PSA Mathematik/ E2

< PSA Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Grundrechenarten

Definitionen

Die vier Grundrechenarten

Rechenart	Ausgedrückt als	Symbol	Namen der Teile	Name des Ergebnisses
Addition	plus	**+**	$2 \quad + \quad 7 \quad =$	9
(addieren, erhöhen)			Summand $+$ Summand $=$	Summe
Subtraktion	minus	**−**	$65 \quad - \quad 22 \quad =$	43
(subtrahieren, reduzieren, vermindern, abziehen)			Minuend $-$ Subtrahend $=$	Differenz
Multiplikation	mal	**·** (×)	$9 \quad \cdot \quad 13 \quad =$	117
(multiplizieren, vervielfachen, -fach)			Faktor $\cdot$ Faktor $=$	Produkt
Division	durch	**:** (÷, /)	$84 \quad : \quad 7 \quad =$	12
(dividieren, teilen)			Dividend **:** Divisor $=$	Quotient

Das Symbol = ist ein Gleichheitszeichen. Es steht für die Gleichheit zweier Ausdrücke. Es wird in einem eigenen Abschnitt genauer erklärt.

Das Symbol × für die Multiplikation wird kaum benutzt, weil es leicht mit dem Symbol oder dem Buchstaben x für die Variable x verwechselt werden kann. Wozu in Rechnungen Buchstaben verwendet werden, werden wir später lernen. Für die Multiplikation wird in diesem Buch das Symbol · benutzt.
Das ist ein Punkt ungefähr auf halber Höhe einer Ziffer notiert.

Für die Division benutzt man auch Punkte : Die anderen Symbole für die Division / und ÷ werden seltener benutzt.
Typisch wird allerdings / bei den Einheiten verwendet, beispielsweise in der Geschwindigkeit (km/h). In diesem Beispiel sagt man "Kilometer pro Stunde". Mit dem Wort "pro" ist Division gemeint.

Weil für Multiplikation und Division Punkte als Symbole verwendet werden, nennt man die beiden Rechenarten zusammen **Punktrechnungen**.

Die Symbole für die Addition + und die Subtraktion – verwenden dagegen beide Striche. Daher nennt man diese beiden Rechenarten zusammen **Strichrechnungen**.

Bei Addition und Multiplikation spielt jeweils die Reihenfolge keine Rolle:

$$5+6+11=6+11+5= \ 11+6+5 \ = \ 22$$

Die Reihenfolge spielt keine Rolle bei der Addition.

$$2\cdot 5\cdot 3=5\cdot 3\cdot 2= \ 2\cdot 3\cdot 5 \ = \ 30$$

Die Reihenfolge spielt keine Rolle bei der Multiplikation.

Bei Subtraktion und Division ist die Reihenfolge wichtig. Das Ergebnis ist nicht das Gleiche, wenn die Reihenfolge anders ist:

$5-3+2=4$ aber $5-2+3 \ = \ 6$

$10\cdot 5:2=25$ aber $10\cdot 2:5 \ = \ 4$

Weitere Ausdrücke für die vier Grundrechenarten

Im Alltag gibt es allerdings einige Worte, die irgendeine Rechenart bedeuten können:

Schneiden, *Kürzen* (zum Beispiel Gehalt) und so weiter könnte minus bedeuten

Wachsen, *zwei Sachen zusammen*, *insgesamt* könnte plus bedeuten

in einige gleiche Teilen schneiden könnte doch geteilt durch bedeuten

... und so weiter ...

Das Gleichheitszeichen

Ein Symbol, das bisher nicht erklärt wurde, ist das Gleichheitszeichen "=". Es wird benutzt, um zu zeigen, dass der Ausdruck links des Zeichens das Gleiche ist, wie der Ausdruck rechts des Zeichens. Dies betrifft sowohl den Wert als auch die Einheit.

$20 = 4 \cdot 5$ ✔(richtig)

$20\ \text{Kartoffeln} = 4 \cdot 5\ \text{Kartoffeln}$ ✔(richtig)

$20\ \text{Kartoffeln} = 4 \cdot 7\ \text{Kartoffeln}$ ✘(falsch: falscher Wert)

$20\ \text{Birnen} = 4 \cdot 5\ \text{Kartoffeln}$ ✘(falsch: falsche Einheit)

$10m \cdot 5 = 50$ ✘(falsch: rechts fehlt die Einheit m)

Wie man mit Einheiten arbeitet, werden wir genauer im entsprechenden Kapitel lernen. Da werden wir auch erfahren, dass

$15m = 150dm$

doch richtig ist.

Es gibt allerdings Gleichungen zwischen mehr als zwei Ausdrucken ("Gleichungsketten"), wie wir vorher gesehen haben:

$5 + 6 + 11 = 6 + 11 + 5 = 11 + 6 + 5 = 22$

Bei Gleichungsketten sind alle Ausdrücke gleich, daher kann man in diesem Beispiel auch schreiben:

$6 + 11 + 5 = 22$ oder $5 + 6 + 11 = 11 + 6 + 5$

Es gilt daher allgemein:

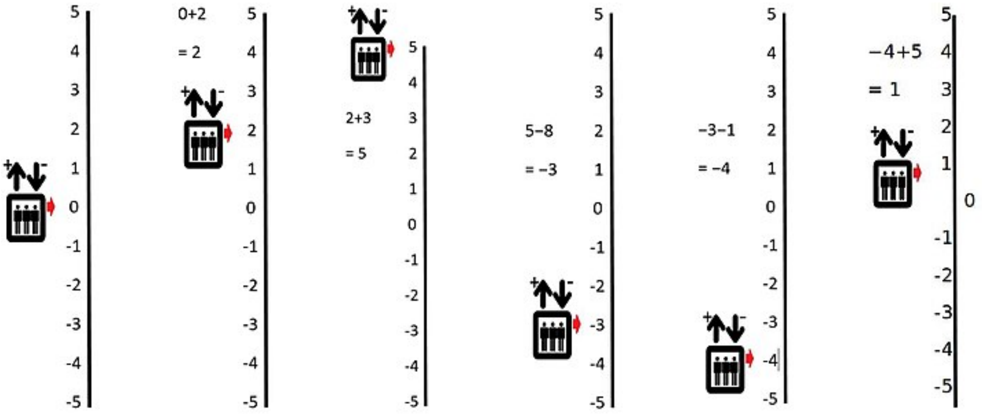
- wenn $a = b$ dann auch $b = a$
- wenn $a = b = c$ dann auch $a = c$

Gleichungsketten kann man allerdings in der Regel nicht bei sogenannten Äquivalenzumformungen benutzen, wie wir später lernen werden.

Die Gleichung zwischen zwei Ausdrucke spielt allerdings eine wichtige Rolle beim Einsetzen, ein Verfahren, das wir im entsprechenden Kapitel lernen werden.

Negative Zahlen

Das Minuszeichen benutzt man nicht nur bei der Subtraktion, sondern auch um sogenannte *negative Zahlen* zu bezeichnen. Was die negativen Zahlen sind, kann man ziemlich einfach verstehen, wenn man sich vorstellt, in einem Aufzug zu sein. Betrachten wir die folgende Bilderfolge:



Im ersten Bild fängt man vom Erdgeschoss an, dieses kann man mit der Zahl 0 bezeichnen. Dann fährt man mit dem Aufzug 2 Stockwerke nach oben. Die Richtung nach oben kann man mit Plus (+) bezeichnen. Das ist im Bild zu sehen. 0+2=2. Im dritten Bild fährt man aus dem 2. Stock 3 Stockwerke weiter nach oben (+ Richtung). 2+3=5. Im vierten Bild fährt man 8 Stockwerke nach unten. Nach unten kann man mit Minus (−) bezeichnen, da die Stockwerke weniger werden. Wenn man aber 5−8 rechnet, kann das Ergebnis nicht 3 sein. 3 ist oberhalb des Erdgeschosses, wir sind aber jetzt in dritten Untergeschoss. Um die Stockwerke unter dem Erdgeschoss zu bezeichnen, braucht man etwas Neues: das Minuszeichen vor dem Stockwerk! Wir sind also im Stock −3, also 3 Stockwerke unterhalb des Erdgeschosses.

Im fünften Bild fährt man ein Stockwerk weiter nach unten. Wir waren im Stock −3 und nach unten bedeutet minus. Am Ende sind wir 4 Stockwerke unter der Erde, also im Stock −4: −3−1=−4. Wenn also beide Zahlen negativ sind, addiert man ihren sogenannten Betrag (3 und 1) und schreibt vor dem Ergebnis wieder ein Minus. Im sechsten Bild fährt man aus dem 4 Stock unter der Erde (−4) 5 Stockwerke nach oben (nach oben bedeutet Plus machen) und befindet sich am Ende einen Stock oberhalb des Erdgeschosses (bei +1): −4+5=1. Wenn man zwei Zahlen mit unterschiedlichem Vorzeichen hat, subtrahiert man die Beträge (größerer Betrag minus kleineren Betrag, hier: 5−4=1) und schreibt man vor dem Ergebnis das Vorzeichen des größeren Betrags (also hier von 5, da sie mehr als 4 ist). Im vierten Bild haben wir 5−8 gerechnet. Da haben wir wieder die Beträge subtrahiert (größerer minus kleineren: 8−5=3) und im Ergebnis haben wir wieder das Vorzeichen des größeren Betrags geschrieben (also das Minus, das vor 8 steht): 5−8 = −3.

Zusammengefasst: Wenn man zwei Zahlen mit dem gleichen Vorzeichen hat (z.B. 4+7 oder −3−5), dann addiert man die Beträge (4+7=11 und 3+5=8) und schreibt vor dem Ergebnis das Vorzeichen: (4+7=11 und −3−5 = −8). Wenn die eine Zahl positiv (+) ist und die andere negativ(−), subtrahiert man die Beträge und schreibt vor dem Ergebnis das Vorzeichen des größten Betrags:
4−7=−3 15−9=6

Negative Zahlen werden immer mit einem Minus *davor* geschrieben, z.B. −6 oder −7,453 oder $-\sqrt{87}$. Positive Zahlen werden mit einem Plus davor geschrieben, z.B. +6 oder +7,453 oder $+\sqrt{87}$. Bei positiven Zahlen kann man das Vorzeichen auslassen. Zum Beispiel ist 6 die positive Zahl +6, mit 7,453 wird die positive Zahl +7,453 gemeint und mit $\sqrt{87}$ einfach $+\sqrt{87}$.

Wenn allerdings das Plus oder das Minus nach der Zahl geschrieben wird, bedeutet es nicht, dass es eine positive oder negative Zahl ist. In diesem Fall erwartet man, dass noch eine Zahl folgen soll. 3− ist einfach unvollständig und auf gar keinen Fall die Zahl Minus drei ...

Weiteres über Rechnungen mit negativen Zahlen werden wir im Teilkapitel über die *Plusminusregel* lernen.

Das Komma bei Dezimalzahlen

Noch ein wichtiger Punkt bei der Schreibweise muss man noch kurz ansprechen. Und es geht hier genau um den Punkt.

Wenn man mit dem Taschenrechner die Division 2 durch 7 macht, kommt etwas wie folgendes vor

0.28571428...

Das ist eine Zahl, die kleiner als eins ist. Auf Deutsch allerdings schreibt man:

0,28571428...

Falls der Unterschied nicht klar ist:

im ersten Fall steht zwischen 0 und dem Rest der Zahl ein Punkt:

0 . 28571428...

im zweiten Fall ein Komma:

0 , 28571428...

Man sagt auf Deutsch "Null Komma zwei acht fünf sieben...". Dieser Unterschied muss einem bewusst sein!

Auf Englisch und bei den meisten Taschenrechnern schreibt man

8970063.4583

oder sogar

8,970,063.4583.

Auf Deutsch und in ein paar anderen Sprachen werden die beiden Teile umgekehrt durch ein Komma getrennt:

8970063,4583

oder sogar

8.970.063,4583.

Auf diese Tatsache sollte man aufpassen!

Insbesondere wenn Menschen mit unterschiedlichen Kulturen, Sprachen oder Notationen Daten miteinander austauschen, kann dieser Unterschied für Verwirrung sorgen. Beim internationalen Datenaustausch und bei Programmiersprachen wird daher praktisch durchgehend der Punkt und nicht das Komma als Trennzeichen verwendet, in diesem Buch (wie allgemein auf Deutsch) allerdings das Komma.

Addition

Rechenart	Ausgedrückt als	Symbol	Namen der Teile	Name des Ergebnisses
Addition	plus	**+**	2 + 7 =	9
(addieren, erhöhen)			Summand + Summand =	Summe

Beispiele: a) 35,7 + 59367 + 95382,89 + 567332,76=? b) 56333,76 + 0,089 + 33727,727 + 9=?

Lösungen

Aufgabe a

2	2	1	2	1	2		1	0
0	0	0	0	3	5	,	1	
0	5	9	3	6	7	,	0	0
0	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6
7	**2**	**2**	**1**	**1**	**8**	**,**	**3**	**5**

Aufgabe b

1	1	0	2	1		1	1	
5	6	3	3	3	,	7	6	0
0	0	0	0	0	,	0	8	9
3	3	7	2	7	,	7	2	7
0	0	0	0	9	,	0	0	0
9	**0**	**0**	**7**	**0**	**,**	**5**	**7**	**6**

Man schreibt die Zahlen, die man addieren will, untereinander. Die Kommas müssen untereinander sein! Wenn eine Zahl kein Komma hat, dann schreibt man ein Komma am Ende der Zahl.

Um die Aufgabe übersichtlicher zu machen, schreibt man links und rechts der Zahlen Nullen(0), wenn Ziffer (im Vergleich zu den anderen Zahlen) „fehlen“.

Man addiert die Zahlen von jeder Spalte und fängt mit der **rechten** Spalte an (und dann immer eine Spalte nach **links**). Die Summe der Ziffer der Spalte schreibt man unterhalb dieser Spalte.

Wenn die Summe der Ziffer in der Spalte mehr als 9 ist, dann schreibt man unterhalb der Spalte nur die letzte Ziffer und die restlichen oberhalb der nächsten Spalte links. Z.B. bei der Aufgabe a ist die Summe der Ziffer der Spalte rechts (mit der man anfängt) 0+0+9+6=15. Man schreibt darunter 5 (die letzte Ziffer) und 1 (15 ohne 5) oberhalb der nächsten Spalte links usw. Hier ist Aufgabe a Schritt zum Schritt gezeigt:

Aufgabe a Schritt zum Schritt gelöst
35,7 + 59367 + 95382,89 + 567332,76=?

Aufgabe:
35,7 + 59367 + 95382,89 + 567332,76=?

Zahlen untereinander schreiben! Darauf aufpassen: **Komma unter Komma!**

				3	5	,	7	
	5	9	3	6	7	,		
	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6

Mit Nullen nachfüllen, damit die Rechnung übersichtlicher wird!
(nicht notwendig, aber empfehlenswert)

0	0	0	0	3	5	,	7	0
0	5	9	3	6	7	,	0	0
0	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6

Erste Spalte rechts wählen
und Summe berechnen!
0+0+9+6=**15**

0	0	0	0	3	5	,	7	0
0	5	9	3	6	7	,	0	0
0	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6

Zehnerziffer → 15 ← Einerziffer
Einerziffer (hier 5) unterhalb der gewählten Spalte schreiben, Zehnerziffer (hier 1) oberhalb der nächsten Spalte links

							1	
0	0	0	0	3	5	,	7	0
0	5	9	3	6	7	,	0	0
0	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6
								5

Nächste Spalte links wählen
und neue Summe berechnen!
1+7+0+8+7=**23**

							1	
0	0	0	0	3	5	,	7	0
0	5	9	3	6	7	,	0	0
0	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6
								5

Zehnerziffer → 23 ← Einerziffer
Einerziffer (hier 3) unterhalb der gewählten Spalte schreiben, Zehnerziffer (hier 2) oberhalb der nächsten Spalte links

					2		1	
0	0	0	0	3	5	,	7	0
0	5	9	3	6	7	,	0	0
0	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6
							3	5

Nächste Spalte links wählen
und neue Summe berechnen!
2+5+7+2+2=**18**
Komma nicht vergessen!

					2		1	
0	0	0	0	3	5	,	7	0
0	5	9	3	6	7	,	0	0
0	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6
						,	3	5

Zehnerziffer → 18 ← Einerziffer
Einerziffer (hier 8) unterhalb der gewählten Spalte schreiben, Zehnerziffer (hier 1) oberhalb der nächsten Spalte links

				1	2		1	
0	0	0	0	3	5	,	7	0
0	5	9	3	6	7	,	0	0
0	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6
					8	,	3	5

Nächste Spalte links wählen
und neue Summe berechnen!
1+3+6+8+3=**21**

				1	2		1	
0	0	0	0	3	5	,	7	0
0	5	9	3	6	7	,	0	0
0	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6
					8	,	3	5

Zehnerziffer → 21 ← Einerziffer
Einerziffer (hier 1) unterhalb der gewählten Spalte schreiben, Zehnerziffer (hier 2) oberhalb der nächsten Spalte links

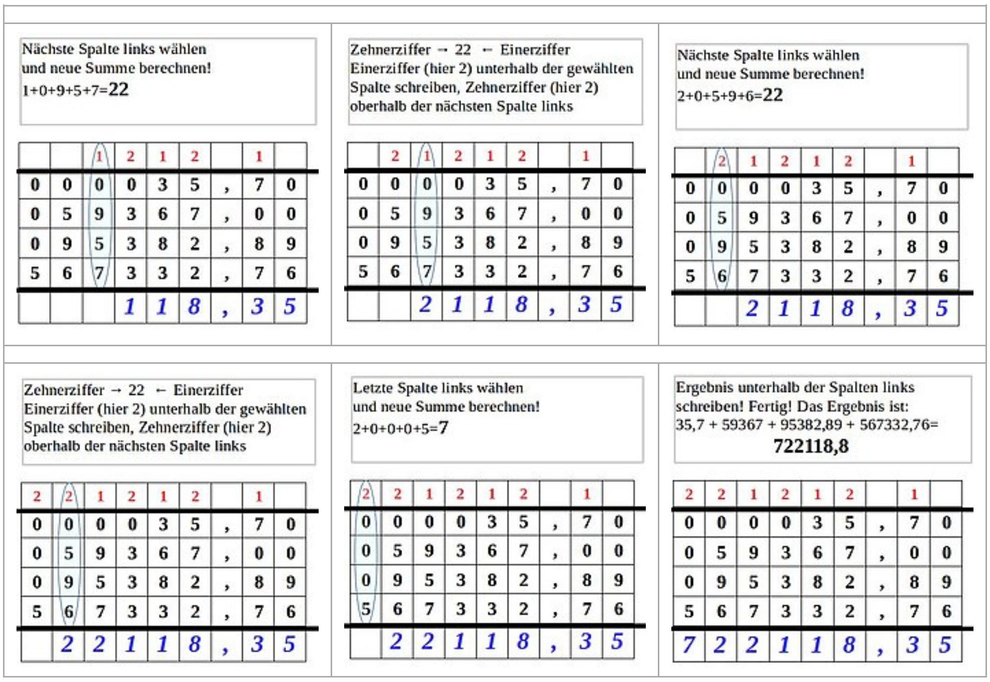
			2	1	2		1	
0	0	0	0	3	5	,	7	0
0	5	9	3	6	7	,	0	0
0	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6
				1	8	,	3	5

Nächste Spalte links wählen
und neue Summe berechnen!
2+0+3+3+3=**11**

			2	1	2		1	
0	0	0	0	3	5	,	7	0
0	5	9	3	6	7	,	0	0
0	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6
				1	8	,	3	5

Zehnerziffer → 11 ← Einerziffer
Einerziffer (hier 1) unterhalb der gewählten Spalte schreiben, Zehnerziffer (hier 1) oberhalb der nächsten Spalte links

		1	2	1	2		1	
0	0	0	0	3	5	,	7	0
0	5	9	3	6	7	,	0	0
0	9	5	3	8	2	,	8	9
5	6	7	3	3	2	,	7	6
			1	1	8	,	3	5



Subtraktion

Rechenart	Ausgedrückt als	Symbol	Namen der Teile	Name des Ergebnisses
Subtraktion	minus	−	65 − 22 =	43
(subtrahieren, reduzieren, vermindern, abziehen)			Minuend − Subtrahend =	Differenz

Beispiele: a) 9,2-6,7 b) 9,5-6,4 c) 4752,8–203,007

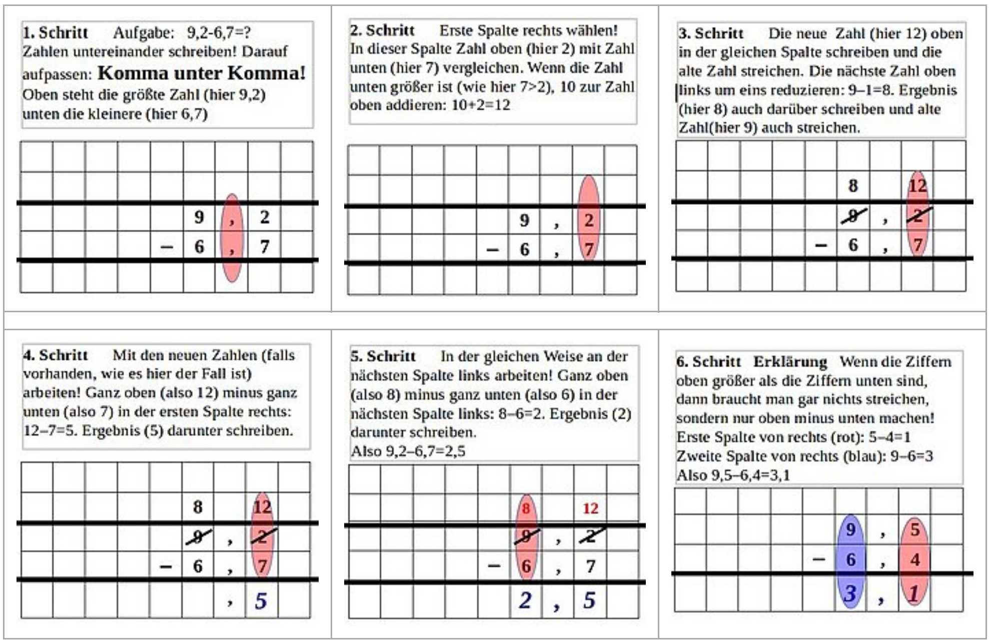
Man schreibt die Zahlen untereinander. Die Kommas müssen untereinander sein! Wenn eine Zahl kein Komma hat, dann schreibt man ein Komma am Ende der Zahl.

Die Zahl oben muss genau so viele Ziffer vor und nach dem Komma haben, wie die Zahl unten. Daher schreibt man rechts der Zahl oben Nullen(0), wenn Ziffer in den Nachkommastellen (im Vergleich zur Zahl unten) „fehlen".

Man subtrahiert die Zahlen von jeder Spalte (oben minus unten) und fängt mit der rechten Spalte an (und dann immer eine Spalte nach links).

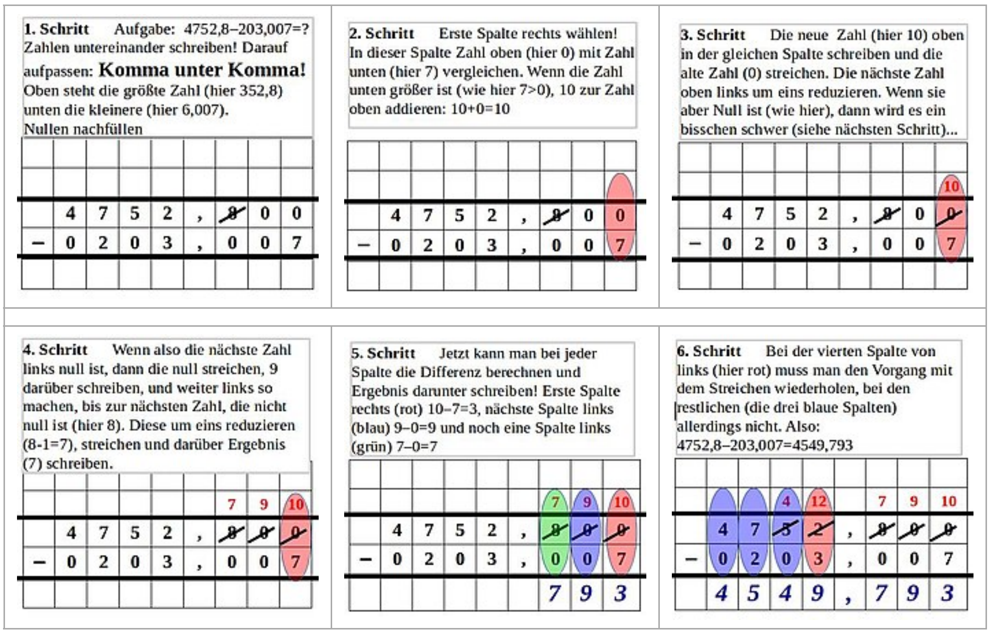
Wenn die Ziffer oben kleiner als die Ziffer unten ist, dann addiert man zu dieser Ziffer 10 und subtrahiert von der nächsten Ziffer oben links eins. In der nächsten Spalte links benutzt man dann oben die reduzierte Ziffer. Beispielsweise:

Aufgaben a und b: 9,2−6,7=? 9,5-6,4=?

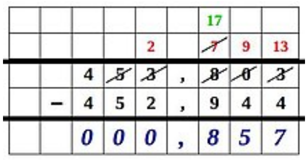
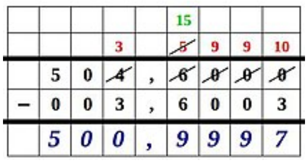
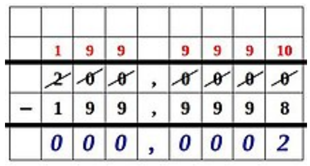


Bei größeren Zahlen macht man den ganzen Vorgang bei jedem Schritt.

Aufgabe c: 4752,8–203,007=?



Noch ein paar gelöste Beispiele:

Bsp. A 453,803−452,944=0,857	Bsp. B 504,6−3,6003=500,997	Bsp. C 200−199,9998=0,0002
		

Multiplikation

Definitionen

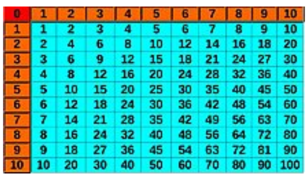
Rechenart	Ausgedrückt als	Symbol	Namen der Teile	Name des Ergebnisses
Multiplikation	mal	· (×)	9 · 13 =	117
(multiplizieren, vervielfachen, -fach)			Faktor · Faktor =	Produkt

Zunächst einmal erklären wir die Bedeutung der Multiplikation.

$5 \cdot 3$ bedeutet, dass man 5 mal die 3 zueinander addiert (plus macht). Also $5 \cdot 3 = \underbrace{3+3+3+3+3}_{5\ mal} = 15$. Allerdings spielt bei der Multiplikation die Reihenfolge keine Rolle. $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.

Letzteres ($3 \cdot 5$) bedeutet drei mal die 5 zueinander addieren: $3 \cdot 5 = \underbrace{5+5+5}_{3\ mal} = 15$.

Mit Hilfe der Addition kann man ein Multiplikationstabelle erstellen, sie wird ***das kleine Einmaleins*** genannt.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

das kleine Einmaleins

Multiplikation mit Hilfe der Einmaleins-Tabelle

Mit Hilfe der Einmaleinstabelle[1] kann man Multiplikationen zwischen Zahlen mit einer Ziffer ganz schnell berechnen:

2 mal 7 mit Hilfe der Einmaleinstabelle finden

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

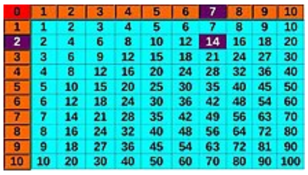
Zeile "2" wählen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Spalte "7" wählen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Box wo sie sich treffen wählen



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Ergebnis: 14

1. (die man allerdings schon auswendig lernen könnte)

Und noch ein paar Beispiele:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Die Reihenfolge Spielt...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

keine Rolle! 5x3=3x5

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Ebenfalls: 7x8...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

... = 8x7!

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

noch ein Beispiel

Multiplikation von Zahlen mit mehreren Ziffern und Nachkommastellen

a) $5 \cdot 3$ b) $5 \cdot 30$ c) $5 \cdot 37$ d) $4 \cdot 37$ e) $40 \cdot 37$ f) $37 \cdot 45$ g) $0{,}45 \cdot 0{,}000037$ h) $450 \cdot 37000$

Beispiel a haben wir im Abschnitt über Definition schon beantwortet: $5 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$

Bevor wir mit den restlichen Beispielen weitermachen, müssen wir zwei Sachen noch erklären.

1. Bemerkung: **Multiplizieren mit Klammern**
   Wenn etwas in Mathematik in Klammern steht, ist es so gemeint, dass die Rechnung in den Klammern erst gemacht werden muss. Wenn wir $3 \cdot (2+5)$ berechnen wollen, rechnen wir *erst* $2+5$ berechnen, also was in den Klammern steht $2+5=7$. Dann führen wir die Multiplikation aus $3 \cdot 7 = 21$. Hätten wir erst $3 \cdot 2$ gerechnet und dann $+5$, wäre das Ergebnis falsch: $3 \cdot 2 = 6 \text{ und } 6 + 5 = 11$.
   Das bedeutet dann, dass man die Zahl außerhalb der Klammern erst mit jedem Summand in den Klammern multiplizieren muss und dann diese Produkte addieren.
   $3 \cdot (2+5)$ ist nicht $3 \cdot 2 + 5$. Man muss erst die Zahl außerhalb der Klammern (3) erst mit jedem Summand in den Klammern (2 und 5) multiplizieren
   $3 \cdot 2 = 6 \text{ und } 3 \cdot 5 = 15$ und dann diese Produkte (6 und 15) addieren $6 + 15 = 21$ (also das richtige Ergebnis). Man schreibt:
   $3 \cdot (2+5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 6 + 15 = 21$
   oder
   $3 \cdot (2+5) = 3 \cdot 7 = 21$
2. Bemerkung: **Multiplizieren mit 10**
   Wenn man eine Zahl mit 10 multipliziert, ist das Ergebnis diese Zahl mit einer Null auf ihren rechten Seite geschrieben. Das haben wir in der einmaleins-Tabelle gesehen:
   $2 \cdot 10 = 20 \quad 3 \cdot 10 = 30 \quad 3 \cdot 10 = 30$ usw. Leicht denkt man dann, dass das Gleiche mit $15 \cdot 10$ passiert. Tatsächlich ist $15 \cdot 10$ gleich einer 15 mit einer 0 dahinter, also $15 \cdot 10 = 150$.

Im Beispiel b ist es möglich, 30 als Produkt von 3 und 10 zu schreiben. Es steht tatsächlich in der einmaleins-Tabelle, dass $3 \cdot 10 = 30$ ist, also

$30 = 3 \cdot 10$

Daher

$5 \cdot 30 = 5 \cdot 3 \cdot 10 = 15 \cdot 10$

(wir haben gerade eben im Beispiel a gesehen, dass $5 \cdot 3 = 15$ ist).

Wir wir in der zweiten Bemerkung (Multiplizieren mit 10) gerade eben gelernt haben, gilt für $15 \cdot 10$

$15 \cdot 10 = 150$

Man kann also zusammenfassen:

$5 \cdot 30 = 5 \cdot 3 \cdot 10 = 15 \cdot 10 = 150$, also $5 \cdot 30 = 150$.

Um **Beispiel c** zu lösen, können wir die erste Bemerkung (Multiplikation mit Klammern) benutzen:

$5 \cdot 37 = 5 \cdot (30 + 7) = 5 \cdot 30 + 5 \cdot 7$ ist

$5 \cdot 30 = 150$

wie wir eben im Beispiel b gesehen haben.

$5 \cdot 7 = 35$

wie man aus der Einmaleins-Tabelle ablesen kann. Somit ist

$5 \cdot 37 = 5 \cdot (30 + 7) = 5 \cdot 30 + 5 \cdot 7 = 150 + 35 = 185$,

also

$5 \cdot 37 = 185$.

In der gleichen Weise und mit den gleichen Schritten kann man Beispiel d berechnen:

$4 \cdot 37 = 4 \cdot (30 + 7) = 4 \cdot 30 + 4 \cdot 7 = 120 + 28 = 148$,

also

$4 \cdot 37 = 148$.

Aber auch **Beispiel e** ist dann nicht so schwer, man soll einfach eine Null zum Ergebnis von d dazu schreiben, wie wir in der Bemerkung über Multiplikation mit 10 gelernt haben:

$40 \cdot 37 = 1680$

Wenn jetzt 37 mit 45 multipliziert wird, wie im Beispiel f, dann werden die folgenden Schritte gemacht:

$$\begin{aligned} 37 \cdot 45 &= 37(40 + 5) \\ &= 37 \cdot 40 \qquad + 37 \cdot 5 \\ &= 1480^{\text{(Bsp. e)}} + 185^{\text{(Bsp. c)}} \end{aligned}$$

(Wir haben hier die Ergebnisse aus den Beispielene und c benutzt)

$1480 + 185$ ist

	1	4	8	0
+		1	8	5
	1	6	6	5

wie wir schon bei der Addition gelernt haben. Also:

$37 \cdot 45 = 1665$

Es gibt verschiedene Schreibweisen, die diesen Prozess beschreiben.

	45	×	37	
	1	4	8	0
+		1	8	5
	1	6	6	5

oder

(ohne Null)

	45	×	37	
	1	4	8	
+		1	8	5
	1	6	6	5

und

		45		
	×	37		
		1	8	5
+	1	4	8	0
	1	6	6	5

oder

		45		
	×	37		
		1	8	5
+	1	4	8	
	1	6	6	5

Wenn man Kommas hat, lässt man die Kommas und die Nullen am Anfang aus und macht die Multiplikation. Im Beispiel g ($0{,}45 \cdot 0{,}000037$) haben wir insgesamt 8 Nachkommastellen (zwei bei $0,\overbrace{45}^{2\ St.}$ und sechs bei $0,\overbrace{000037}^{6\ Stellen}$, also 2+6=8 Stellen nach dem Komma insgesamt). Beim Ergebnis der Multiplikation ohne Kommas (1665) fängt man dann mit der Ziffer rechts (hier 5) an und zählt nach links so viele Stellen, wie die gesamten Nachkommastellen (hier 8 Stellen). Dort muss beim neuen Ergebnis das Komma stehen. 1665 hat aber nur vier Ziffer. Wenn die Zahl weniger Ziffer als die Nachkommastellen hat wie hier, schreibt man erst mehrere Nullen links der Zahl:

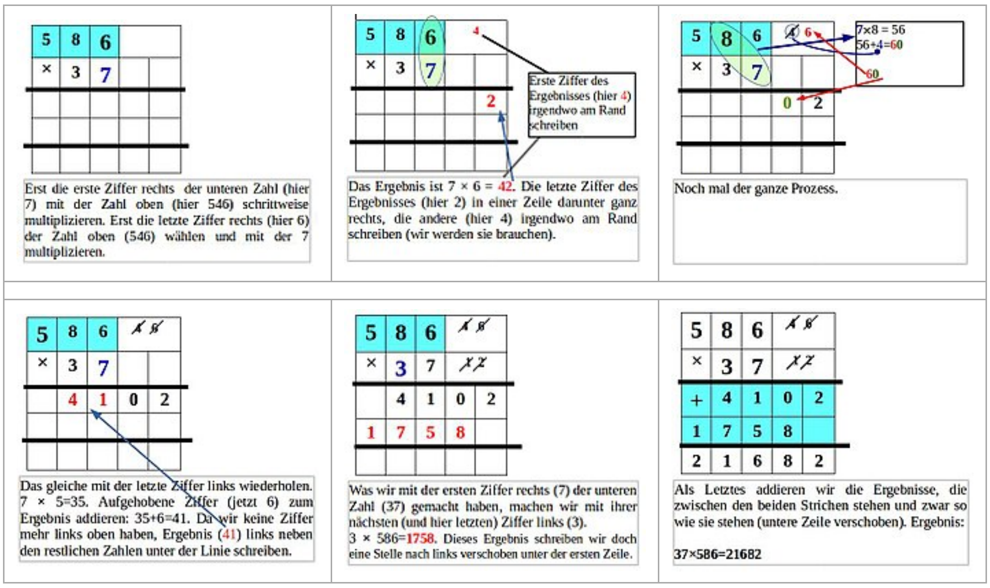
000000001665 $\qquad 00000|\overbrace{0001665}^{7\ Stellen}$ $\qquad$ Komma 7 Stellen nach links stellen $\rightarrow 0{,}0001665$

Daher:

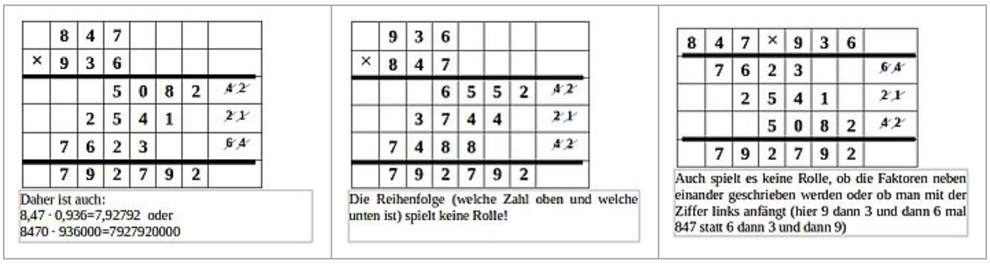
$0{,}45 \cdot 0{,}000037 = 0{,}0001665$

Wenn man Nullen am Ende der Zahlen hat, dann lässt man diese Nullen aus. Man macht die Multiplikation und schreibt dann wieder die ausgelassenen Nullen dazu. Im Beispiel h ($450 \cdot 37000$) haben wir 4 Nullen (eine bei 650 und drei bei 38000). Also zum Ergebnis 1865 schreibt man noch 4 Nullen dazu: 16650000. Also $450 \cdot 37000 = 18650000$.

Das Folgende Beispiel zeigt die Vorgangsweise genauer und Schritt zum Schritt:



Und noch ein Beispiel, diesmal mit zwei Zahlen mit jeweils drei Ziffern:



Division

Definitionen

Rechenart	Ausgedrückt als	Symbol	Namen der Teile	Name des Ergebnisses
Division	durch	**:** (÷, /)	84 : 7 =	12
(dividieren, teilen)			Dividend : Divisor =	Quotient

Einfache Division mit Hilfe der Einmaleins-Tabelle

Mit diesem Vorgang kann man Divisionen durchführen, wenn der Divisor höchstens (also kleiner oder gleich) 10 ist und der Dividend höchsten das 10-fache des Divisors (also wenn der Divisor 4 ist, höchsten 40, wenn der Divisor 7 ist, höchstens 70 und so weiter)

Zum Beispiel 17 : 5

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Zeile des Divisors wählen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

17 liegt zwischen 15 und 20
Beide Spalten wählen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Schauen, welche Zahlen
oben in den Spalten stehen

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Von beiden Zahlen (3 und 4)
die kleinste wählen.
Das ist das Ergebnis
17 : 5 = 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Aber 3 mal 5 ist
doch nicht 17

Es gibt einen Rest. Diesen
berechnen wir dann:
3 mal 5 = 15 und 17−15=2
also 17 : 5 = 3 mit Rest 2
Man schreibt:
17:5=3 R 2

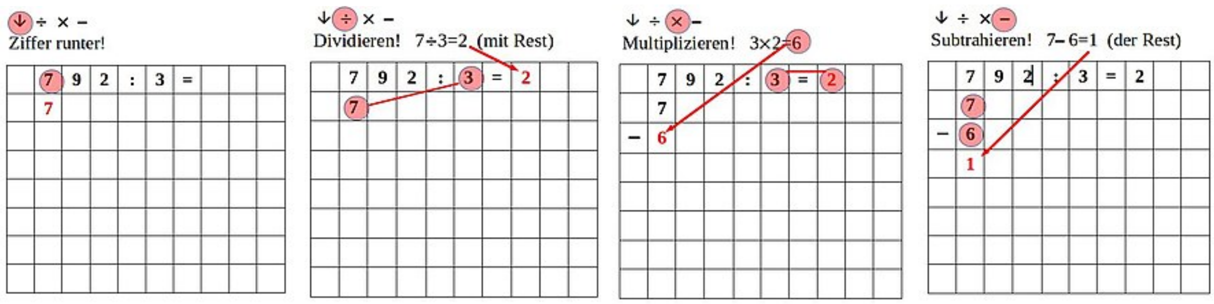
Der Haupt(vor)gang

Der Vorgang der Division, wenn der Dividend eine größere Zahl ist, kann durch vier Schritte beschrieben werden:

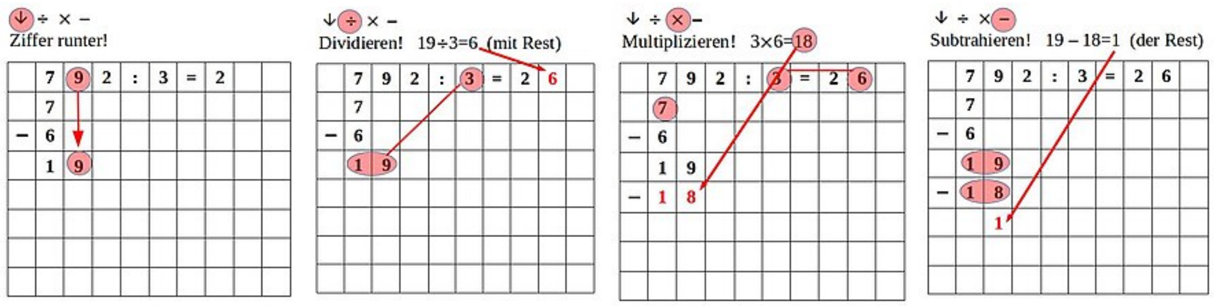
1. ↓ Ziffer runter (ganz links anfangen)
2. ÷ was runter steht durch den Divisor dividieren (mit Hilfe der Einmaleinstabelle)
3. × das Ergebnis der Division mit dem Divisor multiplizieren
4. − dieses Produkt von dem, was "runter steht" subtrahieren. So berechnet man den Rest der Division (Schritt 2)

So einen Vorgang nennt man in Mathematik (und nicht nur) Algorithmus. Die vier Schritte (↓ ÷ × –) werden wiederholt (so was nennt man Iteration). Wenn der Rest null ist und es kein Ziffer mehr am Dividend gibt, dann hört man auf. Es gibt aber auch die Möglichkeit, dass der Rest nie Null wird. Dieser Fall wird später erklärt.

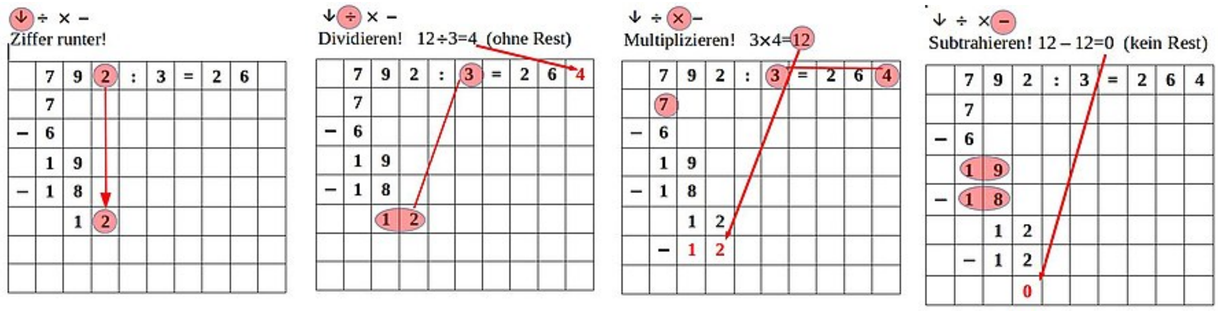
Am besten **versteht** man den Vorgang durch ein Beispiel (um ihn zu **lernen**, muss man selbstverständlich üben...). Probieren wir 792:3 zu berechnen:



Jetzt wird der Vorgang wiederholt!



Jetzt wird der Vorgang noch mal wiederholt!



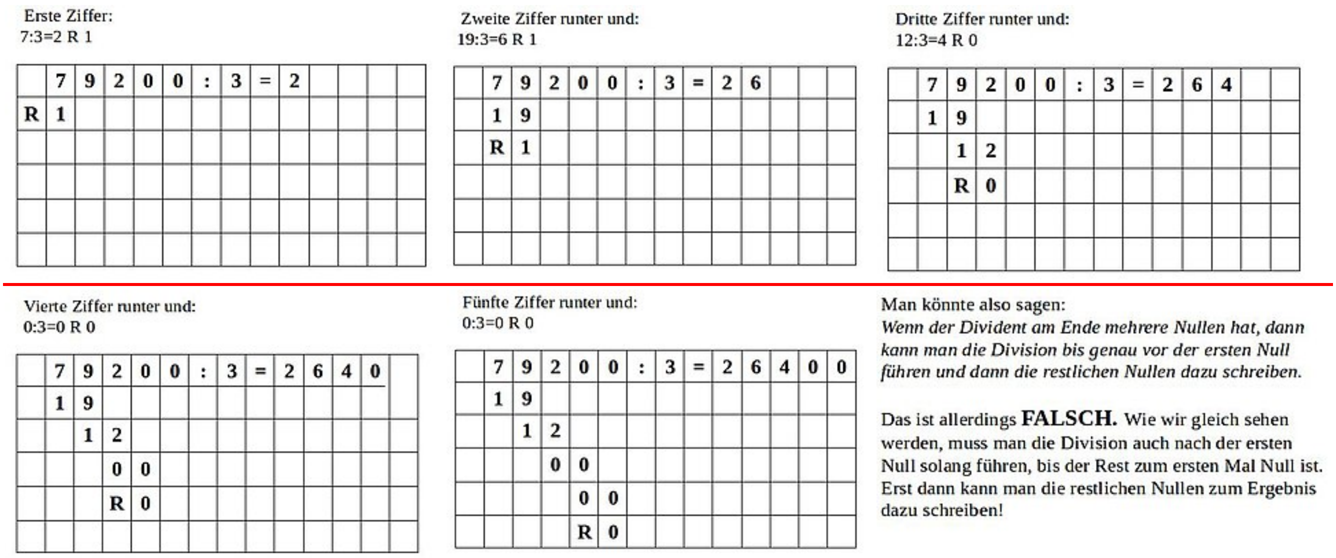
Was aber man in der Tat schreibt, sieht doch anders aus! Man schreibt nur gewisse Schritte, der Rest macht man im Kopf oder als Nebenrechnung am Rand. Hier die Schritte, wie sie tatsächlich geschrieben werden:

Ein letztes Beispiel:

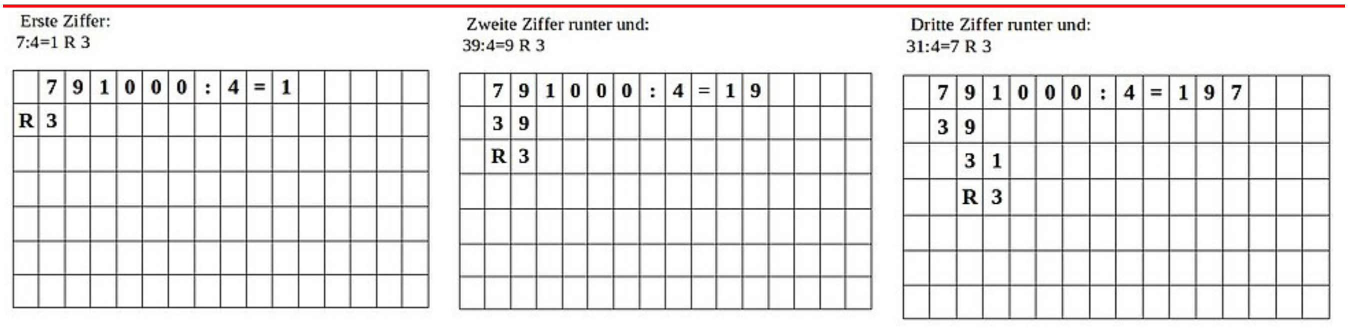
In diesem Fall sagt man, dass 842 durch 5 gleich 168 mit Rest 2 ist. Man schreibt 842:5=168 R 2. Der Rest muss allerdings immer kleiner als der Divisor sein (auch in den Zwischenschritten), sonst hat etwas nicht richtig geklappt. Die Division kann man allerdings weiterführen, wie wir bald lernen werden.

Dividend mit Nullen am Ende

Wenn der Dividend Nullen am Ende hat, kann man sich ein paar Schritte sparen. Schauen wir ein Beispiel:



Schauen wir jetzt, wie die **richtige Regel** lautet:



Vierte Ziffer (erste 0) runter und:
30:4=7 R 2

	7	9	1	0	0	0	:	4	=	1	9	7	7		
	3	9													
		3	1												
			3	0											
			R	2											

Fünfte Ziffer runter und:
20:4=5 R 0

	7	9	1	0	0	0	:	4	=	1	9	7	7	5	
	3	9													
		3	1												
			3	0											
				2	0										
				R	0										

Sechste Ziffer runter und:
0:4=0 R 0

	7	9	1	0	0	0	:	4	=	1	9	7	7	5	0
	3	9													
		3	1												
			3	0											
				2	0										
					0	0									
					R	0									

Man kann also **die Division aufhören und die restlichen Nullen erst dann schreiben, wenn der Rest zum ersten Mal Null ist!**

Wenn der **Divisor** auch **Nullen am Ende** hat, kann man vom beiden Divisor und Dividend so viele **Nullen streichen**, wie die Nullen des Divisors und erst dann die Division durchführen. Beispielsweise ist 7910000:400=79100:4(in beiden Fällen ist das Ergebnis 19775). Warum das so ist, kann man erst verstehen, wenn man das Kürzen von Brüchen gelernt hat, daher lernen wir es hier zunächst einmal einfach so, als Regel...

Null in der Mitte des Ergebnisses

8	0	3	2	:	4	=	2	0	0	8
0	0									
	0	3					Und nicht 28!			
		3	2							
			0	R						

			FALSCH!							
	8	0	3	2	:	4	=	2	8	
	0	0	3	2						
				0	R					

Ein Fehler, der oft vorkommt, ist die Nullen in der Mitte des Ergebnisses auszulassen.
Im ersten Bild sieht man den richtigen Vorgang.

