最新

中學教科書

弎角術

新編

中學教科書

三角術

附
對數表
弦切表

譯例

1. 是書原本,係美國耶魯大學算學教員費烈伯,史德朗二博士所合著,耶魯爲美洲唯一大學校,則是書之聲價何待贅言.

2. 三角術之艱深,學者每以爲苦,是編祇供中學教授而已,非爲專家研究之用,故力求簡捷清楚,學者勿譏其淺也.

3. 作者原序,舉本編之特色,計有左列七事.

(1.) 本書論平三角弧三角術俱極簡明.

(2.) 解三角形之諸公式特爲表出.

(3.) 演習之豐富.

(4.) 以曲線代表法解三角函數,反函數,雙線函數.

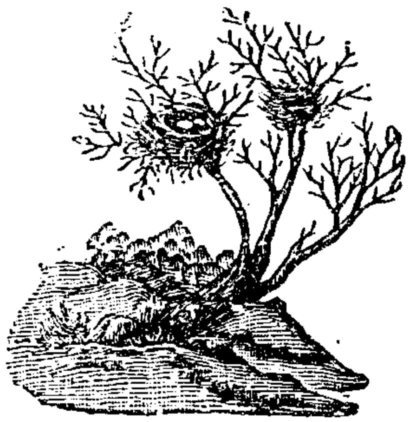
(5.) 弧三角術中之圖,以新法描摹,顯豁異常.

(6.) 論雜糅數與雙線函數,俱極新穎自在.

(7.) 以圖解弧三角形.

4. 本編後半附列各種數表,學者推算之際,檢閱最爲便利.印刷數表,其困難異於尋常,本編特延熟諳算學之士,專司較勘,以期其無所罣誤,不至貽害讀者.

編譯者識



目錄表

平三角術

第一章

三角函數

第二章

正三角形

第三章

三角公式

第四章

斜三角形

第五章

眞弧度　曲線代表法

第六章

推對數術　推三角函數術　棣美弗之例

雙曲線函數

面數

第七章

雜題

弧三角術

第一章

正弧三角形與象限三角形

第二章

斜弧三角形

面數

第三章

天文地輿算題

第四章

公式彙錄

附錄

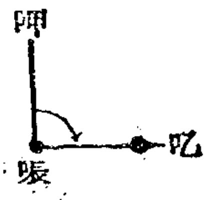
平三角術

第一章　三角函數

角

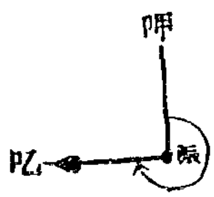
1. 三角術論角之大小,乃視其此邊離彼邊旋轉所止之處,距彼邊若干而定之.

今試取時鐘指針運行之方位譬之,如指針轉過一匝之四分之一,則其所過之角爲一正角,轉過一匝之半,則其所過之角爲二正角,轉過一匝,則其所過之角爲四正角,轉過一匝半,則所過之角爲六正角,餘仿此.



第一圖

第二圖



第三圖

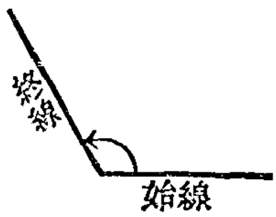
第四圖

觀圖,可見哌𠮙自哌呷而旋至止處,其所過之角,不必適與此二線之交角相等.如第一圖則相等,第四圖卽不相等.

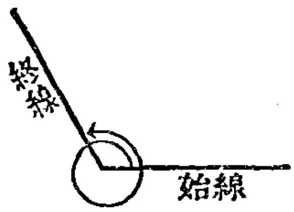
不相等之二角,亦可有同邊,如第二圖與第四圖,其角之二邊方向無異,然第二圖之角爲二正角,第四圖之角則爲六正角.凡角增任若干全匝,其邊之方位不變.

問　時鐘之時針,於六小時半間,轉過若干正角,又分針轉過若干正角.

問　今有汽機之飛輪,每分時旋轉一百匝,則每秒時轉過若干正角.



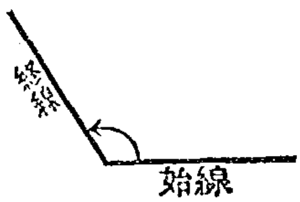
$1\frac{1}{3}$正角



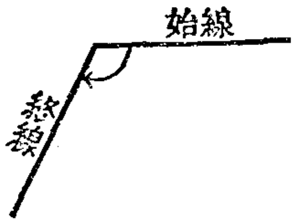
$5\frac{1}{3}$正角

界說　角之首邊,即旋轉由而起度者,曰始線,其次邊曰終線.

界說　旋轉之方向,與時鐘之指針相逆,則其角爲正,與時鐘之指針相順,則其角爲負.



正角



負角

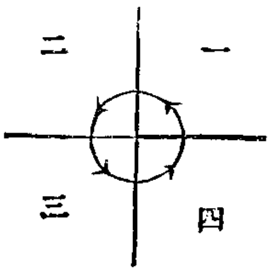
上文藉時鐘指針所過之角爲喻,皆負角也.

2.　凡角恆以度分秒三者度之,度爲正角九十分之

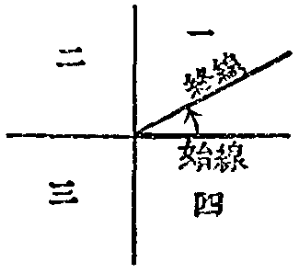
一,分爲一度六十分之一,秒爲一分六十分之一.

度分秒之數,恆以° ′ ″三號識之;如二十六度四十三分十秒,可寫作 26° 43′ 10″.

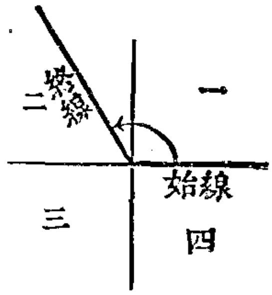
3. 角尖四周之平面,分爲四象限,如圖中所示者;其第一象限起於始線.



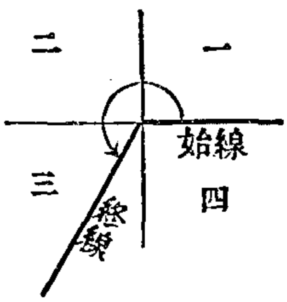
四象限之圖



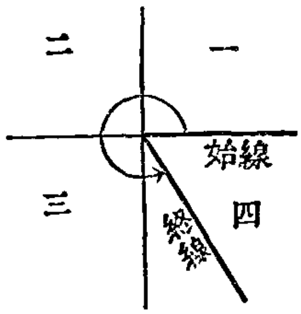
角在第一象限內



角在第二象限內



角在第三象限內



角在第四象限內

角之終線在某象限內,則謂此角在此象限內.

演 習

4. (1.) $2\frac{1}{7}$正角爲若干度分秒,此角在何象限內.

(2.) 何角小於 360° 而其始終二線與 745° 之角相同

(3.) 有何正(正負之正)角,小於 720°,而其邊與 −73° 之角同.

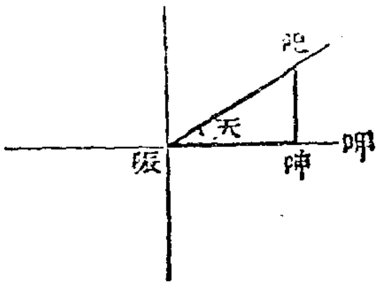
(1.) $-890°$之角在何象限內.

三角函數之界說

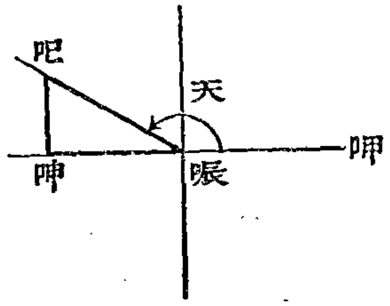
5. 三角函數者數也,而解之如諸線之比例.

按角之函數,即下文所言角之正弦,餘弦,正切,餘切,正割,餘割,正矢,餘矢是也,以三角術中用之,故曰三角函數.

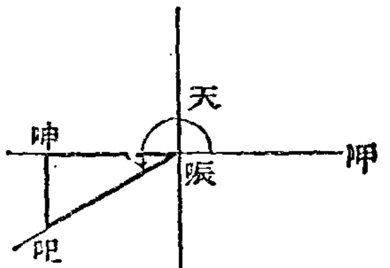
如圖,設呷唇吧角位置合宜,其始線適橫列,乃自其終線之任一點吧,作吧呻與始線正交.



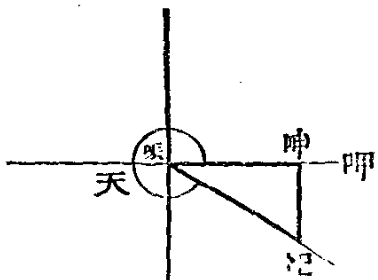
角在第一象限內



角在第二象限內



角在第三象限內



角在第四象限內

如命呷唇吧角爲天,則有

$$\frac{\text{呻吧}}{\text{唇吧}}=\text{天之正弦(寫作正弦天)}.$$

$$\frac{\text{㖘呻}}{\text{㖘吧}}=\text{天之餘弦(寫作餘弦天)}.$$

$$\frac{\text{呻吧}}{\text{㖘呻}}=\text{天之正切(寫作正切天)}.$$

$$\frac{\text{㖘呻}}{\text{呻吧}}=\text{天之餘切(寫作餘切天)}.$$

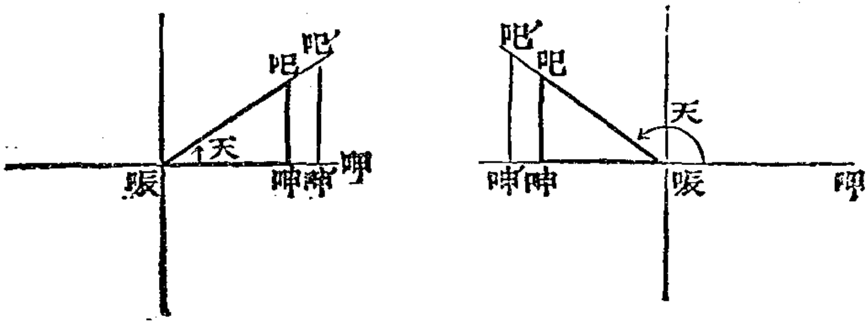
$$\frac{\text{㖘吧}}{\text{㖘呻}}=\text{天之正割(寫作正割天)}.$$

$$\frac{\text{㖘吧}}{\text{呻吧}}=\text{天之餘割(寫作餘割天)}.$$

此外尚可增正矢,餘矢二項.

正矢天 = 1 − 餘弦天,　餘矢天 = 1 − 正弦天.

正弦正切等項之同數,不隨吧點在終線之何點而變,惟隨角之大小.



如圖,因㖘呻吧三角形與㖘呻'吧'三角形相似,故㖘呻'吧'任二邊之比例,等於㖘呻吧相當二邊之比例.

界說　角之正弦,餘弦,正切,餘切,正割,餘割,爲角之三角函數,其同數祇隨角而變.

6.　數可以線之長與方向表之,線之長代表數之大

小線之方向,代表數之正負.

7. 如令五節內諸比例之分母等於一,則三角函數可以線代表之.

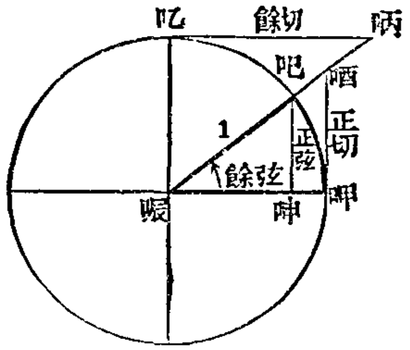
如正弦天 $=\dfrac{\text{呻吧}}{\text{唇吧}}=\dfrac{\text{呻吧}}{1}=$ 呻吧 $=$ 此線所代表之數

即為此線與其度長準箇之比例.

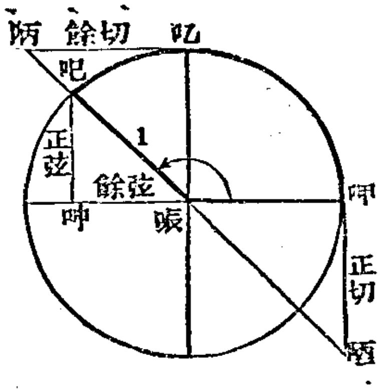
是故呻吧可代表天之正弦.

仿此,其餘諸三角函數,亦可以線代表之.

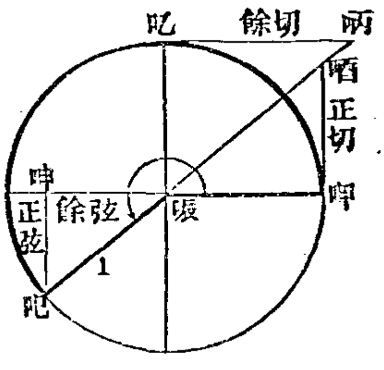
如圖,於呷唇吧角之唇尖四旁作圓,半徑為一準箇,命呷唇吧角為天,是則準五節有



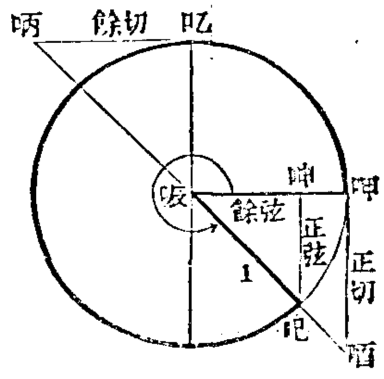
第一圖



第二圖



第三圖



第四圖

呻吧代表天之正弦.

㖘呻代表天之餘弦.

呷哂代表天之正切.

叱呐代表天之餘切.

㖘哂代表天之正割.

㖘呐代表天之餘割.

前圖中之呻吧,㖘呻等線,每稱作正弦,餘弦等,求簡捷也.

由此可見三角函數更可以下法解之.

如於角尖之四旁,以一準個爲半徑作圜,則

(1.) 角之正弦,可以自終線交圜周點,至始線之垂線代表之.

(2.) 角之餘弦,可以自角尖至正弦之一段始線代表之.

(3.) 角之正切,可以第一象限起點之切線,自切點至終線之一段代表之.

(4.) 角之餘切,可以第二象限起點之切線,自切點至終線之一段代表之.

(5.) 角之正割,可以自角尖至正切之一段終線代表之.

(6.) 角之餘割,可以自角尖至餘切之一段終線代表之.

三角函數有兩種解法,五節之解法,曰比例界說,七節之解法,曰線界說.學者勿因一物二解,遂生疑慮,當知此二者實同一義也.推算之

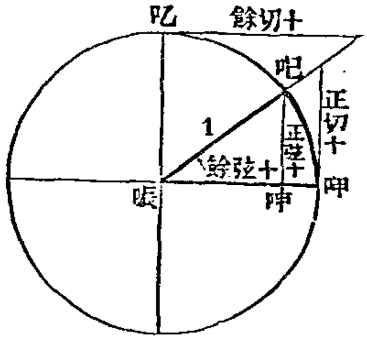
時,有用首種界說爲便者,亦有用次種界說爲便者,學者至後自知,故以兼熟二說爲要.

三角函數之號

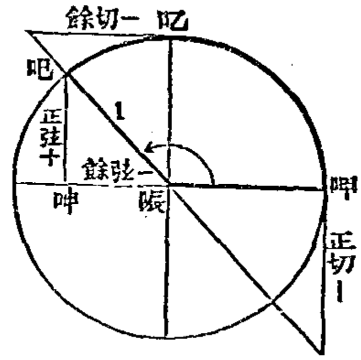
8. 線之正負,由其方向而定之.如五節圖中之唇呷,自唇點沿始線而向右則爲正,向左則爲負,又呷吧自唇呷而向上則爲正,向下則爲負.其終線唇吧則恆爲正.

由上文之理,按五節比例界說,可定三角函數之號.如按線界說,則更易定之,蓋正弦與正切,自唇呷向上度之爲正,向下度之爲負.

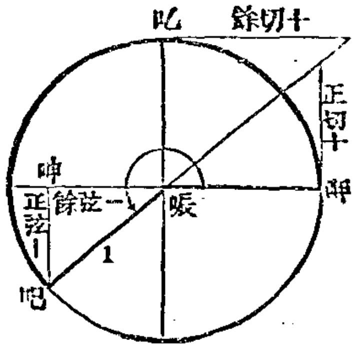
餘弦與餘切,自唇叱向右度之爲正,向左度之爲負.



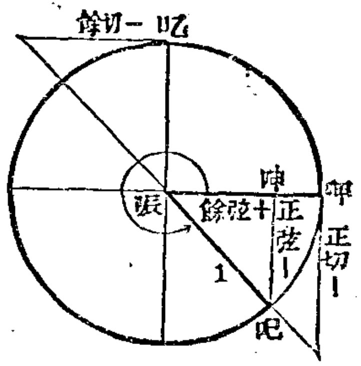
第一圖



第二圖



第三圖



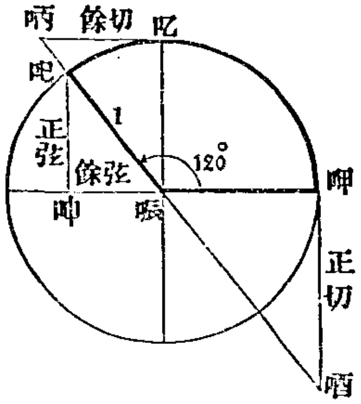
第四圖

正割與餘割,如與終線㖘吧同向度之,則爲正,反向度之,則爲負.

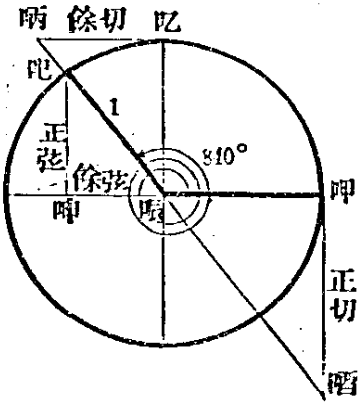
各象限內諸角函數之號,列如下表.

象限	一	二	三	四
正弦 餘割	+	+	−	−
餘弦 正割	+	−	−	+
正切 餘切	+	−	+	−

9. 夫角之函數之同數,祗視其邊之方位,此理彰彰不待言矣.如二角相差三百六十度,或爲三百六十度之倍數,則其邊之方位無異,故其函數之同數亦無異.



第一圖



第二圖

如第一圖中之角爲一百二十度,第二圖中之角爲八百四十度,然代表此二角函數之諸線無異.

演習

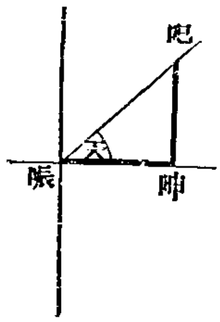
試作圖以定左列各函數之號，正切1000°，餘弦810°，正弦760°，　餘切 $-70°$，　餘弦 $-550°$，　正切 $-560°$，正割300°，　餘切1560°，　正弦130°，　餘弦260°，正切310°.

函數之相關

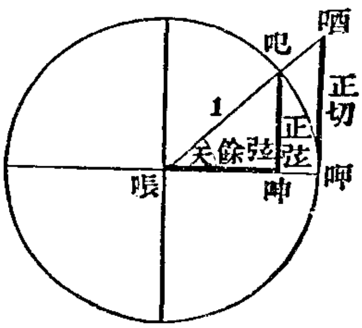
10. 按5節，唇吧任長若干，恆有

$\dfrac{\text{呷吧}}{\text{唇吧}}=$ 正弦天，　$\dfrac{\text{唇呷}}{\text{唇吧}}=$ 餘弦天，　$\dfrac{\text{呷吧}}{\text{唇呷}}=$ 正切天，

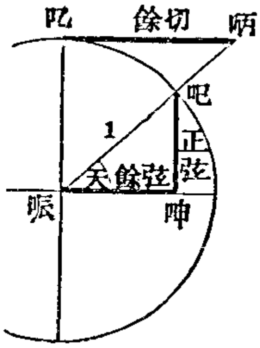
$\dfrac{\text{唇呷}}{\text{呷吧}}=$ 餘切天，　$\dfrac{\text{唇吧}}{\text{唇呷}}=$ 正割天，　$\dfrac{\text{唇吧}}{\text{呷吧}}=$ 餘割天.



第一圖



第二圖



第三圖

細考第二第三圖，即有

$$\frac{\text{呷吧}}{\text{唇呷}}=\text{正切天}=\frac{\text{正弦天}}{\text{餘弦天}},\tag{1}$$

$$\frac{\text{唇呷}}{\text{呷吧}}=\text{餘切天}=\frac{\text{餘弦天}}{\text{正弦天}}.\tag{2}$$

以(1)與(2)式相乘,得

$$正切天餘切天=1, \tag{3}$$

即 $$正切天=\frac{1}{餘切天},\quad 餘切天=\frac{1}{正切天}.$$

又細察第二第三圖,得

$$\frac{眼吧}{眼呷}=正割天=\frac{1}{餘弦天}, \tag{4}$$

$$\frac{眼吧}{呷吧}=餘割天=\frac{1}{正弦天}. \tag{5}$$

又察第二第三圖,得 $眼呷^2+呷吧^2=眼吧^2$,

即 $$正弦^2天+餘弦^2天=1, \tag{6}$$

而 $正弦^2天=1-餘弦^2天,\quad 餘弦^2天=1-正弦^2天.$

又眼呷^2+呷哂^2=眼哂^2,而眼叱^2+叱呐^2=眼呐^2,

即 $$1+正切^2天=正割^2天, \tag{7}$$

$$1+餘切^2天=餘割^2天. \tag{8}$$

上文設天角在第一象限內,但其餘諸象限內各角,與此正同.惟呷吧在第三第四象限內爲負,眼呷在第二第三象限內爲負耳.

演習

11. (1.) 試證餘弦天正割天$=1$.

(2.) 試證正弦天餘割天$=1$.

(3.) 試證正切天餘弦天$=$正弦天.

(4.) 試證正弦天$\sqrt{1-餘弦^2天}=1-餘弦^2天$

(5.) 試證正切天＋餘切天 $= \dfrac{1}{\text{正弦天餘弦天}}$.

(6.) 試證正弦^{4}天－餘弦^{4}天 $= 1 - 2$餘弦^{2}天.

(7.) 試證 $\dfrac{1}{\text{餘切天正割天}} =$ 正弦天.

(8.) 試證正切天正弦天＋餘弦天＝正割天.

12. 10節內(1)至(8)式,乃表同角內諸函數相關之方程.如角之一函數之同數為已知,則可代入諸方程之一而解之,卽得餘一函數,仿此可迭求餘諸函數.

解方程(6),(7),(8)時,須開平方,如無他事以定其根之正負,則函數必有兩箇同數者.蓋因其函數有某同數時,可有二角俱小於三百六十度,而與之相配也.

演　習

13. (1.) 命天小於九十度,而正弦天 $= \frac{1}{2}$,試求天之餘諸函數.

解　　餘弦天 $= \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

既天小於90°,故知餘弦天為正.

是以　　餘弦天 $= +\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$$\text{正切天} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$餘切天=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3},$$

$$正割天=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$餘割天=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

(2.) 今有正切天 $=-\frac{1}{3}$,而天在第四象限內,求正弦天與餘弦天.

解 $$\frac{正弦天}{餘弦天}=-\frac{1}{3},$$

是以 3 正弦天 $=-$ 餘弦天,

因. 正弦^{3}天 $+$ 餘弦^{2}天 $=1$,

是以 10 正弦^{2}天 $=1$,

$$正弦天=-\sqrt{\frac{1}{10}}=-\frac{1}{10}\sqrt{10},$$

$$餘弦天=\frac{3}{10}\sqrt{10}.$$

(3.) 今有正弦$(-30°)=-\frac{1}{2}$,求 $-30°$ 之餘諸函數.

(4.) 今有天在第三象限內,而正弦天 $=-\frac{1}{3}$,求天之餘諸函數.

(5.) 今有地在第四象限內,而正弦地 $=-\frac{3}{5}$,求地之餘

諸函數.

(6.) 今有餘弦$60^\circ=\frac{1}{2}$,求60°之餘諸函數.

(7.) 今有正弦$0^\circ=0$,求餘弦0°與正切0°.

(8.) 今有正切人$=\frac{4}{3}$,而人在第一象限內,求人之餘諸函數.

(9.) 今有餘切$45^\circ=1$,求45°之餘諸函數.

(10.) 今有正切地$=\frac{1}{2}\sqrt{5}$,而餘弦地爲負,求地之餘諸函數.

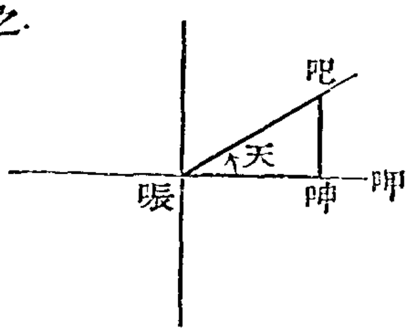
(11.) 今有餘切$30^\circ=\sqrt{3}$,求30°之餘諸函數.

(12.) 今有2正弦天$=1-$餘弦天,而天在第二象限內,求正弦天與餘弦天.

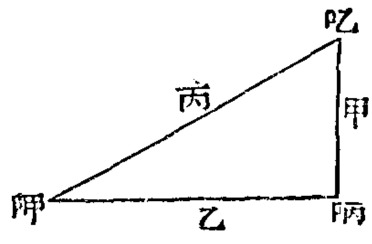
(13.) 今有正切天$+$餘切天$=3$,而天在第一象限內,求正弦天.

正三角形銳角之函數

14. 正三角形內銳角之函數,可以本形之邊成比例顯之.



第一圖



第二圖

按三角形之角,恆以呷吃丙等字號之,其對邊恆以相當之甲乙丙等字號之,如第二圖.

於呷吃丙正三角形內,按五節有

$$正弦呷=\frac{吃丙}{呷吃}=\frac{甲}{丙}=餘弦吃,$$

$$餘弦呷=\frac{呷丙}{呷吃}=\frac{乙}{丙}=正弦吃,$$

$$正切呷=\frac{吃丙}{呷丙}=\frac{甲}{乙}=餘切吃,$$

$$餘切呷=\frac{呷丙}{吃丙}=\frac{乙}{甲}=正切吃.$$

15. 自14節,可見凡準正三角形之銳角,有

$$正弦=\frac{角之對邊}{弦},$$

$$餘弦=\frac{角之倚邊}{弦},$$

$$正切=\frac{角之對邊}{角之倚邊},$$

$$餘切=\frac{角之倚邊}{角之對邊}.$$

餘角之諸函數

16. 自14節,有

$$\left.\begin{aligned}正弦呷&=餘弦吃=餘弦(90^\circ-呷),\\ 餘弦呷&=正弦吃=正弦(90^\circ-呷),\\ 正切呷&=餘切吃=餘切(90^\circ-呷),\\ 餘切呷&=正切吃=正切(90^\circ-呷).\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

正弦與餘弦有若是之相關,故互稱爲彼之餘函數,正切與餘切亦然.

由以上所得之理,可述之爲例語曰,

凡銳角之函數,等於其餘角之餘函數.

諸角之函數,詳列於弦切眞數表內.按本節之理,45°至90°間諸角之函數,可從小於45°諸角之函數得之,故弦切眞數表,不必列至90°,至45°已足,惟須排列合法,使一函數可視爲某角之函數,亦可視爲其餘角之餘函數.

演習

17. (1.) 試以小於45°之角之函數,表左列諸角之函數.

正弦70°,　餘弦89° 30′,　正切63°,

餘弦60°,　餘切47°,　正弦72° 39′.

(2.) 今有餘弦天＝正弦2天,求天之同數.

(3.) 今有正切天＝餘切3天,求天之同數.

(4.) 今有正弦2天＝餘弦3天,求天之同數.

(5.) 今有餘切(30°－天)＝正切(30°＋3天),求天之同數.

(6.) 今有呷吔哂爲三角形之三角,求證

$$餘弦\frac{1}{2}吔＝正弦\frac{1}{2}(呷＋哂).$$

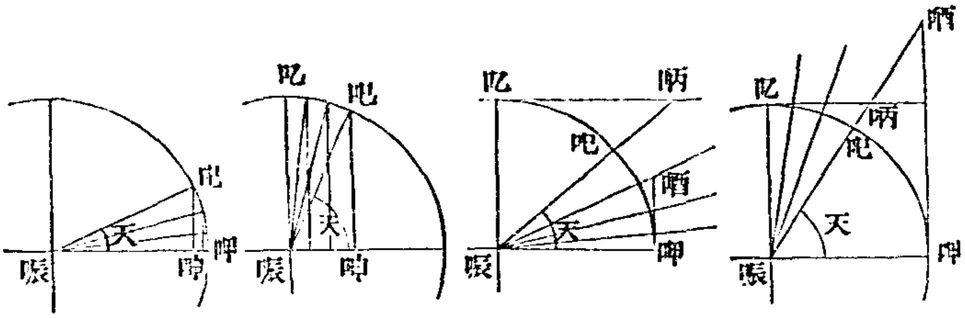
解略　　呷＋吔＋哂＝180°,

0°, 90°, 180°, 270°, 與360°之函數

18. 夫天角向0°而漸損(第一圖),則正弦天漸損,而餘

弦天漸增,迨㖘吧與㖘呷符合為一,則呻吧為0,而㖘呻變為㖘呷(=1).

是以　　　正弦0°=0,　餘弦0°=1.



第一圖　　第二圖　　第三圖　　第四圖

天角向90°而漸增(第二圖),則正弦天漸增而餘弦天漸損,迨㖘吧與㖘叱符合為一,則呻吧變為㖘叱(=1),而㖘呻變為0.

是以　　　正弦90°=1,　餘弦90°=0.

天角向0°而漸損(第三圖),則正切天漸損而餘切天漸增,迨㖘吧與㖘呷符合,則呷哂為0,而叱哂增至無窮.

是以　　　正切0°=0,　餘切0°=∞.

天角向90°而漸增(第四圖),則正切天漸增而餘切天漸損,迨㖘吧與㖘叱符合,則呷哂增至無窮,而叱哂=0.

是以　　　正切90°=∞,　餘切90°=0.

按所謂餘切0°=∞者,意謂角甚近0°時,其餘切增至過於凡可能名之數也.∞之為號,非指一定之數,惟表其數為無窮大耳.

凡三角函數為無窮大時,如其角自此旁而漸近限同

數,則爲正,如其角自彼旁而漸近限同數,則爲負.是則如角漸損至0°,則餘切0° = +∞,如角自負角漸增至0°,則餘切0° = −∞.然 +∞ 與 −∞ 亦不必細爲數別,祇以∞一號賅此二項可也.

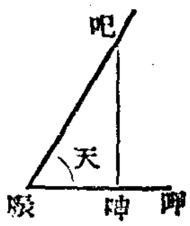
仿前法可推得180°, 270° 360°之函數,且本節之理,可以左表顯之.

角	0°	90°	180°	270°	360°
正弦	0	1	0	−1	0
餘弦	1	0	−1	0	1
正切	0	∞	0	∞	0
餘切	∞	0	∞	0	∞

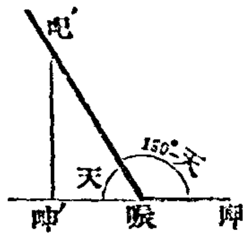
19. 當角迭變之時,其正弦與餘弦之同數,祇在−1至+1之間,其正切與餘切之同數,乃在 −∞ 至 +∞ 之間其正割與餘割之同數,乃在−∞ 至 +∞ 之間,除去−1與+1間之數.

補角之函數

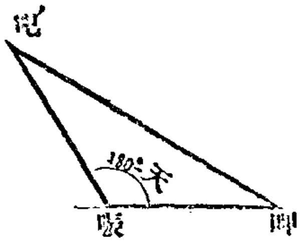
20. 設䟫吧呻三角形(第一圖),等於䟫吧′呻′三角形(第二圖),是則呻吧=呻′吧′,而䟫呻 = 䟫呻′,呷䟫吧′角(第二圖)等於呷䟫吧(第一圖)之補角,又於呷䟫吧′三角形內(第三圖),呷䟫吧′角 = 呷䟫吧′角(第二圖).



第一圖



第二圖



第三圖

準5節與8節,有

$$\left.\begin{aligned}\text{正弦}(180^\circ-\text{天})&=\text{正弦天},\\ \text{餘弦}(180^\circ-\text{天})&=-\text{餘弦天},\\ \text{正切}(180^\circ-\text{天})&=-\text{正切天},\\ \text{餘切}(180^\circ-\text{天})&=-\text{餘切天}.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

本節之理,可述之爲例語曰,

凡角之正弦,等於其補角之正弦,而角之餘弦,正切,餘切,各等於其補角反號之餘弦,正切,餘切.

按此理於解鈍角三角形時最爲緊要.

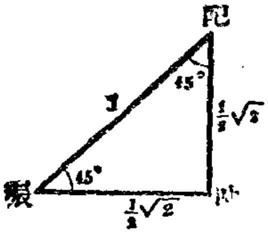
45°, 30°, 60° 之函數

21. 唳呻吧正三角形(第一圖)內,唳角 = 吧角 = 45°, 而唳吧 = 1.

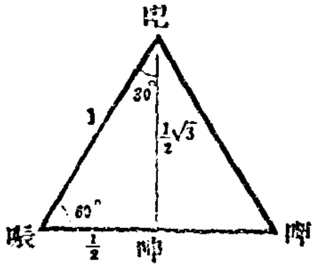
是以 $\quad\text{唳呻}=\text{呻吧}=\frac{1}{2}\sqrt{2},$

故 $\quad\text{正弦}\,45^\circ=\text{餘弦}\,45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2},\qquad$ 14,16節

$\quad\text{正切}\,45^\circ=\text{餘切}\,45^\circ=1.$



第一圖



第二圖

娠吧呷等邊三角形(第二圖)內,各邊俱爲度長準個,吧呻線平分娠吧呷角,乃正交娠呷而平分之.

是以於娠吧呻正三角形內, 娠呻 $=\frac{1}{2}$, 呻吧 $=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

故 正弦 $30°$ = 餘弦 $60°$ $=\frac{1}{2}$, 14節

餘弦 $30°$ = 正弦 $60°$ $=\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

正切 $30°$ = 餘切 $60°$ $=\frac{1}{3}\sqrt{3}$,

餘切 $30°$ = 正切 $60°$ $=\sqrt{3}$.

22. 左列表中之同數,學者宜熟記之.

角	0°	30°	45°	60°	90°
正弦	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
餘弦	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

演習

設天 $=30°$,試證左列數問.

(1.) 正弦2天 = 2正弦天餘弦天.

(2.) 餘弦3天 = 4餘弦^{3}天 − 3餘弦天.

(3.) 餘弦2天 = 餘弦^{2}天 − 正弦^{2}天

(4.) 正弦3天 = 3正弦天餘弦^{2}天 − 正弦^{3}天.

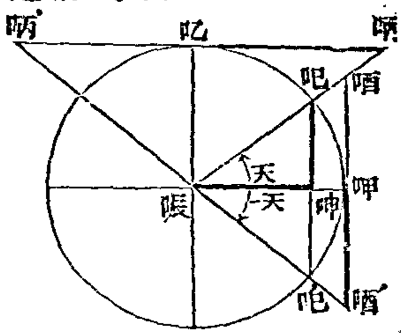
(5.) 正切2天 = $\dfrac{2\text{正切天}}{1-\text{正切}^2\text{天}}$.

(6.) 試證如天 = 45°，則一題與三題之方程亦合理.

