Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Vorlesung 24

Gitter

In der nächsten Vorlesung werden wir einen Zahlbereich über seine reellen und komplexen Einbettungen als Gitter in einem reellen Vektorraum realisieren. Hier besprechen wir die dazu notwendigen Begrifflichkeiten aus der konvexen Geometrie.

Definition 24.1. Es seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Dann heißt die Untergruppe $\mathbb{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}v_n$ ein *Gitter* im $\mathbb{R}^n$.

Manchmal spricht man auch von einem vollständigen Gitter. Als Gruppen sind sie isomorph zu $\mathbb{Z}^n$, hier interessieren aber auch Eigenschafen der Einbettung in $\mathbb{R}^n$. Ein Gitter heißt *rational*, wenn die erzeugenden Vektoren zu $\mathbb{Q}^n$ gehören. Das durch die Standardvektoren $e_1, \ldots, e_n$ erzeugte Gitter heißt *Standardgitter*.

Lemma 24.2. *Es seien $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_n$ Basen im $\mathbb{R}^n$. Dann stimmen die zugehörigen Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}v_n$ und $\Delta = \mathbb{Z}w_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}w_n$ genau dann überein, wenn ihre Übergangsmatrix ganzzahlig mit Determinante ± 1 ist.*

Beweis. Es seien M und N die (reellen) Übergangsmatrizen zwischen den beiden Basen, dabei gilt

$$M \circ N = E_n$$

und

$$\det M \cdot \det N = 1$$

nach dem Determinantenmultiplikationsatz. Seien die Gitter gleich. Dann folgt aus $v_j \in \Delta$, dass in

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} w_i$$

die Koeffizienten c_{ij} ganzzahlig sind und damit sind die Übergangsmatrizen ganzzahlig. Ihre Determinanten sind somit auch ganzzahlig und aus der Determinantenbedingung folgt, dass die Determinanten 1 oder -1 sein müssen, da dies die einzigen Einheiten in $\mathbb{Z}$ sind.

Wenn beide Übergangsmatrizen ganzzahlig sind, so gilt

$$\Gamma \subseteq \Delta \subseteq \Gamma$$

und damit Gleichheit. □

Beispiel 24.3. Das Standardgitter Γ im $\mathbb{R}^2$ wird durch die Standardbasis e_1, e_2 erzeugt, aber auch durch die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, siehe Lemma 24.2.

Satz 24.4. *Zu einem Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}v_n \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die topologische Restklassengruppe $\mathbb{R}^n/\Gamma$ isomorph zum n-dimensionalen Torus $S^1 \times \cdots \times S^1$ (mit n Faktoren).*

Beweis. Nach Aufgabe 24.3 können wir davon ausgehen, dass Γ das Standardgitter $\mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n$ ist. Für dieses gilt

$$\mathbb{R}^n/(\mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}e_1) \times \cdots \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}e_n) = S^1 \times \cdots \times S^1.$$

□

Konvexe Mengen

Definition 24.5. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $P, Q \in T$ auch jeder Punkt der Verbindungsstrecke, also jeder Punkt der Form

$$rP + (1-r)Q \text{ mit } r \in [0,1]\,,$$

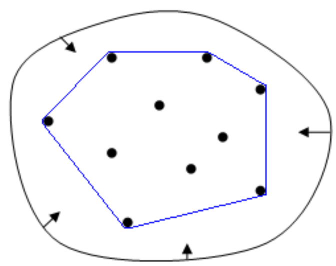
ebenfalls zu T gehört.

Der Durchschnitt von konvexen Teilmengen ist wieder konvex. Daher kann man definieren.

Definition 24.6. Zu einer Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt die kleinste konvexe Teilmenge T, die U umfasst, die *konvexe Hülle* von U.

Die konvexe Hülle ist einfach der Durchschnitt von allen konvexen Teilmengen, die U umfassen.

Im zweidimensionalen kann man sich die konvexe Hülle so vorstellen, dass man eine Schnur um die fixierten Punkte aus U legt und die Schnur dann zusammen zieht. Dreidimensional nehme man ein Stofftuch.



Definition 24.7. Zu einem durch linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ gegebenen Gitter bezeichnet man die konvexe Hülle der Vektoren $\epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_n v_n$ mit $\epsilon_i \in \{0, 1\}$ als die *Grundmasche* (oder *Fundamentalmasche*) des Gitters.

