$$\Delta=a\begin{vmatrix}1 & 1 \cdots\cdots \\ 1 & 1+a\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{vmatrix}$$

コレハ $(n-1)$ 行 $(n-1)$ 列ノ行列式ニシテ而カモ原ノ行列式ト同形ナリ。コノ方法ヲ續行スルトキハ與ヘラレタル行列式ノ値ハ a^{n-1} ナルヲ知ル。

93. n 次ノ行列式

$$\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\cdots\cdots \\ 1 & 1+a & 1\cdots\cdots \\ 1 & 1 & 1+a\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{vmatrix}=a^n+na^{n-1}$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 $$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\cdots\cdots \\ 1 & 1+a & 1\cdots\cdots \\ 1 & 1 & 1+a\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & 1\cdots\cdots \\ 0 & 1+a & 1\cdots\cdots \\ 0 & 1 & 1+a\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{vmatrix}$$

$$=a^{n-1}+a\begin{vmatrix}1+a & 1\cdots\cdots \\ 1 & 1+a\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{vmatrix}$$

然ルニ第二ノ行列式ハ $(n-1)$ 行 $(n-1)$ 列ノ行列式ニシテ原行列式ト同形ナリ。故ニ

$$\Delta=a^{n-1}+a\times a^{n-2}+a^2\begin{vmatrix}1+a & 1\cdots\cdots \\ 1 & 1+a\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\end{vmatrix}$$

以下同樣ニスレバ

$$\Delta=\overbrace{a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots\cdots+a^{n-1}}^{n-2\text{個}}+a^{n-2}\begin{vmatrix}1+a & 1 \\ 1 & 1+a\end{vmatrix}$$

$$=na^{n-2}+a^n$$

94. $(6\sqrt{6}+14)^{2n+1}=\mathrm{N}$ トシ F ヲ此分數部分トスレバ $\mathrm{NF}=20^{2n+1}$ ナルコトヲ證明セヨ。

解 $6\sqrt{6}-14$ ハ1ヨリ小ナル不盡根數ナルガ故ニ $(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}$ モ亦1ヨリモ

小ナル不盡根數ナリ。サテ

$$(6\sqrt{6}+14)^{2n+1}-(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}=2\left\{14^{2n+1}+\frac{(2n+1)2n}{2!}14^{2n-1}6^3+\cdots\cdots\right\}$$

ナルヲ以テ偶數ナリ。故ニ $(6\sqrt{6}+14)^{2n+1}$ ノ小數部分ハ $(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}$ ニ等シ

故ニ $$\mathrm{NF}=(6\sqrt{6}+14)^{2n+1}(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}=20^{2n+1}$$

95. n ガ正ノ整數ナルトキハ

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots(n+n)$$

ハ 2^n ニテ割リ切ルヽコトヲ證セヨ。

解 數學的歸納法ニテ證明センニ先ヅ $n=1$ ナル時ハ明カニ成立ス。故ニ n ノ或値 r ノ時ニ問題ハ成立スルモノト假定シテ $n=r+1$ ノ時ニ尙且ツ成立スルコトヲ證セントス。即チ

$$(r+1)(r+2)(r+3)\cdots\cdots(r+r)=\mathrm{M}(2^r)$$

ナリトシテ

$$(r+2)(r+3)(r+4)\cdots\cdots(r+1+r+1)=\mathrm{M}(2^{r+1})$$

ヲ證セバ可ナリ。サテ

$$(r+2)(r+3)(r+4)\cdots\cdots(r+1+r+1)=\frac{\mathrm{M}(2^r)}{r+1}(r+1+r)(r+1+r+1)$$
$$=\mathrm{M}(2^r)(2r+1)\times 2$$
$$=\mathrm{M}(2^{r+1})(2r+1)$$

ヨツテ證明シ得タリ。

96. $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ ハ 2^n デ割リ切レルコトヲ證セヨ。

解 數學的歸納法ニテ證明センニ $n=1$ 及ビ $n=2$ ナルトキハ
$(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})$ 及ビ $(3+\sqrt{5})^2+(3-\sqrt{5})^2$ ハ夫々 2 及ビ 2^2 ニテ割リ切レル。次ニ
$(3+\sqrt{5})^{r-1}+(3-\sqrt{5})^{r-1}$ 及ビ $(3+\sqrt{5})^r+(3-\sqrt{5})^r$ ハ夫々 2^{r-1} 及ビ 2^r ニテ割リ切レルコトヲ假定ス。然ル時ハ一般ニ

$$p^{r+1}+q^{r+1}=(p^r+q^r)(p+q)-pq(p^{r-1}+q^{r-1})$$

ナル關係アルヲ以テ，$3+\sqrt{5}=p$, $3-\sqrt{5}=q$ トスレバ假定ニヨリテ p^r+q^r ハ 2^r ニテ，$p^{r-1}+q^{r-1}$ ハ 2^{r-1} ニテ割リ切ラル。而シテ又 $p+q$ ハ 2 ニテ pq ハ 2^2 ニテ割リ切ラルヽ故ニ結局

$$(3+\sqrt{5})^{r+1}+(3-\sqrt{5})^{r+1}$$

ハ 2^{r+1} ニテ割リ切ルヽコトニナル。仍ツテ證明セラレタリ。

97. x ガ自然數ナルトキハ

$$\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x}{30}$$

モ亦自然數ナルコトヲ證セヨ。

解　數學的歸納法ニテ容易ニ證明スルコトヲ得。

98. n ガ 1 ヨリモ大ナル整數ナル時ハ

$$n^2-n+1$$

ハ完全平方數トナラザルコトヲ證セヨ。

解　$n^2-n+1=(n-1)^2+n$

然ルニ $n>1$ ナルガ故ニ

$$n^2-n+1>(n-1)^2$$

次ニ

$$n^2-n+1=n^2-(n-1)$$

ニシテ $n>1$ ナルヲ以テ

$$n^2-n+1<n^2$$

ヨツテ

$$n^2>n^2-n+1>(n-1)^2$$

即チ與ヘラレタル數ハ二ツノ連續整數ノ平方ノ間ニアリ。故ニ平方數ナラズ。

99. $4n+1$ ハ素數ナル時ハ其數ハ $\{(2n)!\}^2+1$ ノ因數ナルコトヲ證セヨ。

解　$4n+1$ ハ素數ナルガ故ニうゐるそんノ定理ニヨリテ $(4n)!+1$ ハ $4n+1$ ノ倍數ナリ。即チ

$$\{(4n+1)-1\}\{(4n+1)-2\}\cdots\cdots\{(4n+1)-2n\}(2n)!+1=M(4n+1)$$

故ニ

$$M(4n+1)+(-1)^{2n}1.2.3.\cdots\cdots 2n(2n)!+1=M(4n+1)$$

故ニ　$(2n)!(2n)!+1=M(4n+1)$

或ハ　$\{(2n)!\}^2+1=M(4n+1)$

100. $4^{2n+1}+3^{n+2}$ ハ 13 ノ倍數ナルコトヲ證セヨ。

解　$4^{2n+1}+3^{n+2}=4\times 4^{2n}+3^2\times 3^n$

$$=4(3+13)^n+9\times 3^n$$

$$=4\{3^n+M(13)\}+9\times 3^n$$

$$=(4+9.3^n+4M(13)$$

$$=M(13)$$

101. 3 ヨリモ大ナル二ツノ素數ノ平方ノ差ガ 24 ノ倍數ナルコトヲ證セヨ。

解　二ツノ素數ヲ x, y トスルト　ふぇるまーノ定理ニヨツテ

$$x^2-1=M(3)$$

又 x ガ奇數ナルガ故ニ $x=2m+1$ ト置ケバ

$$x^2-1=(2m+1)^2-1=4m(m+1)=M(8)$$

故ニ　$x^2-1=M(24)$

同様ニ　$y^2-1=M(24)$

從ツテ　$x^2\sim y^2=M(24)$

102. 1000 ヨリ小ニシテ 2,3 及ビ 5 ニテ整除シ得ザル數ノ個數如何。

解　1000 以下ノ數ニシテ 2,3,5 ヲ約數ニ有スル最大數ハ 990 ナリ。而シテ 990 ト互ニ素ナル數ニシテ而カモ 990 以下ノ數ハ，定理ニヨリ

$$990\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=264$$

而シテ 991 ト 1000 トノ間ニ 2, 3 及ビ 5 ニテ除スルコトヲ得ザル數ハ 991 ト 997 トノ二ツノミ，仍ツテ所要ノ個數ハ 266 種ナリ。

103. $3^{2n+3}+40n-27$ ハ 64 ノ倍數ナルコトヲ證セヨ。但シ n ハ正ノ整數ナリトス。

解　數學的歸納法ニテ證明センニ，$n=1$ ナル時ニハ

$$3^{2n+3}+40n-27=256=M(64)$$

次ニ n ノ或値例ヘバ r ノ時問題ハ成立スルモノトシ，$n=r+1$ ノ時ニモ問題ガ成立スル所以ヲ證明セントス。

即チ

$$3^{2r+3}+40r-27=M(64)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル假定ノ下ニ

$$3^{2(r+1)+3}+40(r+1)-27=M(64)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ證セントス。ソレガ爲メニハ邊々相減ジタルモノガ 64 ノ倍數ナラバ可ナリ。

即チ　$3^{2r+3}(9-1)+40=M(64)$

即チ　$3^{2r+3}+5=M(8)$

ナラバ可ナリ。ソコデ問題ハ r ハ任意ノ正ノ整數ナルトキ

$$3^{2r+3}+5=M(8)$$

ナルコトヲ證セバ可ナリ。而シテ其證明ニハ更ニ歸納法ヲ用フレバ宜シ。

104. 六位ノ整數ニシテ其左端ノ數字ヲ右端ニ移ス時ハ，原數ノ或整數倍トナルガ如キモノヲ求メヨ。

解 左端ノ數字ヲ x トシ，ソレヲ省キタル五位ノ數ヲ y トスレバ所要ノ數ハ $100000x+y$ ニシテ，左端ノ數字ヲ右端ニ移ス時ハ $10y+x$ トナル。ヨツテ題意ニ從ヒ

$$\frac{10y+x}{100000x+y}=n$$

茲ニ n 及ビ x ガ共ニ 1 ヨリ 9 マデノ整數ナリトス。

ソコデ $n=1$ トスルト

$$y=11111x$$

y ハ五位ノ整數ナルヲ以テ $x=1, 2, \cdots\cdots 9$ マデハ成立ス。ヨツテ $100000x+y=111111,\ 222222,\ 333333,\ 444444,\ 555555,\ 666666,\ 777777,\ 888888,\ 999999$

次ニ $n=2$ ノ時ニ y ヲ五位ノ整數ナラシムル x ノ値ハナシ。$n=3$ ノ時ニハ $x=1$ $x=2$ ノ時 y ガ五位ノ整數 42857, 85714 トナル故ニ 142857, 285714 モ所要ノ數ナリ。$n=4$ 以上ニハカヽル條件ヲ滿足スル x ノ値ハ存在セズ。故ニ結局求ムル數ハ

111111, 222222, 333333, 444444, 555555, 666666, 777777, 888888 999999, 142857, 285714

附錄 1

總復習問題

1. $X=ax+by+cz,\qquad Y=cx+ay+bz,\qquad Z=bx+cy+az$

$A=ax+cy+bz,\qquad B=bx+ay+cz,\qquad C=cx+by+az$

ナル時ハ，

$$(X-A)(X-B)(X-C)=(Y-A)(Y-B)(Y-C)$$
$$=(Z-A)(Z-B)(Z-C)=XYZ-ABC$$

ナルコトヲ證セヨ。

2. $(x^2+xy+y^2)(a^2+ab+b^2)$ ハ X^2+XY+Y^2 ナル形ニナルコトヲ示セ。

3. $\dfrac{x}{a+\alpha}+\dfrac{y}{b+\alpha}+\dfrac{z}{c+\alpha}=1\qquad \dfrac{x}{a+\beta}+\dfrac{y}{b+\beta}+\dfrac{z}{c+\beta}=1$

$\dfrac{x}{a+\gamma}+\dfrac{y}{b+\gamma}+\dfrac{z}{c+\gamma}=1$

ナル時ハ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1+\frac{\alpha\beta\gamma}{abc}$$

ナルコトヲ證セヨ。

4. $a+b+c+d=a^2+b^2+c^2+d^2=0$

ナル時ハ

$$a^8+b^8+c^8+d^8=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+d^4)^2$$

ナルコトヲ證セヨ。

5. $x+y+z=0,\qquad x^2+y^2+z^2=2a^2,\qquad x^3+y^3+z^3=3a^3$

ナル時ハ

$$(x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4=3(x^4+y^4+z^4)$$

ナル關係アルコトヲ證セヨ。

6. $\dfrac{by}{z}+\dfrac{cz}{y}=a \qquad \dfrac{cz}{x}+\dfrac{ax}{z}=b \qquad \dfrac{ax}{y}+\dfrac{by}{x}=c$

ナル時ハ

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{xyz}=0$$

ナル關係アルコトヲ證セヨ。

7. $yz+zx+xy=a^2$ ナル時ハ

$$\frac{1}{yz(a^2+x^2)}+\frac{1}{zx(a^2+y^2)}+\frac{1}{xy(a^2+z^2)}$$
$$=\frac{2a^2}{xyz\sqrt{(a^2+x^2)(a^2+y^2)(a^2+z^2)}}$$

ナルコトヲ證セヨ。

8. $yz+zx+xy=0$ ナル時ハ

$$(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2+2x^2y^2z^2=x^4(y+z)^2+y^4(z+x)^2+z^4(x+y)^2$$

ナルコトヲ證セヨ。

9. $bz+cy=cx+az=ay+bx, \qquad x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=0$

ナル時ハ $a+b+c,\ -a+b+c,\ a-b+c,\ a+b-c$ ナル四ツノ數ノ中少クトモ一ツハ零ナルコトヲ證セヨ。

10. $y^2+z^2+yz=a^2, \qquad z^2+x^2+zx=b^2, \qquad x^2+y^2+xy=c^2$

ガ成立スル時ハ

$$3(yz+zx+xy)^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

ナルコトヲ證セヨ。

11. $x+y+z=p_1, \qquad yz+zx+xy=p_2, \qquad xyz=p_3$

$x^2+yz=a, \qquad y^2+zx=b, \qquad z^2+xy=c$

ナル時ハ

(i) $a+b+c=p_1^2-p_2$,

(ii) $bc+ca+ab=p_1^2p_2-2p_1p_3-p_2^2$

(iii) $abc=p_1^3p_2-6p_1p_2p_3+p_2^3+8p_3^2$

ナルコトヲ證明セヨ。

12. $x=la, \quad y=(l-1)b, \quad z=(l-3)c, \quad l=\dfrac{1+b^2+3c^2}{a^2+b^2+c^2}$

