

3

232405

初中臨時教材

代數學

上册

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

東北書店印行



MG
G634.6
11

上册目錄

第一章 文字初步的運算

代數學的目的 (1) 乘法 (1) 乘法的交換定則 (3) 因式 (3) 乘法的指數定則 (4) 以零作乘數的意義 (5) 係數 (6) 同類項及異類項 (6) 同類項的加減法 (6) 異類項的加減法 (8) 乘法的結合定則 (9) 單項式的乘法 (10) 單項式的除法 (11) 除法的指數定則 (11) 零次方 (12)

第二章 簡易方程式

方程式 (14) 公理 (15) 解法 (15) 核算 (16)

第三章 正負數

負數 (18) 正負數之大小 (19) 加法的法則 (20) 代數式的正項和負項 (23) 式和項的關係 (23) 加法的交換定則 (24) 加法的結合定則 (24) 單括弧 (25) 減法的法則 (28) 乘法的法則 (29) 負數的乘方 (31) 乘法分配定則 (31) 除法的法則 (33) 除法分配定則 (34) 重複括弧 (36) 代數式的數值 (36)

第四章 多項式的基本運算(加法和減法)

整式的次數 (39) 升冪式和降冪式 (40) 多項式加減法 (40)

43015

第五章 一元一次方程式

方程式的定義 (43) 方程式的次數 (44) 解方程式 (45) 移項法則 (45) 一元一次方程式的解法 (46) 解應用問題的步驟 (50) 應用問題解法 (56) 數目問題 (56) 年齡問題 (57) 分配問題 (57) 買賣問題 (59) 行程問題 (62) 水程問題 (65) 鐘錶問題 (66) 工作問題 (68) 混合問題 (70) 水管注水問題 (72) 利息問題 (74) 補助未知數 (75)

第六章 聯立一次方程式

聯立方程式 (79) 二元聯立一次方程式的解法 (81) 加減消元法 (80) 代入消元法 (82) 雜題解法 (84) 同值方程式 (86) 矛盾方程式 (87) 三元聯立一次方程式的解法 (87) 應用問題的解法 (89)

第七章 一次函數的圖解

直線上點的位置 (96) 平面上點的位置 (97) 實際的應用 (101) 函數 (102) 求函數值 (103) 一次函數的圖解 (104) 圖解二元一次聯立方程式 (105) 圖解二元一次同值方程式 (106) 圖解二元一次矛盾方程式 (107)

第八章 續多項式的基本運算(乘法和除法)

多項式乘法 (109) 乘方的指數定則 (110) 乘算公式一 (111)

乘算公式二 (114) 乘算公式三 (116) 乘算公式四 (117) 乘算公式五 (119) 多項式除法 (122) 剩餘的處理法 (124) 剩餘定理 (124)

第九章 分 解 因 式

質因式 (127) 分解因式 (127) 各項有公因式的分解法 (127) 分類分解法 (129) 利用乘算公式分解法 (131) 二次三項式分解法一 (135) 二次三項式分解法二 (138) 分解因式的定理 (140) $a^n \pm b^n$ 的分解法 (142)

第十章 最高最公因式和最低公倍式

最高公因式 (145) 求法一 (145) 求法二 (147) 最低公倍式 (150) 求法一 (151) 求法二 (151)

第十一章 分 式

分式 (154) 約分 (154) 通分 (156) 分式加減法 (159) 分式符號的變化 (162) 分式乘法 (165) 分式除法 (167) 繁分式 (169)

代 數 學

上 冊

第 一 章

文字初步的運算

1. 代數學的目的

代數學是繼續算術而研究數目的科學，除用亞拉伯數字代表數目以外，還用文字代表數目，使研究的途徑簡易明瞭，並且記述起來，可以包括種種情形而有普遍性。

什麼叫做文字？就是英文字母 a, b, c, \dots 等等。 a 或 b 以及其他每一個文字，都可以代 $1, 2, 3, \dots$ 等等數目；但在一個題中，只代一個定數，不換題時，不能任意更換。

例如：這個教室有 a 個桌子。

這“ a ”，代替桌子的數目，桌子多，牠代的數目大；桌子少，牠代的數目小，但只代一個定數，不能同時代兩個不相同的數，因為事實上這個教室的桌子，是一個定數。

2. 乘

用例說明於下



〔例1〕 這個教室有40個桌子，共有多少桌腿？

答： 4×40 個桌腿，即160個桌腿。

〔例2〕 那個教室有 a 個桌子，共有多少桌腿？

答： $4 \times a$ 個桌腿。

這種答法，初學的人，必定要生疑問：

(1) a 到底代多少數？

(2) $4 \times a$ 又是多少？

(3) $4 \times a$ 既然不知道是多少數目，怎樣能作答數？

解釋如下：

(1) 那個教室有多少桌子，牠就代表多少數，既然代表一個數，就當作一數看待，不必一定要知道是多少。

(2) a 既代一個數， $4 \times a$ 當然也代一個數，和 4×40 是一樣的，自然可以作答數。

疑問發生的原因：

這都由於學了算術，得到的觀念，是數字的運算；加之，日常生活中所用的數，與算術上的又是一樣，所以遇到用文字代替數目，總覺得文字和數字不同，不知多寡，無從算起，影響得連題都不會答了。

在代數學上，文字和數字相乘，或者文字和文字相乘，中間的乘號，通常省略不寫，所以 $4 \times a$ 寫作 $4a$ ， $a \times b$ 寫作 ab ，但數字和數字相乘，中間的乘號便不能省略，如 4×3 ，若把乘號省略，就與 43 沒有分別了。

$4 \cdot a$ 是 4 乘 a 的意思，“ \cdot ”是乘號，不是小數點。為要分別小數點與乘號，在習慣上，乘號比較小數點位置略高。例如 $4 \cdot 6$ 與 4.6 ，

前者為4乘6，後者為4小數點6。

$4a$ 的意思既然明白，同樣就可得 $5 \times b = 5b$ ，是5個 b 的意思； $a \times b = ab$ ，就是 a 個 b 的意思，如此類推。

3. 乘法的交換定則

在算術上，知 $4 \times 3 = 3 \times 4$ ，

$$5 \times 6 = 6 \times 5。$$

不但這樣的式子總是兩端相等，就是無論幾個任何數相乘，牠們的順序都可以這樣調換，不影響牠們的乘積，文字既然能代數目，同理便可得

$$4a = a4，$$

$$ab = ba。$$

在乘法中這樣的調換，就叫做乘法的交換定則。

由交換定則，知數字和文字相乘，把數字寫在文字的前邊也是一樣的，所以 $b \times 5$ 通常寫為 $5b$ ，不寫為 $b5$ ，文字和文字相乘，通常以字母的次序排列之，所以 $b \times a$ 寫為 ab ，但有特別情形時，不在此限。

4. 因式

$5b$ 是5和 b 相乘得來的，把5和 b 都叫做 $5b$ 的因式，同樣， $3ab$ 的因式是3, a , b , $3a$, $3b$ 和 ab 。

1乘 a 時，應當寫為 $1a$ ，但通常只寫 a ，不寫 1 。因1乘任何數與不乘一樣，同樣， $1 \times b \times c$ 只寫為 bc 。

a 的因式是1和 a ； bc 的因式是1, b 和 c 。

5. 乘法的指數定則

知 $a \times a$ 可以寫為 aa , $a \times a \times a$ 可以寫為 aaa , 假如 500 個 a 相乘, 就要連寫 500 個 a , 為簡便計, 把連乘的個數寫在文字的右角上, 表明多少文字連乘的意思, 這右角上的數, 叫做指數, 原數叫做底數。

$$\therefore a \times a = a^2, \quad a \times a \times a = a^3, \\ 500 \text{ 個 } a \text{ 相乘} = a^{500}.$$

a 右角上的 2, 3 與 500 是指數, a 是底數。

a^1 讀 a 的一次方, a^2 讀 a 的二次方 (或平方), a^3 讀 a 的三次方 (或立方), a^4 讀 a 的四次方, a^r 讀 a 的 r 次方, 餘類推。

因任何數的一次方與牠自己相等, 故 $a^1 = a$ 。通常指數是 1 時, 省略不寫, 就是這個原故, 絕對不是零次方, 要注意!

$$\therefore 3^2 \times 3 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{2+1},$$

$$\therefore 3^2 \times 3 = 3^{2+1} = 3^3.$$

$$\therefore 2^2 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3},$$

$$\therefore 2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5.$$

同理, 得

$$a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5,$$

$$b^2 \times b^5 = a^{2+5} = b^7.$$

由上式得指數的定則 I:

同文字相乘的積, 等於以同文字作底數, 以指數的和為指數。

* “.” 代故字; “∴” 代因字

習 題

下列各式於省略乘號後，應怎樣寫法？

1. $15 \times a$. 2. $a \times 15$. 3. $a \times x$. 4. $x \times a$.

5. $a \times c \times 1$. 6. $1 \times x \times a$. 7. $x \times y \times b$.

8. $y \times m \times c$. 9. $18m$, $3bc$, $5xy$ 是什麼意思？

化簡下列各式：

10. $b \times bbb$. 11. $m^3 \times m^4$. 12. $a^2 \times a^2 \times a^2$.

13. $x^4 \times x^4$. 14. $c \times c^2 \times c^3 \times c^4$. 15. $3 \times y^3 \times y^4$.

16. 1隻鷄多少足？2隻鷄多少足？ m 隻鷄多少足？

17. 1間房子租金 a 元，2間房子租金多少？3間租金多少？ n 間租金多少？

18. 1斤是16兩，2斤是多少兩？4斤是多少兩？ a 斤是多少兩？

19. $35m$ 和 $11mn$ 的因式是什麼？

20. a 和 b 的因式是什麼？

6. 以零作乘數的意義

0×2 的意思就是2個0相加，但無論多少0相加，總是0。

$$\therefore 0 \times 2 = 0 + 0 = 0.$$

$$0 \times a = \underbrace{0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots}_{\text{共有 } a \text{ 個}} = 0.$$

同理 $a \times 0 = 0 \times a = 0$, $0 \times a \times m = 0 \times m = 0$.

7. 係 數

把一式的因式，分成兩組，用一組作主體，其餘一組，叫做體的係數。

〔例 1〕 在 $3x$ 式中，以 x 作主體， 3 為係數；這種係數，叫做數字係數。

〔例 2〕 在 ax 式中，以 x 作主體， a 為係數；以 a 作主體， x 為係數，這種係數，叫做文字係數。

由例 2 知在一式中，係數原沒有一定，總要看以什麼為主體，才能決定。在一式中，因為所取的主體不同，就有幾種係數。

〔例 3〕 在 a 式中，以 a 為主體，係數是 1 ，並不是沒有係數。在 ab 式中，以 ab 為主體，係數也是 1 。

8. 同類項及異類項

(1) 項 在一式中，被“+”號或“-”號分開的部分，連上前面的符號，叫做項。

例如：在 $3a-5x$ 中， $3a$ 算一項， $-5x$ 算一項。

(2) 同類項及異類項。二項或許多項，除係數以外，文字次數完全一樣的，叫做同類項；反之，叫做異類項。

例如： $3x^2$ 和 $5x^2$ ； $6a^2x$ 與 $8a^2x$ 都是同類項。但 $3a^2x$ 與 $3ax^2$ 不是同類項，是異類項。

9. 同類項的加減法

每本書價為 x 角，甲買 3 本，乙買 5 本，共需多少角？

甲買3本所需角數 = $3x$ ，

乙買5本所需角數 = $5x$ 。

$3x$ 是3個 x 的意思， $5x$ 是5個 x 的意思，所以 $3x$ 加 $5x$ 是 $8x$ 。即

$$3x + 5x = (3+5)x = 8x \cdots \cdots \text{共需的角數} c$$

同理 $8a - 5a = (8-5)a = 3a$ 。

由上式知同類項加減時，只加減牠們的係數，而後把文字附上。

例如： 1. $5x - 3x = (5-3)x = 2x$ 。

$$2. \quad 5a^2 + 6a^2 - 3a^2 = (5+6-3)a^2 \\ = 8a^2.$$

$$3. \quad 5m - 4m - m = (5-4-1)m \\ = 0 \times m = 0.$$

在 $3x+5x$ 式中，被“+”號把全式分成兩部分，故叫做二項式；如只有一項時，叫做單項式；如有三項時，叫做三項式，二項以上的式子，叫做多項式：

【練習】說明下式的錯誤。

1. $5x - 3x = 5 - 3 = 2$ 。

2. $3n^2 + 5n^2 = (3+5)n^4 = 8n^4$ 。

3. $3a^2 + a + 5a = (3+1+5)a^2 = 9a^2$ 。

習 題

1. 單項式 m 的係數是什麼？

2. $3n$ 和 $\frac{1}{2}mn$ 的係數是什麼？

化簡下列各式：

3. $m+m+m$. 4. $6a+4a$. 5. $2x+3x+4x$.

6. $7a+6a-a$. 7. $3x^3+3x^3-2x^3$. 8. $\frac{3}{2}a+\frac{7}{5}a-\frac{1}{2}a$.

9. $3a^2x+15a^2x-7a^2x$. 10. $\frac{1}{2}x+x-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x$.

11. $8abc$, $7a+6a-a$ 和 $3x^3+x^3$, 各是幾項式?12. 甲乙兩汽車, 每小時都行 x 里, 甲車行 15 小時, 乙車行 7 小時; 問甲乙兩車共行多少里?13. 羊一頭價 a 元, 甲買 3 頭, 乙買 8 頭, 問甲乙各需洋多少? 共需洋多少?14. 書三冊, 第一冊價 m 角, 第二冊較第一冊貴一倍, 第三冊較第二冊貴 2 倍; 問共價洋多少?

10. 異類項的加減法

項不同類, 不能加減牠們的係數; 如係相加, 用加號連之, 如係相減, 用減號連之, 即是結果。

例如: $2a$ 和 $3x$ 不是同類項, 相加得 $2a+3x$; 相減得 $2a-3x$, 不能再簡單。

同樣, $a+b$ 和 $a-b$ 也不能再簡單, 因為項不同類。

如要簡單 $3x-2x+y+5y$ 這個式子, 把同類的項加減後, 即是結果。

$$\therefore 3x-2x+y+5y=(3-2)x+(1+5)y=x+6y$$

【練習】 說明下式的錯誤:

1. $3m+2n=(3+2)mn=5mn$.

2. $3ac+5ab=(3+5)abc=8abc$.

習 題

化簡下列各式：

1. $2b + b - 3x$.

2. $2a + 3a + 4b - b$.

3. $4a - 2a + 5b - 3b - 3c$. 4. $7m - 3m + 3n - 2n - 2p$.

5. $2a + 15a + 21b - 3b + c - c$.

6. $4xy - 3xy + 11y - 9y + 2x - x$.

7. $47x - 25x - 22x + 63y - 45y + 12y + z + 3z - 2z$.

8. a 隻鷄， b 隻兔，共有多少足？

9. 甲每小時行 a 里，行了3小時；乙每小時行 b 里，行了2小時；問甲乙二人共行多少里？

10. 某人現年18歲，過2年後是多少歲？過 a 年後是多少歲？

11. 甲乙兩班的學生都是 a 個，甲班有女生 b 個，乙班有女生 c 個；問甲乙兩班各有男生多少？

12. 假設 r 是奇數，牠前面的那一個奇數是什麼？後面的那一個奇數是什麼？

11. 乘法的結合定則

在算術上，知 $5 \times 3 \times 6 = (5 \times 3) \times 6$
 $= 5(3 \times 6)$
 $= 90$.

同理 $a \times b \times c = (a \times b) \times c$
 $= a(b \times c)$.

即三個數相乘，可以任意分組乘之，其積不變，不但三個數相

乘如此，就是三個以上的數相乘也是如此，這就叫做乘法的結合定期。

12. 單項式的乘法

(i) 某家有電燈5盞，每月每盞電費 x 角，11個月共需洋多少？

$$1\text{盞燈每月電費} = 1 \times x\text{角},$$

$$5\text{盞燈每月電費} = 5 \times x\text{角}.$$

$$\therefore 5\text{盞燈}11\text{個月電費} = 11 \times 5x\text{角} = 55x\text{角}.$$

(ii) 某家有電燈5盞，每月每盞電費 x 角， a 個月共需洋多少？

$$1\text{盞燈}a\text{個月的電費} = a \times x\text{角}.$$

$$\therefore 5\text{盞燈}a\text{個月的電費} = 5 \times ax = 5ax\text{角}.$$

(iii) 某家有電燈5盞，每月每盞電費 x 角， $3a$ 個月共需洋多少？

$$5\text{盞燈}1\text{個月的電費} = 1 \times 5x\text{角}.$$

$$\therefore 5\text{盞燈}3a\text{個月的電費} = 3a \times 5x\text{角}.$$

由交換定則，得

$$\begin{aligned} 3a \times 5x &= 3 \times 5 \times a \times x \\ &= 15ax. \end{aligned}$$

所以單項式乘單項式，等於數字乘數字，文字乘文字，再連乘之，即得結果。

$$[\text{例}1] \quad 3ab \times 5ax = 3 \times 5 \times a \times a \times b \times x = 15a^2bx.$$

$$\begin{aligned} [\text{例}2] \quad 15xy^7 \times 3x^5y^6z &= 15 \times 3 \times x \times x^5 \times y^7 \times y^6 \times z \\ &= 45x^6y^{13}z. \end{aligned}$$

13. 單項式的除法

除法是乘法的逆算。

$$\begin{aligned} \because 4 \times a = 4a, \quad \therefore \frac{4a}{4} = \frac{4 \times a}{4} = a, \\ \frac{4a}{a} = \frac{4 \times a}{a} = 4. \end{aligned}$$

同樣 $\because 3 \times b \times c = 3bc,$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{3bc}{3} &= \frac{3 \times b \times c}{3} = bc, \\ \frac{3bc}{b} &= \frac{3 \times b \times c}{b} = 3c, \\ \frac{3bc}{c} &= \frac{3 \times b \times c}{c} = 3b, \\ \frac{3bc}{bc} &= \frac{3 \times b \times c}{b \times c} = 3. \end{aligned}$$

由上式知單項式除單項式，把相同的因式約去，即得商，如無公因式可約時，以被除式作分子，除式作分母，以表商式。

14. 除法的指數定則

$$\because a \times a = a^2, \quad \therefore \frac{a^2}{a} = \frac{a \times a}{a} = a^1 = a^{2-1}.$$

即 $a^2 \div a = a^{2-1} = a.$

$$\because a \times a \times a = a^3, \quad \therefore \frac{a^3}{a} = \frac{a \times a \times a}{a} = a^2 = a^{3-1}.$$

即 $a^3 \div a = a^{3-1} = a^2.$

$$\because a^2 \times a^3 = a^5, \quad \therefore \frac{a^5}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a^3 = a^{5-2}.$$

即 $a^5 \div a^2 = a^{5-2} = a^3$.

由上式得指數定則II：

同文字相除，商的指數等於被除數的指數減去除數的指數。

〔例1〕 $\frac{30a^3x^5}{5a^2x^4} = 6a^{3-2}x^{5-4} = 6ax$.

〔例2〕 $\frac{30a^2x^4}{5a^3x^5}$ 這式子怎樣簡單？

依指數定則，則得其商式為

$$6a^{2-3}x^{4-5}.$$

2減3及4減5現在尚不會運算，待學了負數以後，自然會算故現時如遇到這樣的題，其運算法為約去同因式。

$$\therefore \frac{30a^2x^4}{5a^3x^5} = \frac{6}{ax}$$

任何數的零次方是什麼意義呢？先看下列。

數 字 的

$$\frac{9}{9} = 1,$$

即 $\frac{3^2}{3^2} = 1.$

由指數定則II，得

$$3^2 \div 3^2 = 3^{2-2} = 3^0,$$

$$\therefore 3^0 = 1,$$

$$\frac{5^2}{5^2} = \frac{25}{25} = 1,$$

即 $5^2 \div 5^2 = 5^{2-2} = 5^0,$

$$\therefore 5^0 = 1.$$

文 字 的

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{a \times a}{a \times a} = 1,$$

由指數定則II，得

$$a^2 \div a^2 = a^{2-2} = a^0,$$

$$\therefore a^0 = 1.$$

$$\frac{b^3}{b^3} = \frac{b \times b \times b}{b \times b \times b} = 1,$$

即 $b^3 \div b^3 = b^{3-3} = b^0,$

$$\therefore b^0 = 1.$$

所以任何數的零次方都是 1。

習 題

計算下列各式：

1. $5x^2 \times 7x^5$.

2. $4a^3 \times 5x^3$.

3. $7ab \times 8a^3b^2$.

4. $x^3y^3 \times 6a^2x^4$.

5. $5a^2x \times 8cx$.

6. $5x^3y^3 \times 6x^3a^3$.

7. $8ab \div 4a$.

8. $2m^2n \div 3m$.

9. $35a^{11} \div 7a^7$.

10. $15x^2y \div 3xy$.

11. $4a^2b^2c^2 \div ab^2c^2$.

12. $\frac{a^2}{a} \times \frac{b^2}{b}$.

13. $\frac{a^2}{b} \times \frac{b^2}{a}$.

14. $\frac{4xy^2z}{xyz} \times xz$.

15. 學生 m 個，每 10 人分一組，共分幾組？每 20 人分一組，共分幾組？每 p 個人分一組，共分幾組？

第二章

簡易方程式

15. 方程式

方程式之意義，可藉下例說明之：

〔例 1〕 甲年齡的 3 倍是 36。問甲現年多少？

把這個題的意思用式子表示出來，是

$$3 \times ? = 36 \cdots \cdots (1)$$

猜這“？”代表什麼數？

〔例 2〕 某數的 2 倍加上 4，等於 14，求某數是多少？

把這個題的意思用式子表示出來，是

$$2 \times ? + 4 = 14 \cdots \cdots (2)$$

猜這“？”又代表什麼數？

代數上通常用末後的幾個字母 x, y, z 等等代表未知數，現在用 x 代表未知數，即(1)，(2)中的“？”則

(1) 變為 $3x = 36 \cdots \cdots (3)$

(2) 變為 $2x + 4 = 14 \cdots \cdots (4)$

(3) 式中的 x ，一望而知其為 12，且祇能為 12；(4) 式中的 x ，一望而知其為 5，且祇能為 5；這些式子通稱為方程式。

16. 公理

解方程式須藉下列四條公理：

- I. 相等兩量，各加同量，其和仍相等；
- II. 相等兩量，各減同量，其差仍相等；
- III. 相等兩量，各以同量乘之，其積仍相等；
- IV. 相等兩量，各以同量除之，其商仍相等。

17. 解法

在 § 15 中所計算的問題，因為很簡單，故方程式中的未知數還容易猜；假如複雜些，就不容易猜了，故不得不研究一種有規則的運算法。

〔例 1〕 求 $3x=36$ 中 x 值，就得用公理 IV。

兩端用 3 除之，即得 $x=12$ 。

〔例 2〕 求 $2x+4=14$ 中 x 值，其步驟如下：

若將兩端各減 4，仍相等，得下式，

$$2x+4-4=14-4. \quad (\text{公理 II})$$

即 $2x=10$ 。

兩端用 2 除之，得 $x=5$ 。 (公理 IV)

爲什麼兩端減 4 不加 4？學者自答之。

〔例 3〕 解 $3x-4=8$ 。

兩端加 4，得

$$3x+4-4=4+8. \quad (\text{公理 I})$$

即 $3x=12$ 。

兩端用 3 除之，得 $x = \frac{12}{3} = 4$. (公理IV)

爲什麼兩端加 4 不減 4？學者自答之。

[例 4] 解 $\frac{x}{2} = -6$.

兩端用 2 乘， $x = -12$. (公理III)

18. 核 算

求得 x 之值，以之代入原方程式中，而考其兩端是否相等，以檢查有無錯誤；這種手續叫做核算。

例如：
 $3x - 8 = x + 12$.
 $3x - x = 12 + 8$. (公理I, II)
 $2x = 20$.
 $x = 10$. (公理IV)

將 x 之值代入原方程式中，則

$$\text{左端} = 3 \times 10 - 8 = 22;$$

$$\text{右端} = 10 + 12 = 22.$$

結果相等，故 x 之值適合方程式。

習 題

求下列方程式中的未知數：

1. $x - 40 = 130$.

2. $4x = 2x + 6$.

3. $14 = x + 8$.

4. $y - 5 = 4$.

5. $y + 3 = 7$.

6. $2y - 4 = 0$.

7. $2z = 18$.

8. $n + 3 = 11 - 2$.

-
9. $3w-3=27$. 10. $121=r+20$.
11. 將某數的3倍中減去5得28，求某數。
12. 有一個數用6乘後，再加上13，結果是79；問這個數是多少？
13. 從一個數的8倍中減24，剩40；問原數是多少？
14. 某數用5乘後，比23多12；求某數。
15. 某數的4倍與11的差是37；求某數。
16. 兄年為弟年的2倍，5年前兄為9歲；問弟現年多少？
17. 父年為子年的3倍，父子年齡的和為40；求父子各年幾何？
18. 某人買書9冊，付洋6元，還找回1.5元；問每冊價洋多少？

第三章 正負數

19. 負數

1. 某人每日得工資五角，用去三角，還餘多少？

2. 某工人每日得工資3角，用去5角，够不够用？

兩題的答數，都是2角：一個是餘下的，一個是短少的，意義恰相反。在代數學上表意義相反的兩數，用正負兩種數來分別。餘下的通常用正數表之，符號是“+”；短少的通常用負數表之，符號是“-”。有了正負數以後，第一題的算式寫作 $5-3=+2$ ，第二題的算式寫作 $3-5=-2$ 。

不論正負號，只論數值的大小，叫做絕對值，符號是“|”。

例如： -5 的絕對值用 $|-5|$ 記之，等於5。上述兩題答數的絕對值為 $|+2| = |-2| = 2$ 。

因此我們知道“+”和“-”這兩個符號，在代數學上都有兩種用法：（1）用在運算方面的叫做運算符號，和算術上的意義一樣；（2）用在分別數的性質時，叫做性質符號。

正負數應用到量上的說明：

1. 如每日的時間，用正午為標準，下午6時為+6時，則上午8時為-4時。

2. 假設往北是正的，則往南就是負的。用鄒州為標準，到北平的方向便是正的，到漢口的方向便是負的。

3. 假設用海平面為標準，高於海平面的為正，低於海平面的為負。

20. 正負數之大小

數的大小用記號 $>$ (大於)或 $<$ (小於)表出來。

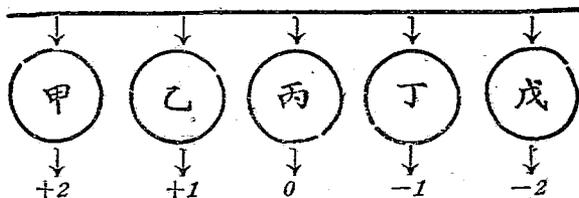
例如： 5 大於 3 就寫為

$$5 > 3, \text{ 或 } 3 < 5.$$

由上節既知代數上比算術上多了一種負數。那末，牠們自己的大小如何？牠們和正數的大小又如何？總應當知道，現在舉一個實際問題來說明正負數的大小：

假設有甲乙丙丁戊五個人，每日收入都是10元；甲每日支出8元，其餘的人，順次每人每日多支出1元，他們的剩餘各如何？

剩 餘 的 數 目



因為收入是一樣的，所以支出得多，就剩餘得少，於是得

$$(+2) > (+1) > 0 > (-1) > (-2).$$

這個式子表明正數大小的次序，和算術上的數是一樣的；負數的絕對值愈大，數值愈小，並且表明凡正數皆大於零，凡負數皆小

於零。所以就得出正負數和零大小的次序如下：

$$\cdots > +1 > +3 > \cdots > +2 > +1 > 0 > -1 > -2 > -3 > \cdots > -4 > \cdots$$

習 題

用正負數的意義，說明下列各題：

1. 某井底比海平面高7尺。
2. 上午10時和下午2時。
3. 甲錶比乙錶每小時快10分，比丙錶每小時慢5分。
4. 由鄭州向東行20里，或由鄭州向西行30里。
5. 戰線向前進5里。
6. 戰線向後退10里。
7. 排列0, -25, -3, 5, 12的次序。
8. 排列 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 5, -4的次序。

21. 加法的法則

正 數 加 正 數

甲每月收入100元(+100),
又收入50元(+50); 問每月共收入多少?

答: 每月共收入150元(+150)。

既知答數為+150, 研究怎樣得來。

負 數 加 負 數

甲每月還乙洋100元(-100)
還丙洋50元(-50); 問每月共還多少?

答: 每月共還洋150元(-150)。

既知答數為-150, 研究怎樣得來?

