元

重刊九數通考引

數學之書已簡則患疏已繁則苦眩吾邑屈君省園九數通考一書卷帙不繁諸法畧備洵善本也粵匪之亂版亡賊既平 大憲力圖善後凡規畫輿圖清理田賦營造城郭開浚河渠修治廟宇衙署度基址程土物量工計日一一需九數於是大崇數學學者皆愛是書之簡易而詳備也求者日眾而印本罕存其從元孫承榦訪諸窮鄉僻壤得其版十五六而補刊其所闕以存手澤以應求者時同治壬申仲夏後進潘欲仁謹識

序

余少時讀周官經六書九數之目因尋求漢永元中南閣祭酒許慎說文解字以為古小學賴是以存而前此北平侯張蒼傳古九章算術魏劉徽爲之註者卒不可得近有宣城梅氏撰中西算學通獨九數存古有錄無書蓋唐宋立之學官所謂算經十書厯厯周髀有全文梅氏所論述周髀而外絕不見徵引是以意欲存古而未能歟常熟屈君省園嗜古好深湛之思於書

靡不披覽九加意實學俾足以致用既撰萬言肄雅為識字津涉其治算數也妙盡其能亦兼中西而會通之乃舉而分隸九章則又梅氏所志焉未逮也古者九數司徒掌之以教萬民保氏掌之以教國子與五禮六樂五射五馭六書之倫合而謂之道藝夫德行以為體道藝以為之用是故司諫巡問民間則以時書其德行道藝辨其能而可任於國事者由是言之士有國事之責期在體用賅備有如是今屈君將出為

國家分理斯民凡用之於官施之為教淵乎其有本也君以是編屬余撰序余曰昔鄭康成氏遊於馬季長之門三年不得親相質問季長集諸生考論圖緯因疑於算聞其能乃召見之樓上漢晉閒達人學士若張衡王粲闞康之高允咸稱明算且於此學各有論著今屈君所為書信足以補道藝中一事矣適

朝廷開館纂四庫全書九章算經於是逸而復出而以是編者方之古算經猶說文之後不可

無玉篇廣韻以今之詳廣古之略以今之逐事加密盡抉古之奧其在是歟其在是歟

乾隆癸巳日在箕初休寧戴震謹序

自序

古者九數列於六藝掌於保氏以教國子故七十子之徒身通其術秦漢而後代不乏人如洛下閎張衡劉焯祖冲之輩各有著述號爲專家唐宋設明經算學科其書須在學宮令博士弟子肄習誠以算雖小學實格物致知之要務也夫九章之術用以齊七政正五音敬天授民格神和人以至同量衡通食貨便營作莫不賴之以爲統紀其爲道豈淺鮮哉近世以來學士文人以其無關進取遂視爲賈人胥史之事棄置不復留心而里塾教授又僅抄因乘歸除歌訣及方田粟布數法轉相傳習問以九章名目茫然不能舉對良可慨已曾自早歲遊心算學間嘗采輯傳本手自抄錄以備遺忘然於按題立法之故究未能通曉原委洞悉其所以然心嘗格而不化己丑之春因事入都得

聖祖仁皇帝御製數理精蘊伏而讀之討古今之同異集中西之大成蒐羅美備剔抉奥微平日之格而不化者一旦渙然冰釋且得開拓其心胸增廣其聞見因歎

大聖人之制作超出百代之上而又惜薄海內外窮儒寒畯未獲悉覩全書乃不揣固陋舉曩時所輯重加增改一折衷於數理精蘊書凡十有三卷名曰九數通考學者誠取而習之不特古者六藝教人之法可以得其旨趣即我

朝文軌大同制作明備之休亦藉以仰窺萬一矣是爲序

乾隆壬辰季冬之月虞山屈曾發識

例言

謹按

御製數理精蘊以線面體分部九章之義包括無遺精深浩博非初學所能驟窺茲編專爲學算而輯故仍以九章分卷俾學者知九數之名義

近代算書流傳者少坊間所刻程氏統宗號爲善本而平方立方定位未經指明平圓立圓比例未能密合又或僅傳其法而弗申其解習者未能了然於心手間也伏讀數理精蘊條理分明本末晣晰始若發蒙茲編分類輯錄中西一貫逈非向來傳本所及

數理精蘊所載設如各題大約舊傳者十之五新增者十之四舊題而用新法者十之一茲編限於卷帙未能悉登每種僅列一題間有一題而備數法者所以明算法殊塗同歸之趣也

算學理數非圖不顯非說不明茲編圖則細列說則詳著庶幾理數既明而所以用算之法亦迎刃而解學者果能精思熟玩觸類引伸即以窮天下之變不難矣

舊本各種歌訣便於學者記習茲編仍舊俱載間有隱晦舛誤之處重加刪潤改正俾讀者一覽了然

九章設如坊本混淆雜出茲編更分條貫皆有理義細玩自見非好爲更張也

難題昉於劉氏通明算法嗣後吳氏比類程氏統宗遞相纂集然其法皆不離乎九章明其法而善用之題雖難無難也故分輯於各條之中不另標出

數理本原肇於圖書度量權衡根於黃鐘周髀為算書之祖幾何乃西法之宗學算而不講求非先河後海之旨也故弁於卷首竊比
數理精蘊之上編所以立綱明體云爾

方五斜七周三徑一正六面七諸說皆舉大概以立言非可定率以立算向來刻本皆據此為問答鶻突了事安所得真數而求之乎

數理精蘊所載諸物輕重面體比例皆有定率求之不爽毫釐今彙輯卷首以便檢閱

坊本開卷多載因乘歸除自一至九之設如以為初學入門茲編不載非畧也諸法業已散見各條細玩自可得其端緒若初學者無從入手只消以自一至九之數挨列於盤另以自一至九之數各為法以漸習之可耳

各面形求積為丈量田地之原各體形求積為盤量倉窖之原各面形求邊周為分田截積之原各體形求邊周為米求倉窖之原坊本於方田章僅載量田盤倉諸法少廣章僅載截田求倉諸法是求末而遺本也茲編於此二章輯錄獨詳亦欲其探其本耳

割圓之法屢求句股相傳已久西法又有八線六宗三要等說而圓度內外諸線相求之法始備坊本皆闕而不載非通儒之見也茲編另為一卷附於九章之後庶明於三角之法乃得為算學之全云若夫弧三角算係造歷者專家之業故未編入

數理精蘊後載借根借方之法以假數求真數有對數比

例之法以加減代乘除皆西人用筭之捷徑因卷帙浩繁未能悉載惟比例規一法既可以尺代算而於畫圖製器尤所必需故另輯末卷以備參考至於外間所傳籌算筆算等法雖不學可也

數理精蘊命位皆以筆記故有作〇作、之號茲編從俗所便概用珠盤中間立說不無小異然說雖殊而理與法則仍一也

是編所輯大要本於

數理精蘊其間歌訣雜法兼採舊本他如河洛圖說則本

周易折衷方程設例則參梅氏全書不敢忘其所自也

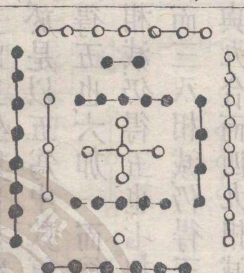
九數通考目錄

虞山屈曾發省園氏輯

圖書爲數學之源

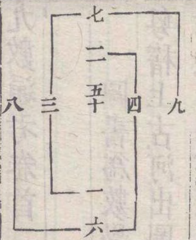
粤稽上古河出圖洛出書八卦是生九疇是叙數學亦於是乎肇焉蓋圖書應天地之瑞因聖人而始出數學窮萬物之理自聖人而得明也溯其本源加減出於河圖乘除出於洛書朱子

河圖



曰河圖以五生數統五成數而同處其方蓋揭其全以示人而道其常數之體也其位一六居下二七居上三八居左四九居右五十居中今考其數始於一中於五終於十而加減之法由是生焉蓋自一而二自二而三自三而四自四

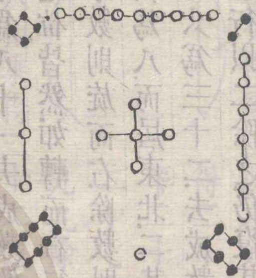
而五此五生數皆挨次遞加一者也自一至五則五又爲一體矣於是以五爲中數復加一而爲六故一與六合而一六相減仍得五也六加一而爲七以五計之實加二故二與七合而二七相減仍得五也七加一而爲八以五計之實加三故三與八合而三八相減仍得五也八加一而爲九以五計之實加四故四與九合而四九相減仍得五也九加一而爲十以五計之實加五故五與十合而五十相減仍得五也此五成數亦挨次遞加而以中數五計之又爲挨位遞加之數凡兩數相加求得一數者兩數相減仍還原數此加減二法相爲



對待者也又作圖以明之如一三七九爲四奇數用中兩率三七相加得十以首率一減之得末率九以末率九減之得首率一若以

首末兩率一九相加亦得十以中兩率三七減之得三如二四六八爲四耦數用中兩率四六相加得十以首率二減之得末率八以末率八減之得首率二若以首末兩率二八相加亦得十以中兩率四減之得六六減之得四故曰河圖爲

洛書



加減之原也朱子曰洛書以五奇數統四耦數而各居其所蓋主於陽以統陰而肇其變數之用也其位戴九履一左三右七二四爲肩六八爲足而五居中今考其數陽以三左行陰以二右行易曰參天兩地而倚數蓋以一乘一以一除一皆不可變故奇數起於三因天圓徑一而圍三也耦數起於二因地方徑一而圍四兩其二也陽以三左

行乘數則旋而左除數則返而右如三其一爲三而居東三其三爲九而居南三其九爲二十七去成數餘七而居西三其二十七爲八十一去成數餘一而居北等而上之至於億兆其餘數之位皆然如轉而右行以三除之仍復其原數矣陰以二右行乘數則旋而右除數則返而左如二其二爲四而居東南二其四爲八而居西南二其八爲十六去成數餘六而居西北二其十六爲三十二去成數餘二而居西南上而億兆亦然如轉而左行以二除之仍復其原數矣此乘除之數見於運行者如此若以對待者觀之一與九對一爲數之始九爲數之終互乘互除其數不變也二與八對二八互乘皆得十六二除之得八八除之仍得二此二與八之相倚也三與七對三七互乘皆得二十一三除之得七七除之仍得三此三與七之相倚也四與

六對四六互乘皆得二十四四除之得六六除之仍得四此四與六之相倚也至五為參兩之合而位於中三二之合五也一四之合亦五也一一二二之積又五也三三四四之積又五之積也此五所以為數之會而位之中與故斜直四圍皆得十五進退循環縱橫交錯總不外於乘除蓋乘除二法相為對待者也又作圖以明之如一三九七為奇數用中兩率三九相乘

得二十七以首率一除之得末率二十七以末率二十七除之得首率一若以首末兩率一與二十七相乘亦得二十七以中兩率三除之得九九除之得三如二四八六為耦數用中兩率四八相乘得三十二以首率二除之得末率十六以末率十六除之得首率二若以首末兩率二與十六相乘亦得三十二以中兩率四除之得八八除之得四故曰洛書為乘除之原也然

洛書固為乘除之原而亦為加減之本今推得洛書加減之法四乘除之法十六積方之法五句股之法四併圖書合一之妙各為圖表以明之如左俾學者知算法之所自昉焉

洛書加減四法

一用奇數左旋相加得相連之耦數

一加三為四　三加九為十二
九加七為十六　七加一為八

若用奇數減左旋相連之耦數得右旋相連之奇數

三減四為一　九減十二為三
七減十六為九　一減八為七

一用耦數左旋相加得相連之耦數

二加六為八　六加八為十四
八加四為十二　四加二為六

若用耦數減左旋相連之耦數得右旋相連之耦數

六減八為二　八減十四為六
四減十二為八　二減六為四

一用奇數右旋加耦數得相連之奇數。
一加六爲七。七加二爲九。九加四爲十三。三加八爲十一。
若用奇數減相連之奇數得相連之耦數。
一減七爲六。七減九爲二。九減十三爲四。三減十一爲八
一用耦數右旋加奇數得相對之奇數。
二加九爲十一。四加三爲七。八加一爲九。六加七爲十三。
若用奇數減相對之奇數得相連之耦數。
九減十一爲二。三減七爲四。一減九爲八。七減十三爲六。

洛書乘除十六法

一用三左旋乘奇數得相連之奇數。
三三如九。九三二十七。三七二十一。三一如三。
一用八左旋乘耦數得相連之耦數。
八八六十四。八四三十二。八二一十六。八六四十八。

一用三左旋乘耦數得相連之耦數。
三四一十二。三二如六。三六一十八。三八二十四。
一用八左旋乘奇數得相連之耦數。
八三二十四。八九七十二。八七五十六。八一如八。
一用二右旋乘耦數得相連之耦數。
二二如四。二四如八。二八一十六。二六一十二。
一用七右旋乘奇數得相連之奇數。
七七四十九。七九六十三。七三二十一。七一如七。
一用二右旋乘奇數得隔二位之耦數。
二九一十八。二三如六。二一如二。二七一十四。
一用七右旋乘耦數得相連之耦數。

七二一十四　七八五十六　七四二十八　七六四十二

一用一乘奇數得本位之奇數

一一如一　一九如九　一三如三　一七如七

一用六乘耦數得本位之耦數

六六三十六　六四二十四　六八四十八　六二一十二

一用一乘耦數得本位之耦數

一二如二　一八如八　一四如四　一六如六

一用六乘奇數得相連之耦數

六七四十二　六三一十八　六九五十四　六一如六

一用四乘耦數得相對之耦數

四四一十六　四二如八　四六二十四　四八三十二

一用九乘奇數得相對之奇數

九九八十一　九三二十七　九一如九　九七六十三

一用四乘奇數得隔二位之耦數

四九三十六　四一如四　四七二十八　四三一十二

一用九乘耦數得相對之耦數

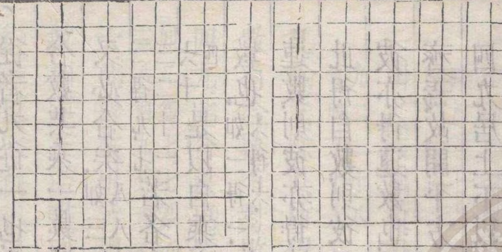
九二一十八　九四三十六　九八七十二　九六五十四

凡除法除其所得之數得其所乘之數茲不再設

數有合數有對數合數生於五對數成於十一六二七三八四九此合數也皆相減而爲五者也五加一爲六六減五爲一是六與一同根也五加二爲七七減五爲二是七與二同根也三八四九其理亦然故凡同根數爲合數一九二八三七四六此對數也皆相併而爲十者也在河圖則合數同方而對數相連在洛書則合數相連而對數相對相合之相從者六從一也七從二也八從三也九從四也如前乘除十六法相對之相

從者，九從一也，八從二也，七從三也，六從四也。如後積方五法。凡以合數共乘一數所得之數必同。乘耦既同數，乘奇則同根。若各自乘焉則又必合矣。如三三得九，八八六十四。以對數共乘一數所得之數必對。如三三得九，七三二十一。若各自乘焉則又必同矣。如一一得一，九九亦八十一。二二得四，八八亦六十四。是以自乘之數相合之相從者，此得自數則彼亦得自數也。如一得一，六得六。此得對數則彼亦得對數也。如四得六，九得一。此得連數則彼亦得連數也。如三得九，八亦得四。二得四，七亦得九。相對之相從者，此得自數則彼得對數也。如一得一，九亦得一。二得四，八亦得四。此得連數則彼亦得連數也。如三得九，七亦得九。二得四，八亦得四。要皆會於一六四九而齊焉，故開平方之自乘數，止於一六四九，而洛書之位，一六四九居上下以為經，二七三八居左右以為緯者此也。

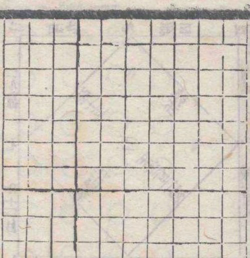
洛書對位成十互乘成百圖



一與九對，成十。十自乘，積一百。其九自乘八十一，一自乘一。一乘九，九乘一，俱爲九，共十八。合之一百。與十自乘積同。

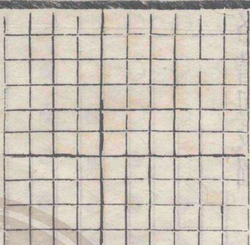
二與八對，成十。八自乘六十四，二自乘四。二乘八，八乘二，俱十六，共三十二。合之一百。