ナル時ハ $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1+4c^2c^2+9c^2a^2+a^2b^2}{a^2+b^2+c^2}$ ナルコトヲ示セ。

13. $a+b+c+d=x, \qquad a+b-c-d=y, \qquad a-b+c-d=z,$

$a-b-c+d=u$ トスル時

$$ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$$

ナラバ

$$xy(x^2+y^2)=zu(z^2+u^2)$$

ナルコトヲ證セヨ。

14. $x^2+yz=a, \qquad y^2+zx=b, \qquad z^2+xy=c, \qquad x^2+y^2+z^2=2\lambda$ ヨリ

(i) $(x+y+z)^2=2(a+b+c-\lambda)$

(ii) $\{(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)\}^2=(8(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$ ヲ導ケ。

15. $x,\ y,\ z$ ノ値ノ如何ニ關セズ

$$x=\frac{k+ly}{m+ny} \qquad y=\frac{k+lz}{m+nz} \qquad z=\frac{k+lx}{m+nx}$$

ナル爲ニハ

$$l^2+m^2+kn+lm=0$$

ナラザルベカラザルコトヲ證セヨ。

16. $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ ガ完全ナル平方ナル爲ニハ

$$af=gh, \qquad bg=hf, \qquad ch=fg$$

ナラザルベカラザルコトヲ證セヨ。

17. 多項式 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$ ト分數式 $\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^{n+1}+\mathrm{D}x^{n+2}}{1-2x+x^2}$ ト

ガ恒等ナル時ハ $a_0,\ a_1,\ a_2\cdots\cdots a_n$ ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ。

18. $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$ ナル時ハ $a^2+b^2=1$ ナルコトヲ證明セヨ。

19. ε ガ 0.0007 ヨリモ小ナル正ノ數ナル時ハ $1+\dfrac{\varepsilon}{2}$ ト $\sqrt{1+\varepsilon}$ トノ差ガ

$\frac{1}{10^7}$ ヨリモ小ナルコトヲ證明セヨ。

20. $F_n=(y-z)^n+(z-x)^n+(x-y)^n, \qquad V=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$

$\Delta=(y-z)(z-x)(x-y)$ ナル時ハ

$$F_n=VF_{n-2}+\Delta F_{n-3} \qquad (n\geqq 3)$$

ナルコトヲ證セヨ。

21. $f(x,y)$ ガ x ト y トノ同次ノ二次對稱式ナル時，即チ

$f(x,y)=A(x^2+y^2)+Bxy$ ナル時ハ

$f(b,c)(b-c)+f(c,a)(c-a)+f(a,b)(a-b)=-(A+B)(b-c)(c-a)(a-b)$ ナルコトヲ證セヨ。

22. x^2-x+p ト $x^3+x^2+x+p+3$ トガ四次ノ最小公倍數ヲ有スルヤウニ p ノ値ヲ定メヨ。

23. $(y-z)^n+(z-x)^n+(x-y)^n$ ハ n ガ $3m+2$ ノ如キ整數ナルトキハ $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ ニテ割リ切レルガ其平方ニテ割リ切レザルコトヲ證セヨ。

24. r ガ正ノ整數ナル時，次ノ恒等式ヲ證セヨ。

$$\frac{(x+y)(x+y-1)\cdots\cdots(x+y-r+1)}{r!}=\frac{x(x-1)\cdots\cdots(x-r+1)}{r!}$$
$$+\frac{x(x-1)\cdots\cdots(x-r+2)}{(r-1)!}\,\frac{y}{1!}+\frac{x(x-1)\cdots\cdots(x-r+3)}{(r-2)!}\,\frac{y(y-1)}{2!}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{y(y-1)\cdots\cdots(y-r+1)}{r!}$$

25. n ヲ正ノ整數トセスバ

$$(x^n-1)(x^{n+1}-1)\cdots\cdots(x^{n+r-1}-1) \text{ ガ } (x-1)(x^2-1)\cdots\cdots(x^r-1)$$

ニテ整除セラルヽコトヲ證セヨ。

26. a,b,c ナル三ツノ文字ヲ含メル整式 $f(a;b,c)$ ガ b,c ノ交代式ナル時ハ

$$f(a;b,c)+f(b;c,a)+f(c;a,b)$$

ハ a,b,c ノ交代式ナルコトヲ證セヨ。

27. A飛行機ハ東京ヨリ大阪ニ，B飛行機ハ大阪ヨリ東京ニ向ヒ，各一定ノ速サニテ同時ニ出發セリ。A飛行機ハ3時間ニシテ大阪ニ着シ，B飛行機ハ途中 A 飛行機ニ出會ヒテヨリ4時間ニシテ東京ニ着セリトイフ。B飛行機ハ大阪東京間ヲ幾時間ニテ行キシカ。

28. 甲ハA地ヲ出發スルト同時ニ乙ハ同方向ニ向ツテB地ヲ出發セリ。若干時間ノ後甲ガ乙ニ追ヒ付キタル時兩者ノ歩行里數ハ合計 $7\frac{1}{2}$ 里ナリ。然ルニ此地點トA地トノ距離ハ乙ノ速度ヲ以テ算スレバ $4\frac{1}{2}$ 時間ノ行程ニ當リ又甲ガ乙地ヲ通過セシハコノ時ヨリ2時間前ナリトイフ。AB兩地ノ距離如何。

29. A船ハ甲港ヲ出發シテ乙港ニ向ヒ，B船ハ乙港ヲ出發シテ甲港ニ向ヒ午前十時ニ途中ニテ出會フベキ豫定ナリシガ，A船ハ出發後15分間停止シタル後續航シB船ハ4分遲レテ出發シタル爲午前十時九分ニ出會ヒタリ，而シテA船ノ速サハ毎時10海里ナリシトイフ，B船ノ速サ毎時幾海里ナルカ。

30. 定圓ノ二ツノ半徑ガ角速度 v, v' ヲ以テ同ジ方向ニ廻轉ス。廻轉ノ始マレル時二ツノ半徑ノナス角ガ α ナリトシ其角ノ β トナル時刻ヲ求メヨ。

31. 或圓壔ニ針金ヲ捲クニ，針金ノ長サハ圓壔ノ長サト圓壔ノ直徑トニ正比例シ，又針金ノ直徑ノ平方ニ反比例スルモノトス。此割合ヲ以テ直徑6糎ノ或長サノ圓壔ニ直徑1粍ノ針金ヲ捲クニハ長サ15米ノ針金ヲ要スルトイフ。直徑16糎ノ同ジ長サノ圓壔ニ直徑2粍ノ針金ヲ捲クニハ幾米ノ針金ヲ要スルカ。

32. $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}=a\sqrt{yz(x+y+z)}\\ \sqrt{y}=b\sqrt{zx(x+y+z)}\\ \sqrt{z}=c\sqrt{xy(x+y+z)}\end{array}\right\}$ ヲ解ケ。

33. $\left.\begin{array}{l}ax=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\\ by=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\\ cz=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\end{array}\right\}$ ヲ解ケ。

34. $\left.\begin{array}{l}x+y=a\\ \frac{x}{b-y}+\frac{b-y}{x}=\frac{5}{2}\end{array}\right\}$ ヲ解ケ。

35. $\left.\begin{array}{l}x^2+2y=1+2xy\\ y^2+2x=m(1+2xy)\end{array}\right\}$ ヲ解ケ。

36. $\lambda^2+p\lambda+q=0$ ヲ滿足スル λ ノ二ツノ値ヲ α, β トスレバ, コレヨリ $a^2+pab+qb^2=(a-\alpha b)(a-\beta b)$ ヲ導ケ。

37. $(f^2-bc)x+(ch-fg)y+(bg-hf)z=0$

$(ch-fg)x+(g^2-ca)y+(af-gh)z=0$

$(bg-hf)x+(af-gh)y+(h^2-ab)z=0$

ガ成立スル時ハ

$$abc-2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

38. 方程式 $x^2+ax+bc=0$, $x^2+bx+ac=0$ ガ唯一ツノ根ヲ共有スル時, 其共通根ト他ノ二根トヲ根トスル方程式ハ

$$x^3-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)x-\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

39. α, β, γ ヲ方程式 $x^3+3bx+c=0$ ノ根トスル時 $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$, $(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)$, $(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$ ヲ三ツノ根トスル方程式ハ

$$x^3+9bx^2-27(c^2+4b^2)=0$$

ナルコトラ證モヨ。

40. $x^3+ax^2+bx+ab=0$ ノ三ツノ根ノ立方ヲ根トスル方程式ヲ求メヨ。

41. $x^2+xy+y^2=a$, $xy(x+y)=b$ ナル時, t ニ關スル三次方程式 $t^3-at+b=0$ ノ根ガ $x, y, -(x+y)$ ナルコトヲ證セヨ。

42. $x^5-10a^3x^2+b^4x+c^5=0$ ハ三ツノ重根ヲ有スルナラバ,

$$ab^4-9x^6+c^5=0$$

ナル關係アルコトヲ證セヨ。

43. 方程式 x^n+x+1 ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ トスレバ次ノ關係アルコトヲ證セヨ。

(i) $(\alpha_1^{n-1}+\alpha_2^{n-1}+\cdots\cdots)-(\alpha_1^n+\alpha_2^n+\cdots\cdots)=1$

(ii) $\left(\dfrac{1}{\alpha_1^{n-1}}+\dfrac{1}{\alpha_2^{n-1}}+\cdots\cdots\right)-\left(\dfrac{1}{\alpha_1^n}+\dfrac{1}{\alpha_2^n}+\cdots\cdots\right)=n-2(-1)^n$

44. 方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$ ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ トスレバ

$$(1-p_2+p_4-\cdots\cdots)^2+(p_1-p_3+p_5-\cdots\cdots)^2$$
$$=(1+\alpha_1^2)(1+\alpha_2^2)\cdots\cdots(1+\alpha_n^2)$$ ナルコトヲ證セヨ。

45. $x+y+z=a^2x+b^2y+c^2z=0$

ナル時ハ

$$(a+b+c)(a^3x+b^3y+c^3z)=(bc+ca+ab)(bcx+cay+abz)$$

ナルコトヲ證セヨ。

46. $2q-p^2=0$ $\quad$ $2sq-r^2=0$ ナル時ハ

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

ハ二次方程式ニ歸着シ得ベキコトヲ證セヨ。

47. α, α' ハ有理數ニシテ而カモ α, α' $\dfrac{\alpha}{\alpha'}$ ガ何レモ有理數ノ平方ニ等シカラザル時ハ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha'}$ ハ整數ヲ係數トスル或定マリタル四次方程式ノ根ナリ。又此方程式ノ四ツノ根ハ $\pm\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\alpha'}$ ナリ。

注意 $x^4-2(\alpha+\alpha')x^2+(\alpha-\alpha')^2=0$

48. $\sqrt{6}-2$ ハ $x^6-18x^4+16x^3+28x^2-32x+8=0$ ノ一ツノ根ナルコトヲ知リテ此方程式ノ他ノ根ヲ求メヨ。

49. $x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\cdots\cdots n!=0$ ハ等根ヲ有セザルコトヲ證セヨ。

50. 整方程式 $nx^n-(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)=0$ ノ實根ハ多クトモ二個ナルコトヲ證セヨ。

51. 方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ ノ三ツノ根ヲ α, β, γ トシ, $S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ ト置ク時, 次式ヲ證セヨ。

$S_1=-p \qquad S_2=-(pS_1+2q) \qquad S_3=-(pS_2+qS_1+3r)$

$S_n=-(pS_{n-1}+qS_{n-2}+rS_{n-3}) \qquad n=4, 5, 6 \cdots\cdots$

52. 方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ノ根ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トシ $S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n$ ト置ク時, 次ヲ證セヨ。

$S_1=-p \qquad S_2=-(pS_1+2q) \qquad S_3=-(pS_2+qS_1+3r)$

$$S_4=-(pS_3+qS_2+rS_1+4s)$$

$$S_n=-(pS_{n-1}+qS_{n-2}+rS_{u-3}+sS_{n-4}) \qquad n=5, 6, 7, \cdots\cdots$$

53. 方程式 $f(x)=0$ ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_n$ トスル時 $\frac{\alpha_r}{\alpha_s}(r \neq s)$ ヲ根トスル方程式ハ $f(x)=0, fxy(=0$ ヨリ x ヲ消去シテ得ラルヽコトヲ證明セヨ。

54. 前題ヲ利用シテ再ビ第十七編第二章問題8ヲ解ケ。

55. $2x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}=0$ ヲ最高羃ノ係數ガ1ニシテ，他ノ係數ガ凡テ整數ナル方程式ニ直セ。

56. $p=x-\frac{yz}{x} \qquad q=y-\frac{zx}{y} \qquad r=z-\frac{xy}{z} \qquad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$

ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

57. $\frac{x^2-xy-xz}{a}=\frac{y^2-yz-yx}{b}=\frac{z^2-zx-zy}{c}$

$$ax+by+cz=0$$

ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

58. かるだんノ方法ニヨリテ次ノ方程式ヲ解ケ。

(i) $x^3-18x-35=0$ 　　(ii) $x^3+21x+342=0$

(iii) $2x^3+3x^2+3x+1=0$

59. ふぇらりノ方法ニヨリテ次ノ方程式ヲ解ケ。

(i) $x^4-3x^2-42x-40=0$ 　　(ii) $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$

60. a, b, c, d ハ凡正數ナリトスレバ，

$$\frac{3}{b+c+d}+\frac{3}{c+d+a}+\frac{3}{d+a+b}+\frac{3}{a+b+c} \geqq \frac{16}{a+b+c+d}$$

61. x, y, z ガ正ノ整數ナルトキ，

$$x^x y^y z^z \geqq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

62. n ハ正ノ整ニシテ且ツ $a>1$ ナル時ハ

$$n\left(\frac{a^{2n+1}+1}{a^{2n}-1}\right)>\frac{a}{a-1}$$

ナルコトヲ證セヨ。

63. 次ノ三群ハ正數ニシテ且ツ各群ガ大小ノ順序ニ並ベアルモノトス。

$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \quad b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots, b_n, \quad c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots, c_n$

然ル時ハ

$$\frac{a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3+\cdots\cdots}{n}>\frac{\Sigma a_1}{n}\frac{\Sigma b_1}{n}\frac{\Sigma c_1}{n}$$