∴ 150 恰等於收入洋數的絕對值之和，添上正號，故得算式如下：

性質符號 ← - - +100

$$\begin{array}{r} \text{運算符號} \leftarrow + \quad + 50 \\ \hline +150 \end{array}$$

由上例得同性質數相加的法則：

I. 求絕對值的和； II. 符號仍舊。

例如：

1. 求 +3a 與 +5a 的和。

$$\begin{array}{r} +3a \\ +) +5a \\ \hline +8a \end{array}$$

-150 恰等於還債洋數的絕對值之和，添上負號，故得算式如下：

性質符號 ← - -100

$$\begin{array}{r} \text{運算符號} \leftarrow + \quad - 50 \\ \hline -150 \end{array}$$

2. 求 -3a 與 -5a 的和。

$$\begin{array}{r} -3a \\ +) -5a \\ \hline -8a \end{array}$$

正 數 與 負 數 相 加

某人由南京向北行 30 里 (+30) 後，向南行 20 里 (-20)；問他距南京多少里？

答：在南京北邊 10 里 (+10)。

因 +10 恰等於所行里數的絕對值之差，添上絕對值大的符號，故得算式如下：

$$\begin{array}{r} \text{性質符號} \leftarrow - \quad +30 \\ \text{運算符號} \leftarrow + \quad -20 \\ \hline +10 \end{array}$$

某人由南京向北行 20 里 (+20) 後，向南行 30 里 (-30)；問他距南京多少里？

答：在南京南邊 10 里 (-10)。

因 -10 恰等於所行里數的絕對值之差，添上絕對值大的符號，故得算式如下：

$$\begin{array}{r} \text{性質符號} \leftarrow - \quad +20 \\ \text{運算符號} \leftarrow + \quad -30 \\ \hline -10 \end{array}$$

由上例得兩個異性質數相加的法則：

I. 求絕對值的差； II. 用絕對值大的符號。

如兩個以上的異性質數相加，可每次取兩個，依法則加之。

例如：

1. 求 $+80x$ 與 $-50x$ 的和。

$$\begin{array}{r} +80x \\ +) -50x \\ \hline +30x \end{array}$$

2. 求 $+50x$ 與 $-80x$ 的和。

$$\begin{array}{r} +50x \\ +) -80x \\ \hline -30x \end{array}$$

3. 求 $+30b$ ， $-25b$ 與 $+70b$ 的和。

$$\begin{array}{r} +30x \\ +) -25b \\ \hline +5b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +5b \\ +) +70b \\ \hline +75b \end{array}$$

以上正負性質的數相加，都叫做代數和，所以代數和與算術的和，就不能完全一樣，因為代數上的數有正負兩種性質，加起來可以增大，也可以反而變小。

【練習】 兩個什麼性質的數加起來大？兩個什麼性質的數加起來反而小？

習 題

求下列各題中諸數的和：

1. $+5$ ， $+10$ 。

2. $+5$ ， -10 。

3. -5 ， -10 。

4. -70 ， -80 。

5. -8 ， $+5$ ， $+3$ 。

6. $+5$ ， -8 ， $+3$ 。

7. -5 ， $+8$ ， -6 ， $+15$ 。

8. $-3a$ ， $-7a$ 。

9. $15b$ ， $-16b$ 。

10. $+17x$ ， $-18x$ 。

11. 0 ， $-2x$ 。

12. 0 ， $-x$ ， $+x$ 。

13. $-3y, 0$ 。

14. $+1, 0, +1, -3$ 。

15. $+3m, -2m, +m, -4m$ 。

16. $+3a, +b, -5a, -10b$ 。

17. 甲從某地向東行30里後，向西行20里，又向東行10里；問甲距某地多少里？其方向如何？

18. 甲從某地向東行3個 a 里後，向西行2個 a 里，又向東行1個 a 里；問甲距某地多少里？其方向如何？

22. 代數式的正項和負項

我們知道 $3a-3x+b$ 是三項式； $3a$ 是首項， $-3x$ 是第二項， $+b$ 是末項（§9）。

在代數上，式的首項是正的，通常把“+”號省略不寫，故 $3a$ 即 $+3a$ 。

因首末兩項都含“+”號，就叫做正項；第二項含“-”號，就叫做負項，所以項的正負，以牠前邊的符號來定。

例如： $-3a+3b-7$ 的首末兩項含負號，所以是負項，第二項含正號，所以是正項。

23. 式和項的關係

拿一個多項式來研究，牠的成分，不出下列三種情形：

- (1) 都是正項組織成的；
- (2) 都是負項組織成的；
- (3) 正項和負項組織成的。

所以一個多項式的全式（不含括弧的），普遍的來說，就是表

明正項和負項的代數和，常把運算的加號省略不寫。

因此前 § 21 的運算式：

$$\begin{array}{r} +3a \\ +) +5a \\ \hline +8a \end{array}$$

可以寫為 $3a + (+5a) = 8a$ ，

$$\text{即 } 3a + 5a = 8a。$$

$$\begin{array}{r} -3a \\ +) -5a \\ \hline -8a \end{array}$$

可以寫為 $-3a + (-5a) = -8a$ ，

$$\text{即 } -3a - 5a = -8a。$$

同樣， $80x + (-50x) = 30x$ ，即 $80x - 50x = 30x$ ；

$$50x + (-80x) = -30x，\text{即 } 50x - 80x = -30x；$$

$$30b + (-25b) + (+70b) = 75b，\text{即 } 30b - 25b + 70b = 75b。$$

24. 加法的交換定則

在算術上，知

$$3 + 5 = 5 + 3。$$

同樣，知

$$a + b = b + a。$$

這就是兩個數相加，不因其相加的次序而變，不但兩個數相加如此，就是三個以上的數相加，也是如此，這就叫做加法的交換定則。

25. 加法的結合定則

在算術上，知

$$\begin{aligned} 3 + 5 + 7 &= (3 + 5) + 7 = 3 + (5 + 7) \\ &= 15。 \end{aligned}$$

同樣，知 $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)。$

這就是三個數相加，可以分組加之，其和不變，不但三個數相

加是如此，就是三個以上的數相加，也是如此。這就叫做加法的結合定則。

習 題

化簡下列各式：

1. $3a + b - 5a - 10b$. 2. $4a^2 - 5a - 15a^2 + 5$.
 3. $3xy - 4a + 5xy + 8a$. 4. $3x^2 - 5 - 4x^3 - 5x - x^2 + x^3$.

26. 單括弧

括在括弧內的項，不管是多少項，都要當作一項看待。

I. 括弧前邊是“+”號。

後§ 25，知 $7 + (11 - 15) = 7 + 11 - 15 = 3$ ；

$$80x + (30x - 45x) = 80x + 30x - 45x = 65x,$$

就可以得到去掉括弧的法則：

式中括弧前邊是正號，去掉時，括弧內各項的符號不變。

反之，也可以得到添加括弧的法則：添加前邊帶正號的括弧，括在括弧內的各項的符號也不變。

例如： 1. $3 + 5 - 7 + 1 = 3 + (5 - 7 + 1)$

或 $= 3 + 5 + (-7 + 1)$

2. $3a - 2b - a + b = 3a + (-2b - a + b)$

或 $= 3a - 2b + (-a + b)$.

II. 括弧前邊是“-”號。

$8 - (4 + 3)$ 的意思，是從8減去4與3之和，結果為1；如從8先減去4後，再減去3，其結果也是1。

於是： $8-(4+3)=8-4-3=1。$

同樣： $5a-(3a+a)$ 的意思 是從 $5a$ 減去 $3a$ ，再減去 a 。

於是： $5a-(3a+a)=5a-3a-a=a。$

$8-(4-3)$ 的意思，是從 8 減去 4 與 3 之差，結果是 7 ；如從 8 減去 4 後，再加上 3 ，其結果也是 7 。

於是： $8-(4-3)=8-4+3=7。$

同樣： $5a-(3a-a)$ 的意思，是從 $5a$ 減去 $3a$ ，再加上 a 。

於是： $5a-(3a-a)=5a-3a+a=3a。$

由上例得法則如下：

式中括弧前邊是負號，去掉牠時，要變括弧內各項的符號（正的變為負的，負的變為正的）。

添加前邊帶負號的括弧時，括在括弧裏邊的各項，都要變符號。

例如：I. $3+5-7+1=3-(-5+7-1)$

或 $=3+5-(7-1)。$

2. $3a-2b-a+b=3a-(2b+a-b)$

或 $=3a-2b-(a-b)。$

III. 括弧前邊符號的變換。

上邊講的是去括弧或加括弧時，括弧內符號的變換法則；這裏是講不去括弧的符號變換，但原則是一樣。

例如：原式為 $+(5-2)$ 。想把括弧前邊的“+”號變為“-”號，同時把括弧內各項的符號亦都變了，所得式之值與原式之值相同：

$$+(5-2)=+5-2=-(-5+2)=3。$$

同理： $-(-5+2)=-5+2=+(-5+2)=-3。$

$$+(a-b) = +a-b = -(-a+b),$$

$$-(a-b) = -a+b = +(-a+b).$$

由上例得法則：

把一式括弧前邊的符號，由“+”號變為“-”號，或由“-”號變為“+”號，同時變換括弧各項內符號，其值不變。

【練習】 說明下邊算式的錯誤在什麼地方：

$$\begin{aligned} 1. \quad -(-5+2)(-7+1) &= +(5-2)(7-1) \\ &= 3 \times 6 = 18. \end{aligned}$$

$$2. \quad (5-2+1) = -(5+2-1) = -6.$$

習 題

去掉括弧後，化簡下列各式：

$$1. \quad 5+(7+8).$$

$$2. \quad 5-(7-8).$$

$$3. \quad 5x+(x-2a).$$

$$4. \quad 2a-(a+3x).$$

$$5. \quad a+b-(a+b).$$

$$6. \quad x-y-(y-x).$$

$$7. \quad 3a+4b-(3b+a)-(5a-8b).$$

$$8. \quad 2a-(3a-2b)+(2a-3b)-(a-2b).$$

$$9. \quad 3ab+5cd-4ac-6bd-(3ab+6cd-3ac-5bd).$$

$$10. \quad \frac{1}{2}a-b+\frac{1}{3}a-\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\right).$$

$$11. \quad -a-3b-\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}c\right).$$

$$12. \quad -\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}y-\frac{1}{6}\right).$$

下列各題的括弧裏邊，應當寫什麼式子？

13. $5+7+8=5+(\quad)$.

14. $a-b-c=a-(\quad)$.

15. $x+3y-5=(\quad)-5$.

16. $x-5y+9=9-(\quad)$.

27. 減法的法則

由前節，知

$$-7m-(10m+2m)=-7m-10m-2m=-19m.$$

$$-7m-(10m-2m)=-7m-10m+2m=-15m.$$

從上兩式知道減法就是把減式的正負號改變後，依 § 21 的法則與被減式相加。

例如：從 $6x$ 減去 $-4x$ ，把 $-4x$ 變為 $4x$ 後，加到 $6x$ 上，得 $10x$ 即是結果。

注意：代數學上把減式各項的符號變後，就成了代數和；凡有式中的正負號，都是性質符號。

習 題

求下列各題中兩數的差（第一數減第二數）：

1. $+7, +5.$

2. $+7, -5.$

3. $-7, -5.$

4. $-7, +5.$

5. $+15x, +21x.$

6. $+81a, -59a.$

7. $-b, -11b.$

8. $-8y, -4y.$

9. $0, +9n.$

10. $0, -13m.$

11. $-17c, 0.$

12. $+13d, 0.$

13. $-25s, -9s.$

14. $-2z, -4z.$

15. 某人有國幣 40 元，買書用去 17 元，購衣服用去 6 元，又代

友人還賬25元；問此人現有國幣多少元？

28. 乘法的法則

正 數 乘 正 數

甲每小時向東行5里(+5)，由某村起行；問2小時後(+2)，甲距某村多少里？

答：在某村東10里(+10)。

算式是 $(+5) \times (+2) = +10$ 。

負 數 乘 負 數

甲每小時向西行5里(-5)，現在行到某村；問2小時前(-2)，距某村多少里？

答：在某村東10里(+10)。

算式是 $(-5) \times (-2) = +10$ 。

由上例得兩個同性質數相乘的法則：

I. 求絕對值的乘積； II. 符號是正的。

如兩個以上的同性質數相乘，可每次取兩個，依法則乘之。

例如： $(+a)(+b) = ab$ ，

$(-a)(-b) = ab$ ，

$(+a)(+b)(+c) = ab(+c) = abc$ 。

負 數 乘 正 數

甲每小時向東行5里(+5)，現在行到某村；問2小時前(-2)，距某村多少里？

答：在某村西10里(-10)。

算式是 $(+5)(-2) = -10$ 。

正 數 乘 負 數

甲每小時向西行5里(-5)，現在行到某村；問2小時後(+2)，距某村多少里？

答：在某村西10里(-10)。

算式是 $(-5)(+2) = -10$ 。

由上例得兩個異性質數相乘的法則：

I. 求絕對值的乘積； II. 符號是負的。

如兩個以上的異性質數相乘，可每次取兩個數，依法則乘之。

例如：

$$a(-b) = -ab,$$

$$(-a)b = -ab,$$

$$a(-b)(-c) = -ab(-c) = abc,$$

$$(-a)(-b)(-c) = ab(-c) = -abc,$$

$$(-a)(-b)(-c)(-d) = (ab)(cd)$$

$$= abcd.$$

由上例得正負數相乘的法則：

- I. 求絕對值的乘積；
- II. 奇個負數相乘，其乘積的符號為負；偶個負數相乘，其乘積的符號為正；正數相乘，無論奇個或偶個，其乘積的符號都是正。

習 題

求下列各式的乘積：

1. $(+7) \times (+8)$.
2. $(-7) \times (-8)$.
3. $(+6) \times (-2)$.
4. $(-6) \times (+2)$.
5. $(+16) \times (-\frac{1}{2})$.
6. $(-3a) \times (+3)$.
7. $(+3x) \times (-3)$.
8. $(-ab) \times (+c)$.
9. $(+6m) \times (-5ft)$.
10. $(-5) \times (-6) \times (-3)$.
11. $(-2) \times (-2) \times (+2)$.
12. $(-5) \times (-6) \times (-3)$.
13. $(-2) \times (-1) \times (+1) \times (-1) \times (-1)$.
14. $(-2b) \times (+b) \times (-4c) \times (-2x)$.
15. 某人由徐州每小時向北行5里，2小時後，距徐州多少里？
16. 某人每小時向北行a里，現在行到徐州；問2小時以前，在徐州何方？距多少里？

29. 負數的乘方

數 字 的	文 字 的
$(-1)^2 = (-1)(-1) = 1^2 = 1,$	$(-a)^2 = (-a)(-a) = a^2,$
$(-1)^3 = (-1)^2(-1)$	$(-a)^3 = (-a)^2(-a)$
$= (+1)(-1) = -1,$	$= a^2(-a) = -a^3,$
$(-1)^4 = (-1)^2(-1)^2$	$(-a)^4 = (-a)^2(-a)^2$
$= (+1)(+1) = +1,$	$= a^2 \times a^2 = a^4,$
$(-1)^5 = (-1)^4(-1)$	$(-a)^5 = (-a)^4(-a)$
$= (+1)(-1) = -1,$	$= a^4(-a) = -a^5,$

由上式知道負數的奇次方仍為負數，偶次方則為正數。

30. 乘法分配定則

1. 甲年 $3x$ 歲，乙年 $2x$ 歲，他們年齡和的3倍是多少？

$$\text{甲乙年齡的和} = 3x + 2x,$$

$$\text{甲乙年齡和的3倍} = 3(3x + 2x)$$

$$= 3 \times 5x = 15x.$$

2. 如把上題改為甲年3倍與乙年3倍，共是多少？

$$\text{甲年3倍} = 3 \times 3x,$$

$$\text{乙年3倍} = 3 \times 2x;$$

$$\text{甲年3倍與乙年3倍的和} = 3 \times 3x + 3 \times 2x$$

$$= 9x + 6x = 15x.$$

兩題的答數既相等，

$$\therefore 3(3x+2x) = 3 \times 3x + 3 \times 2x.$$

同樣 $m(a+b) = ma+mb,$

$$m(a-b) = ma-mb.$$

所以單項式乘多項式，等於分乘各項後所得積的代數和，這就叫做乘法的分配定則，也就是單項式乘多項式的法則。

知道了乘法的分配定則，便可得到括弧前邊有乘數時，去掉括弧的法則：

括弧前邊有乘數去掉牠時，用括弧前邊的乘數乘括弧以內的各項。

例如： 1. $-2(3a+2b) = -2 \times 3a + (-2) \times 2b$
 $= -6a - 4b.$

2. $3x - \frac{1}{3}(6x^2 - 21x + 9y) = 3x - \frac{1}{3} \times 6x^2$
 $+ \frac{1}{3} \times 21x - \frac{1}{3} \times 9y$
 $= 3x - 2x^2 + 7x - 3y$
 $= 10x - 2x^2 - 3y.$

習 題

去括弧後，化簡下列各式：

1. $2x(x-5).$

2. $5(a-b).$

3. $-5(a-b).$

4. $(3x-5y) \times 3y.$

5. $-3x(3x-5y).$

6. $-3x(-x-y+2).$

7. $(-a^2bc + ab^2c - abc^2) + 2(-ab).$

8. $2(a+b+c) - 3(a-b+c) - (b+c+a).$

$$9. \frac{3}{4}x(2x-3y+4z) - \frac{5}{6}x\left(3x - \frac{1}{5}y - z\right).$$

下列各式中括弧內應當寫進什麼式子：

$$10. 3x-3y=3(\quad). \quad 11. ax-bx=x(\quad).$$

$$12. ax-3x-2a+4=x(\quad)-2(\quad).$$

$$13. a^3b^2c - a^2b^3c + a^2b^2c^2 = -ab(\quad).$$

14. 甲年 a 歲，乙年為甲的2倍；問他們年齡和的3倍是多少？

31. 除法的法則

I. 同性質的數相除。

$$\because (+5) \times (+2) = +10, \quad \therefore (+10) \div (+2) = +5;$$

$$(+5) \times (-2) = -10, \quad (-10) \div (-2) = +5.$$

由上式得法則：

I. 求絕對值的商； II. 符號是正的。

$$\text{例如：} 1. (+6a) \div (+3a) = + \frac{|+6a|}{|+3a|} = \frac{6a}{3a} = 2.$$

$$2. (-6a) \div (-3a) = + \frac{|-6a|}{| -3a|} = \frac{6a}{3a} = 2.$$

II. 異性質的數相除。

$$\because (-5) \times (-2) = +10, \quad \therefore (+10) \div (-2) = -5;$$

$$(-5) \times (+2) = -10, \quad (-10) \div (+2) = -5.$$

由上式得法則：

I. 求絕對值的商； II. 符號是負的。

$$\text{例如：} 1. (-8x) \div (+2) = - \frac{|-8x|}{|+2|} = - \frac{8x}{2} = -4x.$$

$$2. (+8x) \div (-2) = - \frac{|+8x|}{|-2|} = -\frac{8x}{2} = -4x.$$

習 題

求下列各式的商：

1. $(+15) \div (+5).$

2. $(+21) \div (-7).$

3. $(-21) \div (+7).$

4. $(+15) \div (-5).$

5. $(-12) \div (-4).$

6. $(+27) \div (-9).$

7. $(+3) \div (-2).$

8. $(+2) \div (-3).$

9. $(-27) \div \left(-\frac{3}{2}\right)$

10. $(+5) \div \left(-\frac{1}{2}\right).$

11. $(-3a) \div (-a).$

12. $(-3xy) \div (+y).$

32. 除法分配定則

1. 甲某每月把房租 $3a$ 元和利息 $9a$ 元收到後，分給三個兒子使用；問每人得多少？

$$\text{房租與利息的和} = 3a + 9a = 12a,$$

$$\therefore \frac{3a+9a}{3} = \frac{12a}{3} = 4a \cdots \cdots \text{每人分得的元數。}$$

2. 如把上題改為房租收到後，即分用之；利息收到後，再分用之；問每人兩次共得多少？

$$\text{第一次每人分得的元數} = \frac{3a}{3} = a,$$

$$\text{第二次每人分得的元數} = \frac{9a}{3} = 3a,$$

$$\therefore a + 3a = 4a \cdots \cdots \text{每人兩次共分得的元數。}$$

兩題的答數既相等，

$$\therefore \frac{3a+9a}{3} = \frac{3a}{3} + \frac{9a}{3}.$$

同樣， $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c},$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

所以單項式除多項式，等於分除各項後所得商的代數和，這就叫作除法的分配定則，也就是單項式除多項式的法則。

例如： 1. 求 x 除 $x^2 - 2xy$ 的商。

$$\frac{x^2 - 2xy}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{2xy}{x} = x - 2y.$$

2. 求 $\frac{1}{2}a$ 除 $2a^2 - \frac{1}{3}ab$ 的商。

$$\begin{aligned} \frac{2a^2 - \frac{1}{3}ab}{\frac{1}{2}a} &= \frac{2a^2}{\frac{1}{2}a} - \frac{\frac{1}{3}ab}{\frac{1}{2}a} \\ &= 2 \times \frac{2}{1}a - \frac{1}{3} \times \frac{2}{1}b = 4a - \frac{2}{3}b. \end{aligned}$$

習 題

求下列各式的商：

- $(x^3 - 3x^2 + x) \div x.$
- $(x^6 - 7x^5 + 4x^4) \div x^2.$
- $(a^2 - ab - ac) \div a.$
- $(a^3 - a^2b - a^2b^2) \div a^2.$
- $(15x^5 - 25x^3) \div (-5x^3).$
- $(34b^2c^2 - 51b^2c^3) \div 17bc.$
- $(4x^4y^4 - 8x^2y^2 + 6xy^3) \div (-2xy).$

$$8. (nm^3 - 9m^2n - 12mn^2) \div (-3m).$$

$$9. \left(-3a^2 + \frac{9}{2}ab - 6ac \right) \div (-2a).$$

$$10. \left(-\frac{5}{3}x^2 + \frac{5}{3}xy + \frac{10}{3}x \right) \div \left(-\frac{5}{6}x \right).$$

33. 重復括弧

式中含重復括弧，去掉時，從外向裏，或從裏向外都可以；最便當的方法，是從裏向外一個一個的去掉牠們。

$$\begin{aligned} \text{例如： } a - [b - \{a - (a+b)\}] &= a - [b - \{a - a - b\}] \\ &= a - [b + b] \\ &= a - 2b. \end{aligned}$$

習 題

去掉下列式中的括弧：

$$1. a - [2a - \{3b - (4c - 2a)\}].$$

$$2. -[-\{-(-x)\}] - \{-(-y)\}^2.$$

$$3. -5x - [3y - \{2x - (2y - x)\}].$$

$$4. 2a - \{5b + (3c - a)\} - \{5a - (b + c)\}.$$

$$5. -\{5x - (11y - 3x)\} - \{5y - (3x - 6y)\}.$$

$$6. 3a - [a + b - \{a + b + c - (a + b + c + d)\}].$$

34. 代數式的數值

1. 代數式 用(+), (-), (×), (÷), (√)等運算符號

聯接文字或文字與數字所成的算式，叫做代數式，如 $3ab$ ， $2a^2x+3b-4y$ ， $\sqrt{ab+c^2}$ 都是代數式。

II. 求代數式的數值法 假如代數式中文字代表的數值已經知道，代入式中，計算後，得到的結果，叫做代數式的數值。

例如： 1. 假設 $a=4$ ，求 $3a$ 的數值。

$$3a=3\times 4=12.$$

12就是 $a=4$ 時， $3a$ 這個代數式的數值。

2. 假設 $x=5$ ，求 $x^2-10x+2$ 的數值。

$$x^2-10x+2=5^2-10\times 5+2=-23.$$

-23就是 $x=5$ 時， $x^2-10x+2$ 的數值。

3. 假設 $a=6$ ， $x=7$ ， $z=5$ ；求 $\frac{1}{3}ax-2z$ 的數值。

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}ax-2z &= \frac{1}{3}\times 6\times 7-2\times 5 \\ &= 4.\end{aligned}$$

習 題

假設 $a=7$ ， $b=2$ ， $c=0$ ， $x=5$ ， $y=3$ ；求下列各代數式的數值：

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|---------------|
| 1. $4ax^2$. | 2. x^3b . | 3. a^2cy . |
| 4. a^2-b^2 . | 5. a^2-bc . | 6. $cx-y^2$. |
| 7. $\frac{1}{20}ab^2x$. | 8. $\frac{1}{9}x^2-cy^4$. | |

假設 $a=2$ ， $b=3$ ， $c=1$ ， $d=0$ ；求下列各代數式的數值：

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| 9. $2a^2+3b^2-4c^4$. | 10. $a^2+b^2+c^2+d^2$. |
|-----------------------|-------------------------|

11. $6ab - 3bc - 5cd$.

12. $6a + 5b - 8c + 9d$.

13. 假設 $x = 0, 3, 6$ 時；求 $x^2 - 9x + 20$ 的數值。14. 假設 $x = \frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ 時；求 $6x^3 - 11x^2 + 3x$ 的數值。

第四章

多項式的基本運算（加法和減法）

35. 整式的次數

凡不含有帶根號文字且無文字作分母的代數式，叫做整式，如 $3a+b-c$ 和 $\frac{1}{3}a^2-a-\frac{1}{7}$ 都是整式，但 $\frac{x}{3a}+\frac{y}{b}-\frac{2z}{c}$ 如就 x, y, z 而說，亦是整式。

I. 項的次數。

在 $3x^3y$ 項中，文字乘方的和為4，就叫做4次項，如就 x 來說，叫做 x 的3次項；如就 y 來說，叫做 y 的一次項。

由上知項的次數，就是各文字乘方相加的數目。

II. 整式的次數

在一式中，最高次項是幾次，就叫做幾次式，如在 $x^2y^3+x^2y-y^2$ 式中，最高次項的次數是5，就叫做5次式，如就 x 來說，叫做 x 的2次式；如就 y 來說，叫做 y 的3次式。

如 $3x^2-2x-4$ 是2次式，也是 x 的2次式，因為全式只含一個文字的關係故， -4 叫做絕對項或 x 的零次項；因 x^0 等於1，故 $-4x^0$ 仍等於 -4 。在 y^2-3y+5 式中， $+5$ 可以說是 y 的零次項。

習 題

1. $3ab^2 - 7bc^3 - 8$ 是幾次式？是 a 或 b 的幾次式？
2. $3x^4 - 5x^3 - 6x + 5$ 是幾次式？是 x 的幾次式？各項是幾次項？
3. $5x^3y - 16x^2y^2 + 7xy - 5y + 3x - 5$ 是幾次式？是 x 的幾次式？是 y 的幾次式？ $-5y$ 項是 x 的幾次項？ $+3x$ 項是 y 的幾次項？

36. 升冪式和降冪式

一個數的乘方，又叫做乘冪。如 a^2 ，就叫做 a 的 2 乘冪； b^7 就叫做 b 的 7 乘冪。如此類推。

多項式各項的乘冪，漸漸升高，叫做升冪式；如 $5 + 6a - 7a^2 + 3a^3$ 就是 a 的升冪式。相反的，叫做降冪式；如 $5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ 就是 x 的降冪式。

在 $a^2 + 2ab + b^2$ 式中，如就 a 來說，是降冪式；如就 b 來說，是升冪式。故一式含幾個文字時，不論怎樣排列都可以，需要什麼文字時，就用什麼文字的冪序排列。

習 題

把下邊的式子，排列成 x 或 a 的降冪式； y 或 b 的升冪式：

1. $5 - 7x^4 + 3x - 9x^2$.
2. $a^5 - 11 + a^4 - 3a + 5a^2$.
3. $xy - 15 + x^2y + 6xy^2 + x^3 + y^3$.
4. $a^3 + abc + 2ab^2c - 3a^2bc + b^3 + c^3 - 7abc^2$.

37. 多項式加減法

I. 加法

(1) 橫式運算法 把應加的式子，以括弧括住，用“+”號與被加的式子相連；再去掉括弧，合併同類項，即得結果。

例如：求 $4x-3y$ 與 $3x+2y$ 的和。

$$4x-3y+(3x+2y)=4x-3y+3x+2y=7x-y.$$

(2) 縱式運算法 把各式的同類項，寫在同一縱行內；合併同類項，即得結果。

例如：求 $5a-c$ ， $4b+7c^2$ 與 $2a-3b-5c^2-c$ 的和。

$$\begin{array}{r} 2a-3b-5c^2-c \\ 5a \qquad \qquad \qquad -c \\ +) \qquad \qquad 4b+7c^2 \\ \hline 7a+b+2c^2-2c \end{array}$$

II. 減法

(1) 橫式運算法 把應減的式子，以括弧括住，用“-”號連在被減式的後邊，然後去掉括弧，依 § 9 的法則合併同類項，即得結果。

例如：從 $6x+2y-5$ 式中減去 $4x-3y+10$ 。

$$\begin{aligned} 6x+2y-5-(4x-3y+10) &= 6x+2y-5-4x+3y-10 \\ &= 2x+5y-15. \end{aligned}$$

(2) 縱式運算法 把減式各項的符號改變後，與被減式的同類項寫在同一縱行內(被減式在上，減式在下)，依 § 9 的法則合併同類項，即得結果。

例如：I. 從 $6x+2y-5$ 式中減去 $4x-3y+10$ 。

$$\begin{array}{r} 6x+2y-5 \\ +) \quad -4x+3y-10 \\ \hline 2x+5y-15 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(i)} \quad 6x+(-4x)=2x. \\ \text{(ii)} \quad 2y+3y=5y. \\ \text{(iii)} \quad -5+(-10)=-15. \end{array}$$

2. 從 x^3-1 式中減去 $3x^2-2x$.

$$x^3 \quad \quad \quad -1 \quad \cdot \quad (i) \quad x^3+0=x^3.$$

$$+) \quad \frac{-3x^2+2x}{x^3-3x^2+2x-1} \quad (ii) \quad 0+(-3x^2)=-3x^2.$$

$$(iii) \quad 0+2x=2x.$$

$$(iv) \quad -1+0=-1.$$

習 題

求下列各式的和：

1. x^2+xy, x^2-2xy 2. $7a^2-15, 3a^2+25.$

3. $x^3-x^2+x-1, 2x^2-x+1.$

4. $-a+\frac{2}{3}b, \frac{3}{4}a-b.$

5. $9x^2-7x+5, -14x^2+15x+6, 20x^2-40x-17.$

6. $a^2-ab+bc, ab+b^2-ac, ac-bc+c^2.$

7. $6x^3-2x+1, 2x^3+x+6, x^3-7x^2+2x-4.$

8. $a^3-a^2+3a, 3a^3+4a^2+8a, 5a^3-6a^2-11a.$

9. $x^3-4x^2y+6xy^2, 2x^2y-3xy^2+2y^2, y^3+3x^2y+4xy^2.$

10. $-\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b, \frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b, -2a-b.$

求下列各式的差：

11. 從 $5x^2+xy$ 減去 $2x^2+8xy-7y^2.$

12. 從 $2a-3b-c$ 減去 $4a-3b+c.$

13. 從 $15x+11y-18z$ 減去 $2x-8y+z.$

14. 從 $25a-16b-18c$ 減去 $4a-3b+15c.$

15. 從 $-2x^3-2x^2-3x+2$ 減去 $x^3-x+1.$

第五章

一元一次方程式

38. 方程式的定義

在第二章我們對於方程式，僅作初步介紹，在此應有進一步之研究：

I. 等式

兩個代數式相等時，用等號連結起來，就叫作等式，在等號兩旁的式子，叫做左端和右端。

例如： $x+4=7$ ， $a(a-b)=a^2-ab$ 都是等式。

↓	↓	↓	↓
左端	右端	左端	右端

等式分爲恆等式，方程式兩種：

II. 恆等式

在等式 $a(a-b)=a^2-ab$ 中：

假如用2代 a ，3代 b ，得

$$\text{左端} = 2(2-3) = -2;$$

$$\text{右端} = 2^2 - 2 \times 3 = -2.$$

∴ 兩端相等。

假如用5代 a ，4代 b ，得

$$\text{左端} = 5(5-4) = 5;$$

$$\text{右端} = 5^2 - 4 \times 5 = 5.$$

∴ 兩端相等。

在上式中，無論用什麼數代上式中的 a 和 b ，兩端總是相等；這

種等式，叫做恆等式。

由上例得恆等式的條件：

用無論什麼數代等式中的文字，兩端恆相等，就是恆等式。

III. 方程式

在等式 $x+4=7$ 中：

假如用 2 代 x ，得

$$\text{左端} = 2+4=6,$$

但右端為 7。

∴ 兩端不相等。

假如用 1 代 x ，得

$$\text{左端} = 1+4=5。$$

∴ 兩端仍不能相等。

假如用 4 代 x ，得

$$\text{左端} = 4+4=8。$$

∴ 兩端還不能相等。

假如用 3 代 x ，得

$$\text{左端} = 3+4=7。$$

∴ 兩端相等。

可見在上式中， $x=3$ ，兩端才能相等，除 3 以外。再沒有數，能使兩端相等，這種等式，叫做方程式。

方程式中僅有數字項，叫做已知項或已知數。已知數亦可用 a, b, c 等文字代之。方程式中需求的數，叫做未知數，常用 x, y, z 等文字代之。

代未知數的文字，叫做方程式的元。

39. 方程式的次數

方程式中只有一個未知數，牠的次數是 1 時，叫做一元一次方程式；牠的次數是 2 時，叫做一元二次方程式，如此類推。

例如：在 $x+4=7$ 中， x 的次數是 1，所以是一元一次方程式；在 $x^2+6x+7=0$ 中， x 的次數是 2，所以是一元二次方程式。

故方程式的次數，以其未知數最高次項的次數定之（參閱 § 35）。

40. 解方程式

求方程式的未知數，等於什麼數兩端才能相等，叫做解方程式。求得的未知數之值，叫做方程式的根。

41. 移項法則

把方程式的項由左端移到右端，或由右端移到左端，都叫做移項。

方程式中含未知數的項，常常不在同一端，沒法合併；已知數的項，也有這樣的情形，所以要移項。

I. 移加作減，移減作加（這是根據等量公理 I 和 II 得來的）。

舉例說明於下：

例如： 1. 解 $x+3=5$ 。

兩端減 3，得 $x=5-3$ 。

這樣的做法，實際上等於把左端的“+3”移到右端為“-3”。

2. 解 $x-3=5$ 。

兩端加 3，得 $x=5+3$ 。

這無異把左端的“-3”移到右端為“+3”。

II. 移乘作除，移除作乘（這是根據等量公理 III 和 IV 得來的）。

舉例說明於下：

例如： 1. 解 $3x=15$ 。

用移乘作除，則得

$$x = \frac{15}{3} = 5.$$

2. 解 $\frac{x}{4} = 20.$

用移除作乘，則得

$$x = 20 \times 4 = 80.$$

由上邊的例子，知道有了移項法則，解方程式時，要方便得多了。

注意： (1) $3x + 1 = 5,$

$$x + 1 \doteq \frac{5}{3}.$$

(2) $\frac{x}{4} + 1 = 20.$

$$x + 1 \doteq 20 \times 4.$$

42. 一元一次方程式的解法

(a) 不含數字分數的一元一次方程式的解法：

- I. 有括弧時，先去掉括弧；
- II. 移未知數項於一端，已知數項於另一端；
- III. 合併同類項；
- IV. 用未知數的係數除兩端，即得未知數的數值；
- V. 核算。