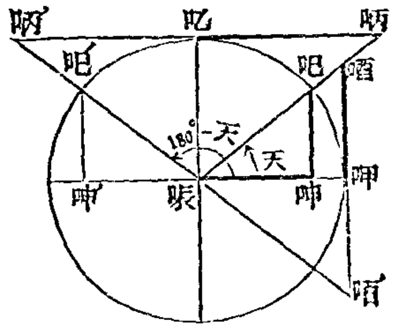
(7.) 試證如天 = 120°，則二題與四題之方程亦合理.

(−天)，(180° − 天)，(180° + 天)，(360° − 天)之函數

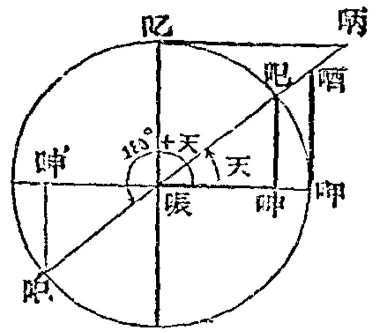
23. 代表此各角之任一函數之線，與代表天角同函數之線等長.



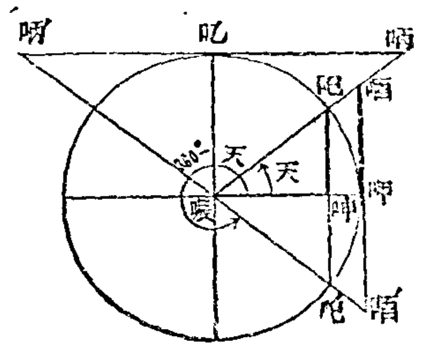
第一圖



第二圖



第三圖



第四圖

如第二與第三圖內,㖘呷′吧′三角形＝㖘呷吧三角形,是以呷吧＝呷′吧′,而㖘呷＝㖘呷′.

第一與第四圖內,㖘呷吧′三角形＝㖘呷吧三角形,是以呷吧′＝呷吧.

第一,第二,與第四圖內,㖘呷唒′三角形＝㖘呷唒三角形,是以呷唒′＝呷唒.

第一,第二,與第四圖內,㖘吒哂′三角形＝㖘吒哂三角形,是以吒哂′＝吒哂.

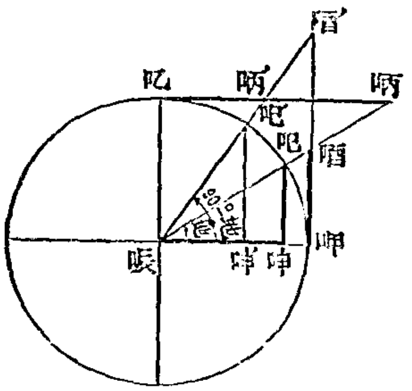
故(−天),(180°−天),(180°+天),(360°−天)各角之任一函數,其同數等於天之同函數,但其號則視其代表線之方向而異.

如以此各函數線以合宜之號,則成左表.

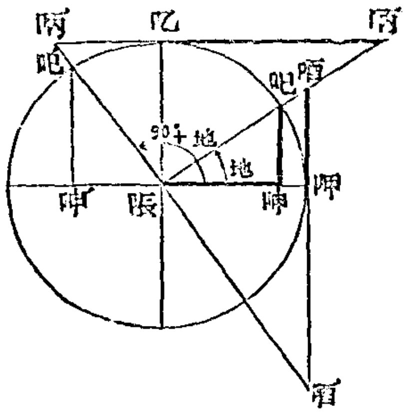
正弦(−天)＝−正弦天	正弦(180°−天)＝正弦天
餘弦(−天)＝餘弦天	餘弦(180°−天)＝−餘弦天
正切(−天)＝−正切天	正切(180°−天)＝−正切天
餘切(−天)＝−餘切天	餘切(180°−天)＝−餘切天
正弦(180°+天)＝−正弦天	正弦(360°−天)＝−正弦天
餘弦(180°+天)＝−餘弦天	餘弦(360°−天)＝餘弦天
正切(180°+天)＝正切天	正切(360°−天)＝−正切天
餘切(180°+天)＝餘切天	餘切(360°−天)＝−餘切天

(90°−地),(90°+地),(270°−地),(270°+地)之函數

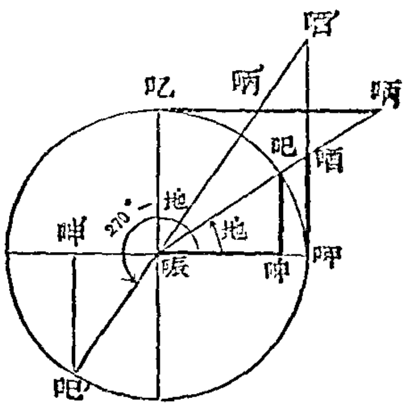
24. 代表此各角正弦之線,與代表地角餘弦之線等長,代表各角餘弦正切餘切之諸線,與代表地角之正弦餘切正切等長.



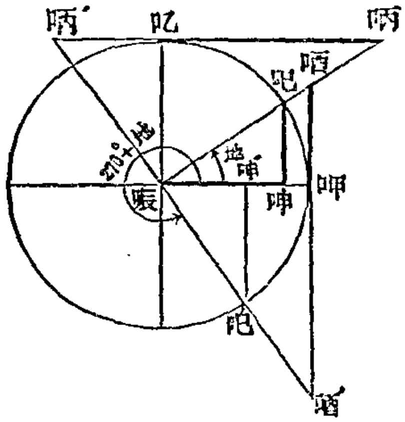
第一圖



第二圖



第三圖



第四圖

因　㖘呻'吧'三角形＝㖘呻吧三角形,是以呻'吧'＝㖘呻,而㖘呻'＝呻吧.

㖘呷唒'三角形＝㖘𠮙㖐三角形,是以呷唒'＝𠮙㖐.

㖘𠮙㖐'三角形＝㖘呷唒三角形,是以𠮙㖐'＝呷唒.

故(90°－地),(90°＋地),(270°－地),(270°＋地)各角之任一函數,其同數等於地之各餘函數,但其號則視代表線

之方向而異.

如以此各函數綴以合宜之號,則成左表.

正弦$(90°-$地$)=$餘弦地	正弦$(90°+$地$)=$餘弦地
餘弦$(90°-$地$)=$正弦地	餘弦$(90°+$地$)=-$正弦地
正切$(90°-$地$)=$餘切地	正切$(90°+$地$)=-$餘切地
餘切$(90°-$地$)=$正切地	餘切$(90°+$地$)=-$正切地
正弦$(270°-$地$)=-$餘弦地	正弦$(270°+$地$)=-$餘弦地
餘弦$(270°-$地$)=-$正弦地	餘弦$(270°+$地$)=$正弦地
正切$(270°-$地$)=$餘切地	正切$(270°+$地$)=-$餘切地
餘切$(270°-$地$)=$正切地	餘切$(270°+$地$)=-$正切地

25. 按上二節之理,則任一正角或負角之函數,可徑以小於$90°$之正角函數表之.

如　　正弦$212°=$正弦$(180°+32°)=-$正弦$32°$,

　　　餘弦$260°=$餘弦$(270°-10°)=-$正弦$10°$.

演　習

26. (1.) 何角小於$360°$,而其正弦等於$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.如其正切等於$\sqrt{3}$,則此角為何角.

(2.) 今有正弦天$=\frac{1}{2}\sqrt{3}$,求天角小於$720°$之諸同數.

(3.) $-30°, 765°, 120°, 210°$之正餘弦各為若干.

(4.) $405°, 600°, 1125°, -45°, 225°$之諸函數各若干.

(5.) $-120°, -225°, -420°, 3270°$之諸函數各若干.

(6.) 試以小於$45°$角之函數,表$233°, -197°$,與$894°$之

函數.

(7.) 試以45°與90°間角之函數,表正弦267°,正切(−254°),餘弦950°.

(8.) 已知餘弦164° = −.96,求正弦196°等於若干.

(9.) 化簡餘弦(90°+天)餘弦(270°−天)−正弦(180°−天)正弦(360°−天).

(10.) 化簡$\frac{\text{正弦}(180^\circ-\text{天})}{\text{正弦}(270^\circ-\text{天})}\text{正切}(90^\circ-\text{天})+\frac{1}{\text{正弦}^2(270^\circ-\text{天})}$.

(11.) 試以天之諸函數表(天−90°)之諸函數.

平三角術　第二章

正三角形

27. 求三角形未知之件,謂之解三角形.

已知三角形之三件,且其中至少有一件爲邊,則此三角形爲可解.正三角形之一角卽正角,恒爲已知,故正三角形之二邊,或一邊一銳角爲已知,則其形可解.

正三角形中未知之件,可用左列諸方程求得之.

(1)　$\text{正弦}=\dfrac{\text{對邊}}{\text{弦}}$,　　(2)　$\text{餘弦}=\dfrac{\text{倚邊}}{\text{弦}}$,　　14節

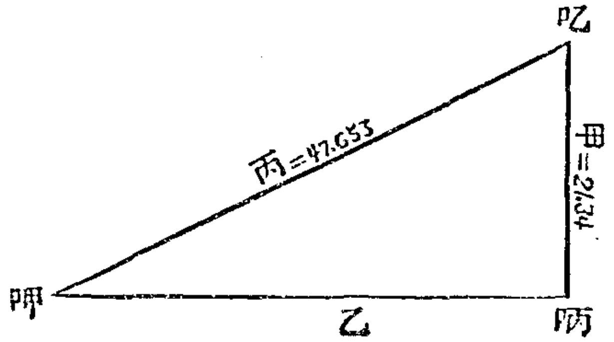
(3)　$\text{正切}=\dfrac{\text{對邊}}{\text{倚邊}}$,　　(4)　$\text{餘切}=\dfrac{\text{倚邊}}{\text{對邊}}$,

(5)　$\text{丙}^2=\text{甲}^2+\text{乙}^2$,　　(6)　$\text{吃}=(90°-\text{呷})$.　　16節

解法,先擇取含有二已知件之方程,以二同數代入,卽得第三件.倣此可盡得未知之件.一題而可有數解法,則擇其最捷者.

法　問

今有正三角形之弦爲47.653,其一邊爲21.34,求其餘諸件及面積.



眞數解法

角之函數,可檢弦切眞數表而得之.

$$\text{正弦呷}=\frac{\text{甲}}{\text{丙}}=\frac{21.34}{47.653}$$

```
47.653)21.3400(.4478
       190612
       ------
        227880
        190612
        ------
         372680
         333571
         ------
          391090
          381224
          ------
            9866
```

正弦呷 $=.4478$

呷 $=26°\ 36'$

乙=丙餘弦呷

$=47.653\times.8942$

```
    47.653
     .8942
   -------
     95306
   190612
  428877
 381224
----------
 42.6113126
```

乙 $=42.61$

按二位以後小數所以棄去者,以其不眞確,因所用弦切眞數表,祇四位小數也.

叱$=(90°-26°36')=63°24'$

對數解法

解三角形恆以用對數爲便.

諸函數之對數,可檢弦切對數表得之.下列之解法,係用五位小數之弦切對數表.

$$\text{正弦呷}=\frac{\text{甲}}{\text{丙}}$$

對正弦呷=對甲−對丙

對 $21.34\ =1.32919$

對 $47.653=1.67809$ 減

對正弦呷$=9.65110-10$

呷$=26°\ 36'\ 14''$

$$\text{餘弦呷}=\frac{\text{乙}}{\text{丙}}$$

對乙=對丙+對餘弦呷

對 $47.653=1.67809$

對餘弦 $26°\ 36'\ 14''=9.95140-10$

對乙 $=1.62949$

乙 $=42.608$

叱 $=90°-26°\ 36'\ 14''=63°\ 23'\ 46''$

面積 $=\frac{1}{2}$ 甲乙

$=\frac{1}{2}\times 21.34\times 42.61$

```
      21.34
      42.61
     ------
      2134
    12804
    4268
   8536
   ---------
 2)909.2974
   --------
   454.6487
```

面積 $=454.6$

還原

甲^2 = 丙^2 − 乙^2 = (丙 + 乙)(丙 − 乙)

$= 90.263\times 5.043$

```
      90.263
       5.043
     -------
      270789
     361052
   4513150
   ---------
甲2=455.196309
```

開方得甲 $= 21.34$,卽徵算法不誤.

面積 $=\frac{1}{2}$ 甲乙

對面積 = 對$\frac{1}{2}$ + 對甲 + 對乙

對$\frac{1}{2} = 9.69897 - 10$

對 $21.34 = 1.32919$

對 $42.608 = 1.62949$

對面積 $= 2.65765$

面積 $= 454.62$

還原

甲^2 = 丙^2 − 乙^2 = (丙 + 乙)(丙 − 乙)

$= 90.261\times 5.045$

對 $90.261 = 1.95550$

對 $5.045 = 0.70286$

$2)2.65836$

對 $21.34 = 1.32918$

甲 $= 21.34$,卽徵算法不誤.

細觀以上二種解法,知用對數者,較之用眞數者,得數更爲密合,以眞數祗有四位小數,而對數有五位小數故也.

演習

28. (1.) 今有正三角形,乙 $= 96.42$,丙 $= 114.81$,求甲與呷.

(2.) 正三角形之弦爲 28.453,一邊爲 18.197,求其餘件.

(3.) 已知正三角形之弦 $= 747.24$,其一銳角 $= 23^\circ 45'$,求其餘件.

(4.) 今有正三角形之一邊 = 37.234, 其對角 = 54° 27′, 求其餘件與面積.

(5.) 今有正三角形之一邊 = 1.1293, 其倚角 = 74°13′27″, 求其餘件與面積.

(6.) 今有正三角形, 呷 = 15°22′11″, 丙 = .01793, 求乙.

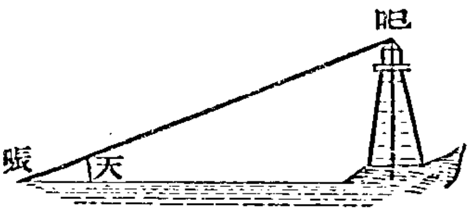
(7.) 今有正三角形, 吃 = 71°34′53″, 乙 = 896.33, 求甲.

(8.) 今有正三角形, 丙 = 3729.4, 乙 = 2869.1, 求呷.

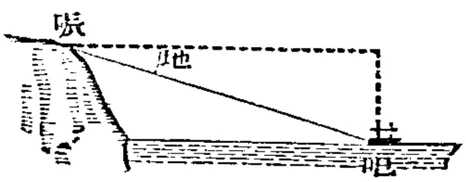
(9.) 今有正三角形, 甲 = 1247, 乙 = 1988, 求丙.

(10.) 今有正三角形, 甲 = 8.6432, 乙 = 4.7815, 求吃.

自視點至物之直線,與地平線所成之角,曰仰視角,亦曰俯視角.



第一圖



第二圖

如第一圖內,唇為視點,則天角為吧物之仰視角,又第二圖內,唇為視點,則地角為吧物之俯視角.

(11.) 距塔底253尺之處,測得塔頂之仰視角為60°20′, 求塔之高.

(12.) 峭壁高出海面85尺,遠望海中浮筩之俯視角為24° 31′ 22″, 求浮筩距壁底若干.

(13.) 有一豎竿高31尺,其橫平影長45尺,問日在地平

上之仰視角若干.

(14.) 自115尺高之塔巔,遠望塔前大道上一物之俯視角爲22°13′44″,問此物距塔巔若干.

(15.) 今有索長324尺,一端綴於屋頂,一端及地牽緊之,其與地平成角47°21′17″,求屋之高.

(16.) 今有燈塔高150呎,則自其頂可觀海面最遠之物相距若干.

(按此題須以地半徑爲3960哩入算.)

(17.) 今有三浮筩,適在正三角形之角尖,其三角形之一邊爲17.894尺,此邊之倚角爲57°23′46″,求繞此三浮筩之道長若干.

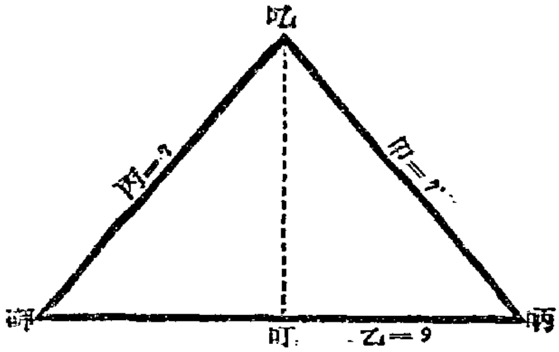
(18.) 距塔897.3尺之處,測塔頂之仰視角爲10°27′42″,求塔之高.

(19.) 今有梯長$42\frac{1}{2}$尺,倚於屋旁,梯足距屋$25\frac{1}{4}$尺,則梯與地成角若干度.

(20.) 今有街道廣120尺,兩旁有屋,此旁之屋高55尺,自其屋簷測彼旁屋頂之仰視角爲26°37′,求彼屋之高.

(21.) 旗竿上作一誌點,下距地面53尺7寸遠,自一點測得誌點之仰視角爲25°34′,又測得竿頂之仰視角爲34°17′,問竿高若干.

(22.) 今有等腰三角形,二腰各長7寸,底長9寸,求此形之諸角各若干度.



解略　作吃叮垂線,平分其底與呷吃哂角.

呷吃叮正三角形內,呷吃=7寸,呷叮=$4\frac{1}{2}$寸,故呷吃叮可解.

哂角=呷角,呷吃哂角=2呷吃叮角.

(23.) 今有等腰三角形之二腰,各長13.44寸,二等角各爲63° 21′ 42″,求形之餘件及面積.

(24.) 今有等腰三角形之二等邊各爲377.22寸,其間角爲19° 55′ 32″,求形之底與面積.

(25.) 如圜之弦長18尺,其所配之圜心角爲45° 31′ 10″,求圜半徑.

(26.) 今有尖劈,底廣3.92寸,二邊各長13.25寸,求劈之尖角爲若干度.

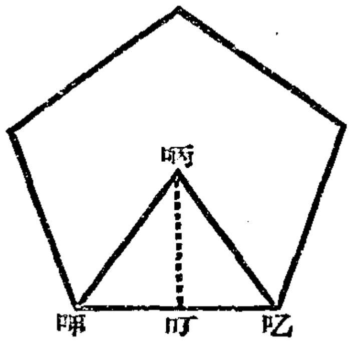
(27.) 今有二股規,股長5寸,二股間之角爲64° 45′,問二股之尖相距若干.

(28.) 今有等腰三角形田一方,底長1793.2尺,底二端之倚角各爲53° 27′ 49″,求田之面積.

(29.) 今有屋宇廣30尺,屋簷高$25\frac{1}{2}$尺,屋脊高$33\frac{1}{2}$尺,求

椽之長,及屋一端之面積.

(30.) 有法五邊形之一邊爲29.25寸,求其大小輻及面積.



解略　五邊形可分成五等腰三角形,各以大輻爲二腰,設呷呩叱爲此五形之一,呷叱 = 29.25寸,呷呩叱角 = 360° 之$\frac{1}{5}$=72°.按前設之法,可求得呩呷,呩叮,及呷呩叱三角形之面積,即五邊形之大小輻,及其面積之五分一是也.

(31.) 有法十二邊形之小輻爲2,求形之周界.

(32.) 今有一塔爲八角體,周界爲153.7尺,求塔底之面積若干.

(33.) 今有有法七邊形之田一方,其大輻爲6283.4尺,築籬環之,求籬之共長.

(34.) 圜內切有法六邊形之一邊爲3.27尺,求同圜內切有法十邊形之周界若干.

(35.) 今有有法九邊形之田一方,面積爲483930方尺,築籬環之,求籬之共長.

藉正三角形而解斜三角形

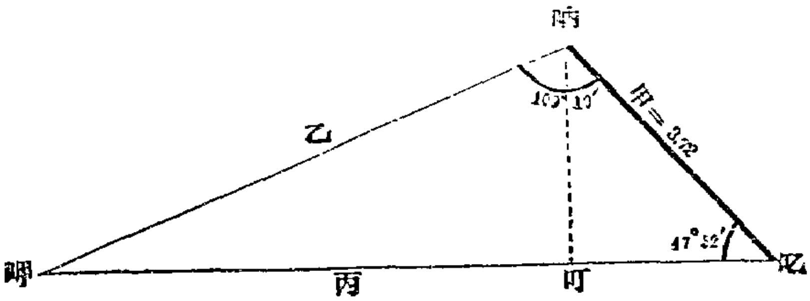
29. 解斜三角形有專術,後章詳之,然恆可藉正三角

形解之,而不必另用專術,惟其術略描耳.觀左列諸演習,可明其理.

演 習

(1.) 今有斜三角形,甲 $=3.72$,叱 $=47°52'$,啢 $=109°10'$,求其餘件.

本題所已知者爲一邊二角.



解略 呷 $=[180°-($叱$+$啢$)]$.

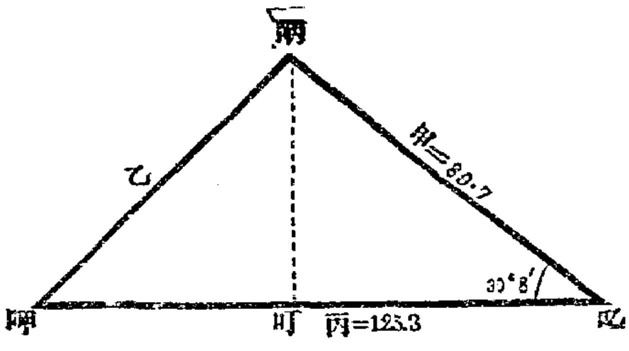
作啢叮垂線.

解叱啢叮正三角形.

是則啢叮已得,故可解呷啢叮正三角形.

(2.) 今有斜三角形,甲 $=89.7$,丙 $=125.3$,叱 $=39°8'$,求其餘件.

本題所已知者爲二邊與其間角.



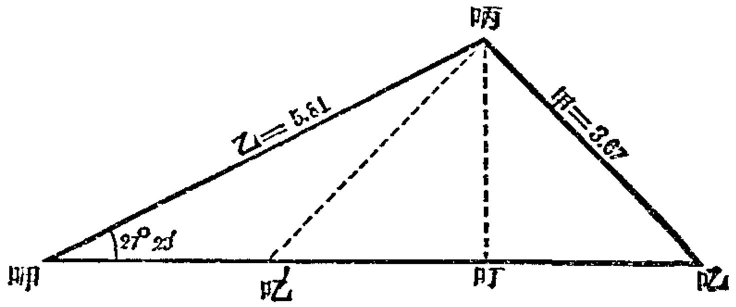
解略 作啢叮垂線.

解㕯吃叮正三角形.

是則已得㕯叮與呷叮(＝丙－叮吃),故可解呷㕯叮正三角形.

(3.)　今有斜三角形,甲 = 3.67, 乙 = 5.81, 呷 = 27°23′,求其餘件.

本題所已知者爲二邊及一邊之對角.



任取呷㕯吃,呷㕯吃′兩三角形之一,俱含已知之件,題即可解矣.

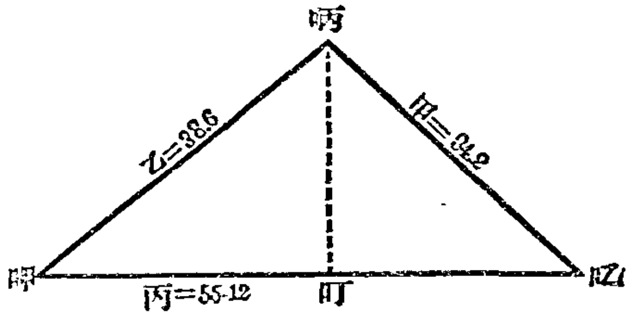
如對已知角之邊,小於已知之又一邊,大於自彼邊之端至底之垂線㕯叮,則此題有二解法.(詳見後第四章)

解略　解呷㕯叮正三角形.

是則已得㕯叮,即可解㕯叮吃正三角形,或㕯叮吃′正三角形.

(4.)　今有斜三角形之三邊,甲＝34.2,乙＝38.6,丙＝55.12,求其角.

本題所已知者爲三邊.



解略　　設叮𠮙＝天，

$$\text{甲}^2-\text{天}^2=\text{𠰳叮}^2=\text{乙}^2-(\text{丙}-\text{天})^2.$$

是以

$$\text{甲}^2=\text{乙}^2-\text{丙}^2+2\text{丙天},$$

$$\text{天}=\frac{\text{甲}^2+\text{丙}^2-\text{乙}^2}{2\text{丙}}.$$

是則呷𠰳叮與𠮙𠰳叮兩正三角形之弦與一邊為已知，則解之不難矣．

(5.) 呷𠮙二樹在池之兩旁，呷樹距𠰳點297.6尺，𠮙樹距𠰳點864.4尺，呷𠰳𠮙角為87° 43′ 12″，求呷𠮙距若干．

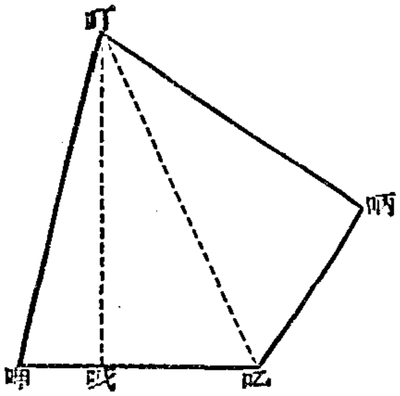
(6.) 今欲求海面呷舟距岸上𠮙點之遠，故在岸上作𠮙𠰳線，長800尺，測得呷𠮙𠰳角為67° 43′，呷𠰳𠮙角為74° 21′ 16″，則呷舟距𠮙點若干．

(7.) 今有燈塔立於小山之巔上，高92尺，其底距水際一點297.25尺，在此點測塔頂之仰視角為46° 33′ 15″，求塔頂距此點若干．

(8.) 今有三角田一方，三邊為534尺，679.47尺，474.5尺，則其三角與田之面積各若干．

(9.) 今有一點直距河邊$117\frac{1}{4}$尺，而高出河面11尺，自此點測河彼岸之俯視角為1° 12′，求河之廣若干．

(10.) 呷𠮙𠰳叮四邊形內，呷𠮙＝1.41，𠮙𠰳＝1.05，𠰳叮＝1.76，叮呷＝1.93，呷角＝75° 21′，求此形之餘諸角各為若干度．



解略 作叮吃對角線.

呷吃叮三角形之二邊與其間角已知,故爲可解.

解呷吃叮三角形以得叮吃.

旣得叮吃,則叮吃呐三角形之三邊爲已知,故其形可解.

(11.) 呷吃呐叮四邊形內,呷吃 $=12.1$,呷叮 $=9.7$,呷角 $=47^\circ\ 18'$,吃角 $=64^\circ\ 49'$,叮角 $=100^\circ$,求餘邊.

解略 解呷吃叮三角形以得吃叮.

平三角術　第三章

三角公式

30. 本章先詳左列公式之證,而後由之推得其他諸公式.

正弦(天＋地)＝正弦天餘弦地＋餘弦天正弦地. (11)

正弦(天－地)＝正弦天餘弦地－餘弦天正弦地. (12)

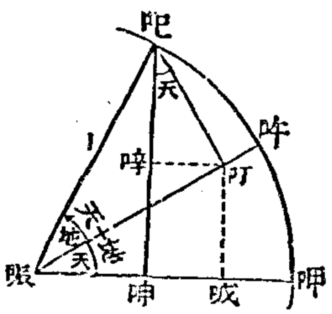
餘弦(天＋地)＝餘弦天餘弦地－正弦天正弦地. (13)

餘弦(天－地)＝餘弦天餘弦地＋正弦天正弦地. (14)

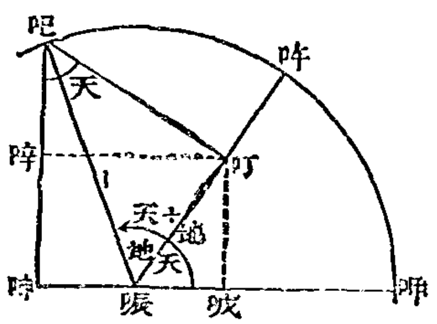
(11)至(14)四公式之證

31. 命呷唇吘角＝天,吘唇吧角＝地,則呷唇吧角＝(天＋地).

天地二角各爲銳而正,在第一圖內,(天＋地)小於90°,在第二圖內,(天＋地)大於90°.



第一圖



第二圖

二圖俱以圜爲準徜圜,且呻吧正交唇呷,故呻吧＝正弦(天＋地),唇呻＝餘弦(天＋地).

作叮吧正交㖘吘,則有

叮吧＝正弦地, 㖘叮＝餘弦地,

呻吧叮角＝呷㖘吘角＝天.

(以其邊俱正交也.)

作叮哦正交㖘呷,叮哱正交呻吧.

正弦(天＋地)＝呻吧＝哦叮＋哱吧.

哦叮＝(正弦天)×㖘叮＝正弦天餘弦地.

(因㖘哦叮爲正三角形,$\frac{\text{哦叮}}{\text{㖘叮}}$＝正弦天.)

哱吧＝(餘弦天)×叮吧＝餘弦天正弦地.

(因哱吧叮爲正三角形,$\frac{\text{哱吧}}{\text{叮吧}}$＝餘弦天.)

故正弦(天＋地)＝正弦天餘弦地＋餘弦天正弦地. (11)

餘弦(天＋地)＝㖘呻＝㖘哦－哱叮.

[如(天＋地)大於90°,則㖘呻爲負.]

㖘哦＝(餘弦天)×㖘叮＝餘弦天餘弦地.

(因㖘哦叮爲正三角形,$\frac{\text{㖘哦}}{\text{㖘叮}}$＝餘弦天.)

哱叮＝(正弦天)×叮吧＝正弦天正弦地.

(因吧哱叮爲正三角形,$\frac{\text{哱叮}}{\text{叮吧}}$＝正弦天.)

故餘弦(天＋地)＝餘弦天餘弦地－正弦天正弦地. (13)

32. 上節祗設天與地各爲銳角而正,則前二公式爲眞確,然亦可推廣之,設天與地任有何同數,而其式恆眞.

命地爲銳角,天爲第二象限內之角,則有天＝(90°＋天′),

式內天'爲銳角.

正弦(天＋地)＝正弦(90°＋天'＋地)

＝餘弦(天'＋地)　　24節

＝餘弦天'餘弦地－正弦天'正弦地

＝正弦(90°＋天')餘弦地

＋餘弦(90°＋天')正弦地　　24節

＝正弦天餘弦地＋餘弦天正弦地.

是則角雖爲鈍而小於180°,公式仍可賅之.仿此可證餘弦(天＋地)之公式亦然.

按此法迭次證之,可見天地任有何正同數,上文二公式恒爲眞確.

又凡負角地,必等於正角地'減360°之倍數.地之函數等於地'之函數,(天＋地)之函數,等於(天＋地')之函數.　9節

故若公式而與(天＋地)合,則亦必與(天＋地')合.

仿此推論,可見天與地雖同爲負角,而公式仍眞確.

33. 以－地代公式(11)內之地,則有

正弦(天－地)＝正弦天餘弦(－地)＋餘弦天正弦(－地),

但餘弦(－地)＝餘弦地,又正弦(－地)＝－正弦地.　23節

故正弦(天－地)＝正弦天餘弦地－餘弦天正弦地.　(12)

又以－地代公式(13)內之地,則有

餘弦(天－地)＝餘弦天餘弦(－地)－正弦天正弦(－地),

＝餘弦天餘弦地＋正弦天正弦地.

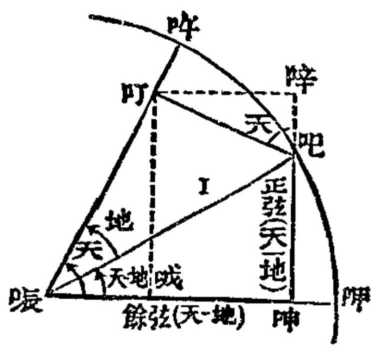
故餘弦(天－地)＝餘弦天餘弦地＋正弦天正弦地. (14)

演習

34. (I.) 設天與地爲正銳角,試按幾何學之理證左二公式.

正弦(天－地)＝正弦天餘弦地－餘弦天正弦地,

餘弦(天－地)＝餘弦天餘弦地＋正弦天正弦地.



解略 呷唇吘角＝天, 吧唇吘角＝地, 呷唇吧角＝(天－地).

作吧叮正交唇吘.

是則叮吧＝正弦(－地)＝－正弦地,但叮吧爲負,故取吧叮爲正,乃等於正弦地.

唇叮＝餘弦(－地)＝餘弦地,

啈吧叮角＝呷唇吘角＝天,其邊爲正交.

作叮啈正交呻吧,叮哦正交唇呷.

正弦(天－地)＝呻吧＝哦叮－吧啈.

自唇哦叮正三角形,有 哦叮＝(正弦天)×唇叮＝正弦天餘弦地.

自叮啈吧正三角形,有 吧啈＝(餘弦天)×吧叮＝餘弦天正弦地.

故 正弦(天－地)＝正弦天餘弦地－餘弦天正弦地.

餘弦(天一地)＝㖘呻＝㖘戌＋叮啐.

自㖘戌叮正三角形,有　㖘戌＝(餘弦天)×㖘叮＝餘弦天餘弦地.

自叮啐吧正三角形,有　叮啐＝(正弦天)×吧叮＝正弦天正弦地.

故　　餘弦(天一地)＝餘弦天餘弦地＋正弦天正弦地.

(2.) 試求(45°＋天),(30°－天),(60°＋天)等角之正餘弦,以正弦天與餘弦天明之.

(3.) 今有正弦天＝$\frac{3}{5}$,正弦地＝$\frac{5}{13}$,天與地俱爲銳角,求正弦(天＋地)與正弦(天－地).

(4.) 試以30°與45°之函數,求75°之正餘弦.

解略　　75°＝(45°＋30°).

(5.) 試以30°與45°之函數,求15°之正餘弦.

(6.) 今有天與地各在第二象限內,正弦天＝$\frac{1}{2}$,正弦地＝$\frac{1}{4}$,求正弦(天＋地)與餘弦(天－地).

(7.) 按上文諸公式,試以天之正餘弦明(180°－天),(180°＋天),(270°－天),(270°＋天)諸角之正餘弦.

(8.) 試證正弦(60°＋45°)＋餘弦(60°＋45°)＝餘弦45°

(9.) 今有正弦45°＝$\frac{1}{2}\sqrt{2}$,餘弦45°＝$\frac{1}{2}\sqrt{2}$,求正弦90°與餘弦90°.

(10.) 試證正弦(60°＋天)－正弦(60°－天)＝正弦天.

和角較角之正切

35. 夫　正切(天＋地)＝$\dfrac{\text{正弦(天＋地)}}{\text{餘弦(天＋地)}}$

$$=\frac{\text{正弦天餘弦地}+\text{餘弦天正弦地}}{\text{餘弦天餘弦地}-\text{正弦天正弦地}}.$$

以餘弦天餘弦地同除此式下端之母子，且勿忘$\frac{\text{正弦}}{\text{餘弦}}$=正切，則有

$$\text{正切}(\text{天}+\text{地})=\frac{\text{正切天}+\text{正切地}}{1-\text{正切天正切地}}. \qquad (15)$$

仿此以(14)式除(12)式，則有

$$\text{正切}(\text{天}-\text{地})=\frac{\text{正切天}-\text{正切地}}{1+\text{正切天正切地}}. \qquad (16)$$

倍角之函數

36. 設(11),(13),(15)三式中之地＝天，則可得2天之函數以天之函數明之.