ナルコトヲ證セヨ。

64. 三ツ實數ノ和ガ $3a$ ニ等シク，夫等ノ平方ノ和ガ $6a^2$ ニ等シキ時ハ三ツノ實數ハ何レモ $a(1+\sqrt{2})$ ヨリモ大ナラザルコトヲ證明セヨ。$(a>0)$

65. $\frac{3.7.11.\cdots\cdots(4n-1)}{5.9.13.\cdots\cdots4n+1}<\sqrt{\frac{3}{4n+3}}$

ナルコトヲ證セヨ。

66. $\frac{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)}{2.4.6.\cdots\cdots\cdots2n}<\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$

ナルコトヲ證セヨ。

67. $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ガ正ノ整數ナル時次式ヲ證セヨ，

$$\left(\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}\right)^{a_1+a_2\cdots\cdots+a_n} \geqq a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots\cdots a_n^{a_n}$$

67. $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ガ正數 $m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$ ガ正ノ整數ナル時ハ，

$$\frac{m_1a_1+m_2a_2+\cdots\cdots m_na_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n}>\left\{a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots\cdots a_n^{m_n}\right\}^{\frac{1}{m_1+m_2+\cdots\cdots m_n}}$$

69. $\frac{5^n-1}{4n}>5^{\frac{n-1}{2}}(n>1)$ ヲ證明セヨ。

*70. $\sqrt{3-x}<x-2$ ヲ解ケ。

71. $\sqrt{3-x}>2-x$ ヲ解ケ。

72. $\left.\begin{array}{l} y^2-xy=15 \\ x^2+xy>14 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ。

73. $x>2$ ナル時 $\frac{x^2-3x+11}{x-2}$ ガ x ノ如何ナル値ノ時最小トナルカ。

74. $-2 \leqq x \leqq 7$ ナル時，$(7-x)^4(2+x)^5$ ノ最大値ガ $4^4.5^5$ ナルコトヲ證セヨ．

75. 與ヘラレタル正方形＝面積ノ最小ナル正方形ヲ內接セシメヨ。又與ヘラレタル正方形＝面積ノ最大ナル正方形ヲ外接セシメヨ。

76. 與ヘラレタル球＝內接スル直圓壔ノ體積ヲ極大ナラシメヨ。

77. 與ヘラレタル圓＝外接スル等脚梯形ノ面積ノ變化ヲ研究セヨ。

78. z ガ複素數＝シテ且ツ其絕對値ガ1ナラバ z ト $\frac{1}{z}$ トハ互＝共軛ナルコトヲ證セヨ。

79. 二ツノ複素數 z ト z' トノ間＝

$$z'=\frac{\alpha-z}{1-\beta z}$$

ナル關係アリ且ツ $|z|=1$ ナル時ハ, $|z'|=1$ ナルコトヲ證明セヨ。但シ α,β ハ互＝共軛ナル複素數ナリトス。

80. 四ツノ複素數 $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ アリテ $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_4}$ ハ純虛數ナル時複素數平面上＝テ此等ノ表ハス四ツノ點ヲ夫々 A, B, C, D トスレバ, AB ト CD トハ互＝垂直ナルコトヲ證セヨ。

但純虛數トハ bi ノ如キ數ナリトス。

81. $a=\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha \qquad b=\cos 2\beta+i\sin 2\beta$

$c=\cos 2\gamma+i\sin 2\gamma \qquad d=\cos 2\delta+i\sin 2\delta$

ナル時,

$$ab+cd=2\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\{\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\}$$

$$\frac{1}{(a-b)(c-d)}=\frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+)i\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{4\cos(\beta-\alpha)\cos(\gamma-\delta)}$$

ナルコトヲ證セヨ。

82. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0 \qquad \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ ナル時ハ,

$3(\alpha-\beta),\ 3(\beta-\gamma),\ 3(\gamma-\alpha)$ ガ 2π 倍數ナルコトヲ證セヨ。

83. $(2+5\omega+2\omega^2)^6=(2+2\omega+5\omega^2)^6=729$ ナルコトヲ證明セヨ。

84. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x(x+a)}-x=\frac{a}{2}$ ナルコトヲ證セヨ。

85. $\lim_{x\to1}\frac{(x^m-1)^p-(x^n-1)^q}{(x-1)^p-(x-1)^q}$ ハ $p>q$ ナルカ又ハ $p=q$ ナルカ或ハ $p<q$

ナルカ＝從ヒ n^q 又ハ ∞ 或ハ m^p ナルコトヲ證セヨ。

86. $x_1=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \qquad x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\cdots\cdots \qquad x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}}\right)$

トスル時ハ $x>0$ ナルカ $x<0$ ナルカ＝從ツテ $\lim_{n\to n}x_n$ ハ1ナルカ或ハ -1 ナルカナリ。

67. $a,\ b,\ c$ ガ G.P. ヲナス時ハ,

$$\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}=\frac{2}{\log_b x}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

88. p 個ノ等差級數アリ, 其初項ハ夫々 $1, 2, 3, \cdots\cdots, p$ ＝シテ其公差ハ夫々 $1, 3, 5, \cdots\cdots (2p-1)$ ナリ。今各級數ノ始メノ n 項ノ和ヲ夫々 $S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots S_p$ トスルコト, $S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_p=\frac{np}{2}(np+1)$ ナルコトヲ證セヨ。

89. $x^y=y^x,\ m^x=n^y$ ヲ滿足スル x ト y トノ實數ナル値ハ底數ノ如何＝拘ラズ $\qquad x=A^p, \qquad y=A^q$

但シ $\quad A=\frac{\log m}{\log n} \qquad p=\frac{\log n}{\log m-\log n} \qquad q=\frac{\log m}{\log m-\log n}$

ナルコトヲ證明セヨ。

90. 等差級數ト等比級數ガ同一ノ初項ト末項トヲ有シ而カモ項數ガ相等シキ時ハ等差級數ノ和ガ等比級數ノ和ヨリモ大ナルコトヲ證セヨ。

91. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+3x^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+nx^n}+\cdots\cdots$ ハ $0<x\leqq1$ ナル時發散＝シテ, $x>1$ ナル時收斂ナルコトヲ證セヨ。

92. らーベノ定理ヲ用ヒテ

$$\frac{1}{3.4}+\frac{2.4}{3.5.6}+\frac{2.4.6}{3.5.7.8}+\cdots\cdots+\frac{2.4.6\cdots\cdots\cdots2n}{3.5.7\cdots\cdots(2n+1)(2n+2)}+\cdots\cdots$$

ガ收斂ナルコトヲ證明セヨ。

93. $\frac{1}{1^2-x}+\frac{1}{2^2-x}+\frac{1}{3^2-x}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2-x}+\cdots\cdots$

ハ x ガ完全平方ナラザル時ハ恒＝收斂ナルコトヲ證セヨ。

94. $1+\frac{2^2-1}{2^2+1^2}+\frac{3^2-2^2}{3^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n_2-(n-1)^2}{n^2+(n-1)^2}+\cdots\cdots$

ハ發散ナルコトヲ證セヨ。

注意 $u_n=\frac{2n-1}{2n^2-2n+1}>\frac{1}{n}$ ナルコト＝注意スベシ。

95. $\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.7}+\frac{3.5.7}{4.7.10}+\cdots\cdots\frac{3.5.7\cdots\cdots(2n+1)}{4.7.10\cdots\cdots(3n+1)}+\cdots\cdots$

ハ收斂ナルコトヲ證セヨ。

96. $\frac{x+5}{(x^2-1)(x+2)}$ ノ展開式＝於ケル x^{2n-1} ノ係數ハ $1-\frac{1}{2^{2n}}$ ナルコトヲ證セヨ。

97. $1+\frac{(1+2x)}{1!}+\frac{(1+2x)^2}{2!}+\frac{(1+2x)^3}{3!}+\cdots\cdots$

ノ展開式＝於ケル x^n ノ係數ハ $\frac{2^n e}{2}$ ナルコトヲ證セヨ。

98. $\frac{1}{1-5x+6x^2}$ ガ x ノ昇冪＝展開シ得ベキモノト假定シテ x^n ノ係數ヲ求メヨ。

99. $(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)\cdots\cdots(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n)$

ヲ x ノ昇冪ノ級數＝展開スル時ハ共始メヨリト終リヨリト同一ノ番目＝アル項ノ係數ハ相等シク且ツ奇數番目ノ項ノ係數ノ和ト偶數番目ノ項ノ係數ノ和トハ互相等シク共＝ $\frac{(n+1)!}{2}$ ＝等シキコトヲ證セヨ。

100. n ガ正ノ整數ナリトシ，$(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^r)^n$ ノ展開式＝於ケル x^m ノ係數ヲ a_m トスル時ハ m ガ $r+1$ ノ倍數＝アラザル時ハ，

$$a_m-{}_nC_1a_{m-1}+{}_nC_2a_{m-2}-\cdots\cdots=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

101. n ガ任意ノ正ノ整數＝シテ P_n ガ $(1+x)^n$ ノ展開式ノ凡テノ係數ノ積ナルトキハ

$$\frac{P_{n-1}}{P_n}=\frac{(n+1)^n}{n!}$$

ナルコトヲ證セヨ。

102. n ガ正ノ整數ナルトキハ

$$n^{n+2}-n(n-1)^{n+2}+\frac{n(n-1)}{2!}(n-2)^{n+2}-\cdots\cdots=\frac{n}{24}(3n+1)(n+2)!$$

ナルコトヲ證セヨ。

103. $\frac{1}{n}+\frac{x}{n(n+1)}+\frac{x^2}{n(n+1)(n+2)}+\frac{x^3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$+\cdots\cdots=e^x\left\{\frac{1}{n}-\frac{x}{1!(n+1)}+\frac{x^2}{2!(n+2)}-\cdots\cdots\right\}$$

ナルコトヲ證セヨ。

104. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots+(2n+1)^2=(n+1)(2n+1)$ ナルコトヲ證セヨ。

105. n ガ正ノ整數ナル時

$$n^n-n(n-2)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^n-\cdots\cdots=4.6.8\cdots\cdots.2n$$

ナルコトヲ證セヨ。

106. n ガ正ノ整數ナル時ハ

$$1-n\frac{1+x}{1+nx}+\frac{n(n-1)}{1.2.}\frac{1+2x}{(1+nx)^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\frac{1+3x}{(1+nx)^3}$$

$$+\cdots\cdots=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

107. n ハ3ヨリ大ナル整數ナルトキ

$$a-n(a-1)+\frac{n(n-1)}{1.2}(a-2)-\cdots\cdots+(-1)^n(a-n)=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

108. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n^2+n-1}{n!}=9e+1$ ナルコトヲ證セヨ。

109. $\left(r+\frac{1}{r}\right)^2+\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(r^n+\frac{1}{r^n}\right)^2=\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\left(r^2+\frac{1}{r^{2n}}\right)+2n$

ナルコトヲ證セヨ。

110. $S_n^r=1^r+2^r+\cdots\cdots+n^r$ ナルトキハ

$$6S^5+2S_n^3=n^3(n+1)^3$$

ナルコトヲ證セヨ。

111. $\dfrac{1}{2+}\dfrac{2}{3+}\dfrac{3}{4+}=\cdots\cdots\dfrac{3-e}{e-2}$

ナルコトヲ示シ以ツテ e ハ $2\frac{2}{3}$ ト $2\frac{8}{11}$ トノ間ニアルコトヲ證セヨ。

112. $0<x<1$ ナル時ハ

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^{2n-1}}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)$$

ナルコトヲ證セヨ。

113. 無限乘積 $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}\frac{a+n}{b+n}$ ガ發散ナルコトヲ證セヨ。但シ $a>0, b>0$ ナリトス。

114. $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots$

トスルトキ

$$\log_e 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots\right)$$

$$=S-2\times\frac{S}{2}=0$$

トナルトイフ判斷ハ何レノ部分ニ謬リアリヤ指摘セヨ。

115. 連次差ノ方法ニヨリテ次ノ級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

(i) $1+5+15+35+70+126+\cdots\cdots$

(ii) $1+2+29+130+377+866+1717+\cdots\cdots$

116. $\dfrac{1}{\left(a+\frac{1}{a}\right)-}\dfrac{1}{\left(a+\frac{1}{a}\right)-}\cdots\cdots$ ナル漸近分數ノ第 n 漸近分數ヲ求メヨ。

117. $\dfrac{p_n}{q_n}$ ヲ連分數 $\dfrac{1}{a+}\dfrac{1}{b+}\dfrac{1}{a+}\dfrac{1}{b+}\cdots\cdots$ ノ第 n 漸近分數ナリトスレバ，p_n, q_n ガ夫々 $\dfrac{x+bx^2-x^4}{1-(ab+2)x^2+x^4}$, $\dfrac{ax+(ab+1)x^2-x^4}{1-(ab+2)x^2+x^4}$ ノ x^n ノ係數ニ等シキコトヲ示セ。但シ a, b ハ正ノ整數ナリトス。

118. 前題ニ於テ

$$ap_{2n}=bq_{2n-1}=ab\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

ナルコトヲ證セヨ。但シ α, β ハ $1-(ab+2)x+x^2=0$ ノ二ツノ根ナリトス)

119. n 回試行シテ第 n 回目ニ始テ或事象ガ起ル確率ヲ p_n トス。今事象ガ平均 s 回ニ一度起ルトイケ。然ル時ハ

$$1=\frac{p_1+2p_2+3p_3+\cdots\cdots+np_n+\cdots\cdots}{s}$$

ナルコトヲ證セヨ。

120. f_r ヲ最初ノ r 回ノ試行ニ一度モ或事象ガ起ラザル確率トシ，其事象ガ平均 s 回ニ一度起ルモノトス。然ル時ハ

$$s=1+f_1+f_2+f_3+\cdots\cdots\cdots$$

ナルコトヲ證セヨ。

注意 $f_{r-1}=f_r+p_r$, $p_1=1-f_1$ ト置キテ前題ヲ利用セヨ。

121. n 個ノ整數ヲ採ツテ其積ヲ作ルニ積ノ最後ノ數字ガ 1,3,7 又ハ 9 ナルコトノ確率ハ $\dfrac{2^n}{5^n}$ ニ等シク，2,4,6 若クハ 8 ナルコトノ確率ハ $\dfrac{4^n-2^n}{5^n}$ ニ等シク，5 ナルコトノ確率ハ $\dfrac{5^n-4^n}{10^n}$ ニ等シク從ツテ零ナルコトノ確率ハ $\dfrac{10^n-8^n-5^n+4^n}{10^n}$ ニ等シキコトヲ證セヨ。

