

算學的啟事

章克標 著



開明書店

開明書店
發行

算學的啟事

1934

序

當歐洲在中世紀叫做黑暗時代的時候，人民迷信極深，僧侶有無上的權威。武士也很出風頭，王侯貴人擁有許多田奴和僕從，一般人民智識卑下，只好任在上者吮吸宰割，所以學問爲在上者所獨占，而進步發展極遲緩。那時有很多人對於算學不高興，有一首流傳下來的打油詩可證。詩曰：

Multiplication is mie vexation,

And Division is quite as bod,

The Golden Rule is mie shambling stule,

And Pratices drives me mad.

〔大意：乘法叫人煩惱，除法也很不好，比例叫人走頭無路，演算要使人發狂。〕

中國許多現代青年，也許對這首詩要表同情，我聽得許多人討厭算學，會考舉辦以來，也是算學科有不好的成績，若干教育家會懷疑於算學在教育上的效果；算學果是這樣一種可憎的學科嗎？

算學所具的純粹抽象性，是最不易領會的，一般人的討厭算學，說算學不容易懂，大概是這一個

點，而歷來的算學教授，又是注意在這一點，所以會造成令人愈弄愈不懂的局面。有人給算學下定義，說是不問牠是什麼，到還明白，你要問牠是什麼，反而愈弄愈不明白；這就是道出算學的抽象性的。對於平常一般人，抽象得太利害了，確是不易理會。

不過，一定要抽象得利害，纔算是算學嗎？在粗淺的地方，在實際的社會生活上，我們不是常常有算學的問題嗎？為什麼一定要去學那書本上的抽象的不容易懂的算學呢？這便是歷來算學教育失敗之所在。一般人並不要求怎樣高深的抽象的算學，而教算學的偏不肯用具體的來代表抽象給一個明顯的實在，於是算學成爲不可解不容易懂而爲人所討厭的一種學科了。

每種科學，一定要能使人普遍地感到興味，然後研究的人會多起來，而此學科纔可以有發達之望，像算學的這樣爲人所厭棄，前途是很難樂觀的。一定要在開始的時候，給培養好一種興趣，自然將來會愈進愈深愈加感到興味的。有些人對於算學是很感到興味，因爲他們知道了算學；而對於算學討厭的，實在是因爲未曾真個認識算學之故。

所以近來對於改良算學教授法的呼聲極高，其主旨不外是排除抽象的而要以實際的代之，使得算學爲人易懂、易學，而得一般人的喜歡。本來算學和我們的日常生活有不能分離的關係，應該得是很接近的，算學趣味應該普及遍在於一般人的，希望能由教授方針的改換而達到這個目的。不過

事情是不大容易，因為對於算學一科一向如何處理的習慣，一時殊難改革過來，而且如何纔是實際的算學，也很不易組織，這都是算學教授所應熟慮的。

本書以算學一科發達的徑路為骨幹，而記述各個有名算學家的遺聞逸事，對於正式的算理是很少說到的，但也注意科學如何會興，如何則衰的因果關係。學科之興衰，似乎是靠一兩個傑出的天才者，其實卻並不如此。一定要天下太平，然後文化可以望其昌隆，所以雖則是表面上記述各個人物，在骨子裏，我們仍看重那個時代和世間。

本書為青年課外閱讀之用，求其顯淺，故不說及算理，這不能是真的算學史，粗淺的算學史也說不上，只是注意其發展的大概情形罷了。在古代希臘文化盛時，算學差不多是學術的中心，一般人對於算學，是很感到興趣的。所以這一學科很是發達，而在中世紀則有許多人討厭算學，文化上便是個黑暗時代。我們現在生當文明盛世，豈可對於學術不感到興味？長此下去，豈不將落伍太甚，尙能希望民族之復興乎？區區之意，想由此可以多少增加些算學的興趣，對乾燥無味的算學一科給予一點滋潤，使算學不致一味被視為討厭的學科。不過這是一件很大的工作，當然不是這冊小書所能完全成功的，但我的微意卻要在這裏表白一下。

310.9
657

1



3 0539 9096 0

目次

埃及	一
1 世界最古的文明國	一
2 曆的起源	三
3 曆的精確度	四
4 曆的改良	五
幾何學的起源	六
6 算術和代數學	七
7 算盤的發明	八
8 埃及文化衰頹的原因	九
二 巴比倫	一一
1 太陽的運行	一一

2	弧度與角度	二二
3	六十進法	二四
4	陰曆的發明	二四
三	希臘	二六
1	歐羅巴最初的文明國	二六
2	幾何學的發達	二七
四	泰勒斯	二九
1	金字塔的高	二九
2	預言日蝕	三二
3	泉水溝中	三三
五	畢他哥拉斯	三三
1	畢他哥拉斯學校	三三
2	畢他哥拉斯的慘死	三四
3	畢他哥拉斯定理	三五

六

4 畢他哥拉斯學派.....三

柏拉圖.....三

1 未習幾何不許入門.....三

2 立方倍積問題.....三

3 柏拉圖的偉大.....三

七

亞歷山大學派.....三

1 亞歷山大大王.....三

2 亞歷山大城.....三

3 前期亞歷山大大學.....三

4 後期亞歷山大大學.....三

八

歐幾里得.....三

1 幾何原本.....三

2 幾何學無王者之道.....三

3 給他三個銅子.....三

九

亞幾默德

1 圓周率的發見

2 圓周及圓面積

3 球圓柱的表面積及體積

4 橫杆原理

5 金冠真偽

6 亞幾默德之死

一〇

羅馬

1 羅馬人

2 羅馬數字

3 算盤

4 十二分數

一一

印度

1 婆羅門

四〇

四〇

四一

四二

四三

2	算術及代數	三
3	數字零及零號	三
4	π 的數值	五
5	印度算術衰頹的原因	五
	算術和代數的源流	七
1	算術的發明	七
2	印度算術的優勝	九
3	代數的起源	九
4	印度代數學	六
5	代數的停滯	六
	阿剌伯	六
1	回教的興起	六
2	薩拉森文化	六
3	算學及數字的改良	六

4	代數原始	六
5	結語	六
一四	黑暗時代	七
1	人種大移動	七
2	阿剌伯算學的翻譯	七
3	雷奧那特	七
一五	文藝復興	七
一六	塔塔格利亞	七
1	口吃的人	七
2	算學比賽	八
3	無賴的加爾丹	八
4	塔塔格利亞的悶死	八
5	加爾丹的末日	八
6	弗拉里	八

一七	章達	六
	1 尊王論者	六
	2 看破密碼	六
	3 加號和減號	六
一八	對數	九
	1 奈比爾	九
	2 布里格斯	九
	3 二哲人的會晤	九
	4 對數表	九
一九	小數的發見	九
	1 西蒙·斯蒂芬的小數記號法	九
	2 華利斯發見小數	九
二〇	計算符號	九
	1 計算符號的重要	九

2	加號減號.....	100
3	相等不等及除號.....	101
4	乘號比及比例.....	101
5	奧脫雷脫.....	101
6	括線及括弧.....	101
7	代數文字.....	101
8	正負數無限大幕及根號.....	101
一一一	地動說的完成.....	110
1	太陽中心說.....	110
2	地球中心說.....	111
3	哥白尼的地動說.....	111
4	凱伯勒與伽利略.....	114
5	牛頓的成功.....	117
一一二	笛卡爾.....	119

1	十七八世紀的算學	一九
2	大哲學家笛卡爾	二〇
3	大算學家笛卡爾	二一
4	圖解法的根源	二二
二三	巴斯格	二四
二四	牛頓	二五
1	牛頓的少年時代	二五
2	牛頓的發明發見	二六
3	牛頓的晚年	二七
二五	雷白尼	二八
1	雷白尼的發明微積分	二八
2	英國與大陸之爭	二九
3	雷白尼的晚年	三〇
二六	圓周率	三一

1	圓積問題	二七
2	圓周率的值	二九
3	圓周率的超越性	三四
4	圓周率的記號	三四
5	記憶 π 值的詩	三二
二七		
歐拉		三四
1	法國算學之盛	三四
2	歐拉仕於俄國	三四
3	歐拉的失明	三四
4	歐拉在算學上的貢獻	三四
二八		
拉格倫日		三九
1	十七歲任算學教授	三九
2	憂鬱症的纏綿	四〇
3	晚年的幸福	四五

二九

4 他的人品……………一三〇

拉普拉斯……………一三〇

1 出身低微的人……………一三〇

2 忠實的科學家……………一三五

3 投機的獵官者……………一三五

4 羅強特爾……………一三七

5 甫理葉……………一五六

三〇

純正幾何學之復興……………一六〇

1 笛沙爾克……………一六〇

2 孟諾……………一六一

3 卡諾……………一六三

4 邦斯萊……………一六四

三一

米突制的度量衡……………一六四

1 創始……………一六四

2	制定.....	一六
3	推廣.....	一六
三二	十九世紀以後的算學.....	一七〇
1	加速度的發展.....	一七〇
2	綜合幾何學.....	一七一
3	解析幾何學.....	一七三
4	代數學.....	一七三
5	解析學.....	一七三
6	函數論.....	一七三
7	數論.....	一七四
三三	十九世紀的算學家.....	一七五
1	高斯.....	一七五
2	高希.....	一七六
3	斯丹那.....	一七六

4 阿倍爾.....二八一

5 哈米爾敦.....二八二

6 伽羅.....二八四

7 淮以哀斯脫拉斯.....二八六

8 普恩加來.....二八七

三四

太陽系的擴大.....二九〇

1 天王星的發見.....二九〇

2 海王星的發見.....二九一

3 冥王星的發見.....二九三

三五

算學的應用.....二九五

1 算學與大文.....二九五

2 算學和測量學.....二九七

3 算學與物理.....二九九

4 其他.....二九九

三六

中國算學概說.....三〇一

一 埃及 (Egypt)

R.L.

1 世界最古的文明國

埃及是世界最古的文明國。當四五千年之前，現在自號爲文明先進而以殺人爲務的歐洲諸國還不能稱爲國而是被酋長所管轄的時候，埃及早已有很可稱道的文化了。埃及在那時是唯一的最強盛的文明國。

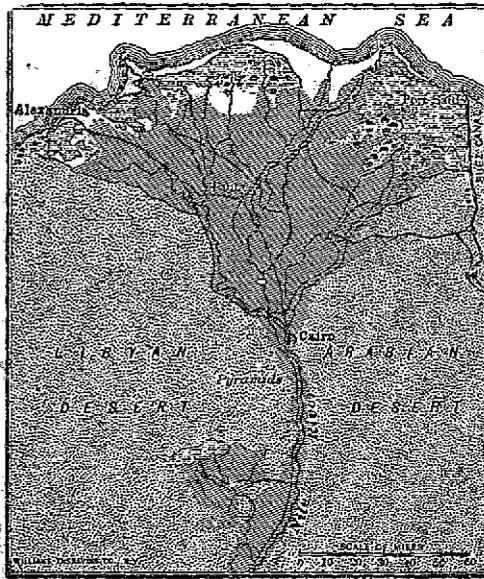
現今在非洲東北部，也有一個叫埃及的國度。爲英國的屬國，於歐戰後在和會中要求獨立，一九二二年得英國允許，現在雖算是獨立國，但仍在英人勢力支配之下。我們所說的埃及是在三千年前已經滅亡了的，和現今的埃及雖是同一的土地，但不是同一個國度，這是須要明瞭的。埃及從三千年



前到現在，一直被他人支配宰割，受盡外族的侵凌，上古燦爛之文化，不能救濟他們的國難。

埃及地方處於熱帶，天氣極熱，又少雨水，所以遲早總有成爲沙漠地的危險。幸而這國度的中央，貫流着一道大河，叫做尼羅河 (Nile River)，每年到了一定的季節，這河中洪水泛濫，把兩岸的土地都浸潤了，使得不致乾枯。頂好運的是這河中的洪水，把上流地方世界上頂肥沃的泥土也帶了來，所以洪水退了以後，在地上不用施肥，而播種五穀，卻能獲得很好的收成。因爲有這樣的天惠，所以埃及在世界各地中，能夠有開化最早的地位。

因爲尼羅河發大水能把土地浸潤，把肥料運來，所以人民播種的五穀不用勞作就有好收成。加以埃及人又早知開溝渠引水之法，所以尼羅河所浸不到的地方，也得充分的水來灌溉。只要有水，他們便有好收成。那時的埃及人，都等着大水的來臨。



2 曆的起源

尼羅河的水勢，每年都一樣，大概從六月起，漸漸水漲，到十月，河水最大，以後漸減，到了十一月，又回復到平常的水準。

埃及的人們，長時間計算着那河水頂大的日期到次一回河水頂大的日期所經過的日子。他們把那長時間的結果平均起來，知道所經過的日子是三百六十五日又四分之一日，他們就把這期間叫做一年。

埃及人把一年分成十二個月，又以三十日作為一月，而把那餘多下來的五日，叫做歲餘，不算入任何個月之內。現行的曆法，有大月和小月，把三百六十五日分配於一年之中，埃及人的曆，不是這樣。他們把這五日的歲餘，放在十二月之後和一月之前，不歸入十二月或一月去。這多餘的五日，放在年底歲首之間，作為祝祭宴樂的期間。此曆法之制定，遠在西曆紀元前四千二百四十一年，為歷史上第一次有確實年代的事實。

這樣，在一年中，還有四分之一的日子餘多着，那怎麼辦呢？

現行的曆，每隔三年，多加一日，叫做閏年。即依西曆紀元年數，能以四整除的為閏年，平年二月只

有二十八日，閏年則二月有二十九日。這樣每隔三年置一閏年的結果，閏年是過多了，算來四百年間，比實際要多出三個閏年。所以在四百年間，非再減削去三個閏年不可。

因之，再加一個制限，即凡西曆紀元的年數，能以百整除而不能以四百整除的年分，卻作為平年。照例，西曆紀元年數能以百整除的，當然能以四整除，應該是閏年的，就因這緣故，不能以四百整除的，如一千九百年，卻要作為平年。

埃及人不用那隔三個年置閏年，和不能以四百整除的年分，仍作平年那些麻煩的規則；每年都是三百六十五日，而在第一千四百六十年上，再加多一個添置的年分。

3 曆的精確度

一年的精確時間是三百六十五日五時四十八分四十六秒餘，即三百六十五日及 0.2422 日。試將此 0.2422 日一千四百六十倍之，則恰好和一年相近。就是一千四百六十倍起來，是三百五十三日餘，和一年的日數只差十一日餘。是一千四百六十年間只差十一日，一年間不過差了十分鐘樣子，所以一個月不過差五十秒。

平常我們的鐘表，很正確的一天也差幾秒，一個月就要差幾分了，在他們沒有什麼鐘表的時代，

能有這樣正確的結果這樣精密的計算實在是可驚可佩的古埃及人的文明程度也由此可知了。

4 曆的改良

二千年後，即距今二千年前，羅馬的大將由良凱撒 (Julius Caesar) 征伐埃及時，知道此種曆法的利益，便帶回羅馬來，把羅馬本來的曆法改訂。羅馬舊曆法，每年為三百五十五日，凱撒改為三百六十五日，每四年置閏一日。單月三十一日，雙月三十日，惟二月為二十九日。其中有一月名為紀念凱撒的，故名 July (七月)。後人稱此種曆法為由良曆 (Julian Calendar)，因為是由良凱撒所改定的曆法。

凱撒死後一千六百年，有個教王格來各列第十三世 (Gregory XIII) 在西曆紀元一千五百八十二年，召集當時許多的算學家、天文學家和教士，商議修改曆法。那時有克羅維 (Christoph Clavius) 建議，仍採用凱撒依埃及曆法改定之由良曆為標準，於是這埃及的曆就通行於全歐洲。

但是曆法完全照埃及的樣子，也有若干不便和不完備的地方，把這些加以改良補正，成為完備的曆，這就是西歐各國現行的曆。我們現在所採用為國曆的，也即此曆。陽曆還有一個名稱叫格來各列曆，即是取名於改曆者教王格來各列十三世的名字，再追求其源，那曆法還是埃及的曆法。

5 幾何學的起源

尼羅河的大洪水，成爲現在所用曆法的起源，前面已說過了。但是還不止這一點，算學當中的幾何學，也是因這大洪水而產生的。

希臘的希羅多德 (Herodotus)，是被稱爲史家的老祖宗的，他的著書中有說：「塞所斯脫里王用抽籤的方法，分給埃及人以相等的方形的土地，而每年徵取租稅。但當尼羅河發洪水，把某人的土地衝毀了，那麼地主就得向王申告此事；王就派官役出來，測量土地被洪水所損毀的大小，按照那個比例而減免其所納之租稅。幾何學想來是因這個必要而建創出來，再傳流給希臘人的。」

再按照事實，後來希臘的算學家，大都是到埃及去留學過，修習了幾何學之後，再回本國，深加研究，然後此學科更發達，幾何學成爲一種完備的學問。希臘的幾何學就是我們現今所學的幾何學，而這希臘的幾何學，是從埃及傳來的。

幾何學一名詞的語原，卽有測地之意，可見其起源是在測量地面。而一切學術之因必要而發達，也可明瞭，決非憑空可以提倡或制止，也不煩多言了。

6 算術和代數學

算術在埃及也很早就發達了。依希羅多德所記，埃及人數物時，用小石在手上由右向左移動而計算，每數到了十，則算上一位。這個逢十進一位的方法，便是我們現在所用的十進法。

埃及人用了十進法來計算了加法、減法、乘法、除法。也計算了分數。但這分數在埃及人是一種很難的算法。

算術之外，代數學也發明了，有解簡單的方程式的計算。埃及的算術和代數學，後來傳入希臘，再後來又直接流入羅馬。從羅馬再分散到歐洲諸國，直到距今六百年前，歐洲各國還通行着那種算法。但可惜的，因為表數的簡單數字，沒有發明，埃及的算術和代數，就沒有幾何學那麼發達。總之，埃及的算術和代數發明了，經過三千年的長期間，直到印度、阿剌伯的算術、代數流入為止，歐洲是一直沿用着的。

埃及人在歷史上留名的算學家叫亞麥斯 (A'hmes)，是一個教士，只知他是西曆紀元前一千七百年以前的人，當埃及王拉斯在位的時代，但的確是什麼時候卻不可考。因為有他所記錄的一冊算書，爲林特 (Rhind) 所蒐集而出世，於是埃及古代算學的大概，便可窺知了。

亞麥斯所記之書中記載許多關於算術、代數、幾何的問題。此書名叫做「探求一切難解事物的指針」。那是有史以來的最古算書，現珍藏於英國的不列顛博物館。其中所記載的，有人以為包有紀元前三千年之學問知識，只埃及古文化之偉大，更足令人驚奇了。

7 算盤的發明

埃及人發明的計算器械之中，有一種算盤，他們叫做阿巴加斯 (abacus)。

說了算盤，就要聯想到我們現在所用的算盤吧。但埃及人所用的阿巴加斯，和我們的算盤是不同的。我們的算盤，一行上有七顆珠，上二下五，上格的一珠相當於下格的五珠，即數到了五，移為上格的一珠，到了十則於左一行下格動一珠。阿巴加斯每行有九顆珠，即以此九珠計從一到九的數，到了十則於左一行動一珠。再從九十九到一百，是於更左的一行動一珠的。

這阿巴加斯，後來由希臘的大算學家柏拉圖 (Plato) 傳到希臘，即被廣泛地使用着。再後在西曆紀元前一世紀頃，再從埃及直接傳到羅馬，在羅馬也為一般所用。此後更廣泛地通行於歐洲各地，直到印度、阿剌伯的算術、代數學流入歐洲，纔漸受淘汰。

這樣，在埃及、算學的各部門，都是很發達的，而且這又在四千多年以前的古代，我們可以想像埃及

埃及的文明程度，是怎樣高起了。

8 埃及文化衰頹的原因

這樣文明的埃及，後來卻不再發達進展了，那不是很奇怪嗎？那個理由是這樣的：埃及的人民，分爲六個階級，即是僧侶、兵士、農民、工技、商人及包含漁牧奴僕等雜民。以僧侶爲最高貴，兼做官吏、教師、法官，在社會上有非常勢力，他們有許多土地，都是免稅的，因之他們的財富益加增大了。兵士也有若干畝免稅的土地，農民以下的四階級便不能有土地，所以很貧困。因而只有僧侶是可以治學的，別的人都不會享這權利，他們就是貴族，生活非常適意，享用極其豪華，過慣了富貴的生活，便不肯去在學術上用工夫了。更進一層的是曆法和幾何、代數等等，以前所發明發見的，全部都記載在叫做「聖經」的東西之中。此種聖經是頂尊貴的，其中記載着的不許任何人加以研究，加以懷疑討論。如有違反處以重罰，因之什麼人都不能有進一步的研究了，文明程度自然就得停滯於這一點，倘使沒有這樣的阻礙，那埃及人的文明，會進展到怎樣的地步，是誰也不能測料的。

對於一切學術的研究，非絕對自由不可，倘使不能自由採集研究材料，自由發表研究結果，再由地探討論究，那麼進步發達，是絕無希望的。

倘使一國家不許自由研究自由發表批評，那麼這國家是自絕了進步發展的徑路，終於非滅亡不可了。惟有文化是不可以並且不應該統制的。

埃及就是這個例。埃及束縛了研究和發表的自由，終於走入了滅亡的徑路。我們要留心，不可以踏襲這條舊轍。

二 巴比倫 (Babylon)

1 太陽的運行

當阿剌伯之北，波斯之南，有一道大河，這河的上流，原是二條河道，到了下流，纔匯合爲一，而注於海的。這北首的支流，叫底格里斯河 (Tigris)，南首的支流，叫幼發拉底河 (Euphrates)。

底格里斯河和幼發拉底河的中間，是一塊叫做美索不達米亞 (Mesopotamia) 地土肥沃的大平原。這大平原也是人類誕生之後的最早發達場所之一。距今四五千年，這地方已經有一個很發達的國度，就是巴比倫。在當初，這二河還未會合而爲一，美索不達米亞即是介



在二河中間的土地之意。該地因了天惠的緣，一年有三次小麥的收成，又有產量豐富的棗樹，所以能給養許多人，產生文明強盛的國家。

無論那裏的人，起初總有這樣一種感覺的，巴比倫人對於這一點卻更加覺得：就是太陽每天一定從東方上昇向西方落下；在有太陽時，也不覺得怎樣暖，到了日沒之後，卻忽地覺得冷起來了。更加使他們奇怪的是太陽上昇的地方和落下的地方，每天稍微有些不同。

而且奇怪的事，還不是這樣就完了。再仔細注意起來，卻知道經過了幾百日之後，太陽又回復到了原來的地方，從本來上昇的地方上昇，落下於本來落下的地方。

於是很有耐心地注意這個期間，經過了長時間的計算，知道了恰好是在第三百六十日上，太陽回復到從原來的地方上昇，也落下於原來的地方。

這還是不算數，再看周圍的草木，抽葉、開花、結果，有的是枯萎了，有的是落了葉，到次一回的抽葉、開花之間，也是要三百六十日。所以巴比倫人，以三百六十日為一年。

於是把太陽做樣子，繪了個圓，把周圍分做三百六十等分，即以圓周的三百六十分之一表示太陽繞地球一日的大小。最初的巴比倫人把這作為曆法而使用着。

2 弧度與角度

此後，有些好奇的人，在曆的圓周上，用半徑的長去分割下來，恰好和六十日間的大小一致。這樣便有趣了，再把全圓周分割起來，也恰好是六回，再到了原來的位。在另外任意繪的圓上試驗起來，也是有同樣的結果。這纔確實知道了圓周用半徑的長去分割，恰好等分爲六，而其六等分之一又恰好和六十日的大小刻劃一致。其次，又知道了在無論怎樣的圓，圓周的六分之一的弧的兩端，和中心聯結的二半徑間的角，都是相等的；而且做出了這樣大小的角去考查起來，又是等於圓周上刻劃的六十日間的大小。因之知道圓弧的大小和角的大小是常常一致的，再把這樣的角六個，順次接合起來，恰好成功一個圓。所以圓由三百六十個區分所成，而角也是三百六十個區分，成了同一個東西。於是把三百六十個區分之一，叫做一度。一度就是當初巴比倫人所用曆法的一日的大小。

這樣，凡逢計算弧或角時，以度作爲單位；要再算得精密些，只有度的單位是不夠的，從六十度的角聯想出來，把一角分爲六十等分，叫做分，以後再把一分分爲六十等分叫做秒。

巴比倫人的這樣發明了完全的度、分、秒，是距今三千年以前的事了。一直到了近年發明了以代表度，以'示分，以"爲秒的記號。

3 六十進法

大概是因了度、分、秒的用六十進位的緣故，巴比倫人的計數中，有六十進位法的組織。這是別的古代民族所沒有的。在巴比倫遺留下來的載籍中，有人發見了一頁記載着 1 至 60 的平方數的表，其最初的七數是 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49，其次則爲 $14 = 8^2$, $1.21 = 9^2$, $1.40 = 10^2$, $2.1 = 11^2$ ，此等式子，非依六十進位法，不能解之。因須是 $1.4 = 60 + 4 = 64$, $1.21 = 60 + 21 = 81$ 則纔符合。

在別的一冊頁上，是記錄着月球自生魄至望每日光體之大小，令其全體爲二百四十分。起首五日之光體爲 5, 10, 20, 40, 1.20 (= 80) 之級數，這裏也有六十進位之法，且可知其已有等比級數的知識。此後則變爲等差級數，自五日至十五日之數爲 1.20, 1.36, 1.52, 2.8, 2.24, 2.40, 2.56, 3.12, 3.28, 3.44, 4。在這六十進位法中，已隱切定位之理，即如 $1.4 = 64$ 一式，1 是表 60，比 4 高一位而又位置關係的。所借者，定位計數法所必要的記號 0，他們沒有，因之要到二千年後的印度和阿剌伯人，纔有完全的記數法。

4 陰曆的發明

巴比倫人當初作爲曆法而造出來的三百六十個區劃，卻不發達爲曆法，而發達到了成了弧度、角度，在曆法上已是毫無價值的了。

爲什麼呢？因爲巴比倫人後來，由觀察月球的運行，新又發見了很正確的陰曆。

巴比倫人於天文有特別的擅長，因爲他們一向最拜天體，信星辰之能支配人間命運，故觀天體的機會特多。他們的曆法也很早就發達，對於天文上的計算，也極正確，有很早的日蝕、月蝕以及天文上的記錄。亞歷山大大王征服巴比倫時，得有天文紀錄可上溯至紀元前二千二百三十四年，可見其文化之古。還分黃道爲十二宮，以及二十八宿的分配在十二宮中，在他們是早已有的了，各星辰都早有名稱。他們的天文曆學，傳到各地，很爲異民族所敬崇而採用的。

現在東亞諸國，還有不少的地方使用陰曆的。即我國一向也用陰曆，民國以來雖規定用陽曆爲國曆，但陰曆的勢力，還是根深蒂固，在一般社會上很佔勢力。

巴比倫文化雖很早就發達，但他們迷信於占星術，雖長於耕作，但不長於政治和戰爭，故常爲強鄰所征服，爲自立之國，期間很短。他們不能抵禦異族的侵掠，政府大抵以媚外抑內爲能事，所以亡國之禍，時時受到。因之文化雖高，也不能保持，更無論發揚光大矣。

三 希臘 (Greek)

1 歐羅巴最初的文明國

在歐洲南部突出於地中海，有個希臘半島，那裏有個國度也就是希臘。在這地方，距今二千七八百年之前，有個很進步的文明國，也叫希臘。這當然和現在的希臘國，不是同一個國度，其間是經過了不止一次的興亡，而且和古希臘的人種，也有很大的不同了。

從現在看來，他們能夠達到那樣的文明，真是有點不可思議的。其中有許多物事，簡直令人五體投地，有些連現在的頂文明國裏，也做不出來。而且他們的文明，又是繼續了一千年以上，那是更加可以驚嘆的。

希臘地方三面通海，一面卻爲險峻的山嶺所遮斷，所以很少有外寇侵入的危險，他們就能安心致力於商賈及學藝了。因爲他們有美麗的山和美麗的海，受着自然的偉大感化，所以他們對於美的事物，非常愛好。因之，文學、美術、工藝及其他一切學問都非常進步發達。

還有在紀元前第七世紀頃，和當時的文明先進國如腓尼基、波斯、埃及、巴比倫等國貿易往還極繁，因之輸入了學藝及優秀的物品，很受着感化和刺激的。如泰萊斯、畢他哥拉斯、柏拉圖、歐幾里得等大學者，都有一次到埃及或巴比倫去旅行，修習了他們的學問再回國來，加以研究而發揚光大之。

希臘實在是歐羅巴洲有史以來最初的文明國，也是最偉大的文明國。現在歐洲的文明國在有些方面說是仍還趕不上希臘的。

2 幾何學的發達

埃及人發明了算學中一分科的幾何學，對於這幾何學，只要在實際生活上不起大障礙，就滿足了，不再想去作進一步的研究，但希臘人便不如此。希臘人對於事物極喜沈思耽想，對於不論何事，必謀去研明其原因理由，加以改良而應用於別的方面。因此之故，他們有很多的發明和發見。在美術工藝特別是雕刻方面，雖現今頂有名作家的作品，也比不上希臘的完美。

這樣文明的希臘人所頂喜歡的學問是什麼？在希臘稱為學問的第一是指什麼的？那實在是算學。希臘人差不多想「不懂算學不能爲人」的。所以不論人身份如何，算學是一定要學習的。說起希臘的學者來，那是不知有幾萬了，但一定先是算學家。而且希臘人特別愛好算學中的幾何學。因之幾

何學便特別進步發達了。

因之，希臘的學者一定是幾何學者。此等許多學者之中，泰勒斯（Thales）、畢他哥拉斯（Pythagoras）、奧依諾比提斯（Anaximander）、柏拉圖（Plato）、由獨克斯（Eudoxus）、歐幾里得（Euclid）等等又是其中頂有名的算學家。

但希臘的文明，連綿互一千餘年之長，其間也有盛衰興替，非一言可了。當以建設亞歷山大學府爲一總結。在亞歷山大學府建設以前，則學問的中心，可以說在雅典城，而雅典市民也多是尙文好學的。在此期間中有歷史上尤不可不知之大學者，今姑略記於次各節。



四 泰勒斯 (Thales)

1 金字塔的高

泰勒斯是希臘最早的算學家又是天文學家，生於西曆紀元前七世紀到六世紀之間。他小時候做商店的學徒，到了成人之後，因商務上事件，到埃及去。他聽說埃及的某大寺院中，祕藏着珍貴的書籍，就熱願要去看，經了多次誠懇的請求之後，方得許可。這些珍貴的書籍，實在是關於算學和天文的書籍。他很用心閱讀此種書籍，漸漸通達，明白了書中記載的一切，因此他就通了算學和天文學，據說，他的學問，比那時埃及寺中的僧侶更好。那時埃及文化已衰落，僧侶都是暮氣沈沈，不從事於學問，