三與七對成十。七自乘四十九。三自乘



九。三乘七七乘三俱二十一共四十二。

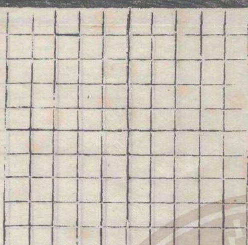
合之一百。



四與六對成十。六自乘三十六。四自乘

十六。四乘六六乘四俱二十四共四十八。

合之一百。

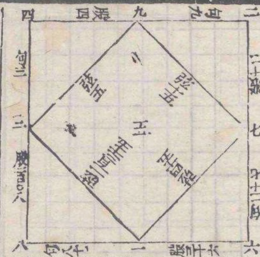


中五含五成十。五自乘二十五。又五自

乘二十五。又五五互乘各二十五共五十。

合之一百。

洛書句股圖



句三股四弦五。

句九股十二弦十五。

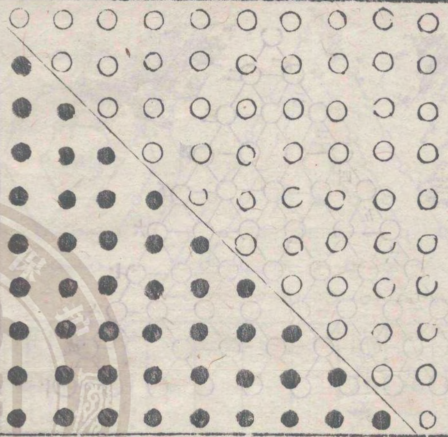
句二十七股三十六弦四十五。

句八十一股一百〇八弦一百三十五。

此洛書四隅合中方而寓四句股之法者推

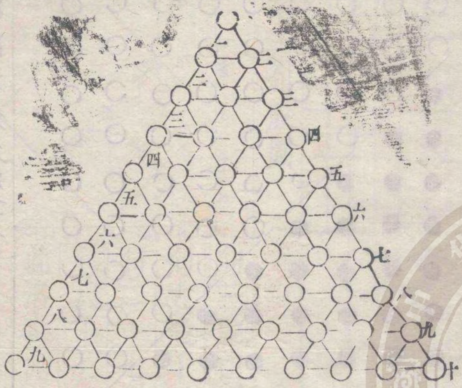
之至於無窮法皆視此。

河洛未分未變方圖



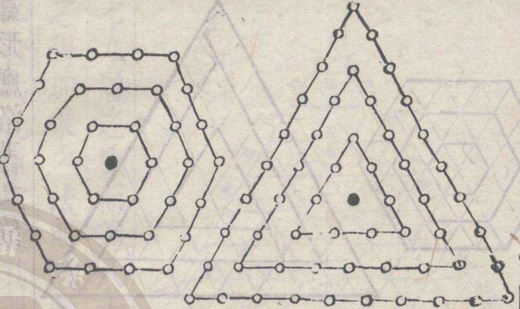
河圖之數五十有五洛書之數四十有五合爲一百此天地之全數也以一百之全數爲斜界而中分之則自一至十者積數五十有五自一至九者積數四十有五二者相交而成河洛數之兩三角形矣凡積數自少而多必以三角而破百數之全方以爲三角其形不離乎此二者下諸圖之根實出於此

河洛未分未變三角圖



河圖之數自一至十洛書之數自一至九象之已分者也圖則生數居內成數居外書則奇數居正偶數居偏位之已變者也如前圖破前方之百數以爲河洛二數又就點數十位中涵冪形之九層以爲河洛合一之數則雖其象未分其位未變而陰陽相包之理三極互根之道已粲然默寓於其中矣故爲分析以明之如後論

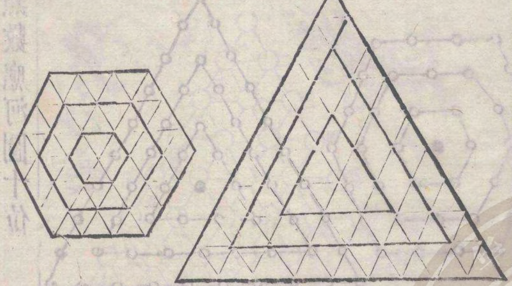
點數應河圖十位



周圍三角分三重中一重九次內一重二九一十八外一重三九二十七除中心凡五十四

中含六角亦分三重中一重六次內一重二六一十二外一重三六一十八除中心凡三十六

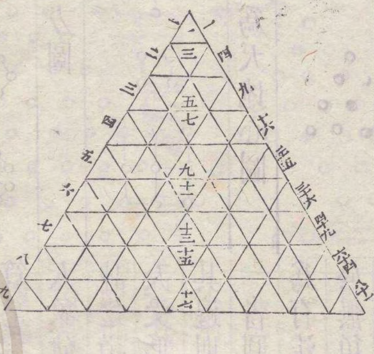
冪形應洛書九位



周圍三角分三重中一重九次內一重三九二十七外一重五九四十五凡八十一

中含六角亦分三重中一重六次內一重三六一十八外一重五六三十凡五十四○以上諸圖本同一根雖積數若異而其爲九六之變則一也

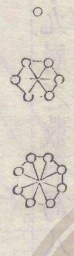
羃形爲算法之原



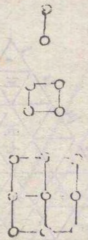
此圖左方注者本數也自一至九而用數全矣中列注者加數也一加二爲三二加三爲五至八加九而爲十七皆以本數遞加而每層之羃積如之右方注者乘數也一自乘一其羃積一二自乘四其羃積合一三兩層而爲四至九自乘八十一則其羃積亦合自一至十七九層之數而爲八十一皆以本數自乘而每形之羃積亦如之得加乘之法則減除在其中矣自此而衍至於無窮其數無不合焉九章之術其理無不貫焉此圖書所以爲算法之原也

圖形合洛書爲象法之原

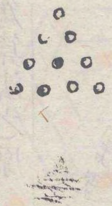
天圓圖



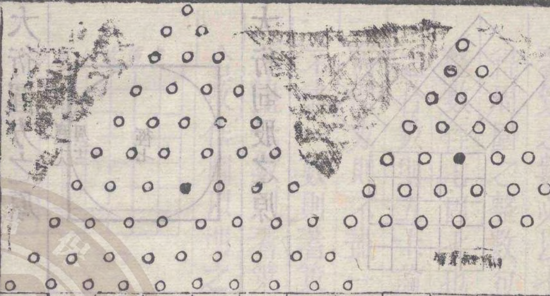
地方圖



人爲天地心圖

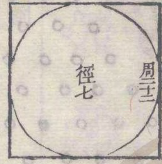


凡有數則有象象不離乎數也萬象起於方圓而測方圓者以三角此句股所以爲算之宗也圓者天象方者地象三角形者人象何則天之道如環無端故其象圓也地之道奠定有常故其象方也人受性於天受形於地猶三角之形其心則圓之心其邊則方之邊也今就九數而三分之則一者圓之根也而十數之內惟六角八角爲有法之圓形其自十以後角愈多以至於無角者視此矣此一六八所以爲圓象之數也二者方之根也而十數之內惟四



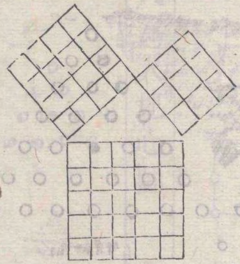
九可以積成方面其自十以後積愈多而皆可成方者視此矣此二四九所以爲方形之數也以十數裁爲三角自一至四則三其心也自一至七則五其心也自一至十則七其心也所謂三角求心之法者如是其自十以後數愈多而皆可以求心者視此矣此三五七所以爲三角形之數也洛書之位一六八居下爲天道之下濟二四九居上爲地道之上行三五七居中爲人道之中處其數其象亦於圖形乎有合矣

大衍圓方之原



凡方圓可爲比例惟徑七者方周二十八圓周二十二卽兩積相比例之率也用其半故若十四與十一合二十八與二十二共五十是大衍之數含方圓同徑兩周數

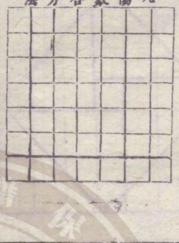
大衍句股之原



句三其積九
股四其積十六
弦五其積二十五
合之五十是大衍之數含句股弦三面積

蓍策之數必以七為用者蓋方圓之形惟以徑七為率則能得周圍之整數句股之形亦惟以三四為率則能得斜弦之整數徑七圍七也句三股四之合亦七也是故論方圓周圍之合數則五十論句股弦之合積亦五十此大衍之體也因而開方則不盡一數而止於四十九此大衍之用也開方而不盡一數則蓍策之虛一者是已方面之中函八句股而又不盡一數則蓍策之掛一者是已惟老陽老陰之數與此密合故作圖以明之

老陽數合方法

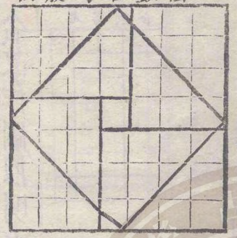


全方四十九

中含大方六六三十六為過揲之數

小角一一如一一六五乘共十二併成十三為掛扐之數

老陰數合句股法



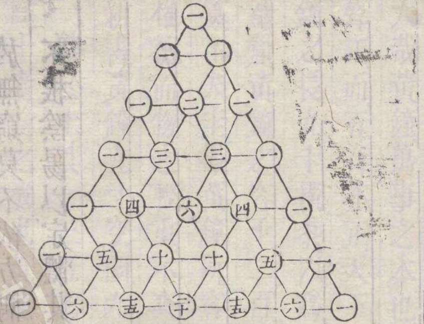
全方四十九

句三股四其積六四因之得二十四為過揲之數

弦五其積二十五為掛扐之數弦實亦含四句股積而多句股較一

十數之中除一一不變自二二至十十皆可成方然惟三三則五數居中七七則二十五數居中此二者為能得天地之中數蓋三三者洛書之數七七者蓍策之數洛書之數五居中矣而其四方則又成四句股之數而以中五為弦之法焉蓍策之數二十五居中矣而其四方則又具四句股之積而即以二十五為弦之實焉蓋大衍之數本於河圖之數其同條共貫者有如此

加倍法圖



此圖用加一倍法如第二層兩一生第三層中位之二併左右兩一成四是倍二爲四也第三層一二各生第四層中位之三併左右兩一成八是倍四爲八也以下放此出於數學中謂之開方求廉率其法以左一爲方右一爲隅而中間之數則其廉法也第三層爲平方第四層爲立方第五層六層七層爲三乘四乘五乘方於成卦之理亦相脗合何則陽大陰小陽如方陰如隅分居兩端陰陽合則生中間之兩象如平方之方隅合而生兩廉其長如方其廣如隅也又乘則生中間之六卦如立方之方隅合而生六廉三平廉根於方而其厚如隅三長廉根於隅而其長如方也故開方之法雖相乘至於無窮莫不依方隅以立算成卦之法雖相加至於無窮莫不根陰陽以定體其理亦一而已

黄鐘爲萬事根本

大哉黄鐘萬事之本也黄鐘立則元聲協而十二律呂亦協宮聲正而五音亦正天下萬物紛錯而不齊者皆由是以定焉黄鐘之長九十横黍以爲分寸尺丈引則曰度而物之長短不差毫釐黄鐘之容千二百黍以爲龠合升斗斛則曰量而物之多寡不失圭撮黄鐘所容千二百黍之重以爲銖兩斤鈞石則曰權衡而物之輕重不爽忽微蓋得其本而物自不能外也律呂新書黄鐘九寸空圍九分積八百一十分注曰天地之數始於一終於十其一三五七九爲陽九者陽之成也二四六八十爲陰十者陰之成也黄鐘陽聲之始陽氣之動也故按其數九寸分之數具於聲氣之元不可得而見及斷竹爲管吹之而聲和候之而氣應而後數始形焉均其長得九寸審其圍得九分積其實得八百一十分是爲律本度量權衡於是而受法十一律由是而損益焉蓋理者氣之體氣者理之用惟理出於自然故數亦出於自然也

黄鐘生度

黄鐘之管其長横累秬黍中者九十粒一粒爲一分十分爲寸十寸爲尺十尺爲丈十丈爲引古法四丈爲疋五丈爲端今無定則分下有釐毫絲忽微纖沙塵埃渺漠模糊逡巡須臾瞬息彈指刹那六德虛空清淨釐毫以下皆以十析若平方則百分爲寸立方則千分爲寸丈尺與毫釐以下皆同

黄鐘生量

黄鐘之管容秬黍中者一千二百粒爲一龠兩其龠爲合十合爲升十升爲斗十斗爲石今法合下有勺撮抄圭粟亦以十析

黄鐘生衡

黃鐘所容千二百黍重十二銖倍其銖爲兩十六兩爲斤三十斤爲鈞四鈞爲石今法兩下有錢分釐分釐以下並與度法同

凡度量衡自單位以上如度法之丈量法之石衡法之斤兩皆爲單位則曰十百千萬億兆京垓秭穰溝澗正載極恒河沙阿僧祇那由他不可思議無量數自億以上有以十進者有以萬進者有以自乘之數進者今立法俱以萬進如萬萬曰億萬億曰兆之類是也

歷法則曰宮度三十度分六十分秒六十秒微六十微纖六十纖忽六十忽十芒芒六十塵塵凡自度以下須每項列兩位如幾十幾度幾十幾分之類

又有日二十四小時十二時又爲時四刻八刻又以小刻分十五分以下與前同

田法則曰頃百畝畝積二百四十步分積二十四步十分以下釐毫絲忽同度法

里法則三百六十步計一百八十丈爲一里古稱在天一度在地二百五十里今尺驗之在天一度在地二百里蓋古尺得今尺十分之八實緣縱黍橫黍之分也按今尺係工部營造尺古尺係周尺今將二尺圖後

石法二千五百寸此亦舊法古今尺度不同量法又異須以今斛米一石量得今尺上若干寸較準石法推算方得密合今設例從舊法

諸物輕重率此係較準新法用工部營造尺將諸物製爲立方其邊一寸其積千分較量毫釐諸物如一乃以部平逐樣細秤得其輕重故與舊法迥殊焉

赤金十六兩八錢	紋銀九兩
水銀十二兩二錢八分	紅銅七兩五錢
白銅六兩九錢八分	黃銅六兩八錢
鋼六兩七錢三分	生鐵六兩七錢
熟鐵六兩七錢三分	高錫六兩三錢

六錫七兩六錢　倭鉛六兩
黑鉛九兩九錢三分　白玉二兩六錢
金珀八錢　白瑪瑙二兩三錢
紅瑪瑙一兩二錢　硨磲一兩五錢二分
青石二兩八錢八分　白石二兩五錢
紅石二兩五錢六分　象牙一兩五錢四分
牛角一兩九錢　沉香八錢三分
白檀八錢三分　紫檀一兩〇二分
花梨八錢七分　楠木四錢八分
黃楊七錢五分　烏木一兩一錢
油八錢　水九錢三分

附各面各體比例定率凡各面各體皆有比例之定率其散見於各法者恐難查考茲特彙列卷首以便檢閱

黃鐘爲萬事根本

周徑定率

徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇	周	一〇〇〇〇〇〇〇〇
周	三一四一五九二六五	徑	三一八三〇九八八

又

圓面積與周方積比例定率

圓面	一〇〇〇〇〇〇〇〇	周方	一〇〇〇〇〇〇〇〇
周方	一二五六六三七〇六二	圓面	七九五七七四七

又

方斜定率

方	一〇〇〇〇〇〇〇〇
斜	一四一四二一三五六

理分中末線定率

全分	一〇〇〇〇〇〇〇〇

大分	一六一八〇三三九九
小分	三八一九六六〇一

邊線相等面積不同定率　又

方	一〇〇〇〇〇〇〇〇	圓	一〇〇〇〇〇〇〇〇
圓	七八五三九八一六	方	一二七三二三九五四
三邊	四三三〇一二七〇	三邊	五五一三二八八九
五邊	一七二〇四七七四一	五邊	二二九〇五七九八六
六邊	二五九八〇七六二〇	六邊	三三〇七九七三三四
七邊	三六三三九一二四〇	七邊	四六二六八四〇九八
八邊	四八二八四二七一二	八邊	六二四七七四四三五
九邊	六一八一八二四二〇	九邊	七八七〇九四三〇二
十邊	七六九四二〇八八三	十邊	九七九六五七〇九九

