Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 32

Orthogonalität

Mit dem Skalarprodukt kann man die Eigenschaft zweier Vektoren, aufeinander senkrecht zu stehen, ausdrücken.

Definition 32.1. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$. Man nennt zwei Vektoren $v,w \in V$ *orthogonal* zueinander (oder *senkrecht*), wenn

$$\langle v,w\rangle = 0$$

ist.

Bemerkung 32.2. Dass die über das Skalarprodukt definierte Orthogonalität der anschaulichen Orthogonalität entspricht, kann man sich folgendermaßen klar machen .[1] Zu orthogonalen Vektoren $u,v \in V$ gilt, dass v zu den beiden Punkten u und $-u$ den gleichen Abstand besitzt. Es ist ja

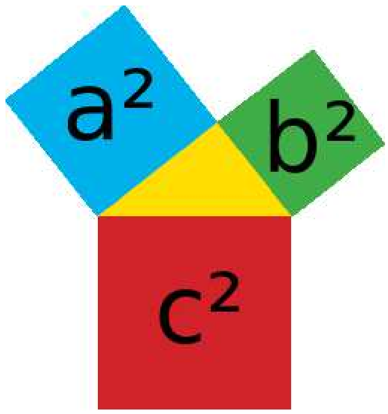
$$\begin{aligned} || v-u ||^2 &= \langle v-u, v-u\rangle \\ &= \langle v,v\rangle + \langle u,u\rangle \\ &= \langle v+u, v+u\rangle \\ &= || v+u ||^2 . \end{aligned}$$

Die Umkehrung gilt ebenfalls, siehe Aufgabe 32.1.

[1] Wenn man akzeptiert, dass die über das Skalarprodukt definierte Länge der anschaulichen Länge entspricht, was auf dem elementar-geometrischen Satz des Pythagoras beruht.

Pythagoras von Samos lebte im sechsten vorchristlichen Jahrhundert. „Sein“ Satz war aber schon tausend Jahre früher in Babylon bekannt.

Wir rufen uns den Satz des Pythagoras in Erinnerung.



Der folgende Satz ist der *Satz des Pythagoras*, genauer die Skalarproduktversion davon, die trivial ist. Die Beziehung zum klassischen, elementargeometrischen Satz des Pythagoras ist diffizil, da es nicht selbstverständlich ist, dass unser über das Skalarprodukt eingeführter Orthogonalitätsbegriff und unser ebenso eingeführter Längenbegriff mit dem entsprechenden intuitiven Begriff übereinstimmt. Dass unser Normbegriff der wahre Längenbegriff ist, beruht wiederum auf dem Satz des Pythagoras in einem cartesischen Koordinatensystem, was den klassischen Satz voraussetzt.

Satz 32.3. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -,-\rangle$. Es seien $u, v \in V$ Vektoren, die aufeinander senkrecht stehen. Dann ist*

$$|| u+v ||^2 = || u ||^2 + || v ||^2 .$$

Beweis. Es ist

$$|| u+v ||^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = || u ||^2 + || v ||^2 .$$

$\square$

Definition 32.4. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann heißt

$$U^{\perp} = \{ v \in V | \ \langle v,u\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U.

Das orthogonale Komplement zu einem Untervektorraum ist selbst wieder ein Untervektorraum, siehe Aufgabe 32.6. Wenn ein Erzeugendensystem von U gegeben ist, so gehört ein Vektor $v \in V$ bereits dann zum orthogonalen

Komplement von U, wenn er auf allen Vektoren des Erzeugendensystems senkrecht steht, siehe Aufgabe 32.7.

Beispiel 32.5. Sei $V = \mathbb{R}^n$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Zum eindimensionalen Untervektorraum $\mathbb{R}e_i$ zum Standardvektor e_i besteht das orthogonale Komplement aus allen Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ 0 \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, deren i-ter Eintrag 0 ist. Zum eindimensionalen Untervektorraum $\mathbb{R}v$ zu einem Vektor

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$$

kann man das orthogonale Komplement bestimmen, indem man den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

bestimmt. Der Orthogonalraum

$$U = (\mathbb{R}v)^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$$

besitzt die Dimension $n-1$, es handelt sich also um eine sogenannte Hyperebene. Man nennt dann v einen *Normalenvektor* für die Hyperebene U.

Zu einem Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$, der durch eine Basis (oder ein Erzeugendensystem) $v_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$, $i = 1, \ldots, k$, gegeben ist, bestimmt man das orthogonale Komplement als Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0,$$

wobei $A = (a_{ij})$ die aus den v_i gebildete Matrix ist.