且沒有師長，非大才也難自修，故得讓泰勒斯稱雄。

埃及地方，當國王死後，用石造成很大的墳墓。造墳墓要用數萬的人工，無數的石頭，費幾十年的時間。所以造成的墳墓，是像小山一般高大，其中安放著國王的靈柩。這是埃及的巨大建築之一，現在還有不少存留在那地方。這些墳墓狀作三角形，像個金字，所以叫做金字塔，頂大的有高至五六百呎，聳峙在沙漠之中，像一座石山。

泰勒斯旅行埃及的當時，已經有不少的金字塔了。他只用一根短棒，不費什麼手脚，用計算便能求得金字塔的高。這在當時是很使人驚異的，泰勒斯就被尊為大算學家了。

這是怎樣算法的呢？——在太陽底下，物事有個影子，諸位是知道的。泰勒斯先量了那短棒的長，再把這棒豎立，使金字塔影的尖端和棒影的尖頭相一致；再量棒影和金字塔影的長。這樣，棒影的長和金字塔影的長的比，恰好等於棒長和金字塔高的比。是立了這樣一個比例式，去計算出金字塔的高來。諸位，倘見高樹的影，橫在地上時，不妨取一管尺，豎直擺放，使尺影的尖頭和樹影的合一，再算當時的尺影和樹影，立出尺影的長和樹影的長為 1 與 x 的比，去求出 x 來看。一定會求得樹的高度了。

想出這樣的比例問題而用比例式去解答的，泰勒斯是第一人。當時埃及及王亞馬西斯 (Amasis) 也很佩服他的才學，極敬重他。在他回到希臘之時，已經不是商人而是大算學家了。他也決心以算學

家渡世，在他的故鄉米雷托斯開設講壇而收許多門弟子，這也是學校的開始。米雷托斯在那時是個頂富庶繁榮的埠頭，為商務之中心，文化也很發達，所以他的講學為各地所知，慕名來者很多。他們這一派是被稱為伊奧尼亞（Ionia）學派或米雷托斯（Miletus）學派的。

2 預言日蝕

泰勒斯的是算學家的名聲還不如他的是天文學家的名聲來得大。他知道地球形圓，他也知道一年的長是三百六十五日又四分之一，把這些知識教給希臘人。他又知道日蝕和月蝕的理由。日蝕是因為太陽的全部或一部為月亮所掩蔽而起的現象。月蝕是月亮為地球所掩蔽而不見其全部或一部的現象。這二者是很容易發生的，而且從地球上看來，普通日蝕總比月蝕為多，每年總有四、五回。月蝕比日蝕為少，每年多時，也只二、三回。總之這日蝕、月蝕是怎樣發生的道理，在二千五六百年前已經知道了。

頂有名的是他預言了西曆紀元前五百八十五年有日蝕而中的事。他預言了年份抑併日月都說出卻不可考，但這是使得他的名聲，振動一時的。有人說這些知識，是泰勒斯從埃及人學來而不是泰勒斯自己的發明和發見，或者確實如此，因為當時的埃及人的天文學早已極為進步。

不過泰勒斯因為預言日蝕的中之故，名聲頓盛，要入門來做弟子的大增，他就被推尊到了極點而成為希臘七賢人之首。

3 臭水溝中

某日的傍晚，泰勒斯在路上散步，仰觀着天空的星辰。他一心看着上面，對於腳下的道路，一點也不留心。正巧這路旁有着臭水溝，他竟失足跌了下去，弄得滿身污水淋漓。那時路旁的老婦人見了，大笑不止，又嘲笑他道：「你連自己腳下的是什麼都不清楚，天上的事情到反能知道的嗎？」泰勒斯笑而不答。

泰勒斯的最著名門弟子二人，為亞諾芝曼德（Anaximander）與亞諾芝曼尼（Anaximenes），攻習天文與物理學，繼承泰勒斯的業績。亞諾芝曼尼的弟子亞諾薩哥拉（Anaxagoras）又是研究變圓為方問題（圓積問題）的第一人。



五 畢他哥拉斯 (Pythagoras)

1 畢他哥拉斯學校

距今二千五百年前，當西曆紀元前六世紀頃，希臘出了一個大算學家叫畢他哥拉斯，他的一生像是神話一般地渺茫難考，但也有若干是可以憑信的將記在下面。

畢他哥拉斯少壯時曾遊學埃及、巴比倫等地，研究算學，後來回到希臘，在他的故里薩馬斯 (Samos) 開講學館，不見何等成績。乃於紀元前五二九年頃，他移到南部意大利地方，在克洛東 (Croton) 地方，開設了一個學校。他

在這地方走了紅運，講學之際，聽者滿堂，各階級市民都來，尤以上層階級爲多，該地有婦女不得赴公共場所之國禁，而有不少女人敢犯禁來聽講的，他是大成功了。這聽講者之中，有個妙年美麗的少女倩安（Themo），是貴家的小姐，因傾倒於他的學術，不嫌年紀的懸隔，嫁給他爲妻，後曾爲他作傳，惜已佚矣。

畢他哥拉斯又是哲學家 and 道德學者，他的一切學問，都以算學爲基礎，他分算學爲四項目，叫做四藝（*Quadrivium*）：第一靜止量即幾何學，第二運動量即力學（或星學），第三絕對數即算術，第四應用數即音樂。此種分類爲後人襲用至數百年之久。

這學校的學生，佩帶着五角星形的徽章，使別人一見就知道他們是畢他哥拉斯學校的學生，即在出了學校之後，也帶着那徽章，以表示他是畢他哥拉斯的弟子。又學生或該學校的出身者，對於學校中所教授的或他們自己發見的，不許宣揚出學校之外，而且一切的發見，都歸於校主畢他哥拉斯名下，不許用各自的名字，故他們是一個堅固的團體。

2 畢他哥拉斯的慘死

畢他哥拉斯學校中的學生，是這樣親密地結合，漸漸變成一種祕密結社的樣式。這一個團集，其

後益加得勢，終至其中的人物，即畢他哥拉斯的弟子，參預到政治的事務上去。

本來畢他哥拉斯學校的學生中，很多貴族的子弟，因之他們預聞了政治之後，該城市的政治益加貴族化，專為貴族謀利益了。

因之畢他哥拉斯和這秘密結社中的分子，便積起了人民的仇怨。

後來民主黨的人同情於人民的苦痛而起革命，打毀了畢他哥拉斯學校，畢他哥拉斯逃到梅泰封登 (Metapontum)，在該地為人所殺。

3 畢他哥拉斯定理

畢他哥拉斯曾發見一個有名的定理，即「直角三角形斜邊上的正方形的面積等於他二邊上正方形面積的和。」這就叫做畢他哥拉斯定理，是很有名的。

據說他發見這定理之後，非凡欣悅，以為這不能是人力而是天助，因之屠牛百頭以祭天神。

試作二邊為三寸及四寸之直角三角形，而量其斜邊之長，則適為五寸。即直角三角形三邊長之比的頂簡單數字是三、四、五，即中國古算書上所說的勾三、股四、弦五，是同一事項。

再試取一線，剪一尺二寸長，在三寸、四寸、五寸處各記標識，將兩端拼合，再以針緊牽，有標識之點，

則三寸與四寸二邊間之角卽成直角，卽成九十度之角，沒有三角板及圓規時而欲作直角時，可用此法作之。這是作直角的最簡單而正確的方法。

4 畢他哥拉斯學派

除這直角三角形定理之外，畢他哥拉斯在算學上的發見是很多的，不過因爲他這學派中的一切發見，都歸於他名下，所以何者是他自身的創作，何者是他門弟子的發見，是很難查考的。畢他哥拉斯有很大的天才，若不爲民主黨人所殺，一定還有很大的貢獻的。

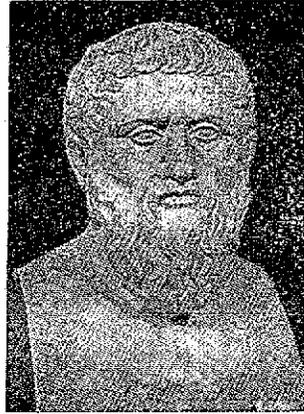
黨人雖然殺了畢他哥拉斯，毀了他的學校，但不能侵害他的學問，因爲他有弟子傳承下去，其後數百年間還能繼續這畢他哥拉斯的學派。

六 柏拉圖 (Plato)

1 未習幾何不許入門

普通稱爲世界四聖人的是孔子、釋迦、基督、蘇格拉底。這四人中之一的蘇格拉底，有一門弟子叫柏拉圖。這人是西曆紀元前五世紀到四世紀間生於希臘的大學者。

蘇格拉底對於弟子柏拉圖，決不當他是門徒，而當他是個好友看待的，因爲柏拉圖在蘇格拉底的多數弟子中是個傑出者。



柏拉圖於師尊蘇格拉底死後，旅行於埃及、西西里等地，再回故鄉希臘，與畢他哥拉斯的弟子爲友，他從那裏習得算學的學問。

由埃及的旅行和交友的影響，他對於算學發生很大的興趣，回到了他故鄉雅典之後，在郊外

的亞加那米 (Academina) 地方，創設了一個學校，從事於教育及著述以終其餘生。現在歐美稱專門教育的學校叫阿亞的米，是由此起源的。當時的雅典是文化的中心，講學之風很盛，他的學校很發達，門人甚多。

柏拉圖在亞加的米學校所教授的算學之中，以算術和幾何為主，頂有趣的是在這學校的門口榜示着一個標札，上書「未學習幾何學者不許入門。」由此可知柏拉圖對於算學是怎樣尊重了。有這樣一個尊重算學的柏拉圖為校主，亞加的米學校中產生出不少的算學家也是當然的。

2 立方倍積問題

當時台利亞 (Delia) 地方忽然發生疫病流行，人民非常恐怖。地方上的人便去向阿坡羅神祈願，請終熄此種疫病。而神的默示却是把某處地方的神壇改造為倍大，則疫病自止。

於是無知識之工匠，只把立方神壇的邊二倍而獻上去。

不知怎樣，疫疾並不終熄，神怒不解，反而更甚。

試以高、長、寬各二倍起來，而求出立方的體積來，那決不是原來的二倍。

台利亞的人民知道了這個錯誤，但沒有人知道怎樣可以二倍的法子，大家苦思焦慮之後，總沒

有辦法，於是來請教那些數學家。許多算學家就大家來研究這個立方倍積問題了。

在這多數人中間，柏拉圖的友人叫做希包克拉克底(Hippocrates)這有名的學者也在內。可是誰也解答不出來。只有希包克拉克底是差不多可以成功了，但他卻執着於遵守作圖的規定，只用圓規及直尺去解，所以未得結果。

柏拉圖也被邀請商量這問題，和弟子輩共同合力研究。

他也同別的算學家一樣失敗了麼？不，他卻不失敗。他在圓規直尺之外再用了別種器械而解答了。不必說因之神怒已解，而疫病已止。因恰是二倍大的祭壇已經做成了之故。

3 柏拉圖的偉大

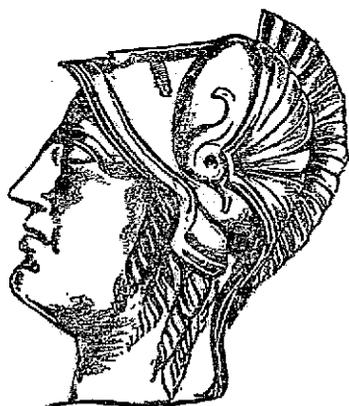
柏拉圖因為太偉大了，所以他的哲學家的名氣掩住了別的一切，因為哲學是包括了一切的。他並不以算學出名，但在算學上也有不少貢獻。他和畢他哥拉斯一樣，以算學為一切學問的基礎，也鼓勵研究算學，即使他在算學上沒有什麼特殊的發見發明，但他於幾何學改良其論證的方法，將古代算學家之論證，改修為顯明確切之方式，並創立縝密之定義，兼定理公理之討論，是不可磨滅的功績。幾何的用公理、公法、定義、定理等作演繹的有統系的論究，是由柏拉圖開其先河的。

柏拉圖在其他方面的成就更大，他的著作以對話體的形式書就，故叫做對話篇，是古文化中的經典之作，迄今仍爲人推崇。柏拉圖的弟子亞里士多德（Aristotle）也是有名的大師，影響於後世的學術界尤大。

七 亞歷山大學派 (The Alexandrian School)

1 亞歷山大大王 (Alexander the Great)

希臘在西曆紀元前五世紀頃，擊敗東方的大帝國波斯，其強盛冠絕一時，文化也極榮盛。在紀元前三百四十五年頃有國名馬其頓 (Macedon) 崛起於希臘之北方。馬其頓王腓力泊 (Philip) 有大志，抱征服天下之心，先發兵攻希臘之雅典，希臘人大驚，急遣大軍禦之，戰於凱洛奈 (Chaeronea)，大敗。嗣後希臘國勢遂一蹶不振，日趨衰頹之途。



亞歷山大為腓力泊王之子，他父親對他的教育，很是注意，幼時即聘請雅典的大哲學家亞里士多德 (Aristotle) 為師傅，亞氏是柏拉圖弟子，其學問尤佳，支配歐洲學術者達千餘年之久。亞歷山大受其訓誨，故極好學，

更尊重希臘的文化學術，故能爲古代史上最著名之王。腓力泊王於征服希臘後，欲再征波斯。當時波斯領土頗大，兵力亦強，故集庭臣共議，有反對者，王反爲所弑，發生內亂。時亞歷山大年僅二十繼位爲馬其頓王。繼父之遺志，先討平內亂，卽遠征波斯。途中征服小亞細亞諸小國，翌年大破波斯軍，更征服敘利亞、埃及等。復擊潰波斯之殘軍，平定波斯全土，更東行達印度之西疆。

亞歷山大所率大軍戰無不勝，攻無不取，故其所領疆土，東起印度，波斯，西迄希臘，南達埃及，至非洲之北部，成爲世界稀有之大帝國。

亞歷山大征印度未及成功，因兵士疲乏，部下嗟怨，班師回波斯，更謀組織軍隊，以繞道阿剌伯海達埃及，途中卽可征服阿剌伯，惜在將出發時，忽得大病，又以頻戰爭，操勞過度，終至不起，於紀元前三二三年夏季與世永別，時年僅三十三歲。亞歷山大在位後不過十二年，拓地千萬里，造成如此之大國，故後人稱之爲亞歷山大大王。

2 亞歷山大城

亞歷山大不僅是一個軍事上的侵掠者，在他二十歲上向亞洲出發，有意用希臘馬其頓的混合軍隊，在世界各地去散佈希臘文化，他所到之處，都建設希臘民族的市城，據言在他在位的十二年間，

在他帝國版圖之內有七十餘處這樣的城市的新建。其中特別有名的，即是在尼羅河口的亞歷山大城，這是他引兵一到該地即着手建設，早就預備其成爲大港，爲歐亞交通的連絡中心的。他的大計是要構通東西的文化，使全世界成爲一個在他支配下的大帝國。

爲要團結東西文化，他自己也以身作則，娶了波斯的公主爲妻，並命其部將士卒與亞洲婦結婚，又使三萬波斯兒童學習希臘文字和馬其頓的軍事學，他移殖亞洲人於歐洲及移希臘人於亞洲，這種種舉動，表示他實有遠大的計劃。即使他有將帝國完全組織成功的充分時間，也沒有人能繼續他的大業，所以他一死之後，這大帝國便成了紛亂之勢，各將佐互相爭權，經過了幾次戰爭之後，有三個王國出現，分治他所征服的各地。這三國卽爲馬其頓、埃及及波斯，都由他原來的部屬爲王。

佔據埃及地方，並轄巴力斯坦與敘利亞南部，新建一個埃及及王國的是亞歷山大的部將脫雷梅（Ptolemy），他本是埃及的總督，亞歷山大死後，卽繼續維持埃及的治安，十七年之後，纔得了國王的尊號，開始了脫雷梅王朝，凡十幾代，都用脫雷梅的名字，所以他卽稱爲脫雷梅一世。最後的國君，即是美麗的姑婁巴女王，爲羅馬人所毀滅，從脫雷梅一世起，凡三百年間，埃及在地中海上又是十分富強，文化極盛。

脫雷梅一世卽以亞歷山大城爲首都，繼續建設事，使該城成爲古代最大的城市。港中貨船雲集，

有遠自印度及中國來的貨品。港口有高大之燈塔，光照數里之外，雖在暗夜，船隻亦得入口。脫雷梅的王宮，也建築得很講究，用大理石造成，位於綠茵之上，是參考波斯和埃及的庭園別墅王宮而造成的。城中公共建築的華美和豐富，也是上古少有的，有博物館、圖書館、演講廳、音樂廳、浴場、市場以及其他公共場所。這城早就成爲當時文化的中心了。

3 前期亞歷山大大學

脫雷梅一世和他的主人亞歷山大大王一樣，也極尊崇學術，愛希臘文化，所以他在亞歷山大城建設非常宏偉的大學。建造了許多講堂、博物館、實驗室。且圈定廣大的土地爲學校用地，也設植物園。更從世界各地徵集學術材料，成爲鉅大之大學。那的確是空前絕後的。

脫雷梅王在亞歷山大城所造的圖書館極爲宏大，收集了五十餘萬卷的書籍，又仔細抄寫各種名著，加以考訂，成爲定本。又招聘世界各地之大學者，使來講學，予以十分之優遇，由國庫支給俸養，且又住在王宮之內，故印度、希臘、埃及及各地之自負爲博學之士，羣集於亞歷山大城，成爲文化中心。

其時希臘爲世界文化之最高地，故從希臘來之學者最多，其中有不少頗有聲名的。直到姑婁巴女王被羅馬將軍凱撒擄去，此亞歷山大城的文化，連綿不絕，是爲前期亞歷山大大學，約延續三百年。

前期亞歷山大大學時代，有許多著名學者，尤以歐幾里得 (Euclid)、亞幾默德 (Archimedes)、亞坡羅紐斯 (Apollonius) 三人為最有名，此三人後人稱算學界之三雄。

4 後期亞歷山大大學

西曆紀元前一世紀頃，羅馬國軍攻佔亞歷山大城，此大學一時有中絕之危，但後仍能復興，恢復其往日之繁榮，各地學子競集於此。自此時以後，即約自西曆紀元起，稱為後期亞歷山大大學，續繼約六百年。

後期亞歷山大大學中之有名學者為普脫雷梅 (Claudius Ptolemy)、巴普斯 (Pappus)、狄奧芬多 (Diophantus) 等。但已不如前期之有許多發見發明，不過抱殘守缺也算克紹箕裘罷了。

西曆紀元六百四十一年，阿剌伯人攻破亞歷山大城，焚其市街，此歷史上有名之大學遂被破壞。目今埃及之臨地中海一港，有名亞歷山大者，現在是很小的海口，不能窺見古代雄偉之景象了，但在一千數百年前，為世界第一大都市，且是文化中心地。現在汽輪還要經過亞歷山大附近的蘇彝士運河，但無人一顧，曾為世界文明史上最高峯之亞歷山大。通算前後期亞歷山大大學，共約一千年之久，為世界文化之中心，在歷史上與亞歷山大王之名並傳不朽。

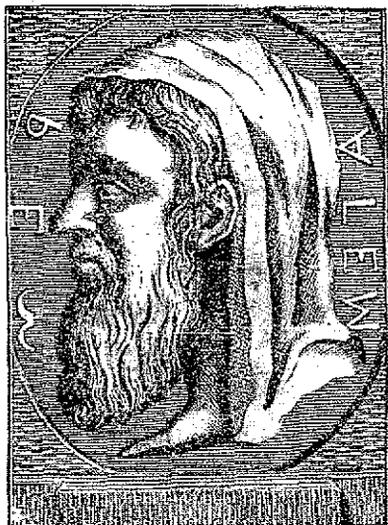
八 歐 幾 里 得 (Euclid)

1 幾 何 原 本

脫雷梅第一建立亞歷山大大學，最先招請的一般教授之中，有著名的算學家歐幾里得。

歐幾里得約生於紀元前三六五年，是柏拉圖的弟子，是秀出之才，而且性質溫和，循循善誘，自王以下當時之學者與弟子都很敬重他。他的生平事跡，均無可考查，只知其幼於柏拉圖而較亞幾默德爲年長。

歐幾里得將以前的算學家所著書和他自己的見解與發見，編纂成一本很好的幾何學教科書，此教科書名“*Elementa*”，我國譯作「原本」。



說幾何原本，是沒有一人不知道指歐幾里得的那書的。

此原本的作成約在紀元前三三〇年到三二〇年之間，計分十三篇。第一、二、三、四各篇論平面幾何。第五篇論比例之理。第七、八、九三篇論算術。第十論無理數。第十一、十二論立體幾何。第十三篇論有規則之立體。其編制頗完善，在歐幾里得死後二千年間，直至近世，很少有較勝於此書者出現，差不多是幾何中的聖書。

幾何原本中何者是歐幾里得自己的發見，無法考定，大部分是他蒐集別人的結果，給予一種有系統的記述，卻是一定的。這便是他的大功績。因為幾何的學習很難，而經他的整理，成爲有條不紊之著，使學者有路可循，即在近今英國還有以此原本作爲教科書在學校中使用的，二千二百年前所著的書在二十世紀的文明時代，還仍舊使用，就可見此書之價值如何了。

2 幾何學無王者之道

歐幾里得以此原本作教科書教其弟子，在當時的學生，也和今日一樣，有以此書爲太難，不容易理會的。本來在希臘的幾何學，一向注重抽象的推理，初學者不易理，原屬當然。在他許多弟子中，也有埃及王脫雷梅第一，別的弟子對於先生歐幾里得有顧忌，在脫雷梅王則自己是君長，歐幾里得是臣

下，沒有什麼可怕的。於是某一天因為原本太難了，王問歐幾里得：「有沒有更容易些的學幾何學的方法？」而歐幾里得的回答是「幾何學沒有為王者而特別通融的路。」

換句話說起來，即是不論是君王是奴才，在幾何學是一律平等的。這的確如此，不但幾何學，一切學問，都是這樣。不能因為是了王，學習起來就特別容易些。無論什麼人，倘使不肯用功，學問總不會上達，一定下了苦功纔有進步的。但是明白這道理而能夠像歐幾里得那樣說話的，世界上有幾人呢？歐幾里得可稱為真的學者了。

後人把歐幾里得所說的幾何學無王者之道一語，推廣其意味說：學問無王者之道。

3 給他三個銅子

此後歐幾里得的名聲，愈加大了，許多學生從世界上的各地方到亞歷山大城來受他的教誨。同樣他用原本教他們，與脫雷梅第一相同，大多數的弟子總覺得艱難不易解。

在現今的文明時代看來，學習幾何也許並不十分艱難，但在二千二百年之前，學生的知識較低，那是當然要感到不易了。於是弟子中的一人問道：「學了這樣難的原本，到底有甚麼好處呢？」

聽了此話的歐幾里得，從他袋裏摸出三個銅子來說：「你是想得着這三個銅子比獲得知識更

甚吧。」給了他，請他回家裏去。

歐幾里得的意思爲要錢而去求學問，那是大錯的。求學是應該爲學問而學問，其真目的是在造成爲人的人格見識，倘使爲的是要錢，去求學還是去從專別的更快求得錢財之事更好。

這樣歐幾里得的行爲都是教訓的。其著書是千古沒有比類的善本，雖也有細小的疵瑕，仍不掩其全體的完整，研修幾何學的人，都以研究此原本爲入手。

幾何學原本之傳入中國，在十七世紀初葉，當明末之際，耶穌會派教士利瑪竇始來華，與徐光啓共譯其前六篇，於萬曆三十五年（一六〇七）完成，在北京出版。此爲西洋算學直接來華之始，當時是爲改曆之故，時中國本來的曆算已有錯誤，故勢非採用較正確之西方曆算不可。

九 亞 幾 默 德 (Archimedes)

1 圓周率的發見

出身於亞歷山大大學的人中，亞幾默德是頂偉大的算學家。他在紀元前二八七(?)年，生於西拉扣斯 (Syracuse)。到亞歷山大城遊學以後，回到故鄉西拉扣斯，仕於當時的希侖王 (Hieron) 爲臣，希侖王也很企重他，待他很好。

亞幾默德有很大的天才，不但在算學方面，即在機械學、物理學等各方面都有很大的發明，是古史上第一等大學者，後世的牛頓，差可比擬。

亞幾默德著書很多，有很多的發見和發明，此地只說比較熟知的。



求圓周時，大家是知以直徑乘 π (叫圓周率即等於 $3.14159\dots$)，還有求圓面積的方法也

知道吧。這些都是亞幾默德所發見的。

亞幾默德研究圓周與直徑的比，知道圓周是較直徑之 $\frac{22}{7}$ 為小，而較 $\frac{223}{71}$ 為大，即比 3.14286 為小，比 3.14324 為大。圓周與直徑的比，即是圓周率，通常用希臘文字 π 表之，其值為 3.14159……平常誰都知道的，照現在看起來，像毫無什麼難處，但這是在一千年以前則小數點以下第三位不很明白，也很不容易了。希臘算學家在這一方面，一向不加研究，亞幾默德的研究又是獨特的。

2 圓周及圓面積

曲線與直線的長，在希臘一般算學家，一向認為不能比較的，所以在這一方面，並無人加以研究。亞幾默德以天縱之才，信其直覺之力，發意研究，乃得在計量幾何學上開一新園地。

於是亞幾默德知道用此圓周率 π 的數值來乘直徑，即可得圓周之長 ($C = 2\pi r$)。

至於圓的面積如何求法？則是照上法先求得圓周之長，以圓的半徑乘圓周之長再用 2 除之。現在是半徑的平方乘以 π 即得圓的面積，亞幾默德的算法和現在是不同，但答數卻是一樣 ($S = \frac{1}{2}C \cdot r$)。

3 球圓柱的表面積及體積

亞幾默德自己所頂得意的，是其論球體及圓柱體的論著。他發見球的表面積，等於以球半徑之長為半徑之圓（即該球體之大圓）面積之四倍。其次又發見圓柱的表面積及體積，並及球的體積。他對於這個發見是特別得意的。這一個發見是在圓柱體內容一球，不使其接觸面有空隙，其時球的體積是圓柱體積之三分之二。他平時常說，死後要做一個以球內容於圓柱體的式樣做他的墓標。

4 槓杆原理

很重的物件，常用一根棒去撬，在根下墊了一木頭，撬動很容易，這就叫槓杆，或叫槓子。為什麼用很小的力可以掀動重物？這是頂簡單的機械，在初步的物理上便有講到，也是由亞幾默德首先正確解答的。

我們所用的秤，是應用了槓杆的原理做成的。用秤去稱量重物是用了秤錘移動到二者水平而看刻劃的斤兩。秤是上面用紐支懸的，但支點在下面也同樣，那支持的叫支點。亞幾默德曾對人說，倘使有踏得住的支點，我可以把這地球撬動給你看。

5 金冠真偽

有一天希俞王造了一頂純金的王冠。王想辨別工匠是否作弊，即要確定金冠材料是純金還是有銀潛雜着。於是召亞幾默德來他去試驗。

亞幾默德起初也想不出辦法來。倘使把金冠的一部切下來，當然可以試出來的，但這要弄壞了王冠，所以不行。他每日雖然苦慮，卻總想不出方法來，而允許的日限又到了，心焦非凡。於是想洗個浴來提提神，就命預備浴水。他洗到浴缸裏去，看見了浴水溢出來，忽然觸動靈機，立時跳起來，喊道有法子！赤身裸體奔到實驗室去從事於他想到的實驗了。

亞幾默德先取與王冠同重量的金塊和銀塊，把這三樣分別洗到水中，測定各該時溢出的水量，由此去計算出王冠中所含金和銀的分量，判明了王冠不是純金，而且計算出了其中含銀的分量。希俞王以此結果責問工匠，工匠認爲天示其詐，俯首伏罪。

爲什麼把王冠同金銀塊放入水中而測定溢出的水量呢？「物體在水中失去了牠同容積的水的重量。」這理由亞幾默德在水中偶然悟到了，這就是現在被稱爲亞幾默德原理的。物質的比重，根據了此原理而測定。

6 亞幾默德之死

當時的新興強國羅馬，出兵攻掠四鄰，西拉扣斯也受其侵略，被大軍包圍。亞幾默德考察出許多新戰具來助王破敵，其中有石砲（Onagras）的裝置，可以機械投巨石於數十丈外，遠近如意，以擊敵人。希命王用了此種新兵器之助，給羅馬軍以大傷創。據言有一次，亞幾默德作圓面鏡，反射太陽光線去燒毀羅馬軍的戰船，則恐非事實。羅馬的將軍馬西拉斯（Marcellus）乃作長圍，為持久之戰，封鎖海港，斷其外援，互三年之久，羅馬兵在紀元前二一二年終於攻佔了西拉扣斯。

從前的戰爭是很殘酷的，戰勝國對於戰敗國的人民，可任意生殺，掠奪財貨子女，而羅馬兵本來又極野蠻，所以西拉扣斯人大受其害。

當時羅馬將軍馬西拉斯下令不準殺害亞幾默德一家及掠奪其財產，因為亞幾默德是大學者，名重一時，羅馬人也很敬重他。

可是羅馬兵並未見過亞幾默德，也不會認識他，也不會知道他的家在何處。

有一羅馬兵士闖入民家想去掠取財貨，看見一個老人在沙上畫着圓，俯首沈思，他看見了人，就想可以問出財物的端倪來了，大步走過去。

這老人即是亞幾默德，他正在思索當中，聽得有人過來，恐怕踏掉了他的圓，所以大聲說道：「止步！不要過來弄壞了我的圓。」聽了這話的羅馬兵，以受了侮辱，大怒，突然用刀刺殺老人。

馬西拉斯知道了大學者亞幾默德被殺死的事，大驚，極痛惜其無罪而受死，給他造了一座壯麗的墳墓，以表景仰之意，依從他的志願，以圓柱內容球體爲墓標。西西里的人，後來也不知敬崇此曠世的大師，在百餘年後，羅馬詩人西塞羅（Cicero）遊西拉扣斯時，見此墓標已埋沒在荒草荆棘之中矣。同樣，亞幾默德的學藝，也埋淹了數百年之久，到歐洲文藝復興以後，纔有人再去研究理會。

10 羅 馬 (Roman)

1 羅 馬 人

在意大利的底白河 (Tiber) 上流有一處叫拉丁 (Lavinium) 地方的，在西曆紀元前八世紀頃被一族很強的人佔據着，建有羅馬城。他們富於尚武精神，就是在寒冷的冬天河水都結了冰，也裸體而在鍛鍊體力，所以在戰場可以一以當十，打仗總得勝的。

人數雖少但因爲強大，所以漸漸征服鄰近各地，到了紀元前三世紀已是很強的國家了。這個國就叫羅馬。現在意大利的首府叫羅馬，即是從前羅馬王國的首府，也是現在的羅馬市，即國名與首府同叫羅馬的。