〔例 1〕 解 $3x - 8 = 10.$

解： 移項， $3x = 10 + 8.$

合併同類項， $3x=18$ 。

用3除兩端， $x=6$ 。

核算：用6代原方程式中的 x ，得

$$\text{左端} = 3 \times 6 - 8 = 10。$$

\therefore 知 $x=6$ 不誤。

〔例2〕 解 $2(2x-3)=-2+8x$ 。

解： $4x-6=-2+8x$ ， I

$$4x-8x=-2+6， \quad \text{II}$$

$$-4x=4。 \quad \text{III}$$

$$\therefore x=-1。 \quad \text{IV}$$

〔註〕 以後見核算不寫出的，都是留作讀者練習。

〔例3〕 解 $5x-6(x-5)=2(x+5)+5(x-4)$ 。

解： $5x-6x+30=2x+10+5x-20$ ， I

$$5x-6x-2x-5x=10-20-30， \quad \text{II}$$

$$-8x=-40。 \quad \text{III}$$

$$\therefore x=5。 \quad \text{IV}$$

〔例4〕 解 $0.9x-5=(0.2x-2)(x-2)$ 。

解： $0.9x-5=0.2x-2x+4$ ， I

$$0.9x-0.2x+2x=4+5， \quad \text{II}$$

$$2.7x=9。 \quad \text{III}$$

$$\therefore x=3\frac{1}{3}。 \quad \text{IV}$$

〔練習〕 指出下邊運算的錯誤：

解方程式 $6x-15=2x-7$ 。

解： $6x - 2x = 15 - 7,$
 $4x = 8 = x = 2.$

習 題

解下列各方程式：

1. $3x + 15 = x + 25.$
2. $2x - 3 = 3x - 7.$
3. $0.3x + 4 = 0.5(x - 2).$
4. $0.2x + 3 = 16 - (0.2x - 3).$
5. $2x - \{3 + (x - 7)\} = 8.$
6. $x - [3 + \{x - (3 + x)\}] = 9.$
7. $8(x - 2) + 17(x - 3) = 4(x - 9) + 4.$
8. $97 - 5(x + 20) = -1 - 8(x + 3).$
9. $157 - 21(x + 3) = 163 - 15(2x - 5).$
10. $8(x - 3) - (6 - 2x) = 2(x + 2) - 5(5 - x).$
11. $5x - (3x - 7) - \{4 - 2x - (6x - 3)\} = 0.$
12. $3(5 - 6x) - 5[x - 5\{1 - 3(x - 5)\}] = 23.$
13. $25x - 19 - [3 - (4x - 5)] = 3x - 16(x - 5).$

(b) 含數字分數的一元一次方程式的解法：

用分母的L.C.M.乘式中各項，化去分母後，用(a)的解法解之。

[例1] 解 $\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x = \frac{8}{3}x - 3.$

解：分母的L.C.M. = $2 \times 3 = 6.$

用6乘全式， $\frac{5}{2} \times 6 - \frac{3}{2}x \times 6 = \frac{8}{3}x \times 6 - 3 \times 6,$

$$15 - 9x = 16x - 18.$$

$$-9x - 16x = -18 - 15,$$

$$-25x = -33.$$

$$\therefore x = \frac{33}{25} = 1\frac{8}{25}.$$

【例2】解 $\frac{1}{3}x + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}x\right) = \frac{3}{5}x - \frac{2}{3}.$

解：去括弧， $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} + \frac{2}{3}x = \frac{3}{5}x - \frac{2}{3}.$

分母的L.C.M. = $3 \times 5 = 15.$

用15乘全式，

$$15 \times \frac{1}{3}x + 15 \times \frac{2}{5} + 15 \times \frac{2}{3}x = 15 \times \frac{3}{5}x - 15 \times \frac{2}{3},$$

$$5x + 6 + 10x = 9x - 10,$$

$$5x + 10x - 9x = -10 - 6,$$

$$6x = 16.$$

$$\therefore x = -2\frac{2}{3}.$$

習 題

解下列各方程式：

1. $\frac{x}{4} + \frac{x-5}{3} = 30.$

2. $\frac{x+19}{5} = 3 + \frac{x}{4}.$

3. $\frac{x-4}{7} = \frac{x}{5} - 2.$

4. $\frac{x-1}{8} = 1 + \frac{x+1}{18}.$

5. $\frac{x+5}{6} - \frac{x+1}{9} = \frac{x+3}{4}.$

6. $\frac{x-8}{7} + \frac{x-3}{3} + \frac{5}{21} = 0.$

7. $\frac{4(x+2)}{5} = 7 + \frac{5}{3}x$. 8. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 7\frac{5}{6}$.
9. $3 + \frac{x}{0.5} = 7 - \frac{x}{0.2}$. 10. $1.5 = \frac{0.36}{0.2} - \frac{0.09x - 0.18}{0.9}$.
11. $\frac{3}{16}(x-1) - \frac{5}{12}(x-4) = \frac{2}{5}(x-6) + \frac{5}{48}$.
12. $x + \frac{5}{3}(x-7) - \frac{6}{7}(x-8) = 3x - 14\frac{1}{3}$.
13. $\frac{7}{5}x - \frac{1}{14}(x-11) = \frac{3}{7}(x-25) + 34$.
14. $\frac{1}{5}(x-8) + \frac{4+x}{4} + \frac{x-1}{7} = 7 - \frac{23-x}{5}$.
15. $\frac{x}{4} - \frac{x+10}{5} + 4\frac{3}{4} = x-1 - \frac{x-2}{3}$.

4.3. 解應用問題的步驟

解應用問題，困難的地方，就是怎樣依照題意列出方程式，只要列出方程式，解之，即得解答。

第一步 把題中的話語，怎樣變成式子？

例如：1. 什麼數比 x 多5？式子是 $x+5$ 。

2. x 比15大多少？式子是 $x-15$ 。

3. 現年 x 歲，5年後是多少歲？

過一年增加1歲，故5年後為 $(x+5)$ 歲。

4. 有銀200元分給甲乙二人，甲得 x 元，乙得多少元？

在200元中把甲得的 x 元減了，就是乙應得元數，式子是 $200 -$

5. 水1小時流 x 里，船在靜水中1小時行 a 里；船1小時順流和逆流各行多少里？

順流行時，船1小時行 a 里，水向下沖 x 里和起來共行 $(a+x)$ 里。

逆流行時，船本來能行 a 里，但被水流的力量要阻抗的少行 x 里，故只能行 $(a-x)$ 里。

5. 有洋1000元，年利是百分之 x ；問一年的利息是多少？
一元的利息一年是百分之 x ，1000元的利息，自然是

$$\frac{x}{100} \times 1000.$$

7. 騎兵一隊，共有馬蹄 x 個；問這隊騎兵人馬各多少？

8. 米 x 石，一人15日食完，問每日食多少？

9. 教室長 x 尺，寬比長多1尺，面積是多少？

10. 6小時行 x 里，1小時行多少里？

11. 一日做事的三分之一， x 日做多少？

12. 有5元的鈔票 x 張，共是多少元？

第二步 I. 怎樣用 x 代題中要找的數，有直接和間接的兩種：

(1) 直接的

〔例1〕把國幣80元分給甲乙二人，甲分得的3倍比乙分得的5倍，多16元；問甲乙各得多少？

(a) 先看題中要求的是什麼數？

要求的是甲乙各分得的元數。

(b) 怎樣用未知數去代替？

知甲乙二人共分80元，故用 x 代甲分得的元數，或乙分得的元

數都可以，假如用 x 代甲分得的元數，則 $30-x$ 必定是乙分得的元數。

這樣代替，甲乙分得的元數，雖未算出，已用兩個式子表示出來了，只要 x 求出後，甲乙分得的元數，自然就會知道，至於怎樣列方程式和求 x ，後邊再講。

(2) 間接的

【例2】糖若干斤，其中 $\frac{1}{2}$ 是每斤 4 角， $\frac{1}{4}$ 是每斤 3 角，其餘的是每斤 2 角，共值國幣 13 元，問各多少斤？

這題問的是各種糖有多少斤，但不能用 3 個未知數代牠們，因為這樣一來，變成三元的方程式，現在尙不會解，只好用間接的方法去代。

把糖的總斤數用 x 代之，則每斤 4 角的糖有 $\frac{1}{2}x$ 斤，每斤 3 角的糖有 $\frac{1}{4}x$ 斤，每斤 2 角的糖有 $\left\{x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x\right)\right\}$ 斤， x 求出後，各種糖的斤數，自然可以算出。

II. 怎樣依題意列方程式。

- (1) 先把題中的話語，都解釋清楚，方能明瞭其中的關係；
- (2) 用 x 代替要找的數，把題中的話語，儘可能的變成式子；
- (3) 由題意找相當的關係，用等號連結之，即為方程式。

找關係用等號連結，這是解應用問題最難的地方，但一般的情形，不出下邊所述的範圍：

- (1) 有些題已說明相等的關係，用等號連結，即為方程式。

例如：父年為子年的 4 倍；10 年後，父年等於子年的 2 倍，求父子的年齡。

設 x 為子的歲數

題中的話語	變成式子
父年為子年的 4 倍 10 年後	$4x$ ……父 $x + 10$ ……子
10 年後子年的 2 倍	$4x + 10$ ……父 $2(x + 10)$

題上說明 10 年後，父年等於子年的 2 倍，故得方程式如下：

$$4x + 10 = 2(x + 10).$$

(ii) 有些題已說明多少 (或大小) 的關係。

(a) 假如知道所多的數目，看那一個大，就從那個上減去，自然相等，即得方程式。

例如：在例 1 題中：

題中的話語	變成式子
把 80 元分給甲乙	x ……甲 $80 - x$ ……乙
甲的 3 倍	$3x$
乙的 5 倍	$5(80 - x)$

題上說明甲的 3 倍比乙的 5 倍多 104 元，故把多下的在甲的 3 倍中減去，即得方程式如下：

$$3x - 104 = 5(80 - x).$$

(b) 假如知道所少的數目，看那一個小，就給那一個加上，自然相等，即得方程式。

例如：某數的 3 倍比 20 少 5，求某數。

設 x 為某數，則 $3x$ 為某數的 3 倍。

題上說明3倍比20少5，故在3倍上加5，即得方程式如下：

$$3x+5=20.$$

(iii) 有些題不說明(i)或(ii)的關係，找相等的關係列方程式，就要難些，現在僅舉一例說明找法，以後再分類的講述。

例如：在例2題中：

題中的話語	變成式子
糖若干斤	
2分之1是每斤4角	$\frac{1}{2}x \times 0.4$值的元數
4分之1是每斤3角	$\frac{1}{4}x \times 0.3$值的元數
其餘的斤數是每斤價2角	$\left\{x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x\right)\right\} \times 0.2$值的元數

題中沒有相等或大小的關係，但有共價13元，由這總價可以找出相當的關係，得方程式如下：

$$\frac{1}{2}x \times 0.4 + \frac{1}{4}x \times 0.3 + \left\{x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x\right)\right\} \times 0.2 = 13.$$

第三步 列方程式時，必須單位相同。

例如：上邊例2兩端都是以元為單位。假如左端用元為單位，右端用角為單位，結果便生錯誤。

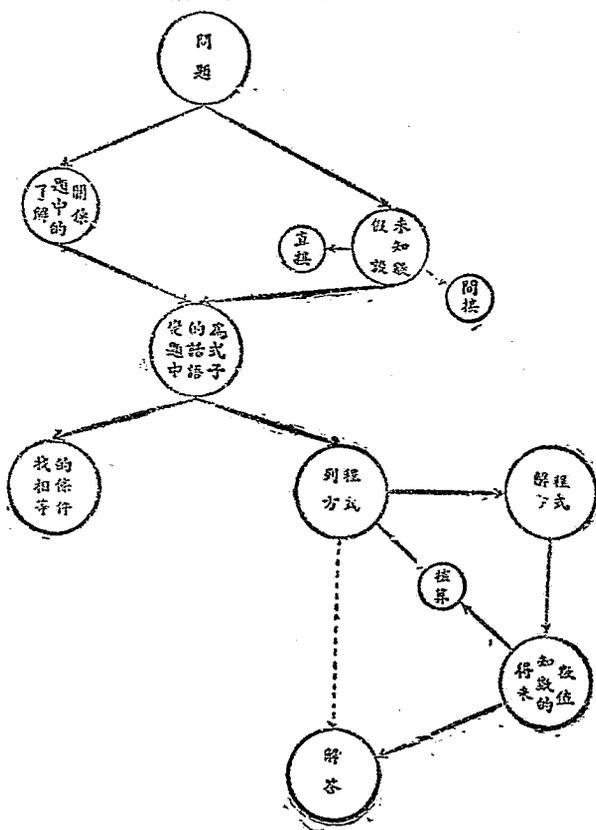
第四步 在解題中，所設的未知數，只代表數，不代表量，故需要標明單位時，務必註明，非常重要。

例如：在例2中，假如設 x = 糖的總數，那就不對，因不知道是斤數，還是擔數，還是兩數，故需要註明。

第五步 核算。

- (i) 把求得的數代入原方程式中，看解方程式時，有無錯誤；
- (ii) 再看合題意不合，就是合理不合。如求人數而得下分數或負數，即知不合理，不是方程式沒列對，便是題上有錯誤。

解應用問題的運算手續圖



44. 應用問題解法

現在把應用問題分類解法如下：

I. 數目問題

(1) 三個連續奇數的和為27，求這三個連續奇數。

解：連續的奇數相差是2，故設 x = 中間的一個奇數，則 $x-2, x+2$ ，是其餘兩個奇數，依題意得方程式：

$$(x-2)+x+(x+2)=27.$$

解之，得 $x=9$ 。

$9-2=7, 9+2=11$ ，故7, 9, 11為所要求的三個連續奇數。

〔註〕以後解應用問題，得到方程式後，若無解法省略了，就是留作讀者練習。

(2) 二數和為49，小數的2倍比大數多14，求二數。

設 x = 小數，則 $49-x$ = 大數。

題上說明小數的2倍比大數多14，故從小數的2倍中減去14，得方程式：

$$2x-14=49-x.$$

解之，得 $x=21$ 。

故知小數為21，大數為28。

(3) 二數的差為8，大數上加2，等於小數的3倍；求這二數。

(4) 二數的和為39，大數比小數多9；求這二數。

(5) 三個連續數的和為39，求這三數。

(6) 三個連續偶數的和為30，求這三數。

(7) 某數4分之1比5分之1多-7，求某數。

II. 年齡問題

(8) 父子年齡的和為84歲，已知父年等於子年的3倍；問父子各多少歲？

解：設子年為 x 歲，則父年為 $(84-x)$ 歲。

父年等於子年的3倍，就是列方程式的條件，故得方程式：

$$84-x=3x.$$

解之，得 $x=21$ 。

故知父年63歲，子年21歲。

(9) 父子年齡的和為80歲，已知子年的2倍比父年多10；問父子各多少歲？

(10) 甲現年為乙現年的5倍，5年後為乙的3倍；求甲乙的歲數。

(11) 父年30歲，子年6歲；幾年後父年為子年的2倍？

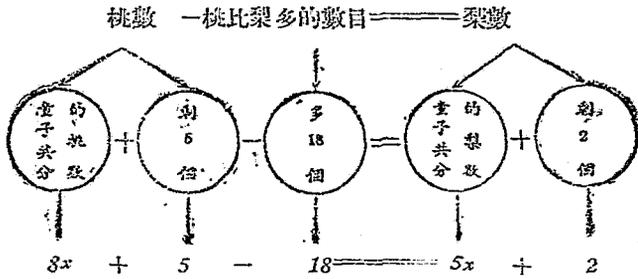
III. 分物問題

(12) 童子若干人，分桃和梨；每人分桃8個，梨5個，還剩餘桃5個，梨2個，知桃比梨多18個；求童子，桃和梨各是多少？

解：設 x =童子人數。

題上說明梨桃多少的關係，就是列方程式的條件。*

* 圖解原為明瞭題中的關係，開列方程式，便利教授；讀者滋題時，宜省略這步手續。



解之，得

$$x = 5 \cdots \cdots \text{童子的數目；}$$

$$8x + 5 = 8 \times 5 + 5 = 45 \cdots \cdots \text{桃數，}$$

$$5x + 2 = 5 \times 5 + 2 = 27 \cdots \cdots \text{梨數。}$$

核算：(i) 把 x 的數值代入原方程式，得

$$\text{左端} = 8 \times 5 + 5 - 18 = 27；$$

$$\text{右端} = 5 \times 5 + 2 = 27。$$

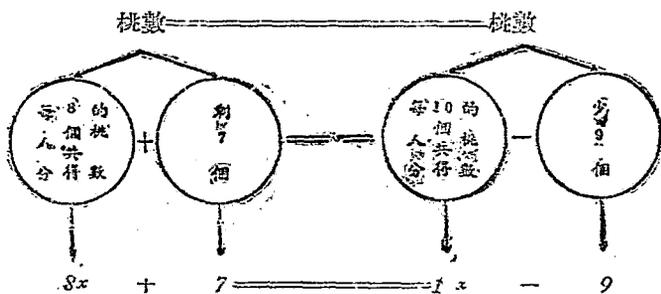
故知解方程式無錯誤。

(ii) 因 45 個桃，5 個童子分之，每人分得 8 個剩 5 個；27 個梨，5 個童子分之，每人分得 5 個剩 2 個，故知不誤。

(13) 若干童子分若干桃，假如每人分 8 個，剩 7 個；假如每人分 10 個，少 9 個；問童子和桃各多少？

解：無論怎樣去分，桃的數目總是不變，這就是列方程式的條件。

設童子的數目為 x 。



解之，得

$$x = 8 \dots\dots \text{童子數目，}$$

$$8x + 7 = 8 \times 8 + 7 = 71 \dots\dots \text{桃數。}$$

(14) 童子若干人分蜜柑若干：每人分 4 個，剩 3 個；每人分 5 個，少 2 個；問童子和蜜柑各多少？

(15) 甲乙丙三人分金若干元：知甲乙共得 60 元，甲丙共得 80 元；乙丙共得 62 元；問三人各得多少元？

(16) 童子若干人分桃和梨：每人分桃 4 個，梨 2 個，剩桃 2 個，梨 6 個；只知梨比桃少 10 個；問童子，桃和梨各幾何？

(17) 男 10 人，女 3 人，童子 20 人，分洋 38 元，知男子一人分得的數比童子一人的多 2 角；女子一人分得的數為一個童子的 2 倍；問各得多少？

IV. 買賣問題

買賣問題約可分為賠賺問題，物價與物量關係問題兩大類：

(a) 賠賺問題

(18) 某人以若干元買馬，後以 24 元 6 角賣出，損失 1.8 成；問馬的原價幾何？

設馬的原價為 x 元，則 $0.18x$ 元為賠本的洋數，買價和賣價的差

數，等於賠本的洋數，就是這種問題列方程式的條件。

$$\begin{array}{ccc} \text{共需的洋數} & - & \text{共賣得的洋數} = \text{賠本的洋數} \\ \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ x & - & 24.6 = 0.18x \end{array}$$

解之，得 $x=30$ ，即馬的原價為30元。

(19) 某人以每頭2.5元的價購羊若干頭，其後加2成賣出，獲利2.8元；問共買羊幾頭？

設共買羊 x 頭，則共需的洋數為 $2.5x$ 元，共賣得的洋數為 $(2.5 + 0.2)x$ 元，賣價減買價等於獲利的洋數，就是這種問題列方程式的條件。

$$\begin{array}{ccc} \text{共賣得的洋數} & - & \text{共需的洋數} = \text{獲利的洋數} \\ \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ (2.5+0.2)x & - & 2.5x = 2.8 \end{array}$$

解之，得 $x=14$ ，即買了羊14頭。

(b) 物價與物量的問題

(20) 某人買馬2匹，牛5頭；馬每匹較牛每頭的價貴8元，共用洋135元；問每匹馬和每頭牛各價洋多少？

各物價的總和等於共用的洋數，即是列方程式的條件。

設每頭牛的價為 x 元，

則每匹馬的價為 $x+8$ 元。

列方程式的條件是：

$$\begin{array}{ccc} \text{各物價的和} & \xlongequal{\hspace{10em}} & \text{共用的元數} \\ \begin{array}{c} \text{2 的} \\ \text{匹 的} \\ \text{馬 價} \end{array} + \begin{array}{c} \text{5 的} \\ \text{頭 的} \\ \text{牛 價} \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{共 用} \\ \text{的 元} \\ \text{數} \end{array} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2(x+8) & + & 5x = 135 \end{array}$$

解之，得 $x=17, x+8=17+8=25$ 。

即每匹馬25元，每頭牛17元。

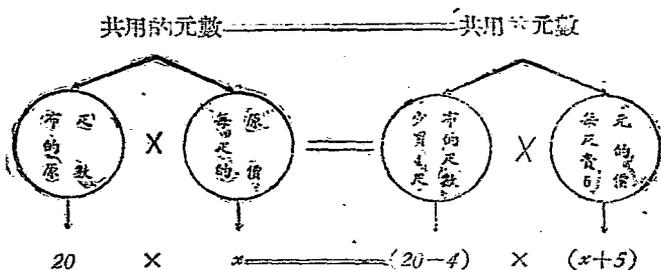
(21) 某人以國幣若干元買布20疋，若每疋貴5元，則少買4疋。求每疋的原價和共用的元數。

物價貴了，就買的少；物價賤了，就買的多。但購買者所用的元數，總是不變；這就是列方程式的條件。

設每疋的原價為 x 元。

則每疋貴5元後的價為 $x+5$ 元。

列方程式的條件是：



解之，得 $x=20, 20 \times 20=400$ 。

即每疋原價20元，共用400元。

(22) 以1元6升之價買米若干石，若1元賤1升賣之，則賠洋6元；問原買米多少？

(23) 某人買地若干方丈，每方丈價洋1元，其後地價騰貴3倍，某人留地250方丈，餘數賣出，獲利150元，問原買地若干方丈？

(24) 買書2種，共10冊，A種每冊價1元，B種每冊價5角，共付洋8元，求A、B兩種的冊數。

(25) 絹每尺的價錢為棉布每尺的5倍，買絹2丈3尺，棉布5丈，共用洋13.2元，問每尺的價錢各多少？

(26) 某人以錢若干買鷄卵，每個價洋 1.5 分；若一個鷄卵減價 3 釐，則可多買 5 個，問初次共買若干？

V. 行程問題

在行程問題中，有時間，速度和距離這三種要素，牠們的關係式是：

$$\text{距離} = \text{速度} \times \text{時間}。$$

因此我們知道計算這類問題時，列方程式的條件，約分下列三種：

(i) 距離 = 距離。

(ii) 時間 = 時間。

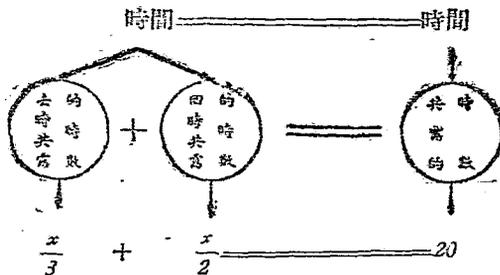
(iii) 速度 = 速度。

(a) 關於一人（或一物）的行程問題

(27) 甲乙兩地相距若干里，去時每小時行 3 里，回時每小時行 2 里，來回共需 20 小時。求甲乙兩地的距離。

設 x 甲乙兩地相距的里數。

速度知道，距離雖不知道，但用 x 代了以後，就算知道；剩下的僅是時間問題，故用條件 (ii) 列方程式。



解之，得 $x = 24 \cdots \cdots$ 里數。

(b) 關於兩人（或兩物）的行程問題

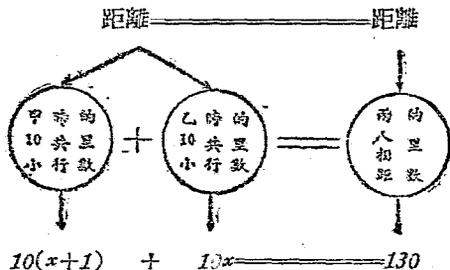
(1) 相遇問題

(28) 甲乙二人相距 130 里，同時相向而行，知甲比乙每小時多行 1 里，10 小時後相遇。求甲乙每小時各行多少里？

甲乙兩人不在同一的地方，相向而行，相遇的條件是要兩人共行的距離和他們原來相距的距離相等，這就是列方程式的條件。

設 x = 乙每小時所行的里數，

則 $x+1$ = 甲每小時所行的里數。



解之，得 $x=6$ ……乙每小時所行的里數，

$x+1=7$ ……甲每小時所行的里數。

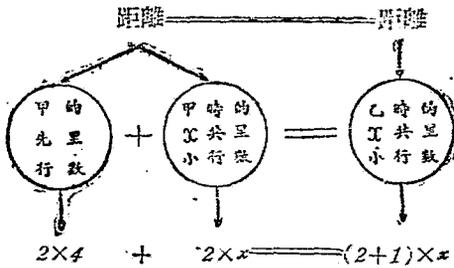
(2) 追及問題

關於這類的問題，約可分為兩種：(i) 兩人在同一地方而不同時起行；(ii) 兩人不在同一地方而同時起行。

關於 (i) 類問題，一人要追及他一人，要他們兩人走的距離相等，才會可能。這就是列方程式的條件。

(29) 甲每小時行 2 里，從某地出發，先行 4 小時，乙從某地出發追之，但知乙每小時比甲多行 1 里，問乙幾小時後才能追及甲？

設 x = 乙追及甲所需的時數。

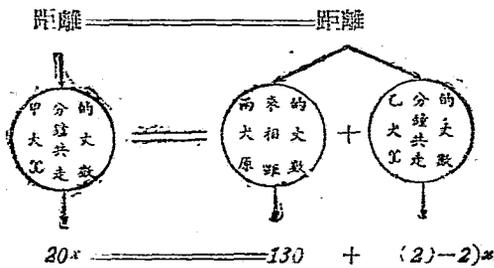


解之，得 $x = 8$ 小時。

關於 (ii) 類問題列方程式的條件是追者須較被追者多走他們原來相距的路程。

(30) 甲乙兩犬相距 130 丈，甲犬每分鐘行 20 丈，乙犬每分鐘比甲犬少行 2 丈，問幾分鐘後，甲犬追及乙犬？

設 $x =$ 甲犬追及乙犬所需鐘點的分數。



解之，得 $x = 65 \dots \dots$ 分鐘。

(31) 某人步行 10 里後，坐汽車行若干里，又騎馬行了坐汽車所行路的 2 倍，總計行 70 里；問坐汽車行多少里？

(32) 甲乙二人同時從兩地相向而行，每小時甲行 5 里，乙行 3 里；甲行到兩地相距的中心，離乙尚有 5 里。求兩地的距離。

(33) 甲乙二人相距 150 里，每小時甲行 7 里，乙行 8 里：假如同時相向而行，問幾小時後相會？

(34) 甲乙二人從某地出發，每小時甲行 7 里，乙行 5 里；甲讓乙先走 4 小時，由後追之。問多少時能追及？

(35) 乙比甲每小時多行 1 里；甲先行 4 小時，乙由後追之。8 小時追及，問甲乙每小時各行多少里？

VI. 水程問題

水程問題和行程問題所不同的地方，水程有順流和逆流的分別，故解這類題時，要注意是逆流還是順流。

順流速度 = 船在靜水中的速度 + 水流速度，

逆流速度 = 船在靜水中的速度 - 水流速度。

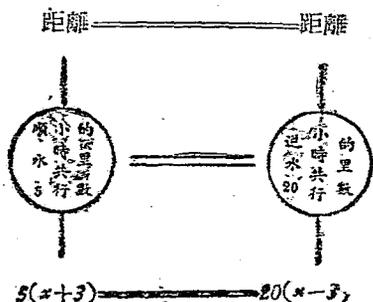
(36) 每小時水流 3 里，一船順水 5 小時所行的路，逆水行時，需 20 小時；求所行的里數。

解：設 x = 船在靜水中每小時所行的里數；

則 $x + 3$ = 順水每小時船行的里數，

$x - 3$ = 逆水每小時船行的里數。

來回行的路相等，就是列方程式的條件。



解之，得 $x=5$ 。

$5(x+3)=5(5+3)=40$ ……所行的里數。

(37) 甲坐船到乙處，需3小時，回來須6小時，但知船在靜水中每小時行7里，求每小時水流的速度。

(38) 有一船在靜水中每小時行5里，今在每小時水流2里的河中，上、下一次共需10小時，求這河的長和上行所需的時數。

VII. 鐘錶問題

這是一種圓周上的行程問題。

解這類問題時，題中的話語特別簡單，要用鐘錶上許多常識，才能計算。

一點鐘共60分，鐘上每1小格是1分。

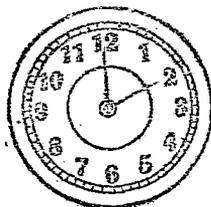
長針走12分，短針走1分。相隔15分即成直角；相隔30分即成直線。

(a) 相重 算長短兩針，相重的問題，同算直線運動的追及問題一樣，列方程式的條件是距離=距離。

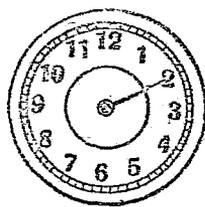
(39) 2點與3點間，何時兩針相重？

原來兩針位置圖

相重時兩針位置圖



(I)