面積相等邊線不同定率　又

方	一〇〇〇〇〇〇〇〇	圓	一〇〇〇〇〇〇〇〇
圓	一一二八三七九一六	方	八八六二二六九二
三邊	一五一九六七一三七	三邊	二三四六七七三六九
五邊	七六二三八七〇五	五邊	六七五六四七九三
六邊	六二〇四〇三二四	六邊	五四九八一八〇五
七邊	五二四五八一二六	七邊	四六四八九八〇三
八邊	四五五〇八九八五	八邊	四〇三三二二八八
九邊	四〇二一九九六三	九邊	三五六四四〇一四
十邊	三六〇五一〇五八	十邊	三一九四九四一八

求圓內各形之一邊定率　求圓內各形之面積定率

圓徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇	圓徑方	一〇〇〇〇〇〇〇〇

三邊	八六六○二五四○
方	七○七一○六七八
五邊	五八七七八五二五
六邊	五○○○○○○○
七邊	四三三八八三七四
八邊	三八二六八三四三
九邊	三四二○二○一四
十邊	三○九○一六九九

三邊	三二四七五九五三
方	五○○○○○○○
五邊	五九四四一○三一
六邊	六四九五一九○五
七邊	六八四一○二五四
八邊	七○七一○六七八
九邊	七二三一三六○六
十邊	七三四七三一五六

求圓外各形之一邊定率

圓徑	一○○○○○○○○
三邊	一七三二○五○八○
方	一○○○○○○○○
五邊	七二六五四二五二
六邊	五七七三五○二七
七邊	四八一五七四六二
八邊	四一四二一三五六
九邊	三六三九七○二四
十邊	三二四九一九七○

求圓外各形之面積定率

圓徑方	一○○○○○○○○
三邊	一二九九○三八一○
方	一○○○○○○○○
五邊	九○八一七八二六
六邊	八六六○二五四○
七邊	八四二七五五八
八邊	八二八四二七一二
九邊	八一八九三○三
十邊	八一二二九九二四

圓與圓內各形面積定率

圓積	一○○○○○○○
三邊	四一三四九六六七
方	六三六六一九七七
五邊	七五六八二六七二
六邊	八二六九九三三四

圓與圓外各形面積定率

圓積	一○○○○○○○○
三邊	一六五三九八六六九
方	一二七三二三九五四
五邊	一一五六三二八三四
六邊	一一○二六五七七九

七邊	八七一〇二六四一	七邊	一〇七三〇二九七四
八邊	九〇〇三一六三一	八邊	一〇五四七八六一七
九邊	九二〇七二五四二	九邊	一〇四二六九七九一
十邊	九三五四八九二八	十邊	一〇三四二五一五二

邊線相等體積不同定率　　又

立方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇	球	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
球	五二三五九八七七五	立方	一九〇九八五九三二七
四面	一一七八五一一一二九	四面	二二五〇七九〇七七
八面	四七一四〇四五二一	八面	九〇〇三一六三一七
十二面	七六六三一一八九〇三	十二面	一四六三五四七九〇五一
二十面	二一八一六九四九六九	二十面	四一六六七三〇四六三

體積相等邊線不同定率　　又

立方	一〇〇〇〇〇〇〇〇	球	一〇〇〇〇〇〇〇〇
球	一二四〇七〇〇九八	立方	八〇五九九五九七
四面	二〇三九六四八九〇	四面	一六四三九四八八一
八面	一二八四八九八二九	八面	一〇三五六二八五
十二面	五〇七二二〇七	十二面	四〇八八一八九五
二十面	七七一〇二五三四	二十面	六二一四四三三二

求球內各形之一邊定率　　求球內各形之體積定率

球徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇	球徑方	一〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	八一六四九六五八	四面	六四一五〇〇二九
立方	五七七三五〇二六	立方	一九二四五〇〇八六
八面	七〇七一〇六七八	八面	一六六六六六六六
十二面	三五六八二二〇九	十二面	三四八一四五四八二

二十面	五二五七三一一	二十面	三一七〇一八八三三

求球外各形之一邊定率　求球外各形之體積定率

球徑	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇	球徑方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	二四四九四八九七四	四面	一七三二〇五〇八〇七
立方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇	立方	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
八面	一二二四七四四八七	八面	八六六〇二五四〇三
十二面	四四九〇二七九七	十二面	六九三七八六三六七
二十面	六六一五八四五三	二十面	六三一七五六九九九

球與球內各形體積定率　球與球外各形體積定率

球積	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇	球積	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
四面	一二二五一七五三〇	四面	三三〇七九七三三七二
立方	三六七五五二五九〇	立方	一九〇九八五九三一七

八面	三一八三〇九八八五	八面	一六五三九八六六八六
十二面	六六四九〇八八九一	十二面	一三二五〇三四三五八
二十面	六〇五四六一三七二	二十面	一二〇六五六六九九一

周髀經解

昔者周公問於商高曰竊聞乎大夫善數也請問古者庖犧立周天歷度

周天歷度者分周天三百六十度爲推求歷日之用也按通鑑載包犧作甲歷又易大傳言包犧仰以觀於天文俯以察於地理其觀察之時必有度數以紀其法象則歷度始於包義無疑矣

夫天不可階而升地不可將尺寸而度請問數從安出

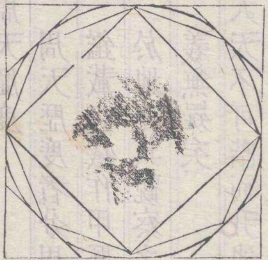
天之高明地之博厚非人力所能及其歷度之數不知從何而得也

商高曰數之法出於圓方

萬物之象不出圓方萬象之數不離圓方河圖者方之象也洛書者圓之象也太極者圓之體奇也四象者方之體偶也奇數天也耦數地也有天地而萬物於是乎生有圓方而萬象於是乎定有奇耦而萬數於是乎立矣

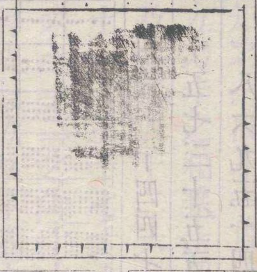
圓出於方

以數而論出於圓方以圓方而論則圓出於方蓋方易度而圓難測方有盡而圓無盡故推圓者以方度之以有盡而度無盡也是以圓周內弦外切屢求句股爲無數多邊形以切近圓界將合而爲一而圓周始得故曰圓出於方也



方出於矩

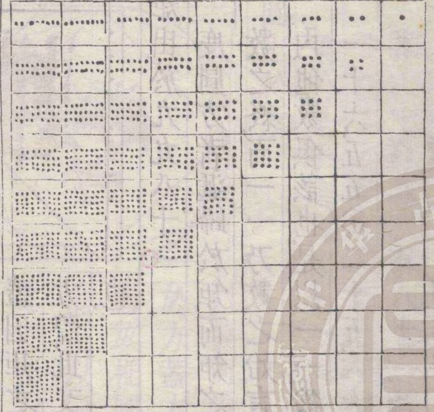
孟子曰不以規矩不能成方圓夫規所以



成圓。而矩所以成方也。故凡方形必出於二矩相合。如矩之二股均者合之卽爲正方。矩之二股一大一小者合之則爲長方。蓋因矩之爲形其角直其線正。所以能成方體。此又直內方外之理。故曰方出於矩也。

矩出於九九八十一。

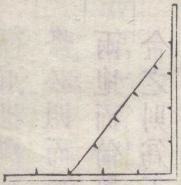
度圓方者遞歸於矩。而矩之形總不外乎二數相乘。九九者數之終。而一一乃數之始。言九九而不及他數者。以九九之內他數俱該也。是以一一爲一。二二爲四。三三爲九。四四爲一十六。五五爲二十五。六六爲三十六。七七爲四十九。八八爲六十四。九九爲八十一。乃矩之二股均平所成之正方也。



一二爲二。一三爲三。一四爲四。一五爲五。一六爲六。一七爲七。一八爲八。一九爲九。形雖未方。而其理猶存也。二三爲六。二四爲八。二五一十。二六一十二。二七一十四。二八一十六。二九一十八。三四一十二。三五一十五。三六一十八。三七二十一。三八二十四。三九二十七。四五二十。四六二十四。四七二十八。四八三十二。四九三十六。五六三十。五七三十五。五八四十。五九四十五。六七四十二。六八四十八。六九五十四。七八五十六。七九六十三。八九七十二。乃

矩之一股小一股大所成之長方也至於一百之類雖爲正方乃十之相乘十則仍歸於一也又如八十四九十六之類乃六七四十二六八四十八之倍不得自立爲數之本又或十一十三十七十九之類十一爲二五一十之奇十三爲二六一十二之奇十七爲二八一十六之奇不得成正方亦不得成長方故不入九九之數也只以九九之數爲方之本而方之形必合以矩故曰矩出於九九八十一也

故折矩以爲句廣三股修四徑隅五



前言圓方之形此言句股生成之正數也以二矩合之既爲方形今以一矩折之則爲一方之兩邊是以折矩之橫者爲句之廣折矩之縱者爲股之長於句股之末以斜弦連之是爲徑隅徑直也隅角也言自兩角相對直連之也句之廣必三股之修必四而徑隅始得五此乃自然生成之正分也易曰參天兩地而倚數天數一參之則爲三地數二兩之則爲四三二合之則爲五此又句三股四弦五之正義也

既方其外半其一矩

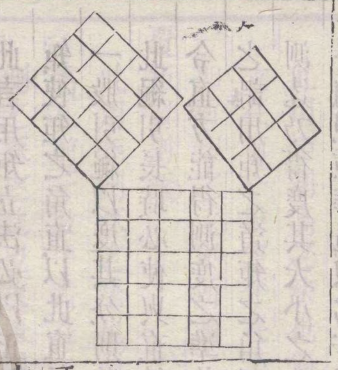
此言句股之面積也句股以弦連之不得爲方形必再合一矩乃爲一長方所謂方其外者言弦之外復加一矩以成方也句三股四相乘得一十有二即爲兩矩合成之數半之得六乃句股之面積所謂半其一矩者也

環而共盤得成三四五

此言句股弦相和之數也環而共盤者環繞盤旋於句股弦之周圍得成三四五共之爲一十有二乃三數相和總數也

兩矩共長二十有五是爲積矩

此言句股相求之法也



兩矩者句與股也其所以相求者以句股弦各面積彼此加減以立法也句三自乘爲九股四自乘爲十六合計之爲二十五是句股各自乘之積相併而與弦自乘積等故曰積矩也弦自乘積內減句自乘之積得股自乘之積若減股自乘之積得句自乘之積故爲句股弦相求之法也

故禹之所以治天下者此數之所由生也

言禹平成之功昭垂萬古推厥所以奏績者必藉句股以審高下始得順水之性而告厥成功然則禹之所以治水者非此句股之法所由生乎

周公曰大哉言數請問用矩之道

商高曰平矩以正繩

此言用矩立法必以正且直也平矩以正繩有兩義平置其矩使矩之角直以此直角之一股或橫或平（橫以度遠 平以度高）復自一股引繩以度其分則此分爲我所知故以所知推所不知此繩引長時必使與直角對正不論其分之幾何引之又必令直方能得測度之準故爲平矩以正繩又平者均平準齊之謂用矩之道矩之角正（即直角之謂）然後二股得直以之測高測遠乃得度其大小之分此矩既正而所測之度亦正矣孟子曰規矩準繩以爲方圓平直繩者即準之之意規矩所以度方圓而準繩所以考平直故準之以平繩之以直始得立

法之精微故曰平矩以正繩也

偃矩以望高

此用矩測高之法也偃者仰也仰矩方可測高矩之一股直立在前一股定平在下然後比例推之蓋平股與立股之比卽所知之遠與所測之高之比也故仰測而得高

覆矩以測深

此用矩測深之法也覆者俯也俯矩方可測深矩之一股立者在前一股平者在上平股與立股之比卽所知之遠與所測之深之比也故俯測而得深

臥矩以知遠

此用矩測遠之法也臥者平也平矩方可測遠以矩之一股爲橫向內一股爲縱向前是以橫與縱之比卽所知之度與所求之遠之比也故平測之而得遠

環矩以爲圓

此用矩爲圓之法也以矩之一端爲樞一端旋轉爲圓則成一圓環矩者卽旋規之說也

合矩以爲方

此用矩爲方之法也矩二股也兩矩相合乃成一方卽前方出於矩之說也

方屬地圓屬天天圓地方

前言用矩以測高深廣遠復用矩以爲圓方此以圓方屬之天地者非以形體言蓋以陰陽動靜之理言也樂記云著不息者天也著不動者地也不息故運而不積圓之象也不動故靜而有常方之理也且圓之數無盡而方之數有盡天不

可階而升測天者恒於地上度之是仍以方度圓也凡數之不盡者必奇數之可盡者必耦是以陽爲奇陰爲耦此方圓之理數所以屬乎天地也

方數爲典以方出圓

典則也言圓之數奇零不盡不可爲則故惟方數可爲典則以方出圓者以方之形度圓之形從方數中生出圓數卽前圓出於方之說也如圓徑求積則以徑自乘之爲正方形而以方率圓率比例推之卽得圓積是皆以方出圓之理也

笠以寫天天青黑地黃赤天數之爲笠也青黑爲表丹黃爲裏以象天地之位

此卽儀象以表天地之形色也笠形圓故以象天寫象也青黑天之色黃赤地之色天數之爲笠形則以青黑爲表丹黃

爲裏以象天地之位蓋取天包地之象也

是故知地者智知天者聖智出於勾勾出於矩夫矩之於數其裁制萬物惟所爲耳

天地之高深廣遠非聖智不能知然聖智非由理之自然亦不能無所憑藉而知也故明勾股之數卽可以知地而爲智知地之數卽可因地以知天而爲聖矣故曰智出於勾也然勾股之形又賴矩以成故矩爲勾股之本而天地之高深廣遠皆賴矩以測况萬物之大小巨細豈能外於矩之度分乎故矩之於數其裁制萬物惟其所爲而無不可也

周公曰善哉

以周公之聖而與之曰善哉則其得數之本立法之妙可謂至矣至是而周髀之義盡矣

幾何原本節錄

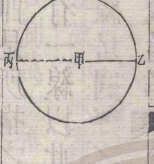
凡論數度必始於一點自點引之而爲線自線廣之而爲面自面積之而爲體是名三大綱是以有長而無濶者謂之線有長與濶而無厚者謂之面長與濶厚俱全者謂之體

線有直曲兩種其二線之一端相合二端漸離必成一角二線若俱直者謂之直線角一直一曲者謂之不等線角二線俱曲者謂之曲線角

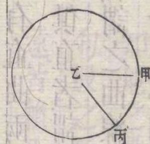
凡命角必用三字而以中一字爲所指之角如甲乙丙三角形指甲角則云乙甲丙角是也亦有單舉一字者則其所舉之一字即是所指之角也

凡有一線以此線之一端爲樞一端爲界旋轉一周即成一圓此線居圓徑之半謂之半徑線如甲乙若引長至圓之對界將全

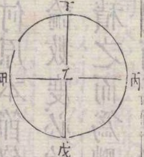
圓平分爲二即爲全徑線如丙乙若自圓心至圓界作幾何半徑線皆謂之輻線其圓線即謂之圓界圓界內所積之面度謂之圓面



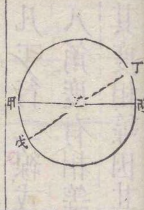
凡圓線分界之所皆以所對之角而命其弧因其形似弧故名之而角又以所對之弧而命其度弧大者角亦大弧小者角亦小蓋角度俱在圓界而圓界爲角度之規也如乙角爲心甲丙爲界則乙角相對之界即甲丙弧而甲丙弧即乙角之度也



凡角相對之弧得圓界四分之一者此角必直謂之直角如第

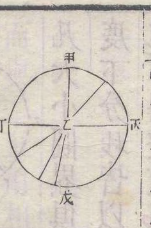


一圖丁乙丙丙乙戊丁乙甲甲乙戊四角是也若不足四分之一者謂之銳角如第二圖丁乙丙甲乙戊二角是也若過於四分之一者謂之

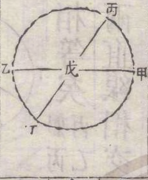


鈍角如第二圖丁乙甲丙乙戊二角是也其二角兩尖相對則曰對角如兩銳角相對兩鈍角相對也二角兩尖相並則曰並角如一銳角與一鈍角相並也

凡有一圓將全徑線平分爲二如丙乙丁線每半圓界內自徑線中心如乙作相並之幾角此幾角之共度必與兩直角等蓋用雖多寡不同銳鈍各異然總在全徑線所限半圓界內爲全圓界四分之二故與二直角相等也若合全圓論之作衆輻線衆角雖多亦必與四直角相等矣如丙甲丁乙半圓內三角與兩直角度等丙乙丁戊半圓內四角亦與兩直角度等



