明之，因於 $x=0$ 時，此二函數皆呈不定式 $0.\infty$ 但在近 $x=0$ 處，

$$|\sin x|<|x|<|\tan x|$$

以 $\sin x$ 除之，得

$$1<|x\csc x|<|\sec x|,$$

若不以 $\sin x$ 除各項，而以 $\tan x$ 除各項，則得

$$|\cos x|<|x\cot x|<1$$

因 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\lim\limits_{x\to 0}\sec x=1$，如於 $x=0$ 規定 $x\csc x$ 及 $x\cot x$ 之値

為 1，則二者於 $x=0$ 皆變為連續函數。

再者，設有不相等之二數，h 及 k，俾

$$\lim_{x\to a-} f(x)=h,\quad \lim_{x\to a+} f(x)=k。$$

當 $x=a$ 時此函數或無確值，或等於 h 或等於 k 或等於任何其他數。則稱函數有有限間斷性 (finite discontinuity)。前節習題 7 卽其一例。

前節第 6 題為無限間斷性 (infinite discontinuity) 之一例。蓋

$$\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}}=0,\quad \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$$

而於 $x=0$ 則此函數無確值也。

再有更尋常之一種無限間斷性，可以 $x=\frac{\pi}{2}$ 之 $tan\ x$ 說明之。於此，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} tan\ x=+\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} tan\ x=-\infty$$

於 $x=\frac{\pi}{2}$ 則無確值。又如

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{(1-x)^2}=\lim_{x\to 1+}\frac{1}{(1-x)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+x)^2}=+\infty。$$

亦無窮間斷性之一例。其他間斷性可以 $x=0$ 之 $sin\ \frac{1}{x}$，$tan\ \frac{1}{x}$ 及 $sec\ \frac{1}{x}$ 說明之。前者除於 $x=0$ 外，其餘各處皆連續，於 $x=0$，函數既不變為無限大亦無單向極限。後二者不但於 $x=0$ 無單向極限，卽變為無限大亦不可能，且於 x 合乎下式之任何值時，皆有無限間斷性。

$$x=\frac{2}{(2n+1)\pi}$$

式中 n 為任何正負整數。

因連續性係以極限觀念確定其義，故連續性之研究，不過第 5 節所述極限特性及第 6 節所論諸點之應用而已。由此可知設二函數係連續的，則其和，其差，其積皆連續的，至二函數之比除分母爲零外，亦係連續的。若二函數有一或皆爲間斷的，則合併之函數或間斷或不間斷，視二函數之特性而定，其原則前兩節已論及之。

設 u 爲 x 之一連續函數，則 u 之任何正整數冪亦爲 x 之一連續函數，故 u 之任何多項式爲 x 之一連續函數，且兩多項式之比除 x 之值使分母爲零外，亦係連續的。

u 之分數冪係多值的，但僅有一個或二個實數值，茲暫以實數爲討論之範圍。設函數有二實數值，一正一負，就本節範圍而論，可視爲兩個不同之函數。如是則可謂一連續函數之正分數冪亦爲連續的。茲不詳論此命題而僅以例說明之。命 $k\neq 0$，並設

$$\lim_{x\to a} u=k$$

求證

$$\lim_{x\to a} u^{\frac{1}{3}}=k^{\frac{1}{3}}。$$

先書恆等式

$$u^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}=\frac{u-k}{u^{\frac{2}{3}}+u^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{2}}+k^{\frac{2}{3}}}$$

當 x 趨近於 a 時，則右端分子趨於零而分母則否，故左端之差數必趨於零。

初級超越函數(elementary transcedental functions)之連續性須根據其定義及第 5 節所論極限之各項特性，始能加以證明，本書一概從略。至下述各款則學者可承認其爲眞實，暫不問其證明。第一，設 u 爲 x 之連續函數，則函數 e^u，$\sin u$ 及 $\cos u$ 皆爲 x 之連續函數。第二，設 u 爲正數且連續，則 $\log u$ 亦連續。$\tan u$，$\cot u$，$\sec u$，及 $\csc u$ 可以 $\sin u$ 及 $\cos u$ 之有理代數式表出，故可據以討論

此等函數之連續性。反三角函數係多值的，但如規定其中之某一值表反三角函數，則設 u 為 x 之連續函數，且 u 之值可使此反三角函數為實數，則反三角函數亦為 x 之連續函數。

茲於本章末述一極有用之普遍定理，其證法非本書範圍所及。讀者在討論函數之連續性時恆宜繪出函數之圖形以資印證。若據下列定理之所假設以繪製圖形，欲得違反其結論之圖形實不可能，則讀者當承認此定理之能成立也。

定理：設函數 $y=f(x)$ 連續於封閉間隔 a 至 b 上，則可求得二數 h 及 k，俾適合 $a\leqq x\leqq b$ 之 x 值可使 $h\leqq y\leqq k$，又取一適合 $h\leqq m\leqq k$ 之 m 值，則可求得一適合 $a\leqq c\leqq b$ 之 c 值俾 $f(c)=m$.

習 題 五

1. 討論下列各式之連續性：

(a) $x^2+\sin x$; (b) $x-\cos x$; (c) $e^x-\sqrt{x^2+1}$

2. 舉若干個 x 之值俾下列各函數為間斷：

(a) $\dfrac{x+1}{1-\cos x}$; (b) $\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$; (c) $\dfrac{\sin 2x+e^x}{(x^2+2x+1)^{\frac{1}{3}}}$

3. 討論下列各式之連續性：

(a) $e^{\sin x}\cos x$; (b) $(x^2-3x+2)e^{-3x}$; (c) $\dfrac{x+3\cos x}{x^2+x+1}$

4. 討論下列各式之連續性：

(a) $x^3-2\tan x$; (b) $\log\cot x$; (c) $e^x\sec x$;

(d) $\dfrac{1-\cot x}{1+\cot x}$; (e) $\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ (f) $e^{\tan x}$

5. 試舉可能之最大間隔，俾下列諸函數連續於此間隔內，且包括下列 x 之某定值。

(a) $\tan 2\pi x,\ x=0.7$; (b) $\log\sin x,\ x=3$;

(c) $\sec x+\cot 2x$, $x=\frac{\pi}{6}$; (d) $\frac{x^2-5}{(x-1)(x+2)}$, $x=0$.

6. 證明下列各函數在所示封閉間隔上係連續的，並定 h 及 k 之值，俾便印證本節末段之普遍定理。

(a) $3\sin 2x$, 在封閉間隔 0 至 π, 上;

(b) $e^{3x}+x$, 在封閉間隔 -1 至 $+1$ 上;

(c) $\log\cos x$, 在封閉間隔 0 至 $\frac{\pi}{3}$ 上;

(d) x^2e^{-x}, 在封閉間隔 -2 至 5 上。

第三章　函數之導微函數

第八節　導微函數之意義

於前章內已知,設 $y=\frac{u}{v}$ 且 u 與 v 各趨於極限 a 與 b 而 b 又非零,則 y 趨於極限 $\frac{a}{b}$。又知,設 v 單向趨近於零而 u 不趨近於零,則 y 變爲無限大。如 u 與 v 均趨於零,則非更詳知函數 u 與 v 之性質,不能決定 y 之極限,本章所研討者均係分母分子皆趨於零之比數之極限,故每例均須就函數之形式以定其比數之極限。

有許多普通觀念內,卽含有上述比數極限之意義。吾人每舉車行時之速率。然則速率究爲何物乎?於某段路內從其所經時間而計算其速率,所能得者不過其『平均速率』而已。若將距離縮短,而計車經過之時間,然所得者仍僅爲此時間內之平均速率。以 s 表示某點所經過之距離,而 t 表示行此距離所歷之時間,則 $\frac{s}{t}$ 爲 t 時內之平均速率。所謂在某點之速率者,卽謂於 t 趨於零時 $\frac{s}{t}$ 所趨之極限是也。此速率可用每秒若干呎,每小時若干哩等表示之,視量距離時間所用單位若何而定,但此並非謂在某時間內此車行若干呎,或在某時間內,此車行一哩之幾分之幾也。

再如道及水或他種液體下某平面上某點所受之壓力。何謂某點之壓力?取平面上一部份所受之合力 F 而除之以此部份之面積 A,得『平均壓力強度』。所謂某點之壓力強度者,卽面積 A 趨於零而仍包含此點時,$\frac{F}{A}$ 之極限是也。

此類情形常發生於須用數學之各種問題內,每與連續變數之函數有關。茲以 x 爲變數,而以 y 爲其函數:

$$y=f(x), \tag{1}$$

令 y_o 爲對應於 x 等於 x_o 之函數位，卽

$$y_o=f(x_o),$$

並設此函數爲連續的，故 x 趨於 x_o 則函數値 y 趨於 y_o，此式內，於 $x-x_o$ 趨於零時，$y-y_o$ 亦趨於零，現所硏討者則爲當 $x-x_o$ 趨於零時 $(y-y_o)|(x-x_o)$ 之極限。普通以 Δy 代表 $y-y_o$ 而以 Δx 代表 $x-x_o$，蓋希臘字母 Δ 通常表示『差數』也。此二量稱爲 y 差及 x 差或 y 之增量(increment)及 x 之增量。

以 $x=x_o+\Delta x$，$y=y_o+\Delta y$，

代入(1)，得

$$y_o+\Delta y=f(x_o+\Delta x)$$

但

$$y_o=f(x_o)$$

故

$$\Delta y=f(x_o+\Delta x)-f(x_o)$$

以 Δx 除之，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}。$$

上式左右端之極限相等，以記號表之，卽

$$\lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to o}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} \tag{2}$$

此式右端之値在多種問題中可直接求得。不論求得之難易如何，依數學意義，此實爲解決此類問題之惟一方法。此極限値謂之在 x_o 處，y 對於 x 之導微函數(derivative)。

玆以此意施於速率問題。物體當運動時，自某點起所經距離爲時間 t 之函數。設

$$s=16t^2-10t$$

式內 s 之單位爲呎，t 之單位爲秒。當 $t=1$ 時，$s=6$，且就此函數之形式知 $t=1$ 時，函數爲連續的。欲求 $t=1$ 時物體之速率，可命 $t=1+\Delta t$，$s=6+\Delta s$，

$$6+\Delta s=16(1+\Delta t)^2-10(1+\Delta t)=6+22\Delta t+16(\Delta t)^2$$

化簡後，得

$$\Delta s=22\Delta t+16(\Delta t)^2$$

以 Δt 除各項，得

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=22+16\Delta t$$

上式表距離與時間之比。若 $\Delta t=1$，則 $\Delta s=38$ 表示自 $t=1$ 至 $t=2$ 物體共運動 38 呎。若 $\Delta t=\frac{1}{2}$，則 $\Delta s=15$，表示自 $t=1$ 至 $t=\frac{3}{2}$ 物體共運動 15 呎，在此半秒鐘內之平均速率爲每秒 30 呎。若 $\Delta t=-\frac{1}{2}$，則 $\Delta s=-7$，表示在前半秒內之平均速率爲每秒 14 呎。就上式，立知

$$\lim_{\Delta t\to o}\frac{\Delta s}{\Delta t}=22,$$

故當 $t=1$ 時之速率爲每秒 22 呎。

設有函數

$$y=f(x)$$

在某變程內，無論 x 爲何值，皆係連續的，且在此變程內，任取 x 之定值，皆可求得。y 對於 x 在該值之導微函數。如是，可不必規定 x_0 之地位，卽可逕以 x 之函數表示 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之極限。此新函數謂之 $f(x)$ 對於 x 之導微函數〔derived function or derivative with respect to x of $f(x)$〕。導微函數雖亦可用 $\phi(x)$，$f_1(x)$ 等代表之，但欲表示其與原設函數之關係起見，通常採用下列記號之一種

$$f^1(x),\ \frac{d}{dx}f(x),\qquad \frac{dy}{dx}\qquad D_xy,\qquad D_xf(x)。$$

$\frac{d}{dx}$及 D_x 兩記號可視爲『對於 x 之導微函數』一語之簡號，故記號後書 y 或 $f(x)$ 卽表示對 y 或 $f(x)$ 施求導微函數之運算以求得一新函數。此種運算謂之微分運算或微分法 (differentiation)。下式可視爲導微函數之定義。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to o}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\qquad(3)$$

以此應用於函數

$$s=16t^2-10t$$

得

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\frac{[16(t+\Delta t)^2-10(t+\Delta t)]-[16t^2-10t]}{\Delta t}$$

$$=32t-10+16\Delta t$$

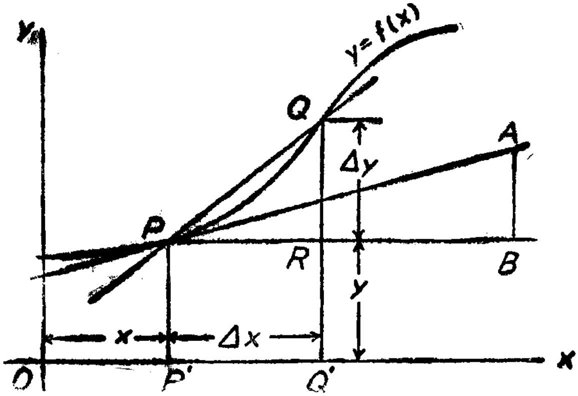
故

$$\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(16t^2-10t)=\lim_{\Delta t\to o}\frac{\Delta s}{\Delta t}=32t-10。$$

此爲 t 之一新函數，卽導微函數，以任何 t 值代入卽得此時之速率。當 $t=1$，速率爲 22，但當 $t=2$，則速率爲 54，故每瞬刻，各自有其一定之速率。

設第 13 圖內之曲線表函數 $y=f(x)$ 之圖形。當 x 之值爲 OP 時，對應之 y 值爲 $P'P$。當 x 等於此值時，欲求函數之導微函數，可一察 $\Delta x=P'Q'$ 及 y 之對應增量 $\Delta y=RQ$ 之變值。若 Δx 趨於零，則割線 PQ 繞 P 點旋轉，以趨於 PA 之地位。三角形 PQR 愈趨愈小，其形狀則趨於 PAB 之形狀，而比數$\frac{\Delta y}{\Delta x}$則趨於$\frac{BA}{PB}$。直線 PA 爲曲線在 P 點之切線，由此等關係，可見在函數之圖形上可估

計函數之導微函數之値，只須於 P 點畫一與 PA 相同之切線，與 PB 相同之水平線，與 BA 相同之鉛直線，而以與 y 相同之比例尺量 BA，以與 X 相同之比例尺量 PB 即得 $\frac{BA}{PB}$ 之値。



第 13 圖

當 X 變値而達 OP' 時，y 亦變値而達 PP'，此時 y 之增率與 X 之增率之比等於 BA 與 PB 之比。根據此點，可以文字表導微函數之意義如下：某 X 之函數對於 X 之導微函數即此函數之瞬刻變値率 (instantaneous rate of change of value) 以同時 x 之變値率量度而得之値也。因 x 爲自變數其値可任意指定，故可隨意定其增減之變値率。函數隨 x 而變，其變値率須視 x 之變値率如何而定，故必須以 x 之變値率度量之，y 之變値率始有明確之意義。速率者，距離之變値率以時間之變値率度量而得之數値也。謂某瞬刻物體之速率爲每秒 10 呎者，即謂距離呎數之增加爲時間秒數增加之 10 倍是也。

習題六

1. 求函數

$$y=2x^2-6x+5$$

在 $x=2$ 處之導微函數。先令 $\Delta y=y-1$，及 $\Delta x=x-2$ 以求 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之極限值，次令 $x=2$ 代入式內以求導微函數。

2. 一質點運動時，其距離 s（呎）與時間 t（秒）之關係為

$$s=40-2t-8t^2。$$

2 秒後，求此點之地位及速率；在 1 秒時如何？在開始計時之時如何？若視加速度為速率之變值率，求上述三個時刻之加速度。

3. 正方形之面積為邊長之函數。求此函數之式，及其導微函數，然後證明以邊長之，增加率量得之面積增加率為正方形周線（Perimeter）之半。

4. 試以立方體邊長之函數，表其體積並證明其導微函數之值等於立方體面積之半。

5 示圓形之面積增加率等於圓周乘半徑之增加率。

6. 試以球半徑之函數，表其體積，並示其導微函數卽可用以表示球面面積，且此導微函數之導微函數（稱為二級導微函數）卽等於大圓周之四倍。

7. 示長方形面積對於長度之導微函數為寬度，而直角壔（right prism）對於高度之導微函數等於其底之面積。

8. 某函數 $y=f(x)$ 之圖形為以原點為中心之圓弧，而 x 與 y 之比例尺相等。試以幾何方法，證明無論 x 為何值，導微函數之值恆如下式所示：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}。$$

9. 自 $y=log_{10}x$ 之圖形，估計於 $x=1$，$x=2$，$x=10$，三點 $\frac{dy}{dx}$ 之值。

第九節　求導微函數之通則

應用前節導微函數之定義。可推演求導微函數之通則數條，以免每求導微函數，必用極限方法。玆以 y, u, v 爲自變數 x 之函數，通常又以 u 及 v 爲助變數藉以表示 y 爲 x 之函數。玆先將各法則逐條列下，再加證明並示其用途。

法則一　設 $y=u+v$, 則 $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$。

法則二　設 $y=uv$,　則 $\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$。

法則三　設 $y=u^n$,　則 $\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$。

法則四　設 $y=\frac{u}{v}$,　則 $\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$。

法則五　設 $y=f(u)$, 則 $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{du}f(u)\cdot\frac{du}{dx}$。

法則一之證明　此處 y 爲兩個 x 之函數 U 與 V 之和。玆以 Δu, Δv 及 Δy 分別表對應於自變數增量 Δx 之 u, v, y 三變數之增量。故

$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v,$$

但 $y=u+v$, 左端減去 y 右端減去 $u+v$ 後兩端再以 Δx 除之，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

當 Δx 趨於零，此三個『差商』(difference quotients)所趨之值，即其導微函數也，依第 5 節命題(一)可得：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}。$$

法則二之證明 $y=uv$ 而

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)=uv+v\Delta u+(u+\Delta u)\Delta v$$

移項並以 Δx 除兩端,得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\frac{\Delta u}{\Delta x}+(u+\Delta u)\frac{\Delta v}{\Delta x}。$$

當 Δx 趨於零,此三個差商趨於導微函數,而 $u+\Delta u$ 趨於 u,依第5節命題(二),得

$$\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}。$$

法則三之證明 當 n 為正整數:設 y 為 n 個因式之積,

$$y=u_1u_2u_3\cdots\cdots u_n。$$

依法則二,得

$$\frac{dy}{dx}=u_2u_3\cdots\cdots u_n\frac{du_1}{dx}+u_1\frac{d}{dx}(u_2u_3\cdots\cdots u_n)$$

$$=u_2u_3\cdots\cdots u_n\frac{du_1}{dx}+u_1u_3\cdots\cdots u_n\frac{du_2}{dx}+u_1u_2\frac{d}{dx}(u_3\cdots\cdots u_n)$$

$$=u_2u_3\cdots\cdots u_n\frac{du_1}{dx}+u_1u_3\cdots\cdots u_n\frac{du_2}{dx}+\cdots\cdots+u_1\cdots\cdots u_{n-1}\frac{du_n}{dx}$$

上式計有 n 項,各項皆為一因式之導微函數與其他各因式之乘積,設各因式皆係同一函數,$u_1=u_2=\cdots\cdots u_n=u$,則

$$y=u^n$$

而

$$\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}。$$

當 n 為正分數:設 $n=\frac{p}{q}$ 而 p 與 q 皆為正整數,則

$$y=u^n=u^{\frac{p}{q}} \text{或} y^q=u^p。$$

應用適已證明之法則，得

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx}=pu^{p-1}\frac{du}{dx},$$

卽

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}\,\frac{u^{p-1}}{y^{q-1}}\,\frac{du}{dx}$$

但

$$y^{q-1}=u^{\frac{p}{q}(q-1)}=u^{p-\frac{p}{q}},$$

而

$$\frac{u^{p-1}}{y^{q-1}}=\frac{u^{p-1}}{u^{p-\frac{p}{q}}}=u^{\frac{p}{q}-1}=u^{n-1},$$

故

$$\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}。$$

當 n 爲負數時：以 $n=-m$，m 爲正分數或正整數，則

$$y=u^n=u^{-m}=\frac{1}{u^m}$$

雙方乘 u^m，得

$$yu^m=1$$

依法則二，得

$$y\frac{d}{dx}(u^m)+u^m\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(1),$$

凡導微函數皆表示變值率，常數旣不變，故其導微函數爲零，依上述之證法，得

$$\frac{d}{dx}(u^m)=mu^{m-1}\frac{du}{dx},$$

故

$$myu^{m-1}\frac{du}{dx}+u^m\frac{dy}{dx}=0$$

求$\frac{dy}{dx}$，得

$$\frac{dy}{dx}=-myu^{-1}\frac{du}{dx}=-mu^{-m-1}\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}。$$

法則四之證明：令

$$y=\frac{u}{v}=uv^{-1},$$

依法則二及三，得

$$\frac{dy}{dx}=v^{-1}\frac{du}{dx}+u\frac{d}{dx}(v^{-1})=v^{-1}\frac{du}{dx}-uv^{-2}\frac{dv}{dx}$$

$$=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}。$$

法則五之證明　此法則內有二式

$$y=f(u)$$

$$y+\Delta y=f(u+\Delta u)。$$

移項，以 Δx 除兩端而以 Δu 乘右端之分子及分母，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}。$$

當 Δx 趨於零，各差商皆趨於導微函數，依第 5 節命題（二），得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}。$$

第十節　代數函數之導微函數

除第 9 節所證之通則四條外，另有法則二條：

法則六　常數之導微函數爲零。

法則七　變數對於本身之導微函數等於一，卽，$\frac{dx}{dx}=1$。

此二法則讀者可自證之。

(1)多項式　多項式爲常數乘變數冪之積之和。依法則一，分別求每項之導微函數而加之。每項皆呈 cx^n 之形，c 爲常數，依法則二及三，得

$$\frac{d}{dx}cx^n=ncx^{n-1}\frac{dx}{dx}+x^n\frac{dc}{dx}=ncx^{n-1},$$

最後之結果係依法則六與七而得。例如

$$y=6x^2-3x^3+\frac{1}{3}x^5-8,$$

其導微函數爲

$$\frac{dy}{dx}=12x-9x^2+\frac{5}{3}x^4。$$

(2)有理代數函數　此類函數內或有商式，但可書爲乘積之和，分母可變爲有負指數之因式，例如

$$y=\frac{(x-2)(x^2+3)}{x^2-2x+4}-\frac{1}{(x-3)^2}.$$

依法則一，分別求兩項之導微函數。依法則四，第一項之導微函數爲

$$\frac{(x^2-2x+4)\frac{d}{dx}[(x-2)(x^2+3)]-(x-2)(x^2+3)\frac{d}{dx}(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+4)^2}$$

而

$$\frac{d}{dx}(x-2)(x^2+3)=(x-2)\frac{d}{dx}(x^2+3)+(x^2+3)\frac{d}{dx}(x-2)$$

$$=(x-2)(2x)+(x^2+3)(1)=3x^2-4x+3$$

至

$$\frac{d}{dx}(x^2-2x+4)=2x-2$$

代入並化簡，得

$$\frac{x^4-4x^3+13x^2-4x}{(x^2-2x+4)^2}。$$

欲求第二項之導微函數，依法則三，得

$$\frac{d}{dx}(x-3)^{-2}=-2(x-3)^{-3}=\frac{-2}{(x-3)^3}。$$

故最後得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^4-4x^3+13x^2-4x}{(x^2-2x+4)^2}+\frac{2}{(x-3)^3}$$

(3)無理代數函數　函數內含有代數式之方根者，可採用分數指數以討論之。例如

$$y=\frac{\sqrt[3]{x^2-2}}{x^2-\sqrt{4-6x}}。$$

可書爲

$$y=(x^2-2)^{\frac{1}{3}}[x^2-(4-6x)^{\frac{1}{2}}]^{-1}$$

先依法則二及三，再依一，六及七，得

$$\frac{dy}{dx}=[x^2-(4-6x)^{\frac{1}{2}}]^{-1}\ \frac{1}{3}(x^2-2)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}(x^2-2)$$

$$+(x^2-2)^{\frac{1}{3}}(-1)[x^2-(4-6x)^{\frac{1}{2}}]^{-2}\frac{d}{dx}[x^2-(4-6x)^{\frac{1}{2}}]$$

$$=\frac{3x}{2}[x^2-(4x-6)^{\frac{1}{2}}]^{-1}(x^2-2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$-(x^2-2)^{\frac{1}{3}}[x^2-(4-6x)^{\frac{1}{2}}]^{-2}[2x+3(4-6x)^{-\frac{1}{2}}]。$$

如不用分指數及負指數,則結果可書爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{3x}{2}(x^2-\sqrt{4-6x})-(x^2-2)\left(2x+\frac{3}{\sqrt{4-6x}}\right)}{\sqrt[3]{(x^2-2)^2}\,(x^2-\sqrt{4-6x})^2}。$$

習　題　七

1. 求下列函數之導微函數:

(a) $3x-6x^2$;　　(d) $(1-x^3)^2+(x^2-5)^3$;

(b) x^3-2x^2+7x-6;　　(e) $(x^3+3x-2)^5$;

(c) $(1-x)^2+4(x^2-7x+2)$;　　(f) $x^4-\frac{2}{\ }x^2+(2x-3)^2$

2. 設 $y=\frac{c}{u^n}$, 而 c 爲常數, n 爲正分數或正數, u 爲 x 之任何函數,則

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{nc}{u^{n+1}}\frac{du}{d}$$

3. 求下列各式之 $\frac{dy}{dx}$:

(a) $y=(3-x^2)(x-4x+2)$;　　(c) $y=10x^3(16-4x^2)^2$;

(b) $y=x^2(x^2-3)^3$　　(d) $y=(x^2-6x+2)^2(x^4-1)$。

4. 用上第2題之結果,求下列各函數對所示各變數之導微函數。

(a) $\frac{6}{1-x^2}$, x;　　(c) $\frac{a}{(a-2t)^n}$, t;

(b) $\frac{1}{y^2+2y-5}$, y;　　(d) $\frac{c}{a+bs^k}$, s。

5. (a) 設 $y=\frac{x-2}{x-3}$, 求$\frac{du}{dx}$; (c) 設 $V=\frac{u^2}{u^3-1}$, 求$\frac{dv}{du}$;

(b) 設 $F=\frac{K}{r^2}$, 求$\frac{dF}{dr}$; (d) 設 $s=6t-\frac{1}{(t-1)^2}$, 求$\frac{ds}{dt}$。

6. 求下列導微函數:

(a) $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}-6x^{-1})$; (d) $\frac{d}{ds}\frac{(s-2)^2}{(s-1)^{\frac{3}{2}}}$

(b) $\frac{d}{dt}(t+\sqrt{t^2-4})$; (e) $\frac{d}{dr}\frac{a(1-r^n)}{1-r}$;

(c) $\frac{d}{du}\frac{3u}{\sqrt{1-u^2}}$; (f) $\frac{d}{dp}\frac{p}{\sqrt{(q^2-p^2)^2+b^2p^2}}$。

7. 以 r, s 及 v 分別代球之半徑（吋）,面積（方吋）及體積（立方吋）,求 $\frac{ds}{dr}$, $\frac{dv}{dr}$, 及 $\frac{dv}{ds}$。並示 $\frac{dv}{ds}=\frac{dv}{dr}\Big/\frac{ds}{dr}$, 且示此爲法則五之一特例,但法則五內之函數 u 不得爲常數。

8. 『落體律』可以下式表示之:

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0,$$

s 爲落下距離, t 爲時間, v_0 爲起始速度, s_0 爲起始距離, g 爲常數。求 $t=5$ 及 $t=8$ 時之速度,及加速度。

9. 有錐形器,其圓底直徑二呎,高三呎,頂點有管以貫水,水流入此器之流率爲每分鐘 100 立方吋,當水深 6 吋及 18 吋時求水面升高之速度。

10. 長 10 呎之梯倚於鉛直之牆,其下端在水平之地板上滑動,其速度爲每秒二呎。當梯之下端離牆千呎時,求梯上端之滑下速度。又離牆 6 呎時滑下速度若干?

11. 射彈離砲口時之速度爲 v_0, 其仰角爲 a, 其水平速度恆爲

$v_o \cos a$，射彈之高度 y 爲其水平距離 x 之函數，如下式：

$$y = x \tan a - \frac{gx^2}{2v_o^2 \cos^2 a}。$$

求高度增加之速度，以 x 之函數表之。x 爲何值時射彈停止升高，又此時之高度若干？此時射彈運動之方向如何？當 $x = 10v_o$ 時，其運動之方向如何？

12. 二船同時自某埠開行，一向東駛，速度爲每小時 12 浬，一向北駛，速度爲每小時 16 浬。15 分鐘後二船相離之速度如何？一小時後如何？設東駛之船先開 30 分，問北駛之船開行 15 分後二船相離之速度如何？

第十一節 三角函數及反三角函數之導微數

先書特殊法則數條於此，以後當證明之。

法則八 (a) $\dfrac{d}{dx} \sin x = \cos x;$

(b) $\dfrac{d}{dx} \cos x = -\sin x;$

(c) $\dfrac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x;$

(d) $\dfrac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x;$

(e) $\dfrac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$

(f) $\dfrac{d}{dx} \csc x = -\csc x \tan x。$

法則九 (a) $\dfrac{d}{dx} \sin^{-1} x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\begin{bmatrix}\text{第一第四象限，}+\\ \text{第二第三象限，}-\end{bmatrix};$

(b) $\dfrac{d}{dx} \cos^{-1} x = \mp \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\begin{bmatrix}\text{第一第二象限，}-\\ \text{第三第四象限，}+\end{bmatrix};$

(c) $\dfrac{d}{dx}\ tan^{-1}x=\dfrac{1}{1+x^2}$;

(d) $\dfrac{d}{dx}\ cot^{-1}x=\dfrac{-1}{1+x^2}$;

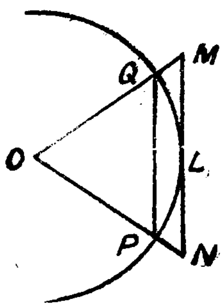
(e) $\dfrac{d}{dx}\ sec^{-1}x=\pm\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\begin{bmatrix}\text{第一第二象限，}+\\\text{第三第四象限，}-\end{bmatrix}$;

(f) $\dfrac{d}{dx}\ csc^{-1}x=\mp\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\begin{bmatrix}\text{第一第四象限，}-\\\text{第二第三象限，}+\end{bmatrix}$。

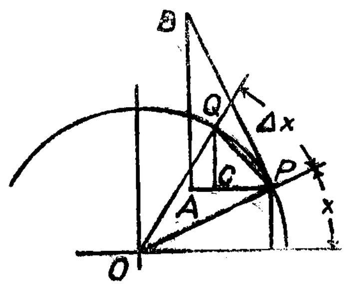
在證上列諸法則之前，應先證下列命題：

在任何已知圓形上，弦長與所張弧長之比數於弧長趨於零時趨於 1。

以 PQ 為弦，其所張之弧為 PLQ，圓心為 O.（第 14 圖）。證



第 14 圖



第 15 圖

$$\lim_{PLQ\to 0}\frac{PQ}{PLQ}=1.$$

證法：令 MN 與 PQ 平行，並切 PLQ 弧於 L 點。依相似三角形定理，$\dfrac{PQ}{MN}=\dfrac{OP}{OM}$，但當 PLQ 弧趨於零時，OM 趨於常數 OP，故 $\dfrac{PQ}{MN}$ 趨於 1。因 $PQ<PLQ<MN$，故

$$1 > \frac{PQ}{PLQ} > \frac{PQ}{MN}$$

當弧趨於零時，$\frac{PQ}{MN}$ 趨近於 1，故介於 1 與 $\frac{PQ}{MN}$ 間之數亦必趨於 1。

法則八(a)之證法　第 15 圖內，圓之半徑爲 1，故中心角 x 之弧度卽可以張於角上弧之長度量之，而角度增量 Δx（弧度）卽等於弧 PQ 之長度。故 $\sin x = \frac{RP}{OP} = RP$，而對應於 Δx 之正弦增量爲 CQ。設 $y = \sin x$，則

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{CQ}{\text{弧}PQ} = \frac{CQ}{\text{弦}PQ} \cdot \frac{\text{弦}PQ}{\text{弧}PQ}。$$

當 Δx 趨於零，弦 PQ 之方向趨於切線 PB 之方向，而比數 $\frac{CQ}{\text{弦}PQ}$ 趨於比數 $\frac{AB}{PB}$，因 $\angle ABP = x$，故 $\frac{AB}{PB} = \cos x$，又因此時弦與弧之比數趨於一，得

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x。$$

此證法於 x 爲任何值時皆有效，故讀者宜繪圖以示在其他象限內之情形。

法則八(b)之證法　仍用第 15 圖，

$$y = \cos x = \frac{OR}{OP} = OR,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-CP}{\text{弧}PQ} = \frac{-CP}{\text{弦}PQ} \cdot \frac{\text{弦}PQ}{\text{弧}PQ},$$

照上證法，得

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{AP}{PB}=-\sin\ x,$$

法則八(c)之證法

$$y=\tan\ x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

依法則四，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\ \frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

依前證之法則八(a)及(b)，求導微函數，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x。$$

法則八內其餘各式讀者可以 $\sin\ x$ 及 $\cos\ x$ 之函數，表諸三角函數，然後倣上例自證之。

法則九(a)之證法，　設 $y=\sin^{-1}x$ 則 $\sin\ y=x$，依法則五七及八(a)，

$$\cos y\frac{dy}{dx}=1,\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{\pm 1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}。$$

如規定根數爲正，則在餘弦爲負之第二及第三象限內必加負號。

法則九內其餘各式讀者可倣此證明。

以本節各法則與法則五倂用，可求得所有簡單三角及反三角函數之導微函數，再與以前之各法則倂用可求得由代數函數三角函數合倂而成之函數。

玆舉二例以明之：

令 $y=\tan(3x^2-6)$，以 $3x^2-6=u$，則 $y=\tan\ u$，依法則五及八(c)，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\sec^2 u=6x\ \sec^2(3x^2-6)。$$

令 $y=x^2\sin^{-1}\frac{x}{1+x}$，可以 $\frac{x}{1+x}=u$，則 $y=x^2\sin^{-1}x$，依法則二五及九(a)，得

$$\frac{dy}{dx}=\sin^{-1}u\ \frac{d}{dx}(x^2)+x^2.\ \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ \frac{du}{dx}$$

$$=2x\sin^{-1}\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{(1+x)^2}}}.\ \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$=2x\sin^{-1}\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{(1+x)\sqrt{1+2x}}。$$

習 題 八

1. 求下式對 x 之導微函數:

(a) $\cos 3x$;

(b) $\tan\frac{x}{2}$;

(c) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$;

(d) $\cot\left(-\frac{x}{2}\right)$;

(e) $\sec\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$;

(f) $2\sin x-6\cos 3x$;

(g) $a\sin 2x\cos 3x$;

(h) $b\tan x/\sin 2x$;

(i) $\sin mx\cos nx$;

(j) $\cot mx\tan nx$。

2. 示 $-2\sin^2 x$ 與 $\cos 2x$ 之導微函數相同。由此，試推測此二函數間之關係。

3. 由下列公式

$$\sin(mx+nx)=\sin mx\cos nx+\cos mx\sin nx$$

用微分法，求 $\cos(mx+nx)$ 之公式。

4. 求下列導微函數：

(a) $\frac{d}{dt}(\sin^2 t)$；　(d) $\frac{d}{dt}(t\sin 3t+b\sin^2 3t)$；

(b) $\frac{d}{d\theta}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$；　(e) $\frac{d}{dx}(1-x^2\sin 2x+\cos 3x)$；

(c) $\frac{d}{dx}(\cos^2 x\sin 2x)$；　(f) $\frac{d}{d\theta}(\sec^2\theta\tan\theta)$。

5. 一輪在鉛直平面內旋轉每秒一轉，（卽以每秒 2π 弧度之角速旋轉）。設輪之直徑爲 4 呎，求輪邊某點之向上速率，(a)當此點與輪中心點在同一水平時。(b)當此點高於中心點一呎時。

6. 求下式對其自變數之導微函數：

(a) $\sin^{-1}2u$；　(d) $x\tan^{-1}2x$；　(g) $v(\cot^{-1}v)^2$；

(b) $\cot^{-1}\frac{x}{2}$；　(e) $\tan^{-1}(\cos x)$；　(h) $\sin^{-1}(x^2-5)$；

(c) $\sec^{-1}\frac{1}{y}$；　(f) $\tan(\cos^{-1}x)$；　(i) $\frac{\sin^{-1}3\theta}{\cos^{-1}2\theta}$。

第十二節　指數及對數函數之導微函數

本節所需之特殊法則爲：

法則十　(a) $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$；

(b) $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\log_e a$

則法十一　(a) $\frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}$；

(b) $\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e$。

十(a)不過十(b)之特例，蓋設 $a=e$，得 $\log_e e=1$，則 (b) 化爲

(a)。十(b)可應用於任何底數 a，而十(a)則祇能應用於此惟一之底數 e。第一章曾述及此數（即自然或納氏對數之底數）之值，至何以選此數爲底數，則可於此法則之證法內知之。

法則十(a)之證法。 先論以泛定值 a 爲一般底數之指數函數：

$$y=a^x$$

以增量 Δx 予 x，得

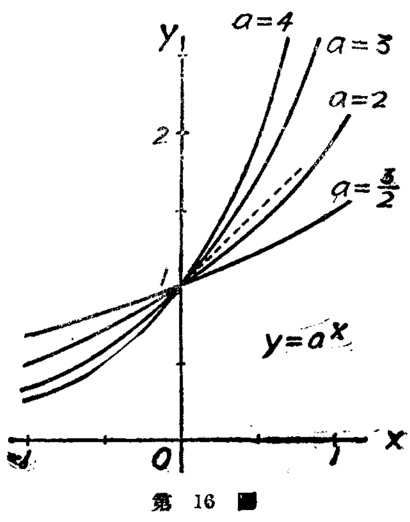
$$y+\Delta y=a^{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-y=a^{x+\Delta x}-a^x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\left(\frac{\quad 1}{\Delta x}\right)。$$

求 x 趨於零時之極限，得

$$\frac{dy}{dx}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}。$$



第 16 圖

式中仍須求最後因式之值，

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

此未知常數卽 $x=o$ 時之導微函數，以 $a^{\circ}=1$ 也；爲求其值起見，令 a 分別代若干不同數值而繪 $y=a^x$ 之圖形（第 16 圖）。於 $x=o$ 之導微函數示 y 增值率與 x 增值率之比，換言之，卽示曲線穿過 y-軸時之方向也。a 之值不同則此數亦不同，但 a 在 2 與 3 間之某值時，此曲線穿過 y- 軸之方向爲 45°，故 y 與 x 之增值率相同，如 a 等於是值時，則於 $x=o$ 之導微函數爲 1. 茲以 e 代 a 之此值，則得

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$$

故，設 $y=e^x$，則

$$\frac{dy}{dx}=e^x$$

故 e 之定義，爲使 $y=a^x$ 之圖形以 45° 之方向穿 y- 軸之 a 值，嗣後可據以計算 e 之值至任何需要之精確度。現暫認 $e=2.71828$，如第 3 節所述。

法則十(b)之證法　由上述證法內，證明：於 $a=e$ 時，其導微函數等於原設函數。茲令 $a=e^m$，則 $m=log_e a$ 而

$$y=a^x=e^{mx}$$

依法則十(a)及五，得

$$\frac{dy}{dx}=e^{mx}m=a^x log_e a$$

法則十一(a)及十一(b)之證法　(a)亦爲(b)之一特例，蓋令 $a=e$，(b)卽變爲(a)也。故證(b)卽足，令

$$y=log_e x,$$

則

$$a^y = x$$

求兩端對 x 之導微函數，依法則十(b)，五及七，得

$$a^y \log_e a \frac{dy}{dx} = 1$$

因 $a^y = x$，而 $\log_e a = \frac{1}{\log_a e}$（因設 $e^m = a$，$a^{\frac{1}{m}} = e$），得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \log_e a} = \frac{1}{x} \log_a e$$

除自然底數 e 外，應用最廣者為常用底數(Common base) 10。計算時宜用常用底數，但在數學內運算函數時則宜用自然底數，蓋如用任何其他底數 a，仍須以此底數之模數(Moduluo) $\log_a e$ 化之為自然底數也。常用底數之模數 $\log_{10} e$ 可於普通對數表內查得之，其五位值為 0.43429。嗣後所有對數函數如不另標明者均指以 e 為底數者。

法則一至十一，足可用以求上述各種初級函數合併而成之任何函數之導微數，但須有充分之練習，始能應用如意。如能記憶全部分或大部分之法則，及應用法則於各種特例而得之公式，至為有益。此後解題之經驗可為讀者之嚮導。本書之習題則選各種重要問題，俾學者得以熟諳諸重要特例之公式。

習 題 九

1. 求下列函數之導微函數：

(a) $4e^{2x}$;	(e) $\log(3x-2)$;	(i) $e^{\sin x}$;
(b) $e^{-\frac{1}{2}x}$;	(f) $2\log(x^2+4)$;	(j) $\log\cos x$;
(c) a^{x^2-7};	(g) $\log_{10}(4x)$;	(k) $a^{\log ax}$;
(d) $3a^{-\frac{2}{x}}$;	(h) $7\log_{10}(1-2x)$;	(l) $\log_a(a^x)$。

2. 求下列導微函數:

(a) $\frac{d}{dx}(xe^{x}-e^{-x})$;　　(d) $\frac{d}{dx}(x^2-2x)\log(1-x)^2$;

(b) $\frac{d}{du}e^{u}\sin u$;　　(e) $\frac{d}{dt}\frac{\log(1-t^2)}{2t-3}$;

(c) $\frac{d}{d\theta}a^{\theta}\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;　　(f) $\frac{d}{dr}\sin\left(2r-\frac{\pi}{6}\right)\log\frac{r}{1-r}$.

3. 求 x 之古氏函數之導微函數,

$$gd\ x=\tan^{-1}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}。$$

4. 雙曲線函數皆由指數函數爲其定義:

x 之雙曲線正弦 $\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

x 之雙曲線餘弦 $\cosh x=\frac{c^{x}+e^{-x}}{2}$

x 之雙曲線正切 $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$

x 之雙曲線餘切 $\coth x=\frac{1}{\tanh x}$

x 之雙曲線正割 $\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}$

x 之雙曲線餘割 $\operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x}$

示 $\frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x$ 及 $\frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x$, 並由此推出其他雙曲線函數之微分法,並注意其與三角函數微分法之相似性。

5. 以指數函數表示上題之後四函數,再求其導微函數,以與上題所得結果相印證。

6. 已知 $y=\sinh^{-1}x$ 之意義與 $x=\sinh y$ 相同, 用法則九(a)之證法,示

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x=\frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{x^2+1})=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}。$$

並示

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x=\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{1-x^2}。$$

7. 示凡具下列形狀

$$y=e^{kx}(a\sin nx+b\cos nx)$$

之函數，其導微函數與原設函數呈相同之形式但 a 及 b 之值每與前不同。

8. 示凡呈下列形狀

$$y=e^{kx}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_n)$$

之函數其導微函數為另一同形狀之函數，但多項式內之各係數通常與原設者不同。

第十三節　間接確定之函數

前已論及藉助變數 u，可表 y 為 x 之函數，並知由此可繪 y 為 x 函數之圖形並由此可求 y 對 x 之導微函數。此雖為表 y 為 x 之函數之間接法，因僅須將 u 值代入卽可消去 u 故此類函數仍可視為以自變數直接表出之顯函數 (explicit functions)。間接表示二變數間之關係有兩種不同之方式，茲述之如下：

(1) 隱函數 (implicit functions)　方程式內含有因變數及自變數，但未解出因變數，則稱因變數為自變數之隱函數。若能據式求因變數之解，卽可化之為顯函數之形式，通常仍以保留隱函數之形式，更易處理。令 x 與 y 分別為自變數與因變數，將方程式各項皆移至左端則方程式可書為

$$f(x,y)=o,$$

左端為含兩變數之式。欲求 y 對 x 之導微函數，只須視式中 y 為 x

之函數，逐項求其對 x 之導微函數，最後據式解出 $\frac{dy}{dx}$，得

$$\frac{dy}{dx}=\phi(x,y),$$

此式表示導微函數仍爲兩變數之函數。用此式時應知此兩變數間之關係仍以原式連絡之。

例如

$$x^2y+sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=o。$$

在上式內無法解 y，但可視每項爲二式之乘積以求其導微函數，得

$$x^2\frac{dy}{dx}+2xy+x\frac{d}{dx}\ sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=o,$$

即，

$$x^2\frac{dy}{dx}+2xy+\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{\sqrt{x^2-y^2}}+sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=o,$$

由此得，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left[2xy+sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]\sqrt{x^2-y^2}-y}{x^2\sqrt{x^2-y^2}+x}$$

任何 x 及 y 之值能適合原方程式者，代入後式內即可得對應於此組值之導微函數之值。

(2) 參數方程式 (parametric equations) 參數方程式內亦用助變數，但因變數及自變數皆以此助變數之函數表之，而非以助變數爲自變數之函數。

法則五謂，設 $y=f(u)$ 而 $u=\phi(x)$，則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

並設 $\frac{du}{dx}$ 非零,可以之爲除數,而得

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}}=\frac{dy}{du}$$

此處可視 y 與 u 皆爲 x 之函數

以 t 爲助變數或參數,並令

$$y=f(t),\qquad x=\phi(t),$$

做上述證法,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

通常用作參數之助變數每有重要之物理的或幾何的意義,故就參數式求得以參數表出之導微函數,每能推得各種結論,非消去參數後之$(x,\ y)$式所能得者。

茲舉一簡例以明之。求球之體積 v 對球面面積 s 之導微函數。因,

$$v=\frac{4}{3}\ \pi r^3,\qquad s=4\pi r^2,$$

故

$$\frac{dv}{ds}=\frac{\frac{dv}{dr}}{\frac{ds}{dr}}=\frac{4\pi r^2}{8\pi r}=\frac{1}{2}\ r。$$

如用 s 以直接表示 v, 方程式中即含有根式,其結果將不能如是之易於詮釋。由上式,知球小時,球面面積變值較速於球之體積,球大時,則球之體積變值較速於球面。

習　題　十

1. 求下列各式中 y 對 x 之導微函數，以 x 及 y 之函數表求得之導微函數：

(a) $x^2+y^2=16$;　　(e) $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=x$;

(b) $xy-x^2+2xy^2=4$;　　(f) $\cos(x-y)=o$;

(c) $(x^2-6)(y^3-x)=2xy$;　　(g) $x\sinh y=y$;

(d) $(x-y)(x+y-2)=1$;　　(h) $e^x\log y=1$。

2. 求下列第一式對第二式之導微函數，以參數表導微函數：

(a) $y=\dfrac{1}{1-t}$,
$x=\dfrac{1}{1+t}$;

(b) $u=1-\sin\theta$,
$v=\tan\theta$;

(c) $y=1-t^2$
$x=t^2+1$

(d) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{2t^3}$
$x=\dfrac{1}{3}t^2$;

(e) $y=a\sin\theta+b\cos\theta$,
$x=a\cos\theta+b\sin\theta$;

(f) $v=\dfrac{2}{3}\pi r^3$,
$s=\pi(1+\sqrt{2})r^2$。

3. 有輪在水平軌道上滾動，輪上某點原與軌道相接，迨輪滾動 θ 弧度後，此點離軌上原接觸點之水平距離 x 及鉛直距離 y 可表以下二式：

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta),$$

式內 a 爲輪之半徑。求此點運動之方向爲何，(a)當 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 時：(b)當 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 時。(c)當 $\theta=\pi$ 時。設輪恆以每秒 $\dfrac{1}{4}$ 轉之角速滾動，x 與 y 之增率各爲何，(a)當 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 時？(b)當 $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ 時？

第十四節 高級導微函數

求一函數對其自變數之導微函數時如不規定自變數之值，則所得者為此自變數之另一新函數，謂之原設函數之導微函數。前數節已述明求各種初級函數導微函數之方法，故可據以求導微函數之導微函數或二級導微函數(second derivative or second derived function)此新函數復可再求其導微函數而得原設函數之三級導微函數（third derivative），以此類推，可至任何高級導微函數。許多實際問題需應用高級導微函數，有時則需要以某已知函數為某未知函數之高級導微函數，由此以求此未知函數。例如動體之加速度為速度對時間之導微函數，故為位移對時間之二級導微函數。一有擔負之梁，在任何點之偏轉可視為離一端之距離之函數。此函數對距離之二級導微函數與彎曲力矩成正比，其三級導微函數與抗切力 (shearing force)成正比，四級導微函數與此點之擔負強度成正比。

已知函數 $y=f(x)$，以記號

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\ f(x)$$

表示導微函數，則二級導微函數，應為

$$\frac{d}{dx}\ \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\ \frac{d}{dx}\ f(x)。$$

上式可縮為

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}\ f(x)$$

此記號表示運算手續$\frac{d}{dx}$，即求對 x 之導微函數，已運用二次，而非謂有何數曾自乘而得平方也。做此，y 之各級導微函數可以下列記號表示之，

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}\cdots\cdots\frac{d^ny}{dx^n},$$

設 $y=f(x)$，則可用下列各記號，其意義仍相同，

$$\frac{d}{dx}f(x),\ \frac{d^2}{dx^2}f(x),\cdots\cdots\frac{d^n}{dx^n}f(x),$$

各級導微函數又可用下列記號，如

$$\begin{array}{llll} D_xy, & D_x^2y, & D_x^3y, & \cdots\cdots D_x^ny; \\ y', & y'', & y''', & \cdots\cdots y^{(n)}; \\ f(x) & f'(x), & f'''(x), & \cdots\cdots f^{(n)}(x)。\end{array}$$

設 y 係用 x 之顯函數表示，則其高級導微函數亦可以 x 之顯函數表之。若 y 爲 x 之隱函數，則求高級導微函數時，須設法消去其每次所發生之低級導微函數。例如欲求下式內 y 對 x 之一級及二級導微函數，

$$x^2y+y^3=6,$$

逐項行微分運算，得

$$x^2\frac{dy}{dx}+2xy+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

卽，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy}{x^2+3y^2}。$$

再逐項行微分運算，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(x^2+3y^2)\left[\left(2x\frac{dy}{dx}+2y\right)-2xy\left(2x+6y\frac{dy}{dx}\right)\right]}{(x^2+3y^2)^2}$$

代入 $\frac{dy}{dx}$ 之值並約分，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2y(x^2-3y^2)}{(x^2+3y^2)^3}$$

應注意者，卽在此二級導微函數內，y 與 x 之關係仍以原方程式連絡之。

再有一法，卽就原式，作微分運算二次，而不先解 $\frac{dy}{dx}$，故

$$x^2y+y^3=6,$$

$$(x^2+3y^2)\frac{dy}{dx}+2xy=0,$$

$$(x^2+3y^2)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(2x+6y\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}+2x\frac{dy}{dx}+2y=0,$$

有此三式卽可定 y，$\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^3}$ 爲 x 之函數之方程式，如以 y 已定於第一式，則可以第二第三式定 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 爲 x 及 y 之函數之方程式。

如函數係用參數式表示，則消去法與上略有不同。以

$$y=t^2, \qquad x=\frac{1}{3}t^3,$$

則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{t^2}=\frac{2}{t}。$$

因 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{t^2}$，故求二級導微函數時得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=-\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2}=-\frac{2}{t^4}.$$

再有一法，卽就二式求其對 x 作微分運算二次，

$$y=t^2, \qquad x=\frac{1}{3}t^3$$

$$\frac{dy}{dx}=2t\frac{dt}{dx}, \qquad 1=t^2\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+2t\frac{d^2t}{dx^2}; \quad o=2t\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+t^2\frac{d^2t}{dx^2}。$$

由上列各式用代數消去法可解$\frac{dy}{dx}$及$\frac{d^2y}{dx^2}$，使其爲 t 之函數。

習 題 十 一

1. 求下列各函數之初級，二級，三級導微函數：

(a) $\sin 3x$; (c) e^{-2x}; (e) $\frac{1}{1-x}$;

(b) $\log(1-x^2)$; (d) $\tan\frac{x}{2}$; (f) $x\cos 2x$。

2. 求 $r^2\theta=\sin\theta$ 之 $\frac{d^2\theta}{dr^2}$。

3. 設 $x=a\cos\theta$ 及 $y=a\sin\theta$，示

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3=a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2。$$

4. 凡呈下狀之函數

$$y=(a+bx)\sin x+(c+gx)\cos x$$

其各級導微函數亦呈此狀但式內常係數之值不同。

5. 設 y 爲 $\sin x$，$\cos x$，或 e^{-3x} 之一時，即適合下式

$$\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=-3y。$$

6. 設物體運動時，距離 s（呎）與時間 t（秒）之關係以下式之一表示之，

$$s=10t^2;\quad s=10t^2-17t;\quad s=10t^2+3t+80;$$

則加速度皆爲每秒每秒 20 呎。

7. 求下式之 $\frac{d^2y}{dx^2}$：

$$x=a\theta-b\sin\theta,\ y=a-b\cos\theta。$$

第四章　函數之積分

第十五節　微分法之逆運算

第三章論及微分法(differentiation)，即求函數之導微函數法，知此導微函數爲另一新函數。本章則論相反之問題，即已知某函數之導微函數，而求此函數之本身。

因此須有新記號以表此運算手續。設 $y=f(x)$，用上章之記號，則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)。$$

此謂施某種運算法於 y 或 $f(x)$，以求得導微函數 $f'(x)$。欲表示相反之運算法，可書爲

$$\int f'(x)dx=f(x),$$

此 $\int\cdots dx$ 一記號表示施某種運算法於 $f'(x)$ 以求得 $f(x)$。此與微分法相反之運算手續謂之積分運算或積分法(integration)，所求得之函數，$f(x)$，則謂之 $f'(x)$ 對 x 之積分(integral, with respect to x, of $f'(x)$)。此處 $f'(x)$爲原設函數，稱爲被積函數(integrand)，函數記號上之 ′ 號，本用以表導微函數，通常並不冠於被積函數上。設被積函數爲

$$f(x),\quad \phi(x),\quad F(x),\ 等。$$

則其積分各爲

$$\int f(x)dx,\quad \int\phi(x)dx,\quad \int F(x)dx,\ 等。$$

因常數之導微函數爲零，若二函數僅常數項不同則此二函數，必

有相同之導微函數。故求任何函數之積分時，於積分後加任何常數項，此式仍爲原設函數之積分。故任何函數之一般積分 (general integral) 皆有泛定常數一項，謂之積分常數(constant of integration)。

例如，x^2-7，x^2+2，$x^2+\sqrt{3}$，$x^2+\frac{\pi}{6}$，等函數之導微函數皆爲 $2x$，故

$$\int 2x\, dx = x^2 + c$$

式內積分常數 c 可爲任何常數。

求函數之導微函數即等於求以自變數之變值率表示此函數之變值率，此吾人所已知。若已知某函數變值率之函數，而據以求此函數，則有賴積分運算。例如，任何自由落體之加速度爲向下每秒每秒 32 呎，則以每秒呎爲單位之速度 v 爲時間 t（秒）之函數，其關係可以積分式表之如下：

$$v = \int 32dt = 32t + v_0$$

式內 v_0 爲積分常數，所以以 v_0 表示之者，以此常數即爲 $t=o$ 時之 v 值也。再者，速度爲距離之增率，故距離 s（呎）可以積分式表之如下：

$$s = \int (32t + v_0)dt = 16t^2 + v_0t + s_0$$

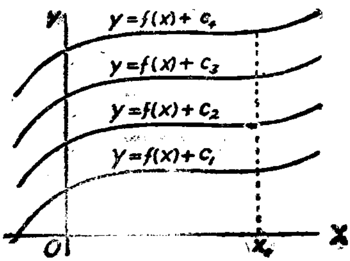
所以以 s_0 代表新積分常數者，以其爲 $t=o$ 時之 s 值。設已知 v 及 s 之起始值爲 v_0 及 s_0 而代入之，則上二式不復爲一般積分而謂之爲對應於已知起始條件(initial conditions)之特殊積分(particular integral)。

第 8 節曾述如何就 $y=f(x)$ 圖形上某點切線之方向以確定對應於該點 x 值之導微函數。反之就導微函數亦可知其積分函數之圖形在各 x 值之方向，由此可推出積分函數之圖形，稱爲積分曲線

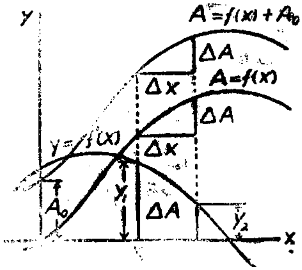
(integral curve)，惟其中之泛定常數有賴起始條件以決定之。此泛定常數之變易，不過將曲線移上或移下，對全曲線所有之縱坐標作同量之變動，對曲線在任何 x 值如 x_1 點之方向固無影響也(第17圖)。

一察第 18 圖 $y=f'(x)$ 之曲線，更可對積分運算之意義，有較深之認識。

設有一函數 $A=f(x)$，對應於 $x=x_1$ 之 A 值為曲線 $y=f'(x)$，x- 軸，$x=o$ 及 $x=x_1$ 兩直線間所包之面積。茲證明 A 對 x



第 17 圖



第 18 圖

之導微函數為 $f'(x)$，因而

$$A=f(x)=\int y\,dx=\int f'(x)\,dx_{\circ}$$

先研究 x 之兩值 x_1 及 $x_1+\Delta x$，及其對應之縱坐標 y_1 及 y_2。夾於此兩縱坐標間之面積為對應於 x 增量 Δx 之面積增量 ΔA。A 對 x 之導微函數為

$$\frac{dA}{dx}=\lim_{x\to o}\frac{\Delta A}{\Delta x}.$$

但 $\dfrac{\Delta A}{\Delta x}$ 小於 y_1 及 y_2 間之最大縱坐標，而大於 y_1 及 y_2 間之最小縱坐標。設此曲線係連續的，當 x 趨於零，則 y_2 趨於 y_1，最大及最小之縱坐標皆趨於 y_1；故 $\dfrac{\Delta A}{\Delta x}$ 趨於 y_1，由此可知於任何 x 值，得

$$\frac{dA}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=y=f'(x)。$$

$A=f(x)$ 之圖形，當 x 增加時，其增率可以 $y=f'(x)$ 圖形上之縱坐標度量之。若此曲線之縱坐標爲負，卽表示 A 值遞減。以 A_0 爲任何常數，函數 $A=f(x)+A_0$ 之導微函數亦爲 $f'(x)$，故此函數亦爲 $f'(x)$ 之積分。

在上證法內須假設 $y=f'(x)$ 之曲線係連續的。暫時須守此限制，但將來知有數種函數雖係間斷的而有連續的積分函數。此卽謂有某種連續函數存在，其導微函數則爲所設之間斷函數也。

對於導微函數求法如能熟練，不必有特別公式卽能知簡單之積分法。以下習題能使讀者對於積分法之意義更爲明澈。

習 題 十 二

1. 求下列函數之積分，每次勿忘加積分常數。求所得積分之導微函數，與原設函數比較，以資校正。

(a) x^3+3; (c) $\sin x$; (e) e^{3x};

(b) $2x-x^2$; (d) $\cos 2x$; (f) $4e^{-2k}$。

2. 求函數

$$y=3x^2-4x+2,$$

之一般積分及當 $x=1$ 而積分值爲 10 之特殊積分。

3. 求 $y=\int 5\cos x\,dx$ 之積分，其起始條件爲：當 $x=o$ 時，$y=6$。

4. 設物體移動，其速度 v（每秒呎）與時間 t（秒）之關係以 $v=12-6t$ 表示之，求自 $t=o$ 至 $t=2$ 間移動之距離。並求自 $t=2$ 至 $t=5$ 間及自 $t=o$ 至 $t=5$ 間移動之距離。

5. 已知當 $v=4$，則 $u=2$，並知 u 之變率以 v 之變率表示之爲一 v 之函數如下式：

$$\frac{du}{dv}=1-6v^2。$$

求以 v 之函數表 u,

6. 求曲線 $y=\sin x$ 及 x- 軸間之面積，自 $x=o$ 至 $x=\pi$。

7. 求以 x 之函數表曲線 $y=e^{-x}$，x- 軸，y- 軸及 x 點之縱坐標四線所包之面積。

8. 水注入盛器內每分一巴羅(barrel 合 36 加侖)，試以積分表示 t 分鐘時盛器內之水量。

9. 設 $\frac{d}{dx^2}=6x-2$，則 y 爲 x 之函數，求其通式。設 $x=o$，則 $y=2$ 而 $\frac{dy}{dx}=o$，當 $x=2$ 時，y 與 $\frac{dy}{dx}$ 之值爲何？當 $x=5$ 時如何？當 $x=-2$ 時如何？

第十六節　積分法之公式

第三章內對於微分運算之法則，頗多引伸，凡導微函數存在之初級函數，皆可施以微分運算。積分運算爲間接方法，凡連續之函數及某數種間斷之函數雖可證明其積分之存在，但此等積分或能或不能以初等函數表示之，凡能以初等函數表出者亦須能將其被積函數化爲某種已知函數之導微函數之形式，方能求得此初級函數。爲應此需要計，特依據已知之各種微分法，得若干條積分之標準式。各式內 u 與 v 仍爲 x 之函數。由法則一，得

1. $\int(u+v)dx=\int udx+\int vdx.$

法則二在積分問題上之應用應俟第六章再爲詳論，茲舉一特例，即因數之一爲常數時，則

2. $\int a\ u\ dx=a\int u\ dx.$

在法則三內令 $u=x$ 而 $n\neq 1$（參看下 17 式），得

3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

由法則六及七及上第 2 式,得

4. 設 $\dfrac{dy}{dx} = o$, 則 $y =$ 常數。

5. $\int a dx = ax + c$

下列各式係基於法則八,九及十一之各部份,讀者可用微分法以證明此等式之能成立。

6. $\int \cos x \; dx = \sin x + c.$

7. $\int \sin x \; dx = -\cos x + c.$

8. $\int \sec^2 x \; dx = \tan x + c.$

9. $\int \csc^2 x \; dx = -\cot x + c.$

10. $\int \sec x \tan x \; dx = \sec x + c.$

11. $\int \csc x \cot x \; dx = -\csc x + c.$

12. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pm \sin^{-1} x + c_1 = \mp \cos^{-1} x + c_2.$

13. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c_1 = -\cot^{-} x + c_2.$

14. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \pm \sec^{-1} x + c_1 = \mp \csc^{-1} x + c_2.$

15. $\int e^x dx = e^x + c.$

16. $\int a^x dx = a^x \log_a e + c.$

17 $\int \frac{1}{x}dx = \log x + c.$

自習題九之第 6 題內諸關係式及關於 $\cosh^{-1}x$ 之類似關係，得

18. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log(x+\sqrt{x^2+1}) + c = \sinh^{-1}x + c.$

19. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \log(x+\sqrt{x^2-1}) + c = \cosh^{-1}x + c.$

20. $\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + c = \tanh^{-1}x + c.$

依法則五之原則，可將 1－20 各式之用途大加擴充。法則五內，y 爲 u 之函數而 u 爲 x 之函數，故可用代入法消去 u 使 y 爲 x 之函數。以記號表之，卽

$$y = f(u),\quad u = \phi(x),\quad y = f[\phi(x)] = F(x)。$$

依法則五，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{卽} \quad F'(x) = f'(u)\cdot\phi'(x)$$

故

$$\int F'(x)dx = \int f'(u)\cdot\phi'(x)dx = F(x) = y.$$

以 u 爲自變數，則

$$\int f'(u)du = f(u) = y = F(x)$$

此法最大之便利爲：設有被積函數 $F'(x)$，不能識其爲何函數之導微函數，可分之爲兩因式其一爲 u 之函數如 $f'(u)$，其一爲 u 之導微函數，使積分之形變爲

$$\int f'(u)du,$$

如因式選擇得宜，卽易求積分，此之謂代替法 (method of substitution)。

例如，求

$$\int x\sqrt{1+x^2}\ dx$$

令 $u=1+x^2$，則 $\frac{du}{dx}=2x$，故

$$\int x\sqrt{1+x^2}\ dx=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{2}}.\,2x\,dx=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dx}\ dx.$$

依上述代替法及 2，3 兩式，得

$$\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+c=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c.$$

再如，

$$\int tan\ x\ dx=\int\frac{sin\ x}{cos\ x}\ dx$$

令 $u=cos\ x$，則 $\frac{du}{dx}=-sin\ x$，依 17 式，得

$$\int tan\ x\,dx=-\int\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\ dx=-\int\frac{1}{u}\ dx=-log\ u+c$$

$$=log\ \frac{1}{u}+c=log\ \frac{1}{cos\ x}+c=log\ \ sec\ x+c.$$

習 題 十 三

1. 示 $\int\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\ dx=\frac{1}{3}sin^{-1}\frac{3x}{2}+c.$

提示：令 $u=\frac{3}{2}x$ 並用 12 式

2. 示 $\int \frac{3}{1+4x^2}\,dx=\frac{3}{2}\tan^{-1}2x+c.$

3. 示 $\int \sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin^2 x+c.$

4. 求下列積分：

(a) $\int \cos 4x\,dx$;　　(c) $\int \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$

(b) $\int e^{3x}dx$;　　(d) $\int e^{-\frac{x}{2}}dx.$

5. 求下列函數之積分函數：

(a) $\cot x$;　　(c) $\sec^2 x\tan x$;

(b) $\frac{x^2}{1+x^3}$;　　(d) $x(1-x^2)^3$。

6. 已知 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+3x^2-6x+2}{1-x^2}$，求以 x 之函數表 y。

提示：以分母除分子求商及餘數，得

$$\frac{dy}{dx}=-(x+3)-\frac{5(1-x)}{x^2-1}=-x-3+\frac{5}{x+1};$$

於是，

$$y=-\int x\,dx-\int 3\,dx+5\int\frac{1}{x+1}\,dx。$$

7. 示 $\int \frac{3x-5}{4x^2+9}\,dx=\frac{3}{8}\log(4x^2+9)-\frac{5}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}x\right)+c.$

8. 求 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx.$

9. 求 $\int \cos^n x\sin x\,dx.$

10. 求 $\int x^2e^{x^3}dx$

11. 求 $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$

12. 求 $\int\frac{1}{x^2+4x-5}\,dx.$

提示：以 $x^2+4x-5=(x+2)^2-9$，再以

$$u=\frac{x+2}{3}。$$

第十七節 定積分

當 x 自一值變至另一值，例如自 a 變至 b，欲知其函數 $f(x)$ 之變值若干，可求此二處函數值之差

$$f(b)-f(a)$$

卽得。在習題十二之第 4 題及第 6 題內，已知某函數之變率（卽其導微函數），問題為求此函數之變值。此類問題亦常遇見之問題也，以 $f'(x)$ 表示導微函數，則

$$f(x)=\int f'(x)dx.$$

上式左端包含一積分常數，故無從確定函數在 $x=a$ 及 $x=b$ 之值，但因常數之值不變，故此函數在 $x=a$ 及 $x=b$ 間之變值（卽 $f(b)-f(a)$ 之值）與此常數無關，例如，設

$$f'(x)=\cos\ 2x,$$

欲求 $f(x)$ 在 $x=o$ 及 $x=\frac{\pi}{4}$ 間之變值，先求

$$\int\cos\ 2x\ dx=\frac{1}{2}\sin\ 2x+c.$$

以 $x=o$ 及 $x=\frac{\pi}{4}$ 代入而求其差，得

$$\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+c\right)-\left(\frac{1}{2}\sin(o)+c\right)=\frac{1}{2}+c-c=\frac{1}{2}。$$

此運算法之標準記號爲

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{o}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}。$$

因常數 c 並不影響結果故括弧內略去不書。

通常如已知某函數之導徵函數 $f'(x)$ 而欲求自 $x=a$ 至 $x=b$ 函數之變值，輒書爲

$$\int_{a}^{b}f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_{a}^{b}=f(b)-f(a).$$

此之謂定積分(definite integral)，是數而非函數。a 與 b 二數分別謂之積分之低界及高界 (lower and upper limits of integration). 函數 $f'(x)$ 則稱爲被積於 a 與 b 之間。

由上，可推知

$$\int_{a}^{b}\phi(x)dx=-\int_{b}^{a}\phi(x)dx,$$

換言之，變易高低界之秩序卽等於變易定積分之正負號。

又

$$\int_{a}^{b}\phi(x)dx+\int_{b}^{c}\phi(x)dx=\int_{a}^{c}\phi(x)dx,$$

此式可由下列恆等式知之，令 $\phi(x)$ 表 $f'(x)$，則

$$[f(b)-f(a)]+[f(c)-f(b)]=f(c)-f(a)。$$

與定積分對立者爲第 15 節所論之積分函數，謂之無定積分(indefinite integral)。由前知無定積分之一般形式爲一 x 之函數另含泛定常數爲其一項。如能知 x 爲某一值時之函數值，卽可求得此泛定常數之值，而得特殊積分。定積分之記號可用以表示積分常數之值，

即規定低界之值而以變數爲高界卽得，例如

$$\int_a^x f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_a^x=f(x)-f(a).$$

式內積分常數之特殊值爲 $-f(a)$，此卽等於規定當 $x=a$ 時積分函數之值爲零也。

例如，設

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6}{x}，\text{且當 } x=5，\text{則 } y=o,$$

由此得，

$$y=\int\frac{6}{x}\,dx=6\ log\ x+c$$

將起始條件代入，得 $o=6\ log\ 5+c$，卽 $c=-6\ log\ 5$. 故

$$y=6\ log\ x-6\ log\ 5=6\ log\frac{x}{5}。$$

如用適所述之新記號，可縮運算手續爲

$$y=\int_5^x\frac{6}{x}\,dx=\Big[6\ log\ x\Big]_5^x=6\ log\ x-6\ log\ 5=6\ log\frac{x}{5}.$$

如起始條件內 y 不爲零，而爲當 $x=5$，則 $y=8$，則上式當改爲

$$y=8+\int_5^x\frac{6}{x}\,dx=\cdots\cdots=8+6\ log\frac{x}{5}。$$

習 題 十 四

1. 設 $\frac{dy}{dx}=3x^2-8x+2$，當 x 自 2 變至 5，問 y 變値若干？

2. 求下列定積分之值：

(a) $\int_0 t\sqrt{t}\,dt$;　　　　(b) $\int_{-2}^0 2(t^2-1)\,dt$;

(c) $\int^{5} \frac{\log\ x}{x}\,dx$;　　　(d) $\int_{1}^{-8} s^{\frac{2}{3}}(s^2-2s)ds$.

3. 設有物體受力後運動，此力 F 所作之功 u 爲此物移動距離 s 之函數。此函數對 x 之導微函數卽用以表力之函數。設某物體受力 $F=-45$; s 自 2 變至 4，問此力作功若干？ s 自 2 變至 -4，作功若干？自 -4 至 4 作功若干？

4. 有物被引向某點，其引力等於 $\frac{10}{s^2}$，s 表物與此點之距離。求此力施於此物後所作之功 (a) 當此物自 $s=3$ 運動至 $s=2$ (b) 自 $s=2$ 至 $s=1$。

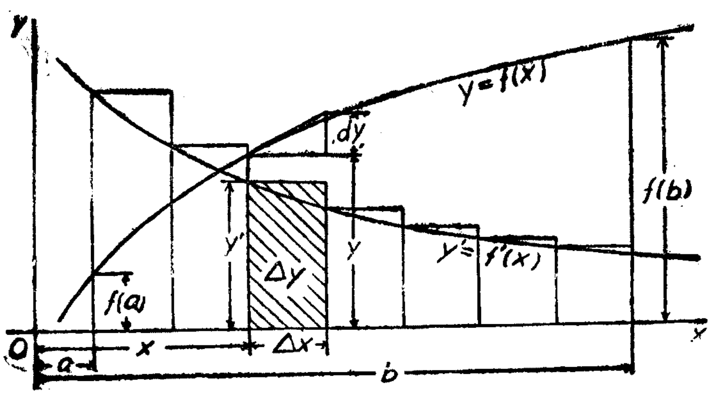
5. 某動體之速度 v 與時間 t 之關係可表以下式:

$$v=4t-\sin\ 2t.$$

求此動體在任何時之地位與在 $t=\frac{\pi}{4}$ 時地位之距離，先以高界爲變數之積分表此距離，復以 t 之函數。表此積分。

第十八節　微分之和之極限

令 $y=f(x)$，其導微函數爲 $y'=f'(x)$。設第 19 圖內之二曲



第 19 圖

線分別表 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之圖形依第 15 節所述，當 x 自一值變至另一值時，例如自 a 至 b，則 y 值之變值卽曲線 $y'=f'(x)$ 與 x-軸，及 $x=a$ 與 $x=b$ 諸線所包之面積。茲將 a 至 b 之間隔等分爲數部份，每部份寬 Δx，並於分點畫縱坐標以表示該點之 y'，於每個寬 Δx 之間隔上，畫一長方形，以左端之縱坐標爲其高度，故每個長方形之面積爲 $y'\Delta x=f'(x)\Delta x$，式內 y' 或 $f'(x)$ 卽左端之縱坐標。在 $y=f(x)$ 之圖形上標明 dy 之直線與 Δx 之比係以 Δx 左端之切線定之，故

$$\frac{dy}{\Delta x}=y'=f'(x),\ \text{卽}\ dy=f'(x)\Delta x.$$

可見 dy 之長度卽等於以 dy 標明之面積。此數量 dy 謂之 y 之微分 (differential of y)，其值視 Δx 及 x 之值而定，$f'(x)$ 則爲 x 之函數。

自 a 至 b 所有微分之和可以下式表示：

$$\sum_a^b dy=\sum_a^b f'(x)\Delta x,$$

此和數與在曲線 $y'=f'(x)$ 下自 a 至 b 之面積之差可以 E 表之，卽長方形上之邊及曲線間之面積之和，令 $\Delta y'$ 表長方形之高度與 y' 差數之最大者，則

$$E<(b-a)\Delta y'$$

以上雖尙未論及 Δx 之大小，及間隔 a 至 b 究分爲若干等分，但無論 Δx 變爲如何小或間隔 a 至 b 等分次數如何多，上述各點恆能成立。等分數目無窮增大，則 Δx 趨於零爲極限，如 $f'(x)$ 爲連續函數，則 $\Delta y'$ 亦必趨於零。如是則 E 必趨於零而微分之和趨於所求之面積。故

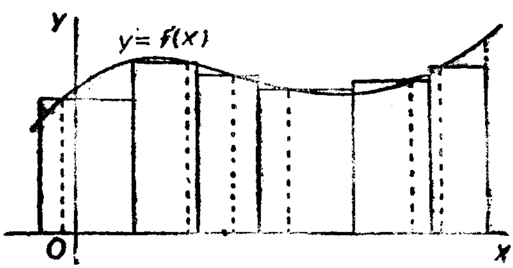
$$\lim_{x\to 0}\sum_a^b f'(x)\Delta x=\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a).$$

就特例 $y=f(x)=x$ 而論，則 $y'=f'(x)=1$，故 $dy=dx=f'(x)\Delta x=\Delta x$，換言之，自變數之微分與增量固無區別，故當 $y=f(x)$，可以

$$dy=\frac{dy}{dx}dx=f'(x)dx,$$

自變數之微分 dx 實爲一泛定增量，而函數之對應微分 dy 則等於其導微函數與此增量之乘積。故一變數之微分與另一變數微分之比即前變數對後變數之導微函數。因此導微函數亦稱爲微分係數 (differential coefficient).

以上論微分和之極限，爲簡單起見，故將自 a 至 b 之間隔等分爲若干部份，且用每部份左端之 y' 爲矩形之高。但只須將上述論點略加修改，(其詳以不討論爲宜)即知不但不必等分間隔 ab，y' 亦不必限於取小間隔之左端者只須在小間隔內取 y' 即可。當其中最大之 Δx 趨於零時，此和數之極限仍等於此定積分。此可於第 20 圖見之。蓋照圖內所畫之長方形，其面積之和較之以左端縱坐標爲高度所得之長方形面積之和似更近所求之面積，而當其寬度趨於零時，則面積之和之極限即爲所求之面積也。(第 20 圖)微分僅暫應用於一問題之中間步驟，最後結果則爲微分之和之極限，故書 $dy=y'dx$ 時，無論以 y' 爲間隔 dx 左端之值或在間隔 dx 中取其他 y 對 x 之導微函數，皆無關係也。



第 20 圖

茲舉例以明此種分析法，（即微分和之極限之觀念）如何應用以解決實際問題。

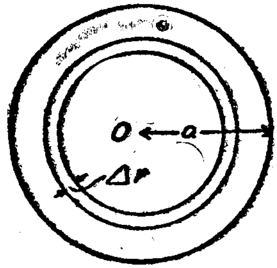
第一例，有正圓柱（如分步軸承 step bearing）其抵抗繞軸而轉之摩擦力平均分配於此正圓柱之一端，求抗此摩擦力之力矩。設圓柱之半徑爲 a 吋，摩擦力爲每平方吋面積 p 磅。第 21 圖示圓柱一端之切面，a 爲半徑，o 爲其軸，將此圓分爲若干個小圓，以 Δr 表任何二鄰接圓半徑之差，則二鄰接圓之面積差爲 $2\pi r_1\Delta r$，其中 r_1 爲某一中間半徑。在此環形截面上之總摩擦力爲 $2\pi r_1 p\Delta r$，而對於 o 點之力矩爲

$$\Delta M = 2\pi r_1 r_2 p\Delta r, \tag{1}$$

其中 r_2 亦爲一中間半徑，諸 ΔM 之和卽所求之力矩，但因不知 r_1 及 r_2 之値，故不能直接求得此和數，但 r_1 及 r_2 當在二圓之半徑之間，若令 $r^2 = r_1 r_2$，則 r 亦爲一中間半徑，若書

$$dM = 2\pi r^2 p dr \tag{2}$$

求上式和數之極限，不必求 r 之値，而得一表示所求力矩之値之定積分



第 21 圖

此力矩爲

$$M = \int_0^a 2\pi p r^2 dr = \frac{2}{3}\pi p a^3.$$

此問題不用微分之觀念，亦可解得，由(1)得

$$\frac{\Delta M}{\Delta r}=2\pi r_1 r_2 p,$$

當 Δr 趨於零，則中間半徑 r_1 及 r_2 等應皆趨於與 r 相合，故導微函數爲

$$\frac{dM}{dr}=2\pi p r^2,$$

而

$$M=\int_0^a 2\pi p r^2 dr=\frac{2}{3}\pi p a^3.$$

但類此之問題，多數仍以用微分爲宜，微分 dM 可視爲增量 ΔM 之近似值，而所有 dM 之和之極限則恰等於所有 ΔM 之和。實際解題時不必書方程式(1)，儘可徑書方程式(2)，因任何中間半徑如 r_1 及 r_2 等，皆可以 r 替代之也。

第二例，有長方形之水櫃，其底有孔以洩水，流率爲每分鐘 $k\sqrt{h}$ 立方吋，其中 h 爲孔上之水深，而 k 爲常數。以 a 與 b 爲水櫃底之寬及闊，h_1 爲起始水深，問需時若干以洩盡櫃內之水。水面低落 dh 所需之時間爲

$$dt=\frac{ab\ dh}{k\sqrt{h}},$$

卽洩去之體積以每分鐘洩去之體積除之。由此得

$$t=\frac{ab}{k}\int_0^{h_1}\frac{dh}{\sqrt{h}}=\frac{2\,ab}{k}\sqrt{h_1}$$

式內 a，b，及 k，皆以吋爲單位，t 則以分爲單位。在 dt 之式內，欲求確切之時間，必須求出 h 之變值爲 dh 時 $k\sqrt{h}$ 之平均值，但用求微分和之極限解此題，(卽求其定積分)，則無須求出此平均值。

習 題 十 五

1. 某梁距一端 x 呎之每呎擔負爲

$$L=100x,$$

設此梁長 10 呎,求總擔負。(提示:求對應於梁之長度 dx 之擔負微分 dL, 然後據以求積分。)

2. 求第一題內梁上擔負對於一端(據以量度 x 之一端)所生之力矩。設此梁兩端皆支於柱上,示 $x=10$ 一端之柱承受全擔負三分之二。

3. 在梁上任何點之切力爲此點一方面所有鉛直合力,(連擔負及支力在內),求第 1 題第 2 題內梁上中點所受之切力。求在任何距離 x 之切力,以 x 之函數表示之。

4. 螺簧每加力 10 磅伸長一吋,此簧如伸長 8 吋,問曾作功若干?(參看習題十四第 3 題)。

5. 某軸之平領形軸承(flate collar bearing)受推力 100 磅,此軸承之內半徑爲 3 吋,外半徑爲 5 吋。設壓力平均分配於軸承面上,而其摩擦係數爲 .05, 求軸承上摩擦力所生之力矩。

6. 一正圓柱形之水櫃有一平方吋之孔以洩水。設水流速度爲每秒 $5\sqrt{h}$ 呎,式中 h 爲孔上之水深,問自水深 10 呎低落至千呎,需時若干?水櫃之半徑爲 6 呎。

7. 水下平面上一點所受之壓力爲每平方呎 62.5 h 磅, h 爲此點上之水深。今有鉛直之牆高 6 呎,寬 10 呎,恰爲水所淹,求牆上所受之總壓力,並求牆之下半段所受之總壓力。

8. 求第 7 題內水壓力對於牆頂邊所生之力矩。須集中力於何處以平衡此壓力?

9. 有錐形之漏斗,圓徑 10 吋,高 12 吋,水之洩出率爲每秒 $10\sqrt{h}$ 立方吋,h 爲水深之吋數。水深 8 吋時,需時若干可將水洩盡?

第五章　方程式之解法

第十九節　代數方程式　恰合根

以 $P(x)$ 表示 x 之 n 次多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

式中 n 爲正整數，而 $a_0, a_1\cdots\cdots a_n$ 等則爲常數。

餘式定理(remainder theorem)：設以 $x-r$ 除 $P(x)$，則其餘式爲 $P(r)$。

證：以 $P(x)=Q(x)(x-r)+R$，式內 $Q(x)$ 爲商式，R 爲餘式，設以 $x=r$，則 $P(r)=R$。

下述定理爲餘式定理之推論，蓋 r 如爲方程式 $P(x)=o$ 之一根，卽等於謂餘式 $P(r)$ 爲零也。

因式定理(factor theorem)：設 r 爲方程式 $P(x)=o$ 之一根，則 $P(x)$ 恰可被 $x-r$ 除盡。

設 r 爲方程式：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=o \tag{1}$$

之一根，則由因式定理知 $x-r$ 爲左端之一因式，故設 $r_1, r_2\cdots\cdots r_n$ 等亦爲此式之根，則 $(x-r_1), (x-r_2), (x-r_3)\cdots\cdots(x-r_n)$ 等亦爲左端之因式。但最多不能過 n 根，蓋過此則爲高於 n 次之多項式也。

設 n 次之方程式至少有一根，則每次分解因子後仍可分解，故方程式有 n 個根，方程式可書爲：

$$a_0(x-r_1)(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_n)=o \tag{2}$$

各因式相乘，得

$$a_0x^n+a_0p_1x^{n-1}+a_0p_2x^{n-1}+\cdots\cdots a_0p_{n-1}x+a_0p_n=o \tag{3}$$

式內 p_1 爲諸根之和冠以負號，p_2 爲諸根乘積之和每項均爲二根之乘積，以此類推，p_k 中每項均爲 k 個根之乘積，如 k 爲偶數，則冠以

負號。

現可研究數種特殊之多項式。第一，以 $a_0=1$，而諸根 $r_1, r_2\cdots\cdots r_n$ 之值分别爲 $0,1,2,\cdots\cdots n-1$，當 x 爲正整數 m 時，研究此多項式之值。(2)之左端變爲 n 個相續正整數之乘積，以特殊記號代表之。

$$ {}_mP_n=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)。 \tag{4}$$

如 m 小於 n 則此數爲零，但設 $m=n$，則另以一新記號表示之，

$$ {}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots2\cdot1=n! \tag{5}$$

此數謂之 n 之階乘(factorial)，其應用極廣，設 m 大於 n，則

$$ {}_mP_n=\frac{m!}{(m-n)!}=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots2\cdot1}{(m-n)(m-n-1)\cdots\cdots2\cdot1} \tag{6}$$

玆舉一例以明此等記號重要應用之一種。某籃球隊共有球員 20 人，比賽時僅有 5 角，則排列比賽球員之可能性如下：20 人皆可充第一角，故第一角可有 20 種補充法，對於每一補充法之第二角，可以其餘 19 人充之，故第一第二角共有 20•19 種不同之補充法，於每種補充法中有 18 種第三角之補充法，以此類推，故所求之排列球員之數目爲 20,19,18,17,16 五因數之積。此卽在 20 物件中，每次取 5 件之排列(permutation)數也。其值可以下列記號表之：

$$ {}_{20}P_5=\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}{15\cdot14\cdot13\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}=\frac{20!}{15!}$$

推廣之，在 n 個物件中，每次取 k 個之排列數爲

$$ {}_nP_k=\frac{n!}{(n-k)!} \tag{7}$$

若 $k=1$，則 ${}_nP_1=\dfrac{n!}{(n-1)!}=n$，此卽在 n 物件内每次選一件之數目也。設 $k=n_1$ 則得一重要之特例 ${}_nP_n=\dfrac{n!}{o!}$.此處 $o!$ 之值必規定代表 1，否則當 $n=1$ 時，恆等式 $\dfrac{n!}{(n-1)!}=n$ 不能成立；故 ${}_nP_n$

$=n!$,如(5)所示,此即 n 物件不同之排列數也。

設欲求在 20 球員中挑選五人共計可有若干不同之挑選法，因每挑選五人,尙可就五角作 5! 種不同之排列,故以 5! 除 ${}_{20}P_5$，即得所求之挑選數。此即在 20 物件每次取 5 件之配合(combinations).數也,照例以下列記號表之,

$$ {}_{20}C_5=\frac{20!}{5!\cdot 15!} $$

推廣之,在 n 個物件中每次取 k 個之配合數爲,

$$ {}_nC_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{8} $$

若在 20 人中每次挑選 15 人與每次挑選 5 人有同一之配合數,因每次取 5 人卽每次捨 15 人也,取捨之法是應相同。故得普遍之關係式,

$$ {}_nC_k={}_nC_{n-k}. $$

前論多項式之第二種特式,令 $a_0=1$，且令所有諸根皆相等,即 $r_1=r_2=\cdots\cdots=r_n=r$，則(2) 之左端變爲 $(x-r)^n$，而在 (3) 內，$p_1=-nr, p_n=\pm r^n$，其通式則爲 $p_k=\pm{}_nc_kr^k$，k 爲偶則 p_k 爲正，k 爲奇則 p_k 爲負。於是(3)變爲

$$ (x-r)^n=x^n-nrx^{n-1}+\frac{n!}{2!(n-2)!}r^2x^{n-2}\cdots\cdots\pm r^n. \tag{9} $$

此之謂正整數冪二項式定理(binomial theorem for positive integral powers),用此方程式可求得任何正整數冪二項式之任何一項。例如$(a-b)^n$之第 k 項內含有 b^{k-1}。可書爲

$$ (-1)^{k-1}\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}a^{n-k+1}b^{k-1}。 \tag{10} $$

由多項式(3),得下列重要定理:

設(3)內之係數皆爲整數，並設 p 與 q 爲無公因數之整數，如 $\frac{p}{q}$ 爲(3)之一根，則 q 爲 a_0 之因數。

證：於(3)內，設 $x=\frac{p}{q}$，則

$$\frac{a_0p^n}{q^n}+\frac{a_0p_1p^{n-1}}{q^{n-1}}+\cdots\cdots+a_0p_n=o,$$

以 q^{n-1} 乘之，而移第二項以下各項，得

$$\frac{a_0p^n}{q}=a_0p_1p^{n-1}+a_0\,p_2p^{n-2}q+\cdots\cdots a_0p_nq^{n-1}.$$

在上式內，右端爲一整數，則左端亦應爲一整數，故 q 必爲 a_0 之因數。

由此可理，知，凡若方程式呈下形：

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=o \tag{11}$$

式內 $p_1,p_2\cdots\cdots p_n$ 等皆爲整數，則其所有之有理根必爲整數且爲 p_n 之因數。設 $p_1,p_2,\cdots\cdots p_n$ 等係數中有並非整數但爲有理分數者，則可求得一新方程式

$$y^n+q_1y^{n-1}+q_2y^{n-2}+\cdots\cdots+q_n=o, \tag{12}$$

式中諸 q 爲整數，且使(12)式諸根爲(11)式諸根之倍數。欲使(11)式之諸根增加 m' 倍，換言之即定(12)式中諸 q 之值俾 y 值爲 x 值之 m 倍，可令 $y=mx$ 代入(12)，再以 m^n 除各項得

$$x^n+\frac{q_1}{m}x^{n-1}+\frac{q_2}{m^2}x^{n-2}+\cdots\cdots+\frac{q_n}{m^n}=o.$$

將此式與(11)比較，應有

$$q_k=m^k.p_k(k=1,2,\cdots\cdots n)。 \tag{13}$$

由另一方面亦可得此結果，蓋 p_k 爲每次取 k 根相乘積之和，今每根皆增大 m 倍，故 p_k 必增大 m^k 倍設諸 p 值等爲有理數。則可選擇 m 之值，使諸 q 值皆爲整數。

凡呈(1)形之方程式，若諸 a 值爲有理數，則可以嘗試法求其各有理根。蓋以 a_0 除(1)得(11)，必要時以增大諸根 m 倍，得(12)，此二式內之有理根皆爲整數，因(12)式諸根之乘積爲整數 q_n，故可試 q_n 之各因數，以視其是否爲一根。依因式定理，設 r 爲一根，則 $x-r$ 爲一因式，故嘗試法以用綜合除法(synthetic division)爲最簡便。此運算法爲分離係數法應用之一例。以一多項乘或除另一多項式，若排列係數時能由其地位及秩序，知其屬於何項變數，則係數後之變數部分可省略不書，現所欲論者，卽以二項式 $x-r$ 除多項式之算法。用普通方法佈式如下：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -3x^2 & +7x & -6 & x-3 \\
\cline{5-5}
4x^3 & -12x^2 & & & 4x^2+9x+34 \\
\cline{1-2}
 & 9x^2 & +7x & & \\
 & 9x^2 & -27x & & \\
\cline{2-3}
 & & 34x & -6 & \\
 & & 34x & -102 & \\
\cline{3-4}
 & & & 96 &
\end{array}
$$

爲簡單起見，式中可略去 x 之冪數，及各重複數字，於是可佈式如下：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4 & -3 & 7 & -6 & 1-3 \\
\cline{5-5}
 & -12 & & & 4\quad 9\quad 34 \\
\cline{2-2}
 & 9 & & & \\
 & & -27 & & \\
\cline{3-3}
 & & 34 & & \\
 & & & -102 & \\
\cline{4-4}
 & & & 96 &
\end{array}
$$

上式，更可重排，使其更簡單整齊，第一係數4須重寫一次，商式中其餘三係數，均依次排列，96 則爲餘式。

$$
\begin{array}{rrrr|l}
4 & -3 & 7 & -6 & 1-3 \\
 & -12 & -27 & -102 & \\
\hline
4 & 9 & 34 & 96 &
\end{array}
$$

除式內第一項已知其爲 x 故亦可略去，並易除式第二項之號，則運

算時可以加代減，故最後之式爲

$$\begin{array}{rrrr|l} 4 & -3 & 7 & -6 & \underline{3} \\ & 12 & 27 & 102 & \\ \hline 4 & 9 & 34 & 96 & \end{array}$$

再舉一例，求以 $x+2$ 除$x^5-6x^3+3x^2-8$ 之商。用綜合除法，得

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & 0 & -6 & 3 & 0 & -8 & \underline{-2} \\ & -2 & 4 & 4 & -14 & 28 & \\ \hline 1 & -2 & -2 & 7 & -14 & 20 & \end{array}$$

故商爲 $x^4-2x^3-2x^2+7x-14$ 而餘式爲 20.

如用嘗試法得 $x-r$ 爲一恰合除式 (exact divisor)，則令商式等於零，得降次方程式(depressed equation)，又可以嘗試法求其根。求正整數根之嘗試次數不但爲 q_n 之因數之個數所限制，且可求得一正根之界限(bound for the positive roots)，凡 q_n 之因數超過此界限者皆可不試。以 $x-b$ 試除，所得商式內各係數及所得餘數爲零或正數，則無大於 b 之根。實際嘗試時，先求正根，求得後，即得其降次方程式。欲求負根，先以一乘諸根，次就此新方程式求其正根，由(13)知欲變易各根之號只須盡變未知數。奇次冪之號或盡變偶次冪之號即可。

所有有理根旣已求得，並將對應於此根之因式除去，所得降次方程式如不高於四次可用根式表其根。以後第 23 節中當論方程式之近似解法，求無理根用近似解法每較以根式表根爲便。惟二次方程式(quadratic equation)及二項方程式(binomial equations)仍以用根式表根之値爲宜，故現在可僅注意上述之二式。茲述二種方程式之解法如下：

設已知之方程式爲二次，其一般形式爲

$$ax^2+bx+c=o$$

其根可用下列二法之一求得之。

設此二次式可以觀測法分解因式，則

$$(hx+k)(sx+t)=o$$

其二根為

$$x=-\frac{k}{h},\quad -\frac{t}{s}.$$

如因式不易由觀測求得，則可以下列公式求根。以 $4a$ 乘此式以免分數攙入，並配方，得

$$4a^2x^2+4abx+4ac=o.$$

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac,$$

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

由此得公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

如 a,b,c 表泛定常數或表其他變數，則用此公式，最為便利。b^2-4ac 謂之二次方程式之判別式(discriminant)，蓋 a,b,c 若為實數 b^2-4ac 為正，則二根為不等實數；為零，則根為相等實數；為負，則為共軛複數(conjugate complex number)。

設方程式為二項式

$$x^k-q=o,$$

則方程式諸根為 q 之 k 次根，可以根數表示之。設 k 為偶而 q 為正，則有一正實根及一負實根；設 k 為偶而 q 為負，則各根皆為虛數；設 k 為奇，則有一與 q 同號之實根。二項式各根之性質將再於第 50 節內論及。

例：解 $6x^4-11x^3+9x^2+4x-2=o.$

以 6 除之，得　$x^4-\frac{11}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=o.$

令 $y=6x$：$y^4-11y^3+54y^2+144y-432=o.$

試 1；							
	1	−11	54	144	−432	1	$f(1)=-244$
		1	−10	44	188		
	1	−10	44	188	−244		

試 2;
$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -11 & 54 & 144 & -432 & \underline{2} \\
 & 2 & -18 & 72 & 432 & \\
\hline
1 & -9 & 36 & 216 & 0 &
\end{array}$$

故一根爲 2,而降次方程式爲

$$y^3-9y^2+36y+216=0$$

先試 2,以次試 3,4,6,8, 均不能得根,試 9,

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -9 & 36 & 216 & \underline{9} \\
 & 9 & 0 & 324 & \\
\hline
1 & 0 & 36 & 540 &
\end{array}$$

所有係數及餘式皆爲正數或零,故實根不論爲有理數或無理數不能大於 9。

改各根之號,卽令 $z=-y$,

$$z^3+9z^2+36z-216=0$$

以 1 及 2 試算,知其非根,以 3 試算,得

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & 9 & 36 & -216 & \underline{3} \\
 & 3 & 36 & 216 & \\
\hline
1 & 12 & 72 & 0 &
\end{array}$$

故 3 爲根,此外尙須解 $z^2+12z+72=0$.

$$z=\frac{-12\pm\sqrt{144-288}}{2}=-6(1\pm\sqrt{-1}).$$

故原方程式之四根爲$\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $1+\sqrt{-1}$ 及 $1-\sqrt{-1}$.

習 題 十 六

1. 有 12 件物每次取 5 件,問有若干排列法?

2. 有信號旗五面,每個信號以三旗爲一列組成之,問可得若干種信號?

3. 爲奬勵鐵路公司延長線路起見特准該公司在 6 哩見方之市鎭

內選地六塊，每塊一方哩。設所選之地不得有兩塊在同一之南北或東西行內，問有若干種選擇法？如不加限制，有若干種選擇法？

4. 欲於 25 人中選拔 7 人，各司定職，問有不同之選法若干種？

5. 在 $(a+b)^{13}$ 展式中，問何數爲 a^5b^8 之係數？設有梨橘各十三個，以梨橘各一個爲一對，分爲十三對，今從每對內或取一梨或取一橘，共取梨 5 個橘 8 個，問有若干種不同之取法。

6. 求 $\left(\frac{1}{x}-x^{\frac{3}{2}}\right)^{17}$ 展式中之第 12 項。

7. 解下列二次方程式：

(a) $x^2-6x+5=0$;　　(c) $3x^2+7x-2=0$;

(b) $x^2-13x-30=0$;　　(d) $x^2-kx+4=0$.

8. 有四個方程式，甲方程式之根爲 3 與 -4；乙式之根爲 2 與 8；丙式之根爲 a 與 $-a$；丁式之根爲 $a+\sqrt{b}$ 與 $a-\sqrt{b}$；書出此四方程式。

9. $x^2+4xy+4y^2-x+6=0$，解出 x。y 爲何值則 x 之二值相等？則 x 爲實數？則 x 爲複數？

10. 設方程式 $x^2+2ax-a=0$. 一根爲他根之二倍，問 a 須爲何值？設一根較他根大 5；問 a 須爲何值？

11. 書有下列各根之方程式：

(a) 2, 5, 及 -3;　　(c) 1, 3, 及 -4;

(b) 2, 3, -1, -5;　　(d) 2, -1, $3+\sqrt{-2}$, $3-\sqrt{-2}$

12. 求下列各式之有理根，如屬可能，並求其完全解法：

(a) $x^3-7x^2+14x-8=0$;　　(b) $x^4-2x^3-12x^2-13x-10=0$;

(c) $6x^4+5x^3+5x-6=0$;　　(d) $5x^3+\frac{7}{6}x^2+\frac{27}{5}=0$;

(e) $2x^5-3x^4-5x^3+4x^2-6x-10=0$.