(II)

解：設長針走 x 分與短針相重，則短針走 $\frac{x}{12}$ 分。

2 點鐘時，長針離短針 10 分；要長針追上短針，就是長針走的距離等於短針走的距離加上原本相隔的距離，故得方程式如下：

$$x = 10 + \frac{x}{12}$$

解上，得 $x = 10\frac{10}{11}$ 分。

如答 $10\frac{10}{11}$ 分相重，那就不對，因不知道是幾點鐘的 $10\frac{10}{11}$ 分相重，

故須要答 2 點 $10\frac{10}{11}$ 分相重。

(b) 成直角 兩針成直角，就是相隔 15 分的意思。

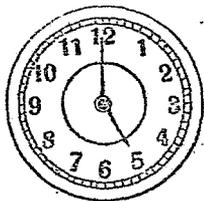
4 點到 8 點，每 1 點鐘內成兩次直角；未重以前一次，重了以後一次。

12 點到 3 點，重了以後才有成直角的時候。

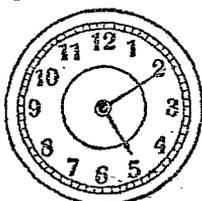
9 點到 12 點，未重以前有成直角的時候；但重了以後就沒有。

(40) 5 點與 6 點間，兩針何時成直角？

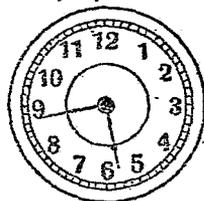
兩針在 5 時的位置 未重以前兩針成直角的位置 重後兩針成直角的位置



(I)



(II)



(III)

解：5 點到 6 點，兩針成兩次直角；未重以前成直角，就是長針走的沒趕上短針，還差 15 分，即是與趕上相比較，少走 15 分的意思，故在相重方程式的右端減去 15，即得需要的方程式如下：

$$x = 25 + \frac{x}{12} - 15$$

解之，得 $x = 10\frac{10}{11}$ 分。

答：5 點 $10\frac{10}{11}$ 分兩針成直角。

重了以後成直角，就是長針走的趕上短針以後，還多走了 15 分，故在相重方程式的右端加上 15，即得需要的方程式如下：

$$x = 25 + \frac{x}{12} + 15。$$

解之，得 $x = 43\frac{7}{11}$ 分。

答：5 點 $43\frac{7}{11}$ 分兩針成直角。

(a) 成直線 直線是兩個直角的意思，故解成直線問題時，如在未重以前成直線，就在相重方程式的右端減去 30；如在重了以後成直線，就在相重方程式的右端加上 30。

(41) 6 點與 7 點間，兩針何時相重？

(42) 8 點與 9 點間，兩針何時成直角。

(43) 3 點與 4 點間，兩針何時成直角？

(44) 8 點與 9 點間，兩針何時相隔 18 分？

(45) 10 點與 11 點間，兩針何時相隔 37 分？

(46) 10 點與 11 點間，兩針何時成直線？

VIII. 工作問題

解這類問題時，假定事情為 1，把每人每日能做全事的幾分之幾，先要算出。

(i) 如問數人合做事的日數：列方程式的條件是：

每人所做的事情相加 = 一事。

第五章 一元一次方程式

(ii) 如兩人換着做，列方程式的條件是：

兩人所做事物的和 = 一事。

(iii) 如問一人獨做的日數，列方程式的條件是：

一人所做的事 = 一事。

(47) 甲10日做成的事，乙須12日做成；問二人合做，幾日可成？

解： 設 x = 二人合做所需的日數，

甲一日做的事情為 $\frac{1}{10}$ ，

乙一日做的事情為 $\frac{1}{12}$ 。

甲做的事情 + 乙做的事情 = 一事

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{10}x & + & \frac{1}{12}x = 1 \end{array}$$

解之，得 $x = 5\frac{5}{11}$ ……合做所需的日數。

(48) 有一工程，甲獨作45日可完，乙獨作30日可完。今乙作22日後，換甲去作，問須多少日可完？

解： 設 x = 乙作後甲作完的日數，

$\frac{1}{45}$ = 甲每日所做的工程，

$\frac{1}{30}$ = 乙每日所做的工程。

乙先作的工程 + 甲後作的工程 = 全工程

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \frac{1}{30} \times 22 & + & \frac{1}{45} \times x = 1 \end{array}$$

解之，得 $x = 12$ ……甲作完的日數。

(49) 有一工程，甲獨作 4 日可完，乙獨作 6 日可完；問兩人合作，幾日可成？

(50) 甲 2 日做成的事，乙須 3 日做成。甲先做若干日後，換乙繼續做之，知乙比甲多做 7 日；問甲做了幾日？

(51) 一事，甲乙合做，12 日可成；甲丙合做，15 日可成；乙丙合做，20 日可成。問三人合做，幾日可成？

(52) 有一工程，甲獨做 15 日可完，乙獨做 30 日可完；如乙獨做 10 日後，再添上甲合做。問幾日可完？

IX. 混合問題

(a) 用不相同價值的物品混合後，以平均價值出售，求各物品的數量時，列方程式的條件是：

各物品價值之和 = 總售價。

(53) 上等酒每升 7 角，下等酒每升 5 角，這樣兩種酒共取 1 石混合之，每升以平均價值 6 角 5 分出售；問兩種酒各從取多少？

解：設 x = 上等酒應取的升數。

則 $100 - x$ = 下等酒應取的升數。

$$\begin{array}{ccc} \text{上等酒的價值} + \text{下等酒的價值} = \text{總售價} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 7x & + & (100 - x)5 & = & 100 \times 6.5 \end{array}$$

解之，得 $x = 75$ 升 = 7 斗 5 升……上等酒，

$100 - x = 25$ 升 = 2 斗 5 升……下等酒。

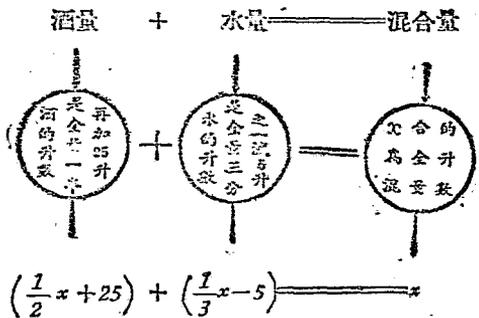
(b) 如只講混合各物的關係，不講價值時，列方程式的條件是：

(i) 各物品量相加 = 混合量。

(ii) 各物品自己的數量 = 各物品自己的數量。

(54) 有水酒混合液，酒的升數比全量的一半多25升；水的升數比全量的3分之1少5升。問酒水各多少？

解： 設 x = 全量的升數



解之，得 $x = 120$

酒的升數 = $\frac{1}{2}x + 25 = \frac{1}{2} \times 120 + 25 = 85$ 升 = 8斗5升

水的升數 = $\frac{1}{3}x - 5 = \frac{1}{3} \times 120 - 5 = 35$ 升 = 3斗5升。

(55) 有酒水混合液，酒佔百分之80；如加水10升，則酒佔百分之70。問酒水各多少？

解： 設 x = 未加水以前全量的升數。

因酒量沒變，用作下列方程式的條件：

$$\begin{array}{ccc} \text{酒量} & & \text{酒量} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{(未加水以前的酒量)} & = & \text{(加水以後的酒量)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{80}{100} \times x & = & \frac{70}{100} (x + 10) \end{array}$$

解之，得 $x = 70$ 。

$$\text{酒升數} = \frac{80}{100} \times x = \frac{80}{100} \times 70 = 56 \text{升} = 5 \text{斗} 6 \text{升},$$

$$\text{水升數} = 70 \text{升} - 56 \text{升} = 14 \text{升} = 1 \text{斗} 4 \text{升}.$$

(56) 上下兩種酒混合成一石，每升售洋 2 角 7 分。知上等酒每升 3 角，下等酒每升 2 角；問各應取多少？

(57) 今有水酒混合液，酒佔百分之 65；若加酒 15 升，則酒佔百分之 80。問水和酒各多少？

(58) 今有銀銅合質：銀比全量 3 分之 1 多 15 兩；銅比全量 4 分之 1 少 5 兩。問銀銅各若干？

X. 水管注水問題

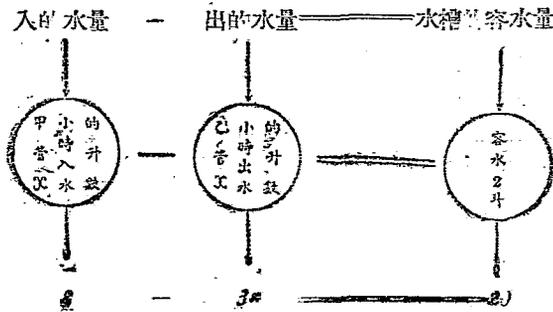
這類問題分兩種：

(a) 一管入水，一管出水，多少小時注滿？列方程式的條件是：

入的水量 - 出的水量 = 注滿的水量。

(59) 一水槽可容水 2 斗，有甲乙兩管，甲管每小時入水 8 升，乙管每小時出水 3 升；問兩管齊開，多少小時能注滿？

解：設 x = 注滿的時數。



解之，得 $x=4\cdots\cdots$ 小時。

〔註〕 假如有注入的水管，又有流出的水管，原來注滿水，同時各管齊開，多少小時流盡？列方程式的條件是：

注滿的水量 + 入水量 - 出水量 = 0。

(b) 數管齊開或一管獨開，多少小時注滿？列方程式的條件是：

數管（或一管）注入的水量 = 注滿的水量。

(60) 一水桶有甲乙丙三管：開甲管 2 小時可注滿，開乙管 3 小時可注滿，開丙管 5 小時可注滿；問三管齊開，多少小時可注滿？

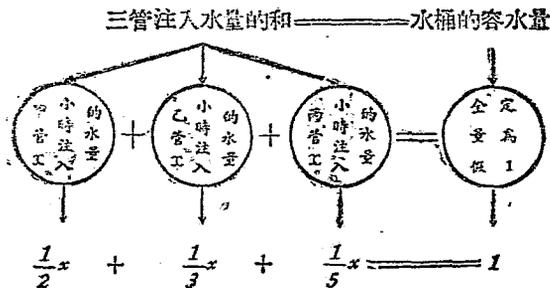
解： 設 x = 三管齊開，注滿的時數。

水桶的容量未說明，假定為 1；

則甲管每小時注入全量 $\frac{1}{2}$ ；

乙管每小時注入全量 $\frac{1}{3}$ ；

丙管每小時注入全量 $\frac{1}{5}$ 。



解之，得 $x = 58\frac{2}{31}$ 分。

(61) 有一水桶，容水3.6斗，底有小孔，每小時漏0.4斗；上有一孔，每小時注入1.2斗。問多少小時可注滿？

(62) 一水槽有甲乙丙三管；開甲管3小時可注滿，開乙管4小時可注滿，開丙管5小時可注滿，問三管齊開，多少小時可注滿？

(63) 有酒桶，先漏去3分之1，後取出3斤，桶裏恰剩一半，問原有酒多少斤？

(64) 一水槽有甲乙丙三管，三管齊開，15分可注滿。知甲管比乙管每分鐘多注1升，乙管比丙管每分鐘多注0.4升；又知水槽的容量為240升，求各管每分鐘注入的升數。

XI. 利息問題

∴ 利息 = 本金 × 利率 × 時間。

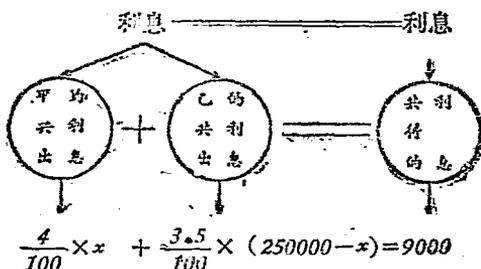
∴ 列方程式的條件有四種：

(1) 利息 = 利息。 (2) 本金 = 本金。

(3) 利率 = 利率。 (4) 時間 = 時間。

(65) 250000元分借於甲乙二人，甲出利百分之4，乙出利百分之3.5，共得利9000元，問甲乙各借多少元？

解：設 x = 甲借的元數，
則 $250000 - x$ = 乙借的元數。



解之，得 $x = 50000$ 元……甲借的，
 $250000 - 50000 = 200000$ 元……乙借的。

(66) 把9000元分存甲乙兩銀行，甲行年利百分之4，乙行年利百分之5，一年間利息相等，問各存多少元？

(67) 1000元分借於甲乙二人，甲出年利百分之3，乙出年利百分之4；如把二人所借的洋數交換，則多得利2元。問各借多少元？

45. 補助未知數

例題：兔行4步時，犬只能行3步；犬2步的距離，等於兔3步；兔先行50步，問犬行多少步可以趕上？

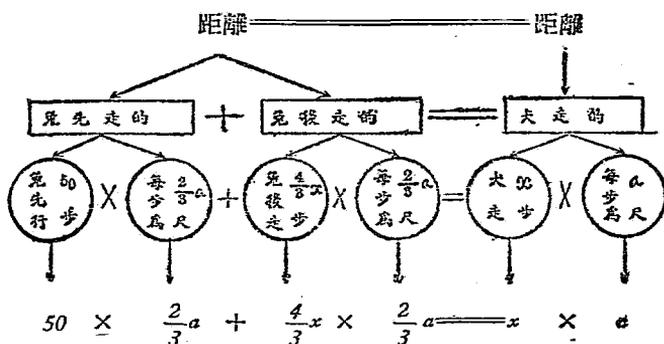
解：設 $x =$ 犬趕上兔時應行的步數，

$a =$ 犬每步的尺數。

走的快慢的關係		步大小的關係	
犬	兔	犬	兔
行3步	行4步	2步	3步
行1步	行 $\frac{4}{3}$ 步	$\frac{2}{3}$ 步	$\frac{3}{2}$ 步

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{行 } x \text{ 步} & \text{行 } \frac{4}{3}x \text{ 步} & \text{1 步 } a \text{ 尺} & \text{1 步 } \frac{2}{3}a \text{ 尺} \\ \hline \end{array}$$

犬趕上兔，就是兩頭走的距離相等，即是列方程式的條件。



各項都有 a ，故用 a 除之，得

$$50 \times \frac{2}{3} + \frac{8}{9}x = x.$$

解之，得

$$x = 300 \text{ 步。}$$

這個題中如僅設一個未知數，不容易列方程式，故用 a 再代一個未知數，把方程式列成，但解時即刻消去，牠的功效是幫助着把方程式列出來，在解法中，不發生阻礙，所以把這種假設數，叫做補助未知數。

解上邊列題的主要點：

- (1) 犬走 x 步，兔走多少步要算出；
- (2) 犬一步是 a 尺，兔一步是多少尺，也要算出。

1. 犬走4步時，兔走5步；犬5步等於兔8步；如兔先走84步，問犬走多少步才能趕上？

2. 有一人划船，在每小時水流 3 里的河流中，行往某處；知去時所需的時數，為回來的 4 倍；求船在靜水中每小時的速度。

習 題

1. 鴿鶴共 42 隻，足共 108 ；問各是多少？

2. 某工人一年的工資是公司股票 3 張和現金 108 元； 5 個月的工資是股票 1 張和現金 95 元。問股票 1 張價值多少？

3. 甲乙兩種酒，每瓶的價值，乙為甲的 $\frac{7}{4}$ ，若甲種每瓶落價 2 角，則 30 瓶乙種酒和 20 瓶甲種酒的價值相等，求甲乙兩種酒每瓶的價值。

4. 有貧民若干人，若每人給與銅元 50 枚，則短少 100 枚；若每人給與 40 枚，則餘 5 枚。問人數是多少？

5. 一工程，甲獨作 8 日做完，乙獨作 12 日做完；甲乙合作，中途甲因事休息 2 日，問幾日才能做完？

6. 某公司資本若干元，第一年經費 1000 元，其餘金得利 $\frac{6}{1}$ ；第二年經費 1000 元，其餘金得利 $\frac{5}{1}$ ；第三年經費 1000 元，其餘金得利 $\frac{8}{1}$ ，第四年的資本比原資本多 1700 元。問原資本是多少？

7. 馬車前輪的周圍是 3.25 尺，後輪是 3.8 尺；行若干距離，前輪比後輪多轉 143 次？

8. 某人第一次賣去鷄卵的數目，比原有的一半多 7 個；第二次賣去的數目，比餘下的一半多 7 個；第三次賣去的數目，比餘下的一半多 7 個，恰賣完，問原有鷄卵是多少？

9. 甲乙兩桶，容同量的麥酒，今從甲桶取出 3 斗 4 升，乙桶

取出 8 斗，則甲桶所餘酒，為乙桶所餘的 2 倍，問甲乙兩桶各容多少？

10. 一矩形教堂，長比寬多 2 尺，若長減 4 尺，寬增 8 尺，面積不變；問教堂的長寬各多少？

11. 兔走 5 步的距離，等於犬走 2 步的距離；兔走 2 步，犬走 1 步。如兔在犬前 80 步（兔步），問犬行多少步能追及兔？

12. 犬走 4 步，兔能走 5 步；犬 2 步的距離，等於兔 3 步的距離。兔先走 100 步，犬由後追之，幾步可以追及？

13. 兵一隊列成正方陣，餘 31 人；若每行每列增 1 人，則短少 24 人。求兵的總數。

14. 兵一隊，等分為兩支隊：第一支隊列成三層的中空方陣，第二支隊列成五層的中空方陣，恰可重入三層方陣的中空處，求兵的總數。

第六章

聯立一次方程式

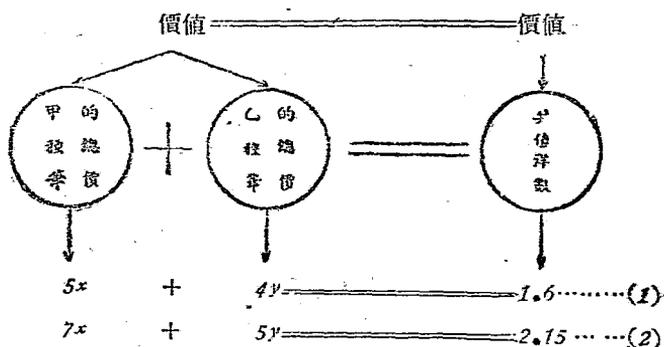
46. 聯立方程式

【問題】 甲種筆 5 枝，乙種筆 4 枝，共價 1.6 元；甲種筆 7 枝，乙種筆 5 枝，共價 2.15 元，要求甲乙兩種筆每枝的價值。

這時候甲乙兩種筆每枝的價值都不知道，用一個未知數來代替是不行的，故非兩個不可。

假設 甲種筆每枝價 x 元，

乙種筆每枝價 y 元。



方程式 (1) 和 (2) 都是從一個問題中得來，故兩式中的 x 一定代表一樣的數； y 也是如此。有這種情形的方程式，叫做聯立方程式。

上邊兩個方程式，都是一次的，含兩個未知數，叫做二元聯立一次方程式；如有三個方程式，含三個未知數，都是一次的，而且這三個未知數的數值同時能適合這三個方程式時，就叫做三元聯立一次方程式，如此類推。

假設 $x+y=5$ ……(1) 和 $x-y=1$ ……(2) 的 x 和 y 求出來是 3 和 2，適合(1)，同時又適合(2)，這 3 和 2 就叫做這兩個聯立方程式的解。知道聯立方程式，求牠的解，叫做解聯立方程式。

47. 二元聯立一次方程式的解法

解聯立方程式的主要目的，是要想個法子把方程式的未知數，消得剩下一個，用解一元一次方程式的方法，先求一個未知數的數值；其餘的未知數，利用所求出來的未知數，都可求出。

解法(1) 加減消元法。

$$\text{〔例 1〕 解 } \quad 2x+y=18 \dots\dots\dots (1)$$

$$\quad \quad \quad 3x+5y=34 \dots\dots\dots (2)$$

假如想消去 x ，把兩個方程式中 x 的係數變成一樣，兩式相減，便可達到目的。

$$(1) \times 3, \quad 6x+3y=54 \dots\dots\dots (3)$$

$$(2) \times 2, \quad 6x+10y=68 \dots\dots\dots (4)$$

$$(4) - (3) \quad \quad \quad 7y=14 \circ$$

$$\therefore y=2 \dots\dots\dots (5)$$

把(5)中 y 的數值代入(1)，得

$$2x+2=18,$$

$$2x=16,$$

$$\therefore x=8.$$

〔例 2〕 解 $4x-3y=6$ (1)

$$3x+12y=33$$
..... (2)

解： 如想消去 y 。

$$(1) \times 4, \quad 16x-12y=24$$
..... (3)

$$(3) + (2), \quad 19x=57.$$

$$\therefore x=3$$
..... (4)

把 (4) 中 x 的數值代入 (2)，得

$$3 \times 3 + 12y = 33,$$

$$12y = 24.$$

$$\therefore y = 2.$$

核算： 把 $x=3$ 和 $y=2$ 代入原方程式中，得

$$(1) \text{ 的左端} = 4 \times 3 - 3 \times 2 = 6,$$

$$(2) \text{ 的左端} = 3 \times 3 + 12 \times 2 = 33.$$

兩端均相等，故知合所求。

由上例得解法：

I. 把含未知數的項移到一端，不含未知數的項，移到另一端。

II. 想消那個未知數，即把兩式中牠的係數變成一樣。

變法 (i) 如想消去的未知數，係數是互質數，即用牠互乘兩全式；

(ii) 如想消去的未知數，係數有公因數，求牠們的最小公倍數，用第一式的係數（要消去未知數的），除得的商乘第一式，用第二式的係數（要消去未知數的），除得的商乘第二式。

III. 如想消去的未知數項是同號就相減；異號就相加。

IV. 消去一未知數後，所得的方程式，是一元一次的，解之得一個未知數的數值。

V. 用求得的未知數的數值，代入任一原方程式中，即得餘一未知數的數值。

解法(2) 代入消元法。

例如： 解 $2x + y = 18$ (1)

$3x + 5y = 34$ (2)

由(1)，得 $y = 18 - 2x$ (3)

把(3)中 y 的數值代入(2)，得

$$3x + 5(18 - 2x) = 34,$$

即 $3x - 10x = 34 - 90.$

$$-7x = -56.$$

$$\therefore x = 8.$$

把 x 的數值代入(3)，得

$$y = 18 - 2 \times 8 = 2.$$

由上例得解法：

I. 由任一式中，先求出一未知數的數值（假定另一未知數為已知），代入另一方程式中，得一元一次方程式。

II. 解之，得一個未知數的數值。

III. 用求得的未知數的數值，代入(1)或(2)，他一未知數，即可求出。

【練習】 試用上邊的兩種解法，求 § 46 問題的解答。

習 題

解下列各方程式：

1.
$$\begin{cases} 3x+4y=10, \\ 4x+3y=9. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x+2y=13, \\ 3x+y=14. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 4x+7y=29, \\ x+3y=11. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 2x-y=9, \\ 3x-7y=19. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 5x+6y=17, \\ 6x+5y=16. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 2x-10=-y, \\ 7x-53=-8y. \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} 8x-y=34, \\ x-53=-8y. \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} 15x+7y=29, \\ 9x+15y=39. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} 14x-39=3y, \\ 6x+17y=35. \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} 28x-33=23y, \\ 63x-101=25y. \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} 35x+17y=86, \\ 56x-17=13y. \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} 15x+77y=92, \\ 55x-22=33y. \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} 5x=7y, \\ 7x+5y=74. \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} 3x-7y=0, \\ 12y=5x-1. \end{cases}$$

15.
$$\begin{cases} 19x=-17y, \\ 2x-53=y. \end{cases}$$

16.
$$\begin{cases} 5x=7y-21, \\ 21x-9y=75. \end{cases}$$

17.
$$\begin{cases} 6y-5x=18, \\ 12x-9y=0. \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} 8x-5y=0, \\ 13x=8y+1. \end{cases}$$

19.
$$\begin{cases} 39x-8y=99, \\ 52x-80=15y. \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} 93x+15y=123, \\ 15x+93y=201. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 5x+10y-3x-11y=14, \\ 7x-9y-3x+12y-38=0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 42x-2y=28x-31, \\ 9y-10x=37+15y. \end{cases}$$

48. 雜題解法

〔例1〕 解 $5(x+2y) - (3x+11y) = 14 \dots\dots (1)$

$$7x-9y-3(x-4y) = 38 \dots\dots (2)$$

解： 去括弧，由 (1) 得 $5x+10y-3x-11y=14,$

即 $2x-y=14, \dots\dots (3)$

去括弧，由 (2) 得 $7x-9y-3x+12y=38$

即 $4x+3y=38 \dots\dots (4)$

(3) $\times 3,$ $6x-3y=42 \dots\dots (5)$

$$10x=80.$$

$$\therefore x=8.$$

把 x 的數值代入 (3)，得

$$2 \times 8 - y = 14.$$

$$\therefore y=2.$$

〔例2〕 解 $\frac{x}{13} - \frac{y}{7} = 6x - 10y - 8 = 0.$

解： $\frac{x}{13} - \frac{y}{7} = 0 \dots\dots (1)$

$$6x - 10y = 8 \dots\dots (2)$$

從 (1) 去分母，得 $7x - 13y = 0 \dots\dots (3)$

從 (2)，得 $3x - 5y = 4 \dots\dots (4)$

(3) $\times 3,$ $21x - 39y = 0 \dots\dots (5)$

$$(4) \times 7, \quad 21x - 35y = 28 \dots\dots\dots (6)$$

$$(6) - (5), \quad 4y = 28 \dots\dots\dots (6)$$

$$\therefore y = 7.$$

$$\begin{aligned} \text{從 (3), 得} \quad 7x &= 13y \\ &= 13 \times 7 = 91. \end{aligned}$$

$$\therefore x = 13.$$

【例3】解
$$\begin{cases} x + y = 8 \dots\dots\dots (1) \\ x - y = 2 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

這種題的解法最簡單，相加後，用2除之，即得 x 的數值；相減後，用2除之，即得 y 的數值。

$$\therefore x = 5, y = 3.$$

這種題將來解二元聯立高次方程式時，用處很多，應特別記住！

習 題

解下列各方程式

$$1. \begin{cases} \frac{2x}{3} + y = 16, \\ x + \frac{y}{4} = 14. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 5, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{5x}{6} - y = 3, \\ x - \frac{5y}{6} = 8. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x - 5 = y, \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{x}{9} + \frac{y}{7} = 10, \\ \frac{x}{3} + y = 50. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{1}{12}y = 3, \\ 4x - y = 20. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{5} = 1\frac{3}{7}, \\ x + \frac{y}{3} = 4\frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 4, \\ \frac{1}{7}x + \frac{1}{15}y = 3. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3(4x+7y) = 87, \\ 2(x+3y) = 22. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 5(x+2y) - (3x+y) = 31, \\ 3(3x-7y) - (2x-y) = 48. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3\left(\frac{5x}{6} - y\right) = 9, \\ 8\left(x - \frac{5y}{6}\right) = 1. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3x - 7y = 0, \\ \frac{2}{7}x + \frac{5}{3}y = 7. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 0, \\ 3x + \frac{1}{2}y = 17. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x = 3y, \\ \frac{x}{3} + y = 34. \end{cases}$$

$$15. \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 3x - 7y - 37 = 0.$$

$$16. \frac{x+1}{10} = \frac{3y-5}{2} = \frac{x-y}{8}.$$

$$17. \frac{x}{13} - \frac{y}{17} = 6x - 10y - 8 = 0.$$

$$18. \frac{x+3}{5} = \frac{8-y}{4} = \frac{3(x+y)}{8}.$$

49. 同值方程式

例如：解 $x+y=6$ (1)

$$2x+2y=12 \text{ (2)}$$

解：(1)×2, $2x+2y=12$ (3)

(2)-(3), $0=0$.

