中國地理研究所

測量專刊

第五號

(暫行本)

輻線三角測量稜形鎖誤差之檢討

王之卓

中國地理研究所大地測量組印行
四川李莊
中華民國三十二年七月

輻線三角測量稜形鎖誤差之檢討

王之卓

(一) 偶然誤差

德人芬士特瓦爾德(S. Finsterwalder)曾演化得直線角鎖誤差傳播之普通公式為：

$$m_y^2 = m_{y_0}^2 + S^2 \cdot m_{\alpha_0}^2 + \frac{S^2}{3b} \cdot \mu^2$$

$$m_x^2 = m_{x_0}^2 + S^2 \cdot m_{\beta_0}^2 + \frac{S^2}{3b} \cdot \mu_\beta^2 \qquad (1)$$

此公式適用於由一基線出發等段進行之角鎖，其中之符号各代表

μ —— 角度之中誤差

m_α —— 方向之中誤差

m_{α_0} —— 起始方向之中誤差

m_β —— 比例尺傳播之誤差

m_{β_0} —— 起始邊長(基線)之比例尺誤差

m_x, m_y —— 點之縱向及橫向點位中誤差

s —— 導線邊長

n —— 導線之數目

德國格魯伯(Gruber)教授據此以探討輻線三角測量稜形鎖偶然誤差之傳播，得

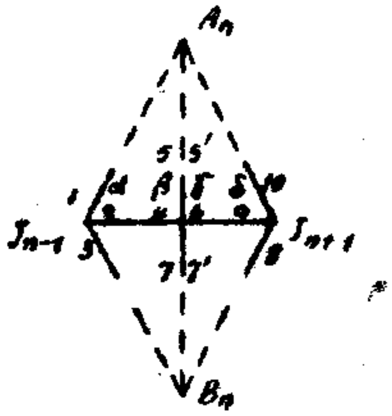
$$\mu_\beta^2 = 5\mu^2$$

其結論為：輻線三角測量稜形鎖中之任一輻射點，其縱向(x方

向）之點位誤差約為$\sqrt{3}$倍於其橫向（y方向）之點位誤差，故稜形鎖術決定之方向遠勝於其術決定之比例尺。亞國盟 Buchholtz 教授亦有同樣結果導出，但此種理論上之結論不與事實相符合，荷蘭人 Kint 首先發現此事實，因並推得正確之結果應為：

$$\mu_\beta^2 = 2.5\,\mu^2$$

其理論之推演亦欠完善，蓋稜形鎖之平差必須與應用輻射三角測量儀（Radialtriangulator）作實際觀測時之情形相符合也。



圖一

已往之演化率皆忽略二點：

一、觀測為方向觀測而非角度觀測

二、在方向觀測中方向(5)與(7)各獨立觀測兩次，（區分之為5, 5', 及7, 7'），故須分開，使方向(7)(4)(5)為一組，(7')(6)(5')為另一組。

茲依照觀測及計算實際情形演化其關係如下。其與嚴格理論之不同者，即方向(2)(4)或(6)(9)之誤差，本各同時影響及其兩端之稜形，此時則忽略其影響，而按各稜形單獨之平差步驟檢討之。

稜形鎖平差之條件方程式為：

$$\frac{\sin(2-1)\sin(6-5'+10-9)\sin(9-8)\sin(3-2+4-7)}{\sin(2-1+5-4)\sin(10-9)\sin(7'-6+9-8)\sin(3-2)} = 1 \qquad (2)$$

$$7'-5'+5-7 = 360 \qquad (3)$$

今以α與δ等角之約值為45°，β及γ等角之約值為90°計算，則式(2)可化為直線式：

$$-2d(1)+4d(2)-2d(3)-2d(4)+d(5)+d(5')-2d(6)+d(7)$$
$$+d(7')-2d(8)+4d(9)-2d(10)+W=0 \qquad (4)$$

以式(3)各角之係數為 a 而式(2)各角之係數為 b，則得法方程式之係數為

$$[aa]=60,\quad [ab]=0,\quad [bb]=4 \qquad (5)$$

今試求比例尺傳播之誤差，可出發自邊長計求之公式：

$$b_2=b_1\frac{\sin(2-1)\sin(6-5'+10-9)}{\sin(2-1+5-4)\sin(10-9)} \qquad (6)$$

或

$$\log b_2=\log b_1+\log\frac{\sin(2-1)\sin(6-5'+10-9)}{\sin(2-1+5-4)\sin(10-9)}$$
$$=\log b_1+F(l_1\, l_2\cdots\cdots l_n)$$

微分之，則

$$\frac{db_2}{b_2}-\frac{db_1}{b_1}=-2d(1)+2d(2)-d(4)+d(5)+d(5')$$
$$-d(6)+2d(9)-2d(10) \qquad (7)$$