122. 甲ノ袋ニハ白球5個黑球1個，乙袋ニハ白球3個アリ，今甲ヨリ4球ヲ取リ出シテ乙ニ入レ，次ニ乙ヨリ5球ヲ取リ出シテ甲ニ入レタル時，甲ノ中ニ黑球ノアル確率如何。

123. 1,2,2,4,4,6 ナル目ヲ有スル骰子8回投ゲ，1,2,4 ノ目ガ各3回，2回，3回出ヅル確率如何。

124. 一回ノ勝負ニ於テ甲ガ乙ニ勝ツ確率ハ $\dfrac{3}{5}$ ナリ，3 回ノ勝負ニ於テ甲ガ乙ニ 2 回勝ツ確率ヲ求メヨ。

125. $0,1,2,\cdots\cdots(6n-1)$ ナル番號ヲ附ケタル $6n$ 個ノ球ヲ入レタル袋ヨリ三個取リ出シテ番號ノ和ガ $6n$ ニ等シキ確率ヲ求メヨ。

126. 一ツノ骰子ヲ三度續ケテ投ゲテ目ノ和 15 ヲ得タル時，最初ノ一投ゲガ

4 ナリシ確率ガ $\frac{1}{5}$ ナルコトヲ證セヨ。

127. 一ツノ袋ノ中ニ5個ノ球アリ，今其中ヨリ1個取リ出セシニ赤ナリシトイフ。5個トモニ赤ナル確率ハ $\frac{1}{3}$ ナルコトヲ證セヨ。

128. 白球5個黑球4個ヲ入レタル袋ヨリ一球ヲ取リ出シ，ソレガ白球ナラバ20圓ヲ與フル約束ヲセリ，然ラバ一回ノ試ミノ希望金額ヲ12圓ナラシムルニハ，黑球ヲ取リ出シタル時ニ何程ノ金ヲ與ベキカ。

129. $8x+13y=138$ ノ正ノ整數解ヲ求メヨ。

130. $49x-69y=100$ ノ整數解ヲ求メヨ。

131. $3x+2y+8z=40$ ノ正ノ整數解ヲ求メヨ。

132. $\left.\begin{matrix} 5x+y+7z=39 \\ 2x+4y+9z=63 \end{matrix}\right\}$ ノ正ノ整數解ヲ求メヨ。

133. 316ヲ二ツノ正ノ整數ニ分チ第一ノ方ハ13ニテ整除シ得ベク，第二ノ方ガ11ニテ整除シ得ベキヤウニセントス。各分ノ値如何。

134. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$ ノ値ヲ求メヨ.

135. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & a & b & c & d & e \\ e & f & a & b & c & d \\ d & e & f & a & b & c \\ c & d & e & f & a & b \\ b & c & d & e & f & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix}$$

ナルコトヲ證セヨ。但シ $\quad A=a-d^2+2ce-2bf$

$B=c^2-b^2-2ac-2df \quad C=e^2-f^2+2ac-2bd$

136. w ヲ $x^3=1$ ノ虚根トスル時ハ，

$$\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ w & w^2 & w^3 & 1 \\ w^2 & w^3 & 1 & w \\ w^3 & 1 & w & w^2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -27$$

ナルコトヲ證セヨ。

137. $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$ ナル時ハ $\begin{vmatrix} a & h & g & x \\ h & b & f & y \\ g & f & c & z \\ x & y & z & u \end{vmatrix}$ ハ完全平方ナルコヲ證セヨ。

135. $$\begin{vmatrix} yz-x^2 & zx-y^2 & xy-z^2 \\ zx-y^2 & xy-z^2 & yz-x^2 \\ xy-z^2 & yz-x^2 & zx-y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r^2 & u^2 & u^2 \\ u^2 & r^2 & u^2 \\ u^2 & u^2 & r^2 \end{vmatrix}$$

ナルコトヲ證セヨ. 但シ $r^2=x^2+y^2+z^2 \quad u^2=yz+zx+xy$

139. $$\begin{vmatrix} 0, & x, & y, & 0 \\ x, & 0, & 0, & a \\ y, & 0, & 0, & b \\ 0, & a, & b, & 0 \end{vmatrix} = (bx-ay)^2$$

ヲ證明シ，次ニコレヲ利用シテ次式ヲ證セヨ。

$$\begin{vmatrix} x^2+y_2 & 0 & 0 & ax+by \\ 0 & x^2+a^2 & xy+ab & 0 \\ ax+by & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = (bx-ay)^4$$

140. $(f^2-bc)x+(ch-fg)y+(bg-hf)z=0$

$(ch-fg)x+(g^2-ca)y+(af-gh)z=0$

$(bg-hf)x+(af-gh)y+(h^2-ab)z=0$

ガ x, y, z ノ零ナラザル値ニ對シテ聯立スル爲メノ條件ハ

$af^2+bg^2+ch^2-2fgh-abc=0$

ナルコトヲ證セヨ。

141. $(1+lx)(1+ay)=1+lz$

$(1+mx)(1+by)=1+mz$

$(1+nx)(1+cz)=1+nz$

ガ聯立スル爲メノ條件ハ

$$\frac{a(b-b)}{l}+\frac{b(c-a)}{m}+\frac{c(a-b)}{n}=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

142. 行列式ヲ行ヒテ次ノ方程式ヲ解ケ。

$2x-3y+z=3a-b-2c$

$x+2y-z=3b+c$

$5x+2y-z=4a+3b+c$

143. p ガ素數ナル時ハ $2\times(p-3)!+1$ ハ p ノ倍數ナルコトヲ證明セヨ。

144. m, n ガ互=素ナルトキハ m^2+n^2 ノ奇數ノ約數ハ $4k+1$ ノ形ヲナスコトヲ證セヨ。

145. $3^{4n+2}+2\times4^{3n+2}$ ガ 17 ノ倍數ナルコトヲ證セヨ。

146. a モ b モ共=91ト互=素ナルトキハ $a^{12}-b^{12}$ ハ 91 ノ倍數ナルコトヲ證明セヨ。

147. n ガ1ヨリモ大ナル正ノ整數ナリトスレバ

$$n^5-5n^3+60n^2-56n$$

ハ 120 ノ倍數ナルコトヲ證セヨ。

148. $(n^r-1)!$ =含マル丶 n ノ最高冪指數ハ

$$\frac{n^r-nr+r-1}{n-1}$$

=等シキコトヲ證明セヨ。

149. $\sqrt{3}+1)^{2n+1}$ ノ整數部ハ $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}-(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ =等シキコトヲ證セヨ。

150. n ヲ正ノ整數ナリトシ $(3\sqrt{3}+5)^{2n+1}=\mathrm{N}+\mathrm{F}$ トスル時ハ, $\mathrm{F}(\mathrm{N}+\mathrm{F})=2^{2n+1}$ ナルコトヲ證明セヨ。

151. p ガ素數=シテ x ガ p ト互=素ナル時ハ $x^{p^r-p^{r-1}}-1$ ハ p^r ノ倍數ナルコトヲ證セヨ。

152. $p+1, 2p+1$ ハ共=素數=シテ x ガ $2, p+1$ 及ビ $2p+1$ ト互=素ナル時ハ $x^{2p}-1$ ハ $8(p+1)(2p+1)$ ノ倍數ナルコトヲ證明セヨ。

153. m ガ素數=シテ a, b ハ m ヨリモ小ナルトキハ

$$a^{m-2}+a^{m-3}b+a^{m-4}b^2+\cdots\cdots+b^{m+2}$$

ハ m ノ倍數ナルコトヲ證セヨ。

附録 2

文部省檢定試驗問題(代數之部)

注意 文部省檢定試驗ハ明治十八年ヨリ初マリシト雖モ當時ノ問題ハ今日ニテハ參考トスルニ足ラヌト考ヘタルニヨリ，明治三十年度ヨリ記述スルコトニセリ。尙本試驗ニハ一題ダケ算術ノ問題ヲ配セラレ居ル場合多シ。然レドモコレモ省略セリ。

明治三十年

【豫備試驗】

1. 圓壔形ノ木桶ノ水ガ其底ノ小孔ヨリ流出シ盡クル時間ハ始メノ水ノ深サノ平方根ニ比例ス。今底ニ二箇ノ相等シキ小孔ヲ有スル圓壔形ノ桶中ノ水ガ其一小孔ヨリ五斗ダケ流レ出デタル時第二ノ小孔ヲモ開キタルニ殘餘ノ水ガ前ノ五斗ノ水ト等シキ時間ニテ全ク流レ出デタリトイフ。初メ桶中ニアリシ水ハ幾何ナリシカ。

2. 金一圓ニツキ米若干ノ割ニテ米五石ヲ買ヒ之ヲ一圓ニツキ二升五合ヅツ高ク賣リテ金十圓ノ利潤ヲ得タリトイフ。始ノ米ノ價幾何ゾ。若シ負ノ答アラバ之ヲ解釋セヨ。

3. $\dfrac{(h+1)x^2+hx+h}{x^2+x+1}>k$

上ノ不等式中ニ於テ h ガ與ヘラレタル數ナルトキ x ノ値ノ如何ニ拘ラズ本式ガ成リ立ツタメニハ k ニ如何ナル値ヲ與ヘ得ベキカ。

4. 二項法ヲ應用シテ $\sqrt[5]{3^5-2}$ ヲ小數第五位マデ計算セヨ。

5. 次ノ「デテルミナン」ノ値ヲ計算セヨ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 7 \\ 4 & 8 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

【本試驗】

3. 次ノ方程式ヲ滿足スル x, y ノ値ヲ出セ。

$$x-y=3 \qquad x^5-y^5=3093$$

4. $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+n^2$ ノ和ヲ索メヨ。

明治三十一年

1. $x^2-(8m-2)x+15m^2-2m-7$

ナル三項式ノ値ガ x ノ値ノ如何ニ拘ハラズ正ナル爲メニハ m ノ値ヲ如何ニ撰定スベキカ。

2. 次ノ二ツノ方程式ヨリ x 及ビ y ヲ消去セヨ。

$$ax^2+2hxy+by^2=0$$
$$a'x^2+2h'xy+b'y^2=0$$

3. 甲乙二地アリ，其距離三十四里ナリ。又甲地ヲ通ジテ一直線ニ延長セル鐵道線路アリ，乙地ヨリ此鐵道マデノ距離ハ九里ナリトイフ。今乙地ヨリ一直線ニ鐵道ト聯絡スル新道ヲ開キ甲乙間ニ於ケル貨物ノ運賃ヲ出來ルダケ減ゼシメントス。甲地ヨリノ距離幾何ノ處ニテ鐵道ト聯絡セシムベキヤ。但シ鐵道ニテノ運賃ハ新道ニテノ運賃ノ半額ナリト假定スベシ。

4. 指數級數ヲ用ヒテ e ノ平方根ノ小數第四位マデ正シキ近似數ヲ出スニハ第何項マデ採ラザルベカラザルカ。又此近似値ハ如何。

5. 行列式(デヽルミナン)ヲ用ヒテ次ノ方程式ヲ解ケ。

$$ax+by+cz=A$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=A^2$$
$$a^3x+b^3y+c^3z=A^3$$

【本試驗】

1. 對數表ヲ用ヒテ次ノ方程式ヲ解ケ。

$$18.405\times 43^x=(670.97)^2$$

2. 次ノ不等式ニ適スル x ノ値ノ限界ヲ見出セ。

$$\frac{4x^2-20x+18}{x^2-5x+4}<3$$

明治三十二年

【豫備試驗】

1 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$x+\sqrt{2ax}=b$$

但シ a, b ハ共ニ正數ニシテ $\sqrt{}$ ハ平方根中ノ正ナル者ヲ表ハスモノトス。

2. 次ノ不等式ヲ解ケ。

$$\sqrt{a-x}>x-b$$

但シ $a>b>0$ ニシテ $\sqrt{}$ ハ平方根中ノ正ナル者ヲ表ハスモノトス。

3. 或年ノ始メニ借リタル元金 A 圓ヲ償却スル爲メニ每年末 a 圓宛拂ヒ込ミテ n 年ノ

終ニ於テ償却セントス。利率 r ト A 及ビ a トヲ知リテ n ヲ求メヨ。

4. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$log\sqrt{7x+5}=1-log\sqrt{2x+3}$$

但シ log ハ 10 ヲ底數トセル對數ヲ表ハスモノトス。

5. $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{array}\right\}$$

ナル時

$$a^3x+b^3y+c^3z$$

ノ値ヲ求メヨ。

【本試驗】

1. a, b, c ガ實數ナルトキ x ニ如何ナル實値ヲ與フルモ次ノ式ノ値ガ常ニ正ナルタメノ條件ヲ求ム。

$$ax^2+2bx+c$$

2. $$\left.\begin{array}{l} x^2+yz=a \\ y^2+zx=b \\ z^2+xy=c \\ x^2+y^2+z^2=2\lambda \end{array}\right\}$$

ナル時ハ

$$(a+b+c-\lambda)(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)=[(b-\lambda)(c-\lambda)+(c-\lambda)(a-\lambda)+(a-\lambda)(b-\lambda)]^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

3. 次ノ不等式ヲ解ケ。

$$\sqrt{a-x}>x$$

但シ $\sqrt{}$ ハ平方根中ノ正ナルモノヲ表ハスモノトス。

4. 次ノ方程式ノ凡テノ實根ヲ求ム。

$$2^{3x+1}+2^{3x}=5\times2^{x+4}$$

明治三十三年

【豫備試驗】

1. x, y ニ就テノ次ノ聯立方程式ヲ吟味セヨ。

$$(2k+1)x+(4k+3)y=3-k$$
$$(k+2)x+(3k+4)y=1+k$$

2. 次ノ方程式ニ適合スル x ノ値ガ實數ナル爲メノ條件ヲ求メヨ。

$$x^2+1+\frac{1}{x^2+1}=2a$$

3. $(a+b)^{20}$ ノ展開式ノ初ヨリ $3r$ 番目ノ項ノ係數ガ初ヨリ $r+b$ 番目ノ項ノ係數ニ等シトイフ。其係數ノ値ヲ問フ。

4. 10 ヲ底數トスル對數ヲ log ニテ表ハセバ

$$log2=0.30103 \qquad log3=0.84510$$

ナリ 1000 ヲ底數トセル $\left(\frac{4}{343}\right)^{\frac{1}{2}}$ ノ對數ヲ見出セ。

5. 甲乙兩人アリ同時ニ周圍 400 間アル正方形ノ相隣レル隅ヨリ發シ同方向ニ進ム。甲ハ乙ヨリ前ニアリテ其速度一分間ニ 42 間乙ノ速度ハ 1 分間ニ 34 間ナリ。甲乙兩人出發後始メテ同一ノ邊上ニ來ルマデノ時間ヲ問フ。