自(11)式有

$$\text{正弦}(\text{天}+\text{天})=\text{正弦天餘弦天}+\text{餘弦天正弦天}.$$

是以 $\text{正弦}\,2\text{天}=2\,\text{正弦天餘弦天}.$ (17)

自(13)式得 $\text{餘弦}\,2\text{天}=\text{餘弦}^2\text{天}-\text{正弦}^2\text{天}.$ (18)

夫既 $\text{餘弦}^2\text{天}=1-\text{正弦}^2\text{天}$，而 $\text{正弦}^2\text{天}=1-\text{餘弦}^2\text{天}$，故自(18)式得

$$\text{餘弦}\,2\text{天}=1-2\,\text{正弦}^2\text{天}, \qquad (19)$$

又 $$\text{餘弦}\,2\text{天}=2\,\text{餘弦}^2\text{天}-1. \qquad (20)$$

自(15)式得 $$\text{正切}\,2\text{天}=\frac{2\text{正切天}}{1-\text{正切}^2\text{天}}. \qquad (21)$$

半角之函數

37. (19)與(20)二式,於任一角俱眞確,故於$\frac{1}{2}$天角亦眞.

自(19)式可得 $$餘弦天=1-2正弦^2\frac{1}{2}天,$$

即 $$正弦^2\frac{1}{2}天=\frac{1-餘弦天}{2},$$

故 $$正弦\frac{1}{2}天=\pm\sqrt{\frac{1-餘弦天}{2}}. \qquad (22)$$

自(20)式可得 $$餘弦天=2餘弦^2\frac{1}{2}天-1,$$

即 $$餘弦^2\frac{1}{2}天=\frac{1+餘弦天}{2},$$

故 $$餘弦\frac{1}{2}天=\pm\sqrt{\frac{1+餘弦天}{2}}. \qquad (23)$$

以(23)式除(22)式,則得

$$正切\frac{1}{2}天=\pm\sqrt{\frac{1-餘弦天}{1+餘弦天}}. \qquad (24)$$

函數和較之公式

38. 自公式(11)至(14),可得

$$正弦(天+地)+正弦(天-地)=2正弦天餘弦地,$$

$$正弦(天+地)-正弦(天-地)=2餘弦天正弦地,$$

$$餘弦(天+地)+餘弦(天-地)=2餘弦天餘弦地,$$

$$餘弦(天+地)-餘弦(天-地)=-2正弦天正弦地.$$

設 $$戊=(天+地),\quad 亥=(天-地),$$

則有 $$天=\frac{1}{2}(戊+亥),\quad 地=\frac{1}{2}(戊-亥).$$

代入前四式內,得

$$正弦戊+正弦亥=2正弦\frac{1}{2}(戊+亥)餘弦\frac{1}{2}(戊-亥), \quad (25)$$

$$正弦戊-正弦亥=2餘弦\frac{1}{2}(戊+亥)正弦\frac{1}{2}(戊-亥), \quad (26)$$

$$餘弦戊+餘弦亥=2餘弦\frac{1}{2}(戊+亥)餘弦\frac{1}{2}(戊-亥), \quad (27)$$

$$餘弦戊-餘弦亥=-2正弦\frac{1}{2}(戊+亥)正弦\frac{1}{2}(戊-亥). \quad (28)$$

以(26)式除(25)式,得

$$\frac{正弦戊+正弦亥}{正弦戊-正弦亥}=\frac{正切\frac{1}{2}(戊+亥)}{正切\frac{1}{2}(戊-亥)}. \quad (29)$$

演 習

39. 按本章所有諸公式,試以天之函數明左列諸角之函數.

(1.) 正切(180°－天),正切(180°＋天).

(2.) (天－180°)之函數.

(3.) 正弦(天－90°),與餘弦(天－90°).

(4.) 正弦(天－270°),與餘弦(天－270°).

(5.) (45°－天)之正餘弦,(45°＋天)之正餘弦.

(6.) 今有正切45° ＝1,正切30° ＝$\frac{1}{3}\sqrt{3}$,求正切57°與正切15°.

(7.) 試證 $餘切(天+地)=\frac{餘切天餘切地-1}{餘切地+餘切天}$. (30)

解略 以公式(11)除公式(13).

(8.) 試證餘切(天$-$地)$=\dfrac{\text{餘切天餘切地}+1}{\text{餘切地}-\text{餘切天}}$. (31)

(9.) 試證餘弦$(30^\circ+$地$)-$餘弦$(30^\circ-$地$)=-$正弦地.

(10.) 試證正弦3天$=3$正弦天-4正弦^{3}天.

解略 正弦3天$=$正弦(天$+2$天).

(11.) 試證餘弦3天$=4$餘弦^{3}天-3餘弦天.

(12.) 如天與地爲銳角,而正切天$=\frac{1}{2}$,正切地$=\frac{1}{3}$,求證(天$+$地)$=45^\circ$.

(13.) 試證正切(天$+45^\circ$)$=\dfrac{1+\text{正切天}}{1-\text{正切天}}$.

(14.) 已知地爲銳角,正弦地$=\frac{2}{3}$,求正弦$\frac{1}{2}$地,餘弦$\frac{1}{2}$地,正切$\frac{1}{2}$地.

(15.) 已知天在第二象限內,餘弦天$=-\frac{3}{5}$,求正弦2天與餘弦2天.

(16.) 已知餘弦$45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2}$,求$22\frac{1}{2}^\circ$之函數.

(17.) 已知天爲銳角,正切天$=2$,求正切$\frac{1}{2}$天.

(18.) 已知餘弦$30^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3}$,求$15^\circ$之函數.

(19.) 已知餘弦$90^\circ=0$,求45°之函數.

(20.) 試以正弦天明正弦5天.

(21.) 試以餘弦天明餘弦5天.

(22.) 試證正弦(天$+$地$+$人)$=$正弦天餘弦地餘弦人

＋餘弦天正弦地餘弦人＋餘弦天餘弦地正弦人－正弦天正弦地正弦人.

解略 正弦(天＋地＋人)＝正弦(天＋地)餘弦人＋餘弦(天＋地)正弦人.

(23.) 已知正切2天＝3正切天,求天爲若干.

(24.) 試證正弦32°＋正弦28°＝餘弦2°.

(25.) 試證正切天＋餘切天＝2餘割2天.

(26.) 試證$(\text{正弦}\frac{1}{2}\text{天}+\text{餘弦}\frac{1}{2}\text{天})^2=1+\text{正弦天}$.

(27.) 試證$(\text{正弦}\frac{1}{2}\text{天}-\text{餘弦}\frac{1}{2}\text{天})^2=1-\text{正弦天}$.

(28.) 試證$\text{餘弦}2\text{天}=\text{餘弦}^4\text{天}-\text{正弦}^4\text{天}$.

(29.) 試證正切(45°＋天)＋正切(45°－天)＝2正割2天.

(30.) 試證$\text{正弦}2\text{天}=\frac{2\text{正切天}}{1+\text{正切}^2\text{天}}$.

(31.) 試證$\text{餘弦}2\text{天}=\frac{1-\text{正切}^2\text{天}}{1+\text{正切}^2\text{天}}$.

(32.) 試證$\frac{1+\text{正弦}2\text{天}}{1-\text{正弦}2\text{天}}=\left(\frac{\text{正切天}+1}{\text{正切天}-1}\right)^2$.

(33.) 試證$\text{正切}\frac{1}{2}\text{天}=\frac{\text{正弦天}}{1+\text{餘弦天}}$.

(34.) 試證$\text{餘切}\frac{1}{2}\text{天}=\frac{\text{正弦天}}{1-\text{餘弦天}}$.

(35.) 試以$\frac{\text{餘弦天}-\text{餘弦地}}{\text{餘弦天}+\text{餘弦地}}$變爲乘數.

式中須加減者,則對數法不能駁,故必變之爲乘數,然後可以對數推算.

解略 $\dfrac{\text{餘弦天}-\text{餘弦地}}{\text{餘弦天}+\text{餘弦地}}=\dfrac{-2\,\text{正弦}\frac{1}{2}(\text{天}+\text{地})\,\text{正弦}\frac{1}{2}(\text{天}-\text{地})}{2\,\text{餘弦}\frac{1}{2}(\text{天}+\text{地})\,\text{餘弦}\frac{1}{2}(\text{天}-\text{地})}$

$$=-\text{正切}\tfrac{1}{2}(\text{天}+\text{地})\,\text{正切}\tfrac{1}{2}(\text{天}-\text{地}).$$

(36.) 試以$\dfrac{\text{正切天}+\text{正切地}}{\text{餘切天}+\text{餘切地}}$化爲乘數.

(37.) 試證$1-\text{正切天正切地}=\dfrac{\text{餘弦}(\text{天}+\text{地})}{\text{餘弦天餘弦地}}$.

三角反函數

40. **界說** 設有角之正弦爲甲,則其角度可以正弦$^{-1}$甲號之,角之餘弦爲甲,則其角度可以餘弦$^{-1}$甲號之,角之正切爲甲,則其角度可以正切$^{-1}$甲號之,餘仿此.此等式總稱曰三角反函數.

正弦$^{-1}$甲之意,謂正弦等於甲之角也,故不指定某角,惟凡正弦爲甲之角是也.

如 $\text{正弦天}=\frac{1}{2}$, $\text{天}=30°, 150°, (30°+360°)$等角,

與 $\text{正弦}^{-1}\frac{1}{2}=30°, 150°, (30°+360°)$等角.

夫角之正弦或餘弦,不能小於-1或大於$+1$,故若甲不在-1與$+1$之間,則正弦$^{-1}$甲與餘弦$^{-1}$甲爲不可解.仿此如甲在-1與$+1$之間,則正割$^{-1}$甲與餘割$^{-1}$甲亦爲不可解.

演習

41. (1.) 求左列諸角之度數若干.

正弦$^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 正切$^{-1}(-1)$, 正弦$^{-1}(-\frac{1}{2})$,

餘弦$^{-1}\frac{1}{2}$, 餘弦$^{-1}1$.

(2.) 如天 = 餘切$^{-1}\frac{1}{3}$,求正切天.

(3.) 如天 = 正弦$^{-1}\frac{3}{5}$,求餘弦天與正切天.

(4.) 求正弦(正切$^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3}$).

(5.) 求正弦(餘弦$^{-1}\frac{4}{5}$).

(6.) 求餘切(正切$^{-1}\frac{1}{17}$).

(7.) 已知正弦$^{-1}$甲 = 2餘弦$^{-1}$甲,而兩角俱爲銳角,求甲之同數,

(8.) 已知正弦$^{-1}$甲 = 餘弦$^{-1}$甲,求正弦$^{-1}$甲小於360°時之同數.

(9.) 已知正切$^{-1}1 = \frac{1}{4}$正切$^{-1}0$,而兩角俱小於360°,求此二角各若干度.

(10.) 已知正弦$^{-1}$甲 = 餘弦$^{-1}$甲,又正弦$^{-1}$甲 + 餘弦$^{-1}$甲 = 450°,求正弦$^{-1}$甲.

(11.) 試證正弦(餘弦$^{-1}$甲) = $\pm\sqrt{1-\text{甲}^2}$.

解略 設天 = 餘弦$^{-1}$甲,則甲 = 餘弦天,

正弦天 = $\pm\sqrt{1-\text{餘弦}^2\text{天}} = \pm\sqrt{1-\text{甲}^2}$.

(12.) 試證正切(正切$^{-1}$甲 + 正切$^{-1}$乙) $= \dfrac{甲+乙}{1-甲乙}$.

(13.) 試證正切(正切$^{-1}$甲 − 正切$^{-1}$乙) $= \dfrac{甲-乙}{1+甲乙}$.

(14.) 試證餘弦(2餘弦$^{-1}$甲) $= 2甲^2 - 1$.

(15.) 試證正弦(2餘弦$^{-1}$甲) $= \pm 2甲\sqrt{1-甲^2}$.

(16.) 試證正切(2正切$^{-1}$甲) $= \dfrac{2甲}{1-甲^2}$.

(17.) 試證餘弦(2正切$^{-1}$甲) $= \dfrac{1-甲^2}{1+甲^2}$.

(18.) 試證正弦(正弦$^{-1}$甲 + 餘弦$^{-1}$乙)

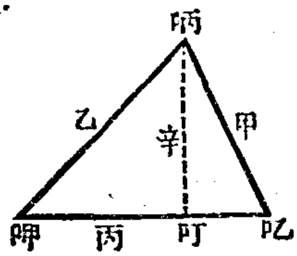
$$= 甲乙 \pm \sqrt{(1-甲^2)(1-乙^2)}.$$

平三角術　第四章

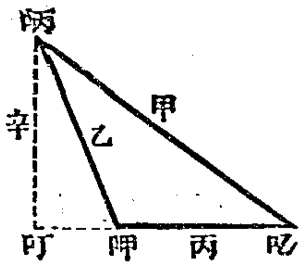
斜三角形

公式由來

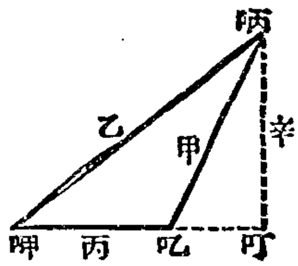
42. 本節與下數節之公式,用以解斜三角形,最為簡捷.



第一圖



第二圖



第三圖

如圖,作哂叮垂線.　命哂叮＝辛,

是則
$$\frac{辛}{乙}=正弦呷,$$

$$(於第二圖內,\ \frac{辛}{乙}=正弦(180^\circ-呷)=正弦呷.)$$

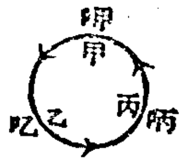
而
$$\frac{辛}{甲}=正弦吆.$$

$$(於第三圖內,\ \frac{辛}{甲}=正弦(180^\circ-吆)=正弦吆.)$$

約之得
$$\frac{甲}{乙}=\frac{正弦呷}{正弦吆}. \qquad (32)$$

按此公式之理,謂任取斜三角形之一邊為底,則二邊相比,如其對角之正弦相比.故可變其元字,而有

$$\frac{\text{乙}}{\text{丙}}=\frac{\text{正弦叱}}{\text{正弦哂}}.$$



又變之,有 $$\frac{\text{丙}}{\text{甲}}=\frac{\text{正弦哂}}{\text{正弦呷}}.$$

解斜三角形之諸公式,俱可仿此迭變之,下文祇書其一式而已.

三角形已知一邊與二角,或已知兩邊及其一對角,則用(32)式解之.

43. 取(32)式約而幷之,得

$$\frac{\text{甲}-\text{乙}}{\text{甲}+\text{乙}}=\frac{\text{正弦呷}-\text{正弦叱}}{\text{正弦呷}+\text{正弦叱}}.$$

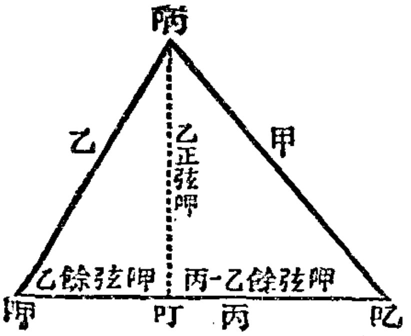
取(29)式以呷與叱代式內之戌與亥,則有

$$\frac{\text{正弦呷}-\text{正弦叱}}{\text{正弦呷}+\text{正弦叱}}=\frac{\text{正切}\frac{1}{2}(\text{呷}-\text{叱})}{\text{正切}\frac{1}{2}(\text{呷}+\text{叱})}.$$

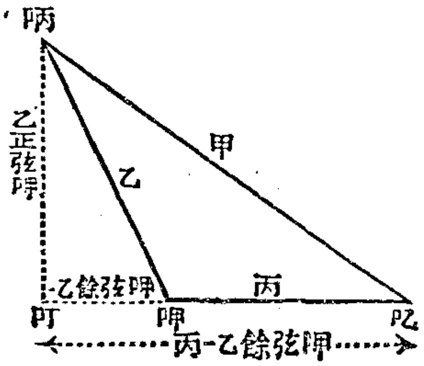
故 $$\frac{\text{甲}-\text{乙}}{\text{甲}+\text{乙}}=\frac{\text{正切}\frac{1}{2}(\text{呷}-\text{叱})}{\text{正切}\frac{1}{2}(\text{呷}+\text{叱})}.\qquad(33)$$

三角形已知二邊與其間角,則用此式解之.

44. 呷角無問爲銳爲鈍,俱有



第一圖



第二圖

$$甲^2=(丙-乙餘弦呷)^2+(乙正弦呷)^2$$

$$=丙^2-2乙丙餘弦呷+乙^2(餘弦^2呷+正弦^2呷).$$

(蓋呷爲銳,則如第一圖,呷叮＝乙餘弦呷,叮吃＝呷吃－呷叮＝丙－乙餘弦呷,哂叮＝乙正弦呷.又呷爲鈍,則如第二圖,呷叮＝乙餘弦(180°－呷)＝－乙餘弦呷,叮吃＝呷吃＋呷叮＝丙－乙餘弦呷,哂叮＝乙正弦(180°－呷)＝乙正弦呷).

故 $$甲^2=乙^2+丙^2-2乙丙餘弦呷. \qquad (34)$$

此式爲(37)式所從出.

又三角形已知二邊與其間角,或已知三邊,俱可用此式解之,但不能用對數.

45. 自(34)式得 $$餘弦呷=\frac{乙^2+丙^2-甲^2}{2乙丙}.$$

自37節(22)式得

$$2正弦^2\frac{1}{2}呷=1-餘弦呷=1-\frac{乙^2+丙^2-甲^2}{2乙丙}.$$

是以 $$2正弦^2\frac{1}{2}呷=\frac{2乙丙+甲^2-乙^2-丙^2}{2乙丙},$$

$$=\frac{甲^2-(乙-丙)^2}{2乙丙},$$

$$=\frac{(甲-乙+丙)(甲+乙-丙)}{2乙丙}.$$

命 $申=\dfrac{甲+乙+丙}{2}$, 則 $(甲-乙+丙)=2(申-乙)$,

而 $(甲+乙-丙)=2(申-丙)$.

以之代入得 $$2正弦^2\frac{1}{2}呷=\frac{2(申-乙)(申-丙)}{乙丙}.$$

是以 $$正弦\frac{1}{2}呷=\sqrt{\frac{(申-乙)(申-丙)}{乙丙}}. \qquad (35)$$

(開平方時,祇取其正根者,以已知正弦$\frac{1}{2}$呷爲正也.)

自37節(23)式有

$$2餘弦^2\frac{1}{2}呷=1+餘弦呷=\frac{2乙丙+乙^2+丙^2-甲^2}{2乙丙},$$

$$=\frac{2申(申-甲)}{乙丙}.$$

是以 $$餘弦\frac{1}{2}呷=\sqrt{\frac{申(申-甲)}{乙丙}}. \qquad (36)$$

以(36)式約(35)式,得

$$正切\frac{1}{2}呷=\sqrt{\frac{(申-乙)(申-丙)}{申(申-甲)}}, \qquad (37)$$

$$=\sqrt{\frac{(申-甲)(申-乙)(申-丙)}{申(申-甲)^2}}$$

$$=\frac{1}{申-甲}\sqrt{\frac{(申-甲)(申-乙)(申-丙)}{申}}.$$

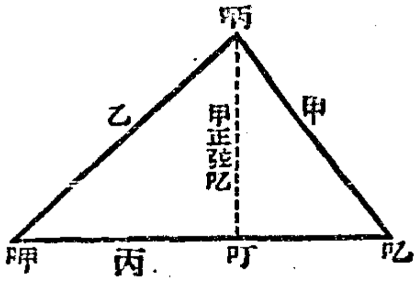
命 $$呼=\sqrt{\frac{(申-甲)(申-乙)(申-丙)}{申}},$$

$$正切\frac{1}{2}呷=\frac{呼}{申-甲}. \qquad (38)$$

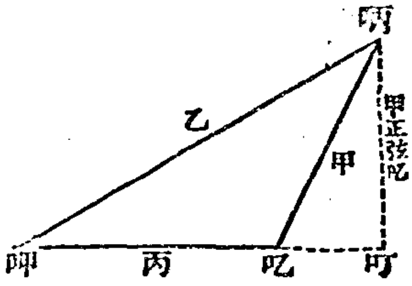
三角形之三邊爲已知,則可用(37)(38)兩式以求其角.

三角形面積公式

46. 命三角形之面積爲啤.



第一圖



第二圖

(第一圖內,昞叮＝甲正弦吃,第二圖內,昞叮＝甲正弦(180°－吃)＝甲正弦吃)

於第一第二圖內，　呻＝$\frac{1}{2}$丙×昞叮.

是以　　　　　　呻＝$\frac{1}{2}$甲丙正弦吃.　　　　(39)

自(17)式有　　正弦吃＝2正弦$\frac{1}{2}$吃餘弦$\frac{1}{2}$吃.

以(35)(36)兩式所得正弦$\frac{1}{2}$吃與餘弦$\frac{1}{2}$吃之同數,代入此式,則得

$$正弦吃=\frac{2}{甲丙}\sqrt{申(申-甲)(申-乙)(申-丙)}.$$

故　　　$$呻=\sqrt{申(申-甲)(申-乙)(申-丙)}.\qquad(40)$$

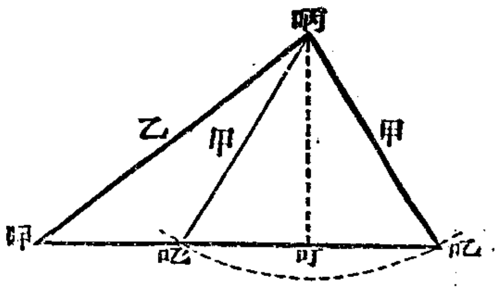
此式又可寫作　　呻＝申呼.　　　　　(41)

三角形已知二邊,與其間角,求面積,則用(39)式,已知其三邊求面積,則用(40)或(41)式

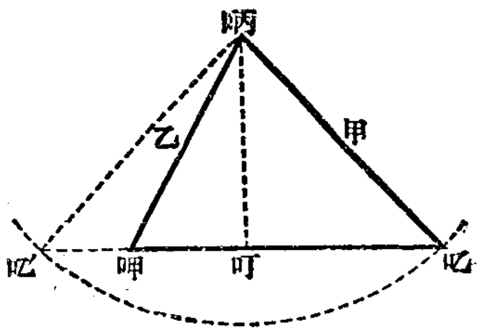
疑端

47. 三角形之已知件爲二邊與其一邊所對之銳角.

命此三件爲甲,乙,呷.



第一圖



第二圖

如甲小於乙而大於垂線哂叮(第一圖),則有呷哂吃與呷哂吃'兩三角形俱含已知之件,故有二解法.

如甲大於乙(第二圖),則祗有一解法.

如甲等於垂線哂叮,則祗有一解法,即呷哂叮正三角形是也.

如甲之同數小於垂線哂叮,則無有三角形能含已知諸件.

蓋旣哂叮＝乙正弦呷,則甲＜乙正弦呷時,三角形爲不可解,甲＝乙正弦呷時,祗有一解法,即呷哂叮爲正三角形,甲＜乙而＞乙正弦呷時,則有二解法.

48. 第一端 已知一邊兩角.

法問 已知甲$=36.738$,呷$=36^\circ\ 55'\ 54''$,吃$=72^\circ\ 5'\ 56''$,

哂$=180^\circ-($呷$+$吃$)=180^\circ-109^\circ\ 1'\ 50''=70^\circ\ 58'\ 10''$.

求乙	求丙
$\frac{乙}{甲}=\frac{正弦吃}{正弦呷}$	$\frac{丙}{甲}=\frac{正弦哂}{正弦呷}$

$$對甲 = 1.56512$$
$$對正弦吒 = 9.97845-10$$
$$餘對正弦呷 = 0.22123$$
$$對乙 = 1.76480$$
$$乙 = 58.184$$

$$對甲 = 1.56512$$
$$對正弦哂 = 9.97559-10$$
$$餘對正弦呷 = 0.22123$$
$$對丙 = 1.76194$$
$$丙 = 57.80$$

覆驗

按左式可自丙,哂,吒,而定乙之同數,式爲

$$\frac{乙-甲}{乙+甲}=\frac{正切\frac{1}{2}(吒-呷)}{正切\frac{1}{2}(吒+呷)}.$$

此驗法固繁重,然最易顯明誤謬,依左式驗之,可略簡徑,然不能若是確鑿.

$$\frac{乙}{丙}=\frac{正弦吒}{正弦哂}.$$

解下列之諸三角形.

(1.) 已知甲 $= 567.25$, 呷 $= 11^\circ 15'$, 吒 $= 47^\circ 12'$.

(2.) 已知甲 $= 783.29$, 呷 $= 81^\circ 52'$, 吒 $= 42^\circ 27'$.

(3.) 已知丙 $= 1125.2$, 呷 $= 79^\circ 15'$, 吒 $= 55^\circ 11'$.

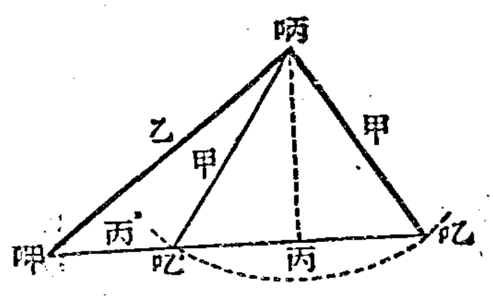
(4.) 已知乙 $= 15.346$, 吒 $= 15^\circ 51'$, 哂 $= 58^\circ 10'$

(5.) 已知甲 $= 5301.5$, 呷 $= 69^\circ 44'$, 哂 $= 41^\circ 18'$.

(6.) 已知乙 $= 1002.1$, 呷 $= 48^\circ 59'$, 哂 $= 76^\circ 3'$.

49. 第二端 已知三角形之兩邊與其一邊之對角.

法問 已知甲 $= 23.203$, 乙 $= 35.121$, 呷 $= 36^\circ 8' 10''$.



求呞與呞′

$$\frac{正弦呞}{正弦呷}=\frac{乙}{甲}.$$

$$\begin{aligned} 對乙 &= 1.54556 \\ 對正弦呷 &= 9.77064-10 \\ 餘對甲 &= \underline{8.63445-10} \\ 對正弦呞 &= 9.95065-10 \\ 呞 &= 63°12' \\ 呞' &= 180°-呞=116°48 \end{aligned}$$

求哂與哂′

$$哂 = 180° -(呷+呞)= 80° 39' 50''$$

$$哂' = 180° -(呷+呞')= 27° 3' 50''$$

求丙與丙′

$$\frac{丙}{甲}=\frac{正弦哂}{正弦呷}.$$

$$\begin{aligned} 對甲 &= 1.36555 \\ 對正弦哂 &= 9.99421-10 \\ 餘對正弦呷 &= \underline{0.22936} \\ 對丙 &= 1.58912 \\ 丙 &= 38.825 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 對甲 &= 1.36555 \\ 對正弦哂' &= 9.65800-10 \\ 餘對正弦呷 &= \underline{0.22936} \\ 對丙' &= 1.25291 \\ 丙' &= 17.902 \end{aligned}$$

覆驗

自左式可自丙,哂,呞,而定乙之同數,

$$\frac{乙-甲}{乙+甲}=\frac{正切\frac{1}{2}(呞-呷)}{正切\frac{1}{2}(呞+呷)}.$$

此法略繁,然有誤無不顯明,用下式則較簡捷,但未能若是確切.

$$\frac{乙}{丙}=\frac{正弦呞}{正弦哂}.$$

(1.) 以下諸形各有若干解法.

(1.) 呷 $=30°$, 甲 $=15$, 乙 $=20$.

(2.) 呷 $=30°$, 甲 $=10$, 乙 $=20$.

(3.) 呞 $=30°$, 甲 $=8$, 乙 $=20$.

(4.) 呞 $=37°\,23'$, 甲 $=9.1$, 乙 $=7.5$.

解左列諸三角形,試觀其有若干解法.

(2) 已知呷 $=147°\,12'$, 甲 $=0.63735$, 乙 $=0.34312$.

(3.) 已知呷 = 24° 31′, 甲 = 1.7424, 乙 = 0.96245.

(4.) 已知呷 = 21° 21′, 甲 = 45.693, 乙 = 56.723.

(5.) 已知呷 = 61° 16′, 甲 = 9.5124, 乙 = 12.752.

(6.) 已知㖪 = 22° 32′, 甲 = 0.78727, 丙 = 0.47311.

50. 第三端 已知二邊與其間角.

法問 已知甲 = 41.003, 乙 = 48.718, 㖪 = 68°33′58″, 求餘件及面積.

求呷與叱

$$\frac{\text{正切}\frac{1}{2}(\text{叱}-\text{呷})}{\text{正切}\frac{1}{2}(\text{叱}+\text{呷})}=\frac{\text{乙}-\text{甲}}{\text{乙}+\text{甲}}.$$

乙 − 甲 = 7.715

乙 + 甲 = 89.721

$\frac{1}{2}$(叱 + 呷) = 55° 43′ 1″.

對(乙 − 甲) = 0.88734

餘對(乙 + 甲) = 8.04710−10

對正切$\frac{1}{2}$(叱 + 呷) = 0.16639

對正切$\frac{1}{2}$(叱 − 呷) = 9.10083−10

$\frac{1}{2}$(叱 − 呷) = 7° 11′ 20″

$\frac{1}{2}$(叱 + 呷) = 55° 43′ 1″

叱 = 62° 54′ 21″

呷 = 48° 31′ 41″

求丙

$$\frac{\text{丙}}{\text{甲}}=\frac{\text{正弦㖪}}{\text{正弦呷}}.$$

對甲 = 1.61281

對正弦㖪 = 9.96888−10

餘對正弦呷 = 0.12535

對丙 = 1.70704

丙 = 50.938

求面積

呻 = $\frac{1}{2}$甲 乙 正弦㖪

對$\frac{1}{2}$ = 9.69897−10

對甲 = 1.61281

對乙 = 1.68769

對正弦㖪 = 9.96888−10

對呻 = 2.96835

呻 = 929.72

覆驗

$$\frac{\text{正弦㖪}}{\text{正弦叱}}=\frac{\text{丙}}{\text{乙}}.$$

$$\text{對正弦}\,\text{叱} = 9.94951-10$$
$$\text{對丙} = 1.70704$$
$$\text{餘對乙} = 8.31231-10$$
$$\text{對正弦}\,\text{哂} = 9.96886-10$$

解左列諸三角形幷求其面積.

(1.) 已知呷 $= 41°\,15'$, 乙 $= 0.14726$, 丙 $= 0.10971$.

(2.) 已知哂 $= 58°\,47'$, 乙 $= 11.726$, 甲 $= 16.147$.

(3.) 已知叱 $= 49°\,50'$, 甲 $= 103.74$, 丙 $= 99.975$.

(4.) 已知呷 $= 33°\,31'$, 乙 $= 0.32041$, 丙 $= 0.9203$.

(5.) 已知哂 $= 128°\,7'$, 乙 $= 17.738$, 甲 $= 60.571$.

51. 第四端 已知三邊.

法問 已知甲 $= 32.456$, 乙 $= 41.724$, 丙 $= 53.987$, 求三角與面積.

$$\text{申} = 64.084$$
$$\text{申}-\text{甲} = 31.628$$
$$\text{申}-\text{乙} = 22.360$$
$$\text{申}-\text{丙} = 10.097$$

$$\text{呼} = \sqrt{\frac{(\text{申}-\text{甲})(\text{申}-\text{乙})(\text{申}-\text{丙})}{\text{申}}}.$$

$$\text{對}(\text{申}-\text{甲}) = 1.50007$$
$$\text{對}(\text{申}-\text{乙}) = 1.34947$$
$$\text{對}(\text{申}-\text{丙}) = 1.00419$$
$$\text{餘對申} = 8.19325-10$$
$$2)\,2.04698$$
$$\text{對呼} = 1.02349$$

求呷

$$\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{呷} = \frac{\text{呼}}{\text{申}-\text{甲}}.$$

$$\text{對呼} = 1.02349$$
$$\text{對}(\text{申}-\text{甲}) = 1.50007 \quad \text{減}$$
$$\text{對正切}\tfrac{1}{2}\text{呷} = 9.52342-10$$
$$\tfrac{1}{2}\text{呷} = 18°\,27'\,23''$$
$$\text{呷} = 36°\,54'\,46''$$

求叱

$$\text{正切}\tfrac{1}{2}\text{叱} = \frac{\text{呼}}{\text{申}-\text{乙}}.$$

$$\text{對呼} = 1.02349$$
$$\text{對}(\text{申}-\text{乙}) = 1.34947 \quad \text{減}$$
$$\text{對正切}\tfrac{1}{2}\text{叱} = 9.67402-10$$
$$\tfrac{1}{2}\text{叱} = 25°\,16'\,16''$$
$$\text{叱} = 50°\,32'\,32''$$

求 㫍

㫍本可自(呷+𠰳)=(180°−㫍)得之,然以覆驗之便,故特另求.

$$\text{正切}\frac{1}{2}\text{㫍}=\frac{\text{呼}}{\text{申}-\text{丙}}.$$

對呼 = 1.02349

對(申 − 丙)= 1.00419

對正切$\frac{1}{2}$㫍= 0.01930 減

$\frac{1}{2}$㫍= 46° 16′ 22″

㫍= 92° 32′ 44″

覆 驗

(呷+𠰳+㫍)= 180° 0′ 2″.

求左列諸三角形之三角與面積.

(1.) 已知甲 = 38.516, 乙 = 44.873, 丙 = 14.517.

(2.) 已知甲 = 2.1158, 乙 = 3.5854, 丙 = 3.5679.

(3.) 已知甲 = 82.818, 乙 = 99.871, 丙 = 36.363.

(4.) 已知甲 = 36.789, 乙 = 11.698, 丙 = 33.328.

(5.) 已知甲 = 113.08, 乙 = 131.17, 丙 = 114.29.

(6.) 已知甲 = .9763, 乙 = 1.2489, 丙 = 1.6543.

演 習

52. (1.) 𠰳㫍二處相距1863尺,各測呷樹,得𠰳㫍呷角為36° 43′,㫍𠰳呷角57° 21′,求樹距較近之處若干尺.

(2.) 呷𠰳二屋相距3876步,別有㫍屋與前二屋成呷𠰳㫍角 = 49° 17′,𠰳呷㫍角 = 58° 18′,則其距呷若干步.

(3.) 今有三角形田,一邊長285.4尺,倚此邊之二角為41°22′與31° 19′,如築籬環之,共長若干.又田之面積若干

(4.) 今有平行方形之二對角線為8與10,其間角為53° 8′,求形之邊各長若干.

(5.) 呷吃二山,一距哂村9里,一距哂村13里,呷哂吃角爲71° 36′ 37″,求二山相距若干.

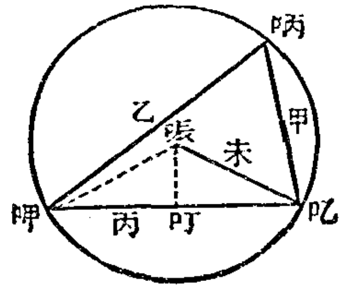
(6) 二浮筩相距2789尺,一舟距近筩4325尺,自二筩至舟二線之夾角爲16° 13′,則舟距遠筩若干.此題可有二解乎.

(7.) 已知甲 = 64.256,丙 = 19.278,哂 = 16° 19′ 11″,求同有此諸件兩三角形面積之較若干.

(8.) 今以13尺長之柱支堤,柱底距堤底6尺,柱頂正在堤面高8尺之處,求堤之斜度.

(9.) 今有一邑之界線作三角形,三邊爲8.943里,7.2415里,10.817里,求此邑所佔之面積若干.

(10.) 試證三角形外切圜徑,等於三角形之任一邊爲其對角正弦所約



解略 按幾何學之理 呷張吃角 = 2哂.

作張叮正交呷吃.

叮張吃角 $=\frac{1}{2}$呷張吃 = 哂.

叮吃 = 未正弦叮張吃 = 未正弦哂.

是以 丙 = 2未正弦哂,

即 2未 $=\frac{\text{丙}}{\text{正弦哂}}$.