第二十節　行列式及消去法

解題時每需求一個或一個以上之未知數之值。如問題之意義確定可求解者，則必可據題意書出若干個包含未知數之方程式，方程式個數與未知數個數恰相等。

在此等方程式內如須增加若干輔助未知數，或增加後較爲便利，則增加方程式之個數亦應與未知數個數相等。

凡欲求 n 未知數必須有 n 個獨立方程式，即 n 式之中，無一係由此 n 式中之另一式推得者也。將此項方程式變換及合併可得若干個新方程式，其數目較前爲少，僅有 $n-r$ 個未知數與 $n-r$ 個方程式。新方程式內不復出現之 r 個未知數謂之被消去。欲求某一未知數之值必續繼用此消去法，至祇賸所求之一未知數於一方程式內。此消去法未必處處可能，即可能運算手續亦極繁重。本節即論能化爲有理代數式方程式之切於實用且有系統的消去法。

1. 行列式記號　設有包含三個未知數 x, y, 及 z 之平直方程式一組，計三式：

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3.$$

設法消去 y 及 z，得

$$x=\frac{d_1b_2c_3+b_1c_2d_3+c_1d_2b_3-c_1b_2d_3-d_1c_2b_3-b_1d_2c_3}{a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3}.$$

分母內六項，每項包含三個不同之字母，及三個不同之足碼，由三式諸係數錯綜排列而成，上式中足碼係按數字之自然秩序排列，故六項即 a, b, c 三文字間之六種排列法。又正項之文字或係依文字之順序排列，或係依偶次之互換或逆位 (inversion) 之順序排列，至負項之文字則係依奇次之逆位順序排列。若將分母中之 a 改爲 d 即得分子。此類之式謂之行列式。(determinant)

行列式之記號爲一有行有列之方陣，左右界以直線，例如三級行列式有三行三列，如下：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

自行列式中每行每列只取一元素，所有此等不同行列諸元素連乘積之代數和謂之行列式之值，乘積（或項）中逆位之數爲偶則爲正，逆位之數爲奇則爲負。例如 $a_2\ c_1\ b_3$ 構成之項，若照此寫法可察出其排列之『不順』者（各元素文字係按行之秩序順排。數字係按列之秩序順排）；此處計有 c 在 b 前，2 在 1 前二個逆位。若變易元素之排列則增損逆位偶數個，依此標準，故每項各有其一定之正負號，不因元素之排列而變易。

2. 行列式之展開　由上述定義可得簡單法則，以求行列式之值。於二級行列式，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

於三級行列式，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1c_2b_3 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

上行列式內各元素間之線示選項之方法，依鐘向轉者得正號，反鐘向轉者得負號。

例：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 2\cdot(-2)\cdot(-5)+1\cdot1\cdot3+(-4)\cdot4\cdot3 \\ &\quad -4\cdot(-2)\cdot3-1\cdot3\cdot(-5)-2\cdot4\cdot1 \\ &= 20+3-48-24+15-8=-42. \end{aligned}$$

由行列式之定義，凡行列式皆可以較低級之行列式表之，謂之行列式之子式 (minor determinants). 欲求對應於某元素之子式只須將原行列式內包含此元素之一行一列取消卽得。例如，在上述三級行列式內對應於 a_1 及 b_3之子式各爲

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

任一行列式，可以其某一行或某一列之各元素乘其對應之子式，之代數和表之。各元素之正負相間，第一列第一元素爲正，第一列第二元素爲負，餘類推。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= -a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

三級以上之行列式亦可以逐步化爲若干個三級行列式之和，然後展開所得之各三級行列式以求其值。因 n 級行列式通常有 $n!$ 項故展開高級行列式之手續至爲繁複。如五級行列式卽可展爲 20 個三級行列式或 60 個二級行列式也。

3. 行列式之特性　上述行列式之展開法可藉以求行列式之值，

但如知行列式之數種特性，則運算往往可較速，此等特性且可爲認識各行列式間關係之一助。

(a) 設行列式所有之行與所有之列互易，例如以第一行易第一列，（餘類推）則行列式之值不變。

(b) 設二行（或列）互易，則行列式之正負號變。

蓋二行或二列互易，則展式中每項之逆位數均增或損奇數個。

(c) 同行（或同列）各元素如有公因數，則此公因數亦爲此行列式之因數。

因展式內每項均含有某行之一元素，爲其因數，且每項僅含該行之一元素也。

(d) 設一行（或列）之各元素與另一行（或列）之各對應元素成正比例，則此行列式等於零。

蓋於一行（或列）內除去公因數，則有二行（或列）完全相等，於是先以一行（或列）之各元素及其對應子式，表行列式之值，再以相等之另一行（或列）之各元素及其對應子式表此行列式。前後二式之號不同，而數值相等，故原行列式之值必等於零。

(e) 自一行（或列）之各元素加以或減去另一行（或列）各對應元素之倍數，此行列式之值不變。

例如：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ma_2 & a_2 & a_3 \\ b_1+mb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1+mc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+ma_2)\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-(b_1+mb_2)\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}+(c_1+mc_2)\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ma_2 & a_2 & a_3 \\ mb_2 & b_2 & b_3 \\ mc_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

依特性(d)最後一行列式之値應爲零，故原行列式之値不變。

行列式可利用特性(e)使其元素變爲零或較小之數，以節省展開之手續。玆展開一四級行列式以說明之：

$$\begin{vmatrix} 22 & 3 & 2 & -2 \\ 32 & 6 & 7 & 3 \\ 14 & 2 & 4 & 1 \\ 24 & 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 9 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 9 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -35 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -41 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -41 & -7 \end{vmatrix} = 900.$$

上式內，首由第一列內減去第二列之六倍；第二步，於第二行上加第一行，再於第一行內減去第三行之二倍；第三步，用第一列各元素及其子式表此行列式並取出第一行之因數 -1；第四步，於第二列內減第一列，再於第一列內減第三列之九倍；第五步，以三級行列式第二行內各元素及其子式表此行列式，再取出第一行之公因數 5。

4. 行列式之應用　行列式之初步重要應用可以下列各例明之。

(a) 解 n 元聯立平直方程式。

例：$n=3$。

$$a_1x+a_2y+a_3z=a_4,$$
$$b_1x+b_2y+b_3z=b_4,$$
$$c_1x+c_2y+c_3z=c_4.$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_3 \\ b_4 & b_2 & b_3 \\ c_4 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_4 & a_3 \\ b_1 & b_4 & b_3 \\ c_1 & c_4 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Δ 爲各係數之行列式，

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

證：以 x, y, z 之值代入各方程式，將常數項移至左端，以 Δ 乘各項，則方程式左端爲一有二行相等之四級行列式，故等於零。

表各未知數爲一分數 n 個未知數係數構成之行列式，爲分母將常數項代替此行列式中所求未知數之係數之新行列式爲分子。

有二特例應注意：(1)設分母 Δ 爲零而其他行列式非零則各方程式謂之不一致，各未知數不論表何有限值，皆不能適合各方程式。(2)如所有行列式皆等於零，則各方程式並非獨立，故不足以定各未知數之值，如下例(b)所示。

(b) 溢額方程式組之一致性：方程式組中之方程式個數多於其未知數個數則謂之溢額(redundant).因 n 個獨立方程式即可定 n 個未知數，如是求得之未知數欲其適合其餘之方程式，必此此等方程式與 n 個方程式有特殊關係，茲舉例以明之。

設欲研究(a)例內第三式是否由其他二式而得，即須能求得 p 與 q 二數，使 p 乘第一式加 q 乘第二式得第三式。如是則必

$$a_1p+b_1q=c_1,$$
$$a_2p+b_2q=c_2,$$
$$a_3p+b_3q=c_3,$$
$$a_4p+b_4q=c_4。$$

以四式求二未知數 p 與 q，是爲溢額方程式組。解前二式，得

$$p=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\qquad q=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}。$$

以上值代入第三式，得

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{即}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

此式表 p 與 q 值可適合前三式之條件。四式內任取三式皆可推出與此相似之條件。由上述 3 (a) 行列式之特性，可知如本節(a)之四個行列式皆爲零，則此三方程式並非獨立。

對於溢額方程式組，倣上法推證知 $n+r$ 個平直方程式中如僅有 n 個未知數則自其中任意 $n+1$ 個方程式內所得之 $n+1$ 級行列式等於零，方程式始能一致。最常見者爲特例 $r=1$，此處祇須察一個行列式之值。

倣此，在下列三式內

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0,$$

欲得 $x=y=z=o$ 以外之解，必其行列式等於零。此必要條件適合後，可任取其中二式以解$\dfrac{x}{y}$及$\dfrac{y}{z}$之值。

(c) 表示兩個一元代數方程式有一公根之條件。

例：
$$x^2+3x-a=0,$$
$$x^3-ax^2+2x-5=0.$$

書上二式及其以x乘得之式如下：

$$\begin{aligned} x^2+3x-a&=0,\\ x^3+3x^2-ax\qquad&=0,\\ x^4+3x^3-ax^2\qquad\qquad&=0,\\ x^3-ax^2+2x-5&=0, \end{aligned}$$

$$x^4-ax^3+2x^2-5x=0.$$

任何 x 值之能適合二原方程式者皆能適合上列五式。以 x, x^2, x^3, 及 x^4 作爲未知數，由(b)，知欲 x 值能同時適合上五式，必

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -a \\ 0 & 1 & 3 & -a & 0 \\ 1 & 3 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 2 & -5 \\ 1 & -a & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}=0。$$

設 a 值能使此行列式等於零，則原設二式有一公根。此行列式謂之原設二式之消去式(eliminant)。

(d) 自二個聯立方程式內消去一變數。

例：
$$x^2y-3xy^2+2y-1=0,$$
$$xy-y^2+2=0。$$

照前法，得

$$x^2y-3xy^2+(2y-1)=0,$$
$$xy-(y^2-2)=0,$$
$$x^2y-(y^2-2)x\qquad=0。$$

欲 x 及 x^2 能適合上列三式，必

$$\begin{vmatrix} y & -3y^2 & (2y-1) \\ 0 & y & -(y^2-2) \\ y & -(y^2-2) & 0 \end{vmatrix}=0。$$

由此消去 x 而得一僅含 y 之方程式。此行列式謂之二式之 x 消去式。

此處及(c)所用之方法謂之薛氏消去法(Sylvester's method of elimination)，此法以須消去之變數之冪乘原式，使變數之係數及無變數之項可成一方陣，設原設二方程式各爲 m 及 n 次，則連同原設二方程式在內共需構成 $m+n$ 個方程式，方可求得消去式。

習題十七

1. 求下列行列式之值：

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -8 \end{vmatrix}$；(c) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & \cdot 7 & 1 \end{vmatrix}$；

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$；　(e) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ a & b & c & 0 \\ 1 & d & e & 0 \end{vmatrix}$。

2. 證下列恆等式，如屬可能，宜引(3)內行列式之特性以證之，不必將其展開。

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 15 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix}=0$；　(b) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -2 \\ -10 & 6 & -2 \end{vmatrix}=0$；

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$；　(d) $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$；　(f) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3. 展開下列行列式：

(a) $\begin{vmatrix} 48 & 5 & 9 \\ 36 & 6 & 7 \\ 72 & 8 & 14 \end{vmatrix}$；(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$；(c) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 11 & 16 \\ 7 & 30 & 36 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & c \\ x & y & 1 & 1 & 0 \\ y & x & c & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　(e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$。

4. 以行列式法解下式:

(a) $3x+2y=7,$
$4x-y=2;$

(b) $ax-8y=1,$
$2x-ay=\frac{1}{2};$

(c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1,$
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5;$

(d) $x+y=-1,$
$x+z=1,$
$z+x=4;$

(e) $2x+y+2z=2,$
$x-3y+5z=-9,$
$3x+2y-z=1;$

(f) $x-w=-1,$
$3x+y=5,$
$y+2z=0,$
$x-3z=4;$

(g) $x^2+3xy=4,$
$3x^2-xy=1;$

(h) $3x^2+4y^2=48,$
$6x^2-y^2=15.$

5. 下列方程式組內何者可得定解?並求其解

(a) $3x-2y+z=2,$
$x+5y-z=6,$
$7x+y+z=10;$

(b) $3x+4y=7,$
$2x-5y=-3,$
$x+3y=6;$

(c) $u+v-3=0,$
$3u-v+11=0,$
$u-3v+17=0,$
$5u-3v+25=0;$

(d) $x-y+z=2,$
$2x+y-3z=5,$
$x+2y-4z=0.$

6. 在下列各組方程式內，以任一數指定爲任一未知數之值，即可

得解法。每次皆以 x 解 y 與 z。

(a) $x-3y=4,$ $2y+z=7,$ $x+y+2z=18;$

(b) $x-y+3z=0,$ $x+y-z=0,$ $3x+y+z=0$。

7. a 應爲何數，則下列多項式始有公因式？ x^2-2x+a， x^3-ax-2.

8. 消去下列二式內之 y:

$$x^2+3xy-2y^2-3x=6,$$
$$xy+4y^2+2y=-2。$$

9. 消去下列二式內之 t :

$$x=1-t^2, \qquad y=2t+t^3。$$

第二十一節 三角變易解方程式

方程式內如有未知角之三角函數，謂之三角方程式。如不止一個未知角，則須有相等數之方程式，而解時常須有聯立方程式及消去法，下列運算次序，爲三角方程式有系統之解法：

(一) 變換各方程式，使各三角函數僅含一個未知角。

(二) 變換各方程式，使同一未知角無不同之倍數角或分數角出現，並使已知角及未知角之和之三角函數不出現。

(三) 每一未知角選一種函數，凡此未知角之他種函數概以此函數表之。

(四) 以所選未知角之函數作爲未知數，照代數式解之。

(五) 求得每未知角之一函數後，由各函數求各未知角之値，將其代入原式，以試其是否適合。

上述次序有時可以變易，或可省略。在任何步驟內，宜儘量利用代數化簡法，茲分述(一)至(五)各手續如次：

1. 分離各未知角　三角函數內如含有數個未知角之和或差須以各個角之函數以表此和差角之函數，下列諸常用公式；可供此用：

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y \tag{1}$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y \tag{2}$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y \tag{3}$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y \tag{4}$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}. \tag{5}$$

$$\cot(x\pm y)=\frac{\cot x\cot y\mp 1}{\cot y\pm\cot x}. \tag{6}$$

上項三角公式無論 x 及 y 爲何值，皆能成立，可藉以分離若干個未知角之和差，例如：

$$\cos(x+y-u+v)=\cos[(x+y)-(u-v)]$$
$$=\cos(x+y)\cos(u-v)+\sin(x+y)\sin(u-v)$$
$$=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)(\cos u\cos v+\sin u\sin v)$$
$$+(\sin x\cos y+\cos x\sin y)(\sin u\cos v-\cos u\sin v).$$

2. 化未知角爲一律　未知角分離後，在函數內或倘有各種不同之形式如

$$x, 3x, \frac{x}{2},\ x+\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6}-\frac{x}{2},\ \text{等}$$

可選一 x 之平直函數爲標準，而將所有函數以此標準角表之。倍數及分數角之函數可用下列公式運算之：

$$\sin 2x=2\sin x\cos x. \tag{7}$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x. \tag{8}$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}. \tag{9}$$

$$\cot 2x=\frac{\cot^2 x-1}{2\cot x}. \tag{10}$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}. \tag{11}$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2} \tag{12}$$

$$\tan\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}. \tag{13}$$

令 x 與 y 逕表角與角之和差三角函數內角度之加減項可應用公式(1)至(6)，以處理之。公式(7)–(10)與(1)–(6)二組可化任何倍數角之函數爲單角函數，至公式(11)–(13)可用以化重複減半之分數角，（即具$\frac{x}{2^n}$形之分數角），復因此三式內含有根式，當 n 大於 1 時，化爲單角之函數，必至根號重重，不便運算。以此，不如逕以分數角爲單位，而視未知角爲一倍數角。選單位時，當知角變換爲較低倍數角或分數時，其方程式之代數次數較高，而方程式之次數則以愈低愈便。在此步運算中，爲得到較易處理之代數方程式起見，爲便於分解因式起見，或爲其他類似之便利起見每須藉助於下列諸公式：

$$\sin mx+\sin nx=2\sin\tfrac{1}{2}(m+n)x\cos\tfrac{1}{2}(m-n)x \tag{14}$$

$$\sin mx-\sin nx=2\cos\tfrac{1}{2}(m+n)x\sin\tfrac{1}{2}(m-n)x \tag{15}$$

$$\cos mx+\cos nx=2\cos\tfrac{1}{2}(m+n)x\cos\tfrac{1}{2}(m-n)x. \tag{16}$$

$$\cos mx-\cos nx=-2\sin\tfrac{1}{2}(m+n)x\sin\tfrac{1}{2}(m-n)x \tag{17}$$

3. 以一種三角函數表其他三角函數法　此步解法僅須應用六種三角函數之定義及直角三角形之勾股定理（勾方股方之和等於弦方）。設角度 ϕ，係以長 r 之直線 OP 自原線 Ox 出發繞 O 點旋轉而成。令 x 及 y 表正坐標制中之橫坐標與縱坐標，O 爲原點，Ox 爲 x-軸之正向。由角 ϕ 可決定 r,x,y 三量間之諸比數　設 $r=1$，則 $x=\cos\phi$ 而 $y=\sin\phi$。設 $x=1$，則 $y=\tan\phi$ 而 $r=\sec\phi$，設 $y=1$，則 $x=\cot\phi$ 而 $r=\csc\phi$。故在一直角形內，令其適當之一邊爲 1，則

所有函數可以他二函數之有理函數表之，或用他一函數之有理或無理函數表之。普通宜用正弦及餘弦二函數表其他函數，在施代數簡化法前，宜避用根式，直至最後一步始化爲一種函數。

4. 求未知角之函數值　經上述變易後，得 n 個方程式，內含 n 個未知數，各爲某未知角或其倍數角或分數角之某三角函數。由此方程式組用代數解法，各得函數之一個或多個數值，有時其中亦有可擯棄之值。正切及餘切可爲一切實數，正弦及餘弦祇有 -1 至 1 間之實數值，正割及餘割則祇有小於等於 -1 或大於等於 1 之實數值。前後爲求未知角之值。

5. 求未知角之值　每三角函數值定後可有無數之角值，其中通常有二值小於 2π，而其他各值則可以 2π 之整倍數加減此二值而得。下示通解之方式：A 爲 x 之任何可能值，第一第三二式內，A 值宜取 $\frac{\pi}{2}$ 至 $-\frac{\pi}{2}$ 之間者，第二式內 A 值宜取 0 至 π 之間者。

$$\text{已知 } \sin x \text{ 或 } \csc x\text{，則 } x=n\pi+(-1)^n A \tag{18}$$

$$\text{已知 } \cos x \text{ 或 } \sec x\text{，則 } x=2n\pi\pm A \tag{19}$$

$$\text{已知 } \tan x \text{ 或 } \cot x\text{，則 } x=n\pi+A. \tag{20}$$

已定 x 之一 A 值，以 n 依次等於 o 及各個正整數或負整數，以得 x 之其他各值。

例 1：　$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0.$

式內僅一未知角 x，故無需第一步，用(14)，得，

$$\sin 3x+\sin x=2\sin 2x\cos x,$$

故方程式變爲

$$\sin 2x+2\sin 2x\cos x=0,\quad \text{即}\quad \sin 2x(1+2\cos x)=0$$

設 $\sin 2x=0$，則 $2x=n\pi$ 而 $x=n\frac{\pi}{2}$。

設 $1+2\cos x=0, \cos x=-\frac{1}{2}, x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$

例 2: $\begin{cases} \tan(x+2y)=\csc\ -\cot x, \\ \cot(x+2y)=\csc\dfrac{x}{2}。\end{cases}$

以 x 及 $x+2y$ 爲二未知角，則可略去第一步。第二式可書爲

$$\tan(x+2y)=\sin\frac{x}{2},$$

故消去 $x+2y$，得

$$\sin\frac{x}{2}=\csc x-\cot x.$$

或用公式(11)，得

$$1-\cos x=2\csc^2 x-4\csc x\cot x+2\cot^2 x.$$

爲免除根式起見，所有函數皆以 $\sin x$ 及 $\cos x$ 表之，

$$1-\cos x=\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{4\cos x}{\sin^2 x}+\frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x},$$

$$(1-\cos x)\sin^2 x=2-4\cos x+2\cos^2 x$$

$$(1-\cos x)\sin^2 x=2(1-\cos x)^2,$$

$$(1-\cos x)(\sin^2 x+2\cos x-2)=0,$$

$$1-\cos x=0 \text{ 或 } \cos^2 x-2\cos x+1=0.$$

$\cos x$ 之三值相符皆等於 1，故 $x=2n\pi$。欲求 y，可由

$$\cot(x+2y)=\csc\frac{x}{2}=\infty,$$

得， $x+2y=m\pi, 2y=m\pi-2n\pi,\ y=m\dfrac{\pi}{2}-n\pi$，式內 m 及 n 爲任意二整數，故答數可書爲 $y=m\dfrac{\pi}{2}$。

6. 反三角函數方程式 $\sin^{-1}a$, $arc\ \sin a$, a 之反正弦，正弦等於 a 之角，皆有同一之意義。最後一名詞實爲反正弦之定義，前二者則爲其標準記號。此記號表一角度，可視爲其正弦 a 之函數。如第 5

款所述，對於每個 a 值，此 a 之函數有無數之對應值。其他反三角函數之命名及記號皆與此相類。

方程式內常有表角與角間之關係者，而表角之式則爲某未知數之反三角函數。設方程式內每項均表一角度，則求方程式兩端角度之三角函數可化之爲一代數方程式。

例：求下方程式中之 x 值：

$$2tan^{-1}x+cot^{-1}x=\frac{\pi}{4}$$

以 θ 及 ϕ 分代 $tan^{-1}x$ 及 $cot^{-1}x$，再求此方程式兩端之正切

$$tan(2\theta+\phi)=\frac{tan\,2\theta+tan\,\phi}{1-tan\,2\theta\,tan\,\phi}=\frac{\dfrac{2x}{1-x^2}+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{2}{1-x^2}}=1。$$

此可化爲

$$x^3+x^2+x+1=0$$

其實數解僅 $x=-1$，則得 $tan^{-1}x=-\frac{\pi}{4}$ 及 $cot^{-1}x=\frac{3\pi}{4}$，以之代入原式，恰可適合。

習　題　十　八

1. 解下列各方程式：

(a) $2\,cos^2\,x+3\,sin\,x=3$;

(b) $cos\,2x-3\,cos\,x+2=0$;

(c) $sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$;

(d) $sin\,y+sin\,3y=cos\,y-cos\,3y$;

(e) $csc\,x\,cot\,x=2\sqrt{3}$;

(f) $tan^2\,x+cot^2\,x=2$。

2. 解下列方程式組：

(a) $\sin y+\cos x=-1$,

$$\frac{\cot^2 y}{\csc^2 y-\csc y}=2\cos^2 x;$$

(b) $3\sin x+\tan y=\frac{5}{2}$,

$$(1-2\cot y)\csc x=-2。$$

3. 求下列各式之 x:

(a) $\sin^{-1} x+\cos^{-1} 2x=\frac{\pi}{6}$;

(b) $2\sin^{-1} x+\sin^{-1} 3x=\pi$;

(c) $\cos^{-1} x+\tan^{-1} x=\cot^{-1} x$。

4. 置一物於斜面上,其摩擦係數 $\mu=\frac{1}{\sqrt{3}}$。問斜面之傾角應如何方可使移此物向上之力,等於此物之重量?

5. 有梯倚於牆,梯之兩端與牆及地板之摩擦係數皆為 $\mu=\frac{1}{3}$。問梯之傾角若恰足使之直立不至滑動。

6. 水平梁上之不同地位上繫二繩,二繩之端皆繫於一 100 磅之重量上。設二繩之張力分別為 60 磅及 100 磅;求二繩與梁所成之角度。

第二十二節 對數變易解方程式法

含有指數函數之方程式至為重要。因指數函數為對數函數之反函數,故有指數函數時,常可取其對數。設同組各方程式皆僅二項,每項又皆為已知常數與未知數已知冪之乘積或已知常數與已知常數未知冪之乘積,則應用此法皆可生效,但底數與指數上不可同含未知數。

例: $y=ab^{kx}$, 求 $y=y_1$ 時之 x 值。式內 a,b, 及 k 皆為已知數。取對數,得

$$\log y_1 = k\cdot\log b + \log a$$

$$x = \frac{\log y_1 - \log a}{k\log b}。$$

此處對數用何種底數，無甚關係。底數之意義已於第 3 節及第 12 節內論及，若計算目的在求數值宜用 10 爲底數，若目的在得一公式以供討論每以用自然底數 e 爲宜。

在上式內設當 $x=2.7$ 時，則 $y=5.2$ 又 $x=3.8$，則 $y=3.4$，而以 $b=e$（自然底數），求 a 與 k。

$$5.2 = ae^{2.7k},$$

$$3.4 = ae^{3.8k}。$$

取對數，得

$$\log 5.2 = 2.7\,k\log e + \log a,$$

$$\log 3.4 = 2.8k\log e + \log a。$$

上式爲 k 及 $\log a$ 之平直方程式。設用自然對數，則 $\log e=1$，但任用何底數解得之值均相同。

習　題　十　九

1. 一幾何級數之最後項爲 $L=ar^{n-1}$，其中 a 爲首項，r 爲二隣項之比數，n 爲項數。於 5 與 23 間，嵌入四個幾何中項。

2. 設 T_1 爲皮帶離滑車之張力，T_2 爲趨滑車之張力，欲拉動滑車而皮帶不滑，必

$$\frac{T_1}{T_2} < e^{a\theta}$$

式內 a 爲皮帶與滑車間之摩擦係數，θ 爲張於接觸弧上滑車軸心之角度（以弧度爲單位）。

求 T_1/T_2 之界限值，設 $a=0.3$，$\theta=\pi$。求 θ 之界限值，設 $a=0.3$，$T_1=2T_2$。

3. 於下式內求 x, y, 及 z:

$$x^3y^3=6z^4,\ xy^5z^2=7,\ x^5z^3=y^3$$

4. 於公式 $pv^n=c$ 內，設 $v=2$，則 $p=213$，$v=10$ 則 $p=23.4$，求 n。

5. 容電器之電容爲 k，於 t 時經電阻 R 放電，則跨容電器兩端之電壓 V 可表以下式：

$$V=Ae^{-\frac{t}{KR}}$$

式內 A 爲常數。已知 $K=\frac{1}{3}10^{-6}$，又當 $t=0$，$V=100$，當 $t=1800$，$V=55$，試由此數據求 R。

第二十三節　方程式之近似解

本章前數節所論爲某數種方程式及方程式組之解法。且知必須變換及合併各方程式，使化成第 19 節所論之形狀即僅一個未知數之有理代數方程式後，然後可據以求解。第 19 節內曾論及多項式有理恰合根（Exact roots）之求法，若降低方程式爲二項方程式或二次方程式，則所有各根，皆可求得。但常有某種方程式或方程式組不能化爲有理代數式者，或雖可化爲有理代數式而不能合第 19 節解法之條件。如是則必用他種方法以得其近似值，實際上以圖解法最爲便利，或由圖中直接求得結果，或以之爲他種近似解法之嚮導。

1. 圖解法、一個未知數　凡僅有一未知數之方程式，應先將等號兩端函數化爲最簡，然後繪此二函數之圖形，以求兩函數相等時之未知數，亦即二曲線相交時之橫坐標。繪圖時先繪略圖以得交點之近似位置，然後將其附近部份放大詳繪，以求其較精確之近似值。

製圖形時，可應用第一章所述之原則，利用表格及計算以代繪圖。實際上求近似值時可合併應用計算尺，數學表，及各種曲線圖等，惟方程式種類繁多，應相度情形以決定方法，不能於此規定通則。但求圖形之交點實爲一種最有效之嚮導，圖形之各部份往往各有其用處。

凡含有混和函數（mixed functions）之方程式卽包含第一章所述函數二類以上者，往往須用此法。但此法實可施於任何方程式。凡方程式不能經適當變易以求得其恰合解者，或雖能求得其恰合解而手續太繁者均宜利用圖解法以求其近似値。

例如方程式

$$e^{3x}sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$$

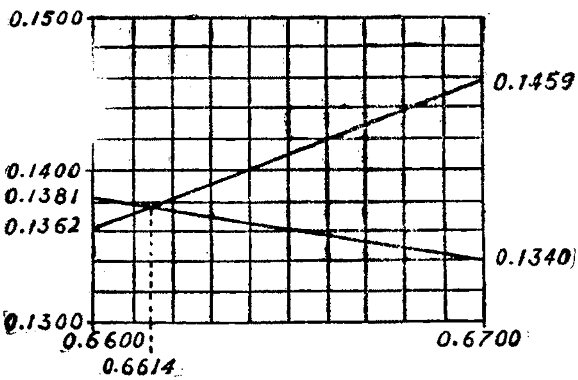
卽無恰合解。書此式為

$$sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=e^{-3x},$$

繪二函數之圖形，以定其交點之 x 値。於數學表（例如 Smithsonian 物理表第 14 表及第 19 表）內覓正弦函數及指數函數之値，在繪曲線以前，卽知根在 $x=.66$ 及 $x=.67$ 之間。茲列簡表如下：

x	e^{-3x}	$sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$
.66	.1381	.1362
.67	.1340	.1359

設將此四點繪於方格紙上（須就紙幅能容納限度選最大之比例尺），並假設此二小段之曲線皆為直線，求得二線約於 $x=0.6614$ 相交



第 22 圖

（第 22 圖）。此答數之準確度至少為三位數字，通常應用上即此已足。兩圖形之其他交點，亦即方程式之其他解可於用小比例尺之略圖繪成後覓得，然後用大比例尺以繪交點附近之詳圖。

2. 多項方程式　以數字為係數之多項方程式亦可用上述之圖解法，但有時則以採用基於多項式特性之一種解法為宜。設係數為有理數，則此方程式或有有理根，如是則可用第 19 節之法，求其降次方程式。茲將可資應用之多項式特性述之如次：用 19 節之記號，令

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots a_n$$

式中諸 a 假定為數字係數。

(a) 設 $P(x_1)$ 及 $P(x_2)$ 異號，則 x_1 與 x_2 之間必有奇數個實根。

此因多項式為一連續函數，故其圖形在 x_1 與 x_2 間穿過 x- 軸之次數為奇。

(b) 設 $P(x_1)$ 及 $P(x_2)$ 同號，則 x_1 與 x_2 間之根數不能為奇。

因此曲線為連續的，設穿過 x- 軸一次，則必再穿過一次始能使 $P(x_1), P(x_2)$ 同號。故不穿過 x- 軸則已，否則其穿過之次數必為偶。

(c) 設 $a+b\sqrt{-1}$ 為 $P(x)=0$ 之一根，其中 a 與 b 皆為實數，則 $a-b\sqrt{-1}$ 亦必為其一根。

設以 $x=a+b\sqrt{-1}$ 代入 $P(x)$，而分別合併其實數項及虛數項，得 $P(a+b\sqrt{-1})=A+B\sqrt{-1}$，其中 A 與 B 皆為實數。設 $a+b\sqrt{-1}$ 為 $P(x)=0$ 之一根，則因虛數實數不能相等，A 與 B 必各為零。又 $a+b\sqrt{-1}$ 與 $a-b\sqrt{-1}$ 僅虛數 $\sqrt{-1}$ 之係數異號，故 $P(a-b\sqrt{-1})=A-B\sqrt{-1}=0$，故設 $a+b\sqrt{-1}$ 為一根則其共軛複數 $ab\sqrt{-1}$ 亦為一根。

(d) $P(x)=0$ 正實根之數不能超過各係數變號數。

多項式照未知數之升冪或降冪排列，鄰項係數異號則稱係數變號，例如某項係數爲正，而下項係數爲負，或前後正均謂之係數變號一次。此即所謂狄氏符號律（Descartes' Rule of Signs）也。其眞實性基於下列兩事：(1) 設一方程式各項同號，則無正根，即全爲正數或全爲負數之和不能等於零；而 (2) 由 $(x-r)P(x)$ 展開之多項式較之 $P(x)$ 至少必多一變號。命題 (2) 至易證明。設 $a_0, a_1 \cdots\cdots a_n$ 爲$P(x)$ 各項之係數，則 $(x-r)P(x)$ 之各項係數爲 $a_0, a_1-ra_0, a_2-ra_1, \cdots\cdots -ra_n$。設兩個連接係數，如 a_1 與 a_2 異號，則 a_2 與 a_2-ra_1 同號，故 $P(x)$ 之兩項變號一次，則新式對應於原式後項之項與後項同號，新式之首項係數亦與原式者同號。設 a_0 及每發生變號一次之第二項依次排列，則雖將其他各項省略不書，仍不至更易此式之變號數，但新式內仍有與此同號之各項，且有他項夾雜其中，或亦有係數變號之情形，故新式內各項之係數至 a_n-ra_{n-1} 爲止其變號數至少與原式者相等，而新增之 $-ra_n$一項，因與緊前變號組之第二項異號，故新式較原式至少多一變號。

例：$2x^4-6x^3-3x^2-4x+5=0$.

式內計有變號二次，但略去尾隨之同號各項而成

$$2x^4-6x^3+5=0,$$

仍有變號二次。以 $x-1$ 乘之，而僅書係數，得

2	−6	−3	−4	5	
	−2	6	3	4	−5
2	−8	3	−1	9	−5

新式內係數 2，−8，9 分別與原式內對應係數 2，−6，5 同號。3 與 −1，已增加一變號，即以任何數易 3 與 −1，亦不能使變號個數少於 2。此外，末項係數 −5，又增加一個變號。原式正實根不能超過二個，故新式之正實根不能超過三個。若以此律直接施於新方程式則只知方程式之正實根不能超過五個。

(e) $P(x)=0$ 之負正根之個數不能超過 $P(-x)=0$ 之變號

個數。

以前方程式之負根即等於後方程式之正根也。

解多項式時，體驗 (a) 至 (e) 之特性以應用第 19 節內之原理及運算法，頗易得到答案。但心中須有函數 $P(x)$ 之圖形，故最好能繪出此圖形，至少亦須作一略圖。

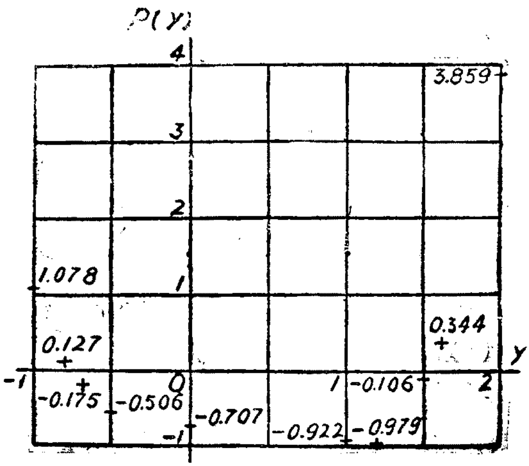
例：當 $x=\frac{\pi}{4}$ 時，求下式之 y 值：

$$xy^2-y=\frac{\sin x}{y^2}.$$

y 之方程式為

$$P(y)=.7854y^4-y^3-.7071=0.$$

因係數非盡有理數，故無有理根。式內僅有一個變號，故至多可有一個正實根，於 $P(-y)$ 內其符號之相續為 $++-$，亦只有一個變號，故方程式至多有一個負實根。故此式有二個或四個複數根。依餘式定理，並用綜合除法，得 $P(0)=-.707$，$P(1)=-.922$，$P(2)=3.859$.



第 23 圖

故知 1 與 2 之間有一實根，照第 23 圖內之各點位置，則根似在 1.2

與 1.3 之間。但 $P(1.2)=-.979$，$P(1.5)=-.106$，$P(1.6)=.344$，故此根當在 1.5 至 1.6 之間，用通常內推法 (interpolation)，得正根爲

$$y=1.5+\frac{106}{106+344}\ \frac{1}{10}=1.524$$

於是回至 $P(-y)$ 而試 $y=1$，得 $P(-1)=1.078$ 示負根在 -1 至 0 之間，而 $P(-.5)=-.506$，$P(-.7)=-.175$，$P(-.8)=.127$，用通常內推法，得

$$y=-.7-\frac{175}{175+127}\cdot\frac{1}{10}=-.758$$

上二根之末位數字或有誤。此方程式另有一解法，書方程式爲

$$.7854y^4=y^3+.7071,$$

而繪此二相等函數之曲線，用計算尺，冪數表等以定二曲線之交點。

3. 聯立方程式　第 20 節中曾述如何化方程式組爲一組有理代數方程式，由此可消去各未知數，而賸一個未知數，以成一個一元多項式。倣此，可依次求得各未知數之方程式。但遇不能化爲有理代數式之方程式組，即無法消元；即可消元，而所得一元方程式或亦需用近似解法。如遇含二未知數之二個方程式，則可不必消元而用圖解法。

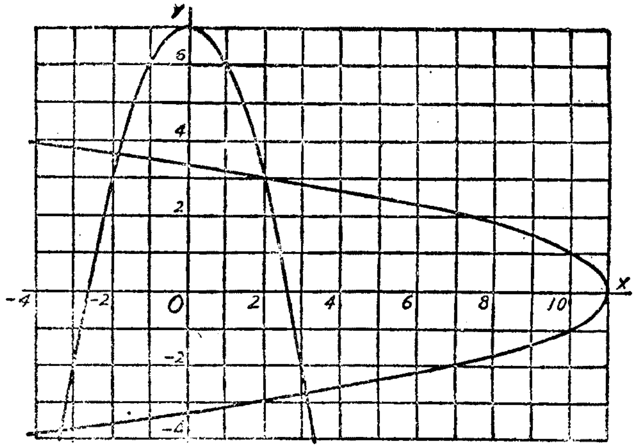
設有二方程式皆含有二未知數 x 與 y，每式皆以 y 爲 x 之函數，可繪此二函數之圖形而求其交點之 x 值及 y 值。

例：$x^2+y=7$，$x+y^2=11$ 求 x 及 y. 消去 y 或 x，即得含 x 或 y 之四次方程式，

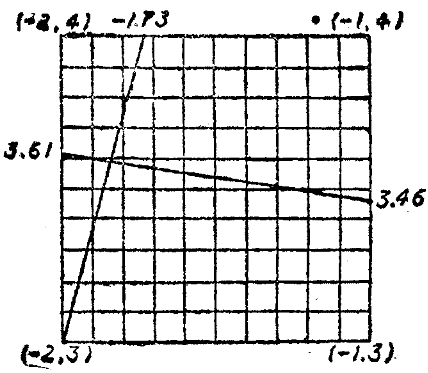
$$x^4-14x^2+x+38=0,$$

或 $$y^4-22y^2+y+110=0.$$

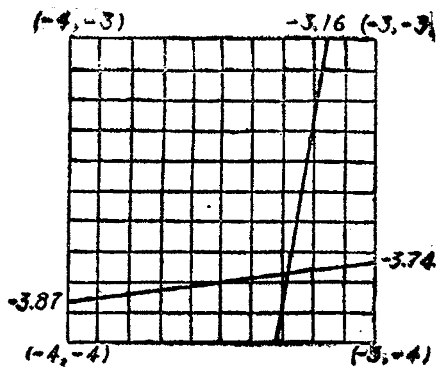
上二式各有一有理根即 $x=2$，$y=3$，然後用第 2 款方法，解 x 其他各值，再由 $y=7-x^2$ 求 y 之值。



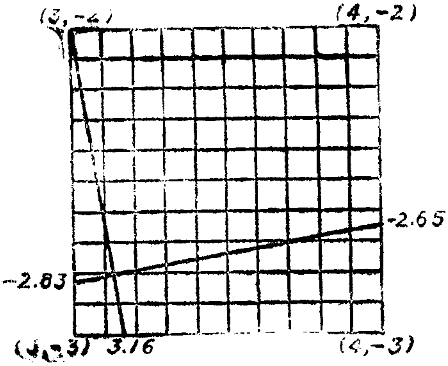
第 24 圖



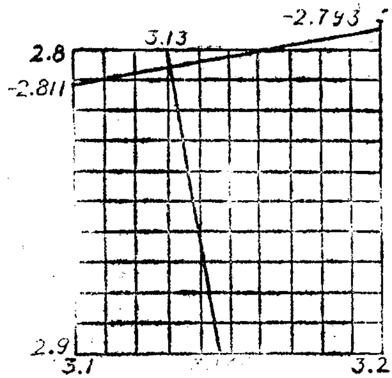
第 25 圖



第 26 圖



第 27 圖



第 28 圖

但亦可將原二式之圖形繪出如第 24 圖而標出其交點，其中一點爲 $x=2, y=3$，再將其他三交點附近另繪放大之圖四幅如第 25, 26, 27 圖，而估得其他三解爲 $x=-1.84$，$y=3.60$；$x=-3.29$，$y=-3.78$；$x=3.13$，$y=-2.80$. 如欲將準確度增高，可再將交點附近放大，如第 28 圖，卽將第四象限內之交點附近再放大之情形，因估得 $x=3.131, y=-2.805$.

凡遇二元方程式二個均可用此解法。如可消元，則須視各題之特殊狀況以決定採用何種解法，如不能消元或不宜消元，則圖解法爲求近似值最切實用之方法。

習　題　二　十

1. 解下列各方程式：

(a) $x \sin x - \cos x = 0$，（最小正根）；

(b) $(1-x)\log_{10} x = -1$；

(c) $e^{2x}(3x+4x^3)=5$。

2. 求下列各方程式之正根：

(a) $x^3-5x^2+2x+7=0$；

(b) $x^4+x^3-x^2-2x-2=0$;

(c) $x^3-3x-\dfrac{33}{4}=0$.

3. 求下列方程式組之實解:

(a) $y^2=8x^2$, $x^2+y=11$;

(b) $y=sin^{-1}\dfrac{x}{y}$, $x=ye^{4x}$

(c) $sin\, x=tan\, y$, $x+y=\dfrac{\pi}{2}$.

4. 電路內之電流 i 以時間 t 之函數表之爲

$$i=\frac{E}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t},$$

其中 E 爲所加電壓, R 爲電路之電阻, L 爲電感, C 則爲視原始狀況而定之常數。時間 t 逐漸增加,則末項逐漸減少,而電流趨於極限$\dfrac{E}{R}$. 設當 $t=0$, $i=10$, 問 C 爲何值。設 C 爲是值,而 $E=100$, $L=0.01$, 問當 $t=0.1$,欲 i 達到其極限值之 98%, R 須爲何值?

5. 有鏈長 s 呎,懸於相距 d 呎而同高之兩點上,得

$$s=2\frac{H}{w}\,sinh\,\frac{wd}{2H}=\frac{H}{w}\left(e^{\frac{wd}{2H}}-e^{-\frac{wd}{2H}}\right).$$

式內 w 爲鏈之每呎重量, 而 H 爲張力之水平分力。設 $s=200$, $d=150$, $w=10$, 求 H。

參 考 書 目

First Course in the Theory of Equations, L. E. Dickson (Wiley, 1922).

Elementary Theory of Equations, L. E. Dickson (Wiley, 1914).

Theory of Equations, Burnside and Panton (Longmans, 1899).

Introduction to Higher Alegebra, Maxime Bocher (Macmillan, 1919) especially Chapters I–IV.

Graphical and Mechanical Computation, Joseph Lipka(Wiley, 1918).

The Calculus of Observations, Whitaker and Robinson(Blackie and Sons, 1924), Chapters V and VI

第六章　積分運算法

第二十四節　代替積分法

第四章注意於積分法之意義，本章則論其方法。第 15 節內曾解釋積分

$$\int \phi(x)dx = f(x)$$

之意義爲施一種運算（以記號 $\int \cdots\cdots dx$ 表之）於 $\phi(x)$ 以求得 $f(x)$，且知其爲求導微函數之逆運算。"$\phi(x)$ 之積分爲 $f(x)$"，及"以 $\phi(x)$ 爲導微函數之函數爲 $f(x)$" 二語，皆爲上式之確解。在第 18 節內曾述 $\phi(x)dx$ 一記號之意義，謂之爲 $f(x)$ 之微分，因此上式可視上列等式爲施一種以 $\int$ 表示之運算於微分 $\phi(x)dx$ 以求得 $f(x)$。如是則上列等式之意義爲"$\phi(x)dx$ 之積分爲 $f(x)$"，或"以 $\phi(x)dx$ 爲微分之函數爲 $f(x)$"。由上解釋，雖積分一名詞在前後二種解釋內措辭雖不同，而涵義則一致。本章所論積分法以視爲求微分之逆運算爲便。

設有 $\int \phi(x)dx$，而欲施此式所示之運算，必先設法使其與第 16 節內標準式之一相同。如不能直接得到，則可以另一 x 函數之新變數代替，例如以 $u=\theta(x)$，則 $du=\theta'(x)dx$，以此二式代入原積分式，得一新積分式如下：

$$\int F(u)du$$

如 $u=\theta(x)$ 選擇適宜，則新式每可與標準式之一相符。此與第 16 節所述之代替法相同，該節例題已足說明此種運算。

如遇定積分則有二法可用：(1)代入後，求積分而得一 u 之函數，

將 u 仍化爲 x，然後以高低界代入求定積分之值；(2) 開始即改變定積分之高低界，以對應於 x 高低界之二 u 值爲新積分之高低界，然後直接求以 u 表示之積分值。

例：求下列定積分

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-4x^2}\, dx.$$

令 $2x=\sin u$，則 $dx=\frac{1}{2}\cos u\, du$，故其不定式化爲

$$\frac{1}{2}\int\sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\, du=\frac{1}{2}\int\cos^2 u\, du,$$

$$=\frac{1}{4}\int(1+\cos 2u)\, du=\frac{1}{4}\int du+\frac{1}{8}\int\cos 2u\, d(2u)$$

求積分，得

$$\frac{1}{4}u+\frac{1}{8}\sin 2u=\frac{1}{4}u+\frac{1}{4}\sin u\cos u.$$

以 x 表之，得

$$\frac{1}{4}\sin^{-1}2x+\frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2},$$

以定積分之高低界代入求值，得 $\frac{\pi}{8}$。

用第二法，則當 $x=0$, $u=0$, 當 $x=\frac{1}{2}$, $u=\frac{\pi}{2}$，故可書爲

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\, du=\left[\frac{1}{4}u+\frac{1}{8}\sin 2u\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}.$$

替代法之有效與否恃用者之技巧，而技巧則由於熟練。用此法時，每須與以下各節所述方法併用。宜用此法求積分之各式雖不能列舉，但於下列習題內將普通用代替法之問題列入並與以提示，讀者以後遇類似問題時是可做此索解。

習 題 二 十 一

1. 求下式所表之函數:

$$\int(4-3\,x)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

(以 $4-3x=u$ 代入。)

2. 就下各式作積分運算:

(a) $\int\sqrt{4x-\text{[illegible]}}\;dx$;　　(b) $\int\frac{dx}{\sqrt{5-7x}}$;

(c) $\int(2x^2-5)^3x\,dx$。

3. 就下式作積分運算:

$$\int\frac{dv}{\sqrt{4-v^2}}.$$

(以 $\frac{v}{2}=u$ 代入,再用第 16 節之 12 式。)

4. 就下列各式作積分運算:

(a) $\int\frac{dx}{1+4x^2}$;　　(b) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$;

(c) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}}$;　　(d) $\int\frac{dx}{1-9x^2}$.

5. 求 $\int_3^5\frac{dx}{2x-5}$. (以 $2x-5=u$ 代入)。

6. 求 (a) $\int_8^{10}\frac{dx}{x-7}$;　　(b) $\int_{-4}^0\frac{dx}{1-3x}$;

(c) $\int_0^2\frac{x\,dx}{1+x^2}$.

7. 求 $\int\sqrt{1-9x^2}\;dx$ (以 $3x=\sin\,u$ 代入)。

8. 求 $\int\sqrt{4-x^2}\;dx$.

9. 求 (a) $\int x\ \cos(x^2)dx$;　(b) $\int x\sqrt{1+4x^2}\ dx$;

(c) $\int x\csc^2(1-x^2)dx$, (以 $u=x^2$ 代入 a.)

10. 求 (a) $\int xe^{1-x^2}\ dx$;　(b) $\int x^2e^{4x^3-2}\ dx$. (以 $1-x^2=u$ 代入(a)內)。

11. 求 (a) $\int e^{\sin x}\cos x\ dx$;　(b) $\int \cos^3 x\ \sin\ x\ dx$.

第二十五節　分部積分法

依求導微函數法則二,知

$$\frac{d}{dx}(uv)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx},$$

式內 u 與 v 爲 x 之任何函數。因知

$$uv=\int v\ du+\int u\ dv,$$

移項,得

$$\int u\ dv=uv-\int v\ du,$$

由此式得一積分法謂之分部積分法(integration by parts)。

求 $\int f(x)dx$. 先將 $f(x)$ 分爲二因式,其一因式知其爲某函數之導微函數 v,則以 u 表其他因式,得

$$uv-\int v\ du,$$

其中新積分 $\int v\ du$ 可再用分部或其他積分法,以解之。

此法頗似第 16 節所述之替代法,但二者實絕不相同,蓋前者一因式爲變數之函數而另一因式則此變數之導微函數,如以 uv 表此二

因式，則 u 須爲 v 之函數，而後者則兩因式 u 與 v 皆獨立函數也。

由上項公式，得

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du=uv-\left(uv-\int u\,dv\right)。$$

此爲恆等式，不能於積分運算有何幫助，故選 u 與 v 時，當注意不使其有上情形出現。

再用此法求積分時，如所得結果愈趨愈繁難，則應另選因式 u 與 dv，重行運算，但有時第二次新得之積分式與原式完全相同，而係以不同之常數。新式並非恆等式，可據以解得所求之積分。

例：$\int e^x \sin x\,dx.$

令 $u=e^x$，$dv=\sin x\,dx$，則 $v=-\cos x$

$$\int e^x \sin x\,dx=-e^x\cos x+\int \cos x\,e^x dx.$$

再令 $u=e^x$ 而 $dv=\cos x\,dx$，則 $v=\sin x$，

$$\int \cos x\,e^x dx=e^x \sin x-\int \sin x\,e^x dx,$$

合併此二式，卽得

$$2\int e^x \sin x\,dx=e^x(\sin x-\cos x)+c.$$

設第二步令 $u=\cos x$ 而 $dv=e^x dx$，則 $v=e^x$，因得

$$\int \cos x\,e^x dx=e^x\cos x+\int e^x \sin x\,dx,$$

卽與第一步所得結果完全相同，毫無用處。

再如 $\int \log x\,dx$ 不見於各標準式內，但以 $u=\log x$，$dv=dx$，則

$$\int \log x\,dx=x\log x-\int x\,\frac{dx}{x}=x\log x-x+c.$$

習 題 二 十 二

1. 求：(a) $\int log(5x-8)dx$;　　(b) $\int e^{2x}cos\ x\ dx$;

(c) $\int e^{x}sin\ 3x\ dx$;　　(d) $\int e^{-2x}cos\ 3x\ dx$.

2. 求：(a) $\int_0^{\pi} x\ sin\ x\ dx$;　　(b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\ cos\ 2x\ dx$;

(c) $\int_0^1 xe^{x}dx$;　　(d) $\int_{-1}^{0} x^2e^{3x}dx$;

(e) $\int_1^2 xe^{-2x}dx$.

3. 求：(a) $\int x\ log\ x\ dx$;　　(b) $\int x\ cosh\ x\ dx$.

（參看第 12 節習題九第 4 題。）

4. 求 $\int sin^{-1}\ x\ dx$.（先用代替法以 $u=sin^{-1}\ x$ 代入，再用分部積分法。）

5. 求：(a) $\int cos^{-1}\ x\ dx$;　　(b) $\int sinh^{-1}\ x\ dx$.

第二十六節　嘗試積分之應用

有一種積分法於實際上應用頗廣，卽書一知其與所求積分同形式之函數，其中含有待定之未知係數若干。此函數謂之嘗試積分(Trial integral)，其導微函數必與所設之被積函數相同，卽據此條件以定各未知係數之值。應用此法時，必須見被積函數卽立知其積分之正確形式，故只須決定若干係數之值。幸常見之多數函數皆易認識其積分之形式。

設由一函數之導微函數，及其高級導微函數中，發現其中任何級導微函數皆由若干項組成，而各項之變數部份又不出乎若干種函數之外，但各項之係數則或不相同，凡有如此特性之函數，不論運用積分法或微分法皆祇能發生新係數而不能增加各項之變數部分之種類。

故此函數之嘗試積分卽可視爲由被積函數及其各級紀數內所含各種變數項之和，但各項前各置一泛定常數。

例：
$$\int x^2e^x\,dx.$$

此式之被積函數及各級導微函數爲 x^2e^x；$x^2e^x+2xe^x$；$x^2e^x+4xe^x+2e^x$；$x^2e^x+6xe^x+6e^x$. 其更高級之導微函數亦限於此數種函數，但可得新係數而已。此數種函數卽 x^2e^x，xe^x，e^x 三項，原函數不論求若干級之紀數，其項數皆不能出此三者之外，但係數則不同，故三者中任一函數之積分亦含有同樣之各項，而各有其常係數。玆以

$$ax^2e^x+bxe^x+e^x$$

爲嘗試積分，而 a，b，c，則爲待定之常數。此式既爲 x^2e^x 之積分，則其導微函數必等於 x^2e^x. 求導微函數，令等於所設被積函數，

$$ax^2e^x+(2a+b)xe^x+(b+c)e^x=x^2e^x.$$

則見必 $a=1$，$2a+b=0$，$b+c=0$，方可。由此得 $b=-2$，$c=2$，故所求積分應爲

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+k.$$

任何指數函數 ae^{kx}，重複作微分運算，所得各項與前相同，而係數則異。凡具 $a\ sin\ kx$ 或 $a\ cos\ kx$ 形之函數如繼續作微分運算，其所得各項之形與二式之一相同。求 ax^n 之各級導微函數，n 爲正整數，每次降低 x 之羃次以至於零。由此觀之，凡被積數係由指數，正弦，餘弦，及多項式之乘積之和所組成者皆可應用嘗試積分。

習 題 二 十 三

1. 求下列各式之積分：

(a) $\int x\ sin\ 2x\ dx$; (b) $\int x\ cos\ 4x\ dx$; (c) $\int (1-x)sin\ \frac{x}{2}\ dx$.

2. 求下列各積分：

(a) $\int e^{x} sin\ \frac{x}{3}\ dx$; (b) $\int e^{-3x}(cos\ x-2\ sin\ x)dx$.

3. 求下列定積分之值：

(a) $\int_0^1 e^{x}(x^2-3x)dx$; (b) $\int_1^3 e^{-\frac{x}{2}}(x^3-4x+2)dx$.

4. 求：(a) $\int x\ sinh\ x\ dx$; (b) $\int sin\ x\ cosh\ x\ dx$.

第二十七節　有理分式之積分法

多項式之積分法並不困難而有理分式卽多項式比數之積分法則應特別注意。

設一有理分式之分子爲一多項式，其次數反高於分母之多項式者，則以分母除分子可化成一帶分式卽一多項式與一分母次數高於分子之有理分式之和。

例：
$$\frac{x^4+2x^3-3x+2}{3x^3-6x+2},$$

以分母除分子，得商 $\frac{1}{3}(x+2)$ 及餘式 $2x^2+\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ 故此分式等於

$$\frac{1}{3}(x+2)+\frac{2x^2+\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{3x^3-6x+2}.$$

故分式之積分法祇須論分子次數低於分母者已足。設被積函數中分母之次數爲 n. 依第 19 節關於多項式之各原則，此多項式有 n 個平直因子，而分母可書爲

$$a_0(x-r_1)(x-r_2)(x-3)\cdots\cdots(x-r_n),$$

其中 $r_1, r_2\cdots\cdots r_n$ 爲常數而 a_0 可用除法消去。現試論下列分項分式 (partial fractions) 之和，

$$\frac{c_1}{x-r_1}+\frac{c_2}{x-r_2}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{x-r_n}.$$

設上式各分母，卽原式分母之各因式，無一重複出現，則上列分項分式之和，必爲一分式其分母卽原分式之分母，其分子則爲 $n-1$ 次之多項式，其係數則爲 c_1，$c_2\cdots\cdots c_n$ 等之平直函數。以此項係數分別與原式分子內同次項之係數列爲等式，卽可獲得 n 個方程式，以求 c_1，c_2，$\cdots\cdots c_n$ 等之值，俾此分項分式之和能等於原分式。

例：
$$\frac{\frac{1}{2}(17-x)}{(x-2)(x+1)(x+3)}=\frac{c_1}{x-2}+\frac{c_2}{x+1}+\frac{c_3}{x+3}.$$

加右方之分項分式則其分子爲

$$c_1(x+1)(x+3)+c_2(x-2)(x+3)+c_3(x-2)(x+1),$$

可化爲

$$(c_1+c_2+c_3)x^2+(4c_1+c_2-c_3)x+(3c_1-6c_2-2c_3)$$

如此式與$\frac{1}{2}(17-x)$恆等，則必，

$$c_1+c_2+c_3=0,$$

$$4c_1+c_2-c_3=-\frac{1}{2},$$

$$3c_1-6c_2-2c_3=\frac{17}{2}。$$

因得 $c_1=\frac{1}{2}$，$c_2=-\frac{3}{2}$，$c_3=1$，而原分式之積分爲

$$\frac{1}{2}\int\frac{(17-x)dx}{(x-2)(x+1)(x+2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$\frac{1}{2}\log(x-2)-\frac{3}{2}\log(x+1)+\log(x+3)=\log\sqrt{\frac{(x-2)(x+3)^2}{(x+1)^3}}.$$

設分母之因子有重複出現者，則合併分項分式所得分式之分母與原式分母並不相等，故不適於代表原設函數，但對上法只須略事修改，卽仍有效。設分母內有數因式相等，卽有因式之冪數出現，例如 $(x-r)^m$，其中 m 小於或等於 n，則前法和式內相當於 m 項之各

項應改爲

$$\frac{a_1}{x-r}+\frac{a_2}{(x-r)^2}+\cdots\cdots\frac{am}{(x-r)^m}.$$

如是則等號右端各項分式之公分母必等於原式之分母，此 n 常數足使分項分式之和適合等於所設分式之條件。

例：$$\frac{x^3+2x^2+5x}{(x-1)(x+1)^3}=\frac{c_1}{x-1}+\frac{c_2}{(x+1)}+\frac{c_3}{(x+1)^2}+\frac{c_4}{(x+1)^3}.$$

右端各項相加，則其分子爲

$$\begin{aligned}&c_1(x+1)^3+c_2(x-1)(x+1)^2+c_3(x-1)(x+1)+c_4(x-1)\\&\quad=(c_1+c_2)x^3+(3c_1+c_2+c_3)x^2+(3c_1-c_2+c_4)x\\&\qquad\qquad+(c_1-c_2-c_3-c_4).\end{aligned}$$

欲上式等於 x^3+2x^2+5x，必

$$\begin{aligned}c_1+c_2\qquad\quad&=1,\\3c_1+c_2+c_3\quad&=2,\\3c_1-c_2+c_4\quad&=5,\\c_1-c_2-c_3-c_4&=0.\end{aligned}$$

由此得 $c_1=1$，$c_2=0$，$c_3=-1$，$c_4=2$. 至求得之分項分式皆易求積分，蓋凡具

$$\int\frac{cdx}{(ax+b)^n}$$

式之積分皆可以 $u=ax+b$ 代入也。

上述方法只須原式分母能分解爲平直因式卽可應用。設有複數因式(imaginary factors)，可將上法再略修改卽可，蓋

$$\frac{a_1}{x-r_1}+\frac{a_2}{x-r_2}=\frac{(a_1+a_2)x-(a_1r_2+a_2r_1)}{x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2}$$

故二簡單分式之和皆呈下形：

$$\frac{c_1x+c_2}{x^2+px+q}$$

複數因式必成對出現，其乘積爲一實係數之二次式如上式之分母，故對應於此一雙複數因式之和式之兩項可以上式代之。設有重複之複數因式，則分項分式內各項之分母爲二項式之各次冪，降至原式所示之冪次爲止，各項分子則皆具 c_1x+c_2 之形狀。

例：求 $\int\frac{15x^2+8x-16}{x^3(x^2+3x+4)^2}dx$

被積函數可書爲

$$\frac{15x^2+8x-16}{x^3(x^2+3x+4)^2}=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{x^3}+\frac{c_4x+c_5}{x^2+3x+4}+\frac{c_6x+c_7}{(x^2+3x+4)^2}$$

由上式可求 c_1，$c_2\cdots\cdots c_7$ 之値。

此處遇呈下形之積分

$$\int\frac{(ax+b)dx}{(x^2+px+q)^n}$$

令 $u=x+\frac{p}{2}$ 代入，得

$$a\int\frac{udu}{\left[u^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^2}+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int\frac{du}{\left[u^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}$$

第一式以 $v=u^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ 代入，即可求得其積分，第二積分之運算根據一化簡公式(reduction formula)，其求法如下：

$$\frac{d}{dx}x(x^2+k)^m=(x^2+k)^m+2mx^2(x^2+k)^{m-1}$$

於右方加減 $2mk(x^2+k)^{m-1}$ 各一次，得

$$(x^2+k)^m+2m(x^2+k)(x^2+k)^{m-1}-2mk(x^2+k)^{m-1}$$
$$=(2m+1)(x^2+k)^m-2mk(x^2+k)^{m-1}.$$

故

$$x(x^2+k)^m=(2m+1)\int(x^2+k)^m dx-2mk\int(x^2+k)^{m-1}dx,$$

解上式末項積分，令 $m=1-n$，得

$$\int\frac{dx}{(x^2+k)^n}=\frac{1}{2(n-1)k}\cdot\frac{x}{(x^2+k)^{n-1}}$$
$$-\frac{3-2n}{2(n-1)k}\int\frac{dx}{(x^2+k)^{n-1}}$$

如是繼續應用此公式每用一次減低被積函數分母之冪一次，最後得下列積分：

$$\int\frac{dx}{x^2+k}=\frac{1}{\sqrt{k}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{k}}+c_1=\frac{1}{2\sqrt{-k}}\log\frac{x+\sqrt{-k}}{x-\sqrt{-k}}+c_2$$
$$=\frac{1}{\sqrt{-k}}\tanh^{-1}\frac{x}{\sqrt{-k}}+c_3.$$

此處積分運算係根據第 15 節內 13 及 20 式，k 爲正數，可用前者；k 爲負數可用後二者。現將此公式應用於適所求之第二積分，令 $u=x$ 及 $q-\frac{p^2}{4}=k$. 卽可得到結果。

凡有理代數函數如爲分式，而其分母可分解爲平直或二次因式，則此函數爲可積函數。

習題二十四

1. 用第 16 節之 20 式並用分項分式及第 16 節之 20 式驗證下列積分式。二法內皆需應用代替法。

(a) $\int\frac{dx}{x^2-9}=\frac{1}{6}\ log\ \frac{x-3}{x+3}+c;$

(b) $\int\frac{dx}{x^2+2x-3}=\frac{1}{4}\ log\ \frac{x-1}{x+3}+c;$

(c) $\int\frac{dx}{4x^2+4x-8}=\frac{1}{12}\ log\ \frac{x-1}{x+2}+c.$

2. 用代替法及第 16 節 17 式求下列積分，再用分項分式以求之。

(a) $\int\frac{x+1}{x^2+2x-3}\ dx=log\ \sqrt{x^2+2x-3}\ +c;$

(b) $\int\frac{xdx}{4x^2-25}=\frac{1}{8}\ log(4x^2-25)+c.$

3. 證下列各式：

(a) $\int\frac{x-1}{x^2+2x+2}\ dx=log\ \sqrt{x^2+2x+2}-2tan^{-1}(1+x)+c;$

(b) $\int\frac{3x-6}{x^2-5x+6}\ dx=log(x-2)+2log(x-3)+c;$

(c) $\int\frac{x^2+2}{x^2+1}\ dx=x+tan^{-1}x+c.$

5. 用分項分式以求下列各式之積分：

(a) $\int\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}\ dx;$　　(c) $\int\frac{(3x-2)dx}{x(x+1)^3};$

(b) $\int\frac{(t^2+pq)dt}{t(t-p)(t+q)};$　　(d) $\int\frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$。

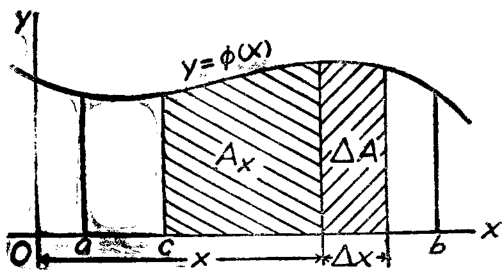
第二十八節　積分法之限制

1. 被積函數爲連續　設 $\phi(x)$ 於 $x=a$ 至 $x=b$ 變程間連續，

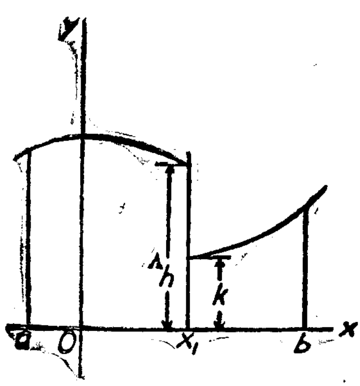
則有下列函數 $f(x)$ 存在，

$$\int \phi(x)dx = f(x)$$

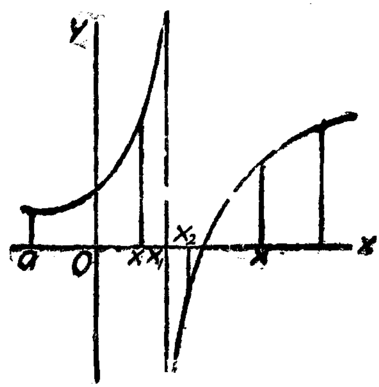
$f(x)$ 亦在 a 至 b 變程上連續。此可以第 29 圖內 $\phi(x)$ 之曲線證明之。凡稱 $f(x)$ 確定於某變程內，必在變程內舉 x 值後，可得其對應之 $f(x)$ 值。令 $f(c)$，即 $f(x)$ 在 $x=c$ 之值，爲任一常數。且令 $f(x)=f(c)+A_x$，其中 A_x 爲 c 與 x 間曲線下之面積。此函數爲連續性者，蓋當 Δx 趨於零則 $A_{(x+\Delta x)}=A_x+\Delta A$ 趨於 A_x；此函數爲 $\phi(x)$ 之積分者，蓋



第 29 圖



第 30 圖



第 31 圖

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{A_{(x+\Delta x)}-A_x}{\Delta x}=\phi(x).$$

如是規定之函數 $f(x)$ 含有一泛定常數 $c=f(c)$，卽積分常數也。

2. 被積函數具有限間斷性 設函數 $\phi(x)$ 除在 x_1 一點外，自 a 至 b 皆連續（參看第 30 圖。）設 x 自左趨於 x_1，則 $\phi(x)$ 之值趨於 h；設 x 自右趨於 x_1，則 $\phi(x)$ 趨於 k，而 h 與 k 之值各異。如是則此函數之積分自 a 至 b 變程上仍有連續性。令 $f(a)=c$ 爲一泛定常數，而 $f(x)=C+A_x$，其中 A_x 爲 a 與 x 間之曲線下之面積。如是規定之函數係連續的，其導微函數除在 x_1 一點外，任 x 爲何值皆等於 $\phi(x)$。於 x_1，$f(x)$ 無導微函數，但下列分數式

$$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

當 Δx 自負向趨於零，則趨於 h；當 Δx 自正向趨於零，則趨於 k.

可見函數 $\phi(x)$ 在某變程內有有限個點有有限間斷性者仍可有一連續之積分。

3. 有鉛直漸近線之被積函數 設 $\phi(x)$ 自 a 至 b，除 x_1 一點外，各點皆連續，而於 x_1 有一鉛直漸近線（第 31 圖）。

$$\int_a^x \phi(x)dx=f(x) \tag{1}$$

式中 x 介於 a 與 x_1 之間，故 $f(x)$ 之值卽自 a 至 x 之曲線下之面積。當 x 趨於 x_1 則此面積或趨於一定極限，或無窮增大，要當視函數 $\phi(x)$ 之特性而定。設此極限係有定值的，可規定

$$\lim_{x\to x_1}\int_a^x \phi(x)=f(x_1) \tag{2}$$

故在 $x=x_1$ 處函數 $f(x)$ 有定值。再設 x_2 及 x 皆在 x_1 與 b 之間，則當 x_2 趨於 x_1 時，積分

$$\int_{x_2}^x \phi(x)dx$$

或趨一定値極限，或無限大增加，或無限大減少。設此極限及前極限皆有定值，則 x 爲 x_1 與 b 間任何值時，可規定

$$f(x)=f(x_1)+\lim_{x_2\to x_1}\int_{x_2}^{x}\phi(x)\,dx. \tag{3}$$

函數 $f(x)$，自 a 至 b，當(1)(2)(3)三式得有定值，故在此間隔上 $f(x)$ 係連續的。設上述二極限有一不存在，卽二面積有一無窮增加或減少，則 $\phi(x)$ 之積分仍存在，此積分，除 x_1 外，各點皆連續，於 x_1 則有鉛直漸近線。

上述要點卽，當積分爲間斷時，則在間斷點左右之高低界內作積分運算爲不可能，如不顧及其間斷性，則每得荒謬之結果。反之，當積分函數爲連續時，則雖在高低界之間被積函數有間斷點亦可作積分運算。

例 1：以 $y=\dfrac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ 爲被積函數。此在 $x=1$ 有一鉛直漸近線。其積分爲

$$\int\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}=3(x-1)^{\frac{1}{3}}+c.$$

此函數於 $x=1$ 係連續的，其定積分爲

$$\int_0^2\frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}=\Big[3(x-1)^{\frac{1}{3}}\Big]_0^2=6,$$

此值卽 0 至 2 間曲線下面積之確值。

例 2：以 $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 爲被積數，在 $x=1$，有一鉛直漸近線。其積分爲

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2}=-\frac{1}{x-1}+c.$$

亦於 $x=1$ 有一漸近線。如照常運算可得

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^2=-2,$$

此結果殊為荒謬，蓋

$$\int_0^x\frac{dx}{(x-1)^2}=-\frac{1}{x-1}-1=\frac{-x}{x-1},$$

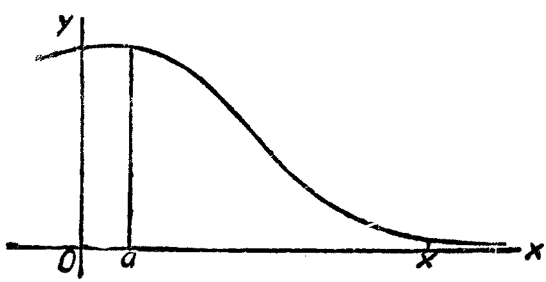
如為眞確，必 x 小於 1，設 x 趨於 1，此積分卽無窮大增加。同理，

$$\int_x^2\frac{dx}{(x-1)^2}=-1+\frac{1}{x-1}=\frac{2-x}{x-1},$$

如為眞確，必 x 大於 1，設 x 趨於 1，則此積分卽無窮大增加。且自 O 至 2 之面積皆在 x- 軸之上而前所得結果 -2 反為負數亦明示其不眞確也。

4. 定積分之高低界為無限大時之情形　由上所論知某曲線，x-軸，鉛直漸近線，及縱坐標四綫間之面積或可有有限值。設變數互換則漸近線變為水平的，而表面積者則為以無限大為高低界之積分。設函數$\phi(x)$ 以 x- 軸為漸近線，故當 x 趨於無窮大，則函數趨於零，則曲線下自 a 至 x 之面積（第 32 圖）為

$$\int_a^x\phi(x)dx,$$



第 32 圖

設當 x 趨於無限大，而此積分趨一定限，則此極限卽在 a 右之曲線下之全部面積，故可書爲

$$\int_a^{\infty}\phi(x)dx=\lim_{x\to\infty}\int_a^x\phi(x)dx,$$

但設此積分不趨於一定限，則上式左方並無實在意義，以言詞表之卽謂『此積分不存在，』或『此積分無有限值。』

下列二式

$$\int_{-\infty}^{a}\phi(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx,$$

可倣上例說明之，二者或有有限值，或無有限值，要視被積函數之性質而定。設 x- 軸並非漸近線，則 x 趨於無窮大時此等積分自無存在之可能也。

例 3:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{x\to\infty}\Big[\log x\Big]_1^x=\lim_{x\to\infty}\log x$$

因此極限不存在，故此積分亦不存在。

例 4:

$$\int_{-\infty}^{a}e^x dx=\lim_{x\to-\infty}\Big[e^x\Big]_x^0=1。$$

5. 積分函數之表現法　凡被積函數除在有限個點爲間斷外餘皆連續者，則有一積分存在，除在被積函數有鉛直漸近線各點或間斷各點外，此積分函數皆連續，不問積分可否表出，其積分之存在則無疑義也。故積分卽不能以初級之代數或超越函數表之，然仍有此函數存在。至能用第四章及本章各方法以求積分之函數必被積函數與積分皆能以初級函數表出者。多種重要積分不能以初級函數表出，本書當於後章論之。

按又積分與被積函數可不必爲同類之函數，例如

$$\int\frac{dx}{x-1}=log(x-1)+c,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=sin^{-1}x+c,$$

$$\int tan\ x\ dx=log\ sec\ x+c,$$

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=tan^{-1}x+c=log\ \frac{1+x}{1-x}+c.$$

故被積函數爲代數的及有理的而積分或爲超越函數，或前者爲無理代數式而後者爲超越的，或前者爲一種超越函數而後者爲他種超越函數。

有數種重要函數，其被積函數雖爲無理代數函數或初等超越函數，但其積分却不能以此項初等函數表示，猶之三角或對數函數之不能以代數函數表示或三角函數與對數函數之不能互相表示。遇此項情形時，祇能以積分式作爲函數之定義，有時並可用特種方法以繪其曲線(有數種方法將於以後論及)，其中有數種函數極爲重要者則予以定名，並將其值列表付印，以資檢查。例如或然率積分 (probability integral)

$$\int e^{-x^2}\ dx,$$

在或然率理論及最小二乘冪法內皆須論及，多數積分表及物理表內均將其值列表；又如橢圓積分 (elliptic integrals) 卽三次或四次多項式之平方根式之積分，亦爲高深函數研究之一，其值亦印行於多數積分表及物理表內。

再有一重要函數，謂之加馬函數(gamma function)，以希臘字母 Γ 爲其符號，係以一定積分式確定其值。此函數之自變數在被積函數內爲一參數，其式如下：

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx \tag{4}$$

以 $u=e^x$, $dv=x^{n-1}dx$, 用分部積分法,得

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx=\left[-\frac{1}{n}e^{-x}x^n\right]_0^\infty+\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-x}x^n dx,$$

因右端第一項以高低界之值代入皆等於零(參看第 46 節),故

$$n\Gamma(n)=\Gamma(n+1) \tag{5}$$

由(4),知 $\Gamma(1)=1$; 由 (5), 知 $\Gamma(2)=1$, 故 n 為正整數時

$$\Gamma(n)=(n-1)! \tag{6}$$

各數學表及物理表內輒將此函數 1 至 2 間之分數列表,以此與(5)併用即可求得 n 為任一正數時之函數值。

習 題 二 十 五

1. 示下列積分,無論 x 為何值,皆係連續。並將每題被積函數及積分之圖形繪出:

(a) $\int x^{-\frac{1}{3}}dx$;　　(b) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x}}$.

2. 示下列各積分各有一個或多個鉛直漸近線:

(a) $\int\frac{dx}{1-x^2}$;　　(b) $\int \tan x\,dx$;　　(c) $\int\frac{dx}{x^2}$.

3. 試下列定積分運算之是否有效:

(a) $\int_0^5 \log x\,dx$;　　(b) $\int_0^\pi \tan x\,dx$;　　(c) $\int_0^\infty e^{-x}dx$;

(d) $\int_0^2\frac{dx}{(1-3x)^2}$;　　(e) $\int_1^\infty\frac{dx}{x^3}$;　　(f) $\int_{-\infty}^{-1}x^{-\frac{1}{3}}dx$.

4. 示雙曲線之一與其漸近線之一間之面積無有限值。

第二十九節 積分表之用法

凡可以初等函數表出其積分之函數，祇須對於第 24 節至第 27 節之各項方法運用得當，即能求得其積分，但爲節省時力起見，學者宜熟知積分表之應用。各積分表之繁簡與排列雖不盡相同，但對下列各點，加以注意當可爲應用積分表之一助。

1. 積分之分類　積分皆依其被積函數之性質而分類。首爲有理代數函數，依其分母之因式性質而排列。次爲無理代數函數，依根式之性質而分類。再次爲初級超越函數，最後則爲不能以初等函數表示其不定積分之函數，而列表以示其定積分之值。

此四大類更可分爲若干小類，每小類包含若干積分式，其選擇與排列之着眼點則在書表地位之節省，與乎實用常見積分之易於引用。學者如能熟諳其自備積分表之排列法及所含各式，加之以本章內所論各項積分法，則應用積分表時方可收省時之效。

2. 被積函數之配置　積分式之不能直書而得每可於積分表內覓得其類似式，以爲運算之公式。但多須先用某種變易，將其化成表內已有之式。本章所論各種方法足爲變易函數形式之助。有時直接用本章之方法得解反較易。

有理代數函數求積分時，如用第 27 節所述各法，必能化爲積分表所載定式之一，且利用表內之式，每可省去化爲分項分式之手續。

無理代數函數求積分時，必須用代數方法先將被積函數化爲多項之和，每項內祇含變數之一個根式。如分母內有若干項其中至少有一根式時，應在分子分母上全乘一根式，使分母有理化。設一項內有根式以乘除一有理分數式，則此有理分數式或須化爲分項分式。

至求超越函數之積分，殊無通則可沿。讀者如對於積分表三角及對數函數之變易能諳熟極爲有益。可注意者即積分表內殊鮮函數之函數如 $F[f(x)]$ 之定式，式中函數 F 爲一初等超越函數，實際上遇此情形，應以 $f(x)=u$ 代入，至能否求得積分則視其他因式之性質

而定，例如，

$$\int x^5 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int u^2 e^u du = \frac{1}{2} e^u (u^2 - 2u + 2) + c$$

式中 $u = x^2$，設被積函數內無 x^5 或其他 x 之奇次冪，則無法以表示此不定積分。

學者演下列求積雜題時，應注意方法之選擇及積分表之應用。

習　題　二　十　六

1. $\int (e^{5x} + a^{5x}) dx$;
2. $\int \frac{(a^x - b^x)^2 dx}{a^x b^x}$;
3. $\int \left(\cos\frac{\theta}{3} - \sin 3\theta\right) d\theta$;
4. $\int \cos(\log x) \frac{dx}{x}$;
5. $\int (\sec\phi - \tan\phi)^2 d\phi$;
6. $\int \frac{ax\,dx}{x^4 + e^4}$;
7. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - (u+b)^2}}$;
8. $\int \frac{ax\,dx}{x^4 - e^4}$;
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{c^2x^2 - a^2b^2}}$;
10. $\int \tan^4\theta \sec^4\theta \, d\theta$;
11. $\int \frac{(x^2 + x - 1)}{x^3 + x^2 - 6x} dx$;
12. $\int \frac{(2z^2 - 5) dz}{z^4 - 5z^2 + 6}$;
13. $\int \frac{(3x+2) dx}{x(x+1)^3}$;
14. $\int \frac{as^2 ds}{(s+a)^3}$;
15. $\int \frac{4dx}{x^4 + 1}$;
16. $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2+2)^2} dx$;
17. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{3}{4}} + 1}$;
18. $\int \frac{dx}{x(x+1)^{\frac{1}{3}}}$;

19. $\int \alpha \sin \alpha \, d\alpha$; 20. $\int x \tan^{-1} x \, dx$;

21. $\int \cos\theta \log \sin\theta \, d\theta$; 22. $\int \frac{ds}{(a^2+s^3)^2}$;

23. $\int \frac{r^3 dr}{\sqrt{1-r^3}}$; 24. $\int_{1.5}^{2} \frac{dx}{2x-3}$;

25. $\int_{1.5}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$; 26. $\int_{0}^{a} \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax-x^2}}$;

27. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2+5x+4}$; 28 $\int_{0}^{\infty} e^{-2x} dx$;

29. $\int \frac{x^5 \, dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$; 30. $\int \frac{(x+\sin x)dx}{1+\cos x}$;

31. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta}}$; 32. $\int e^{2x} \tan^3 x \, dx$;

33. $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 3x}{1+9a^2} \, da$; 34. $\int_{0}^{1} e^{-x^2} dx$;

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+2e^{2x}}}$; 36. $\int_{0}^{3a} \frac{2x \, dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}$;

37. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; 38. $\int_{0}^{\log 2} \sqrt{e^x-1} \, dx$;

39. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}$; 40. $\int y \cosh 3y \, dy$;

41. $\int \sinh 3x \cosh 3x \, dx$; 42. $\int e^{\frac{x}{2}} \sin x \, dx$;

43. $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx$;　　44. $\int \frac{(1+3x)dx}{(2+3x+5x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

45. $\int \frac{dx}{3x\sqrt{5-6x}}$;　　46. $\int_0^\infty x^{\frac{5}{2}} e^{-x} dx$;

47. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}}$;　　48. $\int_0^\infty e^{-4x^2} dx$.

參 考 書 目

A Short Table of Integrals, B. O. Peirce (Ginn, 1910).

Advanced Calculus, W. F. Osgood (Macmillan, 1925), Chapters I, II, IX and XIX.

Advanced Calculus, E. B. Wilson (Ginn, 1912), Chapters XI, XIII, and XIV.

Integral Calculus, W. E. Byerly (Ginn, 1888).

Mathematical Analysis, Goursat-Hedrick, Vol I. (Ginn, 1904), Chapters IV and V.

第七章　數種標準曲線方程式及其變易

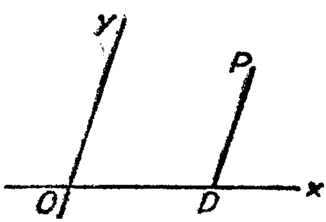
第三十節　坐標之數種用法

在前數章內，吾人論及函數，知函數之圖形極有用處。前所論之圖形，皆視為表示函數 $y=f(x)$，之值之法。x 之值用某比例尺沿水平方向量度，其對應之 y 值，則以某比例尺沿鉛直方向量度之。故縱坐標 y 與橫坐標 x 為圖形上一點之坐標，而圖形則為一羣點之軌跡(locus)，各點之坐標適合關係式 $y=f(x)$。以前數章並不注意曲線之幾何方面，而注意其對於解釋函數關係之應用。

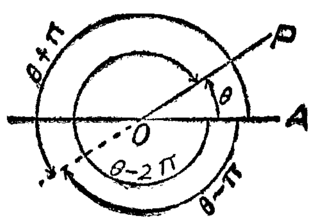
本章則論某數種平面曲線之幾何性，視之為點之軌跡，各點之坐標關係則以某種方程式表之。但所論要以極重要之方程式及其曲線為限，蓋為學數學者所不可不知者也。

一點在平面或某曲面之地位可以二數定之，即此點之坐標(coordinates) 是也。實用上，坐標種類甚多。地球曲面上某地之位置可以其經緯度定之，故經緯度及其二規定原線 (zero lines)，即赤道與主子午線，成為地面上之一種坐標制。

設在一平面上定 O 為原點（第 33 圖），畫二線經 O 而定其方向如 Ox 及 Oy，則 O 可用二線段以接於平面上之任何點 P，每一線段與既定之方向相同，如 OD 及 DP。此二線段之長度即可視為



第 33 圖



第 34 圖

P 點之坐標，其爲正或負則視其方向與原線方向之向背而定。因定其長度之單位卽得所謂狄氏坐標制(Cartesian system of Coodinates)，以首用此系之法國大哲學家狄卡爾氏(Decartes)而得名。

最常用者爲直角坐標制 (rectangular system)，其 x- 軸 Ox 係水平的而以向右爲正向，其 y- 軸則爲鉛直的以向上爲正向。因注意之點爲幾何的故橫縱坐標 x 及 y 皆以同一長度之單位量之。每對之 x 及 y 值，在平面上有一對應之定點 P，而平面上任一定點 P 亦有固定之坐標值 x 與 y。

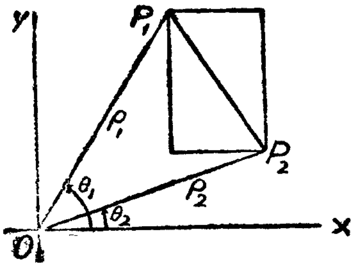
再有一種常用之坐標制卽極坐標制 (polar system)。以一定點 O 爲極(pole)，而以經 O 之直線 OA 爲原線 (initial line)，其方向係固定的，通常以向右爲正。設 P 爲平面上之任一點（第 34 圖），則由 O 至 P 之線段謂之 P 之向徑 (radius vector)而以 ρ 爲其長度之記號，設其正向爲自 O 至 P 則爲正，否則爲負。OA 與向徑正端所成之角，謂之向角(vectorial angle)，以 θ 表之，由 OA 起反鐘向而量則向角爲正，否則爲負。ρ 與 θ 二數組成 P 點之坐標。任一對坐標值 (ρ,θ)，必有一定點，但已知之某定點可以無數之坐標值表之。設以(ρ,θ)定一 P 點，則此 P 點亦可以$(\rho,\pm 2n\pi)$ 及 $[-\rho, \theta\pm(2n+1)\pi]$ 表之，其中 n 爲任何正整數。

1. 點與點間之距離　以 P_1 及 P_2 爲平面内之兩點，其直角坐標制之坐標分別爲(x_1,y_1)及(x_2,y_2)。連接 P_1 與 P_2 之線爲一長方形之對角線（第 35 圖），其邊各爲 x_1-x_2 及 y_1-y_2。故兩點間之距離 d 爲

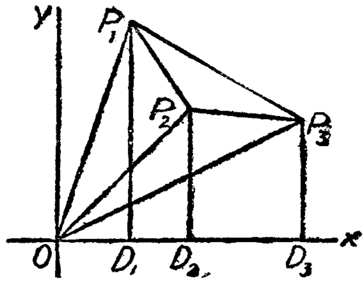
$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \tag{1}$$

再，設以 $(\rho_1\theta_1)$ 及 (ρ_2,θ_2) 爲此二點之極坐標，則 P_1P_2 爲三角形 OP_1P_2 之一邊，其長度爲

$$d=\sqrt{\rho_1{}^2+\rho_2{}^2-2\rho_1\rho_2 cos\ \theta_1-\theta_2)}. \tag{2}$$



第 35 圖



第 36 圖

2. 多邊形之面積　有三角形其頂點爲平面內之任意三點 P_1, P_2 及 P_3。接連其中任二點之線，此二點之縱坐標及其在 x- 軸上所截斷之部份成爲一梯形如 $P_1D_1D_2P_2$（第 36 圖）。此三角形之面積可以三個如此之梯形面積表之，$A=-P_1D_1D_2P_2-P_2D_2D_3P_3+P_1D_1D_3P_3$。然後以三點之坐標表三梯形之面積，得

$$A=\frac{1}{2}(x_1-x_2)(y_1+y_2)+\frac{1}{2}(x_2-x_3)(y_2+y_3)+\frac{1}{2}(x_3-x_1)(y_3+y_1),$$

化簡，得

$$A=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3) \tag{3}$$

式(3)右端可書爲一行列式如下：

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3'}$$

所應注意者即 p_1，p_2，p_3 之順序係依反鐘向而繞此三角形。如反此方向則行列式之二行互易，所得結果仍有相同之數值，惟符號各異。

仿上法，此三角形之面積亦可以下列三個三角形之面積表之，如

$A=-P_1OP_2-P_2OP_3+P_1OP_3$，此三面積又可以三頂點之極坐標表之

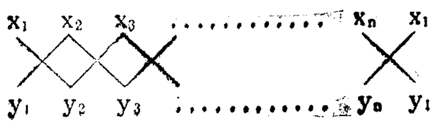
$$A=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2 sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}\rho_2\rho_3 sin(\theta_3-\theta_2)+\frac{1}{2}\rho_3\rho_1 sin(\theta_1-\theta_3) \quad (4)$$

式中如變更 $p_1p_2p_3$ 之順序，則亦變更答數之符號。

設 $P_1, P_2, \cdots\cdots P_n$ 爲依反鐘向繞一多邊形之各頂點。設以 P_1 與其他各頂點接連，則此多邊形被分爲若干三角形。以(3)式表各三角形之面積而求其和，得多邊形之面積如下

$$A=\frac{1}{2}[(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+\cdots\cdots$$
$$+(x_n-x_1)(y_n+y_1)] \quad (5)$$
$$=\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+\cdots\cdots x_ny_1-x_2y_1-\cdots\cdots-x_1y_n)$$

此可以下列排列法助記憶



設以(4)式表多邊形所分成之各三角形，則其和爲

$$A=\frac{1}{2}[\rho_1\rho_2 sin(\theta_2-\theta_1)+\rho_2\rho_3 sin(\theta_3-\theta_2)+\cdots\cdots$$
$$+\rho_n\rho_1 sin(\theta_1-\theta_n)] \quad (6)$$

3. 方程式與軌跡　曲線可視爲一點之軌跡，即，凡此平面內適合某條件之所有各點皆屬於此軌跡內，而不合此條件之點皆不屬於此軌跡。此條件可以一方程式表示此點二坐標間之關係。此方程式即稱爲此曲線之方程式。解析幾何學基本問題之一即已知一曲線之定義而求其方程式。

例如欲求一圓之方程式，其半徑爲 5，而圓心爲(2_1-7)。此圓爲各點之軌跡，其與(2_1-7)間之距離皆爲 5，故此圓上任一點之坐標(x_1y)必有下列之關係

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+7)^2}=5.$$

即

$$x^2+y^2-4x\ +14y+28=0.$$

是爲此圓之直角坐標方程式。其極坐標方程式則爲

$$\rho^2+\rho_1{}^2-2\rho\rho_1 cos(\theta-\theta_1)=25,$$

式內(ρ_1,θ_1)爲$(2,-7)$點之極坐標，設以原點爲極而 x- 軸爲原線，則

$$\rho_1{}^2=53,\ tan\theta_1=-\frac{7}{2}.$$

再舉一例，設欲求一直線之方程式，此線經$(3,2)$點而與$(-5,12)$及$(4,3)$二點連成之直線相平行。所求之直線上之任一點與後二點所成之三角形，其面積必與已知三點所成三角形之面積相等。用$(3')$，得

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & 12 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -5 & 12 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

展開後化爲 $x+y=5$。

解析幾何之另一基本問題爲繪製已知方程式之曲線。此曲線即謂之爲此方程式之軌跡，繪時可用第一章內各方法，但尙有關於軌跡之幾何特性應加考慮，蓋用此或可以減少繪圖時之繁重工作也。

(a) 對稱性設一曲線等分垂直於一直線之各弦，則稱此曲線對稱於此直綫設曲線經一點之各弦皆爲此點所等分，則稱此曲線對稱於此點。

下列諸點均顯而易見:

設曲線之方程式內僅含有 y 之偶次冪，則曲線必對稱於 x 軸蓋以 $-y$ 代 y 亦不致改此方程式也。

設曲線之方程式內僅含有 x 之偶次冪，則曲線必對稱於 y 軸。

設曲線方程式各項之 x 及 y 或均爲偶次冪或均爲奇次冪。則曲線必對稱於原點。常數項可視偶次項。

設曲線之極方程式內僅含 ρ 之偶次冪，或 ρ 爲 θ 之週期函數，其週期爲 $\frac{\pi}{n}$ 而 n 則爲任一整數，則曲線必對稱於極。

(b) 軌跡之範圍　於一曲線之方程式內，設以一變數表他變數，例如以 x 表 y，則僅 x 值在某限度內時，y 爲實數，逾此則否。如是先以 x 解 y，再以 y 解 x 卽可定此軌跡所及之範圍。一曲線之極方程式亦可做此決定其範圍。

(c) 漸近線　如何決定漸近線之位置此處不便作普遍的討論，但對下列各點應卽注意。

設當 x 趨於某一常數 a 時 y 變爲正或負無限大，則此曲線於 $x=a$ 有一鉛直漸近線。設 y 爲 x 之分式函數而分母內含有因式 $x-a$，卽有此項現象。

設當 y 趨於 b 時 x 變爲無限大，則此曲線於 $y=b$ 有一水平漸近線。

例：試繪下列方程式之曲線：

$$x^2y^2-y^2-x^2=0.$$

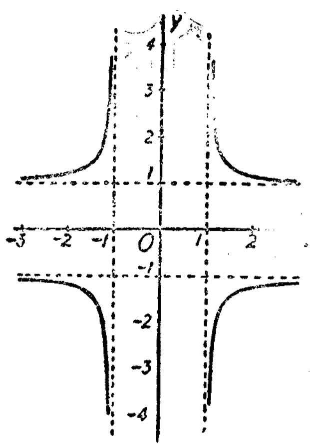
此曲線必與兩軸及原點對稱，故祇須完成第一象限內之曲線，則他象限內部份皆可由對稱性繪出。以 x 表 y，得

$$y^2=\frac{x^2}{x^2-1},$$

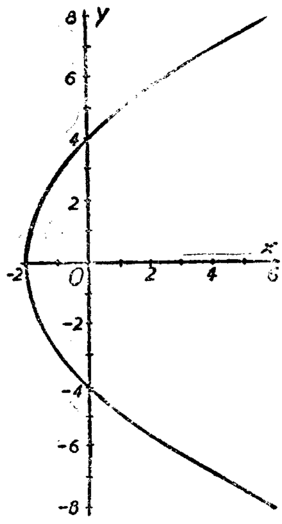
設 x 之值小於一，則 y 爲虛數，故此曲線必在 $x=1$ 處虛線之右（第 37 圖）。又因

$$x^2=\frac{y^2}{y^2-1},$$

此曲線亦必在 $y=1$ 處虛線之上。當 x 趨於 1，則 y 增爲無限大，故於 $x=1$ 有一鉛直漸近線。同樣，於 $y=1$ 亦有一水平漸近線。$\left(2,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 及 $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},2\right)$ 則爲此曲線上之三點。就上已知各事，卽不難將此曲線繪出矣。



第 37 圖



第 38 圖

再，試繪 $y^2=8x+16$ 之軌跡。此曲線僅對稱於 x- 軸。設 $x<-2$ 則 y 爲虛數。$(-2,0),(0,4)$，及 $(6,8)$ 皆在此曲線上。得此數事，卽可將曲線繪出。（第 38 圖）。

4. 交點與參數　有二方程式，各代一軌跡，凡變數之能適合兩式者卽爲兩曲線公點之坐標。故欲求二曲線之交點，祇須將其方程式作爲聯立式，而解其 x 及 y 或 ρ 及 θ，視所用坐標而定。解聯立方

程式之運算中，往往用種種方法合併原設方程式以構成新方程式。此等新方程式亦為經過原曲線交點之曲線。最後所得結果往往為與二坐標軸平行而經過所求交點之直線.例如欲求圓 $x^2+y^2=25$ 與直線 $x-y=1$ 之交點，可以 $x=y+1$ 代入前式，而得 $2y^2+2y=24$ 即 $y^2+y-12=0$. 此式即等於兩水平線，其式為 $y=3, y=-4$，以之代入原第二式得兩鉛直線，其式為 $x=4, x=-3$。此兩組直線決定四點，$(4,3)$及$(-3,-4)$二點即所求之交點，另二點為$(-3,3)$及$(4,-4)$，則不在此圓及直線之上。

設$f(x,y)=0$ 及 $\phi(x,y)=0$ 為二軌跡之方程式，則

$$\phi(x,y)+kf(x,y)=0 \tag{7}$$

為一經過原軌跡所有交點之新曲線方程式，其中 k 為任何常數。不同之 k 值使此方程式為同族或同組內之各別曲線，凡此族內之曲線皆經過原軌跡之交點。如僅就此族內之單獨曲線着想，則 k 為一泛定常數，但就此曲線族整個着想，則 k 可視為能有一串不同數值之數，稱為參數。在解析幾何內，參數一名詞，常用於兩種不同之關係內，如：

(a) 每一 x,y 或 ρ,θ 之方程式可含有一個或多個泛定常數，皆以字母表之。每以一組定值予此等泛定常數即得一一定之曲線，但以不同之值予此項泛定常數則所得之曲線亦各不同。如是定得之曲線族，視其參數之數，謂之一參數族，二參數族，三參數族等等。如是之參數不與 x 及 y 或 ρ 與 θ 有任何變數關係而為獨立的，必每個參數皆予以定值，然後兩坐標始能有一定之關係。

* (b) 前數章內曾論及助變數之用法，其中一特例即參數方程式 (parametric equations)之利用，如 $x=f(t), y=\phi(t)$。此處之參數 t 為一第三變數，必隨 x 及 y 變值，而非獨立的。與 t 以不同之值不能得各別之曲線，但得同一曲線上之各點。消去 t 即得此曲線之方程式，不復含有參數。如是之參數方程式亦可含有泛定常數，如 $x=a\cos t, y=a\sin t$。此處就泛定常數言，則 a 為參數；就助變數言，則 t 為參數。取上二式平方之和，得 $x^2+y^2=a^2$，即一同心圓族，而 a 則

為此族之參數。

設以 a 為助變數而 t 為泛定常數，則得 $y=x\tan a$，此為經過原點之一直線族，而各直線與 x- 軸所成之角 t 為此族之參數。

習 題 二 十 七

1. 證明以 $(-2,4)$, $(5,3)$ 及 $(2,7)$ 為頂點之三角形為一等腰三角形，求此三角形之底及高及其面積。另以公式(3′)求其面積。

2. 以諸邊及對角線之長度，示$(1,2)$, $(13,-3)$, $(16,1)$ 及$(4,6)$ 為一平行四邊形之頂點。以公式(5)求其面積。

3. 有兩點之極坐標各為 $(3,\frac{\pi}{3})$ 及 $(8,\frac{5\pi}{12})$，求此兩點間之距離。有一線與接連此兩點之線平行而其間距離為 3，以公式(4)求此線之極方程式。

4. 以線連$(-3,2)$及$(9,7)$，而求其二等分線之方程式，此二等分線可視為與前二點等距之軌跡。

5. x 與 y 應有何種關係始能使三角形 $(2,7)(4,3)(x,y)$ 之面積為零？在此條件下，(x,y)點之軌跡為何？

6. 一點距 $(0,4)$ 之距離等於其縱坐標之四倍，求其軌跡之方程式。

7. 上題改用極坐標而以 $(4,\frac{\pi}{2})$ 為已知點，求此軌跡之極方程式，至縱坐標則為 $\rho\sin\theta$。

8. 一點距 $(3,0)$ 及 $(-3,0)$ 兩點距離之和為 10。求此點軌跡之方程式。對於此軌跡之對稱及範圍加以討論，並繪此曲線。

9. 一點 (x,y) 與 $(2,3)$ 相連之線為一長方形之對角線。設此長方形之面積為 8，而其一邊恆為水平，此點 (x,y) 之軌跡為何？書其方程式並繪曲線。

10. 一點與 $(-4,4)$ 之距離為 6，求其軌跡之方程式並繪曲線。

11. 改用極坐標解上題其已知點變爲 $(4\sqrt{2}, 3\frac{\pi}{4})$。

12. 一點與 (6,0) 之距離爲此點與原點距離之二倍，求其軌跡之方程式。示此爲一圓，半徑爲 4，中心爲 $(-2,0)$。

13. 用極坐標解上題。

14. 一點移動時與 (4,0) 之距離恆爲與 $(-4,0)$ 距離之 k 倍。書其軌跡之方程式，以 k 爲泛定常數。令 k 爲 $\frac{1}{2}$,1,2,3 等值，繪其軌跡並示其各爲一圓。

15. 示 $x^2+y^2+6y=16$ 及 $x^2+y^2-6y=16$ 之公點爲 (4,0) 及 $(-4,0)$。求經此二曲線公點之一參數圓族之方程式，並繪此族內之若干圓。

16. 以精密之繪圖示 14 題曲線族與 15 題曲線族相交處爲互相垂直。

17. 繪爲參數方程式 $x=4\sec t$, $y=3\tan t$ 所定之曲線。示此爲一點之軌跡，其與 (5,0) 及 $(-5,0)$ 之距離差數爲 8。

18. 討論二參數之曲線族，其參數方程式爲 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, a 與 b 爲族參數，而 t 爲助變數。

第三十一節　直線

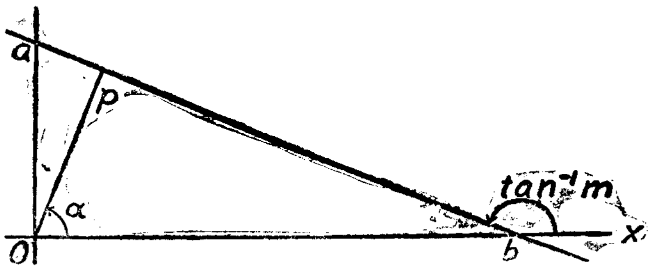
設平面上有任一直線並在平面上採用一種坐標制，則有若干常數或參數與此線有關。此項參數之名稱記號在數學書內幾皆一律，卽 x 截距 (x-intercept), a; y 截距 (y-intercept), b; 與 x- 軸所成角度之正切，謂之此直線之斜度 (slope), m; 自原點之垂直距離, p; 此垂直線與 x- 軸所成之角, α (第 39 圖)。

$m=\tan(\alpha\pm\frac{\pi}{2})$，故 α 或 m 祇須知其一卽可求其他。除此以外，上述任二參數皆無相互之關係，故任取二獨立參數可用以決定一直線。下列各式，各用兩個參數，爲直線之標準式：

斜度截距或簡稱斜度方程式，爲

$$y=mx+b, \tag{1}$$

凡此直線上任一點 (x,y) 皆適合此式。



第 39 圖

截距方程式爲

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{2}$$

a 與 b 卽直線在 $x-$ 及 $y-$ 軸上之截距，且式亦卽斜度截距式之結果，蓋 $m=-\dfrac{b}{a}$ 也。

法線(normal)方程式爲

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p, \tag{3}$$

旣知 $a=p\sec\alpha$ 及 $b=p\csc\alpha$，卽可由截距式推出此式。

直線之標準極方程式爲

$$\rho\cos(\theta-\alpha)=p. \tag{4}$$

由幾何的觀察卽知直線上任一點 (ρ,θ) 必適合此式，以 $x=\rho\cos\theta$ 及 $y=\rho\sin\theta$ 代入法線式卽得此式。

凡 x 及 y 之一次方程式皆可化爲斜度式截段式及法線式，故所代表者皆爲直線。例如方程式 $5x-12y+6=0$ 可書爲斜度式

$$y=\frac{5x}{12}+\frac{1}{2},$$

示 $m=\frac{5}{12}$ 而 $b=\frac{1}{2}$。再可書爲

$$\frac{x}{-\frac{6}{5}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1,$$

此式之特點爲等號右方之 1，示 $a=-\frac{6}{5}, b=\frac{1}{2}$. 最後因 $5^2+12^2=13^2$，以 -13 除原式，得

$$-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y=\frac{6}{13}.$$

此式特點爲 x 及 y 之係數平方之和爲 1，故可爲某角之正弦或餘弦，上式內 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, $\sin\ \alpha=\frac{12}{13}$, $p=\frac{6}{13}$。通常計算時皆以 p 書爲正數，但此點並非必要。參數 p 及 α 實爲垂線之足之極坐標，故極可以多種方式表出之。變上法線式之號，得 $\cos\ \alpha=\frac{5}{13}$, $\sin\ \alpha=-\frac{12}{13}$, $p=-\frac{6}{13}$，用此等值仍與上列諸值有相同之效果。

此外有三特例應予注意。第一，與 y- 軸平行之直線，其方程式爲 $x=c$，因其並不含 y 故不能書成斜度式。第二，穿過原點之直線，其直角坐標方程式內無常數項，故不能書成截距式。第三，在極坐標內，穿過極之直線，其方程式爲 $\theta=\alpha\pm\frac{\pi}{2}$。

除 p 與 α 之值可變易外，其餘各式中之參數對於某一直線皆僅有惟一之值。各式皆有其優點，須視決定直線之已知條件之性質，及所欲求之事項之性質以決定選擇何式表某直線。二獨立條件定一直線，亦卽決定其所有參數之值。但直線方程式通常以不用其標準參數爲宜，最常用有二式。

點及斜度 (point-slope) 方程式爲

$$y-y_1=m(x-x_1). \tag{5}$$

(x_1y_1)為直線上之一點，設知直線之斜度及直線上之任一點，即可書此方程式。

設已知直線上之二點，則可用二點方程式

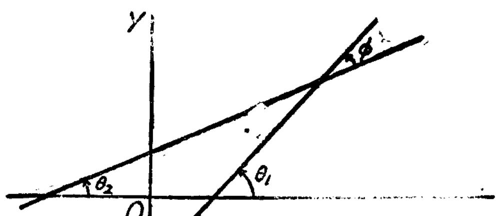
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{6}$$

此為 x 及 y 之平直方程式，設 $x=x_1$ 及 $y=y_1$ 或 $x=x_2$ 及 $y=y_2$ 皆可適合，故所代表者為經過(x_1,y_1)及(x_2,y_2)二點之直線。二點方程式之另一形式為

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0, \tag{6'}$$

此式表示(x,y)點及二已知點所定之三角形面積為零。

求直線 AB 與 CD 所成之角度，因知此角為二線與 x- 軸所成角之差，即 $\phi=\theta_1-\theta_2$（第 40 圖）。



第 40 圖

設 AB 及 CD 之斜度分別為 m_1 及 m_2，則

$$\tan\phi=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}. \tag{7}$$

在他方面，設已知一線如 CD 而欲定另一線 AB，其斜度使與 CD 成一已知角 ϕ，則祇須解(7)式內之 m_1，得

$$m_1=\frac{m_2+\tan\ \phi}{1-m_2\tan\ \phi}. \tag{8}$$

設 AB 與 CD 互相垂直，則 $\tan\ \phi$ 爲無限大，而 $1+m_1m_2=0$，卽 $m_1=-1/m_2$.

法線式有一重要應用卽作爲距離公式。在 $x\cos\ a+y\sin\ a-p=o$ 內，p 爲自原點至直線之距離，而方程式 $x\cos\ a+y\sin\ a-p=d$ 代表與前線平行之一線，自原點至此線之距離爲 $p+d$，故後線上任一點與前線之距離爲 d. 故自任一點(x_1y_1)至一線 $x\cos\ a+y\sin\ a=p$ 之距離爲：

$$d=x_1\cos\ a+y_1\sin\ a-p. \tag{9}$$

此距離公式對於說明某數種方程式極爲相宜，玆以二例明之。

設有二直線 $3x+5y=9$ 及 $x-7y=4$. 方程式

$$(3x+5y-9)+k(x-7y-4)=0$$

任 k 爲何値，皆代表穿過前二線交線之一直線。設 k 爲二線化爲法線式之因數比數，卽

$$\pm k=\frac{\sqrt{3^2+5^2}}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{\sqrt{34}}{5\sqrt{2}},$$

則可書爲

$$\frac{3x+5y-9}{\sqrt{34}}=\pm\frac{x-7y-4}{5\sqrt{2}},$$

因等號左右端皆表一距離公式，故此方程式代表與原來二線等距之點之軌跡卽二直線交角之等分線也。

再，$(3x+5y-9)(x-7y-4)=k$ 可書爲

$$\frac{(3x+5y-9)}{\sqrt{39}}\ \frac{(x-7y-4)}{5\sqrt{2}}=\frac{k}{10\sqrt{17}}.$$

此式所代表之軌跡上各點與原設二直線距離之積爲上式右端之常數。因二距離之積爲常數，當一距離甚小時則另一距離變爲甚大，故

原設二直線各爲此曲線之漸近線。

習 題 二 十 八

1. 書下列各直線之直角坐標方程式:

(a) 斜度爲 3, x 截距爲 5。

(b) y 截距爲 -2, 且經過$(7, 3)$。

(c) 經過$(2, 9)$且與 $3x-8y=7$ 平行。

(d) 經過$(1, 3)$及$(-2, 5)$。

(e) 斜度爲$\frac{3}{4}$,與原點之距離爲 8。

(f) 經過$(1, 8)$,且與$(-3, 4)$之距離爲 2.

2. 書下列直線之極方程式:

(a) 與原線垂直,離極 2 單位。

(b) 自原點之距離爲 5, 經過$\left(10, \frac{\pi}{4}\right)$。

(c) 經過極且垂直於

$$\rho \cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=6.$$

3, 以接連$(1, 5)$及$(8, -2)$之線爲一三角形之底邊而$(7, 6)$則爲其頂點。

(a) 求底邊之長度。

(b) 求以底邊爲其一段之直線之方程式。

(c) 用距離公式求高度。

(d) 以底邊乘高度之半求面積。

(e) 以第 30 節之公式求面積。

4. 求上題內三角形各角之正切。

5. 證下列三直線交於一點: $3x+4y=7$, $2x-3y=5$, $x-10y=3$。(提示:書出係數及常數項之行列式)。

6. 三角形之三邊為 $4x-3y=-10$, $4x+3y=15$, $5x+12y=26$. 證此三角形各角之等分線交於一點。

7. 一線之方程式為 $3x+ky=5$. 試以 k 表出此線之斜度,截距,及自原點至直線之距離。以值予 k, 使直線適合下列條件:

(a) 與 $7x+4y+5=0$ 平行。

(b) 與 $x-2y=6$ 成 $45°$

(c) 離原點一單位。

(d) 離(2, 4)點 2 單位。

(e) 經過(7, 2)。

8. 一線之方程式為 $x+ky=c$。求 k 與 c 之值,使此線適合下列條件:

(a) 經過(2, 4)及(−3, 7)。

(b) 經過(1, 5)垂直於 $3x-8y=6$.

(c) 經過原點而離(5, −6)之距離為 2。

9. 一線經過 $x-3y+4=0$ 及 $5x+7y=1$ 之交點及(1, −3),書其方程式。

10. 注意第 6 題之三角形,繪下列方程式之曲線:

(a) $(4x-3y+10)(4x+3y-15)=50$.

(b) $(4x-3y+10)(4x+3y-15)(5x+12y-26)=-65$.

(c) $(4x-3y+10)(4x+3y-15)+(5x+12y-26)=0$.

