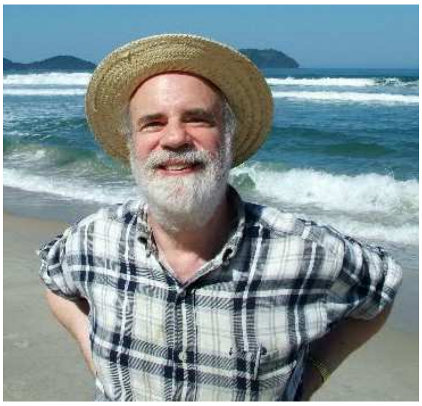
Prof. Dr. H. Brenner — Osnabrück SS 2016

Einführung in die mathematische Logik

Vorlesung 26

Semantik der Modallogik

Von Gottfried Wilhelm Leibniz stammt die Idee, Notwendigkeiten über mögliche Welten zu verstehen.



Saul Kripke schuf die formale Modelltheorie für die Modallogik.

Wir besprechen nun die Semantik der Modallogik, die mit gerichteten Graphen arbeitet, die die Idee von erreichbaren Welten modellieren.

Definition 26.1. Unter einem *modallogischen Modell* versteht man einen gerichteten Graphen (M, R) zusammen mit einer Wahrheitsbelegung μ für die Aussagenvariablen für jeden Knotenpunkt $w \in M$.

Die Knotenpunkte des gerichteten Graphen nennt man in diesem Zusammenhang auch *Welten* oder Weltpunkte. Die von einer Welt x aus verbundenen Welten y, also die mit xRy, nennt man die von x aus erreichbaren Welten, die Relation R heißt auch *Erreichbarkeitsrelation*. Durch die übliche Interpretation die aussagenlogischen Junktoren erhält man in jedem Weltpunkt eine Belegung für alle aussagenlogischen Ausdrücke in den gegebenen Aussagenvariablen. Darauf aufbauend kann man auch jedem modallogischen Ausdruck an jedem Knotenpunkt einen Wahrheitswert zuordnen, und zwar in folgender Weise.

Definition 26.2. In einem modallogischen Modell (M, R, μ) (mit einer punktweisen Wahrheitsbelegung μ) definiert man die Gültigkeit von modallogischen Ausdrücken induktiv wie folgt: Sei der modallogische Ausdruck α schon für jeden Weltpunkt definiert. Dann setzt man für einen jeden Weltpunkt $w \in M$

$$w \vDash \Box\alpha$$

genau dann, wenn in jeder von w aus erreichbaren Welt v die Beziehung

$$v \vDash \alpha$$

gilt.

Beispiel 26.3. Wir arbeiten mit den Aussagenvariablen p, q, r. Im Weltpunkt a gelte

$$a \vDash p, q, \neg r$$

und im Weltpunkt b gelte

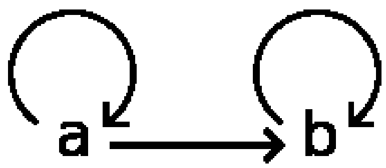
$$b \vDash p, \neg q, r\,.$$

Daraus kann man die Gültigkeit von aussagenlogischen Ausdrücken jeweils erschließen, beispielsweise gilt

$$a \vDash p \wedge \neg r$$

oder

$$b \vDash \neg q \to r\,.$$



Für modallogische Ausdrücke muss man den gerichteten Graphen berücksichtigen, wobei man induktiv über die Anzahl der Boxen vorgeht. Es geht also zunächst um Ausdrücke der Form $\Box\alpha$, wobei α ein rein aussagenlogischer Ausdruck ist (also ohne jede Box). Die Gültigkeit von $\Box\alpha$ in einem Weltpunkt bedeutet, dass in jedem von diesem Weltpunkt aus erreichbaren Weltpunkt α gilt. Somit gilt beispielsweise

$$a \vDash \Box p$$

und

$$a \vDash \neg\Box q$$

und

$$a \vDash \Box(q \vee r)\,,$$

ferner

$$b \vDash \Box p$$

und

$$b \vDash \Box \neg q\,.$$

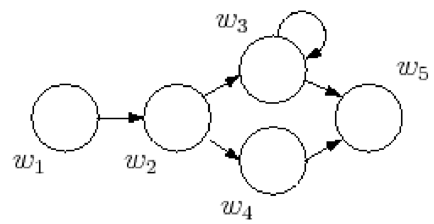
Damit kann man dann in jedem Punkt aussagenlogisch den Wahrheitswert von jeder modallogischen Aussage bestimmen, in der die Box nur einfach (also ohne Verschachtelungen) auftritt, beispielsweise