即為其比例尺誤差。以 m 為方向觀測之中誤差，則其比例尺傳播之中誤差應為：

$$m_F^2=[FF]\,m^2 \qquad (8)$$

$$[FF]=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf\cdot1]^2}{[bb\cdot1]}=[ff]-\frac{[af]^2}{[aa]}-\frac{[bf]^2}{[bb]} \qquad (9)$$

由式(7)與式(4)式(3)得：

$$[ff]=20,\quad [af]=30,\quad [bf]=0$$

故
$$m_F^2 = \left(20 - \frac{(30)^2}{60}\right) m^2 = 5m^2 = 2.5\mu^2 \qquad (10)$$

方向之傳播公式則為：

$$F = (6) - (4) \qquad (11)$$

以此公式與式(3)、(4)相較，則得式(9)內之：

$$[ff] = 2，\quad [af] = 0，\quad [bf] = 0$$

故
$$m_F^2 = [FF]\, m^2 = 2m^2 = \mu^2 \qquad (12)$$

以式(11)及(12)代入式(1)得：

$$\left.\begin{aligned} m_y^2 &= m_{y_0}^2 + S^2 m_{\alpha_0}^2 + \frac{S^3}{3b}\,\mu^2 \\ m_x^2 &= m_{x_0}^2 + S^2 m_{\beta_0}^2 + \frac{S^3}{3b}\,(2.5)\,\mu^2 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

是以由攝影鏡所得高值縱橫方向誤差之比例應約為 $1:\sqrt{2.5} = 1:1.6$，與荷蘭 Kint 所得者相同。

（二） 系統誤差

輻線三角測量因有系統誤差存在，致難能達到高度之精度。由實際經驗，則在輻線三角測量時恆有系統之比例尺誤差存在。其原因尚未能加以適當之解釋。此種現象首由德人諾曼伯於 1935 年在 "Theorie und Praxis von Aeropolygonierung und Aeronivellement" 文內發表，繼則在 1939 年荷人盧墨原在第六屆攝影測量會議內，報告甚多實例，證實其存在而未能加以解釋。茲在理論上推究之。

有系統之誤差可發生自兩種原因：一自攝影方向之傾斜，一自地面之高程差。兩種誤差本身雖為偶然性質，但其每種組合則對長形鎖各方向恆可能作有系統之影響。據最近航測實際應用之經驗，既知

凡輻線三角測量工作內有不能解釋之系統誤差存在，則此二種誤差在輻線三角鎖所發生之影响，更應作詳細之探討矣。

自攝影幾何學知凡成透視關係之二平面，均有二相對點存在，其特徵為：以此二點為站點，在二面上所量至其他各點之夾角均彼此相等，此點名為等角點。設像片之傾斜角為 ν 時，則此等角點位於像片上自像片主點沿 ν 方向之 $f\tan\frac{\nu}{2}$ 處，其中 f 為攝影焦距。故如地面無高低差時，以等角點為輻線中點作輻線三角測量，可無系統誤差存在。地面因高低差所發生構影之扭曲，沿自像片天底點 N 出發之輻線方向。故如攝影方向無傾斜時，則以像片天底點為輻線中點作輻線測量，亦無系統誤差存在。實際應用時攝影方向之傾斜不可避免，而地面之高低差，視地域情形，或甚或微，工作時遂不能得嚴格之解決。普通任擇像片主點，像片等角點或像片天底點中之一為輻線中點，而最普通者厥為像片主點之應用，蓋由此可省卻求攝影傾斜角 ν 之煩，且在理論上固無一點可以得完善之結果也。

由於攝影方向之傾斜 ν 及地面高低差 Δh 所發生輻線方向之扭曲，其關係公式在德國約但麥爺全書中，應用單位圓關係推求，茲更利用其扭曲之特徵，推添如下。分以像片等角點，像片主點及像片天底點為輻線中點三種情形，所有之演化均以保持二次小值為原則。

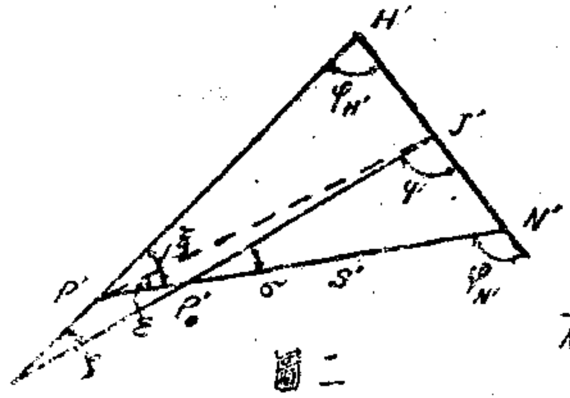
等角點：　圖二所表示之各點為：

H'—像片主點，　J'—像片等角點，　N'—像片天底點，

P'—地形點構影，　P_0'—地形點高低差為零時構影之位置。

在 J' 點處至構影 P_0' 所成之方向角 φ 應與地面上相當點所量者相等，但因地形點高低差 Δh 之關係，使 P_0' 點沿自天底點 N' 之方向作 $P_0'P'$