Für jede Ziffer des Dividents, die runtergebracht wird,
***muss* ein Ziffer im Ergebnis geschrieben werden!**

Das richtige Ergebnis ist daher 2008. Im zweiten Bild sieht man den falschen Vorgang.
Selbstverständlich ist 28 nicht gleich 2008 und daher ein **falsches** Ergebnis!

Null am Anfang des Ergebnisses

2	3	6	:	4	=	0	5	9	
2	3								
	3	6							
		0	R						

↓	↓								
2	3	6	:	4	=	5	9		
	3	6							
		0	R						

Was ist aber, wenn die Null (oder die Nullen) ganz am Anfang des Ergebnisses stehen? In diesem Fall spielt es keine Rolle, ob die Null da steht oder nicht. 059 bedeutet genau die gleiche Zahl wie 59 (allerdings auch genau wie 59,000 und 00059, auf gar keinen Fall aber wie 590 oder 59000...).

Wenn man Nullen vor dem Anfang einer Zahl oder nach der letzten Nachkommastelle schreibt, ändert sich die Zahl nicht.

47,03=00047,03=47,030000=0047,03000.

Das gilt allerdings nur für den Anfang der Zahl oder nach der letzten Nachkommastelle. Wenn man Nullen irgendwo in der Mitte der Zahl schreibt, dann hat man nicht mehr die gleiche Zahl.
47,03 ≠ 407,03 ≠ 470,03 ≠ 47,003 Alle diese Zahlen sind nicht gleich!
Aus diesem Grund kann man am Anfang (**und nur am Anfang**) der Division mit den ersten zwei (oder drei und so weiter) Ziffern anfangen, wenn die erste kleiner als der Divisor ist. Dieser Vorgang wird im zweiten Bild dargestellt.

Dividend mit Komma (einfach)

	↓	↓						↓
7	9,	2	:	3	=	3	6,	4
1	9							
→	1,	2						
		0	(R)					

Was ist, wenn der Divident schon Nachkommastellen hat? In diesem Fall wird die Division, wie wir sie bisher gelernt haben, mit einer Änderung durchgeführt:

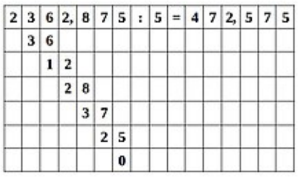
Wenn zur nächsten Ziffer nach dem Komma gesprungen werden muss, dann muss man erst ein Komma im Ergebnis schreiben.

In unserem Fall ist es **nicht** wenn man die Ziffer 9 im Dividend erreicht. Das Komma muss geschrieben werden, erst bevor man die nächste Ziffer nach dem Komma (hier die Ziffer 2) runter bringen muss. Erst dann schreibt man das Komma und dann macht man die Rechnung (12:3) und dann schreibt man das Ergebnis dieser Rechnung (4) **nach** dem Komma. ***Es gibt kein anderes Komma in der Zahl*** (also auf gar keinen Fall irgendwo ein zweites Komma schreiben).
Eine Bemerkung noch: Den letzten Rest haben wird hier mit (R) in Klammern geschrieben. Den Begriff Rest benutzt man eigentlich bei ganzzahligen Divisionen (mit Zahlen ohne Nachkommastellen)[1]. 0 ist hier der Teilrest der letzten Teildivision (12:4=3 R 0). Wenn bei einer Division mit Nachkommastellen im Ergebnis Teilrest 0 hat, kann man mit der Division aufhören. Das ist allerdings nur selten der Fall, wie wir gleich lernen werden.

1. Der genaue Begriff ist allerdings in diesem Fall Modulo

Divisor mit Komma (einfach)

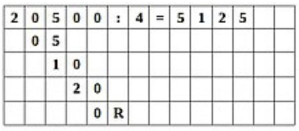
Was ist, wenn der Divisor Nachkommastellen hat, wie zum Beispiel in 236,2875:0,5? In diesem Fall wird das Komma sowohl im Divisor als auch im Dividenden so oft nach rechts verschoben, bis der Divisor keine (notwendige) Kommastelle mehr hat. In unserem Beispiel, wenn das Komma im Divisor (0,5) ein Mal nach rechts verschoben wird, bekommt man die Zahl 5, die keine Nachkommastellen hat. Das Komma wird dann auch im Dividenden (236,2875) ein Mal nach rechts verschoben (also der neue Dividend wird 2362,875 sein). Mit diesen neuen Zahlen kann man die Division ganz normal fortführen, wie im Bild am Rand. Der Prozess ist also:



- Komma in Divisor verschieben, bis er keine Nachkommastelle hat: $0{,}5 \rightarrow 0\underbrace{\times 5}_{1\ mal},\ldots \rightarrow 5 \rightarrow$
- Komma genauso oft (hier einmal) im Divident verschieben: $236{,}2875 \rightarrow 236\underbrace{\times 2}_{1\ mal},875 \rightarrow 2362{,}875 \rightarrow$
- Division mit den neuen Zahlen durchführen (siehe Bild)

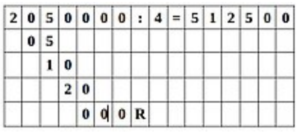
Was ist, wenn der Dividend keine Nachkommastellen hat, beispielsweise 205:0,04?

In diesem Fall denkt man, dass ein Komma am Ende des Dividenden steht, und schreibt so viele Nullen wie notwendig nach dem Komma: 205=205,00 (allerdings gilt auch 205=205,00000 und so weiter). Dann wird der Vorgang wie vorher durchgeführt:



- Komma im Divisor verschieben: $0{,}04 \rightarrow 0\underbrace{\times 04}_{2\ mal}, \rightarrow 4 \rightarrow$
- Komma genauso oft (hier zweimal) im Dividenden verschieben, bis er keine Nachkommastelle hat: $205{,}00 \rightarrow 205\underbrace{\times 00}_{2\ mal},\ldots \rightarrow 20500 \rightarrow$
- Division mit den neuen Zahlen durchführen (siehe Bild)

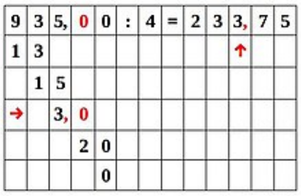
Ein letztes Beispiel: 205:0,0004. Hier muss man das Komma sogar viermal verschieben:



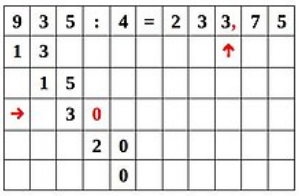
- Komma im Divisor verschieben: $0{,}0004 \rightarrow 0\underbrace{\times 0004}_{4\ mal},\ldots \rightarrow 4\backslash \rightarrow$
- Komma genauso oft (hier zweimal) im Dividenden verschieben, bis er keine Nachkommastelle hat: $205{,}000000 \rightarrow 205\underbrace{\times 0000}_{4\ mal},\ldots \rightarrow 2050000 \rightarrow$
- Division mit den neuen Zahlen durchführen (siehe Bild)

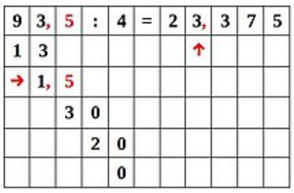
Dividend ohne Komma, Ergebnis mit Komma (nicht periodisch)

Was ist, wenn die Division nicht genau aufgeht. wie zum Beispiel in 935:4?



In diesem Beispiel ist es klar, dass ein Rest geben wird. Die Division kann man aber doch weiter fortsetzen, wie wir bei Zahlen mit Nachkommastellen schon gelernt haben. In diesem Beispiel können wir 935 als Zahl mit Nachkommastellen schreiben (freilich alle Nullen), wie wir schon gelernt haben: 935=935,00... Dann führen wir die Division in der gewöhnlichen Weise durch (siehe Bild). Allerdings kann man in diesem Fall die Nullen im Dividenden gar nicht schreiben, wie im Bild links unten zu sehen ist. In diesem Fall werden Nullen weiter unten geschrieben, bis der Teilrest irgendwann Null wird. Vorsicht aber: Wenn der Dividend zu Ende ist und die erste Null dazu benutzt wird, muss man ein Komma im Ergebnis schreiben!





Diesen Prozess (weiter Nullen schreiben) kann man auch benutzen, wenn der Dividend zwar schon Nachkommastellen hat, der Teilrest am Ende aber doch nicht Null ist. In diesem Fall schreibt man Nullen weiter, selbstverständlich ohne ein zweites Komma im Ergebnis zu schreiben!

Dividend ohne Komma, Ergebnis mit Komma(periodisch)

Bisher war es fast immer in den Beispielen so, dass der Teilrest am Ende Null war. Das war kein Zufall, die Beispiele wurden einfach so gewählt, damit sie verständlicher sind. In der Regel ist der Teilrest keine genaue Zahl. Probieren wir es mit dem folgenden Beispiel:

Wie wir schon gelernt haben, wenn man das Ende der Zahl erreicht und keine Ziffer mehr hat, kann man doch die Division weiterführen: erst eine Null im Ergebnis schreiben und dann eine Null jedes Mal dazuschreiben, bis irgendwann der Teilrest Null wird. In unserem Fall hier passiert so etwas aber nicht. Wie man sieht, wiederholen sich die Zahlen 2 und 7 immer wieder und, wie man hoffentlich versteht, das wird immer so bleiben. Wir haben hier diese Wiederholung mit verschiedenen Farben dargestellt. Die wiederholte Zifferreihenfolge nennt man Periode. Man sagt, dass das Ergebnis von 938 durch 11 gleich 85 Komma 27 periodisch ist. Man bezeichnet die Periode mit einem Strich über der Zifferreihenfolge (oder mit einem Punkt, wenn es nur eine Ziffer ist). Man schreibt also: $938 : 11 = 85{,}\overline{27}$

Man braucht die Division nicht weiterführen. Wann kann man aber genau damit aufhören? Wenn man schon mit Null hinzufügen angefangen hat (passiert hier bei der letzten Ziffer der Zahl 938) und der gleiche Teildividend vorkommt, dann kann man aufhören, wie im Bild hier

Kombinationen

Hier finden wir ein paar weiterführende Beispiele zur Vertiefung der Kenntnissen.

3	7	0	6	1	0	0	0	0	:	7	=	5	2	9	4	4	2	8	5,	9	1	...
	2	0																	↑			
		6	6																			
			3	1																		
				3	0																	
					2	0																
						6	0															
							4	0														
							→	5	0													
									1	0												
										3	0	...										

Probieren wir erst die Division 3706,1:0,00007. Wenn der Divisor ein Komma hat (wie hier 0,00007), dann muss man das Komma sowohl im Divisor also auch im Dividenden so oft nach rechts verstellen, bis der Divisor keine Nachkommastellen mehr hat. Falls der Dividend dann nicht genügende Nachkommastellen hat, werden sie mit Nullen nachgefüllt. Daher ist 3706,1:0,00007 gleich so viel wie 370610000:7

3706,1:0,00007=370610000:7

Letztere Division führen wir auch im Bild durch. Wir fangen dann mit dem Hauptvorgang (in verkürzter Darstellung) an. Da die erste Stelle des Dividenden (3) kleiner als der Divisor ist, kann man weitere Ziffer des Dividenden benutzen (also 37), weil Nullen am Anfang des Ergebnisses (und nur dort) keine Rolle spielen. Diese zwei Stellen wurden mit Hellblau markiert. Da, wo die rote Stelle und der rote rechts-Pfeil im Bild ist, kann man weitere Nullen einführen, nachdem erst ein Komma im Ergebnis geschrieben wird (roter nach-oben-Pfeil und Komma im Ergebnis). Mit Lila (um dem Teildividenden 30) wird darauf aufmerksam gemacht, dass das Ergebnis doch periodisch ist (also der Teildividend 30 und alle andere Teildividenten, die nach ihm kommen, in der gleichen Reihe immer wiederholt vorkommen). Die Periode, wie im Ergebnis wieder mit Lila notiert, ist die Ziffernfolge 428591.

Da man aber die Periode im Ergebnis erst nach dem Komma notiert wird, schreibt man nicht

$\mathbf{3706,1 : 0,00007 = 5295\overline{4285{,}91}}$ (falsch), sondern

$\mathbf{3706,1 : 0,00007 = 52954285{,}\overline{914285}}$ (richtig).

Im vorherigen Beispiel haben wir eine Division durch 11 gesehen. Da bestand die Periode aus zwei Ziffern (27). Im letzten Beispiel (Division durch 7) bestand die Periode aus sechs Ziffern (914285). Bei einer anderer Division (durch 4), gab es wieder keine Periode. Es kann also eine Periode geben oder nicht, und sie kann lang oder kurz sein. Im folgenden Beispiel (938:23) haben wir die Periode nicht mal angegeben, da sie schon aus 22 Ziffern(!) besteht. **Es gibt einen Beweis dafür, dass** wenn der Divisor und der Dividend ganze Zahlen sind (oder sein können), **immer eine Periode entsteht** (also eine wiederholte Reihenfolge von Ziffern nach dem Komma) oder ein Teilrest Null (also die Division kann aufhören). Diese Periode kann sehr lang sein, es gibt sie aber in diesem Fall immer.

Im folgenden Beispiel lernen wir allerdings auch dazu genauer, wie man die Division durchführt, wenn der Divisor größer als 10 ist. Wir haben schon eine solche Division gesehen, aber noch nicht erklärt, wie das funktioniert.

			9	3	8	:	2	3	=	4	0,	7	8	2	...	
(93−4×23=1)				1	8											
	(18−0×23=18)			1	8	,0										
		(180−7×23=19)			1	9	0									
			(190−8×23=6)				6	0								
				(60−2×23=14)			1	4	0	...						

Grundsätzlich gibt es hier nichts Neues. Man soll wieder die Grundschritten durchführen:

↓ Ziffer runter (ganz links anfangen)
÷ was runter Steht durch den Divisor dividieren ("wie oft der Divisor in den Teildividenden hineinpasst")
× das Ergebnis der Division mit dem Divisor multiplizieren
− dieses Produkt von dem, was "runter steht" subtrahieren.

Nun aber werden diese Schritte irgendwo am Rand durchgeführt und jeweils unter dem Teildividenden das Ergebnis der Subtraktion am Ende geschrieben.

Schritt ↓ Ziffer runter: Weil die erste Ziffer im Dividend (9) kleiner als der Divisor (23) ist, nehmen wir am Anfang die ersten zwei Ziffer des Dividenden (93)

Schritt ÷ dividieren: 23 passt in 93 viermal hinein (das kann man allerdings bei größeren Zahlen nur raten und ausprobieren). Wie erste Ziffer des Ergebnisses wird daher 4 sein.
Schritt × multiplizieren: Die letzte Ziffer des Ergebnisse (4) wird mit dem Divisor multipliziert: 4×23=92.
Schritt − subtrahieren: Das Ergebnis der Multiplikation (92) wird aus dem vorläufigen Teildividenden (93) subtrahiert (93−92=1). Allein das Ergebnis der Subtraktion (hier 1) wird dann unter den Teildividenden geschrieben. Im Bild haben wir allerdings die zwei letzten Schritten am Rand links zusammengefasst (93−4×23=1).

Diese Schritte werden dann wiederholt, bis man irgendwann die Periode entdeckt. Hier haben wir allerdings schon ziemlich bald aufgehört (wie schon erwähnt, ist die Periode in diesem Beispiel sehr lang...).

4	5,	2	:	1	3	=	3,	4	7	6	9	2	3	0	...
→	6	2					↑								
	1	0	0												
			9	0											
			1	2	0										
					3	0									
						4	0								
							1	0							
							1	0	0	...					

Im folgenden Beispiel ist der Divisor wieder größer als 10, wir haben aber hier die Teilschritte des Hauptvorgangs (↓ ÷ × −) nicht am Rand geschrieben. Die Division lautet 4,52:1,3, man soll also erst das Komma verschieben: 4,52:1,3=45,2:13. Letztere Division wird im Bild gezeigt. Wieder muss man mit zwei Ziffern anfangen. Sofort nach der ersten Ziffer im Ergebnis muss man ein Komma schreiben (roter Pfeil). Und wieder gibt es eine Periode (wenn der Teildividend 100 wiederholt wird), die Ziffernfolge 769230. Die Periode besteht hier (wie bei der Division durch 7 am Anfang dieses Teilkapitels) aus sechs Ziffern. Also $\mathbf{4,52 : 1,3 = 3{,}4\overline{769230}}$. Hier ist zu beachten, dass **nicht alle Ziffern nach dem Komma die Periode sind**! Die Periode fängt in diesem Fall erst nach der ersten Nachkommastelle an.

0,	0	0	4	5	2	:	1	3	=	0,	0	0	0	3	4	7	6	9	...
0	0																		
	0	0																	
		0	4																
			4	5															
				6	2														
				1	0	0													
						9	0												
						1	2	0	...										

Wenn allerdings die Division 0,0452:13 durchgeführt wird, muss man im Ergebnis schon mit Null und Komma anfangen (Bild links)! Der Rest des Vorgangs bleibt unverändert. Vorsicht aber: **in diesem Fall (wenn Komma schon am Anfang steht), darf man Nullen nicht auslassen**! Die Periode allerdings fängt in diesem Fall noch weitere Stellen nach dem Komma an: $\mathbf{0{,}0452 : 13 = 0{,}00034\overline{769230}}$.

Bei der Division 330,103:11 (links) finden wir noch ein paar Neuigkeiten. Die Periode besteht zwar wieder aus zwei Ziffern wie in der vorherigen Division durch **11**, diesmal sind es aber die Ziffern 36 (und nicht 27). Es gibt in dieser Division einige Nullen dazwischen, die man selbstverständlich NICHT auslassen darf und dazu ein Komma unter diesen Nullen.

3	3	0,	1	0	3	:	1	1	=	3	0,	0	0	9	3	6	...
	0	0									↑						
	→	0	1														
			1	0													
			1	0	3												
					4	0											
						6	0										
							4	0	...								

Bei der Division 391,204:11 (rechts) stellt man fest, dass die Division durch 11 sogar auch genau ausgehen kann (das stimmt ja für alle Divisoren, die ganzzahlig, also ohne Komma, sind). Wenn der Teilrest Null ist, ist der Vorgang fertig. Wann die Division durch bestimmte Zahlen genau aufgeht, lernt man im Kapitel über Teilbarkeit.

	3	9	1,	2	0	4	:	1	1	=	3	5,	5	6	4
		6	1												
			6	2											
				7	0										
					4	4			Null Teilrest! Rechnung fertig!!						
						0	(R)								

7,	4	3	:	3	=	2,	4	7	6	6	...
1	4										
	2	3									
		2	0								
			2	0							
				2	...						

Im letzten Beispiel können wir sehen, dass die Periode auch nur eine Ziffer sein kann (hier 6). In diesem Beispiel fängt die Periode wieder erst an der dritten Nachkommastelle an. Man schreibt $\mathbf{7,43 : 3 = 2,47\dot{6}}$

Punktrechnungen mit 10, 100, 1000 und so weiter

- Wenn man eine Zahl mit 10, 100, 1000 und so weiter ***multipliziert***, dann verschiebt sich das ***Komma*** der Zahl einfach ***nach rechts*** (die Zahl wird größer), so oft, wie es Nullen gibt:

  3,45 · 10 = 34,5 (***Mal*** 10; in 10 gibt es eine Null, Komma wird einmal nach ***rechts*** verschoben)

  54 · 10000 = 54,0000 · 10000 = 540000 (*Mal* 10000; in 10000 gibt es vier Nullen, Komma wird 4 Mal nach ***rechts*** verschoben; Allerdings gibt es kein Komma am Ende der Zahl 54; man schreibt ein Komma am Ende der Zahl und dazu nach dem Komma so viele Nullen, wie man will, und schiebt dann das Komma)

  0,008 · 100 = 0,8 (***Mal*** 100; in 100 gibt es 2 Nullen, Komma wird 2 Mal nach ***rechts*** verschoben)

- Wenn man eine Zahl mit 10, 100, 1000 und so weiter ***dividiert***, dann verschiebt sich das ***Komma*** der Zahl einfach ***nach links*** (die Zahl wird kleiner), so oft, wie es Nullen gibt:

  3,45:10 = 0,345 (***Durch*** 10; in 10 gibt es eine Null, Komma wird einmal nach ***links*** verschoben; allerdings gibt es links vor 3,4 keine Null, man schreibt also links von der Zahl so viele Nullen, wie man will, und schiebt dann das Komma)

  54:10000 = 0,0054 (***Durch*** 10000; in 10000 gibt es 4 Nullen, Komma wird 4 Mal nach ***links*** verschoben; allerdings gibt es links vor 54 kein Komma, man schreibt also links von der Zahl ein Komma und so viele Nullen, wie man will, und schiebt dann das Komma)

  0,008:100 = 0,00008 (***Durch*** 10; in 10 gibt es eine Null, Komma wird 1 Mal nach ***links*** verschoben; allerdings muss man zuerst am Ende der Kommazahl weitere Nullen schreiben)

  900000:100 = 9000,00 = 9000 (***Durch*** 100; in 100 gibt es 2 Nullen, Komma wird 2 Mal nach ***links*** verschoben; da es kein Komma am Ende der Zahl gibt, muss man erst das Komma schreiben)

Textaufgaben

Mit den Grundrechenarten kann man auch Textaufgaben bilden. Bei diesen Aufgaben ist in der Regel die Bedeutung der Wörter nicht so wichtig, wie der Aufbau des Satzes:

- *Dividieren Sie die Differenz von 125 und 20 mit der Summe von 4 und 3.*

Schauen wir mal, wie der Satz ***aufgebaut*** ist. Erst steht, dass man dividieren muss (also durch machen). Was muss man aber dividieren? Was steht nach dem Wort dividieren? Die Zahlen 125 und 20? **NEIN**! **Nach** dem Wort *dividieren* (durch machen) *steht* das Wort *Differenz*! Man muss also **erst** eine *Differenz* berechnen! Welche Differenz? Die Differenz von 125 und 20 (*was nach dem Wort Differenz steht*)! Das steht ja auch da! Die Differenz (Minus) von 125 und 20 ist 125−20=105. Diese Differenz muss man durch irgendwas dividieren. Ist das durch 4, durch 3 oder doch was anderes? Doch was anderes! Die Differenz muss man mit der *Summe* (Plus machen) dividieren. Man muss also erst eine Summe berechnen, die Summe von 4 und 3 (was nach dem Wort Summe steht), 4+3=7. Man soll also die *Differenz* (105) *durch die Summe* (7) *dividieren*:

105:7=15. 15 ist also die Antwort zur Aufgabe!

Vorrang der Rechenarten

Der Haupt(vor)gang

Bei einer Rechnung muss die Reihenfolge der Rechnungen klar sein, sonst ist das Ergebnis nicht eindeutig:

$6 + 3 - 7 + 5$:

- Wenn man von links nach rechts liest, dann: $6 + 3 = 9,\ 9 - 7 = 2,\ 2 + 5 = 7$ also Ergebnis 7.
- Wenn man von rechts nach links liest, dann: $\overleftarrow{12 = 7 + 5},\ \overleftarrow{9 = 3 - 12},\ \overleftarrow{15 = 6 + 9}$ also Ergebnis 15.

Das Ergebnis ist nicht das Gleiche! In den meisten Sprachen der Welt fängt man links an. Dann ist das richtige (und eindeutige) Ergebnis 7. Nur bei Addition oder Multiplikation spielt die Leserichtung und allgemein die Reihenfolge keine Rolle:

$6 + 5 + 11 = 5 + 6 + 11 = 11 + 5 + 6 = 5 + 11 + 6 = 22$

$2 \cdot 4 \cdot 5 = 4 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$

In diesem Buch wird die Deutsche Leserichtung benutzt, also von links nach rechts.

Was ist, wenn man Strich- und Punktrechnungen gleichzeitig hat?

$2 + 3 \cdot 4$

- Wenn man erst die Strichrechnung macht, ist das Ergebnis: $2 + 3 = 5 \ \rightarrow \ 5 \cdot 4 = 20$
- Wenn man erst die Punktrechnung macht, ist das Ergebnis: $3 \cdot 4 = 12 \ \rightarrow 2 + 12 = 14$

Das Ergebnis ist wieder unterschiedlich. Damit das Ergebnis eindeutig ist, muss es eine Regel geben. Noch einen Grund, warum es eine Regel geben muss, findet man, wenn man daran denkt, das bei Multiplikation und Addition die Reihenfolge keine Rolle spielen soll:

$2 + 3 \cdot 4$ und $3 + 2 \cdot 5$

Hier haben wir die Reihenfolge bei der Addition geändert (einmal steht 2+3 und dann 3+2). Machen wir in beiden Fällen erst die Multiplikation:

$2 + 12 = 14$ und $3 + 10 = 13$

Das Ergebnis ist wieder unterschiedlich. Damit das Ergebnis eindeutig ist, muss es eine Regel geben. In Mathematik haben die Punktrechnungen immer Vorrang (man muss die Punktrechnungen zuerst machen). Also ist hier 14 das richtige Ergebnis. Wenn es also in einer Rechnung Strich- und Punktrechnungen gibt, dann muss man zuerst die Punktrechnungen machen!

Wenn es aber eine Klammer gibt, dann muss man erst die Rechnung in der Klammer machen:

$(2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$ Hier ist das Ergebnis doch 20

$2 + (3 \cdot 4) = 2 + 12 = -10$ ...und hier ist das Ergebnis wieder 14.

Wenn es wiederum innerhalb einer Klammer mehrere Rechnungen gibt, dann muss man die Klammer erst machen und in der Klammer an die Regeln halten:

$5 + 36 : (3 \cdot 5 - 6) - (56 : 7 - 2) \cdot 3 = ?$

Unterstreichen wir zuerst die Rechnungen in den Klammern:

$$5 + 36 : \underbrace{(\underline{3 \cdot 5} - 6)}_{\substack{15 - 6 \\ 9}} - \underbrace{(\underline{56 : 7} - 2)}_{\substack{8 - 2 \\ 6}} \cdot 3 =$$

In beiden Klammern muss man zuerst die Punktrechnung machen
und dann die Strichrechnung in Klammer
Man kann also die Klammer durch das jeweilige Ergebnis ersetzen

$$5 + 36 : \cancelto{9}{(3 \cdot 5 - 6)} - \cancelto{6}{(56 : 7 - 2)} \cdot 3 =$$

$$5 + 36 : \quad 9 - \quad 6 \quad \cdot 3 =$$

Kompakter geschrieben ist die Rechnung jetzt:

$5 + 36 : 9 - 6 \cdot 3$ Hier muss man erst die Punktrechnungen machen

$5 + \cancelto{4}{36 : 9} - \cancelto{18}{6 \cdot 3} =$

$5 + 4 - 18 = -9$

Hier das Ganze noch einmal übersichtlicher

Klammer vor Punkt vor Strich
Klammer unterstreichen
$5 + 36 : \underline{(3 \cdot 5 - 6)} - \underline{(56 : 7 - 2)} \cdot 3$

Klammer vor Punkt vor Strich
In Klammer erst Punkt
$5 + 36 : (\underline{3 \cdot 5} - 6) - (\underline{56 : 7} - 2) \cdot 3$
15−6 8−2

Klammer vor Punkt vor Strich
In Klammer erst Punkt dann Strich
$5 + 36 : (3 \cdot 5 - 6) - (56 : 7 - 2) \cdot 3$
15−6 8−2
9 6

Klammer vor Punkt vor Strich
Klammer durch Ergebnis ersetzen
$5 + 36 : \cancelto{9}{(3 \cdot 5 - 6)} - \cancelto{6}{(56 : 7 - 2)} \cdot 3$
15−6 8−2
9 6

~~**Klammer**~~ vor Punkt vor Strich
Klammer fertig
$5 + 36 : \quad 9 \quad - \quad 6 \quad \cdot 3$

~~Klammer~~ vor **Punkt** vor Strich
Punkt unterstreichen & berechnen
$5 + \cancelto{4}{\underline{36 : 9}} - \cancelto{18}{\underline{6 \cdot 3}}$

Klammer vor Punkt vor **Strich**
Strich durchführen
$5 + 4 - 18 = \mathbf{-9}$

Fertig!

Alle Schritte kompakt dargestellt:

$$5 + 36 : \underbrace{(\underbrace{3 \cdot 5}_{15} - 6)}_{9} - \underbrace{(\underbrace{56 : 7}_{8} - 2)}_{6} \cdot 3 =$$

$$5 + \underbrace{36 : 9}_{4} - \underbrace{6 \cdot 3}_{18} =$$

$$5 + 4 - 18 = -9$$

Komplexeres Beispiel

$5+6\cdot 7-55:(21-4\cdot 8)-3\cdot[7+2\cdot(6\cdot 3-39:3)]-57=$

In der großen Klammer hat die kleine Klammer Vorrang (Klammer vor Punkt vor Strich)

$\downarrow \quad 7+ \quad 2\cdot(18-13)$ — In der kleinen Klammer erst Punkt und dann Strichrechnung

$\downarrow \quad 7+2\cdot 5$ — Kleine Klammer durch ihr Ergebnis in der großen Klammer ersetzen

$21-32 \quad 7+10$ — In den verbliebenen Klammern erst Punkt- und dann Strichrechnungen

$-11 \quad 17$ — Man kann also die Klammer durch das jeweilige Ergebnis ersetzen

$$5+6\cdot 7-55:\cancel{(21-4\cdot 8)}^{21-32=-11}-3\cdot\underbrace{\left[7+\overbrace{2\cdot(\cancel{6\cdot 3}^{18}-\cancel{39:3}^{13})}^{2\cdot\cancel{(18-13)}^{5}=10}\right]}_{7+10=17}-57=$$

$$5+\cancel{6\cdot 7}^{42}-\cancel{55:(-11)}^{-5}+\cancel{3\cdot 17}^{51}-57$$

$$5+42+5-51-57=-56$$

(an Plus-Minus Regelnhalten!)

Klammer vor Punkt vor Strich Große Klammer unterstreichen $5+6\cdot7-55:(21-4\cdot8)-3\cdot\underline{[7+2\cdot(6\cdot3-39:3)]}-57$ **Schritt 1**
Klammer vor Punkt vor Strich Klammer in großer Klammer unterstreichen $5+6\cdot7-55:(21-4\cdot8)-3\cdot[7+2\cdot\underline{(6\cdot3-39:3)}]-57$ **Schritt 2**
Klammer vor **Punkt** vor Strich *Punkt* in kleiner Klammer unterstreichen & berechnen $5+6\cdot7-55:(21-4\cdot8)-3\cdot[7+2\cdot(6\cdot3-39:3)]-57$ $(18-13)$ **Schritt 3**
Klammer vor Punkt vor **Strich** *Strich* in kleiner Klammer unterstreichen & berechnen $5+6\cdot7-55:(21-4\cdot8)-3\cdot[7+2\cdot(6\cdot3-39:3)]-57$ $\underline{(18-13)}$ **Schritt 4** (6)
Klammer vor Punkt vor Strich Kleine Klammer durch Ergebnis ersetzen $5+6\cdot7-55:(21-4\cdot8)-3\cdot[7+2\cdot\cancel{(6\cdot3-39:3)}^{6}]-57$ $(18-13)$ **Schritt 5** (6)
Klammer vor Punkt vor Strich Kleine Klammer durch Ergebnis ersetzen $5+6\cdot7-55:(21-4\cdot8)-3\cdot[7+2\cdot(6)]-57$ **Schritt 6**
Klammer vor Punkt vor Strich Kleinere Klammern unterstreichen $5+6\cdot7-55:(21-4\cdot8)-3\cdot[7+2\cdot(6)]-57$ **Schritt 7**
Klammer vor **Punkt** vor Strich *Punkt* in kleineren Klam. unterstreichen & berechnen $5+6\cdot7-55:(21-\underline{4\cdot8})-3\cdot[7+\underline{2\cdot(6)}]-57$ $21-32 \quad 7+12$ **Schritt 8**
Klammer vor Punkt vor **Strich** *Strich* in kleineren Klam. unterstreichen & berechnen $5+6\cdot7-55:(21-4\cdot8)-3\cdot[7+2\cdot(6)]-57$ $\underline{(21-32)} \quad \underline{(7+12)}$ **Schritt 9** $(-11) \quad 17$
Klammer vor Punkt vor Strich Kleinere Klammern durch entspr. Ergebnis ersetzen $5+6\cdot7-55:\cancel{(21-4\cdot8)}^{(-11)}-3\cdot\cancel{[7+2\cdot(6)]}^{17}-57$ $\cancel{(21-32)} \quad \cancel{(7+12)}$ **Schritt 10** $(-11) \quad 17$
Klammer vor Punkt vor Strich Kleinere Klammern durch entspr. Ergebnis ersetzen $5+6\cdot7-55:(-11)-3\cdot17-57$ **Schritt 11**
Klammer vor **Punkt** vor Strich (plus mal minus Regel) *Punkt* unterstreichen und berechnen $5+\cancel{6\cdot7}^{42}-\cancel{55:(-11)}^{5}-\cancel{3\cdot17}^{51}-57$ **Schritt 12**
Klammer vor Punkt vor **Strich** Strich durchführen $5+42+5-51-57=$ **-56** **Schritt 13** **Fertig!**

(an Plus-Minus Regelnhalten!)

Bruchrechnungen

Definitionen

Bruch: $\begin{array}{cl} 10 & \leftarrow \text{Zähler} \\ - & \leftarrow \text{Bruchstrich} \\ 5 & \leftarrow \text{Nenner} \end{array}$

Es gilt: $\frac{10}{5} = 10 : 5 = 2$ (Ein Bruch ist wie eine Division)

Unterschied: Ein Bruch ist eine Zahl. Eine Division ist eine Rechenart zwischen zwei Zahlen.

Echter Bruch: Wenn der Nenner größer als der Zähler ist: $\frac{5}{11}$

Unechter Bruch: Wenn der Zähler größer als der Nenner ist: $\frac{11}{5}$

Gleichnamige Brüche: Brüche, die den gleichen Nenner haben (z.B. $\frac{10}{5}$, $\frac{3}{5}$)

Gemischte Zahlen

Eine gemischte Zahl besteht aus einer natürlichen Zahl und einem echten Bruch $6\frac{4}{5}$

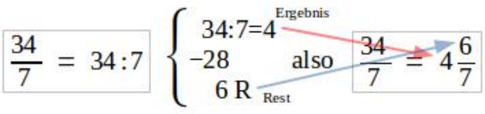
Gemischte Zahl in unechten Bruch umwandeln

Um eine gemischte Zahl in einen Bruch umzuwandeln, multipliziert man die natürliche Zahl mit dem Nenner des Bruches und addiert das Ergebnis zum Zähler. Das neue Ergebnis ist dann der Zähler des neuen Bruches, der Nenner bleibt der gleiche:

$$6\frac{4}{5} = \frac{6 \cdot 5 + 4}{5} = \frac{34}{5}$$

Unechten Bruch in gemischte Zahl umwandeln

Um einen unechten Bruch in eine gemischte Zahl umzuwandeln, dividiert man den Zähler mit dem Nenner (ohne Nachkommastellen). Das Ergebnis der Division ist der „Zahlteil" der gemischten Zahl, der Rest ist der Zähler des „Bruchteils", der Nenner bleibt der gleiche:



(siehe Division)

Erweitern und Kürzen

Erweitern ist, wenn man sowohl Zähler als auch Nenner eines Bruches mit der gleichen Zahl multipliziert. Der neue Bruch bleibt dann doch gleich:

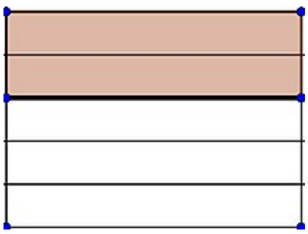
$$\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{20}{35}$$

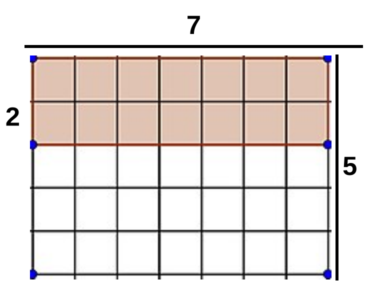
Kürzen ist, wenn man sowohl Zähler als auch Nenner eines Bruches mit der gleichen Zahl dividiert. Der neue Bruch bleibt dann doch gleich:

$$\frac{12}{8} = \frac{12 : 4}{8 : 4} = \frac{3}{2}$$

In all diesen Fällen arbeitet man mit natürlichen Zahlen (positive Zahlen ohne Komma).

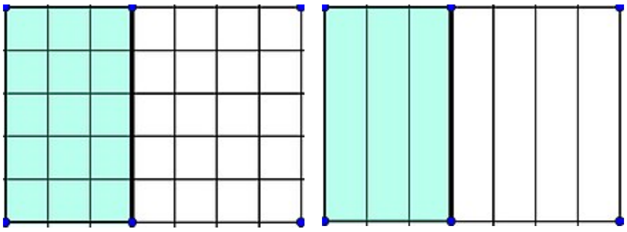
Erklärung des Erweiterns und des Kürzens





Vergleichen wir die beiden Bilder. Im ersten Bild wird das Ganze im 5 geteilt, zwei Teile davon werden dunkel dargestellt. Das ist also eine Repräsentation des Bruches $\frac{2}{5}$. Im zweiten Bild wird das Ganze nicht nur in 5 (waagerecht) sondern auch in 7 (senkrecht) geteilt. Dadurch entstehen im Ganzen $5 \cdot 7 = 35$ kleine "Quadrate". Jedes kleines Quadrat ist daher $\frac{1}{35}$ des Ganzen. Die dunkle Region ($\frac{2}{5}$) beinhaltet allerdings $2 \cdot 7 = 14$ solche "Quadrate" also $\frac{14}{35}$. Man folgt daraus, dass $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$ ist. Man hat in diesem Fall sowohl den Zähler als auch den Nenner mit der gleichen Zahl (hier 7) ***multipliziert***: $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{14}{35}$. Diesen Prozess nennt man erweitern.

Der Gegenprozess ist dann das *Kürzen*. Im ersten Bild wird das Ganze in 5 Zeilen und 7 Spalten also insgesamt in $7 \cdot 5 = 35$ kleine "Quadrate" geteilt (das könnte selbstverständlich eine andere Austeilung sein). Die blaue Region ist $3 \cdot 5 = 15$ solche Teile, also $\frac{15}{35}$. Wenn man jetzt die waagerechte Austeilung (in Fünf Zeilen geteilt) entfernt (zweites Bild), dann



ist das ganze nur in 7 (Spalten) geteilt, wobei jetzt die blaue Region 3 Spalten davon ist also $\frac{3}{7}$. In diesem Fall haben wir sowohl Zähler als auch Nenner durch die gleichen Zahl (hier 5) dividiert: $\frac{15}{35} = \frac{15:5}{35:5} = \frac{3}{7}$. Diesen Prozess nennt man kürzen.

Strichrechnungen

Wenn man zwei Brüche addiert oder subtrahiert, dann muss man auf den Nenner aufpassen:

Brüche mit gleichem Nenner:

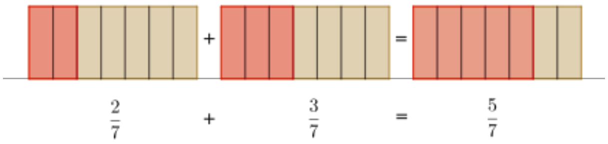
$$\frac{5}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5+2}{4} = \frac{7}{4}$$

Brüche mit unterschiedlichen Nennern: Zähler und Nenner des ersten Bruches mit Nenner des zweiten erweitern (blaue Pfeile) und entsprechend für den zweiten Bruch (rote Pfeile)!

$$= \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} \left(= \frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{3 \cdot 4} \right) = \frac{15}{12} + \frac{8}{12} = \frac{15+8}{12} = \frac{23}{12}$$

Dabei ist es nicht wichtig, ob man minus oder plus zwischen den Brüchen hat. Allein der Nenner (ob er der gleiche oder nicht ist) spielt einer Rolle.

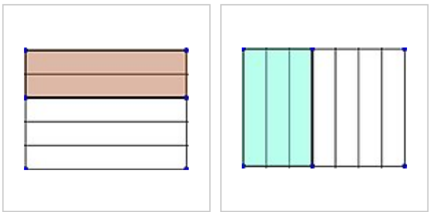
Erklärung der Strichrechnungen



Wenn man den gleichen Nenner hat, ist es leicht mit einer Figur zu verstehen, warum die angegebene Regel gilt. Man kann sehen:

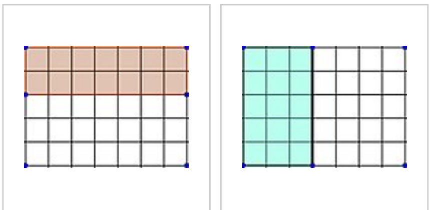
wenn zwei Schokoladentafeln in 7 geteilt werden und von einer Schokoladentafel 3 Teile (drei Siebtel) und von der anderen 2 Teile (zwei Siebtel) genommen werden, hat man insgesamt 5 Teile (also fünf Siebtel).

Was ist aber, wenn man nicht den gleichen Nenner hat, wie z.B. mit $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$?



Wie kann man das zeigen, dass das Egebnis $\frac{2 \cdot 7 + 5 \cdot 3}{5 \cdot 7}$ sein soll?

Einfach! Man teilt die erste Figur auch in 7 Teilen und die zweite in 5:



Jedes kleines Quadrat in den neuen Figuren ist $\frac{1}{35}$ des Ganzen. Wir haben in beiden Figuren 5·7=35 kleine Quadrate. Wie man sehen kann, sind die $\frac{2}{5}$ gleich so viel wie $\frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{14}{35}$ und die $\frac{3}{7}$ gleich so viel wie $\frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35}$. Da wir jetzt gleichnamigen Brüchen haben, kann man die Zähler addieren:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{14+15}{35} = \frac{29}{35}$$

Punktrechnungen

Bei einer Multiplikation zwischen zwei Brüchen multipliziert man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner (Oben mal Oben, Unten mal Unten):

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

Bei der Division von zwei Brüchhen multipliziert man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweitens Bruches:

$\frac{5}{4} : \frac{3}{7} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 3} = \frac{35}{12}$ ($\frac{7}{3}$ ist der Kehrwert von $\frac{3}{7}$)

Hier spielt der Nenner keine Rolle (im Gegenteil zu den Strichrechnungen).

Arbeiten mit ganzen Zahlen und Brüchen

Die Rechnungen mit ganzen Zahlen und Brüchen sind leicht, wenn man den vorherigen Stoff schon verstanden hat.

Strichrechnungen

Um eine ganze Zahl in einen Bruch umzuwandeln, reicht das Produkt der ganzen Zahl mit dem Nenner des Bruches als Zähler im Bruch zu schreiben:

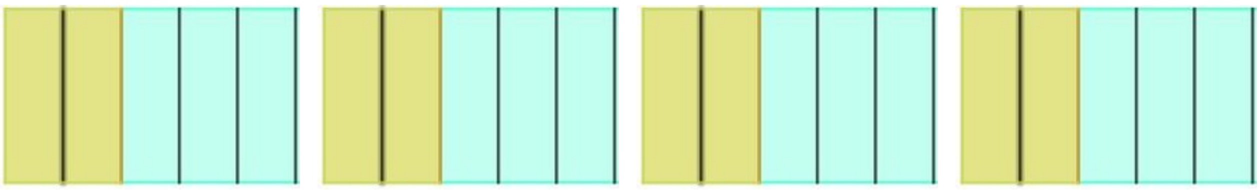
$3 = \frac{5 \cdot 3}{5} = \frac{15}{5}$

Das sollte schon klar sein, da 15:5=3 ist... Um das zu veranschaulichen reicht es 3 ganzen jeweils in 5 geteilt nebeneinander zu stellen. Dann werden genau 3×5=15 Fünftel aufgezählt!

Hat man einmal die ganze Zahl als (gleichnamigen) Bruch, kann man auch eine entsprechende Strichrechnung durchführen, z.B.:

$3 + \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7}{7} + \frac{2}{7} = \frac{23}{7}$ $\qquad$ $5 - \frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 9}{9} - \frac{5}{9} = \frac{40}{9}$

Punktrechnungen



Genau so leicht ist die entsprechende Multiplikation. Im ersten Bild werden zwei Fünftel dargestellt und diese werden 4 mal nebeneinander dargestellt. Insgesamt sind es daher 4×2=8 Fünftel.

$4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{8}{5}$

Um das Produkt einer ganzen Zahl mit einem Bruch zu berechnen, reicht es das Produkt der ganzen Zahl mit dem Zähler des Bruches in einem neuen gleichnamigen Bruch zu schreiben.

Die Division ist dann auch leicht:

$4 : \frac{3}{13} = 4 \cdot \frac{13}{3} = \frac{52}{3} \; (= 17\frac{1}{3})$

Um den Quotient einer ganzen Zahl durch einem Bruch zu berechnen, reicht es das Produkt der ganzen Zahl mit dem Kehrwert des Bruches zu berechnen.

Kombinationen

Bei Kombinationen von Bruchrechnungen muss man auf der Reihenfolge (siehe Vorrang der Rechenarten) aufpassen:

$\frac{2}{3} + \left(\frac{6}{7} - \frac{9}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{16}{21} : \frac{4}{7}\right)$

Man muss zuerst die Klammern machen:

- Erste Klammer

$\frac{6}{7} - \frac{9}{7} = \frac{6-9}{7} = -\frac{3}{7}$ *Hier haben wir nur eine Strichrechnung und zwar mit dem gleichen Nenner*

- Zweite Klammer

$\frac{2}{5} - \frac{16}{21} : \frac{4}{7}$ *Hier müssen wir erst die Punktrechnung machen und dann die Strichrechnung.*

$\frac{2}{5} - \frac{16}{21} : \frac{4}{7} = \frac{2}{5} - \frac{16}{21} \cdot \frac{7}{4} = \frac{2}{5} - \frac{16 \cdot 7}{21 \cdot 4}$ *Hier soll man erst kürzen.*

$$\frac{2}{5} - \frac{\cancel{16}^{4} \cdot 7}{21 \cdot \cancel{4}^{1}} = \frac{2}{5} - \frac{4 \cdot \cancel{7}^{1}}{\cancel{21}^{3} \cdot 1} = \frac{2}{5} - \frac{4}{3} \ \left(\text{Vorgang: } \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}\right) = \frac{2 \cdot 3 - 4 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{6-20}{15} = -\frac{14}{15}$$

Jetzt kann man in der Rechnung die Ergebnisse für die Klammern einsetzen:

$$\frac{2}{3} + \cancelto{-\frac{3}{7}}{\left(\frac{6}{7} - \frac{9}{7}\right)} \cdot \cancelto{-\frac{14}{15}}{\left(\frac{2}{5} - \frac{16}{21} : \frac{4}{7}\right)} =$$

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \left(-\frac{14}{15}\right) \text{(minus mal minus ist plus)} =$$

$$\frac{2}{3} + \frac{\cancel{3}^{1} \cdot \cancel{14}^{2}}{\cancel{7}^{1} \cdot \cancel{15}^{5}} \text{(hier erst kürzen)} = \frac{2}{3} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} =$$

$$\frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{16}{15}$$

Textaufgaben zu den Bruchrechnungen

Die Textaufgaben mit Bruchrechnungen werden i.d.R. leicht in die mathematische Sprache umgewandelt:

In einem Staat mit 8,46 Millionen Einwohner trinkt jeder Einwohner durchschnittlich vier Neuntel Liter Milch täglich.

a. i. *Wie viel Liter werden dann täglich konsumiert?*
   ii. *Der Gewinn für die Eigentümer ist 0,8¢/Liter Milch. Wie viel ist der tägliche Gewinn? Finden Sie ihn gerechtfertigt?*
b. *Im einem anderen Staat gibt es 4 Supermarktketten. Zusammen gewinnen die Eigentümer 105000€ täglich. Eigentümer A bekommt zwei Fünftel des Gewinns, Eigentümer ein Drittel und den Rest teilen die anderen zwei Eigentümer C und D. Wie viel gewinnt täglich jeder Eigentümer? Finden Sie den Gewinn gerechtfertigt?*

Aufgabe a lässt sich leicht berechnen:

$$8{,}46 \cdot \frac{4}{9} = 3,76 \text{ (Millionen Liter)}$$

Da der Gewinn pro Liter 0,8¢ ist, soll man 0,8 mit 3,76 Mil. multiplizieren (dann hat man ¢) und dann durch 100 dividieren (dann hat man €):

$$3{,}76 \cdot \frac{0{,}8 \cdot 1000000}{100} = 30080 \text{ (€)}$$

Ob dieser Gewinn gerechtfertigt ist, soll jeder für sich entscheiden (die Eigentümer werden ihn sicherlich gerechtfertigt finden, sonst würden sie ihn nicht machen...).

Aufgabe b ist ebenfalls nicht besonders schwer:

Eigentümer A: $105000 \cdot \frac{2}{5} = 44000 \text{ (€)}$

Eigentümer B: $105000 \cdot \frac{1}{3} = 35000 \text{ (€)}$

Eigentümer C und D teilen den Rest: $105000 - 44000 - 35000 = 26000 \qquad 26000 : 2 = 13000 \text{ (€ jeweils für Eigentümer C und D)}$

Primfaktorzerlegung

Definitionen

Primzahlen sind die natürlichen Zahlen (Zahlen ohne Komma und Minus), die nur durch 1 und sich selbst geteilt werden können. (teilbar: dividieren, ohne dass eine Kommazahl entsteht)

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
geht auch durch			2		2 3		2 4	3	2 5		2 3 4 6	
Primzahl	✔	✔	✘	✔	✘	✔	✘	✘	✘	✔	✘	✔

Z.B.:

2 ist nur durch 2 und 1 teilbar und daher eine Primzahl.

3 ist nur durch 3 und 1 teilbar und daher eine Primzahl.

4 ist nur durch 4 und 1, aber auch durch 2 teilbar und daher keine Primzahl.

5 ist nur durch 5 und 1 teilbar und daher eine Primzahl.

6 ist nur durch 6 und 1, aber auch durch 2 und 3 teilbar und daher keine Primzahl.

usw.

Was bedeutet in diesen Sätzen "teilbar"? Eine Zahl ist durch eine andere Zahl teilbar, wenn das Ergebnis der Division kein Nachkommastellen enthält.

Nehmen wir die Zahl 5.