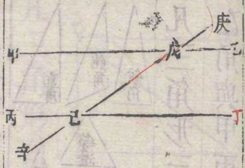
凡兩直線相交所成二對角之度必俱相等如甲乙丙丁二線交於戊處成甲戊丁丙戊乙二對角斯二鈍角之度必等又成甲戊丙丁戊乙二對角斯二銳角之度亦必等今試以二線相交之處爲心旋轉作一圓則二線俱爲此圓之全徑線而一圓俱兩平分其相對之弧度必俱相等弧度既等故相對之角度亦必相等也



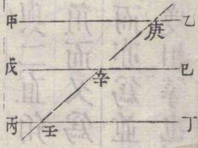
凡大小圓界俱定爲三百六十度取其數無奇零便於布算也度下分杪皆以六十起數以三百六十乃六六所成以六十度之可得整數也

凡二線之間寬狹相離之分俱等則此二線謂之平行線雖引至無窮其端必不能相合以其遠近雖殊皆爲平行線也

凡平行二線或縱或斜作一直線交加於上如庚辛則成八角此八角度有相等者必是對角或內外角如庚戊乙甲戊己二角其度相等因其兩尖相對謂之對角庚戊乙戊己丁二角其度

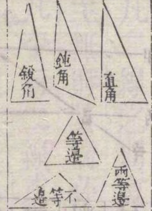


亦相等因其在平行二線之內外故謂之內外
角甲戊己戊己丁二角其度亦相等因其俱在
二平行線之內而立斜線之左右故又謂之相
對錯角庚戊甲丁己辛二角其度亦相等因其
俱在平行二線之外故謂之外角乙戊己丙己
戊二角其度亦相等因其又俱在平行二線之內故又謂之內
角總之二平行線上交以斜線所成八角必兩兩相等也惟平
行線上一邊之二內角或一邊之二外角謂之並角其度不等
而與二直角相等如甲戊庚與乙戊庚丁己辛與丙己辛雖為
外角而又為並角乙戊己與甲戊己丁己戊與丙己戊雖為內
角而亦為並角以其同出於一線之一邊故謂之並角與二直
角度相等也



凡平行二線之間再作一平行線如戊己則三線
互相為平行也在此三線上照前作一庚辛壬
斜線則所成之庚辛二角必相等而辛壬二角
亦必相等也

凡各種界所成俱謂之形其直界所成者為直界形曲界所成
者為曲界形直界形未有少於三角形者故三角形為諸形之
首一角直者為直角三角形一角鈍者為鈍角三角形三角俱



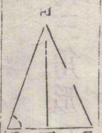
銳者為銳角三角形三邊線度等者為等邊三
角形兩邊線度等者為兩等邊三角形三邊線
度俱不等者為不等邊三角形

凡三角形三角度相併必與二直角度等如甲乙丙三角形自
乙角與甲丙線平行作乙丁線則成丙乙丁角與丙角為二尖

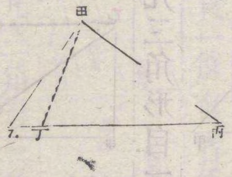
交錯之角其度必等而甲乙丁角亦爲直角今於直角內減丙乙丁角所餘爲甲乙丙角與丙角相併不適得一直角之度耶再加以甲角與二直角等矣

凡三角形自一界線引長成一外角此外角度與形內二銳角度等蓋甲乙丙三角形三角度相併原與二直角等今乙丙外角丙乙甲爲內角丙乙丁爲外角相併亦與二直角等則減去內角所餘外角與甲丙二銳角其度相等矣

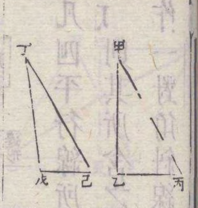
三角形之兩邊線若等其底線之兩角度亦必等若自上角至底作一直線將底線平分爲兩則此線爲上角之分角線又爲底線之中垂線也如甲丁



凡三角形內長界所對之角必大短界所對之角必小如甲乙丙三角形乙丙界長於甲丙界故所對之甲角大於乙角而甲乙界短於甲丙界故所對之丙角小於乙角試依甲丙界度截乙丙於丁復自甲至丁作甲丁線即成甲丙丁兩等邊三角形夫甲丙丁丙兩界既等則甲丁丙丁甲丙兩角亦等今甲丁丙角相等之丁甲丙角原自乙甲丙角所分則乙甲丙角必大於甲丁丙角矣然此甲丁丙角爲甲乙丁小三角形之外角與小形內之甲乙二角共度等既與甲乙二角共度等則大於乙角可知矣夫甲丁丙角既大於乙角則乙甲丙角必更大於乙角矣丙角之小於乙角其理亦同

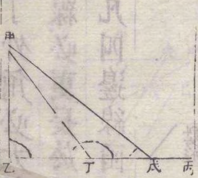


凡三角形內必有二銳角蓋三角形之三角併之與二直角等

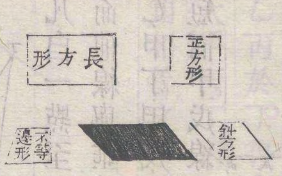


如甲乙丙三角形乙角爲直角則所餘甲角丙角併之始與乙角等故此甲丙二角爲銳角也又如丁戊己三角形戊角爲鈍角則所餘之丁角己角愈小於直角而爲銳角矣

凡自一點至一横線作衆線而衆線內有一垂線必短於他線而他線與垂線相離愈遠則愈長也如自甲點至乙丙線作甲乙甲丁甲戊幾線此丙甲乙爲垂線較之甲丁甲戊線其度最短而甲戊線與甲乙線相離旣遠於甲丁故更長於甲丁線葢

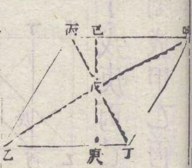


甲乙爲垂線則乙角必爲直角而甲乙丁三角形內丁角甲角必俱爲銳角而小於乙角矣因乙角大於丁角故所對之甲丁線必長於甲乙線又甲丁戊外角原與甲乙二內角共度等則丁外角必大於乙丙角矣因丁外角大於乙角故所對之甲戊線必更長於甲丁線也



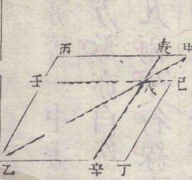
凡四邊線函四角者其形有五四邊線度等而角度亦等者爲正方形四直角而兩邊線短兩邊線長者爲長方形四邊線度等而角度不等者爲等邊斜方形兩邊線長兩邊線短而角度又不等者爲兩等邊斜方形以上四形俱自平行線出如四邊線不等亦不平行而四角度又不等者爲不等邊斜方形

凡四平行線所成方形其兩兩平行線度俱相等如丙甲與乙丁丙乙與甲丁則其所含之角成兩對角亦必兩兩相等如甲乙兩對角若丙丁兩對角作一對角斜線如甲乙則平分爲兩三角形如丙甲乙與丁甲乙其對角之



度必等。如丙角與丁角。而二尖交錯之角。其度亦必兩兩相等。如丙甲乙與丁乙甲丙乙甲與丁甲乙。若作兩對角線。如甲乙與丙丁。則平分為四三角形。其相交處必平分二線之正中。如戊。而所成四線。亦必兩兩相等。如甲戊戊乙丙戊戊丁。其相對之各角。與二尖交錯之各角。亦必兩兩相等。若再於對角線上。或縱或橫。正中截開。如己庚。則又平分為六三角形。其相對之線度角度。亦無不相等也。

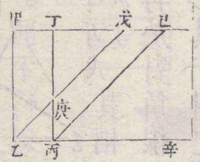
凡四邊形。於對角線不拘何處。如戊。復作相交二平行線。如壬戊己辛戊



庚二線相交。則成四四邊形。如甲己戊庚戊辛乙壬庚戊壬丙己丁辛戊四形。又卽成四三角形。如甲己戊甲庚戊兩小三角形戊辛乙戊壬乙兩中三角形。及兩長方形。如己丁辛戊庚戊壬丙。蓋甲丁乙丙之全形。因甲乙對角線。平分為甲丁乙。甲丙乙。兩

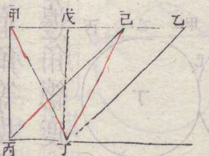
大三角形。其分俱等。今一小方形。復平分為兩小三角形。其分亦等。一中方形。復平分為兩中三角形。其分亦等。則所餘二長方形。亦自然相等也。

凡兩平行線內。所作之四邊形。其底度若等。則面積必俱等。如甲己乙辛兩平行線內。於乙丙底。作甲乙丙丁長方形。戊乙丙己斜方形。此兩形雖不同。而所容之分必等。何也。試以兩三角



形考之。如甲乙戊。丁丙己。兩三角形。其甲乙。丁丙二線等。甲戊。丁己二線等。甲角丁角俱為直角。其度又等。則此兩三角形。自然相等。今於兩三角形內。各減去丁戊庚形。則所餘之甲乙庚丁戊。庚丙己。二形之分必等。復於此二形內。各加一庚乙丙形。則成甲乙丙丁。戊乙丙己。兩四邊形。其面積必然相等也。

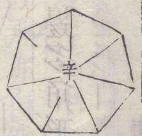
凡兩平行線內所作之三角形其底度若等則面積必俱等如甲乙丙丁兩平行線內於丙丁底作甲丙丁三角形己丙丁三



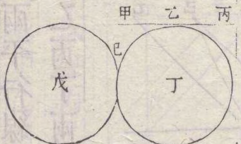
角形此兩形之積必等何也自丁至戊作一直線與甲丙平行再自丁至乙作一直線與丙己平行即成甲丙丁戊己丙丁乙兩四邊形此二形既同出於丙丁底其面積相等今兩三角形俱平分四邊形之一半其面積亦必相等矣

凡等邊等角各形內五邊者爲五角形六邊者爲六角形邊愈多角愈多者俱隨其邊與角而名之焉

多邊多角形自角至心作線凡有幾界即成幾三角形設如辛七邊形自辛至邊七角作七線即成七三角形而此各三角形

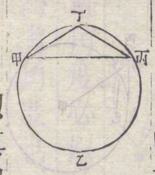


之分俱等若欲知各邊角之總度則將邊數加一倍得數減四所餘即各邊角之總度如辛七邊形則加一倍得十四減去四餘十即七邊形之各邊角總度也何則凡三角形之三角與二直角度等七邊形成三角形者七共與十四直角等而辛心所有之七角又與四直角等故於十四直角內減四直角餘十直角與七邊形之各邊角總度相等矣



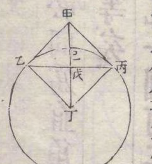
凡有直線切於圓界而不與圓界出入相交者謂之切線如甲乙丙線切於丁圓之乙界是也又如此圓界與彼圓界相切而不相交則謂之切圓如丁戊二圓於己界相切二界總未相交也

凡一直線橫分圓之兩界謂之弦線如甲丙其所分圓界之兩段皆謂之弧如甲丁丙甲乙丙此弧與弦相交所成之二角謂之弧分角如甲丙乙丙甲乙二角又如甲丙丁丙甲丁二角



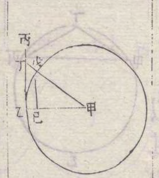
自弦線之兩端作二直線相遇於圓界之一處如甲丁丙丁二線相遇於丁所成之角如甲丁丙角謂之圓分內角又謂之弧分相對之界角以其與甲乙丙弧相對也

圓弦線上自圓心作一中垂線如丁戊則將弦線兩平分如戊丙與戊乙若自圓心至弦線兩端作二輻線如丁丙與丁乙成一丁丙乙三角形此三角形之二輻線既等則中垂線所分之丙戊戊乙二段必等若將中垂線引長至弧界己則又將弧界兩平分矣如己丙與己乙若自弦線兩端與圓界相切各作一切線如丙甲與乙甲相遇於甲此二線之度必等



又即爲二輻線之垂線矣因其爲垂線則甲乙丁甲丙丁二角必同爲直角而甲丙乙與丁丙乙兩三角形其度亦必兩兩相等矣

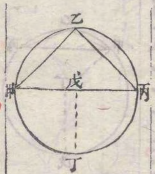
凡一圓有二輻線如甲乙與甲戊截弧之一段所成三角形謂之分圓面形如甲戊乙一段若欲取弧界各角之度則用三種線求之一爲弧之切線如於甲乙輻線之末與圓界相切作丙乙垂線是也二爲弧之割線如自圓心甲將甲戊線引長割出至切線丁處作甲丁線是也三爲弧之弦線如從圓界戊至甲乙輻線作戊己垂線是也若欲取甲角相對弧度於此三線取之皆得乙戊弧之度焉



一圓界內任於圓界一段至圓心作二線如甲丙與乙丙至圓界作二線如甲丁與乙丁即成二角在圓心者爲心角如甲丙乙在圓界者爲界角

如甲丁乙凡心角界角形雖不一其所對弧度若等則心角皆大於界角一倍若心角所對弧度居界角所對弧度之一半則兩角之度相等蓋凡量角度必以角為圓心真度乃見故界角所對之弧僅得其半為真角度也

凡圓內界角立於圓界之半者為直角如甲乙丙界角立於甲丁丙圓界之正一半則乙角必為直角也試自圓心戊至圓界



丁作戊丁輻線即成甲戊丁心角其相對之甲丁弧為圓界四分之一則戊角亦必為直角夫戊心角所對甲丁弧正為乙界角所對甲丁丙弧之一半則戊心角度必與乙界角度相等也

凡圓內界角其所對之弧過於圓界之一半者為鈍角如甲乙

丙界角相對之甲戊丙弧大於圓界之一半則乙角必為鈍角也試將甲戊丙弧平分於戊為甲戊丙戊兩段復自圓心丁至

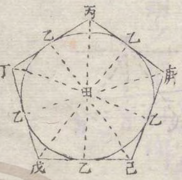
甲戊作二輻線即成甲丁戊心角其相對之甲戊弧過於圓界四分之一則丁角亦必為鈍角夫丁心角所對甲戊弧正為乙界角所對甲戊丙弧之一半則丁心角度必與乙界角相等也

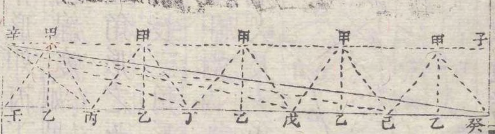
凡圓內界角其所對之弧不及圓界之一半者為銳角如甲乙丙界角相對之甲戊丙弧小於圓界之一半則乙角必為銳角也試將甲戊丙弧平分於戊為甲戊丙戊二段復自圓心丁至

甲戊作二輻線即成甲丁戊心角其相對之甲戊弧小於圓界四分之一則丁角亦必為銳角夫丁心角所對甲戊弧正為乙界角所對甲戊

丙弧之一半。則丁心角度。必與乙界角度相等也。

凡函圓各形之各邊線。與圓界相切而不相交。則謂之函圓切界形。如丙丁戊己庚五角形。各邊皆切於圓界也。其所函圓之輻線度。如甲乙。與一直角長三角形之小邊度等。如辛壬癸形之辛壬邊。而五角形之五邊共度。如丙丁類五邊。又與長三角形之大邊度等。如壬癸邊。則長三角形之面積。與函圓五角形之面積亦等。何則。試自圓心甲對丙丁戊己庚五角各作分角線。即成甲丙丁類五三角形。夫長三角形之壬癸度。既與五角形之五邊共度等。今將壬癸底線平分爲五。依前所分五三角形式。作甲壬丙類五正式三角形。復自所分丙丁戊己四處。俱向辛角各作四線。遂分辛壬丙類五斜式三角形。再於五正式三角形內。自甲角至底。各



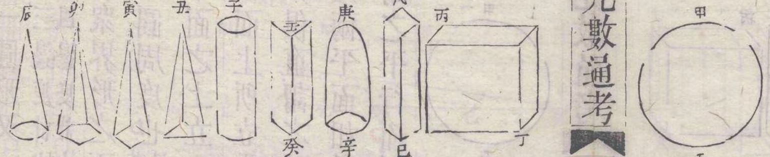


作甲乙垂線。俱與圓輻線等。則五正式三角形之高度。亦自相等。於是復自辛角與壬癸平行。作辛子切角線。則此兩式三角形。同底又同在二平行線內。其面積必兩兩相等。夫分形之面積等者。全形之面積自無不等。此辛壬癸長三角形。與丙丁戊己庚函圓五角形。其面積必然相等也。若以圓形論之。則以圓之輻線。爲長三角形之小邊。以圓之周線。爲長三角形之大邊。其長三角形面積。亦與圓面積等矣。夫圓周界。曲線也。前所設五角形之邊界。直線也。觀之似難於相通者。然以圓之內外。各設無數多邊形。逼近圓界。則直線曲線。將合而爲一。其理亦無不同矣。

