CURVA TAUTÓCRONA

SE DUAS BOLINHAS FOREM SOLTAS DE POSIÇÕES DISTINTAS NA RAMPA, QUAL DELAS CHEGA PRIMEIRO NO PONTO MAIS BAIXO? EXPERIMENTE!

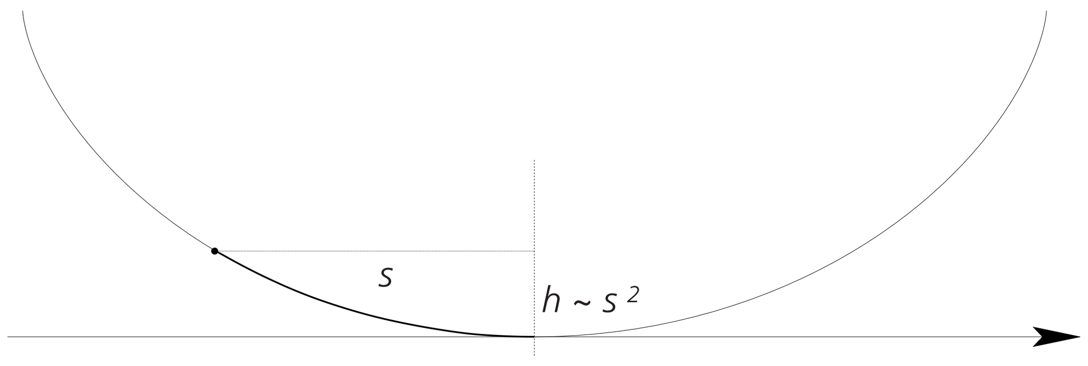
POR QUE A CICLOIDE É TAUTÓCRONA?

A propriedade geométrica que faz o **período do movimento** da bola sobre a cicloide **não depender da amplitude** pode ser assim enunciado: em cada ponto da rampa, a altura acima do ponto mais baixo **(h)** é proporcional ao quadrado da distância ao ponto mais baixo, medida ao longo da curva **(s)**.

Como a **energia potencial** da bola é proporcional à altura, resulta que ela é proporcional ao quadrado da distância ao ponto de equilíbrio, medida ao longo da curva. Isto é exatamente o que acontece no **sistema massa-mola**, em que o potencial $\frac{1}{2}kx^2$ tem a mesma propriedade.

Como as soluções do sistema massa-mola são senoides com período independente da amplitude, o mesmo acontece com a rampa tautócrona.

Em resumo: a energia potencial da tautócrona "imita" a energia potencial do sistema massa-mola, e herda a propriedade do período independente da amplitude!



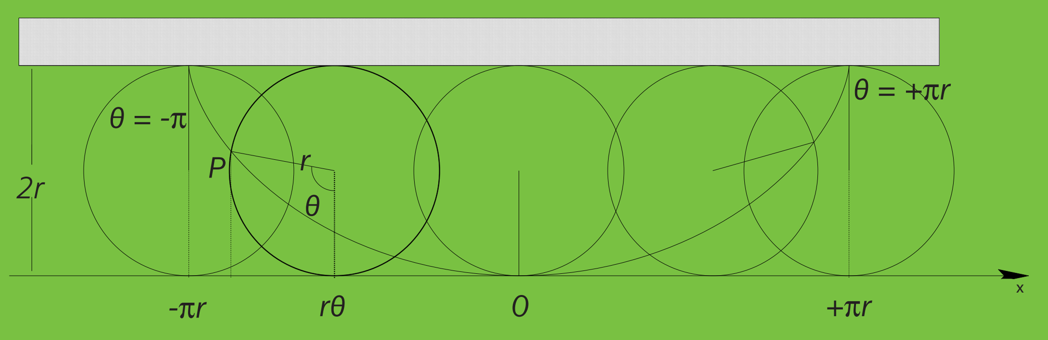
PARAMETRIZAÇÃO DA CICLOIDE

Considere uma circunferência de raio r rolando sobre a paralela ao eixo x de altura igual a $2r$. À medida que a circunferência rola o ponto $P = (x(\theta), y(\theta))$ satisfaz:

$x(\theta) = r(\theta + \text{sen}\theta)$
$y(\theta) = r(1 - \cos\theta)$

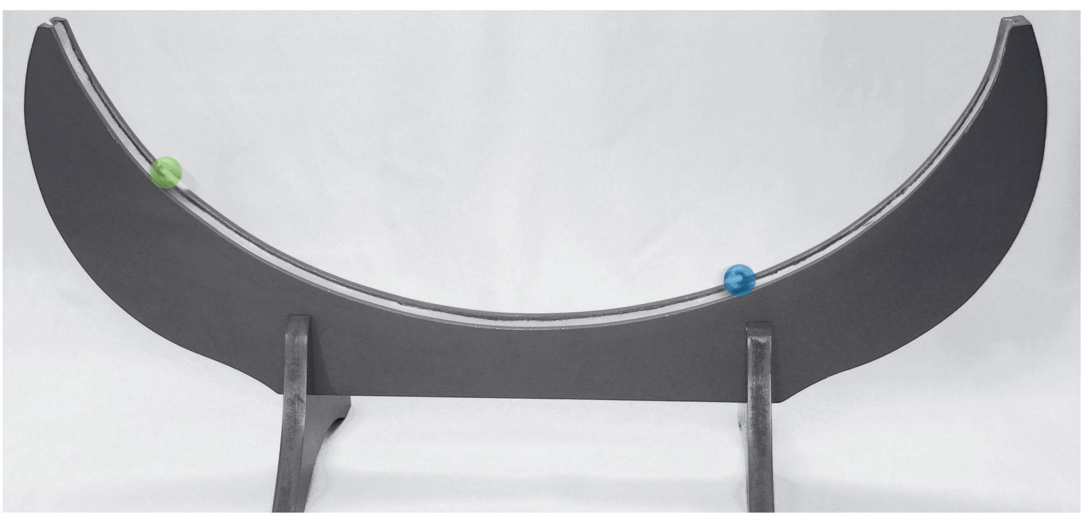
onde θ pertence a $(-\pi, \pi)$. Isto é uma parametrização da cicloide, pelo parâmetro θ.

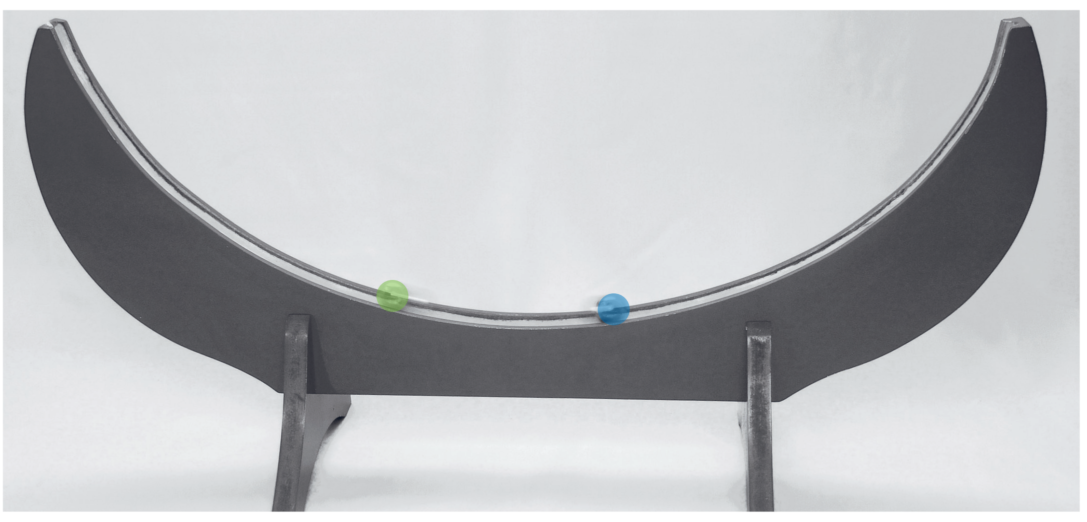
A função cujo gráfico é a cicloide não admite uma formulação em termos de combinações finitas de funções elementares. Então a parametrização é a melhor maneira de se calcular a cicloide por meio de uma fórmula!
Para quem conhece um pouco de cálculo, não é tão difícil verificar a propriedade geométrica da tautócrona.