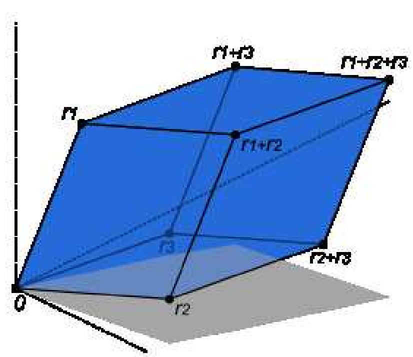
Die in der vorstehenden Definition auftauchenden Vektoren sind die Eckpunkte des von den Basisvektoren $v_1, \ldots, v_n$ erzeugten Parallelotops. Die Elemente der Grundmasche selbst sind alle Vektoren der Form

$$r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n \text{ mit } r_i \in [0, 1]$$

Wir werden die Grundmasche häufig mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen. Zu einem Gitterpunkt P nennt man die Menge $P + \mathfrak{M}$ eine *Masche* des Gitters. Ein beliebiger Punkt $Q \in \mathbb{R}^n$ hat eine eindeutige Darstellung $Q = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$ und damit ist

$$Q = (\lfloor t_1 \rfloor v_1 + \cdots + \lfloor t_n \rfloor v_n) + ((t_1 - \lfloor t_1 \rfloor) v_1 + \cdots + (t_n - \lfloor t_n \rfloor) v_n),$$

wobei der erste Summand zum Gitter gehört und der zweite Summand zur Grundmasche. Insbesondere haben zwei verschiedene Maschen nur Randpunkte, aber keine inneren Punkte gemeinsam.



Da ein Gitter keine wohldefinierte Gitterbasis besitzt, gibt es eine wohldefinierte Grundmasche nur dann, wenn eine Gitterbasis fixiert wurde, siehe Beispiel 24.3. Allerdings, und dies ist entscheidend, ist das Volumen einer

Grundmasche unabhängig von der Gitterbasis und hängt nur vom Gitter selbst ab. Dies folgt aus Lemma 24.2 in Verbindung mit Satz 67.2 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)). Das Volumen eines Parallelotops und insbesondere einer Grundmasche kann man mit den beiden folgenden Sätzen berechnen. Vergleiche die Definition der Diskriminante und Lemma 8.9

Satz 24.8. *Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis im $\mathbb{R}^n$ und sei P das davon erzeugte Parallelotop. Dann gilt für das Borel-Lebesgue-Maß λ auf $\mathbb{R}^n$*

$$\lambda(P) = |\det(v_1, \ldots, v_n)|,$$

wobei in der Matrix die Koordinaten von v_i bezüglich der Standardbasis stehen.

Beweis. Dies ist der entscheidende Schritt zum Beweis zu Satz 67.2 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)), siehe den Beweis dort. □

Satz 24.9. *Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und sei P das davon erzeugte Parallelotop. Dann gilt für das Borel-Lebesgue-Maß λ_V auf V*

$$\lambda_V(P) = (\det(\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \le i,j \le n})^{1/2}.$$

Beweis. Für den Beweis siehe Satz 67.8 (Analysis (Osnabrück 2014-2016)). □

Der Gitterpunktsatz von Minkowski

Hermann Minkowski (1864-1909)

Definition 24.10. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *zentralsymmetrisch*, wenn mit jedem Punkt $P \in T$ auch der Punkt $-P$ zu T gehört.

Definition 24.11. Ein topologischer Raum X heißt *kompakt* (oder *überdeckungskompakt*), wenn es zu jeder offenen Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{mit } U_i \text{ offen und einer beliebigen Indexmenge } I$$

eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ derart gibt, dass

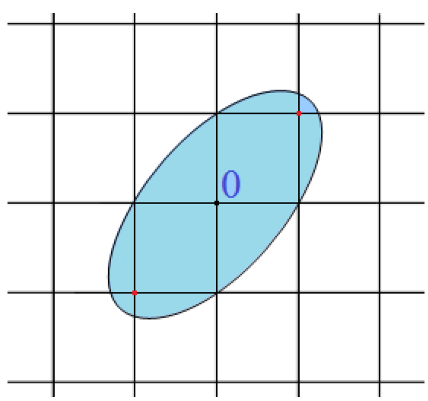
$$X = \bigcup_{i \in J} U_i$$

ist.

Nach dem Satz von Heine-Borel ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Ein weiterer im Folgenden wichtiger Aspekt ist, dass disjunkte kompakte Teilmengen $Y, Z \subseteq \mathbb{R}^n$ einen positiven Abstand haben, dass es also ein $d > 0$ mit

$$d(P, Q) > d$$

für alle $P \in X$ und $Q \in Y$ gibt, siehe Aufgabe 24.14. Es wird auch der Minimalabstand angenommen, siehe Aufgabe 24.15.



Der folgende Satz heißt *Gitterpunktsatz von Minkowski*.

Satz 24.12. *Sei Γ ein Gitter im $\mathbb{R}^n$ mit Grundmasche $\mathfrak{M}$. Es sei T eine konvexe, kompakte, zentralsymmetrische Teilmenge in $\mathbb{R}^n$, die zusätzlich die Volumenbedingung*

$$\operatorname{Vol}(T) \geq 2^n \operatorname{Vol}(\mathfrak{M})$$

erfülle. Dann enthält T mindestens einen von 0 verschiedenen Gitterpunkt.

