高中代數學

目　　錄

第一章　代數式之基本演算

一　實數之基本演算

數　算術中所討論者僅限於正數,而代數學中則將數之範圍擴大,即負數及虛數等亦入於數之領域中.茲將數之系統列表如下:

- 數
  - 實數
    - 有理數
      - 整數
      - 分數　包括有限小數及循環小數.
    - 無理數　包括不循環之無限小數.
  - 虛數

2. 實數之絕對值.　算術中所討論之數,置正號(+)於其前,名曰正數,若置負號(−)於其前,則名曰負數.正號與負號,爲數之性質符號.故不論正數或負數,若去其性質符號,則仍爲算術中所用之數,此數名爲未去號以前之正數或負數之絕對值.例如 3 爲 +3 之絕對值,亦爲 −3 之絕對值.

表某數之絕對值,常於其旁夾二直線,例如 $|+3|=3$,

$|-3|=3$. 故 a 之絕對值爲 $|a|$, 又 0 之絕對值 $|0|$ 定爲 0.

正數之性質符號,常略而不記.合正數,負數與 0, 總稱曰實數

3. 實數之加法. 同號二數相加,其和爲二數絕對值之和,而附以公有之符號.

例
$$(-2)+(-3)=-5,$$
$$(+2)+(+3)=+5.$$

異號二數相加,其和爲二數絕對值之差,而附以絕對值較大者之符號.

例
$$(-3)+(+2)=-(3-2)=-1,$$
$$(+3)+(-2)=+(3-2)=+1.$$

此和謂之代數和.一數加一正數,則其數增大,加一負數,則其數減小,故代數和與算術和大不相同.

4. 實數之減法. 求二數之差,可變其減數之符而加之.

例 $(+5)-(+3)=(+5)+(-3)=+2.$

則何謂差?差之定義如下:

被減數=減數+差.

故若有一數與減數 b 之和等於被減數 a, 則此數爲 a 減 b 之差.

今設 $b=-b'$, b' 爲一正數,求 $a-b$. 因 $a+b'$ 與 b 之和等於 a, 故 $a+b'$ 等於 $a-b$. 即 $a-(-b')=a+b'$

例　$(+5)-(-3)=(+5)+(+3)=+8,$

$(-5)-(-3)=(-5)+(+3)=-2,$

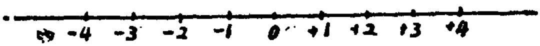
$0-(-2)=+2.$

5.　二實數之比較.　設有 a, b 二實數,若 $a-b$ 爲正,則曰 a 大於 b; 若 $a-b$ 爲 0, 則曰 a 等於 b; 若 $a-b$ 爲負,則曰 a 小於 b.

即若:　$a-b \gtreqless 0$, 則 $a \gtreqless b$.

6.　實數之表示法.　正數皆大於零,零大於負數.正數之絕對值愈大,則其值亦愈大,而負數則絕對值大者,其值反小.例如 $+3>+2$　$-3<-2$.

凡實數可以用一直線上之點表示之:於一無限直線上取一點以表示 0, 謂之原點.於原點之右取一點以表示 1, 謂之單位點.凡點在原點之右者,表示正數,在原點之左者,表示負數.如有兩點,一在左一在右,則令右點所表示之數大於左點所表示之數.茲將表示整數之諸點,明記如



又　$\cdots<-4<-3<-2<-1<0<+1<+2<+3<+4\cdots$

7. 實數之乘法. 兩正數或兩負數相乘,其積爲一正數;一正數與一負數相乘,其積爲一負數;積之絕對值爲絕對值之積,此定義也. 設$a>0, b>0$,則

$$(+a)\times(+b)=+ab,$$

$$(-a)\times(-b)=+ab,$$

$$(+a)\times(-b)=-ab,$$

$$(-a)\times(+b)=-ab.$$

無論何數,與零相乘,定其積爲零.

設a爲任何數,則$a\times 0=0\times a=0$.

8. 連乘積 兩個以上之數相乘,其結果稱爲此諸數之連乘積.而此相乘之諸數,稱爲因數.

由前節,偶數個負數之連乘積爲一正數;奇數個負數之連乘積爲一負數;若有一個因數爲零,則其積爲零.

例 $\quad 2\times(-3)\times 4\times(-5)=-6\times 4\times(-5)$

$$=-24\times(-5)=+120.$$

而 $\quad 2\times(-3)\times(-4)\times(-5)=-6\times(-4)\times(-5)$

$$=24\times(-5)=-120.$$

在算術中,諸數相乘,其間必須記以乘號(×).在代數學中,凡文字與文字相乘,或數字與文字相乘,常將乘號略去不記.但數字與數字相乘,則不可略去.例如$a\times b$常記爲

ab; $3\times a\times b$ 常記爲 $3ab$. 但 3×2 則斷不能記爲 32, 惟有時於因數之間,夾以圓點,作爲乘號,如 $3\times 2\times 5$ 可記爲 $3\cdot 2\cdot 5$.

9. 數之除法　兩正數或兩負數相除,其商爲正.一正數與一負數相除,其商爲負.商之絕對值,爲絕對值之商.凡除數不能爲零.此商之定義也.

例
$$(+12)\div(+3)=+4,$$
$$(-12)\div(-3)=+4,$$
$$(+12)\div(-3)=-4,$$
$$(-12)\div(+3)=-4.$$

零爲非零之數除,其商爲零.以零除任何數,定義中所不及,故毫無意義.

二　運算之基本律

10. 交換律.　諸數相加或相乘,其次序雖任意換,其和或積不變.

例
$$a+b=b+a,$$
$$a+(-b)+c=a+c+(-b),$$
$$ab=ba,$$
$$abc=bca.$$

11. 組合律.　諸數相加或相乘,將其各項或諸因

數任意組合,其和或積不變.

例 $$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c),$$

$$abc=(ab)c=a(bc).$$

12. 分配律. 諸數之和與某數之乘積,等於以此某數乘其各數所得諸積之和.

例 $$c(a+b)=(a+b)c=ac+bc.$$

13. 乘冪數與指數律. n 個 a 之連乘積,記以 a^n,曰 a 之 n 乘冪數,a 爲底,n 爲指數. a^n 之逆數 $\frac{1}{a^n}$,以 a^{-n} 記今設 n 與 m 爲二正整數,則

(i) $$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

因 $a^m\times a^n=m$ 個 a 之連乘積 $\times n$ 個 a 之連乘積

$=(m+n)$ 個 a 之連乘積

$=a^{m+n}$.

(ii) $$(ab)^m=a^mb^m$$

因 $(ab)^m=m$ 個 ab 之連乘積

$=m$ 個 a 之連乘積 $\times m$ 個 b 之連乘積

$=a^mb^m$.

(iii) $$(a^m)^n=a^{mn}$$

因 $(a^m)^n=n$ 個 a^m 之連乘積

$=mn$ 個 a 之連乘積

$=a^{mn}$.

14. 負數之冪. 負數之偶數乘冪爲正,奇數乘冪爲負.

例　　$(-5)^2=+5^2,\ (-5)^3=-5^3.$

一般言之,$(-5)^{2n}=+5^{2n},\ (-5)^{2n+1}=-5^{2n+1}.$

15. 指數律之擴張.

(i) 設　　$m>n>0\quad a\neq 0.$

則因 $a^m\times a^{-n}=\dfrac{a^m}{a^n}=m$ 個 a 之連乘積 $\div n$ 個 a 之連乘積

$=(m-n)$ 個 a 之連乘積,

故　　$a^m\times a^{-n}=a^{m-n}$

(ii) 若　　$m=n,\ a\neq 0.$

則因　$\dfrac{a^m}{a^n}=1$,故定 a^0 之意義爲 1,

即　　$a^0=1.$

(iii) 設　　$0<m<n,\ a\neq 0.$

則因　$\dfrac{a^m}{a^n}=m$ 個 a 之連乘積 $\div n$ 個 a 之連乘積

$=1\div(n-m)$ 個 a 之連乘積

$=\dfrac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}$

$=a^{m-n}.$

故又得　$a^m\times a^{-n}=a^{m-n}.$

總而言之,得結果如下:

若$a \neq 0$，則不論m與n爲正整數或負整數。

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

習　題　一

1.　求證　$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

化簡下列各式：

2.　$\dfrac{2^{2^2}}{2(2^2)^2}$.

3.　$(36^2a^7b^5c^4d^2) \div (81a^4b^8c^2)$.

4.　$(a^8b^2c^4) \times (a^5b^6c^8) \div (a^7b^4c^6)$.

5.　$(-12x^3y^4z^5)^3 \times \left(\dfrac{x^2}{8y^2z^3}\right)^2$

6.　$\left(\dfrac{a^4c^5y^2}{a^3b^2c^3x^2y^4}\right)^2 \times \left(\dfrac{a^3b^3x^5}{a^2b^3c^3 \cdot cy^2}\right)^3 \times \left(\dfrac{b^2c^4x^2y^2}{a^4b^3x^5y^2}\right)^6$

7.　$(-3x^2y^3z)^5 \times \left(\dfrac{x^6y^9}{z^4}\right) \times \left(\dfrac{3x^3y^4}{4z^2}\right)^2$

8.　$\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n} \times \left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n+l} \times \left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}$

9.　$\left\{\left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^l \times \left(\dfrac{x^m}{x^l}\right)^m\right\} \div \{(x^l)^l \times (x^m)^m\} \times \{(x^m)^l \times (x^l)^m\}$.

10.　$\dfrac{(yz)^{mn}(zx)^{nl}(xy)^{lm}}{(y^{m-1}z^{n-1})^l(z^{n-1}x^{l-1})^m(x^{l-1}y^{m-1})^n}$.

三　初等代數式

16. 定義. 用五種演算記號'+' '−','×','÷','√'若干回以聯合數字(有理數或無理數)及文字所成之式,謂之初等代數式*.僅用'+','−','×'三種符號所聯成之初等代數式,謂之**有理整式**.有理整式除有理整式之商,謂之**分數式**.

例　ax^2+bx+c, $\sqrt{\frac{5}{2}}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}$　爲整式.

而　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $\frac{2+x}{1-x}$　爲分數式.

合有理整式與分數式,總稱曰有理式.有理式而外之初等代數式,統稱之曰無理式.

例　$2x+\frac{1}{y}$, $\sqrt{3}x^2+\sqrt{2}x+1$　爲有理式.

而　$\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $2\sqrt{x}+3$　爲無理式.

17　項及同類項. 代數式中以加號及減號所隔離之各部分,謂之項.

例　$a^2-2ab+b^2$ 中, a^2, $-2ab$, $+b^2$ 各謂之項

兩項除數字係數外,其所含文字及各文字之指數完

---

*代數式之一般定義,本書因無敍述之必要,故略之.又'若干回'者,其回數有限之謂也.

全相同者,謂之同類項.

例如 $3a^2b^3$ 及 $2a^2b^3$ 爲同類項,而 $4a^2b$ 與 $4ab^2$ 非爲同類項.

18. 單項式及多項式. 一有理整式僅含有一項者,謂之單項式.含有二項以上者,謂之多項式.

多項式之項數爲二者,謂之二項式,項數爲三者,謂之三項式.

19. 有理整式之次數. 單項式中諸文字之指數和,稱爲此單項式之次數.多項式中所含最高次項之次數,爲其式之次數.

例　　$3x^3+2x^2-4x+5$　爲 x 之三次式.

而　　$x^4+2xy+3y^2$　爲 x 與 y 之四次式.

式中不含文字之項,謂之絕對項.

若式中諸項之次數相同,則謂之齊次式.

例　$5x^3-3x^2y+2xy^2-y^3$ 爲 x 與 y 之齊次式.

20. 完全多項式. x 之多項式,其標準形式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

於此 n 爲正整數,$a_0, a_1, a_2\cdots\cdots a_{n-1}, a_n$ 代表 $n+1$ 個數字.如 $a_0, a_1\cdots\cdots a_n$ 無一爲零,則此式謂之 n 次完全多項式,否則謂之不完全多項式.由此可知完全多項式之項數必比其次數多一.

21. 代數式之值　於代數式中之諸文字各以數字代入,而依式中演算符號,實行計算,所得之結果,稱為此代數式之一值.

設　　$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$

為 x 之 n 次有理整式, b 為一數字,以 b 代 x, 則其值等於

$$a_0b^n+a_1b^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}b+a_n.$$

多項式之數值,其法可如下例以求之:

例　$x=b$ 時,求 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 之值.

法將式中各項係數依次列之,以 b 乘第一項之係數 a_0,所得結果,與第二項之係數 a_1 相加,乃復以 b 乘之,而後與第三項之係數 a_2 相加,如是繼續進行,加至 a_n 止(本題 $n=3$),其最後所得之結果,即為所求之值.此種計算法之演式如下:

$$\begin{array}{cccc}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
 & a_0b & a_0b^2+a_1b & a_0b^3+a_1b^2+a_2b \\
\hline
 & a_0b+a_1 & a_0b^2+a_1b+a_2 & a_0b^3+a_1b^2+a_2b+a_3
\end{array}$$

不完全多項式中之缺項,其係數為零,當以零補足之.

例　設 $x=3$, 求 $2x^5+3x^4-2x^2+5x-8$ 之數值.

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 3 & 0 & -2 & 5 & -8 \\
 & 6 & 27 & 81 & 237 & 726 \\
\hline
 & 9 & 27 & 79 & 242 & 718
\end{array}$$

故所求之數値爲718.

22. 有理整式之加法. 諸式相加,可將各式中之諸項之前附以加號,依次記之,如有同類項,則集合而簡約之.

例 1.　求 $12x^2$, $5xy$, $-5x^2$, $+4xy$ 之和.

$$\begin{aligned}12x^2+5xy+(-5x^2)+4xy&=12x^2+(-5x^2)+5xy+4xy\\&=7x^2+9xy.\end{aligned}$$

例 2.　求 $5ab+2bc+3ca$ 與 $-4ab+3bc-7ca$ 之和.

$$\begin{aligned}&5ab+2bc+3ca\quad 4ab+3bc-7ca\\&=5ab-4ab+2bc+3bc+3ca-7ca\\&=ab+5bc-4ca.\end{aligned}$$

諸式相加,可將各式中之同類項相實而列記之,然後求其各同類項係數之代數和.

例 3.　求 $2x^2-2xy+3y^2$, $4y^2+5xy-3x^2$ 及 $2xy+3x^2-y^2$ 之和.

$$\begin{array}{r}2x^2-2xy+3y^2\\-3x^2+5xy+4y^2\\3x^2+2xy-\ y^2\quad(+\\\hline 2x^2+5xy+6y^2\end{array}$$

例 4.　求 $a^2+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{3}b^2$, $\frac{3}{4}a^2+\frac{2}{5}b^2$, $\frac{2}{3}ab-\frac{1}{4}b^2$ 之和.

$$
\begin{array}{rrrl}
a^2 & +\frac{1}{2}ab & -\frac{1}{3}b^2 & \\
\frac{3}{4}a^2 & & +\frac{2}{5}b^2 & \\
 & \frac{2}{3}ab & -\frac{1}{4}b^2 & (+ \\
\hline
1\frac{3}{4}a^2 & +1\frac{1}{6}ab & -\frac{11}{60}b^2 &
\end{array}
$$

23. 有理整式之減法. 兩式相減,可將減式中各項之符號悉行變更,附記於被減式之後,有同類項則簡約之.

例　從 $x^5-x^4+x^3-x+1$ 減 $x^4-x^3+x^2+x-1$.

$$
\begin{aligned}
& x^5-x^4+x^3-x+1-(x^4-x^3+x^2+x-1) \\
&= x^5-x^4+x^3-x+1-x^4+x^3-x^2-x+1 \\
&= x^5-2x^4+2x^3-x^2-2x+2.
\end{aligned}
$$

24. 去括弧法. 括弧前有(+)號者,去括弧後,不變其中各項之符號.

例 1.　　$a+(b+c)=a+b+c.$

例 2.　　$a+(-b-c)=a-b-c.$

括弧前有(−)號者,去括弧後,必須變更其中各項之符號.

例　　$a-(b-c-d)=a-b+c+d.$

式中如有數重括弧,可由外而內逐次去之.

例 $a-\{b-[c-(d-e)]\}=a-b+[c-(d-e)]$

$$=a-b+c-(d-e)$$

$$=a-b+c-d+e.$$

又若自內而外逐次去之,其結果亦同.

簡法 設括弧之前有(−)號者,名之曰負括弧,則得去括弧之簡法如次:

某數之前有奇數重之負括弧時,去括弧後,必須變更此數之符號;設某數之前有偶數重之負括弧時,則去括弧後,不必變更其符號.

例 1. $a-\{b-[c-(d-\overline{e-f})]\}$

$$=a-b+c-d+e-f.$$

例 2. $6x-\{4x+[2x-(3x-\overline{5x-7})-1]-5\}$

$$=6x-4x-2x+3x-5x+7+1+5$$

$$=-2x+13.$$

25. 多項式之整理. 關於某一特別文字之多項式,依其各項之次數而排列之,是爲多項式之整理.若各項之次數自左而右逐漸增加者,謂之昇冪排列;逐漸減少者,謂之降冪排列.

26. 有理整式之乘法 相乘二式如有公共之

文字,則當就此文字整理之而後乘.

例 1.　求 $2x^3-x^2+3$ 與 $x-2+x^2$ 之積.

先將二式依 x 之降冪排列而後實行乘法.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
2x^3 & -x^2 & & +3 & & & \\
 & x^2 & +x & -2 & & & (\times \\
\hline
2x^5 & -x^4 & & +3x^2 & & & \\
 & 2x^4 & -x^3 & & +3x & & \\
 & & -4x^3 & +2x^2 & & -6 & (+ \\
\hline
2x^5 & +x^4 & -5x^3 & +5x^2 & +3x & -6 &
\end{array}
$$

例 2.　求 x^2+xy+y^2 與 x^2-xy+y^2 之積.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x^2 & +xy & +y^2 & & & \\
x^2 & -xy & +y^2 & & & (\times \\
\hline
x^4 & +x^3y & +x^2y^2 & & & \\
 & -x^3y & -x^2y^2 & -xy^3 & & \\
 & & x^2y^2 & +xy^3 & +y^4 & (+ \\
\hline
x^4 & & +x^2y^2 & & +y^4 &
\end{array}
$$

觀察此二例,可得結論如下:

(i)　二式若依某一特別文字之降冪(或昇冪)排列,則由上法相乘而後,其積亦依此文字之降冪(或昇冪)排列.

(ii)　積之次數,等於原二式次數之和.

(iii)　積之最高次項(或最低次項),等於原二式最高次項(或最低次項)之積.

(iv) 二齊次式之積,仍為齊次式.

27. 恆等式. 實行乘法,可得下列之諸恆等式.恆等式者,不問其中之文字表示何數或何式,兩邊常等之關係式也:

(1) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

(2) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$.

(3) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

(4) $(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$.

(5) $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$.

(6) $(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.

(7) $(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$.

(8) $(x+A)(x+B)=x^2+(A+B)x+AB$.

此諸式甚為重要,學者宜熟記之.

例 1. $(2x-3y)^2=(2x)^2-2\times 2x\times 3y+(3y)^2$

$=4x^2-12xy+9y^2$.

例 2. $(a+b+c)^2=\{a+(b+c)\}^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$

$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

例 3. $99^2=(100-1)^2=100^2-2\times 100\times 1+1^2$

$=10000-200+1$

$=9801$.

例 4. $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$

$$=\{(a-b)+(c-d)\}\{(a-b)-(c-d)\}$$

$$=(a-b)^2-(c-d)^2$$

$$=a^2-2ab+b^2-c^2+2cd-d^2.$$

二項式$(A\pm B)$之乘冪,其一般之展開法,當述諸後.茲將其各次展開式之係數,列表如下.此表稱為巴士卡*算術三角形.

指數	係				數			
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
…	…………………………………							

巴士卡(Pascal, 1623-1662),氏為法人,幼承父教,專治古文,禁習數學,氏以木炭當地作圖,竟得三角形內角之和為二直角之定理,其父大為驚異,乃授以幾何學.

例

$(a+b)^7$

$$=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7.$$

28. 有理整式之除法. 先整理除式及被除式,使其依某一文字之降冪排列,而後以除式之首項(即左端之項)除被除式之首項,得商之首項;以商之首項乘除式得積,置於被除式之下相減,得餘式.又以除式之首項除餘式之首項,得商之第二項,以此商之第二項乘除式,自餘式減其積;如此繼續進行,以至於盡.若不能盡,則至餘式之次數小於除式之次數而止.

例 以 $3x^2+2x-1$ 除 $18x^5-3x^4-7x^3+14x^2-x-1$.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
18x^5 & -3x^4 & -7x^3 & +14x^2 & -x & -1 & 3x^2+2x-1 \\
\cline{7-7}
18x^5 & +12x^4 & -6x^3 & & & & 6x^3-5x^2+3x+1 \\
\cline{1-3}
 & -15x^4 & -x^3 & +14x^2 & & & \\
 & -15x^4 & -10x^3 & +5x^2 & & & \\
\cline{2-5}
 & & 9x^3 & +9x^2 & -x & & \\
 & & 9x^3 & +6x^2 & -3x & & \\
\cline{3-6}
 & & & 3x^2 & +2x & -1 & \\
 & & & 3x^2 & +2x & -1 & \\
\cline{4-6}
\end{array}$$

故所求之商為 $6x^3-5x^2+3x+1$.

29. 分離係數法. 二式相乘或相除,可依其文字之降冪排列,省去文字,僅記其各項之係數.如有缺項,則以0補足之,然後用普通乘除法,求得其積或商之各項係數,

於此所得之結果,復以適當之文字乘冪插入之,是謂**分離係數法**.

例 1.　求 $(2x^3-3x^2+x-4)(x^2+2x-3)$.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
2 & -3 & +1 & -4 & & & \\
1 & +2 & -3 & & & & (\times \\
\hline
2 & -3 & +1 & -4 & & & \\
 & 4 & -6 & +2 & -8 & & \\
 & & -6 & +9 & -3 & +12 & \\
\hline
2 & +1 & -11 & +7 & -11 & +12 &
\end{array}$$

故所求之積為 $2x^5+x^4-11x^3+7x^2-11x+12$.

例 2.　求 $(x^3-3x^2+2)(x^3+3x-2)$.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
1 & -3 & +0 & +2 & & & \\
1 & +0 & +3 & -2 & & & \\
\hline
1 & -3 & +0 & +2 & & & \\
 & & 3 & -9 & +0 & +6 & \\
 & & & -2 & +6 & +0 & -4 \\
\hline
1 & -3 & +3 & -9 & +6 & +6 & -4
\end{array}$$

故所求之積為 $x^6-3x^5+3x^4-9x^3+6x^2+6x-4$.

例 3.　求 $(2x^3-3x^2-6x-1)\div(2x^2-5x-1)$.

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
2 & -3 & -6 & -1 & 2 & -5 & -1 \\
\cline{5-7}
2 & -5 & -1 & & 1 & +1 & \\
\cline{1-4}
 & 2 & -5 & -1 & & & \\
 & 2 & -5 & -1 & & & \\
\cline{2-4}
\end{array}$$

故所求之商為 $x+1$.

30. 綜合除法. 除式如爲一次二項式者,可用綜合除法,以求其商及剩餘.茲先舉例以明其法.

例 以 $(x+3)$ 除 (x^3+2x^2-x+4).

【解】 依前節所述分離係數法,此二式相除,其演式如下:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & +2 & -1 & +4 & 1+3 \\
1 & +3 & & & \overline{1-1+2} \\
\hline
0 & -1 & -1 & & \\
 & -1 & -3 & & \\
\cline{2-4}
 & & 2 & +4 & \\
 & & 2 & +6 & \\
\cline{3-4}
 & & & -2 &
\end{array}
$$

於此所當注意者,被除式及諸除式之第一項各與其減式之第一項相等,每行相減,其差爲0,故各減式之第一項,均可略去不記;次因除式首項之係數爲1,故商之各項,與被除式及諸除式之第一項順次相同.由是,除式之第一項及商之各項雖略去不記,亦可明瞭,故上列演式,可簡書之如下:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 1 & +2 & -1 & +4 & +3 \\
-) & & 3 & & & \\
\cline{2-4}
 & 1 & -1 & -1 & & \\
 & & & -3 & & \\
\cline{3-5}
 & & & 2 & +4 & \\
 & & & & +6 & \\
\cline{4-5}
 & & & & -2 &
\end{array}
$$

如將此演式更縮之,則可記爲

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +2 & -1 & +4 & +3 \\ & +3(- & -3(- & +6(- & \\ \hline 1 & -1 & +2, & -2 & \end{array}$$

或

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +2 & -1 & +4 & +3 \\ & +3 & -3 & +6 & (- \\ \hline 1 & -1 & +2, & -2 & \end{array}$$

若先將除式之第二項 $+3$ 變爲 -3，則其減式中各項之符號悉行改變，卽可施行加法．

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +2 & -1 & +4 & -3 \\ & -3 & +3 & -6 & \\ \hline 1 & -1 & +2 & -2 & \end{array}$$

其商爲 x^2-x+2，剩餘爲 -2．

含 x 之多項式，以 x 之一次二項式除之，可施用綜合除法，其法如下：

假設除式中 x 之係數爲 1，將被除式依 x 之降冪排列，略去文字，僅記其係數，如有缺項，則以 0 補充之．變除式第二項之符號，記於被除式之右，是謂變法數．由是作橫線，將被除式之第一項記於橫線之下，是爲商中第一項之係數，以變法數乘之，得積記於被除式第二項之下相加，得商中第二項之係數．如是繼續進行，以至於盡．橫線下最後一項卽爲剩餘，其餘各項，則爲商中各項之係數．

若除式雖爲一次二項式而其第一項之係數不等於 1，則須先化之，而後施行綜合除法．

例　以 $3x-2$ 除 $3x^3-11x^2+18x-3$.

【解】　因　　$3x-2=3(x-\frac{2}{3})$.

故先以 $x-\frac{2}{3}$ 除之,得

$$\begin{array}{rrrr} 3 & -11 & +18 & -3 \\ & 2 & -6 & +8 \\ \hline 3 & -9 & +12, & 5 \end{array}$$

故所求之商爲 $(3x^2-9x+12)\div 3=x^2-3x+4$, 剩餘爲 5.

習　題　二

1.　下列各式爲何種之代數式?

　(i)　$3x^2+2x+5$.

　(ii)　$\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

　(iii)　$5x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}+6x+3$.

　(i　$x^{-3}+2x^{-2}+3x+4$.

2.　$a=2, b=-3, c=4$, 求下列各式之值:

　(i)　$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

　(ii)　$(a^3+b^3)(a^2-b^2)(a^2+c^2)$.

3.　設 $a=4, b=5, c=3$, 求下式之值.

$$\sqrt{2\{b(a^2-b^2)+7c^2\}}+\sqrt[3]{5(b^2-c^2)}-a^2.$$

4.　$x=3$, 求 $3x^3-2x+4x+7$ 之值.

5.　$x=-2$, 求 $x^5+3x^3-5x^2+x-8$ 之值.

6. $x=4$, 求 $2x^6-3x^5+7x^4-4x^3-9x+12$ 之值.

7. 求 x^3-x+x^2-1, $x-2x^3+3x^2+2$, $4x^3+2x+1$ 之和.

8. 求 $\frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{3}y^2$, $\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{4}xy-\frac{1}{2}y^2$, $\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{4}y^2$ 之和.

9. 從 $4x^3+6x^2+5$ 減 $2x^3-3x^2+x-4$.

10. 何者與 x^2+3x-4 相加,得 x^3+2x^2-5?

11. 簡約 $a+\{2b-[a-(3a-b)-b(a-b)]-6\}$.

12. 簡約 $2x-\{3x-[x-(4x-\overline{5x-2}+5)+3]-7\}$.

13. 簡約 $\{12a-[4a+(2a-3b)-(a-5b)]-8a\}$.

14. 求 $(x^3-x^2+x-1)(2x^2-x+1)$.

15. 求 $(2x^4-3x+5x^2-2)(6x-5x^3+x^2+3)$.

16. 求 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

17. 展開 $(a+b-c-d)^2$.

18. 求 $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$.

19. 求 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.

20. 求 999^2 之值.

21. 求 $(x^3-x^2-9x-12)\div(x^2+3x+3)$.

22. 求 $(x^3+y^3-1+3xy)\div(x+y-1)$. $=x^2-xy+y^2+x+y+1$

23. 求 $(20x^5-57x^4+34x^3-73x^2-4x+20)$

$\div(5x^3-3x^2+8x-4)$.

用分離係數法求下列各式之積或商:

24. $(3x^2+2x+1)(x^2-x+1)$.

25. $(4x^3-3x+2)(x^3+2x^2-3)$.

26. $(3x^4-2x^3-32x^2+66x-35)\div(x^2+2x-7)$.

$3x^2-8x+5$

用綜合除法求下列各式之商及剩餘:

27. $(5x^5-x^3+x+3)\div(x-3)$.

28. $(x^3+x^2-5x+6)\div(x+2)$.

29. $(2x^3-3x^2+8x-12)\div(2x-3)$.

30. $(3x^3-11x^2+18x-3)\div(3x-2)$.

四　證明恆等式之成立

31. 恆等式之成立 恆等式之意義已詳§27. 推其所以成立之故,乃本節之目的.

欲證恆等式 $A\equiv B$ 之成立,可依運算規律,將 A 化為 B, 或將 B 化為 A, 或將 A, B 二式各化為他式 C, 證出 $A\equiv C$, $B\equiv C$, 即得 $A\equiv B$.

例 1. 設 $U_r=\dfrac{a^r-b^r}{a-b}$, $V_r=a^r+b^r$, $a\neq b$.

求證 $$2U_{r+s}=U_rV_s+V_rU_s.$$

【證】 $$U_rV_s+V_rU_s=\frac{a^r-b^r}{a-b}\cdot(a^s+b^s)+(a^r+b^r)\frac{a^s-b^s}{a-b}$$

$$=\frac{2(a^{r+s}-b^{r+s})}{a-b}$$

$$=2U_{r+s}.$$

$$2U_{r+s}=U_rV_s+V_rU_s$$

例 2.　證明 $(x+a+b)^2-4ab=(x+a-b)^2+4bx.$

【證】　略事計算,卽知恆等式之兩邊皆等於

$$x^2+a^2+b^2+2ax+2bx-2ab.$$

32. 數學歸納法. 含有正整數 n 之恆等式,有時可用下述方法證明之.

先證 n 為 1 時,恆等式成立.其次由 n 推至 $n+1$,最後斷定 n 為任意正整數時,恆等式成立.此法稱為數學歸納法.今舉例以明之.

例　求證 $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\cdots(1+x^{2^{n-2}})(1+x^{2^{n-1}})$

$$=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{2^n-2}+x^{2^n-1}.$$

【證】　n 為 1 時,上式確成恆等式.假設

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\cdots(1+x^{2^{k-2}})(1+x^{2^{k-1}})$$

$$=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{2^k-2}+x^{2^k-1},$$

則得　$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\cdots(1+x^{2^{k-1}})(1+x^{2^k})$

$$=(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{2^k-2}+x^{2^k-1})(1+x^{2^k})$$

$$=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{2^{k+1}-2}+x^{2^{k+1}-1}.$$

故若 $n=k$ 時成立,則 $n=k+1$ 時亦必成立.置 $k=1$,卽知 $n=2$ 時恆等式成立.再置 $k=2$,卽知 $n=3$ 時成立.今已證由 $n=k$ 可推至 $n=k+1$,故恆等式之成立也明誌.

習 題 三

證明下列諸恆等式:

1. $(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2-x^2-y^2-z^2=(x+y+z)$

2. $(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2+2(a+b)(a+c)$
$$+2(b+c)(b+a)+2(c+a)(c+b)=4(a+b+c)$$

3. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$
$$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$

4. $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
$$=2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^4+b^4+c^4).$$

5. $2\{(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4\}$
$$=\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}^2.$$

6. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$

7. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(b+c)(c+a)(a+b).$

8. $(y-z)^4+(z-x)^4+(x-y)^4=2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$

9. $(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$

10. $x(x-1)(x-2)(x-3)+1=(x^2-3x+1)^2.$

11. $(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})=x^n-y^n.$

12. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)\cdots\cdots(x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1)$
$$=x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1.$$

第二章　一次方程式

一　解方程式之原則及一元一次方程式

33. 定義. 恆等式與方程式.

以任何數值代入於等式中之文字,其兩邊常相等者,稱爲恆等式.此§27所已述者.

例
$$(x+y)(x-y)\equiv x^2-y^2$$
爲一恆等式.

以某特別數值代入等式中之文字而後,其兩邊始能相等者,稱爲方程式,或曰條件等式.

例　於
$$2x-1=x+2$$
之等式中,必須 $x=3$, 而後其兩邊始能相等,除3以外,任何數值,皆不適合,故 $x=3$, 爲使此等式成立之條件.此種等式,謂之方程式.其適合一方程式之數值謂之根,適合二及二以上之一組方程式之諸數值謂之解.

方程式中含有已知數及未知數二種.已知數常以數字或 a,b,c 等文字表示之.未知數常以 x,y 等文字表示之.

設有兩方程式,其解相同,詳言之,即適合於第一方程式之未知數之值,皆適合於第二方程式;而適合於第二方程式之未知數之值,皆適合於第一方程式,如斯之二方程式,謂之兩同解方程式.

例如 $3x+2=x-4$ 與 $x=-3$ 爲同解方程式;而 $x^2=9$ 與 $x=3$ 非爲同解方程式.

所謂解方程式者,即求與原方程式同解,而使其未知數之值顯然易見之方程式而已.

以方程式之解,代入於原方程式中之未知數,其結果,必爲恆等式,是謂驗算.

方程式中除未知數外,其已知數爲數字者,謂之數字方程式;其已知數爲 a, b, c 等文字者,謂之文字方程式.

方程式之兩邊皆爲一次有理數式者,名爲一次方程式.一次方程式僅含一未知數者,謂之一元一次方程式,其形式如下: $ax+b=0,\ a\neq 0.$

34. 解方程式之原則.

(i) 方程式之兩邊,以同數或同式加之(或減之),其解不變.

故方程式中之任意一項,變其符號,可移諸他邊.又方

程式之兩邊如有完全相同之項,可消去之.

(ii)　方程式之兩邊,以同數($\neq 0$)乘之,其解不變.

故方程式之兩邊,可將各項之符號悉行變更之,因變其各項之符號,即以 -1 乘其各項也.

定理 1.　設 A, B, C 皆為 x 之有理整式,則方程式 $AC=BC$ 之根與 $A=B$, $C=0$ 二方程式之根相同.

因 x 之值,如能使 $AC=BC$,必能使 $A=B$ 或 $C=0$. 反是, x 之值如能使 $A=B$ 或 $C=0$ 者,必能使 $AC=BC$ 故解方程式 $AC=BC$,祇須求 $A=B$, $C=0$ 二方程式之根足矣.

例如方程式 $x^2=3x$ 與二方程式 $x=0$ 及 $x-3=0$ 之根相同,即其根為 0 及 3.

同理, $(x-1)(x-2)=0$ 之根與 $x-1=0$ 及 $x-2=0$ 之根相同,即其根為 1 及 2.

由是可知整方程式 $A=B$ 之兩邊,同以整式 C 乘之,則引入 $C=0$ 之根. 反之,於整方程式 $AC=BC$ 之兩邊,同以整式 C 除之,則即失去 $C=0$ 之根. 故方程式之兩邊,不可以含有未知

數之代數式無條件的相乘除.

定理 2. 設 A, B 皆爲 x 之有理整式,則整方程式 $A^2=B^2$ 與二整方程式 $A=B, A=-B$ 之根相同.

因 $A^2=B^2$ 與 $A^2-B^2=0$ 之根相同,但

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B),$$

故方程式 $A^2=B^2$ 與 $A-B=0$ 及 $A+B=0$ 之根相同,故解 $A^2=B^2$,祇須解 $A=B$ $A=-B$ 二方程式足矣.

例如 $(2x-1)^2=(x-2)^2$ 之根與二方程式 $2x-1=x-2$ 及 $2x-1=-(x-2)$ 之根相同,解之,得 $x=-1, 1$.

故方程式 $A=B$ 之二邊各自平方之,即引入 $A=-B$ 之根;反之,儻化方程式 $A^2=B^2$ 爲 $A=B$,則失去 $A=-B$ 之根矣.

35. 一元一次方程式之解法. (i) 方程式中如有分數及括弧者,當先去其分母及括弧;(ii) 將含有未知數之項移於左邊,已知數之項移於右邊,且令各邊皆集爲一項;(iii) 以未知數之係數除其兩邊,即得方程式之根.

例 1. 解方程式 $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{x}{6}-(4-x)$.

【解】 去分母及括弧,

$$4x-3x+6=x-24+6x,$$

移項，　　$4x-3x-x-6x=-24-6,$

即　　$-6x=-30,$

$$x=5.$$

驗算　　$\dfrac{2\cdot5}{3}-\dfrac{5-2}{2}=\dfrac{5}{6}-(4-5).$

例 2.　設 $a+b\neq0$，解 $a(x-a)=2ab-b(x-b)$.

【解】　去括弧，　$ax-a^2=2ab-bx+b^2,$

移項，　　$ax+bx=a^2+2ab+b^2,$

即　　$(a+b)x=(a+b)^2,$

因　　$a+b\neq0$，故 $x=a+b$.

例 3.　設 $a\neq b$，解 $(x-a)^2-(x-b)^2=(a-b)^2$.

【解】　由觀察法，知 b 為此方程式之一根，然此方程式，實際上為一次方程式，且 $a\neq b$，故除 b 而外，別無他根，其理由如以下各節所述.

36　一元一次方程式之根.　凡一元一次方程式，皆可化為　　$ax=b\ (a\neq0)$

之形，由是　　$x=\dfrac{b}{a}$.

故一元一次方程式必有一根，且僅有一根.

例　試解　　$mx+n=px+q$.

【解】　移項集之，　$(m-p)x=q-n,$

若 $m \neq p$，則爲一次方程式，故有惟一之根 $\frac{q-n}{m-p}$.

若 $m=p$，則非一次方程式：若同時 $q \neq n$ 則無解；$q=n$，則無論何數，皆爲其解.

37. 應用問題. 本節所述之問題，均可以一元一次方程式解之者.

例 1. 有一舟子，在河中划舟，順流而行每十分鐘行二里，逆流而行，十五分鐘行二里．求河流每分鐘之速率及此舟子在靜水中划舟之速率

【解】 設 x 爲河水每分鐘所流之里數.

順流而行，此舟子划舟之速率，每分鐘爲 $\frac{2}{10}$ 里，即 $\frac{1}{5}$ 里．在靜水中，則爲每分鐘 $\frac{1}{5}-x$ 里.

逆流而行，每分鐘行 $\frac{2}{15}$ 里，在靜水中則爲 $\frac{2}{15}+x$ 里.

故 $$\frac{1}{5}-x=\frac{2}{15}+x.$$

解之，得 $$x=\frac{1}{30}$$

由是 $$\frac{1}{5}-x=\frac{1}{6}.$$

河流之速度爲每分鐘 $\frac{1}{30}$ 里，在靜水中，划舟之速率爲每分鐘 $\frac{1}{6}$ 里.

例 2.　求五點鐘與六點鐘之間,兩針成直角之時刻.

【解】　設所求之時刻為五點 x 分.

長針行 x 分之距離,短針行 $\frac{x}{12}$ 分.兩針互成直角,相距十五分.若長針在短針之前十五分之處成直角,則

$$x=25+\frac{x}{12}-15.$$

即　$\frac{11}{12}x=10,\qquad x=10\frac{10}{11}.$

若長針在短針之後十五分之處成直角,則

$$x=25+\frac{x}{12}+15.$$

即　$\frac{11}{12}x=40,\qquad x=43\frac{7}{11}.$

故在五點 $10\frac{10}{11}$ 分及 $43\frac{7}{11}$ 分之時,兩針互成直角.

習　題　四

解下列諸方程式:

1.　$15-(7-5x)=2x+(5-3x)$

2.　$x(x+3)-4x(x-5)=3x(5-x)-16.$

3.　$x=1+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}.$

4.　$x-2[x-3(x+4)-5]=3\{2x-[x-8(x-4)]\}-2.$

5.　$2\{3[4(5x-1)-8]-20\}-7=1.$

6. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x-1\right)-6\right]+4\right\}=1.$

7. $3-\frac{5-2x}{5}=4-\frac{4-7x}{10}+\frac{x+2}{2}.$

8. $\frac{5x-0.4}{0.3}+\frac{1.3x-0.5}{2}=\frac{13.95-8x}{1.2}.$

9. $(b-c)(a-x)+(c-a)(b-x)+(a-b)(c-x)=1-x.$

10. $\frac{x+1}{a+b}+\frac{x-1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}.$

11. $(2x-1)(3x-1)(4x+1)(5x+1)=0.$

12. $(x^2-x)(2x-5)=(x^2-x)(x+9).$ 0. 1. 14.

13. $(x+2)^3-(x-2)^3=32x+16.$

14. $\{(a+b)x-c\}^2=\{(a-b)x+c\}^2.$ 0. $\frac{c}{b}$.

15. $(x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0.$

應用問題:

16. 將360分爲二部分,其一部分之二倍等於他一部分之三倍,問各部分若干?

17. 雞兔共籠,其頭共有100,足共有270.問雞兔之數各若干?

18. 甲乙丙三人,共有法幣360元.甲所有之數,爲乙所有之二倍;丙所有之數,比乙所有之數多40元.問甲乙丙各有法幣若干元?

19. 有父子二人,不知其歲數.但知七年以前,父之歲

數爲子之四倍;七年以後,則爲二倍.求父子之歲數.

20. 一舟在河中,順流而行,每小時行 18 里,逆流而行,每小時行 12 里.求河流之速率.

21. 有一水槽,裝三水管,甲管注水,乙丙二管出水.開放甲管,經三小時,水即滿槽;開放乙管,經二小時,滿槽之水卽行流盡;開放丙管,則四小時可以流盡.今槽中貯滿以水,而後三管同時開放,則幾小時後,槽中之水流盡?

22. 甲乙二人同作一事,12 日可成.今甲乙二人同作 10 日,甲因病停工,其餘之事,由乙獨作 5 日,始行成功.問甲乙獨作,各需幾日可成?

23. 七點與八點之間,兩針何時成一直線(方向相反)?何時相重?

24. 八點與九點之間,兩針何時成一直角

25. 甲乙丙丁四人,分法幣 1300 元.各人所得者,甲爲乙之 $\frac{2}{3}$,乙爲丙之 $\frac{2}{3}$,丙爲丁之 $\frac{2}{3}$.問每人各得若干? 160元

26. 有一正方形,每邊加二尺,則其面積增加 100 方尺.求此正方形原有之面積.

27. 有一錢囊,內貯一圓法幣之數爲半圓法幣之二倍,又爲十分鎳幣之三倍.三種合計,其值爲 15.4 圓.求各種幣數.

28. 某種合金重三兩,內二分爲銀,三分爲銅.今欲將此合金,化爲三分銀,七分銅,問當加銅若干?
1兩

29. 一犬追兔,兔在犬前50步(兔步).兔行5步之時,犬行4步,但兔3步之距離等於犬行2步之距離,問兔再行若干步被犬追及?

30. 在空氣中19兩之金,在水中爲18兩,10兩之銀,在水中爲9兩.今有合金一種,內含金銀二種元素.在空氣中重387兩,在水中重351兩.問此合金中含金銀各若干?
57金 330銀

二 一次聯立方程式

38. 二元一次聯立方程式之解法.

(i) 加減消去法.

例 解 $$2x-6y=7, \tag{1}$$

$$3x+4y=4. \tag{2}$$

【解】 以 $2\times(1)$,得 $$4x-12y=14. \tag{3}$$

以 $3\times(2)$,得 $$9x+12y=12. \tag{4}$$

(3),(4) 相加,得 $$13x=26.$$

$$x=2.$$

以 x 之值代入(1),得 $$y=-\tfrac{1}{2}.$$

(ii) 代入消去法.

例　解
$$7x+2y=30, \tag{1}$$
$$3x-y=-2. \tag{2}$$

【解】　由 (2),　$y=3x+2.$

代入 (1), 得　$7x+2(3x+2)=30.$

即　$13x=26.$

$$x=2.$$

由是　$y=8.$

(iii) 比較消去法.

例　解
$$2x+3y=7, \tag{1}$$
$$4x-5y=3. \tag{2}$$

【解】　由 (1),　$x=\dfrac{7-3y}{2}.$

由 (2),　$x=\dfrac{3+5y}{4}.$

故　$\dfrac{7-3y}{2}=\dfrac{3+5y}{4}.$

解之,　$y=1.$　$x=2.$

以上三例之驗算,學者試自爲之.

39. 解之公式. 任何二元一次聯立方程式皆可化爲
$$a_1x+b_1y=c_1, \tag{1}$$
$$a_2x+b_2y=c_2. \tag{2}$$

在形式上,可求其解如下:

以 $b_2\times(1)$, 得 $$a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2, \tag{3}$$

以 $b_1\times(2)$, 得 $$a_2b_1x+b_2b_1y=c_2b_1, \tag{4}$$

由 (3) 減 (4), $$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1. \tag{5}$$

同理 $$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1. \tag{6}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} x&=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\\ y&=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.\end{aligned}\right\}(A)$$

在事實上此二值是否為解,解是否僅限於此,當於下節討論之.

例 解 $$2x+y=10,$$
$$3x-2y=1.$$

由公式, $$x=\frac{10\times(-2)-1\times1}{2\times(-2)-3\times1}=\frac{-20-1}{-4-3}=\frac{-21}{-7}=3,$$
$$y=\frac{2\times1-3\times10}{2\times(-2)-3\times1}=\frac{2-30}{-4-3}=\frac{-28}{-7}=4.$$

驗算從略.

40. 討論. (i) 若 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$, 則由前節之演算, 聯立方程式 (1) 與 (2) 如果有解, 其解非 (5) 不可. 然則 (A) 是否為 (1) 與 (2) 之解, 當驗算於下: 以 (A) 代入 (1) 之左邊,

$$a_1\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}+b_1\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{c_1(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

其值適等於 (1) 之右邊 c_1. 又以 (A) 代入 (2) 之左邊,

$$a_2\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}+b_2\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{c_2(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

其值適等於(2)之右邊 c_2，故知：

若 $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$，則聯立方程式(1)與(2)有一解，且僅有一解，此解可以公式(A)表示之。

(ii) 若 $a_1b_2-a_2b_1=0$，則前節之(5)與(6)變爲

$$0x=c_1b_2-c_2b_1 \text{ 與 } 0y=a_1c_2-a_2c_1.$$

故此時如 $c_1b_2-c_2b_1$ 與 $a_1c_2-a_2c_1$ 二數之中，有一不等於0，則聯立方程式(1)與(2)無解，是謂**矛盾方程式**，或曰**不能解方程式**.

今設　$a_1b_2-a_2b_1=0$, $c_1b_2-c_2b_1=0$, $a_1c_2-a_2c_1=0$

而討論之．因方程式(1)爲一次，故 a_1 與 b_1 二數中，必有不爲0者．

設 $a_1 \neq 0$，則　$b_2=\frac{a_2b_1}{a_1}$,　$c_2=\frac{a_2c_1}{a_1}$.

由是方程式(2)可書爲 $a_2x+\frac{a_2b_1}{a_1}y=\frac{a_2c_1}{a_1}$.

即
$$a_2a_1x+a_2b_1y=a_2c_1 \tag{2'}$$

然(2)〔即(2′)〕爲一次方程式，故 $a_2 \neq 0$，以 a_2 除(2′)之兩邊變成(1)．是以兩方程式(1)與(2)，一而二，二而一者也．任意與 y 以一數，由(1)〔即(2)〕可得 x 之值，故知解之組數爲無限，是謂**不定方程式**．總而言之：

若 $a_1b_2-a_2b_1=0$，則聯立方程式 (1) 與 (2) 或矛盾或不定：二數 $c_1b_2-c_2b_1$ 與 $a_1c_2-a_2c_1$ 之中，有一不等於 0，則方程式無解，稱爲矛盾；兩數皆等於 0，則兩方程式合而爲一，其解無數，稱爲不定.

41. 三元一次聯立方程式之解法.

例 1. 解

$$3x-2y+4z=13, \tag{1}$$

$$2x+5y-3z=-9, \tag{2}$$

$$6x+3y+2z=7. \tag{3}$$

【解】 以 $3\times(1)$， $9x-6y+12z=39.$ (4)

以 $4\times(2)$， $8x+20y-12z=-36,$ (5)

(4), (5) 相加， $17x+14y=3.$ (6)

以 $2\times(3)$， $12x+6y+4z=14.$ (7)

由 (7) 減 (1)， $9x+8y=1.$ (8)

以 $4\times(6)$， $68x+56y=12.$ (9)

以 $7\times(8)$， $63x+56y=7.$ (10)

由 (9) 減 (10)， $5x=5.$ $\therefore\ x=1.$

以 $x=1$ 代入 (8)， $8y=-8.$ $\therefore\ y=-1.$

以 x, y 之值代入 (1)，得 $3+2+4z=13.$ $\therefore\ z=2.$

驗算從略,學者試自為之.

例 2. 解
$$\frac{b}{y}+\frac{c}{z}-\frac{a}{x}=5, \tag{1}$$
$$\frac{c}{z}+\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=3, \tag{2}$$
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}-\frac{c}{z}=1. \tag{3}$$

【解】　視 $\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}$ 如未知數,三方程式左右各相加,得
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=9. \tag{4}$$

由 (4) 逐次減 (1), (2), (3), 得
$$2\frac{a}{x}=4, \quad 2\frac{b}{y}=6, \quad 2\frac{c}{z}=8.$$

故
$$x=\frac{a}{2}, \quad y=\frac{b}{3}, \quad z=\frac{c}{4}.$$

驗算從略,學者試自為之.

四元一次聯立方程式之解法,可依此推得之.

42. 討論. 三元及三元以上之一次聯立方程式,當述諸他章實行解一次聯立方程式之時,將未知數逐一消去,得一組之數值,若適合於諸方程式,則此一組之數,為其惟一之解.然三元或三元以上之一次方程式,亦有矛盾或不定者,姑略其一般討論,舉例如下:

例 1.
$$A\equiv 3x-2y+4z-13=0, \tag{1}$$
$$B\equiv 2x+5y-3z+9=0, \tag{2}$$

$$C \equiv 7x+8y-2z+5=0. \tag{3}$$

【解】 由 (1) 及 (2) 消去 z, 得

$$3A+4B \equiv 17x+14y-3=0. \tag{4}$$

由 (1) 及 (3) 消去 z, 得

$$A+2C \equiv 17x+14y-3=0. \tag{5}$$

由 (4) 及 (5) 消去 y, 得

$$2A+4B-2C \equiv 0x-0=0.$$

故 $C \equiv A+2B$, 卽方程式 $C=0$ 係由 A, B 兩式誘導而來, 非獨立存在者, 故原方程式之解, 其組數有無限之多. 詳言之, 與 z 以任意一數, 由 $A=0$, $B=0$ 可得 x, y 之數值, 後者亦滿足 $C=0$. z 之值旣屬自由, 故其解之組數爲無限.

例 2.

$$A \equiv 3x-2y+4z-13=0 \tag{1}$$

$$B \equiv 2x+5y-3z+9=0, \tag{2}$$

$$C \equiv 7x+8y-2z+6=0. \tag{3}$$

【解】 消去 y 及 z, 得

$$2A+4B-2C \equiv 0x-2=0.$$

卽

$$C \equiv A+2B+1.$$

於是 $1=0$, 故 (1), (2) (3) 不能同時成立, 卽自相矛盾之三方程式也.

43. 方程式與未知數之個數. 一次聯立方程

式中,其未知數之個數與方程式之個數以相等爲原則.若未知數之個數多於方程式之個數,則其解無限.若未知數之個數少於方程式之個數,則此諸方程式,一般言之,不能同時成立;倘欲同時成立,必須含有條件.即若 m 個方程式含 n 個之未知數,設 $m>n$,則此 m 個方程式能同時成立之條件,爲其中任取 n 個之方程式而解之,所得諸未知數之值,必須滿足於其餘 $m-n$ 個之方程式,否則,原方程式不能同時成立.

例如含二未知數 x, y 之三方程式:

$$a_1x+b_1y=c_1,$$

$$a_2x+b_2y=c_2,\quad (a_1b_2-a_2b_1\neq 0)$$

$$a_3x+b_3y=c_3,$$

若能同時成立,則由§39,解第一,第二兩方程式所得 x, y 之值,代入第三方程式中,當得

$$a_3(c_1b_2-c_2b_1)+b_3(a_1c_2-a_2c_1)=c_3(a_1b_2-a_2b_1),$$

是即所求之條件也.

44. 應用問題.

例 1. 有三位數,其第二位數字等於第一位數字與第三位數字之和,而第二位數字與第三位數字之和爲 8,若第一位數字與第三位數字互相交換,則較原數增加 99.

求原數.

【解】　設 $x=$ 百位數, $y=$ 十位數, $z=$ 個位數, 則原數爲

$$100x+10y+z.$$

由題中之條件,得下列三方程式:

$$x+z=y, \tag{1}$$

$$y+z=8, \tag{2}$$

$$100z+10y+x=100x+10y+z+99. \tag{3}$$

解之,得　　$x=2,\ y=5,\ z=3.$

故所求之數爲 253.

例 2.　某甲行若干距離之後,休息三十分鐘,又繼續進行,但其速率爲原速率之 $\frac{7}{8}$,到達目的地時,共費 6 小時,計行 20 里.若以原速率多行 4 里,而後休息三十分,再以原速率之 $\frac{7}{8}$ 向前進行,則共需時 $5\frac{6}{7}$ 小時.求原速率及自出發點至休息處之距離.

【解】　設原速率爲每小時 x 里, y 爲自出發點至休息處相距之里數,則由題意,得下列二方程式:

$$\frac{y}{x}+\frac{1}{2}+\frac{20-y}{7x/8}=6, \tag{1}$$

$$\frac{y+4}{x}+\frac{1}{2}+\frac{16-y}{7x/8}=5\frac{6}{7}. \tag{2}$$

以 $\frac{y}{x}$ 及 $\frac{1}{x}$ 爲未知數,解之,得　　$\frac{y}{x}=\frac{3}{2},\ \ \frac{1}{x}=\frac{1}{4}.$

即　　$x=4,\ y=6.$

故原速率為每小時4里,自出發點至休息站相距6里.

習題五

1. 下列各組之方程式,何者有解?何者無解?

(a) $\begin{cases}2x+3y=7,\\4x-2y=6.\end{cases}$　　(b) $\begin{cases}2x+3y=4,\\4x+6y=8.\end{cases}$

(c) $\begin{cases}3x+5y=8,\\6x+10y=3.\end{cases}$

試解下列各組之聯立方程式:

2. $\begin{cases}x+3y=3,\\3x+5y=1.\end{cases}$　　3. $\begin{cases}2x-3y=7,\\3x+4y=4.\end{cases}$

4. $\begin{cases}12x=9-10y,\\8y=7-9x.\end{cases}$　　5. $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{3y}=1,\\\dfrac{9}{x}+\dfrac{10}{y}=5.\end{cases}$

6. $\begin{cases}3x+\dfrac{y}{x}=6,\\7x-\dfrac{2y}{x}=1.\end{cases}$　　7. $\begin{cases}\dfrac{7}{2x}+\dfrac{1}{3y}=0,\\\dfrac{3}{x}+\dfrac{14}{y}=-3.\end{cases}$

8. $\begin{cases}10x+\dfrac{6}{y}=5,\\15x+\dfrac{10}{y}=8.\end{cases}$　　9. $\begin{cases}(x-1)(y-2)=0,\\(x-2)(y-3)=0.\end{cases}$

10. $\begin{cases}(2x+y)^2=(x-3y+5)^2,\\(x+y)^2=1.\end{cases}$　　11. $\begin{cases}y^2=(x-1)^2,\\2x+3y-7=0.\end{cases}$

12. $\begin{cases}x+2y-z=2,\\3x+2y-4z=5,\\2x+y-z=1.\end{cases}$　　13. $\begin{cases}x+y+z=1,\\8x-2y+5z=3,\\9x-y+6z=4.\end{cases}$

14. $\begin{cases}x+y=1,\\y+z=2,\\z+x=4.\end{cases}$　　15. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{6}{z}=9\\\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}=5,\\\dfrac{3}{y}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{z}=4.\end{cases}$

16. $\begin{cases}x+y+z=10,\\x+y+u=1,\\x+z+u=3,\\y+z+u=4.\end{cases}$　　17. $\begin{cases}4x-3z+u=9,\\5y+z-4u=17,\\3y+u=12.\\x+2y+3u=8.\end{cases}$

18. 設有三數,其和為20.第一數與第二數之二倍及第三數之三倍相加,等於44,第一數與第二數之和之二倍減第三數之四倍,則為 14.求此三數.

19. 有一矩形,長闊各加6寸,則長為闊之$\frac{3}{2}$,而其面積增加84方寸.求矩形原有之面積.

20. 甲乙二人各有法幣若干.甲給乙如乙所有之數,乙又與甲如甲所餘之數;最後甲又與乙如乙所餘之數.如

是,甲尚有16元,乙尚有24元.問甲乙原有法幣若干?

21. A, B 二小輪,行駛於甲乙二地,其間相距200里.B 輪由甲地出發,先行一小時,A 輪始亦由甲地出發.又經二小時,B 卽爲 A 追及,A 輪直達乙地,停留四小時,又回向甲地,行至距甲地10里之處,而遇 B 輪.求 A, B 二輪之速率.

22. 甲乙二旅客,共有行李500公斤.因行李過重,甲付行李費1.25元,乙付1.75元.若此行李屬於一人,則須納費4元.問每人可帶免費之行李若干公斤?

23. 甲乙丙三種合金,甲含金五分(以重量計之),銀二分,銅一分;乙含金二分,銀五分,銅一分;丙含金三分,銀一分,銅四分.今欲將此三種合金,化爲一種合金,內含金銀銅之量各相等,而其重則爲九兩.問甲乙丙三種合金各需若干?

$\frac{1485}{771}$; $\frac{135}{191}$, $\frac{92}{191}$

三　二元一次方程式之圖解

45. 常數及變數. 當解證一題,或論述一理之時,某文字之值,自始至終一定而不變者,是曰常數.設其不定而可變者,是曰變數.

例如在 $2x+3$ 之整式中,2,3爲常數,而 x 之值可以變動,故 x 爲變數.

46. 函數. 設有二變數 x, y,其 y 之值隨 x 之值而

變，詳言之，即 x 之值若定，則 y 之值亦隨之而定．如是 x 謂之自變數，y 謂之因變數；或曰 y 為 x 之函數．

例　　$y=2x+3.$

設　　$x=0$，則 $y=3$；

$x=1$，則 $y=5$；

$x=2$，則 $y=7\cdots\cdots$

與 x 以任意一數值，y 必隨得一數值，是即 y 為 x 之函數．

通例 x 之函數，恆記之為 $f(x)$，$F(x)$ 或 $\phi(x)$ 等等．

x 之有理整式，或稱為 x 之有理整函數．x 之有理式，或稱為 x 之有理函數，餘類推．

若自變數之個數在二個或二個以上，則常以 $f(x,y)$，$\phi(x,y,z)$ 等記其函數．

例　　$f(x,y)=ax+by+c,$

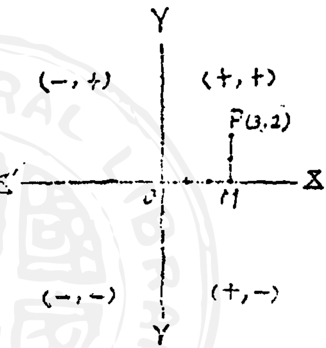
$\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2.$

設　　$f(x)=2x^2+3x+4,$

若此式中 $x=1$，則 $f(x)$ 之值當為 9，常以 $f(1)$ 記之，即 $f(1)=2\times1^2+3\times1+4=9$．若 $x=2$，則 $f(2)=2\times2^2+3\times2+4=18$．是為函數之值

47. 坐標． 在平面上作二直線 XX'，YY' 互相垂直，其交點為 O，名此 O 點曰原點．XX'，YY' 謂之軸．XX' 謂

之橫軸,或曰 x 軸,YY' 謂之縱軸,或曰 y 軸.二軸分平面為四部分,其各部分謂之象限.XOY 為第一象限,$X'OY$ 為第二象限,$X'OY'$ 為第三象限,XOY' 為第四象限.設 P 為此平面上之一點,對於 P 以下法決定二數 x,y,名為 P 點之坐標,



自 P 作 x 軸之垂線 PM,其垂足為 M,以線分 OM 之長為 x 之絕對値,以線分 PM 之長為 y 之絕對値.P 點若在 y 軸之右(卽在第一或第四象限之內),定 x 為正,若在 y 軸之左(卽在第二或第三象限之內),則定 x 為負.P 點若在 x 軸之上方(卽在第一或第二象限之內),定 y 為正,若在 x 軸之下方(卽在第三或第四象限之內),定 y 為負.名 x 為 P 之橫坐標,名 y 為 P 之縱坐標.

例如圖中所示之點,其橫坐標為 3,縱坐標為 2,可記之為 (3, 2),以表此點之位置.

故在第一象限內之點,其橫坐標與縱坐標皆為正;在第二象限內之點,其橫坐標為負,縱坐標為正;在第三象限內之點,其橫坐標與縱坐標皆為負;在第四象限內之點,其橫坐標為正,縱坐標為負.在平面上任取一點,必可決定其

坐標;反之,有坐標,必可在平面上決定一點.是以點定則坐標定,坐標定則點亦定.

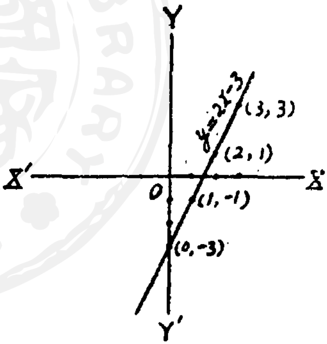
x 軸上之點,其縱坐標爲 0,y 軸上之點,其橫坐標爲 0.原點之坐標爲 $(0, 0)$,蓋其縱橫二坐標皆等於 0 也.

48. 一次函數之圖形. x 之一次式或稱曰 x 之一次函數,其形式爲 $ax+b$.略記之以 y,則 $y=ax+b$.將此 x, y 作爲一平面上之點之坐標,可得無數之點,此諸點合成一圖形,名曰函數 $y=ax+b$ 之圖形.

例 $y=2x-3$.

設 $x=0, 1, 2, 3, 4\cdots\cdots$

則 $y=-3, -1, 1, 3, 5\cdots\cdots$.



將 x 及 y 之對應值作爲點之坐標 $(0, -3)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$, $(3, 3)\cdots\cdots$,在平面上決定以此爲坐標之諸點.凡此諸點,皆在 $y=2x-3$ 之圖形上.取點若甚多,則其圖形顯而易見.本題之圖形,似爲一直線,事實上亦然.

凡一次函數之圖形,必爲一直線.

至其證明,則讓之於解析幾何學中.

49. 二元一次方程式之圖形. 由前節,凡二

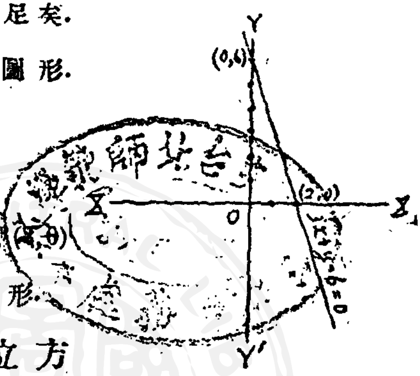
元一次方程式之可化為 $y=mx+b$ 之形式者,其圖形為一直線.然有二點即可決定一直線,故作一次函數或一次方程式之圖形,祇須求得二點足矣.

例　作 $3x+y-6=0$ 之圖形.

若　$x=0$, 則 $y=6$;

若　$y=0$, 則 $x=2$.

由是以直線連結 $(0,6)$, $(2,0)$ 二點,即得 $3x+y-6=0$ 之圖形.



50. 二元一次聯立方程式之圖解.

聯立方程式之解,為同時適合於各方程式之數值,故若以二元一次聯立方程式之解,作為坐標,則具此坐標之點,必同時在各方程式之圖形上.故於各方程式之圖形之交點之坐標,即為聯立方程式之解.

例　用圖形解聯立方程式:

$$3x+y-6=0, \qquad (1)$$

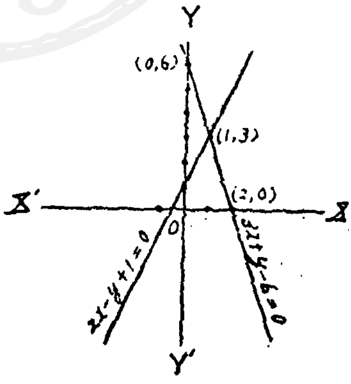
$$2x-y+1=0. \qquad (2)$$

由 (1), 若 $x=0$, 則 $y=6$,

$y=0$, 則 $x=2$;

由 (2), 若 $x=0$, 則 $y=1$,

$y=0$, 則 $x=-\frac{1}{2}$.



由是作二直線,得交點 $(1,3)$,故此式之解爲 $x=1, y=3$.

二個一次方程式之圖形爲二直線.此二直線若相交於一點,則交點之坐標,爲此聯立方程式之解.二直線若互相平行,則無共通之點,此時聯立方程式無解.二直線若互相重合,則其線上之點皆爲共通之點,其坐標皆爲聯立方程式之解.此與 §42 之理論相對待者也.

習　題　六

作下列各方程式之圖形:

1. $y=0,\ y+3=0,\ 2x-y=0,\ x-y=0.$

2. $7x+3y-18=0.$　　3. $3x-4y=24.$

4. $5x-3y+10=0.$　　5. $x=0,\ x=3.$

用圖形解下列各聯立方程式:

6. $\begin{cases}2x+y-3=0,\\ x-2y=0.\end{cases}$　　7. $\begin{cases}3x+2y+19=0,\\ 2y-3x+4=0.\end{cases}$

8. $\begin{cases}4x+y-2=0,\\ 3x+5y+8=0.\end{cases}$　　9. $\begin{cases}2x-y+5=0,\\ x+y+1=0.\end{cases}$

10. 用圖形以決定下列各組方程式之性質:

(a) $\begin{cases}4x+3y-10=0,\\ 8x+6y+3=0.\end{cases}$　　(b) $\begin{cases}x+2y-3=0,\\ \dfrac{x}{2}+y-\dfrac{3}{2}=0.\end{cases}$

第三章　因數分解

一　恆等式之應用

51　定義. 已知若干因數以求其積,是爲乘法.已知一積以求其因數,謂之因數分解.

因數分解,雖無一般統括之法則,然有幾種特別方法,在代數式之運算上頗爲重要.茲先從乘法之結果以推求之.

52. 恆等式之應用. 由恆等式以逆推之,爲分解因數之一法.

例 1.
$$9x^2+30xy+25y^2=(3x)^2+2(3x)(5y)+(5y)^2$$
$$=(3x+5y)^2.$$

例 2.
$$x^2-4xy+4y^2+6x-12y+9$$
$$=(x-2y)^2+6(x-2y)+9$$
$$=(x-2y+3)^2.$$

例 3.
$$x^2-y^2-z^2+2yz=x^2-(y^2-2yz+z^2)$$
$$=x^2-(y-z)^2$$
$$=(x+y-z)(x-y+z).$$

例 4. $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$

$$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$$

$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

例 5. $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

又 $x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

53 集項法. 求整式之因數,有時改變項之順序而集合之,較爲簡捷.

