Elliptical orbits

FK 166.4

Elliptische loopbanen.

Methode van Gauss voor de bepaling van elliptische loopbanen.

Onderlinge vergelijking der verhandelingen van Hansen en Encke.

Hansen begint, even als Encke, met het bewys van de bekende eigenschappen der driehoeken (Bladz. 84 (2) Encke bladz. 320) en gaat dan onmiddellijk over tot het betoog der grondformule voor ρ' (Bladz. 86 (4)) die alleenlijk op de eigenschap rust dat de loopbaan in eene platte vlakte ligt die door de zon gaat maar waarby de verhouding tusschen de driehoeken als bekend wordt aangenomen. Die formule komt by Encke eerst voor aan het hoofd van bladz. 326. Het wezen van die grondformule wordt door Hansen veel naauwkeuriger beschouwd en ontwikkeld dan door Encke. Hansen wydt aan die beschouwing bladz. 86 tot 94. Hy toont aan waarom die grondformule ongeschikt is voor het gebruik en leidt uit haar zelve af dat eene eerste benadering eene kennis van de verhouding der driehoeken tot op grootheden der tweede orde insluit.

Encke gaat, na de formules (2) van Hansen bewezen te hebben onmiddellijk over tot het betoog der formule die het verband tusschen den parameter en de driehoeken uitdrukt en die in deze vorm by Hansen in het geheel niet voorkomt, maar alleen in de uitgewerkte gedaante, die Gauss haar heeft gegeven (Hansen bladz. 111 in Q en bladz. 122 form. p = enz.) Encke geeft hier tevens een paar formules, noodig voor de berekening der elementen, die by Hansen eerst op het laatste einde van zyne verhandeling voorkomen en die hier ook nog niet noodig zyn. Encke gaat onmiddellijk over tot de bepaling van de verhouding tusschen de driehoeken uit de radii vectores en toont door de formule voor den parameter aan, dat die op de kennis eener grootheid der derde orde rust. Hansen geeft de bepaling van de verhouding tusschen de driehoeken op bladz. 94–96 en komt bladz. 96 tot dezelfde uitkomsten als Encke op bladz. 324

Encke geeft bladz. 325–6 het betoog der grondformule (Hansen bladz. 86 (4)) en toont verder uit haar zelve aan, dat zy tot in acht nemen van grootheden der derde orde voldoet. Hy brengt die formule ook onder eene eenvoudigere gedaante, maar treedt omtrent haar in geene beschouwingen.

Encke (Bladz. 332 boven) en Hansen (bladz. 98 (6)) wyzigen de grondformule naar de bepaalde verhouding tusschen de driehoeken. Encke toont echter niet, zoo als Hansen, opzettelijk aan, dat de formule, door de eliminatie der driehoeken, de geschiktheid verkrygt voor het gebruik, die zy oorspronkelijk niet had.

Hansen (bladz. 100) en Encke (bladz. 330) geven het betoog der grootheden P en Q van Gauss. Hansen doch duidelijker dan Encke zien waarom Gauss die groothe-

heden heeft ingevoerd. Hansen doet dit na Encke vóór het
betoog der gewijzigde grondformule. Hansen geeft echter
de grootheid Q niet in den vorm waarin zy door Gauss
is gebragt. Hy neemt dien vorm voor Q (bladz. 111) eenvoudig-
heidshalve aan, maar bij dien behoeft, maar die vorm voorts
om afzonderlijk bewijs dat door Hansen niet wordt
gegeven.

Hansen (bladz. 105) en Encke (bladz. 332) herleiden de
gewijzigde grondformule tot de bekende vierdemagts
vergelijking van Gauss. Die vergelijking wordt door
Encke veel naauwkeuriger beredeneerd dan door Han-
sen. Encke doet zien dat de gewijzigde grondformule
onmiddelijk leidt tot eene volledige vergelijking
der achtste magt. Uit den vorm dier vergelijking leidt
hij belangrijke gevolgtrekkingen omtrent hare wortels
af. Encke handelt (bladz. 335–8) opzettelijk over het geval
waarin de vergelijking twee uitkomsten voor de loop-
baan geeft.

Hansen geeft (bladz. 106–8) eenige beschouwingen over
de vierde magtsvergelijking van een geheel anderen aard
dan die van Encke. Hansen leidt uit het wortel dier
vergelijking af onder welke omstandigheden zy de
loopbaan met eene meerdere of mindere juistheid
doet bepalen.

Hansen (bladz. 108–110) en Encke (bladz. 339–341) gaan, na
het betoog der vierdemagtsvergelijking over, tot het aan-
toonen van de verhouding tusschen de driehoeken, of
van de grootheden P en Q naar eene eerste benadering
kennis van de loopbaan. Hansen en Encke maken beiden
eene onderscheiding tusschen de grootheden die van
alle toevalligheden omtrent P en Q onafhankelijk zijn
en de overige. De juiste berekening der grootheid
Q vordert de bepaling van het verschil tusschen de
excentrische anomaliën, dat men buitendien voor
de bepaling der elementen kennen moet en waar
over door Hansen en Encke later wordt gehandeld.
Voor het oogenblik maakten, om tot de verbetering van P en Q
te kunnen overgaan, uit de opgeloste vierdemagts vergely-
king, ρ ρ'' r en r'' worden afgeleid. Voor r en r'' geven Han-
sen en Encke dezelfde formulen, die by Hansen eerst
later (pag 119) volgen. De formulen voor ρ en ρ'' zijn door
Hansen (bladz. 112–114) onder eene eenvoudigere gedaante
dan die van Gauss en Encke gebragt.

Encke geeft (bladz. 342) na het bepalen der groot-
heden ρ, ρ'', r, r'' onmiddellijk de formulen voor
de berekening van de helling der loopbaan en de
lengte van den knoop. Hansen geeft die formulen
veel later (bladz. 131) daar zy by eene eerste benadering
niet noodig zijn. Zy kunnen echter als een toets
der reeds volbragte berekeningen worden aangewend

Hansen geeft bladz. 112 – 114 de vroeger vermelde vereenvoudiging van formulen die bij Encke niet voorkomt en vervolgens (bladz. 114 – 118) eene zamenstelling van alle formulen die bij alle benaderingen dezelfde blijven en die men alzoo onmiddellijk berekenen kan. Daarna verbindt hij de oplossing der zevendemagtsvergelijking naar de eerste hypothese en pag 118 – 119 volgen de formulen voor de berekening der afstanden bij de drie waarnemingen naar de oplossing der zevendemagtsvergelijking onder de eerste hypothese waarbij $P = \frac{\theta}{\theta''}$ en $Q = \theta\theta''$

Na deze voorbereidingen gaan Hansen (bladz 121) en Encke (bladz 345) over tot de verbetering van de verhoudingen tusschen de elliptische sectoren en de daarbij behoorende driehoeken. Die verhoudingen kunnen van uit de verbeterde waarden van P en Q en zij vorderen de kennis van het verschil tusschen de excentrische anomaliën die men toch voor de berekening der elementen kennen moet. De bepaling van dat verschil is de groote moeijelijkheid. Encke geeft ~~[illegible]~~ (met eene door hem aangebragte belangrijke wijziging) de oplossing van Gauss, ~~[illegible]~~ en Hansen geeft eene hem eigene [illegible] oplossing van het vraagstuk. Encke treedt in eenige bespiegelingen omtrent de grootte der verbetering. Dit onderzoek strekt zich bij Hansen uit van pag. 121 tot pag 129, bij Encke van pag 345 tot pag 353.

Nu moeten nog de elementen bepaald worden, uit de oplossing der verbeterde zevendemagtsvergelijking en de daaruit afgeleide waarden van r, r'', u en u''. Encke had de formulen die de ligging der loopbaan bepalen reeds vroeger (bladz. 342) gegeven. De overige geeft hij hier. Hansen en Encke hebben voor de bepaling van a e π en M verschillende formulen aan Gauss ontleend. Hansen neemt die formulen zonder wijziging, en nagenoeg letterlijk van Gauss over. Hansen geeft bladz. 131 – 132 ten slotte hem eigene formulen voor de bepaling van i en Ω.

Encke toont pag 355 aan, door de formulen, dat de verhouding tusschen de driehoeken bij de bepaling van eene elliptische loopbaan, bij de eerste hypothese veel naauwkeuriger dan bij eene parabolische [illegible] worden aangenomen.

Encke handelt nog bladz 356 – 361 over de verbetering der waarnemingen naar Gauss, welk onderwerp door Hansen geheel en al met stilzwijgen wordt voorbijgegaan.

Hansen past zijne formulen toe op de bepaling der loopbaan van Euterpe uit waarnemingen van 12 Nov, 2 Dec, 22 Dec. 1853 en Encke past zijne formulen toe op de bepaling der loopbaan van Hebe uit waarnemingen van den 5, 10 en 16 July 1847.

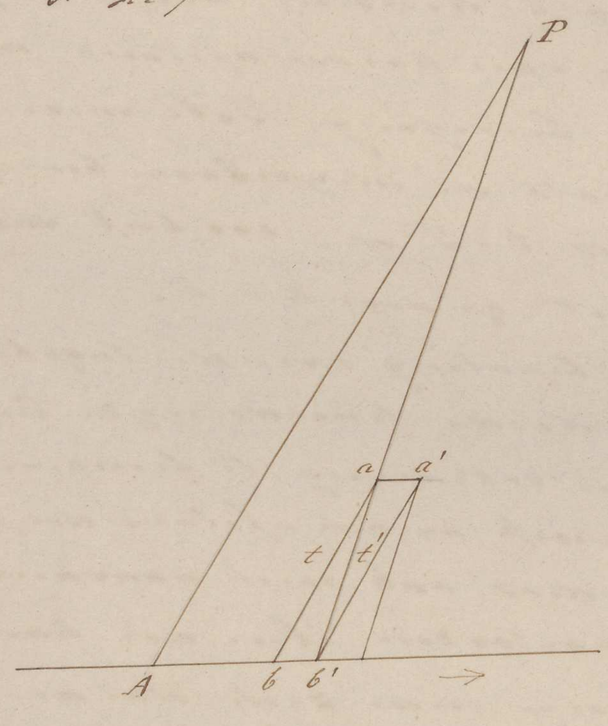
Hansen geeft bladz. 139 een Zusatz waarin hij de oude methode van Gauss ontwikkeld in het 20ste deel der Mon. Corr. bij diens nieuwe methode aangelegd en aantoont dat de hoofdformule van de oude methode niet dan eene uitbreiding is van het theorema van Lambert volgens hetwelk men uit de kromte van den schijnbaren weg eener planeet of komeet kan afleiden of zij al of niet digter dan de aarde bij de zon is geplaatst.