(d) $(4x-3y+10)^2=5x+12y-26$。

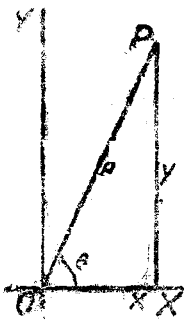
11. 求曲線 $x^3-xy^2=12$ 之漸近線,並繪此曲線。

第三十二節 坐標之變易

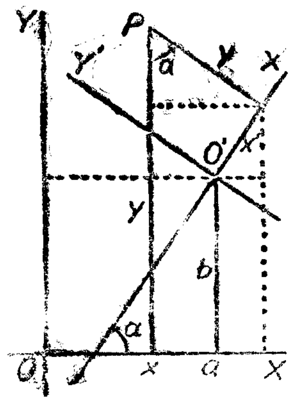
吾人知同一軌跡或曲線用直角坐標與用極坐標方程式之形式完全不同。卽同用直角坐標,某曲線之方程式亦視軸之選擇及曲線之性質而異其形式。故用某種坐標之已知方程式每須於一與原坐標制有一定關係之新坐標制內定此同一軌跡之方程式。此可以曲線上一點

之新坐標表其舊坐標，以之代入原有方程式內得用新坐標之方程式。前已舉例已明直角坐標及極坐標之關係。設以原點爲極而以 x- 軸爲原線，（第 41 圖）則由直角坐標變易爲極坐標之關係式如下：

$$x=\rho \cos \theta,\quad y=\rho \sin \theta \tag{1}$$



第 41 圖



第 42 圖

由極坐標變易爲直角坐標，則解上列二式內之 ρ 及 θ，或直接觀圖，皆得

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{2}$$

在運算時，常須用下列輔助關係式：

$$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}。 \tag{2'}$$

坐標變易最重要一種爲自一直角坐標制變易至另一直角坐標制。以第 42 圖內之 OX 及 OY 爲原坐標軸。設(a, b 爲 O' 點對於原軸之坐標而 $O'X'$ 與 OX 成一角度 α，則任一點 P 之原坐標如爲(x, y)而新坐標爲(x', y')，必適合下列諸關係式：

$$x=a+x'\ \cos\ a-y'\ \sin\ a,$$

$$y=b+x'\ \sin\ a+y'\ \cos\ a。\qquad(3)$$

用此二式可將任一方程式自原坐標制變易至新坐標制。此項關係由圖形之幾何性質固可得到，但亦可由距離公式得到，蓋

$$x'\ \cos\ a-y'\ \sin\ a+a=0$$

爲 OY 對於新軸之方程式，而

$$x\ \sin\ a+y'\ \cos\ a+b=0$$

則 OX 對新軸之方程式也。

設 $a=0$，則變易(3)之新軸使與原軸平行，謂之移動 (translation)，其方程式變爲

$$x=x'+a,\quad y+y'+b \qquad (4)$$

設 $a=0$ 及 $b=0$，則 O' 與 O 合，則變易 (3) 謂之軸之轉動 (rotation)，其方程式變爲

$$x=x'\ \cos\ a-y'\ \sin\ a,$$

$$y=x'\ \sin\ a+y'\ \cos\ a。\qquad(5)$$

凡用(3)之任何變換皆可分爲移動及轉動各一次而得到同樣結果，而此二重簡單手續較之用方程式(3)往往反爲便利。

因方程式(3)所代表者爲 x 及 y 之平直式，故另選新直角坐標軸不改變方程式之次。

由方程式(4)，知軸之移動不改變方程式內 x 及 y 最高次之一項。

因方程式(5)以 x 及 y 爲 x' 及 y' 之齊次平直函數，故轉動使原式之各項在新式內仍各發生同次之項。

上述三事表示坐標之變易雖能改變一曲線方程式之形狀，但任何移動或轉動仍不能改變此方程式之某數種特性。但坐標軸如選擇得宜，可使方程式化爲簡單，故選定新軸以使新方程式得表現某數種特性爲重要問題之一。

有方程式 $\rho=\sec^2\dfrac{\theta}{2}$，欲變易爲直角坐標則選直角坐標軸時，應

使此式愈簡愈妙。

$$\rho=sec^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{cos^2\theta}=\frac{2}{1+cos\,\theta},$$

用方程式(2)及(2′)，得

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2}{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}=\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+x}.$$

去根號，此式化爲

$$y^2=-4x+4.$$

以 $x=x'+1,\ y=y'$ 得

$$y'^2=-4x',$$

至此無論移動或轉動均不能再將其化簡矣。

再，有方程式

$$3x^2-7xy+2y^2+9x+2y-32=0.$$

設將原點移至一對稱點使式內無一次項。令 $x=x'+h,\ y=y'+k$，則

$$3x'^2+6hx'+3h^2-7x'y'-7hy'-7kx'-7hk+2y'^2+4ky'$$
$$+2k^2+9x'+9h+2y'+2k-32=0.$$

選擇 h 及 k，使 x' 及 y' 之係數皆爲零，得

$$6h-7k+9=0,$$
$$-7h+4k+2=0,$$

則 $h=2$ 而 $k=3$。此方程式因變爲

$$3x'^2-7x'y'+2y'^2-20=0,$$

設轉動坐標軸至對稱位置，則 x' 及 y' 之乘積項消滅。以

$$x'=x''cos\ a-y''sin\ a,\quad y'=x''sin\ a+y''cos\ a,$$

因得

$$3x''^2\ cos^2\ a-6x''y''sin\ a\ cos\ a+3y''^2\ sin^2\ a$$
$$-7x''^2\ sin\ a\ cos\ a-7x''y''(cos^2\ a-sin^2\ a)+7y''^2\ sin\ a\ cos\ a$$

$$+2x''^2 \sin^2 \alpha+4x''y'' \sin \alpha \cos \alpha+2y'' \cos^2 \alpha-20=0.$$

選擇 α 使 $x''y''$ 之係數爲零，得

$$-2 \sin \alpha \cos \alpha=7(\cos^2 \alpha-\sin^2 \alpha)$$

卽

$$\tan 2\alpha=-7.$$

由此得 $\cos 2\alpha=\frac{1}{10}\sqrt{2}$, $\sin^2 \alpha=\frac{10-\sqrt{2}}{20}$, $\cos^2 \alpha=\frac{10+\sqrt{2}}{20}$;

$\sin \alpha \cos \alpha=-\frac{7}{20}\sqrt{2}$，而此方程式變爲

$$\frac{5}{2}(1+\sqrt{2})x''^2+\frac{5}{2}(1-\sqrt{2})y''^2=20.$$

學者應先繪原方程式而後再繪前後兩組新坐標軸。應注意者，原式可書爲

$$(x-2y+4)(3x-y-3)=20,$$

可先繪此曲繪之二漸近線。對稱點卽二漸近線之交點，而對稱軸則爲二漸近線間角度之等分線也。

習　題　二　十　九

1. 變易下列各式爲極坐標式：

(a) $y^2=4p(x+p)$,

(b) $x^2-y^2=16$,

(c) $x^2+y^2+6x=0$。

2. 變易下列各式爲直角坐標式：

(a) $\rho=8 \cos \theta$;　　(c) $\rho=\frac{}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$;

(b) $\rho=\frac{8}{1-\cos \theta}$;　　(d) $\rho \cos \theta=4$.

3. 有方程式 $x^2+y^2-bx+2y+1=0$，移動原點至一對稱點而繪其曲線。

4. 有曲線 $x^2-y^2=0$, 試轉動其坐標軸 $\frac{\pi}{4}$ 弧度。

5. 示方程式 $x^2+y^2=r^2$ 不受轉動之影響。

6. 極坐標內,變易 $\theta=\theta'+\alpha$ 等於使原線經一角度 α 之轉動。試將方程式 $\rho=10\ sin\ \theta$ 作上述之轉動再將原方程式及新方程式均變易為直角坐標,以資證明。

7. 有方程式 $xy-6x+8y+2=0$, 試由移動與轉動變易為 $x^2-ky^2=c$ 式, k 與 c 皆為常數。

8. 有方程式 $x^2+3x-3y+6=0$, 試由移動轉動變易為 $y^2=kx$ 形之方程式。

第三十三節 圓錐曲線

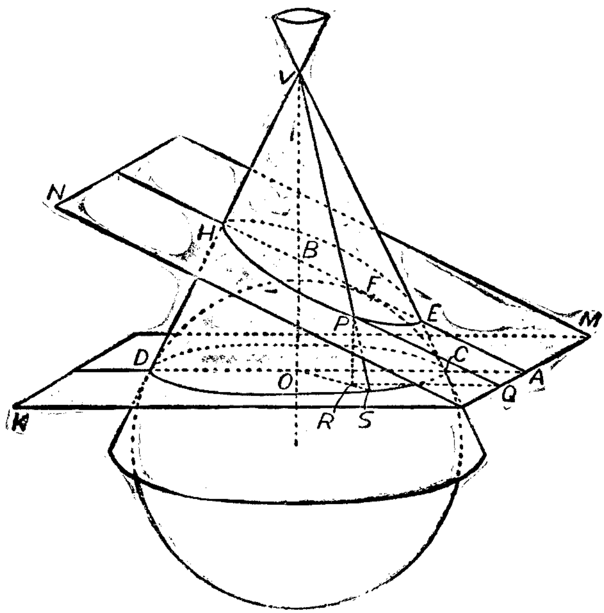
圓錐曲線(conic sections)為曲線中最重要之一類。凡屬此類之曲線皆可以一平面切一正圓錐而得,因而得名。

圓錐曲線之特性可於第 43 圖內之幾何關係內求得。以 V 為頂點之錐體為平面 MN 截於曲線 EHP。與平面 MN 在 F 點相切之球與切錐體於 CSD 圓各點上。錐體之軸垂直於此圓之平面,中心 O 為垂足,且於 B 點穿過平面 MN, 此圓之平面 MK 交平面 MN 於直線 QM。直線 OA 與 QM 垂直, BF 於 A 點垂直於 QM。

取此曲線之任一點 P, 畫 PF 及錐體之元素 PV, 於 S 點穿平面 MK。畫 PR 與 BO 平行, PQ 與 BA 平行。三角形 PRS 與 ΔVOS 或 ΔVOC 相似, 而 ΔPQR 則與 ΔBAO 相似。因 PF 及 PS 為自 P 點至球面之切線,二線相等,故

$$\frac{PF}{PQ}=\frac{PS}{PQ}=\frac{PS}{PR}\cdot\frac{PR}{PQ}=\frac{VC}{VO}\cdot\frac{BO}{BA}.$$

上式與 P 在曲線上之地位無關,故 PF 與 PQ 之比,無論 P 為曲線上任一點,其值皆同。設 α 為錐體之一元素與其軸所成之角,而 ϕ



第 43 圖

爲截面 MN 與此軸相交處之角，則此常數比爲

$$\frac{PF}{PQ}=\frac{VC}{VO}\cdot\frac{BO}{BA}=\frac{\cos\ \phi}{\cos\ \alpha}.$$

此比數謂之此曲線之偏心率(eccentricity)，通常以 e 表之，F 點謂之焦點(focus)，QM 線謂之準線(directrics)。由上述，得定義如下：

圓錐曲線爲平面上一點之軌跡，此點與平面上一定點之距離，及與同平面上一定直線之距離有一定之比。

欲使圓錐曲線在直角坐標系內有習見之式，可以準線爲 y- 軸，使 x- 軸穿過焦點 F，而以自焦點至準線之距離爲 $2p$。(第44圖)，以 $\frac{PF}{PQ}=e$ 爲一常數，得

$$\sqrt{(x-2p)^2+y^2}=ex,$$

因化爲

$$(1-e^2)x^2+y^2-4px+4p^2=0 \tag{1}$$

再，如用極坐標，則以 F 爲極，而以經 F 而與準線垂直者爲原線，則

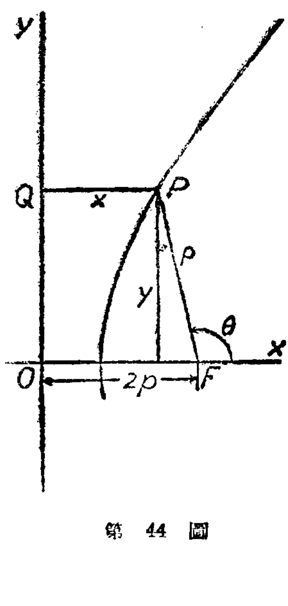
$$\rho=e(2p+\rho\ \cos\ \theta)$$

此可化爲

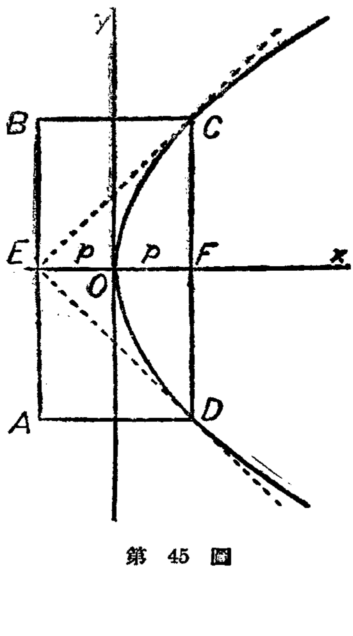
$$\rho=\frac{2ep}{1-e\ \cos\ \theta} \tag{2}$$

欲討論圓錐曲線之特性，宜分論此類曲線各種不同之形式：

1 圓　設第 43 圖內之截面 MN 移至於 B 與錐體軸 VB 垂直之地位，曲線 EHP 變成一圓，偏心率變爲零，但 QM 線則退至無窮遠。故圓之準線在『無窮遠』而焦點則在中心。此爲不適用方程



第 44 圖



第 45 圖

式(1)之特例。因圓上各點與其中心等距，以中心爲在$(h,\ k)$，而半徑爲 r，得

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2, \tag{3}$$

當 h 與 k 皆爲零，卽化爲圓之最簡式。

設以方程式(1)之 $e=0$，得

$$(x-2p)^2+y^2=0,$$

則此方程式之軌跡僅有一實點$(2p,\ 0)$在第 43 圖內之對應情形爲截面 MN 經 V 點與 VB 垂直。此軌跡謂之點圓(point circle)，相當於 r 爲零之方程式(3)。

2. 拋物線　在方程式(1)內，以 $e=1$，得

$$y^2-4px+4p^2=0,$$

卽

$$y^2=4p(x-p)$$

設移動原點至$(p,\ o)$點，則上式變易爲

$$y^2=4px, \tag{4}$$

此爲拋物線(parabola)之標準式，由此可硏究其特性。第 45 圖之曲線於 x- 軸對稱，故 x- 軸謂之拋物線之軸且此軌跡全部在 y- 軸之右。正方形 $ABCD$ 之兩邊爲 $2p$ 及 $4p$，直線 AB 爲準線，長 $4p$ 之直線 CD 則謂之拋物線之正焦弦(latus rectum)。拋物線交其軸處之 O 點謂之頂點(vertex)。所有拋物線形狀皆同，不同者僅大小，而其大小則視 p 之值而定。p 實爲一族拋物線之參數，可爲任一正數或負數。如 p 爲負數則曲線全部必在 y- 軸之左。

下方程式

$$x^2=4py, \tag{4'}$$

如與(4)比，卽知其表示以原點爲頂點而以 y- 軸爲軸之拋物線。此拋物線視 p 之爲正爲負而定其在 x- 軸之上下。

下列方程式

$$(y-k)^2=4p(x-h), \tag{4''}$$

$$(x-h)^2=4p(y-k), \tag{4'''}$$

分別代表頂點在(h, k)而有水平軸及垂直軸之拋物線。

在方程式(2)內，設 $e=1$，得

$$\rho=\frac{2p}{1-\cos\theta}=p\csc^2\frac{\theta}{2} \tag{5}$$

上式爲拋物線極坐標方程式常用之二種形式。下列方程式

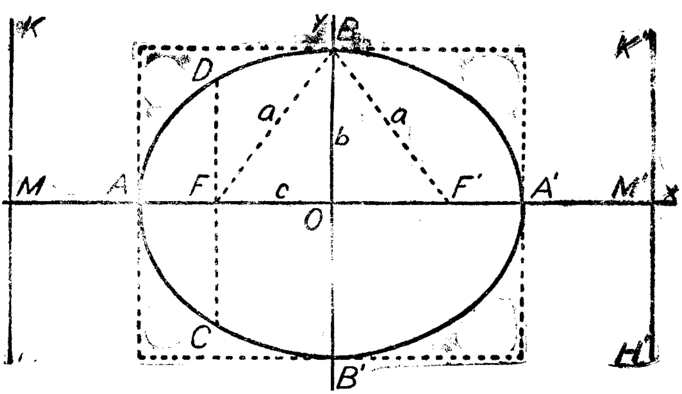
$$\rho=\frac{2p}{1+\cos\theta}=p\sec^2\frac{\theta}{2} \tag{5'}$$

代表在頂點左端之拋物線，換言之卽旋轉 π 弧度，蓋 $\cos\theta=-\cos(\theta+\pi)$ 而 $\csc^2\frac{\theta}{2}=\sec^2\frac{\theta+\pi}{2}$ 也。

3. 橢圓 設 e 非一，則方程式(1)可書爲

$$\frac{\left(x-\frac{2p}{1-e^2}\right)^2}{\frac{4e^2p^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{4e^2p^2}{1-e^2}}=1 \tag{1'}$$

設 e 在零及一之間，則可以



第 46 圖

$$a^2=\frac{4e^2p^2}{(1-e^2)^2}, \qquad b^2=\frac{4e^2p^2}{1-e^2}, \tag{6}$$

再將原點移至$\left(\frac{2p}{1-e^2},\ O\right)$點，則(1′)變爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{7}$$

此爲橢圓之最簡標準式，相當於以 OA 及 OB 爲軸之橢圓（第 46 圖）。此曲線與二軸及原點皆對稱，x- 截距爲 a 及 $-a$，y- 截距爲 b 及 $-b$. 長 $2a$ 之直線 AA' 爲長軸(major axis)，而長 $2b$ 之直線 BB' 則爲短軸(minor axis)，設 HK 爲準線而 F 爲焦點，則 $OM=\frac{2p}{1-e^2}$，又因 B 爲曲線上之一點，

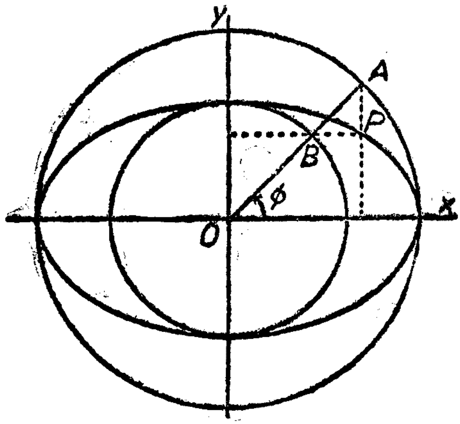
$$BF=e\cdot OM=\frac{2ep}{1-e^2}=a,$$

又因$\frac{b^2}{a^2}=1-e^2$，得

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2} \quad 卽 \quad e=\frac{c}{a}, \tag{8}$$

式內 $c=OF$. 設以 $x^2=c^2=a^2-b^2$ 代入方程式(7)，得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，表示經 F 點之雙縱坐標 CD 之長度爲 $\frac{2b^2}{a}$. 此雙縱坐標謂之橢圓之正焦弦。由曲線之對稱性，知橢圓在 $H'K'$ 另有一準線，於 F' 另有一焦點。

任一橢圓，其長短半軸分別爲 a 及 b，皆與二圓相伴，其一之半徑爲 b 內接於橢圓，謂之短軸輔圓(minor auxiliary circle)，其他之半徑爲 a 外切於橢圓，謂之長軸輔圓(major auxiliary circle)。（第 47 圖）。



第 47 圖

下列方程式

$$x=a\ \cos\ \phi,\ y=b\ \sin\ \phi, \tag{9}$$

為橢圓之參數方程式，蓋消去 ϕ 卽得方程式(7)也。由上式可得簡易之幾何畫法以定橢圓上任一點 P 之位。經 O（第 47 圖）作一線與 Ox 成任一角度 ϕ，與長軸及短軸輔圓分別在 A 及 B 相交。經 A 之鉛直線與經 B 之水平線之交點卽所求之 P 點。

方程式(2)之 e 如小於一，卽為橢圓之極方程式，而以左端焦點為極。如分母式內之負號改為正號，則極為右焦點。

欲得極在中心之橢圓極方程式，可將方程式 (7) 變易為極坐標，得

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta} \tag{10}$$

至下列公式

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \tag{10'}$$

則代表中心在$(h,\ k)$之橢圓，其長短半軸分別為 a 及 b，設 a 大於 b，則長軸為水面，設 a 小於 b，則長徑為鉛直。設 $a=b$，則變為

圓之方程式。

4. 雙曲線　設 e 大於一，則方程式(1′)之 $1-e^2$ 爲負，可令

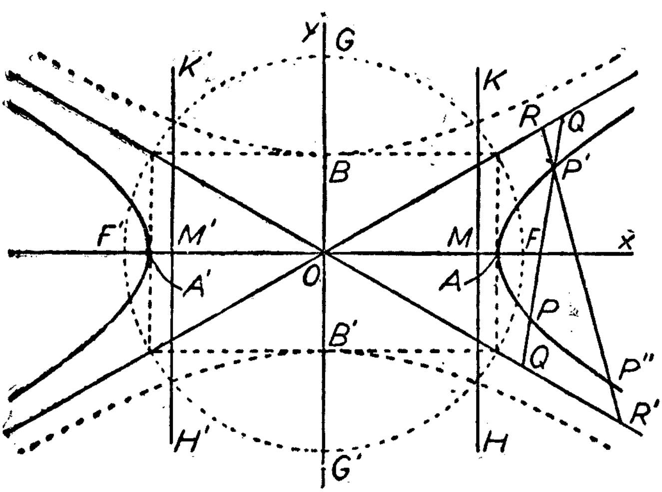
$$a^2=\frac{4e^2p^2}{(1-e^2)^2},\qquad b^2=-\frac{4e^2p^2}{1-e^2},\tag{11}$$

仿前例將原點移至 $\left(\frac{2p}{1-e^2},\ O\right)$，此方程式變爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\tag{12}$$

此爲雙曲線之標準式。雙曲線對稱於二軸及原點。其 x- 截距爲 a 及 $-a$，當 x 之值在此二值之間，則 y 非實數（第 48 圖）。設 HK 爲準線而 F 爲焦點，則 $OM=\frac{2p}{e^2-1}=\frac{a}{e}$. 因 A 爲曲線上之一點，

$$\frac{AF}{AM}=e=\frac{a}{OM},$$



第 48 圖

用合比定理，得

$$\frac{AF+a}{AM+OM}=\frac{OF}{a}=e$$

但因$\dfrac{b^2}{a^2}=e^2-1$，得

$$e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}\quad 即\quad e=\frac{c}{a} \tag{13}$$

式內 $c=OF$ 而 $2c$ 爲長方形之對角線，其長度及高度爲 $2a$ 及 $2b$。直線 AA' 謂之雙曲線之貫軸 (transverse axis) BB' 則謂之配軸 (conjugate axis)。

在方程式(8)內，設以 $x^2=c^2=a^2+b^2$，則 $y=\pm\dfrac{b^2}{a}$，示經過 F 或 F' 之雙縱坐標即雙曲線之正焦弦等於$\dfrac{2b^2}{a}$。

方程式(12)可書爲

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{x}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1, \tag{12'}$$

依第 31 節之原理，則長方形之對角線 $bx-ay=0$ 及 $bx+ay=0$ 爲雙曲線之二漸近線，而雙曲線即與此二線距離之積爲常數之點之軌跡也。

$$\frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

由上式，則已知其二漸近線及一點 P，即可定[illegible]曲線上其他各點之位，經 P 點繪一直線與漸近線交於 Q 及 Q' 二點取 P'，令 $Q'P'=QP$，則 P' 爲雙曲線上之另一點，蓋由幾何關係即知 P' 與 P 至二漸近線距離之積相同也。（第 48 圖）同樣，過 P' 點作直線各交二漸近線於 R 及 R' 取 P''，令 $R'P''=RP'$，則 P'' 亦此雙曲線上之一點。

在方程式(2)內，令 e 小於 1，卽得雙曲線之極方程式，其極在右焦點。設分母式內之負號改爲正號，則極爲左焦點 F'。與橢圓方程式(10)對應，以中心爲極之雙曲線之極方程式爲

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta}. \tag{14}$$

雙曲線最適宜之參數方程式爲

$$x=a\ \sec t,\quad y=b\ \tan t; \tag{15}$$

或

$$x=a\ \cosh\ t,\quad y=b\ \sinh t \tag{16}$$

在任一對方程式內消去 t 卽得方程式(12)。

方程式

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \tag{17}$$

與(12)比較，卽知其所代表者爲一雙曲線，如第 48 圖虛線所成之曲線，其漸近線與(12)相同，但其焦點 G 及 G' 則在 y- 軸上。(12)及(17)所代表之二曲線互爲配雙曲線。

設(17)或(12)內之 $a=b$，則第 48 圖之長方形變爲正方形，二漸近線相交成直角，則雙曲線謂之直交雙曲線。在此情況下，如轉動坐標軸經$\frac{\pi}{4}$之角度，使其與二漸近線相合，則方程式變爲

$$xy=\frac{a^2}{2}. \tag{18}$$

至下列方程式

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=\pm 1 \tag{19}$$

$$(x-h)(y-k)=\pm\frac{a^2}{2} \tag{20}$$

則代表兩對配雙曲線，而以$(h,\ k)$爲中心者也。

習題三十

1. 書適合下列條件之圓方程式:

(a) 中心在(2,5)經過(5,1)。

(b) 經過(1,5)及(−3,6),而中心在直線 $3x-2y=6$ 上。

(c) 經過(2,−1),(−5,2),(3,3)三點。

2. 書下列拋物線之方程式:

(a) 頂點在(2,4)焦點在(3,4)。

(b) 經過(0,1),(2,3),(5,−1)三點且有鉛直軸。

(c) 頂點在原點,而直線 $x=3$ 為其準線。

3. 軌跡上各點至$(c,0)$及$(-c,0)$距離之和等於 $2a$,示此軌跡為二點為焦點之橢圓,而其截距則在$(a,0)$及$(-a,0)$。

4. 書橢圓之方程式,其焦點在(2,4)及(8,4),並經過(5,0)。

5. 書以 $3x\pm4y=0$ 為漸近線且適合下列條件之雙曲線方程式:

(a) 焦點在(0,10)。

(b) 焦點在(5,0)。

(c) 經過(7,2)。

6. 改第 3 題之『和』為『差』,『橢圓』為『雙曲線』解之。

7. 書方程式

$$y^2=12x+6y+15$$

為(4″)式,且求此拋物線之頂點,焦點,及準線。

8. 書下列各式為本節之標準式,各曲線之中心,焦點,及漸近線,並舉各曲線之名稱。

(a) $x^2+y^2+6x-8y=0.$

(b) $x^2-4y^2+2x+16y-11=0.$

(c) $x^2+4x-6y+22=0.$

(d) $16x^2-96x+9y^2+18y+9=0.$

9. 有直交雙曲線以 x- 軸為其漸近線之一, 此曲線經 (2,8) 及

$(5,4)$，求他一漸近線。

10. 橢圓之中心在$(3,8)$，一焦點在$(3,2)$，其偏心率爲 $\frac{3}{4}$. 書其方程式並求其正焦弦之長度。

11. 下式爲何種圓錐曲線，其中心在何處？

$$\rho=\frac{16}{3+4\cos\theta}.$$

12. 討論由下式而得之軌跡：

$$x=2+5\cos\phi,\ y=-3+3\sin\phi.$$

13. 書雙曲線 $x^2-9y^2=36$ 之參數方程式。

第三十四節　二次方程式

上節所論之圓錐曲線之直角坐標方程式皆爲 x 與 y 之二次方程式。本節論在何種條件下則二次方程式代表何種圓錐曲線，並演繹解析之方法以決定任何二次方程式究代表何種軌跡。

任一拋物線，如坐標軸選擇得宜，可書爲

$$y^2=4px, \tag{1}$$

同樣，任一橢圓可書爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2}$$

任何雙曲線可書爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{3}$$

任一圓亦可以(2)代表之，但須 $a=b=r$.

二次方程式之通式爲

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{4}$$

式中六常數可爲任何實數或零，但 A, B, C 三者不可皆爲零。因此式可以任一常數乘之，故實際僅有五獨立參數，而此五參數可視爲五

常數與第六常數之比，恆以不等於零之某常數爲第六常數。

設(4)所代表者爲圓，拋物線，橢圓或雙曲線，則(4)必可由(1)(2)或(3)變易坐標推出。移動不改變各二次項，而轉動則改變各二次項爲其他二次項。故(4)如係由(1)所變易，則

$$Ax^2+Bxy+Cy^2$$

必爲一完全平方式，故(4)如爲拋物線，則必 $B^2-4AC=O$. 設(4)係由(2)所變易，則各二次項必爲平方數之和，故(4)如爲橢圓，則 $B^2-4AC<O$. 如(4)爲雙曲線則必須能分解各二次項爲二實數平直因式，故必 $B^2-4AC>O$。

如是祇須一驗(4)之各二次項，即可知其爲(1)(2)(3)中之何種曲線。茲將求(4)式曲線確切特性之方法分論如下：

1. $B^2-4AC=O$. 設 $B=O$, 則或 $A=O$, 或 $C=O$, 於是(4)可化爲第 33 節內之(4″)或(4‴)，由是可知其爲何種曲線。設 B 非零，則可轉動坐標軸以消去 xy 項，再照前進行。但在某種條件下此方程式所代者或爲二直線，此二直線或平行，或疊合或爲虛直線。茲舉例以明之。令此式於轉動後消去 xy 項而成

$$y^2+Dx+Ey+F=0$$

則可書

$$y^2+Ey+\frac{E^2}{4}=-D\left(x-\frac{E^2-4F}{4D}\right)$$

則此式爲第 33 節內之(4″)。但設 $D=0$, 則

$$y=-\frac{E}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{E^2-4F},$$

其所代表者爲二水平線，或分離，或疊合，或爲虛直線視 E^2-4F 之或正，或零，或負而定。設以 x^2 代 y^2, 則照此得第 33 節內之(4‴)，即二鉛直線

檢驗方程式時每不須將其化爲標準式，例如

$$9x^2+12xy+4y^2+30x-32y+25-0,$$

可書爲

$$(3x+2y)^2+D(2x-3y)+E(3x+2y)+F=0,$$

而求 D, E 及 F 使此式與原式一致。求得 $D=12$, $E=2$, $F=25$, 但以 $3x+2y$ 爲新 y, 而 $2x-3y$ 爲新 x. 得

$$(3x+2y)^2+(3x+2y)+1=-12(2x-3y)-24$$

卽

$$(3x+2y+1)^2=-12(2x-3y+2).$$

因知此爲一拋物線，且以

$$3x+2y+1=0 \text{ 及 } 2x-3y+2=0$$

二線爲新坐標軸，卽可化之爲標準式。令

$$3x+2y+1=\sqrt{13}\ y',\quad 2x-3y+2=\sqrt{13}\ x'$$

則此式卽變易爲

$$y'^2=-\frac{12}{\sqrt{13}}\ x'$$

有時求 D, E, 及 F 時，發現 $D=o$, 則方程式代表者爲直線其特性如前述，視 E 及 F 而定。

2. $B^2-4AC<O$. 設 $B=o$, 則 A 與 C 必同號。設 $A=c$, 則軌跡爲一圓，立可化成標準式、例如，

$$x^2+y^2-6x+4y-F=0$$

可書爲

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=F+13$$

卽

$$(x-3)^2+(y+2)^2=F+13$$

示其爲一圓，其半徑爲 $\sqrt{F+13}$, 中心在 $(3,-2)$。此圓或爲實圓，或爲點圓，或爲虛圓，視 $F+13$ 之或正或零或負而定。設 A 與 C 不等，如

$$4x^2+9y^2+8x-36y-F=0,$$

可書爲

$$4(x^2+2x+1)+9(y^2-4y+4)=F+40.$$

此為一橢圓，或實或表一點或虛則視 $F+40$ 之為正，零，或負而定。設 $F=-4$，則可書為

$$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1,$$

此軌跡為橢圓，中心在$(-1,2)$，長短半軸為 3 及 2。

設 B 非零，可轉動坐標軸以得無 xy 項之新方程式，但先宜移動坐標軸，以消去式內之一次項，而成

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=K,$$

式內 A，B，及 C 不變，但 K 為一新常數。此方程式所代表者為實橢圓或點橢圓或虛橢圓視 K 為正或零或負而定。設此式表實軌跡，則轉動坐標軸經角度 α，卽可化成標準式，α 角須適合 $\tan 2\alpha=\dfrac{B}{A-C}$。

3. $B^2-4AC>O$. 設 $B=0$，則 A 與 C 必異號。茲以下式為例，

$$4x^2-9y^2+8x-36y-F=0,$$

書之為

$$4(x^2+2x+1)-9(y^2+4y+4)=F-32.$$

設 $F=32$，則所代表者為二相交直線

$$2(x+1)=\pm 3(y+2).$$

設 F 不等於 32，則上列二直線為雙曲線之漸近線，橫軸之為水平或鉛直則視 $F-32$ 之為正或為負而定。設 $F=-4$，則

$$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=-1,$$

此為一雙曲線，中心在$(-1,-2)$，長短半軸為 3 及 2，焦點在$(-1, -2\pm\sqrt{13})$.

設 B 非零,則可轉動軸以消去 xy 項,再照前演算。但照下述觀察法以繪曲線之略圖每較便利而有用。式內二次項可分解因式,茲以

$$(4x+5y)(2x-7y)+8x+29y-24=0$$

爲例。令

$$(4x+5y+p)(2x-7y+q)=c$$

定 p, q, 及 c, 使此式與原式一致。如是則, $p=-2$, $q=3$, $c=18$, 故其漸近線爲

$$4x+5y-2=0,\ 2x-7y+3=0,$$

自此二線至曲線上任一點間距離之積爲

$$\frac{4x+5y-2}{\sqrt{41}}\cdot\frac{2x-7y+3}{\sqrt{41}}=\frac{18}{\sqrt{41}\ \sqrt{53}}.$$

設用此法而得 $c=0$, 則此軌跡爲二直線所組成。

習 題 三 十 一

1. 化下列各式爲標準式,並求各標準參數之值:

(a) $x^2+y^2-8y-9=0$,

(b) $x^2+6x-8y-7=0$,

(c) $x^2-4y^2-24y+24=0$,

(d) $4x^2+y^2+8x-2y-31=0$.

2. 示下列各式皆代表二直線:

(a) $16x^2+8xy+y^2+12x+3y+2=0$,

(b) $x^2-xy-2y^2-x-4y-2=0$.

3. 示下列各式皆爲虛軌跡:

(a) $x^2+y^2-4x+8y+26=0$,

(b) $x^2-xy+y^2+3x-3y+5=0$,

(c) $x^2-2xy+y^2+x-y+1=0$.

4. 變易坐標軸,化下列各式爲標準式,並用新舊坐標繪其曲線:

(a) $x^2-2xy+y^2+2x-y-1=0$,

(b) $5x^2+2xy+5y^2-12x-12y=0$.

5. 決定下列軌跡之性質:

(a) $y^2-xy-5x+5y=0$,

(b) $x^2-10xy+y^2+x+y+1=0$,

(c) $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$,

(d) $9x^2-24xy+16y^2-18x-101y+19=0$.

第三十五節 數種曲線族及直線族

二次方程式之通式代表一有五參數之曲線族，但選擇坐標軸即須決定三個參數，即新原點之二坐標及轉動之角度，故祇解兩個參數與圓錐曲線之本體的特性有關。此二參數影響此曲線之形狀及大小。

拋物線及圓之偏心率分別為一及零，故形狀係固定的，故僅一參數以定此項曲線之唯一變動特性即其大小。拋物線之參數為其正焦弦，而圓之參數則其半徑。

橢圓及雙曲線有二變動特性，即形狀及大小，須以二參數定之，在通式內為 e 及 p，在簡單標準式內為 a 及 b. 下式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{1}$$

代表一族共焦點(confocal)圓錐曲線，c 為固定常數而 a 則視為此族之參數，當 a 大於 c 則為橢圓，a 小於 c 則為雙曲線，但焦點皆在(c,o)及$(-c,o)$。

設下二式

$$f_1(x,y)=0,\quad f_2(x,y)=0,$$

代表圓錐曲線，則

$$mf_1(x,y)+nf_2(x,y)=0 \tag{2}$$

代表一經過上二曲線公點之另一圓錐曲線，不論 m 及 n 之值如何

選擇。因各項之因數皆可除，故僅 m 與 n 之比爲有意義。故此爲一有一參數之圓錐曲線族，如已知原有之二曲線，僅須一個其他條件，卽可完全固定(2)式。因爲二次方程式，故二原式共有四公點，但其是否有限值或實數值則不一定。有一值得注意之特例，卽二原式所代表者爲二圓。在此狀況下，四公點有二點在無限大，其他二點或爲實數值或爲虛數值。令此二圓爲

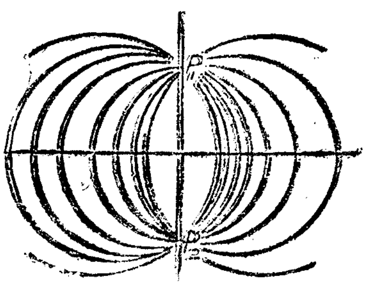
$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0,$$

則(2)變爲

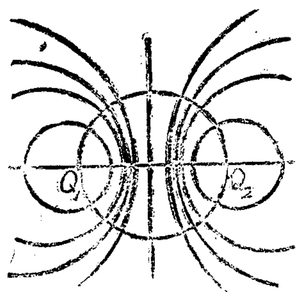
$$m(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1)+n(x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2)=0,$$

所代表者爲經二圓公點之所有之圓，但當 $m=-n$，則變爲二直線，一在無很遠，一經二圓之二公點，恆爲實直線。

第 49 圖代表公點爲有限值及實數值之情形，第 50 圖則公點爲虛數值。二圖內之鉛直線爲，當 $m=-n$ 時，此軌跡之有限值部份。此線謂之此二定圓之根軸 (radical axis)，設交點有實數值，又謂之



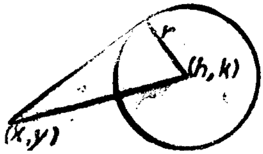
第 49 圖



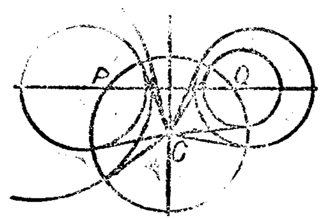
第 50 圖

公弦 (common chord)。二圖之每一圖內，任取二圓皆可作爲所設之圓，據以爲定此圓族之用。第 50 圖內經 Q_1 及 Q_2 之圓並不屬於此族，但與此族所有之圓正交（垂直相交）。設以第 50 圖內一族之圓加於第 49 圖一族之圓之上而使 Q_1 及 Q_2 與 P_1 及 P_2 相合，則二族

之圓於正交於每一交點，故二者謂之正交族 (orthogonal systems)，此項正交性如研究根軸之另一特性更易表現。設 (x,y) 爲平面上之任一點，另有一圓，中心在 (h,k) 半徑爲 r，則自此點至此圓之切線長度爲（第 51 圖）



第 51 圖



第 52 圖

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2},$$

同樣，

$$\sqrt{(x-h_1)^2+(y-k_1)^2-r_1^2}$$

爲此點至另一圓之切線長度，其中心在 (h_1,k_1) 半徑爲 r_1。設 (x,y) 表至二圓可作等切線之點之軌跡，則以等號連上列二式，卽得此軌跡之方程式，此軌跡卽二圓之根軸也。由此演繹可得上述之正交關係。設自某族圓之根軸上 C 點畫若干切線至此族之各圓，則各切點皆在另一族之一圓上，其中心皆在 C，其半徑則等於公切線之長度（第 52 圖）。後一圓族之各圓須經過 P 及 Q 二公點自屬顯而易見。

x 及 y 之平直方程式及二次方程式定 x 及 y 之值二組，卽二式所表之直線與曲線二交點之坐標也。設二交點相合，稱直線切此曲線。例，試以 $y=mx+n$ 與雙曲線

$$x^2+xy-2x+3=0$$

相交。消去 y，得

$$(1+m)x^2+(n-2)x+3=0.$$

設此直線爲切線，則 x 之二值必相合，故

$$(n-2)^2=12(1+m),$$

$$n=2\pm2\sqrt{3(1+m)}.$$

方程式

$$y=mx+2\pm2\sqrt{3(1+m)}$$

代表雙曲線之兩切線，其斜度爲 m。此斜度爲泛定常數，但欲得實切線，必 $1+m$ 爲正數。凡直線上任何其他與切線條件一致者，皆可用以定 m 之值。例如欲求經(2,3)之切線，可以 $x=2$ 及 $y=3$ 代入切線方程式而解 m，得 $m=2\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$，直線經 (2,3) 而有此斜度者即所求之切線，即

$$y-3=\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\left(x-2\right) \text{ 及 } y-3=\left(2-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\left(x-2\right).$$

凡在切點與切線垂直之直線稱爲曲線之法線 (normal)。已知有泛定斜度 m 之切線方程式爲

$$y=mx+f(m),$$

式中 $f(m)$ 爲 y- 截距之值，其值可做上例決定 n 值之法決定之，且可以 m 表切點之坐標，設 $[f_1(m),\ f_2(m)]$ 表切點之坐標則在此點之法線爲經此點而斜度爲 $-\frac{1}{m}$ 之直線。方程式

$$y-f_2(m)=-\frac{1}{m}[x-f_1(m)]$$

此

爲無論 m 爲何值時之法線。上式之 m 宜以 $-\frac{1}{m}$ 代之，如是則法線之方程式可以其本身之斜度 m' 表之。凡法線能適合之其他任何條件皆可用以定其斜度，如上例定切線斜度之方法相同。

例如橢圓之標準式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

卽

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0.$$

在此式與 $y=mx+n$ 之間消去 y，得

$$(m^2a^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0.$$

由此得

$$x=-\frac{a^2mn+a\sqrt{a^2m^2n^2-(m^2a^2+b^2)(n^2-b^2)}}{m^2a^2+b^2}.$$

如根式為零則此直線切此橢圓，欲其為零，必

$$n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

故此線如與橢圓相切，必具下式之形狀：

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

此線與橢圓之切點在

$$x=\mp\frac{a^2m^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\quad y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},$$

而經此點之法線為

$$y\mp\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^3}}=-\frac{1}{m}\left[x\pm\frac{a^2m^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right]$$

卽

$$y=-\frac{1}{m}x\pm\frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},$$

以法線之斜度 $m'=-\frac{1}{m}$ 代入上式，則法線之方程式為

$$y=m'x\pm\frac{m'(a^2-b^2)}{\sqrt{a^2+b^2m'^2}}.$$

下表為各標準曲線之切線方程式及法線方程式。學者可自行證明之。

曲　線	切　線	法　線
$y^2=4px$,	$y=mx+\frac{p}{m}$,	$y=mx-2pm-pm^3$;
$x^2=4py$,	$y=mx-pm^2$,	$y=mx+2p+\frac{p}{m^2}$;
$x^2+y^2=r^2$,	$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$,	$y=mx$;
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$,	$y=mx\pm\frac{m(a^2-b^2)}{\sqrt{a^2+m^2b^2}}$;
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$,	$y=mx\pm\frac{m(a^2+b^2)}{\sqrt{a^2-m^2b^2}}$;
$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$,	$y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$,	$y=mx\mp\frac{m(b^2+a^2)}{\sqrt{m^2b^2-a^2}}$;
$xy=c$,	$y=mx\pm2\sqrt{-cm}$,	$y=mx\pm\left(\frac{1-m^2}{n}\right)\sqrt{mc}$.

所應注意者卽上表內法線方程式之 m 爲法線之斜度，而非切線之斜度。副標準式之切線及法線方程式可據此立卽書出。例如橢圓之副標準式爲

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$$

令 $x=x'-h$, $y=y'-k$ 代入上表橢圓之切線及法線方程式內卽得。

上列方程式均含有 m，故各代表一族直線，m 爲其族之參數，各族之任一直線皆爲關係曲線之切線或法線。設欲選族內之一員使其適合第二條件，則此第二條件必須能排成一方程式以爲求 m 值之用。已知切點或法線交點，而欲求其方程式，則上表至爲有用，當 x 及 y 已有定值時方程式內卽僅含 m 爲未知數，m 之次數表示解之個數 例如，拋物線之切線爲一 m 之二次方程式，表示過一點可作二切線，其法線爲 m 之三次方程式則示過一點有三法線，其中至少有一

實數值。

習題三十二

1. 書拋物線 $y^2=8x-4$ 之切線方程式，其斜度爲 4。書與所求切線垂直之法線方程式。

2. 求 $(x-2)^2+y^2=25$ 圓之切線方程式，此線並經$(-4,2)$。

3. 求 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 及 $x^2+y^2+2x-10y$ 二圓之根軸。自根軸上一點（其 $x=8$）至此二圓之切線各長若干？

4. 有二次曲線經 $x^2+3xy=2$ 及 $y^2+4x^2=5$ 之交點，並經$(2,8)$點，求其方程式。

5. 求經上題二曲線公點之拋物線方程式。

6. 有三圓之方程式如下

$$x^2+y^2=25,\quad x^2+y^2-4x+2y=4,\quad x^2+y^2+16x+48=0,$$

凡自一點至此三圓有等長之切線，謂之三圓之根心(radical centre)。求三圓根心之坐標。

7. 求經$(5,-1)$點之橢圓 $9x^2+4y^2=36$ 之切線方程式。

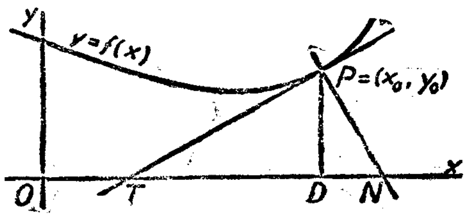
8. 書出以$(0,4)$及$(0,-4)$爲焦點之共焦點圓錐曲線方程式。予參數以二值，一使其爲橢圓，一使其爲雙曲線。求此二曲線之交點，並證在此點一曲線之切線卽他曲線之法線。

9. 自準線上任一點至拋物線之二切線互相垂直，試證明之。

第八章　導微函數之數種應用

第三十六節　曲線之切線及法線

1. 直角坐標　設以圖形代表 $y=f(x)$，則在 x 爲某值時之 $\frac{dy}{dx}$ 或 $f'(x)$ 之值與曲線上對應於此 x 值之點之切線互有關係，導微函數之值可定切線之方向，由切線之方向亦可定導微函數之值。（參看第 8 節）。若 x 與 y 用同一比例尺量度，（如在解析幾何內）則導微函數之值卽等於切線之斜度。



第 53 圖

第 53 圖之曲線爲 $y=f(x)$ 在 $P(x_0, y_0)$ 點附近之一段。於 $x=x_0$ 之導微函數 $f'(x_0)$ 等於 $\frac{DP}{TD}$，卽 DTP 角之正切，亦卽切線 TP 之斜度。

經 (x_0, y_0) 點之切線斜度既爲 $f'(x_0)$，依第 31 節之點斜度方程式，此切線之方程式爲

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0), \tag{1}$$

法線 NP 於 P 點與切線垂直，其方程式爲

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \tag{2}$$

(x_0, y_0) 點之導微函數可用下列不同記號表示之：

$$f'(x_0),\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0,y_0)},\left[\frac{dy}{dx}\right]_0,\frac{dy_0}{dx_0}.$$

設方程式係以 $y=f(x)$ 式之顯函數表示,可適用第一記號,若 x 與 y 之關係以隱函數表示則以後三種記號爲宜,以其能表示爲 x_0 及 y_0 二者之函數也。如此則切線及法線以具有下列形式最爲適用:

$$y-y_0=\frac{dy_0}{dx_0}(x-x_0) \tag{3}$$

$$y-y_0=-\frac{dx_0}{dy_0}(x-x_0) \tag{4}$$

應用上二方程式時,應知導微函數之值必定於 $x=x_0$ 及 $y=y_0$,且必 x_0 及 y_0 皆能適合曲線之方程式,上二直線始各爲此曲線之切線及法線。

設以參數方程式表 x 與 y 之關係,如

$$x=f_1(t),y=f_2(t),$$

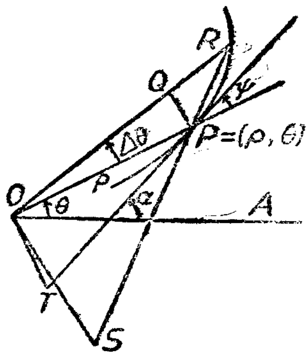
則,設 $t=t_0$ 時 $x=x_0,y=y_0$,此曲線之切線及法線爲

$$y-f_2(t_0)=\frac{f_2'(t_0)}{f_1'(t_0)}[x-f_1(t_0)], \tag{5}$$

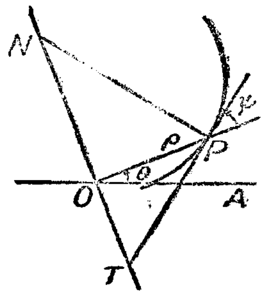
$$y-f_2(t_0)=-\frac{f_1'(t_0)}{f_2'(t_0)}[x-f_1(t_0)]. \tag{6}$$

已知 $y_0=DP$, 及斜度 $\frac{dy_0}{dx_0}=\frac{DP}{TD}$ 二者之值,則切線長度 PT, 法線長度 NP, 切線影 TD, 及法線影 DN 四者皆可由圖算得。

2. 極坐標 ρ 與 θ 間之關係,可以含有此二變數之方程式表之,如 $f(\rho,\theta)=0$,且可定一 P 點之軌跡,其坐標爲 (ρ,θ). 曲線在 P 點之方向(第 54 圖)卽切線 TP 之方向,如知 α 角或其函數,卽可求得。因 $\alpha=\theta+\psi$, 故祇須定 ψ 之正切卽可, ψ 爲 P 點之切線與向徑 ρ 所成之角。欲求 $\tan\psi$, 另取 R 點, 其坐標爲 $\rho+\Delta\rho$ 及



第 54 圖



第 55 圖

$\theta+\Delta\rho$,PR 爲割線，PQ 爲弧線，以 O 爲中心，ρ 爲半徑，而割 OR 於 Q。令 OS 與 PQ 弦平行而於 S 割此割線，因 $\rho\Delta\theta=$弧 PQ 而 $\Delta\rho=QR$，故

$$\rho\frac{\Delta\theta}{\Delta\rho}=\frac{\text{弧}PQ}{QR}=\frac{\text{弧}PQ}{\text{弦}PQ}\cdot\frac{\text{弦}PQ}{QR}=\frac{\text{弧}PQ}{\text{弦}PQ}\cdot\frac{OS}{OR}.$$

當 $\Delta\rho$ 及 $\Delta\theta$ 趨於零，三角形 ORS 趨於三角形 OPT，以 TOP 係一直角。在第 11 節內已知弧與弦之比趨於一，故

$$\rho\frac{d\theta}{d\rho}=\frac{OT}{OP}=\tan\psi \tag{7}$$

切線之斜度爲

$$\tan\alpha=\tan(\theta+\psi)=\frac{\tan\theta+\tan\psi}{1-\tan\theta\tan\psi},$$

故

$$\tan\alpha=\frac{\tan\theta+\rho\frac{d\theta}{d\rho}}{1-\rho\tan\theta\frac{d\theta}{d\rho}}. \tag{8}$$

上列結果如變換直角坐標系亦可得到。設以 OA 爲 x- 軸，而 y- 軸則於 O 點垂直於 OA，故 P 之直角坐標爲

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta.$$

則

$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\rho}}{\dfrac{dx}{d\rho}}=\frac{\sin\theta+\rho\cos\theta\dfrac{d\theta}{d\rho}}{\cos\theta-\rho\sin\theta\dfrac{d\theta}{d\rho}},$$

以 $\cos\theta$ 除分子分母卽得 (8)。

第 55 圖示四量及其標準符號，直線 TN 係與向徑 OP 垂直。由各三角形之相似性，則極切線長度 PT，極切線影 OT'，極法線影 ON，及極法線長度 NP，四者皆可以 ρ 及 $\tan\psi$ 表之。

3. 兩曲線之交角 設兩曲線於 P 點相交，則此二曲線在此公點之切線所成之角 ϕ 謂之此二曲線之交角 (angle of intersection)。設此二切線與 x- 軸所成之角爲 α_1 及 α_2，而與畫至公點之向徑所成之角爲 ψ_1 及 ψ_2，則 $\phi=\alpha_1-\alpha_2=\psi_1-\psi_2$. 設曲線係用直角坐標之顯函數，隱函數或參數方程式表示，則宜用

$$\tan\phi=\tan(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2},$$

式中 $\tan\alpha_1$ 爲 P 點一曲線之 $\frac{dy}{dx}$ 値，而 $\tan\alpha_2$ 則 P 點他一曲線之 $\frac{dy}{dx}$ 値，皆由原二式計算而得。設曲線用極坐標之方程式表出，則可求 $\tan\psi_1$ 及 $\tan\psi_2$ 之値，再由是而計算 $\tan\phi$。

習題三十三

1. 求下列各曲線在所示各點之切線及法線之方程式。並各求其切線，法線，切線影，法線影四者之長度。

(a) $y=x^2+3x-2$，於 $x=1$；

(b) $y=\sin x$，於 $x=\frac{\pi}{[illegible]}$；

(c) $y^2+9x^2=25$，於 $(-1,4)$；

(d) $x^2=e^y$，於 $(1,0)$；

(e) $x^2+xy-2y=5$ 於 $(1,-4)$；

(f) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\sin \pi t, \end{cases}$ 於 $t=\frac{1}{2}$；

(g) $\begin{cases} x=1-2t \\ y=t^2-4t \end{cases}$ 於 $t=1$；

(h) $x=4t^2, y=t^3$ 於 $t=-2$

2. 求下列曲線在所示各點之極切線長度，極法線長度，極切線影，及極法線影。

(a) $\rho=a\sec^2\frac{\theta}{2}$，於 $\theta=\frac{\pi}{2}$；（拋物線）；

(b) $\rho=a\sin\theta$，於 $\theta=\frac{\pi}{3}$；（圓）；

(c) $\rho^2=a^2\cos 2\theta$，於$\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6}\right)$。（雙紐線 lemniscate）

3. 示拋物線 $y^2=4px$ 上各點之法線影皆爲 $2p$，並示任一點之切線影皆爲原點所等分。由此二事，證拋物線之焦點與切點及切線與法線與 x- 軸之交點等距。

4. 設 (x_1, y_1)及(x_2, y_2) 爲 $x^2+y^2=r^2$ 圓上之二點，示 $x_1x+y_1y=r^2$ 及 $x_2x+y_2y=r^2$ 爲在此二點之切線方程式。設此二切線於(x_0, y_0)相交，示 $x_0x+y_0y=r^2$ 線於 (x_1y_1) 及 (x_2, y_2) 割此圓。以 $r=5, x_1=3, y_1=4, x_2=4, y_2=-3$，繪圖以明之。

5. 示雙曲線 $x^2-y^2=5$ 與橢圓$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ 以直角相交。

6. 示螺線(spiral)$\rho=a\theta$ 與螺線 $\rho=\frac{a}{\theta}$ 以直角相交，並示前螺線之極法線影有定長而後螺線之極切線影有定長。

7. 以 $s.v.$ 及 a 分代動體之距離，速度及加速度。用下列關係

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v\frac{dv}{ds},$$

以示，設已知 v 爲 s 之函數，則 s 爲任何値時，此函數圖形之法線影等於 s 爲是値時之加速度。

8. 設物體運動時 $v^2=2as$，示加速度恆等於 a，先用微分法直接求之，再用第 7 題及第 3 題之結果證之。

9. 求下列二曲線之交角：

$$y=e^x, y=e^{2x}.$$

10. 求橢圓 $x=a\cos\phi$, $y=b\sin\phi$ 於 $\phi=\phi_0$ 點之切線及法線方程式。

11. 示橢圓上任一點之法線等分自此點至二焦點間二直線所成之角度。

12. 求圍於二坐標軸及雙曲線之切線下之面積。示此面積與切點之位置無關。

13. 求雙曲線 $x=a\sec t, y=b\tan t$ 於 $t=t_0$ 點之切線影及法線影。

14. 設由準線上一點畫二切線至一拋物線，示接連二切點之直線必經過焦點。

第三十七節 導微函數圖形之應用

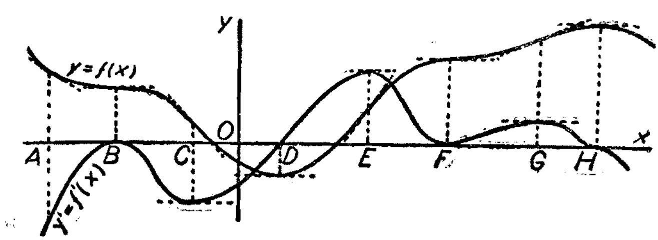
1. 曲線之繪製 第 3 節，第 4 節及第七章內皆論及各式函數圖形之繪法，如應用導微函數及其曲線，則原設函數曲線之繪製更爲便易。

設函數 $y=f(x)$ 及其導微函數 $y'=f'(x)$ 各以曲線代表之。因任一 x 値之 y' 卽原曲線之切線斜度，故，設 $y'=0$ 於 $x=x_0$，則原曲線於 $x=x_0$ 有一水平切線；設 y' 於 x_0 爲正數，y 於 x_0 爲一遞增函數，卽當 x 自 x_0 增加，則曲線亦漸上升；設 y' 於 x_0 爲負數，y 於 x_0 爲一遞減函數。再，設 y' 於 x_0 漸增，則 y 曲線之切線斜

度亦漸增，故 y 曲線於 x_0 向上凹；同樣，設 y' 於 x_0 漸減，則 y 曲線於 x_0 向下凹。設當 x 自左趨於 x_0 時，y' 漸增，但當 x 離 x_0 而右趨時 y' 漸減，則 $y=f(x)$ 之曲線在 x_0 之左係向上凹，在 x_0 之右係向下凹。凡曲線變動其凹向(concavity)之點，如自上凹變為下凹，或自下凹變為上凹，謂之彎點(point of inflexion)。

$y'=f'(x)$	$y=f(x$
1. 零，	水平切線
2. 正，	漸增
3. 負，	漸減
4. 漸增，	向上凹
5. 漸減，	向下凹
6. 斜度易號，	彎點
7. 與 x- 軸相切向上凹，	水平切線，上升彎點。
8. 與 x- 軸相切向下凹，	水平切線，下降彎點。
9. 與 x- 軸相切，上升彎點，	水平切線，向上凹。
10. 與 x- 軸相切，下降彎點，	水平切線，向下凹。

上列對照表將函數與其導微函數之關係，函數圖形與其導微函數圖形之關係簡單表明。第 7 項及第 9 項之"上升"字樣表示曲線在彎點左右皆係上升，即此曲線在此點穿過其水平切線，原在切線下



第 56 圖

者變為反在其上。第 8 項及第 10 項內之"下降"字樣之解釋與此類似。第 7 項係自第 1，2，及 6 項演繹而得；第 8 項得自第 1，3，及

6 項;第 9 項得自第 1 及第 4 項;第 10 項得自第 1 及第 5 項。

第 56 圖內,第 1 項之情形為 B,D,F,H;第 2 項為 E,與 G,或 D 與 F 間或 F 與 H 間之任一點;第 3 項為 A 與 C,或 $f'(x)$ 在 x- 軸下時之任一點;第 4 項為 A 與 D,或 A 與 B 間,C 與 E 間,F 與 G 間之任一點;第 5 項為 B 與 C 間,E 與 F 間,G 與 H 間及 H 右之任一點。第 6 項為 B,C,E,F 及 G;第 7 項為 F;第 8 項為 B;第 10 項為 H。圖內無第 9 項之情形,但仿照第 10 項,即知其情形如何。

$y'=f'(x)$ 與 $y''=f''(x)$,或 $y''=f''(x)$與 $y'''=f'''(x)$ 亦有與上述相同之關係,故可利用高級導微函數以定原設函數之性質。例如對應於 y 之彎點,如 B,C,E,F,或 G,y' 必有一水平切線,故 y''必有一零點。但 y'' 雖為零,y' 雖有水平切線,y 仍可無彎點,如 H。於 B,C,E,F 及 G,y'' 曲線必穿過 Ox 軸,而於 H 則與 x-軸相切。

設欲繪下列函數之曲線

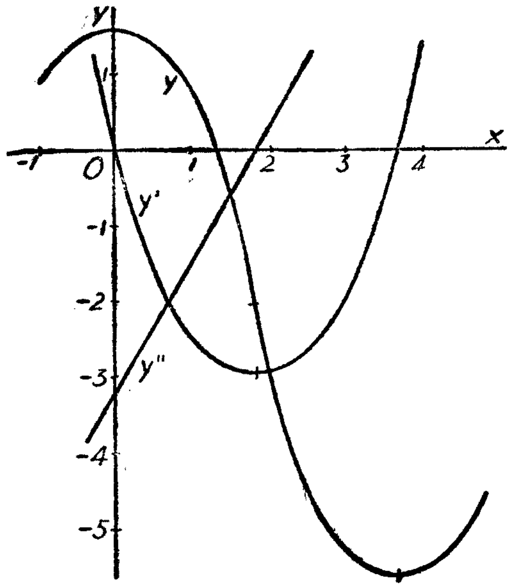
$$y=0.29x^3-1.6x^2+1.56.$$

先求一級及二級導微函數,得

$$y'=0.87x^2-3.2x,$$

$$y''=1.74x-3.2。$$

y'' 為一直線(第 57 圖),有正斜度,於 $x=1.84$ 割 x- 軸。x 為此值時,y' 必有一水平切線,且依上表第 1 及第 4 項,其各點必向上凹。且當 $x=1.84$ 時,$y'=-2.96$,當 $x=0$ 或 $x=3.68$ 時,$y'=0$,故 y' 於 0 漸減,於 3.68 漸增。繪 y',知 y 於 $x=0$ 及 $x=3.68$ 皆有水平切線,前者為向下凹,後者為向上凹,而彎點則在 $x=1.84$。任用代入法或綜合除法求 $x=0$,$x=1.84$,及 $x=3.68$ 之 y 值,即知此三重要點之確切地位,而作此曲線之略圖。



第 57 圖

2. 方程式之根 欲解方程式 $f(x)=0$,可研究方程式 $f'(x)=0$,而得知 $f(x)=0$ 之根之地位。下為一重要定理。

羅爾氏定理(Rolle's Theorem).設 $f(x)$ 在間隔 a 至 b 上係連續的,而 $f(a)=f(b)=0$,且 $f(x)=0$ 在 a 與 b 間無實根,又,$f'(x)$ 自 a 至 b 係連續的,則方程式 $f'(x)=0$ 在 a 至 b 間有奇數個實根。

此定理之眞實性可一察 $f(x)$ 之圖形得之。此函數於 a 及 b 為零,而非在 a 至 b 之間為零,故,此函數設自 a 漸增(漸減),則向 b 時必漸減(漸增),故其斜度 $f'(x)$之變號次數必奇,因 $f'(x)$ 係連續的,故必經過零。此定理對於代數函數及超越函數同樣適用。設函數為多項式,則可以謹嚴之代數證法證明之。

令 $f(x)=(x-a)^r(x-b)^s\phi(x)$,其中 r 及 s 皆為正整數,則

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{r}{x-a}+\frac{s}{x-b}+\frac{\phi'(x)}{\phi(x)},$$

以 $(x-a)(x-b)$ 乘之,得

$$\frac{(x-a)(x-b)f'(x)}{f(x)}=r(x-b)+s(x-a)+\frac{(x-a)(x-b)\phi'(x)}{\phi(x)}.$$

此式右端當 $x=a$ 時爲 $r(a-b)$,當 $x=b$ 則爲 $s(b-a)$,二者異號,故式之值在 a 與 b 間必有奇數次經過零點。至此式左端各因式內僅 $f'(x)$ 可於 a 至 b 間爲零,故 $f'(x)$ 在此間隔上爲零之次數爲奇。

設一方程式 $f(x)$ 含有一個或若干個泛定常數或參數,則其根必視此項參數之值而定。參數爲某值時可使二個或若干個根合一,則謂之雙重根或多重根 (double or multiple roots)。因 $f'(x)=0$ 在 $f(x)=0$ 每二個實數根之間有一實數根,可見如 $f(x)=0$ 有二個或多個根,例如 m 個根,於 $x=a$ 處相合,則 $f'(x)=0$ 必有 $m-1$ 個根在 $x=a$ 處相合。換言之,$f(x)=0$ 之 m 重根即 $f'(x)=0$ 之 $m-1$ 重根。如式爲多項式則亦可以代數法證之。

令 $f(x)=(x-a)^m\phi(x)$,則

$$f'(x)=(x-a)^{m-1}[m\phi(x)+(x-a)\phi'(x)]$$

由是立得上述之結論。

故知 $f(x)=0$ 之雙重根爲此式及 $f'(x)=0$ 之公根,故二式間如消去 x 即可得方程式有重根時各係數或參數間應有之關係。以 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之公因式等於零即可定重根之值。$f(x)=0$ 及 $f'(x)=0$ 之消去式謂之 $f(x)=0$ 之判別式。(discriminant)

例如欲求下列三次方程式之判別式:

$$x^3+px^2+qx+r=0,$$

求對於 x 之導微函數,得

$$3x^2+2px+q=0,$$

此二式之薛氏消去式爲

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q & r & 0 \\ 0 & 1 & p & q & r \\ 0 & 0 & 3 & 2p & q \\ 0 & 3 & 2p & q & 0 \\ 3 & 2p & q & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

由此得，

$$p^2q^2-4p^3r+18pqr-4q^3-27r^2=0.$$

如各係數能適合上列關係式，則所設三次方程式可有雙重根。

再舉一例，有一族直線 $x\cos a+y\sin a=5$，式中 a 爲此族之參數。此族各直線與原點之距離一律爲 5，族中直線經過已知之一點 (x,y) 者，a 通常可有二值。但在某數點，則 a 之二值相合。欲求此等重合點，可書原式及其對於 a 之導微函數，

$$x\cos a+y\sin a=5,$$

$$-x\sin a+y\cos a=0,$$

二式自乘後相加，得

$$x^2+y^2=25.$$

此爲一圓方程式，即使 a 二值重合之點之軌跡，此族所有直線皆與此圓相切。

習 題 三 十 四

1. 繪 $12y=x^4-6x^2$ 之曲線，用導微函數以定各彎點之位置。

2. 利用導微函數繪曲線 $y=x-x\log x$。

3. 已知 $x^3-6x^2+9x-3=0$ 有三實數根，試用導微函數示一根大於 3，一根在 1 與 3 間，一根小於 1。

4. 用導微函數以示二次方程式 $x^2+px+q=0$ 之判別式爲 p^2-4q。

5. k 應爲何值則方程式 $\cos\theta+\sin\theta=k$ 有 θ 之雙重解。

6. 直線 $y=mx-2pm-pm^3$，無論 m 爲何值，皆爲拋物線 $y^2=4px$ 之法線。通常有三法線經過一點(x,y)。示其中二法線重合之點之軌跡爲半三次拋物線 $27py^2=4(x-2p)^3$。

7. 示 $f'(x)=0$ 有若干虛根則 $f(x)=0$ 亦必有同數之虛根。因之，示方程式

$$x^4-4x^3+15x^2+3x-15=0$$

有二虛根。

8. 示不論 x 爲何值，曲線 $y=1-x^{\frac{2}{3}}$ 皆向上凹。當 $x=1$ 及$x=-1$，時 $y=0$，示在此二值之間 y 爲正數。何以在 1 與 -1 之間無等於零之導微函數，羅氏定理何以不適用於此處。

第三十八節 極大與極小

設於 x 之任一值 x_0，函數 $y=f(x)$ 之圖形有一水平切線且曲線係向下凹，則 $y_0=f(x_0)$ 較 x_0 附近之任何 y 值爲大此 y_0 謂之 y 之極大(maximum)值。同樣，設此圖形於 x_0 有一水平切線且曲線向上凹，則 y_0 較 x_0 附近之任何 y 值爲小謂之函數之極小(minimum)值。參照第 37 節對照表之第 1,3 及 5 項，卽知於任何 x 值，如 $y'=0$，而 y'' 爲負，則 y 必爲極大；依第 1,2 及 4 項，卽知於任何 x 值如 $y'=0$ 而 y'' 爲正，則 y 必爲極小。但於某種情形下雖 y' 及 y'' 均爲零，亦可有極大 y 或極小 y，如對照表第 9 及 10 項所示者。

極大極小之定義既如上所述，由此可知欲定極大極小存在之必要與充分條件，只須研究函數 $y=f(x)$ 之各級導微函數卽可。如 y 爲極大或極小，y' 必爲零。設於 x_0，x_1，x_2 等值 $y'=0$，此等 x 值概謂之臨界值(critical values)，玆一察 x 爲臨界值時，其對應之 y 值究爲極大乎，極小乎，抑既非極大亦非極小乎。設於 x_0，有 $y=y_0$，$y'=0$，$y''=0,\cdots\cdots y^{(n-1)}=0$，$y^{(n)}=y_0^{(n)}$，卽計算 $x=x_0$ 處之各級導微函數至一非零之 n 級導微函數爲止，n 或爲 2，或爲大於 2 之任何整數。設 $y_0^{(n)}$ 爲正，則 $y^{(n-1)}$ 爲零而漸增，$y^{(n-2)}$ 向上凹，則

照第 37 節對照表之第 7 及 9 項，知 $y^{(n-3)}$，$y^{(n-4)}$，等回溯至 y' 皆更迭於"彎點"及"向上凹"二者之間，且皆與 x- 軸相切。故，設 n 為偶，y_0 為極小；設 n 為奇，則 y 有一"上升彎點"。設 $y_0^{(n)}$ 為負，依表內第 8 及 10 項，知 n 為偶則 y_0 為極大，而 n 為奇則 y 有一"下降彎點"。

總而言之設於 $x=x_0$，$y=y_0$，$y'=0$，$y^{(n)}=y_0^{(n)}$，而 y' 與 $y^{(n)}$ 間之各級導微函數皆為零，則

(a) 設 $y_0^{(n)}>0$ 而 n 為偶，則 y_0 為 y 之極小；

(b) 設 $y_0^{(n)}>0$ 而 n 為奇，則 y 有上升彎點；

(c) 設 $y_0^{(n)}<0$ 而 n 為偶，則 y_0 為 y 之極大；

(d) 設 $y_0^{(n)}<0$ 而 n 為奇，則 y 有下降彎點。

例如第 37 節內之函數

$$y=0.29\ x^3-1.6\ x^2+1.56$$

其臨界值為 $x=0$，及 $x=3.68$，前者相當於 y 之極大，後者相當於 y 之極小。

再如，函數

$$y=x^2\ \sin\ x.$$

其導微函數為

$$y'=2x\ \sin x+x^2\ \cos\ x,$$

當 $x=o$ 或 $x=-2\ \tan\ x$ 時，$y'=0$，於臨界點 $x=0$，

$$y_0''=[(2-x^2)\sin\ x+4x\ \cos\ x]_{x=o}=0,$$

$$y_0'''=[-6x\ \sin\ x+(6-x^2)\cos\ x]_{x=o}=6.$$

此處 $n=3$ 為奇，$y^{(n)}=6$ 為正，故 y 於 $x=0$ 有一上升彎點。

其他臨界值為 $x=-2\ \tan\ x$ 之解，其個數無窮。用第 23 節之近似解法，得最小之正臨界值在 $x=2.29$. 於此 x 值，$\tan x=-1.14$，$\cos\ x=-.659$，$\sin\ x=.752$. 欲知於 $x=2.29$ 之 y'' 為正抑為負，可以 $x=-2\ \tan\ x$ 代入，得

$$y''=(2-4\ \tan^2\ x)\ \sin\ x+8\ \tan x\cos x=\sin x\ (10-4\tan^2 x).$$

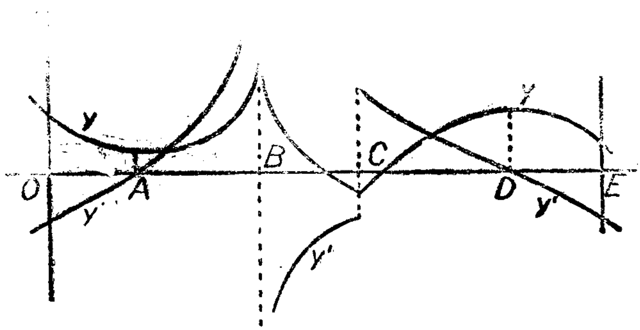
於 $x=2.29$ 因 $\sin x$ 爲正，$4\tan^2 x$ 小於 10，y'' 亦爲正，故

$$y_{x=2.29}=.752(2.29)^2=3.94$$

爲 y 之極小值。

現論實際上遇見之各種極大極小問題之解法。

1. 一變數之顯函數　設任一量 y 爲一自變數 x 之已知函數，而欲知 x 爲何值則 y 爲最大或最小值。應注意之 x 之變程或無限制或有高低界。設此函數係連續的，則其最大值或屬於前論之極大或爲變程高低界之一。函數之極端值如第 58 圖內之 B 或 C 出現於



第 58 圖

間斷時殊不常遇到。於 B，y' 之曲線有一鉛直漸近線，向左則 y' 爲正，向右則 y' 爲負，表示 y 曲線於此有一銳點謂之會切點(cusp)。於 C，y' 曲線有一有限間斷點表示 y- 曲線之驟然轉向。欲於自 O 至 E 之變程內求 y 之最大值，必將 O，B，D 三處之 y 值加以比較。於 D 之極大值可照前述方法定之。同樣，欲求 y 之最小值，可定 A 點之極小值再以之與 C 及 E 之 y 值比較。

第 3 節內論及之函數

$$M=3000\ x-500\ x^2$$

於 $x=3$ 有一極大值，蓋於此其導微函數

$$\frac{dM}{dx}=3000-1000$$

爲零也。此點之 $M=4,500$. M 之極小值則在 x- 變程之高界卽 $x=8$ 處，此點之 $M=-8000$，此題內，因負彎曲矩與等值二正彎曲矩對於此梁能發生同樣之應力 (stress)，此二極端值應從其絕對值上，加以比較。

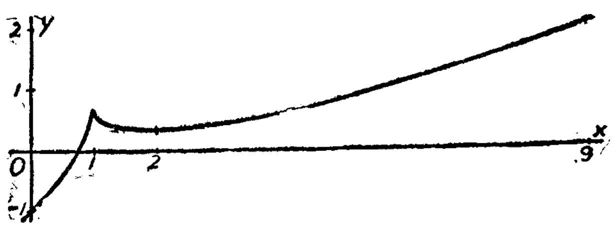
再，由方程式 $y=\frac{2}{3}x-(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 所確定之函數 y,x 之變程爲自 0 至 9。其導微函數

$$y'=\frac{2}{3}-\frac{2}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}},$$

當 $x=2$ 時爲 0。其二級導微函數

$$y''=\frac{2}{9(x-1)^{\frac{4}{3}}},$$

當 $x=2$ 時爲正，故 y 在此點之值，$y=\frac{1}{3}$，爲一極小值，斜度 y' 在 $x=1$ 有一無限間斷點，且由正變爲負，但於此點 y 本身等於有限值 $\frac{2}{3}$，故在此處有一會切點，於 $x=0$ 處，$y=-1$，於 $x=9$ 處，$y=2$。故在上述變程內，此函數之最小值爲在 $x=0$ 處之 -1，其最大值爲在 $x=9$ 處之 2。由此項數據卽可製得其圖形如第 59 圖所示。



第 59 圖

2. 隱函數　設 y 為以 $f(x,y)=0$ 式確定之函數，則其各級導微函數，y'，y'' 等可用第 14 節之方法求得。欲求其臨界點，可就 $f(x,y)=0$ 及 $y'=0$ 二式內解得 x 及 y，此等值可代入 y'' 式內，遇必要時可代入更高級之導微函數內。由各級導微函數之值可直接應用前述極大及極小之鑒別法。

設有一組適合原式 $f(x,y)=0$ 之 x,y 值使 y' 於此處有間斷點，則此點之 y 值應與其他最大或最小值比較。此項例外本書不作詳盡之討論，惟在第十二章內有較此處稍詳之敍述。

設將 $y=\frac{2}{3}x-(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 有理化，得

$$(2x-3y)^3-27(x-1)^2=0。$$

此為確定隱函數之方程式，求導微函數，得

$$y'=\frac{2(2x-3y)^2-18(x-1)}{3(2x-3y)^2}$$

$$y''=\frac{2}{(2x-3y)^2}$$

y' 為零必其分子為零而分母非零，故以

$$(2x-3y)^2-9(x-1)=0,$$

併原式解得 $x-1=1$，$2x-3y=3$，由是得 $x=2$ 及 $y=\frac{1}{3}$。於此點，y'' 為正，故 $\frac{1}{3}$ 為 y 之極小值。

設 $2x-3y=0$，則原式內之 $x-1$ 必等於 0，故 $x=1$，而 $y=\frac{2}{3}$。在此點 y' 之分母亦為零，此時雖不能定 y' 之值以作討論之根據，但可記錄此點之 x 及 y 值以與其他臨界值比較。於 x 變程之高低界，$x=0$ 及 $x=3$，y 值可由代替法於原式內求得，以之與 $\frac{1}{3}$ 及 $\frac{2}{3}$ 比較即知其孰為最大孰為最小值。

3. 有助變數之函數　欲表示 y 爲 x 之函數每因引用助變數而使一問題化爲簡單。例如欲用二助變數，u 與 v，則必須有三方程式，以便消去 u 與 v 而表 y 爲 x 之函數。以

$$f_1(x,y,u,v)=0,$$
$$f_2(x,y,u,v)=0,$$
$$f_3(x,y,u,v)=0。$$

爲此三方程式，設欲求 x 爲何值，則 y 有極大或極小值，爲求 x 之臨界值起見，可就此三式求其對於 x 之導微數而另得三方程式，連前共有包含 $x,y,u,v,\frac{dy}{dx},\ \frac{du}{dx},\ \frac{dv}{dx}$ 之方程式六個。令 $\frac{dy}{dx}=0$，再消去 u 及 v 及其導微函數，而解 x 及 y。在此項情形之下，所得之 x 臨界值及相當之 y 值，及此問題之其他已知條件通常已足用以決定極大極小之位置，故無須或不宜再求高級導微函數或 $\frac{dy}{dx}$ 內之間斷性。

例：有一圓柱形盛器，兩端封閉，其容積爲定值，現欲求此圓柱之尺寸比例俾圓柱之面爲最小。以 v 表容積，s 表面積，h 表高度，r 表半徑，則

$$v=\pi r^2h,\quad s=2\pi rh+2\pi r^2.$$

式內 v 爲已知常數，s 可視爲 r 之函數而以 h 爲助變數。求二式對 r 之導微數，得

$$o=2\pi rh+\pi r^2\frac{dh}{dr},$$

$$\frac{ds}{dr}=2\pi h+2\pi r\frac{dh}{dr}+4\pi r。$$

令 $\frac{ds}{dr}=0$，得四方程式以消去 h 及 $\frac{dh}{dr}$，再解 r 及 s。但自後二式將 $\frac{dh}{dr}$ 消去，卽得所求之尺寸比例，卽 $h=2r$，以此値代入原有二

式內，卽可以 v 表 r, h 及 s 之値。此問題可不再用極小値之試驗，因其實際條件已明示所得答案之正確矣。

習 題 三 十 五

1. 製曲線，$y=2x^3+9x^2-60x+12$ 並定有水平切線之點及彎點。

2. 雙垂曲線(catenary)之方程式為

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

示此曲線於 $x=0$ 處與直線 $y=1$ 相切，且此曲線完全在此直線之上。

3. 繪曲線 $y=ax+b\cos x$ 並定其有水平切線之點及彎點。(a)當 $a=1$，$b=2$ 時；(b)當 $a=2$，$b=1$ 時；(c)當 $a=1$，$b=1$ 時。

4. 有長 L 之梁，其擔負分配均勻，支於二端，其離一端 x 單位處之偏轉 y 為

$$y=k(x^4-2Lx^3+L^3x),$$

式內 k 為常數，求最大之偏轉，以 k 及 L 表之，並示此梁之各點皆向上凹。

5. 設上題之梁之兩端不用支柱而改為嵌入牆內，則均勻擔負所生之偏轉為

$$y=k(x^4-2Lx^3+L^2x^2)。$$

求最大之偏轉，以 k 表之。並求彎點之地位。

6. 平原上有一軍隊在一南北向道路之西 8 哩。此隊欲以最短之時間達到路上某點，此點在現在軍隊所處地位之南 6 哩。設在平原上進行之速度為每小時 4 哩，在路上則為 5 哩，問軍隊應向路上之何點進行？

7. 有一兩端封閉之圓柱形盛器，設其面積為常數，問用如何之尺寸比例可得最大之容積。

8. 長方形之梁，其強度與闊度乘深度平方之積成正比例。設有一圓木，問如何削法可使其成一最強之長方形梁?

9. 示函數 ax^n，於 $x=0$，設 n 為偶，則為一彎點，n 為奇則為極大或極小點；再，設 a 為負則為極大，a 為正則為極小。

10. 彈道之方程式為

$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v_0{}^2\cos^2\theta},$$

式內 θ 為仰角，v_0 為初速度。設 v_0 為常數問 θ 為何值，則斜面 $y=\frac{\;}{4}x$ 上之射程最遠?

第三十九節　密切圓曲率

1. 密切圓　已知曲線之方程式，則由第 36 節，知求此曲線在任何點切線方程式之法。此直線即經過曲線上某已知點之直線，其斜度 $\frac{dy}{dx}$ 則與原曲線在該點之 $\frac{dy}{dx}$ 相同。此二條件，（所設點與該點之 $\frac{dy}{dx}$）足以定此直線，蓋二獨立之條件即可定一直線也。

圓之一般方程式含有三個泛定常數，故需要三個獨立條件以定一圓。設已知一曲線之方程式，欲求通過此曲線上某已知點 (x_0, y_0) 之圓之方程式，並設此圓在 (x_0, y_0) 處之 $\frac{dy}{dx}$，及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 與該曲線在該點之 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 完全相同（第 60 圖）。

設以

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

為此圓之方程式，a, b 及 R 可由此三規定條件確定之常數。設此圓經 $(x_0 y_0)$，則

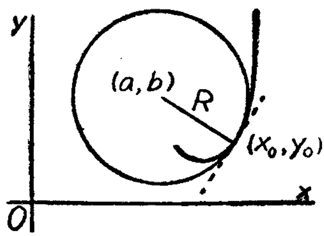
$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R$$

設於(x_0, y_0)之一級導微函數 $\dfrac{dy_0}{dx_0}$ 及二級導微函數 $\dfrac{d^2y_0}{dx_0^2}$ 須合乎上述條件之值，則

$$2(x_0-a)+2(y_0-b)\frac{dy_0}{dx_0}=0,$$

$$2+2\left(\frac{dy_0}{dx_0}\right)^2+2(y_0-b)\frac{d^2y_0}{dx_0^2}=0.$$

由上三式解 a, b 及 R，得



第 60 圖

$$a=x_0-\frac{\dfrac{dy_0}{dx_0}\left[1+\left(\dfrac{dy_0}{dx_0}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y_0}{dx_0^2}}, \tag{1}$$

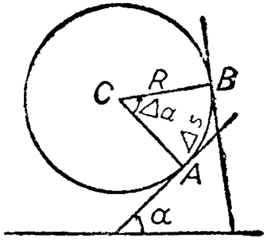
$$b=y_0+\frac{1+\left(\dfrac{dy_0}{dx_0}\right)^2}{\dfrac{d^2y_0}{dx_0^2}}, \tag{2}$$

$$R=\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy_0}{dx_0}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y_0}{dx_0^2}}. \tag{3}$$

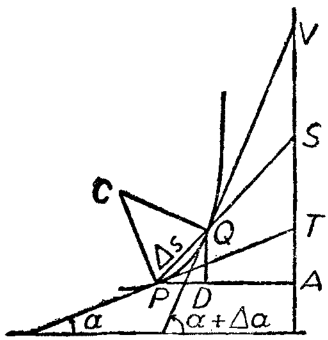
凡有上列 a, b 及 R, 值之圓卽曲線於 (x_0, y_0) 點之密切圓 (osculation circle), 至三式內之一級二級導微函數皆自原曲線方程式求得者。

2. 曲率直角坐標　吾人由直線上得到斜度或"增率" (rate of increase) 之概念，以直線之增率爲常數故也。同樣，因圓之"轉率" (rate of turning)爲常數，故亦由圓而得曲率 (curvature) 之概念。於第 61 圖內，自 A 至 B, 沿弧線之距離爲 Δs, 所經過之角度，自 a 至 $a+\Delta a$, 爲 Δa。故轉率爲$\frac{\Delta a}{\Delta s}$，因 $R\Delta a=\Delta s$, 故圓之曲率爲

$$曲率=\frac{\Delta \alpha}{\Delta s}=\frac{1}{R}。$$



第 61 圖



第 62 圖

凡屬非圓之曲線，其曲率不爲常數，視點之地位而異。設以一含 x,y 之方程式表一曲線，而求其在曲線上某點 $P(x,y)$ 之曲率。(第 62 圖) 令 P 與 Q 之切線與 x- 軸所成之角度分別爲 a 及 $a+\Delta a$, 則自 P 至 Q 所經之角度爲 Δa。第 40 節內將論及定曲線長度之方法，現暫假設任何曲線之弦 PQ 所對之弧長 Δs, 且設當 Q 趨於 P, 則 Δs 與弦 PQ 之比趨於一，與圓之情形相同(參看第 11 節)。相當於曲線長度之增量 Δs, x 之增量 $PD=\Delta x$, 而

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{PD}{PQ},\quad \frac{PQ}{\Delta s}=\frac{PA}{PS}\cdot\frac{PQ}{\Delta s}$$

當 Δs 趨於零,割線 PS 趨於切線 PT, 故

$$\frac{dx}{ds}=\frac{PA}{PT}=\cos\ a \tag{4}$$

Δa 與 Δs 之比,在圓雖爲常數,如爲其他曲線則視 Δs 之值而定,於 Δs 趨於零時,此比數之極限卽此曲線於 P 點之曲率。故

$$曲率=\frac{da}{ds}=\frac{da}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}=\frac{da}{dx}\cos\ a,$$

因 $\tan\ a=\frac{dy}{dx}$, 故

$$\frac{da}{dx}=\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\cos\ a=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 a}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}。$$

故任何曲線之

$$曲率=\frac{da}{ds}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \tag{5}$$

式內之一級二級導微函數卽在欲求曲率之點所計算而得者。

以 k 代曲率,以曲率與密切圓之半徑比較,則

$$k=\frac{1}{R}$$

式內 R 爲密切圓之半徑，故曲線上任一點之曲率卽該點密切圓之曲率，故密切圓亦謂之曲率圓 (circle of curvature)，其半徑稱爲曲率半徑，其中心爲曲率中心。

3. 曲率，極坐標　極坐標內

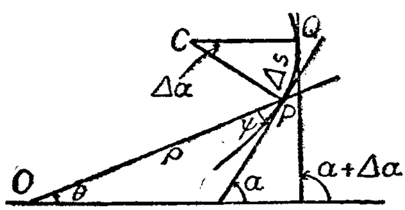
$$\alpha=\theta+\psi$$

式內 θ 爲向角，ψ 爲切線與向徑所成之角，與第 36 節所示者相同。故在第 63 圖內，得

$$K=\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\theta}{ds}+\frac{d\psi}{ds}=\left(\frac{d\theta}{d\rho}+\frac{d\psi}{d\rho}\right)\frac{d\rho}{ds}.$$

$\frac{\Delta\rho}{\Delta s}$ 之極限值 $\frac{d\rho}{ds}$ 爲 $\cos\psi$，蓋參看第 54 圖

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta s}=\frac{QR}{\Delta s}=\frac{QR}{PR}\cdot\frac{PR}{\Delta s}=\frac{OR}{SR}\cdot\frac{PR}{\Delta s}.$$



第 63 圖

一察左端二因式，則見 $\frac{PR}{\Delta s}$ 趨於 1，而 $\frac{OR}{SR}$ 趨於 $\frac{OP}{TP}$ 卽 $\cos\psi$ 也。又因 $\tan\psi=\rho\frac{d\theta}{d\rho}$，故

$$\frac{d\psi}{d\rho}=\frac{\frac{d\theta}{d\rho}+\rho\frac{d^2\theta}{d\rho^2}}{1+\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2},$$

而

$$\cos\psi=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\psi}}=\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}},$$

故

$$K=\frac{2\frac{d\theta}{d\rho}+\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2+\rho\frac{d^2\theta}{d\rho^2}}{\left[1+\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{6}$$

設極方程式宜以 θ 爲自變數則可以下列恆等式

$$\frac{d\theta}{d\rho}=\frac{1}{\frac{d\rho}{d\theta}},\quad \frac{d^2\theta}{d\rho^2}=\frac{-\frac{d^2\rho}{d\theta^2}}{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$$

代入(6),經簡化後,得

$$K=\frac{\rho^2+2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}}{\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{7}$$

習 題 三 十 六

1. 示拋物線 $y^2=4px$ 上任一點(x,y)之密切圓半徑等於

$$\frac{(y^2+4p^2)^{\frac{3}{2}}}{4p^2}.$$

拋物線某點之 $x=p$,求其密切圓中心。並求頂點之密切圓中心。(注意頂點之 y' 及 y'' 爲無很大,故在定此特點之值之前必先將 a, b 及 R 之式簡化。)

2. 示雙曲線 $xy=k$ 任一點上之曲率半徑爲 $\frac{d^3}{2k}$,式中 d 爲此點

至原點之距離。

3. 求對數螺線 $\rho=e^{a\theta}$ 於 $\theta=o$ 點之曲率。示此曲線在任一點之曲率半徑爲 $R=\rho\sqrt{1+a^2}$。

4. 於擺線(cycloid)

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta),$$

之任一點，示曲率半徑等於法線長度之兩倍，並示於 $\theta=0$ 及 $\theta=2\pi$，曲率半徑爲零。

5. 用恆等式 $x=\rho\cos\theta$ 及 $y=\rho\sin\theta$，導出極坐標之 k 式，卽於直角坐標之 k 式內以 $\rho,\theta,\dfrac{d\rho}{d\theta}$ 及 $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2}$ 表 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 是也。

6. 求正弦曲線 $y=\sin x$ 上任一點之曲率半徑，並示當 $y=0$ 則曲率爲零。

7. 求下列曲線之曲率，以 t 表之：

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t.$$

8. 示心形曲線(cardiod) $\rho=\dfrac{9}{8\pi}(1-\cos\theta)$ 上任一點之密切圓面積等於此點之向徑。

9. 示任何曲線上彎點之曲率爲零。

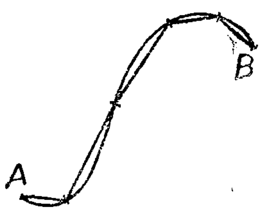
10. 求拋物線 $y^2=4px$ 於 (x_0,y_0) 點之曲率中心。示，如消去 x_0 與 y_0 則此曲率中心之軌跡爲一半三次拋物線，原拋物線所有之法線皆爲此軌跡之切線。（參看習題三十四之 6）。

第九章　積分法之應用

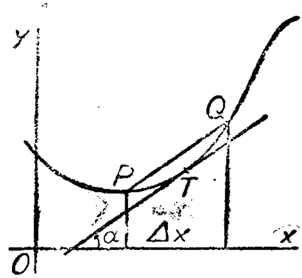
第四十節　曲線弧之長度

"曲線弧之長度"涵義若何，爲吾人亟應明瞭之事。對於某線段之長度，或兩點間之距離，皆有明確之概念，故可藉以定曲線弧長度之意義。

第 64 圖內爲一連接 A,B 二點之曲線，設在此段曲線上選若干點，俾每二鄰點間之弦，弦長等於或小於 h。此等弦長之和爲一定值，設表以 L。A 與 B 間之點數如無窮增加，則 h 之值趨於零，L 之值可趨於某一定極限 S，而此極限可與 A 與 B 間各點之選擇法無關。設無論點之選法如何，祇須 h 趨於零，L 卽有此極限值 S，則 L 之此極限卽自 A 至 B 之弧長，否則此曲線之弧長意義爲不明確。



第 64 圖



第 65 圖

欲數量 L 有一定極限之條件此處尙不能成立，卽欲將其確切的敍述亦尙不可能。現在能知在兩點之間，凡曲線係連續的，本身不相交，各點均有一定之切線，則照上述定義可使接連兩點之曲線弧有一定值足矣。設此曲線本身相交或在某數點無一定之切線，在此項特點間一部份之弧長仍可有定值，可將此諸部份相加以獲全部弧長。

設有連續曲線，每點皆有一定之切線，其方程式爲 $f(x,y)=0$。

以 S 表此曲線自(x_0,y_0)點至任一點(x,y)之弧長。欲導出以 x 及 y 表示之 S 式。令 P 與 Q（第 65 圖）爲此曲線上之二點。切線之斜度當切點自 P 移至 Q 時連續變值，有時較 PQ 之斜度爲大，有時則較小，故依第 7 節末之普遍定理，P 與 Q 間必有某點 T，其斜度與直線 PQ 者相同。設 a 爲切線於 T 與 x- 軸所成之角，而 Δx 爲 P 與 Q 之橫坐標差，則

$$PQ=sec\ a\ \Delta x=\sqrt{1+tan^2 a}\ \Delta x=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ \Delta x.$$

自 x_0 至 x 此等元素之和之極限值卽所求之弧長，故

$$s=\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx, \tag{1}$$

式內 $\frac{dy}{dx}$ 係由曲線之方程式而得，以 x 之函數表之。

由式中 x 及 y 之對稱性，(1)式可化爲

$$s=\int_{y_0}^{y}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy, \tag{2}$$

式內 $\frac{dx}{dy}$ 係由曲線之方程式而得，以 y 之函數表之。

如此曲線係以參數方程式表示，如

$$x=f_1(t),\ \ y=f_2(t),$$

則自(1)或(2)可得

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{[f'_1(x)]^2+[f'_2(x)]^2}\ dt, \tag{3}$$

當 $t=t_0$ 時，$x=x_0$，$y=y_0$。此處可注意者，設 x 及 y 表平面內某質點之地位，而 t 表時間，則 $f'_1(t)$ 及 $f'_2(t)$ 爲沿 x- 軸及 y- 軸方向之分速度，(3)之被積函數爲此質點沿路線之速率 v。積分

$$s=\int_{t_0}^{t} v\,dt \tag{3'}$$

爲自 t_0 時至 t 時沿路線所經過之距離。

設方程式係用極坐標(ρ,θ)則用下列恆等式

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$$

自(1)及(2)可導出：

$$s=\int_{\rho_0}^{\rho}\sqrt{1+\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}\,d\rho, \tag{4}$$

$$s=\int_{\theta_0}^{\theta}\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2+\rho^2}\,d\theta, \tag{5}$$

(4)之被積函數須以 ρ 之函數表之，而(5)之被積函數須以 θ 表之，皆從原曲線方程式求得。

習 題 三 十 七

1. 求拋物線 $y^2=16x$ 自頂點至(4,8)點之長度。

2. 求雙垂曲線 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ 自 $x=0$ 至(x, y)點之長度。

[答：$\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$]。

3. 求擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ 一拱(arch)之長度。（答：$8a$）。

4. 一動點於 t 時之地位爲

$$x=\frac{1}{2}t^2,\ y=\frac{2}{3}t^3,$$

示此點自靜止 $t=o$ 起，二秒內沿路線移動之距離爲$\frac{17^{\frac{3}{2}}-1}{12}$單位。

5. 求心形線 $\rho=a(1+\cos\theta)$之周界。（答：$8a$）。

6. 求螺線 $\rho=e^{a\theta}$ 自 $\rho=o$ 至 $\rho=a$ 之長度。（答：$\sqrt{a^2+1}$）。

7. 據直角及極坐標式用積分法求半徑爲 R 之圓周。

第四十一節　面積及體積

1 平面面積，直角坐標　吾人已熟知凡具

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

形之積分代表自 x_0 至 x 之曲線及 x- 軸間之面積，而此面積之微分則爲

$$dA=ydx=f(x)dx.$$

此面積亦可視爲長度爲 y 之鉛直線移動所產生，移動之方向一定而長度則變。面積之微分則可視爲沿直線長度 $f(x)$ 乘移動距離之微分 dx。此與視曲線爲由一動點所成之想象類似，曲線長度之微分即此點經過距離之微分 ds。

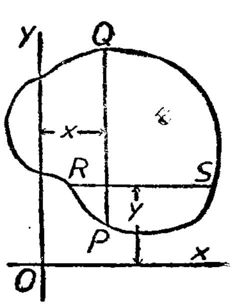
由此觀點知任何平面皆可以

$$dA=\phi(x)dx$$

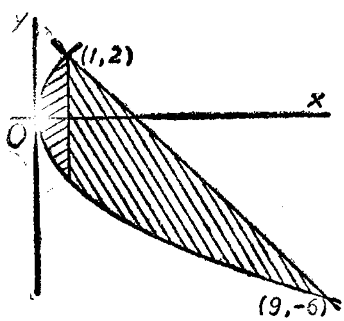
表之，式中 $\phi(x)$ 代表 x 之函數即穿過此面積而與 x- 軸垂直之距離，如第 66 圖內之 PQ。面積即

$$A=\int_{x_1}^{x_2} \phi(x)dx, \tag{1}$$

之值，x_1 與 x_2 爲此面積上 x 之極端值。



第 66 圖



第 67 圖

同樣，面表可以

$$A=\int_{y_1}^{y_2}\theta(y)\,dy, \tag{2}$$

表示，$\theta(y)$ 爲 y 之函數，卽穿過此面積而與 y- 軸垂直之距離如圖內之 RS，y_1 及 y_2 則此面積上 y 之極端值。

例：求拋物線 $y^2=4x$ 及直線 $y=-x+3$ 所包之面積。繪此曲線及直線（第 67 圖），自二方程式解交點之 x 及 y，知自 $x=0$ 至 $x=1$ 間隔內穿過面積之鉛直距離爲 $4\sqrt{x}$，自 $x=1$ 至 $x=9$ 間隔內穿過面積之距離爲 $-x+3+2\sqrt{x}$，故全面積爲

$$A=4\int_0^1\sqrt{x}\,dx+\int_1^9(-x+3+2\sqrt{x})\,dx=\frac{64}{3}。$$

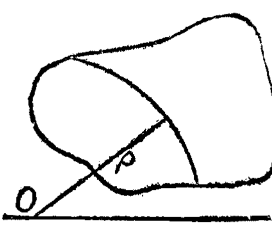
但對穿此面積之水平距離則爲 $3-y-\frac{1}{4}y^2$，故

$$A=\int_{-6}^{2}\left(3-y-\frac{1}{4}y^2\right)dy=\frac{64}{3}。$$

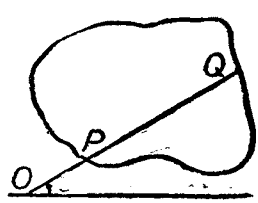
2. 平面面積，極坐標　平面面積有時可視爲一圓弧向外擴張之動作所產生，此圓弧在各地位之長度各不相同，如第 68 圖所示。設被面積界所割之弧長以正在擴張之圓半徑 ρ 之函數 $f(\rho)$ 表之，則面積之微分可以

$$dA=f(\rho)d\rho$$

表之，故面積爲



第 68 圖



第 69 圖

$$A=\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho)d\rho, \tag{3}$$

式內 ρ_1 及 ρ_2 為面積上 ρ 之極端值。

再，面積亦可視為向徑之一部份繞定點 O 旋轉所產生者，此部份在各部位之長度隨時變動，如第 69 圖所示。以 P 與 Q 為向徑割面積界之二點，則面積之微分為長度 PQ 乘 PQ 中點移動距離之微分，此微分卽

$$\frac{1}{2}(OP+OQ)d\theta,$$

故

$$dA=\frac{1}{2}(OQ-OP)(OP+OQ)d\theta=\frac{1}{2}(\overline{OQ}^2-\overline{OP}^2)d\theta,$$

設 $\frac{1}{2}(\overline{OQ}^2-\overline{OP}^2)$ 以向角 θ 之函數 $f(\theta)$ 表之，則面積為

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)d\theta。 \tag{4}$$

玆舉例以明之，設半徑 a 之圓為距中心 b 單位之直線所割（第 70 圖），求割下部份之面積。距中心 ρ 單位被此面積界所割之弧長為 $2\rho\ sec^{-1}\frac{\rho}{b}$，而 ρ 之極端值為 b 及 a。故面積為

$$A=\int_b^a 2\rho\ sec^{-1}\frac{\rho}{b}\,d\rho=a^2sec^{-1}\frac{a}{b}-b\sqrt{a^2-b^2}.$$

再，距離 OQ 及 OP 分別為 a 及 $b\sec\theta$，故積分式如用 θ 表示，則

$$A=\int_{-sec^{-1}\frac{a}{b}}^{sec^{-1}\frac{a}{b}}\frac{1}{2}(a^2-b^2\sec^2\theta)d\theta=a^2sec^{-1}\frac{a}{b}-b\sqrt{a^2-b^2},$$

3. 旋轉曲面之面積　旋轉曲面 (surface of revolution) 係由一曲線如，$y=f(x)$，繞一軸，如 Ox，旋轉所產生（第 71 圖）。此曲

面亦可視爲由半徑有變值之圓之運動所產生此圓之平面恆與 Ox 垂直，其半徑則恆等於變數 y。面積之微分即運動之圓周乘此圓循曲線移動之距離微分 ds，故此曲面之面積爲

$$A=\int_{s_1}^{s_2} 2\pi y\ ds \tag{5}$$

求積分時可任用下式之一

$$A=\int_{x_1}^{x_2} 2\pi\ f(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \tag{6}$$

$$A=\int_{y_1}^{y_2} 2\pi\ y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy \tag{7}$$

前式被積函數爲 x 之函數，後式之被積函數則爲 y 之函數。

設曲線係用極坐標而以原線爲旋轉軸，則

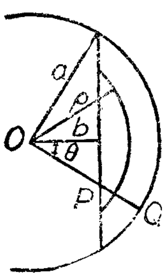
$$dA=2\pi\rho\ \sin\ \theta\ ds,$$

設 $\rho=f(\theta)$ 爲此曲線之方程式，得

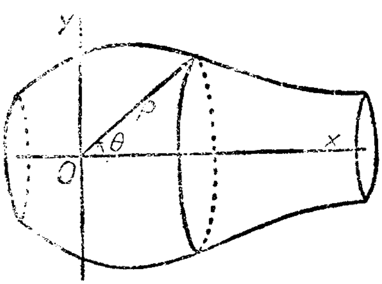
$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} 2\pi\ f(\theta)\ \sin\ \theta\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}d\theta, \tag{8}$$

設以 $\theta=f(\rho)$ 表此曲線，則宜用

$$A=\int_{\rho_1}^{\rho_2} 2\pi\rho\ \sin\left[f(\rho)\right]\sqrt{1+\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}d\rho \tag{9}$$



第 70 圖



第 71 圖

欲求半徑爲 a 之球面之面積，可視其爲圓 $x^2+y^2=a^2$ 繞 x- 軸旋轉所產生者。下二式皆可用，即

$$A=\int_{-a}^{a} 2\pi\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-a}^{a} a\,dx=4\pi a^2;$$

$$A=2\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+\frac{y^2}{a^2-y^2}}\,dy=4\pi a\int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=4\pi a^2。$$

如用極坐標則可視爲圓 $\rho=2a\cos\theta$ 繞原線旋轉。下列二式之一皆可用以求面積：

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\cdot 2a\cos\theta\sin\theta\sqrt{4a^2\cos^2\theta+4a^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=8\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta=4\pi a^2;$$

$$A=\int_0^{2a} 2\pi\rho\sqrt{1-\frac{\rho^2}{4a^2}}\sqrt{1+\frac{\rho^2}{4a^2-\rho^2}}\,d\rho$$

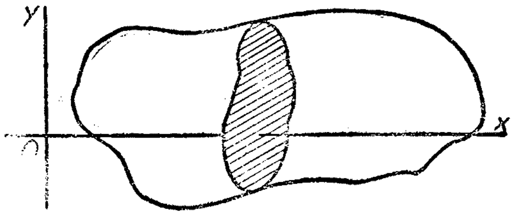
$$=2\pi\int_0^{2\pi}\rho\,d\rho=4\pi a^2。$$

以上列舉各種不同之式，不過爲說明各式之用途起見，實際解題時可擇最易得到答案者用之。

4. 體積　體積可視爲由面積變値之平面之運動所產生，此平面恆與一定直線垂直。體積之微分爲運動平面之面積乘平面循定線之移動距離之微分。設此定線爲 x- 軸，而運動平面面積（即體積之截面）係以 x 之函數 $f(x)$ 表之（第 72 圖），則體積爲

$$V=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx. \tag{10}$$

兹論一特例，設此體積爲曲線 $y=\phi(x)$ 繞 x 軸旋轉所產生之旋轉曲面所包，則運動平面之面積爲 πy^2，而體積爲



第 72 圖

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2}[\phi(x)]^2dx. \tag{11}$$

但體積亦可視爲向外擴張之球面變動部份所產生，設半徑 ρ 之球面之變動部份（即在體積內之球面）係以 ρ 之函數 $f(\rho)$ 表之，則體積可表以

$$V=\int_{\rho_1}^{\rho_2}f(\rho)d\rho. \tag{12}$$

例如，半徑爲 a 之球體積，依(11)，爲

$$V=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\frac{4}{3}\pi a^3,$$

或用(12)而以極爲中心，則

$$V=\int_0^a 4\pi\rho^2 d\rho=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

習 題 三 十 八

1. 以積分法示橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 之面積爲 πab。

2. 求拋物線 $x^2=4ay$ 與箕舌線(witch) $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ 間之面積。

答：$\left(2\pi-\dfrac{4}{3}\right)a^2$.