(11.) 今有呷叱哂三城,呷叱12里,叱哂14里,呷哂17里,自呷至叱與哂作直鐵路,則成何角.

(12.) 今有氣球升空,正在直道之上,自道上二點測其仰視角爲49° 12′與53° 29′,如二點相距15847尺,則氣球距此二點各爲若干.

(13.) 今有呷叱二點,中隔一河,欲求其距,乃作呷哂線,長315.32尺,測得哂呷叱角爲53° 43′,呷哂叱角爲57° 13′,問呷叱距若干.

(14.) 山坡上之屋高50尺,自距屋200尺之點,測得屋之配角爲12° 13′,求此點距屋頂若干尺.

(15.) 試證四邊形面積半於其對角線之合乘其間角之正弦.

(16.) 自船首呷點,船尾叱點,測他船之前桅哂,得呷叱哂角爲65° 31′,叱呷哂角爲110° 46′,如呷與叱相距300尺,呷哂二舟之距若干.

(17.) 今有汽舟二艘,同出海口,一向正西北行,每小時行十二哩,一向南西67°行,每小時17哩,則三小時之後,求二舟相距若干.

(18.) 呷叱二竿,中隔一河,另有哂竿距呷竿62尺,測得呷哂叱角爲50°8′ 5″,哂呷叱角爲61° 18′ 20″,問聯呷叱二竿之索當長若干.

(19.) 等高之呷叱二山峯,爲人跡所不能到,取哂可二

點相距一里,測得丙丁甲角爲88° 34',丁丙甲角63° 8',丙丁乙角64° 27',丁丙乙角87° 9',求甲乙二峯相距若干.

(20.) 乙島距燈塔甲5里,丙島距甲3里,乙甲丙角爲33° 11',求此二島之距.

(21.) 甲乙二點彼此不得互見,自丙點均可見之,度得甲丙1321尺,乙丙1287尺,測得甲丙乙角61° 22',求甲乙之距.

(22.) 今有甲乙丙三山,乙在丙之正北5里,甲距丙8里,距乙11里,則甲在乙之南若干.

(23.) 今有大厦一所,欲測其長,選得一處距屋之此端215.75尺,距屋之彼端198.25尺,測得屋所配之角爲53° 37' 28",問屋之長若干.

(24.) 今有三角形之三邊爲372.15, 427.82, 404.17,求其最小角之餘弦若干.

(25.) 今選得某處距海上一島之此端3里,彼端7里,測得島所配之角爲33° 55' 15",求島之長若干.

(26.) 今有牆垣一堞,長12342寸,擇取一點,距牆之此端13581寸,距彼端10025寸,則牆於此點所配之角當爲若干度.

(27.) 今有上山直徑長213.2尺,較地平之高度爲12° 2',自山巔測山足一樹所配之角爲10° 5' 16",求樹之高.

(28.) 今有直道二條,相遇於甲,成角37°50',在此道上距

呷3里有叿村,彼道上距呷5里有哂村,問叿哂相距若干

(29.) 呷叿二車棧,中隔一山,自哂棧均可望見之,已知呷哂 = 11.5 里,叿哂 = 9.4 里,呷哂叿角 = 59° 31′,求呷與叿之距.

(30.) 今欲測敵軍礮臺呷,距我軍叿點之遠,乃取距呷372.7步之哂點,測得呷哂叿角 79° 53′,哂呷叿角 74° 35′,問呷叿距若干.

(31.) 叿村在呷村之正西14里,別有哂村距呷19里,距叿17里,則哂在呷之正西若干里.

(32.) 今有呷叿二村,中隔一湖,呷距哂村18里,叿距哂村13里,呷哂叿角爲13° 17′,求呷叿二村相距若干.

(33.) 自平原某處,測山之仰視角爲 39° 51′,正向後退217.2尺,復測山之仰視角爲 26° 53′,求山頂高出平原若干尺.

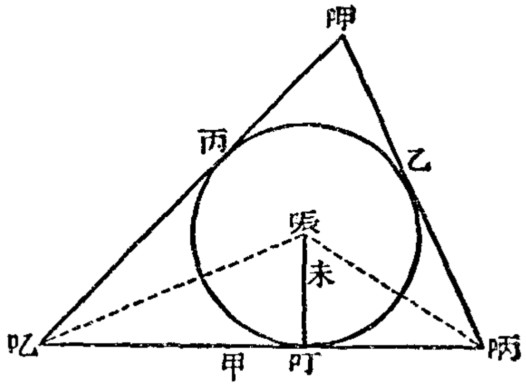
(34.) 呷叿二處,人跡俱不能到,欲求其距,另擇相距2547尺之哂叮二點,測得呷哂叿 = 27° 21′,叿哂叮 = 33° 14′,叿叮呷 = 18° 17′,呷叮哂 = 51° 23′,求自呷至叿之距.

(35.) 汽車二輛,自一站同時出發,二軌之交角爲21° 12′,一車速率每小時40哩,一車速率每小時50哩,則二車起行十五分時之後相距若干.

(36.) 自燈塔叿欲測呷舟之遠,另取哂點距燈塔300尺,測得叿哂呷 = 108° 34′,哂叿呷 = 65° 27′,求呷舟距燈塔

𠮙若干.

(37.) 試證三角形之內切圓半徑,等於甲正弦$\frac{1}{2}$𠮙正弦$\frac{1}{2}$𠰳正割$\frac{1}{2}$呷



解略 作唇𠮙,唇𠰳,及垂線唇叮.

唇𠮙平分𠮙角,唇𠰳平分𠰳角,而唇叮＝未.

$$甲=𠮙叮+叮𠰳=未(餘切\tfrac{1}{2}𠮙+餘切\tfrac{1}{2}𠰳).$$

$$餘切\tfrac{1}{2}𠮙+餘切\tfrac{1}{2}𠰳=\frac{正弦\frac{1}{2}𠰳餘弦\frac{1}{2}𠮙+餘弦\frac{1}{2}𠰳正弦\frac{1}{2}𠮙}{正弦\frac{1}{2}𠮙正弦\frac{1}{2}𠰳},$$

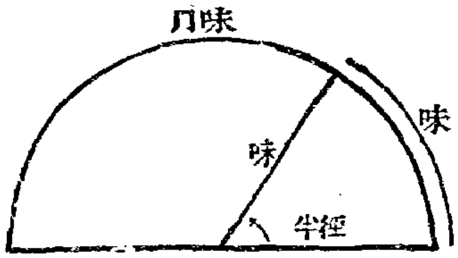
$$=\frac{正弦\frac{1}{2}(𠮙+𠰳)}{正弦\frac{1}{2}𠮙正弦\frac{1}{2}𠰳}=\frac{餘弦\frac{1}{2}呷}{正弦\frac{1}{2}𠮙正弦\frac{1}{2}𠰳}.$$

是以 $$未=甲\frac{正弦\frac{1}{2}𠮙正弦\frac{1}{2}𠰳}{餘弦\frac{1}{2}呷}=甲正弦\tfrac{1}{2}𠮙正弦\tfrac{1}{2}𠰳正割\tfrac{1}{2}呷.$$

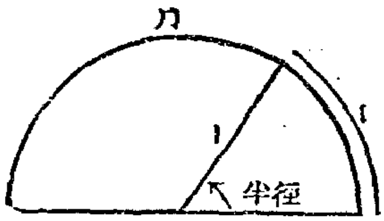
平三角術　第五章

眞弧度

53. 夫半圓周之長爲冂味($冂 = 3.14159+$),半圓周所配之圓心角爲180°,是以凡弧之長適等於半徑者,其所配之角必爲$\frac{180^\circ}{冂}$,此角爲眞弧度之準箇,名之曰輻角.



第一圖



第二圖

如圜之半徑爲一準箇,則一準箇長之弧正配一輻角,是以於準箇圜內,以弧之長代表其所配角之眞弧度.

如弧之長爲$\frac{冂}{2}$,則配$\frac{冂}{2}$輻角.

夫一輻角 $= \frac{180^\circ}{冂}$,故有

$$90^\circ = \frac{冂}{2}\text{輻角},$$

$$180^\circ = 冂\text{輻角},$$

$$270^\circ = \frac{3冂}{2}\text{輻角},$$

$$360^\circ = 2冂\text{輻角}.$$ 餘仿此.

輻角與度互等之數如左,

$$1\text{輻角} = 57.29578°,$$

$$= 57° \, 17' \, 45''.$$

$$1° = .0174533\text{輻角}.$$

用眞弧度時,每略去輻角二字,如言$\frac{冂}{2}$,與冂等,即指$\frac{冂}{2}$輻角,與冂輻角等也.反之如以度分秒量角,則恒誌以°′″三號,故可免混誤.

演 習

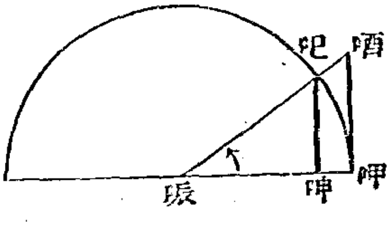
(1.) 試以30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 720°, 990°,變爲眞弧度數.(設冂爲3.1416.)

(2.) 試將左列眞弧度數變爲常度,$\frac{冂}{8}, \frac{冂}{10}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}$.

(3.) 今有圜弧長2.7寸,如半徑爲2寸,則此弧所配之角爲若干眞弧度.如半徑爲5寸,則爲若干眞弧度.

54. 本節闡明某角之眞弧度天,與其正弦正切之相關.

(1.) 如天小於$\frac{冂}{2}$,則正弦天<天<正切天.



以準箇爲半徑作圖.

準幾何學之理 呻吧 < 呷吧弧 < 呷唒.

是以 正弦天 < 天 < 正切天.

(2.) 天漸近其限0時, $\frac{\text{正弦天}}{\text{天}}$ 與 $\frac{\text{正切天}}{\text{天}}$ 漸近其限1.

以正弦天約正弦天 < 天 < 正切天,則有

$$1<\frac{\text{天}}{\text{正弦天}}<\frac{1}{\text{餘弦天}}.$$

倒之為 $$1>\frac{\text{正弦天}}{\text{天}}>\frac{\text{餘弦天}}{1}.$$

當天漸近其限0時,餘弦天漸近半徑1,卽其限也.

故 $\frac{\text{正弦天}}{\text{天}}$ 漸近其限1.

以餘弦天約 $1>\frac{\text{正弦天}}{\text{天}}>$ 餘弦天,則得

$$\frac{1}{\text{餘弦天}}>\frac{\text{正切天}}{\text{天}}>1.$$

當天漸近其限0時,餘弦天漸近其限1.

是則 $\frac{1}{\text{餘弦天}}$ 漸近其限1.

故 $\frac{\text{正切天}}{\text{天}}$ 漸近其限1.

三角函數之週復

55. 天角之正弦,與(天+360°),(天+720°)等角之正弦相同.諸角之公式為(天+2卯𠃊),式內卯為任何整數.

故正弦爲週復函數,以360°卽2冂爲一期.

餘弦,正割,餘割,與正弦同.

天角之正切與(天+180°),(天+360°)等角之正切相同.此諸角之公式爲(天+卯冂),式內卯爲任何整數.

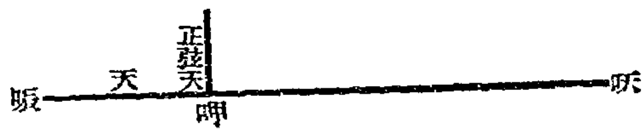
故正切亦爲週復函數,以180°卽冂爲一期.

餘切與正切同.

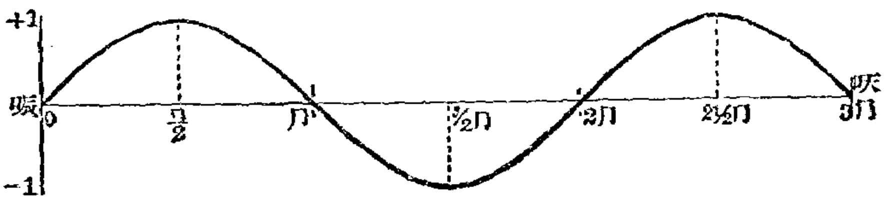
曲線代表法

56. 設於㖘呑線上,取㖘呷(=天)代表天角之眞弧度.於呷點作垂線等於正弦天.如遍作諸垂線,以代表天之諸同數,則聯諸垂線端之曲線,曰正弦曲線.

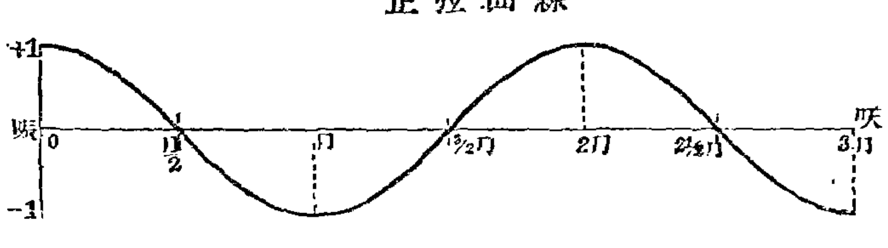
如正弦天爲負,則曲線向下作之.



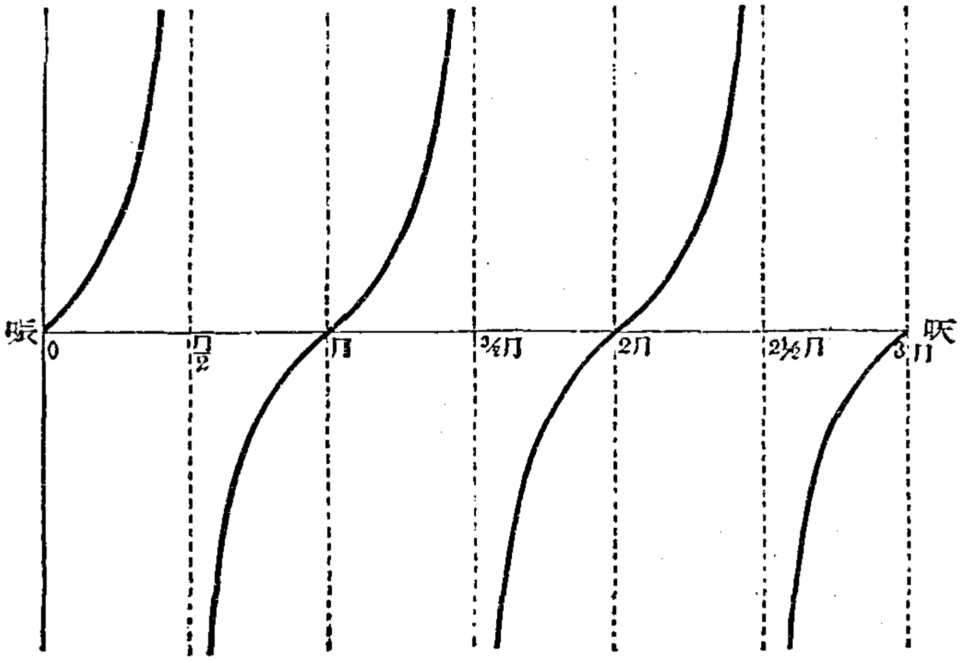
仿此可作餘弦,正切,餘切,正割,餘割諸曲線.



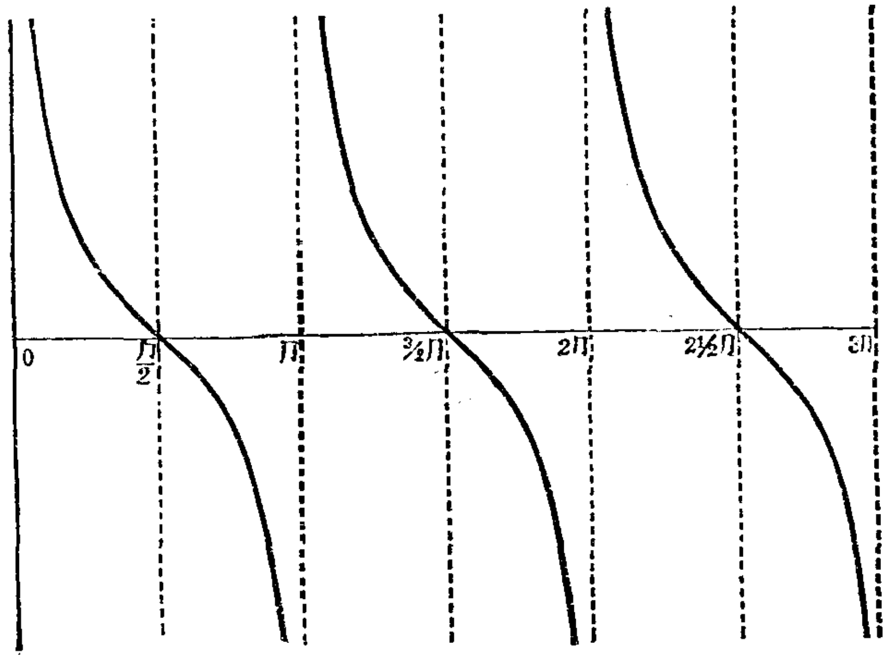
正弦曲線



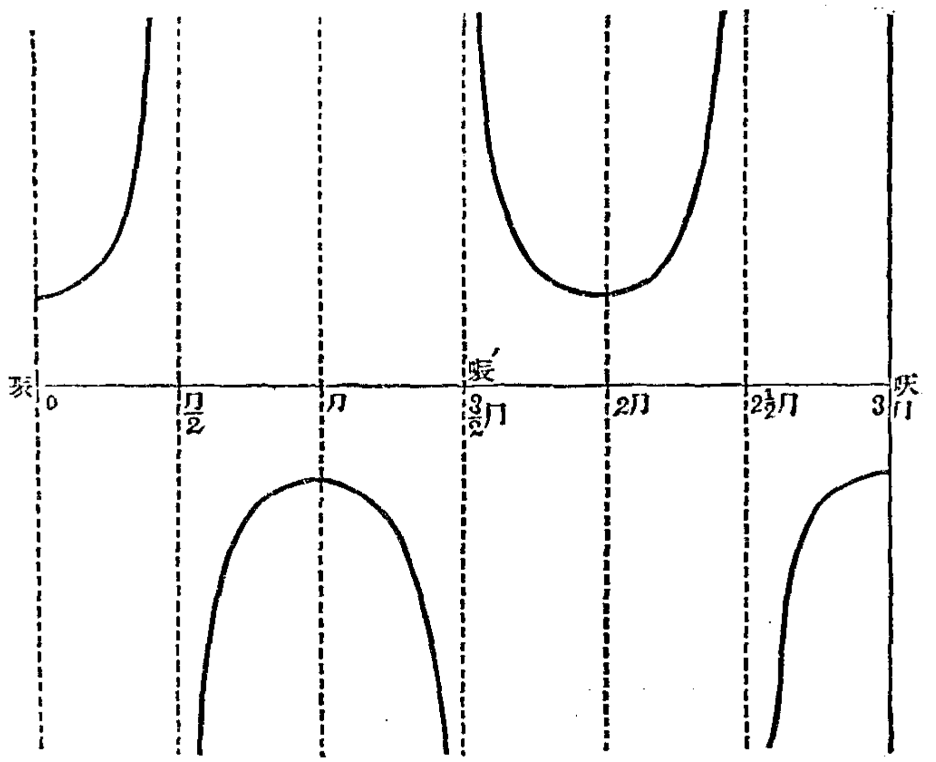
餘弦曲線


0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π
$2\frac{1}{2}\pi$
3π

正切曲線


0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\pi$
2π
$2\frac{1}{2}\pi$
3π

餘切曲線

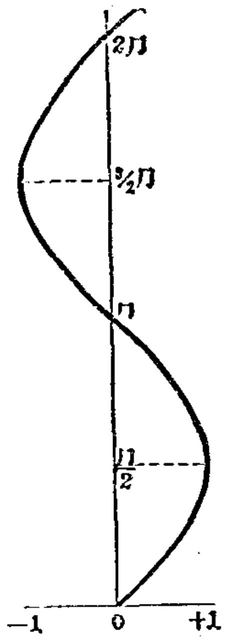


正割曲線

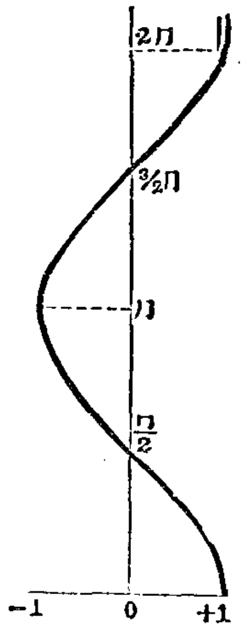
若在唇咳線上,自唇'點度取諸距,而不自唇點取之,則可自正割曲線而得餘割曲線.

若自唇點之左右取諸距,以代表諸數,又以垂線之長代表角之眞弧度,則作成反曲線.

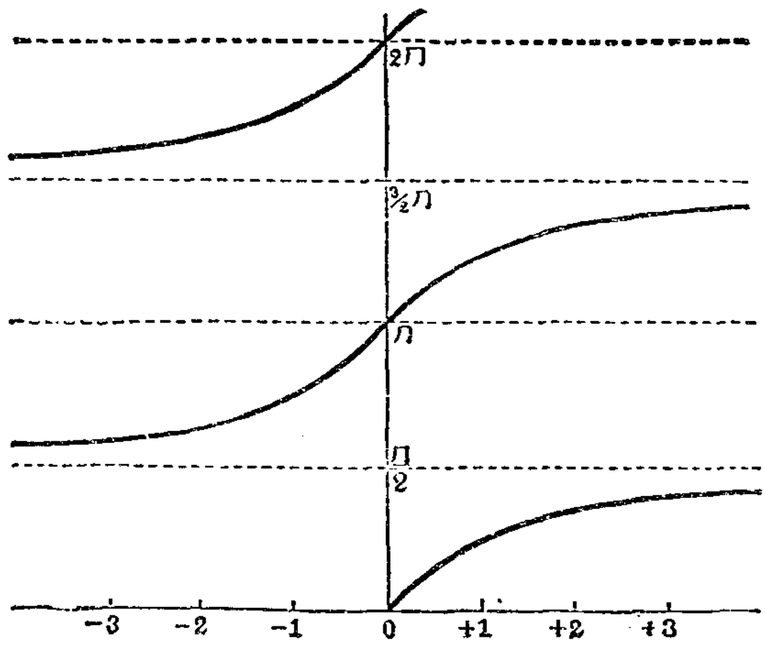
以上諸曲線,除正切與餘切曲線外,俱以2丌爲期,往復於唇咳線上,是卽謂2丌與4丌,4丌與6丌,−2丌與0等之間,其曲線在橫軸左右之狀,俱與0及2丌間之狀相同也,其各相當之反曲線,則在豎軸左右按定期而有同狀.正切與餘切二曲線之週復期則爲丌.



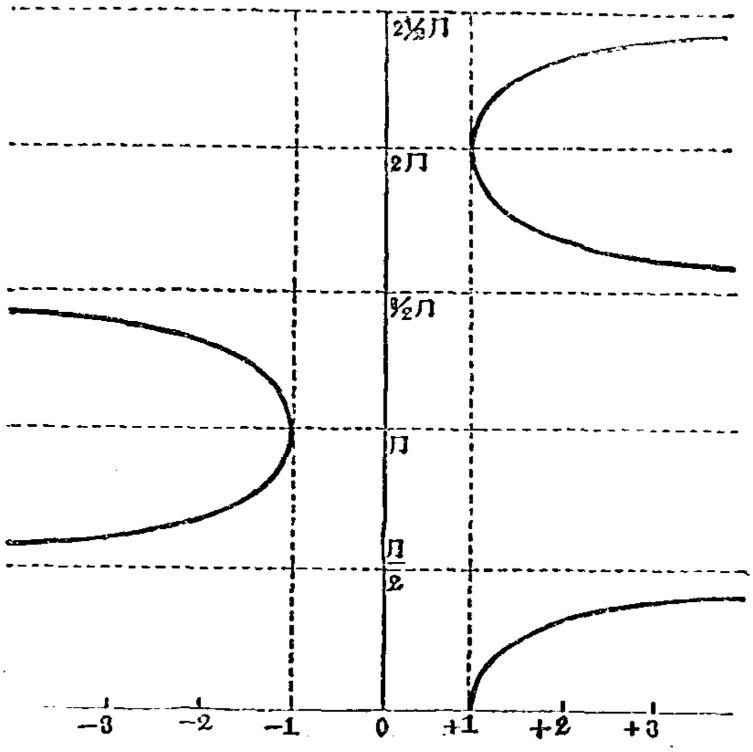
正弦反曲線



餘弦反曲線



正切反曲線



正割反曲線

平三角術　第六章

推對數術 推三角函數術 棣美弗之例 雙曲線函數

57. 推對數與三角函數,以無窮級數之法為便.按微分術有

$$對_{戊}(1+天)=天-\frac{天^2}{2}+\frac{天^3}{3}-\frac{天^4}{4}+\cdots \qquad (1)$$

$$正弦天=天-\frac{天^3}{3!}+\frac{天^5}{5!}-\frac{天^7}{7!}+\cdots \qquad (2)$$

(3!指1×2×3, 4!指1×2×3×4, 餘仿此.)

$$餘弦天=1-\frac{天^2}{2!}+\frac{天^4}{4!}-\frac{天^6}{6!}+\cdots \qquad (3)$$

更有一級數,亦下文所屢用,其式為

$$戊^{天}=1+\frac{天}{1!}+\frac{天^2}{2!}+\frac{天^3}{3!}+\frac{天^4}{4!}+\cdots \qquad (4)$$

戊 =2.7182818··,即為納白爾氏對數之底.

58. 級數(1)式,祇於天之同數能充偏程 $-1<天\leqq 1$ 時方能收斂.但級數(2)(3)(4)三式,當天有定同數之時,俱能收斂.

級數(1)式之對數係納氏對數,(2)(3)兩式之天角乃眞弧度數,學者當切記勿忘.

推對數術

59. 論推對數之術,當先自代數學中得其界說與定例,如左數條.

以甲爲底,則寅之對數卽$甲^{天}=寅$式中之天也.

故可書爲　　$天=對_{甲}寅$.

兩眞數之合之對數,等於其兩對數之和.

卽　　$對_{甲}寅卯=對_{甲}寅+對_{甲}卯$.

兩眞數相除之商,等於實之對數減去法之對數.

卽　　$對_{甲}\frac{寅}{卯}=對_{甲}寅-對_{甲}卯$.

眞數某乘方之對數,等於其數之對數乘指數.

卽　　$對_{甲}寅^{巳}=巳\,對_{甲}寅$.

自某數之納氏對數,欲變之爲甲底之對數,則有下式.

$$對_{甲}寅=\frac{對_{民}寅}{對_{民}甲}=嗩_{甲}對_{民}寅,$$

式中$嗩_{甲}=\frac{1}{對_{民}甲}$,名曰常乘數.

60. 茲可進言推算對數之理法矣.夫按(1)式級數,可徑得正數二以下之納對.

例題　試推$對_{民}\frac{3}{2}$至五位小數.

以$\frac{1}{2}$代級數(1)式內之天,得

$$對_{民}\frac{3}{2}=對_{民}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$$

欲求得數至五位小數無誤,則當取級數之項數足用,使餘項數與第五位小數無涉.夫按代數學之理,凡級數之諸項遞損,且正負相間者,則餘諸項必小於其首項,故祗取項數足用,使棄去諸項之首項,與第五位小數無涉,斯可矣.

正項	負項
$\frac{1}{2}=0.5000000$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}=0.1250000$
$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}=0.0416667$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4}=\ .0156250$
$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}=0.0062500$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^6}=\ .0026042$
$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}=0.0011161$	$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^8}=\ .0004883$
$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}=0.0002170$	$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2^{10}}=\ .0000977$
$\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{2^{11}}=0.0000444$	$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2^{12}}=\ .0000203$
$\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}}=0.0000094$	$\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{2^{14}}=\ .0000044$
$.5493036$	$.1438399$

自正項之和減去負項之和,得

$$對_{e}\frac{3}{2}=.4054637$$

級數餘諸項之和命之為味.是則按代數學之理有

$$味<\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{2^{15}}<.0000021.$$

推算時截去尾位小數之誤,不及.0000006,是即全誤不及.0000027,故得數之五位小數為真.

61. 前節已言級數(1)式不能徑推大於二之對數,然可變之為他級數,以推任何正數之對數.

以－天代(1)內之天,則有

$$對_{昆}(1-天)=-天-\frac{天^2}{2}-\frac{天^3}{3}-\frac{天^4}{4}\cdots$$

當天能充 $-1\leqq 天<1$ 時,此級數能斂.

以之自(1)式減去,得

$$對_{昆}(1+天)-對_{昆}(1-天)=對_{昆}\left(\frac{1+天}{1-天}\right)$$

$$=2\left(天+\frac{天^3}{3}+\frac{天^5}{5}+\frac{天^7}{7}+\cdots\right), \quad (5)$$

當天能充 $-1<天<1$ 時,此級數能斂.

設 $地=\left(\frac{1+天}{1-天}\right)$,則天自 -1 至 $+1$ 之間,地自 0 至 ∞,故可以之代入(5)式.另得一級數如左.

$$對_{昆}地=2\left[\left(\frac{地-1}{地+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{地-1}{地+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{地-1}{地+1}\right)^5+\cdots\right], \quad (6)$$

地任有何正同數,此級數俱能斂,故可用以推任一真數之納對.

自(5)式更可得一級數,亦頗有用,即設 $天=\frac{1}{2地+1}$,則 $\frac{1+天}{1-天}=\frac{地+1}{地}$,而級數(5)變為

$$對_{氏}\left(\frac{地+1}{地}\right)=2\left(\frac{1}{2地+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2地+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2地+1)^5}+\cdots\right).$$

不論地有何正同數,此級數亦俱能歛.故得

$$對_{氏}(地+1)=對_{氏}地+2\left(\frac{1}{2地+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2地+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2地+1)^5}+\cdots\right). \qquad (7)$$

用此級數可由已知之$對_{氏}地$而得$對_{氏}(地+1)$.當地大於2之時,其歛較(6)式爲速,故宜用之.

62. 作對數表時,不必一一求與數之對數,衹求各質數之對數可矣,以其餘諸數之對數,可用下式得之也.

$$對天地=對天+對地.$$

如求一至十之對數,則祇需求2,3,5,7四質數可矣.

(以$4=2^2$, $6=2\cdot3$, $8=2^3$, $9=3^2$, $10=2\cdot5$, $對1=0$故也.)

故於此還求各數之對數,宜用(7)式.

63. 例題 推2,3,4,與5之納對.

$$對_{氏}2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\cdots\right).$$

$$\frac{1}{3}=.3333333$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}=.0123457$$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}=.0008230$$

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}=.0000653$$

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}=.0000056$$

$$.3465729$$

$$2$$

$$對_{氏}2=.6931458$$

命級數之餘諸項爲昧.

按代數學之理,有

$$\text{昧}<\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}},$$

即　昧<.000000573.

推算時去尾位小數之誤不及.0000005.

故全誤不及.00000165.

如用(6)式,所得之級數必同.

$$\text{對}_{\text{氏}}3=\text{對}_{\text{氏}}2+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}+\cdots\right).$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}&=.2000000\\
\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}&=.0026667\\
\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}&=.0000640\\
\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}&=\underline{.0000018}\\
&.2027325\\
&\underline{2}\\
&.4054650\\
\text{加 對}_{\text{氏}}2&=\underline{.6931458}\\
\text{對}_{\text{氏}}3&=1.0986108
\end{aligned}$$

$$\text{昧}<\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{25}}$$

即　昧<.00000006.

推算之誤并前對$_{\text{氏}}$2之誤不及.00000217.

如用(6)式以推對$_{\text{氏}}$3,則當有

$$\text{對}_{\text{氏}}3=2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdots\right].$$

此級數之斂較前爲遲,以其前級數各項之乘數係$\frac{1}{5}$之方數,而此則爲$\frac{1}{2}$之方數也.故前用四項已足者,今必

用八項,始能得五位小數無誤也.

$$對_{氏}4=2\,對_{氏}2=1.3862916.$$

$$對_{氏}5=對_{氏}4+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5}+\cdots\right)=1.60944$$

64. 仿此可推任何真數之對數.

自1至10之納對,列於下表.

$對_{氏}1=\ .00000$	$對_{氏}6=1.79176$
$對_{氏}2=\ .69315$	$對_{氏}7=1.94591$
$對_{氏}3=1.09861$	$對_{氏}8=2.07944$
$對_{氏}4=1.38629$	$對_{氏}9=2.19722$
$對_{氏}5=1.60944$	$對_{氏}10=2.30259$

自真數之納對乘嘖$_{10}$=.43429448,卽得其數之常對數,亦曰十進對數. 59節

如 $$對_{10}5=對_{氏}5\times.43429448=.69897.$$

65. 作對數表時,宜用種種捷法,以求省工.

推三角函數法

66. 夫旣正切天$=\dfrac{正弦天}{餘弦天}$,餘切天$=\dfrac{餘弦天}{正弦天}$,又割矢等函數俱可準正餘弦而得之.故推三角函數時,獨意正餘弦,祗用(2)(3)兩式變化之可矣.又因任一角之正餘弦,恆等於$\dfrac{\pi}{4}$或小於$\dfrac{\pi}{4}$角之正餘弦,故(2)(3)兩級數中之天,不必大於$\dfrac{\pi}{4}$. 16節

夫$\frac{\text{ㄇ}}{4}=0.785398\cdots<\frac{8}{10}$,故此兩級數之斂甚速,細考之即知$\frac{1}{9!}=.000003$不至干涉第五位小數,$\frac{1}{11!}$不至干涉第七位小數.

67. 造表時不必一一用級數以推各角之函數,更可用38節之(25)(27)二式,以得

正弦卯天 = 2餘弦天正弦(卯−1)天 − 正弦(卯 − 2)天,

餘弦卯天 = 2餘弦天餘弦(卯−1)天 − 餘弦(卯 − 2)天.

如表中列每分之函數,則先用級數求得$1'$之正餘弦,後用前二式遞求$2',3',4'$之正餘弦,直抵30°,每分之函數俱可推得.

求30°至45°角之正餘弦,則可按已得之數,用左二術推得之.

正弦(30° + 地) = 餘弦地 − 正弦(30° − 地),

餘弦(30° + 地) = 餘弦(30° − 地) − 正弦地.

68. 用(2)(3)兩級數以求正餘弦,當先將角之常度變爲真弧度.

變時勿忘 $1^\circ=.017453293$, $1'=.0002908882$, $1''=.000004848137$.

例題 試推$12^\circ\,15'\,39''$之正餘弦.

$$\begin{aligned}12^\circ &= .209439516\\ 15' &= .004363323\\ 39'' &= .000189076\\ \hline 12^\circ\,15'\,39'' &= .213991915\end{aligned}$$ 爲真弧度.

$$正弦天=天-\frac{天^3}{3!}+\frac{天^5}{5!}-\cdots$$

$$\begin{aligned}天&=.2139919\\ \frac{天^5}{5!}&=.0000037\\ &\overline{.2139956}\\ 減\frac{天^3}{3!}&=.0016332\\ 正弦天&=.2123624\end{aligned}$$

至五位小數無誤.

$$餘弦天=1-\frac{天^2}{2!}+\frac{天^4}{4!}-\cdots$$

$$\begin{aligned}1&=1.0000000\\ \frac{天^4}{4!}&=.0000874\\ &\overline{1.0000874}\\ 減\frac{天^2}{2!}&=.0228963\\ 餘弦天&=.9771911\end{aligned}$$

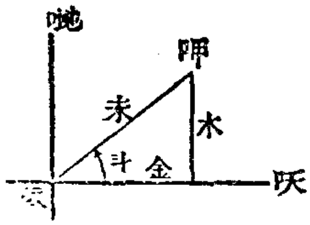
至五位小數無誤.