$\mathbf{5 : 1 = 5}$

$\mathbf{5 : 2 = 2{,}5}$

$\mathbf{5 : 3 = 1{,}\dot{3}}$

$\mathbf{5 : 4 = 1{,}25}$

$\mathbf{5 : 5 = 1}$

Dividiert man 5 durch jede größere natürlich Zahl (also: 6,7,8…), erhält man als Ergebnis eine Kommazahl kleiner als 1 (also Null-Komma-irgendwas). Beispielsweise:

$\mathbf{5 : 6 = 0{,}8\dot{3}}$

Teilbar ist die Zahl 5 also nur durch eins (5:1=5) und sich selbst (5:5=1). Da bei unserem Beispiel alle anderen Ergebnisse ein Komma enthalten ist die Zahl 5 eine Primzahl.

Für 6 hingegen ist das nicht der Fall. 6 ist selbstverständlich durch 1 und 6 teilbar, aber eben auch durch 2 (6:2=3) und durch 3 (6:3=2). Daher ist 6 KEINE Primzahl.

Die ersten Primzahlen sind also 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23 ...

Faktor ist ein Teil einer *Multiplikation*.

Primfaktorzerlegung (PFZ) bedeutet daher, eine Zahl als Produkt von Primzahlen auszudrücken (die dann Faktoren sind; Primzahlen die auch Faktoren sind, nennt man Primfaktoren; wenn man eine Zahl in Primfaktoren zerlegt, hat man die PFZ).

Vorgangsweise

Nehmen wir die Zahl 7800. Wir versuchen sie durch die Primzahlen der Reihe nach und soweit es jedes Mal geht zu dividieren. Die erste Primzahl ist 2 7800 : 2 = 3900. Geht es weiter durch 2? Ja! 3900 : 2 = 1950. Geht es noch weiter? Ja! 1950:2=975. Weiter durch 2 geht es aber nicht.

Probieren wir dann durch 3. Geht es? Ja! 975:3=325. Geht es weiter durch 3? Nein! (325:3 = 108,33

Probieren wir die nächste Primzahl: 325:5=65. Das geht nochmal: 65:5=13.

Die nächsten Primzahlen sind 7 und **11**, da geht es nicht. Es geht wieder durch 13 13:13=1.

Hier sind wir fertig. Wir haben 7800 drei mal durch 2, ein mal durch 3, zwei mal durch 5 und ein mal durch 13 dividiert und dann war das Ergebnis 1. Es gilt daher: 7800:2:2:2:3:5:5:13=1 und umgekehrt (Gegenrechnung) 7800=2·2·2·3·5·5·13.

Schreibweise

Den ganzen Prozess Schritt zum Schritt kann man so darstellen:

7800		7800	2	7800	2	7800	2	7800	2	7800	2	7800	2
		3900		3900	2	3900	2	3900	2	3900	2	3900	2
				1950		1950	2	1950	2	1950	2	1950	2
						975	3	975	3	975	3	975	3
						325		325	5	325	5	325	5
								65		65	5	65	5
										13		13	13
												1	

Anwendungen

Brüche kürzen

Wir haben schon das Kürzen von Brüchen gesehen:

$$\frac{45}{35} = \frac{45 : 5}{35 : 5} = \frac{9}{7}$$

Hier sieht man sofort, dass man sowohl den Zähler als auch den Nenner durch 5 teilen kann. Was ist aber, wenn man große Zahlen hat. In diesem Fall ist es besser, die PFZ der Zahlen erst durchzuführen:

$$\frac{6664}{8820} = ?$$

6664	2
3332	2
119	7
17	17
1	

8820	2
4410	2
2205	3
735	3
245	5
49	7
7	7
1	

Man schreibt Zähler und Nenner als Produkt von Primzahlen und kürzt den Bruch (also Primzahlen, die oben und unten vorkommen, werden gestrichen)

$$\frac{6664}{8820} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 17}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}} = \frac{2 \cdot 17}{3 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{34}{45}$$

Strichrechnungen von mehreren Brüchen

Wir haben schon gesehen, wie man zwei Brüche addiert oder subtrahiert. Was ist aber, wenn man mehrere Brüche hat? Man könnte selbstverständlich erst die zwei Brüche machen, das Ergebnis mit dem nächsten Bruch usw, es gibt aber in diesem Fall eine Methode, die schneller ist und die PFZ benutzt: Hier macht man zuerst die PFZ der Nenner:

$\frac{41}{120} - \frac{11}{36} + \frac{37}{300} = ?$ Hier macht man zuerst die PFZ der Nenner:

120	2	36	2	300	2
60	2	18	2	150	2
30	2	9	3	75	3
15	3	3	3	25	5
5	5	1		5	5
1				1	

120 = 2·2·2·3·5	Hier kommt 2 **drei** mal vor
36 = 2·2·3·3	Hier kommt 2 *zwei* mal vor
300 = 2·2·3·5·5	Hier kommt 2 *zwei* mal vor
	Am häufigsten kommt die 2 **drei** mal vor
kgV=2·2·2·3·3·5·5	Also müssen wir 2 in kgV **drei** mal benutzen. Das gleiche passiert mit 3 und 5.

(**kgV** bedeutet kleinstes gemeinsames Vielfaches)

Das kgV wird der neue gemeinsamer Nenner sein. Das bedeutet wir müssen alle drei Brüche erweitern. Im ersten Bruch ($\frac{41}{120}$) ist der Nenner 120 und muss auf 1800 erweitert werden. Mit welcher Zahl muss man 120 multiplizieren um 1800 zu bekommen? Um das zu finden, dividiert man 1800 durch 120 1800:120=15. Mit dieser Zahl (15) muss man den Nenner (120) multiplizieren. Damit aber der Bruch gleich bleibt, muss man auch den Zähler mit 15 multiplizieren. Den gleichen Prozess wiederholt man bei den anderen Brüchen:

$$\overbrace{\frac{41}{120}}^{1800:120=15} - \overbrace{\frac{11}{36}}^{1800:36=50} + \overbrace{\frac{37}{300}}^{1800:300=6} = \overbrace{\frac{41}{120}}^{15} - \overbrace{\frac{11}{36}}^{50} + \overbrace{\frac{37}{300}}^{6} = \frac{41\cdot 15}{120\cdot 15} - \frac{11\cdot 50}{36\cdot 50} + \frac{37\cdot 6}{300\cdot 6} = \dots$$

$$\dots = \frac{615}{1800} - \frac{550}{1800} + \frac{222}{1800} = \frac{615-550+222}{1800} = \frac{287}{1800}$$

Das ist der beste Weg um mehrere ungleichnamige Brüche zu addieren oder subtrahieren.

Teilbarkeit

Bei der PFZ haben wir immer probiert, eine Zahl durch einer Primzahl zu teilen. Kann man wissen, ob das geht, ohne die Division zu machen? Für viele Primzahlen geht das. Die einfachsten Regel sind für 2, 3 und 5:

Durch 2

Wenn eine Zahl in 0, 2, 4, 6, 8 endet (gerade Zahl), dann ist sie durch 2 teilbar:

2004 und 33338 sind durch 2 teilbar: 2004 endet in 4, 33338 in 8.

2005 oder 486863 sind nicht durch 2 teilbar: 2005 endet in 5 und 486863 in 3.

Durch 5

Wenn eine Zahl in 0 oder 5 endet, dann ist sie durch 5 teilbar:

409 und 85923 sind nicht durch 5 teilbar (sie enden in 9 bzwin 3).

490 und 89235 hingegen sind durch 5 teilbar (sie enden in 0 bzwin 5)

Durch 3 (oder 9)

Wenn die Summe der **Ziffer**[1] einer Zahl durch 3 (bzw 9) teilbar ist, dass ist die Zahl auch durch 3 (bzw9) teilbar:

135 ist durch 3 teilbar: 1+3+5=9 (9:3=3, die Summe der Ziffer 9 ist durch 3 teilbar, also auch die Zahl 135). Sie ist auch durch 9 teilbar (9 ist durch 9 teilbar)

3564825 ist durch 3 teilbar: 3+5+6+4+8+2+5=33, 33:3=**1**. 33 ist durch 3 teilbar, daher auch 3564825. 33 ist aber nicht durch 9 teilbar, also 3564825 auch nicht.

3564824 ist nicht durch 3 oder 9 teilbar:3+5+6+4+8+2+4=32, 32 ist nicht durch 3 oder 9 teilbar

35644825 ist sowohl durch 3 als auch durch 9 teilbar: 3+5+6+4+4+8+2+4=32, 32 ist durch 3 und 9 teilbar

Durch 7

Um zu verstehen, wie man herausfindet, ob eine Zahl durch 7 teilbar ist, machen wir ein Beispiel. Nehmen wir die Zahl 4445. Man teilt sie in Teilen am Ende anfangend und jedes mal zwei Ziffer nehmend: 44 | 45. Wenn die Summe vom doppelten des rechten teils und vom linken Teil durch 7 teilbar ist, dann ist auch die ganze Zahl: 2·44+45=133. Wenn man nicht sofort sehen kann, ob 133 durch 7 teilbar ist, kann man den Vorgang wiederholen: 133 in zwei Teilen → 1 | 33 2·1+33=35. 35 ist durch 7 teilbar, daher auch 133 und 4445. Bei größeren Zahlen muss man den Vorgang wiederholen. Probieren wir es mit einer größeren Zahl: 437381 43 | 73 | 81 2·43+73=159 2·159+81=399 → 3 | 99 3·2+99= 105 → 1 | 05 1·2+05=7 7 ist offenbar durch 7 teilbar also auch 105 und 399 und 437381! Man muss sagen: diese Regel kann doch länger dauern, als die eigentliche Division zu machen...

Durch 11

Für die Teilbarkeit durch 11 gibt es eine Regel: ***wenn die Differenz der alternierenden Summe der Ziffer einer Zahl 0 oder durch 11 teilbar ist, dann ist die Zahl auch durch 11 teilbar.*** Beispiel: 981607. Man nimmt die Summe der ersten, der dritten und der fünften (alternierend) Ziffer 9+1+0= 10 und die Summe der zweiten, der vierten und der sechsten (alternierend) Ziffer 8+6+7=21. Die Differenz der beiden Summen ist 21-10=**1**, was durch 11 teilbar ist. Daher ist auch 981607 durch **1** teilbar!

Schlussrechnung

Direkte Proportionalität

Fangen wir direkt mit einem Beispiel an.

- *5 Tische kosten 315€. We viel kosten 2 Tische?*

Hier spricht man von einer sogenannten ***direkte Proportionalität*** Weniger Tische werden weniger Geld kosten. Das Beispiel besteht aus zwei Sätze:

was gegeben ist: „5 Tische kosten 315€“. Diese Daten schreibt man auf ein Zeile nebeneinander. Man schreibt also am Anfang:

5 Tische ... 315€

was gefragt ist: „Wie viel kosten 2 Tische?“ Hier ist der Preis der Tische in € gefragt. Man schreibt eine zweite Zeile unter die erste: Dabei schreiben wir das Gefragte (Preis der Tische) als x und die Anzahl der Tische unter der Anzahl Tische von der ersten Zeile:

5 Tische ... 315€

2 Tische ... x

Man fängt mit der gefragten Größe an (hier €), also mit der Zahl, die an der gleichen Spalte mit x steht, und multipliziert diese Zahl mit der Zahl schräg gegenüber

315·2=630.

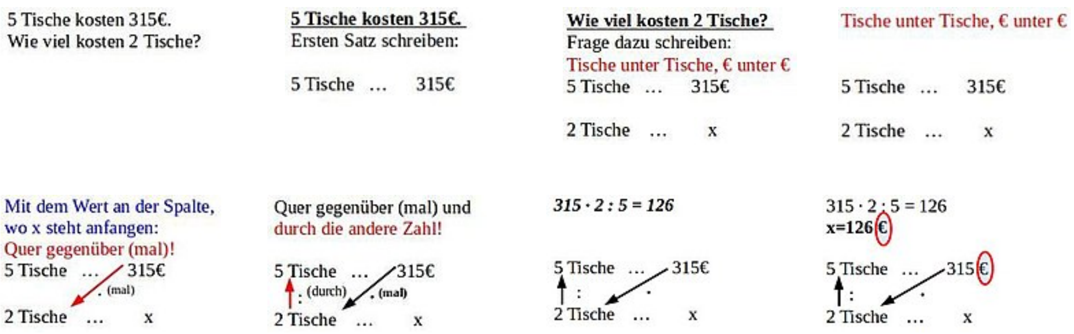
Das Ergebnis dividiert man mit der verbliebenden Zahl (hier 5).

630:5=126

Jetzt kommt die Frage: 126 was? Was haben wir hier gerechnet? Sicherlich nicht Frösche und auch nicht Äpfel. Wie kann man herausfinden, was hier gerechnet wurde? Eine Möglichkeit ist es, die folgende Frage zu stellen: „Wieviel kosten 2 Tische?“ Kosten sind gefragt, also €. Das Ergebnis ist daher der Wert in €. Ein anderer Weg ist es darauf zu schauen, wo x steht: Es steht unterhalb von „315€“. Wir haben gesagt, dass in jeder Spalte die Sachen (in Mathematik „Einheiten“ genannt) übereinstimmen müssen. Unterhalb von € müssen € stehen. Daher sollte die Einheit von x auch € sein. Somit ist die Antwort:

„Zwei Tische kosten 126€.“

Der ganze Prozess noch einmal Schritt für Schritt:



Noch ein Beispiel:

3,5 Liter eines Stoffes wiegen 14,7 kg.

a) *Wie viel wiegen 0,0175 Liter?*

b) *Wie viel Liter sind 3850kg?*

Hier gibt es zwei Fragen, das gegebene ist aber in beiden Fällen das gleiche, nämlich der erste Satz.

a) Für die erste Frage schreiben wir das gegebene an einer Zeile und das gefragte darunter (gleiche Sachen unter gleichem):

3,5 Liter ...... **14,7 kg**

↑: ↙·

0,0175 Liter x

Die Zahl, die an der gleichen Spalte mit x steht, mal die Zahl schräg gegenüber und durch die andere Zahl

$$\left(\frac{14{,}7 \cdot 0{,}0175}{3{,}5}\right) \qquad x = 0{,}735 \ \ kg$$

Noch einmal stellt sich die Frage: 0,735 was? Was haben wir hier gerechnet? Wieso haben wir kg geschrieben? Die Frage war „Wie viel wiegen 0,0175 Liter?“ Also muss die Einheit vom Ergebnis kg sein. Wenn wir die Schlussrechnung betrachten, sehen wir ebenfalls, dass x unterhalb von „14,7 kg“ steht. In einer Spalte müssen die Einheiten übereinstimmen, unterhalb von kg müssen gleichfalls kg stehen. Somit ist die **Antwort**:

„0,0175 Liter des Stoffes wiegen 0,735kg.“

b) Für die zweite Frage schreiben wir wieder das gegebene in einer Zeile und das gefragte darunter (gleiche Sachen (Einheiten) unter gleiche):

$$\begin{array}{ccc} \textbf{3,5 Liter} & \cdots\cdots & \textbf{14,7 kg} \\ & \searrow\cdot & :\uparrow \\ x & \cdots\cdots & \textbf{3850 kg} \end{array} \quad \left(\frac{3{,}5\cdot 3850}{14{,}7}\right) \qquad x \approx 916{,}7\ \textbf{Liter}$$

Ob man die Liter links oder rechts schreibt oder ob man das gegebene oben oder unten, spielt keiner Rolle. Wichtig ist: das Gegebene in einer Reihe und gleiche Sachen (Einheiten) in der gleichen Spalte!

$$\begin{array}{ccc} \textbf{14,7 kg} & \cdots\cdots & \textbf{3,5 Liter} \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ \textbf{3850 kg} & \cdots\cdots & x \end{array} \quad \left(\frac{3{,}5\cdot 3850}{14{,}7}\right) \qquad x \approx 916{,}7\ \textbf{Liter}$$

In diesen Aufgaben ist es wichtig zu verstehen: Man braucht nicht wissen, was die Wörter bedeuten! Man soll einfach die Struktur der Sätze der Aufgabe verstehen!

Indirekte Proportionalität

In der direkten Proportionalität haben wir gesehen, wie man vorgeht, wenn zwei Größen gleichzeitig größer oder kleiner werden. Wenn man mehr von einer Ware kaufen will, dann muss man auch mehr bezahlen. Wenn man weniger kaufen will, dann zahlt man auch weniger. Wenn man mehr kg von einem Stoff hat, dann hat man auch mehr Liter des Stoffes. Es gibt aber auch Fälle, bei denen die Erhöhung einer Größe die Verminderung einer anderen bedeutet:

- *3 Arbeiter brauchen 15 Stunden, um ein Haus mit Fliesen zu verlegen. Wie viel Zeit brauchen dann 5 Arbeiter?*

1 Arbeiter würde in diesem Fall **mehr** Zeit brauchen. Es gibt für einen Arbeiter viel mehr Boden zu verlegen, wenn er alleine arbeitet. Also **weniger** *Arbeiter* brauchen **mehr** *Zeit.* Das ist also ***KEINE direkte*** sondern eine ***indirekte Proportionalität***

Wie bei der direkten Proportionalität schreibt man hier auch die gegebenen Größen nebeneinander und gleiche Größen untereinander

$$\begin{array}{ccc} \textbf{3 Arbeiter} & \cdots\cdots & \textbf{15 Stunden} \\ \textbf{5 Arbeiter} & \cdots\cdots & x \end{array}$$

In diesem Fall multipliziert man mit der Zahl ***gerade*** gegenüber (und ***NICHT schräg gegenüber***, wie in der *direkten Proportionalität*) und dividiert dann durch die andere Zahl:

$$\begin{array}{ccc} \textbf{3 Arbeiter} & \overset{\cdot}{\longleftarrow} & \textbf{15 Stunden} \\ \downarrow: & & \\ \textbf{5 Arbeiter} & & x \end{array} \quad \left(\frac{15\cdot 3}{5}\right) \qquad x = 9\ \textbf{Stunden}$$ (die die Arbeiter in diesem Fall brauchen).

Um zu unterscheiden, ob man eine direkte oder indirekte Proportionalität hat, muss man schon die Sprache und die Zusammenhänge gut verstehen können!

Vergleich direkter und indirekter Proportionalität

Wie wir in den vorherigen Absätzen gesehen haben, muss man sowohl bei der direkten als auch bei der indirekten Proportionalität die Daten, die (in der Regel in einem Satz) in Verbindung gebracht werden, in einer Zeile *nebeneinander* schreiben (hier bei der direkten Proportionalität 3,5 Liter und 14,7 kg und bei der indirekten 3 Arbeiter und 15 Stunden) und dafür sorgen, dass in *jeder Spalte die gleichen Einheiten geschrieben werden.*

$$\begin{array}{ccc} \textbf{3,5 Liter} & \cdots\cdots & \textbf{14,7 kg} \\ \textbf{0,0175 Lit} & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{ccc} \textbf{3 Arbeiter} & \cdots\cdots & \textbf{15 Stunden} \\ \textbf{5 Arbeiter} & \cdots\cdots & x \end{array}$$

Bei beiden Vorgängen fängt man dann mit ***der*** Zahl an, die nur *an der gleichen Spalte mit x steht* (hier 14,7 kg in der direkten und 15 Stunden in der indirekten Proporionalität). Der Unterschied ist: bei der *direkten* Proportionalität geht man dann ***schräg***, bei der *indirekten* ***gerade*** gegenüber, und multiplitiert mit dieser Zahl (hier 0,0175 Liter in der direkten und 3 Arbeiter in der indirekten Proporionalität). Am Ende dividiert man in beiden Fällen mit der übriggebliebenen Zahl (hier 3,5 Liter in der direkten und 5 Arbeiter in der indirekten Proporionalität).

$$\begin{array}{ccc} \textbf{3,5 Liter} & \cdots\cdots & \textbf{14,7 kg} \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ \textbf{0,0175 Lit} & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{ccc} \textbf{3 Arbeiter} & \overset{\cdot}{\longleftarrow} & \textbf{15 Stunden} \\ \downarrow: & & \\ \textbf{5 Arbeiter} & & x \end{array}$$

Wie kann man verstehen, ob eine direkte oder eine indirekte Proportionalität vorliegt?

Nehmen wir den folgenden Bruch b: $b = \frac{z}{n}$, wobei z der Zähler und n der Nenner ist. Wenn z=20 und n=5 ist, dann ist der Bruch b=4. Wenn jetzt der Zähler größer wird (z.B. z=30), dann wird der ganze Bruch ***auch*** größer: $b = \frac{30}{5} = 6$. Wenn der Zähler kleiner wird (z.B. z=10), dann wird der ganze Bruch ***auch*** kleiner: $b = \frac{10}{5} = 2$. Je größer der Zähler, desto größer der Bruch. Je kleiner der Zähler, desto kleiner der Bruch. Diesen Zusammenhang nennt man ***direkte Proportionalität***.

Wenn jetzt der Nenner größer wird (z.B. n=10), dann wird der ganze Bruch ***das Gegenteil***, also kleiner: $b = \frac{20}{10} = 2$. Wenn der Zähler kleiner wird (z.B. z=4), dann wird der ganze Bruch ***das Gegenteil***, also größer: $b = \frac{10}{5} = 2$. Je größer der Zähler, desto kleiner der Bruch. Je kleiner der Zähler, desto größer der Bruch. Diesen Zusammenhang nennt man ***indirekte Proportionalität***.

Wenn zwei Größen (z.B. Volumen und grob gesagt Gewicht[2]) gleichzeitig wachsen oder gleichzeitig weniger werden (z.B. wenn man mehr Wasser hat, ist sowohl das Volumen als auch das Gewicht mehr), dann liegt eine ***direkte Proportionalität*** vor. Wenn der Wachstum einer Größe zur Verminderung einer anderen führt (z.B. mehr Arbeiter brauchen weniger Zeit, um die gleiche Arbeit zu erledigen), dann liegt eine ***indirekte Proportionalität*** vor. So kann man verstehen, ob man direkte oder indirekte Proportionalität benutzen soll. Beim nächsten Kapitel allerdings (***Prozentrechnung***) kommt nur die ***direkte Proportionalität*** vor!

Prozentrechnung

Definitionen

Das Wort „***Prozent***“ kommt aus dem lateinischen und bedeutet pro Hundert. Ein Prozent IST ein Hundertstel.

$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

In diesem Sinn ist z.B.:

$5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$ $\quad 20\% = \frac{20}{100} = 0{,}20 = 0{,}2$ $\quad \frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\%$

Bei Aufgaben, die mit Prozentrechnung zu tun haben, **ist der Wert am Anfang immer 100%**

100% **ist** gleich 1, also das ***„Ganze“***:

100%=1

Diesen Anfangswert nennt man **Grundwert**. Es gibt dazu auch den **Prozentwert** (oder Prozentanteil) und den **Prozentsatz**. Um zu verstehen, was die Begriffe bedeuten, nehmen wir folgendes Beispiel:

Wie viel % von 55 Personen sind 11 Personen?

Wir wollen einen Teil von den 55 Personen in Prozent (in Hundertstel) berechnen. Dieser Teil sind die 11 Personen. Die 11 Personen sind der Prozentanteil oder Prozentwert.

Das Ganze (100%, Anfangswert) sind die 55 Personen. Der Grundwert ist "55 Personen".

Herauszufinden welcher Wert der Grundwert ist, ist in der Prozentrechnung eine entscheidende Aufgabe. Um den Grundwert im Satz zu erkennen, schaut man in der Regel, welches Wort im Genitiv steht. Wenn man sagt "des Gewichts", "der Bevölkerung", "von 55 Personen", dann sind diese Ausdrücke der Grundwert (100%). Der andere Wert ist der Prozentanteil.

Es kann aber sein, dass kein Wort in der Aufgabe im Genitiv steht, sondern, dass eine ***zeitliche Reihenfolge*** vorkommt. Wenn nichts anderes angegeben wird, ist der Wert in der früheren Zeit der Wert am Anfang, der Grundwert (100%). Beispielsweise, wenn ein Baum wächst, *ist der Wert am zeitlichen Anfang der Grundwert*; der Prozentwert kann dann variieren, je nachdem was gefragt ist: Er kann die Höhe am Ende sein oder der Höhenunterschied.

Wenn beides vorkommt (zeitliche Folge und Genitiv), dann ist der Genitiv der Grundwert. Im Beispiel mit dem Baum kann gefragt werden, wie viel Prozent der Höhe am Ende die Höhe am Anfa ist. In diesem Fall ist die Höhe am Ende der Anfangswert (Genitiv ist "stärker" als die zeitliche Reihenfolge).

Der **Prozentsatz** beschreibt, wie viele ***Hundertstel des Ganzen*** der Prozentanteil ist. In unserem Beispiel:

$$\frac{11}{55} \overset{\text{kürzen}}{=} \frac{1}{5} \overset{\text{erweitern}}{=} \frac{20}{100} = 20\%$$

Grundaufgaben

Nicht vergessen: **Der Wert am Anfang (das „Ganze“) ist immer 100%**

- *Wie viel % von 55 Personen sind 11 Personen?*

Der Wert am Anfang (das „Ganze“) ist immer 100%. Hier ist der Prozentsatz eines Teils von 55 Personen gefragt. 55 Personen sind 100%. (***Nach dem Wort „von“*** steht der Wert, der **100%** ist). Wir schreiben das so auf, wie wir es in der Schlussrechnung (genauer in der direkten Proportionalität) gelernt haben:

$$\begin{array}{ccc} \text{55 Personen} & \cdots\cdots & 100\% \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ \text{11 Personen} & \cdots\cdots & x \end{array} \quad \left(\frac{100\cdot 11}{55}\right) \quad x = 20\%.$$

- *Wie viele Personen sind 11% von 55 Personen?*

Der Wert am Anfang (das „Ganze“) ist immer 100%. Hier ist ein Prozentsatz von 55 Personen gefragt, also haben wir am Anfang 55 Personen, die dann 100% sind! (Also ***nach dem Wort „von“*** steht der Wert, der **100%** ist). Wir schreiben das auf, wie wir es in der Schlussrechnung (genauer in der direkten Proportionalität) gelernt haben:

$$\begin{array}{ccc} \text{55 Personen} & \cdots\cdots & 100\% \\ & \searrow\cdot & :\uparrow \\ x & \cdots\cdots & 11\% \end{array} \quad \left(\frac{55\cdot 11}{100} = 6{,}05\right) \quad x \approx 6\ \text{Personen}.$$

- *Wie viel % von 23 kg sind 5329kg?*

Hier steht nach „von“ 23 kg, also sind 23kg 100%

$$\begin{array}{ccc} \text{23 kg} & \cdots\cdots & 100\% \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ \text{5329 kg} & \cdots\cdots & x \end{array} \quad \left(\frac{100\cdot 5329}{23}\right) \quad x \approx 23170\%.$$

- *Wie viel ist 0,3% von 0,26 Liter?*

$$\begin{array}{ccc} \text{0,26 Liter} & \cdots\cdots & 100\% \\ & \searrow\cdot & :\uparrow \\ x & \cdots\cdots & 0{,}3\% \end{array} \quad \left(\frac{0{,}26\cdot 0{,}3}{100}\right) \quad x = 0{,}00078\ \text{Liter}.$$

- *Von wie vielen Personen sind 55 Personen 11%?*

Hier ***steht nach dem Wort „von“ eine Frage***. Das ***Gefragte*** schreibt man in der Mathematik mit **x**. Daher ist x 100%. Das Gefragte ist 100%.

$$\begin{array}{ccc} x & \cdots\cdots & 100\% \\ & \nearrow\cdot & :\downarrow \\ 55 \text{ Personen} & \cdots\cdots & 11\% \end{array} \quad \left(\frac{55\cdot 100}{11}\right) \qquad x = 500 \text{ Personen}\,.$$

Vertiefende Aufgaben

Prozentrechnung bei Wachstum oder Zerfall

In diesem Absatz werden wir uns mit Aufgaben beschäftigen, bei denen irgendeine Größe mehr oder weniger wird.

- *Das Gehalt eines Beamten war 1800€ und wurde um 2,5% gekürzt. Berechnen sie das neue Gehalt! Um wie viel € wurde das Gehalt erhöht?*

Es gibt zumindest zwei Wege, um diese Aufgabe zu lösen. Wir werden hier nur den Weg lernen, der für die Umkehraufgaben (die wir im nächsten Absatz lernen werden) notwendig ist.

Zur Erinnerung: ***der Wert am Anfang (das „Ganze“) ist immer 100%***. Das Gehalt am Anfang war 1800€, daher sind 1800€ (der Wert am Anfang) 100%. Das Gehalt wurde **gekürzt**, also wurde es um 2,5% **weniger**. *Daher bleibt dann 100-2,5=97,5% des Gehaltes.* Wir wollen wissen, wie viel Geld in € diesen 97,5% ist:

$$\begin{array}{ccc} 1800\ € & \cdots\cdots & 100\% \\ & \searrow\cdot & :\uparrow \\ x & \cdots\cdots & 97{,}5\% \end{array} \quad \left(\frac{1800\cdot 97{,}5}{100}\right) \qquad x = 1755\ €$$

Ein Baum ist 5,6m groß und wächst in einem Jahr auf 6m. Um wie viel % ist er gewachsen?

Zur Erinnerung: ***der Wert am Anfang (das „Ganze“) ist immer 100%***. Der Baum war am Anfang 5,6m, daher sind 5,6m (der Wert am Anfang) 100%. Er ist auf 6m gewachsen, also um 6-5,6= 0,4m *größer* geworden. Wir wollen wissen, wie viel % (von 5,6m) diese 0,4m sind:

$$\begin{array}{ccc} 5{,}6\ \mathrm{m} & \cdots\cdots & 100\% \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 0{,}4\ \mathrm{m} & \cdots\cdots & x \end{array} \quad \left(\frac{100\cdot 0{,}4}{5{,}6}\right) \qquad x \approx 7{,}14\%.$$

Umkehraufgaben

- *Man hat in seinem Haus ein neues Zimmer aufgebaut. Die Fläche des Hauses ist dadurch um 15% auf 112,7m² gewachsen. Berechnen Sie die ursprüngliche Fläche!*

Der Wert am Anfang (das „Ganze“) ist immer 100%. Hier *wissen wir nicht*, wie groß das Haus am Anfang war, das ist doch *gefragt*! Das **gefragte** schreibt man in Mathematik mit **x**. **100% ist also x**. Das Haus ist um 15% *gewachsen*, also *die Fläche am Ende* (112,7m²) ist 100+15=**115%**. Daher sind 112,7m² 115%.

Schreiben wir diese Information auf, wie wir das gelernt haben:

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & x \\ \downarrow: & \nwarrow\cdot & \\ 115\% & \cdots\cdots & 112{,}7\ \mathrm{m}^2 \end{array} \quad \left(\frac{112{,}7\cdot 100}{115}\right) \qquad x = 98m^2\,.$$

- *Ein Tisch wurde um 10% geschnitten. Die neue Länge ist 2,7m. Berechnen Sie die ursprüngliche Länge!*

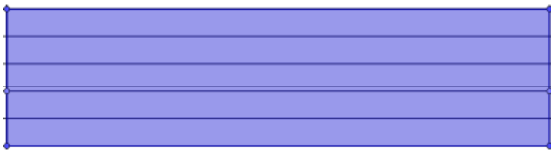
Der Wert am Anfang (das „Ganze“) ist immer 100%. Er ist aber nicht gegeben. **Daher ist x 100%**. Der Tisch wurde um 10% *geschnitten*, war am Anfang 100%, daher bleibt noch 100-10=**90%**. 2,7m (*der Wert am Ende*) sind daher 90%. Schreiben wir das Ganze auf:

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & x \\ \downarrow: & \nwarrow\cdot & \\ 90\% & \cdots\cdots & 2{,}7\ \mathrm{m} \end{array} \qquad x = 30m.$$

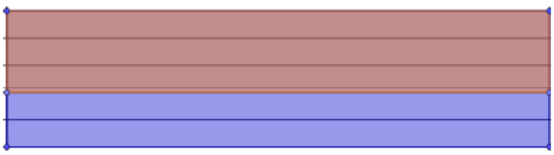
Erklärung der Prozent- und Schlussrechnung

Wie schon betont, bedeutet "ein Prozent" das gleiche wie ein Hundertstel. Ein Hundertstel ist ein Bruch. Für die Erklärung der Prozentrechnung kann man daher die Bruchrechnung benutzen, genauer gesagt das Erweitern von Brüchen

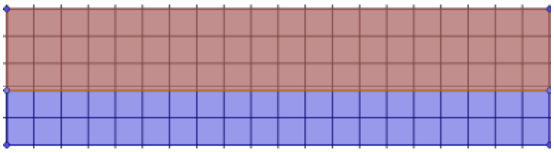
Wenn wir wissen wollen, wie viel Prozent von 5kg 3kg sind, können wir mit der Darstellung von 5kg anfangen:



Drei kg kann man dann als Bruchteil von diesen 5kg darstellen, wie im folgenden Bild:



Wenn jemand das Ganze senkrecht auf 20 teilt, ist jeder kleiner Teil ein Hundertstel. Im Bild kann man schon sehen, dass die drei fünftel $3 \cdot 20 = 60$ solche kleine Teile sind, also 60 Hundertstel, also 60%:



Wenn wir jetzt mit Brüchen arbeiten, können wir durch die Bilder leicht verstehen, dass wir den Bruch $\frac{3}{5}$ mit der Zahl 20 *erweitert* haben:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\%$$

Wie sind wir auf die Zahl 20 gekommen? Wir haben einfach 100 durch 5 dividiert, also durch die Zahl, die den Wert des Ganzen darstellt. Wieso ist 5 das Ganze? Wir haben schon in den Definitionen gesagt, dass das Ganze nach dem Wort "von" steht, also hier die 5 kg. So wie wir die Prozentrechnung gelernt haben, bedeutet das, dass man mit der Zahl quer gegenüber multiplizieren muss und durch die andere Zahl dividieren:

$$\begin{array}{ccc} 5\text{ kg} & \cdots\cdots & 100\% \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 3\text{ kg} & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad \left(100 \cdot \frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{100}{5} = 3 \cdot 20 = 60\right) \qquad x = 60\%$$

3 kg sind daher 60% (also 60 Hundertstel) von 5 kg.

Schauen wir jetzt ein Beispiel mit Zahlen, die nicht so "rund" sind:

Wie viel Prozent von 17 Äpfel sind 230 Äpfel?

Hier ist das Ganze die 17 Äpfel, also was nach dem Wort "von" (also in Genitiv) steht. Welcher Anteil von 17 Äpfel sind 230 Äpfel?

$$\frac{230}{17}$$

Diesen Bruch müssen wir so erweitern, damit im Nenner am Ende 100 steht:

$$\frac{230}{17} = \frac{230 \cdot 100 : 17}{17 \cdot 100 : 17}$$

Der Nenner hier wird tatsächlich 100 sein (es gilt $17 \cdot 100 : 17 = 1700 : 17 = 100$). Somit haben wir:

$$\frac{230 \cdot 100 : 17}{100} = 230 \cdot 100 : 17\% = 100 \cdot 230 : 17\% \approx 1352{,}94\%$$

da hundertstel genau Prozent bedeutet.

Wir haben in diesem Fall tatsächlich die Prozentrechnung mit Hilfe der Schlussrechnung durchgeführt, so wie wir das gelernt haben:

$$\begin{array}{ccc} 17\text{ Äpfel} & \cdots\cdots & 100\% \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 230\text{ Äpfel} & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad \left(\frac{100 \cdot 230}{17} \approx 1352{,}94\right) \qquad x \approx 1352{,}94\%$$

230 Äpfel sind daher ca. 1352,94% von 17 Äpfel.

Was ist, wenn man 17% von 35 Stunden berechnen will?

17% bedeutet 17 Hundertstel. Wir müssen 35 Mal die 17 Hundertstel nehmen. Anders gesagt teilen wir die 35 Stunden in Hundert Teile und nehmen 17 davon:

$$x = 17 \cdot \frac{35}{100} = 5{,}95$$

17% von 35 Stunden sind daher 5,95 Stunden.

Das ist wieder genauso, wie wir den Prozess mit Schlussrechnung gelernt haben:

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & 35\text{ Stunden} \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 17\% & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad \left(35 \cdot \frac{17}{100} = \frac{17 \cdot 35}{100}\right) \qquad x = 5{,}95\text{ Stunden}$$

Ähnlich denkt man bei der Schlussrechnung (genauer: bei der direkten Proportionalität). Nehmen wir folgendes Beispiel:

3,5 Liter eines Stoffes wiegen 14,7 kg.

a) *Wie viel wiegen 175 Liter?*

b) *Wie viel Liter sind 3850kg?*

Für die erste Frage denkt man erst, wie viel ein Liter wiegt. Man soll also 14,7 kg durch 3,5 dividieren, um zu finden, wie viel jedes Liter wiegt. Das ist als ob man eine Schokolade hätte und wissen wollte, wie viel jedes Teil wiegt.

$$x_1 = \frac{14{,}7}{3{,}5} = 4{,}2$$

4,2 kg wiegt jedes Liter des Stofes.

175 Liter wiegen dann 735 kg:

$175 \cdot 4{,}2 = 735$

Als Schlussrechnung:

$$\begin{array}{lcl} \text{3,5 Liter} & \cdots\cdots & \text{14,7 kg} \\ \text{175 Liter} & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad \left(175 \cdot \frac{14{,}7}{3{,}5}\right) \qquad x = 735 \text{ kg}$$

In der zweiten Frage muss man erst finden, wie viel Volumen ein kg hat:

$$x_1 = \frac{3{,}5}{14{,}7} \approx 0{,}238$$

Ca. 0,238 Liter ist jedes kg des Stoffes.

Das Volumen von 3850 kg ist dann ca. 917 Liter:

$$3850 \cdot 0{,}238... = 3850 \cdot \frac{3{,}5}{14{,}7} = 916{,}\dot{6}$$

Nochmal als Schlussrechnung:

$$\begin{array}{lcl} \text{14,7 kg} & \cdots\cdots & \text{3,5 Liter} \\ \text{3850 kg} & \cdots\cdots & x \end{array}$$

{\displaystyle \left(3850\cdot {\frac {3{,}5}{14{,}7}}=916{,}{\dot {6}}\right)\qquad

Bei der indirekten Prportionalität muss man ein bisschen anderes denken:

- *3 Arbeiter brauchen 15 Stunden, um ein Haus mit Fliesen zu verlegen. Wie viel Zeit brauchen dann 5 Arbeiter?*

1 Arbeiter würde in diesem Fall **mehr** Zeit brauchen. Es gibt für einen Arbeiter viel mehr Boden zu verlegen, wenn er alleine arbeitet. Also **weniger** *Arbeiter* brauchen **mehr** *Zeit*. Wie wir schon im entsprechenden Kapitel erklärt haben, ist das ***keine direkte*** sondern eine ***indirekte Proportionalität***. Man muss in diesem Fall herausfinden, wie viel Zeit ein Arbeiter braucht. Ein Arbeiter wird die Arbeit von allen anderen erledigen müssen und jede der 3 Arbeiter braucht 15 Stunden. Einer Arbeiter braucht daher 45 Stunden:

{\displa

Wenn jetzt diese Arbeit auf 5 Arbeiter aufgeteilt wird, wird jeder ein fünftel der Arbeit erledigen müssen. Wenn alle zusammen arbeiten, dann wird die Arbeit 9 Stunden dauern:

{\displ

In diesem Fall muss man also direkt gegenüber multiplizieren, wie wir das gelernt haben:

$$\begin{array}{lcl} \text{3 Arbeiter} & \overset{\cdot}{\longleftarrow} & \text{15 Stunden} \\ \downarrow: & & \\ \text{5 Arbeiter} & & x \end{array} \qquad \left(\frac{15 \cdot 3}{5}\right) \qquad x = 9 \text{ Stunden}$$

Kombinationsaufgaben

- *Die Produzenten eines Filmes hatten vor dem Schnitt 5 Stunden Material. Beim ersten Schnitt haben Sie 70% geschnitten. Das war ihnen aber doch zu kurz, daher haben s eine neue um 20% länger (als der geschnittene Film) Version gemacht. Berechnen Sie die Dauer der letzten Version!*

Der Wert ganz *am Anfang* (**100%**) ist hier gegeben (*5 Stunden*). Das wurde um 70% geschnitten, es bleiben also 100-70=**30%**. Schreiben wir diese Information auf:

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \cdots\cdots & \text{5 Stunden} \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 30\% & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad x = 1{,}5 \text{ Stunden.}$$

Der Film war dann den Produzenten doch zu kurz. Diesen geschnittenen Film (also die 1,5 Stunden) haben sie dann um 20% verlängern. Diese 1,5 Stunden sind daher der neue ***Anfangswert***, also **100%**! Der Wert am Ende ist daher 100+20=**120%** *von 1,5 Stunden* (vom geschnittenen Film):

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \cdots\cdots & \text{1,5 Stunden} \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 120\% & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad x = 1{,}8 \text{ Stunden.}$$

- *Die Produzenten eines Filmes hatten vor dem Schnitt zu viel Material. Beim ersten Schnitt haben Sie 80% geschnitten. Das war ihnen aber doch zu kurz, daher haben sie eine neue um 15% längere (als der geschnittene Film) Version gemacht. Die letzte Version dauert 1,61 Stunden. Berechnen Sie die ursprüngliche Dauer, also die Dauer des ungeschnittenen Films!*

Das hier ist eine Kombination von zwei Umkehraufgaben. Die letzte Version dauert 1,61 Stunden. Sie ist um 15% länger als die erste geschnittene Version. In diesem Fall haben wir am Anfang die geschnittene Version, diese ist also 100% und wurde um 15% auf 1,61 Stunden verlängert. 1,61 Stunden sind daher 115%, der Wert am Anfang (100%) ist noch unbekannt:

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \cdots\cdots & x \\ \downarrow: & \nwarrow\cdot & \\ 115\% & \cdots\cdots & \text{1,61 Stunden} \end{array} \qquad x = 1{,}4 \text{ Stunden.}$$

Der Schnitt ist 1,4 Stunden nachdem er geschnitten wurde. Die Dauer am Anfang (100%), vor dem Schnitt, ist noch unbekannt. 80% wurden geschnitten, also 100-80=20% sind nach dem Schnitt geblieben. Nach dem Schnitt (80%) war der Film 1,4 Stunden:

$$\begin{array}{llll} 100\% & \cdots\cdots & x & \\ \downarrow: & \nwarrow\cdot & & x = 7 \text{ Stunden.} \\ 20\% & \cdots\cdots & 1{,}4 \text{ Stunden} & \end{array}$$

Das Filmmaterial am Anfang (die ursprüngliche Dauer) war daher 7 Stunden!

Für Fortgeschrittene

Es gibt einen viel schnelleren Weg um Aufgaben mit Prozentrechnung zu lösen. Nehmen wir die zwei Aufgaben aus dem letzten Kapitel.

- *Die Produzenten eines Filmes hatten vor dem Schnitt 5 Stunden Material. Beim ersten Schnitt haben Sie 70% geschnitten. Das war ihnen aber doch zu kurz, daher haben s eine neue um 20% längere (als der geschnittene Film) Version gemacht. Berechnen Sie die Dauer der letzten Version!*

Die Dauer nach dem Schnitt ist 100%-70%=30%. Wie am Anfang des Kapitels über Prozentrechnung erwähnt, 30% **ist** 0,3 ($30\% = \frac{30}{100} = 0{,}3$).

Wenn der Anfangswert gegeben ist, muss man mit dem Prozentsatz (als Zahl, also nicht 30, was %, also Hundertstel, ist, sondern 0,3) **multiplizieren**:

5·0,3=1,5 (Stunden).

Den nächsten Schritt kann man genauso machen. Nach 20% Erhöhung (aufpassen: des geschnittenen Films) haben wir $120\% = \frac{120}{100} = 1{,}2$.

1,5·1,2=1,8 (Stunden).

Das ganze kann man sogar in einem Schritt berechnen:

5·0,3·1,2=1,8 (Stunden).

Betrachten wir noch einmal den ersten Schritt. Wir wollen wissen, wie viele Stunden 30% von 5 Stunden sind. 30% bedeutet $\frac{30}{100}$. Man soll daher die 5 Stunden in 100 teilen und 30 Teile davon nehmen:

$$\frac{5}{100} \cdot 30 = \frac{5 \cdot 30}{100} = 5 \cdot \frac{30}{100} = 5 \cdot 0{,}3 \text{ (Stunden)}$$

Der Anfangswert (Grundwert) wird daher mit 0,3 multipliziert.

Das kann man auch feststellen, wenn man die Schlussrechnung wie bisher gelernt durchführt:

$$\begin{array}{lll} 30\% & \cdots\cdots & x \\ \downarrow: & \nwarrow\cdot & \\ 100\% & \cdots\cdots & 5 \text{ Stunden} \end{array} \quad \left(\frac{5 \cdot 30}{100} = 5 \cdot 0{,}3\right) \qquad x = 1{,}5 \text{ Stunden.}$$

In der Umkehraufgabe soll man die Gegenrechnung der Multiplikation benutzen, also die Division.

- *Die Produzenten eines Filmes hatten vor dem Schnitt zu viel Material. Beim ersten Schnitt haben Sie 80% geschnitten. Das war ihnen aber doch zu kurz, daher haben sie eine neue um 15% längere (als der geschnittene Film) Version gemacht. Die letzte Version dauert 1,61 Stunden. Berechnen Sie die ursprüngliche Dauer, also die Dauer des ungeschnittenen Films!*

$100\% - 80\% = 20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$

$100\% + 15\% = 115\% = \frac{115}{100} = 1{,}15$

1,61:1,15:0,2=7 (Stunden)

Schon fertig!

Man kann auch so denken:

x·0,2·1,15=1,61 |:1,15:0,2

x=1,61:1,15:0,2=7 (Stunden)

Wenn der Wert am Ende (der Prozentanteil) gegeben ist, muss man durch den Prozentsatz (als Zahl) dividieren.

Umsatzsteuer (USt.) und Rabatt

Umsatzsteuer (USt.)

Denken wir an eine Flasche Wasser. Der Produzent verkauft sie dem Supermarkt für einen Preis von, sagen wir mal, 2€ und der Supermarkt will dazu 1,2€ gewinnen. Um wie viel Geld wird dann das Produkt verkauft? Man könnte denken: 2+1,2=3,2€. Das ist aber doch nicht alles. Der Staat verlangt für jedes verkauftes Gut und für jede verkaufte Leistung Steuer. Diese Steuer nennt man Umsatzsteuer (USt.). Die USt. ist in Deutschland für Grundgüter 7% und für den Rest 19%, in Österreich 10% für Grundgüter und 20% für den Rest. In anderen Staaten gibt es andere Steuersätze (5%, 13% usw.). Diese Steuer wird vom Einkäufer bezahlt und ist daher Teil des Preises. Die Flasche Wasser wird daher nicht für 3,2€ verkauft, sondern um 10% mehr (ein Getränk ist ein grundlegendes Gut, also ist die USt. 10%).

Nettoverkaufspreis (NVP) (100%)	USt.

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & 3{,}2€ \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 110\% & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad x = 3{,}52€ .$$

Bruttoverkaufspreis (BVP)

Die Ware wird also um 3,52€ verkauft. Diesen Preis nennt man Bruttoverkaufspreis (BVP). Die 3,2€ (den Preis ohne Steuer) nennt man Nettoverkaufspreis (NVP). Die USt. in dieser Aufgabe ist 10% des Nettoverkaufspreises:

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & 3{,}2€ \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 10\% & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad x = 0{,}32€ .$$

Es gilt offenbar, sowohl was dem Preis als auch was dem Prozentsatz betrifft:

BVP=NVP + USt. (in diesem Beispiel: 3,52=3,2+0,32 und 110%=100%+10%)

Rabatt[3]

Aus verschiedenen Gründen (z.B. wenn eine Ware nicht so leicht verkauft wird oder am Ende einer Saison) kann ein Verkäufer eine Ware billiger als für den gewöhnlichen Preis verkaufen. Das nennt man Rabatt (oder Skonto). Im vorherigen Beispiel kann der Supermarkt die Flasche Getränk um 6% billiger verkaufen. Der Preis vor dem Rabatt ist in diesem Fall 3,52€ (Wert am Anfang, 100%). Nach dem Rabatt bleibt noch 100-6=94%:

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & 3{,}52€ \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 94\% & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad x \approx 3{,}31€ .$$

Preis vor Rabatt (PVR) (100%)	
Preis nach Rabatt (PNR)	Rabatt (R)

Der Rabatt in diesem Fall ist 6% des Preises vor dem Rabatt:

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & 3{,}52€ \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 6\% & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad x \approx 0{,}21€ .$$

Es gilt offenbar, sowohl was dem Preis als auch was dem Prozentsatz betrifft:

PNR=PVR-R (in diesem Beispiel: 3,31=3,52-0,21 und 94%=100%−6%)

1. Ziffer sind sozusagen die Buchstaben einer Zahl
2. in der Physik soll man *Masse* sagen
3. Hier wird der Rabatt auf den Listenpreis für den Endkunden berechnet, der die USt. enthält. Anfangswert wird daher bei den folgenden Berechnungen der Bruttoverkaufspreis sein. In der Schulmathematik wird i.d.R. Rabatt genau so definiert. Das ist allerdings nicht immer der Fall bei der kaufmännischen Mathematik.

Kombination

Gegebener Anfangswert

- *Der Nettoverkaufspreis einer Ware ist 65€. Berechnen Sie den Verkaufspreis nach einem 12% Rabatt, wenn die USt. 12% ist.*

Die Aufgabe kann man in zwei Schritten lösen. Erst den Bruttoverkaufspreis berechnen (Der Bruttoverkaufspreis, also der Preis nach USt. ist 12% mehr also 100+12=112%):

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & 65€ \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 112\% & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad x = 72{,}8€$$

Das ist der Bruttoverkaufspreis.

Dann kann man den Preis nach dem Rabatt berechnen. Der Preis nach dem Rabatt wird 12% weniger sein, also 100%-12%=88%.

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & 72{,}8€ \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 88\% & \cdots\cdots & x \end{array} \qquad x \approx 64{,}06€$$

Das ist der Preis nach dem Rabatt (PNR).