3. 求擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$之一拱面積，（提

示:用(1)式，但以 θ 及 $d\theta$ 表 $\phi(x)$ 及 dx 並用 θ 之高低界）。答：$3\pi a^2$。

4. 示心形線 $\rho=a(1-\cos\theta)$之全部面積爲 $\frac{3}{2}\pi a^2$。(用(4)式，注意 OP 爲零

5. 用(8)以定上題心形線繞原線旋轉所產生之曲面面積。答：$\frac{32}{5}\pi a^2$。

6. 求爲上題曲面所包之體積。(用(11)式，由恆等式 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 以 θ 及 $d\theta$ 表 y 或 $\phi(x)$ 及 dx,）答 $\frac{8}{3}\pi a^3$。

8. 長方形截面之梁，設一端固定，而於他端加以擔負，令自擔負至某截面之距離爲 x, 其最大張應力爲

$$f=\frac{6Wx}{bh^2}.$$

式內 f 爲每平方吋若干磅之應力，W 爲若干磅之重量，x 爲若干吋之距離，b 與 h 爲截面之闊度及深度（吋）。設能調整 b 與 h 之關係，使任一 x 值之應力相等，則稱梁有"均勻強度"設於 x 爲任何值時，$f=10,000$ 而 $W=20,000$ 梁之全長爲 36 吋，依下列情形求梁之體積（立方吋）。

(a) 闊度 b 不變，皆爲 3 吋；

(b) 高度 h 不變，皆爲 3 吋；

(c) 截面形狀各處一致，皆爲 $b=\frac{3h}{16}$.

9. 有圓柱形油桶其軸爲水平的，半徑爲 15 呎，長 60 呎，油深 3 呎。欲將深度增至 13 呎，需加油若干立方呎？

10. 以曲線 $y=a\log_e bx$ 繞 $y-$ 軸旋轉以產生一立體。求 $x-$ 軸下之體積。設以線繫此立體，並設其每單位體積之重量爲 w, 示任一水平截面下之重量恆與此截面之面積成正比例，並示此重量所加於每單位面積上之平均應力爲 $\frac{1}{2}aw$。

第四十二節 矩及平均值

前已知如何表示弧，面積及體積之微分，及如何以積分法求此項微分之總值。設，在積分運算之前，以自某固定點，直線或平面至此微分元素之距離冪乘此微分元素，再作積分運算，則所得結果，謂之弧，面積或體積對此點，此直線，或此平面之矩(moment)。

設弧，面積或體積之微分係以 $f(x)dx$ 表之，則積分

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-a)^n f(x)\, dx \tag{1}$$

卽弧，面積或體積在 x_0 及 x_1 間之部份對軌跡 $x=a$ 之 n 次矩。以 y 代 x 亦可有同樣之結論。設以 $f(\rho)d\rho$ 表微分，則積分

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^n f(\rho) d\rho \tag{2}$$

為弧，面積或體積在 ρ_1 及 ρ_2 間之部份對於極之 n 次極矩(polar moment)。

應用(1)時，吾人可設想弧爲動點所產生，面積爲運動之鉛直線所產生，旋轉曲面爲平面與 $x-$ 軸垂直之圓所產生，體積爲垂直於 $x-$ 軸之平面面積所產生。在上述任一情况下，$x-a$ 表示運動元素與軌跡 $x=a$ 間之距離，而此距離對運動元素之全體係一律的。同樣，應用(2)時，可設想弧爲動點所產生，面積爲運動圓弧所產生，旋轉曲面爲一直垂於原線之圓所產生，體積爲球面之一部份所產生。但無論在何狀況下，ρ 皆指整個運動元素與極點間之距離。此項運算之變化於下例中略可窺見，且於第 44 節須再討論。

在定積分

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx$$

所示之變程中（指弧長，面積或體積之變程），x^n 之平均值以$(x^n)_m$表之，其意義由下式確定

$$(x^n)_m\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1} x^n f(x)\,dx. \tag{3}$$

同樣，ρ^n 在所示變程內之平均值可由下式確定之：

$$(\rho^n)_m\int_{\rho_0}^{\rho_1} f(\rho)\,d\rho=\int_{\rho_0}^{\rho_1} \theta^n f(\rho)d\rho. \tag{4}$$

實際應用時，$n=1$ 及 $n=2$ 之二矩，最爲重要。$n=1$ 之一次矩，以其對於一組平行力之平衡有關，有時謂之靜力矩(statical moment)，在某所設變程內 x，之平均値謂之此變程內重心之横坐標。重心之其他坐標亦倣此規定。$n=2$ 之二次矩謂之慣性矩（moment of inertia)，以其與自轉體之慣性力有關也，x^2 或 y^2 或 ρ^2 之平均値謂之對於某點，某線或某面之迴轉半徑(radius of gyration)之平方，此點此線此面即量度 x，y，或 ρ 之出發處也。

此項定義之意義及應用之方法可以例明之。

試一察拋物線 $y=x^2$ 在(1,1)及(3,9)二點間之弧。此弧長可用下二式之一表示，即

$$S=\int_1^3\sqrt{1+4x}\;dx=\int_1^9\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\;dy。$$

此弧對 $y-$ 軸之一次矩 M_y 爲

$$M_y=s\,x_m=\int_1^3 x\sqrt{1+4x^2}\;dx=\int_1^9 y^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\;dy。$$

最後二積分式可擇一應用，蓋弧線上各點皆適合 $y=x^2$ 之關係也。同樣，對 $x-$ 軸之一次矩亦有二式

$$M_x=s\,y_m=\int_1^9 y\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\;dy=\int_1^3 x^2\sqrt{1+4x^2}\;dx.$$

此弧之重心即由上兩公式求得之$(x_m,\ y_m)$點。此弧對 $y-$ 及 $x-$ 軸之二次矩或慣性矩可分別以 I_y 及 I_x 表之，其方程式如下

$$I_y=s\,(x^2)_m=\int_1^3 x^2\sqrt{1+4x^2}\;dx=\int_1^9 y\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\;dy,$$

$$I_x=s(y^2)_m=\int_1^9 y^2\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\ dy=\int_1^3 x^4\sqrt{1+4x^2}\ dx。$$

應注意者，此例內因 $y=x^2$，故 $M_x=I_y$，但就一般情形言，M_x 不一定等於 I_y。

試取底 a 高 b 之長方形，以底為 x- 軸，左邊為 y- 軸。其面積為

$$A=\int_0^a bdx=\int_0^b ady=ab。$$

對兩邊之一次矩為

$$M_y=Ax_m=\int_0^a bx\ dx=\frac{1}{2}\ a^2b,$$

$$M_x=Ay_m=\int_0^b ay\ dy=\frac{1}{2}\ ab^2.$$

由此得 $x_m=\frac{a}{2}$，$y_m=\frac{b}{2}$，故重心在此長方形之中心。對兩邊之慣性矩為

$$I_y=A(x^2)_m=\int_0 bx^2dx=\frac{1}{3}\,a^3b,$$

$$I_x=A(y^2)_m=\int_0^b ay^2dy=\frac{1}{3}\,ab^3。$$

由此得 $(x^2)_m=\frac{a^2}{3}$，$(y^2)_m=\frac{b^2}{3}$。

例三，曲線 $y=sin\ x$ 之下，自 $x=0$ 至 $x=\pi$ 之面積為

$$A=\int_0^\pi sin\ x\ dx=2,$$

對 y- 軸之一次矩為

$$M_y=Ax_m=\int_0^\pi x\ sin\ x\ dx=\pi$$

示 $x_m=\frac{\pi}{2}$。對 x 軸之一次矩可書爲

$$M_x=Ay_m=\int_0^1 y(\pi-2\ \sin^{-1}y)\ dy,$$

式內 $\sin^{-1}y$ 之值爲其第一象限值，但以 $\sin\ x\ dx$ 爲面積元素，較爲適宜，再以此長方形上 y 之平均值 $\frac{\sin\ x}{2}$ 乘之，得

$$M_x=Ay_m=\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{2}\ dx=\frac{\pi}{4}$$

故 $y_m=\frac{\pi}{8}$。至慣性矩則有

$$I_y=A(x^2)_m=\int_0^\pi x^2\sin\ x\ dx=\pi^2,$$

$$I_x=A(y^2)_m=\int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{3}\ dx=\frac{4}{9}$$

後積分爲以前例求得之 y^2 之平均值 $\frac{\sin^2 x}{3}$ 乘微分長方形 $\sin\ x\ dx$ 所得之結果。

例四，有半徑 r 之圓之扇形，其中心角爲 a。以極爲中心，則扇形之面積爲

$$A=\int_0^r a\rho\ d\rho=\frac{ar^2}{2},$$

其一次極矩爲

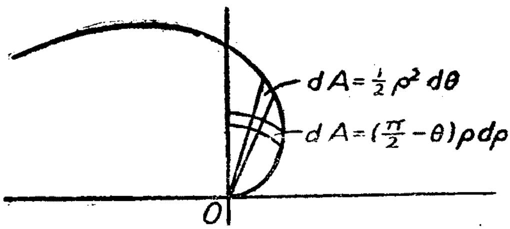
$$M_0=A\rho_m=\int_0^r a\rho^2 d\rho=\frac{ar^3}{3}。$$

示 ρ 之平均值 $\rho_m=\frac{2}{3}\ r$。此扇形之二次極矩爲

$$I_0=A(\rho^2)_m=\int_0^r a\rho^3 d\rho=\frac{ar^4}{4}。$$

示 ρ^2 之平均值為 $(\rho^2)_m=\frac{r^2}{2}$。

例五，曲線 $\rho=a\theta$ 之向徑，自 $\theta=0$ 轉動至 $\theta=\frac{\pi}{2}$，



第 73 圖

所產生之面積可以二式表之（第 73 圖）。

$$A=\int_0^{\frac{\pi a}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\rho}{a}\right)\rho\,d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\theta^2}{2}\,d\theta=\frac{a^2\pi^3}{48}。$$

一次極矩，如用 dA 之第一式，得

$$M_0=A\,\rho_m=\int_0^{\frac{a\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\rho}{a}\right)\rho^2 d\rho=\frac{a^3\pi^4}{192}。$$

示 $\rho_m=\frac{a\pi}{4}$。但如用 dA 之第二式則更適宜，因其為扇形，依前例，ρ 在此元素上之平均值為 $\frac{2}{3}a\theta$，故積分變為

$$M_0=A\,\rho_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^3\theta^3}{3}\,d\theta=\frac{a^3\pi^4}{192}。$$

此例之極慣性矩，如以面積元素為扇形，則極易求得，以 ρ^2 在此扇形元素上之平均值 $\frac{a^2\theta^2}{2}$ 乘此元素。得

$$I_0=A(\rho^2)_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^4\theta^4}{4}\,d\theta=\frac{a^4\pi^5}{640},$$

由此得

$$(\rho^2)_m=\frac{3}{40}\ a^2\pi^2.$$

習 題 三 十 九

1. 求拋物線 $y^2=8x$ 自原點至(2, 4)之弧之重心。

2. 三角形之三邊爲 3, 4, 5. 求其面積之重心。

3. 求直線 $2x+3y=30$ 在第一象限內所割之面積對 $x-$ 軸之慣性矩。

4. 求半圓弧之重心。求全圓周對其直徑之慣性矩。

5. 有面積圍於曲線 $\rho=e^\theta$, 原線,止於$\left(e^{\frac{\pi}{4}},\frac{\pi}{4}\right)$點之向徑三者之間。求其一次及二次極矩及迴轉半徑。

6. 示圓面積對中心之極慣性矩爲對直徑慣性矩之二倍。

7. 一角錐體(pyramid)之底爲長方形,其二邊爲 a 及 b, 高爲 h。求其體積之重心,及對於底平面之慣性矩。

8. 求實心球對其中心之極慣性矩。

9. 求在擺線 $x=a(\theta-\sin\ \theta)$, $y=a(1-\cos\ \theta)$ 一拱下面積之重心。

10. 有一正圓錐體,底之半徑爲 r, 高爲 h, 求曲面及體積之重心。求曲面及體積對其軸及底平面之慣性矩。

第四十三節　分佈量:質量,力

設某量係分佈一變程內(弧長,面積,體積),此量之強度可每點不同而某點強度之值可以此點坐標之函數表之,強度之單位爲每單位長,或每單位面積或每單位體積有此量若干。嚴格言之,一量在某變程內某點 P 之強度爲 ΔQ 與 ΔR 之比之極限, ΔQ 爲量 Q 之一部份屬於變程 R 中之 ΔR 部份者,且使 ΔR 趨於零以取極限

值，但 ΔR 中恆須包含 P 點之$\frac{\Delta Q}{\Delta R}$。

設此變程之微分元素係以 $f(x)dx$ 表之，並設屬於此元素之分佈量之強度可以 $\phi(x)$ 表之，則 x_1 與 x_2 間之總量爲

$$Q=\int_{x_1}^{x_2} \phi(x)f(x)dx,$$

設以變程 $R=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ 除上列積分之結果，卽 R 上之 Q 之平均強度。無論所用之微分爲何式均可得到相似之結果。

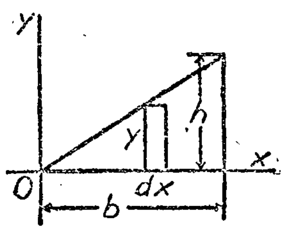
上述普遍意念之應用極爲重用，以其與各種理工科學之關係頗多。茲擇其較應用較直接者若干則，述之如次：

1. 分佈質量　設分佈質量於一變程之內，則其強度謂之密度 (density)，視變程之性質有線密度，面密度及體密度之別。設有一三角形（第 74 圖），底邊爲 b 高爲 h，而底邊在 x- 軸上。令密度爲 x 之一函數，例如 $sin\ \frac{\pi x}{b}$，則相當於面積微分元素 $dA=\frac{h}{b}x\,dx$ 之質量爲

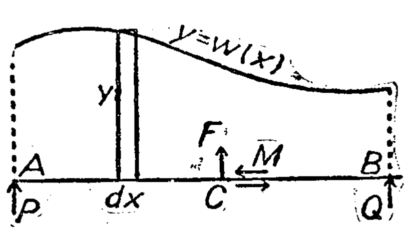
$$dm=\frac{h}{b}\ x\,sin\,\frac{\pi x}{b}\ dx,$$

此三角形所有之總質量爲

$$m=\int_0^b \frac{b}{h}\ x\,sin\ \frac{\pi x}{b}\ dx。$$



第 74 圖



第 75 圖

此處之密度爲面密度，所得之式對於厚度不同而質地均匀之三角板亦可適用，此質量對 y- 軸之一次及二次矩爲

$$M_y=\int_0^b \frac{h}{b}\ x^2 sin\frac{\pi x}{b}\ dx,$$

$$I_y=\int_0^b \frac{h}{b}\ x^3 sin\ \frac{\pi x}{b}\ dx。$$

以質量 m 除 M_x，得此質量重心之橫坐標。以 m 除 I_x 得對 y- 軸迴轉半徑之平方。如面積上之密度爲常數，則上列二積分式分別變爲以此常數乘上節之面積積分及矩積分。設欲求此質量對 x- 軸之矩，因密度爲 x 之函數，最好仍用 $dm=\frac{b}{h}\ x\,sin\ \frac{\pi x}{b}\ dx$，而由前節，知在此元素上，$y$ 之平均値爲$\frac{hx}{2b}$，y^2 之平均値爲 $\frac{h^2x^2}{3b^2}$，故

$$M_x=\frac{h}{2b}\ M_y,\quad I_x=\frac{h^2}{3b^2}\ Iy,$$

由此觀之，只須密度能以被積函數中之變數表之，不論變程之微分屬於何式，均可求得質量及此質量所生之矩。

2. 運動體上之力　設有質量 m 之物體爲一力 F 向一固定之方向運動，則此物體循此方向依下列定律加速

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F。\tag{1}$$

式內 S 爲循此方向之位移，t 爲時間，二級導微函數則爲加速度。設 F 爲 t 之函數，而 $v=\frac{ds}{dt}$，則

$$m\frac{dv}{dt}=F,$$

設當 $t=t_0$，時，$v=v_0$，當 $t=t_1$ 時 $v=v_1$，則

$$m(v_1-v_0)=\int_{t_0}^{t_1} F\ dt。\tag{2}$$

右方之積分謂之力之衝量(Impulse)，故力可視爲分佈於某時間內之衝量強度。質量乘其速度之積謂之動量(momentum)。方程式(2)卽謂物體動量之變値等於其所受之衝量。

當質量 m 運動時，力 F 隨時運動，物體在各個地位時所受 F 不同，故 F 可視爲位移 S 之函數。方程式(1)可書爲

$$m\frac{ds}{dt}\ \frac{d^2s}{dt^2}=F\ \frac{ds}{dt},$$

卽

$$m\ v\ dv=F\ ds,$$

求積分，得

$$m\left(\frac{V_1^2}{2}-\frac{V_0^2}{2}\right)=\int_{s_0}^{s_1}F\ ds。\qquad(3)$$

右方之積分謂之力之工作(work)，故力亦可視爲循運動路線分佈之工作強度。$\frac{1}{2}mv^2$ 謂之質量之動能(kinetic energy)，方程式(3)卽謂物體動能之變値等於加於物體上之工作，以 U 表工作，則

$$\frac{dU}{ds}=F$$

故

$$\frac{dU}{dt}=\frac{dU}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=Fv。$$

此爲工作率謂之功率(Power)，應注意者，力爲分佈於移動距離間之工作強度而功率則爲分佈於一段時間之工作強度。設功率 P 視爲時間之函數，則

$$U=\frac{m}{2}(V_1^2-V_0^2)=\int_{s_0}^{s_1}F\ ds=\int_{t_0}^{t_1}P\ dt。\qquad(4)$$

3. 分佈力　現可研究力量分佈於施力處之影響，茲舉數特例以說明其方法如下：

(a)加有擔負之梁 有梁 AB，長 L（第 75 圖），以 P 及 Q 二力支其兩端，此梁支撑一擔負，擔負之強度各點不同。以 A 爲原點，而沿 AB 量 x。每單位長度之擔負重量爲該點至 A 點距離 x 之函數 $w(x)$。此函數圖形之縱坐標即示擔負之強度。總擔負爲

$$P+Q=\int_0^L w(x)dx, \tag{5}$$

而此擔負對於 A 之矩爲

$$QL=\int_0^L x\ w(x)dx。 \tag{6}$$

因函數 $w(x)$ 爲已知，故上項方程式足以計算支柱力 P 與 Q 之值。

若懸想於此梁之任一點 c，有一截面分此梁爲二部份，則此二部必彼此以力相引謂之內應力(Internal stresses)。此力之鉛直分力，卽 AC 施於 CB 上者，謂之切力(shearing force)。以 F 表之，則 CB 施於 AC 之力爲 $(-F)$，因 AC 所受之鉛直力必平衡，如以 $AC=a$，則

$$F=P-\int_0^a w(x)dx \tag{7}$$

AC 上諸鉛直力之合力至多可構成一力偶，(couple) 故於 C 點必有一力偶 M 以平衡之，M 謂之彎曲矩 (bending moment)。因力偶對於任何點所取之矩皆相同，故取對於 A 點之矩，得

$$M=a\ F+\int_0^a x\ w(x)dx=a\ P-a\int_0^a w(x)dx$$
$$+\int_0^a x\ w(x)dx。 \tag{8}$$

就 (7) 與 (8) 作積分運算，可以 a 之函數（卽 c 點橫坐標函數）表 F 及 M。

(b)水壓力 由水力學，知液體施於一曲面之壓力係垂直於此曲

面。曲面上力之強度，卽每單位面積上有若干力單位，謂之壓力(pressure)。不論曲面之傾角若何液體內兩點之壓力差，恆等於液體每單位體積之重量乘此二點之高度差。每立方呎之淨水重約 62.5 磅，故在自由水面深度 h 呎下之壓力爲大氣壓加每平方呎 62.5 磅。

有一平面對於鉛直線之交角爲 ϕ，自由面下深度爲 y 處平面之水平寬度爲 x，則面積元素爲 $x \sec \phi \, dy$，而平面面積爲

$$A=\sec \phi \int_{y_1}^{y_2} x \, dy \tag{9}$$

y_1 及 y_2 爲此面積上 y 之極端值。總壓力爲

$$P=w \sec \phi \int_{y_1}^{y_2} yx \, dx \tag{10}$$

式內 w 爲液體每單位體積之重量。此總壓力對此平面與自由面交線之矩爲

$$Py_c \sec \phi=w \sec^2 \phi \int_{y_1}^{y_2} y^2 x \, dy, \tag{11}$$

蓋自此線至深度爲 y 之元素之距離爲 $y \sec \phi$ 也。y_c 稱爲壓力中心之深度(depth of the centre of pressure)，其意義卽由 (11) 式確定，設此平面係鉛直的，$\sec \phi=1$ 則 (9),(10),(11)三積分所代表者卽爲面積及此面積對自由面交線之一次矩與二次矩。

(c)應力 以第 76 圖內之面積代表梁，柱或撑之截面。設此面積與 CD 對稱，AB 經重心 O 而與 CD 垂直。此平截面分物體爲二部份，各以分佈於此截面上之力互相作用。加於物體一部份之外力必爲他部份之外力所平衡，在此截面之反作用必將此部份之外力傳至他部份。此截面上任一點力之強度垂直於此平面者謂之正應力(normal stress)在此平面上者謂之切應力 (tangential or shearing stress)。

設施於此物體一部之合力循 CD 線者爲切力 F，垂直於此平面者爲加於 O 點之推力 P，及彎曲矩 M，卽對於 AB 之力矩爲 M

之力偶（參看第 75 圖）：茲一察正應力如何分佈於截面之各部份，俾總力等於 P，而對於 AB 之矩則為 M。據材料力學內所作各項假設推論之結果知正應力為自 AB 之距離 y 之平直函數。設以

$$p=k(y-b), \tag{12}$$

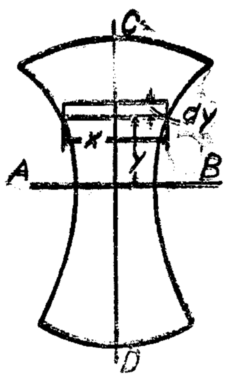
表之，並以 $x\,dy$ 表面積元素，則總正力為

$$P=k\int_{y_1}^{y_2}(y-b)x\,dy, \tag{13}$$

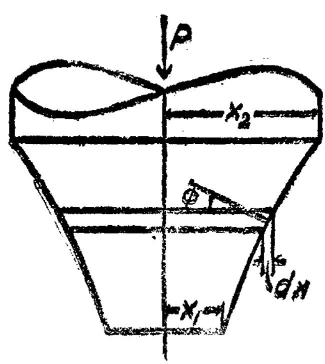
其對 AB 之矩為

$$M=k\int_{y_1}^{y_2}y(y-b)x\,dy。 \tag{14}$$

求積分後再解方程式以 P 及 M 表 k 與 b，則由(12)式可計算離 AB y 單位處之應力。p 之極端值係在 $y=y_1$ 及 $y=y_2$ 處。在直線 $y=b$ 上，$p=0$，故謂之截面之中軸（neutral axis）。(13)之積分為此面積對直線 $y=b$ 之一次矩，設 $P=0$，則此矩亦為零，故 b＝0，而中軸變為直線 AB。在此情形之下，一次矩 M 與此面積對 AB 之二次矩成正比。



第 76 圖



第 77 圖

(d)支樞摩擦力　有一旋轉曲面形之支樞軸承（piot bearing），有軸在其中轉動，此軸所受之推力為 P。（第 77 圖）。在此軸承內

面之各部份均受一正壓力，姑假定其爲常數 p。令 ϕ 表曲面之法線與水平線所成之角，則面積元素可書爲 $2\pi\ x \csc\phi\ dx$，而此元素上之垂直分壓力爲 $p\sin\phi$ 乘此元素，故

$$P=2\pi p\int_{x_1}^{x_2} x\ dx=p(\pi x_2^2-\pi x_1^2)。 \tag{15}$$

此表示壓力 p 等於以軸承之鉛直投影面積除推力 P。

設軸承內之摩擦係數爲 μ，則 μp 爲抵抗軸轉動之每單位面積之力。此抵抗力對於軸之軸線(shaft axis)之總矩爲

$$T=2\pi\ up\int_{x_1}^{x_2} x^2 \csc\phi\ dx, \tag{16}$$

式內 $\csc\phi\ dx=ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$。若支樞爲圓錐形則 ϕ 爲常數，設 $\phi=\frac{\pi}{2}$，則爲平領或步進軸承。

習 題 四 十

1 有半圓板其任一點之厚度與此點邊界直徑之距離成正比例，求此板之重心。（令 $dA=2ydx$，且以 kx 爲面密度）。

2. 求題 1 半圓板對其直徑之慣性矩。

3. 有長方形板其厚度與距一邊之距離平方成正比，求其重心。以面積對銳邊之二次及三次矩表所得之結果。

4 重 100 磅之物爲力 $F=2t+3e^{-t}$ 所作用，F 之單位爲磅，t 之單位爲秒。自 $t=0$ 至 $t=2$，其速度之變值如何？

5. 某活塞之動程爲 3 呎。第一呎內，活塞上之總汽壓爲 $F=100{,}000$ 磅，其餘動程中則依定律 $F_x=100{,}000$ 而變，x 爲活塞移動之呎數。問蒸汽施於活塞一面時，全動程內，活塞所作之工作若干？

6. 重 320 磅之物體，受力 $F=100\,t$，其中 F 之單位爲磅，t 之單位爲秒。設當 $t=0$ 時，$v=0$，求以 t 之函數表 v。試以 t 之函

數表功率,並求三秒內所作之工作。

7. 用題 6 所得之 v 式,試以 t 之函數表 S,並以 S 之函數表 F。用 $U=\int F\ ds$ 計算求三秒內力所作之工作,而與上題比較所得之結果。

8. 某梁上之擔負每呎長之強度爲 $w=1000\,x$ 磅,x 爲離此梁一端之距離。設梁長 10 呎,求二端之支柱力及離一端 x 呎之切力及彎曲矩。

9 改上題內 $w=500+1,000\ sin\dfrac{\pi x}{10}$,求支柱力,切力及彎曲矩。

10. 水櫃之一面爲梯形,梯形之高邊 16 呎,低邊 8 呎,二邊相距 12 呎。設水深 9 呎,問此面所受壓力之中心高若干呎?

11. 有自動水閘閘門,高 4 呎寬 5 呎,上邊裝鉸鏈可以轉動,下邊則抵於閘礎上。設一方面水高 3 呎,他方面水高 1 呎,求鉸鏈上所受之力。

12. 圓柱形之杯斜置於案上,傾角爲 45°,內盛液體,恰足以掩沒此杯之圓底。求此底上之壓力中心。

13. 在梁之截面,寬 2 吋高 8 吋處,所受彎曲矩爲 5 噸吋,求截面之最大正應力。

14. 設題 13 之梁除彎曲矩外再加 4 噸之挽力,問最大之正應力若干,並求中軸之地位。

15. 設一圓軸之半徑爲 r,所受彎曲矩爲 m,最大之正應力若干?設此軸中空,其內半徑爲 r_1,最大之正應力若干?

16. 支樞之接觸面積爲圓錐體,半徑 3 吋,高 4 吋。軸之推力爲 1500 磅,摩擦係數爲 $\dfrac{1}{20}$,求摩擦抵抗力之矩。

17. 有領形軸承,外半徑 4 吋,內半徑 3 吋,所受總壓力爲 4000 磅,$u=0.03$,求摩擦力矩。

第四十四節 重複積分法

1. 就一變數之重複積分法 一函數之不定積分本身亦爲一函數可再據以作積分運算,故下列記號

$$\int\left[\int f(x)dx\right]dx=\iint f(x)dx^2$$

卽表示一函數,其二級導微函數爲 $f(x)$。同樣三級導微函數爲 $f(x)$ 之函數可以

$$\iiint f(x)\,dx^3$$

表之,以此類推至任何級。此項函數,每作積分運算一次卽多出一泛定常數,欲定此項泛定常數必已知 $f(x)$ 之性質,且有充分之原始條件。

例,已知加速度與時間之函數關係爲

$$\frac{d^2s}{dt^2}=sin\ \pi t$$

且知當 $t=0$ 則 $\frac{ds}{dt}=0,\ s=2$。設欲求 $t=5$ 時之 s, 則

$$\frac{ds}{dt}=-\frac{1}{\pi}cos\ \pi t+c_1,\ c_1=\frac{1}{\pi},$$

$$s=-\frac{1}{\pi^2}sin\ \pi t+\frac{t}{\pi}+c_2,\ c_2=2。$$

當 $t=5$, 則 $s=2-\frac{5}{\pi}$。此結果可以一個式表之如下

$$s_5=2+\int_0^5\int_0^t sin\ \pi t\ dt^2$$

設欲以 t 之函數表 s, 則須以 t 代上式之 5.

吾人已知積分可視爲一面積。同樣,第二積分可釋爲面積之一次

矩，第三積分可釋爲面積之二次矩。曲線 $y=f(x)$ 下自 a 至 x 之面積（第 78 圖）爲

$$A=\int_a^x f(x)dx, \tag{1}$$

設以 M 表面積 A 對於在 x 處縱坐標之一次矩，則

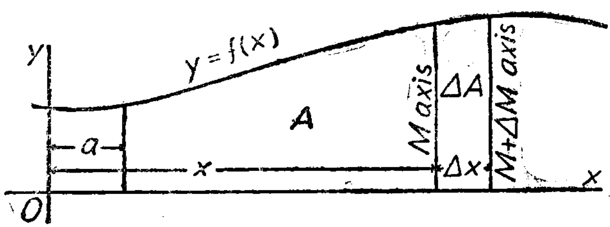
$$M+\Delta M=M+A\ \Delta x+\Delta A\cdot c\ \Delta x$$

式內 c 約等於二分之一。由此得

$$\frac{\Delta M}{\Delta x}=A+c\ \Delta A,\quad \frac{dM}{dx}=A,$$

故

$$M=\int_a^x\int_a^x f(x)dx^2 \tag{2}$$



第 78 圖

同理，A 對於在 x 處縱坐標之二次矩爲

$$I=2\int_a^x\int_a^x\int_a^x f(x)dx。 \tag{3}$$

在(2)及(3)內，各次之積分運算皆自同一初點 $x=a$ 起，如最後一次之高界固定則結果爲一定積分。若每次積分運算之初點不同，除最後之高界外其他各次之高界皆非 x，則所得結果仍可作面積及一次二次矩解，但不如上法之易於說明。

(1)與(2)在梁之理論內有直接之應用。設梁循 Ox 放置（第 78 圖），令 $f(x)$ 表梁上任一點 x 之向下力強度，則面積 A 表 a 與 x

間之總擔負。令 a 點之彎曲矩為 M_a，切力為 F_a，則 x 點之切力為

$$F_x=F_a-A=F_a-\int_a^x f(x)dx. \tag{4}$$

至 x 點之彎曲矩則由三部份組成。M_a 為一力偶，其在 x 之效應與在 a 相同，F_a 於 x 之力矩為 $F_a x$ 而分佈之擔負於 x 之矩則如(2)所示。故

$$M_x=M_a+F_a x-\int_a\int_a f(x)dx^2=M_a+\int_a F_x dx. \tag{5}$$

凡梁在 a 與 x 間之集中擔負或支力相當於 $f(x)$ 之無限間斷點，並使 F_x 有有限間斷點，但 M_x 仍係連續的。遇此問題，可將 $f(x)$ 連續部份之梁分別運算並調整積分常數使其適合已知之條件，其詳情此處當不能盡述也。(4)與(5)為討論梁受分佈擔負之基本方程式。

2. 二變數之多層積分　在前數節內，一數量之微分或表為一自變數之函數乘自變數之微分，例如以 $y\,dx$ 表面積之微分，或 $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ 表弧長之微分，dx 前之係數必須為 x 之函數，故在作積分運算之前，必先將其變為 x 之函數。再求各次力矩及論及分佈量時，用以乘弧長，面積或體積之微分之函數亦須以此自變數表之。

弧線微分因曲線之方程式之二變數相互表示故應用時當無甚限制，但面積微分則於選用變數時有極大之限制，茲所論者卽如何避免此項限制之法。

茲仍以第 42 節之力矩為例，而計算曲線 $y=sin\ x$ 下自 $x=0$ 至 $x=\pi$ 之面積。$dA=sin\ x\,dx$，其對 $x-$ 軸之一次矩，因高 $sin\ x$ 之長方形 y 之平均值為 $\bar{y}=\frac{1}{2}sin\ x$，故

$$M_x=A y_m=\int_0^\pi \frac{sin^2 x}{2}\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

但此 y 之平均值可由下列積分運算而得，

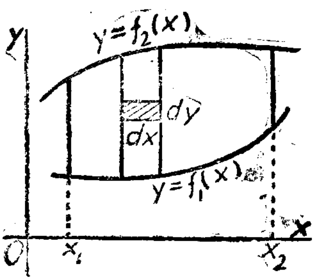
$$\bar{y}\ \sin\ x\ dx=dx\int_0^{\sin x} y\ dy=\frac{1}{2}\sin^2 x\ dx.$$

式內 dx 爲長方形之常數寬度，可用除法自方程式內消去，故

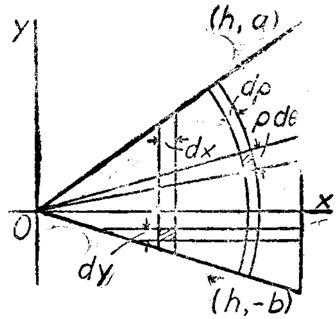
$$M_x=Ay_m=\int_0^{\pi}\left[\int_0^{\sin x} y\ dy\right]\ dx=\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} ydy\ dx.$$

同樣，此面積對於 x 軸之二次矩爲

$$I_x=A(y^2)_m=\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} y^2\ dy\ dx.$$



第 79 圖



第 80 圖

凡具有

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}\phi(x,y)dy\ dx$$

形式者謂之多層積分 (iterated integral)，若視 $\phi(x, y)$ 表示某數量在(x, y)點之強度，則此積分表示曲線 $y=f_1(x)$ 及 $y=f_2(x)$ 及直線 $x=x_1$ 及 $x=x_2$ 間之面積上之總量，（第 79 圖）

例如，欲求三角形對於一頂點之極慣性矩，令此頂點爲原點，x 軸則與對邊垂直（第 80 圖）。令其他二頂點之坐標爲$(h, a)(h, -b)$，

則三邊各爲 $y=\frac{a}{h}x$, $y=\frac{-b}{h}x$ 及 $x=h$. 自 O 點至任一點(x, y) 之距離平方爲 x^2+y^2，此可視爲此點之慣性矩之強度。其總量爲

$$I_0=\int_0^h\int_{\frac{-b}{h}x}^{\frac{a}{h}x}(x^2+y^2)\,dy\,\,dx.$$

先求對於 y 之積分，視 x 爲常數，即求寬 dx 之直條之總面積，得

$$I_0=\int_0^h\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{-b}{h}x}^{\frac{a}{h}x}dx=\int_0^h\left[\frac{(a+b)}{h}+\frac{a^3+b^3}{3h^3}\right]x^3dx.$$

再對 x 求積分，得

$$I_0=\left[\frac{3h^2(a+b)+(a^3+b^3)}{12h^3}x^4\right]_0^h=\frac{3h^3(a+b)+h(a^3+b^3)}{12}.$$

再此題亦可先求對 x 之積分，如此則 x 之高低界應爲 y 之函數，而當 y 在 $-b$ 及 0 之間及在 0 及 a 之間，其函數之形式又各不同。

$$I_0=\int_{-b}^{0}\int_{-\frac{b}{h}y}^{h}(x^2+y^2)dx\,dy+\int_0^a\int_{\frac{h}{a}y}^{h}(x^2+y^2)dx\,dy$$

$$=\int_{-b}^{a}\left[\frac{h^3}{3}+hy^2+y^3\left(\frac{h^3}{3b^3}+\frac{h}{b}\right)\right]dy+\int_0^a\left[\frac{h^3}{3}+y^2h-y^3\left(\frac{h^3}{3a^3}+\frac{h}{a}\right)\right]dy$$

$$=\frac{3h^3b+hb^3}{12}+\frac{3h^3a+ha^3}{12}=\frac{3h^3(a+b)+h(a^3+b^3)}{12}.$$

極坐標制內亦可應用此法，其面積元素爲 $\rho\,d\theta\,d\rho$（第 80 圖）。設求此元素自 ρ_1 至 ρ_2 對 ρ 之積分得 $\frac{1}{2}(\rho_2^2-\rho_1^2)d\theta$，設求此元素自 θ_1 至 θ_2 對 θ 之積分則得$\rho(\theta_2-\theta_1)d\rho$. 高低界 ρ_1 及 ρ_2 可爲 θ 之函數，高低界 θ_1 及 θ_2 亦可爲 ρ 之函數，此即第 41 節所述之極坐標面積微分之二種形式也。

爲說明極坐標之兩層積分起見，仍以第 80 圖之三角形爲例。距離之平方爲 ρ^2，三邊之方程式各爲

$$\theta=tan^{-1}\left(\frac{-b}{h}\right),\theta=tan^{-1}\frac{a}{h},\ \rho=h\sec\theta.$$

$$I_0=\int_{tan^{-1}\left(\frac{-b}{h}\right)}^{tan^{-1}\frac{a}{h}}\int_0^{h\sec\theta}\rho^3d\rho\, d\theta$$

$$=\int_{tan^{-1}\left(\frac{-b}{h}\right)}^{tan^{-1}\frac{a}{h}}\frac{h^4\sec^4\theta}{4}d\theta$$

$$=\frac{h^4}{4}\left[tan\ \theta+\frac{tan^3\theta}{3}\right]_{tan^{-1}\left(\frac{-b}{h}\right)}^{tan^{-1}\frac{a}{h}}$$

$$=\frac{3h^3(a+b)+h(a^3+b^3)}{12}.$$

設欲更迭積分運算之次序，則 ρ 之變程應分爲三段，每段各用不同之高低界。

$$I_0=\int_0^h\int_{tan^{-1}\left(\frac{-b}{h}\right)}^{tan^{-1}\frac{a}{h}}\rho^3d\theta\, d\rho$$

$$+\int_h^{\sqrt{h^2+b^2}}\int_{tan^{-1}\left(\frac{-b}{h}\right)}^{-sec^{-1}\frac{\rho}{h}}\rho^3d\theta\, d\rho$$

$$+\int_h^{\sqrt{h^2+a^2}}\int_{sec^{-1}\frac{\rho}{h}}^{tan^{-1}\frac{a}{h}}\rho^3d\theta\, d\rho.$$

上列求積分次序較前者爲繁複，故不列全部算式以省篇幅。

凡關於距或面積分佈量之問題，如用兩層積分，皆可有四種解

法，至應運用何法，則視表分佈情形或強度之函數性質及周界曲線之性質而定。兩層積分中被積函數可任為二變數之一之函數，或為二變數之函數，此其便利之點。

習 題 四 十 一

1. 已知 $s=5+\int_0^t\int_2^t 12\,dt^2$，以 t 之函數表 s，並求當 $t=0$ 時之速度及加速度。t 為何值則 $v=0$？

2. 設 $\dfrac{d^2s}{dt^2}=-24t$，當 $t=5$ 時 $v=0$，當 $t=3$ 時，$s=0$，試用積分記號以 t 表 s。求此積分之值，然後以微分法求速度及加速度，以校對所得結果。

3. 用本節第 1 款之 (4) 及 (5) 式計算長 L 之梁對於原點，（即其左端）之 M_a 及 F_a，此梁擔負均勻，而支柱其二端。用第 43 節第 3 款之方程式以校所得答數。

4. 以本節第 1 款之 (2) 及 (3) 式應用於長方形，而以第 42 節之方法校之。

5. 以第 4 題之方程式應用於三角形，並校其結果，此三角形之三邊為 $y=3x$, $y=0$, $x=a$.

6. 以本節第 1 款之 $f(x)=sin\,x$，而以第 42 節之方法校之。

7. 某面積對 y 軸之慣性矩為

$$I_y=A(x^2)_m=\int_0^5\int_{y+1}^{b-y}x^2dx\,dy,$$

繪此面積，並求 $(x^2)_m$.

8. 問下列積分適合於何種面積？

$$\int_2^5\int_{-x}^{x}xy\,dy\,dx.$$

此積分，以面積元素 $dy\,dx$ 乘 xy，謂之此面積對於二坐標軸之慣性

積(product of inertia).

9. 求長方形對其兩邊之慣性積。

10. 求一圓象限對其周界半徑之慣性積（參看第 8 題）。

11. 以極坐標解第 10 題，注意 $xy=\rho^2 \sin\theta\cos\theta$.

12. 示長方形對其一頂點之極慣性矩等於對二邊慣性矩之和。

13. 求在曲線 $x=y^2$ 及 $y=x^2$ 所包圍之面積上 $\sqrt{\frac{x}{y}}$ 之平均值。

14. 求在以下列積分表示之面積上之 $\sec\theta$ 之平均值，並繪此面積。

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\cos\theta}\rho\,d\rho\,d\theta.$$

第四十五節　積分法之代替算法

吾人已知在某高低界內函數之積分恆可以一面積釋之。如能設法以求所欲得之面積，即知此積分之值。當被積函數不能施積分運算時，或函數僅可以圖表表示時，則此事至爲重要。本節之目的爲示若干種由圖表而計算面積之標準方法，並示其對於有關積分法問題之應用。

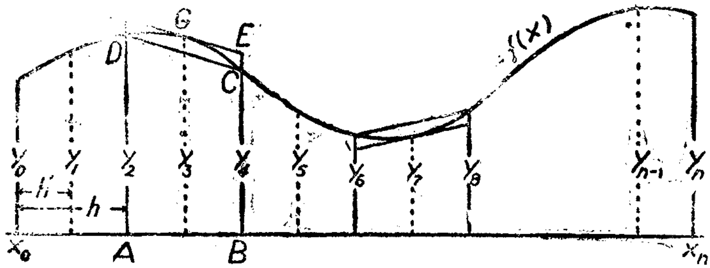
1. 定積分之近似值求法　試一察積分

$$A=\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx.$$

並設已知曲線 $y=f(x)$ 在 $x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h, \cdots\cdots x_0+\frac{n}{2}h$ 之縱坐標值，分別以 $y_0,\ y_2,\ y_4,\ \cdots\cdots y_n$ 表之，如第 81 圖實線所示。二縱坐標間之面積約似一梯形，故全面積約等於此諸梯形之和。

$$A_t=\frac{h}{2}[(y_0+y_2)+(y_2+y_4)+\cdots\cdots+(y_{n-2}+y_n)] \tag{1}$$

$$=\frac{h}{2}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots\cdots y_{n-2})].$$



第 81 圖

式內所以用偶數足碼者,不過爲便利嗣後討論起見,並非此公式非用偶數足碼不可也。設以 2 除各足碼得所謂梯形律 (trapezoidal rule) 之通常形式。

設僅取每個等間隔之中點,記以 y_1, y_2, y_3,……y_{n-1} 如圖中所示之虛線,則 hy_1, hy_3, 等等約等於各間隔上之面積,而全面積之近似值爲

$$A_m=h(y_1+y_3+\cdots\cdots y_{n-1}). \tag{2}$$

此之謂中縱坐標律 (mid-ordinate rule), 此處全用奇標足碼亦非必要。

當曲線向下凹,如 y_2 至 y_4 所示,則間隔上之面積,用梯形律則估值較低,用中縱坐標律則估值較高。當曲向上凹,如 y_6 至 y_8 則結果恰相反。設用二法計算面積,而所得估計值 A_t 與 A_m 各異,則此面積之眞實值當在此二估計值之間,設求二估計值之平均值,以 $h=2h$, 得

$$\frac{1}{2}(A_t+A_m)=\frac{}{2}[(y_0+y_n)+2(y_1+y_2+\cdots\cdots y_{n-1})].$$

此卽梯形律,式中同時兼用奇偶縱坐標而各間隔之寬爲 h'.

設一察寬 h 某間隔如 AB, 用梯形律所用之面積爲 $ABCD$,而

中縱坐標律所用者爲 $ABEF$,因 DGC 之曲率關係,後法較爲準確。欲估計 DGC 之面積,可假設有簡單之曲線經此三點,而最簡單之曲線合乎此用者莫如具有 $y=ax^2+bx+c$ 形之拋物線。設 EF 與 DC 平行,則可證明 EF 必於 G 點切此拋物線,而 DCG 之面積爲平行四邊形之三分之二。以經過此三點之拋物線代此間隔上之曲線,則

$$ABCGD=ABCD+\frac{2}{3}DCEF$$

$$=ABCD+\frac{2}{3}(ABEF-ABCD).$$

因此項估計法可應用於寬 h 之各個間隔,則全面積之近似值爲

$$\begin{aligned}A_s&=A_t+\frac{2}{3}(A_m-A_t)=\frac{1}{3}(A_t+2A_m)\\&=\frac{h}{3}[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\cdots\cdots+y_{n-1})\\&\quad+2(y_2+y_4+\cdots\cdots+y_{n-2})]\end{aligned}\tag{3}$$

此卽辛普森氏律(Simpson's rule),爲區別辛氏所創其他規律起見,此律亦謂之辛氏拋物線律,辛氏三分之一律,或辛氏第一律。

辛氏律須用奇數個之等距縱坐標,而前二律所須者僅等距之縱坐標。當數據適用時,辛氏律較他二律所得結果,精確多多。設表內縱坐標非等距的,則用梯形律之原理估計面積較便,蓋可分別估計各梯形面積,再求其和以得全面積也。有時可視數據之性質,以不同之方法分施於面積之各部分。

三法估計面積之誤差皆視 h 之大小而定,h 愈小,誤差亦愈小。h 已定,則辛氏律所得結果較他二律用 $\frac{h}{2}$ 爲間隔所得之結果尤爲精確,卽他二律雖倍其間隔之等分數,尙不能及辛氏律也。

2. 積分曲線之作圖　設有函數 $y=f(x)$ 係以圖或表表示,則可用面積釋積分之原則,以繪此函數之積分曲線。因積分常數關係,此積分曲線可經過任一所欲之點。茲以此點爲 (x_0, A_0),則積分曲線在

任一 x 處之縱坐標 A_x 爲

$$A_x = A_0 + \int_{x_0}^{x} f(x) d$$

設曲線 $y=f(x)$ 於 x_0, x_1, x_2, 等處之縱坐標已知其爲 y_0, y_1, y_2, 等（第 81 圖）,則 A_x 於 x_1 處之近似値爲

$$A_1 = A_0 + \frac{1}{2} h_1 (y_0 + y_1),$$

式內 $h_1 = x_1 - x_0$. 同樣,於任一點 x_n,

$$A_n = A_{n-1} + \frac{1}{2} h_n (y_{n-1} + y_n). \tag{4}$$

式中 $h_n = x_n - x_{n-1}$. 此法相當於梯形律,各縱坐標無須等距。如以自 x_{n-1} 至 x_n 之中點縱坐標替代 (4) 內之 $\frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)$, 則相當於中縱坐標律。

設各縱坐標係等距的,則可應用辛氏律以得較準確之近似値,

$$A_n = A_{n-2} + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n), \tag{5}$$

式內 h 爲縱坐標間之公距。此公式不能應用於 $n=1$, 除非已知距 x_0 左 h 單位之 y_{-1}. 但遇此情形 A_1 仍可由 (4) 得之。

3. 對於求積分問題之應用 試一察曲線 $y=f(x)$ 下之面積,並設其數據分爲 x, y (偶), y (奇),如下表所示:

x	y		xy		y^2	
	(偶)	(奇)	(偶)	(奇)	(偶)	(奇)
0	(1.2)		(0)		(1.44)	
0.4		3.8		1.52		14.44
0.8	4.6		3.68		21.10	
1.2		4.9		5.88		24.01
1.6	4.2		6.72		17.64	
2.0		2.8		5.60		9.64
2.4	(1.0)		(2.40)		(1.00)	
	(2.2)+ 8.8	11.5	(2.4)+ 10.40	13.00	(2.44)+ 38.80	48.00

表內 $h=0.4$，依梯形律自 $x=0$ 至 $x=2.4$ 之面積爲

$$A_t=\frac{0.4}{2}[2.2+2(8.8+11.5)]=8.56,$$

依辛氏律，得

$$A_s=\frac{0.4}{3}[2.2+2(8.8)+4(11.5)]=8.77.$$

此皆積分

$$A=\int_0^{2.4}f(x)dx$$

之估計值。設欲求此面積之重心，則應求下列積分之近似值

$$Ax_m=\int_0^{2.4}xy\,dx,\quad Ay_m=\frac{1}{2}\int_0^{2.4}y^2dx.$$

故表內增加 xy 及 y^2 二行，仍依縱坐標之偶奇分列，俾應用辛氏律時，便於計算。依梯形律，

$$A_t\,x_m=\frac{0.4}{2}[2.4+2(23.40)]=9.84,$$

$$A_t\,y_m=\frac{1}{2}\,\frac{0.4}{2}[2.44+2(86.89)]=17.62,$$

由是得 $x_m=1.15$，而 $y_m=2.06$。但依辛氏律，則

$$A_s\,x_m=\frac{0.4}{3}[2.4+2(10.40)+4(13.00)]=10.00,$$

$$A_s y_m=\frac{1}{2}\,\frac{0.4}{3}[2.44+2(38.80)+4(48.09)]=18.16,$$

故 $x_m=1\ 14$ 而 $y_m=2.07$。

欲求對二坐標軸之慣性矩，則

$$A(x^2)_m=\int_0^{2.4}x^2y\,dx,\quad A(y^2)_m=\frac{1}{3}\int_0^{2.4}y^3dx,$$

祇須於表內加入 x^2y 及 y^3 之值，卽可估計上列之積分值。設欲求慣性積，則如 xy^3 一項以估計

$$\int_0^{2\cdot 4}\int_0^{y} xy\ dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\cdot 4} xy^2dx$$

之值。對原點之極慣性矩爲

$$\int_0^{2\cdot 4}\int_0^{y}(x^2+y^2)dy\,dx=\int_0^{2\cdot 4} x^2y\ dx+\frac{1}{3}\int_0^{2\cdot 4} y^3dx,$$

此卽上列對於二坐標軸慣性矩之和。

欲求此面積繞 x 軸之旋轉體積，則

$$V_x=\pi\int_0^{2\cdot 4} y^2dx=2\pi A\ldots$$

最後一項可以上列計算之結果代入卽得。設以此面積繞 y 軸旋轉，則每個面積元素 ydx 皆成體積 $2\pi\,xy\,dx$，故全體積爲

$$V_y=2\pi\int_0^{2\cdot 4} xy\ dx=2\pi\ Ax_m,$$

其值亦可用以前計算結果代入求得。

積分 $V=\int_{x_0}^{x_n}\phi(x)dx$ 表一體積，此體積於任一 x 處垂直於 x 軸之截面面積爲 $\phi(x)$。設等距間之截面爲已知，則可用前述三律之一，以求 V 值，依辛氏律則自 x_{n-2} 至 x_n 之體積爲

$$\frac{h}{3}[\phi(x_{n-1})+4\phi(x_{n-1})+\phi(x_n)]$$

此與角臺律(prismoid rule)相同，此律據兩平行底面積及中間截面面積以求二底間立體之體積。有若干種立體用此公式可得其恰合之體積，若與前述求面積相似條件下亦可求得滿意之近似值。

習 題 四 十 二

1. 利用正弦表，以 $h=\frac{\pi}{6}$，依梯形律以求正弦曲線下自 o 至 π 之面積，及此面積對二坐標軸之一次及二次矩。

2. 於第 1 題內改用中縱坐標律，仍用同樣之 h，以所得結果與用積分法所得者比較。

3. 應用辛氏律於上題，以 $h=\frac{\pi}{4}$，再以 $h=\frac{\pi}{6}$，並以所得結果與 1 及 2 之平均數比較。

4. x 與 y 之對應值如下：

x……	0	0.8	1.9	3.1	4.3	5.5	6.6	7.9	9.0	10.0
y……	2.00	2.10	2.32	2.69	3.11	3.69	4.30	5.17	6.00	6.91

繪各點於方格紙上，而繪光滑之曲線以貫串之。於 x 爲整數處，定此曲線之縱坐標值，再以此項縱坐標，依辛氏律，計算曲線下之面積，對 x 軸之旋轉體積，及此面積之重心。

5. 自 e^{-x^2} 表內，書出自 $x=0$ 至 $x=1$ 之 e^{-x^2} 值，其 x 間隔爲 0.1，據以估計積分

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

之值。以所得結果與或然率積分表所列之值比較。

6. 有單位質量，爲力所作用，其在各時間之力值如下表

t	0	1	2	3	4	5	6
F	2.4	1.8	1.3	0.9	0.6	0.4	0.3.

用 $mv=mv_0+\int_0^t Fdt$，假設 $V_0=2$，繪 v 爲 t 之函數之曲線。

7. 於第 6 題用 $s=s_0+\int_0^t vdt$，以 $s_0=1$，繪以 t 表 s 之曲線。

8. 自第 6 及第 7 題繪 F 爲 s 函數之曲線，再用 $U=\int_{s_0}^{s} Fds$ 求當 $t=6$ 時之 U，而以

$$U=\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)$$

校所得結果。

9. 以 $U=\int_0^t Fv\,dt$ 校由第 6 題所得之 v 值。

10. 一梁長 12 呎，其擔負係對稱的，且支於其二端。其離任一端 x 呎處之擔負（單位爲每呎若干噸）如下表所示：

x……	0	1	2	3	4	5	6
w……	0.9	1.5	2.0	2.4	2.7	2.9	3.0

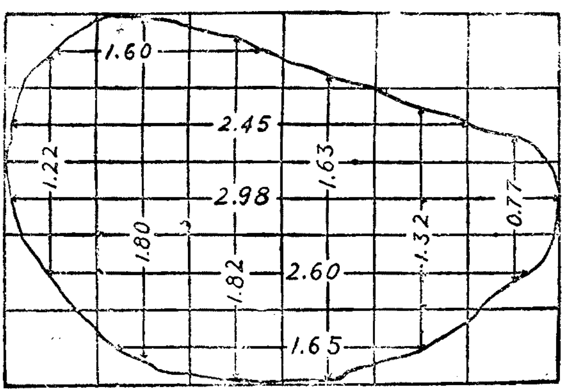
繪此梁一半長度之切力曲線及彎曲矩曲線。

11. 鐵道路基所移去之土方須照下列數據計算，即已知循鐵道 x 距離處之土方截面面積是也。

X（碼）…………	0	10	20	30	40	50	60
A（平方碼）……	0	11	43	57	62	35	0

求應掘去之土方共計若干立方碼，並求此土方對 $x=0$ 點之平均距離。

12. 第 82 圖內之面積之分法及量法皆適於中縱坐標律之應用。直條寬 0.5 橫條寬 0.4，求面積，重心，及對於外接長方形諸邊之慣性矩。



第 82 圖

參 考 書 目

Advanced Calculus, W. F. Osgood(Macmillan, 1925), Chapter IV.

Mathematical Analysis, Goursat-Hedrick, Vol. I. (Ginn, 1904), Chapter VI.

Integral Calculus, W. E. Byerly (Ginn, 1888)

Graphical and Mechanical Computation, Joseph Lipka, Wiley, 1918) Chapter IX.

The Calculus of Observations, Whitaker and Robinson(Blackie and Sons. 1924), Chapter VII.

第十章　函數定值法

第四十六節　不定式

在第二章內，本書曾舉出當自變數以數種不同之方式變值時，函數極限之定義，及無限變值之定義。該章並述函數 u,v 如趨於某極限值時或變爲無限大時，$u+v$, uv 以及 $\frac{u}{v}$ 應若何變值，在若干種情形下，雖已知 u,v 變值之性質仍不能決定 $u+v$, uv, 及 $\frac{u}{v}$ 之值。故由 u,v 如此組合之式謂之不定式，必須對 u,v 之變值有更詳明之認識始能決定此等式之值。本節目的在說明既詳知 u,v 變值之後應如何決定由 u,v 組合而成諸不定式之值之法，除第二章所舉各式外，且及於實際上常遇之其他不定式。

在下列各款內，須用第 7 節末段之普遍定理。茲將該普遍定理現須應用之一部份，分爲另一定理如下：

中間值定理 (intermediate value theorem). 設 $f(x)$ 在自 $x=a$ 至 $x=b$ 之間隔上連續，並設 k 在 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之間，則 a 與 b 間 x 至少有一值，假定爲 c, 能使 $f(c)=k$.

由此定理可得下列之命題。

推論　設 $f(x)$ 自 a 至 b 爲連續的，並設 $f(x)$ 在 a 與 b 間既有大於 k 又有小於 k 之值，則 a 與 b 間有某值 c 合乎 $f(c)=k$.

第 37 節內之羅爾氏(Rolle)定理即由此推論建立。

1. 平均值定律　函數 $y=\phi(x)$ 於 a 與 b 間之平均值 y_m 爲

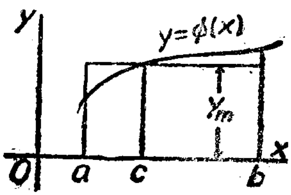
$$y_m=\frac{\int_a^b\phi(x)dx}{\int_a^b dx}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

式內 $f(x)$ 爲 $\phi(x)$ 之積分。式內分子即第83圖 a 與 b 間此函數曲線下之面積，而分母則 a 至 b 之距離。y 之平均值，即曲線縱坐標之一，爲一長方形之高，其面積與曲線下之面積相等，其長則爲 $b-a$.

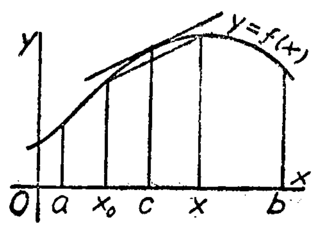
設 $\phi(x)$ 在間隔 a 至 b 上係連續的，則，因平均值在最大最小值之間，由上述推論知 a，與 b 間有某點 c 可等於其中值，即

$$\phi(c)=y_m=\frac{f(b)-f(a)}{ba}.$$

函數 $\phi(x)$ 爲 $f(x)$ 之導微函數，因是而得下列命題：



第 83 圖



第 84 圖

平均值定理 (mean value theorem). 設 $f(x)$ 及其導微函數 $f'(x)$ 在間隔 $x=a$ 至 $x=b$ 上皆係連續的，則 a 與 b 間有一值 c，適合

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

設 x_0 及 x 爲 a 與 b 間之任二值，則此函數及其函數自 x_0 至 x 亦皆連續，而可代替上項定理結論內之 a 及 b. 因得，

推論 設 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 自 a 至 b 皆係連續的，並設 x_0 在 a 與 b 間，則 a 與 b 間之每個 x，於 x_0 與 x 間，皆有某值 c，能合乎下列方程式：

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(c).$$

此推論之幾何的意義如第84圖所示。此推論等於謂割線之斜度

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

等於 x_0 與 x 間某點 c 之曲線斜度。

上列諸命題可藉以在演繹此後之各項定理，茲且舉一簡單之例，以示適所述推論之應用。設已知 $f(x_0)$ 及 $f'(x_0)$之值而未知此函數之其他各值，而欲求近 x_0 對應於 x 之 $f(x)$ 值。引用上述推論，雖 c 值爲未知，因 x 近 x_0，則 $f'(c)$ 之值，卽割線之斜度，與 $f'(x_0)$ 之值當相差不遠。

故 $f(x)$ 之近似值，可由下列公式得之，

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0).$$

例如，$f(x)=log\,x$，則 $f'(x)=\frac{1}{x}$. 因 $log\,e=1$，故

$$log\,x=1+(x-e)\frac{1}{e}=\frac{x}{e}.$$

設 x 近 e 則上列公式可得良好之結果，但須近至何等程度方能得預定之某準確度，猶未能就此判斷也。

所應注意者，卽上列公式，以 $f'(x_0)$ 代未知數 $f'(c)$，與此曲線在 x_0 點之切線方程式

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

相同（見第 36 節），蓋切線上與切點毗鄰各點自與曲線上各點相近也。

此方程式重要用途之一卽估計由自變數誤差所生函數誤差之值。例如，由平面三角形之正弦律得

$$a\,sin\,B=b\,sin\,A.$$

設 A, B 及 b 之值已經測定，若據以求 a. 當量得之值爲 A_0, B_0 及 b_0 時，設 A 有一定數量之誤差，欲求由計算而得 a 值之差誤。視 a 爲 A 之函數，則其近似方程式爲

$$a-a_0=\frac{da_0}{dA_0}(A-A_0),$$

以 Δa 代 $a-a_0$, ΔA 代 $A-A_0$ 而以 A, B 及 b 之已知值計算此點之導微函數，則

$$\Delta a=\frac{b_0 \cos A_0}{\sin B_0}\Delta A.$$

此示由於某一定誤差 ΔA 所生之誤差 Δa 視 b_0, A_0, 及 B_0 之值而定，設 B_0 甚小則誤差 Δa 將甚大。此處之 ΔA 實爲相當於自變數增量 $\Delta A=dA$ 時之微分 da.

2. 二重平均值定律 (double law of the mean). 設 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 自 $x=a$ 至 $x=b$ 之間隔上連續，且在此間隔上有連續之導微函數，則 a 與 b 間有一 c 值，能適合

$$\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(c)}{\phi(c)}.$$

此可用下列函數以證明之。

$$[f(b)-f(a)][\phi(x)-\phi(a)]-[\phi(b)-\phi(a)][f(x)-f(a)].$$

此函數在自 a 至 b 之間隔上連續，而在 $x=a$ 及 $x=b$ 則爲零，故照平均值定理，其導微函數在 a 與 b 間之某值，$x=c$ 時，亦將爲零。求導微函數並以 c 代 x, 得

$$[f(b)-f(a)]\phi'(c)-[\phi(b)-\phi(a)]f'(c)=0$$

由是可立得所欲證明之關係式。

茲述與第 1 款推論相似之定理如下：

定理　設 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 及其一級導微函數皆在自 $x=a$ 至 $x=b$ 之間隔上連續，並設 x_0 係在自 a 至 b 之間隔上，則此間隔內任取一 x 值，在 x_0 與 x 之間，必可求得一 c 值使適合

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\phi(x)-f(x_0)}=\frac{f'(c)}{\phi'(c)}.$$

3. $\frac{0}{0}$式 設函數 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 在包括 x_0 之間隔上連續且有連續之導微函數，並設兩函數於 x_0 皆爲零，則爲此二函數比式之函

$$\frac{f(x)}{\phi(x)}$$

於 x_0 呈$\frac{0}{0}$之形。若當 $x=x_0$ 時欲規定$\frac{f(x)}{\phi(x)}$一適當之值，依認重平均值定律，得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\phi(x)-\phi(x_0)}=\frac{f'(c)}{\phi'(c)}.$$

式內 c 在 x 與 x_0 之間。因 $f(x_0)$ 及 $\phi(x_0)$ 皆爲零，故

$$\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{f'(c)}{\phi'(c)}.$$

當 x 趨於 x_0 時，變數 c 亦趨於 x_0，因此二比數恆相等，故二者必趨於同一極限或變爲同向之無限大，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{\phi'(c)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}.$$

上列恆等式之最後一項雖以 x 易 c，但不能影響其極限。

例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=0.$$

可以三角變換校之如下：

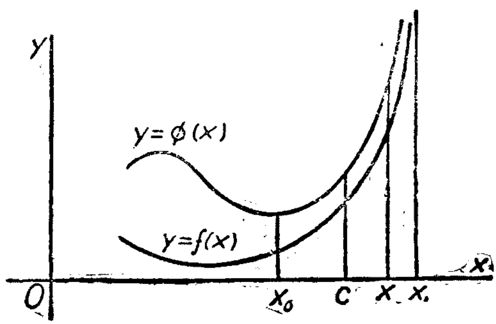
$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},\quad \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

因得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=0.$$

應用此律時，如分子及分母之導微函數亦為零，此新函數亦為不定式$\frac{0}{0}$，則可再用此律而求二級導微函數之比。設亦皆為零，仍可再用此律，至分子分母二者或二者之一非零為止。每階段中，可利用代數或三角變換法以簡化欲求其極限之函數。

4. $\frac{\infty}{\infty}$式　設 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 於 x_1 之一方連續且各有連續之導微函數，但皆於 x_1 有垂直漸近線，則分式$\frac{f(x)}{\phi(x)}$於 x_1 之形式為$\frac{\infty}{\infty}$，即，當 x 趨於 x_1 時，分子及分母皆變為無限大。依二重平均值定律，吾人可於此點得一定值或示其變為無限大。設於 x_1 附近取 x_0 及 x 二點，此函數及其導微函數於此二點皆係連續的，而 x 又在 x_0 與 x_1 之間（第 85 圖），則



第　85

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{\phi(x)-\phi(x_0)}=\frac{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\dfrac{\phi(x_0)}{\phi(x)}}\cdot\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{f'(c)}{\phi'(c)},$$

式內 c 在 x_0 及 x 之間。茲一察當 x 及 x_0 趨於 x_1 時之關係。上式內三比式

$$\frac{1-\dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\dfrac{\phi(x_0)}{\phi(x)}},\quad \frac{f(x)}{\phi(x)},\quad \frac{f'(c)}{\phi'(c)}$$

可分別論之。第三式為 c 之連續函數當 c 趨於 x_1 時，設$\dfrac{f'(c)}{\phi'(c)}$以某種狀態趨於一極限或變為無限大，則前二比式之積亦必如此。無論 x_0 為何值，吾人可選擇 x 之值，使分式$\dfrac{f(x_0)}{f(x)}$及$\dfrac{\phi(x_0)}{\phi(x)}$欲如何小即如何小，故當 x_0 趨於 x_1 時，x 之趨於 x_1 足以使$\dfrac{f(x_0)}{f(x)}$及$\dfrac{\phi(x_0)}{\phi(x)}$趨於零，故第一比式趨於 1. 由此可知第二第三比式必趨同一極限或以同一方向變為無限大。依上項假設，得

$$\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{c\to x_1}\frac{f'(c)}{\phi'(c)}=\lim_{x\to x_1}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}.$$

此與$\dfrac{0}{0}$式之結論相同，其用法亦相同，即應用一次如仍為不定式，可重複應用也。

例如分式

$$\frac{\tan x}{\log\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$$

於 $x=\dfrac{\pi}{2}$時成為$\dfrac{\infty}{\infty}$. 求導微函數，得

$$\frac{\sec^2 x}{\dfrac{1}{x-\dfrac{\pi}{2}}}=\frac{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 x},$$

而此式於$\dfrac{\pi}{2}$成為$\dfrac{0}{0}$.再求導微函數，得

$$\frac{1}{2\sin x\cos x},$$

此於 $x=\frac{\pi}{2}$ 成爲 $\frac{1}{0}=\infty$, 卽，此函數在 $\frac{\pi}{2}$ 處，變成無限大。

5. 其他不定式　任一函數於 x 之某值，假設 x_0, 變爲不定式時，可就其對於具有 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 之函數之關係研究之。茲略論其他各種不定式之求值法。

(a) $0\cdot\infty$ 式　設 $f(x_0)=0$, $\phi(x_0)=\infty$，則

$$f(x_0)\phi(x_0)=\frac{f(x_0)}{\frac{1}{\phi(x_0)}}=\frac{0}{0},$$

或

$$f(x_0)\phi(x_0)=\frac{\phi(x_0)}{\frac{1}{f(x_0)}}=\frac{\infty}{\infty}.$$

(b) $\infty-\infty$　設 $f(x_0)=\infty$, $\phi(x_0)=\infty$, 則

$$f(x_0)-\phi(x_0)=\frac{\frac{1}{\phi(x_0)}-\frac{1}{f(x_0)}}{\frac{1}{f(x_0)\phi(x_0)}}=\frac{0}{0}.$$

(c) 0^0, ∞^0, 1^∞.　函數 $f(x)^{\phi(x)}$ 之對數式爲 $\log f(x)^{\phi(x)}=\phi(x)\log f(x)$. 故具前三式之一之函數，其對數必爲前述各種不定式中之一。旣求得應予對數之值，卽可求得原函數之相當值也。

6. 於 $x=\infty$ 之值　前所論者爲函數於 $x=x_0$ 成爲不定，x_0 仍爲 x 之定值。有時吾人每欲知當 x 無窮增大時，其函數趨於何值。當 x 增大時，此函數或變爲正無限大或負無限大，或趨於某定值 k。遇後項情形時，此函數之曲線有一水平漸近線，$y=k$. 設當 x 變爲無限大時函數爲不定式，則可用前述各法將此函數化爲分式 $\frac{f(x)}{\phi(x)}$，而使

分子分母於 x 無窮增大時或皆變爲無限大，或皆趨於零。令 $x=\frac{1}{u}$

則當 x 變爲無限大時 u 趨於零，而

$$\frac{d}{du}f(x)=\frac{d}{du}f\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{u^2}\ f'\left(\frac{1}{u}\right)=-x^2f\ (x),$$

倣此，

$$\frac{d}{du}\phi(x)=-x^2\phi'(x).$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{x^2f'(x)}{x^2\phi'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}.$$

故知於 $x=\infty$ 求極限法與於 x 爲任一有限值 x_0 之求極限法相同。

習 題 四 十 三

1. 用公式 $I=\frac{\pi d^4}{32}$ 計算實體圓軸對於其軸線之極慣性矩時，設測定之直徑有 0.1% 之誤差，問所得結果之百分誤差若干？$\left(I=\frac{\pi d^4}{32}\right)$.

2. 自一角度之餘弦以定其正弦，設餘弦之誤差爲 .0002. 問所得正弦之誤差若干，(a) 當餘弦爲 .9927 時，(b) 當餘弦爲 .3279 時？

3. 由離山峯五哩處之平原量山之仰角，得 $5°20'\pm 2'$，問由此計算所得之峯高誤差若干？

4. 長 L 呎之擺在 θ 弧度之小角度內擺動，其擺動一次之時間 t 秒爲

$$\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\frac{\theta^2}{16}\right).$$

設 $\theta=5°$, $L=36$ 吋，$g=32.16$ 呎/秒^2，改 θ 爲 $6°$，改 L 爲 37 吋，改 g 爲 32.2 呎/秒^2，問每項改變對於 t 之影響各如何？

5. 示：

(a) $\left[\frac{a^x-1}{b^x-1}\right]_{x=0}=\log_b a$;

(b) $\left[\frac{x-\tan^{-1}x}{x-\sin^{-1}x}\right]_{x=0}=-2$;

(c) $\left[\frac{x(x-1)^n-2}{x^2-2x}\right]_{x=2}=n+\frac{1}{2}$.

6. 求下列諸式之值:

(a) $\frac{\tan nx-n\tan x}{n\sin x-\sin nx}$於 $x=0$;

(b) $\frac{xe^x-\log(x+1)}{x^2}$ 於 $x=0$;

(c) $\frac{x-\sin x}{x^2}$ 於 $x=0$;

(d) $\frac{\tan\theta}{\tan 3\theta}$ 於 $\theta=\pi$.

7. 對於下列函數在所示之處予以適當之值。

(a) $(a^x+x)^{\frac{1}{x}}$ 於 $x=0$;

(b) $(\tan\theta)^{\cos\theta}$ 於 $\theta=\frac{\pi}{2}$;

(c) $\frac{x^2}{e^x}$ 於 $x=\infty$;

(d) $\frac{\cot x}{\cot 3x}$ 於 $x=0$;

(e) $\frac{\log x}{x}$ 於 $a=\infty$;

(f) $\frac{e^x}{\log x}$ 於 $x=\infty$.

8. 定下列各式之極限:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-3x+5x^5}{7x+x^3+7x^5}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^x$;

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a}{x}+1\right)^x$;

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x\tan x-\frac{\pi}{2}\sec x\right)$.

9. 示積分$\int_0^\infty xe^{-x}dx$之存在,並求其值。

10. 示當 x 變爲無限大時,x^ne^{-kx} 趨於零, n 可爲任一正整數, k 爲任一正數。

第四十七節　附尾量之泰羅氏定理

1. 定理之內容及證明　第 46 節內論及平均値定理並示如知某點之函數値及其導微函數値則能估計此函數在此點附近之近似値。茲所述之泰羅氏定理性質略相近，而用途更廣，其內容如次：

泰羅氏定理(Taylor's Theorem)　設 $f(x)$ 及其前 n 級導微函數在 $x=a$ 至 $x=b$ 之間隔上爲連續，又設 x_0 在此間隔內，則在此間隔內任意取一 x 値後，必可在 x_0 與 x 之間求得一 c 値俾下列等式能成立：

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(c).$$

式內末項異於他項，蓋其導微函數之値係據未定點 c 計算，而非若其他各項係由已知點 x_0 定値也。此末項謂之『尾量』(remainder)。設 $n=1$，則此定理與平均値定理之推論相同。

茲以 $n=3$ 時之情形證泰羅氏定理，但所論各點可施於 n 等於任何値。令 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ 及 $f'''(x)$ 在間隔自 $x=a$ 至 $x=b$ 上連續，並令 $\overline{M}_3$ 及 $\underline{M}_3$ 分爲 $f'''(x)$ 在此間隔上之最大及最小値，則對於間隔上之任一 x，

$$\underline{M}_3\leqq f'''(x)\leqq\overline{M}_3$$

故，設 x 大於 x_0，則

$$\int_{x_0}^{x}\underline{M}_3dx\leqq\int_{x_0}^{x}f'''(x)dx\leqq\int_{x_0}^{x}\overline{M}_3dx,$$

蓋 x 及 x_0 皆在此間隔上也。設 x 小於 x_0，則祇須反積分高低界之次序，或反不等號之方向卽得。茲仍假設 x 大於 x_0，求積分，得

$$\underline{M}_3(x-x_0\leqq f''(x)-f''(x_0)\leqq\overline{M}_3(x-x_0).$$

此項函數在高低界 x_0 及 x 間可再求積分而仍合乎上項不等式，蓋一曲線如在另一曲線之下，則前線下之面積亦必小於後曲線下之面積也。故三次求積分之結果，得

$$\underline{M}_3\frac{(x-x_0)^3}{3!}\leqq f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)$$

$$-\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0)\leqq\overline{M}_3\frac{(x-x_0)^3}{3!}。$$

由此可得

$$f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)-\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0)=\frac{(x-x_0)^3}{3!}M_3$$

式中 M_3 為 $\underline{M}_3$ 與 $\overline{M}_3$ 間之某值。

假設 x 小於 x_0，則每求積分一次，必反其不等號，但所得之最後方程式仍具同一形式。對於 x 及 x_0 之選擇，所需要於 a 及 b 者為 x 及 x_0 必在間隔自 a 至 b 之上，設 a 至 b 之間隔與自 x_0 至 x 之間隔相疊合仍適合此項條件，故，設 $\underline{M}_3$ 及 $\overline{M}_3$ 為間隔自 x_0 至 x 上 $f'''(x)$ 之最小及最大值，則最後所得之等式恆能成立，依中間值定理，x_0 與 x 之間有一 c 值，能令 $M_3=f'''(c)$，故結論可書為

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(c),$$

式內 c 在 x_0 及 x 之間。M_3 及 c 皆視 x_0 及 x 而定。

令 $x=x_0+h$，得泰羅氏定理另一常用形式：

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_0+\theta h)$$

式內 θ 在零與一之間。此方程式可引伸至任何項數，其末項則包含 $x_0+\theta h$ 之最高級導微函數值，謂之尾量。

2 泰羅氏定理之應用　應用泰羅氏定理時，必先決定下列三值，(a) x_0 值，於此定函數及其各級導微函數之值；(b) x 之地位，即所欲

求函數值之屬，換言之，即發生各次冪之 $h=(x-x_0)$ 之大小；(c) 所欲用之項數。實際上 c 值不能知，故計算時大多不用末項，但必須知 $f^{(n)}(c)$ 在某值之間，故略去尾量仍可得充份準確之結果。

設略去尾量，則此公式之效用卽係以 $n-1$ 次之多項式替代函數 $f(x)$，設略去之尾量爲值甚小，此多項式頗可用以代表或估計此函數。故能知所捨去尾量之大小，則此定理爲用至大，而尾量之大小可由適所述三值決定。

茲以 $f(x)=\log x$ 爲例。x_0 須視欲定函數值之範圍而定，且須在函數及其導微函數均有定值之處。因 x 爲負數時 $\log x$ 爲虛數，故 x_0 不可爲負數，於 $x=0$, $\log x$ 及其各級導微函數又皆爲間斷的，故 x_0 必取一正數，令 $x_0=1$，計算 $x=1$ 處之各級導微函數並定其值，

$$f(x)=\log x, \qquad f(1)=0;$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}, \qquad f'(1)=1;$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}, \qquad f''(1)=-1;$$

$$f'''(x)=\frac{2}{x^3}, \qquad f'''(1)=2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}; \qquad f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

由泰羅氏公式，得

$$\log x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{nc^n},$$

式內 c 在 1 與 x 之間。末項爲尾量，無法可求其值，但當 x 值確定後，n 值選定後，卽可推知尾量不能超過之最大限度。令 $n=4$，設 $x=2$,

則尾量之最大值對應於 c 之最小值，此值必不小於 1，故尾量之絕對值不至大於

$$\frac{(2-1)^4}{4}=\frac{1}{4}.$$

此值太大不宜略去，故此公式於 $x=2$ 時如僅取 4 項，自不適用。以 $x=1.1$，則 c 仍不能小於 1，略去尾量所生之誤差不能大於

$$\frac{(1.1-1)^4}{4}=.000025$$

若 x 值距 1 更近，其誤差當更小。設 $x=0.9$，c 小於 1 但不小於 0.9，誤差不至大於

$$\frac{(0.9-1)^4}{4(0.9)^4}=.000038.$$

總之，如 n 愈大或 $x-x_0$ 之差愈小，則因略去尾量而生之誤差愈小。對於 x_0 值之選擇亦略有關係，但此種關係各種函數各不相同。

習 題 四 十 四

1. 用泰羅氏定理，以 x 之二次多項式表 $\cos x$. 此於 $x=0$ 附近得頗佳之近似值。當 $x=0.3$ 弧度時，如用此式，試估計其誤差。（以 $x_0=0$, $n=4$, 蓋在此情形下 $f'''(x_0)=0$ 也）。

2. 以 $x-2$ 之冪表 x^3-6x^2+1.（以 $x_0=2$, $n=3$. 以代數法將結果化爲原式，以資校對）。

3. 以 $x-\frac{\pi}{4}$ 之冪表 $\sin x$，並示當 $x-\frac{\pi}{4}=.05$ 時其三項以後之尾量小於 .00005.$\left(以\ x_0=\frac{\pi}{3},\ n=3\right)$。

4. 用泰羅氏定理示 $\sin x$ 與 x 之差不超過 $\frac{x^3}{6}$，故，設 $x=0.1$，則誤差在三位小數以外。（以 $x_0=0$, $n=3$）。

5. 求 e^x 之近似多項式，於 $x=\frac{1}{2}$ 時，須準確至第三位小數。

6. 以 x 之冪表 $log_{10}(5+x)$ 之近似值，設 $x=1$ 須準確至四位數。

7. 設 x 爲小值，則 $1+x+x^2$ 爲 $\frac{1}{1-x}$ 之近似式。

8. 設 $x=.03$ 則 $\frac{1}{1+x}$ 可以 $1-x+x^2$ 代之，並能準確至三位數。

9. 設 x 爲小值，示 $1+\frac{x^2}{2}$ 爲 $\sqrt{1+x^2}$ 之適當近似式。

10. 設 x 爲小值，示 $8-3x+\frac{3}{16}x^2$ 爲 $(4-x)^{\frac{3}{2}}$ 之適當近似式。

11. 以 x 之冪級數表 e^x，此於 $x=1$ 時須準確至六位小數。示 $e=2.718282-$.

第四十八節　無限級數

1. 泰羅氏級數　用泰羅氏定理，對於若干種函數，可以 $x-x_0$ 冪之多項估計其在某點 x_0 附近之值，其誤差則視項數之多少，卽多項式之次數，及 $x-x_0$ 之值而定。以 $R_n(x)$ 表誤差，卽 n 項後之尾量，而以 $P_n(x)$ 表有 n 項之多項式，則

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x).$$

設當 n 無窮增大時，對於 x 之若干數值，例如在間隔自 a 至 b 上之 x，其 $R_n(x)$ 趨於零。若果如此，則對於此間隔上任一 x 值，當 n 無窮增大時多項式 $P_n(x)$ 趨於 $f(x)$。其所用之記號爲

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\cdots\cdots$$

式後之點串表示項數連續無窮。右方級數謂之泰羅氏級數，而在間隔自 a 至 b 上之各點，

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0,\ \lim_{n\to\infty} P_n(x)=f(x),$$

則此級數爲函數 $f(x)$ 之精確代表式。如此表示之函數謂之『展爲 $(x-x_0)$ 之冪』或『於 x_0 附近展成泰羅氏級數』。

茲以 $f(x)=e^x$ 明之。依泰羅氏定理，

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^c,$$

式內 c 在零與 x 之間。設 x 爲正，則 c 小於 x，而 e^c 小於 e^x；設 x 爲負，c 亦爲負，而 e^c 小於一。故無論如何，尾量 $R_n(x)$ 不大於

$$\frac{x^n}{n!}e^{|x|}.$$

對於 x 之某已知值，

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}e^{|x|}=e^{|x|}\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

上式內最後項之極限爲零，蓋

$$\frac{x^n}{n!}=\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\cdots\frac{x}{n},$$

設 m 之絕對值大於 $2x$，凡在 $\frac{x}{m}$ 後之因式皆小於 $\frac{1}{2}$，而所有因式之積亦小於 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$，則當 n 無窮增大時，$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$ 必趨於零。故知無論 x 爲何值，e^x 可以泰羅氏級數表之。由此級數前數項組成之多項式可爲此函數之近似式，至在某限定誤差內所需要之項數則視 x 之值而定。

又如，依泰羅氏定理，

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots x^{n-1}+\frac{x^n}{(1-c)^{n+1}}.$$

設 x 在 $\frac{1}{2}$ 及 $-\frac{1}{2}$ 之間，則 c 亦在此間隔內，而 $1-c$ 大於 $\frac{1}{2}$，尾量

$$R_n(x)=\frac{1}{1-c}\left(\frac{x}{1-c}\right)^n$$

當 n 無窮增大時趨於零，蓋 $\frac{x}{1-c}$ 小於一也。故泰羅氏級數在間隔自 $\frac{1}{2}$ 至 $-\frac{1}{2}$ 內可完全代表此函數，但在此間隔外，則因 c 之不定，使吾人不能決定。但此函數於 $x=1$ 變爲無窮大，故欲應用泰羅氏級數 x 必小於 1。

2. 級數之收斂　通常吾人每以

$$S=u_0+u_1+u_2+\cdots u_{n-1}+u_n+\cdots\cdots$$

表一級數，記號 S 之意義爲

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n$$

式內 S_n 爲此級數首 n 項之和。在討論級數時最重要者卽是否有此極限之存在，卽當 n 無窮增大時，S_n 是否趨一定値爲極限。設有此極限，則此級數謂之收斂 (convergent)，否則謂之發散 (divergent)。有若干種級數祇須施以簡單之試驗卽知其爲收斂或發散，有若干種則須施以較詳密之試驗始能決定其性質，亦有無法試驗者。

玆略述數種決定級數性質之簡單測驗法如下：

(a) 正項和不超過某定値者　設級數

$$u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots$$

之各項皆爲正，並設其首 n 項之和 S_n 對於任何 n 値皆小於某固定數，A，則此級數爲收斂的，而

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S\leqq A。$$

欲此命題成立，應知 S_n 本身如不超過 A，卽不能趨於較 A 爲

大之極限，故只須極限之存在。因各項皆爲正數，故 S_n 隨 n 而增大。當 x 增大時，S_n 可達到若干數值或較若干數值爲大。但有若干數值爲 S_n 所永不能達者。所有正數不屬於前組即屬於後組，必有某數 N 在能達到或超過之數與不能達到之數之分割點。合於此條件之數 N 顯然爲 S_n 之極限，亦即 S 之值。

(b) 比較測驗法　命

$$u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots$$

爲一正項級數，設可求得一收斂正項級數

$$A=a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots$$

其每項 a_n 不小於前級數之相當項 u_n，則前級數亦收斂，其值 S 亦不大於 A。

設可求得一發散級數

$$b_0+b_1+b_2+\cdots\cdots$$

其每項 b_n 皆不大於相當項 u_n，則第一級數亦發散。

關於收斂之證明如下：S_n 恆小於或等於相當之和 A_n，但 A_n 恆小於 A，故 $S_n<A$，則依 (a)，此級數爲收斂，而其值爲 $S\leqq A$。

關於發散之證明，則因發散級數首 n 項之和 B_n 不能恆較任何固定數爲小，否則依 (a) 此級數將爲收斂級數。故 B_n 無限增大，而 S_n 既不小於相當之 B_n 亦必無窮增大也。

(c) 斂比測驗法　命

$$u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots$$

爲一無限正項級數，設

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=t,$$

若 $t<1$ 則此級數爲收斂的；若 $t>1$ 則級數爲發散的。

某項 u_{n+1} 與其前項 u_n 之比數謂之斂比 (test ratio)。若斂比

之極限，t，等於 1，則此法無效。

欲證此命題，可用比較法施於級數。

$$u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots$$

及正項級數

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots$$

依代數，

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r}=a(1+r+r^2+\cdots\cdots r^{n-1})。$$

而左式則可書爲

$$\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

設 $r<1$，上式第二項當 n 無窮增大時趨於零，設 $r\geqq 1$，則極限不存在。故

$$\frac{a}{1-r}=a+ar+ar^2+\cdots\cdots$$

爲收斂級數必 r 之絕對值小於 1，否則爲發散級數。

設 $t<r<1$，則因斂比趨於 t，故可求得某數 m，俾 $n>m$ 時，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<r.$$

以 $ar^m=u_m$，則對於 $n>m$，得 $ar^n>u_n$，因首 m 項不能影響此級數之收斂性，故依比較法，此級數爲收斂的。

設 $1\leqq r<t$，倣前論法，對於某數 m，於 $n>m$ 時，能令斂比大於 r，而此級數依比較法示其爲發散的。

(d) 絕對收斂　設以各項不同號之級數視爲概由正項組成而知其爲收斂的，則原級數亦收斂。

凡合乎此項測驗之級數謂之絕對收斂(absolutely convergent).

凡收斂正項級數皆絕對收斂。

證：令 S_n 爲假設原級數皆爲正項組成之首 n 項之和，令 A_n 爲原級數首 n 項內正項之和而 B_n 爲其中負項之和。設 T_n 爲原級數首 n 項之代數和，則

$$T_n=A_n-B_n,\ S_n=A_n+B_n$$

當 n 無限增加，S_n 趨於極限 S，故 A_n 及 B_n 必分趨於極限 A 及 B，故 T_n 亦必趨於極限 $T=A-B$。

(e) 間號級數　設級數

$$u_0-u_1+u_2-\cdots\cdots$$

之各項之符號正負相間，而對於 n 之任何值，恆有

$$|u_n|\geqq|u_{n+1}|$$

則此級數爲收斂，

當 n 增加時，首 n 項之和 S_n 更迭爲增減，但此項變動逐漸減少而卒趨於零。令 $\bar{S}_n$ 爲 S_n 及 s_{n-1} 之較大值，而 $\underline{S}_n$ 則其較小值，則 $\bar{S}_n=\underline{S}_n+u_{n-1}$. $\underline{S}_n$ 隨 n 增大而不能超過 u_0，故倣 (a) 之論法，$\underline{S}_n$ 必趨於一極限 $\underline{S}$。同理，$\bar{S}_n$ 隨 n 而減少，而永不小於 u_0-u_1，故必趨於一極限 $\bar{S}$。因 u_{n-1} 趨於零，$\bar{S}=\underline{S}$，又因 S_n 恆爲 $\bar{S}_n$ 或 $\underline{S}_n$，故必趨於極限 $S=\bar{S}=\underline{S}$。

設將收斂間號級數之各項皆改爲正項，則新級數之斂比小於 1，但可趨於 1 爲極限。故此級數非必絕對收斂。凡非絕對收斂之收斂級數謂之條件收斂 (conditionally convergent)。此二種最大之區別在：更換絕對收斂級數各項之次序可不影響其收斂性；設更換條件收斂之級數項之次序則可使其變爲一發散級數。

(f) 積分測驗法　大凡級數之 n 項每爲 n 之函數，如 $u_n=f(n)$，n 祇爲正整數。設視 n 爲一連續變數，而導微函數 $f'(n)$ 對所有之 n 皆值爲負，且積分

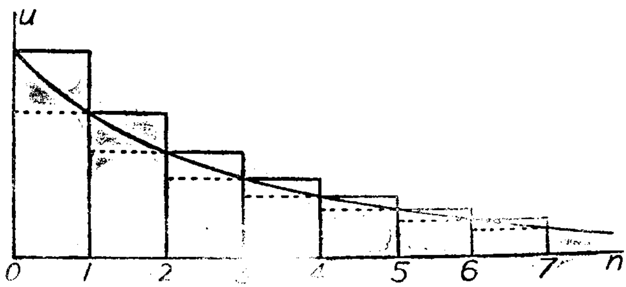
$$\int_0^\infty f(n)dn$$

存在，則此級數爲絕對收斂的，而其和 S 亦適合下列條件

$$S-u_0<\int_0^\infty f(n)dn<S$$

設上列積分不存在（即謂積分爲無限大），則此級數爲發散的。

此說之眞實性可於第 86 圖見之。令此曲線之方程式爲 $u=f(n)$，則曲線與 x 軸間之面積可以上列積分表之，而實線長方形之面積和



第 86 圖

爲 S，點線長方形面積和則爲 $S-u_0$，因此曲線之斜度爲負，故其關係必如上所示。

(g) 各種測驗法之應用　本段所論之級數測驗法並不十分完全，但將實際最適用者均包括在內。測驗時應先用何法雖無通則可尋，但由所測驗之級數之性質每能提示應選用何法。本款自 (a) 至 (f) 所述各法不過爲便利討論起見，其次序與實用上並無關係，例如實驗 (a) 幾不能直接應用，(d)則另須加用一法，通常皆先試 (c)，如不成功再試 (b) 或 (f)。(e) 僅能試有條件的收斂性，故必另用一法以定其是否絕對收斂。

試驗級數之性質時應知其收斂性或發散性並不因略去若干有限項或以公因數乘所有各項而變更。此於用比較測驗法及討論間號級

數時極為重要。

例如，級數

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots$$

之斂比為 $x^2\dfrac{2n+1}{2n+3}$，其極限為 x^2，故此級數於 $|x|<1$ 為絕對收斂，而於 $|x|>1$ 則為發散，但當 $x=\pm1$ 時，則此法無效。設 $x=\pm1$，則各項正負相間，依 (e)，此級數亦為收斂的。但此項收斂性係條件的，蓋設將各項改為正號而以 (f) 測驗之，得

$$\int_0^\infty\frac{dn}{2n+1}=\left[\log\sqrt{2n+1}\right]_0^\infty=\infty,$$

示此級數於 $x=1$ 或 $x=-1$ 並非絕對收斂。

習 題 四 十 五

1. 求以 x 冪表示 $\sin x$ 之泰羅氏級數。據其斂比示此級數於 x 為任何值時皆收斂。依泰羅氏尾量定理，如欲計算 $\sin\dfrac{\pi}{7}$ 準確至五位數字，共須若干項，欲 $\sin\dfrac{5\pi}{7}$ 準確至五位數字須若干項？

2. 示調和級數 (harmonic series) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots$ 為發散。(與級數 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\left[\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right]+\left[\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}\right]+\cdots\cdots$ 比較)。

3. 示下列級數為條件收斂：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

4. 與第 2 題調和級數比較，示級數

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots\cdots$$

於 $p \leqq 1$ 時爲發散的。並以積分法試驗之。

5. 示第 4 題之級數於 $p>1$ 時爲收斂的。(比較下列二級數

$$1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right]+\left[\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right]+\cdots$$

$$1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right]+\left[\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right]+\cdots\cdots$$

後列級數等於

$$1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots$$

其中 $r=\frac{1}{2^{p-1}}$。並用積分法測驗之)。

6. 求 $(a+x)^p$ 之泰羅氏級數，p 爲任何正負實數，並據斂比示設 $|x|<|a|$ 則此級數收斂，設 $|x|>|a|$ 則發散。設 p 爲正整數則此級數之項數係有限的並與由二項式定理 (第 19 節) 所得之結果相同。(在本題 p 爲任一實數之情形，由泰羅氏級數所得之結果卽所謂廣義二項式定理。

7. 用二項式定理以得 $(1+x^2)^{\frac{2}{3}}$ 之泰羅氏級數，並示，設 $|x|<1$ 則爲收斂級數。(第 6 題)。

8. 示級數

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$$

於 $x<1$ 絕對收斂(利用斂比)，於 $x=-1$，則爲條件收斂(第 3 題)，於 $x=1$ 或 $|x|>1$ 則爲發散。(與調和級數比較)。

9. 測驗下列級數之收斂性:

(a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots\cdots$;

(b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n+1}+\cdots\cdots$;

(c) $\frac{1}{10}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}-\frac{1}{40}+\cdots\cdots$。

10. 下列級數於 x 爲何值時則爲絕對收斂?

(a) $x-\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\frac{x^5}{\sqrt{5}}-\cdots\cdots;$

(b) $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots;$

(c) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}+\cdots$

(d) $1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{3^3}+\cdots\cdots;$

(e) $1-x+2x^2-3x^3+\cdots\cdots$

第四十九節　無限級數之運算

吾人已知,設級數之通項含有變數 x,則當 x 表某間隔內之一數時(姑設此間隔爲由 a 至 b)級數爲收斂,如此則級數在該間隔內可表一 x 之函數。茲討論以級數表示之函數如何運算。在未論之先,應完全明瞭及級數所表函數之特點。令

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots\cdots$$

表一函數級數,又設

$$a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots$$

表一正項常數級數*,如不論 n 爲何正整數,不論 x 表由 a 至 b 間隔內何數,恆有

$$|u_n(x)|\leqq a_n$$

則稱常數級數 a_n 在由 a 至 b 間隔上轄制 (dominate) 函數級數 $u_n(x)$。茲述一重要命題如下。

設某函數級數在由 a 至 b 之間隔內受一收斂常數級數所轄制,則在該間隔內,此函數級數爲絕對收斂。

由以前討論級數之絕對收斂性,上述命題顯然能成立。

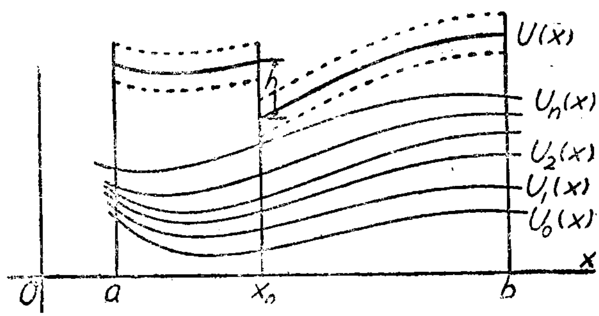
* 通項爲變數 x 之函數者稱爲函數級數,通項與 x 無關者稱爲常數級數——譯者註。

茲再述一重要命題：

如 $u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots\cdots$

各項在由 a 至 b 之間隔上均爲 x 之連續函數，若此級數爲一收斂常數級數所轄制配，則此級數在由 a 至 b 之間隔內表一 x 之連續函數 $U_{(x)}$。

欲證此命題，可令 $U_n(x)$ 表級數前 n 項之和。因二個或數個連續函數之和仍爲一連續函數，故 $U_n(x)$ 在所設間隔內爲連續函數。由前一定理知 $U(x)$ 在由 a 至 b 之間隔內趨近於某一定極限。設有函數 $U_{(x)}$ 在此間隔內 $|U_{(x)}|$ 能表 $U_{n(x)}$ 所趨極限，如能證明 $U_{(x)}$ 爲連續函數則此定理卽證明矣。



第 87 圖

設轄制級數爲

$$A=a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots;$$

且令 A_n 表此級數前 n 項之和。因不論 x 表內隔內何數，皆有 $|U_{(x)}|\leqq A$，可見函數無垂直漸近線。假定 $U_{(x)}$ 在 $x=x_0$ 處有一有限間斷點（第 87 圖），且設在間斷點處，函數相差之量爲 h 如圖所示。因在所設間隔內，有

$$|U(x)-U_n(x)|\leqq A-A_n,$$

因級數 n 項以後之尾量本身亦爲一級數，又絕對收斂條件在此處亦

能適用。但當 n 增大時，$A-A_n$ 可使小於$\frac{h}{}$，故 $U_n(x)$ 與 $U(x)$ 接近之程度足使 $U_n(x)$ 之值在圖中介於虛線之內。但 $U_n(x)$ 爲連續函數，故此事不可能。可見 $U(x)$ 不能在該處有一有限間斷點。

茲論級數在何種條件下方可施某種運算。

1. 加法與減法　設有二級數

$$U(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots\cdots+u_n(x)+\cdots\cdots,$$

$$V(x)=v_0(x)+v_1(x)+v_2(x)+\cdots\cdots+v_n(x)+\cdots\cdots,$$

當 x 爲某值時，同爲絕對收斂，則當 x 爲該某值時，有

$$U(x)\pm V(x)=[u_0(x)\pm V_0(x)]+[u_1(x)\pm v_1(x)]+\cdots\cdots$$
$$+[u_n(x)\pm v_n(x)]+\cdots\cdots$$

此等式之右端亦爲一收斂級數

因題設，當 x 爲某值時上列二級數爲絕對收斂，故祇須證明各項爲正數時能施加法運算，上述定理即完全證明矣。令 $U_n(x)$ 與 $V_n(x)$ 各表二級數前 n 項之和，並令

$$U(x)=U_n(x)+R(x),\ V(x)=V_n(x)+T_n(x),$$

則

$$U(x)+V(x)=U_n(x)+V_n(x)+R_n(x)+T_n(x).$$

因當 n 無限增大時，$R_n(x)$與 $T_n(x)$ 趨近於零，則 $[U_n(x)+V_n(x)]$ 趨近於 $[U(x)+V(x)]$。又，$U_n(x)+V_n(x)$爲新級數前 n 項之和，故此新級數爲收斂，可代表 $U(x)$ 與 $V(x)$ 之和。

2. 乘法　設當 x 爲某值時此二級數

$$U(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots\cdots+u_n(x)+\cdots\cdots,$$

$$V(x)=v_0(x)+v_1(x)+\cdots\cdots+v_n(x)+\cdots\cdots,$$

均爲絕對收斂，則 x 爲該某值時，

$$U(x)V(x)=u_0(x)\cdot v_0(x)+u_1(x)\cdot v_0(x)+u_0(x)+v_1(x)+\cdots\cdots$$

$$+u_{n-1}(x)\cdot v_n(x)+u_n(x)\cdot v_n(x)+\cdots$$

此新級數亦爲絕對收斂。

如 x 爲某值時各項均爲正數亦能達此結論，則證明將完備無缺。用前述記法，有

$$U(x)\cdot V(x)=U_n(x)\cdot V_n(x)+U_n(x)\cdot T_n(x)$$

$$+V_n(x)\cdot R_n(x)+R_n(x)\cdot T_n(x).$$

當 n 無限增大時，$R_n(x)$ 與 $T_n(x)$ 趨近於零，而 $U_n(x)\cdot V_n(x)$ 趨近於乘積 $U(x)\cdot V(x)$。新級數之諸項均爲 $u_i(x)\cdot v_j(x)$ 形，以 S_k 表新級數中前 k 項之和俾 $i+j\leqq k$。第一，如 $k=2n$ 則 S_k 包括 $U_n(x)\cdot V_n(x)$ 所有之項及 $U_n(x)\cdot T_n(x)$ 與 $V_n(x)\cdot R_n(x)$ 中一部分之項，故

$$S_{2n}>U_n(x)\cdot V_n(x).$$

又如 $k=n$ 則乘積 $U_n(x)\cdot V_n(x)$ 包含 S_k 中所有之項及 S_k 所無之項，故

$$U_n(x)\cdot V_n(x)>S_n$$

由此觀之，當 n 增大時 S_n 可使趨近於 S_{2n} 所趨近之數；故 S_n 與 S_{2n} 有一趨近於某極限，則其他一數亦趨近於此同一之極限。但 S_n 小於 $U_n(x)\cdot V_n(x)$ 必趨近於一等於或小於 $U(x)V(x)$ 之極限，而 S_{2n} 則大於 $U_n(x)\ V_n(x)$，故不能有小於 $U(x)\cdot V(x)$ 之極限，可見 $U(x)V(x)$ 顯然爲 S_n, S_{2n} 之公共極限。

3. 積分法　設有函數級數

$$U(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots\cdots+u_n(x)+\cdots\cdots$$

在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內受轄制於正項常數收斂級數

$$A=a_0+a_1+\cdots\cdots+a_n+,\cdots\cdots,$$

如在此間隔內每項均為 x 之連續函數則

$$\int_{x_0}^{x} U(x)dx=\int_{x_0}^{x} u_0(x)dx+\int_{x_0}^{x} u_1(x)dx+\cdots\cdots+\int_{x_0}^{x} u_n(x)dx+\cdots$$

x_0 與 x 為間隔內之某值，而此新級數在此間隔內受轄制於級數

$$A(b-a)=a_0(b-a)+a_1(b-a)+\cdots\cdots+a_n(b-a)+\cdots\cdots,$$

用以前記法，可寫

$$|U(x)-U_n(x)|\leqq A-A_n,$$

故有

$$\left|\int_{x_0}^{x} U(x)\,dx-\int_{x_0}^{x} U_n(x)\,dx\right|\leqq(A-A_n)\cdot\left|x-x_0\right|.$$

按

$$\int_{x_0}^{x} U_n(x)\,dx$$

為前 n 個積分之和，每一積分為新級數之一項，又當 n 無限增大時 $A-A_n$ 趨近於 0，可見

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} U_n(x)dx=\int_{x_0}^{x} U(x)dx.$$

逐項考察卽可知新級數受轄制於一常數級數。注意此新轄制級數亦為收斂。

4. 微分法　設函數級數

$$U(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots\cdots+u_n(x)+\cdots\cdots$$

在 $x=a$ 至 $x=b$ 間隔內為收斂，又設每項之導微函數所構成之函數級數

$$\frac{d}{dx}u_0(x)+\frac{d}{dx}u_1(x)+\cdots\cdots+\frac{d}{dx}u_n(x)+\cdots\cdots,$$

在由 a 至 b 之間隔內受轄制於常數級數

$$A=a_0+a_1+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots,$$

又設每項之導微函數在此間隔內均為連續，則此諸導微函數所構成之級數在所設間隔內能完全代表

$$\frac{d}{dx}U(x).$$

欲證明之，只須注意，在上述條件下，此導微函數級數，按前一命題可求其積分，求得結果為原來之函數級數加一串常數，

故 $$\frac{d}{dx}u_0(x)+\frac{d}{dx}u_1(x)+\cdots\cdots+\frac{d}{dx}u_n(x)+\cdots\cdots$$

非代表 $U(x)$ 之導微函數不可。

5. 冪級數　所謂 x 之冪級數者，形如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

之級數也。式中 a_0,a_1，a_n 均為常數，諸項按 x 之升冪排列。以後所論之函數級數大部分均為冪級數。

關於此級數有一重要之命題：

設有 x 之冪級數，當 $x=x_0$ 時為收斂，則凡能適合 $|x|<|x_0|$ 之一切 x 值必能使級數絕對收斂。

欲證此命題，設級數

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots\cdots$$

為收斂。取一數 M 俾不論 n 為何數，均有 $M>|a_nx_0^n|$，則在 $|x|<|x_0|$ 條件下，

$$|a_nx^n|=\left|a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right|<M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

但級數

$$M+M\frac{x}{x_0}+M\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\cdots\cdots$$

當 $|x|<|x_0|$ 時爲絕對收斂，故在上述條件下，級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$$

爲絕對收斂。

茲另述一重要命題如下：

設級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

當 $x=x_0$ 時爲收斂，則能適合 $|x|<|x_0|$ 之一切 x 值必能使下列級數

$$a_1+2a_2x+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots$$

收斂，此級數係就上一級數逐項求微分而得者。

欲證此命題，取 x_1 之正值，俾 $|x|<x_1<|x_0|$，則級數

$$a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots\cdots+a_nx_1^n+\cdots\cdots$$

爲收斂。欲證導微函數所構成之級數爲收斂，可設 x 爲正，與最後所舉之級數比較，證明，n 大於某值後，有

$$n\,a_n\,x^{n-1}\leqq a_n\,x_1^n$$

足矣。即只須證明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{x_1^n}<1.$$

按

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z}{k^{z-1}}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{k^{z-1}\log k}$$

可見若 $k>1$ 則極限值爲 0. 又

$$\frac{n\,x^{n-1}}{x_1^n}=\frac{1}{x_1}\,\frac{n}{\left(\frac{x_1}{x}\right)^{n-1}}$$

又，x_1 爲常數，令$k=\frac{x_1}{x}$，可見當 n 增大時$\frac{n\ x^{n-1}}{x_1{}^n}$趨近於零。

因任一冪級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots.$$

如當 $x=x_0$ 爲收斂，則在 $x=-x_1$ 至 $x=x_1$ 間隔內($|x_1|<|x_0|$)受轄制於正項收斂級數，

$$|a_0|+|a_1x_1|+|a_2x_1^2|+\cdots\cdots,$$

又因冪級數之任意一項在任何間隔內均爲連續，由前述諸命題，可知一切冪級數在其爲收斂之間隔內代表一連續函數，且可逐項施加，減，乘，微分，積分諸運算，所得結果在收斂間隔內均能有效。

茲再述一命題：

設有 x 之冪級數在某間隔內代表一函數，則此級數爲函數之泰羅氏級數(Taylor's series)。

設令

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$$

且令級數在 $x=x_0$ 時爲收斂，則

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots$$

$$f''(x)=2a+3!\,a_3x+4\cdot3a_4x^2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^n(x)=n!\,a_n+(n+1)!\,a_{n+1}\,x+\frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}x^2+\cdots\cdots$$

在 $|x|<|x_0|$ 條件下，上列諸等式均能成立。則當 $x=0$ 時，等式亦能成立，於是

$$a_0=f(o),a_1=f'(o),2a_2=f''(o),\cdots\cdots,n!\,a_n=f^{(n)}(o),$$

而原設級數變爲

$$f(x)=f(o)+xf'(o)+\frac{x^2}{2!}f''(o)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(o)+\cdots\cdots$$

等式右端卽泰羅氏冪級數也。

習　題　四　十　六

1. 寫出 $\sin x$ 之泰羅氏冪級數，於是由微分法求 $\cos x$ 之級數式。將二級數相乘，證 $2\sin x\cos x=\sin 2x$.