棣美弗之例

69. 按代數學所論之雜糅數

$$甲=金+木\sqrt{-1}=金+木幻, \qquad (8)$$

可以圖表明之如左.



取㖘呹與㖘哋兩軸正交,則甲數與呷點符合,而呷點與二軸之距為木與金.

觀圖卽知甲之同數亦可書為

$$甲=未(餘弦斗+幻正弦斗). \qquad (9)$$

70. 按代數學得雜糅數甲＝金＋幻木,及乙＝水＋幻火之界說,卽

$$\text{甲}+\text{乙}=\text{金}+\text{水}+\text{幻}(\text{木}+\text{火}).$$

又減法爲加法之反,故有

$$\text{甲}-\text{乙}=\text{金}-\text{水}+\text{幻}(\text{木}-\text{火}).$$

乘法則以甲與乙如(9)式之狀解之爲便,故若

$$\text{甲}=\text{未}(\text{餘弦斗}+\text{幻正弦斗}),\text{乙}=\text{申}(\text{餘弦牛}+\text{幻正弦牛}),$$

其合數可以下方程解之,

$$\text{甲乙}=\text{未申}[\text{餘弦}(\text{斗}+\text{牛})+\text{幻正弦}(\text{斗}+\text{牛})]. \qquad (10)$$

又除法爲乘法之反,故有

$$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}=\frac{\text{未}}{\text{申}}[\text{餘弦}(\text{斗}-\text{牛})+\text{幻正弦}(\text{斗}-\text{牛})].$$

終則按雜糅數實數與幻數各等之理,知

$$\text{金}+\text{幻木}=\text{水}+\text{幻火},$$

故有 $$\text{金}=\text{水}, \qquad \text{木}=\text{火}. \qquad (11)$$

71. 今求雜糅數之各次方,如

$$\text{天}=\text{餘弦斗}+\text{幻正弦斗}.$$

按(10)則有

$$\begin{aligned}\text{天}^2&=(\text{餘弦斗}+\text{幻正弦斗})(\text{餘弦斗}+\text{幻正弦斗})\\&=\text{餘弦}\,2\,\text{斗}+\text{幻正弦}\,2\,\text{斗}.\\ \text{天}^3&=\text{天}^2\cdot\text{天}\\&=(\text{餘弦}\,2\,\text{斗}+\text{幻正弦}\,2\,\text{斗})(\text{餘弦斗}+\text{幻正弦斗})\\&=\text{餘弦}\,3\,\text{斗}+\text{幻正弦}\,3\,\text{斗}.\end{aligned}$$

其公式爲

$$\text{天}^n=(\text{餘弦斗}+\text{幻正弦斗})^n=\text{餘弦卯斗}+\text{幻正弦卯斗}.$$

自此方程得棣美弗之例如左式,

$$(\text{餘弦斗}+\text{幻正弦斗})^{\text{卯}}=(\text{餘弦卯斗}+\text{幻正弦卯斗}).\quad(12)$$

72. 用棣美弗之例,可以正弦天與餘弦天爲主,而得正弦卯天與餘弦卯天之詳式.試以二項例詳(12)之上端,且以天代斗,則有

$$\begin{aligned}\text{餘弦卯天}+\text{幻正弦卯天}= \\ &\text{餘弦}^{\text{卯}}\text{天}+\text{卯餘弦}^{\text{卯}-1}\text{天}(\text{幻正弦天}) \\ &+\frac{\text{卯}(\text{卯}-1)}{2!}\text{餘弦}^{\text{卯}-2}\text{天}(\text{幻正弦天})^2 \\ &+\frac{\text{卯}(\text{卯}-1)(\text{卯}-2)}{3!}\text{餘弦}^{\text{卯}-3}\text{天}(\text{幻正弦天})^3+\cdots\end{aligned}$$

卽 餘弦卯天+幻正弦卯天

$$=\left(\text{餘弦}^{\text{卯}}\text{天}-\frac{\text{卯}(\text{卯}-1)}{2!}\text{餘弦}^{\text{卯}-2}\text{天正弦}^2\text{天}+\cdots\right)$$

$$+\text{幻}\left[\text{卯餘弦}^{\text{卯}-1}\text{天正弦天}-\frac{\text{卯}(\text{卯}-1)(\text{卯}-2)}{3!}\text{餘弦}^{\text{卯}-3}\text{天正弦}^3\text{天}+\cdots\right].$$

仿(11)式,置實件幻件一一相等,卽得

$$\text{餘弦卯天}=\text{餘弦}^{\text{卯}}\text{天}-\frac{\text{卯}(\text{卯}-1)}{2!}\text{餘弦}^{\text{卯}-2}\text{天正弦}^2\text{天}+\cdots\quad(13)$$

$$\begin{aligned}\text{正弦卯天}&=\text{卯餘弦}^{\text{卯}-1}\text{天正弦天} \\ &-\frac{\text{卯}(\text{卯}-1)(\text{卯}-2)}{3!}\text{餘弦}^{\text{卯}-3}\text{天正弦}^3\text{天}+\cdots\quad(14)\end{aligned}$$

例題 卯=5,試求其式.

$$餘弦5天=餘弦^5天-10餘弦^3天正弦^2天+5餘弦天正弦^4天.$$

$$正弦5天=5餘弦^4天正弦天-10餘弦^2天正弦^3天+正弦^5天.$$

單數之根

73. 用棣美弗之例,更可得單數之諸根,夫單數之卯次根,卽爲下方程之諸根.

$$天^{卯}=1.$$

凡卯次式祗能有卯箇根數,而不能多之,故如能得卯箇數皆能充此方程,則卽盡得單數之諸卯次根矣.

設有卯箇數 $$天_{未}=餘弦\frac{2冂未}{卯}+幻正弦\frac{2冂未}{卯},$$

$$未=0,1,2,\cdots 卯-1.$$

按幾何圖象,此諸數可以有法多邊形之卯尖表之,故爲各異.今證其確爲單數之卯次根.

夫按(12)有 $$天_{未}^{卯}=\left(餘弦\frac{2冂未}{卯}+幻正弦\frac{2冂未}{卯}\right)^{卯},$$

$$=餘弦\left(卯\cdot\frac{2冂未}{卯}\right)+幻正弦\left(卯\cdot\frac{2冂未}{卯}\right),$$

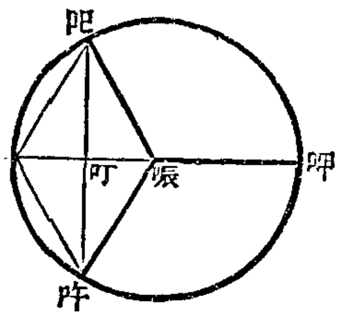
$$=餘弦2冂未+幻正弦2冂未,$$

$$=1+幻0=1.$$

故天$_{未}$爲單數之一根.

設單數之立方根可以圖中呷吧咔三點表之.圖中㖊呷$=1$,呷㖊吧角$=\frac{2冂}{3}=120°$,呷㖊咔角$=\frac{4冂}{3}=240°$,是

卽圜周爲呷吔吘三點所平分也.是則㖦叮$=\frac{1}{2}$,叮吔$=$叮吘$=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.故自上文代表雜糅數之理,可得呷代表$+1$,吔代表$-\frac{1}{2}+$幻$\frac{1}{2}\sqrt{3}$,吘代表$-\frac{1}{2}-$幻$\frac{1}{2}\sqrt{3}$.



演習

74. (1.) 試用正弦天與餘弦天爲率,以明正弦4天及餘弦4天.

(2.) 試用正弦天與餘弦天爲主,以明正弦6天及餘弦6天.

(3.) 求六箇單數之六次根.

(4.) 求五箇單數之五次根.

雙線函數

75. 雙線函數可以左二方程表之.

$$\text{雙正弦天}=\frac{\text{戊}^{\text{天}}-\text{戊}^{-\text{天}}}{2}, \qquad (15)$$

$$\text{雙餘弦天}=\frac{\text{戊}^{\text{天}}+\text{戊}^{-\text{天}}}{2}, \qquad (16)$$

式中雙正弦天與雙餘弦天卽指天之雙線正弦與雙線餘弦也.所以稱以此名者,因此二者與雙線之相關,一如正餘弦與平圜之相關也.研究雙線函數,以用雜糅數爲便,故下文從之.夫本章之(2)(3)(4)三級數,當天有實同數時,代表正弦天,餘弦天,戊^{天}之同數.然此三級數,當天有雜糅同數時,亦可代表正弦天,餘弦天,戊^{天}之同數.按代數學精邃之理,左列三方程,前祗按實變數而證實之者,卽其變數爲雜糅,亦仍確鑿不易也.

$$正弦(天+地)=正弦天餘弦地+餘弦天正弦地, \qquad (17)$$

$$餘弦(天+地)=餘弦天餘弦地-正弦天正弦地, \qquad (18)$$

$$戊^{天+地}=戊^{天}戊^{地}. \qquad (19)$$

因此故變數可任有何雜糅之同數,而正弦天,餘弦天,戊^{天},仍易推得.

若是則引起雙線函數矣.且雙線函數與三角函數之相關亦因此而堅立,故上文第三章內三角函數之公式,皆不難變爲雙線函數相當之公式.

取天與地爲實數,且以幻地代(17),(18),(19)中之地,則有

$$正弦(天+幻地)=正弦天餘弦幻地+餘弦天正弦幻地,$$

$$餘弦(天+幻地)=餘弦天餘弦幻地-正弦天正弦幻地,$$

$$戊^{天+幻地}=戊^{天}戊^{幻地}.$$

是則若變數爲雜糅,則推此諸函數,全係於變數之純幻.若以幻天代級數(4)內之天,則有

$$戊^{幻天}=1+幻天+\frac{(幻天)^2}{2!}+\frac{(幻天)^3}{3!}+\frac{(幻天)^4}{4!}+\cdots$$
$$=\left(1-\frac{天^2}{2!}+\frac{天^4}{4!}-\frac{天^6}{6!}+\cdots\right)$$
$$+幻\left(天-\frac{天^3}{3!}+\frac{天^5}{5!}-\frac{天^7}{7!}+\cdots\right).$$

以此與級數(2)(3)相比,即知此二級數即為餘弦天與正弦天,故有左方程為算家尤拉所得之要術.

$$戊^{幻天}=餘弦天+幻正弦天. \qquad (20)$$

用此術可自正弦天與餘弦天推得戊^{幻天},祇須幻天為純幻,即天為實是也.

求正弦幻天與餘弦幻天,法以幻天代(20)內之天,得

$$戊^{-天}=餘弦幻天+幻正弦幻天. \qquad (21)$$

又以－幻天代(20)內之天,得

$$戊^{天}=餘弦幻天-幻正弦幻天. \qquad (22)$$

(21)與(22)之和較為

$$餘弦幻天=\frac{戊^{天}+戊^{-天}}{2}=雙餘弦天, \qquad (23)$$

$$正弦幻天=\frac{幻(戊^{天}-戊^{-天})}{2}=幻雙正弦天. \qquad (24)$$

如令天遞有諸同數,而用級數(4)以推戊^{天}之同數,則可見雙正弦天與雙餘弦天可用下圖兩曲線表之.

用(23)(24)兩方程,可自三角諸函數公式以得雙線諸函數公式.是故凡尋常三角術之各公式,適有雙線三角術之各公式一一與之相配也.下文所列之例題,即用此法得雙線三角術之重要公式.

以一幻天代(23)(24)中之天得

$$餘弦天=\frac{戊^{幻天}+戊^{-幻天}}{2}, \qquad (25)$$

$$正弦天=\frac{戊^{幻天}-戊^{-幻天}}{2幻}. \qquad (26)$$

此二公式用處頗繁.

例題　雙正弦(天＋地)＝－幻正弦幻(天＋地),

＝－幻(正弦幻天餘弦幻地＋餘弦幻天正弦幻地),

＝－幻(幻雙正弦天雙餘弦地＋幻雙餘弦天雙正弦地),

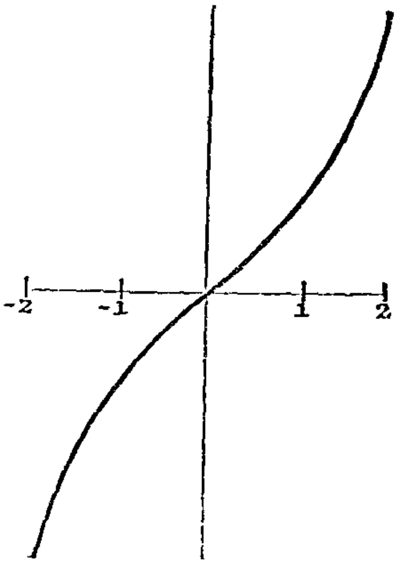
＝雙正弦天雙餘弦地＋雙餘弦天雙正弦地.

例題　雙正弦天＋雙正弦地

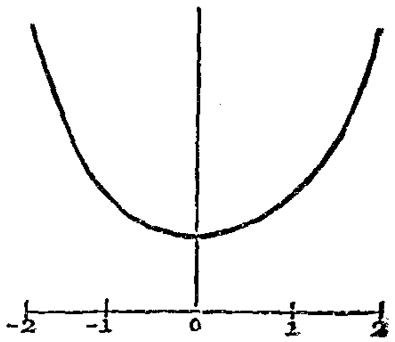
$$=-幻(正弦幻天+正弦幻地),$$

$$=-幻\,2\,正弦\frac{1}{2}幻(天+地)餘弦\frac{1}{2}幻(天-地),$$

$$=2\,雙正弦\frac{1}{2}(天+地)雙餘弦\frac{1}{2}(天-地).$$



雙正弦天



雙餘弦天

演習

76. (1.) 試證雙正弦 $0=0$,　雙餘弦 $0=1$.

(2.) 試證雙正弦$\frac{1}{2}$冂幻 $=$ 幻,　雙餘弦$\frac{1}{2}$冂幻 $=0$.

(3.) 試證雙正弦冂幻 $=0$,　雙餘弦冂幻 $=-1$.

(4.) 試證正弦$(-$幻天$)=-$正弦幻天.

(5.) 試證餘弦$(-$幻天$)=$餘弦幻天.

(6.) 試證雙正弦$(-$天$)=-$雙正弦天.

(7.) 試證雙餘弦$(-$天$)=$雙餘弦天.

夫雙線正切,雙線餘切,雙線正割,雙線餘割,可以等式表之如左.

$$雙正切天=\frac{雙正弦天}{雙餘弦天},\qquad 雙餘切天=\frac{雙餘弦天}{雙正弦天},$$

$$雙正割天=\frac{1}{雙餘弦天},\qquad 雙餘割天=\frac{1}{雙正弦天}.$$

試證左列諸題

(8.) 正切(幻天)$=$幻雙正切天.

(9.) 雙餘切$(-$天$)=-$雙餘切天.

(10.) 雙正割$(-$天$)=$雙正割天.

(11.) 雙^{2}餘弦天 $-$ 雙^{2}正弦天 $=1$.

(12.) 雙^{2}正割天 $+$ 雙^{2}正切天 $=1$.

(13.) 雙^{2}餘切天 $-$ 雙^{2}餘割天 $=1$.

(14.) 雙正弦(天$-$地)$=$雙正弦天雙餘弦地$-$雙餘弦

天雙正弦地.

(15.) 雙餘弦(天－地)＝雙餘弦天雙餘弦地－雙正弦天雙正弦地.

(16.) $$雙餘弦\frac{1}{2}天=\sqrt{\frac{1+雙餘弦天}{2}}.$$

(17.) 雙正弦戊－雙正弦亥＝

$$2雙餘弦\frac{1}{2}(戊+亥)雙正弦\frac{1}{2}(戊-亥).$$

(18.) 雙餘弦戊＋雙餘弦亥＝

$$2雙餘弦\frac{1}{2}(戊+亥)雙餘弦\frac{1}{2}(戊-亥).$$

(19.) 雙餘弦戊－雙餘弦亥＝

$$2雙正弦\frac{1}{2}(戊+亥)雙正弦\frac{1}{2}(戊-亥).$$

平三角術　第七章

雜題

函數之相關

77. 試證左列諸方程.

(1.) 餘弦天 = 正弦天餘切天.

(2.) 餘割天正切天 = 正割天.

(3.) (正切天 + 餘切天)正弦天餘弦天 = 1.

(4.) (正割地 − 正切地)(正割地 + 正切地) = 1.

(5.) (餘割人 − 餘切人)(餘割人 + 餘切人) = 1.

(6.) 餘弦^{2}地 + (正切地 − 餘切地)正弦地餘弦地 = 正弦^{2}地.

(7.) 餘弦^{4}天 − 正弦^{4}天 + 1 = 2餘弦^{2}天.

(8.) (正弦地 − 餘弦地)^2 = 1 − 2正弦地餘弦地.

(9.) 正弦^{3}天 + 餘弦^{3}天 =

(正弦天 + 餘弦天)(1 − 正弦天餘弦天).

(10.) $\frac{\text{餘切天}+\text{正切地}}{\text{正切天}+\text{餘切地}}$ = 餘切天正切地.

(11.) 餘弦^{2}地 − 正弦^{2}地 = 2餘弦^{2}地 − 1.

(12.) 1 − 正切^{4}天 = 2正割^{2}天 − 正割^{4}天.

(13.) $\frac{\text{餘弦天}}{\text{正弦天餘切}^2\text{天}}$ = 正切天.

(14.) 正割^{2}地餘割^{2}地 = 正切^{2}地 + 餘切^{2}地 + 2.

(15.) 餘切地 − 餘割地正割地(1 − 2正弦^{2}地) = 正切地.

(16.) $\left(\dfrac{1}{\text{正弦人}} - \text{餘切人}\right)^2 = \dfrac{1 - \text{餘弦人}}{1 + \text{餘弦人}}$.

(17.) $\dfrac{\text{正割地}}{1 + \text{餘弦地}} = \dfrac{\text{正切地} - \text{正弦地}}{\text{正弦}^3\text{地}}$.

(18.) $1 + \dfrac{2\,\text{正弦天}}{\text{正割天}} = (\text{正弦天} + \text{餘弦天})^2$.

(19.) $\dfrac{1}{\text{正割}^3\text{天}} - \text{正弦}^3\text{天} =$

$(\text{餘弦天} - \text{正弦天})(1 + \text{正弦天餘弦天})$.

(20.) $(\text{正弦天餘弦地} + \text{餘弦天正弦地})^2 +$

$(\text{餘弦天餘弦地} - \text{正弦天正弦地})^2 = 1$.

(21.) $(\text{甲餘弦天} - \text{乙正弦天})^2 +$

$(\text{甲正弦天} + \text{乙餘弦天})^2 = \text{甲}^2 + \text{乙}^2$.

(22.) $\dfrac{1}{(\text{餘弦}^2\text{地} - \text{正弦}^2\text{地})^2} = 1 + \dfrac{4\,\text{正切}^2\text{地}}{(1 - \text{正切}^2\text{地})^2}$.

求小於90°而能充左列諸方程之角.

(23.) 4餘弦天 = 3正割天.

(24.) 正弦地 = 餘割地 $-\dfrac{3}{2}$.

(25.) $\sqrt{2}$正弦天 − 正切天 = 0.

(26.) 2餘弦天 − $\sqrt{3}$餘切天 = 0.

(27.) 正切地 + 餘切地 $-2=0$.

(28.) 2正弦^{2}地 $-2=-\sqrt{2}$餘弦地.

(29.) 3正切^{2}天 $-1=4$正弦^{2}天.

(30.) 餘弦^{2}天 $+2$正弦^{2}天 $-\frac{5}{2}$正弦天 $=0$.

(31.) 餘割天 $=\frac{2}{3}$正切天.

(32.) 正割天 + 正切天 $=\pm\sqrt{3}$.

(33.) 正切天 $+2\sqrt{3}$餘弦天 $=0$.

(34.) 3正弦天 -2餘弦^{2}天 $=0$.

左列諸角之函數,試以小於$45°$角之諸函數爲主而求之.

(35.) 正弦$92°$.

(36.) 餘弦$127°$.

(37.) 正切$320°$.

(38.) 餘切$350°$.

(39.) 正弦$265°$.

(40.) 正切$171°$.

(41.) 今有正弦天 $=\frac{4}{7}$,而天在第二象限內,求天之餘諸函數.

(42.) 今有餘弦天 $=-\frac{3}{8}$,而天在第三象限內,求天之餘諸函數.

(43.) 今有正切天$=\frac{3}{2}$,而天在第三象限內,求天之餘諸函數.

(44.) 今有餘切天$=-\frac{7}{5}$,而天在第四象限內,求天之餘諸函數.

問角必在何象限內始能充左列各方程.

(45.) 正弦天餘弦天$=-\frac{1}{4}\sqrt{3}$.

(46.) 正割天正切天$=2\sqrt{3}$.

(47.) 正切地$+\sqrt{20}$餘弦地$=0$.

(48.) 餘弦天餘切天$=\frac{5}{6}$.

求地小於$360°$時能充左列各方程之諸同數.

(49.) 正切地$+2$正弦地$=0$.

(50.) $(1+$正切天$)(1-2$正弦天$)=0$.

(51.) 正弦天餘弦天$(1+2$餘弦天$)=0$.

試證左列諸題.

(52.) 餘弦$780°=\frac{1}{2}$.

(53.) 正弦$1485°=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(54.) 餘弦$2550°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(55.) 正弦$(-3000°)=-$餘弦$30°$.

(56.) 餘弦$1300°=-$餘弦$40°$.

(57.) 求甲正弦90°+乙正切0°+甲餘弦180°之同數.

(58.) 求甲正弦30°+乙正切45°+甲餘弦60°+乙正切135°之同數.

(59.) 求(甲−乙)正切225°+乙餘弦180°−甲正弦270°之同數.

(60.) 求左式之同數,

(甲正弦45°+乙餘弦45°)(甲正弦135°+乙正弦225°)

正三角形

78. 左列諸題內,度取距之所在之諸平面皆設爲橫平面,苟或不然,則必特爲申明.

(1.) 距塔底1121尺之處,測塔頂之仰視角爲$15^\circ 17'$,求塔之高若干.

(2.) 河之此畔有樹高77尺,於彼畔正對此樹之點測得樹頂之仰視角爲$5^\circ 17' 37''$,求河之廣若干.

(3.) 今有梯子長42尺,如其底距屋壁25尺,則梯與壁成角若干度.

(4.) 日高$33^\circ 22'$時,有樹成影長75尺,則樹之高若干

(5.) 二村相距三哩,乘氣球升高正在此村之天頂,測彼村之俯視角爲$8^\circ 15'$,問氣球升高若干.

(6.) 距塔底197尺之點,測塔頂之仰視角爲$46^\circ 45' 54''$求塔之高若干.

(7.) 今有人高5呎10吋,立於距路燈竿4呎7吋處,如

人影長18呎,則燈竿之高若竿.

(8.) 屋高101.3尺,其影長131.5尺,求日當時之高度若干.

(9.) 繩長112尺,一端繫於屋巔,緊曳一端下斜着地,與地成角77° 20′,求屋之高若干.

(10.) 河畔有屋高出水面130尺,自彼畔正對此屋之點測其仰視角爲14° 30′ 21″,求河之廣若干.

(11.) 今有危崖高出海面1217.8尺,自崖巔測一船塢之俯視角爲10° 9′ 13″,求崖底距船塢若干.

(12.) 距塔底1121.5尺之處,測塔之仰視角爲11° 3′ 5″,求塔之高若干.

(13.) 江之岸高出水面94.73尺,自彼岸水線測其仰視角爲10° 54′ 13″,求江之廣若干.

(14.) 今有危崖高113尺,其影正及海中距崖底93尺之小舟,問當時日高若干度.

(15.) 自29尺高之樹杪,牽38尺長之繩及地,則繩與地作角若干度.

(16.) 一樹爲風折而未斷,樹杪倒觸地而正距樹根15尺,與地成角42° 28′,求樹之原高若干.

(17.) 支圓布幕中央之竹竿高18呎,自竿頂牽繩至樁計長37呎,求樁距竿底若干,又繩與地成角若干度.

(18.) 今有一舟向西南方行,每小時駛8哩,則其向南

之遠牽若干.

(19.) 今有屋宇高121呎,自街之彼旁正對此屋之點測得屋頂之仰視角爲 $65°\ 3'$,求街之廣若干.

(20.) 自52尺高之屋頂,測112尺高之又一屋頂,得仰視角爲 $30°\ 12'$,求其直距若干.

(21.) 屋中有窗,距地24尺,如以梯子上端倚窗,下端距屋壁8尺,則梯之斜度若干.

(22.) 設日距地 92000000 哩,其視半徑爲 $16'\ 2''$,求其眞徑若干.

(23.) 設地半徑爲 3963 哩,其所配在月之角爲 $57'\ 2''$,(譬如月中有人測得地之視半徑卽係此數.)求月與地之距.

(24.) 設月距地 238885 哩,其視半徑爲 $15'\ 34''$,求其眞徑若干.

(25.) 設地半徑爲3963哩,其所配在日之角爲 $9''$,求日與地之距.

(26.) 今有燈塔高57呎,自舟中測其頂之仰視角爲 $5°\ 3'\ 20''$,其底之仰視角爲 $4°\ 28'\ 8''$,求塔底高出海面若干.

(27.) 自某點測一塔之仰視角爲 $53°\ 51'\ 16''$,直退後302呎,再測塔之仰視角爲 $9°\ 52'\ 10''$,求塔之高.

(28.) 今有一樹在路之旁,介二記哩石碑之間,此二碑相距正一哩,自此碑測得至樹之直線與路成角 $25°\ 15'$,

自彼碑測得至樹之直線與路成角 $45^\circ\ 17'$,求樹距路若干.

(29.) 今有燈塔高出海面225呎,自塔頂測得海面二舟之俯視角爲 $17^\circ\ 21'\ 50''$ 與 $13^\circ\ 50'\ 22''$,聯此二舟之直線正過塔底,求二舟相距若干.

等腰三角形與有法多邊形

79. (1.) 有法十二邊形之面積爲37.52方呎,求其小輻若干.

(2.) 有法十一邊形之周界爲23.47呎,求其外切圜之半徑.

(3.) 今有圜半徑3.147尺,求其外切十等邊形之周界.

(4.) 十等邊形之一邊爲23.41尺,求其內切圜半徑.

(5.) 今有等邊三角形之周界爲17.2尺,求其內切圜之面積.

(6.) 八等邊形之面積爲2478方寸,求其周界若干.

(7.) 五等邊形之面積爲32.57方尺,求其內切圜半徑.

(8.) 雙股規之股長7寸,二股成角 43°,求二股尖相距若干.

(9.) 今有屋宇廣37.54尺,屋面之斜度爲 $43^\circ\ 36'$,求椽之長若干.

(10.) 今有圜半徑爲12732,有弦長18321,則其在圜心所配之角若干度.

(11.) 設取圜半徑爲一,則配 $77^\circ 17' 40''$ 角之弦當長若干.

(12.) 今有弦等於半徑之$\frac{4}{7}$,則其在圜心所配之角若干度.

(13.) 如有通弦長 11223 尺,其配角爲 $59^\circ 50' 52''$,則圜半徑若干.

(14.) 某海口有燈塔二所,各距碼頭二哩,如有人在碼頭上測得至二塔線所成之角爲 $17^\circ 32''$,求二燈塔相距若干.

(15.) 五等邊形之一邊爲2,求其內切圜半徑.

(16.) 圜內容七等邊形之周界爲12,求此圜之半徑.

(17.) 八等邊形內容圜半徑爲3,求八等邊形之周界.

(18.) 今有九等邊形,切於半徑爲1之圜內,求此形之內切圜半徑若干.

(19.) 今有圜半徑爲1,求其外切十等邊形之周界.

(20.) 今有圜半徑爲1,求外切六等邊形之面積.

(21.) 今有圜半徑爲1,求其內切十一等邊形之周界.

(22.) 十二等邊形之周界爲30,求其面積.

(23.) 十一等邊形之面積爲18,求其周界.

三角方程

80. 試證左列諸方程.

(1.) $正弦\frac{1}{2}地 \pm 餘弦\frac{1}{2}地 = \sqrt{1 \pm 正弦地}$.

(2.) $\frac{餘弦天-餘弦地}{餘弦天+餘弦地} = -正切\frac{1}{2}(天+地)正切\frac{1}{2}(天-地)$.

(3.) $\frac{正弦2天+正弦4天}{餘弦2天+餘弦4天} = 正切3天$.

(4.) $餘弦^2地正切^2地 + 正弦^2地餘切^2地 = 1$.

(5.) $\frac{餘弦(天+地+人)}{正弦天正弦地正弦人} =$

$餘切天餘切地餘切人 - 餘切天 - 餘切地 - 餘切人$.

(6.) $餘弦^2(天-地) - 正弦^2(天+地) = 餘弦2天餘弦2地$

(7.) $\frac{正弦天+正弦地}{餘弦天-餘弦地} = -餘切\frac{1}{2}(天-地)$.

(8.) $\frac{餘弦天-正割天}{正割天} = 4餘弦^2\frac{1}{2}天(餘弦^2\frac{1}{2}天-1)$.

(9.) $餘切天 = \frac{正弦2天}{1-餘弦2天}$.

(10.) $正切^2地 = \frac{1-餘弦2地}{1+餘弦2地}$.

(11.) $餘切天 - 正切天 = 2餘切2天$.

(12.) $正切\frac{1}{2}天 + 2正弦^2\frac{1}{2}天餘切天 = 正弦天$.

(13.) $\frac{正切天 \pm 正切地}{餘切天 \pm 餘切地} = \pm 正弦天正割天正切地$.

(14.) $正弦天 - 2正弦^3天 = 正弦天餘弦2天$.

(15.) 4正弦地正弦$(60^\circ-$地$)$正弦$(60^\circ+$地$)=$正弦3地.

(16.) $\dfrac{\text{正弦地}(1-\text{正切}^2\text{地})}{\text{正割}^2\text{地}}\times$

$$\left(\frac{1}{\text{餘弦地}-\text{正弦地}}+\frac{1}{\text{餘弦地}+\text{正弦地}}\right)=\text{正弦}2\text{地}.$$

(17.) $1+$正切地正切$\dfrac{1}{2}$地$=$正割地.

(18.) 正弦4天$=4$正弦天餘弦^{3}天-4餘弦天正弦^{3}天.

(19.) 正割2天$+$正切2天$+1=\dfrac{2}{1-\text{正切天}}$.

(20.) 正切$50^\circ+$餘切$50^\circ=2$正割10°.

(21.) 餘弦$(\text{天}+45^\circ)+$正弦$(\text{天}-45^\circ)=0$.

(22.) $\dfrac{\text{正切天}}{1-\text{餘切}^2\text{天正切天}}=$正弦2天.

(23.) $(1-\text{正切}^2\text{天})$正弦天餘弦天

$$=\text{餘弦}2\text{天}\sqrt{\frac{1-\text{餘弦}2\text{天}}{1+\text{餘弦}2\text{天}}}.$$

(24.) $\dfrac{\text{餘弦地}+\text{正弦地}}{\text{餘弦地}-\text{正弦地}}=$正切2地$+$正割2地.

(25.) 正弦$(\text{天}+\text{地})$餘弦天$-$餘弦$(\text{天}+\text{地})$正弦天

$$=\text{正弦地}.$$

(26.) 餘弦$(\text{天}-\text{地})$正弦地$+$正弦$(\text{天}-\text{地})$餘弦地

$$=\text{正弦天}.$$

(27.) $\dfrac{\text{正弦}(\text{天}-\text{地})}{\text{餘弦天餘弦地}}+\dfrac{\text{正弦}(\text{地}-\text{人})}{\text{餘弦地餘弦人}}+\dfrac{\text{正弦}(\text{人}-\text{天})}{\text{餘弦人餘弦天}}=0.$

(28.) $\dfrac{\text{正弦天}+\text{正弦}\,2\text{天}}{\text{餘弦天}-\text{餘弦}\,2\text{天}}=\text{餘切}\,\dfrac{1}{2}\text{天}.$

(29.) $2\,\text{正弦}^2\text{天}\,\text{正弦}^2\text{地}+2\,\text{餘弦}^2\text{天}\,\text{餘弦}^2\text{地}=$

$1+\text{餘弦}\,2\text{天}\,\text{餘弦}\,2\text{地}.$

(30.) $\text{正弦}\,60^\circ+\text{正弦}\,30^\circ=2\,\text{正弦}\,45^\circ\,\text{餘弦}\,15^\circ.$

(31.) $\dfrac{\text{正切}(\text{天}-\text{地})+\text{正切地}}{1-\text{正切}(\text{天}-\text{地})\,\text{正切地}}=\text{正切天}.$

(32.) $\dfrac{2}{\text{正弦地}\,\text{正切}\frac{1}{2}\text{地}}=1+\text{餘切}^2\dfrac{1}{2}\text{地}.$

(33.) $\text{正弦}\,4\text{天}+\text{正弦}\,2\text{天}=2\,\text{正弦}\,3\text{天}\,\text{餘弦天}.$

(34.) $\dfrac{\text{正弦天}+\text{正弦地}}{\text{餘弦天}-\text{餘弦地}}=\dfrac{\text{餘弦天}+\text{餘弦地}}{\text{正弦地}-\text{正弦天}}.$

(35.) $\text{正弦}\,75^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$

(36.) $2\,\text{正切}\,2\text{地}=\text{正切}(45^\circ+\text{地})-\text{正切}(45^\circ-\text{地}).$

(37.) $\dfrac{\text{正切}\,2\text{天}+\text{正切天}}{\text{正切}\,2\text{天}-\text{正切天}}=\dfrac{\text{正弦}\,3\text{天}}{\text{正弦天}}.$

(38.) $\text{正切}\,3\text{地}=\dfrac{3\text{正切地}-\text{正切}^3\text{地}}{1-3\text{正切}^2\text{地}}.$

(39.) $\text{正弦}\,60^\circ+\text{正弦}\,20^\circ=2\,\text{正弦}\,40^\circ\,\text{餘弦}\,20^\circ$

(40.) $\text{正弦}\,40^\circ-\text{正弦}\,10^\circ=2\,\text{餘弦}\,25^\circ\,\text{正弦}\,15^\circ.$

(41.) $\text{餘弦}\,2\text{天}-\text{餘弦}\,4\text{天}=2\,\text{正弦}\,3\text{天}\,\text{正弦天}.$

(42.) $\text{正切}\,15^\circ=2-\sqrt{3}.$

(43.) $\left(\sqrt{1+\text{正弦天}}-\sqrt{1-\text{正弦天}}\right)^2=4\,\text{正弦}^2\dfrac{1}{2}\text{天}.$

(44.) $\left(\sqrt{1+\text{正弦天}}+\sqrt{1-\text{正弦天}}\right)^2=4\text{餘弦}^2\frac{1}{2}\text{天}.$

(45.) $\frac{\text{正弦}(2\text{天}+\text{地})}{\text{正弦天}}-2\text{餘弦}(\text{天}+\text{地})=\frac{\text{正弦地}}{\text{正弦天}}.$

(46.) $\frac{\text{正弦}\,4\text{天}}{\text{正弦}\,2\text{天}}=2\text{餘弦}\,2\text{天}.$

(47.) $\text{正弦}\,50^\circ-\text{正弦}\,70^\circ+\text{正弦}\,10^\circ=0.$

(48.) $\text{餘弦}\,\frac{\text{冂}}{3}-\text{餘弦}\,\frac{\text{冂}}{2}=2\,\text{正弦}\,\frac{5\text{冂}}{12}\,\text{正弦}\,\frac{\text{冂}}{12}.$

(49.) $\frac{1-\text{正切}^2(45^\circ-\text{天})}{1+\text{正切}^2(45^\circ-\text{天})}=\text{正弦}\,2\text{天}.$

(50.) $\frac{\text{正弦}\,75^\circ-\text{正弦}\,15^\circ}{\text{餘弦}\,75^\circ+\text{餘弦}\,15^\circ}=\sqrt{\frac{1}{3}}.$

(51.) $\text{正切}^3\frac{1}{2}\text{天}(1+\text{餘切}^2\frac{1}{2}\text{天})^3=\frac{8}{\text{正弦}^3\text{天}}.$

(52.) $\text{正切}\,75^\circ=2+\sqrt{3}.$

(53.) $\text{正弦}\,3\text{天}+\text{正弦}\,5\text{天}=2\,\text{正弦}\,4\text{天}\,\text{餘弦天}.$

(54.) $\text{餘弦}\,5\text{天}+\text{餘弦}\,9\text{天}=2\,\text{餘弦}\,7\text{天}\,\text{餘弦}\,2\text{天}.$

(55.) $\text{正弦}\,15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$

(56.) $\frac{\text{正弦}3\text{天}-\text{正弦天}}{\text{餘弦}3\text{天}+\text{餘弦天}}=\text{正切天}.$

(57.) $\text{正弦}\,5\text{地}=5\,\text{正弦地}-20\,\text{正弦}^3\text{地}+16\,\text{正弦}^5\text{地}$

(58.) $\text{餘弦}\,5\text{地}=5\,\text{餘弦地}-20\,\text{餘弦}^3\text{地}+16\,\text{餘弦}^5\text{地}.$

(59.) $\text{正弦}\,4\text{天}=\frac{4\text{正切天}(1-\text{正切}^2\text{天})}{(1+\text{正切}^2\text{天})^2}.$

(60.) $餘弦(45^\circ+天)+餘弦(45^\circ-天)=\sqrt{2}餘弦天.$

(61.) $餘弦3天+餘弦5天+餘弦7天+餘弦15天=4餘弦4天餘弦5天餘弦6天.$

(62.) $正弦^2\frac{1}{2}天(餘切\frac{1}{2}天-1)^2=1-正弦天.$

(63.) $\frac{3正弦天-正弦3天}{餘弦3天+3餘弦天}=正切^3天.$

(64.) $正弦天(1+正切天)+餘弦天(1+餘切天)=餘割天+正割天.$

(65.) $\frac{餘弦^3天-正弦^3天}{餘弦天-正弦天}=\frac{2+正弦2天}{2}.$

(66.) $餘弦地+餘弦(120-地)+餘弦(120+地)=0.$

(67.) $\frac{正弦3天}{正弦天}=2餘弦2天+1.$

(68.) $\frac{(餘弦地-餘弦3地)(正弦8地+正弦2地)}{(正弦5地-正弦地)(餘弦4地-餘弦6地)}=1.$

(69.) $\left(\frac{正弦天}{1+餘弦天}\right)^2=\frac{1-餘弦天}{1+餘弦天}.$

(70.) $\frac{正弦3天}{正弦天}-\frac{餘弦3天}{餘弦天}=2.$

(71.) $\frac{1+正弦天+餘弦天}{1+正弦天-餘弦天}=餘切\frac{1}{2}天.$

(72.) $\frac{正弦(4天-2地)+正弦(4地-2天)}{餘弦(4天-2地)+餘弦(4地-2天)}=正切(天+地).$

(73.) $\frac{正弦天+正弦3天+正弦5天+正弦7天}{餘弦天+餘弦3天+餘弦5天+餘弦7天}=正切4天.$

設呷,叱,丙為三角形之三角,求證左列諸方程.