Beweis. Wir betrachten das verdoppelte Gitter 2Γ. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis für Γ, so ist $2v_1, \ldots, 2v_n$ eine Basis für 2Γ. Wir bezeichnen die Grundmasche von 2Γ mit $\mathfrak{N}$, für ihr Volumen gilt $\operatorname{Vol}(\mathfrak{N}) = 2^n \operatorname{Vol}(\mathfrak{M})$. Zu jeder Masche $\mathfrak{N}_Q = Q + \mathfrak{N}$, $Q \in 2\Gamma$, betrachten wir den Durchschnitt

$$T_Q = T \cap \mathfrak{N}_Q.$$

Da T kompakt und insbesondere beschränkt ist, gibt es nur endlich viele Maschen derart, dass dieser Durchschnitt nicht leer ist. Seien diese Maschen (bzw. ihre Ausgangspunkte bzw. ihre Durchschnitte) mit $\mathfrak{N}_i$ (bzw. Q_i bzw. T_i) $i \in I$, bezeichnet (da der Nullpunkt aufgrund der Konvexität und der Zentralsymmetrie zu T gehört, umfasst I zumindest 2^n Elemente). Die in die Grundmasche $\mathfrak{N}$ verschobenen Durchschnitte bezeichnen wir mit

$$\tilde{T}_i := T_i - Q_i.$$

Wir behaupten zunächst, dass die $\tilde{T}_i$ nicht paarweise disjunkt sind. Sei also angenommen, sie wären paarweise disjunkt. Mindestens eines der T_i (und damit der $\tilde{T}_i$) hat positives Volumen, sagen wir für $i = 1$. Wegen der angenommenen Disjunktheit sind insbesondere

$$X := \tilde{T}_1 \text{ und } Y := \bigcup_{i \in I, i \neq 1} \tilde{T}_i$$

disjunkt zueinander. Wir haben also zwei disjunkte kompakte Teilmengen, und diese besitzen einen Minimalabstand d (d.h. zu jedem Punkt aus X liegen in einer d-Umgebung keine Punkte aus Y, siehe Aufgabe 24.14). Sei $x \in X$ ein innerer Punkt (den es gibt, da X konvex ist und ein positives Volumen besitzt) und sei $y \in Y$. Mit S sei die Verbindungsstrecke von x nach y bezeichnet, die ganz in $\mathfrak{N}$ verläuft. Wir wählen einen Punkt $s \in S$, der weder zu X noch zu Y gehört (solche Punkte gibt es wegen des Minimalabstandes). Da s sowohl zu X als auch zu Y einen Minimalabstand besitzt, gibt es eine ϵ-Umgebung B von s, die disjunkt zu X und Y ist. Wir können ferner annehmen, dass B ganz innerhalb von $\mathfrak{N}$ liegt (wegen der Wahl von x). Als eine Ballumgebung hat B ein positives Volumen, was zu folgendem Widerspruch führt.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}(\mathfrak{N}) &\geq \operatorname{Vol}(X \cup Y \cup B) \\
&= \operatorname{Vol}\left(\bigcup_{i \in I} \tilde{T}_i\right) + \operatorname{Vol}(B) \\
&> \sum_{i \in I} \operatorname{Vol}(\tilde{T}_i) \\
&= \sum_{i \in I} \operatorname{Vol}(T_i) \\
&= \operatorname{Vol}(T) \\
&\geq 2^n \operatorname{Vol}(\mathfrak{M}) \\
&= \operatorname{Vol}(\mathfrak{N}).
\end{aligned}$$

Es gibt also Indizes $i \neq j$ und einen Punkt $z \in \tilde{T}_i \cap \tilde{T}_j$ (z muss selbst nicht zu T gehören). Sei

$$z_i := z + Q_i \in T_i \text{ und } z_j := z + Q_j \in T_j\,.$$

Wegen $Q_i, Q_j \in 2\Gamma$ ist auch $Q_i - Q_j \in 2\Gamma$ und daher

$$0 \neq \frac{Q_i - Q_j}{2} \in \Gamma.$$

Aus $z_j \in T$ folgt (wegen der Zentralsymmetrie) auch $-z_j \in T$ und wegen der Konvexität von T ergibt sich

$$\frac{Q_i - Q_j}{2} = \frac{1}{2}(z_i - z) - \frac{1}{2}(z_j - z) = \frac{1}{2}z_i - \frac{1}{2}z_j \in T.$$

Wir haben also einen von Nullpunkt verschiedenen Gitterpunkt in T gefunden. $\square$

Abbildungsverzeichnis