2. 用二項式定理寫出$\frac{1}{1-x}$之冪級數，由積分法求 $\log(1-x)$ 之級數式。

3. 求 e^x, e^{-x} 之級數式，於是由加減法求 $\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 與 $\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 之級數式。由微分法證明此二函數彼此互爲導微函數。

4. 求證

$$\int_0^x e^{-x^2}dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots\cdots$$

5. 寫出 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$之級數式，由積分法求 $\sin^{-1}x$ 之級數式。

6. 用二項式定理展開函數 $(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}$，由積分法，證明

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}=.508.$$

7. 若冪級數之導微函數卽冪級數本身則此冪級數爲函數 a_0e^x 之冪級數（a_0 係此級數之首項），試證明之。

8. 設 $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$，求證若 $\frac{d^2y}{dx^2}=-y$，則 $y=a_0\cos x+a_1\sin x$。

參 考 書 目

Advanced Colculus, W. F. Osgood (Macmillan, 1925), Chapters VII and X.

Advanced Calculus, E. B. Wilson (Ginn, 1912), Chapters III, XVI and XVII.

Mathematical Analysis. Goursat-Hedrick, Vol. I (Ginn, 1904). Chapters III, VII and IX.

Engineering Mathematics. *C. P. Stainmatz (McGraw-Hill, 1911), Chapter V.

第十一章　複數表出之量與週期函數

第五十節　複數量

1. 複數之標準式　凡複數均可寫作 $a+bi$ 之形式，式中 a 與 b 為實數，或有理或無理，而 i 為 $\sqrt{-1}$。複數包括實數及純虛數，純虛數者實數與虛數單位 i 之相乘積也。玆舉複數之實例數則如下：

$$2+\sqrt{-9}=2+3\sqrt{-1}=2+3i,\ \sqrt{-7}=i\sqrt{7},\ 4i,\ \sqrt{2}.$$

就此四例言，第二第三為純虛數，第四為實數。

讀者在解代數方程式時即知複數可為方程式之根，並知如何施以加減乘除等運算。運算時最好用 i 代 $\sqrt{-1}$，視 i 為一代數記號，得出結果用下式使之還原

$$i=\sqrt{-1},\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i. \qquad (1)$$

複數經加，減，乘後答數顯然仍可寫成 $a+bi$ 之形式。若用一複數除另一複數，可先將除數之共軛數同乘除數與被除數，則商亦可寫成 $a+bi$ 之形式。例如

$$\frac{3-8i}{2+5i}=\frac{(3-8i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}=\frac{-34-31i}{29}=-\frac{34}{29}-\frac{31}{29}i.$$

在應用時，須注意 $a,\ b$ 二實數之值若定則 $a+bi$ 表惟一之複數。換言之，如 $a+bi=c+di$ 則必 $a=c,\ b=d$。因移項後得 $a-c=(d-b)i$，此等式若兩端俱不為零則實數可與一虛數等，於理不合。

任取二實數 a, b，必可求得一實數 ρ 及一角 θ 適合

$$a=\rho\cos\theta,\ b=\rho\sin\theta,\ a+bi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta). \qquad (2)$$

此處 ρ 可視為正數，θ 之值由下式決定：

$$\sin\theta=\frac{b}{\rho},\quad \cos\theta=\frac{a}{\rho},$$

式中 $$\rho=\sqrt{a^2+b^2}.$$

複數尚有一重要之記法，在敍述之先，應規定 $e^{i\theta}$ 之涵義。當 x 爲實數時，指數函數 e^x 可表以冪級數

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

當 $x=i\theta$ 時，此冪級數之值卽作爲 $e^{i\theta}$ 之定義，於是將 (1) 式之值代入，得

$$e^{i\theta}=1+i\theta-\frac{\theta^2}{2!}-\frac{i\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\frac{i\theta^5}{5!}+\cdots\cdots \tag{3}$$

此級數之每一項均表一確定之數，或虛或實，將虛實分隔，並注意 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 之冪級數展式卽知

$$e^{i\theta}=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\cdots\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\cdots\cdots\right)=\cos\theta+i\sin\theta.$$

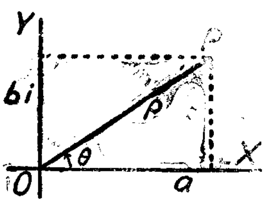
故可寫

$$a+bi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta} \tag{4}$$

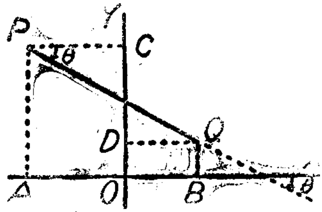
式中 ρ,θ 與 a,b 之關係仍如式 (2) 所示。可見一複數有三種不同之記法，應取何種記法視題目之性質而定。正數 ρ 稱爲此複數之模或絕對值 (modulus or absolute value)，θ 則稱爲幅 (amplitude or argument)。

2. 複數之圖示法　實數可以沿某軸之距離或線段之長表之。至複數則包括完全不同之二部，卽實數部 a，與純虛數部 bi。欲以幾何圖形表複數，可沿 OX 軸取一線段表實數部，沿 OX 之垂直線 OY 軸取一線段表虛數部；OX, OY 各稱爲實數軸與虛數軸（第 88 圖）。此虛實二部之和 $a+bi$ 可用二邊各長 a,b 所構成之矩形對角線 OP 表示。此線之長爲 ρ，與 OX 軸成 θ 角。取 OX 與 OY 爲坐標軸，

P 點之直角坐標爲 (a,b)，極坐標爲(ρ,θ)。



第 88 圖



第 89 圖

在 OX, OY 平面上，一切方向線段可代表一複數，且此數可書成式 (4) 中三種形式之一，式中 a, b 各爲線段在實數軸與虛數軸上之投影，ρ 爲線段之長，θ 爲線段與實數軸所成之角。茲以線段 PQ（第 89 圖）爲例，$a=AB$ 表一正數，$b=CD$ 表一負數，ρ 爲 PQ 之長，θ 爲 CPQ 角，此爲第四象限之角。

等長之平行線段，又有同一之方向，則二線段代表同一複數。用以代複數線段之位置不決定於數之本身，但由其與問題各方面之關係決定之。

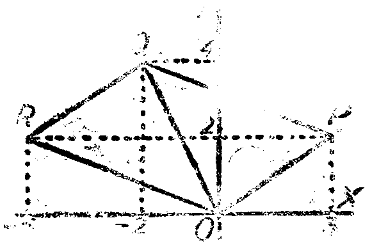
此處泛定複數之幾何表示法，此種表示法之便利，由複數用此種表示法後之便於運算見之。

3. 複數之運算　若將 $3+2i$ 與 $-5+2i$ 相加則答數爲 $-2+4i$。在圖解上，$3+2i$ 爲 OP 所代表（第 90 圖）；$-5+2i$，爲 PQ 所代表，而其和 $-2+4i$ 爲 OQ 所代表。將秩序改動，$-5+2i$ 用 OR 代表，$3+2i$ 用 RQ 代表，答數亦同。

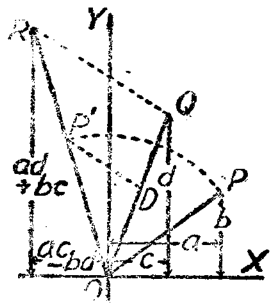
就此圖觀之如以代表二數之線段爲平行四邊形之鄰邊，則對角線表二數之和。任取二複數相加均有此關係。如有數個複數相加，可將代表此諸數之線段端與端依次相接如 AB, BC, CD, DE，而閉合線段 AE 代表諸數之和。其步驟與繪力之多邊形以求平面上諸同點力 (concurrent forces)之合力相同。

減法運算可變被減數之號然後運用加法以求差，由第 90 圖可

看出 $OQ-OP=PQ$ 表 $-2+4i-(3+2i)=-5+2i$。



第 90 圖



第 91 圖

茲以例說明複數之乘法。取

$$3-4i=5e^{i\theta}\left(\sin\theta=-\frac{4}{5},\ \cos\theta=\frac{3}{5}\right),$$

$$12+5i=13e^{i\theta}\left(\sin\phi=\frac{5}{13},\ \cos\phi=\frac{12}{13}\right)。$$

取二式左右兩端相乘得

$$56-33i=65\,e^{i(\theta+\phi)}.$$

此結果毫不矛盾，因

$$\sin(\theta+\phi)=\sin\theta\ \cos\phi+\cos\theta\ \sin\phi=-\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{33}{65}.$$

$$\cos(\theta+\phi)=\cos\theta\ \cos\phi-\sin\theta\ \sin\phi=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{56}{65}.$$

取任意二數，用三種不同之形式表其乘積如下：

$$a+bi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho\,e^{i\theta}$$

$$c+di=\sigma(\cos\phi+i\sin\phi=\sigma\,e^{i\phi}$$

$$(ac-bd)+(ad+bc)i=\rho\sigma[\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)]=\rho\sigma\,e^{i(\theta+\phi)}.$$

此結果亦可由幾何圖形推證。設 OP, OQ（第 91 圖）二線段代表此二數。作 OR 與 OX 成 $\theta+\phi$ 角。在 OR 上取 $OP'=\rho$，在 OQ 上取 $OD=1$。若 QR 平行於 DP'，OR 為所求乘積之長。

可見二複數之乘積亦為複數，其模為二複數模之乘積，其幅為二複數幅之和。除法之運算可由乘法推出。因被除數等於除數與商之乘積，故商之模為除數之模除被除數之模，商之幅為被除數之幅減除數之幅。除法之圖示亦可自第 91 圖看出。以 OQ 除 OR 得商 OP。用幾何作圖法求 OP，可在 OQ 上取 $OD=1$，在 OR 上取 P' 點使 OP' 平行於 QR，作 $OP=OP'$ 且令 POX 角等於 ROQ 角卽得。

將複數寫成第二或第三標準式顯然較寫成第一標準式更便於乘除之運算。若某數之模為 1，換言之，卽可寫成 $\cos\theta+i\sin\theta$ 或 $e^{i\theta}$ 之數，若以此數乘某數則被乘數之模不變惟使其幅增加 θ 而已。例如在第 91 圖中，若 Q 與 D 疊合，OP 與 OQ 之乘積為 OP'，OP 與 OP' 有相同之模，但 OP' 有較大之幅。同理以模為 1 之數除某數。僅將被除數負向旋轉除數所有之幅。因以 $e^{i\theta}$ 除某數卽以 $e^{-i\theta}$ 乘某數也。

玆論一特例：

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{i\frac{\pi}{2}},$$

以 i 乘某數，卽增加被乘數之幅 $90°$，以 i 除某數卽減被除數之幅 $90°$。

又
$$i^2=-1=\cos\pi+i\sin\pi=e^{i\pi}$$

故以 i^2 乘某數或除某數等於使被乘數或被除數旋轉 $180°$，故以 i^2 乘或除一數，卽將該數之方向顛倒。

以正實數乘或除某數僅變該數之模，其幅不變。在第 91 圖中，若 $\theta=0$，OR 必在 OQ 上。

以 $\rho e^{i\theta}$ 乘或除一數時，最好將因數 ρ 與 $e^{i\theta}$ 之效果分開。因數 ρ 僅改變他數之模稱為伸縮因數 (tensor)，另一因數 $e^{i\theta}$ 僅改變他數之幅稱為為旋轉因數(rotor)。

玆進而論複數之乘方與開方。

$$(a+bi)^k=\rho^k(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\rho^k e^{ik\theta} \tag{5}$$

由 (5) 之後一等式,可得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta, \tag{6}$$

此重要關係式稱爲棣慕弗定理 (De Moiore's theorem)。若 k 視爲正整數,將等式左端按二項式定理展開,比較等式虛實二部,則可以 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 之代數式表 $\cos k\theta$ 與 $\sin k\theta$。

不論 k 爲正數,負數,或分數,(5)(6) 二等式均能成立。故求複數之乘冪與方根均可利用此二式計算。欲明此二式之重要,必先注意不論 n 爲正整數或負整數或零,等式

$$\cos(\theta+2n\pi)+i\sin(\theta+2n\pi)=e^{i(\theta+2n\pi)}, \tag{7}$$

均能成立。由 (5)

$$(a+bi)^k=\rho^k e^{i(k\theta+2nk\pi)}. \tag{8}$$

若 k 爲正負整數,則只有一答數卽令 $n=0$ 所算出之數。若 k 爲有理分數則可有數個答數。令 $k=\dfrac{p}{q}$, p, q 爲無公因數之正整數,則有 q 個數值,卽對應於 $n=0, 1, 2\cdots\cdots q-1$ 等 q 個數值。由 $n=q, q+1\cdots\cdots$ 所算出之結果與 $n=0, 1\cdots\cdots$ 所算出之値同。

玆舉例以明之,求下式之値:

$$\left(1+\sqrt{-3}\right)^k=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^k$$

先令 $k=5$,則結果爲:

$$\left(1+\sqrt{-3}\right)^5=32\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=32\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)$$

$$=16(1-\sqrt{-3}).$$

次令 $k=\frac{1}{4}$, 則

$$\sqrt[4]{1+\sqrt{-3}}=2^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2n\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2n\pi}{4}\right)\right].$$

此四個不同之答數爲:

$$2^{\frac{1}{4}}(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ),(n=0)$$

$$2^{\frac{1}{4}}(\cos 105^\circ+i\sin 105^\circ),(n=1)$$

$$2^{\frac{1}{4}}(\cos 195^\circ+i\sin 195^\circ),(n=2)$$

$$2^{\frac{1}{4}}(\cos 285^\circ+i\sin 285^\circ),(n=3)$$

此四數有相同之模,惟各數之幅依次相差 90°,故代表四數之直線繞原點成等角。

再舉一例,解二項方程式 $x^5+1=0$.

$$x=\sqrt[5]{-1}=(\cos\pi+i\sin\pi)^{\frac{1}{5}}=e^{\frac{i(2n+1)}{5}\pi}$$

令 $n=0,1,2,3,4$ 得

$$x=\cos 36^\circ+i\sin 36^\circ$$

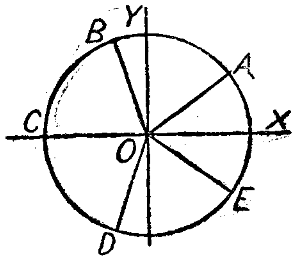
或　$\cos 108^\circ+i\sin 108^\circ$

或　$\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ$

或　$\cos 252^\circ+i\sin 252^\circ$

或　$\cos 324^\circ+i\sin 324^\circ$

此諸數在圖解上爲單位圓之半徑(第 92 圖)OA, OB, OC, OD, OE。方程式有惟一之實根即 $\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ=-1$, 以 OC 代表。



第 92 圖

4. 複變數函數　設 $z=x+iy$,式中 x, y 爲變數但其值爲實,而 z 稱爲複變數(複數變數之簡稱)。$w=f(z)$ 謂之複變數函數。此等函數爲數學中重要之一支,茲略述梗概如次。

此與第一章所述實變數函數相同,如任與自變數 z 一複數值可求得其函數 w 之對應值,則稱此複數函數爲確定。定函數之法不一,於是函數可依此分類此亦與第一章所述實變數函數同。

設 w 爲 z 之代數函數　則不論 z 爲何值,均可按本節第三款所述之方法算出 w 之值。此處代數函數亦可分爲多項整函數,有理分函數,及無理函數。

茲規定指數函數之意義如次。在第一款中曾以冪級數確定 $e^{i\theta}$ 之意義,做此卽以冪級數確定 e^z 之意義,

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots\cdots \tag{9}$$

若再假定指數律能適用於此處,則有

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{10}$$

由定義,

$$1+(x+iy)+\frac{(x+iy)^2}{2!}+\cdots\cdots$$

$$=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots\right)\left[\left(1-\frac{y^2}{2!}+\cdots\cdots\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots\right)\right].$$

此關係式亦可用第 49 節所述之加法與乘法證實。

複數對數之定義亦與實數對數之定義同，謂 $w=\log z$ 卽謂 $z=e^w$ 也。由上述之式 (7) $e^w=e^{w+2in\pi}$（式中 n 爲任意整數），故如

$$z=\rho[\cos(\theta+2n\pi)+i\sin(\theta+2n\pi)]=e^{\log\rho}e^{i(\theta+2n\pi)}$$

於是可寫

$$\log z=\log\rho+i(\theta+2n\pi) \tag{11}$$

此處 $\log\rho$ 爲 z 之模 ρ 之自然對數。

又因　$z=e^w=10^{w\log_{10}e}$

於是，$\log_{10}z=w\log_{10}e=\log_{10}e\cdot\log z=\log_{10}\rho+i(\theta+2n\pi)\log_{10}e$ (12)

用(11)，(12)二式可寫出任何複數之自然對數或常用對數。玆考察一特例，凡負數之幅 θ 皆爲 π，故 $\theta+2n\pi$ 爲 π 之奇數倍數。用加法求諸實數乘積之對數時，如因數中負數個數爲偶則 $\theta+2n\pi$ 爲 π 之偶數倍數，否則爲 π 之奇數倍數。均在用對數計算時只取絕對值，但結果爲正爲負可藉此推測。

在確定三角函數定義之前，先注意 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，及 $e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$，於是

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},\quad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

此之謂正弦餘弦之倭拉氏式(Euler's expressions)。

於是可由下二式確定正餘弦之意義

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{13}$$

或用 z 之冪級確定其意義，

$$\begin{aligned}\sin z&=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\cdots\\ \cos z&=1-\frac{z}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\cdots\end{aligned} \tag{14}$$

應用公式（9）與（13）運算後知（13),(14）之意義相同。正切餘切正割餘割之定義仍如普通三角學上所述，以正弦餘弦之比或倒數表之。

雙曲線函數(hyperbolic functions)之定義用下式表出

$$\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\ \cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \tag{15}$$

$$\tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z},\ \coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z}$$

$$\operatorname{csch} z=\frac{1}{\sinh z},\ \operatorname{sech} z=\frac{1}{\cosh z} \tag{16}$$

由（13）與（15）可得

$$\begin{aligned} i\sin z&=\sinh(iz),\ \cos z=\cosh(iz)\\ i\sinh z&=\sin(iz),\ \cosh z=\cos(iz)\end{aligned} \tag{17}$$

令 $z=x+iy$ 代入(13),再應用(15),(17) 可得

$$\begin{aligned}\sin(x+iy)&=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y,\\ \cos(x+iy)&=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y.\end{aligned} \tag{18}$$

倣此可得

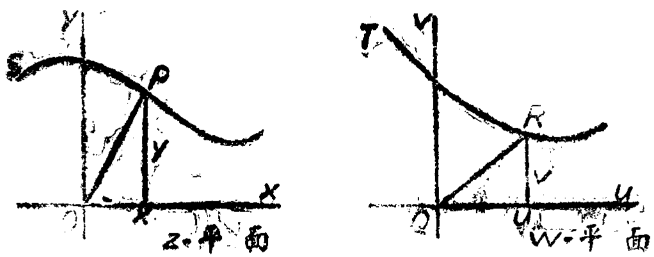
$$\begin{aligned}\sinh(x+iy)&=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y\\ \cosh(x+iy)&=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y\end{aligned} \tag{19}$$

根據此處所述定義三角學中一切標準公式均易求得，且可推得關於雙曲線函數之相當公式。

欲作複變數函數之圖解，應知此等函數可寫為

$$w=f(z)=u+iv$$

式中 $z=x+iy$ 實數 u, v 為 x, y 之函數。按第二款所述 z 之值可用平面上一點表之，其對應值 w 可於另一平面上作出一點以表之。



第 93 圖

令 $z=x+iy$ 可用 OP 代表 z（第 93 圖）；x, y 爲 P 之坐標。倣此用 QR 表 w；u, v 爲 R 點之坐標，至 u, v 之值則由 x, y 決定。在 z 平面上任取一點，z 卽有一對應值；z 之値定，w 之值隨之而定，w 平面上亦有一定點 R 與 w 之值對應。若 P 點沿軌跡 PS 移動，則 R 亦描出一對應軌跡如 RT。舉例說明如下，令

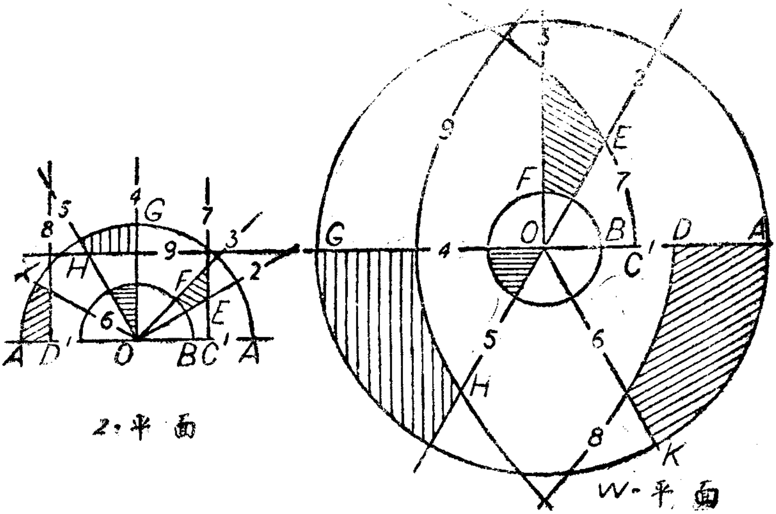
$$w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2i\,xy.$$

此處 $u=x^2-y^2, v=2xy$. 令代表 z 之點沿直線 $y=mx$ 移動，則代表 w 點所描之軌跡可用一組含參變數之方程式
$u=(1-m^2)x^2$, $v=2mx^2$ 表之，消去 x 後得

$$v=\frac{2m}{1-m^2}u.$$

若 z 點描一圓 $x^2+y^2=r^2$, 則可得 $u^2+v^2=r^4$ 亦爲一圓。若 z 描鉛直線 $x=a$, 則 $u=a^2-y^2$, $v=2ay$, 或 $v^2=-4a^2(u-a^2)$ 爲一拋物線。在 z 平面上如有一曲線網，在 w 平面上亦有一對應曲線網。吾人稱 w 平面上之圖形係根據 z 平面上一特種函數之關係所繪出者。在第 94 圖中，係將在上述各方程式中予 a, m, r 以定値作出數曲線，茲作 $y=b=1.5$ 之曲線。因 z 有二値對應於 w 一値，故 z 平面上第一第二象限上之值，卽需 w 平面之全部。z 平面上第三第四象限上之值，需另一 w 平面以資作圖。z 平面上四塊加陰影線地面，

在 w 平面上亦有四塊對應地面各以相似之陰影線標出。兩平面上之對應點記以相同文字，兩平面上之對應線記以相同數字。



第 94 圖

做此任與一函數卽可將 z 平面上之曲線按一定法則移置 w 平面上，根據每一函數可得一特異之圖。

關於複數函數之性質欲再有所論列非本書範圍所及。惟不妨在此一述者，卽微分法及積分法對於此章所述各簡單函數均可應用，無區別實變數複變數之必要。將第三第四各章之 x, y 易以 z, w 卽可導出諸重要公式。惟前章之幾何解釋對於複變數不適用耳。

習題四十七

1. 將下列各數寫成複數之三種標準式，

(a) $5+12\sqrt{-1}$; (b) $2-\sqrt{-21}$; (c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

(d) $e^{i\frac{\pi}{3}}$;　　(e) $\dfrac{3+\sqrt{-2}}{4-\sqrt{-7}}$;　　(f) $3e^{2i}$.

2. 合併下列各複數:

(a) $(5-3i)+(8+7i)$;　　(b) $(4+9i)(3-2i)$;

(c) $e^{i\frac{\pi}{4}}$; $-e^{i\frac{\pi}{6}}$;　　(d) $3e^{-i\pi}\cdot\frac{1}{5}e^{i\frac{\pi}{3}}$;

(e) 以 $5e^{i\frac{\pi}{6}}$ 除 $2+\sqrt{-12}$.

3. 將第二題中,每一數之圖作出,於是用圖解法求出答數。

4. 用二項式定理求下列各乘羃之值,再用棣慕弗定理計算,比較二法所得答數。

(a) $(3+4i)^3$;　　(b) $\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5$;　　(c) $\left(\frac{5}{13}-\frac{12}{13i}\right)'$.

5. 求下列各根數之值,用圖示法表出諸根之值。

(a) $\sqrt[3]{1}$;　　(b) $\sqrt[6]{-1}$;

(c) $\sqrt[4]{7-5i}$;　　(d) $\sqrt[5]{32(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)}$.

6. 解下列各方程式:

(a) $x^3+1=0$;　　(b) $x^4-1=0$;　　(c) $x^6+1=0$;

(d) $x^4+7=0$;　　(e) $x^5-13=0$;　　(f) $x^6+4x^3+8=0$.

7. 據 $x^5+a^5=(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4)(x+a)$,
解方程式

$$x^4-2x^3+4x^2-8x+16=0.$$

8. 以 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 表 $\cos 5\theta$。

9. 設 $z=x+iy=2+i\frac{\pi}{3}$ 將下列各 z 之函數化成 $a+bi$ 之形式;

(a) e^{2z};　　(b) $\log(z-1)$;　　(c) $\sin\frac{1}{2^z}$;　　(d) $\tan 2z$;

(e) $\cosh 3z$;　(f) e^{-z^2};　(g) $\sec iz$.

10. 求證下列各關係式:

(a) $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$;

(b) $1-\tanh^2 z=\operatorname{sech}^2 z$;

(c) $\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1\cos z_2+\cosh z_1\sinh z_2$.

11. 若 $w=\cosh z$ 求證 $z=\cosh^{-1}w=\log(w+\sqrt{w^2+1})$。

12. 若 $w=\sin z$ 求證 $z=\sin^{-1}w=-i\log(iw+\sqrt{1-w^2})$。

13. 設 $w=z^2-2z$, 欲 w 平面上 w 點描 $u=v$ 線, z 平面上 z 點應描何軌跡? 當 z 點之軌跡為 $x=y$ 時, w 之軌跡為何?

14. 設 $w=\cos z$, 求證 z 之軌跡如下式所示, 則 w 之軌跡為直線。

(a) $x=\frac{\pi}{2}$;　(b) $x=0$;　(c) $y=0$;　(d) $\cot x=\tanh y$。

15. 設 $w=\sinh z$, 寫出四個 z 平面上軌跡之方程式, 且令此等軌跡移置 w 平面上代表直線。

16. 設 $w=e^z$, 將 z 平面上 $x=0, x=1, y=0, y=1$, 所包之正方形移置 w 平面上。

17. 利用對數求下列乘積之值

$$(-3.27)(\sqrt{-742})\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(179e^{i\frac{\pi}{3}}\right).$$

第五十一節　簡諧函數

1. 標準式　凡三角函數均有週期性, 當自變數遞增時, 函數之值週而復始。自變數使函數完全經過一週之增量稱為函數之週期。就特例言, 凡能用

$$y=c\sin(kx+\phi). \tag{1}$$

表出之函數皆稱簡諧函數(simple harmonic function),式中 c, k, ϕ 皆表常數。係數 c 稱為幅 (amplitude), ϕ 為相角(phase angle), k 確定週期之長短,因 kx 經 2π 之變距後, y 之值週而復始,故週期為$\frac{2\pi}{k}$。x 改變一單位, y 所經過之週數為$\frac{k}{2\pi}$,此數稱為頻率 (frequency)。(1)式亦可寫作 $y=\cos\left(kx+\phi-\frac{\pi}{2}\right)$, 故簡諧函數亦可用餘弦函數表出,或正餘弦同用如下:

$$y=a\cos kx+b\sin kx \tag{2}$$

式中 $a=c\sin\phi$ 而 $b=c\cos\phi$。(1) (2)二式為簡諧函數之標準式。

由第 50 節之等式(13),有

$$c\sin(kx+\phi)=\frac{c}{2i}\left[e^{i(kx+\phi)}-e^{-i(kx+\phi)}\right]$$

$$=\frac{c}{2i}e^{i\phi}\cdot e^{kix}-\frac{c}{2i}e^{-i\phi}\cdot e^{-kix}.$$

又,
$$a\cos kx=\frac{a}{2}(e^{kix}+e^{-kix}),$$

$$b\sin kx=\frac{b}{2i}(e^{kix}-e^{-kix}),$$

注意 i 為 $-i$ 之倒數,遂有

$$y=\frac{a-bi}{2}e^{kix}+\frac{a+bi}{2}e^{-kix}.$$

假設 (1), (2) 表同一函數,可令

$$A=\frac{c}{2i}e^{i\phi}=\frac{a-bi}{2},\ B=\frac{c}{2i}e^{-i\phi}=\frac{a+bi}{2},$$

得,
$$y=Ae^{kix}+Be^{-kix} \tag{3}$$

此爲簡諧函數之第三標準式，但在此式中欲 y 爲實值必 A, B 互爲共軛數，卽 A, B 有相同之實數部，虛數部則等值而異號。

任一簡諧函數可以三種標準式之一表出，每一式中各有三常數；在 (1) 式中爲 c, k, ϕ；(2) 式中爲 a, b, k；(3) 式中爲 A, B, k。簡諧函數用數學方法推得時，每以第三種標準式出現，例如由解微分方程式時所得結果；但欲討論此函數時，則以代成 (1), (2) 式爲便。

2. 數個簡諧函數之合併　含同一變數之二個函數可相加而成另一函數，但二個週期相同而幅與相角互異之函數相加則有特點在。設此二函數可表以

$$y_1 = a_1 \cos kx + b_1 \sin kx$$

$$y_2 = a_2 \cos kx + b_2 \sin kx$$

其和爲

$$y = y_1 + y_2 = (a_1 + a_2)\cos kx + (b_1 + b_2)\sin kx.$$

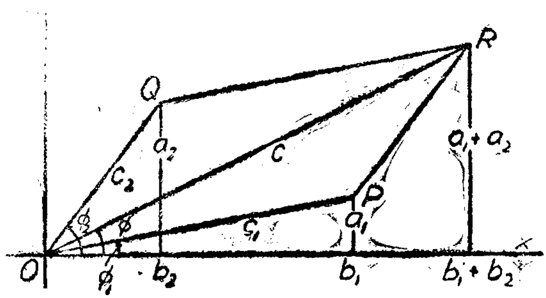


圖 95

將此與下列二複數之相加相聯繫

$$(b_1 + a_1 i) + (b_2 + a_2 i) = (b_1 + b_2) + (a_1 + a_2) i$$

並以第 50 節第 2 款之圖解法處理複數之相加者處理之.在第 95 圖中線段 OP, OQ, OR 各表複素數

$$b_1+a_1i=c_1e^{i\phi_1}$$

$$b_2+a_2i=c_2e^{i\phi_2}, \tag{4}$$

$$(b_1+b_2)+(a_1+a_2)i=ce^{i\phi}.$$

若將此三複素數與下列三週期函數相連繫

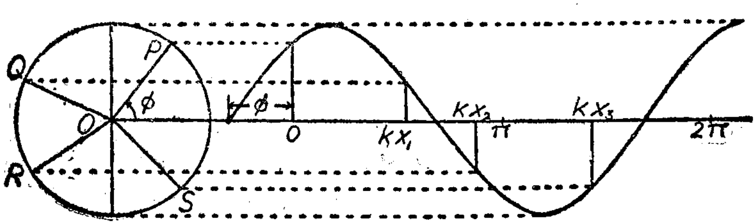
$$a_1\cos kx+b_1\sin kx=c_1\sin(kx+\phi_1),$$

$$a_2\cos kx+b_2\sin kx=c_2\sin(kx+\phi_2), \tag{5}$$

$$(a_1+a_2)\cos kx+(b_1+b_2)\sin kx=c\sin(kx+\phi),$$

可見在圖解上諸向量相加可代以相繫之簡諧函數相加。故以(4)式爲簡諧函數(5)之記號代表(symbolic representations)實爲便利。數個簡諧函數相加減卽可以與之相繫之複數相加減代之。因$-e^{i\phi}=e^{i(\phi+\pi)}$，減一簡諧函數卽等於加一相角相反之簡諧函數。

在應用記號代簡諧函數以便利運算，未嘗論及週期或頻率，但讀者須知惟週期或頻率相同之函數始可以此法處理之。又 (4) 式爲簡諧函數之記號代表不可與簡諧函數之指數形式 (3) 並爲一事。函數之記號代表與函數本身之關係可由第 96 圖明白指示。設 OP 爲 $ce^{i\phi}$

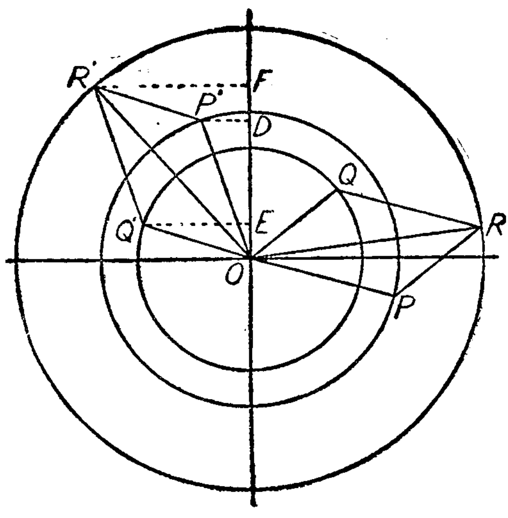


第 96 圖

之代表，而 $ce^{i\phi}$ 本身又爲簡諧函數 $c\sin(kx+\phi)$ 之記號代表。當 $x=x_1$ 時，欲求函數之對應值，可作 POQ 角等於 kx_1 弧度，OQ 在鉛直線上之投影卽所求函數之値。第 96 圖示函數之圖形，其水平比例尺上以 kx 之弧度爲單位，對應於 x 值之縱坐標卽由上述之圖解

法得之。圖上有 $kx=0, kx_1=POQ, kx_2=POR, kx_3=POS$ 及 $kx+\phi=0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 諸組值。

二簡諧函數相加之圖示可由第 97 圖完全表出。令 OP 與 OQ 各爲二簡諧函數之記號代表,OR 爲其和,當 kx 之值爲 POP', QOQ' 及 ROR' 時 P',Q',R' 各點於鉛直線上之投影各爲 D,E,F 點,於是 OD, OE 各爲二函數之值,OF 爲其和之值。當 x 變值時,平行四邊形 $OP'R'Q'$ 繞 O 點旋轉,其形狀大小均不變。縱坐標 OD, OE 隨 x 而變,當 kx 經過 2π 時 OD, OE 即週而復始,但二縱坐標之和仍以時長時短之 OF 表之。



第 97 圖

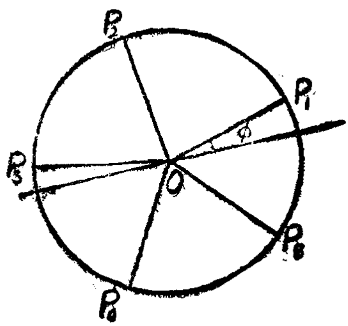
3. 多相關係 (polyphase relations) 二個或數個同週期簡諧函數之和可做複數求和或相量求和法應用平行四邊形律,既已詳述於前。設有 n 個簡諧函數,週期同,幅亦同,惟相角依次相差 $\frac{2\pi}{n}$ 之倍數。舉例如下:

$$c\,sin(kx+\phi),\ c\,sin\left(kx+\phi+\frac{2\pi}{n}\right), c\,sin\left(kx+\phi+\frac{4\pi}{n}\right),$$
$$\cdots\cdots c\,sin\left(kx+\phi+\frac{n-1}{n}2\pi\right) \tag{6}$$

諸函數之記號代表在圖解上均爲長度爲 c 之線（可以一圓之諸半徑表之），各線依次相差 $\frac{2\pi}{n}$。諸函數之和顯然爲 0，故可書等式如下：

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} sin\left(kx+\phi+\frac{2r\pi}{n}\right)=0, \tag{7}$$

此式不論 k, x, ϕ 與 n 爲何值均能成立。第 98 圖表 $n=5$ 時，OP_1，至 OP_5 表五個同週幅之函數



第 98 圖

設有一組函數如下

$$c\,sin(kx+\phi),\ c\,sin\left(kx+\phi+\frac{2m\pi}{n}\right),\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots,\ c\,sin\left(kx+\phi+\frac{n-1}{n}2m\pi\right), \tag{8}$$

式中 m 爲一整數。此處相角相差$\frac{2m\pi}{n}$。設 m 與 n 之最高公因數爲 p，令 $m=m'p, n=n'p$。此 n 個相角與 ϕ 之差可寫成 $2m'\pi M$ 之

形，其中 M 之 n 個值可排成 p 列 n' 行如下：

$$\begin{array}{lllll}
0, & \frac{1}{n'}, & \frac{2}{n'}, & \ldots, & \frac{n'-1}{n'}, \\
1, & 1+\frac{1}{n'}, & 1+\frac{2}{n'}, & \ldots\ldots, & 1+\frac{n'-1}{n'}, \\
2, & 2+\frac{1}{n'}, & 2+\frac{2}{n'}, & \ldots\ldots, & 2+\frac{n'-1}{n'}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
p-1, & p-1+\frac{1}{n'}, & p-1+\frac{2}{n'}, & \ldots\ldots, & p-1+\frac{n'-1}{n'}.
\end{array}$$

因任取 $\frac{2m'\pi r_1}{n'}$ 與 $\frac{2m'\pi r_2}{n'}$，若 r_2-r_1 不爲 n' 之倍數，則此二數之差不能爲 2π 之倍數故對應於第一列各值之函數均不相同，若 $n'>1$ 則諸函數之和爲零。第二列所舉相角較其上各角相差 $2m'\pi$，故其所表之函數與第一列同。由此可知其餘各列亦均與第一列同。故若 $n'>1$，即若 m 不爲 n 之倍數，則

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} sin\left(kx+\phi+\frac{2mr\pi}{n}\right)=0. \tag{9}$$

若 $n'=1$，則 $p=n$, M 之 n 個值均在第一行，各行既表相同之函數，故若 m 爲 n 之倍數則有 n 個相同之函數，

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} sin\left(kx+\phi+\frac{2mr\pi}{n}\right)=n\,sin(kx+\phi) \tag{10}$$

茲論特例，令 $n=8$, $m=4$, 則 $p=4$, $m'=1$, $n'=2$。函數爲：

$$\begin{array}{ll}
c\,sin(kx+\phi), & c\,sin(kx+\phi+\pi) \\
c\,sin(kx+\phi+2\pi), & c\,sin(kx+\phi+3\pi) \\
c\,sin(kx+\phi+4\pi), & c\,sin(kx+\phi+5\pi)
\end{array}$$

$$c\,sin(kx+\phi+6\pi),\qquad c\,sin(kx+\phi+7\pi).$$

同行之四函數形異而值同，同列二函數值同而號異，故八函數之和爲零。

次令 $n=9, m=6$，則 $p=3, m'=2, n'=3$。此九函數相角與 ϕ 之差可列表如次：

$$\begin{array}{lll} 0, & \dfrac{4\pi}{3}, & \dfrac{8\pi}{3}, \\ 4\pi, & 4\pi+\dfrac{4\pi}{3}, & 4\pi+\dfrac{8\pi}{3}, \\ 8\pi, & 8\pi+\dfrac{4\pi}{3}, & 8\pi+\dfrac{8\pi}{3}. \end{array}$$

由每列之值得三組相同之函數，每組三函數之和等於零。

最後令 $n=5, m=4$，則 $p=1, m'=4, n'=5$. 各函數相角與 ϕ 之差爲

$$0,\quad \frac{8\pi}{5},\quad \frac{16\pi}{5},\quad \frac{24\pi}{5},\quad \frac{32\pi}{5},$$

此五值各相當於

$$0,\quad -\frac{2\pi}{5},\quad -\frac{4\pi}{5},\quad -\frac{6\pi}{5},\quad -\frac{8\pi}{5},$$

此五函數如第 98 圖所示，惟次敍爲 $OP_1, OP_5, OP_4, OP_3, OP_2$.

習 題 四 十 八

1. 將下列各函數寫成三種標準形式，並舉出各函數之幅，週期，及相角：

(a) $4\,sin\,6x-3\,cos\,6x$;　　(b) $142\,sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$;

(c) $5e^{3ix}=5e^{-3ix}$;　　(d) $2i(e^{ix}-e^{-ix})$;

(e) $(7-5i)e^{8ix}+(7+5i)e^{-8ix}$.

2. 求證下列各式亦為簡諧函數：

(a) $4\cos^2 x-2$;　　(b) $\sqrt{1-\cos 6x}$;

(c) $3\sin 2x\cos 2x$;　　(d) $\frac{1}{2}-\sin^2\left(\frac{x+\pi}{3}\right)$;

(e) $7\left[\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right]$.

3. 有一時間 t（單位秒）之簡諧函數，每秒鐘經過 10 週，當 $t=0$ 時函數之値為 2，當 $t=\frac{1}{40}$ 時，函數之値為 5，求寫出此函數。

4. 求 $S_1=10\sin 300t$ 與 $S_2=10\sin\left(300t+\frac{2\pi}{3}\right)$ 二簡諧函數之和。

5. 有一三相遞電線(3-phase electric transmission line)，其所傳遞之三個電流各為 $i_1=I\sin\omega t$, $i_2=I\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)$, $i_3=I\sin\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)$。求證不論何時此三電流之和為零。

6. 旋曲柄 (rotating crank) 之離心力為 $M\omega^2$，式中 M 為旋轉部分之質量與其重心至旋轉軸距離之乘積，ω 表角速率（以每秒若干弧度為單位）。此力在二直角坐標軸上之分力為 $M\omega^2\sin\theta$ 與 $M\omega^2\cos\theta$，θ 為曲柄與二軸某一軸之角移 (angular displacement)。若有 n 個曲柄，其位置相距之角度依次各為 $\frac{2\pi}{n}$，求證此諸曲柄之離心力互相平衡。令 $n=4$ 繪圖以明之。

7. 將題 6 應用於往復機 (reciprocating engine)，在向外動程 (stroke) 之始，$\theta=0$。曲柄上所受力對於軸中平行於動程之線所生力矩為 $aM\omega^2\sin\theta$，式中 a 為線至曲柄所居平面之距離。求證若諸曲柄大小相等，各曲柄間之角距相同，且沿軸等距離置放，求證諸曲柄所生力矩不能平衡。令 $n=3$, $n=5$ 繪圖。假定取力矩之軸在第一曲

柄所居平面內。

8. 曲柄上因往復部分所生之力約爲

$$F=\frac{W}{g}r\omega^2\cos\theta+\frac{W}{g}\frac{r^2}{l}\omega^2\cos 2\theta,$$

式中 $\frac{W}{g}$ 爲往復部分之質量，r 爲曲柄半徑，l 爲連桿 (connecting rod) 之長，其餘各記號與題 6 題 7 同。第一項稱爲原力 (primary force)第二項稱爲副力(secondary force)。若曲柄之裝置與前二題同，求證，$n>1$ 時，原力互相平衡，$n>2$ 時，副力亦互相平衡，惟 $n=2$ 時則否。

第五十二節 週期函數之分析

福利葉氏級數 福利葉(Fourier) 氏之名恆加於形式如下之級數上：

$$c_0+c_1\sin(x+\phi_1)+\cdots\cdots+c_n\sin(nx+\phi_n)\cdots\cdots \qquad (1)$$

除首項外，其餘每項均爲一簡諧函數，由上節討論之結果，知此級數亦可寫爲

$$a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots\cdots+a_n\cos nx+\cdots\cdots$$
$$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots\cdots+b_n\sin nx+\cdots\cdots \qquad (2)$$

式中 $a_0=c_0$, $a_n=c_n\sin\phi_n$, $b=c_n\cos\phi_n$. 若不論 x 爲何實値，此級數均爲收斂，則此級數表一 x 之函數，可記以 $f(x)$, 此函數以 2π 爲週期；因 c_0 爲常數；第二項爲

$$c_1\sin(x+\phi_1)=a_1\cos x+b_1\sin x,$$

稱爲 $f(x)$ 之第一諧項(first harmonic)，當 x 經過 2π 時，此項之値卽週而復始，又，任意一項

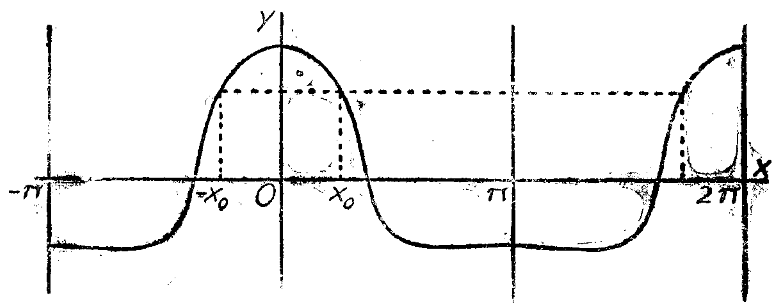
$$c_n\sin(nx+\phi_n)=a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

稱爲 $f(x)$ 之第 n 諧項，在 x 經過 2π 時，此項之值經過 n 週重複之值。

茲進而考察此函數所具之特點。先假設級數 (2) 只有餘弦項，於是

$$f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots\cdots+a_n\cos nx+\cdots\cdots \tag{3}$$

此處每項在 $x=x_0$ 時如爲某值在 $x=-x_0$ 或 $2\pi-x_0$ 時，亦有此值，故曲線對稱於 $x=0, x=\pi, x=2\pi, \cdots\cdots$ 諸線（第 99 圖）。



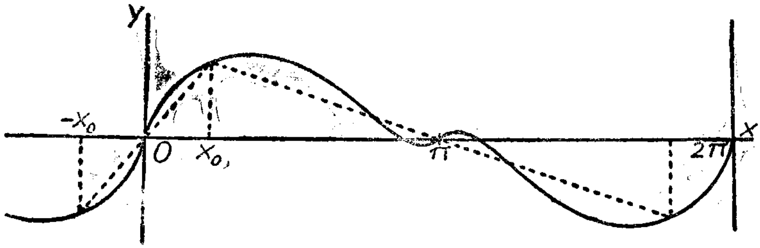
第 99 圖

次假設級數 (2) 只有正弦項，於是

$$f(x)=b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots\cdots+b_n\sin nx+\cdots\cdots \tag{4}$$

此處每項在 $x=x_0$ 時與 $x=-x_0$ 或 $2\pi-x_0$ 時，有相同之絕對值，而互異其號，故曲線對稱於 x 軸上，$x=0, \pi, 2\pi\cdots\cdots$ 諸點（第 100 圖）。曲線又通過此等對稱點，因 x 爲 π 之倍數時，各項之值均爲 0 也。

凡有正弦項之函數不能有第 99 圖之對稱形勢，亦猶有餘弦項之函數不能有第 100 圖之對稱形勢，此點固顯而易見。



第 100 圖

2. 係數之值　設級數 (2) 表函數 $f(x)$, 假定此函數由 $x=0$ 至 $x=2\pi$ 可求積分,且在此間隔內級數能逐項求積分,則

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\int_0^{2\pi} a_0 dx+R_0,$$

式中 R_0 表形式如下之諸項

$$\int_0^{2\pi} a_n \cos nx\,dx,\quad \int_0^{2\pi} b_n \sin nx\,dx$$

每一項之值均爲零。故

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx. \tag{5}$$

其次,分別以 $\cos mx$ 乘函數與級數再求積分,則

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx=\int_0^{2\pi} n_0 \cos mx\,dx+R_m=R_m$$

式中 R_m 表形式如下之諸項

$$\int_0^{2\pi} a_n\cos nx\cos mx\,dx,\quad \int^{2\pi} b_n \sin nx\cos mx\,dx.$$

按三角恆等式

$$\cos nx\cos mx=\frac{1}{2}\cos(m+n)x+\frac{1}{2}\cos(m-n)x,$$

若 $m \neq n$ 此等項均爲簡諧函數而諸定積分之值爲 0。若 $m=n$，則最後一項爲常數 $\frac{}{2}$，而積分之值爲 πa_m。又按恆等式

$$sin\, nx\, cos\, mx=\frac{1}{2}sin(m+n)x-\frac{1}{2}sin(m-n)x,$$

不論 n 爲何數諸定積分之值均爲零，因卽令 $m=n$ 末項亦爲零。故 $R_m=\pi a_m$ 而

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos mx\ dx \tag{6}$$

最後，分別以 $sin\, mx$ 乘函數及級數各項然後求積分，則

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin mx\, dx=\int_0^{2\pi}a_0 \sin mx\, dx+S_m=S_m,$$

式中 S_m 表形式如下之諸項

$$\int_0^{2\pi}a_n\cos\ nx \sin mx\, dx,\ \int_0^{2\pi}b_n\sin nx\sin mx\, dx.$$

此處之第一式與前述之第二式同形，故不論 n 爲何數其值均爲零。就第二式言

$$sin\, nx\, sin\, mx=\frac{1}{2}cos(m+n)x+\frac{1}{2}cos(m-n)x,$$

當 $m \pm n$ 時積分爲零，$m=n$ 時其值爲 πb_m。故 $S_m=\pi b_m$，而

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin mx\, d \tag{7}$$

假定上述各步驟均有效，則在 (6)，(7) 二式中依次令 $m=1, 2, 3$ …… 卽得確定代表 $f(x)$ 之福利葉級數各項係數之方法。

3. 應用時之條件　在何條件下一函數可用福利葉級數代表，非本書所能窮究。茲但根據權威作家之結論，將條件之足以用福氏級數代函數者一述。

(a) 凡連續週期函數在每週內極大與極小之個數爲有限者可代以福氏級數。若依自變數 x 計函數之週期爲 T; 令 $\frac{2\pi x}{T}=x'$,則依新變數 x' 計,函數之週期卽爲 2π,故級數之形爲 (2),由對稱形勢可化爲 (3) 或 (4)。(5) (6),(7) 三式則可藉以定常數之值,每個常數恰有一值。

(b) 函數除有 (a) 中所述各性質外,有不爲無限大之間斷點數個(個數亦有限),且在間斷點 $x=x_0$ 處函數之值作爲

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \quad 與 \quad \lim_{x\to x_0+} f(x)$$

二個單向極限(unilatral)之平均數,則函數可代以福氏級數。

(c) 任何函數在一有限間隔內,例如由 $x=a$ 至 $x=b$,皆可以福氏級數代表,惟必須週期函數之一完全週相當於上述函數之間隔且在此間隔內函數能適合上述 (a) 或 (b)條件。若令:

$$x'=\frac{2\pi x-2a x}{b-a}$$

則 $x=a$ 時 $x'=0$, $x=b$ 時 $x'=2\pi$,故依變數 x' 計,所欲討論之間隔變爲由 0 至 2π。凡 x' 之函數在此間隔內之值,吾人可作一週期函數,當自變數由 2π 至 4π 時或推廣之自 $2n\pi$ 至 $2(n+1)\pi$ 時,函數之值週而復始,重複不已。

福氏級數受轄制於正項常數級數

$$|c_0|+|c_1|+|c_2|+\cdots\cdots+|c_n|+\cdots\cdots,$$

若此常數級數爲收斂則由第 49 節所論,福氏級數必代表一連續函數。由此節所論又知欲求函數之積分可逐項求代此函數之級數之積分。若將福氏級數逐項求微分,新級數各係數絕對值所構成之常數級數若爲收斂,則新級數可表原級數所代表函數之導微函數。

但對於福氏級數尚有較第 49 節所述更進一步之結果,在條件

$(a), (b), (c)$ 之下如一函數可用福氏級數代表，則逐項求積分之結果卽屬有效。不待驗看其轄制級數。但另一方面逐項求微分是否有效則尙未可必。級數逐項求微分後，驗新級數係數形成之常數級數是否收斂爲充分可靠之測驗法，但非必要之條件，因導微函數可爲間斷函數也。

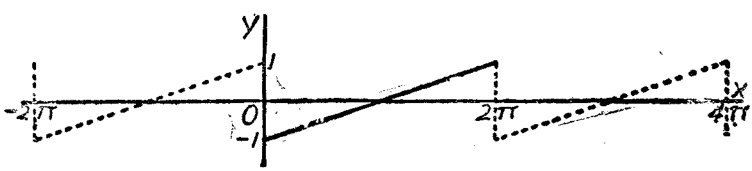
4. 常數定値法　欲用福氏級數代表之函數形式不一，或爲已由一公式表出之函數，或爲繪就之圖解，或爲由實驗測定之一組値列成表格者。實用上係數之定値法視函數呈何形式而異。

(a) 若函數係由一公式表出者，用公式 (5),(6),(7)，求積分法確定係數之値最爲便利。例如在 $x=0$ 至 $x=1$ 間隔內求以福氏級數表 $y=x$。令 $x'=2\pi x$，則 $y=\frac{x'}{2\pi}$，故必須討論 $x'=0$ 至 $x'=2\pi$ 間隔內之變化。

暫時取消 x' 右上角之撇號($'$)，按公式(5)

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x\,dx}{2\pi}$$

令函數 $y-a_0=\frac{x}{2\pi}-\frac{1}{2}$ 由 0 至 2π 爲函數之一週（第 101 圖），



第 101 圖

(4)式所具之對稱形勢，故級數內只有正弦項。事實上，卽用公式 (6) 亦必得 $a_m=0$ 之結果，（不論 m 爲何値）。應用公式 (7) 則有

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2\pi}\sin mx\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi^2 m^2}\Big[\sin mx - mx\cos mx\Big]_0^{2\pi} = -\frac{1}{\pi m}.$$

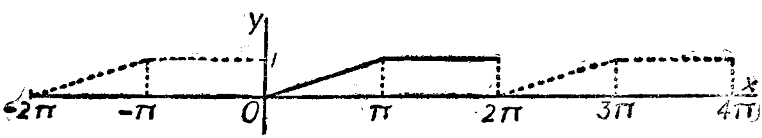
將 x 之撇號恢復,得

$$\frac{x'}{2\pi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left(\sin x'+\frac{1}{2}\sin 2x'+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\sin nx'+\cdots\cdots\right),$$

用原來之變數 x 表出,爲

$$x=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left(\sin 2\pi x+\frac{1}{2}\sin 4\pi x+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\sin 2n\pi x+\cdots\cdots\right).$$

在 0 與 1 之間,不論 x 爲何值此等式恆能成立，惟右端之週期函數,當 x 爲整數時,有間斷點,此時函數之值爲$\frac{1}{2}$，卽函數在所設間隔兩端之值，0 與 1 之平均數也。



第 102 圖

茲另舉一例,設有 x 之函數 y, 由 $x=0$ 至 $x=\pi$ 時 $y=\frac{x}{\pi}$, 由 $x=\pi$ 至 $x=2\pi$ 時 $y=1$（第 102 圖）。由式 (5)

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\pi \frac{x}{\pi}dx+\int_\pi^{2\pi}dx\right]=\frac{3}{4}.$$

由式(6) 得

$$a_m=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi \frac{x}{\pi}\cos mx\,dx+\int_\pi^{2\pi}\cos mx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{(\pi m)^2}\Big[mx\sin mx+\cos mx\Big]_0^\pi+\frac{1}{\pi m}\Big[\sin mx\Big]_\pi^{2\pi}.$$

由此知，若 m 爲偶數 $a_m=0$，若 m 爲奇數 $a_m=-\frac{}{(\pi m)^2}$。又由式 (7) 得

$$b_m=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\pi\frac{x}{\pi}\sin mx\,dx+\int_\pi^{2\pi}\sin mx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{(\pi m)^2}\left[\sin mx-mx\cos mx\right]_0^\pi-\left\{\frac{1}{\pi m}\left[\cos mx\right]_\pi^{2\pi}\right.,$$

由此知，若 m 爲偶數 $b_m=-\frac{1}{\pi m}$，若 m 爲奇數 $b_m=-\frac{1}{\pi m}$.

集合所有之討論，遂得

$$y=\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\left[\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x+\cdots\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots\cdots\right].$$

(b) 有時函數雖由某方程式確定，但不能或不便按 (5)，(6)，(7) 各式求積分。在此種情形下，有時可用他法推出該函數之福氏級數展式，最低限度展式前數項簡諧函數係數之近似值可以求得。若函數可用正弦及餘弦之冪級數表出，則此等正餘弦之冪級數可化成倍角之正餘弦，故結果可寫成福氏級數之形式。

將 $\cos x$ 之 n 次冪化成倍角之函數可用下列恆等式

$$\cos^n x=\frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos nx+n\cos(n-2)x\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x+\cdots\cdots+R_n\right] \qquad (8)$$

方括弧中各項係數與二項定理中展式之係數同。若 n 爲偶數，項數爲 $\frac{n}{2}+1$，最後一項 R_n 爲一常數，其值爲 $(a+b)^n$ 展式中居中一項係數之半。若 n 爲奇數，項數爲$\frac{n+1}{2}$級數中無常數項。

等式(8)極易推出，只須將餘弦寫成倭拉氏式卽得

$$\cos^n x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\Big[e^{inx}+ne^{i(n-2)x}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}e^{i(n-4)x}+\cdots\cdots+ne^{-i(n-2)x}-e^{-inx}\Big].$$

在方括弧中首末二項合併卽得 $2\cos nx$，次項與倒數第二項合併得 $2n\cos(n-2)x$，餘類推。若 n 爲偶數，居中一項爲常數，卽二項展式之係數，若 n 爲奇數，項數雙雙合併成爲倍角之餘弦。

同理，用正弦之倭拉氏式可將 $\sin x$ 之 n 次羃展開，惟所得之式因 n 之爲奇爲偶而異其形。

若 n 爲偶數，

$$\sin^n x=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\Big[\cos nx-n\cos(n-2)x$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x+\cdots\cdots\pm R_m\Big] \tag{9}$$

方括弧中各項與 (8) 式方括號中各項同，惟 (9) 式中各項符號正負相間。若 n 爲 4 之倍數則方括號前之符號爲正，否則爲負。

若 n 爲奇數，

$$\sin^n x=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\Big[\sin nx-n\sin(n-2)x$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin(n-4)x+\cdots\cdots\Big]. \tag{10}$$

此處項數爲$\frac{n+1}{2}$，最後一項有 $\sin x$，各項係數按二項定理推出，方括弧前符號之正負視 $n-1$ 爲 4 之倍數與否而定。

茲舉例以明之，在往復機 (reciprocating engine) 或往復喞筒

(reciprocating pump)內，活塞 (piston) 之位移 (displacement) s 爲曲柄角 (crank angle)θ 之函數。其關係式爲

$$= L + r - r\cos\theta - \sqrt{L^2 - r^2\sin^2\theta},$$

式中 L 爲連桿(connecting rod)之長，r 爲曲柄之半徑。令 $pL = r$

則
$$\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\theta} = \frac{r}{p}(1 - p^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}$$

用二項式定理展開，則上式可書爲

$$\frac{r}{p}\left[1 - \frac{1}{2}p^2\sin^2\theta - \frac{1}{8}p^4\sin^4\theta - \frac{1}{16}p^6\sin^6\theta + \cdots\cdots\right].$$

應用等式 (9)，則得

$$\sin^2\theta = \qquad\qquad -\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2},$$

$$\sin^4\theta = \qquad \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8},$$

$$\sin^6\theta = -\frac{1}{32}\cos 6\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta - \frac{15}{32}\cos 2\theta + \frac{10}{32}.$$

集合結果得 s 之福氏級數式

$$s = a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + a_4\cos 4\theta + a_6\cos 6\theta + \cdots\cdots$$

式中常數可用下列各式求出算至 p 之五次方爲止：

$$a_0 = r\left(1 + \frac{p}{4} + \frac{3p^3}{64} + \frac{5p^5}{256}\right)$$

$$a_1 = -r$$

$$a_2 = -r\left(\frac{p}{4} + \frac{p^3}{16} + \frac{15p^5}{512}\right)$$

$$a_4 = r\left(\frac{p^3}{64} + \frac{3p^5}{256}\right)$$

$$a_6 = -r\left(\frac{p^5}{512}\right)$$

玆再舉一例，設有函數

$$y = \frac{\sin x}{1 - p\cos x},$$

式中 p 爲小於 1 之正數。上式可書爲

$$y = \sin x(1 + p\cos x + p^2\cos^2 x + p^3\cos^3 x + \cdots\cdots),$$

由等式 (8)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2},$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x,$$

於是此函數可表以下式

$$y = \left(1 + \frac{p^2}{2}\right)\sin x + \left(p + \frac{3p^3}{4}\right)\sin x\cos x$$

$$+ \frac{p^2}{2}\sin x\cos 2x + \frac{p^3}{4}\sin x\cos 3x + \cdots\cdots$$

式中乘積式可改爲和差式如下：

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\sin x\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin x,$$

$$\sin x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x,$$

於是 y 可以下式表出，其中係數準確至 p 之三方。

$$y=\left(1+\frac{p^2}{4}\right)\sin x+\left(p+\frac{p^3}{4}\right)\sin 2x$$

$$+\frac{p^2}{4}\sin 3x+\frac{p^3}{8}\sin 4x+\cdots\cdots.$$

(c) 若 (a),(b) 二法施於某函數不能得出結果，吾人仍可求得級數前數項係數之近似值。至於項數之多寡，近似值之可靠程度，則視關於此函數所知之限度與性質而定。

函數或以方程式表出，或以圖示，或由經驗數據，不論函數以何法表出，不能由所得題材作出由 $x=0$ 至 $x=2\pi$ 函數之圖形，至少亦能得其近似之圖形。曲線下之面積，如注意二軸上比例尺，可利用以定等式 (5) 之 a_0。由第四節之方法，(6),(7) 二被積函數之圖形

x_0	y	$\cos x$	$y\cos x$	$\sin x$	$y\sin x$
0	9.3	1.000	9.30	0.000	0.00
30	15.0	0.866	12.99	0.500	7.50
60	17.4	0.500	8.70	0.866	15.07
90	23.0	0.000	0.00	1.000	23.00
120	37.0	−0.500	−18.50	0.866	32.04
150	31.0	−0.866	−26.85	0.500	15.50
180	15.3	−1.000	−15.30	0.000	0.00
210	4.0	−0.866	−3.46	−0.500	−2.00
240	−8.0	−0.500	4.00	−0.866	−6.93
270	13.0	0.000	0.00	−1.000	−13.20
300	−14.0	0.500	−7.10	−0.866	−12.30
330	−6.0	0.866	−5.20	−0.500	−3.00
和	111.0		−41.36		55.68

x_0	y	$\cos 5x$	$y \cos 5x$	$\sin 5x$	$y \sin 5x$
0	9.3	1.000	9.30	0.000	0.00
30	15.0	−0.866	−12.99	0.500	7.50
60	17.4	0.500	8.70	−0.866	−15.07
90	23.0	0.000	0.00	1.000	23.00
120	37.0	−0.500	−18.50	−0.866	−32.04
150	31.0	0.866	26.85	0.500	15.50
180	15.3	−1.000	−15.30	0.000	0.00
210	4.0	0.866	3.46	−0.500	−2.00
240	−8.0	−0.500	4.00	0.866	−6.93
270	−13.0	0.000	0.00	−1.000	13.20
300	−14.0	0.500	−7.10	0.866	−12.30
330	−6.0	−0866	5.20	−0.500	3.00
和			3.62		−6.14

如 m 之值確定卽可製出，曲線下之面積可藉以定積分之值，因此可以定係數之值。曲線下之面積或用面積計(planimeter)測出，或用其他方法測出，而定一特殊係數之值，不必先定其他係數之值。例如定第七項係數之值，不必知第七以前諸項係數之值也。

眼前之題材，可供給沿 x 軸每隔一定長間隔之函數值，至少可得其近似值。此等值卽隔一定間隔之縱坐標也。在分析簡諧函數時，因其應用之方式不同，因而有各種不同之列表法，其中有在一定間隔內利用縱坐標以計算各項之值者。茲舉其一應用較爲普遍之方法，以資說明。此法用第 45 節之梯形律以求面積，因此得 (5), (6), (7) 各定積分之近似值。在第一行，列 x 之值，通常以度爲單位，並取對應於此諸 x 值之縱坐標；在第二行，列 $y=f(x)$ 之對應值；其餘各行，

列 $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x$ 等值，列至計算所需之程度爲止，再遠則列 $y\sin x, y\cos x, y\sin 2x, y\cos 2x$ 等。在 $x=0$ 之縱坐標亦列入，但 $x=2\pi$ 不列入，若此二值不同，週期函數爲間斷，則 $x=0$ 之值取二值之平均數。令 M 爲任一行諸值之平均數，則 $2\pi M$ 爲其對應積分之值，而其對應常數立可求得。上表所列各行之值足以定 a_0, a_1, b_1, a_5, b_5 之值，並表明第五項係數之值不必由前數項之係數決定。

縱坐標凡 12，其和爲 111.0，平均數 9.25 故 $a_0=9.25$。同理，$y\cos x, y\sin x$ 之平均數各爲 -3.44，與 4.64，由此得 $a_1=-6.88$, $b_1=9.28$。類推，可得 $a_5=0.604$, $b_5=-1.62$。

用列表法，若縱坐標之數不多於 $2m$，不必試求 a_m 或 b_m。在此例中不論 x 爲何值，$\sin 6x$ 恆爲零，而 $\cos 6x$ 之值則相間爲 $+1$ 與 -1，故 a_6 與 b_6 之值不甚可靠，蓋縱坐標之個數太少也。大凡，縱坐標愈多，則定出之函數愈益可靠，但縱坐標個數如至少爲 12，且超過 $2m$，如上例之情形，結果固頗爲可靠也。

習 題 四 十 九

1. 由 $x=0$，至 $x=\pi$ 函數 $y=1$；由 $x=\pi$ 至 $x=2\pi$，$y=-1$；求一福氏級數代表此函數。注意級數之形如 (4)。

2. 將題 1 之級數逐項求積分，於是得一級數，由 $x=0$ 至 $x=\pi$ 表函數 $y=x$，由 $x=\pi$ 至 $x=2\pi$ 表 $y=2\pi-x$，惟積分常數未能確定。令 $y=0, x=0$，用一常數項級數表此積分常數。

3. 第 4 款第一說明 (a) 中，得一級數在 $x=0$ 至 $x=1$ 間隔內代表 $y=x$。證明此級數不能施微分運算。

4. 求題 3 所述級數之積分，令 $x=0$ 則積分常數可以一常數級數表出，藉此定積分常數之值。令 $x=1$ 以驗算之。再令 $x=\frac{1}{2}$ 證明

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\cdots$$

5. 設有函數 $y=(1+p\sin x)^{\frac{3}{2}}$,式中 $|p|$ 小於 1, 試以福氏級數表此函數準確至 p 之三次冪。

6. 橢圓形之極方程式為

$$\rho=\frac{2ep}{1-e\cos\theta}$$

式中 e 小於 1。用含 θ 之福氏級數表 ρ,係數算至 e 之五次冪。

7. 在題 6 中,令 $p=5, e=0.1$, 且令 $\theta=0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$, 等值以計算 ρ 之值。用如此算出之 12 個 ρ 值計算 a_0, a_2, a_3, 與 a_5 之數值, 以之與題 6 之結果相比較, 仍令 $p=5, e=0.1$。再用 $\theta=0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ 等六個 ρ 值計算 a_0, a_2, a_3 與以前之結果比較。

8. 就題材能及之範圍, 分析週期函數其中六個縱坐標如下表所示:

x······	0°	60°	120°	180°	240°	300°
y······	−0.85	0.95	0.72	2.75	−1.37	−2.20

9. 根據下列數據,求常數項,及函數之第一,第三, 第五, 諧諧函數。

x······	0°	30°	60°	90°	120°	150°
y······	−18	−39	−39	−8	22	22
x······	180°	210°	240°	270°	300°	330°
y······	11	10	14	12	15	−1

10. 某曲線之七個縱坐標 (每隔 $\frac{\pi}{6}$ 取一縱坐標) 如下表所示:

x······	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
y······	0	676	660	940	1004	554	0

此屬於前半週之題材。茲根據下列三種不同之假設分別計算諧函數之值。

(a) 級數無正弦項。注意:由題設可見下半週之值可將上半週之值倒列卽得,由每行 12 組值所得之平均數與僅由前 6 組值算得者相同。

(b) 級數中無餘弦項。據此則下半週之值亦可將上半週之值倒列而得,惟符號各異。除 y 行之值外,其他各行之平均值由 6 組所得與 12 組所得相同。

(c) 級數中僅有奇次諧函數。據此則 $x_0+\pi$ 之縱坐標與 x_0 之縱坐標,同值而異號,故後半週仍與前半週各值之排列順序同,惟符號各異。此處 6 組之平均數與 12 組者同。(a),(b) 中之計算可用於此處。又此處無常數項。

11. 某交流電流曲線之縱坐標如下表所示:

x……0	10	20	30	40	50	60	70	80
y……5	4	20	22	19	25	29	29	30
x……90	100	110	120	130	140	150	160	170
y……38	46	38	41	50	32	30	33	7

假定下半週此等值重複出現,且排列順序與符號完全相同,求第 1,第 5,第 15 諧函數。

12. 求一福氏級數在 $x=0$ 至 $x=2$ 間隔內代表 $y=e^{-x}$,(a) 用積分法定係數之值,(b)每隔 0.2 取縱坐標之值。(注意:$x=0$ 時縱坐標之值應取 $x=0$ 與 $x=2$ 算出之值之平均數)。

參 考 書 目

Engineering Mathematics, C. P. Steinmetz (McGraw-Hill, 1911) Chapters I–V.

Hyperbolic Functions, James McMahon (Mathematical Monographs, Merriman and Woodward, No. 4, Wiley,1906).

Advanced Calculus, W. F. Osgood (Macmillan, 1925). Chapters XVI and XX.

Advanced Calculus, E. B. Wilson (Ginn, 1912). Chapters VI, XVII and XVIII.

Mathematical Analysis, Goursat-Hedrick, Vol. I (Ginn, 1904), Chapters IX, also Vol. II, Part I (Ginn, 1916)

Integral Calculus, W. E. Byerly (Ginn 1888), Chapters II and XVII.

Functions of a Complex Variable, T. S. Fiske (Mathematical Monograpns, Merriman and Woodward, No. 11, Wiley, 1906)

Graphical and Mechanical Computation, Joseph Lipka (Wiley 1918), Chaptars VII.

The Calculus of Observations, Whitaker and Robinson (Blackie and Son, 1924), Chapters X and XIII.

Fourier's Series and Spherical Harmonics, W. E. Byerly (Ginn, 1893), especially Chapters II and III.

Fourier's Theorem and Harmonic Analysis, Albert Eagle (Longmans, 1925).

第十二章　多元函數

第五十三節　幾何的看法

以前各章所舉函數限於一個自變數。本章當一論處理含二個或多個變數之函數之方法。設有一個或數個方程式，例如 m 個方程式中，每方程式表 n 個變數間之關係，則自變數必有 $n-m$ 個，因將 $n-m$ 個變數之值確定後即可解 m 個聯立方程式確定其餘 m 個變數之值，否則用消去法在 m 個方程式中只能消去 $m-1$ 個變數，在消去式中仍有一變數為其他 $n-m$ 個變數之函數。例如在

$$x=u-v,\ y=u+v,\ z=u^2-v^2,$$

三方程式中含有五個變數，可視 x,y 為自變數而 z 為其因變數或函數，因 x,y 定則 u,v 定，u,v 定則 z 之值亦定。若自三式中消去 u,v 即可得 $z=xy$，式中 z 直接以 x,y 二自變數表出。

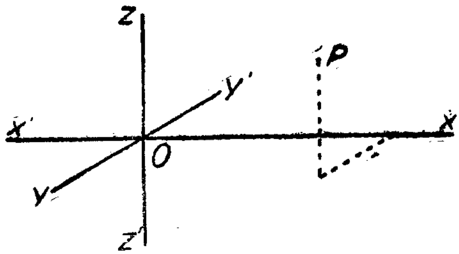
此處諸方程式視為聯立，但有時不如將每一方程式各元之關係分別討論，最後再將結果集合。在上式中 x,y,z 三者均可視為自變數 u,v 之函數以討論之。

多元函數之記法與單元之函數者相彷，惟括號中之文字較多耳。例如 $z=f(x,y)$，$W=\phi(x,y,z)$ 分別表 z 為 x,y 之函數，W 為 x,y,z 之函數。

單元函數，藉平面解析幾何之助，得以圖形表二變數間之關係，因此極便研究。同理，三度空間幾何學之觀念在此處可助讀者了解多個變數間之關係。將幾何之語言推廣至四元或多元有時頗覺便利，而四度空間或多度空間幾何之合邏輯且適於應用固毫無疑義，惟不易想像耳。

1. 坐標與軌跡　已知三變數間之關係，例如 $\phi(x,y,z)=0$，或 $z=f(x,y)$，吾等可視 x,y,z 三數為與三個互相垂直平面間之距離，

即謂 x, y, z 可視為空間直角坐標制中之三坐標也。原點 O 選定後，三軸即隨之而定，通常令 xx' 沿水平方向，zz' 沿鉛直方向 而 yy' 則垂直於上述二軸所決定之平面（第 103 圖）



第 103 圖

圖中所示 P 點之三個坐標均為正。坐標面分空間為八部份，謂之卦限 (octants) 三坐標間正負號之配合亦恰有八種。任取三實數 x, y, z 或正或負，必代表空間一點，空間一點必與三平面有一定之距離，表此距離之數即此點之坐標，x 表點與 yz 平面之距離，y 表點與 xz 平面之距離，而 z 表點與 xy 平面之距離。

設 P 點之坐標 x, y, z 限定適合於關係式 $\phi(x, y, z)=0$ 者，則 x, y 之值如指定後，z 必有一確定之值，若 z 隨 x, y 連續變值，則 P 點之軌跡為一面(surface)。例如由 P 點至原點之距離為$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，若 $x^2+y^2+z^2=16$，則 P 點至原點 O 之距離恆為 4，故 P 點之軌跡為一球面，其半徑為 4，而原點為球心。

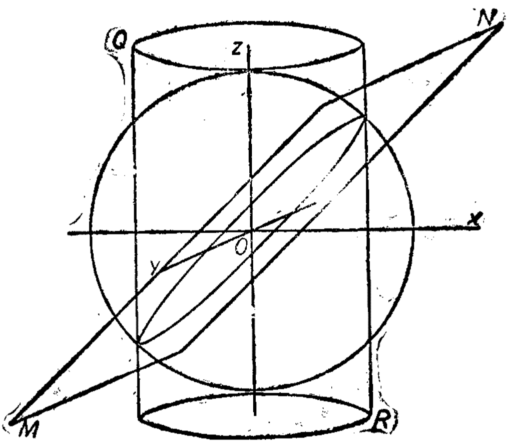
用方程式 $\phi(x, y, z)=0$, $f(x, y, z)=0$ 所代表之二面通常相交於一曲線上，故坐標同時能適合上列二方程式之點者，其軌跡即二面相交所成之曲線也。凡含 x, y, z 三變數之二個聯立方程式每決定一空間曲線 (space curve)，反之，任一空間曲線可以二方程式決定之，以含此曲線之任意二面之方程式決定之。此二個聯立方程式有多種之選擇法，故決定曲線之方程式，並非一成不變者。凡能同時適合 $\phi(x,y,z)=0$ 與 $f(x,y,z)=0$ 二方程式之 x, y, z 亦必能適合 $\phi(x, y, z)+$

$kf(x, y, z)=0$ 形式之方程式，故此方程式所代表之面亦含有 $\phi(x,y,z)=0$, $f(x,y,z)=0$ 二面所公有之曲線。通常每能選定 k 之值俾方程式較原方程更爲簡單，而易於解釋。若選定 k 之值能消去一變數（姑假定爲 z）則所餘方程式只表 x 與 y 之關係，此關係不論 z 爲何值均能成立，卽謂所餘方程式表一彷彿圓柱體之面，其各元素(elements)均平行於 z 軸。

例如，有二面：

$$x^2+y^2+z^2=16,\quad x-z=0$$

第一方程式卽適所述及之球面，第二方程式爲等分 xy 平面與 yz 平面之平面（第 104 圖）此平面 MN（第 104 圖）截球面於其大圓。



第 104 圖

若自二式消去 z 則得 $2x^2+y^2=16$，此爲一橢圓柱面如圖所示之 QR 是也。此橢圓柱面亦通過大圓。若將二方程式相加則得

$$x^2+y^2+z^2+x-z=16,$$

此爲另一球面，適所述之大圓爲此球面上之一小圓。就此四方程式任取二方程相加減所得之方程式必代表另一通過此圓之面。

2. 直線與平面　設通過 (x_1, y_1, z_1),(x_2, y_2, z_2)二點，各作三坐標面之平行面，則得一正平行六面體,(rectangular parallelopiped)其稜之長爲 $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$ 且各平行於 x, y, z 軸。以直線連此二定點，則此直線爲平行六面體之對角線。其長爲

$$l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1}$$

此對角線之方向餘弦(directisn cosines)各爲

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{l},\ \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{l},\ \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{l}, \tag{2}$$

α, β, γ 三角各爲此對角線與三軸所成之角，按定義亦卽對角線與正平行六面體三稜所成之角。

若另有一點(x, y, z)在此直線上，則此點必與 (x_1, y_1, z_1) 彷上法構成一同形之正平行六面體，於是

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{3}$$

此卽通過(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)二點所作直線之方程式也，亦可寫作

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma} \tag{4}$$

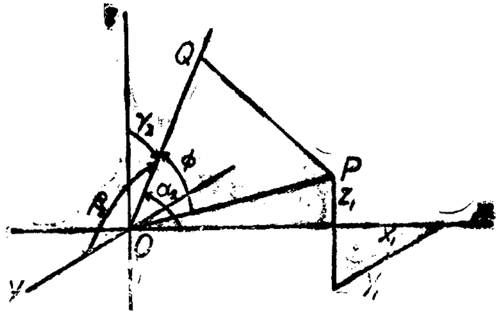
此式以直線之方向角與其上之一點決定直線之方程式。　若 S 表 (x, y, z) 點至定點 (x_1, y_1, z_1) 之距離，則由等式 (2), 知方程式 (4) 亦可寫成含參數之形式(parametric form), S 爲參數，

$$x=x_1+S\cos\alpha,\ y=y_1+S\cos\beta,\ z=z_1+S\cos\gamma \tag{5}$$

欲定二直線間之角，可自原點引二直線各平行於所設直線，則所作二直線間之角卽所設二直線之角。令 OP （第 105 圖）之長爲 l_1，其方向角爲 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$，又令 P 之坐標爲 (x_1, y_1, z_1)。令 OQ 之長爲

l_2, 其方向角爲 $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, 且令 PQ 垂直於 OQ, 若此二線間之角爲 θ, 則

$$\cos\theta=\frac{OQ}{OP}=\frac{l_2}{l_1},$$



第 105 圖

線段 OR, RS, SP 之長各爲 x_1, y_1, z_1, 此三線段與 OP 會合於 P 點，故三線在 OQ 上投影之和等於 OP 在 OQ 上之投影 l_2。故有

$$x_1\cos\alpha_2+y_1\cos\beta_2+z_1\cos\gamma_2=l_2.$$

但 $x_1=l_1\cos\alpha_1$, $y_1=l_1\cos\beta_1$, $z_1=l_1\cos\gamma_1$,將此等值代入上式，並以 l_1 除式之二端，得

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=\frac{l_2}{l_1}=\cos\theta. \qquad (6)$$

若二線平行，$\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$, $\gamma_1=\gamma_2$, (6) 式變爲

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=\cos 0=1, \qquad (7)$$

是爲任一直線方向餘弦間之恆等式。

若二直線互相垂直，則 $\cos\theta=0$, 即

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0. \qquad (8)$$

若有動點(x, y, z), 其位置雖變，但在 OP 線之投影恆爲 P, 則

此點之軌跡爲在 P 點垂直於 OP 線之平面，設以 p 表 OP 之長則平面之方程式爲

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p, \tag{9}$$

式中 α,β,γ 爲 OP 之方向角。此方程式稱爲平面之法線式(normal form)。

凡含 x,y,z 三元之一次方程式，如 $Ax+By+Cz+D=0$，皆代表一平面，蓋 A,B,C 恆可視爲某正六面體之三邊，此六面體對角線之方向餘弦爲 $\frac{A}{R},\frac{B}{R},\frac{C}{R}$，而 $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$。若將方程式之常數項移於右端，並以 R 除各項，則得平面之法線式。就特例言，方程式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+1 \tag{10}$$

表 x,y,z 三軸上之截距各爲 a,b,c 之平面。又方程式

$$(x-x_1)\cos\alpha+(y-y_1)\cos\beta+(z-z_1)\cos\gamma=0 \tag{11}$$

所表之平面通過 (x_1,y_1,z_1) 且垂直於方向角爲 α,β,γ 之直線。方程式

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0 \tag{11a}$$

表通過 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$ 三點之平面。蓋式爲 x,y,z，之一次式，且令 x,y,z 之值代三點中任一點之坐標，等式恆能成立故也。若以此式與第 31 節 $(6')$ 式比較當發現其相似性，此點使人欲求一與第 30 節 $(3')$ 相似之公式表四面體之體積。在 $(11a)$ 中若 x,y,z 表不在平面上一點之坐標，則行列式之值必不爲零，此值之六分之一卽表四點構成四面體之體積，證明姑從略。此值或正或負視四

點排列之次序而定。

因二平面決定一直線，任意二個三元一次方程式代表一直線，由此二方程式不難推出形如 (3), (4), (5)之方程式。

例如有二個三元一次方程式：

$$3x-5y+z=3,$$

$$x+7y-z=1.$$

二式相加，得

$$4x+2y=4,\ \text{或}\ y=-2x+2.$$

消去 x，得

$$26y=4z,\ \text{或}\ y=\frac{2z}{13}$$

於是可寫：

$$-2x+2=\frac{y}{1}=\frac{2z}{13},$$

或

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-13}.$$

將此式之分母各除以諸分母平方之和之平方根，即得形如(4)之方程式。此式甚累墜，非必要時不用。欲化成 (3) 式，只須求出二組適合方程式之 x, y, z 值，作為 x_1, y_1, z_1 與 x_2, y_2, z_2 即可。

方程式：

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

所代表二平面間之角與自一點至此二平面所引二垂線間之角同，以 θ 表此角，則

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}} \tag{12}$$

若二平面互相垂直則必

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \tag{13}$$

比較 (11) 與 (9) 則見由原點至通過 (x_1, y_2, z_1) 點之平面間之垂距爲

$$x_1 \cos\alpha+y_1 \cos\beta+z_1 \cos\gamma,$$

式中 α, β, γ 各表此平面垂線之方向數。凡平行於此平面之平面皆可表以

$$x \cos\alpha+y \cos\beta+z \cos\gamma=p,$$

式中 p 爲原點至平面之垂距。由 (x_1, y_1, z_1) 點至此平面之垂距則爲

$$d=x_1 \cos\alpha+y_1 \cos\beta+z_1 \cos\gamma-p \tag{14}$$

例如，欲求$(2, 5, -3)$點至平面 $3x-4y+12z=20$ 之垂距，則因 $3^2+4^2+12^2=13^2$,

$$d=\frac{3(2)-4(5)+12(-3)-20}{13}=-\frac{70}{13}.$$

3. 高次方程式之軌跡　研究高次方程式所代表之曲面宜注意其對稱情形及曲面與一組平面相交之諸曲線。

若將方程式中諸變數之號改變後而方程式之形式不變則其所表之軌跡必對稱於原點。若將二變數之號改變而方程式之形不變，則軌跡對稱於第三變數之軸；若將一變數之號改變而方程式不變，則軌跡對稱於其餘二變數爲零之平面。例如曲面 $x^2+3y^2+4yz=10$ 對稱於原點，x 軸，yz 平面，但不對稱於 y 軸，z 軸，xz 平面，xy 平面。

研究曲面與一組平面相交之諸曲線，取平行於坐標平面之平面，如 $x=k, y=k, z=k$ 等平面爲最便，而 $x=0, y=0, z=0$ 尤便。令 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 代入方程式中所得曲線稱爲曲面在坐標面上之跡 (traces)。例如上述曲面在 yz 面上之跡爲雙曲線 $3y^2+4yz=10$, 在 xz 面上之迹爲二直線 $x^2=10$, 在 xy 面上之迹爲橢圓 $x^2+3y^2=10$。

欲再研究此曲面,可令 $z=k$ 得一組在諸平行平面上之橢圓

$$x^2+3y^2+4ky=10,$$

做此可察知曲面與 $x=k, y=k$ 諸平面相交之曲線。

凡可寫作

$$x^2+y^2=f(z) \tag{15}$$

之方程式所代表之曲面與 $z=k$ 相交之曲線概爲以 z 軸上之一點爲心之圓。此等曲面稱爲 z 軸之旋轉曲面(surface of revolution about z-axis). 凡通過 z 軸之平面之截此曲面,如通過地軸之平面交地球於子午線,其在 xz 面之跡爲 $x^2=f(z)$。將變數互易,可推得以 x 軸,y 軸爲旋轉軸之旋轉面之性質。

二次方程式所表之曲面謂之二次曲面(quadric surfaces)。若選擇適當坐標軸均可化爲三種典型式。第一爲圓錐面(cones):

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{16}$$

以原點爲頂點, 三變數平方前之號有一變數與其他二變數異號者則此變數之軸爲圓錐面之軸。若三變數平方之前均有相同之符號, 則只有原點一點在軌跡上。第二爲橢圓面 (ellipsoids) 與雙曲線面(hyperboloids)。

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{17}$$

若各項皆爲正則爲橢圓面,若有一項爲負則爲一面雙曲線面(hyperboloid of one sheet),若有二項爲負,則曲面爲二面雙曲線面 (hyperboloid of two sheets),若三項皆負則無實數値能適合此方程式。第三爲抛物線面 (paraboloids)

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{x^2}{b^2}=cz. \tag{18}$$

x^2, y^2 前有同號則稱爲橢圓的拋物線面，否則稱爲雙曲線的拋物線面。

向上節所述各點，將此等曲面研究後卽知其所以如此命名之理。

用參數方程式表曲面甚爲便利，如

$$x=f_1(u, v),\ y=f_2(u, v),\ z=f_3(u, v), \tag{19}$$

就此三式中消去 u, v 卽得 x, y, z 間之一關係式。同理，方程式：

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t) \tag{20}$$

可表空間一曲線，在三方程式中任取二雙方程式消去 t，卽得二個 x, y, z 間之方程式。例如球面可表以

$$x=r\cos u\cos v,$$

$$y=r\cos u\sin v,$$

$$z=r\sin u,$$

式中 u 可視爲球面之緯度，而 v 可視爲其經度。設以式聯 u,v 之關係，則此三方程式表球面上之一曲線。令 $v=k$，則三方程式表球面上之子午線，令 $u=k$，則三方程式平行之緯線，令 $u=mv$，則諸方程式表依一定角穿過所有子午線之螺旋線。凡繞 z 軸之旋轉曲面皆可以

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=f(u) \tag{21}$$

表之；而螺線面(helical surface)可以下式表之：

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=f(u)+mv \tag{22}$$

若泛定函數 $f(u)$ 恆等於零，則曲面卽爲普通之螺形面(helicoid)可由垂直於 z 軸之直線所產生。若令 $u=r$，r 爲一常數，則方程式變爲

$$x=r\cos v,\quad y=r\sin v,\quad z=mv, \tag{23}$$

卽螺旋線 (helix) 之方程式，在半徑爲 r 之圓筒上取旋距爲 $2\pi m$

所成之螺旋線也。

習　題　五　十

1. 求$(3,1,1)$至$(-2,-1,0)$之距離。

2. 一點在 $x^2-3y^2+2z^2-z=0$ 與 $2x^2+y^2+z=0$ 所交之曲線上移動，若由此點作線平行於 x 軸，求點動時直線所生之柱形面之方程式。若線平行於 y 軸或 z 軸求柱形面之方程式。

3. 求連接 $(2,3,3)$ 與 $(1,1,1)$ 之直線之方向餘弦。假定線之方向係向上。

4. 求連接$(2,3,3)$，$(1,1,1)$二點直線之方程式。

5. 在上題直線上若 $(1,1,1)$ 點向上移動三單位則止於何處？

6. 求連接 $(5,-2,4)$ 與 $(3,1,2)$ 二點之直線之方程式，寫成(3)，(4)，(5) 諸不同之形式。

7. 某平面過 $(6,2,3)$ 點，且垂直於連此點與原點之直線，求此平面之方程式。

8. 求平面 $5x-2y-2z+3=0$ 上任一垂線之方向餘弦。

9. 求 $3x+y-7z+11=0$ 與 $2x+4y+z-3=0$ 二平面交線之方程式，寫成 (4) 式。

10. 求 $2y-3z+5=0$ 與 $7x-4y-z-10=0$ 二平面交線之參數方程式。

11. 求第 10 題直線與 $y+1=0$，$2x+3y+2z-1=0$ 二平面交線間之角。

12. 某平面通過 $(1,4,1)$ 點，且垂直於直線 $x+3y+5z+6=0$，$y+2x-1=0$，求此平面之方程式。

13. 求通過$(2,1,7)$，$(1,-2,7)$，$(4,3,1)$三點之平面之方程式。

14. 頂點為$(0,0,0)$，$(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$之四面體之體積顯然為$\frac{1}{6}$。試用公式$(11a)$求之。

15. 求頂點爲 $(1,3,2),(2,7,5),(-3,4,6)(3,0,2)$ 之四面體之體積。

16. 求證 $(5,6,7),(2,7,4),(3,4,-3)$ 及 $(1,6,-1)$ 在一平面上。

17. 求直線 $x-2y-8=0,\ 3y+z+8=0$ 與平面 $3x+y-2z+7=0$ 間之角。

18. 求 $(4,3,7)$ 點至平面 $5x-2y+4z-7=0$ 之距離。

19. 某平面通過直線 $x-y+z=0,\ 2x+y+3z=0$ 又通過 $(1,2,-1)$點,求平面之方程式。

20. 空間一點至 $(5,0,0)$ 與 $(-5,0,0)$ 二點距離之和恆爲 15,求此點之軌跡並討論之。

21. 空間一點恆與一平面及不在此平面上之某定點等距離,求其軌跡。

22. 將 xy 面上之曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 繞 y 軸旋轉,求旋轉面之方程式。

23. 求證 $x=t^2, y=2t, z=t$ 爲拋物柱面與平面之交線。

24. 求證曲面 $x^2=uv^2\ y=u(1-v^2), z_2=4u$ 爲繞 z 軸旋轉而成之圓錐面。

25. 試討論空間曲線 $x=t\cos t, y=t\sin t\ z=t$ 之特性。

第五十四節　偏導微函數與全導微函數

1. 偏導微函數　設有二元函數 $z=f(x,y)$。先視 y 爲常數,則 z 爲 x 之函數。令 y 之値爲常數 y_0, 求出 z 對於 x 在 $x=x_0$ 處之導微函數。在 $f(x,y)$ 中共有二變數,此處只視 x 爲變數,求出之導微函數,以$\dfrac{\partial z}{\partial x}$表之,稱爲 z 對於 x 之偏導微函數(partial derivative).