因(2)是(1)的2倍，再沒有什麼差別，即(1)和(2)是一個方程式，所以其解不定。這種方程式，叫做同值方程式。

50. 矛盾方程式

例如： 解 $x = 2y \dots\dots\dots (1)$

$$x = 2y - 3 \dots\dots\dots (2)$$

解： 移項， $x - 2y = 0 \dots\dots\dots (3)$

$$x - 2y = -3 \dots\dots\dots (4)$$

(3)-(4), $0 = 3 \dots\dots\dots (5)$

0不能等於3，即是這種聯立方程式，求不出來解答，原因是 x 既等於 $2y$ ，同時絕不能等於 $2y-3$ 。這種方程式，叫做矛盾方程式。

51. 三元聯立一次方程式的解法

解法：

I. 任取兩個方程式，消去一未知數；再任取兩個方程式（與前邊取的不要完全相同），消去同樣的未知數，得二元聯立一次方程式。

II. 用解二元聯立一次方程式的方法，即得兩個未知數的數值。

• III. 把求得的兩個數值，代到任一原方程式中，即得第三個未知數的數值。

例如： 解 $6x + 2y - 5z = 13 \dots\dots\dots (1)$

$$3x + 3y - 2z = 13 \dots\dots\dots (2)$$

$$7x + 5y - 3z = 26 \dots\dots\dots (3)$$

解： 消去 y 。

從(1)和(2)，得 $12x - 11z = 13 \dots\dots\dots (4)$

從(1)和(3)，得 $16x - 19z = 13 \dots\dots\dots (5)$

從(4)和(5)消去 x ，得 $13z = 13.$

$$\therefore z = 1.$$

把 z 的數值代入(4)，得

$$12x - 11 \times 1 = 13.$$

$$\therefore x = 2.$$

把 x 和 z 的數值代入(1)，得

$$6 \times 2 + 2y - 5 \times 1 = 13.$$

$$\therefore y = 3.$$

核算： 把 $x=2, y=3, z=1$ 代入(1)，(2)和(3)，得

(1)的左端 $= 6 \times 2 + 2 \times 3 - 5 \times 1 = 12 + 6 - 5 = 13,$

(2)的左端 $= 3 \times 2 + 3 \times 3 - 2 \times 1 = 6 + 9 - 2 = 13,$

(3)的左端 $= 7 \times 2 + 5 \times 3 - 3 \times 1 = 14 + 15 - 3 = 26,$

故知 $x=2, y=3, z=1$ 合所求。

習 題

解下列各方程式：

$$1. \begin{cases} 7x + 5y + z = 26 \dots\dots\dots (1) \\ 6x + 3y + 4z = 39 \dots\dots\dots (2) \\ 9x + 4y + 4z = 50 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 7x + 3y - 5z = 3, \\ 3z - y - 4x = 1, \\ x + y - z = 1. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x - 3y + 2z = 0, \\ 3x + 2y - 5z = 22, \\ x - y - z = 2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{4}z = 4, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y - \frac{2}{5}z = 1, \\ \frac{1}{4}z - \frac{1}{6}y - \frac{1}{2}x = 0. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} \frac{y+z}{4} = \frac{z+x}{3} = \frac{x+y}{2}, \\ x+y+z = 27. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{y-z}{3} = \frac{y-x}{2} = 5z-4x, \\ y+z = 2x+1. \end{cases} \quad 7. \begin{cases} \frac{1}{2}(x+z-5) = y-z \\ \qquad \qquad \qquad = 2x-11 \\ \qquad \qquad \qquad = 9-(x-22). \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x+20 = \frac{3y}{2} + 10 \\ \qquad \qquad = 2x+5 \\ \qquad \qquad = 110-(y-z). \end{cases} \quad 9. \begin{cases} x+y = 28, \\ x+z = 30, \\ y+z = 32. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x-y = 2, \\ y-z = 3, \\ x+z = 9. \end{cases} \quad 11. \begin{cases} u+x+y+z = 1, \\ 2u+2x-3y+z = 2, \\ u-3x-6y+4z = 1, \\ 3u+x-8y-z = 0. \end{cases}$$

(9, 10兩題先相加，後再消去未知數。)

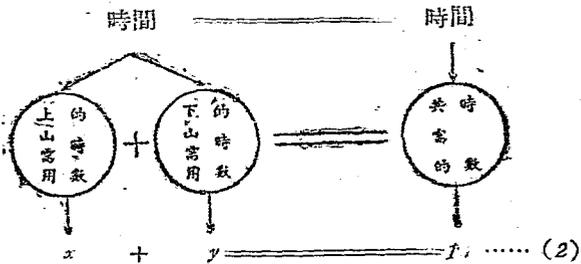
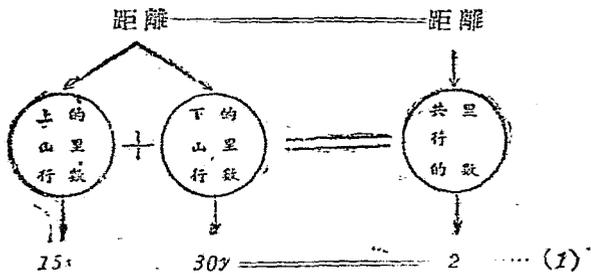
52. 應用問題的解法

解應用問題的步驟，和一元一次的應用問題一樣；所不同的地方，就是如係二元的問題，要假設兩個未知數，得兩個方程式；如係三元的，要假設三個未知數，得三個方程式，如此類推。

解一元一次方程式的應用問題時，方程式兩端的質量和單位要一樣；但解聯立方程式的應用問題時，只要每個方程式兩端的質量和單位相同，不必要幾個方程式都一樣。

例如：一汽車上山，每小時行15里；下山每小時行30里；10小時共行210里，問上下山各需多少小時？

設 x = 上山的時數；
 y = 下山的時數。



例題一：兩位數的兩個數字之和為10，如加18，適為原數數字倒置後的數，求這個數。

解：設 x = 個位上的數字，
 y = 十位上的數字；

則 $10y + x =$ 所求的數，

$10x + y =$ 所求原數數字倒置後的數。

依題意得方程式：

$$x + y = 10 \dots\dots\dots (1)$$

$$10y + x + 18 = 10x + y \dots\dots\dots (2)$$

解之，得 $x = 6, y = 4$ 。

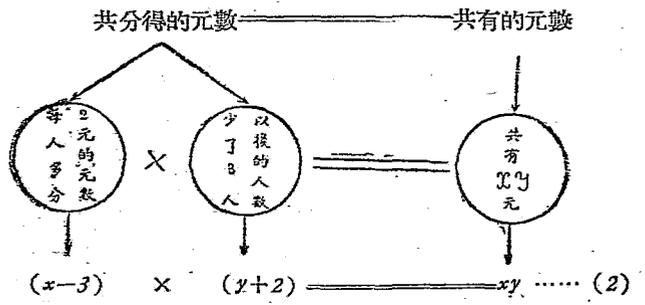
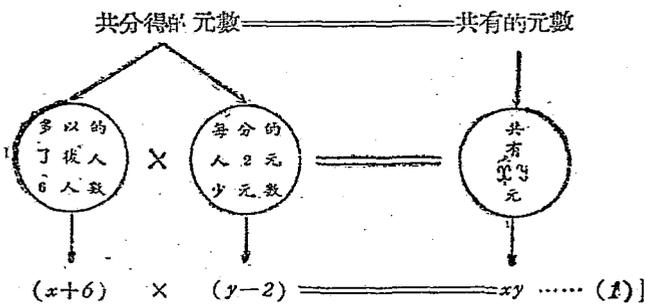
∴ 所求的數 = $10 \times 4 + 6 = 46$ 。

核算： $x = 6, y = 4$ 相加為 10, $46 + 18 = 64$, 64 是 46 的數字倒置後的數。

故知 46 為所求的數。

例題二：人數與元數，都不知道。如人數多 6 個，則每人少分 2 元；如人數少 3 個，則每人多分 2 元求人數與元數。

解：設 $x =$ 人數， $y =$ 每人分得的元數。



化簡 (1) 和 (2), 得 $6y - 2x = 12$ (3)

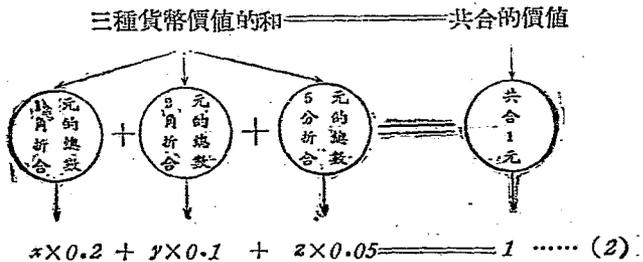
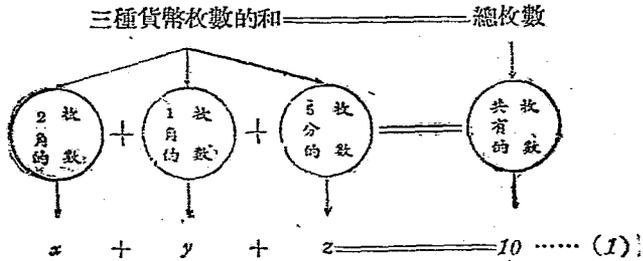
$2x - 3y = 6$ (4)

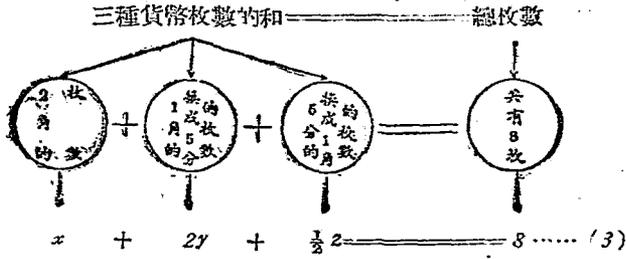
解之, 得 $x = 12, y = 6$.

答: 12人, 72元。

例題三: 某人有 2 角, 1 角和 5 分的貨幣三種, 共 10 枚, 合洋 1 元; 如以 5 分的換成 1 角的, 1 角的換成 5 分的, 則共有 8 枚
問三種各有幾枚?

解: 設 $x = 2$ 角的枚數,
 $y = 1$ 角的枚數,
 $z = 5$ 分的枚數。





解之，得

$$x=3, y=1, z=6.$$

答：2角的有3枚，1角的有1枚，5分的有6枚。

習 題

1. 把本節第一個問題中上山和下山的馬數求出來。
2. 大小二數的和為36，其差比小數的 $\frac{1}{3}$ 多2；求二數。
3. 有龜鶴一籠，牠們的頭共是5個，足共是16隻；問有幾個龜？有幾個鶴？
4. 有一兩位數，等於8倍兩數字的和；如減45，則為原數的易位數；求這兩位數。
5. 設絨4丈，絲3丈的價共為33元；絨5丈，絲6丈的價共為48元。問絨絲每丈各價多少？
6. 有人買6匹馬，7頭牛，共用1000元；又買11匹馬，13頭牛，共用1844元。問馬和牛各價多少？
7. 有一三位數，數字之和為16，百位和十位的數字等於個位的數；如加上594於原數，百位上的數字與個位上數字易位。求這三位數。

8. 甲乙二人比較年齡：7年前甲3倍於乙；7年後甲2倍於乙。問現年各多少？

9. 一室中有男女若干人，從男子看去，女人比男人少1人；從女子看去，男人恰較女人多1倍。問男女各幾人？

10. 甲乙二人共有國幣150元；因甲用去一半，乙用去 $\frac{3}{2}$ ，則二人共有國幣60元。問二人原各有若干元？

11. 有一矩形，若寬增2丈，長增3丈，則面積增多64方丈；若寬增3丈，長增2丈，則面積增多68方丈。問長寬各多少？

12. 有銅與銀的合質：銀比全量的 $\frac{2}{3}$ 多42兩；銅比全量的 $\frac{1}{3}$ 少8兩。問銅銀各幾兩？

13. 問一個人和他妹妹的年齡，那人答道：“我的年齡增3歲，則2倍於妹妹現在的年齡；如妹妹年齡減5歲，則我的年齡為她的 $3\frac{1}{2}$ 倍”求二人的年齡。

14. 某人借洋若干元，依單利計算，六年應還本利和5200元，十年應還本利和6000元。求所借的元數和年利率。

15. 有一工程，甲乙丙三人作之，3日可成；若甲乙二人合作，32日可成；乙丙二人合作，120日可成。求各人獨作的日數。

16. 童子若干人分鉛筆若干枝：其中4人各取4枝，餘者各取3枝，則剩16枝；若有一人只取2枝，則餘者恰可得6枝。問童子，鉛筆各幾何？

17. 甲乙丙三人，甲乙同作6日，共得工資42元；丙甲同作9日，共得工資54元；乙丙同作15日，共得工資75元，問每人每日工資多少？

18. 某人有三子，他的年齡恰等於三子年齡的和；再過9年，

爲長子與次子的和；又過3年，則等於長子與末子的和；又過3年，則爲次子與末子的和。問父子現年各多少？

第七章

一次函數的圖解

53. 直線上點的位置

I. 橫方向線

甲說徐州在東邊，乙說在西邊；甲說徐州明明白白的在鄭州東邊，乙說明明白白的在海州西邊，我們拿地圖來一看，都說的對，不同的原因是甲用鄭州作標準，乙用海州作標準，所以定一地方或一點的位置，非先定標準點不可，這標準點叫做原點，就是起點的意思。

例如：說徐州在鄭州東，鄭州做了標準點，就是原點；徐州在海州西，海州做了標準點，即是原點。

由上例知道原點可以任意選擇。

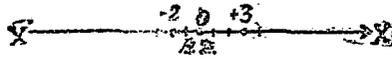
表東西方向的線，叫做橫方向線。

在橫方向線上選定原點後，如東邊（或右邊）距離的數為正的，則表西邊（或左邊）距離的數為負的，這是通常的選定法，不是非這樣不可的，如下圖：



例如：求原點右邊3尺(+3)和左邊2尺(-2)兩點的位置。

假定在方向線上取一線分代表一尺，則由原點向右量3單位線分得(+3)的位置；向左量2單位線分得(-2)的位置，如下圖。



II. 縱方向線

表南北方向或線，叫做縱方向線。

在縱方向線上，選定原點後，如表北邊(或上邊)距離的數為正的，則表南邊(或下邊)距離的數為負的，

如左圖：



例如：求原點上邊3尺(+3)和下邊2尺(-2)兩點的位置。

由原點0向上量3線分得(+3)的位置；向下量2線分得(-2)的位置(假定一線分代表一尺)。

由此可知凡實數均可以方向線上之點表出；反言之，方向線上之點可表對應實數。



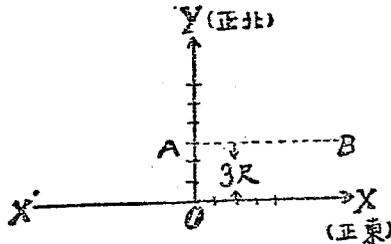
54. 平面上點的位置

假如在教室內，以東西和南北兩牆根當作縱橫兩方向線，牆角當作原點，提出問題如下：

問甲生的座位在什麼地方？

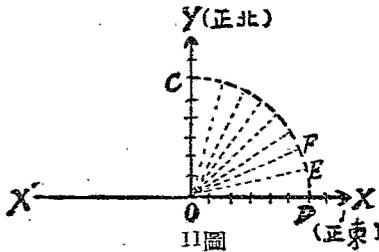
他答離東西牆(橫方向線)3尺。

這種答法，似乎明白，但實際上仍沒法知道他的坐位，因離東西牆 3 尺的地方不止一處，如圖 I 中 AB 線上的點，都適合甲生的回答。



I 圖

乙生說，這樣沒法定位置，需要知道距原點的遠近才成，於是再問甲生距原點多少尺？他答 6 尺。



II 圖

在圖 II 中 CD 弧上的點，都距原點 6 尺，故用甲生的回答，還是不能定他所在的位置。

由上例知道定一點在平面上的位置，用一個方向距離是不行的。如在圖 I 中，知道距橫方向線的遠近，還要知道距縱方向線的遠近，才能定甲生的坐位；如在圖 II 中，知道距原點的遠近，還要知道角度的大小，才能定甲生的坐位。

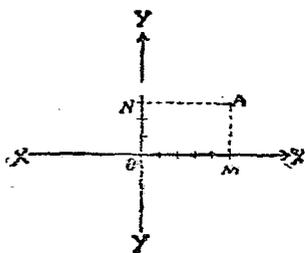
用圖 II 的條件定點的位置，初等代數學上暫不討論，現在講用圖 I 的條件來定點的位置，通常取相交的兩直線作標準，牠們的交點，就選為原點；牠們自己叫做坐標軸。

• 坐標軸若是交成直角的，叫做直角坐標。在初等代數學上，都

用這種坐標軸。橫標方向線，簡稱為橫軸或 x 橫；縱標方向線，簡稱為縱軸或 y 軸。坐標軸方向，橫軸以向右為正，向左為負；縱軸以向上為正，向下為負。

例如：知甲生的坐位離 x 軸 3 尺，離 y 軸 5 尺。求甲生的位置。

在方格紙上選定一線分為一單位。



(i) 由原點在 x 軸上向右量 5 單位，得 M 點；再由 M 點向上量 3 單位，得 A 點，即甲生的位置。

(ii) 或由原點在 y 軸上向上量 3 單位，得 N 點；再由 N 點向右量 5 單位，得 A 點，即甲生的位置。

的位置。

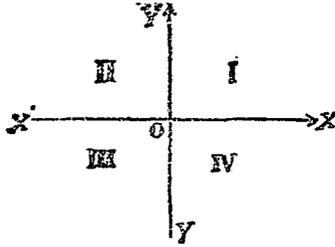
(iii) 或由原點起，在 x 軸上向右量 5 單位，得 M 點，在 y 軸上向上量 3 單位，得 N 點；再由 N 、 M 兩點各畫一直線與 x 軸和 y 軸平行，交點 A ，即甲生的位置。

上述三個方法，都是用 $OM = 5$ 和 $ON = 3$ 來決定 A 點的位置，故通常用 $A(5, 3)$ 表 A 點。括弧內的 5 和 3 ，叫做 A 點的坐標， 5 叫做 A 點的橫坐標， 3 叫做 A 點的縱坐標。

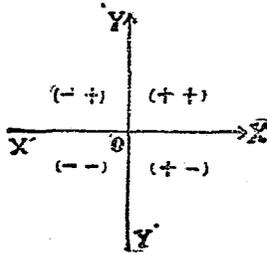
任意點 P 在平面上的位置，以其距 y 軸和 x 軸之距離來決定，即用橫坐標 x 和縱坐標 y 之值來決定，故用 $P(x, y)$ 表之，橫坐標記在前邊，縱坐標記在後邊，是一定的不可任意交換。

兩軸相交，把一平面分為四部分，每一部分叫做一象限，順次

稱為第一象限，第二象限，第三象限，第四象限，如下圖：

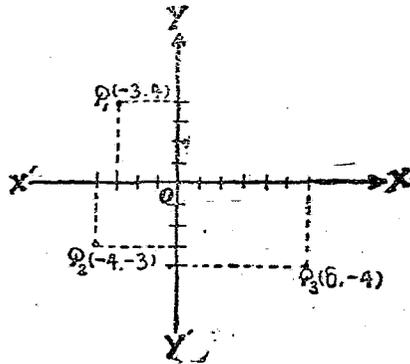


各象限內坐標的正負如下：



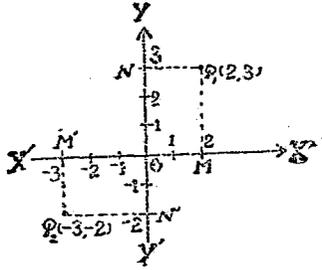
〔例 1〕 求 $P_1(-3, 4)$ $P_2(-4, -3)$ 和 $P_3(6, -4)$ 各點的位置。

先作 XX' YY' 軸，自原點 O 向左量 3 線分（假定一線分爲單位），又向上量 4 線分，各自分點作 Y' XX' 的平行線，相交於 P_1 。



同理，自原點向左量 4，向下量 3，作平行線相交，即得 P_2 之位置，依法求 $P_3(6, -4)$ 之位置。

【例 2】 求下圖中 P_1 及 P_2 兩點的坐標。



由 P_1 作二線，各平行於 x 軸， y 軸，交 x 軸於 M 點， y 軸於 N 點。因 OM 是 2 線分長， ON 是 3 線分長，故知 P_1 的坐標為 $(2, 3)$ ，同理，知 P_2 的坐標為 $(-3, -2)$

習 題

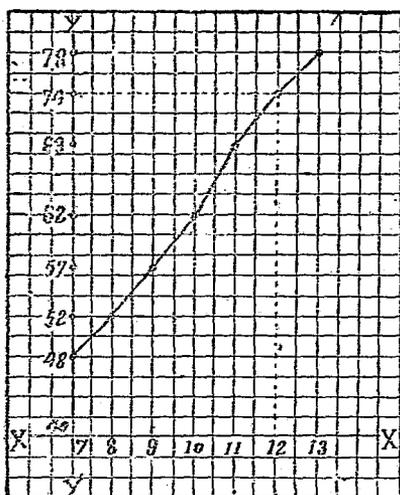
求下列各點的位置：

- | | |
|--------------------|-------------------|
| 1. $P(5, -4)$. | 2. $P(-3, -7)$. |
| 3. $P(-2, 1)$. | 4. $P(-10, 5)$. |
| 5. $P(5, -a)$. | 6. $P(a, -b)$. |
| 7. $P(-2a, -3b)$. | 8. $P(2x, -3y)$. |

55. 實際的應用

統計年齡不同的小孩子平均的體重，得下表：

年齡	7	8	9	10	11	13
體重的磅數	48	52	57	62	69	78



用上邊的統計，製圖如左：

y 軸上的數代表磅數；每一線分作兩磅，由40磅起算。

x 軸上的數代表年齡；每兩線分算一歲，由原點起就是7歲。

由左圖知小孩子年齡越大，身體越重；並且知12歲的小孩子平均體重是74磅左右。

習 題

任選兩量關係的統計表製圖。

56. 函 數

在代數學中，通常用 a, b, c, \dots 表確定的常數，以 x, y, z, \dots 表不確定的變數。如一變數之值是依他一變數之值而決定的，則後者叫做自變數，而前者叫做依變數；如 $y = ax^2 + bx + c$ ，任與 x 一值，可得 y 一對應值； x 為自變數， y 為依變數。

如一代數式之值是依所含變數之值而決定的，則這式叫做這變數的函數；函數符號為 $f(\quad)$ 。

例如： $5x+6$ ，牠的數值完全依靠 x 的數值的大小而定，所以把這個式子，叫做 x 的函數，通常用符號 $f(x)$ 表之，即

$$f(x) = 5x + 6.$$

同樣， y^2+5y+8 ，這個式子是 y 的函數，用 $f(y)$ 表之，即

$$f(y) = y^2 + 5y + 8.$$

$x+y+3$ 這個式子的數值的大小，不但依靠 x 數值的大小，還依靠 y 數值的大小而定，所以就把它叫做 x 和 y 的函數，用 $f(x, y)$ 表之，即

$$f(x, y) = x + y + 3.$$

如同時有幾個不同的 x 的函數，便要用符號 $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ ……表之，以示區別，但其使用法以及性質，都與 $f(x)$ 是一樣的。

例如： $5x+3$ 和 $8x-4$ 是不同的 x 的函數，用符號表之，為

$$f(x) = 5x + 3 \text{ 和 } F(x) = 8x - 4.$$

代數式是什麼文字的幾次式，就可叫做那個文字的幾次函數。

例如： $f(x) = x+3$ 是 x 的一次函數； $\phi(x) = x^2+5x+6$ 是 x 的二次函數； $F(x, y) = x+y+3$ 是 x 和 y 的一次函數。

函數的範圍很廣，本章只講簡易的一次函數的圖解。

57. 求函數值

求函數值的法子，和 § 34 求代數式的數值的法子一樣。

例如：1. 設 $f(x) = 2x+1$ ，求 $x=1, 2, 3$ 時， $f(x)$ 的數值。

$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3; \quad f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5;$$

$$f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7.$$

2. 設 $y = x + 3$, $x = 1, 2, 3, \dots$ 時, y 的數值。

x	1	2	3	4	5
y	4	5	6	7	8

3. $x = 1, 2, 3, \dots$ 時, 求 $4x - 1$ 的數值。

x	1	2	3	4	5
$4x - 1$	3	7	11	15	19

習 題

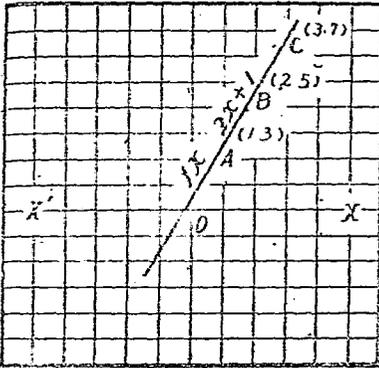
$x = 1, -2, 3, -4, 5$ 時, 求下列各函數的值:

- $f(x) = 3x - 7.$
- $f(x) = 16 - (2x - 3).$
- $f(x) = 8(x - 3) - (6 - 2x).$
- $f(x) = 2(x + 2) - 5(5 - x).$
- $f(x) = 3(x - 1)^2 - 3(x^2 - 1).$
- $f(x) = 2(x + 1)^2 - 2(x + 3)^2.$
- $f(x) = 0.5x - 0.8.$
- $f(x) = 0.16x - 0.008.$
- $\phi(x) = x^2 - 6x - 7.$
- $\phi(x) = 5x^2 - x + 10.$

58. 一次函數的圖解

由變數 x 的每一數值, 求出函數的相應數值, 作為一點的坐標, 可求出許多點的位置, 聯這些點得一直線, 即表一次函數。凡一次函數的變跡均為直線。

如把上節例 1 圖解之：



x	y	令 $y = f(x) = 2x + 1$.
1	3	任與 x 之值 1 ,
2	5	2, 3, …… , 則可得
3	7	$y = f(x)$
⋮	⋮	相應之值, 3, 5, 7,
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	將 x 各值作為橫
⋮	⋮	坐標; y 相應各值

作為縱坐標。

由此可得 $A(1,3)$; $B(2,5)$; $C(3,7)$, …… 諸點, 聯綫為即 $f(x) = 2x + 1$ 的圖解。

習 題

圖解 § 57 習題中 1—8 的函數。

59. 圖解二元一次聯立方程式

例如：圖解 $3x + 2y = 16$ …………… (1)

$5x - 3y = 14$ …………… (2)

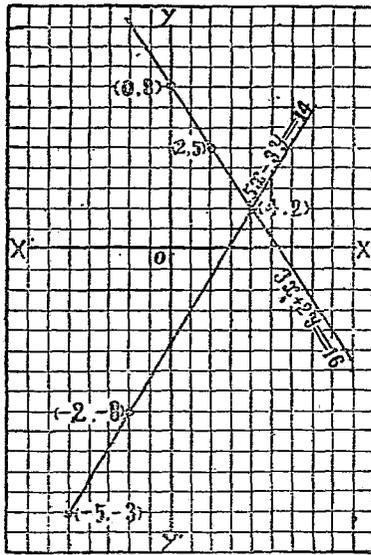
由 (1), 得 $y = \frac{16 - 3x}{2} = f(x)$ 。 | 由 (2), 得 $y = \frac{14 - 5x}{-3} = f(x)$ 。

假設 $x = 0$, 則 $y = f(0) = 8$ 得 | 假設 $x = -2$,

點的坐標。 | 則 $y = -8$;

同樣， $x=2$ ，則 $y=f(2)=5$ | $x=-5$ ，
 又得一點的坐標。 | 則 $y=-13$ 。

(1) 和 (2) 各表一直線，牠們交點的坐標為 $(4, 2)$ 。這 4 和 2 能適合 (1) 和 (2)，故知 $x=4, y=2$ 為方程式的解。



60. 圖解二元一次同值方程式

例如：圖解 $x + y = 8$ (1)

$2x + 2y = 16$ (2)

由 (1)，得 $y = f(x) = 8 - x$ 。

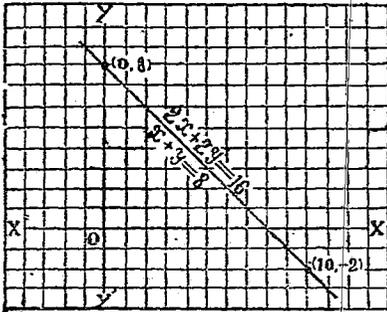
由 (2)，得 $y = f(x) = \frac{16 - 2x}{2}$ 。

假設 $x = 0$ 。

假設 $x = 0$ ，

則 $f(0)=8$;
 $x=10$,
 則 $f(10)=-2$.

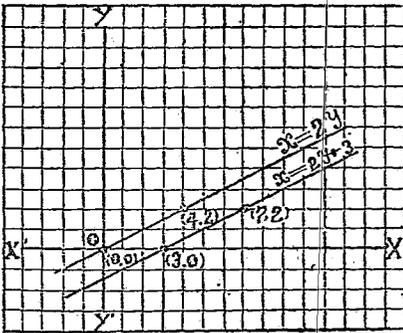
則 $f(0)=8$;
 $x=10$,
 則 $f(10)=-2$.



由(1)和(2)得到各點的坐標一樣，故只能畫一直線，可以無窮長，適合這線的點有無窮個；故同值方程式即不定方程式有無窮個根。

61. 圖解二元一次矛盾方程式

例如：圖解 $x=2y$ (1)
 $x=2y+3$ (2)



在(1)中：

$$\begin{cases} y=0, & \begin{cases} y=2, \\ x=4. \end{cases} \\ x=0; \end{cases}$$

在(2)中：

$$\begin{cases} y=0, & \begin{cases} y=2, \\ x=7. \end{cases} \\ x=3; \end{cases}$$

故由(1)和(2)所畫的線平行而不能相交，所以

矛盾方程式沒有解答。

習 題

圖解下列各方程式：

$$1. \begin{cases} y = 4x, \\ 2x + y = 18. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y = 2, \\ 3x + 3y = 6. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x - 5y = 15. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y = 2x + 3, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y = 6, \\ 2x + 2y = 12. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x - 3y = 0, \\ x - 3y = 3. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x + y = 10, \\ 7x + 8y = 53. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 6y - 5x = 8, \\ 12x - 9y = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x + 4y = 10, \\ 4x + y = 9. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x + 2y = 13, \\ 3x + y = 14. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x + y = 10, \\ 7x + 6y = 62. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 6y - 5x = 18, \\ 12x - 9y = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 8x = 5y, \\ 13x = 8y + 1. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 19x + 17y = 0, \\ 2x - y = 53. \end{cases}$$

第八章

續多項式的基本運算（乘法和除法）

62. 多項式乘法

- I. 一個作乘式，一個作被乘式。
- II. 把乘式與被乘式各按同一文字同一順序排列。
- III. 被乘式寫在上邊，乘式寫在下邊，由左邊對齊。
- IV. 用乘式的每項乘被乘式的各項，把所得的乘積，寫在橫線下面，同類項寫在同一縱項內。
- V. 求各同類項的代數和。

[例 1] 以 $x+2$ 乘 $2x+5$ 。

$$\begin{array}{r} 2x+5 \\ \times) \quad x+2 \\ \hline 2x^2+5x \dots\dots\dots (2x+5) \times x \\ +) \quad \quad 4x+10 \dots\dots (2x+5) \times 2 \\ \hline 2x^2+9x+10 \end{array}$$

被乘式和乘式含同文字時，在未乘以前，最好排列成同文字的升幂或降幂式；如有缺項時，應當留空位，或用零補充之。

[例 2] 以 x^3-1-2x 乘 $4x-3$ 。

$$\begin{array}{r} \quad \quad x^3 \quad \quad \quad -2x-1 \\ \times) \quad 4x-3 \\ \hline 4x^4 \quad \quad \quad -8x^2-4x \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 +) \quad \frac{-3x^3 \quad +6x+3}{4x^4-3x^3-8x^2+2x+3} \\
 \text{或} \quad \frac{x^3+0-2x-1}{4x^4+0-8x^2-4x} \\
 \times) \quad \frac{4x-3}{4x^4+0-8x^2-4x} \\
 +) \quad \frac{-3x^3+0+6x+3}{4x^4-3x^3-8x^2+2x+3}
 \end{array}$$

積的次數是被乘式的次數與乘式的次數之和。

習 題

求下列各題的乘積：

1. $a+5$ 和 $a-3$.
2. $x+1$ 和 $x-5$.
3. x^2+5 和 $x-7$.
4. $x+y-2$ 和 $x-y+2$.
5. a^2+ab+b^2 和 $a-b$.
6. $a+b$ 和 $a-b$.
7. $\frac{1}{2}x^2+5$ 和 $x-\frac{1}{3}$.
8. $0.5x-1$ 和 $x+0.8$.
9. x^3-2x+1 和 x^2+x+1 .
10. x^3+x^2+1+x 和 x^2-x+1 .
11. $x^2y+3xy-7y^2$ 和 x^2y+xy^2 .
12. $-xy+y+x^2$ 和 $\frac{1}{2}x-y$.