VORSICHT:

Wenn man Brutto- (BVP) und Nettoverkaufspreis (NVP) vergleicht (und USt. berechnet) ist nicht der Brutto- sondern der Nettoverkaufspreis der Grundwert (100%)

Wenn man aber Bruttoverkaufspreis (BVP) und Preis nach Rabatt (PNR) vergleicht, ist der Bruttoverkaufspreis doch der Grundwert (100%):

$$\begin{array}{lll} NVP & \ldots\ldots & 100\% \\ BVP & \ldots\ldots & 100\% + USt. \neq 100\% \end{array} \qquad \begin{array}{lll} BVP & \ldots\ldots & 100\% \\ PNR & \ldots\ldots & 100\% - \text{Rabatt} \neq 100\% \end{array}$$

Bemerkung: Erhöhen und Reduzieren um den gleichen Prozentsatz

Wie man in der letzten Aufgabe feststellen kann, wenn man den Preis um 12% erhöht und dann wieder um 12% vermindert, ist der Preis am Ende nicht gleich dem Preis am Anfang! Warum passiert das? Weil wir zwei **unterschiedlichen Anfangswerte** haben! Erst haben wir den Nettoverkaufspreis als Anfangswert (100%) und den Bruttoverkaufspreis als Endwert (112%). Dann ist aber der Bruttoverkaufspreis der Anfangswert (100% und nicht mehr 112%) und der Endwert der Preis nach dem Rabatt (88%).

Das ganze kann man auch wieder in einem Schritt berechnen:

65€·1,12·0,88≈64,06€ !

Man muss also immer aufpassen, welcher der Anfangswert ist!

Gegebener Endwert

Der Verkaufspreis einer Ware nach 15% Rabatt ist 56,1€. Berechnen Sie den Nettoverkaufspreis , wenn die USt. 10% ist.

Der Preis nach dem Rabatt (56,1€) ist 100-15=85%. Vor dem Rabatt (100%) ist er daher:

$$\begin{array}{cccccc} 56{,}1€ & \cdots\cdots & 85\% & & & \\ & \searrow \cdot & :\uparrow & x = 66€ & & \textit{Das ist der Bruttoverkaufspreis.} \\ x & \cdots\cdots & 100\% & & & \end{array}$$

Der Bruttoverkaufspreis nach 10% USt. ist 66€. Das ist also 110%. Der Nettoverkaufspreis (Anfangswert) ist 100% und gesucht!

$$\begin{array}{cccccc} 66€ & \cdots\cdots & 110\% & & & \\ & \searrow \cdot & :\uparrow & x = 60€ & & \textit{Das ist der Nettoverkaufspreis.} \\ x & \cdots\cdots & 100\% & & & \end{array}$$

Das ganze kann man selbstverständlich auch in einem Schritt berechnen:

56,1€:0,85:1,1=60€

Warum gibt es Steuer?

Der Staat verlangt für jede verkaufte Ware und für jede erbrachte Leistung Steuer. Mit diesem Steuergeld werden (im Idealfall) die verschiedenen Leistungen, die der Staat anbietet, finanziert (z.B. Schule, Polizei, Armee, Krankenhäuser).

Zinsen und Kapitalertragssteuer (KESt.)

Definitionen

Die Symbole: Guthaben G_0 (Geld im Konto am Anfang), Zinsen Z, effektive Zinsen eZ, Zinssatz Zs, effektiver Zinssatz eZs, Guthaben G_1 (Geld am Ende des ersten Jahres).

Der Begriff Zinsen hat mit den Bankinstitutionen zu tun, der Begriff KESt. mit dem Staat. Eine Bank ist eine Institution, die Geschäfte mit Geld macht. Als Privatkunde kann jede Person ihr Geld in einer Bank anlegen. Das Geld befindet sich dann auf einem sogenannten Konto. Die Bank gibt dem Kunden Zinsen, die nach einem jährlichen Prozentsatz, den sogenannten Zinssatz berechnet wird. Der Grundwert für den Zinssatz ist das Guthaben am Anfang G_0. Die Zinsen werden durch die Staat versteuert. Diese Steuer, Kapitalertragssteuer (KESt.) genannt, ist im deutschsprachigem Raum ca. 25% der Zinsen und dieser Prozentsatz wird im Folgenden immer benutzt.

Es gibt verschiedene Gründe, warum die Bank jedes Jahr den Kunden Zinsen gibt. Einerseits verliert das Geld durch die Inflation (Erhöhung der Preise) an seinen Wert, andererseits erzielen die Banken durch Investitionen und Kredite einen Gewinn, der ein Vielfaches der Zinsen ist.

Wie schon erwähnt, die Zinsen werden versteuert, daher bleiben im Konto nicht die ganzen Zinsen, die die Bank gibt, sonder ein Teil davon, die sogenannten effektiven Zinsen. Da die Steuer 25% ist, sind die effektiven Zinsen der Rest 75% der Zinsen, die die Bank gibt.

Guthaben am Anfang G_0 ist das Geld, das ein Privatkunde in ein Bankkonto anlegt.

Zinsen Z ist das Geld, das die Bank jedes Jahr dem Kunden gibt, sozusagen als Belohnung für seine Vertrauen an der Bank (und als Teil des Gewinns, den die Bank mit diesem Geld gewinnt).

Zinssatz Zs ist ein Prozentsatz. Er wird benutzt, um die Zinsen, die die Bank gibt, zu berechnen. In diesem Fall ist das Guthaben am Anfang G_0 der Grundwert (also 100%).

Kapitalertragssteuer KESt. ist eine Steuer auf die Zinsen. Sie wird vom Staat genommen, um Funktionen des Staates zu finanzieren. in diesem Buch wird sie immer 25% sein. Der Grundwert allerdings ist in diesem Fall nicht das Guthaben am Anfang G_0, sondern die Zinsen Z, die die Bank dem Kunden gibt.

Effektive Zinsen eZ ist das Geld, das dem Kunden von den Zinsen übrig bleibt, nachdem die Zinsen versteuert werden. Wenn nichts Anderes auf dem Konto passiert, ist das **Guthaben nach einem Jahr G_1** die Summe des Guthabens am Anfang G_0 und der effektiven Zinsen.

Effektiver Zinssatz eZs ist ein Prozentsatz. Er ist 75% des Zinssatzes Zs, da 25% der Zinsen als KESt. vom Staat genommen werden. Wenn nichts Anderes auf dem Konto passiert, wird das Guthaben nach einem Jahr G_1 um so viel mehr Prozent als das Guthaben am Anfang G_0, wie der effektive Zinssatz.

$G_1 = G_0 + eZ$	$Z = G_0 \cdot Zs : 100$	$KESt. = Z \cdot \frac{25}{100}$
$eZ = Z - KESt.$	$eZ = G_0 \cdot eZS : 100$	$G_1 = G_0 \cdot \frac{100+eZS}{100}$

Zinsen

Wenn man Geld auf einem Konto hat, bekommt man jedes Jahr Zinsen. Die Bank benutzt das Geld vom Konto, um es zu investieren. Teil des Gewinns aus den Investitionen bekommt der Kontoinhaber als Zinsen (zu diesem Thema lernen wir mehr im Kapitel über Wachstum).

Die Zinsen werden nach einem Jahreszinssatz berechnet. Wenn man z.B. 4000€ im Konto (Anfangswert: 100%) hat und der Zinssatz 0,5%, dann bekommt man am Ende des Jahres:

$$\begin{array}{ccccc} 100\% & \cdots\cdots & 4000€ & & \\ \uparrow: & \swarrow \cdot & & & x = 20€\ \textit{Zinsen.} \\ 0{,}5\% & \cdots\cdots & x & & \end{array}$$

KESt., effektive Zinsen, Guthaben nach einem Jahr

Wenn man ein Bankkonto hat, bekommt man von der Bank jedes Jahr Zinsen. Diese werden vom Staat versteuert. Diese Steuer nennt man Kapitalertragssteuer (KESt.). Der Zinssatz für die Berechnung der Steuer ist ungefähr auch 25%. Das bedeutet im vorherigen Beispiel, dass ein Teil (25%) von den 20€ dem Staat (und nicht dem Kontoinhaber) gegeben wird. Wie viel Geld gelangt dann auf das Konto? In dieser Frage sind die Zinsen (und nicht das Geld am Anfang) der Grundwert (also 100%):

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \cdots\cdots & 20\text{€} \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 25\% & \cdots\cdots & KESt. \end{array} \qquad KESt. = 5\text{€} \;\; KESt.$$

Daher bleiben auf dem Konto nicht 20€ mehr am Ende des Jahres sondern:

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \cdots\cdots & 20\text{€} \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 75\% & \cdots\cdots & eZ. \end{array} \qquad eZ. = 15\text{€} \;\; \textit{effektive Zinsen.}$$

(nicht vergessen: $25\% = 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, $75\% = 0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, also 3/4 der Zinsen bleibt im Konto und 1/4 geht zum Staat als Steuer KESt.)

Diese Zinsen, die auf dem Konto bleiben, nennt man ***effektive Zinsen***, den entsprechenden Zinssatz ***effektiven Zinssatz***. Man kann die effektiven Zinsen offenbar auch einfacher berechnen: eZ = Z – KESt.=20€−5€=15€

Das bedeutet dann, dass das Geld am Ende des Jahres (Guthaben G_1):

G_1=4000€+15€=4015€ ist.

Man kann dann als Formel schreiben:

Die Symbole: Guthaben G_0 (Geld im Konto am Anfang), Zinsen Z, effektive Zinsen eZ, Zinssatz Zs, effektiver Zinssatz eZs, Guthaben G_1 (Geld am Ende des ersten Jahres).

$G_1 = G_0 + eZ$	**$Z = G_0 \cdot Zs : 100$**	**KESt.= $Z \cdot \frac{25}{100}$**
$eZ = Z - KESt.$	**$eZ = G_0 \cdot eZS : 100$**	**$G_1 = G_0 \cdot \frac{100+eZS}{100}$**

Effektiver Zinssatz

Da der Zinssatz Zs und der effektiver Zinssatz eZs Prozentsätze sind, ist es oft verwirrend, wenn man den effektiven Zinssatz als Prozentanteil des Zinssatzes berechnet. Daher fangen wir mit einem Beispiel an, in dem die effektiven Zinsen berechnet werden.

In einem Konto ist das Guthaben am Anfang 2000€, der Zinssatz 5%. Berechnen sie die effektiven Zinsen!

Berechnen wir erst die Zinsen. In diesem Fall ist das Guthaben der Grundwert (Wert am Anfang, 100%).

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \cdots\cdots & 2000\text{ €} \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 5\% & \cdots\cdots & Z \end{array} \qquad \left(\frac{2000\cdot 5}{100} = 2000\cdot 0{,}05\right) \qquad Z = 100\text{ €}.$$

Wenn die effektiven Zinsen berechnet werden, sind sie 75% der Zinsen (hier ist der Grundwert 100% die Zinsen und nicht das Guthaben am Anfang):

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \cdots\cdots & 100\text{ €} \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 75\% & \cdots\cdots & eZ \end{array} \qquad \left(\frac{100\cdot 75}{100} = 100\cdot 0{,}75\right) \qquad eZ = 75\text{ €}.$$

Statt € könnte man irgendeine andere Währung oder eine andere Einheit nehmen:

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \cdots\cdots & 100\text{ Kronen (oder kg} \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \text{oder irgendwas)} \\ 75\% & \cdots\cdots & eZ \end{array} \qquad \left(\frac{100\cdot 75}{100} = 100\cdot 0{,}75\right) \qquad eZ = 75\text{ Kronen (oder kg oder irgendwas)}.$$

Wie viel % von 2000 Kronen können diese 75 € oder Kronen oder kg oder irgendwas sein?

$$\begin{array}{lcl} 2000\text{ €} & \cdots\cdots & 100\% \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 75\text{ €} & \cdots\cdots & eZs \end{array} \qquad \left(\frac{75\cdot 100}{2000}\right) \qquad eZs = 3,75\%.$$

Hier ist der Grundwert das Guthaben am Anfang. Wir haben festgestellt, dass die effektiven Zinsen eZ 3,75% dieses Guthabens sind. Diesen Prozentwert (3,75%) kann man auch direkt über den Zinssatz berechnen. Wir sollten einfach daran denken, dass wir anstatt 100€ oder 100 Kronen Zinsen oder 100 von kg oder irgendwas eine andere Einheit da haben, nämlich %. In diesem Fall benutzen wir den Zinssatz 5% als Grundwert:

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \cdots\cdots & 5\% \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 75\% & \cdots\cdots & eZs \end{array} \qquad \left(\frac{5\cdot 75}{100} = 5\cdot 0{,}75\right) \qquad eZs = 3{,}75\%.$$

Man könnte genauso denken, dass die Zinsen 5€ (oder Kronen oder irgendwas) sind und die effektiven Zinsen berechnen:

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \cdots\cdots & 5\text{ € (oder Kronen} \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \text{oder irgendwas)} \\ 75\% & \cdots\cdots & eZs \end{array} \qquad \left(\frac{5\cdot 75}{100} = 5\cdot 0{,}75\right) \qquad eZs = 3{,}75\text{ € (oder Kronen oder irgendwas, also auch \%)}.$$

In dieser Weise ist es möglich den effektiven Zinssatz (also die jährliche prozentuelle Erhöhung des Guthabens) berechnen. Es gilt:

$$\begin{array}{lcl} 100\% & \cdots\cdots & G_0 \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ Zs\text{ in }\% & \cdots\cdots & Z\text{ in €} \end{array} \qquad Z = \frac{G_0\cdot Zs}{100}\text{ (in €)}.$$

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & Z \text{ in } € \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 75\% & \cdots\cdots & eZ \text{ in } € \end{array} \qquad eZ = \frac{Z \cdot 75}{100} = 0{,}75 \cdot Z \ (\text{in } €)\,.$$

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & Zs \text{ in } \% \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 75\% & \cdots\cdots & eZs \text{ in } \% \end{array} \qquad eZs = \frac{Zs \cdot 75}{100} = 0{,}75 \cdot Zs \ (\text{in } \%)\,.$$

Umkehraufgaben

Wir haben schon gelernt, wie man Umkehraufgaben löst. Wichtig ist immer den richtigen Wert als Grundwert zu benutzen. In den Umkehraufgaben ist er i.d.R. unbekannt.

In einem Konto ist das Guthaben nach einem Jahr G_1 6368,53€, der Zinssatz 0,6%. Berechnen Sie das Guthaben am Anfang, die Zinsen Z_1, die effektiven Zinsen eZ_1 und die Kapitalertragssteuer $KESt._1$ in diesem Jahr.

In dieser Aufgabe ist es notwendig, erst den effektiven Zinssatz zu berechnen.

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & 0{,}6\% \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 75\% & \cdots\cdots & eZs \end{array} \qquad \left(\frac{0{,}6 \cdot 75}{100} = 0{,}6 \cdot 0{,}75\right) \qquad eZs = 0{,}45\%\,.$$

Das Guthaben wird daher jedes Jahr nicht um 0,6% mehr (was die Bank gibt), sondern 0,45% mehr (was nach der Versteuerung und den Abzug der KESt. übrig bleibt). Daher ist das Guthaben am Ende des ersten Jahres 100%+0,45%=100,45% (100% am Anfang plus 0,45% eZs). Das Guthaben am Anfang (Grundwert 100%) ist in diesem Fall gefragt:

$$\begin{array}{ccc} 100{,}45\% & \cdots\cdots & 6368{,}53\ € \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 100\% & \cdots\cdots & G_0 \end{array} \qquad G_0 = 6340\ €\,.$$

Durch Umformen der Formel, die wir in den Definitionen für die Berechnung des Guthabens nach einem Jahr G_1 gelernt haben, können wir ganz leicht die effektiven Zinsen berechnen:

$G_1 = G_0 + eZ \qquad\qquad | - G_0$

$(G_1 - G_0 = eZ)$

$eZ = G_1 - G_0 = 6368{,}53\ € - 6340\ € = 28{,}53\ €$

Mit Hilfe der Schlussrechnung können wir dann die ganzen Zinsen berechnen (was die Bank gibt):

$$\begin{array}{ccc} 75\% & \cdots\cdots & 28{,}53\ € \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 100\% & \cdots\cdots & Z \end{array} \qquad Z = 38{,}04\ €\,.$$

Durch Umformen der Formel, die wir in den Definitionen für die Berechnung der effektiven Zinsen eZ_1 gelernt haben, können wir ganz leicht die effektiven Zinsen berechnen:

$eZ_1 = Z_1 - KESt._1 \qquad\qquad | - eZ_1 + KESt._1$

$KESt._1 = Z_1 - eZ_1 = 38{,}04\ € - 28{,}53\ € = 9{,}51\ €$

Es gibt viele Wege die Umkehraufgaben zu lösen. Allerdings ist es absolut notwendig in diesen Aufgaben erst den effektiven Zinssatz zu berechnen (wenn er nicht schon gegeben ist!). Eine andere Schlussrechnung für die Berechnung der Zinsen sehen wir im Folgenden. Der Leser sollte daran denken, warum diese Berechnung stimmt (einfach daran denken, wie viel % jeder Wert ist!):

$$\begin{array}{ccc} 100{,}45\% & \cdots\cdots & 6368{,}53\ € \\ \uparrow: & \swarrow\cdot & \\ 0{,}6\% & \cdots\cdots & Z \end{array} \qquad Z = 38{,}04\ €\,.$$

Und noch ein Kommentar: Bei einer Aufgabe muss man nicht die Fragen so wie sie in der Aufgabe stehen nacheinander beantworten. Man sollte an die Zwischenschritte denken. Hier haben wir beispielsweise erst den effektiven Zinssatz berechnet (was zwar nicht gefragt wird, für die Lösung aber absolut notwendig ist). Allerdings haben wir erst die effektiven Zinsen und dann die ganzen Zinsen berechnet (obwohl in die umgekehrte Reihenfolge gefragt wird...).

Wachstums- und Zerfallsprozessen

Allgemein

Wachstum: Bevölkerung

- *China hatte im Jahr 1966 eine Bevölkerungsgröße von circa 750 Millionen Menschen.*

Das jährliche Wachstum lag bei circa 2,5%. Wie groß wäre die Bevölkerung im Jahr 2016, wenn der Wachstum gleich geblieben wäre? Was wären die Ergebnisse eines solchen Wachstums?

Zwischen 1966 und 2016 liegen 50 Jahre. Berechnen wir Schritt für Schritt die Bevölkerung für die ersten drei Jahre:

Der Anfangswert (Jahr 1966) ist 750 Millionen (100%). In einem Jahr ist die Bevölkerung um 2,5% gewachsen, also im Jahr 1967 wäre die Bevölkerung 102,5%:

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & 750 \text{ Millionen} \\ \uparrow: & \swarrow \cdot & \\ 102,5\% & \cdots\cdots & x_1 \end{array}$$

$$\left(750\cdot\frac{102,5}{100}=750\cdot 1,025=768,75\right)\qquad \text{also}\qquad x_1=768,75\text{ Millionen}$$

$$\text{man kann daher schreiben:}\qquad x_1=750\cdot 1,025^1\text{Millionen}$$

Für das nächste Jahr 1967 ist von diesem Wert auszugehen, um die Bevölkerung 1968 zu berechnen. Die Bevölkerung wäre 2,5% gewachsen im Vergleich zum 1967 (und nicht 1966). Die Bevölkerung im Jahr 1967 (768,75 Millionen) ist daher der neue Anfangswert (100%):

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & 768{,}75 \text{ Millionen} \\ \uparrow: & \swarrow \cdot & \\ 102,5\% & \cdots\cdots & x_2 \end{array}$$

$$\left(768,75\cdot\frac{102,5}{100}=768,75\cdot 1,025=787,96875\right)\quad \text{also}\quad x_2\approx 787,97\text{ Millionen}$$

$$\text{aber, wie wir forher gesehen haben}\qquad 768,75=750\cdot 1,025\qquad \text{und daher}$$

$$787,97=768,75\cdot 1,025=\overbrace{750\cdot 1,025}^{(=768,75)}\cdot 1,025=750\cdot 1,025^2\quad \text{also}$$

$$x_2=750\cdot 1,025^2\text{ Millionen}$$

Für das dritte Jahr geht man ähnlich vor:

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \cdots\cdots & 787{,}97 \text{ Millionen} \\ \uparrow: & \swarrow \cdot & \\ 102,5\% & \cdots\cdots & x_3 \end{array}$$

$$787,97\cdot\frac{102,5}{100}=787,97\cdot 1,025\approx 807,67\qquad \text{also}\qquad x_3\approx 807,67\ \text{Millionen}$$

$$\text{aber, wie wir forher gesehen haben}\qquad 787,97=750\cdot 1,025^2\qquad \text{und daher}$$

$$\text{und daher } 807,67\cdot 1,025=\overbrace{750\cdot 1,025^2}^{(=787,97)}\cdot 1,025=750\cdot 1,025^3\quad \text{also}$$

$$x_3=750\cdot 1,025^3\text{ Millionen}$$

Wenn man das Ergebnis nach 50 Jahren berechnen will, müsste man mit der Strategie die gleiche Rechnung insgesamt 50 mal durchführen! Es gibt aber einen schnelleren Weg, die Aufgabe mit Hilfe eines Taschenrechners zu lösen.Betrachten wir unsere Ergebnisse (man muss immer mit der entsprechende schon gemachte Schlussrechnung vergleichen):

$$x_1=750\cdot 1,025^1\text{ Millionen}\qquad (=768,75\text{ Millionen})$$

$$x_2=750\cdot 1,025^2\text{ Millionen}\qquad (\approx 787,97\text{ Millionen})$$

$$x_3=750\cdot 1,025^3\text{ Millionen}\qquad (\approx 807,67\text{ Millionen})$$

Jedes Jahr multiplizieren wir einmal weiter mit $1,025$, jedes Jahr wird die Hochzahl um 1 größer! Das erste Jahr ist die Hochzahl von $1,025$ 1, das zweite Jahr 2, das dritte Jahr 3 und so weiter. Man kann sofort erkennen, dass die Hochzahl von $1,025$ nach 50 Jahren 50 sein wird und daher:

$x_{50}=750\cdot 1,025^{50}\text{ Millionen}\approx 2577,83\ \text{Millionen}$.
So groß wäre die Bevölkerung Chinas nach 50 Jahren!

Hier ist die Periode (also die Zeit in der die Bevölkerung um 2,5% wächst) ein Jahr. In anderen Aufgaben kann sie etwas anderes sein (Woche, Monat, Tag, Stunde und so weiter). Wenn der Anfangswert A ist, der Wert am Ende E, der Prozentsatz des Wachstums P und die Anzahl der Perioden n (wie viele Perioden wir haben), dann kann man folgende Formel schreiben:

$$E=A\cdot(1+P:100)^n$$

Man kann schon sehen, dass die Bevölkerung Chinas sehr groß gewesen wäre, wenn das Wachstum so hoch geblieben wäre. Die Wirtschaft Chinas war schon 1966 geplant und die zuständigen Personen haben damals schon festgestellt, dass die Wirtschaft ein solches Wachstum der Bevölkerung nicht würde verkraften können. Die Leute würden an Hunger sterben oder man würde Kriege führen müssen, um die Bevölkerung zu verringern oder neue Ressourcen zu erschließen. Deshalb haben die Zuständigen die „ein-Kind-Politik" eingeführt, die das Wachstum der Bevölkerung ohne Hungertod oder größere Kriege in gewissen Grenzen gehalten hat. Die Bevölkerung ist doch gewachsen, aber nicht so viel.

Ein kleiner *(oder doch sehr großer?)* Kommentar:
Manche könnten sagen, dass die Verdoppelung nach 50 Jahren nicht so viel ist. Wenn jemand dieser Meinung ist, sollte er die Bevölkerung nach 1000 Jahren berechnen (also, die Hochzahl sollte 1000 und nicht mehr 50 sein) und versuchen, sich vom Ergebnis nicht schockieren zu lassen ...
Allerdings könnte man die Haltung von der Bevölkerung in ärmeren Staaten psychologisch gesehen schon verstehen: Sie haben keine Kenntnisse und glauben, dass mehrere Kinder eine bessere Zukunft gewährleisten, beziehungsweise die Versorgung im Alter besser sicherstellen. Oft spielt dabei die Religion eine dazu verstärkende Rolle.

Was ist aber mit den Wirtschaftswissenschaftlern? Die notwendigen Mathematikkenntnisse haben diese Personen mit Sicherheit. Dummheit nach dem berühmten Spruch von Einstein mag man ihnen grundsätzlich nicht gleich unterstellen wollen. Trotzdem behaupten sie, dass ein unendliches wirtschaftliches Wachstum (was mit Sicherheit auch ein unendliches Wachstum zum Beispiel des Energieverbrauchs und der Ressourcen voraussetzt) für das Überleben der Wirtschaft notwendig sei!

Die logische Schlußfolgerung ist folglich, dass aus der nicht verfügbaren Unendlichkeit ein zwangsläufiges Scheitern dieser Wirtschaftsstrategie folgen muss, also kein Überleben möglich ist. Die Folgen für die Bevölkerung zu bedenken, bleibt dem Publikum überlassen ...

Zurück zum mathematischen Problem, dazu eine Methode, die nicht funktioniert, also ein ***falscher Weg:***

Viele versuchen, diese Aufgabe so zu lösen, indem sie 2,5% mit 50 multiplizieren, also 50 mal miteinander addieren. Kommen wir so zum selben Ergebnis?

50·2,5%=125%, 100%+125%=225%=2,25, 750 Millionen· 2,25=1687,5 Millionen.

Das ist allerdings falsch!

Der Fehler liegt darin, dass man 2,5% immer auf die Bevölkerung von 1966 bezieht. Die Bevölkerung aber wächst jedoch jedes Jahr um 2,5% in Bezug auf das vorherige Jahr und nicht auf 1966. Daher muss man jedes Mal mit 1,025 und nicht einmal mit 2,25 multiplizieren!

Zerfall: Radioaktivität

Zerfall ist das Gegenteil von Wachstum. Zerfall liegt vor, wenn jede Periode (Jahr, Monat und so weiter) die vorhandene Menge um den gleichen Prozentsatz weniger wird. Ein geeignetes Beispiel dafür ist die Radioaktivität:

- *Das Iod-Isotop ^{131}I (wird in nuklear-medizinischen Therapie benutzt) wird täglich um 8,3% weniger*

Wie viele Atome des Isotops bleiben nach 3 Wochen, wenn wir am Anfang 250000 Atome haben?

Wir können hier sofort die Formel des vorherigen Absatzes benutzen [E = A · (1+P:100)^n], indem wir berücksichtigen, dass wir einen Zerfall und kein Wachstum haben, also die Atome werden weniger statt mehr. Wir müssen daher minus statt plus benutzen:

$E = A\cdot(1-P:100)^n = 250000 Atome\cdot(1-8,3:100)^{21} \approx 40522 Atome$ (hier müssen wir auf eine ganze Zahl runden; warum denn? Die Hochzahl allerdings ist 21 und nicht 3; wieso?)

Bei der Radioaktivität gibt es eine für das jeweilige Isotop charakteristische Periode, die sogenannte „Halbwertszeit“. Das ist die Zeit, die notwendig ist, damit die Anzahl der radioaktiven Atome sich halbiert, also auf 50% abnimmt, daher der Name. Bei ^{131}I ist diese Zeit 8 Tage. Bei Atomen, die in Kernkraftwerken benutzt werden, ist diese Zeit deutlich größer (zum Beispiel 4,5 Milliarden Jahren für ^{238}U Uran). So entsteht radioaktiver Müll, mit dem nicht einfach umzugehen ist, welcher auch kaum mit technisch oder kommerziell vertretbarem Aufwand entsorgt werden kann, jedoch viel konzentrierter auftritt als an den ursprünglichen Lagerorten, wo bedingt durch den Abbau noch zusätzlich große Mengen radioaktiver Stäube als Abraum anfallen und vom Wind verwehen. Das und die Gefahr eines Unfalls (wie z.B. neulich in Fukushima), machen die Nutzung der Kernspaltung sehr gefährlich.

Interessant ist dabei allerdings, dass ein einwandfrei funktionierendes Kernkraftwerk allein durch den Betrieb keine Radioaktivität nach außen freisetzt, das passiert erst bei entsprechenden Pannen. Kohle enthält ebenfalls radioaktive Atome als unerwünschte Beigabe, wie übrigens praktisch jegliches Material, welches durch Bergbau gefördert wird. Mit der Abluft von Kohlekraftwerken wird durch den reinen Betrieb also mehr Radioaktivität in der Umwelt freigesetzt als durch ein Kernkraftwerk gleicher Leistung. Das Kohlekraftwerk produziert allerdings keinen zusätzlichen radioaktiven Müll und setzt keine zusätzliche Radioaktivität bei einer Panne frei.

Zinseszins

Wachstumsprozesse sind auch für das Banksystem sehr relevant. Das Guthaben in einem Konto wächst jährlich um den Zinssatz.
Wenn man kein Geld aufhebt oder einzahlt, kann man das Guthaben nach beliebigen Jahren mit Hilfe der Formel [E = A · (1+P:100)^n] berechnen.
A ist hier das Kapital am Anfang, E das Guthaben nach n Jahren, P der Zinssatz.

- *Berechne das Guthaben in einem Konto nach 20 Jahren, wenn das Kapital am Anfang 100000€ ist und der effektive Zinssatz 0,45%.*

Wie groß sind die Zinsen Z?

E = A · (1+P:100)^n = 100000€ · (1+0,45:100)^{20} ≈ 109395,34€ (Warum muss man hier auf 2 Nachkommastellen runden?)

Die Zinsen kann man dann leicht berechnen: Z=E−A=109395,34€−100000€ = 9395,34€

Die Bank benutzt unsere Geld, um Geld zu investieren, zum Beispiel, um Geld anderen auszuleihen. Die Bank aber verlangt einen viel höheren Kreditzinssatz als den Zinssatz, den sie für unseres Geld im Konto gibt.

- *Berechne, wie viel Geld eine Bank nach 20 Jahren bekommt, wenn sie 100000€ mit 2,5% Zinssatz ausleiht.*

E = A · (1+P:100)^n = 100000€ · (1+2,5:100)^{20} ≈163861,64€

Der Gewinn für die Bank ist daher: 163861,64€−100000€ ≈ 63861,64€ Das ist eindeutig viel mehr, als das Geld, das die Bank dem Kontoinhaber zurückgibt. Das reicht aber doch nicht aus! Banken dürfen mit unserem Geld mehrere Kredite vergeben. Quasi schöpfen sie so fiktives Geld mit jedem bereitgestellten Kredit. Sie dürfen, sagen wir mal, zehn Kredite vergeben. Sofern die Kreditgeber alles samt Zinsen zurückzahlen, ist der reine Gewinn für die Bank:

10 · 63861,64€ − 9395,34€ ≈ 629221,10€

Natürlich können Kredite ausfallen, werden also nicht zurückgezahlt. Ein solcher Ausfall ist zunächst einmal das Risiko der Bank. Zudem hat die Bank die Angestellten und die Infrastruktur (Bankgebäude, Computersysteme etc) zu finanzieren.

Ein Kommentar noch finde ich hier notwendig:
Diesen nicht gerade unbeträchtlichen Gewinn rechtfertigen die Banken durch das genannte Risiko, das sie beim Ausleihen übernehmen. Je höher das Risiko einer Investition, desto höher der Kredit-Zinssatz. Zudem wird das Risiko bereits dadurch reduziert, dass mehr Kredite vergeben werden, als Geld angelegt wurde. Die Tatsache, dass die Banken bei der letzten Finanzkrise doch Geld vom Steuerzahler bekommen haben, um einen Bankrott abzuwenden, ohne die geringste Forderung, das Geld zurückzugeben, zeigt eindeutig, dass sie ihr Risiko begrenzen, wenn die Kalkulation im großen Rahmen wirklich einmal schiefgeht, was allerdings bei der angedeuteten Geldschöpfung durch Banken immer wieder der Fall sein wird.

Arbeiten mit Termen

Definitionen

Ein Term ist ein mathematischer Ausdruck. $3+4$, $s+x$, t^2, r^2x-4r, $\frac{r^2x-4r}{w+9}$ sind alles Terme, wobei $\frac{r^2x-4r}{w+9}$ aus mehreren Teiltermen besteht.

Potenzen

Definition

Jeder Term der Form m^n ist eine ***Potenz***. Was unten steht (hier m) nennt man ***Basis***, was oben rechts (hier n) ***Hochzahl***.

Potenz $4^{3\,\leftarrow \text{Hochzahl}}_{\leftarrow \text{Basis}}$ Was bedeutet diese Schreibweise?

Wenn man 4+4+4 hat, kann man auch 3·4 schreiben. $\underbrace{4+4+4}_{3\ mal} = 3\cdot 4$. Eine **Multiplikation** zeigt, wie oft man eine Zahl mit sich selbst ***addiert***.

Wenn man 4·4·4 hat, dann kann man 4^3 schreiben. Eine **Potenzzahl** (hier 4^3) zeigt, wie oft (so oft, wie die **Hochzahl**, hier 3) man eine Zahl (die **Basis**, hier 4) mit sich selbst ***multipliziert***.

Rechenarten

Zwei Potenzzahlen mit der gleichen Basis kann man *multiplizieren*, indem man die gleiche Basis und als Hochzahl die Summe der Hochzahlen nimmt.

$4^3\cdot 4^6 = 4^{3+6} = 4^9$ $\quad a^t\cdot a^q = a^{t+q}$ $\quad x^3\cdot x^{57} = x^{3+57} = x^{60}$

Warum das so ist, ist leicht zu erklären:

$$4^3 \cdot 4^6 = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3\ mal} \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{6\ mal} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{9\ mal} = 4^9 \quad (=4^{3+6})$$

Die Hochzahlen addiert man, auch wenn sie negativ sind:

$$4^7 \cdot 4^{-2} = 4^{7+(-2)} = 4^5 \qquad a^t \cdot a^{-q} = a^{t+(-q)} = a^{t-q} \qquad x^3 \cdot x^{-7} = x^{3+(-7)} = x^{3-7} = x^{-4}$$

Bei einer *Addition* oder *Subtraktion* von Potenzen kann man dagegen die Hochzahlen **nicht** addieren!

$$4^3 + 4^6 \neq 4^9$$

Zwei Potenzzahlen mit der gleichen Basis kann man dividieren, indem man die gleiche Basis nimmt und als Hochzahl die Differenz der Hochzahlen (**oben minus unten!**).

$$\frac{a^7}{a^5} = a^{7-5} = 7^2 \qquad \frac{7^{74}}{7^5} = 7^{74-5} = 7^{69} \qquad \frac{4^z}{4^x} = 4^{z-x}$$

Warum das so ist, ist leicht zu erklären:

$$\frac{a^7}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}} \text{(kürzen)} = \frac{a \cdot a}{1} = a^2 \quad =(a^{7-5})$$

Die Hochzahlen subtrahiert man (**oben minus unten**), auch wenn sie negativ sind:

$$\frac{w^5}{w^{-7}} = w^5 : w^{-7} = w^{5-(-7)} = w^{5+7} = w^{12} \qquad \frac{a^{-7}}{a^5} = a^{-7} : a^5 = a^{-7-5} = a^{-12} \qquad \frac{4^{-7}}{4^{-c}} = 4^{-7} : 4^{-c} = 4^{-7-(-c)} = 4^{-7+c}$$

Da ein Bruch (fast) gleichbedeutend mit einer Division ist, kann man auch sagen, dass bei der Division von Potenzzahlen mit gleicher Basis das Ergebnis die gleiche Basis ist, mit einer Hochzahl, die die Differenz aus der Hochzahl des Dividends und der Hochzahl des Divisors ist.

Es muss auch klar sein: x^2 ist nicht das Gleiche wie y^2 (kann ausnahmsweise sein, ist es in der Regel aber nicht!) und x, x^2 und x^5 sind ebenfalls i.d.R. auch nicht das Gleiche! Wenn die Basis anders ist, kann man mit den Hochzahlen keine Strichrechnung machen, z.B.:

$4^3 \cdot 5^6 \neq 20^9$ oder etwas Ähnliches. Man kann einfach diesen Ausdruck **NICHT** vereinfachen!

Grundaufgaben

Vereinfachen Sie!

$3x^2+5-7x^5+11-4x^2+3-11x^5+5x^2=?$

Diesen Term kann man vereinfachen, indem man Gleiches mit Gleichem addiert bzw. subtrahiert:

$$3x^2 + 5 - 7x^5 + 11 - 4x^2 + 3 - 11x^5 + 7x^2 =$$

Mit Rot sind alle Teilterme (*Summanden*), die x^2 beinhalten, mit Blau alle Teilterme, die x^5 beinhalten und mit Schwarz alle einfachen Zahlen markiert. Man summiert die entsprechenden Teilterme. x^2 gibt es 3-4+7 also insgesamt 6 mal, x^5 (mit Blau) -7-11 also -18 mal und die Zahlen summiert man auch, 5+11+3 ist 19. Das Gesamtergebnis kann man vereinfacht so schreiben:

$6x^2 +19 -18x^5$

Klammer Auflösen

Ziel des Ausmultiplizierens

Lösen Sie die Klammern auf!

$$2(3x-5) \qquad (1)$$

Ziel solcher Aufgaben ist, einen Ausdruck ohne Klammern zu schreiben, der gleichwertig zu diesem Ausdruck (mit Klammern) ist. Probieren wir zunächst einmal die Klammern einfach wegzulassen. Zuerst soll man etwas erklären:

Wenn zwischen zwei mathematischen Ausdrücken nichts (keine Rechenart) steht, ist ein "mal" gemeint (Multiplikation) ***(einzige Ausnahme sind hier die gemischten Zahlen)***

$$2(3x-5) = 6x-5 \qquad (2)$$

Probieren wir jetzt in beiden Ausdrücken eine Zahl an der Stelle von x einzusetzen, beispielsweise 0:

$$(1) \quad \rightarrow \quad 2(3\cancel{x}^{=0} - 5) = -10$$
$$(2) \quad \rightarrow \quad 6\cancel{x}^{=0} - 5 = -5$$

Die beide Ausdrücke sind nicht gleich. Probieren wir es auch mit 1:

$$(1) \quad \rightarrow \quad 2(3\cancel{x}^{=1} - 5) = -4$$
$$(2) \quad \rightarrow \quad 6\cancel{x}^{=1} - 5 = 1$$

Wieder sind die Ausdrücke nicht gleich. Man sagt dann, dass $2(3x-5) \neq 6x-5$ ist, dass $2(3x-5)$ nicht gleich zu $6x-5$ ist. Obwohl eine Zahl schon ausreichen könnte, stimmt das eigentlich für alle Zahlen, die man für x einsetzen kann.

Probieren wir dann beide Summanden in der Klammer mit dem Ausdruck außerhalb der Klammer zu multiplizieren:

$$2(3x-5) = 6x-10 \qquad (3)$$

Egal mit welcher Zahl wir es jetzt ausprobieren, werden die beide Ausdrücke immer gleich sein! Beispielsweise mit 4

$$(1) \quad \rightarrow \quad 2(3\cancel{x}^{=4} - 5) = 14$$
$$(3) \quad \rightarrow \quad 6\cancel{x}^{=4} - 10 = 14$$

Da das immer gilt, kann man schreiben:

$$2(3x-5) = 6x - 10$$

Wir haben daher unser Ziel erreicht! Wir haben einen gleichwertigen Ausdruck ohne Klammern!

Klammern werden aufgelöst, indem jeder Summand in Klammern mit dem Ausdruck außerhalb der Klammer multipliziert wird.

Aufgaben mit einer Klammer

Lösen Sie die Klammern auf!

$2x^2(3x^5 - 7 + 5x)$

Die Aufgabe hier ist, einen gleichwertigen Ausdruck ohne Klammern zu schreiben. Wie eben erklärt, multipliziert man dafür den Term außerhalb der Klammer ($2x^2$) mit jedem Summand in den Klammern (also erst mit $3x^5$, dann mit 7 und dann mit $5x$):

$$\underline{2x^2} \cdot (3x^5 \; - 7 \; + 5x) \quad =$$
$$\underline{2x^2} \cdot 3x^5 - \underline{2x^2} \cdot 7 + \underline{2x^2} \cdot 5x \quad =$$
$$6x^7 - 14x^2 + 10x^3$$

Der Ausdruck am Ende ist immer gleich mit dem Ausdruck am Anfang. Wir haben also die Klammer aufgelöst!

Aufgaben mit 2 Klammern

Lösen Sie die Klammern auf!

$(2x^2 - 5)(3x^2 - 4)$

Die Aufgabe hier ist wieder, einen gleichwertigen Ausdruck ohne Klammern zu schreiben. Um das zu machen, multipliziert man jeden Summand der ersten Klammer $(2x^2 - 5)$ mit jedem Summand der zweiten Klammer $(3x^2 - 4)$:

$$(2x^2 - 5) \cdot (3x^2 - 4) \quad =$$
$$2x^2 \cdot 3x^2 - 2x^2 \cdot 4 - 5 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 4 \quad =$$
$$6x^4 - 8x^2 - 15x^2 + 20 \quad =$$
$$6x^4 - 23x^2 + 20$$

Hier gilt die Multiplikationsregel der Vorzeichen: plus mal plus ist plus, plus mal minus ist minus, minus mal plus ist minus, minus mal minus ist plus. (Das Gleiche gilt bei durch)

+ · + = +

+ · − = −

− · + = −

− · − = +

Arbeiten mit negativen Zahlen

Wir haben gerade eben die Regeln für die Multiplikation mit Plus und Minus gesehen. Wie kann man diese Regeln mit Zahlen erklären?

Dass $(+5) \cdot (+3) = (+15)$ ist, ist trivial. $+5$ ist 5 und $+3$ ist 3. $(+5) \cdot (+3) = (+15)$ ist daher gleichbedeutend wie $5 \cdot 3$ und, wie Multiplikation definiert wird, ist das 15.

Dass $5 \cdot (-3) = (-15)$ ist, macht eben auch Sinn. Laut Definition der Multiplikation ist $5 \cdot (-3) = -3 - 3 - 3 - 3 - 3 = -15$, wie man beim Arbeiten mit negativen Zahlen lernt.

Wenn man $(-5) \cdot 3$ hat, ist die Erklärung ebenso leicht. In der Multiplikation spielt die Reihenfolge keine Rolle, daher ist $(-5) \cdot 3 = 3 \cdot (-5) = -5 - 5 - 5 = -15$.

Warum ist aber Minus mal Minus doch Plus?

Um das zu erklären, kann man folgende Rechnung betrachten:

$(-5) \cdot (5 + (-3))$

Macht man nach der Regel erst die Rechnung in Klammern, ist das Ergebnis:

$(-5) \cdot (5 + (-3)) = (-5) \cdot 2 = 2 \cdot (-5) = -5 - 5 = -10$

Wenn erst die Klammer aufgelöst wird, wie wir das vorher gelernt haben, dann ergibt sich Folgendes:

$(-5) \cdot (5 + (-3)) = (-5) \cdot 5 + (-5) \cdot (-3)$

$(-5) \cdot 5$ ist -25, wie wir eben gelernt haben.

Wenn Minus mal Minus Plus ist, dann ist $(-5) \cdot (-3) = (+15)$ und das Ganze ergibt:

$-25 + 15 = -10$

Wenn Minus mal Minus Minus wäre, dann wäre $(-5) \cdot (-3) = (-15)$ und das Ganze ergäbe:

$-25 - 15 = -35$

was ein falsches Ergebnis ist, da wir schon gesehen haben, dass das Ergebnis, wenn man erst die Rechnung in Klammern macht, -10 ist. Ähnliche Ergebnisse bekommt man, egal welches Beispiel benutzt wird. Daher ist Minus mal Minus Plus.

Ähnliches gilt, wenn man nur Vorzeichen hat:

$+(+3) = +3 = 3 \qquad -(+3) = -3 \qquad +(-3) = -3 \qquad -(-3) = +3 = 3$

Herausheben

Herausheben ist das Gegenteil von Klammer-Auflösen. Man hat einen Term ohne Klammer und versucht in den Summanden die gemeinsamen Teilterme zu finden, die dann außerhalb der Klammer bleiben. Die restlichen Terme bleiben dann als Summanden in der Klammer:

- $6x^7 - 14x^2 + 10x^3$=? *Heben Sie heraus!*

(das ist allerdings das gleiche Beispiel, wie in *Klammer auflösen*, nur in die Gegenrichtung).

Die kleinste Hochzahl von x ist 2. Jeder Summand hat daher ein x^2 drinnen. Außerdem kann man die Zahl in jedem Summand durch 2 teilen. Also jeder Summand hat daher eine 2 drinnen. $2x^2$ ist daher das gemeinsame Element, es bleibt außerhalb der Klammer:

$6x^7 - 14x^2 + 10x^3 = 2x^2 \cdot (3x^5 - 7 + 5x)$

Wie haben wir die Teilterme in der Klammer gefunden?

$6x^7 : 2x^2 = 3x^5$, $\quad 14x^2 : 2x^2 = 7$, $\quad 10x^3 : 2x^2 = 5x$!

Bei den Hochzahlen wählt man die kleinste Hochzahl. Wenn eine Variable bei einem Summand nicht vorkommt, dann kann man sie nicht herausheben. Bei den Zahlen kann man erst die Primfaktorzerlegung durchführen und dann die gemeinsamen Faktoren herausheben:

- $45b^4y^2n^7 - 30y^5n^9 - 75b^8y^8n^8 + 105\,b\,y\,n^7$ = ?

$45b^4y^2n^7 - 30y^5n^9 - 75b^8y^8n^8 + 105\,b\,y\,n^7 \quad = \quad 3{\cdot}3{\cdot}5\,b^4y^2n^7 - 2{\cdot}3{\cdot}5\,y^5n^9 - 3{\cdot}5{\cdot}5\,b^8y^8n^8 + 3{\cdot}5{\cdot}7\,b\,y\,n^7$

Hier haben wir die PFZ gemacht. Überall kommt 3 und 5 zumindest einmal vor, b kommt im zweiten Summand nicht vor (daher kann man b nicht herausheben), die kleinste Hochzahl von y ist 1 ($y=y^1$) und von n 7. Man kann also „3", „5", „y" und „n^7" herausheben:

$3{\cdot}5\,y\,n^7 \cdot (...?...) = 15yn^7 \cdot (...?...)$

Was bleibt jetzt in der Klammer? Wir dividieren jeden Teilterm (Summand) mit dem herausgehobenen Teilterm ($15yn^7$):

$45b^4y^2n^7 : 15yn^7 = 3b^4y$	$30y^5n^9 : 15yn^7 = 2y^4n^2$
$75b^8y^8n^8 : 15yn^7 = 5b^8y^7n$	$105\,b\,y\,n^7 : 15yn^7 = 7b$

also:

$45b^4y^2n^7 - 30y^5n^9 - 75b^8y^8n^8 + 105\,b\,y\,n^7 = 15yn^7\ (\,3b^4y - 2y^4n^2 - 5b^8y^7n + 7b\,)$

Binomische Formeln

Allgemein kann man die binomischen Formeln als eine Art *mathematisches Spiel* wahrnehmen, dass auf die höhere Mathematik vorbereitet.

Es gibt drei binomische Formeln:

- Die ***Plusformel***: $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$
- Die ***Minusformel***: $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
- Die ***Plusminusformel***: $\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Warum $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist, kann man leicht feststellen, wenn man die Potenz auf ihre Faktoren zerlegt und die Klammern ausmultipliziert:

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ähnlich kann man die anderen Formeln zeigen:

$$(a-b)^2 = (a-b)\,(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Nun die Aufgaben, die mit binomischen Formeln zu tun haben, gehen davon aus, dass man die binomische Formeln schon kann und an der Stelle von a und b andere Terme stehen:

- Plusformel: $(3d+5)^2$ Hier haben wir statt a 3d und statt b 5.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(a & + & b)^2 & = & a^2 & + & 2 & a & b & + & b^2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
(3d & + & 5)^2 & = & (3d)^2 & + & 2 & (3d) & (5) & + & 5^2 \\
 & & & = & 9d^2 & + & & 30d & & + & 25
\end{array}
$$

- Minusformel: $(c - 4x)^2$ Hier haben wir statt a c und statt b 4x.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
(a & - & b)^2 & = & a^2 & - & 2 & a & b & + & b^2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
(c & - & 4x)^2 & = & (c)^2 & - & 2 & (c) & (4x) & + & (4x)^2 \\
 & & & = & c^2 & - & & 8cx & & + & 16x^2
\end{array}
$$

- Plusminusformel: $(5u + 2v)(5u - 2v)$ Hier haben wir statt a 5u und statt b 2v

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(a & + & b)^2 & \cdot & (a & - & b & = & a^2 & - & b^2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
(5u & + & 2v)^2 & \cdot & (5u) & - & 2v & = & (2v)^2 & - & (2v)^2 \\
 & & & & & & & = & 25u^2 & - & 4v^2
\end{array}
$$

Besonders wichtig sind die binomischen Formeln bei den Umkehraufgaben:

$36x^2 - 60ax + 25a^2 = ?$

Hier ist gefragt, den Term als Quadrat eines sogenannten Binoms oder als Produkt von Faktoren (in Klammern) zu schreiben. Man kann sofort beobachten, dass es drei Summanden gibt, drei Teilterme: $36x^2$, $60ax$, $25a^2$. Dadurch kann man sofort die Plusminus Formel ausschließen (da gibt es nur zwei Terme: a^2-b^2). Da es am mittleren Term ein Minus gibt, findet man sofort, dass es um die Minusform geht. Die quadratischen Terme sind $36x^2$ und $25a^2$. Wenn man sich ein bisschen mit den *Quadratzahlen* auskennt, weiß man, dass 36 das Quadrat von 6 und 25 das Quadrat von 5 ist. Also kann $36x^2$ nur das Quadrat von 6x und $25a^2$ von 5a sein. Der mittlere Term sollte dann $2 \cdot 6x \cdot 5a$ sein, was auch tatsächlich stimmt ($2 \cdot 6x \cdot 5a = 60ax$). Daher gilt:

$36x^2 - 60ax + 25a^2 = (6x - 5a)^2$

Noch ein Beispiel:

$121d^2 - 4t^2$

Das kann nur die Plusminusform sein, weil sie die einzige ist, die nur zwei Teilterme hat. Daher:

$121d^2 - 4t^2 = (11d + 2t)(11d - 2t)$

Bemerkung: die ersten sogenannten *Quadratzahlen* sind:

1 (=1^2), 4 (=2^2), 9 (=3^2), 16 (=4^2), 25 (=5^2), 36 (=6^2), 49 (=7^2), 64 (=8^2), 81 (=9^2), 100 (=10^2), 121 (=11^2), 144 (=12^2).