按
$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

當 Δx 趨近於零，此式之極限卽在 (x_0, y_0) 處之 $\frac{\partial z}{\partial x}$。$x_0, y_0$ 爲泛定常數求出之偏導微函數爲 x_0, y_0 之函數可適用於任何 x, y 值，故足碼不妨略去。

倣此，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 用以表下式之極限

$$\frac{\Delta z}{\Delta y}=\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{2}$$

求出之偏導微函數爲 x_0, y_0 之函數，或 x, y 之函數，因 x_0, y_0 爲 x, y 之一組泛定值。

例如 $z=x^2-3xy+y^3$；則 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x-3y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3x+3y^2$。此等答數係根據第三章導微函數求法算出，因其中一變數旣視爲常數，自可用第三章之法則求出其導微函數也。

又設 w 爲三變數之函數，

$$w=f(x, y, z)$$

則視 y, z 爲常數，視 w 爲 x 之函數所求出之 w 對於 x 之導微函數稱爲 w 對於 x 之偏導微函數。此偏導微函數 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 爲 x, y, z 之函數。記號 $\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ 之意義亦倣此可知。此觀念可推及多於三變數之函數。

2. 全導微函數與全微分　設有二元函數 $z=f(x, y)$，且設 x, y 各有增量 $\Delta x, \Delta y$ 時，z 之對應增量爲 Δz。假定 x_0, y_0, z_0 爲 x, y, z 未增時之初值，則

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0),$$

在式中同時加減 $f(x_0, y_0+\Delta y)$，再以 Δx 除兩端，則得

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)}{\Delta x}$$

$$+\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

右端之第一項與(1)式之右端同,惟須視 $y_0+\Delta y$ 爲 y_0 耳,當 Δx 趨近於零,$y_0+\Delta y$ 趨近於 y_0,顯然此項之極限爲在(x_0, y_0)處 z 對 x 之偏導微函數。第二項與(2)式比較,易知其極限爲在(x_0, y_0)之$\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$式中$\frac{dy}{dx}$之意義即 y 對於 x 之導微函數之普通意義,其值視(x, y)如何趨近於(x_0,y_0)而定。若以$\frac{dz}{dx}$表$\frac{\Delta z}{\Delta x}$之極限,則

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}, \tag{3}$$

此極限稱爲 z 對於 x 之全導微函數(total derivative)。注意此處之 Δz 由於 $\Delta x, \Delta y$ 二增量所產生,而偏導微函數則僅由一變數增量所產生。全導微函數$\frac{dz}{dx}$之值不但爲 x, y 之函數,且爲$\frac{dy}{dx}$之函數。例如取前例

$$z=x^2-3xy+y^3,$$

則
$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=2x-3y+(3y^2-3x)\frac{dy}{dx}.$$

結果與第 13 節求隱函數導微函數之結果相同。

倣此推證,可得

$$\frac{dz}{dy}=\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dy}, \tag{4}$$

此全微分之觀念易推及一般之多元函數。設

$$w=f(x, y, z, u)$$

則
$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dx}. \tag{5}$$

$\frac{dw}{dy}, \frac{dw}{dz}, \frac{dw}{du}$亦可倣此求得。

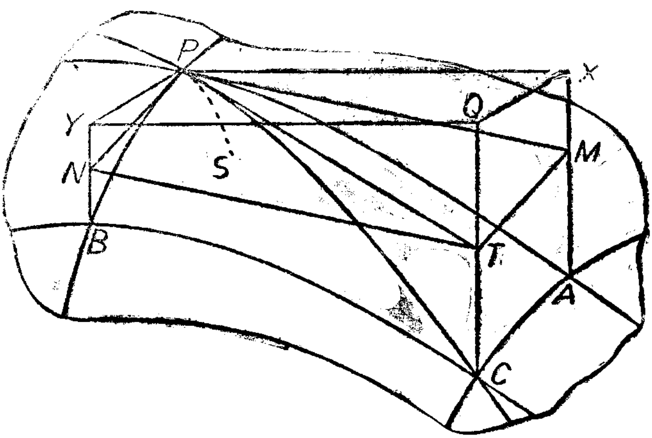
若用微分記法，且知微分之比爲導微函數，則 (3) 或 (4) 可書爲

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy。\tag{6}$$

此式稱爲 z 之全微分 (total differential)。由式 (5) 可得 w 之全微分

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz+\frac{\partial w}{\partial u}du,\tag{7}$$

3. 幾何的解釋　對於二元函數，偏導微函數，全導微函數以及全微分之意義均可藉幾何解釋之。設方程式 $z=f(x, y)$ 代表一曲面，曲面之一部分以不規則之曲線劃出如圖 106 所示。平面 $x=x_0$ 交曲面



第 106 圖

於曲線 PB, 此曲線在 P 點之斜率爲

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}=\lim_{PX\to 0}\frac{YB}{PY}=\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_P=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0}=\frac{YN}{PY}$$

式中 PY 平行於 y 軸，PN 切曲線 PB 於 P 點。

做此 $y=y_0$ 交曲面於曲線 PA, 其在 P 點之斜率爲

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{PX\to 0}\frac{XA}{PX}=\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_p=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0}=\frac{XM}{PX}.$$

茲一論全微分，設 $dx=PX$, $dy=PY$ 則 $XM=\frac{\partial z}{\partial x}dx$, $YN=\frac{\partial z}{\partial y}dy$, 而 $PXQY$ 爲一水平平面上之矩形，$PMTN$ 爲曲面 P 點上之切面上一平行四邊形，由幾何圖形，顯見 $XM+YN=QT$, 故

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=QT。$$

由 $\Delta x=PX$ 與 $\Delta y=PY$ 所產生之 Δz 爲 QC。若 C 點 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ 沿平面 PQC 與曲面相交之曲線 PC 趨近於 P 點 (x_0, y_0, z_0)，因 PT 爲此曲線之切線

$$\frac{dz}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\lim_{PX\to 0}\frac{QC}{PX}=\frac{QT}{PX}。$$

但由幾何圖形，可察知

$$\frac{QT}{PX}=\frac{XM}{PX}+\frac{YN}{PX}=\frac{XM}{PX}+\frac{YN}{PY}\cdot\frac{PY}{PX}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}。$$

爲便利起見，上段曾假定 C 點沿 PC 曲線以達 P 點。若 C 點沿曲面上其他曲線 SP 以達 P 點，PT 爲 P 點之切線，諸極限之比仍如上述。故在 P 點之全微分與由 C 達 P 之途徑無關（不論沿 PS 或 PC 均可）惟與曲線在 P 點之方向有關耳。此二偏導微函數與切面 $PMTN$ 有關，而全導微函數則與 PT 線之方向有關。

4. 高級偏導微函數　以前曾明言多元函數對於某變數之偏導微函數仍爲一多元函數。故偏導微函數本身又有偏導微函數及全導微函數。多元函數 z 對於變數 x 之各級偏導微函數可用下列記號表示：

$$\frac{\partial z}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\ \text{餘類推,}$$

z 對於其他自變數之各級偏導微函數亦做此記法。又

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}。$$

設 w 為 x, y, z 之函數，則

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^3 w^3}{\partial x\,\partial y\,\partial z},\quad \frac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^4 w}{\partial z\,\partial y^2\,\partial x},$$

以及類此之記號均有顯明之意義。例如第四記號即表就 w 對 x 之偏導微函數再取對於 y 之偏導微函數二次，再取對於 z 之偏導微函數是也。

5. 間接表出之函數　設有多元關係式

$$f(x, y, z, w)=0,$$

$$\phi(x, y, z, w)=0。\tag{8}$$

設此二式為聯立方程式，自變數之個數等於所有變數之個數減去方程式個數。通常就題意即知如何選定自變數，自變數一經選定後，即可解諸方程式得以諸自變數之顯函數表因變數，然後做上列諸款求其全或偏導微函數，如方程式不便於解，可就 (8) 式諸隱函數之形式求出因變數對自變數之導微函數。設視 x, y 為自變數，z 與 w 為因變數，則可求出其對於 x 之導微函數，

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=0,\tag{9}$$

式中 $f(x, y, z, w)$ 與 $\phi(x, y, z, w)$ 之偏導微函數即視此等式為四元函數求出，而 z 與 w 之偏導微函數只能用記號表示。就式 (9) 可解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial \phi}{\partial w} & \frac{\partial \phi}{\partial x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial w}\\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial w}\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial z}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial w}\\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial w}\end{vmatrix}}。$$

倣此可求得 z 與 w 對於 y 之偏導微函數。w 對於 x 之全導微函數爲

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{10}$$

可見將諸必要之偏導微函數求出卽得(10)式，否則開始卽就(8)式作微分運算，

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx}=0,$$

$$\frac{d\phi}{dx}=\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx}=0。 \tag{11}$$

自(11)中消去 $\frac{dz}{dx}$ 以解出 $\frac{dw}{dx}$ 卽得關係式(10)。$\frac{dy}{dx}$ 仍爲泛定，否則必須知 y 與 x 之關係以便將其算出，但如此則只有一個自變數矣。

上述討論自亦適用於一元函數，且示如何處理參數方程式之方法。

例如，令

$$xy+3x^2z-yz^3=0 \tag{12}$$

則 z 可視爲 x, y 之函數。設欲求之式爲

$$\frac{\partial z}{dx},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

則可得

$$y+6xz+3x^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz^2\frac{\partial z}{\partial x}=0 \tag{13}$$

由此得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+6xz}{3yz^2-3x^2} \tag{14}$$

若再逐項求全導微函數，得

$$x+y\frac{dx}{dy}+3x^2\frac{dz}{dy}+6xz\frac{dx}{dy}-3yz^2\frac{dz}{dy}-z^3=0, \tag{15}$$

由此得

$$\frac{dz}{dy}=\frac{x-z^3}{3yz^2-3x^2}+\frac{y+6xz}{3yz^2-3x^2}\,\frac{dx}{dy}。 \tag{16}$$

再就(13)逐項求對於 y 之偏導微函數，

$$1+6x\frac{\partial z}{\partial y}+3x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}-3yz^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}-3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-6yz\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

將$\frac{\partial z}{\partial x}$與$\frac{\partial z}{\partial y}$之值代入上式，卽可解出$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。$\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right.$卽(16)式右端之第一項$\left.\right]$

玆再舉一例，螺形面之方程式爲 $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=mv$。假設由此三式確定 z 爲 x, y 之函數，而 u 與 v 視爲參數。欲求$\frac{\partial z}{\partial x}$可視 z, u, v 爲 x 與 y 之函數，而對於 x 求偏導微函數。

$$1=\frac{\partial u}{\partial x}\cos v-u\sin v\frac{dv}{dx},$$

$$0=\frac{\partial u}{\partial x}\sin v+u\cos v\frac{dv}{dx},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=m\frac{\partial v}{\partial x},$$

由此得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-m\frac{\sin v}{u}。$$

習 題 五 十 一

1. 設　$$z=x^3-xy^2+2y,$$

求在 (2, 0) 之$\dfrac{\partial z}{\partial x}$與$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。又求在(2, 0)之$\dfrac{dz}{dx}$，假定 x 與 y 之間有關係式 $y=x^2-4$。再將 x^2-4 之值代入原式，使 z 僅為 x 之函數，求$\dfrac{dz}{dx}$，視結果是否相同。

2. 設 $z=sin\,(x+y)$，求證$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$，並證

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

3. 設 $pv=kz$，求$\dfrac{\partial z}{\partial p}$，$\dfrac{\partial z}{\partial v}$。並求 z 之全微分，k 為一常數。

4. 設 y 為 x 之函數由方程式 $f(x,y)=0$ 所確定，求證

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}$$

式中 $u=f(x,y)$。

5. 設$w=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}-xz$，求$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x}$。

6. 設 $w=z^{xy}$，求 w 之全微分。（先就方程式二端取對數，然後再求微分。）

7. 設 z 為 x 與 y 之函數，由下式確定

$$xy^2+sin^{-1}\frac{y}{z}=0.$$

求$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$與 dz。

8. 設 $z=x^2+y^2$, $x=t$, $y=t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$。

9. 設 $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$, 求證 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$。

10. 設 $sin(x+y)-e^z=0$。求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

11. 已知 $u=\rho^2 e^{2\theta}$, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, 視 ρ 與 θ 爲參數。

第五十五節 偏導微函數與全導微函數之應用

1. 切線切面與法線法面 設有曲面由下列方程式確定

$$f(x,y,z)=0 \tag{1}$$

令 (x_0, y_0, z_0) 爲曲面上之一點，則方程式

$$(x-x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+(y-y_0)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0+(z-z_0)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0=0 \tag{2}$$

爲在此點之切面(tangent plane)。因式爲 x, y, z 之一次式，故代表一平面；$x=x_0, y=y_0, z=z_0$ 能適合此方程式，故此平面必含 (x_0, y_0, z_0) 點；又(2)式在此點對於 x, y 之偏導微函數與(1)式在此點之偏導微函數同，故必含(1)與 $x=x_0$ 及(1)與 $y=y_0$ 交線上之切線。

若 z 以 x 與 y 之顯函數表之如下：

$$z=f(x,y) \tag{3}$$

則切面

$$z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0(y-y_0) \tag{4}$$

若 x, y, z 之關係以下列參數方程式表之，

$$x=f_1(u,v),\ y=f_2(u,v),\ z=f_3(u,v) \tag{5}$$

則切面之方程式爲

$$x-x_0=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_0(u-u_0)+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_0(v-v_0),$$

$$y-y_0=\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_0(u-u_0)+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_0(v-v_0),$$

$$z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_0(u-u_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_0(v-v_0)。\tag{6}$$

若自 (6) 消去 $u-u_0$ 與 $v-v_0$ 則得切面之方程式如下：

$$(x-x_0)\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}_0+(y-y_0)\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{u} & \frac{\partial z}{v}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}_0+(z-z_0)\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}_0=0,\tag{7}$$

式中足碼"o"表示行列式之值，據(x_0, y_0, z_0)點計算。

在曲面上(x_0, y_0, z_0)點上之法線，卽切面上切點之垂線，其方程式之形有下列各種：

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0},\tag{8}$$

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0}=\frac{z-z_0}{-1},\tag{9}$$

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C},\tag{10}$$

式中 A, B, C 各爲 (7) 式中第一第二第三行列式之值；(8), (9), (10) 三式各屬於 (1), (3), (5) 三式。

設有空間曲線由二曲面之交線確定如下

$$f(x, y, z)=0, \phi(x, y, z)=0,\tag{11}$$

則曲線在(x_0, y_0, z_0)之切線爲此二曲面之切面之交線，

$$(x-x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+(y-y_0)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0+(z-z_0)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0=0,$$

$$(x-x_0)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_0+(y-y_0)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_0+(z-z_0)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0=0,$$

此二式可寫成直線之標準式，

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \phi}{\partial z}\end{vmatrix}_0}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial z} & \dfrac{\partial f}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial z} & \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\end{vmatrix}_0}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\end{vmatrix}}。 \tag{12}$$

若空間曲線以參數方程式表之，

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t), \tag{13}$$

則切線之方程式爲

$$\begin{aligned} x-x_0&=(t-t_0)\left(\frac{dx}{dt}\right)_0,\\ y-y_0&=(t-t_0)\left(\frac{dy}{dt}\right)_0,\\ z-z_0&=(t-t_0)\left(\frac{dz}{dt}\right)_0, \end{aligned} \tag{14}$$

由此可得

$$\frac{x-x_0}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_0}=\frac{y-y_0}{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_0}=\frac{z-z_0}{\left(\dfrac{dz}{dt}\right)_0}。 \tag{15}$$

曲線之法面(normal plane)可書爲

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{16}$$

式中 A, B, C 取 (12) 或 (15) 式之諸分母；視情形如何而定。

2. 泰羅氏定理之推廣　設 z 爲 t 之函數，藉下列諸式表其間之關係

$$z=f(x, y), x=x_0+ht, y=y_0+kt, \tag{17}$$

則

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\frac{dx}{dt}+\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)\frac{dy}{dt}=h\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+k\frac{\partial f}{\partial y}f(x,y)。$$

上式可以下列記號表出

$$\frac{dz}{dt}=\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]f(x, y)$$

方括號內之式表加於 $f(x, y)$ 之運算。又，

$$\frac{d^2z}{dt^2}=h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)+hk\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}f(x,y)+hk\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f(x, y)+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)$$

假定各函數均爲連續，俾所得結果與取導微函數之次序無關，即謂

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f(x, y),$$

如此則上式可以下列記號表出

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^2f(x, y)。$$

倣此任何級之導微函數可按下式求之，

$$\frac{d^nz}{dt^n}=\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^nf(x, y) \tag{18}$$

此式表示加於 $f(x, y)$ 之運算手續可按二項展式中之各項求之：

$$\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^n=h^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}+nh^{n-1}k\frac{\partial^n}{\partial y\,\partial x^{n-1}}$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}h^{n-2}k^2\frac{\partial^n}{\partial y^2\partial x^{n-2}}+\cdots\cdots$$

若運用泰羅氏定理將 z 按 t 之升冪展開,

$$z=z_0+t\left(\frac{dz}{dt}\right)_0+\frac{t^2}{2!}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0+\frac{t^3}{3!}\left(\frac{d^3z}{dt^3}\right)_0+\cdots\cdots+\frac{t^n}{n!}\left(\frac{d^nz}{dt^n}\right)_\theta \tag{19}$$

式之右端有 z 及 z 對於 t 之各級導微函數在 $t=0$ 之值,惟最後一項 z 之 n 級導微函數須以 $t=\theta$ 之值代入,而 $0<\theta<t$。

將以前諸方程式中之值代入(19),得

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+t\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]f(x_0,y_0)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{t^n}{n!}\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k), \tag{20}$$

此式可適合於 x_0, y_0, h, k 之一切值,只須函數自 x_0 至 x_0+th 及 y_0 至 y_0+tk 爲連續卽可。

又 $th=x-x_0$, $tk=y-y_0$, 故

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]f(x_0,y_0)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(c_1,c_2) \tag{21}$$

式中 $x_0<c_1<x$, 而 $y_0<c_2<y$。令 $t=1$ 則(20)變爲下式

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]f(x_0,y_0)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0+\theta h,y_0+\theta k) \tag{22}$$

在(22)式中, x_0 與 y_0 之足碼可以略去不用, 因式中無 x, y 須與 x_0, y_0 區別也。

在(21)或(22)中若任 n 無限增大而尾量趨近於零，則右端爲含有 $x-x_0$, $y-y_0$ 或 h, k 之無限羃級數，此級數之和恰足表左端函數之値。尾量是否趨近於零須視 x_0, y_0 與 h, k 之値爲何而定。若所取之値適當，則略去高於一級之導微函數卽可得左端之近似値。以右端之前二項表左端之値無異在 (x_0, y_0, z_0) 點以切面代曲面也，故必 h k 甚小始可。

例如，槍彈之射程 R 由下式決定：

$$R=\frac{V^2 \sin 2a}{g},$$

式中 V 爲初速，a 爲仰角，g 爲重力加速度。則

$$R-R_0=\frac{2V_0 \sin 2a_0}{g}(V-V_0)+\frac{2V_0^2 \cos 2a_0}{g}(a-a_0)$$

$V-V_0$ 與 $a-a_0$ 之高次方均略去。當 $V-V_0$ 與 $a-a_0$ 不甚大時，此爲計算 $R-R_0$ 最便利有效之方法。

此處將泰羅氏定理推廣至二個自變數，但此法亦可推廣至多個自變數。兹將與(22)相倣之三元函數之展式書出如下：

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, z+m) &= f(x, y, z)+\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+m\frac{\partial}{\partial z}\right]f(x, y, z) \\ &+\frac{1}{2!}\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+m\frac{\partial}{\partial z}\right]^2 f(x, y, z)+\cdots\cdots \qquad (23) \\ &+\frac{1}{n!}\left[h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+m\frac{\partial}{\partial z}\right]^n f(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta m), \end{aligned}$$

式中 $0<\theta<1$。

3. 極大與極小　兹討論在何條件下，始有 $f(x+h, y+k, z+m)-f(x, y, z)=Q$ 恆爲負數或零，式中 h, k, m 表可小至所欲之小數。若此條件能求得則稱函數在 (x, y, z) 有極大値。在(23)中令 $n=1$，則得

$$Q=h\frac{\partial}{\partial x}f(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta m)$$
$$+k\frac{\partial}{\partial y}f(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta m)$$
$$+m\frac{\partial}{\partial z}f(x+\theta h, y+\theta k, z+\theta m),$$

取 $k=0$, $m=0$, 若 Q 爲負則 h 與函數對於 x 之偏導微函數二因式必異號,當 h 由負經過 0 變爲正時,則偏導微函數必由正經過 0 變爲負始可。若視第二因式爲 h 之函數,則應用第 37 節所述各款,卽知此函數對 h 之導微函數必爲負或零,而以後首先不爲零之高級導微函數之級次必爲奇數次,且其值必爲負。但對於 h 之各級導微函數與對於 x 之各級導微函數有同號,而此處所論各點適於 h 者亦可適於 k 與 m, 故在 (x, y, z)如有極大則必

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x, y, z)=0, \frac{\partial}{\partial y}f(x, y, z)=0, \frac{\partial}{\partial z}f(x, y, z)=0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p}f(x, y, z)<0, \frac{\partial^q}{\partial y^q}f(x, y, z)<0, \frac{\partial^r}{\partial z^r}f(x, y, z)<0, \quad (25)$$

式中 p 爲在(x, y, z)處首先不爲零之 x 高級導微函數之級次,且 p 必爲偶數。q 及 r 與 p 有相似之意義,其值亦必爲偶數。

若不論 h, k, m 表任何小數(惟 h, k, m 有一不爲零),Q 恆爲正則 $f(x, y, z)$ 在 (x, y, z)有一極小。條件 (24) 仍爲必要,條件 (25)應將不等號之向改變,其論列與上節相倣,毋庸贅述。

此處所論雖以三元函數爲例,固可適合任何多元函數。若施之於二元函數,則函數對於二自變數之第一級偏導微函數爲零卽相當於曲面之切面爲水平面也。當變數之個數甚多時可僅視 x 其中之一變數 x 爲變數,而視其餘之變數爲常數,則第 38 節所述函數爲極大之條件與此處所述關於 x 之偏導微函數應適合之條件恰同。據(24)(25)二式可知如欲$f(x, y, z)$爲極大,則視 y, z 爲常數,函數有一 x 之

極大值；視 z, x 爲常數，函數有一 y 之極大值；視 x, y 爲常數，函數有一 z 之極大值。

此處所述各條件雖爲函數爲極大極小之必要條件，但非充分條件。在處理實際問題時，不論函數係以自變數之顯函數表出，或由數個含參數之聯立方程式表出，只須據(24)求極大或極小，就實際條件即可決定函數之是否極大或極小，不必再據(25)式以判定之。若自變數與函數之關係以隱函數表之或二者之關係藉參數式表出，則須將(24)與原方程式聯立以確定極大與極小之位置。條件(25)固可用以判別函數爲極大抑爲極小，但不能測出函數有無此等極端值。

就二元函數而言，若 z 爲 x, y 之函數，在某點(24)，(25)所述條件皆能適合，又

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]^2>0 \tag{26}$$

則必有一極端值存在。若不等式之方向變易則極端值不存在；若式之值爲零則不能決。

若欲對任何函數作更詳盡之討論，有二途徑可循。其一用前二節所舉之方法對函數作幾何之探討可推出所欲求之結果。其二，用(23)求 Q 之值，（式中 n 大於一，若式爲代數整式可將式完全展開至最後一項）。可推知 Q 是否當 h, k, m 甚小時恆爲正抑恆爲負。

茲取例以明之，設欲求下式之極端值

$$z=x^3+y^3-6xy。$$

由條件(24)，必有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-6y=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-6x=0。$$

此二方程式之實數解爲

$$x=0,\ y=0 \text{ 與 } x=2,\ y=2。$$

又
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=6,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=6。$$

就點(0, 0)言，二級導微函數爲零，而三級者則否，故(25)式中 n 爲偶之必要條件不能適合，故知(0, 0)不爲極端值。在(2, 2)點，二級導微函數皆爲正，故有一極小點存在之可能。此處$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6$，故由(26)知在(2, 2)點確有一極小點，其值爲 $z=-8$。若用公式(22)，則令 $n=2$，得 Q 之值爲

$$\frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]$$

在 $x=2+\theta h$, $y=2+\theta k$ 之值爲

$$Q=\frac{1}{2}h^2(12+6\theta h)-12hk+k^2(12+6\theta k)$$

化簡後變爲

$$Q=(h^2-hk+k^2)(6+3\theta h+3\theta k).$$

就 Q 之二因式觀之，第一式不論 h 與 k 爲何恆爲正，第二式則當 h, k 之值甚小時爲正。故經此測驗後足以知在(2, 2)點有極小值。

若按(22)式完全展開，則得

$$z=-8+6(h^2-hk+k^2)+h^3+k^3$$

由此得

$$Q=z+8=(h^2-hk+k^2)(6+h+k),$$

示前式中之 $\theta=\frac{1}{3}$，同時又可看出在(2, 2)點有極小值。

茲再舉一例，設

$$z=x^4-3x^2y+2y^2。$$

則
$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-6xy,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-3x^2+4y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-6y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4。$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=24x$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}=24。$$

此處(0,0)爲惟一之臨界點，在此點將(25)之不等式變向卽能適合，故有極小值存在之可能。又$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6x$，按(26)式，在(0,0)處得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right]^2=0.4-0=0,$$

故按(26)不能決定極小值果存在否。

此處 z 可析爲因式，$z=(x^2-y)(x^2-2y)$，若令此二因式等於零，二式在 xy 平面上之軌跡爲二拋物線，有公共頂點在原點上。夾於二拋物線之間各點處 z 有負值，在其他各處 z 爲正，故 z 無極端值。

令 $n=2$，末項在 $x=\theta h$，$y=\theta k$ 取值，則由(22)，得

$$Q=\frac{1}{2}[h^2(12\theta^2h^2-6\theta k)-12hk+4k^2]$$

$$=h^2(6\theta^2h^2-3\theta k)-k(6h-2k)。$$

此處任一項均可正可負視 h 與 k 間之關係如何而定（不論 h,k 若何小），可見函數在此處無極端值。

若將函數按(22)完全展開，等於在原式中以 h,k 代 x,y；由上列之因式形式足以明示函數無極端值存在也。

習 題 五 十 二

1. 求球面 $x^2+y^2+z^2=169$ 在$(3,-4,12)$點之切面之方程式。並證由原點至此點所引之半徑爲切面之垂線。

2. 設有曲面 $x=u^3+v^2$，$y=u^2-v$，$z=u+v^2$，求在 $u=1$，$v=2$

曲面上一點之切面與法線之方程式。

3. 在題 2 之曲面上，先令 $u=1$ 可得一曲線，次令 $v=2$ 又可得一曲線，求此二曲線在 $v=2$, $u=1$ 處之切線方程式，並證明此二切線在題 2 所求出之切面上。

4. 設由 $x+z-2xy=12$, $y+z-2xz=-8$ 確定一曲線，求此曲線在$(2,-2,2)$點之切線與法面之方程式。

5. 據推廣之泰羅氏定理，按 x, y 之升冪展開 $\sin(x+y)$至 x 與 y 之三次冪爲止。令 $y=x$ 將所得結果與 $\sin 2x$ 之展式比較，以資驗算。

6. 三角形之面積可用公式 $A=\frac{1}{2}ab\sin C$ 計算，設 $a=1000$ 呎，$b=600$ 呎，$C=42°$。a, b 均準確至 $\frac{1}{2}\%$，C 準確至十分之一度，求算出之面積 A 誤差之限度。

7. 某螺旋線之方程式爲 $x=5\cos\theta$, $y=5\sin\theta$, $z=\frac{1}{2}\theta$ 求在 $\theta=\theta_0$ 處此曲線之切線與法面之方程式。求證$\left(0, 0, \frac{1}{2}\theta_0\right)$在法面上。

8. 求證球面 $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ 在 (x_1, y_1, z_1) 點所作切面之方程式爲 x, $x+y$, $y+z$, $z+a(x+x_1)+b(y+y_1)+c(z+z_1)+d=0$。

9. 試分某數爲三部份俾其乘積爲極大。求證此三部份必相等。

10. 求證一般等體積之正六面體中惟立方體有最小之面。

11. 在曲面

$$x^2+2y^2+3z^2-2xy-2yz=2$$

上，求 z 之極大與極小。

12. 求證函數

$$w=2x^2-3y^2+5z^2$$

無極大亦無極小。

13. 設四面體之四頂爲 (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)。若欲選一點 (x, y, z) 俾由此點至各頂點距離平方之和爲一極小，則必 $x=\frac{1}{4}(x_0+x_1+x_2+x_3)$, $y=\frac{1}{4}(y_0+y_1+y_2+y_3)$, $z=\frac{1}{4}(z_0+z_1+z_2+z_3)$。

14. 試由(21)式,用$(x-2)$, $(y+1)$之乘冪表 x^2y.

15. 展開 e^{x+y} 至 x 與 y 之三次冪。尾量可以 x, y 之三次式表之。

16. 若當 x 與 y 甚小時,以 x, y 之二次多項式表 $log(sin\,x+cos\,y)$ 之近似值,此二次多項式應爲 $x-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

17. 當 x 甚小，y 之值與 1 接近時,試以二次式表

$$\frac{y}{2}\sqrt{y^2-x^2}+\frac{y^2}{2}\,sin^{-1}\frac{x}{y}$$

之近似值。

第五十六節　平面曲線性質舉要

1. 特異點　在前數節中曾說明欲研究某面曲，可先研究曲面與一組平面相交之曲線。但將曲線與含此曲線之曲面相提並論，則曲線之數重要性質更形顯明。曲線

$$f(x, y)=0 \tag{1}$$

爲曲面

$$z=f(x, y) \tag{2}$$

之一截面。

由(2),得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \tag{3}$$

若視 z 爲常數,則(2)爲曲面與平面之交線,而(3)式可書爲

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}。\tag{4}$$

設 $z=z$　若 $f(x_0,y_0)=z_0$，則由(4)式，在 (x_0,y_0) 求出之 $\frac{dy}{dx}$ 表曲線 $f(x,y)=z_0$ 在 (x_0,y_0) 點之斜率。但有時在 (x_0,y_0) 點，$\frac{\partial f}{\partial x}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=0$，如此則(4)為不定不能由(4)得斜率之確定值。$(x_0,y_0)$ 稱為曲線 $f(x,y)=z_0$ 上之特異點(singular point)。此等點卽前節論 z 之極大極小時所稱之臨界點也。

欲求曲線(1)之特異點可令 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 聯立以解出 x, y。若 x_0, y_0 為聯立方程式之一解，且 $f(x_0,y_0)=0$，則 (x_0,y_0) 為曲線(1)上之一特異點；若 $f(x_0,y_0)=z_0\neq0$ 則此點不在曲線(1)之上，而屬於曲線 $f(x,y)=z_0$。

特異點可分為若干種。前節所舉之例 $z=x^3+y^3-6xy$ 中，求得之臨界點在 $(0,0)$，$(2,2)$ 二點。$(0,0)$ 點為曲線 $x^3+y^3-6xy=0$ 上之特異點又稱為重點(double point)，因曲線本身交於此點，可藉曲線之圖形說明者也。至 $(2,2)$ 點則為曲線 $x^3+y^3-6xy=-8$ 上之另一種特異點，稱為孤立點(isolated point or conjugate point)，因曲線上其他各點均不與此點相聯也。可見曲面 $z=f(x,y)$ 之極大點或極小點在曲線 $f(x,y)=z_0$ 上均為特異點。在以前所舉例 $z=(x^2-y)(x^2-2y)$ 中，臨界點為 $(0,0)$，此點為曲線 $(x^2-y)(x^2-2y)=0$ 二支之接觸點(contact point)或稱為自切點(tacnode)。

設有曲線 $x^2-y^3=0$，可由方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-3y^2=0$$

定其特異點，得 $x=0$，$y=0$，因此點在曲線上，故為一特異點。製此

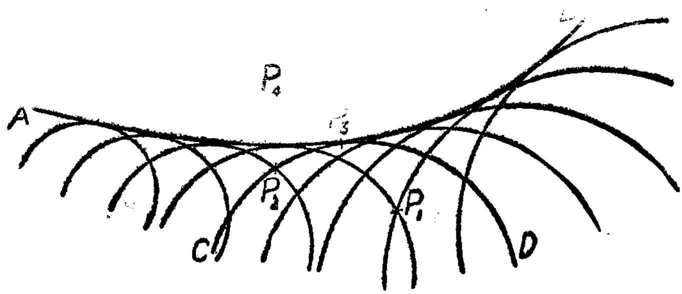
曲線則見曲線在原點同切 y 軸於 x 軸之上，在 x 軸之下則無曲線之跡。凡曲線之二支同止於一點且在此點有公切線則稱曲線有一會切點(cusp)。若二支止於一點但在此點無公切線，則曲線上有一折斷點(salient point)。

就各種之特異點作詳盡之區別與討論非此書之範圍所及，惟遇此等點時，繪製曲線並研究含此曲線之曲面，對於實際問題之探討即此亦已足矣。

2. 包跡　設有由方程式

$$f(x, y, k)=0, \tag{5}$$

確定之一族曲線，式中 k 為一泛定常數。若以某定點之坐標 x_0, y_0 代 x, y，則(5)變為以 k 為未知數之方程式，解此方程式即得曲線(5)通過 (x_0, y_0) 點 k 應具之數值。此族曲線中有若干支通過 (x_0, y_0) 視方程式 k 有若干個實根而定。於是 xy 平面可按 k 之根數分為若干區域，每一區域中每點必有同數之曲線通過。在圖 107 中，曲線 AB 分平面為二區域；在 AB 之一邊 P_1, P_2 所在之區域，每點有二支曲線通過。在 AB 之他邊，即 P_4 點所在之區域，無一曲線經過此區域中之



第 107 圖

任何點。在二區域之界線 AB 上，k 之二值疊合，如在 P_3 點。

(5)式中，k 之二值若合而為一，必(5)式與根據(5)式所求出對於 k 之偏導微函數有公根，如第 37 節所述。即謂在 AB 曲線上選定 x, y

後方程式:

$$f(x,y,k)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial k}f(x,y,k)=0 \tag{6}$$

可以用同一之 k 值適合之。自此二式中消去 k 可得一含 x 與 y 之方程式，其軌跡必包有界線 AB，稱爲曲線族(5)之包跡 (envelope)。

方程式(6)可視爲 x 與 y 之參數方程式，k 爲參數。設對應於參數 k_1 之値爲 x_1, y_1。令 P_3 代表此點，則 CD 表 $k=k_1$ 時(5)式之曲線。對於此一組變數之特值，有

$$f(x_1,y_1,z_1)=0,\ \frac{\partial}{\partial k}f(x_1,y_1,z_1)=0 \tag{7}$$

欲求 CD 在 P_3 點之斜率，可在式(5)中令 $k=k_1$，求

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_1+\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_1\frac{dy}{dx}=0 \tag{8}$$

式中足碼表示在 $x=x_1, y=y_1, k=k_1$ 求諸式之値。欲求 P_3 點在 AB 上之斜率，則用式(6)，視 x, y 爲 k 之函數。於是必有

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_1\cdot\frac{dx}{dk}+\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_1\cdot\frac{dy}{dk}+\left[\frac{\partial f}{\partial k}\right]_1=0 \tag{9}$$

按(7)式觀之，則(9)式之第三項應爲零，故據(8)式若能求得 CD 在 P_3 點斜率某一確定之値，則據(9)式求出 AB 在 P_3 點之斜率必有相同之値。故在包跡上任取一點，在曲線族內必可求出一支曲線在此點與包跡有公切線。

有時(6)式所代表之軌跡爲曲線族(5)特異點之軌跡。在此軌跡上，據(8)式不能求得曲線斜率之確定値，故曲線不爲包跡之一部分。

例如，設

$$f(x,y,k)=x^2+(y-k)^2-16=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial k}f(x,y,k)=-2(y-k)=0.$$

消去 k 得包跡 $x=\pm4$. 此處曲線族爲以 4 爲半徑，y 軸上之一點爲圓心之圓族，而包跡則爲此一族圓之公切線。

茲再舉一例，設

$$f(x,y,k)=x^3-(y-k)^2=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial k}(x,y,k)=2(y-k)=0.$$

消去 k, 得 $x=0$, 卽 y 軸之方程式。此非包跡，因 y 軸切曲線 $x^3-(y-k)^2=0$ 於 $(0,k)$，且

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-2(y-k),$$

在 $(0,k)$ 處二式之值皆爲 0, 可見軌跡爲特異點之軌跡。此族曲線爲一族半立體拋物線其會切點在 y 軸上，過會切點之公切線爲平行於 x 軸之線。

3. 展線　設有曲線

$$f(x,y)=0 \tag{10}$$

在曲線 (x_0,y_0) 上之切線之方程式爲

$$(x-x_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_0+(y-y_0)\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_0=0 \tag{11}$$

在此點法線之方程式爲

$$(x-x_0)\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_0-(y-y_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_0=0. \tag{12}$$

設在 $f(x_0,y_0)=0$ 中視 y_0 爲 x_0 之函數，則 (12) 表一族直線，x_0 爲其參數。欲求此一族直線之包跡，可據 (12) 求 y_0 對於 x_0 之導微函數，視 x,y 爲常數；消去 x_0,y_0 得以含 x 與 y 之方程式表所求

求包跡。曲線法線族之包跡稱爲曲線之展線(evolute)。

取抛物線

$$y-x^2=0 \tag{13}$$

以資說明,在(x_0, y_0)之法線爲

$$x-x_0+(y-y_0)2x_0=0,$$

因 $y_0=x_0^2$, 上式可書爲

$$x+(2y-1)x_0-2x_0^3=0 \tag{14}$$

對於參數 x_0 求導微函數,得

$$2y-1-6x_0^2=0 \tag{15}$$

從(14),(15)二式中消去 x_0, 得展線之方程式

$$27x^2=16\left(y-\frac{1}{2}\right)^3$$

在一般問題中,消去 x_0, y_0 二元,每極費手續,故直接用公式(12)不如用一僅含一個參數之方程式爲便。在第 35 節中曾明示凡圓錐曲線之法線族可用其斜率爲參數。

若曲線(10)以一雙參數方程式表出,

$$x=\theta(t), y=\phi(t) \tag{16}$$

在 $t=t_0$ 處之法線概可書爲

$$[x-\theta(t_0)]\theta'(t_0)+[y-\phi(t_0)]\phi'(t_0)=0 \tag{17}$$

式中僅含一參數 t_0。例如橢圓可表以

$$x=a\cos t, y=b\sin t \tag{18}$$

在 $t=t_0$ 之法線爲

$$-(x-a\cos t_0)a\sin t_0+(y-b\sin t_0)b\cos t_0=0,$$

化簡後,變為

$$ax\sin t_0-by\cos t_0=(a^2-b^2)\sin t_0\cos t_0 \tag{19}$$

對於 t_0 求導微函數,得

$$ax\cos t_0+by\sin t_0=(a^2-b^2)(\cos^2 t_0-\sin^2 t_0) \tag{20}$$

以 $\sin t_0$乘(19),以 $\cos t_0$ 乘 (20),使二式相加,得

$$ax=(a^2-b^2)\cos^3 t_0,$$

以 $\cos t_0$ 乘(19),以 $\sin t_0$ 乘(20),再從後式減去前式,得

$$by=-(a^2-b^2)\sin^3 t_0。$$

此最後之二方程式即展線之參數方程式。若在兩式之二端同取 $\frac{2}{3}$ 次方,令二式相加,即得直角坐標方程式:

$$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

4. 漸近線　在以前諸章中曾提及若 y 為無限大時,x 趨近於 a,則曲線有鉛直漸近線 $x=a$; 若 y 趨近於 b 時,x 變為無限大,則曲線有水平漸近線 $y=b$。又知令諸一次因式之乘積等於某常數,則令每一一次式等於零所表之直線即曲線之漸近線。此節當述一求斜漸近線之通法。

設方程式(10)表一曲線,則(11)為過 (x_0, y_0) 點之切線之方程式。(11)在坐標軸上之截距為

$$a=x_0+y_0\frac{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_0}{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_0},\quad b=x_0\frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_0}{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_0}+y_0。$$

設 x_0, y_0 為無限大時[x_0, y_0 仍須能適合 $f(x_0, y_0)=0$],a 與 b 仍為有限值,則(11)變為漸近線。

設有曲線

$$y^3=6x^2+x^3。$$

由(11)知切線之截距爲

$$a=x_0-\frac{y_0^3}{4x_0+x_0^2},\ b=-\frac{4x_0^2+x_0^3}{y_0^2}+y_0。$$

因 $y_0^3=6x_0^2+x_0^2$，上列二方程式可書爲

$$a=-\frac{2x_0^2}{4x_0+x_0^2},\ b=\frac{2x_0^2}{[6x_0^2+x_0^3]^{\frac{2}{3}}},$$

當 x_0 無限增大時；a, b 各以 $-2, +2$ 爲極限，故漸近線爲

$$x-y+2=0。$$

茲再述一更便利之求漸近線法。直線 $y=mx+b$ 可與曲線(10)交於若干點，欲求此若干點之橫坐標，可消去 y，得一含 x 之方程式，

$$f(x, mx+b)=0。$$

若選定 m, b 之值俾 x 高次方之係數爲零，則直線交曲線於二個無窮遠點，卽漸近線是也。以此法施之前例，得

$$m^3x^3+3bm^2x^2+3b^2mx+b^3=6x^2+x^3,$$

若 $m^3=1, 3bm^2=6$，則 x^3 與 x^2 之係數爲零，由此得 $m=1,\ b=2$，而所求漸近線爲 $y=x+2$.

習 題 五 十 三

1. 求證曲線 $y^2=x^3-4x^2$ 有孤立點$(0,0)$。
2. 求 $y^5+2xy^2=x^2+y^4$ 之特異點。
3. 求下列曲線族之包跡

$$y=mx+\sqrt{1+m^2}.$$

4. 求下列圓族之包跡

$$x^2+4ax+y^2+3a^2=0.$$

5. 求下列直線族之包跡

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=5.$$

6. 求蔓葉線 (cissoid) $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ 之展線。

7. 求證圓之展線上有一特異點。

8. 用第 39 節之方法，求證題 6，題 7 之展線爲此二曲線曲率中心之軌跡。

9. 求下列曲線之漸近線

$$x^2-xy-6y^2+2x+4y+12=0.$$

10. 求曲線 $y^2=\dfrac{x^3}{x-2}$ 之漸近線。

11. 求證擺線

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$$

之展線仍爲一擺線，其方程式爲

$$x=a(t+\sin t),\ y=-a(1-\cos t),$$

若在 t 上加 π，x 上加 $-a\pi$，y 上加 $2a$，則仍得原曲線。試繪製此諸曲線。

12. 求曲線

$$y=\sec\theta,\ x=\tan\theta$$

之展線，先按曲率中心之軌跡求之，再按法線族包跡求之。

13. 探討下列曲線之特異點與漸近線，製出諸曲線，標出彎點與極大極小點。

(a) $y^2=\dfrac{1}{x-a}$;　　(b) $y^2=x^2-x^4$;

(c) $y=\frac{x}{(x-a)^2}$;　　(d) $x^2y^2-x^4+y^2+x^2=0$;

(e) $xy^2-x^3-2x^2+1=0$.

14. 雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 切線族之方程式爲

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2},$$

式中 m 爲泛定常數。求證此切線族之包跡卽原設之雙曲線。

15. 求下列曲線之展線

$$x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta),$$

$$y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta).$$

第五十七節　多元函數之積分

1. 重積分　討論多元函數，此處僅據三元函數討論之。設有函數由下列之方程式所確定，

$$w=f(x,y,z), \tag{1}$$

且視 x,y,z 爲三因次點 (a point in three dimensions) 之坐標。設 R 表此三因次空間中之某區域，且視 R 由數個微分元素所組成，元素之因次各爲 dx, dy, dz; 在區域 R 邊境之元素有時僅爲整個元素之一部分。此微分元素之體積爲 $dx\,dy\,dz$, 若 dx, dy, dz 諸因次皆趨近於零，則在 R 以內全部元素體積之和將趨近於 R, 且以 R 爲極限。若每一微分元素均乘以函數 w 在 R 境內 (x,y,z) 點之值，則當諸元素體積趨近於 R 時，此等乘積之和

$$\Sigma f(x,y,z)dx\,dy\,dz \tag{2}$$

或亦趨近於某極限。若果如此，則 (2) 式所表諸乘積之和所趨之極限稱爲 $f(x,y,z)$ 在 R 區域內之積分。可以下列記號表之

$$\int_R wdV=lim\ \Sigma_R f(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint_R f(x,y,z)dx\,dy\,dz \qquad (3)$$

此處有三變數。故此量稱為三重積分(triple integral). 此觀念可推及任意若干個變數，惟幾何解釋稍須修改，統稱之曰重積分 (multiple integral)。

二重積分中之區域可視為平面之一部分，取函數 $z=f(x,y)$，其式可書為

$$\int_R z\,dA=lim\,\Sigma_R f(x,y)dx\,dy=\iint_R f(x,y)dx\,dy, \qquad (4)$$

式中 $dA=dx\,dy$ 即 R 區域中之微分面積也。二重積分之值可視為第 44 節所述之二元兩層積分求得。例如，區域 R 若由 $y=\phi_1(x)$, $y=\phi_2(x)$ 二曲線及 $x=x_1, x=x_2$ 二直線所包圍而成，則

$$\int_R z\,dA=\int_{x_1}^{x_2}\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(x,y)dy\,dx. \qquad (5)$$

若 R 不由此四線所包圍而成，則可將此區域分為若干部分，每一部分由數線包圍而成，於是重積分之值可由若干個兩層積分之和表出。重積分之值所以能用此種方法求得者，蓋因一區域可視為由無數個長 $\phi_2(x)-\phi_1(x)$ 寬 dx 之長條所構成，先求每一長條上諸元素之和之極限，次求全部長條上所有之元素之和之極限，即 (4) 式所表之極限也。至二重積分與兩層積分相等之鑒別的討論，本書從略。

同理(3)式之三重積分之值可視為三元三層積分求得。

$$\int_R w\,dv=\int_{x_1}^{x_2}\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\int_{\theta_1(x,y)}^{\theta_2(x,y)}f(x,y,z)dz\,dy\,dx, \qquad (6)$$

式中區域 R 所佔空間由 $z=\theta_1\ (x,y)$, $\theta=\theta_2(x,y)$ 二曲面；$y=\phi_1(x)$, $y=\phi_2(x)$二柱形面及 $x=x_1, x=x_2$ 平面所包圍。若 R 不為此諸面所包圍，則可分之為若干部分，俾每一部分為諸面所包圍而三重積分之值，可以若干個三層積分之和表之。(5),(6)二式中之諸變數可

以互易，故求積分之次序可以任意，就題意擇其最便利之次序行之。

二重及三重積分概可以幾何解釋，如以上所述，但重積分之定義固不必須有幾何之解釋，在應用時，多種變數均不能視爲直角坐標制中之坐標。即無任何幾何解釋；(3)，(4) 二式所舉之極限自有其明確之意義，幾何解釋不過表量與量之關係之便利方法而已。

重積分之應用至爲廣泛，茲舉其較普遍者如次：

(a) 直角坐標制中之體積　設體積如(6)式所示，由諸面所包圍，則

$$V=\int_{x_1}^{x_2}\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}[\theta_2(x,y)-\theta_1(x,y)]dy\,dx.$$

若在區域 R 內 $f(x,y,z)$ 恆爲 1，則 (6) 式之值即表此體積。例如，爲 $z=0$, $z=1+x+y$ 二平面與拋物線柱形面 $y=x^2$，平面 $y=4$ 所包圍之體積，以三重積分表之爲

$$\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{1+x+y}dz\,dy\,dx.$$

對於 z 求積分，得

$$\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}(1+x+y)dy\,dx.$$

此處體積即以二重積分之值表之。再視 x 爲常數對於 y 求積分，則新被積函數變爲

$$\left[y+xy+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{4}=4+4x+8-\left(x^2+x^3+\frac{x^4}{2}\right),$$

而所求積分之值爲

$$\int_{-2}^{2}\left(12+4x-x^2-x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx=48-\frac{16}{3}-\frac{32}{5}=36.27.$$

(b) 圓柱坐標制之體積　若以圓柱坐標之 (ρ,θ,z) 代直角坐標制之 (x,y,z)，式中 $\rho\cos\theta=x$，而 $\rho\sin\theta=y$，則構成體積之諸元素

爲 $d\rho, \rho d\theta$ 與 dz, 而體積可以下列三重積分表之

$$\int_R dV=\iiint_R \rho\, d\rho\, d\theta\, dz.$$ 。

此式可視爲多層積分按任何次序求積分以定其值。例如求半徑爲 5 之球面所包之體積 V, 有

$$V=\int_0^5\int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{25-\rho^2}}^{\sqrt{25-\rho^2}} \rho\ dz\ d\theta\ d\rho,$$

對於 z 求積分,得

$$V=\int_0^5\int_0^{2\pi} 2\rho\sqrt{25-\rho^2}\, d\theta\, d\rho,$$

再對於 θ 求積分.

$$V=\int_0^5 4\pi\,\rho\sqrt{25-\rho^2}\, d\rho$$

由此得

$$V=\left[-\frac{4}{3}\pi(25-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5=\frac{500}{3}\pi.$$

(c) 球面坐標制之體積　球面坐標制以 ρ, θ, ϕ 爲 P 點之坐標, ρ 表由原點至 P 點之距離 OP, θ 表 xy 平面與 z 軸及 OP 二直線所決定之平面間之角,而 ϕ 表 OP 與 z 軸所夾之角。故 θ 可視爲以 ρ 爲半徑之球面上之經度而 ϕ 可視爲此球面上之餘緯度(co-latitude), z 軸爲交球面於其二極, xz 平面交球面於其起算經線 (prime meridian) 球面坐標與直角坐標間之關係可表以下式:

$$x=\rho \sin\phi\cos\theta,\ y=\rho\sin\phi\sin\theta,\ z=\rho\cos\phi.$$

以 $d\rho, \rho\sin\theta\, d\theta, \rho\, d\phi$ 爲微分元素之三因次,則體積可表以三重積分

$$\int_R dV=\iiint_R \rho^2 \sin\phi\ d\rho\, d\theta\, d\phi.$$

若以原點爲圓錐體之頂點，z 軸爲圓錐體之軸，則其體積爲

$$V=\int_0^{a}\int_0^{2\pi}\int_0^{h\sec\phi}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

式中 a 爲圓錐體之軸與其元素間之角，h 爲其高。按下列步驟求積分得：

$$V=\int_0^{a}\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}h^3\sec^3\phi\sin\phi\,d\theta\,d\phi$$

$$=\int_0^{a}\frac{2\pi}{3}h^3\sec^3\phi\sin\phi\,d\phi$$

$$=\frac{\pi}{3}h^3(\sec^2 a-1)=\frac{\pi}{3}h^3\tan^2 a.$$

(d) 矩與平均值　若在上述 (a), (b), (c) 代表體積之三積分內插入一因式，因式中以原式所用之坐標表各原始體積中一點至某定點，某定線或某定面之距離，則新積分之值表原積分所表之體積對於某定點，某定線或某定面之第一次矩(first moment)。若以體積除此第一次矩，則商爲此體積對於某點，某線或某面距離之平均值。體積離三坐標面距離之平均值爲此體積重心之坐標，可以 x_m, y_m, z_m 表之。

若上述插入之因式不爲距離而爲距離之平方，則新積分表此體積對於某定點，某定線，或某定面之第二次矩(second moment)或慣性矩(moment of inertia)。若以體積除此第二次矩，則商爲距離平方之平均值，此平均值之平方根爲體積對於某定點，某定線，或某定面之迴轉半徑(radius of gyration)。

此種矩與平均值之觀念，可推至距離之任何次乘冪，如第 42 節所述。在被積函數內插入因式，並不變積分之高低界，惟因式爲諸變數之函數之形式每須選定適當坐標，運算始可能，求積分之次序自亦須取其便於運算之次序。

(e) 分佈量　設有一量分佈於體積之各部，分佈之『濃度』

(intensity)或『每單位體積內之量』各點不同，此濃度可以點之坐標之函數表之。若將此濃度函數插入(a),(b),(c)各代表體積之積分中，作爲一因式，則新積分爲此體積中所有該量之全部(total amount)．若將體積除此全部，則商爲此量在所設體積內之平均濃度。

若此濃度因式與(d)中之距離因式同插入積分中，則新積分爲此量之全部對於某定點，某定線，某定面之矩，此等點線面爲量距離之出發點。若以此量之全體除此矩則商爲此量之全部對於所設點線面之平均距離。若用距離之平方，則得此全部量之第二次矩及迴轉半徑。

茲舉一例以明之，設欲求某球體對於其某一直徑之迴轉半徑，假設球體內各點之密度與各點與球心距離之平方成正比例。設球之半徑爲 r，且以原點爲球心，z 軸爲所設直徑。按直角坐標制，濃度因式爲 $a(x^2+y^2+z^2)$ 式中 a 爲一常數，而距離平方因式爲 x^2+y^2，故球體質量之全部 M 可表以下列積分：

$$M=8\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}a(x^2+y^2+z^2)dz\,dy\,dx,$$

式中由對稱形勢，故取第一卦限中之質量而 8 倍之。慣性矩 I 之積分較 M 之積分在被積函數內多一因式 x^2+y^2。若 $k^2M=I$，則 k 爲所求之迴轉半徑。

在圓柱坐標制內，濃度因式爲a (ρ^2+z^2) 而距離平方因式爲 ρ^2，於是

$$I=2\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{r^2-\rho^2}}a(\rho^2+z^2)\rho^3\,dz\,d\theta\,d\rho,$$

由於球之對稱形勢，故取球之上半部而倍其值。M 之積分較 I 少去因式 ρ^2.

在球面坐標制內，濃度因式爲 ρ^2，而距離平方之因式爲 $\rho^2\sin^2\phi$，故

$$M=\int_0^{\pi}\int_0^{r}\int_0^{2\pi}a\,\rho^4\sin\phi\,d\theta\,d\rho\,d\phi,$$

$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{r}\int_0^{2\pi} a\,\rho^6 \sin^3\phi\, d\theta\, d\rho\, d\phi.$$

可見就此題而言，用球面坐標制當較用其他二種坐標制爲便利也。

(f)曲面 設某曲面之方程式爲 $f(x,y,z)=0$, 茲一論曲面上某一部分面積 S。令 S 在 xy 平面上之投影爲 R, 且取 $dx\,dy$ 爲構成面積 R 之元素。於是 S 上之對應微分元素爲 $\sec\gamma\, dx\, dy$, 式中 γ 爲 xy 平面與 S 在某點切面間之角，亦卽 z 軸與曲面法線間之角也。由第 53 節與第 55 節，知

$$\sec r=\frac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

於是 S 之面積爲

$$\int_R \sec\gamma\, dA=\iint_R \frac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dy.$$

各次矩，平均值，以及分佈量與曲面之關係，可在被積函數內插入適當距離因式與濃度因式以處理之。

如視此等積分爲多層積分以求值時，須知在曲面之所有點上恆有 $f(x,y,z)=0$, 故被積函數中如有 z, 必須化成 x 與 y 之函數後，始可作積分運算。

2. 線積分 設有積分

$$\int_{x_1}^{x_2} P(x,y)\,dx, \tag{7}$$

式中 y 爲 x 之函數，由下列方程式表出

$$y=f(x) \tag{8}$$

將 y 以 x 表出代入，卽可求出積分之值。茲試一察函數 $P(x,y)$ 與

曲線 $y=f(x)$ 在此積分式內之關係，則見在曲線 $y=f(x)$ 之一點 (x, y) 上，微分 dx 乘以 $P(x, y)$ 之值，此點之横坐標則爲間隔 dx 內之任意點之 x。函數 $P(x, y)$ 賦與平面上每點一濃度，而曲線 $y=f(x)$ 則選定一串點與一串 dx 相聯。此積分謂之 $P(x, y)$ 沿曲線 $y=f(x)$ 由 $x=x_1$ 至 $x=x_2$ 之線積分(line integral)。若 y 爲 x 之多值函數，則線積分表以諸定積分之和最便，每一定積分表曲線上 y 爲單值之一部分。

例如，令 $P(x, y)=xy-y^2$，而曲線之方程式爲 $y^2=4x-8$，且沿 $(3, -2)$ 點至 $(6, 4)$ 點求積分。曲線爲一拋物線，其頂點在 $(2, 0)$，其軸平行於 x 軸，故 $(3, -2)$ 在曲線軸下之一支而 $(6, 4)$ 在曲線軸上之一支。在軸下一支之方程式爲 $y=-2\sqrt{x-2}$，軸上一支之方程式爲 $y=2\sqrt{x-2}$. 所求線積分爲

$$\int_{3,-2}^{6,4}(xy-y^2)dx=\int_3^2(-2x\sqrt{x-2}-4x+8)dx$$

$$+\int_2^6(2x\sqrt{x-2}-4x+8)dx。$$

同理，亦可據曲線之方程式以 y 之函數表 x，而線積分之形式爲

$$\int_{y_1}^{y_2}Q(x, y)dy \tag{9}$$

若(7)與(9)沿同一曲線作積分運算，則二式之和亦爲一線積分

$$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2}[P(x, y)dx+Q(x, y)dy] \tag{10}$$

線積分(10)可按式逐項求積分，亦可據曲線之方程式，以 y 與 dy 表 x 與 dx，或以 x 與 dx 表 y 與 dy，然後運算。若曲線以參數方程式表出，則各項皆可以參數及其微分表出之。例如，沿上述拋物線求線積分

$$\int_{2,0}^{6,4}y^2\,dx+x^2\,dy,$$

若各項以 x 與 dx 表之，則式爲

$$\int_2^6\left[4x-8+x^2(x-2)^{-\frac{1}{2}}\right]dx,$$

若各項以 y 與 dy 表之，則式爲

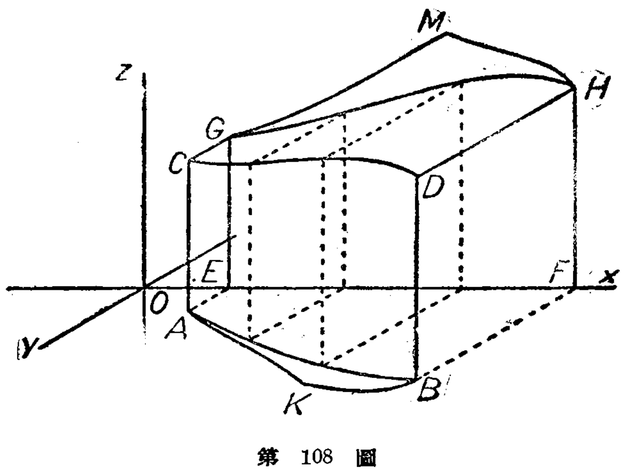
$$\int_0^4\left[\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{16}(y^2+8)^2\right]dy.$$

此拋物線亦可以參數方程式 $x=2+t^2$，$y=2t$ 表之，各項可以 t 與 dt 表之，而式變爲

$$\int_0^2[8t^3+2(2+t^2)]dt.$$

與線積分有關之觀念當再於下段縷述之。

(a) 幾何的解釋　令 x, y, z 爲空間一點之坐標。方程式 $y=f(x)$ 表 xy 平面上之曲線 AB（第 108 圖），若就三因次言則方程



第 108 圖

式代表圓柱形面 $ABDC$。令曲面 $z=P(x,y)$ 交圓柱形面於空間曲線 CD，則自 $y=f(x)$ 與 $z=P(x,y)$ 二式中消去 y 後之方程式

$z=\phi(x)$ 代表圓柱形面 $CDHG$。可見，沿曲線 $y=f(x)$ 之線積分

$$\int_{AB} P(x, y)dx$$

等於簡單積分

$$\int_{EF} \phi(x)dx$$

實即代表面積 $EFGH$，此即圓柱形面積 $ABDC$ 在 xz 平面上之投影也。積分之值可正可負視求積分時所沿曲線之向如何而定；即謂

$$\int_{AB} P(x, y)dx=-\int_{BA} P(x, y)dx.$$

由 A 達 B 之線積分之值，須視其所循曲線如何而定。若由 A 經另一曲線 AKB 以達 B 點，則在 xz，平面上有一對應於此曲線之曲線 GMH，而線積分

$$\int_{AKB} P(x, y)dx$$

等於面積 $EFHMG$。可見迴線 $GHMG$ 之面積可表以

$$\int_{AKB} P(x, y)dx+\int_{BA} P(x, y)dx=\int_{AKBA} P(x, y)dx。$$

由此可知，沿 xy 平面上某迴線求積分可得 xz 平面上某迴線之面積，此二迴線各為 $z=P(x, y)$ 上某迴線在 xy, xz 二平面上之投影。

同理，積分

$$\int Q(x, y)\, dy$$

可表 yz 平面上某曲線之面積，此曲線之形須視 xy 平面某曲線之跡而定，此二曲線為曲面 $z=Q(x, y)$ 上某曲線在 yz 平面與 xy 平面之投影。

取一特例論之，令平面 $z=y$ 為上述之 $z=P(x, y)$ 面，則 xz 平

面上之曲線與 xy 平面上之曲線有相同之面積，可以

$$\int z\,dx,\text{ 或 }\int y\,dx$$

表其值，沿面積之周圍作積分運算。此即習見求平面上面積之積分也。惟按平面幾何之向例，若以反鐘向沿面積之周圍作積分運算則

$$A=-\int y\,dx,$$

或

$$A=\int x\,dy.$$

若取此二式之和以表迴線之面積，則

$$A=\frac{1}{2}\int(x\,dy-y\,dx) \tag{11}$$

此即在 xy 平面上藉以求迴線面積之線積分也。積分運算必須沿面積周圍以反鐘向爲之。

(b) 格林氏 (Green) 定理 試一察多層積分

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)\,dy\,dx \tag{12}$$

因被積函數爲 $P(x,y)$ 對於 y 之偏導微函數，故對於 y 作積分運算後，得

$$\int_{x_1}^{x_2}P[x, f_2(x)]dx-\int_{x_1}^{x_2}P[x, f_1(x)]dx.$$

但此式爲線積分：

$$\int_{x_1}^{x_2}P(x,y)dx\text{ 與 }\int_{x_2}^{x_1}P(x,y)\,dx$$

之和，第一式沿 $y=f_2(x)$ 自 x_1 至 x_2 求積分，第二式沿 $y=f_1(x)$ 自 x_2 至 x_1 求積分，若此二路徑構成一迴線 C，則其和爲 $P(x,y)$ 沿

順鐘向繞此迴線之線積分，而（12）代表 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 在曲線所包面積上之重積分。

$$\iint_{(C)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx = -\int_{(C)} P\, dx, \tag{13}$$

式中右端之線積分係繞曲線沿反鐘向求積分。倣此對於函數 $Q(x)$ 有

$$\iint_{(C)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{(C)} Q\, dy. \tag{14}$$

此處右端之線積分，如繞曲線沿反鐘向求積分，則等於左端之重積分，由(13)與(14)二式得

$$\int_{(C)} (P\, dx + Q\, dy) = \iint_{(C)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy \tag{15}$$

此即所謂格林氏定理也。將 (a) 款中之幾何解釋施於此處，在 xy 平面上之迴線 C 爲圓柱面在 xy 平面上之跡，而線積分爲下列二投影面積之和：其一爲曲面 $z=P(x, y)$ 與圓柱面之交線在 xz 平面上之投影，其一爲曲面 $z=Q(x, y)$ 與圓柱面之交線在 yz 平面上之投影。重積分則代表圓柱形面與曲面

$$z=0 \text{ 及 } z=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$

所包之體積。

(c) 適合微分(exact differentials)試一察某二元函數

$$z=F(x, y) \tag{16}$$

此函數之全微分爲

$$dz=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy \tag{17}$$

若在 xy 平面取一曲線 $y=f(x)$，且沿此曲線由 (x_1, y_1) 至 (x_2, y_2) 求積分，則

$$\int_{z_1}^{z_2} dz = \int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy\right) \tag{18}$$

右端爲一線積分，其值可按常法求得。但左端之值表(16)所代表之曲面由 (x_1, y_1, z_1) 變至 (x_2, y_2, z_2) 時 z 之變值。故

$$\int_{z_1}^{z_2} dz = z_2 - z_1 = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1). \tag{19}$$

若函數 $F(x, y)$ 爲已知，(18)式中線積分之值可以(19)式求出。設已知 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 則

$$F(x, y) = \int \frac{\partial F}{\partial x} dx + \phi(y) \tag{20}$$

式中視 x 爲變數，y 爲常數求積分。又

$$F(x, y) = \int \frac{\partial F}{\partial y} dy + \theta(x) \tag{21}$$

式中視 y 爲變數，x 爲常數求積分。選定 $\phi(y)$ 與 $\theta(x)$ 二泛定函數，須使(20)，(21)二式相符。

等式(19)明示線積分(18)僅與曲面(16)及 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 二點有關，其值與二點間之路線無關。此即謂繞迴線 C 求得線積分

$$\int_{(C)}\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy\right) \tag{22}$$

之值必等於零也。若在等式(15)中，令 $P = \frac{\partial F}{\partial x}$，$Q = \frac{\partial F}{\partial y}$，則

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

式之右端恆等於零，故由(15)之重積分觀之，知(22)必等於零。

故知，若 $P\,dx + Q\,dy$ 爲某函數 $F(x,y)$ 之全微分，則

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{23}$$

又線積分(10)之值僅與二終點之位置有關，與聯接二點之路線無關，至繞迴線 (C) 之線積分(15)之值則為零。反之，若(23)式能成立，則 $p\,dx+Q\,dy$ 可為某函數 $F(x, y)$ 之微分，其他條件均隨之成立。當等式(23)能成立，$p\,dx+Q\,dy$ 稱為適合微分，而(23)稱為適合微分之鑒別式(test for an exact differential).

此處亟須注意者，卽凡對於適合微分，由定點 (x_1, y_1) 沿任何路線之線積分為 x 與 y 之某確定函數，對於一般情形言，線積分不僅為 x, y 之函數，其值且須視求積分所經之路線為何而定。

(d) 三元線積分 線積分及與線積分相聯而生之觀念易推及三元以及多於三元之函數。茲姑就三元函數述其關係之重要者如次。設 P, Q, R 各為 x, y, z 之函數，則

$$\int_{AB}(P\,dx+Q\,dy+R\,dz) \tag{24}$$

可表沿空間 A, B 二點間某空間曲線之線積分。此空間曲線可以二方程式表之：

$$=f_1(x),\ z=f_2(x).$$

將 y, dy, z, dz 概以 x 與 dx 表之，則(24)之值可視為一簡單積分，求得其值。若此空間曲線以參數方程表之，則被積函數可以參數及其微分表之。

若果有一函數 $w=F(x, y, z)$ 能適合

$$P=\frac{\partial F}{\partial x},\ Q=\frac{\partial F}{\partial y},\ R=\frac{\partial F}{\partial x},$$

則 $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ 為 w 之全微分，而等式(24)表 A 點至 B 點函數 w 之變值，此值與 A, B 間之路線無關，僅由 A, B 二點之坐標所決定。函數 w 存在之必要與充分條件為：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0. \tag{25}$$

等式(25)爲三元函數有適合微分之條件。若等式(25)不能成立，則線積分之值必須由所經路線與二終點坐標所決定。

(e) 物理學上之應用　(一)理想氣體(perfect gas)對於任何氣體，單位量氣體之體積 V，壓力 P，與絕對溫度 T 三者之間有一確定之關係式。對於理想氣體，有

$$pv=BT \tag{26}$$

式中 B 爲一常數。當 p, v, T 諸量由 p_1, v_1, T_1，變爲 p_2, v_2, T_2 時，氣體所受之熱 ${}_1q_2$ 可書爲

$$ {}_1q_2=\int_{p_1v_1T_1}^{p_2v_2T_2}(c_v\,dT+Apdv) \tag{27}$$

此處 c_v 爲『定容比熱』，其值爲常數，惟因氣體之不同而異其值。c_vdT 之積分表溫度增加所受之熱，而 $Apdv$ 之積分表氣體膨脹時所作之機械的功。常數 A 可將機械的功以熱量之單位表出。等式(27)爲一線積分，可藉(26)式以其中變數之一表出之。若選定 p 與 v 爲自變數，則

$$ {}_1q_2=\int_{p_1,v_1}^{p_2,v_2}\frac{C_v}{B}v\,dp+\frac{C^v}{B}kpdv \tag{28}$$

式中 $k=\dfrac{C_v+AB}{C_v}=\dfrac{C_p}{C_v}$，藉此式確定之 C_p 稱爲『定壓比熱』亦爲一常數。

因 k 恆大於一，(28)式中之被積量必非適合微分，故熱量 q 不能以 p 與 v 之函數表出。設壓力，體積，溫度經過一串不同之變值後仍回復其初值，熱量 q 並不回復至其初值，其終值與初值之差須視壓力，體積，溫度在變化過程中所經過之一串變值如何而後定。換言之，卽線積分(28)之值與求積分時所取之路線有關也。

等式 (27) 可書爲

$$ {}_1q_2=\int_{T_1}^{T_2}c_vdT+\int_{p_1,v_1}^{p_2,v_2}Apdv.$$

故可書 ${}_1q_2$ 爲二項之和：${}_1q_2={}_1q_2'+{}_1q_2''$，式中

$$ {}_1q_2'=\int_{T_1}^{T_2}c_v\,dT=c_v(T_2-T_1) \tag{29}$$

$$ {}_1q_2''=\int_{p_1,v_1}^{p_2,v_2}Apdv。 \tag{30}$$

(29) 式中之積分與求積分時所經之路線無關，故其值可求出如(29)式所示。吾人可書 $q'=c_vT+q_0'$ 式中 q_0' 爲一常數。若以常數 A 除 q'，將 q' 用通用之能量單位表出，則結果稱爲氣體之禀能（intrinsic energy）.但 q'' 不能以 p 與 v 之函數表出，因 (30) 爲一線積分，惟當 p 書爲 v 之函數時（即謂求積分所由之路線確定後）此線積分如有確定之值。

若(28)式中之被積量以 T 或 $\frac{1}{B}pv$ 除之，則新積分可書爲

$$ {}_1S_2=\int_{p_1v_1}^{p_2v_2}C_v\frac{dp}{p}+C_v\,k\,\frac{dv}{v}. \tag{31}$$

量 S 謂之熵 (entropy)，爲 p 與 v 之函數，因被積量爲一適合微分也。求積分，得

$$ S=C_v\,log_e(pv^k)+S_0, \tag{32}$$

式中 S_0 爲一常數。

線積分 (28) 必須沿某一定路線求積分，此路線可表以方程式 $f(p,v)=0$. 茲先察等溫膨脹 (isothermal expansion)，在變動過程中溫度爲常數 p 與 v 之關係式爲 $pv=c$. 若以 v 與 dv 表被積式，則

$$ {}_1q_2=\int_{v_1}^{v_2}\frac{C_v}{B}(k-1)C\frac{dv}{v}=\frac{C_v}{B}(k-1)C\,log_e\frac{v_1}{v_0}=AC\,log_e\frac{v_1}{v_0}. \tag{33}$$

此即氣體體積由 v_0 增至 v_1 時欲氣體維持等溫所需之熱量也。

茲再探討氣體內無熱量加入時求積分所經之路線應如何。由所

設條件，必有

$$v\,dp+k\,p\,dv=0,$$

由此得

$$\frac{dp}{p}+k\frac{dv}{v}=0$$

兩端求積分，得

$$\log p+k\log v=\log c_1$$

式中常數項書爲 $\log c_1$ 較爲便利，上列關係式可改書爲

$$pv^k=c_1 \tag{34}$$

此卽線積分 (28) 或 (27) 爲零之條件也，換言之卽沿曲線 (34) 求積分，則上述線積分之值爲零。若氣體循此式膨脹，則由等式 (32) 知氣體之熵爲一常數，而溫度則變動，因從 (26) 與 (34) 可得

$$T=\frac{C_1}{B}v^{1-k}. \tag{35}$$

氣體既不吸熱亦不放熱，故膨脹爲絕熱的(adiabatic).

(二)力場 (force field)設一物體受力之作用而移動；又設物體在點(x, y, z)時，其所受之力沿三坐標軸之分力各爲 x, y, z 之函數 X, Y, Z；則此變動之力施於物體上所作之功可表以線積分

$${}_1W_2=\int_{x_1,y_1,z_1}^{x_2,y_2,z_2}(X dx+Y dy+Z dz). \tag{36}$$

若條件(25)能適合，則必有一函數 $W(x, y, z)$ 俾

$$\frac{\partial w}{\partial x}=X,\ \frac{\partial w}{\partial y}=Y,\ \frac{\partial w}{\partial z}=Z,$$

而線積分(36)代表物體由此點至彼點函數 w 之變值，其值與求積分所經之路線無關。函數 $U=-W$ 謂之位函數(potential function)，位函數之變值恰爲所作功之負值。若此函數存在則力場爲保守的力場

(conservative field).

若條件(25)不能適合，則線積分(36)之值須視求積分所經之路線如何而定，位函數不能存在，而力場爲非保守的(non-conservative).

此處所論之觀念應用於僅有二自變數之平面上之力場自更簡易。

習　題　五　十　四

1. 求$\int_0^6\int_0^x\int_x^y(x^2+y^2+z^2)dz\,dy\,dx$之值，並以幾何解釋之。

2. 求一均勻的立方體對於其某一稜之慣性矩。

3. 若立方體各部之密度與各點與其某一稜之距離成正比例，求其重心。

4. 設有球體，上半球爲均勻的，下半球各點之密度與各點至球心之距離成正比例，二半球之重量相等，求此球之重心。

5. 設有正圓柱體其密度在頂上爲每單位體積 w 磅，均勻增加，至底上其密度增至每單位體積 $2w$ 磅，求圓柱體之重心及其對於底上某直徑之迴轉半徑。答數用半徑 r 及高度 h 表之。

6. 求$\iiint xy\,dV$之值，將積分推至因次爲 a, b, c 之正長方體之體積，用正長方體共點之三稜爲坐標軸。

7. 某曲面之方程式爲 $xyz=5$. 求以積分表此曲面爲圓柱面 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 所包部分之面積。

8. 求在單位球面第一卦限上乘積 xyz 之平均值。

9. 求圓柱形面 $x^2+y^2=a^2$ 與圓柱形面 $x^2+z^2=a^2$ 所包之體積，及包此體積之面積。

10. 下列各式何者爲適合微分？求以下列各式爲其全微分之函數。

(a) $x\,dx+y\,dy$;　　(b) $y\,dx-x\,dy$;

(c) $(x-y)dx-x\,dy$;　　　　(d) $x^2\,dx-xy\,dy$;

(e) $3x^2\,y\,dx+(x^3-y^3)dy$;　　(f) $z\,dx+z\,dy+(x+y)dz$.

11. 沿路線 $y=x$ 求下列線積分之值:

$$\int_1^3(x^2+y^2)dx。$$

12. 沿 $y=x, y=x^2, y=x^3$ 三不同之路線,求下列線積分之值:

$$\int_{0,0}^{1,1}y\,dx-x\,dy。$$

13. 用題 12 之結果及等式 (11),求各路線間所包之面積。

14. 用格林氏定理及等式 (15),求證式 (11) 等於代表路線所包面積之重積分。

15. 繞以 (0, 0), (2, 0), (2, 3), (0,3) 為頂點之矩形求線積分

$$\int y^2\,dx+x^2\,dy$$

以證實格林氏定理。

16. 以圓 $x^2+y^2=1$ 代矩形,解題 15.

17. 用等式(28)求 v 由 v_0 變為 $2v_0$ 氣體所吸收或放出之熱,沿路線 $pv^2=c$ 求積分。

18. 求題 17 中,溫度之變值。

19. 求題 17 中,熵之變值。

20. 當氣體體積沿路線 $p\,v=c$ 由 v_1 變為 v_2, 次沿路線 $pv^2=c_1$ 由 v_2 變為 v_1, 最後沿路線 $v=v_1$ 變回起始狀態,即 p 由 $\frac{\quad}{v_1^2}$ 變至 $\frac{C}{v_1}$, 求氣體所諸熱之變值。

21. 理想氣體若以等溫膨脹,試討論其熵之變值

22. 在一平面力場內,某單位質量上所受力之二分力為

$$X=-2x, Y=-2y。$$

求證此力場爲保守的，並求此力場之位函數，假定在原點處位函數之值爲零。

23. 設在一平面力場內，某單位質量上所受力之二分力爲

$$X=ay, Y=bx,$$

求證若 $a\neq b$ 則力場爲非保守的。若物體沿四邊爲 $x+y=1$, $x-y=-1$, $x+y=-1$, $x-y=1$ 之矩形運動一週，求此力對於單位質量所作之功。若 $a=b$ 求證功之值爲零。令 $a=b$ 求位函數。若沿 $x^a y^b=c$ 形式之路線移動則力場未曾作功，又若 $a=b$, 則沿此路線位函數之值恆爲零。又證明在此等路線上之任一點之力垂直於此路線，

24. 在某三因次力場內，位函數爲

$$\frac{-m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

求證力與物體與原點距離之平方成反比例，且力之方向趨向原點。

參　考　書　目

Solid Geometry, Charles Smith (Macmillan, 1903)

Advanced Calculus. W. F. Osgood (Macmillan, 1925), Chapters IV, V, VI, VIII, XI, XII, XIII.

Advanced Calculus, E. B. Wilson (Ginn 1912) Chapters IV, V, XII.

Mathematical Analysis, Goursat-Hedrick, Vol I (Ginn. 1904), Chapters VII, X, XI, XII.

Integral Calculus W.E. Byerly (Ginn 1888).

第十三章　經驗數據之處理法

第五十八節　或然率之理論

量之值由觀察或量度所得者每非其正確值而僅爲其近似值。例如，某種鹽之已知濃度之溶液，在何温度開始凝固即不能確定。若有人作一次之測定試驗，其結果每由多種原因產生誤差，如温度計上不正確之校準，觀察温度計之欠準確，權水量鹽量時之欠準確，水之蒸發等等，在在均使結果不能正確。從一次之測定無從估計誤差之多寡，若將試驗重複若干次，若諸次結果接近，則可估計諸結果之可信程度。例如二次測定之結果未必恰相符合，但由直覺吾人恆以爲眞値或在此二次測定值之內而不甚信其爲其他之値，又二次測定結果之精確度或精密度似覺與二結果之差數有關。

若某未知量經若干次之觀察以決定其值，不特須求此量之近眞值，尤重要者，更須知如何量度此近眞值之精密度。於此必須先與或然率以確定專門之定義，爲達到此目的先從簡單理想的情形作討論之出發點。

1. 簡單理想的情形　設在 n 個不同事件中，有一事件且僅有一事件能出現，又此 n 個事件有同等出現之機會，若其中 r 個爲適稱事件，其餘 $n-r$ 個爲不適稱事件，則事件之適稱者出現之或然率(probability)爲 $\frac{r}{n}$ 而事件之不適稱者出現之或然率爲 $\frac{n-r}{n}$，例如取一銅幣拋擲，幣面幣底必有一向上，面與底不能同時向上，而此二事件有同等出現之機會。幣面向上之或然率爲 $\frac{1}{2}$，幣底向上之或然率亦爲 $\frac{1}{2}$。若取二銅幣拋擲，則或二幣面向上或甲幣面向上乙幣底向上，或甲幣底乙幣面向上，或二幣底向上。此四事件均有同等出

現之機會。二幣面向上或二幣底向上之或然率各為 $\frac{1}{4}$ 一幣面一幣底向上之或然率則為 $\frac{2}{4}$ 或 $\frac{1}{2}$。若某事件勢必出現，則其或然率為 1。

若甲事件出現之或然率與乙事件之出現與否無關則甲乙二事件互稱為獨立事件 (independent events) 若二個或若干個事件同時出現所構成之事件謂之複合事件 (compound event)。茲列舉數重要情形如次。

(a) 共存獨立事件 (concurring independent events) 若干個獨立事件同時出現之或然率為各個事件或然率之連乘積。

茲就二獨立事件論之，設甲事件出現之情形有 m_1 種，不出現之情形有 n_1 種，每種有同等之機會，則甲事件出現之或然率為 $p_1=\frac{m_1}{m_1+n_1}$，用同樣之記法，得乙事件之或然率為 $p_2=\frac{m_2}{m_2+n_2}$，甲事件 m_1 種出現之情形，每種可與乙事件 m_2 種出現情形之任一種同時出現，故甲乙二事件同出現之情形凡 m_1m_2 種。但甲事件出現或不出現之可能情形凡 (m_1+n_1) 種，乙事件出現或不出現之可能情形凡 (m_2+n_2) 種，故二事件出現或不出現之情形凡 $(m_1+n_1)(m_2+n_2)$ 種。故二事件同出現之或然率為

$$\frac{m_1m_2}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)}=p_1p_2$$

(b) 互斥事件　若干個事件中僅有一事件能出現，則有一事件出現之或然率為各個事件或然率之和。

茲就二事件論之，設甲事件出現乙事件不出現凡 m_1 種方式，乙事件出現甲事件不出現凡 m_2 種方式，甲乙二事件俱不出現之方式凡 m_3 種，則甲事件出現之或然率為 $p_1=\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}$，乙事件出現之或然率為 $p_2=\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}$，甲乙二事件有一出現之或然率為

$p=\dfrac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3}=p_1+p_2$。

玆以撲克牌* 52 張說明此二命題。若在 52 張中任意取一張則得『黑葉』之或然率爲 $\frac{1}{4}$，得『王』之或然率爲 $\frac{1}{13}$，得黑葉王之或然率爲 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{13}=\frac{1}{52}$. 倣此，得紅心王，得黑花王，得紅菱王之或然率亦各爲 $\frac{1}{52}$，而得王之或然率則爲 $\frac{1}{52}+\frac{1}{52}+\frac{1}{52}+\frac{1}{52}=\frac{1}{13}$. 若在 52 張中任取 4 張，取得 4 王之或然率卽爲取四王之適稱方式之種數除以任取 4 張之方式之種數也。王僅有四張，其被取之順序不同，共計 4! 種；而在 52 張牌中任取四張共有 $52\cdot51\cdot50\cdot49$ 種不同之順序，故取得四王之或然率爲 $\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{52\cdot51\cdot50\cdot49}$。取得四黑葉之或然率爲 $\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{52\cdot51\cdot50\cdot49}$ 取得同花之或然率爲 $\frac{4\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10}{52\cdot51\cdot50\cdot49}$。

(c) 重複嘗試　若某事件嘗試一次成功之或然率爲 p，失敗之或然率爲 q，則在 n 次嘗試中恰成功 r 次之或然率爲二項式 $(p+q)^n$ 展式中含 p^r 之一項，卽

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}p^rq^{n-r}.$$

蓋在 n 次中成功之 r 次或爲前 r 次或爲後 r 次或成敗交錯合計凡成功 r 次，其不同之交錯方式共 $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ 種，而按某一定程序恰成功 r 次之或然率爲 r 次嘗試成功之或然率之乘積 p^r，及 $n-r$ 須嘗試失敗之或然率之乘積 q^{n-r}。明乎此卽可明白上式矣。

玆以擲骰爲例說明之，在一次嘗試中擲出一點之或然率爲 $\frac{1}{6}$，

---

* 撲克牌 52 張，分『黑葉』(spade)『紅心』(heart)，『黑花』(club)『紅菱』(diamonds) 四種花色，每種 13 張；此 13 張各有不同之點數自 1 至 10 凡 10 種，其餘三種則爲『王』『后』『士』三種。　譯者註

若連擲四次則由上述定理先求：

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^4=\left(\frac{1}{6}\right)^4+4\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)+6\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2+4\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

此五項各爲擲出一點四次，三次，二次，一次及零次之或然率。此五項之和爲 1，因此五事件必有一出現也。若取四骰一擲則一點出現若干枚數之或然率亦如上式所示。

若取五銅幣擲之，則因每一銅幣幣面向上之或然率爲 $\frac{1}{2}$。先書出

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5=\left(\frac{1}{2}\right)^5+5\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)+10\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$+5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}.$$

此六項之值各代表幣面出現 5, 4, 3, 2, 1, 0 枚之或然率。

2. 觀察誤差之或然率　以或然率之定律施於觀察之誤差實無嚴正之指示法。因各種事件，各種原因等等之可能情形殊無法計算，故上述理想之情形不能應用。但公認之或然率理論被普遍採用，在處理經驗數據時爲助甚大。此種理論與上述或然率之觀念實相符合也。

觀察與量度之所以有誤差原因至夥，詳加分析，因又有因，以次推論永無窮期。設由某原始來源所生之誤差爲 a，假定誤差之一切來源之値皆可以此原始來源之倍數表之。又設此原始來源之個數爲 n，在此 n 個誤差來源中，每個所生之誤差可正可負，機會均等。若產生正誤差來源之個數較產生負誤差來源之個數多 m 個，則所生之誤差爲正，其値爲 ma。如此假定之後，則情形與拋擲 n 個銅幣相同。茲倣先例書出

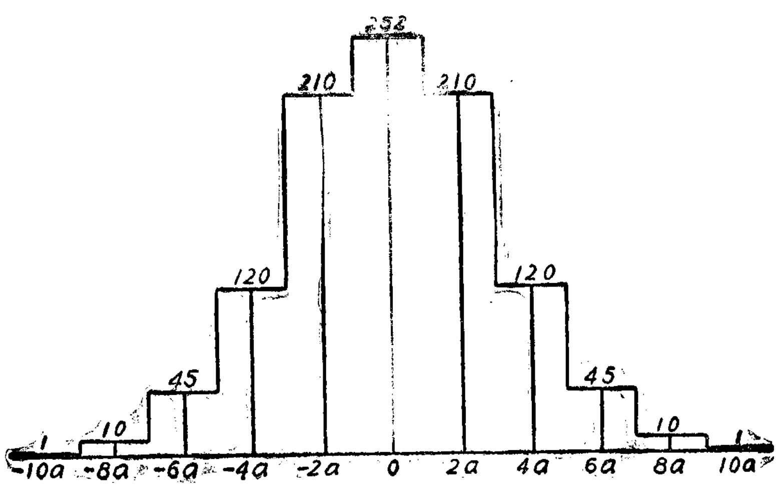
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}+n\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots+$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}.$$

第一項爲所有誤差之原始來源皆產生負誤差之或然率，即誤差爲 $-na$ 之或然率。通項 $\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots r}\frac{1}{2^n}$ 則爲產生負誤差之來源爲 r 個，正誤差之來源爲 $n-r$ 個之或然率亦即誤差爲 $(n-2r)a$ 之或然率也。

若 $n=5$ 則此等數恰與上述拋擲五枚銅幣各或然率之數相等。茲製一圖表 $n=10$ 時之或然率函數。設 p 表誤差爲 x 之或然率，則得表如下：

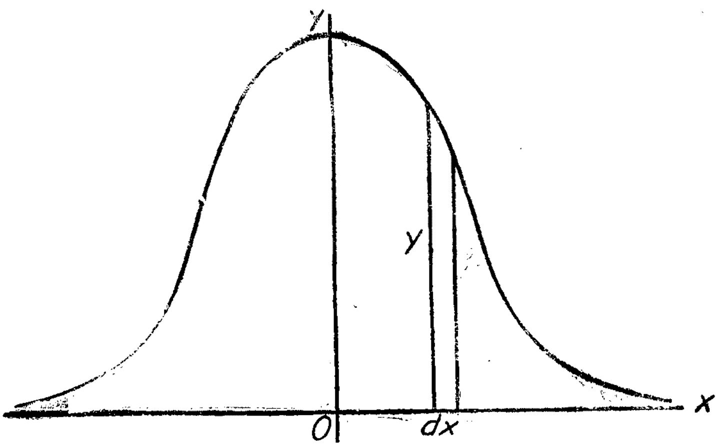
x:	$-10a$	$-8a$	$-6a$	$-4a$	$-2a$	0	$2a$
p:	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$
x:	$4a$	$6a$	$8a$	$10a$			
p:	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$			



第 109 圖

此 11 個 p 值之和為 1。在第 109 圖中，對應於每一 x 值之縱坐標均繪出，其高與對應於 x 之 p 值成正比例。若作出之諸矩形，寬為 $2a$ 高為 $y=\frac{p}{2a}$ 則矩形之面積為 $p=2ay$，卽誤差落於底上之或然率，諸矩形之和等於 1。

在實際觀察中，誤差之來源決非 10 個相等之原始來源所構成，亦非有限個相等之來源所構成，惟當 n 無限增大時，則以上述之臆設情形表實際狀況愈益近於正確耳。於此吾人亟欲求得一函數 $y=f(x)$ 俾微分面積 $y\,dx$ 足以代表誤差落在微分底邊 dx 上之或然率。令 n 表一有限值作為討論之出發點，令 Δx 表 $2a$，求其對應 Δy，於是令 n 無限增大，以求 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之極限，然後由此得以 x 之函數表 y (圖 110)。



第 110 圖

差數為 $2a$ 之二個相續之 x 值為 $x_1=(n-2r)a$, $x_2=(n-2r-2)a$，其對應之 y 值為

$$y_1=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{(2a)1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots r}\frac{1}{2^n},$$

$$y_2=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r)}{2a\cdot1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r+1)}\frac{1}{2^n}。$$

由除法可得

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{n-2r}{n-2r-2},\quad \frac{x_2-x_1}{x_1}=\frac{-2}{n-2r}。$$

又
$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{r+1}{n-r},\quad \frac{y_2-y_1}{y_1}=\frac{n-2r-1}{r+1}。$$

消去 r，可得

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2x_1y_1-y_1(x_2-x_1)}{\frac{n}{2}(x_2-x_1)^2+x_1(x_2-x_1)+(x_2-x_1)^2}。$$

當 n 無限增大時，則左端之值趨近於導微函數 $\frac{dy}{dx}$，且勿忘 $x_2-x_1=2a$，得

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2xy-2ay}{2na^2+2ax+4a^2}。$$

當 n 遞增時，a 之值遞減，當 n 變爲無限大時，a 之值趨近於零，故 $2na^2$ 爲不定式。但當誤差來源之個數 n 增加時，則由每一原始來源所產生之誤差 a 必減小，而可能之最大誤差必增大而產生此最大誤差之或然率 $\frac{1}{2^n}$ 必迅速減小。na^2 之極限在每一組觀察環境下必有一確定之值，但環境不同則此極限値亦異。令

$$\frac{1}{2h^2}=\lim_{n\to\infty}na^2$$

式中 h 爲一常數，其値隨題而定。於是

$$\frac{dy}{dx}=-2h^2xy,\ 或\ \frac{dy}{y}=-2h^2x\,dx。$$

兩端求積分，則得一以 x 之函數表 y 之關係式，

$$\log y=-h^2x^2+c \text{ 或 } y=ke^{-h^2x^2}, \qquad (1)$$

式中 $k=e^c$，積分常數如此書出，較爲便利。

此曲線有一必須適合之條件卽曲線與 x 軸間之全部面積必等於 1 是也。曲線對稱於 y 軸，x 軸則爲其漸近線，故其面積爲

$$2\int_0^\infty ke^{-h^2x^2}dx=1。$$

在初等函數中不能求得 $-x$ 之函數以此處之被積函數爲導微函數者。但將被積函數展開爲 x 之冪函數，再逐項求積分，再不論定積分之高界爲何値，此定積分之値可求至任何精確之程度。在多種積分表內上列定積分之値可以查得。

$$2\int_0^\infty k\,e^{-h^2x^2}dx=\frac{k\sqrt{\pi}}{h}=1,$$

故 $k=\dfrac{h}{\sqrt{\pi}}$. 使誤差落於 $-x$ 與 $+x$ 之間，換言之，卽使誤差之絕對值小於 x，其或然率爲

$$p=2\int_0^x y\,dx=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-h^2x^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hx} e^{-(hx)^2}d(hx). \qquad (2)$$

此積分之値在多種物理與數學之表內與 hx 之値並列以資查攷，稱爲或然率積分(probability integral)。

此定積分之值顯然爲其高界 hx 之函數。誤差應在某一定間隔 $-x$ 至 x 之間之或然率因 h 增大而增大。故常數 h 爲觀察之精密度之權衡(measure of the precision)。若 h 甚大。重複若干次之觀察必相聚較密，與眞値相距甚近，若 h 甚小，則諸觀察之値必散佈較遠，與眞値相差較大。

習 題 五 十 五

1. 骰子二粒一次擲得雙六之或然率若何？

2. 由 52 張牌中，但取 2 張，求取得二張紅心之或然率。答 $\frac{1}{17}$.

3. 若取六銅幣拋擲，恰有三幣面向上之或然率若何？ 答 $\frac{5}{16}$.

4. 若取六銅幣拋擲，至少有三幣面向上之或然率若何？ 答 $\frac{21}{32}$.

5. 袋中盛球，10 白 6 黑，若任意取 2 球，求取得一白一黑之或然率。答 $\frac{1}{2}$.

6. 在題 5 中，取得二白之或然率若何？取得二黑之或然率若何？答 $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$.

7. 設有五人依次在題 5 之袋中取一球，取後即返球於袋以待第二人取球，問五人均取得黑球之或然率若何？ 答 $\frac{243}{32768}$.

8. 在題 7 中若每人取球後不復返球於袋，求取得 5 黑球之或然率，求取得二黑三白之或然率。 答 $\frac{1}{728}$; $\frac{75}{182}$.

9. 某槍手平均每放槍 10 次，中的 3 次，求 5 次中至少能中的一次之或然率。〔注意：$p=1-q$，式中 q 爲五次不中的之或然率，卽謂 $p=1-\left(\frac{7}{10}\right)^5$〕。

10. 在題 9 中，至少須嘗試若干次俾至少中的一次之或然率大於一次不中之或然率？ 答 2。

11. 令 $h=1, h=\frac{1}{2}$ 在同一軸上製或然率曲線 $y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$。

12. 設 h 爲已知，試從或然率積分表上查以 h 表 x 之值，俾誤差大於 x 之絕對值與小於 x 之絕對值有同等之機會。

13. 從表上查出：在觀察 20 次中有若干次應在眞值左右 $\frac{3}{5h}$ 單

位以內。 答 12.

第五十九節　最小二乘冪法

1 對於一單量之直接觀察　設在相似之條件下對某未知量 Q 作 n 次之觀察。按或然率理論，某種誤差 x 能產生之理想的或然率應爲零，因

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-h^2x^2}dx$$

代表誤差落於 x_1 至 x_2 間之或然率。可見求誤差之或然率，必舉誤差所在之間隔，此間隔上之面積卽表所求之或然率也。察際上觀察之結果或量度之讀數(readings)必有一最小之分度，設以 c 表此分度，誤差 x 能以產生之或然率實卽誤差落於 $x-\frac{1}{2}c, x+\frac{1}{2}c$, 間隔內之或然率也。例如某刻度尺上分度達每單位之十分之一，讀數爲 0.8 之量卽指此讀數距 0.8 似較近於 0.7 或 0.9 也，換言之讀數爲 0.8 卽表 0.75 與 0.85 間之量也。故誤差 x 之或然率爲

$$p_x=\frac{ch}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}.$$

設上述對於未知量 Q n 次觀察之値爲 $m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$. 玆欲求一値 M 爲 Q 値之最近眞者亦卽或然率最大之値 (most probable)。若 M 卽爲 Q，則 $x_1=M-m_1, x_2=M-m_2 \cdots\cdots, x_n=M-m_n$ 爲各次觀察之誤差，其或然率爲

$$\frac{ch}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x_1^2}, \quad \cdots\cdots, \quad \frac{ch}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x_n^2},$$

而此一組誤差應產生之或然率爲各個誤差或然率之乘積，卽

$$p=\frac{c^nh^n}{\pi^{\frac{n}{2}}}e^{-h^2(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2)}.$$

可見 Q 之最近眞值 M 即能使此一組誤差有最大之或然率者，亦卽使 $x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots x_n^2$ 爲極小者。故選擇 M 必使

$$(M-m_1)^2+(M-m_2)^2+\cdots\cdots+(M-m_n)^2$$

爲極小。將上式對於 M 求導微函數，並令導微函數等於零得

$$M=\frac{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n}{n}. \tag{1}$$

故 n 次量度之算術平均數爲 Q 值之最近眞者，但究非 Q 之眞值，故 $M-m_1, M-m_2$, 等等不能稱爲誤差，而稱爲剩餘誤差 (residual errors)，常用 $v_1, v_2\cdots\cdots v_n$ 表之。最小二乘羃原則，卽選定 M 俾

$$\Sigma v^2=v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_n^2$$

爲極小。

未知量 Q 之最近眞值既已求得，更進而求估計此值之精密度。上節曾舉出 h 爲精密度之權衡，現在必須求用剩餘誤差 v_1, v_2 等表出 h。

從量度所得者僅 $m_1, m_2,\cdots\cdots m_n$ 等 n 個值，茲欲從此諸值定 h，俾曲線

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

下之面積分佈於 x 軸上與量度所得值之分配相稱。量度之數爲 n，曲線下之總面積爲 1，故每一量度有面積之 $\frac{1}{n}$。M 爲 Q 最好之估計值，諸 v 值爲諸 x 值最好之估計值，故 x 之於 Q 亦猶 v 之於 m; x 之原點爲 Q, v 之原點應選 M, 故全面積對於通過 M 點鉛直軸之第一次矩必爲零。卽

$$\frac{v_1}{n}+\frac{v_2}{n}+\cdots\cdots+\frac{v_n}{n}=0$$

選擇 h 必須能使理論面積對於 y 軸之第二次矩或慣性矩，等於實際求得之面積對於 y 軸之第二次矩。若 M 與 Q 是差為 q，則應有

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{\infty} x^2 e^{-h^2x^2}dx=\frac{\Sigma v^2}{n}+q^2,$$

由積分表可查得

$$\frac{1}{h^2}=\frac{\Sigma v^2}{n}+q^2$$

式中 q 仍須再設法確定者。q 之值自不能絕對求得，但由一組觀察之結果可得此誤差之合理的估計。

第一，若選取一 r 值，俾

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{hr} e^{-h^2x^2}dx=\frac{1}{2},$$

則誤差 x 之絕對值大於或小於 r 有同等之機會。此 r 值稱為一次觀察之近眞誤差 (probable error of a single observation)，由表上可查得其值為

$$r=\frac{0.47694}{h} \tag{2}$$

茲再一察 n 次觀察之結果 m_1, m_2, ……m_n。為便利起見，設 $n=9$，則 M 由

$$h^2(M-m_1)^2+h^2(M-m_2)^2+\cdots\cdots+h^2(M-m_9)^2$$

為極小之條件所決定，由此得

$$M=\frac{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_9}{9}.$$

令 $5M_1=m_1+m_2+m_3+m_4+m_5$，則

$$M=\frac{5M_1+m_6+m_7+m_8+m_9}{9}$$

此卽使

$$h_1^2(M-M_1)^2+h^2(M-m_6)^2+\cdots\cdots+h^2(M-m_9)^2$$

爲極小之 M 值也，式中 $h_1^2=5h^2$。由此可見若將 5 次觀察之平均 M_1 與其他各單次觀察合併，則 M_1 必應有一精密度權衡 h_1，此 h_1 與 h 之關係可以 $h_1=\sqrt{5}\,h$ 表之。前曾以 r 表單次觀察之近眞誤差，若以 r_1 表 M_1 之近眞誤差，則

$$r=\frac{0.47694}{h},\ r_1=\frac{0.47694}{h_1}.\ r_1=\frac{r}{\sqrt{5}}$$

倣此推理，可見 n 次觀察之平均之近眞誤差爲

$$r_0=\frac{r}{\sqrt{n}}=\frac{0.47694}{h\sqrt{n}},\tag{3}$$

式中 r 爲單次觀察之近眞誤差。

此 r_0 與上述之 q 不必爲同一量，但 q 應隨 h 與 n 而變一如 r_0 之隨 h 與 n 而變也。故可假定

$$q^2=\frac{b^2}{h^2n},$$

從而確定 b 之最近眞值。於是有

$$\frac{1}{2h^2}=\frac{\Sigma v^2}{n}+\frac{b^2}{h^2n},$$

由此得

$$\frac{1}{h^2}=\frac{2\Sigma v^2}{n-2b^2}.$$

選擇 b 之值必須不論 n 爲何值能與 h 一合理之值。若 $2b^2$ 不爲 1 則當 $n=1$ 時，h 變爲無限大，如此則 $r=0$，於理不合。若 $2b^2=1$，則當 $n=1$ 時，h 變爲不定，於理並無不合，因單次觀察之精密度本爲不定也。故令 $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，由此得

$$q^2=\frac{1}{2h^2n}=\frac{1}{2(0.47694)^2}r_0^2.$$

故最後得

$$\frac{1}{h}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} \tag{4}$$

$$r=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{(n-1)}} \tag{5}$$

$$r_0=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{(n-1)n}} \tag{6}$$

最後二公式，一爲單次觀察之近眞誤差，一爲一組多次觀察平均數之近眞誤差，此二式實爲討論精密度資用公式之最重要者，因式 $(\Sigma v^2)^{\frac{1}{2}}$ 必須就每組觀察值算出，至 r 與 r_0 式中之其他因式均可自計算表查出也。

玆舉例如下：某線用長 20 米分度至厘米之捲尺量度 8 次，結果列於下表之第一行。其平均數爲 188.875 米，其剩餘誤差列於第二行，剩餘誤差之平方列於第三行。

觀察值	v	v^2
188.97	0.095	.009025
.88	.005	.000025
.91	.035	.001225
.99	.115	.013225
.83	−.045	.002025
.80	−.075	.005625
.81	−.065	.004225
.81	−.065	.004225
$M=188.875$	$\Sigma v=0.500$	$\Sigma v^2=.039600$

剩餘誤差之平方和爲

$$\Sigma v^2=0.0396,$$

於是查表可得

$$r = 2549\sqrt{0.0396} = 0.051,$$

$$r_0 = .0901\sqrt{0.0396} = 0.018.$$

故所求之 M 可書爲

$$M = 188.875 \pm 0.018 \text{ 米。}$$

近眞誤差有二位數字，M 之値則書至近眞誤差所及之位數爲止。

2. 對於單量若干個加重之觀察値　設某單量 Q 經若干次獨立之測定，每次之精密度不同。命 m_1, m_2,……m_n 表各次測定之結果，h_1, h_2,……h_n 表各次結果之精密度。若 Q 之値爲 M，則誤差爲 $x_1 = M - m_1$, $x_2 = M - m_2$,…… 各誤差之或然率可表以

$$p_1 = \frac{c_1 h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 x_1^2}, \quad p_2 = \frac{c_2 h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 x_2^2}, \ldots\ldots$$

此一組誤差恰同時產生之或然率爲

$$p_1 p_2 \cdots p_n = \frac{c_1 c_2 \cdots c_n h_1 h_2 \cdots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(h_1^2 x_1^2 + h_2^2 x_2^2 + \cdots + h_n^2 x_n^2)}$$

當 e 之指數爲極小時，此式有極大，故當

$$h_1^2(M - m_1) + h_2^2(M - m_2) + \cdots\cdots + h_n^2(M - m_n) = 0.$$

故得 M 之最近眞値爲：

$$M = \frac{h_1^2 m_1 + h_2^2 m_2 + \cdots\cdots + h_n^2 m_n}{h_1^2 + h_2^2 + \cdots\cdots + h_n^2}.$$

此 M 量謂之加重平均數(weighted mean)，在結果中 m_1, m_2,……等値分別加以不同之重量(weights)，其値與 h_1^2, h_2^2……成正比例。若以 w_1, w_2,……表所加之重，則

$$\frac{w_1}{h_1^2} = \frac{w_2}{h_2^2} = \cdots\cdots = \frac{w_n}{h_n^2} = \frac{1}{h^2}, \tag{7}$$

式中 h 表某測定值所加之重爲 1 之精密度權衡。由(7)，可得

$$M=\frac{w_1m_1+w_2m_2+\cdots\cdots+w_nm_n}{w_1+w_2+\cdots\cdots+w_n} \tag{8}$$

對於某一測定值，或觀察值加重 w 卽無異謂此測定值或觀察值可信程度或精密度與重量爲 1 之 w 個測定值平均數之精密度相同。在實用上，w 之值恆取與諸 h^2 成正比例或與近眞誤差之平方成正比例之整數。

重量爲 1 之測定值之近眞誤差 r 與重量爲 w 之加重平均數 M 之近眞誤差 r_0 間之關係於是可表以下式：

$$r=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma wv^2}{n-1}}, \tag{9}$$

$$r_0=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma wv^2}{(n-1)\Sigma w}} \tag{10}$$

式中

$$\Sigma wv^2=w_1(M-m_1)^2+w_2(M-m_2)^2+\cdots\cdots+w_n(M-m_n)^2,$$

$$\Sigma w=w_1+w_2+\cdots\cdots+w_n。$$

此等和數必須根據所設數據算出，至其他因式與前述者同，皆可自算表中查得。

適所舉計算 r 與 r_0 之公式亦可倣第 1 款之推理求得，卽就此處求得之式察之，若令所加之重有等值，$w_1=w_2=\cdots\cdots=w_n=1$. 則所得之結果仍與以前求得之公式相合。又所加之重若改用較大之倍數，則原來與重量爲 1 相當之 r 增大；但 r_0 之值則不論所加之重改用較大或較小之倍數，其值不變。

3. 若干個量之一次函數　設有若干個待測定之量，因此等量不能直接測定，而其一次函數之值則能測定，故可由此等量之一次函數之值反求此等量之值。爲便利起見，始假定 x, y, z 三量爲待測定者，其一次函數測定如下

$$
\begin{aligned}
a_1x+b_1y+c_1z&=M_1,\\
a_2x+b_2y+c_2z&=M_2\\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
a_nx+b_ny+c_nz&=M_n,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

測定值 $M_1, M_2, \cdots\cdots M_n$ 自難免無誤差，而方程式個數又多於未知數之個數 可見欲得一組 x, y, z 之值同時適合諸方程式，迨屬無望，而 x, y, z 最適當之值或不能恰合諸方程式中之任一式。設以 x, y, z 之最近眞值代入，且令

$$
\begin{aligned}
a_1x+b_1y+c_1z-M_1&=v_1\\
a_2x+b_2y+c_2z-M_2&=v_2\\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
a_nx+b_ny+c_nz-M_n&=v_n
\end{aligned}
\tag{12}
$$

式中 v_1, v_2, 等等爲剩餘誤差，即 M_1, M_2 諸值與其最近眞值之差數也。若 h 爲 M_1 之精密度權衡，則 M_1 之或然率爲

$$p_1=\frac{ch}{\pi^{\frac{1}{2}}}e^{-h^2v_1^2},$$

若此 n 次量度有相等之精密度，則此一組量度之或然率爲

$$P=\frac{c^nh^n}{\pi^{\frac{n}{2}}}e^{-h^2(v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_n^2)}.$$

最近眞之 x, y, z 值必須使 P 爲極大，故必須能使 $v_1^2+v_2^2+\cdots\cdots+v_n^2$ 爲極小。可見此量對 x, y, z 諸量之偏導微函數爲零乃必要之條件，由此導出之三式即足以定 x, y, z 之值。此式對 x 之偏導微函數爲

$$2v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+2v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}+\cdots\cdots+2v_n\frac{\partial v_n}{\partial x}=2a_1v_1+2a_2v_2+\cdots\cdots+2a_nv_n$$

對於 y, z 之偏導微函數可倣此求得。以 2 除諸式再將(12)之 v_1, v_2 ……等值代入，得常態方程式(normal equations)：

$$\begin{aligned}
[aa]x+[ab]y+[ac]z&=[aM],\\
[ab]x+[bb]y+[bc]z&=[bM],\\
[ac]x+[bc]y+[cc]z&=[cM],
\end{aligned}\tag{13}$$

式中

$$\begin{aligned}
[aa]&=a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2,\\
[ab]&=a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n,\\
[ac]&=a_1c_1+a_2c_2+\cdots\cdots+a_nc_n,\\
[aM]&=a_1M_1+a_2M_2+\cdots\cdots+a_nM_n,
\end{aligned}$$ 等等。

若 M_1, M_2, 諸測定値有不等之精密度，則(11)各式上須各加重，各重量之値與其精密度權衡成正比例；若以 w_1, w_2,……表此等重量，則下式必須爲極小：

$$w_1v_1^2+w_2v_2^2+\cdots\cdots+w_nv_n^2.$$

相當於(13)之常態方程式變爲

$$\begin{aligned}
[waa]x+[wab]y+[wac]z&=[waM],\\
[wab]x+[wbb]y+[wbc]z&=[wbM],\\
[wac]x+[wbc]y+[wcc]z&=[wcM],
\end{aligned}\tag{14}$$

式中

$$\begin{aligned}
[waa]&=w_1a_1^2+w_2a_2^2+\cdots\cdots+w_na_n^2,\\
[wab]&=w_1a_1b_1+w_2a_2b_2+\cdots\cdots+w_na_nb_n
\end{aligned}$$ 餘類推。

在導出上上述常態方程式(14)時雖言及觀察値或測定値之精密度，但並非謂必待諸値之精密度權衡爲已知後始能用此等方程式也。

(13)式卽未提及精密度權衡，而只用觀察方程式(11)導出。(14)式中所加之重僅指觀察方程式之相對的可信程度之估計値，如觀察者之學識，儀器之良窳，以及環境之優劣等等。若無從得估計之根據，仍須用(13)式。

上述求三未知數 x, y, z 之方法自可推廣以求三個以上之未知數，(13)與(14)型之常態方程式個數自須與待定未知數個數相等。

用常態方程式算出之數，其精密度之估計法不妨在此一述，惟證明則姑從略。若將由(14)求得之 x, y, z 值代入(12)以定諸 v 之値，則重量1之觀察值之近眞誤差可表以下列公式

$$r=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma wv^2}{n-3}}。$$

若用(13)式，其中重量皆爲1，則 r 爲每一測定値 $M_1, M_2, \cdots\cdots$ 之近眞誤差。就一般言，對於 q 個未知數作 n 次之觀察，重量1之觀察値之近眞誤差爲

$$r=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma wv^2}{n-q}}。\tag{15}$$

若令 $q=1$，則式化爲(9)，是固理之所當然。

設(14)之解可以下式中右端各量之一次函數表出如下

$$x=A_1[waM]+A_2[wbM]+A_3[wcM],$$

$$y=B_1[waM]+B_2[wbM]+B_3[wcM],$$

$$z=C_1[waM]+C_2[wbM]+C_3[wcM],$$

則 x, y, z 之近眞誤差各爲

$$r_x=\sqrt{A_1}r,\ r_y=\sqrt{B_2}r,\ r_z=\sqrt{C_3}r.\tag{16}$$

設方程式(14)用行列式法求解，並以 Δ 表各未知數係數所構成之行列式，則

$$A_1=\frac{\Delta_a}{\Delta},\quad B_2=\frac{\Delta_b}{\Delta},\quad C_3=\frac{\Delta_c}{\Delta},\tag{17}$$

式中 Δ_a, Δ_b, Δ_c 各爲〔wxa〕,〔wbb〕與〔wcc〕在行列式 Δ 中之餘因式。A_1, B_2, C_3 之倒數則爲各未知數之重量。(16)與(17)式自亦可推廣至三個以上之變數。

茲舉一例,設三角形之三角爲 x, y, z; x 角經四次量度得平均值 $36°25'47''$, y 經二次量度得平均值 $90°36'28''$, z 經三次量度,得平均值 $52°57'57''$. 因 $z=180-(x+y)$, 故觀察方程式爲

$$x=36°25'47'',\quad \text{重量}\ 4,$$

$$y=90°36'28''\quad \text{重量}\ 2,$$

$$x+y=127°2'3''\quad \text{重量}\ 3.$$

常態方程式爲

$$7x+3y=526°49'17''$$

$$3x+5y=562°19'5''$$

解出 x, y 並代入方程式中求 z 得校正值:

$$x=36°25'44.23''$$

$$y=90°36'22.46''$$

$$z=52°57'53.31''.$$

將 x, y. z 代入諸原方程式內,得

$$v_1=-2.77'',\ v_2=-5.54'',\ v_3=3.69'',$$

再據(15),令 $n=3$, $q=2$, 得 $r=7''$,(約計值)。此處

$$\Delta=\begin{vmatrix}7&3\\3&5\end{vmatrix}=26,\ \Delta_a=5,\ \Delta_b=7$$

由(17)

$$A_1=\frac{7}{26},\quad B_2=\frac{5}{26},$$

由(16), $r_x=3.5''$, $r_y=3.0''$ 答數均爲約計值。

4. 一般觀察方程式　適已詳述如何由若干個未知數之一次函數之觀察值定出各未知數之最近眞值。實則函數卽非一次，此法亦可通用，玆當一論及之。

設觀察之方程式爲

$$\begin{aligned} &f_1(x,\ y,\ z)=M_1\\ &f_2(x,\ y,\ z)=M_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &f_n(x,\ y,\ z)=M_n \end{aligned}\tag{18}$$

式中左端諸函數之形式爲已知，但不限定屬於何形式，只須此等函數對於所有變數之偏導微函數可以求得。命 $x_0,\ y_0,\ z_0$ 爲 $x,\ y,\ z$ 之近似値，其値或由任取三方程式能得者，或由其他方法求得者。命

$$x=x_0+h,\ y=y_0+k,\ z=z_0+m,$$

則由泰羅氏定理，略去 $h,\ k,\ m$ 之高次冪，

$$f_1(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)+h\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}\right]_0+k\left[\frac{\partial f_1}{\partial y}\right]_0+m\left[\frac{\partial f_1}{\partial z}\right]_0\tag{19}$$

式中偏導函數取其在$(x_0,\ y_0,\ z_0)$點之値。此處 $h,\ k,\ m$ 爲加於近似値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ 上之校正値，若 $h,\ k,\ m$ 之値甚小，則用(19)式表函數 $f_1(x,\ y,\ z)$當甚適稱。如(19)式之方程式可得 n 個，於是觀察方程式(18)可以形如下式之 n 個方程式代之：

$$h\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}\right]_0+k\left[\frac{\partial f_1}{\partial y}\right]_0+m\left[\frac{\partial f_1}{\partial z}\right]=M_1-f_1(x_0,\ y_0,\ z_0).\tag{20}$$

此諸式爲 $h,\ k,\ m$ 之一次式，故可據以前所述之法求得其常態方程

式。

此法自亦可推及於任意若干個未知數。此處所述之一般觀察方程式實包括前述之一次方程式在內，形如(20)之方程式常可用以代以前所舉之一次觀察方程式，且甚爲便利。

茲就前所述之例以說明之。量度之 x, y 值乃其近似值，故可書：

$$x=36°25'47''+h,\ y=90°36'28''+k,$$

相當於(20)之式爲

$$h=0,\qquad 重量\ 4,$$

$$k=0,\qquad 重量\ 2,$$

$$h+k=-1,\qquad 重量\ 3。$$

常態方程式爲

$$7h+3k=-36''$$

$$3h+5k=-36'',$$

解之得校正值 $h=-2.77''$, $k=-5.54''$. x 與 y 仍與以前求得者相同。

習 題 五 十 六

1. 某基線 (base line) 以分度至百分之一呎之鋼捲尺量度五次，又以分度至十分之一呎之鏈尺量度五次，結果列表如次：

捲尺量度之結果	鏈尺量度之結果
741.17 呎	741.2 呎
741.09 呎	741.4 呎
741.22 呎	741.0 呎
741.12 呎	741.3 呎
741.10 呎	741.1 呎

求此二組值中單次觀察之近眞誤差，且求此線長之適當校正值。

2. 甲測量隊測得某線之長爲 683.4±0.3，乙測量隊測得其長爲 684.9±0.3. 問由此二結果可下何斷語?