有一圓形又一衆界形此圓周度若與彼衆界形總度等如三角形合三邊度計之正方形合四邊度計之之類也則圓形之面積必大於衆界形之面積若衆界形之面積與圓形面積同者則衆界形之總度必復大於圓周度也蓋圓積可用周求衆界形之積只可用邊求不可用周求也

平面之上立一直線無少偏倚則各邊所生之角必俱直謂之平面上所立垂線若立一平面無少偏倚則四邊所成之角亦必俱直謂之平面上所立直面

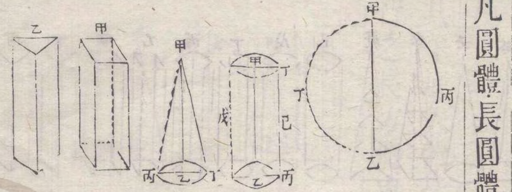
凡兩平面相對其所立衆垂線度俱各相等則此相對之平面謂之平行面



凡各種面內所積之實爲體而皆因其面以名之焉如全體不成角度止現圓之圓面則謂之圓體甲乙圖是也全體各面俱平各邊相等所成各角又等則謂之正方體丙丁圖是也全體各面雖平體長而面成兩式其相對各面仍兩兩相等相對各邊則又平行角又相等則謂之長方體戊己圖是也體有曲平兩面相雜而不成等邊等面則謂之平底半圓體庚辛圖是也全體相對之各面不平行上下兩面平行則謂之上下面平行三稜體壬癸圖是也體圓而上下面俱平則謂之長圓體子圖是也底爲平面其各面俱合於一角而成厚角則謂之尖瓣體底三角者謂之三瓣尖體底四角者謂之四瓣尖體底衆角者謂之衆瓣尖體如丑寅卯三圖是也又或底面圓而漸銳成形則謂之尖圓體

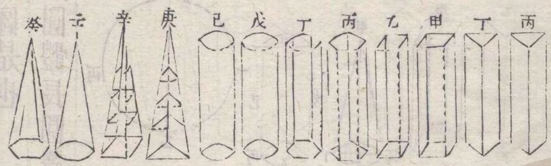
辰圖是也。

凡圓體長圓體尖圓體俱生於圓面故其外皮面積亦生於圓



界一旋轉之度分耳如取甲乙丙丁之圓形則以甲乙徑線爲樞心將甲丙乙半圓作轉式旋轉復還於原處即成甲丙乙丁一圓形體如取甲乙戊己長圓形則以甲乙中線爲樞心將丙丁線界作轉式旋轉復還於原處即成甲乙戊己一長圓體如取甲丙丁平底尖圓形則以甲乙中線爲樞心將甲丁邊線作轉式旋轉復還於原處即成甲乙丙丁一尖圓體矣。

凡體面式不一而積等者爲積數相等之體面式既同而體積又等者爲面式體積全等之體

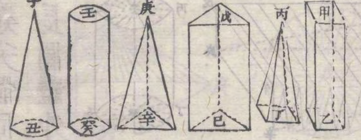


如甲乙二體爲積數相等之體也丙丁二體爲面式體積全等之體也。

凡各面所成體形內其各面俱平行或上下面爲平行而立於等積之底其體之高又等則其體之積亦相等如甲乙體其各面俱平行又如丙丁體其上下面平行立於等積之底其高又等或又如戊己體其上下面平行圓面積又等高又等則其兩兩體積必相等矣又如庚辛壬癸之類尖體形苟立於等積之底其體之高若等則其體之積亦等何以見之若將衆尖體分爲平行底之衆小體其所分之衆小體底度高度必俱相等如庚辛圖其所分小體之積俱等

故其全體之積亦相等也

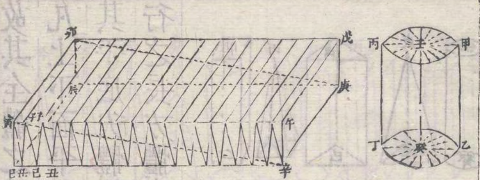
凡上下面平行各體與平底尖體同底同高者不論平面圓面其平底尖體皆得上下面平行體三分之一如甲乙上下面平行之長方體與丙丁四瓣尖體其乙丁兩底積等甲乙丙丁兩



高度又等則甲乙體與三丙丁體等如戊己上下面平行之三稜體與庚辛三瓣尖體其己辛兩底積等戊己庚辛兩高度又等則戊己體與三庚辛體等如壬癸上下面平行之長圓體與子丑尖圓體其癸丑兩底積等壬癸子丑兩高度又等則壬癸體與三子丑體等又如壬癸長圓體與甲乙戊己類體同底同高則亦與三丙丁庚辛類尖體等又或子丑尖圓體與丙丁庚

辛類尖體同底同高則亦得甲乙戊己類體三分之一矣

凡長圓體外周面積與長方體底面積等而長圓體半徑又與



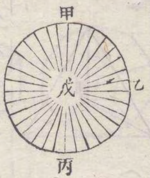
長方體高度等則長圓體積必得長方體積之半如甲乙丙丁一長圓體戊己一長方體試將長圓體從壬癸中線至周圍外面剖爲無數分則成子丑巳類無數長尖體此無數長尖體之高與長圓體之壬甲半徑等而無數長尖體之共底即長圓體之周圍外面積則此無數長尖體必爲戊己長方體之一半矣蓋寅己辛三角面爲午巳長方面之一半而此子丑巳類衆三角面與寅巳辛三角面等則卯辰庚辛巳寅三角體爲戊己長方體之一半而此子丑己類衆

半周乘半徑得圓積全恃此理

說見前

長尖體亦必與卯辰庚辛巳寅三角體等而為長方體之一半矣故甲乙丙丁長圓體為戊己長方體之一半也

凡球體外面積與尖圓體之底積等而球體之半徑又與尖圓

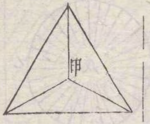


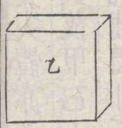
體之高度等則球體之積與尖圓體之積等如甲乙丙丁一球體己庚辛一尖圓體試將球體從中心平分為兩半圓體又從兩半圓體中心各分為無數尖體此所分尖體每一分必皆與尖圓體所分尖體一分等何則球體所分尖體皆以球外面甲乙丙丁為底以球甲戊半徑為高尖圓體所分尖體皆以尖圓之庚子辛癸底為底以尖圓之己壬高為高故此兩種無數尖體皆為同底同高其積相等無疑矣夫所分之

體既等則原體亦必相等故曰球體與尖體俱相等也

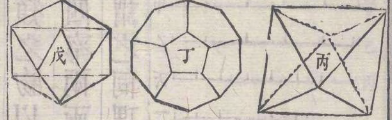
凡各形外皮面積相等之體惟圓體所函之積大於他體所含之積蓋平圓周度與各形衆邊總度等則圓面積必大於各形面積况圓體所函有不大於他體所函者乎

凡各面相合其每面之角所合處復成一種體角謂之厚角厚角所成等面體形有五種各以面數而名之其一為四面體每





面有三角各三角之各三界度俱等如甲圖是也二為六面體每面俱為正方其方面之四角俱為直角而各界互等故又為正方體如乙圖是也三為八面體每邊有三角各三角之各三界度俱等如丙圖是也四為十二面體每面有五角各五角之五界度俱等如丁圖是也五為

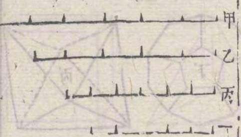


二十面體每面有三角各三角之各三界度俱等如戊圖是也此外不能復生他形蓋此五種厚角體俱是等邊三角四角五角之平面相合所成凡平面自三角以下不能成面而厚角自三面以下亦不能成角故厚角自三面始然平面三角四角五角所成厚角除此五種體亦不能復成他形也若平面六角以外並不能成厚角矣

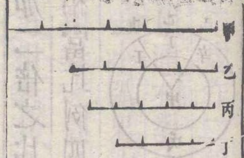
大凡欲論諸物之不齊必借同類之物以比之始可以得其不齊之度數此比例之法所由設也其比者與所比者俱謂之率率者法也矩也以數互相準之之謂也如一線與他線相比其度之或長或短其數之或多或少自能見之如一面與他面相比其面度之或大

或小其積數之或多或少自能見之如一體與他體相比其體度之或厚或薄其積數之或多或少自能見之若將一線與一面相比或一面與一體相比既不同類又不同形則線之長短面之大小體之厚薄俱不可辨矣故曰欲論諸物之不齊必借同類之物以比之也

有四率兩兩相比其一率與二率之比同於三率與四率之比則謂之同理比例亦謂之相當比例也如甲乙丙丁四數甲與

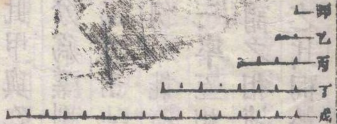


乙比丙與丁比苟乙為甲六分之五丁為丙六分之五則甲與乙之比例丙與丁之比例此兩比例相同而乙有甲幾分之數即可知丁有丙幾分之數矣故凡四率內將一率與三率分數定為相等二率與四率分數亦定為相等其度



之長短雖有不同苟分數定準則一率與二率之比即如三率與四率之比也若一率與二率相比之分大於三率與四率相比之分則為不同理之比例而比例不得行矣如甲與乙相比之分為六與四而丙與丁相比之分為五與四則此甲與乙之比大於彼丙與丁之比矣若以一率二率相比之分為準則三率四率相比之分為小若依三率四率相比之分為準則一率二率相比之分又大故謂之不同理之比例而此例不能行也

凡三率互相為比此一率與二率之比同於二率與三率之比則謂之相連比例率也如甲乙丙三數互相為比苟甲數與乙數之比同於乙數與丙數之比則此三數謂之相連比例率矣



若相連比例率內將一率與三率比之則為隔一位加一倍之比例或有相連比例四率將一率與四率比之則為隔二位加二倍之比例大凡有幾率隔幾位以比者皆以隔幾位而為加幾倍之比例也如甲乙丙三數其甲與丙之比為隔一位加一倍之比例或甲乙丙丁戊五數俱為相連比例率其甲與丁之比即為隔二位加二倍之比例而甲與戊之比又為隔三位加三倍之比例矣

相當比例四率為數學之要因其理之所該最廣故設為雙圜圖以申明之並甲點為心作乙丙一大圜丁戊一小圜此二圜界各為三百六十分象天度也於是自圜之甲心過小圜界之辛壬二處至大圜己

庚二處作二線則大圜之己甲庚小圜之辛甲壬俱同一甲角此甲通相對之己庚大弧界設爲六十度爲大圜六分之一則辛壬小弧界亦爲六十度爲小圜六分之一矣大凡角度俱定於相對之圜界今大圜之己庚弧界小圜之辛壬弧界俱與一甲角相對其度雖依圜之大小不同而分數則等分數既等則大圜小圜大弧大弧兩兩互相爲比卽如四率之兩兩相比爲同理比例也是以大圜之三百六十分爲一率大弧之六十分爲二率小圜之三百六十分爲三率小弧之六十分爲四率其大圜與大弧之比卽同於小圜與小弧之比也故凡各率各度雖異相當之分數若同則一率與二率之比必同於三率與四率之比而俱謂之順推比例矣亦曰正比例要之分合加減各率之法總不越此圖之互轉相較之理也

一種反推比例將一率與二率之比同於三率與四率之比者反推之以二率與一率爲比四率與三率爲比其所比之例仍同故亦謂之相當比例率也如前雙圜圖以大弧界與大圜界爲比小弧界與小圜界爲比也因其以一率爲二率以三率爲四率前後互移故謂之反推比例然名雖爲反推而相當比例之率仍與順推相同也

一種遞轉比例將一率與二率之比同於三率與四率之比者轉較之以一率與三率爲比二率與四率爲比其所比之例仍爲相當比例率也如前雙圜圖以大圜界與小圜界爲比大弧界與小弧界爲比也因其以三率爲二率以二率爲三率遞轉相較故謂之遞轉比例然其所比之例亦仍爲相當比例率也

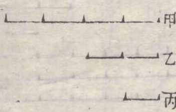
一種分數比例將相比之率較數截開以一率與二率之較爲

一率與二率爲比以三率與四率之較爲三率與四率爲比其
所比之例仍爲相當比例率也如前雙圜圖大圜界內減去大
弧界仍與大弧界爲比小圜界內減去小弧界仍與小弧界爲
比也因其各分內有分開相減之故所以謂之分數比例然其
所比之例仍同於相當比例率也
一種合數比例將相比之率併之以一率與二率之和爲一率
與二率爲比以三率與四率之和爲三率與四率爲比其所比
之例仍同於相當比例率也如前雙圜圖大圜界所分大段加
入大弧界仍與大弧界爲比小圜界所分大段加入小弧界仍
與小弧界爲比也因其有相加之分故謂之合數比例然其所
比之例仍同於相當比例之四率也
一種更數比例以一率與二率之比同於三率與四率之比者

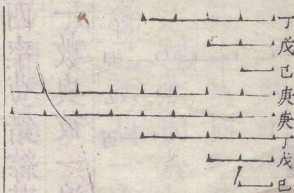
更之將一率與三率相減用其餘分爲二率仍與一率爲比將
三率與四率相減用其餘分爲四率仍與三率爲比則其比例
之理亦同於相當比例率也如前雙圜圖將大圜與大弧相減
餘己丙庚一大段仍與大圜界爲比將小圜與小弧相減餘辛
戊壬一大段仍與小圜界爲比也因其以所餘之大段更弧界
故謂之更數比例然雖更入比之仍與相當比例四率同也
一種隔位比例有兩相比例四率將此一邊四率內一率與末
率爲比彼一邊四率內一率與末率爲比則其所比之例仍同
於相當比例率也如前雙圜圖以所分弧界之兩線引長

自庚壬過甲至癸丑作一全徑線自己辛過甲至子寅作一全
徑線則分大圜爲庚己己丑丑寅寅庚四段分小圜爲壬辛辛
癸癸子子壬四段其大圜四段爲相當四率而小圜四段亦爲

相當四率度之大小雖異而分數相同故以此各相當四率隔
位以比之其大圓之庚己一段與寅庚一段爲比而小圜之壬
辛一段與子壬一段爲比其比例仍同於相當比例四率但以
其兩邊各取兩率隔位以比之故謂之隔位比例耳
一種錯綜比例有兩連比例三率此一邊三率內中率與末率
之比同於彼一邊三率內中率與末率之比則爲相當比例之
四率苟錯綜其位分以此一邊首率與末率隔位爲比復取另
一數與彼一邊中率爲比而成同理之四率則此另一數必與



彼邊三率爲連比例四率矣如此一邊有甲乙
丙三數彼一邊有丁戊己三數將此一邊中率
乙數與末率丙數之比同於彼一邊中率戊數
與末率己數之比則爲同理比例矣今錯綜其



位分使此一邊首率甲數與末率丙數隔位爲
比復另取一庚數與彼一邊中率戊數爲比則
亦同於相當比例之四率而此庚數與彼邊丁
戊己三數爲連比例之四率矣何則試以庚數
置於彼邊丁數之上而爲首率丁移爲中率戊
移爲末率則此邊甲首率與丙末率之比同於
彼邊庚首率與戊末率之比但以兩連比例率互相易位增入
此比之之不同故謂之錯綜比例耳
一種加分比例凡有二率依本度各加幾倍所加之分數若等
則此二率互相爲比仍同於原二率之互相爲比謂之等倍相
加之比例也如甲乙二數依甲度加三倍爲丙依乙度加三倍
爲丁則此丙丁二數互相爲比仍同於甲乙二數之互相爲比

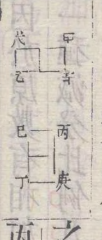
因於原數有相加之分故謂之加分比例也

一種減分比例凡有二率依本度各減幾倍所減之分數若等則此二率互相爲比仍同於原二率之互相爲比謂之等分相減之比例也如有甲乙丙丁二數甲乙三分丙減去甲戊一分丙丁三分丙減去丙己一分則戊乙己丁互相爲比仍同於原甲乙丙丁全數之互相爲比因其於原數有相減之分故謂之減分比例也