$=\Delta r$ 之移動，故由而發生之誤差為 δ_J，$H'J'$ 之長為 $f\cdot\tan\frac{\nu}{2}$，$J'N'$ 之長為 $(f\cdot\tan\nu)-f\cdot\tan\frac{\nu}{2})$，只係解至二次小值時，則其長均為 $f\cdot\frac{\nu}{2}$。



圖二

自三角形 $P'N'J'$：

$$\frac{\varepsilon}{N'J'}=\frac{\sin(\varphi+\delta_J)}{S'+\Delta r}=\frac{\sin\varphi\cdot(1-\frac{\delta_J^2}{2})+\delta_J\cdot\cos\varphi}{S'(1+\frac{\Delta r}{S'})}$$

$$\varepsilon=\frac{f\cdot\nu}{2S'}(\sin\varphi+\delta_J\cos\varphi)(1-\frac{\Delta r}{S'})=\frac{f\cdot\nu}{2S'}\sin\varphi+\frac{f\cdot\nu\cdot\delta_J}{2S'}\cdot\cos\varphi-\frac{f\cdot\nu\cdot\Delta r}{2S'^2}\sin\varphi \qquad (14)$$

更自三角形 $P'_0N'J'$：

$$\frac{\sigma}{N'J'}=\frac{\sin\varphi}{S'}$$

$$\sigma=\frac{f\cdot\nu}{2S'}\cdot\sin\varphi \qquad (15)$$

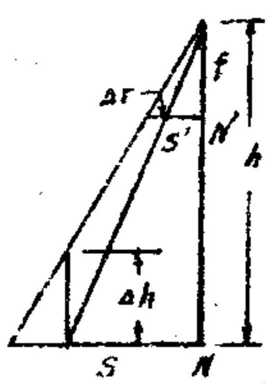
故

$$\delta_J=\sigma-\varepsilon=-\frac{f\cdot\nu}{2S'}\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\delta_J+\frac{f\cdot\nu\cdot\Delta r}{2S'^2}\cdot\sin\varphi$$

$$\delta_J(1+\frac{f\cdot\nu}{2S'}\cdot\cos\varphi)=\frac{f\cdot\nu\cdot\Delta r}{2\cdot S'^2}\cdot\sin\varphi$$

$$\delta_J=\frac{f\cdot\nu\cdot\Delta r}{2S'^2}\cdot\sin\varphi(1-\frac{f\cdot\nu}{2S'}\cdot\cos\varphi)=\frac{f\cdot\nu\cdot\Delta r}{2S'^2}\sin\varphi \qquad (16)$$

但在 ν 甚小時，按圖三得：



圖三

$$\frac{\Delta r}{S'}\approx\frac{\Delta h}{h} \quad 或 \quad \Delta r=\frac{S'}{h}\Delta h \qquad (17)$$

而

$$S'=S\frac{f}{h} \qquad (18)$$

故得：

$$\delta_J=\frac{\nu}{2}\cdot\sin\varphi(\frac{f}{S'})(\frac{\Delta r}{S'})=\frac{\nu}{2}\sin\varphi(\frac{h}{S})(\frac{\Delta h}{h})$$

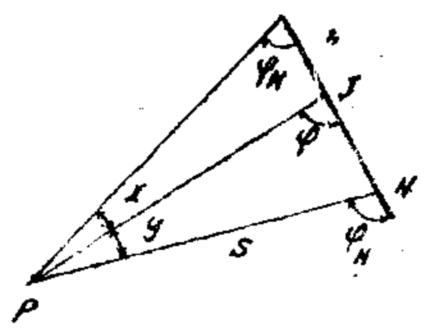
$$=\frac{\nu}{2}\cdot\sin\varphi\cdot\frac{\Delta h}{S}$$

$$\delta_J = \frac{\vartheta}{2} \sin\varphi \tan\beta \tag{19}$$

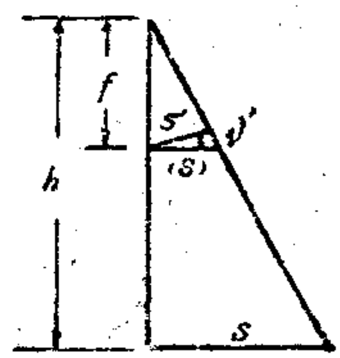
β 為相當之地面坡度角

像片天底點：　由圖二及式（15）得

$$\varphi_N = \frac{f \cdot \vartheta}{2S'} \cdot \sin\varphi \tag{20}$$



圖四



圖五

更由地面上求其相當點間方向角之關係。按圖四設各點 H、J、N、P 為地面上相當於像片上之 H'、J'、N'、P' 等各點，則自三角形 PNJ 得：

$$y = \varphi_N - \varphi = \frac{h}{2}\vartheta \cdot \frac{\sin\varphi}{S} \tag{21}$$