(74.) 正弦 2 呷 + 正弦 2 叱 + 正弦 2 丙 = 4 正弦呷正弦叱正弦丙.

(75.) 正弦 2 呷 + 正弦 2 叱 − 正弦 2 丙 = 4 餘弦呷餘弦叱正弦丙.

(76.) 正弦^{2}呷 + 正弦^{2}叱 + 正弦^{2}丙 = 2 + 2 餘弦呷餘弦叱餘弦丙.

(77.) 正切呷 + 正切叱 + 正切丙 = 正切呷正切叱正切丙.

試解左列諸方程,求天小於360°時之同數.

(78.) 餘弦 2 天 + 餘弦天 = − 1.

(79.) 正弦天 + 正弦 7 天 = 正弦 4 天.

(80.) 餘弦天 − 正弦 2 天 − 餘弦 3 天 = 0.

(81.) 餘弦天 − 正弦 3 天 − 餘弦 2 天 = 0.

(82.) 正弦 4 天 − 2 正弦 2 天 = 0.

(83.) 正弦 2 天 − 餘弦 2 天 − 正弦天 + 餘弦天 = 0

(84.) 正弦 (60° − 天) − 正弦 (60° + 天) = $+\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(85.) 正弦 (30° + 天) − 餘弦 (60° + 天) = $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(86.) 餘割天 = 1 + 餘切天.

(87.) 餘弦 2 天 = 餘弦^{2}天.

(88.) 2 正弦地 = 正弦 2 地.

(89.) 正弦 3 地 + 正弦 2 地 + 正弦地 = 0.

(90.) 正弦^{2}天 $+ 5$ 餘弦^{2}天 $= 3$.

(91.) 正切$(45° -$ 天$) +$ 餘切$(45° -$ 天$) = 4$.

斜三角形

81. (1.) 呷叱二點在河之二岸,今欲求其相距,若度得呷㖠為2483尺,叱呷㖠角61° 25′,呷㖠叱角52° 17′,問呷叱若干.

(2.) 自呷村至叱村間之直道長12哩,自呷村至㖠村間之直道長7哩,與前道成角77°,求叱㖠二村相距若干.

(3.) 今欲測營寨呷距礮臺叱之距,度得叱㖠線長半里,測得呷叱㖠角 $= 75°$ 18′, 呷㖠叱角 $= 78°$ 21′, 求呷叱之距.

(4.) 呷叱二屋相距1728尺,又有㖠屋與前二屋成叱呷㖠角 $=47°$ 51′, 呷叱㖠角 $=57°$ 23′, 求㖠屋距呷屋若干.

(5.) 平原之上有高屋叱與峭壁呷,欲求其距,故度得叱㖠線長1281步,測得呷叱㖠角 $= 65°$ 31′, 叱㖠呷角 $=$ 70° 2′, 求呷叱距.

(6.) 二村相距三里,有一氣球升空二村之間,自二村測氣球之仰視角為13° 19′ 與20° 3′, 求氣球距較近之村若干.

(7.) 呷叱二竿,矗立澤地之兩端,另取㖠點距呷1272.5尺,距叱2012.4尺,呷㖠叱角為41° 9′ 11″, 求呷叱之距.

(8.) 呷叱二樁在河之二岸,又一樁㖠距呷樁431.27步,

距㕧樁601.72步，呷㖞㕧角爲39° 53′13″，求呷㕧二樁間之距.

(9.) 呷㕧二燈塔相距11里,有㖞舟與之成㕧呷㖞角 = 31° 13′ 31″，呷㕧㖞角 = 21° 46′ 8″，求此舟距呷若干.

(10.) 呷㕧二島相距6103尺，如有㖞舟與之成呷㕧㖞角爲37° 25′ 㕧呷㖞角爲40° 32′，求舟與呷島之距.

(11.) 今有燈塔建於山頂,自坡上一點測塔之配角爲21° 22′，進前55尺,又測其配角爲40° 27′，如塔高58尺，則後測點距塔底若干.

(12.) 今有二島相距二里,另有一浮筩,距此島3里，距彼島4里，求在浮筩上二島所配之角爲若干度.

(13.) 今有三角形,其三邊爲151.45, 191.32, 250.91，求其自最大角至對邊之垂線當長若干.

(14.) 今有一樹直立山坡上,坡與樹幹成角110° 23′，下坡85.6尺，測樹所配之角爲22° 22′，求樹之高.

(15.) 燈塔54尺高,建於岩石之上,自塔頂測一舟之俯視角爲19° 10′，自塔底測之,則爲12° 22′，求岩石高出海面若干.

(16.) 今有呷㕧㖞三村,以直衢相聯，呷㕧 = 4哩，㕧㖞 = 5哩,呷㖞 = 7哩,求呷㕧與㕧㖞所成之角爲若干度.

(17.) 今有呷㕧二浮筩相距半里,如與岸上㖞點成呷㕧㖞角 = 77° 7′，㕧呷㖞角 = 67° 17′，求呷㖞之距若干.

(18.) 海灣曲入地內,其旁聳立一塔,高出水面175尺,自塔頂測海灣二對岸之俯視角為 57° 16′ 與 15° 2′,求灣之橫廣若干.

(19.) 三角形之二邊為$\sqrt{2}$與$\sqrt{3}$,其間角為 45°,求餘一邊若干.

(20.) 今有平行方形之二倚邊為172.43與101.31,其間角為61° 16′,求二對角線若干.

(21.) 今有樹高41尺,立於小山之巔,山坡與地平成角10° 12′,下坡若干路,測樹所配之角為 28° 29′,求此點距樹底若干.

(22.) 今有平原與地平成角7° 33′,自原上一點遠測旗竿所配之角為 20° 3′,向竿進前50尺,測竿所配之角為40° 35′,求竿之高.

(23.) 平原上有高塔一坐,為人所不能近,自一點測塔之仰視角為 53° 19′,正向後退 227 尺,測塔之仰視角為22° 41′ 求塔之高.

(24.) 今有山坡與地平成角12° 18′,其巔有屋一所,下坡距屋75尺之處,測屋所配之角為 32° 5′,求屋之高.

(25.) 自河此岸測彼岸一樹之高度為 28° 31′,正退後139.4尺,測其高度為 19° 10′,求河之廣.

(26.) 平原之中有一高邱,自邱足測邱巔之高度為21° 7′,後退 211 尺,測其高度為 18° 37′,求邱之高.

(27.) 小山之頂有一牌坊,高153.2尺,直下山坡321.4尺,測牌坊所配之角爲11° 13′,求此點至牌坊頂之距.

(28.) 今有小山,其坡與地平成角10° 12′,山巔有屋一坐,自坡上一點測屋頂之高度爲20° 55′,下坡115.3尺,再測其高度爲15° 10′,求屋之高.

(29.) 今自呷叱二處,同測空中哂雲,呷叱線正在雲下長2874尺,於呷處測雲之高度爲77° 19′,哂呷叱角爲51° 18′,呷叱哂角爲60° 45′,求雲高於呷若干.

(30.) 呷叱二人同在一直路上,相距675.4尺,此路正在一氣球哂之下,測得呷叱哂角＝34° 42′,叱呷哂角＝41° 15′,求氣球距呷若干.

(31.) 今有一人欲知隔河岸上二物之距,度得哂叮＝357尺,呷哂叱角＝29° 33′,叱哂叮角＝38° 52′,呷叮叱角＝54° 10′,呷叮哂角＝34° 11′,求呷叱距.

(32.) 今有峭壁高出海面327尺,自壁頂測二舟之俯視角爲15° 11′與13° 13′,在壁底測此二舟所配之角爲122° 39′,求二舟之距若干.

(33.) 今有斜平原與地平成角18° 51′,於此原之底適有一屋,有人在原上距屋112尺處,測屋所配之角爲33° 52′,求屋之高若干.

(34.) 今有呷叱二舟,相距451.35尺,自呷舟測一燈塔巔之高度爲33°17′,塔底哂與水面齊平,呷叱哂角＝12°31′,

吶呷叱角$=137^\circ 22'$,求燈塔之高.

(35.) 今有高塔,其前適有崇樓,自樓中正對塔底之一牖測塔之高度爲$29^\circ 21'$,又於前牖下20尺之牖測塔之高度爲$39^\circ 3'$,求塔之高.

(36.) 今有船塢距其堤之一端一哩,距其又一端$1\frac{1}{2}$哩,此堤於塢上所配之角爲$31^\circ 11'$,求堤之長若干.

(37.) 今有直路始山坡而升,其長1022尺,山之高勢每四尺升一尺,自山底測山頂一塔所配之角爲$7^\circ 19'$,求塔之高.

(38.) 三角塲之一角矗立一塔,高192尺,自塔頂測餘二角之俯視角爲$58^\circ 4'$與$17^\circ 49'$,對塔之邊在塔頂所配之角爲$75^\circ 15'$,求此邊之長.

(39.) 某處古跡,有二石柱矗立,一高66尺,一高48尺,二柱之間有一石像,與二柱同在一直線內,像之首距高柱之頂100尺,距低柱之頂84尺,而低柱之底距像底之中心正爲74尺,求二柱之頂相距若干.

(40.) 三角形之二邊相比如十一比九,其對角相比如三比一,問諸角各爲若干度.

(41.) 今有平行方形,其二對角線爲12432與8413,對角線間之角爲$78^\circ 44'$,求形之面積若干.

(42.) 三角形之一邊爲1012.6,而二角爲$52^\circ 21'$與$57^\circ 32'$,其面積若干.

(43.) 三角形之二邊為218.12與123.72,其間角為59° 10′,求形之面積.

(44.) 三角形之二角為35° 15′與47° 18′,其一邊為2104.7,求其面積若干.

(45.) 三角形之三邊為1.2371, 1.4713, 2.0721, 求其面積若干.

(46.) 三角形之二邊為168.12與179.21,其間角為41° 14′,求形之面積若干.

(47.) 三角形之三邊為51尺, 48.12尺, 32.2尺,求其面積若干.

(48.) 三角形之二邊為111.18與121.21,其間角為27° 50′,求其面積若干.

(49.) 今有平行方形之二對角線為37與51,其間角為65°,求形之面積若干.

(50.) 今有四邊形之二對角線為34與56,其交角為67°,求形之面積若干.

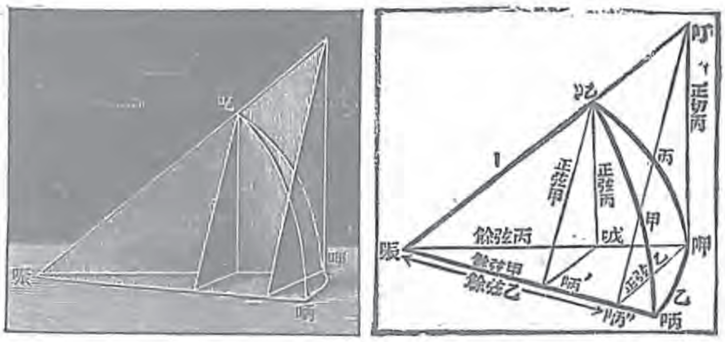
弧三角術

第一章

正弧三角形與象限三角形

正弧三角形

82. 設唇乃以1爲半徑之球心,呷𠯆𠰷爲正弧三角形,正角在呷,乃呷唇𠰷,呷唇𠯆,𠯆唇𠰷三平面限球面所成.又設叮呷𠰷″與𠯆𠰌𠰷′二平面各過呷與𠯆二點,同



與唇𠰷線正交.叮𠰷″呷與𠯆𠰷′𠰌二平面角各度弧三角形之𠰷角,又弧三角形之三邊甲,乙,丙所有之數度與𠯆唇𠰷,呷唇𠰷,呷唇𠯆諸角一一相同,是則呷叮=正切丙,𠯆𠰌=正弦丙,𠯆𠰷′=正弦甲,唇𠰷′=餘弦甲,唇𠰷″=

餘弦乙，㖘𠲜＝餘弦丙，呷𠰳″＝正弦乙.

於㖘𠲜𠰳′與㖘呷𠰳″兩相似三角形內，有

$$\frac{\text{餘弦丙}}{\text{㖘呷}}=\frac{\text{餘弦丙}}{1}=\frac{\text{餘弦甲}}{\text{餘弦乙}}\text{，卽餘弦甲}=\text{餘弦乙餘弦丙}. \quad (1)$$

於𠮙𠰳′𠲜三角形內有

$$\text{正弦𠰳}=\frac{\text{𠮙𠲜}}{\text{𠮙𠰳}'}\text{，卽正弦𠰳}=\frac{\text{正弦丙}}{\text{正弦甲}}. \quad (2)$$

於叮呷𠰳″三角形內有

$$\text{正切𠰳}=\frac{\text{叮呷}}{\text{𠰳}''\text{呷}}\text{，卽正切𠰳}=\frac{\text{正切丙}}{\text{正弦乙}}. \quad (3)$$

以(2) (3)與(1)式合之，得

$$\text{餘弦𠰳}=\frac{\text{正切乙}}{\text{正切甲}}. \quad (4)$$

又如以呷𠮙爲呷𠮙𠰳正弧三角形之底，則有

$$\text{正弦𠮙}=\frac{\text{正弦乙}}{\text{正弦甲}}. \quad (5)$$

$$\text{正切𠮙}=\frac{\text{正切乙}}{\text{正弦丙}}. \quad (6)$$

$$\text{餘弦𠮙}=\frac{\text{正切丙}}{\text{正切甲}}. \quad (7)$$

以前諸方程合之，可得

$$\text{餘弦𠮙}=\text{正弦𠰳餘弦乙}. \quad (8)$$

$$\text{餘弦𠰳}=\text{正弦𠮙餘弦丙}. \quad (9)$$

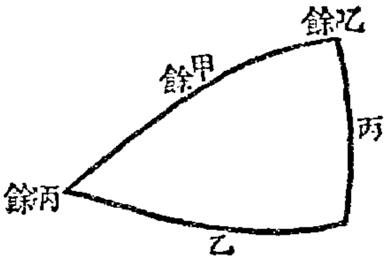
$$\text{餘弦甲}=\text{餘切𠮙餘切𠰳}. \quad (10)$$

納氏之術

83. 用以上十公式,足解正弧三角形之各事,算學家納白爾以簡術二條賅此諸法,是曰納氏之術.

其術先取正角旁之二倚弧,與弦之餘弧及其餘二角之餘角,命之曰弧角分件.

正角不在弧角分件之內.



如圖中乙,丙,餘甲,餘叱,餘㕯五者爲弧角分件.五件之內任取其一爲中件,則在中件之兩旁者名之曰倚件,其餘兩件名之曰對件.

設取丙爲中件,則餘叱與乙爲倚件,餘甲與餘㕯爲對件.

上文十公式可列之爲二羣如下.

第一羣	第二羣
正弦餘㕯＝正切餘甲正切乙.	正弦餘甲＝餘弦乙餘弦丙.
正弦餘叱＝正切餘甲正切丙.	正弦　乙＝餘弦餘甲餘弦餘叱.
正弦餘甲＝正切餘叱正切餘㕯.	正弦　丙＝餘弦餘甲餘弦餘㕯.
正弦　丙＝正切餘叱正切乙.	正弦餘叱＝餘弦餘㕯餘弦乙.
正弦　乙＝正切餘㕯正切丙.	正弦餘㕯＝餘弦餘叱餘弦丙.

納氏之術可述之如左.

I. 中件之正弦必等於兩倚件正切之合.

II. 中件之正弦必等於兩對件餘弦之合.

84. 本書中所論正弧三角形之各邊,俱設其小於半圜周,各角俱設其小於兩正角.

解弧三角形時當留意下二事.

(1.) 如正角旁之二邊同小或同大於90°,則弦必小於90°,如一邊小於90°,一邊大於90°,則弦必大於90°.

(2.) 一角與其對邊必同大於或同小於90°.

法問

85. 今於甲 $= 63° 56'$, 乙 $= 40° 0'$, 求丙,𠮙,𠰳.

求丙

餘甲為中件.

丙與乙為對件.

正弦餘甲 = 餘弦乙餘弦丙,

即 餘弦甲 = 餘弦乙餘弦丙.

$$餘弦丙 = \frac{餘弦甲}{餘弦乙}.$$

對餘弦甲 = 9.64288

餘對餘弦乙 = 0.11575

對餘弦丙 = 9.75863

丙 $= 54° 59' 47''$

求𠰳

餘𠰳為中件.

餘甲與乙為傍件.

正弦餘𠰳 = 正切餘甲正切乙,

餘弦𠰳 = 餘切甲正切乙.

對餘切甲 = 9.68946

對正切乙 = 9.92381

9.61327

𠰳 $= 65° 45' 58''$

求𠮙

乙為中件.

餘甲與餘𠮙為對件.

正弦乙 = 餘弦餘甲餘弦餘𠮙,

即正弦乙 = 正弦甲正弦𠮙.

$$正弦𠮙 = \frac{正弦乙}{正弦甲}.$$

對正弦乙 = 9.80807

餘對正弦甲 = 0.04659

對正弦𠮙 = 9.85466

𠮙 $= 45°41'28''$

覆驗

用原求之三件.

餘𠰳為中件.

餘𠮙與丙為對件.

正弦餘𠰳 = 餘弦丙餘弦餘𠮙.

即 餘弦𠰳 = 餘弦丙正弦𠮙.

對餘弦丙 = 9.75863

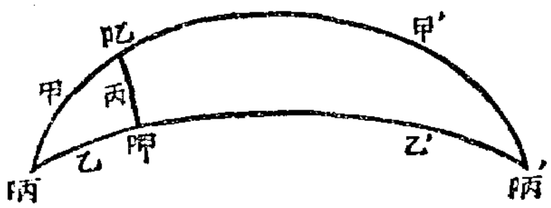
對正弦𠮙 = 9.85466

對餘弦𠰳 = 9.61329

𠰳 $= 65°45'54''$

疑端

86. 如已知者爲正角旁之一邊與此邊之對角,則有二種解法,可以下圖表明之.夫旣解之而得各件準正弦之同數,故不但得甲,乙,叱之同數,幷得 $180°-$甲,$180°-$乙,$180°-$叱之同數.



設丙 $= 26°\ 4'$.

吶 $= 36°\ 0'$.

用納氏術求甲,甲',乙,乙',叱,叱'.

求叱與叱'

正弦餘吶 = 餘弦餘叱餘弦丙,

即　餘弦吶 = 正弦叱餘弦丙,

即　正弦叱 $= \dfrac{\text{餘弦吶}}{\text{餘弦丙}}$.

對餘弦吶 = 9.90796

餘對餘弦丙 = 0.04659

對正弦叱 = 9.95455

叱 $= 64°\ 14'\ 30''$

叱' $= 180°-$叱 $= 115°\ 45'\ 30''$

求甲與甲'

正弦丙 = 餘弦餘甲餘弦餘吶,

即　正弦丙 = 正弦甲正弦吶,

即　正弦甲 $= \dfrac{\text{正弦丙}}{\text{正弦吶}}$.

對正弦丙 = 9.64288

餘對正弦吶 = 0.23078

對正弦甲 = 9.87366

甲 $= 48°\ 22'\ 55''-$

甲' $= 180°-$甲 $= 131°\ 37'\ 5''+$

(所以有微差者以棄去小數也.)

求乙與乙′

正弦乙＝正切丙正切餘昞,

卽 正弦乙＝正切丙餘切昞.

對正切丙＝9.68946

對餘切昞＝0.13874

對正弦乙＝9.82820

$乙 = 42^\circ\ 19'\ 17''$

$乙' = 180^\circ - 乙 = 137^\circ\ 40'\ 43''$

覆驗

正弦乙＝餘弦餘甲餘弦餘叱,

卽 正弦乙＝正弦甲正弦叱.

對正弦甲或甲′＝9.87366

對正弦叱或叱′＝9.95455

對正弦乙＝9.82821

$乙 = 42^\circ\ 19'\ 21''$

$乙' = 180^\circ - 乙 = 137^\circ\ 40'\ 39''$

象限三角形

87. 界 象限三角形者,弧三角形之一邊適爲一象限者也.

象限三角形可按納氏解正弧三角形之術解之.

按極三角形之理,有

$呷 = 180^\circ - 甲'$ $甲 = 180^\circ - 呷'$

$叱 = 180^\circ - 乙'$ $乙 = 180^\circ - 叱'$

$昞 = 180^\circ - 丙'$ $丙 = 180^\circ - 昞'$

夫旣象限三角形之極三角形爲正三角形,故可用納氏術解之.旣得之後,反求象限三角形之各件不難矣.

法 問

設 $呷 = 136^\circ\ 4'$, $叱 = 140^\circ\ 0'$, $甲 = 90^\circ\ 0'$.

其極三角形相當之各件爲

$甲' = 43^\circ\ 56'$, $乙' = 40^\circ\ 0'$, $呷' = 90^\circ$.

達納氏術求得

吜$'$= 45° 41' 28", 哂$'$= 65° 45' 58", 丙 = 54° 59' 47",

再用極三角形之理得

乙=134° 18' 32", 丙 = 114° 14' 2", 哂 = 125° 0' 13".

演 習

88. (1.) 今有呷吜哂正弧三角形,甲邊 = 63° 56', 乙邊 = 40°, 求餘一邊丙與吜哂二角.

(2.) 今有呷吜哂正弧三角形, 甲弦 = 91° 42', 吜角 = 95° 6', 求其餘件.

(3.) 今有呷吜哂正弧三角形, 乙邊 = 26° 4', 吜角 = 36°, 求其餘件.

(4.) 今有呷吜哂正弧三角形, 丙邊 = 54° 30', 吜角 = 44° 50', 求其餘件.

此題之答何以有疑.

(5.) 今有呷吜哂正弧三角形, 乙邊 = 55° 28', 丙邊 = 63° 15', 求其餘件.

(6.) 今有呷吜哂正弧三角形, 吜角 = 69° 20', 哂角 = 58° 16', 求其餘件.

(7.) 今有呷吜哂正弧三角形, 甲邊 = 90°, 哂角 = 42° 10', 呷角 = 115° 20', 求其餘件.

解略 極三角形之呷角爲正角.

(8.) 今有呷吜哂正弧三角形, 乙邊 = 90°, 哂角 = 69°

13′ 46″, 呷角 = 72° 12′ 4″, 求其餘件.

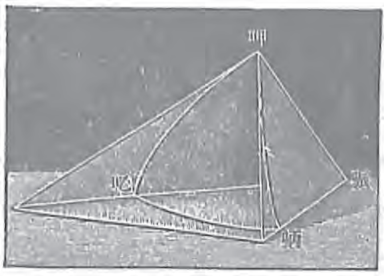
(9.) 今有呷叱呥正弧三角形, 呥角 = 23° 27′ 42″, 乙邊 = 10° 39′ 40″, 求叱角與甲丙二邊.

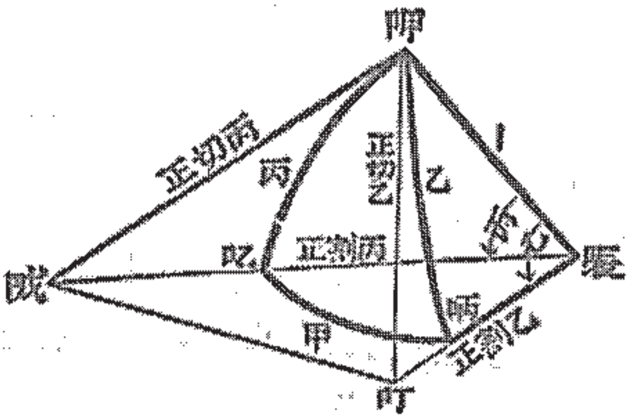
(10.) 今有呷叱呥正弧三角形, 叱角 = 47° 54′ 20″, 呥角 = 61° 50′ 29″, 求其餘件.

弧三角術　第二章

斜弧三角形

89. 如圖,㖘為以一為半徑之球心,呷吃哂為斜弧三角形,為呷㖘吃,吃㖘哂,呷㖘哂三平面所限成.設呷哦叮





平面過呷點而與呷㖘正交,割呷㖘吃,吃㖘哂,呷㖘哂三平面於呷哦,哦叮,呷叮.是則呷叮＝正切乙,呷哦＝正切丙,㖘叮＝正割乙,㖘哦＝正割丙.

在哦㖘叮三角形內,有

哦叮^2＝正割^{2}乙＋正割^{2}丙－2正割乙正割丙餘弦甲.

在呷哦叮三角形內,有

哦叮^2＝正切^{2}乙＋正切^{2}丙－2正切乙正切丙餘弦呷.

以此兩方程相減,且已知正割^{2}乙－正切^{2}乙＝1,故得

0＝2－2正割乙正割丙餘弦甲＋2正切乙正切丙餘弦呷.

化盡,得

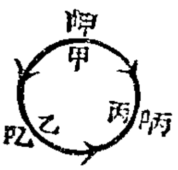
餘弦甲=餘弦乙餘弦丙+正弦乙正弦丙餘弦呷. (1)

如遞以乙與丙爲三角形之底,仿此可得

餘弦乙=餘弦丙餘弦甲+正弦丙正弦甲餘弦吃,

又 餘弦丙=餘弦甲餘弦乙+正弦甲正弦乙餘弦昞.

(此羣公式,其次式可由首式得之,三式可由次式得之,祗按圖內環上所列之元字遞代之可矣.如以乙代甲,以丙代乙,以甲代丙,以吃代呷,以昞代吃,以呷代昞是也.凡斜弧三角形之各羣公式,俱同此理,故各羣祗列首式而已.)



90. 按極三角形之理

甲 = 180° − 呷′　　呷 = 180° − 甲′

乙 = 180° − 吃′　　吃 = 180° − 乙′

丙 = 180° − 昞′　　昞 = 180° − 丙′

由此可得第二羣公式.

以甲,乙,丙,呷之諸同數代入(1)式中,又知餘弦(180° − 呷) = − 餘弦呷,與正弦(180° − 呷) = 正弦呷,故有

餘弦呷′= − 餘弦吃′餘弦昞′+正弦吃′正弦昞′餘弦甲′.

夫此式既於任一三角形俱眞,故可去其誌點,寫作

餘弦呷=−餘弦吃餘弦昞+正弦吃正弦昞餘弦甲.(2)

以對數推算之公式

91. 公式(1)爲　餘弦甲 = 餘弦乙餘弦丙 + 正弦乙

正弦丙餘弦呷.

由之得 $$餘弦呷=\frac{餘弦甲-餘弦乙餘弦丙}{正弦乙正弦丙}.$$

按三六節 $$餘弦呷=1-2正弦^2\frac{1}{2}呷.$$

是以 $$1-2正弦^2\frac{1}{2}呷=\frac{餘弦甲-餘弦乙餘弦丙}{正弦乙正弦丙},$$

即 $$正弦^2\frac{1}{2}呷=\frac{餘弦乙餘弦丙+正弦乙正弦丙-餘弦甲}{2正弦乙正弦丙},$$

$$=\frac{餘弦(乙-丙)-餘弦甲}{2正弦乙正弦丙},$$

$$=\frac{正弦\frac{甲+乙-丙}{2}正弦\frac{甲-乙+丙}{2}}{正弦乙正弦丙}. \qquad (38)$$

命$\frac{甲+乙+丙}{2}=$申,則有

$$\frac{甲+乙-丙}{2}=申-丙,又\frac{甲-乙+丙}{2}=申-乙,$$

故有 $$正弦\frac{1}{2}呷=\sqrt{\frac{正弦(申-乙)正弦(申-丙)}{正弦乙正弦丙}}.$$

又既 $$餘弦呷=2餘弦^2\frac{1}{2}呷-1,$$

故仿得 $$餘弦\frac{1}{2}呷=\sqrt{\frac{正弦申正弦(申-甲)}{正弦乙正弦丙}}.$$

是故 $$正切\frac{1}{2}呷=\sqrt{\frac{正弦(申-乙)正弦(申-丙)}{正弦申正弦(申-甲)}}. \qquad (I)$$

故可化(2)為 $\text{正切}\frac{1}{2}\text{甲}=\sqrt{\frac{-\text{餘弦呻餘弦}(\text{呻}-\text{呷})}{\text{餘弦}(\text{呻}-\text{⿰口乙})\text{餘弦}(\text{呻}-\text{⿰口丙})}}.$ (II)

92. 如於(I)式內遞升一元字,則有

$$\text{正切}\frac{1}{2}\text{⿰口乙}=\sqrt{\frac{\text{正弦}(\text{申}-\text{丙})\text{正弦}(\text{申}-\text{甲})}{\text{正弦申正弦}(\text{申}-\text{乙})}}.$$

以正切$\frac{1}{2}$⿰口乙約正切$\frac{1}{2}$呷而化盡之,得

$$\frac{\text{正切}\frac{1}{2}\text{呷}}{\text{正切}\frac{1}{2}\text{⿰口乙}}=\frac{\text{正弦}(\text{申}-\text{乙})}{\text{正弦}(\text{申}-\text{甲})}.$$

合之約之,可得

$$\frac{\text{正切}\frac{1}{2}\text{呷}+\text{正切}\frac{1}{2}\text{⿰口乙}}{\text{正切}\frac{1}{2}\text{呷}-\text{正切}\frac{1}{2}\text{⿰口乙}}=\frac{\text{正弦}(\text{申}-\text{乙})+\text{正弦}(\text{申}-\text{甲})}{\text{正弦}(\text{申}-\text{乙})-\text{正弦}(\text{申}-\text{甲})}.$$

按30,38節,此式變為

$$\frac{\text{正弦}\frac{1}{2}(\text{呷}+\text{⿰口乙})}{\text{正弦}\frac{1}{2}(\text{呷}-\text{⿰口乙})}=\frac{\text{正切}\frac{1}{2}\text{丙}}{\text{正切}\frac{1}{2}(\text{甲}-\text{乙})}. \qquad \text{(III)}$$

以正切$\frac{1}{2}$⿰口乙乘正切$\frac{1}{2}$呷而化盡之,則得

$$\frac{\text{正切}\frac{1}{2}\text{呷正切}\frac{1}{2}\text{⿰口乙}}{1}=\frac{\text{正弦}(\text{申}-\text{丙})}{\text{正弦申}}.$$

約之合之,又按30,38節,此式變為

$$\frac{\text{餘弦}\frac{1}{2}(\text{呷}+\text{吃})}{\text{餘弦}\frac{1}{2}(\text{呷}-\text{吃})}=\frac{\text{正切}\frac{1}{2}\text{丙}}{\text{正切}\frac{1}{2}(\text{甲}+\text{乙})}. \qquad \text{(IV)}$$

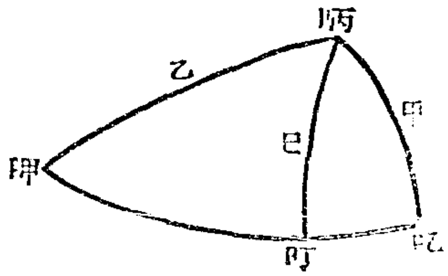
仿前法可變II式爲

$$\frac{\text{正弦}\frac{1}{2}(\text{甲}+\text{乙})}{\text{正弦}\frac{1}{2}(\text{甲}-\text{乙})}=\frac{\text{餘切}\frac{1}{2}\text{呐}}{\text{正切}\frac{1}{2}(\text{呷}-\text{吃})}. \qquad \text{(V)}$$

與

$$\frac{\text{餘弦}\frac{1}{2}(\text{甲}+\text{乙})}{\text{餘弦}\frac{1}{2}(\text{甲}-\text{乙})}=\frac{\text{餘切}\frac{1}{2}\text{呐}}{\text{正切}\frac{1}{2}(\text{呷}+\text{吃})}. \qquad \text{(VI)}$$

93. 於呷吃呐弧三角形內,設作呐叮正交呷吃,則按正弧三角形公式,



於呷呐叮三角形內, 正弦巳＝正弦乙正弦呷.

於吃呐叮三角形內, 正弦巳＝正弦甲正弦吃.

由此得 正弦甲正弦吃＝正弦乙正弦呷,

即

$$\frac{\text{正弦甲}}{\text{正弦呷}}=\frac{\text{正弦乙}}{\text{正弦吃}}. \qquad \text{(VII)}$$

[如$(呷+𠮙)>180°$，則$(甲+乙)>180°$，如$(呷+𠮙)<180°$，則$(甲+乙)<180°$.]

94. 凡斜弧三角形俱可用前文自I至VII諸公式之一式或多式以解之，詳列之如下數端.

斜弧三角形諸端

(1.) 有三邊求三角.