例 1. $x^3+2x^2+2x+1=x^3+1+2x(x+1)$

$$=(x+1)(x^2-x+1)+2x(x+1)$$

$$=(x+1)(x^2-x+1+2x)$$

$$=(x+1)(x^2+x+1).$$

例 2. $x^3+4x^2+5x+6=x^3+3x^2+x^2+3x+2x+6$

$$=x^2(x+3)+x(x+3)+2(x+3)$$

$$=(x+3)(x^2+x+2).$$

54. 由視察法分解二次三項式 x^2+px+q 之因數.

因 $(x+a)(x+b)\equiv x^2+(a+b)x+ab$, 故若 x^2+px+q 有因數

$x+a$ 與 $x+b$ 則 $a+b=p$, $ab=q$.

例 1. 求 x^2+5x+6 之因數.

於此 $a+b=5$, $ab=6$. 因 $a+b$ 與 ab 皆爲正數,故 a, b 必須皆爲正數.分解 6 爲二正因數,得 6 與 1, 或 2 與 3; 其中惟有 $2+3=5$. 故

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3).$$

例 2. 分解 $x^2-13x+22$ 爲因數.

於此 $a+b$ 爲負, ab 爲正,故 a, o 皆須爲負. 分解 22 爲二負因數,即 -1, -22; -2, -11. 其中 $-2-11=-13$; 故

$$x^2-13x+22=(x-2)(x-11).$$

55. 由視察法分解二次三項式 ax^2+bx+c 之因數.

(i) 因 $(mx+n)(px+q)=mpx^2+(mq+np)x+nq$. 故若 ax^2+bx+c 之二因數爲 $mx+n$ 與 $px+q$, 則 $mp=a$, $mq+np=b$, $nq=c$.

例 求 $7x^2-19x-6$ 之因數.

$$7\times1=7,\ 2\times(-3)=-6,$$

$$\begin{array}{ccc} 7 & & +2 \\ & \times & \\ 1 & & -3 \end{array} \qquad 7\times(-3)+1\times2=-19$$

$$\therefore\quad 7x^2-19x-6=(7x+2)(x-3).$$

(ii) 分解 ax^2+bx+c 之因數,可以 a 乘其各項,復以 a 除之,則原式變爲 $\{(ax)^2+b(ax)+ac\}/a$ 之形式,於此視 (ax)

爲一數,依前節之法以解之.

例　分解 $7x^2-19x-6$ 爲因數.

$$7x^2-19x-6=\frac{(7x)^2-19(7x)-42}{7}$$

$$=\frac{(7x-21)(7x+2)}{7}$$

$$=(x-3)(7x+2).$$

56. 配方法. 有 x^2+2ax, 欲配成一完全平方,則以 a^2 加之卽得.然 a^2 爲 x 係數折半之平方.故欲將 x^2+px 配成完全平方,須加 $p^2/4$.

例如 x^2+6x 以 3^2 加之,卽爲完全平方,卽 $x^2+6x+9=(x+3)^2$

用配方法以分解因數之例:

例 1.　$x^2-16x+15=x^2-16x+8^2-8^2+15$

$$=(x-8)^2-49=(x-8)^2-7^2$$

$$=(x-1)(x-15).$$

例 2.　$x^2+3x+2=x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2$

$$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\left(x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=(x+2)(x+1).$$

57. 二次三項式 ax^2+bx+c 之一般分解法.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

例　分解 $6x^2-11x-2$ 之因數.

於此 $a=6$, $b=-11$, $c=-2$, 代入上列公式,得

$$6x^2-11x-2=6\left(x+\frac{-11}{12}+\frac{\sqrt{121+48}}{12}\right)\left(x+\frac{-11}{12}-\frac{\sqrt{121+48}}{12}\right)$$

$$=6\left(x-\frac{11}{12}+\frac{13}{12}\right)\left(x-\frac{11}{12}-\frac{13}{12}\right)$$

$$=6\left(x+\frac{1}{6}\right)(x-2)$$

$$=(6x+1)(x-2).$$

注意:　於上列公式中,其因數之性質,視 $b^2-4ac\gtreqless 0$ 而定.

(i). 若 $b^2-4ac>0$, 且爲完全平方數,則二因數不含

根數;若 $b^2-4ac>0$,但非爲完全平方數,則二因數皆含無理數.

(ii) 若 $b^2-4ac=0$,則二因數相同,即原式爲完全平方式.

(iii) 若 $b^2-4ac<0$,則二因數皆含虛數.但普通分解因數,以不含虛數爲原則,故若 $b^2-4ac<0$,不分解之可也.

習 題 七

分解下列各式爲因數:

1. $9x^2-12xy+4y^2$.
2. $x^2+14x+49$.
3. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.
4. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$.
5. $(x+y+z)^2-(x-y+z)^2$.
6. $(3x^2-4x-2)^2-(3x^2+4x-2)^2$.
7. $a^2+b^2-c^2-d^2-2ab+2cd$
8. x^6-y^6.
9. $12a^3x^3-75axy^2$.
10. x^4+x^2+1.
11. $x^4-3x^2y^2+y$
12. x^4-x^3+x-1.
13. $x^5-x^3-8x^2+8$.
14. x^4-2x^3+2x-1.
15. x^3+2x^2+3x+2.
16. $x^6+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1$.

17. $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$.　　18. $x^2+18x+32$.

19. x^2+x-30.　　20. $2x^2+7x+3$.

21. $6x^2-13x+6$.　　22. $14x^2+x-3$.

23. $5x^2+14x-3$.

24. $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$.

25. $(x^2-2x+3)^2-13(x^2-2x+3)+22$.

26. $(x+y)^2-8(x+y)(y+z)+15(y+z)^2$.

27. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-9$.

28. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

29. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$.

30. $x^3+y^3+3xy-1$.

31. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

32. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$.

二　剩餘定理

58. 剩餘定理. 含x之多項式,依x之降冪排列,如以一次二項式$x-a$除之,則其剩餘,必等於以a代此多項式之x所得之數值.

設$f(x)$為含x之多項式,以$x-a$除之,得商$\phi(x)$,餘數R,則

$$f(x)\equiv\phi(x)(x-a)+R.$$

R既為餘數,則其次數必低於一次,由是可知R為不含x之數,即其數值與x無關係.上列恆等式中,不論x與以何值,其兩邊常相等.設$x=a$,則

$$f(a)=\phi(a)(a-a)+R.$$

故 $$R=f(a).$$

例　以$x-2$除x^2+2x+3,則其剩餘為

$$R=2^2+2\times2+3=11.$$

注意:　若除式為x或$x+a$,則求剩餘時以0或$-a$代入被除式中之x即得.

例 1.　以x除x^3+2x^2+x+4,則其剩餘為

$$R=0^3+2\times0^2+0+4=4.$$

例 2.　以$x+2$除$2x^3-x^2+3x-5$,則其剩餘為

$$R=2(-2)^3-(-2)^2+3(-2)-5$$
$$=-16-4-6-5=-31.$$

59.　推論.　設$x=a$時,多項式$f(x)$之值為零,則$f(x)$必可為$x-a$除盡之;又如$f(x)$可為$x-a$除盡,則$x=a$時,$f(x)$之值為零.

例 1.　$$f(x)=x^3-3x^2+2.$$

若 $x=1$，則 $f(1)=1^3-3\cdot1^2+2=0$，故知 x^3-3x^2+2 必可爲 $x-1$ 除盡之.

例 2. 若 x^3+2x^2+mx+2 可爲 $x-2$ 除盡，則 m 之值若何?

因 $x=2$ 時，$R=0$.

故 $2^3+2\times2^2+m\times2+2=0$. $\therefore\ m=-9$.

60. 定理. (i) 不論 n 爲奇數或爲偶數，x^n-a^n 必能以 $x-a$ 除盡之.

因 $x=a$，則 $R=a^n-a^n=0$.

即 $$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}.$$

(ii) n 爲偶數時，則 x^n-a^n 常能以 $x+a$ 除盡之，如 n 爲奇數，則其剩餘爲 $-2a^n$.

若 n 爲偶數，則

$$\frac{x^n-a^n}{x+a}=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots\cdots+a^{n-2}x-a^{n-1}.$$

(iii) n 爲奇數時，x^n+a^n 能以 $x+a$ 除盡之；若 n 爲偶數，則其剩餘爲 $2a^n$.

若 n 爲奇數，則

$$\frac{x^n+a^n}{x+a}=x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1}.$$

(iv) 不論 n 為奇數或為偶數, x^n+a^n 以 $x-a$ 除之,其剩餘恆為 $2a^n$.

61. 應用剩餘定理以分解因數.

$b-a \quad -b+a \quad a-b \quad -(b-a)$

例 1. 求 $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$ 之因數.

【解】 令 $b=c$, 則原式為零,故 $b-c$ 為此式之一因數.同理, $c-a$ 與 $a-b$ 亦為此式之因數.實際上:

$$
\begin{aligned}
&(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3\\
&\quad=(b-c)^3+\{(c-a)+(a-b)\}\\
&\qquad\qquad\times\{(c-a)^2-(c-a)(a-b)+(a-b)^2\}\\
&\quad=(b-c)^3+(c-b)(3a^2-3ab-3ac+b^2+bc+c^2)\\
&\quad=(b-c)\{(b-c)^2-(3a^2-3ab-3ac+b^2+bc+c^2)\}\\
&\quad=-3(b-c)(a^2-ab-ac+bc)\\
&\quad=-3(b-c)(a-b)(a-c)\\
&\quad=3(b-c)(c-a)(a-b).
\end{aligned}
$$

例 2. 分解 $2x^3+3x^2-11x-6$ 為因數.

【解】 設原式有一因數為 $(x-a)$, 則 a 必為 -6 之因數.今將 -6 之因數 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ 分別代入於原式中,知 $x=2$ 時,原式為零,故知原式必有因數 $x-2$. 乃用綜合除法,以 $x-2$ 除原式,得商 $2x^2+7x+3$, 故

$$2x^3+3x^2-11x-6=(x-2)(2x^2+7x+3)$$
$$=(x-2)(x+3)(2x+1).$$

習題八

1. 以 $x+2$ 除 x^3+4x^2+3x-2, 求其剩餘.

2. 以 $x-3$ 除 $2x^3+4x^2-5x+6$, 求其剩餘.

3. x^3+3x^2-x-6 以 $x+2$ 除之,能否除盡?

4. 設 mx^2-2x+3 可爲 $x-3$ 除盡,則 m 之值當若何?

5. $x^3+mx^2-20x+4$ 可爲 $x+2$ 除盡,求 m 之值.

6. 6^5+1 爲 7 之倍數; 14^8-1 爲 15 及 13 之倍數; $7^{2n+1}+1$ 爲 8 之倍數,其理若何?

7. 試證 $(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$ 能以 $(x+1)(2x+1)$ 除盡之.

8. 試證 $(x^3+x^2+4)^3-(x^3-2x+3)^3$ 能以 $(x+1)^2$ 除盡之.

9. 試證下式能以 $(y+z)(z+x)(x+y)$ 除盡之:

$$(x+y+z)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}.$$

應用剩餘定理分解下列各式之因數:

10. x^3-5x+4.

11. $3x^5-3x^4-13x^3-11x^2-10x-6$.

12. $6x^4+5x^3+3x^2-3x-7$.

13. $x^3+3x^2-10x-24$.

14. $x^3+6x^2+11x+6$.

15. x^4-2x^2+3x-2.

三 未定係數法

62. 定理. 設 $f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ 爲 x 之 n 次之有理整式.假如有 n 個各不相等之數值 $b_1, b_2, b_3\cdots\cdots b_n$ 一一代入於 $f(x)$ 中之 x, 皆能使 $f(x)$ 之值爲零,則

$$f(x)\equiv a_0(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\cdots\cdots(x-b_n).$$

因 $$f(b_1)=0,$$

故 $x-b_1$ 爲 $f(x)$ 之一因數.由是

$$f(x)=(x-b_1)(a_0x^{n-1}+\cdots\cdots)$$

又 $$f(b_2)=0,$$

則 $$(b_2-b_1)(a_0b_2^{n-1}+\cdots\cdots)=0.$$

然 $$b_1\neq b_2,$$

故 $$a_0b_2^{n-1}+\cdots\cdots=0.$$

由是 $x-b_2$ 爲 $a_0x^{n-1}+\cdots\cdots$ 之一因數,即

$$a_0x^{n-1}+\cdots\cdots=(x-b_2)(a_0x^{n-2}+\cdots\cdots).$$

因之 $$f(x)=(x-b_1)(x-b_2)(a_0x^{n-2}+\cdots\cdots).$$

此手續施行 r 回，則得

$$f(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots\cdots(x-b_r)(a_0x^{n-r}+\cdots\cdots).$$

設 $$r=n,$$

卽得 $$f(x)=a_0(x-b_1)(x-b_2)\cdots\cdots(x-b_n).$$

63. 定理. 設有一含 x 之有理整式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$，又有 n 個以上不同之數值 $b_1, b_2,\cdots\cdots b_n,\cdots\cdots$ 若 $f(b_1)$, $f(b_2)$,$\cdots\cdots f(b_n)$,$\cdots\cdots$ 皆等於0，則 $a_0, a_1\cdots\cdots a_n$ 亦皆等於 0.

何則？假如 $a_0\neq0$，則 $f(x)$ 爲 n 次之有理整式. 由前節之定理，得 $f(x)\equiv a_0(x-b_1)(x-b_2)\cdots\cdots(x-b_n)$.

然 $f(b_{n+1})=0$，故 $a_0(b_{n+1}-b_1)(b_{n+1}-b_2)\cdots\cdots(b_{n+1}-b_n)=0$，此爲不可能之事，以各因數皆不等於 0 之故，是以 a_0 不能不爲 0，因之 $f(x)\equiv a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$. 同理，知 $a_1=0$，且知 a_0，$a_1,\cdots\cdots a_n$ 皆等於 0.

64. 定理. 二個含 x 之 n 次有理整式，以 n 個以上不相同之數值代 x，若其值常相等，則其對應係數必兩兩相等.

設 $$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

$$b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n$$

爲二個含x之n次有理整式.於此二式中,若以多於n個之值代x,而其值常相等,則以之代入

$$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots\cdots+(a_n-b_n)$$

中,其值亦常等於零,故必

$$a_0-b_0=0,\ a_1-b_1=0,\cdots\cdots,\ a_n-b_n=0,$$

即 $$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\cdots\cdots,\ a_n=b_n$$

系. 自變數x之兩多項式若全相等,則其對應係數必兩兩相等.

65. 未定係數法.

例 1. 變x^2+4x+6爲$x+1$之二次多項式.

【解】 假定所求之多項式爲

$$a(x+1)^2+b(x+1)+c.$$

於此a, b, c皆爲尚屬未定之係數,假如此式與原式全相等,則 $$x^2+4x+6\equiv a(x+1)^2+b(x+1)+c,$$

即 $$x^2+4x+6\equiv ax^2+(2a+b)x+(a+b+c).$$

由前節,得 $$a=1,\ 2a+b=4,\ a+b+c=6.$$

故 $$b=2,\ c=3,$$

因之 $$x^2+4x+6\equiv(x+1)^2+2(x+1)+3.$$

例 2. 用未定係數法於兩式相除.

求 $(2x^4+3x^3+4x^2+x-2)\div(x^2-x+1)$ 之商及剩餘

【解】 被除式爲四次,除式爲二次,則其商必爲二次,餘式最多爲一次.故可假定

$$2x^4+3x^3+4x^2+x-2$$

$$\equiv(c_0x^2+c_1x+c_2)(x^2-x+1)+(d_0x+d_1)$$

$$\equiv c_0x^4+(c_1-c_0)x^3+(c_0-c_1+c_2)x^2+(c_1-c_2+d_0)x+(c_2+d_1).$$

由前節,知 $c_0=2$, $c_1-c_0=3$, $c_0-c_1+c_2=4$,

$$c_1-c_2+d_0=1,\quad c_2+d_1=-2.$$

$$\therefore\quad c_1=5,\ c_2=7,$$

$$d_0=3,\ d_1=-9.$$

故所求之商爲 $2x^2+5x+7$, 剩餘爲 $3x-9$.

例 3. 用未定係數法分解 $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$ 爲因數.

【解】 因此式之前三項 $x^2+2xy-8y^2=(x+4y)(x-2y)$;

故設 $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$

$$\equiv(x+4y+l)(x-2y+m)$$

$$\equiv x^2+2xy-8y^2+(l+m)x+(4m-2l)y+lm.$$

以求 l 與 m 兩數,比較兩方之係數,得

$$l+m=2,$$

$$-2l+4m=14,$$

$$lm=-3.$$

由 (1), (2), 得 $l=-1$, $m=3$. 此二數值適合於(3), 故

$$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x+4y-1)(x-2y+3).$$

注意: 若 (1), (2) 所得 l, m 之值不能適合於(3), 則原式不能分解因數.

例 4. 分解 $x^4-x^3+6x^2-x+15$ 爲因數.

【解】 假定所求之因數爲 x^2+ax+b, x^2+cx+d 以探之.

於
$$\begin{aligned} x^4-x^3+6x^2-x+15 &= (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) \\ &= x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd \end{aligned}$$

之兩邊, 比較其係數:

$$a+c=-1, \tag{1}$$

$$b+d+ac=6, \tag{2}$$

$$ad+bc=-1, \tag{3}$$

$$bd=15. \tag{4}$$

由 (4), 可得 $\left.\begin{matrix} b=3 \\ d=5 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} b=5 \\ d=3 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} b=1 \\ d=15 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} b=15 \\ d=1 \end{matrix}\right\}$.

試以 $b=3$, $d=5$ 代入 (3), 得

$$5a+3c=-1. \tag{5}$$

由 (1) 及 (5), 得 $a=1$, $c=-2$. 以此諸值代入 (2), 恰能適合, 故得 $a=1,\ b=3,\ c=-2,\ d=5$.

由是 $x^4-x^3+6x^2-x+15=(x^2+x+3)(x^2-2x+5)$.

習題九

1. 變 $3x^3-x^2+2x-4$ 為 $x-2$ 之多項式.

2. 變 $4x^2+10x+9$ 為 $2x+3$ 之多項式.

3. 設 $f(1)=3,\ f(-1)=9,\ f(2)=6,$

   求 $f(x)=ax^2+bx+c.$

4. 設 $f(0)=5,\ f(1)=5,\ f(-1)=-1,\ f(3)=11,$

   求 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$

5. 欲使直線 $3x+y+c=0$ 通過 $(2,\ -3)$, c 之值當若

6. 用未定係數法求下式之商及剩餘:

   $(6x^5+13x^4-12x^3-11x^2+11x-2)\div(2x^3+x-2).$

7. 求 $(2+x+3x^2)\div(1+x-x^2)$ 至第四項.

8. x^3+ax^2+bx+6 能以 $x-2$ 及 $x-3$ 除盡之,求 a,b 之值.

應用未定係數法分解下列各式之因數:

9. $2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2.$

10. $x^4+7x^3+20x^2+29x+21.$

11. $x^2-y^2+2y-1.$

12. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24.$

四 對稱式及交代式

66. 對稱式. 含有二文字之代數式,若將此二文字互換而其式不變者,名此代數式爲關於此二文字之對稱式.一般言之,含有若干文字之代數式,若將其中之任意二文字互換而其式常不變者,謂此式爲關於此若干文字之對稱式.例如

$$a+b+c,\ bc+ca+ab,\ a^3+b^3+c^3+3abc$$

皆爲a,b,c之對稱式.又如$a+b+3c$式中,如將b,c互換,則得$a+c+3b$,此與原式不同,故關於a,b,c言之,不能謂之對稱式.

關於a,b二文字之齊次對稱式,其一般之形式當如下:

一次: $L(a+b)$.

二次: $L(a^2+b^2)+Mab$.

三次: $L(a^3+b^3)+Mab(a+b)$.

....

關於a,b,c三文字之齊次對稱式,其一般之形式當如下:

一次: $L(a+b+c)$.

二次: $L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)$.

三次：

$$L(a^3+b^3+c^3)+M\{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\}+Nabc.$$

……　　…………………………………………

於此各式中之 L, M, N 皆不含 a, b, c.

67. 交代式. 含若干文字之式中,取二文字互換之,其式僅變其符號者,則稱此式爲此二文字之**交代式**.又若某式爲式中任何二文字之交代式,則稱此式爲其全體文字之交代式.

例如 $a-b$, 將 a, b 互換之,則爲 $b-a$, 然 $b-a=-(a-b)$, 故 $a-b$ 爲 a, b 二文字之交代式.

又如　　$(b-c)(c-a)(a-b)$

互換 b, c 二文字,則爲

$$(c-b)(b-a)(a-c)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

若將 c, a 或 a, b 互換之,其結果相同,故此式爲 a, b, c 三文字之交代式.

68. 輪換對稱. 於含有 a, b, c 三文字之式中,易 a 爲 b, 易 b 爲 c, 易 c 爲 a, 將全體文字依次輪換而其式不變者,稱爲關於 a, b, c 之輪換對稱式.

凡對稱式皆爲輪換對稱式,而輪換對稱式則未必爲對稱式.

例如 $a^2b+b^2c+c^2a$ 雖可輪換,而不能謂之對稱式,因互換 a,b 二文字,則爲 $b^2a+a^2c+c^2b$,與原式不同.

式中形狀相同各項之和,常以 Σ 記之.

例如就 a,b,c 三文字言之,則

$$\Sigma a=a+b+c,$$

$$\Sigma ab=ab+bc+ca,$$

$$\Sigma a^2=a^2+b^2+c^2 \text{ 等}.$$

69. 定理. 對稱式與對稱式或交代式與交代式之積,皆爲對稱式.

因二對稱式 A,B,就其所含之二文字互換之,其式不變,故其積亦然,換言之,即其積 AB 亦爲對稱式也.

若 A,B 爲二交代式,就其所含之二文字互換之,則 A 變爲 $-A$,B 變爲 $-B$,然其積 AB,因二文字互換而變爲 $(-A)(-B)$,即仍爲 $A\cdot B$,固毫無變化者,故 AB 爲對稱式.

例 1. $\underbrace{(a+b)}_{\text{對稱式}}\underbrace{(a^2-ab+b^2)}_{\text{對稱式}}=\underbrace{a^3+b^3}_{\text{對稱式}}.$

例 2. $\underbrace{(a-b)}_{\text{交代式}}\underbrace{(a^2-b^2)}_{\text{交代式}}=\underbrace{(a-b)^2(a+b)}_{\text{對稱式}}.$

例 3. $\underbrace{(a^4+a^2b^2+b^4)}_{\text{對稱式}}\div\underbrace{(a^2+ab+b^2)}_{\text{對稱式}}=\underbrace{a^2-ab+b^2}_{\text{對稱式}}.$

例 4. $\underbrace{(a^2-b^2)}_{\text{交代式}}\div\underbrace{(a-b)}_{\text{交代式}}=\underbrace{a+b}_{\text{對稱式}}.$

推論. 對稱式與交代式之積爲交代式.

例 $$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

70. 定理. 若干文字之交代整式,以其任意二文字之差除之,必能除盡.

設 P 爲 a, b, c 三文字之交代整式;互換 a, b 二文字,則 P 變爲 $-P$. 故若 $a=b$, 則 $P=-P$. 換言之,若 $a=b$, 則 $P=0$. 故 P 以 $a-b$ 除之適盡.

71. 對稱式及交代式之因數分解.

例 1. 分解 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 爲因數.

【解】 令 $a=b$, 則原式等於 0, 故 $a-b$ 爲原式之一因數. 同理,知 $b-c$, $c-a$ 亦爲其因數. 然原式爲三次式,故除 $a-b$, $b-c$, $c-a$ 之三因數而外,別無他因數含有 a, b, c 者.

故原式等於 $L(a-b)(b-c)(c-a)$. L 與 a, b, c 無關.

比較兩邊 a^2b 之係數,得

$$1=-L, \quad \therefore \quad L=-1.$$

即原式等於 $$-(b-c)(c-a)(a-b).$$

例 2. 分解 $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$ 爲因數.
$a^2c^2(b-c)+c^2b^2(c-b)+a^2b^2(b-a)$

【解】 令 $b=c$, 則原式等於 0, 故 $b-c$ 爲原式之一因數. 同理,知 $c-a$, $a-b$ 亦爲其因數.

原式為五次之齊次對稱式,故除 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之外,尙有二次之齊次對稱因數.故原式等於

$$(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)\}.$$

比較 a^4b 之係數,得 $0=-L,\quad\therefore\quad L=0.$

又令 $a=0,b=1,c=2$ 代入兩邊,得

$$-4=-1\times2\times(-1)\times M\times2.$$

即 $$-4=4M,\qquad\therefore\quad M=-1.$$

由是原式等於 $-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca).$

習題十

分解下列各式為因數:

1. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y).$

2. $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y).$

3. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3.$

4. $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3.$

5. $x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3.$

6. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2).$

7. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3.$

8. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5.$

9. $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5.$

10. $(y-z)(y+z)^3+(z-x)(z+x)^3+(x-y)(x+y)^3$.

11. $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$.

12. $x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)$.

五　最高公因數及最低公倍數

72. 最高公因數. 有一整式能除盡若干整式,則名此整式爲此若干整式之公因數.

公因數中次數最高者,謂之最高公因數.

例如 a, b, a^2b, ab^2, a^2b^2 皆爲 $a^2b^2d, a^2b^3c^4$ 之公因數,而 a^2b^2 爲其最高公因數.

73. 若干單項式之最高公因數. 取各單項式中公共之文字而記其最低之指數,而書其積,并附以各式數字係數之最大公約數,即爲所求諸單項式之最高公因數.例如

$$9a^2b^3x^4y^5,\ 6ab^2x^3y^6,\ 12a^3bx^2y^3$$

之最高公因數爲

$$3abx^2y^3.$$

74. 用因數分解法以求最高公因數.

例　求 x^3-1 與 x^4+x^2+1 之最高公因數.

【解】　$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$,

$$x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

故所求之最高公因數爲 x^2+x+1.

75. 定理. (i) 設A, B爲二整式,m爲任意之數或整式,若B爲A之因數,則B亦爲mA之因數.

因B爲A之因數,故A必能被B除盡.設其商爲b,則

$$A=bB.$$

由是 $$mA=mbB.$$

故B爲mA之因數.

(ii) 設C爲A, B二整式之公因數,則C亦必爲$mA+nB$與$mA-nB$之公因數(但m, n爲任意之數或整式).

設 $$A=aC,\ B=bC,$$

則 $$mA+nB=maC+nbC=(ma+nb)C,$$

$$mA-nB=maC-nbC=(ma-nb)C.$$

故C爲$mA+nB$與$mA-nB$之公因數.

76. 兩多項式之最高公因數. 設A, B爲二整式,B之次數不高於A之次數,以B除A,得一剩餘,復以此剩餘除B,得第二剩餘,又以第二剩餘除第一剩餘,如是繼續進行,至得剩餘爲0而止,則適在其前之一剩餘,即爲A, B之最高公因數(證見下節).

注意：最高公因數為一常數,視作無公因數較妥.

又二式之中,若有一式可以除盡他式,則此式即為所求之最高公因數.

例　求 x^2-4x+3 與 $4x^3-9x^2-15x+18$ 之最高公因數.

$$
\begin{array}{rl}
x^2-4x+3)\,4x^3-9x^2-15x+18 & (4x+7 \\
\underline{4x^3-16x^2+12x} & \\
7x^2-27x+18 & \\
\underline{7x^2-28x+21} & \\
x-3)\,x^2-4x+3 & (x-1 \\
\underline{x^2-3x} & \\
-x+3 & \\
\underline{-x+3} &
\end{array}
$$

故所求之最高公因數為 $x-3$.

上列演式頗費紙幅,可改書之如下:

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
x & x^2-4x+3 & 4x^3-9x^2-15x+18 & 4x \\
 & \underline{x^2-3x} & \underline{4x^3-16x^2+12x} & \\
-1 & -x+3 & 7x^2-27x+18 & 7 \\
 & \underline{-x+3} & \underline{7x^2-28x+21} & \\
 & & x-3 &
\end{array}
$$

77.　證.　前節所述之事實,今證明之於下.

設 A, B 二式輾轉相除,其演式如次:

$$
\begin{array}{rl}
B)\,A & (Q_1 \\
\underline{BQ_1} & \\
R_1)\,B & (Q_2 \\
\underline{R_1Q_2} & \\
R_2)\,R_1 & (Q_3 \\
\underline{R_2Q_3} & \\
0 &
\end{array}
$$

因 $A-BQ_1=R_1$,故 A 與 B 之公因數,亦必爲 R_1 之因數,可知 A 與 B 之公因數,亦即 B 與 R_1 之公因數.

又因 $BQ_1+R_1=A$,故 B 與 R_1 之公因數,亦必爲 A 之因數,可知 B 與 R_1 之公因數,亦即 A 與 B 之公因數.

由是凡 A, B 之公因數,皆爲 B, R_1 之公因數.凡 B, R_1 之公因數,皆爲 A, B 之公因數.故 A 與 B 之最高公因數,即 B 與 R_1 之最高公因數.同理,B 與 R_1 之最高公因數,即 R_1 與 R_2 之最高公因數.若 R_2 除盡 R_1,則 R_1 與 R_2 之最高公因數爲 R_2.由是,R_2 爲 B, R_1 之最高公因數,亦即 A, B 之最高公因數.

例 求 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 $2x^3+5x^2-x-1$ 之最高公因數.

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
2 & 2x^3+5x^2-x-1 & x^4+3x^3+2x^2+3x+1 & \\
 & 2x^3+10x^2+14x+4 & 2\qquad(\times & \\
\hline
 & -5)\ -5x^2-15x-5 & 2x^4+6x^3+4x^2+6x+2 & x \\
 & x^2+3x+1 & 2x^4+5x^3-x^2-x & \\
\cline{3-3}
 & & x^3+5x^2+7x+2 & x \\
 & & x^3+3x^2+x & \\
\cline{3-3}
 & & 2x^2+6x+2 & 2 \\
 & & 2x^2+6x+2 & \\
\cline{3-3}
\end{array}
$$

故所求之最高公因數爲 x^2+3x+1.

注意: 二式各以其最高公因數除之,所得兩商之間必無公因數.又二式公因數,爲其最高公因數之因數.

78. 若干式之最高公因數. 求A, B, C三式之最高公因數,可先求其中任意二式之最高公因數,例如先求得A, B二式之最高公因數爲D.次復求D與C之最高公因數爲G,則G卽爲A, B, C之最高公因數.

例　求　$A=x^4+x^3-x^2+x-2$, $B=2x^4+5x^3-2x^2-7x+2$及$C=3x^4-x^3-x^2-1$之最高公因數.

【解】　應用前法,先求得A, B之最高公因數x^2+x-2.

其次求得x^2+x-2與C之最高公因數爲$x-1$.

故A, B, C之最高公因數爲$x-1$.

三式以上之最高公因數,亦可依此法求之.

79. 最低公倍數. 設若干整式皆爲某整式之因數,則曰某式爲此若干整式之公倍數.

公倍數中次數最低者,謂之最低公倍數.

例如x^4-a^4及x^2-a^2均爲$x-a, x+a$之公倍數,而x^2-a^2爲其最低公倍數.

諸式之公倍數,其數無窮,而其最低公倍數,則僅有一個(其常數因數可置之不顧).

80. 若干單項式之最低公倍數. 求諸單項式之最低公倍數,祇須取各式中所含之文字,記其最高之

指數,而皆其積,并求各式數字係數之最小公倍數,爲其數字係數.

例如 $9x^2y$, $12xy^2z$, $6yz^3$ 之最低公倍數爲 $36x^2y^2z^3$.

多項式之易於分解因數者,可由觀察法以求其最低公倍數.

例　求 x^3+y^3, x^3-y^3, $x^4+x^2y^2+y^4$ 之最低公倍數.

【解】
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2),$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2),$$
$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2).$$

故所求之最低公倍數爲 $(x^3+y^3)(x^3-y^3)=x^6-y^6$.

81. 二多項式之最低公倍數. 求二式之最低公倍數,可先求其最高公因數,以此最高公因數除其中之一式,得商與他式相乘,即爲所求之最低公倍數.

設 A, B 爲二整式,其最高公因數爲 G, 則

$$A=Ga,\quad B=Gb.$$

於此 a, b 亦爲整式,其間必無公因數.故 A, B 之最低公倍數爲 Gab. 然

$$Gab=A\times\frac{B}{G}=B\times\frac{A}{G}.$$

故二多項式之最低公倍數,爲以最高公因數除一式所得

之商,乘他式之積.

例　求 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 $2x^3+5x^2-x-1$ 之最低公倍數.

【解】　二式之最高公因數爲 x^2+3x+1.

又　　$(2x^3+5x^2-x-1)\div(x^2+3x+1)=2x-1$.

故所求之最低公倍數爲 $(2x-1)(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)$.

82. 二式之最高公因數與最低公倍數之關係. 設 A, B 爲二整式, G 爲其最高公因數, L 爲其最低公倍數,則

$$A=aG,\ B=bG,\ L=abG.$$

$$L=aB=bA=abG.$$

故　　$$LG=AB,\ L\div G=ab.$$

此卽所求之關係也.其第一關係可述之如下:

二式之最高公因數與最低公倍數相乘之積,等於二式相乘之積.

83. 若干多項式之最低公倍數. 求 A, B, C 三整式之最低公倍數,可先求其中任意二式 A, B 之最低公倍數.以其結果與第三式 C 求之,則最後所得之結果,卽爲所求之最低公倍數.

三式以上之最低公倍數,可依法推求之.

例 求 $A=x^4+3x^3+2x^2+3x+1$, $B=2x^3+5x^2-x-1$ 及 $C=2x^3-3x^2+2x-3$ 之最低公倍數.

【解】 由 § 81 之例,知 A, B 之最低公倍數為

$$M=(2x-1)(x^4+3x^3+2x^2+3x+1).$$

次求 M 與 C 之最低公倍數.

由除法,知 $2x-1$ 與 C 無公因數,而 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 與 C 之最高公因數為 x^2+1.

又 $$C/(x^2+1)=2x-3,$$

故 M 與 C 之最低公倍數(亦即 A, B, C 之最低公倍數)為

$$(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)(2x-1)(2x-3).$$

習題十一

求下列各題之最高公因數:

1. x^3-1, x^3+ax^2-ax-1.
2. x^2+5x+6, x^2+x-2, $x^2-14x-32$.
3. $(x^2-1)^2(x+1)^2$, $(x^3+5x^2+7x+3)(x^2-6x-7)$.
4. $2x^3-3x^2-11x+6$, $4x^3+3x^2-9x+2$.
5. x^3-2x^2-2x-3, $2x^3+x^2+x-1$.
6. $3x^3+2x^2-19x+6$, $2x^3+x^2-13x+6$.
7. $x^4-x^3-3x^2+x+2$, $2x^4+3x^3-x^2-3x-1$.

8. $3x^3-13x^2+23x-21$, $6x^3+x^2-44x+21$.

9. $3x^3-x^2-12x+4$, x^3-2x^2-5x+6, $7x^3+19x^2+8x-4$.

10. $x^3+ax^2-3x-3a$, x^3-x^2-3x+3, x^3+x^2-3x-3.

求下列各题之最低公倍数:

11. $(x^3-y^3)(x-y)^3$, $(x^4-y^4)(x-y)^2$, $(x^2-y^2)^2$.

12. x^2-3x+2, x^2-5x+6, x^2-4x+3.

13. $x^2-(y+z)^2$, $y^2-(z+x)^2$, $z^2-(x+y)^2$.

14. x^3+x^2+x+1, x^3-x^2+x-1.

15. x^6-1, $3x^3-5x^2-3x+5$, x^4-1.

16. $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$, $6x^2+5x-6$.

17. $x^3-6x^2+11x-6$, $2x^3-7x^2+7x-2$, $2x^3+x^2-13x+6$.

18. x^4+5x^2+4x+5, $2x^4-x^3+10x^2+4x+5$,

$2x^4+x^3+7x^2+3x+3$.

第四章 分數式

一 分數式之基本運算

84. 定義. 二有理整式相除得分數式,被除式謂之分子,除式謂之分母.

例如 A, B 爲兩有理整式,若 $A \div B$,可記之爲分數式 $\frac{A}{B}$, A 爲分子, B 爲分母.

85. 定理. 分數式之分子分母,各以同數 $(\neq 0)$ 乘之,其值不變.

設 $\frac{A}{B}$ 爲分數式, m 爲不等於0之數,則

$$\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}.$$

推論. 分數式之分子分母,各以不等於零之同數除之,其值不變.

86. 約分. 分數式之分子分母如有公因數時,將此公因數除去之,名曰約分.

如分數式之分子分母無公因數者,則此分數謂之不可約分數.

例 1. $\dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}=\dfrac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}$

例 2. $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+2x-63}=\dfrac{(x+3)(x-7)}{(x+9)(x-7)}=\dfrac{x+3}{x+9}$.

例 3. 簡約 $\dfrac{2x^3+13x^2-6x+7}{2x^4+5x^3+8x^2-2x+5}$.

【解】 先求得分子與分母之最高公因數 $2x^2-x+1$,以此數除其分子分母,得

$$\frac{2x^3+13x^2-6x+7}{2x^4+5x^3+8x^2-2x+5}=\frac{x+7}{x^2+3x+5}.$$

注意: 原分數未知數所不能取之值,約分後或可取.例如分數式 $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 之 x 不能取數值 1,而約分後,變為 $x+1$,則 x 可取數值 1.故約分時所用之等號'='不宜易以全等號'$\equiv$'.

87. 通分. 異分母之諸分數使之變為同分母,且使所得之諸新分數由約分可以復原,名此手續曰通分.

通分之法,先求各分母之最低公倍數,謂之公分母,以各分母除之,所得之商,乘其原分數之分子分母,則所得之諸新分數,其分母皆相同,且由約分可復原狀矣.例如有三分數

$$\frac{a}{x^2y(x+y)},\quad \frac{b}{xy^2(x-y)},\quad \frac{c}{xy(x^2-y^2)}.$$

三分母之最低公倍數為 $x^2y^2(x^2-y^2)$. 以各分母除之,得商 $y(x-y)$, $x(x+y)$, xy, 順次乘各分數之分子分母,得

$$\frac{a}{x^2y(x+y)}=\frac{ay(x-y)}{x^2y(x+y)\cdot y(x-y)}=\frac{ay(x-y)}{x^2y^2(x^2-y^2)},$$

$$\frac{b}{xy^2(x-y)}=\frac{bx(x+y)}{xy^2(x-y)\cdot x(x+y)}=\frac{bx(x+y)}{x^2y^2(x^2-y^2)},$$

$$\frac{c}{xy(x^2-y^2)}=\frac{cxy}{xy(x^2-y^2)\cdot xy}=\frac{cxy}{x^2y^2(x^2-y^2)}.$$

88. 分數之加減法. 同分母之諸分數相加或相減,其結果等於以其同分母爲分母,以諸分子加減之結果爲分子之分數.

例　$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}=\frac{a+b-c}{d}.$$

異分母之諸分數相加減,可先通分,而後加減之.

例 1. 簡約 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}$.

【解】 公分母爲 a^2-b^2, 故

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a^2-b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a-b+a+b-2b}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{2(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{2}{a+b}.$$

注意: 若 $a^2\neq b^2$ (卽 a, b 所取之值其平方不相等),則原式常與 $\frac{2}{a+b}$ 相等(§85). 若 $a=b\neq 0$, 則原式無值. 而 $\frac{2}{a+b}$ 有一定之值. 故簡約後之結果,與原式並非全相等者.

例 2.　簡約　$x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$.

【解】　$x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}=\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$

$$=\frac{x^3-x+x+1-x^3+3x-1}{x^2-1}$$

$$=\frac{3x}{x^2-1}.$$

例 3.　簡約　$\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$.

【解】　$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4}$,

$$\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{2(x-1)-2(x+1)}{x^2-1}=-\frac{4}{x^2-1},$$

$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-1}=\frac{4(x^2-1)-4(x^2-4)}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{12}{x^4-5x^2+4}.$$

89. 分數之乘法. 諸分數相乘之積,等於以其諸分子之積爲分子,諸分母之積爲分母之分數.

例 1.　$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

【解】　因　$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times bd=\frac{a}{b}\times b\times\frac{c}{d}\times d=ac$,

而　$\frac{ac}{bd}\times bd=ac$,　$\therefore\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

同理　$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\cdots\cdots=\frac{ace}{bdf}\cdots\cdots.$$

例 2. $\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\times\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{(x^3-1)(x+1)}{(x^3+1)(x-1)}=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$

90. 分數之除法. 二分數相除,以除數之倒數乘被除數即得.

因 $$\frac{ad}{bc}\times\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b},$$

故 $$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

例 $$\frac{a^2-(b-c)^2}{(a^2-b^2)^2}\div\frac{a-b+c}{a^4-b^4}=\frac{a^2-(b-c)^2}{(a^2-b^2)^2}\times\frac{a^4-b^4}{a-(b-c)}$$
$$=\frac{(a+b-c)(a^2+b^2)}{a^2-b^2}.$$

91. 繁分數.

例 1. 簡約 $$\frac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}}$$

【解】 原式 $=\dfrac{a(a+b)-b(a-b)}{a(a-b)+b(a+b)}=\dfrac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=1$

例 2. 簡約 $$\frac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}$$

【解】 原式 $=\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x(x-2)}{x(x-2)-(x-1)}}$

$$=\frac{(x-2)(x^2-3x+1)}{(x-2)(x^2-3x+1)-x(x-2)}$$

$$=\frac{(x-2)(x^2-3x+1)}{(x-2)(x^2-3x+1-x)}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-4x+1}.$$

二 分數之基本性質

92. 定理 1. 若 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$, 且 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n, (b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)\neq 0$, 則此 n 個分數皆等於

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}.$$

【證】 設 $\frac{a_1}{b_1}=k$, 因 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ 皆不等於 0, 故

$$a_1=b_1k,\ a_2=b_2k,\ a_3=b_3k,\ \cdots\cdots,\ a_n=b_nk,$$

因之 $(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)=(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)k.$

又 $b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n\neq 0$, $\therefore\ \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}=k.$

故得 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}.$

93. 推論 1. 若 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$, 且 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n, (P_1b_1+P_2b_2+\cdots\cdots P_nb_n)\neq 0$, 則此諸分數皆等於

$$\frac{P_1a_1+P_2a_2+\cdots\cdots+P_na_n}{P_1b_1+P_2b_2+\cdots\cdots+P_nb_n}.$$

94. 推論 2. 若 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$, 則此諸分數

之 k 乘羃數皆等於 $\dfrac{P_1a_1^k+P_2a_2^k+\cdots\cdots+P_na_n^k}{P_1b_1^k+P_2b_2^k+\cdots\cdots+P_nb_n^k}$.

但 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n, (P_1b_1^k+P_2b_2^k+\cdots\cdots+P_nb_n^k)\neq 0$, k 爲一正整數.

【證】 設 $\dfrac{a_1}{b_1}=l$, 則因 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ 皆不等於 0, 故得

$$a_1=b_1l,\ a_2=b_2l,\ a_3=b_3l,\ \cdots\cdots,\ a_n=b_nl.$$

由是 $P_1a_1^k=P_1b_1^kl^k,\ P_2a_2^k=P_2b_2^kl^k,\ \cdots\cdots,\ P_na_n^k=P_nb_n^kl^k.$

將此諸等式兩邊相加, 且以不等於 0 之 $P_1b_1^k+P_2b_2^k+\cdots\cdots+P_nb_n^k$ 除之, 即得所求之結果.

例 1. 設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$.

求證 $\dfrac{a^3b+2c^2e-3ae^2f}{b^4+2d^2f-3bf^3}=\dfrac{ace}{bdf}$. 但分母皆不爲 0.

【證】 令 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=k$, 則 $a=bk, c=dk, e=fk$.

$$\therefore\ \frac{a^3b+2c^2e-3ae^2f}{b^4+2d^2f-3bf^3}=\frac{b^4k^3+2d^2fk^3-3bf^3k^3}{b^4+2d^2f-3bf^3}$$

$$=k^3=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}.$$

例 2. 設 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$, $abc(x+y+z+a+b+c)\neq 0$.

求證 $$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}=\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{x+y+z+a+b+c}.$$

【證】 令 $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k.$$

因 $abc \neq 0$，故 $x=ak$, $y=bk$, $z=ck$.

又因 $x+y+z+a+b+c=(k+1)(a+b+c)$，左邊不等於 0，

故 $$k+1 \neq 0,\ a+b+c \neq 0.$$

$a(k+1)$ 既不為 0，故

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}=\frac{a^2k^2+a^2}{ak+a}=\frac{(k^2+1)a}{k+1}.$$

而 $$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}$$

$$=\frac{(k^2+1)a}{k+1}+\frac{(k^2+1)b}{k+1}+\frac{(k^2+1)c}{k+1}$$

$$=\frac{(k^2+1)(a+b+c)}{k+1}.$$

又 $a+b+c \neq 0$，故右邊可書為

$$\frac{(k^2+1)(a+b+c)^2}{(k+1)(a+b+c)}=\frac{k^2(a+b+c)^2+(a+b+c)^2}{k(a+b+c)+(a+b+c)}.$$

由是 $$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}=\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{x+y+z+a+b+c}.$$

95. 定理 2. 設有 n 個分數 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \cdots\cdots, \frac{a_n}{b_n}$，其分母皆為正數，則 $$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}$$

之值，在諸分數中最大者與最小者之間.

【證】 設諸分數中其值最小者為 $\frac{a_r}{b_r}$（若有與之相等者，則任取其一）.

令 $\frac{a_r}{b_r}=k$, 則 $\frac{a_1}{b_1}-k$ 決非負數.

若以正數 b_1 乘之, 亦不爲負, 由是 a_1-kb_1 必非負數. 同理, 可知

$$a_2-kb_2,\ a_3-kb_3,\ \cdots\cdots,\ a_n-kb_n$$

皆非負數. 而此諸數之和

$$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n-(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)k$$

亦非負數. 以正數 $(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)$ 除之, 得

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n}-k$$

亦非負數, 故決不小於 0. 因之

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n}$$

決不小於 k, k 爲諸分數中之最小者. 同法, 可證此分數決不大於諸分數之最大者. 卽此分數在最大最小兩分數間之謂也.

例 設 $\frac{x}{b+c-c}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$.

求證 $\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)}$

且假定此五個分母皆不爲 0.

【證】 $$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}. \qquad (1)$$

又諸分數之分子分母,分別以 $y+z, z+x, x+y$* 乘之,則各分數等於

$$\frac{x(y+z)}{(y+z)(b+c-a)}=\frac{y(z+x)}{(z+x)(c+a-b)}=\frac{z(x+y)}{(x+y)(a+b-c)}$$

$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)}. \tag{2}$$

由 (1) 及 (2), $\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)}.$

習題十二

簡約下列各分數式:

1. $\dfrac{(x^6-y^6)(x+y)}{(x^3+y^3)(x^4-y^4)}$.

2. $\dfrac{3x^2-8x-3}{3x^2+7x+2}$.

3. $\dfrac{5x^2+6ax+a^2}{5x^2+2ax-3a^2}$.

4. $\dfrac{15x^2-46x+35}{10x^2-29x+21}$.

5. $\dfrac{(x^2-25)(x^2-8x+15)}{(x^2-9)(x^2-7x+10)}$.

6. $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}$.

7. $\dfrac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{1-x^2}$.

8. $\dfrac{2x^3+7x^2-7x-12}{2x^3+3x^2-14x-15}$.

9. $\dfrac{x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}$.

10. $\dfrac{a(b-c)(c-d)-c(d-a)(a-b)}{b(c-d)(d-a)-d(a-b)(b-c)}$.

---

* $y+z, z+x, x+y$ 三者決不同時等於 0, 因 $ax+by+cz \neq 0$ 之故.

11. $\dfrac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

12. $\dfrac{1}{2a-3b}+\dfrac{1}{2a+3b}-\dfrac{6b}{4a^2-9b^2}$.

13. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^3+1}$.

14. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x^2-4x+3}$.

15. $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{x+2}{(x-2)(3-x)}+\dfrac{x+3}{(3-x)(1-x)}$.

16. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

17. $\dfrac{yz(x+a)}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{zx(y+a)}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{xy(z+a)}{(z-x)(z-y)}$.

18. $x+\dfrac{1}{3-2x}-\dfrac{8x^4-33x}{8x^3-27}-\dfrac{2x+6}{4x^2+6x+9}$.

19. $\dfrac{(a+b)^3-c^3}{a+b-c}+\dfrac{(b+c)^3-a^3}{b+c-a}+\dfrac{(c+a)^3-b^3}{c+a-b}$.

20. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x+4}+\dfrac{3}{x+6}-\dfrac{1}{x+8}$.

21. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

22. $\dfrac{x^2-4}{x^3+3x^2-x+6}-\dfrac{3x^2-14x-5}{3x^3-2x^2-10x-3}$.

23. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}\times\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\div\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}$.

24. $\dfrac{1}{x}-\left\{1-\left[\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)}\right)\right]\right\}.$

25. $(x^2-y^2-z^2+2yz)\div\dfrac{x-y+z}{x-y-z}.$

26. $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right)\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right).$

27. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y+z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}}\div\dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+z}}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}}.$　28. $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}\div\dfrac{\dfrac{1}{a^4}-\dfrac{1}{b^4}}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2}.$

29. $x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}.$　30. $\dfrac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x+1}+1}{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x-1}-x}.$

三　部分分數

96. **部分分數.** 若干分數,施用加法及減法,可合併爲一分數,此種運算前已述之.今言其逆,有一分數,欲分析之爲若干分數之代數和,此若干分數名爲原分數之部分分數.

設欲分解之分數,其分子分母皆爲x之有理整式,若其分母之次數高於分子之次數,名曰常分數.若分子之次數高於分母之次數,則先以分母除其分子,使原分數變爲

一整式與一常分數式之代數和,而後將所得之常分數分析之.

本節僅示部分分數之梗概,故詳其計算而略其理論於此所當注意者,凡所設分數之分母中,如有一一次因數 $x-a$,則其部分分數中有一對應項 $\frac{A}{x-a}$.如分母中有一因數 $(x-b)^2$,則其部分分數中有二對應項 $\frac{B_1}{x-b}$ 及 $\frac{B_2}{(x-b)^2}$.設分母中有因數 $(x-b)^n$,則其部分分數有 n 個對應項 $\frac{B_1}{x-b}$, $\frac{B_2}{(x-b)^2}$, $\frac{B_3}{(x-b)^3}$, ……, $\frac{B_n}{(x-b)^n}$,如分母中有二次因數 x^2+px+q,則部分分數中有一對應項爲 $\frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q}$;如分母中有一因數爲 $(x^2+px+q)^2$,則其部分分數中有二對應項爲 $\frac{Px+Q}{x^2+px+q}$, $\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^2}$. $A, B, P, Q,$ …… 皆爲常數*

原理既明,則部分分數,可用未定係數法求之.

例 1. 分解 $\frac{5x-11}{2x^2+x-6}$ 爲部分分數.

【解】 因 $2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$,

故假定
$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-3}.$$

於此 A, B 爲不含 x 之未定係數.去分母,得

$$5x-11=A(2x-3)+B(x+2).$$

* 證明從略.

使兩方x之同次冪之係數相等，則

$$2A+B=5,\ -3A+2B=-11.$$

由是 $$A=3,\ B=-1.$$

故 $$\frac{5x-11}{2x^2+x-6}=\frac{3}{x+2}-\frac{1}{2x-3}$$

學者可用還原法以證此結果之眞確.

例 2. 分解$\dfrac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}$爲部分分數.

【解】 假定 $$\frac{23x-11x^2}{(2x-1)(3-x)(3+x)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{3-x}+\frac{C}{3+x},$$

則 $$23x-11x^2=A(3+x)(3-x)+B(2x-1)(3+x)+C(2x-1)(3-x).$$

使 $2x-1=0$，得 $A=1$.

使 $3-x=0$，得 $B=-1$.

使 $3+x=0$，得 $C=4$.

$$\therefore\quad \frac{23x-11x^2}{(2x-1)(3-x)(3+x)}=\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{3-x}+\frac{4}{3+x}.$$

學者必須還原以證實此結果.

例 3. 分解$\dfrac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}$爲部分分數.

【解】 假定 $$\frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2},$$

則 $$3x^2+x-2=A(x-2)^2+B(1-2x)(x-2)+C(1-2x).$$

設 $$1-2x=0,\ 得\ A=\frac{1}{3};$$

$$x-2=0,\ 得\ C=-4.$$

使兩方 x^2 之係數相等,則

$$3=A-2B,\ 由是\ B=-\frac{5}{3}.$$

$$\therefore\ \frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=\frac{1}{3(1-2x)}-\frac{5}{3(x-2)}-\frac{4}{(x-2)^2}.$$

學者可還原以證實之.

例 4. 分解 $\frac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}$ 爲部分分數.

【解】 假定 $$\frac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-4},$$

則 $$42-19x=(Ax+B)(x-4)+C(x^2+1).$$

令 $$x=4,\ 得\ C=-2.$$

使兩方 x^2 之係數相等,則 $0=A+C,\quad \therefore\ A=2.$

使絕對項相等,則 $42=-4B+C,\quad \therefore\ B=-11.$

$$\therefore\ \frac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}=\frac{2x-11}{x^2+1}-\frac{2}{x-4}.$$

此結果可還原以證實之.

例 5. 分解 $\frac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}$ 爲部分分數.

【解】 假定 $$\frac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{f(x)}{(x-2)^4},$$

A 爲常數, $f(x)$ 爲 x 之函數, 其形式須決定者.

去分母, $\quad 9x^3-24x^2+48x=A(x-2)^4+(x+1)f(x).$

令 $\quad x=-1$, 得 $A=-1$.

將 A 之值代入上式而移項, 得

$$(x+1)f(x)=(x-2)^4+9x^3-24x^2+48x$$
$$=x^4+x^3+16x+16,$$
$$\therefore\quad f(x)=x^3+16.$$

次求 $\dfrac{x^3+16}{(x-2)^4}$ 之部分分數. 令 $x-2=z$,

則
$$\frac{x^3+16}{(x-2)^4}=\frac{(z+2)^3+16}{z^4}=\frac{z^3+6z^2+12z+24}{z^4}$$
$$=\frac{1}{z}+\frac{6}{z^2}+\frac{12}{z^3}+\frac{24}{z^4}$$
$$=\frac{1}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}+\frac{12}{(x-2)^3}+\frac{24}{(x-2)^4}.$$

$$\frac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}$$
$$=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}+\frac{12}{(x-2)^3}+\frac{24}{(x-2)^4}.$$

本節以略去理論,故一切計算都爲機械式,然學者可用還原法以證實其結果,則昧而復明.

習題十三

分解下列各分數式爲部分分數:

1. $\dfrac{7x-1}{1-5x+6x^2}$.　　2. $\dfrac{46+13x}{12x^2-11x-15}$.

3. $\dfrac{1+3x+2x^2}{(1-2x)(1-x^2)}$.　　4. $\dfrac{x^2-10x+13}{(x-1)(x^2-5x+6)}$.

5. $\dfrac{9}{(x-1)(x+2)^2}$.　　6. $\dfrac{2x^2-11x+5}{(x-3)(x^2+2x-5)}$.

7. $\dfrac{26x^2+208x}{(x^2+1)(x+5)}$.　　8. $\dfrac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^4}$.

9. $\dfrac{2x^3+x^2-x-3}{x(x-1)(2x+3)}$.　　10. $\dfrac{5x^3+6x^2+5x}{(x^2-1)(x+1)^3}$.

11. $\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.　　12. $\dfrac{x^3+x^2-2x-3}{x^3-1}$.

13. $\dfrac{4x-1}{(x^2+2x+5)^2}$.　　14. $\dfrac{2x^3+9}{x^4+x^3-12x^2}$.

15. $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$.　　16. $\dfrac{x^3-x^2}{(2x^2-x+2)(x^2-2x+3)}$.

四　分數方程式

97. 分數方程式之解法.

(i) 將各項移於等號之一邊,化爲既約分數式 $\dfrac{N}{D}$, 於此 N 與 D 皆爲未知數 x 之整式. 凡 x 所取之值,能使 $N=0$ 而 $D\neq0$ 者,皆爲原分數方程式之解. 且其解限於此.

例 1. 解
$$\frac{2x}{x+1}-1=\frac{1}{x-1}.$$

【解】 $$\frac{2x}{x+1}-1-\frac{1}{x-1}=0.$$

簡之, $$\frac{x^2-3x}{x^2-1}=0.$$

置 $x^2-3x=0$, 得 $x=0$ 與 $x=3$. 而此二值不能使分母 x^2-1 爲零, 故卽爲所求之解.

例 2. 解 $$\frac{x^2-2x}{x^2-4}+2=\frac{1}{x+2}.$$

【解】 移項後簡化之, 得

$$\frac{3(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=0,$$

$$\frac{3(x+1)}{x+2}=0.$$

故 $x=-1$ 爲所求之解.

本例用約分而後得解者也.

分數方程式未必有解, 舉例於下:

例 3 試解 $$\frac{x-1}{x+1}=2-\frac{x+1}{x-1}.$$

【解】 移項簡化之, 得

$$\frac{4}{x^2-1}=0,$$

則 x 以任何有限數值, 均不能使 $\frac{4}{x^2-1}$ 爲 0, 故原方程式無解.

(ii) 解分數方程式,常可以方程式各項之最低公分母遍乘各項而後解之.然如所得之值,代入最低公分母爲零,則此值非爲原方程式之解.此理甚明,更舉二例以顯之.

例 4. 解 $$\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}=\frac{x+13}{x(x-1)}.$$

【解】 以各項之最低公分母 $x(x-1)$ 遍乘之,乃得

$$3(x-1)+6x-(x+13)=0.$$

由是 $$x=2.$$

此值不能使最低公分母 $x(x-1)$ 爲零,故爲所求之根.

例 5. 解 $$\frac{x+3}{3x+2}=\frac{4x-1}{4x+1}-\frac{2x-1}{3x+2}.$$

【解】 以最低公分母 $(3x+2)(4x+1)$ 遍乘各項,得

$$(x+3)(4x+1)=(4x-1)(3x+2)-(2x-1)(4x+1).$$

去括弧而整理之,得 $$x=-\frac{2}{3}.$$

然 $x=-\frac{2}{3}$ 適合 $(3x+2)(4x+1)=0$.故非爲原方程式之解.由是且知原方程式無有解.此事實亦可用 (i) 法知之.蓋原方程式可簡化爲

$$\frac{2}{4x+1}=0$$

之故.

(iii) 拘泥常法而解方程式時,不能免於無謂之繁雜.其道云何?乃在下筆前善事思索.茲舉一例以明之.

例 6. 解 $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}$.

【解】 若將各項實行除法:

$$1+\frac{1}{x-2}-1-\frac{1}{x-3}=1+\frac{1}{x-5}-1-\frac{1}{x-6}.$$

即 $$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-6},$$

或 $$\frac{-1}{(x-2)(x-3)}=\frac{-1}{(x-5)(x-6)}.$$

由是 $$x^2-5x+6=x^2-11x+30,$$

$$6x=24,$$

$$\therefore\quad x=4.$$

98. 聯立分數方程式. 解分數方程式,任常例先去分母而後解,然有時反以不去分母爲便.茲舉二例,以明此說.

例 1. 解

$$\begin{cases}\frac{x-1}{y-2}=\frac{x-3}{y-4}. & (1)\\ \frac{1}{xy-2x}+\frac{1}{4y-2y^2}=\frac{2}{xy}. & (2)\end{cases}$$

【解】 由 (1), $x-y=-1$.

由 (2), $x+2y=8$.

解之,得 $x=2,\ y=3.$

此卽爲所求之解,可代入原方程式而驗證之.

例 2. 解

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{5}{6}, & (1)\\[2ex] \dfrac{yz}{y+z}=-\dfrac{3}{2}, & (2)\\[2ex] \dfrac{z+x}{xz}=-\dfrac{1}{2}. & (3)\end{cases}$$

【解】 分 (1), (2), (3) 爲

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6},$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}.$$

卽得 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{z}=-1.$

故所求之解爲 $x=2,\ y=3,\ z=-1.$

99. 應用問題.

例 1 特別快車之速率爲慢車速率之 $\frac{9}{5}$. 若在 135 公里之行程中,慢車較特別快車多費 2 小時. 問特別快車與慢車之速率各如何?

【解】 設慢車每小時行 x 公里,則特別快車每小時

行$\frac{9}{5}x$公里.由題意,得方程式:

$$\frac{135}{x}-2=\frac{135}{\frac{9}{5}x}.$$

即
$$\frac{135}{x}-2=\frac{75}{x}.$$

解之,得
$$x=30,\ \frac{9}{5}x=54.$$

故慢車每小時行30公里,特別快車每小時行54公里.

例 2. 有一分數,其分子分母各加1,則爲$\frac{2}{3}$,若將分子分母各減1,則爲$\frac{1}{2}$.求原分數.

【解】 設分子爲x,分母爲y,則

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{2}{3}, & (1)\\[2ex] \dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{1}{2}. & (2)\end{cases}$$

由(1),
$$3x-2y=-1.$$

由(2),
$$2x-y=1.$$

由是
$$x=3,\ y=5.$$

故原分數爲$\frac{3}{5}$.

習題十四

解下列各方程式:

1. $\dfrac{x-4}{x+3}=\dfrac{x-5}{x+2}$.　　2. $\dfrac{6x-1}{3x+2}-\dfrac{4x-7}{2x-5}=0$.

3. $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{4}{x^2-6x+8}$.

4. $\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}+\dfrac{2}{(x-3)(x+2)}+\dfrac{3}{(x+2)(x+1)}=0$.

5. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+5x+4}=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$.　　6. $\dfrac{x+a}{b(x+b)}+\dfrac{x+b}{a(x+a)}=\dfrac{a+b}{ab}$.

7. $\dfrac{x^3+1}{x+1}-\dfrac{x^3-1}{x-1}=20$.　　8. $\dfrac{2x+3}{x+1}-\dfrac{3x+3}{3x+1}=\dfrac{4x+5}{4x+4}$.

9. $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{x+8}-\dfrac{1}{x+10}$.

10. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}$.

11. $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+5}{x+7}=\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+5}$.

12. $\dfrac{x-8}{x-3}-\dfrac{x-9}{x-4}=\dfrac{x+7}{x+8}-\dfrac{x+2}{x+3}$.

13. $\dfrac{ax+c}{x-p}+\dfrac{bx+d}{x-q}=a+b$.

14. $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x-c}=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+c}$.

15. $\dfrac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)}+\dfrac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)}+\dfrac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)}=0$.

解下列各組之聯立方程式:

16. $\dfrac{x-4}{y+4}=\dfrac{x-3}{y+7},\ \dfrac{x-2}{y-2}=\dfrac{x+5}{y-1}.$

17. $\dfrac{3x+y-1}{x-y+2}=\dfrac{6}{7},\ \dfrac{x+9}{y+4}=\dfrac{x+3}{y+3}.$

18. $\dfrac{xy}{ay+bx}=\dfrac{b}{a},\ \dfrac{xy}{ax+by}=\dfrac{a}{b}.$

19. $\dfrac{xy}{x+y}=a,\ \dfrac{yz}{y+z}=b,\ \dfrac{zx}{z+x}=c.$

20. $\dfrac{xy}{4y+3x}=20,\ \dfrac{zx}{2x-3z}=15,\ \dfrac{zy}{4y-5z}=12.$

21. 有一工程,甲獨作,三日可成;乙獨作,四日可成.問二人合作,幾日可成?

22. 慢車自某站開行後二小時,特別快車亦自該站開出,行210公里追及慢車,設特別快車之速率爲慢車速率之$\dfrac{5}{3}$.問慢車之速率如何?

23. 有一分數,其分母加1,分子減1,爲則$\dfrac{3}{5}$.若分母減1,分子如1,則爲1.求原分數.

24. 有一二位數,以其數字之和除之,其商爲5.又交換二數字後,以原數之個位數之二倍與十位數之差除之,則其商爲9.求此二位數.

25. 火車開行一小時,忽遇障礙,停車半小時,乃以原速率$\dfrac{6}{5}$之速率前進,至目的地時,較原定時刻遲18分鐘.

若以原速率多行 10 公里，始遇障礙，則較原定時刻遲
分. 求原速率及兩地之距離.

26. 沿江有 A，B 二村，相距 24 里. 某甲自 A 至 B，步行至半途而改舟溯流而上，共經 7 小時而抵 B 村. 歸時亦行至半途而改舟順流而下，共經 6 小時而抵 A 村. 但知步行之速率，歸時爲往時之 $\frac{3}{4}$；舟行之速率以受水流之影響，歸時爲往時之二倍. 問往時步行及舟行之速率各如何

五 函數之極限

100. 函數之極限. 以 x 爲半徑之圓，其面積爲 πx^2. 前者變動，後者亦隨之而變. 凡隨 x 而變之數，爲 x 之函數. x 之函數，可用記號 $f(x)$，$g(x)$ 等略記之(參見 §46). 若 $f(x)=5x$，則 $f(0)=0$，$f(\frac{1}{5})=1$，……. 若 x 逐漸變動而接近於 1，則 $f(x)$ 亦變動而接近於 5. 此事以記號

$$\lim_{x\to 1} f(x)=5 \tag{1}$$

略記之. (1) 之讀法則爲'當 x 接近於 1 時，$f(x)$ 之極限爲 5'. 擴而充之：設 a 與 b 皆爲一常數，記號

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \tag{2}$$

之讀法爲'當 x 接近於 a 時，函數 $f(x)$ 之極限爲 b.' (2) 之

讀則爲'若 x 甚近於 a, 則 $f(x)$ 甚近於 b'.

凡變動之數爲變數,故上述之 x 與 $f(x)$ 皆變數也.

例　設 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

【解】　當 x 甚近於 0 時, $\dfrac{1}{x+1}$ 甚近於 1, 故得

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1.$$

101. 不定形式之極限.　設 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, 則 $f(1)$ 毫無意義. 然當 x 甚近於 1 時, $f(x)$ 甚近於 2. 即

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2. \tag{1}$$

故在 $x=1$, 函數 $f(x)$ 雖不取任何數值, 而極限關係 (1) 則依然成立也. 一般言之: 設 $F(x)$ 與 $G(x)$ 皆爲 x 之函數, 則

$$f(x)=\frac{F(x)}{G(x)}, \tag{2}$$

亦爲 x 之函數. 若 $F(a)=G(a)=0$, 則 $f(a)$ 無意義. 或曰當 $x=a$ 時, (2) 成爲不定形式. 然極限

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

之存在與否, 乃爲另一事; 當斯情形, 求此極限, 通常稱爲求不定形式之極限. 茲更舉二例以明之.

例 1.　設 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, 求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

【解】 若 $x \neq 1$，則 $f(x)=x^2+x+1$. 故當 x 甚近於 2 時，$f(x)$ 甚近於 7. 即

$$\lim_{x\to 2} f(x)=7.$$

例 2. 設 $f(x)=\frac{x+1}{x-3}\div\frac{x-1}{x-3}$，求 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

【解】 若 $x \neq 3$，則

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}.$$

由是 $$\lim_{x\to 3} f(x)=2.$$

其在斯例，$f(3)$ 亦無意義. 置

$$F(x)=\frac{x-3}{x-1},\quad G(x)=\frac{x-3}{x+1},$$

則 $$f(x)=\frac{F(x)}{G(x)},\quad F(3)=G(3)=0.$$

故本例亦所謂求不定形式之極限的問題.

102. 變數之變換.