3. 設由 6 次量度得一平均數，其近眞誤差為 0.02，若以相同之精密度再量度若干次，問須再量幾次俾近眞誤差減至 0.004？

4. 某物體之密度以相同之精密度量度 10 次，結果如下：

9.662	9.664	9.677	9.663	9.645
9.673	9.659	9.662	9.680	9.654

求此物體密度之近眞值，及此值之近眞誤差。

5. 在下列諸量度中，其重量均經標出。求此量之校正值，並求此加重平均數之近眞誤差。

4.512	重量 2,	4.502	重量 2,
4.515	重量 1,	4.511	重量 2,
4.507	重量 4,	4.497	重量 3.
4.503	重量 3,		

6. 以鎗對鉛直之幕上某點作 12 次之射擊，幕上射穿之孔離幕底之鉛直距離（單位呎）分配如下：

7.5	9	4.5	11.5	6	8.5
13	7	9.5	6.5	10	9

(a)求目標高出幕底之鉛直距離。

(b)求任一彈孔對於目標之近眞鉛直差。

(c)求擊中幕上四呎寬之水平帶之或然率：(1)向帶之中線描準，(2)向帶之底線描準。

(d)假定水平偏差與鉛直偏差同，求擊中每邊四呎之正方形之或然率。(1)向正方形之中心描準。(2)向一頂點描準(3)向某邊中點描準。

7. 在某點依次量度四相鄰之角，其值各為 a, b, c, d. 量度四角之和則其值為 $a+b+c+d+e$. 求各角之校正值，並求各校正值之近眞誤差。

8. 由高程測量得下列結果：

A 高出 O 115.52	D 高出 C 632.25
B 高出 A 60.12	D 高出 E 211.01
B 高出 O 177.04	E 高出 B 596.12
C 高出 A 234.12	E 高出 C 427.18
C 高出 B 171.00	

求 A, B, C, D, E 高出 O 點之校正值，並求各值之近眞誤差。

9. 戈唐(Gordon)氏求圓柱之極限強度(ultimate strength)之公式可書爲

$$p=\frac{S}{1+Tr^2}$$

式中 s 與 T 皆爲常數，r 爲柱長與柱截面最小處直徑之比，p 爲截面上擔負以單位每平方吋若干磅表出之。試由下列數據求定常數 s 與 T 之值

$$p=34650,\quad 35000,\quad 36580,\quad 37030$$
$$r=42,\quad 33,\quad 24,\quad 19.5$$

10. 設 $x=5$, $y=10$ 爲 x 與 y 之近似值，試由下列觀察方程式求 x, y 最恰當之值。

$$x^2+xy=75.2,$$
$$x+y^2=104.5,$$
$$2xy-y^2=0.3,$$
$$3x+y=24.6.$$

並求 x 與 y 校正值之近眞誤差。

11. 某正圓柱體之高度 h 與直徑 $2r$ 分別量度得值如下。復將圓柱體沒入水中由重量之減輕以測定其體積 πr^2h:

$$h=3.225,\quad 2r=1.375,\quad \pi r^2=14.348.$$

求 h 與 r 及其近眞誤差：(a)賦與各觀察方程式以同等之重量，(b)分別賦與各觀察方程式以重量1, 2, 10。

12. 設某正弦磁強計(sine intensity magnetometer)中磁棒之

磁極強度(pole strength)爲 P, 二磁極間之距離爲 d, 由棒中心至磁針支點之距離爲 a。若 θ 爲磁針之偏轉角, H 爲地磁之水平強度,各量間之關係式爲

$$\frac{P}{H}(2a^2d+d^3)=a^5 sin\,\theta.$$

試從下列數據求 P 與 d 之最近眞値,已知 $H=0.1884(c.\ g.\ s.)$,

$a(c.\ m.)$	θ	$a(c.\ m.)$	$\theta.$
20	24°17′	40	1°49′
25	12 46	45	1 35
30	6 48	50	1 27
35	3 26		

第六十節 精密度之實際效用

前二節中曾就或然率理論及最小二乘冪法之與處理經驗數據有關者作簡略之敍述。在 58 節曾申明或然率積分式不能嚴正成立。但在討論時不能不先作假設,或如前所述諸條假設或其他類此之假設。假設中有與本書所舉大異其趣者,但其價値並不遜於此書所舉者,因假設之不同於是所得方程式亦異。惟讀者於此須知方程式

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2} \tag{1}$$

以及由此式導出之最小二乘冪法雖不由嚴正之演繹法所推出, 自有其眞正之科學根據。在任何一串冗長之觀察値或量度中, 各量與其平均數相差數之分配幾無不與式(1)之圖形相符合,只須選定適當之 h 而已。(1)旣與經驗相合如此,故此式之成立有經驗之根據,與理論之演繹無關。

以下所述簡短之討論欲使運用此法更臻便利正確。

1. 誤差之種類 誤差之種類甚多, 有可避免者, 有可發現俾得校正者,有不可避免而恆影響於所求之値者。欲得完備之分類迨不可

能，茲一察下述各類。

(a)持久誤差 (persistent errors) 此等誤差對於一串觀察値生相同之效果。此等誤差之影響平均數一如其影響每一觀察値，惟不能影響剩餘誤差之値。可見持久誤差足使平均値不能爲所求値之恰當値，其不恰當之點不能由近眞誤差，或精密度權衡顯出。因持久誤差不影響剩餘誤差，而近眞誤差與精密度則均以剩餘誤差表出者也。在持久誤差中有觀察者之個人誤差 (personal error)。多數觀察者對於一組觀察値每與以持久之過餘與不及之讀數。例如以信號指揮多數人動作則反應有疾徐之別。此等個人誤差可由有計劃之測驗以校正之。由於不適當之調準或裝置所生之儀器誤差 (instrumental error) 亦有持久性。此等誤差應以精細計劃之實驗與驗算並與其他儀器之結果相比較以定其誤差之多寡，然後加以校正。鐘之快慢，溫度計之校準誤差，面積計上之零圓均儀器誤差之例也。誤差有因所採實驗之方法而生者，可由實驗理論察出而校正之。例如氣體體積必須校正爲標準溫度及氣壓下之體積；風之影響，熱之損失，蒸發之損失等之校正，皆屬於此類。

(b)偶然誤差(accidental errors)此等誤差惟在某獨立之觀察値中見之。其產生也，不能預料，誤差之多寡無從察出故不能加以校正。觀察値之所以有剩餘誤差即發源於此等誤差，藉剩餘誤差卽可斷定每一單獨觀察値或若干個觀察値平均數之精密度。由此可知，未知量估計値之可信程度與估計値之精密度不同。若所有之持久誤差均經校正後則精密度可作估計値可信程度之權衡。若一未知量分別用不同之方法不同之儀器實驗以測定之，若二組觀察値之差與各組平均數近眞誤差相較不甚大，則明示實驗中無顯著之持久誤差足以爲害。

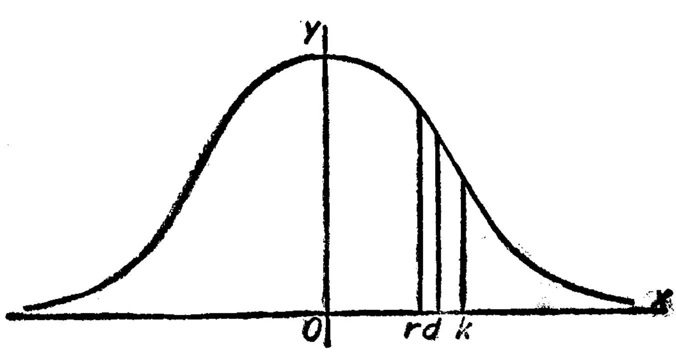
(c)錯誤與大誤差 在一串觀察値中，偶爾有與其他各値出入甚大者。此恆表明錯誤(mistake)之產生，例如數字之誤寫，向刻度尺之反向讀値，誤取角之餘角以代本角之類是也。此等錯誤不能與討論精

確度之誤差等量齊觀。取值時稍謹愼卽可免除此等錯誤，卽遇有錯誤亦可發現而校正之，或遐棄而不用。環境驟發生變動亦爲產生大誤差之一原因，如儀器遭受振動，藥品中含有雜質，風之吹動等等是：總之，凡遇較大之剩餘誤差時必須特別注意，若知其爲錯誤或由環境驟變所致則可與以適當之校正。若較大剩餘誤差所以產生之故無從查悉，此觀察値亦不妨與以較小之重量或遐棄去不用。但讀者必須能判斷如何方可稱某剩餘誤差爲大。此點自須由觀察之次數及其精密度而定。設欲知某觀察値在一組觀察値中是否恰當，假定此一組觀察値之 h 已經確定。

$$P=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-h^2x^2}\,dx$$

爲剩餘誤差在 $-a$, $+a$ 間隔內之或然率，而 $1-P$ 爲剩餘誤差在 $-a$, $+a$ 間隔外之或然率。在一組 n 個剩餘誤差中，$n(1-P)$ 爲剩餘誤差之絕對値應大於 a 之數。通常每選定一値 a 俾 $n(1-P)=\frac{1}{2}$，凡剩餘誤差大於 a 之觀察値卽棄而不用。若選定之 a 書爲 $a=br$，則 b 之近似値如下

n:	5	10	20	40	80	160
b:	2.4	2.9	3.3	3.7	4.1	4.4



第 111 圖

此觀察值取捨之標準 (criterion for rejection) 不可嚴格或盲目遵守，不過供合理判斷之助耳。通常只須觀察次數在三或四次以上，概以 $4r$ 爲剩餘誤差之最大限度

2. 精密度與有效數字　設方程式 (1) 之圖形如第 111 圖所示。令在 r 之縱坐標分曲線在第一象限內之面積爲相等二部分；令在 d 之縱坐標通過此一部分面積之重心，而 k 爲此一部分面積之迴轉半徑。由積分運算可得

$$d=\frac{1}{h\sqrt{\pi}},\quad k=\frac{1}{h\sqrt{2}},\tag{2}$$

r 卽爲第 59 節所述之近眞誤差；與 d, k 之關係式爲

$$r=0.8453\,d=0.6745\,k\tag{3}$$

d 稱爲觀察值之平均差 (average deviation) 而 k 稱爲平均誤差 (mean error)。對應於 n 個觀察值平均數之近眞誤差有平均數之平均差(average deviation of the mean)與平均數之平均誤差(mean error of the mean)，其值可由下式求得

$$do=\frac{d}{\sqrt{n}},\quad k_0=\frac{k}{\sqrt{n}}.\tag{4}$$

d 與 k 之值可直接由一組觀察值之剩餘誤差算出。若剩餘誤差爲 v_1, v_2, v_3 等，則

$$d=\frac{|v_1|+|v_2|+\cdots\cdots+|v_n|}{n}=\frac{|\Sigma|v|}{n},\tag{5}$$

$$k=\sqrt{\frac{v_1{}^2+v_2{}^2+\cdots\cdots+v_n{}^2}{n}}=\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n}}\tag{6}$$

此等式惟當 n 爲大數時能得圓滿之結果，若 n 甚小則不能示眞正之精密度，因原設平均數在曲線(1)之中央。例如 $n=1$ 此等公式之必不能用，固顯而易見。適用於一切 n 值之公式爲

$$d=\frac{\Sigma|v|}{\sqrt{n(n-1)}}.\tag{5'}$$

$$k=\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}}. \tag{6'}$$

因 d 與 d_0 較易計算，故恆用以代替 r 與 r_0 以表精密度。偶爾 k 與 k_0 爲人採用，但並無重要之優點。由(2)(4)二式，可察見 k_0 與第 59 節所述之 q 相同。

由(5)與(6)或(5')與(6')算出之 d 與 k 能約略適合(3)，故可得一近似關係式如下：

$$0.8453\,\Sigma|v|=0.6745\sqrt{n\Sigma v^2}.$$

將此式代入第 59 節中之 r，則得一近似公式

$$r=0.8453\frac{\Sigma|v|}{\sqrt{n(n-1)}}, \tag{7}$$

又 r_0 與 h 之對應近似公式亦可求得。此等近似公式之優點卽在以剩餘誤差各絕對値之和代剩餘誤差平方和之平方根，前者易算，後者難求也。(7)式中 $\Sigma|v|$ 之係數可在數學或物理計算表中查出，其値與 n 並列。

用以表示測定値精密度之 r_0, d_0, 或 k_0 之數值必須有二位有效數字。若數字爲 8 或 9 則偶爾以一位數字表之。測定値本身之位數則以能包括表示精密度數字之末位爲止。例如記錄 2.718±0.024 卽表示 2.718 爲一串觀察値之平均數。而此一串觀察値之 r_0, d_0, 或 k_0 之値則爲 0.024。2983±14, 28700±800, 0.0273±0.0019 等値書寫均正確，第一値表四位有效數字，後二値均表三位有效數字。若一値書爲 18300±260 則指數字"3"後之零係由計算上得出者並非書之以塡充位數藉以表示其爲一五位數者，卽謂所求値在 18295 與 18305 之間，至末一零字不過用以表數爲五位而已。1.2±0.053 2375.2±16, 305.73±2.14 均爲不正確之記錄法。

予測定値以正確之記錄法實屬重要，不但可以經濟之地位與勞力保持已知其精密度之測定値，且與一般科學家與專門學者記數之

習慣相符。

3. 誤差之傳播(propagation of error)據已知量以算未知量，則已知量之近眞誤差必傳播至算出之量，茲欲論者即計算所得之量之精密度。本此論列可得算律數則俾得以最少之勞力算出所求結果仍保持適當之精密度。

(a)函數之近眞誤差　試一察三元函數

$$w=f(x,\ y,\ z) \tag{8}$$

其全微分為

$$dw=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz。 \tag{9}$$

設 x, y, z 皆為一組觀察值之平均數，令 dx, dy, dz 各表其一組觀察值之剩餘誤差，則全微分 dw 表 w 之對應剩餘誤差。但 dx, dy 與 dz 均可正可負，令(9)之兩端自乘，以 v, v_1, v_2, v_3 依次代 dw, dx, dy, dz 得

$$\begin{aligned} v^2=&\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2v_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2v_2^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2v_3^2\\ &+2\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}v_1v_2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}v_2v_3+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}v_3v_1\right] \end{aligned} \tag{10}$$

令 n_1 表剩餘誤差 v_1 之個數，n_2 表 v_2 之個數，n_3 表 v_3 之個數，n 表 v 之個數，將 v_1, v_2, v_3 儘可能情形配合，必有 $n=n_1n_2n_3$ 種配合，此 n 個 v 值可以與(10)相彷之 n 個方程式表之。將此 n 個方程式相加，得

$$\Sigma v^2=n_2n_3\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\Sigma v_1^2+n_1n_3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\Sigma v_2^2+n_1n_2\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\Sigma v_3^2,$$

(10)式中方括號內諸項之和顯然為零。

若以 n 除此方程式，則得

$$k^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2k_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2k_2^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2k_3^2, \tag{11}$$

式中諸 k 表(6)式所指諸組觀察值之平均誤差。因諸 k 值與諸 d 值及諸 r 值成正比例,故(11)式中之諸平均誤差皆可改為諸平均差或諸近眞誤差。

此處雖就三元函數討論,其理自可推及任何多元函數。有若干特例尤須特別注意。就多元一次函數觀之,設

$$w=ax+by+cz+d$$

此處各元之偏導微函數即各元之係數,故

$$r^2=a^2r_1^2+b^2r_2^2+c^2r_3^2 \tag{12}$$

若 $a=b=c=1$,則 w 不過為諸自變數之和,若 $\bar{r}$ 為式右端諸 r 之最大者,顯見 r 介於 $\bar{r}$ 與 $\sqrt{3}\,\bar{r}$ 之間。

就諸自變數之乘積觀之,令

$$w=x\,y\,z,$$

則

$$r^2=y^2z^2r_1^2+x^2z^2r_2^2+x^2y^2r_3^2,$$

以 w^2 除各項,得

$$\frac{r^2}{w^2}=\frac{r_1^2}{x^2}+\frac{r_2^2}{y^2}+\frac{r_3^2}{z^2}. \tag{13}$$

方程式之各項為各百分誤差之平方和。若 $\bar{t}$ 為右端三個近眞百分誤差之最大者,則 w 之近眞誤差介於($\bar{t}$)與 $\sqrt{3}\,\bar{t}$ 之間。因倒數之百分誤差與原數之百分誤差同,故自變數中有一個或數個為除數時(13)仍可用。

次就一單量之乘冪觀之,設

$$w=x^m.$$

此處

$$r^2=(mx^{m-1})^2r_1^2$$

以 w^2 除兩端,以 t 與 t_1 表近眞百分誤差則得

$$t^2=m^2t_1^2. \tag{14}$$

此式不論 m 為正為負,為整數為分數均可應用。

最後,就一量之對數觀之,

$$w=\log x.$$

此處　　$$r^2=\frac{r_1^2}{a^2}=t_1^2, \qquad (15)$$

此卽謂，一量對數之近眞誤差卽此量之近眞百分誤差。

(b) 計算律　下列各計算律可由(12)，(13)，(14) 與 (15) 諸式解釋其理由。

(一) 諸量相加或相減，先求各量之近眞誤差（或平均差）於是每量中應保留之數字位數只須達到各近眞誤差（或平均差）之最大者之第二位數卽可。

換言之，將各數之同位數字列成同行後以行加減，保留之最後一行務須使其前一行包括所有數之有效數字，此行以後之數字均可棄法不加運算。

(二) 在乘法或除法運算時，先定出各數之近眞百分誤差（或差數），在乘數或除數以及答數中保留足够之有效數字，俾與最大近眞誤差相稱。

換言之，凡因數或除數之有誤差者概須以同位數之有效數字表出之，數字之位數究應取若干位，則由因數中或除數中有最少位數之有效數字者爲準；惟以 1，2 爲首位數字者不妨較 8，9 爲首位數字者多取一位有效數字。

(三) 若用對數以行乘除運算，則對數定値部中保留之位數與算律(二)所舉各因數或除數所保留之有效數字位數同。

若無下列正當之佈算法，則算律(二)之優點無由表現。設已知圓之直徑爲 27.86±0.35 欲求其圓周，佈式如下：

正確法	
	27.86
	3.142
	8 358
	2786
	1116
	56
	87.54

普通法	
	27.86
	3.142
	5572
	11144
	2786
	8358
	8753612
	87.54

在正確法中，以 3 乘 27.86 爲第一列，次以 0.1 乘 2786，以 0.04 乘 27.8，以 0.002 乘 28 得第二，三，四各列。各次運算只須達到比應保留之數字多一位爲止。

習 題 五 十 七

1. 討論習題五十六中題 1 之二串觀察值，一察何者應捨去不用，並證其有持久誤差。

2. 試予習題五十六題 2 以答案。

3. 以觀察值取捨之鑒別法施於習題五十六題 4 各量度。又以由(7)所得 r 之近似值與由第 59 節(5)求得之值相比較。

4. 某圓柱之高度與直徑經測定如下：

直徑 $=2.542\pm.014$ 吋，高度 $=1.753\pm.016$ 吋。

求圓柱之體積，並以通行之寫法表出其精密度。

5. 某汽艇在靜水中之最高速率爲每小時 28.46±0.24 哩。若水流爲每秒 4.35±0.06 呎，問汽艇逆水上駛，速率若何？指出答數之精密度。

6. 在某次會議中甲估計樓下到會人數爲 2400，乙估計第二層樓上人數爲 950，丙估計第三層樓上人數爲 550，故到會人數約計爲 3900. 設 A, B, C 各有近似百分誤差 15%，求估計總數上之近似百分誤差。

7. 某村將耕田分爲九區，每區置一觀察員以估計耕田畝數。假定每區耕田面積大致相等，又假定每一觀察者大致有相同之精密度，求證估計所得全村耕田畝數之近眞百分誤差約爲每一觀察員估計值之近眞百分誤差之三分之一。

8. 用每秒約擺動一次之單擺測定 g 值。公式爲

$$g=\frac{\pi^2 L}{t^2}.$$

若 L 之近眞百分誤差爲 0.0025 而 t 之近眞誤差爲 0.0015，求 g

值之近眞誤差。

9. 水力學中，長管中水流時水頭 H 與水流速度 v 之關係式爲

$$H=f\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g},$$

式中 f 爲一經驗常數，L 爲管長之呎數，d 爲水管直徑之呎數。若 $f=0.0412$，$L=7943$ 呎，$d=6$ 吋 $v=10$ 每秒呎，求 H 之值 注意答數之有效數字，按正確之算律計算。

10. 設圓軸長 L，半徑爲 r，若軸受轉矩(torque) M，則其扭轉角 θ 爲

$$\theta=\frac{2ML}{\pi r^4 E_s},$$

式中 E_s 爲切變彈性係數。已知 $E_s=12,000,000$（每平方吋磅數），$L=72$ 吋，$r=1\frac{13}{16}$吋，$M=3500$ 磅一吋，計算 θ，注意所費勞力與所求精密度應相稱。

第六十一節　經驗方程式

二個或若干個變數間之關係可以方程式表之，若方程式之形式或方程式內之常數係由觀察或實驗數據推得者，則方程式稱爲經驗方程式 (empirical equation). 本節目的在一述如何由已知數據決定方程式之形式與常數之值之最常用諸法。

爲便利起見，經驗方程式又可分爲二種。方程式之形式可由推理而導出者曰有理式(rational)，只須定式中常數之值。此等常數稱爲經驗常數。若有理式爲不可知，或已知而不便於應用，則有時每可選得一較切實用之方程式以表已知數據所示各變數間之關係。此等方程式曰經驗式 (empirical formula)。此二類方程式並無明顯之分劃 方程式中如習題中所舉戈頓氏(Gordon)長柱強度之公式可稱爲半有理式，其形式之選定在適合邏輯的推理但其推理之根據則爲經

驗式之虎克氏定律，其中含一常數，卽由實驗決定之彈性係數是也。有理式與經驗式區別之所以不能嚴格劃分，實因忽視基本關係式如虎克氏定律本身爲經驗公式之傾向所致。

若方程式爲眞正之有理式，則由數據確定式中常數較所得式不妨用以求數據所未及之範圍。至經驗方程式則僅在數據所及準確度已經測定之範圍內可信。用經驗方程式之便利在能藉方程式所定之函數作數學的運算。但運算手續之準確度切須注意，由在作微分運算時此點更宜注意。

1. 經驗常數之決定法 不論方程式爲經驗式或有理式決定其中常數應具之值與選擇方程式形式之手續無關。玆姑假定方程式之形式爲已知，一察如何由經驗數據以決定常數之值。

設有二變數 x, y 以已知之方程式表其關係，方程式中有 n 個常數，則將所有項移往左端後，關係式可書爲

$$f(x_1\, y_1\, c_1, c_2, \cdots\cdots e_n) = 0.$$

經驗數據內有若干組對應之 x, y 值，其值或得自量度或得自計算與觀察視情形而定。觀察之次數愈多，所得結論之可信程度愈大。卽欲得諸 c 值之粗略近似值亦須知 x, y 之 n 組數值，俾便由 n 個方程式中，解得 n 個未知數之值。設 n_1 爲 x, y 觀察值之組數，且設 n_1 大於 n。每組 x, y 值可視爲一點之坐標而標於一坐標紙上。由標出之 n_1 個點每可作一曲線俾各點至此線之距離不至超過觀察誤差範圍之外。製曲線時自須注意其方程式之形式。又製曲線時必須使標出之點平均散佈於曲線之上下。於是在此曲線上依適當之間隔取 n 點，此 n 點須在數據所及範圍內，且分配平均者，將此 n 點之坐標值代入所設方程式中得 n 個方程式，可藉以解得 n 個常數之值。

此法以所繪曲線代表觀察數據，故結果之價值視繪曲線之技巧如何而定。因每一觀察值均難免誤差，故在用心繪就之曲線上取 n 點之值所定出之 n 個常數較之在觀察值中任取 n 組值所定出者更爲近眞。

常數測定之準確度及手續之繁簡須視方程式之形式若何及常數之個數若何而定。若方程式爲常數之一次式，則其常數易定，若方程式有常數之高次式，無理式，或超越式，則解此組 n 個方程式不無困難，有時只能以近似法解決之。

就多數科學的數據，以及大多數工程的數據言，上述之法實足得充分準確之結果。若必欲得更爲準確之結果則不得不求助於最小二乘冪法。在方程式

$$f(x_1\, y_1\, c_1, c_2, \cdots\cdots c_n)=0$$

中，以各組 x, y 之值分別代入後，所得方程式之個數恰與觀察值之組數同；此等方程式卽據以定未知常數之觀察方程式也。由此可得一組 n 個常態方程式，於是可據以求得各常數之最近眞值。此法所耗勞力過大，故非需要高度之精密度，且所得數據亦精密可信，値得以較大之勞力處理時，不用此法。

一二特例頗値得一論，一方面因此等問題較易遇見，又因此等特例可以簡法解決也。

(a) 二常數之一次式　此處，方程式可書爲

$$c_1 f_1(x, y)+c_2 f_2((x, y)+f_3(x, y)=0, \tag{1}$$

或以前二函數之一除兩端，並移項，得

$$Y=mX+b$$

式中 Y 與 X 各爲諸函數値之比，m 與 b 各代替 c_1 與 c_2。若由已知數據計算 X, Y 之値，則可得若干在一直線上之點(X, Y)。作此直線，則線之斜度爲 m，而其 y 截距爲 b。斜度與截距可直接由量度求得。或在線上取二點以定其値。X 與 Y 之比例尺不必相同，惟據圖由量度以定 m 與 b 則必注意及 X, Y 之比例尺方可。

(b) 冪曲線，對數紙作圖法　若方程式可書爲

$$y=ax^n \tag{2}$$

式中 y 與 x 為觀察量之某種函數，a 與 n 為待定常數，兩端取對數，得

$$log\ y = log\ x + log\ a。$$

令 $Y = log\ y, X = log\ x, m = n, b = log\ a$ 則與(a)款之情形同，其常數自易測定。利用對數紙，則工作簡省甚多，對數紙者以對數比例尺代自然比例尺之坐標紙也，在此紙上點 x, y 與軸之距離各為 $log\ x$, $log\ y$; 故無須查表卽得點($log\ x$, $log\ y$)之位置。諸(x, y)點在紙上標出後，a 卽對應於 $x=1$ 之 y 值，n 相當於上款之 m，取一自然比例尺量得所作直線之斜度卽 n 之值也。

（c）指數曲線，單對數紙作圖法　若方程式之形式為

$$y = ae^{mx} \tag{3}$$

兩端取對數，得

$$log\ y = m\ log\ e \cdot x + log\ a,$$

令 $Y = log\ y$, $X = x$ 則又與（a）款之情形同，$log\ a$ 為線之截距，$m\ log\ e$ 為線之斜度。利用單對數紙則工作簡省甚多，此紙一軸上用自然比例尺，一軸上用對數比例尺。於是在自然比例尺上標出 x，在對數比例尺上標 y。此處 a 為對應於 $x=0$ 之 y 值，而 $m\ log\ e$ 為此線之斜度。因在單對數紙自然比例尺上由 0 增至 1 時對數比例尺上之對應值由 1 增 10 倍，故對數必視為以 10 為底之常用對數。

2. 決定方程式形式法　若欲求一方程式足以約略表二組變數間之關係，而關於此二變數間關係之知識均不足以為選定方程式之根據，則欲定方程式之形式殊無一定之處理法。嘗未經一再嘗試說明無一定之法可循，亦無足資決定之標準。又同一函數可以二種或若干種不同之形式表出之，其準確度亦均相同。於是形式之選擇一半根據其是否適宜與便利一半根據其導出是否簡易而準確。變數間之關係每有不能以任何方程式便利表出者，此等函數間之關係只能將其數據

列表以資查閱，此等實例甚多，讀者切勿以爲函數間之關係皆可以方程式約略表出也。

已得數據欲據以求經驗公式，第一步即將各對應值視爲點之坐標而標出各點，以曲線連各點或各點之接近處。由曲線之形可暗示方程式之形式，有時可有數種不同之形式，至係數或常數則如第一款所述方法求之。常數既定，則以數據代入驗算，必求得方程式對所有數據均尚適合，始可認爲此方程式之形式可用。

據曲線一部分之形狀以定曲線之方程式其事甚難，但辨認線是否直線則較易，故將變數變易使曲線變易爲直線則爲助匪小。若所求方程式爲上款 $(a), (b), (c)$，中方程式之一種，則變易變數使曲線成爲直線自屬可能。通常將觀察之對應值 x, y 列爲兩行，更在其他各行書出 x, y 之函數如 $x^2, y^2, xy, \frac{x}{y}, \log x, \log y$ 等等。若在此諸行中能發現二行之值，當此等值視爲點之坐標，能繪出一近於直線之線，則第 1 款 (a) 之形式可用，其常數自易測定。若將數據直接標在對數紙上，無異將 $\log x$ $\log y$ 標在直角坐標紙上，在單對數紙上標出 x, y 無異在直角坐標紙上標 x 與 $\log y$ 或 y 與 $\log x$。常數之值皆可在對數紙或單對數紙上求得如第一款所述。嘗試次數之多寡，亦即表上所列行數之多寡，須視時間充裕與否及研究者耐性如何而定。惟必須注意避免重複。例如方程式 $xy=mx+b$ 與 $y=b\left(\frac{1}{x}\right)+m$ 形異實同，試其一不必試其二。

單對數紙有時可用以決定形式如下之方程式：

$$y-b=ae^{mx} \tag{4}$$

惟式中 b 值必須一再嘗試始能確定。若(4)果爲所求方程式，b 之值選擇適當，則視 $\log(y-b)$ 與 x 爲單對數紙上坐標，標出諸點必在一直線上。若予 b 以過大之值則得一曲線，所求直線爲其漸近線。若所選 b 之值過小，則亦得一曲線，亦以所求直線爲漸近線，惟曲線彎曲之方向不同，故經數次嘗試後即可得 b 之適當值。

同理，對數紙可用以決定形式如下之方程式

$$y-b=mx^n.$$

(o,b)爲此曲線上之一點，若 b 之値選擇適當，則 $\log x$ 與 $\log(y-b)$ 視爲對數紙上之坐標，標出諸點必在一直線上。若 b 之値選擇不適當，則連諸點之線爲曲線，以所求直線爲其漸近線，〔如方程式(5)確能表 x, y 之關係〕。若經多次嘗試仍不能得 b 之適當値，於是 m 與 n 均無從確定，是證明(5)式不能適合於代表此函數也。

多項式

$$y=c_0+c_1x+\cdots\cdots+c_nx^n \tag{6}$$

亦爲函數中之常用者。通常 n 之値大至 3，4 爲止，取 $n+1$ 組 x, y 之値卽可決定諸係數 c 之數値。此處 n 代一正整數，至前列諸方程式中之 n 則可正可負，可爲分數可爲整數。(6)式便於應用最小二乘冪法，因將 x, y 之數値代入後，得 c 之一次式，惟 n 之値過大時，則構成常態方程式以及解方程式均須甚大之勞力。

數據列表後，由視察旣可暗示適當之方程式形式，若 x 與 y 之値構成二組等差級數，則必能以一次式表 x, y 之關係。若 x 成等差級數，y 成等比級數，則在單對紙上作圖可得一直線。若 x 成等差級數，而各對應 y 値表以 $y_1, y_2, \cdots\cdots y_n$，由諸 y 値求其第一級差

$$y_1'=y_1-y_2,\ y_2'=y_2-y_3, \cdots\cdots y'_{n-1}=y_{n-1}-y_n,$$

由第一級差進而求其第二級差，

$$y''_1=y'_1-y'_2,\ y''_2=y'_2-y'_3, \cdots\cdots, y''_{n-2}=y'_{n-2}-y'_{n-1},$$

倣此可求其任何級差。若某級差各項之値約略相等，則(6)式可以表函數間之關係，求差至各項約略相等之級數卽多項式之次數。例如，求差至第三級各項約略相等，則可以三次多項式表函數間之關係。

習 題 五 十 八

1. 氯化鈣之水溶液在攝氏 15° 時，密度 s 與溶質百分成分 p 測定如下：

p……	2	4	6	8	10	20
s……	1.02	1.03	1.06	1.07	1.09	1.18

p……	25	30	35	40
s……	1.23	1.29	1.34	1.40

求以 p 之一次式表 s。

2. 若在攝氏 $t°$ 蒸汽潛熱 L 測定如下，試以一次方程式表 L 與 t 之關係。

t……	75	90	100	115	125
L……	554	544	536	526	519

3. 求定 a, b 俾方程式 $y=a+bx^2$ 能適合下列數據：

x……	19	25	31	38	44
y……	1900	3230	4900	7330	9780

4. 假定下列各量能合 $y=ax^n$。試加檢驗，並定 a、n 之最適當值。

x……	4	7	11	15	21
y……	28.(	79.4	182	318	589

5. 下表示某變壓器心之磁感應 B 與由磁性滯後作用所生之功率損失 E。

B……	2000	4000	6000	8000	10000
E……	2869	8700	16660	26370	37660

試求一形如 $E=aB^n$ 之公式。

6. 檢驗下列數據是否適合 $y=ae^{mx}$，並求各常數之值。

x	2.701	2.870	3.258	3.681	3.892
y	3.86	4.20	5.10	6.30	7.00

7. 下列數據示 t 秒鐘後，冷卻物體之溫度與四週溫度差 θ 之對應值

t	0	3.45	10.85	19.30	28.80	40.10	53.75	70.95
θ	19.9	18.9	16.9	14.9	12.9	10.9	8.9	6.9

牛頓冷卻律爲 $\theta=\theta_1 e^{-m}$．試一驗此律能否適合上列數據，並求 θ_1 與 m.

8. 在某電弧內，電流 A（安培）與位差 V（伏特）測定如下：

A	1.96	2.46	2.97	3.45	3.96	4.97	5.97
V	50.25	48.7	47.9	47.5	46.8	45.7	45.0
A	6.97	7.97	9.00				
V	44.0	43.6	43.5				

求定一含二經驗常數之公式。試在上表添一行將算出之 VA 值填入作爲一新變數。

9. 某溫泉在深度 x 之溫度 P 測定如下：

x	28	66	173	248	296	400	505	548
θ	11.71	12.90	16.40	20.00	22.20	23.75	26.45	27.70

求一形如 $\theta=a+bx+cx^2$ 之方程式。

10. 玻璃在溫度 θ 之導電係數 C 測定如下：

θ	58	86	148	166	188	202	210
C	0	.004	.018	.029	.051	.073	.090

求一經驗公式表 θ 與 C 之關係。

11. 飽和水蒸汽在壓力 p（每平方吋磅數）下之體積 v（立方呎）如下表所示：

p……	10	20	30	40	50	60
v……	37.80	19.72	13.48	10.29	8.34	6.62

求一經驗公式。

12. 求一形如 $y=b+ae^{mx}$ 之公式使適合下列數據：

x……	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y……	20.1	27.8	35.0	41.5	47.6	53.0	58.1	62.7	66.8	70.0

13. 時間 t 與電流 i 之理論定律爲 $i=I\ (1-e^{-kt})$。試由下列數據一檢驗此定律並定 I, k 之值。

t……	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
i……	0	0.075	0.20	0.34	0.45	0.49

14. 下列數據屬於某透鏡；p 表物至透鏡距離，p' 表像至鏡距離。

p……	320	240	180	140	120	100	80	60
p'……	21.35	21.80	22.50	23.20	23.80	24.60	26.20	29.00

求一方程式表 p 與 p' 之關係。

參　考　書　目

Practical Least Squares, O. M. Leland (McGraw-Hill, 1921).

The Calculus of Observations, Whitaker and Robinson (Blackie and Son, 1924).

Combinations of Observations, D. Brunt (Cambridge University Press, 1917).

Theory of Errors and Least Squares, L. D. Weld (Macmillan, 1916).

Method of Least Squares, Mansfied Merriman (Wiley, 1913).

Method of Least Squares, D. P. Bartlett (Boston, 1900).

Theory of Errors and Method of Least Squares, W. W. Johnson (Wiley, 1912).

An Introduction to the Theory of Statistics, S. U. Yule (Charles Griffin and Company, 1919).

Discussion of the Precision of Measurements. S. W. Holman (Wiley, 1904).

Engineering Mathematics, C. P. Steinmetz (McGraw-Hill, 1911) Chapters VI and VII.

A Course in Practical Mathematics, F. M. Saxelby (Longmans, 1910), Chapter VIII.

Graphical and Mechanical Computation, Joseph Lipka (Wiley, 1918), Chapters VI and VII.

Interpolation, J, F. Steffensen (Williams and Wilkins, 1927).

第十四章　一級常微分方程式

第六十二節　微分方程式之意義

在研究諸變數間之關係時，若知一二變數之他種關係，如某變數對另一變數之導微函數，即可利用以求變數間之關係。凡關係式中含有一個或若干個導微函數者稱為微分方程式(differential equation)簡單微分方程式前已加以利用。凡變數表以積分，如

$$y=\int f(x)\,dx,$$

此式卽等於微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x),$$

由此卽可得 y 與 x 間之關係式，惟式中有一積分常數。至所求關係式之形式用積分法立可求出。微分方程式論之目的在處理非經變易後不能作積分運算之微分方程式。經積分運算後變數間之關係式不復含有導微函數，則此關係式稱為原設微分方程式之解(solution)。

1. 分類　若方程式中只含一自變數，於是式中導微函數僅常見之一種，則方程式為常微分方程式(ordinary differential equation)；若方程式含二個或二個以上之變數，並含有對於某一變數或若干個變數之偏導微函數，則方程式稱為偏微分方程式(partial differential equations)。本章及後二章僅論常微分方程式。

方程式之級(order)指式中導微函數級數之最高者。例如，方程式中有三級導微函數，有低於三級者，但無高於三級者，則方程式卽稱為三級微分方程式。

方程式之次(degree)則指式中最高級導微函數乘冪之次數。例如

$$x^3 \frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3y^4=0$$

爲第二級第一次，而

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3y-4x^3=0$$

爲第一級第二次。必式爲諸導微函數之有理整式，方程式方有次數可言。

解微分方程式無普遍之方法。解微分方程式一如積分法爲逆運算，只有若干種方程式可解。此處爲篇幅所限只能擇其較普通較重要者論其解法。在分類時着眼於方程式之級數與次數，方程式之有其他特點者亦隨時標出而類別之。

2. 方程式與解　微分方程式爲逆運算，欲知其解法，必先知方程式如何產生。例如由

$$y=\int 3x^2\,dx$$

可得

$$y=x^3+c \tag{1}$$

對於 (1) 作微分運算，得

$$\frac{dy}{dx}=3x^2 \tag{2}$$

方程式 (2) 爲微分方程式，(1) 爲其解。

又，方程式

$$y=ae^{2x}+b\sin x$$

中，a 與 b 爲參數，故方程式表一含二參變數之曲線族。求式之第一第二級導微函數得

$$\frac{dy}{dx}=2ae^{2x}+b\cos x, \tag{4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4ae^{2x}-b\sin x. \tag{5}$$

由 (3), (4), (5) 消去 a, b, 得

$$(\cos x-2\sin x)\frac{d^2y}{dx^2}+5\sin x\frac{dy}{dx}-(4\cos x+2\sin x)y=0。 \tag{6}$$

此二級方程式以 (3) 為其解。

推及一般情形，設有方程式

$$f(x, y, a_1, a_2, \cdots\cdots a_n)=0 \tag{7}$$

式中有 n 個泛定常數，由此逐步求微分 n 次可再得 n 個方程式，與原式合計共 $n+1$ 個方程式，自此 n+1 個方程式中消去 n 個常數得 n 級微分方程式

$$\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots\cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0. \tag{8}$$

方程式 (7) 稱為微分方程式 (8) 之通解(general solution)或完全原式(complete primitive). 可見通解中每有泛定常數其個數與方程式之級數同。若以特值代入一部分之常數內，方程式仍為微分方程式之解，但不得謂之通解，而謂之特解(particular solution).

在上述例 (3) 中，取一特解，俾 $x=0$ 時，$y=2$. 如此則必 $a=2$, 而特解為

$$y=2e^{2x}+b\sin x. \tag{3'}$$

若更欲式 (3) 當 $x=0$ 時曲線之斜度為零，則必 $b=-4$, 而解變為

$$y=2e^{2x}-4\sin x. \tag{3''}$$

由(3')與(3'')不能得微分方程式(6)。方程式 (3') 為某一級微分方程式之原式，而(3'')則不為任何微分方程式之原式，因式中無泛定常數故也。

由上諸例，可見微分方程式之通解或完全原式中之涵義與微分方程式本身之涵義相同。至其特解之涵義則除容納微分方程式之涵義外尚有附加條件。此等附加條件謂之起始條件(initial conditions).

取 y 所代表之式，及 y 之必要各級導微函數代入微分方程式內，藉以證實所求之解爲正確，謂之解之驗算 (test of a solution)。例如，由(3″)可得

$$y=2e^{2x}-4\sin x,$$

$$\frac{dy}{dx}=4e^{2x}-4\cos x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=8e^{2x}+4\sin x,$$

將諸式代入(6)，則得含 x 之恆等式。

習 題 五 十 九

1. 求證不論任何直線皆爲微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 之解。

2. 求以下列諸式爲完全原式之微分方程式:

(a) $y^2=cx$;

(b) $y^2=c_1x+c_2$;

(c) $y^2=cx+c^2$;

(d) $y=a\cos 2x$;

(e) $y=ae^{bx}$;

(f) $y=ae^{2x}+be^{-2x}$.

3. 以 4 爲半徑之圓族之方程式爲:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=16。$$

若命曲率半徑等於 4，則由此所構成之微分方程式可推出一完全原式，與上列方程式相同，試證明之。

4. 設有微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-12y=24x,$$

下列各式何者爲其解?

(a) $y=-\frac{1}{6}-2x$;　　(c) $y=8e^{-4x}+\frac{1}{6}-2x$

(b) $y=4e^{3x}-2e^{2x}$;　　(d) $y=ae^{3x}+be^{-4x}-2x-\frac{1}{6}$.

5. 在方程式

$$y=a+bx+cx^2$$

中，a, b, c 應具何值，方程式始能爲題 4 微分方程式之解。

6. 某拋物線族之方程式爲

$$y^2=8(x+h),$$

試求其微分方程式藉以說明此族拋物線皆有等長之法線影。

7. 已知拋物線 $y^2=16x$ 切線族之方程式爲

$$y=mx+\frac{4}{m}$$

求此族直線之微分方程式，並證拋物線之方程式爲其一解，任取拋物線之切線之方程式亦爲其一解。

第六十三節　變數之分隔

本節及第 64 節專論一級一次微分方程式。因第一級導微函數爲二微分之比，故一級一次微分方程式可書爲

$$M\,dx+N\,dy=0, \tag{1}$$

式中 M, N 爲 x, y 之函數。通常不能直接就式 (1) 求積分，因 M 中如含有 y 無法化爲 x 之函數，N 中如含有 x 亦無法化爲 y 之函數也。換言之，被積函數非化成只含一變數，無從作積分運算。若 M 僅爲 x 之函數，N 僅爲 y 之函數，則稱變數業經分隔，可就式逐項作積分運算。例如，由

$$x^3dx-\cos y\,dy=0,$$

立得其解

$$\frac{x^4}{4}-\sin y=c$$

式中 c 爲一泛定常數。

1. 變數可直接分隔者　若 M 與 N 皆可析爲二因式，且一因式有 y 無 x，一因式中有 x 無 y，則將 M 中僅含 y 之因式與 N 中僅含 x 之因式除方程式，則函數卽被分隔。設有方程式

$$(x-xy)dx+ye^x dy=0$$

若以 $(1-y)e^x$ 除方程式，得

$$xe^{-x}\,dx-\frac{y\,dy}{y-1}=0,$$

於是可據式作積分運算。

2. 齊次方程式　若形如 (1) 之方程式中，M 與 N 爲 x,y 同次之齊次函數，則方程式謂之齊次方程式。若在 x,y 之 n 次齊次函數中令 $y=vx$ 則式含因式 x^n，及另一僅含 v 之因式。因 y 爲 x 之某未知函數，則 v 亦爲 x 之某未知函數，用 vx 代替 y 時，必令 $dy=v\,dx+x\,dv$，如是則得一不含 y 之新微分方程式，其變數可做第一款方法使之分隔。舉例以資說明。

$$(y^2-xy)dx+x^2dy=0$$

令 $y=vx$，因而 $dy=v\,dx+x\,dv$，以 x^2 除方程式後，得

$$(v^2-v)dx+v\,dx+x\,dv=0,$$

將變數分隔，

$$\frac{dx}{x}+\frac{dv}{v^2}=0$$

由此得解

$$\log x-\frac{1}{v}=C, \text{或 } x=C_1 e^{\frac{1}{v}},$$

式中 $c_1=e^c$. 復令 $v=\frac{y}{x}$, 解變爲

$$x=C_1 e^{\frac{x}{y}}.$$

3. M 與 N 爲一次式　若 M 與 N 爲 x, y 之一次式，則 $M=0$, $N=0$ 各表一直線。若將原點移至二線交點，則 M, N 式中不復含有常數項，於是方程式爲齊次，可做前款之方法求解。設有方程式

$$(4x+3y+1)dx+(x+y+1)dy=0.$$

直線 $4x+3y+1=0$ 與 $x+y+1=0$ 交於 $(2, -3)$, 令 $x=x'+2$, $y=y'-3$ 方程式變爲

$$(4x'+3y')dx'+(x'+y')dy'=0.$$

令 $y'=vx'$, 再以 x' 除方程式，得

$$(4+3v)dx'+(1+v)(v\,dx'+x'\,dv)=0,$$

或

$$\frac{dx'}{x'}+\frac{(1+v)dv}{(2+v)^2}=0,$$

由此得解

$$\log x'+\frac{1}{2+v}+\log(2+v)=C,$$

令 $x'=x-2$, $v=\frac{y'}{x'}=\frac{y+3}{x-2}$ 以資還原，最後得

$$\log(2x+y-1)=C-\frac{x-2}{2x+y-1}.$$

4. 簡單應用題　上列各種微分方程式僅微分方程式之一小部分，玆述其應用此等應用題亦可以他種微分方程式解之，以後數節再

擇要討論。

曲線之幾何性質可以含有一次導微函數之式表出之；如 $y\frac{dx}{dy}$ 表切線影，$y\frac{dy}{dx}$ 表法線影，$x-y\frac{dx}{dy}$ 與 $y-x\frac{dy}{dx}$ 各表切線截距，$x+y\frac{dy}{dx}$ 與 $y+x\frac{dx}{dy}$ 各表法線截距。此等式中皆含有曲線上點之坐標及點之斜度。在極坐標制中，$\rho\frac{d\theta}{d\rho}$ 表曲線向徑與切線所交角之正切，$\rho^2\frac{d\theta}{d\rho}$ 表極切線影，$\frac{d\rho}{d\theta}$ 表極法線影。若欲求切線恆與 x 軸交於 $(2x, 0)$ 點之曲線（x 表切點之橫坐標）則有

$$x-y\frac{dx}{dy}=2x,\ \text{或}\ \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0,$$

由此得 $xy=C$ 此爲一族雙曲線，其中任取一線均有上述性質。若欲求切線與向徑恆交於定角 ψ 之曲線，則有

$$\rho\frac{d\theta}{d\rho}=\tan\psi,\ \text{或}\ \cos\psi\ d\theta=\frac{d\rho}{\rho},$$

由此得 $\theta\cot\psi=\log\rho+c$，此式可書爲

$$\rho=c_1\,e^{\theta\cot\psi}.$$

此方程式代表一族等角螺線，任取其中一線交向徑於定角。

方程式 (1) 可書爲

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}. \tag{1}$$

因 M 與 N 俱爲 x, y 之函數，則任意點之斜度均可決於此方程式。此微分方程式之解表一族曲線稱爲積分曲線族(integral curves)，任取此曲線之一，在曲線任何點 (x, y) 上之斜度均可據式 (1) 求出。若以 $-\frac{M}{N}$ 之負值倒數代 $-\frac{M}{N}$ 則得微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{N}{M}, \tag{2}$$

此式之解表一族曲線與曲線族(1)處處交於直角。積分曲線族(2)稱爲積分曲線族(1)之正交曲線族(orthogonal trajectories)設欲求拋物線族 $y^2=4px$ 之正交曲線族及此族曲線之通過(2, 4)點者。在 $y^2=4px$ 兩端求導微函數

$$2y\frac{dy}{dx}=4p$$

消去 p 得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}.$$

所求正交曲線族之微分方程式爲

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y},$$

由此得 $y^2+2x^2=c$. 此爲一族橢圓，其中通過(2, 4)點者爲

$$y^2+2x^2=24.$$

習　題　六　十

1. 解下列各微分方程式:

(a) $(y-1)dx-(x+1)dy=0$,

(b) $\sin\theta\, dr+r\cos\theta\, d\theta=0$,

(c) $\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$,

(d) $dy+y\sin x\,dx=\sin x\,dx$.

2. 解下列各微分方程式:

(a) $(y-x)dy+y\,dx=0$,　　(b) $(x^2+y^2)dx=2xy\,dy$,

(c) $(x^2y+y^3)dx-x^3\,dy=0$, (d) $(3x^2-y^2)dy=2xy\,dx$.

3. 解下列微分方程式：

(a) $(2x-y+1)dx+(x+2y+3)dy=0$,

(b) $(2x+y-1)dx+(4x+2y+4)dy=0$.

注意：此處所求得交點之二直線為平行線故上述方法無效。令 $2x+y=t$, 則 $dy=dt-2dx$。

4. 求切線影爲一常數之曲線族。

5. 求法線影等於 16 且通過 $(2, 8)$ 點之曲線。

6. 求極法線影等於 $\rho\sin\theta$ 之曲線族之極方程式。

7. 求圓族 $x^2+y^2=r^2$ 之正交曲線族。

8. 求圓族 $x^2+y^2+cx=0$ 之正交曲線族。

9. 某曲線族所有曲線切線與動徑間之角恆等於向量角之半，求此族曲線之方程式。

第六十四節　適合微分方程式

一級一次微分方程式如

$$M\,dx+N\,dy=0, \tag{1}$$

之通解或完全原式爲含有 x, y 及一常數 c 之方程式。此式可書爲

$$f(x, y)=C, \tag{2}$$

故其微分方程式爲

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0. \tag{3}$$

(3)式之左端爲一適合微分，凡可書如 (3) 式之方程式稱爲適合微分方程式 (exact differential equation)。由方程式 (3) 可定微分 dy 與 dx 之比，可見(1)如與(3)有同解，(1)，(3) 二式至多可有一因式

之區別。〔姑定此因式爲 $\phi(x, y)$〕故形如 (1) 之微分方程式如有解 (2)，則必可求得一因式 $\phi(x, y)$ 俾

$$M\phi(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x},\ N\phi(x, y)=\frac{\partial f}{\partial y} \tag{4}$$

此因式 $\phi(x, y)$ 稱爲積分因式 (integrating factor)，方程式乘此因式後始能變爲適合微分方程式。微分所以必須變爲適合者，因在適合微分中變數不加分隔卽可作積分運算也。由積分式

$$\int\frac{\partial f}{\partial x}dx,\int\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

第一式中視 y 爲常數，第二式中視 x 爲常數，必可求得 $f(x, y)$ 惟僅含 y 之諸項不能由前式求得，僅含 x 之諸項不能由後式求得。故取此二式中任一式運算之結果，加以他式運算結果中第一式運算所無各項，卽得所求之函數 $f(x, y)$。

例如，由完全原式

$$x^4+x^2y^2-4y^4=C.$$

可推出適合微分方程式

$$(4x^3+2xy^2)dx+(2x^2y-16y^3)dy=0.$$

若欲求此式之解，則必一察

$$\int(4x^3+2xy^2)dx=x^4+x^2y^2+C,$$

$$\int(2x^2y-16y^3)dy=x^2y^2-4y^4+C.$$

取前式中各項及後式中在前式未出現之 $-4y^4$ 卽得所求之方程式。可見在將第二式求積分時，只須注意不含 x 諸項，因含 x 諸項均在第一次運算中求得也。

若形如 (1) 式之方程式爲適合微分方程式，則必

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}, \tag{5}$$

因 M 與 N 各爲 $f(x,y)$ 對 x 與 y 之偏導微函數，故方程式(5)等於

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},$$

除在若干間斷點外，此式恆能成立，至對於間斷點此式何以不能成立，本書不加討論，方程式（5）稱爲微分方程式適合性之鑒別式(test for exactness)。

凡變數已經分隔之微分方程式皆爲適合微分方程式，前述用除法分隔變數亦可視爲應用積分因式。第 63 節之方法與觀點與本節所論殊途同歸惟該節所論似更簡易。

1. 藉觀察求積分因式　求積分因式無普遍之法則。經驗以及下述之暗示足使學者得適當之技巧。

(a) $x\,dy-y\,dx$ 除以 x^2, y^2, xy, x^2-y^2 或 x^2+y^2 後可變爲適合微分。若方程式可變爲上述之形式卽可用上列五式之一除之以求解。例如

$$(y^2x+y)dx-x\,dy=0$$

整理後變爲

$$y^2x\,dx+(y\,dx+x\,dy)=0$$

除以 y^2 卽得適合方程式。

(b) 若 M 含有形如 ax^hy^k 之兩項，而 N 所含之兩項各等於 M 之兩項乘 $\frac{bx}{y}$，式中 b 爲一常數對於每項可有不同之值，在此等條件下可以 x^my^m 爲積分因式，例如：

$$(x^2y^2-4xy)dx+(3x^3y-2x^2)dy=0.$$

以 x^my^m 乘之，試其適合性

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^{m+2}y^{n+2}-4x^{m+1}y^{n+1})=\frac{\partial}{\partial x}(3x^{m+3}y^{n+1}+2x^{m+2}y^{n}),$$

$$(n+2)x^{m+2}y^{n+1}-4(n+1)x^{m+1}y^{n}=3(m+3)x^{m+2}y^{n+1}+$$

$$2(m+2)x^{m+1}y^{n}.$$

欲方程式爲適合，必

$$n+2=3(m+3),\quad -4(n+1)=2(m+2)$$

卽 $m=-\frac{18}{7}$，$n=-\frac{5}{7}$.

(c) 若 xM 與 yN 爲 xy 之函數，則以 $xM-yN$ 除方程式卽可使方程式適合。若 $xM=yN$ 則此法無效，惟 xM 果等於 yN 則其解爲 $xy=C$ 可以不必再用此法。

(d) 若應用適合性之鑒別式得 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Nf(x)$，式中 $f(x)$ 爲不含 y 之任何函數，則乘 $e^{\int f(x)dx}$ 可使方程式適合。

(e) 若 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-Mf(y)$，式中 $f(y)$ 爲不含 x 之任意函數，則乘 $e^{\int f(y)dy}$ 可使方程式適合。

2. 一級平直方程式　若方程式爲因變數及其導微函數之一次式則方程式稱爲平直 (linear) 方程式。一級平直方程式之標準式爲

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \tag{6}$$

式中 P 與 Q 爲 x 之任意函數。此種方程式雖已在前款論及，因其極爲重要，故有再論之必要。此式可書爲

$$(Py-Q)dx+dy=0, \tag{6'}$$

於是 $M=Py-Q$ 而 $N=1$。由 (d) 之提示，得

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=P-0=Nf(x),$$

式中 $f(x)=P.\ e^{\int Pdx}$ 爲其一積分因式。以此積分因式乘之，

$$e^{\int Pdx}(Py-Q)dx+e^{\int Pdx}dy=0.$$

此式易證明其爲適合，其解爲

$$ye^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dx+C \tag{7}$$

因此種微分方程式應用甚廣(6)，(7)二式最好能記熟，俾一遇形如(6)式之微分方程式卽先求積分因式 $e^{\int Pdx}$ 再代入(7)式求解。

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1-x}{x}y=e^{x}。$$

積分因式爲

$$e^{\int\frac{1-x}{x}dx}=e^{\log x-x}=xe^{-x},$$

代入(7)，得

$$ye^{-x}=\int e^{x}xe^{-x}dx=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^{2}+C,$$

故其解爲 $y=e^{x}\left(\frac{x}{2}+\frac{c}{x}\right)$.

3. 廣義平直方程式　此處所欲論之方程式每稱爲柏努利(James Bernoulli)方程式，可設法化爲平直方程式。其標準式爲

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q\,y^{n}, \tag{8}$$

式中 n 爲任意一數。除以 y^{n}，則得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{1-n}=Q \tag{8'}$$

令 $v=y^{1-n}$ 於是 $\frac{dv}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ 以 $1-n$ 乘方程式，則得

$$\frac{dv}{dx}+(1-n)Pv=(1-n)Q,$$

與 (6) 式相同。

習 題 六 十 一

1. 求證下列各方程式爲適合，並書出其解：

(a) $x^2dx+(y^2-1)dy=0$;

(b) $(x+y)dx+(x-y^2)dy=0$;

(c) $\cos y\,dx+(y-x\sin y)dy=0$。

2. 求下列各方程式之積分因式並書其解：

(a) $(x^3-y)dx+x\,dy=0$;

(b) $(xy+y^3)dx-(4x^2+3xy^2)dy=0$;

(c) $(3x^2+y)dx+(x^3y+xy^2+x)dy=0$。

3. 解下列各微分方程式：

(a) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$;

(b) $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=\sin 2x$;

(c) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=y^3$;

(d) $\dfrac{dr}{d\theta}+r\theta=r^2\theta^3$.

4. 某物體運動時之速率 v 循下律變值

$$\frac{dv}{dt}+kv=a\sin t$$

若 $t=0$ 時 $v=0$，求以 t 之函數表 v。

5. 在電路中電流之變値服從下律

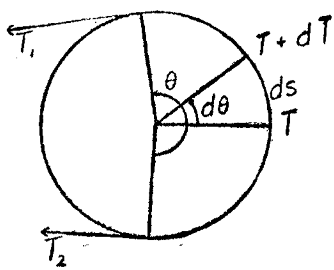
$$L\frac{di}{dt}+Ri=E,$$

式中 i 表電流，t 表時間，其他文字概表常數。若 $t=0$ 時 $i=i_0$，求以 t 之函數表 i。

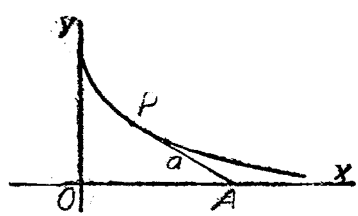
6. 在題 5 中，以 $E\sin t$ 代 E 解方程式，注意此題與題 4 有相似處。

7. 設皮帶張於滑輪上，而與面間每單位長之正壓力（normal pressure）爲 $\frac{T}{a}$，式中 T 爲皮帶上之張力，a 爲滑輪半徑。對於微分長度 ds 上之力爲 $\frac{T}{a}ds=T\,d\theta$，式中 $d\theta$ 爲張於 ds 弧上之角（第 112 圖）。若 f 爲摩擦係數，當開始滑動時，其張力上之對應變値爲

$$dT=fT\,d\theta。$$



第 112 圖



第 113 圖

求證皮帶兩端張力之比爲下式所限制

$$\frac{T_1}{T_2}=e^{f\theta}.$$

8. PA（第 113 圖）爲長度爲 a 之線，當 A 點沿 OX 移動

時，P 點所繪出之曲線稱爲引線弧（見習題二題 2 ）。此曲線顯然有定長之切線 a，求其方程式。

第六十五節　高次微分方程式

方程式中如含有導微函數之高次冪，則導微函數不如以一個文字代表較爲便利。令 $p=\dfrac{dy}{dx}$，於是不論次數如何，一級方程式可書爲

$$f(x,\ y,\ p)=0 \tag{1}$$

1. 通解　本款述式 (1) 之三種解法，此三法中有先解出 p 者，有先解出 y 或 x 者。方法之選擇最爲重要，因一法每較他法爲便。

(a) 先解出 p 者　視 (1) 爲含未知數 p 之代數方程式，於是解出 p，解之個數與次數相同。今下列各式爲其解：

$$p=f_1(x,\ y),\ p=f_2(x,\ y)\ \cdots \tag{2}$$

每式皆爲一級一次微分方程式，可做以前所述方法解之。設其解爲

$$F_1(x,\ y,\ c)=0,\ F_2(x,y,c)=0,\cdots\cdots, \tag{3}$$

則其通解爲

$$F_1(x,\ y,\ c)F_2(x,\ y,\ c)\cdots\cdots=0。 \tag{4}$$

常數 c 不能視爲互不相關，否則 (4) 將爲高於一級之方程式之完全原式而不爲 (1) 之通解矣。若此等常數有相同之值，則由 (4) 式及 $F_1(x,\ y,\ c)$，消去 c 可得 $p=f_1(x,\ y)$，倣此可知 F_2，$f_2\cdots\cdots$等函數間之關係。

例如，有二次方程式

$$yp^2+(x-x^2y)p-x^3=0。$$

解出 p，得

$$\frac{dy}{dx}=p=-\frac{x}{y},\ \ \frac{dy}{dx}=p=x^2,$$

其解爲

$$x^2+y^2+c=0,\ 3y-x^3+c=0,$$

合書爲一式,得通解

$$(x^2+y^2+c)(3y-x^3+c)=0_{\circ}$$

(b) 先解出 y 者　有時由 (1) 求 y 較便,故可以 x 與 p 之函數表出之。

$$y=\phi(x,p)_{\circ} \tag{5}$$

對 x 施微分運算,且勿忘 p 爲 x 之函數,則得

$$p=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial p}\frac{dp}{dx}_{\circ} \tag{6}$$

此爲 p 與 x 之一級一次微分方程式,故可用前述諸法求解。設其解爲

$$F(x,p,c)=0, \tag{7}$$

由(5)與(7)消去 p, 即得 (1) 之通解。

設有方程式 $p^2=x-y$。解出 y, 得 $y=x-p^2$, 求導微函數,得

$$p=1-2p\frac{dp}{dx},$$

或

$$\frac{p\,dp}{1-p}=\frac{dx}{2}$$

作積分運算

$$-p-log(p-1)=\frac{x}{2}+C_{\circ}$$

令 $p=\sqrt{x-y}$, 得解

$$-\sqrt{x-y}-log(\sqrt{x-y}-1)=\frac{x}{2}+c_{\circ}$$

有時不易消去 p，或消去後消去式甚繁。但(5)與(7)或(1)與(7)不妨合併視爲所求之解，c 爲泛定常數，p 視爲參數。

茲舉一値得注意之特例。若(5)之形式爲

$$y=px+\phi(p), \tag{5'}$$

則作微分運算後，得

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+\frac{d\phi}{dp}\frac{dp}{dx}, \tag{6'}$$

若 $\frac{dp}{dx}=0$ 能適合此式，故(7)之形爲

$$p=c \tag{7'}$$

故以 $p=c$ 代入(5′)，卽得通解，

$$y=cx+\phi(c)。$$

形如(5′)之方程式稱爲克萊羅氏方程式(Clairaut's equation)，若已認淸方程式屬於此類，其解可立卽書出。

(c) 先解出 x 者　若據(1)式解 x 較便，則令

$$x=\phi(y,p) \tag{8}$$

視 x 與 p 爲 y 之函數求對於 y 之導微函數，得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial p}\frac{dp}{dy}。 \tag{9}$$

此爲含 p,y 之一級一次微分方程式，設其解爲

$$F(y,p,c)=0 \tag{10}$$

通解爲(8)與(10)或(1)與(10)消去 p 後之消去式，或視 p 爲參數，此二式卽爲其通解。再取前例 $p^2=x-y$ 用此法計算，於是 $x=y+p^2$，由此得

$$\frac{1}{p}=1+2p\frac{dp}{dy},$$

或
$$\frac{p^2dp}{1-p}=\frac{dy}{2}$$

其解為
$$-\frac{p^2}{2}-p-log(p-1)=\frac{y}{2}+c,$$

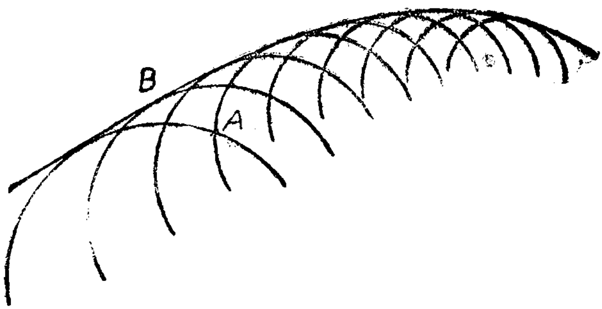
令 $p=\sqrt{x-y}$ 代入，仍得前法所得結果。

2. 異解　設微分方程式
$$f(x, y, p)=0 \tag{1}$$
之通解為
$$F(x,y,c)=0 \tag{11}$$
方程式(11)或由(3)所推出，或由(1)與(7)或由(1)與(10)消去 p 所推出。此(11)式代表一族曲線，c 為此族曲線之參數，此族曲線可有一包跡；在此包跡上每點均為此族曲線與包跡之接觸點。若將包跡上任意點之坐標 x, y 及該點之 p 代入(1)，則定能適合(1)，因此點之 x, y, p 即(11)式所代表之曲線族中某一曲線之 x, y, p 也。換言之，即包跡之方程式亦為微分方程式之一解。包跡既僅一支曲線，又非(11)之特解，〔在(11)式中令 c 表某定值則得一特解〕故包跡之方程式稱為異解(singular solution)。

欲求異解須視下列三條件能否適合。

(a) c 判別式　取任意點(x, y)例如第 114 圖之 A 點，代入方程式(11)照例可求得二個或多於二個之 c 值。但在包跡上之點(例如 B 點)則不然，有數個 c 值必疊合，不及在 A 點處之多。c 之二個值或多個值疊合之條件即下列二方程式
$$F(x, y, c)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial c}=0,$$
可以同一 c 適合之。自此二方程式消去 c 得方程式
$$\theta_c(x,y)=0,$$

此函數 θ_c 稱爲 c 判別式，以包跡上任意點之坐標 x, y 代入，此判別式必等於零。故令判別式之諸因式等於零卽可求得異解。



第 114 圖

(b) p 判別式　將任意點 (x, y)（如 A 點）之坐標代入 (1) 式，通常可得二個或多個 p 值。但在包跡上之點 B，若干個 p 值每疊合。故自方程式

$$f(x, y, p)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial p}=0$$

消去 p，可得 p 判別式。

設消去式爲

$$\theta_p(x,y)=0$$

θ_p 爲 p 判別式，令此式之因式等於零可得異解。

(c) 解之檢驗　c 判別式與 p 判別式必含吾人所欲求之因式，但二式又可各含其他因式，此等因式之軌跡不適合微分方程式。故必須至少一驗二判別式中之一式，棄去不能得解之因式，卽謂棄去不能滿足第 62 節所述解之鑒別式者。

凡因式能得在通解中之某特解者亦須棄去。

例如，有方程式

$$p^2-(x+y)p+xy=0。$$

其 p 判別式為

$$(x+y)^2-4xy,$$

故方程式如有異解必為 $x-y=0$，但令 $y=x$，$p=1$ 代入方程式得 $1-2x+x^2=0$，此非恆等式，故無異解。

茲再舉一例，設有微分方程式

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2=4\rho^2(\rho^2-1),$$

此處 $p=\frac{d\rho}{d\theta}$，若 $\rho=0$ 或 $\rho=\pm1$ 則二值疊合。按 $\rho=0$ 僅為一點（即原點），但令 $\rho=\pm1, \rho=0$ 代入微分方程式內，則得恆等式，故半徑為 1 之圓為異解。又，將方程式書為

$$\frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-1}}=\pm2\,d\theta$$

則得
$$sec^{-1}\rho=\pm2\theta+c。$$

此處 $\pm$ 號可任取何號均可，因 $sec(2\theta+c)=sec(-2\theta+c_1)$ 若 $c_1=-c$。其通解為

$$\rho=sec(2\theta+c)。$$

欲求 c 判別式，可對 c 求偏導微函數，

$$0=2\,sec(2\theta+c)tan(2\theta+c),$$

消去 c，得

$$2\rho\sqrt{\rho^2-1}=0,$$

仍得 $\rho=0$, $\rho=\pm1$。此處仍得以 1 為半徑之圓，又極點 $\rho=0$ 不在曲線族之任一曲線上，故不為包跡之一部分。

茲再舉第三例，

$$xp^2-2yp-x=0$$

之通解爲

$$c^2x^2-2cy-1=$$

此處 c 判別式與 p 判別式相同，皆得

$$x^2+y^2=0.$$

此表一實點，不在通解之任何曲線上，但視爲虛數軌跡，此式能適合所設微分方程式。因由此可得 $p=-\dfrac{x}{y}$，代入微分方程式得

$$\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)=0。$$

習題六十二

1. 先解出 p 以求下列各微分方程式之通解：

(a) $p^2+3xp+2x^2=0$;　　(b) $xp^2+(y-x^2)p=0$;

(c) $y^2+p^2=1$;　　(d) $p^3-p^2y-px^2+x^2y=0$。

2. 先解出 y 以求下列各式之通解：

(a) $p^2+2xp-y=0$;　　(b) $4xp^2+2xp-y=0$;

(c) $y=px+p^3$;　　(d) $p^2x=py+4=0$。

3. 先解出 y 以求下列各式之通解：

(a) $x+py(2p^2+3)=0$;　　(b) $y=px+p^3$;

(c) $p^2+3xp+2x^2=0$;　　(d) $p^2+2xp-y=0$。

提示：在(d)中，得 p 與 y 之微分方程式後，視 p 爲自變數，而方程式變爲平直。

4. 在解 2(b) 與 2(c) 時，含 p 與 x 之微分方程式有不含 $\dfrac{dp}{dx}$ 之因式。若將此等因式等於零並自所設方程式中消去 p，則可得異解，

試闡明之。

5. 試證明用 3(b) 之方法亦可得與 2(c) 相同之異解。

6. 圓 $x^2+y^2=16$ 以斜度爲參數之切線方程式爲 $y=mx+4\sqrt{1+m^2}$。求證此族直線之微分方程式爲克萊羅氏 (Clairaut) 方程式，其異解卽爲所設圓。

7. 直線族 $y=mx-4m-2m^3$ 爲拋物線 $y^2=8x$ 之全部法線。求其微分方程式及其異解。

8. 求下列微分方程式之通解與異解。

$$(y-px)^2+4p=0。$$

9. 檢驗下列諸式以求其異解：

(a) $y^2+p^2=1$；

(b) $p^2+px-y=0$；

(c) $\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2+\rho^2-\rho^4=0$。

第十五章　高級常微分方程式

第六十六節　常係數齊次平直方程式

在本節當述形式如下之方程式：

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=0, \tag{1}$$

式中係數 $a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$ 皆為常數。此方程式為平直且為齊次，因每項之 y 及其各級導微函數均為一次。方程式為 n 級，其通解必含 n 個且僅含 n 個泛定常數。凡具 n 個泛定常數之 x 之函數，以之代 y 後，能滿足(1)式卽為方程式之通解。明乎此，則不必作積分運算卽可構成一解。

因 y 及其各級導微函數在式中均為一次，可見 y 可有 ce^{mx} 之形式，蓋此等函數與其導微函數僅常數因數不同而已。試令

$$y=ce^{mx},\ \frac{dy}{dx}=cme^{mx},\cdots\cdots\frac{d^n y}{dx^n}=cm^n e^{mx},$$

代入(1)，得

$$ce^{mx}(a_0m^n+a_1m^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}m+a_n)=0。 \tag{2}$$

當 m 為任何有限值時 ce^m 不能等於零，故必

$$a_0m^n+a_1m^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}m+a_n=0。 \tag{3}$$

此方程式稱為 (1) 之輔助方程式(auxiliary equation)。能適合 (3) 之 m 共有 n 個值，若以 $m_1, m_2,\cdots\cdots m_n$，表此 n 個值，則能適合 (1) 之 y 為

$$c_1e^{m_1x},\ c_2e^{m_2x},\cdots\cdots c_ne^{m_nx},$$

若令

$$y=c_1 e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\cdots\cdots+c_ne^{m_nx} \tag{4}$$

代入 (1),則得 n 個形如 (2) 式之和,每式之值皆爲零。故 (4) 爲 (1) 之一解。若 m 之 n 個值各不相同,則 (4) 爲通解,若 m 有重根則(4) 式必經更改,始能爲(1)之通解。例如 $m_1=m_2$, 則 (4) 式右端二項變爲一項 $(c_1+c_2)e^{m_1x}$, 於是式中不復含應有之 n 個獨立常數。試令 $y=xe^{mx}$,則得

$$\frac{dy}{dx}=(mx+1)e^{mx},\ \frac{d^2y}{dx^2}=(m^2x+2m)e^{mx}\cdots\cdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=(m^nx+nm^{n-1})e^{mx}$$

代入 (1),得

$$xe^{mx}[a_0m^n+a_1m^{n-1}+\cdots\cdots+a_n]+$$

$$e^{mx}[a_0nm^{n-1}+a_1(n-1)m^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}]=0。$$

若 m 之值能適合 (3) 則第一方括號內之值爲零,第二方括號內爲第一括號內諸式之導微函數,故當 m 爲 (3) 之重根時,其值必爲零。故若 $m_1=m_2$, $y=xe^{m_1x}$ 爲 (1) 之一解,倣此可證,若 m_1 爲 (3) 之 r 重根,s 爲小於 r 之整數,則 $y=x^se^{m_1x}$ 爲 (1) 之解。故 m 若有 r 重根,則(4)式中對應於此 m 值之項可依次乘以 $1,x,x^2,\cdots\cdots x^{r-1}$, 其結果爲通解。

若(3)有一雙複數根 $h\pm ki$, 式中 $i=\sqrt{-1}$, (4) 式中之對應項可書爲

$$c_1e^{(h+ki)x}+c_2e^{(h-ki)x}=e^{hx}(c_1e^{kix}+c_2e^{-kix})$$

$$=e^{hx}(c_1\cos kx+c_1 i\sin kx+c_2\cos kx-c_2 i\sin kx)$$

$$=e^{hx}(c_1\cos kx+c_1\sin kx), \tag{5}$$

式中 $c_1=c_1+c_2$, $c_2=(c_1-c_2)i$,若據此以解出 c_1, c_2,得 $2c_1=c_1+c_2i$,

$2c_2=c_1-c_2 i$ (見第 51 節)。可見,若 m_1 與 m_2 為共軛複數根,則 (4) 式中之二對應項可寫為實數式(5), c_1 與 c_2 為共軛複數值。(4) 式如此修改後有時較便利。

例如

$$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-8\frac{dy}{dx}+12y=0。$$

其輔助方程式為 $m^3-m^2-8m+12=0$, 解之得 $m=2,2,-3$。其通解為

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{-3x}。$$

又如

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^3}-4\frac{dy}{dx}-4y=0。$$

不必書出其輔助方程式,即知其根為 $2,-2,-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$。其通解為

$$y=c_1\,e^{2x}+c_2\,e^{-2x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(c_3\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x+c_4\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right)。$$

茲舉二個極端重要之特例。其一為諧運動之微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0。\tag{6}$$

此處輔助方程式之根為 $\pm ki$, 於是通解為

$$y=c_1\cos k\,x+c_2\sin k\,x,\tag{7}$$

或書成下列較便利之形式

$$y=c\sin(kx+\phi)。\tag{7'}$$

在後式中, c 與 ϕ 為泛定常數, $c^2=c_1{}^2+c_2{}^2$, $c_1=c\sin\phi$, $c_2=c\cos\phi$,

y 爲諧函數，振幅爲 c，週期爲 $\frac{2\pi}{k}$ 而相角爲 ϕ。週期卽由微分方程式決定，至振幅與相角則在通解中爲泛定常數，須令通解適合某原始條件以決定其值。

第二重要之特例包括第一例爲其特例。設有方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2a\frac{dy}{dx}+by=0, \tag{8}$$

其輔助方程式之根爲 $-a\pm\sqrt{a^2-b}$。若 b 大於 a^2 則通解爲

$$y=ce^{-ax}sin(\sqrt{b-a^2}x+\phi)。 \tag{9}$$

若 $a=0$，則式爲諧運動之式。若 a 爲正數，則因式 e^{-ax} 隨 x 增加而遞減，表振動之幅漸次減小。如此，則(9)爲阻尼振動 (damped vibrations) 之方程式，而(8)式爲其微分方程式。若 a 爲負，則 (9)之振幅進增。

若在(8)式中，a^2 大於 b，則其解可書爲

$$y=e^{-ax}(c_1\,e^{\sqrt{a^2-b}x}+c_2\,e^{-\sqrt{a^2-b}x})。 \tag{10}$$

若 a 爲正，則當 x 無限增大時 y 趨近於零，若 a 爲負，則 y 隨 x 遞增。(10)亦可書爲

$$\begin{aligned} y&=e^{-ax}(C_1\,cosh\sqrt{a^2-b}x+C_2\,sinh\sqrt{a^2-b}\,x)\\ &=Ce^{-ax}sinh(\sqrt{a^2-b}\,x+\phi), \end{aligned} \tag{10'}$$

式中 $C_1=c_1+c_2, C_2=c_1-c_2, Ce^{\phi}=2c_1$ 而 $Ce^{-\phi}=-2c_2$ (10′) 式有時較(10)爲便利。

習　題　六　十　三

1. 書出下列各式之通解：

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}-16y=0$;　　　(b) $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=0$;

(c) $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+3y=0$;　(d) $\frac{d^4y}{dx^4}-6\frac{d^2y}{dx^2}+8y=0$。

2. 解下列各式:

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$;　(b) $\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^2y}{dx^2}=0$;

(c) $\frac{d^3y}{dx^3}-6\frac{d^2y}{dx^2}+9\frac{dy}{dx}=0$,　(d) $4\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^2y}{dy^2}+y=0$。

3. 書出下列各方程式之通解,解中不得有虛數:

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0$;　(b) $\frac{d^4y}{dx^4}-16y=0$;

(c) $\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}=0$;　(d) $\frac{d^5y}{dx^5}+6\frac{d^3y}{dx^3}+9\frac{dy}{dx}=0$。

4. 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+16y=0,$$

適合 $x=0, y=0, \frac{dy}{dx}=5$ 之條件,試解此方程式。

5. 解下列微分方程式。

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+3y=0$$

原始條件:當 $x=0$ 時 $y=2$, $\frac{dy}{dx}=1$。

6. 求微分方程式

$$\frac{d^3y}{dx^3}+4\frac{dy}{dx}=0$$

之特解,當 $x=\frac{\pi}{4}$, $y=0$; $x=0$, $y=1$; $x=\frac{\pi}{8}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=0$。

7. 若以 10 磅重量加於彈簧則簧移動一吋。若以 40 磅之重量加於彈簧，則簧移動 4 吋故重量上所受簧之力爲 $-120s$，s 爲重量高出其平衡位置之呎數，若以質量與加速度之乘積等於力，則得微分方程式

$$\frac{40}{g}\frac{d^2s}{dt^2}=-120s_{\circ}$$

求證此運動爲諧運動，假定當彈簧移下 6 吋時（即在平衡位置之下 2 吋時）運動開始，求運動之方程式。並求振動週期。

8. 若題 7 之運動，受與速度成正比例之摩擦力所阻，則微分方程式之形式變爲

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+n\frac{ds}{dt}=-ks_{\circ}$$

若 n^2 小於 $4mk$ 證明運動爲阻尼振動，並求振動頻率。

9. 設有長度爲 L，直徑爲 D 之圓軸(shaft)，在一端固定，一端扭轉使扭轉角爲 θ，扭轉矩爲

$$M=\frac{\pi D^4 G\theta}{32L}.$$

式中 G 爲製軸材料之剛性係數。若在扭轉之一端加一重量 W，此重量對於圓軸軸線(shaft axis)之迴轉半徑爲 k，當軸發生角移後，任其回復原狀，則

$$\frac{Wk^2}{g}\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{-\pi D^4 G\theta}{32L},$$

不計軸本身之慣性力。求扭轉振動之週期。

10. 若電容爲 K 之容電器荷有電量 q，則電壓爲$\frac{q}{K}$。若令此電容器通過自感應爲 L 而電阻爲 R 之電路以放電，則有

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{K}=0_{\circ}$$

試以 t 之函數表 q，假定 $t=0$ 時，$q=q_0$，$\frac{dq}{dt}=0$。L,R,K 間有何種關係，則放電爲阻尼振動式？否則放電電流之性質若何？

第六十七節 非齊次平直方程式

本節論形式如下之微分方程式：

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots+a_ny=X, \tag{1}$$

式中係數仍爲常數，惟 X 爲僅含 x 之函數。若此函數之値恆爲零則方程式化爲前節所述之齊次方程式。

此處仍須利用輔助方程式

$$a_0m^n+a_1m^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0 \tag{2}$$

仍以 $m_1,m_2,\cdots\cdots m_n$ 表此式之 n 個根，則可書

$$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\cdots\cdots+c_ne^{m_nx}+f(x) \tag{3}$$

若令 $y=f(x)$ 代入 (1) 式之左端恰等於 X，則 (3) 爲 (1) 之解，因 (3) 式中含有指數函數各項按前節所論其値應爲零故也。若 (2) 式之 n 個根無相重者，則 (3) 爲通解，恰含 n 個泛定常數，否則仍可倣前節之法修正 (3) 式使成爲 (1) 之通解。若有複數根仍可倣前節之法以正弦與餘弦函數代指數函數。

函數 $f(x)$ 稱爲 (1) 之特殊積分(particular integral)，通解中其餘各項則統稱爲餘函數(complementary function)。

欲解(1)，以零代 X，先求齊次方程式之解。以此爲餘函數進而求特殊積分，以下三款列舉求特殊積分之三法。如能用第一法，自以用第一法最便，實際問題亦多能以此法求解。用其餘二法，恆可得解，第三法可用爲下節之預備資料。在第四款中並舉一能化爲(1)式之方程式。

1. **嘗試特殊積分** 設果有一組函數 $f_1(x)$，$f_2(x)\cdots\cdots f_q(x)$俾

X 及其各級導微函數皆可以此等函數之一次式表出如下：

$$b_1 f_1(x)+b_2 f_2(x)+\cdots\cdots+b_q f_q(x),$$

則可書

$$y=b_1 f_1(x)+b_2 f_2(x)+\cdots\cdots+b_q f_q(x), \tag{4}$$

於是只須定諸係數 b 之值俾此式爲特殊積分；欲求 b 之值，可將(4)代入(1)比較同類項之係數卽得。若此一組函數 $f_1(x)$ 等果存在，則將 X 各項及各項之各級導微函數書出直至不能產生新形式之項爲止，如此卽可發現 $f_1(x)$ 等所有之形式矣。

若(4)中含有餘函數中之一項，則係數無從測定，因係數爲通解中之泛定常數 c 也。因此若遇 X 中有 kx^pe^{mx} 形之項，而 ce^{mx} 又爲餘函數之一項則產生例外。遇此例外時若 m 爲輔助方程式之 r 重根，則以 $kx^{p+r}e^{mx}$ 代替 X 中之 ce^{mx} 項，凡(4)式中一切與餘函數內各項形式相同者皆取消之。

詳盡之說明從略，舉例以見此法之有效，設有方程式

$$\frac{d^4y}{dx^4}-9\frac{d^2y}{dx_2}=x^3-e^{3x}。$$

輔助方程式之根爲 $0,0,\pm 3$，而餘函數則爲

$$c_1+c_2x+c_3e^{3x}+c_4e^{-3x}。$$

特殊積分可分二部求之，先求其能產生 x^3 之部分，次求其能產生 $-e^{3x}$ 之部分。求第一部時須注意例外，用上述之記法，則 $k=1$, $p=3$, $m=0$, $r=2$。故以 x^5 代替 x^3，故嘗試積分爲

$$y=b_1x^5+b_2x^4-b_3x^3+b_4x^2。$$

應求得之導微函數爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}=20b_1x^3+12b_2x^2+6b_3x+2b_4,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=120\,b_1\,x+24b_2。$$

代入微分方程式並比較兩端同類項係數得

$$-180b_1=1,108b_2=0,120b_1-54b_3=0,24b_2-18b_4=0,$$

故特殊積分之第一部分爲

$$y=\frac{-x^5}{180}-\frac{x^3}{81}。$$

求特殊積分之第二部時亦須注意例外情形，以 xe^{3x} 代 e^{3x}，取

$$y=b_x\,e^{3x}$$

爲嘗試積分。應求出之導微函數爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}=9bxe^{3x}+6be^{3x},\quad \frac{d^4y}{dx^4}=81bxe^{3x}+108be^{3x}。$$

代入方程式並比較係數，得 $54b=-1$，故通解爲

$$y=c_1+c_2\,x+c_3\,e^{3x}+c_4\,e^{-3x}-\frac{x^5}{180}-\frac{x^3}{81}-\frac{1}{54}xe^{3x}。$$

茲再舉第二例

$$\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-8y=x\,sin\,2x。$$

此處餘函數可書爲

$$c_1\,e^{2x}+c_2\,sin\;2x+c_3\,cos\,2x,$$

微分方程式右端爲餘函數中之一項乘以 x，而輔助方程式之對應根亦不爲重根。故用函數 $x^2\,sin\,2x$，及由此用微分法所得各項之不見於餘函數內者爲嘗試積分。此處嘗試積分爲

$$y=b_1\,x^2\,sin\,2x+b_2x^2cos\,2x+b_3\,x\,sin\,2x+b_4x\,cos\,2x,$$

求出各級導微函數後代入微分方程式可求得 b 之值，使此式爲一特

殊積分。

2. 參數變值法 由微分方程式已得餘函數後，不書如 (3) 式，而書爲

$$y=c_1 e^{m_1x}+c_2 e^{m_2x}+\cdots\cdots+c_n e^{m_nx}, \tag{5}$$

遇有重根或複數根仍須倣前法將式修正，惟 c 則不復視爲常數而視爲 x 之函數，於是問題即在定 c 應爲 x 之何種函數俾(5)可爲 (1) 之解。此之謂參數變值法(variation of parameters)。

將 y 及其各級導微函數代入(1)，此 n 個泛定函數 $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ 有必須適合之一條件，更任意選定 $n-1$ 其他條件與前條件合計可得 n 個條件方程式，據此即可定出 $c_1, c_2\cdots\cdots c_n$ 等 n 個函數。此其他 $n-1$ 條件之選定以便利計算爲主，實際上每選 n 個含諸 c 一級導微函數之平直方程式，茲就上述最後之例說明此法之運用，

$$\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-8y=x\sin 2x。$$

吾人可書

$$y=c_1 e^{2x}+c_2 \sin 2x+c_3 \cos 2x$$

$$\frac{dy}{dx}=2c_1 e^{2x}+2c_2 \cos 2x-2c_3 \sin 2x$$
$$+e^{2x}\frac{dc_1}{dx}+\sin 2x\frac{dc_2}{dx}+\cos 2x\frac{dc_3}{dx}.$$

此處有二個可任意選定之條件，故可令後三項之和爲零爲任意選定條件之一，於是可進而求第二級導微函數

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4c_1 e^{2x}-4c_2 \sin 2x-4c_3 \cos 2x$$
$$+2e^{2x}\frac{dc_1}{dx}+2\cos 2x\frac{dc_2}{dx}-2\sin 2x\frac{dc_3}{dx},$$

於此可仍令後三項爲零作爲第二任意選定之條件，於是可求第三級

導微函數

$$d^3y=8c_1\,e^{2x}-8c_2\cos 2x+8c_3\sin 2x$$

$$+4e^{2x}\frac{dc_1}{dx}-4\sin 2x\frac{dc^2}{dx}-4\cos 2x\frac{dc_3}{dx}。$$

若將 y 及其一級，二級，三級三個導微函數代入微分方程式，則因各級導微函數之前三項與餘函數之導微函數同，故令 $\frac{d^3y}{dx^3}$ 之後三項等於 $x\sin 2x$ 則方程式必能適合。於是得三條件，前二者爲任意選定，最後者爲必須適合之條件。

$$e^{2x}\frac{dc_1}{dx}+\sin 2x\,\frac{dc^2}{dx}+\cos 2x\frac{dc_3}{dx}=0,$$

$$2e^{2x}\frac{dc_1}{dx}+2\cos 2x\frac{dc_2}{dx}-2\sin 2x\frac{dc_3}{dx}=0,$$

$$4e^{2x}\frac{dc_1}{dx}-4\sin 2x\frac{dc_2}{dx}-4\cos 2x\frac{dc_3}{dx}=\sin 2x。$$

此三式不經中間步驟亦可直接書出，因諸 c 導微函數之係數卽餘函數及其各級導微函數中諸 c 之係數也。解此三個一次代數方程式，得

$$\frac{dc_1}{dx}=\frac{x}{8}e^{-2x}\sin 2x,$$

$$\frac{dc_2}{dx}=-\frac{x}{8}\sin 2x(\sin 2x+\cos 2x),$$

$$\frac{dc_3}{dx}=\frac{x}{8}\sin 2x(\sin 2x-\cos 2x)。$$

用積分運算卽可得諸 c 之函數，惟積分常數可略去，因此處所求者僅爲特殊積分，若再加積分常數，則再得餘函數，此爲已知不必再求。故

$$c_1=-\frac{1}{64}e^{-2x}(\cos 2x+2x\sin 2x+2x\cos 2x),$$

$$c_2=-\frac{x^2}{32}+\frac{1}{256}(-\sin 4x+\cos 4x+4x\sin 4x+4x\cos 4x),$$

$$c_3=\frac{x^2}{32}+\frac{1}{256}(-\sin 4x-\cos 4x-4x\sin 4x+4x\cos 4x),$$

將式代入 y 式中化簡並取消餘函數中已見之項，得通解

$$y=c_1 e^{2x}+(c_2-3x-2x^2)\sin 2x+(c_3-x+2x^2)\cos 2x_{\circ}$$

3. 記號算子之運用　記號 $D_x y$ 常用以表 y 對於 x 之一級導微函數，在不致發生誤會時，可略去足碼只書 Dy 即可。倣此 y 之高級導微函數可書為 $D^2 y, D^3 y$ 等。於是方程式(1)可書為

$$a_0 D^n y+a_1 D^{n-1}y+\cdots\cdots+a_n y=X_{\circ} \tag{6}$$

或書為

$$[a_0 D^n+a_1 D^{n-1}+\cdots\cdots+a_n]y=X \tag{7}$$

更為便利，方括號中之式可視為整個之運算符號，正如 D 之為運算符號。在(7)式中對於 y 之運算與(6)或(1)式所示對於 y 之運算同。方括號內之式稱為記號算子(symbolic operator)。

若視算子之記號為代數式，則可析因式，方程式可書為

$$(D-m_1)(D-m_2)\cdots\cdots(D-m_n)y=X, \tag{8}$$

式中諸 m 為輔助方程式之諸根。每一因式視為算子各有其確定之意義，如

$$(D-m)y=Dy-my=\frac{dy}{dx}-my_{\circ}$$

故在代數中表示相乘之記號，在此處另表其他之運算。在代數中，(8)式表諸因式之連乘積，此處若將(8)式解釋為連續作若干次之微分運算則結果仍與用(7)式或(6)式算出之結果相同。令 $n=2$ 以示此種解釋之可用。

$$(D-m_1)(D-m_2)y=(D-m_1)(Dy-m_2y)$$
$$=D(Dy-m_2y)-m_1(Dy-m_2y)$$
$$=D^2y-m_2Dy-m_1Dy+m_1m_2y$$
$$=[D^2-(m_1+m_2)D+m_1m_2]y。$$

旣知記號算子有如此之性質，故可書

$$(D-m_n)y=u_1$$
$$(D-m_{n-1})u_1=u_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(D-m_1)u_{n-1}=X, \tag{9}$$

式中諸 u 爲助變數，皆爲 x 之函數，故解最後之方程式卽可得 u_{n-1}，依次解得 u_{n-2} ……以至於 y。諸方程式皆一級平直式易於解得。積分常數皆可略去，因加積分常數無非再引入餘函數之項而已。

玆舉例以明之。

$$D^2y-4Dy+3y=\frac{1}{x}。$$

相當於(8)，式可書爲：

$$(D-3)(D-1)y=\frac{1}{x}。$$

方程式 (9) 變爲

$$(D-3)u=\frac{1}{x},\ (D-1)y=u。$$

用第 64 節之方法，

$$ue^{-3x}=\int\frac{1}{x}e^{-3x}\,dx;$$

用此 u 值，第二微分方程式變爲

$$Dy-y=e^{3x}\cdot\int\frac{1}{x}e^{-3x}\,dx,$$

由此得求 y 之方程式

$$ye^{-x}=\int\left[e^{2x}\int\frac{1}{x}e^{-3x}\,dx\right]dx.$$

欲求上式之積分，惟有將被積函數展爲無限級數。若先用分部積分法，得

$$ye^{-x}=\frac{1}{2}e^{2x}\int\frac{1}{x}e^{-3x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}e^{-x}dx,$$

次將被積函數之指數函數展爲級數，再除以 x，逐項作積分運算，則得通解，

$$y=\frac{1}{2}e^{3x}\left[c_1+\log x-3x+\frac{9}{4}x^2-\frac{9}{6}x^3+\cdots\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{2}e^{x}\left[c_2+\log x-x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{18}+\cdots\cdots\right]。$$

4. 勒戎德耳氏(Legendre)平直方程式 形式如下

$$k_0(a+bx)^n\frac{d^ny}{dx^n}+\cdots\cdots+k_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx}+k_n=X \tag{10}$$

之方程式可化爲常數係數之平直方程式，只須令

$$a+bx=e^z。$$

第一第二級導微函數可求出如下，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\,\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{b}{a+bx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dz}\,\frac{d^2z}{dx^2}=\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)\frac{b^2}{(a+bx)^2},$$

倣此可知若 y 對於 x 之 n 級導微函數乘以 $(a+bx)^n$ 則變爲 y

對於 z 之導微函數之常係數平直方程式。若令 $x=\frac{1}{b}(e^z-a)$ 則右端之 X 變爲 z 之函數。故得前已討論之微分方程式，式中以 z 爲自變數。求得解後令 $z=log(a+bx)$ 使變數還原。

此種方程式謂之勒戎德耳氏平直方程式 (Legendre's linear equation)，至科西(Canchy)氏方程式則指 $a=0,b=1$ 之特例而言。

習 題 六 十 四

1. 解下列微分方程式

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=12+x$;

(b) $\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^2y}{dx^2}=cos\ x$;

(c) $\frac{d^3y}{dx^3}-6\frac{d^2y}{dx^2}+9\frac{dy}{dx}=e^{-x}$。

2. 求下列方程式之解:

(a) $\frac{d^4y}{dx^4}-4\frac{d^2y}{dx^2}=1+e^{2x}$;

(b) $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=sin\ 2x$;

(c) $\frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}=x^2-cos\ 4x$。

3. 用參數變值法求解:

(a) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=tan\ x$;

(b) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=\frac{1}{x}$;

(c) $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+3y=8e^{3x}\cos x$。

4. 解下列方程式：

(a) $(D-1)^2y=e^x\sec^2 x$;

(b) $(D-2)(D+1)y=e^{-x}(1-3x)$。

5. (a) 解科西氏平直方程式。

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+5x\frac{dy}{dx}+4y=x。$$

(b) 解勒戎德耳氏平直方程式：

$$(2x-1)^2\frac{d^2y}{dx^2}+2(2x-1)\frac{dy}{dx}-36y=1。$$

6. 在第 66 節題 7 中，若物體除本身重量及彈簧拉力外另感受一有週期性之鉛直力，則微分方程式之形式爲

$$\frac{40}{g}\frac{d^2s}{dt^2}+120s=F\sin\omega t,$$

式中自常數F爲所感受力之極大值，$\frac{2\pi}{\omega}$爲其週期。試據下列二點討論此種運動：(a)當 $\omega=\sqrt{3g}$ 時(b)當 ω 有其他之值時。

7. 在第 66 節例題 8 中，加一週期力 $F\sin\omega t$，並假定 n^2 小於 $4mk$，求證運動爲一種振動可表以下式

$$s=k\sin(\omega t+\phi),$$

問 ω 爲何值時，有極大之振幅。

8. 設有長柱 AB（第 115 圖），兩端爲圓形，橫向支於 B 點，橫向兼直向支於 A 點，上置擔負 P，着力點與柱軸之距離爲 d，柱上離 A 點 x 處之彎曲矩約爲

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Py-\frac{Pd}{L}x,$$

式中 E 爲製柱材料之彈性係數，I 爲截面之慣性矩，L 爲柱長，y 爲距 A 爲 x 處之横向移動。求彈性曲線，注意 $x=0$，及 $x=L$ 時 $y=0$。

第 115 圖

9. 在第 66 節題 10 中，加一電動力 $E\sin\omega t$ 求解，並在解微分方程式時區別『暫時的』現象與『永久的』現象。

第六十八節　減低方程式之級求解法

本節述在適當情形下如何減低微分程式之級。故高級微分方程式可從解一串低級（每減低至一級）方程式解出。

1. 式中缺 y 者　若式中無 y 之顯函數，則變更因變數可減低方程式之級。設方程式爲 n 級，其中最低級之導微函數爲 q 級，則令

$$u=\frac{d^q y}{dx^q},\quad \frac{du}{dx}=\frac{d^{q+1}y}{dx^{q+1}},\cdots\cdots\frac{d^{n-q}u}{dx^{n-q}}=\frac{d^n y}{dx^n},$$

故方程式由 n 級降至 $n-q$ 級。

例如

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=x^3\sin x。$$

令 $u=\dfrac{dy}{dx}$，則得一級平直方程式

$$\frac{du}{dx}-\frac{2u}{x}=x^2\sin x。$$

積分因式爲 $e^{\int -\frac{2dx}{x}}=e^{\log\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^2}$，故

$$\frac{u}{x^2}=\int \sin x\,dx=-\cos x+c,$$

而
$$u=\frac{dy}{dx}=-x^2\cos x+cx^2,$$

於是得通解

$$y=-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x+c_1x^3+c_2。$$

2. 式中缺 x 者　若微分方程式中無 x 之顯函數則令

$$\frac{dy}{dx}=u$$

可降低方程式一級，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+u\frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy}{dx}=u\left(\frac{du}{dy}\right)^2+u^2\frac{d^2u}{dy^2},$$

餘類推，y 對於 x 之各級導微函數可以 u 及 u 對於 y 之較低級函數表出。代入微分方程式內得一級數較低之新微分方程式，以 y 爲自變數，u 爲因變數。

例如，由

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1,$$

可得
$$yu\frac{du}{dy}+u^2=1,$$

分隔變數，並作積分運算，得

$$(u^2-1)y^2=c$$

再以 $u=\frac{dy}{dx}$ 代入，得其通解

$$y^2=x^2+c_1x+c_2。$$

3. 適合微分方程式　在第 64 節中曾述及一級適合微分方程式。若任何級之微分方程式係直接由較低級微分方程式求導微函數所推出者皆謂之適合微分方程式。直接鑒定式之適合與否無普遍之法可循，若式果爲適合則可由視察出發從而索得其解。

本此觀念，一察上款例題

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0。$$

第一項可由 $y\frac{dy}{dx}$ 作微分運算推出，由微分運算，可得

$$\frac{d}{dx}\left(y\frac{dy}{dx}\right)=y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

自所設微分方程式減去此項得 -1，故仍須求以 -1 爲導微函數之函數，此函數顯然爲 $-x+c$，故所設方程式爲

$$y\frac{dy}{dx}-x+c=0$$

之適合導微函數。據此式作積分運算即得其通解。

茲再舉一例，

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{dy}{dx}+4x=0。$$

第一步，書出

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)=x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx},$$

與所設方程式相減後，知尙須求以

$$-y\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}+4x$$

爲導微函數之式，此式顯然爲

$$-\frac{1}{2}y^2-y+2x^2+c,$$

而原設方程式爲

$$x\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2}y^2-y+2x^2+c=0$$

之適合導微函數。故用此法可從解較低級之方程式得高級方程式之解。由此法所得之較低級新微分方程式稱爲原方程式之第一積分(first integral)。在多數實際問題中，第一積分之重要實不亞於完全原式。

習　題　六　十　五

1. 解下列方程式：

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$；

(b) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=x^2$；

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}=x$。

2. 解 (a) $2\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^y$；

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$；

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{a^2}{y^2}=0$。

3. 解下列微分方程式：

(a) $(x^3-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+(5x^2-2)\dfrac{dy}{dx}+4xy=0$；

(b) $(5x^2-2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+14x\dfrac{dy}{dx}+4y=0$；

(c) $(x^3-x)\dfrac{d^3y}{dx^3}+(8x^2-3)\dfrac{d^2y}{dx^2}+14x\dfrac{dy}{dx}+4y=0$。

4. 解下列微分方程式，並證明圓族爲曲率爲常數之惟一曲線族。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=k\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}。$$

第十六章　多元常微分方程式

第六十九節　聯立方程式組

本節討論一組若干個微分方程式，諸式中均以 t 爲自變數，另含若干個 t 之函數 x, y, z 等，及一個或數個此等因變數對於 t 之導微函數。解此一組方程式，卽求以 t 之函數表 x, y, z 等變數，將求得之解代入原設諸方程式內必須能得 t 之恆等式。用以表 x, y, z 之式謂之通解，其中必含若干個泛定常數，泛定常數個數之多寡由所設方程式組中所含導微函數之級數決定之。

每組所含獨立方程式個數，與方程式中所有因變數之個數相同。就原設諸方程式對 t 繼續作微分運算可得若干個額外之方程式。組內方程式個數旣增多，則可用代數法消去因變數使只剩一因變數，如 x 及其對 t 之各級導微函數。此式可得而解，其解中以 t 之函數表 x，並含有若干個泛定常數。同法。可施於 y, z 等變數。變數旣以 t 之函數表出後，代入原設方程式組內每能降低方程式之級數，如此再求其他變數有時較便。在表 x, y, z 諸變數式中之泛定常數有時有相互之關係，此等關係可將式代入原設方程式中以求之，蓋方程式之解必須能使方程式成爲 t 之恆等式也。

例如，有二方程式

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+1, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt}-x=t+4。 \tag{2}$$

就(2)式作微分運算，得

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dx}{dt}=1。 \tag{3}$$

由(1)與(3)得只含 x 與 t 之微分方程式

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}+1\right)^2+1, \tag{4}$$

此式之通解爲

$$x=\cosh(t+C_1)-t+C_2。 \tag{5}$$

將此式之值代入(2)，再求積分，得

$$y=\sinh(t+C_1)+C_2t+4t+C_3。 \tag{6}$$

方程式(5)與(6)合稱聯立方程式(1)與(2)之通解。

求 y 不必定由上法，亦可先就 (3) 作微分運算，得

$$\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}=0, \tag{7}$$

從此式與(1)式，可得只含 y 與 t 之方程式.