【本試驗】

1. x, y, z ヲ次ノ方程式ヨリ逐ヒ出セ。

$$(z+x-y)(x+y-z)=ayz \qquad (x+y-z)(y+z-x)=bzx \qquad (y+z-x)(z+x-y)=cxy$$

2. 次ノ方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ。

$$x^4+2(m-1)x^2+m^2+7=0$$

3. 甲乙丙ノ三人其年齢ガ等比級數ヲナストキ或金高ヲ年齢ニ比例シテ分配シ，其後五年ヲ經テ同金高ヲ復タ年齢ニ比例シテ分配セシニ甲ハ前ヨリモ 59 圓 50 錢多ク乙ハ前ヨリモ 8 圓 50 錢多ク得タリ。而シテ此時丙ノ年齢ハ甲ノ年齢ノ二倍ニ等シカリシトイフ。仍テ問フ甲乙丙ノ最初ノ年齢及ビ前後兩度ニ分チタル各金高如何。

4. 或國ニ於テ毎月出產者ノ數ト死亡者ノ數トハ夫々其月ノ初メノ人口ノ $\frac{1}{480}$ ト $\frac{1}{600}$ トニ等シトイフ。幾月ヲ經テ人口ハモトノ二倍トナルカ。但シ此計算ニハ次ノ對數表ヲ用フベシ。

$$log2=0.3010300 \qquad log3=0.4771213 \qquad log7=0.8450930$$

明治三十四年

【豫備試驗】

1. $(2\lambda-1)x^2+(5\lambda+1)x+3\lambda+1=0$ ナル方程式ノ二ツノ根ノ比ガ $\frac{3}{2}$ トナル樣ニ λ ヲ定メヨ。

2. 甲乙二人ニテ a 時間ニ仕揚ル仕事ヲ甲一人ニテナス時ハ之ヲ乙一人ニテ仕揚ル時間ノ三倍ヨリ b 時間ダケ少キ時間ニテ仕揚グベシトイフ甲乙各一人ニテハ幾時間ヲ要スルカ。

3. 次ノ聯立方程式ニ適スル x, y ノ値ヲ求メヨ。

$$x+y=\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-y^2}=\sqrt{3}$$

但シ $\sqrt{}$ ハ正ナル根ヲ表ハスモノトス。

4. 或人ノ手元ニ銅貨ハ皆無ニシテ五錢白銅貨ガ手元ニアル最小貨幣ナリシ時ニ，若干金ノ支拂ヲシテ，ツリ錢ヲ取ラザリシガ爲メニ 27 錢ヲ損セリ，一口ノ支拂高ハ各 15 圓以上ニシテ合計ハ 130 圓未滿且ツ口數ハ奇數ナリト云フ。支拂ノ口數ヲ問フ。

5. 第一項ハ 4 ニシテ第 $m+1$ 項ヨリ第 m 項ヲ引キタル殘リハ常ニ $2m+3$ ナル級數ノ第 m 項ヲ求ム。

【本試驗】

1. AB ヲ直徑トセル半圓內ニ AB ニ平行ニ弦 CD ヲ引キ四邊形 ABCD ガ AB ヲ軸トシテ回轉スルトキニ生ズル立體ノ體積ヲシテ AB ヲ直徑トスル球ノ體積ノ半分ニ等シカラシメントス。CD ノ長サヲ求ム。

2. a ト b トノ値ノ如何ニ拘ハラズ

$$\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2}{x^2-b^2}=4$$

ナル方程式ノ四ツノ根ハ恒ニ實數ナルコトヲ示セ。

3. $x+x+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ナルトキハ，x, y, z ノ中ノ何レカ一ツハ必ズ 1 ニ等シカラザルベカラザルコトヲ證明セヨ。

4. 0.001 ヲ底數トスル 0.0001 ノ對數ヲ索ム。

明治三十五年

【豫備試驗】

1. 次ノ方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ.

$$\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{b-x}}=\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

2. 次ノ不等式ニ適合スル x ノ値ノ限界ヲ定メヨ。

$$\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-7x+12}<\frac{1}{x^2-4x+3}$$

3. 甲乙ノ二人アリ。甲ハ每分 a 間ノ速サニテ南北ノ路ヲ北ヘ向ヒテ進ミ，乙ハ每分 b 間ノ速サニテ東西ノ路ヲ東ニ向ヒテ進ム。甲ハ此兩路ノ交叉點ノ南 A 間ノ點ヲ又乙ハ同交叉點ノ西 B 間ノ點ヲ同時ニ出發シ來レルモノトスレバ，甲乙ノ距離ハ何時何處ニ於テ最モ近カルベキカ。

4. 項數ハ $2n$ 偶數ノ番號ノ項ノ和ハ a, 奇數ノ番號ノ和ガ b ナル等比級數ヲ定メヨ。

5. $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2$ ナルコトヲ證明セヨ。

【本試驗】

1. 次ノ方程式ト不等式トノ一組ヲ解ケ

$$ax-by=1 \qquad px+qy>1$$

玆ニ a, b, p, q ハ何レモ正ノ實數ヲ表ハスモノトス。

2. 次ノ方程式

$$x^2-(8a-2)x+15a^2-2a-7=0$$

ノ根ノ平方ノ和ガ 24 ナル時ハ a ノ値如何。

3. 次ノ恒等式

$${}_{n+1}C_{r+1}={}_{n}C_r+{}_{n-1}C_r+{}_{n-2}C_r+\cdots\cdots+{}_{r}C_r$$

ヲ證明セヨ。玆ニ ${}_mC_s$ ハ m 個ノ相異ナル物ヨリ s 個宛トリタル組合セノ數ヲ表ハスモノトス。

明治三十六年

【豫備試驗】

1. 次ノ二ツノ方程式アリ

$$mx-6y=5m-3$$

$$2x+(m-7)y=7m+29$$

m ニ如何ナル値ヲ與フレバ

(a) 二ツノ方程式ハ相容レザルベキカ。

(b) 二ツノ方程式ハ不定ノ組合ヲナスベキカ。

2. 次ノ方程式ヨリ x, y, z ヲ逐ヒ出セ

$$(z+x-y)(x+y-z)=lyz$$

$$(x+y-z)(y+z-x)=mzx$$

$$(y+z-x)(z+x-y)=nxy$$

3. 次ノ方程式ヲ解ケ。但シ $\sqrt{}$ ハ正ナル根ヲ表ハスモノトス

$$\sqrt{x+10}-\sqrt{x-10}=10$$

4. 正ノ數 a, b, c ノ間ニ次ノ不等式アルトキハ其二數ノ和ハ必ズ第三數ヨリ大ナルコトヲ證明セヨ

$$4>\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}>0$$

5. 次ノ二ツノ常用對數ヲ與フ

$$log2=0.30103 \qquad log3=0.47712$$

依リテ 15 ヲ底トスル 0.81 ノ對數ヲ問フ。

【本試驗】

1. 次ノ聯立方程式ヲ滿足スル x ト y トノ値ヲ小數第三位マデ求メヨ。

$$346x+787y=73$$

$$127x-329y=588$$

2. x^n-ax+b ト $nx^{n-1}-a$ トガ公約數ヲ有スルガ爲メニ必要ナル條件ヲ見出セ。

3. 次ノ一組ノ方程式ト不等式トヲ解ケ

$$\sqrt{1-x^2}<y \qquad y=2(x+1)$$

4. 初項 a, 公比 9 ナル等比級數ノ n 項ノ和ハ初項 a, 公差 a ナル等差級數ノ若干項ノ和ニ等シキコトヲ示セ。

明治三十七年

【豫備試驗】

1. $x+y=xy=1$ ナル時ハ $x^3=y^3=-1$ ナルコトヲ證明セヨ。

2. 次ノ方程式ヲ解ケ

$$2x-\sqrt{2x^2+x^3}=x\sqrt{2x+3}$$

但シ $\sqrt{\ }$ ハスベテ正ノ實根ヲ表ハスモノトス。

3. 次ノ不等式ヲ解ケ

$$\sqrt{3-2x}<x$$

4. 次ノ聯立方程式ガ根ヲ有スル爲メノ條件ヲ求メヨ。

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=z \qquad 2x+2y+p=0 \qquad z^4+pz^2+q=0$$

5. 第 m 項ガ $am^2+2bm+c$ ナル級數ノ第一項以下 n 項ノ和ヲ求メヨ。但シ a, b, c ハ m ニ關係ナキ數トス。

【本試驗】

1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ

$$x^2+y^2=1$$

$$18(z-1)x-(z-26)y=0$$

$$(23z-73)x-36(z-1)y=0$$

2. 次ノ方程式ノ一根ハ 3 ヨリ大ニシテ他根ハ 3 ヨリ小ナル爲ニ λ ノ取ルベキ値ヲ求ム。

$$(\lambda+2)x^2-4\lambda x+\lambda-1=0$$

3. a, b, c ハ實數ニシテ方程式

$$ax^2+2bx+c=0$$

ノ根ガ虛數ナル時ハ，聯立方程式

$$ax^2+2bx+c=ay^2+2by+c$$

$$axy+b(x+y)+c=0$$

ハ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

4. 與ヘラレタル矩形 ABCD ノ一邊 BA ノ延長上ニ一點 M ヲトリ MC ト AD トノ交點ヲ N トスルトキ三角形 AMN, CDN ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

明治三十八年

【豫備試驗】

1. x^4+px^2+q ガ x^2+px+q ニテ割リ切レル爲ニ p 及ビ q ノ取ルベキ値如何。

2. 方程式 $x^2+ax+b=0$ ガ實根ヲ有スルトキ，次ノ方程式ノ根ノ性質ヲ吟味セヨ。

$$x^2+ax+b+(x+c)(2x+a)=0$$

但シ a, b, c ハ皆實數ナリ。

3. x ガ 0 ヨリ $-\frac{1}{2}$ マデ變ズル間ニ於テ

$$1-kx \geqq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geqq 1-lx$$

ガ常ニ成リ立ツ爲メニ k 及ビ l ノ取ルベキ値ヲ求ム。

4. $\frac{ax+b}{x^2+1}$ ニ於テ x ニアラユル實數ノ値ヲ與フルトキ此式ノ取ル所ノ極大ノ値ガ 4 ニシテ其極小ノ値ガ -1 ナル爲ニハ a 及ビ b ニ如何ナル値ヲ與フベキカ。但シ a 及ビ b ハ實數ナリトス。

5. $(1-2x+3x^2)^5$ ノ展開式中ニ於ケル x^7 ノ係數ヲ求メヨ。

【本試驗】

1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=45 \\ 5z+6x-y&=36 \\ y^2-xz&=31\cdot146 \end{aligned}\right\}$$

2. 方程式

$$a=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \qquad b=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

ガ一ツノ根ヲ共有スル爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ヲ求メヨ。

3. $a^2+b^2+c^2=1$, $x^2+y^2+z^2=1$ ナル時ハ $ax+by+cz$ ノ絶對値ハ常ニ 1 ヨリモ大ナラザルコトヲ證明セヨ。

4. 與ヘラレタル四ツノ相異ナル子音ト與ヘラレタル三ツノ相異ナル母音トヲ一列ニ並ブルニ，母音ト母音トハ相接セズ，且ツ母音ガ初メニ在ラザル樣ニスル時ハ並ベ方幾通リアルカ。

5. 今ヨリ後一ケ年每ニ a 圓ヅヽ n ケ年賦ヲ以テ償還セラルベキ年 r 分利附額面 na 圓ノ公債アリ。之ヲ年 p 分ノ複利ニテ計算シタル現價ヲ簡單ナル形ニテ表ハセ。但シ未償還元金ニ對スル利子ハ每年年賦金ト同時ニ支拂ハルヽモノトス。

明治三十九年

【豫備試驗】

1. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\sqrt{x^2-7ax+10a^2}-\sqrt{x^2+ax-6a^2}=x-2a$$

2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\left.\begin{array}{l} y+z+yz=a \\ z+x+zx=b \\ x+y+xy=c \end{array}\right\}$$

3. 方程式

$$x^2+px+q=0$$

ノ二ツノ根ノ比ガ與ヘラレタル數 k ニ等シキ爲メニ必要ニシテ充分ナル條件ヲ求メヨ。

4. x ニ於ケル整式

$$nx^{n+1}-(1+np)x^n+(p-1)x^{n-1}+(p-1)x^{n-2}+\cdots\cdots+(p-1)x+p$$

ガ $x^2-(p+1)x+p$ ニテ整除セラルヽコトヲ證明セヨ。

5. 12 册ノ相異ナル書籍中ヨリ或特別ナル書籍一册ト他ノ書籍五册トヲ取リテ一列ニ置ク方法幾通リアルカ。

【本試驗】

1. x^3+px+q ガ $(x-\alpha)^2$ ノ如キ一次式ノ平方ニテ割リ切ルヽ爲メニハ p ト q トノ間ニ如何ナル關係アルベキカ。

2. 次ノ聯立方程式ガ實根ヲ有スル爲ノ條件ヲ求メヨ。

3. $\dfrac{x^2+2ax+1}{x^2+2bx+1}$ ナル式ノ極大ノ値及ビ極小ノ値ガ相等シキ絶對値ヲ有シテ且ツ其符號ガ反對ナル爲ニハ a ト b トノ間ニ如何ナル關係ヲ要スルカ。

4. 次ノ行列式ヲ因數ニ分解セヨ。

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

明治四十年

【豫備試驗】

1. 二個ノ x ニ於ケル有理整式ノ和ト其最小公倍數トガ與ヘラルトキ此二式ヲ求ムル方法ヲ說明セヨ。

2. $ax^2+2bxy+cy^2-\lambda(x^2+y^2)$ ガ有理式ノ平方ニ等シキ爲メニハ λ ハ如何ナル値ヲ有スベキカ。

3. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=\alpha$

$\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}=\beta$

$\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\left(\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}\right)\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)=\gamma$

ヨリ x, y, z ヲ逐ヒ出セ。

4. 次ノ不等式ヲ解ケ。

$$\frac{a(x-1)}{x-2}>1$$

5. $\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ y & x & u & z \\ z & u & x & y \\ u & z & y & x \end{vmatrix}$ ヲ因數ニ分解セヨ。