其後羅馬國勢日強，先征服了意大利全部，繼即征服希臘、埃及、迦太基 (Carthage) 諸國，其領土東至小亞細亞、敘利亞、埃及，南達非洲北部，西達西班牙，北至法蘭西、英格蘭諸地，爲一地域極大之帝國。

依國力之增加，羅馬文化也漸漸進步發達。不過羅馬文化和希臘不同，他們是重實行的民族，故關於實際生活方面的很有可觀，而科學、藝術則很平凡。他們對於政治、法律及社會組織，很有貢獻，而哲學、算學等方面，反不如以前之希臘人遠甚。

希臘人把學問作為學問而尊重，加以研究使得發達；羅馬人卻是善戰好勇，對於學問則缺少信仰，所以在文化方面只是做倣了以前的埃及人和希臘人，沒有獨特的發明。而且模倣的也不過是文學和美術工藝之類，較高等的哲學、算學等學問，卻沒有人去顧到的。所以希臘時代發達的算學，到了羅馬時代，突然停滯了，或竟可以說是衰退了。所幸東西洋交界地的亞歷山大城還有那所大學巍然獨存，遺留着若干很熱心研究算學的人。羅馬人算學的殘留，或羅馬算學的惠及，是近乎沒有的。

2 羅馬數字

羅馬人沒有留給我們以什麼算學上的遺產，只有一種我們現在還可接觸到的，那即是羅馬數字。

我們常見時鐘的面上記着的字碼有些是

I II III IV V VI VII VIII IX X XI XII

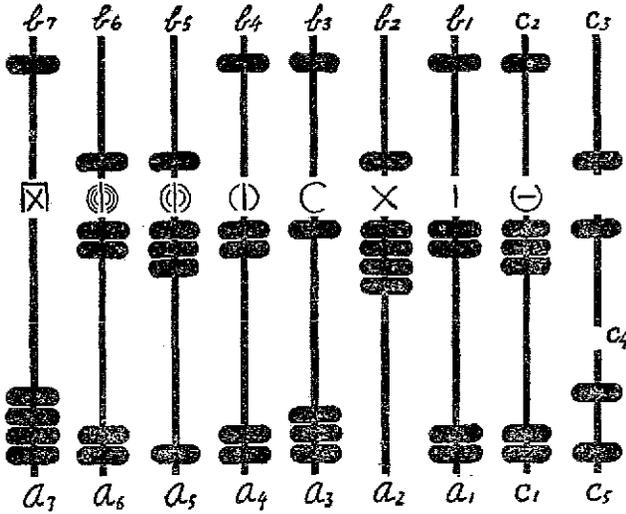
這些便是羅馬數字，表示 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 各數的。羅馬人的新發明，恐怕只有這點罷了，而且這也是到了後世很加過一番改良後的面目。

這羅馬數字的記數法，是每逢 5 用一個別個記號，而進一位，即是一種五進法。從 I (一) 到 V (五) 到 X (十)，X 到 L (五十)，L 到 C (一百) 這樣進位的。我們現在所用的命數法是十進法，每逢十纔給一個名稱而進一位，如一、十、百、千、萬，每逢十進位的十進法。這是很便利的，像羅馬人的這個五進法是不很好而且太複雜。羅馬數字的這種記法也很不好，繁複而費時，近來是很少使用的了，即在時鐘上現在也不很用到了。這種複雜的數字，總以避免爲是。

總之，羅馬的算學很幼稚，可以爲我們現在的研究作參考的，簡直沒有。

3 算盤 (abacus)

羅馬人有一種計算的器械，他們日常使用，學校中也教授。這不是他們所發明，是得自希臘的。希臘人很早就使用此器演算，即以小石子作碼，放在刻有格子的沙盤上，其第一格爲單位，第二格爲十位，第三格爲百位，依次上昇，每一石子表一，在單位上有了九子時再不能加上，要加一必須去九子而於十位上置一。古埃及人也有此算盤，惟埃及以極左之格爲單位，而希臘人則以右方之格爲單位耳。



此種算盤後來加以改良，將各格分爲上下二段，下段每子作一，上段每子作五，以減少所用石子之數。也有不用沙盤而用金屬之平板，於其上挖

溝槽若干條以代格子之用，碼子即放在槽中而計算焉。此爲羅馬人所改良抑希臘人所改，已無可考，惟羅馬人則於盤面各槽間或格間刻了數字，示下段每子之值，又於右方添設表分數之格二，以合他們實際的應用。

上面圖中 b_7 到 c_5 各線槽是表示一到百萬的各位數，在下段 a_7 放四子，上段 b_7 放一子，各表一及五。在右面的二線溝，各表單位的分數， c_1 是表 $\frac{1}{12}$ ，共放五子；其上段的 c_2 每子作 $\frac{6}{12}$ ，放一子。最右一格 c_5 一子表 $\frac{1}{24}$ ，一子表 $\frac{1}{48}$ ， c_5 二子各表 $\frac{1}{72}$ 。

在上圖算盤上所表示的數是 792192+

$\frac{3}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{72} = 782192\frac{11}{36}$ 。用這算盤可以計算加減法及簡單的乘除法。算盤上的碼子叫做 *apices*，在計算乘除法時，大約是用九九表及補數，而用連加及連減之方式出之。

4 十二分數

在上面的算盤面上，有以十二進位的一項，可見此以十二為分母的分數，羅馬人是常用的。十二進位的數系統，倘使能完全組成，本是比十進法更屬理想的東西，不過羅馬人只用了此一種分數而已。因為在日常的使用，往往分單位為二、三、四、六等為最普通，十二進位之分數，實較十進更為簡易，因在十二進位各為 $\frac{6}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12}$ ，而在十進位法則各為 $\frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}$ 也。從 $\frac{1}{12}$ 至 $\frac{11}{12}$ 他們各有專門的名稱。

羅馬人以一磅重之銅塊，叫做一愛斯 (*as*)，分為十二恩仙 (*unciae*)，而一個恩仙為四西西利西 (*stilicis*)，二十四斯克里波里 (*scripuli*)。於是把 1 叫愛斯， $\frac{1}{2}$ 叫賽米斯 (*semis*)， $\frac{1}{3}$ 叫脫利恩斯 (*trions*)， $\frac{1}{4}$ 叫卡特倫斯 (*quadrans*) 等。此十二個以外 $\frac{1}{24}, \frac{1}{48}, \frac{1}{72}, \frac{1}{144}, \frac{1}{288}$ 也都有特別的名詞。這樣的分數，其加減是很簡單了，但乘除則頗煩複凌亂。分數的計算，在學校中，屬於主要科目。羅馬文人賀拉西 (*Horace*) 嘗記錄當日在學校時師生問答之詞如下：「令阿平納斯之子告我，若從

五恩仙減去一恩仙則餘數爲何？曰三分之一。善哉，汝堪勝管理財產之任矣。然若以一恩仙加則爲何？曰二分之一。」

除此十二進位之分數外，羅馬人在算學上，殊無絲毫供獻，雖然羅馬帝國很強很大，在歷史上煊赫一時。

二 印度

1 婆羅門 (Brahmins)

繼古代希臘人之後，研究算學，使這門學問發達的人種，是和希臘人同出一系的印度人。在希臘凡屬市民人人可以自由研究學問，在印度則人民階級地位尊卑之分別極嚴，不是人人可以研究學問的，即使有志學習，地位低微的人也沒處去求教，即使人有意傳授，社會習慣也不許。

那麼怎樣的人纔可以自由研究呢？那只有王族和婆羅門僧侶。婆羅門是印度的宗教，階級的地位比王族更高，受人民之供養，十分尊貴。

僧侶因為空閑的日子很多，故以研究天文學作消閑。印度僧侶以太陽、月亮及星的發光為第一件難解之事，更加是日沒之後，這許發光的星以時圓時缺的巨大的光體，感到奇妙不可思議，對於這些天象的研究就很熱心。

2 算術及代數

研究天文學的結果，算學作爲副產物而出來，印度人不把算學作爲算學而研究，因爲研究天文就不能不涉及算學，他們的目的，原不在算學。這是和希臘人不同的。希臘人把算學當做一種獨立的學問而研究，印度人則由必要所逼迫而研究。因爲二者的出發點不同，所以其間很有不少差異。

不過印度人所致力研究的天文對於世人一點沒有益處，反而是其副貳的算學，對後世世界人類給以大利益的。

那麼印度人研究的算學是什麼呢？那是以算術、代數、三角爲最主要，特別是印度的算術和代數，在世上頂有用。就是現在我們所學習的算術和代數的源流，實在都出於印度的。

埃及和希臘比印度發達得早，也更文明開化，但算術和代數二科目，一點也不進步發達，現在想來不是很奇怪的嗎？

3 數字零及零號

要問爲什麼埃及和希臘的算術、代數不發達，反而文明程度較底的印度發達了呢？這是因爲在

埃及和希臘都不曾有表示數的簡單的記號發明，而在印度卻早有了便利且簡單的數字。

我們現在所說的算用數字或阿剌伯數字，其實是在印度數字，最先是在印度發明使用的。即1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9的九個數字及0的記號，在一千四五百年之前，早已在印度完全發明而且使用了。所以那是不應叫阿剌伯數字而應該叫印度數字的。頂可笑的還有人會叫這些爲羅馬數字，這是很大的錯誤，完全是纏錯的。羅馬數字原另有其物，現在還不會全滅，在上一節中我們已經說過了。

有了1到0的數和0的記號，把來混合使用後，任何巨大複雜之數，都可很簡單容易地表出來，致使算學本身變得很容易，於是方有快速的進步。

這數字的發明人是誰，現在已無從考查，時代也不知道，不過確知其出於印度耳。

用了1到9的數字和0，去計數和想出逢十進一位之法，是一個很大的發見，現在雖則七、八歲的兒童也不消一個月就能弄得清楚，很使人會想做是極容易的。可是此種發明在古代是許多學者費了不少心血，經幾千年之後纔想出來的，開始時決不容易。而且從1到0的數字發明之後，再去發明個0，也要千餘年工夫，不過僅是一個0的記號。在1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9幾個數字發明時，0還不會被使用的，那時只用1到9的數字來表示大數，便不用着很麻煩的方法。

現在我們看起來，這些發見像是很多小無足道的，不知這對於世上的功用卻很大，我們應得感

謝印度人。

那麼爲什麼印度所發明的數字又稱爲阿剌伯數字呢？這因從印度先傳到了阿剌伯，而歐洲卻是從阿剌伯再傳過去的，所以歐羅巴人便叫做阿剌伯數字了。

4 π 的數值

印度算學家中頂有名的是阿爾耶婆哈答 (Aryabhata)、伯拉美格答 (Brahmagupta)、巴斯加拉 (Bhaskara) 等，這些人的詳細歷史是失傳了，不過他們都是很大的學者，卻由一事可以知道。即希臘學者以苦心研究而還不能發見的圓周率 π 之值，印度學者卻已發見了。

阿爾耶婆哈答的 π 用 3.1416 的數值，這是和我們目下所常用一樣的。巴斯加拉以 $\frac{3927}{1225}$ 爲精嚴之值，倘不要什麼精密的則 $\sqrt{10}$ 也可以，這 $\sqrt{10}$ 不就是和希臘的大學者亞幾默德所發見的共同嗎？

由此可以知道印度的數學是怎樣發達了。印度人比較又是頂喜算術，我們現在所習的算術，就叫他做印度算術也未始不可。

5 印度算學衰頹的原因

印度的算學是這樣發達的，倘使能一直維持而發揚光大，對於世上真是不知怎樣有益理。但後來反是停滯而退步了，是很可惜的。其故何在？即如上所述：第一，因以天文為主體。所稱爲算學家的，在他們都先是天文家，故不是專門研究算學。第二，因爲學問限於王屬及僧侶，爲少數階級獨佔，所傳不廣，爲學難繼。第三，印度人所發見發明的事項，不明白記載，祇作詩記之，言簡意賅，不能暢達；因此計算方法與理由等，每多失之含混暗昧；這些詩在他本人或有相當學識之人，讀了也許可解，否則便成爲神話一般，莫名其妙，所以要理解算學很是不易，即有要研究之人，也因爲學習不易，往往中道而廢，漸至凌替。由此可知學術之獨佔與思想之箝制，實爲使文化凋凌衰頹之最有力量之手段，以復興文化爲名而行箝制思想之實者，應知有所警惕。

印度學術的衰頹，正和埃及一樣，凡是一種學術被一特權階級獨佔之後，便有不能繼承守成的危險，更何論發揚光大。所以說學術思想，是天下之公器，不能因爲個人之好惡，而加以人爲的摧殘。凡限制思想自由者，都是愚蠢不堪舉動，適足以自害自戕而已。歷史上不知給了我們多少回反覆的教訓了，而仍有至死不悟之徒，與夫仰體上意奉行惟謹之走狗，悲夫。

一二 算術和代數的源流

1 算術的發明

西歐的文明是埃及、希臘、波斯、羅馬這些稱霸的大國，依次相遞的繼承下來，算術應是在這些地方發達起來的了。

但是我們現在所用的算術，決不是起源於此等國家的，反而是由文明程度較低的東方國家先發明，再向西傳播而流傳到歐洲，在達到歐洲時，早經形成了完全的算術體系了。

算術實在是印度人發明的。

印度人開始研究算術的三千年前，在埃及早已有了同樣研究。而且傳到了希臘，希臘人也很努力，繼續研究。

而且希臘人本是文明程度很高的，一切的學問都有了長足的進步，特別是幾何學頂發達。可是算術卻不行，差不多毫無進展，和算術有密切關係的代數學也同樣，那是什麼理由呢？

便是因爲那聰敏的希臘人也不會發明表數的簡單而適當的符號。埃及人、希臘人、波斯人都用文字來表數；不但此也，就是連運算也用文字記述出來，因之算術弄得非常複雜，學習很麻煩，因而學習的人很少，便不能進展了。

2 印度算術的優勝

在印度卻有了很簡單的符號來代表數，我們現今所用的數字即是。因爲有了此種數字的發明，算術所得到的便利是很多的。

印度最先所發明的數字，是從「 1 」到「 0 」的數字，和代表十、百、千的位的各記號，先用這些數字和記號來表數，因爲還沒有零號，所以也不甚簡單。

什麼人發明此種數字和在什麼時候發明的，都不能考查了。不過現今所有的算用數字是在印度發明，而發明的時代在西曆紀元第一、二世紀以前，卻是可以斷言的。

其後到了第六世紀，出了大算學家阿爾耶婆哈答（生於西元四七六年），此人似乎知道用「 0 」的記號，而且似乎知道用了「 0 」和數字就可以表示十、百、千等位。

在第七世紀是印度數頂興盛的時代，這時候有大算學家柏拉美格答（生於西元五九八年）。

在柏拉美格答的時代，這○的記號已經完全發明而千百千萬等定位的原理也已經闡明了。現今所用記數法，是在那時候完成的。

用了1到○的數字和○的記號，應用了定位的原理，無論任何大小的數，都可以容易記出，這是印度算術進步到今日算術的最大原因。

不過用了1到○的九個數字和一個○的記號，一切數都可以表示出來，那是多麼便利呢。埃及算術、希臘算術和印度算術優劣的分歧點即在此點。

數的記號完成後，計算十分容易，因之印度人除加減乘除各算法之外，利息、折扣、混合、等差級數、等比級數、開平方、開立方、順列、錯列等各方面，凡是算術可以涉到的，他們都踏到了。

實在埃及人、希臘人、羅馬人費了三千年的長時間所還不能達到的地方，印度人很不費力就達到了。

以後印度的算術傳到了阿剌伯，再傳到了歐洲，歐洲知道了印度算術的優秀，便採用了。以代以前所用的埃及、希臘、羅馬的算術，再加以改良進步，而發達到成爲現在的算術。

3 代數的起源

代數學的起源是在紀元三、四世紀頃的後期亞歷山大大學。

在埃及不必說，即是希臘、印度等，古時的代數也是和算術混在一起的。不是像現在那麼成爲一科獨立的學問。代數不過附屬於算術的一分科，也是和算術一般用文字說明理由，以文字解題。

那時有個大算學家出現，把代數學從算術分離出來，使用符號以表代數學上的量及運算，使此科有很大的進步。

這人是第三、四世紀頃住於亞歷山大城的狄奧芬多 (Diofantus)。

狄奧芬多是後期亞歷山大大學最後而且最大的算學家。此人出生的故鄉已無從考查，他父母的姓名和他生卒的年代也都不能明確知道。但知其在西元三百三十年頃以八十四歲之高壽死去。由一墓誌得如下之事實：「狄奧芬多氏之一生，幼年佔十二分之一，青年佔六分之一，獨身時代七分之一有餘，結婚五年後生一子，子先其父四年而死，得其父年齡之半。」他的著書不是用希臘文寫的，好像不是希臘人。

狄奧芬多著書極多，現今所殘存的不過很小的一部分。他的著書中頂有名的是叫「阿里四米的加」(Arithmetica)的代數學十三卷，現只存七卷，這七卷是比別的萬卷更重要的寶書。

因爲除了四千年前的埃及僧侶亞麥斯所輯的「探求一切難事物的指針」那冊包括算術、代

數、幾何等等的書而外，此一阿里四米的加一，是現存代數學的頂古的教科書了。而且此書中是用略字以表示數的運算的，故狄奧芬多的代數學，叫做略字的代數，而尊他為最初於代數用略字的人。

狄奧芬多是知道正數負數的第一人，他也知負數再以負數乘，所得的乃是正數。

但可以注意的，他不採用負數作答而把負數看作無意義而放棄的。

他不但解了一次方程式，而且也解了二次方程式。不過二次方程式所有二根，他只求一根，對於另有一根他未加注意。

在狄奧芬多以前的學者，差不多沒有人知道代數的，也說不上知道，竟可以說以前在算學中沒有這一個科目。許多希臘的算術家中，只有他一人發揮出他的特色來，其他的人都研究幾何學或算術，研究代數的人竟然沒有。

恰巧當時在印度代數學的初步已經發達，所以有人疑他的一部分，是從印度學問中傳來的。那麼印度的代數學又怎樣？

4 印度代數學

印度的代數學也和狄奧芬多的一樣，用了略字以表示運算方法。倘使一個問題中有若干未知

的數，則黃、青、赤、黑等字代表之。

主張在數除了正數以外必有負數的，也是印度人。這正負數的說明，用積財和借債，積財爲正數，借債爲負數。或畫一直線，以中央爲0，向右方爲正數，則向左方爲負數，印度人是用此種說明的。

此外還可以證明印度人代數的進步，是他們知道解二次方程式必得二根。

但印度人也和狄奧芬多一樣，不承認負數根的存在。巴斯加拉的話：正數或負數的平方，均得正數，一正數的平方根有二，一是正數，另一是負數，而負數的平方根則不存，因爲負數不是平方數之故。

5 代數的停滯

印度的代數和算術同傳入阿剌伯，阿剌伯人混合印度的代數和狄奧芬多的代數再傳入歐洲。代數傳到了歐羅巴之後，有很久長的時間停滯了沒有進步。因爲那時歐洲亂離相繼，稱爲黑暗時代。當時做官的只知貪受財寶，奢侈逸樂，武人爭權奪利，日以殺伐爲務，僧侶也毫無道德，欺壓平民，哄騙錢財，一般人民困苦顛沛，受着貴族階級的高壓，喘息不暇，誰也沒有研究學術的工夫。因之代數學和印度人與狄奧芬多發明當時無異，只計算正的數。

代數真個發揮代數學的面目，是在正數負數的意味完全明瞭之時，於此得了完全的理解和應

用，而且用字母來代表數和量，這是起於十六、七世紀到十八世紀方得完成。

即代數學的完成，尚不過在二百年前，現在已發達得令人驚嘆，其廣大與深奧，已非平常人所能窺見了。這都是近代自由研究的精神所賜，不受何種外面的制限，自然欣欣向榮，枝繁葉茂了。

三 阿 刺 伯 (Arab)

1 回 教 的 興 起

在羅馬有一句諺語流傳到如今：「苛洛修姆 (Colosseum) 如有倒塌之日，羅馬也將滅亡吧。」苛洛修姆是羅馬的大劇場，為阜斯巴辛 (Vespasian) 帝所建，是把尼祿 (Nero) 帝的庭園改造的，全部用石建造，中央為圓形競技場，座席在其周圍，作向後漸高的式樣，開工於紀元七〇年，至八二年始告完成。為六二〇呎與五一三呎的橢圓形，統共四層樓房，競技場有二八七呎乘一八〇呎之廣。是一牢固偉大的建築。

他們在這個建築物中，表演着動物的鬪，動物與人的鬪，甚至人與人的鬪，作為生命生殺的場所，而高貴的人們，則在四周的安適座席中，含笑觀覽以為娛。

這個苛洛修姆現在還巍然存在，而羅馬已在一千五百年前滅亡了。羅馬亡後約一千年，中間歐洲紛亂如麻，世稱黑暗時代。

這時候東方的邊隅，有燦爛的光明，不受絲毫搖動，那實在是薩拉森文化。

看東方地圖上有阿剌伯和波斯二國，這二國都是在很大沙漠間，大家一定以為國中有這樣的大沙漠，終不過是沒有關係的國度，可是實在並不如此，現在雖然是很弱的小國，在一千年前，卻是世界上很大的文明國家。

西曆紀元六世紀頃，阿剌伯的麥加（Mecca）地方，有個貧窮的趕駱駝的伙子叫摩罕默德（Mohammed），他有一天偶然心有所感，入山祈神，得了天使的啓示，遂下山向人宣說教理，自稱天神所降的大預言者。

但麥加地方的人民，輕侮他素日的貧苦，不信他的話而且謀加不利於他，因之他避地而到麥地那（Medina）。

在麥地那地方，摩罕默德仍宣說他天授的教義，得了一般人的信仰，由信奉者的維護，結成了一大宗教，不久擴展到了阿剌伯全國。

摩罕默德的教即是回教，或稱回教，或稱清真教門，或稱伊斯蘭教。

回教中人以摩罕默德避地麥地那之年為回曆紀元叫做海基拉（Hijra），這回曆紀元正當西曆紀元六百二十二年。

阿剌伯人民本來散漫如沙，從回教出現後，卻有了一個共同的信仰，便團結起來了。宗教力的團結本領很大，他們要把回教擴張到全世界，所以右手執劍，左手執摩罕默德所傳的可蘭經 (Koran)，喊着「信奉可蘭經否則就死」的口號，大舉侵寇敘利亞、美索不達米亞、波斯、印度等遠地各國。

世上總是貪生怕死的人多，所以說信了可蘭經可以放生，不信就要殺，大家便不得已而來信可蘭經了，於是回教擴及於世界，在他兵力所及的各地。

2. 薩拉森 (Saracen) 文化

回教徒摩罕默德為王，建立薩拉森王國。於離古巴比倫不遠之處建設報達城 (Bagdad) 為國都，為回教文化之中心。回教因有輕死重戰的教訓，勢力頓盛，摩罕默德死後，繼位的領袖都很英明，他們展拓疆土，侵入埃及，燒燬了亞歷山大城，破壞了亞歷山大大學。再侵掠到西班牙地方，不久也建立了一回教國為薩拉森的屬國，以哥多瓦 (Cordova) 做首都，獎勵文學、美術和科學，成為中古歐洲文化的中心。

阿剌伯人的戰功，如入無人之境，在短年月之間，造成了一個大帝國。

比這更堪驚異的，是本為遊牧之民，卻能迅速接受各國的文化，很快地建造了他們的文明。

他們移入希臘、印度、羅馬等文明國的學問，很熱心修習，極有成功。他們把印度、希臘、羅馬的有名著作，都譯成阿刺伯文，而且加以研究，以致本來的文明國人，反要學習了阿刺伯文來誦習阿刺伯人的著作了。

這是薩拉森文化，在歐洲中世紀黑暗時代，這裏點燃着文明之光，後來歐洲人反要到回教文化中心地的報達哥多瓦等處來求學問。

我們只說和算學方面有關的。

3 算學及數字的改良

阿刺伯人本來是以牧畜爲業的游牧民族，沒有算學的學問。數是用文字來記載的，所以很複雜，只有極少數的商人和印度有貿易關係，稍微知道些算術。

以後征服了別的國家，疆土漸大，知道沒有學問是不易治國的，算學也有必要，所以從印度去招聘學者來，並且聘請以前是亞歷山大大學教師的人來，努力研習算學。

更因爲回王爲了學者們建造圖書館、天文臺，很優待他們，於是各地學者都來集，差不多把印度的書和亞歷山大大學裏所有的書都翻成了阿刺伯文。

阿剌伯人知道這些算學中是印度算學頂傑出，對於天文學以外的學問，全部採用印度算學，有些地方當然也用希臘算學的。

特別因為印度的從 1 到 9 的數字和零的記號，位的原理，弄得很好，所以採用而改良之，現今我們所用的完全數字，實在是經了阿剌伯人改良的那些數字。

這樣把東西洋文化融貫通而成一種統一的薩拉森文化。

4 代數原始

阿剌伯人當中最早的大算學家叫穆罕默德·本·姆沙·阿勃·雷發耳·阿爾加李斯米 (Muhammad ibn musa abu Djefar Alkhwarizmi)，這名字太長，通常就叫阿爾加李斯米 (Alkurismi)。他生存於麥奴王 (Al-Mannu 813-833) 統治之時，被任為圖書館長，曾隨到阿富汗及印度等，於西元八三〇年頃回報達。阿爾加李斯米有許多關於天文、算術和代數的著書，特別寫了一本代數教科書，很有名。

這本書就叫代數學，是融合了印度和狄奧芬多的知識而著作，代數學的名稱就是從這書起源的。代數原名的 Algebra 即是從阿爾加李斯米的書名 Al-jabr w' almuqabala 出來的。該書的譯為

拉丁文，只取了第一個字作書名；原來書名中的 *Algebra* 即是以同量在方程兩邊加減之意，即是移項；而 *Almugabala* 是把同種類的項合爲一項，即簡約同類項，這是解方程的基本算法。

這書是很有名的大著，此後五六百年間，不但是阿刺伯人，即歐洲人也以此書爲教本而研究代數學，可以算是代數學的祖宗。

5 結 語

這樣，阿刺伯人將東洋、西洋二種文明融合了，應該有新的發見發明來光大這文化了。可是他們沒有什麼可記的新功績。

阿刺伯人雖則善於模倣文明國，但缺少自己創造的力量，所以他們只是繼承而研究希臘、羅馬和印度的文化，並不會自己去創造出阿刺伯的文化來。

希臘、羅馬及印度的學者所走過的路程上，阿刺伯人再去細搜了一遍；換言之，阿刺伯人不過將以前的文化蒐集而保存之，再傳給他人罷了。

後來阿刺伯人又將此文化交代給歐洲人了，此後阿刺伯又沒有什麼文化了。

一四 黑暗時代 (The Dark Age)

1 人種大移動

西曆第四世紀到第十世紀中間，歐洲有很大的亂動。在歐洲北部，有日耳曼民族 (German) 以牧畜及搶掠爲生，時常侵寇羅馬，深入羅馬國內扶植勢力。

日耳曼民族中有哥特人 (Goths)，住北海北岸，萬達人 (Vandals) 住波羅的海沿邊，法蘭克人 (Franks) 住萊茵河畔，撒克遜及盎格魯人 (Saxons and Angles) 住現在丹麥地方。

紀元三世紀後，東方的蠻族匈奴西侵，佔黑海南岸，逐哥特人，哥特人逃入羅馬，打破羅馬軍，攻佔許多地方，建立哥特王國。萬達人也侵入西班牙，併入非洲，也建立萬達王國。撒克遜及盎格魯人也因羅馬撤退不列顛戍兵，建立了盎格魯撒克遜王國。

這時各民族因被侵掠失去原住的土地而流亡到別處去佔據新土地，即叫人種大移動。羅馬的官吏只知望風逃避，只苦了許多百姓，爲征服者魚肉，而所存之羅馬文化，也就給野蠻的日耳曼人掃

除無餘。羅馬帝國和別的國度，大都為蠻族所滅，羅馬只有教皇保持了意大利一隅之地。

這個時代史家叫牠為黑暗時代，自西曆紀元四七六年以後的三四百年，歐洲的情形，的確不堪，但見野蠻民族到處殺人搶掠，全歐洲墮入了黑暗之境，因舊文化完全破壞而新文化還不會建設起來。

2 阿刺伯算學的翻譯

西曆紀元四世紀到十世紀中間，研究學問的人可以說一個也沒有，到了十世紀末葉，纔有一個吉爾伯 (Gardar) 出來，算是當時的大學者了。

吉爾伯 生於奧佛涅 (Auvergne) 的奧理拉克 (Aurillac)，受教育於修道院，其後學於西班牙，以修習算學為主。回國後在理姆 (Rheims) 學校中，任教十年，其博學為人所重。鄂圖王 (Otto I) 命為該地主教，後昇為羅馬教王，即西維士德第二 (Gyoster II)，卒於一〇〇三年，其一生飽嘗政治糾紛與宗教之競爭。

他雖不過懂了些羅馬的算學，現在看來很是平凡，但在黑暗時代吉爾伯 算是大名鼎鼎的了。許多無知的人，還說他和魔鬼交通，故有此智慧，他的聲名，幾遍全歐，故法蘭西、德意志、意大利 等各國有

許多學者來從他受教，他也很熱心講學。後來這些門弟子知道羅馬算學的不夠，便開始學習阿刺伯算學。這已是西曆十二世紀的事了，距今不過八百年。

因為了這緣故，阿刺伯算學著作很多譯成拉丁文了。第一個把阿刺伯算學譯成拉丁文的是阿綏拉特 (Abelard of Bath)，約在十二世紀之初。此人曾旅行於小亞細亞、埃及、西班牙等地，冒了千難萬險，去研究阿刺伯語，終於把歐幾里得的幾何原本及其他的書，翻譯了出來。

此後許多學者繼續翻譯阿刺伯的書冊，又將阿刺伯數字即印度數字和 0 的記號，完全移入了歐洲，於是算學逐漸進步了。

特別是十三世紀的羅馬皇帝腓特烈二世 (Frederick II)，十分注重學藝，於那不勒 (Naples) 及巴杜亞 (Padua) 二處，各創設一所大學，招請了許多學者來譯阿刺伯書本，歐洲纔重見文明之光。

3 雷奧那特 (Leonardo of Pisa)

當黑暗時代告終之際，第一個首先負荷了促發歐洲算學復興的大事業的人，便是雷奧那特。

雷奧那特又名非波那西 (Fibonacci，意即 Bonacci 之子)，生於意大利的比薩，他的父親是一個工廠書記，他叫雷奧那特從小就練習算盤。這小孩對於算學感到很大的興趣。