Encke geeft een Zusatz bladz. 377 waarin hij aantoont dat men bij eene eerste benadering van P en Q naauwkeuriger waarden dan $\frac{\theta}{\theta''}$ en $\theta\theta''$ kan aannemen.

De aberratie by planeten.

Toelichting van Gauss Theoria motus pag. 71 en 135.

Zy T de tyd waarop het licht dat waargenomen wordt
van de planeet is uitgegaan.
P de plaats in de ruimte die de planeet op dat oo-
genblik heeft ingenomen.
t de tyd waarop dat licht het objectief des kykers bereikt
t' " " " " oculair " " "
a en b, a' en b' de plaatsen van objectief en oculair
voor de tyden t en t'
A de plaats van den kyker of van de aarde op den tyd T



Het licht, op den tyd T van P uitgegaan, bereikt het objectief op den tyd t in a en komt van de rigting Pa. Terwyl de kyker zich, onder de voortplanting van het licht, beweegt, kan het licht niet langs zyne as loopen, tenzy die as (ab) eene andere rigting verkrygt dan die van waar het licht komt. Die rigting wordt hierdoor bepaald dat het licht door het oculair moet gaan als het den kyker doorloopen heeft. Na den tyd, waarin het licht den kyker heeft doorloopen, is het oculair van b naar b' overgegaan en de rigting van ab wordt hierdoor bepaald dat de verhouding tusschen ab' en bb' de verhouding is tusschen de snelheden van het licht en van de aarde. Terwyl de planeet, op den tyd T, geplaatst is in P, wordt zy op den tyd t gezien in de rigting ab.

Het verschil tusschen de tyden t en t' is zoo klein dat het verwaarloosd mag worden. Daarom is b' ook de plaats der aarde op den tyd t d.i. op den tyd waarop zy het licht van de planeet ontvangt of op den tyd der waarneming. Is A de plaats der aarde op den tyd T, d.i. op den tyd toen het licht der planeet, dat op den tyd t wordt waargenomen, van haar uitging, dan is de verhouding tusschen Pb' en Ab' dezelfde als die tusschen de snelheden van het licht en van de aarde. Men heeft dan:
Pb' : Ab' = ab' : bb' en daarom is AP evenwijdig aan ab of a'b'.

De schijnbare plaats der planeet op den tijd t is dus gelijk aan hare ware plaats op den tijd T.

Het verschil tusschen de tijden t en T wordt bepaald door den afstand van de planeet tot de aarde verbonden met de snelheid van het licht. De eenvoudigste wijze om de aberratie eener planeet in rekening te brengen, als men hare ware plaats uit de waarnemingen moet afleiden, bestaat dus daarin dat men den tijd, waarop men de schijnbare plaats heeft bepaald met $t-T$ vermindert. De waarneming geeft onmiddellijk de ware plaats voor den tijd T, alzoo bepaald.

Moet men de ware plaats der planeet voor den tijd der waarneming (t) kennen, zoo behoeft men, behalve de kennis van haren afstand, nog die van hare schijnbare beweging. Telt men bij de waargenomene plaats de schijnbare beweging der planeet in het tijdvak $t-T$ op, zoo heeft men de ware plaats der planeet op den tijd t.

Gauss heeft, bij de bepaling van de loopbaan eener planeet, nog eene derde handelwijze ingevoerd om de aberratie in rekening te brengen. Naar die handelwijze behoeft hij den afstand der planeet niet te kennen en dus ook niet aanvankelijk de aberratie te verwaarloozen. Om die handelwijze te verstaan, herinnere men zich dat de loopbaan berekend wordt uit de plaatsen die de planeet op drie tijdstippen in de ruimte van het zonnestelsel inneemt, dat die plaatsen worden afgeleid uit de rigtingen waarin de planeet zich, op deze tijdstippen, uit drie verschillende oogpunten vertoonde en dat het onverschillig is welke die oogpunten zijn, indien men die naauwkeurig kent. Zoo wordt de parallaxis in rekening gebragt door niet het middelpunt der aarde als het oogpunt te beschouwen waaruit de planeet is waargenomen, maar de plaats zelve waar de waarneming is volbragt, of wel het punt van de ecliptica, waarin zij getroffen wordt door de lijn, van de planeet naar de plaats der waarneming getrokken.

Het blijkt uit de figuur dat de rigting $b'a$ de ware plaats der planeet, op den tijd t, zoude voorstellen, indien zij onbewegelijk ware. $b'P$ is de schijnbare plaats der planeet, verbeterd voor de aberratie die alleenlijk uit de beweging der aarde voortvloeit, d.i. verbeterd voor de aberratie der vaste sterren. De planeet was niet meer in P toen haar licht de aarde bereikte. De zigting aP of $b'P$ is noch hare ware plaats voor den tijd T, noch voor den tijd t. De zigting aP of $b'P$ is de ware plaats der planeet op den tijd T gezien uit het oogpunt dat de aarde op den tijd t inneemt. De tijd t is dadelijk bekend en men kan de plaats der aarde voor dien tijd berekenen. Verbetert men de waargenomene plaats der planeet voor de aberratie der vaste sterren, zoo heeft men hare ware plaats voor den nog onbekenden tijd T waargezien uit het oogpunt dat de aarde op den bekenden tijd inneemt. Hieruit wordt de ware plaats in de ruimte bepaald, die de planeet op den onbekenden tijd T inneemt, maar daardoor wordt ook de afstand der planeet bekend en laat zich de tijd T berekenen. Eerst na vele voorloopige berekeningen die van den tijd T afhankelijk zijn en bij de naauwkeurigst mogelijke bepaling van de reeds nog naauwkeurig bekende afstanden, heeft men de kennis van de juiste tijdstippen waarvoor de plaatsen der planeet in de ruimte gelden en deze kennis wordt door de eerste bepaling van de afstanden verkregen. De juiste kennis van die tijdstippen is verder noodig terwijl men de elementen der loopbaan te berekenen heeft uit de drie plaatsen in de ruimte welke de planeet heeft ingenomen.

Bij de handelwijze van Gauss heeft men niet aanvankelijk de aberratie verwaarloosd en vindt men, zonder eene herhaling der berekeningen, de loopbaan zoo naauwkeurig als de waarnemingen het gedoogen.

Hansen redeneert in zijne verhandeling als of men dadelijk door de waarnemingen, voor een bekend tijdstip, de ware zigting kende van de lijn, die de aarde aan de planeet verbindt en, bij het door hem gegeven uitgewerkte voorbeeld, moest hij stilzwijgend aannemen, dat de plaatsen der planeet, door eene voorloopige kennis van de loopbaan, reeds van de aberratie gezuiverd waren. Bij de formulen door Hansen zamengesteld wordt, door Gauss, de aberratie op de volgende wijze in rekening gebragt.

Al de formulen in § 23 pag. 114-6 zamengesteld, zijn van de tijden T onafhankelijk en behoeven dus slechts eenmaal berekend te worden. De afstanden laten zich echter niet bepalen, zonder de kennis van de tijden T, voorkomende in de grootheden P en Q § 24 pag 116. Die grootheden hangen echter hoofdzakelijk van de afstanden af en voor eene eerste berekening van de afstanden, moet men, voor die grootheden, de enkele waarden $\frac{\theta''}{\theta}$ en $\theta\theta''$ aannemen. Bij die allereerste benadering gebruikt men de tijden der waarneming, omdat men die nog niet verbeteren kan, maar had men eigenlijk de nog onbekende tijdstippen moeten gebruiken, waarop de planeet de plaatsen in de ruimte, die men te bepalen heeft, innam. De eerste ruwe voorstelling van P en Q geeft echter eene benaderende waarde voor de afstanden, die toelaat eene meer naauwkeurige waarde der grootheden P en Q te berekenen, naar de formulen:

$$P = \frac{\theta''\eta}{\theta\eta''} \qquad Q = \frac{r'^3\,\theta\theta''}{r r''\eta\eta''\cos f\cos f'\cos f''}$$

Reeds dadelijk bij die tweede benadering is men in staat ook de grootheden θ en θ'', wegens de aberratie, te verbeteren en dat mag dan ook niet worden nagelaten. Bij de tweede benadering gebruikt men, in de grootheden θ en θ'', niet meer de tijden der waarneming t, maar de tijden T, door de voorloopige kennis der afstanden daaruit afgeleid. Bij de volgende benaderingen kan men, door de meer naauwkeurige kennis der afstanden, indien het noodig is, de tijden T meer naauwkeurig dan bij eene eerste benadering berekenen.

Bij de berekening van de elementen der loopbaan, uit de plaatsen der planeet in de ruimte, moet men de gevonden tijden T gebruiken, omdat die plaatsen alleen voor die tijden gelden.

De bepaling van de loopbaan eener planeet uit drie waarnemingen, naar Gauss.

Geometrische aanwijzing van den weg door Gauss ingeslagen.

Laat A, A', A'' de drie heliocentrische plaatsen der aarde voorstellen en B, B', B'' de drie, daarbij behoorende geocentrische plaatsen der planeet. Men verbeelde zich de vlakte gevormd door de zon en de punten A en B namelijk de gelijktijdige plaatsen van aarde en planeet. Die vlakte teekent zich aan den hemel als een groote cirkel AB die de zon tot middelpunt heeft. In die vlakte ligt de lijn van de zon naar de planeet getrokken en daaraan moet de heliocentrische plaats der planeet in den boog AB gelegen zijn. De twee overige heliocentrische plaatsen der planeet, C' en C'' liggen evenzoo in de bogen $A'B'$ en $A''B''$. De punten C, C' en C'' liggen met de zon in dezelfde platte vlakte en alzoo in een grooten cirkel aan den hemel die de vlakte der loopbaan vertegenwoordigt. Laat $C''C'C$☊ een gedeelte van dien grooten cirkel zijn. Indien de ligging der punten C, C', C'' uit die der punten A, A', A'', B, B', B'' is afgeleid, zoo is ook het eerste gedeelte van het vraagstuk opgelost.

Om de ligging der punten C, C', C'' te bepalen trekke men de bogen $B\alpha, B'\alpha', B''\alpha''$ loodregt op de ecliptica E☊. Die bogen zijn de geocentrische breedten der planeet en de bogen $A\alpha, A'\alpha', A''\alpha''$ zijn de verschillen tusschen de geocentrische lengten der planeet en de heliocentrische lengten der aarde. Men kent de hypothenusen $AB, A'B', A''B''$ en de hoeken $BA\alpha$, $B'A'\alpha'$ en $B''A''\alpha''$.

Worden de bogen $AB, A'B', A''B''$ verlengd tot dat zij elkander in de punten D, D' en D'' ontmoeten, zoo ontstaan de driehoeken $AD''A'$, $A'DA''$ en $AD'A''$, waarin de bases en de aangrenzende hoeken bekend zijn, en waaruit zich de hoeken D, D', D'' en de twee andere zijden laten berekenen.