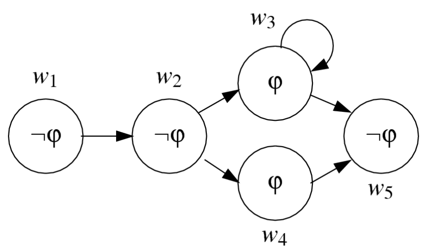
$$a \vDash \Box p \wedge \neg r \wedge \neg \Box \neg r\,.$$

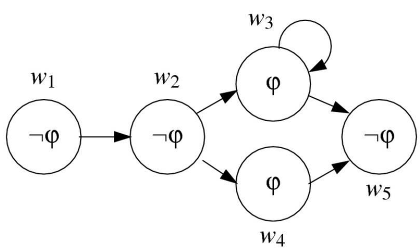
Unter Berücksichtigung des gerichteten Graphen kann man dann auch den Wahrheitswert für jeden modallogischen Ausdruck mit modallogischer Verschachtelungstiefe ≤ 2 bestimmen, also etwa

$$a \vDash \Box\Box p\,,$$

u.s.w.







$\mathcal{M}, w_1 \models \neg\varphi$
$\mathcal{M}, w_1 \models \Box\Box\varphi$
$\mathcal{M}, w_2 \models \Box\varphi$
$\mathcal{M}, w_3 \models \Diamond\varphi$
$\mathcal{M}, w_5 \models \Box\varphi$
$\mathcal{M}, w_5 \models \Box\neg\varphi$

Definition 26.4. Man sagt, dass ein *modallogischer Ausdruck* α in einem modallogischen Modell (M, R, μ) *gilt*, geschrieben

$$(M, R, \mu) \vDash \alpha\,,$$

wenn

$$w \vDash \alpha$$

für alle $w \in M$ gilt.

Lemma 26.5. (1) *Die aussagenlogischen Tautologien der modallogischen Sprache gelten in jedem modallogischen Modell.*

(2) *In jedem modallogischen Modell (M, R, β) gilt das K-Axiom, also*

$$M \vDash \Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)\,.$$

(3) *Die in einem (jeden) modallogischen Modell gültigen Ausdrücke sind abgeschlossen unter dem Modus Ponens.*

(4) *Wenn ein modallogischer Ausdruck α in einem (jedem) modallogischen Modell gilt, so gilt auch $\Box\alpha$ in diesem (jedem) modallogischen Modell.*

Beweis. (1) und (3) sind klar, da die Gültigkeit in einem Knoten die aussagenlogischen Gesetze respektiert. (2). Sei $w \in M$ und

$$w \vDash \Box(\alpha \to \beta)$$

und

$$w \vDash \Box\alpha\,.$$

Dann gilt in jeder von w aus erreichbaren Welt v

$$v \vDash \alpha \to \beta \text{ und } v \vDash \alpha$$

und damit

$$v \vDash \beta\,.$$

Also ist

$$w \vDash \Box\beta\,.$$

(4). Wenn $(M, R, \mu) \vDash \alpha$ in einem modallogischen Modell (M, R, μ) gilt, so gilt für jede Welt $w \in M$ auch $w \vDash \alpha$. Wegen dieser allgemeinen Gültigkeit gilt auch $v \vDash \alpha$ für jede von w aus erreichbare Welt und damit $w \vDash \Box\alpha$. Dies gilt in jedem Punkt dieses Modells. $\Box$

Definition 26.6. Man sagt, dass eine Menge Γ von modallogischen Ausdrücken in einem modallogischen Modell (M, R, μ) *gilt*, geschrieben

$$(M, R, \mu) \vDash \Gamma\,,$$

wenn

$$(M, R, \mu) \vDash \alpha$$

für alle $\alpha \in \Gamma$ gilt.

Definition 26.7. Man sagt, dass ein *modallogischer Ausdruck* α in einem gerichteten Graphen (M, R) *gilt*, geschrieben

$$(M, R) \vDash \alpha\,,$$

wenn für jede Wahrheitsbelegung μ

$$(M, R, \mu) \vDash \alpha$$

gilt.

Definition 26.8. Es sei Γ eine Menge von modallogischen Ausdrücken und α ein modallogischer Ausdruck. Man sagt, dass α aus Γ *folgt*, geschrieben $\Gamma \vDash \alpha$, wenn für jedes modallogische Modell (M, R, μ) mit

$$(M, R, \mu) \vDash \Gamma$$

auch

$$(M, R, \mu) \vDash \alpha$$

gilt.

Für $\Gamma = \emptyset$ ergeben sich die modallogisch allgemeingültigen Ausdrücke. Aufgrund von Lemma 26.5 gehören alle in der K-Modallogik ableitbaren Ausdrücke dazu. Wie in der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik ist also der Ableitungskalkül korrekt und es erhebt sich die Frage, ob er auch vollständig ist.