像片上距離 S' 與其地面上相當距離 S 相交之角 ϑ' 與該距離之方位角 φ 有關。在 φ 為零時，此角即為攝影傾斜 ϑ，當 φ 為 $90°$ 時，則此二距離平行。故由簡單之演化，可知其關係為：

$$\vartheta' = \vartheta \cdot \cos\varphi \tag{22}$$

由圖五可知：

$$S' = (S) - (S)\vartheta'\frac{S}{h} = S\frac{f}{h}\left(1 - \vartheta'\frac{S}{h}\right)$$

$$= S\left(\frac{f}{h}\right)\left(1 - \vartheta \cdot \cos\varphi \frac{S}{h}\right) \tag{23}$$

今名 φ_N 與 φ_N' 之差為 δ_N，則自式（20）（21）及（23）關係得

$$\delta_{N'} = \varphi_{N'} - \varphi_N = \sigma - y = \frac{f\cdot\nu}{2\cdot S'}\sin\varphi - \frac{h}{2}\nu\,\frac{\sin\varphi}{S}$$

$$= \frac{f\cdot\nu}{2(S\frac{f}{h})}\cdot\sin\varphi\left(1+\nu\,\frac{\cos\varphi\cdot S}{h}\right) - \frac{h\cdot\nu}{2}\cdot\frac{\sin\varphi}{S}$$

$$= \frac{h\cdot\nu}{2\cdot S}\cdot\sin\varphi + \frac{\nu^2}{2}\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi - \frac{h\cdot\nu}{2\cdot S}\cdot\sin\varphi$$

$$\underline{\delta_{N'} = \frac{\nu^2}{4}\sin 2\varphi} \qquad (24)$$

<u>像光主點</u>：

仍利用圖二，首求 φ 與 $\varphi_{H'}$ 之差，則得：

$$\zeta = \varphi - \varphi_{H'} = \xi - \sigma \qquad (25)$$

自三角形 $P'H'N'$： $\dfrac{\xi}{f\cdot\nu} = \dfrac{\sin\varphi_{H'}}{S'+\Delta r}$,

$$\xi = f\cdot\nu\,\frac{\sin(\varphi-\zeta)}{S'(1+\frac{\Delta r}{S'})} = \frac{f\cdot\nu}{S'}(\sin\varphi - \zeta\cdot\cos\varphi)(1-\frac{\Delta r}{S'})$$

$$\xi = \frac{f\cdot\nu}{S'}\sin\varphi - \frac{f\cdot\nu}{S'}\cos\varphi\cdot\zeta - \frac{f\cdot\nu}{S'}\sin\varphi\left(\frac{\Delta r}{S'}\right) \qquad (26)$$

代式（15）及（26）之關係於式（25）得：

$$\zeta = \xi - \sigma = +\frac{f\cdot\nu}{2S'}\sin\varphi - \frac{f\cdot\nu}{S'}\cos\varphi\cdot\zeta - \frac{f\cdot\nu}{S'}\sin\varphi\left(\frac{\Delta r}{S'}\right)$$

$$\zeta\left(1+\frac{f\cdot\nu}{S'}\cdot\cos\varphi\right) = \frac{f\cdot\nu}{2S'}\cdot\sin\varphi - \frac{f\cdot\nu}{S'}\cdot\sin\varphi\left(\frac{\Delta r}{S'}\right)$$

$$\zeta = \frac{f\cdot\nu}{2S'}\cdot\sin\varphi - \frac{f\cdot\nu}{S'}\sin\varphi\left(\frac{\Delta r}{S'}\right) - \frac{f^2\cdot\nu^2}{2S'^2}\sin\varphi\cos\varphi \qquad (27)$$

代式（23）之關係於式（27）得：

$$\zeta = \frac{f\cdot\nu}{2S}\cdot\frac{h}{f}\cdot\sin\varphi\left(1+\frac{S}{h}\nu\cdot\cos\varphi\right) - \frac{h\cdot\nu}{S}\sin\varphi\left(\frac{\Delta r}{S'}\right)$$

$$-\frac{h^2\cdot\nu^2}{2\cdot S^2}\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

$$y=\frac{h\cdot\nu}{2S}\cdot\sin\varphi+\frac{\nu^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi-\frac{h\cdot\nu}{S}\sin\varphi\left(\frac{\Delta r}{S'}\right)-\frac{h^2\cdot\nu^2}{2S^2}\sin\varphi\cos\varphi \qquad (28)$$