用公式I.　　　　覆驗用V或VI式.

(2.) 有三角求三邊.

用公式II.　　　　覆驗用III或IV式.

(3.) 有兩邊與其夾角.

用V, VI, VII.　　　　覆驗用III或IV式.

(4.) 有兩角與其間之邊.

用III, IV, VII.　　　　覆驗用V或VI式.

(5.) 有兩角與其一角之對邊.

用VII, V, III.　　　　覆驗用IV式.

(6.) 有兩邊與其一邊之對角.

用VII, V, IV.　　　　覆驗用III式.

法問　第一端

95. 今有甲 $= 81° \ 10'$，乙 $= 60° \ 20'$，丙 $= 112° \ 25'$. 求呷，𠮙，𠯈.

甲 = 81° 10′

乙 = 60° 20′

丙 = 112° 25′

2申 = 253° 55′

申 = 126° 57′ 30″

申 − 甲 = 45° 47′ 30″

申 − 乙 = 66° 37′ 30″

申 − 丙 = 14° 32′ 30″

對正弦申 = 9.90259

對正弦(申−甲) = 9.85540

對正弦(申−乙) = 9.96281

對正弦(申−丙) = 9.39982

求呷

$$正切\frac{1}{2}呷=\sqrt{\frac{正弦(申-乙)正弦(申-丙)}{正弦申正弦(申-甲)}}.$$

對正弦(申−乙) = 9.96281

對正弦(申−丙) = 9.39982

餘對正弦申 = 0.09741

餘對正弦(申−甲) = 0.14460

2)19.60464

對正切$\frac{1}{2}$呷 = 9.80232

$\frac{1}{2}$呷 = 32° 23′ 19″

呷 = 64° 46′ 38″

求叱

$$正切\frac{1}{2}叱=\sqrt{\frac{正弦(申-甲)正弦(申-丙)}{正弦申正弦(申-乙)}}.$$

對正弦(申−甲) = 9.85540

對正弦(申−丙) = 9.39982

餘對正弦申 = 0.09741

餘對正弦(申−乙) = 0.03719

2)19.38982

對正切$\frac{1}{2}$叱 = 9.69491

$\frac{1}{2}$叱 = 26° 21′ 6″

叱 = 52° 42′ 12″

求㖠

$$正切\frac{1}{2}㖠=\sqrt{\frac{正弦(申-甲)正弦(申-乙)}{正弦申正弦(申-丙)}},$$

對正弦(申−甲) = 9.85540

對正弦(申−乙) = 9.96281

餘對正弦申 = 0.09741

餘對正弦(申−丙) = 0.60018

2)20.51580

對正切$\frac{1}{2}$㖠 = 10.25790

$\frac{1}{2}$㖠 = 61° 5′ 32″

㖠 = 122° 11′ 4″

覆驗

公式V爲　$$餘切\frac{1}{2}丙=\frac{正切\frac{1}{2}(呷-吃)正弦\frac{1}{2}(甲+乙)}{正弦\frac{1}{2}(甲-乙)}.$$

$$呷=64^\circ\ 46'\ 38''$$
$$吃=52^\circ\ 42'\ 12''$$
$$呷-吃=12^\circ\ 4'\ 26''$$
$$\frac{1}{2}(呷-吃)=6^\circ\ 2'\ 13''$$

$甲=81^\circ\ 10'$

$乙=60^\circ\ 20'$

$甲+乙=141^\circ\ 30'$, $\frac{1}{2}(甲+乙)=70^\circ\ 45'$

$甲-乙=20^\circ\ 50'$, $\frac{1}{2}(甲-乙)=10^\circ\ 25'$

$對正切\frac{1}{2}(呷-吃)=9.02430$

$對正弦\frac{1}{2}(甲+乙)=9.97501$

$餘對正弦\frac{1}{2}(甲-乙)=0.74279$

$餘切\frac{1}{2}丙=9.74210$

$\frac{1}{2}丙=61^\circ\ 5'\ 32''$

$丙=122^\circ\ 11'\ 4''$

法問　第三端

96. 今有$甲=78^\circ\ 15'$, $乙=56^\circ\ 20'$, $丙=120^\circ$, 求呷,吃,與丙.

$\frac{1}{2}(甲+乙)=67^\circ\ 17'\ 30''$

$\frac{1}{2}(甲-乙)=10^\circ\ 57'\ 30''$

$\frac{1}{2}丙=60^\circ$

$對正弦\frac{1}{2}(甲+乙)=9.96493$

$對餘弦\frac{1}{2}(甲+乙)=9.58663$

$對正弦\frac{1}{2}(甲-乙)=9.27897$

$對餘弦\frac{1}{2}(甲-乙)=9.99201$

$對餘切\frac{1}{2}丙=9.76144$

求$\frac{1}{2}(呷-吃)$.

公式V可寫之如下式,

$$正切\frac{1}{2}(呷-吃)=\frac{正弦\frac{1}{2}(甲-乙)餘切\frac{1}{2}丙}{正弦\frac{1}{2}(甲+乙)}.$$

$$對正弦\frac{1}{2}(甲-乙)=9.27897$$

$$對餘切\frac{1}{2}𠰳=9.76144$$

$$餘對正弦\frac{1}{2}(甲+乙)=0.03502$$

$$\frac{1}{2}(呷-吃)=6°\ 47'\ 4''$$

求$\frac{1}{2}$(呷+吃).

公式VI可寫之如下式,

$$正切\frac{1}{2}(呷+吃)=\frac{餘弦\frac{1}{2}(甲-乙)餘切\frac{1}{2}𠰳}{餘弦\frac{1}{2}(甲+乙)}.$$

$$對餘弦\frac{1}{2}(甲-乙)=\ 9.99201$$

$$對餘切\frac{1}{2}𠰳=\ 9.76144$$

$$餘對餘弦\frac{1}{2}(甲+乙)=\ \underline{0.41337}$$

$$對正切\frac{1}{2}(呷+吃)=10.16682$$

$$\frac{1}{2}(呷+吃)=55°\ 44'\ 36''-$$

$$\frac{1}{2}(呷-吃)=6°\ 47'\ 4''$$

$$呷=62°\ 31'\ 40''$$

$$吃=48°\ 57'\ 32''-$$

求丙

自公式VII得 $正弦丙=\frac{正弦乙正弦𠰳}{正弦吃}.$

$$對正弦乙=9.92027$$

$$對正弦𠰳=9.93753$$

$$餘對正弦吃=\underline{0.12249}$$

$$對正弦丙=9.98029$$

$$丙=107°\ 8'$$

覆驗

公式III可寫之如下式,

$$正切\frac{1}{2}丙=\frac{正弦\frac{1}{2}(呷+吃)正切\frac{1}{2}(甲-乙)}{正弦\frac{1}{2}(呷-吃)}.$$

$$對正弦\frac{1}{2}(呷+吃)=\ 9.91725$$

$$對正切\frac{1}{2}(甲-乙)=\ 9.28696$$

$$餘對正弦\frac{1}{2}(呷-吃)=\ \underline{0.92762}$$

$$對正切\frac{1}{2}丙=10.13183$$

$$\frac{1}{2}丙=53°\ 33'\ 56''$$

$$丙=107°\ 7'\ 51''$$

(有微差因棄去小數位故也.)

疑端

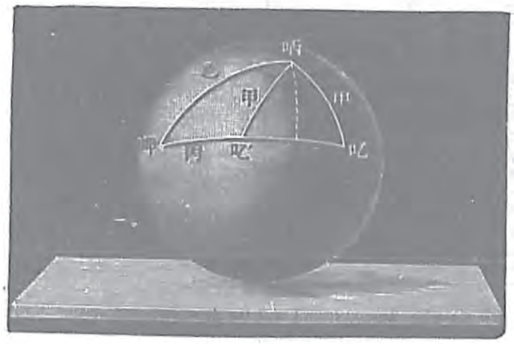
97. (1.) 已知者爲二邊及其一邊之對角.

如已知角之對邊與90°之較大於其餘一已知邊,則已知角與其對邊必同小或同大於90°,故有二種解法.

(2.) 已知者爲二角及其一角之對邊.

如已知邊之對角與90°之較大於其餘一已知角,則已

知邊與其對角必同小或同大於90°,故有二種解法.



(如左二公式內之任一式,其分子大於分母,則題爲不可解.)

$$\text{正弦吒}=\frac{\text{正弦呷正弦乙}}{\text{正弦甲}},\qquad \text{正弦甲}=\frac{\text{正弦乙正弦呷}}{\text{正弦吒}}.$$

法問 第六端

98. 今有甲 = 40° 16′, 乙 = 47° 44′, 呷 = 52° 30′,

求吒,吒′,哂,哂′,與丙,丙′.

求吒與吒′

公式VII可寫之如左式,

$$\text{正弦吒}=\frac{\text{正弦呷正弦乙}}{\text{正弦甲}}.$$

對正弦呷 = 9.89947

對正弦乙 = 9.86924

餘對正弦甲 = 0.18953

對正弦吒 = 9.95824

吒 = 65° 16′ 30″

吒′ = 114° 43′ 30″

求 哂

公式V可寫之如左式,

$$\text{餘切}\frac{1}{2}\text{哂}=\frac{\text{正弦}\frac{1}{2}(\text{甲}+\text{乙})\text{正切}\frac{1}{2}(\text{呷}-\text{吒})}{\text{正弦}\frac{1}{2}(\text{甲}-\text{乙})}.$$

對正弦$\frac{1}{2}$(甲+乙) = 9.84177

對正切$\frac{1}{2}$(呷−吒) = 9.04901 負

餘對正弦$\frac{1}{2}$(甲−乙) = 1.18633 負

對餘切$\frac{1}{2}$哂 = 10.07711

$\frac{1}{2}$哂 = 39° 56′ 24″

哂 = 79° 52′ 48″

求 昞′

對正弦 $\frac{1}{2}$(甲+乙)= 9.84177

對正切$\frac{1}{2}$(呷−吃′)= 9.78153 負

餘對正弦$\frac{1}{2}$(甲−乙)= 1.18633 負

對餘切$\frac{1}{2}$昞′=10.80963

$\frac{1}{2}$昞′= 8° 48′ 41″

昞′= 17° 37′ 22″

求 丙

公式IV可寫之如左式,

$$正切\frac{1}{2}丙=\frac{餘弦\frac{1}{2}(呷+吃)正切\frac{1}{2}(甲+乙)}{餘弦\frac{1}{2}(呷-吃)}.$$

對餘弦$\frac{1}{2}$(呷+吃)= 9.71326

對正切$\frac{1}{2}$(甲+乙)= 9.98484

餘對餘弦$\frac{1}{2}$(呷−吃)= 0.00270

對正切$\frac{1}{2}$丙 = 9.70080

$\frac{1}{2}$丙 = 26° 39′ 42″

丙 = 53° 19′ 24″

求 丙′

對餘弦$\frac{1}{2}$(呷+吃′)=9.04631

對正切$\frac{1}{2}$(甲+乙) = 9.98484

餘對餘弦$\frac{1}{2}$(呷−吃′)=0.06745

對正切$\frac{1}{2}$丙′ =9.09860

$\frac{1}{2}$丙′ =7° 9′ 9″

丙′ = 14° 18′ 18″

覆 驗

公式III可寫之如左式,

$$正弦乙=\frac{正弦吃正弦丙}{正弦昞}.$$

對正弦吃 = 9.95824

對正弦丙 = 9.90418

餘對正弦昞 = 0.00682

對正弦乙 = 9.86924

乙 = 47° 44′

演 習

99. (1.) 呷吃昞弧三角形內,甲邊 = 124° 53′, 乙邊 = 31° 19′, 呷角 = 16° 26′, 求其餘件.

(2.) 呷吃昞斜弧三角形內,呷角 = 128° 45′, 昞角 = 30°

35′，呒角＝68° 50′，求其餘件.

(3.) 呷呒哂弧三角形之丙邊＝78° 15′，乙邊＝56° 20′，呷＝120°，求其餘件.

(4.) 呷呒哂弧三角形之呷角＝125° 20′，哂角＝48° 30′，乙邊＝83° 13′，求其餘件.

(5.) 呷呒哂弧三角形內之丙＝40° 35′，乙＝39° 10′，甲＝71° 15′，求其諸角.

(6.) 呷呒哂弧三角形內之呷＝109° 55′，呒＝116° 38′，哂＝120° 43′，求其諸邊.

(7.) 呷呒哂弧三角形內，呷角＝130° 5′ 22″，哂角＝36° 45′ 28″，乙邊＝44° 13′ 45″，求其餘件.

(8.) 呷呒哂弧三角形內，呷角＝33° 15′ 7″，呒＝31° 34′ 38″，哂＝161° 25′ 17″，求其諸邊.

(9.) 呷呒哂弧三角形內，丙邊＝112° 22′ 58″，乙邊＝52° 39′ 4″，甲邊＝89° 16′ 53″，求其諸角.

(10.) 呷呒哂弧三角形內，丙＝76° 35′ 36″，乙＝50° 10′ 30″，呷＝34° 15′ 3″，求其餘件.

弧三角形之面積

100. 按幾何學已證得弧三角形之面積等於其弧餘，是即

面積＝(呷＋呒＋哂－2正角)×三正角三角形之面積.

式中呷，呒，哂爲弧三角形之三角.

是以 $$\frac{\text{面積}}{\text{球面}}=\frac{\text{呷}+\text{呺}+\text{昞}-180^\circ}{720^\circ}.$$

但球面爲4冂咮^2,故

$$\text{面積}=\text{冂咮}^2\left(\frac{\text{呷}+\text{呺}+\text{昞}-180^\circ}{180^\circ}\right).$$

下式曰雷禮耳之術,可由已知弧三角形之三邊而求得$(\text{呷}+\text{呺}+\text{昞}-180^\circ)$,式中甲,乙,丙爲三邊,而$2\text{巾}=\text{甲}+\text{乙}+\text{丙}$.其式爲

$$\text{正切}\left(\frac{\text{呷}+\text{呺}+\text{昞}-180^\circ}{4}\right)=$$

$$\sqrt{\text{正切}\frac{1}{2}\text{巾}\,\text{正切}\frac{1}{2}(\text{巾}-\text{甲})\,\text{正切}\frac{1}{2}(\text{巾}-\text{乙})\,\text{正切}\frac{1}{2}(\text{巾}-\text{丙})}.$$

演習

(1.) 弧三角形之三角呷$=63^\circ$,呺$=84^\circ\ 21'$,昞$=79^\circ$,球之半徑爲10寸,求此弧三角形之面積若干.

(2.) 今有弧三角形之邊甲$=6.47$寸,乙$=8.39$寸,丙$=9.43$寸,球之半徑爲25寸,求此形之面積若干.

(3.) 弧三角形內呷$=75^\circ\ 16'$,呺$=39^\circ\ 20'$,丙$=26$寸,球半徑爲14寸,求此形之面積若干.

(4.) 弧三角形內甲$=441$哩,乙$=287$哩,昞$=38^\circ\ 21'$,球半徑爲3960哩,求此形之面積若干.

弧三角術　第三章
天文地輿算題
天文算題

101. 人居地面,仰視俯察,宛若一己居大球之中心,其上之半卽大穹也.此大球曰天球,球面之上羣曜系焉.天球似於二十三點五十六分時內,環繞軸線一匝.此軸線卽地軸引長至無窮所成者也.地軸穿天球之二點,定而不動,是曰天之南北極.天上有北極星,甚近天之北極(祇差1°16′).故指其所在,人於地面北行,則見天北極似出地平漸高,其高度正與測處之緯度相同.

天空諸恒星相與之方位定而不變.日月,行星,彗星,與恒星相與之方位時時有變,日似在恒星中向東而行,日約一度,月則加十三倍焉.

天球正在人頂上之一點曰天頂.

任一處距天頂九十度之大圜曰地平.

地赤道之平面如展大至天球,則天球所成之大圜曰天赤道.

日在恒星中向東行之軌道曰黃道.黃道爲一大圜,與赤道之平面斜交作角約爲$23\frac{1}{2}^\circ$.

地軸引長,穿天球之二點,曰天赤道之二極,各距赤道90°.

黃道之二極各距黃道90°.

天赤道交黃道之二點曰二分點,日過之而向北者曰春分點,日過之而向南者曰秋分點.

諸曜距天赤道之度數曰赤緯度,以北爲正,南爲負.

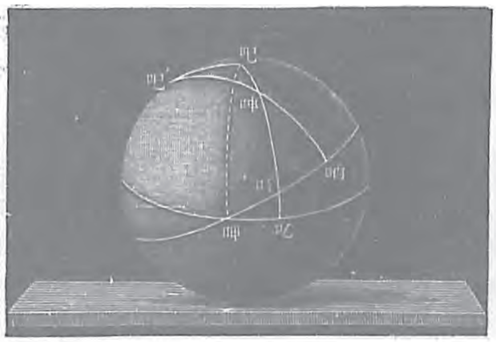
於天赤道上自春分點向東度得距過某曜及天赤道二極之大圜之度數,爲此曜之赤經度.

於過某曜及黃道極之大圜上,度得某曜距黃道之度數,爲此曜之黃緯度.

於黃道上自春分點向東度得距過某曜及黃道極之大圜之度數,爲此曜之黃經度.

演習

(1.) 今有某星之赤經度爲25°35′,赤緯度爲+63°26′,設天赤道與黃道之交角爲23°27′,求其黃經黃緯度.



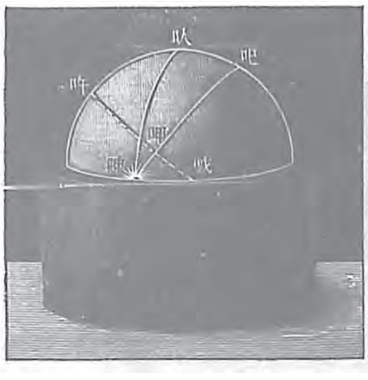
如圖,呷𠮙為天赤道,呷𠰳為黃道,吧為赤道之一極,吧'為黃道之一極.呻為星之所在,呻𠮙與呻𠰳為自吧與吧'所作正交呷𠮙與呷𠰳之線.呷𠮙為星之赤經度,𠮙呻為其赤緯度,呷𠰳為星之經度,呻𠰳為其緯度.

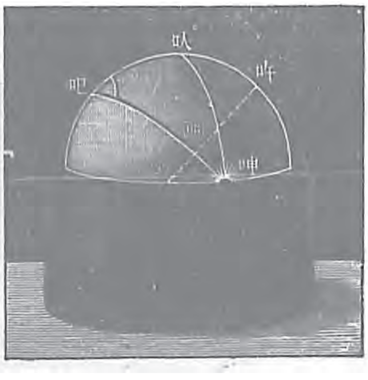
於吧'吧呻弧三角形內,可見吧'呻為黃緯之餘弧,吧呻為赤緯之餘弧,而吧'吧呻為 $\bar{90}°$ 加赤經.又當留意呷為春分點.

(2.) 西歷十二月二十一日,太陽之赤緯為 $-23° 27'$,問在北緯 $41° 18'$ 之處,視日出之時當在何時.

當太陽上邊齊地平時,叺呻即天頂與日心之距為 $90° 50'$.此 $50'$ 即為日半徑 $16'$ 與折光差 $34'$ 之和也.

(3.) 西歷十二月二十一日,太陽之赤緯為 $-23° 27'$,問在北緯 $50° 35'$ 之處,視日落當在何時.


日出圖


日落圖

在上二圖內,吧爲天赤道之極,叺爲天頂,哎吘爲天赤道.呷呻爲日之赤緯,叺呻 = 90° 50′,吧呻 = 90° + 赤緯,吧叺 = 90° − 緯度.按題所求者爲呻吧叺角.極上每 15° 之角適配一小時.

地輿算題

102. 過某處與地球兩極之大圜,曰該處之子午圈.

子午圈上自赤道至某處之弧,曰該處之緯度.

緯度自赤道向南向北量之,起 0°,訖 90°.

赤道上自原點子午圈,至某處子午圈之弧曰該處之經度.各國公議以英京倫敦哥尼尚之觀象臺之子午圈爲原點子午圈.

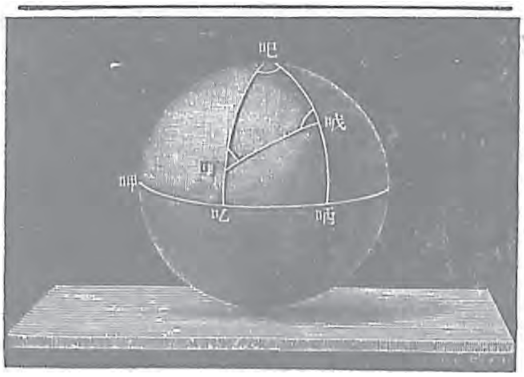
經度乃向東或西度之,起 0°,訖 180°.

某處之經度,亦即爲其處子午圈與原點子午圈間之角.

下諸問內設一分等於一海哩

(1.) 今於地球面上選得叮哎二處,叮在東經 60° 15′,北緯 20° 10′,哎在東經 115° 20′,北緯 37° 20′,求二處相距若干海哩.

如圖,呷呴爲地球之赤道,吧爲北極,呷爲原點子午圈交赤道之點,吧叱與吧呴爲過叮與哎之子午圈.是則呷叱爲叮點之經度,叱叮爲其緯度,呷呴爲哎點之經度,呴哎爲其緯度.



(2.) 紐約城居北緯 40° 43′,西經 74° 0′,舊金山大埠居北緯 37° 48′,西經 122° 28′,求此二城間最短之距.

(3.) 散地阿克居北緯 40° 28′,西經 74° 1′,馬代拉居北緯 32° 28′,西經 16° 55′,求此二城間最短之距.

(4.) 舊金山大埠居北緯 37° 48′,西經 122° 28′,瓜哇島之巴達斐亞埠居南緯 6° 9′,東經 106° 53′,求此二埠間最短之距.

(5.) 舊金山大埠居北緯 37° 48′,西經 122° 28′,智利國之法巴來蘇埠居南緯 33° 2′,西經 71° 41′,求此二埠間最短之距.

弧三角術　第四章

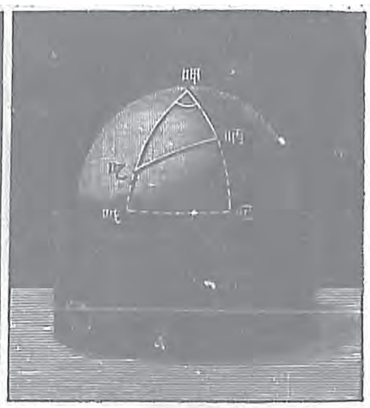
弧三角形之實驗解法

103. 如設一球適容於半球形盃中,則弧三角形已知之諸件可一一先定之,而後度得所求之諸件.

弧三角形之邊爲大圜上之弧,可依盃邊爲準,用石筆畫之於球上,以盃邊適合大圜也.盃邊又宜分二向,各劃自0°至180°之分線.

弧三角形之角,可度球上距角尖90°之大圜而得之.

第一端　已知弧三角形之甲乙丙三邊,求定呷,叱,呐三角.



第一圖　　　　第二圖

置球於盃中,依盃邊爲準,作一線於球上,其度數與丙邊等.此線之二端命之爲呷與叱.次以呷與叱遞爲心,乙

與甲遞爲半徑,用雙股規作二小弧,相交於㖶(見第一圖).然後移球之位,使呷與㖶適各沿盃邊,乃作呷㖶線＝乙.仿此作呝㖶線＝甲.

欲定呷角之度數,法置呷呝弧適合盃邊,乃作呷哦等於90°.又引長呷㖶爲呷吒適等於90°.移球之位使哦與吒齊沿盃邊,乃取哦吒之度數,即呷之度數也.仿此可定呝與㖶之度數.

第二端　已知呷呝㖶三角,求甲乙丙三邊.

自180°各減呷,呝,與㖶,以得極三角形之甲′,乙′,丙′.次按第一端之法作此極三角形,命其三角尖爲呷′,呝′,㖶′.遞以此三尖爲中心,以90°爲半徑,用雙股規作諸小弧,此諸小弧之交點,即原三角形之呷,呝,㖶三角尖也.是則原形之甲乙丙三邊,可在盃邊量度而得之.

第三端　已知乙丙二邊與間角呷,求呝,㖶,與甲.

第三圖

第四圖

如第三圖,度取呷𠮙令等於丙,又於呷𠮙之引長線內作叮點,令呷叮等於90°.次用雙股規誌別點吧,使距呷90°.乃轉球使叮與吧同沿盃邊,作叮戓等於呷角之度數.又令呷與戓同沿盃邊,作呷吶線等於乙邊之度數.作線聯吶與𠮙,則所求三角形之諸件可度得之.

第四端　已知呷𠮙二角,與其間之邊丙,求甲,乙,與吶.

度取呷𠮙線等於丙,次仿第三端作呷與𠮙二角,展長其邊使相交於吶.

第五端　已知乙甲二邊,與其一邊之對角呷,求丙,𠮙,與吶.(歧疑之端.)

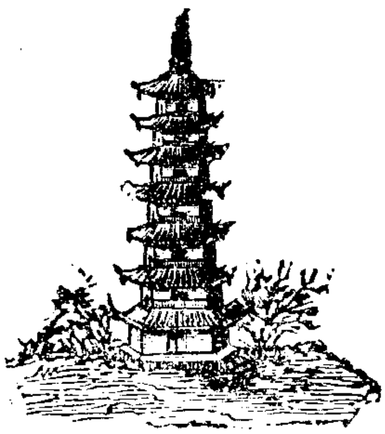
如第四圖,度取呷吶等於乙,仿第三端作呷角.以雙股規取丙為半徑,以吶為中心作弧,交三角形之餘一邊於𠮙於𠮙',且度取兩三角形之餘件.

如以吶為心,所作之弧不交三角形之餘邊,則此題不可解.如切之,則有一解法.

第六端　已知呷𠮙二角,與其一角之對邊甲.

按第五端作已知三角形之極三角形,次按第二端作其原三角形,乃度所求之諸件.

以上所舉之作法,統正斜三角形而悉賅之.



公 式 彙 錄

函數之相關(10節)

$$正切天=\frac{正弦天}{餘弦天},\qquad 餘切天=\frac{餘弦天}{正弦天},$$

$$正割天=\frac{1}{餘弦天},\qquad 餘割天=\frac{1}{正弦天},$$

$$正切天餘切天=1,\qquad 正弦^2天+餘弦^2天=1,$$

$$1+正切^2天=正割^2天,\qquad 1+餘切^2天=餘割^2天.$$

正三角形(14與27節)

$$正弦呷=\frac{甲}{丙},\qquad 正弦吃=\frac{乙}{丙},$$

$$餘弦呷=\frac{乙}{丙},\qquad 餘弦吃=\frac{甲}{丙},$$

$$正切呷=\frac{甲}{乙},\qquad 正切吃=\frac{乙}{甲},$$

$$餘切呷=\frac{乙}{甲},\qquad 餘切吃=\frac{甲}{乙},$$

$$甲^2+乙^2=丙^2,$$

此諸公式中丙為弦,甲與乙為正角旁之二邊,呷與吃

爲對甲乙二邊之銳角.

兩角之函數(30至34節)

$$正弦(天+地)=正弦天餘弦地+餘弦天正弦地,$$

$$正弦(天-地)=正弦天餘弦地-餘弦天正弦地,$$

$$餘弦(天+地)=餘弦天餘弦地-正弦天正弦地,$$

$$餘弦(天-地)=餘弦天餘弦地+正弦天正弦地.$$

$$正切(天+地)=\frac{正切天+正切地}{1-正切天正切地},$$

$$正切(天-地)=\frac{正切天-正切地}{1+正切天正切地},$$

$$餘切(天+地)=\frac{餘切天餘切地-1}{餘切地+餘切天},$$

$$餘切(天-地)=\frac{餘切天餘切地+1}{餘切地-餘切天}.$$

倍角之函數(36節)

$$正弦2天=2正弦天餘弦天,$$

$$餘弦2天=餘弦^2天-正弦^2天,$$

$$=1-2正弦^2天,$$

$$=2餘弦^2天-1,$$

$$正切2天=\frac{2正切天}{1-正切^2天},$$

$$餘切2天=\frac{餘切^2天-1}{2餘切天}.$$

半角之函數 (37節)

$$正弦\frac{1}{2}天=\pm\sqrt{\frac{1-餘弦天}{2}},$$

$$餘弦\frac{1}{2}天=\pm\sqrt{\frac{1+餘弦天}{2}},$$

$$正切\frac{1}{2}天=\pm\sqrt{\frac{1-餘弦天}{1+餘弦天}},$$

$$餘切\frac{1}{2}天=\sqrt{\frac{1+餘弦天}{1-餘弦天}}.$$

函數之和較 (38節)

$$正弦戊+正弦亥=2\,正弦\frac{1}{2}(戊+亥)餘弦\frac{1}{2}(戊-亥),$$

$$正弦戊-正弦亥=2\,餘弦\frac{1}{2}(戊+亥)正弦\frac{1}{2}(戊-亥),$$

$$餘弦戊+餘弦亥=2\,餘弦\frac{1}{2}(戊+亥)餘弦\frac{1}{2}(戊-亥),$$

$$餘弦戊-餘弦亥=-2\,正弦\frac{1}{2}(戊+亥)正弦\frac{1}{2}(戊-亥).$$

$$\frac{正弦戊+正弦亥}{正弦戊-正弦亥}=\frac{正切\frac{1}{2}(戊+亥)}{正切\frac{1}{2}(戊-亥)}.$$

斜三角形 (42至45節)

$$\frac{甲}{乙}=\frac{正弦呷}{正弦叱},\qquad \frac{甲}{丙}=\frac{正弦呷}{正弦呐},\qquad \frac{乙}{丙}=\frac{正弦叱}{正弦呐}.$$

$$\frac{甲-乙}{甲+乙}=\frac{正切\frac{1}{2}(呷-叱)}{正切\frac{1}{2}(呷+叱)},$$

$$\frac{甲-丙}{甲+丙}=\frac{正切\frac{1}{2}(呷-㕲)}{正切\frac{1}{2}(呷+㕲)}$$

$$\frac{乙-丙}{乙+丙}=\frac{正切\frac{1}{2}(吆-㕲)}{正切\frac{1}{2}(吆+㕲)}.$$

$$甲^2=乙^2+丙^2-2乙丙餘弦呷,$$

$$乙^2=丙^2+甲^2-2丙甲餘弦吆,$$

$$丙^2=甲^2+乙^2-2甲乙餘弦㕲.$$

$$正切\frac{1}{2}呷=\sqrt{\frac{(申-乙)(申-丙)}{申(申-甲)}},$$

$$正切\frac{1}{2}吆=\sqrt{\frac{(申-丙)(申-甲)}{申(申-乙)}},$$

$$正切\frac{1}{2}㕲=\sqrt{\frac{(申-甲)(申-乙)}{申(申-丙)}},$$

上諸公式中申 $=\frac{甲+乙+丙}{2}$.

$$正切\frac{1}{2}呷=\frac{呼}{申-甲},\quad 正切\frac{1}{2}吆=\frac{呼}{申-乙},\quad 正切\frac{1}{2}㕲=\frac{呼}{申-丙},$$

上諸公式內呼 $=\sqrt{\frac{(申-甲)(申-乙)(申-丙)}{申}}$.

三角形之面積（46節）

$$呻=\frac{1}{2}甲丙正弦吆.\quad 呻=\frac{1}{2}乙甲正弦㕲.\quad 呻=\frac{1}{2}丙乙正弦呷.$$

$$呻=\sqrt{申(申-甲)(申-乙)(申-丙)}.$$

對數,正餘弦,與指函數之級數(57節)

$$對_{自}(1+天)=天-\frac{天^2}{2}+\frac{天^3}{3}-\frac{天^4}{4}+\cdots$$

$$餘弦天=1-\frac{天^2}{2!}+\frac{天^4}{4!}-\frac{天^6}{6!}+\cdots$$

$$正弦天=天-\frac{天^3}{3!}+\frac{天^5}{5!}-\frac{天^7}{7!}+\cdots$$

$$戊^{天}=1+天+\frac{天^2}{2!}+\frac{天^3}{3!}+\frac{天^4}{4!}+\cdots$$

棣美弗之理(71節)

$$(餘弦天+\sqrt{-1}正弦天)^{卯}=餘弦卯天+\sqrt{-1}正弦卯天.$$

$$正弦卯天=$$

$$卯餘弦^{卯-1}天正弦天-\frac{卯(卯-1)(卯-2)}{3!}餘弦^{卯-3}天正弦^3天+\cdots$$

$$餘弦卯天=卯餘弦^{卯}天-\frac{卯(卯-1)}{2!}餘弦^{卯-2}天正弦^2天+\cdots$$

雙線函數(75節)

$$雙正弦天=\frac{戊^{天}-戊^{-天}}{2},$$

$$雙餘弦天=\frac{戊^{天}+戊^{-天}}{2},$$

$$戊^{幻天}=餘弦天+幻正弦天.$$

$$正弦天=\frac{戊^{幻天}-戊^{-幻天}}{2幻},$$

$$餘弦天=\frac{戊^{幻天}+戊^{-幻天}}{2}.$$

$$正弦幻天=\frac{幻(戊^{天}-戊^{-天})}{2}=幻雙正弦天,$$

$$餘弦幻天=\frac{戊^{天}+戊^{-天}}{2}=雙餘弦天.$$

弧三角形

正弧三角形與象限弧三角形(83,87節)

用納氏術可也.

斜弧三角形(89至93節)

$$餘弦甲=餘弦乙餘弦丙+正弦乙正弦丙餘弦呷.$$

$$餘弦呷=-餘弦叱餘弦呩+正弦叱正弦呩餘弦甲.$$

$$正切\frac{1}{2}呷=\sqrt{\frac{正弦(申-乙)正弦(申-丙)}{正弦申正弦(申-甲)}}.$$

$$正切\frac{1}{2}甲=\sqrt{\frac{-餘弦呻餘弦(呻-呷)}{餘弦(呻-叱)餘弦(呻-呩)}}.$$

$$\frac{正弦\frac{1}{2}(呷+叱)}{正弦\frac{1}{2}(呷-叱)}=\frac{正切\frac{1}{2}丙}{正切\frac{1}{2}(甲-乙)}.$$

$$\frac{餘弦\frac{1}{2}(呷+叱)}{餘弦\frac{1}{2}(呷-叱)}=\frac{正切\frac{1}{2}丙}{正切\frac{1}{2}(甲+乙)}.$$

$$\frac{正弦\frac{1}{2}(甲+乙)}{正弦\frac{1}{2}(甲-乙)}=\frac{餘切\frac{1}{2}呩}{正切\frac{1}{2}(呷-叱)}.$$

$$\frac{\text{餘弦}\frac{1}{2}(\text{甲}+\text{乙})}{\text{餘弦}\frac{1}{2}(\text{甲}-\text{乙})}=\frac{\text{餘切}\frac{1}{2}\text{丙}}{\text{正切}\frac{1}{2}(\text{呷}+\text{叱})}.$$

$$\frac{\text{正弦甲}}{\text{正弦呷}}=\frac{\text{正弦乙}}{\text{正弦叱}}.$$

弧三角形之面積 (101節)

$$\text{面積}=\text{冂咊}^2\left(\frac{\text{呷}+\text{叱}+\text{哂}-180°}{180°}\right)$$

$$\text{正切}\left(\frac{\text{呷}+\text{叱}+\text{哂}-180°}{4}\right)=$$

$$\sqrt{\text{正切}\frac{1}{2}\text{申正切}\frac{1}{2}(\text{申}-\text{甲})\text{正切}\frac{1}{2}(\text{申}-\text{乙})\text{正切}\frac{1}{2}(\text{申}-\text{丙})}.$$

附　　錄

平三角術弧三角術假弧三角術三者之相關

前文三角術中所論之面,乃平面弧面二種.其別異之處,卽平面之曲率爲無,而弧面之曲率恒有定正數,命之爲牛.設球之半徑增至無限,則其面漸近平面,而以之爲限,其曲率牛卽漸近於無.