Lemma 26.9. *Es sei Γ ein K-modallogisches System und α ein modallogischer Ausdruck. Es gelte*

$$\Gamma \vdash \alpha\,.$$

Dann ist auch

$$\Gamma \vDash \alpha\,.$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 26.5. □

Diese Aussage erlaubt es insbesondere, zu zeigen, dass aus einem gegebenen modallogischen Axiomensystem Γ ein gewisser modallogischer Ausdruck α nicht ableitbar, indem man ein modallogisches Modell (M, R, μ) angibt, in dem Γ gilt, aber α nicht.

Semantik der einzelnen modallogischen Systeme

Der durch die K-Modallogik gegebene axiomatische Rahmen gilt in jedem gerichteten Graphen, aufgefasst als modallogisches Modell. Wir fragen uns, wie speziellere modallogische Axiome mit Eigenschaften von gerichteten Graphen zusammenhängen. Der folgende Satz liefert eine Übersetzung zwischen diesen beiden Konzepten.

Satz 26.10.

(1) *In einem gerichteten Graphen (M, R) gilt das Möglichkeitsaxiom genau dann, wenn jeder Punkt $w \in M$ einen Nachfolger besitzt.*
(2) *In einem gerichteten Graphen (M, R) gilt das Reflexivitätsaxiom genau dann, wenn R reflexiv ist.*
(3) *In einem gerichteten Graphen (M, R) gilt das Symmetrieaxiom genau dann, wenn R symmetrisch ist.*
(4) *In einem gerichteten Graphen (M, R) gilt das Transitivitätsaxiom genau dann, wenn R transitiv ist.*

(5) *In einem gerichteten Graphen (M, R) gilt das euklidische Axiom genau dann, wenn R euklidisch ist.*
(6) *In einem gerichteten Graphen (M, R) gilt das Löb-Axiom genau dann, wenn R transitiv ist und es in M keine unendlichen Ketten gibt.*

Beweis. (1). Es sei (M, R) gegeben. Sei zunächst vorausgesetzt, dass in R jedes Element einen Nachfolger besitzt und sei

$$w \vDash \Box\alpha$$

für eine Welt $w \in M$. Es sei $v \in M$ mit wRv. Dann ist

$$v \vDash \alpha$$

und somit

$$w \vDash \Diamond\alpha\,,$$

also

$$w \vDash \Box\alpha \to \Diamond\alpha\,.$$

Sei umgekehrt angenommen, dass M eine Sackgassenwelt w besitzt. Dann ist für eine beliebige Aussagenvariable p

$$w \vDash \Box p\,,$$

aber

$$w \nvDash \Diamond p\,,$$

und das Möglichkeitsaxiom kann nicht gelten.

(2). Es sei (M, R) gegeben. Sei zunächst R reflexiv und sei

$$w \vDash \Box\alpha\,.$$

Wegen wRw ist insbesondere

$$w \vDash \alpha\,.$$

Wenn R nicht reflexiv ist, so sei $w \in M$ und wRw gelte nicht. Es sei μ die Belegung, bei der

$$w \vDash p$$

gelte, aber in allen anderen Welten $v \vDash \neg p$. Dann ist

$$w \vDash \neg\Diamond p\,,$$

und somit ist

$$w \nvDash p \to \Diamond p\,.$$

(3). Es sei (M, R) gegeben. Sei zunächst R symmetrisch und sei

$$w \vDash \alpha\,.$$

Es sei eine von w aus erreichbare Welt v gegeben, also wRv. Wegen der Symmetrie ist auch vRw und somit ist

$$v \vDash \Diamond\alpha\,.$$

Also ist

$$w \vdash \Box\Diamond\alpha \,.$$

Wenn R hingegen nicht symmetrisch ist, so seien $w, v \in M$ Welten mit wRv, aber nicht vRw. Es sei p eine Aussagenvariable und es sei μ die Belegung, bei der

$$w \vDash p$$

gelte und so, dass in allen von v aus erreichbaren Welten $z \vDash \neg p$ gelte. Dann ist

$$v \vDash \neg\Diamond p \,,$$

und somit ist

$$w \nvDash \Box\Diamond p \,,$$

also

$$w \nvDash p \rightarrow \Box\Diamond p \,.$$

(4). Es sei (M, R) gegeben. Sei zunächst R transitiv und sei

$$w \vDash \Box\alpha \,.$$

Es sei wRv und vRz und somit

$$z \vDash \alpha \,.$$

Also ist

$$v \vDash \Box\alpha \,.$$

und damit

$$w \vDash \Box\Box\alpha \,.$$

Es sei nun R nicht transitiv und seien $w, v, z \in M$ Punkte mit wRv, vRz, aber nicht wRz. Es sei p eine Aussagenvariable und sei μ die Belegung, bei der p in allen von w aus erreichbaren Welten gelte, in allen anderen Welten nicht. Dann ist