此後他旅行於埃及、敘利亞、希臘、西西里等地，這些地方本來是算學很發達的，所以他能利用空暇去搜羅殘留下的學問，他十分努力，所以不久就成了大算學家。

他知道關於計算方面要推印度算學頂秀出。

後來回故鄉，在一二〇二年著了一本書叫做「算盤大全」(Liber Abaci)，一二二八年出其改正版，這是一本述阿剌伯人所知的代數和算術的學問，但他自己的方法寫出，並不踏襲陳套，和他的別種著作統看起來，他確是很有創造之才，不像那中世紀的一般學者，只襲用前人著作的舊形態。

在這算盤大全中是歐洲人用今日的算用數字和0的記號寫作算術和代數的第一本書，而且其內容很正確，又很精到地述印度和阿剌伯的算學，此後長時間被用作算學的教科書，凡要研究算學者，必先讀此書。

雷奧那特已成為歐洲一流的大算學家，以後還著不少關於算術、代數也有關於幾何、三角的書。這樣雷奧那特著作了許多書，以後的算學總該有大進步了，可是事實不然，因為此後的二百年間，又有混亂的大戰爭，歐洲還不得乾淨。

無論怎樣的戰事，都是文明的障礙物、破壞者，過去的歷史已經替我們證實得很明白了。頂可怕

的，尤其是混亂的內戰，中國文化的時時停滯，沒有發展，也大都由於間歇地發生戰爭之故。我們對於
勇於內戰的大人物，敢致其深惡痛疾之意。

一五 文藝復興 (The Renaissance)

東洋和西洋交界地方，有個君士坦丁堡 (Constantinople)，此城建造於極佔形勝險要之地，無論從海從陸，都不易攻打，以平常的戰術去對付，是可稱金城湯池的堅城。這個君士坦丁堡是東羅馬帝國的首府，橫隔了東西洋的交通，保藏着希臘文化。

到了西元一四五三年，突厥人用大炮打此堅城，終於把牠攻破了，佔領了君士坦丁堡，東羅馬帝國滅亡。用大炮攻城以此爲嚆矢。

君士坦丁堡的陷落卻偶然幫助了歐洲學術文明的進步。因爲多數的希臘上流社會人，把他們所寶藏的書，帶了逃歸意大利，這種典籍，就有流播於歐洲各地的機會了。

那時的歐洲是戰征殺伐血腥刺鼻的世界，完全不看重學問，有之，也不過從阿剌伯書中得來的不甚可靠的東西。現在來了從君士坦丁堡逃歸的希臘人，可以由希臘文字直接研究希臘的古書了。

西元第十五世紀中葉，哥丁堡 (Gutenberg) 已經發明了用金屬鑄造活字，印刷術頓時發達，書籍的出版成爲十分容易，故書價大賤，而且出版很多。這對學術的進步發達很有幫忙。

出。十六世紀後半，歐幾里得的名著原本從希臘文直接翻譯出來了，其後許多希臘書冊，都陸續譯

而且這時哥倫布（Columbus）又發見了美洲新大陸，接着麥哲倫（Magellan）環航全球一週成功，世界各國的人逐漸接近，學術的交換頻繁，人心成爲進取向前的，對於各科各種學問也熱心研究了。因之長久停滯了進步的算學，突然也有許多人去研究了。

*

*

*

天亮了，歐洲各國人民漸漸從長眠中醒覺過來，不久太陽在東方昇起來，射照眩目的光線於歐洲，大家都得來開始工作了。熟睡之後，得了新鮮空氣，人人都元氣旺盛，可以努力工作。

其中活動最出勁的推意大利人，不久又傳播於德意志、法蘭西及英吉利的人民。

這就叫文藝復興，原名 Renaissance，原來是再生的意思，或者可叫復活，但依事實情形，通常都稱文藝復興。

到了文藝復興時代，在代數學上發明了記號法的解法，而且再作進一步的研究，高等代數學也出現了。幾何學完全把希臘人的古書復活了，大家從事於研究。三角也有進步，與我們日常頂有關係的算術，差不多在那時代已經完成得和我們現在所學習的一樣了。而且算學又被廣泛地應用於天

文學、物理學等別的學科，而促其進步發達。

實在只有很短的時年月，算學上的各專門，都被上了新裝，擴大了範圍，頓改舊觀。

可是在文藝復興時代，也有許多悲慘的事實，當時的學者們，大都有隱祕他們自己的發明發見而不傳授他人的習癖，因之同一事項，有許多人同時發見發明，到後來爭奪那發見的榮譽，一人說「是我最初發見的，」又一人說「你是偷了我的，」此種偷竊的爭論，常常使得有許多學者悶悶而死。

*

*

*

文藝復興時代的算學家甚多，其中特別有名的可舉出的如雷吉奧孟塔努斯 (Regiomontanus 1436—1476) 塔塔格利亞 (Tartaglia) 加爾丹 (Cardan) 韋達 (Vieta) 奈比爾 (Napier) 布里格斯 (Briggs 1556—1631) 哈里奧脫 (Harriot) 奧脫雷脫 (Oughtred 1576—1660) 伽利略 (Galileo 1564—1642) 凱伯勒 (Kepler 1571—1630) 等。

今將此等算學家中更為人熟知的若干人略言其大概於次各節。

一六 塔塔格利亞 (Tartaglia, 1500-1577)

1 口吃的人

意大利的小鎮布勒西亞 (Brascia) 地方有驛伏之子名叫尼可洛 (Nicolo Fontana) 者，當他還是六歲的小孩時，逢到意大利和法蘭西開戰，布勒西亞忽為法軍佔領。當時鎮上的百姓，爭先奔到寺廟中避難，尼可洛也由他父親負了，逃入寺中。

當時教權極盛，無論怎樣的大罪人，若逃入寺中，吏役便不能進去捕捉，他們以為縱使法軍蠻野之極，也不敢到寺中來殺人的，所以男人感到危險，以為逃入寺中便可以免死了。可是法兵是不管這些的，見人便亂殺一陣，不論是無罪的百姓，也不問老弱稚幼，只是一味殺，殺。

當法兵退出後，尼可洛的母親掛心去看看，可是怎樣的一種慘狀啊！尼可洛就在父親懷中與父一同被斬殺了。這尼可洛頭上受傷三處，下顎、上顎也都被割碎，母親抱尼可洛大泣昏去；醒來時，卻覺到小孩身體尚溫，心裏便存了一線希望，抱回家中想他活轉來仔細調護。真個尼可洛到活了轉來，母

親的喜悅不言可知。他們是做驛伏的家庭，貧困可知，沒有錢求醫，也沒有錢買藥。

母親就心這些傷處如何可以醫好，她看見狗和貓受了傷，常用舌舐傷處而得收口全好，於是做做着用舌去舐那童孩的創傷，作為治療的手段。

孩子的傷果然被她舐好了，幾個月之後，傷口完全平復，不過此後的尼可洛卻成了有殘病之人，因上下顎的傷，使他說話不靈便，而且發音不清楚，並有些口吃的樣子。因為他的口吃，人家就給他取了一個混名叫塔塔格利亞，意即口吃的人。後來本名的尼可洛，反而不彰，倒是塔塔格利亞的名字為衆周知。

塔塔格利亞的母親想送兒子入學校，但因貧不能具束修之敬，所以無法可想，孩子只能借了小友們讀過的破舊書本，或從人家借些舊書來，一個人自學自修。當然先生是沒有的，可是他很肯學習，只要是比他多懂一點的人，他就去請求教誨指導那不明白的地方。

買紙也沒有錢，他把父親的墓石代紙，用小石條去寫，寫滿了拭去再寫，軟的小石條在硬性石面上可以寫得很顯明，如用石板、石筆一般，塔塔格利亞每天如此用功。

塔塔格利亞如此專心用功，又加他本來天分極高，故學問大進，雖則家貧，他仍安心修學，不到三十歲就做了威尼斯的算學教授。

2 算學比賽

塔塔格利亞還是小孩子的時候，意大利波羅尼（Bohenna）大學的算學教授叫菲洛（Scipione deo Ferro 1465-1526）的，研究阿刺伯算學，造詣極高，知道三次方程式的解法。他把這個難問題的解法，傳給了他的弟子佛羅里達（Florinda），並不會公開發表而逝。因之這時知道三次方程解法的人，在廣大的歐洲，只有佛羅里達一人。

一五三〇年有一人提出數問題於塔塔格利亞，其中有一題屬於三次方程式，他發見了一個不完備的解法。但向世間公表說他知道了三次方程式的解法。當然佛羅里達不甘示弱，也公言是他纔知道，於是有競爭。

當時塔塔格利亞初任威尼斯算學教授，意氣極盛，目中無人，以佛羅里達是吹牛皮的謬言，於是相約於一五三五年二月二十二日公開比賽，以定勝敗，以見優劣。

他後來聽人說佛羅里達的確由他師菲洛教授了此解法，方纔喫一驚，因為他自己所知道的，也不過是個不完全的解法，後悔其誇下海口，於是再從新臨時抱佛脚大用起工夫來。

到了臨比試前的十日，他纔能發見了三次方程式的比較完全的解法。

一五三五年二月二十二日，比賽在米蘭（Milan）的某教堂中舉行，雙方各出題三十通，規定在五十日內，誰將對方所出的三十個問題解答最多者爲勝。可是塔塔格利亞只在二小時內完全解答了佛羅里達的問題，而塔塔格利亞所出的問題，佛羅里達一個也解不出。於是塔塔格利亞全勝而歸，大喜，作詩以紀其事，於是名噪一國，全意大利無不知其名。許多人都來求塔塔格利亞教示三次方程式的解法。

但塔塔格利亞也照這時的習慣，決不肯輕易教給任何人。

此後他對於三次方程式的研究，更加熱心，在一五四一年，竟得到了一個一般普通的解法，但他仍不願公表出來，他的意思要等他將歐幾里得和亞幾默德的書從希臘文中全譯了出來之後，再自著一部大代數學，在該書中發表他的解法，以爲該書生色。他很安心從事他的翻譯工作。

3 無賴的加爾丹 (Geronimo Cardan 1501-1576)

和塔塔格利亞差不多同時代，米蘭有一個叫加爾丹的。他是某律師的私生子，卻也生性聰敏，雅有才學，不過因爲十六世紀的一般風俗不大好，說謊欺詐視爲常事，加爾丹也未能免俗，他的品性不能說好。雖不致於犯殺人罪，但賭博、欺詐、哄騙、亂吹牛皮、說大話等的事，卻很優爲之。也做卜易看相

的人，頗懂得江湖訣，平常的惡事，是很喜做的。

他後來又做了醫生，在米蘭行醫，忽然對於算學感到了興味，用心研究算學，他是有才能的，所以也很快就成爲算學家，而算學爲職業做了米蘭的算學教授，但生活仍極放浪。

加爾丹渴望知道三次方程式的解法，可是塔塔格利亞終不允教示。於是他用了一個詭計，寫了一封信給塔塔格利亞，他自稱是意大利的一個貴族，仰慕他的聲名，極願意接待他，和他討論學問，請他到米蘭去。

塔塔格利亞接到了此信，當做真有這樣一個貴族，非常開心，就到米蘭去。可是到了約定的地方，見的不是貴族而是加爾丹。加爾丹先是這樣的欺騙了塔塔格利亞。他懇求他把三次方程式的解法教給他，起初是固執不允許，後來加爾丹說：「你教給我後，我決不傳給別人，並且我倘使突然生病死了，也不寫在紙上留着痕跡給後人。」他還立了嚴肅的重誓，塔塔格利亞富於情感，見他如此熱心，就把那個解法教給了他。

可是加爾丹不能嚴守他的誓言，他把這解法傳給了他的弟子弗拉里（Ferrari），而且在他著書「學藝大觀」（Arte Magna）上，發表了這個解法，並於一五四五年刊行此書。因爲他想只有這纔可以增高他書的價值，使他的著作成權威的書，雖則他也在書上說明此方法的發見要歸功於他的

朋友塔塔格利亞。可是塔塔格利亞卻大發怒了，他有一個野心，要做一本不朽鉅著，這念頭完全被打毀了，因為這一個頂可藉為權威的項目，被別人先發表了。而且世上一般盲目的人，還都認為那是加爾丹的發見，加爾丹的聲名大振。

塔塔格利亞先做一本書說述他發見三次方程式解法的歷史，使大家知道三次方程式的一般解法是他所創見的。

4 塔塔格利亞的悶死

可是他還氣忿不過，想先打倒他的敵人，使他出醜，遂向加爾丹挑戰，舉行算學比賽，比賽的地方就是十年前和佛羅里達決戰得勝的米蘭某教堂。

到了比賽的日子，塔塔格利亞滿望可以叫加爾丹當場出醜了，可是加爾丹很機警，自知總比不過塔塔格利亞，所以叫弟子弗拉里代表應戰，以便有遁詞可以推託。

比賽開始了，雙方各出題三十一個，在十五天內解出對方的問題者為勝。塔塔格利亞於七天內解答了大部的問題，而加爾丹一面則經過了五個月還未解答出來，後來解答是送來了，那些答案，除了一個之外，全都做錯的。

可是加爾丹是狡滑之徒，會弄辯舌，因了抗辯申說把比賽的結果胡塗過去了，而且再提出問題求解，於是雙方又互相作繼續的競賽。因此塔塔格利亞雖然勝了，一般人並不得知，仍舊信加爾丹的遁詞，於是塔塔格利亞憤恨不平，更有別的許多不如意事，使他悶恨不堪。

一直到十年之後的一五五六年他纔從惱恨中脫出，開始出版他的著作，可是不能如他之願，還沒完成，沒有發表到他的三次方程式解法，他死了。

塔塔格利亞所著的算術書，雖失之冗長，然蒐羅甚富，頗有精到之處，又集有許多商業上的問題，可以窺見當時的實際社會情形。書中也載有很有興味之遊戲問題，以引人入趣。

現在的三次方程式一解法中，仍有叫加爾丹的解法的，那實在是塔塔格利亞所發見，不過塔塔格利亞的解法是不傳了，是否完全相同，卻不可考。

5 加爾丹的末日

以後加爾丹的名聲日盛，遂做到了波羅尼大學的算學教授。他也撰著了許多書，可是因在一五六二年寫了一篇基督的傳，其中有非難耶穌基督之處，犯了基督徒的怒，被拘逮入獄。從此他便爲一般人所不齒，出獄後，也沒有人去理他了。終於他自殺了。又一說謂他的自殺另有原因，他出獄後，移居

羅馬，復以下占爲業，他的占星在當時很有名，羅馬教王給他年金若干。因爲他預言了自己的死期，但日期近了，他並不死，這與他卜占的名譽有關，故在那時他便自殺了。他實有狂人的氣質。所謂狂人與天才原是很接近的。

加爾丹是一個老賭鬼，嗜賭博如命，而且他肯細心研究，在他死後的一六六三年有一本關於賭博術的遺著出版，其中講述擲兩顆骰子，何數最多出現，三顆骰子同擲則又如何，很有學理的解釋，還有關於把握算（或確率即 Probability）的種種問題，很有獨見。所以即使是賭博，其中也可以有學問，我們不必把眼界放得太狹小，以思想非統於一尊不可，那完全是錯誤的見解。

6 弗拉里 (Lodovico Ferrari 1522-1565)

加爾丹的弟子弗拉里，是很有才能的。他家裏很貧，初爲加爾丹的侍僕，被主人所賞識，許他爲弟子。日三次方程式解法成功後，激動一般算學家致力於更高次的方程式的解法，弗拉里以其卓越之才智，發見了四次方程式的解法，加爾丹也把來收在他的學藝大觀中。這個四次方程式的解法後人是指做旁貝里的解法的。正像加爾丹的解法不是加爾丹所發明一樣，這解法不是旁貝里 (Tappanoti Bombelli) 的創見。雖則旁貝里學問也很好，他在一五七二年出版的代數學是一本很好的書。



一七章 達 (Francis Vieta 1540-1603)

1 尊王論者

西元十六世紀中葉，法蘭西產生了一個大算學家，他的名字叫韋達。韋達初入養成辯護士的學校，卒業之後就到巴黎執行律師職務。再後來做議員，終其生為國家服役。

韋達是一個敬虔的天主教徒，一個非凡的尊王論者，他深信而且極力主張帝王的神聖不可侵犯，君權高於一切。

他過了四十歲後，纔研究算學，稱爲當時第一流的算學家。他的到這地步，是很下了一番苦心苦功的，雖則因爲他興味的所在，十分喜歡，有時候讀起書來，研究起問題來，真個連日連夜不眠不休好幾天儘躲在書房中。

有一次荷蘭公使對法王亨利第四說，荷蘭國中有個算學家羅曼諾斯 (Adrianus Romanus 1561-1615)，以前出了一個算學題目向普天下求解答，法國卻沒有人送解答去。那個問題是四十五次的方程式，不知法蘭西可有數學家，倘使解得出，也送一個答案去便好。——這樣暗諷法國的沒有算學家。

亨利第四聽了這話，心裏非常不快，立刻召了韋達來，命他解這問題。韋達在此時恰好正在研究這一方面的問題，所以立刻在王面前解題，得了二個答數，以後又再求出了二十一個答數，寄給羅曼諾斯去，同時韋達也出了一個題目去請教羅曼諾斯解答，羅曼諾斯寄來了一個遠兜大圈子的解法來，韋達就做了一個十分簡明的解法去給他看，於是羅曼諾斯大驚，十分佩服韋達的才能，特地從荷蘭到法國來致謝他的教示，二人感情很好，一見如故，遂相約爲兄弟。

2 看破密碼

當時西班牙國內有一種用密碼的祕密通信，密碼數一共六百字，其配置的方法常常變更，不曉得底細的人，自然弄不明白的。

有一次亨利第四截獲了這種祕密的密碼信件，可是完全是暗號，無論如何看不懂。於是再召了韋達來和他商量。

韋達想了許多時候，終於把這密碼解決了，不但如此，而且同時明白了那個密碼的配置組織的根本。

後來法蘭西和西班牙之間發生了戰事，西班牙就利用密碼通信，他們當做法國人總不會明白的，豈知事情的結果全出意料之外，密碼的事總被敵人着了先鞭。

西班牙王腓力泊第二很覺驚詫，以為這到底不是人力所能及，法蘭西方面一定有了魔法術士，看破了密碼。

於是去告訴了當時比各國王更有權威的基督教教士的頭腦羅馬教王，說法蘭西叛教，用了魔法術士，所以西班牙喫了大虧，請加法蘭西以應有的制裁。

爲什麼對教王訴說使用魔法術呢？因爲基督教對於施用魔法術要加重罰的，所以想借教王的力量，壓到法蘭西。

3 加號和減號

加號用 $+$ ，減號用 $-$ ，誰都知道的。這些符號一看是很簡單，想起來什麼人都很容易發明得出來的。可是實際很不容易，比之去造出數字來更加煩難。數字是在一千五六百年前在印度已經發明了。一到 ∞ 的數碼和 0 的記號，而加法、減法的記號，是還一直未曾發明的。

看起來雖然非常容易，可是在塔塔格利亞、加爾丹、弗拉里等的時代，還沒有發明。把這記號發明了而使用牠推廣牠的，卻是韋達。不必說韋達以前，原也已經有二、三學者發明了應用着，但他們自己使用，別人是不知道的。韋達則發明了此符號後，深信其簡單和便利，公開傳給一般的人，使大家共用。

所以現在所用的加號、減號的發明和使用，實在還是很近的事，不過三百多年以前罷了。

我們想到此事，可知韋達的功績，是不能埋沒的。韋達還有一種不可磨滅的功績，那是用字母來代一個任意所思的數，極是便利，他也傳勸一般人用，致使代數學得很大的進步。

他還想出表示二乘方、三乘方的特別記號法，比之前所用的，十分簡單化了。

這樣，在代數學上使了許多種記號，韋達促進了代數學的大進步。韋達以前的代數學是用略字，

所以叫略字代數學，那不過是一種簡寫法，仍不脫是文字的代數之域。到了韋達使用記號之後，代數學的面目一新，故韋達以後的代數學，叫記號式的代數學。現今的代數學，可以說全是記號了。記號式代數學的創始人，可以說是韋達。

韋達在高等的算學上，還有很多的發明發見，於西元一六〇三年死於巴黎，享年六十四歲。

一八 對數 (Logarithms)

1 奈比爾 (John Napier 1550-1617)

文藝復興時代最令人驚嘆之發見，是完全計算記號的發明，小數的發明和對數的發明。平常須得經過極複雜的計算時，可以用了某種特別的數，而很簡單解決。那時所用的特別之數，叫做對數。

學習代數中間，對數是必然要講到的。用了對數之後，計算起來，十分簡便。在這對數沒有發明以前，天文學和三角法的計算，實是極其麻煩，要費多大的心力，從這對數發明之後，變得很省力，有人說天文家、算學家的壽命可以比以前延長一倍。

這對數是誰發明的呢？那是英國蘇格蘭人，名叫約翰·奈比爾，他是梅欠斯敦男爵 (Baron of Merchiston)。

在十六世紀已經發明了對數，實可算是算學史上的一大奇蹟，當時慕指數也還沒有使用，毫無可以根蹤對數原因，可見奈比爾是天才橫溢的人了。



2 布里格斯 (Henry Briggs 1556-1631)

當時有個英國人叫布里格斯，卒業於劍橋 (Cambridge) 大學，在倫敦的格來曉姆 (Gresham) 大學任算學教授，也是當時有名的算學家，後來一六一九年任牛津 (Oxford) 大學的教授，牛津是和劍橋並稱的英國頂有名的大學。

布里格斯知道了奈比爾發明的對數，而且知道了他的計算方法之後，覺得計算簡單便利，非常欣快就拿來應用到天文學和別種計算上去。此後布里格斯又研究出比奈比爾更便利而簡捷的方法，完成對數的應用。

布里格斯一向對於奈比爾從心敬尊的，早就想要有一面會的機會，在西元一六一六年，這個夙願是得償了，布里格斯因為要見奈比爾，從倫敦出發，長途跋涉到蘇格蘭去會他。

3 二哲人的會晤

當時交通不便，沒有火車可坐，到蘇格蘭路途遙遠，而且又須越險阻的山嶺，所以路是很不好走的。布里格斯因欲見對數發明者之熱誠，故道心甚堅。

另一方面奈比爾也在希望布里格斯的到來，每日引頸而望。可是一天一天過去，布里格斯終未到着。於是一天奈比爾等得心焦，發長太息而言道：布里格斯其終不來了嗎？正當他獨語之時，門外有敲門之聲，引導進來的便是布里格斯。

二人會面之後，互相注視，不發一言，達一刻鐘之久。終於布里格斯說道：「爵爺，我奔波了這長路是爲要來拜爵爺，想問爵爺是因爲了什麼睿智的啓發而會開始想到這個天文學上頂便捷的利器。爵爺，我想，在你想出以前，爲什麼沒有人會想到的，現在看起來，是如此簡單。這真是奇事了。」

這樣，二人談了一夜的長談，不知不覺到天亮。二人談到學問上的事，都傾吐了所知所信，布里格斯深服奈比爾之卓識，奈比爾也佩服布里格斯的學問比他爲深廣，二人互相尊敬。

後來布里格斯得了奈比爾的助力將對數加以改良，使三角法和天文學有了一段進步。

奈比爾在當時所發明的對數，不能算是完璧；可是他會見了布里格斯以後，他能將未完成的工作托於他而很安心於一六一七年長逝了。

4 對數表

布里格斯繼奈比爾之後，改良對數，使得更便捷而廣應用於各科。他用他學生的精力，去造對數

表，在一六二四年發表了一冊十四位的對數表，包含從一到二萬，和從九萬到十萬的數，其間空缺的二萬到九萬，由另一算學愛好者叫弗拉克（Adrian Vlacq 1600?-1667）補足之，在一六二八年他出版一冊從一到十萬的對數表，其中七萬個是他自己計算的。這是照布里斯改良的計劃，以10為底數，即我們現在的常用對數。

弗拉克是個荷蘭人，在倫敦營書籍商及出版業，後來又去巴黎開書店，死於海牙（Hague）。

造三角函數的對數表，也是布里斯的計劃，由他的友人貢透（Edmund Gunter 1581-1626）的協助，最先於一六二〇年出版正弦及正切的對數表，為每分的七位對數表，Cosine, Cotangent 11 名詞，即由貢透首先使用。

布里斯以他的餘年從事於三角函數的對數的更精深的計算，未及完成而逝，由甘利伯蘭（Henry Gillibrand 1597-1637）繼續完成之，弗拉克以私費為之印行。布里斯曾分每度為一百分而計算，但弗拉克所印行的表，仍照慣例的六十分法，故布里斯計劃的革新，未能實現。布里斯與弗拉克先後共印行四種基本的著作，其計算結果之精確，後人難予以更動，一直維持至近今，始有加以修改的更精確的計算。

和奈比爾可以爭發見對數的先權的，另有一個瑞士人彪奇（Joost Bürgi 1552-1632）他在1

六二〇年於伯拉牙(Prague)出版一冊對數表，他的著想和構造是和奈比爾異其旨趣的；不過因爲他忽於早日出版，直到奈比爾的對數，已經名滿歐陸而爲一般所通知時，他纔刊行，所以他的名聲，沒有人知道。

一九 小數的發見

1 西蒙·斯蒂芬的小數記號法

距今一千五六百年之前，在印度已經發明了1,2,3,4,5,6,7,8,9的數字和0的記號，以及逢到十昇上一位的十進法。因之計算變成非常便利。但是比「小」而較「大」的數，即對於小數，卻還不會有簡單的記號發明出來。

嗣後阿刺伯和歐羅巴的算學家，於一千數百年的長期間中，很是煞費了苦心，可是總弄不好，只能用麻煩的方法來表示小數。

那麼這小數是誰發明的呢？這也決不是由一人獨力去發明的，也不是偶然而發明了的。這是許多學者的苦心經營，經過了久長的年月，方纔漸漸成功的。

但是確實地意識到小數，而且用了如今一般的記號去表示的，實始於文藝復興的時代。

最初正式說述到小數，是一比利時人叫西蒙·斯蒂芬（Simon Stevin 1548-1620）。但斯蒂芬

雖知道小數，而其在計算中，卻未曾使用適當的記號來表示小數。在他例如 6.325 是記作 $6(0)3(1)4(2)5(3)$ 的。

即是於小數點處記個 (0)，小數點以下一位記 (1)，二位記 (2)，三位記 (3) 以表之。

這雖是一種麻煩的方法，但也是足夠表示小數了。

斯蒂芬如何得發見十進小數，有人以為是因了實用方面，因他於一五八四年印行一冊利息表，而此利息表之便於用十進分數，乃是提醒十進分數之根源。一五八五年他有一短文 “La Dismae” 論述十進分數之便利。他所熱心的，不但是十進分數，而是主張度量衡的採用十進制，以此為政府之責職，這是到了二百年後，經法蘭西的大革命，始有米突制出現而實現他的理想。

2 華利斯發見小數

其後一六三一年威廉·奧脫雷脫 (William Orghred) 著書中表示小數，他的記號較之斯蒂芬是更簡單化了，即於 6.325 是記作 $6|3|2|5$ 的。

在一六二九年，斯蒂芬的弟子吉拉特 (Albert Girard) 曾有一次用像目今一般的小數點來記小數，但是否真個意識地使用這小數點，卻不明瞭。

真正意識到小數點像現在一般使用法的始創者，是約翰·華利斯(John Wallis 1616-1703)。在華利斯以前，另一對數的發明者瑞士人彪奇在他的算學著作中也有二次用像現今一樣的小數點。此外奈比爾等書中，也有偶然見到的，不過他們是否真的意識到如此使用卻不可考，所以我們仍以華利斯為小數的發明人。

世間原有於暗默中無意識的巧合，可是縱使年代較遲，明確意識到而使用的豈不更加強有力嗎？此所以小數的發明，要推華利斯了。

華利斯起初和奧脫雷脫用同樣的記法，記 12.345 為 $12\frac{345}{1000}$ ，後來則一律改用小數點。但在歐洲大陸諸國，仍沿用奧脫雷脫的記法。到了十八世紀之初，方纔改過來採用小數點的記法。

平常總以為十進小數是和十進法同一系統，可以和印度算術同時來，豈知其發見還經着無數的時間和曲折呢。

十進小數，也可以算文藝復興時代的一大發明。近代算學之發達，由於記算之便利，均出於印度記數法、十進分數和對數的三大發明所賜。

二〇 計 算 符 號

1 計 算 符 號 的 重 要

現在算術上所使用的計算符號，列舉起來，大體是加號、減號、乘號、除號、相等號、不等號表示比及比例的符號以及括弧、括線等等。對於這些符號，一向我們毫不注意，在使用着這些記號的時候，一點也不覺得甚麼希奇，視爲很平常很當然的。可是倘使去留心到那些符號是怎樣纔發明出來的，仔細查考一下之後，便知道有不知多少的學者，費了無數的心血，經過長年累月的努力，方纔考案出來，自然湧起感激的心思了。

埃及、巴比倫、希臘、印度、阿剌伯，那些古文明人，還沒有能力去發明那種簡單的記號。他們的計算，都用長長的文字記述出來。當中即使有發明了簡單的記號而一個人使用着的，比之今日的記號，也還是過於複雜煩難。

到了文藝復興時代，纔有這種種符號的發明，傳到現在，使我們學習起算學來，簡便得多。

文藝復興時代最大發明之一，實是現今的簡單的計算符號。因為有了此種計算符號，算學變得便利而得進步發達了。以下將略說各種符號的發明。

2 加號 減號

用 + 表示相加，這是加號。

用 - 表示相減，這是減號。

最初的希臘人和印度人，只把連續寫下去作相加之意，在算術中，現在也還有這習慣留存，即如 $1 + \frac{1}{2}$ 選記作 $1\frac{1}{2}$ 便是例。意大利的算學家，已不再用文詞敘說算法而代以略語，用 $\frac{1}{2}$ 的首字母 $\frac{1}{2}$ 來代表相加。這方法頗為廣泛，但並不普遍，也有人用 c ，也有人用希臘字母 ϕ ，還有選用羅馬文字 ϕ 的表示相減，印度人用一點，意大利算學家的略語用 z 或 h (即 minus 之首字)，但也不普遍，此外有用 de 的。其中用 + 及 - 的也有，那是大都出於商家的實用，不在算學上用的。

頂先將 + 的符號用到算學書上的是德國萊比錫 (Leipzig) 地方的約翰·維特曼 (Johann Widmann)，在西元一四八九年所印的算術書中有此二符號。其後維也納 (Vienna) 大學教授葛拉馬底斯 (Grammateus 即 Heinrich Scheuber) 在一五二一年所著的算術書中，也正規地用 +、-

來作加減的符號。他的弟子克利斯朵夫·羅道爾夫 (Christoff Rudolff) 在一五二五年出版的第一本用德文寫的代數學中，也沿用他師的符號。到了西曆一五四四年斯提反爾 (Stifel)的著書出版， $+$ 的符號，始被一般人認為運算符號。