【本試驗】

1. a, b, c, p, q, r ハ何レモ實數ニシテ且ツ a, b, c ハ正ノ數ナルトキ

$$(a+b+c)(ap^2+bq^2+cr^2)=(ap+bq+cr)^2$$

ナラバ $p=q=r$ ナルコトヲ證セヨ。

2. a, b, c ハ何レモ實數ニシテ $a<b<c$ ナル時方程式

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

ノ根ハ a ト b トノ間及ビ b ト c トノ間ニ挾マレタル實數ナルコトヲ證明セヨ。

3. 次ノ一組ノ方程式ト不等式トヲ解ケ。

$$\left.\begin{array}{r}x^2+4y^2=1\\x^2+y^2<2y\end{array}\right\}$$

4. 矩形ヲ底トスル與ヘラレタル直錐ノ底面ニ平行ナル截面ヲ一ツノ底トシ，直錐ノ底面上ニ今一ツノ底ヲ有スル最大體積ノ直六面體ノ高サヲ計算セヨ。

5. 10 ヲ底トセル 2 ノ對數ハ 0.3010300 ナルコトヲ知リテ 5 ヲ底トセル 2 ノ對數ヲ計算セヨ。

明治四十一年

【豫備試驗】

1. $f(x)$, $\varphi(x)$ ヲ x ニ關スル二ツノ有理整式トスレバ

$$f(x^2)+x\varphi(x^2)$$

ヲ x^2-1 ニテ除スル時ノ剩餘ハ $f(1)+x\varphi(1)$ ナルコトヲ證明セヨ。

2. 次ノ方程式ヲ解ケ。但シ $\sqrt{\ }$ ハ正ナル根ヲ表ハスモノトス。

$$\sqrt{x^2+x+\frac{1}{2}}+\sqrt{x^2-x+\frac{1}{2}}=2$$

3. 方程式

$$(14p-1)x^2-2px+1=0$$

ノ二根 α, β ノ間ニ次ノ關係ノ成立ツ爲メニハ p ニ如何ナル値ヲ與フベキカ。

$$3\alpha\beta=2\alpha-\beta$$

4. 等比級數ヲナセル n 個ノ數ノ積ヲ P, 其和ヲ S 其逆數ノ和ヲ T トスレバ,

$$P^2=\left(\frac{S}{T}\right)^n$$

ナルコトヲ證セヨ。

5. $$\begin{vmatrix}\dfrac{1}{x-a} & \dfrac{1}{x-b} & \dfrac{1}{x-c}\\[2mm] \dfrac{1}{y-a} & \dfrac{1}{y-b} & \dfrac{1}{y-c}\\[2mm] \dfrac{1}{z-a} & \dfrac{1}{z-b} & \dfrac{1}{z-c}\end{vmatrix}$$

ヲ分子分母共ニ因數ニ分解サレタル分數ニ直セ。

【本試驗】

1. 次ノ聯立方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ。

$$\left.\begin{array}{r}x+y+\lambda z=1\\x+\lambda y+z=1\\x-y+z=3\end{array}\right\}$$

2. 與ヘラレタル三角形ノ三邊ヲ或同一ノ長サダケ延長シタモノニ等シキ邊ヲ有スル直角三角形ヲ作ルコトヲ得ルヤ否ヤ之ヲ吟味セヨ。

3. x ガ 1 ヨリモ小ナル正ノ數ナル時ハ

$$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

ト $\frac{x}{2}$ トノ差ハ $\frac{x^3}{2}$ ヨリモ小ナルコトヲ證明シ且是ニヨリテ $x=\frac{1}{60}$ ナル時上式ノ値ヲ小數第四位マデ計算セヨ。

4. $(1+x+x^2)^8$ ノ展開式中ニ於テ x^5 ノ係數ヲ求メヨ。

明治四十二年

【豫備試驗】

1. 或凸多角形ノ內角ガ等差級數ヲナシ其最小角ハ 120° 公差ハ 5° ナリトイフ。邊數幾何ナルカ。

2. 次ノ不等式ヲ解ケ。

$$\sqrt{a(a-x)}>a-2x$$

3. 方程式　ax^3+bx^2+cx+d

ガ絕對値相等シクシテ符號相反スル二ツノ根ヲ有スルタメニハ係數ノ間ニ如何ナル關係アルコトヲ要スルカ。

4. a ガ正ノ數ナルトキ

$$(5a+\sqrt{a^2-x^2})(2a-\sqrt{a^2-x^2})$$

ノ最大值ヲ求メヨ。玆ニ $\sqrt{\ }$ ハ正ノ平方根ヲ表ハス。

5. 次ノ級數ノ和ヲ求メヨ。

$$ax+(a+ab)x^2+(a+ab+ab^2)x^3+\cdots\cdots+(a+ab+ab^2+\cdots\cdots+ab^{n-1})x^n$$

【本試驗】

1. 一直線上ニ四點 A, B, C, D アリ。同直線上ノ一定點 P ヨリ A, B マデノ距離ハ夫夫二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

ノ二根ニテ表ハサレ。同點ヨリ C, D マデノ距離ハ夫々二次方程式 $px^2+2qx+r=0$ ノ二根ニテ表ハサル。點 A, B ガ點 C, D ニヨリテ調和ニ分タルヽガ爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ヲ求メヨ。

2. a, b, c ハ一ツノ三角形ノ三邊ノ長サヲ表ハス時ハ

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$$

ハ x ノ値ノ如何ニ關セズ恒ニ正數ナリ。之ヲ證明セヨ。

3. 正六角形ヲ底トスル直角壔ノ與ヘラレタル球ニ內接スルモノヽ中ニテ體積ノ最大ナルモノヲ求ム。

4. 行列式ヲ用ヒテ次ノ聯立方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ。

$$x+y+z=1$$
$$ax+by+cz=d$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=d^2$$

明治四十三年

【豫備試驗】

1. x ニ就テノ有理整式ヲ $x-a$ ニテ割リタル時ノ剩餘ヲ A トシ，$x-b$ ニテ割リタル時ノ剩餘ヲ B トス。$(x-a)(x-b)$ ニテ割リタル時ノ剩餘ヲ求ム。

2. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$2x+2\sqrt{1+x^2}=\frac{5}{\sqrt{1+x^2}}$$

但シ $\sqrt{\ }$ ハ正ナル根ヲ表ハスモノトス。

3.
$$\left.\begin{aligned}&x+y+z=-a\\&x^2+y^2-z^2=0\\&xy+yz+zx=b\\&xyz=-c\end{aligned}\right\}$$

ヨリ x, y, z ヲ逐ヒ出セ。

4. 與ヘラレタル圓ニ外接スル二等邊梯形ノ中ニテ面積ノ最小ナルモノヲ求ム。

5. $(a+bx+cx^2)^m$ ノ展開式ニ於ケル x^n ノ係數ヲ求ムル方法ヲ述ベヨ。但シ m ハ正ノ整數ナリ。

【本試驗】

1. $a^2+b^2=1,\quad a'^2+b'^2=1,\quad aa'+bb'=0$

ナル時ハ

$$a^2+a'^2=1,\quad b^2+b'^2=1,\quad ab+a'b'=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

2. 次ノ聯立方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ。

$$\left.\begin{aligned}ax+by+cz=1\\bx+cy+az=1\\cx+ay+bz=1\end{aligned}\right\}$$

a, b, c ハ實數ナリトス。

3. 次ノ方程式ノ一ツノ根ガ他ノ二ツノ根ノ和ニ等シクナル樣ニ m ヲ定メ，且此方程式ヲ解ケ。

$$225x^3-90x^2-x+m=0$$

4. 相交ハル二ツノ直線 OX, OY アリ，OX 上ノ一點 A_1 ヨリ OY ニ垂線 A_1A_2 ヲ下シ，其足 A_2 ヨリ OX ニ垂線 A_2A_3 ヲ下シ，更ニ A_3 ヨリ OY ニ垂線 A_3A_4 ヲ下シ順次之ト同樣ノ手續ヲ限リナク行フモノトス。

$$OA_1=a\qquad OA_2=b$$

トシテ此等ノ垂線ノ和

$$A_1A_1+A_2A_3+A_3A_4+\cdots\cdots+A_nA_{n+1}+\cdots\cdots\cdots$$

ヲ求メヨ。

明治四十四年

1. $a+b+c=0$ ナル時ハ

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$$

ナルコトヲ證セヨ。

2. 次ノ聯立方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ。

$$\left.\begin{aligned}ax-by-z+1=0\\x+y-az-b=0\\x+y-z+1=0\end{aligned}\right\}$$

3. 同一ノ直線上ニ相等シキ底ヲ有スル三角形ト矩形トヲ此直線ニ平行ナル直線ニテ截リ其二ツノ平行線外ニアル部分ノ面積ノ和ヲ三角形ノ面積ニ等シカラシメントス。平行直線ノ距離ヲ求メヨ。

4. 10個ノ球ヲ一直線上ニ列ブル方法幾何アルカ。但其ノ中ノ或特別ナル二球ハ必ズ一ツ置キニ在ルベキモノトス。

5. $a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots$ ハ等差級數ニシテ，$b_1, b_2, b_3,\cdots\cdots$ ハ其各項ガ皆正ナル等比級數ナリ。若シ $a_1=b_1$, $a_2=b_2$ ナルトキハ a_n ハ b_n ヨリモ大ナラザルコトヲ證セヨ。

【本試驗】

1. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{y}{b}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{z}{c}+\dfrac{c}{z}$

$$xyz=abc$$

$$x^2+y^2+z^2+2(ab+bc+ca)=0$$

ヨリ x, y, z ヲ逐出セ。

2. a, b, p, q ハ實數ナル時ハ，次ノ方程式ハ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

$$\frac{p^2}{a^2+x}+\frac{q^2}{b^2+x}-1=0$$

3. 次ノ不等式ヲ解ケ但。

$$x-b>\sqrt{a(a-2x)}$$

但シ a, b ハ正ノ數ニシテ，$\sqrt{\ }$ ハ正ナル平方根ヲ表ハスモノトス。

4. 次ノ三ツノ等式ハ同時ニ成リ立チ得ルコトヲ證セヨ。

$$x=10^{\frac{1}{1-\log z}} \qquad y=10^{\frac{1}{1-\log x}} \qquad z=10^{\frac{1}{1-\log y}}$$

但シ log ハ常用對數ヲ表ハスモノトス。

大正元年

1. x ニ於ケル有理整式ヲ $x-a, x-b, x-c$ ニテ割リタル剩餘ガ夫々 α, β, γ ナルコトヲ知リテ $(x-a)(x-b)(x-c)$ ニテ割リタル時ノ剩餘ヲ求メヨ。
但シ a, b, c ハ相異ナル數トス。

2. 次ノ聯立方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ。

$$(3+\lambda)x+4y=5-3\lambda$$

$$2x+(5+\lambda)y=8$$

3. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=\frac{a}{x} \qquad \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=\frac{b}{y} \qquad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{c}{z}$$

4. $\sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$ ヲ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ナル形ニ表ハセ。

5. 三邊ガ等差級數ヲナス三角形ノ周及ビ面積ヲ與ヘテ此三角形ノ三邊ヲ求ム。

【本試驗】

1. $a^2+b^2-1+k(a^2+2mab-b^2)$ ガ a, b ニ於ケル二ツノ一次式ノ積ニ等シキ爲ニハ，k ト m トノ間ニ如何ナル關係アルコトヲ要スルカ。

2. 次ノ不等式ヲ解ケ。

$$\frac{3+x}{1+x}<\frac{5x}{1-x}$$

3. 一ツノ直角三角形ノ三邊ガ等差級數ヲナス時ハ其內接圓ノ半徑ハ此級數ノ公差ニ等シキコトヲ證明セヨ。

4. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\begin{vmatrix} a & b & x \\ b & 2a+b & 2x \\ x & 2x & 3(a+b) \end{vmatrix}=0$$

大正二年

【豫備試驗】

1. $x^5-mx^4+(4n+1)x^3-(6m+3)x^2+54x-27$ ガ $(x-3)^2$ ニテ割リ切ルヽヤウニ m 及ビ n ヲ定メヨ。

2. $\left.\begin{aligned} x^2(y+z)&=a^3 \\ y^2(z+x)&=b^3 \\ z^2(x+y)&=c^3 \\ xyz&=abc \end{aligned}\right\}$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

3. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\left.\begin{aligned} y+z-\lambda x&=2a \\ z+x-\lambda y&=2b \\ x+y-\lambda z&=2c \end{aligned}\right\}$$

4. x ガ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ マデ變化スル時 $\dfrac{x^2+1}{x}$ ノ變化ヲ研究セヨ。

5. 等差級數ノ初メノ n 項ノ和ガ n ノ值ノ如何ニ拘ハラズ $n(3n+1)$ ニ等シキコトヲ知リテ初項ト公差トヲ求メヨ。

【本試驗】

1. 二ツノ整數ノ和ハ 1002 ニシテ，最小公倍數ハ 3528 ナリトイフ。此二數ヲ求メヨ。

2. p, q, p', q' ガ與ヘラレタル實數ナル時

（イ） $x^2+px+q=0$ ノ二ツノ根ヲ α, β トシ

（ロ） $x^2+p'x+q'=0$ ノ二ツノ根ヲ α', β' トシ

$\alpha\alpha'+\beta\beta'$ 及ビ $\alpha\beta'+\alpha'\beta$ ヲ二ツノ根トスル二次方程式ヲ作リ且ツ此二ツノ方程式ノ根ハ與ヘラレタル二ツノ方程式ノ根ガ共ニ實數ナル根ヲ有スルカ或ハ共ニ虛數ノ根ヲ有スル時ハ實數ニシテ，何レカ一方ガ虛數ノ根ヲ有シ他方ガ相等シカラザル實根ヲ有スル時ハ虛數ナルコトヲ證明セヨ。

3. $\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2ax+2b}$ ノ極大及極小ヲ求メヨ。

大正三年

【豫備試驗】

1. $\dfrac{(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5}{5}$ ハ $\dfrac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{3}\times\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}$ ニ等シキコトヲ證セヨ。

2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$x+y=\sqrt{2a^2-x^2}+\sqrt{2a^2-y^2}=a\sqrt{3}$$

3. 方程式 $(m+1)x^2-2(m+2)x+m-1=0$ ハ m ノ値ガ如何ナルトキ相異ナル實根ヲ有スルカ。且ツ其場合ニ於ケル根ノ符號如何。

4. 直角ニ相交ハル二直線ヲ相等シキ速度ニテ進行スル二點ノ最短距離ヲ求メヨ。

5. 1, 2, 3, 4, 5 ノ五ツノ數字ヲ用ヒテ四桁ノ數幾種ヲ作リ得ルカ。但シ一數中ニ同數字四ツ用フルコトヲ得ズ。

【本試驗】

1. 二ツノ二次方程式、

$$ax^2+bx+c=0$$
$$lx^2+mx+n=0$$

ガ少クトモ一ツノ共通根ヲ有スル爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ヲ求メヨ。

2. 次ノ不等式ヲ解ケ。

$$x+\sqrt{2ax-x^2}<b$$

但シ a, b ハ正ノ數ナリトス。

3. x_1 ト x_2 トガ相等シカラザル時次ノ三ツノ關係式ノ中或二ツガ成立ツトキハ殘リノ一ツモ亦成立ツコトヲ證明セヨ。

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

大正四年

【豫備試驗】

1. a, b, c ハ何レモ零ナラザル數ニシテ, $bc+ca+ab=0$ ナル時ハ次ノ三ツノ方程式ノ中初メノ二ツヲ滿足スル x, y, z ノ値ハ第三ノモノヲモ滿足スルコトヲ證明セヨ。

$$x+y+z=a+b+c$$
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$
$$\frac{x}{a^3}+\frac{y}{b^3}+\frac{z}{c^3}=0$$

2. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{b}=\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

但シ a, b ハ實數ニシテ b ハ正ナリトス。

3. 次ノ方程式ヲ吟味セヨ。

$$x^4-(3\lambda+4)x^2+(\lambda+1)^2=0$$

4. x ト y トノ間ニ $36x^2+16y^2=9$ ナル關係アルトキ $y-2x$ ノ極大値及極小値ヲ求ム。

5. 或人ノ三子甲乙丙ノ年齡ガ等比級數ヲナセル時, 若干圓ノ金額ヲ其年齡ニ比例シテ此三子ニ分配セリ, 後五箇年ヲ經タル時ニ長子甲ノ年齡ハ末子丙ノ年齡ノ二倍ニナレリ。此時前ト同一ノ金額ヲ再ビ年齡ニ比例シテ分配センニ 乙ハ前回ヨリモ 25 圓多ク丙ハ前回ヨリモ 75 圓多カリシトイフ。分配セシ金額及ビ三子ノ最初ノ年齡各幾何ナルカ。

【本試驗】

1. $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$ ニ於テ $b^2=ac$ ナラバ

$$x=pX+qY+r$$
$$y=p'X+q'Y+r'$$

ト置キテ得タル式

$$AX^2+2HXY+CY^2+2DX+2EY+F$$

ニ於テモ亦 $B^2=AC$ ナルコトヲ證明セヨ。

2. 聯立方程式

$$\left.\begin{aligned} ax-6y&=5a-3 \\ 2x+(a-7)y&=29-7a \end{aligned}\right\}$$

ヲ滿足スル x ノ値ガ y ノ値ヨリモ大ナルガ爲メニハ a ヲ如何ニトルベキカ。

3. 與ヘラレタル周ヲ有スル直角三角形ガ斜邊ヲ軸トシテ 廻轉シテ生ズル立體ノ體積ノ三倍ガ他ノ二邊ヲ夫々軸トシテ廻轉シテ生ズル立體ノ體積ノ和ニ等シトイフ。此三角

形ノ各邊ノ長サヲ求ム。

大正五年

【豫備試驗】

1. 方程式 $x^2+p^2+q^2+2pqx=1$ ガ絕對値ノ 1 ヨリモ小ナル二ツノ實根ヲ有スル爲メ=必要=シテ且ツ充分ナル條件ヲ求メヨ。但シ p, q ハ實數ナリ。

2. $x^2+yz=a,\quad y^2+zx=b,\quad z^2+xy=c,\quad x+y+z=0$

ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

3. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\sqrt{1-x^2}+ax=1$$

但シ $\sqrt{\ }$ ハ正ノ平方根ヲ示スモノトス。

4. a, b, c ハ正數ナル時ハ

$$\frac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt{\frac{bc+ca+ab}{3}}\geqq\sqrt[3]{abc}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

5. x ト y トノ間= $x+y=a$ トナル關係アル時 x^2+y^2 ノ極大及ビ極小ヲ求メヨ。但シ a ハ與ヘラレタル正數=シテ, x ト y トハ負ナラザルモノトス。

【本試驗】

1. $x=a+ls,\ y=b+ms,\ z=c+ns$ =於テ s ノ代リ= p ト置キタル時ノ x, y, z ノ値ハ同時= $y-z=1, x=0$ ヲ滿足シ, q ト置キタル時ノ値ハ $z-x=1, y=0$ ヲ滿足シ, r ト置キタル時ノ値ハ $x-y=1, z=0$ ヲ滿足スル時ハ a, b, c ノ間=如何ナル關係アルベキカ。

2. a, b, p, q ハ何レモ實數ナルトキ

$$a^2x^2+b^2y^2=1 \qquad p^2x^2-q^2y^2>1$$

ヲ滿足スル x ト y トノ限界ヲ求メヨ。

3. 與ヘタレタル線分ヲ底邊トシ其線分ヲ直徑トスル半圓=內接シ與ヘラレタル長サノ周ヲ有スル梯形ノ邊ヲ求メヨ。

大正六年

【豫備試驗】

1. $f(x)$ ハ x =關スル二次ノ有理整式=シテ $f(x^2-1)$ ハ $f(x)$ =テ整除シ得ベシトイフ。$f(x)$ ヲ求メヨ。

2. a, b, c ハ何レモ實數ナリトシテ次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a+b+c \\ ax+by+cz=bc+ca+ab \\ (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0 \end{array}\right\}$$

4. m, n ガ任意ノ整數=シテ $m<n$ ナル時 m ト n トノ間=在リ且 3 ヲ分母トスル凡テノ分數ノ中整數=等シカラザルモノヽ和ハ n^2-m^2 =等シキコトヲ證明セヨ。

5. O, A ガ與ヘラレタル二點ナルトキ, O ヲ中心トシテ半徑 R ナル圓ヲ畫キ, A ヨリ之=切線 AP ヲ引ク, AP ガ AO ヲ軸トシテ廻轉シテ生ゼル面積ヲシテ極大ナラシムル R ノ値ヲ求ム。

【本試驗】

1. $ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$ ナルトキ

$$\mathrm{A}=a+b+c+d,\quad \mathrm{B}=a+b-c-d,\quad \mathrm{C}=a-b+c-d,\quad \mathrm{D}=a-b-c+d$$

トスレバ $\mathrm{AB}(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)=\mathrm{CD}(\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2)$

ナルコトヲ證明セヨ。

2. $\dfrac{2x-m}{x^2-4x+3}$

ヲシテ任意ノ實數=等シカラシムベキ x ノ實數値ガ必ズ存在スル爲メ=ハ, m ハ如何ナル數ナルコトヲ要スルカ。

3. 正ナル初項ヲ有スル一ツノ等差級數ト一ツノ等比級數トノ最初ノ二項ガ相等シキ時, 等差級數ノ第三項以後ノ各項ハ等比級數ノソレ=對應スル項ヨリモ大ナラザルコトヲ證明セヨ。

大正七年

【豫備試驗】

1. $(x^m-1)(x^{m+1}-1)(x^{m+2}-1)$ ハ $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)$ =テ整除セラルヽコトヲ證明セヨ。但 m ハ正ノ整數トス。

2. 次ノ不等式ヲ解ケ。

$$x^2-(2m+1)x+2(3m-1)<0$$

但シ m ハ常數ナリトス。

3 a, b, c ハ一ツノ三角形ノ邊ノ長サヲ表ハストキハ聯立方程式

$$\left.\begin{array}{l} y+z=a \\ z^2+x^2+zx=b^2 \\ x^2+y^2-xy=c^2 \end{array}\right\}$$

ノ根ハ何レモ實數ナルコトヲ證明セヨ。

4. s ハ n 個ノ正數, $a, b, c, \cdots\cdots l$ ノ和ナルトキ

$$\frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\frac{s}{s-c}+\cdots\cdots+\frac{s}{s-l}\geqq\frac{n^2}{n-1}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

5. 直六面體ノ一稜ノ長サ a 及其體積 v ガ與ヘラレ且其全表面積ハ $6a^2$ ナルコトヲ知リテ他ノ二稜ノ長サヲ求メヨ。又如何ナル場合ニ此等ノ二稜ハ相等シクナルカ。

【本試驗】

1. $x^3+y^3+px^2+qxy+ry^2$ ガ x, y ニ關シテ一次ト二次トノ因數ニ分解シ得ルタメニハ p, q, r ハ如何ナル條件ヲ滿足スベキカ。但シ p, q, r ハ實數ニシテ二ツノ因數ノ係數ハ實數若クハ虛數ナリトス。

2. 線分 AB ヲ直徑トスル半圓アリ, 此半圓周上ニ一點 P ヲ求メ P ヨリ AB ニ垂直ナル半徑ニ至ル距離ト弦 PA トノ比ヲシテ與ヘラレタル數 k ニ等シカラシメヨ。

3. 等差級數ノ最初ノ n 項ノ和ト之ニ續ケル n 項ノ和トノ比ガ n ニ關係ナキモノハ存在シ得ルカ若シ存在スレバ如何ナル級數ナルカ。

大正八年

注意 本年ヨリ試驗法ガ改正セラレタリ。

2. x ガ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ マデ變化スルトキ

$$\frac{2x-5}{3x+4}$$

ノ變化ヲ攻究シ且ツ其變化ヲ表ハス曲線ヲ畫ケ。

3. 次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

5. 或整數ノ平方ハ五位ノ數ニシテ, 萬ノ位ノ數字ハ 5, 一ノ位ノ數字ハ 1 ナリトイフ。其整數ヲ求メヨ。

6. a ヲ實數トシテ方程式

$$x=a+\sqrt{x^2+2(a+1)x+4a}$$

ガ根ヲ有スル場合ニ於ケル a ノ値ノ範圍ヲ定メヨ。但シ $\sqrt{}$ ハ正ノ平方根ヲ表ハスモノトス。

8. n ガ 1 ヨリモ大ナル整數ナル時

$$2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

【本試驗】

2. $a, b, \mathrm{A}, \mathrm{B}, n$ ハ何レモ正ノ整數ニシテ $\mathrm{A}b-\mathrm{B}a$ ガ 1 ニ等シキ時ハ

$$\frac{b}{a},\quad \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}},\quad \frac{a+n\mathrm{A}}{b+n\mathrm{B}}$$

ハ何レモ已約分數ナルコトヲ證セヨ。

6. $\dfrac{ax^2+bx+c}{x+1}$ ガ 0 ニ等シキ極大値ヲ有スル爲メニハ a, b, c ノ間ニ如何ナル關係アルヲ要スルカ。

8. 二ツノ正數 a, A ヨリ順次

$$a_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{\mathrm{A}}{a}\right)\qquad a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{\mathrm{A}}{a_1}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots,\ a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{\mathrm{A}}{a_{n-1}}\right)$$

等ノ正數 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ ヲ作ルトキハ

$$\frac{a_n-\sqrt{\mathrm{A}}}{a_n+\sqrt{\mathrm{A}}}=\left(\frac{a-\sqrt{\mathrm{A}}}{a+\sqrt{\mathrm{A}}}\right)^{2^n}$$

ナルコトヲ證セヨ。

9. 直角三角形ヲ作リ其斜線ノ長サヲ a, 他ノ二邊ト直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ下セル垂線ノ長サトノ和ヲ l ナラシメントス。其二邊ノ長サヲ求メヨ。

大正九年

【豫備試驗】

2. 與ヘラレタ圓ニ一ツノ弦 AB ヲ引キ中心ヨリ之ニ下セル垂線ヲ OC トシ AB+OC ヲ與ヘラレタル長サニ等シカラシメントス, AB ノ長サヲ求メヨ。

3. $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$ ト分數式

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^{n+1}+\mathrm{D}x^{n+2}}{1-2x+x^2}$$

トガ恒等式ナルトキ, $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ ハ等差級數ヲナスコトヲ證明シ其場合ニ於ケル A, B, C, D ノ間ノ關係ヲ求メヨ。

【本試驗】

2. $x^2+ax+bc=0$, $x^2+bx+ac=0$ ガ共通ナル一根ヲ有スル時ハ他ノ二根ハ $x^2+cx+ab=0$ ノ根ナルコトヲ證セヨ。

3. 三ツノ無限級數

$$\mathrm{A}=1+r_1+r_1^2+r_1^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B=1+r_2+r_2^2+r_2^3+\cdots\cdots$$

$$C=1+r_1r_2+(r_1r_2)^2+(r_1r_2)^3+\cdots\cdots$$

ノ間＝ AB=C ナル關係アル時ハ r_1, r_2 ノ取リ得ベキ限界如何。 又 r_1, r_2 ノ一方ガ正ノ數ナル時ハ他ハ負數ナルコトヲ證セヨ。

6.
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix}=0$$

ナルコトヲ證明セヨ。

8. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\sqrt{x-4+\sqrt{x-3}}=m$$

但シ m ハ正ノ數トス。

9. $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ ハ何レモ正數ナルトキ

$$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^n}\right)>n$$

ナルコトヲ數學的歸納法ニヨリテ證明セヨ。

大正十年

【豫備試驗】

1. 方程式

$$0.001x^2-2x+1=0$$

ニ於テ其小ナル根ヲ小數第四位マデ求メヨ。

2. $1, 2, 3, \cdots\cdots n$ ノ中ヨリ二ツヅヽ取リテ作レル總テノ積ノ和ヲ求メヨ。

【本試驗】

1. x ノ總テノ正數値ニ對シテ

$$(5-p)x^2-6x+p+5=0$$

ノ値ガ常ニ正ナルタメニハ p ハ如何ナル數ナルコトヲ要スルカ。

2. $(1+x+x^2+x^3+x^4)^4$ ノ展開ニ於ケル x^7 ノ係數ヲ求メヨ。

【本試驗】

11. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$ ハ n ガ限リナク増大スルトキ，限リナク増大スルコトヲ證明セヨ。

大正十一年

【豫備試驗】

5. ε ガ 0.0009 以下ノ正數ナルトキ $\sqrt[3]{1+\varepsilon}$ ト $1+\frac{2}{3}$ トノ差ガ $\frac{1}{10^7}$ ヨリモ小ナルコトヲ證明セヨ。

6. 與ヘラレタル實數 a, b ニ對シテ

$$x+y+z=a, \qquad x^2+y^2+z^2=b$$

ヲ滿足スル實數 x, y, z ガ存在スル爲メニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $3b-a^2\geq 0$ ナルコトヲ證明セヨ。