63. 乘方的指數定則

$$(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^6 = a^{2 \times 3}$$

$$\therefore (a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$$

$$(a^2b^3)^3 = a^2b^3 \times a^2b^3 \times a^2b^3 = a^6b^9 = a^{2 \times 3}b^{3 \times 3}$$

$$\therefore (a^2b^3)^2 = a^{2 \times 2} b^{3 \times 2} = a^4 b^6.$$

同樣， $(a^2)^m = a^{2 \times m} = a^{2m},$

$$(a^n)^m = a^{n \times m} = a^{nm},$$

$$(a^m b^n)^p = a^{m \times p} b^{n \times p} = a^{mp} b^{np}.$$

由上例得指數定則III：

乘方的乘方，等於以其指數相乘作為乘積的指數。

【練習】 指出下列各式的錯誤：

1. $(ab)^3 = a^{1+3} b^{1+3} = a^4 b^4.$

2. $(3b^3)^2 = 3b^{3 \times 2} = 3b^6.$

3. $(a^2)^2 = a^{2+2} = a^4.$

習 題

計算下列各式：

1. $(m^3)^5.$ 2. $(x^7)^2.$ 3. $(3m^3)^4.$

4. $(2x^7)^2.$ 5. $(x^3y^4)^3.$ 6. $(7ab^2c)^2.$

7. $(ab^m)^2.$ 8. $(x^2y^n)^3.$ 9. $(x^m b^n)^4.$

10. $(a^p b^q)^n.$ 11. $(2a^p b^q)^n.$ 12. $(x^{2n})^{2m}.$

64. 乘算公式一

1. 二數和的平方

假設 a 代一個數， b 代一個數，則二數的和為 $a+b$ 。

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times) \quad a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

由實際乘得 a, b 二數和的平方為 $a^2 + 2ab + b^2$ 。

如把 b 換成 c ，得

$$\begin{array}{r} \times) \quad a+c \\ \quad a+c \\ \hline \quad a^2+ac \\ \quad \quad ac+c^2 \\ \hline \quad a^2+2ac+c^2 \end{array}$$

所得的乘積，與上邊乘積的形式一樣，僅是 b 的地方換成 c 。

如把 a 換成 m ，得

$$\begin{array}{r} \times) \quad m+b \\ \quad m+b \\ \hline \quad m^2+mb \\ \quad \quad mb+b^2 \\ \hline \quad m^2+2mb+b^2 \end{array}$$

所得乘積的形式，還是一樣，僅是 a 的地方換成 m 。

所以無論兩個什麼數相加的平方，總是上邊的形式，就把牠作為二數的平方和之公式。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \dots\dots\dots (\text{公式 } 1)$$

(二數和的平方，等於二數平方和，加上二數乘積的2倍。)

$$[\text{例 } 1] \quad (m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2.$$

$$[\text{例 } 2] \quad (a+3b)^2 = a^2 + 2a \times 3b + (3b)^2 \\ = a^2 + 6ab + 9b^2.$$

$$[\text{例 } 3] \quad (3a+5b)^2 = (3a)^2 + 2 \times 3a \times 5b + (5b)^2 \\ = 9a^2 + 30ab + 25b^2.$$

$$[\text{例 } 4] \quad (x^2+y^3)^2 = (x^2)^2 + 2x^2y^3 + (y^3)^2 \\ = x^4 + 2x^2y^3 + y^6.$$

II. 二數差的平方

$$\begin{array}{r} \times) \quad a-b \\ \quad a-b \\ \hline \quad a^2-ab \\ \quad \quad -ab+b^2 \\ \hline \quad a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

$$\therefore (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \dots\dots\dots \text{〔公式 2〕}$$

（二數差之平方，等於二數平方和，減去二數乘積的 2 倍。）

$$\text{〔例 1〕} \quad (a-d)^2 = a^2 - 2cd + d^2.$$

$$\text{〔例 2〕} \quad (a-3b)^2 = a^2 - 2a \times 3b + (3b)^2 \\ = a^2 - 6ab + 9b^2.$$

$$\text{〔例 3〕} \quad (x-y^2)^2 = x^2 - 2x \times y^2 + (y^2)^2 \\ = x^2 - 2xy^2 + y^4.$$

$$\text{〔例 4〕} \quad \left(\frac{1}{2}x-w\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}x \times w + w^2 \\ = \frac{1}{4}x^2 - xm + w^2.$$

習 題

應用公式，求下列各式的平方：

- | | | |
|-----------------------------------|------------------------|-----------------------------------|
| 1. $3a+7$. | 2. $3a-7$. | 3. $2a+5b$. |
| 4. $2a-5b$. | 5. $5ab+c$. | 6. $5ab-c$. |
| 7. $3a^2+7$. | 8. $3a^2-7$. | 9. $3x^2+y^3$. |
| 10. $3x^2-y^3$. | 11. a^2y+2^2 . | 12. x^2y-2^2 . |
| 13. $\frac{1}{3}x+y$. | 14. $\frac{1}{3}x-y$. | 15. $\frac{1}{5}x+\frac{1}{7}y$. |
| 16. $\frac{1}{5}x-\frac{1}{7}y$. | 17. $0.5x+0.8$. | 18. $0.5x-0.8$. |

III. 多項式的平方

(a) 三項式的平方

$$(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2 \\ = (a+b)^2 + 2 \times c(a+b) + c^2.$$

$$\begin{aligned} & \text{〔把 } (a+b) \text{ 當作一數看待〕} \\ & = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ & = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \end{aligned}$$

例如：求 $3a-x+y$ 的平方。

$$\begin{aligned} & (3a-x+y)^2 \\ & = (3a)^2 + (-x)^2 + y^2 + 2 \times 3a(-x) + 2(-x)y + 2 \times 3a \times y \\ & = 9a^2 + x^2 + y^2 - 6ax - 2xy + 6ay \end{aligned}$$

(b) 四項式的平方

$$\begin{aligned} & (a+b+c+d)^2 \\ & = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd. \end{aligned}$$

總之，多項式的平方，等於各項平方之和，再加上每兩項相乘積之二倍。

習 題

求下列各式的平方：

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------|
| 1. $3a+7b+c.$ | 2. $2a+5b-m.$ |
| 3. $5ab-c+1.$ | 4. $a-\frac{1}{2}+b.$ |
| 5. $2x^2+x-1.$ | 6. $2a-b-c.$ |
| 7. $5x+6y-3c.$ | 8. $y^3-m^2-n^2.$ |
| 9. $x^2+m^2+n^2.$ | 10. $7x+3y+8z.$ |
| 11. $\frac{2}{3}a^2-x+\frac{3}{2}.$ | 12. $a+b+c+d+e.$ |

65. 乘算公式二

二數和與差之積

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times) a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2 \quad -b^2 \end{array}$$

$$\therefore (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \dots\dots\dots (\text{公式 3})$$

（二數和與二數差的乘積，等於二數平方的差）

$$[\text{例 1}] \quad (5+3)(5-3) = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16.$$

$$[\text{例 2}] \quad (a+3b)(a-3b) = a^2 - (3b)^2 \\ = a^2 - 9b^2.$$

$$[\text{例 3}] \quad (2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2 - (3b)^2 \\ = 4a^2 - 9b^2.$$

$$[\text{例 4}] \quad (x+y+z)(x+y-z) = \{(x+y)+z\} \{(x+y)-z\}$$

$$= (x+y)^2 - z^2$$

〔把 $(x+y)$ 當作一數看待〕

$$= x^2 + 2xy + y^2 - z^2.$$

$$[\text{例 5}] \quad (a^2+b^2)(a^2-b^2) = (a^2)^2 - (b^2)^2 \\ = a^4 - b^4.$$

【練習】 指明下式的錯誤：

$$1. \quad (a+m)(a+m) = a^2 + m^2.$$

$$2. \quad (a-m)(a-n) = a^2 - mn.$$

$$3. \quad (x^2+y^2)(x^2-y) = x^{2+2} - y^{2+1} = x^4 - y^3$$

$$\text{或} = x^{2 \times 2} - y^{2 \times 1} = x^4 - y^2.$$

習 題

求下列各式的乘積：

1. $(7-9)(7-9)$.

2. $(a+3)(a-3)$.

3. $(2a+b)(2a-b)$.

4. $(5a+2b)(5a-2b)$.

5. $(1+2m)(1-2m)$.

5. $(x^2+y)(x^2-y)$.

7. $(a+b+c)(a+b-c)$.

8. $(3x+2y+z)(3x+2y-z)$.

9. $(x^2+3+2x)(2x+x^2-3)$.

10. $(xy+x^2+y^2)(y^2-x^2+xy)$.

66. 乘算公式三

I. 二數和的立方

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times) a+b \\ \hline a^2+ab \\ +) +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ \times) a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ +) a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

$$\therefore (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \dots\dots\dots (\text{公式 4})$$

$$\begin{aligned} \text{[例 1]} \quad (2+4)^3 &= 2^3 + 3 \times 2^2 \times 4 + 3 \times 2 \times 4^2 + 4^3 \\ &= 8 + 48 + 96 + 64 = 216. \end{aligned}$$

$$\text{[例 2]} \quad (a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

$$\text{[例 3]} \quad (3a+2x)^3 = (3a)^3 + 3(3a)^2(2x) + 3(3a)(2x)^2 + (2x)^3$$

$a)^3$

$$= 27a^3 + 54a^2x + 36ax^2 + 8x^3$$

$$\begin{aligned} \text{[例 4]} \quad (a^2+xy)^3 &= (a^2)^3 + 3(a^2)^2xy + 3a^2(xy)^2 + (xy)^3 \\ &= a^6 + 3a^4xy + 3a^2x^2y^2 + x^3y^3. \end{aligned}$$

II. 二數差的立方

$$\begin{array}{r} \times) \quad a-b \\ \quad \underline{a^2-ab} \\ +) \quad \quad -ab+b^2 \\ \quad \underline{a^2-2ab+b^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times) \quad a^2-2ab+b^2 \\ \quad \underline{a-b} \\ +) \quad \quad \underline{a^3-2a^2b+ab^2} \\ \quad \quad \quad \underline{-a^2b+2ab^2-b^3} \\ \quad \quad \quad \quad \underline{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3} \end{array}$$

$\therefore (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \dots\dots\dots$ (公式 5)

[例 1] $(5-2)^3 = 5^3 - 3 \times 5^2 \times 2 + 3 \times 5 \times 2^2 - 2^3$
 $= 125 - 150 + 60 - 8 = 27.$

[例 2] $(3a-2x)^3 = (3a)^3 - 3(3a)^2(2x) + 3(3a)(2x)^2 - (2x)^3$
 $= 27a^3 - 54a^2x + 36ax^2 - 8x^3.$

習 題

求下列各式的立方：

- | | | |
|-----------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. $6+7.$ | 2. $6-7.$ | 3. $3x+5y.$ |
| 4. $3x-5y^2$ | 5. $2ab+3c.$ | 6. $2ab-3c.$ |
| 7. $4x^2+5y^2.$ | 8. $4x^2-5y^2.$ | 9. $2a^2+3b^2.$ |
| 10. $2a^2-3b^2.$ | 11. $5x^4+4y^4.$ | 12. $5x^4-4y^4.$ |
| 13. $a+\frac{2}{3}b.$ | 14. $\frac{1}{3}x^2+3y.$ | 15. $\frac{1}{6}a^2-3a.$ |

67. 乘算公式四

I.
$$\begin{array}{r} \times) \quad a^2+ab+b^2 \\ \quad \underline{a-b} \\ +) \quad \quad \underline{a^3+a^2b+ab^2} \\ \quad \quad \quad \underline{-a^2b-ab^2-b^3} \\ \quad \quad \quad \quad \underline{a^3 \qquad \qquad -b^3} \end{array}$$

$\therefore (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 \dots\dots\dots$ (公式 6)

$$\begin{aligned} \text{〔例 1〕 } (5-3)(5^2+5\times 3+3^2) &= 5^3-3^3 \\ &= 125-27=98. \end{aligned}$$

不用公式算，結果還是一樣。

$$(5-3)(5^2+5\times 3+3^2)=2(25+15+9)=98.$$

$$\text{〔例 2〕 } (x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3.$$

$$\begin{aligned} \text{〔例 3〕 } (2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2) \\ &= (2x-3y) \{ (2x)^2+2x\times 3y+(3y)^2 \} \\ &= (2x)^3-(3y)^3=8x^3-27y^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{〔例 4〕 } (3x-y^2)(9x^2+3xy^2+y^4) \\ &= (3x-y^2) \{ (3x)^2+3x\times y^2+(y^2)^2 \} \\ &= (3x)^3-(y^2)^3=27x^3-y^6. \end{aligned}$$

【練習】 指出下列各式的錯誤：

$$\begin{aligned} 1. (2x-3y)(4x^2+5xy+9y^2) \\ &= (2x-3y) \{ (2x)^2-(2x)(3y)+(3y)^2 \} \\ &= (2x)^3-(3y)^3=8x^3-27y^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (3a-5b)(9a^2+15ab+25b^2) \\ &= (3a-5b) \{ (3a)^2+(5a)(3b)+(5b)^2 \} \\ &= (3a)^3-(5b)^3. \end{aligned}$$

$$\text{II. } \begin{array}{r} a^2-ab+b^2 \\ \times) \quad a+b \\ \hline a^3-a^2b+ab^2 \\ +) \quad \quad a^2b-ab^2+b^3 \\ \hline a^3 \qquad \qquad \qquad +a^3 \end{array}$$

$$\therefore (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \dots\dots\dots \text{(公式 7)}$$

$$\text{〔例 1〕 } (x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3.$$

$$\text{〔例 2〕 } (a^2+3b^2)(a^4-3a^2b^2+9b^4)$$

$$= (a^2 + 3b^2) \{ (a^2)^2 - a^2(3b^2) + (3b^2)^2 \}$$

$$= a^6 + (3b^2)^3 = a^6 + 27b^6.$$

習 題

應用公式，求下列各式的乘積：

1. $(a-3)(a^2+3a+9)$.
2. $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$.
3. $(2a^2-b^2)(4a^4+2a^2b^2+b^4)$.
4. $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$.
5. $(3x-8y)(9x^2+24xy+64y^2)$.
6. $(7x+3y^2)(49x^2-21xy^2+9y^4)$.
7. $(a+b+c) \{ (a+b)^2 - (a+b)c + c^2 \}$.
8. $(x+y-z) \{ (x+y)^2 + (x+y)z + z^2 \}$.

68. 乘算公式五

I. $x + 9$

$$\begin{array}{r} \times) \quad x + 7 \\ \hline x^2 + 9x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +) \quad \quad \quad 7x + 63 \\ \hline x^2 + 7x + 9x + 63 \end{array}$$

$x^2 + (7+9)x + 63$
↓
↓
↓

兩首項的積

兩末項的積

$$\begin{array}{r} \times) \quad \quad \quad x + 7 \\ \hline x^2 - 9x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +) \quad \quad \quad 7x - 63 \\ \hline x^2 + 7x - 9x - 63 \end{array}$$

$x^2 + (7-9)x - 63$
↑
↑

兩末項的代數和

同樣， $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \dots\dots\dots$ (公式 8)

由上邊得乘積各項的觀察法：

- I. 首項 = 兩乘式首項相乘；
- II. 末項 = 兩乘式末項相乘；
- III. 中項 = 兩乘式末項的代數和乘首項。

$$\begin{aligned} \text{〔例 1〕} \quad (x+5)(x-8) &= x^2 + (5-8)x - 40 \\ &= x^2 - 3x - 40. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{〔例 2〕} \quad \left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) &= x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

習 題

用觀察法，求下列各式的乘積：

1. $(x+5)(x+10)$.
2. $(x+5)(x-5)$.
3. $(x-7)(x-10)$.
4. $(x+7)(x+10)$.
5. $(x+8)(x-4)$.
6. $(x-12)(x-1)$.
7. $(x+12)(x-1)$.
8. $(-x-2)(-x-3)$.
9. $(-x+7)(x-7)$.
10. $(-x+21)(x-21)$.
11. $\left(x + \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$
12. $\left(x - \frac{1}{7}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.
13. $\left(x - \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$
14. $\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x - \frac{1}{10}\right)$.

$$\begin{array}{r} - \text{II} \cdot \\ \times \begin{array}{r} 2x+3 \\ 5x+7 \\ \hline 10x^2+15x \\ 14x+21 \\ \hline 10x^2+29x+21 \\ \downarrow \\ 3 \times 5 + 2 \times 7 \end{array} \quad \times \begin{array}{r} 2x-3 \\ 5x-7 \\ \hline 10x^2-15x \\ -14x-21 \\ \hline 10x^2-29x-21 \\ \downarrow \\ -3 \times 5 - 2 \times 7 \end{array} \quad \times \begin{array}{r} 2x-3 \\ 5x+7 \\ \hline 10x^2-15x \\ 14x-21 \\ \hline 10x^2-x-21 \\ \downarrow \\ -3 \times 5 + 2 \times 7 \end{array} \end{array}$$

同樣： $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd \dots\dots\dots$ (公式9)

由上邊得乘積各項的觀察法：

- I. 首項 = 兩乘式首項相乘；
- II. 末項 = 兩乘式末項相乘；
- III. 中項 = 乘式首末兩項交互相乘的代數和（同號相加，異號相減）。

$$\begin{aligned} \text{〔例 1〕 } (2x+3)(x-3) &= 2x \times x + 3x - 3 \times 2x + 3 \times (-3) \\ &= 2x^2 - 3x - 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{〔例 2〕 } \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) &= 3x \times x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times 3\right)x + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= 3x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

習 題

用觀察法，求下列各題的乘積：

1. $(2x+5)(x+2)$.
2. $(2x-5)(x-2)$.
3. $(2x+5)(2x-1)$.
4. $(3x+7)(2x-3)$.
5. $(4x-3)(2x+3)$.
6. $(3x-2)(7x+9)$.
7. $\left(4x - \frac{1}{3}\right)\left(3x + \frac{1}{8}\right)$.
8. $\left(2x - \frac{1}{7}\right)\left(x + \frac{1}{10}\right)$.
9. $(3x-2y)(3x+y)$.
10. $(3x+2y)(3x+2y)$.
11. $(2x+7y)(2x-5y)$.
12. $(5x+3a)(4x-3a)$.
13. $(2x+5a)(x-5a)$.
14. $(2x^2+a^2)(x^2-a^2)$.
15. $(y^2+7)(y^2-6)$.
16. $(x^2-3)(2x^2+5)$.
17. $(m^2-5)(4m^2-2)$.
18. $(xy-5)(xy+8)$.
19. $(abc-7)(abc+1)$.

69. 多項式除法

求 $a+b$ 除 $2a^2+3ab+b^2$ 的商式。

$$\begin{array}{r} 2a+b \\ a+b \overline{) 2a^2+3ab+b^2} \\ \underline{2a^2+2ab} \\ ab+b^2 \\ \underline{ab+b^2} \\ 0 \end{array}$$

由上例得法則：

- I. 先把除式和被除式，用同文字的升幂或降幂排列。
- II. 首商，用除式首項除被除式首項得首商，用首商乘除式各項所得的乘積從被除式中減去，得第一餘式。
- III. 次商 用除式首項除第一餘式的首項，得次商。用次商乘除式各項所得的乘積從第一餘式中減去，有餘再繼續依法做去；如最後餘式為零，則為能除盡；如最後餘式不為零，而為低於除式的次數之式（就某文字說），則為除不盡，這時候商之表示法，在後面再說明。

〔例 1〕 用 $x-a$ 除 x^3-a^3 ，被除式有缺項時，應當留空位，或補零。

$$\begin{array}{r} x^2+ax+a^2 \\ x-a \overline{) x^3+0+0-a^3} \\ \underline{x^3-ax^2} \\ ax^2 \\ \underline{ax^2-a^2x} \\ x^2x-a^3 \\ \underline{a^2x-a^3} \\ 0 \end{array}$$

商式的次數，是被除式的次數與除式的次數之差。

〔例2〕 用 $x+1$ 除 x^3+3x^2+x+5 。

$$\begin{array}{r} x^2 1 \\ x+1) x^2 + x^2 + x + 5 \\ \underline{ x^3 + } x + 5 \\ x + 5 \\ \underline{ x + 1} 4 \end{array}$$

最後餘式的次數比除式的次數低，故不能再除，把這個4個叫做剩餘，關於這個問題，在後邊還有敘述。

習 題

求下列各式的商：

1. $(2x^2+3x-35) \div (2x-7)$.
2. $(42a^2-25a-3) \div (6a-1)$.
3. $(4x^2+23x+15) \div (4x+3)$.
4. $(15a^2+17ax-4x^2) \div (3a+4x)$.
5. $(x^2+2xy+y^2) \div (x+y)$.
6. $(x^3+y^3) \div (x+y)$.
7. $(a^3-b^3) \div (a-b)$.
8. $(x^3-x^2-12-9x) \div (3x+x^2+3)$.
9. $(6m^3-m^2-11m+3) \div (3m^2-4m-1)$.

解下列各方程式：

10. $(x+1)^2 - (x^2-1) = 22$.
11. $3(x-1)^2 - 3(x^2-1) = x-15$.
12. $(x+1)(2x+3) = 2(x+1)^2 + 8$.

33. $6(x^2-3x+2)-2(x^2-1)=4(x+1)(x+2)$.
 14. $(x+15)(x-3)-(x^2-6x+9)=30-15(x-1)$.
 15. $84+(x+4)(x-3)(x+5)=(x+1)(x+2)(x+3)$.
 16. $(x+1)(x+2)(x+6)=x^3+9x^2+4(7x-1)$.

70. 剩餘的處理法

以 $x+1$ 除 $2x+3x^2+1$

$$\begin{array}{r}
 \text{商式} \dots\dots\dots 3x-1 \\
 \text{除式} \dots\dots (x+1) \overline{) 3x^2+2x+1} \dots\dots \text{被除式} \\
 \underline{3x^2+3x} \\
 -x+1 \\
 \underline{-x-1} \\
 2 \dots\dots \text{剩餘}
 \end{array}$$

把被除式和除式依同文字的降冪序排列後，實行除法，若所得的商式比除式的次數低時，我們就知道這個除式除不盡被除式，通常把這種餘式，叫做剩餘。

代數學上處理剩餘的方法，和算術上一樣；也是把剩餘作分子，除式作分母，寫做分式，加到已得的商式後邊，如上例，得

$$\frac{3x^2+2x+1}{x+1} = 3x-1 + \frac{2}{x+1}$$

故以多項式 B 除多項式 A，假如商為 Q，剩餘為 R，則得除算公式如下：

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}. \quad \therefore A = B \times Q + R \dots\dots\dots (A)$$

71. 剩餘定理

[例 1] 求 $x-2$ 除 $3x^2$ | [例 2] 求 $x-a$ 除 $3x^2$

+2x+1的剩餘。

$$\begin{array}{r} 3x+8 \\ x-2 \overline{) 3x^2+2x+1} \\ \underline{3x^2-6x} \\ 8x+1 \\ \underline{8x-16} \\ 17 \end{array} \dots\dots\dots \text{剩餘}$$

若以2代被除式中的x,則得

$$2x^2+2x+1=3 \times 2^2+2 \times 2+1=17.$$

由公式(A),得

$$\begin{aligned} & 3x^2+2x+1 \\ = & (x-2)(3x+8)+17. \end{aligned}$$

令 $x=2$,則 $x-2=0$.

因之 $(x-2)(3x+8)=0$.

$$\begin{aligned} \therefore 3 \times 2^2+2 \times 2+1 & =17 \\ & =R. \end{aligned}$$

由上例得定理(一):

含x的多項式,依x的降冪序排列,用x的一次二項式 $x-a$ 除他;那末,所得的剩餘,必等於用a代多項式中的x所得的數值。

[例3] $x-2$ 能除盡 x^2-3x+2

$$\begin{array}{r} 3x+2 \\ x-2 \overline{) x^2-3x+2} \\ \underline{x^2-2x} \\ -x+2 \\ \underline{-x+2} \\ 0 \end{array}$$

+2x+1的剩餘。

$$\begin{array}{r} 3x-3a+2 \\ x-a \overline{) 3x^2+2x+1} \\ \underline{3x^2-3ax} \\ 3a+2x+1 \\ \underline{3a+2x-a(3a+2)} \\ \text{剩餘} \dots\dots\dots 3a^2+2a+1 \end{array}$$

若以a代被除式中的x,則得

$$3x^2+2x+1=3a^2+2a+1.$$

由公式(A),得

$$\begin{aligned} & 3x^2+2x+1 \\ = & (x-a)(3x+3a+2) \\ & +3a^2+2a+1. \end{aligned}$$

令 $x=a$,則 $x-a=0$.

因之 $(x-a)(3x+3a+2)=0$.

$$\begin{aligned} \therefore 3 \times a^2+2 \times a+1 & \\ = & 3a^2+2a+1=R. \end{aligned}$$

[例4] $a+2$ 能除盡 x^3+8 .

$$\begin{array}{r} x^2-2x+4 \\ x+2 \overline{) x^3 +8} \\ \underline{x^3+2x^2} \\ -2x^2 \\ \underline{-2x^2-4x} \\ 4x+8 \\ \underline{4x+8} \\ 0 \end{array}$$

這是用實際除法，知其能除盡。

用 2 代被除式中的 x ，則 $R = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$ 。

這是用公式(A)和定理(一)證明能除盡。

由上例得定理(二)：

含 x 的多項式，依 x 的降冪序排列，若能以 x 的一次二項式 $x-a$ 除盡；那末，用 a 代多項式中的 x ，則多項式必為零，即剩餘為零。

【練習】 為什麼例 3 用 2 代被除式中的 x ，例 4 用 -2 代被除式中的 x ？

這是用實際除法，知其能除盡。

用 -2 代被除式中的 x ，則 $R = (-2)^2 + 8 = 0$ 。

這是用公式(A)和定理(一)證明能除盡。

習 題

下列各式，用後式除前式，實行除法，求其商和剩餘：

1. $7x-8, x-1$. 2. $6a^3+2x+1, x+2$.

3. $3x^3+5x+7, x-2$. 4. $x^3+27, x-3$.

5. 試用剩餘定理，求上列各題的剩餘。

試以剩餘定理(二)，決定下列各式的後式能不能除盡前式：

6. $x^2-7x+12, x-3$. 7. $x^2-7x+12, x-2$.

8. $x^5-3x^2+4, x+1$. 9. $a^5+b^5, a+b$.

10. 5^3+1 為 6 的倍數，何故？

11. 10^3-1 必為 11 和 9 的倍數，試證之。

第九章

分解因式

72. 質因式

一個代數式除常數及其自身以外，沒有其他因式時，叫做質式。例如： $a, a+b, a^2+c$ 都是質式。因式成質式的叫做質因式。

73. 分解因式

把一個式子化為諸質因式連乘的積形狀時，叫做分解因式。

〔例 1〕 分解 a^2-b^2 。

分解 a^2-b^2 ，就是問 a^2-b^2 是些什麼質因式乘起來的。由(公式 3)，知 $a+b$ 乘 $a-b$ 得 a^2-b^2 ，所以 a^2-b^2 可以分解為 $a+b$ 與 $a-b$ 。

$$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

〔例 2〕 分解 $ab+ac$ 。

$$\therefore a \text{ 乘 } b+c \text{ 得 } ab+ac,$$

$$\therefore ab+ac=a(b+c).$$

分解因式是初等代數學的重要部分，因為計算分式和解高次方程式……等都要應用牠，讀者務須練習純熟。

74. 各項有公因式的分解法

如一式的各項，有公共因式，把牠括在括弧外邊，用牠除原式。

各項所得的商式，寫在括弧內邊，就是分解後所得的結果。

〔例 1〕 分解 $am+bm-cm$ 。

各項的公共因式是 m ，

$$\therefore am+bm-cm=m(a+b-c)。$$

〔例 2〕 分解 $2a^2b+4ab^2+6ab$ 。

公共因式是 $2ab$ ，

$$\therefore 2a^2b+4ab^2+6ab=2ab(a+2b+3)。$$

〔例 3〕 分解 $(a+b)^2+2(a+b)$ 。

公共因式是 $a+b$ ，

$$\therefore (a+b)^2+2(a+b)=(a+b)(a+b+2)。$$

〔例 4〕 分解 $(a+b)(x+y-z)-(a-b)(z-y-x)$ 。

式中好像沒有公共因式，但把後邊括弧前邊的符號變了， $x+y-z$ 就是公共因式。

因為 $(z-y-x)$ 和 $(x+y-z)$ 各項的符號完全相反，所以才能這樣的變號。

$$\begin{aligned} \therefore (a+b)(x+y-z)-(a-b)(z-y-x) \\ &= (a+b)(x+y-z)+(a-b)(x+y-z) \\ &= (x+y-z)(a+b+a-b) \\ &= 2a(x+y-z)。 \end{aligned}$$

習 題

分解下列各式的因式：

1. a^3-ax 。

2. x^3-x^2 。

3. $a^3-a^2b^2$ 。

4. $5ax-5a^2x^2$ 。

5. $5x-25x^2y$ 。

6. $16x+64xy^2$ 。

7. $3x^3 - 216x^2$. 8. $-6x^3 - 2x^4 - 4x^5$.
 9. $x^3 - x^2y + xy^2$. 10. $3a^4 - 3a^3b + 6a^2b^2$.
 11. $5x^5 - 10a^2x^5 - 15a^3x^3$. 12. $7a - 7a^3 + 14a^4 + 21a^5$.
 13. $38a^3x^5 - 57a^4x^2$. 14. $2a(a+b) - 2c(a+b)$.
 15. $(x-y)^2 - 3x(y-x)$. 16. $(a-b)c + (b-a)c^2$
 17. $ax^2(b-c) - 3x(c-b)$.
 18. $(x+y)^2(b-c) - (x+y)(c-b)$.
 19. $m(x+y)(b+c-a) - (x+y)(a-b-c)$.
 20. $-(a-b)^2 = +(-a+b)^2$, 對不對?
 21. $-(a-b)^3 = +(-a+b)^3$, 對不對?
 22. 分解 $(a-b)^2 - (b-a)^2$.

75. 分類分解法

〔例 1〕 分解 $ma + mb + na + nb$.

依含 m 和 不含 m 的項分為兩類，則

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (ma + mb) + (na + nb) \\ &= m(a + b) + n(a + b). \end{aligned}$$

分解到這裏， $a + b$ 成爲公共因式，用上節的分解法，得

$$\text{原式} = (m + n)(a + b).$$

〔例 2〕 分解 $x^2 - ax + bx - ab$.

如用 b 分類，就是把含 b 的項括在一括弧內，不含 b 的項括在一括弧內，得下式：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (x^2 - ax) + (bx - ab) \\ &= x(x - a) + b(x - a) \\ &= (x - a)(x + b). \end{aligned}$$

同樣，用 a 分類，得下式：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (x^2 + bx) - (ax + ab) \\ &= x(x + b) - a(x + b) \\ &= (x - a)(x + b).\end{aligned}$$

【練習】 讀者試用 x 分類，看能不能分解？

〔例3〕 分解 $a^3x - a^2 + ax - 1$ 。

用 x 分類，得下式：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (a^3x + ax) - (a^2 + 1) \\ &= ax(a^2 + 1) - (a^2 + 1) \\ &= (a^2 + 1)(ax - 1)\end{aligned}$$

〔例4〕 分解 $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 5x - 5$ 。

如用 x 分類，得下式：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 5x) - 5 \\ &= x(x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x + 5) - 5.\end{aligned}$$

上式再不能分解，故知用 x 分類不對。如把每兩項括在一起，得下式：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (x^5 - x^4) - (2x^3 - 2x^2) + (5x - 5) \\ &= x^4(x - 1) - 2x^2(x - 1) + 5(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^4 - 2x^2 + 5).\end{aligned}$$

由上例可知無論怎樣分類，都可以，但需要各括弧內有共同因式，才能分解，這就是分類的標準。

習 題

分解下列各式的因式：

1. $xa + xb + ma + mb$. 2. $ax^3 + x^2 + ax + 1$.