可是略字的使用還很多歧， $+$ 一號並不普遍地為一般人所採用，直到近世代數學之祖章達出來，大聲宣傳其便利，在他自己著書中使用，並勸人普遍使用，以後方得逐漸推行開來。到了十七世紀初年，漸漸普遍。

3 相等不等及除號

用 \parallel 表示相等，這叫做等號。發明這等號的是英國人勞白脫·雷考特 (Robert Recorde 1510-1558)，生於威爾斯，任牛津大學算學教授。他在一五五七年所出版的代數書中，首先用這符號。還有德國人芝蘭德 (Xylander 即 Wilhelm Holzmann 1532-1576)於一五七五年用平行之二縱線表示相等，形式是一樣的，不過不是橫行而是縱列罷了。但在十六世紀，表相等平常總不用符號，而是文字申說的。牛頓 (Newton)於一六八〇年還用 \wedge 或 \vee 來表相等，這是拉丁文 aequalis (相等) 第一字之略寫。韋達用 \parallel 號表示差，即他的 \parallel 是現時我們所記 \approx 的意思。

除法最初是照阿剌伯的樣子，在二量之間劃一線，但線的劃法作 $a-b$, a/b 或 $a \div b$ 卻不一定。西元一六三一年奧脫雷脫 (Oughtred) 用點來表示除法或比。現在用的除號 \div 是由一個瑞士人約翰·亨利西·蘭 (Johann Heinrich Rahn) 於一六五九年在丘里溪 (Zürich) 出版的代數書中首先使用。一六六八年 Thomas Brahcker 翻譯他的書，纔介紹到英國，以後漸通行，貝爾 (John Pell 1610-1685) 曾將此譯書改編詳解。也有人說貝爾於一六三〇年已用 \div 為除號。

不等者一個大而另一個小之謂也，表示大小關係用的符號是 \vee 和 \wedge 。即 \vee 表大於， \wedge 表小於。發明這不等號的是英國的算學家湯麥斯·哈里奧脫 (Thomas Harriot 1560-1621)。他曾伴同第一個吸用烟草的拉雷卿 (Sir Walter Raleigh) 所派第一次殖民到美洲佛綺尼亞 (Virginia)，在那邊測量土地。他在算學上，有許多貢獻，他的著作沒有發表以前身死的，後來整理他的遺著纔發現了他的記號，他的著作於他死後十年的一六三一年纔刊行。

表示不等用 \neq ，不大用 \nless ，不小用 \ngtr 還是屬於最近的事。

4 乘號比及比例

用 \times 表示相乘，這叫乘號。發明的是個英國學者奧脫雷脫 (Oughtred)，此人是個注重用符號

的人，在他著作中，一共大約有一百五十多種，其中爲現在所採用的除乘號外是以 \sim 表示相差，及比例的 \therefore 。他本來以 \cdot 爲比的符號，以 \therefore 爲比例的符號，例如 2 比 3 和 6 比 3 相似便記作

$$2:3::6:9$$

這符號在英國及歐洲大陸應用很廣，又是早在一六五一年英國的天文學家魏·維新 (Vicent Wing) 已用 \therefore 來做比的符號，因爲要避免和小數點的 \cdot 混淆，故不採用奧脫雷脫所用的一點。

雷白尼 (Leibnitz) 關於這些記號的態度，他曾於一六九八年七月二十九日致函於約翰·柏努利 (John Bernoulli) 說：「我不喜歡用 \times 爲乘號，因其容易與 \times 相混。……我常常單用一小點在二量之間，表示其相乘，因之表示比我不一點而用二點，我表示除也是用相同的二點的；因之對於你的 $dy \cdot x : db \cdot a$ 在我作 $dy : x = db : a$ 的，而且的確在事實上是和 dy 除以 x 等於 db 除以 a 相同的。一切關於比例的規則，都可以從這等式導出來。」這對於比和比例的見解，是很透徹的。經了奧爾夫 (Christian Wolf) 的助，一點用做乘號，在十八世紀很通行。

5 奧脫雷脫 (William Oughtred 1576-1660)

威廉·奧脫雷脫是乘號的首先創用者，已如上述，他是倫敦阿爾巴立 (Albany) 教堂的司教，

於推廣算學，有偉大之功績。他嘗免費授人算學，其門弟子中傑出者有算學家華利斯（John Wallis）及天文家華特（Beth Ward）。奧脫雷脫所著的算學之論（Clavis Mathematicae）於一六三一年出版，很久被英國學校採用為教本，足見其完美。

可是這個大算學家有一件不如意事，即夜裏要做工作卻不行。一切的研究工作，都得在白晝做。爲什麼夜間不行呢？因爲奧脫雷脫的夫人是一個非常的節儉人，可以說是吝嗇到了極度的，因之夜間使用燈火，是干犯圖禁的。

當時沒有煤氣、電氣，所以點了蠟燭工作，用燭火一晚要費好幾條蠟燭，一年積了算算，是很不少的錢，所以夜間禁止燈火。

怕老婆的奧脫雷脫，只得聽命於妻，而夜間停止工作。在有月光的夜晚，他到戶外的月亮光中去用功，沒有月光的晚上，早便安置了。這是和我們的故事裏的映雪囊螢以及掘壁偷光，同樣可傳爲美談的。

學者的最大欣悅是在鑽究，夜間精神鎮靜，最適宜於用功。可是他不能，豈不可憐。倘使他生於當今之世，一定會到公園中或十字街頭的路燈光下去用功的。可憐的奧脫雷脫，因爲怕老婆而失了研究學術的自由。

6 括線及括弧

爲計算上的便利，或者將相同的計算若干回合而爲一，反而方便時，用括弧的法子，大家是明白的。這是修改由良曆的克羅維 (Clavius) 在一六〇八年及吉拉特 (Girard) 在一六二九年發明的。

在括弧以外，有在上邊引一道線的，叫括線，這是韋達在一五九一年發明的。

括弧雖經發明及若干算學家的採用，但到了雷白尼及柏努利的時代，方始普遍。

7 代數文字

代數學從算術分離成一個獨立的學問，是因發明了代表數的文字，和確定正負數的理論。除了這二者以外，代數學上所用的記號和算術所用的，沒有什麼大差別。

十六世紀以前的代數學，差不多全用文字記述，那是很麻煩複雜的。十六世紀的算學家斯蒂芬、旁貝里等人，常常苦心於考察出有否把代數學弄得更容易而簡單的記述法。

這時法國出了一個大算學家韋達，把代數學變得十分簡單，使牠進步發達了。此後把韋達的代

數更普及於一般人，則應歸功於湯麥斯·哈里奧脫(Thomas Harriot 1560-1621)和笛卡爾。

那麼韋達發明了怎樣的記號呢？他是用 B, C, D, E, G……等子音字母來代表已知數，用 A, E, I, O, Q 等母音字母代表未知數。因之在一問題中，不管其有多少未知的，一律用文字代了而立出方程式來。

其實也有人說十五世紀的約翰·雷吉奧孟塔努斯(Johannes Regiomontanus 1436-1476)是最初用文字來代表已知及未知的數的人，還有斯提反爾(Michael Stifel 1486? - 1567)也早就使用過和韋達相同方法。但是這二人所做的事，並不會在世上流傳開來，所以和他們的死去共歸絕滅，現在的記號是從韋達直接變化下來的。

此後哈里奧脫把韋達的大寫字母改用小寫，笛卡爾又加以改良，用 a, b, c……等字母代表已知數，x, y, z……等字母代表未知數，就和現今代數學上所用的一樣了。

8 正負數無限大零及根號

在代數學上，比 0 為大的數叫正數，比 0 為小的叫負數。正數的記號，是在該數前面記一個 + 號，負數則記一個 - 號。這是把加減號借用為數的性質的符號了。在正數，數目大其值愈大，在負數，數目

大其值愈小，這些是大家都熟知的吧。現在倘將其大小順序排次起來，便是：

小 ← ————— → 大
 …… -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ……

真個理解這正負數的意義，而使用的人是誰？

西元第四世紀，住居於亞歷山大城的人，狄奧芬多這大算學家和生存於十一世紀頃の印度大算學家巴斯加拉等人，對於負數的意義，是隱隱約約有點知道的。其後在十三世紀雷奧那特是偶然之間用着負數。更後十五世紀的都斯加 (Tuscan) 的僧侶路加·百希理 (Luca Pacioli 1445-1509) 像也是知道負數的。

到了十六世紀，加爾丹纔正式論到正負數，他叫正數爲「實在」，負數爲「假在」。斯提反爾於一五五四年稱爲「無理的數」或「零下的虛數」。可是還難算有充分的理解。

真個理解正數負數而開始處理的，是十六、七世紀的人哈里奧脫 (Harriot)。更進一步加以說明，正像現在所論一樣明瞭的，是同時代的笛卡爾 (Descartes) 的功績。

8 的符號，大家知道嗎？這是表「無限大」的。大到無可限量的數，叫無限大，意即比大的還要大，不能限制之。發明這記號的人，是英國的約翰·華利斯，於一六五五年公表於世，遂爲一般所採用。

一個數自乘好幾回，只將所要自乘的回數，記在該數字的右角上，很簡單去表示之，這是使用指數的方法，大家一定知道的。例如

$$3 \times 3 = 3^2 \quad 5 \times 5 \times 5 = 5^3 \quad a \times a \times a \times a \times a = a^5$$

便是。這樣同一數好幾回自乘叫做冪，或乘方，即上面是3的二冪，5的三冪，a的五冪。二冪也叫平方，三冪也叫立方，五冪叫五乘，這些右角上的數，便叫冪指數，或單稱指數。

最初使用冪這種稱謂的，是西元九世紀頃の阿刺伯大算學家阿爾加里斯米。但他也不是完全透徹了解這道理的。在西元一五八六年，西蒙·斯蒂芬首先用①表一乘，②表二乘，③表三乘，如 $3^2 + 3^3 - 2^2$ 記作 $4^2 + 3^3 - 2^2$ 的。

以後一六三一年，湯麥斯·哈里奧脫把所乘的暈連記，即 a^2 作 aa ，把 a^3 作 aaa ，以表示之。

在代數上，文字和文字、括弧、括弧和括弧相乘時，中間的乘號是略去的。那也是始於哈里奧脫的時代。

哈里奧脫的記號，比以前的，和我們現今很接近了。不過倘使 a^{100} 要連記一百個 a ，那就很不方便。把哈里奧脫的記號再加改良，變成像現在一般把要自乘的回數，即是指數，記在右角上，也是笛卡爾的考案。

到後來約翰·華利斯更進一步，於一六五九年不但以正數爲指數，而且承認負數分數等也作指數。

不論正數、負數、分數，或者另外什麼數都可以用同一形式表出來，那是 $\sqrt{\quad}$ 這裏 $\sqrt{\quad}$ 代表了一切指數。發明這種記法的，是十七世紀終未到十八世紀的英國大學者牛頓。

甲數等於乙數的平方時，叫乙數爲甲數的平方根。表示平方根，用記號 $\sqrt{\quad}$ ，例如表 $\sqrt{4}$ 的平方根，即用 $\sqrt{4}$ ，那就是 $\sqrt{\quad}$ 。這個 $\sqrt{\quad}$ 的記號叫根號。最先發明這記號是克利斯朵夫·羅道爾夫。以後又有獨自發明的，十六世紀的斯提反爾 (Stifel)。這 $\sqrt{\quad}$ 號是取根的 *radix* 一字的首文字而變化出來的。 *radix* 爲根，即草木的根之意，謂「何數平方後而成此數」的求其平方的根本之意。

以上把現今算術和代數上所用的記號大體都說到了。

二 地動說的完成

1 太陽中心說

現在小學生都知道的：地球是個球體，自西向東自行迴轉，再以太陽為中心，而圍繞之。太陽周圍除地球外，還有水星、金星、火星、木星、土星、天王星、海王星和最近發見的冥王星，都和地球同樣圍繞了太陽而周轉的。這一點很簡單的事情，在三百年前，卻是什麼人也不知道。知道的不過一二人，而全世界的普通人都和這有正反對的見解。那是怎樣設想的呢？我在說明之前，先記述古代希臘人對於天界的意見。

研究天文學最早的古國，要推埃及，不過埃及的天文學發達到某一程度之後，卻停滯了，便傳給於希臘。

希臘最古的算學家、天文學家，有個叫泰勒斯，此人生活在紀元前七世紀到六世紀頃，知道地圓如球，以此說教給他的學生。而且他還說明月亮的發光是反射了太陽的光之故。

泰勒斯的弟子亞諾芝曼德 (Anaximander) 還說明宇宙間的無數星球，和地球一樣，也有人類生存棲息着。

西元前六世紀，畢他哥拉斯曾說及地球和水星、金星、火星、木星等行星，是繞太陽周圍環行的。亞理士多德也和畢他哥拉斯主張同一說，而且亞理士多德還進一步說到地球和太陽的距離，和地球到別的恆星的距離，是不能比較的小，差不多說都說不到的。

這些畢他哥拉斯和亞理士多德的話，和現在所說是沒有什麼兩樣，那是現今的太陽中心說的開端。

那麼西洋在紀元前已經有了此種正確的見解，爲甚麼後來又變了呢？

2 地球中心說

西元二世紀頃，後期亞歷山大大學極盛時，在那裏有個非常有名的教授，是算學家和天文學家的托萊梅 (Ptolemaeus Claudius 87-165)。

這位托萊梅先生打破了畢他哥拉斯和亞理士多德的太陽中心說而新建立了地球中心說。這一說在當時的程度十分合式，而且因其與基督教教義最吻合之故，爲勢力日盛的基督教所信奉，因

之後來基督教通於歐洲各地時，托萊梅的這一說也隨而流佈開去，而且浸久便誤認爲基督教解釋宇宙之一部分了。一般人用和信仰基督教同樣的虔誠來信仰托萊梅的宇宙觀。托萊梅的說素是：

大地是宇宙之中心，太陽和別的星都繞了地周轉。其中月最近大地，次爲金星，又次水星，又次太陽，太陽之次爲火星，木星，土星，最外層是一切的恆星，共分八層，自東而西，於二十四時間繞地一周。

因此運動而分出晝夜來，太陽入地的下方時，爲夜，其時月和星代太陽而出現。太陽和月、星晝夜交換，守護地球，伺候人類。

這是托萊梅的說素，還有更可笑的是「大地是平坦的，海一直遠去，有海水之涯，其地水爲懸瀑，流注不息，其下卽爲地獄，故地獄中不絕下雨。」

這一種宇宙觀，自他組成以後，因基督教的維持，一千五百年之間，沒有人敢懷疑。

3 哥白尼的地動說

距今四百年前，卽十五世紀到十六世紀初，基督教僧侶中有個波蘭人哥白尼 (Nikolaus Copernicus 1473-1543)，他相信托萊梅的說不對，而畢他哥拉斯、亞理士多德的說不錯，著了一本小冊



叫「天體的運動」，說明他的新的宇宙觀。

這一冊「天體的運動」由三個要目組成。第一是主張地球是球形。第二說地球自西向東迴轉。第三說地球和水星、金星、火星、木星、土星等行星是繞了太陽的周圍行動。

這就是現在的太陽中心說，稱為哥白尼的地動說，為當時的人所排斥，大家說「哥白尼是瘋人」或說是「逆天的叛徒」。

他的書出版不久他就死了，所以世間的批評，他是聽不到的。而且一般人對他並不注意，也就不為教會所留心而加以禁阻。

可是有了一個共鳴者，深信哥白尼學說的正確，根據了哥白尼的學說而再研究，並且著書將哥白尼的宇宙系統傳佈開來，這人是意大利的杜密尼（Dominican）派的僧侶布留諾（Giordano

Bruno 1548-1600）

布留諾因信哥白尼學說，於一五七六年離開了羅馬的教會生活，流浪於各地，一五八四年著書

說述他的根據哥白尼的宇宙系，主張太陽不過為恆星之一，恆星均有所屬之行星，自成一系統，與太陽之有行星而成一太陽系相同。地球有自轉運動，太陽也有自轉運動，但地球和別的行星又環繞了太陽運行。

他的此種說素，引起了一般教徒的反感，一五九三年被逮捕而送往羅馬，受宗教裁判，可是並不立時就下裁判，把他關在牢中七年之後，纔於一六〇〇年二月八日判決處火刑。十七日執行火刑，並且將骨灰撒於風，謂之死無葬身之地。布留諾是為學術而犧牲了，當時教會權勢之大，由此可見。

4 凱伯勒與伽利略

可是，真理是不屈於強權的，無論如何壓制，地動說還是要發展到牠的完成。完成這個地動說的，實在是德國的算學家凱伯勒

(Johann Kepler 1571-1630)。

凱伯勒於一六〇〇年在當時的大天文學者丹麥人布拉赫 (Tycho Brahe 1546-1601) 的主持的 Prague 天文臺做了一年助手，適布拉赫於翌年死去，他得到了許多天文上的正確記錄，因



爲布拉的觀測計算在那時是以正確有名的，他用了此種材料來做研究的基礎，結果是很可靠了。

他先利用了火星的記錄來計算火星的軌道，知道不呈圓形而是成橢圓形。於是他再從事於研究橢圓的種種性質，幸而希臘的算學家對於此曲線已有研究，所以他有道路可以遵循。希臘人的研究此曲線，當然夢想不到有此種實用上的價值的。他再把木星、土星、金星、水星等也假定其爲橢圓軌道而計算，經過了五年的工夫，有了確定的見解，著了一冊書叫「無假設的天文學」，現今所稱的凱伯勒的三大定律即在此書中。

由他的研究，以算理確定了一切行星依了以太陽爲一焦點的橢圓軌道而運行，由其與太陽之距離而決定運行之速度，軌道的長軸與公轉周期相關。此外沒有制限行星的規律了。哥白尼的地動說，至此已達完成之境。

哥白尼的一生是很苦的，第一因他信奉新教，受宗教的迫害；第二因爲家貧體弱，謀生不易，他的生活是與困苦奮鬥的歷史。他那時也受欠薪之累，他是窮死的，傳說他又是餓死的，而死後欠薪有一萬六千元之巨，交付於其遺族。

與凱伯勒同時，在意大利有個大天文學家叫伽利略（Galileo Galilei 1564-1642）。因爲他發明了望遠鏡，對於天體的觀測，十分便利，窺見了許多前所未見的天象，於是也深信哥白尼的地動說。

之合理。因為伽利略有了望遠鏡，可以有真實憑證拿出來，故他的名聲漸大，因之他的主張便受了宗



教家的嫉視，於是一六一六年羅馬教王下令禁止地動說，認地動說為異端邪說，且嚴禁一切關於哥白尼體系的學說的流佈。一面又強逼伽利略簽名於放棄哥白尼地動說的誓文。

伽利略見真理昌明之無望，乃著一對話篇，說述二個世界體系的論難，第一人主張托萊梅之說，第二人主張哥白尼之說，第三人則批判二說之正否。他想用很隱微的筆意來傳達他的意見。經過了交涉之後，得教王允許刊行，於一六三二年二月出版。

但是此書生了問題，伽利略也得受宗教裁判。判決他應放棄地動說，入獄若干時期，並於每週一回對神行贖罪懺悔。一六三三年七月二十二日，伽利略受此判決，只有低頭伏罪之一途，因有布留諾火刑之前例，而伽利略已是七十歲的老人，但還低聲喃喃道：「但地實是動的。」

伽利略因一向受有力者多斯加納（*Doscarini*）大公的維護，故還不會大嘆苦頭，仍有究學的自由，又免其入獄之刑，不過每週須去教堂懺悔。

他仍耽於研究，成力學對話篇一書，爲其不朽之大著，爲啓發現在的自然科學的第一本書。此書完成後，他不幸盲了雙目，至一六四二年而歿，年七十八歲。

5 牛頓的成功

哥白尼和伽利略都受了專橫的基督教僧侶的迫害，而不能宣揚其真理，可是真理終久必出現於光天化日之下。

在伽利略逝世的一年，在英國誕生了一個自古以來最大的科學者牛頓。他是大物理學者，大算學者，大天文學者，發明了萬有引力的原理，運動的三大定律，把地動說證實到了無可挽回的地步。哥白尼和伽利略的學說，經他的闡明而達到無可非難之地位。就是基督教徒也不敢再出來作梗，因爲成了人人承認是合理的，宗教也就無所施其權威與迷信了。

到了這時候，教徒也承認地動說的太陽在中心，地球和別的行星也繞了太陽運轉等事，所以牛頓是替哥白尼和伽利略報了仇。

現在是沒有人再相信托萊梅的大地中心說了，地球云云，已是極明的事了，誰知三四百年之前，是有絕不相同的見解呢。可見學術的進步，是無限制的，即使強權要加以壓迫，結果也終必歸於失敗，徒然犧牲了先覺和無謂的勞力罷了。

笛卡爾 (René Descartes 1596-1650)

1 十七八世紀的算學

在文藝復興時代，一切科學都有人研究，但這中間沒有秩序，不過由興之所至，亂鬧一下罷了，這是過渡時期中所難免的現象。

歐洲文藝復興時代的種種雜亂研究過後，到了十七、八世紀，漸漸去蕪汰雜，整理起來，完成了牠的進步，更加在算學史上是開了一個新紀元。

解析幾何學和微積分學的發明，就在這個時代。這些都是在算學上佔有高等的部門，我們平常人是很以為不易的學科。可是算學家因為有了新的徑路，大家都很興奮齊來研究這解析幾何學和微積分學，因之算學一科有長足之進步，其發達與前一世紀不可同日而語。近代算學之進步，實由此二新部門所促成。

格 (Pascal)、華利斯 (Wallis)、灰馬 (Fermat)、牛頓 (Newton)、呼臺斯 (Huygens)、雷白尼 (Leibniz)、柏努利 (Bernoulli) 兄弟等人，有永遠不滅的光輝。

2 大哲學家笛卡爾



十七、八世紀中的思想家，用他們的腦力去破壞舊的觀念，建設新的觀念，笛卡爾可算是最早的一個。在宗教上他雖終生信仰純正的天主教，而在科學上他卻是一個很深心的懷疑論者。他看到許多世上最明敏的思想家，在久長鑽究形而上學，可是並不會得到什麼定論，反而有時會互相矛盾衝突。因此使得他不輕信什麼權威而懷抱了一個巨大的決心，對於什麼物事都用一種深查細究的考問。他在算術和幾何學上發見其結論的確切不移，於是使他想用這個方式去判別真理的真偽以追求真理。所以他決定把算學的思考方式，應用到其他各種科學上去。「將宇宙的祕密、自然的神祕和算學的法則相比較，他希望可以用同一的匙去啓悟的。」他是這樣建立他的笛卡爾哲學體系。

笛卡爾是個大哲學家，地位很高，可是在算學上的地位是不是更高呢？我們有理由如此問，因為他的哲學，早已被後來創建的各體系所淹沒，而他所發明的解析幾何學，永久在算學上有地位。

3 大算學家笛卡爾

笛卡爾於一五九六年生於法國都羅(Tourne)之名門，少時體弱而才智過人，對於一切事物，喜尋理究源，其父常以小哲學家稱之。幼小時即好算學，受學於有名教會學校。一日在街散步，見一揭貼，乃一幾何學問題，廣徵一般人之解答者；此為當時通行的算學比賽之一種，他在數小時內解決了此問題，於是對於算學更加感到了興趣。

二十一歲時，他為志願兵而入軍隊，因為那時在軍隊中是十分閒暇的，他就熱心研究算學，他的進步很快，不久就可伍於一流的算學家。一六二九年以後他不再考究純粹算學了，他用算理為基礎而研究哲學。

一六二九至一六四九的二十年間，他住居於荷蘭，時當荷蘭頂強盛之際，他的研究以物理和哲學為主。後瑞典國女王克利斯丁那(Christina)十分企重欽佩他的學術，招聘他去講學，他經了長時的躊躇之後，於一六四九年纔決心去，翌年以水土氣候不慣客死斯德哥爾摩(Stockholm)。

笛卡爾自三十三歲以後，不再研究算學，他在哲學方面名聲很大是應該的，但是說他完全放棄了算學，卻不妥當，因為他有另一種的見解。

他給故鄉的好友梅純納 (Mascorne) 一封信當中說：「笛沙爾克 (Desargues) 君很使我對他抱歉，因為他以為我不再研究幾何學而惋惜，但我只是決意離開那鍛練思索的純粹的幾何學，而研究另一種解釋自然現象的幾何學……你應知我的一切學問，都是幾何學。」

所以說他是個大算學家，更為確當。他在算學上除了解析幾何學的創設者外，尚有不少功績。

4 圖解法的根源

圖解法是大家所熟知的了，表示各種的統計，或某種計量的變化，不用一項項的數字，而把數字改造為圖形。比方海關每年的進口貨數量，以一根直線的長來表示，則把各年度的直線一根根並列起來，見其一根高似一根則可知逐年進口洋貨之增加，並且看其高度如何而知洋貨進口增加之形勢。這比之去逐一細查數字，更加一目了然。

又如銀價的昇降，是每月逐日有變動的，倘使繪為圖解，成一曲線，則其變化之跡，又歷歷在目。這全是圖解的便利合用之處。圖解法的根源，卻是出於解析幾何學的。即解析幾何學上的頂基本的坐

標法，是圖解所根據的。

坐標法即以二個數值而定一點的位置。在平面上設縱橫二線爲標準，叫坐標軸，即橫軸及縱軸。橫軸及縱軸之交爲原點。平面上一點距縱軸之長爲橫長，距橫軸之長爲縱長，則有二數值爲縱長及橫長者，則此點之位置可決定了。此二數值，即名爲該點之坐標。故有坐標，則一點之位置，定而不可移了。聯二點爲一直線，在這裏所表示出來的，是個一次方程式。以一點爲中心以任意長所作圓周，在這裏所表示的爲一二次方程式。其他幾何學上各事項，均出之於代數上的方程式之形式，把代數與幾何學打成一片，這即是解析幾何學。

參照此坐標法，以橫軸表時間，以縱軸表銀價之數值，則每一期間之銀價，在平面上得一定之點，將此各點聯起來，便成了銀價昇降的曲線了。所有的圖表，大抵是如此作成的。



1111 帕 斯 格 (Blaise Pascal 1623-1662)

一個人的壽命長短和他爲人的本身的價值是沒有甚麼關係的。即使早死，倘使他所殘留的業績十分偉大，那是比活了一二百歲的人瑞，還有價值，不言可知。倘使是於世無益的人，便是溫良恭讓的孔夫子，也要破口大罵老而不死是爲賊！

十七世紀初葉法國最有名的算學家巴斯格，只活了三十九歲，但他的成功，卻是非常大。

巴斯格於一六二三年生於阿文涅 (Auvergne) 的克萊孟 (Clermont)，他父親對於孩子的教育很留心，在孩子四歲時從鄉下搬出來住於巴黎，而且不放心把孩子的教育委托他人，所以父親本人犧牲一切來教育這孩子。

巴斯格幼小時就很穎慧，他父親對於算學也是很有研究的，但他不願他在未熟習希臘、拉丁文之前去研究算學，所以一切關於算學的書是禁止他閱讀的。

可是奇怪的人性是在愈加壓逼的地方愈加反抗，所以說不許

學算學，反使巴斯格心中一心想學算學了。有一次他問父親算學所講的是什麼？父親大體回答他是研究如何作圖正確，以及尋出其間相互的關係。這樣回答了他，就不許他再問，並且不許他再談及算學。

這樣他就用他的小心思，要去作正確的圖形，用了木炭在瓦片上，石版上畫，用了石片在地面上畫，如圓形、正三角形等，他以正確作圖爲根元，由他自己命名的圖形以及公理定理，偷了遊嬉的時光，做他的傾心的遊戲。他偶然得出了三角形三內角等於二直角的定理，這時他只有十二歲。

他父親看了他研究的程序，非常驚喜，知他具有非凡天才，喜極而淚下。他再不禁他學算學，且給他歐幾里得的幾何原本。那書他不經人指導，很容易就習熟了。

他的正式功課還是習語學，不過用餘暇來研究算學，可是他在十四歲上已經入了當時算學家所組織的學會，在十六歲上草了一篇關於圓錐曲線的論文，那是非凡之精透，說從亞幾默德以來不曾見過的，笛卡爾不相信那文是出於十六歲的孩子之手。

他繼續用功，在十九歲時他創造了一種算術機械，八年後加以改良而得到專利權。

在二十四歲時，他一時放棄了算學的研究而入宗教生活。他的冥想錄是文學上極有名的。

這是因爲他小時過度用功，身體便不康健，從十八歲起，差不多夜間沒有一夜得安眠過，因不眠

症而胃弱，因之身體益加壞了。他想保養身體而進入虔敬的宗教生活，可是三年之後，他又來研究算學了。

他有一次因夜間齒痛甚劇，忽然觸悟了擺線的理論，思想滔滔不絕，他對於擺線的研究又得成功。關於擺線，他曾於一六五八年出題公開求答，向全歐著名算學家挑戰，應徵者只有華利斯和 Lamyère 二人，後者錯得很多，前者也不完備且有錯誤。巴斯格公開了自己的答案，學界中人多讚揚之。

他和灰馬通信，其中講到了把握算的問題。

在一六六二年他以康健不勝，死於巴黎，年僅三十九歲。他是個患肺病的人，從十八九歲以後，沒有一天不是在和病魔作戰之中過活，他認為人生很苦，但必須振起精神奮鬥，所以身體雖衰弱，意志卻堅強，在學問上有如許大成功。

二四 牛頓 (Issac Newton 1642-1727)

1 牛頓的少年時代

牛頓可算是古往今來頂偉大的學者了，他在各方面都秀出，除算學以外，如哲學、天文學、物理學、機械學等，在舉凡應用算學的學問，都可佔一流的地位。自古這樣博學多能之人，非常之少，只有亞歷山大大學時代的亞幾默德，稍可比擬。所以亞幾默德是被喚作古代的牛頓，這二人實在是古今學界的奇彩。

127

西元一六四二年，即伽利略逝世的一年，十二月二十五日，牛頓誕生於英國林肯沙



(Lincolnshire) 的烏爾斯沙坡 (Woolsthorpe) 是一個貧農之子。他幼小時身體很弱，但他很早就進村塾，到十二歲上，送到格浪塞 (Grantam) 的公立小學。起初他像很不用心，成績不好，名次在級中很低。有一次他被一個名次較高的小孩狠踢了一腳在肚子上，於是奮發向上，追出那個欺侮他的孩子，而且再用功直到他考了第一。

在格浪塞時牛頓對於機械的發明，已感十分興趣。他造了一隻計時的水漏，一座風車，和一輛車子，可以由坐車的人自己驅動，以及其他的玩具。到了他十五歲時，他的母親帶他回家助理農事，但是他的絕對嫌厭農事和對於學問的非凡熱心，使她再放他到格浪塞來，直到了十八歲，然後再進劍橋大學的三一學院。