Bruchterme kürzen

Die Kenntnisse dieses Kapitels kann man benutzen, um Bruchterme zu kürzen. Zuerst vereinfacht man die Terme sowohl oben (im Zähler) als auch unten (im Nenner), dann hebt man heraus, was man herausheben kann (oben und unten) und am Ende schaut man nach, ob eine binomische Formel vorhanden ist (wieder oben und unten, im Zähler und im Nenner). Am Ende, wenn man Produkte im Zähler und im Nenner hat, kann man kürzen, wenn es möglich ist: Nehmen wir beispielsweise folgenden Bruchterm:

$$\frac{6x^2 - 5x + 3x^2 + 2x}{18x^3 - 12x^2 + 2x}$$

- ***Erster Schritt: Vereinfachen*** (geht nur im Zähler; $6x^2 - 5x + 3x^2 + 2x$ ist so viel wie $9x^2 - 3x$): $\frac{9x^2-3x}{18x^3-12x^2+2x}$
- ***Zweiter Schritt: Herausheben*** (geht oben und unten): $\frac{3x(3x-1)}{2x(9x^2-16x+1)}$
- ***Dritter Schritt: Nach binomischen Formeln suchen*** Das geht hier nur unten; der Term im Klammer $9x^2 - 16x + 1$ ist nach der Minus binomische Formel gleich $(3x-1)^2$. Daher ergibt sich der Bruch: $\frac{3x(3x-1)}{2x(3x-1)^2}$
- ***Vierter Schritt: Kürzen***, was man kürzen kann: $\frac{3\cancel{x}\,\cancel{(3x-1)}^{1}}{2\cancel{x}(3x-1)^{\cancel{2}\,1}}$

Das Ergebnis ist daher:

$$\frac{6x^2 - 5x + 3x^2 + 2x}{18x^3 - 12x^2 + 2x} = \frac{3}{2(3x-1)}$$

Bruchterme in Brüchen mit gemeinsamen Nenner umwandeln

Im Kapitel über Brüchen haben wir schon gesehen, wie man zwei gleichnamige und zwei ungleichnamige Brüche addiert:

Brüche mit gleichem Nenner:

$\frac{5}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5+2}{4}=\frac{7}{4}$

Brüche mit unterschiedlichen Nennern: Zähler und Nenner des ersten Bruches mit Nenner des zweiten erweitern und entsprechend für den zweiten Bruch!

$$\frac{5}{4}+\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}\left(=\frac{5\cdot 3+2\cdot 4}{3\cdot 4}\right)=\frac{15}{12}+\frac{8}{12}=\frac{15+8}{12}=\frac{23}{12}$$

Dabei ist es nicht wichtig, ob man minus oder plus zwischen den Brüchen hat. Allein der Nenner (ob er der gleiche oder nicht ist) spielt einer Rolle.

Der Vorgang ist genau der gleiche für Bruchterme

Brüche mit gleichem Nenner:

$\frac{5}{a}+\frac{2}{a}=\frac{5+2}{a}=\frac{7}{a}$

Brüche mit unterschiedlichen Nennern:

$$\frac{5}{a}+\frac{2}{b}=\frac{5\cdot b}{a\cdot b}+\frac{2\cdot a}{b\cdot a}\left(=\frac{5\cdot b+2\cdot a}{a\cdot b}\right)=\frac{5b}{ab}+\frac{2a}{ab}=\frac{5b+2a}{ab}$$

Wenn aber die Sache etwas komplizierter wird, dann benutzt man einen Vorgang, der sehr ähnlich zum Verfahren der Primfaktorzerlegung und ihre Anwendung bei Strichrechnungen zwischen mehreren Brüchen ist.

$$\frac{5s}{a^3\ t^6\ x}-\frac{2z}{a^2\ t^7\ x\ s}=?$$

Für jeden Teilterm, jede Variable, im Nenner, wählt man die höchst Hochzahl die vorkommt. Diese wird dann im gemeinsamen Nenner benutzt. Für a ist sie 3 (a^3), für t 7 (t^7), für x ist die Hochzahl 1(x^1 also x) und für s auch 1 (also s). Der gemeinsame Nenner wird daher a^3t^7xs sein. Den Zähler multipliziert man dann, mit den aus dem Nenner fehlenden Teilen.

$$\frac{5s\cdot(t\ s)}{a^3\ t^7\ x\ s}-\frac{2z\cdot(a\ x)}{a^3\ t^7\ x\ s}=\frac{5s^2\ t-2z\ a\ x}{a^3\ t^7\ x\ s}$$

Wieso habe wir den Zähler im ersten Bruch (5s) mit ts multipliziert? Wir haben erst den gemeinsamen Nenner (a^3t^7xs) durch den Nenner des Bruches (a^3t^6x) dividiert:

$$\frac{a^3t^7xs}{a^3t^6x}=ts$$

Mit diesem Term (diesem Ergebnis) muss man den Zähler multiplizieren. Den gleichen Prozess haben wir beim zweiten Bruch wiederholt. Dieser Prozess allerdings (gemeinsamen Nenner durch den jeweiligen Nenner dividieren) haben wir auch bei den Strichrechnungen zwischen mehreren Brüchen benutzt, wo wir auch die Primfaktorzerlegung angewandt haben.

Was im Zähler steht, ist nicht so wichtig. Im Nenner allerdings können die Faktoren größere Terme in Klammern sein:

$$\frac{5s}{a^3w^2(t-1)(t+1)^5(t-3)}-\frac{2z}{a^2w^5p(t-1)^2(t+1)^2(q^2+7+r)^2}=?$$

Finden wir erst den gemeinsamen Nenner. Es gibt im Nenner des ersten Bruches die Termen a, w, (t-1), (t+1) und (t-3). Im zweiten Bruch findet man im Nenner noch folgende Terme dazu: p, (q^2+7+r). Wir sollten für den gemeinsamen Nenner die höchste Hochzahl des jeweiligen Terms benutzen. Beispielsweise ist diese für den Term a die Hochzahl 3, für den Term w die Hochzahl 5, für den Term (t+1) die Hochzahl 5 usw. Der gemeinsame Nenner wird dann $a^3w^5p(t-1)^2(t+1)^5(t-3)(q^2+7+r)^2$ sein.

Der Zähler des ersten Bruches wird durch den Quotient des gemeinsamen Nenners durch den Nenner des ersten Bruches erweitert:

$$\frac{a^3w^5p(t-1)^2(t+1)^5(t-3)(q^2+7+r)^2}{a^3w^2(t-1)(t+1)^5(t-3)}=w^3p(t-1)(q^2+7+r)^2$$

Entsprechend für den zweiten Bruch:

$$\frac{a^3w^5p(t-1)^2(t+1)^5(t-3)(q^2+7+r)^2}{a^2w^5p(t-1)^2(t+1)^2(q^2+7+r)^2}=a(t+1)^3(t-3)$$

Nun kann man das Ganze in einem Bruch schreiben:

$$\frac{5s}{a^3w^2(t-1)(t+1)^5(t-3)}-\frac{2z}{a^2w^5p(t-1)^2(t+1)^2(q^2+7+r)^2}=$$

$$\frac{5s\cdot w^3p(t-1)(q^2+7+r)^2}{a^3w^5p(t-1)^2(t+1)^5(t-3)(q^2+7+r)^2}-\frac{2z\cdot a(t+1)^3(t-3)}{a^3w^5p(t-1)^2(t+1)^5(t-3)(q^2+7+r)^2}=$$

$$\frac{5s\cdot w^3p(t-1)(q^2+7+r)^2-2z\cdot a(t+1)^3(t-3)}{a^3w^5p(t-1)^2(t+1)^5(t-3)(q^2+7+r)^2}$$

Bruchtermegleichungen

Wie das Wort besagt, sind Bruchtermegleichungen Gleichungen, die Bruchterme beinhalten. Wir werden hier uns mit Bruchtermegleichungen, die nur eine unbekannte Variable beinhalten. Ziel ist durch Umformungen den Wert der Variable zu finden, der die Gleichung erfüllt.

$$\frac{4x^2+5x-2x^2-4x}{x^2+x}-\frac{2x}{x-1}=\frac{2x+15}{x^2-1}$$

Die Schritte, um die Lösung zu finden, sind am Anfang wie die Schritten bei Abschnitt „Bruchterme kürzen“.

- ***Erster Schritt: Vereinfachen*** (geht nur im Zähler des ersten Bruches; $4x^2+5x-2x^2-4x$ ist so viel wie $2x^2-x$): $\frac{2x^2-x}{x^2+x}-\frac{2x}{x-1}=\frac{2x+15}{x^2-1}$
- ***Zweiter Schritt: Herausheben*** (geht nur im Zähler und im Nenner des ersten Bruches;): $\frac{x(2x-1)}{x(x+1)}-\frac{2x}{x-1}=\frac{2x+15}{x^2-1}$
- ***Dritter Schritt: Nach binomischen Formeln suchen*** (das geht hier nur im Nenner des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung: $x^2-1=(x+1)(x-1)$): $\frac{x(2x-1)}{x(x+1)}-\frac{2x}{x-1}=\frac{2x+15}{(x-1)(x+1)}$
- ***Vierter Schritt: Kürzen***, was man kürzen kann (das geht in diesem Beispiel beim ersten Bruch: $\frac{x(2x-1)}{x(x+1)}=\frac{2x-1}{x+1}$). Damit ergibt sich:

$$\frac{2x-1}{x+1}-\frac{2x}{x-1}=\frac{2x+15}{(x-1)(x+1)}$$

- ***Fünfter Schritt*** Hat man diese Schritte überprüft, versucht man die ***Bruchterme auf den gleichen Nenner*** zu ***bringen***, wie am vorherigen Teilkapitel gezeigt. Hier gibt es im Nenner zwei verschiedenen Terme, $(x+1)$ und $(x-1)$. Der Bruch auf der rechten Seite hat schon beide, man braucht (und darf) ihn NICHT ***erweitern***. Am ersten Bruch fehlt noch der Term $(x-1)$ und mit diesem muss er erweitert werden. Am zweiten Bruch fehlt der Term $(x+1)$ und mit diesem muss er erweitert werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\overbrace{2x-1}^{\cdot\,(x-1)}}{x+1} &- \frac{\overbrace{2x}^{\cdot\,(x+1)}}{x-1} &&= \frac{2x+15}{(x-1)(x+1)}\\
\frac{(2x-1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} &- \frac{2x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)} &&= \frac{2x+15}{(x-1)(x+1)}\\
\frac{2x^2-2x-x+1}{(x+1)\cdot(x-1)} &- \frac{2x^2+2x}{(x-1)\cdot(x+1)} &&= \frac{2x+15}{(x-1)(x+1)}
\end{aligned}$$

- ***Sechster Schritt*** Jetzt haben wir überall den gleichen Nenner. Wenn wir beide Seiten der Gleichung (also alle Brüche) mit diesem Nenner multiplizieren, dann wird er überal gekürzt.

$$\frac{2x^2-3x+1}{(x+1)\cdot(x-1)}-\frac{2x^2+2x}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{2x+15}{(x-1)(x+1)} \qquad |\cdot(x-1)(x+1)$$

$$\left[\frac{2x^2-3x+1}{(x+1)\cdot(x-1)}-\frac{2x^2+2x}{(x-1)\cdot(x+1)}\right]\cdot(x-1)(x+1)=\frac{2x+15}{(x-1)(x+1)}\cdot(x-1)(x+1)$$

$$\frac{(2x^2-3x+1)\cdot\cancel{(x-1)(x+1)}}{\cancel{(x-1)(x+1)}}-\frac{(2x^2+2x)\cdot\cancel{(x-1)(x+1)}}{\cancel{(x-1)(x+1)}}=\frac{(2x+15)\cdot\cancel{(x-1)(x+1)}}{\cancel{(x-1)(x+1)}}$$

- ***Siebter Schritt*** Das vorläufige Ergebnis ist daher die folgende Gleichung, die wir dann mit einfachen Umformungen lösen können:

$$\begin{aligned}
(2x^2-3x+1)-(2x^2+2x) &= 2x+15 && |(\text{Klammer auflösen})\\
2x^2-3x+1-2x^2-2x &= 2x+15 && |(\text{Vereinfachen und Variablen trennen})\\
-5x+1 &= 2x+15 && |-1-2x)\\
-7x &= 14 && |:(-7)\\
x &= -2
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge, also die Zahlen, die die Bruchtermegleichung am Anfang erfüllen, ist hier nur eine Zahl, die Zahl 2. Man schreibt:

$\mathbb{L}=\{2\}$

Wie man sieht, ist die Lösung einer Bruchtermegleichung kompliziert. Das Üben und die Erfahrung machen die Sache selbstverständlich einfacher. Es gibt aber doch noch einen Schritt, um so eine Gleichung vollständig zu lösen: Die Definitionsmenge muss vorerst herausgefunden werden. Mit diesem Schritt beschäftigen wir uns im nächsten Teilkapitel.

Definitionsmenge

Nehmen wir folgendes Beispiel:

$$\frac{2x^2-x}{x^2+x}-\frac{2x}{x-1}-\frac{2(x+4)}{x^2-1}$$

In den Nennern gibt es verschiedene Terme:

$x^2+x \quad x-1 \quad x^2-1$

Alle diese Terme kann man als Produkte von verschiedenen Faktoren schreiben:

$x^2+x=x(x+1) \quad x-1 \quad x^2-1=(x-1)(x+1)$

Alle diese Faktoren stehen im Nenner. Es gibt eine Regel in Mathematik, die besagt:

Die Division durch 0 ist nicht definierbar.

Warum das so ist, kann man in der höheren Mathematik zeigen. Der Nenner darf also nicht null sein. In welchen Fällen kann der erste, der zweite oder der dritte Nenner null sein? Dafür setzen wir diese Nenner gleich null!

$x(x+1)=0 \quad x-1=0 \quad (x-1)(x+1)=0$

Wann kann jetzt der erste Ausdruck null sein? Wenn zumindest einer der Faktoren null ist!

$x(x+1)=0 \quad \textbf{wenn} \quad x=0 \quad \textbf{oder} \quad (x+1)=0 \; also \; x=-1 \quad \textbf{ist.}$

In der gleichen Weise für die anderen zwei Nenner:

$x-1=0 \quad \textbf{wenn} \quad x=1 \quad \textbf{ist.}$

$(x-1)(x+1)=0 \quad \textbf{wenn} \quad x=1 \quad \textbf{oder} \quad x=-1 \quad \textbf{ist.}$

Der Ausdruck $\frac{2x^2-x}{x^2+x}-\frac{2x}{x-1}-\frac{2(x+4)}{x^2-1}$ kann nur dann definiert werden, wenn x nicht 0, 1 oder -1 ist. x darf daher alle andere Zahlen sein **außer** -1, 0 und 1. All die Zahlen, die x sein **darf**, nennt man Definitionsmenge. Man sagt, dass die Definitionsmenge die Menge der reellen Zahlen außer -1,0 und 1 ist und schreibt:

$x \neq \{-1,\ 0,\ 1\}$ oder $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 0,\ 1\}$

Die Definitionsmenge anzugeben ist bei jeder Aufgabe sehr wichtig. Nehmen wir das Beispiel am Anfang und setzen wir es gleich null:

$$\frac{2x^2-x}{x^2+x}-\frac{2x}{x-1}-\frac{2(x+4)}{x^2-1}=0$$

Die Lösungsschritte haben wir im vorherigen Absatz gelernt. Die Definitionsmenge ist (wie gerade eben gezeigt) $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 0,\ 1\}$. Wer die Lösungsschritte macht, kommt zum Ergebnis $x=-1$. Dieser Wert gehört aber nicht zur Definitionsmenge. x darf nicht -1 sein, weil in diesem Fall eine Division durch null vorkommt. Man sagt in diesem Fall, dass die Gleichung keine Lösung hat (und sie hat tatsächlich keine Lösung: -1 kann keine Lösung sein!) oder dass die Lösungsmenge die sogenannte leere Menge ist: $\mathbb{L}=\{\}$ oder $\mathbb{L}=\emptyset$.

Bei manchen Aufgaben kann es sein, dass die allgemeine Definitionsmenge angegeben wird (z.B. die natürliche Zahlen). Wenn man das Beispiel mit den Tischen im Kapitel über lineare Gleichungssysteme betrachtet, kann man feststellen, dass die Antwort nur eine natürliche Zahl sein kann und dass etwas in der Angabe nicht stimmt, wenn das nicht der Fall ist.

Obwohl es nicht Thema diese Buches ist, erwähnen wir hier, dass die Definitionsmenge auch durch Ungleichungen angegeben werden kann. Das ist beispielsweise der Fall, wenn man einen Term in einer quadratischen Wurzel hat. Nehmen wir das folgende Beispiel:

$\sqrt{x-2}$

Wir behaupten hier, dass dieser Ausdruck nur dann definiert werden kann[1], wenn der Term unter der Wurzel positiv oder null (anders gesagt: nicht negativ) ist. Das liegt daran, dass die Gegenrechnung der Wurzel das Quadrat ist und das Quadrat von jeder beliebigen Zahl immer positiv ist (oder null, wenn die Zahl null ist). Bei positiven Zahlen ist diese Tatsache klar: + mal + wird + sein. Aber auch bei den negativen Zahlen ist es genauso: − mal − ist auch immer plus! Es gibt also keine Zahl, deren Quadrat negativ ist. In unserem Beispiel muss daher gelten:

$x-2\geq 0 \qquad \textbf{also} \qquad x\geq 2$

Man sagt „x muss größer oder gleich null sein“.

1. genauer gesagt in der Menge der reellen Zahlen. Warum aber das jetzt gesagt werden muss, ist überhaupt nicht Thema dieses Buches

Umformen

Die Gegenrechnungen

Wenn Vassili Saskia drei Äpfel gibt, dann hat er danach noch fünf Äpfel. Wie viele Äpfel hatte er vorher?

Wie kann man diese Aufgabe in der mathematischen Sprache schreiben? Das Gefragte (*wie viele Äpfel*) kann man mit irgendeinem Symbol als Stellvertreter für die noch unbekannte Zahl schreiben. Zumeist wird als Symbol oder Stellvertreter ein Buchstabe verwendet.
Man legt zum Beispiel fest: Sei x die Anzahl der Äpfel vor der Aktion.
Es ist immer wichtig, präzise festzulegen, was genau mit dem Symbol gemeint ist, sonst ist es nachher schwierig, das Ergebnis der Rechnung zu verstehen.

Wenn Vassili drei Äpfel weggibt, dann hat er weniger Äpfel als zuvor, es geht um eine Subtraktion. Von den x Äpfeln am Anfang sind drei Äpfel zu subtrahieren. Dass dann noch fünf Äpfel bleiben, bedeutet:

x−3=5

Man kann durch Probe feststellen, dass Vassili anfangs acht Äpfel hatte. Es gibt aber in der Mathematik einen geschickteren Weg, die Aufgabe zu lösen. Man benutzt die sogenannte ***Gegenrechnung***. Bei allen Gleichungen gibt es zwei Teile, ein Teil links vom „=“ und ein Teil rechts vom „=“. Bringt man einen Term von einer Seite zur anderen, dann muss man die Gegenrechnung benutzen.

Die Gegenrechnung der Subtraktion ist die Addition und umgekehrt:

Wenn x−3=5 ist, dann kann man die 3 auf die andere Seite bringen und statt minus die Gegenrechnung (plus) benutzen:

x=5+3 also x=8

Bei der Aufgabe c+4452 = 341 bringt man 4452 auf die andere Seite und benutzt die Gegenrechnung von minus. Die Lösung ist daher:

c= 341−4452 also c = −4111

Die Gegenrechnung der Multiplikation ist die Division und umgekehrt.

3f=114

Zwischen 3 und f steht nichts. In Mathematik besteht die Konvention, wenn zwischen zwei Ausdrucken (zum Beispiel einer Zahl und einem Symbol, einer Klammer und einer Zahl und so weiter) nichts steht, dann ist Multiplikation gemeint (einzige Ausnahme: die gemischten Zahlen). Man soll 3 auf die andere Seite bringen und die Gegenrechnung von mal (also durch) benutzen:

f=114:3 und daher f = 38. Man kann auch einen Bruch statt einer Division benutzen:

$f = \frac{114}{3} = 38$

Entsprechend ist die Gegenrechnung der Division die Multiplikation:

$\frac{k}{5} = 11$ also k:5 = 11 und daher k = 11 · 5

k = 55

Was ist aber die Gegenrechnung vom Quadrat?

Die Gegenrechnung von Quadrat ist die sogenannte „Wurzel“:

$z^2 = 81$ also z = $\sqrt{81}$ und daher z=9

9 ist die Zahl, deren Quadrat 81 ist, daher ist die Wurzel von 81 gleich 9.
Doch Obacht!
Auch -9 ist eine Zahl, deren Quadrat 81 ist.
Die Gegenrechnung ist folglich nicht eindeutig.
Es ist daher notwendig, beide Lösungen zu betrachten und zu beurteilen, was sinnvoll ist.

Selbstverständlich ist die Gegenrechnung der Wurzel das Quadrat.

$\sqrt{m}$ = 13 also m = 13^2 und daher m=169

Kombinationen

Wenn man mehrere ***Summanden*** und Rechenarten und eine unbekannte Variable hat, dann soll man alle Teilterme (Summanden) mit der Variable auf eine Seite bringen.
Im Folgenden werden alle Terme mit der Variable nach links gebracht. Die restlichen Terme werden auf die andere Seite gebracht. Schauen wir ein Beispiel an:

5x − 7 = 3x + 11

Wir wählen die linke Seite als die Seite, in der die Teilterme (Summanden) mit der Variable (x) sein werden. Wir haben zwei solchen Teilterme, 5x und 3x. 5x ist schon auf der linken Seite, wir müssen also noch 3x auf die andere Seite bringen. Vor 3x steht das Symbol „=“. Ist 3x jetzt positiv oder negativ? Wenn man b=4 schreibt, ist +4 oder −4 gemeint? Die Antwort ist +4. Daher auch hier, wenn nach dem Symbol „=“ kein plus oder minus steht, dann ist ein plus gemeint. Wenn man 5x − 7 = 3x + 11 schreibt, ist es das Gleiche wie + 5x − 7 = + 3x + 11. Wenn man den Term 3x auf die andere Seite bringt, muss man die Gegenrechnung benutzen, also Subtraktion (minus).

5x − 7 − 3x = 11

7 hat kein x neben sich, sie muss auch auf die rechte Seite gebracht werden, wieder mit der Gegenrechnung, also diesmal mit Addition (plus):

5x − 3x = 11 + 7

Das Ganze kann man in einem Schritt machen:

5x − 7 = 3x + 11

5x − 3x = 11 +7

2x = 18
(Hier haben wir einfach die Rechnungen gemacht: 5x-3x ist 2x und 11+7 ist 18).

Es bleibt noch, 2 auf die andere Seite zu bringen. Zwischen 2 und x steht nichts, daher ist eine Multiplikation gemeint. Die Gegenrechnung ist eine Division:

x = $\frac{18}{2}$ und daher x = 9

Man kann das ganze auch so erklären:

5x − 7 = 3x + 11

Man will, dass auf der rechten Seite 3x verschwindet. Das kann passieren, indem man 3x subtrahiert. Ein Gleichung aber ist wie eine Waage. Das Gleichungssymbol (=) teilt die Gleichung in zwei Teilen, links und rechts. Was auf der einen Seite passiert, muss auch auf der anderen stattfinden, damit das Gleichgewicht erhalten bleibt. Man benutzt folgende Schreibweise:

5x − 7 = 3x + 11 | −3x (Man schreibt am Rand, was auf beiden Seiten zu tun ist)

5x − 7 − 3x = 3x + 11 − 3x

2x − 7 = 11

Man will aber auf der linken Seite nur Teilterme (Summanden) mit x haben, deshalb muss die -7 dort verschwinden. Das geht, indem man 7 auf beiden Seiten addiert.

2x − 7 = 11 | +7

2x − 7 + 7 = 11 + 7

2x = 18

Jetzt bleibt nur die Division:

2x = 18 | :2

x = 18 : 2   (Man kann auch $x = \frac{18}{2}$ schreiben)

x = 9

Sofern mehrere Teilrechnungen oder Zwischenschritte im Kopf durchgeführt werden, wird zusammengefasst und kürzer notiert:

5x − 7 = 3x + 11 | −3x+7

2x = 18 | :2

x = $\frac{18}{2}$

x = 9

Wenn die Variable innerhalb einer Klammer steht, ist der erste Schritt, die Klammer aufzulösen, sonst geht man wie vorher vor:

4y + 3 (7 − 5y) = 11 − 6y

4y + 21 − 15y = 11 − 6y | −21 +6y

4y − 15y + 6y = 11 − 21

− 5y = −10 | : (−5)

y=2

Das Gleichheitszeichen in Umformungen

Die Gegenrechnungen und den ganzen Vorgang beim Umformen nennt man auch Äquivalenzumformungen.

Im Kapitel über die Grundrechenarten haben wir gelernt, dass das Gleichheitszeichen auch in Kettengleichungen benutzt werden kann. Das ist in der Regel nicht der Fall bei Äquivalenzumformungen. Wie wir gesehen haben, wird jeder Schritt nacheinander gemacht und die Gleichung (mit so vielen Gleichheitszeichen wie am Anfang, also hier mit einem Gleichheitszeichen) wieder darunter geschrieben. Jeder Schritt wird an den Rand geschrieben und in jedem Teil der Gleichung (hier rechts und links des Gleichheitszeichens) durchgeführt.

4y + 21 − 15y = 11 − 6y | −21 +6y

4y + 21 − 15y + −21 +6y = 11 − 6y −21 +6y

4y − 15y + 6y = 11 − 21

Es ist falsch zu schreiben:

4y + 21 − 15y = 11 − 6y = 4y + 21 − 15y −21 +6y = 11 − 6y −21 +6y

Die beiden Teile sind doch nicht gleich: 11 − 6y = 4y + 21 − 15y −21 +6y.
Wenn man die Gleichungen nebeneinander schreiben will, gibt es ein anderes Zeichen dafür, den doppelten Folgepfeil:

4y + 21 − 15y = 11 − 6y ⇔ 4y − 15y + 6y = 11 − 21

Diese Schreibweise wird allerdings nur in fortgeschrittener Mathematik und nur unter bestimmten Bedingungen benutzt.

Darstellung von Zahlen

Verschiedene Darstellungen einer Zahl

Die gleiche Zahl kann man in verschiedenen Weisen schreiben. Man spricht von unterschiedlichen Darstellungen der Zahl:

$$0,3^2 = 0{,}09 = \frac{9}{100} = \frac{21}{300} = 9\%$$

$$\sqrt{64} = 800\% = 8 = \frac{80}{10} = \frac{40}{5}$$

Runden

Allgemein

Das Quadrat von 7 ist 49 und daher ist die Wurzel von 49 gleich 7 (sie sind Gegenrechnungen). Was ist aber mit der Wurzel von 7? Wenn man die Rechnung mit einem einfacheren Taschenrechner macht, kommt das folgende Ergebnis vor:

2,6457513110645905905

Das bedeutet, dass das Quadrat von 2,6457513110645905905 (die Gegenrechnung) 7 sein sollte. Wenn man aber mit dem Taschenrechner die Rechnung macht:

2,6457513110645905905² = 2,6457513110645905905 · 2,6457513110645905905

kommt 6,9999999999999999999 als Ergebnis heraus, was zwar fast 7 ist, aber nicht genau 7!

Man spricht in diesem Fall vom **Runden**. Der Taschenrechner gibt beim Wurzelziehen ein Ergebnis an, das nicht genau ist. Das genaue Ergebnis hat unendlich viele Nachkommastellen. Es ist unmöglich die Wurzel von 7 mit einer Kommazahl ganz genau zu bestimmen. Die einzige Weise die Wurzel von 7 genau anzugeben, ist $\sqrt{7}$ zu schreiben!

Wie genau das Ergebnis mit Kommastellen ist, hängt vom Taschenrechner ab. Jeder Taschenrechner kann eine bestimmte Anzahl von Nachkommastellen berechnen. Die Wurzel aus 7 mit einer Kommazahl ***genau*** anzugeben ist aber ***nicht möglich***.

Der Taschenrechner gibt ein Ergebnis an, das so nah wie möglich zum tatsächlichen Wert von $\sqrt{7}$ ist und so viele Nachkommastellen hat, wie der Taschenrechner berechnen kann. In der Anzeige des Taschenrechners stehen sogar oft weniger Stellen (wieder gerundet) als die Stellen, die der Taschenrechner berechnen kann[1].

Das Runden ist in solchen Fällen unvermeidbar und oft notwendig und sinnvoll. Stellen wir uns vor, dass ein Produkt 6€ kostet. In einer Sonderaktion wird allerdings ein Rabatt 17% gewährt. In diesem Fall ist der Preis nach dem Rabatt:

6 · 0,83 = 4,938€

Hier muss man wieder Runden. Die Münze mit dem kleinsten Wert ist 1¢ (0,01€). So was wie 0,008€ kann man nicht in Bar bezahlen. Man kann auch nicht genau 4.938€ bezahlen. Man muss auf zwei Nachkommastellen runden:

4,938€ ≈ 4,94€

Warum haben wir hier 4,94 und nicht 4,93 geschrieben?

4,938 liegt näher bei 4,94 als bei 4,93.

Wenn man rundet, rundet man auf (also eins nach oben), wenn die nächste Ziffer 5 oder mehr ist. Man rundet ab (also die Ziffer bleibt die gleiche), wenn die nächste Ziffer weniger als 5 ist:

5,6873729 ≈ 5,69   5,6873729 ≈ 5,687373

5,6873729 ≈ 5,68737   5,6873729 ≈ 5,687   8,785 ≈ 8,79

Man muss allerdings sagen: es gibt auch andere Regeln, wie man rundet, wenn die nächste Stelle eine einzige 5 ist. Dieses Thema wird später in diesem Kapitel erklärt.

Wie viele Nachkommastellen muss man schreiben? Das ist vom Problem abhängig.

Die Ziffern ohne die Nullen zu Beginn oder am Ende der Zahl nennt man gültige Ziffern.

Es kann sein, dass bei einer Aufgabe festgelegt wird, auf wie viele Stellen gerundet wird:

Aufgabe: Runden auf drei (gültige) Stellen (oder in diesem Beispiel auf zwei Nachkommastellen)

5,6873729 ≈ 5,69

Aufgabe: Runden auf sieben Stellen (oder in diesem Beispiel auf sechs Nachkommastellen)

5,6873729 ≈ 5,687373

Aufgabe: Runden auf sechs Stellen (oder in diesem Beispiel auf fünf Nachkommastellen)

5,6873729 ≈ 5,68737

Aufgabe: Runden auf vier Stellen (oder in diesem Beispiel auf drei Nachkommastellen)

5,6873729 ≈ 5,687

Aufgabe: Runden auf zwei (gültige) Stellen[2] (oder in diesem Beispiel auf vier Nachkommastellen)

0,002356 ≈ 0,0024

Wenn es keine Angabe über die gültigen Ziffern gibt, schreibt man nicht mehr als 5 oder 6 gültigen Ziffern insgesamt (also samt Ziffer vor dem Komma), beispielsweise:

895,76038≈895,760   0,007854309826≈0,00785   9874086973≈9874100000

In manchen Fällen sollte es von der Aufgabe klar sein, wie vielen gültige Stellen zu erwarten sind. Ein solchen Beispiel haben wir schon mit dem € gesehen.

Ein anderes Beispiel ist, wenn man ein Messband benutzt, um einen Abstand zu messen. Ein Messband kann nur bis mm messen und nichts kleineres. Wenn der gemessene Abstand 145cm ist und ihn in 7 teilt, kann das Ergebnis nur eine Nachkommastelle haben (mm).

Wenn man die Zeit mit einem elektronischen Stoppuhr misst, zeigt diese oft Nachkkommastellen nach der Sekunde, z.B. 6,463s. Das ist wieder völlig daneben, da die Reaktionszeit des Menschen mehr als 0,1s ist. Man kann also mit einer Stoppuhr, die mit der Hand betrieben wird, nicht genauer als eine Nachkommastelle nach der Sekunde messen. Die restlichen Nachkommastellen führen zum falschen Eindruck, dass man doch so genau (mit drei Nachkommastellen) messen kann.

Hier kann man auch erklären: Eine Zahl ändert sich nicht, wenn man eine oder mehrere Nullen vor der ersten Ziffer oder nach der letzten Nachkommastelle hinzufügt:

7,34 = 007,34 = 7,340 = 7,34000 = 000007,34000000

8888 = 8888,0000 = 0008888

Runden mit 9 als nächste Stelle

Runden mit 5 als nächste Stelle

Der Fall der 5 ist nicht so ganz einfach, folgen noch weitere, von 0 verschiedene Ziffern, wird aufgerundet.

Kommen wir nun zum problematischen Fall, dem Fall 5 ohne weitere Ziffern danach:

Bei der sogenannten kaufmännischen Rundung wird auch bei 5 aufgerundet, was insbesondere bei Verkaufsgeschäften mit kleinen Beträgen dem Händler zugute kommt, wenn dieser viele ähnliche Geschäfte macht, daher vermutlich auch der Name.

Um das zu verstehen, stelle man sich viele zufällige Zahlen vor, die gerundet werden sollen. Einmal wird die Summe aller Zahlen vor der Rundung berechnet, nennen wir diese Summe V (vor der Rundung). Anschließend wird die Summe aller Zahlen nach der Rundung berechnet, nennen wir diese Summe N (nach der Rundung).

Man wird feststellen, dass N größer oder gleich V sein wird, was daran liegt, dass bei dieser Methode bei 5 immer aufgerundet wird.

Um das zu vermeiden, gibt es ein besseres Rundungsverfahren, bei dem es zwei Möglichkeiten gibt. Im Falle von 5 wird bei der einen Möglichkeit immer so gerundet, dass die letzte Ziffer gerade ist. Bei der anderen Möglichkeit wird bei 5 immer so gerundet, dass die letzte Ziffer ungerade ist. Man entscheidet sich bei einer Aufgabe der Rundung vieler Zahlen anfangs einmalig für eine der beiden Möglichkeiten und bleibt daraufhin dabei.

Bildet man wieder die Summenprobe, wird man feststellen, dass es Zufall ist, ob V oder N größer ist oder beide sogar gleich sind.

Man sagt: Das Verfahren ergibt keine systematischen Abweichungen.

Beispiel zur Rundung hin zur geraden Ziffer:

8,775 ergibt auf drei Stellen gerundet 8,78

8,765 ergibt auf drei Stellen gerundet 8,76

8,755 ergibt auf drei Stellen gerundet 8,76

0,125 ergibt auf zwei Stellen gerundet 0,12

0,135 ergibt auf zwei Stellen gerundet 0,14

0,145 ergibt auf zwei Stellen gerundet 0,14

Entsprechend zur Rundung hin zu ungeraden Ziffern:

8,775 ergibt auf drei Stellen gerundet 8,77

8,765 ergibt auf drei Stellen gerundet 8,77

8,755 ergibt auf drei Stellen gerundet 8,75

0,125 ergibt auf zwei Stellen gerundet 0,13

0,135 ergibt auf zwei Stellen gerundet 0,13

0,145 ergibt auf zwei Stellen gerundet 0,15

Welches Rundungsverfahren anzuwenden ist, hängt davon ab, in welchem Zusammenhang gerechnet wird (kaufmännisch, wissenschaftlich, statistisch). Weitere Details und weitere Möglichkeiten zu runden: Rundung

Zahlenmengen

Einführung

Einfach gesagt ist eine ***Menge*** eine Sammlung von mehreren Sachen. Viele Bücher zusammen sind eine Menge von Bücher, viele Blumen zusammen sind eine Menge von Blumen, viele Ziegen und Schafen und Kühe zusammen sind eine Menge von Tieren. Man kann sogar von einer Menge sprechen auch, wenn man eine Sache hat (z.B. ein Buch) oder keine Sache (die leere Menge). Ein Bereich der Mathematik, die Mengentheorie, beschäftigt sich mit den Mengen. In dieser Theorie spricht man auch von ***Zahlenmengen***.

Natürliche Zahlen

Die einfachste *Zahlenmenge* ist die Menge der ***natürlichen Zahlen*** $\mathbb{N}$:

1, 2, 3, 4, 5 .....

Die Menge der natürlichen Zahlen schreibt man mit $\mathbb{N}$. Null kann auch zur Menge der natürlichen Zahlen gehören. Wie man die Menge mit oder ohne Null schreibt, unterscheidet sich zwischen Sprachen und Kulturen.

Ganze Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen kann man mit den negativen Zahlen erweitern. Dann entsteht die *Menge* der ***ganzen Zahlen*** $\mathbb{Z}$:

.... −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 ....

Alle *natürliche* Zahlen sind auch *ganze* Zahlen. Andererseits sind **NUR** die *positive* ganze Zahlen (oder die *nicht negativen*) auch *natürliche* Zahlen!

Rationale Zahlen

Wenn man natürliche oder ganze Zahlen dividiert, bekommt man oft Zahlen mit Nachkommastellen:

$\mathbf{11 : 7 = 1{,}571428....}$

Diese Zahl ist keine ganze (und daher auch keine natürliche) Zahl. Sie ist eine sogenannte rationale Zahl. Die Menge alle Zahlen, die man als Brüche von ganzen Zahlen schreiben kann, ist die Menge der rationalen Zahlen. Man soll aufpassen. 11 durch 7 (11:7) ist eine Division zwischen zwei ganzen Zahlen. Das Ergebnis dieser Division (der *Quotient*). Der *Bruch* $\frac{11}{7}$ hingegen ist **eine** Zahl (eine rationale Zahl), die gleich so viel ist, wie das Ergebnis der Division 11:7.

Wenn man zwei ganze Zahlen dividiert, kann man wieder eine ganze Zahle bekommen (wie z.B. 26:2=13) oder eine Zahl mit Nachkommastellen. Wenn das Ergebnis Nachkommastellen hat, dann ist sie keine ganze Zahl mehr

Alle *ganze* Zahlen (und daher auch alle natürliche) sind auch *rationale* Zahlen (z.B. $7 = \frac{14}{2}$). **NUR** die *rationalen* Zahlen **OHNE Nachkommastellen** sind auch *ganze* Zahlen.

Für die Zahlen mit Nachkommastellen gibt es zwei Möglichkeiten: sie können endlich viele Nachkommastellen haben (z.B. $\mathbf{6{,}345} = \frac{1269}{200}$) oder unendlich viele Nachkommastellen (wie $\frac{11}{7}$). Im letzten Fall gibt es in den Nachkommastellen eine Wiederholung von der gleichen Zahlenfolge:

$$\frac{11}{7} = 1,\mathbf{571428}\ \ 571428\ \ 571428\ldots.$$

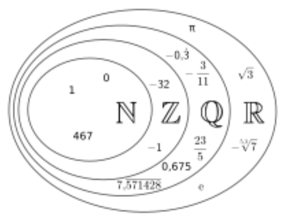
Diese wiederholte Zahlenfolge (hier die Zahlenfolge 571428) nennt man ***Periode***.

Die erweiterte Zahlenmenge (ganze Zahle und dazu Zahlen mit endlich viele oder unendlich viele aber periodischen Nachkommastellen) nennt man *Menge* der ***rationalen Zahlen*** ℕ.

Reelle Zahlen

Es gibt aber auch Zahlen, die zwar *unendlich viele Nachkommastellen* haben aber **keine** *Periode*. $\sqrt{2}$ z.B. ist eine solche Zahl. Es gibt einen Beweis dafür, der zeigt, dass man $\sqrt{2}$ **NICHT** als Bruch von zwei ganzen Zahlen ausdrücken kann. $\sqrt{2}$ ist eine sogenannte ***irrationale*** Zahl. Die irrationale Zahlen (wie $\sqrt{2}$) zusammen mit den rationalen (wie $\frac{11}{7}$ oder −6) bilden zusammen die Menge der reellen Zahlen ℝ.

ALLE *rationale* Zahlen sind auch *reelle* Zahlen. **NICHT** alle *reelle* Zahlen sind auch *rationale* Zahlen (z.B. $\sqrt{2}$ ist eine Reelle aber keine Rationale Zahl).



Zahlenmengen

Man kann also sagen: 5 ist eine natürliche aber auch eine ganze, eine rationale und eine reelle Zahl. $-\frac{14}{7}$ ist eine rationale, eine reelle aber auch eine ganze Zahl (warum? Weil −14:7 = −2 ist und −2 eine ganze Zahl ist). Sie ist aber keine natürliche Zahl (weil −2 eine negative Zahl ist). $\sqrt{7}$ ist nur eine reelle Zahl und keine rationale, ganze oder natürliche Zahl. $\sqrt{81}$ ist eine reelle, aber auch eine rationale, eine ganze und eine natürliche Zahl (weil $\sqrt{81} = 9$ ist).

Eine Darstellung der Beziehungen zwischen den Mengen kann man im Bild sehen. Die reelle Zahlen beinhalten alle anderen Mengen, sie sind sozusagen die „größte" Menge, die natürlichen Zahlen hingegen sind in allen anderen Mengen drinnen, beinhalten aber selber keine andere Menge (zumindest nicht in diesem Bild, also, wenn wir über diese 4 Mengen sprechen). Die natürliche Zahlen sind sozusagen die „kleinste" Menge von diesen 4 Mengen.

Einheiten

Definitionen

Unsere Umgebung, die Natur, wir selber haben viele Eigenschaften: ein Wald kann schön sein, ein Berg kann groß oder klein sein, das Meer blau usw. Manche Eigenschaften, die man messen kann, sind für die Physik wichtig. Solche Eigenschaften sind z.B. die Länge (oder der Abstand, der Weg usw.), die Masse (grob gesagt: das Gewicht), die Zeit, die Geschwindigkeit, die Kraft, die elektrische Ladung usw Alle diese Eigenschaften, die für die Physik wichtig sind und die man messen kann, nennt man ***physikalische Größen***

Jede Größe kann man mit verschiedenen ***Einheiten*** messen. Für den **Abstand** z.B. benutzt man *Meter* (oder auch *Zolle*, *Kilometer*, *Millimeter* usw.), für die **Zeit** *Sekunde* (oder *Stunden*, *Tagen*, *Minuten* usw.) für die **Masse** *Kilogramm* (oder *Gramm*, *Tonne* usw.), für die **Kraft** *Newton* usw..

Vorsätze

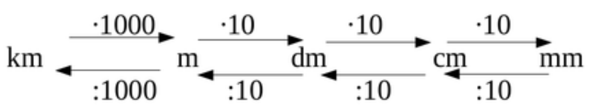
Für jede Einheit gibt es verschiedene Vorsätze, also kleine Wörter, die einen gewissen Anteil der Einheit zeigen:

Milli (m) bedeutet ein Tausendstel, Zenti (c) ein Hundertstel, Deci (d) ein Zehntel, Kilo (k) bedeutet Tausend. Ein Milligramm (mg) bedeutet daher ein Tausendstel eines Gramms, ein Zentimeter (cm) bedeutet ein Hundertstel eines Meters, ein Kilogramm (kg) Tausend Gramms, ein Decivolt (dV) ein Zehntel eines Volts, ein Zentiliter (cL) ein Hundertstel eines Liters, ein Kilowatt (kW) Tausent Watts.

Einheiten Umwandeln

Abstand

Für die Umrechnungen eines Abstandes benutzt man folgendes Schema:



In diesem Bild:

- Wenn ein Abstand z.B. in km gegeben ist und in dm umgerechnet werden soll (von links nach rechts, **vom größten zum kleinsten**) muss man **multiplizieren**, in diesem Beispiel einmal mit 1000 und einmal mit 10:

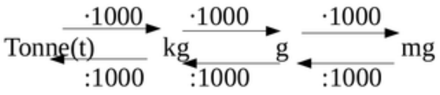
  2,35km= 2,35 ·1000 ·10 dm = 23500 dm

- wenn ein Abstand z.B. in cm gegeben ist und in m umgerechnet werden soll (von rechts nach links, **vom kleinsten zum größten**) muss man **dividieren**, in diesem Beispiel zwei mal durch 10:

  0,054cm= 0,054:10:10 m = 0,00054m

Masse

Für die Umrechnungen einer Masse benutzt man folgendes Schema:



In diesem Bild:

- wenn eine Masse z.B. in kg gegeben ist und in mg umgerechnet werden soll (von links nach rechts, **vom größten zum kleinsten**) muss man **multiplizieren**, in diesem Beispiel zwei mal mit 1000:

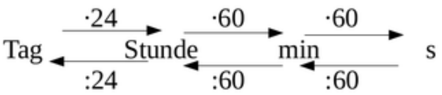
  $0{,}087kg = 0{,}087 \cdot 1000 \cdot 1000\ mg = 87000mg$

- wenn eine Masse z.B. in g gegeben ist und in Tonnen (t) umgerechnet werden soll (von rechts nach links, **vom kleinsten zum größten**) muss man **dividieren**, in diesem Beispiel zwei mal durch 1000:

  $36530g = 36530:1000:1000\ t = 0{,}03653t$

Zeit

Für die Umrechnungen der Zeit benutzt man folgendes Schema:



In diesem Bild:

- wenn eine Zeit z.B. in Minuten gegeben ist und in Sekunden umgerechnet werden soll (von links nach rechts, **vom größten zum kleinsten**) muss man **multiplizieren**, in diesem Beispiel einmal mit 60:

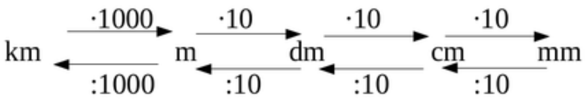
  $0{,}08min = 0{,}08 \cdot 60\ s = 4{,}8s$

- wenn eine Zeit z.B. in Minuten gegeben ist und in Tage umgerechnet werden soll (von rechts nach links, **vom kleinsten zum größten**) muss man **dividieren**, in diesem Beispiel einmal durch 60 und einmal durch 24:

  $36630\ min = 36630:60:24\ Tage = 25{,}4375\ Tage$

Flächeninhalt

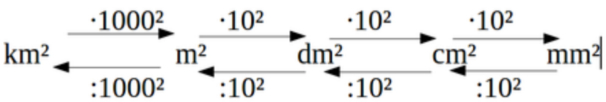
Für die Umrechnungen einer Fläche benutzt man wieder das Schema des Abstandes:



ABER!!!

Fläche ist immer mit Quadrat: km^2, m^2, dm^2, cm^2, mm^2

Es ist immer hoch 2. Daher muss man jeden Schritt (oder alle Schritte zusammen) 2 mal machen! Daher kann man folgendes bild benutzen:



In diesem Bild:

- Wenn eine Fläche z.B. in km^2 gegeben ist und in dm^2 umgerechnet werden soll (von links nach rechts, **vom größten zum kleinsten**) muss man **multiplizieren**, in diesem Beispiel einmal mit 1000^2 und einmal mit 10^2.

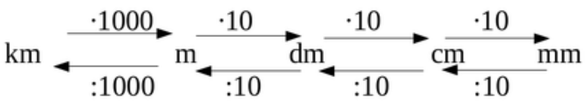
  $2{,}35km^2 = 2{,}35 \cdot 1000^2 \cdot 10^2 dm^2 = 2{,}35 \cdot 1000000 \cdot 100\ dm^2 = 235000000dm^2$

- Wenn eine Fläche z.B. in cm^2 gegeben ist und in m^2 umgerechnet werden soll (von rechts nach links, **vom kleinsten zum größten**) muss man **dividieren**, in diesem Beispiel zwei mal durch 10^2, also zwei mal durch 100 dividieren.

  $0{,}054cm^2 = 0{,}054:10^2:10^2\ m^2 = 0{,}054:100:100\ m^2 = 0{,}0000054m^2$

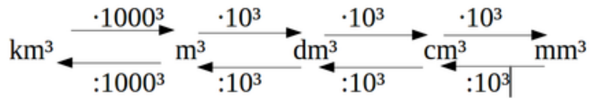
Volumen

Für die Umrechnungen eines Volumens benutzt man wieder das Schema des Abstandes:



Volumen ist immer Kubik: km^3, m^3, dm^3, cm^3, mm^3

Es ist immer hoch 3. Daher muss man jeden Schritt (oder alle Schritte zusammen) 3 mal machen! Daher kann man folgendes bild benutzen:



In diesem Bild:

- Wenn ein Volumen z.B. in km³ gegeben ist und in dm³ umgerechnet werden soll (von links nach rechts, **vom größten zum kleinsten**) muss man **multiplizieren**, in diesem Beispiel einmal mit 1000³ und einmal mit 10³.

$$2{,}35km^3 = 2{,}35 \cdot 1000^3 \cdot 10^3 \ dm^3 = 2{,}35 \cdot 1000000000 \cdot 1000 \ dm^3 = 2350000000000 \ dm^3 \ (=2{,}35 \cdot 10^{12} \ dm^3)$$

- Wenn ein Volumen z.B. in cm³ gegeben ist und in m³ umgerechnet werden soll (von rechts nach links, **vom kleinsten zum größten**) muss man **dividieren**, in diesem Beispiel zwei mal durch 10³.

$$0{,}054cm^3 = 0{,}054:10^3:10^3 \ m^3 = 0{,}054:1000:1000 \ m^3 = 0{,}000000054 \ m^3 \ (= 5{,}4 \cdot 10^{-8} \ m^3)$$

Mittelwerte

Einführung

In der Mathematik, besonders im Bereich der Statistik, gibt es viele sogenannten **Mittelwerte**. Was ist ein Mittelwert? Wenn man viele Werte (viele Zahlen, die irgendwas messen) hat, dann gibt es eine Zahl, die sich irgendwie in der Mitte dieser Werte befindet. Das ist ein Mittelwert. Es gibt aber verschiedene „Mitten“, also verschiedene Wege um diese Mitte zu berechnen, je nachdem wie das Problem ist. Drei von diesen Wegen werden wir hier lernen, den ***Durchschnitt***, den ***Median*** und den ***Modalwert***.