在地面上相當點間之夾角，自圖四之三角形 PHJ 得：

$$x=\varphi-\varphi_H=\frac{h}{2}\nu\frac{\sin\varphi}{PH} \qquad (29)$$

又自三角形 PHN 得：

$$PH=S\frac{\sin\varphi_N}{\sin\varphi_H}=S\frac{\sin(\varphi_H+x+y)}{\sin\varphi_H}=S\frac{\sin\varphi_H+(x+y)\cos\varphi_H}{\sin\varphi_H}$$

$$=S(1+(x+y)\cos\varphi_H)=S\left(1+x\cot\varphi_H+\frac{h}{2}\nu\frac{\sin\varphi}{S}\cot\varphi_H\right) \qquad (30)$$

代式(30)於式(29)得：

$$x=\frac{h\cdot\nu}{2}\frac{\sin\varphi}{S}\left(1-x\cos\varphi_N-\frac{h\nu}{2S}\cdot\cos\varphi\right)$$

$$=\frac{h}{2}\nu\frac{\sin\varphi}{S}-\frac{h}{2}\nu\frac{\cos\varphi}{S}\cdot x-\frac{h^2\nu^2}{4S^2}\cdot\sin\varphi\cos\varphi$$

故

$$x\left(1+\frac{h\cdot\nu}{2}\cdot\frac{\cos\varphi}{S}\right)=\frac{h}{2}\nu\cdot\frac{\sin\varphi}{S}-\frac{h^2\nu^2}{4S^2}\cdot\sin\varphi\cos\varphi$$

而

$$x=\frac{h\cdot\nu}{2}\cdot\frac{\sin\varphi}{S}-\frac{h^2\nu^2}{4S^2}\cdot\sin\varphi\cos\varphi-\frac{h^2\nu^2}{4S^2}\cdot\sin\varphi\cos\varphi$$

$$=\frac{h}{2}\nu\cdot\frac{\sin\varphi}{S}-\frac{h^2\nu^2}{2S^2}\cdot\sin\varphi\cos\varphi \qquad (31)$$

自式(28)及(31)，稱 φ_H 與 $\varphi_{H'}$ 之差為 $\delta_{N'}$，得：

$$\delta_{N'}=\varphi_{N'}-\varphi_H=x-y=-\frac{\nu^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{h\nu}{2}\sin\varphi\left(\frac{\Delta r}{S'}\right)$$

代以式（17）之關係得：

$$\delta_{H'} = -\frac{\nu^2}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{h\nu}{S}\cdot\sin\varphi\,\frac{\Delta h}{h}$$

或

$$\delta_{H'} = -\frac{\nu^2}{4}\sin 2\varphi + \nu\cdot\sin\varphi\cdot\tan\beta \tag{32}$$

各種情形之結果總列於下表：

表一

輻射中點		等角點	天底點	像主點
誤差來源	攝影方向傾斜 ν	0	$\frac{\nu^2}{4}\cdot\sin 2\varphi$	$-\frac{\nu^2}{4}\sin 2\varphi$
	地面傾斜 $\tan\beta$	$\frac{\nu}{2}\sin\varphi\cdot\tan\beta$	0	$\nu\cdot\sin\varphi\cdot\tan\beta$

（三）　忽視系統誤差之影響

系統誤差之本身，如攝影方向之傾斜及地面之高程差二種，普通其值甚微，可認作偶然性質，略而不計。但當其影響過大於觀測誤差時，則徒改良觀測方法以增加觀測精度，不復能得實際之效益。茲設想該形鎖中各方向 1, 2, 3 ……等（圖一）均有系統誤差 δ_1, δ_2 ……等存在，如仍按例用步驟，依條件方程式（3）（4）平差時，試檢討其影響於輻射三角測量之情形。

今設偶然誤差完全不存在，則純由系統誤差在二條件方程式中所得之不符值設各為 ω_1 與 ω_2，則得：

$$-2\delta_1 + 4\delta_2 - 2\delta_3 - 2\delta_4 + \delta_5 + \delta_{5'} - 2\delta_6 + \delta_7 + \delta_{7'} - 2\delta_8 + 4\delta_9 - 2\delta_{10} = \omega_1 \tag{33}$$

$$+\delta_5 - \delta_{5'} - \delta_7 + \delta_{7'} = \omega_2 \tag{34}$$

但系統誤差影響於方向 5 與方向 5′者相同，方向 7 與方向 7′者相同，故 ω_2 恒為零・今按偶然誤差平差方法平差之，則得下列二誤差方程式：

$$
\begin{aligned}
-2v_1 + 4v_2 - 2v_3 - 2v_4 + v_5 + v_{5'} - 2v_6 + v_7 + v_{7'} - 2v_8 + 4v_9 - 2v_{10} + \omega_1 &= 0 \\
+ v_5 - v_{5'} \qquad - v_7 + v_{7'} \qquad + 0 &= 0
\end{aligned}
$$