牛頓的天才，實是到了劍橋之後纔發揮出來的。他在入學以前，不知什麼算學，可是直觀力極強，他把古人幾何學的定理，當做自明的真理，並且沒有什麼預備和指引，他看懂了笛卡爾的幾何學。這期間中，他又讀了許多算學上的名著，其中華利斯的無限論使他得益最多。他在劍橋大學畢業後，因為學問優美，被該校選為特待研究生而永住於劍橋。一六六七年由其師巴洛 (Barrow) 之好意，推他繼任其算學教授之職。

2 牛頓的發明發見

牛頓的發明和發見非常之多，而且都是很艱難的，今舉其中有名的：

第一、二項定理和以文字表指數。

第二、流動法 (Method of Fluxions) 的發見，這就是後來叫微分學的。

第三、積分學的發見。微分學和積分學都是算學中頂高等的部門。

第四、運動三定律的發見。

第五、萬有引力的發見。

因為發見了運動的三定律和萬有引力，天文學得了很大助力，着實有了進步，物理學也因之生氣勃勃，發達到現在一般完備。

牛頓所發明流動法，當初並不公表，直到後來德國的大算學家雷白尼發見微分學之後，歐洲大陸與英國爭論這微分學發見的名譽，在學界上是很有名的一件事。不必說二人是各自歸各發見的，牛頓雖較早，但雷白尼的記法等更優秀。

牛頓的發明萬有引力，帶附着一件很有趣的故事。

某日，天氣晴和，牛頓在蘋果樹下讀書，他仰臥在椅子上，因和暖的太陽光催眠，很有要睡去的樣子，忽有一重物打在他肩頭，他驚醒了，看看並不見人，卻是落下來的一隻蘋果。

於是牛頓想了：並沒有風，蘋果爲什麼會落下來？蘋果的梗子很牢生在枝頭，落下來一定要有去拉牠下來的。對了，什麼東西都像蘋果一樣被拉着。於是從上面落下來。這一定是大地有把物拉下來的力，就是地心有吸力。不但地球，一切宇宙間的物，都有相吸引的力。於是就發見了萬有引力的法則。牛頓著書中以自然哲學原理 (Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica) 或單稱原理 (Principia)，爲最著名。此書於一六八七年出版，分三卷，全部都是講萬有引力的。第一卷論質點及物體在自由空間的運動。第二卷論有中間物妨阻的運動，流體力學的理論並及浪波音學之理。第三卷爲以第一卷之理論應用於太陽系之諸現象，研究行星的質量及距離，月球的運動及彗星論著。牛頓所寫數百種著作之中，以此爲最有名，而且也是最苦心之作。

3 牛頓的晚年

牛頓因爲長期間的研究生活，腦力使用過度，因而受損，在五十歲之後，有二年間患了不眠症。因爲睡眠不足，於腦更有不良的影響，生了神經衰弱，讀書都讀不進了，於是心神不快，一時差不多成

了癡呆的樣子。但不久這病就好了，身體也恢復了健康。可是以後大發見發明是沒有了，到一七二七年三月二十日，終其一生。

他的遺骸葬於威斯敏脫寺（Westminster Abbey）。這大寺是英國頂有名的政治家、學者、軍人的葬地，對於國家有不朽的大功的，纔可入寺。一七三一年他的墓上，紀念碑也建立起來了，使他的功績，傳之久遠。

最後我們要抄下一段牛頓自己說的話，作為結束，他說：

「天真的小孩們在海岸上遊嬉，拾取貝殼沙粒，可是眼前的海中，不知藏着多少美麗的事物，要拾取也拾不完的豐富，這些小孩是不知道的。小孩所拾取的，不過是此中寶物的一部分耳。」

可是小孩捨得了，心中也很滿足了。我正是像這些小孩一模一樣的。宇宙間爲人所不知的事正多着哩。我不過知道了其中的一些。還有許多許多爲人所未曾知道的知識在着。」

這話是如何謙遜。世界上無知無識的，每多跨大自滿，而真實有學問的都肯恭謙。因他是知道學問無止境的，不像不學的人，知識卑陋，見聞淺薄，而敢狂大自足。我們有一句俗話叫「初學三年天下去得，再學三年寸步難行」，便是說明此中真理的。以牛頓之如此偉大，尙且自謙如此，則世有自命爲天才的人，豈不羞殺。

二五 雷白尼 (Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716)

1 雷白尼的發明微積分

緜閱數千年的算學史，進步發達結集於十七世紀末到十八世紀初的五十年間，是從那時再開始發展到現在的地步。在這五十年的短期集大成成繼往開來之功的，實是在牛頓與雷白尼二人。



雷白尼於西元一六四六年六月二十一日生於德國的萊比錫 (Leipzig)。他父親，是萊比錫大學的神學教授，但當雷白尼六歲時就死了。

當時德國內戰未息，凌亂不堪，文化卑下，武人猖獗，他又孤兒，所以讀書很費力。他當時的學校程度極低，全靠獨自修習，十二歲已通拉丁文，再開始習希臘文。到了十五歲，他入萊比錫大學，研究法律。不過他對於一切學問都很熱心，尤其覺得算學最有趣味。

當時德國大學的程度極低，高等算學的教授也沒有，只有一個講幾何原本的，講得也不清楚，別的人分毫不能理解，雷白尼卻懂得。後來他只好到巴黎，當時巴黎是歐洲文化的中心，他交了許多學界的知名之士，其中有個大算學家呼基斯（Huygens），送了雷白尼一本他的著作，使雷白尼決心了再去研究高等算學。一六七三年一月到三月，雷白尼往倫敦也結識了許多學友。回巴黎之後，他長時間作算學上的研究，以呼基斯為他的導師，業大進。

一六七五年十一月二十一日他發明微分法（Differential），逐漸研究下去，九年之後，在一六八四年他方纔在雜誌上公表他的發見，這是在牛頓發見流動法之後十七年，在牛頓原理出版前的三年。他因為怕別人爭他的發見，所以逼不得已而發表其一部分，只佔了六面紙張，而且說得十分簡略。二年之後，他又在同誌上發表關於積分的計算。於在德國本國沒有人注意他的新法，而歐洲大陸其他各國的算學家爭相傳誦，大家承認他的偉大。

2 英國與大陸之爭

雷白尼在歐洲大陸享受了發明微積分的榮譽十五年之後，忽然英國方面來替牛頓爭奪這發

明權了。最初是一六九九年一個住在倫敦的瑞士人提出一篇論文於倫敦學士院，說微積分的發明人是牛頓，而雷白尼不過襲取牛頓的思想而已。於是英國學界大為興奮，羣起責難雷白尼之偷竊，但雷白尼以事出虛構，不屑置辯。後來卻因爲一七〇五年牛頓也發表了他的流動法，而大陸方面，說牛頓的流動法是學了雷白尼的微分法而做成的，於是英國與大陸學界又起論爭。大家寫信公開討論，並不是反對牛頓的最先發現，而是替雷白尼刷洗清白。

因此之故，歐洲大陸和英國差不多學術絕交的樣子，英國是孤立的，喫虧不小，而雷白尼在歐洲提攜後進，學術的發展甚速。更有柏努利兄弟等大算學家助威，故英國方面失敗居多。後來又大家出題求解，做算學比賽，英國成績也不如大陸。

雷白尼死後，有許多學者研究他的記錄手札，看見他發明微分法的步驟，決非出於牛頓，而且也證實了他與倫敦友人的通信中，也不會得到牛頓的流動法的概念。所以微分積分是二人各自分別發明，不過牛頓較早十年，但雷白尼的符號等較好，而且有歐洲後繼的學者發揚光大之，所以現在的微積分，是繼續雷白尼而來的。英國初時，用牛頓的記法，很不便，後來也只好改用大陸的記法了。

3 雷白尼的晚年

雷白尼是以研究算學爲主的，但別的科目也很精通，實在是箇博學多才之士，如哲學、法律、言語學等，都很來得，又與政治及實際上事相關係，也論到宗教問題等。這可與古希臘的亞里士多德相比，正同牛頓的比於亞幾默德一樣。古今的二大學者，正是絕好一對。

雷白尼的晚年極靜謐，他從許多事業退休之後，便得充分頤養了。但他因壯年時專一於學問，未暇去談戀愛，也沒有結婚的工夫，故到老還是獨身。他的晚年是很孤獨的。

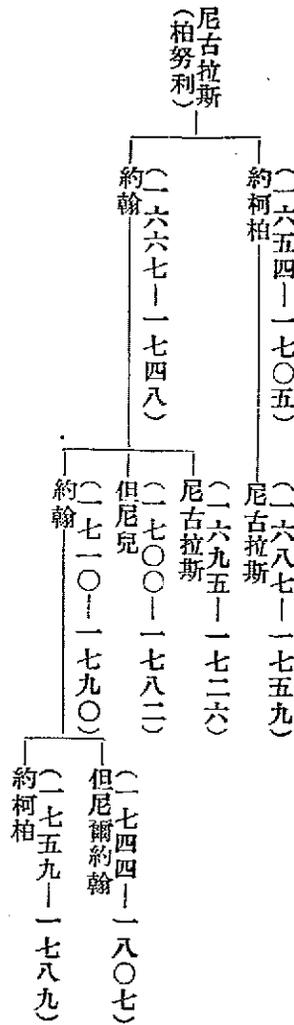
雷白尼從來不去教堂禮拜，他有這工夫，寧可看幾頁書，他不相信基督教對人有什麼好處，更不相信上帝的鬼話。這在他是很不利的，因爲那時宗教勢力極大，人民迷信極重，大家都指雷白尼爲怪人，所以常人每不敢和雷白尼往來，以免取憎於僧侶。

西元一七一六年十一月十四日，一代的大算學家雷白尼歿於哈諾華 (Hanover)。他的親友也怕基督教僧侶而未敢去送葬，本有來往的官僚，也沒有人去弔，這絕世大學者的死，是很淒涼的。

雷白尼雖死，他的學問卻有人繼承下去，他生前已經把他新發見微分和積分，撒佈於歐洲的算學界，雖則他自己對於微分積分的目的和方法，也很有不明之處，但因接下去的人才很多，故得大進步，其中尤以柏努利兄弟之力最大。

柏努利 (Bernoulli) 一家，可稱爲一個算學家庭，四代三十餘人，都是大算學家，以下的八人最

有名，即其世系表。



其中約柯柏 (Jakob 1654-1705) 和約翰 (Johann 1667-1748) 二兄弟最爲有名。二兄弟是雷白尼死後歐洲最大的算學家，曾提出算學題和英國比賽，而將英國算學家戰敗。歐洲此後的五、六十年間的算學家，差不多全是他二人的弟子。因之雷白尼的算學，因有了這許多後繼人，益加發揚光大了。

二六 圓周率

1 圓積問題

圓周率的意思，大家知道罷，用 π 作圓周率的記號，大家也知道的罷。圓的面積等於半徑平方再乘 π ；而以直徑乘 π 則得圓周之長。其他凡有關係到圓，決脫離不開這個 π 。這大概都已明白的。 π 的值是如此重要，其如何計算出來的史實，先得講到圓積問題。所謂圓積問題就是要求作一個和圓面積相等的正方形，這是算學史上有名幾何學三大問題之一。

西曆紀元前六世紀頃，希臘有算學家名亞諾薩哥拉 (Anaxagoras) 者，因故被逮入獄，在牢中是不許閱讀書報的，他用心思想研究算學，特別對於用直尺和圓規作與圓面積相等的正方形一問題有苦心的鑽究。他沒有成功。

這是圓積問題的開端。

嗣後，有許多學者繼續研究，在西元前第五世紀頃，一個希臘學者希波克拉底斯 (Hippocrates

of Chios) 對於此問題的研究，特別熱心。但他對於作一個與圓面積等積的正方形一問題也未成功，不過在研究中發見了與新月形的等積的正方形的作法而已。

也是西元前五世紀頃，柏拉圖的弟子狄諾斯脫拉斯 (Dionysius) 用了希比阿斯 (Hippias) 所發見的一種 *Quadratrix* 的曲線，成功了化圓積為正方形。但這是藉了別種曲線之助，和別的算學家要遵守初等幾何學作圖規約只許用直尺和圓規是不同的。

以後到了西元前三世紀頃，希臘的大算學家亞幾默德出來，他也試解過這個問題。亞幾默德以後，還有不少人從事於這個問題的研究，但是都失敗了。

以後一千八百年間，即亞諾薩哥拉在獄中研究以後二千二百年間，有不知幾多的學者，想用直尺和圓規來解決這問題，竭盡全力而終未成功。在十七世紀，即三百年前，對於此問題的研究，可算頂頂起勁，歐洲許多學者，如雷吉奧孟塔努斯 (Regiomontanus)、布端奧 (Buteo)、奴耐芬 (P. Nunes)、斯甘利格 (Joseph Scaliger)、韋達 (Vieta)、羅曼諾斯 (A. Romanus)、克萊維 (Clavius)、梅蒂斯 (Metius)、奎爾苟 (Quarou) 等人，最為有名。

以後微分學發明之結果，遂有用此高等算學之力去解的，但仍未成功。到了十八世紀林特曼 (Lindemann) 出來，方纔闡明了用直尺和圓規不能解這問題的理由。

現在知道圓化為正方形，是初等幾何不能作圖的問題，即用直尺和圓規不能解答的。那麼爲什麼不能解呢？因爲和圓有不能分離關係的數圓周率 π ，是一個超越數，永久不能求得正確的值之故。次說 π 的值。

2 圓周率的值

埃及人、巴比倫人，都將 π 的值作爲 $\frac{22}{7}$ 。但 $\frac{22}{7}$ 不是精確的數值。在希臘時代，已經很有人研究了。特別在那圓積問題被研究時，總連帶想到先求得 π 的真的數值。自亞諾斯哥拉之後，研究者層出不窮。亞幾默德發見了比較正確的值，即 π 之值比 $\frac{22}{7}$ 爲小，比 $\frac{223}{71}$ 爲大。這二數化爲小數是

$$\frac{22}{7} = 3.142857$$

$$\frac{223}{71} = 3.14084507042$$

即小數以下二位相同，第三位起不同，而 π 之值確是在此二值之間的。

那麼在算術發祥地的印度如何？印度古時以 π 之值爲 3 ，或 $\sqrt{10}$ ，即 3.1622 。其後阿爾耶婆哈答改爲 3.1416 ，現今平常還用此值。巴斯加拉以爲不要十分精密可用 $\frac{22}{7}$ ，要精確些可用 $\frac{3927}{1250}$

的。即 $3.1416 \frac{22}{7}$ 也是希臘亞幾默德發見的值， $\frac{3927}{1250}$ 是阿爾耶婆哈答用過的值，二者都是現在常用的。

當印度算學由阿剌伯移入歐洲後，這巴斯拉拉的值是被襲用的。

在我國晉朝祖沖之（約西元六世紀頃）已知以 $\frac{22}{7}$ 及 $\frac{335}{113}$ 為圓周率之值。稱前者為約率，後者為密率。

十七世紀時，歐洲研究圓積問題之風極盛， π 也不會被用卻，因之他的值益加精密了，羅曼諾斯 (A. Romanns) 將 π 計算到十五位，德國的羅道夫·荷命 (Ludolph von Ceulen) 以畢生之力計算 π 的值到了三十五位，刻於其墓碑上，因之此數常被稱羅道夫的數。

3 圓周率的超越性

其後華利斯·沙伯 (Sharp)、馬滯 (Machin) 也有計算，到了十八世紀，西元一七六一年法國阿爾薩斯州人朗貝爾 (Johann Heinrich Lambert) 寫了一篇論文，說明 π 的無理性，即有無理數的性質。他的正確數值是求不出的。送到伯林學士院，再後來到一八八二年纔由林特曼完全證明了他的超越性。

目今一般所用圓周率的數值如次記爲最普通：

$$(1) \frac{22}{7} = 3.142857$$

$$(2) 3.1416$$

$$(3) \frac{355}{113} = 3.1415929203539\dots\dots$$

$$(4) \pi = 3.14159265358979323846264338\dots\dots$$

要正確算出 π 的値來是不可能的，不過小數點以下一直可以計算下去，英國的倫敦人欣克 (Shanks) 於一八七三年計算到七百〇七位。計算到小數點下七百多位，使用起來是可以說近於正確了，不過我們日常計算是用不到這樣精密的。普通只用 3.1416 已足，再要細些用 3.141593 也儘夠了。

上記欣克氏的計算所得 π 之值，爲參考故揭載於次：

$\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105840974944592$
 $30781640628620699862803482534211706798214808651328230664709384460$
 $95505822317253594081284811174502841027019385211055596446229489549$
 $80381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648566$
 $92346034361045432664821339360726024941273724587006606315588174881$

52)9209692925409171536436789259036001183053054882046652138414695
 19416116594330572703667595919530921861173819326117931051185490744
 62379969274956735188575272489122793818301194912988867836244065043
 0360213950160924480772309482355309662027556939798695142247499620
 60749703041236688619951100892023637702130216941190298858254463168
 9799904659700081700296312377381842084180791451183980570985.....

4 圓周率的記號

我們用 π 這記號來表圓周率，這也不是以前一直就有的，以前各學者都各自用便宜的記號。十八世紀的瑞士大算學家歐拉，纔開始用 π 代表圓周率，現在是全世界一致照此使用了。歐拉的用此記號，在一七三七年，其實距今不過二百年樣子。

自然，這個記號創出之後，關於圓的事項記寫起式子來，很便利了不少。照上所說，可知即使我們用一個記號之微，也有着許多算學家的苦心潛藏着。

5 記憶 π 值的詩

在西洋是有些人做詩來助π的值的記憶，他們依照各位數字的字母，來做成詩或文章，很有趣的。如頂簡單的 3.1416 即有一句——“Yes, I have a number”來表示。再如

See, I have a rhyme assisting,

My feeble brain its tasks sometime resisting.

即示 3.141592653589 的十三位數。更長的還有表示到小數第三十一位的如次：

Sir, I send a rhyme exolling,

In sacred truth and rigid Spelling,

Numerical spirites elucidate

For me, the lesson's dull weight.

If Nature gain,

Not you Complain

Tho' Dr. Johnson fulminate.

全部數字，不便記憶，寫成如此的詩句，也是助記憶之一法。不過這是沒有什麼大用處的，不過是古人的想頭罷了。

二七 歐拉 (Leonhard Euler 1707-1783)

1 法國算學之盛

西元一千七百六七十年代到一千八百二三十年之間，歐羅巴的算學，可以說由法國獨霸了，此外只有在瑞士的一角裏，歐拉獨放異彩。

在這時代，法國算學家有拉格命日、拉普拉斯、羅強特爾 (Legendre 1752-1833)、甫里葉、孟諸等人，最爲有名。這些學者所研究的，大都在高等算學方面，所以那些事項且不多說，只將他的傳記約略言之。

我想先記歐拉，因爲這個瑞士的大算學家，比法國的算學家們都要年長，而且他在十八世紀末年就已去世了。

2 歐拉仕於俄國

歐拉於一七〇七年生於倍塞爾 (Basel)，是一個牧師的兒子，幼時父親就教他算學，後入倍塞

爾大學，為約翰柏努利的得意弟子。十九歲時，他做了一篇關於船的論文，得了法蘭西科學院的第二獎。

當時約翰柏努利的二子，但尼爾及尼古拉斯兄弟，也是算學家，仕於俄國加德琳第一 (Catherine I) 之朝，他們德惠女王招聘歐拉，二兄弟本來是歐拉的好友，於是一七二七年歐拉到了聖彼得堡。那時他纔二十歲。



學問和年齡是沒有什麼關係的。當時俄國中央研究院提出了一個關於天文學上的難題，廣徵天下算學家的解答，有若干很著名的算學家，費了數月工夫，纔做出來。歐拉卻借用了他自己的進步的方法的助力，只費了三日工夫，就解決了。(後來高斯用了更進步的方法，只用一小時，就解了這個問題。)

因此歐拉的名聲，就傳揚開來了，可是這在歐拉反而有了不幸事情，因為他的過度用功，以致生病發熱，終於盲了右眼，那時他年二十八歲。不過俄國本來天氣太冷，對於他的健康上也不行。再因安娜第一 (Anne I) 的專制集權，使得溫和的歐拉，放棄官吏生活而專力於學術。

3 歐拉的失明

一七四一年歐拉受普魯士腓特烈大王 (Frederick the Great) 之招聘，離俄而赴柏林，也很受普魯士朝廷的優遇。有一次王妃問他是這樣一個有名的學者，何以如此膽小寡言。歐拉回答因為他是從鄉野來的，那裏的人說了一句話，就有被吊殺危險。腓特烈的招請歐拉，是受學者達朗倍爾 (D'Alembert) 的慫恿，他並不是讚美什麼算學家的，在一封他致服爾泰 (Voltaire) 的信中，有稱歐拉為「一個偉大的幾何獨眼巨人」(un gros œilono de géométrie) 的滑稽名詞。古來所謂賢君的好學，大都如此，他們做了君王，不過為要收攬民心，於是賣賣野人頭罷了。

時俄女王加德琳第二又來招請歐拉，經過了很多的麻煩，於一七六六年普王允歐拉赴俄。他推舉了當時有名的法國算學家拉格倫日為後任，再去聖彼得堡。

可是歐拉這次赴俄的運氣很不好，因為寒氣的侵凌，他僅存的左眼又失了明。他到俄國不久，完全失了明，時年五十九歲。

但歐拉的研究，並不因此終止，他仍舊開了他的心眼，繼續他的工作。他用了書記，筆錄他的口授論文，其中一七七〇年他的書記所記錄的一本代數學，雖然全是初等的，卻是代數學中的秩序井然

歐
而有系統的最早之作。

歐拉還遇到更不幸的事，即在他失明後的五年當他六十四歲時，聖彼得堡發生大火災，他的住家被火燒，幸有忠心的學生救他出險，而他很費心血所搜集的材料和他的許多著作稿本，也燬滅了一部，可是他並不灰心，他鼓起勇氣，把以前的著作再寫下來，改訂了而再版。

拉
歐拉還有一個故事。當法國的哲學家狄德羅 (Denis Diderot) 到俄國宮庭來，他講話十分流利，給宮庭的青年羣一種鮮活的無神論思想。這時有人向狄德羅說，一個博學的算學家，有一個用代數學來證明上帝存在的方法，倘使他喜歡聽，他可以在公衆之前宣佈出來。狄德羅允許了。於是歐拉走上前來，十分莊重地，用確信的口調說：「 $(a + b)^n / a^n$ 所以上帝是存在的，對不對？」狄德羅對於代數學，好像比希伯來文更難，於是十分狼狽而惶惑不解，四圍起了一陣轟笑，他自覺無顏而退。歐拉這玩笑，極幽默。

4 歐拉在算學上的供獻

147

歐拉所研究的除算學外，關於天文、物理等方面，也很廣博，而解析法即微分積分學，無限級數論以及函數論、數論等最有名。這是在高等算學方面的。在初等算學上，他也有若干改良和發明，現在我

們所有三角函數的略號，是歐拉創始的。三角形的三角以 $\angle A, \angle B, \angle C$ 和此三角的對邊以 a, b, c 表示，是歐拉首先採用的。又用 π 來代表圓周率也是歐拉於一七三七年創始。在採用記號方面，還有一七三四年用 $\Gamma(x)$ 表 Γ 的函數，一七二八年用 e 表自然對數的底數，一七五〇年用 Σ 表總和，一七七七年用 $\llbracket \cdot \rrbracket$ ，這符號後來為高斯所採用。

這盲目的大算學家，於一七八三年秋初，死於聖彼得堡，年七十六歲，他在盲目中的研究實有十七年之久。

歐拉的著作，最為豐富，有全集計四十五厚冊，其數量之多是在古今算學家獨步的。全集於他死後，即行計劃發刊，因為內容浩繁，要很大的資本，漸漸遷延下來，到了一九〇九年九月，瑞士的自然科學協會，用全國的捐款來開始刊行，二年之後，第一卷纔出版，以後是預備陸續出書的；可是到了半中，資金又用罄了，於是又成立了一個刊行此全集為目的的公司，叫歐拉全集公司，這在算學史上恐怕是空前而絕後的了，由這公司之力，全集方能完全出版，所需用費超過四十萬法郎。

二八 拉格侖日 (Joseph Louis Lagrange 1736-1813)

I 十七歲任算學教授

拉格侖日的是一個大算學家，當爲萬人所公認，倘使要舉出有史以來的十個算學家的名字，拉格侖日，必然在內，他是十八世紀算學界的異彩。



拉格侖日於一七三六年一月二十五日生於意大利的都林 (Turin)，他有法國人的血統。他父親是沙狄尼亞 (Sardinia) 陸軍聯隊的會計員，起初生活很富裕，但因投機事業而喪盡他的資財。拉格侖日後來以此事爲他一生之幸，因爲倘使有財產，他以爲他也不致從事於學術之研究，而將成一個放蕩的纨绔

子弟了。

在都林大學讀書時，他不曾認識他自己的才能，他喜歡西塞洛 (Cicero) 與味吉爾 (Virgil) 更

甚於亞幾默德和牛頓。但後來他又好古代幾何學了，及見了英國天文家哈雷(Halley)的代數學，方引起他對於近世的解析法的興趣。他自己個人獨習算學，沒有什麼人指導，讀了笛卡爾、歐拉等人的著作，進境極快，在十七歲上已被擢為該地王室軍校的算學教授。他仍舊孜孜不倦地用功，二年之間，已可伍於當時歐洲最大算學家之中。他得了他的學生之助，設立了一個都林學會，後來是發展為都林研究院。十九歲時，他和歐拉通訊討論定積線問題，所用的「變分法」為歐拉所激賞，以為歐洲無匹，比歐拉自己更高一著。由此可知他天分的高超。

2 憂鬱症的纏綿

拉格命日的研究步步進展，已儕於學界最高的地位，但因他生來身體不強，而且又因過度的用功，身體更弱，所以心神總不很爽快，似乎患了憂鬱症似的。

一七六四年，他二十八歲時，法國研究院提出一個關於月球的運動懸賞的問題，要求用萬有引力說明月球常以同一的面對地球之故。拉格命日應徵，獲得了那名譽的賞金。

因為想和學界知名之士見面，他到巴黎會見了許多學者。他還想再到倫敦去，但因病未果。在一七六六年，歐拉要離開柏林而去聖彼得堡時，指定只有拉格命日堪為他的後任，達朗倍爾也同時推

薦他。腓特烈大王於是遣使赴柏林，申言歐洲最大之王，願意聘請歐洲最大的算學家。於是拉格倫日到柏林去，時年三十歲，一直住在那裏達二十年之久。

他仍舊是孤獨悲傷的，看見同年輩的人都結婚了，而且友人的妻子們告訴他，只有結婚生活是安樂的，所以他也結了婚。可是這個結合並沒什麼幸福，他的妻不久就死了，這反而增加了他的悲傷。腓特烈大王對他很尊敬，時常和他談到實行全守規律生活的利益。這使拉格倫日去培養有規律的習慣，他每日做一定時間的工作，不使延長。他的文章先想好了再下筆，等到開始寫之後，他只要寫下去，一毫也不需更改。

3 晚年的幸福

腓特烈大王死後，普魯士已不如往昔那麼尊敬學者，拉格倫日應法王路易十六（Louis XVI）的邀請而移居巴黎。王妃也很敬他，請他寓於羅浮宮中。但是他又染上了憂鬱症，使他對算學失掉了興趣。他有一時從有名的化學家拉瓦節（Lavoisier）研究化學，他覺得這和代數同樣容易。

不久轟動全世界的法國大革命開始了，這使他再起來活動。這時許多學者和貴族，都被送上斷頭臺，或投入獄中，外國人是全部逐出國境，可是拉格倫日仍受大家的尊敬，不被放逐，也不受迫害。

這時有名的天文學家雷孟尼 (P. C. Lamontier) 的女兒，年輕而多才的姑娘，同情這位大算學家的孤獨，願嫁給他，由她的獻身的行為，使拉格侖日的老年，獲得了幸福，至死他不再覺得寂寞。

4 他的人品

拉格侖日被革命政府任用，受各方面的尊敬，自是因他的人格高尚所致。他的職司是度量衡改革委員會的委員長，現在的萬國公用度量衡即米突制，就是那會所創定的。他在該職，不曾有什麼變動，因為他一意從公，不加入私的黨派之爭，所以雖則革命期中殺人如麻，又經過雅各賓黨的情黨運動，後來 Lavoisier 和 Laplace 也被逐出，而他仍舊不動，但他見情形太紛亂，想離開巴黎，回到柏林。可是因一七九五年巴黎設立師範學校 (École Normale) 要請他擔任教授而挽留了他。這校不久即被封閉，他不會授什麼講義，可是一七九七年建立了工藝學校 (École Polytechnique)，他便被任算學教授，於是他的算學研究再行開始。

他所研究的科學，範圍極廣，可以說包括算學全部。其在解析幾何學，是稱爲三大家之一，其他順列、組合、二項定理、微分積分、函數論方面的進步發展功績更多。拉格侖日所著的書，和別的算學家不同，文章都是很優美的，後世的大算學家哈米爾敦稱之爲科學詩的一種。

差不多的算學書，都是文詞蕪雜淺陋，而且詞不達意，看了令人生氣，可是拉格命日的文章甚佳，令人誦之如讀詩歌，而且清晰明麗，容易理解。這實在由於他崇高的人格所產，表現他的明朗和平親和的個性於文詞中了。

拉格命日是個極端和易的人，極力避去爭端，就是在講話也很膽小。他總用疑似不確的詞句，口頭禪是開頭必說「我不知道。」他於一八一三年四月十日死於巴黎。他沒有畫像遺留下來，因他頂嫌惡畫像，所以有人是在他不知不覺時，當他在研究室中，偷偷地去描他的。因之真正的像很難繪出，現今所留下來的像，都只像其一部分。

二九 拉普拉斯 (Pierre Simon Laplace 1740-1827)

1 出身低微的人



拉普拉斯於一七四九年三月二十三日生於諾曼地的 Bannont en Auge，他幼年時代很不明瞭，因為當他出了名以後，極力隱他過去幼年的貧乏生活。那時的社會，階級觀念很深，出身低微是一極可恥的事，拉普拉斯是很要體面的，所以無怪他要諱言他的出身了。他的父親是一個貧農，不能供給他求學，恰有財富的鄰人，因為見他天資聰穎，於是資助他學費。拉普拉斯在波夢 (Beaumont) 的陸軍學校修學，不久就任了這學校的算學教師。

他的野心是很大的，當然想大發展，於是在十八歲時，他帶了若干介紹信，到巴黎去見當時法國的大學者達朗倍爾。那些信沒有什麼效果，但勇敢的拉普拉斯不為之氣沮，寫了一篇關於機械學的

論文寄給那個大學者。得到了他的讚美，說他有如此才力，是應得他來扶助他的。於是由達朗倍爾的介紹，任了巴黎陸軍學校的算學教授。他的前途是這樣決定了，他便十分努力研究算學，得到了「法國的牛頓」的稱呼。