Durchschnitt

Den ***Durchschnitt*** (auch *arithmetisches Mittel* genannt) mehrerer Werte berechnet man, indem man ihre Summe durch ihre Anzahl (wie viele Werte wir haben) dividiert:

$$\mathbf{Durchschnitt} = \frac{\mathbf{Summe\ der\ Werte}}{\mathbf{Anzahl\ der\ Werte}}$$

Ein Beispiel:

- *Das Gewicht der Schüler in einer Klasse ist: 54kg, 65kg, 48kg, 76kg, 52kg, 65kg, 45kg. Wie viel ist der Durchschnitt?*

$$\mathbf{Durchschnitt} = \frac{\mathbf{Summe\ der\ Werte}}{\mathbf{Anzahl\ der\ Werte}} = \frac{\mathbf{54+65+48+76+52+65+45}}{\mathbf{7}} \approx \mathbf{57{,}86} \text{ (das sind kg)}$$

Median

Den ***Median*** (auch *Zentralwert* genannt) mehrerer Werte findet man, indem man die Werte zuerst **der Größe nach ordnet** (z.B. vom kleineren zum größeren) und dann den **Wert in der Mitte** der Reihe wählt.

Ein Beispiel!

- *Das Gewicht der Schüler in einer Klasse ist: 54kg, 65kg, 48kg, 76kg, 52kg, 65kg, 45kg. Wie viel ist der Median?*

Zuerst der Größe nach ordnen!

45, 48, 52, **54**, 65, 65, 76

(ALLE Werte schreiben, also zwei oder mehr mal schreiben, wenn der Wert mehrmals vorkommt; jeden Wert muss man schreiben, so oft wie er vorkommt)

Der Wert in der Mitte ist 54. Es gibt 3 Werte links und 3 Werte rechts. Also 54 ist genau in der Mitte. Daher ist 54kg der **Median**!

Was ist aber, wenn die Anzahl der Werte eine gerade Zahl ist, wenn wir z.B. 12 Werte haben (12 ist eine gerade Zahl) und nicht 7 wie vorher (7 ist eine ungerade Zahl). Wenn man 7 Werte hat (oder irgendeine andere ungerade Zahl) dann gibt es genau eine Zahl in der Mitte. Bei gerader Anzahl der Werte gibt es doch 2 Zahlen in der Mitte. In diesem Fall wird als Median der Wert definiert, der genau *zwischen den beiden Zahlen in der Mitte* steht, also der *Durchschnitt der beide Zahlen*. Schauen wir ein Beispiel an!

- *Das Gewicht der Schüler in einer Klasse ist: 52kg, 65kg, 48kg, 76kg, 52kg, 65kg, 45kg, 65kg, 45 kg, 45kg, 78kg, 69kg. Wie viel ist der Median?*

Zuerst der Größe nach ordnen!

45, 45, 45, 48, 52, **52, 65**, 65, 65, 69, 76, 78

(ALLE Werte schreiben, also jeden Wert schreiben, so oft wie er vorkommt)

Hier gibt es zwei Werte in der Mitte, 52 und 65. Der Median ist genau in der Mitte also die beide Werte addieren und durch 2 dividieren:

$$\mathbf{Median} = \frac{\mathbf{52}kg + \mathbf{65}kg}{\mathbf{2}} = \mathbf{58{,}5}\ kg$$

Modus

Der ***Modus*** (auch *Modalwert* genannt) von mehreren Werten ist der Wert, der **am häufigsten vorkommt**

Ein Beispiel!

- *Das Gewicht der Schüler in einer Klasse ist: 54kg, 63kg, 48kg, 76kg, 52kg, 63kg, 45kg. Wie viel ist der Modalwert?*

Hier kommt 63 zwei mal vor, alle andere Werte kommen nur einmal vor. Daher ist 63kg der Modus.

Was ist aber, wenn mehrere Werte öfters vorkommen? Noch ein Beispiel!

- *Das Gewicht der Schüler in einer Klasse ist: 52kg, 65kg, 48kg, 76kg, 52kg, 65kg, 45kg, 65kg, 45 kg, 45kg, 78kg, 69kg.*

Hier kommt 45 drei mal vor, 65 drei mal vor, 52 zwei mal vor und die restlichen Werte nur ein mal vor. 45 und 65 kommen am öftesten vor. Daher sind sie beide Modalwerte. 52 hingegen kommt nicht so oft vor wie 45 und 65 (also „nur" zwei mal), daher ist 52 kein Modalwert. Es gilt also:

Modalwerte (*Modi*): 45kg und 65kg

Vergleichen von Mittelwerten

Weicht der Durchschnitt vom Median nicht stark ab, dann kann man über eine eher gleichmäßiger Verteilung sprechen, Weicht der Durchschnitt vom Median stark ab, dann ist die Verteilung ungleichmäßig. *(Vorausgesetzt, dass alle Werte positiv sind)*

Dreieckskonstruktionen

Theorie

Ein Dreieck ist eine geschlossene ebene Figur mit drei Strecken als Seiten. Die Dreieckkonstruktion ist von selber aus eine Herausforderung und ein Weg, einige Fertigkeiten zu üben. Sie gilt als Vorbereitung und Einführung allgemein für die Geometrie. Ziel ist ein Dreieck mit drei vorgegebenen Größen nur mit Hilfe eines Zirkels und eines Lineals zu konstruieren. Solche Konstruktionen waren sehr beliebt schon in der Antike. Wichtig ist zu wissen, dass die Summe aller Winkel genau 180° und jeder Winkel kleiner als 180° ist und dass keine Seite größer als die Summe der anderen zwei sein darf.

Es gibt vier verschiedenen Aufgabensorten, je nachdem, was gegeben ist. Wenn drei Seiten gegeben sind, dann spricht man von der SSS (Seite-Seite-Seite) Konstruktion. Wenn zwei Seiten und der dazwischen liegender Winkel gegeben sind, spricht man von der SWS (Seite-Winkel-Seite) Konstruktion. Wenn zwei Seiten und ein Winkel, der nicht zwischen den Seiten liegt, gegeben sind, dann spricht man von der SSW Konstruktion (Seite-Seite-Winkel). Wenn zwei Winkel und eine Seite gegeben sind, dann spricht man von der WSW Konstruktion (Winkel-Seite-Winkel).

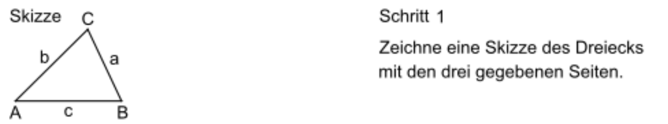
Konventionen

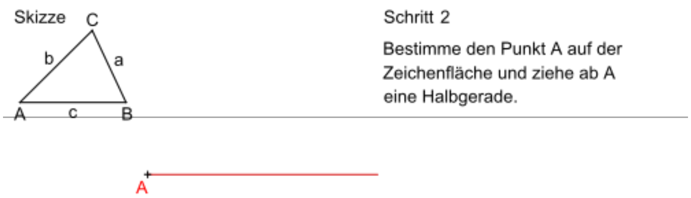
Die Seiten jedes Dreiecks werden klein geschrieben (mit a, b und c). Die gegenüber liegenden Eckpunkte werden entsprechend groß geschrieben mit (A, B und C). Für die entsprechenden Winkel werden die griechischen klein Buchstaben α, β und γ benutzt (Alpha, Beta und Gamma). Also, wenn A der Eckpunkt ist, ist der Winkel an diesem Punkt α und die gegenüberliegende Seite a. Man zeichnet die Seiten nacheinander im Gegenuhrzeigersinn. Unten zeichnet man i.d.R. die Seite a.[3]

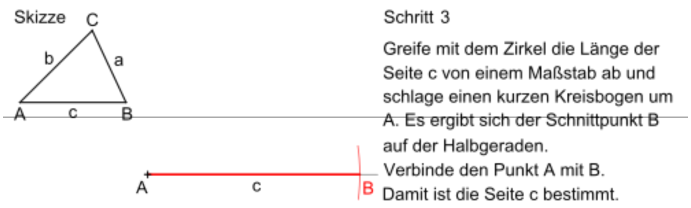
1. Ferner rechnet ein Taschenrechner auch anders als ein typischer Heimcomputer oder ein Notebook. So kann sich zwischen derartigen Geräten ebenfalls ein Unterschied ergeben. Zudem kann es bei solchen Geräten Optionen geben, selbst festzulegen, auf wie viele Stellen ein Ergebnis berechnet werden soll.
2. (0 zählt hier am Anfang der Zahl bei der Anzahl gültiger Stellen nicht mit)
3. Diese Konventionen werden i.d.R. in den Schulbüchern verwendet (und oft von Lehrern erwartet). Selbstverständlich darf (und kann) man irgendwelche andere (mehr oder weniger kongruenten) Symbole benutzen (außer wenn die Lehrperson das nicht erlaubt; so eine Haltung werde ich allerdings hier nicht kommentieren...).

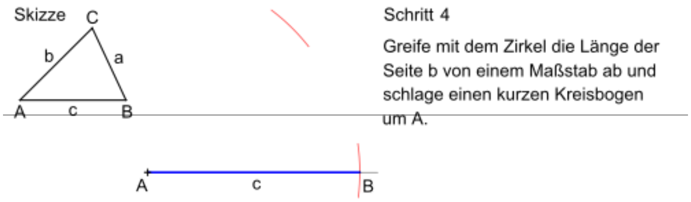
SSS Konstruktion

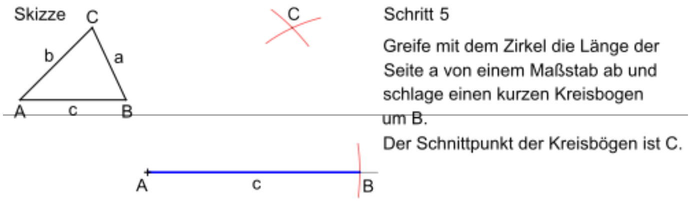
Wenn drei Seiten gegeben sind, geht man wie in den folgenden Bildern vor. Die Schritte sieht man am Rand jedes Bildes.

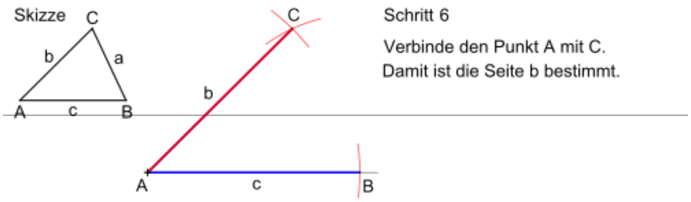


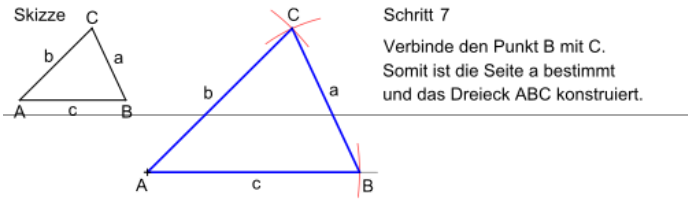








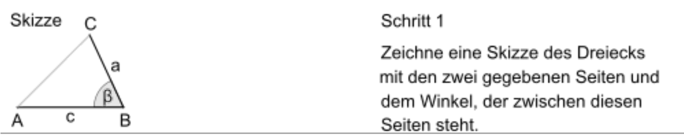


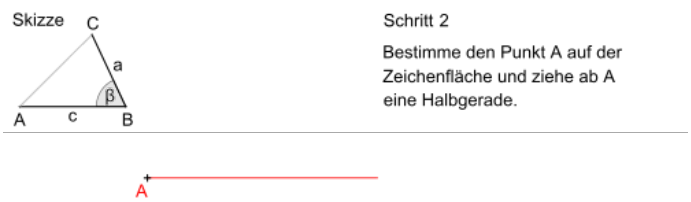


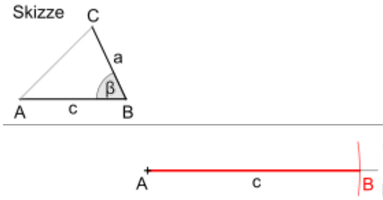
Die ganzen Schritten kann man in der folgenden Animation sehen:

SWS Konstruktion

Wenn zwei Seiten und der Winkel dazwischen gegeben sind, geht man wie in den folgenden Bildern vor. Die Schritte sieht man am Rand jedes Bildes.

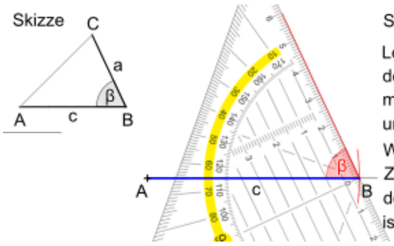






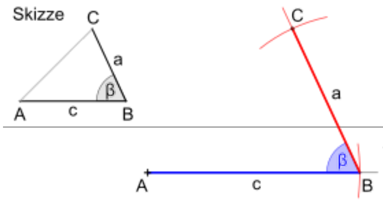
Schritt 3

Greife mit dem Zirkel die Länge der Seite c von einem Maßstab ab und schlage einen kurzen Kreisbogen um A. Es ergibt sich der Schnittpunkt B auf der Halbgeraden.
Verbinde den Punkt A mit B.
Damit ist die Seite c bestimmt.



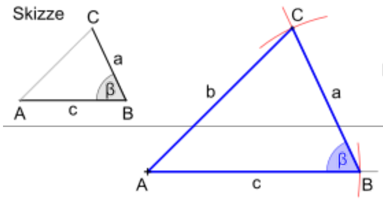
Schritt 4

Lege das Geodreieck mit der Kante der Maßskala durch den Punkt B, die mittige Skalenlinie für Null (0) auf B und die betreffende Linie der Winkelweite auf die Seite c.
Ziehe ab B eine Halbgerade entlang der Kante des Geodreiecks. Somit ist der Winkel β, z. B. 65°, bestimmt.



Schritt 5

Greife mit dem Zirkel die Länge der Seite a von einem Maßstab ab und schlage einen kurzen Kreisbogen um B. Es ergibt sich der Schnittpunkt C auf der Halbgeraden.
Verbinde den Punkt B mit C.
Damit ist die Seite a bestimmt.



Schritt 6

Verbinde den Punkt A mit C.
Damit ist die Seite b bestimmt sowie das Dreieck ABC konstruiert.

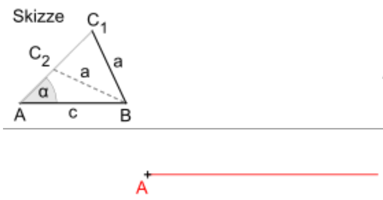
Die ganzen Schritten kann man in der folgenden Animation sehen:

SSW Konstruktion

Wenn zwei Seiten und ein Winkel, der nicht zwischen diesen Seiten steht, gegeben sind, geht man wie in den folgenden Bildern vor. Die Schritte sieht man am Rand jedes Bildes.

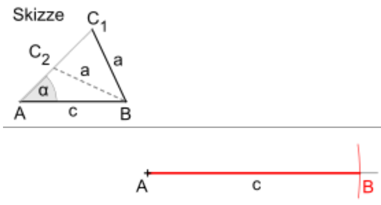
Schritt 1

Zeichne eine Skizze des Dreiecks mit den zwei gegebenen Seiten und dem Winkel, der nicht zwischen diesen Seiten steht.



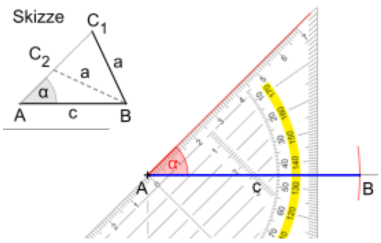
Schritt 2

Bestimme den Punkt A auf der Zeichenfläche und ziehe ab A eine Halbgerade.



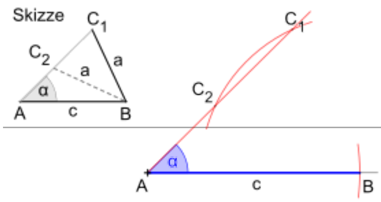
Schritt 3

Greife mit dem Zirkel die Länge der Seite c von einem Maßstab ab und schlage einen kurzen Kreisbogen um A. Es ergibt sich der Schnittpunkt B auf der Halbgeraden.
Verbinde den Punkt A mit B.
Damit ist die Seite c bestimmt.



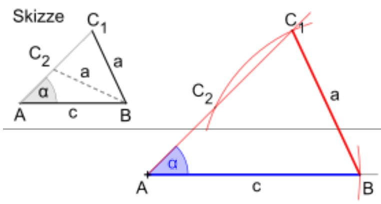
Schritt 4

Lege das Geodreieck mit der Kante der Maßskala durch den Punkt A, die mittige Skalenlinie für Null (0) auf A und die betreffende Linie der Winkelweite auf die Seite c.
Ziehe ab A eine Halbgerade entlang der Kante des Geodreiecks. Somit ist der Winkel α, z. B. 45°, bestimmt.



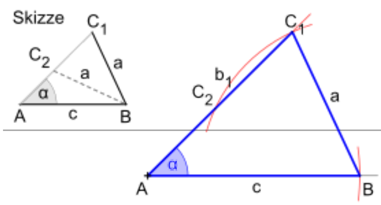
Schritt 5

Greife mit dem Zirkel die Länge der Seite a von einem Maßstab ab und schlage einen Kreisbogen um B. Es ergeben sich die beiden Schnittpunkte C_1 und C_2.



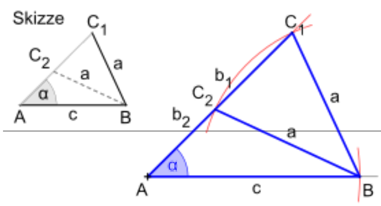
Schritt 6

Verbinde den Punkt B mit C_1.
Damit ist die erste mögliche Lage der Seite a bestimmt.



Schritt 7

Verbinde den Punkt A mit C_1.
Damit ist die Seite b_1 bestimmt.



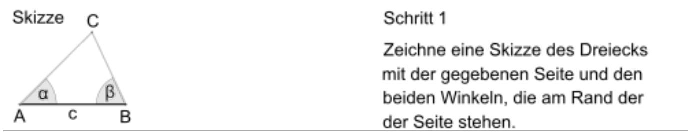
Schritt 8

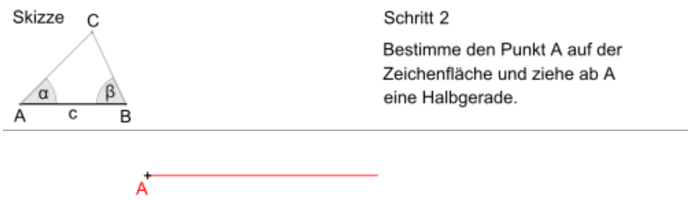
Verbinde den Punkt B mit C_2.
Damit ist sowohl die zweite mögliche Lage der Seite a als auch die Länge der Seite b_2 bestimmt.
Somit sind die zwei möglichen Dreiecke ABC_1 und ABC_2 konstruiert.

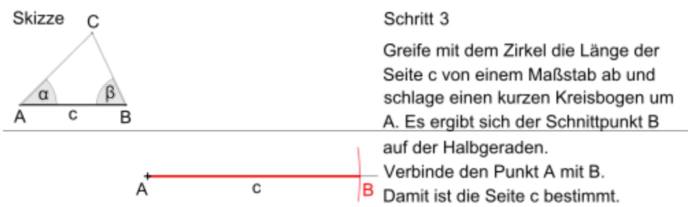
Die ganzen Schritten kann man in der folgenden Animation sehen:

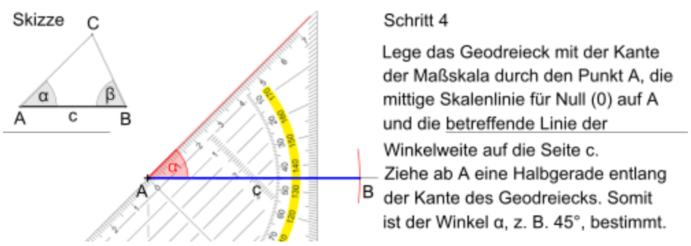
WSW Konstruktion

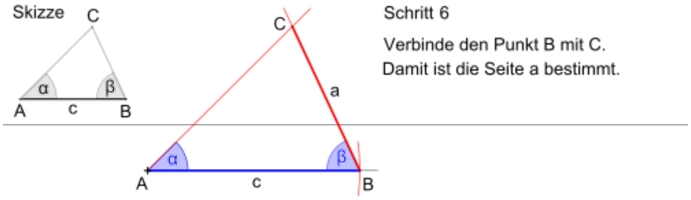
Wenn zwei Winkel und eine Seite gegeben sind, gibt es zwei Möglichkeiten. Wenn die zwei Winkel am Rand der gegebenen Seite stehen, dann geht man wie in den folgenden Bildern vor. Wenn einer der gegebenen Winkel, der Winkel gegenüber der gegebenen Seite ist, dann berechnet man erst den dritten Winkel (180°− die anderen beiden Winkel) und geht dann vor, wie in den folgenden Bildern. Die Schritte sieht man am Rand jedes Bildes.

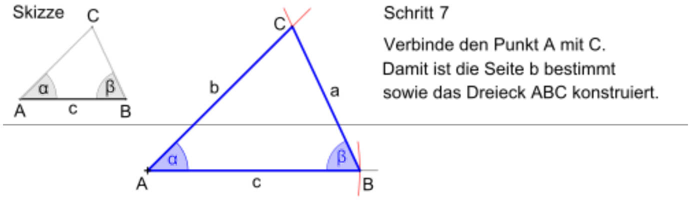












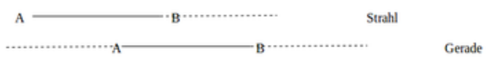
Die ganzen Schritten kann man in der folgenden Animation sehen:

Herzlichem Dank an Petrus3743, der die Seite vorbereitet hat und die Erlaubnis gegeben hat, sie hier zu benutzen. Für weitere Konstruktionen kann man seinem Link folgen

Geometrie der Ebene

Definitionen

Grundbegriffe

 Strecke Definition	 Gerade und Strahl	 Winkel Darstellung	 vier rechte Winkel

Strecke

Strecke ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Z.B von den beiden gezeichneten Möglichkeiten zwischen A und B im ersten Bild oben, welche ist die kürzeste?

Gerade und Strahl

Wenn ich eine Strecke auf einer Seite unendlich lang verlängere, dann habe ich einen Strahl. Wenn ich das an beiden Seiten tue, dann hab ich eine Gerade.

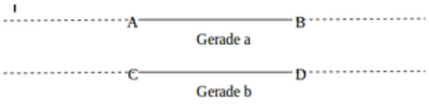
Winkel

Zwischen zwei Strahlen, die vom gleichen Punkt ausgehen, entsteht ein Winkel. Mit einem Winkel misst man eine Drehung.

Rechter Winkel

Wenn sich zwei Geraden einander so schneiden, dass vier gleichen Winkel entstehen, dann ist jeder von diesen Winkeln ein rechter Winkel.

Parallelen



zwei Parallele Geraden

Wenn zwei Geraden so nebeneinander liegen, dass sie nie einander schneiden und immer den Gleichen Abstand haben, dann sind sie parallel zueinander

Punkt

Um alle Begriffe bisher zu definieren, haben wir den Punkt gebraucht. Was ist aber wieder ein Punkt? Diese ist die schwerste Definition. Wenn man beispielsweise den Abstand zwischen Wien und Linz berechnen will, muss man einen Ort in jeder Stadt wählen, sonst kann der Abstand bis 15km mehr oder weniger sein! Dieser Ort könnte z.B. eine Säule in der Mitte von jeder Stadt sein. Für so einen großen Abstand reicht eine Säule schon. Sie ist sozusagen ein Punkt.

Wenn man aber die Säule selber messen will, geht es nicht mehr. Man nimmt dann zwei winzigen Flächen am Rand der Säule. Je kleiner das Objekt ist, das wir messen wollen, desto kleiner muss der „Punkt“ sein.

Im idealen Fall ist der Punkt gar nichts, hat selber keine Länge, keine Breite und keine Höhe! So kann man sich einen Punkt vorstellen und so wird er auch definiert.

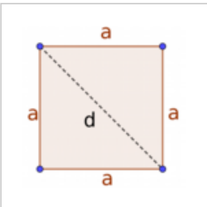
Eckpunkt

In einer ebenen Figur sind die Eckpunkte, die Punkte bei denen sich zwei Seiten einander schneiden.

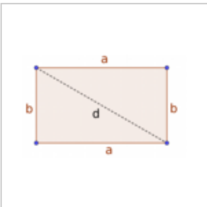
Seite und Diagonale

Die ***Seiten*** einer ebenen Figur sind die Abgrenzungen der Figur vom Rest der Ebene. Im folgenden Bild eines Quadrats werden alle seine Seiten mit a bezeichnet, im Bild des Rechtecks werden zwei Seiten mit a und zwei mit b bezeichnet. Eine Seite verbindet zwei Punkte die nacheinander liegen. Die ***Diagonale*** verbindet hingegen zwei gegenüberliegenden Eckpunkte, die sich nicht am Rand der gleichen Seite befinden. Ein Quadrat und ein Rechteck haben jeweils zwei Diagonalen, die gleich lang sind, in einem Parallelogramm hingegen sind sie nicht gleich lang.

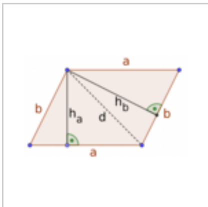
Figuren



Quadrat



Rechteck



Parallelogramm

Quadrat

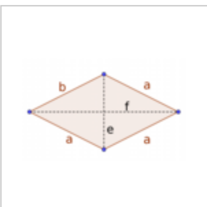
Ein Quadrat ist eine viereckige geschlossene Figur, deren Seiten als auch deren Winkel gleich zu einander sind. Formeln: $u=4a$, $A=a^2$ (u ist der Umfang, a die Seite, A die Fläche). Mit d ist hier die sogenannte ***Diagonale*** gezeigt (verbindet zwei gegenüberliegende Eckpunkte).

Rechteck

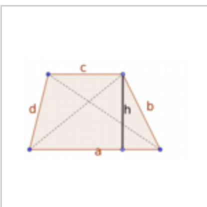
Ein Rechteck ist eine viereckige geschlossene Figur, deren Winkel gleich zueinander sind und deren gegenüberliegenden Seiten auch gleich sind. Formeln: $u=2a+2b$ oder $u=2(a+b)$, $A=a{\cdot}b$. Mit d ist wieder die Diagonale bezeichnet, mit a und b die Seiten (in der Figur ist a für die Länge, also die längere Seite und b für die Breite, also die kürzere Seite).

Parallelogramm

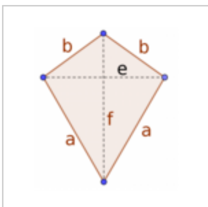
Ein Parallelogramm ist eine viereckige geschlossene Figur, deren gegenüberliegenden Seiten gleich sind. Daher sind sie auch parallel. Formeln: $u=2a+2b$ oder $u=2(a+b)$, $A=a{\cdot}h_a$ oder $A=b{\cdot}h_b$. In der Figur ist h_a die Höhe zur Seite a und h_b die Höhe zur Seite b. Mit d wird eine der beiden Diagonalen bezeichnet (hier die kürzeste).



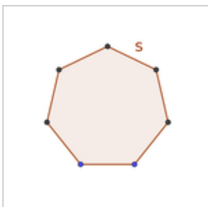
Raute



Trapez



Deltoid



Siebeneck

Raute (Rhombus)

Eine Raute ist eine viereckige geschlossene Figur, deren Seiten gleich sind. Daher sind auch alle Winkeln gleich. Formeln: $u=4a$, $A=\frac{e \cdot f}{2}$. Mit e und f sind die beiden Diagonale bezeichnet, mit a die Seite.

Trapez

Ein Trapez ist eine viereckige geschlossene Figur mit zwei gegenüberliegenden parallele Seiten. Formeln: u=a+b+c+d, $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$. Mit a, b, c und d werden die vier (nicht unbedingt gleichen) Seiten bezeichnet, mit h die Höhe auf die Basis (***Basis*** ist nicht nur beim Trapez, sondern bei jeder Figur die **untere Seite**, beim Trapez im Bild hier die Seite a, also die Seite die im Bild unten steht). In der Figur sieht man auch die Diagonalen (ohne Symbol).

Deltoid

Ein Deltoid ist eine viereckige geschlossene Figur mit zwei Paaren nacheinander liegenden gleichen Seiten.

Vieleck (regelmäßiges)

Ein Vieleck ist eine Figur mit mehreren Winkeln. Wenn die Figur geschlossen ist und alle Seiten (und Winkel) gleich zueinander, dann ist das Vieleck regelmäßig. Im Bild sieht man ein regelmäßiges Siebeneck, die Seite ist hier mit s bezeichnet.

Fragen

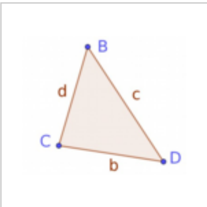
Ist jedes Rechteck ein Parallelogramm? Umgekehrt?

Ist jede Raute ein Quadrat? Umgekehrt?

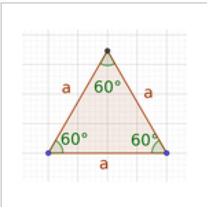
Ist jedes Trapez ein Parallelogramm? Umgekehrt?

Ist jedes Quadrat auch ein Rechteck? Umgekehrt?

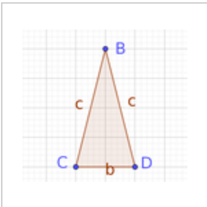
Dreieck, Besondere Dreiecke



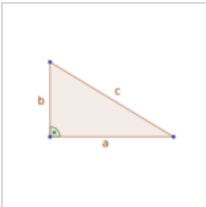
spitz

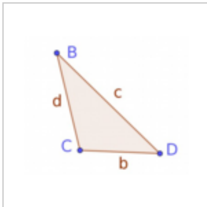


gleichseitiges



gleichschenkliges


rechtwinkeliges



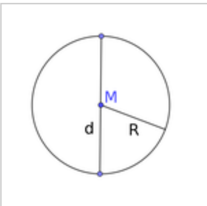
stumpfwinkeliges

Ein Dreieck ist eine geschlossene Figur mit drei Winkel. Ist einer Winkel mehr als 90°, dann heißt das Dreieck stumpfwinkeliges, wenn alle Winkel kleiner als 90° sind, dann spitzwinkeliges.

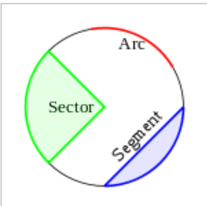
Bei allen Dreiecken gilt für den Umfang: u=a+b+c, wobei a, b und c die Symbole für die Seiten sind. Die allgemeinen Formeln für die Fläche sind $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$, wobei h_a, h_b und h_c die Höhen zu den entsprechenden Seiten sind (im Bild nicht zu sehen).

Ist einer der Winkeln 90°, dann wird das Dreieck rechtwinkelig genannt. Die Formel für die Fläche ist in diesem Fall $A = \frac{a \cdot b}{2}$, wobei hier a und b die kleineren Seiten sind (Katheten genannt). Die größte Seite (dem rechten Winkel gegenüber) nennt man Hypotenuse.

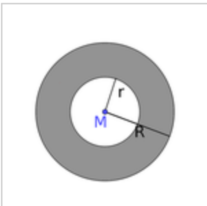
Sind zwei der drei Winkel (und auch zwei Seiten) gleich, dann nennt man das Dreieck gleichschenklig. Sind alle Winkel (und Seiten) gleich, dann ist es ein gleichseitiges Dreieck (mit Seite a). Für die Fläche des gleichseitigen Dreiecks gilt: $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$.



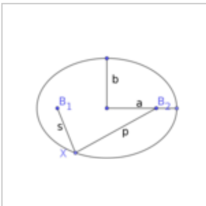
Kreis



Kreisteile



Kreisring


Ellipse

Kreis, Kreissektor, Kreisring

Ein Kreis ist die Menge aller Punkten, die von einem Punkt M (Mittelpunkt genannt) den gleichen Abstand r (Radius genannt) haben. Formeln: u=2πr, A=πr². r ist der Radius. Hier wird mit d der Durchmesser bezeichnet. **π ist eine Zahl** (wie 2 oder 5,632), mit dem Unterschied, dass man diese Zahl (π) nicht genau angeben kann. π ist ungefähr 3,14159... **Sie ist das Verhältnis (also der Bruch) des Umfangs zum Durchmesser ($\pi = \frac{u}{d}$).**

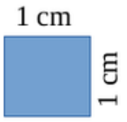
Schneidet man einen Kreis wie einen Torten-schnitt (also zwei Schnitte von Mittelpunkt aus bis am Rand), dann hat man einen Kreissektor. Schneidet man ein Stück mit einer Strecke von einem zu einem anderen Punkt des Kreises, hat man ein Kreissegment. Im Bild steht für den Bogen das englische Wort "arc". Schneidet man von der Mitte eines Kreises einen kleineren Kreis mit den selben Mittelpunkt ab, dann bekommt man ein Kreisring.

Ellipse

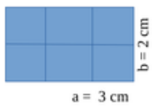
Schneidet man einen Zylinder schief, dann entsteht eine Ellipse. Die sieht wie ein zerquetschter Kreis aus. Die genauere Definition ist kompliziert:

Man nimmt zwei Punkte, die Brennpunkte (im Bild B_1 und B_2). Jeder Punkt der Ellipse (im Bild z.B. X) hat zu jedem Brennpunkt einen gewissen Abstand (im Bild z.B. ist der Abstand zum Brennpunkt B_1 mit s bezeichnet und zum B_2 mit p). In einer Ellipse ist die Summe der beiden Abständen (also s+p) immer gleich (im Bild gleich 2a, wobei a die sogenannte große Halbachse ist). Mit b wird hier die sogenannte kleine Halbachse bezeichnet.

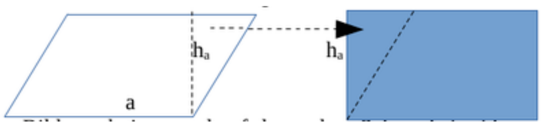
Intuitiver Beweis der Formeln des Flächeninhalts mancher ebenen Figuren



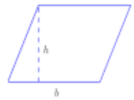
1 cm^2



Rechteck



Parallelogramm



Parallelogramm

Definition des Quadratzentimeters

Ein Zentimeter Quadrat (1 cm^2, ein Zentimeter hoch zwei) ist ganz einfach ein Quadrat, dessen Seite ein Zentimeter ist (erstes Bild).

Fläche des Rechtecks

Im zweiten Bild sieht man ein Rechteck, dass aus mehreren Quadrat Zentimeter besteht. Hier haben wir zwei Zeilen, jede mit 3 Quadraten. Insgesamt 2x3=6 (cm^2). Man kann offenbar sagen, dass der Flächeninhalt A eines Rechtecks die Länge a der einer Seite mal die Länge b der anderen ist.

$A = a \cdot b$

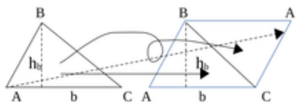
Sonderfall: Das Quadrat. Da gilt $A = a \cdot a = a^2$, da die Seiten gleich sind.

Fläche des Parallelogramms

Im Fall eines Parallelogramms kann man sich vorstellen, dass ein Stück der Figur so wie im Bild geschnitten und auf der andere Seite wieder hinzugefügt werden kann. Dadurch entsteht wieder ein Rechteck, dessen Seiten jetzt die Basis a und die Höhe h_a des Parallelogramms sind. Die Fläche des dadurch entstandenen Rechtecks ist daher der Flächeninhalt des Parallelogramms:

$A= a \cdot h_a$

Fläche des Dreiecks



Fläche des Dreiecks

Im Fall eines Dreiecks kann man sich wie im Bild vorstellen, dass ein zweites Dreieck, gleich groß wie das erste, umgedreht und auf das erste zugefügt wird. So entsteht wieder ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt $A = b \cdot h_b$ ist. Weil aber dieses Parallelogramm aus 2 gleiche Dreiecke besteht, muss man für den Flächeninhalt des Dreiecks das ganze mit 2 dividieren:

$$A = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

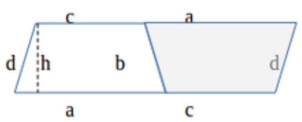
Entsprechend für die anderen Seiten kann man schreiben:

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Sonderfälle: Rechtwinkeliges, gleichschenkeliges und gleichseitiges Dreieck. In den zwei letzten Fällen kann man den Satz des Pythagoras benutzen, um eine Formel zu erzeugen (machen wir aber hier nicht).

Fläche des Trapezes



Fläche des Trapezes

Genauso geht man bei einem Trapez vor. Es entsteht ein Parallelogramm, dessen Basis aber jetzt a+b ist und den Flächeninhalt daher $(a+b) \cdot h$. Weil, wie vorher beim Dreieck, das Trapez zwei mal vorkommt, muss man wieder für den Flächeninhalt des Trapezes das ganze durch 2 dividieren:

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

Anwendung der Formeln

Variablen

Bei allen Formeln gibt es sogenannten **„Variablen“**. Es geht in der Regel um ein Buchstabe, der für irgendwas steht. Hier schreiben wir, wofür diese Symbole in der Geometrie stehen.

- Ein großes **A**, steht in der Regel für die ***Fläche*** (genauer für den Flächeninhalt)
- Ein **u** steht i.d.R. für den ***Umfang*** (also wie lang das Rum-herum der Figur ist)
- **a**, **b**, **c** usw. stehen i.d.R. für die ***Seiten*** (auch Länge oder Breite) von Figuren
- **h** (oder **H**) steht i.d.R. für die ***Höhe*** einer Figur. Oft gibt es dann ein Index, z.B. h_b, was dann bedeutet, dass diese die Höhe für die Seite b ist.
- **r** (oder **R**) steht i.d.R. für den ***Radius*** eines Kreises.
- **d** steht bei einem Kreis für den ***Durchmesser*** des Kreises, bei einem Parallelogramm (oder Rechteck, Quadrat, Trapez, Vieleck) aber für die ***Diagonale***!

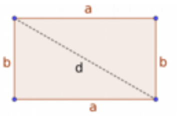
- Griechische kleine Buchstaben (*α, β, γ, δ, ε, θ, φ*) stehen i.d.R. für Winkel.
- Allerdings ist mit dem griechischen Buchstaben ***π*** die Kreiszahl bezeichnet (π≈3,1415...).

Einsetzen

Bei einer Aufgabe sind immer gewisse Informationen gegeben, z.B.:

- *Ein Zimmer ist 4m lang und 2,8m breit. Finden Sie seinen Umfang und seine Fläche heraus!*

In solchen Problemen soll man die gegebenen Zahlen in die Formel sinnvoll einsetzen. Das bedeutet, dass man die Buchstaben in der Formel durch Zahlen ersetzt. In diesem Beispiel sucht man in einer Formelsammlung das Rechteck (da ein Zimmer die Form eines Rechtecks hat).



Rechteck

In der Figur, die man in der Formelsammlung finden kann, kann man sehen, dass mit **a** die ***Länge*** und mit **b** die ***Breite*** bezeichnet wird. In der Formelsammlung kann man auch die Formel für den Umfang finden:

u=2a+2b

Die Länge a ist gegeben: 4m. Die Breite b auch: 2,8m. Wenn nichts zwischen einer Zahl und einer Variable steht (hier z.B. 2a), dann ist mal gemeint (2 mal a). Man schreibt also an der Stelle von a und b die Zahlen 4 und 2,8:

$u = 2a + 2b = 2\cancel{a}^{=4} + 2\cancel{b}^{=2,8} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2,8 = 13,6\ (m$, da wie *m* mit *m addiert* haben)

In der Spalte für die Fläche steht beim Rechteck:

A=a·b also

$A = a \cdot b = \cancel{a}^{=4} \cdot \cancel{b}^{=2,8} = 4 \cdot 2,8 = 11,2\ (m^2$, da wie *m* mit *m multipliziert* haben)

Man soll auch auf die Einheiten aufpassen:

Der Umfang ist eine *Strecke*, also er wird in Streckeneinheiten gemessen (hier m), die *Fläche* hingegen in Flächeneinheiten (hier in m²).

Andererseits kann es sein, dass eine Größe in verschiedenen Einheiten gegeben wird, z.B.:

- *Die Länge eines Rechtecks ist 5dm und seine Breite 32cm. Finden Sie seinen Umfang und seine Fläche heraus!*

Das Einsetzen von Werten in einer Formel setzt voraus, dass die Einheiten übereinstimmen. Man muss z.B. überall in der Formel Werte in Stunden haben und nicht irgendwo Stunden, an einer anderen Stelle Minuten usw Hier muss man den Wert einer der beiden Seiten umwandeln, z.B.:

32cm=32:10 dm = 3,2 dm

Jetzt sind beide Seiten (Länge und Breite) in dm und es kann weiter berechnet werden:

u=2a+2b und **A=a·b**

Die Länge a ist gegeben: a=5dm. Die Breite b haben wir jetzt auch in dm umgerechet: b=3,2dm:

$u = 2a + 2b = 2\cancel{a}^{=5} + 2\cancel{b}^{=3,2} = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3{,}2 = 16{,}4\ (dm$, da wie hier dm mit dm *addiert* haben) und

$A = a \cdot b = \cancel{a}^{=5} \cdot \cancel{b}^{=3,2} = 5 \cdot 3{,}2 = 16\ (dm^2$,da wie hier dm mit dm *multipliziert* haben)

Hätten wir die Einheiten (die 32cm) nicht umgewandelt, hätten wir Probleme mit dem Einheit am Ende oder sogar ein völlig falsche Antwort:

- Bei der Multiplikation hätten wir:

  $A = a \cdot b = \cancel{a}^{=5} \cdot \cancel{b}^{=32} = 5 \cdot 32 = 160$ **FALSCH!** Wenn man hier dm² oder cm² als Einheit schreibt, ist das Ergebnis völlig falsch, die Einheit, die wir schreiben hätten sollen, wäre dm·cm, das wäre zwar richtig, aber diese Einheit wird für die Fläche nie benutzt.

- Bei der Addition hätten wir:

  $u = 2a + 2b = 2\cancel{a}^{=5} + 2\cancel{b}^{=32} = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 32 = 74$ **FALSCH! Hier ist sogar der Wert völlig falsch!** Der richtige Wert, wie wir gesehen haben, ist 16,4 dm (oder 164 cm). Man kann nicht dm und cm addieren oder subtrahieren, genauso wie man nicht dm und kg addieren kann! **Addieren (oder subtrahieren) kann man nur Sachen, die genau die gleichen Einheiten haben!**

Nicht nur bei Multiplikation oder Addition müssen die Einheiten übereinstimmen, sondern auch bei Division und allen anderen Rechenarten. Bei Multiplikation und Addition haben wir das Beisp gerade eben gesehen (Fläche und Umfang des Rechtecks am letzten Beispiel). Ein Beispiel für Division, ist wenn man die Fläche eines Rechtecks durch seine Länge dividiert, um die Breite zu berechnen. Wenn die Fläche 6cm² und die Länge 30mm, dann kann man NICHT die Division so durchführen: $b = \frac{6}{30}$, da 6 in cm gegeben ist und 30 in mm. Man soll zuerst z.B. die mm in cm umwandeln (30mm=3cm) und dann die Division durchführen: $b = \frac{6}{3} = 2$ (das sind dann cm, da wir cm² durch cm dividiert haben und man die Hochzahl und dann kann man die Einheiten kürzen: $\frac{cm^{\cancel{2}}}{\cancel{cm}} = cm$.

Wir können also schreiben:

Bei Rechnungen müssen die Einheiten immer übereinstimmen!

Bei einer Rechnung (oder Gleichung) muss man immer erst *kontrollieren*, ob die Einheiten übereinstimmen, dann die Einheiten, die nicht übereinstimmen, in übereinstimmenden Einheiten *umwandeln* und erst am Ende die Rechnung *durchführen*! Das gilt immer (auch bei der Schluss-und Prozentrechnung)!

In Physik benutzt man sogar Einheitssysteme, das ist aber für dieses Buch ein fortgeschrittenes Thema

Umformen in der Geometrie

Bei manchen Aufgaben muss man die Formel umformen, z.B.:

Der Umfang eines Quadrats ist 12cm. Berechnen Sie die Seite und die Fläche!

In der Formelsammlung findet man die Formel für den Umfang eines Quadrats:

u=4a

Hier ist der Umfang gegeben, man braucht die Seite. Zwischen 4 und a steht nichts, also ist mal gemeint. Die Gegenrechnung von mal ist durch und der Umfang ist 12, also:

$u = 4a \quad | : 4$

$\frac{u}{4} = a$ Seiten in einer Gleichung kann man selbstverständlich umtauschen, also:

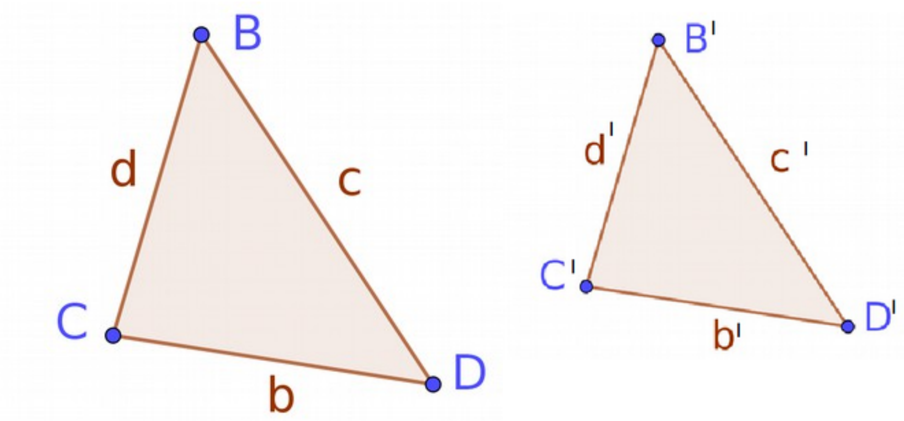
$a = \frac{u}{4} = \frac{\cancel{u}^{12}}{4} = \frac{12}{4}$ also

a=3 cm

Die Formel für die Fläche, die man auch in der Formelsammlung finden kann ist dann:

$A = a^2{}_{(a=3)} = 3^2 = 9$ also $A = 9\ cm^2$

Ähnlichkeit von Figuren



Wenn wir die beiden Bilder oben vergleichen, können wir sagen, dass es das gleiche Dreieck ist, nur von einem anderen Abstand gesehen oder, dass wir doch zwei verschiedene Dreiecke haben, die zwar ähnlich zueinander sind aber doch nicht das gleiche Dreieck, da die Seiten nicht gleich sind. Um auf diesen Unterschied aufmerksam zu machen, wird beim Vergleich zwei geometrischen Figuren nicht das Wort "gleich" (und "nicht gleich") benutzt, sondern die Wörten "ähnlich" (und "nicht ähnlich") und "kongruent" (und "nicht kongruent").

Zwei geometrische Figuren sind ähnlich, wenn sie die gleiche Seitenanzahl haben und alle entsprechenden Winkel gleich zueinander sind. Wenn dazu zumindest eine Seite (und daher auch alle andere) der beiden Figuren gleich ist, dann sagt man, dass die Figuren kongruent sind.

Das Wort "gleich" wird bei geometrischen Figuren nicht benutzt, weil es dann nicht klar ist, ob nur alle Winkel oder doch auch alle Seiten gleich sind.

Bei ähnlichen Figuren gilt, dass das *Verhältnis* entsprechender Seiten eine Konstante Zahl ist. Wenn wir die Seiten aus dem Bild benutzen, wird es klar, was damit gemeint ist. Nehmen wir die Seite b aus dem Bild links und die entsprechende Seite b' aus dem Bild rechts. *Verhältnis* in Mathematik bedeutet Bruch. Der Bruch der beiden Seiten ist dann $\frac{b}{b'}$. Werden die beiden Seiten in irgendeiner Weise gemessen, wird dann festgestellt, dass der Bruch ca. 1,5 ist. Es gilt also $\frac{b}{b'} = 1{,}5$.

Wenn wir ein anderes Paar von entsprechenden Seiten nehmen, wird das Verhältnis (der Bruch) wieder 1,5 sein: $\frac{c}{c'} = 1{,}5$.

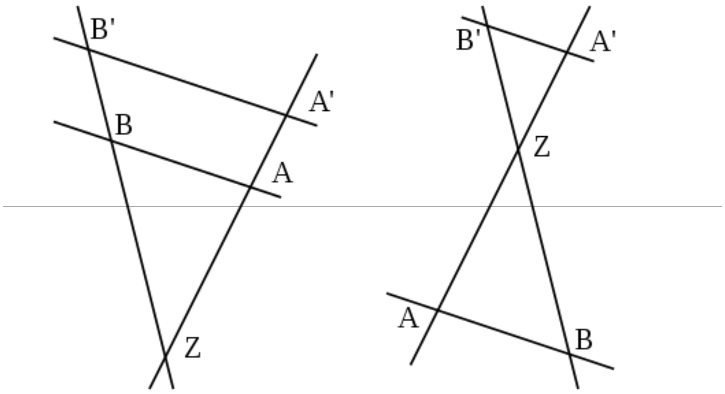
Das Verhältnis (der Bruch) von entprechenden Seiten (z.B. $\frac{b}{b'}$ oder $\frac{c}{c'}$) ist eine konstante Zahl, hier 1,5. Das gilt genauso für das dritte Paar von entsprechenden Seiten $\frac{d}{d'} = 1{,}5$.

Diese Regel gilt nicht nur in Dreiecken sondern in allen geometrischen Figuren, die ähnlich sind. Im folgenden Bild sieht man verschiedene Figuren. Alle Figuren mit der gleichen Farbe sind ähnlich.

Alle hier gleichfarbigen Figuren sind zueinander ähnlich.

Strahlensatz

Die Ähnlichkeit von Figuren findet Anwendung im sogenannten "Strahlensatz".



Nehmen wir zwei geraden, die einander am Schnittpunkt Z schneiden, wie die Geraden BB' und AA' im Bild links. Diese Geraden werden von zwei weiteren parallel zueinander Geraden AB und A'B' geschnitten. So entstehen zwei ähnliche Dreiecke, ABZ und A'B'Z. Da die Dreiecke ähnlich sind, gilt:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AZ}{A'Z} = \frac{BZ}{B'Z}$$

Diese Formel zeigt, was bei der Ähnlichkeit von Figuren behauptet wurde: Das Verhältnis (der Bruch) von entsprechenden Seiten bleibt konstant.

Der Strahlensatz findet zahlreiche Anwendunge in Physik und Mathematik. Hier erwähnen wir "nur" seine Anwendung bei der Vermessung des Abstandes zwischen Mond und Erde und bei der geometrischen Erzeugung einer Dezimalzahl auf einer Zahlgerade.