$$w \vDash \Box p$$

und

$$v \nvDash \Box p \,,$$

da ja $z \nvDash p$, und somit ist

$$w \nvDash \Box\Box p \,,$$

also

$$w \nvDash \Box p \rightarrow \Box\Box p \,.$$

(5). Es sei (M, R) gegeben. Sei zunächst R euklidisch und sei

$$w \vDash \Diamond\alpha \,.$$

Somit gibt es eine Welt v mit wRv und mit

$$v \vDash \alpha \,.$$

Es sei z eine Welt mit wRz. Nach der euklidischen Eigenschaft ist dann auch zRv, daher ist

$$z \vDash \Diamond\alpha \,.$$

Somit ist

$$w \vDash \Box\Diamond\alpha\,.$$

Es sei nun R nicht euklidisch und seien $w, v, z \in M$ Punkte mit wRv, wRz, aber nicht vRz. Es sei p eine Aussagenvariable und sei μ die Belegung, bei der $\neg p$ in allen von v aus erreichbaren Welten gelte, in allen anderen Welten nicht. Dann ist

$$v \vDash p$$

und somit

$$w \vDash \Diamond p\,.$$

In z gilt hingegen $\Box\neg p$, also

$$z \vDash \neg\Diamond p\,.$$

Somit gilt

$$w \vDash \neg\Box\Diamond p$$

und damit

$$w \nvDash \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p\,.$$

(6). Wir arbeiten mit der Kontraposition des Löb-Axioms, also mit

$$\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond(\alpha \wedge \neg\Diamond\alpha)\,.$$

Sei zunächst vorausgesetzt, dass (M, R) die graphentheoretischen Eigenschaften besitzt. Sei $w \in W$ und

$$w \vDash \Diamond\alpha\,.$$

Dann gibt es eine Welt $v \in M$ mit wRv und mit

$$v \vDash \alpha\,.$$

Wir betrachten Ketten $vRv_2, v_2Rv_3, \ldots$ mit $v_i \vDash \alpha$. Da es keine unendliche Kette gibt, bricht eine solche Kette ab, sagen wir in v_n. In v_n gilt dann

$$v_n \vDash \alpha \wedge \neg\Diamond\alpha\,.$$

Wegen der Transitivität ist v_n von w aus erreichbar und somit ist

$$w \vDash \Diamond(\alpha \wedge \neg\Diamond\alpha)\,.$$

Sei nun vorausgesetzt, dass (M, R) nicht die Eigenschaften erfüllt. Wenn R nicht transitiv ist, so ist nach Lemma 25.18 in Verbindung mit Lemma 26.9 die Gültigkeit des Löb-Axioms ausgeschlossen. Es sei also eine unendlich lange Kette der Form w_nRw_{n+1} gegeben. Wir belegen $w_n \vDash p$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $v \vDash \neg p$ für alle anderen Welten. Dann gilt

$$w_0 \vDash \Diamond p \wedge \neg\Diamond(p \wedge \neg\Diamond p)\,,$$

da außerhalb der Kette stets $\neg p$ gilt und innerhalb der Kette stets $\Diamond p$ gilt. $\Box$

Bemerkung 26.11. Ein Modell des Löb-Axioms ist insbesondere frei von Schleifen, d.h. es ist reflexivitätsfrei, es gilt also nie wRw. Eine solche Schleife würde ja direkt eine unendliche Kette produzieren. Der gerichtete Graph

$$w_n, n \in \mathbb{N},$$

mit der durch w_nRw_m, falls $n < m$ gegebenen Relation und der Belegung $w_n \vDash p$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigt, dass das Löb-Axiom (in der Form $\Diamond p \to \Diamond(p \wedge \neg \Diamond p)$ bei einer unendlichen transitiven Kette ohne Schleifen nicht gelten muss.

Beispiel 26.12. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}_+$ die modallogische Ausdrucksmenge, die durch

$$\alpha_n = \Diamond(p_1 \wedge \ldots \wedge p_{n-1} \wedge \neg p_n)$$

gegeben ist. Da sich die Ausdrücke, die innerhalb des $\Diamond$-Operators von α_n stehen, gegenseitig ausschließen, bruacht man zur Realisierung von $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ mindestens n Punkte. Daher ist

$$\Gamma = \{\alpha_n | \, n \in \mathbb{N}_+\}$$

nicht durch einen endlichen gerichteten Graphen erfüllbar. Die Ausdrucksmenge ist problemlos durch einen unendlichen gerichteten Graphen erfüllbar: Von einer Grundwelt W_0 aus sind die unendlich vielen Welten W_n, $n \in \mathbb{N}_+$, erreichbar, und in W_n gilt $p_1 \wedge \ldots \wedge p_{n-1} \wedge \neg p_n$ (die Wahrheitsbelegung ist ansonsten unerheblich).

Abbildungsverzeichnis