其相當之法方程式為：

$$
\left.
\begin{aligned}
60K_1 \qquad + \omega_1 &= 0 \\
4K_2 + 0 &= 0
\end{aligned}
\quad 故 \quad
\begin{aligned}
K_1 &= -\frac{\omega_1}{60} \\
K_2 &= 0
\end{aligned}
\right\} \tag{35}
$$

各方向所得之改正數則為：

$$
\begin{aligned}
&v_1 = v_3 = v_4 = v_6 = v_8 = v_{10} = \frac{\omega_1}{30}, \qquad v_2 = v_9 = -\frac{\omega_1}{15} \\
&v_5 = v_{5'} = v_7 = v_{7'} = -\frac{\omega_1}{60}
\end{aligned} \tag{36}
$$

自式（7）得由系統誤差按偶然誤差平差後所得之比例尺差為：

$$
\begin{aligned}
\frac{db_2}{b_2} - \frac{db_1}{b_1} = &-2(\delta_1 + v_1) + 2(\delta_2 + v_2) - (\delta_4 + v_4) + (\delta_5 + v_5) \\
&+ (\delta_{5'} + v_{5'}) - (\delta_6 + v_6) + 2(\delta_9 + v_9) - 2(\delta_{10} + v_{10})
\end{aligned}
$$

參致式（36）得：

$$
\begin{aligned}
\frac{db_2}{b_2} - \frac{db_1}{b_1} = &-2\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_4 + \delta_5 + \delta_{5'} - \delta_6 + 2\delta_9 - 2\delta_{10} \\
&+ \left\{ -2v_1 + 2v_2 - v_4 + v_5 + v_{5'} - v_6 + 2v_9 - 2v_{10} \right\} \\
= &-2\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_4 + \delta_5 + \delta_{5'} - \delta_6 + 2\delta_9 - 2\delta_{10} + \delta_1 - 2\delta_2 \\
&+ \delta_3 + \delta_4 - \frac{1}{2}\delta_5 - \frac{1}{2}\delta_{5'} + \delta_6 - \frac{1}{2}\delta_7 - \frac{1}{2}\delta_{7'} + \delta_8 \\
&- 2\delta_9 + \delta_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\underline{\frac{db_2}{b_2} - \frac{db_1}{b_1} = -\delta_1 + \delta_3 + \delta_5 - \delta_7 + \delta_8 - \delta_{10}} \tag{37}
$$

至於系統誤差之影響於導線角，則按式（11）為

$$F=(6)-(4)=\delta_6+v_6-(\delta_4+v_4)$$

按式（36）則 $v_6=v_4$

故 $$F=\delta_6-\delta_4 \tag{38}$$

今設系統誤差源自攝影方向之傾斜及地面之高低差，則此等 δ_1 δ_2……相互之間有一定之關係存在。茲以像片主點為輻射中點，則按表一由攝影方向傾斜得各方向之影響為：

$$-\frac{v^2}{4}\sin 2\varphi \tag{39}$$

按式（37）（參攷圖一）表列其對每模形比例尺之影響為：（以飛航方向與各像片最大傾斜方向所成之角各為 φ_1，φ_2……φ_{n-1}，φ_n，其中各 φ 角值係完全偶然性質）

$$\left.\begin{aligned}
-\delta_1 &= +\frac{v_{n-1}^2}{4}\sin 2(\varphi_{n-1}-45) = -\frac{v_{n-1}^2}{4}\cos 2\varphi_{n-1}\\
+\delta_3 &= -\frac{v_{n-1}^2}{4}\sin 2(\varphi_{n-1}+45) = -\frac{v_{n-1}^2}{4}\cos 2\varphi_{n-1}\\
+\delta_5 &= -\frac{v_n^2}{4}\sin 2(\varphi_n-90) = +\frac{v_n^2}{4}\sin 2\varphi_n\\
-\delta_7 &= +\frac{v_n^2}{4}\sin 2(\varphi_n+90) = -\frac{v_n^2}{4}\sin 2\varphi_n\\
+\delta_8 &= -\frac{v_{n+1}^2}{4}\sin 2(\varphi_{n+1}+135) = +\frac{v_{n+1}^2}{4}\cos 2\varphi_{n+1}\\
-\delta_{10} &= +\frac{v_{n+1}^2}{4}\sin 2(\varphi_{n+1}-135) = +\frac{v_{n+1}^2}{4}\cos 2\varphi_{n+1}\\
\hline
\Sigma &= -\frac{v_{n-1}^2}{2}\cos 2\varphi_{n-1}+\frac{v_{n+1}^2}{2}\cos 2\varphi_{n+1}
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