Orthonormalbasen

Definition 32.6. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Eine Basis v_i, $i \in I$, von V heißt *Orthogonalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

gilt.

Definition 32.7. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Eine Basis v_i, $i \in I$, von V heißt *Orthonormalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \text{ für alle } i \in I \text{ und } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

gilt.

Die Elemente in einer Orthonormalbasis haben alle die Norm 1 und sie stehen senkrecht aufeinander. Eine Orthonormalbasis ist also eine *Orthogonalbasis*, bei der zusätzlich die Normbedingung

$$|| \, v_i \, || = \sqrt{\langle v_i, v_i \rangle} \, = \, 1$$

erfüllt ist. Man kann problemlos von einer Orthogonalbasis zu einer Orthonormalbasis übergehen, indem man jedes v_i durch die Normierung $\frac{v_i}{||v_i||}$ ersetzt (da v_i Teil einer Basis ist, ist die Norm von 0 verschieden). Eine Familie von Vektoren, die jeweils die Norm 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen, aber nicht unbedingt eine Basis bilden, nennt man ein *Orthonormalsystem*.

Lemma 32.8. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und sei u_i, $i \in I$, eine Orthonormalbasis von V. Dann ergeben sich die Koeffizienten eines Vektors v bezüglich dieser Basis durch*

$$v \, = \, \sum_{i \in I} \langle v, u_i \rangle \, u_i .$$

Beweis. Da eine Basis vorliegt, gibt es eine eindeutige Darstellung

$$v \, = \, \sum_{j \in I} a_j u_j$$

(wobei alle a_j bis auf endlich viele gleich 0 sind). Die Behauptung ergibt sich somit aus

$$\langle v, u_i \rangle \, = \, \left\langle \sum_{j \in I} a_j u_j, u_i \right\rangle \, = \, \sum_{j \in I} a_j \, \langle u_j, u_i \rangle \, = \, a_i .$$

□

Wir werden Orthonormalbasen hauptsächlich im endlichdimensionalen Fall betrachten. Im $\mathbb{R}^n$ ist die Standardbasis eine Orthonormalbasis. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist eine Orthonormalbasis von der Form $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$, wobei jeweils $a^2 + b^2 = 1$ erfüllt sein muss. Beispielsweise ist $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis. Das folgende *Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren* erlaubt es, ausgehend von einer Basis eines endlichdimensionalen Vektorraumes eine Orthonormalbasis zu konstruieren, die die gleiche Fahne von Untervektorräumen bestimmt.

SATZ 32.9. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und es sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von V mit*[2]

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_i \rangle = \langle u_1, u_2, \ldots, u_i \rangle$$

für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Die Aussage wird durch Induktion über i bewiesen, d.h. es wird sukzessive eine Familie von orthonormalen Vektoren konstruiert, die jeweils den gleichen Untervektorraum aufspannen. Für $i = 1$ muss man lediglich v_1 normieren, also durch $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$ ersetzen. Sei die Aussage für i schon bewiesen und sei eine Familie von orthonormalen Vektoren $u_1, \ldots, u_i$ mit $\langle u_1, \ldots, u_i \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ bereits konstruiert. Wir setzen

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \langle v_{i+1}, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v_{i+1}, u_i \rangle u_i .$$

Dieser Vektor steht wegen

$$\begin{aligned} \langle w_{i+1}, u_j \rangle &= \langle v_{i+1} - \langle v_{i+1}, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v_{i+1}, u_i \rangle u_i, u_j \rangle \\ &= \langle v_{i+1}, u_j \rangle - \sum_{k \leq i, k \neq j} \langle v_{i+1}, u_k \rangle \langle u_k, u_j \rangle - \langle v_{i+1}, u_j \rangle \langle u_j, u_j \rangle \\ &= \langle v_{i+1}, u_j \rangle - \langle v_{i+1}, u_j \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

senkrecht auf allen $u_1, \ldots, u_i$ und offenbar ist

$$\langle u_1, \ldots, u_i, w_{i+1} \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i, v_{i+1} \rangle .$$

Durch Normieren von w_{i+1} erhält man u_{i+1}. □

BEISPIEL 32.10. Es sei V der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y, z) \longmapsto 2x + 3y - z .$$

Als Unterraum des $\mathbb{R}^3$ trägt V ein Skalarprodukt. Wir möchten eine Orthonormalbasis von V bestimmen. Dazu betrachten wir die Basis bestehend aus den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

[2]Hier bezeichnet $\langle - \rangle$ den von den Vektoren erzeugten Untervektorraum, nicht das Skalarprodukt.