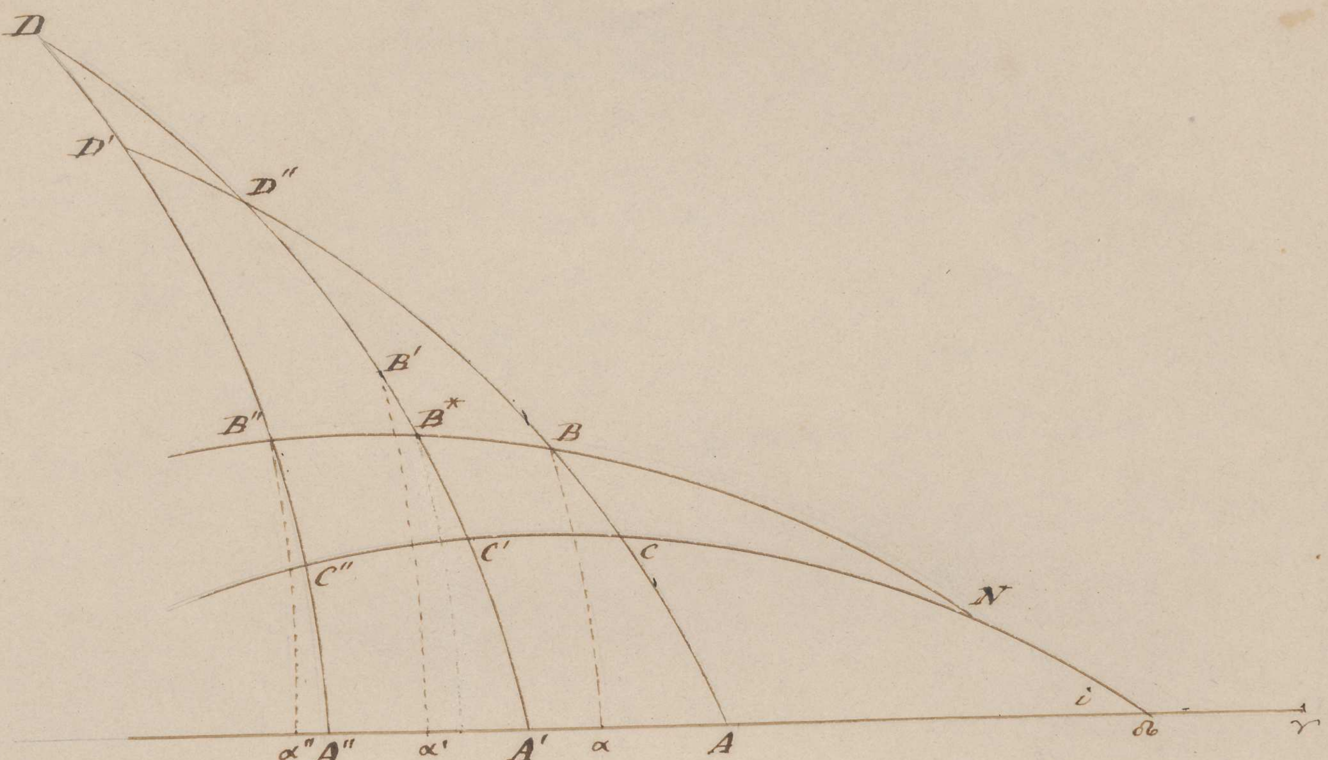
Trekt men eenen boog van een' grooten cirkel door de punten B en B'' zoo ontstaan daardoor de driehoeken $BD'B''$, $BD''B^*$ en B^*DB''. In den driehoek $BD'B''$ kent men reeds de zijden

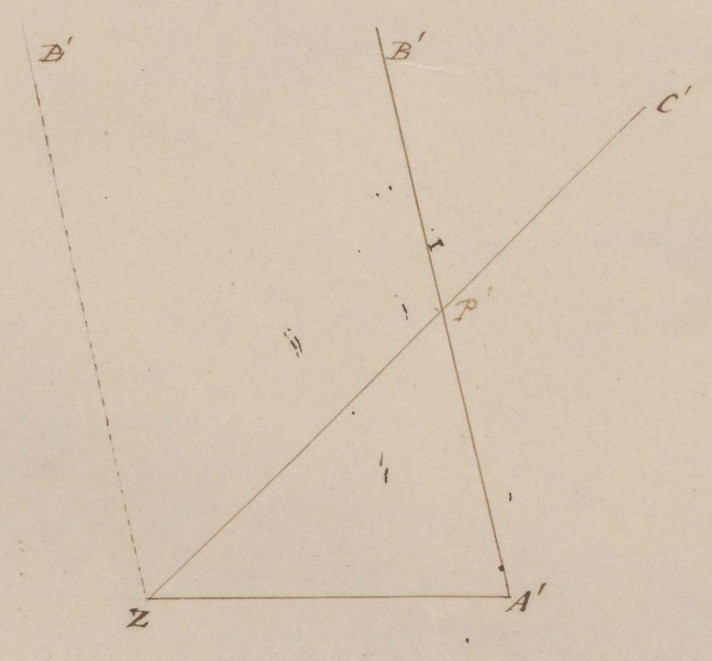
BD', $B''D'$ en den hoek D'. Men kan daardoor de zijde $B''B$ en de aangrenzende hoeken berekenen. Omtrent de tweede andere driehoeken laat ~~zich~~ die berekening echter niet volbrengen omdat men wel de ligging kent van het punt B' dat boven of onder den boog BB'' gelegen zal zijn, maar niet die van het punt B^*. Men moet alzoo den boog $B'B^*$ bepalen, hetgeen niet mogelijk is. In den driehoek B^*DB'' kent men de zijde $B''D$ en de aangrenzende hoeken. Daaruit kan men de zijde DB^* berekenen, vervolgens B^*A' uit DA' en eindelijk met behulp van $B'A'$ het verschil B^*B'. Omtrent de ligging van de punten C, C', C'' kan men echter niets besluiten vóórdat de boog $B'C'$ bepaald is. De bepaling van dien boog is de groote moeijelijkheid van het vraagstuk. Gauss heeft, met een groot talent, voor de bepaling van dien boog eene vergelijking gegeven die op de bekende wetten der beweging rust en alleenlijk op eene indirecte wijze kan worden opgelost.

Is eenmaal de boog $B'C'$ bepaald dan volgt daaruit van zelf de boog $C'D''$ en kan ~~men~~ den hoek C' berekenen. Daaruit berekent men de zijden $C'D'$ en $C''D'$ met de hoeken die zij met den boog $C''C'C$ maken en hieruit volgt de ligging der drie punten C, C', C'' met wier bepaling het eerste gedeelte van het vraagstuk is opgelost.

Ook de hoek C' moet, uit de wetten van beweging, in vereeniging met $B'C'$ worden afgeleid.

Kan men de ligging der punten C, C' en C'', naar aanleiding van de figuur, alleenlijk door de sphaerische driehoeksmeting bepalen, dan zoude men de loopbaan eener planeet ook zonder eenige kennis van de wetten van beweging uit drie geocentrische plaatsen kunnen afleiden. De boog $B'C'$ en de hoek C' zijn de eenige grootheden die door de wetten van beweging bepaald moeten worden. Al het overige wordt door de sphaerische driehoeksmeting bepaald.


D
D'
D''
B'
B*
B''
B
C''
C'
C
N
i
α'' A''
α'
A'
α
A
☊
♈


B'
B'
C'
P'
Z
A'

De grootheden bij Hansen voorkomende hebben naar de nevenstaande figuur de volgende geometrische beteekenis.

Blz. 84 $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$ zijn $\Upsilon\alpha\ \Upsilon\alpha'\ \Upsilon\alpha''$

$\beta\ \beta'\ \beta''$ " $B\alpha\ B'\alpha'\ B''\alpha''$

$l\ l'\ l''$ " $\Upsilon A\ \Upsilon A'\ \Upsilon A''$

Blz. 87 $m'' = BB'$ bl. 88 $m = B'B''$ bl. 91 $m' = BB''$

Blz. 87 $c = 180° - BB'\alpha'$ $c'' = 180° - B''B'\alpha'$

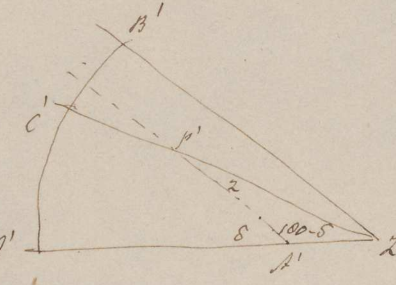
Blz. 89 $\theta = \Upsilon☊$ $i = C☊A$

Blz. 91 $M\ M'\ M''$ zijn $BA\ BA'\ BA''$

$D = \text{hoek } B''BA$ $D' = B''BA'$ $D'' = B''BA''$

Bij D heeft hier eene andere beteekenis dan op blz. 113

Blz. 97



Uit deze figuur volgt dat:

$z = B'C'$

$\delta = A'B'$

Blz. 105 σ is B^*C'. Dit blijkt niet onmiddellijk uit de figuur of de notatie, maar uit de formulen in vergelijking van die van Gauss.

Blz. 110 $2f' = CC''$ bl. 111 $2f'' = CC'$ $2f = C'C''$

Blz. 112 $z = B'A'A''$

De overige hulpgrootheden bij Hansen als:

Blz. 86 K, A, B, C blz. 113 D

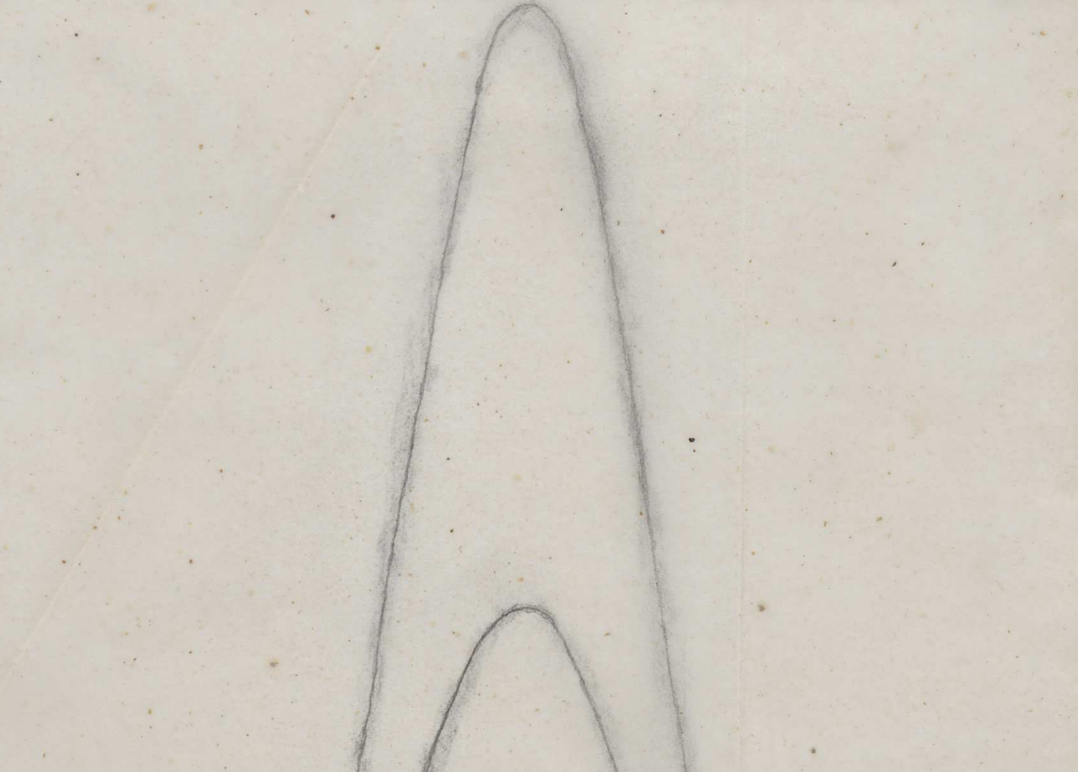
" 105 $J, \sigma, \Omega, \omega$

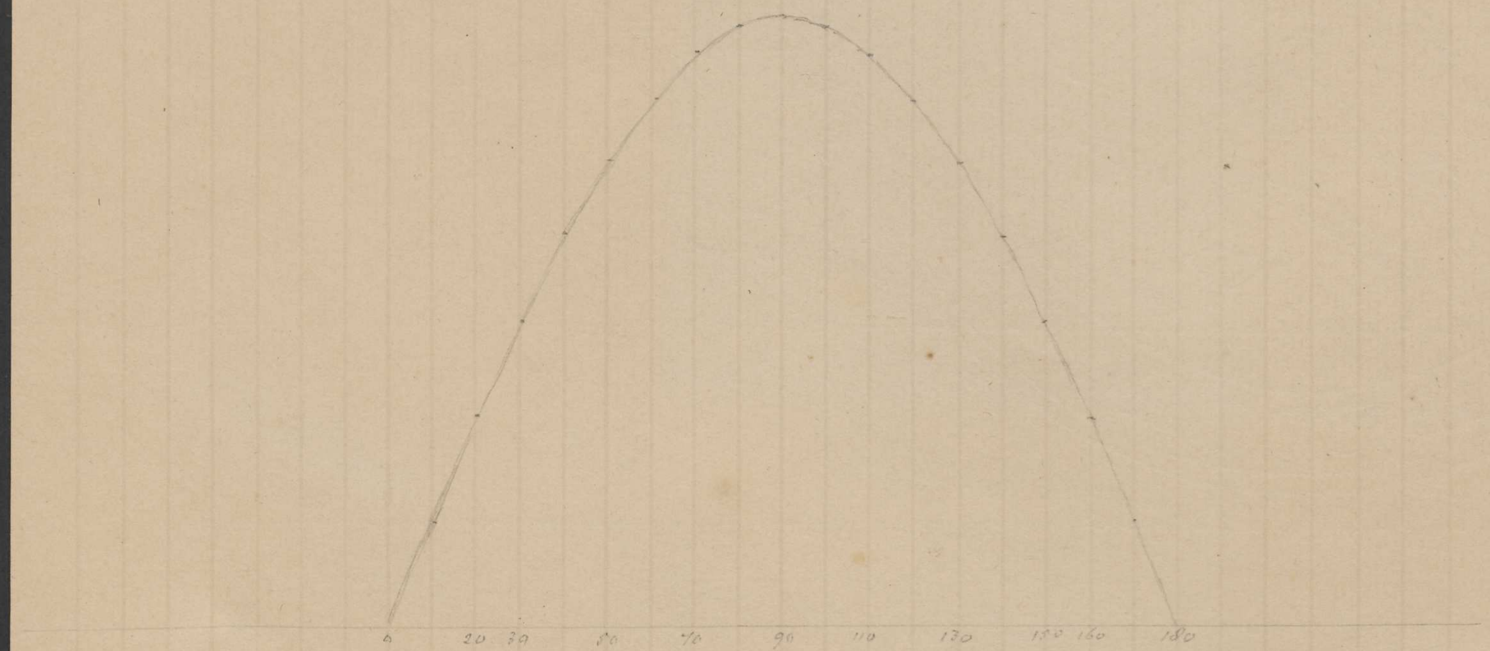
" 109 E, E'', W, W'', w, w''

" 113 $\Lambda, \Lambda'', \lambda, \lambda''$

" 115 U, U'', L, L''

hebben meerendeels eene niet zeer eenvoudige geometrische beteekenis, maar die uit de beschouwingen van Hansen niet kan worden afgeleid en voor wier bepaling men den weg moet volgen door Gauss ingeslagen. Men moet echter de geometrische beteekenis van sommige dier grootheden kennen om de verhandeling van Hansen te kunnen verstaan.




0
20
30
50
70
90
110
130
150
160
180

$m \sin^4 z$

		$m=1$	$m=0,8$	$m=0,7$	$m=2$	$m=0,5$
	$z=$ 0	0,000	0,000	0,000	0.000	0,000
	30	0,062	0,050	0,043	0.124	0,031
	60	0,562	0,450	0,393	1,124	0,281
	70	0,780	0,624	0,546	1,560	0,390
	80	0,941	0,753	0,659	1,882	0,470
	90	1,000	0,800	0,700	2,000	0,500
280	100	0,941	0,753	0,659	1,882	0,470
290	110	0,780	0,624	0,546	1.560	0,390
300	120	0,562	0,450	0,393	1,124	0,281
330	150	0,062	0.050	0,043	0.124	0.031
360	180	0,000	0,000	0,000	0.000	0,000

9.9450

$q = +30°$

$z = 0$	$\sin(z-q) = -0,500$
30	0,000
60	+0,500
90	0,866
120	1,000
150	0,866
180	0,500

	m'	m''
24°	1,778	0,801
27°	1,328	0,849

0,2500

~~0,2499~~

$$r^8 - Ar^6 \pm Br^2 - C = 0$$

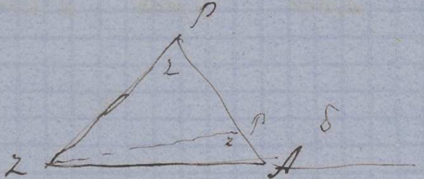
$r^8 - Ar^6 + Br^2 - C = 0$ $3+$

$r^8 - Ar^6 - Br^2 - C = 0$ $1+$

$r^8 - Ar^6 - Br^2 - C = 0$ $1+$

$r^8 - Ar^6 + Br^2 - C = 0$ $3+$

Altijd 4 onbekend.



$A = 180 - \delta$

$P = z$

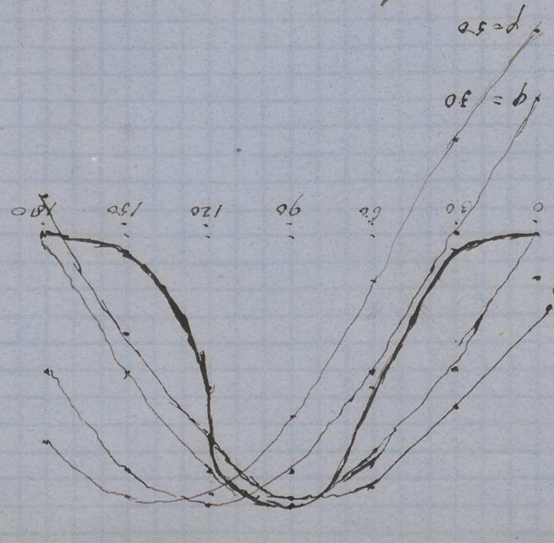
$$P + A < 180^\circ$$

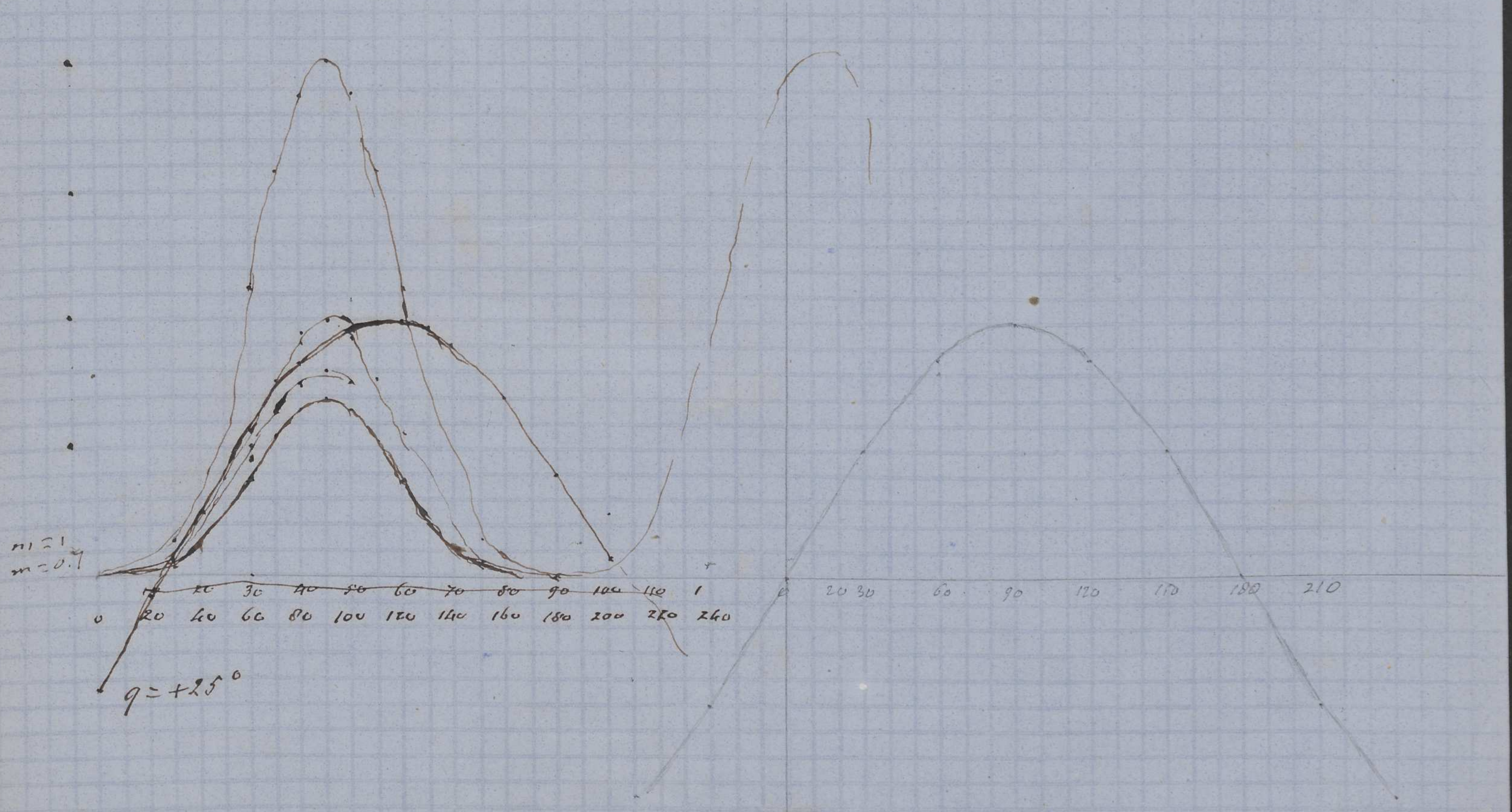
$180^\circ - \delta + z < 180^\circ$ $180^\circ + z < 180^\circ + \delta$