設 $$f(x)=\frac{x^2-x+2}{2x^2+x-1},$$

則 $$f(\tfrac{1}{x})=\frac{1-x+2x^2}{2+x-x^2}.$$

故 $$\lim_{x\to 0} f(\tfrac{1}{x})=\tfrac{1}{2}.$$

此事或書爲
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\tfrac{1}{2}. \tag{1}$$

(1) 之讀法爲'當 x 漸趨於無限大時, $f(x)$ 之極限爲 $\frac{1}{2}$'. (1) 之真義乃'x 甚大時, $f(x)$ 甚近於 $\frac{1}{2}$'. 一般言之:
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$$
者, 乃
$$\lim_{x\to 0} f\left(\tfrac{1}{x}\right)=b$$
之簡也. 更舉一例, 結束本節.

例 設 $f(x)=x-\dfrac{2x^2}{2x+1}$, 求 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

【解】 $f(x)=\dfrac{x}{2x+1}$, $f\left(\tfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2+x}$.

故 $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\tfrac{1}{x}\right)=\tfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\tfrac{1}{2}$.

習題十五

求下列極限:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-6x+8}$.
4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-3x+2}$.
5. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^3+x^2+5x-3}{8x^3-8x^2+4x-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^3-7x^2-3x-4}{x^3-5x^2-8x+48}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x+1}{x^2-4}-\dfrac{x-1}{x(x-2)}\right]$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2x^2+x-3}-\dfrac{1}{3x^2-x+2}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+\dfrac{x+1}{x-3}}{x+\dfrac{x-1}{x-3}}$.

10. 當 $x\to\infty$ 時，求下列各式之極限值：

(i) $\dfrac{2x^2-3x+4}{3x^2+2x-5}$. (ii) $\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$.

(iii) $\dfrac{(x^2-1)(x^3+1)}{(x^4+1)(2x-1)}$.

(iv) $\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots b_m}$ $(n\leqq m)$.

第五章 根數及複素數

一 根數

103. 定義. (i) 設a為一正數,n為一正整數.則必有惟一之正數,其n乘羃等於a者(此為一事實,其證明從略).此惟一之正數,名曰a之n方根之主值,以$\sqrt[n]{a}$記之.

(ii) 若$n=2$,則以$\sqrt{a}$略記之.二方根,三方根或曰平方根,立方根.

(iii) 若$a=0$,則定$\sqrt[n]{a}$之意義為0.

(iv) a之n方根記以$a^{\frac{1}{n}}$,故$\sqrt[n]{a}$為$a^{\frac{1}{n}}$之主值.

(v) 若m為一整數,則$(a^{\frac{1}{n}})^m$略記以$a^{\frac{m}{n}}$.

例 $$(5^{\frac{1}{3}})^2=5^{\frac{2}{3}}.$$

(vi) 若m為正數,則定a^{-m}之意義為$\frac{1}{a^m}$.

104. 指數律之擴張.

定理 (i) $$(a^m)^{\frac{1}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m=a^{\frac{m}{n}}.$$

(ii) $$a^f\cdot a^g=a^{f+g}$$

(iii) $$(a^f)^g=a^{fg}$$

(iv) $$a^f\cdot b^f=(ab)^f$$

(v) $$\frac{a^f}{b^f}=\left(\frac{a}{b}\right)^f$$

但 a, b 為正數；f, g 為分數；m, n 為整數，$n>0$.

【證】 (i) 設 $a^{\frac{1}{n}}=c$，則 $a=c^n$，$a^m=c^{mn}$.

又設 $(a^m)^{\frac{1}{n}}=d$，則 $a^m=d^n$. 由是 $d^n=c^{mn}$.

兩邊取 n 方根，得 $d=c^m$.

由定義(v)，$c^m=a^{\frac{m}{n}}$，而 $d=(a^m)^{\frac{1}{n}}$，故得所述之關係.

(ii) 設 $f=\dfrac{m}{n}, g=\dfrac{p}{q}$；$n, q$ 為正整數；m, p 為整數.

又設 $a^f\cdot a^g=x$，則 $x^{nq}=(a^f)^{nq}\cdot(a^g)^{nq}$.

然 $(a^f)^n=[(a^m)^{\frac{1}{n}}]^n=a^m$，同理 $(a^g)^q=a^p$.

$$x^{nq}=(a^m)^q\cdot(a^p)^n=a^{mq+np}.$$

由是 $x=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{f+g}$，此即欲證之關係也.

(iii) 設 $a^{mp}=y$.

因 $[(y^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{q}}]^{nq}=(y^{\frac{1}{n}})^n=y$, ∴ $(y^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{q}}=y^{\frac{1}{nq}}$

以 a^{mp} 代 y，得 $[(a^{mp})^{\frac{1}{n}}]^{\frac{1}{q}}=[a^{\frac{mp}{n}}]^{\frac{1}{q}}=[a^{\frac{m}{n}}]^{\frac{p}{q}}=(a^f)$

又 $(a^{mp})^{\frac{1}{nq}}=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{fg}$. ∴ $(a^f)^g=c^{fg}$.

(iv) 因 $(a^f\cdot b^f)^n=(a^f)^n\cdot(b^f)^n=a^m\cdot b^m=(ab)^m$.

故 $$a^f\cdot b^f=(ab)^{\frac{m}{n}}=(ab)^f.$$

(v) 由 (iv), 得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^f \cdot b^f = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^f = a^f, \quad \therefore \quad \left(\frac{a}{b}\right)^f = \frac{a^f}{b^f}.$$

例
$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2},$$

$$\sqrt{8ab^3} = \sqrt{4b^2}\sqrt{2ab} = 2b\sqrt{2ab},$$

$$\sqrt[3]{\frac{3a}{b^3c^6}} = \frac{\sqrt[3]{3a}}{\sqrt[3]{b^3c^6}} = \frac{\sqrt[3]{3a}}{bc^2},$$

$$\sqrt[5]{\sqrt{32x^{15}y^5}} = \sqrt[10]{32x^{15}y^5} = \sqrt{2x^3y},$$

$$(\sqrt[3]{2xy^2})^2 = \sqrt[3]{(2xy^2)^2} = \sqrt[3]{4x^2y^4} = y\sqrt[3]{4x^2y},$$

但 a, b, c, x, y 皆爲正數.

105. 同類根數與同次根數.

有二根數, 相除而後, 若其商不爲根數, 名此二根數爲同類根數.

例 1. $3\sqrt{2}$ 及 $5\sqrt{2}$ 爲同類根數.

例 2.
$$2\sqrt[3]{24x^4y^2} = 2\times 2x\sqrt[3]{3xy^2} = 4x\sqrt[3]{3xy^2},$$

$$\sqrt[3]{81xy^5} = 3y\sqrt[3]{3xy^2}.$$

故
$$2\sqrt[3]{24x^4y^2} \text{ 及 } \sqrt[3]{81xy^5},$$

亦爲同類根數.

同類根數之和或差, 亦與之同類.

例 1. $\sqrt{54} + \sqrt{24} = 3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 5\sqrt{6}.$

例 2. $\sqrt{a^5b} + 2\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{ab^5}$

$$=a^2\sqrt{ab}+2ab\sqrt{ab}+b^2\sqrt{ab}$$

$$=(a^2+2ab+b^2)\sqrt{ab}$$

$$=(a+b)^2\sqrt{ab}.$$

指數相同之二根數,謂之同次根數.凡非同次根數可化爲同次根數.

例 1. 化$\sqrt[3]{2}$與$\sqrt{3}$爲同次根數.

【解】 指數3與2之最小公倍數爲6,故得

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{4},$$

$$\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}.$$

例 2. $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{32}.$

例 3. $\sqrt[4]{a^3b^2}\div\sqrt[3]{ab^2}=\sqrt[12]{a^9b^6}\div\sqrt[12]{a^4b^8}=\sqrt[12]{\frac{a^9b^6}{a^4b^8}}=\sqrt[12]{\frac{a^5}{b^2}}$

106. 共軛根數.

兩根數之積,若爲有理數,則稱此兩根數互爲共軛根數.例如$\sqrt{a}$及$\sqrt{a}$, $a+\sqrt{b}$及$a-\sqrt{b}$,或$\sqrt{a}+\sqrt{b}$及$\sqrt{a}-\sqrt{b}$各對,均互爲共軛根數.

因 $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a,$

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b,$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b.$$

107. 共軛根數之應用.

例 1. $$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

例 2. $$\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{3(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2-5}=\sqrt{5}-\sqrt{2}.$$

例 3. $$\frac{12}{3+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}=\frac{12(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{(3+\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{12(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{6+6\sqrt{5}}=\frac{2(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{1+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{2}$$

$$=1+\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2}.$$

108. 不盡根數. 設 n 爲一正整數，a 爲一正有理數，若 $\sqrt[n]{a}$ 不爲有理數*，則名之曰 (n 次的) 不盡根數.

定理. 兩個二次不盡根數，若不相等，則其和與差皆爲無理數.

【證】 設 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ 爲二不盡根數，假如 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 等於有理數 c，則其共軛根數

* 整數與分數，合而言之曰有理數.

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{c},$$

亦爲一有理數. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 與 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 既皆爲有理數,則此兩者之和與差卽 $2\sqrt{a}$ 與 $2\sqrt{b}$ 亦當爲有理數,是不合理.故 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 必爲無理數.同理,可知 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 亦爲一無理數.

109. 定理. 設 a, c 爲兩有理數, $\sqrt{b}, \sqrt{d}$ 爲兩不盡根數,若 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$, 則 $a=c$, $b=d$.

【證】 由假設,知、

$$\sqrt{b}-\sqrt{d}=c-a.$$

若 $b \neq d$, 則 $\sqrt{b} \neq \sqrt{d}$, 由前節知 $\sqrt{b}-\sqrt{d}$ 爲一無理數,不能與有理數 $c-a$ 相等.故必 $b=d$, 且 $a=c$.

110. 設 a 爲一有理數, $\sqrt{b}$ 爲一不盡根數, a^2 大於 b, 求 $a+\sqrt{b}$ 之平方根.

【解】 假定 x 不小於 y, 且 $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 以探之.

兩邊平方, $\quad a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}.$

$$\therefore \quad x+y=a,$$

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{b}, \text{卽 } xy=\tfrac{1}{4}b.$$

因 $\quad (x-y)^2=(x+y)^2-4xy,$

$$(x-y)^2=a^2-b,$$

$$x-y=\sqrt{(a^2-b)}.$$

由是　　$x=\frac{1}{2}\{a+\sqrt{(a^2-b)}\}$,

$$y=\frac{1}{2}\{a-\sqrt{(a^2-b)}\}.$$

例　求 $6+2\sqrt{5}$ 之平方根.

【解】 設　$\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

兩邊平方之, $6+2\sqrt{5}=x+y+2\sqrt{xy}$.

$$x+y=6,\ xy=5.$$

如上法解之,得 $x=5,\ y=1$.

故所求之平方根為 $\sqrt{5}+1$.

習題十六

簡約下列各式:

1. $\sqrt{18}$.　　2. $\sqrt[3]{27^2}$.

3. $\sqrt[5]{64a^{[illegible]}b^5c^{13}}$.　　4. $\sqrt[2n]{a^nb^{[illegible]}c^{[illegible]}}$.

5. $\sqrt[n]{a^{2n+1}b^{3n+[illegible]}c^{4n}}$.　　6. $\sqrt{x^2y^2-x^2z^2}$.

7. $\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}$.　　8. $\sqrt[3]{x^6-x^3y^3}$.

9. $\sqrt[3]{1-\frac{a^3}{b^3}}$.　　10. $\sqrt{\frac{c^{n+[illegible]}}{a^{3n[illegible]}}}$.

11. $4\sqrt{63}+5\sqrt{7}-8\sqrt{28}$.　　12. $\sqrt{44}-3\sqrt{176}+2\sqrt{99}$.

13. 比較 $3\sqrt{2}$ 及 $2\sqrt[3]{3}$ 之大小.

14. 比較 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ 及 $\sqrt[5]{5}$ 之大小.

簡約下列各式:

15. $\sqrt{35}\div\sqrt{\frac{7}{5}}$.　　16. $10\div\sqrt{5}$.

17. $2\sqrt{3}\div3\sqrt{2}$.　　18. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$.

19. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$.　　20. $2\sqrt{35}\cdot\sqrt{65}\div\sqrt{91}$.

21. $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{15})$.

22. $\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{2}}$.

23. $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$.　　24. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

25. $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$.　　26. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

27. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$　　28. 求 $28-5\sqrt{12}$ 之平方根.

29. 求 $17+12\sqrt{2}$ 之四方根.

30. 設 $\sqrt{5}=2.23607$, 求下式之值:

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}.$$

二　多項式之開方法

111. 開平方法. 由恆等式

$$A^2+2AB+B^2=A^2+(2A+B)B=(A+B)^2$$

推得多項式開平方之法如下:

(i) 將原式依某文字降冪排列之.

略去本節,無妨進修後述諸事項.

(ii) 求原式首項之平方根為根式之首項.

(iii) 從原式減去根式首項之平方,得第一餘式.

(iv) 以根式首項之二倍為試除數,除第一餘式之首項,得商,是為根式之第二項.

(v) 以根式首項之二倍與根式第二項之和為全除數,從第一餘式減去全除數與根式第二項之積,得第二餘式.

(vi) 以根式首二項之二倍試除第二餘式之首項,得根式之第三項.依此繼續進行.如某一餘式為零,則所求得之根式即為原式之平方根.

上述開平方之演式,可列之如次:

$$\begin{array}{r|l|l}
 & A^2+2AB+B^2 & \underline{A+B} \\
 & \underline{A^2} & \\
2A+B & 2AB+B^2 & \\
 & \underline{2AB+B^2} &
\end{array}$$

例 1. 求 $4x^2-12xy+9y^2$ 之平方根.

$$\begin{array}{r|l|l}
 & 4x^2-12xy+9y^2 & \underline{2x-3y} \\
 & \underline{4x^2} & \\
4x-3y & -12xy+9y^2 & \\
 & \underline{-12xy+9y^2} &
\end{array}$$

故所求之平方根為 $2x-3y$.

例 2. 求 $16x^4-24x^3+25x^2-12x+4$ 之平方根.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 16x^4-24x^3+25x^2-12x+4 \;\big|\; \underline{4x^2-3x+2} \\
 & \underline{16x^4} \\
8x^2-3x & -24x^3+25x^2-12x+4 \\
 & \underline{-24x^3+\;\;9x^2} \\
8x^2-6x+2 & 16x^2-12x+4 \\
 & \underline{16x^2-12x+4}
\end{array}
$$

故所求之平方根爲 $4x^2-3x+2$.

從多項式開平方,卽可推得數之開平方法.

凡一位或二位整數之平方根爲一位數,三位或四位整數之平方根爲二位數.依此類推,可將一數從個位起,向左每二位分爲一段,最後一段爲一位或二位不定;如此分得之段數,卽爲平方根之位數.

求小數之平方根,可從小數點起,向右每二位分爲一段,其法與求整數之平方根相同.

例 3. 求 524176 之平方根.

$$
\begin{array}{r|lll|l}
 & & & & \;A\quad\;\; B\quad\; C \\
 & 52 & 41 & 76 & 700+20+4=724 \\
 & 49 & 00 & 00 & \\
2A+B=1400+20 & 3 & 41 & 76 & \\
=1420 & 2 & 84 & 00 & \\
 & & 57 & 76 & \\
2(A+B)+C=1440+4=1444 & & 57 & 76 &
\end{array}
$$

故所求之平方根爲 724

112. 開立方法. 從恆等式

$$A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=A^3+(3A^2+3AB+B^2)B=(A+B)^3$$

推得多項式開立方之法如下:

(i) 將原式依某文字降冪排列之.

(ii) 求原式首項立方根爲根式之首項.

(iii) 從原式減去根式首項之立方,得第一餘式.

(iv) 以根式首項平方之三倍加首項與第二項乘積之三倍及第二項平方之和爲全除數.復以根式第二項乘全除數,從第一餘式相減,得第二餘式.以後依此進行之.

上述開立方之演式,可列之如次:

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & A^3+3A^2B+3AB^2+B^3 & \underline{A+B} \\
 & A^3 & \\
\hline
3\times A^2=3A^2 & 3A^2B+3AB^2+B^3 & \\
3\times A\times B=+3AB & & \\
B^2=+B^2 & & \\
\hline
3A^2+3AB+B^2 & \underline{3A^2B+3AB^2+B^3} &
\end{array}
$$

例 1. 求 $8x^6-12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1$ 之立方根.

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & 8x^6-12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1 & \underline{2x^2-x+1} \\
 & 8x^6 & \\
\hline
3\times(2x^2)^2=12x^4 & -12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1 & \\
3\times 2x^2\times(-x)=-6x^3 & & \\
(-x)^2=+x^2 & & \\
\hline
12x^4-6x^3+x^2 & -12x^5+6x^4-x^3 & \\
\hline
3(2x^2-x)^2=12x^4-12x^3+3x^2 & 12x^4-12x^3+9x^2-3x+1 & \\
3(2x^2-x)\times 1=6x^2-3x & & \\
1^2=1 & & \\
\hline
12x^4-12x^3+9x^2-3x+1 & \underline{12x^4-12x^3+9x^2-3x+1} &
\end{array}
$$

故所求之立方根爲 $2x^2-x+1$.

從多項式之開立方,卽可推得數之開立方法.

凡一位至三位整數之立方根爲一位數,四位至六位整數之立方根爲二位數.依此類推,可將一數從個位起向左每三位分爲一段,分得之段數,卽爲此數立方根之位數.

求小數之立方根,可從小數點起,向右每三位分爲一段,其法與整數開方相同

例 2. 求 19683 之立方根

$$
\begin{array}{lr|l}
 & & \quad A \quad\ B \\
 & 19\,683 & 20+7=27 \\
 & 8\,000 & \\
3A^2=3\times 20^2=1200 & & \\
3AB=3\times 20\times 7=420 & 11\,683 & \\
B^2=7^2=49 & & \\
\hline
 & 1669 & 11\,683
\end{array}
$$

故所求之立方根爲 27.

習題十七

求下列各式及各數之平方根:

1. $x^4-6x^3+13x^2-12x+4$.

2. $x^4+2x^3-x^2-2x+1$.

3. $16x^4+24x^3+81x^2+54x+81$.

4. $13x^4+13x^2+4x^6-14x^5+4-4x-12x^3$.

5. $1+4x-10x^2+20x^3+25x^4+24x^5+16x^6$.

6. 5625.

7. 56169.

8. 582169.

9. 25.336889.

求下列各式之立方根:

10. $64x^3-144x^2+108x-27$.

11. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$.

12. $8x^6-36x^5+66x^4-63x^3+33x^2-9x+1$.

求下列各數之立方根,凡不盡之問題,至少要答數四位:

13. 29791.

14. 58863869.

15. 7.1293.

16. 3.00168.

三 複素數

113. 平方根之擴張. 設 $a>0$, $x^2=a$, 則

$$(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0.$$

故 x 或為 $\sqrt{a}$ 或為 $-\sqrt{a}$. 由是可知平方等於 a 之數有二,即 $\sqrt{a}$ 與 $-\sqrt{a}$ 是也,今稱此兩數皆為 a 之平方根.故凡正數之平方根有二,兩者絕對值相等,符號相反.

不論正數與負數,其平方數無有負數者,故負數之平方根,不在實數領域之內,特名之曰虛數.

平方等於 -1 之虛數,以 i 或 $\sqrt{-1}$ 記之.

設 a 為一正數,則定 $\sqrt{-a}$ 之意義為

$$\sqrt{a}\sqrt{-1}=\sqrt{a}i.$$

虛數之單位為i,實數之單位為1,故名一實數與一虛數之和或差為一複素數.

例如a,b皆為實數,則$a+bi$為一複素數.

假定. 虛數與複素數之運算服從基本律*.

114. 虛數之乘冪. 由定義

$$i=\sqrt{-1},\qquad i^2=-1.$$

故
$$i^3=i^2\cdot i=-i,\qquad i^4=i^2\cdot i^2=1,$$
$$i^5=i^4\cdot i=i,\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由是可知虛數之奇數乘冪仍為虛數,而其偶數乘冪則為實數.i之乘冪,每四次為一週期.

115. 虛數之乘積. 設a,b為兩正數,則

$$(+\sqrt{-a})(+\sqrt{-b})=(\sqrt{a}\sqrt{-1})(\sqrt{b}\sqrt{-1})$$
$$=\sqrt{ab}(\sqrt{-1})^2=-\sqrt{ab},$$
$$(-\sqrt{-a})(-\sqrt{-b})=-\sqrt{ab},$$
$$(+\sqrt{-a})(-\sqrt{-b})=(+\sqrt{a}\sqrt{-1})(-\sqrt{b}\sqrt{-1})$$
$$=-\sqrt{ab}(\sqrt{-1})^2=\sqrt{ab},$$
$$(-\sqrt{-a})(+\sqrt{-b})=\sqrt{ab}.$$

故二虛數相乘,其積為實數;同號者其積為負,異號者為正.

* 見第一章第二節.

116. 共軛複素數.

設有二複素數,惟其虛數部分之符號不同者,謂之共軛複素數.

例如 $a+bi$ 與 $a-bi$ 爲共軛複素數.

因

$$(a+bi)+(a-bi)=2a,$$

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2.$$

故二共軛複素數之和或積皆爲實數.

117. 複素數之基本四法.

設 $a+bi$ 及 $c+di$ 爲二複素數,則

(i) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$

(ii) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$

(iii)
$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=ac+adi+bci+bdi^2\\&=ac+adi+bci-bd\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i.\end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\\&=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.\end{aligned}$$

118. 複素數之絕對值.

a^2+b^2 之正平方根,即 $\sqrt{a^2+b^2}$,稱爲 $a+bi$ 及 $a-bi$ 之絕對值,以 $|a+bi|$ 及 $|a-bi|$ 表之.

故 $|a+bi|=|a-bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$

119. 定理. 設複素數$a+bi=0$,則$a=0,b=0$.

【證】 因 $$a+bi=0,$$

故 $$bi=-a.$$

兩邊平方之, $$-b^2=a^2.$$

由是 $$a^2+b^2=0.$$

但a^2與b^2皆為正數,如a或b有一非0,則a^2+b^2決不為0,故必須$a=0,b=0$.

120. 定理. 若$a+bi=c+di$,則$a=c,b=d$.

【證】 因 $$a+bi=c+di,$$

故 $$(a-c)+(b-d)i=0.$$

由前節,知 $$a-c=0,\ b-d=0,$$

即 $$a=c\quad b=d.$$

121. 定理. 二複素數乘積之絕對值,等於其各絕對值之積.

【證】 設$a+bi$及$c+di$為二複素數,則

$$\begin{aligned}|(a+bi)(c+di)|&=|(ac-bd)+(ad+bc)i|\\&=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}\\&=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}\\&=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\end{aligned}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}$$

$$=|a+bi|\cdot|c+di|.$$

推論. 諸複素數之積之絕對值,等於其各絕對值之積.

122. 定理. 二複素數之和之絕對值,不大於其各絕對值之和.

【證】 若 $a+bi$ 及 $c+di$ 為二複素數,則

則 $$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}. \qquad (1)$$

兩邊平方, $$a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$
$$\geqq a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd),$$

即 $$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geqq ac+bd.$$

再平方, $a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\geqq a^2c^2+2abcd+b^2d^2$,

即 $$a^2d^2+b^2c^2\geqq 2abcd.$$

$$\therefore \quad (ad-bc)^2\geqq 0 \qquad (2)$$

因 a,b,c,d 皆為實數,故 $ad-bc$ 亦為一實數.若 $cd\neq bc$ 則 $(ad-bc)^2>0$; 如 $ad=bc$, 則 $(ad-bc)^2=0$, 故 (2) 常真,由是 (1) 亦常真.

例 $$|2+i|=\sqrt{5},\ |1+3i|=\sqrt{10}.$$

而 $$|(2+i)+(1+3i)|=5$$

故 $$5<\sqrt{5}+\sqrt{10}.$$

123. 求 $a+bi$ 之平方根

【解】　設 $\sqrt{a+bi}=x+yi$.

於此 x, y 皆爲實數.

兩邊平方　　$a+bi=x^2-y^2+2xyi$.

使實數與虛數部分各自相等則

$$x^2-y^2=a, \tag{1}$$

$$2xy=b. \tag{2}$$

$$\therefore\quad (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2$$

$$=a^2+b^2$$

由是
$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{3}$$

由 (1) 與 (3)
$$x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$$

$$y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}.$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right\}},$$

$$y=\pm\sqrt{\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right\}}.$$

因 x, y 皆爲實數 x^2+y^2 爲正數，故 (3) 式中 $\sqrt{a^2+b^2}$ 應取其正數值.

又於 (2) 式中，xy 之符號應與 b 之符號相　．故若 b 爲數，則 x 與 y 當爲同號；如 b 爲負數，則 x 與 y 當爲異號.

例　求 $-7-24\sqrt{-1}$ 之平方根.

【解】　設 $\sqrt{-7-24i}=x+yi$ 則

$$-7-24i=x^2-y^2+2xyi.$$

$$\therefore\quad x^2-y^2=-7, \tag{1}$$

$$2xy=-24. \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad (x^2+y^2)^2&=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2\\&=49+576\\&=625.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad x^2+y^2=25. \tag{3}$$

由 (1) 及 (3), 得

$$x^2=9,\quad y^2=16.$$

$$\therefore\quad x=\pm 3,\ y=\pm 4.$$

由 (2), xy 爲負數, 故

$$x=3,\ y=-4,\ 或\ x=-3,\ y=4.$$

故所求之根爲 $3-4i$ 或 $-3+4i$.

124. 1之立方根.　設 $x=\sqrt[3]{1}$, 則

$$x^3=1,\ 或\ x^3-1=0,$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

故必　　$x-1=0$, 或 $x^2+x+1=0$.

由是　　$x=1$, 或 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

實行乘法,可證明此三數值之立方皆等於1.故1之立方根有三,即

$$1, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

其中二者爲複素數.如以α,β表此二數,則α與β爲方程式

$$x^2+x+1=0$$

之根,由是其積常等於1,即

$$\alpha\beta=1.$$

$$\therefore \quad \alpha^3\beta=\alpha^2.$$

但 $$\alpha^3=1.$$

$$\therefore \quad \beta=\alpha^2.$$

同理 $$\alpha=\beta^2.$$

因此二數各爲其他數之平方,故1之三個立方根,常以$1, \omega, \omega^2$表之.

又因ω爲方程式$x^2+x+1=0$之根,故$1+\omega+\omega^2=0$.即1之三個立方根之和爲0

又 $$\omega\cdot\omega^2=\omega^3=1,$$

故1之兩虛數立方根之積爲1.

又ω^3之整數次方各等於1.即若n爲整數,則

$$\omega^{3n}=1.$$

例1. 求證

$$(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$$

【證】 在 $a+\omega b+\omega^2 c$ 與 $a+\omega^2 b+\omega c$ 之乘積中,

b^2 與 c^2 之係數為 $\omega^3=1$,

bc 之係數 $=\omega^2+\omega^4=\omega^2+\omega=-1$,

ca 與 ab 之係數 $=\omega^2+\omega=-1$.

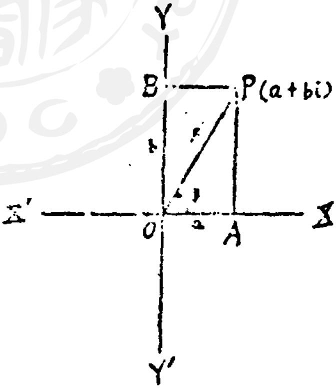
$$\therefore\quad (a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$$

例 2. 求證 $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0$.

【證】 因 $1+\omega+\omega^2=0$,

故
$$\begin{aligned}&(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3\\&=(-2\omega^2)^3-(-2\omega)^3\\&=-8+8=0.\end{aligned}$$

125. 複素數之圖表法. 在平面上,作二直線 XX', YY' 互相垂直,其交點為 O,謂之原點. XOX' 名為實數軸, YOY' 名為虛數軸. 凡實數可以實數軸上之一點表之,虛數可以虛數軸上之一點表之. 實數之正者其點在原點之右;負者其點在原點之左. 又設 bi 為一虛數,若 $b>0$,其點在原點之上方;若 $b<0$,其點在原點之下方.



設有複素數 $a+bi$ 欲於圖上表之,可於數軸上取一

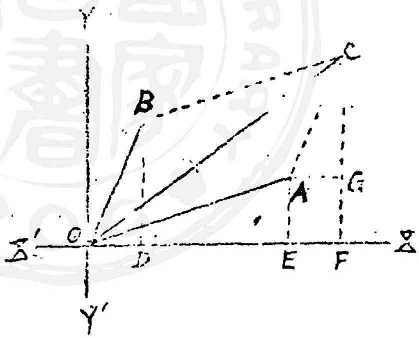
點 A 以表實數 a. 於虛數軸上取一點 B, 以表虛數 bi. 通過 A 點, 作一直線平行於 YY', 過 B 點, 作一直線平行於 XX', 此二直線相交於 P 點, 則 P 即爲代表 $a+bi$ 之點, 而 OP 之長卽爲 $a+bi$ 之絕對值, 常以 ρ 表之. $\angle XOP$ 角謂之幅角, 此平面謂之複素數平面*.

又因 $$OP=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{AP}^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

常爲正數. 故不論 $a+bi$ 複素數內之 a 或 b 爲正爲負, 其絕對值必爲 $+\sqrt{a^2+b^2}$ 也.

二複素數之和亦可以圖示之.

設 $a+bi$ 及 $c+di$ 二複素數, 則在圖形上可得 A 點以表 $a+bi$, B 點以表 $c+di$. 由是作 OA, OB 二直線. 且過 A 點, 作 AC 平行於 OB, 過 B 點, 作 BC 平行於 OA, AC 與 BC 相交於 C, 則 C 點卽爲代表 $(a+bi)+(c+di)$ 之一點, OC 卽爲



*複素數之圖表法, 自德國高斯 (Gauss) 在 1831 年發表以後, 廣爲世人所採用, 故複素數之平面多稱之爲高斯平面. 然此法之首創者實爲丹麥之 Wessel, 其公布年代爲 1797, 特未曾引起學界之注意耳. 又法人 Argand 於 1806 年亦發見此法, 故法國學者, 不稱高斯平面, 而稱 Argand 之圖.

$(a+bi)+(c+di)$ 之絕對值,即 $OC=\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$.

作 BD, AE, CF 垂直於 OX; AG 垂直於 CF; 則

$$a=OE,\ b=EA,\ c=OD,\ d=DB,$$

且
$$\triangle ODB\equiv\triangle AGC,$$

由是
$$OF=OE+EF=OE+OD=a+c.$$

故 C 為代表 $(a+c)+(b+d)i$ 之點.

126. 複素數之極坐標之表示法*

設 P 為複素數平面上之一點,代表 $a+bi$, 其絕對值為 ρ, 幅角為 θ, 則

$$a=\rho\cos\theta,\ b=\rho\sin\theta,$$

由是
$$a+bi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

是為複素數之極坐標之表示法. 設 k 為整數,則又得

$$a+bi=\rho\{\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)\}$$

(見§125之圖). 故同一複素數,其幅角有無數. 其中任意兩角相差為 2π 之整數倍.

例　以 $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ 之形式表示 $-1+\sqrt{3}i$.

【解】　於此 $\rho\cos\theta=-1$, $\rho\sin\theta=\sqrt{3}$.

$$\therefore\quad \rho=\sqrt{1+3}=2.$$

* 未習三角法者,略去本節及次節

由是 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故 $-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

求兩複素數 $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ 與 $r(\cos\psi+i\sin\psi)$ 之積,可依 § 117 得之,即

$$\rho(\cos\theta+i\cos\theta)r(\cos\psi+\sin\psi)=\rho r\{\cos(\theta+\psi)+i\sin(\theta+\psi)\}.$$

由此關係,得二定理:其一爲 § 121 之定理.其二爲兩複素數乘積之幅角,等於其兩複素數幅角之和.擴而充之,得

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\times r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\times\cdots\cdots\times r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$
$$=r_1r_2\cdots\cdots r_n\{\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)\}.$$

設 $r_1=r_2=\cdots\cdots=r_n=1$, $\theta_1=\theta_2=\cdots\cdots=\theta_n=\theta$, 則成

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \ (n \text{ 為正整數}). \qquad (1)$$

此定理稱爲棣美佛*定理.

設 $\alpha=\gamma(\cos\theta+i\sin\theta)$, $(\gamma>0)$, 則

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\gamma}(\cos\theta-i\sin\theta).$$

又設 n 爲一正整數,則由此結果而得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=(\cos\theta-i\sin\theta)^n$$
$$=\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^n=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta).$$

---

*棣母佛 (Demoivre, 1667—1754). 氏生於法而長於英,牛頓嘗謂門人曰:棣氏之學深於余,胡不問之.

故(1)對於負整數 $-n$ 亦成立.

127. 根數之擴張. 由§103,設 $a>0$, n 爲一正整數,則方程式

$$z^n=a \tag{1}$$

之正根爲 $\sqrt[n]{a}$ 或 $a^{\frac{1}{n}}$.今擴充 $a^{\frac{1}{n}}$ 之意義於下:設 a 爲一複素數,凡適合方程式(1)之 z 皆記以 $a^{\frac{1}{n}}$.由此定義,即知 $4^{\frac{1}{2}}$ 有二值;即 2 與 -2. 又若 m 爲一整數,則定 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義爲 $(a^{\frac{1}{n}})^m$.

今解方程式(1):設

$$a=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),\ z=r(\cos\phi+i\sin\phi).$$

前者爲已知數,故可假設

$$-\pi<\theta\leqq\pi. \tag{2}$$

由棣母佛定理,

$$\gamma^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

又由§120,得

$$\gamma^n=\rho,\ \cos n\phi=\cos\theta,\ \sin n\phi=\sin\theta.$$

故 $\gamma=\sqrt[n]{\rho}$, 此爲普通之根數($\geqq0$).(3)之最後兩關係成立之必要條件爲 $n\phi=\theta+2k\pi$, 其中 k 爲一整數.由是

$$\phi=\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

固定 k, 必有整數 p 與 q 適合.

$$k=np+q \text{ 而 } 0\leqq q<n.$$

故 $\phi=2p\pi+(\theta+2q\pi)/n$, 由是(1)之根如下:

$$z=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2q\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2q\pi}{n}\right),$$

$$q=0,1\cdots\cdots n-1.$$

方程式(1)之根限於此n個數. 此n個數顯然互異. 若 $a=1$, 則得1之n方根凡n個:

$$\cos\frac{2q\pi}{n}+i\sin\frac{2q\pi}{n}\ (q=0,1,\cdots\cdots n\cdots\cdots).$$

置 $W_n=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, 則1之$n$方根可書爲

$$1, W_n, W_n^2,\cdots\cdots W_n^{n-1}.$$

最後, 棣母佛定理, 可推廣之如下: 設 a 爲一有理數, 則 $(\cos\theta+i\sin\theta)^a$ 之値爲 $\cos a\theta+i\sin a\theta$.

蓋設 $a=\frac{m}{n}$, n 爲正整數, 則 $\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}$ 爲 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{n}}$ 之一値. 如擧m乘冪卽所述爲眞.

例　求 $2+2\sqrt{3}i$ 之平方根.

複素數 $2+2\sqrt{3}i$, 之絕對値等於4, 幅角爲 $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ (k爲整數), 故其平方根爲 $\pm(\sqrt{3}+i)$.

習題十八

求下列各式之積:

1. $(2\sqrt{-3}+3\sqrt{-2})(4\sqrt{-3}-5\sqrt{-2})$.

2. $(3\sqrt{-7}-5\sqrt{-2})(3\sqrt{-7}+5\sqrt{-2})$.

3. $(e^{i}+e^{-i})(e^{i}-e^{-i})$.

4. $\left(x-\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$.

化下列各式之分母爲實數:

5. $\dfrac{1}{3-\sqrt{-2}}$.

6. $\dfrac{3\sqrt{-2}+2\sqrt{-5}}{3\sqrt{-2}-2\sqrt{-5}}$.

7. $\dfrac{3+2\sqrt{-1}}{2-5\sqrt{-1}}+\dfrac{3-2\sqrt{-1}}{2+5\sqrt{-1}}$.

8. $\dfrac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}}-\dfrac{a-x\sqrt{-1}}{a+x\sqrt{-1}}$.

9. $\dfrac{(x+\sqrt{-1})^2}{x-\sqrt{-1}}-\dfrac{(x-\sqrt{-1})^2}{x+\sqrt{-1}}$.

10. $\dfrac{(a+\sqrt{-1})^3-(a-\sqrt{-1})^3}{(a+\sqrt{-1})^2-(a-\sqrt{-1})^2}$.

求下列各複素數之平方根:

11. $-5+12\sqrt{-1}$.

12. $-47+8\sqrt{-3}$.

13. $a^2-1+2a\sqrt{-1}$.

14. $4ab-2(a^2-b^2)\sqrt{-1}$.

下列各式以 $A+iB$ 之形式表之：

15. $\dfrac{3+5i}{2-3i}$.

16. $\dfrac{1+i}{1-i}$.

17. $\dfrac{(1+i)^2}{3-i}$.

18. $\dfrac{(a+bi)^2}{a-bi}-\dfrac{(a-bi)^2}{a+bi}$.

求證下列各式：

19. $(1+\omega^2)^4=\omega$.

20. $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$.

21. $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9$.

下列諸復素數，以 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)$ 之形式表之：

22. $1+i$.

23. $-\sqrt{3}+i$

24. $1-\sqrt{3}i$.

25. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$.

26. 求 1 之四個四方根.

27. 求 -1 之五個五方根.

28. 求 $\sqrt[7]{1+i}$ 之一切值.

29. 試以數學歸納法，證明 §126 之( ).

30. 證明

$$\left(x^2-2\,ax\cos\frac{\pi}{n}+a^2\right)\cdots\cdots\left(x^2-2\,ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+a^2\right)=\frac{x^{2n}-a^{2n}}{x^2-a^2}.$$

第六章 二次方程式

一 二次方程式之理論

128. 二次方程式之根. 一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (a \neq 0)$$

之兩邊,以 a 除之,得 $$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

首二項配成完全平方,得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0,$$

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left\{\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right\}^2=0,$$

或 $$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

由是 $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

如以 α, β 表此二根,則

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

129. 根之討論. 設 $b^2-4ac=0$, 則二根相等.

設 a, b, c 皆為實數,且 $b^2-4ac>0$, 則二根為不等之二實數.

若 $b^2-4ac<0$, 則二根為虛數.由是可知二次方程式根之性質,視 b^2-4ac 若何而定.故

b^2-4ac 謂之二次方程式之判別式.

例 1. 設 $x^2-6x+10=0$.

於此 $a=1,\quad b=-6,\quad c=10.$

$$\therefore\quad b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times10=-4.$$

故其根為虛數.

例 2. 設 $x^2+2(k+2)x+9k=0$

之二根相等,則 k 之值若何?

【解】
$$\{2(k+2)\}^2-4\times1\times9k=0,$$

$$4k^2+16k+16-36k=0,$$

$$k^2-5k+4=0,$$

$$(k-1)(k-4)=0.$$

$$\therefore\quad k=1,\ 或\ k=4.$$

例 3. 設 p, q, r 為有理數,

求證　$$x^2-2px+p^2-q^2+2qr-r^2=0$$

之根爲有理數.

【解】　因　$$(-2p)^2-4(p^2-q^2+2qr-r^2)=4(q^2-2qr+r^2)$$
$$=4(q-r)^2.$$

此爲完全平方數,故原方程式之根爲有理數.

130. 定理. 二次方程式之根僅有二個.

【證】　設 $ax^2+bx+c=0$ 有三個不同之根 α, β, γ, 則

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0, \quad (1)$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0, \quad (2)$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0. \quad (3)$$

由 (1) 減 (2), 得

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0,$$

即　$$(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0.$$

但由假設, $\alpha\neq\beta$, 即 $\alpha-\beta\neq0$,

故必　$$a(\alpha+\beta)+b=0. \quad (4)$$

又由 (2), (3), 得　$$a(\beta+\gamma)+b=0. \quad (5)$$

由 (4) 減 (5), 得　$$a(\alpha-\gamma)=0.$$

但 $a\neq0$, 且 $\alpha\neq\gamma$, 故欲使 $a(\alpha-\gamma)=0$ 實爲不可能之事.

由是二次方程式不能有三個不相等之根,即其根僅有二個.

131. 根與係數之關係. 設二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

之二根為 α, β, 則

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}. \tag{1}$$

$$\alpha\beta=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}$$

$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}. \tag{2}$$

〔別法〕 二次方程式

$$ax^2+bx+c=0.$$

以 a 除之,即為

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0. \tag{1}$$

若其二根為 α, β, 則

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0,$$

即

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0. \tag{2}$$

但 (1), (2) 兩方程式完全相同,故若比較其對應係數,

則
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

由是可得一結論：如二次方程式第一項之係數爲1，則其二根之和等於 x 之係數反號，二根之積等於第三項.

例　二次方程式 $6x^2+x=2$,

即
$$x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0.$$

其二根之和爲 $-\frac{1}{6}$，二根之積爲 $-\frac{1}{3}$.

132. 知方程式之根以作方程式.

設二次方程式之根爲 α, β，則此方程式必爲

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0,$$

即
$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0,$$

或
$$x^2-(\text{二根之和})\,x+(\text{二根之積})=0.$$

例 1.　設已知二根爲 $3, -2$，求作二次方程式

【解】　此方程式爲

$$x^2-(3-2)x+3\times(-2)=0,$$

即
$$x^2-x-6=0.$$

例 2.　求作二次方程式，設其二根爲

$$3x^2+8x+5=0$$

之根之三倍.

【解】 設 α, β 爲 $3x^2+8x+5=0$ 之二根,則

$$\alpha+\beta=-\frac{8}{3}, \quad \alpha\beta=\frac{5}{3}$$

故所求之方程式爲

$$x^2-(3\alpha+3\beta)x+3\alpha\cdot3\beta=0,$$

即 $$x^2+3(\alpha+\beta)x+9\alpha\beta=0,$$

$$x^2+8x+15=0.$$

例 3. 設 α, β 爲 $x^2-px+q=0$ 之二根,求 $\alpha^2+\beta^2$ 及 $\alpha^3+\beta^3$ 之值.

【解】 $$\alpha+\beta=p,$$

$$\alpha\beta=q,$$

$$\therefore \quad \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=p^2-2q.$$

又 $$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$$

$$=p(p^2-2q-q)$$

$$=p(p^2-3q).$$

133. 二次方程式之圖解. 於平面上設直角坐標軸,以記點 (x, y).

設 a, b, c 皆爲實數,則方程式

$$y=ax^2+bx+c,$$

表一曲線.此曲線與 $X'X$ 軸或有兩交點,或僅一交點,或無交點.交點之形爲 $(a, 0)$, 而 a 卽爲方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

之根,乃爲實根.僅一交點者兩根相重.無交點者無實根.故方程式之實根可用圖解得之.

134. 極大與極小. 設 y 爲 x 之一函數,將 x 之值逐漸增至 a, y 之值亦隨之而增至 m, 過 a 以後,縱令 x 之值依然增加,而 y 之值反逐漸減少.如是稱 y 在 a 處有一極大, m 爲其極大值.又若 x 逐漸增至 b, 函數 y 逐漸減少而至 l, x 自 b 增加, y 亦隨之而增加,則曰 y 在 b 處有一極小, l 爲其極小值.

例如 $$y=(x-1)^2-4, \tag{1}$$

若 x 由絕對值甚大之負數逐漸增加而至 1, 則 y 由甚大之正值逐漸減少而至 -4. 將 x 自 1 增加,則 y 亦增. x 甚大 y 亦甚大.又若

$$(x-1)^2-4=(x+1)(x-3)=0,$$

則 $y=0$. 故方程式 (1) 所表示之曲線交 $X'OX$ 軸於兩點: $(-1, 0)$ 與 $(3, 0)$.

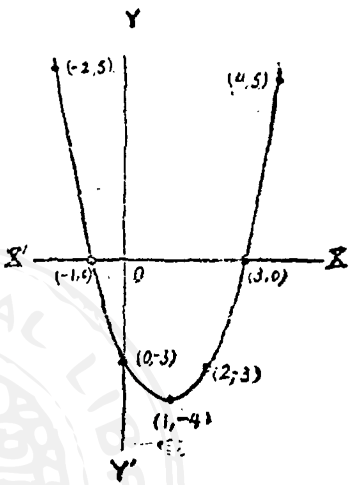
若 x 小於 -1, 則 y 爲正; x 居 -1 與 3 之間,則 y 爲負; x 大於 3, y 復爲正.

設 $x = \cdots\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots;$

則 $y = \cdots\cdots 12, 5, 0, -3, -4, -3, 0, 5, 12$

在$x=1$,y取極小值-4.然若函數爲$y=4-(x-1)^2$,則在$x=1$,y有極大值4.一般言之:

若二次三項式ax^2+bx+c之係數皆爲實數,則必有一極大或極小,茲舉例以明之.



例 1. 求$y=x^2+6x-7$之極大或極小.

【解】 $$y=x^2+6x-7=(x+3)^2-16.$$

當$x=-3$,$y=-16$.故-16爲y之極小值.

例 2. 分一數爲二部分,使其乘積爲極大.

【解】 設a爲此已知之數,x爲其一部分,則他一部分當爲$a-x$;若y爲此二部分之乘積,則

$$y=x(a-x)=ax-x^2=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2,$$

可知$x=\dfrac{a}{2}$時,y取極大之值$\dfrac{a^2}{4}$.

135. 二次三項式之符號定理 1.

實係數之二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根,若爲不相等之二實數,則 x 之值在此二根之間時,二次三項式 ax^2+bx+c 之值與 a 之符號相反;又若 x 之值不在此二根之間時,則 ax^2+bx+c 之值與 a 之符號相同.

【證】　設實數係數之二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

之二根爲不相等之實數,以 α, β 記之,且 $\alpha>\beta$,則

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$

$$=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

若 $x>\alpha$,則 $x-\alpha$ 及 $x-\beta$ 皆爲正數.

若 $x<\beta$,則 $x-\alpha$ 及 $x-\beta$ 皆爲負數.

由是,不論 $x>\alpha$ 或 $x<\beta$, $(x-\alpha)(x-\beta)$ 常爲正數,亦即 ax^2+bx+c 之值與 a 之符號相同.

但若 x 之值在 α 與 β 之間,卽若 $\alpha>x>\beta$,則 $(x-\alpha)$ 爲負,而 $(x-\beta)$ 爲正,由是 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 亦爲負數,卽 ax^2+bx+c 之值與 a 之符號相反.

136. 二次三項式之符號定理2.

設α與β相等,則

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2.$$

與x以不等於α之任何實數,$(x-\alpha)^2$常為正數,故ax^2+bx+c之值與a之符號相同.

設二次方程式$ax^2+bx+c=0$之二根為虛數,則因

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\},$$

故b^2-4ac為負,而$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$為正,由是與x以任何之實數值,$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$之值必為正數,故$ax^2+bx+c$之值與$a$之符號相同.故得定理如下:

設a,b,c皆為實數,若判別式b^2-4ac為負數,則與x以任何實數值ax^2+bx+c之值常與a之符號相同.又若$b^2-4ac=0$,則

$$a^2x^2+bax+ca\geqq 0.$$

例 $y=\frac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}$,$y$為實數時,$x$亦為實數,求實數$a$之界限.

【解】 已[illegible] $$\frac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}=y.$$

即
$$(a-5y)x^2-7x(1-y)+(5-ay)=0.$$

y 爲實數時，x 亦爲實數，又必

$$49(1-y)^2-4(a-5y)(5-ay)\geqq 0,$$

即
$$(49-20a)y^2+2(2a^2+1)y+(49-20a)\geqq 0.$$

由是 $(2a^2+1)^2-(49-20a)^2$ 必須爲負或爲零，而 $49-20a$ 則必須爲正．然

$$(2a^2+1)^2-(49-20a)^2$$
$$=(2a^2+1+49-20a)(2a^2+1-49+20a)$$
$$=2(a^2-10a+25)\times 2(a^2+10a-24)$$
$$=4(a-5)^2(a+12)(a-2).$$

故 $4(a-5)^2(a+12)(a-2)$ 必須爲負或爲零，由是 a 須在 2 與 -12 之間．若然則此式爲負，而 $49-20a$ 爲正．

若 $a=5$，或 -12，或 2，則此式爲零．然 $a=5$，則 $49-20a$ 爲負．故

$$2\geqq a\geqq -12.$$

逆之，最後之關係成立時，x 因 y 爲實數而亦爲實數．故所得之界限無須縮小．

習題十九

1. 設方程式 $x^2-15-m(2x-8)=0$ 之二根相等，問 m 之

值若何?

2. 設方程式 $x^2-2x(1+m)+(1-m)=0$ 之二根相等,求 m 之值.

3. 設 a, b, c 爲實數,求證方程式

$$(a-b+c)x^2+4(a-b)x+(a-b-c)=0$$

之根爲實數.

4. 求下方程式之根:

$$(a+c-b)x^2+2cx+(b+c-a)=0.$$

5. 設 α, β 爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根,求下列二式之值:

(i) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$.　　(ii) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$.

6. 設 α, β 爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根,求作方程式,其根爲　　$(\alpha-\beta)^2$,　　$(\alpha+\beta)^2$.

7. 設 α, β 爲 $x^2-3x+4=0$ 之根,求以 $\alpha+\beta$, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ 爲根之二次方程式.

8. 設 α, β 爲 $3x^2+5x-2=0$ 之根,求以 $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\beta}{\alpha^2}+\dfrac{\alpha}{\beta^2}$ 爲根之二次方程式.

9. 求下列各函數之極大,極小:

(i) $y=x^2-8x+3$.　　(ii) $y=1+4x-x^2$.

(iii) $y=2x^2-x+4$.　　(iv) $y=-4x^2-2x-9$.

10. 於半徑為 r 之圓內,作一面積最大之矩形,問其邊長若干?

11. 設一直角三角形之周圍為一定之長,問如何則其斜邊為最短?

12. 有繩一段,其長二十丈,今此繩圍一矩形之地,問如何則其所圍之面積為最大?

13. 於方程式 $y^2=4ax$ 上所表示之曲線,求一點使與定點 $(c,0)$ 之距離為最短.

14. 通過 $(2,3)$ 作一直線與兩軸 OX, OY 相交於 P, Q 二點.問如何則三角形 OPQ 之面積為極小?

15. 今欲印刷一書,每頁之全面積須為96方寸,天地各留空白三寸,兩邊各留二寸,問此書之長闊各如何,則其印字之面積為極大?

二　雜方程式

137. 高次方程式. 設 $A=0$ 為一方程式.若整式 A 可分解為因數,如 $A\equiv BC\cdots\cdots$,則求 $A=0$ 之根,求 $B=0$, $C=0\cdots\cdots$諸方程式之根可也.

例 1. 解 $$x^4+x^2+1=0.$$

【解】 因 $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

故 $$x^4+x^2+1=0$$

之根與 $$x^2+x+1=0$$

及 $$x^2-x+1=0$$

之根相同.解之,得

$$x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

例 2. 解 $x^4-x^3-5x^2-7x+12=0.$

【解】 分解因數,得

$$x^4-x^3-5x^2-7x+12=(x-1)(x-3)(x^2+3x+4).$$

故 $$x^4-x^3-5x^2-7x+12=0$$

之根與 $$x-1=0, \quad x-3=0$$

及 $$x^2+3x+4=0$$

三方程式之根相同.故其根爲

$$1,\ 3,\ \text{及}\ (-3\pm i\sqrt{7})/2.$$

例 3. 解 $3x^4+10x^2-8=0.$

【解】 以 x^2 爲未知數解之,得

$$x^2=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\times3\times(-8)}}{2\times3}$$

$$=\frac{2}{3} \text{ 或 } -4.$$

故 $$x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 或 } \pm 2i.$$

138. 倒數方程式. 倒數方程式以 $\frac{1}{x}$ 代 x，其方程式之根不變.此種方程式,如依 x 之降冪排列之,則其第一項之係數,與末項之係數相同;其第二項之係數,與末項前一項之係數亦相同……,總之,其自左向右與自右向左距離相等各項之係數皆各相等.又若各對係數之絕對值相等而符號相反者,亦為倒數方程式.

例如
$$2x^4+3x^3+4x^2+3x+2=0$$
與
$$x^5-2x^4+4x^3-4x^2+2x-1=0,$$
皆為倒數方程式.

四次之倒數方程式,可化為二次方程式以解之.

例 1. 解 $2x^4-3x^3+4x^2-3x+2=0.$

【解】 將係數相同各項集之,復以 x^2 除之,則原方程式變為
$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

因 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, 故此方程式又可化為
$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

解之,得
$$x+\frac{1}{x}=0,$$
$$x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}.$$

故所求之根爲 $i, -i$ 與 $\frac{3 \pm i\sqrt{7}}{4}$.

奇次之倒數方程式,有一根爲1或 -1;故由原方程式將 $x-1$ 或 $x+1$ 之因數除去之,則變爲偶數次之倒數方程式.由是,三次或五次之倒數方程式,仍可以二次方程式解之.

例 2. 解 $2x^3-3x^2-3x+2=0$.

【解】 此方程式可改書爲

$$2(x^3+1)-3(x^2+x)=0,$$

即

$$(x+1)\{2(x^2-x+1)-3x\}=0,$$

$$(x+1)(2x^2-5x+2)=0.$$

由 $x+1=0$, 得 $x=-1$.

又從 $2x^2-5x+2=0$,

得

$$x=2 \text{ 或 } \frac{1}{2}.$$

故所求之根爲 $-1, 2, \frac{1}{2}$.

例 3. 解 $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x+1=0$.

【解】 將係數相同各項集之,

$$(x^5-1)-5x(x^3-1)+9x^2(x-1)=0,$$

即

$$(x-1)(x^4-4x^3+5x^2-4x+1)=0.$$

故由 $x-1=0$, 得 $x=1$.

次以 x^2 除 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$,

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0,$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0.$$

解之,得 $$x+\frac{1}{x}=3,$$

$$x+\frac{1}{x}=1.$$

由是 $$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2},$$

$$x=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

故所求之根爲 1, $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

139. **二項方程式.** 設 n 爲正整數, $x^n\pm a=0$ 謂之二項方程式,其解已詳於 §127. 然若 $x^n\pm a$ 可分解爲一次及二次因數者,則有捷徑焉.

例 1. 解 $$x^4+1=0.$$

【解】 此方程式可改書爲

$$(x^4+2x^2+1)-2x^2=0,$$

$$(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1=0.$$

由是 $$x^2+\sqrt{2}x+1=0,$$

或
$$x^2-\sqrt{2}x+1=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}} \text{ 或 } \frac{1\pm i}{\sqrt{2}}.$$

例 2. 解 $\qquad x^5-1=0.$

【解】 因 $\quad x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$

故 $$x=1, \tag{1}$$

或 $$x^4+x^3+x^2+x+1=0. \tag{2}$$

(2) 爲倒數方程式,以 x^2 除之,得

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0,$$

即 $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

$$\therefore \quad x+\frac{1}{x}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

由是 $$x^2-\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}x+1=0.$$

解之,得 $$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-10-2\sqrt{5}}$$

或 $$x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-10+2\sqrt{5}}.$$

140 無理方程式. 方程式有含未知數之根式者,是謂無理方程式.

例如 $x+\sqrt{x+1}=17$ 爲無理方程式.

解無理方程式之常法,即將無理方程式化爲有理方程式而後解之.其所求得之數,必須代入原方程式加以驗算,合者取之,不合者捨去.蓋有理化而後之方程式,未必與原方程式完全等值也,舉例以明之.

例 1. 解 $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+11}=0.$

【解】 移項, $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=2\sqrt{x+11}.$

兩邊平方之, $x+4+x+20+2\sqrt{(x+4)(x+20)}$

$$=4(x+11).$$

簡之,得 $\sqrt{(x+4)(x+20)}=x+10.$

兩邊又自乘, $(x+4)(x+20)=(x+10)^2,$

即
$$4x=20,$$

$$\therefore \quad x=5.$$

以 $x=5$ 代入原方程式之左邊適等於 0, 然則除 5 以外尚有解乎?一審 5 之由來,即知除此以外無有他解.

例 2. 解 $\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0.$

【解】 移項, $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{5x-6}.$

兩邊自乘且簡約之,得

$$\sqrt{(2x-3)(3x-5)}=1.$$

再自乘且簡約之,

$$6x^2-19x+14=0.$$

解之, $x=2$ 或 $\frac{7}{6}$.

以此二值代入原方程式驗之,知 2 爲解,而 $\frac{7}{6}$ 則非也.

注意: $\frac{7}{6}$ 何時混入?此數實適合方程式

$$\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0.$$

其混入乃在自乘之時.

141. 應用問題.

例 1. 直角三角形之面積爲30方寸,斜邊13寸,求其二邊.

【解】 設此直角三角形之一邊爲 x 寸,則他邊爲 $\sqrt{13^2-x^2}$ 寸,由是

$$\frac{1}{2}x\sqrt{169-x^2}=30.$$

自乘又移項,得

$$x^4-169x^2+3600=0.$$

此方程式之正根爲5與12,故二邊長:一爲5寸,一爲12寸.

例 2. 有一矩形,其周長爲其對角線之 $\frac{14}{5}$ 倍,其相鄰邊之差爲 1 寸,求其面積.

【解】 設矩形之一邊爲 x 寸,他邊爲 $x+1$寸. 因周圍 $2(2x+1)$ 爲對角線 $\sqrt{x^2+(x+1)^2}$ 之 $\frac{14}{5}$ 倍,而得方程式

$$2(2x+1)=\frac{14}{5}\sqrt{x^2+(x+1)^2}.$$

自乘而簡化之，得

$$x^2+x-12=0.$$

此方程式之正根爲3，故矩形之兩邊爲3寸與4寸，其面積爲12方寸.

習題二十

解方程式1—35:

1. $4x^4-17x^2+18=0.$

2. $x^4-2x-8=0.$

3. $9x^4-32x^2-6=0.$

4. $6x^4-11x^2-35=0.$

5. $(x^2-4)(x^2-9)=7x^2.$

6. $(x^2-1)^2=2(x^2-1)+15.$

7. $px^3+x+p+1=0.$

8. $x^4+x^3+x^2+3x-6=0.$

9. $(x^2-4)(x^3+4)-4x(x^2-4)=0.$

10. $(x^2-2x)^2+6(x^2-6x+6)=63.$

11. $x^3-8x^2-8x+1=0.$

12. $x^4+x^3+2x^2+x+1=0.$

13. $x^4+3x^3+6x^2+3x+1=0.$

14. $7x^4-17x^3+17x-7=0.$

15. $2x^6-5x^5+4x^4-4x^2+5x-2=0.$

16. $x^5-11x^4+36x^3-36x^2+11x-1=0.$

17. $x^6=64.$

18. $x^6-7x^3-8=0.$

19. $(2x-1)^6=1.$

20. $(1+x^3)=(1-x)^3.$

21. $(x-2)^4-81=0.$

22. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}.$

23. $3x^2-2x+9-5\sqrt{3x^2-2x+3}=0.$

24. $4x^2-2x-1=\sqrt{2x^2-x}.$

25. $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+3}=0.$

26. $\sqrt{13+x}+\sqrt{13-x}=6.$

27. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2+3x}=0.$

28. $\sqrt{3-x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{5-2x}.$

29. $\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+1}.$

30. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=2.$

31. $\sqrt{2x+1-2\sqrt{2x+3}}=1.$

32. $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$.

33. $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=x-3$.

34. $\dfrac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x}}+3=0$.

35. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=4\sqrt{x^2-a^2}=0$.

36. 試求乘積為280,平方根相差為7之二數.

37. 有一矩形,其對角線與短邊之和為長邊之$\frac{3}{2}$,兩邊相差為7寸,求其兩邊.

38. 一直角三角形之周圍12寸,面積6方寸,求其各邊之長.

三　二次聯立方程式

142. 任意兩個二元二次方程式,消去一未知數後,即為他一未知數之四次方程式,其一般解法,非本節此時所能道及.然二次聯立方程式之具有特種形式者,亦非難解.至其實根,亦可由圖解得之,如兩方程式之圖解,有一交點,即有一組實根,有二交點,即有二組實根.

第一類. 含二未知數之兩方程式,其一為一次,一為二次者,可用代入法以消去一未知數.

例　解　$$x^2-y^2-2x-2y-4=0, \tag{1}$$

$$2x-y-7=0. \tag{2}$$

【解】　由 (2),　$$y=2x-7. \tag{3}$$

代入 (1), 得　$$3x^2-22x+39=0.$$

解之,得　$$x=\frac{13}{3} \text{ 或 } 3.$$

以 x 之值代入 (3), 得

$$y=\frac{5}{3} \text{ 或 } -1.$$

故所求之解為　$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{13}{3} \\ y=\frac{5}{3} \end{array}\right\} \text{ 或 } \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array}\right\}.$$

143. 第二類. 兩方程式均無一次項者,舉數例於

例 1.　解　$$x^2+xy=14, \tag{1}$$

$$y^2-xy=15. \tag{2}$$

【解】　以 $15\times(1)$, 以 $14\times(2)$ 相減,得

$$15(x^2+xy)-14(y^2-xy)=0,$$

$$15x^2+29xy-14y^2=0.$$

$$\therefore\quad (5x-2y)(3x+7y)=0.$$

由是　$$5x-2y=0, \tag{3}$$

或　$$3x+7y=0.$$

從 (3), 得　$$x=\frac{2}{5}y.$$

代入 (2), 得　$$y^2-\frac{2}{5}y^2=15$$

$$\therefore\quad y=\pm5,\quad y=\pm2.$$

從 (4), 得　$$x=-\frac{7}{3}y.$$

代入 (2), 得　$$y^2+\frac{7}{3}y^2=15.$$

$$\therefore\quad y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}},\quad x=\mp\frac{7}{\sqrt{2}}$$

由是　$$\left.\begin{matrix}x=2\\y=5\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=-2\\y=-5\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=-\frac{7}{\sqrt{2}}\\y=\frac{3}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=\frac{7}{\sqrt{2}}\\y=-\frac{3}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\}.$$

例 2.　解　$$2x^2-xy=56,$$
$$2xy-y^2=48.$$

【解】　以 (1) 除 (2), 得

$$\frac{y}{x}=\frac{6}{7},\quad\therefore\quad x=\frac{7}{6}y.$$

代入 (2),　$$\frac{7}{3}y^2-y^2=48,\ 即\ y^2=36.$$

$$\therefore\quad y=\pm6,\ 而\ x=\frac{7}{6}y=\pm7.$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l}x=7\\y=6\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=-7\\y=-6\end{array}\right\}.$$

144. 對稱方程式. 含有 x, y 之一組方程式,如將 x 與 y 互換而仍不變者,謂之對稱方程式.

例如下列二組 (a) 與 (b) 為對稱方程式:

$$(a)\quad \begin{cases}2x^2+2y^2+3x+3y=0,\\ x^2y^2+xy+1=0.\end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases}x^2=2x+3y,\\ y^2=2y+3x.\end{cases}$$

如 (a) 者為第一種對稱方程式,若將 x 與 y 互換,其每一方程式各自不變也.

如 (b) 者為第二種對稱方程式,若將 x 與 y 互換,則二方程式之地位亦互換矣.

例 1. 解 $\quad x+y=5, \qquad (1)$

$\qquad xy=6. \qquad (2)$

【解】 平方 (1), $\quad x^2+2xy+y^2=25. \qquad (3)$

以 $4\times(2)$, $\quad 4xy=24. \qquad (4)$

從 (3) 減去 (4), $\quad x^2-2xy+y^2=1. \qquad (5)$

故 $\quad x-y=1, \qquad (6)$

$\qquad x-y=-1. \qquad (7)$

從 (1) 與 (6), 得　　$x=3,\quad y=2.$

從 (1) 與 (7), 得　　$x=2,\quad y=3.$

例 2.　解　$2x^2+5xy+2y^2+x+y+1=0,$

$$x^2+4xy+y^2+12x+12y+10=0.$$

【解】　以 $(x+y)^2-2xy$ 代 x^2+y^2, 且集同類項,

$$2(x+y)^2+xy+(x+y)+1=0,$$

$$(x+y)^2+2xy+12(x+y)+10=0.$$

消去 xy,　$3(x+y)^2-10(x+y)-8=0.$

解之,　$x+y=4,$

或　$x+y=-\dfrac{2}{3}.$

故由 (3) 與 (6), 得　$xy=-37,$

由 (3) 與 (7), 得　$xy=-\dfrac{11}{9},$

由 (6), (8) 得　$x=2\pm\sqrt{41},\quad y=2\mp\sqrt{41},$

由 (7), (9), 得　$x=\dfrac{-1\pm2\sqrt{3}}{3},\quad y=\dfrac{-1\mp2\sqrt{3}}{3}.$

例 3.　解　$x^4+y^4=97,$

$$x+y=5.$$

【解】　設　$x=u+v,\ y=u-v,$

則　$(u+v)^4+(u-v)^4=97$

$$2u=5. \tag{4}$$

消去 u, $$16v^4+600v^2-151=0. \tag{5}$$

解之, $$v=\pm\frac{1}{2} \text{ 或 } \pm i\sqrt{151}/2. \tag{6}$$

將 (4) $u=\dfrac{5}{2}$ 及 (6) 代入,

$$x=u+v, \qquad y=u-v,$$

得 $$x, y=2, 3;\ 3, 2;\ (5\pm i\sqrt{151})/2,\ (5\mp i\sqrt{151})/2.$$

例 4. 第二種對稱方程式之例.

解 $$x^3=7x+3y, \tag{1}$$

$$y^3=7y+3x. \tag{2}$$

【解】 (1) 加 (2), $$x^3+y^3=10(x+y). \tag{3}$$

從 (1) 減 (2), $$x^3-y^3=4(x-y). \tag{4}$$

由 § 127, (3) 與下列二方程式同值.

$$x+y=0, \tag{5}$$

$$x^2-xy+y^2=10. \tag{6}$$

(4) 與下列二方程式同值.

$$x-y=0, \tag{7}$$

$$x^2+xy+y^2=4. \tag{8}$$

由 (5), (7); (5), (8); (6), (7); (6), (8); 得

$$x, y=0, 0;\ 2, -2;\ -2, 2;\ \pm\sqrt{10}, \pm\sqrt{10};$$

$$(1\pm\sqrt{13})/2,\ (1\mp\sqrt{13})/2;$$

$$(-1\pm\sqrt{13})/2,\ (-1\mp\sqrt{13})/2.$$

145. 雜例.

例 1. 解 $$x^4+x^2y^2+y^4=21, \quad (1)$$

$$x^2+xy+y^2=7. \quad (2)$$

【解】 以 (2) 除 (1), $$x^2-xy+y^2=3. \quad (3)$$

(2), (3) 相加, $$x^2+y^2=5. \quad (4)$$

(2), (3) 相減, $$xy=2. \quad (5)$$

$$\therefore \left.\begin{matrix}x=2\\ y=1\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=-2\\ y=-1\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=1\\ y=2\end{matrix}\right\},\ 或\ \left.\begin{matrix}x=-1\\ y=-2\end{matrix}\right\}.$$

例 2. 解 $$3x^2+5x-8y=36, \quad (1)$$

$$2x^2-3x-4y=3. \quad (2)$$

【解】 $(1)-2\times(2)$, $$-x^2+11x=30,$$

$$x^2-11x+30=0.$$

$$\therefore\ x=5,\ 或\ x=6.$$

代入 (2), 得 $$y=8\ 與\ y=12\frac{3}{4}.$$

例 3. 解 $$2x^2+4xy-2x-y+2=0, \quad (1)$$

$$3x^2+6xy-x+3y=0. \quad (2)$$

【解】 $3\times(1)-2\times(2)$, $$4x+9y-6=0. \quad (3)$$

由 (2), (3), 得 $\left.\begin{matrix} x=-3, & x=-2 \\ y=2, & y=\dfrac{14}{9} \end{matrix}\right\}.$

例 4. 解
$$z^2-xy-7=0, \tag{1}$$
$$x+y+z=0, \tag{2}$$
$$3x-2y+2z+2=0. \tag{3}$$

【解】 由 (2), (3),
$$x=-(4z+2)/5, \tag{4}$$
$$y=(-z+2)/5. \tag{5}$$

代入 (1) 而簡之,
$$7z^2+2z-57=0. \tag{6}$$

解之, 得 $z=-3$ 或 $\dfrac{19}{7}$.