今設有航線攝影係包括像片1至 n，得模形2至 $n-1$，則其比例尺誤差之總和為：

第二模形： $-\frac{v_1^2}{2}\cos 2\varphi_1$ $\qquad +\frac{v_3}{2}\cos 2\varphi_3$

第三稜形： $-\frac{v_2^2}{2}\cos 2\varphi_2 \qquad +\frac{v_4^2}{2}\cos 2\varphi_4$

第四稜形： $-\frac{v_3^2}{2}\cos 2\varphi_3 \qquad +\frac{v_5^2}{2}\cos 2\varphi_5$

⋮

第(n−3)稜形： $-\frac{v_{n-4}^2}{2}\cos 2\varphi_{n-4} \qquad +\frac{v_{n-2}^2}{2}\cos 2\varphi_{n-2}$

第(n−2)稜形： $-\frac{v_{n-3}^2}{2}\cos 2\varphi_{n-3} \qquad +\frac{v_{n-1}^2}{2}\cos 2\varphi_{n-1}$

第(n−1)稜形： $-\frac{v_{n-2}^2}{2}\cos 2\varphi_{n-2} \qquad +\frac{v_n^2}{2}\cos 2\varphi_n$

$$\frac{db_n}{b_n}-\frac{db_1}{b_1} = -\frac{v_1^2}{2}\cos 2\varphi_1 - \frac{v_2^2}{2}\cos 2\varphi_2 + \frac{v_{n-1}^2}{2}\cos 2\varphi_{n-1} + \frac{v_n^2}{2}\cos 2\varphi_n \quad (41)$$

故知除首尾二稜形可能發生有系統之誤差外，其間各稜形之影響均相互消抵，是以此種誤差對有系統之比例尺誤差實無重要之影響。至於其對導線角之影響，按式(38)與式(39)之關係，則因 $\sin 2\varphi = \sin 2(\varphi-180)$，故亦恒為零。

今更按表一設以像片主點為輻線中點，得由地面傾斜所發生方向之影響為： $v\cdot\sin\varphi\cdot\tan\beta$

如以 Δh 代表實地之高程差，S 代表自輻線中點至該點實地之距離，則上式亦可寫作

$$v\cdot\sin\varphi\cdot\frac{\Delta h}{S} \qquad (42)$$

地面高程差本屬偶然性質，今為便於檢討其誤差之影響計，假設兩種情形：一即飛航方向沿山谷或山脊進行，二即飛航方向沿山坡之陡傾方向進行。

當飛航方向沿山谷或山脊進行時，像片上下方諸稜形點與像片主點或相當稜形點之高度差，均約略相等。依式(37)表列其對每稜形之影響為：

$$\left.\begin{aligned}
-\delta_1 &= -\nu_{n-1}\sin(\varphi_{n-1}-45)\frac{\Delta h}{\sqrt{2}\,b} = -\frac{\Delta h}{2b}\nu_{n-1}(\sin\varphi_{n-1}-\cos\varphi_{n-1}) \\
+\delta_3 &= +\nu_{n-1}\sin(\varphi_{n-1}+45)\frac{\Delta h}{\sqrt{2}\,b} = +\frac{\Delta h}{2b}\nu_{n-1}(\sin\varphi_{n-1}+\cos\varphi_{n-1}) \\
+\delta_5 &= +\nu_n\sin(\varphi_n-90)\frac{\Delta h}{b} = -\frac{\Delta h}{b}\nu_n\cos\varphi_n \\
-\delta_7 &= -\nu_n\sin(\varphi_n+90)\frac{\Delta h}{b} = -\frac{\Delta h}{b}\nu_n\cos\varphi_n \\
+\delta_8 &= +\nu_{n+1}\sin(\varphi_{n+1}+135)\frac{\Delta h}{\sqrt{2}\,b} = -\frac{\Delta h}{2b}\nu_{n+1}(\sin\varphi_{n+1}-\cos\varphi_{n+1}) \\
-\delta_{10} &= -\nu_{n+1}\sin(\varphi_{n+1}-135)\frac{\Delta h}{\sqrt{2}\,b} = +\frac{\Delta h}{2b}\nu_{n+1}(\sin\varphi_{n+1}+\cos\varphi_{n+1}) \\
\hline
\Sigma &= \frac{\Delta h}{b}\nu_{n-1}\cos\varphi_{n-1} - \frac{2\Delta h}{b}\nu_n\cos\varphi_n + \frac{\Delta h}{b}\nu_{n+1}\cos\varphi_{n+1}
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