3. $x^3 - a^2x^2 - b^2x + a^2b^2$.
 4. $8x^2 + 12ax + 10bx + 15ab$.
 5. $x^3 + bx^2 - a^2x^2 - a^2b$. 6. $xy(a^2 + b^2) - ab(x^2 + y^2)$.
 7. $a^2bc + b^2c^2 - ab^3 - ac^3$. 8. $3x^4 + 4x^3 - 21x - 28$.
 9. $6a^4x^3 + a^3x - 6a^3x^3 - a^2x^2$.
 10. $x^3 - (2a - b)x^2 - (2ab - a^2)x + a^2b$.
 11. $(2a^2 + 3y^2)x + (2x^2 + 3a^2)y$.
 12. $x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$.
 13. $2a + (a^2 - 4)x - 2ax^2$.

76. 利用乘算公式分解法

$$I. a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2. \quad (\text{公式1, 公式2})$$

[例1] 求 $x^2 + 4xy + 4y^2$ 的因式.

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = x^2 + 2(2x)y + (2y)^2 = (x + 2y)^2.$$

[例2] 求 $9x^2 - 6xy + y^2$ 的因式。

$$\text{原式} = (3x)^2 - 2(3x)y + y^2 = (2x - 3y)^2.$$

[例3] 分解 $4x^2 - 12xy + 9y^2$

$$\text{原式} = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 = (2x - 3y)^2$$

[例4] 分解 $2xy - x^2 - y^2$.

$$\text{原式} = -(x^2 - 2xy + y^2) = -(x - y)^2.$$

習 題

分解下列各式的因式：

1. $x^2 + 2ax + a^2$. 2. $a^2 - 2ax + x^2$.
 3. $y^2 + 9 + 6y$. 4. $16 + x^2 + 8x$.

5. $4-4y+y^2$. 6. $b^2+b+\frac{1}{4}$.
7. $5x^2-10xy+5y^2$. 8. $-4a^2-9b^2-12ab$.
9. $-18a^2-27a^4-3$. 10. $x^3-2x^2y+xy^2$.
11. $-9x^3-36x^4-4x^5$. 12. $3a^4-6a^3b+3a^2b^2$.
13. $5ax^4-10a^2x^3+5a^3x^2$. 14. $-7a-7a^3+14a^2$.
15. $(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$.
16. $c^2+(a-b)^2-2(a-b)c$.
17. $2(x+y)(x-y)-(x-y)^2-(x+y)^2$.
18. $(x+y)^2-2(x^2-y^2)+(x-y)^2$.
19. $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.

$$\text{II. } a^2-b^2=(a+b)(a-b). \quad (\text{公式 3})$$

[例 1] 分解 x^2-b^2 .

$$x^2-b^2=(x-b)(x+b).$$

[例 2] 分解 $4x^2-9y^2$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (2x)^2-(3y)^2 \\ &= (2x+3y)(2x-3y). \end{aligned}$$

[例 3] 分解 $(x+b)^2-m^2$.

$$\text{原式}=(x+b+m)(x+b-m).$$

[例 4] 分解 $b^2-x^2+4a(a-b)$.

分解因式時，常常遇到沒有共同因式，也不能用乘算公式分解牠，倘使把牠打亂重整理一次，就依然能分解了。如本例先去括弧，得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= b^2-x^2+4a^2-4ab \\ &= b^2-4ab+4a^2-x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (b-2a)^2 - x^2 \\
 &= (b-2a+x)(b-2a-x).
 \end{aligned}$$

習 題

分解下列各式的因式後，能化簡時，化簡之：

1. x^2-4 .
2. a^2-31 .
4. $1-25x^2$.
4. y^2-25x^2 .
5. $36x^2-25b^2$.
6. p^2q^2-36 .
7. $121a^2-81x^2$.
8. $a^2b^4c^6-x^{16}$.
9. $(b+c)^2-9a^2$.
10. $(x+y)^2-(x-y)^2$.
11. $x^2+4x+4-y^2-2y-1$.
12. $2xy-x^2-y^2+a^2+b^2-2ab$.
13. $x^4-x^2-9-2a^2x^2+a^4+6x$.
14. $x^4+4x^2y+16y^4$.
15. $(1+a^2)(1-b^2)-4ab$.

$$\text{III. } a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2). \quad (\text{公式6, 公式7})$$

[例1] 分解 x^3+27y^3 .

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= x^3 + (3y)^3 \\
 &= (x+3y)(x^2-3xy+9y^2).
 \end{aligned}$$

[例2] 分解 $8x^3-125y^3$.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (2x)^3 - (5y)^3 \\
 &= (2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2).
 \end{aligned}$$

習 題

分解下列各式的因式：

1. $x^3 - y^3$. 2. $x^3 + 8y^3$.
 3. $1 - 343x^3$. 4. $a^3b^3 - 512$.
 5. $x^3y^6 + z^3$. 6. $x^6 - 27y^3$.
 7. $8a^6b^3 + 125x^6$. 8. $x^3y^6 - 216z^{12}$.
 9. $(a+b)^3 + c^3$. 10. $(a+b)^3 + (x-y)^3$.
 11. $(a+b)^3 - (b-a)^3$.
 IV. $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.

我們知道一個式子加上一式，同時又減掉牠，這個式子的數值不變，利用這種辦法，我們就可以把許多驟然看去不能分解因式的代數式，變做 $a^2 - b^2$ 的形式，來分解牠們。

【例 1】 分解 $x^4 + x^2y^2 + y^4$ 的因式。

$$\begin{aligned} x^4 + x^2y^2 + y^4 &= x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 - x^2y^2 \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) \\ &= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2). \end{aligned}$$

【例 2】 分解 $a^4 - 27a^2b^2 + b^4$ 的因式。

本例不必加減，只要把中項分做 $-2a^2b^2$ 和 $-25a^2b^2$ ，就對了。

$$\begin{aligned} a^4 - 27a^2b^2 + b^4 &= a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 25a^2b^2 \\ &= (a^2 - b^2)^2 - (5ab)^2 \\ &= (a^2 + 5ab - b^2)(a^2 - 5ab - b^2). \end{aligned}$$

【例 3】 分解 $a^4 + 4$ 的因式。

本例若變做 $(a^2)^2 + 2^2$ ，仍然是不能分解；因為由剩餘定理，我們知道 $a^2 + b^2$ ，無論用什麼式子都除不盡牠。所以須用加減 aa^2 的辦

法：把本例變做 $a^2 - b^2$ 一樣的形式，才能分解。

$$\begin{aligned} a^4 + 4 &= a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 \\ &= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 \\ &= (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2). \end{aligned}$$

習 題

求下列各式的因式：

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. $x^4 + x^2 + 1$. | 2. $x^3 + x^4 y^4 + y^8$. |
| 3. $x^4 - 11x^2 + 1$. | 4. $x^4 + 6x^2 y^2 + 25y^4$. |
| 5. $x^8 + x^4 + 1$. | 6. $x^4 - 23x^2 y^2 + y^4$. |
| 7. $x^5 - 7x^4 y^2 + y^4$. | 8. $x^4 - 27x^2 + 1$. |
| 9. $x^6 + 16$. | 10. $x^4 - 3x^2 + 1$. |

77. 二次三項式分解法一

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b). \quad (\text{公式 } 8)$$

- I. 首項 = 兩因式首項的乘積；
- II. 末項 = 兩因式末項的乘積；
- III. 中項的係數 = 兩因式末項的代數和。

故欲分解二次三項式 $x^2 + px + q$ 為因式時，祇須把末項 q 分為 a, b 兩因式，使牠們的代數和等於中項的係數 p ，則此式即可分解為 $(x+a), (x+b)$ 兩因式。

上述的分解法，只能適用於二次項的係數是1時，要留意！

〔例 1〕 分解 $x^2 + 12x + 35$

$$\begin{array}{ccc}
 & x^2 + 12x + 35 & \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & x \times x & 7 \times 5 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & (x+7) & (x+5) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 \therefore & 7 & + & 5 = 12
 \end{array}$$

$$\therefore x^2 + 12x + 35 = (x+7)(x+5).$$

〔例 2〕 分解 $x^2 - 10x + 24$

$$\begin{array}{ccc}
 & x^2 - 10x + 24 & \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & x \times x & 4 \times 6 \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & (x+4) & (x+6) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 \therefore & 4 & + & 6 = +10
 \end{array}$$

$$\therefore x^2 - 10x + 24 = (x+4)(x+6).$$

$$\begin{array}{ccc}
 & x^2 - 10x + 24 & \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & x \times x & (-4) \times (-6) \\
 & \swarrow & \searrow \\
 & (x-4) & (x-6) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 \therefore & -4 & -6 = -10
 \end{array}$$

$$\therefore x^2 - 10x + 24 = (x-4)(x-6).$$

由例一，知：

中末兩項都是正時，末項要分為兩個正的。

由例二，知：

中項是負，末項是正時，末項要分為兩個負的。

〔例 3〕 分解 $x^2 + 5x - 24$ 。

$$\begin{array}{c}
 x^2+5x-24 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 x \times x \quad -8 \times 3 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 (x-8) \quad (x+3) \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 -8 \quad +3 = -5 \\
 \approx 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 x^2+5x-24 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 x \times x \quad -3 \times 8 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 (x-3) \quad (x+8) \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 -3 \quad +8 = 5
 \end{array}$$

$$\therefore x^2+5x-24=(x-3)(x+8).$$

由例三，知：

中項是正，末項是負時，末項要分爲一正一負，還要取絕對值大的爲正。

[例4] 分解 $x^2-2x-24$ 。

$$\begin{array}{c}
 x^2-2x-24 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 x \times x \quad -4 \times 6 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 (x-4) \quad (x+6) \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 -4 \quad +6 = 2 \\
 = -2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 x^2-2x-24 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 x \times x \quad -6 \times 4 \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 (x-6) \quad (x+4) \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 -6 \quad +4 = -2
 \end{array}$$

$$\therefore x^2-2x-24=(x-6)(x+4).$$

由例四，知：

中末兩項都是負時，末項要分爲一正一負，還要取絕對值大的爲負。

習 題

分解下列各式的因式：

1. x^2-x-2 .

2. x^2-x-6 .

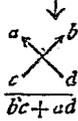
3. x^2+2x-3 .

4. $x^2+3x-40$.

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| 5. $x^2 - 4x - 12.$ | 6. $x^2 + 9x - 36.$ |
| 7. $x^2 - 22x + 121.$ | 8. $110 - x - x^2.$ |
| 9. $240 - x - x^2.$ | 10. $x^4 - a^2x^2 - 462a^4.$ |
| 11. $x^4 - a^2x^2 - 2a^4.$ | 12. $x^4 + 162x + 6561.$ |
| 13. $m^2 - 22mn + 105n^2.$ | 14. $144 - 24ax + a^2x^2.$ |
| 15. $240 + 14ay - a^2y^2.$ | 16. $x^2 + 2ax + a^2 - b^2.$ |
| 17. $x^2 - 2cx + c^2 - d^2.$ | 18. $x^2 + 2(a+b)x + (a+b)^2.$ |
| 19. $380 - x - x^2.$ | 20. $1 + 2x + x^2 - c^2.$ |

78. 二次三項式分解法二

$$acx^2 + (bc + ad)x + bd = (ax + b)(cx + d). \quad (\text{公式 } 9)$$



由上式，知：

1. x^2 的係數 = 兩因式 x 係數的乘積；
2. 末項 = 兩因式末項的乘積；
3. x 的係數 = 兩因式 x 的係數與兩末項交互相乘的代數和。

分解法：

- I. 把 x^2 的係數分成兩因式，寫在一行。
- II. 把末項分成兩因式，寫在另一行（在前行的右邊）。
- III. 用直線對角連之，在一直線上兩式相乘，牠們的代數和假如等於 x 的係數，即合所求。
- IV. 由左向右，取上一列的兩個數，作爲一個因式 x 的係數和

絕對項；取下一列的兩個數，作為其他一個因式 x 的係數和絕對項。

這法子，又叫做十字分解法。

〔例 1〕 分解 $3x^2 + 17x + 24$ 。

把 3 分解開，得 $3 = 3 \times 1$ ；把 24 分解開，得 $24 = 3 \times 8 = 4 \times 6 = 2 \times 12 = 1 \times 24$ 。

取 3 分解的因式寫為一行；取 24 的一組因式另寫一行，用 IV 求合所求的因式，程序如下。

$$\begin{array}{ccc}
 (1) & (2) & (3) \\
 \begin{array}{r} 3 \quad 4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 6 \\ \hline 18 + 4 = 22 \end{array} & \begin{array}{r} 3 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 12 \\ \hline 36 + 2 = 38 \end{array} & \begin{array}{r} 3 \quad 8 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \\ \hline 9 + 8 = 17 \end{array}
 \end{array}$$

由上邊的試驗，知(3)合所求。

$$\therefore 3x^2 + 17x + 24 = (3x + 8)(x + 3).$$

〔例 2〕 分解 $7x^2 - 19x - 6$ 。

$$\begin{array}{l}
 7 = 7 \times 1; \\
 -6 = 2 \times (-3). \\
 \begin{array}{r} 7 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad -3 \\ \hline -21 + 2 = -19 \end{array} \\
 \therefore 7x^2 - 19x - 6 = (7x + 2)(x - 3).
 \end{array}$$

習 題

分解下列各式的因式：

1. $12x^2 - x - 20$.
2. $35x^2 + x - 12$.
3. $6x^2 - 11x - 2$.
4. $15x^2 + x - 2$.
5. $16 - 24x - 27x^2$.
6. $8x^2 - 38x + 35$.

7. $3x^2+41x+26$. 8. $18x^2-33x+5$.
 9. $20-9x-20x^2$. 10. $4x^2+6x-4$.
 11. $15x^2-77x+10$. 12. $12x^2-26xy-10y^2$.
 13. $2x^2-5xy+3y^2$. 14. $24x^2-29xy-4y^2$.
 15. $16a^2+42ab+27b^2$. 16. $6(x+y)^2-11(x+y)-2$.
 17. $16m^2-218mn+27n^2$. 18. $(a+b)x^2+(a-2b)x-3b$.
 19. $mnx^2+(mb+nc)x+bc$. 20. $bcx^2+(bp-cq)x-pq$.
 21. $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{3}$. 22. $\frac{2}{5}x^2+2x+2\frac{1}{2}$.
 23. $0.15x^2-0.11x+0.02$.

79. 分解因式的定理

把剩餘定理(二)倒轉過來，我們就可得分解因式的定理：

含 x 的多項式，若以 a 代 x ，牠的值為零時，則 $x-a$ 必為牠的因式
 (以 $-a$ 代 x ，牠的值為零時，則 $x+a$ 必為牠的因式)。

〔例1〕 分解 x^3-3x+2 。

絕對項 $+2$ 的因數是 $-1, -2, +1$ 和 $+2$ 。

我們先用 -1 和 -2 代原式中的 x ，原式的值都不為零；故知 -1 和 -2 沒有用處，再以 $+1$ 代 x ，則

$$x^3-3x+2=1^3-3\times 1+2=0.$$

故知原式含有因式 $x-1$ 。

依剩餘定理(二)，知道 $x-1$ 能除盡原式，除之，得商式為 x^2+x-2 ，較原式低一次。

$$\begin{aligned} \therefore x^3-3x+2 &= (x-1)(x^2+x-2) \\ &= (x-1)(x-1)(x+2) \\ &= (x-1)^2(x+2). \end{aligned}$$

由是得分解含 x 三次以上的多項式的因式法則如下：

- I. 求絕對項的因數。
- II. 用各因數代多項式中的 x , 看牠的值能不能等於零(代進去不能使多項式為零的因數, 就棄掉不用)。
- III. 某因數 a 代進去能使多項式為零, 那末多項式就含有 $x-a$ 這個因式。
- IV. 用求得的一次二項式 $x-a$, 除多項式, 得一個較原式低一次的商式。
- V. 照這樣分解商式的因式, 分解到不能再分解(即成了質因式)時為止。

〔例 2〕 分解 x^3-7x-6 的因式。

由分解因式的定理, 知道 $x-1$ 為原式的一個因式, $x-1$ 除原式, 得 x^2+x-6 .

$$\therefore x^3-7x-6=(x-1)(x^2+x-6).$$

依 § 77 的分解法分解 x^2+x-6 , 得 $(x-2)(x+3)$.

$$\therefore x^3-7x-6=(x-1)(x-2)(x+3).$$

〔例 3〕 分解 $x^3+x^2+17x+15$ 的因式。

因為原式中的各係數的和為 $1+1-17+15=0$, 故知用 1 代 x , 則原式 $=0$. 依分解因式的定理, 知 $x-1$ 為一個因式, 由此, 得

$$\begin{aligned} x^3+x^2-17x+15 &= (x-1)(x^2+2x-15) \\ &= (x-1)(x-3)(x+5). \end{aligned}$$

這個例用分類分解法亦能分解, 讀者自行練習。

習 題

分解下列各式的因式：

1. x^3+x+30 . 2. x^3-4x^2+8 .
 3. x^3+x^2+x+1 . 4. $x^3+6x^2+11x+6$.
 5. x^3+x^2-4x-4 . 6. $x^3+7x^2-14x+8$.
 7. $2x^3-3x^2-2x+3$. 8. $x^4+5x^3+5x^2-5x-6$.

80. $a^n \pm b^n$ 的分解法

$$\begin{aligned} \because (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) &= a^3 \pm b^3, \\ (a \pm b)(a^3 \mp a^2b + ab^2 \mp b^3) &= a^4 - b^4, \\ (a \pm b)(a^4 \mp a^3b + a^2b^2 \mp ab^3 + b^4) &= a^5 \pm b^5. \end{aligned}$$

由上得 n 為奇數時，

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

n 為偶數時，

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\text{或} = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} - b^{n-1});$$

$a^n + b^n$ 不含有因式 $a + b$ 或因式 $a - b$.

[例 1] 分解 $a^6 - 1$.

$$x^6 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$\text{或} = (x + 1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

$$= (x + 1)(x - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$= (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

[例 2] 分解 $x^5 + y^5$.

$$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4).$$

[例 3] 分解 $a^5 - b^5$.

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

習 題

分解下列各式的因式：

1. $x^4 - 1$. 2. $x^4 + 1$. 3. $x^5 + 1$.
 4. $x^6 + y^6$. 5. $x^7 - y^7$. 6. $a^3 + b^3$.
 7. $m^2 - n^2$. 8. $(ab)^{10} - c^{10}$.

綜括前面諸法，一式之因式分解不外下列幾個步驟：

(1) 如各項有公因式，先括出之；再依別法分解餘一式。

(2) 將其式各項分為幾群，使各群有一公因式，而括出之；如此式有一因式已知（見下因式定理），則可依此因式分其式各項為若干群，而括出公因式。

(3) 如其式為完全平方，則直接利用公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ 而分解因式；如為不完全平方，則於式中同加減一式，或將某項分裂配成完全平方，而全式變為 $a^2 - b^2$ 之形，即可分解因式。

(4) 如其式為二次三項式；則由 $x^2 + px + q$ ，求出 a, b 兩式，務使 $ab = q$ ，且 $a + b = p$ ，即可分解為 $(x+a)(x+b)$ 矣；又或由 $ax^2 + bx + c$ ，求出 l, l', m, m' 四式，務使 $ll' = a, mm' = c$ ，且 $lm' + l'm = b$ ，即可分解為 $(lx+m)(l'x+m')$ 。此外，二次式亦可於式中同加減一式，使成 $a^2 - b^2$ 之形而分解因式；此為一般分解法，前二法為觀察法。

(5) 如其式為一元高次式，則用因式定理，先將絕對項分解因式，一一代入原式 x 中，試驗何者能使原式為零（假設為 a ），則 $x - a$ 為原式之一因式；再實行除法，或用分群法，以得他一因式；

如有因式，再分解之。

(6) 如其式為高次二項式，則用 $a^n \pm b^n$ 公式，先括出 $a \pm b$ 因式(注意 n 為奇數或為偶數)，再依別法分解餘一式。

(7) 有時一式帶有括弧而不能分解；如各括弧內文字僅符號相反，則將某括弧前符號改變；使成相同因式；否則，將括弧去掉，依分群法，括出公因式，或用別法分解因式。

複 習 題

分解下列各式的因式：

1. $x^3 - x^2 - 5x + 6$.

2. $x^3 - 7x + 6$.

3. $(a+b)^3 + c^3$.

4. $(x+y)^3 - (x-y)^3$.

5. $(a-b)x - (x^2 - ab)$.

6. $4a(3x+8a) - 27x^2$.

7. $2y + 2x(1-x)$.

8. $x^2(y-z) + y^2(z-x)$.

9. $xy(a-b+c) - yz(b-c-a) + zx[(b-c)^2 - a^2]$.

10. $a(a^2-1) - b(b^2-1) + ab(a-b)$.

11. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

【示意】 於式中加減 $3a^2b + 3ab^2$.

第十章

最高公因式和最低公倍式

81 最高公因式

同時能除盡幾個代數式的式子，叫做這幾個代數式的公因式。

$$(1) 12x^3 = 3 \times 4 \times x^3;$$

$$16x^4 = 4 \times 4 \times x^3 \times x.$$

上邊兩式的公因式是：

$$2x,$$

$$4x,$$

$$2x^2,$$

$$2x^3,$$

$$4x^3.$$

$$(2) x^4 - 16 = x^4 - 4^2$$

$$= (x^2 + 4)(x^2 - 4)$$

$$= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2);$$

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2).$$

上邊兩式的公因式是：

$$x + 2,$$

$$x - 2,$$

$$x^2 - 4.$$

上邊的公因式中次數有高的，有低的；係數有大的，有小的，次數最高並且係數最大的，叫做最高公因式，簡寫為H.C.F.

(1)的H.C.F.是 $4x^3$ ，(2)的H.C.F.是 $x^2 - 4$.

82. 求法一

I. 把所與各式分解為質因式連乘積。

II. 選取因式：

(i) 同因式只選取一個方次最低的；

(ii) 不同的，都不選。

III. 選取後，連乘之，即是H.C.F.

〔例1〕 求 $35a^3b^2c$ 和 $21a^2b^3d$ 的H.C.F.

$$35a^3b^2c = 5 \times 7 \times a^3 \times b^2 \times c;$$

$$21a^2b^3d = 3 \times 7 \times a^2 \times b^3 \times d.$$

選取因式：7是公共的，故選取； a^2 和 b^2 是公共因式中，方次最低的，故選取； c 和 d 不是公共的因式，故不選取。

$$\therefore \text{H.C.F.} = 7 \times a^2 \times b^2 = 7a^2b^2.$$

〔例2〕 求 $2x^4 - 12x^3 + 18x^2$ 與 $4x^5 - 36x^3$ 的H.C.F.

$$2x^4 - 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 - 6x + 9)$$

$$= 2x^2(x-3)^2;$$

$$4x^5 - 36x^3 = 4x^3(x^2 - 9)$$

$$= 2^2x^3(x+3)(x-3).$$

選取因式：2和 x^2 是方次最低的公因式，故選取； $x-3$ 是方次最低的公因式；故選取。

$$\therefore \text{H.C.F.} = 2x^2(x-3).$$

〔例3〕 求下邊三個式子的H.C.F.：

1. $ax^2 + 2a^2x + a^3,$

2. $2a^2x^2 - 4a^3x - 6a^4,$

3. $3a^3x^2 + 6a^4x + 3a^5.$

$$ax^2 + 2a^2x + a^3 = a(x^2 + 2ax + a^2)$$

$$= a(x+a)^2;$$

$$2a^2x^2 - 4a^3x - 6a^4 = 2a^2(x^2 - 2ax - 3a^2)$$

$$= 2a^2(x+a)(x-3a);$$

$$\begin{aligned} 3a^3x^2 + 6a^4x + 3a^5 &= 3a^3(x^2 + 2ax + a^2) \\ &= 3a^3(x+a)^2. \end{aligned}$$

選取因式： a 和 $x+a$ 是方次最低的公因式，故都選取。

$$\therefore \text{H.C.F.} = a(x+a).$$

習 題

求下列各式的H.C.F.：

1. a^2bc, ab^2c, abc^2 .
2. $12m^5n^4, 16m^2n^5p^2$.
3. a^2+ab, a^2-b^2 .
4. $2x^2-2xy, x^3-x^2y$.
5. $a^3b-ab^3, a^5b^2-a^2b^5$.
6. a^2-4x^2, a^2+2ax .
7. a^2bx+ab^2x, a^2b-b^3 .
8. $4x^2+2xy, 12x^2y-3y^3$.
9. $x^2+x, (x+1)^2, x^3+1$.
10. $a^2-x^2, a^2-ax, a^2x-ax^2$.
11. $x^2-2xy+y^2, (x-y)^3$.
12. x^3+a^2x, x^4-a^4 .
13. x^2+3x+2, x^2-4 .
14. $x^2-x-20, x^2-9x+20$.
15. $x^2-18x+45, x^2-9$.
16. $2x^2-7x+3, 3x^2-7x-6$.
17. $12x^2+x-1, 15x^2+8x+1$.
18. $2x^2-x-1, 3x^2-x-2$.
19. $2x^2+9x+4, 2x^2+11x+5, 2x^2-3x+2$.
20. $3x^4+8x^3+4x^2, 3x^5+11x^4+6x^3, 3x^4+5x^3+2x^2$.

83. 求法二

x^2-a^2 和 $2(x-a)$ 的H.C.F.是 $x-a$.

假設用 y (不是兩式的因式)乘 x^2-a^2 ,得 x^2y-a^2y .

x^2y-a^2y 和 $2(x-a)$ 的H.C.F.仍是 $x-a$.

所以求H.C.F.時，只要不是各式的因式，先乘任一式，與H.C.F.沒有關係。

$$(1) \quad 2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) \\ = 2(x+1)^2;$$

$$(2) \quad x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3), \\ \therefore \text{H.C.F.} = x+1.$$

假設先用2除(1)，得 $x^2 + 2x + 1$ ，再求H.C.F.，知仍為 $x+1$ 。所以在未求H.C.F.以前，只要不是公共因式，約去後與H.C.F.沒有關係。

同理，用任一式中不含的因式，乘其餘的式子，與H.C.F.沒有關係。

如兩式不易分解時，用輾轉互除法求之，最後能除盡的除式，即為兩式的H.C.F.

輾轉互除法：

1. 用低次式作除式，高次式作被除式。
2. 用第一餘式除除式。
3. 用第二餘式除第一餘式。
4. 如此繼續互除，除到餘式為零時，則此最後除式即兩式的H.C.F.
5. 在互除的運算中，被除式或除式，可以任用數字乘或除以便利運算。
6. 在互除的運算中，如遇到餘式，為不含文字的式子時，即是兩式無H.C.F.

例如：求 $12x^3 - x^2 - 30x - 16$ 與 $6x^3 - 2x^2 - 13x - 6$ 的H.C.F.

F.

$$\begin{array}{r|l}
 2x \overline{) 6x^3 - 2x^2 - 13x - 6} & 12x^3 - x^2 - 30x - 16 \overline{) 2} \\
 \underline{6x^3 - 8x^2 - 8x} & \underline{12x^3 - 4x^2 - 26x - 12} \\
 2 \overline{) 6x^2 - 5x - 6} & \underline{3x^2 - 4x - 4} \overline{) x} \\
 \underline{6x^2 - 8x - 8} & \underline{3x^2 + 2x} \\
 \underline{3x + 2} & \underline{-6x - 4} \overline{) -2} \\
 & \underline{-6x - 4} \\
 & 0
 \end{array}$$

∴ H.C.F. = $3x + 2$.

求三個以上代數式的H.C.F.時，先取第一，第二兩式來求，次以求得的H.C.F.和第三式再求，如此類推，最後所得的H.C.F.，即原來各代數式的H.C.F.

習 題

求下列各式的H.C.F.：

1. $x^3 + 2x^2 - 13x + 10, x^3 + x^2 - 10x + 8.$
2. $x^3 - 5x^2 - 99x + 10, x^3 - 6x^2 - 86x + 35.$
3. $x^3 + 2x^2 - 8x - 16, x^3 + 3x^2 - 8x - 24.$
4. $x^3 + 4x^2 - 5x - 20, x^3 + 6x^2 - 5x - 30.$
5. $x^3 - x^2 - 5x - 3, x^3 - 4x^2 - 11x - 6.$
6. $x^3 + 3x^2 - 8x - 24, x^3 + 3x^2 - 3x - 9.$
7. $a^3 - 5a^2x + 7ax^2 - 3ax^3, a^3 - 3ax^2 + 2x^3.$
8. $x^4 - 2x^3 - 4x - 7, x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2.$
9. $2x^3 - 5x^2 + 11x + 7, 4x^3 - 11x^2 + 25x + 7.$
10. $2x^3 + 4x^2 - 7x - 14, 6x^3 - 10x^2 - 21x + 35.$
11. $3x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x - 1, 9x^4 - 3x^3 - x - 1.$
12. $2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 6, 4x^4 - 2x^3 + 3x - 9.$

13. $3x^3 - 3ax^2 + 2a^2x - 2a^3, 3x^3 + 12ax^2 + 2a^2x + 8a^3$.
14. $2a^3 - 9a^2x + 9ax^2 - 7x^3, 4x^3 - 20a^2x + 20ax^2 - 16x^3$.
15. $10x^3 + 25ax^2 - 5a^3, 4x^3 + 9ax^2 - 2a^2x - a^3$.
16. $x^5 - x^3 - x + 1, x^7 + x^6 + x^4 - 1$.
17. $1 + x + x^3 - x^5, 1 - x^4 - x^6 + x^7$.
18. $6 - 8a - 32a^2 - 18a^3, 20 - 35a - 95a^2 - 40a^3$.
19. $3x^5 - 5x^3 + 2, 2x^5 - 5x^2 + 3$.
20. $4x^5 - 6x^3 - 28x, 6x^4 + 10x^3 - 17x^2 - 35x - 14$.

84. 最低公倍式

同時能被幾個代數式除盡的式子：就叫做這幾個代數式的公倍式。

1. x 和 $3x^2$ 的公倍式：是：

$$\begin{array}{ll} 3x^2, & 6x^3, \\ 12x^6, & 15x^6, \\ \dots, & \dots. \end{array}$$

但次數最低，係數最小的是 $3x^2$ ，把這個式子叫做 x 和 $3x^2$ 的最低公倍式：簡寫為L.C.M.

$$\begin{aligned} 2. \quad 4x^2y - y &= y(4x^2 - 1) \\ &= y(2x + 1)(2x - 1); \\ 2x^2 - x &= x(2x - 1). \end{aligned}$$

上邊兩式的公倍式：是：

$$\begin{aligned} xy(2x + 1)(2x - 1), \\ 2x^2y^2(2x + 1)(2x - 1), \end{aligned}$$

$$3x^2y^2(2x+1)^2(2x-1),$$

.....

但L.C.M. = $xy(2x+1)(2x-1)$.