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)^2=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+1。 \tag{8}$$

此式之通解爲

$$y=\sinh(t+b_1)+b_2t+b_3 \tag{9}$$

方程式(5)與(9)爲聯立方程式之通解，其中常數有相互之關係。若將(5)，(9)代入(2)可得 $b_1=C_1, b_2=C_2+4$，惟 b_3 爲泛定。

由 (1) 與 (2) 以消去 y 及其導微函數必得 (4)，由 (4) 必得 (5)；同時，消去 x 及其導微函數必得 (8) 與 (9)。倣此，由一組含 n 因變數之 n 個方程式，必得 n 個確定之高級方程式，每個方程式只含一個因變數。但由此 n 個方程式所得之解不能即謂之原設 n 個聯立方程式之通解，必須將諸式泛定常數之關係求出，俾諸式能使原設方程式爲 t 之恆等式，求得諸式始能稱爲聯立方程式之解。通常每不能由推出之方程式如(4)與(8)還原爲(1)與(2)，因除(1)與(2)外

尙有他組方程式可推出(4),(8)也。諸通解之不同建立於(5)與(9)常數間不同之關係上。

通常每遇一組微分方程卽可求得一組一級微分方程式與之相關。令一助變數表式中變數之每一導微函數(最高級導微函數除外)卽得諸一級微分方程式。例如由(1),(2)可得

$$\frac{dx}{dt}=u,$$

$$\frac{dy}{dt}=v,$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2=\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+1,$$

$$v-x=t+4。$$

第四式不爲微分方程式,用以消去 v, 得

$$\frac{dx}{dt}=u,$$

$$\frac{dy}{dt}=x+t+4,$$

$$\frac{du}{dt}=[(u+1)^2+1]^{\frac{1}{2}}。\qquad (10)$$

由此一組三個方程式亦恰推出(4)與(8),與由(1)(2)所推出者無異。再者,由(10)卽可求出(5)與(6)。第三方程式僅含 u 與 t, 可得

$$u=sinh(t+C_1)$$

於是由第一式得(5),由第二式得(6)。

解一組微分方程式之難處在代數消去法及消去後解式二方面。特種方程式各有其不同之特殊解法。下列二節卽述其最重要之二種解法。

1. 常係數平直方程式組　先取一例以資說明。設有二方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2y=2t, \tag{11}$$

$$4\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-3x=0, \tag{12}$$

就(11)作一次微分運算，就(12)作二次微分運算，得額外三方程式

$$\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}=2, \tag{13}$$

$$4\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dx}{dt}=0, \tag{14}$$

$$4\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2x}{dt^2}=0。 \tag{15}$$

由此五方程式可消去 y 及其一，二，三級導微函數，得僅含 x 與 t 之方程式，

$$4\frac{d^3x}{dt^3}-2\frac{d^2x}{dt^2}-8\frac{dx}{dt}+6x=-2。 \tag{16}$$

用第 66 節所述之算子，以 D 表對 t 之微分運算，則諸方程式可改書為

$$D^2y-Dx-2y=2t, \tag{11'}$$

$$4Dx+Dy-3x=0, \tag{12'}$$

$$D^3y-D^2x-2Dy=D(2t) \tag{13'}$$

$$4D^2x+D^2y-3Dx=0, \tag{14'}$$

$$4D^3x+D^3y-3D^2x=0。 \tag{15'}$$

最後三式可視為由代數法推出，D 為乘式；又消去法本為代數運算，故一切式之運算皆可視為代數的。故可直接運用代數法。將(11)，(12)

書爲

$$Dx+(D^2-2)y=2t,$$

$$(4D-3)x+Dy=0,$$

視 x 與 y 爲未知數，用行列式法解 x，

$$\begin{vmatrix} D & D^2-2 \\ 4D-3 & D \end{vmatrix} x=\begin{vmatrix} 2t & D^2-2 \\ 0 & D \end{vmatrix}$$

展開行列式，得

$$(-4D^3+2D^2+8D-6)x=D(2t)=2, \tag{16'}$$

與 (16) 相同。

倣此解 y，得

$$\begin{vmatrix} D & D^2-2 \\ 4D-3 & D \end{vmatrix} y=\begin{vmatrix} D & 2t \\ 4D-3 & 0 \end{vmatrix}$$

或

$$(-4D^3+2D^2+8D-6)y=-(4D-3)(2t)=6t-8。 \tag{17}$$

由(16)，可得

$$x=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{-\frac{3}{2}t}-\frac{1}{3},$$

由(17)，可得

$$y=(C_4+C_5t)e^t+C_6e^{-\frac{3}{2}t}-t。$$

將此等值代入(12)，可得

$$C_4=-C_1-3C_2,\ C_5=-C_2,\ C_6=-6C_3。$$

再舉一例，設有方程式組

$$\frac{dz}{dt}+4x=\sin t$$

$$\frac{dy}{dt}+\frac{dx}{dt}=2\cos t, \tag{18}$$

$$\frac{dy}{dt}+z=0。$$

用微分算子，諸式可書爲

$$4x-0y+Dz=\sin t,$$

$$Dx+Dy+0z=2\cos t,$$

$$0x+Dy+z=0。$$

據式解 x，得

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & D \\ D & D & 0 \\ 0 & D & 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \sin t & 0 & D \\ 2\cos t & D & 0 \\ 0 & D & 1 \end{vmatrix},$$

由此得方程式

$$(D^3+4D)x=-\cos t。$$

此式之通解爲

$$x=C_1+C_2\sin 2t+C_3\cos 2t-\frac{1}{3}\sin t,$$

將式代入(18)之第一第二式以求 z 與 y，得

$$z=-4C_1 t+2C_2\cos 2t-2C_3\sin 2t-\frac{7}{3}\cos t+C_4,$$

$$y=-C_2\sin 2t-C_3\cos 2t+\frac{7}{3}\sin t+C_5。$$

若將此等值代入(18)之第三式則得 $C_1=0$，$C_4=0$ 故方程式組(18)之通解爲

$$x=C_2\sin 2t+C_3\cos 2t-\frac{1}{3}\sin t,$$

$$y=-C_2\sin 2t-C_3\cos 2t+\frac{7}{3}\sin t+C_5。$$

$$z=-2C_3\sin 2t+2C_2\cos 2t-\frac{7}{3}\cos t。$$

由此二例，足以知處理常係數平直方程式組之法矣。

2. 一級方程式組　若一組方程式中每一方程式均爲一級，則可假定式中之導微函數皆已解出，若式爲三元，則方程式組可化爲

$$\frac{dx}{dt}=P,\quad \frac{dy}{dt}=Q,\quad \frac{dz}{dt}=R。\tag{19}$$

式中 P, Q, R 可爲 x, y, z 與 t 之函數。式又可書爲

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{dt}{1}。\tag{20}$$

此處諸分母可以任何式乘之或除之。式 (20) 可推廣至任何多之方程式，在運用消去法時可獲便利。若在

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q},\quad \frac{dx}{P}=\frac{dz}{R},\quad \frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R},$$

諸式中有一僅含二變數之微分方程式，則其解可供一關係式（其中有一泛定常數），由此可將原方程式組化簡。若如此求得之關係式之個數等於所有因變數之個數，則通解爲已知，因由此諸關係式卽可以 t 之函數表每一變數也。

前款方程式組(10)爲(19)式之一例。化爲(20)式，得

$$\frac{du}{[(u+1)^2+1]^{\frac{1}{2}}}=\frac{dy}{x+t+4}=\frac{dx}{u}=\frac{dt}{1}。$$

由第一式與末式，或第一與第三式，均得求可解之方程式，解後用代入法可將方程式完全解出。

式(20)變數間之諸關係式亦可據恆等式

$$\frac{X\,dx+Y\,dy+Z\,dz+T\,dt}{XP+YQ+ZR+T}=\frac{dt}{1}。\tag{21}$$

求得。此處 X,Y,Z,T 爲諸變數之任意函數，若選擇適當則所成新微分方程式可得而解。(21)式之右端又可以(20)之任一式代之，或形如(21)式左端之另一式代之亦可。

舉例以明之，設有一組方程式

$$\frac{dx}{y+t}=\frac{dy}{x-t}=\frac{dt}{x+y}。$$

令 X,Y 均等於 1，代入(21)，得

$$\frac{dx+dy}{x+y}=\frac{du}{u}=\frac{dt}{u},$$

式中 $u=x+y$。由此得 $x+y=t+C_1$。用 y 與 t 表 x 代入原式，得

$$\frac{dy}{C_1-y}=\frac{dt}{t+C_1},$$

由此得$(C_1-y)(t+C_1)=C_2$。故可書出其通解

$$x=t+\frac{C_2}{t+C_1},\ y=C_1-\frac{C_2}{t+C_1}。$$

下節當續述如何用(21)式解一級微分方程式組。

習題六十六

1. 解不受阻力之抛射體運動之微分方程式組：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g。$$

2. 在某平面保守力場內，位函數爲 $\frac{1}{2}k^2m(x^2+y^2)$，式中 m 爲受力物體之質量。物體運動之方程式爲

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-k^2y,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-k^2x。$$

求證物體運動之路線為一圓錐曲線。

3. 解下列方程式組

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=1,$$

$$t\frac{dy}{dt}+\frac{dx}{dt}=y。$$

4. 解下列方程式組

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}-2x+y=3e^t,$$

$$6\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+4x+y=8e^{2t}。$$

5. 解方程式組

$$\frac{dx}{dt}+x+2y=\sin t,$$

$$9\frac{dy}{dt}-9y-4x=t。$$

6. 解方程式組

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dz}{dx}-2y=4x,$$

$$\frac{dy}{dx}+4\frac{dz}{dx}-3z=0。$$

7. 設圓軸之二端懸二重量，將軸扭轉，以後任其受二重量及軸應變之影響而振動，則運動之微分方程式可書為

$$J_0\frac{d\theta_0}{dt}+J_1\frac{d\theta_1}{dt}=k,$$

$$J_0\frac{d^2\theta_0}{dt^2}=\frac{IG}{L}(\theta_1-\theta_0),$$

式中 J_0 與 J_1 爲所懸重量對軸之軸線之慣性矩，θ_0 與 θ_1 爲二重量之角移，I 爲軸截面之慣性矩，G 爲軸之剛性係數，L 爲軸長，k 爲一常數，其值由初角速度所決定。求以 t 之函數表 θ_0 及 θ_1。

8. 在題 7 中，若一端之重量上受一擾動矩 $M\sin at$，則微分方程式可書爲

$$J_0\frac{d^2\theta_0}{dt^2}=\frac{IG}{L}(\theta_1-\theta_0)+M\sin at$$

$$J_1\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{IG}{L}(\theta_1-\theta_0)。$$

解方程式，區別下列二種情形：

(a)　$$a^2=\frac{IG(J_0+J_1)}{LJ_0J_1},$$

(b) 上式不能成立。

9. i_1 與 i_2 各爲二感應偶合電路上之電流，其微分方程式爲

$$R_1i_1+L_1\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{K_1}\int i_1\,dt-M\frac{di_2}{dt}=E\cos\omega t,$$

$$R_2i_2+L_2\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{K_2}\int i_2\,dt-M\frac{di_1}{dt}=0,$$

式中 R_1, L_1, 及 K_1 各爲第一電路之電阻，電感，電容；R_2, L_2, 及 K_2 則爲第二電路之對應常數，M 爲二電路間之互感係數，而 $E\cos\omega t$ 則爲加於第一電路之週期電動力。若 $E=0$，且電阻略去不計，求證每一電路上之電流皆可表以

$$i=C_1\sin(\omega_1t+\phi_1)+C_2\sin(\omega_2t+\phi_2)。$$

式中 C_1, C_2, ϕ_1, ϕ_2 皆爲泛定常數，ω_1 與 ω_2 則由電路上之常數所決定。（令 $q_1=\int i_1\,dt, q_2=\int i_2\,dt$，且設 $L_1L_2>M^2$）。

10. 若題 9 中之 E 不為零，則表電流之式上應加何種項？不計電阻，特別討論 ω 等於 ω_1 或 ω_2 時之情形。

11. 若題 9 中不略去電阻，書出由解此題所產生 q_1，q_2 之四級微分方程式。

12. 設有物體懸於彈簧上，另一物體懸於第二彈簧上，此彈簧繫於第一物體之下。設二物體不左右擺動而僅上下振動。書出二物體運動之微分方程式，以記號表出必要之常數。不計彈簧質量與重量及空氣阻力。解此微分方程式。

13. 解方程式組

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+5y=t,$$

$$\frac{d\text{[illegible]}}{dt^2}-y=0,$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{dz}{dt}+y=e^t。$$

14. 解方程式組

$$\frac{dx}{y^2t}=\frac{dy}{x^2t}=\frac{dt}{xy^2}。$$

15. 解方程式組

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dt}{1+t^2}。$$

16. 解方程式組

$$\frac{dx}{dt}=\frac{y+t}{x+t},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{x+t}{x+y}。$$

17. 解方程式組

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{zy}=\frac{dz}{x}=\frac{dt}{tz}。$$

18. 將下列方程式化爲一組一級方程式，然後求解。

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=1。$$

第七十節　全微分方程式

1. 可積條件　凡形式如

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0 \tag{1}$$

之方程式曰全微分方程式(total differential equation)，式中 P,Q,R 爲 x, y, z 之函數。多於三元之全微分方程式亦可做此書出，但本書只論三元方程式。

設有關係式　$$f(x, y, z)=c \tag{2}$$

據此可得微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0。 \tag{3}$$

若(2)爲(1)之解，則必有函數 $\phi(x,y,z)$ 存在，俾(1)乘此式後化爲(3)。如此則有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\phi P,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\phi Q,\ \frac{\partial f}{\partial z}=\phi R。 \tag{4}$$

假定

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}, \tag{5}$$

則必

$$\phi\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial\phi}{\partial y}=\phi\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial\phi}{\partial x},$$

$$\phi\frac{\partial Q}{\partial z}+Q\frac{\partial\phi}{\partial z}=\phi\frac{\partial R}{\partial y}+R\frac{\partial\phi}{\partial z},$$

$$\phi\frac{\partial R}{\partial x}+R\frac{\partial\phi}{\partial z}=\phi\frac{\partial P}{\partial z}+P\frac{\partial\phi}{\partial z}。\tag{6}$$

此處之三方程式函數 ϕ 必須能一一適合，故欲此事可能，必函數 P,Q,R 有某種特殊關係始可。若以 R,P,Q 分別乘此三方程式，諸式相加後再以 ϕ 除各項，則得

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0。\tag{7}$$

若此式不能成立，則不能求得函數 ϕ，俾(1)化爲(3)，故形如(2)之解無從求出。故方程式(7)爲三元方程式之可積條件(condition of integrability)。

若第57節條件(25)能滿足，則(1)卽爲(3)而函數 ϕ 可視爲常數1。通常在解題時，先求 ϕ 以爲積分因式每感不便。

若方程式爲四元，則(1)可書爲

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz+S\,dt=0,\tag{8}$$

而形如(4)之方程式有四個，形如(5)之方程式有六個，因每選二元可得一方程式也。形如(6)之方程式中任一式皆自形如(5)之每一式推出，形如(5)之每一式皆與某二變數相聯。每一變數均分三雙出現於式內；若取消每一變數之三雙，自(6)中取其餘三雙，則可得一如(7)之方程式。若以手續依次施於四變數，則得四個形如(7)之方程式但其中僅有三個獨立式。蓋形如(7)之第四式實包含於前三式內；凡 P,Q,R,S 及其偏導微函數之能滿足前三式者莫不能滿足第四式也。故形如(7)之四式，任取其三卽爲四元微分方程式之可積條件。此四方程式之第一式可恰書與(7)相同，以 S 與 t 代 R 與 z，次代 Q 與 y，再次代 P 與 x 卽得其餘三式。

2. 可積方程式之解　若形如(1)之方程式能適合條件(7)則可進而求其形如(2)之解。書方程式爲

$$P\,dx+Q\,dy=0,\tag{9}$$

視上式爲 x,y 之微分方程式 z 爲參數解之。解中之泛定常數可取爲參數 z 之函數，故其解可書爲

$$F(x,y,z)=f(z)。\tag{10}$$

若就三變數作微分運算，得

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{df}{dz}\right)dz=0。\tag{11}$$

又因必有函數 $\phi(x,y,z)$ 存在俾

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\phi P,\ \ \frac{\partial F}{\partial y}=\phi Q$$

故若

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{df}{dz}=\phi R\tag{12}$$

(11)卽(1)乘 ϕ 之積。若可積條件能適合，則由方程式(12)可得只含 f 與 z 之微分方程式，而 f 則可以 z 之函數表之，其中含一泛定常數。$f(z)$ 如此定出後，(10)卽爲(1)之餘。

例如

$$yz\,dx-zx\,dy-y^2\,dz=0。$$

由可積條件推出

$$yz(-x+2y)-zx(-y)-y^2(z+z)=0$$

條件旣適合，進而一察方程式

$$yz\,dx-zx\,dy=0,$$

視 z 爲常數。其解可書爲

$$\frac{x}{y}=f(z),$$

由此得

$$\frac{dx}{y}-\frac{x\,dy}{y^2}-\frac{df}{dz}dz=0。$$

與原設方程式比較,得

$$\frac{df}{dz}=\frac{1}{z},$$

而 $f(z)=log\,z+C$, 故解可以下式之一表之

$$\frac{x}{y}=log\,z+C,\ z=Ce^{\frac{x}{y}}。$$

欲解(8),仍可書出(9)式解之, 取泛定常數爲 z 與 t 之函數,故(10)之形應爲

$$F(x,\,y,\,z,\,t)=f(z,\,t)。$$

就四變數作微分運算,並與(3)比較,如所設方程式能適合三可積條件則應得一含 $z,\,t,\,f$ 三變數之方程式。此三元方程式亦爲可積, 可以解(1)之法解之。

若可積三元方程式中之 $P,\,Q,\,R$ 爲同次齊次式,則可令 $x=uz$, $y=vz$ 得一含 $u,\,v,\,z$ 之新方程式,若 dz 之係數不爲零,則可書

$$P_1\,du+Q_1\,dv+\frac{dz}{z}=0, \tag{13}$$

式中 $P_1\,du+Q_1\,dv$ 爲一適合微分,令爲 $f\ (u,\,v)$之適合微分,則解爲

$$f(u,v)+log\,z=C。 \tag{14}$$

若四元方程式內有此相似情形,可令 $x=ut,\ y=vt,\ z=\omega t$ 得新方程式

$$P_1\,du+Q_1\,dv+R_1\,dw+\frac{dt}{t}=0,$$

式中前三項爲一適合微分,其解可書爲

$$f(u,v,w)+\log t=C。\tag{16}$$

舉例以明之，

$$(y^2+z^2)dx+xz\,dy-xy\,dz=0。$$

可積條件已驗明其能適合，P,Q,R 均爲二次齊次式。令 $x=uz,y=vz$，則得

$$z^2(v^2+1)(u\,dz+z\,du)+z^2u(v\,dz+z\,du)-z^2\,vu\,dz=0,$$

以 z^2 除各項，並集合係數，得

$$z(v^2+1)du+zu\,dv+(uv^2+u)dz=0,$$

可再化爲

$$\frac{du}{u}+\frac{dv}{v^2+1}+\frac{dz}{z}=0。$$

此式形如(13)，形如(14)之解爲

$$\log u+\tan^{-1}v+\log z=C。$$

以 x,y,z 代 u,v 則解變爲

$$\log x+\tan^{-1}\frac{y}{z}=C。$$

在推出(13)時，係假設 dz 之係數不爲零。若此係數爲零，則不能推出(13)，方程式變爲僅含 u,v 之微分方程式，可以第十四章之法解之。

例如，

$$(x+z)dx+(2z-x)dy-(x+2y)dz=0。$$

可積條件能適合，各微分之係數爲一次齊次式。令 $x=uz$，$y=vz$，得

$$z(v+1)(udz+zdu)+z(2-u)(vdz+zdv)-z(u+2v)dz=0$$

以 z 除各項並集合係數，得

$$z(v+1)du+z(2-u)dv=0,$$

就此特例言，dz 之係數化為零。其解為

$$\frac{2-u}{v+1}=c=\frac{2z-x}{y+z}。$$

3. 不可積方程式　若全微分方程式為可積則其解為含一泛定常數之單個多元方程式，此因上節所已述。若方程式為三元，則其解表含一參數之曲面族，族中各面在點(x_0,y_0,z_0)上法線之方向餘弦恆與$P(x_0,y_0,z_0)$,$Q(x_0,y_0,z_0)$,$R(x_0,y_0,z_0)$諸值成正比例。若所設方程式不能適合可積條件，則此曲面族無存在之可能。若假設諸變數間有關係式，如

$$F(x,y,z)=0 \tag{17}$$

則可以二變數表其餘一變數，而(1)可化為二元方程式，假定 x,y 為此二元，並設其解為

$$f(x,y,c)=0 \tag{18}$$

則(17),(18)合併為方程式(1)之解。就幾何意義言，(17)(18)決定一族空間曲線，若(1)為可積，此族曲線全在形如(2)之解所代表之曲面上。(17)與(2)自亦決定此族曲線，但(17)為與(1)無關之泛定關係式，曲線族可視為任意繪於(2)式所表之諸曲面上者，(17)式不能表出(2)所包含之意義。又(17)與(18)本身決不能導出形如(2)之解。若(1)為不可積，(17)與(18)僅表出解之惟一形式。

若四元方程式不能滿足可積條件，可假定二關係式

$$F_1(x,y,z,t)=0,\quad F_2(x,y,z,t)=0, \tag{19}$$

且以二變數表其他二變數，於是(8)化為二元方程式，設 x,y 為此二元，書其解如(18)，則(18)與(19)為所設方程式之解。

若由觀察發現如假定四元有某種關係後，(8)即可化為三元可積方程式，則式之解及所設四元間之關係式合併為原方程式之解。此解

僅有一個假定之關係，自較有二個假定關係者為宜。

例如，有方程式

$$t\,dx-x\,dy+y\,dz-z\,dt=0$$

可積條件不能滿足，若假定 $t-y=0, z-x=0$，則方程式化為

$$2y\,dx-2x\,dy=0$$

其解為

$$x-Cy=0。$$

關係式

$$t-y=0,\ z-x=0,\ x-Cy=0$$

能適合所設方程式

4. 全微分方程式組　設有二個三元方程式

$$\begin{aligned}&P_1\,dx+Q_1\,dy+R_1\,dz=0,\\&P_2\,dx+Q_2\,dy+R_2\,dz=0,\end{aligned}\tag{20}$$

若此二方程式皆為可積，則其二解，各含一泛定常數，合併為方程式組（20）之解，從幾何意義言，此解表一族含二參數之空間曲線，此族曲線為二族曲面之交線所組成。

若二式中僅有一式為可積，則可積式之解為諸變數間之關係式，代入第二式可消去一元，得二元方程式。此二元方程式之解與第一解合併為此組方程式之解。

就代數意義言，方程式組(20)等於方程式組

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R},\tag{21}$$

式中 $P=Q_1R_2-Q_2R_1$，$Q=R_1P_2-P_1R_2$，而 $R=P_1Q_2-P_2Q_1$。用第 69 節之法解方程式組(21)即方程式組(20)之解。若 (20) 之二方

程式均不能滿足可積條件，則利用(21)爲求解之惟一方法。

設有一組三個形如 (8) 之方程式，其解共有三關係式，每式有一泛定常數，惟必須三方程式中至少有二式爲可積。但無論如何。可用代數法將此等式化爲形如第 69 節之(20)之方程式組，並可以該節所述之方法解之。

設有一組二個形如 (8) 之方程式，其解共有二關係式，每式有一泛定常數，惟必須二式皆爲可積。否則可先設一關係式化方程式爲三元，再化爲形如(21)之式。所得之解與所設之關係式合併構成原方程式組之解。

在以前各款中，一組全微分方程式等於一組一級微分方程式，利用此點可求一組全微分方程式之解。反之，第 69 節之(21)式亦爲一全微分方程式，故亦可以此處所述之法解之。若選擇乘式 X, Y, Z, T 能使方程式可積，則全微分方程式解得後即供給解方程式組所欲得諸關係式之一。

在處理一組全微分方程式時，組中任取一方程式可代以組內其他方程式與此方程式合併後之方程式，如甲式倍數與乙式倍數之和差可用以代甲或乙式。原式之不可積者，如此改動後有時變爲可積之式。

習 題 六 十 七

1. 求證下列諸方程式能滿足可積條件。

$$xy\,dx + x^2\,dy + xz\,dz = 0,$$

$$x\,dx + z\,dy + y\,dz = 0。$$

2. 試證題 1 中二式之和差皆爲不可積者。

3. 求證題 1 中二式之解各爲

$$x^2 + 2yz = C \quad 與 \quad 2xy + z^2 = C。$$

4. 求證下列方程式爲可積，

$$t^3y\,dx-xt^3\,dy+ty^2\,dz-2y^2\,z\,dt=0。$$

並證明其解爲

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{t^2}=C。$$

5. 解方程式

$$(y+z)dx+dy+dz=0$$

. 解方程式

$$(y^2+yz)dx+(yz+z^2)dy+(y^2-xy)dz=0。$$

7. 求證下列方程式不能滿足可積條件，假定 $x+y+z=A$ 求其解。

$$(x+y)dx+(x-y)dy+(x+y)dz=0。$$

8. 解方程式

$$(z+1)(x\,dy+y\,dx)-(x^2+y^2)dz=0。$$

9. 若 $k>1$，求證方程式

$$c_v v\,dp+c_v\,kp\,dv-Bdq=0$$

不能滿足可積條件。將此方程式與第 57 節之方程式(28)比較，證明熱量不能以 p 與 v 之函數表出。

10. 若假定 $pv=C$，則題 9 之解爲

$$q=\frac{C_v}{B}(k-1)C\log_e v+c,$$

由此推出第 57 節之等式(33)。

11. 假設 $q=a$，解題 9 之方程式，由此推出第 57 節之方程式(34)爲絕熱膨脹之條件。

12. 令全微分方程式

$$C_v\frac{dp}{p}+C_vk\frac{dv}{v}-ds=0$$

與第 57 節(31)式相聯，推出該節之(32)式為熵之方程式。

13. 若方程式

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz+d\,U=0$$

為可積，又設 X,Y,Z 僅為 x,y,z 之函數，求證前三項之和為一適合微分。

14. 若 $X=yz,\ Y=zx+y,\ Z=xy+z^2$，由題 13 之微分方程式，求以 x,y,z 之函數表 U。

15. 令題 13 之方程式合於題 14之規定，求 U 在其上為常數之曲面族（等位曲面族）。

16. 在題 13 中，若 $X=x,\ Y=y,\ Z=x+y$，求證方程式為不可積。假設 $x=z,\ y=z^2$ 解方程式，求沿二假定方程式所表路線由原點至(1,4,2)點所作抵抗力場之功。

17. 解方程式組

$$(x+y)dx+(x-y)dy+(x+y)dz=0,$$

$$(x-y)dx+(x+y)dy+(x-y)dz=0。$$

18. 解方程式組

$$(x+xy)dx+(x^2+z)dy+(y+xz)dz=0,$$

$$(xy-x)dx+(x^2-z)dy+(xz-y)dz=0。$$

（與題 1 二式之和差比較）

19. 解方程式組

$$\frac{dx}{3y-2z}=\frac{dy}{z-3x}=\frac{dz}{2x-y}.$$

20. 解方程式組

$$t\,dx+z\,dy+t\,dz+y\,dt=0,$$

$$t\,dy+z\,dz-t^2\,dt=0,$$

$$dz-2t\,dt=0。$$

參 考 書 目

Advanced Calculus, W. F. Osgood (Macmillan, 1925) Chapters XIV and XV.

Advanced Calculus, E. B. Wilson (Ginn, 1912) Chapters VII—X.

Differential Equations, H. B. Phillips (Wiley, 1922).

Differential Equations in Spplied Chemistry, Hitchcock and Robinson (Wiley, 1923).

Differential Equations, A. Cohen (Heath, 1906) Chapters I—X.

Differential Equations, D. A. Murray (Longmans, 1919) Chapter I—XI.

Differential Equations, H. Bateman (Longmans, 1918) Chapters I—V and VII.

Differential Equations, A. R. Forsyth (Macmillan, 1903) Chapters I—IV and VIII.

第十七章　偏微分方程式

第七十一節　偏微分方程式之意義

在前數節中見含一個泛定常數之三元或多元之單個方程式可產生全微分方程式。茲一察含有二個或多個泛定常數之三元方程式，

$$f(x, y, z, C_1, C_2, \cdots\cdots C_n)=0。\tag{1}$$

此可視為藉以確定 z 為二自變數 x 與 y 之函數之方程式，故可對 x 與 y 求偏導微函數，

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,\tag{3}$$

在必要時可就此等式再作微分運算，得三個新方程式，式中有 z 之二級偏導微函數。繼續作微分運算可得較高級之導微函數，直至求得之方程式共有 $n+1$ 個為止，於是可據以消去 n 個泛定常數，其消去式含 x, y, z 及 z 對於 x, y 之各級偏導微函數。此等方程式謂之偏微分方程式 (partial differential equation)，推出此偏微分方程式之(1)為其原式。

例 設形如(1)之式為

$$z-(x+a)(y+b)=0,\tag{4}$$

式中 a, b 為泛定常數。於是 (2),(3) 變為

$$-(y+b)+\frac{\partial z}{\partial x}=0,\tag{5}$$

$$-(x+a)+\frac{\partial z}{\partial y}=0,\tag{6}$$

由此三式立得微分方程式

$$z-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{7}$$

爲便利起見，以後偏導微函數可用下列記號

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}。$$

設形如(1)之式爲

$$ax+by+cz+gx^2+hy^2+kz^2=0 \tag{8}$$

逐項求導微函數，得

$$a+cp+2\,gx+2\,kz\,p=0,$$

$$b+cq+2\,hy+2\,kz\,q=0,$$

再逐項求導微函數，得

$$cr+2g+2\,kz\,r+2\,kp^2=0,$$

$$cs+2\,kzs+2\,kpq=0,$$

$$ct+2\,h+2\,kzt+2\,kq^2=0。$$

共計得六方程式，各式皆常數之齊次式，消去諸常數，得

$$\begin{vmatrix} x & y & z & x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 0 & p & 2x & 0 & 2zp \\ 0 & 1 & q & 0 & 2y & 2zq \\ 0 & 0 & r & 2 & 0 & (2\,zr+2\,p^2) \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & (2\,zs+2\,pq) \\ 0 & 0 & t & 0 & 2 & (2\,zt+2\,q^2) \end{vmatrix}=0 \tag{9}$$

將此行列式展開卽得所求之微分方程式。

其次，設 u, v 爲 x,y,z 之已知函數，試一察其間之泛定關係式，

$$\phi(u, v)=0 \tag{10}$$

此可視爲藉以確定 z 爲 x 與 y 之函數之方程式。求偏導微函數，得

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0。 \tag{11}$$

從諸方程式中可消去 $\frac{\partial\phi}{\partial u}$ 與 $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ 得一形如

$$Pp+Qq=R \tag{12}$$

之方程式，式中 P,Q,R 爲 x,y,z 之已知函數。泛定關係式 (10) 可以各種形式表出，若泛定函數不僅一個必繼續作微分運算以推廣 (11) 中方程式之個數直至能消去諸泛定函數爲止。總之，含一個或多個泛定函數之單個關係式可產生一級或高級偏微分方程式。

爲說明起見，令 $u=x+z, v=yz$ 則方程式組(11)變爲

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}(1+q)+\frac{\partial\phi}{\partial v}(0+py)=0,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}(0+q)+\frac{\partial\phi}{\partial v}(z+py)=0,$$

由此立得

$$(1+p)(z+qy)-pqy=0$$

或
$$zp+yq=-z。$$

茲再舉一例，設有泛定關係式 $z=\phi(x^2+y^2)$。求偏導微函數，得

$$p=2x\,\phi',\quad q=2y\,\phi'$$

由此得偏導微函數

$$yp-xq=0。$$

今舉一最後之例，

$$z=\phi_1(x+y)+\phi_2(x-y),$$

求第一與第二級偏導微函數，得

$$p=\phi_1'+\phi_2',\ q=\phi_1'-\phi_2',\ r=\phi_1''+\phi_2'',\ t=\phi_1''+\phi_2''$$

所求偏微分方程式爲二級，即 $r=t$。

可見偏微分方程式可由含一個或若干個泛定常數之關係式 (1) 所產生，又可由一個或若干個泛定函數之關係式產生。且同一方程式可由二不同之原式產生。例如最後一例導出之 $r=t$ 亦可由原式 $z=ax^2+ay^2+bx+cy$ 導出。此爲上式之一特例，令

$$\phi_1(x+y)=A(x+y)^2+B(x+y),$$

$$\phi_2(x-y)=A(x-y)^2+C(x-y),$$

式中 $2A>a$, $B+C=b$, $B-C=c$, 即得。

凡諸變數間之關係式與所設偏微分方程式所表諸變數間之關係相符者皆稱爲方程式之解。含泛定常數之原式，由此可導出所設偏微分方程式者稱爲方程式之全解 (complete solution)，含泛定函數之原式，由此亦可導出所設偏微分方程式者稱爲方程式之通解 (general solution)。方程式可有不定個數之全解，解各不同，皆爲通解之特例。

在前數章中，凡泛定常數皆用以適合原始條件。此等條件每與常微分方程式並列。此處亦可用泛定常數或函數以適合與偏微分方程式並列之已知條件。此等條件或屬於函數之形式如函數爲週期的或指數的等等，或用以申述邊界值 (boundary values)，所謂申述邊界值即謂，由解所決定之曲面有時指定通過某定曲線，或使滿足其他指定之條件是也。

例如，假定 $y=0$ 時 z 爲 x 之諧函數，又當 $x=0$ 時不論 y 爲何值 z 恆等於零，求在此二條件下解方程式 $r=t$。書上述二泛定函數爲

$$\phi_1(x+y)=a_1\sin\omega(x+y)+b_1\cos\omega(x+y)$$

$$\phi_2(x-y)=a_2\sin(x-y)+b_2\cos\omega(x-y)$$

即能得諸函數之條件。當 $x=0$ 時，解化爲

$$z=(a_1-a_2)\sin\omega y+(b_1+b_2)\cos\omega y,$$

若 $a_1=a_2$，$b_1=-b_2$，則不論 y 爲何值 z 恆爲零，故適合所有條件之方程式可書爲

$$z=a[\sin\omega(x+y)+\sin\omega(x-y)]$$

$$+b[\cos\omega(x+y)-\cos\omega(x-y)]$$

$$=2a\sin\omega x\cos\omega y-2b\sin\omega x\sin\omega y$$

$$=2\sin\omega x(a\cos\omega y-b\sin\omega y)。$$

a，b，ω 仍爲泛定，可予以指定之值以適合其他之限制。

又設 z 爲 x 與 y 之一次式且當 $x=1$ 時 $z=1-y$，求在此等條件下解上列方程式。此處可令

$$z=a(x+y)+b(x-y)+c$$

$$=(a+b)x+(a-b)y+c。$$

當 $x=1$，此式化爲

$$z=a+b+c+(a-b)y,$$

故必 $a+b+c=1$，$a-b=-1$，故 $b=1+a$，$c=-2a$，而所求之解爲

$$z=(2a+1)x-y-2a$$

常數 a 仍爲泛定。

習 題 六 十 八

1. 求以下列各式爲原式之偏微分方程式，視 a，b，c 爲泛定常數。

(a) $z=a(x-y)+b$;

(b) $z=ax+by+ab$;

(c) $(x-a)^2+(y-b)^2+y^2=c^2$。

2. 求以下列各式為原式之偏微分方程式，f 與 ϕ 為泛定函數之記號。

(a) $\phi(xy-z, x^2+y^2)=0$;　(b) $\phi(x+y-z, x-y)=0$;

(c) $z=e^{3y}\phi(x-y)$;　(d) $z=f(x+2y)+\phi(x+2y)$;

(e) $z=x+\phi(x^2+y^2+z^2)$;　(f) $z=\phi(x+y)+f(xy)$。

3. 定題 2(b) 之泛定函數俾 (x, y, z) 點在一平面上，此平面在平面 $x=0$ 上之交跡為 $z=2y-5$。

4. 定題 2(e) 之泛定函數俾 (x,y,z) 點在一球面上，此球面與平面 $y=0$ 之交跡為半徑等於 1 之圓。

5. 求定題 2(f) 之二個泛定函數俾 z 僅含 x 之偶次乘冪。

第七十二節　一級偏微分方程式

1. 一級平直方程式　偏導微函數 p 與 q 之一次式

$$Pp+Qq=R \tag{1}$$

稱為平直方程式，其中 P,Q,R 表 x,y,z 之函數。若 u 與 v 為 x, y,z 之某函數俾 $u=C_1$ 而 $v=C_2$ 構成方程式組

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \tag{2}$$

之解，則(1)之通解可書為

$$\phi(u,v)=0, \tag{3}$$

式中 ϕ 為泛定函數。

式(2)中之任一項恆等於下列之比

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz}{P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}} \tag{4}$$

若 $u=C_1$ 則(4)之分子爲零，故分母亦爲零。又

$$\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

故令分母等於零卽爲(1)。同理 $v=C_2$ 亦可證其能滿足(1)。

若 $u=C_1$ 與 $v=C_2$ 能滿足(2)，則以 $\phi(u,v)$ 代 u 代入(4)之分母內，必能使之等於零，故爲(1)之解。ϕ 旣爲 x,y,z 之函數，則

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\phi}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\phi}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial z},$$

分別以 P,Q,R 乘諸式後相加，則因 u,v 代入時分母爲零則 ϕ 代入時分母亦爲零。

例如，

$$yp-xq=1。$$

先解
$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}=dz。$$

由前一等式得解 $x^2+y^2=C_1$，又由

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=dz$$

得解 $tan^{-1}\frac{y}{x}+z=C_2$，故所設方程式之通解爲

$$\phi\left(x^2+y^2,\ tan^{-1}\frac{y}{x}+z\right)=0。$$

2. 一級非平直方程式　非平直方程式通常不能得其通解。但若能求得式之一全解，則可據以求其他不同之全解，其全解之個數並無限制。令

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0 \tag{5}$$

爲一偏微分方程式，令其某一全解書爲

$$f(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0 \tag{6}$$

若製二方程式

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0,\ \ \frac{\partial f}{\partial b}=0, \tag{7}$$

由(6),(7)消去 a 與 b 則可得(5)之一解。欲明此點，可視 (6), (7) 爲藉以確定 z, a, b 爲 x 與 y 之函數之式，則就(6)式作微分運算，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial b}\ \frac{\partial b}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial a}\ \frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial b}\ \frac{\partial b}{\partial y}=0,$$

取(7)代入二式，則所得結果與視 a, b 爲常數求得結果相同。此二式與(6)式合併確定之 p, q 與 z 能適合(5)。

用此法求得之解不含泛定常數，稱爲（5）之異解（singular solution）。

設(6)式中二常數間有某種關係，令 b 爲 a 之函數，則(7)可代以

$$b=\phi(a),\ \ \frac{\partial f}{\partial a}+\phi'(a)\frac{\partial f}{\partial b}=0。 \tag{8}$$

如上法進行，可證明由(6)與(8)消去 a 與 b 可得 (5) 之一解。又因

$\phi(a)$ 爲泛定函數，解中可含若干個常數。(6)與(8)可合併視爲通解、但因欲消去 a 與 b，必選定函數 ϕ，故只能得若干個特解。

例如，偏微分方程式 $z=px+qy-pq$ 之一全解爲 $z-ax-by+ab=0$，由式(7)得 $-x+b=0$，$-y+a=0$，消去 a 與 b 得異解 $z=xy$。若令 $\phi(a)=ma+C$ 則由(8)式得

$$b=ma+C,\ -x+b+m(-y+a)=0,$$

消去 a 與 b 得解

$$4mz-(x+my)^2+2C(x-my)-C^2=0。$$

又，若令 $\phi(a)=\dfrac{C^2}{a}$ 則形如(8)之式爲

$$ab=C^2,\ -x+b-\frac{C^2}{a^2}(-y+a)=0,$$

消去 a 與 b 得解

$$z-2Cx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+C^2=0。$$

下列各款略舉各種形式之偏微分方程式全解之求法。最後一款爲通法，不及前各款所舉特殊方法之便於應用。

(a) 形式 $f(p,q)=0$ 此處 x,y,z 均不見於微分方程式中。

$$z=ax+by+C,\ f(a,b)=0$$

爲其一全解。

例如，$p^2+q+1=0$，則必 $a^2+b+1=0$，其全解爲 $z=ax-(1+a^2)y+C$。

(b) 形式 $z=px+qy+f(p,q)$ 此與常微分方程式中克羅萊氏(Clairaut)方程式相似。其全解爲

$$z=ax+by+f(a,b)。$$

(c) 形式 $f(z,p,q)=0$ 此處 x 與 y 不以顯函數之形出現於

方程式中。可先試 $z=\phi(u)$,式中 $u=x+ay$。於是有

$$p=\phi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dz}{du},\quad q=\phi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{dz}{du}。$$

將此等值代入原方程式中可得含 u 與 z 之一級常微分方程式。解之,得以 u 之函數表 z,式中並有 a 及一新常數,以 $x+ay$ 代 u 卽得一全解。

例如, $pz+q^2=0$。變爲常微分方程式

$$z\frac{dz}{du}+a^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2=0,$$

解之得

$$z=Ce^{-\frac{u}{a^2}},$$

所設方程式之全解可書爲

$$z=Ce^{-\frac{x+ay}{a^2}}。$$

(d) 形式 $f_1(x,y,z,p)=0$ 及 $f_2(x,y,z,q)=0$　此等形式中僅有一個偏導微函數出現。欲解第一式,可視 y 爲常數,而以解含 x 與 z 之常微分方程式之法御之,但視泛定常數爲 y 之泛定函數。此法不僅得其全解,且得其通解。解第二式用同法,惟討論時 x 與 y 應易位。

例如, $x^2p^2-(y-z)^2=0$ 可書爲

$$\frac{dz}{y-z}\pm\frac{dx}{x}=0,$$

解必屬下列二式之一

$$\frac{x}{y-z}=\phi(y),\quad x(y-z)=\phi(y)。$$

(e) 形式 $f_1(x,p)=f_2(y,q)$　此處 z 不以顯函數之形出現於式內,且含 x 與 p 之各項與含 y 與 q 各項分隔。故可書

$$f_1(x,p)=a,\ f_2(y,q)=a$$

據二式用代數法解出 p 與 q，然後作積分運算得表 z 之二式，

$$z=F_1(x,\ a)+\phi_1(y),$$

$$z=F_2(y,\ a)+\phi_2(x),$$

式中 F_1 與 F_2 爲已知函數，ϕ_1 與 ϕ_2 爲泛定函數。若 $\phi_1=F_2+b$，$\phi_2=F_1+b$。則二式相合，故

$$z+F_1(x,a)+F_2(y,a)+b。$$

此爲所設方程式之全解。

(f) 普通形式 $f(x,y,z,p,q)=0$ 解方程式旣在求以 x 與 y 之函數表 z，故必有

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

若 p 與 q 知其爲 x,y,z 之函數，則可倣解全微分方程式之法解之。若能求得第二關係式

$$F(x,y,z,p,q)=0$$

與原式合併，則 p 與 q 可求。由方程式組

$$\frac{dp}{\dfrac{\partial f}{\partial x}+p\dfrac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dq}{\dfrac{\partial f}{\partial y}+q\dfrac{\partial f}{\partial z}}=-\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial p}}=-\frac{dy}{\dfrac{\partial f}{\partial q}}$$

求得之任意關係式（式中至少含偏導微函數 p 或 q 之一）均可用爲第二關係式。選擇此第二關係式愈簡愈妙，但式中須含一泛定常數。解方程式時又產生第二泛定常數。此法之所以導出姑從略，茲舉例以明此法之運用。

設有方程式$(p^2+q^2)y-qz=0$。上述之方程式組變爲

$$\frac{dp}{-pq}=\frac{dq}{p^2}=-\frac{dx}{2py}=-\frac{dy}{2qy-z}。$$

由前二式得關係式 $p^2+q^2=a^2$，式中 a^2 爲泛定常數。令此式與原式聯立以解 p 與 q，得

$$p=\frac{a}{z}\sqrt{z^2-a^2y^2},\quad q=a^2\frac{y}{z}。$$

於是進而解全微分方程式

$$dz=\frac{a}{z}\sqrt{z^2-b^2y^2}\,dx+a^2\frac{y}{z}dy,$$

將式整理，書爲

$$\frac{z\,dx-a^2y\,dy}{\sqrt{x^2-a^2y^2}}=a\,dx,$$

此方程式爲適合，據式作積分運算，得

$$\sqrt{z^2-a^2y^2}=ax+b。$$

故所設方程式之全解爲

$$z^2=a^2y^2+(ax+b)^2,$$

習　題　六　十　九

1. 求下列各一級平直微分方程式之通解：

(a) $p+q=z$;　　(b) $x^2p+y^2q=z^2$;

(c) $yp-xq=x^2-y^2$;　　(d) $(y-z)p+(z-x)q=x-y$;

(e) $yzp+xzq=y$;　　(f) $y^2zp+x^2zq=xy^2$。

2. 求下列各方程式之全解：

(a) $pq=5$;　　(b) $z=px+qy+p^2$;

(c) $p(1+q)=qz$;　　(d) $p=2xq^2$;

(e) $p=(z+yq)^2\phi$;　　(f) $p(q^2+1)+(1-z)q=0$。

3. 求下列各式之通解：

(a) $xp^2-2zp+xy=0$;　　　(b) $(qy-z)^2=x^2(q^2+1)$。

4. 解下列各方程式：

(a) $y^2(p^2-1)=x^2p^2$;　　　(b) $z=px+qy+(p+q)^2$;

(c) $q^2=z^2(p-q)$;　　　(d) $p+y(z-x)=0$。

第七十三節　高級偏微分方程式

高於一級之偏微分方程式僅有數種形式可藉初等方法求解，本書僅能舉其簡明者論之。所幸多數工程及科學問題均可以此法解之。以前曾用 p,q,r,s,t 表一二級偏導微函數，但此處推廣第十五章微分算子之意義，更爲便利。嗣後以 D_x 表對 x 之偏微分運算，D_y 表對 y 之運算。故

$$D_xz=\frac{\partial z}{\partial x},\quad D_y{}^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad (D_x{}^3+2D_y{}^2D_x)z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+2\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x},$$

餘類推，凡 D_x 與 D_y 之多項式均表一定之運算步驟，若施之於 z 卽得 z 之偏導微函數之平直式。

1. 直接解得之方程式　有時視諸變數之一爲常數，將方程式按常微分方程式解之卽可得解。例如 $r+p=xy$，視 y 爲常數，方程式可書爲

$$\frac{dp}{dx}+p=xy。$$

方程式爲一級平直，於是有

$$pe^x=y\int xe^x dx=ye^x(x-1)+\phi_1(y)。$$

故
$$p=\frac{dz}{dx}=(x-1)y+\phi_1(y)e^{-x}。$$

再作積分運算

$$z=\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)y-\phi_1(y)e^{-x}+\phi_2(y)。$$

此爲通解，含有二泛定函數。

玆再舉一例 $xs+q=xy^3$。以 x 除各項，式變爲

$$\frac{dq}{dx}+\frac{q}{x}=y^3$$

視 y 爲常數，解 q

$$qx=\frac{1}{2}x^2y^3+\phi(y)。$$

視 x 爲常數，對於 y 作積分運算，得

$$zx=\frac{1}{8}x^2y^4+\phi_1(y)+\phi_2(x),$$

因 ϕ 之積分爲泛定函數 ϕ_1。

玆舉第三例，$2r+s=y$，對於 x 作積分運算，得

$$2p+q=xy+\phi(y)。$$

此爲一級平直偏微分方程式，可用上節之法求解。取

$$\frac{dx}{2}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{xy+\phi(y)}。$$

由前二式得 $x-2y=a$，以此式 x 之值代入第三式，得

$$(a+2y)y\,dy+\phi(y)dy=dz,$$

或
$$z=\frac{1}{2}ay^2+\frac{2}{3}y^3+\phi_1(y)+b。$$

解出 a 與 b，得

$$x-2y=a,\quad z-\frac{1}{2}(x-2y)y^2-\frac{2}{3}y^3-\phi_1(y)=b,$$

其通解可書爲

$$z=\frac{1}{2}xy^2+\phi_1(y)+\phi_2(x-2y),$$

只含 y 之各項均可歸入泛定函數 $\phi_1(y)$ 中。

2. 常係數平直方程式

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}+4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+3\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}+5z=\sin(x+y)$$

爲常係數平直偏微分方程式之一例。式中可有各級偏導微函數，但每項僅一個偏導微函數之一次冪，項前有一常數係數。因變數 z 亦可出現於一項，右端之函數則爲 x, y 之隨意函數。用微分算子記法，上式可書爲

$$(D^2_x D_y+4D^2_y+3D_xD_y-D_x+5)_z=\sin(x+y)。$$

此種方程式與第 66 及 67 二節所述之常微分方程式相似。

設 $z=\phi_1(x,y)$ 與 $z=\phi_2(x,y)$ 爲其解，則 $z=\phi_1(x,y)+\phi_2(x,y)$ 亦爲其一解。欲解此方程式，先令左端之式等於零且求其解，解得 z 所等之式稱爲餘函數，其次求一特殊積分俾 z 代入左端時恰等於右端。餘函數與特殊積分之和即爲通解。

(a) 方程式中導微函數爲齊級者　此處微分算子 D 爲齊次，即謂 z 項缺，其導微函數皆爲同級。設方程式爲

$$F(D_x, D_y)_z=0。\tag{1}$$

若令 $z=\phi(y+mx)$，則式之左端可化爲，與微分算子同級之 ϕ 之導微函數乘以 m 之多項式 $F(m,1)$。方程式

$$F(m,1)=0\tag{2}$$

稱爲輔助方程式，設其根爲 $m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$，則 (1) 之解爲

$$z=\phi_1(y+m_1x)+\phi_2(y+m_2x)+\cdots\cdots+\phi_n(y+m_nx)。\qquad (3)$$

若諸 m 之值各不相同則(3)爲通解，因泛定函數之個數恰與方程式之級相同。若 m 有重根，則(3)之對應項可乘以 x 之乘冪，使之爲獨立之一項。例如 m_1, m_2, m_3 三值相等，則 (3) 式內之三對應項變爲 $\phi_1, x\phi_2, x^2\phi_3$。若 m 有一雙複數根則(3)式中之對應二項可合併構成二實數泛定函數。例如 $m_1=a+bi,\ m_2=a-bi$，可令 $\phi_1=\theta_1+i\,\theta_2$, $\phi_2=\theta_1-i\,\theta_2$，式中 θ_1 與 θ_2 爲泛定函數，而 (3) 式中之對應二項變爲

$$\theta_1(y+ax+ibx)+i\,\theta_2(y+ax+ibx)=\phi_1(y+m_1x)$$

$$\theta_1(y+ax-ibx)-i\,\theta_2(y+ax-ibx)=\phi_2(y+m_2x)。$$

可見前列諸項之虛數部與後列諸項之虛數部異號，故其和爲實。

例如

$$(D_x^3-4D_x^2D_y+5D_xD_y^2-2D_y^3)z=0。$$

方程式 (2) 爲

$$m^3-4m^2+5m-2=0,$$

其根爲 1,1,2。其通解爲

$$z=\phi_1(x+y)+x\phi_2(y+x)+\phi_3(y+2x)。$$

在此處討論時 x 與 y 可易位。當算子 D_y 之次數高於 D_x 之次數時，則易位討論更爲便利。如注意及輔助方程式中之無限大根。則可不必易位討論。例如，

$$(D_x^3D_y^2-4D_xD_y^4)z=0。$$

方程式爲五級，故輔助方程式亦必視爲五次者，

$$0m^5+0m^4+m^3+0m^2-4m+0=0。$$

其五根爲

$$\infty,\ \infty,\ 2,\ -2,\ 0,$$

故其解爲

$$z=\phi_1(x)+y\phi_2(x)+\phi_3(y+2x)+\phi_4(y-2x)+\phi_5(y)。$$

若將 x, y 易位討論，則得輔助方程式

$$0m^5+4m^4+0m^3+m^2+0m+0=0$$

其根爲

$$\infty,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 0,$$

得解

$$z=\phi_1(y)+\phi_2\left(x+\frac{1}{2}y\right)+\phi_3\left(x-\frac{1}{2}y\right)+\phi_4(x)+y\phi_5(x)。$$

此二解有相同之意義。

茲論(1)式之右端不爲零時之特殊積分。用嘗試積分常能奏效。例如

$$(D_x{}^2-3D_xD_y+2D_y{}^2)z=e^x(1+e^y)。$$

輔助方程式爲 $m^2-3m+2=0$，其根爲 1，2，得餘函數

$$\phi_1(y+x)+\phi_2(y+2x)。$$

特殊積分可分二部討論，其一對應於 e^x 項，其一對應於 e^xe^y 項。對於第一部可試 $z=ae^x$，得 $a=1$。對於第二部，因 $e^xe^y=e^{x+y}$，此式不能與 $\phi_1(y+x)$ 無關，故可試 $z=bxe^xe^y$ 或 $z=Cye^xe^y$。用前一式得 $b=-1$，故其通解爲

$$z=\phi_1(y+x)+\phi_2(y+2x)+e^x-xe^xe^y。$$

若用 $z=Cye^xe^y$ 得 $C=1$，則最後一項可代以 ye^xe^y。又 $\phi_1(y+x)+(y+x)e^xe^y$ 爲 $y+x$ 之泛定函數，若以此式代 $\phi_1(y+x)$ 則適所書

之解呈新形式，但二者之意義相同。

例如

$$D_x^3+D_x^2D_y)z=\sin x\cos y+x^2+y^2$$

餘函數為

$$\phi_1(y-x)+\phi_2(y)+x\phi_3(y)。$$

對於特殊積分產生 x^2 之部分只須討論 $D_x^3z=x^2$ 而必要之項為 $\frac{1}{60}x^5$。對於 y^2 則因 x^n 與 xy^n 不能與餘函數無關，故可試 $z=ax^2y^n$，得$n=3$，$a=\frac{1}{6}$。其次，注意

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\sin(x+y)+\frac{1}{2}\sin(x-y),$$

二項可分別處理。因導微函數皆屬奇數級，可試

$$z=b\cos(x+y),$$

若 $b=\frac{1}{4}$由此得$\frac{1}{2}\sin(x+y)$。因 $y-x$ 之泛定函數包括於餘函數內，故 x 或 y 必有一歸入 $\sin(x-y)$ 與 $\cos(x-y)$。由嘗試

$$z=C_1y\sin(x-y)+C_2y\cos(x-y)$$

得 $C_1=-\frac{1}{2}$，$C_2=0$。故通解為

$$z=\phi_1(y-x)+\phi_2(y)+x\phi_3(y)+\frac{1}{60}x^5+\frac{1}{6}x^2y^3$$
$$+\frac{1}{4}\cos(x+y)-\frac{1}{2}y\sin(x-y)。$$

若由視察與嘗試不能求得特殊積分，則可進而析微分算子為因式 如此可得一串一級方程式。玆以此法解適所舉之例以資說明。析因式，

$$(D_x^3+D_x^2D_y)z=(D_x+D_y)D_xD_xz,$$

式中右端三微分算子將依次施於 z。書

$$D_x z=u$$

$$D_x u=v$$

$$(D_x+D_y)v=\sin x\cos y+x^2+y^2。$$

先就第一項 x^2 言,可一察

$$p+q=x^2,$$

與此式相關之方程式組為

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dv}{x^2}。$$

因所求者為特殊積分,故可自此方程式組中選含有 v 之最簡關係式;即 $v=\frac{1}{3}x^3$。由此立得 $u=\frac{1}{12}x^4$, $z=\frac{1}{60}x^5$ 與以前所得結果相符。至對於 y^2,則得方程式組。

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dv}{y^2},$$

故 $$v=\frac{1}{3}y^3,\quad u=\frac{1}{3}xy^3,\quad z=\frac{1}{6}x^2y^3。$$

化乘積 $\sin x\cos y$ 為和差式

$$\frac{1}{2}\sin(x+y)+\frac{1}{2}\sin(x-y)$$

就此式之前一項,可得方程式組

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dv}{\frac{1}{2}\sin(x+y)}=\frac{dx+dy}{2}。$$

由此得 $v=-\frac{1}{4}\cos(x+y)$,故 $u=-\frac{1}{4}\sin(x+y)$ 而 $z=\frac{1}{4}\cos(x+y)$。

最後，對於後一項可得方程式組

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dv}{\frac{1}{2}sin(x-y)}。$$

由前二項，得 $x-y=c$，以此式化簡後二式，得

$$\frac{dy}{1}=\frac{dv}{\frac{1}{2}sin\,C}$$

或 $$v=\frac{1}{2}y\,sin\,C=\frac{1}{2}y\,sin(x-y),$$

故 $$u=-\frac{1}{2}y\,cos(x-y)\text{ 而 }z=-\frac{1}{2}y\,sin(x-y)。$$

(b) 非齊級導微函數之方程式　此處算子不為齊次式，每不能析為一次因式。但如算子果能析為二個或若干個因式則不論其是否一次因式，均可使問題化簡。假設

$$F(D_x,\ D_y)=F_1(D_x,\ D_y)F_2(D_x,\ D_y),$$

式中函數記號可視為 D_x, D_y 之代數函數，而右端因式與左端同類，皆表多項式。凡可為

$$F_1(D_x,\ D_y)z=0,\quad F_2(D_x,\ D_y)z=0$$

二式中任一式之解者即為

$$F(D_x,\ D_y)=0$$

之一解，且前二式各解之和亦為後式之一解。

若微分算子有一個一次因式 D_x-mD_y-k，則可解

$$p-mq=kz \tag{4}$$

以求得解中之一項。(4)之通解可書為

$$z=e^{kx}\phi(mx+y)。\tag{5}$$

在此式中，常數 m 與 k 有一爲零或皆爲零。若因式中有不含 D_x 者，如 D_y+k，則先解

$$q=-kz \tag{6}$$

得解之一項

$$z=e^{ky}\phi(x)。\tag{7}$$

由微分算子之一次因式已求得解之諸項後，令其餘因式爲 $F_1(D_x, D_y)$，於是必再求解之若干項爲方程式

$$F_1(D_x, D_y)z=0 \tag{8}$$

之解。若嘗試 $z=Ce^{ax+by}$ 則左端化爲

$$Ce^{ax+by}F_1(a, b),$$

若 a, b 能適合 $F_1(a, b)=0$，則此式爲零。此爲 a, b 之多項式，若以 b 表 a 則可得若干個值如 $f_1(b)$，$f_2(b)$，等。解中有一項爲

$$z=Ce^{f_1(b)x+by}$$

式中 b 與 c 爲泛定，令 b 與 c 等於各組不同之值將結果相加可得無數項。故解中可包括之項爲

$$z=\Sigma Ce^{f_1(b)x+by}+\Sigma Ce^{f_2(b)x+by}+\cdots\cdots。\tag{9}$$

不論(8)式之微分算子含有一次因式與否，(9)恆爲(8)之解，但(8)如有一次因式，(5)，(7)二式實優於(9)之和式。在解輔助方程式

$$F_1(a,b)=0 \tag{10}$$

時，算子中若有一次因式皆可顯出，由解 $a=mb+k$ 可得形如(5)之項，由解 $b=k$ 可得形如(7)之項。

若因式 $a-mb-k$ 在式中重複出現，解之對應項可書爲

$$e^{kx}\phi_1(mx+y),\ xe^{kx}\phi_2(mx+y),\ x^2e^{kx}\phi_3(mx+y),等。$$

若因式 $b-k$ 重複出現，則解之對應項可書為

$$e^{ky}\phi_1(x),\ ye^{ky}\phi_2(x),\ y^2e^{ky}\phi_3(x),\text{等}$$

若因式 $a-f(b)$ 重複出現，則(9)式中之對應部分為

$$\Sigma Ce^{f(b)x+by},\ x\Sigma Ce^{f(b)x+by},\ x^2\Sigma Ce^{f(b)x+by},\text{等}$$

在各不同之求和式中 C 與 b 之值完全為泛定。

若式之右端不為零，欲求特殊積分，可用視察法與嘗試法，其法與上述齊級方程式無甚區別。

若微分算子可析為二個或若干個多項因式，則方程式可代以一串低級之方程式。若所設方程式可書為

$$F_1(D_x,\ D_y)F_2(D_x,\ D_y)z=f(x,\ y),$$

則只須處理下列二方程式

$$F_2(D_x,D_y)z=u,$$

$$F_1(D_x,D_y)u=f(x,y)。$$

例如

$$(D_x^4-D_x^2D_y^2-4D_x^2+4D_y^2)z=\sin x。$$

輔助方程式為

$$a^4-a^2b^2-4a^2+4b^2=0。$$

其解為

$$a=2,\ a=-2,\ a=b,\ a=-b,$$

解不相重，皆導出式(5)。其餘函數為

$$e^{2x}\phi_1(y)+e^{-2x}\phi_2(y)+\phi_3(x+y)+\phi_4(y-x)。$$

欲求特殊積分可試 $z=C\sin x$，因所有導微函數均為偶數級，求得 $C=-\frac{1}{3}$。

茲再舉一例，

$$(D_x^2 Dy^2 + Dy^3)z = e^{3x}。$$

此處輔助方程式之解爲

$$a = i\sqrt{b},\ a = -i\sqrt{b},\ b = 0,\ b = 0$$

由前二值得(9)式之項，由後二值得(7)式之項，因其值重複出現，故餘函數爲

$$\Sigma c e^{by + i\sqrt{b}x} + \Sigma c e^{by - i\sqrt{b}x} + \phi_1(x) + y\phi_1(x)。$$

求特殊積分，可試 $z = Cy^2 e^{3x}$ 因而求得 $C = \frac{1}{18}$，或書

$$(D_x^2 D_y^2 + D_y^3)z = (D_x^2 + D_y)(D_y)(D_y)z = e^{3x}$$

解方程式組

$$D_y z = u,$$

$$D_y u = v,$$

$$(D_x^2 + D_y)v = e^{3x}。$$

由此易知 $v = \frac{1}{9}e^{3x}$，故 $u = \frac{1}{9}ye^{3x}$ 而 $y = \frac{1}{18}y^2 e^{3x}$。

習　題　七　十

1. 解偏微分方程式：

(a) $yt - q = xy^3$　　(b) $s = xy$;

(c) $r + s + p = 0$　　(d) $xr = 4p$。

2. 解齊級方程式：

(a) $(D_x^3 - 2D_x^2 D_y - D_x D_y^2 + 2D_y^3)z = 0$;

(b) $(D_x^3 + 3D_x^2 D_y)z = 0$;

(c) $(D_x^2D_y+2D_xD_y^2+D_y^3)=0$。

3. 求下列各式之通解:

(a) $(D_x^2-D_xD_y)z=y+\sin x$;

(b) $(D_x^3-3D_xD_y^2+2D_y^3)z=e^{2x}+\cos(x-2y)$。

4. 求下列各方程式之餘函數:

(a) $(D_xD_y^2+D_y^4)z=\cos(x+y)$;

(b) $(D_x^2+D_xD_y+2D_x+D_y+1)z=x^2+y^2$;

(c) $(D_x^2-4D_x+4)(D_y+1)z=xy$。

5. 求題 4 各方程式之特殊積分。

6. 解 $r-s+q-z=\cos(x+2y)+e^y$。

7. 圓軸之扭轉振動之微分方程式爲

$$G\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=m\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2},$$

式中 θ 爲軸離一端 x 處在時間 t 之角移, G 爲製軸材料之切變彈性係數, m 爲材料之密度。求證其通解可書爲

$$\theta=\phi_1(\sqrt{m}\,x+\sqrt{G}\,t)+\phi_2(\sqrt{m}\,x-\sqrt{G}\,t)。$$

8. 設上題之 ϕ_1 與 ϕ_2 爲同頻率之二個諧函數,即

$$\phi_1(u)=a_1\sin ku+b_1\cos k\,u,$$

$$\phi_2(v)=a_2\sin kv+b_2\cos k\,v,$$

當 $x=0$ 時(即謂軸在 x 之原點處裝定)不論 t 爲何值, θ 恆爲零,求證

$$\theta=(2a_1\cos k\sqrt{G}\,t-2b_1,\sin k\sqrt{G}\,t)\sin k\sqrt{m}\,x。$$

並證當 $t=0$ 時若在任何距離 x, 軸之角速度恆爲零則 $b_1=0$。

9. 圓柱或梁橫振動之微分方程式爲

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -4h^4 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

式中 h 由等式

$$4h^4 = \frac{mA}{EI}$$

確定,m 爲製圓柱材料之密度,A 爲截面面積,E 爲張力彈性係數,I 爲截面對於中心軸線之慣性矩。因變數 y 表當時間爲 t 離所選原點 x 處之偏轉。求呈下式之解:

$$y = \Sigma C e^{h\sqrt{b}(1+i)x+bt} + \Sigma C e^{h\sqrt{b}(1-i)x+bt}$$

$$+\Sigma C e^{-h\sqrt{b}(1+i)x+bt} + \Sigma C e^{-h\sqrt{b}(1-i)x+bt}。$$

10. 在題 9 之微分方程式中命 $y = z\cos\omega t$,式中 z 僅爲 x 之函數,求解含 y, x 之常微分方程式,可得 y 值如下:

$$y = \cos\omega t(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \sinh kx + C_4 \cosh kx),$$

式中 $k^4 = 4h^4\omega^2$。化諸三角函數及雙曲線函數爲指數形,證明此乘積之每項可由題 9 解中之一項命 b 與 c 代適當之數(虛實均可)求得。

11. 用題 10 之解證明當 $t=0$ 時,柱上所有點均有極大之偏轉若 $C_2 = C_4 = 0$,在 $x=0$ 處有節點,(node) 在此點,不論 t 爲何值,皆無偏轉。若在 $x=a$ 處復遇一節點,求證 $C_1 \sin ka = -C_3 \sinh ka$, 否則 $C_3 = 0$, $ka = 2n\pi$ (n 表任何整數)。在此等假設條件下,討論圓柱彈性曲線之形式。

參 考 書 目

Advanced Calculus, W. F. Osgood (Macmillan, 1925) Chapter XV.
Advanced Calculus, E. B. Wilson (Ginn, 1912) Chapter X.

Differential Equations, A Cohen (Heath, 1906) Chapters XII—XIV.
Differential Equations, D. A. Murray (Longmans 1919) Chapter XII.
Differential Equations, H. Bateman (Longmans, 1918) Chapters VI—VII.
Differential Equations, A. R. Forsyth (Macmillan, 1903). Chapters IX and X.

第十八章　微分方程式解法雜例

第七十四節　微分方程式之近似解法

以前諸章略述微分方程式之普通解法。但不能以此等方法求解之微分方程式尚多，又，用已知之方法不能求得通解之方程式亦甚多，惟此處亟應揭示者，即函數如能滿足若干簡單條件如函數具有連續性，具有導微函數，則解必存在。本節之目的在明示如微分方程式之原始條件為已知，則在數字問題中，恆可列表以明函數之變值，表中值準確之程度可隨意支配。

本節之數字解法與前數章解法之關係，正與第 45 節代入數字之積分運算與普通積分運算之關係相似。梯形律以及辛普生律實皆本節之一特例，蓋通常積分運算即在求解一簡單之一級微分方程式也。

1. 短弧積分法，逐步接近法　設有一級微分方程式

$$p=\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

當 $x=x_0$ 時，$y=y_0$ 為原始條件。若右端之函數為 x 之連續函數，且在 (x_0,y_0) 附近恆有對於 y 之偏導微函數，則方程式有一解且僅有一解。略去此命題之批判的討論，進而示如何用列表法以 x 之函數表出 y。

p 之原始值為 $p_0=f(x_0,y_0)$，在 $x=x_1+h$ 處 y 之近似值為 $y_1^{(1)}=y_0+p_0h$。在 x_1 處 p 之近似值為 $p_1^{(1)}=f[x_1,y_1^{(1)}]$。$y_1$ 之第二步近似值為 $y_1^{(2)}=y_0+\frac{h}{2}[p_0+p_1^{(1)}]$，式中 y 在 x_0 與 x_1 間之增率取已知之 p_0 與 $p_1^{(1)}$ 之平均數。p_1 之第二步近似值為 $p_1^{(2)}=f(x_1,y_1^{(2)})$。若 h 不十分大，$p_1^{(2)}$ 接近 $p_1^{(1)}$ 之程度應使 y_1 之第三步近似值 $y_1^{(3)}=y_0+\frac{h}{2}(p_0+p_1^{(2)})$ 與 $y_1^{(2)}$ 接近至所欲達到之準確位數。若 h

之值過大，不能使二值充分接近，則可做上法依次用下列公式逐步推求，

$$p_1^{(k)}=f(x_1,y_1^{(k)}),\ y^{(k+1)}=y_0+\frac{h}{2}(p_0+p_1^{(k)})$$

直至逐步接近之結果符合所欲達之準確位數為止。若步驟在二三次以上最好用較小之 h，最有利之 h 值只能由嘗試求得，惟遇性質類似之題時則以前之解題經驗亦可為有效之嚮導。

設逐步求得之 $y_1^{(1)}$，$y_1^{(2)}$ 等值漸趨近於定值 y_1，則可進而求 $x_2=x_1+h$ 時 y 之近似值，仍可用同法，惟以 x_1, y_1 代 x_0, y_0 運算。依此計算，至函數 $f(x,y)$ 具有之性質足以顯出解之存在為止。

舉例以明之，

$$p=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},$$

當 $x=0$ 時，$y=5$。故 $x_0=0$，$y_0=5$，$p_0=0$。下表明示當 x 為某值時 y 與 p 逐步求得之近似值。在開始時令 h 為 0.5，在 $x=1$ 時減之為 0.25，在 $x=1.5$ 時減之為 0.1。所有之數字計算至四位小數止。

$x_1=0.5$	$y_1^{(1)}=5.0000$	$p_1^{(1)}=-0.1000$
	$y_1^{(2)}=4.9750$	$p_1^{(2)}=-0.1005$
	$y_1^{(3)}=4.9749$	$p_1^{(3)}=-0.1005$
$x_2=1.0$	$y_2^{(1)}=4.9287$	$p_2^{(1)}=-0.2030$
	$y_2^{(2)}=4.8990$	$p_2^{(2)}=-0.2041$
	$y_2^{(3)}=4.8986$	$p_2^{(3)}=-0.2041$
$x_3=1.25$	$y_3^{(1)}=4.8478$	$p_3^{(1)}=-0.2578$
	$y_3^{(2)}=4.8411$	$p_3^{(2)}=-0.2582$
	$y_3^{(3)}=4.8410$	$p_3^{(3)}=-0.2582$

$x_4=1.5$	$y_4^{(1)}=4.7764$	$p_4^{(1)}=-0.3140$
	$y_4^{(2)}=4.7695$	$p_4^{(2)}=-0.3145$
	$y_4^{(3)}=4.7694$	$p_4^{(3)}=-0.3145$
$x_5=1.6$	$y_5^{(1)}=4.7379$	$p_5^{(1)}=-0.3377$
	$y_5^{(2)}=4.7368$	$p_5^{(2)}=-0.3377$
$x_6=1.7$	$y_6^{(1)}=4.7030$	$p_6^{(1)}=-0.3615$
	$y_6^{(2)}=4.7018$	$p_6^{(2)}=-0.3615$
$x_7=1.8$	$y_7^{(1)}=4.6656$	$p_7^{(1)}=-0.3858$
	$y_7^{(2)}=4.6644$	$p_7^{(2)}=-0.3859$
$x_8=1.9$	$y_8^{(1)}=4.6258$	$p_8^{(1)}=-0.4107$
	$y_8^{(2)}=4.6246$	$p_8^{(2)}=-0.4103$
$x_9=2.0$	$y_9^{(1)}=4.5835$	$p_9^{(1)}=-0.4363$
	$y_9^{(2)}=4.5822$	$p_9^{(2)}=-0.4364$

此處所取之例自易以以前方法解出，與所設原始條件相合之方程式爲 $x^2+y^2=25$。當 $x=2$, $y=\sqrt{21}=4.5826$，與表中之值惟末位不符可見此法頗有效。

此法仍可繼續運算，但當 x 遞增時，y 增加漸速，故所選 h 應逐漸減小使此法有效。在 $x=5$ 時，此法無效，因在此處 p 爲無限大也。

2. 差函數之應用　在上例中若注意已求得各值之差數，則求近似值可更迅速。例如求 $y_4^{(1)}$ 時，曾用公式 y_3+hp_3，並未預計 p_3 與 p_4 之平均值。但若注意 p_3 較 p_2 約大 -0.0541，故 p_4 大出 p_3 之量亦不妨估計爲 -0.0541，於是可取 p_3 與 p_4 估計值之平均數。如此求得之平均數約爲 -0.2852，而 $y_4^{(1)}$ 應等於 4.7697，此與眞值甚

爲接近，故第二步算出之近似值卽足資用，無須再作第三步推算矣。

本節明示已求得之列表值差數之系統的應用以減省計算之勞力。

設 t 爲自變數，令 u 表 t 之函數，t 之值按等差級數排列，h 爲公差。將諸 t 值與其對應 u 值並列兩行至 t_n, u_n 爲止，下表列 t_n, u_n 及其前諸項之值。令諸 a 表相連諸 u 之差，$a_k=u_k-u_{k-1}$，餘類推；諸 b 表相連諸 a 之差，稱爲諸 u 之第二級差。倣此以 c 表第三級差，d 表第四級差，餘類推。

t	u	a	b		d
t_{n-4}	u_{n-4}				
t_{n-3}	u_{n-3}	a_{n-3}			
t_{n-2}	u_{n-2}	a_{n-2}	b_{n-2}		
t_{n-1}	u_{n-1}	a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	
t_n	u_n	a_n	b_n	c_n	d_n

由定義可得下列諸等式：

$$u_{n-1}=u_n-a_n \tag{1}$$

$$u_{n-2}=u_{n-1}-a_{n-1} \tag{2}$$

$$u_{n-3}=u_{n-2}-a_{n-2} \tag{3}$$

$$u_{n-4}=u_{n-3}-a_{n-3} \tag{4}$$

$$a_n=a_{n-1}+b_n \tag{5}$$

$$a_{n-1}=a_{n-2}+b_{n-1} \tag{6}$$

$$a_{n-2}=a_{n-3}+b_{n-2} \tag{7}$$

$$b_{n-1}=b_n-c_n \tag{8}$$

$$b_{n-2}=b_{n-1}-c_{n-1} \tag{9}$$

$$c_n=c_{n-1}+d_n。 \tag{10}$$

若將(1),(2),(5)諸式相加,則得

$$u_{n-2}=u_n-2a_n+b_n \tag{11}$$

若將(3),(5),(6),(8),(11)相加,則得

$$u_{n-3}=u_n-3a_n+3b_n-c_n \tag{12}$$

若將(12)式與(4)至(10)諸式相加,(8)式連加二次,則得

$$u_{n-4}=u_n-4a_n+6b_n-4c_n+d_n。 \tag{13}$$

用此法可以 u_n 及同足碼之差數表 u_{n-r}, r 表任意正整數。按(11),(12),(13) 之係數皆二項展式之係數,故可書

$$u_{n-r}=u_n-ra_n+\frac{r(r-1)}{1\cdot2}b_n-\frac{r(r-1)(r-}{1\cdot2\cdot3}c_n+\cdots\cdots, \tag{14}$$

此式不論 r 為何正整數均能成立。

若視(14)式中之 r 為連續變數,並設第 $k+1$ 項後不復有項,則 u 以 r 之多項式表出,當 $r=0,1,2,\cdots\cdots k$ 時所得 u 值均正確。若書 $t=t_n-hr$ 則(14)確定 u 為 t 之多項式之函數,以列表之 t 值代入多項式即能算出其對應 u 值。表中 t,u 有若干組值則 (14) 有若干項。

式(14)可視為內推公式(interpolation formula)。若 t 之值介於 t_{n-1} 與 t_n 之間$\left(\text{即 } t=t_n-\frac{1}{2}h \text{ 時}\right)$,欲求 u 之對應值,可令 $r=\frac{1}{2}$代入(14),(14) 中之項不必全部保留,只須足以達到所欲求之準確位數為度。就一般情形言,若(14)展至第 $k+1$ 項,對應於 0 與 k 間某分數 r 之 u 值,即對應於 $t=t_n-h_r$ 之 u 值。若在(14)中令 r 表大於 k 之值,或表負值,則運算謂之外推法(extrapolation),即

就某已知 t 間隔內之 u 值以估計此間隔外之 u 值。若令 $r=-1$，則得對應於 $t=t_n+h$ 之 u 值，即

$$u_{n+1}=u_n+a_n+b_n+c_n+\cdots\cdots \tag{15}$$

若欲就函數 u 對於 t 作積分運算，則 $dt=-h\,dr$，故

$$\int_{t_n-hr_1}^{t_n-hr_2}u\,dt=-h\int_{r_1}^{r_2}u\,dr,$$

將(14)中各項之括弧解除，即易得右端積分之值。結果自爲近似值，因(14)本爲函數 u 之近似式也。下列特例甚爲重要：

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n}u\,dt=\int_{t_n-h}^{t_n}u\,dt=-h\int_1^0 u\,dr=h\int_0^1 u\,dr$$

$$=h\left(u_n-\frac{1}{2}a_n-\frac{1}{12}b_n-\frac{1}{24}c_n-\frac{19}{720}d_n\cdots\cdots\right)。\tag{16}$$

倣此，可得

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}u\,dt=h\left(u_n+\frac{1}{2}a_n+\frac{5}{12}b_n+\frac{3}{8}c_n+\cdots\cdots\right)。\tag{17}$$

(16)，(17)二式相加，得

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}u\,dt=h\left[2u_n+\frac{1}{3}\left(b_n+c_n+\cdots\cdots\right)\right]。\tag{18}$$

茲將此等公式應用於簡單之積分問題。在或然率理論中，有時需用

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt。$$

令 $u=e^{-t^2}$，在 $t=0$ 至 $t=1$ 每隔 $\frac{1}{10}$ 處算出 u 值，列成二行，求 u 之第一級，第二級，及第三級差。計算 u 值可用級數求和法，或自算表

中查出。

$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}P$	t	u	a	b	c
0.00000	0.0	1.00000			
0.09950	0.1	0.99005	−0.00995		
0.19720	0.2	0.96079	−0.02926	−0.01931	
0.29108	0.3	0.91393	−0.04686	−0.01760	0.00171
0.37950	0.4	0.85214	−0.06179	−0.01493	0.00267
0.46113	0.5	0.77880	−0.07334	−0.01155	0.00338
0.53500	0.6	0.69768	−0.08112	−0.00778	0.00377
0.60053	0.7	0.61263	−0.08505	−0.00393	0.00385
0.65751	0.8	0.52729	−0.08534	−0.00029	0.00364
0.70608	0.9	0.44486	−0.08243	−0.00291	0.00320
0.74667	1.0	0.36788	−0.07698	−0.00545	0.00254
		7.14607	−0.63212	−0.06708	0.02476

表之左端列 $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}P=\int_0^t u\,dt$ 之値，此値可由(16)求得。第一步得

$$\int_0^{0.1} u\,dt=0.1\left[0.99005-\frac{1}{2}(-0.00995)\right]=0.09950。$$

此處 $t_n=0.1$，$t_{n-1}=0$，$h=0.1$，$u_n=0.99005$，$a_n=-0.00995$。在此第一間隔內，僅有第一級差足資採用，第二步可採用至第二級差，其餘各步皆只算至第三級差爲止。此處採用第四級差無甚實效。左行增量逐步由 (16) 推出。例如在 $t=0.5$ 之値爲

$$0.37950+\int_{0.4}^{0.5} u\,dt,$$

由(16)，運算可佈式如下

在 $t=0.4$ 處之值	0.379500
在 $t=0.5$ 處 $\frac{1}{10}u$	0.077880
在 $t=0.5$ 處 $-\frac{1}{20}a$	-0.003667
在 $t=0.5$ 處 $-\frac{1}{120}b$	0.000096
在 $t=0.5$ 處 $-\frac{1}{240}c$	-0.000014
在 $t=0.5$ 處之值	0.461129

方程式(17)亦可用以計算增量。取 $t_n=0.4$，佈式如下：

在 $t=0.4$ 處之值	0.379500
在 $t=0.4$ 處，$\frac{1}{10}u$	0.085214
在 $t=0.4$ 處，$\frac{1}{20}a$	-0.003089
在 $t=0.4$ 處，$\frac{5}{120}b$	-0.000620
在 $t=0.4$ 處，$\frac{9}{240}c$	0.000100
在 $t=0.5$ 處之值	0.461105

此算法不如前法之準確，因(17)中曾取已知間隔外之值作積分運算；但此法不妨用作驗算。

其次，用(18)可一步算出二個增量。令 $t_{n-1}=0.3$ 則有

在 $t=0.3$ 處之值	0.291080
在 $t=0.4$ 處 $\frac{2}{10}u$	0.170428
在 $t=0.4$ 處 $\frac{1}{30}b$	-0.000477
在 $t=0.4$ 處 $\frac{1}{30}c$	0.000089
在 $t=0.5$ 處之值	0.461120

最後之驗算可將 u,a,b,c 各行之值相加。每行之總和爲前行第一值與最末值之差。又若總和中略去 u 之第一值，則左端之總增量爲

$$\int_0^1 u\,dt = h\left[\Sigma u - \frac{1}{2}\Sigma a - \frac{1}{12}\Sigma b - \frac{1}{24}\Sigma c\right],$$

因此式爲用以計算十個相續增量之十個形如(16)之方程式相加之結果。就此題言

$\frac{1}{10}\Sigma u$	0.714605
$-\frac{1}{20}\Sigma a$	0.031606
$-\frac{1}{120}\Sigma b$	0.000559
$-\frac{1}{240}\Sigma c$	−0.000103
總和	0.746667

當 $t=1$ 時，P 之眞值自算表上查得爲 0.84270，若以 $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ 乘之得 0.74682，可見此處之積聚誤差不過 0.00015。經研究後，知此誤差由開始計算略去第二級第三級差所致。若 u 之值，自 $t=-0.1$ 與 $t=-0.2$ 處開始，俾自始卽能應用第二第三級差，則算出之值可與算表上值之前五位相符。

玆再應用差函數以解前款之微分方程式。設 y_1 與 p_1 仍由前款之逐步接近法求得，列一簡短之表

x	y	p	a	b
0.0	5.0000	0.0000		
0.5	4.9749	−0.1005	−0.1005	

式中 a 爲 p 之一級差。於是可用(15)以估計 $x=1.0$ 時之 p 值，再列出差數並用(16)計算 $x=1.0$ 時之 y 值。於是表上增一新列:

1.0	4.8996	−0.2010	−0.1005	0.0000

但將 $x=1.0$, $y=4.8996$ 代入微分方程式中，得 $p=-0.2041$，據以更正 p, a, b，再用(16)計算 y 值，於是表上改正之第三列爲

1.0	4.8989	−0.2041	−0.1036	−0.0031。

再將改正之 x,y 值代入微分方程式中，則見 p 無再改正之必要。復用(15)外推 p 值，列出差數，用(16)計算 y 在表上得第四列

1.5	4.7703	−0.3108	−0.1067	−0.0031。

由此處 x,y 之值算得 $p=-0.3144$，據以得改正之第四列

1.5	4.7696	−0.3144	−0.1103	−0.0067。

倣此，可算至 $x=2.0$ 時之諸值。今再說明用較短間隔之便利修正法。先用公式(14)以 $x=1.5$ 時之 p 值爲 u_n 令 $r=\frac{1}{2}$ 以內推 $x=1.25$ 時之 p 值。內推之 p 值爲 -0.2584，於是得一新表如下。$x=1.25$ 時之 y 值可用(16)算出，令 $x_n=1.50$，並自 $x=1.50$ 之 y 值減去算出之結果，卽得：

x	y	p	a	b
1.00	4.8989	−0.2041		
1.25	4.8412	−0.2584	−0.0543	
1.50	4.7	−0.3144	−0.0560	−0.0017

於是用(15)以估計 p 之新值，並計算 a 與 b，再用(16)求 y 之新值，得第四列之近似值

1.75	4.6838	−0.3721	−0.0577	−0.0017

將此列 x,y 之值代入微分方程式內得 $p=-0.3736$，由此得改正之第四列

1.75	4.6837	−0.3736	−0.0592	−0.0032

於是可估計次列 b 值約為 -0.0045,即可得次列之值為

$$2.00 \qquad 4.5824 \qquad -0.4373 \qquad -0.0637 \qquad -0.0045$$

據此列 x, y 計算 p 值,改正此列之值如下:

$$2.00 \qquad 4.5825 \qquad -0.4365 \qquad -0.0629 \qquad -0.0037$$

此處最後結果較前款所得者更接近眞值。

3. 方程式組之數字積分法 在第 69 節曾述一組任何級之微分方程式組,可化為一組一級微分方程式組,就特例言,一個 n 級微分方程式可化為一組 n 個一級微分方程式。故欲求微分方程式之數字解法,能解一組一級方程式足矣。

茲討論一組三個方程式以見數字積分法之要點,設三式可書為

$$u=\frac{dx}{dt}=u(x, y, z, t)$$

$$v=\frac{dy}{dt}=v(x, y, z, t)$$

$$w=\frac{dz}{dt}=w(x, y, z, t)。$$

此處 u, v 與 w 在右端用為函數記號,在左端用為一級導微函數之簡號。設起始條件為當 $t=0$ 時 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$。由所設諸方程式可算出 u_0, v_0, w_0,取一適當之 h 可得第一步近似值

$$x_1^{(1)}=x_0+u_0h,\ y_1^{(1)}=y_0+v_0h,\ z_0^{(1)}=z_0+w_0h,$$

用此等 x, y, z 值並令 $t=h$ 可得 u_1, v_1, w_1 之近似值。第一組差 u_1-u_0 等值既得可進而求第二步近似值 $x_1^{(2)}, y_1^{(2)} z_1^{(2)}$ 等,將此等值代入微分方程式內,可得 u_1, v_1, w_1 之第二步近似值。逐步計算須至無再修正之必要時為止,此與前節所述一個因變數之情形相同。其次用(15),外推以估計 $u_2, v_2. w_2$, (15) 式中用至第一級差為止。在 u_2, v_2, w_2 各列計算第一第二級差,於是進而由 (16) 求 x_2, y_2, z_2 之近似

值。用此等 x_2 y_2, z_2 之值及 $t=2h$ 由所設微分方程式計算 u_2, v_2, w_2 之第二步近似值，改正差數，並計算 x_2. y_2, z_2 之改正值。如此繼續演算至無須再改爲止。可見一組三個方程式與前款所論一個方程式之區別卽此處三組計算須同時並行，t, x, 及 u 之各級差列一表 y, v 及 v 之各級差另列一表；z, w 及 w 之各級差又另列一表。

茲以複擺問題爲例以說明此法。運動之方程式爲

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-Wh\sin\theta。$$

式中 I 爲質量對於懸軸之慣性矩，W 爲重量，h 爲懸軸至重心之距離，θ 爲在 t 時與鉛直方向之角移。設方程式可化爲

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-10\sin\theta,$$

並令 $\theta=0.5$ 弧度。且當 $t=0$ 時，$\frac{d\theta}{dt}=0$。欲化此式爲一組一級方程式可書

$$\frac{d\theta}{dt}=u \tag{19}$$

$$w=\frac{du}{dt}=-10\sin\theta。 \tag{20}$$

於是可得

$$v_n=u_{n-1}+\int_{t_{n-1}}^{t_n} w\,dt \tag{21}$$

$$\theta_n=\theta_{n-1}+\int_{t_{n-1}}^{t_n} u\,dt \tag{22}$$

又有 $w_n=-10\sin\theta_n$ 使計算周而復始。於是分列三表，每表之第一行概爲 t，第一表列 w 及其各級差，第二表第三表各列 u 與 o 及其各級差。各級差數並非必要，但列差數最易察出誤差，因誤差生則各

級差數卽顯出不整齊之值。此處 h 以選定 0.1 爲便。在 $t=0.0$ 處，$\theta=0.5000$ 故 $w=-4.794$，而 $u=0.0$。自 $t=0.1$ 列開始，以 $t=0.0$ 時之 w 值爲 $t=0.1$ 時 w 之近似值，而 u 之近似值則爲 w 值乘 h，卽 -0.4794。此值亦卽 u 之第一級差。用(16)與(22)算得 θ 之增量爲 -0.0240，記於 θ 之一級差行內，再加於 θ 之起始值，得 $\theta=0.4760$。將此 θ 值代入(20)，得 $t=0.1$ 時

t	w	a	b	c
0.0	−4.794			
	−4.794			
	−4.582	0.212		
0.1	−4.587	0.207		
	−4.380	0 207		
	−3.960	0.627	0.420	
0.2	−3.966	0.621	0.414	
	−2.931	1.035	0.414	
	−3.046	0.920	0.299	−0.115
0.3	−3.044	0.922	0.301	−0.113
	−1.934	1.110	0.188	−0.113
	−1.598	1.446	0.524	0.223
0.4	−1.603	1.441	0.519	0.218
	0.857	2.460	1.019	0.500
	−0 077	1.526	0.085	−0 434
0.5	−0.064	1.539	0.098	−0 421

	u	a	b	c
0.0	0.0000			
	−0.4794	−0.4794		
	−0.4688	−0.4688		
0.1	−0.4690	−0.4690		
	−0.9173	−0.4483	0.0207	
	−0.8999	−0.4309	0.0381	
0.2	−0.9001	−0.4311	0.0379	
	−1.2485	−0.3484	0.0827	0.0448
	−1.2527	−0.3526	0.0785	0.0406
0.3	−1.2526	−0.3525	0.0786	0.0407
	−1.5026	−0.2500	0.1025	0.0239
	−1.4918	−0.2392	0.1133	0.0347
0.4	−1.4901	−0.2375	0.1150	0.0364
	−1.5380	−0.0479	0.1896	0.0746
	−1.5730	−0.0829	0.1546	0.0396
0.5	−1.5724	−0.0823	0.1552	0.0402

t	θ	a	b	c
0.0	0.5000			
	0.4760	−0.0240		
	0.4766	−0.0234		
0.1	0.4766	−0.0234		
	0.4071	−0.0695		
	0.4078	−0.0688		
0.2	0.4078	−0.0688	−0.0454	

	0.2995	−0.1083		
	0.2993	−0.1085		
0.3	0.2993	−0.1085	−0.0397	0.0057
	0.1605	−0.1388		
	0.1610	−0.1383		
0.4	0.1610	−0.1383	−0.0298	0.0099
	0.0077	−0.1533		
	0.0064	−0.1546		
0.5	0.0064	−0.1546	−0.0163	0.0135

w 之第二步近似值，即 $w=-4.582$，由此得其第一級差之值為 0.212。將(16)與(21)，(22)並用，則得 $t=0.1$ 時所有量之近似值，$\theta=0.4766$。將此 θ 值代入(20)，求得 $w=-4.587$，於是第三步推算開始，所得之 θ 值仍相同。

開始求 $t=0.2$ 時之諸值，先設 $t=0.1$ 至 $t=0.2$ w 之增量與 $t=0.0$ 至 $t=0.1$ 時 w 之增量同，即 0.207。將此值寫在 a 下加於以前之 w 值上，得 $w=-4.380$，由(16)，(21)得 u 之增量為 -0.4483。將此值記在 u 之第一級差下，計算 u 與 b，於是由(16)與(22)求得 θ 之增量 -0.0695，由此得 $\theta=0.4071$。由此 θ 值可推出 $w=-3.960$，由此 w 值最後推出 $\theta=0.4078$，再推算一周仍得此同一之 θ 值。

當演算至中間時，可得較高級之差數，對於 $h=0.1$ 第三級差仍屬重要。若 h 甚小則第三級差不妨略去。又若 h 之值甚小時表中每列之計算步驟可由三步減至二步，若能得較高級差後則只須用第一步求得之值即可。

此處用以求次行新值之法即用（15）外推公式求次列之 w，實際上，即假設可求得最高級差在新列有同值，於是退而求 w。例如 $t=0.3$ 時，$c=0.113$，$t=0.4$ 時 $c=0.218$，於是作粗疏之估計 $t=0.5$ 時應有 $c=0.500$，由此即可算出同列其他各值，u 與 θ 由（16）積

分式算出。最後求得 $c=-0.421$ 而非 0.500，在開始估計時有誤差 0.900，在第三步推算中完全校正。

開始求一新列之值亦可用(17)式『向前積分』"integrate ahead" 求得。若欲積分 u 以求 θ，取 $t_n=0.4$，求得 θ 之增量爲 -1.547，得 $\theta=0.0063$。由此 θ 値計算 w，再用(16)式作積分運算。求得 $\theta=0.0064$，與前同。

又用(18)式作向前積分亦可。仍取 $t_n=0.4$ 積分 u 則得由 $t=0.3$ 至 $t=0.5$ 時 θ 之增量爲 -0.2930，由此得 $t=0.5$ 時 $\theta=0.0063$ 與以前算出者有同值。

在此例中，當較高級之差數可求得時，則向前積分法實優於外推法。因就此處所用之 h 求得 w 之第三級差殊不規則故也。計算新列諸值方法之選擇須由計算過程中所呈之特點以決定定之。

此處所論之例足示一高級方程式如何化爲一組一級方程式求解，計算周而復始，其次序爲 $w, u, \theta, w, u\cdots\cdots$ 直至所得値無須再校正爲止。於是自 θ, u, w 中估計一新値即是開始表中之一新列。就一般言，對應於(19)與(20)右端之函數可含一個以上之量，有時必須估計若干個値以創始一新列。此等估計値或用向前積分或用外推法求得。

習 題 七 十 一

1. 設有微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=log_{10}\dfrac{x}{y}$，問起始條件中 x，y 不能有何値？設 $x=5$ 時 $y=10$ 取 0.1 爲間隔自 $x=5$ 至 $x=6$ 將 y 之對應値求出並列表。

2. 用差函數解習題四十二之題 10。

3. 取 1 度爲間隔，自 $x=30^\circ$ 至 $x=40^\circ$ 將 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{x} log_{10}\sin x\,dx$ 之値求出並列表。

4. 設 $\dfrac{d^2s}{dt^2}=log_{10}\cos s$，且當 $t=0$ 時 $s=0$, $v=1$，選一適當之 h，

構成此題之解。s 爲何值時此法無效?

5. 列表解

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d\theta}{dt}=-\sin\theta$$

當 $t=0$ 時,$\theta=1$, $\frac{d\theta}{dt}=0$。

6. 列表,以 t 之函數表 x 與 y,已知

$$\frac{dx}{dt}=y+t,\ \frac{dy}{dt}=e^x$$

當 $t=0$ 時,$x=0, y=1$。

7. 設有方程式,

$$\frac{dx}{dt}=y-z,\ \ \frac{dy}{dt}=z-x,\ \ \frac{dz}{dt}=\sin(x-y),$$

當 $t=0$ 時, $x=0$, $y=0$, $z=1$。求列表以 t 之函數表 x, y, z。

第七十五節 用級數求解法

在上節數字計算法中,高級微分方程式先化爲一組一級方程式。至本節所論分析法,則不如就所有之因變數,惟消去其中之一以討論之,故所論者爲任何級之單個方程式。若最高級導微函數可以解出此種方程式可書爲,

$$\frac{d^ny}{dx^n}=F\left(x, y, \frac{dy}{dx},\cdots\cdots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{1}$$

以下舉,以 $x-x_0$ 之冪級數表 y 之二法,級數各項之係數由 $x=x_0$ 時之 y 及其第一級至 $n-1$ 級各級導微函數之值決定之。

1. 泰羅氏展式之用法 設 y 可表以冪級數

$$y=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+c_3(x-x_0)^3+\cdots\cdots, \tag{2}$$

由泰羅氏定理應有

$$c_0=y_0,\ c_1=\frac{dy_0}{dx_0},\cdots\cdots c_k=\frac{1}{k!}\ \frac{d^k y_0}{dx_0{}^k},\cdots\cdots$$

式中足碼零表諸導微函數之值對應於 $x=x_0$。此等值至 $k=n-1$ 皆可泛設，因其爲通解中 n 個泛定常數也。將諸值代入(1)得 c_n。欲得 c_{n+1} 可就(1)式對於 x 作微分運算，得以 n 級及 n 以下各級已知導微函數表第$(n+1)$級導微函數。此法可無限制繼續進行，只須 F 之各級導微函數有對應於 $x=x_0$ 之值。

例如，方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

已在前節解出。設 $x=x_0$ 時 $y=y_0$，則

$$\frac{dy_0}{dx_0}=-\frac{x_0}{y_0},\ \ \frac{d^2y_0}{dx_0{}^2}=\frac{x_0{}^2+y_0{}^2}{y_0{}^3},$$

$$\frac{d^3y_0}{dx_0{}^3}=-\frac{3(x_0{}^3+x_0y_0{}^2)}{y_0{}^5},\ \ \frac{d^4y_0}{dy_0{}^4}=-\frac{3(5x_0{}^4+6x_0{}^2y_0{}^2+y_0{}^4)}{y_0{}^7}。$$

於是可書

$$y=y_0-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)-\frac{1}{2}\ \frac{x_0{}^2+y_0{}^2}{y_0{}^3}(x-x_0)^2$$

$$-\frac{1}{2}\ \frac{x_0{}^3+x_0y_0{}^2}{y_0{}^3}(x-x_0)^3-\frac{1}{8}\ \frac{5x_0+6x_0{}^2y_0{}^2+y_0{}^4}{y_0{}^7}(x-x_0)^4+\cdots\cdots$$

此處 y_0 爲泛定常數。若倣前例，令 $x_0=0$，$y_0=5$，則

$$y=5-\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{1000}x^4+\cdots\cdots$$

設再取前節所已論之方程式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-10\sin\theta$$

爲例。設 $t=0$ 時 $\theta=\theta_0$, $\frac{d\theta}{dt}=u_0$,則由原設方程式及

$$\frac{d^3\theta}{dt^3}=-10\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d^4\theta}{dt^4}=-10\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-10\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^5\theta}{dt^5}=-10\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3-20\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{}$$

$$+10\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}-10\cos\theta\frac{d^3\theta}{dt^3},$$

及較高級之導微函數,可得諸係數之值

$$c_0=\theta_0,\ c_1=u_0,\ c_2=-5\sin\theta_0,$$

$$c_3=-\frac{5}{3}u_0\cos\theta_0\ ,c_4=-\frac{1}{12}\sin\theta_0(u_0^2-10\cos\theta_0),$$

$$c_5=\frac{1}{12}u_0(10-u_0^2\cos\theta_0)$$ 餘類推。

此等係數皆由 θ_0 與 u_0 二泛定常數表出,若與二泛定常數以定值則諸係數之値定,於是 θ 得以 t 之冪級數表之。

2. 比較係數法 有時先取式(2)表 y,由(2)求 y 之各級導微函數,代入(1),比較同類項之係數以定諸 c 之值。如此則不必能解出最高級導微函數,且最好令 $x'=x-x_0$ 俾級數中各項皆爲 x' 之乘冪。

再以方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

爲例,此式又可書爲

$$y\frac{dy}{dx}=-x,$$

令 $x_0=0$，書出(2)，求第一級導微函數，得

$$(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots)(c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots\cdots)=-x$$

二級數相乘，得

$$-x=c_0c_1+(c_1{}^2+2c_0c_2)x+(3c_1c_2+3c_0c_3)x^2$$
$$+(4c_1c_3+2c_2{}^2+4c_0c_4)x^3+(5c_1c_4+5c_2c_3+5c_0c_4)x^4+\cdots\cdots$$

比較係數，得

$$c_0c_1=0,\ c_1{}^2+2c_0c_2=-1,\ c_1c_2+c_0c_3=0,$$
$$2c_1c_3+c_2{}^2+2c_0c_4=0,\ c_1c_5+c_2c_3+c_0c_5=0,$$

等方程式。由第一式得 $c_0=0$ 或 $c_1=0$。若 $c_0=0$，則由第二式 c_1 必為虛數，故取 $c_1=0$。於是由第二方程式得 $c_2=\dfrac{1}{2c_0}$，由第三式得 $c_3=0$，由第四式得 $c_4=-\dfrac{1}{8c_0{}^3}$，由第五式，得 $c_5=0$。於是得

$$y=c_0-\frac{1}{2c}x^2-\frac{1}{8c_0{}^3}x^4+\cdots\cdots$$

若令 $c_0=5$ 則仍得以前求出之特解。

茲舉最後之一例，

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}+(1-x^2)y=sin\,x。$$

假定 y 可由某級數式表出，據以計算方程式左端之值：

$$\begin{aligned}
y&=c_0+c_1x &&+c_2x^2 &&+c_3x^3+\cdots\cdots,\\
-x^2y&= &&-c_0x^2 &&-c_1x^3+\cdots\cdots,\\
x^2\frac{dy}{dx}&= &&c_1x^2 &&+2c_2x^3+\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2c_2+6c_3x\quad+12c_4x^2\quad+20c_5x^3+\cdots\cdots$$

方程式之左端爲

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\cdots\cdots$$

比較左右端係數,並解由此所得之方程式得

$$y=c_0+c_1x-\frac{1}{2}c_0x^2-\frac{1}{6}(c_1-1)x^3$$

$$+\frac{1}{24}(3c_0-2c_1)x^4+\frac{1}{120}(7c_1+6c_0-2)x^5+\cdots\cdots$$

此解中有二泛定常數,故爲所設方程式之通解。

在論微分方程式較詳盡之專書內，當詳示此處所舉各法之補充與修改以避免或克服解式時所遇之困難， 其所論可以級數解出之方程式之種類當較多。此書僅能在此處附註數要點。

若數項之後係數皆爲零，y 爲 x 之多項式。如此則方程式恆可以他法解之。

若發現級數有通項， 則可辨認級數是否某已知函數之泰羅氏展式。若然,則解可以有限項數表出。

若級數之項無限,又不能發現其通項，則級數之前數項可藉以作數字計算以求近似值。用此法時須一視級數斂性之疾徐，而斂性之疾徐又由 $x_0, y_0, \dfrac{dy_0}{dx_0}$,等值及 $x-x_0$ 之如何選擇而定。起始值爲無限大及能使 y 或 y 之各級導微函數之一爲無限大之 x 值均須避免,此等應避免之值每能直接發現或因其使決定係數之方程式矛盾，或因其使級數發散,而被發現。不知級數之通項，則無法鑒別級數之是否收斂,則數字計算所得之近似值是否接近真值不可知,但由數字近似值之無法求出之知級數之非收斂。

有時選擇之起始值恰使高級導微函數之值爲不定，於是第一款

之法無效，但用第二款之法可得常數較通解爲少之一特解。此解每可爲求得通解之助。解法與解常係數平直方程式之『參數變值法』相仿。此法見下列題 5 之提示內。

習 題 七 十 二

1. 求以 x 之冪級數表下列方程式之通解。

(a) $\frac{dy}{dx}=x+y^2$　　(b) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{1-x^2}$。

2. (a)已設 $x\frac{dy}{dx}+x^2+y^2$，若以 x 之冪級數表 y，求證係數中無泛定常數。

(b) 已設 $(x+h)\frac{dy}{dx}=(x+h)^2+y^2$，當 $x=0$ 時 $y=y_0$，求以 x 之冪級數表 y。求證：若 $h=0$，則 $y_0=0$，且與(a)題之結果比較。

3. 求以 x 之冪級數表下式之通解。

$$\frac{d^2y}{dx^2}-xy=\sin x$$

4. 解方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+x^2y=0$，設 $x=0$ 時，$y=2$，$\frac{dy}{dx}=5$。

5. 用第 2 款之法，求證方程式

$$F(D)y=x^2\frac{d^2y}{dx^2}-(x^2+4x)\frac{dy}{dx}+4y=0$$

有一形如 $y_1=cx^4e^x$ 之解。欲求通解，可試 $y=vy_1+w$，式中 v 與 w 皆爲 x 之函數，將 y 代入原設微分方程式內卽可定出 v,w 之形。求證此方程式變爲

$$vF(D)y_1+F(D)w+y_1\left[x^2\frac{d^2v}{dx^2}-(x^2+4x)\frac{dv}{dx}\right]+2x^2\frac{dv}{dx}\frac{dy_1}{dx}=0。$$

第一項爲零因 y_1 爲所設方程式之一解。選擇 v 俾方括號內之式爲

零，然後解方程式以求 w。因 v 含有二個泛定常數。w 之任何特值均可作為方程式之通解。

6. 用題 5 所示之方法，解方程式

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0。$$

參 考 書 目

Differential Equations, A. Cohen (Heath, 1906), Chapter XI.

Differential Equations, H. Bateman(Longmans, 1918)Chapters IX and XI.

Differential Equations, A. R. Forsyth (Macmillan, 1903) Chapters V and VI.

New Methods in Exterior Ballistics, F. R. Moulton (University of Chicago Press, 1926), especially Chapters III and V.

The Calculus of Observations, Whitaker and Robinson (Blackie and Son, 1924), Chapter XIV.

Interpolation, J. F, Steffensen (Williams and Wilkins,1927).

中英文名詞索引

(數字指頁數,無括號者在正文內,有括號者在習題內)

A

B

C

D

E

M

N

O

P

T