今設有航線攝影包括像片1至n，得梯形2至$n-1$，則其比例尺誤差之總和為：

第二梯形 $\frac{\Delta h}{b}\nu_1\cos\varphi_1 - \frac{2\Delta h}{b}\nu_2\cos\varphi_2 + \frac{\Delta h}{b}\nu_3\cos\varphi_3$

第三梯形 $+\frac{\Delta h}{b}\nu_2\cos\varphi_2 - \frac{2\Delta h}{b}\nu_3\cos\varphi_3 + \frac{\Delta h}{b}\nu_4\cos\varphi_4$

第四梯形 $+\frac{\Delta h}{b}\nu_3\cos\varphi_3 - \frac{2\Delta h}{b}\nu_4\cos\varphi_4 + \frac{\Delta h}{b}\nu_5\cos\varphi_5$

$\vdots$

第$(n-3)$梯形 $+\frac{\Delta h}{b}\nu_{n-4}\cos\varphi_{n-4} - \frac{2\Delta h}{b}\nu_{n-3}\cos\varphi_{n-3} + \frac{\Delta h}{b}\nu_{n-2}\cos\varphi_{n-2}$

第$(n-2)$梯形 $+\frac{\Delta h}{b}\nu_{n-3}\cos\varphi_{n-3} - \frac{2\Delta h}{b}\nu_{n-2}\cos\varphi_{n-2} + \frac{\Delta h}{b}\nu_{n-1}\cos\varphi_{n-1}$

第$(n-1)$梯形 $+\frac{\Delta h}{b}\nu_{n-2}\cos\varphi_{n-2} - \frac{2\Delta h}{b}\nu_{n-1}\cos\varphi_{n-1} + \frac{\Delta h}{b}\nu_n\cos\varphi_n$

$$\frac{db_n}{b_n} - \frac{db_1}{b_1} = \frac{\Delta h}{b}\nu_1\cos\varphi_1 - \frac{\Delta h}{b}\nu_2\cos\varphi_2 - \frac{\Delta h}{b}\nu_{n-1}\cos\varphi_{n-1} + \frac{\Delta h}{b}\nu_n\cos\varphi_n \quad (44)$$

各梯形間之影響相互消極，僅在此種情形之下，由於有系統之地面高低差而無重要之系統誤差發生，在第二種情形時，則像片上方諸

梯形助點之高度差 Δh 與像片下方諸梯形助點之高度差 Δh 相等，但符號相反，即在式(43)內，設編方向1,5,10,等所量點之 Δh 為正時，則方向3,7,8,等所量點之 Δh 應為負。而式(43)所代表之總和公式應為：

$$\Sigma = -\frac{\Delta h}{b}\nu_{n-1}\sin\varphi_{n-1} - \frac{\Delta h}{b}\nu_{n+1}\sin\varphi_{n+1} \tag{45}$$

今設有航線攝影條1至n，則其比例尺誤差之總和為：

$$\frac{db_n}{b_n} - \frac{db_1}{b_1} = \frac{\Delta h}{b}\nu_1\sin\varphi_1 - \frac{\Delta h}{b}\nu_2\sin\varphi_2 - \frac{2\Delta h}{b}\left[\nu_i\sin\varphi_i\right]$$
$$- \frac{\Delta h}{b}\nu_{n-1}\sin\varphi_{n-1} - \frac{\Delta b}{b}\nu_n\sin\varphi_n \tag{46}$$

此時各誤差影響不相消抵而依偶然誤差定律增進，結果易發生甚大之比例尺誤差，但此種乘號情形鮮有實際之應用耳。

至於其對於導線前誤差傳播之影響，則繫於航線方向內地面點之高低差，在上述二種情形時均為零。

故知由於攝影方向傾斜及地面高低差所可能發生之系統誤差無積累性質，但當航線攝影數目甚少時，由式(41)及(44)所代表之誤差有時甚大，足以影響有系統誤差之探討，使得不正確之結論。今以式(41)估計之，假定 $\cos 2\varphi$ 值均為最大之值，攝影傾斜 $\nu = \pm 2^\circ$，則每模光學立體內所得之比例尺差，約達

$$\sqrt{4}\cdot\frac{\nu^2}{2} = \left(\frac{2^\circ}{53}\right)^2 = 0.14\,\%$$

如航線內有十個光學立體，則每個立體內影響之比例尺誤差按系統誤差一般之測求方法應為 0.014%，其值尚微，但如航線攝影數目甚少時，則其值將不復能忽略之矣。