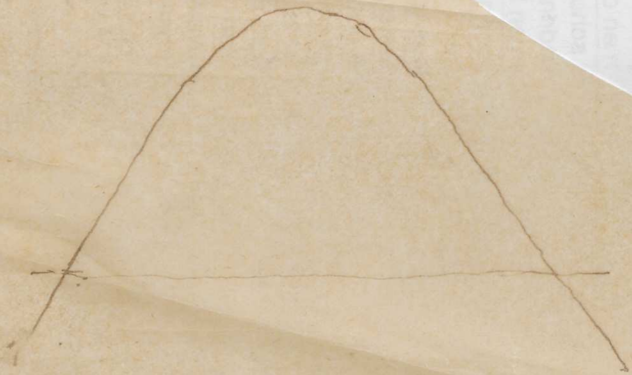
$\cancel{z = \delta}$ $z < \delta$

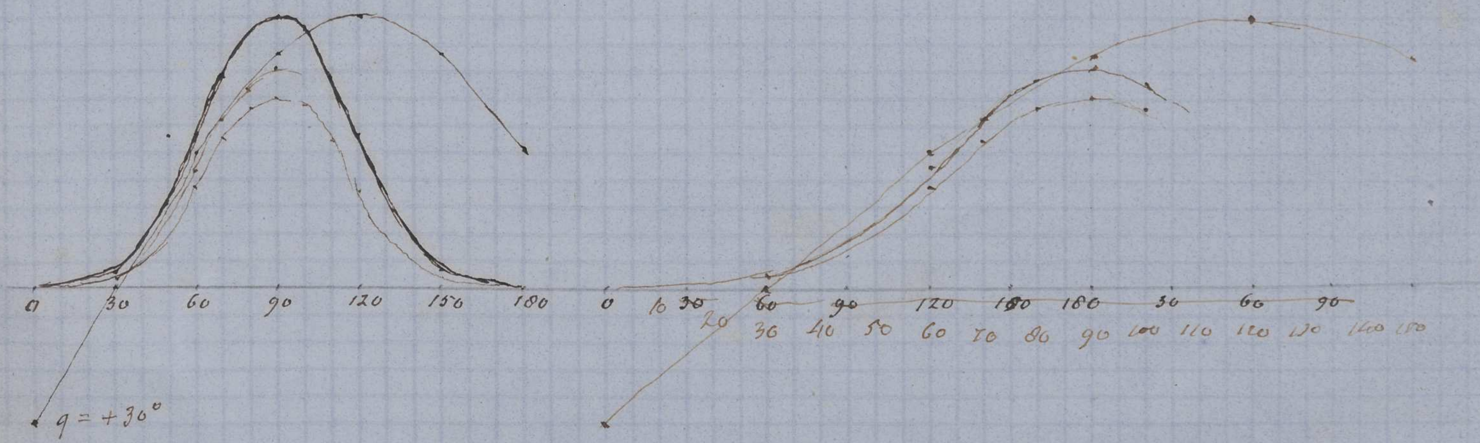
$$z - \delta < 180^\circ$$

Naar mate de planeet digter bij de aarde komt komt Z nader aan δ en valt de planeet met de aarde te zamen zoo is Z = δ. Daar al de gestelde vergelijkingen ook gelden voor de loopbaan der aarde en de waarnemingen ook gelden voor rigtingen op de afstand nul moet de oplossing ook de loopbaan der aarde ~~x~~ en alzoo eene waarde en Z = δ geven.

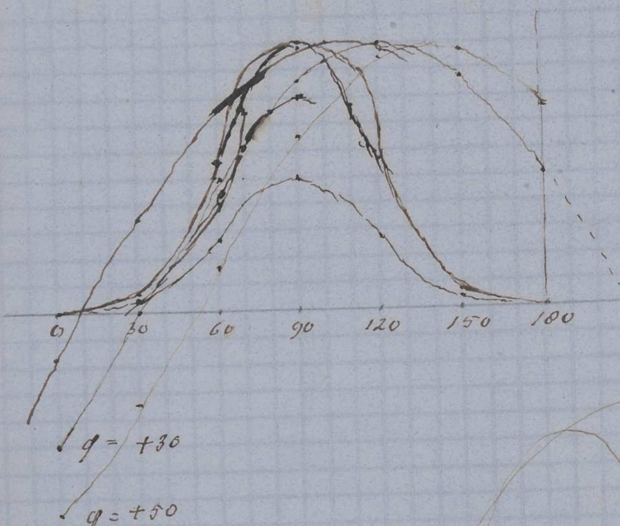


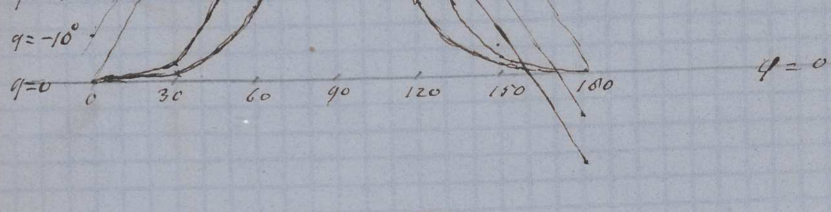

m=1
m=0.7
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 1
0 20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240
q=+25°
0 20 30 60 90 120 150 180 210

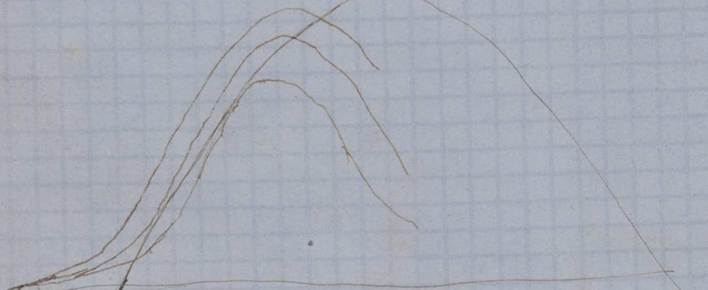



0 30 60 90 120 150 180
φ = + 30°
0 10 30 60 90 120 150 180 30 60 90
20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150

$m = 1 \quad \varphi = +50^\circ$ u. $\varphi = +30$







Een limiet voor twee gelijke wortels of van een aanrakingspunt wordt gegeven door de vergelijkingen

$$m' \sin^4 z' = \sin(z'-q)$$

$$\sin(2z'-q) = \frac{5}{3} \sin q$$

Uit de laatste vergelijking vindt men twee waarden voor $2z'-q$ en dus twee limieten namelijk

$$2z'-q \quad \text{en} \quad 180^\circ-(2z'-q)$$

De eerste geeft ons ... dadelijk

$$m' = \frac{\sin(z'-q)}{\sin^4 z'}$$

Voor de tweede limiet moet men

$2z'-q$ veranderen in $180^\circ-(2z'-q)$ en dus

	"	"	$180^\circ - 2z'$
$2z'-2q$	"	"	$90^\circ - z'$
$z'-q$	"	"	$\cos z'$
$\sin(z'-q)$	"	"	$90^\circ-(z'-q)$
z'	"	"	$\cos(z'-q)$
$\sin z'$	"	"	$\cos^4(z'-q)$
$\sin^4 z'$	"	"	

dus wordt de tweede limiet

$$m'' = \frac{\cos z'}{\cos^4(z'-q)}$$

$$\frac{Q}{\pi r'^3} = \frac{K(P+1)}{A+PB}\rho' \cos\beta' + \frac{C(P+1)}{A+PB} - 1 \quad \text{of}$$

$$\rho' = -\frac{\rho\left(\pm + \left(1 - \frac{C(P+1)}{A+PB}\right)\right)}{\frac{K(P+1)}{A+PB}\cos\beta'} - \frac{\frac{1}{2}Q}{\frac{K(P+1)}{A+PB}\cos\beta'} \times \frac{1}{r'^3}$$

$$\rho' = -K + \frac{L}{r'^3}$$

$$\rho' = -R'\cos\delta' \pm \sqrt{r'^2 - R'^2\sin^2\delta'}$$

$$-K + \frac{L}{r'^3} = -R'\cos\delta' \pm \sqrt{r'^2 - R'^2\sin^2\delta'}$$

$$R'\cos\delta - K + \frac{L}{r'^3} = \pm\sqrt{r'^2 - R'^2\sin^2\delta'}$$

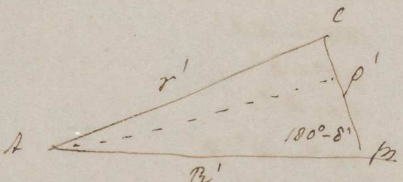
$$(R'\cos\delta - K)^2 + 2\frac{(R\cos\delta - K)L}{r'^3} + \frac{L^2}{r'^6} = r'^2 - R'^2\sin^2\delta'$$

$$(R'\cos\delta - K)^2 r'^6 + 2(R\cos\delta - K)L\, r'^3 + L^2$$
$$= r'^8 - R'^2\sin^2\delta'\, r'^6$$

$$r'^8 - \left\{(R'\cos\delta' - K)^2 + R'^2\sin^2\delta'\right\} r'^6 + 2(K - R'\cos\delta')\, r'^3$$
$$- L^2 = 0$$

$$(m - n\rho')\, r'^3 \pm L = 0$$

$$m - n$$



$(\rho' + R\cos\delta')^2 = r^2 - R'^2\sin^2\delta'$ Lesti. Vorl. p 6.