Eine Bemerkung dazu: Das erste in der Geschichte bekanntes Buch, in dem Geometrie als auf wenigen Sätzen aufgebautes geordnetes Wissen dargestellt wird, ist das Werk "Elemente" von Euklid. In diesem Werk wird erst der Strahlensatz bewiesen und dann auf die Ähnlichkeit von Figuren angewendet.

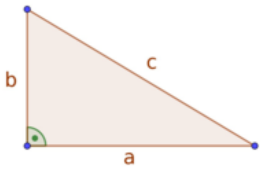
Satz von Pythagoras

Der Satz von Pythagoras lautet:

In einem rechtwinkeligem Dreieck ist die Summe der Quadrate der Katheten gleich dem Quadrat der Hypotenuse.

Der Satz gilt daher **nur** bei Dreiecken, die einen **rechten Winkel** haben.

Selbstverständlich versteht man den Satz viel besser, wenn man eine Figur sieht:



Die Seiten an der rechten Winkel nennt man ***Katheten*** (im Bild mit a und b), die Seite gegenüber ***Hypotenuse*** (im Bild mit c).

Obwohl der Satz nach dem griechischen Philosoph Pythagoras genannt wird, wurde er nicht von ihm entdeckt. Der Satz wurde zumindest 1000 Jahre früher benutzt. Es gibt Tontafel aus Babylonien, die sogenannte pythagoräische Tripeln beinhalten. Eine pythagoräische Tripel sind drei Zahlen, die den Satz von Pythagoras erfühlen.

Nehmen wir drei Zahlen: 2, 3 und 4. Sind diese eine pythagoräische Tripel? Die größte Zahl sollte die längste Seite sein, die Hypotenuse, also c. Hier ist es die Zahl 4. Dann wären die Katheten 2 und 3. Die entsprechenden Quadrate der Katheten sind $2^2=4$ und $3^2=9$, ihre Summe 4+9=13. Das Quadrat der Hypotenuse wäre $4^2=16$. Es Gilt $2^2+3^2 \neq 4^2$ (13 ist nicht gleich 16!). Das bedeutet: Es gibt kein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten 2 und 3 und dessen Hypotenuse 4 Einheiten (z.B. Meter) sind.

2,3 und 4 sind daher keine Pythagoräische Tripel. Wie ist es mit 3, 4 und 5? Sind diese Zahlen eine Pythagoräische Tripel? $3^2+4^2 = 25$ aber auch $5^2 = 25$. Es gilt also: $3^2+4^2=5^2$. Das bedeutet nicht nur, dass es ein rechtwinkeliges Dreieck gibt, dessen Katheten 3 und 4 und dessen Hypotenuse 5 Einheiten ist, sondern auch umgekehrt, dass ein Dreieck, dessen Seiten 3, 4 und 5 Einheiten sind, einen rechten Winkel haben **muss**!

In den Aufgaben muss man aufpassen. Wenn die Katheten angegeben sind und die Hypotenuse gefragt, dann kann man die gegebene Formel benutzen:

- *Bei einem rechtwinkeligen Dreieck sind die Katheten 6 und 8 cm lang. Berechnen Sie die Hypotenuse!*

$a^2+b^2 = c^2$ wobei a=6 und b=8 also

$6^2+8^2 = c^2 \rightarrow 36+64=c^2 \rightarrow 100 = c^2 \rightarrow c=\sqrt{100}=10$(cm)

Wenn aber die Hypotenuse und eine Kathete gegeben sind, dann muss man die Formel erst umformen:

- *Bei einem rechtwinkeligen Dreieck sind die eine Kathete 21mm und die Hypotenuse 29mm lang. Berechnen Sie die andere Kathete!*

$a^2+b^2=c^2 \quad |-a^2$

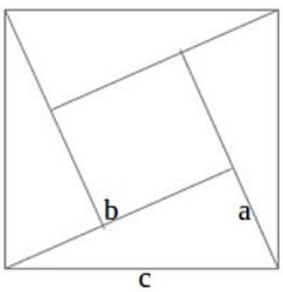
$b^2 = c^2-a^2$ also $b^2 = 29^2-21^2 = 400$ und

$b=\sqrt{400}=20$(mm)

Beweis des Satzes von Pythagoras

Der erste, der entdeckt hatte, dass es Zahlen gibt, die nicht rationale Zahlen sind, war Hippasos von Metapont, ein Schüler von Pythagoras. Diese Entdeckung war noch ein Schritt zur Forschung der Unendlichkeit, da die irrationale Zahlen unendlich viele nicht periodische Nachkommastellen haben. Zu dieser Entdeckung hat vielleicht der Satz von Pythagoras beigetragen, ein Satz der allerdir nicht von Pythagoras entdeckt wurde aber vielleicht nur bewiesen (wenn überhaupt).

Einen Beweis dieses Satzes führen wir hier mit Hilfe der folgenden Figur vor



Satz von Pythagoras

In der Figur sieht man ein großes Quadrat, das vier kongruente (sozusagen gleiche) rechtwinkelige Dreiecke und ein kleineres Quadrat beeinhaltet. Wie man in einer Formelsammlung finden kann, ist die Fläche jedes Dreiecks $A_d = \frac{a \cdot b}{2}$ (und es gibt 4 solche Dreiecken). Die Fläche des kleinen Quadrats in der Mitte ist $A_{kQ} = (a-b)^2$ und die Fläche des großen Quadrats $A_{gQ} = c^2$. Das Ganze (das große Quadrat) ist aber die Summe seiner Teilen. Es gilt daher:

$A_{gQ} = A_{kQ} + 4 \cdot A_D$

$c^2 = (a-b)^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$

also mit Verwendung der minus binomischen Formel:

$c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab$ und daher:

$c^2 = a^2 + b^2$ ***(Satz von Pythagoras)***

Geometrie des Raums

Grundbegriffe

Dimension

Wir haben schon in der Geometrie der Ebene den Begriff der Strecke als auch verschiedene Figuren auf einer ebenen Fläche (z.B. Quadrat, Kreis, Dreieck, Rechteck) kennengelernt. Für eine Strecke braucht man nur die Länge angeben (z.B. 2,4dm), dann hat man sie vollständig beschrieben. Alle Strecken mit dieser Länge sind die gleiche Sache (man sagt in Mathematik: Sie sind Kongruent).

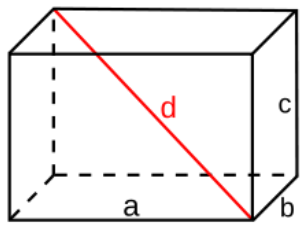

Verschiedene Rechtecke mit gleicher Länge und anderer Breite

Bei einem Rechteck hingegen reicht die Länge nicht aus. Es gibt unendlich viele Rechtecke mit der gleichen Länge und eine andere Breite. Diese Rechtecke sind nicht mehr die gleiche Sache. Sie haben auch einen anderen Flächeninhalt. Sie sind nicht kongruent. Man braucht daher bei Flächen zwei Zahlen, die Abstände beschreiben, beim Rechteck ist das die Länge und die Breite.

Wenn man jetzt eine Figur im Raum betrachtet, z.B. einen Quader, dann reichen die Länge und die Breite wieder nicht aus. Da braucht man noch einen Abstand, die Höhe. Wenn die Höhe anders ist, dann ist auch das Volumen anders.

Die Anzahl der Abstandswerte, die man braucht, um eine Figur vollständig zu beschreiben, nennt man Dimension.[1]

Eine Strecke ist eine eindimensionale Figur: Allein ein Abstand (die Länge), reicht aus, um sie zu beschreiben. Ein Rechteck (und alle ebene Figuren) ist eine zweidimensionale Figur: Man braucht zwei Abstände (Länge und Breite), um sie zu beschreiben. Ein Quader (und alle Figuren, die Raum besetzen) ist eine dreidimensionale Figur: Man braucht drei Abstände (Länge, Breite und Höhe), um sie zu beschreiben. In unserem Bild eines Quaders wird die Länge mit a, die Breite mit b und die Höhe mit c bezeichnet.



Quader mit Raumdiagonale d

Obwohl wir Menschen uns nicht mehrere Dimensionen vorstellen können, gibt es in der Physik theoretische Modelle, die noch mehrere Dimensionen haben. Beispielsweise setzt die allgemeine Relativitätstheorie die Zeit als eine weitere Dimension des sogenannten Zeitraums voraus! Die Stringtheorie kann sogar 11 Dimensionen voraussetzen!

1. Allerdings wird in der Physik nicht nur der Abstand, sondern auch andere Größen als Dimensionsgrundlagen benutzt, z.B. ist in der Relativitätstheorie die Zeit eine vierte Dimension der sogenannten *Raumzeit*

Körper

Ein Gegenstand in der Geometrie wird Körper genannt, wenn für seine Beschreibung drei Abstände notwendig und hinreichend sind.

Notwendig bedeutet, dass weniger Abstände nicht genügend sind, um den Körper zu beschreiben. Man kann nicht einen Quader nur mit Länge und Breite vollständig beschreiben.

Hinreichend bedeutet, dass man nicht mehrere Abstände oder eine andere Dimension für die Beschreibung braucht. Wenn die Länge, die Breite und die Höhe des Quaders gegeben sind, braucht man nicht auch die Raumdiagonale angeben (sie wird schon von den anderen drei Abständen bestimmt).

Jede dreidimensionale Figur ist ein (geometrischer) Körper. In diesem Text wird auch das Wort „Raumfigur" dafür benutzt.

Kante

Im Kapitel über die Geometrie der Ebene haben wir den Begriff der Seite einer ebenen Fläche gesehen. Bei einem Quadrat sind alle Seiten gleich, bei einem Rechteck gibt es eine Länge und eine Breite. Die Strecken am Rand einer ebene Figur wurden also Seiten genannt.

Die Strecken am Rand eine Raumfigur werden aber doch **Kanten** ***genannt***. Das Wort „***Seite***" wäre in diesem Fall verwirrend: man wüsste dann nicht, ob mit „*Seite*" die Seiten***fläche*** oder die Seiten***strecke*** gemeint ist. Daher benutzt man das Wort „Kante" für die Strecken. In unserem Bild eines Quaders wird die Länge mit a, die Breite mit b und die Höhe mit c bezeichnet. a,b und c sind daher Kanten des Quaders. Es gibt in diesem Bild 4 Kanten, die so lang wie a sind, 4 Kanten, die so lang wie b sind, und 4 Kanten, die so lang wie c sind.

Für die ebenen Flächen, die die Figur begrenzen, benutzt man die Worte „Grundfläche", „Seitenfläche" und „Deckfläche". Es gibt selbstverständlich auch Raumfiguren, die von keinen ebenen Flächen begrenzt werden, wie beispielsweise die Kugel.

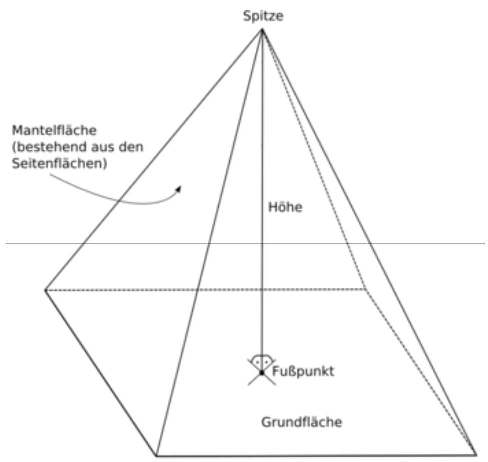
Ecke und Raumdiagonale

Den Punkt, wo drei Grenzflächen aufeinander treffen, nennt man Ecke (Eckpunkt). Die Strecke zwischen zwei Eckpunkten, die nicht auf der gleichen Grenzfläche liegen, nennt man Raumdiagonal (mit d im Bild des Quaders bezeichnet).

Oberfläche

Die Grenze einer Raumfigur ist eine Fläche, ***Oberfläche*** genannt (in diesem Buch werden wir allerdings das Wort ***Grenzfläche*** dafür benutzen). Diese kann aus mehreren ebenen Flächen bestehen, wie bei einem Quader oder einer Pyramide, oder auch eine runde Fläche im Raum sein, wie bei einer Kugel, einem Zylinder oder einem Kegel. Wenn die Grenzfläche der Figur ebene Flächen beinhaltet, dann wird zwischen Grundfläche und Seitenflächen unterschieden.

Grundfläche



Grundfläche ist die Fläche, die im Bild unten (am Grund) steht. Bei Figuren deren Grenzflächen alle die gleiche Form haben (wie z.B. in einem Quader, wo alle Grenzflächen Rechtecke sind), kann jede beliebige Fläche der Figur als Grundfläche benutzt werden.

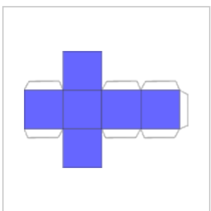
Wenn es eine Grenzfläche gibt, die sich von den anderen unterscheidet (wie z.B. bei der Pyramide in unserem Bild: alle Flächen außer einer sind Dreiecke), dann wird i.d.R. diese Fläche als Grundfläche bezeichnet.

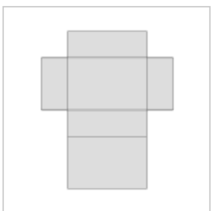
Wenn es eine Grundfläche gibt, dann kann ihr gegenüber nur ein Punkt oder eine ganze Fläche stehen. Wenn ihr gegenüber eine ganze Fläche steht, dann nennt man diese Fläche ***Deckfläche*** (da sie an der „Decke" ist). Die Deckfläche kann auch rund sein. Wenn der Grundfläche gegenüber nur ein Punkt liegt (wie in der Pyramide am Bild), dann nennt man diesen Punkt ***Spitze***.

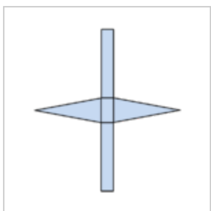
Seitenfläche und Mantel

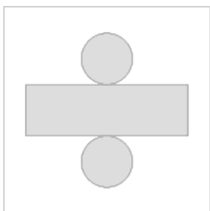
Wenn es eine Grundfläche gibt, dann nennt man jede der restlichen Flächen ***Seitenfläche*** (außer der Deckfläche, wenn es eine gibt). Alle Seitenflächen zusammen nennt man ***Mantel***. Der Mantel kann allerdings auch aus runden und nicht nur ebenen Flächen bestehen, wie z.B. in einem Zylinder (der auch eine Deckfläche hat, die ebenfalls ein Kreis ist) oder einem Kegel (der keine Deckfläche hat, dafür eine Spitze).

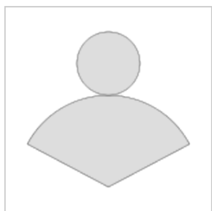
Körpernetz


Netz eines Würfels


Netz eines Quaders

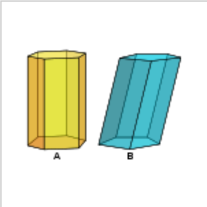

Netz eines Prismas


Netz eines Zylinders

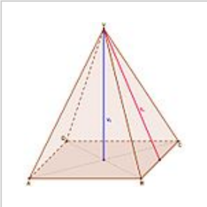

Netz eines Kegels

Wenn man die Grenzflächen eines Körpers abwickelt, so dass eine (komplizierte) ebene Figur entsteht, dann nennt man diese ebene Figur Körpernetz (oder einfach Netz). Das ist immer möglich, wenn die Grenzflächen ebene Figuren sind, allerdings nicht immer, wenn die Grenzflächen rund sind. Das ist möglich bei einem Quader, einem Zylinder oder einem Kegel aber nicht möglich bei einer Kugel oder einem Torus.

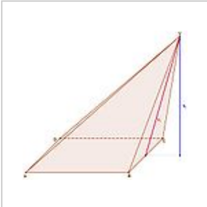
Gerade und schiefe Körper



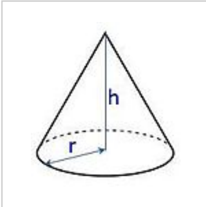
A: gerades Prisma
B: schiefes Prisma



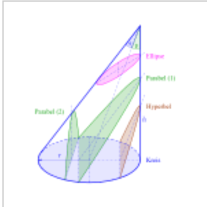
Gerade Pyramide



Schiefe Pyramide



Gerader Kegel

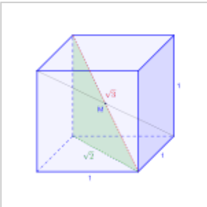


Schiefer Kegel

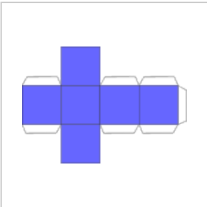
Wenn es bei einem Körper eine Grundfläche gibt, dann gibt es gegenüber entweder eine Fläche oder einen Punkt. Wenn der gegenüberliegende Punkt oder der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Fläche direkt oberhalb (also senkrecht nach oben) vom Mittelpunkt der Grundfläche liegen, dann sagt man, dass der Körper gerade ist, sonst dass er schief ist.

Figuren

Würfel



Würfel



Würfelnetz

Spielwürfel

Definition

*Eine geschlossene Raumfigur, deren Grenzfläche aus 6 kongruente („gleiche“) Quadrate besteht, nennt man **Würfel**.*

Formeln

Mit a wird die Länge der Kante bezeichnet.

Volumen: $V = a^3$

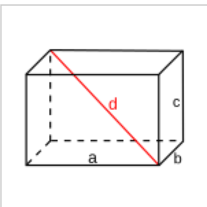
Oberfläche: $A_O = 6a^2$

Kantensumme: $K = 12a$

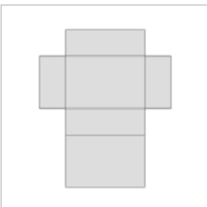
Raumdiagonale (rot im Bild): $d_R = \sqrt{3}\,a$

Flächendiagonale (grün im Bild): $d_F = \sqrt{2}\,a$

Quader



Quader



Netz eines Quader

Eine quaderförmige Mauerziegel

Definition

Eine geschlossene Raumfigur, deren Grenzfläche aus 3 Paare paarweise kongruente („gleiche“) gegenüberliegende Rechtecke besteht, nennt man Quader

Formeln

Mit a wird hier die Länge, mit b die Breite und mit c die Höhe bezeichnet (wie im Bild).

Volumen: $V = abc$

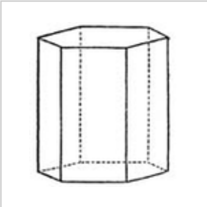
Oberfläche: $A_O = 2ab + 2ac + 2bc$

Kantensumme: $K = 4a + 4b + 4c$

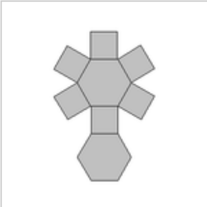
Raumdiagonale: $d_R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Flächendiagonalen: $d_{F1} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $d_{F2} = \sqrt{a^2 + c^2}$, $d_{F3} = \sqrt{b^2 + c^2}$

Prisma



Prisma



Prismanetz

Optisches Prisma

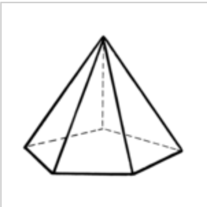
Definition

Eine geschlossene Raumfigur, die durch Parallelverschiebung eines ebenen Vielecks entlang einer nicht in dieser Ebene liegenden Geraden im Raum entsteht, nennt man Prisma. Die Höhe ist der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche.

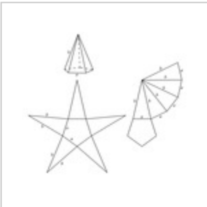
Formeln

Es gibt viele verschiedenen Prismen, daher sollte man dafür die allgemeineren Formeln benutzen, die sich am Ende dieses Teilkapitels befinden.

Pyramide



Pyramide



Pyramidennetz

Einer der ältesten bekannten Pyramiden

Maya Pyramide

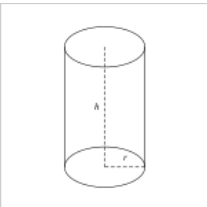
Definition

Wenn man alle Punkte des Umfangs eines Vieleckes mit einem Punkt (genannt „Spitze“ oder „Scheitel“) außerhalb der Ebene des Vieleckes verbindet, dann entsteht die Grenzfläche einer Pyramide. Das Vieleck bildet dann i.d.R. die Grundfläche, die Dreiecke, die durch die Verbindung des Punktes mit dem Umfang entstehen, sind dann die Seitenflächen. Höhe ist der Abstand zwischen Spitze und Grundfläche.

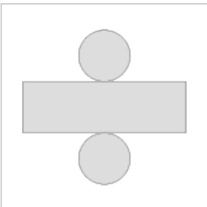
Formeln

Es gibt viele verschiedenen Pyramiden, daher sollte man dafür die allgemeineren Formeln benutzen, die sich am Ende dieses Teilkapitels befinden.

Zylinder



Zylinder



Zylindernetz

Ein klappbarer (fast) zylinderförmiger Hut

Definition

Eine geschlossene Raumfigur, die durch Parallelverschiebung einer ebenen runden Figur (z.B. eines Kreises oder einer Ellipse) entlang einer nicht in dieser Ebene liegenden Geraden im Raum entsteht, nennt man allgemeinen Zylinder. Das Wort Zylinder allein wird i.d.R. für den Körper benutzt, der durch Parallelverschiebung eines Kreises entsteht. Die Höhe ist der Abstand zwischen Grund- und Deckfläche.

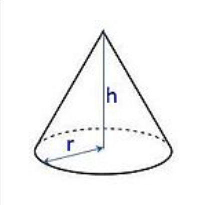
Formeln (für einen geraden Kreiszylinder)

Mit h wird hier die Höhe, mit r der Radius der Grundfläche A_G bezeichnet (wie im Bild), A_M ist die Mantelfläche:

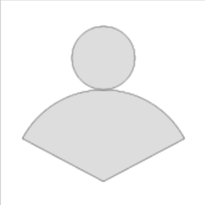
Volumen: $V = \pi r^2\ h$

Oberfläche: $A_O = 2\ A_G + A_M = 2\pi r^2 + 2\pi r\ h = 2\pi r(r + h)$

Kegel



Gerader Kegel



Kegelnetz

Spielkegel [1]

1. (die allerdings **nicht** die Form eines Kegels haben...)

Definition

Wenn man alle Punkte des Umfangs einer runden ebenen Figur mit einem Punkt (genannt „Spitze“ oder „Scheitel“) außerhalb der Figurebene verbindet, entsteht die Grenzfläche eines (allgemeinen) Kegels. Die runde Figur ist dann die Grundfläche und die Fläche, die durch die Verbindung des Punktes mit dem Umfang entsteht, ist der Mantel. Wenn die runde ebene Figur ein Kreis ist, dann spricht man von einem Kreiskegel (in der Schulmathematik oft einfach Kegel genannt). Höhe ist der Abstand zwischen Spitze und Grundfläche. Mit s bezeichnet man die „Mantellinie“ bei einem geraden Kegel.

Formeln (für einen geraden Kegel)

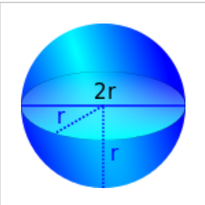
Mit h wird hier die Höhe, mit r der Radius der Grundfläche A_G bezeichnet (wie im Bild), A_M ist die Mantelfläche:

Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2\ h$

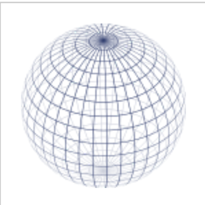
Oberfläche: $A_O = A_G + A_M = \pi r^2 + 2\pi r\ s = \pi r(2r + s)$

(wobei s die sogenannte „Mantellinie“ $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ ist)

Kugel



Kugel



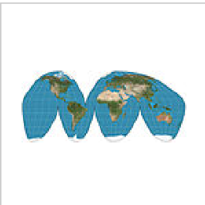
Kugel mit Längen- und Breitenkreisen

Die Erde mit Längen- und Breitenkreisen

Kugelförmige Murmeln

Gewehrkugel[1]

Ein kugelförmiger Basketball



Flächentreue Projektion der Erde[2]

1. (die allerdings **nicht** kugelförmig sind)
2. (die allerdings nicht winkeltreu ist)

Für einen Kugel kann man nicht ein Netz auf einer Ebene zeichnen (nur näherungsweise), was der berühmte Mathematiker und Physiker Carl Friedrich Gauß bewiesen hat.

Definition

Eine Raumfigur mit einer Grenzfläche, deren Punkte alle von einem Punkt in der Mitte der Raumfigur (Mittelpunkt genannt) den gleichen Abstand haben (Radius genannt), nennt man Kugel.

Formeln

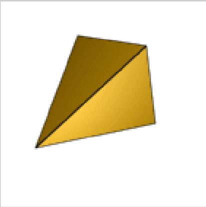
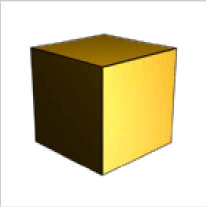
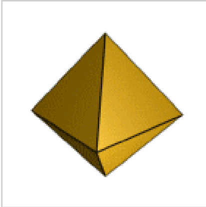
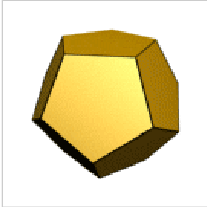
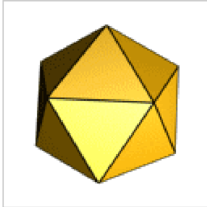
Mit r wird der Radius bezeichnet (wie im Bild).

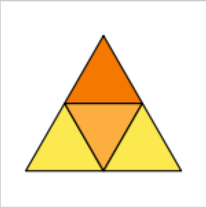
Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

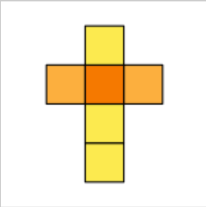
Oberfläche: $A_O = 4\pi r^2$

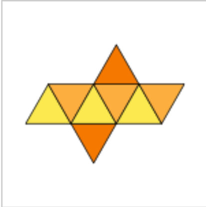
Die platonischen Körper

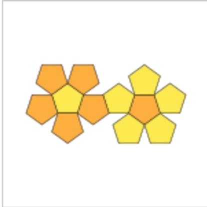
Die fünf platonischen Körper und ihre Netze

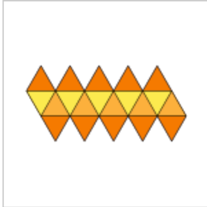







Tetraeder


Würfel[1]


Oktaeder


Dodekaeder


Ikosaeder

1. (auch Hexaeder genannt)

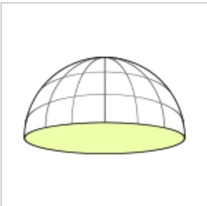
Die platonischen Körper sind Raumfiguren, dessen Grenzflächen kongruent („gleich") zueinander regelmäßige Vielecke sind. Man hat schon in Altertum bewiesen, dass es genau 5 davon gibt: der Würfel, den wir schon gelernt haben (mit 6 Quadrate als Grenzflächen), das Tetraeder (mit vier gleichseitigen Dreiecke als Grenzflächen), das Oktaeder (mit acht gleichseitigen Dreiecke als Grenzflächen), das Dodekaeder (mit zwölf regelmäßigen Fünfecke als Grenzflächen) und das Ikosaeder (mit zwanzig gleichseitigen Dreiecke als Grenzflächen). Da alle Grenzflächen kongruent sind, kann man nicht durch irgendein Merkmal eine Fläche von der anderen oder eine Kante von den andern unterscheiden. Wegen dieser und anderer Eigenschaften haben diese Körper die Philosophen und Wissenschaftler seit der antiken Zeit interessiert.

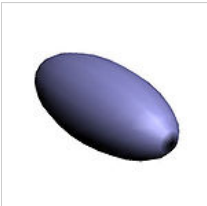
Eine schöne Animation der Körper und ihrer Körpernetze findet man hier![1]

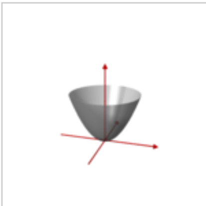
1. (Vorsicht:dieses Link kann den Browser bei alten Computer verlangsamen)

Andere Figuren


Torus


Halbkugel


Ellipsoid


Paraboloid

Selbstverständlich gibt es unendlich viele anderen Raumfiguren, hier erwähnen wir noch den Torus, die Halbkugel, die Ellipsoiden und die Paraboloiden.

Volumen- und Oberflächenregeh

Für alle Körper, die eine Grund- und eine (parellele zur Grundfläche) kongruente („gleiche") Deckfläche haben, gilt, dass das Volumen V die Grundfläche A_G mal die Höhe h ist:

$$V = A_G \cdot h$$

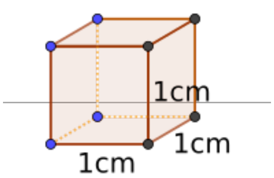
Genauer formuliert gilt diese Regel für alle Körper, die durch Parallelverschiebung einer ebenen Fläche entstehen. Für diese Körper gilt dann, dass die Mantelfläche A_M die Summe deren Teilflächen ist und die gesamte Oberfläche $A_O = A_M + 2A_G$. Für die Teilflächen sollte dann man die Formeln aus der Geometrie der Ebene benutzen.

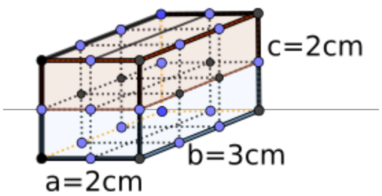
Für alle Körper, die eine Grundfläche A_G und eine gegenüber liegende Spitze haben, gilt, dass das Volumen ein drittel des Produkts der Grundfläche und der Höhe h ist:

$$V = \frac{1}{3} A_G\ h$$

Genauer gesagt muss dazu gelten, dass die Abstände zwischen Spitze und den Punkten auf dem Umfang der Grundfläche gerade sein sollen. Für diese Körper gilt dann, dass die Mantelfläche A_M die Summe deren Teilflächen ist und die gesamte Oberfläche $A_O = A_M + A_G$. Für die Teilflächen sollte dann man die Formeln aus der Geometrie der Ebene benutzen.

Intuitiver Beweis der Formel des Volumens des Quaders





1 cm³ (auch „Kubikzentimeter" genannt, Bild links) ***ist ein Würfel, dessen Kante 1cm ist***

Das Wort „Kubik" stammt aus dem griechischen Wort für Würfel. Als Hochzahl bedeutet „Kubik" hoch 3, also Kubikzentimeter (cm³), Kubikmeter (m³) usw

Wie man jetzt im Bild rechts sehen kann, wenn man einen Quader hat, dessen Länge 3cm, dessen Breite 2cm und dessen Höhe 2cm ist, dann beinhaltet dieser Quader 12 Würfel, je 1cm³, also ist das Volumen 12cm³. Man kann daraus folgen, dass das Volumen eines Quaders allgemein die Länge mal die Breite mal die Höhe ist:

$V = a \cdot b \cdot c$

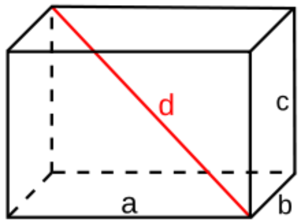
Anwendung der Formeln

Einsetzen

Die Länge eines Lineals ist 3,1 dm, seine Breite 2,5 cm, seine Dicke 2 mm. Berechnen sie die Gesamtlänge seine Kanten, seine Oberfläche und sein Volumen!

Holzlineal

Wie wir in der Geometrie der Ebene schon gelernt haben, kann man in solchen Aufgaben das Volumen durch Einsetzen berechnen. Von der Aufgabe kann man schon erschließen, dass das Lineal die Form eines Quaders hat. Hier benutzt man das Wort „Dicke" anstatt „Höhe", also wird für diese Dimension ein anderer Name benutzt. Man kann also die Formeln, die in der Formelsammlung für den Quader stehen, benutzen:



Quader

Volumen: $V = abc$

Oberfläche: $A_O = 2ab + 2ac + 2bc$

Kantensumme: $K = 12a$

(Mit a wird hier die Länge, mit b die Breite und mit c die Dicke bezeichnet)

Wie aber schon im entsprechenden Kapitel erwähnt, muss man davor warnen, falschen Einheiten anzuwenden! Die Einheiten muss man erst überprüfen und, wenn notwendig, umwandeln. Das ist in dieser Aufgabe schon der Fall:

$a = 3{,}1\,\mathrm{dm} \quad b = 2{,}5\,\mathrm{cm} \quad c = 2\,\mathrm{mm}$

Wir können alle drei Längenwerte ***entweder*** in *dm* ***oder*** in *cm* ***oder*** in *mm* benutzen. Lass uns hier alle in mm berechnen (wie wir es Kapitel über Einheiten gelernt haben):

$a = 3{,}1\,\mathrm{dm} = 310\,\mathrm{mm} \quad b = 2{,}5\,\mathrm{cm} = 25\,\mathrm{mm} \quad c = 2\,\mathrm{mm}$

Erst jetzt können wir diese Werte in die Formel einsetzen:

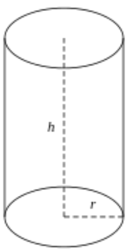
Volumen: $V = abc = 310\,\mathrm{mm} \cdot 25\,\mathrm{mm} \cdot 2\,\mathrm{mm} = 15500\,\mathrm{mm}^3$

Oberfläche: $A_O = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot 310\,\mathrm{mm} \cdot 25\,\mathrm{mm} + 2 \cdot 310\,\mathrm{mm} \cdot 2\,\mathrm{mm} + 2 \cdot 25\,\mathrm{mm} \cdot 2\,\mathrm{mm} = 16840\,\mathrm{mm}^2$

Kantensumme: $K = 4a + 4b + 4c = 4(a + b + c) = 4(310\,\mathrm{mm} + 25\,\mathrm{mm} + 2\,\mathrm{mm}) = 1348\,\mathrm{mm}$

Umformen

Bei manchen Aufgaben muss man die Formel umformen (wie bei der Geometrie der Ebene), z.B.:



Zylinder

Das Volumen eines (geraden) Zylinders ist 530cm³, seine Höhe 70mm. Wie viel ist seine Fläche?

In der Formelsammlung findet man die Formel für die Fläche:

Oberfläche: $A_O = 2\pi\, r^2 + 2\pi\, r\, h$

Wenn man die Formel betrachtet, findet man schon das Symbol h für die Höhe. Diese aber reicht nicht für die Berechnung des Volumens aus! Man braucht auch den Radius r der Grundfläche. Daher wendet man sich an den anderen Vorgaben der Aufgabe. Dort findet man den Wert nicht nur für die Höhe, sondern auch fürs Volumen V.

Volumen: $V = \pi r^2 h$

Die Werte sowohl fürs Volumen als auch für die Höhe sind gegeben, daher kann man durch Umformen auch den Wert für den Radius berechnen:

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h && |:(\pi h) \\ \frac{V}{\pi h} &= r^2 && |\sqrt{\ } \\ r &= \sqrt{\frac{V}{\pi h}} \end{aligned}$$

Die vorsichtige Leserin (oder Leser) hat vielleicht hier schon gemerkt, dass für die Höhe der Wert 7 anstatt 70 benutzt wurde. Wenn sie (oder er) noch den Grund nicht versteht, sollte sie bitte noch mal den vorherigen Unterkapitel über Einsetzten noch mal lesen!

Jetzt kann man leicht die Oberfläche berechnen:

$A_O = 2\pi r(r + h) = 2\pi 4{,}9(4{,}9 + 7) \approx 366{,}4\ (cm^2)$

Kubikwurzel

Das Volumen eines Würfels ist 530cm³. Wie viel ist seine Fläche?

Diese Aufgabe ist ähnlich zur Aufgabe im letzten Unterkapitel über Umformen. Die Formeln für den Würfel sind:

$V = a^3 \quad A_O = 6a^2$.

Man muss erst die Kante a des Würfels berechnen, um seine Fläche berechnen zu können. Man kann dafür die Formel fürs Volumen benutzen, $V = a^3$, da der Wert des Volumens auch gegeben ist. Welche ist aber die Gegenrechnung von „hoch 3“? Diese Gegenrechnung nennt man Kubikwurzel oder noch besser dritte Wurzel:

$$a^3 = V \quad \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{V}$$

$$a = \sqrt[3]{530} \approx 8,1\ (cm)$$

Dann kann man leicht die Oberfläche berechnen:

$$A_O = 6a^2 \approx 6 \cdot 8,1^2 \approx 393,7(cm^2)$$

Entsprechend zur Wurzel (die besser Quadratwurzel genannt wird), ist die dritte Wurzel (auch Kubikwurzel genannt) nur dann eine genaue Zahl, wenn die Zahl unter der Wurzel eine sogenannte Kubikzahl ist, wie z.B.:

1(=1³), 8(=2³), 27(=3³), 64(=4³), 125(=5³), 216(=6³), 343(=7³), 512(=8³), 729(=9³), 1000(=10³), 0,008(=0,1³), 9,261(=2,1³)...

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1} &= 1 \\ \sqrt[3]{27} &= 3 \\ \sqrt[3]{343} &= 7 \\ \sqrt[3]{9{,}261} &= 2{,}1 \end{aligned}$$

Die Kubikwurzel von jeder anderen Zahl (die keine Kubikzahl ist) ist eine irrationale Zahl.

Diese Idee der Gegenrechnung kann man auf alle Hochzahlen erweitern:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{a} = b &\quad \rightarrow \quad a = b^4 \\ \sqrt[5]{m} = n &\quad \rightarrow \quad m = n^5 \\ \sqrt[-10]{x} = z &\quad \rightarrow \quad x = z^{-10} \\ \sqrt[35]{p} = q &\quad \rightarrow \quad p = q^{35} \end{aligned}$$

oder sogar (!):

$$\begin{aligned} \sqrt[4{,}3]{a} = b &\quad \rightarrow \quad a = b^{4{,}3} \\ \sqrt[0{,}3]{m} = n &\quad \rightarrow \quad m = n^{0{,}3} \\ \sqrt[\sqrt{6}]{x} = z &\quad \rightarrow \quad x = z^{\sqrt{6}} \\ \sqrt[x]{p} = q &\quad \rightarrow \quad p = q^{x} \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Symbole benutzt man keine Zahl am Anfang des Wurzelzeichens, nur wenn es um die Quadratwurzel geht:

$\sqrt[2]{m}$ ist gleichbedeutend wie $\sqrt{m}$

Herzlichen Dank an alle, deren Bilder ich in diesem Kapitel benutzt habe!

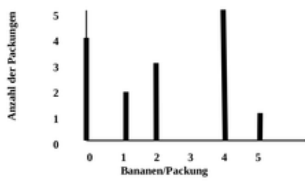
Diagramme

Einführung

In Diagrammen kann man verschiedene Daten in einem Bild darstellen, die man dann schnell ablesen kann. Diagramme können helfen, einen schnellen Überblick zu bekommen, werden aber auch oft benutzt, um einen falschen Eindruck zu bewirken. Hier werden das Säulendiagramm, das Liniendiagramm, das Kreisdiagramm und das Boxplotdiagramm präsentiert, es gibt aber auch zahlreiche andere Diagrammarten, wie z.B. Punktdiagramm, Balkendiagramm usw.

Säulendiagramm

Das folgende Diagramm gibt die Anzahl der Packungen die eine gewisse Anzahl von Bananen pro Packung beinhalten.



Säulendiagramm

So ein Diagramm nennt man ***Säulendiagramm***, weil es aus „Säulen“ besteht. Wenn die Frage z.B. ist, wie viele Packungen 4 Bananen haben, geht man so vor:

Auf der Achse unten (waagerechte Achse, x-Achse) kann man die Bananen pro Packung ablesen, also kann man Bananen ablesen. Da wo 4 Bananen stehen (unten am Diagramm) befindet sich eine Säule. Man kann sehen, wie hoch diese Säule ist. Sie ist so hoch wie 5 Packungen. Die Anzahl der Packungen kann man links ablesen (auf der senkrechte Achse, der y-Achse). Also es gibt 5 Packungen mit 4 Bananen.

Wie viele Packungen haben 3 Bananen? Da, wo 3 Bananen stehen (unten, x-Achse), gibt es keine Säule! Die Höhe der Säule ist daher 0. Es gibt also keine (0) Packung, die 3 Bananen hat!

Wie viele Packungen haben keine Banane? Da, wo 0 Bananen stehen (unten, x-Achse), gibt es eine Säule, die 4 Packungen hoch ist. Es gibt also 4 Packungen mit keiner Banane!

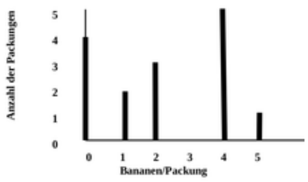
Wie viele Packungen haben höchstens 3 Bananen? Höchstens bedeutet bis, also so viel wie 3 Bananen oder weniger (also 2, 1 oder keine Banane). Es gibt keine Packung mit 3 Bananen, 3 Pack. mit 2 Ban., 2 Pack. mit 1 Banane und 4 Pack. mit keiner Banane, also insgesamt 0+3+2+4=9 Pack..

Wie viele Packungen haben mindestens 3 Bananen? Mindestens bedeutet ab, also so viel wie 3 Bananen oder mehr (also 4, 5, 6 oder mehr Bananen). Es gibt keine Packung mit 3 Bananen, 5 Pack. mit 4 Ban. und 1 Pack. mit 5 Ban., also insgesamt 0+5+1=6 Pack..

Mittelwerte bei einem Säulendiagramm

Bei einem Säulendiagramm kann man auch Mittelwerte finden. Nehmen wir das gleiche Diagramm:

Aus dem Diagramm kann man eine Tabelle erzeugen!

	Bananen pro Packung	Anzahl der Packungen	Gesamte Bananen in diesen Packungen	
	0	4	0·4=	0
	1	2	1·2=	2
	2	3	2·3=	6
	3	0	3·0=	0
	4	5	4·5=	20
	5	1	5·1=	5
		4+2+3+0+5+1=		0+2+6+0+20+5=
	Summe	15 *Packungen*		33 *Bananen*

Es gibt also 33 Bananen in 15 Packungen. Der **Durchschnitt** ist daher: $\frac{33}{15} = 2,2$ B/P (Bananen pro Packung) im Durchschnitt.

Man kann auch den Median finden. Man soll die Werte (wie viele Bananen) einordnen. Wir haben 4 Packungen mit 0 Bananen (also die null kommt vier mal vor), 2 mit einer Banane, 3 mit 2 Bananen usw.:

$$\underbrace{0,0,0,0,1,1,2,}_{\longleftarrow 7\text{ Werte}}\;\underbrace{2}_{Median}\;\underbrace{,2,\overbrace{\color{red}{4,4,4,4,4}}^{Modus},5}_{7\text{ Werte}\longrightarrow}$$

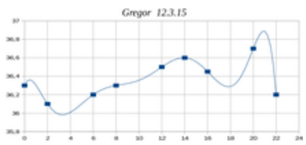
Wie man sehen kann, 3 kommt nicht vor. Wir haben ja keine Packung mit 3 Bananen, also der Wert 3 Bananen kommt nicht vor! Wir haben insgesamt 15 Werte (15 Packungen). Der Wert in der Mitte ist der achte Wert, also 2. Der **Median** ist 2.

Welcher Wert kommt öfters vor? 4 Bananen kommt 5 mal vor (in 5 Packungen). Alle andere Werte kommen nicht so oft vor. Also 4 ist der **Modalwert**.

Liniendiagramm

In einem Liniendiagramm spricht man von einem Koordinatensystem. Es gibt zwei „Koordinaten", die x-Achse (senkrecht) und die y-Achse (waagerecht).

In Balkendiagramm im vorherigen Absatz hatten wir diskrete Werte. Das bedeutet, das man z.B. den Wert 2 und den Wert 3 (Bananen im letzten Beispiel) hat, aber keinen Wert dazwischen (z.B. keine 2,156 Bananen). Das Gegenteil von diskreten Werten sind die kontinuierliche Werte. In unserem Beispiel hier sieht man eine sogenannte (quasi-kontinuierliche) Kostenkurve. Man kann in Diagramm ablesen, sowohl wie viel die Produktion von z.B. 60 T-Shirts kostet, als auch wie viele T-Shirts man mit z.B. 20€ produzieren kann. Für die erste Frage (wie viel kosten 60 T-Shirts) fängt man an der x-Achse an, da wo die Anzahl der T-Shirts angegeben ist. Man geht von 60 (T-Shirts) senkrecht nach oben, bis man die Linie (oft Kurve genannt) trifft. Dann geht man waagerecht zur y-Achse (hier links), bis man die y-Achse trifft, da wo die Kosten stehen. In diesem Fall sind die Kosten 25€. Umgekehrt geht man vor, wenn die Kosten angegeben sind. In unserem Beispiel sind 20€ gegeben. Wie viele T-Shirts kann man damit produzieren? Man fängt in diesem Fall mit der y-Achse an, da auf dieser Achse die Kosten angegeben sind. Man geht dann waagerecht rechts bis man die Linie trifft und dann senkrecht nach unten, bis man die x-Achse trifft. Da kann man 45 T-Shirts ablesen. Man kann also mit 20€ 45 T-Shirts produzieren.



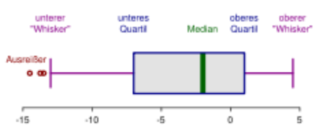
Die Kurve in einem Liniendiagramm kann irgendeine Form haben (und nicht nur eine Gerade). Das folgende Beispiel zeigt die Körpertemperatur von einer Person (namens Gregor) am 12.3.15. Man kann sich aber vorstellen, was im Diagramm dargestellt wird. Man kann z.B. sehen welche Temperatur Gregor um 6 oder um 22.15 Uhr hatte, oder am welchen Zeitpunkten seine Temperatur z.B. 36,45°C oder 36,6°C war.

Kreisdiagramm

Ein Kreisdiagramm zeigt Anteile des Ganzen. Es kann benutzt werden, um einen schnellen Überblick von statistischen Daten zu bekommen.

Ein Beispiel: In einer Klasse sind 8 Personen aus Österreich, 2 aus Deutschland, 2 aus der Türkei, 2 aus Serbien und 2 aus Tschechien. Diese Information kann man so wie im Bild in einem Kreisdiagramm darstellen. Die Hälfte des Kreises sind die 8 Personen aus Österreich. Die andere Hälfte ist in vier gleichen Teilen geteilt, also jeweils 2 Personen für Türkei, Deutschland, Serbien und Tschechien.

Boxplot



Ein Boxplotdiagramm hilft bei der Darstellung von statistischen Daten, wobei es nicht um ein ganzes geht (im Gegenteil zum Kreisdiagramm). Mit einem Boxplotdiagramm bekommt man einen schnellen Überblick über die Verteilung der Daten. Im Bild kann man mit einer dicken senkrechten Linie den Median sehen. Das „Box" fängt links dort, wo ¼ der Daten stehen und endet rechts dort, wo ¾ der Daten stehen. Dazu gibt es zwei senkrechte Linien, die den kleinsten und den größten Wert zeigen. Dazu kann es auch „Ausreißer" geben, also Daten die zu groß oder zu klein sind.

Lineare_Gleichungssysteme

Einsetzungsverfahren

In einem Café gibt es 8 Tische. Manche sind für 3Personen und der Rest für 5 Personen. Insgesamt kann das Café 36 Personen bedienen. Wieviele 3 bzw. 5 Personen-Tische gibt es im Café?

Wie löst man so eine Aufgabe? Man benutzt ein sogenanntes lineares Gleichungssystem. Wir werden uns hier mit der einfachste Form eines Gleichungssystems beschäftigen, einem Gleichungssystem mit zwei unbekannten und zwei Gleichungen. Es gibt verschiedene Wege so ein System zu lösen, wir werden hier zunächst einmal einen Weg zeigen.

Hier gibt es zwei unbekannte, die Anzahl der Tische für 3 Personen und die Anzahl der Tische für 5 Personen. Wenn man in Mathematik etwas nicht kennt, benutzt man ein Symbol dafür, in der Regel x (kann aber a, b, z, A_1, oder irgendwas sein). Lass uns dann mit x die Anzahl der Tische für 3 Personen bezeichnen. Wir wissen nicht, ob die Anzahl der Tische für 5 Personen gleich so groß wie die Anzahl der Tische für 3 Personen ist. Daher müssen wir für die Anzahl der Tische für 5 Personen ein anderes Symbol benutzen, z.B. y. Also:

x: die Anzahl der Tische für 3 Personen

y: die Anzahl der Tische für 5 Personen

Wie schon gesagt, wir wissen nicht, wie viele Tische es für 3 oder für 5 Personen gibt. Wir wissen aber schon, dass es insgesamt 8 Tische gibt. Also die **x** Tische und die **y** Tische ***zusammen*** sind ***8 Tische***:

$x + y = 8$

Die x Tische sind für 3 Personen. Wir wissen zwar nicht, wie viel x ist, aber wir können sagen, dass

1 Tisch → (3 · 1 =) 3 Personen
2 Tische → (3 · 2 =) 6 Personen
5 Tische → (3 · 5 =) 15 Personen
8 Tische → (3 · 8 =) 24 Personen also

x Tische → (3 · x =) $3x$ Personen

da wir x Tische haben, anstatt eine bestimmte Zahl, wie 1, 2, 5 oder 8 Tische.

In der gleichen Weise kann man sagen, dass die y Tische (für 5 Personen) $5y$ Gäste bedienen können.

Wir haben also $3x$ Personen an den x Tischen und $5y$ Personen an den y Tischen.

Wir wissen jetzt nicht, wie viel **3x** oder **5y** ist (das sind ***Personen***), wir wissen aber, dass ***insgesamt*** **36** Personen bedient werden können, also:

$3x + 5y = 36$

Wir schreiben jetzt beide Gleichungen zusammen:

$x + y = 8$

$3x + 5y = 36$

Mit einer Gleichung können wir weder x noch y finden, wir können aber hier die erste Gleichung (am einfachsten) umformen:

$x = 8 - y$

Da wir es **wissen**, dass x=8−y ist, können wir dann in der zweiten Gleichung statt x, 8−y schreiben:

$3\cancel{x}^{(=8-y)} + 5y = 36$ (x wird also durch 8-y ersetzt)

$$3 \cdot \overbrace{(8-y)}^{(hier\ war\ x)} + 5y = 36$$

Jetzt haben wir eine Gleichung mit einem Unbekannten. So was können wir schon lösen, wie wir beim Kapitel Umformen gelernt haben:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (8-y) + 5y &= 36 && \text{|Klammer auflösen} \\ 24 - 3y + 5y &= 36 && \text{|-24 (und y zusammenrechnen)} \\ 2y &= 12 && \text{| :2} \\ y &= 6 \end{aligned}$$

y sind die Tische mit 5 Personen. Es gibt also 6 Tische für 5 Personen. Wie viele sind die restlichen? Wir benutzen unsere Gleichung:

$x = 8 - \cancel{y}^{=6} \quad \rightarrow \quad x = 8 - 6 = 2$

Es gibt also x=2 Tische für 3 Personen und y=6 Tische für 5 Personen. Somit haben wir die Aufgabe gelöst!