代入 (4), (5), 得 $\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \\ z=-3 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} x=-\dfrac{18}{7} \\ y=-\dfrac{1}{7} \\ z=\dfrac{19}{7} \end{matrix}\right\}.$

例 5. 解
$$xy=6, \tag{1}$$
$$yz=12, \tag{2}$$
$$zx=8. \tag{3}$$

【解】 (1)÷(2),
$$\frac{z}{x}=2, \text{ 或 } z=2x. \tag{4}$$

以 (4) 代入 (3), $x^2=$

$\therefore\quad x=\pm 2.$

由是 $z=\pm$ [illegible], $y=\pm 3.$

即　　　$x, y, z=2, 3, 4;\ -2, -3, -4.$

146. 應用問題.

例 1.　求二數,使其平方之和爲29,平方之差爲21.

【解】　設x與y爲所求之兩數,則

$$x^2+y^2=29,\quad x^2-y^2=21.$$

解之,得　　　$x=\pm 5,\quad y=\pm 3.$

由是得四組之解:

$$\begin{cases}x=5,\\ y=3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=5,\\ y=-3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-5,\\ y=3;\end{cases}\quad \begin{cases}x=-5,\\ y=-3.\end{cases}$$

例 2.　一直立之旗竿,其上部被風吹折,竿頂着地之處離竿足八尺.修好後,又被風吹折,折處較前次折處低三尺,而其竿頂着地之處離竿足一丈六尺.求此旗竿之高.

【解】　設此旗竿之上部第一次被風吹折x尺,下部尚餘y尺,則此旗竿之高爲$(x+y)$尺,由是得方程式:

$$\begin{cases}x^2-y^2=64,\\ (x+3)^2-(y-3)^2=256.\end{cases}$$

解之,得　　　$x=17,\quad y=15.$

故此旗竿之高爲32尺.

習題二十一

解下列各組之聯立方程式:

$x=\frac{3y+5}{2}$ $63y^2+174y+87=0$

$7x^2-4x+10x-8=0$

1. $\begin{cases} 7x^2-6xy=8, \\ 2x-3y=5. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2+x+4y^2=0, \\ 3x+6y=1. \end{cases}$

$6y=4x-10$ $x=-4$

3. $\begin{cases} 3x^2-3xy-y^2-4x-8y+3=0, \\ 3x-y-8=0. \end{cases}$

$\begin{cases} x=-4 \\ y=-\frac{13}{3} \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x^2-xy-3y=0, \\ 7x-6y-4=0. \end{cases}$
5. $\begin{cases} x^2+y^2-8=0, \\ (x+1)^2=(y-1)^2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+3y=31, \\ 7x^2-2y^2=10. \end{cases}$
7. $\begin{cases} x(x+3y)=18, \\ x^2-5y^2=4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=38, \\ x^2-xy+y^2=14. \end{cases}$
9. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21(x-y), \\ xy=20. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2+y-8=0, \\ y^2+15x-46=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2+4x+3y-1=0, \\ 2x^2-6xy+y^2+8x+2y-2=0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=931, \\ x^2+xy+y^2=49. \end{cases}$
13. $\begin{cases} x+y=5, \\ xy+36=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2+y^2=200 \\ x+y=12. \end{cases}$
15. $\begin{cases} x^3+y^3=513, \\ x+y=9. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ x-y=2. \end{cases}$
17. $\begin{cases} x^5+y^5=32, \\ x+y=2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} xy+x+y+19=0, \\ x^2y+xy^2+20=0. \end{cases}$ 19. $\begin{cases} x^3=5y, \\ y^3=5x. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x+y=3, \\ y+z=2, \\ x^2-yz=19. \end{cases}$

21. 二數之和爲25,而其平方之和爲313,求此二數.

22. 二數之和加其平方數之和爲14,而其差與其平方差之和爲10,求此二數.

23. 有三數,其中任意二數之和爲餘一數之倒數,問各數幾何?

24. 有一矩形,將其長減二寸,闊增三寸,則其面積增四方寸;若兩邊平方之差爲十五方寸.問矩形之面積幾何?

25. 有一矩形,其對角線與長邊之和等於短邊之7倍,長邊比短邊多17尺,求此矩形之面積.

26. 某直角三角形斜邊長29寸,面積420方寸,求其二邊之長.

27. A, B二地相距50里,甲乙二人同時從兩地出發相向而行,經10小時而相遇.但知甲行一里之時刻比乙行一里之時刻多18分,求甲乙二人每小時所行之里數.

28. 面積240方寸之矩形,內接於半徑13寸之圓中,其

各邊之長若干?

29. A, B 二地相距21里,甲由 A 地出發,向 B 地進行.出發後20分,乙自後追之,及而返,復回 A 地,甲於此時適達 B 地.已知乙每小時行12里,求甲之速率.

第七章　比及比例

一　比

147. 定義. 設有同類二量 A 與 B, A 爲 B 之 x 倍,則 x 名爲 A 與 B 之比,以 $A:B$ 或 $\frac{A}{B}$ 記之. A 爲比之前項, B 爲比之後項.

若比之前項大於後項,則其值大於1,是曰優比;前項小於後項,其值小於1,是曰劣比;前項等於後項,其值等於1,是曰等比.

設有一比,以諸比前項之積爲前項,後項之積爲後項,則此比爲諸比之複比.

例如 $ac:bd$ 爲 $a:b$ 及 $c:d$ 之複比.

又 $a^2:b^2$ 爲 $a:b$ 之二乘比, $a^3:b^3$ 爲 $a:b$ 之三乘比, $\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 爲 $a:b$ 之二分比.

a 之逆數 $\frac{1}{a}$ 與 b 之逆數 $\frac{1}{b}$ 之比,卽 $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$, 或 a 爲 a 對於 b 之反比,或曰逆比.

148. 定理. 比之兩項以同數乘之,或以

數除之,其比不變(所乘所除之數須不爲 0,乃不待明言).

【證】 由分數定理, $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$, $(m\neq 0)$

故得 $$a:b=ma:mb.$$

同理 $$a:b=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}. \qquad (m\neq 0)$$

149. 定理. 比之兩項,各加同一之正數則其值較近於 1.

【證】 (1) 設 a, b, x 皆爲正數,且 $a>b$, 則

$$\frac{a}{b}>1, \quad \frac{a+x}{b+x}>1.$$

然 $$\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}, \quad \frac{a+x}{b+x}-1=\frac{a-b}{b+x},$$

而 $$a-b>0, \quad b<b+x,$$

故 $$\frac{a-b}{b}>\frac{a-b}{b+x},$$

即 $$\frac{a}{b}-1>\frac{a+x}{b+x}-1.$$

故 $$\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}>1.$$

即優比兩項加以同一之正數,其值減少而較近於 1.

【論】　(2)　設 a, b, x 皆爲正數,且 $a<b$, 則

$$\frac{a}{b}<1,\quad \frac{a+x}{b+x}<1.$$

然　$$1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b},\quad 1-\frac{a+x}{b+x}=\frac{b-a}{b+x},$$

而　$$b-a>0,\ b<b+x,$$

故　$$\frac{b-a}{b}>\frac{b-a}{b+x},$$

卽　$$1-\frac{a}{b}>1-\frac{a+x}{b+x}.$$

故　$$\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}<1.$$

卽劣比兩項加以同一之正數,其值增加而較近於1.

二　比　例

150. 比例. 四量所成之二比相等,則稱此四量成比例.例如 $a:b=c:d$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 是也.於此 a 與 d 爲比例之外項, b 與 c 爲比例之內項.

若比例之兩內項相同,如 $a:b=b:c$, 則 b 謂之 a, c 之比例中項.

151 定理 比例式中,兩外項之積,等於兩內項之積.

【證】 設 $$a : b = c : d,$$

則 $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

兩邊以 bd 乘之,得 $$ad = bc.$$

152. 定理. 設有三數成比例,則其第一數與第三數之比,等於第一數與第二數之二乘比.

【證】 設 a, b, c 成比例,則

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}.$$

但 $$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2},$$

$$\therefore\ a : c = a^2 : b^2.$$

153. 定理. 設 $a : b = c : d$, $e : f = g : h$, 則

$$ae : bf = cg : dh.$$

因 $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},\ \frac{e}{f} = \frac{g}{h},$$

$$\therefore\ \frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh},$$

或 $$ae:bf=cg:dh.$$

推論. 設 $a:b=c:d,\ b:x=d:y,$

則 $$a:x=c:y.$$

154. 反比定理. 二比相等,則其反比亦相等.

【證】 設 $$a:b=c:d,$$

則 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ 故\ 1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d},$$

卽 $$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},\ 或\ b:a=d:c.$$

155 更比定理. 交換比例式中之兩內項或兩外項,其比例式仍能成立.

【證】 設 $$a:b=c:d,$$

則 $$ad=bc.$$

兩邊以 dc 或 ab 除之,得

$$a:c=b:d$$

及 $$d:b=c:a,$$

卽 a 與 d 或 b 與 c 可以交換.

156. 合比定理. 相等二比之各前項與後項之和,對各後項之比亦相等.

【證】 設 $a:b=c:d$

則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 故 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$,

即 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, 或 $a+b:b=c+d:d$.

157. 分比定理 相等二比之各前項與後項之差,對各後項之比亦相等.

【證】 設 $a:b=c:d$,

則 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 故 $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$,

即 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, 或 $a-b:b=c-d:d$.

158. 定理 二比相等,則各比前後項之和與差之比亦相等.

【證】 設 $a:b=c:d$,

則由前兩節,得 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

若以後式除前式,則

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

即 $a+b:a-b=c+d:c-d$.

例 1. 若 $\frac{2ma+3nc}{6mb+9nd}=\frac{2ma-3nc}{6mb-9nd}$,

$$a:b=c:d.$$

【證】　由更比定理,得

$$\frac{2ma+3nc}{2ma-3nc}=\frac{6mb+9nd}{6mb-9nd}.$$

又由合比定理與分比定理,得

$$\frac{4ma}{6nc}=\frac{12mb}{18nd}.$$

$$\therefore\ a:b=c:d.$$

例 2.　解方程式

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{4x-1}{2}.$$

【解】　應用合比定理與分比定理,原方程式化為

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{4x+1}{4x-3},$$

$$\therefore\ \frac{x+1}{x-1}=\frac{16x^2+8x+1}{16x^2-24x+9}.$$

再用合比定理與分比定理,乃得

$$\frac{2x}{2}=\frac{32x^2-16x+10}{32x-8}.$$

由是　$$16x^2-4x=16x^2-8x+5.$$

$$\therefore\ x=\frac{5}{4}.$$

以此值代入原方程式,兩邊適等,故為所求之解.

習題二十二

1. 設 $7+x:12+x=2:3$, 求 x.

2. 設 $6x^2+6y^2=13xy$, 求 x 與 y 之比.

3. 設 $x+1:x+6$ 等於 $3:5$ 之二乘比, 求 x.

4. 設 $x:y=3:4$, 求 $7x-4y:3x+y$.

5. 設 $3x-2y=x-5y$, 求 $x:y$ 及 $x+y:x-y$.

6. 設 $a-b:k=b-c:l=c-a:m$, 且 a, b, c 各不相等, 則 $k+l+m=0$, 求證.

7. 設 $x:mz-ny=y:nx-lz=z:ly-mx$, 則 $lx+my+nz=0$, 且 $x^2+y^2+z^2=0$, 求證.

8. 設
$$\frac{x}{q+r-p}=\frac{y}{r+p-q}=\frac{z}{p+q-r},$$
求證
$$(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z=0.$$

設 $a:b=c:d$, 求證:

9. $a^2c+ac^2:b^2d+bd^2=(a+b)^3:(b+d)^3$.

10. $pa^2+qb^2:pa^2-qb^2=pc^2+qd^2:pc^2-qd^2$. ($p\neq0$, $q\neq0$)

11. $(a-b)^2:ab=(c-d)^2:cd$.

12. $a-c:b-d=\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}$.

解下列各方程式:

13. $\dfrac{2x^3-3x^2+x+1}{2x^3-3x^2-x-1}=\dfrac{3x^3-x^2+5x-13}{3x^3-x^2-5x+13}$.

14. $\dfrac{3x^4+x^2-2x-3}{3x^4-x^2+2x+3}=\dfrac{5x^4+2x^2-7x+3}{5x^4-2x^2+7x-3}$.

15. $\dfrac{(m+n)x-(a-b)}{(m-n)x-(a+b)}=\dfrac{(m+n)x+a+c}{(m-n)x+a-c}$.

16. $\dfrac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}=bx+c$.

159. 比例變化. 設二變量有一定之關係:其第一量任意兩值之比,等於第二量對應兩值之比,則曰第一量與第二量成比例變化,或曰成正比例.

例如火車以等速率進行,則其所經過之距離與時間成比例.設此火車行40里需時20分,則行30里需時15分,其距離長短之比與時間之比相同.

若變量 A 與變量 B 依比例變化,則以記號 $A\propto B$ 簡書之.

160. 定理. 若 $A\propto B$,則 $A:B$ 為一常數.

設 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4;\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4$

為 A, B 二量任意之對應值,則

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2},\quad \frac{a_1}{a_3}=\frac{b_1}{b_3},\quad \frac{a_1}{a_4}=\frac{b_1}{b_4}\cdots\cdots$$

由是 $$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2},\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_3}{b_3},\quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_4}{b_4}\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}=\cdots\cdots=\frac{a_1}{b_1}.$$

故 $$\frac{A\text{之任意值}}{B\text{之對應值}}=\text{常數},$$

即 $$\frac{A}{B}=m,\qquad (m\text{為常數})$$

或 $$A=mB.$$

例 1. 某工人所得之工資,與工作之日數成正比例,今作工 14 日得工資 7 圓,求其工作日數與工資之關係.

【解】 設工作 Y 日,可得工資 X 圓.因工資比例於工作之日數,故

$$X=mY.$$

今 $X=7$ 時, $Y=14$, 故 $7=m\times 14$, $m=\frac{1}{2}$. 故所求之關係為 $X=\frac{1}{2}Y$.

例 2. 圓之面積比例於其半徑之平方.今欲作一圓使其面積等於二定圓之面積和,則其半徑當如何?

【解】 設圓之面積為 A, 半徑為 r, 則

$$A=mr^2.$$

設二定圓之面積為 r_1 與 r_2, 則其面積之和為 $m(r_1^2+r_2^2)$. 由 $mr^2=m(r_1^2+r_2^2)$, 得 $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$.

161　反比例.　若 A 數與 B 之逆數成比例變化,則曰 A 與 B 成反比例變化,或曰成反比例,以 $A\propto\frac{1}{B}$ 表之.

例如有一工程,作工之人愈多,則所需時間愈少;工人愈少,則費時愈多,故若各工人之能力彼此相同,則時間與人數成反比例變化

由此定義及前節之定理,得下述之定理.

定理.　設二變量 x, y 成反比例變化,則其積爲一常數

例　工匠 12 人,共作 15 日,可完成一某工程.假設各工匠之能力均等,求人數與日數之關係.

【解】　設工匠 x 人,以 y 日完成此工程,則 xy 爲一常數.此常數等於 12×15.故所求之關係爲

$$xy=12\times15=180.$$

習題二十三

1. 設 $x\propto y$,若 $y=18$ 時,$x=12$;則 $y=21$ 時,x 之值若何?

2. 證明設 $x\propto y$,則 $x^n\propto y^n$.

3. 證明設 $x+y$ 比例於 $x-y$ 而變,則 x 比例於 y 而變

4. 靜止之物體因重力落下,其落下之距離比例於

其所費時間之平方.今於$6\frac{1}{2}$秒末落下414.05公尺,問在10秒末落下之距離若干?

5. 球之體積比例於其半徑之立方.今有三球,其半徑一爲3寸,一爲4寸,一爲5寸.另有一球其體積等於此三球體積之和,問其半徑若干?

6. 設$x^2 \propto y^3$.若$y=4$,則$x=3$;若$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$,則y幾何?

7. 一定量氣體之體積與絕對溫度成正比例,與壓力成反比例.今壓力爲775毫米,溫度爲533°A.,則其體積爲200立方釐米.若壓力爲778毫米,溫度爲663°A.,則其體積爲何?

8. 設y爲x之一函數.當x增加時,y亦隨之而增.問y與x成比例否?

第八章　特種數列

一　等差級數

162. 定義. 依一定方法次第排列之許多數,稱謂數列.其第 n 個數,稱爲數列之第 n 項.

數列中之各項與其前一項之差皆相等者,謂此數列成等差級數,其差謂之公差.成等差級數之數列,常略稱之曰等差級數.等差級數一名算術級數.

例如 1, 3, 5, 7, 9…… 成等差級數,其公差爲 2.

163. 第 n 項. 設等差級數之第一項爲 a,公差爲 d 則諸項爲 $a, a+d, a+2d, a+3d,$ …… 各項所含 d 之係數,恒比其所居之項之數少 1,故若第 n 項爲 l,則

$$l=a+(n-1)d.$$

由是,旣知等差級數之初項及公差,則任何項皆可求得.

例如設初項爲 8,公差爲 3,則其第十二項爲

$$l=8+(12-1)\times 3=8+33=41.$$

旣知等差級數之任意二項,則其他一切項皆可知.例如第 m 項爲 α, 第 n 項爲 β 之等差級數.

設其初項爲 a, 公差爲 d, 則

$$a+(m-1)d=\alpha,$$

$$a+(n-1)d=\beta.$$

由此二方程式,卽可决 a, d 之値,故各項全定.

例　設等差級數之第 7 項爲 15, 第 21 項爲 22, 求第 10 項.

【解】　設 a 爲初項, d 爲公差, 則 $a+6d=15$, $a+20d=22$.

解之,得　　$a=12,\ d=\frac{1}{2},$

故　　第 10 項 $=12+9\times\frac{1}{2}=16\frac{1}{2}$.

164. 等差中項. 三數成等差級數,則中間一數名爲他二數之等差中項.

例如 a, b, c 成等差級數,則 b 爲 a, c 之等差中項,由定義

$$b-a=c-b,$$

$$\therefore\quad b=\frac{1}{2}(a+c).$$

故兩數間之等差中項,等於此兩數之半和.

又於已知二項之間,可插入若干數,使其全體成等差級數.

例如已知二項爲a, b,若於其間插入n項,則共得$n+2$項之等差級數.

a爲初項,b爲末項,即第$n+2$項,由是設d爲公差,則

$$b=a+(n+2-1)d, \quad \therefore \quad d=\frac{b-a}{n+1}.$$

而所插入之數爲

$$a+\frac{b-a}{n+1},\ a+\frac{2(b-a)}{n+1},\ \cdots\cdots,\ a+\frac{n(b-a)}{n+1}.$$

例　於4與19之間,插入四數,使成等差級數.

【解】
$$4+(4+2-1)d=19.$$
$$\therefore \quad d=3.$$

故所求之四數爲7, 10, 13, 16.

165. 等差級數之和. 設a爲初項,d爲公差,n爲項數,l爲末項,S爲總和,則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-2d)+(l-d)+l.$$

若將此級數由末項逆書之,則

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a.$$

將此二式相加,則

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}=n(a+l).$$

$$S=\frac{n}{2}(a+l) \qquad \text{(ii)}$$

由(i),得

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\qquad\text{(iii)}$$

從 (i), (ii), (iii) 三公式, 任知 a, d, l, n, S 中之三數, 卽可求得其餘二數.

例 1. 求等差級數 $5\frac{1}{2}, 6\frac{3}{4}, 8, \cdots\cdots$ 至 17 項之和.

【解】 因 a 爲 $5\frac{1}{2}$, d 爲 $1\frac{1}{4}$, n 爲 17, 由公式 (iii),

$$S=\frac{17}{2}\left\{2\times\frac{11}{2}+16\times\frac{5}{4}\right\}$$

$$=\frac{17}{2}\{11+20\}=\frac{17\times31}{2}=263\frac{1}{2}.$$

例 2. 初項爲 5, 末項爲 45, 和爲 400, 求項數及公差

【解】 設 n 爲項數, 由公式 (ii),

$$400=\frac{n}{2}(5+45).$$

$$\therefore\quad n=16.$$

設 d 爲公差, 則 $\qquad 45=5+15d.$

$$\therefore\quad d=2\frac{2}{3}.$$

166. 雜例.

例 1. 設二等差級數之 n 項之和, 其比爲 $7n+1:4n+27$ 求其第 11 項之比.

【解】 設初項及公差各爲 a_1, d_1, a_2, d_2, 則

$$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2}=\frac{7n+1}{4n+27}.$$

今求 $\frac{a_1+10d_1}{a_2+10d_2}$ 之值，設 $n=21$，則

$$\frac{2a_1+20d_1}{2a_2+20d_2}=\frac{148}{111}=\frac{4}{3}.$$

故所求之比為 $4:3$.

例 2.　設諸等差級數之初項為 $1, 2, 3, 4\cdots\cdots$，公差為 $1, 3, 5, 7, \cdots\cdots$，其各 n 項之和為 $S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots$

求
$$S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_p.$$

【解】
$$S_1=\frac{n}{2}\{2+(n-1)\}=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2=\frac{n}{2}\{4+(n-1)3\}=\frac{n(3n+1)}{2},$$

$$S_3=\frac{n}{2}\{6+(n-1)5\}=\frac{n(5n+1)}{2}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_p=\frac{n}{2}\{2p+(n-1)(2p-1)\}=\frac{n}{2}\{(2p-1)n+1\};$$

故所求總和

$$\begin{aligned}
&S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_p\\
&=\frac{n}{2}\{(n+1)+(3n+1)+\cdots\cdots+(\overline{2p-1}n+1)\}\\
&=\frac{n}{2}\{n(1+3+5+\cdots\cdots+\overline{2p-1})+p\}
\end{aligned}$$

$$=\frac{n}{2}(np^2+p)=\frac{np}{2}(np+1).$$

習題二十四

1. 初項爲3,公差爲2,求等差級數之第10項.

2. 求$3+6+9+\cdots\cdots$至20項之和.

3. 求$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{7}{12}+\cdots\cdots$至19項之和.

4. 求$a-3b, 2a-5b, 3a-7b\cdots\cdots$至40項之和.

5. 等差級數之初項爲1,公差爲4,總和爲190,求項數.

6. 在$\frac{1}{4}$與$-9\frac{3}{4}$之間,插入19個數,使成等差級數.

7. 在$-35x$與$3x$之間,插入18個數,使成等差級數.

8. 等差級數之第5項爲11,第9項爲7,求第十四項.

9. 等差級數之初項爲5,公差爲3,問第幾項之值爲320?

10. 等差級數之前5項之和爲-5,第6項爲-13,求公差.

11. 第n項爲$4n+1$,求等差級數前列十項之和

二 等比級數

167. 定義. 數列中各項與其前一項之比皆相等

者,謂此數列成等比級數.而此比謂之公比.等比級數又名幾何級數.

例如 (a) 2, 4, 8, 16……

(b) 1, 3, 9, 27……

皆成等比級數. (a) 之公比為 2, (b) 之公比為 3.

168. 第 n 項. 設等比級數之初項為 a, 公比為 r, 則各項順次為 $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots$.

各項所含公比 r 之指數,常比其所居之項數少 1. 故若第 n 項為 l, 則 $$l=ar^{n-1}.$$ (i

例如設等比級數之初項為 3, 公比為 2, 則第 6 項為

$$3\times 2^5=3\times 32=96.$$

169 等比中項. 三數成等比級數,則中間一數,名為餘二數之等比中項.

設 a, G, b 成等比級數,則

$$\frac{b}{G}=\frac{G}{a}.$$

由是 $$G^2=ab.$$

$$\therefore\quad G=\sqrt{ab}.$$

二數之間可插入若干項,使成等比級數.設於 a, b 二數之間,插入 n 個項,則連此 a, b 二項,共為 $n+2$ 項,而 b

爲其第$n+2$項.如r爲公比,則

$$b=ar^{n+1}.$$

$$\therefore\quad r^{n+1}=\frac{b}{a}.$$

$$\therefore\quad r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.\qquad\text{(ii)}$$

例　求於160與5之間,插入4項成等比級數.

【解】　設r爲公比,則$5=$第6項$=160r^5$.

$$\therefore\quad r^5=\frac{5}{160}=\frac{1}{32}.$$

$$\therefore\quad r=\frac{1}{2}.$$

故所求之四項爲80,40,20,10.

170. 等比級數之和.　設a爲初項,r爲公比$(r\neq1)$,n爲項數,S爲總和,則

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}.$$

兩邊各以r乘之,則

$$rS=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^n.$$

由後式減前式,

$$rS-S=ar^n-a,$$

即

$$(r-1)S=a(r^n-1).$$

$$\therefore\quad S=\frac{a(r^n-1)}{r-1},\qquad\text{(iii)}$$

故
$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.\tag{iv}$$

注意：若 $r>1$，則用公式 (ii)；

若 $r<1$，則用公式 (iv).

又因 $ar^{n-1}=l$，故公式 (iii) 亦可書爲

$$S=\frac{rl-a}{r-1}.\tag{v}$$

例　求 $\frac{2}{3}$，-1，$\frac{3}{2}$……至前七項之和.

【解】　於此，公比爲 $-\frac{3}{2}$，由 (iv)

$$S=\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^7\right\}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{\frac{2}{3}\left\{1+\frac{2187}{128}\right\}}{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2315}{128}\times\frac{2}{5}=\frac{463}{96}.$$

171. 討論. 由前節公式，

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

若 $|r|<1$，則 n 逐漸增大時，r^n 之絕對值逐漸減小．故若 n 之值增至甚大時，$|r^n|$ 可減至小於任何小之值.

由是若 $|r|<1$，將 n 增大，則 $\frac{ar^n}{1-r}$ 之絕對值可小於任何小之值，以 0 爲其極限．即若 $|r|<1$，則

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

S_∞ 乃 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 之略號*.

例　求 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 至無窮項之和.

於此 $r=\frac{1}{2}$, 故　　$S_\infty=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$

172. 循環小數之值. 循環小數可變爲分數,在算術中已詳論之.茲以等比級數之法則,變循環小數爲分數,其法如下例:

例　求 $0.3\dot{1}\dot{2}$ 之值.

【解】　$0.3\dot{1}\dot{2}=0.3121212\cdots\cdots$

$$=\frac{3}{10}+\frac{12}{10^3}+\frac{12}{10^5}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{12}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\cdots\cdots\right).$$

然　$$1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{100}{99},$$

故　$$0.3\dot{1}\dot{2}=\frac{3}{10}+\frac{12}{1000}\times\frac{100}{99}$$

* 極限:設 x_n 爲變數, l 爲一常數,若將 n 增大, x_n-l 之絕對值可小至不可名言,則曰 l 爲 x_n 之極限,常記爲　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=l.$

參見 §§ 100—102

$$=\frac{3}{10}+\frac{12}{990}=\frac{309}{990}.$$

173. 雜例. 求數列

$$a,\ (a+d)r,\ (a+2d)r^2,\ (a+3d)r^3,\ \cdots\cdots$$

前列 n 項之和;於此各項爲一等差級數與一等比級數各對應項之積.

【解】 設 S 爲此級數前列 n 項之和,則

$$S=a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}d)r^{n-1},$$

$$rS=ar+(a+d)r^2+\cdots\cdots+(a+\overline{n-2}d)r^{n-1}+(a+\overline{n-1}d)r^n.$$

由減法,

$$S(1-r)=a+(dr+dr^2+\cdots\cdots+dr^{n-1})-(a+\overline{n-1}d)r^n$$

$$=a+\frac{dr(1-r^{n-1})}{1-r}-(a+\overline{n-1}d)r^n$$

$$\therefore\quad S=\frac{a}{1-r}+\frac{dr(1-r^{n-1})}{(1-r)^2}-\frac{(a+\overline{n-1}d)r^n}{1-r}.$$

例 1. 設 $|x|<1$, 求 $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$ 之和.

【解】 設 $S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$, 則

$$xS=x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots.$$

$$\therefore\quad S(1-x)=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$$S=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

例 2. 求 $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\cdots\cdots$ 至 n 項之和.

【解】 設 $S=1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-2}{5^{n-1}}$, 則

$$\frac{1}{5}S=\frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{7}{5^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-5}{5^{n-1}}+\frac{3n-2}{5^n}$$

兩式相減,得

$$\frac{4}{5}S=1+\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\cdots\cdots+\frac{3}{5^{n-1}}\right)-\frac{3n-2}{5^n}$$

$$=1+\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)-\frac{3n-2}{5^n}=\frac{7}{4}-\frac{12n+7}{4\times5^n}$$

$$\therefore\quad S=\frac{35}{16}-\frac{12n+7}{16\cdot5^{n-1}}$$

習題二十五

1. 初項 2, 公比 3, 求第 10 項.
2. 初項 10, 公比 $\frac{1}{2}$, 求第 6 項.
3. 初項為 4, 第六項為 $\frac{1}{8}$, 求公比.
4. 初項為 1, 公比 2, 項數 8, 求總和.
5. 於 32 與 126 之間, 插入三項, 使成等比級數.
6. 於 8 與 -1 之間, 插入二項, 使成等比級數.
7. 求 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\cdots\cdots$ 至七項之和.

8. 求 $-2+2\frac{1}{2}-3\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 至六項之和.

9. 求 $1+5+25+\cdots\cdots$ 至 n 項之和.

10. 求 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\cdots$ 至無窮項之和.

11. 求 $a+2a^2+3a^3+4a^4+\cdots\cdots$ 至 n 項之和.

12. 求 $1+\frac{2}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{6}{5^3}+\cdots\cdots$ 至 n 項之和.

13 求 $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots\cdots$ 至 n 項之和.

14 求 $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$ 至無窮項之和,設 $|x|<1$

14. 求 0.456 之值.

三 調和級數

174. 定義. 取數列中任意連續三項,其第一項減第二項之差,與第二項減第三項之差,若其比等於第一項比第三項,則稱此數列成調和級數.

設 $a, b, c, d, \cdots\cdots$ 成調和級數

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c},\ \frac{b-c}{c-d}=\frac{b}{d},\ \cdots\cdots,$$

故
$$c(a-b)=a(b-c).$$

兩邊以 abc 除之,則得

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}.$$

由是 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ 成等差級數,即:

調和級數各項之倒數成等差級數.反之,等差級數各項之倒數成調和級數.

後半段之理,可從上述之證明逆推之.

75. 調和中項.

設 H 為 a, b 之調和中項,則 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{H}$, $\frac{1}{b}$ 成等差級數;

$$\therefore \quad \frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H},$$

即

$$\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b};$$

$$\therefore \quad H=\frac{2ab}{a+b}.$$

故二數之調和中項,等於其和除其積之二倍.

例 於 7 與 $\frac{1}{6}$ 之間,插入 40 個項,使成調和級數.

【解】 於此,6 為一等差級數之第 42 項,其初項為 $\frac{1}{7}$;設 d 為其公差,則

$$6=\frac{1}{7}+41d, \qquad \therefore \quad d=\frac{1}{7}.$$

故所求之數為 $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, ……$\frac{41}{7}$ 之倒數,即

$$3\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ \cdots\cdots\ \frac{7}{44}.$$

176. 等差,等比及調和中項之關係.

設 A 爲 a, b 之等差中項, G 爲等比中項, H 爲調和中項,則

$$A=\frac{a+b}{2}, \tag{1}$$

$$G=\sqrt{ab} \tag{2}$$

$$H=\frac{2ab}{a+b}. \tag{3}$$

故
$$A\cdot H=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2, \tag{4}$$

即 G 爲 A, H 之等比中項.

又
$$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2}}\right)^2$$

如 a 與 b 爲相異之兩正數,則此值恆爲正數,故 $A>G$.

又因
$$G^2=A\cdot H,$$

故
$$G>H.$$

由是
$$A>G>H. \tag{5}$$

177. 餘論. (i) 於等差級數之各項,加一相同之數,或減一相同之數,則其所得結果,仍爲一等差級數,且其公差不變.

(ii) 於等差級數之各項,以相同數乘之或除之,則

其所得結果,仍爲等差級數,而其公差則已變更.

(iii) 於等比級數之各項,以相同數乘之或除之,則其所得結果,仍爲等比級數,且其公比不變.

(iv) 設 $a, b, c, d\cdots\cdots$ 成等比級數,則此諸數成連比例.

即
$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots=\frac{1}{r}.$$

其逆亦眞.

例 設 a^2, b^2, c^2 成等差級數,求證 $b+c, c+a, a+b$ 成調和級數.

【證】 於 a^2, b^2, c^2 各項加以 $ab+ac+bc$,則得

$$(a+b)(a+c),\ (b+c)(b+a),\ (c+a)(c+b),$$

亦爲一等差級數.

各項以 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 除之,得等差級數

$$\frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a},\ \frac{1}{a+b}.$$

故 $b+c, c+a, a+b$ 成調和級數.

習題二十六

1. 於 5 與 11 之間,插入二項,使成調和級數.
2. 於 $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{2}{13}$ 之間,插入四項,使成調和級數.
3. 設 a, b, c 成調和級數,求證

$$a : a-b = a+c : a-c.$$

4. 設 a, b, c 成調和級數，求證

$$\frac{a}{b+c-a}, \frac{b}{c+a-b}, \frac{c}{a+b-c},$$

亦為調和級數.

5. 設 a, b, c, d 成調和級數，求證

$$3(b-a)(d-c) = (c-b)(d-a).$$

6. 設 a, b, c 成調和級數，求證

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c}.$$

7. 設調和級數之第 m 項為 n，第 n 項為 m，求證第 $(m+n)$ 項為 $\frac{mn}{m+n}$.

8. 設 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 成調和級數，求證

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots\cdots + a_{n-1}a_n = (n-1)a_1a_n.$$

四　自然數之數列

178. 自然數： 整數 1, 2, 3, 4, 5, ⋯⋯ 謂之自然數，其各乘方之和，如可下法求之：

(i) **自然數之和.** 最初 n 個自然數之和為

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

(ii)　自然數平方之和.　最初 n 個自然數平方之和爲　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$.

因
$$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1,$$
$$(n-1)^3-(n-2)^3=3(n-1)^2-3(n-1)+1,$$
$$(n-2)^3-(n-3)^3=3(n-2)^2-3(n-2)+1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$3^3-2^3=3\cdot3^2-3\cdot3+1,$$
$$2^3-1^3=3\cdot2^2-3\cdot2+1,$$
$$1^3-0^3=3\cdot1^2-3\cdot1+1.$$

相加,得 $n^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)-3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$,

即
$$3(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)=n^3-n+\frac{3n(n+1)}{2}.$$

由是
$$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(iii)　自然數立方之和.　設 $S=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$, 將下列 n 個等式相加

$$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1,$$
$$(n-1)^4-(n-2)^4=4(n-1)^3-6(n-1)^2+4(n-1)-1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2^4-1^4=4\cdot2^3-6\cdot2^2+4\cdot2-1,$$
$$1^4-0^4=4\cdot1^3-6\cdot1^2+4\cdot1-1,$$

得　$n^4=4S-6(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)+4(1+2+\cdots\cdots+n)-n,$

即　$4S=n^4+n+6(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)-4(1+2+\cdots\cdots+n)$

$$=n^4+n+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$

$$=n(n+1)(n^2-n+1+2n+1-2)=n^2(n+1)^2.$$

$$\therefore\quad S=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

由是,可知最初 n 個自然數立方之和,爲最初 n 個自然數之和之平方.

例 1.　求 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots$ 至 n 項之和.

【解】　第 n 項 $=n(n+1)=n^2+n,$

第 $n-1$ 項 $=(n-1)n=(n-1)^2+(n-1),$

…………………………………………

第 3 項 $=3(3+1)=3^2+3,$

第 2 項 $=2(2+1)=2^2+2,$

第 1 項 $=1(1+1)=1^2+1.$

故此 n 項之和等於

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{2n+1}{3}+1\right\}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

例 2.　某數列之第 n 項爲 $2^{n+1}+8n^3-6n^2$,求其最初 n 項之和.

【解】 所求之和等於

$$(2^2+2^3+\cdots+2^{n+1})+8(1^3+2^3+\cdots+n^3)-6(1^2+2^2+\cdots n^2)$$

$$=\frac{2^2(2^n-1)}{2-1}+\frac{8n^2(n+1)^2}{4}-\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=4(2^n-1)+n(n+1)\{2n(n+1)-(2n+1)\}$$

$$=4(2^n-1)+n(n+1)(2n^2-1).$$

179. 堆垛. 物體如彈丸等壘成錐體等狀,謂之堆垛.其底面為正三角形者,曰三角垛;為正方形者,曰正方垛;為矩形者,曰矩形垛,茲分述之如次:

(i) **三角垛** 設底之每邊為 n 個,則其底層之數為
$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1,$$
即
$$\frac{n(n+1)}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2}(n^2+n).$$

如以 $n-1, n-2, \cdots\cdots 3, 2, 1$ 代入 n,則即得其第二層,第三層,……以至其頂各層之數.設 S 表其總和,則

$$S=\frac{1}{2}\{(1+2+\cdots\cdots+n)+(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)\}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

(ii) **正方垛** 設底層為正方形,每邊有 n 個,以上各層順次每邊為 $n-1, n-2, n-3, \cdots\cdots$ 最高一層僅有一

個，故其總數為

$$n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots\cdots+1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(iii)　矩形垛　設底層為一矩形，長邊 m 個，短邊 n 個；以上各層順次每邊各減一個，頂層之短邊僅有一個，而長邊則為 $m-(n-1)$ 個，由是

$$\begin{aligned}
\text{頂層} &= m-n+1\ \text{個},\\
\text{第二層} &= 2(m-n+2)\ \text{個},\\
\text{第三層} &= 3(m-n+3)\ \text{個},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\text{底層} &= n(m-n+n)\ \text{個}.
\end{aligned}$$

故總和

$$\begin{aligned}
S &= (m-n+1)+2(m-n+2)+3(m-n+3)\\
&\qquad +\cdots\cdots+n(m-n+n)\\
&= (m-n)(1+2+3+\cdots\cdots+n)\\
&\qquad +(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)\\
&= \frac{(m-n)n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= \frac{n(n+1)}{6}\{3(m-n)+2n+1\}\\
&= \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

(iv) 不完全之矩形垛. 設一矩形垛,爲不完全之錐體,其頂層二邊之數爲 a 與 b, 則

頂層 $=ab$,

第二層 $=(a+1)(b+1)=ab+(a+b)+1^2$,

第三層 $=(a+2)(b+2)=ab+2(a+b)+2^2$,

....

底層 $=(a+\overline{n-1})(b+\overline{n-1})=ab+(n-1)(a+b)+(n-1)^2$.

$$\therefore\quad S=abn+\frac{n(n-1)(a+b)}{2}+\frac{(n-1)n(2\cdot\overline{n-1}+1)}{6}$$

$$=\frac{n}{6}\{6ab+3(n-1)(c+b)+(n-1)(2n-1)\}.$$

習題二十七

求和 (1—8):

1. $1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots$ 至 n 項.

2. $1^3+3^3+5^3+\cdots\cdots$ 至 n 項.

3. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots\cdots$ 至 n 項.

4. $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots\cdots$ 至 n 項.

5. $1\cdot3\cdot5+2\cdot4\cdot6+3\cdot5\cdot7+\cdots\cdots$ 至 n 項.

6. $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots$ 至 n 項.

7. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots$ 至 n 項.

8. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots$ 至 n 項.

9. 三角垛底層每邊爲16個,求總數.

10. 正方垛底層每邊爲12個,求總數.

11. 矩形垛底層之長邊爲20個,短邊爲12個,求總數.

12. 不完全矩形垛底層之長邊爲15個,短邊爲12個,層數爲8,求總數.

第九章 順列及組合

一 順列

180. 定義 從 n 個不同之物中,取其 r 個,依各種順序排列之,是謂一順列,順列之種數,謂之順列數,常以 ${}_nP_r$ 表之.

例如有 a, b, c, d 四個文字,取其二個而排列之,則為

$$ab,\ ac,\ ad,\ ba,\ bc,\ bd,$$

$$ca,\ cb,\ cd,\ da,\ db,\ dc.$$

其排列方法有十二種,即

$${}_4P_2=12.$$

181. 定理 設有一事,其完成之法有 m 種,另一事完成之法有 n 種,則完成此兩事之法,共有 $m\times n$ 種.

例如自山麓至山頂之道路有三,則上山之路有三法;至山頂以後,不能由原路下山,則下山之道路僅有二.今若連上山下山而計之,則其方法共有 $3\times2=6$ 種

推論. 一般言之,完成第一事之法有 m 種,完成第二事之法有 n 種,完成第三事之法有 p 種,……則完成此諸事之法共有 $m\times n\times p\cdots\cdots$ 種.

182. 求 ${}_nP_r$ 之公式. 設有 n 個不同之文字,每次取其一個,則其順列數爲 n,即 ${}_nP_1=n.$

若每次取其二個而排列之,則其第一位排列之法有 n 種,因 n 個文字,各可居於第一位也;若第一位既被某一文字佔定,則其餘 $(n-1)$ 個文字,各可居於第二位,故由 n 個文字內每次取其二個而排列之,其順列數爲 $n(n-1)$,即

$${}_nP_2=n(n-1).$$

若每次取其三個而排列之,則其第一第二兩位既被任何二個文字佔定後,其餘 $(n-2)$ 個文字各可居於第三位,但其首二位之順列數爲 $n(n-1)$,故由 n 個文字每次取其三個而排列之,其順列數爲 $n(n-1)(n-2)$,即

$${}_nP_3=n(n-1)(n-2).$$

由是推之,若自 n 個文字每次取其 r 個而排列之,其順列數爲

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

若盡取其 n 個而排列之,則 (i) 式內之 $r=n$,故

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1. \qquad \text{(ii)}$$

n 個自然數之連乘積,即

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1,$$

謂之 n 之階乘,以 $\underline{|n}$ 或 $n!$ 表之.

由是 (i), (ii) 兩公式,可改書之為

$$_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!},$$

$$_nP_n=n!.$$

注意: r 與 n 必須皆為正整數,且 r 不能大於

183. 求 $_nP_r$ 之別法. 於 n 個不同之物中,每次取其 r 個之順列數為 $_nP_r$,每次取 $r-1$ 個之順列數為 $_nP_{r-1}$.若於此 $_nP_{r-1}$ 之每一排列中,加入其餘 $n-r+1$ 個之一而排列之,即為自 n 個不同之物中每次取其 r 個之順列,而此順列總數為 $_nP_{r-1}\times(n-r+1)$,即

$$_nP_r={}_nP_{r-1}\times(n-r+1).$$

如以 $r-1$ 代入此公式中之 r,則

$$_nP_{r-1}={}_nP_{r-2}\times(n-r+2).$$

同理, $$_nP_{r-2}={}_nP_{r-3}\times(n-r+3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$_nP_3={}_nP_2\times(n-2),$$

$$_nP_2={}_nP_1\times(n-1),$$

$$_nP_1=n.$$

兩邊相乘,且消去共有之因數,則

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

例 1.　從 1,2,3,……9 九個數字中,每次取其不同之三數字,可作若干三位數?

【解】　$_9P_3=9(9-1)(9-2)=9\times8\times7=504.$

答:　可得 504 個三位數.

例 2.　學生五人,排成一列,其排列之法有幾種?

【解】　$_5P_5=5\times4\times3\times2\times1=120.$

答:　其排列之法有 120 種.

184. **環狀順列.**　設有 n 個不同之文字,環繞圓周而排列之,則其排列種數為 $(n-1)!$.

因若固定某一文字之地位,而其餘 $n-1$ 個文字任意排列之,則其順列之數為 $(n-1)!$,即

$$\frac{_nP_n}{n}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}{n}=(n-1)!.$$

又若從 n 個不同之文字中,每次取其 r 個作環狀順列,則其順列之數為

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r}$$

故八人環一圓桌而坐,則其順列之數為

$$7!=5040.$$

例 從九人中選出六人作環狀順列,其列法有幾?

【解】 $$\frac{{}_9P_6}{6}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{6}=10080.$$

答: 共有10080種.

185. 重複順列. 從n個不同之文字中,每次取r個而排列之,若各文字皆可重複,則其順列之數爲

因各文字既可重複排列,則第一位之列法有n種,第二位之列法亦有n種,循此以至r位,其順列總數爲

$$n\cdot n\cdot n\cdots\cdots\text{至 } r \text{ 個因數}=n^r.$$

例 以九個有效數字作三位數,可得幾個?

【解】 $$9^3=729.$$

答: 可得729個.

186. 同物之順列. 設n個文字中含有若干相同之文字,求其每次悉取n個文字之順列數.

設n個文字內,有p個a, q個b, r個c, ……等,令每次悉取n個之順列數爲P.今若於其每次排列中,變其p個a爲p個不同之文字,則此p個之排列方法當有$p!$種.然此時排列總數當爲$P\times p!$.又若於$P\times p!$個排列中,令q個b變爲q個不同之文字,則其順列總數當爲$P\times p!\times q!$.同理,若r個c以及其他各種相同之文字悉變爲不同之文

字，則其順列總數爲　$P\times p!q!r!\cdots\cdots$

此時 n 個文字若皆變爲不同之文字，而由此 n 個不同之文字盡取其數而排列之，其順列數爲 ${}_nP_n=n!$。

$$\therefore\quad P\times p!q!r!\cdots\cdots=n!$$

卽

$$P=\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}.$$

例　排列 *success* 一字之字母，其順列數若干？

【解】　s 有 3 個，c 有 2 個，u 及 e 各只一個，字母總數爲 7.

$$\therefore\quad \frac{7!}{3!2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=450.$$

習題二十八

1.　求 ${}_7P_4$，${}_{10}P_5$，${}_8P_8$。

2.　求證 ${}_{10}P_4={}_7P_7$ 及 ${}_{16}P_3=2\cdot{}_8P_4$。

3.　設 ${}_nP_5=12\times{}_nP_3$，求 n 之值。

4　設 ${}_{2n}P_3=2\times{}_nP_4$，求 n 之值。

5.　求 *fancies* 之順列數：

(1)　首末各有一子音；

(2)　母音常在偶數位。

6.　用 0, 1, 2, …… 9 十個數字，作四位數，每個數字不能重複，可得若干數？

7. 10人圍坐一圓桌，其席次之變化若何？

8. 用n個各色不同之項珠，可串成$\frac{(n-1)!}{2}$種不同之項圈，試證之。

9. 用0, 1, 2, …… 9十個數字，作三位數，每個數字如可重複，可得若干數？

10. 求*mississippi*, *independence*各文字之順列數。

二 組合

187. 定義. 從n個不同之物中，每次取出r個爲一組，各組之物不論其排列之次序若何，但各組之間，至少須有一個爲不同者，是爲由n物中每次取r個之組合。其組合方法之種數，謂之組合數，以${}_nC_r$表之。

例如由a, b, c, d四個文字中，每次取其兩個，其組合之法有六種，列之如下：

$$ab, ac, ad, bc, bd, cd,$$

即
$$ {}_4C_2=6.$$

188. ${}_nC_r$之公式. 設由n個不同之物中，每次取其r個之組合數爲${}_nC_r$，若將此各組之物悉行排列之，則各組之順列數爲$r!$，由是${}_nC_r$組之順列總數爲${}_nC_r\times r!$。但此順列總數等於從n個不同之物中每次取其r個之順列

數,故
$$ {}_nC_r\times r!={}_nP_r. $$
$$ \therefore\quad {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!} $$
$$ =\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}. \qquad \text{(i)} $$

注意: 若 $r=n$, 則
$$ {}_nC_n=\frac{n!}{(n-n)!n!}=\frac{1}{0!}. $$

但 ${}_nC_n=1$, 故 $0!=1$.

$0!$ 本為無意義之記號,然如上述,則不可不視之為 1, 以便於一般法則之成立.

例　從 12 本不同之書籍中,每次取出 5 本: (1) 若有一書常須在內; (2) 若有一書常須在外,則其組合之法,各有若干種?

(1) 若有一書每組皆須在內,則祇能於其餘之 11 本書中取其 4 本為組合,故其組合之數為
$$ {}_{11}C_4=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=330. $$

(2) 若有一書每組皆須在外,乃由其餘 11 本每次取 5 本為組合,故其組合之數為
$$ {}_{11}C_5=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=462. $$

189. 求 $_nC_r$ 之別法. 設 a, b, c, d …… 爲 n 個不同之文字,由此 n 個文字中每次取其 r 個之組合數爲 $_nC_r$.

先從 n 個文字內取去 a, 則由其餘 $n-1$ 個文字中取其 $r-1$ 個之組合數爲 $_{n-1}C_{r-1}$. 故於此各組中復將 a 插入之,則含 a 之組數爲 $_{n-1}C_{r-1}$. 同理,含 b 之組數亦爲 $_{n-1}C_{r-1}$. 推之, n 個文字莫不皆然,且其每組有 r 個不同之文字.

但於此所當注意者,由此所成之組合,每組必重複至 r 次.例如 $r=3$, 則 abc 三字所成之組合,必一見於含 a 之各組中,二見於含 b 之各組中,三見於含 c 之各組中,故

$$_nC_r = {_{n-1}C_{r-1}} \times \frac{n}{r}.$$

若以 $n-1$ 代 n, $r-1$ 代 r, 則

$$_{n-1}C_{r-1} = {_{n-2}C_{r-2}} \times \frac{n-1}{r-1}.$$

同理,
$$_{n-2}C_{r-2} = {_{n-3}C_{r-3}} \times \frac{n-2}{r-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$_{n-r+2}C_2 = {_{n-r+1}C_1} \times \frac{n-r+2}{2},$$

$$_{n-r+1}C_1 = n-r+1.$$

兩邊各自相乘,且消去其公因數,得

$$_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots1}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

190. 定理. 由n個不同之物中,每次取r之組合數,恆等於每次取$n-r$個之組合數.

因於n個不同之物中,每次取出r個,則每次所餘爲$n-r$個.故取r個之組合數與取$n-r$個之組合數相同.

$$\therefore\quad {}_nC_r={}_nC_{n-r}.$$

又依前節公式,易知　${}_nC_{n-r}={}_nC_r.$

例　從14人中選出11人,其法有幾?

【解】　$${}_{14}C_{11}={}_{14}C_3=\frac{14\cdot13\cdot12}{1\cdot2\cdot3}=364.$$

191. 定理. 從$n+1$個不同之物中每次取其r個之組合數,等於從n個物中每次取r個及$r-1$個兩種組合數之和.

即　$${}_{n+1}C_r={}_nC_r+{}_nC_{r-1}.$$

【證】　$${}_nC_r+{}_nC_{r-1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$=\frac{n!(n-r+1)+n!r}{r!(n-r+1)!}=\frac{n!(n-r+1+r)}{r!(n-r+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}={}_{n+1}C_r.$$

192. 重複組合. 設由4個數字1,2,3,4,每次取其

3個，如所取之數字可以重複，則其組合方法有幾種？

所取數字既可重複，則對於某一特別數字，重複取其三次，二次，一次，或竟不取，均無不可。

例如111, 112, 124爲所取之三組，今若於此各組中之各位數字，順次加0, 1, 2，則得123, 124, 136，此爲從六個數字1, 2, 3, 4, 5, 6每次取其三個所得組合中之三組。

從1, 2, 3, 4四個數字內，如將111, 112, 124……之類悉行取出，列成一完全之表，惟令各組中在左邊之數字不大於右邊之數字。於是將各位之數，依次以0, 1, 2加之，則所得之組合，與由$4+(3-1)$即6個數字1, 2, 3, 4, 5, 6中每次取其三個，且不相重複所作之組合數相同。但由6個數字每次取其三個之組合數爲${}_6C_3$；故由4個數字每次取3個，如所取者可以重複，其組合數亦爲${}_6C_3$。

此推想可推而廣之，得結果如下：由n個不同之物中，如可重複取其r個之組合數，等於從$n+r-1$個不同之物中每次取r個之組合數，即

$$ {}_{n+r-1}C_r \text{ 或 } \frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)}{r!}. $$

例　設有骰子四粒，可有幾種擲法？

【解】　每一骰子有六面，面上記有1, 2, 3, 4, 5, 6各點，

擲時必有一面向上.四粒骰子同時擲之,每次必有四面向上;且所記各點,每次可以重複見之,故所求擲法,共有

$$ {}_{6+4-1}C_4=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=126 \text{ 種.} $$

193 C 之最大值. n 個不同之物中,每次取出幾個時,其組合數為最大?換言之,$n+1$ 個之數 ${}_nC_0$, ${}_nC_1$, ${}_nC_2$, ${}_nC_n$ 中何者為最大?今解決之如下:

因 $$ {}_nC_r={}_nC_{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}, $$

故若 $$ n-r+1\gtreqless r,\ \text{則}\ {}_nC_r\gtreqless{}_nC_{r-1}. $$

又 $$ n-r+1\gtreqless r,\ \text{則}\ n+1\gtreqless 2r, $$

即 $$ \frac{n+1}{2}\gtreqless r. $$

故若 $$ r<\frac{n+1}{2},\ \text{則}\ {}_nC_r>{}_nC $$ $n\ C_{r-1}$

若 $$ r=\frac{n+1}{2},\ \text{則}\ {}_nC_r={}_nC_{r-1}; $$

若 $$ r>\frac{n+1}{2},\ \text{則}\ {}_nC_r<{}_nC_{r-1}. $$

然 r 必須為正整數,故若

(i) n 為偶數,則 C_r 以 $r=\frac{n}{2}$ 時為最大

(ii) n 為奇數,則 C_r 以 $r=\frac{n+1}{2}$ 與 $r=\frac{n-1}{2}$

時爲最大

習題二十九

1. 求 ${}_{18}C_{15}$, ${}_{12}C_{5}$, ${}_{25}C_{20}$ 之值.

2. 設 ${}_{n}C_{8}={}_{n}C_{7}$, 求 n 之值.

3. 設 ${}_{n}C_{6}={}_{n}C_{12}$, 求 ${}_{n}C_{16}$.

4. 設 ${}_{20}C_{r}={}_{20}C_{r-10}$, 求 r 之值.

5. 設 ${}_{n}C_{4}=210$, 求 n 之值.

6. 在一平面上有15點,其間無有三點在一直線上者,連此諸點,可作若干三角形?

7. 從10人中選出三人:(1)如有一人常須在內,(2)如此人常須在外,則其選法各有若干種?

8. 從母音 a, e, i, o, u 及子音 b, c, d, f, g 內取三個子音,二個母音,可拼成若干文字?

9. 平面上有 n 點,若每三點不同在一直線上,則可作若干直線?

10. n 邊凸多邊形可作若干對角線?

11. 在空間內有十二點,每四點不在同一平面上,則可決定若干平面?

12. 在一平面上有 n 直線,而此諸線皆不相平行,且

三線不相交於一點,則其交點共有幾何?

13. 六粒骰子,可以擲出幾種變化?

14. 有五元,一元,五角,十分,五分,一分之貨幣各一個,問其中能得不同之價若干種?

第十章　二項式定理及多項式定理

194. 二項式之展開.

實行乘法,

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)&\\=x^4+(a+b+c+d)x^3&+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2\\&+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd\end{aligned}$$

....

由此等結果,可得下列之定則:

(1) 右邊之項數,比左邊之因數之個數多1;

(2) 第一項 x 之指數,等於因數之個數,以下各項依次遞減一次;

(3) 第一項之係數爲1;

第二項之係數,爲各因數第二項之和;

第三項之係數,爲各因數之第二項每次取其二個相

乘所得諸積之和；

第四項之係數,爲各因數之第二項每次取其三個相乘所得諸積之和；

以下依此類推,最後一項爲各因數第二項之相乘積.

一般言之,設 n 爲正整數,則 n 個一次二項式相乘之積爲

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots\cdots(x+a_n)$$
$$=x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+c_3x^{n-3}+\cdots\cdots+c_n,$$

於此,

$$c_1=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n,$$
$$c_2=a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n,$$
$$c_3=a_1a_2a_3+a_1a_3a_4+\cdots\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_n=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n;$$

c_1 有 n 項；c_2 有 ${}_nC_2$ 項,即由 n 個不同之數每次取其二個相乘諸積之和；c_3 有 ${}_nC_3$ 項,即由 n 個不同之數,每次取其三個相乘諸積之和……c_n 爲 n 個數之連乘積.

若 $$a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=a_n=a,$$

則 $$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots\cdots(x+a_n)=(x+a)^n;$$

而 $$c_1=a+a+a+\cdots\cdots+a={}_nC_1\times a=na,$$
$$c_2=a^2+a^2+a^2+\cdots\cdots+a^2={}_nC_2\times a^2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2$$

$$c_3 = a^3 + a^3 + a^3 + \cdots\cdots + a^3 = {}_nC_3 \times a^3$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n = a\cdot a\cdot a\cdots\cdots a = a^n;$$

$$\therefore \quad (x+a)^n = x^n + {}_nC_1 a x^{n-1} + {}_nC_2 a^2 x^{n-2} + \cdots\cdots + a^n,$$

或

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2x^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{n-3} + \cdots\cdots + a^n,$$

此公式名爲二項定理.右邊名爲 $(x+a)^n$ 之展開式.

上述公式,如以 $-a$ 代 $+a$,則

$$(x-a)^n = a^n + n(-a)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(-a)^2x^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(-a)^3x^{n-3} + \cdots\cdots + (-a)^n$$

$$= x^n - nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2x^{n-2}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{n-3} + \cdots\cdots + (-1)^n a^n.$$

由是可知 $(x+a)^n$ 與 $(x-a)^n$ 之展開式各項之絕對值相同,惟 $(x-a)^n$ 之展開式內各項符號正負相間,而其末項之爲正爲負,則視 n 爲偶數或奇數而定.

例 1. 求 $(x+y)^6$ 之展開式.

【解】 $$(x+y)^6=x^6+6x^5y+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}x^4y^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}x^3y^3+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^2y^4+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}xy^5+y^6$$

$$=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6.$$

例 2. 求 $(2x-y^3)^6$ 之展開式.

【解】 原式等於:

$$(2x)^6-6(2x)^5y^3+15(2x)^4(y^3)^2-20(2x)^3(y^3)^3+15(2x)^2(y^3)^4-6(2x)(y^3)^5+(y^3)^6$$

$$=64x^6-192x^5y^3+240x^4y^6-160x^3y^9+60x^2y^{12}-12xy^{15}+y^{18}.$$

195. 公項. 於 $(x+a)^n$ 之展開式中第二項之係數為 ${}_nC_1$, 第三項之係數為 ${}_nC_2$, 第四項之係數為 ${}_nC_3$. 循此以往, 可知第 $r+1$ 項之係數為 ${}_nC_r$; 而 x 與 a 之指數之和為 n. 故第 $r+1$ 項為 ${}_nC_ra^rx^{n-r}$, 即

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}a^rx^{n-r}$$

是為展開式之公項.

例 求 $(3-a)^{15}$ 之第十四項.

【解】 所求之項 $={}_{15}C_{13}(3)^2(-a)^{13}={}_{15}C_2\times(-9a^{13})$

$$=-945a^{13}.$$

196. 簡式. 二項定理最簡單之形式爲$(1+x)^n$之展開式,卽

$$(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n.$$

此公式用處頗廣,任何二項定理,皆可由此求得之.

例 1. 求$(x+y)^n$之展開式.

【解】 $(x+y)^n=\left\{x\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\right\}^n=x^n\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^n$

$$=x^n\left\{1+n\cdot\frac{y}{x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{y}{x}\right)^n\right\}$$

$$=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}y^2+\cdots\cdots+y^n.$$

例 2. 求$(x^2-2x)^{10}$之展開式中x^{16}之係數.

【解】 因 $(x^2-2x)^{10}=x^{20}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{10}$

故欲求x^{16}之係數,祇須求$\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{10}$展開式中$\dfrac{1}{x^4}$之係數.

由是 所求之係數$={}_{10}C_4(-2)^4$

$$=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\times16=3360.$$

197. 用歸納法以證明二項定理.

上述二項定理,又可述之如次:設n爲任意之正整數,求證

$$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1x^{n-1}a+{}_nC_2x^{n-2}a^2+\cdots\cdots+{}_nC_rx^{n-r}a^r+\cdots\cdots+a^n.$$

假定 $n=m$ 時二項定理爲眞,則

$$(x+a)^{m+1}=(x^m+{}_mC_1x^{m-1}a+{}_mC_2x^{m-2}a^2+\cdots\cdots+a^m)(x+a)$$

$$=x^{m+1}+(1+{}_mC_1)x^m a+({}_mC_1+{}_mC_2)x^{m-1}a^2$$

$$+\cdots\cdots+({}_mC_{r-1}+{}_mC_r)x^{m-r+1}a^r+\cdots\cdots+a^{m+1}.$$

然

$$1+{}_mC_1={}_{m+1}C_1,$$

$${}_mC_1+{}_mC_2={}_{m+1}C_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}_mC_{r-1}+{}_mC_r={}_{m+1}C_r,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故

$$(x+a)^{m+1}=x^{m+1}+{}_{m+1}C_1x^m a+{}_{m+1}C_2x^{m-1}a^2$$

$$+\cdots\cdots+{}_{m+1}C_rx^{m-r+1}a^r+\cdots\cdots+a^{m+1}$$

此式與 $(x+a)^{m+1}$ 之展開式形式全同,故假定 $n=m$ 時二項定理爲眞,則 $n=m+1$ 時二項定理亦眞.

因 $n=1$ 時,此定理成立,故 $n=2$ 時亦必成立. $n=2$ 時既成立, $n=3$ 時亦成立. $n=3$ 時既成立,則 $n=4$ 時亦成立.由是繼續進行,知無論 n 之值若何,此定理常成立也

198. 求 $(x+a)^n$ 展開式諸項中絕對值之最大者. 設 $x>0$, $a>0$. 因

$$(x+a)^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n,$$

故求 $(x+a)^n$ 展開式中之最大項,祇須求 $\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ 展開式中之最大項即可.

$\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ 展開式中之第 $r+1$ 項為

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}\left(\frac{a}{x}\right)^r,$$

其第 r 項為 $$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}\left(\frac{a}{x}\right)^{r-1},$$

故 $$\frac{\text{第 } r+1 \text{ 項}}{\text{第 } r \text{ 項}}=\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{a}{x}=\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}.$$

由是,若

$$\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}\gtreqless 1,$$

則 $$\text{第 } r+1 \text{ 項} \gtreqless \text{第 } r \text{ 項}.$$

即若 $$\frac{n+1}{r}\gtreqless\frac{x}{a}+1 \quad \text{或} \quad \frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}\gtreqless r,$$

則 $$\text{第 } r+1 \text{ 項} \lesseqgtr \text{第 } r \text{ 項}.$$

若第 $r+1$ 項為最大項,則必

$$\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}\geqq r>\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}-1.$$

故若 $\dfrac{n+1}{\frac{x}{a}+}$ 為整數,以 p 表之,則

$$\text{第 } p+1 \text{ 項} = \text{第 } p \text{ 項}.$$

此時所求之最大項有兩項,即第 $p+1$ 項及第 p 項是也.

若 $\dfrac{n+1}{\dfrac{x}{a}+1}$ 非為整數,而其整數部分為 q,則所求之最大項為第 $r+1$ 項,

茲所謂最大項,指絕對值而言,與符號無關.故 $(x-a)^n$ 展開式之最大項與 $(x+a)^n$ 之最大項相同.

例 1. 設 $x=\dfrac{1}{4}$,求 $(1+x)^{20}$ 展開式中之最大項.

【解】 因 $$\frac{n+1}{\dfrac{x}{a}+1}=\frac{20+1}{4+1}=4\frac{1}{5},$$

由是知其第五項為最大.

例 2. 設 $x=\dfrac{1}{2}$,求 $(2x-3)^{35}$ 展開式中之最大項.

【解】 因 $$(2x-3)^{35}=(2x)^{35}\left(1-\frac{3}{2x}\right)^{35},$$

$$\frac{n+1}{\dfrac{x}{a}+1}=\frac{35+1}{\dfrac{1}{3}+1}=27;$$

故最大項為第 27,第 28 兩項.

199 係數之關係.

今討論展開式

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+\cdots+{}_nC_{n-2}x^{n-2}+{}_nC_{n-1}x^{n-1}+{}_nC_nx^n$$

中係數間之關係如次:

(1) 展開式中與初項末項距離相等之兩項,其係數相等 因 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$.

(2) n為偶數時,展開式中第 $\frac{n}{2}+1$ 項取最大係數.

n為奇數時,則第 $\frac{n+1}{2}+1$ 項與第 $\frac{n-1}{2}+1$ 項兩項係數為最大

(3) 展開式各項係數之和等於 2^n.

於 (i) 式中,設 $x=1$,則得

$$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n.$$

由是可知從 n 個不同之物中,每次取其一個,二個,三個,…… 以至 n 個各種組合數之總和,等於 2^n-1.

(4) 展開式奇數項係數之和,等於偶數項係數之和.

於 (i) 式中,設 $x=-1$,則

$$0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-{}_nC_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n,$$

$$\therefore\quad {}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots\cdots=2^{n-1}.$$

(5) 展開式各項係數平方之和等於 $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

因 $${}_nC_r={}_nC_{n-r},$$

故 $$(1+x)^n={}_nC_0+\cdots\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n,$$

或 $$(1+x)^n={}_nC_n+\cdots\cdots+{}_nC_{n-r}x^r+\cdots\cdots+{}_nC_0x^n$$

兩邊各自相乘,則左邊爲 $(1+x)^{2n}$, 而右邊 x^n 之係數爲

$${}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2+{}_nC_3{}^2+\cdots\cdots+{}_nC_n{}^2.$$

然 $(1+x)^{2n}$ 之展開式中, x^n 之係數爲 $\dfrac{(2n)!}{n!n!}$, 故

$${}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2+\cdots\cdots+{}_nC_n{}^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

(6) 設 n 爲奇數,則展開式各奇數項係數平方之和,等於各偶數項係數正方之和,若 n 爲偶數,則兩和相差 $(-1)^{n/2}\dfrac{n!}{[(n/2)!]^2}$.

因 $$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n,$$

$$(1-x)^n={}_nC_n-{}_nC_{n-1}x+{}_nC_{n-2}x^2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_0x^n.$$

兩邊各自相乘,右邊 x^n 之係數爲

$$(-1)^n\{{}_nC_0{}^2-{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n{}^2\};$$

左邊等於 $(1-x^2)^n$, 其 x^n 之係數, 如 n 爲奇數,則爲 0, 如 n 爲偶數,則爲 $(-1)^{n/2}\dfrac{n!}{[(n/2)!]^2}$.

卽 n 爲奇數,

$${}_nC_0{}^2-{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2-\cdots\cdots-{}_nC_n{}^2=0.$$

若 n 爲偶數,

$$ {}_nC_0^2 - {}_nC_1^2 + {}_nC_2^2 - \cdots\cdots + {}_nC_n^2 = (-1)^{n/2}\frac{n!}{[(n/2)!]^2}. $$

例　求$C_0+2C_1+3C_2+4C_3+\cdots\cdots+(n+1)C_n$之值,其中$C_r$爲${}_nC_r$之略寫.