Gegeben α β A

$$x = \beta\cos A \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin^2 A}$$

$$\cos(180° - \delta) = -\cos\delta$$
$$\sin(180° - \delta) = +\sin\delta$$

9,8750
9,9375

z = 0	sin z = 0		0.000
30	9,6990	8,7960	0.0625
60	9.9375	9.7500	0,5624
90	0.00		1,000
120	9.9375		0.5624
150	9.6990		0.0625
180	0		0,000
210	− 9,6990		
240	− 9.94		
270	1		
300	− 9.94		
330	− 9.69		
360			

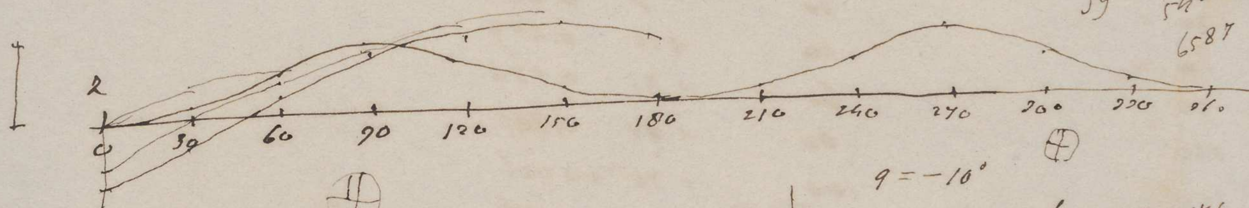
z = 70 sin = 9.9730	9.8920	0,780
80	9.9934	9,9736	0,941
100			0,941
110			0,780

φ = −20

z = 0	z − φ = 20		sin z = +0,342
30	50		0,766
60	80	9.9934	0,985
90	110		0,940
110	140		0,643
150	170		0,173
180	200		−0,342

624 496
1 4496
7520
9934 546
6587

0,560
0,4
4110



φ = 50

z = 0	z − φ = −50°	sin(z − φ) = −9.8843	−0,766
30	−20	−9.5341	−0.342
60	+10	+9.2397	+0.173
90	+40	+9.8081	+0,643
120	+70	+9.9730	+0,940
150	+100	9.9933	+0.985
180	+130	9.8843	+0.766
210	+160		

φ = −10°

z = 0	z − φ = +10	sin = 9.2397	0,174
30	40	9.8081	0,643
60	70	9.9730	0,940
90	100	9.9934	0,985
120	130	9.8843	0,766
150	160	9.5341	0,342
180	190	−9,2397	−0,174

φ = 30

z = 0	z − φ = −30	sin = −0,500	−0,500
30	0		0,000
60	+30		+0,500
90	60	9.9375	0,866
120	90	0	1.000
150	120	9.9375	0,866
180	150		0,500
~~210~~	~~180~~		~~0,000~~

φ = 0

	z − φ = 0	sin = 0,000
	30	0,500
	60	0,866
	90	1,000
	120	0,866
	150	0.500
	180	0,000

$q = +10$

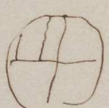
$z = 0$	$z - q = -10$	$-0{,}173$
30	$+20$	$+0{,}342$
60	50	766
90	80	985
100	90	1.000
120	110	0.985
150	140	766
180	170	$+342$
210	200	-173
240		
270		

$q = +25°$

$z = 0$	$z - q = -25$
30	
60	
90	
120	
150	
180	
210	
240	
270	

$q = +25°$

$z = 0$	$z - q = -25$	$-0{,}423$
20	-5	0.087
40	$+15$	0.259
60	$+35$	0.574
80	$+55$	0,819
100	$+75$	$+0{,}906$
120 115 90	$+95$	0.996
140	$+115$	0,906
160	135	0.707
180	155	0,423
200	175	0,~~xxx~~087
220	195	$-$ 0.259
240	215	
260	235	
280	255	



$n' = 1.778$ $\quad$ $n = 0,881$

$h = 0,2499$ $\quad$ $h = 9,9450$

z = 0	h = 0.0000				
30	9.6990	9.9490	0,889	9,6440	0,441
60	9.9375	0,1875	1,540	9,8825	0,763
70	9.9730	0,2230	1,671	9,9180	0,828
80	9.9934	0,2434	1,751	9,9384	0,868
90					
100					
110					
120					
150					
180					

0	~~9,7960~~	
30	9,7960	8,5760
60	0,7500	0
70	0,8920	
80	0,9736	
90		
100		
110		
120		
150		
180		
210		
240		
250		
260		
270		
280		
290		
300		

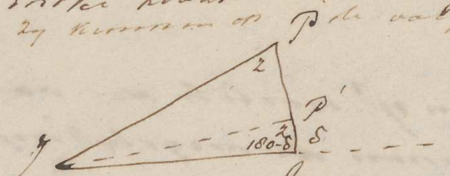
h^{4}_{2} $\quad$ $n = 1.778$ $\quad$ $n = 0,881$

0					
30	8,7960	9,0460	0,111	8,7410	0,055
60	9.7500	0,0000	1.000	9,4950	0,313
70	9,8920	0,1420	1,387	9,8370	0,688
80	9.9736	0,2236	1,673	9,9186	0,829
90					
100					
110					
120					
150					
180					

De wortels der vergelijking $M \sin^4 z = \sin(z+\omega)$ ~~pag 105~~ bij Hansen (pag 105)
of $m \sin^4 z = \sin(z-q)$ bij Encke

Gauss en Hansen maken de opmerking, dat deze vergelijking eenen wortel moet hebben $z = \delta$, die de loopbaan der aarde geeft; dat alleen een wortel $z < \delta$ kan worden aangenomen en dat er gevallen kunnen voorkomen, waarbij twee wortels $z < \delta$ bestaan; zoodat men dan uit de waarnemingen twee loopbanen van het hemellicht kan afleiden, waarvan echter slechts ééne de ware kan zijn. Gauss en Hansen treden in geene diepere beschouwing omtrent het wezen der wortels.

Toen men een paar malen eenen valschen wortel der vergelijking ~~werkelijk twee loopbanen~~ voor de bepaling eener loopbaan had gebruikt ~~had gevonden hetzelfde hemellicht had gevonden~~ heeft Encke, in het jaar 1848, een streng onderzoek omtrent de wortels der genoemde vergelijking volbragt en dit in de Astr. Nachr. Vol 27 pag 241 seq. bekend gemaakt en hij is daarop in zijne verhandeling, in het Berliner Astr. Jahrb. für 1854 pag 333, terug gekomen. De beschouwingen van Encke hebben echter gewoonlijk de gewenschte duidelijkheid. Zij kunnen op de volgende wijze worden toegelicht.



In den driehoek ZPA (zon, planeet, aarde) is $\angle ZPA = z$ en $\angle ZAP = 180^\circ - \delta$. Nu is $P + A < 180^\circ$ d.i. $180^\circ - \delta + z < 180^\circ$ of $180^\circ + z < 180^\circ + \delta$ en $z < \delta$; zoodat z altijd $<$ dan δ moet zijn. Een wortel $z > \delta$ zoude met betrekking tot het vraagstuk onbestaanbaar ~~zijn~~ wezen.

Men kan hierbij voegen dat z en δ beide $< 180^\circ$ zijn moeten.

Naar mate de planeet digter bij de aarde is geplaatst, komt, blijkens de figuur, z nader aan δ; en valt de planeet met de aarde te zamen, zoo is $z = \delta$. Daar al de voorwaarden van het vraagstuk ook gelden voor de loopbaan der aarde en uit de waargenomen rigtingen de afstanden niet kunnen worden bepaald, moet men ook eene willekeurige onderstelling ~~had~~ worden gevonden. Voor die uit waarbij die afstanden gelijk nul worden, komt in $z = \delta$ en de vergelijking moet dus eenen wortel $z = \delta$ hebben, die niet de gezochte loopbaan der planeet maar die der aarde geeft.

De formule $m \sin^4 z = \sin(z-q)$ is afgeleid uit eene vergelijking, die r alleen als onbekende inhoudt, tot de achtste graad opklimt. Die vergelijking komt bij Encke voor in den vorm:

$$r^8 - Ar^6 \pm Br^3 - C = 0$$

De coëfficienten A en C zijn steeds positief en dus altijd $+$.

De coeff. B kan $+$ en $-$ wezen.

Uit den regel van Descartes volgt dat deze vergelijking of 1 positieve en 3 negatieve wortels hebben kan en daarom in het geval van 3 positieve en 1 negatieve wortels moet hebben. [illegible]

alle gevallen, 4 onbestaanbare wortels.

Bestaat slechts één positieve wortel, zoo behoort die tot de loopbaan der aarde en heeft men geenen wortel voor eene loopbaan der planeet, daar r niet negatief kan zijn. De waarnemingen behooren dan niet tot eene planeet. Uit de vergelijking blijkt dat dit geval plaats heeft, als $q > 90^\circ$

Encke, vermeenende dat het wezen van de wortels der 8ste magts-vergelyking zich het best laat beoordeelen, deze heeft getransformeerd voor m sin⁴z = sin(z−p), treedt, in beide zyne genoemde verhandelingen, in eene beschouwing van de wortels dier vergelyking; maar vestigt die beschouwing op verschillende beginselen. In de Astr. Nachr. beroept hy zich hoofdzakelyk op de eigenschappen der hoogere magts-vergelykingen. In het Berl. Jahrb. roept hy daarby het theorema van Taylor ter hulp. Noch het een noch het ander kan zeer klaar genoemd worden. ~~Het volgende kan tot toelichting dienen~~.

Splitst men de vergelyking:

$$m \sin^4 z = \sin(z-p)$$

in de twee vergelykingen:

$$y = m \sin^4 z \quad \text{en}$$
$$y' = \sin(z-p)$$

zoo zullen gelyke waarden van y en y' wortels der oorspronkelyke vergelyking zyn. Stelt men de vergelykingen, by verschillende waarden van m en p, door kromme lynen voor, waarvan z de absciss en y, y' de ordinaten zyn, zoo geven de snypunten dier kromme lynen, voor dezelfde waarden van z, gelyke waarden van y en y' en dus wortels der oorspronkelyke vergelyking. De verschillende toestanden, waarin de wortels kunnen voorkomen, laat zich het best beoordeelen, als men, voor eenige waarden van m, de kromme lyn $y = m \sin^4 z$ beschryft en op een doorschynend papier de kromme lyn $y' = \sin(z-p)$. Verschuift men de laatste evenwydig over de as der z, dan krygt men van zelf de kromme lyn voor verschillende waarden van p daar haar vorm steeds dezelfde is en met p alleenlyk hare plaats verandert. Door dit hulpmiddel ziet men onmiddelyk:

1° dat de oorspronkelyke vergelyking twee of vier bestaanbare wortels hebben kan.

2° dat, als er slechts twee bestaanbare wortels zyn, de een positief de andere negatief moet wezen. De positieve wortel behoort tot de aarde en er bestaat in het geheel geene loopbaan eener planeet, die aan de waarnemingen voldoet

3° dat, als alle wortels bestaanbaar zyn, ~~xxx~~ er of drie positief en een negatief, of twee positief en twee negatief moet zyn. In het eerste geval behoort ieder der positieve wortels tot de aarde en is er geene loopbaan voor eene planeet, die aan de waarnemingen voldoet.