Es ist $||v_1|| = \sqrt{5}$ und somit ist

$$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

der zugehörige normierte Vektor. Gemäß dem[3] Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren setzen wir

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \, u_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist

$$||w_2|| = || \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} || = \sqrt{\frac{36}{25} + 1 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{70}{25}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

und daher ist

$$u_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

der zweite Vektor der Orthonormalbasis.

Korollar 32.11. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann gibt es eine Orthonormalbasis in V.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 32.9. □

Man kann auch stets in einem endlichdimensionalen Vektorraum mit Skalarprodukt ein vorgegebenes Orthonormalsystem zu einer Orthonormalbasis ergänzen, siehe Aufgabe 32.22.

[3]Häufig ist es numerisch geschickter, zuerst nur zu orthogonalisieren und die Normierung erst zum Schluss durchzuführen, siehe Beispiel 32.10.

Korollar 32.12. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist*

$$V = U \oplus U^{\perp},$$

d.h. V ist die direkte Summe aus U und seinem orthogonalen Komplement.

Beweis. Aus $u \in U \cap U^{\perp}$ folgt direkt

$$\langle u, u \rangle = 0$$

und daher $u = 0$. Somit ist die Summe direkt. Sei $u_1, \ldots, u_k$ eine Orthonormalbasis von U, die wir zu einer Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_n$ von V ergänzen. Dann ist

$$U^{\perp} = \langle u_{k+1}, \ldots, u_n \rangle$$

und somit ist V die Summe aus den Unterräumen. $\square$

Zur folgenden Aussage vergleiche auch Lemma 15.6 und Aufgabe 32.26.

Korollar 32.13. *Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu Untervektorräumen $U \subseteq U' \subseteq V$ ist*

$$U^{\perp} \supseteq U'^{\perp}.$$

(2) *Es ist $0^{\perp} = V$ und $V^{\perp} = 0$.*

(3) *Sei V endlichdimensional. Dann ist*

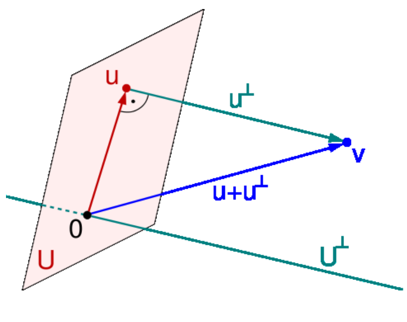
$$\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U.$$

(4) *Sei V endlichdimensional. Dann ist*

$$\dim\left(U^{\perp}\right) = \dim\left(V\right) - \dim\left(U\right).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 32.24. $\square$

Orthogonale Projektionen



Zu einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt und einem Untervektorraum

$$U \subseteq V$$

gibt es ein orthogonales Komplement $U^{\perp}$ und der Raum hat die direkte Summenzerlegung

$$V = U \oplus U^{\perp}.$$

Die Projektion

$$p_U \colon V \longrightarrow U$$

längs $U^{\perp}$ heißt die *orthogonale Projektion* auf U. Diese hängt allein von U ab, da ja das orthogonale Komplement eindeutig bestimmt ist. Häufig bezeichnet man auch die Abbildung $V \to U \to V$ als orthogonale Projektion auf U. Bei einer orthogonalen Projektion wird ein Punkt auf seinen *Lotfußpunkt* auf U abgebildet.

LEMMA 32.14. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und*

$$U \subseteq V$$

ein Untervektorraum mit einer Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_m$ von U. Dann ist die orthogonale Projektion auf U durch

$$p_U(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle \, u_i$$

gegeben.

Beweis. Wir ergänzen die Basis zu einer Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_n$ von V. Das orthogonale Komplement zu U ist

$$U^{\perp} = \langle u_{m+1}, \ldots, u_n \rangle.$$

Nach Lemma 32.8 ist

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle \, u_i = \left(\sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle \, u_i \right) + \left(\sum_{i=m+1}^{n} \langle v, u_i \rangle \, u_i \right).$$

Somit ist $\sum_{i=1}^{m} \langle v, u_i \rangle \, u_i$ die Projektion auf U längs $U^{\perp}$. $\square$

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Kapitolinischer Pythagoras.jpg , Autor = Benutzer Galilea auf de Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0 2
Quelle = Pythagoras large font.svg , Autor = Benutzer KaiMartin auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 2
Quelle = Orthogonal Decomposition qtl1.svg , Autor = Benutzer Quartl auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 8