【解】　$C_0+2C_1+3C_2+4C_3+\cdots\cdots+(n+1)C_n$

$$=(C_0+C_1+C_2+\cdots\cdots+C_n)$$

$$+(C_1+2C_2+3C_3+\cdots\cdots+nC_n)$$

$$=2^n+n\left\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}+\cdots\cdots+1\right\}$$

$$=2^n+n(1+1)^{n-1}=2^n+n2^{n-1}.$$

習題三十

展開下列各式:

1. $(x+2)^6$.　　2. $(x-3)^7$.

3. $(1-2y)^5$.　　4. $(2x-3y)^4$.

5. $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{10}$.　　6. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$.

7. 求$(2x-1)^{20}$之第13項.

8. 求$\left(1-\frac{x}{3}\right)^{18}$之第12項.

9. 求$\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^9$之第6項.

10. 求$(x+\sqrt{2})^4+(x-\sqrt{2})^4$之值.

11. 求$(\sqrt{3}+1)^5-(\sqrt{3}-1)^5$之值.

12. 求 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{15}$ 展開式中 x^{18} 之係數.

13. 求 $(ax^3-bx)^9$ 展開式中 x^{12} 之係數.

求下列各展開式中之最大項:

14. $x=4, y=3$; $(x+y)^9$. 15. $x=9, y=4$; $(2x-3y)^{23}$.

16. $x=\frac{5}{2}$; $(3+2x)^{15}$.

17. 求證 $(1+x)^{2n}$ 展開式中項之係數,等於 $(1+x)^{2n-1}$ 展開式兩中項係數之和.

18. 求證 $(1+x)^{2n}$ 展開式之中項爲

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{n!}2^nx^n.$$

19. 用二項定理求 $(99)^4$, $(101)^4$ 及 $(999)^3$.

設 $C_0, C_1, C_2, \cdots\cdots C_n$ 爲 $(1+x)^n$ 展開式之係數,求證下列各恆等式:

20. $C_1+2C_2+3C_3+\cdots\cdots+nC_n=n\cdot2^{n-1}$.

21. $C_0+\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{C_n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

22. $\frac{C_1}{C_0}+\frac{2C_2}{C_1}+\frac{3C_3}{C_2}+\cdots\cdots+\frac{nC_n}{C_{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}$.

23. $(C_0+C_1)(C_1+C_2)\cdots\cdots(C_{n-1}+C_n)=\frac{C_1C_2\cdots\cdots C_n(n+1)^n}{n!}$.

24. $C_1^2+2C_2^2+3C_3^2+\cdots\cdots+nC_n^2=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}$.

25. $C_0C_1+C_1C_2+C_2C_3+\cdots\cdots+C_{n-1}C_n=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$.

用數學歸納法證明下列各恆等式:

26. $C_1-\dfrac{C_2}{2}+\dfrac{C_3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{C_n}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}$

27. $n!=(n+1)^n-C_1n^n+C_2(n-1)^n-C_3(n-2)^n+\cdots\cdots$

$$+(-1)^rC_r(n-r+1)^n+\cdots\cdots+(-1)$$

28. $\dfrac{C_0}{x}-\dfrac{C_1}{x+1}+\dfrac{C_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{C_n}{x+n}$

$$=\frac{n!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}$$

200. 多項式定理.

設 n 為正整數,則

$$(a+b+\cdots\cdots+k)^n=\sum\frac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\kappa!}a^\alpha b^\beta\cdots\cdots k^\kappa;$$

於此, $\alpha,\beta,\cdots\cdots\kappa$ 各值,可自 $0,1,2,\cdots\cdots n$ 取之,但須 $\alpha+\beta+\cdots\cdots+\kappa=n$,而 Σ 表示 $\dfrac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\kappa!}a^\alpha b^\beta\cdots\cdots k^\kappa$ 諸項之和.

因 $(a+b+\cdots\cdots+k)^n$

$$=(a+b+\cdots\cdots+k)(a+b+\cdots\cdots+k)\cdots\cdots$$ 至 n 個因數

由乘法,知此乘積之每一項,在未集同類項以前,其形式係由每一括弧內取一文字相乘.

但由每一括弧內,所取之文字為 $a,b\cdots\cdots k$ 之任意一個.將此等乘積列為一完全之表,此表中各數其形式皆為

$b^{\beta}\cdots\cdots k^{\kappa}$，但 $\alpha+\beta+\cdots\cdots+\kappa=n$. 如 $\alpha,\beta,\cdots\cdots\kappa$ 表 $0,1,2,\cdots\cdots n$ 任何一組特別之值，惟其和為 n，則其相當之乘積有 α 個因數為 a，有 β 個因數為 b，……有 κ 個因數為 k，而 n 個文字內有 α 個 a，β 個 b，…… 每次取其 n 個之順列數為 $\frac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\kappa!}$，此數即表中 $a^{\alpha}b^{\beta}\cdots\cdots k^{\kappa}$ 之個數也．故表中各數之和為

$$\sum\frac{n!}{\alpha!\beta!\cdots\kappa!}a^{\alpha}b^{\beta}\cdots\cdots k^{\kappa}.$$

例 1.　展開 $(a+b+c+d+e)^4$.

【解】　$(a+b+c+d+e)^4$ 展開式各項有五種形狀，即 $abcd, a^2bc, a^2b^2, a^3b, a^4$，其係數各為

$$\frac{4!}{1!1!1!1!}=24,\ \frac{4!}{2!1!1!}=12,\ \frac{4!}{2!2!}=6,\ \frac{4!}{3!1!}=4,\ \frac{4!}{4!}=1.$$

故集合各項，得

$$(a+b+c+d+e)^4=\Sigma a^4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12\Sigma a^2bc+24\Sigma abcd,$$

Σa^4 表示 $a^4+b^4+c^4+d^4+e^4$，餘仿此．

例 2.　求 $(2+3x+4x^2)^8$ 展開式內 x^5 之係數．

【解】　此展開式每項之一般形狀為

$$\frac{8!}{\alpha!\beta!\gamma!}2^{\alpha}3^{\beta}4^{\gamma}x^{\beta+2\gamma}.$$

於此　　$\alpha+\beta+\gamma=8.$

而 $$\beta+2\gamma=5. \tag{ii}$$

則(i),(ii)之正整數之解爲

$$\begin{cases}\gamma=0,\\ \beta=5,\\ \alpha=3;\end{cases}\quad \begin{cases}\gamma=1,\\ \beta=3,\\ \alpha=4;\end{cases}\quad \begin{cases}\gamma=2,\\ \beta=1,\\ \alpha=5.\end{cases}$$

故所求之係數爲

$$\frac{8!}{3!5!}2^3\cdot 3^5+\frac{8!}{4!3!}2^4\cdot 3^3\cdot 4+\frac{8!}{5!2!}2^5\cdot 3\cdot 4^2=850,752.$$

習題三十一

1. 求 $(a+b+c+d)^3$ 之展開式.
2. 求 $(1+x+x^2+x^3)^{10}$ 展開式中 x^6 之係數.
3. 求 $(1-x+3x^2)^9$ 展開式中 x^7 之係數.

第十一章 對數

一 對數及對數表之用法

201. 定義. 若 $a^x=N$ 而 $a>1$, 則曰 x 爲以 a 作底數時真數 N 之對數,常記之爲 $\quad x=\log_a N.$

例如 $\quad 2^6=64,\quad$ 則 $\quad \log_2 64=6;$

$3^4=81,\quad$ 則 $\quad \log_3 81=4;$

$4^2=16,\quad$ 則 $\quad \log_4 16=2;$

$2^4=16,\quad$ 則 $\quad \log_2 16=4.$

202. 對數之基本定理.

(i) 底數之對數常等於1.

因 $a^1=a$, 故 $\log_a a=1.$

(ii) 1之對數常爲0.

因 $a^0=1$, 故 $\log_a 1=0.$

(iii) 諸數乘積之對數,等於各因數之對數之和(底數相同).

設以a爲底數時，M，N之對數爲x，y，則

$$x=\log_a M, \qquad y=\log_a N.$$

$$\therefore \quad M=a^x, \qquad N=a^y.$$

$$M\times N=a^x\times a^y=a^{x+y},$$

$$\therefore \quad \log_a (M\cdot N)=x+y=\log_a M+\log_a N.$$

同理　$\log_a (M\cdot N\cdot P)=\log_a M+\log_a N+\log_a P.$

注意：　$\log_a M+\log_a N$爲$\log_a (M\cdot N)$，非爲$\log_a (M+N)$，學者切勿誤解.

例　已知$\log_{10}2=0.30103$，$\log_{10}3=0.47712$，求$\log_{10}6$.

【解】
$$\begin{aligned}\log_{10}6&=\log_{10}(2\times 3)\\&=\log_{10}2+\log_{10}3\\&=0.30103+0.47712\\&=0.77815.\end{aligned}$$

(iv)　分數之對數等於分子之對數減分母之對數.

【證】　設$\dfrac{M}{N}$爲一分數；$x=\log_a M$，$y=\log_a N$；則

$$M=a^x,\ N=a^y.$$

故
$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},$$

而
$$\log_a \frac{M}{N}=x-y=\log_a M-\log_a N.$$

注意：(1) $\log M-\log N \neq \log(M-N)$,

(2) $\log\frac{M}{N} \neq \frac{\log M}{\log N}$,

(3) $\frac{\log M}{\log N} \neq \log M-\log N$.

例 1
$$\log\frac{7x}{3y}=\log(7x)-\log(3y)$$
$$=\log 7+\log x-\log 3-\log y.$$

例 2. 已知 $\log_{10}2=0.30103$, 求 $\log_{10}5$.

【解】
$$\log_{10}5=\log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)$$
$$=\log_{10}10-\log_{10}2$$
$$=1-0.30103$$
$$=0.69897.$$

推論
$$\log\frac{1}{M}=\log 1-\log M$$
$$=0-\log M$$
$$=-\log M.$$

故某數倒數之對數等於此數之對數,而變其符號,是為此數之餘對數.某數 N 之餘對數,常記爲 $\operatorname{colog} N$, 即

$$\operatorname{colog} N=\log\frac{1}{N}$$
$$=-\log N.$$

(v) 某數乘冪之對數,等於其數之對數以冪指數乘之.

【證】 設 $x=\log_a M$, 則

$$M=a^x.$$

$$\therefore \quad M^n=a^{nx},$$

$$\log_a M^n=nx$$

$$=n\log_a M.$$

例 已知 $\log_{10}2=0.30103$, 求 $\log_{10}8$.

【解】

$$\log_{10}8=\log_{10}(2^3)$$

$$=3\log_{10}2$$

$$=3\times 0.30103$$

$$=0.90309.$$

注意: $$n\log M \neq \log nM,$$

又 $$\log M^n \neq (\log M)^n.$$

(vi) 某數某次根之對數,等於其數之對數以根指數除之.

【證】 於 $$\log M^n=n\log M$$

式中,設 $$n=\frac{q}{p},$$

則 $$\log M^{\frac{q}{p}}=\frac{q}{p}\log M.$$

$$\log\sqrt[p]{M^q}=\frac{q}{p}\log M.$$

若 $$q=1,$$

則 $$\log\sqrt[p]{M}=\frac{1}{p}\log M.$$

例 1. $$\log_2\sqrt{8}=\frac{1}{2}\log_2 2^3$$

$$=\frac{1}{2}\times 3\log_2 2=\frac{3}{2}.$$

例 2. $$\log\frac{6\sqrt[3]{x^4}}{5a^2}=\log 6+\log\sqrt[3]{x^4}-\log 5-\log a^2$$

$$=\log 6+\frac{4}{3}\log x-\log 5-2\log a.$$

203 底數之變換. 設以 a 爲底數之任何眞數對數爲已知,玆欲求其以 b 爲底數之對數.

設 N 爲眞數, b 爲底數, y 爲其對數,則

$$y=\log_b N, \text{由是 } b^y=N,$$

$$\therefore\ \log_a(b^y)=\log_a N,$$

$$y\log_a b=\log_a N.$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{\log_a b}\times\log_a N$$

$$\log_b N=\frac{1}{\log_a b}\times\log_a N; \qquad (1)$$

由底數爲a之對數變爲底數爲b之對數,以$\frac{1}{\log_a b}$乘之得.於此,$\frac{1}{\log_a b}$爲與N無關係之數,謂之模數

推論. 於公式(1),若令$N=a$,則

$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}\times\log_a a=\frac{1}{\log_a b}.$$

$$\therefore\quad \log_b a\times\log_a b=1.$$

204. 常用對數. 對數之最重要者有二種,一爲自然對數,一爲常用對數.

以e爲底數之對數,謂之自然對數,首創者爲納白爾*亦稱爲納白爾對數,於理論數學上多用之**.

以10爲底數之對數,謂之常用對數,首創者爲白理格***實用計算上常用之.

常用對數,其底數10常略而不記.

例如$\log 2$即爲$\log_{10}2$.以後言常用對數,常略稱之曰對

* 納白爾 (Napier, 1550-1617), 英國之數學家.

** $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots=2.7182818285\cdots\cdots$; $\log_{10}e=0.4342944819\cdots\cdots$.

*** 白理格 (Briggs, 1556-1631), 英國之數學家.

正整數之對數依次列成之表曰對數表.

205. 指標及假數. 一數 N 之對數,爲由整數部分 I 與小數部分 f 兩者合成,即 $\log N=I+f$. 若 f 爲負數,書之爲 $\log N=(I-1)+(1-f)$. 於是 $1-f$ 爲正數.此後凡言對數之小數部分,皆指正數而言. **對數之整數部分曰指標,小數部分曰假數.**

指標可由觀察以決之,假數則由對數表中查得之.定指標之法如次:

因
$$\begin{aligned}10^0&=1, &\therefore\ \log 1&=0;\\10^1&=10, &\therefore\ \log 10&=1;\\10^2&=100, &\therefore\ \log 100&=2;\\10^3&=1000, &\therefore\ \log 1000&=3;\\10^4&=10000, &\therefore\ \log 10000&=4;\end{aligned}$$
....

由此可知,大於 1 而小於 10 之數,其指標爲 0; 大於 10 而小於 100 之數,其指標爲 1; 又三位數之對數,其指標爲 2; 四位數之對數,其指標爲 3; 推之, n 位數之對數,其指標爲 $n-1$.

真數大於 1, 其指標常比其整數部分之位數少 1.

又因 $10^{-1}=\dfrac{1}{10}=0.1$, $\therefore\ \log 0.1=-1$;

$$10^{-2}=\frac{1}{100}=0.01,\quad \therefore\quad \log 0.01=-2;$$

$$10^{-3}=\frac{1}{1000}=0.001,\quad \therefore\quad \log 0.001=-3;$$

....

故真數小於1,其指標爲負數,其絕對值等於小數點右方(至有效數字爲止)0之個數加1.

又指標爲負數時,常將負號記於指標之上.

例如234之指標爲2.

而0.002之指標爲$\bar{3}$.

206. 定理. 凡真數之數字排列相同,則不論其小數點之位置若何,其對數之假數必常相同.

設n爲正整數,因

$$\log 10^n=n,$$

$$\therefore\quad \log(M\times 10^n)=\log M+\log 10^n$$

$$=\log M+n,$$

$$\log(M\div 10^n)=\log M-n,$$

真數M, $M\times 10^n$, $M\div 10^n$,其對數相差爲整數,故其假數相

同.

例
$$\log 1.32 = 0.12385,$$
$$\log 13.2 = \log(1.32\times 10) = \log 1.32 + \log 10 = 1.12385.$$
$$\log 132 = \log(1.32\times 100) = \log 1.32 + \log 100 = 2.12385,$$
$$\log 0.0132 = \log(1.32\div 100) = \log 1.32 - \log 100 = 0.12385 - 2 = \bar{2}.12385.$$

故諸眞數僅小數點之位置不同者,其假數皆相同.

207. 對數表之用法. (本書末尾附有對數表)

例 1. 求 24.3, 0.00243 之對數.

【解】 從表,求 243 之假數爲 38561, 附以指標, 得
$$\log 24.3 = 1.38561,\quad \log 0.00243 = \bar{3}.38561.$$

例 2. 從 $\log x = \bar{2}.68124$, 求 x.

【解】 先由表上求得對應於 68124 之眞數爲 48, 而指標爲 $\bar{2}$, 故
$$x = 0.048.$$

對數之假數常爲正數,故餘對數可變之如下:

例如
$$\operatorname{colog} 300 = -\log 300 = -2.47712$$

$$=-(2+1)+(1-0.47712)$$

$$=\bar{3}.52288.$$

208. 比例差 某數之對數,若爲表中所無,則可用比例法求得之,今舉例說明之如下:

例 1. 求 $\log 572.5$.

【解】 由對數表, $\log 573=2.75815$,

$$\log 572=2.75740,$$

$$表差=0.00075.$$

由 $$1:0.5=0.00075:x,$$

得 $$x=0.000375.$$

以此比例差,加入 $\log 572$ 中,得 $\log 572.5=2.757775.$

例 2. 設 $\log x=1.55185$, 求 x.

【解】 指標爲1,故 x 之整數部分爲二位數.由對數表查得假數55185之前後二假數所對應之真數爲

$$\log 35.7=1.55267,$$

$$\log 35.6=1.55145,$$

$$表差=0.00122;$$

$$\log x-\log 35.6=0.0004.$$

由 $$0.00122:0.0004=0.1:d,$$

$$d=0.03278.$$

將 d 之值加入 35.6，得　$x=35.63278.$

209. 對數方程式

例 1.　解方程式

$$\log x+\log(x+1)=\log 12.$$

【解】　左邊 $=\log x(x+1)=\log(x^2+x).$

故原方程式爲

$$\log(x^2+x)=\log 12,$$

由是　$x^2+x=12,$

卽　$x^2+x-12=0.$

解之，　$x=3$ 或 $-4.$

例 2.　解聯立方程式

$$\begin{cases} \log x+\log y=1+\log 2+\log 3, & (1) \\ x-2y=2. & (2) \end{cases}$$

【解】　由 (1)，　$\log xy=\log(10\times2\times3)=\log 60,$

$$\therefore\quad xy=60.$$

由 (2) 及 (3)，得　$x=12,\ y=5.$

210. 指數方程式.

指數含未知數之方程式曰指數方程式.

例 1.　解 $3^{2x}=81.$

【解】　取兩邊之對數，則

$$2x\log 3=\log 81.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\log 81}{2\log 3}=\frac{\log 3^4}{2\log 3}=\frac{4\log 3}{2\log 3}=2.$$

例 2. 解 $5^x=(\sqrt{5})^{-1}$.

【解】 取兩邊之對數,則

$$x\log 5=-\log\sqrt{5},$$

$$x\log 5=-\frac{1}{2}\log 5,$$

$$\therefore\quad x=-\frac{1}{2}.$$

例 3. 解 $x^{\log x}=100^2$.

【解】 取兩邊之對數,則

$$\log x^{\log x}=\log 100^2,$$

$$\log x\times\log x=2\log 100,$$

$$(\log x)^2=4,$$

$$\log x=2=\log 100,$$

$$\therefore\quad x=100.$$

例 4. 解聯立方程式

$$\begin{cases}2^x=8^{y+1}, & (1)\\ 9^y=3^{x-9}. & (2)\end{cases}$$

由 (1), $\quad x\log 2=3(y+1)\log 2,$

$$\therefore\quad x=3y+3. \tag{3}$$

由 (2),　　$2y\log 3=(x-9)\log 3,$

$$\therefore\quad 2y=x-9. \tag{4}$$

由 (3) 及 (4), 得　　$x=21,\ y=6.$

習題三十二

以 $\log a$, $\log b$, $\log c$ 表以下各對數:

1. $\log(\sqrt{a^3b^2})^6.$　　　2. $\log(\sqrt[5]{a^{-2}b^3}).$

3. $\log(\sqrt[3]{a^{-1}b^2}\times\sqrt{ab^{-3}}).$　　4. $\log\left\{\left(\dfrac{bc^{-2}}{b^{-4}c^3}\right)^{-3}\div\left(\dfrac{b^{-1}c}{b^2c^{-3}}\right)^4\right\}.$

5. 求證　$\log\dfrac{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{4}\log 5-\dfrac{2}{5}\log 2-\dfrac{2}{3}\log 3.$

6. 求證　$\log\dfrac{75}{16}-2\log\dfrac{5}{9}+\log\dfrac{32}{243}=\log 2.$

已知 $\log 5=0.69897$, $\log 6=0.77815$, 求下列各對數:

7. $\log 625.$　　　8. $\log\dfrac{6^3}{5^2}.$

解下列各方程式:

9. $5^{x^2-3x+4}=25.$　　　10. $a^{2x}\cdot b^{3x}=c^5.$

11. $\dfrac{a^{x+1}}{b^{x-1}}=c^{2x}.$　　　12. $2^{x-1}=(0.5)^{2x-5}.$

13. $\begin{cases} \log x + \log y = 3, \\ x + y = 110. \end{cases}$　　14. $\begin{cases} 2^{\sqrt{x^2 - x - 2}} = 4y, \\ \log(1+y) = 2\log y + \log 2. \end{cases}$

15. 設 $\log_e \pi = 1.1447298858\cdots\cdots$. 試利用 § 204 之註腳, 證明 $\log \pi = 0.4971498727\cdots\cdots$.

二 複利及年金

211. 複利. 依金錢借貸之習慣,其利息之計算法有二種:

一爲單利法,卽利息與本金及時期成比例,利上不復生利,其計算法頗爲簡易.卽若 P 爲本金, r 爲每期之利率, n 爲期數,則

$$利息 = Prn,$$

$$本利和 = P(1+rn).$$

一爲複利法,卽每一期之利息加入於本金中,故下一期之本金因此增多.如是所生之利息,謂之**複利**.卽俗語所謂利上加利是也.

設 P 爲本金, r 爲每期之利率, n 爲期數, A 爲本利和;則第一期末之本利和爲 $P(1+r)$; 以此爲本金,故第二期末之本利和爲 $P(1+r)(1+r)$, 卽 $P(1+r)^2$; 循此推之,其第三期末之本利和爲 $P(1+r)^3$; 第 n 期末之本利和爲 $P(1+r)^n$; 卽

$$A = P(1+r)^n \tag{1}$$

由是　　$\log A=\log P+n\log(1+r)$.

例　本金100元,年利率5釐,問於10年間應得之本利和若干?

【解】　　$P=100,\ r=0.05,\ n=10.$

由是　　$\log A=\log 100+10\log(1+0.05)$

$=\log 100+10\log 1.05=2.2119.$

由表,知　　$\log 163=2.21219,$

$\log 162=2.20952,$

表差 $=0.00267.$

又　　$\log A-\log 162=0.00238.$

$267:238=1:x,\ x=0.890\cdots\cdots$

$\therefore\ A=162.89.$　　答162圓8角9分

推論 1.　由(1),得

$$P=\frac{A}{(1+r)^n}.$$

由是　　$\log P=\log A-n\log(1+r)$,

即若已知利率,期數及本利和,則其本金即可由此求之

推論 2.　由(1),得

$$(1+r)^n=\frac{A}{P},$$

$$1+r=\sqrt[n]{\frac{A}{P}},$$

$$\therefore\quad r=\sqrt[n]{\frac{A}{P}}-1.$$

由是 $\qquad \log(1+r)=1/n(\log A-\log P),$

卽若已知本金,期數及本利和,則其利率卽可由此求之.

推論 3. 由(1),得

$$(1+r)^n=\frac{A}{P},$$

$$n\log(1+r)=\log A-\log P.$$

卽 $$n=\frac{\log A-\log P}{\log(1+r)},$$

卽若已知本金,利率及本利和,則其期數亦可知之.

212. 按期儲蓄. 設每年存入 a 圓,其年利率爲 r 則第一年初存入之 a 圓,至 n 年末之本利和爲 $a(1+r)^n$ 圓,第二年初存入之 a 圓,至最後一年間之本利和爲 $a(1+r)^{n-1}$ 圓;循此推之,其第 n 年初存入之 a 圓之本利和爲 $a(1+r)$ 圓;故若 A 爲本利和之總數,則

$$A=a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots\cdots+a(1+r)^n$$

$$=a(1+r)\{1+(1+r)+\cdots\cdots+(1+r)^{n-1}\}$$

$$=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}. \tag{1}$$

若於每年末存入a圓,則其第一年末存入之a圓,至n年末爲$a(1+r)^{n-1}$;第二年末存入之a圓爲$a(1+r)^{n-2}$;循此推之,第三年末存入者爲$a(1+r)^{n-3}$;至n年末存入之a圓不生利息,仍爲a圓,設A爲歷年本利和之總數,則

$$A=a+a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots\cdots+a(1+r)^{n-1}$$

$$=a\{1+(1+r)+(1+r)^2+\cdots\cdots+(1+r)^{n-1}\}$$

$$=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}. \qquad (2)$$

213. 年金. 每年支付相等之金額曰**年金**. 設有金額總數A圓,每年終支付a圓,n年付清,設其利率爲r,則n年間所付本利和之總額,依前節公式(2)爲

$$\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}.$$

但n年間A圓之本利和爲

$$A(1+r)^n,$$

故
$$\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}=A(1+r)^n.$$

$$\therefore\quad a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}. \qquad (3)$$

取兩邊之對數,則得

$$\log a=\log A+\log r+n\log(1+r)-\log\{(1+r)^n-1\},$$

此式便於計算.

214. 年金之現價. 每年支取年金 a 圓,至 n 年而後取盡之存款,若現在一次取盡可得 A 圓,則名 A 爲年金之現價.由前節公式(3),

$$A=\frac{a}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}. \tag{4}$$

令 n 漸趨於無限大,(4)之右邊接近於 $\frac{a}{r}=A_\infty$,由是可知 A_∞ 爲永久年金之現價.換言之:A_∞ 圓之存款,每年支取 $a=A_\infty r$ 圓,可取之不盡.

例如不動產可視爲一種永久年金.其年金爲歲入.此財產之價值,可由歲入求其現價而知之.

例 年利4釐之年金,期間20年,每年支取300圓.求其現價.

【解】 於此 $a=300,\ n=20,\ r=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}.$

故 $$A=300\times 25\left\{1-\left(\frac{25}{26}\right)^{20}\right\}.$$

今 $$\log\left(\frac{25}{26}\right)^{20}=20(1.39794-1.41497)$$

$$=\bar{1}.65940=\log 0.4564.$$

$$\therefore\quad A=300\times 25\times(1-0.4564)=4077.$$

故現價爲4077元.

習題三十三

1. 本金1000元,年利率5釐,至20年末,其本利和若干?

2. 本金500元,年利4釐,每半年轉利一次,10年間之本利和若何?

3. 本金1200元,15年間得本利和2000元,則其年利率幾何?

4. 本金100元,年利率0.06,依複利計算,問幾年後則其本利和爲本金之五倍?

5. 每年初存入100元,年利率爲0.04,問幾年後則本利和爲1200元.

6. 每年初儲金120圓,年利率0.05,依複利計算,至十年末可得本利和若干?

7. 每月初一,存入十圓,至十年末可得1824圓,問其利率如何?

8. 某銀行規定一種儲蓄,每月存銀一元,至十五年末,可得本利和504元,問其利率若何?

9. 每年支付年金1000元,年利率0.04,於20年間付清,今欲一次取盡,試求其現價.

10. 每年應支100元,今不支取,以年利率003計算之,至十年末一併支取,可得若干?

第十二章 不等式

215. 不等式. 以不等號示二數或二代數式之不等關係者,謂之不等式.

不等式中之文字,以任何實數代之,此不等式恆能成立者,謂之絕對不等式.

例如
$$x^2+y^2+1>0,$$
為絕對不等式.

不等式中之文字,須以某特別數值代之,此不等式始能成立者,謂之條件不等式.

例如 $2x+3>7$, 必 $x>2$, 此不等式始能成立.

注意: 本章所記之文字皆表實數.

216. 實數之大小. 設有 a, b 二數,若 $a-b$ 為正,則 a 大於 b; 若 $a-b$ 為負,則 a 小於 b. 即若
$$a-b>0, \quad 則 \quad a>b,$$
若
$$a-b<0, \quad 則 \quad a<b.$$

例如 $\quad 2>-3, \quad$ 因 $\quad 2-(-3)=+5>0,$

而 $\quad -3<-2$, 因 $\quad -3-(-2)=-1<0$;

故負數之絕對值愈大者,其值反愈小,而零則大於任何之負數(參見 §5 與 §6).

217. 定理 1. 不等式之兩邊,以同數加之或以一同數減之,不等式之方向不變.

設 $a>b$, 則 $a-b$ 爲正.

又 $$a-b=a+c-b-c=(a+c)-(b+c),$$

故 $$(a+c)-(b+c)>0.$$

$$\therefore\ a+c>b+c.$$

同理 $$a-c>b-c.$$

推論. 不等式中任意一項,可變其符號移至他邊.

例如 $$a+b>c+d,$$

$$a+b-b>c+d-b,$$

即 $$a>c+d-b.$$

$$a-c>d-b.$$

218. 定理 2. 不等式之兩邊,以同一正數乘之,不等式之方向不變;若以同一負數乘之,則不等式之方向必變.

設 $a>b$, 則 $a-b>0$.

又若 $m>0$, 則 $m(a-b)>0$,

即 $ma-mb>0$, $\therefore\ ma>mb$.

若 $n<0$, 則 $n(a-b)<0$,

即 $na-nb<0$, $\therefore\ na<nb$.

以一數除之,與以其逆數乘之相同,故上述定理,改乘為除,仍能成立.

不等式中各項之符號若悉行更變,則不等式之方向必變,因此時等於以 -1 乘其各項也.

例如 若 $a-b>c$,

則 $b-a<-c$.

219. 定理 3. 方向相同之諸不等式邊邊相加,仍得同方向之不等式.

即若 $a_1>b_1,\ a_2>b_2,\ a_3>b_3,\ \cdots\cdots,\ a_n>b_n$,

則 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n>b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n$.

【解】 因 $a_1>b_1,\ a_2>b_2,\ \cdots\cdots,\ a_n>b_n$,

故 $a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \cdots\cdots,\ a_n-b_n$,

皆為正數,而正數之和仍為正數;故

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots\cdots(a_n-b_n)>0,$$

卽 $$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)-(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)>0,$$

卽 $$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n>b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n.$$

220. 定理 4. 兩邊皆正而方向相同之諸不等式邊邊相乘,仍得同方向之不等式.

卽若 $$a_1,\ a_2,\cdots\cdots a_n;\ b_1,\ b_2,\cdots\cdots b_n,$$

皆爲正數,且 $$a_1>b_1,\ a_2>b_2,\cdots\cdots a_n>b_n,$$

則 $$a_1a_2\cdots\cdots a_n>b_1b_2\cdots\cdots b_n.$$

【證】 因 a_1, a_2, b_1, b_2 皆爲正數,且 $a_1>b_1, a_2>b_2$, 故

$$a_1a_2>b_1a_2,\ b_1a_2>b_1b_2,$$

由是 $$a_1a_2>b_1b_2.$$

次由 (1) 及 $$a_3>b_3,$$

得 $$a_1a_2a_3>b_1b_2b_3.$$

循此推之,故

$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n>b_1b_2b_3\cdots\cdots b_n.$$

221. 定理 5. 兩邊皆負而方向相同之二不等式邊邊相乘,仍得不等式;其方向與原不等式相反.

設 a, b, c, d 皆爲負數,而 $a>b$, $c>d$, 則

$$ac<bc, \quad bc<bd,$$

故 $$ac<bd.$$

推論. 兩邊皆負而方向相同之偶數個之不等式邊邊相乘,仍得不等式;其方向與原不等式相反.

222. 定理 6. 方向不同之二不等式,其一兩邊皆正,其二兩邊皆負,若邊邊相乘,所得之不等式,其方向與兩邊皆負之不等式相同.

設 a, b 皆正,而 $a>b$; c, d 皆負而 $c<d$; 若 $a>b$ 之兩邊以負數 c 乘之,則 $ac<bc$; 又 $c<d$ 之兩邊以正數 b 乘之,得

$$bc<bd, \quad 故 \quad ac<bd.$$

同理,若 a, b 皆正而 $a<b$; c, d 皆負,而 $c>d$ 之時,則

$$ac>bd.$$

推論. 兩邊皆負而方向相同之奇數個之不等式各邊相乘,所得之不等式,其方向與原不等式相同.

兩邊皆負之奇數個之不等式中,捨去一個,其餘為偶數個之不等式,各邊相乘,得兩邊皆正之不等式其方向與

原不等式相反,此不等式復與前所捨去之一不等式各邊相乘,則所得之不等式其方向與原不等式相同.

223. 定理 7. (1) 兩邊皆正之不等式,若將其兩邊各各自乘至同次冪數,則所得之不等式與原不等式之方向相同.

由定理4; a, b 皆正, n 為正整數,則 n 個之不等式 $a>b$ 邊邊相乘,即 $a>b$ 兩邊各各自乘至 n 次,得 $a^n>b^n$.

(2) 兩邊皆為負數之不等式,若兩邊同時施行同一偶數次冪,則須變更原不等式之方向.

由定理5; a, b 皆負, n 為正之偶數,且 $a>b$, 故 $a^n<b^n$.

(3) 不論兩邊之符號若何,不等式之兩邊,若皆自乘奇數次,則所得之不等式,與原不等式之方向相同.

若不等式兩邊之符號不同,自乘奇數次後,正者仍正,負者仍負,故不等式方向不變.

若兩邊皆負之不等式自乘奇數次,由定理推論,其方向與原不等式同.

224. 定理 8. 不論兩邊符號若何,若將不等式之兩邊開同次之奇數次方根,得不等式與原不等式之方向相同.

某數之奇數次方根,與某數同符號,故此定理爲眞.

兩邊皆正之不等式之兩邊,開其偶數次方根,取兩邊皆正之根,得不等式,其方向與原不等式相同;取兩邊皆負之根,得不等式,其方向與原不等式相反.

225. 定理 9. 二正數之等差中項不小於其等比中項.

此定理於 §176 已證明之,茲更證之如次:

設 a, b 爲二正數,求證等差中項 $\frac{a+b}{2}$ 不小於等比中項 $\sqrt{ab}$.

【證】　因　$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\geqq 0,$$

故　$$a^2+2ab+b^2\geqq 4ab,$$

卽　$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqq ab,$$

故　$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}.$$

等號限於 $a=b$ 時成立.

系　兩正數之等比中項不小於其調和中項.

例　設 a, b, c 皆爲正數，求證

$$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab$$

及 $$2(a^3+b^3+c^3)>bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$$

【證】　因 $$b^2+c^2>2bc,$$

$$c^2+a^2>2ca,$$

$$a^2+b^2>2ab,$$

相加以2除之，得 $$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab.$$

又 $$b^2+c^2>2bc,$$

故 $$b^2-bc+c^2>bc.$$

由是 $$b^3+c^3>bc(b+c).$$

同理 $$c^3+a^3>ca(c+a),$$

$$a^3+b^3>ab(a+b),$$

故 $$2(a^3+b^3+c^3)>bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$$

226. 定理 10. 諸正數之等差中項不小於其等比中項.

設有 n 個正數 $a, b, c, d\cdots\cdots$ 各不相等，求證

$$\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{n}\geqq\sqrt[n]{abcd\cdots\cdots},$$

等號限於 $a=b=c=\cdots\cdots$ 時成立.

【證】　由前節，

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqq ab,\quad \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 \geqq cd,$$

故 $$\left(\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}\right)^2 \geqq abcd.$$

但 $\frac{a+b}{2}$、$\frac{c+d}{2}$、亦爲兩正數.

由前節, $$\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\right\}^2 \geqq \frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2},$$

故 $$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geqq abcd.$$

循此推之,設 n 爲 2 之冪數,則

$$\left(\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{n}\right)^n \geqq abcd\cdots\cdots,$$

故 $$\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{n} \geqq \sqrt[n]{abcd\cdots\cdots}.$$

若 n 非爲 2 之冪數時,設 p 爲大於 n 之 2 之一冪數令 $p=n+r$,於此 r 當然爲正整數.

又設 $$k=\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{n},$$

則 $$\left(\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots+rk}{n+r}\right)^{n+r} \geqq k^r abcd\cdots\cdots.$$

但 $$a+b+c+d+\cdots\cdots=nk,$$

故 $$\left(\frac{nk+rk}{n+r}\right)^{n+r} \geqq k^r abcd\cdots\cdots,$$

即 $$k^{n+r} \geqq k^r abcd\cdots\cdots,$$

兩邊以 k^r 除之,得 $$k^n \geqq abcd\cdots\cdots,$$

故 $$\left(\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{n}\right)^n \geqq abcd\cdots\cdots.$$

例　求證　$(1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r)^n > n^n(n!)^r$,

於此 r 為任何實數.

【證】因 $$\frac{1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r}{n} > (1^r\cdot 2^r\cdot 3^r\cdots\cdots n^r)^{\frac{1}{n}},$$

$$\therefore \left(\frac{1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r}{n}\right)^n > 1^r\cdot 2^r\cdot 3^r\cdots\cdots n^r,$$

$$\therefore (1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+{}^r)^n > n^n(n!)^r.$$

227. 定理 11. 設 a 與 b 皆為正數, m 為正整數,則

$$\frac{a^m+b^m}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^m,$$

但 $a=b$, 或 $m=1$ 之時,則不等式變為等式.

設 $$\frac{a+b}{2}=s,\quad \frac{a-b}{2}=d,$$

於此 s 常為正,而 d 之正負,則視 a, b 之大小而定.

由是 $$a=s+d,\quad b=s-d.$$

由二項定理,

$$a^m=(s+d)^m$$
$$=s^m+ms^{m-1}d+\frac{m(m-1)}{2!}s^{m-2}d^2+\cdots\cdots d^m,$$
$$b^m=(s-d)^m$$
$$=s^m-ms^{m-1}d+\frac{m(m-1)}{2!}s^{m-2}d^2-\cdots\cdots+(-1)^m d^m,$$

此左右各自相加,則右邊 d 之奇數次冪各項皆消去,卽

$$a^m+b^m=2\left\{s^m+\frac{m(m-1)}{2!}s^{m-2}d^2+\cdots\cdots\right\},$$

若 $a\neq b$, 則 $d\neq 0$, 而右邊各項皆正,故

$$a^m+b^m>2s^m.$$

卽 $$\frac{a^m+b^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

228. 條件不等式之解法. 欲使條件不等式成立,其中未知數之值有一定界限.解不等式云者,定此界限之謂也.

例 1. 解 $3x+5>x+11.$

【解】 移項, $3x-x>11-5,$

$\therefore\quad x>3,$

卽 x 之值必須大於 3, 而後此不等式始能成立也.

例 2. 解 $x^2-2x-3<0.$

【解】 分解因數, $(x+1)(x-3)<0$

欲使此不等式成立,必須使一因數爲正,而他一因數爲負,故必 $x>-1$,但 <3;即 $-1<x<3$.

229. 絶對不等式之證明.

絶對不等式之簡單者,一望而知;其複雜者,類須用特別工夫證明,今舉二例於下:

例 1. 設 $a_1, a_2\cdots\cdots a_n$ 與 $b_1, b_2\cdots\cdots b_n$ 皆爲實數,則

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)^2$$
$$\leqq(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)\times(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2)^*.$$

(證明)　x 之二次式

$$(a_1^2+\cdots\cdots a_n^2)x^2+2(a_1b_1+\cdots\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+\cdots\cdots+b_n^2)$$

可書爲平方和 $(a_1x+b_1)^2+\cdots\cdots+(a_nx+b_n)^2.$

故不拘 x 爲正爲負爲 0,其値決不爲負.由 §136 之夕號定理,二次式之判別式必非正數,由是即得所要之關係由此證明,且知此關係變爲等式之充要條件爲

$$a_1:b_1=a_2:b_2=\cdots\cdots=a_n:b_n.$$

例 2. 設 n 爲一正整數,證明

$$\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}<\frac{1\cdot3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots\cdots2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

---

* 學者常稱此不等式爲高聖不等式.高聖(Cauchy)法人,十九世大數學家之一.

(證明)　相異兩正數之等差中項大於其等比中項,故

$$\frac{3}{2\cdot1}>\sqrt{\frac{2}{1}},\ \frac{5}{2\cdot2}>\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{7}{2\cdot3}>\sqrt{\frac{4}{3}},\ \cdots\cdots$$

$$\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$

將此 n 個不等式,邊邊相乘,得

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}(2n+1)>\sqrt{n+1}.$$

以 $2n+1$ 除之,則得

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}>\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}.$$

又將 n 個之不等式

$$\sqrt{\frac{1}{3}}>\frac{1}{2\cdot1},\ \sqrt{\frac{3}{5}}>\frac{3}{2\cdot2},\ \sqrt{\frac{5}{7}}>\frac{5}{2\cdot3},\ \cdots\cdots$$

$$\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}>\frac{2n-1}{2n}.$$

邊邊相乘,則得

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}>\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}.$$

習題三十四

求證下列諸不等式,式中文字皆表正數:

1.　$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$　　　　2.　$(a+b)(a^3+b^3)>(a^2+b^2)^2.$

3. $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

4. $a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c>6abc$.

5. $a^3+b^3+c^3>3abc$.

6. $(b+c)(c+a)(a+b)>8abc$.

7. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)<2(a^3+b^3+c^3)$.

8. $3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(bc+ca+ab)$.

9. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>9abc$.

10. $8(a^3+b^3+c^3)>3(b+c)(c+a)(a+b)$.

11. 設 $a^2+b^2=1$, $x^2+y^2=1$, 求證 $ax+by<1$.

12. 設 $a^2+b^2+c^2=1$, $x^2+y^2+z^2=1$, 求證 $ax+by+cz<1$.

13. x^3 與 x^2-x+1 孰大?試詳細討論之.

解下列諸不等式:

14. $1-x>3x-2$.

15. $2x+3>5x-7$.

16. $x^2>25$.

17. $4x-x^2<x^2-6$.

18. $x^2-8<2x$.

19. $(x+1)(x-3)(x-6)>0$.

20. $\dfrac{x-1}{(x-2)(x-4)}>0$.

21. 設 $0<a<1$, 解 $\left|\dfrac{x-a}{ax-1}\right|<1$.

22. 證明 $\dfrac{1\cdot 3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots\cdots 2n}>\dfrac{1}{2\sqrt{(n+1)}}$.

第十三章 無限級數

一 級數總論

230. 無限級數. 設 $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots u_n \cdots\cdots$ 爲一無限數列,則 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ 名爲一無限級數.此級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 常以 Σu_n 記之.

設級數 Σu_n 之各項均爲實數,則此級數謂之實數級數;若各項均爲正數,則謂之正項級數;茲所討論皆爲實數級數.

設第 n 項 $u_n=\sqrt{n}/(n+1)$, 則得級數

$$\frac{\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\cdots\cdots.$$

又如第 n 項 $u_n=\dfrac{1\cdot3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots\cdots2n}$,

則級數爲
$$\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\cdots.$$

231. 收斂級數與發散級數.

設 S_n 表級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots$, 最初 n 項之和, 如

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots u_n,$$

將 n 逐漸增大,則 S_n 之變化有下列數種情形:

(1)　S_n 接近於一有限數值;

(2)　S_n 無限制的增大;

(3)　S_n 無限制的減小,即 $-S_n$ 無限制的增大;

(4)　無前三種情形之一者.

屬於第一種情形者,其級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 謂之收斂級數, S_n 所接近之有限數值 S, 名為級數 Σu_n 之和. 又 S 為數列 $S_1,S_2\cdots\cdots S_n\cdots\cdots$ 之極限,即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$.

屬於第二種及第三種者,謂之發散級數.

屬於第四種者,謂之振動級數,既非收斂級數亦非發散級數.

若 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 為一收斂級數,其和為 S, 則

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S=u_1+u_2+\cdots\cdots.$$

例如等比級數 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 為一收斂級數,其和為 1. 因若 n 逐漸增大,則 S_n 之值逐漸接近於 1 之故. 於此所當注意者:凡收斂級數, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$. 蓋 $u_n=S_n-S_{n-1}$, 此數接近於 $S-S=0$ 之故.

又 $1+2+3+\cdots\cdots$ 爲一發散級數,因若 n 逐漸增大,則 S_n 之值亦逐漸增大,而無限制.

又若 $1-1+1-1+\cdots\cdots$ 爲一振動級數,因 S_n 之値逐次為 $1, 0, 1, 0, 1,\cdots\cdots$ 卽奇數項之和爲 1, 偶數項之和爲 0, S_n 既不接近於一定之値,又非無制限的增大或減小故也.

232. 簡單定理.

(1) 欲決定一級數爲收斂或發散,有限個之項可以略去不計.

因此有限數之項,其和爲一有限數値,故卽略去之,對於級數之性質不生影響.卽收斂者仍爲收斂,發散者仍爲發散也.

(2) 無限級數之各項,以不等於 0 之一有限數値乘之,其級數之性質不變.

設
$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots, \tag{1}$$
爲一收斂級數,其和爲 S, 若 $c\neq0$, 則
$$cu_1+cu_2+cu_3+\cdots\cdots, \tag{2}$$
仍爲一收斂級數,其和爲 cS. 若 (1) 不收斂,則 (2) 亦然.

(3) 保留收斂級數各項之次序而施用組合定律,其和仍不變.

例如　$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$為一收斂級數；$g_1, g_2, \cdots\cdots$為其首二項,次四項等等之和,則級數$g_1+g_2+\cdots\cdots$之和與$u_1+u_2+\cdots\cdots$之和相同.

因若u_n為g_m之末項,則

$$g_1+g_2+\cdots\cdots+g_m=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n,$$

將m無限增大,此等式之兩邊均接近於同一之極限也.

同理,發散正項級數之各項任意組合之,仍為發散級數.

故一收斂級數之各項,可以括弧括之.然其逆不真.

例如收斂級數$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$,可書為

$$\left(1\frac{1}{2}-1\right)+\left(1\frac{1}{4}-1\right)+\left(1\frac{1}{8}-1\right)+\cdots\cdots,$$

除去括弧,則級數$1\frac{1}{2}-1+1\frac{1}{4}-1+1\frac{1}{8}-1+\cdots\cdots$不能收斂.

但如下例,可將括弧除去之.級數$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots$之和為1.蓋

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

故 $$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

233. n項以後之殘項. 設$u_1+u_2+\cdots\cdots$為一收斂級數,則其第n項以後之部分$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots$亦收斂.設以$R_n$表其和,則此$R_n$謂之原級數$n$項以後之殘項.設原級數之和爲$S$,則$S_n+R_n=S$,故$\lim R_n=0$.

234. 定理 1. 設正項級數$u_1+u_2+\cdots\cdots$最初n項之和爲S_n,若S_n常小於一有限數値c,則此級數必收斂.

級數既爲正項,S_n隨n增大而增大.然S_n常小於c,故S_n必接近於一極限,由是可知此級數必收斂.

235. 比較審查法(一). 審查正項級數之收斂與否,可取性質巳明之正項級數與之比較,是曰比較審查法,此法於本節及次節詳明之.

定理 2*. 設$\sum u_n$爲一正項級數,$\sum a_n$爲一收斂正項級數.若有常數c使u_n常小於ca_n,則$\sum u_n$收斂.

【證】 設Σa_n之和爲A,則

---

* 本定理之嚴密證明,非本書之程度所允許.

$$u_1+\cdots\cdots+u_n<c(a_1+\cdots\cdots+a_n)<cA.$$

由定理1, Σu_n 爲一收斂級數.

系. 如正項級數之 u_n 之每項與其前一項之比,不大於某收斂級數之對應比,則 Σu_n 亦收斂.

【證】 設 Σa_n 爲一正項收斂,若 $\frac{u_n}{u_{n-1}}\leqq\frac{a_n}{a_{n-1}}$, 則

$$\frac{u_n}{a_n}\leqq\frac{u_{n-1}}{a_{n-1}}.$$

故 $\frac{u_n}{a_n}$ 不大於常數 $\frac{u_1}{a_1}$, 因之 Σu_n 亦必收斂.

例 求證 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\cdots,$ (1

爲一收斂級數,用上述之定理與系,取收斂級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}+\cdots\cdots, \quad (2$$

與之比較,可得兩種證法:

(i) (1)之每項各不大於 (2) 之對應項,故 (1) 爲收斂級數.

(ii) (1)之每項與其前一項之比爲 $\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\cdots\cdots$ 皆大於(2)之對應比 $\frac{1}{2}$. 故 (1) 爲收斂級數.

236. 比較審查法(二).

定理 3. 設$\sum u_n$爲一正項級數,則$\sum b_n$爲一正項發散級數.若有常數c使u_n常大於cb_n,則$\sum u_n$發散.

系. 如正項級數之每項與其前一項之比,不小於發散正項級數$\sum b_n$之對應項之比,則$\sum u_n$發散.

此定理與系之證法,與前節相仿,學者可自爲之.

237. 試驗級數.

由前二定理,欲決定一正項級數之爲收斂或發散,可與一性質已明之級數比較之.後者曰試驗級數;最重要之試驗級數爲等比級數$a+ar+ar^2+\cdots\cdots$,如正數$r<1$,則收斂;不然則發散.下述級數,亦甚重要.

定理 4. 級數 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots\cdots$, $p>1$時收斂,$p\leqq 1$時發散.

(i) 設$p>1$. 將此級數自$\frac{1}{2^p}$起二項組合爲一項,自$\frac{1}{4^p}$起四項合爲一項,自$\frac{1}{8^p}$起八項合爲一項,……則得級數

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots\cdots,$$

此級數之第一項以後,每項小於下列級數之對應項

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\cdots\cdots,$$

$$1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{(2^{p-1})^2}+\cdots\cdots,$$

故此級數爲收斂級數.

(ii) 設 $p=1$. 則原級數爲 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$. 將此級數 $\frac{1}{5}$ 前二項組合之, $\frac{1}{9}$ 前四項組合之, $\frac{1}{17}$ 前八項組合之,……則得

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots,$$

此級數第二項以後,每項大於下列級數之對應項

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots,$$

此爲發散級數,故 $\Sigma\frac{1}{n}$ 亦發散.

(iii) 設 $p<1$. 此時級數自二項起,各項大於 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$ 之對應項,後者業已證明其爲發散,故 Σn^{-p} 亦發散.

例 1. 求證 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots$ 爲收斂級數.

【證】 此級數第一項以後,每項小於收斂級數 Σn^{-2} 之對應項,故為收斂級數.

例 2. 求證 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots$ 爲發散級數.

【證】 此級數之第 n 項與發散級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$ 之第 n 項之比 $\frac{n}{2n-1}$ 大於 $\frac{1}{2}$, 故發散.

例 3. 第 n 項 $u_n=\frac{2n+1}{n^3+n}$ 之級數收斂否?

【解】 因 $u_n\div\frac{1}{n^2}=\left(2+\frac{1}{n}\right)\div\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<3$, 故 Σu_n 收斂.

238. 審比法. 所謂審比法者,乃以幾何級數之試驗級數之特種比較審查法,其用頗廣,故詳言之於下.

定理 5. 設正項級數若干項之後,其各項與其前一項之比小於一定數值,若此定數小於 1, 則級數收斂.

設自第 k 項之後, 各項與其前項之比小於 r, $r<1$, 則

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}<r,\quad \frac{u_{k+2}}{u_{k+1}}<r,\cdots\cdots.$$

故 $$u_{k+1}<u_kr,\quad u_{k+2}<u_{k+1}<u_kr^2,\cdots\cdots,$$

由是 $$u_k+u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots\cdots<u_k(1+r+r^2+\cdots\cdots)=\frac{u_k}{1-r};$$

故級數收斂.

定理 6. 無限級數若干項之後,其各項與其前項之比,若恆不小於 1, 則此級數必發散.

【證】 設第 k 項之後,各項與其前一項之比不小於 1, 則第 k 項以後,各項符號相同,若皆為正,則得

$$u_{k+1}>u_k,\ u_{k+2}>u_{k+1}>u_k\cdots\cdots,$$

由是 $$u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots\cdots u_{k+n}>nu_k,$$

故此時級數發散.第 k 項以後,若各項皆負,易知此時級數亦為發散.

例 $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2^2}{3}+\frac{2^3}{4}+\cdots\cdots+\frac{2^{n-1}}{n}+\cdots\cdots$ 為一發散級數

何則?設 $n>1$, 則

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^n}{n+1}\div\frac{2^{n-1}}{n}=\frac{2n}{n+1}>1.$$

239. 定理 7. 設 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 為一正項級數, n 逐漸增大, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 接近於一定值 λ, 即以 λ 為其極限.

若 $\lambda<1$, 則 $\sum u_n$ 為收歛級數; 若 $\lambda>1$, 則 $\sum u_n$ 為發散級數.

注意: 若 $\lambda=1$,則 $\sum u_n$ 之性質用他法決定.

(1) 設 $\lambda<1$, 取一數值 r, 使 $\lambda<r<1$.

因 $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda$, $\lambda<r$, 故 n 在某數值以後, $\frac{u_{n+1}}{u_n}<r$. 然 $r<1$, 故級數爲收斂.

(2) 設 $\lambda>1$, n 在某數值以後,常得 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$. 故此級數必發散.

注意: 如 $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, 且 $\lim\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=1$, 則此級數爲發散.然若 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, 且 $\lim\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=1$, 則不能決定其爲發散或收斂.

例 1. 求證 $\frac{3}{5}+\frac{3\cdot5}{5\cdot10}+\frac{3\cdot5\cdot7}{5\cdot10\cdot15}+\cdots\cdots$ 爲一收斂級數.

【解】 此級數之第 n 項爲 $\frac{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)}{5\cdot10\cdot15\cdots\cdots5n}$, 第 n 項與其前一項之比爲 $\frac{2n+1}{5n}$. 因

$$\lim\frac{2n+1}{5n}=\lim\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5n}\right)=\frac{2}{5}<1,$$

故此級數收斂.

例 2. 設 x 爲正數,問級數

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+3x^3}+\cdots\cdots,$$

何時收斂?

【解】 設 u_n 爲級數之第 n 項,則

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^n+\frac{1}{n}}{x^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}}.$$

故
$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{x}.$$

由是若 $x>1$，則此級數爲收斂；$x<1$，則此級數爲發散；若 $x=1$，由定理 4 知其發散，由定理 7 不能決定之.

240. 二項級數.

設 a_0, a_1……皆爲常數，則稱 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 爲 x 之冪級數.下記冪級數名曰二項級數.

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\cdots.$$

凡級數取其各項之絕對值而成收斂級數者，名原級數曰絕對收斂級數.

定理：二項級數當 $|x|<1$ 時爲絕對收斂.

【證】　設 u_n 爲二項級數之第 n 項，則

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}x\right|=|x|,$$

故當 $|x|<1$ 時，級數 $|u_1|+|u_2|+\cdots\cdots$ 爲收斂，即二項級數爲絕對收斂.

注意：　若 m 爲正整數，則二項級數僅有 $m+1$ 項，其和等於 $(1+x)^m$. 此事實可推廣之如下：若 $|x|<1$，則不問

m 之值爲何,常有下記之關係(證明從略):

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\cdots.$$

241. 指數級數. 設 $u_n=\frac{x^n(\log_e a)^n}{n!}$, 則 $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{x\log_e a}{n}$.

故不論 x 爲何數, u_n/u_{n-1} 之極限等於 0. 由是 x 之冪級數

$$1+x\log_e a+\frac{x^2(\log_e a)^2}{2!}\cdots\cdots$$

爲絕對收斂,此級數名曰指數級數.

置 $x=1$, $a=e$, 則級數變爲

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots,$$

其和爲自然對數之底 e. 此事可推廣如下:不問 x 之値如

何, $$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots^*.$$

以 cx 代 x, 則得

$$e^{cx}=1+\frac{cx}{1!}+\frac{c^2x^2}{2!}+\cdots\cdots,$$

又以 $\log_e a$ 代 c, 則得

$$a^x=1+x\log_e a+\frac{x^2(\log_e a)^2}{2!}+\cdots\cdots.$$

---

* 證明超過本書程度,故從略.

指數級數之名稱,其由來在此.

242. 對數級數. 於指數級數中,以 $1+x$ 代 a, y 代 x, 則得

$$(1+x)^y=1+y\log_e(1+x)+\frac{y^2}{2!}[\log_e(1+x)]^2+\cdots\cdots. \qquad (1)$$

然若 $|x|<1$, 則由二項級數,得

$$(1+x)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{2!}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{3!}x^3+\cdots\cdots.$$

此級數中 y 之係數爲 x 之冪級數

$$x+\frac{-1}{1\cdot2}x^2+\frac{(-1)(-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\cdots,$$

即
$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots,$$

最後之級數名曰對數級數,以其等於 (1) 中之 y 之係數 $\log_e(1+x)$ 也.設對數級數之第 n 項爲 u_n, 則

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}|x|=|x|.$$

故對數級數當 $|x|<1$ 時爲絕對收斂,而

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots.$$

243. $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 之級數. 此類級數,若化爲

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{a_n}{n}}, \text{ 則 } \lim\left(\frac{a_n}{n}\right)=0.$$

定理 8. $n>k$ 時，a_n 恆大於某定數，若此數值大於 1，則級數收斂。若 a_n 不大於 1，則級數發散。

(i) 設 $n>k$ 時，$a_n>1+a$，$(a>0)$，則

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{a_n}{n}}<\frac{1}{1+\frac{1+a}{n}},$$

第 k 項以後符號皆相同，設 $u_n>0$，則

$$u_{n+1}<\frac{1}{a}[nu_n-(n+1)u_{n+1}],$$

以 $n=k+1, k+2, \cdots\cdots k+l-1$，次第代入，而後將所得之諸不等式加之，得

$$u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots\cdots+u_{k+l}<\frac{1}{a}[(k+1)u_{k+1}-(k+l)u_{k+l}].$$

由是可知正項級數 $u_{k+2}+u_{k+3}+\cdots\cdots$ 之 l 項之和，常小於一有限數值 $\frac{(k+1)u_{k+1}}{a}$，故此級數收斂。因之 Σu_n 爲收斂級數。易知 $u_n<0$ 時，亦然。

(ii) 設 $n>k$ 時，$a_n\leqq 1$，則

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{\alpha_n}{n}}\geqq\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}.$$

然 $\frac{n}{n+1}$ 為發散級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$ 鄰接兩項之比,故級數 Σu_n 發散.

設增大 n, α_n 常大於1而逐漸接近於1,則仍不能決定級數之性質.此時化 α_n 為 $\alpha_n=1+\frac{\beta_n}{n}$,則 $\lim\frac{\beta_n}{n}=0$.若 β_n 常小於一有限數值 b,則此級數為發散級數.

因若　　$0<\beta_n<b$,

則 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\frac{\alpha_n}{n}}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{\beta_n}{n}}>\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{b}{n^2}}$$

然在此不等式右邊之數,大於發散級數

$$\frac{1}{1-b}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{3-b}+\cdots\cdots$$

之兩對應項之比;因

$$\frac{1}{(n+1)-b}\div\frac{1}{n-b}=\frac{n-b}{(n-b)+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n-b}},$$

而 $$\frac{1}{n-b}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{b}{n}}=\frac{1}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{b^2}{n^3}+\cdots\cdots>\frac{1}{n}+\frac{b}{b^2},$$

故 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 為一發散級數.

244. 級數之收斂條件.

設 $u_1+u_2+\cdots\cdots$ 爲無限級數.若對於一任意之正數 A 可得一項 u_k,在 u_k 以後接續任何項之和,其絕對值小於 A,即設 p 爲任何正整數 $|u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots\cdots+u_{k+p}|<A$,則此級數收斂.若無上述性質,則級數不能收斂*.

於此得收斂級數之一必要條件爲

$$\lim u_n=0,$$

然僅此一個條件,不能決定級數之爲收斂與否.

例如 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$ 爲一發散級數,然 $\lim u_n=\lim\frac{1}{n}=0$

由收斂條件,易證下述之定理:

定理 9. 凡絕對收斂級數必收斂.

設
$$u_1+u_2+\cdots\cdots,$$

爲一絕對收斂級數,置 $u'_n=|u_n|$,則得收斂級數

$$u'_1+u'_2+\cdots\cdots,$$

由 $|u_{k+1}+u_{k+2}+\cdots\cdots+u_{k+p}|\leqq u'_{k+1}+u'_{k+2}+\cdots\cdots+u'_{k+p}$,

故對於正數 A 若有 k 能使

$$u'_{k+1}+\cdots\cdots+u'_{k+p}<A,$$

*證明超過本書程度故從略.

則 $$|u_{n+1}+\cdots\cdots+u_{n+p}|<A.$$

由收斂條件,知 Σu_n 收斂.

245. 來普尼*定理. 設一無限級數之項正負相間,且各項之絕對值不大於其前一項之絕對值,又當 n 漸趨於無限大時,其第 n 項之極限為 0, 則此無限級數收斂.

設級數為 $u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots$, $u_n>0$, 且

$$u_1\geqq u_2\geqq u_3\geqq\cdots\cdots;\ \lim u_n=0.$$

設 S_n 為最初 n 項之和,則

$$S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots\cdots(u_{2n-1}-u_{2n}),$$

故 $S_2\leqq S_4\leqq S_6\leqq\cdots\cdots$ 然 S_{2n} 又可書為

$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots\cdots-u_{2n},$$

故 S_{2n} 雖隨 n 之增加而增加,決不超過 u_1. 由是知 $\lim S_{2n}$ 存在.

又因 $\lim u_n=0$, 故 $\lim S_{2n+1}=\lim S_{2n}$.

總之 $\lim S_n$ 存在.故級數為收斂.

習題三十五

求證下列各級數為收斂級數:

---

* 來普尼 (Leibnitz, 1646-1716), 德人,與牛頓同時,牛頓發明微分積分之學,來普尼亦發明之.

1. $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots\cdots.$

2. $\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{3\cdot4\cdot5}+\frac{6}{4\cdot5\cdot6}+\cdots\cdots.$

3. $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\cdots\cdots.$

求證下列各級數為發散級數:

4. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots.$

5. $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{3a+b}+\cdots\cdots.$

6. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots.$

7. $\frac{2}{1+2\sqrt{2}}+\frac{3}{1+3\sqrt{3}}+\frac{4}{1+4\sqrt{4}}+\cdots\cdots.$

8. 下列諸值為級數之第n項,試將此等級數之首四項記出之,并決定其為收斂級數或發散級數:

(1) $u_n=\frac{2n-1}{(n+1)(n+2)}.$ (2) $u_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}.$

(3) $u_n=\frac{n^2-(n-1)^2}{n^3+(n+1)^3}.$

9. 求證 $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot3}{1\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot7}+\cdots\cdots$ 為收斂級數.

10. 收斂級數 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots$ 非為絕對收斂.

試證明之.

11. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots\cdots$是否爲絕對收歛級數?

決定下列諸級數,何者爲收歛級數,何者爲發散級數:

12. $\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^3+1}+\cdots\cdots.$

13. $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot2}{1\cdot3}+\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot3\cdot5}+\cdots\cdots.$

14. $\frac{2}{2\cdot3}+\frac{4}{3\cdot4}+\frac{6}{4\cdot5}+\cdots\cdots.$

15. $\frac{2}{3}+2\left(\frac{2}{3}\right)^2+3\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots.$

16. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots\cdots.$

17. $\frac{2}{4}+\frac{2\cdot4}{4\cdot7}+\frac{2\cdot4\cdot6}{4\cdot7\cdot10}+\cdots\cdots+\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}{4\cdot7\cdot10\cdots\cdots(3n+1)}+\cdots\cdots.$

18. $\frac{2}{4}+\frac{2\cdot3}{4\cdot5}+\frac{2\cdot3\cdot4}{4\cdot5\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{2\cdot3\cdot4\cdots\cdots(n+1)}{4\cdot5\cdot6\cdots\cdots(n+3)}+\cdots\cdots.$

19. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}+\cdots\cdots.$

20. $\frac{3}{3}-\frac{3\cdot5}{3\cdot6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{3\cdot6\cdot9}-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{3\cdot6\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots.$

21. 設 x 爲實數,則級數 $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots$之收歛範圍爲 $-1\leqq x<1$, 試詳證之.

22. 設 x 為實數,問級數 $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}+\cdots\cdots$ 何時收斂?

23. 證明: 若 $\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=r$, 則冪級數 Σa_nx^n 當 $|x|<r$ 時絕對收斂,若 $|x|>r$, 則不收斂.

24. 決定下列諸冪級數之收斂範圍:

(i) $\Sigma(n+1)x^n$. (ii) $\Sigma\frac{x^n}{n!}$.

(iii) $\Sigma n!x^n$. (iv) $\Sigma\frac{x^n}{n(n+1)}$.

二 特種級數

246. 便於計算自然對數之級數. 對數級數

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$$

之收斂範圍,為 $-1<x\leqq1$. 變 x 之符號,則得

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\cdots.$$

相減,得

$$\log_e\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right]. \qquad (|x|<1)$$

設 n 為一自然數,置 $x=\frac{1}{2n+1}$, 則得

$$\log_e(n+1)-\log_e n=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right].$$

計算自然數之自然對數,以用此級數較便.

例如 $n=1$, 則得

$$\log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\cdots\right).$$

又置 $n=2$, 可得 $\log_e 3$. 故任何正數之自然對數,均可用此級數求得之.

今詳細計算 $\log_e 2$ 至小數五位.

$$\frac{2}{3}=0.666666\cdots\cdots,$$

$$\frac{2}{3\cdot 3^3}=0.024691\cdots\cdots,$$

$$\frac{2}{5\cdot 3^5}=0.001646\cdots\cdots,$$

$$\frac{2}{7\cdot 3^7}=0.000130\cdots\cdots,$$

$$\frac{2}{9\cdot 3^9}=0.000010\cdots\cdots.$$

此五分數之和 $=0.693143+R_1,\ 0<R_1<10^{-6}$.

又 $$R_2=2\left(\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\frac{1}{13\cdot 3^{13}}+\cdots\cdots\right)<\frac{2}{11\cdot 3^{11}}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{44\cdot 3^9}<3\times 10^{-6}.$$

故 $$R_1+R_2+3\times10^{-6}<7\times10^{-6}.$$

由是,知 $$\log_e 2=0.69314\cdots\cdots.$$

247. 自然數之對數表. 於§203之底數換變公式

$$\log_b n=\frac{1}{\log_a b}\times\log_a N$$

中,令 $a=e$, $b=10$, 則得

$$\log_{10}N=\frac{1}{\log_e 10}\times\log_e N.$$

故以模數

$$\mu=\frac{1}{\log_e 10}=0.4342944819\cdots\cdots,$$

乘 N 之自然對數,即得 N 之常用對數.

由前節所述之方法,可得自然數之自然對數.再乘以 μ,則得自然數之常用對數.自然數之對數表乃成.

實用對數表有五位者,有七位者,有十三位者,皆由四捨五入法製成.例如

$$\log 2=\mu\log_e 2=0.434294\cdots\cdots\times0.693147\cdots\cdots\doteq0.30103\cdots\cdots,$$

又如 $\log 7=0.8450980\cdots\cdots$, $\log 3=0.4771213\cdots\cdots$.

於五位對數表(見附錄)中,則書

$$\log 7=0.84510,\quad \log 3=0.47712.$$

前者入而後者捨.

248. 有理函數之冪級數. 設 x 之絕對值小於 1, 則

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+(n+1)x^n+\cdots\cdots,$$

置上式之 $n+1$ 項係數 $a_n=n+1$, 則 $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=0$. 此現象實爲下述定理之一特別情形.