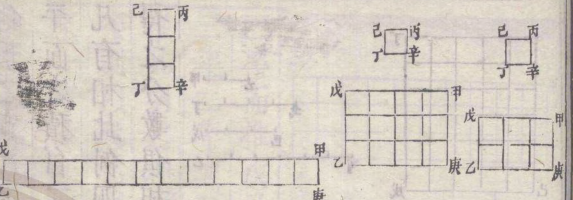
前所論比例之法凡一十有二雖種種變化不窮其每相當分數所成之率依然一理故其相比之例俱同而皆爲相當比例四率也是故線與線爲比面與面爲比體與體爲比依前各種比例之法線之比例若同則爲相當比例線面之比例若同則爲相當比例面體之比例若同則爲相當比例體矣夫線面體

爲類不同雖不能互相爲比假使線面體之每相當分數若等則按其各類相當分數比之亦爲同理比例率也如甲之六分線與乙之三分線相比丙之六分面與丁之三分面相比戊之六分體與己之三分體相比此三種每相當分數旣俱相等故其比例亦俱相等而六率互爲同理比例可知矣

大凡直角平方面積皆生於二線之度故欲知方面所生比例之分將二形之縱橫線分考之卽可得而知矣如甲乙丙丁兩方面形甲乙形之甲戊橫界比丙丁形之丙己橫界大一倍而丙丁形之丙庚縱界比甲乙形之甲辛縱界亦大一倍則甲乙丙丁兩形之分必相等如甲乙大形之甲戊橫界比丙丁小形



之丙己橫界大三倍甲乙大形之甲庚縱界比丙丁小形之丙辛縱界大二倍則大形與小形



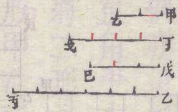
三倍者有二。共爲六分可知矣。再如甲乙大形之甲戊橫界。比丙丁小形之丙己橫界。大四倍。甲乙大形之甲庚縱界。比丙丁小形之丙辛縱界。大三倍。則大形與小形四倍者有三。共爲十二分可知矣。再或甲乙大形之甲戊橫線。比丙丁小形之丙己橫線。大十二倍。而丙丁小形之丙辛縱線。比甲乙大形之甲庚縱線。反大三倍。則大形之寬。雖比小形多十一倍。而大形之長。又比小形少二倍。將此縱橫二線之多少較之。則大形與小形。止爲四分可知矣。故凡直角平方面形與他一形相比。其比例有二。以此形之長。與他形之長比之爲一比例。以此形之寬。與

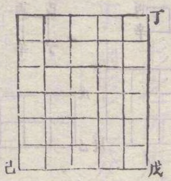
三倍以二倍因之

四倍以三倍因之

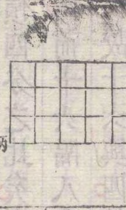
十二倍以三倍約之

他形之寬比之爲一比例。兩形相比之間。而兼兩比例者。正以平面之積。自二線之度生之之故也。





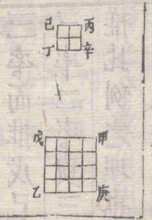
凡有相比例四率。其二率與三率相乘。一率與四率相乘。則所得之分數俱相等也。如甲乙。丁戊。戊己。乙丙。相比例四率。甲乙一率爲二分。丁戊二率爲四分。戊己三率爲三分。乙丙四率爲六分。將二率三率相乘。一率四率相乘。其分數俱得十二也。是故四率中凡有三率。欲求其不知之一率。將兩率之分相乘。所得之數。以一率之分除之。即得其一率矣。如甲乙三分爲一率。丁戊六分爲二率。戊己五分爲三率。乙丙十分爲四率。今只知一率二率三率之分。欲推四率。則以二率三率相乘。爲丁己三



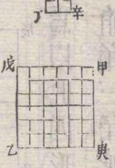
十分乃以甲乙一率除之即得乙丙四率爲十分矣此以小分爲首率者也或知乙丙戊己丁戊之三率而推甲乙之一率則以乙丙十分爲一率戊己五分爲二率丁戊六分爲三率二率與三率相乘以一率除之即得甲乙之四率矣此以大分爲首率者也又或知甲乙丁戊乙丙之三率而推戊己之一率則以丁戊爲一率甲乙爲二率乙丙爲三率二率與三率相乘以一率除之即得戊己之四率矣此即反推比例之理也又或知戊己乙丙甲乙之三率而推丁戊之一率則以戊己爲一率甲乙爲二率乙丙爲三率二率與三率相乘以一率除之即得丁戊之四率矣此即遞轉比例之理也

凡有兩直角方面形其兩界之比例大幾倍者其兩方面之比

例較兩界爲隔一位相加之比例也如甲乙丙丁同式兩方面形甲乙方面之縱橫界比丙丁方面之縱橫界爲二倍則甲乙方面比丙丁方面之二倍者有二二其二爲四故甲乙方面積比丙丁方面積爲四倍凡欲求其比例相連之率則於甲乙形之界二倍之得八分與丙丁方界二分爲比即如甲乙面積十六與丙丁面

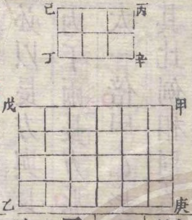


積四分之比矣夫八與十六四與八二與四皆二分之一之比例而十六隔八與四比八隔四與二比則皆成四分之一之比例故十六與四較之四與二爲兩界上連比例隔一位相加之比例也又如甲乙方面之縱橫界比丙丁方面之縱橫界爲三倍則甲乙方面比丙丁方面之三倍者有三三其三爲九故甲乙之面積比丙丁面積爲九倍凡欲求其比例相連之率則

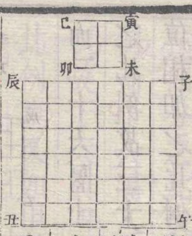


於甲乙形之界三倍之得十八與丙丁界二分爲比即如甲乙面積三十六與丙丁面積四之比矣夫十八與六六與二皆三分之一之比例而三十六隔十二與四比十八隔六與二比則皆成九分之一之比例故三十六與四較之六與二亦爲兩界上連比例隔一位相加之比例也

凡直角方面形有二種一爲長方一爲正方因其縱橫界之比例各異故其所生之形不同而積不得互相爲比也如欲比之必以長方與長方爲比正方與正方爲比其比例始行如甲乙丙丁兩長方形其甲乙形之甲戊橫界比丙丁形之丙己橫界大一倍甲乙形之甲庚縱界比丙丁形之丙辛縱界亦大一倍其比例相同若以甲乙形之甲戊橫界比丙丁形之丙辛縱界



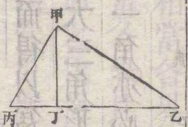
則大三倍以甲乙形之甲庚縱界比丙丁形之丙己橫界止大一分猶不得大一倍其比例則異故甲乙形所生之積爲二十四而丙丁形所生之積爲六俱爲長方形焉又如子丑寅卯兩正方形其子丑形之子辰橫界比寅卯形之寅己橫界子丑形之子午縱界比寅卯形之寅未縱界俱大三倍而比例相同復



以子丑形之子辰橫界比寅卯形之寅未縱界以子丑形之子午縱界比寅卯形之寅己橫界亦俱大三倍而比例相同故子丑形所生之積爲三十六而寅卯形所生之積爲四俱爲正方形焉以此四形兩兩相比各爲相當比例之四方面也

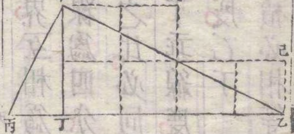
凡直角三角形自直角至相對界作一垂線則所截之兩段一

為一率一為三率而所作之垂線為中率此三率即為相連比例率也如甲乙丙直角三角形自甲直角至相對乙丙界作一



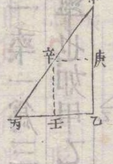
甲丁垂線則截乙丙界為兩段以乙丁段為一率則丁丙段為三率若丁丙段為一率則乙丁段為三率而甲丁垂線總為中率蓋甲乙丁甲丁丙兩三角形為同式故其相當之乙丁甲丁二界互相為比即同於甲丁丁丙二界之互相為比也今以乙丁線為四分丁丙線為一分則甲丁線必得二分因四分與二分之比必同於二分與一分之比故為相連比例三率也若依甲丁垂線度作一戊丁正方形即為中率自乘之數以所截丁丙一段為寬度乙丁一段為長度作一己丁長方形即為首率末率相乘之數此兩形之積必相等也何也乙丁線既為一率則甲丁線為二率甲丁

線復為三率則丁丙線為四率此相連比例三率又為相當比例四率矣因其可為相當比例四率故二率與三率相乘一率與四率相乘所得之分數相同也此乃首率末率求中率之法也要之首率末率相乘中率相乘其所成之二式雖與因俱自相連比例四率而生故其積相



等而得以為準也

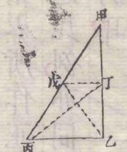
凡大三角形內作小三角形其相當之二角度兩兩相等則其餘一角亦必等謂之同式形也如甲乙丙三角形內作辛庚辛



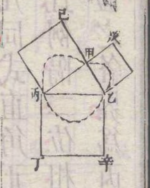
壬二線遂成甲庚辛辛壬丙兩小三角形此兩形庚角壬角既與大形乙角同為直角而大形甲角又為甲庚辛小形所同用則小形所餘辛

角必與大形丙角等。又爲辛壬丙小形所同用。則小形所餘辛角。亦必與大形甲角等。凡同式之形。其積雖不同。而其相當各界互相爲比。俱爲相當比例之率也。是故同式形之相當各界比例既同。則同式形之面積比例亦同。而爲隔一位相加之比例矣。然此不獨三角形爲然也。凡各等邊形。其邊數同。相當角度俱等。而相當界之比例又同。則皆謂之同式直界形。又衆曲線形。於其內外作各種直界形。其式若同。則亦謂之同式曲界形。凡此大小各種同式形。其相爲比例。同於其各相當界所作正方形或三角形之互相爲比也。若同式各種體積之比例。亦同此理。惟較之各界之比例。則爲隔二位相加之比例耳。

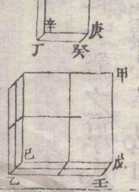
凡三角形在二平行線之間。又共立於一線之底。則其面積必兩兩相等。如甲乙丙三角形。與乙丙平行作一丁戊線。復自丁至丙。自戊至乙。作二線。則分爲四三角形。此四形內乙戊丁丙丁戊兩形。既在乙丙丁戊二平行線之間。又共立於丁戊之底。其積必等。於此二形各加一所截甲丁戊形。即成甲戊乙甲丁丙兩形。其積亦必等。又如甲丁戊乙丁戊兩形。其底俱在甲乙一線上。而戊角又共在一處。亦爲二平行線所限。甲丁戊丙丁戊兩形。其底俱在甲丙一線上。而丁角又共在一處。亦爲二平行線所限。其積亦無不相等。然則各形之積互相爲比。亦即同於各界線之互相爲比也。



凡直角三角形。其直角相對界所作方形之積。必與兩旁界所作兩方形之積等。而直角相對界所作半圓形。與小三角形之

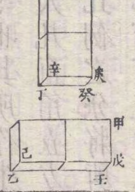


積亦必與兩旁界所作兩半圓形與兩小三角
形之積等如乙丙界所作乙丁方積與甲乙界
所作戊乙方甲丙界所作己丙方兩形之積相
等也其所作半圓形三角形直界與兩旁相等亦同此圖
大凡直角立方體積皆生於面線互乘之度故欲知方體所生
比例之分將所比形之長寛與厚詳較之即可得而知矣如甲
乙丙丁直角立方二體甲乙體之戊己戊壬長寛之度比丙丁
體之庚辛庚癸長寛之度大一倍則戊乙平面底形之內如庚
丁平面底形二倍者有二矣而甲乙體之甲戊厚度又比丙丁



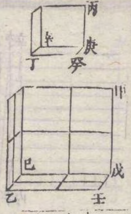
體之丙庚厚度又大一倍則甲乙體形之內如
丙丁體形四倍者有二可知矣是故欲知直角
方體之比例以本體之長寛與厚互相比例以

較之即得直角方體互相爲比之比例也
有兩直角長方體若將此一體之底度與他一體之底度又將
他一體之厚度與此一體之厚度爲比其比例若同則此二體
之積必等也如甲乙丙丁兩直角長方體甲乙體之戊乙底度
比丙丁體之庚丁底度大一倍而丙丁體之丙庚厚度比甲乙
體之甲戊厚度亦大一倍則甲乙丙丁二體之積必相等是故



兩體之底積與厚度相較則兩體之積可知矣
蓋體積之比例視其面線今兩體之底面厚度
交互相等如此其體積不得不等也
凡同式直角正方體其體積之比例比之兩界線之比例爲連
比例隔二位相加之比例也如甲乙丙丁同式兩正方體甲乙
體之各界爲丙丁體之各界之二倍則甲乙體內如丙丁體之

二倍者有四。二其四爲八。故甲乙體積比丙丁

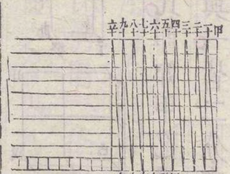


體積大八倍。凡欲求其相連比例之率。則於甲乙體之界四倍之。得八分與丙丁體界一分爲比。即如甲乙體積與丙丁體積之比例矣。夫八與四。四與二。二與一。皆二分之一之比例。今以八與一爲比。其間隔四與二之兩位。故曰同式兩體積之比例。爲兩界上連比例隔二位相加之比例也。若邊爲三倍。則面爲九倍。而體爲二十七倍。亦爲隔二位相加之比例也。

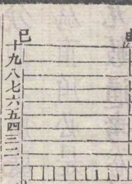
凡圓面半徑與球體半徑等者。其圓面積爲球體外面積四分之一。而圓面半徑。與球體全徑等者。其圓面積與球體外面積等。又球體全徑與長圓體底徑高度等者。則球體之外面積與長圓體之周圍外積等。而球體積爲長圓體積三分之二。又尖圓體之底徑。與球體全徑等。而高與球之半徑等者。則尖圓體積爲球體積四分之一。又即爲半球體積二分之一也。凡此各種之比例。皆以比例而得者也。

凡橢圓體大徑。與圓球體徑相等者。其二體積之比例。同於橢圓體小徑所作方面與圓球體徑所作方面之比。又即同於函橢圓之長方體與函球之正方體之比。其外面積之比例。又即同於橢圓體小徑與球體全徑之比也。

作分釐尺法。如甲戊尺三寸。每寸欲分爲百釐。則將甲乙與戊

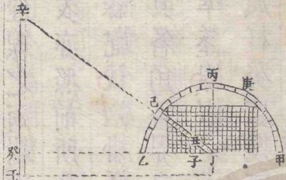


己邊。俱平分爲十分。作諸橫線。次將一寸之甲辛乙丙兩邊。俱分爲十分。再於甲辛邊之第一分作斜線至乙丙邊之乙處。如此作十斜線。俱與第一分斜線平行。即分乙丙之一寸爲一百釐也。何則。甲辛乙丙。皆爲一寸之度。俱平分爲



十分矣今又作橫線斜線各十其橫斜相交處共有百分此百分即百釐也如第一斜線與第一橫線相交處即爲一釐與第二橫線相交處即爲二釐至第十橫線相交處即爲十釐一線十釐十線百釐矣作分數此例測量儀器法以甲丙乙半圓界分爲一百八十度每度作六十分將丁甲丁乙丁丙三半徑線照所容方界分截開分爲一百分於每分上俱與三半徑平行作縱橫線於甲乙徑線之兩端作兩定表以圓丁心爲樞作一遊表如丁己將遊表亦照前所分度分作一百四十分復於此儀器後面作一垂線記號以掛墜線如庚即成一全儀器用以測高深廣遠可知其各角各界之度矣如有一辛壬棋杆欲測其高則將儀器定準墜線以定表對地平癸遊表對旗杆頂辛乃量儀器中心至旗杆癸處幾何如有四十丈則看儀器丁乙線上自丁心至子

得四十分以當四十丈即看與子相對垂線至遊表相交處有幾何如丑子三十分即爲旗杆自辛至癸相當數三十丈也再加癸壬高即得旗杆辛壬之高矣蓋儀器上之丁子丑與所測之丁癸辛爲同式三角形其相當各界之比例俱同故丁子與子丑之比即同於丁癸與癸辛



之比也若欲知丁辛弦線數即視遊表自丁至丑相交之處得幾何如有五十分其相當數即爲五十丈也若欲知丁癸辛三角度則視圓界與遊表相交處如己其乙己弧三十五度十三分即丁角度其餘己丙弧五十四度四十七分即辛角度而癸角爲直角必是九十度也

九數通考卷首終

九數通考卷一

虞山屈曾發省園氏輯

九章名義歌

數學從來有九章.方田粟布易推詳.衰分辨別多和寡.少廣開除圓與方.商度功程術最妙.均平輪送法尤良.盈朒隱互須列位.方程正負要排行.若算高深并廣遠.好將勾股細思量.