4°. Bij den overgang van het geval, waarin de vergelijking vier bestaanbare wortels heeft, tot dat waarin zij slechts twee bestaanbare wortels heeft, smelten twee wortels tot éénen te zamen, zoodat de vergelijking, bij dien overgang, twee gelijke wortels hebben moet. Bij dien overgang en dat zamensmelten heeft eene raking van beide kromme lijnen plaats. Verandert men nu, bij ~~[illegible]~~ eene bepaalde waarde van p, zoo ziet men, door de kromme lijnen, dat, als m zeer groot is, de vergelijking slechts éénen positieven en eenen negatieven wortel heeft. Laat men m allengs kleiner worden, zoo zal, bij eene bepaalde waarde ~~[illegible]~~ van m, de lijn $m \sin^4 z$ de andere uitwendig aanraken. Bij nog steeds kleinere waarden van m ziet (men dat) de kromme lijnen elkander in vier punten doorsnijden, zoodat de vergelijking vier bestaanbare wortels heeft. Wordt m nog kleiner zoo verkrijgt zij eindelijk eens eene waarde, waarbij de kromme lijn $m \sin^4 z$ de andere inwendig aanraakt. Bij nog kleinere waarden van m verkrijgen de kromme lijnen weder slechts twee snijpunten en de vergelijking slechts twee bestaanbare wortels. De grenzen waarbij de vergelijking vier bestaanbare wortels heeft en die, als zij positief zijn, eene loopbaan kunnen doen vinden, liggen dus binnen de grenzen, aangewezen door de uitwendige en inwendige aanraking der kromme lijn $m \sin^4 z$ met betrekking tot de kromme lijn $\sin(z - p)$

Neemt men b.v. $p = +24°$, zoo vindt men de uitwendige aanraking bij $m = 1,778$ en de inwendige bij $m = 0,881$. Elke waarde van m, buiten de grenzen 0,881 en 1,778, zoude dus, bij $p = +24°$, geene loopbaan eener planeet kunnen geven. Binnen die grenzen vindt men vier snijpunten en daarbuiten slechts twee.

Heeft de vergelijking drie positieve wortels, zoo behoort eene (daarvan) tot de aarde, eene tot de planeet en is de derde gewoonlijk eene waarde $z > \delta$ en alzoo onbestaanbaar met het wezen van het vraagstuk, zoodat de derde positieve wortel van zelf weg valt. Het kan echter ook gebeuren, dat de twee wortels, die niet tot de aarde behooren, beide kleiner dan δ zijn en in dat geval geeft de oplossing van het vraagstuk twee loopbanen, die beide aan de waarnemingen voldoen, welke ten grondslag zijn gesteld, maar waarvan slechts eene de ware loopbaan wezen kan. Alleen eene vierde waarneming kan doen beslissen, welke van de twee verkregene loopbanen de ware is. Het vraagstuk kan wel twee, maar nimmer drie of meer loopbanen geven.

Noemt men de vier wortels der vergelijking, als zij bestaanbaar zijn, in de orde waarin zij in grootte op elkander volgen z', z'', z''', z'''' dan zal de vierde wortel z''' altijd grooter dan 180° zijn, wat op hetzelfde nederkomt, negatief zijn en dus wegvallen. Zijn de wortels z', z'', z''' bepaald, dan is het ligt te beslissen of het tegenstelling geval plaats heeft, daar $z < \delta$ zijn moet en δ bekend is.

1° Vindt men $z' = \delta$, dan zijn z'' en z''' beide $> \delta$ en ofschoon er drie positieve wortels bestaan, is er geen die tot de planeet kan behooren en de waarnemingen die ten grondslag zijn gelegd, behooren niet tot eene planeet of komeet.

2° Vindt men $z'' = \delta$, dan is $z' < \delta$ en $z''' > \delta$. De laatste valt dus weg en er is slechts ééne waarde voor z, namelijk z', die aan den eisch van het vraagstuk voldoet. Voor het waargenomen hemellicht wordt dan slechts ééne loopbaan gevonden.

3° Vindt men $z''' = \delta$, dan zijn z' en z'' beide $< \delta$ en de eene zoowel als de andere zal aan den eisch van het vraagstuk voldoen. In dat geval worden twee loopbanen verkregen, omtrent welke men, zonder eene vierde waarneming, niet kan beslissen wie de ware is.

De grenzen binnen welke de vergelijking drie positieve wortels hebben moet en de grenzen waartusschen iedere dier wortels moet vallen, laten zich op de volgende wijze bepalen.

Bij den overgang van twee tot vier ~~xxx~~ bestaanbare wortels moet de vergelijking twee gelijke wortels hebben en als eene vergelijking twee gelijke wortels heeft, zoo ~~heeft zij door~~ is ieder van deze wortels ook een wortel van haren eersten differentiaal.

De vergelijking is:

$$m \sin^4 z - \sin(z-q) = 0$$

en haar eerste differentiaal:

$$4m \sin^3 z \cos z - \cos(z-q) = 0$$

Deze vergelijkingen moeten ééne wortel (met elkander) gemeen hebben. In de plaats van de laatste kan men beter eene zamenstelling van beide vergelijkingen gebruiken, die z in eene zuivere functie van q geeft.

Vermenigvuldigt men de eerste met $-4 \cos z$ en de tweede met $\sin z$, zoo heeft men:

$$-4m \sin^4 z \cos z + 4 \cos z \sin(z-q) = 0$$
$$+4m \sin^4 z \cos z - \sin z \cos(z-q) = 0$$

en ~~xxxxxx~~
en de som is:

$$4 \cos z \sin(z-q) = \sin z \cos(z-q), \quad \text{of:}$$
$$2 \sin(2z-q) - 2 \sin q = \tfrac{1}{2} \sin(2z-q) + \tfrac{1}{2} \sin q$$
$$3 \sin(2z-q) = 5 \sin q$$
$$\sin(2z-q) = \tfrac{5}{3} \sin q$$

Uit den vorm der 8ste machtsvergelijking bleek het reeds, dat zij geene drie positieve wortels hebben kan, tenzij q binnen de grenzen $-90°$ en $+90°$ ligt, maar door de laatste uitkomst wordt q binnen veel engere grenzen beperkt. De vergelijking kan geene vier bestaanbare wortels hebben binnen de grenzen ~~tenzij eene waarde~~ bij welke de waarden van ~~m~~ ~~[illegible]~~ naderingsfactoren voor de twee kromme lijnen geeft. Waar die grootheden niet bestaan zijn ook geen reëele bestaanbare wortels mogelijk en het aanwezen dier wortels vordert alzoo dat voldaan worde aan de vergelijking

$$\sin(2z-q) = \frac{5}{3}\sin q$$

Daar $\sin(2z-q) < \pm 1$ moet ook $\frac{5}{3}\sin q < \pm 1$ of $\sin q < \pm\frac{3}{5}$ zijn. De grootheid q moet alzoo liggen binnen de grenzen

0	en	+ 36°	52′,2
0	"	− 36	52.2
180	"	+ 143	7,8
− 180	"	− 143	7,8

Is q buiten de grenzen $\pm 90°$ gelegen, zoo kan de vergelijking geene drie positieve wortels hebben. ~~Daarbij~~ De twee laatstgenoemde grenzen (maken dus) vervallen. (en) q moet noodwendig liggen tusschen $+36°52',2$ en $-36°52',2$

Uit de vergelijking $\sin(2z-q) = \frac{5}{3}\sin q$ laat zich afleiden binnen welke limieten de waarden van m bij eene bepaalde waarde van q gelegen ~~moeten~~ zijn, ten einde aan de vergelijking drie positieve wortels te (kunnen) ~~geven~~. Die limieten worden aangewezen ~~gegeven~~ door de vergelijkingen:

$$m \sin^4 z = \sin(z-q)$$
$$\sin(2z-q) = \frac{5}{3}\sin q$$

De laatste vergelijking geeft twee waarden voor $2z-q$, namelijk $2z-q$ en $180°-(2z-q)$ en zij geeft, door substitutie in de eerste vergelijking, ook twee limieten voor m.

Noemen wij de eene limiet van m, m' en de andere m'', zoo heeft men onmiddellijk, de uitkomst $2z-q$ gebruikende:

$$m' = \frac{\sin(z-q)}{\sin^4 z}$$

Men vindt den tweeden limiet door, in de eerste vergelijking, voor $2z-q$ $180°-(2z-q)$ te substitueeren.

Daartoe moet men: $180°-(2z-q)$ en dus:

$2z-q$	veranderen in	$180°-2z$
$2z-2q$	"	$90°-z$
$z-q$	"	$\cos z$
$\sin(z-q)$	"	$90°-(z-q)$
z	"	$\cos(z-q)$
$\sin z$	"	$\cos^4(z-q)$
$\sin^4 z$		

en dan wordt de tweede limiet:

$$m'' = \frac{\cos z}{\cos^4(z-q)}$$

Encke heeft, in de Astr. Nachr. n° 641 (Band 27 pag 257) eene tafel gegeven van de, uit de voorgaande formulen, berekende waarden der limieten m' en m'', voor alle mogelijke waarden van q, van drie tot drie graden. Ziet men dat, bij de gegevene waarde van q, de gegevene waarde van m buiten die limieten valt, zoo heeft men dadelijk de zekerheid, dat de ten grondslag gestelde waarnemingen niet tot eene planeet behooren. Encke heeft daarbij de waarden berekend van de wortels z' z'' z''' en z'''', welke met die limieten overeenkomen. Daardoor heeft men dadelijk, als q gegeven is, de limieten binnen welke de wortels gelegen zijn en kan men veelal dadelijk beoordeelen, of het tweeslachtige geval al of niet plaats grijpt.

Uit de berekeningen van Encke blijkt dat de positieve wortels der vergelijking, bij de grootst mogelijke negatieve waarde van q, 116° 33',9 en bij de grootst mogelijke positieve waarde van q, 63° 26',1 bedragen. Aan die grenzen zijn alle positieve wortels aan elkander gelijk. Het tweeslachtig geval kan alleenlijk plaats hebben als $\delta > z'''$ en het is dus onmogelijk, als $\delta \cancel{>} < 63^\circ 26',1$. Het tweeslachtig geval kan dus geene plaats vinden bij nieuw ontdekte planeten, die alleenlijk in de nabijheid van hare oppositiën worden waargenomen.