85. 求法一

- I. 把所與各式分解爲質因式連乘積。
- II. 選取因式：
 - (i) 選取一切不相同的因式；
 - (ii) 如有相同的因式，只取其方次最高者。
- III. 選取後連乘之，即是L.C.M.

〔例1〕 求 $24x^2y$ 和 $72bx^3y$ 的L.C.M.

$$24x^2y = 3 \times 2^3x^2y;$$

$$72bx^3y = 3^2 \times 2^3bx^3y.$$

選取因式： 2^3 , b 和 y 都選取； 3^2 和 x^3 爲同因式中次數最高的，故選取。

$$\begin{aligned} \therefore \text{L.C.M.} &= 2^3 \times 3^2 \times b \times x^3 \times y \\ &= 72bx^3y. \end{aligned}$$

〔例2〕 求 $3a^2+9ab$ 和 $a^3+6a^2b+9ab^2$ 的L.C.M.

$$3a^2+9ab = 3a(a+3b);$$

$$\begin{aligned} a^3+6a^2b+9ab^2 &= a(a^2+6ab+9b^2) \\ &= a(a+3b)^2. \end{aligned}$$

選取因式： 3 , a 和 $(a+3b)^2$ 被選取。

$$\therefore \text{L.C.M.} = 3a(a+3b)^2.$$

86. 求法二

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2);$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

$$\therefore \text{H.C.F.} = x-1.$$

$$\text{L.C.M.} = (x-1)(x+1)(x+2).$$

假如原式相乘，用牠們的H.C.F.除之，結果得

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 1)}{x-1} &= (x^2 - 3x + 2)(x+1) \\ &= (x-1)(x+2)(x+1). \end{aligned}$$

和牠們的L.C.M.相等，由此得求法二：

兩式相乘，用牠們的H.C.F.除之，即得牠們的L.C.M.

例如：知 $x-4$ 是 x^2-5x+4 與 x^2-6x+8 的H.C.F.，求牠們的L.C.M.

$$\begin{aligned} \text{L.C.M.} &= \frac{(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 6x + 8)}{x-4} \\ &= \frac{(x-4)(x-1)(x-2)(x-4)}{x-4} \\ &= (x-1)(x-2)(x-4). \end{aligned}$$

上題用求法一，仍得 $\text{L.C.M.} = (x-1)(x-2)(x-4)$.

求三個以上代數式的L.C.M.時，先求第一，第二兩式的L.C.M.；次以求得的L.C.M.和第三式再求，如此類推，最後所得的L.C.M.即原來各代數式的L.C.M.

習 題

求下列各式的L.C.M.：

1. $x, x^2 + x$

2. $x^2, x^2 - 3x$

3. $3x^2, 4x^2 + 8x$. 4. $21x^3, 7x^2(x+1)$.
5. $x^2 - 1, x^2 + x$. 6. $a^2 + ab, ab + b^2$.
7. $4x^2y, 2x^2 + x$. 8. $6x^2 - 2x, 9x^2 - 3x$.
9. $x^2 + 4x + 4, x^2 + 5x + 6$. 10. $x^2 - 5x + 4, x^2 - 6x + 8$.
11. $x^2 - x - 6, x^2 + x - 2, x^2 - 4x + 3$.
12. $x^2 + x - 42, x^2 - 11x + 30, x^2 + 2x - 35$.
13. $8x^2 - 38xy + 35y^2, 4x^2 - xy - 5y^2, 2x^2 - 5xy - 7y^2$.
14. $(3x - 5x^2)^2, 6 - 7x - 5x^2, 4x + 4x^2 + x^3$.
15. $m^4 + m^2n^2 + n^4, m^3n + n^4, (m^2 - mn)^3$.
16. 假如知 $4x - 5$ 是 $4x^5 + 7x^2 - 3x - 15$ 與 $8x^4 - 6x^3 - x^2 + 15x - 25$ 的 H.C.F. ; 求 L.C.M.
17. 假如知 $x^2 + 2x - 3$ 是 $2x^4 + x^3 - 20x^2 - 7x + 24$ 與 $2x^4 + 3x^3 - 13x - 7x + 15$ 的 H.C.F. ; 求 L.C.M.
18. 假如知 $2x + 1$ 是 $6x^3 + x^2 - 5x - 2$ 與 $6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$ 的 H.C.F. ; 求 L.C.M.
19. 先求 $6x^2 - 13x + 6, 2x^2 + 5x - 12$ 與 $6x^2 - x - 12$ 的 H.C.F. ; 再求 L.C.M.
20. 先求 $4x^3 - 10x^2 + 4x + 2$ 與 $3x^4 - 2x^3 - 3x + 2$ 的 H.C.F. 再求 L.C.M.

第十一章

分 式

87. 分式

算術上的分數，是表兩數相除的商數，例如 $\frac{2}{3}$ ，就是3除2的意思。代數學上的分式，也是表兩代數式相除的商式，被除式叫做分子，除式叫做分母。例如 $\frac{x^2-3}{x+5}$ ，也是 $x+5$ 除 x^2-3 的意思， x^2-3 是分子， $x+5$ 是分母，所以算術上的分數的一切法則和原理，都能應用到代數學上來。

88. 約分

I. 定理

在算術上，知 $\frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$ 。

同理， $\frac{mc}{md} = \frac{mc \div m}{md \div m} = \frac{c}{d}$ ，

$$\frac{x-3x+2}{x-5x-6} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x-1}{x-3}$$

故知分式的分子和分母用同式(不等於零)除之，分式的數值不變。

II. 約分

把分子和分母的公共因式約去，叫做約分。

由上邊定理，知任何分式，只要分子和分母有公共因式，都可以約分，與牠的數值沒有關係。

用分子和分母的H.C.F.去除，才能把公共因式約完，故得約分法如下：

I. 求分子和分母的H.C.F.

II. 用求得的H.C.F.除分子和分母。

〔例1〕 化簡 $\frac{12ax}{16ay}$.

分子和分母的H.C.F.是 $4a$ ，用 $4a$ 除分子和分母，即得結果。

$$\therefore \frac{12ax}{16ay} = \frac{3x}{4y}$$

〔例2〕 化簡 $\frac{x^2+10x+21}{x^2-2x-15}$.

$$x^2+10x+21=(x+3)(x+7);$$

$$x^2-2x-15=(x+3)(x-5).$$

$$\therefore \text{H.C.F.} = x+3.$$

$$\therefore \frac{x^2+10x+21}{x^2-2x-15} = \frac{(x+3)(x+7)}{(x+3)(x-5)} = \frac{x+7}{x-5}$$

約分後的分式，叫做簡分式。

〔練習〕 指出下邊運算的錯誤：

$$1. \frac{x^2-3}{x^2-5} = \frac{x^2-3}{2-5} = \frac{3}{5}.$$

$$2. \frac{x^2-a^2-1}{x^2-a^2-2} = \frac{(x-a)(x+a)-1}{(x-a)(x+a)-2} = \frac{1}{2}$$

$$3. \frac{x^2-2x-3}{x^2+5x-6} = \frac{x^2-2x-3}{x^2+5x-6} = \frac{1-2-1}{5-2} = -\frac{2}{3}$$

4. 約分是約去分子和分母的公因式，還是約去分子和分母的同類項？

習 題

化簡下列各分式：

$$1. \frac{3x^2y}{6xy^2}$$

$$2. \frac{4abc}{8bc^2}$$

$$3. \frac{xy^2z}{x^2yz}$$

$$4. \frac{92m^2n^2p^2}{115m^4np}$$

$$5. \frac{5ab(x^2-y^2)}{15(abx+aby)}$$

$$6. \frac{x^2+x-6}{x^2-2x-15}$$

$$7. \frac{-x^2+6x-5}{x^2-9x+8}$$

$$8. \frac{2x^2-7x+3}{3x^2-7x-6}$$

$$9. \frac{x^2-5x}{x-4x-5}$$

$$10. \frac{3x^5+11x^4+6x^3}{3x^4-16x^3-12x^2}$$

$$11. \frac{a^2x-a^2bx-6ab^2x}{a^2bx^2-4ab^2x^2+3b^3x^2} \quad 12. \frac{5x^3+2x^2-15x-6}{7x^3-4x^2-21x+12}$$

$$13. \frac{4x^4-21x^2+25}{4x^4-9x^2+30x-25}$$

$$14. \frac{3x^3+27ax^2+78a^2x-72a^3}{2x^3+10ax^2-4a^2x-48a^3}$$

$$15. \frac{ax^5-5a^2x^2-99a^3x+40a^4}{x^4-6ax^3-86a^2x^2+35a^3x}$$

89. 通分

I. 定理

在算術上，知 $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$ 。

同理， $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ ； $\frac{a}{b} = \frac{a(m+n)}{b(m+n)}$ 。

故知分式的分子和分母，用同式（不等於零）乘之，分式的數值不變。

II. 通分

把許多分式的分母變成一樣的，還要各分式的數值不變，就叫做通分。

例如：要把 $\frac{3}{4x}$ 和 $\frac{5}{3x^2}$ 通分，就要把分母變成一樣的。

由上定理，知 $\frac{3}{4x} = \frac{3 \times 3x}{4x \times 3x} = \frac{9x}{12x^2}$ 。

$$\frac{5}{3x^2} = \frac{5 \times 4}{3x^2 \times 4} = \frac{20}{12x^2}。$$

$12x^2$ 恰是 $4x$ 和 $3x^2$ 的 L.C.M.，第一分式分子上應乘的數是牠自己的分母除 $12x^2$ 所得的商 $3x$ ，同樣第二分式分子上應乘的數是 4 ，故得通分法如下：

I. 求諸分母的 L.C.M. 作為公分母。

II. 用每一分母除公分母，除得的商乘牠的分子。作為新分子。

〔例 1〕把 $\frac{a}{a-b}$ 和 $\frac{b}{a+b}$ 通分。

$a-b$ 和 $a+b$ 的 L.C.M. 是 $a^2 - b^2$ ，故用 $a^2 - b^2$ 作公分母。

$a-b$ 除 $a^2 - b^2$ ，得 $a+b$ 。

$$\therefore \frac{a}{a-b} = \frac{a(a+b)}{a^2-b^2} = \frac{a^2+ab}{a^2-b^2}.$$

$a+b$ 除 a^2-b^2 , 得 $a-b$.

$$\therefore \frac{b}{a+b} = \frac{b(a-b)}{a^2-b^2} = \frac{ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

〔例 2〕 把 $\frac{x+3}{x^2-3x+2}$, $\frac{x+2}{x^2-4x+3}$ 和 $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ 通分。

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2);$$

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3);$$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

$$\text{L. C. M.} = (x-1)(x-2)(x-3).$$

$$\therefore \text{公分母} = (x-1)(x-2)(x-3).$$

用第一分式的分母除公分母, 得 $x-3$.

$$\therefore \frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x^2-9}{(x-1)(x-2)(x-3)};$$

用第二分式的分母除公分母, 得 $x-2$,

$$\therefore \frac{x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x^2-4}{(x-1)(x-2)(x-3)};$$

用第三分式的分母除公分母, 得 $x-1$,

$$\therefore \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

習 題

把下列各组分式通分:

1. $\frac{2x}{x+y}$ 和 $\frac{3x}{x^2-y^2}$.

2. $\frac{5}{3a-3}$ 和 $\frac{7}{4a+4}$.

3. $\frac{a}{y^2}$, $\frac{b}{z^2}$ 和 $\frac{c}{xy}$. 4. $\frac{6}{3a+5b}$ 和 $\frac{9}{2a-3b}$.
5. $\frac{1}{(a-b)(a-c)}$, $\frac{1}{(a-b)(b-c)}$ 和 $\frac{1}{(a-c)(b-c)}$.
6. $\frac{a-3b}{a^2+3ab+2b^2}$ 和 $\frac{a-b}{a^2+5ab+6b^2}$.
7. $\frac{3-2x}{2x+3}$, $\frac{12}{4x^2-9}$ 和 $\frac{2x+3}{2x-3}$.
8. $\frac{1}{x^2-x-2}$, $\frac{1}{x^2+x-2}$ 和 $\frac{8x}{x^2-4}$.
9. $\frac{1}{(a+b)(a+2b)}$, $\frac{1}{(a+b)(a+3b)}$ 和 $\frac{2}{(a+2b)(a+3b)}$.
10. $\frac{3}{x^2-1}$, $\frac{4}{2x+1}$ 和 $\frac{4x+2}{2x^2+3x+1}$.
11. $\frac{x}{x^2+3x+2}$, $\frac{2}{x^2+9x+14}$ 和 $\frac{12}{x^2+10x+21}$.
12. $\frac{1}{a^2-ab+b^2}$, $\frac{1}{a^2+ab+b^2}$ 和 $\frac{1}{a^3+a^2b^2+b^3}$.
13. $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ 和 $\frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2}$.

90. 分式加減法

(a) 分母相同時的加減法：

I. 仍用相同的分母做分母。

II. 如分式相加，就把分子相加做分子；如分式相減，就把分子相減做分子。

III. 化簡所得的結果。

$$[\text{例 } 1] \quad \frac{a}{d} + \frac{b}{a} = \frac{a+b}{d}$$

$$[\text{例 } 2] \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

$$[\text{例 } 3] \quad \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-2b}{a-b} = \frac{a+b-(a-2b)}{a-b}$$

$$= \frac{a+b-a+2b}{a-b}$$

$$= \frac{3b}{a-b}$$

(b) 分母不同時的加減法：

I. 通分

II. 用(a)的方法運算。

$$[\text{例 } 1] \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$[\text{例 } 2] \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}$$

$$[\text{例 } 3] \quad \frac{10}{9-x^2} - \frac{2}{3+x} - \frac{1}{3-x} = \frac{10}{9-x^2} - \frac{2(3-x)}{9-x^2} - \frac{3+x}{9-x^2}$$

$$= \frac{10-2(3-x)-(3+x)}{9-x^2}$$

$$= \frac{10-6+2x-3-x}{9-x^2}$$

$$= \frac{1+x}{9-x^2}$$

(c) 整式與分式的加減法：

I. 用分母乘整式。

II. 如係相加，就把所得乘積加到分子上做新分子；如係整式減分式時，就把分子從所得乘積中減去做新分子；如係分式減整

式時，就把所得乘積從分子中減去做新分子。

III. 化簡所得的結果。

$$[\text{例 1}] \quad a + \frac{c}{b} = \frac{ab+c}{b}.$$

$$[\text{例 2}] \quad a - \frac{c}{b} = \frac{ab-c}{b}.$$

$$[\text{例 3}] \quad (x+1) - \frac{x^2-3}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1) - (x^2-3)}{x-1}$$

$$= \frac{x^2-1-x^2+3}{x-1} = \frac{2}{x-1}.$$

$$[\text{例 4}] \quad \frac{x^2-3}{x-1} - (x+1) = \frac{x^2-3 - (x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{x^2-3-x^2+1}{x-1} = -\frac{2}{x-1}.$$

【練習】 (a) 指出下列各式的錯誤：

$$1. \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

$$2. \quad 3x - \frac{2x-1}{x-1} = \frac{3x-2x-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1.$$

$$3. \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x^2-1}.$$

(b) 試從 $\frac{2a}{x+1}$ 減去 $2a$.

習 題

計算下列各式：

$$1. \quad \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}.$$

$$2. \quad \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4}.$$

3. $\frac{a}{x+a} - \frac{b}{x+b}$.

4. $\frac{x+3}{x+4} - \frac{x+1}{x+2}$.

5. $\frac{x+a}{x-2a} - \frac{x^2+2a^2}{x^2-4a^2}$.

6. $\frac{5}{1+2x} - \frac{3x}{1-2x} - \frac{4-13x}{1-4x^2}$.

7. $\frac{1}{x^2-9x+20} - \frac{1}{x^2-11x+30}$.

8. $\frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-1}$.

9. $\frac{x-3}{x+2} - \frac{x-2}{x+3} + \frac{1}{x-1}$.

10. $\frac{3}{x^2-1} + \frac{4}{2x+1} + \frac{4x+2}{2x^2+3x+1}$.

11. $(x^2+xy+y^2) - \frac{x^3-y^3}{x-y}$.

12. $(x^2-xy+y^2) - \frac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2}$.

13. $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

14. $\frac{3}{x^2-5x+6} - \frac{15}{x^2-9x+14} - \frac{12}{x^2-10x+21}$.

15. $\frac{5(2x-3)}{11(6x^2+x-1)} + \frac{7x}{6x^2+7x-3} - \frac{12(3x+1)}{11(4x^2+8x+3)}$.

91. 分式符號的變化

分式的符號：(1)分子的符號，(2)分母的符號，(3)分式的符號。

分式 $\frac{a}{b}$ 是表除的商數，如把分子和分母都變為負的，商數仍是正的，與分式的數值沒有關係。

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

如把分式的符號和分子，同時變成負的，得 $-\frac{-a}{b}$ ；但知

$$\left[-\frac{-a}{b} = -\left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}\right]$$

$$\therefore \frac{a}{b} = -\frac{-a}{b}$$

同理，得 $\frac{a}{b} = -\frac{a}{-b}$

所以每次變分式中兩個符號，牠的數值不變。

$$\text{〔例 1〕} \quad \frac{b-a}{y-x} = \frac{-(b-a)}{-(y-x)} = \frac{-b+a}{-y+x} = \frac{a-b}{x-y}$$

$$\text{〔例 2〕} \quad \frac{x-x^2}{2y} = -\frac{-(x-x^2)}{2y} = -\frac{x^2-x}{2y}$$

$$\text{〔例 3〕} \quad \frac{3x}{4-x^2} = -\frac{3x}{-(4-x^2)} = -\frac{3x}{x^2-4}$$

化簡分式時的應用：

$$\text{〔例 1〕} \quad \text{化簡} \quad \frac{5}{3x-3} + \frac{3x-1}{1-x^2} + \frac{1}{2x+2}$$

因第一分式的分母 $= 3(x-1)$ ，

第三分式的分母 $= 2(x+1)$ 。

故把第二分式的分母變為 x^2-1 時，求公分母時，必定簡便，

因之，得

$$\begin{aligned} \frac{5}{3x-3} + \frac{3x-1}{1-x^2} + \frac{1}{2x+2} &= \frac{5}{3(x-1)} - \frac{3x-1}{-(1-x^2)} + \frac{1}{2(x+1)} \\ &= \frac{10(x+1) - 6(3x-1) + 3(x-1)}{6(x^2-1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{11x + 10 - 18x + 6 + 3x - 3}{6(x^2 - 1)}$$

$$= \frac{13 - 5x}{6(x^2 - 1)}$$

【例2】 化簡 $\frac{a}{x+a} + \frac{2x}{x-a} + \frac{a(3x-a)}{a^2-x^2}$ 。

公分母是 $x^2 - a^2$ 最便當，故把第三分式和牠的分母的符號同時改變，得

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+a} + \frac{2x}{x-a} + \frac{a(3x-a)}{a^2-x^2} &= \frac{a}{x+a} + \frac{2x}{x-a} - \frac{a(3x-a)}{-(a^2-x^2)} \\ &= \frac{a(x-a) + 2x(x+a) - a(3x-a)}{x^2-a^2} \\ &= \frac{ax - a^2 + 2x^2 + 2ax - 3ax + a^2}{x^2-a^2} \\ &= \frac{2x^2}{x^2-a^2} \end{aligned}$$

【練習】 指出下列各式的錯誤：

1. $\frac{1}{ab} = \frac{1}{(-a)(-b)}$ 。

2. $\frac{1}{(b-c)(b-a)} = -\frac{1}{(c-b)(a-b)}$ 。

習 題

化簡下列各式：

1. $\frac{1}{4x-4} - \frac{1}{5x+5} + \frac{1}{1-x^2}$ 。

2. $\frac{2}{1+a} - \frac{2}{1-a} - \frac{5a}{a^2-1}$ 。

3. $\frac{x^2-y^2}{xy} - \frac{xy-y^2}{xy-x^2}$.
4. $\frac{3-2x}{2x+3} - \frac{2x-3}{3-2x} + \frac{12}{4x^2-9}$.
5. $\frac{a+c}{(a-b)(x-a)} + \frac{b+c}{(b-a)(x-b)}$.
6. $\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y-x}$.
7. $\frac{3}{x+a} - \frac{1}{x+3a} + \frac{3}{a-x} + \frac{1}{x-3a}$.
8. $\frac{3}{3(1-x)} + \frac{1}{3(1+x)} - \frac{1-x}{4(1+x^2)} - \frac{3}{4(x^2-1)}$.
9. $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$.
10. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{x}{1-x^2} + \frac{3}{x(x^2-1)}$.
11. $\frac{1}{4a^3(a+x)} - \frac{1}{4a^3(x-a)} + \frac{1}{2a^2(a^2+x^2)} - \frac{a^4}{a^3-x^3}$.
12. $\frac{a^2+ac}{a^2c-c^3} - \frac{a^2-c^2}{a^2c+2ac^2+c^3} + \frac{2c}{c^2-a^2} - \frac{3}{a+c}$.
13. $\frac{y+z}{(x-y)(x-z)} + \frac{z+y}{(y-z)(y-x)} + \frac{x+y}{(z-x)(z-y)}$.
14. $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$.

92. 分式乘法

(a) 分式乘分式的法則：

I. 如分子，分母有公因式，彼此互約之。

II. 分子乘分子，分母乘分母。

$$[\text{例 1}] \quad \frac{3a}{4b} \times \frac{8c}{9a} = \frac{3a}{4b} \times \frac{2c \times 4}{3a \times 3} = \frac{2c}{3b}$$

$$[\text{例 2}] \quad \frac{2a}{(a+b)^2} \times \frac{3(a^2-b^2)}{2ab} = \frac{2a}{(a+b)(a+b)} \\ \times \frac{3(a-b)(a+b)}{2ab} = \frac{3(a-b)}{b(a+b)}$$

(b) 分式乘整式的法則：

I. 如整式和分母有公共因式，先約之。

II. 用整式乘分子。

$$[\text{例 1}] \quad \frac{8a}{9b} \times 3b = \frac{8a}{3b \times 3} \times 3b = \frac{8a}{3}$$

$$[\text{例 2}] \quad (3ax-2a^2) \times \frac{x-a}{6x^2-ax-2a^2} \\ = a(3x-2a) \times \frac{x-a}{(3x-2a)(2x+a)} \\ = \frac{a(x-a)}{2x+a}$$

習 題

計算下列各式：

$$1. \quad \frac{16x^2-9a^2}{x^2-4} \times \frac{x-2}{4x-3a} \quad 2. \quad \frac{a^3}{bc} \times \frac{b^3}{ca} \times \frac{c^3}{ab}$$

$$3. \quad \frac{x^2+5x+6}{x^2-1} \times \frac{x^2-2x-3}{x^2-9} \quad 4. \quad \frac{25a^2-b^2}{9a^2x^2-4x^2} \times \frac{x(3a+2)}{5a+b}$$

$$5. \quad \frac{x^2+3x+2}{x^2+9x+20} \times \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6}$$

$$6. \quad \frac{2x^2+5x+2}{x^2-4} \times \frac{x^2+4x}{2x^2+9x+4}$$

7. $\frac{2x^2-x-1}{2x^2+5x+2} \times \frac{4x^2+x-14}{16x^2-49}$
8. $\frac{b^4-27b}{2b^2+5b} \times \frac{4b^2-2b}{2b^2-11b+15}$
9. $\frac{x^2-18x+81}{x^2-5x-50} \times \frac{x^2-6x+7}{x^2-15x+56} \times \frac{x+5}{x-1}$
10. $\frac{(a+b)^2-c^2}{a^2+ab-ac} \times \frac{a}{(a+c)^2-b^2} \times \frac{(a-b)^2-c^2}{ab-b^2-bc}$
11. $\frac{x^2-8x-9}{x^2-17x+72} \times \frac{x^2-25}{x^2-1} \times \frac{x^2-9x+8}{x^2+4x-5}$
12. $\frac{4x^2+x-14}{6xy-14y} \times \frac{4x^2}{x^2-4} \times \frac{x-2}{4x-7} \times \frac{3x^2-x-14}{2x^2+4x}$
13. $\frac{4x^2-16x+15}{2x^2+3x+1} \times \frac{x^2-6x-7}{2x^2-17x+21} \times \frac{4x^2-1}{4x^2-20x+25}$
14. $\frac{(a^2+ax)^5}{x^2-a^2} \times \frac{(a-x)^2}{a^5+a^2x^3} \times \frac{a^2-ax+x^2}{a^3+2a^2x+ax^2}$

9.3. 分式除法

(a) 分式除分式的法則：

I. 把做除式的分式顛倒後，乘被除式。

II. 用分式乘法運算。

[例 1] $\frac{ac}{3b} \div \frac{3a}{4b} = \frac{ac}{3b} \times \frac{4b}{3a} = \frac{4c}{9}$

[例 2] $\frac{2x+a}{9x^2-4a^2} \div \frac{2x+a}{3ax+2x^2} = \frac{2x+a}{9x^2-4a^2} \times \frac{3ax+2a^2}{2x+a}$

$$= \frac{2x+a}{(3x+2a)(3x-2a)}$$

$$\times \frac{a(3x+2a)}{2x+a}$$

$$= \frac{a}{3x-2a}$$

(b) 分式除整式的法則：

I. 把分式顛倒後，乘整式。

II. 用分式乘整式的法則運算。

例如： $(2a+3) \div \frac{2a+3}{bc} = (2a+3) \times \frac{bc}{2a+3} = bc$ 。

(c) 整式除分式的法則：

I. 用整式乘分母。

II. 約為簡分式。

〔例 1〕 $\frac{3a}{b} \div 3abc = \frac{3a}{b \times 3abc} = \frac{1}{b^2c}$ 。

〔例 2〕 $\frac{x^2-4}{ax+2a} \div (x-2) = \frac{(x-2)(x+2)}{a(x+2)(x-2)} = \frac{1}{a}$

〔練習〕 指出下列各式中的錯誤：

1. $(x-5) \div \frac{1}{x^2-4x-5} = (x-5) \div \frac{1}{(x-5)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$

2. $\frac{x-a}{x^2-a^2} \div (x+a) = \frac{(x-a)(x+a)}{x^2-a^2} = 1$

習 題

計算下列各式：

1. $\frac{5a^2b}{6xy} \div \frac{3ab^2}{4x^2y}$

2. $\frac{a+b}{a-b} \div \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

3. $\frac{a^3-b^3}{a^2+b^3} \div \frac{(b-a)^2}{b^2-a^2}$

4. $\frac{x^3-y^3}{a-b} \div \frac{x^2+xy+y^2}{a^2-b^2}$

5. $\frac{2x^2+13x+15}{4x^2-9} \div \frac{2x^2+11x+5}{4x^2-1}$

6. $\frac{x^2-14x-15}{x^2-4x-45} \div \frac{x^2-12x-45}{x^2-6x-27}$
7. $\frac{x^3-6x^2+36x}{x^2-49} \div \frac{x^4+216x}{x^2-x-24}$
8. $\frac{2x^2-x-1}{2x^2+5x+2} \div \frac{16x^2-49}{4x^2+x-14}$
9. $\frac{1+8x^3}{(2-x)^2} \times \frac{4x-x^3}{1-4x^2} \div \frac{(1-2x)^2+2x}{2-5x+2x^2}$
10. $\frac{2}{1-x^2} \div \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$
11. $\frac{x^4-8x}{x^2-4x-5} \times \frac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-2x} \div \frac{x^2+2x+4}{x-5}$
12. $\frac{x^2-64}{x^2+24x+128} \times \frac{x^2+12x-64}{x^3-64} \div \frac{x^2-16x+64}{x^2+4x+16}$
13. $\frac{m^3+4m^2n+4mn^2}{3m^2n-5mn^2-2n^3} \times \frac{m^2-4n^2}{9m^2-3mn+n^2} \div \frac{(m+2n)^2}{27m^3+n^3}$
14. $\frac{a^4-x^4}{a^2-2ax+x^2} \div \frac{a^2x+x^3}{a^3-x^3} \times \frac{a^4+a^2x^2+x^4}{a^2x-ax^2+x^3}$
15. $\frac{a^3+8a^2b+15ab^2}{(64a^3-b^3)(a^3+b^3)} \div \frac{4a^2+21ab+5b^2}{16a^3-17a^2b^2+b^4}$
 $\div \frac{a^2+2ab-3b^2}{a^3-a^2b-ab^2}$

94. 繁分式

分子和分母是分式的，叫做繁分式。

(a) 分子和分母都是單項分式的運算法則：

- I. 把分母的分式顛倒後，乘分子。
- II. 能約時，約為簡分式。

例如：
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

(b) 分子和分母是多項式的分式的運算法則：

I. 把分子和分母的分式，化爲簡分式。

II. 用(a)的運算法則計算。

[例 1]
$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}} = \frac{\frac{ad+bc}{bd}}{\frac{ad-bc}{bd}}$$

$$= \frac{ad+bc}{bd} \times \frac{bd}{ad-bc} = \frac{ad+bc}{ad-bc}$$

[例 2]
$$\frac{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\frac{2a+b^2}{a-b} - \frac{2a-b^2}{a+b}} = \frac{\frac{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)^2}}{\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{a^2-b^2}}$$

$$= \frac{\frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}}{\frac{4ab}{a^2-b^2}}$$

$$= \frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} \times \frac{a^2-b^2}{4ab}$$

$$= \frac{ab}{a^2+b^2}$$

[例 3]
$$\frac{1}{x - \frac{1}{x + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{x - \frac{1}{\frac{x^2+1}{x}}} = \frac{1}{x - \frac{x}{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{x(x^2+1) - x}{x^2+1}}$$

$$= \frac{x+1}{x^3}$$

習 題

化簡下列各式：

$$1. \frac{\frac{m}{n} - \frac{a}{m}}{\frac{a}{m} - \frac{b}{n}}$$

$$2. \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

$$3. \frac{a + \frac{b}{d}}{x - \frac{y}{d}}$$

$$4. \frac{1 - \frac{y^2}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

$$5. \frac{a}{b + \frac{c}{d}}$$

$$6. \frac{x+5 + \frac{6}{x}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2}}$$

$$7. \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{\frac{9}{x} - x}$$

$$8. \frac{2x^2 - x - 6}{\frac{4}{x^2} - 1}$$

$$9. \frac{a}{x + \frac{m}{x + \frac{m}{z}}}$$

$$10. 1 + \frac{x}{1+x + \frac{2x^2}{1-x}}$$

$$11. \frac{\frac{1}{1 - \frac{1+x}{x - \frac{1}{x}}}}$$

$$12. \frac{1}{x - \frac{1}{x + \frac{1}{x}}} - \frac{1}{x + \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}$$

$$13. \frac{2-4x}{4x-2 - \frac{4x}{1 + \frac{2x-1}{4x-1}}}$$

$$14. \frac{x^2}{1 - \frac{1}{x^2}} + \frac{x^2 - 2}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$x^2 + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \quad x^2 - \frac{1}{1 - \frac{2}{x}}$$

2 3 4 5 6



代 數 學 (上)

1948.8.初版 哈.5000.

定價： 元