算學提要訣

學算之人須努力.加減乘除時時習.觀其發問果何如.仔細斟量分法實.若然法實旣能知.次求定位最爲急.再考諸分母子名.商除之法細尋繹.有能致志用工夫.算學雖深可盡識.

九九合數

少數在上.多數在下.加減乘除皆呼此數.

一一如一　一二如二　二二如四　一三如三
二三如六　三三如九　一四如四　二四如八
三四一十二　四四一十六　一五如五　二五一十
三五一十五　四五二十　五五二十五　一六如六
二六一十二　三六一十八　四六二十四　五六三十
六六三十六　一七如七　二七一十四　三七二十一
四七二十八　五七三十五　六七四十二　七七四十九
一八如八　二八一十六　三八二十四　四八三十二
五八四十　六八四十八　七八五十六　八八六十四
一九如九　二九一十八　三九二十七　四九三十六
五九四十五　六九五十四　七九六十三　八九七十二
九九八十一

右法遇十本身改.逢如下位加.

九歸歌

多數在上.少數在下.歸法呼此數.

一歸　不須歸　其法故不立逢一進一十至逢九進九十是也
二歸　二一添作五　逢二進一十逢四進二十逢六進三十逢八進四十
三歸　三一三十一　三二六十二　逢三進一十逢六進二十逢九進三十
四歸　四一二十二　四二添作五　四三七十二　逢四進一十逢八進二十
五歸　五一倍作二　五二倍作四　五三倍作六　五四倍作八
逢五進一十
六歸　六一下加四　六二三十二　六三添作五　六四六十四
六五八十二　逢六進一十
七歸　七一下加三　七二下加六　七三四十二　七四五十五
七五七十一　七六八十四　逢七進一十
八歸　八一下加二　八二下加四　八三下加六　八四添作五
八五六十二　八六七十四　八七八十六　逢八進一十

九歸　隨身下　逢九進一十九一下加一至九八下加八是也

解曰三歸云三一三十一謂如三人分銀一兩各得三錢其除九錢餘存一錢再用三歸又除九分餘存一分也又云三二六十二謂如三人分銀二兩各得六錢共除一兩八錢餘存二錢再用三歸又除一錢八分餘存二分也又云逢三進一十謂如三人分銀三兩各得一兩也餘倣此

分法實訣凡因乘不必拘惟歸除不可顛倒錯誤須詳理而分之

一曰以所有總數爲實以所求每數爲法、

一曰有總物而又有總價或云每物卽以物爲法以價爲實或云每價卽以價爲法以物爲實餘倣此

定位訣

數家定位法爲奇

因乘俱向下位推但用因乘法實後定位故曰乘法雖陞而位反降又曰乘從每下得術

加減只須認本位加法減法本身不動故曰只須認本位

歸與歸除上位施但用歸除法實前定位故曰除法雖降而位反陞又曰歸從法前得令

法多原實逆上法此謂法多實少者蓋法數多而實數少也須從實首位數起逆數至法首位之數止

法前得令順下宜再進前一位得令令者斤兩石斗丈尺貫箇等名也順下是小數逆上是大數也

法少原實降下數此謂法少實多者蓋法數少而實數多也須從實首位數起降下至法首位之數止

法前得令逆上知却進前一步得令逆上則十百千萬逐位而大順下則錢分釐毫挨次而小也

又十二字訣

乘從每下得術術者乃法首位每下該得之名也從實首位數起降下至法首每數則止再下一位得法首每下該得之名是兩呼兩是石呼石以上十百千萬以下錢分釐毫也

歸從法前得令注見前

加減乘除總說

算法以加減乘除爲入門然究其終雖至於千變萬化總不出乎此但用法不同耳或應取其相和之數則用加或應取其相較之數則用減或應聚而總其積則用乘或應散而取其分則用除又有先加而後減者或先減而後加者有先乘而後除者或先除而後乘者又有加減與乘除先後互用者古來九章命算自方田以至句股數有煩簡理有顯晦法有深淺算有難易然何一不從加減乘除而得故淺言之則算法之入門究言之實算法之全體也

加法訣

加法須從下位先　法首有一姑舍旃　十加本位零加次

一外添如法更玄用減法還原○又有幾數相併亦曰加所謂取其相和之數也

減法訣亦曰定身除從實首位起

減法須知先定身　得其身數始爲眞　法中有一何曾用

身外除零妙入神 用加法還原。又有幾數相 亦曰減。所謂取其相較之數也。

因法訣 因與乘一也。單位法謂之因。法位數多謂之乘。特以此而異其名耳。又總名之止曰乘。

因法須呼九九數 起手先從末位推 言十就身如下位

若要還原用九歸

歸法訣 歸與除一也。單位法謂之歸。法位數多謂之歸除。又總名之止曰除。

學者如何算九歸 先從實上左頭推 逢進起身須進上

下加不動下施爲 用因法還原。

乘法說

乘者兩數相因而成也。蓋有兩數，視此一數有幾何彼一數有幾何。將此一數照彼一數加幾倍，則兩數積而復成一數，故謂之相因而成。然不用加而用乘者，何也。蓋加須層累而得，乘則一因卽得。此立法之精而理則實相通也。如有六與十兩數，以

十爲主而加六次得六十，以六爲主而加十次亦得六十。今以十爲主而六乘之，或以六爲主而十乘之，皆得六十，其數無異而用爲捷矣。

乘法訣

下乘之法留頭眞 起手先將法二因 三四五來乘遍了

却將法首破原身 用歸除還原。○原有破頭乘、掉尾乘、隔位乘、諸法。總不如留頭乘之妙。

除法說

除者兩數相較而分也。蓋視大數內有小數之幾倍，將大數照小數減幾次，則大數分而復爲一小數，故謂之相較而分。然不用減而用除者，何也。蓋減必遞消其分，除則一歸卽得。除之與減，卽猶乘之與加，正相對待者也。如有大數一十二、小數四，若用一十二以四減之，三次而盡，卽知一十二爲四之三倍也。今用

除法、呼四一二十二逢四進一十、即知一十二爲四之三倍矣、
此除之與減、理相通而用較捷也、

歸除訣

惟有歸除法更奇　將身歸了次除之先將法首對實首、呼九歸歌歸之、次將歸見數對法次位以下、呼九九數、挨次除之、
有歸若是無除數　起一還將原數施若本位有子可歸、次位無子可除、或雖有子不敷除也、則用後起一還原法、
或遇本歸歸不得　撞歸之法莫教遲如一歸只一子、二歸只二子、因下位無子可除、故不能歸也、則用後撞歸法、如撞歸訖、仍不敷除、則再用起一還原法、
若人識得中間意　算學雖深可盡知

撞歸法

一歸見一無除作九一　二歸見二無除作九二　三歸見三無除作九三

四歸見四無除作九四　五歸見五無除作九五　六歸見六無除作九六
七歸見七無除作九七　八歸見八無除作九八　九歸見九無除作九九

起一還原法

一歸起一下還一　二歸起一下還二　三歸起一下還三　四歸起一下還四
五歸起一下還五　六歸起一下還六　七歸起一下還七　八歸起一下還八
九歸起一下還九

命分說

凡歸除、分至最細而可以恰盡無餘者、謂之無奇零數、若分至最細而屢除不盡者、謂之有奇零數、其零數若畧去之、則不能復還原數、此命分之所以立也、其法命爲分母分子者、即歸除之法數也、分子者、即除不盡之實數也、凡不盡之數、得分母中之幾分者、即命爲幾分之幾、是以命分之一法、所以濟歸

除之不逮也

約分說

約分者以所命之分約之以就整分也蓋命分是就其數之多寡全而紀之而約分則即其多寡之數從而約之以求簡易焉其法以分母分子兩數輾轉相減務期減餘兩數相同是爲度盡兩大數之一小數乃以此數爲一分以除分母得幾分者即約分母爲幾分又除分子得幾分者即約爲分母幾分中之幾凡諸法中有帶分者皆由約法而得則約分實帶分之根也若夫數之不可約者兩數互轉相減必至於一始可以減盡一之外別無他小數可以度盡此兩數也即不用約分用命分誌之可也

約分訣

約分須分子母名　更相減損至同成　就把其同爲法則
除來各數自無零

設如古歷歲實命爲三百六十五日又一百分日之二十五問約得幾何　答曰四分日之一　法置母一百以子二十五減三次餘亦二十五謂之子母相同就以此爲法以除母數得四分以除子數得一分即約得四分日之一也蓋將一日剖作四分而得其一分也

凡約分法以分母分子相減必得相等之數然後用之蓋因此數可以度盡分母又可以度盡分子也今以相等之數二十五爲一分則分母一百有四倍二十五而餘數二十五又恰足一分之數故爲四分日之一一百與二十五之比即同於四與一之比是四與一即爲一百與二十五之相當最小數也

設如有絲二百五十二斤賣過一百四十四斤問約得幾何答曰七分斤之四　法置母二百五十二減去子一百四十四餘母一百〇八反將子一百四十四減去餘母一百〇八餘子三十六又將餘母一百〇八減

去餘子六三十二次餘亦六三十謂之更相減損至同就以此為法以除原母得七分以除原子得四分即約得七分斤之四也

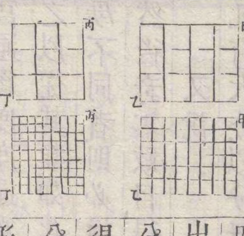
通分說

凡奇零數目不以十遞析者難以立算則用通分如斤通為兩宮通為度度通為分之類是也又有整數而帶零分者則必通之以從其類如化整為零收零作整之類是也或有零分而分母不同者則必通之以同其母如互乘之類是也通分之法立然後奇零數目得以歸有餘齊不足而帶分之法皆根於此矣

又說

凡有大分以分母乘之通為小分則為通分法也然不曰乘而曰通者何也蓋乘則積少成多其得數溢於原數之外通則變大為小其得數仍含於原數之中也如甲乙長方形圖原大分

一十二其分母為四今通為小分則以分母四乘大分二一十得小分四十八其數雖比原大分加四倍然其每分之分只得原數



四分之一故仍含於甲乙方形之內而未嘗溢出原數之外也又如丙丁方形圖原大分九其分母為九今通為小分則以分母九乘大分九得小分八十一其數雖比原大分加九倍然其每分之分只得原數九分之一故仍函於丙丁方形之內亦未嘗溢出原數之外也推之每分之母或為八或為十二或為數十亦皆倣此通之其所通之數雖至千萬而要皆未有溢於所通原分之外者矣

互乘說

凡有兩數其分母分子俱不同則紛紜難御無可置算故必依

此數之分將彼數加為幾倍又依彼數之分將此數加為幾倍則兩分數既同而此例亦同矣如甲乙二數甲為三分之二乙為四分之三欲辨其孰大則先以分母三四相乘得一十二為共母數再以甲分母三互乘乙分子三得九為乙數化一十二分之九又以乙分母四互乘甲分子二得八為甲數化一十二分之八故法用互乘者所以齊其分母也夫以兩分母相乘得一十二者乃以兩分母俱變為十二分也以甲分母互乘乙分子得九者乃以乙分子變為十二分中之九也以乙分母互乘甲分子得八者又以甲分子變為十二分中之八也蓋兩分母既變為同等則兩分子亦俱為同分母之子矣若子母分有幾數而子數同為一者先以各母連乘得數次以各母除之則為各子數也如甲乙丙三數甲為二分之一乙為三分之一丙為四分

之一則先以三母連乘得二十四為甲乙丙共母數又以甲母二除之得一十二為甲之子數以乙母三除之得八為乙之子數以丙母四除之得六為丙之子數也若子母分有幾數而子母數俱不同者亦先以各母連乘得數次以各母除之得數復以各子乘之即為各子數也如甲乙丙三數甲為三分之二乙為四分之三丙為五分之四則先以三母連乘得六十為甲乙丙共母數又以甲母三除之得二十再以甲子二乘之得四十為甲之子數以乙母四除之得一十五再以乙子三乘之得四十五為乙之子數以丙母五除之得一十二再以丙子四乘之得四十八為丙之子數也若大分下又帶小分者則以小分母通大分母為母數又以小分母通大分子加入小分子為子數然後以所變之兩母數兩子數算之如甲乙兩數甲數四分之三又帶此一分之

七分之二乙數九分之五又帶此一分之三分之一則先以甲小分母七通甲大分母四得二十八仍以甲小分母七通甲大分子三得二十一加入甲小分子二得二十三共得二十八分之二十三為甲大小分所變之數次以乙小分母三通乙大分母九得二十七仍以乙小分母三通乙大分子五得一十五加入乙小分子一得一十六共得二十七分之一十六為乙大小分所變之數然後以所變之子母乘除加減隨其宜而用之可也今再分加減乘除之法於左

帶分加法

凡零數相加兩分母同者即併兩分子為得數如九分丈之七與九分丈之五相加兩分母同為九分則兩分子亦同為九分中之零分故不用互乘徑併兩分子得一十二又以滿母數九收

為一丈所餘三仍為九分中之三分故相加得一丈零九分丈之三也此分母相同之加法也

凡零數相加兩分母不同者則用互乘法以所變兩子相加為得數前說論之詳矣此分母不同之加法也

又或分母不同可以加減之使同者則變而同之可省互乘如八分兩之一與一十二分兩之三則將一十二分兩之三各減三分之一變為八分兩之二則兩分母同為八分亦徑併兩分子一二得三為相加之數矣又如六分石之五與三分石之二則將三分石之二各加一倍變為六分石之四則兩分母同為六分亦徑併兩分子五四得九內以滿母數六收為一石餘三為六分石之三即相加之數矣

凡子母數有三四種相加者其分母分子俱不同則用互乘法

三種者以第一數與第二數互乘相加得數又與第三數互乘相加四種者以第一數第二數互乘相加得數與第三數互乘相加得數復與第四數互乘相加如兩分母相同者即併其兩分子而與所餘之分母不同者用互乘以加之又或有兩分母相乘後所得之數與所餘之分母相同者則直以所得之分子與所餘之分子相加為得數即不用互乘矣如三分斤之一又四分斤之二又五分斤之三相加求總數法以前二數案互乘法相加得一十二分斤之十乃以一十二分斤之十與第三數用互乘法相加得六十分斤之八十六因子數大於母數乃收六十為一整數餘二十六為零數即得一斤零六十分斤之二十六為三數相加之總數也凡子母分有四五種相加者倣此又如五分丈之三又四分丈之一又五分丈之一相加求總數法以五分丈之三與五分

丈之一兩分母相同則以此二數併為五分丈之四與四分丈之一依互乘法相加得二十分丈之二十一因子數大於母數乃收二十為一整數餘一為零數即得一丈零二十分丈之一為總數也又如三分兩之二又四分兩之三又一十二分兩之四相加求總數法以前二數案互乘法相加得一十二分兩之一十七與第三分母適相同即以所得之分子一十七與第三分子四相加得二十一因子數大於母數乃收一十二為一整數餘九為零數即得一兩零一十二分兩之九為總數也

帶分減法

凡零數相減兩分母同者即將兩分子相減為餘數如一十一分丈之七減一十一分丈之五求餘數法以兩分母同為一十一分則兩分子亦同為一十一分中之零分故徑將兩分子七五

相減餘二為兩數相減餘數得一十一分丈之二此分母相同之減法也

凡零數相減兩分母不同者則用互乘法以所變兩子相減得餘數如加法例此分母不同之減法也如兩分母不同可加減之使其相同者亦如加法中例故不重設

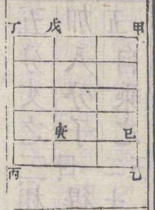
凡零數與整數相減者即以分子與分母相減得餘數如米一石內減七分石之五求餘數法以米一石通為七分為分母與分子五相減餘二即得七分之二為餘數也此整數中減零數法也

凡整數帶零分相減者將兩零分互乘變為同母然後減之如銀八兩零五分兩之四內減五兩零七分兩之三求餘數法以兩零分互乘變為八兩零三十五分兩之二十八內減五兩零三十五分兩之一十五得三兩零三十五分兩之一十三為餘數也此整數帶零分相減之法也

凡子母數三四種相減者其分母分子俱不同則用互乘以齊其分母按前法減之如兩分母相同者即將其兩分子相減而與所餘之分母不同者用互乘以減之又有兩分母相乘後所得之數與所餘之分母相同者則直以所得之分子與所餘之分子相減即得餘數其理俱與加法同

