

Lineare Algebra und analytische Geometrie I**Arbeitsblatt 4****Die Pausenaufgabe**

AUFGABE 4.1. Löse das lineare Gleichungssystem

$$2x + 3y = 7 \text{ und } 5x + 4y = 3.$$

Übungsaufgaben

AUFGABE 4.2. Löse die lineare Gleichung

$$3x = 5$$

für die folgenden Körper K

- a) $K = \mathbb{Q}$,
- b) $K = \mathbb{R}$,
- c) $K = \{0, 1\}$, der Körper mit zwei Elementen aus Beispiel 3.8,
- d) $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, der Körper mit sieben Elementen aus Beispiel 3.9.

Der Körper der komplexen Zahlen wird in der Analysis eingeführt. Eine komplexe Zahl hat die Form $a + bi$ mit reellen Zahlen a, b . Bei der Multiplikation rechnet man $i \cdot i = -1$. Die inverse komplexe Zahl zu $a + bi \neq 0$ ist $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$.

AUFGABE 4.3.*

Löse die lineare Gleichung

$$(2 + 5i)z = (3 - 7i)$$

über \mathbb{C} und berechne den Betrag der Lösung.

AUFGABE 4.4.*

Zwei Personen, A und B , liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B ?

AUFGABE 4.5. In einer Familie leben M, P, S und T . Dabei ist M dreimal so alt wie S und T zusammen, M ist älter als P und S ist älter als T , wobei der Altersunterschied von S zu T doppelt so groß wie der von M zu P ist. Ferner ist P siebenmal so alt wie T und die Summe aller Familienmitglieder ist so alt wie die Großmutter väterlicherseits, nämlich 83.

a) Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, das die beschriebenen Verhältnisse ausdrückt.

b) Löse dieses Gleichungssystem.

AUFGABE 4.6.*

Kevin zahlt für einen Winterblumenstrauß mit 3 Schneeglöckchen und 4 Mistelzweigen 2,50€ und Jennifer zahlt für einen Strauß aus 5 Schneeglöckchen und 2 Mistelzweigen 2,30€. Wie viel kostet ein Strauß mit einem Schneeglöckchen und 11 Mistelzweigen?

AUFGABE 4.7. Wir betrachten eine Uhr mit Stunden- und Minutenzeiger. Es ist jetzt 6 Uhr, so dass die beiden Zeiger direkt gegenüber stehen. Um wie viel Uhr stehen die beiden Zeiger zum nächsten Mal direkt gegenüber?

AUFGABE 4.8. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix}.$$

Unter dem i -ten *Standardvektor* der Länge n versteht man den Vektor, der an der i -ten Stelle eine 1 und sonst nur Nullen stehen hat.

AUFGABE 4.9. Bestimme das Matrizenprodukt

$$e_i \circ e_j,$$

wobei links der i -te Standardvektor (der Länge n) als Zeilenvektor und rechts der j -te Standardvektor (ebenfalls der Länge n) als Spaltenvektor aufgefasst wird.

AUFGABE 4.10. Es sei M eine $m \times n$ -Matrix. Zeige, dass das Matrizenprodukt Me_j mit dem j -ten Standardvektor (als Spaltenvektor aufgefasst) die j -te Spalte von M ergibt. Was ist $e_i M$, wobei e_i der i -te Standardvektor (als Zeilenvektor aufgefasst) ist?

AUFGABE 4.11.*

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1-3i & -1 \\ i & 0 & 4-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 4.12. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1-\frac{1}{2}i & 4i \\ -5+7i & \sqrt{2}+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5+4i & 3-2i \\ \sqrt{2}-i & e+\pi i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

gemäß den beiden möglichen Klammerungen.

Zu einer Matrix M bezeichnet man mit M^n die n -fache Verknüpfung (Matrizenmultiplikation) mit sich selbst. Man spricht dann auch von n -ten *Potenzen* der Matrix.

AUFGABE 4.13. Berechne zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Potenzen

$$M^i, i = 1, \dots, 4.$$

AUFGABE 4.14. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und M eine $n \times n$ -Matrix. Beschreibe DM und MD .

AUFGABE 4.15. Es sei K ein Körper und $m, n, p \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Transponieren von Matrizen folgende Eigenschaften besitzt (dabei seien $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(K)$, $C \in \text{Mat}_{n \times p}(K)$ und $s \in K$).

- (1) $(A^{\text{tr}})^{\text{tr}} = A$.
- (2) $(A + B)^{\text{tr}} = A^{\text{tr}} + B^{\text{tr}}$.
- (3) $(sA)^{\text{tr}} = s \cdot A^{\text{tr}}$.
- (4) $(A \circ C)^{\text{tr}} = C^{\text{tr}} \circ A^{\text{tr}}$.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 4.16. (3 Punkte)

Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 3.9.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 4.17. (3 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 - 2i & 1 + 5i & 0 \\ 7i & 2 + i & 4 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2i & -i \\ 3 - 4i & 2 + 3i \\ 5 - 7i & 2 - i \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 4.18. (4 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K . Zeige, dass die vierte Potenz von M gleich 0 ist, also

$$M^4 = MMMM = 0.$$

Für die folgende Aussage wird sich bald ein einfacher Beweis über die Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen ergeben.

AUFGABE 4.19. (4 Punkte)

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

Genauer: Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$ -Matrix, B eine $n \times p$ -Matrix und C eine $p \times r$ -Matrix über K . Zeige, dass $(AB)C = A(BC)$ ist.

AUFGABE 4.20. (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Finde und beweise eine Formel für die n -te Potenz der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$