推論極幾何學之理,知更有一種面積,其曲率恒爲負數,是曰假球,研究假球上三角之術,曰假弧三角術.

夫自球面過平面,而至假球面,則牛自正同數變爲負同數.是平三角術之公式爲此餘二種三角術之限端.

前論弧三角術,俱設球半徑爲1,如命之爲未,又設弧三角形之三邊爲甲,乙,丙,則公式有變,因以$\frac{甲}{未}$代甲,$\frac{乙}{未}$代乙,$\frac{丙}{未}$代丙故也.如

$$正弦丙=\frac{正弦丙}{正弦甲},$$

變爲

$$正弦丙=\frac{正弦\frac{丙}{未}}{正弦\frac{甲}{未}}.$$

假弧三角術之公式,與弧三角術之公式無他分別,惟以 $\frac{甲}{未}, \frac{乙}{未}, \frac{丙}{未}$ 之雙線函數代三角函數耳.

是則與以上弧三角術公式相配之假弧三角術公式當爲

$$\text{正弦丙} = \frac{\text{雙正弦}\frac{丙}{未}}{\text{雙正弦}\frac{甲}{未}},$$

球面

假球面

假球乃以一種曲線環繞地軸而成者,其曲線之式爲

$$地 = 未\,\text{對}\,\frac{未 + \sqrt{未^2 - 天^2}}{天} - \sqrt{未^2 - 天^2},$$

此假球之底半徑爲未.

故平三角術之公式,可自弧三角術或假弧三角術之公式而得之,祗合函數成級數,且令未增至無限可矣.

法　問

試證如未增至無限,則左列相當之正弧三角形與假

正弧三角形之公式

$$\text{餘弦}\frac{\text{甲}}{\text{末}}=\text{餘弦}\frac{\text{乙}}{\text{末}}\text{餘弦}\frac{\text{丙}}{\text{末}}, \tag{1}$$

$$\text{雙餘弦}\frac{\text{甲}}{\text{末}}=\text{雙餘弦}\frac{\text{乙}}{\text{末}}\text{雙餘弦}\frac{\text{丙}}{\text{末}}, \tag{2}$$

變為相當之正平三角形公式如左

$$\text{甲}^2=\text{乙}^2+\text{丙}^2 \tag{3}$$

設以餘弦$\frac{\text{甲}}{\text{末}}$等之級數代入(1)式,則得

$$\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\text{甲}}{\text{末}}\right)^2+\cdots\right)=\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\text{乙}}{\text{末}}\right)^2+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\text{丙}}{\text{末}}\right)^2+\cdots\right),$$

即 $$1-\frac{1}{2!}\frac{\text{甲}^2}{\text{末}^2}+\frac{1}{4!}\frac{\text{甲}^4}{\text{末}^4}+\cdots=1-\frac{1}{2!}\frac{\text{乙}^2}{\text{末}^2}-\frac{1}{2!}\frac{\text{丙}^2}{\text{末}^2}+\frac{1}{4!}\frac{\text{乙}^4}{\text{末}^4}+\cdots \tag{4}$$

設以雙餘弦$\frac{\text{甲}}{\text{末}}$等之級數,即自雙餘弦天$=\frac{\text{戊}^{\text{天}}+\text{戊}^{-\text{天}}}{2}$所得者代入(2)式,則有

$$1+\frac{1}{2!}\left(\frac{\text{甲}}{\text{末}}\right)^2+\cdots=\left(1+\frac{1}{2!}\left(\frac{\text{乙}}{\text{末}}\right)^2+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2!}\left(\frac{\text{丙}}{\text{末}}\right)^2+\cdots\right),$$

即 $$1+\frac{1}{2!}\frac{\text{甲}^2}{\text{末}^2}+\frac{1}{4!}\frac{\text{甲}^4}{\text{末}^4}+\cdots=1+\frac{1}{2!}\frac{\text{乙}^2}{\text{末}^2}+\frac{1}{2!}\frac{\text{丙}^2}{\text{末}^2}+\frac{1}{4!}\frac{\text{乙}^4}{\text{末}^4}+\cdots \tag{5}$$

消去(4)(5)二式內之1,次以末^{2}乘之,末令末增至無限,則自二式俱可得

$$\text{甲}^2=\text{乙}^2+\text{丙}^2.$$

演習

試將左列諸平三角術公式,證其可自相當之弧三角

術公式而得之亦可自相當之假弧三角術公式而得之.

正三角形,呷＝正角

(1.) 平　　正弦㖞 $=\frac{\text{丙}}{\text{甲}}$.

弧　　正弦㖞 $=\frac{\text{正弦丙}}{\text{正弦甲}}$.

假弧　　正弦㖞 $=\frac{\text{雙正弦丙}}{\text{雙正弦甲}}$.

斜三角形

(2.) 平　$\text{甲}^2=\text{乙}^2+\text{丙}^2-2\,\text{乙丙餘弦呷}$.

弧　餘弦甲＝

餘弦乙餘弦丙＋正弦乙正弦丙餘弦呷.

假弧　雙餘弦甲＝

雙餘弦乙雙餘弦丙＋雙正弦乙雙正弦丙餘弦呷.

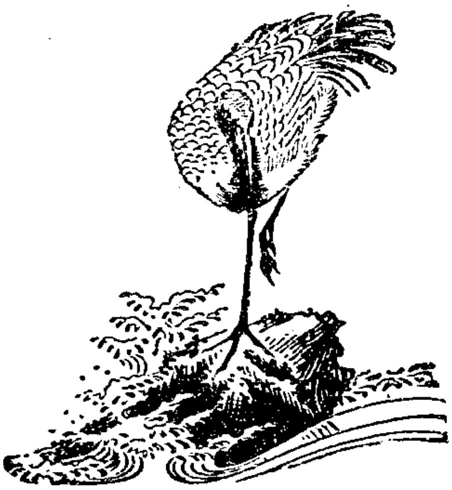
(3.) 平　呻 $=\sqrt{\text{申}(\text{申}-\text{甲})(\text{申}-\text{乙})(\text{申}-\text{丙})}$.

弧　　$\text{正切}\frac{(\text{呷}+\text{𠮙}+\text{㖞}-180^\circ)}{4}=$

$$\sqrt{\text{正切}\frac{1}{2}\frac{\text{申}}{\text{未}}\text{正切}\frac{1}{2}\frac{(\text{申}-\text{甲})}{\text{未}}\text{正切}\frac{1}{2}\frac{(\text{申}-\text{乙})}{\text{未}}\text{正切}\frac{1}{2}\frac{(\text{申}-\text{丙})}{\text{未}}}.$$

假弧　$\text{正切}\frac{(180^\circ-\text{呷}+\text{𠮙}+\text{㖞})}{4}=$

$$\sqrt{\text{雙正切}\frac{1}{2}\frac{\text{申}}{\text{未}}\text{雙正切}\frac{1}{2}\frac{(\text{申}-\text{甲})}{\text{未}}\text{雙正切}\frac{1}{2}\frac{(\text{申}-\text{乙})}{\text{未}}\text{雙正切}\frac{1}{2}\frac{(\text{申}-\text{丙})}{\text{未}}}.$$



答 式 彙 錄

4節(3面)。

(1.) $192°\ 51'\ 25\frac{5}{7}''$.

第三象限.

(2.) 25°.

(3.) 287°, 647°.

(4.) 第三象限.

9節(10面)。

正切 1000° 爲負.

餘弦 810° 爲 0.

正弦 760° 爲正.

餘切 −70° 爲負.

餘弦 −550° 爲負.

正切 −560° 爲負.

正割 300° 爲正.

餘切 1560° 爲負.

正弦 130° 爲正.

餘弦 260° 爲負.

正切 310° 爲負.

13節(12面)。

(3.) 餘弦 $-30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

正切 $-30° = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$,

餘切 $-30° = -\sqrt{3}$,

正割 $-30° = \frac{2}{3}\sqrt{3}$,

餘割 $-30° = -2$.

(4.) 餘弦天 $= -\frac{2}{3}\sqrt{2}$,

正切天 $= \frac{1}{4}\sqrt{2}$,

餘切天 $= 2\sqrt{2}$,

正割天 $= -\frac{3}{4}\sqrt{2}$,

餘割天 $= -3$.

(5.) 餘弦地 $= \frac{4}{5}$,

正切地 $= -\frac{3}{4}$,

餘切地 $= -\frac{4}{3}$,

正割地 $= \frac{5}{4}$,

餘割地 $= -\frac{5}{3}$.

(6.) 正弦$60°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

正切$60°=\sqrt{3}$,

餘切$60°=\frac{1}{3}\sqrt{3}$,

正割$60°=2$,

餘割$60°=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

(7.) 餘弦$0°=1$,

正切$0°=0$.

(8.) 正弦人$=\frac{4}{5}$,

餘弦人$=\frac{3}{5}$,

餘切人$=\frac{3}{4}$,

正割人$=\frac{5}{3}$,

餘割人$=\frac{5}{4}$.

(9.) 正弦$45°=$

餘弦$45°=\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

正切$45°=1$,

正割$45°=$餘割$45°=\sqrt{2}$.

(10.) 正弦地$=-\frac{1}{3}\sqrt{5}$,

餘弦地$=-\frac{2}{3}$,

餘切地$=\frac{2}{5}\sqrt{5}$,

正割地$=-\frac{3}{2}$,

餘割地$=-\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

(11.) 正弦$30°=\frac{1}{2}$,

餘弦$30°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

正切$30°=\frac{1}{3}\sqrt{3}$,

正割$30°=\frac{2}{3}\sqrt{3}$,

餘割$30°=2$.

(12.) 正弦天$=\frac{4}{5}$,

餘弦天$=-\frac{3}{5}$.

(13.) $\sqrt{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{6}\sqrt{5}}$.

17節(16面).

(1.) 正弦$70°=$餘弦$20°$,

餘弦$60°=$正弦$30°$,

餘弦$89°31'=$正弦$29'$

餘切$47°=$正切$43°$,

正切$63°=$餘切$27°$,

正弦$72°39'=$

餘弦$17°21'$.

(2.) 天$=30°$.

(3.) 天$=22°30'$.

(4.) 天$=18°$.

(5.) 天$=15°$.

26節(24面).

(1.) $225°$ 與 $315°$,

$60°$與$240°$.

(2.) $60°, 120°, 420°, 480°$.

(3.) 正弦$-30° = -\frac{1}{2}$,

餘弦$-30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

正弦$765° =$

餘弦$765° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

正弦$120° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

餘弦$120° = -\frac{1}{2}$,

正弦$210° = -\frac{1}{2}$,

餘弦$210° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(4.) $405°$ 之函數等於 $45°$ 之函數.

正弦$600° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

餘弦$600° = -\frac{1}{2}$,

正切$600° = \sqrt{3}$,

餘切$600° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$,

正割$600° = -2$,

餘割$600° = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

$1125°$ 之函數等於 $45°$ 之函數.

正弦$-45° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

餘弦$-45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

正切$-45° =$

餘切$-45° = -1$,

正割$-45° = \sqrt{2}$,

餘割$-45° = -\sqrt{2}$.

正弦$225° =$

餘弦$225° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

正切$225° =$

餘切$225° = 1$,

正割$225° =$

餘割$225° = -\sqrt{2}$.

(5.) $-120°$之函數與四間內$600°$之函數同.

正弦$-225° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

餘弦$-225° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

正切$-225° =$

餘切$-225° = -1$,

正割$-225^\circ=-\sqrt{2}$,

餘割$-225^\circ=\sqrt{2}$.

正弦$-420^\circ=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

餘弦$-420^\circ=\frac{1}{2}$,

正切$-420^\circ=-\sqrt{3}$,

餘切$-420^\circ=-\frac{1}{3}\sqrt{3}$,

正割$-420^\circ=2$,

餘割$-420^\circ=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

3270°之函數等於30°之函數.

(6.) 正弦$233^\circ=-$餘弦37°,

餘弦$233^\circ=-$正弦37°,

正切$233^\circ=$餘切37°,

餘切$233^\circ=$正切37°,

正割$233^\circ=-$餘割37°,

餘割$233^\circ=-$正割37°.

正弦$-197^\circ=$正弦17°,

餘弦$-197^\circ=-$餘弦17°,

正切$-197^\circ=-$正切17°,

餘切$-197^\circ=-$餘切17°,

正割$-197^\circ=-$正割17°,

餘割$-197^\circ=$餘割17°.

正弦$894^\circ=$正弦6°,

餘弦$894^\circ=-$餘弦6°,

正切$894^\circ=-$正切6°,

餘切$894^\circ=-$餘切6°,

正割$894^\circ=-$正割6°,

餘割$894^\circ=$餘割6°.

(7.) 正弦$267^\circ=-$正弦87°,

正切$-254^\circ=-$正切74°

餘弦$950^\circ=-$餘弦50°.

(8.) -0.28.

(9.) 2正弦^{2}天.

(10.) $1+$正割^{2}天.

(11.) 正弦(天-90°)$=-$餘弦天,

餘弦(天-90°)$=$正弦天,

正切(天-90°)$=-$餘切天,

餘切(天-90°)$=-$正切天,

正割(天-90°)$=$餘割天,

餘割(天-90°)$=-$正割天.

28節(28面).

(1.) 甲=62.324,

呷=32° 52′ 40″.

(2.) 乙=21.874,

呷=39° 45′ 28″,

吃=50° 14′ 32″.

(3.) 甲=300.95,

乙=683.96,

吃=66° 15′.

(4.) 乙=26.608,

丙=45.763,

吃=35° 33′,

面積=495.34.

(5.) 乙=3.9973,

丙=4.1537,

呷=15° 46′ 33″,

面積=2.257.

(6.) 乙=0.01729.

(7.) 甲=298.5.

(8.) 呷=39° 42′ 24″.

(9.) 丙=2346.7.

(10.) 吃=28° 57′ 8″.

(11.) 444.16尺.

(12.) 186.32尺.

(13.) 34° 33′ 44″.

(14.) 303.99尺.

(15.) 238.33尺.

(16.) 約15哩.

(17.) 79.079尺.

(18.) 165.68尺.

(19.) 53° 33′.

(20.) 115.136尺.

(21.) 76.355呎.

(22.) 吃=80° 32″,

呷=哂=49° 59′ 44″.

(23.) 吃=53° 16′ 36″,

乙=12.0518寸,

面積=72.392方寸.

(24.) 乙=130.52寸,

面積=24246方寸.

(25.) 23.263尺.

(26.) 17° 48′.

(27.) 5.3546寸.

(28.) 1084950方尺.

(29.) 17尺, 885方尺.

(30.) 大幅 = 24.882寸,

小幅 = 20.13寸,

面積 = 1472方寸.

(31.) 12.861.

(32.) 1782.3方尺.

(33.) 38168尺.

(34.) 20.21尺.

(35.) 2518.2尺.

29節(33面).

(1.) 呷 = 22° 58′,

乙 = 7.07,

丙 = 9.0046.

(2.) 乙 = 79.435,

呷 = 45° 27′ 14″,

昞 = 95° 24′ 46″.

(3.) 呷叱 = 7.6745,

呷叱′ = 2.6435,

叱 = 46° 43′ 50″,

叱′ = 133° 16′ 10″,

呷昞叱 = 105° 53′ 10″,

呷昞叱′ = 19° 20′ 50″.

(4.) 呷 = 37° 53′,

叱 = 43° 52′ 25″,

昞 = 98° 14′ 35″.

(5.) 902.94.

(6.) 1253.2尺.

(7.) 357.224尺.

(8.) 呷 = 44° 2′ 9″,

叱 = 51° 28′ 11″,

昞 = 84° 29′ 40″,

面積 = 126100方尺.

(9.) 407.89尺.

(10.) 叱 = 121° 21′ 16″,

昞 = 92° 6′ 38″,

盯 = 71° 11′ 6″.

(11.) 叱昞 = 5.672,

盯昞 = 3.694.

34節(41面).

(2.) 正弦(45° + 天) =

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$(餘弦天 + 正弦天).

餘弦(45° + 天) =

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$(餘弦天 − 正弦天),

正弦(30° − 天) =

$\frac{1}{2}$(餘弦天$-\sqrt{3}$正弦天),

餘弦$(30°-$天$)=$

$\frac{1}{2}$($\sqrt{3}$餘弦天$+$正弦天).

正弦$(60°+$天$)=$

$\frac{1}{2}$($\sqrt{3}$餘弦天$+$正弦天),

餘弦$(60°+$天$)=$

$\frac{1}{2}$(餘弦天$-\sqrt{3}$正弦天).

(3.) 正弦(天$+$地)$=\frac{56}{65}$,

正弦(天$-$地)$=\frac{16}{65}$.

(4.) 正弦$75°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

餘弦$75°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

(5.) 正弦$15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

餘弦$15°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(6.) 正弦(天$+$地)$=$

$-\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$,

餘弦(天$-$地)$=\frac{3\sqrt{5}+1}{8}$.

39節(44面)。

(5.) 正弦$(45°-$天$)=$

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$(餘弦天$-$正弦天),

餘弦$(45°-$天$)=$

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$(餘弦天$+$正弦天),

正弦$(45°+$天$)=$

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$(餘弦天$+$正弦天),

餘弦$(45°+$天$)=$

$\frac{1}{2}\sqrt{2}$(餘弦天$-$正弦天).

(6.) 正切$75°=2+\sqrt{3}$,

正切$15°=2-\sqrt{3}$.

(14.) 正弦$\frac{1}{2}$地$=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$,

餘弦$\frac{1}{2}$地$=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$,

正切$\frac{1}{2}$地$=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(15.) 正弦2天$=-\frac{24}{25}$,

餘弦2天$=-\frac{7}{25}$.

(16.) 正弦$22\frac{1}{2}°=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$,

餘弦$22\frac{1}{2}°=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$,

正切$22\frac{1}{2}°=\sqrt{2}-1$,

餘切$22\frac{1}{2}°=\sqrt{2}+1$,

正割$22\frac{1}{2}°=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$,

餘割$22\frac{1}{2}°=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

(17.) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(18.) 正弦$15°=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

餘弦$15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$,

正切$15^\circ=2-\sqrt{3}$,

餘切$15^\circ=2+\sqrt{3}$,

正割$15^\circ=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

餘割$15^\circ=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

(20.) 正弦5天＝

5正弦天－20正弦^{3}天

＋16正弦^{5}天.

(21.) 餘弦5天＝

5餘弦天－20餘弦^{3}天

＋16餘弦^{5}天.

(23.) 天＜360°之諸同數爲0°, 30°, 150°, 180°, 210°, 330°.

(36.) 正切天正切地.

41節(48面).

(1.) 正弦$^{-1}\frac{1}{2}\sqrt{2}=45^\circ, 135^\circ, 45^\circ+360^\circ, \cdots$,

餘弦$^{-1}\frac{1}{2}=60^\circ, 300^\circ, \cdots$,

正切$^{-1}(-1)=135^\circ, 315^\circ, \cdots$,

餘弦$^{-1}1=0^\circ, 360^\circ, \cdots$,

正弦$^{-1}(-\frac{1}{2})=210^\circ, 330^\circ, \cdots$

(2.) 正切天＝3.

(3.) 餘弦天＝$\pm\frac{4}{5}$,

正切天＝$\pm\frac{3}{4}$.

(4.) 正弦(正切$^{-1}\frac{1}{3}\sqrt{3}$)＝$\pm\frac{1}{2}$.

(5.) 正弦(餘弦$^{-1}\frac{4}{5}$)＝$\pm\frac{3}{5}$.

(6.) 餘切(正切$^{-1}\frac{1}{17}$)＝17.

(7.) 甲＝$\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(8.) $45^\circ, 225^\circ$.

(9.) 天＝45°, 地＝180°.

(10.) 正弦$^{-1}$甲＝225°.

48節(56面).

(1.) 㔷＝$121^\circ\ 33'$,

乙＝2133.5,

丙＝2477.8.

(2.) 㔷＝$55^\circ\ 41'$,

乙＝534.05,

丙＝653.52.

(3.) 㔷＝$45^\circ\ 34'$,

甲＝1548.1,

乙=1293.7.

(4.) 呷=105° 59′,

甲=54.018,

丙=47.738.

(5.) 叱=68° 58′,

乙=5274.9,

丙=3730.

(6.) 叱=54° 58′,

甲=923.4,

丙=1187.7.

49節(57面).

(1.) (1.) 二種解法.

(2.) 一種解法,正三角形.

(3.) 一種解法.

(4.) 二種解法.

(2.) 叱=16° 57′ 21″,

哂=15° 50′ 39″,

丙=0.32122.

(3.) 丙=2.5719,

叱=13° 15′ 1″,

哂=142° 13′ 59″.

(4.) 丙=93.59, 丙′=12.07,

叱=26° 52′ 7″,

叱′=133° 7′ 53″,

哂=131° 46′ 53″,

哂′=5° 31′ 7″

(5.) 不可解.

(6.) 乙=1.0916,

乙′=0.36276,

呷=39° 37′ 16″,

呷′=140° 22′ 44″,

叱=117° 50′ 44″,

叱′=17° 5′ 16″.

50節(58面).

(1.) 甲=0.0971,

叱=90° 35′ 36″,

哂=48° 9′ 24″,

呻=0.0053261.

(2.) 丙=14.211

呷=76° 20′ 5″,

叱=44° 52′ 55″,

呻=80.962.

(3.) 乙=85.892,

呷=67° 21′ 42″,

呞 = 62° 48′ 18″,

呻 = 3962.8.

(4) 甲 = 0.6767,

叱 = 15° 9′ 21″,

呞 = 131° 19′ 39″,

呻 = 0.08141,

(5.) 丙 = 72.87,

呷 = 40° 50′ 32″,

叱 = 11° 2′ 28″,

呻 = 422.65.

51節(59面)。

(1.) 呷 = 55° 20′ 42″,

叱 = 106° 35′ 36″,

呞 = 18° 3′ 42″,

呻 = 267.92.

(2.) 呷 = 34° 24′ 26″,

叱 = 73° 14′ 56″,

呞 = 72° 20′ 36″,

呻 = 3.6143.

(3.) 呷 = 52° 20′ 24″,

叱 = 107° 19′ 14″,

呞 = 20° 20′ 24″,

呻 = 1437.5.

(4.) 呷 = 97° 48′,

叱 = 18° 21′ 48″,

呞 = 63° 50′ 12″,

呻 = 193.13.

(5.) 呷 = 54° 20′ 16″,

叱 = 70° 27′ 46″,

呞 = 54° 72′,

呻 = 6090.

(6.) 呷 = 35° 59′ 30″,

叱 = 48° 44′ 32″,

呞 = 95° 15′ 56″,

呻 = 0.60709.

52節(60面)。

(1.) 1116.6尺.

(2.) 3081.8步.

(3.) 638.34尺, 14653方尺.

(4.) 4.1與8.1.

(5.) 13 27里.

(6.) 6667尺. 一種解法.

(7.) 121.97.

(8.) 44° 2′ 56″.

(9.) 32.151方里.

(11.) $54° \, 29' \, 12''$.

(12.) 甲＝12296尺,

丙＝13055尺.

(13.) 294.77尺.

(14.) 222.1尺.

(16.) 4211.8尺.

(17.) 72.613哩.

(18.) 51.035尺.

(19.) 0.85872里.

(20.) 2.98里.

(21.) 1331.2尺.

(22.) 8.2里.

(23.) 187.39尺.

(24.) 0.6011.

(25.) 4.8112里.

(26.) $60° \, 51' \, 8''$.

(27.) 37.365尺.

(28.) 3.2103里.

(29.) 10.532里.

(30.) 851.22步.

(31.) 9.5722里.

(32.) 6.1271里.

(33.) 280.47尺.

(34.) 1126.1尺.

(35.) 4.8134哩.

(36.) 2728.25尺.

53節(67面).

(1.) $30° = 0.5236$,

$45° = 0.7854$,

$60° = 1.0472$,

$120° = 2.0944$,

$135° = 2.3562$,

$720° = 12.5664$,

$990° = 17.2788$.

(2.) $\frac{\Pi}{8} = 22° \, 30'$,

$\frac{\Pi}{10} = 18°$,

$\frac{1}{2} = 28° \, 38' \, 53'$,

$\frac{7}{4} = 100° \, 16' \, 4''$.

(3.) 1.35, 0.54.

74節(86面).

(1.) 正弦4天＝

4餘弦^{3}天正弦天

-4 餘弦天正弦^{3}天,

餘弦4天$=$餘弦^{4}天

-6 餘弦^{2}天正弦^{2}天

$+$正弦^{4}天.

(2.) 正弦6天$=$

6 餘弦^{5}天正弦天

-20餘弦^{3}天正弦^{3}天

$+6$ 餘弦天正弦^{5}天,

餘弦6天$=$餘弦^{6}天

-15餘弦^{4}天正弦^{2}天

$+15$餘弦^{2}天正弦^{4}天

$-$正弦^{6}天

(3.) 天$_0=1$, 天$_1=\frac{1}{2}+$幻$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

天$_2=-\frac{1}{2}+$幻$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

天$_3=-1$,

天$_4=-\frac{1}{2}-$幻$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

天$_5=\frac{1}{2}-$幻$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(4.) 天$_0=1$,

天$_1=0.3090+$幻0.9511,

天$_2=-0.8090$

$+$幻0.5878,

天$_3=-0.8090$

$-$幻0.5878,

天$_4=0.3090-$幻0.9511.

77節(93面).

(23.) 天$=30°$.

(24.) 地$=30°$.

(25.) 天$=0°$ 或 $45°$.

(26.) 天$=60°$.

(27.) 地$=45°$.

(28.) 地$=45°$.

(29.) 天$=45°$.

(30.) 天$=30°$.

(31.) 天$=60°$.

(32.) 天$=30°$.

(33.) 無角$<90°$.

(34.) 天$=30°$.

(35.) 正弦$92°=$餘弦$2°$.

(36.) 餘弦$127°=-$正弦$37°$.

(37.) 正切$320°=-$正切$40°$.

(38.) 餘切$350°=-$餘切$10°$.

(39.) 正弦$265°=-$餘弦$5°$.

(40.) 正切$171°=-$正切$9°$.

(41.) 餘弦天 $= -\frac{1}{7}\sqrt{33}$,

正切天 $= -\frac{4}{33}\sqrt{33}$,

餘切天 $= -\frac{1}{4}\sqrt{33}$,

正割天 $= -\frac{7}{33}\sqrt{33}$,

餘割天 $= \frac{7}{4}$.

(42.) 正弦天 $= -\frac{1}{8}\sqrt{55}$,

正切天 $= \frac{1}{3}\sqrt{55}$,

餘切天 $= \frac{3}{55}\sqrt{55}$,

正割天 $= -\frac{8}{3}$,

餘割天 $= -\frac{8}{55}\sqrt{55}$.

(43.) 正弦天 $= -\frac{3}{13}\sqrt{13}$,

餘弦天 $= -\frac{2}{13}\sqrt{13}$,

餘切天 $= \frac{2}{3}$,

正割天 $= -\frac{1}{2}\sqrt{13}$,

餘割天 $= -\frac{1}{3}\sqrt{13}$.

(44.) 正弦天 $= -\frac{5}{74}\sqrt{74}$,

餘弦天 $= \frac{7}{74}\sqrt{74}$,

正切天 $= -\frac{5}{7}$,

正割天 $= \frac{1}{7}\sqrt{74}$,

餘割天 $= -\frac{1}{5}\sqrt{74}$.

(45.) 第二或第四象限.

(46.) 第一或第二象限.

(47.) 第三或第四象限.

(48.) 第一或第二象限.

(49.) 天 $= 0°, 120°, 180°, 240°$.

(50.) 天 $= 30°, \quad 135°, \quad 150°, \quad 315°$.

(51.) 天 $= 0°, 90°, 120°, 180°, 240°, 270°$.

(57.) 0.

(58.) 甲.

(59.) 2(甲 − 乙).

(60.) $\frac{1}{2}$(甲² − 乙²).

78節(96面).

(1.) 306.32尺.

(2.) 831.06尺.

(3.) 53° 28′ 14″.

(4.) 49.39尺.

(5.) 0.43498哩.

(6.) 209.53尺.

(7.) 7.3188呎.

(8.) 37° 36′ 30″.

(9.) 109.28尺.

(10.) 502.46尺.

(11.) 6799.8尺.

(12.) 219.05尺.

(13.) 491.76尺.

(14.) 50° 32′ 44″.

(15.) 49° 44′ 38″.

(16.) 34.063尺.

(17.) 32.326呎, 29° 6′ 35″.

(18.) 每時5.6569哩.

(19.) 56.295呎.

(20.) 103.09尺.

(21.) 71° 33′ 54″.

(22.) 858160哩.

(23.) 238850哩.

(24.) 2163.4哩.

(25.) 90824000哩.

(26.) 432.08呎.

(27.) 60.191呎.

(28.) 0.32149哩.

(29.) 193.77呎, 或1632.9呎.

79節(99面)。

(1.) 3.416呎.

(2.) 3.7865呎.

(3.) 20.45尺.

(4.) 36.024尺.

(5.) 8.6058方尺.

(6.) 181.23寸.

(7.) 2.9943尺.

(8.) 5.1311寸.

(9.) 25.92尺.

(10.) 92° 1′ 24″.

(11.) 1.2491.

(12.) 33° 12′ 4″.

(13.) 11248尺.

(14.) 0.60965哩.

(15.) 1.3764.

(16.) 1.9755.

(17.) 19.882.

(18.) 0.9397.

(19.) 6.4984.

(20.) 3.4641.

(21.) 6.1981.

(22.)69.978.

(23.)15.25.

80節(101面).

(78.)天=90°, 120°, 240°, 270°.

(79.)天=0°, 20°, 45°, 90°, 100°, 135°, 140°, 180°, 220°, 225°, 260°, 270°, 315°, 340°.

(80.)天=0°, 30°, 90°, 150°, 180°, 270°.

(81.)天=0°, 45°, 120°, 240°, 225°, 270°.

(82.)天=0°, 90°, 180°, 270°.

(83.)天=0°, 90°, 210°, 330°.

(84.)天=240°, 300°.

(85.)天=210°, 330°.

(86.)天=0°, 90°.

(87.)天=0°, 180°.

(88.)天=0°, 180°

(89.)天=0°, 90°, 120°, 180°, 240°, 270°.

(90)天=45°, 135°, 225°, 315°

(91.)天=30°, 150°, 210°, 330°.

81節(107面).

(1.) 2145.1尺.

(2.) 12.458哩.

(3.) 1.1033里.

(4.) 1508.4尺.

(5.) 1719.3步.

(6.) 1.2564里.

(7.) 1346.3尺.

(8.) 387.1步.

(9.) 5.1083里.

(10.)3791.8尺.

(11.)4.4152尺.

(12.)28° 57′ 20″.

(13.)115.27.

(14.)44.358尺.

(15.)92.258尺.

(16.)101° 32′ 16″.

(17.) 0.83732里.

(18.) 539.1尺.

(19.) 1.239.

(20.) 152.31與238.3.

(21.) 68.673尺.

(22.) 32.071尺.

(23.) 137.78尺.

(24.) 5574尺.

(25.) 247 52尺.

(26.) 556.34尺.

(27.) 465.72尺.

(28.) 109.22尺.

(29.) 2639.4尺.

(30.) 396.54尺.

(31.) 287.75尺.

(32.) 2280.6尺.

(33.) 64.62尺.

(34.) 127.93尺.

(35.) 45.183尺.

(36.) 4365.2呎.

(37.) 140.17尺.

(38.) 610.45尺.

(39.) 156.66尺.

(40.) 41°48′39″與125°25′57″.

(41.) 51288000

(42.) 366680.

(43.) 11586.

(44.) 947460.

(45.) 0.89782.

(46.) 9929.3.

(47.) 751.62方尺.

(48.) 3145.9.

(49.) 855.1.

(50.) 876.34

88節(119面)。

(1.) 丙 $=54°\ 59'\ 47''$,

乙 $=45°\ 41'\ 28''$,

丙 $=65°\ 45'\ 58''$.

(2.) 丙 $=71°\ 36'\ 47'$

乙 $=95°\ 22'$,

丙 $=71°\ 32'\ 14'$

(3.) 丙 $=64°\ 14'\ 30''$,

丙$'=115°\ 45'\ 30''$,

甲 $=48°\ 22'\ 55''$,

甲' $=131^\circ 37' 5''$,

丙 $=42^\circ 19' 17''$,

丙' $=137^\circ 40' 43''$.

(4.) 㖀 $=65^\circ 49' 54''$,

甲 $=63^\circ 10' 6''$,

乙 $=38^\circ 59' 12''$.

(5.) 甲 $=75^\circ 13' 1''$,

𠮙 $=58^\circ 25' 46''$,

㖀 $=67^\circ 27' 1''$.

(6.) 甲 $=76^\circ 30' 37''$,

乙 $=65^\circ 28' 58''$,

丙 $=55^\circ 47' 44''$.

(7.) 𠮙 $=54^\circ 44' 23''$,

乙 $=64^\circ 36' 39''$,

丙 $=47^\circ 57' 45''$.

(8.) 𠮙 $=96^\circ 13' 23''$,

甲 $=73^\circ 17' 29''$,

丙 $=70^\circ 8' 38''$.

(9.) 𠮙 $=66^\circ 58'$,

甲 $=11^\circ 35' 49''$,

丙 $=4^\circ 35' 26''$.

(10.) 甲 $=61^\circ 4' 55''$,

乙 $=40^\circ 30' 22''$,

丙 $=50^\circ 30' 32''$.

99節(131面).

(1.) 丙 $=155^\circ 35' 22''$,

𠮙 $=10^\circ 19' 34''$,

㖀 $=171^\circ 48' 22''$.

(2.) 甲 $=131^\circ 36' 36''$,

乙 $=116^\circ 36' 58''$,

丙 $=29^\circ 11' 42''$.

(3.) 甲 $=107^\circ 7' 45''$,

𠮙 $=48^\circ 57' 29''$,

㖀 $=62^\circ 31' 40''$.

(4.) 𠮙 $=62^\circ 54' 43''$,

甲 $=114^\circ 30' 26''$,

丙 $=56^\circ 39' 10''$.

(5.) 呷 $=130^\circ 35' 56''$,

𠮙 $=30^\circ 25' 34''$,

㖀 $=31^\circ 26' 32''$.

(6.) 甲 $=98^\circ 21' 22''$,

乙 $=109^\circ 50' 8''$,

丙 $=115^\circ 13' 4''$.

(7.) 𠮙 $=32^\circ 26' 9''$,

甲 $=84^\circ 14' 32''$,

丙 $=51^\circ 6' 12''$.

(8.) 甲 $=80^\circ 5' 8''$,

乙 $=70^\circ 10' 36''$,

丙 $=145^\circ 5' 2''$.

(9.) 呷 $=70^\circ 39' 4''$,

呓 $=48^\circ 36' 2''$,

呐 $=119^\circ 15' 2''$.

(10.) 甲 $=40^\circ 0' 12''$,

呓 $=42^\circ 15' 11''$.

呐 $=121^\circ 36' 19''$.

100節(133面)。

(1.) 80.895方寸.

(2.) 26.869方寸.

(3.) 158.41方寸.

(4.) 39533方哩.

101節(135面)。

(1.) 呻呐 $=48^\circ 2' 43''$,

呷呐 $=52^\circ 53' 9''$.

(2.) 上午七時二十四分.

(3.) 下午四時.

102節(137面)。

(1.) $3029\frac{1}{12}$哩.

(2.) 2229.8哩.

(3.) 2748.5哩.

(4.) 7516.3哩.

(5.) 5109哩.