Definitionen

Lass uns jetzt ein paar Begrife erklären.

Eine ***Gleichung*** ist ein mathematischer Ausdruck, der das Symbol „=“ („ist“, „gleich“ oder „ist gleich“ ausgedrückt) zumindest einmal beinhaltet und bei dem auf beide Seiten des Symbols „=“ andere mathematische Ausdrücke stehen. „6+3=“ ist noch keine Gleichung, „6+3=9“ oder „6+3=x“ oder „6+y=x“ schon.

Wenn alle Variablen in der Gleichung ohne Hochzahl oder sonst was vorkommen, dann spricht man von einer ***linearen*** Gleichung[1]. $6+3=x$ oder $6+y=x$ oder $6+5y=\frac{x}{3}$ sind lineare Gleichungen. $6+3=x^2$, $6+3=\sqrt{x}$ oder $6+5y=\frac{3}{x}$ hingegen nicht (letztere weil x im Nenner ist).

Eine Gleichung kann keine, eine oder mehrere Variablen beinhalten. $6+3=9$ hat keine Variable (und ist allerdings eine wahre Aussage: 6+3 ist tatsächlich 9). $6+3=x$, $6+3=x^2$, $6+3=\sqrt{x}$ haben eine Variable. $6+y=x$, $6+5y=\frac{x}{3}$ und $6+5y=\frac{3}{x}$ haben zwei Variablen.

Wenn man zwei oder mehrere Gleichungen irgendwie verbindet, dann hat man ein ***Gleichungssystem***. In diesem Kapitel haben wir 2 Gleichungen je mit 2 unbekannten gehabt:

$x + y = 8$

$3x + 5y = 36$

Da beide Gleichungen hier linear sind, spricht man von einem ***linearen*** Gleichungssystem. So ein System kann man in verschiedenen Wege lösen. Der Weg, den wir hier benutzt haben, nennt man ***Einsetzungsverfahren***. Es gibt dann noch das *Gleichsetzungsverfahren* und das *Additionsverfahren* (wir werden sie gleich lernen). Das Einsetzungsverfahren ist sehr wichtig (auch in anderen Wissenschaften, wie in der Physik), da man es leicht auch bei nicht lineare Gleichungssysteme anwenden kann. Dieses Thema ist von einem höheren Niveau und daher nicht in diesem Buch behandelt.

Die Zahlen (manchmal aber auch Symbole), die vor den Variablen stehen und mit diesen multipliziert werden, nennt man ***Koeffizienten***. In der zweiten Gleichung ($3x + 5y = 36$) ist der Koeffizient von x 3 und von y 5. In der ersten Gleichung ($x + y = 8$) steht keine Zahl vor den Variablen. Trotzdem sagt man dann, dass der Koeffizient 1 ist (es gilt ja, dass $1 \cdot x = x$ und $1y = y$ ist). Bei $\frac{x}{5} - \frac{3y}{7} - z + c\,v = d$ ist der x-Koeffizient $\frac{1}{5}$, der y-Koeffizient $-\frac{3}{7}$ und der z-Koeffizient -1. Die Symbole c und d sind in dieser Gleichung nicht Variablen (das ist aber nicht immer klar, man soll in solchen Fällen immer die Vorgaben lesen). Wenn ein Symbol benutzt wird, der eine feste Zahl (und daher keine Variable) darstellt, dann nennt man diese Symbol eine ***Konstante***. Die Konstante c ist hier gleichzeitig der Koeffizient der Variablen v. Die Konstante d hingegen ist keiner Koeffizient.

Wie wir später in diesem Kapitel feststellen werden, ein Gleichungssystem kann keine, zwei oder unendlich viele Lösungen haben.

Gleichsetzungsverfahren

Bei diesem Verfahren formt man zwei Gleichungen auf einer Variable um und setzt dann die andere Seiten beider Gleichungen gleich. Dieses Verfahren ist nur bei bestimmten einfachen Aufgaben leicht zu verwenden und daher nicht besonders zu empfehlen. Warum das so ist, kann man gleich im Beispiel des vorherigen Teilkapitels feststellen:

$x + y = 8$

$3x + 5y = 36$

Formen wir beide Gleichungen auf x um:

- Die erste Gleichung geht leicht:

$x + y = 8$ daher

$x = 8 - y$

- Die zweite Gleichung ist etwas schwerer:

$3x + 5y = 36$ |-5y
$3x = 36 - 5y$ |:3
$x = \frac{36-5y}{3}$

Das Gleichungssystem sieht jetzt wie in Folgendem aus:

$x = 8 - y$
$x = \frac{36-5y}{3}$

Da beide Ausdrücke rechts der beiden Gleichungen gleich mit x sind, sind sie auch zueinander gleich:

$\frac{36-5y}{3} = 8 - y$

Jetzt haben wir eine Gleichung mit einer Unbekannte, was man mit Umformen lösen kann:

$\frac{36-5y}{3} = 8 - y$ |·3
$36 - 5y = 3(8 - y)$ |(Klammer auflösen)
$36 - 5y = 24 - 3y$ |-36+3y
$-2y = -12$ |:(-2)
$-y = 6$

und daher

$x = 8 - y = 8 - 6 = 2$

Die Antwort ist:

$x = 2$ und $y = 6$

also genau wie vorher, wie es zu erwarten war.

Additionsverfahren

Das Additionsverfahren ist wichtig, weil es das einfachste bei komplizierteren Gleichungssystemen ist, z.B. mit mehreren Gleichungen und Variablen. Solche größere Gleichungssysteme kommen vor allem in Physik und Mathematik vor. Wie das Verfahren funktioniert kann man am Besten durch ein Beispiel verstehen.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 11 \\ 7x + 2y = -4 \end{array} \right\}$$

Nehmen wir hier die Variable y (man kann aber genauso die Variable x benutzen). Der y-Koeffizient in der ersten Gleichung ist 3 und in der zweiten 2. Wenn wir den ersten Koeffizient mit 2 multiplizieren und den zweiten mit -3 bekommen wir 6 und ihre Gegenzahl -6. Wenn wir beide Seiten der ersten Gleichung mit 2 multiplizieren, dann haben wir auf beiden Seiten das Gleiche gemacht und beide Seiten werden weiter gleich bleiben (siehe Gegenrechnungen). Ebenfalls wenn wir beide Seiten der zweiten Gleichung mit -3 multiplizieren, bleiben beide Seiten dieser Gleichung gleich:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=11 \\ 7x+2y=-4 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} |\cdot 2 \\ |\cdot(-3) \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{c} 4x+6y=22 \\ -21x-6y=12 \end{array}\right\}$$

Wenn wir jetzt die Summe der linken Seiten und die Summe der rechten Seiten beider Gleichungen berechnen, werden die Ergebnisse gleich sein:

$$4x+6y-21x-6y=22+12$$

$$-17x=34$$

Zauberei! Jetzt haben wir nur eine Gleichung mit einem Unbekannten, die wir sofort lösen können!

$$-17x=34 \qquad |:(-17)$$

$$x=-2$$

Wenn wir jetzt eine der beiden Anfangsgleichungen nehmen, können wir auch y berechnen. Nehmen wir die erste:

$2\cancel{x}^{(=-2)}+3y=11$ (x ist -2, wie wir gerade berechnet haben)

$$2\cdot\overbrace{(-2)}^{(=x)}+3y=11$$

$-4+3y=11$ |+4

$3y=15$ |:3

$$y=5$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet daher:

$x=-2$ und $y=5$

Tatsächlich kann man diese Werte in beiden Gleichungen einsetzen und feststellen, dass das Ergebnis stimmt. Ersetzen wir in beiden Gleichungen x durch -2 und y durch 5, dann bekommen wir eine wahre Aussage:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cancel{x}^{(=-2)}+3\cancel{y}^{(=5)}=11 \\ 7\cancel{x}^{(=-2)}+2\cancel{y}^{(=5)}=-4 \end{array}\right\}$$

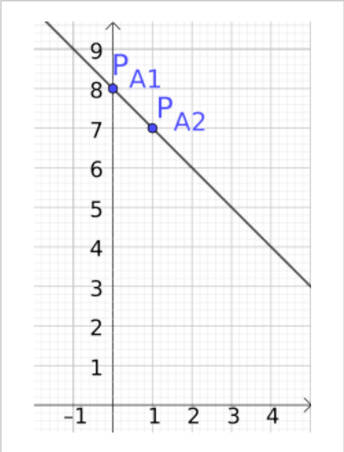
$$\left\{\begin{array}{l} 2(-2)+3\cdot 5=11 \\ 7(-2)+2\cdot 5=-4 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \text{(tatsächlich } -4+15=11)! \\ \text{(tatsächlich } -14+10=-4)! \end{array}$$

Es gibt kein anderes Zahlenpaar, der beide Gleichungen richtig löst, also die Lösung ist eindeutig. Ist es aber immer so? Das ist das Thema des nächsten Unterkapitels.

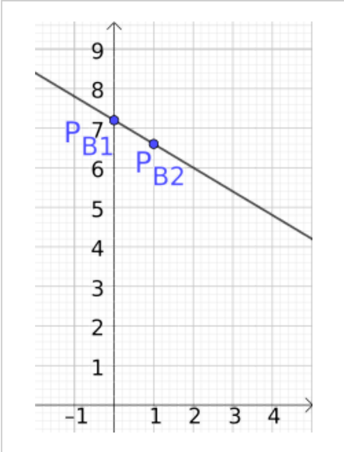
Graphische Lösung eines linearen Gleichungssystems

Im Kapitel über lineare Funktionen wird erklärt, wie man in einem Koordinatensystem eine lineare Funktion mit Hilfe von zwei Punkten zeichnen kann (zwei Punkte sind eine hinreichende und notwendige Voraussetzung, um eine lineare Funktion zu definieren; daher reichen zwei Punkte um die Funktion zu zeichnen). Nehmen wir die erste Funktion vom folgendem Gleichungssystem:

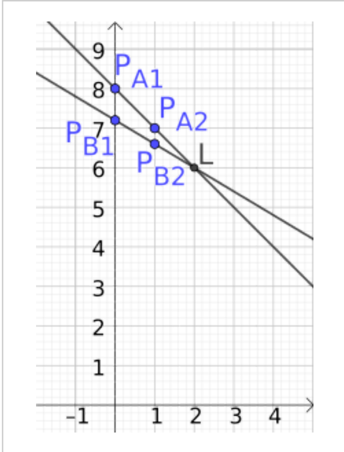
$x+y=8$ (Funktion A)
$3x+5y=36$ (Funktion B)



Funktion A



Funktion B



Funktion A und B

Man kann zwei Punkte für die Funktion finden, indem man willkürlich Werte für x angibt und die entsprechenden Werte für y findet. Für $x = 0$ ist:

$x + y = 8 \rightarrow y = 8 - x \rightarrow y = 8 - 0 \rightarrow y = 8$.

Für $x = 1$ ist:

$x + y = 8 \rightarrow y = 8 - x \rightarrow y = 8 - 1 \rightarrow y = 7$.

Wir haben also zwei Punkte der Funktion A: $P_{A1}(0|8)$ und $P_{A2}(1|7)$. Diese Punkte können wir dann im Koordinatensystem zeichnen und auch die Gerade, die der Funktion $x + y = 8$ entspricht, wie im Bild „Funktion A“.

Entsprechend kann man Punkte für die Funktion B finden. Für $x = 0$ ist:

$3x + 5y = 36 \rightarrow 5y = 36 - 3x \rightarrow 5y = 36 - 3 \cdot 0 \rightarrow 5y = 36 \rightarrow y = 7{,}2$.

Für $x = 1$ ist :

$3x + 5y = 36 \rightarrow 5y = 36 - 3x \rightarrow 5y = 36 - 3 \cdot 1 \rightarrow 5y = 33 \rightarrow y = 6{,}6$.

Wir haben also zwei Punkte der Funktion B: $P_{B1}(0|7{,}2)$ und $P_{B2}(1|6{,}6)$. Diese Punkte können wir dann im Koordinatensystem zeichnen und auch die Gerade, die der Funktion $3x + 5y = 36$ entspricht, wie im Bild „Funktion B“.

Wenn wir jetzt beide Funktionen in einem Koordinatensystem zeichnen, dann bekommen wir das Bild „Funktion A und B“. Da kann man klar sehen, dass die Funktionen einander **an einem einzigen Punkt** schneiden, den Punkt $L(2|6)$. Dieser Punkt ist die **Lösung des Gleichungssystems** der Funktionen A und B. Leider kann man i.d.R. den x- und den y-Wert nicht genau ablesen, daher ist diese Methode nicht so genau, wie die drei Verfahren der vorherigen Absätzen.

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Wir haben in den vorherigen Absätzen folgende Gleichungssysteme gelöst:

Gleichungssystem A	Gleichungssystem B
$x + y = 8$	$2x + 3y = 11$
$3x + 5y = 36$	$7x + 2y = -4$

Die Lösung des ersten linearen Gleichungssystems war $x = 2$ und $y = 6$, des zweitens $x = -2$ und $y = 5$. Geht es aber immer, dass ein Gleichungssystem eine Lösung hat? Die Antwort ist **nein**. Probieren wir das folgendes Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren zu lösen:

Gleichungssystem C

$$x + 2y = 8$$
$$2x + 4y = 8$$

Lösung

$x + 2y = 8 \quad \rightarrow x = 8 - 2y$

$2x + 4y = 8 \quad \rightarrow 2(8 - 2y) + 4y = 8 \quad \rightarrow 16 - 4y + 4y = 8 \quad \rightarrow 16 = 8$ **!**

Man sagt, dass die Aussage am Ende falsch ist. 16 ist doch nicht gleich 8! Das bedeutet, dass die beiden Gleichungen, die wir im Gleichungssystem haben ($x + 2y = 8$ und $x + 2y = 8$), **nicht gleichzeitig erfüllt werden können**. Man sagt, dass **das Gleichungssystem keine Lösung hat**.

Es gibt allerdings noch eine Möglichkeit. Das Gleichungssystem kann unendlich viele Lösungen haben, wie im folgenden Beispiel:

Gleichungssystem D

$$x + 2y = 8$$
$$3x + 6y = 24$$

Lösung

$x + 2y = 8 \quad \rightarrow x = 8 - 2y$

$3x + 6y = 24 \quad \rightarrow 3(8 - 2y) + 6y = 24 \quad \rightarrow 24 - 6y + 6y = 24 \quad \rightarrow 24 = 24$

Man sagt, dass die Aussage am Ende immer wahr ist. Egal wie viel x ist, die beiden Gleichungen werden immer gelten. Man soll doch etwas vorsichtig sein. Wenn $y = 3$ ist, dann ist $x = 2$ (erste Gleichung $x + 2y = 8 \quad \rightarrow x = 8 - 2y \quad \rightarrow x = 8 - 2 \cdot 3 \quad \rightarrow x = 2$). Wenn $y = 1$ ist, dann ist $x = 6$ (erste Gleichung $x + 2y = 8 \quad \rightarrow x = 8 - 2y \quad \rightarrow x = 8 - 2 \cdot 1 \quad \rightarrow x = 6$). Für jedes x gibt es ein bestimmtes y und umgekehrt.

Allerdings gilt genau das Gleiche in der zweiten Gleichung: Wenn $y = 3$ ist, ist $x = 2$ ($3x + 6y = 24 \quad \rightarrow 3x + 6 \cdot 3 = 24 \quad \rightarrow 3x = 6 \quad \rightarrow x = 2$). Wenn $y = 1$ ist, dann ist $x = 6$ ($3x + 6y = 24 \quad \rightarrow 3x + 6 \cdot 1 = 24 \quad \rightarrow 3x = 18 \quad \rightarrow x = 6$). Egal welchen Wert man für y benutzt, wird es für beide Gleichungen der gleiche Wert für x als Lösung gelten (und umgekehrt). Es gilt **nicht**, dass alle Wertepaare (alle Punkte auf der Ebene) Lösungen des Gleichungssystems sind, sondern dass alle Lösungen der einen Gleichung auch Lösungen der anderen Gleichung sind.

Das war allerdings nicht der Fall, als wir eine Lösung des Gleichungssystems hatten (und auf gar keinen Fall, als wir keine Lösung hatten). Nehmen wir beispielsweise das Gleichungssystem A:

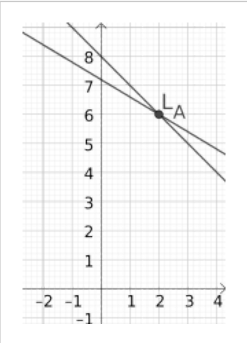
$x + y = 8$

$3x + 5y = 36$

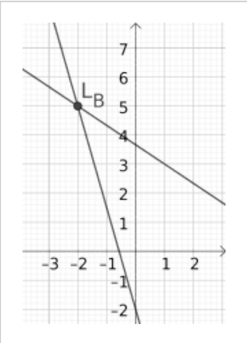
Da haben wir als Lösung $x = 2$ und $y = 6$ gefunden. Diese Lösung gilt gleichzeitig für beide Gleichungen. Tatsächlich wenn $x = 2$ ist, dann gilt für die erste Gleichung ($x + y = 8 \quad \rightarrow y = 8 - x \quad \rightarrow y = 8 - 2 \quad \rightarrow$) $y = 6$ aber auch für die zweite Gleichung ($3x + 5y = 36 \quad \rightarrow 3 \cdot 2 + 5y = 36 \quad \rightarrow 5y = 30 \quad \rightarrow$) $y = 6$. Wenn aber $x = 3$, dann gilt für die erste Gleichung ($x + y = 8 \quad \rightarrow y = 8 - x \quad \rightarrow y = 8 - 3 \quad \rightarrow$) $y = 5$. Für die zweite Gleichung hingegen gilt in diesem Fall: ($3x + 5y = 36 \quad \rightarrow 3 \cdot 3 + 5y = 36 \quad \rightarrow 5y = 27 \quad \rightarrow$) $y = 5{,}4$. Die beiden Gleichungen haben den gleichen Wert für y(den Wert 6), **nur** wenn $x = 2$ ist. Man sagt, dass Gleichungssystem A und B eine Lösung haben, Gleichungssystem C keine und Gleichungssystem D unendlich viele Lösungen haben.

Ein lineares Gleichungssystem kann keine, eine oder unendlich viele Lösungen haben.

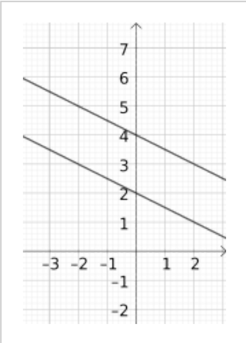
Viel besser kann man das Ganze verstehen, wenn man die graphischen Lösungen betrachtet.



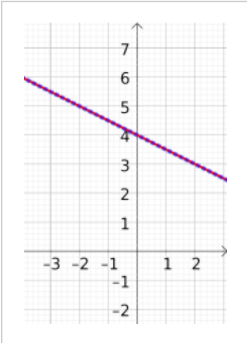
Gleichungssystem A



Gleichungssystem B



Gleichungssystem C



Gleichungssystem D

Im Gleichungssystem A gibt es nur **ein Wertepaar**, das für beide Funktionen stimmt: $L_A(2|6)$. Wenn $x = 2$ ist, dann ist $y = 6$ **für beide Funktionen**. *Für jeden anderen Wert von x stimmt der Wert von y nicht mehr überein.* Beispielsweise für $x = -3$ ist für die Funktion $x + y = 8 \quad y = 11$ und für die Funktion $3x + 5y = 36 \quad y = 9$. Es gibt nur ein Wertepaar, das für beide Funktionen eine Lösung ist, und dieses Wertepaar (also der Punkt $L_A(2|6)$) ist die Lösung des Gleichungssystems.

Entsprechend hat auch das Gleichungssystem B nur eine Lösung, den Punkt (Wertepaar) $L_B(-2|5)$, wie man eindeutig im entsprechenden Bild auch sehen kann. Das ist allerdings nicht der Fall für das Gleichungssystem C. Da laufen die Darstellungen der Funktionen im Koordinatensystem (die **Geraden** sind) **parallel** zueinander, sie treffen einander nie. Sie haben daher **keinen gemeinsamen Punkt** und das Gleichungssystem hat daher **keine Lösung** (man sagt, dass *die Lösung die leere Menge* ist). Im Gleichungssystem D hingegen sind **alle** Punkte der einen Funktion auch Punkte der anderen. Alle Wertepaare, die zu diesen Funktionen gehören, sind daher auch Lösungen des Gleichungssystems D. Das System hat somit **unendlich viele Lösungen**. Beide Funktionen sind in diesem Fall unterschiedliche Darstellungen der gleichen Funktion. Tatsächlich, wenn man beide Seiten der zweiten Funktion (des Systems D) durch 3 dividiert, bekommt man die erste Funktion:

$3x + 6y = 24 \quad | : 3 \quad \rightarrow \quad x + y = 8$.

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Ein Problem ist lösbar, wenn es möglich ist, es zu lösen. Es gibt in der Mathematik einige Probleme, bei denen es bewiesen wurde, dass sie nicht lösbar sind (beispielsweise die Klassische Probleme der antiken Mathematik). Bei linearen Gleichungssystemen bezieht sich die Frage der Lösbarkeit auf die Anzahl der möglichen Lösungen des Systems, also ob das System keine, eine oder unendlich viele Lösungen hat. Um das herauszufinden, kann man selbstverständlich versuchen, das System tatsächlich zu lösen. Es gibt aber auch einen anderen Weg. Hier wird beschrieben, wie man mit Systemen mit zwei Gleichungen und zwei unbekannten arbeitet. Für komplizierteren Systemen braucht man Matrizentheorie (Thema des Universitätsstudiums).

Man soll zuerst beide Gleichungen in die sogenannte explizite Form umformen, also in der Form, in der y allein auf der linken Seite steht. Nehmen wir die Gleichungssysteme A, C und D des vorherigen Absatzes:

Gleichungssystem A	**Gleichungssystem C**	**Gleichungssystem D**
$x + y = 8$	$x + 2y = 8$	$x + 2y = 8$
$3x + 5y = 36$	$2x + 4y = 8$	$3x + 6y = 24$

In der expliziten Form sehen diese Systeme wie im Folgenden aus:

Gleichungssystem A	**Gleichungssystem C**	**Gleichungssystem D**

$$y = -x + 8 \qquad y = -\frac{x}{2} + 4 \qquad y = -\frac{x}{2} + 4$$
$$y = -0{,}6x + 7{,}2 \qquad y = -\frac{x}{2} + 2 \qquad y = -\frac{x}{2} + 4$$

Bei System A ist die Steigung unterschiedlich (-1 in der ersten Gleichung und -0,6 in der zweiten).

Wenn die Steigung der beiden linearen Funktionen unterschiedlich ist, dann hat das System mit Sicherheit genau eine Lösung.

Bei den Systemen C und D ist die Steigung überall die Gleiche ($-\frac{1}{2}$). Im System C haben die Gleichungen einen anderen y-Achsenabschnitt (+4 und +2). Im System D ist hingegen auch der y-Achsenabschnitt der beiden Gleichungen der gleiche (+4)

Wenn die Steigung der beiden linearen Funktionen die gleiche ist, gibt es zwei Möglichkeiten:

- ***Ist der y-Achsenabschnitt unterschiedlich, dann gibt es keine Lösung.***
- ***Ist der y-Achsenabschnitt der gleiche, dann gibt es unendlich viele Lösungen.***

Vorgang bei Textaufgaben

Schon am Anfang dieses Kapitels haben wir uns mit einer Textaufgabe beschäftigt. Dort haben wir schon gelernt, wie Textaufgaben zu lösen sind. Die Aufgabe war:

In einem Café gibt es 8 Tische. Manche sind für 3 Personen und der Rest für 5 Personen. Insgesamt kann das Café 36 Personen bedienen. Wie viele 3 bzw. 5 Personen-Tische gibt es im Café?

Schauen wir die Denkweise genauer an. Die Anzahl der Tische ist bekannt, als auch die der Personen insgesamt. Was ist hier unbekannt (und letztendlich auch gefragt)? Wie viele Tische für 5 Personen und wie viele für 3 Personen es gibt. Für die Unbekannten in jedem mathematischem Problem benutzt man irgendwelche Symbole. Wir haben x und y benutzt, dass könnte aber genauso a und b, oder m und n, oder f und d oder irgendwas anders sein. Wichtig: Es gibt zwei Unbekannte, wir müssen also zwei verschiedenen Symbole dafür benutzen. Wenn es drei Unbekannte gibt, dann soll mal drei unterschiedlichen Symbole benutzen usw. (wie werden uns aber hier nur mit Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten beschäftigen).

Am Anfang muss man definieren, was jedes Symbol darstellt. In dieser Aufgabe haben wir gesagt, dass die Tische für 3 Personen und y die Tische für 5 Personen sind:

x: die Tische für 3 Personen

y: die Tische für 5 Personen

Dieser Schritt sollte nicht so schwer sein. Man gibt einfach Namen (Symbole) für die unbekannten Sachen. Beim nächsten Schritt haben viele Menschen die größten Schwierigkeiten. Dabei ist die Sache nicht wirklich so schwer. Man soll das Problem vorsichtig lesen und ***den Text in die mathematische Sprache umsetzen***. Dafür muss man nicht den ganzen Text verstehen, sondern auf Schlüsselworte beachten. In dieser Aufgabe steht, dass es 8 Tische gibt. Auch wenn man nicht wüsste, was ein Tisch ist, kann man schon schreiben, dass die Tische zusammen 8 sind. Welche Rechenart steht in Mathematik für zusammen? Die Addition. Also:

x+y=8

Wir haben zwei Unbekannte, also wir brauchen zwei Gleichungen, um die Aufgabe eindeutig zu lösen. Die zweite Gleichung zu erzeugen war in dieser Aufgabe nicht so leicht. Wir haben gesagt: Wenn es 2 Tische für 3 Personen gibt, dann sitzen an diesen Tischen 2·3=6 Personen, es 5 Tische für 3 Personen gibt, dann sitzen an diesen Tischen 5·3=15 Personen usw. Man merkt, dass damit wir die Personen berechnen, die Anzahl der Tische mit der Anzahl der Personen pro Tisch (hier 3 Personen pro Tisch) multiplizieren müssen. Wir wissen aber nicht, wie viele Tische für drei Personen es gibt. Wir haben aber doch ein Symbol dafür benutzt: das sind x Tische. Dieses Symbol muss man also mit der Anzahl der Personen pro Tisch (hier 3) multiplizieren, um durch einen Term zu zeigen, wie viele Personen an diesen Tischen sitzen können: 3x! Dass ist (noch) nicht eine bestimmte Zahl, das sind aber doch die Personen die an diesen x Tischen sitzen können. Entsprechend können an den y Tischen für 5 Personen insgesamt 5y Personen sitzen (Anzahl der Tische y mal Personen pro Tisch, hier 5). In der Aufgabe steht, dass das Café insgesamt 36 Personen bedienen kann. Also die Anzahl der Personen, die an den zwei Tischkategorien (eine Kategorie die 3-Personen Tische, zweite Kategorie die 5-Personen Tische) sitzen können ist insgesamt 36 Personen. Welche Rechenart wird hier angedeutet? Wieder Addition. Die Personen der beiden Kategorien zusammen (also plus) sind 36:

3x+5y=36

Wir haben also zwei Gleichungen und zwei Unbekannte.

x+y=8

3x+5y=36

Jetzt kann man eine der dargestellten Wege benutzen, um x und y herauszufinden. In unserem Beispiel haben wir das Ersetzungsverfahren benutzt.

Erzeugen wir das Gleichungssystem für noch ein paar Textaufgaben:

Iris ist 2,5 mal älter als ihr Bruder Andreas. Zusammengezählt sind ihre Altersjahren 14. Wie viele Jahren alt sind die beiden Geschwister?

Gefragt sind die Lebensalter der beiden Geschwister. Wir schreiben mit i das Lebensalter von Iris und mit a von Andreas. Iris ist 2,5 mal älter und zusammen sind die Jahre 18:

i=2,5·a   und   i+a=14

Dieses System lässt sich sehr leicht durch das Ersetzungsverfahren lösen. Wir ersetzen i in der zweiten Gleichung durch 2,5a (da i=2,5a, wie es schon in der ersten Gleichung steht):

i+a=18 → 2,5a+a=14 → 3,5a=14 (:3,5) → a=4 und sofort i=2,5a=2,5·4 → i=10 (also tatsächlich i+a=14)

Die Summe des Fünffachen einer Zahl und 4 ist so viel wie eine andere Zahl um 1 reduziert. Die Differenz des dreifachen der zweiten Zahl und 43 ist so viel wie die erste Zahl um 14 erhöht. Berechnen sie die Zahlen.

Viele finden solche Aufgaben extrem schwer. Dabei muss man einfach Schritt für Schritt vorgehen. Erst gibt man Symbole für die zwei unbekannten Zahlen.

e ist die erste Zahl

z ist die zweite Zahl

Gehen wir Schritt für Schritt vor:

Die Summe des Fünffachen einer Zahl... Die erste Zahl haben wir e genannt. Das fünffache bedeutet 5e. Über die Summe wissen wir noch nichts, außer dass der erster Summand 5e sein wird.

Die Summe des Fünffachen einer Zahl ***und 4...*** Hier erkennen wir den zweiten Summand: 4. Also bisher haben wir: $5e+4$

Die Summe des Fünffachen einer Zahl und 4 ***ist so viel wie...*** ***...ist so viel wie*** in der mathematische Sprache umgesetzt ist nichts mehr und nichts mehr als das Symbol für gleich (=). Also bisher haben wir: $5e+4=$

Die Summe des Fünffachen einer Zahl und 4 ist so viel wie ***eine andere Zahl um 1 reduziert*** Die zweite (die "andere") Zahl haben wir z genannt und sie wird um 1 reduziert also $z-1$. Bisher haben wir: $5e+4=z-1$ Hier endet der erster Satz. Wir haben also schon unsere erste Gleichung!

$5e+4=z-1$

Fangen wir jetzt mit dem zweiten Satz an: ***Die Differenz des dreifachen der zweiten Zahl...*** Über die Differenz kenne wir nur den Minuend. Er ist das dreifache der zweiten Zahl. Die zweite Zahl haben wir z genannt, also ist ihr Dreifaches 3z. Bisher haben wir daher: $3z-$...

Die Differenz des dreifachen der zweiten Zahl ***und 43*** Jetzt haben wir auch den Subtrahend der Differenz: $3z-43$

Die Differenz des dreifachen der zweiten Zahl und 43 ***ist so viel wie*** *...ist so viel wie* bedeutet ist gleich: $3z-43=$

Die Differenz des dreifachen der zweiten Zahl und 43 ist so viel wie ***die erste Zahl um 14 erhöht*** Die erste Zahl ist e und sie wird um 14 erhöht (also plus 14): $3z-43=e+14$. Wir haben jetzt auch die zweite Gleichung! Das Gleichungssystem lautet:

$5e+4=z-1$

$3z-43=e+14$

Dieses System kann man dann mit einem der präsentierten Verfahren lösen. Die Antwort ist e=3 und z=20, wie man überprüfen kann:

$5\cdot 3+4=20-1$ ✔ und

$3\cdot 20-43=3+14$ ✔

Viele Menschen denken, dass solche Aufgaben schwer wären. Wie man hier sieht, wenn man die Aufgabe Schritt für Schritt löst, ist es nicht so schwer. Das braucht einfach etwas Konzentration, ist aber durchaus fast für jeden möglich.

In einer Flups gibt es 37 Tröpats. Manch davon haben 4 Hupals, die restlichen 7 Hupals. Die Flups beihaltet damit 190 Hupals. Wie viele Tröpats mit 4 bzw. 7 Hupals gibt es?

Man mag hier fragen, was zum Teufel Flups, Tröpats und Hupals sind. Meine Antwort ist dann eine weitere Frage: Ist diese Kenntnis für die Lösung der Aufgabe notwendig? Die Antwort ist ganz einfach NEIN! Wenn in einer Prüfungssituation jemand eine unbekanntes Wort trifft, soll man erst entscheiden, ob dieses Wort für die Lösung wichtig ist, sonst verliert man Zeit, die für eine Prüfung i.d.R. sehr wichtig ist. Ziel dieser Aufgabe ist darauf aufmerksam zu machen. In der Aufgabe wird NICHT gefragt, was Flups usw sind. Man braucht es daher auch nicht wissen. Wichtig sind nur Schlüsselworte und -phrasen, wie z.B. **In... gibt es**, was darauf hinweist, dass die Tröpats insgesamt 37 sind. Der erste Schritt ist für jede Unbekannte ein Symbol einzusetzen. Wenn v die Tröpats mit 4 Hupals sind und s die Tröpats mit 7 Hupals, dann haben wir die erste und die zweite Gleichung, genau wie im ersten Beispiel in diesem Teilkapitel:

$v+s=37$

$4v+7s=190$

Das System kann man dann in einer beliebige Weise lösen. Die Antwort ist 23 Tröpats mit 4 Hupals und 14 Tröpats mit 7 Hupals (was das auch immer sein könnte 🙂).

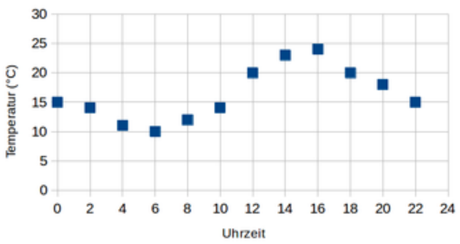
Lineare_Funktion

Grundlagen

Funktion allgemein

Wenn man z.B. die Temperaturen um gewissen Uhrzeiten an einem Tag misst, dann hat man schon eine Art von Funktion. Man sagt, dass die Temperatur die abhängige Variable ist und die Uhrzeit die unabhängige. Für jeden Wert der unabhängigen Variable gibt es einen Wert der abhängigen Variable aber für jeden Wert der abhängigen Variable kann es keine, eine oder mehrere Werte der unabhängigen Variable geben.

Uhrzeit	Temp. °C
00	15
02	14
04	11
06	10
08	12
10	14
12	20
14	23
16	24
18	20
20	18
22	15



In unserem Beispiel: für jede Uhrzeit gibt es genau eine Temperatur (es kann nicht mehrere geben), eine Temperatur aber kann nie, einmal oder mehrmals vorkommen. Man kann die ganze Information in einer Tabelle schreiben und mit Hilfe der Tabelle, kann man auch ein Diagramm erstellen:

Wie man im Diagramm ablesen kann, es gibt nur eine Temperatur für jede Uhrzeit (z.B. um 10 Uhr ist die Temperatur 14°C und nicht gleichzeitig 18°C) aber für jede Temperatur kann es keine (z.B. 5°C gibt es nicht), eine (z.B. 10° C gibt es nur um 6 Uhr) oder mehrere Zeiten (z.B. 15°C kommt 2 mal vor, man kann sogar raten, dass es die gleiche Temperatur irgendwann zwischen 10 Uhr und 12 Uhr gab!).

Lineare Funktion

Wenn das Diagramm einer Funktion eine Gerade ist, dann geht es um eine sogenannte lineare Funktion. Ein lineare Funktion hat die allgemeine Form:

$y=k\,x+d$

wo y die abhängige Variable ist, x die unabhängige Variable und k und d irgendwelche Konstanten (Zahlen, die sich nicht ändern, wie die Variablen). So sind die folgende Funktionen linear:

y=3x – 2 y=-0,5x+130 y= ¾ x – 2,3 y=-√3 x -5

In der ersten Funktion y=3x – 2 ist k=3 und d=-2.

In der zweiten Funktion y=-0,5x+130 ist k=-0,5 und d=130.

In der dritten Funktion y= ¾ x – 2,3 ist k= ¾ und d=-2,3.

In der vierten Funktion y=-√3 x -5 ist k=-√3 und d=-5.

Selbstverständlich kann man statt x und y andere Symbole benutzen:

y=3x – 2, a=3b – 2 und V=3h – 2 sind Darstellungen der gleichen Funktion, es werden nur andere Symbole für x und y benutzt. y= ¾ x – 2,3 ist doch eine andere Funktion, weil k und d (die Konstanten) anders sind. Wenn allein k oder allein d oder beide k und d anders sind, dann haben wir eine andere lineare Funktion. Wenn k und d gleich sind, dann haben wir die gleiche Funktion, egal welche Symbole wir für x und y benutzen.

In einer lineare Funktion $y = kx + d$ wird die **Konstante, mit der x multipliziert wird** (hier mit k bezeichnet), ***Steigung*** der Funktion genannt. Die Steigung ist ein sehr wichtiger Begriff in der höheren Mathematik. Die **Konstante, die dann addiert wird** (hier mit d bezeichnet) nennt man ***y-Achsenabschnitt*** Man muss auch sagen: in verschiedenen Staaten benutzt man unterschiedliche Symbole für k und d, z.B.

$y = mx + n$

Hier ist dann m die Steigung und n der y-Achsenabschnitt.

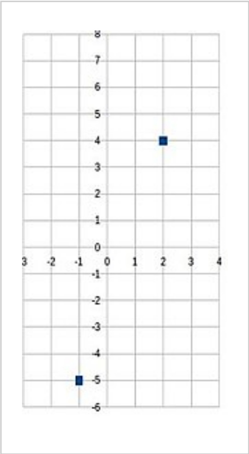
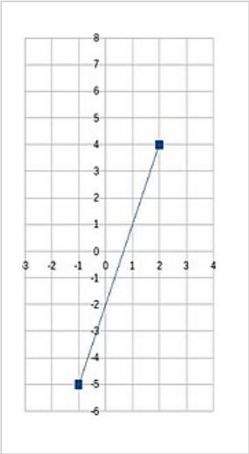
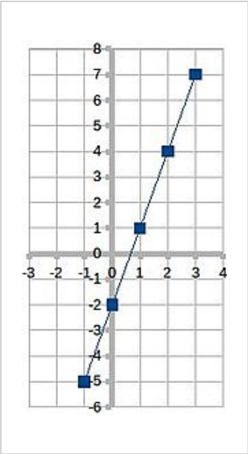
Tabelle für eine lineare Funktion erstellen

Für jede Funktion kann man eine Tabelle machen. Diese Tabelle kann man dann als Punkte in einem Diagramm darstellen. Als Beispiel benutzen wir die Funktion y=3x – 2:

x=..	Berechnung von y=3x-2	y=..		Wertepaare	
-2	y = 3 · (-2) -2 = - 6 -2 =	-8		-2	-8
-1	y = 3 · (-1) -2 = - 3 -2 =	-5		-1	-5
0	y = 3 · (0) -2 = 0 -2 =	-2		0	-2
1	y = 3 · (1) -2 = 3 -2 =	1		1	1
2	y = 3 · (2) -2 = 6 -2 =	4		2	4
3	y = 3 · (3) -2 = 9 -2 =	7		3	7

Diagramm einer linearen Funktion mit Hilfe von zwei Punkten erstellen

Um diese Funktion in einem Diagramm darzustellen braucht man nur zwei Punkte. Einen Punkt schreibt man mit einem Wertepaar P:(x|y), wobei erst immer der x-Wert geschrieben wird und dann der y-Wert (innerhalb von Klammern). Benutzen wird beispielsweise P_A:(-1|-5) und P_B:(2|4) (erstes Bild). Mit Hilfe dieser Punkte kann man eine Gerade ziehen (zweites Bild). Wie man dann feststellen kann, liegen alle Wertepaare der Tabelle auf dieser Gerade! (Drittes Bild)

Das ist genau die Sache. Alle Wertepaare einer linearen Funktion liegen auf der gleichen Gerade! Die Darstellung einer linearen Funktion auf einem Koordinatensystem ist eine Gerade!

Lösung einer Funktion

In Mathematik nennt man **Stelle** der Funktion *den Wert von* ***x*** und **Wert der Funktion** *den Wert von* ***y***. **Lösung** einer Funktion **ist** dann **die Stelle** (also der x-Wert) **der Funktion, an der der Wert der Funktion** (also y) **null ist**.

Nehmen wir die lineare Funktion $y = 4x - 5$. Wie viel ist der Wert der Funktion an der Stelle 3? Stelle bedeutet x-Wert. Wenn $x = 3$ ist, dann ist der Wert der Funktion $y = 4 \cdot 3 - 5$ also $y = 7$. Der Wert der Funktion an der Stelle 3 ist 7. Wie viel ist die Lösung der Funktion? Lösung der Funktion bedeutet, dass der Wert der Funktion y null ist: $0 = 4x - 5$ daher $5 = 4x$ und $x = \frac{5}{4} (= 1{,}2)$

Eine lineare Funktion mit Hilfe von zwei Punkten finden

Wenn man zwei Punkte einer linearen Funktion hat, kann man nicht nur die entsprechende Gerade im Diagramm zeichnen, sondern auch die Funktion selber finden, wenn man sie nicht kennt. Nehmen wir an, dass die folgende zwei Punkte P und Q gegeben sind:

P:(2|4), Q:(5|-2)

Mit Hilfe der beide Punkten kann man die Funktion in einem Koordinatensystem darstellen, wie im Bild. Wie viel ist aber die Steigung dieser Funktion und wie viel der y-Achsenabschnitt?

Die allgemeine Gleichung einer linearen Funktion ist:

$y=kx+d$

Setzen wir die Wertepaare für die zwei Punkten in diese Gleichung ein:

P(x|y)	x	y	y=kx+d
P(2|4)	2	4	$4=k\cdot 2+d$
Q(5|−2)	5	− 2	$-2=k\cdot 5+d$

Wir haben hier zwei Gleichungen mit zwei Variablen (k und d). Wir haben also ein Gleichungssystem. So was können wir schon lösen. Schreiben wir die Gleichungen auf:

$4=k \cdot 2 + d$

$-2=k \cdot 5 + d$

Formen wir die erste Gleichung ($4=k \cdot 2 + d$) auf d um:

$4=k \cdot 2 + d \mid -k \cdot 2$

$4 - 2k = d$ also d ist $4-2k$:

$d=4-2k$

Setzen wir d in die zweite Gleichung ein:

$-2=k \cdot 5 + d$ (wobei $d=4-2k$)

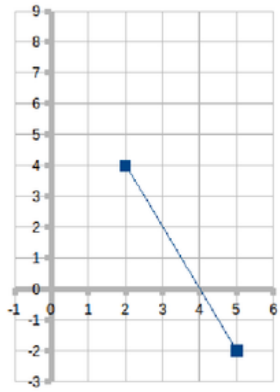
$-2= 5k + (4-2k)$

$-2=5k + 4 - 2k \quad |-4$(und alle k zusammenrechnen)

$-6=3k \quad | :3$

$-2=k$ also

$k=-2$



Lineare Funktion

Wir können jetzt auch d berechnen:

$d=4-2k= 4 - 2 \cdot (-2) = 4 + 4 = 8$ also

$d=8$

Damit haben wir das Gleichungssystem gelöst. In der allgemeinen Gleichung der linearen Funktion $y= kx+d$ können wir jetzt k und d ersetzen ($k=-2$, $d=8$).

$y= -2x + 8$

Die lineare Funktion, die durch die Punkte P:(2|4) und Q:(5|-2) definiert wird, lautet:

$y= -2x + 8$

Das Diagramm dafür kann man leicht zeichnen (siehe Bild). Wenn man die Gerade verlängert, dann trifft sie die y-Achse tatsächlich bei y=8 (y-Achsenabschnitt also d).

Die Steigung k kann man auch direkt von den Punkten berechnen. Es gilt:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

wobei Δy die Differenz der y-Werte der zwei Punkte ist und Δx die Differenz der x-Werte.

In unserem Beispiel sind die Punkte P:(2|4) und Q:(5|-2), also die y-Werte 4 und -2 und die x-Werte 2 und 5. Die entsprechenden Differenzen sind: $\Delta y=4-(-2)=6$ und $\Delta x=2-5=-3$. Daher ist die Steigung der abgebildeten linearen Funktion, die durch die Punkte P und Q geht:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{-3} = -2$$

Textaufgaben zu den linearen Funktionen

Bei den Textaufgaben über lineare Funktionen wird es normalerweise zwei Konstanten geben (also zwei Zahlen). Die Einheit einer der Zahlen wird normalerweise durch eine **Änderungsrate** (ein Verhältnis, einen **Quotient** von zwei anderen Einheiten) ausgedrückt. Diese Konstante (diese Zahl mit der Einheit "etwas" **pro** "etwas anderes") wird die **Steigung** sein, also der Koeffizient der unabhängigen Variable (i.d.R. x). Die Einheit der Steigung wird die Form *Einheit A* **durch** *Einheit B* haben. Die Einheit B (z.B. Sekunde oder Meter) ist die Einheit der unabhängigen Variablen (i.d.R. x.

Die andere Konstante wird dann der y-Achsenabschnitt sein. Die Einheit des y-Achsenabschnitts ist auch die Einheit der abhängigen Variable und auch die erwähnte Einheit A bei der Steigung. Damit haben wir alle Elemente in einem mathematischen Zusammenhang „übersetzt“.

- *Beim Taxifahren ist die Grundgebühr 4€ und jede Minute kostet dann 0,5€. Stelle diesen Zusammenhang als lineare Funktion dar*

Lösung:

Hier sind zwei Zahlen angegeben: 4€ und 0,5€. Über 0,5€ ist aber auch gesagt, dass man "jede Minute" 0,5€ zahlt. Anders ausgedrückt sind es 0,5€ **pro** Minute. Einheit A (€) **durch** Einheit B (min). Das heißt, es geht um eine **Änderungsrate**. 0,5 soll also unsere **Steigung** sein. Dann ist die Grundgebühr der y-Achsenabschnitt. Die abhängige Variable wird also in € ausgedrückt (wie die Grundgebühr und die Einheit A oben in der Steigung), die unabhängige in Minuten (wie die Einheit B, die Einheit, die in der Steigung unten steht). Für beide Variablen kann man frei irgendwelche Symbole auswählen, gewöhnlich sollen sie auch sinnvoll sein, z.B. hier K für die Kosten und t für die Zeit (Englisch: time):

K(t)= 0,5 t + 4 (t in Minuten, K in €)

Man soll auch eine Entscheidung über das Vorzeichen der Steigung treffen. Das ist eher einfach. Wenn es klar ist, dass die abhängige Variable (z.B. y, hier die Kosten K) auch größer wird, wenn die unabhängige (z.B. x, hier die Zeit t) größer wird, dann ist die Steigung positiv. Bei den Kosten ist es klar, dass sie immer mehr werden, wenn die Fahrt länger dauert. Also ist die Steigung positiv.

Wenn aber es klar ist, dass die unabhängige Variable kleiner wird, wenn die unabhängige größer wird, dann ist die Steigung negativ. Schauen wir ein entsprechendes Beispiel.

- *Eine Kerze mit einer Länge von 1,8 dm wird angezündet. Dabei brennt sie stündlich um ca. 0,9 cm ab. Stelle diesen Zusammenhang als lineare Funktion.dar*

Hier ist 0,9 cm eine Änderungsrate, also 0,9 cm pro Stunde. 0,9 ist also die Steigung. Die Kerze wird aber immer kürzer, also wird die Steigung negativ sein. 1,8 dm wird unserer y-Achsenabschnitt sein. Wir wählen L für die Länge und t für die Zeit aus:

L(t)= - 0,9 t + 18 (t in Stunden, L in cm)

Vorsicht!

Man soll immer die Einheiten schreiben und die richtigen Einheiten benutzen.

Wenn man beispielsweise für den Abstand die Einheit Meter benutzt, muss man alle angegebene Abstände in Meter umwandeln, wenn sie nicht schon in Meter angegeben sind. Der vorsichtige Leser hat vielleicht gemerkt, dass der y-Achsenabschnitt in der Funktion 18 und nicht 1,8 ist. Wir haben erst die 1,8dm in 18cm umgewandelt! Das ist notwendig, weil die Steigung in **cm** (und nicht dm) pro Stunde gegeben ist. Ähnlich, wenn der Wert für die Zeit in Minuten gegeben ist, muss man sie erst in Stunden umwandeln (die Steigung ist ja pro Stunden). Darauf muss man also immer aufpassen!

Schauen wir ein etwas komplexeres Beispiel.

- *Der Druck in der Atmosphäre eines Planeten ist durch eine lineare Funktion angegeben. Auf 50km Höhe ist er 3 Atm, auf 200 km 1,8 Atm. Wie viel ist der Druck*

1. *auf der Oberfläche des Planeten?*
2. *auf 300 km Höhe?*
3. *50 km unterhalb der Oberfläche?*

In diesem Fall muss man erst die lineare Funktion mit Hilfe der beiden Punkte finden. Der aufmerksame Leser hat vielleicht schon gesehen, dass die gegebenen Punkte hier $P_1\ (50|3),\ \ P_2\ (200|1{,}8)$ sind. Wie im vorherigen Teil gezeigt, man kann die Funktion in zwei verschiedenen Weisen finden:

Man kann das lineare Gleichungssystem lösen:

P(x|y)	x	y	y=mx+n
P(50|3)	50	3	3=m·50+n
Q(200|1,8)	200	1,8	−1,8=m·200+n

oder man kann direkt die Formel für die Steigung benutzen:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

und dann den y-Achsenabschnitt finden.

Selbstverständlich bekommt man in beiden Fällen die gleiche Antwort:

m=-0,008 und n=3,4 also

$$y = -0{,}008x + 3{,}4$$

Mit Hilfe der Funktion kann man jetzt die Fragen beantworten.

- Auf der Oberfläche ist die Höhe (also der x-Wert) Null. Das ist der y-Achsenabschnitt, also 3,4 Atm
- In der zweiten Frage setzt man die 300 km für den x-Wert ein: $y = -0{,}008 \cdot 300 + 3{,}4 = 1$, also 1 Atm.
- In der dritten Frage muss man denken, dass unterhalb der Oberfläche die Höhe negativ sein wird: $y = -0{,}008 \cdot (-50) + 3{,}4 = 3{,}8$ also 3,8 Atm.