若 $$a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0, \qquad (n>1)$$

則當 $|x|$ 甚小時,冪級數 $a_0+a_1x+\cdots\cdots$ 之和爲

$$\frac{a_0+(a_1+a_0p)x}{1+px+qx^2}.$$

【證】 若 $p=q=0$, 則無待證明.若不然,則設 A 爲兩數

$$\frac{|a_1|}{|p|+|q|} \text{ 與 } |a_0|$$

中之較大者,易知 $|a_n|\leqq(|p|+|q|)^nA$. 故若

$$|x|<\frac{A}{|p|+|q|},$$

則冪級數 Σa_nx^n 收斂.今設 $|x|$ 小於 $(|p|+|q|)^{-1}$, 置

$$S_n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n,$$

則 $$pxS_n=pa_0x+pa_1x^2+\cdots\cdots+pa_{n-1}x^n+pa_nx^{n+1},$$

$$qx^2S_n=qa_0x^2+\cdots\cdots+qa_{n-2}x^n+qa_{n-1}x^{n+1}+qa_nx^{n+2}.$$

故

$$(1+px+qx^2)S_n=a_0+(a_1+pa_0)x+(pa_n+qa_{n+1})x^{n+1}+qa_nx^{n+2}.$$

當 n 漸趨於無限大時或其中最後兩項極限為 0，故得所要之結果.此定理之逆亦真：

當 $|x|$ 甚小時,有理函數 $\dfrac{\alpha+\beta x}{1+px+qx^2}$ 可展開為冪級數 Σa_nx^n，其中

$$a_0=\alpha,\ a_1+a_0p=\beta,\ a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0.\quad (n>1) \qquad (1)$$

【證】 設 Σa_nx^n 之係數滿足 (1)，則其和為所設之有理函數.

例 設 $(5x)/(1-x-2x^2)=\Sigma a_nx^n$，則

$$a_n=\{(-1)^n2+3.2^n\}.$$

(證明) 本題固可應用上述定理證明,然不如下法直捷：設 $|x|<\dfrac{1}{2}$，則

$$\frac{5x}{1-x-2x^2}=\frac{2}{1+x}+\frac{3}{1-2x}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n+3\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n.$$

$$\therefore\quad a_n=(-1)^n2+3.2^n.$$

對於一般之有理函數,亦有類似之定理,學者當能舉一反三.

249. 三角級數 設 Σa_n 與 Σb_n 皆為絕對收斂級數,則三角級數

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad (x\text{ 爲實數})$$

亦絕對收斂.設其和爲 $f(x)$, 則 $f(x+2\pi)=f(x)$. 是乃以 2π 爲週期之週期函數.設 $y=f(x)$, 則其所表示之曲線,爲一有週期性之曲線.

弦之振動狀態,可用上述曲線表示之,故三角級數之理論對於物理學有應用.

250. 地力克來*級數. §238 中所舉之級數

$$1+\frac{1}{2^x}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^x}+\cdots\cdots,$$

當 $n>1$ 時收斂.此級數爲下記級數

$$a_0+\frac{a_1}{2^x}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n^x}+\cdots\cdots,$$

之一特別情形,其中 a_n 與 x 無關係.此種級數名曰地力克來級數.

冪級數,三角級數,地力克來級數,乃特種級數之最重要者.其理論之發展,乃屬較近之事.

習題三十六

1. 求 5 與 7 之常用對數至小數五位.

---

*地力克來 (Dirichlet) 爲十九世紀德國數學家,與法國之高[illegible]同時 (見 § 229).

2. 設 $a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2}=0$, 求下列冪級數 $\Sigma a_n x^n$ 之和:

(i) $1+3x-2x^2-x^3+\cdots\cdots$.

(ii) $2+x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots$.

3. 求冪級數 $a+(a+d)x+(a+2d)x^2+(a+3d)x^3+\cdots\cdots$ 之和.

4. 求冪級數 Σn^2x^{n-1} 之和.

5. 設 $a_n>a_{n+1}>0$, 證明 $\Sigma(-1)^n a_n n^{-x}$, 當 $x>0$ 時收斂.

6. 展開下列函數為 x 之冪級數:

(i) $\dfrac{2x+1}{x^3-2x^2+x-1}$ (ii) $\dfrac{x^2+1}{ax^2+bx+1}$.

第十四章 連分數

251. 連分數. 如 $a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cdots\cdots}}$

之式謂之連分數;簡書之爲 $a+\frac{b}{c+}\,\frac{d}{e+}\cdots\cdots$.

若 $a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$ 中之 a_1 爲整數, $a_2, a_3, \cdots\cdots$ 皆爲正整數,則名 $a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$ 爲一簡連分數.

又 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 謂之連分數之第一,第二,第三……之部分商.

如 $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots$ 等個數爲有限,則謂之有限連分數;不然,則謂之無限連分數.

252. 有限連分數. 有限簡連分數爲一有理數,因其可化爲一平常之分數故也.

例如 $2+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{4}=2+\frac{4}{13}=\frac{30}{13}$, $\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{4}=\frac{13}{30}$.

逆之,凡有理數必可化爲有限簡連分數.茲舉例以明之.

例 變$\frac{67}{29}$爲一連分數.

用輾轉相除如求最大公約數之法:

$$
\begin{array}{l}
29)67(2=a_1 \\
\quad\underline{58} \\
\quad\;9)29(3=a_2 \\
\qquad\underline{27} \\
\qquad\;2)9(4=a_3 \\
\qquad\quad\underline{8} \\
\qquad\quad 1)2(2=a_4 \\
\qquad\qquad\underline{2} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \frac{67}{29}=2+\frac{9}{29}=2+\frac{1}{29/9} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{29}{9}=3+\frac{2}{9}=3+\frac{1}{9/2} \qquad (2)$$

$$\frac{9}{2}=4+\frac{1}{2} \qquad (3)$$

以(2)代入(1),又以(3)代入其結果中,得

$$\frac{67}{29}=2+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2}.$$

因 $$\frac{29}{67}=1\div\frac{67}{29},$$

故得 $$\frac{29}{67}=\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2}.$$

253. 漸近分數.

分數$\frac{a_1}{1}$, $a_1+\frac{1}{a_2}$, $a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3}$…謂之連分數$a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}$……之第一,第二,第三……漸近分數.

如$a_1=0$,則第一漸近分數爲$\frac{0}{1}$.

定理 1. 每一奇數號碼之漸近分數,小於

其後面一個漸近分數;而每一偶數號碼之漸近分數,則較其後面一個爲大.且奇數號碼之漸近分數,因號碼之增加而逐漸增加,偶數號碼之漸近分數,因號碼之增加而逐漸減小.

蓋因正分數之分母減小則分數增大,分母增大則分數減小;如

$$a_1<a_1+\frac{1}{a_2},$$

$$a_1+\frac{1}{a_2}<a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3},$$

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3}<a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4},\cdots\cdots.$$

254. 漸近分數之分子與分母. 將連分數 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots$ 之第一,第二,第三……之漸近分數爲

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_1a_2+1}{a_2},\ \frac{a_1a_2a_3+a_1+a_3}{a_2a_3+1}. \tag{1}$$

設 $p_1, p_2, p_3,\cdots\cdots$ 表此等漸近分數之分子, $q_1, q_2, q_3,\cdots\cdots$ 表其分母,則

$$p_1=a_1,\ p_2=a_1a_2+1,\ p_3=a_1a_2a_3+a_1+a_3\cdots\cdots; \tag{2}$$

$$q_1=1,\ q_2=a_2,\qquad q_3=a_2a_3+1\cdots\cdots. \tag{3}$$

由 (2), (3), 得

$$p_3=a_3p_2+p_1,\quad q_3=a_3q_2+q_1,\tag{4}$$

一般言之.

定理 2. 任何漸近分數之分子分母,與其前面二個漸近分數之分子分母,有關係如下:

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2},$$

此定理可用數學歸納法證明之:

二關係如在 $n=k$ 時成立,則當 $n=k+1$ 時亦成立.何則?

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}=\frac{\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)p_{k-1}+p_{k-2}}{\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)q_{k-1}+q_{k-2}}$$

$$=\frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1}+p_{k-2})+p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1}+q_{k-2})+q_{k-1}}$$

$$=\frac{a_{k+1}p_k+p_{k-1}}{a_{k+1}q_k+q_{k-1}};$$

故 $p_{k+1}=a_{k+1}p_k+p_{k-1}$, $q_{k+1}=a_{k+1}q_k+q_{k-1}$. 由此結果與 (4), 知定理 2 成立.

例 計算 $3+\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5}$ 之漸近分數.

由 $$3=\frac{3}{1},\ 3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2},$$

得 $$p_1=3,\ p_2=7;\ q_1=1,\ q_2=2.$$

故 $$p_3=3\cdot7+3=24,\qquad q_3=3\cdot2+1=7;$$

$$p_4=4\cdot24+7=103,\quad q_4=4\cdot7+2=30;$$

$$p_5=5\cdot103+24=539,\ q_5=5\cdot30+7=157.$$

故所求之漸近分數爲$\frac{3}{1}, \frac{7}{2}, \frac{24}{7}, \frac{103}{30}, \frac{539}{157}$.

255. 相鄰兩漸近分數.

定理 3. 相鄰兩漸近分數之分子分母有關係如下:

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

此定理亦可用歸納法證明之:因

$$p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1a_2=1=(-1)^2.$$

$$p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}=(a_{k+1}p_k+p_{k-1})q_k-p_k(a_{k+1}q_k+q_{k-1})$$

$$=-(p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k),$$

故若 $$p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^k,$$

則 $$p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}=(-1)^{k+1}.$$

然 $p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1a_2=1=(-1)^2$. 故此定理爲真.

系 1. 任何漸近分數$\frac{p_n}{q_n}$爲一既約之分數.

系 2. $$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}},$$

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_nq_{n-2}}.$$

最後之關係,可證明如下:

$$p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n$$
$$=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-2}-p_{n-2}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})$$
$$=a_n(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})=(-1)^{n-1}a_n,$$

以 q_nq_{n-2} 除之即得.

256. 連分數之值.

定理 4. 若 n 無限增大,則漸近分數 $\frac{p_n}{q_n}$ 接近於一有限數值.

由定理1,知奇數號碼之漸近分數 $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \cdots\cdots$ 爲增加數列,而皆小於 $\frac{p_2}{q_2}$. 故 p_{2n+1}/q_{2n+1} 有極限.

又 $\frac{p_2}{q_2}, \frac{p_4}{q_4}, \cdots\cdots$ 爲一減少數列,且皆大於 a_1, 故 p_{2n}/q_{2n} 亦有一極限.

然
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{p_{2n}}{q_{2n}}-\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{q_{2n}q_{2n+1}}=0,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{2n}}{q_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

系 1. 連分數之值居任何相鄰兩漸近分數之間.

系 2. 一連分數之值與其第n漸近分數之差,小於$\dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$而大於$\dfrac{a_{n+2}}{q_nq_{n+2}}$.

設λ表此連分數之值,且假定n爲奇數,則

$$\frac{p_n}{q_n}<\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}<\lambda<\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

故
$$0<\lambda-\frac{p_n}{q_n}<\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{1}{q_nq_{n+1}},$$

又
$$\lambda-\frac{p_n}{q_n}>\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_{n+2}}{q_nq_{n+2}}.$$

同樣可證n爲偶數時,所述亦真.

系 3. 每一漸近分數比其前面任何之漸近分數,更接近於其連分數之值.

由系2, λ與$\dfrac{p_n}{q_n}$之差小於$\dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$,而λ與$\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$之差大於$\dfrac{a_{n+1}}{q_{n-1}q_{n+1}}$,然$q_{n-1}<q_na_{n+1}$,故$\dfrac{1}{q_nq_{n+1}}<\dfrac{a_{n+1}}{q_{n-1}q_{n+1}}$.

由是
$$\left|\lambda-\frac{p_n}{q_n}\right|<\left|\lambda-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|.$$

系 4. 漸近分數$\dfrac{p_n}{q_n}$比任何有理分數之分母不大於q_n者,更接近於其連分數之值.

設$\dfrac{a}{b}$比$\dfrac{p_n}{q_n}$更接近於其連分數之值,則$\dfrac{a}{b}$比$\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$亦更

接近於連分數之值,故由系1,$\frac{a}{b}$必在$\frac{p_n}{q_n}$與$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$之間.

設n為偶數,則 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{a}{b}<\frac{p_n}{q_n}$.

因之
$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}>\frac{a}{b}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

即
$$\frac{1}{q_nq_{n-1}}>\frac{aq_{n-1}-bp_{n-1}}{bq_{n-1}}.$$

或
$$b>q_n(aq_{n-1}-bp_{n-1}).$$

然$aq_{n-1}-bp_{n-1}$為正整數,故$b>q_n$.即若$\frac{a}{b}$比$\frac{p_n}{q_n}$更接近於其連分數之值,則分母b必須大於q_n.同樣可證n為奇數時,所述亦真.

257 循環連分數. 於無限連分數中,一群相連之部分商繼續循環以至無限者,是謂循環連分數,如由最初之部分商即行開始循環者,謂之純循環連分數;否則謂之雜循環連分數.

循環連分數之值,可如下法求得之:

例1. 求$2+\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\cdots\cdots$之值.

此為純循環連分數,其循環節為$2+\frac{1}{3}$.設x為此循環連分數之值,則

$$x=2+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{x},\quad x=\frac{7x+2}{3x+1},$$

$$\therefore\quad 3x^2-6x-2=0.$$

因 x 大於 2,故 $x=\dfrac{3+\sqrt{15}}{3}$.

例 2.　求 $4+\dfrac{1}{5+}\,\dfrac{1}{\dot{2}+}\,\dfrac{1}{\dot{3}}$ 之值.

此為雜循環連分數,其循環節為 $2+\dfrac{1}{3}$;故若 x 表其循環部分之值,y 表其全分數之值,則由例 1,

$$y=4+\frac{1}{5+}\,\frac{1}{x}=\frac{21x+4}{5x+1}=\frac{21(3+\sqrt{15})/3+4}{5(3+\sqrt{15})/3+1}$$

$$=\frac{75+21\sqrt{15}}{18+5\sqrt{15}}.$$

一般言之,設 x 表一純循環連分數之值,其循環節 $a_1+\cdots\cdots\dfrac{1}{+a_k}$,則　$x=a_1+\cdots\cdots\dfrac{1}{+a_k+}\,\dfrac{1}{x}=\dfrac{p_kx+p_{k-1}}{q_kx+q_{k-1}}$,

故
$$q_kx^2+(q_{k-1}-p_k)x-p_{k-1}=0,$$

此二次方程式之一根,即為連分數之值.

次,設 y 為一雜循環連分數

$$a_1+\cdots\cdots\frac{1}{+a_r+}\,\frac{1}{\dot{a}_{r+1}+}\cdots\cdots\frac{1}{+\dot{a}_{r+k}}\text{(兩點間為循環節)};$$

如前,先求循環部分之值 x,則

$$y=a_1+\cdots\cdots\frac{1}{+a_r+}\;\frac{1}{x}=\frac{p_rx+p_{r-1}}{q_rx+q_{r-1}}.$$

258. 化無理數爲連分數. 設 b 爲一無理數,先求小於 b 之最大整數 a_1, 則 $b=a_1+\frac{1}{b_1}$; 於此 b_1 爲一大於 1 之無理數. 次求小於 b_1 之最大整數 a_2, 則 $b_1=a_2+\frac{1}{b_2}$; 於此 b_2 爲一大於 1 之無理數. 循此求之, 得

$$b=a_1+\frac{1}{b_1}=a_1+\frac{1}{a_2+}\;\frac{1}{b_2}=\cdots\cdots=a_1+\frac{1}{a_2+}\;\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots.$$

例 化 $\sqrt{11}$ 爲連分數.

小於 $\sqrt{11}$ 之最大整數爲 3. 故

$$\sqrt{11}=3+(\sqrt{11}-3)=3+\frac{2}{\sqrt{11}+3}=3+\frac{1}{\frac{\sqrt{11}+3}{2}}. \tag{1}$$

小於 $\frac{\sqrt{11}+3}{2}$ 之最大整數爲 3, 故

$$\frac{\sqrt{11}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{11}-3}{2}=3+\frac{2}{2(\sqrt{11}+3)}=3+\frac{1}{\sqrt{11}+3}. \tag{2}$$

小於 $\sqrt{11}+3$ 之最大整數爲 6, 故

$$\sqrt{11}+3=6+(\sqrt{11}-3)=6+\frac{2}{\sqrt{11}+3}=6+\frac{1}{\frac{\sqrt{11}+3}{2}}. \tag{3}$$

(3) 之最後一項與 (1) 之最後一項完全相同; 故若循

此求之,則(3)以後仍爲(2),(3),卽其部分商 3,6 循環以至無限.故以(2)代入(1),又以(3)代入於其結果中,則得

$$\sqrt{11}=3+\frac{1}{3+}\frac{1}{6}$$

一無理數化爲連分數,僅有一種方法,因若二無限連分數相等,則其對應之部分商必須相等.詳證之:

設 a, b 爲二整數;α, β 爲小於 1 之二正數.若 $a+\alpha=b+\beta$,則 $a=b$.

$$\text{故若 } a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots=b_1+\frac{1}{b_2+}\frac{1}{b_3}+\cdots\cdots,$$

則 $a_1=b_1$.由是

$$\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots=\frac{1}{b_2+}\frac{1}{b_3+}\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad a_2+\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots=b_2+\frac{1}{b_3+}\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad a_2=b_2\cdots\cdots.$$

習題三十七

求下列二連分數之漸近分數:

1. $3+\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5}$.　　2. $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{10+}\frac{1}{12}$.

化下列分數爲連分數:

3. $\frac{10}{12}$. 4. $\frac{457}{56}$. 5. $\frac{142}{513}$.

6. $\frac{3}{14}$. 7. $\frac{233}{177}$. 8. $\frac{421}{972}$.

化下列無理數爲連分數:

9. $\sqrt{17}$. 10. $\sqrt{26}$. 11. $\sqrt{7}$.

12. $\sqrt{19}$. 13. $3\sqrt{3}$. 14. $(\sqrt{10}-2)/5$.

求下列循環連分數之值.

15. $\frac{1}{\dot{1}+}\frac{1}{2+}\frac{1}{\dot{3}}$. 16. $\frac{1}{\dot{2}+}\frac{1}{1+}\frac{1}{\dot{3}}$.

17. $3+\frac{1}{4+}\frac{1}{\dot{5}+}\frac{1}{\dot{2}}$. 18. $\frac{1}{\dot{2}+}\frac{1}{3+}\frac{1}{\dot{4}}$.

19. 變 $\pi=3.1415926\cdots\cdots$ 爲連分數而求其第四漸近分數.

20. 求 $e=2.7182818\cdots\cdots$ 之第六漸近分數.

21. 設 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲連分數 λ 之第 n 漸近分數,證明

$$\frac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})}<\left|\lambda-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}.$$

第十五章　一次方程式之整數解

259. 總說. 方程式之個數少於未知數之個數,則其解答有無限組之多,然若解答如以正整數爲限,則其組數未必爲無限.

例如 $x+y=2$; 其 x 與 y 之值,若以實數爲限,則其解答有無限組.若以正整數爲限,則適合於此方程式之值惟 $x=2, y=0$; $x=1, y=1$; 或 $x=0, y=2$ 三對而已.

本章所求未知數之值,皆以正整數爲限.

260. 含二未知數之一次方程式.

含二未知數 x, y 之一次方程式,不外乎 $ax+by=c$, $ax+by=-c$, $ax-by=c$, $ax-by=-c$ 四種,於此 a, b, c 皆爲正整數.然方程式 $ax+by=-c$,顯然無正整數解,而 $ax-by=-c$ 則與 $by-ax=c$ 形式相同,故祇須討論 $ax\pm by=c$ 足矣.

a 與 b 間之公因數必須除盡 c,否則方程式無整數解.故以下設 a 與 b 之間無公因數.

茲先舉數例以解之,至其一般解法,則於下節述之.

例 1.　求 $7x+12y=220$ 之正整數解.

【解】　以較小之係數 7 除之,得

$$x+y+\frac{5y-3}{7}=31. \tag{1}$$

因 x, y 為正整數,故

$$\frac{5y-3}{7}=\text{整數}.$$

由是　$$\frac{15y-9}{7}=\text{整數},$$

即　$$2y-1+\frac{y-2}{7}=\text{整數}.$$

故若　$$\frac{y-2}{7}=\text{整數}=p,$$

則　$$y-2=7p,$$

$$\therefore\quad y=7p+2. \tag{2}$$

以此代入 (1),得

$$x+7p+2+5p+1=31,$$

即　$$x=28-12p. \tag{3}$$

(2) 與 (3) 為整數解之形式.

然若 $p>2$, 則 x 為負數. 又如 p 為負整數,則 y 亦為負數,故欲 x, y 皆為正數,必須 $p=0, 1, 2$.

由是所求之解答為

$$
\begin{array}{llll}
 & \mathbf{0} & & \\
(p=9, & 1, & 2) & \\
x=28\big\} & 16\big\} & 4\big\} \\
y=2\big\} & 9\big\} & 16\big\}
\end{array}
$$

例 2.　解　　$14x-11y=29.$　　(1)

【解】　以11除之，知

$$\frac{3x-7}{11}=2-x+y=\text{整數}.$$

故　　$$\frac{12x-28}{11}=\text{整數},$$

即　　$$x-2+\frac{x-6}{11}=\text{整數}.$$

$$\therefore\quad \frac{x-6}{11}=\text{整數}=p;$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} x&=11p+6\\ y&=14p+5\end{aligned}\right\}.$$

代入(1)，

此爲方程式之一般解答．與 p 以任何之正整數或0，即得 x, y 之正整數值，即

$$
\begin{array}{lllll}
(p=0, & 1, & 2, & 3,\cdots\cdots) & \\
x=6\big\} & 17\big\} & 28\big\} & 39\big\}\cdots\cdots \\
y=5\big\} & 19\big\} & 33\big\} & 47\big\}\cdots\cdots
\end{array}
$$

例 3.　解　　$x+y+z=43,$　　(1)

$10x+5y+2z=229.$　　(2)

消去 z，得 $$8x+3y=143.$$

此方程式之一般解答為

$$x=3p+1,$$
$$y=45-8p.$$

代入 (1)，得 $$z=5p-3,$$

於此 p 不能為 0 或負數，但可取 1 至 5 之正整數，故

$$\begin{array}{lllll}(p=1, & 2, & 3, & 4, & 5) \\ \left.\begin{array}{r}x=4\\ y=37\\ z=2\end{array}\right\} & \left.\begin{array}{r}7\\ 29\\ 7\end{array}\right\} & \left.\begin{array}{r}10\\ 21\\ 12\end{array}\right\} & \left.\begin{array}{r}13\\ 13\\ 17\end{array}\right\} & \left.\begin{array}{r}16\\ 5\\ 22\end{array}\right\}\end{array}$$

261. 方程式 $ax-by=c$ 之正整數解.

將 $\dfrac{a}{b}$ 化為連分數，則得漸近分數 $\dfrac{p}{q}$，適合 $aq-bp=\pm 1$.

(i) 設 $aq-bp=1$，則原方程式可書為

$$ax-by=c(aq-bp).$$

$$\therefore\quad a(x-cq)=b(y-cp).$$

因 a, b 無公因數，故 $x-cq$ 必須以 b 除盡．由是 $x-cq=bt$，於此 t 為一整數，故必

$$x=bt+cq,\quad y=at+cp.$$

由是，若與 t 以任何之正整數或 0，或絕對值小於

$\frac{cq}{b}$與$\frac{cp}{a}$之負整數，即得x,y為正整數之解答．如是得有數組之正整數解．

(ii)　設　$aq-bp=-1$，則$ax-by=-c(aq-bp)$．

$$\therefore\quad a(x+cq)=b(y+cp).$$

$$\therefore\quad \frac{x+cq}{b}=\frac{y+cp}{a}=t=\text{整數}.$$

故　$$x=bt-cq,\ y=at-cp.$$

與t以大於$\frac{cq}{b}$與$\frac{cp}{a}$之任何正整數，即得x,y之正數值．如是得無數組之正整數解．

(iii)　設a或b之值為1，則可由觀察法解之．設$b=$ 則方程式變為$y=ax-c$．若x與以大於$\frac{c}{a}$之任何正整數，得方程式之解．

例　求$29x-42y=5$之正整數解．

【解】　化$\frac{42}{29}$為連分數，這在$\frac{42}{29}$前面之漸近分數為$\frac{1}{}$

故得　$$29\times13-42\times9=-1,$$

$$29\times65-42\times45=-5.$$

以此與原方程式相加，得

$$29(x+65)=42(y+45).$$

$$\frac{x+65}{42}=\frac{y+45}{29}=t.$$

故所求之解,其一般形式爲

$$x=42t-65,\quad y=29t-45.$$

262 定理. 若已知方程式 $ax-by=c$ 之一正整數之解爲 h,k; 則其一般之解爲

$$x=h+bt,\quad y=k+at.$$

因
$$ah-bk=c,$$
$$ax-by=ah-bk.$$
$$\therefore\quad a(x-h)=b(y-k),$$
$$\frac{x-h}{b}=\frac{y-k}{a}=t.$$
$$\therefore\quad x=h+bt,\quad y=k+at.$$

263. $ax+by=c$ 之正整數解.

將 $\frac{a}{b}$ 化爲連分數,則得漸近分數 $\frac{p}{q}$,適合 $aq-bp=\pm1$.

(i) 設 $aq-bp=1$, 則 $ax+by=c(aq-bp)$.

$$\therefore\quad a(cq-x)=b(y+cp),$$
$$\frac{cq-x}{b}=\frac{y+cp}{c}=t=\text{整數}.$$
$$\therefore\quad x=cq-bt,\ y=at-cp.$$

由是,若 t 與以大於 $\frac{cp}{a}$ 而小於 $\frac{cq}{b}$ 之正整數,即得正整

數解，其解答之組數爲有限．若無合於此條件之整數 t 方程式無正整數解．

(ii) 設 $aq-bp=-1$，則 $ax+by=-c(aq-bp)$．

$$\therefore \quad a(x+cq)=b(cp-y),$$

$$\frac{x+cq}{b}=\frac{cp-y}{a}=t=\text{整數}.$$

$$\therefore \quad x=bt-cq,\ y=cp-at.$$

由是，若 t 與以大於 $\frac{cq}{b}$ 而小於 $\frac{cp}{a}$ 之正整數，即得正整數解，其解答之組數爲有限．如無合於此條件之整數 t，則無

(iii) 若 a 與 b 中有一數爲 1，則其解可由觀察法求

264. 定理． 若已知 $ax+by=c$ 之一對正整數之解爲 h,k；則其一般之解爲

$$x=h+bt,\quad y=k-at.$$

因 $ah+bk=c$，故 $ax+by=ah+bk$．

$$\therefore \quad a(x-h)=b(k-y),$$

$$\frac{x-h}{b}=\frac{k-y}{a}=t=\text{整數}$$

$$\therefore \quad x=h+bt,\ y=k-at.$$

265. 含三未知數之一次方程式．

(i) $ax+by+cz=d$ 之正整數之解，可用下法求之

移項，　　$ax+by=d-cz.$

與 z 以 0, 1, 2, 3,……等值，則得方程式變爲

$$ax+by=c',$$

是可用前法解之.

(ii)　解聯立方程式

$$ax+by+cz=d,$$

$$a'x+b'y+c'z=d'.$$

先消去 z，得方程式　$Ax+By=C.$

設 $x=f$, $y=g$ 爲其一對之解，則其一般之解爲

$$x=f+Bs,\ y=g-As. \qquad (1)$$

將 x 與 y 之值代入原方程式，得 $Fs+\ z=H$，求得其一解

$$s=h+\ t,\ z=k-Ft.$$

以 s 之值代入 (1)，得 $x=f+Bh+BGt$, $y=g-Ah-AGt.$

若與 t 以適當之整數，即得 x, y, z 之值.

(iii)　已知聯立方程式

$$ax+by+cz=d,$$

$$a'x+b'y+c'z=d'$$

一組特殊解，求其一般解.

設 f, g, h 爲其一組特殊之解，則

$$af+bg+ch=d.$$

$$a'f+b'g+c'h=d'.$$

由減法，$a(x-f)+b(y-g)+c(z-h)=0,$

$$a'(x-f)+b'(y-g)+c'(z-h)=0.$$

由是
$$\frac{x-f}{bc'-b'c}=\frac{y-g}{ca'-c'a}=\frac{z-h}{ab'-a'b}=\frac{t}{k}.$$

於此 t 為一整數，k 為分母 $bc'-b'c$, $ca'-c'a$, $ab'-a'b$ 之最大公因數，故所求之一般解為

$$x=f+(bc'-b'c)\frac{t}{k},$$

$$y=g+(ca'-c'a)\frac{t}{k},$$

$$z=h+(ab'-a'b)\frac{t}{k}.$$

習題三十八

求下列諸方程式之正整數解：

1. $3x+8y=103.$　　2. $5x+2y=53.$

3. $7x+12y=152.$　　4. $13x+11y=414.$

5. $5x-7y=3.$　　6. $6x-13y=1.$

7. $8x-21y=33.$　　8. $17y-13x=0.$

9. $19y-23x=7.$　　10. $77y-30x=295.$

11. $4x+3y=2z+3.$　　12. $7x+4y+19z=84.$

13. 分81為二部分,一為8之倍數,一為5之倍數,求其二部分之值.

14. 有一數,以39除之,得餘數16;以56除之,得餘數27.此種數有多少?

15. 求二分數,其分母為7與9,其和為$1\frac{10}{63}$.

16. 求二真分數,其分母為12與8,二分數之差為$\frac{1}{24}$.

求下列各組聯立方程式之正整數解:

17. $\left.\begin{aligned}6x+7y+4z=122\\11x+8y-6z=145\end{aligned}\right\}$　　18. $\left.\begin{aligned}12x-11y+4z=22\\-4x+5y+z=17\end{aligned}\right\}$

19. $\left.\begin{aligned}20x-21y=38\\3y+4z=34\end{aligned}\right\}$

20. 有整數以3,7,11除之,得餘數為1,6,5.求其最小者.

第十六章 數論

266. 質數與合數. 本章所討論之數,限於正整數. 設一整數除其自身及1以外任何整數均不能除盡之者,是謂質數. 一數能以自身及1以外之整數除盡之者,謂之合數. 例如53爲質數,而35則爲合數; 二數之間,除1以外,無公因數者,謂之互質數,例如24與77爲互質數.

267. 整數之基本性質. (i) 設a能除盡bc,然a與b爲互質數,則a必能除盡c.

(ii) 設一質數a能除盡$bcd\cdots\cdots$,則a必能除盡此乘積中之一因數; 又若質數a能除盡b^n,於此n爲任何之正整數,則a必能除盡b.

(iii) 設a與b, c均爲互質數,則a與bc亦必爲互質數. 逆之,設a與bc爲互質數,則a與b, c二數亦均爲互質數. 一般言之: 若a與$b, c, d, \cdots\cdots$各數均爲互質數,則與其乘積$bcd\cdots\cdots$亦必爲互質數. 其逆亦真.

(iv) 設a與b爲互質數,則a與b之任何正整數冪亦

必爲互質數.

268. 定理. 質數無最大者.

若有最大之質數 p, 則 p 以下諸質數之乘積 $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdots\cdots p$ 必能以 $2, 3, 5, \cdots\cdots p$ 各數除盡.而此乘積與 1 之和,將與一切質數爲互質數,此和大於 p, 矛盾顯然, 故質數無最大者.

269. 定理. 分解一數爲質因數之乘積,無論其因數之順序若何,結果恆同.

設 $N=abcd\cdots\cdots=\alpha\beta\gamma\delta\cdots\cdots$, 其中 $a, b, \cdots\cdots$; $\alpha, \beta, \cdots\cdots$ 皆爲質數. 質數 α 必能除盡 $abcd\cdots\cdots$; 故 α 必能除盡乘積中之一個因數, 假設 α 能除盡 a, 則必等於 a, 由是 $bcd\cdots\cdots=\beta\gamma\delta\cdots\cdots$, 如前, β 必須等於 $bcd\cdots\cdots$ 之一因數,循此以往, 即可完全證明.

270. 合數之因數個數. 設 N 爲一合數, 又設 $N=a^pb^qc^r\cdots\cdots$, 於此 $a, b, c\cdots\cdots$ 爲兩兩相異之質數; $p, q, r\cdots\cdots$ 爲正整數; 則乘積

$$(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)\cdots\cdots$$

之各項皆爲 N 之一因數. 且此外別無他數可爲 N 之因數者. 故 N 之因數個數等於上列乘積中之項數

$$(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots.$$

於此,1與本數 N 亦算入因數之列.

271. 分解一數爲二數之積,其法有幾?

因爲每一種分解法必有二個因數.故所求之數爲

$$\frac{1}{2}(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots.$$

但此假定 N 非爲完全平方,即 $p, q, r, \cdots\cdots$ 中至少有一個爲奇數.

設 N 爲一完全平方數,則 $\sqrt{N}\times\sqrt{N}$ 亦爲一種分解法,而對於此法僅有一個因數 $\sqrt{N}$.故此時所求之種數爲

$$\frac{1}{2}\{1+(p+1)(q+1)\cdots\cdots\}.$$

272. 分解一數爲二互質數之因數之積,其法有幾? 如前,設 $N=a^pb^qc^r\cdots\cdots$,其二個因數中必有一個含 a^p,否則,a 之某次冪在一因數內,而 a 之其他某次冪在別一因數內,此二因數即非互質數矣.b^q 等亦然.故所求之數等於分解 $abc\cdots\cdots$ 爲二因數之方法總數.由是設 n 爲 N 中不同質因數之個數,則知所求之數爲 2^{n-1}.

273. 因數之和. 如前,設 $N=a^pb^qc^r\cdots\cdots$,則乘積

$$(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots\cdots+c^r)\cdots\cdots$$

之每一項爲 N 之一因數.故因數之和即等於此乘積.即

$$所求之和=\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{q+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{r+1}-1}{c-1}\cdots\cdots.$$

例 1. 求 21600 之因數個數及其因數之和.

【解】 因 $21600=2^3\cdot3^3\cdot2^2\cdot5^2=2^5\cdot3^3\cdot5^2$. 故

$$\text{因數之個數}=(5+1)(3+1)(2+1)=72;$$

$$\text{因數之和}=\frac{2^6-1}{2-1}\cdot\frac{3^4-1}{3-1}\cdot\frac{5^3-1}{5-1}$$

$$=63\times40\times31=78120.$$

例 2. 設 n 為奇數,則 $n(n^2-1)$ 可以 24 除盡.

【證】 因 $n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$,

n 為一奇數,$n-1$ 與 $n+1$ 為二連續之偶數;故此二數中,一數可以 2 除盡,他數可以 4 除盡.

又 $n-1, n, n+1$ 為三個相接續之整數,故此三數中必有一數可以 3 除盡. 故 $n(n^2-1)$ 可以 2, 3, 4 之乘積 24 除盡.

274. 定理. 相接續之 r 個整數之積,常可以 $r!$ 除盡.

設 P_n 表 r 個接續整數之積,其中最小者為 n; 則

$$P_n=n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1),$$

$$P_{n+1}=(n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots(n+r).$$

$$\therefore\quad nP_{n+1}=(n+r)P_n=nP_n+rP_n.$$

故 $P_{n+1}-P_n=\dfrac{P_n}{n}\times r=r$ 乘 $r-1$ 個接續整數之積.

若 $r-1$ 個接續整數之積常可以 $(r-1)!$ 除盡,則

$$P_{n+1}-P_n=r\times(r-1)!\text{之倍數}=r!\text{之倍數}.$$

若 $r-1$ 個接續整數之積常可以 $(r-1)!$ 除盡,則 r 個接續整數之積常可以 $r!$ 除盡.然兩個接續整數常可以 $2!$ 除盡,故 3 個接續整數常可以 $3!$ 除盡,由數學歸納法,知定理成立.

275. 定理. 設 p 為質數,於 $(1+x)^p$ 之展開式中,除初與末項外,其餘各項之係數均可以 p 除盡.

除初項與末項以外,各項係數之形式為

$$\frac{p(p-1)(p-2)\cdots\cdots(p-r+1)}{r!},$$

此 r 為不大於 $p-1$ 之正整數.今此式為一整數,p 為一數,且大於 r,故 p 不能以 $r!$ 中之任何因數除盡.由是 $-1)(p-2)\cdots\cdots(p-r+1)$ 可以 $r!$ 除盡.故除初項及末項外,他各項係數可以 p 除盡.

推論: 設 p 為質數,則

$$(a+b+c+d+\cdots\cdots)^p=a^p+b^p+c^p+d^p+\cdots\cdots+M(p),$$

(p) 表示 p 之倍數.

設以 β 表 $b+c+d+\cdots\cdots$,則得

$$(a+\beta)^p=a^p+\beta^p+M(p).$$

設 $c+d+\cdots\cdots=\gamma$,則得

$$\beta^p=b^p+\gamma^p+M(p).$$

如此繼續推之,即得所要之結果

276. 飛爾馬* 之定理.

設 N 爲一正整數,對於質數 p 爲互質數則 $N^{p-1}-1$ 爲 p 之倍數.

由前節,

$$(a+b+c+d+\cdots\cdots)^p=a^p+b^p+c^p+d^p+\cdots\cdots+M(p).$$

設 $a, b, c, d, \cdots\cdots$ 皆等於1,且其個數爲 N,則

$$N^p=N+M(p),$$

即
$$N(N^{p-1}-1)=M(p).$$

然 N 與 p 爲互質數,故 $N^{p-1}-1$ 爲 p 之倍數.

推論: 若 p 爲不等於2之一質數,則 $p-1$ 爲偶數.

由
$$\left(N^{\frac{p-1}{2}}+1\right)\left(N^{\frac{p-1}{2}}-1\right)=M(p),$$

知 $N^{\frac{p-1}{2}}+1$ 或 $N^{\frac{p-1}{2}}-1$ 爲 p 之倍數,即

$$N^{\frac{p-1}{2}}=Kp\pm1,$$

於此 K 爲一正整數.

例　求證 n^7-n 可以42除盡.

【解】　因7爲一質數,故 $n^7-n=M(7)$,

---

* 飛爾馬(Formant, 1601--1665),法人,在數論中占有特殊之地位.

又　$$n^7-n=n(n^6-1)=n(n+1)(n-1)(n^4+n^2+1).$$

今 $(n-1)n(n+1)$ 可以6除盡，故 n^7-n 可以 6×7 之積42除盡.

277. 同餘式. 設 a 為一正整數，則任何其他之整數 N 可以 $N=aq+r(0\leqq r<a)$ 之形式表之. 卽以 a 除 N，商為 q，餘數 r 之謂也；於此 a 謂之模數.

設二整數 b, c 以 a 除之，其餘數相同，則此二數稱為對於模數 a 之同餘數. 此時 $b-c$ 為 a 之倍數. 記之為

$$b\equiv c(\text{mod.}\ a),\ \text{或}\ b-c\equiv 0(\text{mod.}\ a).$$

此為同餘式.

設 b, c 對於模數 a 為同餘數，p 為整數，則 pb 與 pc 亦為同餘數. 卽若 $b\equiv c(\text{mod.}\ a)$，則 $pb\equiv pc(\text{mod.}\ a)$.

278. 定理. 設 a 與 b 為互質數，則以 b 除下列各數，

$$a,\ 2a,\ 3a,\cdots\cdots,\ (b-1)a,$$

其餘數各不相同.

設列中兩數 ma 與 $m'a$ 以 b 除之，其餘數同為 r，則

$$ma=qb+r,\ m'a=q'b+r;$$

故　$$(m-m')a=(q-q')b;$$

由是 b 必須除盡 $(m-m')a$. 然 b 與 a 為互質數，故 b 必須除盡 $m-m'$，然此亦為不可能，因 m 與 m' 皆小於 b 而大於0.

由是其餘數必不相同,又無有爲0,故各餘數爲1, 2, 3, ……, $b-1$,但未必依此次序耳.

推論: 設a與b爲互質數,c爲一整數,則b項之等差級數

$$c, c+a, c+2a, \ldots\ldots, c+(b-1)a,$$

以b除之,其所得之餘數與

$$c, c+1, c+2, \ldots\ldots, c+(b-1)$$

以b除之所得之餘數相同,即0, 1, 2, ……, $b-1$是也(次序或有顛倒).

279. 定理. 設b_r與c_r,對於模數a爲同餘數 ($R=1, 2, 3, \ldots\ldots$),則其乘積$b_1b_2b_3\ldots\ldots$與$c_1c_2c_3\ldots\ldots$亦爲同餘數.

因由假設

$$b_1-c_1=n_1a,\ b_2-c_2=n_2a,\ b_3-c_3=n_3a, \ldots\ldots,$$

於此$n_1, n_2, n_3\ldots\ldots$爲整數,故

$$b_1b_2b_3\ldots\ldots=(c_1+n_1a)(c_2+n_2a)(c_3+n_3a)\ldots\ldots$$
$$=c_1c_2c_3\ldots\ldots+M(a).$$

280. 飛爾馬定理之別證.

設p爲一質數,N與p爲互質數,則$N^{p-1}-1$爲p之倍數.此爲飛爾馬定理,今用前節定理證之,以p除

$$N, 2N, 3N, \ldots\ldots, (p-1)N, \qquad (1)$$

所得 p 個之餘數爲

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ (p-1). \tag{2}$$

故(1)中諸數乘積與(2)中各數乘積對於模數 p 爲同餘數。即 $(p-1)!(N^{p-1}-1)\equiv 0 \pmod{p}$.

然 $(p-1)!$ 與 p 爲互質數,故 $N^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p}$.

281. 歐樓*定理. 不大於 n 而與 n 爲互質數之正整數之個數,常記以 $\phi(n)$. 例如 $\phi(1)=0$, $\phi(2)=1$, $\phi(13)=12$, $\phi(18)=6$. 歐樓有下述之定理.

定理. 設 $a, b, c, d, \cdots\cdots$ 兩兩爲互質數,則

$$\phi(abcd\cdots\cdots)=\phi(a)\cdot\phi(b)\cdot\phi(c)\cdot\phi(d)\cdots\cdots.$$

先就 a, b 二數之積 ab 以討論之. 自1以至 ab 諸整數排列之如次:

$$\begin{array}{lllllll}
1, & 2, & \cdots\cdots & k, & \cdots\cdots & a, \\
a+1, & a+2, & \cdots\cdots & a+k, & \cdots\cdots & a+a, \\
2a+1, & 2a+2, & \cdots\cdots & 2a+k, & \cdots\cdots & 2a+a, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(b-1)a+1, & (b-1)a+2, & \cdots\cdots & (b-1)a+k, & \cdots\cdots & (b-1)a+a.
\end{array}$$

設 k 與 a 爲互質數,則第 k 行(縱者爲行橫者爲列)之

* 歐樓(Euler, 1707-1783),瑞士數學大家,晚年失明,繼續努力於數學者十七年而卒.

數,皆與a爲互質數,若k與a有一公因數,則第k行內無有一數與a爲互質數.今第一列有$\phi(a)$個之數與a爲互質數,故有$\phi(a)$個縱行,其中各數皆與a爲互質數.設第k行爲此等縱行之一,此縱行內各數成一等差級數,以b除之,餘數爲$0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, b-1$.故此縱行內有$\phi(b)$個整數與$b$爲互質數.

同理,$\phi(a)$個縱行內之每一縱行有$\phi(b)$個數與b爲互質數,由是在表中有$\phi(a)\cdot\phi(b)$個數對於a與b均爲互質數.故對於ab亦爲互質數.以式表之.

$$\phi(ab)=\phi(a)\cdot\phi(b)$$

故 $\phi(abcd\cdots\cdots)=\phi(a)\cdot\phi(bcd\cdots\cdots)=\phi(a)\cdot\phi(b)\cdot\phi(c)\cdot\phi(d)\cdots\cdots$.

設a爲一質數,p爲正整數,則於$1, 2, 3, \cdots\cdots, a^p$中與$a$有公因數之數爲

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots\cdots,\ (a^{p-1}-1)a,\ (a^{p-1})a,$$

其個數爲a^{p-1},故

$$\phi(a^p)=a^p-a^{p-1}=a^p\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

設$N=a^pb^qc^r\cdots\cdots$,而$a, b, c, \cdots\cdots$爲相異之質數,則

$$\phi(N)=\phi(a^pb^qc^r\cdots\cdots)=\phi(a^p)\cdot\phi(b^q)\cdot\phi(c^r)\cdots\cdots$$

$$=a^p\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot b^q\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdot c^r\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots$$

$$=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots,$$

即 $$\phi(N)=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots.$$

例 $$18=2\cdot 3^2.$$

$$\phi(18)=18\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$=18\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=6.$$

282. 威爾孫* 定理.

設 p 爲質數,則 $1+(p-1)!$ 可 p 以除盡.

設 a 爲 $$1, 2, 3, 4, \cdots\cdots, (p-1) \qquad (1)$$

中之任意一數.以 a 乘 (1) 中諸數,得

$$1\cdot a, 2\cdot a, 3\cdot a, \cdots\cdots, (p-1)a. \qquad (2)$$

因 a 與 p 爲互質數,故以 p 除 (2),其餘數爲 $1, 2, 3, \cdots\cdots (p-1)$.故其餘數爲 1 者祗有一個.

換言之: 若 a 爲小於 p 之任何正整數,則必有唯一之正整數 b 小於 p 者適合於 $ab=M(p)+1$.

然則 a 與 b 有相等之時乎? 若 $a=b$, $a^2=M(p)+1$, 則

$$(a-1)(a+1)=M(p).$$

* 威爾孫 (J. Wilson, 1741-1793).

然a既小於質數p,故必$a=n-1$或$a=1$,否則不能適合於此式.

由是於$2,3,4,\cdots\cdots,p-2$諸數中,可兩兩組合使其乘積爲p之倍數加1.故連乘積

$$2\cdot3\cdot4\cdots\cdots(p-2)\ =M(p)+1$$

亦等於p之倍數加1.因之

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots\cdots(p-2)(p-1)=(p-1)\{M(p)+1\},$$

即

$$1+(p-1)!\equiv0(\text{mod.}\ p).$$

H/5

習題三十九

1. 求證$n(n+1)(2n+1)$爲6之倍數.

2. 若n爲奇數,則$(n^2+3)(n^2+7)$爲32之倍數.

3. 設x與y均爲正整數,若$x-y$爲偶數,則x^2-y^2爲4之倍數.

4. 求8064之因數個數.

5. 分解7056爲二因數,其法有幾?

6. 求證$2^{4n}-1$可以15除盡.

7. 設n爲大於3之質數,則$n(n^2-1)(n^2-4)$爲360之倍數.

8. 求證$n^5-n=M(30)$.

9. 問 600 有幾個整除數?

10. 求 1200 與 14553 之整除數之個數.

11. 求 $\phi(360)$.

12. 求證 $5^{2n+1}+n^5-5n^3+4n-5=M(120)$.

13. 求證 $4^{2n+1}+3^{n+2}\equiv 0 \pmod{13}$.

14. 若 $4n+1$ 爲質數,則必爲 $(2n)!^2+1$ 之因數.

第十七章　或然率

283. 或然率. 設有一事連續做 $a+b$ 回,若成功 a 回而失敗 b 回,則比值 $\frac{a}{a+b}$ 謂之成功之或然率,$\frac{b}{a+b}$ 謂之失敗之或然率.

例如囊中有白球二個紅球三個(球雖有紅白之分,其餘性質皆同),若每次任取其一個,固不能預知所取者爲白球或爲紅球,而取得白球之機會(即或然率)爲 $\frac{2}{5}$,取得紅球之機會爲 $\frac{3}{5}$.

設有一事,百發百中,則其成功之或然率爲 1,失敗之或然率爲 0;其他各種情形之或然率爲小於 1 之正數或 0.又若一事成功之或然率爲 p,則其失敗之或然率爲 $1-p$.

或然率有由永久之經驗而後其意義大明者,例如錢圓有表裏二面,投擲一次,其表面出現與其裏面出現之或然率同爲 $\frac{1}{2}$,然所投之次數不多,則表面出現之次數與裏面出現之次數可以相差甚遠.設投 10 次,得表面 6 次得裏面 4 次;投 20 次,得表面 11 次,得裏面 9 次;若所投之次

數愈多,則其出現表面與出現裏面之次數愈相接近.由是其或然率之爲$\frac{1}{2}$,由久長之經驗而大明.

284. 總和或然率.

諸事中若有一事成功而他事均歸失敗者,則謂此諸事互相排斥.

例如骰子爲一六面體,每一面上,分記1, 2, 3, 4, 5, 6各點.其於擲出1時,其他2, 3, 4, 5, 6諸點不能顯出,是乃互相排斥之六事.

定理. 設有二事互有排斥,則或此或彼可能成立之或然率等於各事成立之或然率之和.

設A與B爲互相排斥之二事,則有

(i) A成立,B不成立,

(ii) B成立,A不成立,

(iii) A不成立,B不成立

三種情形.設每種情形可能遭遇之總次數各爲l, m, n,則

$$A\text{成立之或然率}=\frac{l}{l+m+n},$$

$$B\text{成立之或然率}=\frac{m}{l+m+n},$$

$$\text{或}A\text{或}B\text{成立之或然率}=\frac{l+m}{l+m+n},$$

故得定理如上述.

此種或然率之和,稱之爲總和或然率.

例如某獎券之號碼共爲五十萬號,頭獎一個.某人購該獎券二張,求其中頭獎之或然率.

$$第一張着頭獎之或然率=\frac{1}{500000},$$

$$第二張着頭獎之或然率=\frac{1}{500000},$$

第一張或第二張着頭獎之或然率,爲

$$\frac{1}{500000}+\frac{1}{500000}=\frac{1}{250000}.$$

故此人中頭獎之總和或然率爲二十五萬分之一.

285. 合積或然率. 設有甲乙二事,甲成乙敗,甲敗乙成,甲乙俱成,甲乙俱敗四種情形,皆有發生之能性者,稱爲甲乙兩事無關係.

兄弟二人,兄入高中,弟入初中,皆爲候選公費生,高中公費生缺額一名,候選者五名,初中公費生缺額一名,候選者三名,皆以抽籤法決定.問兄弟二人皆入選之或然率爲何?

高中籤五,初中籤三,組合之,共十五種情形.故所求之或然率爲十五分之一.擴而充之,得定理如下:

定理. 無關係之二事同時成立之或然率,等於各事成立之或然率之積.

設第一事於 m_1 次中成功 a_1 次,第二事於 m_2 次中成功 a_2 次.將二事組合之,總爲 m_1m_2 次,而其中僅有 a_1a_2 次爲二事同時成功者,故其或然率爲 $\frac{a_1a_2}{m_1m_2}$ 卽 $\frac{a_1}{m_1}\times\frac{a_2}{m_2}$.

例如從甲囊中取出白球之或然率爲 $\frac{3}{4}$,從乙囊中取出白球之或然率爲 $\frac{2}{5}$,則從甲乙二囊同時各取白球一個之或然率爲 $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$,卽 $\frac{3}{10}$.

同理,設有無關係之諸事,其成功之或然率各爲 $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots$ 則其同時並成之或然率爲 $p_1p_2p_3\cdots\cdots$,而同時並敗之或然率爲 $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\cdots\cdots$.

此種或然率可稱之爲合積或然率.

系. 設有二事,其第一事成功之或然率爲 p_1,第一事成功以後,第二事成功之或然率爲 p_2,則二事俱成之或然率爲 p_1p_2.

例如,囊中有五白球,四黑球,則取一白球之或然率爲 $\frac{5}{9}$,若第一次取出一個白球不再置入囊中,則取第二個白球之或然率爲 $\frac{4}{8}$.故從囊中取出白球二次之或然率

爲 $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$.

286. 屢次試驗之或然率.

定理. 設做一事其成功之或然率爲 p,則做 n 次成功 r 次之或然率爲

$$ {}_nC_rp^r(1-p)^{n-r}. $$

一事成功之或然率爲 p,則其失敗之或然率爲 $1-p=q$. 於 n 次之試驗中,成功 r 次,失敗 $n-r$ 次,指定某次成功,某次失敗之或然率爲 p^rq^{n-r}.

惟於 n 次中取 r 次,其方法之全數爲 ${}_nC_r$.

由是於 n 次之試驗中,成功 r 次之或然率爲 ${}_nC_rp^rq^{n-r}$ 是乃 $(p+q)^n$ 展開式

$$ p^n+{}_nC_1p^{n-1}q+{}_nC_2p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-r}p^rq^{n-r}+\cdots\cdots $$

中之一項.

推論. 於 n 次試驗中,其至少有 r 次成功之或然率爲

$$ p^n+{}_nC_1p^{n-1}q+{}_nC_2p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-r}p^rq^{n-r}. $$

因於 $(p+q)^n$ 之展開式中,其在第 $(n-r+1)$ 項以前各項,爲於 n 次中有 r 次以上成功之或然率,其在第 $(n-r+1)$ 項以後各項,爲於 n 次中有 r 次以下成功之或然率. 由總

和或然率之理,知所述爲眞.

例 骰子一粒,連擲六次,問擲出一點適二次及至少二次之或然率各如何?

【解】 骰子一粒,每擲一次其擲出一點之或然率爲 $\frac{1}{6}$. 故六次中擲出一點二次之或然率爲

$$ {}_6C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{3125}{15552}. $$

又六次中擲出一點者至少二次之或然率爲

$$ \left(\frac{1}{6}\right)^6+{}_6C_1\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)+{}_6C_2\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2+{}_6C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 $$

$$ +{}_6C_4\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{12281}{46656}. $$

287. 數學期望值.

設有一事,其成立之或然率爲 p. 若此事成立可得款項 M 圓,則曰此事之數學期望值爲 PM 圓.

例 某獎券發行號數爲五十萬號,頭獎一個,獎金五十萬圓.某人購該獎券一張,求其着頭獎之期望值.

【解】 $$p=\frac{1}{500000},\quad M=500000,$$

$$pM=\frac{1}{500000}\times500000=1.$$

故着頭獎之期望值爲一圓.

習題四十

1. 囊中有白球4,黑球5,任取其一,求取出白球之或然率.

2. 囊中盛赤球5,白球7,任取其二,求其所取者皆爲白球之或然率.

3. 有 n 個人,同坐於一圓桌之周圍,其中甲乙二人相鄰與不相鄰或然率之比爲 5 比 $n-3$, 證之.

4. 將錢擲二次,皆出表面之或然率如何?

5. 囊中有赤球5,白球6,任取其一連取二次,求其取出之球皆爲白色之或然率.

6. 四個骰子,同時擲之,求其表面點數和爲 10 之或然率.

7. 以三個骰子,擲出9之或然率如何?

8. 以二個骰子,擲出8之或然率如何

9. 甲乙二人各擲二骰,求其得數相等之或然率.

10. 錢一文,擲五次,求其間連出表面三次之或然率.

11 甲乙二人競爭,每回甲勝之或然率爲$\frac{3}{4}$,求甲於六回中勝四回之或然率

12 甲乙競爭,每回甲勝之或然率爲$\frac{2}{3}$,求甲於五回

中至少勝三回之或然率.

13. 骰子一個連擲七次,求其至少擲出六點三回之或然率.

14. 囊中有一圓之法幣五枚,半圓七枚,二角十枚,今人從此囊中(1)祇許取出一枚;(2)祇許取出二枚.試各求其期望值.

15. 甲乙二人依次交互擲錢,預約初出表面者,給與一元.問二人之期望值如何?

16. 一人投考五大學,各校之應考者,其數為1020, 701, 500, 1215, 3450.錄取人數順次為200, 150, 300, 160, 450.問此人至少錄取一校之或然率為何?錄取方法,假定用抽籤法決定.

288. 人之存亡. 人之壽命,修短無定,生死問題,殊難言之.然就多年調查統計而製就之存亡表,亦可推得吾人生死之或然率.我國因缺乏統計,尚未製就存亡表.本節後末所載者,係美國之數據.表中第一行 x 係指歲數,第二行 l_x 係指在 x 歲生存之人數,而

$$d_x=l_x-l_{x+1}.$$

設 p_x 表 x 歲時尚繼續生存之或然率,q_x 表在 x 歲時死亡之或然率,則

$$p_x=\frac{l_{x+1}}{l_x},$$

$$q_x=\frac{d_x}{l_x}=\frac{l_x-l_{x+1}}{l_x}=1-p_x.$$

此表至95歲爲止,此歲數稱爲表限.

例　一人今年33歲,求其繼續生存至60歲之或然率.

【解】　此種或然率記爲 $_np_x$, 而 n 爲前後歲數之差.由是

$$_{27}p_{33}=\frac{l_{60}}{l_{33}}=\frac{57917}{83277}=0.69552\cdots\cdots.$$

289. 生命年金之現價. 一人每年支取年金若干,直至死亡時爲止,稱爲生命年金.今若將此年金一次取盡,所得之金額名曰生命年金之現價.

今有 x 歲者 l_x 人,每人每年支取年金1圓,死亡者即止付,求其生命年金之現價.

按存亡表,第一次支取年金者 l_{x+1} 人,第二次 l_{x+2} 人,以此類推.設表限爲 m, 以利率 r 依複利計算,則現值共爲

$$\frac{l_{x+1}}{1+r}+\frac{l_{x+2}}{(1+r)^2}+\cdots\cdots+\frac{l_m}{(1+r)^{m-x}}.$$

若 a_x 爲每人應得之現價,幷令 $v=(1+r)^{-1}$, 則

$$a_x=\frac{1}{l_x}(vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+\cdots\cdots+v^{m-x}l_m).$$

若分子分母各以 v^x 乘之,則

$$\dot{a}_x=\frac{1}{v^x l_n}(v^{x+1}l_{x+1}+v^{x+2}l_{x+2}+\cdots\cdots+v^m l_m).$$

290. 人壽保險. 某甲於 x 歲時向保險公司投保壽險訂立合同:甲於訂約時起,在生存時每年初付公司保險費 p_x,公司允於甲死亡年之年底付甲之家屬款額,求保險費 p_x 之計算法.

設 p_x 爲純粹保險費,即假定公司無利益可得者.若公司承保壽險計 x 歲者共 l_x 人,則公司於此年起,每年初收入之款各爲 $p_x l_x$, $p_x l_{x+1}$, $p_x l_{x+2}$,…….

惟因死亡者即須賠款,故公司於此年起每年年底各須付出 (l_x-l_{x+1}), $(l_{x+1}-l_{x+2})$,…….

如將收付之款各作現價而平衡之,則

$$p_x(l_x+l_{x+1}v+l_{x+2}v^2+\cdots\cdots)=(l_x-l_{x+1})v$$
$$+(l_{x+1}-l_{x+2})v^2+(l_{x+2}-l_{x+3})v^3+\cdots\cdots. \qquad (1)$$

因 $d_x=l_x-l_{x+1}$, 故

$$p_x=\frac{d_x v+d_{x+1}v^2+d_{x+2}v^3+\cdots\cdots}{l_x+l_{x+1}v+l_{x+2}v^2+\cdots\cdots}. \qquad (2)$$

式中之和,加至表限 m. (1) 之兩邊以 l_x 除之,則

$$p_x\left\{1+\frac{1}{l_x}(l_{x+1}v+l_{x+2}v^2+\cdots\cdots)\right\}$$

$$=v+\frac{v}{l_x}(l_{x+1}v+l_{x+2}v^2+\cdots\cdots)$$

$$-\frac{1}{l_x}(l_{x+1}v+l_{x+2}v^2+\cdots\cdots).$$

故 $$p_x(1+a_x)=v+va_x-a_x.$$

$$\therefore\quad p_x=v-\frac{a_x}{1+a_x}. \tag{3}$$

事實上,保險費較此稍大,用以充公司之開支及餘利.

習題四十一

1. 一人今年 72 歲,求其活至 80 歲之或然率.

2. 一人今年 60 歲,子年 30 歲,求此二人均繼續生存 20 年之或然率.

3. 某甲今年 40 歲,欲得每年 1000 圓之生命年金,依年利 0.05 之複利計算,問一次應付款若干?

4. 某乙今年 60 歲,每年可得養老金 500 元,今欲將此養老金提前一次取盡,問可得若干?

5. 某人今年 34 歲,欲保終身壽險 2000 圓,依年利四釐複利計算,問每年應付若干?

6. 某人今年 50 歲,欲保終身壽險 5000 圓,依年利五釐複利計算,問一次應付多少?

第十八章 行列式

一 定義及記法

291. 行列式之由來.

西曆 1693 年,即清康熙三十二年,來普尼解含有 n 個未知數之聯立一次齊次方程式,消去 n 個未知數,結果很整齊,後以是結果用簡單之符號記之,是即行列式.後五十年(清乾隆八年),克萊滿*又發明是理,行列式遂引起世人之注意.

292. 定義及記法. 將 n^2 個數寫成正方形.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{matrix}$$

是謂正方陣,縱曰行,橫曰列,每一個數謂之元素.

a_{sr} 表第 s 列 r 行之元素.

---

* 克萊滿 (G. Cramer), 法國數學家

正方陣不過為一種記號,固無數值之可言.將正方陣之二邊各作一豎線:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

是謂行列式.行列式表示一數,其數值當於下數節規定之,其有 n 行 n 列者,謂之 n 階之行列式.

故 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 為二階行列式;$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 為三階行列式.

293. 二階及三階行列式之規定

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

即自左上方向右下方相乘之數附以正號,自左下方向右上方相乘之數附以負號.又規定

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3$$

$$+ a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

若於行列式之右旁重複記其第一,第二兩行,即易求得右邊之各項.

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

之乘積之以↘連之者附以正號,以↗連之者附以負號.是為薩拉司法*.但三階以上之行列式不能用是法推之.又因

$$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

故
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

此法可擴充至任意階之行列式,詳論於後.

行列式中 $a_{11}, a_{22}, \cdots\cdots, a_{nn}$ 謂之主對角線中之元素.此諸元素之乘積 $a_{11}\,a_{22},\cdots\cdots,a_{nn}$ 謂之行列式之主項.

主項左右各以一直線夾之,如 $|a_{11}\,a_{22}\cdots\cdots a_{nn}|$ 為行列式之簡單記號.

---

* 薩拉司 (Sarrus, 1798－1861).

例 1. $\begin{vmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix}=1+a^2.$

例 2. $\begin{vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{vmatrix}=1-abc+abc+b^2+a^2+c^2$

$$=1+a^2+b^2+c^2.$$

例 3. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$

$$=5(1+12)+1(-3-8)+2(-9+2)$$

$$=65-11-14=40.$$

294. 行列式之值. 於 n 階之行列式中 n^2 個之元素,每列取一個,凡 n 個,使其中無兩個同行,作其乘積,附以適當之附號(附號之規定見下節),是爲行列式展開式中之一項.故項之一般形式爲 $\pm a_{1r_1}a_{2r_2}\cdots\cdots a_{nr_n}$,於此 $r_1,r_2,\cdots\cdots,r_n$ 表示 $1,2,\cdots\cdots,n$ 之一排列.諸項之和,爲行列式之值.

因 $1,2,\cdots\cdots,n$ 之排列數爲 $n!$,故 n 階行列式之項數爲 $n!$.例如三階之行列式有 $3!$ 或 6 項;四階之行列式有 $4!$ 卽 24 項.

295. 項之符號. 項 $\pm a_{1r_1},a_{2r_2},\cdots\cdots,a_{nr_n}$ 之符號,何時取+,何時取-,由 $r_1,r_2\cdots\cdots r_n$ 之順序而定.若 r_i 在 r_j 之

左方而 $r_i>r_j$ 時,謂 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$ 有一逆序.設 $r_1, r_2, \cdots\cdots r_n$ 有 m 個逆序,則定其符號爲 $(-1)^m$;即 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$ 中有偶個逆序時,其符號爲+,奇數個逆序時,其符號爲−.例如三階行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

之展開式有 $a_1b_2c_3$, $a_1b_3c_2$, $a_2b_1c_3$, $a_2b_3c_1$, $a_3b_2c_1$ $a_3b_1c_2$ 六項,此項依其記數之次序其符號隨之而定.因 $a_1b_2c_3$ 之 1, 2, 3 逆序之數爲零,故於 $a_1b_2c_3$ 之前附以正號.

$a_1b_3c_2$ 其記數 1, 3, 2 有一逆序,故附以負號.

$a_2b_1c_3$ 其記數 2, 1, 3 有一逆序,故附以負號.

$a_2b_3c_1$ 其記數 2, 3, 1 有二逆序,故附以正號.

$a_3b_2c_1$ 其記數 3, 2, 1 有三逆序,故附以負號.

$a_3b_1c_2$ 其記數 3, 1, 2 有二逆序,故附以正號.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

習題四十二

展開下列諸行列式:

1. $\begin{vmatrix} p & q & r \\ q & p & s \\ r & s & p \end{vmatrix}$.　　2. $\begin{vmatrix} 1 & x & a \\ 1 & y & b \\ 1 & z & c \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} p & -q & r \\ q & r & -s \\ r & s & p \end{vmatrix}$.　　4. $\begin{vmatrix} 0 & -q & -r \\ q & 0 & -s \\ r & s & 0 \end{vmatrix}$.

求下列諸行列式之值:

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.　　6. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

二　行列式之性質

296. 定理 1. 一行列式依次交換其行與列(卽第一列變爲第一行,……之謂),其行列式之値不變.

例如
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

令設 $(-1)^w a_{1r_1} a_{2r_2} \cdots\cdots a_{nr_n}$ 爲行列式

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

展開式中之一項，m 為 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$ 之逆序數.排列此項諸之次序使第二記數 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$ 為自然順序 $1, 2, \cdots\cdots$ 則第一記數變為 $s_1, s_2, \cdots\cdots, s_n$, 即

$$a_{1r_1}a_{2r_2}\cdots\cdots a_{nr_n}=a_{s_11}a_{s_22}\cdots\cdots a_{s_nn}.$$

$s_1, s_2, \cdots\cdots, s$ 之逆序數亦為 m, 何則? 若 $i<j$ 而 $r_i>r_j$, r_i 與 r_j 在 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$ 中為一逆序; 交換 a_{ir_i} 與 a_{jr_j} 二元素則由第二記數之一逆序 r_i, r_j 而生第一記數之逆序 j, i. 是順次兩兩交換,得 $a_{s_11}a_{s_22}\cdots\cdots a_{s_nn}$. 而 $r_1, r_2, \cdots\cdots, r$ 中有若干逆序,於 $s_1, s_2, \cdots\cdots s$ 中亦有若干逆序,故後者之逆序數為 m. 由是可知

$$(-1)^m a_{s_11}a_{s_22}\cdots\cdots a_{s_nn}$$

為行列式

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

之一項. 故行列式 (1) 與 (2) 相等.

297. 定理 2. 若行列式之一行或一列中元素皆為 0, 則行列式之值為零.

因行列式展開式中各項,為由每行每列各取一元

相乘而得,故若有一行或一列之元素全體爲 0,則各項皆有 0 之因數,故其值爲 0.

298. 定理 3. 交換行列式之二行或二列所得之行列式,等於原行列式乘 -1.

$$\text{例如}\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}_{(1)} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}_{(2)}$$

因 (1) 之任意一項,其因數之次序依 (1) 之行之次序排列,如將其最初與最末之二因數交換其因數之次序,變爲依 (2) 之行之次序排列;但因此交換,其記數逆序之次數必增加或減少奇數次,故變更此項之符號乃爲 (2) 之一項.