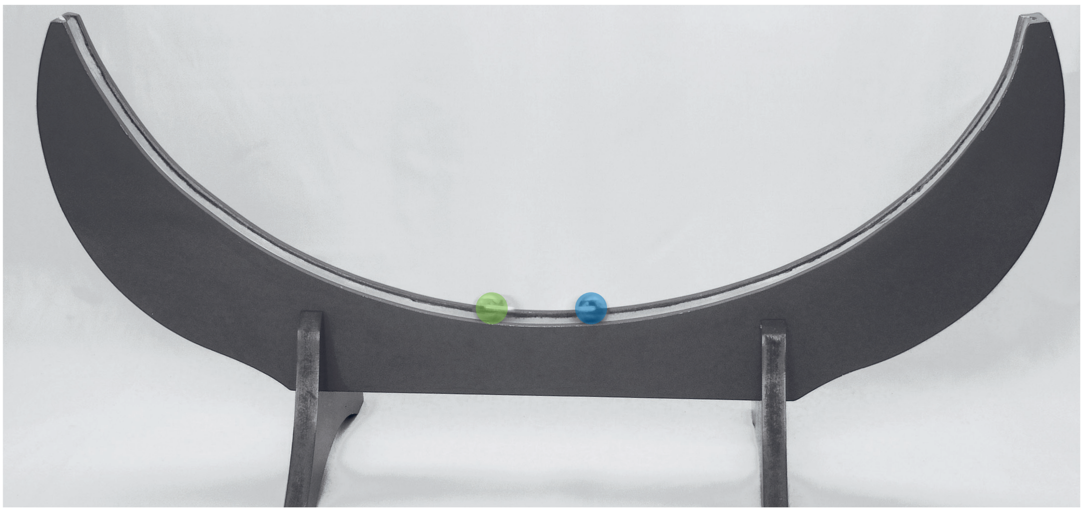


A parametrização $P(\theta) = (r(\theta + \text{sen}\theta); r(1 - \cos\theta))$ tem vetor velocidade $P'(\theta) = (r(1+\cos\theta), r\,\text{sen}\theta)$.
O comprimento do arco do ponto mais baixo até $P(\theta)$ é a integral do módulo da velocidade.

Então invertemos para ter θ em função de s. Como a altura h é a segunda coordenada de $P(\theta)$ obtemos: $h = s^2 / 8r$.







Como você pode verificar, quando as bolinhas são soltas de posições distintas na rampa, elas chegam ao mesmo tempo. Isso explica por que essa rampa é chamada de *tautócrona*, do grego *tautó* (mesmo) e *chronós* (tempo).

A rampa tautócrona é a curva chamada *cicloide*, que é definida pela trajetória de um ponto do bordo de um disco que rola sem escorregar sobre uma linha reta e plana. A tautócrona também é chamada de *braquistócrona*, onde *brachys* significa rápido, pois da ponta mais alta a qualquer outro ponto é a rampa que propicia o trajeto de menor tempo.

CURIOSIDADES

Conta a história que Pascal colocou algumas questões sobre a cicloide, oferecendo um prêmio a quem as solucionasse, como era habitual na época.

Todas as poucas soluções apresentadas continham, pelo menos, alguns erros de cálculo, o que fez Pascal decidir por não conceder o prêmio e por publicar posteriormente suas próprias soluções.

Tal fato exaltou os ânimos da comunidade matemática, pois enquanto uns achavam que tinham direito ao prêmio, outros reclamavam das omissões em atribuir os créditos corretos em suas citações.

TENTE GANHAR O PRÊMIO DE PASCAL! RESOLVA DUAS DAS QUESTÕES PROPOSTAS POR ELE:

1) MOSTRAR QUE O COMPRIMENTO DA CICLOIDE É 4 VEZES O DIÂMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA QUE A GERA.

2) MOSTRAR QUE A ÁREA LIMITADA PELA CICLOIDE É O TRIPLO DA ÁREA DA CIRCUNFERÊNCIA QUE A GERA.