帶分乘法

凡零分與零分相乘者兩分子各相乘所得之數即乘出之分也如三分丈之二與五分丈之四相乘法以兩分母三五相乘得一十五又以兩分子二四相乘得八即定為一十五分丈之八為乘出之數也試作圖以明之如甲乙為一丈甲丁亦為一丈作一甲乙丙丁正方形將甲丁分為三分甲乙分為五分內共容一



十五分即兩分母乘出之共母數也甲丁三分之二爲甲戊甲乙五分之四爲甲巳二數相乘得甲巳庚戊長方形內容八分即兩分子乘出之共子數也正方與長方相較即知長方爲正方一十五分之八矣此零分乘零分之法也

零分與整數相乘者分子乘整數而以分母除之即所得之數也如有七人每人賞銀五分兩之二法以分子二乘七人得一十四以分母五除之得二兩八錢即七人共該之數也蓋五分兩之二是一兩分爲五分而得其二分也一人得二分則七人必共得一十四分既以一兩分爲五分今滿五分收爲一兩故一十四分爲二兩八錢也此零分與整數相乘之法也此即後歌訣所云一邊子母無整數子因共物母除之也

整數帶零分與整數乘者先將此帶分之整數以分母通之加入分子與彼整數相乘却以分母除之即得總數也如一百九十人每人支銀一兩又一十九分兩之一求共該銀數法以分母一十九通銀一兩爲一十九加入分子一共二十以乘共人一百九十得三千八百以分母一十九除之得二百兩即共該銀數也此整數帶零分與整數相乘之法也此即後歌訣所云一邊子母帶整數母乘整分子納之以乘共物爲之實却將分母法除之也

整數帶零分與零分乘者先將整數通爲零分相乘得數以分母自乘之數除之即得如有整數二丈又五分丈之四與零分五分丈之三相乘求總數法以整數二丈用分母五通爲一十分加入分子四得一十四分乃與零分分子三相乘得四十二以分母五自乘之二十五除之得一百六十八尺即所求之數也此整數帶零分

與零分相乘之法也。此因兩分母相同，故用此法。如分母不同，則用互乘法齊其分母，乃以所變之分母化整為零，再與彼所變分子相乘得數，以所變分母自乘之數除之，即得也。

整數帶零分與整數帶零分相乘，而分母不同者，則用互乘法齊其數，然後以相同之分母各化整為零，加入分子，相乘得數，再以同母自乘之數除之，即得。如長方田闊二丈又四分丈之三，長三丈又三分丈之二，求積法：以兩分母四三相乘得一十二，以前分母四乘後分子二得八，以後分母三乘前分子三得九，乃以共母數一十二通闊二丈為二十四分，加入分子九得三十三分，為闊分數；又以一十二通長三丈為三十六分，加入分子八得四十四分，為長分數；爰以兩數相乘得一千四百五十二分，乃以同母一十二自乘之一百四十四歸除之，得一十丈〇八尺又三分尺之一，為所得之積也。此整數帶零分與整數帶零分相乘之法也。此即後歌訣所云兩邊子母帶整數，照前乘納相乘之，同母自乘為法則，法除實分不差池也。蓋有一法不用互乘，得數亦同，更為直捷：以前分母四通闊二丈為八，加分子三得闊一十一分；以後分母三通長三丈為九，加分子二得長亦一十一分；兩數相乘得一百二十一分，乃以兩分母四三相乘得一十二為法除之，即得積一十丈〇八尺，不盡四，約得三分尺之一也。

帶分除法

零分歸除零分者，兩分母兩分子各自除之所得之數，即除出之分也。如有奇零不盡者，用互乘法代除，即得分數，其比例與除出之法同。如九分丈之二，以三分丈之一除之，求得幾何？法以九分丈之二為實，三分丈之一為法，以法分母三除實分母九得三，又以法分子一除實分子二仍得二，即定為三分丈之二，為所得之數也。若用互乘代除法，則以實分母九乘法分子一得九，為除出之分母；又以法分母三乘實分子二得六，為除出之分子，則定為九分丈之六，為所得之數也。此法與前法所

得之分母分子數雖不同而理則一蓋三分之二與九分之六其比例實同也前法以法除實其得數爲減分之比例此法兩數互乘其得數爲加分之比例耳

設如有米六分石之三每斗價四分錢之三問該銀幾何答曰二錢五分法以兩分子三二相乘得六爲實以兩分母四六相乘得二十四爲法除之得二錢五分即所求之數也此即後歌訣所云兩邊子母無整數乘子爲實乘母除也

設如有銀買羽絨每三分丈之一價四分兩之三今欲買八分丈之七問該銀幾何答曰一兩九錢六分八釐七毫五絲法以原價分母四乘今羽絨分母八得三十二爲乘出之分母以原價分子三乘今羽絨分子七得二十一爲乘出之分子是爲三十二分之二十一乃以原羽絨三分丈之一爲法除之

因分母除不盡變用互乘法代除以乘出之分母三十二乘法分子一仍得三十二爲除出之分母以乘出之分子二十一乘法分母三得六十三爲除出之分子即得三十二分之六十三滿分母三十二收爲整數一兩餘三十一如求真數以分子三十一乘整數一兩得三十一兩以分母三十二除之得九錢六分八釐七毫五絲加整數一兩卽得所求之數也

整數歸除零分者分母通整數以除分子卽得所求之數如五分丈之三以八丈除之求得幾何法以分子三爲實以分母五通整數八丈得四十爲法除之得七寸五分卽所求之數也此整數除零分之法也

零分歸除整數者分母通整數以分子除之卽得所求之數如六丈以三分丈之二除之求得幾何法以分母三通整數六丈

得十八爲實以分子二爲法除之得九丈即所求之數也此零分除整數之法也

整數帶零分歸除整數者先將法實之兩整數俱通爲零分而於法中加入分子除之即得如二十四丈以二丈零三分丈之二除之求得幾何法以分母三通二十四丈得七十二爲實又以分母三通二丈得六加入分子二得八爲法除之得九丈即所求之數也此法以分母三通法實之兩整數者是將兩整數之每丈俱通爲三分也兩整數旣化爲同等則法實一體故法除實而得所求之數也此整數帶零分除整數之法也

整數歸除整數帶零分者先將法實之兩整數俱通爲零分而於實中加入分子以法除之即得如前二丈零三分丈之二以二十四丈除之求得幾何法以分母三通二丈得六加入分子二得八爲實又以分母三通二十四丈得七十二爲法除之得一尺寸一分一不盡約爲九分丈之一即所求之數也蓋七十二與八之比即同於九與一之比故約爲九分之一此整數除整數帶零分之法也

整數帶零分歸除零分者先將整數通爲零分加入分子除之即得如五分丈之四以三丈零八分丈之一除之求得幾何法以五分丈之四爲實以法分母八通三丈爲二十四加入分子一得二十五共得八分丈之二十五爲法用第一條兩分母兩分子各自除之之法以法分母八除實分母五得六二五爲除出之分母以法分子二十五除實分子四得〇一六爲除出之分子乃以所得之分母除所得之分子得二尺五寸六分即所求之數也蓋法之三丈又八分丈之一乃三丈一尺二寸五分也實之五分丈之四乃八尺

也以三丈一尺二寸五分除八尺得二尺五寸六分今以六二五除一〇六得數亦同者六二五與三丈一尺二寸五分之比即同於一〇六與八尺之比爲加倍之比例也此整數帶零分除零分之法也若數有奇零歸除不盡者則用互乘法代除如前數已將整數通爲八分丈之二十五爲法乃以實分母五乘法分子二十五得一百二十五爲除出之分母又以法分母八乘實分子四得三十二爲除出之分子乃以所得之分母除所得之分子亦得二尺五寸六分蓋一百二十五與六二五之比又即同於三十二與一六〇之比亦皆爲加倍之比例也

零分歸除整數帶零分者先將整數通爲零分加入分子以法除之即得如四丈又三分丈之二以七分丈之四除之求得幾何法以實之分母三通整數四丈爲一十二加入分子二得一十四

共得三分丈之一十四爲實以七分丈之四爲法用互乘代除之法以實分母三乘法分子四得一十二爲除出之分母以法分母七乘實分子一十四得九十八爲除出之分子乃以所得之分母除所得之分子得八尺餘二不盡約爲六分尺之一此八尺零六分尺之一即所求之數也此零分除整數帶零分之法也

整數帶零分歸除整數帶零分者先各以整數通爲零分加入分子以法除實即得如有田五畝又三分畝之二共租銀五兩又二十七分兩之一每畝求得幾何法以銀分母二十七通五兩爲一百三十五加入分子一得一百三十六共得二十七分兩之一百三十六爲實又以田分母三通五畝爲一十五加入分子二得一十七共得三分畝之一十七爲法用互乘代除之法以銀分母二十七乘田分子一十七得四百五十九爲除出之分母以田分母三乘銀分子一百三十六得四百

〇八為除出之分子乃以所得之分母除所得之分子得八錢八分八釐又四百五十九分釐之四百〇八即每畝所出租銀數也此整數帶零分除整數帶零分之法也

設如城守兵一營其糧可支一年又七分年之三今汰去兵三分之一求應支年數幾何答曰一年又七分年之六分半

法以年分母七通一年為七分加入分子三得七分年之九又以兵分子一減分母三餘二為現存兵三分之二因兩分母不同故用互乘以齊之以兩分母七三相乘得二十一為共母分即原兵分以年分母七乘兵分子二得一十四為現存兵分以兵分母三乘年分子九得二十七為原年分即以所遞現存兵分一十四為法以原年分二十七乘原兵分二十一得五百六十七以法除之得四十分半滿母數二十一收為一年餘數為一年又二十一分年之一十九分半用法約之得一年又七分年之六分半為今應支之年數也蓋現存兵比原兵少三分之一則支糧年數必多三分之一故現存兵一十四與原兵二十一之比即同於原年分二十七與今年分四十分半之比也

通分訣

一邊子母無整數　子因其物母除之　兩邊子母無整數
乘子為實乘母除　一邊子母帶整數　母乘整分子納之
以乘其物為之實　卻將分母法除之　兩邊子母帶整數
照前乘納相乘之　同母自乘為法則　法除實分不差池

異乘同除說

數有應先除後乘者但用除法多有奇零不盡之數則無由而乘故變用先乘後除雖有不盡之數皆可命之此通變之法也

以今有之此一件乘原有之彼一件故曰異乘以原有之此一件除之而得今所求彼一件之數故曰同除

又訣

異乘同除法何如　物賣錢來作例推　先用原錢乘只物
却將原物法除之　算者留心能善用　一絲一忽不差池

設如原有麥三斗五升磨麪二十五斤今要麪一百七十五斤問該麥幾何答曰二石四斗五升　法以原麥三斗五升乘今用麪一百七十五斤得六十一石二斗五升為實以原磨麪二十五斤為法除之卽得

設如原有麥八斗六升磨麪六十四斤半今有麥三十五石四斗八升問該磨麪幾何答曰二千六百六十一斤　法以原磨麪乘今麥得二萬二千八百八十四斤六為實以原麥八斗六升除之卽得

同乘異除訣

同乘異除法可識　原物價相乘為實　今物除實求今價
今價除實求今物

設如有田一畝原濶八步長三十步今濶要一十二步求得長幾何答曰二十步　法以原濶八步乘原長三十步得二百四十步為實以今濶一十二步為法除之卽得按異乘同除法以原有之兩件為一率二率今有之一件為三率今所求之一件為四率俱以原有之一件與今有之一件相乘其積相等同乘異除法則以原有之兩件為二率三率今有之一件為一率今所求之一件為四率是原有之兩件相乘今有之兩件相乘其積相等此兩法異同之故也

設如原有小珍珠五十顆重一兩價一十二兩今有大珍珠三十顆重一兩問該價幾何答曰二十兩　法以原珠五十乘原

價一十二得六百兩爲實以令珠三十爲法除之即得
異乘同乘法謂如以四乘之又以五乘之再以七乘之者就變法以四乘五得二十再以七乘之得一百四十就以一百四十爲法乘之以代三次相乘而數一轍也
設如每人日織錦八尺二寸五分今有五十六人共織二十七日問該織錦幾何答曰一千二百四十七丈四尺 法以五十六人乘二十七日得一千五百一十二工再以日織八尺二寸五分乘之即得
異除同除法謂如用四除之又用五除之再用一十二除之者就變法以四乘五得二十再以一十二乘之得二百四十就以二歸四除以代三次歸除而數一轍也
設如有客一十五人住一十二日共用米三石六斗問每客日用米幾何答曰二升 法以米三石六斗爲實以一十五人乘一十二日得一百八十人爲法除之即得
同乘同除法謂應一除一乘再除再乘又除又乘多有不盡之數今變法總乘爲實總乘爲法除之

設如以夏布換棉布但知每夏布三丈價銀二錢每棉布七丈價銀七錢五分今有夏布四十五丈問換棉布幾何答曰二十八丈 法以夏布價二錢乘棉布七丈得一兩四錢再以夏布四十五丈乘之得六十三丈爲實以棉布價七錢五分乘夏布三丈得二兩二錢五分爲法除之即得此法乃合兩比例爲一比例也如分作兩比例明之每夏布三丈價銀二錢今夏布四十五丈則價銀應得三兩此一比例也棉布價銀七錢五分得棉布七丈今夏布四十五丈之價三兩則應得棉布二十八丈此又一比例也夫銀三兩原爲夏布四十五丈之價則夏布四十五丈所換之棉布二十八丈價銀亦應三兩可知矣蓋兩比例中一以三丈作一率一以七錢五分作一率故以三丈與七錢五

一比例
一率 夏布三丈
二率 二錢
三率 夏布四十五丈
四率 三兩

一率 七錢五分

二率　棉布七丈

分相乘得二兩二錢五分而為一率是合兩一

二比例

三率　三兩

率而為一一率也一以二錢作二率二以七丈

四率　棉布二十八丈

作二率故二錢與七丈相乘得一兩四錢而為

一率　二兩二錢五分

二率是合兩二率而為一二率也而後比例之

總比例

二率　一兩四錢

三率即前比例之四率如以兩三率相乘為三

三率　夏布四十五丈

率則所得四率亦為兩四率相乘之數必須以

四率　棉布二十八丈

前比例之四率除之方得後比例之四率故即以夏布四十五丈為三率而得棉布二十八丈為四率也

設如原有鵞八隻換雞二十隻每雞三十隻換鴨九十隻每鴨六十隻換羊二隻今却有羊五隻換鵞問該幾何答曰換鵞二十隻 法先用異乘同乘法以原鵞八乘原雞三十得二百四十又以原鴨六十乘之得一萬四千四百再以今有羊五乘之得七萬二千為

實又用異除同除法以換雞二十乘換鴨九十得一千八百又以換羊二乘之得三千六百為法除實即得此法乃合三比例為一比例也如分作三比例明之羊二隻換鴨六十隻則羊五隻必換鴨一百五十隻此一比例也鴨九十隻換雞三十隻則鴨一百五十隻必換雞五十隻此二比例也雞二十隻換鵞八隻則雞五十隻必換鵞二十隻此三比例也夫雞五十隻原為鴨一百五十隻之所換而鴨一百五十隻又原為羊五隻之所換則雞五十隻所換之鵞二十隻即為羊五隻之所換可知矣今以三比例之各一率連乘之為一率又以三比例之各二率連乘之為二率者正合三比例為一比例也

設如原有麥一萬二千石車一十二輛每車載三石日行八十里四十日運完今有麥三萬石車一十六兩每車載四石日

行六十里。問運完日數幾何。答曰。七十五日。　法以原有麥一萬二千石。互乘今車一十六輛。得一十九萬二千輛。又以今車載四石乘之得七十六萬八千石。又以今行里六十乘之得四千六百○八萬里。爲法。以今有麥三萬石。互乘原車一十二輛。得三十六萬輛。又以原車載三石乘之得一百○八萬石。又以原行里八十乘之得八千六百四十萬里。又以原運日四十乘之得三十四萬五千六百萬日爲實。以法除實即得。此法乃合四比例爲一比例也。如分作四比例明之。則先以麥數爲比例。原麥一萬二千石。四十日運完。今麥三萬石。則應運一百日。此一正比例也。然車數不同。故次以車數爲比例。原車一十二輛。應運一百日。今車十六輛。則應運七十五日。此一轉比例也。然每車所載石數又不同。故次以石數爲比例。原車載三石。應運七十五日。今車載四石。則應運五十六日四分日之一。此又一轉比例也。然日行里數又不同。故次以里數爲比例。原行八十里。應運五十六日四分日之一。今行六十里。則應運七十五日。此又一轉比例也。今以四比例之各一率。連乘之爲一率。以四比例之各三率。連乘之爲三率者。正合四比例爲一比例也。

九數通考卷一終