如 $a_2b_3c_1$ 爲 (1) 之一項,$-c_1b_3a_2$ 爲 (2) 之對應項.因 $a_2b_3c_1$ 之記數有二次逆序,而 $c_1b_3a_2$ 有一次逆序.

此雖就三階行列式而言,其理可推之一般,故定理爲真

系. 設行列式之二行或二列完全相同,則此行列式之值爲 0.

設 D 爲此行列式之值.如將完全相同之二行或二列交換之,則 D 變爲 $-D$;

$$D=-D.$$

299. 定理4. 設一行或一列中之諸元素皆以k乘之,則所得之行列式等於以k乘原行列式

因一行或一列之各元素以k乘之,則其展開式之各項各有k之因數,故等於以k乘此行列式.

求行列式之值,可用此定理,取得捷徑.例如

$$\begin{vmatrix} -6 & 8 & 2 \\ 15 & -20 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot3\cdot4\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 480$$

系 設二行或二列之對應元素成比例,則行列式之值爲0.

例
$$\begin{vmatrix} ra & a & d \\ rb & b & e \\ rc & c & f \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = r\cdot0=0.$$

300 定理5. 設一行列式之一行或一列爲二項式,則此行列式等於兩行列式之和,如

$$\underset{(1)}{\begin{vmatrix} a_1+a' & a_2 & a_3 \\ b_1+b' & b_2 & b_3 \\ c_1+c' & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} = \underset{(2)}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} + \underset{(3)}{\begin{vmatrix} a' & a_2 & a_3 \\ b' & b_2 & b_3 \\ c' & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

因(1)之每一項爲(2),(3)二對應項之和.如

$$(a_1+a')b_2c_3=a_1b_2c_3+a'b_2c_3.$$

301. 定理 6. 於行列式之任一行(或任一列)之諸元素,加其他任一行(或任一列)對應諸元素之同倍數,行列式之值不變.

例
$$\begin{vmatrix} a_1+kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

計算行列式之數值時,可用此定理以簡之,例如

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 7 \\ 5 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}=0,\text{因 } 4,7,7=2(5,-4,2)+3(-2,5,1).$$

302. 定理 7. 設一行列式之元素爲變數 x 之有理整函數,若 $x=a$ 時其值爲0,則此行列式可以 $x-a$ 除盡.

因此行列式實爲 x 之多項式,若 $x=a$ 時,此多項式值爲零,則此多項式可以 $x-a$ 除盡.

例　求證
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a).$$

若 $a=b$ 或 $b=c$ 或 $c=a$，則此行列式之值為零，故此行列式可以 $a-b, b-c, c-a$ 除盡，亦即可以 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 除盡。然此乘積與行列式同為 a,b,c 之三次式，故兩者之比為常數。

又比較兩者 bc^2 之係數，皆為 1，故此行列式等於 $(a-b)(b-c)(c-a)$.

習題四十三

展開下列諸行列式：

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$.　　2. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$.　　4. $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^3 \\ \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$.

求下列諸行列式之值：

6. $\begin{vmatrix} 6 & 42 & 27 \\ 8 & -28 & 36 \\ 20 & 35 & 135 \end{vmatrix}$.　　7. $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 15 & 12 & 3 \\ 20 & 32 & 12 \end{vmatrix}$.

求證下列諸恆等式:

8. $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}=0.$

9. $\begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & p+s \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & p & q+r \end{vmatrix}=0.$

10. $\begin{vmatrix} 1 & p & p^3 \\ 1 & q & q^3 \\ 1 & r & r^3 \end{vmatrix}=(p-q)(q-r)(r-p)(p+q+r).$

11. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3.$

12. $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}=4(b+c)(c+a)(a+b).$

13. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=abcd(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-$

14. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}=0.$

15. $$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & j \\ -c & -f & -h & 0 & k \\ -d & -g & -j & -k & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

三 子行列式 行列式之乘法

303 子行列式. 在任何之行列式Δ中除去某一特別元素e所在之一行與一列,其餘元素,不變其相關之位置,則得一行列式$\Delta(e)$,其階數比Δ之階數少1,名$\Delta(e)$爲關於元素e之子行列式.

例如在
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta(a_1) = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta(a_2) = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

304 定理. 在任何行列式Δ之展開式中,項之含有主對角線上之某一元素者,其和等於此元素乘其子行列式.

爲簡潔起見,就四階之行列式以證之.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

其中含有 a_1 諸項之和等於

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=a_1\,\Delta(a_1). \quad (2)$$

因 Δ 中含有 a_1 之一項爲由 a_1 乘 $\Delta(a_1)$ 中之一項而得,且其符號亦各相同,因 a_1 居項之首,與其後記數之次序不生影響也.例如 $-a_1b_4c_3d_2$ 爲 (1) 之一項,此項蓋由以 a_1 乘 $-b_4c_3d_2$ 而得者也.逆之,以 a_1 乘 $\Delta(a_1)$ 之一項爲 Δ 之一項.

將第一第二兩行互易,第一第二兩列互易,得行列式 Δ_1, $\Delta_1=\Delta$. b_2 居 Δ_1 之左上方(即 Δ 中 a_1 之位置),且 $\Delta(b_2)=\Delta_1(a_2)$. 故 Δ 中含有 b_2 諸項之和等於 $b_2\Delta(b_2)$.

同樣可證含有 c_3 諸項之和 $=c_3\Delta(c_3)$, 含有 d_4 諸項之和 $=d_4\,\Delta(d_4)$.

推論. 設 a_{ik} 爲 Δ 中第 i 列第 k 行之元素,則 Δ 中含有 a_{ik} 所有各項之和等於 $(-1)^{i+k}a_{ik}\Delta(a_{ik})$.

先將含有a_{ik}之一列逐次與其上各列交換而置於第一列,然後將含a_{ik}之一行逐次與前面各行交換而置於第一行,由是a_{ik}居第一行第一列之地位,而此行列式變號$(i-1)+(k-1)$次,即$i+k-2$次.若令Δ'表最後所得之行列式,則

$$\Delta'=(-1)^{i+k-2}\Delta=(-1)^{i+k}\Delta;$$

在Δ'中含有a_{ik}諸項之和為$a_{ik}\Delta'(a_{ik})$.故在Δ中,其和為$(-1)^{i+k}a_{ik}\Delta(a_{ik})$,因在$\Delta$中$a_{ik}$之子行列式與在$\Delta'$中$a_{ik}$之子行列式相同也.

例如在$\Delta=|a_1b_2c_3d_4|$中,對於元素d_3,$i=4$,$k=3$,可變換其地位如次:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d_3 & d_1 & d_2 & d_4 \\ a_3 & a_1 & a_2 & a_4 \\ b_3 & b_1 & b_2 & b_4 \\ c_3 & c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}$$

305. 定理. **一行列式可以其中之任一列或任一行之各元素與其各子行列式相乘諸積之和表之,其符號為正負相間或負正相間.**

如四階之行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & a_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

可書爲 $\Delta=a_1\Delta(a_1)-a^2\Delta(a_2)+a_3\Delta(a_3)-a_4\Delta(a_4)$,

因Δ展開式之每一項僅祇含有a_1, a_2, a_3, a_4四元素中之一個.其含有a_1各項之和爲$a_1\Delta(a_1)$,含a_2各項之和爲$-a_2\Delta(a_2)$等等.同理,

$$\Delta=-b_1\Delta(b_1)+b_2\Delta(b_2)-b_3\Delta(b_3)+b_4\Delta(b_4)$$
$$=a_1\Delta(a_1)-b_1\Delta(b_1)+c_1\Delta(c_1)-d_1\Delta(d_1)$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

325. **餘因子.** 上述Δ之展開式用下法記之更爲便利,如

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4$$
$$=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+b_4B_4$$

等等.於此$A_1=\Delta(a_1)$, $A_2=-\Delta(a_2)$等等,此$A_1, A_2, \cdots\cdots$謂之$a_1, a_2, \cdots\cdots$之餘因子.

設a_{ik}爲n階行列式Δ中第i列第k行之元素,則令$(-1)^{i+k}\Delta(a_{ik})$爲元素a_{ik}之餘因子,可以A_{ik}記之.故

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\Delta(a_{ik})=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ik}.$$

注意：凡由一列元素與他列對應元素之餘因子相乘積所得之任何和如 $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+b_4A_4$ 者，其值爲 0. 蓋因 $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+b_4A_4$ 指明一行列式其末三列與 $\Delta=|a_1b_2c_3d_4|$ 之末三列相同，但其首列爲 b_1, b_2, b_3, b_4. 又因此行列式之第一列與第二列皆爲 b_1,b_2,b_3,b_4 而消滅；其他亦如此故也.

307. 行列式之乘法. 同階之二行列式 Δ 與 Δ' 之相乘積可以第三行列式 Δ'' 表之，其法如下：

Δ 之第 i 列之各元素以 Δ' 第 k 行之各對應元素相乘之積之和爲 Δ'' 之第 i 列第 k 行之元素.

如
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1p_1+a_2q_1 & a_1p_2+a_2q_2 \\ b_1p_1+b_2q_1 & b_1p_2+b_2q_2 \end{vmatrix}.$$

何則？因第三行列式爲下列四行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_1p_1 & a_1p_2 \\ b_1p_1 & b_1p_2 \end{vmatrix},(1)\quad \begin{vmatrix} a_1p_1 & a_2q_2 \\ b_1p_1 & b_2q_2 \end{vmatrix},(2)\quad \begin{vmatrix} a_2q_1 & a_1p_2 \\ b_2q_1 & b_1p_2 \end{vmatrix},(3)\quad \begin{vmatrix} a_2q_1 & a_2q_2 \\ b_2q_1 & b_2q_2 \end{vmatrix}.(4)$$

但 (1), (4) 兩行列式爲 0, 因其各行互成比例也. 簡約 (2), (3) 而加之，得

$$p_1q_2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}+p_2q_1\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}=(p_1q_2-p_2q_1)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

又同樣可證 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3 & a_1q_1+a_2q_2+a_3q_3 & a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3 \\ b_1p_1+b_2p_2+b_3p_3 & b_1q_1+b_2q_2+b_3q_3 & b_1r_1+b_2r_2+b_3r_3 \\ c_1p_1+c_2p_2+c_3p_3 & c_1q_1+c_2q_2+c_3q_3 & c_1r_1+c_2r_2+c_3r_3 \end{vmatrix}.$$

如二行列式之階數不同,可使之相同,而後用上法乘之.如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

是謂增邊行列式.

習題四十四

求下列行列式之積:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 5 \\ 3 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -6 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 5 & 11 \\ 7 & -13 & 15 \\ 9 & 10 & -23 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & b & -a \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} r & 0 & r \\ p & q & 0 \\ 0 & q & r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ a & b & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix}.$

5. $\begin{vmatrix} a & -a & a & a \\ -b & b & b & b \\ c & c & -c & c \\ d & d & d & -d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$

6. $\begin{vmatrix} l & m & n \\ m & n & l \\ n & l & m \end{vmatrix}^2.$

7. $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha-i\beta & \gamma-i\delta \\ -\gamma-i\delta & \alpha+i\beta \end{vmatrix}.$

8. 求證 $\begin{vmatrix} k & c & -b \\ -c & k & a \\ b & -a & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^2+k^2 & ab-kc & ac+kb \\ ab+kc & b^2+k^2 & bc-ka \\ ac+kb & bc+ka & c^2+k^2 \end{vmatrix}.$

9. 設 $s_i=\alpha^i+\beta^i+\gamma^i$, 求證

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\ \alpha&\beta&\gamma\\ \alpha^2&\beta^2&\gamma^2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&\alpha&\alpha^2\\ 1&\beta&\beta^2\\ 1&\gamma&\gamma^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta&\delta_1&\delta_2\\ \delta_1&\delta_2&\delta_3\\ \delta_2&\delta_3&\delta_4\end{vmatrix}.$$

10. 設 A_i, B_i, C_i 爲行列式 $|a_1b_2c_3|$ 中 a_i, b_i, c_i 之餘因子，證明

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}A_1&A_2&A_3\\ B_1&B_2&B_3\\ C_1&C_2&C_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}^3.$$

四 消去法及聯立一次方程式

308. 聯立一次方程式之解法.

設今有三個未知數 x_1, x_2, x_3 之三個一次方程式爲

$$\left.\begin{aligned}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3&=k\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3&=l\\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3&=m\end{aligned}\right\}(1)$$

由 x_1, x_2, x_3 之係數所作成之行列式 $\Delta=|a_1b_2c_3|$ 名爲(1)之係數行列式，又以 $A_1, A_2, \cdots\cdots$ 表 Δ 中 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ 之餘因子.

以 A_1 乘第一方程式，B_1 乘第二方程式，C_1 乘第三方程式，而後相加得

$$\begin{array}{r|r|r|r}a_1A_1&x_1+a_2A_1&x_2+a_3A_1&x_3+kA_1\\ b_1B_1&+b_2B_1&+b_3B_1&+lB_1\\ c_1C_1&+c_2C_1&+c_3C_1&+mC_1\end{array}$$

但此方程式中 x_2 與 x_3 之係數爲0, 而 x_1 之係數爲 Δ, 右邊爲一行列式, 其第一行爲 k, l, m, 其餘二行與 Δ 內第二第三兩行相同. 故此方程式可書爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} k & a_2 & a_3 \\ l & b_2 & b_3 \\ m & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

同理, 以 A_2, B_2, C_2 乘 (1) 之各方程式相加, 又以 A_3, B_3, C_3 乘 (1) 之各方程式相加, 得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & k & a_3 \\ b_1 & l & b_3 \\ c_1 & m & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & k \\ b_1 & b_2 & l \\ c_1 & c_2 & m \end{vmatrix}.$$

故若 $\Delta \neq 0$, 則所求之解爲

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k & a_2 & a_3 \\ l & b_2 & b_3 \\ m & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & k & a_3 \\ b_1 & l & b_3 \\ c_1 & m & c_3 \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & k \\ b_1 & b_2 & l \\ c_1 & c_2 & m \end{vmatrix}.$$

例　解
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4, \\ x + y - z = 2, \\ 4x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

$$x=\begin{vmatrix}4 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}=\frac{26}{20}=\frac{13}{10}.$$

同樣,得 $y=\frac{-21}{20}=-\frac{21}{20}$, $z=\frac{-35}{20}=-\frac{7}{4}$.

含有 n 個未知數之 n 個一次方程式亦可依同法解之,是爲克萊滿方法*.

309. 克萊滿方法.

設含有 n 個未知數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之 n 個一次方程式爲

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{array}\right\}\quad(1)$$

若(1)之係數行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

* 克萊滿方法 (Cramer's rule).

則(1)必有一組之解且僅有一組之解.

設 A_{ik} 為 a_{ik} 之餘因子, 以 $A_{11}, A_{21}, \cdots\cdots, A_{n1}$ 乘 (1) 之各方程式而後相加, 得

$$Ax_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots\cdots + b_nA_{n1} = A_1,$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{A_1}{A},$$

一般, 以 $A_{1s}, A_{2s}, \cdots\cdots, A_{ns}$ 乘 (1) 之各方程式, 得

$$Ax_s = b_1A_{1s} + b_2A_{2s} + \cdots\cdots + b_nA_{ns} = A_s,$$

$$\therefore \quad x_s = \frac{A_s}{A} \, (s = 1, 2, \cdots\cdots, n).$$

式中 A_s 為 A 之第 s 行易以 $b_1 \cdots\cdots b_n$ 所成之行列式.

由是可知 (1) 若有解, 其解必為

$$x_1 = \frac{A_1}{A}, \; x_2 = \frac{A_2}{A}, \cdots\cdots, \; x_n = \frac{A_n}{A}.$$

然則此一組之數值果為 (1) 之解乎? 由代入法以驗之可也. 代入 (1) 之第 r 方程式, 得

$$\frac{1}{A}(a_{r1}A_1 + a_{r2}A_2 + \cdots\cdots + a_{rn}A_n)$$

$$= \frac{1}{A}\left(a_{r1}\sum_{k=1}^{n} b_kA_{k1} + \cdots\cdots + a_{rn}\sum_{k=1}^{n} b_kA_{kn}\right)$$

$$= \frac{1}{A}\{b_1(a_{r1}A_{11} + \cdots\cdots + a_{rn}A_{1n}) + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots + b_r(a_{r1}A_{r1} + \cdots\cdots + a_{rn}A_{rn}) + \cdots\cdots\}$$

$$= \frac{1}{A}(b_rA) = b_r.$$

故 $x_s=\Delta_s/\Delta\ (s=1,2,\cdots\cdots n)$ 確爲 (1) 之解.

310. 一次齊次方程式

上二節所述之一次方程式,若其常數項爲0,則爲一次齊次方程式.含三未知數 x_1,x_2,x_3 之聯立一次齊次方程式之形式爲

$$\left.\begin{aligned}a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0\\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0\end{aligned}\right\}\ (1)$$

顯然,方程式 (1) 有解 $x_1=x_2=x_3=0$, 由前節若 $\Delta\neq0$, 則僅有此一組之解,然若 $\Delta=0$, 則方程式 (1) 之解不僅一組.

設 C_1,C_2,C_3 爲行列式 $|a_1\,b_2\,c_3|$ 中 c_1,c_2,c_3 之餘因子, r 爲任意之數,又設 $x_1=rC_1,\ x_2=rC_2,\ x_3=rC_3;$ (2)

則因

$$r(a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3)=0,$$

$$r(b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3)=0,$$

$$r(c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3)=r\,\Delta=0,$$

故 (2) 爲 (1) 之解.

除 (2) 以外,聯立方程式 (1) 尚有其他之解否?若 C_1,C_2,C_3 不皆爲 0, 設 $C_3\neq0$, 則由第一,第二兩方程式,得

$$\frac{x_1}{x_3}=\frac{C_1}{C_3},\quad \frac{x_2}{x_3}=\frac{C_2}{C_3}.$$

故此時凡 (1) 之解其形式必爲

$$x_1=rC_1,\ x_2=rC_2,\ x_3=rC_3.$$

若 C_1, C_2, C_3 皆等於0，則

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}.$$

故此時第一第二兩方程式可任取其一而捨其一．而於

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,$$

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0.$$

兩方程式可同樣討論之．由是得定理如下：

若 (1) 之係數行列式 $|a_1b_2c_3|=0$，而九個餘因子 $A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3$ 之中不皆為0，則 (1) 之一般解可書為

$$x_1=r_1A_1+r_2B_1+r_3C_1,$$

$$x_2=r_1A_2+r_2B_2+r_3C_2,$$

$$x_3=r_1A_3+r_2B_3+r_3C_3,$$

於此 r_1, r_2, r_3 為任意之數．

若九個餘因子皆等於0，則三方程式合而為一．

311. 終結式． 二代數方程式 $f(x)=0$ 與 $\phi(x)=0$ 之終結式為 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 係數之一整函數．$f(x)=0$ 與 $\phi(x)=0$ 有一公共之根之充要條件為其終結式等於零．

例如 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ (1) 與 $x-b=0$ (2) 之終結式為

$a_0b^2+a_1b+a_2$；如 $a_0b^2+a_1b+a_2=0$，則方程式(1)，(2)有一公共之根，其逆顯然亦等.

任何二代數方程式 $f(x)=0$，$\phi(x)=0$ 之終結式，可用下法消去 x 而得之，是爲西薇士德*之消去法.

設
$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0, \tag{1}$$
$$\phi(x)=b_0x^2+b_1x+b_2=0; \tag{2}$$

逐次以 x 與 1 乘 (1)，以 x^2，x 與 1 乘 (2)，得

$$\begin{aligned}
a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x\quad\quad &=0,\\
a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 &=0,\\
b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2\quad\quad\quad\quad &=0,\\
b_0x^3+b_1x^2+b_2x\quad\quad &=0,\\
b_0x^2+b_1x+b_2 &=0.
\end{aligned} \tag{3}$$

別作五個聯立齊次方程式，x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 爲未知數，以行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0\\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

* 西薇士德 (J.J. Sylvester, 1814—1897)，英國猶太人.

爲其係數行列式.若(1)與(2)有共通之根 b,則(3)中五個 x 之方程式有共通之根 b.因之所作之五個齊次方程式有解 $x_1=b^4, x_2=b^3, x_3=b^2, x_4=b, x_5=1$.是必 $D=0$.何以言之?若 $D\neq 0$,則所作之聯立齊次方程式除 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$ 而外,别無他解也.故 $D=0$ 爲(1)與(2)有一公共根之必要條件,且亦爲其充足條件;因若 D 之前四行各以 x^4, x^3, x^2, x 乘之而後加入於其第五行,則 D 之第五行之元素爲 $xf(x)$, $f(x)$, $x^2\phi(x)$, $x\phi(x)$, $\phi(x)$.故若 $D=0$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ 表 D 之第五行元素之餘因子,則

$$D=(\mu_1x+\mu_2)f(x)+(\mu_3x^2+\mu_4x+\mu_5)\phi(x)\phi(x)=0.$$

由此恆等式,知 $f(x)$ 之每一因數 $x-\beta$ 必爲 $(\mu_3x^2+\mu_4x+\mu_5)\phi(x)$ 之一因數;因 $f(x)$ 爲三次,而 $\mu_3x^2+\mu_4x+\mu_5$ 僅爲二次,故 $f(x)$ 至少有一因數 $x-\beta$ 爲 $\phi(x)$ 之一因數.換言之,即 $f(x)=0$ 之一根必須適合 $\phi(x)=0$.即(1)與(2)有一公共根之謂也.

然此種推論係假定 $\mu_1,\mu_2,\cdots\cdots,\mu_5$ 非皆爲0者.若 D 之所有元素之餘因子皆爲0,則可證明 $f(x)=0$ 與 $\phi(x)=0$ 之公共根不止一個(證明從略).

總之,$f(x)=0$, $\phi(x)=0$ 有公共根之充要條件爲其終結式 $D=0$.

例 以上法證明 $x^2+3x+2=0$ 與 $x+1=0$ 有一公共根.

$$D=\begin{vmatrix}1&3&2\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1+2-3=0.$$

習題四十五

1. $\begin{cases}2x+3y-5z=3,\\x-2y+z=0,\\3x+y+3z=7.\end{cases}$

2. $\begin{cases}ax+by+cz=d,\\a^2x+b^2y+c^2z=d^2,\\a^3x+b^3y+c^3z=d^3.\end{cases}$

3. $\begin{cases}2x+4y-3z=3,\\3x-8y+6z=1,\\8x-2y-9z=4.\end{cases}$

4. $\begin{cases}2x-4y+3z+4t=-3,\\3x-2y+6z+6t=-1,\\5x+8y+9z+3t=9,\\x-10y-3z-7t=2.\end{cases}$

5. 解下列方程式,求其 $x:y:z$ 之比 $\begin{cases}x+2y-z=0,\\3x-y+4z=0,\\4x+y+3z=0.\end{cases}$

6. 下列方程式除 $x=0, y=0, z=0$ 而外,若尚有其他之解,則 λ 當取何值?

$$\begin{cases}4x+3y+z=\lambda x,\\3x-4y+7z=\lambda y,\\x+7y-6z=\lambda z.\end{cases}$$

7.　求證二方程式 $6x^2+5x-6=0$ 與 $2x^3+x^2-9x-9=0$ 有一公共之根,求此根.

8.　作 $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ 與 $b_0x^2+b_1x+b_2=0$ 之終結式.

9.　求 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 與 $x^3=1$ 之終結式.

第十九章 方程式論

一 基本定理 有理根

312. n次方程式. 含有未知數 x 之 n 次方程式,其標準形式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,(x_0\neq0) \qquad (1)$$

其最後之一係數 a_n 謂之絕對項.若 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$ 無一爲零者,則(1)謂之完全方程式;否則,謂之不完全方程式.n次之完全方程式其項數爲$n+1$.

若係數 $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$ 皆爲實數,則其第一項係數 a_0 常可視爲正數;若係數皆爲有理數,則皆可化爲整數,且使其間無公共之因數.

(1)之各項以 a_0 除之,則化爲第二種之標準形式

$$x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n=0, \qquad (2)$$

於此,第一項之係數爲1,而 $b_1=\frac{a_1}{a_0},\cdots\cdots$.本章常以 $f(x)=0$ 表(1)或(2)之方程式.

313. 方程式之根. 方程式 $f(x)=0$ 之根,爲能使 $f(x)$ 等於零之 x 之值.換言之,凡 x 之值能滿足於 $f(x)=0$ 者,爲此方程式之根.

由根之定義,如 a_n 爲 0,則 $f(x)=0$ 之一根爲 0;若 $f(x)=0$ 之係數皆爲正數,則此方程式不能有正根;如完全方程式 $f(x)=0$ 之係數正負相間,則不能有負根.

例如 $2x^3+x^2+1=0$ 不能有正根,因 x 之值如爲正數,則多項式 $2x^3+x^2+1$ 決不能爲 0 故也.

又方程式 $2x^3-x^2+3x-1=0$ 無有負根.

314. 定理 1. 設 b 爲 $f(x)=0$ 之一根,則 $f(x)$ 可以 $x-b$ 除盡;逆之,設 $f(x)$ 可以 $x-b$ 除盡,則 b 爲 $f(x)=0$ 之一根.

此定理在 §59 中已述及,今更證之於下:

依剩餘定理,$f(x)$ 以 $x-b$ 除之,其剩餘爲 $f(b)$.若 b 爲 $f(x)=0$ 之一根,則 $f(b)=0$,故 $f(x)$ 能以 $x-b$ 除盡.逆之,如 $f(x)$ 能以 $x-b$ 除盡,則其剩餘 $f(b)=0$,故 b 爲 $f(x)=0$ 之一根.

例 求證 3 爲 $f(x)=x^3-2x^2-9=0$ 之一根.

【證】

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & +0 & -9 & \underline{3} \\ & 3 & +3 & +9 & \\ \hline 1 & +1 & +3 & 0 & \end{array}$$

由綜合法,得其餘剩 $f(3)=0$,故 3 爲 $f(x)=0$ 之一根.

設 b 爲 $f(x)=0$ 之一根，則 $f(x)$ 可以 $x-b$ 除盡，設其商爲 $\phi(x)$，則

$$f(x)=(x-b)\phi(x).$$

故 $f(x)=0$ 之其他諸根，爲其降次方程式 $\phi(x)=0$ 之根.

例 解方程式 $x^3-3x^2+5x-3=0$.

【解】

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & +5 & -3 & \underline{1} \\ & 1 & -2 & +3 & \\ \hline 1 & -2 & +3 & 0 & \end{array}$$

由觀察，1 爲此方程式之一根，由綜合除法，得其降次方程式爲 $x^2-2x+3=0$，此二次方程式之根爲 $1\pm i\sqrt{2}$，故所求之根爲 $1, 1+i\sqrt{2}, 1-i\sqrt{2}$.

315. 基本定理. "凡有理整方程式 $f(x)=0$ 必有一根"此爲代數學之基本定理.*

用基本定理可證下述定理:

定理 2. n 次之方程式.

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,(a_0\neq 0)$$

必有 n 個且僅有 n 個之根.

由基本定理，知 $f(x)=0$ 必有一根 β_1，則 $f(x)$ 可以 $x-\beta_1$ 除盡，其商式之首項爲 a_0x^{n-1}，故

$$f(x)=(x-\beta_1)(a_0x^{n-1}+\cdots\cdots), \tag{1}$$

*其證明非本書程度所允許，故從略.

同理，若 $n \neq 1$，則 $a_0x^{n-1}+\cdots\cdots=0$ 必有一根 β_2，而

$$a_0x^{n-1}+\cdots\cdots=(x-\beta_2)(a_0x^{n-2}+\cdots\cdots),$$

故
$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(a_0x^{n-2}+\cdots\cdots); \tag{2}$$

由此類推，得

$$f(x)=a_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots\cdots(x-\beta_n). \tag{3}$$

$x=\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n$ 時，$f(x)$ 爲 0；即 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n$ 爲 $f(x)=0$ 之根．此外無其他之根，何則？若 $f(a)=0$，則 $(a-\beta_1)(a-\beta_2)\cdots\cdots(a-\beta_n)=0$，故 a 必等於 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n$ 中之一數．

由此定理，可知解方程式 $f(x)=0$ 與分解 $f(x)$ 爲因數無甚差別．

例　求作方程式，已知其根爲 $2, \frac{1}{2}, -1, 0$．

【解】　所求之方程式爲

$$(x-2)(x-\tfrac{1}{2})(x+1)(x-0)=0,$$

即
$$2x^4-3x^3-3x^2+2x=0.$$

316. 重根　n 次方程式之根 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots \beta_n$ 中如有相等者，則謂此方程式有重根，如二根等於 β，則 β 謂之二重根，三根等於 β，則 β 謂之三重根；一般言之，如有 r 個根（但僅有 r 個根）等於 β，則 β 謂之 r 重根．

β 爲 $f(x)=0$ 之 r 重根之條件，爲 $f(x)$ 能以 $(x-\beta)^r$ 除盡，但不能被 $(x-\beta)^{r+1}$ 除盡．

n 次方程式有 n 個根，其 r 重根，亦以 r 個根計算．故 n 次方程式未必有 n 個不同之根．

例如 $x^3-3x^2+3x-1=0$ 爲三次方程式，但因 $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$，故三根皆等於 1.

317. 有理根

設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0(a_0\neq 0)$

之係數皆爲整數，又設 $\frac{b}{c}$ 爲一既約分數．若 $\frac{b}{c}$ 爲 $f(x)=0$ 之一根，則

$$c^n f\left(\frac{b}{c}\right)=a_0b^n+a_1b^{n-1}c+\cdots\cdots+a_{n-1}bc^{n-1}+a_nc^n=0,$$

故 $a_0b^n+a_nc^n\equiv 0(\text{mod. } bc)$，然 b, c 之間無公因數，故 b 爲 a_n 之因數，c 爲 a_0 之因數．由此可知求有理係數方程式之有理根，可由有限次之試算以得之．若 $a_0=1$，則 $\frac{b}{c}$ 不能爲其一根，除非 $c=\pm 1$，由是得下述定理：

如方程式 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a^n=0$ 之係數 $a_1,\cdots\cdots a_n$ 皆爲整數，則不能有一分數根．

例　求下列方程式之有理根：

$$3x^5-8x^4+x^2+12x+4=0.$$

【解】　此方程式之有理根在 $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$,

$\pm\frac{4}{3}$ 諸數中.由觀察,知 1 非其一根;試 2,知爲一根,得其降次方程式爲 $3x^4-2x^3-4x^2-7x-2=0$.又 2 爲降次方程式之一根,得其第二降次方程式 $3x^3+4x^2+4x+1=0$.此方程式無正根,因其每項之係數皆爲正.試 -1,知非其根;試 $-\frac{1}{3}$,爲其一根;由是得其第三降次方程式 $x^2+x+1=0$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
3 & -8 & +0 & +1 & +12 & +4 & \underline{2} \\
 & 6 & -4 & -8 & -14 & -4 & \\
\hline
3 & -2 & -4 & -7 & -2 & 0 & \underline{2} \\
 & 6 & +8 & +8 & +2 & & \\
\hline
3 & +4 & +4 & +1 & & 0 & \underline{-\frac{1}{3}} \\
 & -1 & -1 & -1 & & & \\
\hline
3 & +3 & +3 & 0 & & &
\end{array}
$$

故所求之有理根爲 $2, 2, -\frac{1}{3}$.

設 b 爲一正數,以 $x-b$ 除 $f(x)$,其結果之係數若皆爲正,則 $f(x)=0$ 不能有大於 b 之根.設 b 爲一負數,如上所得之係數正負相間,則 $f(x)=0$ 不能有絕對值大於 b 之負根.

因由綜合除法,若 b 之絕對值增大,則其所得之商,首項以後之係數其絕對值亦必增大而其符號不變.由是,其最後一項之係數即其剩除不能爲零.茲舉例以明之:

例 1. 求證 $2x^3+3x^2-4x+5=0$ 無有大於 1 之根.

【證】

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & +3 & -4 & +5 & \underline{1} \\
 & 2 & +5 & +1 & \\
\hline
2 & +5 & +1 & +6 &
\end{array}
$$

以 $x-1$ 除之,所得之係數皆爲正號.設 $b>1$,以 $x-b$ 除之,則其結果之係數爲更大之正數,決不能除盡.故

所設之方程式不能有大於1之根.

例 2. 求證 $3x^3+4x^2-3x+1=0$ 無有絕對值大於2之負根.

【證】
$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & +4 & -3 & +1 & -2 \\ & -6 & +4 & -2 & \\ \hline 3 & -2 & +1 & -1 & \end{array}$$

以 $x+2$ 除之,其結果之係數正負相間,故其根不能小於 -2. 譬如以 $x+3$ 除之,結果係數之符號不變,而其絕對值增大,即 $3-5+12-35$.

二 根與係數之關係

318. 根與係數之關係. 設 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n$ 為方程式

$$x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+b_3x^{n-3}+\cdots\cdots+b_n=0$$

之根,則
$$x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+b_3x^{n-3}+\cdots\cdots+b_n$$
$$-(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)\cdots\cdots(x-\beta_n)=0.$$

此為一恆等式,整理之後,其形式為 $\gamma_0x^{n-1}+\gamma_1x^{n-2}+\cdots\cdots+\gamma_{n-1}=0$, 是必 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_{n-1}$ 皆等於 0. 若不然,則變為一方程式矣.故得

$$-b_1=\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots\cdots+\beta_n,$$
$$b_2=\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\cdots\cdots+\beta_2\beta_3+\cdots\cdots+\beta_{n-1}\beta_n,$$
$$-b_3=\beta_1\beta_2\beta_3+\beta_1\beta_2\beta_4+\cdots\cdots\cdots\cdots+\beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^n b_n=\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\cdots\beta_n,$$

右邊表每二個根,每三個根……之積之和.而其左邊之爲正爲負,則視其右邊每項之因數爲偶數或爲奇數而定.由是得下述定理:

定理. 設n次方程式$x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n=0$之第一項$x^n$之係數爲1,則其第二項之係數$b_1$變其符號,等於其諸根之和;絕對項$b_n$(其符號變或不變,視$n$爲奇數或偶數而定)等於其諸根之積;任何項之係數$b_r$(其符號變或不變,視$r$爲奇數或偶數而定)等於其每$r$個根乘積之和.

如方程式第一項之係數非爲1,則以此係數除此方程式之各項;如爲不完全方程式,則應注意其缺項之係數爲0.

例如求方程式$3x^3-6x+2=0$之根與其係數之關係.先將此方程式化爲$x^3+0x^2-2x+\frac{2}{3}=0$,令其根爲$\beta_1,\beta_2,\beta_3$,則

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=0,\ \beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3=-2,\ \beta_1\beta_2\beta_3=-\frac{2}{3}.$$

例 1. 已知方程式$2x^3+3x^2-23x-12=0$之二根爲3與-4;求其餘一根.

【解】　所求之根 $=-\frac{3}{2}-\{3+(-4)\}=-\frac{1}{2}$

$$=(12\div 2)\div 3(-4)=-\frac{1}{2}.$$

例 2.　求 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根成等比級數之條件.

【解】　設此方程式之根爲 $\frac{\alpha}{\beta}$, α, $\alpha\beta$, 則

$$\frac{\alpha}{\beta}+\alpha+\alpha\beta=-p,$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta}+\alpha^2+\alpha^2\beta=q,$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\alpha\cdot\alpha\beta=-r.$$

由最後等式,得　$\alpha=\sqrt[3]{-r}$.

第二等式以第一等式除之,又以 $\alpha=\sqrt[3]{-r}$ 代入於其結果,且簡約之,得 $q^3-p^3r=0$, 此即爲所求之條件.

若 $q^3-p^3r=0$, 則所設方程式之三根果成等比級數否試討論之.

例 3.　方程式 $x^3+8x^2+5x-50=0$ 有二重根,試解之.

【解】　設 α,α,β 爲此方程式之根,得

$$2\alpha+\beta=-8,\ \alpha^2+2\alpha\beta=5,\ \alpha^2\beta=50;$$

解第一,第二兩等式,得 $\alpha=-5, \beta=2$; 又 $\alpha=-\frac{1}{3}, \beta=-\frac{22}{3}$.

其中 $\alpha=-5, \beta=2$, 適合於 $\alpha^2\beta=50$, 而 $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=-\frac{22}{3}$, 不能適合於此等式,故所求之根爲 $-5, -5, 2$.

319. 根之對稱函數. 以根所表之式,若任意交換式中二根之位置,其式不變,是爲根之對稱函數.

例 1. 求方程式 $2x^3-3x^2-4x-5=0$ 諸根平方之和.

【解】 設其根爲 α, β, γ, 則

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^2+4=6\frac{1}{4}.$$

例 2. 設 α, β, γ 爲方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根,求作 $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ 爲根之三次方程式.

【解】 設 p', q', r' 表所求方程式之係數, 則

$$-p'=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=q,$$
$$q'=\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta+\alpha\beta\cdot\beta\gamma$$
$$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=(-r)(-p)=rp,$$
$$-r'=\beta\gamma\cdot\gamma\alpha\cdot\alpha\beta=(\alpha\beta\gamma)^2=r^3.$$

故所求之方程式爲 $x^3-qx^2+prx-r^2=0$.

例 3. 設 α, β, γ 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根,求 $\Sigma\alpha^2\beta$ 及 $\Sigma\alpha^3$.

【解】 $\Sigma\alpha^2\beta=(\alpha+\beta+\gamma)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)-3\alpha\beta\gamma=-pq+3r.$

$$\because\ (\Sigma\alpha)(\Sigma\alpha^2)=\Sigma\alpha^3+\Sigma\alpha^2\beta,$$
$$\therefore\ \Sigma\alpha^3=(\Sigma\alpha)(\Sigma^2)-\Sigma\alpha^2\beta$$
$$=(-p)(p^2-2q)+pq-3r$$
$$=-p^3+3pq-3r.$$

習題四十六

1. 求作方程式以下列各數爲根者:

(i) $a,\ -b,\ a+b.$ (ii) $3,\ 4,\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3},\ 0.$

2. 求證 -3 爲下列方程式之三重根:

$$x^4+8x^3+18x^2-27=0.$$

3. 求證 $2x^4-3x^3+4x^2-10x-3=0$ 無有理根.

下列諸方程式有有理根,試解之:

4. $x^3-x^2-14x+24=0.$ 5. $x^3-2x^2-25x+50=0.$

6. $3x^3-2x^2+2x+1=0.$ 7. $2x^4+7x^3-2x^2-x=0.$

8. $x^5-9x^4+2x^3+71x^2+81x+70=0.$

9. $2x^5-8x^4+7x^3+5x^2-8x+4=0.$

10. $12x^4-32x^3+13x^2+8x-4=0.$

11. 設 $2x^3-7x^2+10x-6=0$ 之二根爲 $1\pm i$; 求其餘一根.

12. 方程式 $8x^3-14x^2-21x+27=0$ 之根成等比級數,試解之.

13. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 有兩根,其和爲 0, 求證 $pq=r$.

14. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之一根爲他根之倒數,求其條件.

15. 方程式 $x^4+4x^3+10x^2+12x+9=0$ 有二根相等,試解之.

16. 設 α, β, γ 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根,求作以下列各數爲根之三次方程式:

(i) $-\alpha, -\beta, -\gamma$.　　(ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$.

(iii) $\alpha+k, \beta+k, \gamma+k$.　　(iv) $-\frac{1}{\alpha^2}, -\frac{1}{\beta^2}, -\frac{1}{\gamma^2}$.

17. 設 α, β, γ 爲 $2x^3+x^2-4x+1=0$ 之根,求

(i) $\Sigma\alpha^2$.　　(ii) $\Sigma\alpha^3$.　　(iii) $\Sigma\frac{1}{\alpha\beta}$.

三　方程式之變換

320. 方程式之變換. 變一所設方程式爲一新方程式,使其根(或係數)與原方程式之根(或係數)有某種關係,名爲方程式之變換;此種方法,有利於解方程式;今擇其重要而又簡單者述之.

321. 根之符號之變換. 變換方程式 $f(x)=0$ 爲一新方程式,使其根等於原方程式之根乘 -1.

設原方程式爲 $f(x)=0$, 則所求之方程式爲 $f(-y)=0$, 因若 β 爲 $f(x)=0$ 之一根,則 $-\beta$ 爲 $f(-y)=0$ 之一根故也.

設原方程式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0,$$

則所求之方程式爲

$$a_0y^n-a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^na_n=0.$$

例如變換方程式 $4x^5-9x^3+6x^2-13x+6=0$ 諸根之符號得新方程式 $4x^5-9x^3-6x^2-13x-6=0$. 事實上,原方程式之根爲 $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -2, \pm i$; 而新方程式之根爲

$$-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2, \mp i.$$

322. 倍根變換. 變換已知方程式爲他方程式,使其根爲原方程式之根之 k 倍,是爲倍根變換.

設已知方程式爲 $f(x)=0$, 則所求之方程式爲 $f\left(\frac{y}{k}\right)=0$, 因若 $x=\beta$ 時 $f(x)=0$, 則 $y=k\beta$ 時 $f\left(\frac{y}{k}\right)=0$.

設已知方程式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0,$$

則所求之方程式爲

$$a_0y^n+ka_1y^{n-1}+k^2a_2y^{n-2}+\cdots\cdots+k^na_n=0.$$

若 $k=-1$, 則爲前節之變換.

例 1. 設有方程式 $x^4+2x^3-x+3=0$, 若 2 倍其根,則得方程式 $$x^4+4x^3-8x+48=0.$$

若 $\frac{1}{2}$ 倍其根,則得方程式

$$x^4+x^3-\frac{x}{8}+\frac{3}{16}=0,$$

即
$$16x^4+16x^3-2x+3=0.$$

例 2. 變換方程式 $36x^3+18x^2+2x+9=0$ 爲他方程式使其第一項之係數爲 1,而其餘各項之係數皆爲整數.

【解】 將方程式各項以 36 除之,得

$$x^3+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{18}+\frac{1}{4}=0, \qquad (1)$$

k 倍其根,得

$$x^3+\frac{kx^2}{2}+\frac{k^2x}{18}+\frac{k^3}{4}=0, \qquad (2)$$

欲消去分母,當取 k 爲 6 之倍數,以 $k=6$ 代入 (2),得

$$x^3+3x^2+2x+54=0, \qquad (3)$$

此即爲所求之方程式.以 6 除 (3) 之根,即得原方程式 (1) 之根.

323. 倒根變換. 變換已知方程式爲他方程式,使其根爲原方程式之根之倒數;是爲倒根變換.

設已知之方程式爲 $f(x)=0$,則所求之方程式當爲 $f\left(\frac{1}{y}\right)=0$;因若 $x=\beta$ 時 $f(x)=0$,則 $\frac{1}{y}=\beta$ 時 $f\left(\frac{1}{y}\right)$ 亦必爲 0.

設已知方程式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

則所求之方程式爲

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 y + a_0 = 0.$$

例如倒 $x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 之根則得方程式

$$x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0.$$

324. 平行變換. 變換已知方程式爲他方程式,使其根爲原方式程之根減去一常數 k; 是爲平行變換.

設 $f(x)=0$ 爲已知方程式,則所求之方程式爲 $f(y+k)=0$, 因若 $x=\beta$ 時 $f(x)=0$, 則 $y=\beta-k$ 時 $f(y+k)$ 亦必爲 0.

設已知之方程式爲

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

則所求之方程式爲

$$f(y+k) = a_0 (y+k)^n + a_1 (y+k)^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}(y+k) + a_n = 0,$$

各項依二項定理展開之,而又依 y 之次數集之,則爲

$$\phi(y) = c_0 y^n + c_1 y^{n-1} + \cdots\cdots + c_{n-1} y + c_n = 0,$$

令此 $c_0 = a_0, c_1 = nka_0 + a_1, \cdots\cdots, c_n = f(k).$

新方程式之各係數可用下法求之.

設 $x = y + k$, 則 $y = x - k$, 故

$$f(x) = f(y+k) = \phi(y) = \phi(x-k),$$

$$c_0(x-k)^n + \cdots\cdots + c_{n-1}(x-k) + c_n$$

$$= a_0 x^n + \cdots\cdots + a_{n-1} x + a_n;$$

此恆等式之兩邊以 $x-k$ 除之,其商又以 $x-k$ 除之,如此繼續進行,其左邊逐次所得之餘數 $c_n, c_{n-1}, \cdots\cdots$ 必與右邊所產生之餘數相同.約言之:

先以 $x-k$ 除 $f(x)$,又以 $x-k$ 除其商,……其逐次所得之餘數為 $c_n, c_{n-1}, \cdots\cdots, c_0$.

例　將 $2x^3-7x^2-3x+1=0$ 之根減去 4,作方程式.

【解】　第一法:　以 $y+4$ 代 x,得

$$\begin{aligned}2x^3-7x^2-3x+1&=2(y+4)^3-7(y+4)^2-(y+4)+1\\&=2y^3+17y^2+37y+5.\end{aligned}$$

第二法:

$$\begin{array}{rrrrlcl}
2 & -7 & -3 & +1 & \underline{|4} & \therefore & c_3=5,\\
 & +8 & +4 & +4 & & & \\ \hline
2 & +1 & +1, & +5 & & \therefore & c_2=37,\\
 & +8 & +36 & & & & \\ \hline
2 & +9, & +37 & & & \therefore & c_1=17,\\
 & +8 & & & & & \\ \hline
2, & +17 & & & & \therefore & c_0=2.
\end{array}$$

故所求之方程式為

$$2y^3+17y^2+37y+5=0.$$

例 1.　變換方程式 $x^3-3x^2+5x+6=0$ 為他方程式,使含未知數之二次項之係數為0.

【解】　以 $x=y+k$ 代入,得

$$y^3+(3k-3)y^2+\cdots\cdots=0;$$

設 $3k-3=0$, 則 $k=1$. 將原方程式之根減去 1, 得 $x^3+2x+9=0$, 此即爲所求之方程式.

例 2. 變換 $x^3-5x^2+8x-1=0$ 爲另一方程式,使含有未知數之一次項之係數爲 0.

【解】 以 $x=y+k$ 代入,得

$$y^3+(3k-5)y^2+(3k^2-10k+8)y+\cdots\cdots=0,$$

若 $3k^2-10k+8=0$, 則 $k=2$ 或 $\frac{4}{3}$. 將原方程式之根減去 2, 或 $\frac{4}{3}$, 得 $x^3+x^2+3=0$, 或 $27x^3-27x^2-85=0$.

325. 一般變換. 今再舉例以示方程式根之變換之一般.

例 1. 求作方程式,其根爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根之平方.

【解】 設 $y=x^2$, 則 $x=\pm\sqrt{y}$, 以此代入原方程式而簡約之得

$$y^3+(2q-p^2)y^2+(q^2-2pr)y-r^2=0.$$

例 2. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根爲 α,β,γ. 求作方程式,使其根爲 $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$.

【解】 因 $\alpha\beta\gamma=-r$, 故 $\beta\gamma=-\frac{r}{\alpha}, \gamma\alpha=-\frac{r}{\beta}, \alpha\beta=-\frac{r}{\gamma}$.

故所求之方程式之根 y 與原方程式之根 x 有關係：$y=-\frac{r}{x}$，由是 $x=-\frac{r}{y}$，以此代入 $x^3+px^2+qx+r=0$ 而簡約之，得

$$\cancel{y^3-qy^2+pry-r^2=0},\quad x^3-px^2+prx-r^2=0$$

此卽爲所求之方程式.

習題四十七

1. 變換 $x^5+3x^4-2x^2+6x+7=0$ 之根之符號.

2. 以 -2 乘 $2x^4+x^3-4x^2-6x+8=0$ 之根.

3. 施倒根變換於方程式 $5x^5-x^4+3x^3+9x+10=0$.

4. 將 $2x^5+x^4-3x^2+6=0$ 之根減去 2.

5. 變換 $x^4-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{25}-\frac{1}{48}=0$ 爲他方程式，使其第一項之係數爲 1，其他各項之係數皆爲整數.

6. 變換 $3x^4+36x^3+x-7=0$ 爲 y 之方程式，使 y^3 之係數爲 0.

7. 變換下列方程式，使其失去未知數之一次項：

(1)　$x^3+6x^2+9x+10=0$.

(2)　$x^3-x^2-x-3=0$.

8. 設 $x^4+x^3-x+2=0$ 之根爲 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$，求作方程式使其根爲 $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2,\delta^2$.

9. 設 $x^4+3x^3+2x^2-1=0$ 之根爲 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$，求作方程

式,使其根為 $\beta+\gamma+\delta,\ \alpha+\gamma+\delta,\ \alpha+\beta+\delta,\ \alpha+\beta+\gamma$.

10. 設 $x^3+p^2x+qx+r=0$ 之根為 $\alpha\ \beta,\gamma$,求作方程式使其根為:

$$(1)\quad \frac{\alpha\beta}{\gamma},\ \frac{\beta\gamma}{\alpha},\ \frac{\gamma\alpha}{\beta}.$$

$$(2)\quad \frac{\alpha}{\beta+\gamma},\ \frac{\beta}{\gamma+\alpha},\ \frac{\gamma}{\alpha+\beta}.$$

四 實數根與虛數根

326. 實數係數之方程式

定理. 設方程式 $f(x)=0$ 之係數皆為實數,若 $a+ib$ 為其一根,則 $a-ib$ 亦必為其一根(a 與 b 為實數).

設 $a+ib$ 為 $f(x)=0$ 之一根,則 $f(x)$ 可以 $x-(a+ib)$ 除盡;故欲證明 $a-ib$ 亦為 $f(x)=0$ 之一根,祇須證明 $f(x)$ 可以乘積 $\{x-(a+ib)\}\{x-(a-ib)\}$ 除盡之足矣. 此乘積之係數皆為實數:蓋

$$\{x-(a+ib)\}\{x-(a-ib)\}=(x-a)^2+b^2$$
$$=x^2-2ax+(a^2+b^2).$$

因 $f(x)$ 與 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 有一公因數 $x-(a+ib)$,故必有一最高公因數.但實數係數之二多項式,其最高公因

數之係數亦必須爲實數,故 $x-(a+ib)$ 不能爲其最高公因數.由是 $f(x)$ 與 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 之最高公因數卽爲 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$,換言之,$f(x)$ 可以 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$ 除盡.

例 方程式 $2x^3+5x^2+46x-87=0$ 之一根爲 $-2+5i$,解此方程式.

【解】 因 $-2+5i$ 爲其一根,則 $-2-5i$ 亦爲一根.但此方程式所有之根其和爲 $-\frac{5}{2}$,故第三根爲

$$-\frac{5}{2}-(-2+5i-2-5i)=\frac{3}{2}.$$

系 1. 係數爲實數之任何多項式 $f(x)$ 可分解爲一次與二次之實因數.

因對於 $f(x)=0$ 之每一實數根 c,必可得一 $f(x)$ 之實因數 $x-c$;對於 $f(x)=0$ 之每一對虛數根 $a+ib$, $a-ib$,必可得一 $f(x)$ 之實因數 $x^2-2ax+(a^2+b^2)$.

系 2. 對於 $f(x)=0$ 之虛數根所得 $f(x)$ 諸因數之乘積爲一 x 之函數,與 x 以任何之實數,此函數之值常爲正.

因此函數之每一因數皆取 $(x-a)^2+b^2$ 之形式,此種因數爲二平方之和,且 $b\neq0$,故 x 爲實數時其值常正.

系 3. 實數係數之方程式,其次數如爲奇數,至少有一實數根.

因其虛數根之個數必爲偶數,今知根之總數爲奇數,故至少有一實數根.

327. 既約方程式 下述定理可與前節之定理同樣證明;係數爲有理數之方程式,如有一根爲 $a+\sqrt{b}$,則 $a-\sqrt{b}$ 亦必爲其一根,於此 a, b 皆爲有理數,$\sqrt{b}$ 爲無理數.

設 $\phi(x)=0$ 爲一方程式,其係數爲有理數,若 $\phi(x)$ 不能有有理係數之因數,則謂此方程式在有理數之範圍內爲既約.

例 $x^2-2=0$ 及 $x^2+x+1=0$ 在有理數之範圍內皆爲既約之方程式.

328. 定理. 設 $f(x)=0$ 爲有理係數之方程式,又設 $\phi(x)=0$ 在有理數之範圍內爲既約,若 $\phi(x)=0$ 之一根爲 $f(x)=0$ 之根,則前者之一切根均爲 $f(x)=0$ 之根.

若 $f(x)=0$ 與 $\phi(x)=0$ 中有一公共之根 c,則 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 有一公因數 $(x-c)$. 已知 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 之係數皆爲有理數,故其最高公因數之係數亦皆爲有理數.

由假設 $\phi(x)$ 不能分解爲有理係數之因數,故 $f(x)$ 與

$\phi(x)$ 之最高公因數即為 $\phi(x)$. 換言之,即 $f(x)$ 可以 $\phi(x)$ 除盡.故凡 $\phi(x)=0$ 之根,皆為 $f(x)=0$ 之根.

329. 續號與變號. 多項式 $f(x)$ 內連接二項之符號相同時,謂之有一次續號;如連接二項之符號相反時,謂之有一次變號.

例如於 $x^6-x^4-x^3+2x^2+3x-1$, 其符號之次序為 $+--++-$, 故有二次續號與三次變號.

定理. 設 b 為正數,$f(x)$ 可以 $x-b$ 除盡.若 $f(x)$ 之係數為實數,則其商 $\phi(x)$ 至少較 $f(x)$ 減少一次變號.

設 $f(x)$ 中 x 之最高乘冪之係數 a_0 為正以證之.由綜合除法之規則,因 b 為正數,以 $x-b$ 除 $f(x)$, 其商之係數在 $f(x)$ 第一負係數以前皆為正數.及遇 $f(x)$ 之一負係數,則其商於此項或後數項始可變為負數.如其商於該項變為負數,則常繼續為負,迨乎 $f(x)$ 又遇正係數時,其商之係數方有變化之機會.但由假設,$f(x)$ 恰能被 $x-b$ 除盡,故 $\phi(x)$ 最後一項之符號,必與 $f(x)$ 最後一項之符號相反,故 $\phi(x)$ 至少須失去 $f(x)$ 最後之一變號.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 1 & +1 & -2 & -10 & -1 & +12 & -4 & \underline{2} \\ & 2 & +6 & +8 & -4 & -10 & +4 & \\ \hline 1 & +3 & +4 & -2 & -5 & +2, & 0 & \end{array}$$

如 $f(x)=x^6+x^5-2x^4-10x^3-x^2+12x-4$ 可以 $x-2$ 除盡,其商爲 $\phi(x)=x^5+3x^4+4x^3-2x^2-5x+2$. $f(x)$ 有三變號,而 $\phi(x)$ 中僅有二個變號,卽 $f(x)$ 最後之一變號,已於 $\phi(x)$ 中失去矣.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -1 & +1 & -7 & +2 & \underline{2} \\ & 2 & +2 & +6 & -2 & \\ \hline 1 & +1 & +3 & -1, & 0 & \end{array}$$

又如 $f(x)=x^4-x^3+x^2-7x+2$ 以 $x-2$ 除之適盡,其商爲 $\phi(x)=x^3+x^2+3x-1$. 此時 $f(x)$ 有四次變號,而 $\phi(x)$ 僅有一次變號.

330. 笛卡爾之符號規則*.

定理. 設方程式 $f(x)=0$ 之係數爲實數,則其正根之個數不能多於其變號之次數;其負根之個數不能多於 $f(-x)=0$ 中變號之次數.

(i) 設 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_r$ 表 $f(x)=0$ 之正根.

以 $x-\beta_1$ 除 $f(x)$, 又以 $x-\beta_2$ 除其商,如此繼續進行,最後得商 $\phi(x)$, 至少比 $f(x)$ 之變號少去 r 次. 故 $f(x)$ 至少須有 r 個變號,卽其正根之個數不能多於其變號之次數也.

* 笛卡爾 (Descartes, 1596-1650), 十七世紀法國之哲學家兼數學家,爲解析幾何學之[illegible]者.

(ii)　$f(x)=0$ 之負根,為 $f(-x)=0$ 之正根.故由(i),知 $f(x)=0$ 之負根,其數不能多於 $f(-x)=0$ 變號之次數.

例如方程式 $f(x)=x^6-x^5-x^3+x-1=0$ 之正根最多不過三個,其負根最多不過一個.因 $f(x)$ 僅有三次變號,而 $f(-x)=x^6+x^5+x^3-x-1=0$ 僅有一次變號.

系.　完全方程式之負根,其個數不能超過其續號之次數.

因設 $f(x)=0$ 為一完全方程式,其中每一連號對於 $f(-x)=0$ 即為一變號,而此外 $f(-x)$ 無發生變號之可能也.

如 $$f(x)=x^5+x^4-6x^3-8x^2-7x+1=0, \tag{1}$$

則 $$-f(-x)=x^5-x^4-6x^3+8x^2-7x-1=0; \tag{2}$$

(1)之 x^4, $-8x^2$, $-7x$ 各項與其前項為連號,而(2)之對應項則即為變號.

因(1)有二次變號,三次連號,故 $f(x)=0$ 之正根最多不過二個,負根最多不過三個.

331.　虛根之察驗法.　設 $f(x)=0$ 為 n 次之方程式,其根無有為0者,又設 v 與 v' 各為 $f(x)$ 及 $f(-x)$ 內變號之數,則方程式 $f(x)=0$ 至少有 $n-(v+v')$ 個虛根.

因 $f(x)=0$ 正根之數不能多於 v 個,負根之數不能多

於 v' 個,故所有實數之根不能多於 $v+v'$ 個.由是其虛根之數至少當有 $n-(v+v')$ 個.

例 求證 $x^5+x^2+1=0$ 有四個虛根.

【證】 此時 $f(x)=x^5+x^2+1$, $f(-x)=-x^5+x^2+1$, 故 $n-(v+v')=5-(0+1)=4$, 故原方程式至少當有四個虛根.但因原方程式為五次,其根當有五個,且其實根至少當有一個,由是其虛根確為四個.

習題四十八

1. $2x^4-x^3+5x^2+13x+5=0$ 之一根為 $1-2i$, 解此方程式.

2. $2x^4-11x^3+17x^2-10x+2=0$ 之一根為 $2+\sqrt{2}$, 解此方程式.

3. 求作以 $-5+2i$ 與 $-1+\sqrt{5}$ 為二根之最低次方程式,其係數須為有理數.

4. 求作次數最低之有理係數之方程式,已知其一根為 $\sqrt{3}+i$.

5. 應用笛卡爾符號之規則於下列各方程式:

(1) $x^4+1=0$. (2) $x^4-x^2-1=0$.

(3) $x^4+2x^3+x^2+x+1=0$. (4) $x^4-2x^3+x^2-x+1=0$.

(5) $x^7+x^5+x^3-x+1=0.$ (6) $x^7+x^4-x^2-1=0.$

(7) $x^6-4x^2+3=0.$ (8) $x^{5n}-x^{2n}+x^n+x+1=0.$

設 $x^6+3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0$ 之根均為實數,求其正根及負根之個數.

五 重 根

332. 導函數. 名 nax^{n-1} 爲 ax^n 之導函數,常數之導函數爲0. 多項式 $f(x)$ 各項導函數之和,謂之 $f(x)$ 之導函數,以 $f'(x)$ 表之.

$f'(x)$ 之導函數謂之 $f(x)$ 之第二次導函數,以 $f''(x)$ 表之.其第三次,第四次……之導函數,可依此推之.

例 $f(x)=3x^4-8x^3+4x^2-x+4,$

則 $f'(x)=12x^3-24x^2+8x-1,$

$f''(x)=36x^2-48x+8,$

$f'''(x)=72x-48,$

$f^{(4)}(x)=72.$

$f^{(5)}(x)=0.$

333. 戴勞定理*. 設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$,則

$$f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}(x+h)+a_n.$$

*戴勞(B. Taylor, 1685-1731),英人,氏發見今所謂戴勞定理,三年後其人,五十年後方引起世人注意,其較嚴證明則始自西里

用二項定理展開各項，且集合 h 同次冪之項，則得

$$f(x+h)=\{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n\}$$
$$+\{na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-1}\}h$$
$$+\{n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots\cdots+2a_{n-2}\}\frac{h^2}{1\cdot 2}$$
$$+\{n(n-1)(n-2)a_0x^{n-3}+(n-1)(n-2)(n-3)a_1x^{n-4}$$
$$+\cdots\cdots+3\cdot 2a_{n-3}\}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1\}a_0\frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n},$$

此展開式之第一項即爲 $f(x)$，第二項 h 之係數爲 $f'(x)$，第三項 $\frac{h^2}{2!}$ 之係數爲 $f''(x)\cdots\cdots$，其末項之係數爲 $f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}$，故

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{2!}+f'''(x)\frac{h^3}{3!}+\cdots\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!},$$

此即戴勞定理。

例 設 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$,

則
$$f(x+h)=a_0(x+h)^3+a_1(x+h)^2+a_2(x+h)+a_3$$
$$=(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)+(3a_0x^2+2a_1x+a_2)$$
$$+(6a_0x+2a_1)\frac{h^2}{2!}+6a_0\frac{h^3}{3!}$$
$$=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+f'''(x)\frac{h^3}{3!}.$$

推論： 因 $x=a+(x-a)$，得 $f(x)=f[a+(x-a)]$. 以 a 代 x，以 $x-a$ 代 h，得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots\cdots+f^{(n)}(x)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

例　以 $x-1$ 之乘羃表 x^3-1.

【解】　$f(x)=x^3-1,\ f'(x)=3x^2,\ f''(x)=6x,\ f'''(x)=6;$

故　$f(1)=0,\ f'(1)=3,\ f''(1)/2!=3,\ f'''(1)/3!=1;$

故　$x^3-1=3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3.$

334. 重根.　由前後推論,設 $f(x)$ 爲一多項式,則

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2!+\cdots\cdots, \tag{1}$$

$$f'(x)=f'(a)+f''(a)(x-a)+f'''(a)(x-a)^2/2!+\cdots\cdots. \tag{2}$$

若 $f(x)$ 可以 $x-a$ 除盡,但不能被 $(x-a)^2$ 除盡,則由(1), $f(a)=0,\ f'(a)\neq 0$; 故由(2), $f'(x)$ 不能被 $x-a$ 除盡.又若 $f(x)$ 可以 $(x-a)^2$ 除盡,但不能被 $(x-a)^3$ 所除盡,則由(1),知 $f(a)=f'(a)=0,\ f''(a)\neq 0$; 故由(2), $f'(x)$ 可以 $(x-a)$ 除盡,但不能被 $(x-a)^2$ 所除盡.一般言之,若 $f(x)$ 可以 $(x-a)^r$ 除盡,但不能被 $(x-a)^{r+1}$ 所除盡,則由(1), $f(a)=f'(a)=\cdots\cdots=f^{(r-1)}(a)=0$, $f^{(r)}(a)\neq 0$, 故由(2), $f'(x)$ 可用 $(x-a)^{r-1}$ 除盡,但不能被 $(x-a)^r$ 所除盡.故得定理如下:

定理. $f(x)=0$ 之一單根,非爲 $f'(x)=0$ 之根, $f(x)=0$ 之二重根必爲 $f'(x)=0$ 之一單根.一般言之, $f(x)=0$ 之 r 重根爲 $f'(x)=0$ 之

$(r-1)$ 重根.

例如 $f(x)=x^3-x^2-8x+12=0$ 之根為 $2, 2, -3$,

$f'(x)=3x^2-2x-8=0$ 之根為 $2, -\frac{4}{3}$.

故求 $f(x)=0$ 之重根,祇須求 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公因數. 若 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 無公因數, 則 $f(x)=0$ 之根皆為單根.

設 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之公因數為 $\phi(x)$, 則 $\phi(x)=0$ 之每一單根, 為 $f(x)=0$ 之二重根; $\phi(x)=0$ 之每一二重根, 為 $f(x)=0$ 之三重根. 依此類推, $\phi(x)=0$ 之 r 重根為 $f(x)=0$ 之 $r+1$ 重根.

例　求方程式 $f(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0$ 之重根.

【解】　於此, $f'(x)=5x^4-4x^3-15x^2+2x+8=0$, 而 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最高公因數為 $\phi(x)=x^3-3x-2$.

$\phi(x)=0$ 之根為 $-1, -1, 2$. 故 -1 為 $f(x)=0$ 之三重根, 2 為其二重根. 卽 $f(x)=0$ 之根為 $-1, -1, -1, 2, 2$.

習題四十九

1. 求 $f(x)=2x^5-4x^4+x^2-20$ 之逐次導函數.

2. 設 $f(x)=x^4-2x^2+1$, 用戴勞定理,求 $f(x+h)$.

3. (1) 以 $x+1$ 之乘冪表 x^4+x^2+1,(2) 以 $x-2$ 之乘冪表 x^5-32.

4. 下列各方程式有重根,解之:

(1) $x^3-3x-2=0.$

(2) $9x^3+12x^2-11x+2=0.$

(3) $4x^4+12x^2+9=0.$

(4) $x^4-4x^3+8x+7=0.$

(5) $x^5-x^3-4x^2-3x-2=0.$

5. 設方程式 $x^3-12x+a=0$ 有二重根,求 a.

6. 設 $3x^3+ax^2+x+b=0$ 有三重根,試決定 a,b,且求其根.

7. 二方程式 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$ 與 $x^4+x^3-x-1=0$ 有相同之根,解此二方程式.

六　實數根之近似值

335. 定理 1. 設 $f(x)=0$ 爲實數係數之方程式,a,b 爲二實數,若 $f(a)f(b)<0$,則在 a,b 之間,必有 $f(x)=0$ 之一根.

此定理,可舉實例以明之.

例　求證 $f(x)=x^3-3x+1=0$ 必有一根在 1 與 2 之間.

【證】 因 $f(1)=-1$ 而 $f(2)=3$. 故 $f(1)f(2)=-3<0$.

如逐次以 $x=1.1,\ 1.2\ \ 1.3, \cdots\cdots$ 代入 $f(x)$ 而計算之,得 $f(1.5)=-0.125$, 而 $f(1.6)=0.296$.

用同法,逐次以 1.5 與 1.6 間之數代入 $f(x)$ 而計算之得 $f(1.53)=-0.008423$, 而 $f(1.54)=0.032264$.

用此法繼續進行,可得二數列:

$$(a)\quad 1,\ 1.5,\ 1.53,\ 1.532,\cdots\cdots$$

$$(b)\quad 2,\ 1.6,\ 1.54,\ 1.533,\cdots\cdots$$

此二數列接近於同一之極限,如其極限值為 c, 則 c 為 $f(x)=0$ 之一根,即 $f(c)=0$.

因 x 通過 (a) 中諸數,則 $f(x)$ 常為負,故其極限 $f(c)$ 不能為正;若 x 通過 (b) 中諸數,則 $f(x)$ 常為正,故其極限 $f(c)$ 不能為負. 由是 $f(c)$ 必須為零, 即在 1 與 2 間之 c 為 $f(x)=0$ 之一根.

336. 定理 2. 設 $f(x)$ 之係數皆為實數, a, b 為二實數若 a 與 b 均非 $f(x)=0$ 之根,而在 a 與 b 之間, $f(x)=0$ 有奇數個根,則 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號相反;但若 a, b 之間 $f(x)=0$ 有偶數個根(或無根),則 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號相同.

逆之，若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號相反，則在 a, b 之間 $f(x)=0$ 有奇數個根，若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號相同，則 a, b 之間有偶數個根，或無根.

【證】 設 $a<b$，又 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_r$ 為在 a, b 間 $f(x)=0$ 之根之全體，則 $f(x)$ 可以 $(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots\cdots(x-\beta_r)$ 除盡，設其商為 $\phi(x)$.