此後他一帆風順，名聲日大，地位日高，學問上也很有成功，於一七八五年三十六歲時，被推爲法國中央研究院會員。後來又任調查經度委員會的委員長，改革度量衡制度時，是委員的一人，和拉格命日同在師範學校當教授。當革命時，一切要求改造的呼聲極高，關於改曆，拉普拉斯曾建議以西元一二五〇年爲紀元，因爲照他的計算，那一年的地軌的長軸，恰和赤道垂直，故有種種科學上的方便。但這不會被採用，革命政府以革命之年爲紀元。

2 忠實的科學家

拉普拉斯所注力的研究，解析幾何亦是其一，還有確率論，差不多是由他發端的，此外代數學以及微分積分的高等部門，也有不少功績，以上都是高等算學。再在應用算學一方面，天文學和物理學上，他也有不少偉績。

拉普拉斯的著作，很不容易懂，文詞不佳，理路紊亂。他把算學只看做解問題的工具，只要一有解

答之後，他不再去理會那個過程，也不去說明他的解析，或修飾他的工作。

拉普拉斯對於學問卻很忠實，有一回他做了一本關於天文學的書，獻給皇帝拿破侖一世，拿破侖說：「拉普拉斯先生，人家對我說你在這本大著中說述了宇宙的組織，但是你沒有說到那個創造主。」而拉普拉斯的回答是很勇敢的：「我這書裏用不到這個無稽的假說。」

他晚年退隱於 Ancueil 的一個村中別墅，過度幽閒生活，仍埋頭於研究，直到他死。他是歐拉的崇拜者，常說：「讀歐拉的著作，讀歐拉，他是我們全體的大師。」

3 投機的獵官者

拉普拉斯不但是個科學家，他也參加政治活動，因之許多人對他的人格很不滿。不過他處於亂世革命時代，又想做大官食大俸，自有他不得不然的苦衷。做政治舞臺上人物的，本來也只能如此，纔可以應付各方面。

當他被革命政府任官時，極力擁護革命，熱心擁護共和政治，大加謳歌，以為天下樂土地上樂園。就是在這殺人如草芥的革命的暴民專制治下的法國。

可是一到共和曆二月十八日（此為法國革命後改曆之二月，係十月二十日到十一月二十日

之間)拿破侖稱皇帝後,他又適應時代需要,一反前言而歌頌帝政,擁護拿破侖向他矢忠。拿破侖因他的功績,酬以內務部長一席。可是他實不會做官辦公事,做部長是成績毫無,六個月後拿破侖實在看不過了,解除了他的職務。可是仍舊給他一個元老院的議員的高職,以羈縻他,因為知道他是野心的。

拿破侖遠征莫斯科,因寒冷被自然屈服而敗歸在途中,於一千八百十三年十月在萊比錫和聯合軍大戰三日,又敗,其時他的運命迫於旦夕。這時國內議院中,由拉普拉斯首先唱議要拿破侖退位,和聯合軍媾和,重奉波爾蓬王朝正統。於是拿破侖被流放於聖海林那島,而路易十八被立為法王。拉普拉斯又矢忠於王,受封為侯爵,酬他推翻拿破侖之功。

這一種反獲小人的行爲,出於一個大科學家,實在可笑。但因為他有了官迷,實不得不如此以求上進。所以真真從事於學術的人,第一要除去此種官迷,因有了官迷以後,以有得官做為第一要着,別的都不管了。

4 羅強特爾 (Adrien Marie Legendre 1752-1833)

除拉格倫日、拉普拉斯外,在解析學上,羅強特爾也是很有貢獻的人。他生於都魯斯 (Toulouse)

之中流家庭，當他到巴黎的馬查侖 (Maçarin) 大學求學時，開始對於算學感到深厚的興味，他的老師馬利 (Abbe Joseph Francois Marie) 也是有名的算學家，指導他研究，進步很快。不久在巴黎的軍事學校中得到了教授算學的位置。其時有一篇論文，得到了柏林的王室研究院的獎金。一七八〇年他因要有充分時間來研究算學，辭去教職。他在若干公共機關中，得到些小飯碗。一七九五年被任師範學校的教授，其後任政府機關中的小官。因為他的膽小和拉普拉斯對他的非友誼的感情，阻止了他的顯達，反而使他對於學術，有恆久的研究心。

他在算學上的獨創和發見雖較少，也有許多功績，最著名的是橢圓函數的研究，其他如在最小二乘法、數論等方面，也有許多研究。在測地學上，他很有經驗，當實測英國格林威治與巴黎的距離，他是委員之一。

他著有初等幾何一書，很負盛名，在歐洲大陸及美國方面，用為教科書以替代歐幾里得的原本，為時甚久，重版次數甚多。他不照歐幾里得的編次，把三角的一部分也放進去，並且還說述 π 的無理性，那是近世改良歐幾里得幾何的最先著述。

5 甫里葉 (Joseph Fourier 1768-1830)

約瑟·甫里葉生於法蘭西中部之烏克塞爾 (Auxerre)。他是一個縫工之子，家甚貧，而且很不幸，在八歲上就做了孤兒。因之，少年時代得了親友的援助方得入了本地的陸軍學校，於是熱心用功，攻習算學，進步奇速。不久被認為有算學的天才。

他志願為砲兵，但因出身低賤而被拒絕，說「甫里葉非名門之子，不能任砲兵，雖則他算學很好。」當時法國砲兵頂好，都由貴家子弟充當，所以非名門出，便不能當砲兵了。於是甫里葉只能放棄了做軍人的念頭，決心來做算學家了。不久他就被任為陸軍學校的算學教授。二十一歲時，他到巴黎，在科學研究院宣讀他一篇關於解數字方程式的論文，這是將牛頓的方法更改進一步的。

在大革命時代，甫里葉也很活動，頗有功績。革命時代，法國的學藝一時有興盛之勢，度量衡的改制有大規模的計劃。當一七九五年師範學校創設時，他也是學生之一，後來做教師。因為他的才學，被聘為工藝學校教授。後拿破侖遠征埃及，帶了許多學者同行，他也被請加入而離職。同行有孟諾、貝索萊 (Berthollet) 等。拿破侖建立了一個埃及學院，甫里葉是任祕書的。他在埃及不但從事科學工作，並且處理政務。其後回國，又做了十四年的知事。

但是他的研究算學，並不會因任何事而中止，對於算學上的貢獻極大，在高等算學有種甫里葉級數，是他首先着手研究的。

三〇 純正幾何學之復興

1 笛沙爾克 (Girard Desargues 1598-1662)

自從笛卡爾發明解析幾何學，牛頓和雷白尼發明微分積分之後，許多學者大家都向這新開拓的部門鑽究，把古代的幾何拋荒了，所以在十七、八世紀間，純正幾何方面是沒有什麼發展，一直要到孟諸的畫法幾何起來纔再提醒這一方面的研究，由邦斯萊繼續發展，更由梅皮斯 (Möbius) 斯丹那 (Steiner) 的繼起而完成，後來更由法國的顯斯理 (Olinde) 德國的斯達特 (von Staudt) 意國的克里孟那 (Cremona) 而完成了更高度的發展。

可是這一派的源流，卻也很早，差不多和笛卡爾的發明解析幾何學同時，笛沙爾克已在這方面開拓了新境地，巴斯格也貢獻，但因後繼無人，致湮沒無聞耳。

笛沙爾克於一五九三年生於里昂 (Lyon)，以建築技師為業，但極長於算學，一六二六年至一六三〇年之間，在巴黎講授算學，不收費，對於推廣斯學，有很大的功績。笛卡爾與巴斯格都很敬佩

他的學問。巴斯格又自承受他的啓發不少。

近世綜合幾何學的基本，在連續原理，即直線的兩端點在無窮遠處相合一，而平行線亦於無窮遠處相交。又以爲中心在無窮遠處之圓周。再把各種圓錐曲線只視爲圓的射影。笛沙爾克的此種見解，是在幾何學上開拓新領地的，因爲希臘的古代幾何學，在那時已經很有研究，再不能擴大，而學者只得另行想出新機軸來了。

不過此種發見，因爲解析學的興旺而被掩遮，一時無人顧及，一直到十八世紀末十九世紀初，纔有孟諾的畫法幾何來再行創始，方能發展近世綜合幾何的另一頁。

2 孟諾 (Gaspard Monge 1746-1818)

十九世紀以後，有種進步很速的幾何學，那是畫法幾何學。有了此種幾何發明之後，幾何學成爲實用的，藝術的，而且空間的了。所以自有畫法幾何學以後的純正幾何學，後人叫做近世綜合幾何學。這綜合幾何學的開拓功臣，便是孟諾和他的許多門弟子。

孟諾於一七四六年生於波納 (Braune) 之貧家，因爲他的關於波納城市的設計圖，被一個陸軍大佐的技師所賞識，於是爲他在梅取爾 (Ménier) 地方的工技學校謀得一職。因爲他是低賤人

家出身，不能做軍人，但允許他入了附屬班，那是教授測量和繪圖的。

他見當時築城的設計圖，要用很繁的算術計算，他想出了一個幾何學的方法來代用，那是十分簡單，但不為他們採用，可是一經試驗之後，證實了那個便利和正確，便熱心應用了。孟諾再發展他的方法，創造出書法幾何學來。因為法國陸軍學校中間的競爭，他的方法是不許宣洩到學校以外去的。一七六八年，他被任梅取爾的算學教授。

一七八〇年，他因為和他的二個學生拉克洛阿 (S. F. Lacroix) 梵隆 (S. S. Gay de Vernon) 他不得不說：「我在這裏所做一切的計算，都能以直尺和圓規成之，但這祕密我是不許可發表的。」於是拉克洛阿自己去尋求這個祕密，終於發見了那個步驟，在一七九五年公刊了。孟諾自己同年也公表了他的創見，第一次是用他在師範學校的講義，因為他也做了那校的教授，第二次是在師範學校的校刊上，他改寫過的。一七九五年的師範學校不過四個月短命而停辦。同年工藝學校開校，此校之創設孟諾也作有力之活動。他在那裏教書法幾何，直到拿破侖徵集他隨軍赴埃及。他又是埃及學院的第一任學長。

孟諾是熱心的革命家，一七九二年任海軍長官，利用他的算學來助國防的充實。恐怖黨抬頭後，其職被免，且幾受死，幸以逃免。他又是拿破侖的崇拜者，以拿破侖失勢後他的勳命都被法王路易

十八所剝奪。還有工藝學校的毀棄，也使他很傷心。他不久就悶死。

孟諾是一個好教師，他有許多傑出的學生，其中尤有名者是杜賓（O. Dupin）、塞伏（F. Servois）、布里安與（O. J. Brianchon）、哈謙脫（Thiétte）、比奧（J. B. Biot）、邦斯萊（Poncelet）等人。

3 卡諾 (Lazare Nicolas Marguerite Carnot 1753-1823)

卡諾生於波根地（Burgundy）之諾萊（Noye）地方，在該地受相當教育後，入軍隊服務。他對於算學早就感到興味，故仍單獨研究，一七八四年著一書論力學上的問題。當一七八九年法國大革命勃發之際，他參加政治活動，被選為國防委員；當一八九三年歐洲諸國聯合軍百萬大軍總攻法國時，是由他編制十四個師團去抵抗而攻破的。到一七九六年，他反對拿破侖的獨裁，被放逐出國。他退去於日內瓦，在該地他又從事學問的研究，但仍自稱為一切君王的永久敵對者，以表示他從事革命的決心。當拿破侖從莫斯科敗回，他力為法國效命疆場，但不是為輔佐拿破侖，而是法蘭西民族國家。波爾蓬王朝（Bourbon）路易十八復國，再被放逐，於一八二三年死於馬特堡（Magleburg）。

他所研究的，是近世幾何上主要部門，孟諾的研究以空間為主，而他是關於平面上的。他將質量引用到幾何學上來，創設位置幾何。他又發明許多射影幾何學上的定理，為後來的邦斯萊等開一新

徑路。

4 邦斯萊 (Jean Victor Poncelet 1783-1867)

邦斯萊是梅茲 (Metz) 人，曾參加攻俄之役，在克拉斯諾 (Krasnoi) 的戰場上，被當做戰死者而遺棄，因之被俘於俄，囚於沙拉安夫 (Saraboff)。在監獄中他不許閱書，因之使他只能回憶到在梅茲時中學所學以及在工藝學校所講的孟諸的講義。他開始從基本地方研究算學。他的此種研究，後來使他成名。

他在囚牢中所做算學工作，正如彭揚在獄十二年間的做文學工作，成了天路歷程一書，流傳到如今，遠膾炙人口。到了一八一四年，他纔回法國，在一八二二年出版他的著作，這書也像彭揚的文學作品一樣受人尊敬。而且把孟諸的幾何，更發揚光大了。

三一 米突制的度量衡

1 創始

測度長短叫度，計量容積叫量，權衡輕重叫衡，即是總稱爲度量衡的。

我國本來的度量衡單位，有丈尺寸分，石斗升合，斤兩錢分等名稱的制度，現在已採用米突制而以市用制爲輔。初於民國四年，將米突制名爲萬國權度通制而採用爲第二種的國定度量衡制。於民國十八年二月，改以此爲標準制，由工商部頒佈施行細則，努力推行。因恐一時民間未慣，故另設市用制爲輔。

米突法的度量衡，起源於法蘭西，其制定距今約一百三十四年，今略述於次。

法國在大革命未發生以前，貴族和平民之間的階級間隔很遠，貴族有領地，過着富裕之生活，平民則貧苦不堪。而且人民無法律爲之保障，國王或大官可以隨意用一紙文書拘捕及監禁任何人民。所以特權階級，坐享膏腴，不出租稅，可以做官而任意剝削人民。人民則待宰之羔羊，馴良溫和，一無反

抗之力而坐以待斃。

國王也不愛惜百姓，又因窮兵黷武，以及奢侈揮霍，因之國庫空虛，便加課人民重稅以爲彌補，苛稅雜捐，指不勝屈。又因當時的尺度、斗升或稱秤，即度量衡很不正確，什麼都沒有。政府官署所用的度量衡和民間所用的不一樣。而民間的度量衡，也不一致，都有些稍的差異。因之納稅以及交易買賣，都很不便利。而巧取豪奪之事，便因發生。

等到大革命發生之後，便有改革度量衡的提議了。本來早在一五二八年亨利第二的臣下弗奈爾（Jean Fornal）已經有這計劃，但未能實現。是到了一七九〇年，政治家泰勒蘭（Talleyrand）在國民制憲會議中提議制定一種簡約而適用的新制度來推行全國，以代複雜混亂的舊式度量衡制，此案即被通過，交由專家調查辦理。

2 制定

於是從科學研究院組織一委員會，指定了當時算學界有名的五人即包達（Borda）、拉格倫日（Lagrange）、拉普拉斯（Laplace）、孟諾（Monge）、孔度西（Condorcet）爲委員，直隸屬國民制憲會之下，司理研究調查修改度量衡制度一事。

其時決定以永久不變的自然的長爲單位。研究會的報告，建議了以通過巴黎的經線的四分之一長即北極到赤道間的長的千萬分之一爲長的單位。

於是基本工作，須要測定經線的長了。指定了巴黎大學的教授第郎勃(Delaunoy)和梅奧(Mechain)二人擔任此事。他們先測敦開克(Dunkirk)和西班牙的巴塞洛那(Barcelona)間的經線之長。

這工作開始於法國大革命的大混亂中，他的從事測量工作，常被誤認作法國的間諜，被地方政府所逮捕。可是他們很堅毅不屈，七年之間，完成了那工作，結果也很好。從敦開克到巴塞洛那之間，在經度上約是十度，是用三角測量法的，再和一七三六年波甘(Bonguer)和孔達明(Ondamine)二人在祕魯所作的測量相比較，決定了四分之一經線即從北極到赤道爲止的子午線之長。以此分爲千萬等分，以其一分爲長的單位，叫做米突。這是用希臘字的，意義是「尺」。

包達爲主任，鑄造了二根長一米突的白金的棒，選取其中更正確的一根，作爲度的原器。這是後來成爲世界的米突的標準的。

又由委員會決定和長的單位有一定不變的關係的重的單位。選定一米突的十分之一即一粉之長爲一邊之立方體的純水在攝氏四度的重，叫做尪(公斤)。由方登爲主任作一尪(公斤)的

重的白金錘爲衡的原器。這是後來世界米突制度量衡的衡的原器。

又以一粉的立方即十糲的立方的容積做單位，叫做罇（公升）。

這樣度量衡的單位是決定了。還有地積的單位，那是畝的平方，叫做安（公畝）。

3 推廣

法國於一七九五年就開始推廣此米突制的度量衡了。因爲用力推行，和其實際上的便利簡單，所以自一八四〇年以後，意大利、西班牙、葡萄牙、希臘、比利時、荷蘭以及丹麥和瑞士的一部分，逐次採用了這種制度。德意志的許多聯邦，也很有用此制的，而半妊的重量單位，也在奧國商業上通用。一八六三年，萬國統計學會開會議於柏林，承認以米突制作爲國際間的公用度量衡最便利。聖彼得堡的俄帝國科學院也建議改用法米突制來改俄舊制的便利。一八六四年英國會也決議用米突法爲第二種的度量衡制，在先科學上的著作，早已大概採用了。美國是一八六六年公佈採用的。

一八七〇年由二十九國派遣委員五十人會議於巴黎，討論萬國度量衡原器，一八七二年議決仍以法國之原器爲標準，而以白金九〇%鉍一〇%之合金，作H形之棒三十根，各長一米突。其中第六根適爲一米突，名之爲 \odot ，作爲萬國原器。又以白金鉍之合金製成之錘三個，其中的第三個名爲 \odot ，

爲萬國原器。所以要用鎢鈹之合金，因此合金在空氣或溼氣中其質不變，酸類不腐蝕，富於彈性剛性，且膨脹係數甚小，經學術上嚴密之試驗而採用的。

後來測地學的進步，經精密之測量，則地球之子午線比二千萬米突多了一千七百米，故一米突之長，實際上是比半子午線之千萬分之一稍短。

後來又知道了地球在長年月之間，也稍有變動，子午線的長，並不如法國學者初時所設想的永久不變，所以現在是以原器作爲長度的標準了。

還有衡的原器和攝氏四度的真空中純水一立方粉的重量，也有些不符，現在也是以衡的原器做重量標準。

三二 十九世紀以後的算學

1 加速度的發展

十九世紀以後，因交通機關發達之結果，世界各國間往來便利，學問之相互交換成爲容易，便造成這世紀之文化的大進展。以前所謂文化，似限於歐洲，此後則成爲世界的文化，算學亦復如此，一切學術均擴大爲全世界學者共同研究而使之發達進步焉。

如電氣火花之用非常高速播傳於四方，算學上之發見發明，都是瞬息之間周知於世界各地，加以研究，更得改良發達。就中，最初是法國和德國的算學家很活動，以後自十九世紀中葉以降，歐美各國的學者，都有同樣的努力。

算學家的名字有不勝枚舉之概，而且在這十九世紀，算學的各分科，雖互有聯絡，卻也更細分而專門化，各自分別深求之。結果，有非專家不能了解之概。

又因各分科之非常複雜，而都有相互深切之關係，故其範圍限界，如何者爲代數，何者爲微分積

分，以及到那裏是幾何學的領域，在學者中間，也不能判然明瞭。況且代數學、幾何學、微積分學中，又要分別出許多分科來，各自成一獨立之學問，所以目下算學各科間限界更是不易分明了。

因之，先將其大體的分科及各分科的簡單說明記述於次。但這時代的發明發見，都屬於高等算學方面，我們是不容易理會的，初等算學的知識，自文藝復興時代，到十八世紀中葉之間，已經全都發明發見出來了。我們只略說何種分科有何學者作主要的研究。

2 綜合幾何學

在研究幾何學中，十七世紀發見了一種解析幾何學，其後有一時期，學者專注力於解析幾何學的研究。古代的幾何學，差不多沒有人顧及了。可是不久就生了反動，古代的幾何學，也有了新生氣，對於解析幾何學，稱古來的幾何學為綜合幾何學。

在綜合幾何學上最有功績的，是孟諸·邦斯萊·梅皮斯 (Möbius 1790-1868)、斯丹鼎 (Steiner)、顯斯理 (Chasles 1793-1880)、斯達特 (Staudt 1798-1867)、克里孟那 (Cremona 1830-1903) 等人。

在這綜合幾何學中，有一個一直被懷疑的公理，這是歐幾里得的名著幾何原本中的一個次

重要的平行線公理，幾何原本是一冊最優美的教科書，二千年間長時間，都用此書來研究幾何學。可是到了十九世紀中葉，有俄國人羅白基平斯基 (Nicholans Ivanovich Lobachevski 1793-1856) 和匈牙利人波里耶 (Wolfgang Bolvai de Bolva 1775-1856) 二人，差不多同時各自否認這個歐幾里得幾何中的平行線公理，而創造出一種新的幾何學來。

這是叫做「非歐幾里得幾何學」，贊成這學科的，有幾多有名的算學家。現在中等學校所教用的幾何學是綜合幾何學中的歐幾里得幾何。非歐幾里得幾何學對於初等幾何學是很少關係的。

3 解析幾何學

近世幾何學的有急速的發達，是在解析幾何學發明之後。解析幾何學的最初發見人是笛卡爾。此然造成今日的解析幾何學的基礎的人，卻是德人柏留格爾 (Julius Plucker 1801-1868)。此外有海斯 (Hesse 1811-1874)、布斯 (Booth 1806-1878)、克雷勒希 (Clebsch 1832-1872)、哈爾芬 (Halphen 1844-1889)、達潘 (Darboux 1842-1917) 都有不可磨滅之功績。

4 代數學

到了近世，代數學益加進步，有更深且廣之研究。成爲代數學基本法則之發見及方程式論之發達，而達到近世高等代數學深奧的理論。在代數學上有功績的人，首推高斯，而經哈密爾敦 (Hamilton 1805-1865)、第摩根 (De Morgan 1806-1871)、披雅斯 (Pairee 1809-1880)、格拉斯曼 (Grassmann 1809-1877)、開萊 (Cayley 1821-1895)、西維士德 (Sylvester 1814-1897) 等人的力，纔達到現在的完美地步。

5 解析學

把一般的微分積分學、無限級數、確率論、微分方程式等等給一個總括的名稱，叫算學解析，因爲那都是用解析的方法來討論研究的。

這解析學是高等算學的門限，從事於此研究的人最多，而其中最有名者是高希阿倍爾 (Abel 1802-1829)、法夫 (Pfaff 1765-1826)、普恩加來 (Poincaré 1854-1912)。

6 函數論

和解析學有不能分解的關係，有函數論，其研究者中推阿倍爾 (Abel 1802-1829)、約柯比 (Ja-

colin 1804-1851) 海米脫 (Hermite 18-221901) 伽羅 (Galois 1811-1832) 克魯因 (Klein 1849—) 開萊 (Cayley) 里曼 (Riemann 1826-1866) 淮以哀斯脫拉斯 (Weierstrass 1815-1897) 希淮茲 (Sulwarz 1845—)。

7 數論

在數論上，頂有名的是高斯。高斯在算學的各部分中，都有大名聲，特別是數論，好像是他一手包辦的。此外第力希來 (Dirichlet 1805-1859) 斯密斯 (H. J. S. Smith 1826-1883) 孔茂 (Kummer 1810-1893) 克洛耐格 (Kronecker 1823-1891) 段特金特 (Dedekind 1831-1916) 康托 (Cantor 1845-1918)。

這樣組成了現在的複雜的算學。回顧十八世紀，算學不是這樣廣大深遠的，是從十九世紀到現在，有了非常的發達。

今後要做一個算學家，必須先於算學的全般有一個相當的研究，然後去專心於從事一個分科，而且分科此後將更多更複雜，成為大算學家必要有非常的努力和忍耐。

三三 十九世紀的算學家

1 高斯 (Karl Friedrich Gauss 1777-1855)



高斯和別的高斯分別，有時稱爲大高斯，於一七七七年四月二十三日生於布侖休維克(Brunswick)。他父親是個做磚瓦的工人，當然他也是要繼承父業的。可是因他天生有算學的天才，說句笑話起來，他在會說話以前先會得計算的，而且又喜歡學問，幼小時就喜讀書，不喜歡泥工，父親很不歡喜他的脾氣。幸而他的計算力的正確敏捷，引起了白爾脫 (Johann Martin Bartels 1769-1836) 的注意，此人後爲杜巴 (Dorpat) 大學的算學教授，轉告了布侖

休維克公爵查理威廉。於是由公爵商得他父親的同意，來教育這孩子，送他入加洛林（Carolinum）大學。他的語學天才，也不遜於算學，進步極快，當他一七九五年進戈丁根（Göttingen）大學時，還不會決定習語學或算學哩。因為那時開智納（Abraham Gotthelf Kästner, 1719-1800）在那裏充算學教授，不是高斯所傾服的人，雖則當時德國學界認他地位很高，讚美他的算學和詩的才能。但照高斯說來，他不過可算詩人中的頂好算學家，而在算學家中可稱第一流詩人罷了。

因為高斯的天才卓絕，在加洛林大學三年間，已經有了超過那裏的教授的實力，那時他不過十五歲到十八歲，已發明了最小二乘法，證明了整數論中頂重要的“quadratic reciprocity”的定律。進了戈丁根之後，自然也只有獨自修習，獲得進步，因為那裏的教授，沒有力量指導他了。在他學生時代，已有關於整數論和別的種種重大發見。一七九九年，他有名的博士論文發表，震驚一時。那論文是證明代數學的基本定理，即一切方程式都有根，這嚴密的證明，是以前的學者所漏脫的。

在他十九歲上，發見了圓內接正十七邊形的作圖，非常欣喜，因此對於算學感到興趣而以後益加努力了。二十一歲時，學校畢業之後，回到故鄉，在自己家裏教授弟子，為家計之助。一七九八年至一七九九年間他到赫姆芬達（Helmstedt）大學整理圖書。

一八〇七年他三十歲時，俄國的沙皇招他赴聖彼得堡研究院講學，這時戈丁根市新建設了一

座天文臺，天文學家奧爾培（Olber）勸請他擔任臺長，因之他謝絕了赴俄之行。他不願意去講算學而允許做天文臺長，因他可以專心從事科學之研究。

高斯一直住在戈丁根，過他的一生，在他繼續的研究之中。一八二八年他到過一次柏林，去出席科學家會議。以後永未離過戈丁根一步，只有在一八五四年 戈丁根和漢諾伐間火車開通之際，他去旅行過一次。

高斯的性質是很嚴格的，他的算學書也是這樣子。算學上所最重要的是正確，高斯所著算學書甚多，無一處不嚴密確切的。另一方面，他又富於稚氣，頗有童心，極單純。可是他有時很有脾氣，和人說不來，因之友人極少，他也不喜交際。

他的整數論（Disquisitiones Arithmeticae）於一八〇一年在萊比錫出版，是數論上開新紀元的著作。其次他的計算天體軌道亦有成功。研究誤差，是他開創的，他發見誤差的方程式，即誤差 \times 發生的確率以 χ^2 表示，則 $\chi^2 \parallel \text{Ke}^{-\chi^2/2}$ 。又新創複素數的幾何學表示法，即所謂高斯的表示。又研究圓周等分法，即正多角形之作圖。他的發見極多，他的功績，在全部算學範圍之內都有。他於一八五五年二月二十三日死於戈丁根。遺言以他所發見的正十七邊形刻於臺碑，這是後來在他的故鄉布侖德維克的紀念碑上實現了的。

2 高 希 (Augustin Louis Cauchy 1789-1857)

高希於一七八九年八月二十一日生於巴黎，一八五七年五月二十五日歿於Geneva。他和高斯同時，同樣有名，他是巴黎人，爲法蘭西算學界巨星，與德國算學界有高斯一樣。

高希幼時，受他父親的教育，他父親和當時的大學者拉格命、拉普拉斯等往來，他們就認識此兒將來必爲學界奇才。一八〇五年進了工藝學院，二年後入Ecole des Ponts et Chaussées，一八一〇年赴坎堡(Cherbourg)爲工程技師。但他還是研究算學。三年後因身體健康關係回巴黎，更因拉格命日和拉普拉斯之勸告，放棄工程師的工作而從事於純粹科學之研究。不久被任爲工藝學院的教授。一八三〇年七月革命結果法王查理第十被逐，路易腓力布應人民的要求，而登沙國的王位，查理第十逃往英國。高希因爲拒絕宣誓盡忠於新王，被革去原職，而他自願受了流刑，流浪國外。他到瑞士的弗里堡(Fribourg)，重新從事研究算學。一八三一年受聘於彼特孟王於都林(Turin)大學講物理算學。一八三三年廢王查理第十由英國召他，爲其孫波道公爵之傅。這給了高希周遊歐洲各地的機會。查理第十給了他一個男爵的封號。一八三八年他回到巴黎，法蘭西學院有個教授的職位請他擔任，可是他仍不允宣誓而不得任職。後來他想做別的官職，但有不宣誓不得任官的法律，他的潔

癖是使他不肯宣誓的。

一八四八年的二月革命，逐出了路易腓力布，法國重爲共和制，廢去了宣誓，於是高希再任了工藝學院的教授。後來路易拿破侖重建帝政，再復活了宣誓的規矩，但對於二個人是特別免除其宣誓的，即是高希和 D. E. G. Arago 二人。

在高斯以前的算學，發達還比較幼稚，所以不論歐拉、牛頓、拉格朗日，都對於算學的全範圍有關拓進步之功，而在高斯以後，則無論如何異常之天才，在廣泛的算學各部門，要有同樣的業績是不可能了。像高斯的範圍是算很大了，但也是特別注力於數論方面。高希也如此，他的研究範圍原不小，而致力之地則在屬於解析的級數論、函數論方面。一八二一年發表的代數解析論，是使得初等函數的理論和複素數的無限級數論，有了確固不動的基礎。又複素數函數論中的高希積分定理是一八二五年的發見，是函數論中最大的基本定理。其他微分方程式、置換論方面偉大的研究，以及在數論、行列式、天文學、光學、彈性方面的研究，都是很驚人的。他的全集凡二十七卷，其龐大僅次於歐拉。

3 斯丹那 (Jakob Steiner 1796-1863)

古代小亞西亞出一個大幾何學者阿波洛尼士，盛名永存，而斯丹那是可以說追踪先哲的，於

一七九六年三月十八日與歐拉相同生於瑞士，一八六三年卒於倍因（Basel）。原來綜合幾何學自孟諸、卡諾、邦斯萊等開拓肇基以來，大成到今日之偉觀，是靠了斯丹那的發揮他的天才之功。