7. $y=\frac{x^3-4x}{x^2-1}$ ノぐらふヲ畫クコトニヨリ，方程式

$$x^3-4x-m(x^2-1)=0$$

ハ m ガ如何ナル實數ナルモ恒ニ三ツノ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

【本試驗】

2. $\frac{x-b}{x+a}-\frac{x-a}{x+b}>\frac{x+a}{x-b}-\frac{x+b}{x-a}$ ヲ解ケ。

大正十一年

【豫備試驗】

2. 區域 $(-1, 1)$ 內ニ次ノ不等式ヲ滿足セザル x ノ値ガ少クトモ一ツ存在スルコトヲ證明セヨ。

$$|x^2+ax+b|<\frac{1}{2}$$

10. $x_0=1,\ x_1=1+\frac{1}{x_0+1},\ x_2=1+\frac{1}{x_1+1}\cdots\cdots\cdots, x_n=1+\frac{1}{x_{n-1}+1}\cdots\cdots\cdots$ ナル時 $\lim_{n\to\infty} x_n$ ノ値ヲ求メヨ。

【本試驗】

5. a, b, c ハ一ツノ三角形ノ三ツノ邊ノ長サヲ表ハス數ナルトキハ

$$a^2(x-y)(x-z)+b^2(y-z)(y-x)+c^2(z-x)(z-y)$$

ハ x, y, z ノ凡テノ實數値ニ對シテ決シテ負ナラザルコトヲ證明セヨ。

6. 聯立方程式

$$x^2=ax+by$$

$$xy=cx+dy$$

ヲ滿足スル x, y ノ値ハ又方程式

$$by^2=(bc-ad)y+d(cx+dy)$$

ヲ滿足スルコトヲ證明シ且此聯立方程式ヲ解ケ。

7. n ガ 3 ヨリモ大ナル整數ナル時ハ

$$\sqrt[3]{3}>\sqrt[n]{n}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

大正十二年

【豫備試驗】

6. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\begin{vmatrix} x-a-b & 2x & 2x \\ 2a & a-b-x & 2a \\ 2b & 2b & b-a-x \end{vmatrix}=0$$

【本試驗】

1. 二ツノ方程式

$$x^2+ax+b=0 \qquad x^2+a'x+b'=0$$

ノ根ガ互ニ他ヲ分ツ爲メニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

2. 次ノ級數ノ收斂性ヲ吟味セヨ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A}{n}-\frac{B}{n+1}\right)$$

但シ A, B ハ n ニ無關係ナル正數トス。

大正十二年

5. $\frac{a}{b}$ 及ビ $\frac{c}{d}$ ハ已約分數ナルトキ $\frac{ad+bc}{bd}$ ガ已約分數ナル爲メニ必要ニシテ十分ナル條件ガ b ト d トハ互ニ素ナルコトナリ。コレヲ證セヨ。

6. $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 及ビ $b_1, b_2, \cdots\cdots b_n$ ハ何レモ正ノ數ニシテ

$$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_n, \qquad b_1\leqq b_2\leqq\cdots\cdots\leqq b_n$$

ナルトキハ

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)\leqq n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots a_nb_n)$$

ナルコトヲ證明セヨ。

7. p ハ正數 q ハ任意ノ實數ナルトキ，方程式 $x^3+px+q=0$ ハ唯一ツノ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

【本試驗】

2. 次ノ聯立方程式ヲ解キ，且ツコレヲ吟味セヨ。

$$\left.\begin{aligned} x(1-5z)+y(1+z)&=5z+2 \\ 2x(1+2z)+y(2-5z)&=z+4 \\ (x+y)(1-z)+z&=k \end{aligned}\right\}$$

大正十三年

【豫備試驗】

5. x ガ自然數ナルトキハ

$$\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x}{30}$$

ノ値モ亦自然數ナルコトヲ證明セヨ。

6. 次ノ聯立方程式ヲ滿足スル x 及ビ y ノ値ガ共ニ正ニシテ且 1 ヨリモ小ナルガタメノ a, b ニ對スル條件ヲ求ム。

$$x^2+y^2=a \qquad xy=b$$

【本試驗】

1. $3n$ 個ノ物ノ中 n 個ハ同ジニシテ其他ハコレト異ナリ且互ニ相異ナルトキ，コレ等ノ物ヨリ n 個ヅヽトル組合セノ數ハ

$$2^{2n-1}+\frac{(2n)!}{2(n!)^2}$$

ナルコトヲ證セヨ。

2. $x^2+ax+b=0$ ノ任意ノ一根ト $x^2+ax+b'=0$ ノ任意ノ一根トノ差ノ絕對値ハ

$$\frac{|b-b'|}{|a|+2\sqrt{c}}$$

ヨリモ小ナラザルコトヲ證セヨ。但シハ c ハ $|b|$ ト $|b'|$ トノ中ノ小ナラザル方ヲ表ハスモノトス。

大正十三年

【豫備試驗】

5. 不等式 $\sqrt{a^2-x^2}>2x-a$ ヲ解ケ。

6. a, b ハ整數ナルトキ

$$x^3+y^3+ax^2y+bxy^2$$

ガ有理係數ヲ有スル因數ニ分解セラレ得ル爲メニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

【本試驗】

1. 二ツノ有理數ノ和モ積モ共ニ整數ナルトキハ此等ノ有理數ハ何レモ整數ナルコト

ヲ證セヨ。

2. 實變數 x =關スル實係數ノ有理函數

$$\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$$

ガ凡テノ實數値ヲトリ得ル爲メノ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

大正十四年

【豫備試驗】

5. m ハ實數ヲ表ハスモノトシテ次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}=m$$

6. 相異ナル n 個ノ物ヨリ r 個宛取リテ作レル順列中 p 個ノ特別ノ物ヲ含ムモノハ

$${}_{n-p}P_{r-p}\times{}_{r}P_{p}$$

通リアルコトヲ證明セヨ。

【本試驗】

1. 二數ノ和 s ト其最小公倍數 L トノ最大公約數ヲ D トスレバ其二數ハ方程式

$$x^2-sx+LD=0$$

ノ根ナルコトヲ證明セヨ。

2. 數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ =於テ

$$a_{r+1}-3a_{r+1}+2a_r=0 \qquad (r=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots\cdots)$$

ナルトキ a_n ヲ a_1, a_2 =テ表ハセ。

大正十四年

【豫備試驗】

5. 次ノ聯立方程式ヲ解キ且ツ根ガ實數ナル揚合ニ於テ其符號ヲ吟味セヨ。

$$\left.\begin{array}{l} x+y=m \\ x^2+y^2-3x-4y=0 \end{array}\right\}$$

但シ m ヲ已知ノ實數トス。

6. $\begin{vmatrix} a^2 & bc & a^2-(b-c)^2 \\ b^2 & ca & b^2-(c-a)^2 \\ c^2 & ab & c^2-(a-b)^2 \end{vmatrix}$

ヲ因數ニ分解セヨ。

【本試驗】

1. n ガ 1 ヨリモ大ナル整數ナルトキハ

$$n^2-n+1$$

ハ完全平方ニアラザルコトヲ證明セヨ。

2. n ガ正ノ整數ナルトキ

$$\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})\cdots\cdots(1-a)}{1-a^n}=n$$

ナルコトヲ證セヨ。

大正十五年

5. $f(x)$ ハ x ニ關スル四次ノ整式ニシテ之ヲ $(x-2)^2$ ニテ除スレバ剩餘 3 ヲ得, $(x-1)^2$ ニテ剩スレバ剩餘 -3 ヲ得ルトイフ $f(x)$ ヲ求ム。

6. 無限級數

$$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^k}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ノ和ヲ s_k ニテ表ハストキ, 無限級數

$$s_2+s_4+s_6+\cdots\cdots+s_{2n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ノ和ヲ求メヨ。

【本試驗】

2. 二次方程式

$$2Ax(x-a)+\lambda(x^2-a^2)+2Bx(x+a)=0$$

ガ等根ヲ有スルタメノ λ ノ値ヲ決定シ且其ノ λ ノ各ノ値ニ對スル x ノ値ノ積ハ a^2 ニ等シキコトヲ證セヨ。

大正十五年

【豫備試驗】

5. 一次方程式 $\varphi(x)=0$ ノ根ガ二次方程式 $f(x)=0$ ノ二根ノ間ニアルトキハ λ ニ如何ナル實數値ヲ與フルトモ方程式 $f(x)+\lambda\varphi(x)=0$ ハ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。但シ $\varphi(x)$ 及ビ $f(x)$ ノ係數ハ何レモ實數ナリトス。

6. 不等式

$$\frac{a}{x}-\frac{1}{x-1}>1$$

ヲ解ケ。但シ $a>0$ トス。

【本試驗】

1. 次ノ方程式ヲ解キ且ツコレヲ吟味セヨ。

$$\sqrt{x^2-2mx+1}=2x-m$$

但シ m ハ實數トス。

2. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$$\Sigma\frac{1}{x_1(x_1+x_2)(x_1+x_2+x_3)\cdots\cdots(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)}=\frac{1}{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$$

但 Σ ハ $x_1, x_1, x_3, \cdots\cdots x_n$ ヲアラユル仕方ニテ入レ換ヘテ得タル式ノ和ヲ表ハスモノトス。

昭和二年

6. $0<a<1$ ニシテ $\sqrt{1-a}<b<\sqrt{1-a^2}$ ナルトキハ

$$\frac{a^2}{2}<1-b<a$$

ナルコトヲ證明セヨ。

7. 10 個ノ物アリ。其中 a ガ三個 b ガ二個 c ガ二個, d, e, f ガ各一個ヅヽアルトキ此等ノ物ヨリ四個宛トル組合セ及ビ順列ノ數如何。

8. 方程式

$$x^3+px+q=0$$

ガ次ノ形ニ變形セラルヽタメニ必要ニシテ十分ナル條件ヲ求メヨ。

$$(x^2+mx+n)^2=x^4$$

【本試驗】

1. $x^4+5x^3-10x+5$ ハ整數ヲ係數トスル因數ニ分解シ得ザルコトヲ證明セヨ。

2. $x(x-1)(x-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(x-r+1)$ ヲ x_r ニテ表ハセバ

$$(x+y)_n=x_n+\frac{n}{1!}x_{n-1}y_1+\frac{n(n-1)}{2!}x_{n-2}y_2+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}x_{n-r}y_r+\cdots\cdots\cdots+y_n$$

ナルコトヲ證明セヨ。

昭和三年

5 六位ノ整數ニシテ其左端ノ數字ヲ右端ニ移ストキハ原數ノ或整數倍トナル如キモノヲスベテ索メヨ。

6. λ ガ實數ナルトキ次ノ方程式ノ根ニシテ其ノ絶對値ガ λ ノ絶對値ヨリモ小ナラザルモノヲ索メヨ。

$$x^2-12x+4\lambda+15=0$$

7. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$x^2-yz=a^2,\quad y^2-zx=a^2,\quad z^2+xy=a^2$$

但シ $a\neq 0$ トス。

8. $\dfrac{1-|x|}{1+|x|}$ ノぐらふヲ畫ケ。

【本試驗】

1. $3,\ 2-x,\ \sqrt{x^2+8x+7}$ ガ一ツノ三角形ノ三邊ノ長サヲ表ハスタメニハ x ハ如何ナル値ヲ取ルベキカ。

2. 次ノ行列式ノ値ヲ求ム。

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix}$$

昭和四年

5. 長サ $2a$ ナル線分 AB ヲ直徑トスル半圓アリ，AB 上ニ一點 P ヲトリ，P ニ於テ AB ニ垂線ヲ立テ半圓トノ交點ヲ M トシ，M ヲ過リ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ半圓ト再ビ交ル點ヲ N トシ，$\overline{2AN}^2+PN^2$ ヲシテ k^2 ニ等シカラシムル時 AP ノ長サ如何。

6. x^k+y^k ハ $x+y$ ト xy トノ整式トシテ表サルヽコトヲ證明セヨ。但シ k ハ 2 以上ノ整數トス。

7. 方程式 $3x+5y=1306$ ニ適合スル正ノ整數 x, y ハ幾組アルカ。又其ノ中ニテ x ト y トノ差ガ最小ナルモノヲ求ム。

8. 方程式 $x^4+x^3+px^2+qx+r=0.$ ノ根ノ和ガ零ナルトキノ p, q, r ノ間ノ關係如何。

【本試驗】

1. a, b, c ガ有理數ニシテ $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}=0$ ナルトキハ $a=0,\ b=0,\ c=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

5. x ニ關スル有理整式 $f(x)$ ニツキ恒等式

$$f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=x$$

ガ成立スルトキ $f(x)$ ヲ索メヨ。

昭和五年

5. x ニ關スル有理整式ヲ x^2+px+q 及ビ $x-a$ ニテ割リテ得ル剩余ヲ夫々 $Px+Q$

及ビ A トスルトキ，此式ヲ $(x^2+px+q)(x-a)$ ＝テ割リテ得タル剩余ヲ求メヨ。但シ $a^2+pa+q\neq0$ ナリトス。

6. 二次方程式 $x^2+(a+bi)x+(c+di)=0$ ガ少クトモ一ツノ實根ヲ有スルタメノ必要且十分ナル條件如何，但シ a, b, c, d ハ實數＝シテ i ハ $\sqrt{-1}$ ヲ表ハスモノトス。

7. 1, 2, 3, 4, 5, 6 ナル六ツノ目ヲ有スル骰子ヲ十回投ゲ 1 ノ目ガ一回 2 ノ目ガ二回 3 ノ目ガ三回，4 ノ目ガ四回出ヅル確率ヲ求メヨ。

【本試驗】

5. $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ ガ何レモ正ナルトキ

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqq\sqrt{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$$

ナルコトヲ證明シ且ツ兩邊ノ相等シキハ $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$ ナル場合＝限ルコトヲ證明セヨ。

昭和六年

5. 二次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ ガ實根ヲ有シ且ツ $\lambda\geqq0$ ナル時ハ方程式

$$(ax^2+2bx+c)-\lambda(cx^2+2bx+a)=0$$

モ亦實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。但シ a, b, c ハ實數ナリトス。

6. $n>1$ ナルトキ次ノ不等式ヲ證明セヨ。

$$(n!)^2<\left\{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right\}^n$$

7. c ガ任意ノ實數ナルトキ方程式

$$x+1-\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=c$$

ハ一ツノ負根トニツノ正根トヲ有シ且ツ α ヲ其一根トスレバ他ノ二根ハ夫々 $1-\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{1-\alpha}$ ＝等シキコトヲ證セヨ。

【本試驗】

5. 方程式 $x_n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$

ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ トスルトキ，次ノ等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ。

$$(1+\alpha_1^2)(1+\alpha_2^2)\cdots\cdots(1+\alpha_n^2)=(1-p_2+p_4-\cdots\cdots)^2+(p_1-p_3+p_5-\cdots\cdots)^2$$

昭和七年

5. n ガ正ノ整數ナルトキ $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$ ガ x^2+x+1 ＝テ整除セラルヽガタメノ條件ヲ求ム。

欠

欠

終