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots\cdots(x-\beta_r)\phi(x),$$

因之
$$\frac{f(a)}{f(b)}=\frac{a-\beta_1}{b-\beta_1}\cdot\frac{a-\beta_2}{b-\beta_2}\cdots\cdots\frac{a-\beta_r}{b-\beta_r}\cdot\frac{\phi(a)}{\phi(b)}.$$

因數 $\frac{\phi(a)}{\phi(b)}$ 之值必須為正．因若 $\frac{\phi(a)}{\phi(b)}$ 為負，則 $\phi(a)$ 與 $\phi(b)$ 之符號相反，由是在 a 與 b 之間必有 $\phi(x)=0$ 之根；因之 $f(x)=0$ 除 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_r$ 之外，尚有其他之根，此與假設相矛盾.

又因 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_r$ 大於 a 而小於 b，故 r 個因數如 $\frac{a-\beta_1}{b-\beta_1}$ 等皆為負數.

由是，若 r 為奇數，則 $\frac{f(a)}{f(b)}$ 為負，即 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號相反．若 r 為偶數，則 $\frac{f(a)}{f(b)}$ 為正，即 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號相同.

逆之,若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號相反,則 $f(a)/f(b)$ 為負.由是 r 為奇數;若 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號相同,則 r 為偶數或零.

例. 討論 $f(x)=x^4-6x^3+x^2+12x-6=0$ 之實根.

【解】 由笛卡爾符號規則,此方程式之正根不能多於三個,而負根不能多於一個.

逐次計算 $f(0), f(1), f(2), \cdots\cdots$ 之值,得 $f(0)=-6$, $f(1)=2$, $f(2)=-10$, $f(3)=-42$, $f(4)=-70$, $f(5)=-46$, $f(6)=102$.

故在 0 與 1 之間必有一根,在 1 與 2 之間亦有一根,在 5 與 6 之間亦必有一根.

又用同法以求負根,得 $f(0)=-6$, $f(-1)=-10$, $f(-2)=38$,故有負根在 -1 與 -2 之間.

337. 中國古法*. 求數字方程式根之近似值,其法雖多,然以中國古法最稱簡捷,故特述之.其法見下例自明:

例. 求 $f(x)=2x^3+x^2-15x-59=0$ 之正根.

【解】 因 $f(3)=-41$ $f(4)=25$,故在 3 與 4 之間有一根,此根如以小數表之當為 $3.\beta\gamma\delta,\cdots\cdots$,於此 $\beta, \gamma, \delta, \cdots\cdots$ 表小數之數字.

---

*西書多稱此法為霍納(Horner)氏法.其實中國早已有之.據李儼著中國算學史,中國之發明,遠在宋代,而霍納則為十九世紀之人.

原方程式之根減3,得其方程式 $\phi(x)=2x^3+19x^2+45x-41=0$. 此方程式在0與1之間,有根 $0.\beta\gamma\delta\cdots\cdots$ 逐次以 $x=0.1, 0.2, 0.3, \cdots\cdots$ 代入 $\phi(x)$ 而計算之,知 $\phi(0.6)$ 爲負而 $\phi(0.7)$ 爲正,由是可知 β 對於0.6. 將 $\phi(x)=0$ 之根減去0.6,得

2	+1	−15	−59	3
	6	+21	+18	
2	+7	+6,	−41	
	6	+39		
2	+13,	+45		
	6			
2,	+19			

$$\psi(x)=2x^3+22.6x^2+69.96x-6.728=0,$$

2	+19	+45	−41	0.6
	1.2	+12.12	+34.272	
2	+20.2	+57.12,	−6.728	
	1.2	+12.84		
2	+21.4,	+69.96		
	1.2			
2,	+22.6			

此方程式在0與0.1之間有根 $0.\gamma\delta\cdots$. 以 $x=0.01, 0.02, \cdots\cdots$ 代入 $\psi(x)$ 以試算之,知 $\psi(0.09)$ 爲負而 $\psi(0.1)$ 爲正. 故有根在0.09與0.1之間,卽 γ 爲9, 由是 $f(x)=0$ 之正根至二位小數爲3.69.

如此繼續求之,卽得 $f(x)=0$ 正根之近似值爲3.69……

如求 $f(x)=0$ 之負根,祇須求 $f(-x)=0$ 之正根可耳.

例　求 $f(x)=x^3+x^2-10x+9=0$ 負根之近似值,至小數五位.

於此 $f(-x)=x^3-x^2-10x-9=0$ 用中國古法,其正根之近似值爲4.03293. 故 $f(x)=0$ 負根之近似值爲 -4.03293.

習題五十

試以中國古法計算下列各方程式所示之根至四位小數:

1. $x^3+x-3=0$, 一根在1與2之間.

2. $x^3+2x-20=0$, 一根在 2, 3 之間.

3. $x^3+6x^2+10x-2=0$, 一根在0, 1之間.

4. $3x^3+5x-40=0$, 一根在2, 3之間.

5. $x^3+10x^2+5x-120=0$, 一根在2, 3之間.

6 $2x^3-x^2-9x+1=0$, 一根在 -1 與 -2 之間.

7. $x^3-2x^2-23x+70=0$, 在 -5, -6 之間有一根.

8. $x^4+6x^3+12x^2-11x-41=0$, 一根在 -2, -3 之間.

9. 於方程式 $x^3-17=0$ 用霍納氏法計算 $\sqrt[3]{17}$ 至第四位小數.

10. 用同法計算 $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ 各至第四位小數.

七 施斗模定理*

338. 施斗模函數列. 設 $f(x)=0$ 爲一代數方程式, $f_1(x)$ 爲 $f(x)$ 之第一次導函數.

* 施斗模 (Sturm, 1803—1855), 瑞士人.

以$f_1(x)$除$f(x)$，設其商爲q_1，其餘數爲$-f_2(x)$. 又以$f_2(x)$除$f_1(x)$，設其商爲q_2，其餘數爲$-f_3(x)$.

如此繼續進行，若求$f(x)$與$f_1(x)$之最高公因數者然，惟每一餘數必須變其符號. 如是得一組之函數：

$$f_0(x)=f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\cdots\cdots,f_m$$

謂之施斗模之函數列，$f_m(x)$爲$f(x)$與$f_1(x)$之最高公因數.

由定義，此等函數間，有關係如下：

$$f(x)\equiv q_1f_1(x)-f_2(x),$$

$$f_1(x)\equiv q_2f_2(x)-f_3(x),$$

$$f_2(x)\equiv q_3f_3(x)-f_4(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{m-2}(x)\equiv q_{m-1}f_{m-1}(x)-f_m.$$

由此諸關係可得下述之結果：

(i) 若$f(x)=0$無重根，則f_m爲不等於0之常數.

(ii) 若$f(x)=0$無重根，則相鄰二函數不能同時爲零.

如$x=c$時，$f_1(x)$與$f_2(x)$同等於零，則$f_3(x)$亦必爲零；因之$f_4(x)$亦必爲零，故最後之f_m亦必爲0. 但此與假設相矛盾. 故相鄰二函數不能同時爲零.

(iii) 設 $f(x)=0$ 無重根.若對於 x 之某一數值 $f_1(x), f_2(x)\cdots\cdots f_{m-1}(x)$ 中有一函數爲零,則其前後二函數之比等於 -1.

例　若 $f_2(c)=0$, 則 $f_1(c)=-f_3(c)$.

(iv) 設 $f(x)=0$ 爲無重根之一實係數方程式,c 爲實數.

若 $f_r(c)=0, r>0$, 則三函數

$$f_{r-1}(x),\ f_r(x),\ f_{r+1}(x)$$

間變號之數,在 $x=c$ 之略前 $(x<c)$ 與略後 $(x>c)$,皆等於 1.

因 $f_r(c)=0, r>0$, 故由 (i),(ii),(iii), $f_{r-1}(c)\,f_{r+1}(c)<0$. 設 h 爲甚小之正數,則 $f_{r-1}(c\pm h)\,f_{r+1}(c\pm h)<0$. 由是

$$f_{r-1}(c\pm h),\ f_r(c\pm h),\ f_{r+1}(c\pm h)$$

之變號次數爲 1. 蓋於二異號之間夾一他實數,祇能有一個變號也.

339. 施斗模之定理. 設 $f(x)=0$ 爲一無重根之實係數方程式,又設 a 與 b 爲任何之二實數,均非 $f(x)=0$ 之根.數列

$$f_0(a),\ f_1(a),\ f_2(a)\cdots\cdots f_m(a)$$

之變號次數[illegible]

$$f_0(b),\ f_1(b),\ f_2(b)\cdots\cdots f_n(b)$$

之變號次數之差,即為在a與b之間,$f(x)=0$之根之個數.

設以 $a<b$ 證之.令x之值由a逐漸增加至b.若過$f(x)=0$之一根c,則當x經過c時,施斗模函數列失去一個變號.何則? 設$h>0$,由戴勞定理,

$$f(c-h)-f(c)=-f'(c)h+f''(c)\frac{h^2}{2!}\cdots\cdots,$$

$$f(c+h)-f(c)=+f'(c)h+f''(c)\frac{h^2}{2!}\cdots\cdots.$$

若h之值甚小,各展開式右邊之符號與其第一項之符號相同.因$f(c)=0$,故$f(c-h)$之符號與$-f'(c)h$相同,$f(c+h)$之符號與$f'(c)h$相同.若$f'(c)$為正,則$f(c-h)$為負,而$f(c+h)$為正.即在$x=c$之前,$f(x)$與$f'(x)$之符號為$-,+$;而在$x=c$之後,則為$+,+$;如是失去一個變號.若$f'(c)$為負,則$f(c-h)$為正,而$f(c+h)$為負.即在$x=c$之前,$f(x)$與$f'(x)$之符號為$+,-$,而當$x=c$之後,則為$-,-$.故當x經過$f(x)=0$之一根c,不論$f'(c)$為正為負,施斗模函數列常失去一個變號,蓋由(iv),當x經過c時,$f_0(x)$以後之諸函數,其變號次數無有損益也.

若$f(d)\neq 0$,$a<d<b$,則當x經過d時,由(iv),知施斗模函數列之變號數決無增減,故x由a變至b時,其所失去變號

之數,等於在 a, b 間 $f(x)=0$ 根之個數.

例 應用施斗模之定理於方程式 $x^3+3x^2-4x+1=0$

$3\ +6\ -4$	$1\ +3\ -4\ +1$	$1+1$
$6\ +12\ -8$	$3\ +9\ -12\ +3$	
$6\ -3$	$3\ +6\ -4$	
$15\ -8$	$3\ -8\ +3$	
$30\ -16$	$3\ +6\ -4$	
	$-14\ +7$	$3+15$
$30\ -15$		
-1	$-2\ +1$	

於此,
$$f(x)=x^3+3x^2-4x+1,$$
$$f_1(x)=3x^2+6x-4.$$
故
$$f_2(x)=2x-1,$$
$$f_3(x)=1.$$

(i) 若 x 之值甚大,則其最高次項之符號即爲其多項式之符號.故得下表

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$,	有三變號
0	$+$	$-$	$-$	$+$,	有二變號
∞	$+$	$+$	$+$	$+$,	無有變號

故 $f(x)=0$ 有一負根,有二正根.

(ii)　以 $x=0, 1, \cdots\cdots$ 代入各函數以定其正根，得

x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	+	−	−	+，有二變號
1	+	+	+	+，無有變號

故二正根皆在 0 與 1 之間.

同理，可決定其負根在 −4 與 −5 之間.

習題五十一

用施斗模之定理於下列各方程式之實根：

1. $x^3-6x^2+5x+13=0.$　　2. $x^3+5x+2=0.$

3. $x^3+3x^2+8x+8=0.$　　4. $2x^4-3x^2+3x-1=0.$

5. $x^4-12x^2+12x-3=0.$　　6. $x^4+2x^3-6x^2-8x+9=0.$

7. $4x^3-2x-5=0.$　　8. $x^4+x^3+x^2+x+1=0.$

9. $x^4-6x^3+x^2+14x-14=0.$

八　根之對稱函數

340. 定理. 設 $f(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n=0$ 之根為 $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n$，$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots\cdots(x-\beta_n)$，

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-\beta_1}+\frac{f(x)}{x-\beta_2}+\cdots\cdots+\frac{f(x)}{x-\beta_n}.$$

設 $n=3$ 以證之，一般之時，其證法無變化：

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3), \tag{1}$$

於 (1) 中以 $x+h$ 代 x,得

$$f(x+h)=[(x-\beta_1)+h][(x-\beta_2)+h][(x-\beta_3)+h], \tag{2}$$

(2) 之兩邊均可化爲 h 之多項式,左邊用戴勞氏定理,右邊實行乘法.因 (2) 爲恆等式,故兩邊 h 同次冪之係數相等.因 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\cdots\cdots$,其 h 之係數爲 $f'(x)$,而右邊 h 之係數爲 $(x-\beta_2)(x-\beta_3)+(x-\beta_3)(x-\beta_1)+(x-\beta_1)(x-\beta_2)$,故

$$f'(x)=(x-\beta_2)(x-\beta_3)+(x-\beta_3)(x-\beta_1)+(x-\beta_1)(x-\beta_2)$$

$$=\frac{f(x)}{x-\beta_1}+\frac{f(x)}{x-\beta_2}+\frac{f(x)}{x-\beta_3}.$$

例　設 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$,則

$$f'(x)=3x^2-12x+11,$$

故　$$(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)+(x-1)(x-2).$$

341. 根之同次冪之和. 於 § 317,已述根之對稱函數之意義及其特種情形,今更蓋以下述定理.

定理. 方程式 $f(x)=0$ 之根之同次冪之和可以其係數表之.

設方程式 $f(x)=x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0$　(1)

之根爲 α,β,γ;又設 $s_r=\alpha^r+\beta^r+\gamma^r$.

因　$$b_1=-(\alpha+\beta+\gamma),$$

故 $$s_1=-b_1;\qquad(2)$$

又因 $$b_2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,$$

故 $$2b_2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

$$=b_1^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

$$\therefore\quad s_2=b_1-2b_2.\qquad(3)$$

由上所得 s_1, s_2 之值,可得 $s_3, s_4,$ ……之值.其法如次:

因 α, β, γ 為 (1) 之根,故

$$\alpha^3+b_1\alpha^2+b_2\alpha+b_3=0,\qquad(4)$$

$$\beta^3+b_1\beta^2+b_2\beta+b_3=0,\qquad(5)$$

$$\gamma^3+b_1\gamma^2+b_2\gamma+b_3=0.\qquad(6)$$

相加,得 $$s_3+b_1s_2+b_2s_1+3b_3=0;\qquad(7)$$

由是知 s_3 可以 b_1, b_2, b_3 表之.

又將 (4), (5), (6) 各以 α, β, γ 乘之,加其結果得

$$s_4+b_1s_3+b_2s_2+b_3s_1=0,$$

由是即可求得 s_4.

同理,如將 (4), (5), (6) 各以 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$,或以 $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ 等乘之,將每次乘得之結果相加,得

$$s_5+b_1s_4+b_2s_3+b_3s_2=0,\quad s_6+b_1s_5+b_2s_4+b_3s_3=0,\cdots\cdots,$$

由是 s_5, s_6……等均可以 b_1, b_2, b_3 表之.

例　設 α, β, γ 為 $x^3-2x^2+4x+2=0$ 之根,求

$$\Sigma\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},\ \Sigma\frac{1}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2},\ \Sigma\frac{1}{\alpha^3}=\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}.$$

變換原方程式,設 $x=\frac{1}{y}$,得

$$y^3+2y^2-y+\tfrac{1}{2}=0,$$

由此方程式,以 $b_1=2,\ b_2=-1,\ b_3=\frac{1}{2}$ 代入於上列公式 (2), (3), (7),得 $s_1=-2,\ s_2=6,\ s_3=-\frac{31}{2}$.故

$$\Sigma\frac{1}{\alpha}=-2,\Sigma\frac{1}{\alpha^2}=6,\ \Sigma\frac{1}{\alpha^3}=-\frac{31}{2}.$$

習題五十二

1. 求方程式 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 之 s_3, s_4.

2. 設 α, β, γ 為 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根,求 $\Sigma\frac{1}{\alpha^2}$ 及 $\Sigma\frac{1}{\alpha^3}$.

3. 設 α, β, γ 為 $x^3-x^2+3x+4=0$ 之根,求

   (1) s_1, s_2, s_3, s_4.　　(2) $\Sigma\frac{1}{\alpha^3}$ 及 $\Sigma\frac{1}{\alpha^4}$.

九　三次方程式及四次方程式

342. 三次方程式之解法. 用平行變換三次方程式可使其含有未知數之二次項失去,其一般之形式為

$$x^3+px+q=0. \tag{1}$$

令 $x=y+z$,則 $x^3=y^3+z^3+3yz(y+z)=y^3+z^3+3yzx$,即

$$x^3-3yzx-(y^3+z^3)=0, \tag{2}$$

使 (2) 與 (1) 相一致，則得

$$y^3+z^3=-q, \tag{3}$$

$$3yz=-p,\ 卽\ y^3z^3=-\frac{p^3}{27}. \tag{4}$$

由是 y^3 與 z^3 爲二次方程式

$$u^2+qu-\frac{p^3}{27}=0 \tag{5}$$

之二根，卽

$$y^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ z^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}. \tag{6}$$

然 (6)，取其右邊之立方根，設其一值爲 y_1, z_1；則 y 有 y_1，$\omega y_1, \omega^2 y_1$ 三值；z 有 $z_1, \omega z_1, \omega^2 z_1$ 三值，卽

$$y=y_1,\ \omega y_1,\ \omega^2 y_1; \tag{7}$$

$$z=z_1,\ \omega z_1,\ \omega^2 z_1. \tag{8}$$

但由 (4)，$yz=-\frac{p}{3}$，故設 $y_1z_1=-\frac{p}{3}$，則 (7)，(8) 中 y 與 z 之值，適合於此條件者，惟下列三對，卽

$$y,\ z=y_1,\ z_1;\qquad \omega y_1,\ \omega^2 z_1;\qquad \omega^2 y_1,\ \omega z_1;$$

由是 (1) 之三根爲：$x_1=y_1+z_1$，$x_2=\omega y_1+\omega^2 z_1$，$x_3=\omega^2 y_1+\omega z_1$. 此可名之爲意大利之公式*.

*三次方程式解法，爲十六世紀意大利學者之產物，發明者爲誰，史家未能十分確定

例　解方程式 $x^3-6x^2+6x-2=0$.

【解】　以 $x=y+2$ 代入原方程式,使失去其二次項,得

$$y^3-6y-6=0.$$

於此 $p=-6$, $q=-6$, 代入上之公式,得此方程式之根

$$\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2},\ \omega\sqrt[3]{4}+\omega^2\sqrt[3]{2},\ \omega^2\sqrt[3]{4}+\omega\sqrt[3]{2}.$$

故原方程式之根爲

$$2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2},\ 2+\omega\sqrt[3]{4}+\omega^2\sqrt[3]{2},\ 2+\omega^2\sqrt[3]{4}+\omega\sqrt[3]{2}.$$

343. 討論.　三次方程式根之性質,視 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ 之值而定.故名 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ 爲三次方程式 $x^3+px+q=0$ 之判別式,今假定 p, q 皆爲實數而討論之:

(i)　若 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$, 則 (1) 之三根中,一根爲實數,二根爲虛數,即

$$x_1=y_1+z_1,$$

$$x_2=\omega y_1+\omega^2 z_1=-\frac{1}{2}(y_1+z_1)+\frac{\sqrt{3}}{2}(y_1-z_1)i,$$

$$x_3=\omega^2 y_1+\omega z_1=-\frac{1}{2}(y_1+z_1)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y_1-z_1)i.$$

(ii)　若 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, 則 $y_1=z_1$, 由是三根均爲實數,但其二根相等,即

$$x_1=2y_1=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}=-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

$$x_2=x_3=-y_1=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

(iii) 若 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$，則三根均為實數，且不相等．

因此時 $y_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ 之立方根號下為虛數，y_1 之形狀為 $y_1=\alpha+\beta i$；但 z_1 為 y_1 之共軛複素數，故 $z_1=\alpha-\beta i$．由是三根皆為實數，即

$$x_1=y_1+z_1=(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=2\alpha,$$

$$x_2=\omega y_1+\omega^2 z_1=\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)(\alpha+\beta i)+\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\,i)(\alpha-\beta i)$$
$$=-\alpha-\sqrt{3}\beta,$$

$$x_3=\omega^2 y_1+\omega y_2=\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\,i)(\alpha+\beta i)+\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)(\alpha-\beta i)$$
$$=-\alpha+\sqrt{3}\beta.$$

344. 四次方程式之解法． 凡四次方程式可化為

$$x^4+ax^2+bx+c=0. \tag{1}$$

於 (1) 之左邊加減 $x^2u+\frac{u^2}{4}$，使化為二平方數之差，於此 u 為一常數．由是 (1) 化為

$$x^4+x^2u+\frac{u^2}{4}-x^2u-\frac{u^2}{4}+ax^2+bx+c=0,$$

或
$$\left(x^2+\frac{u}{2}\right)^2-\left[(u-a)x^2-bx+\left(\frac{u^2}{4}-c\right)\right]=0. \quad (2)$$

今取適當之 u, 使此第二項爲完全平方, 是必

$$b^2=4(u-a)\left(\frac{u^2}{4}-c\right),$$

或
$$u^3-au^2-4cu+(4ac-b^2)=0. \quad (3)$$

設 u_1 爲 (3) 之一根, 於 (2) 式中, 以 u_1 代 u, 則其第二項爲 $\sqrt{u_1-a}x-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}$ 之平方, 由是 (2) 分解爲下列二方程式:

$$x^2+\sqrt{u_1-a}x+\left(\frac{u_1}{2}-\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0, \quad (4)$$

$$x^2-\sqrt{u_1-a}x+\left(\frac{u_1}{2}+\frac{b}{2\sqrt{u_1-a}}\right)=0. \quad (5)$$

解 (4) 與 (5), 即可得 (1) 之根.

例　解 $x^4+x^2+4x-3=0$.

【解】　於此 $a=1$, $b=4$, $c=-3$, 代入 (3), 得

$$u^3-u^2+12u-28=0.$$

此三次方程式之一根爲 2, 即 $u_1=2$, 入代 (4), (5), 得

$$x^2+x-1=0,$$

$$x^2-x+3=0;$$

解此二方程式, 得 $x=(-1\pm\sqrt{5})/2$, $(1\pm i\sqrt{11})/2$.

習題五十三

解下列各方程式:

1. $x^3+3x^2+6x+5=0.$
2. $x^3-9x-28=0.$
3. $x^3-9x^2+9x-8=0.$
4. $x^3-3x-4=0.$
5. $4x^3-7x-6=0$
6. $x^3+3x^2+9x-1=0.$
7. $x^4+x^2+6x+1=0.$
8. $x^4-4x^3+x^2+4x+1=0.$
9. $x^4+12x-5=0.$
10. $x^4+8x^3+12x-11x+2=0$

常 用 對 數

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		00 000	30 103	47 712	60 206	69 897	77 815	84 510	90 309	95 424
1	00 000	04 139	07 918	11 394	14 613	17 609	20 412	23 045	25 527	27 875
2	30 103	32 222	34 242	36 173	38 021	39 794	41 497	43 136	44 716	46 240
3	47 712	49 136	50 515	51 851	53 148	54 407	55 630	56 820	57 978	59 106
4	60 206	61 278	62 325	63 347	64 345	65 321	66 276	67 210	68 124	69 020
5	69 897	70 757	71 600	72 428	73 239	74 036	74 819	75 587	76 343	77 085
6	77 815	78 533	79 239	79 934	80 618	81 291	81 954	82 607	83 251	83 885
7	84 510	85 126	85 733	86 332	86 923	87 506	88 081	88 649	89 209	89 763
8	90 309	90 849	91 381	91 908	92 428	92 942	93 450	93 952	94 448	94 939
9	95 424	95 904	96 379	96 848	97 313	97 772	98 227	98 677	99 123	99 564
10	00 000	00 432	00 860	01 284	01 703	02 119	02 531	02 938	03 342	03 743
11	04 139	04 532	04 922	05 308	05 690	06 070	06 446	06 819	07 188	07 555
12	07 918	08 279	08 636	08 991	09 342	09 691	10 037	10 380	10 721	11 059
13	11 394	11 727	12 057	12 385	12 710	13 033	13 354	13 672	13 988	14 301
14	14 613	14 922	15 229	15 534	15 836	16 137	16 435	16 732	17 026	17 319
15	17 609	17 898	18 184	18 469	18 752	19 033	19 312	19 590	19 866	20 140
16	20 412	20 683	20 952	21 219	21 484	21 748	22 011	22 272	22 531	22 789
17	23 045	23 300	23 553	23 805	24 055	24 304	24 551	24 797	25 042	25 285
18	25 527	25 768	26 007	26 245	26 482	26 717	26 951	27 184	27 416	27 646
19	27 875	28 103	28 330	28 556	28 780	29 003	29 226	29 447	29 667	29 885
20	30 103	30 320	30 535	30 750	30 963	31 175	31 387	31 597	31 806	32 015
21	32 222	32 428	32 634	32 838	33 041	33 244	33 445	33 646	33 846	34 044
22	34 242	34 439	34 635	34 830	35 025	35 218	35 411	35 603	35 793	35 984
23	36 173	36 361	36 549	36 736	36 922	37 107	37 291	37 475	37 658	37 840
24	38 021	38 202	38 382	38 561	38 739	38 917	39 094	39 270	39 445	39 620
25	39 794	39 967	40 140	40 312	40 483	40 654	40 824	40 993	41 162	41 330
26	41 497	41 664	41 830	41 996	42 160	42 325	42 488	42 651	42 813	42 975
27	43 136	43 297	43 457	43 616	43 775	43 933	44 091	44 248	44 404	44 560
28	44 716	44 871	45 025	45 179	45 332	45 484	45 637	45 788	45 939	46 090
29	46 240	46 389	46 538	46 687	46 835	46 982	47 129	47 276	47 422	47 567
30	47 712	47 857	48 001	48 144	48 287	48 430	48 572	48 714	48 855	48 996
31	49 136	49 276	46 415	49 554	49 693	49 831	49 969	50 106	50 243	50 379
32	50 515	50 651	50 786	50 920	51 055	51 188	51 322	51 455	51 587	51 720
33	51 851	51 983	52 114	52 244	52 375	52 504	52 634	52 763	52 892	53 020
34	53 148	53 275	53 403	53 529	53 656	53 782	53 908	54 033	54 158	54 283
35	54 407	54 531	54 654	54 777	54 900	55 023	55 145	55 267	55 388	55 509
36	55 630	55 751	55 871	55 991	56 110	56 229	56 348	56 467	56 585	56 703
37	56 820	56 937	57 054	57 171	57 287	57 403	57 519	57 634	57 749	57 864
38	57 978	58 092	58 206	58 320	58 433	58 546	58 659	58 771	58 883	58 995
39	59 106	59 218	59 329	59 439	59 550	59 660	59 770	59 879	59 988	60 097
40	60 206	60 314	60 423	60 531	60 638	60 746	60 853	60 959	61 066	61 172
41	61 278	61 384	61 490	61 595	61 700	61 805	61 909	62 014	62 118	62 221
42	62 325	62 428	62 531	62 634	62 737	62 839	62 941	63 043	63 144	63 246
43	63 347	63 448	63 548	63 649	63 749	63 849	63 949	64 048	64 147	64 246
44	64 345	64 444	64 542	64 640	64 738	64 836	64 933	65 031	65 128	65 225
45	65 321	65 418	65 514	65 610	65 706	65 801	65 896	65 992	66 087	66 181
46	66 276	66 370	66 464	66 558	66 652	66 745	66 839	66 932	67 025	67 117
47	67 210	67 302	67 394	67 486	67 578	67 669	67 761	67 852	67 943	68 034
48	68 124	68 215	68 305	68 395	68 485	68 574	68 664	68 753	68 842	68 931
49	69 020	69 108	69 197	69 285	69 373	69 461	69 548	69 636	69 723	69 810
50	69 897	69 984	[illegible]	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672
51	70 757	70 842	70 927	71 012	71 096	71 181	71 265	71 349	71 433	71 517
52	71 600	71 684	71 767	71 850	71 933	72 016	72 099	72 181	72 263	72 346
53	72 428	72 509	72 591	72 673	72 754	72 835	72 916	72 997	73 078	73 159
54	73 239	73 320	73 400	73 480	73 560	73 640	73 719	73 799	73 878	73 957
55	74 036	74 115	74 194	74 273	74 351	74 429	74 507	74 586	74 663	74 741
56	74 819	74 896	74 974	75 051	75 128	75 205	75 282	75 358	75 435	75 511
57	75 587	75 664	75 740	75 815	75 891	75 967	76 042	76 118	76 193	76 268
58	76 343	76 418	76 492	76 567	76 641	76 716	76 790	76 864	76 938	77 012
59	77 085	77 159	77 232	77 305	77 379	77 452	77 525	77 597	77 670	77 743
60	77 815	77 887	77 960	78 032	78 104	78 176	78 247	78 319	78 390	78 462
61	78 533	78 604	78 675	78 746	78 817	78 888	78 958	79 029	79 099	79 169
62	79 239	79 309	79 379	79 449	79 518	79 588	79 657	79 727	79 796	79 865
63	79 934	80 003	80 072	80 140	80 209	80 277	80 346	80 414	80 482	80 550
64	80 618	80 686	80 754	80 821	80 889	80 956	81 023	81 090	81 158	81 224
65	81 291	81 358	81 425	81 491	81 558	81 624	81 690	81 757	81 823	81 889
66	81 954	82 020	82 086	82 151	82 217	82 282	82 347	82 413	82 478	82 543
67	82 607	82 672	82 737	82 802	82 866	82 930	82 995	83 059	83 123	83 187
68	83 251	83 315	83 378	83 442	83 506	83 569	83 632	83 696	83 759	83 822
69	83 885	83 948	84 011	84 073	84 136	84 198	84 261	84 323	84 386	84 448
70	84 510	84 572	84 634	84 696	84 757	84 819	84 880	84 942	85 003	85 065
71	85 126	85 187	85 248	85 309	85 370	85 431	85 491	85 552	85 612	85 673
72	85 733	85 794	85 854	85 914	85 974	86 034	86 094	86 153	86 213	86 273
73	86 332	86 392	86 451	86 510	86 570	86 629	86 688	86 747	86 806	86 864
74	86 923	86 982	87 040	87 099	87 157	87 216	87 274	87 332	87 390	87 448
75	87 506	87 564	87 622	87 679	87 737	87 795	87 852	87 910	87 967	88 024
76	88 081	88 138	88 195	88 252	88 309	88 366	88 423	88 480	88 536	88 593
77	88 649	88 705	88 762	88 818	88 874	88 930	88 986	89 042	89 098	89 154
78	89 209	89 265	89 321	89 376	89 432	89 487	89 542	89 597	89 653	89 708
79	89 763	89 818	89 873	89 927	89 982	90 037	90 091	90 146	90 200	90 255
80	90 309	90 363	90 417	90 472	90 526	90 580	90 634	90 687	90 741	90 795
81	90 849	90 902	90 956	91 009	91 062	91 116	91 169	91 222	91 275	91 328
82	91 381	91 434	91 487	91 540	91 593	91 645	91 698	91 751	91 803	91 855
83	91 908	91 960	92 012	92 065	92 117	92 169	92 221	92 273	92 324	92 376
84	92 428	92 480	92 531	92 583	92 634	92 686	92 737	92 788	92 840	92 891
85	92 942	92 993	93 044	93 095	93 146	93 197	93 247	93 298	93 349	93 399
86	93 450	93 500	93 551	93 601	93 651	93 702	93 752	93 802	93 852	93 902
87	93 952	94 002	94 052	94 101	94 151	94 201	94 250	94 300	94 349	94 399
88	94 448	94 498	94 547	94 596	94 645	94 694	94 743	94 792	94 841	94 890
89	94 939	94 988	95 036	95 085	95 134	95 182	95 231	95 279	95 328	95 376
90	95 424	95 472	95 521	95 569	95 617	95 665	95 713	95 761	95 809	95 856
91	95 904	95 952	95 999	96 047	96 095	96 142	96 190	96 237	96 284	96 332
92	96 379	96 426	96 473	96 520	96 567	96 614	96 661	96 708	96 755	96 802
93	96 848	96 895	96 942	96 988	97 035	97 081	97 128	97 174	97 220	97 267
94	97 313	97 359	97 405	97 451	97 497	97 543	97 589	97 635	97 681	97 727
95	97 772	97 818	97 864	97 909	97 955	98 000	98 046	98 091	98 137	98 182
96	98 227	98 272	98 318	98 363	98 408	98 453	98 498	98 543	98 588	98 632
97	98 677	98 722	98 767	98 811	98 856	98 900	98 945	98 989	99 034	99 078
98	99 123	99 167	99 211	99 255	99 300	99 344	99 388	99 432	99 476	99 520
99	99 564	99 607	99 651	99 695	99 739	99 782	99 826	99 870	99 913	99 957
100	00 000	00 043	00 087	00 130	00 173	00 217	00 260	00 303	00 346	00 389

平方數,立方數及平方根,立方根表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1.000	1.000	51	2,601	132,651	7.141	3.708
2	4	8	1.414	1.260	52	2,704	140,608	7.211	3.733
3	9	27	1.732	1.442	53	2,809	148,877	7.280	3.756
4	16	64	2.000	1.587	54	2,916	157,464	7.348	3.780
5	25	125	2.236	1.710	55	3,025	166,375	7.416	3.803
6	36	216	2.449	1.817	56	3,136	175,616	7.483	3.826
7	49	343	2.646	1.913	57	3,249	185,193	7.550	3.849
8	64	512	2.828	2.000	58	3,364	195,112	7.616	3.871
9	81	729	3.000	2.080	59	3,481	205,379	7.681	3.893
10	100	1,000	3.162	2.154	60	3,600	216,000	7.746	3.915
11	121	1,331	3.317	2.224	61	3,721	226,981	7.810	3.936
12	144	1,728	3.464	2.289	62	3,844	238,328	7.874	3.958
13	169	2,197	3.606	2.351	63	3,969	250,047	7.937	3.979
14	196	2,744	3.742	2.410	64	4,096	262,144	8.000	4.000
15	225	3,375	3.873	2.466	65	4,225	274,625	8.062	4.021
16	256	4,096	4.000	2.520	66	4,356	287,496	8.124	4.041
17	289	4,913	4.123	2.571	67	4,489	300,763	8.185	4.062
18	324	5,832	4.243	2.621	68	4,624	314,432	8.246	4.082
19	361	6,859	4.359	2.668	69	4,761	328,509	8.307	4.102
20	400	8,000	4.472	2.714	70	4,900	343,000	8.367	4.121
21	441	9,261	4.583	2.759	71	5,041	357,911	8.426	4.141
22	484	10,648	4.690	2.802	72	5,184	373,248	8.485	4.160
23	529	12,167	4.796	2.844	73	5,329	389,017	8.544	4.179
24	576	13,824	4.899	2.884	74	5,476	405,224	8.602	4.198
25	625	15,625	5.000	2.924	75	5,625	421,875	8.660	4.217
26	676	17,576	5.099	2.962	76	5,776	438,976	8.718	4.236
27	729	19,683	5.196	3.000	77	5,929	456,533	8.775	4.254
28	784	21,952	5.292	3.037	78	6,084	474,552	8.832	4.273
29	841	24,389	5.385	3.072	79	6,241	493,039	8.888	4.291
30	900	27,000	5.477	3.107	80	6,400	512,000	8.944	4.309
31	961	29,791	5.568	3.141	81	6,561	531,441	9.000	4.327
32	1,024	32,768	5.657	3.175	82	6,724	551,368	9.055	4.344
33	1,089	35,937	5.745	3.208	83	6,889	571,787	9.110	4.362
34	1,156	39,304	5.831	3.240	84	7,056	592,704	9.165	4.380
35	1,225	42,875	5.916	3.271	85	7,225	614,125	9.220	4.397
36	1,296	46,656	6.000	3.302	86	7,396	636,056	9.274	4.414
37	1,369	50,653	6.083	3.332	87	7,569	658,503	9.327	4.431
38	1,444	54,872	6.164	3.362	88	7,744	681,472	9.381	4.448
39	1,521	59,319	6.245	3.391	89	7,921	704,969	9.434	4.465
40	1,600	64,000	6.325	3.420	90	8,100	729,000	9.487	4.481
41	1,681	68,921	6.403	3.448	91	8,281	753,571	9.539	4.498
42	1,764	74,088	6.481	3.476	92	8,464	778,688	9.592	4.514
43	1,849	79,507	6.557	3.503	93	8,649	804,357	9.644	4.531
44	1,936	85,184	6.633	3.530	94	8,836	830,584	9.695	4.547
45	2,025	91,125	6.708	3.557	95	9,025	857,375	9.747	4.563
46	2,116	97,336	6.782	3.583	96	9,216	884,736	9.798	4.579
47	2,209	103,823	6.856	3.609	97	9,409	912,673	9.849	4.595
48	2,304	110,592	6.928	3.634	98	9,604	941,192	9.899	4.610
49	2,401	117,649	7.000	3.659	99	9,801	970,299	9.950	4.626
50	2,500	125,000	7.071	3.684	100	10,000	1,000,000	10.000	4.642

複利表（假定本金一圓）

年數	2½%	3%	3½%	4%	4½%	5%	5½%	6%	6½%	7%	8%
1	$1.025	$1.030	$1.035	$1.040	$1.045	$1.050	$1.055	$1.060	$1.065	$1.070	$1.080
2	1.051	1.061	1.071	1.082	1.092	1.103	1.113	1.124	1.134	1.145	1.160
3	1.077	1.093	1.109	1.125	1.141	1.158	1.174	1.191	1.208	1.225	1.260
4	1.104	1.126	1.148	1.170	1.193	1.216	1.239	1.262	1.286	1.311	1.360
5	1.131	1.159	1.188	1.217	1.246	1.276	1.307	1.338	1.370	1.403	1.469
6	1.160	1.194	1.229	1.265	1.302	1.340	1.379	1.419	1.459	1.501	1.587
7	1.187	1.230	1.272	1.316	1.361	1.407	1.455	1.504	1.554	1.606	1.714
8	1.218	1.267	1.317	1.369	1.422	1.477	1.535	1.594	1.655	1.718	1.851
9	1.249	1.305	1.363	1.423	1.486	1.551	1.619	1.689	1.763	1.838	1.999
10	1.280	1.344	1.411	1.480	[illegible]	1.629	1.708	1.791	1.877	1.967	2.159
11	1.312	1.384	1.460	1.539	1.623	1.710	1.802	1.898	1.999	2.105	2.332
12	1.345	1.426	1.511	1.601	1.696	1.796	1.901	2.012	2.129	2.252	2.518
13	1.379	1.469	1.564	1.665	1.772	1.886	2.006	2.133	2.267	2.410	2.720
14	1.413	1.513	1.619	1.732	1.851	1.980	2.116	2.261	2.415	2.579	2.937
15	1.448	1.558	1.675	1.801	1.935	2.079	2.232	2.397	2.572	2.759	3.172
16	1.485	1.605	1.734	1.873	2.022	2.183	2.355	2.540	2.739	2.952	3.420
17	1.522	1.653	1.795	1.948	2.113	2.292	[illegible]	2.693	2.917	3.159	3.700
18	1.560	1.702	1.857	2.026	2.208	2.407	2.621	2.854	3.107	3.380	3.990
19	1.599	1.754	1.923	2.107	2.308	2.527	2.766	3.026	3.309	3.517	4.316
20	1.639	1.806	1.990	2.191	2.412	2.653	2.918	3.207	3.524	3.870	4.661
21	1.680	1.860	2.059	2.279	2.520	2.786	3.075	3.400	3.753	4.141	5.034
22	1.722	1.916	2.132	2.370	2.634	2.925	3.243	3.604	3.997	4.430	5.437
23	1.765	1.974	2.206	2.465	2.752	3.072	3.420	3.820	4.256	4.741	5.871
24	1.809	2.033	2.283	2.563	2.876	3.225	3.615	4.049	4.533	5.072	6.341
25	1.854	2.094	2.363	2.666	3.005	3.286	3.813	4.292	4.828	5.427	6.348
26	1.900	2.157	2.446	2.772	3.141	3.556	4.023	4.549	5.142	5.807	7.396
27	1.948	2.221	2.532	2.883	3.282	3.733	4.244	4.822	5.476	6.214	7.988
28	1.996	2.288	2.620	2.999	3.430	3.920	4.478	5.112	5.832	6.649	8.627
29	2.046	2.357	2.712	3.119	3.584	4.116	4.724	5.418	6.211	7.114	9.317
30	2.098	2.427	2.807	3.243	3.745	4.322	4.984	5.743	6.614	7.612	10.063
31	2.150	2.500	2.905	3.373	3.914	4.538	5.258	6.088	7.044	8.145	10.868
32	2.204	2.575	3.007	3.508	4.090	4.765	5.547	6.453	7.502	8.715	11.737
33	2.259	2.652	3.112	3.648	4.274	5.003	5.852	6.841	7.990	9.325	12.676
34	2.315	2.732	3.221	3.794	4.466	5.253	6.174	7.251	8.509	9.978	13.690
35	2.373	2.814	3.334	3.946	4.667	5.516	6.514	7.686	9.062	10.677	14.785
36	2.433	2.898	3.450	4.104	4.877	5.792	6.872	8.147	9.651	11.424	15.968
37	2.493	2.935	3.571	4.268	5.097	6.081	7.250	8.636	10.279	12.224	17.246
38	2.556	3.075	3.696	4.439	5.326	6.385	7.649	9.154	10.947	13.079	18.625
39	2.620	3.167	3.825	4.616	5.566	6.705	8.069	9.704	11.658	13.995	20.115
40	2.685	3.262	3.959	4.801	5.816	7.040	5.513	10.286	12.416	14.974	21.725
41	2.752	3.360	4.098	4.993	6.078	7.392	8.982	10.903	13.223	16.023	23.462
42	2.821	3.461	4.241	5.193	6.352	7.762	9.476	11.557	14.083	17.144	25.339
43	2.892	3.565	4.390	5.400	6.637	3.150	9.397	12.250	14.998	18.344	27.367
44	2.964	3.671	4.543	5.617	6.936	8.557	10.546	12.985	15.973	19.628	29.556
45	3.038	3.732	4.702	5.841	7.248	8.985	11.127	13.765	17.011	21.002	31.920
46	3.114	3.895	4.867	6.075	7.574	9.434	11.780	14.590	18.117	22.473	34.474
47	3.192	4.012	5.037	6.318	7.915	9.906	12.384	15.466	19.294	24.046	37.232
48	3.271	4.132	5.211	6.571	8.271	10.401	13.065	16.394	20.549	25.729	40.211
49	3.353	4.256	5.396	6.833	8.644	10.921	13.784	17.378	21.884	27.530	43.427
50	3.437	4.384	5.585	7.107	9.033	11.467	14.542	18.420	23.307	29.457	46.902

年金表（假定年金一圓）

年數	1%	1½%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0100	2.0150	2.0200	2.0300	2.0400	2.0500	2.0600	2.0700
3	3.0301	3.0452	3.0604	3.0909	3.1216	3.1525	3.1836	3.2149
4	4.0604	4.0900	4.1216	4.1836	4.2465	4.3101	4.3746	4.4399
5	5.1010	5.1523	5.2040	5.3091	5.4163	5.5256	5.6371	5.7507
6	6.1520	6.2296	6.3081	6.4684	6.6330	6.8019	6.9753	7.1533
7	7.2135	7.3230	7.4343	7.6625	7.8983	8.1420	8.3938	8.6540
8	8.2857	8.4328	8.5830	8.8923	9.2142	9.5491	9.8975	10.2598
9	9.3685	9.5593	9.7546	10.1591	10.5828	11.0266	11.4913	11.9780
10	10.4622	10.7027	10.9497	11.4639	12.0061	12.5779	13.1808	13.8164
11	11.5668	11.8633	12.1687	12.8078	13.4864	14.2068	14.9716	15.7836
12	12.6825	13.0412	13.4121	14.1920	15.0258	15.9171	16.8699	17.8885
13	13.8093	14.2368	14.6803	15.6178	16.6268	17.7130	18.8821	20.1406
14	14.9474	15.4504	15.9739	17.0863	18.2919	19.5986	21.0151	22.5505
15	16.0969	16.6821	17.2934	18.5989	20.0236	21.5786	23.2760	25.1290
16	17.2579	17.9324	18.6393	20.1569	21.8245	23.6575	25.6725	27.8881
17	18.4304	19.2014	20.0121	21.7616	23.6975	25.8404	28.2129	30.8402
18	19.6147	20.4894	21.4123	23.4144	25.6454	28.1324	30.9057	33.9990
19	20.8109	21.7967	22.8406	25.1169	27.6712	30.5390	33.7600	37.3790
20	22.0190	23.1237	24.2974	26.8704	29.7781	33.0660	36.7856	40.9955
21	23.2392	24.4705	25.7833	28.6765	31.9692	35.7193	39.9927	44.8652
22	24.4716	25.8376	27.2990	30.5368	31.2480	38.5052	43.3923	49.0057
23	25.7163	27.2251	28.8450	32.4529	36.6179	41.4305	46.9958	53.4361
24	26.9735	28.6335	30.4219	34.4265	39.0826	44.5020	50.8156	58.1767
25	28.2432	30.0630	32.0303	36.4593	41.6459	47.7271	54.8645	63.2490
26	29.5256	31.5140	33.6709	38.5530	44.3117	51.1135	59.1564	68.6765
27	30.8209	32.9867	35.3443	40.7096	47.0842	54.6691	63.7058	74.4838
28	32.1291	34.4815	37.0512	42.9309	49.9676	58.4026	68.5281	80.6977
29	33.4504	35.9987	38.7922	45.2189	52.9663	62.3227	73.6398	87.3465
30	34.7849	37.5387	40.6681	47.5754	56.0849	66.4388	79.0582	94.4608
31	36.1327	39.1018	42.3794	50.0027	59.3283	70.7608	84.8017	102.0730
32	37.4941	40.0883	44.2270	52.5028	62.7015	75.2988	90.8898	110.2182
33	38.8690	42.2936	46.1116	55.0778	66.2095	80.0638	97.3432	118.9334
34	40.2577	43.9331	48.0338	57.7302	69.8579	85.0670	104.1838	128.2588
35	41.6603	45.5921	49.9945	60.4621	72.6522	90.3203	111.4348	138.2369
36	43.0769	47.2760	51.9944	63.2759	77.5983	95.8363	119.1209	148.9135
37	44.5076	48.9851	54.0343	66.1742	81.7022	101.6281	127.2681	160.3374
38	45.9527	50.7139	56.1149	69.1594	85.9703	107.7095	135.9042	172.5610
39	47.4123	52.4807	58.2372	72.2342	90.4091	114.0950	145.0585	185.6403
40	48.8864	54.2679	60.4020	75.4013	95.0255	120.7938	154.7620	199.6351
41	50.3752	56.0819	62.6100	78.6632	99.8265	127.8398	165.0477	214.6096
42	51.8790	57.9231	64.8622	82.0232	104.8196	135.2318	175.9505	230.6322
43	53.3978	59.7920	67.1595	85.4839	110.0124	142.9933	187.5076	247.7765
44	54.9318	61.6889	69.5027	89.0484	115.4129	151.1430	199.7580	266.1209
45	56.4811	63.6142	71.8927	92.7199	121.0294	159.7002	212.7435	285.7493
46	58.0459	65.5684	74.3306	96.5015	126.8706	168.6852	226.5081	306.7518
47	59.6263	67.5519	76.8172	100.3965	132.9454	178.1194	241.0986	329.2244
48	61.2226	69.5652	79.3535	104.4084	139.2632	188.0254	256.5645	353.2701
49	62.8348	71.6087	81.9406	108.5406	145.8337	198.4267	272.9584	378.9990
50	64.4632	73.6828	84.5794	112.7969	152.6671	209.3480	290.3359	406.5289

年金現價表（假定年金一圓）

年数	1%	$1\frac{1}{2}$%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
1	0.9901	0.9852	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346
2	1.9704	1.9559	1.9416	1.9135	1.8861	1.8594	1.8334	1.8080
3	2.9410	2.9122	2.8839	2.8286	2.7751	2.7232	2.6730	2.6243
4	3.9020	3.8544	3.8077	3.7171	3.6299	3.5460	3.4651	3.3872
5	4.8534	4.7826	4.7135	4.5797	4.4518	4.3295	4.2124	4.1002
6	5.7955	5.6972	5.6014	5.4172	5.2421	5.0757	4.9173	4.7665
7	6.7282	6.5982	6.4720	6.2303	6.0021	5.7864	5.5824	5.3893
8	7.6517	7.4859	7.3255	7.0197	6.7327	6.4632	6.2098	5.9713
9	8.5660	8.3605	8.1622	7.7861	7.4353	7.1078	6.8017	6.5152
10	9.4713	9.2222	8.9826	8.5302	8.1109	7.7217	7.3601	7.0236
11	10.3676	10.0711	9.7868	9.2526	8.7635	8.3064	7.8869	7.4987
12	11.2551	10.9075	10.5752	9.9540	9.3851	8.8633	8.3838	7.9427
13	12.1337	11.7315	11.3484	10.6350	9.9856	9.3936	8.8527	8.3577
14	13.0037	12.5434	12.1062	11.2961	10.5631	9.8986	9.2950	8.7455
15	13.8651	13.3432	12.8493	11.9379	11.1184	10.3797	9.7122	9.1079
16	14.7179	14.1313	13.5777	12.5611	11.6523	10.8378	10.1059	9.4466
17	15.5623	14.9076	14.2919	13.1661	12.1657	11.2741	10.4773	9.7632
18	16.3983	15.6726	14.9920	13.7535	12.6593	11.6896	10.8276	10.0591
19	17.2260	16.4262	15.6785	14.3238	13.1339	12.0853	11.1581	10.3356
20	18.0456	17.1686	16.3514	14.8775	13.5903	12.4622	11.4699	10.5940
21	18.8570	17.9001	17.0112	15.4150	14.0292	12.8212	11.7641	10.8355
22	19.6604	18.6208	17.6580	15.9369	14.4511	13.1630	12.0416	11.0612
23	20.4558	19.3309	18.2922	16.4436	14.8568	13.4886	12.3034	11.2722
24	21.2434	20.0304	18.9139	16.9355	15.2470	13.7986	12.5504	11.4693
25	22.0232	20.7196	19.5235	17.4131	15.6221	14.0939	12.7834	11.9628
26	22.7952	21.3986	20.1210	17.8768	15.9828	14.3752	13.0032	11.8258
27	23.5596	22.0676	20.7069	18.3270	16.3296	14.6430	13.2105	11.9867
28	24.3164	22.7267	21.2812	18.7641	16.6631	14.8981	13.4062	12.1371
29	25.0658	23.3761	21.8444	19.1885	16.9837	15.1411	13.5907	12.2777
30	25.8077	24.0158	22.3965	19.6004	17.2920	15.3725	13.7648	12.4090
31	26.5423	24.6461	22.9377	20.0004	17.5885	15.5928	13.9291	12.5318
32	27.2696	25.2671	23.4683	20.3888	17.8736	15.8027	14.0840	12.6466
33	27.9897	25.8790	23.9886	20.7658	18.1476	16.0025	14.2302	12.7538
34	28.7027	26.4817	24.4986	21.1318	18.4112	16.1929	14.3681	12.8540
35	29.4086	27.0756	24.9986	21.4872	18.6646	16.3742	14.4982	12.9477
36	30.1075	27.6607	25.4888	21.8323	18.9083	16.5460	14.6210	13.0352
37	30.7996	28.2371	25.9695	22.1672	19.1426	16.7113	14.7368	13.1170
38	31.4847	28.8051	26.4406	22.4925	19.3679	16.8679	14.8460	13.1935
39	32.1630	29.3646	26.9026	22.8082	19.5845	17.0170	14.9491	13.2649
40	32.8347	29.9158	27.3555	23.1148	19.7928	17.1591	15.0463	13.3317
41	33.4997	30.4590	27.7995	23.4124	19.9931	17.2944	15.1380	13.3941
42	34.1581	30.9941	28.2348	23.7014	20.1856	17.4232	15.2245	13.4524
43	34.8100	31.5212	28.6616	23.9819	20.3708	17.5459	15.3062	13.5070
44	35.4555	32.0406	29.0800	24.2543	20.5488	17.6628	15.3832	13.5579
45	36.0945	32.5523	29.4902	24.5187	20.7200	17.7741	15.4558	13.6055
46	36.7272	33.0565	29.8923	24.7754	20.8647	17.8801	15.5244	13.6500
47	37.3537	33.5532	30.2866	25.0247	21.0429	17.9810	15.5890	13.6916
48	37.9740	34.0426	30.6731	25.2667	21.1951	18.0772	15.6500	13.7305
49	38.5881	34.5247	31.0521	25.5017	21.3415	18.1687	15.7076	13.7668
50	39.1961	34.9997	31.4236	25.7298	21.4822	18.2559	15.7619	13.8007

複利現價表（假定若干年後爲一圓）

年數	2½%	3%	3½%	4%	4½%	5%	5½%	6%	6½%	7%	8%
1	$.9756	$.9709	$.9662	$.9615	$.9569	$.9524	$.9479	$.9434	$.9390	$.9346	$.9259
2	.9518	.9426	.9335	.9246	.9157	.9070	.8985	.8900	.8817	.8734	.8573
3	.9286	.9151	.9019	.8890	.8763	.8638	.8516	.8396	.8278	.8163	.7938
4	.9060	.8885	.8714	.8548	.8386	.8227	.8072	.7921	.7773	.7629	.7350
5	.8839	.8626	.8420	.8219	.8025	.7835	.7651	.7473	.7299	.7130	.6806
6	.8623	.8375	.8135	.7903	.7679	.7462	.7252	.7050	.6853	.6663	.6302
7	.8413	.8131	.7860	.7599	.7348	.7107	.6874	.6651	.6435	.6227	.5835
8	.8207	.7894	.7594	.7307	.7032	.6768	.6516	.6274	.6042	.5820	.5403
9	.8007	.7664	.7337	.7026	.6729	.6446	.6176	.5919	.5674	.5439	.5002
10	.7812	.7441	.7089	.6756	.6439	.6139	.5854	.5584	.5327	.5083	.4632
11	.7621	.7224	.6849	.6496	.6162	.5847	.5549	.5268	.5002	.4751	.4289
12	.7436	.7014	.6618	.6246	.5897	.5568	.5260	.4970	.4697	.4440	.3971
13	.7254	.6810	.6394	.6006	.5643	.5303	.4986	.4688	.4410	.4150	.3677
14	.7077	.6611	.6178	.5775	.5400	.5051	.4726	.4423	.4141	.3878	.3405
15	.6905	.6419	.5969	.5553	.5167	.4810	.4479	.4173	.3888	.3624	.3152
16	.6736	.6232	.5767	.5339	.4945	.4581	.4246	.3936	.3651	.3387	.2919
17	.6572	.6050	.5572	.5134	.4732	.4363	.4025	.3714	.3428	.3166	.2703
18	.6412	.5874	.5384	.4936	.4528	.4155	.3815	.3503	.3219	.2959	.2502
19	.6255	.5703	.5202	.4746	.4333	.3957	.3616	.3305	.3022	.2765	.2317
20	.6103	.5537	.5026	.4564	.4146	.3769	.3427	.3118	.2838	.2584	.2145
21	.5954	.5375	.4856	.4388	.3968	.3589	.3249	.2942	.2665	.2415	.1987
22	.5809	.5219	.4692	.4220	.3797	.3418	.3079	.2775	.2502	.2257	.1839
23	.5667	.5067	.4533	.4057	.3634	.3256	.2919	.2618	.2349	.2109	.1703
24	.5529	.4919	.4380	.3901	.3477	.3101	.2767	.2470	.2206	.1971	.1577
25	.5394	.4776	.4231	.3751	.3327	.2953	.2622	.2330	.2071	.1843	.1460
26	.5262	.4637	.4088	.3607	.3184	.2812	.2486	.2198	.1945	.1722	.1352
27	.5134	.4502	.3950	.3468	.3047	.2678	.2356	.2074	.1826	.1609	.1252
28	.5009	.4371	.3817	.3335	.2916	.2551	.2233	.1956	.1715	.1504	.1159
29	.4887	.4243	.3687	.3207	.2790	.2429	.2117	.1846	.1610	.1406	.1073
30	.4767	.4120	.3563	.3083	.2670	.2314	.2006	.1741	.1512	.1314	.0994
31	.4651	.4000	.3442	.2965	.2555	.2204	.1902	.1643	.1420	.1228	.0920
32	.4538	.3883	.3326	.2851	.2445	.2099	.1803	.1550	.1333	.1147	.0852
33	.4427	.3770	.3213	.2741	.2340	.1999	.1709	.1462	.1252	.1072	.0789
34	.4319	.3660	.3105	.2636	.2239	.1904	.1620	.1379	.1175	.1002	.0730
35	.4214	.3554	.3000	.2534	.2143	.1813	.1535	.1301	.1103	.0937	.0676
36	.4111	.3450	.2898	.2437	.2050	.1727	.1455	.1227	.1036	.0875	.0626
37	.4011	.3350	.2800	.2343	.1962	.1644	.1379	.1158	.0973	.0818	.0580
38	.3913	.3252	.2706	.2253	.1878	.1566	.1307	.1092	.0914	.0765	.0537
39	.3817	.3158	.2614	.2166	.1797	.1491	.1239	.1031	.0858	.0715	.0497
40	.3724	.3066	.2526	.2083	.1719	.1420	.1175	.0972	.0805	.0668	.0460
41	.3633	.2976	.2440	.2003	.1645	.1353	.1113	.0917	.0756	.0624	.0426
42	.3545	.2890	.2358	.1926	.1574	.1288	.1055	.0865	.0710	.0583	.0395
43	.3458	.2805	.2278	.1852	.1507	.1227	.1000	.0816	.0667	.0545	.0365
44	.3374	.2724	.2201	.1781	.1442	.1169	.0948	.0770	.0626	.0509	.0338
45	.3292	.2644	.2127	.1712	1380	.1113	.0899	0727	.0588	.0476	.0313
46	.3211	.2567	.2055	.1646	.1320	.1060	.0852	.0685	.0552	.0445	.0290
47	.3133	.2493	.1985	.1583	.1263	.1010	.0807	0647	.0518	.0416	.0269
48	.3057	.2420	.1918	.1522	.1209	.0961	.0765	.0610	.0487	.0389	.0249
49	.2982	.2350	.1853	.1463	.1157	.0916	.0726	.0576	.0457	.0363	.0230
50	.2909	.2281	.1791	.1407	.1107	.0872	.0688	.0543	.0429	.0339	.0213

存亡表 (英國)

歲數	生存人數	死亡人數	歲數	生存人數	死亡人數	歲數	生存人數	死亡人數
x	l_x	d_x	x	l_x	d_x	x	l_x	d_x
10	100 000	749	40	78 106	765	70	38 569	2391
11	99 251	746	41	77 341	774	71	36 178	2448
12	98 505	743	42	76 567	785	72	33 730	2487
13	97 762	740	43	75 782	797	73	31 243	2505
14	97 022	737	44	74 985	812	74	28 738	2501
15	96 285	735	45	74 173	828	75	26 237	2476
16	95 550	732	46	73 345	848	76	23 761	2431
17	94 818	729	47	72 497	870	77	21 330	2369
18	94 089	727	48	71 627	896	78	18 961	2291
19	93 362	725	49	70 731	927	79	16 670	2196
20	92 637	723	50	69 804	962	80	14 474	2091
21	91 914	722	51	68 842	1001	81	12 383	1964
22	91 192	721	52	67 841	1044	82	10 419	1816
23	90 471	720	53	66 797	1091	83	8 603	1648
24	89 751	719	54	65 706	1143	84	6 955	1470
25	89 032	718	55	64 563	1199	85	5 485	1292
26	88 314	718	56	63 364	1260	86	4 193	1114
27	87 596	718	57	62 104	1325	87	3 079	933
28	86 878	718	58	60 779	1394	88	2 146	744
29	86 160	719	59	59 385	1468	89	1 402	555
30	85 441	720	60	57 917	1546	90	847	385
31	84 721	721	61	56 371	1628	91	462	246
32	84 000	723	62	54 743	1713	92	216	137
33	83 277	726	63	53 030	1800	93	79	58
34	82 551	729	64	51 230	1889	94	21	18
35	81 822	732	65	49 341	1980	95	3	3
36	81 090	737	66	47 361	2070			
37	80 353	742	67	45 291	2158			
38	79 611	749	68	43 133	2243			
39	78 862	756	69	40 890	2321			

代數學中西名詞對照表

一 畫

一次方程式 Simple equation

一次函數 Function of the first degree

二 畫

二分比 Subduplicate ratio

二方根 Square root

二次方程式 Quadratic equation

二重根 Double root

二乘比 Duplicate ratio

二階行列式 Determinant of the second order

二項方程式 Binomial equation

二項式 Binomial

二項定理 Binomial theorem

二項級數 Binomial series

三 畫

三方根 Cubic root

三角垜 Triangular pile

三角級數 Trigonometrical series

三重根 Triple root

三乘比 Triplicate ratio

三階行列式 Determinant of the third order

三項式 Trinomial

子行列式 Minor determinant

四 畫

不可約分數 Irreducible fractions

不完全方程式 Incomplete equation

不完全多項式 Incomplete polynomial

不定方程式 Indeterminate equation

不能解方程式 Inconsistent equation

不等式 Inequality

不盡根式 Surd

互質數 Numbers prime to each other

元素 Element

內項 Means

公比 Common ratio

公因數 Common factor

公倍數 Common multiple

公差 Common difference

公項 General term

分子 Numerator

分比定理 Proportion by division

分母 Denominator

分配律 Distributive law

分數方程式 Fractional equation

分數式 Fraction expression

分離係數法 Method of detached coefficient

反比 Inverse ratio

反比例 Inverse proportion

反比定理 Proportion by inversion
文字方程式 Literal equation
方程式 Equation
方程式之解 Solution of equation
方程式之變換 Transformation of equation
方程式論 Theory of equation
比 Ratio
比例 Proportion
比例中項 Mean proportion
比較消去法 Elimination by comparison

五 畫

主值 Principal value
主項 Principal term
主對角線 Principal diagonal
代入消去法 Elimination by substitution
代數式 Algebraical expression
代數和 Algebraical sum
加減消去法 Elimination by addition or subtraction
外項 Extreme
平方根 Square root
未定係數法 Indeterminate coefficients
正方垛 Square pile
正方陣 Square array
正比例 Direct proportion
正項級數 Series with positive terms
正數 Positive number
矛盾方程式 Inconsistent or Incompatible equation

六 畫

交代式 Alternating expression
交換律 Commutative law
共軛根數 Conjugate radicals
共軛虛數 Conjugate complex numbers
列 Row
劣比 Ratio of less inequality
合比定理 Proportion by composition
合數 Composite number
合積或然律 Probability of successive choices
同次根數 Radicals of common index
同解方程式 Equivalent equation
同餘式 Congruence
同類根數 Similar radicals
同類項 Like terms
因數 Factor
因數分解 Factorization
因變數 Dependent variable
多項式 Polynomial
年金 Annuity
收斂級數 Convergent series
有限連分數 Terminating continued fraction
有理式 Rational expression
有理函數 Rational function
有理整函數 Rational integral function
自然對數 Natural logarithms
自然數 Natural numbers
自變數 Independent variable
行 Column
行列式 Determinant

七 畫

判別式 Discriminant

坐標 Co-ordinates
完全方程式 Complete equation
完全多項式 Complete polynomial
更比定理 Proportion by alternation

八畫

函數 Function
底數 Base
或然率 Probability
昇冪 Ascending power

九畫

前項 Antecedent
後項 Consequent
恆等式 Identity
指數 Exponent
指數方程式 Exponential equation
指數級數 Exponential series
指標 Characteristic
負數 Negative number
重根 Multiple roots
降冪 Desending power

十畫

乘冪 Power
倒數方程式 Reciprocal equation
原點 Origin
展開式 Expansion
差 Difference
振動級數 Oscillating series
根 Root
矩形垛 Rectangular pile
純循環連分數 Pure recurring continued fraction
級數 Series or progression
逆比 Inverse ratio
高次方程式 Equation of higher degree

十一畫

假數 Mantissa
商 Quotient
堆垛 Pile of shot
常分數 Simple fraction
常用對數 Common logarithm
常數 Constant
條件不等式 Conditional inequality
條件等式 Conditional equality
現值 Present value
組合 Combination
組合律 Associative law
組合數 Number of combination
通分 Reduction of fraction to a common denominator
連分數 Continued fraction
連乘積 Continued product
部分分數 Partial fraction
部分商 Partial quotient
訥白爾對數 Napierian logorithm

十二畫

剩餘定理 Remainder theorem
單位點 Point of unit
單利法 Simple interest
單項式 Simple expression
幅角 Amplitude
幾何級數 Geometrical progression
循環連分數 Recurring continued fraction
最低公倍數 Lowest common multiple
最高公因數 Highest common factor

無限級數 Infinite series
無限連分數 Infinite continued fraction
無理方程式 Irrational equation
無理式 Irrational expression
發散級數 Divergent series
等比 Ratio of equality
等比中項 Geometrical mean
等比級數 Geometrical progression
等差中項 Arithmetical mean
等差級數 Arithemetical progression
絕對不等式 Absolute inequality
絕對收斂級數 Absolute convergent series
絕對值 Absolute value
絕對項 Absolute term
虛數 Imaginary number
虛軸 Axis of pure imaginaries
象限 Quadrant
軸 Axis
週期函數 Periodic function
開方法 Evolution
開平方法 Extraction of square root
開立方法 Extraction of cubic root
階乘 Factorial
項 Term
順列 Permutations
順列數 Number of permutations

十三畫

極大 Maximum
極小 Minimum
極限 Limit
解 Solution
解方程式 Solve equation
試驗級數 Test series

十四畫

圖形 Graph
實數 Real number
實數級數 Real series
實數軸 Axis of real number
對稱方程式 Symmetrical equation
對稱式 Symmetrical expression
對稱函數 Symmetrical function
對數 Logarithm
對數方程式 Logarithmic equation
對數表 Table of logarithms
對數級數 Logarithmic series
漸近分數 Convergent fraction
算術級數 Arithmetical progression
綜合除法 Synthetic division
複比 Compound ratio
複利法 Compound interest
複素數 Complex number
複素數平面 Plane of complex number
齊次式 Homogeneous expression

十五畫

增邊行列式 Bordering a determinant
數字方程式 Numerical equation
數列 Sequence of number
數學歸納法 Mathematical induction
標準形式 Standard form
模數 Modulus
調和中項 Harmonic mean
調和級數 Harmonic progression
質數 Prime number
輪換對稱式 Cyclic symmetry expression

十六畫

冪級數 Power series

導函數 Derived function

橫坐標 Abscissa

橫軸 Axis of abscissa

積 Product

餘因子 Cofactors of determinant

餘對數 Cologarithm

十七畫

優比 Ratio of greater inequality

縱坐標 Ordinate

縱軸 Axis of ordinate

繁分數 Complex fraction

聯立方程式 Simultaneous equations

十八畫

簡連分數 Simple continued fraction

雜循環連分數 Mixed recurring continued fraction

二十三畫

變法數 Variable divisor

變數 Variable

驗算 Check

高中代數學

二十二年十一月初版 三十五年七月第一版

每冊定價國幣二元六角

編著者 陳建功 毛路真

發行人 開明書店 代表人 范洗人

印刷者 開明書店

(222 P.) Y B 49