斯丹那生於田野貧農人家，到了十三歲，還是一個目不識丁的鄉村頑童，到十四歲，纔受文字之教育，十八歲時，爲教育家裴斯泰洛齊（Pestalozzi）之學生，於是其潛藏之天才忽而茁發，向學之志，不可遏制。乃請命於父，入海岱堡（Heidenberg）大學三年，至一八二一年赴柏林，作苦學生，自己一面做工一面讀書。一八三二年他的大論文幾何形態關係的組織的研究發表，名振一時，柏林大學特爲他新設幾何學講座，聘爲教授，以後他專致力於純正幾何學之研究，發表於世。他在柏林大學的講義，全是他自己獨創的發見，毫不引用別人的研究，而且教授甚嚴格，學生引以爲苦事。他是有名的柏林大學教授，可是除了專門的幾何學以外，可說什麼都不知道。在海岱堡爲學生時，也只聽幾何學講義，微分積分、整數論等都不理睬的。所以他的代數學的知識，比中學生還不如，至多明白了二次方程式的解法罷了，這好像是不會有而是真的事。他又是很直情徑行的人，有友人，也有不少敵人，有時對於友人也起猛烈衝突。

某晚他的友人，也是很有名的算學家約柯比（Jacobi）來訪，談了許多話，忽然意見不合，激論之後，約柯比辭去。在約柯比方抵寓而斯丹那差了使者來了，約他明日以手槍決鬪。約柯比的回答很妙：

「你倘使喜歡死，可以自己去買了手槍，對着自己的頭一擊，何必來約別人。」這事是這樣解決的。他在研究上也有同樣的個性表現。許多他的發見，只記錄了結果，而沒有什麼證明。

他被稱為歐幾里得以來最大的幾何學家。

4 阿倍爾 (Niels Henrik Abel 1802-1829)

阿倍爾於一八〇二年八月五日生於挪威國之芬杜威 (Finsdøe)。一八二九年四月六日以二十七歲夭折。他雖短命，但在這短促生涯中所完成的大功，已不失為十九世紀之一大算學家了。他本來對算學並不感到特別興趣，直到一八一八年教會學堂克利斯的那大學來了個教授霍姆包 (Holmboe)，由他的講義，引起了他對算學的興趣。他起初試想解一般的五次方程式，用代數的解法，以試他的能力。一八二一年入克利斯的那大學，愛讀歐拉、拉格命日、羅強特爾等之著作，橢圓函數之發見，是種根於此時的。

因他對於算學有特殊能力，政府特給官費使他遊學外邦。一八二五年離挪威，先去德國，在柏林留了六個月，與斯丹納及克來爾 (August Leopold Crelle) 爲友。克來爾的發行那個著名的克萊爾雜誌，是由阿倍爾及斯丹納的慫恿的。這有名雜誌於一八二六年創刊。阿倍爾在這上面發表了幾篇

大著。他的證明五次方程式不能以代數學方法，即加減乘除和有限回數開方解答，在一八二四年發表的，很簡略而難解，是在這雜誌的第一卷裏重新寫過，再行刊載的。他還研究怎樣的方程式是可以代數學方法解答的，也綜合成定理。在一八二六年阿倍爾離德赴法，他在德國不會會見高斯。因為一八二四年他送他的證明五次方程式不能解的論文給高斯，高斯不會有什麼注意，使他的自尊心不願去找了根的。他對於高斯，也有同樣的感情，他在巴黎十個月，會見了第力希來、羅強特爾、高希和別的人，但他人不認識他的才學，他雖在克來爾雜誌上發過許多論文，但法人此時還不知此雜誌之存在，而阿倍爾也不願自己表示他的功績，所以他也不被重視。

不久他急於回國，在國內他做私人教授。後來因克來爾的斡旋，在柏林得了教授的位置，但這消息遞去，他已經逝世了。一九〇二年他的百年生日祝賀之際，由後人替他結集了全集二卷和追懷錄一冊，公刊於世。

對於橢圓函數，他有割時期的研究。二項定理的最一般情形，也是他最先論到。對於無限級數的發散、收斂有不少發見及補正高希之處。

5 哈米爾敦 (William Rowan Hamilton 1805-1865)

哈米爾敦於西元一八〇五年八月四日生於愛爾蘭之都柏林 (Dublin) 市。在他的幼年時代，就跟伯叔研究語學，八歲就習希臘、拉丁和法文。他很有語學的天才，在十三歲時，已學會了十三國以上的文字。因之他讀書很便利，什麼都可以從原文直讀，用不到看譯書，就不會受誤譯之累。

就在那十三歲上，他讀了牛頓所著的一冊算學書，感到很大興趣，就再讀解析幾何、微分積分，以及牛頓的原理。拉普拉斯的天體力學。對於算學，十分熱心研究。十八歲時，他已經有了一篇論文訂正拉普拉斯著作中的一個錯誤。

一八二四年他進都柏林的三一學院，一八二七年在他還在學時，被同大學聘任天文學講座，這是他的學問已足勝任，故特別破格的，就可見他是怎樣的一種天才了。

他的不朽盛名，是四元法的發見。這是一八四三年十月十六日的傍晚，他偕妻沿了都柏林市的運河散步，忽然觸發了一個念頭，於是就走到近邊的 Broustian Bridge 橋上，用小刀把那個基本公式 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 刻在石欄上，以誌痕跡而免遺忘。以後為紀念哈米爾敦的大發見，此橋改名為四元橋 (Quaternian Bridge)。

四元法是怎樣的東西呢？

複素數 $a + bi$ 依歐拉、高斯等的研究，視為以 1 為單位的實數及以 i 為單位的虛數的複合數。

因之在一平面上定了實數軸與虛數軸，則 $a + bi$ 可以對應這兩軸的坐標是 (a, b) 的在這平面內的一點來代表。而同平面內的任意一點，也和某一複素數相對應。哈米爾敦想到空間中的點是與何物對應的？他先想到和同一樣取第三個單位 1 ，而設立有 $1, i, j$ 三種單位的合成數 $a + bi + cj$ 。造成了一個新的數系統。後來研究的結果，是再加了一個單位而為四元更合理，於是把第四單位叫作 k ，而是以 $1, i, j, k$ 四單位的合成數 $a + bi + cj + dk$ 。這四種單位 $1, i, j, k$ 之間應含怎樣意義，哈米爾敦以次記式子為其基本性質：

$$1^2 = i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = ji = k, \quad jk = kj = i, \quad ki = ik = j.$$

這數系統即是四元法，上記是四元法的根本公式。他不但創造了這新的數列，而且這思想在幾何學上、運動學上以及羣論上，都有重大的影響。即哈米爾敦用了四元法在算學上開闢了前人未發的新天地。

此外哈米爾敦著書很多，都是很有益的。他實在是十九世紀算學的大恩人。一八六五年六十歲死於都柏林。

6 伽 羅 (Evariste Galois 1811-1832)

阿倍爾以二十六年之短命生涯，在算學史上留下了名字，成學界奇跡，伽羅卻比他更短六年，他只有二十年，也做出了很巨大的功績。人生二十歲可說是乳臭未乾，一般做大學生的，還在朦朧瞠瞠爛用父祖財產，而耽溺於無益之嬉戲。可是我們看了伽羅的業績，就感到人間智力的偉大。而且他的二十年並不是過的恬靜的思索生活，在最後之二年，正當法國大革命勃發之際，他也參加政治活動，因之入獄，又或與學界先進論爭，最後且以戀愛事件決鬪而死。他的短促生涯，卻是波瀾重重，在多事之際，他還能在極短時間內作要極端靜思的算學研究，而且立了大功績，真是令人驚嘆的。

伽羅於一八一一年十月二十五日生於巴黎附近之 Bourges-la-Reine，一八三二年五月三十日決鬪受重傷，翌日去世。他在十五歲以後，纔發現出算學的天才來。他曾有二次被拒入工藝學院，因為入學考試不合格。一八二九年入了師範學校，那時是個下賤的學校，他的傲慢使他在學校生活不平凡，一八三〇年的革命擾亂之際，他被逼退學。他為人聰敏非凡，讀平常教科書快速如看小說，在早就耽讀拉格命日等的名著，很受啓發，十七歲時創見大思想羣論的根本概念，其論文為當時一部分算學家所激賞。但此論文的為各國學界所注意，卻在他死後十四五年，由廖維 (Lionville) 氏在一八四六年於他的雜誌上介紹了之後，各國學者纔振驚於伽羅着想之妙，而就此新思想沒頭研究，遂致建設了壯麗玄妙的羣論。因此方程式論得一變了本來的面目，而函數論有了絕大的發展。伽羅的論

文是關於羣論和方程式論的，一共五篇，一八九七年由法國算學會公刊的，他的全集，全書只六十七頁，正和歐拉相反，是全集中最小的。

7 淮以哀斯脫拉斯 (Karl Weierstrass 1815-1897)

淮以哀斯脫拉斯於一八一五年十月三十一日生於西法利亞 (Weisphalia) 的小村 Ostenfelde，一八九七年二月十九日死於柏林。當他入巴代達 (Paderborn) 中學時，對於斯丹那的幾何研究，已很感到興味。十九歲入波痕 (Bonn) 大學修習法律經濟，但仍獨自學習算學，特別對拉普拉斯用功。但當時在波痕大學講算的 Wilhelm Diesterweg 和 J. Plücker 不會給他感化。大學畢業後，做中學教員，先擔任語學科學等科目，後來也教算學。

他的研究算學是孜孜不息的，據說有一次，忘卻去上八點鐘的課，校長到他的室中去看查究竟，卻見他很熱心在研究一個問題，是從昨夜連續下來，不知道已經天亮，他向校長道歉，並且說他想要一種大發見來振驚世間。

一八六四年他被任柏林大學教授，那時他已經是五十老人了。他可說從這時出發，開始學術上的大工作的。本來數學史上的偉人，大抵在少年時代就顯現特殊的天才，很早就從事於專門的研究，

不必推到伽羅和阿倍爾的特例，高斯也在二十四歲時就發表了他的整數論，准以哀斯脫拉斯便全不同了，在那些偉人差不多已是成功退身的時候，他纔來開始，他是個晚成的人。而且他是做了多年中學教師，往往有人說做了初等算學教師的人，前途無望，這卻有此實例來否定了。他對於中學教師生活，常以歡喜誇傲而回想，斷言教授初等算學決不妨害為算學家的向上。他在開拓的業績以外，這些地方也給後進以很好的教訓。

他的研究範圍也很大，以一般函數論及橢圓函數論為最著，最近的橢圓函數是以他所研究的做根據的。又如發舉出是連續函數而微分不可能的實例，即是連續曲線而沒有切線的實例

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{但 } a \text{ 為正的奇數, } b \text{ 為小於 } 1 \text{ 的正數,}$$

$$ab > 1 + \frac{3a}{2}.$$

是給當時算學界以很大的震動的，也是算學史上一件大事。他最重論理嚴正，把一切解析論的根底置於正整數的性質上，這叫算學的算術化，是最近算學的一般傾向，由他開始其端緒的。

8 普恩加來 (Henri Poincaré 1854-1912)

十九世紀中葉到二十世紀初的大算學家，世界各地都產生不少，其中尤傑出的，當推普恩加來，

在他生存當時，已爲世所公認，在純粹算學和應用算學上的貢獻，無人能及，特別是晚年的耽於哲學



思索，把算理的幽玄思想介紹於思想界，尤有其特殊的地位。他在一八五四年四月二十九日生於法國的南山（Nancy），一九一二年七月十七日歿於巴黎。

他初入南山中學，後進工藝學院和礦工專校，一八七九年由巴黎大學授以博士學位。先在該因（Caen）大學講算學解析，繼在蘇朋納大學（Sorbonne）先擔任物理和實驗機械，後擔任物理、算學，後又擔任天文、算學和天體力學。他出版著作很多，在數量上可以和高希、歐拉等比肩，其範圍遍及天文、物理、算學和哲學，在同時沒有人能像他這樣廣博多才的。關於純粹算學方面，他差不多沒有一部門不踏到的，更是在微分方程式、一般函數論、整數論及幾何學的基礎，有重要研究。算理哲學有科學與假設、科學的價值及科學與方法三大著。理論物理上的三體研究的大問題，曾於一八九〇年獲得瑞典王奧斯卡第二的大獎賞的一半。其他所得的學額賞甚多。又得世界著名大學劍橋、牛津、格拉斯考、克利斯丁尼亞、伯魯塞勞、斯托克霍姆等六大學的名譽博士。

他的身體不巨偉，以一般歐人來說，是具有法蘭西人的纖弱，身長不及五呎五吋，體重亦在一百五十磅以下，他思索研究以外，不做別事。以探索真理爲人間最高的目標。常公言他是爲算學而生，爲算學而死，是一個篤學之士。

三四 太陽系的擴大

1 天王星的發見

在地動說一節裏，已經約略說明了我們的世界的構造，但那些星宿是前古幾千年以來就知道的，我們未會有新的發現。關於太陽系的日、月、火、水、木、金、土的七星，是有史以前就爲人類所熟知，而恆星相互間有一定不動的位置，月和太陽及其他行星，各自在恆星間運行，也早爲人類窺破。稱行星爲 Planet，在希臘文原意中有徬徨之意，因行星不同太陽，月亮作有規則的運行。

日月五星爲太陽系的一族，爲衆周知已久，而不知此外更有同屬於太陽系之天體存在，由近世科學之發達發見新的行星，將太陽系的範圍擴大，於是我們的世界日見開闊，可以說是必然的。

在望遠鏡發明以前，觀測天象，全憑肉眼，因此視力之關係，天文學不能有大的進展。十六世紀中葉伽利略發明了望遠鏡，再由牛頓的力學定律，闡明太陽系運行的理，研究天文的風氣一時大盛。有很多的業餘研究家，備了自製的望遠鏡，熱心去觀測天象。天王星的發見者赫喜爾 (William Herschel)

1783-1823)也是此中之一人。他小時就愛好算學天文，自造望遠鏡來觀天，逐漸爲世所認知，而成績也很好，有了許多星學上的發見，與倫敦王家天文臺通訊，是業餘家佼佼者了。他在一七八一年三月十三日發見了一個新的行星，最初他是誤認爲慧星的，將此事通報於王家天文臺，驚動一時。大家觀測計算的結果，知道是一個行星，位置尙在土星之外側，爲以前所未知的。

在英國由赫喜爾的提議，紀念當時在位英王喬治三世，取名 *Georgium Sidus*，但在歐洲大陸都給另起名字，有人以爲赫喜爾發見，即以赫喜星名之，有人遵古來慣例，名之爲 *Uranus* (天王星)，後來以天王星之名通行於世。

這是太陽系的第一次擴大。

2 海王星的發見

天王星發見之後，天文學者的最先工作是去測定其軌道。因由牛頓力學的論定，太陽系各行星是依了以太陽爲焦點的橢圓而運行，而且橢圓是有了焦點之外，再在其周上有三點即可決定的。所以要測定新行星的軌道，只要有了此行星的三個不同時期的位置即可。不過倘使這三點太接近了，容易有大的誤差，所以要有三個隔離較遠的時期爲妙。

因此想到去查舊的天文記錄，也許以前有人觀測過此星的，果然查了出來，格林威治的天文臺，在赫喜爾的發見前一百年頃，已有五次的觀測記錄在星圖上。巴黎有名天文學家雷孟尼自一七五〇年以來也有記錄，不過是不作為行星，而因每次在不同的位置，當是別個新恆星罷了。但在決定軌道，此種記錄卻甚重要，由此種記錄和赫喜爾以後的觀察，意外容易地決定了新行星的軌道。

可是隔了不久，這個新行星走出了軌道之外去了，不到三十年工夫，很離開了算定的軌道。於是便疑心以前的觀測不正確，再因新測定的材料，加以相近的大行星木星、土星所受影響的補正，重新算定。可是還是不行，行星的運行，仍不上軌道來。各國的天文學者，都無法解決此謎。有人懷疑到牛頓力學的不合，也有人推想在此行星之外，尚有一行星來牽制之故。

一個天體受別個天體的影響的計算，在當時已為極平常之事，但有了影響而去摸索那個天體之所在，卻是從未有入看手過的事，這是極不容易的問題，許多學者都束手無策。眼看行星的軌道年年有大誤差，而無法解決此問題。數年後，有個劍橋大學新畢業的青年算學者亞丹斯 (John Couch Adams 1819-1892)，以二年餘之研究計算，獲得了一個假定的結果，一八四五年十月，訪格林威治天文臺長，提出他的大論文，要求發表他由算理所推定的未知行星的位置，並且作實際之觀測。

可是這個無名的青年，不見重於天文臺長，也沒有照他指定的位置去探索新星，也不公表他的

論文。而同時在法國也有個新進的天文學者勒佛利 (Urban Jean Joseph LeVerrier 1811-1877) 也從事於這個問題的研究，經過了多次的失敗，於一八四六年六月達到一個結論而公表於世。他的結果和丹斯的是不謀而合的，但格林威治的天文臺仍不肯動其巨大之望遠鏡去探索。

勒佛利致書於柏林的天文臺長伽來 (Galle) 博士要求他探索此假定之新行星，一八四六年九月二十三日伽來博士接到此書，因為他說的如此確定，故依照他指定的地點探窺，果然有這個星。的確是一個新的行星，於是很快的傳佈於世界各地，大家承認勒佛利的天才和算學的偉大。

倫敦於十月一日得到此消息，亞丹斯的友人，一般劍橋的青年學者大譁，以為此星是亞丹斯在一年前已發見的，反被別人獲了優先權，是格林威治天文臺長的怠慢之故。又恨劍橋大學的設備不周，不能自行觀測。於是格林威治天文臺長將此事始末公表於世，深謝自己的不明，湮沒了亞丹斯的功績。因此由算學之力而發見此新行星之功，亞丹斯也分了一半。此新行星即是海王星 (Neptune)。這是太陽系的第二次擴大。

3 冥王星的發現

純粹以算學的假設，而發見海王星的存在，使太陽系的範圍又擴大了一次。但天王星的行動還

未全入正軌，自然會有人想到又有別個行星的牽制，可是數十年來，數學家、天文學家的努力，不曾有什麼新的發見，直到一九三〇年方始發見了海王星外的另一顆新行星，現定名為冥王星（*Pluto* 或 *Hades*），這是太陽系的第三次擴大。

發見此行星的是美國羅威爾天文臺的青年托姆巴（*Clyde W. Tombaugh*），由所攝的照相中，窺見此星的行動奇怪，加以注意，而決定其為新行星。不過此天文臺的創始人羅威爾（*Perceval Lowell* 1855-1916），對於此新星，很早就有研究，還論定了此新行星的軌道，現在所發見的和他的論斷雖有些出入，但他的一九一五年的論文中，實已先決定了此星的存在，不過他在論文發表的翌年即逝世，而他的天文臺上仍繼續他的工作，遂有此發見耳。

這還是新近纔發見的新行星，一切都在觀測研究之中，還不會有什麼可以說述的，但由算學之力來決定一個天體的位置，卻又多了一實例，亦可見算學之偉大了。

三五 算學的應用

算學應用範圍的廣大，可以不必多說的，從古以來的教育科目中，算學總佔有重要的地位，希臘人所謂學問，實在即是算學之意，我國的六藝之中，也有算學一項。爲什麼算學如此爲人重視呢？因爲人間日常生活之中，少不了算學。我們現在算術中所學習的，大都是日常生活所不可少的知識，卽如程度較高的各科目，也和人生有密切的關係。曆的決定，是少不了算學的，製曆是與人間生活極有關的一件事，農人播種，商人航海，都要根據曆書，國家製定曆法，算是爲人民服役之一大事。我國在黃帝時代，已定曆法，堯時代已有閏法，曆的製定，一向是治國大事之一，各朝都有欽天監之類的設置，司理其事，在中國的天文學，是以製曆爲本位的。而天文與算學，實有不能分離之關係。

1 算學與天文

在遠古的巴比倫時代，美索不達米亞的駐民，仰觀天象的結果，得了種種結論，他們因此而發明了角度的六十分法，許多星辰的運行，也是他們所熟知，而特別對於月亮感到興味，他們建造許多觀

象臺，對於月亮有頂精密的觀測，造成了以月的周期爲本位的太陰曆，現在的回教徒還沿用着。

埃及人對於太陽有敬虔的崇拜思想，又因天狼星的預告水漲，經長年的經驗，測定了一年的長短，成爲太陽曆的起源，經過若干次的修改，成爲現在全世界通行的曆法。此種曆法的製定，必要算學，是可以不必說的。

至於天文的須要算學，沒有算學差不多沒有天文一科，也是很明白的。太陽的運行，行星的軌道，星球的距離，星宿的位置，都非藉算學不能決定。前節不是已說過由算學的計算而發見了新的行星嗎？實在是有了算學纔有天文的。希臘算學家的研究圓錐曲線，還不知道有實際的用處，而凱伯勒的橢圓軌道，卻給橢圓以實際應用了。非歐幾里得幾何學發見以後，有安斯坦的相對性原理出來，把宇宙觀完全改變，非歐幾里得的空間反像比歐幾里得的更合實際。這些是算學爲天文的前驅的事。

但算學受天文的啓發也不少。從前印度的算學，是跟了天文而來的，天文是主體，算學不過是天文的工具，在他們天文與人生有更密切的關係。一切的發見是起於必要，實用上的價值我們不能忽略的。比方幾何學起源尼羅河的氾濫，牛頓的發明微積分，是因爲要解力學上的問題，其他繪畫建築上的投影法、透視法便是射影幾何的起源。要解釋宇宙的謎的天文學，對於推進算學，也很有力量。

天文學的發達，是靠了算學的進步，不是算學家不能成天文學家，只看天文學史上有名的，在算

學史上一定也是有名的。如塞爾 (Friedrich Wilhelm Bessel) 亨生 (Peter Andreas Hansen) 勒佛利 (Jean Joseph Leverrier) 亞丹斯 (John Couch Adams) 希爾 (George William Hill) 牛康姆 (Simon Newcomb) 等十九世紀的天文學家都是有名的算學家。可知算學在天文上所佔地位之重要。

2 算學和測量學

當測量高山深谷大河之時，不能直接去量的，用什麼方法？要知道海中的島，或遠處可以望見的地體的距離怎樣算法？這是只要用一個望遠鏡和磁石而觀測，其他均可用算學的計算而求得之。

北平到南京的距離，並非一尺尺去量出來的。中國和美國的距離，太平洋的面積，東海的大小或者小沼大湖的面積都非用算學，不能測量出來的。在大洋中航海的輪船，四周都是水，卻知道他所在的位置，而在萬一出險之際，可以報告其位置而求援。去赴援的船，也明白知道那船的所在地，這都是非有算學之力不成的。

不但國內的面積，世界各國的大小，都是算學的力，而且說地球是圓的，也由測量的結果而知其正確。還有地球的大小，直徑周圍等，也由測量而知，但這些測量也不是測量了全個地球的，只測量了

很精密的一部分，別的是用計算而求得的。

實在沒有算學就沒有測量了，有了算學纔有測量的。

3 算學與物理

拋物向上必落下，大砲向天開，砲彈終必下墜，這是什麼理由？而且以怎樣的速度落下來。要明白這個，非知地心吸力不可，這就要用到算學。

那麼天上不是有無數的星嗎？為什麼不墮下來？但是流星不知每天有多少，用很速的力向地下垂，這也是受吸力的支配，一切都要用算學。

或問水何以流，電氣何由發生，電氣有若干力可作多少工作，電氣的強如何，時鐘何以按時行走，機械何以能運物，或音一秒走多少遠，光一秒走多少遠，大炮何以能洞穿鋼板等等問題，都是物理學上科學的研究。但其確實的結果，或確實的計算方法，無一非由算學的力，算學的計算方法不可。

物理學的發達，是要借了算學的力，纔能實現的。沒有算學的力，一點也不能發達。

自古迄今的物理學者都是算學家，只要算學根底好，就容易成物理學者的。拉格命日、拉普拉斯、牛頓等不必說，十九世紀的大物理學者，又必是大算學家。如蒲生 (Simon Denis Poisson 1781-18

40) 包爾 (Sir Robert Stawell Ball 1840-1913) 哈密爾敦 (Sir William Rowan Hamilton) 伐來斯基 (Sophia Kowalevski 1850-1891) 湯姆生 (W. Thomson 1824-1907) 弗爾拉 (Norman Ferrers 1829-1903) 拉梅 (Gabriel Lamé 1795-1870) 魏腦 (Barré de St-Venant 1797-1886) 馬提 (Mathieu) 格林 (George Green 1798-1841) 馬克斯威 (James Clerk Maxwell 1831-1879) 霍享爾次 (Hermann von Helmholtz 1821 1894) 蘭金 (William John M. Rankine 1820-1872) 安斯坦 (Einstein)。

這些數不清的大物理家，都是大算學家，即使算學家並不大，最初必然研究算學，有了充分的算學力量之後，然後去研究物理的。

物理學之少不了算學，正同天文學一樣。

4 其他

晚近的各種學科，都有借重算學的趨勢，心理學、生理學、經濟學、社會學甚至史學、地文學、生物學、農學各方面，都要採用算學的式子，來表示其正確。統計材料為各方重視之後，大家歡喜用公式來概括，於是算學的式子，每被亂用。許多表示相關的式子，散見於各學科的各部門，雖則並不如何嚴正嚴

密，但算學被人重視，已經可見，差不多算學不是一獨立的科學而是別的科學的根基的樣子了。

照此種看法，則算學的範圍將更廣大，用處將益擴大，雖則現在還未到達成熟之時，但這氣運已很顯然了。

本來算學一科目，和別的科學，很有特異的性質，是所謂嚴正的科學的軌範，自然科學的要成爲真正科學，是非算學化不可，一切科學的要借重算學，大概是在這一點吧。

三六 中國算學概說

中國算學源流甚古，史稱黃帝考定星曆，建立五行，起消息，正閏餘，則在西元前二千五百年頃，已有較完備之算學。周秦之際，算學也屬必修學藝之一，至漢尚仍其制。最古的中國算書爲周髀算經及九章，此二書之著述者爲何人，已難稽考，大約非出於一人之手，而爲編集古來各種問題於一書中，略加以分類編次罷了。所以源流也許極古，有可上溯至周秦以前者，亦有兩漢時代的算法羅雜其間，蓋爲一種集成之編而非一貫之創作。由此等書中可見圓周率及畢他哥拉斯定理，在中國很早就知道。劉歆之創圓周率爲 3.14159265 ，較古代之以 $\pi \approx 3$ 已見進步，至祖沖之則更定 $\pi \approx 3.14159265$ ，並定 $\frac{22}{7}$ 爲疎率， $\frac{355}{113}$ 爲密率，則更進一步，在實用上，可謂無礙矣。在兩晉南北朝之際，算學頗見進展，除祖沖之、恆之父子外，有孫子、張丘建、夏后陽等人，並著有算經傳世。東漢明帝時佛法已入中國，疑印度算學亦隨而入華，受此刺激，故能於亂離之世，而獨盛於一時也。

201

到了唐朝，中國國勢大盛，與四方交通之故，印度算學再傳入中國，有瞿曇悉達譯九執歷，著開元占經，爲印度算學入中國之可考者。當時整理中國舊有算學，李淳風、梁述、王真儒受詔譯注五曹孫子

十部算經，付國學行用。蓋唐代學校也。設算學一科，復有以算學取士，故尚有人傳習。唐初王孝通著有輯古算經，亦爲現存古算書之一。中國算學之流傳於百濟、日本，亦始於唐代。

至宋有秦九韶於算學之造詣特高，所著數書九章，中有高次方程式根近似值之求法，早於西人之發見同法，在五六百年之前。李治之天元一術，亦發人所未發，具見巧思，所著測圓海鏡，益古演段均爲中國算書中特有地位之作。至楊輝出，更有進步，中國算學至此，似達極盛之境。楊輝算法今存七卷。降至元代，有郭守敬、朱世傑二家，並著盛名。郭守敬於天算、星學，特著才識。朱世傑著四元玉鑑，有同於今日之代數學，又有關於級數之論，一時無兩。元代拓土之廣，遍於歐亞，惜爲治不久，故學術之流通，未見旺盛。西方阿剌伯算學之流入中土，及希臘算學之由阿剌伯傳來者，爲量甚少，惟回曆則於此時爲政府所採用，以補中國原有曆法之不備。

明清之際，海禁大開，西葡諸國努力於海外殖民，遂有教士東來，時中國算學已極衰頹，古法亦無人通曉，因之極意攝取西方學術。利瑪竇等遂以算爲人所重。徐光啓爲傾心西方學術之最著者，至受洗禮皈依天主教，從利瑪竇爲師，同譯歐幾里得幾何原本，其後艾儒略、龐迪我、熊三拔、陽瑪諾等西教士，並以算而用。湯若望、羅雅谷繼進，明亡後仍掌理欽天監，則其時曆算，蓋已盡用客卿矣。

清康熙帝亦能留意曆算，修定曆象考成、數理精蘊等書，於雍正初刻成。其時梅文鼎、殷成父子，以

整理西方算學有名，著書甚多。自此以後，西方算學漸見擡頭，中國古法算學漸廢，乃至無人能曉，不必等到設立學校，教授西方算學，中國古算法早已亡了。現在我們的算學，是繼承了西方埃及希臘的系統來的。



開明青年叢書

中學各科學習法	編輯例解	青年與生活	給青年的十二封信	社會科學講話	國際政治講話	文心	少年科學大綱	科學的故事	數學的園地	數學的趣味	星空的巡禮	神祕的宇宙	科學在今日	物理世界的漫遊	十萬個爲什麼
夏丏尊 林語堂 等	秦仲實	金仲華	朱光潛	祝伯英	張明養	葉聖陶 夏丏尊 胡伯愨	胡伯愨	宋易	劉薰宇	劉薰宇	王幼予	周煦良	秦仲實	顧均正	董純才
七角	六角	四角	四角	四角	五分	七角	五分	一元	四角	八角	四角	五角	六角	二角	三角
化學奇談	氣象學講話	動物珍話	鳴蟲之話	鳥與文學	我們的身體	談美	藝術趣味	繪畫與文學	西洋名畫巡禮	西洋音樂楔子	孩子們的音樂	世界之童年	人類史話	亞洲腹地旅行記	南極探險記
顧均正	王勤瑛	賈祖璋	樓俊卿	賈祖璋	胡伯愨	宋光濟	豐子愷	豐子愷	豐子愷	豐子愷	豐子愷	黃素封	陶乘珍	李達禮	胡仲持
九角	六角	四角	三角	九角	五角	五角	四角	五角	一元	六角	五角	七角	七角	一元	六角

開明書店印行

民國廿四年九月初版發行

實價大洋六角五分
(外埠酌加寄費)

開明青年叢書
“算學的學事故”

*

有著作權不准翻印

著者 章克標

發行者 上海福州路開明書店
章錫琛

印刷者 上海梧州路三九〇號
美成印刷公司

總發行所 上海福州路七〇二五四八號 開明書店

分發行所 上海福州路漢口交通路口 開明書店分店
南京太平路長沙南陽街
北平楊梅竹斜街

本書已照著作權法呈請內政部註冊