Eene der twee, door Encke aangehaalde, voorbeelden van twee loopbanen, die door dezelfde waarnemingen worden gegeven, is ontleend aan de komeet van 1846, wier loopbaan door Brünnow berekend is. Bij dat voorbeeld was:

$$\delta = 138^\circ\, 30'\, 55''$$

en de vergelijking:

$$[9,90482]\ \sin^4 z = \sin(z + 32^\circ 57' 11'')$$

De grootheid q was dus $-32^\circ 57' 11''$. Voor $q = -33^\circ$ vindt men, in de tafel van Encke, de limieten der wortels:

z'	tusschen	88° 53',9	en	106° 5',8
z''	"	106 5,8	"	130 54,2
z'''	"	130 54,2	"	138 26,6
z''''	"	329 48,9	"	330 1,9

Hieruit blijkt dadelijk dat $z''' = \delta$ moet worden en dat alzoo het tweeslachtig plaats grijpt.

De wortels der vergelijking zijn:

$$z' = 94^\circ 34' 57''$$
$$z'' = 118\ 55\ 45$$
$$z''' = 137\ 9\ 52$$
$$z'''' = 329\ 56\ 39$$

De reden waarom Z'' niet volkomen gelijk aan δ wordt gevonden, ligt in de onjuist aangenomen waarden van de grootheden P en Q.

Brünnow had den wortel $118°55'45''$ gebruikt (gevende $\rho = 0,380$) en het bleek uit latere waarnemingen dat alleen de wortel $43°55'5,8''$ (gevende $\rho = 0,691$) met de ware toepbaarheid der komeet ~~goeden~~ kon overeenstemde.

Men kan nog verlangen de 8ste magts-vergelijking, waarvan hier gebruik is gemaakt, afgeleid te zien uit de grondformule, in den vorm waarin zij bij Hansen voorkomt. Die grondformule is de formule (5) blads. 98 bij Hansen, die bij hem op blads. 105 in de 4de magts-vergelijking van Gauss wordt getransformeerd, namelijk:

$$\left\{A - C + P(B - C) - K(P+1)\rho'\cos\beta'\right\} r'^3 + \tfrac{1}{2}Q(A + PB) = 0$$

of

$$\left\{\frac{A - C + P(B - C)}{K(P+1)\cos\beta'} - \rho'\right\} r'^3 + \frac{\tfrac{1}{2}Q(A+PB)}{K(P+1)\cos\beta'} = 0$$

Stellen wij ter verkorting:

$$\frac{A - C + P(B-C)}{K(P+1)\cos\beta'} = -k \quad \text{en} \quad \frac{\tfrac{1}{2}Q(A+PB)}{K(P+1)\cos\beta'} = l\,; \quad \text{zoo is:}$$

$$(-k - \rho')r'^3 + l = 0$$

$$-k - \rho' + \frac{l}{r'^3} = 0 \quad \text{en}$$

$$\rho' = -k + \frac{l}{r'^3}$$

En willen wij de formule bij Encke voorkomt.

Om ρ' uit die formule te elimineren, heeft men in den driehoek, wiens hoekpunten zijn zon, planeet en aarde)

Zijn (Lith. verl. pag. 6) in een regtlijnigen driehoek gegeven α, β, A, dan is:

$$\gamma = \beta\cos A \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta^2\sin^2 A}$$

en dus hier:

$$\rho' = R'\cos A \pm \sqrt{r'^2 - R'^2\sin^2 A}$$

$A = 180° - \delta'$ en dus: $\cos A = -\cos\delta'$ en $\sin A = +\sin\delta'$ dus in bijgevolg:

$$\rho' = -R'\cos\delta' \pm \sqrt{r'^2 - R'^2\sin^2\delta'}$$

Men heeft alzoo:

$$-k + \frac{l}{r'^3} = -R'\cos\delta' \pm \sqrt{r'^2 - R'^2\sin^2\delta'}$$

$$R'\cos\delta' - k + \frac{l}{r'^3} = \pm\sqrt{r'^2 - R'^2\sin^2\delta'}$$

$$(R'\cos\delta' - k)^2 + 2\frac{(R'\cos\delta' - k)l}{r'^3} + \frac{l^2}{r'^6} = r'^2 - R'^2\sin^2\delta'$$

$$(R'\cos\delta' - k)^2 r'^6 + 2(R'\cos\delta - k)l\,r'^3 + l^2 = r'^8 - R'^2\sin^2\delta\, r'^6$$

of eindelijk:

$$r'^8 - \{(R'\cos\delta' - k)^2 + R'^2\sin^2\delta'\}\, r'^6 + 2(k - R'\cos\delta')\, l\, r'^3 - l^2 = 0$$

Het blijkt hieruit dat de termen die r'^6 en r'^0 bevatten altijd negatief zijn en dat alleen de term, die r'^3 bevat, beide teekens kan hebben, naar gelang $k >$ of $< R'\cos\delta'$ is.

In den bovenstaanden vorm wordt de vergelijking door Encke gegeven.

Stelt men in de formule:

$\rho' = -k + \frac{l}{r'^3}$

$$x' = -R'\cos\delta \pm \sqrt{(r'^2 - R'^2\sin^2\delta')}$$

$$\mu\sin q = -R'\sin\delta'$$

$$\mu\cos q = k - R'\cos\delta'$$

$$m = \frac{l}{\mu R'^3\sin^3\delta'}$$

en neemt men in aanmerking dat $\frac{\sin z}{R'} = \frac{\sin(\delta' - z)}{\rho'} = \frac{\sin\delta'}{r'}$ is, zoo herleidt men de bovenstaande 8ste magts vergelijking tot de 4de magts-vergelijking van Gauss:

$$m\sin^4 z = \sin(z \mp q)$$

Opdat m steeds positief zoude zijn, kiest men het quadrant, waarin q valt, zoodanig dat l en μ hetzelfde teeken verkrijgen. De coefficient van r'^3, namelijk $-2(k - R'\cos\delta')l$, is $-2\mu l\cos q$ en is dus (positief (negatief $+$ of $-$, naar gelang $q >$ of $< 90°$ is en men heeft:

$r'^8 - Ar'^6 + Br'^3 - C = 0$, voor $q < 90°$ . . . . (1)

$r'^8 - Ar'^6 - Br'^3 - C = 0$, voor $q > 90°$ . . . . (2)

Uit de vergelijking (2) ziet men onmiddellijk, dat de vergelijking, als $q > 90°$ is, hoogstens éénen positieven wortel hebben kan. Wij hebben gezien dat q, bij het aanwezen van drie positieve wortels, zelfs binnen de limieten $-36°52',2$ en $+36°52',2$ beperkt moet blijven.

Elliptische loopbanen.

Elliptische loopbanen

Oplossingen van het problema van Keppler

Hiertoe behooren de bepalingen van de parabolische anomaliën nabij 180° en de bepalingen der anomaliën in zeer lange ellipsen.

Voor de oplossing van het problema van Keppler als de eccentriciteit niet groot is, zie men:

Dr. C. P. Burger Academisch proefschrift

Schubert Astr. Jahrb. 1820 pg 113
Degen A. N. I. 229 (Door Dr. Burger voorbijgezien)
Encke A. N. 30. 277
Hansen A. N. 35. 317
Lehman A. N. 39. 258
Lehman. Lapsus hyperbolicus A. N. 43. 161. 177. 193.
Lehman Lapsus ellipticus en hyperbolicus. A. N. 44. 17. 49. 65. 81. 99. 161. 177. 241. 261. 273.

Dubois A. N. 59. 177

Het midden uit radii vectores

Dubois C. R. 1 Juin 1863
" Les Mondes 1863 n° 27 p. 445
" Bewijs dat het midden van alle voerstralen gelijk is aan de halve kleine as. Les Mondes Suppl. n° 20.

Bache.

Methoden voor het berekenen van elliptische elementen.

- Keppler. Epit. pag. 53. Bohnenberger Astr. § 173 pag. 261.
2 Gauss Mon. Corr. XX. 197. 322.
1 Gauss Theoria motus corporum coelestium etc.

Encke. De dubbele uitkomsten die de methode van Gauss kan geven. A. N. 27. 241 en A. N. 28. 219.

Encke. Beschouwingen omtrent de methode van Gauss. A. N. 30. 33. 49.

Bruhns A. N. 37. 381

de Gasparis. Nieuwe formulen.
A. N. 39. 242. 335
" 42. 205
" 43. 281
Compte Rend. 40. 853
" " 41. 326. 408

Valz. Compt. Rend. 41. 798. 42. 922

Encke. Eene geheel nieuwe ontwikkeling der methode van Gauss. Berl. Astr. Jahrb. 1854. (Voor drie volledige waarnemingen.)

Bruhns. Bepaling der loopbaan uit vier waarnemingen waarvan twee onvolledig zijn. Dissertatio de planetis minoribus pag. 16

[illegible], Bertrand en Gauss over het gebruik van waarnemingen bij de [illegible].
C. R. 40. 1023. 1082. 1177.

Villarceau. C. R. 50.

Klinkerfues. Ueber Bahnbestimmungen von Planeten und Cometen. Göttingen 1861.

Hansen. Ueber die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Leipzig 1864.

Verbetering der elliptische elementen.

Voor de oplossing der differentiaal-formulen door de methode der kleinste quadraten zie onder anderen Sawitsch Practische Astr. II. 12 — 243 — 324

Plana. Verbetering der elementen naar de methode der kl. quadraten en berekening der gewigten Z. für Astr. VI. 249.

Leverrier. A. N. 23. 185-193.

Götze. Differential-quotienten A. N. 28. 97-113 en Ergänzungsheft pg 159.

Weyer. Voorwaardenvergelijkingen. A. N. 35. 197.

Winnecke. Verbetering van loopbanen. A. N. 41. 294.

Ueber die Differential-formeln für Cometenbahnen von grosser Excentricität mit Berücksichtigung von planetarischen Störungen. Von G. D. E. Weyer. Berlin. Dümmler 1852

Ueber die Verbesserung der Planeten-Elemente aus beobachteten Oppositionen, von Dr. J. G. Galle. Habilitations-Schrift. Breslau 1858

Hornstein. Ueber die Bahn der Calliope. 1855. Verbetering van elliptische loopbanen.

Oppolzer. Verbetering van loopbanen A. N. no 1396.

Oppolzer. Entwickelung von Differential-formeln, zur Verbesserung einer Planeten- oder Kometenbahn etc. von Theodor Oppolzer. Wien 1864.

Oppolzer. Nieuwe methode voor differentiaal-formulen voor de verbetering der loopbaan van eene planeet of komeet, hierin bestaande dat de elementen der loopbaan van de ecliptica op den aequator worden overgebragt en dat verband wordt bepaald tusschen de factoren van deze elementen en die in de R en decl.

XLIX Band der Sitzungsb. der m.-w. Cl. der Kaiserl. Academie in Wien (Bibliotheek van de Sterrenwacht)

Kleine planeten die verloren zijn gegaan. Oppolzer.
Sitzungsberichte XLVIII Band. (Sterrenwacht)