

依照教育部修正課程標準編輯

復興高級中學  
教科書  
平面幾何學

胡敦復 榮方舟 編著  
商務印書館發行

## 編輯大意

1. 本書依照民國二十五年部頒修正高中算學課程標準編著。
2. 本書共分十一編四十六章。其編章之程序分配，完全以學者進修之便適為標準。
3. 幾何學為最謹嚴之學。一語不可隨便，語語須有根據。本書一方面將一切需用定理從頭依次證明不令遺漏，一方面將學者於初中幾何中已習知之定理用最簡括之法述之。使學者既收複習之功而又不感重複乏味。
4. 本書於第一編之末分別詳述證題之方法加以各種例題。學者至此，初中時所覺幾何之困難蓋可釋然矣。
5. 軌跡作圖題，學者最視為畏途。本書至第二編之末始詳論之。並舉種種例題詳述其解法。務使學者有所依據不致茫然。
6. 關於面積之定理除等積形外常可歸納於比例中。故幾何學教科書往往先論比例而於面積則甚略。然如此則將使學者失去

面積之觀念，幾視矩形爲兩線分之相乘積，不復知其爲一二向度之平面部分之量矣。故本書特在未講比例之前先專編論面積。且開始特定“面分”一名詞，先論等積異形面分，次論正方形及矩形。如此，學者對於面積之真意義，庶幾明瞭無遺矣。

7. 量與數學者務宜辨別清楚。本書至比例之末第二十五章始論單位及數。在此章之前，一切圖形，不定單位，皆爲一獨立量，不屬入一毫數之意義。至二十五章比例之末，此時學者於幾何中各量已一再研究深印腦際，方論單位及數，卽以避免學者對於量及數之混淆不清也。故圓心角，圓周角與弧之關係，亦至此始論及之。

8. 根軸，相似中心，調和線束，極大極小等，爲初中幾何所或未涉及者。本書集爲一編，學者至此雖未可云窺見初等幾何之全豹，然已可覺得圖形之變化莫測，愈鑽研愈精深而有味也。

9. 作圖題爲幾何學中最難解者。在未論比例之前作圖題之範圍尚狹。多數作圖題，須賴面積比例之定理方得解。第十六章所論僅爲作圖題之意義及初步解法。故於平面幾何學之終再專編分類論之。

10. 普通幾何學教科書對於立體幾何學，常專重面積體積之計算。對於理論方面幾付闕如。本書依據最近部頒課程標準立體幾何學專爲高中理組修習。故對於理論較多，並於第十一編雜舉各例以示各種解法之一斑。

11. 本書對於例題之選擇非常注意。凡過於艱澀及無甚意義者，概不選入。故習題為數雖少而精彩特多，學者務須按題演習，定收事半功倍之效也。

12. 本書編著匆促，難免錯誤。希高明正之。

民國二十五年二月編者識

# 目 錄

緒 論	1
習題一	
第一編 直線形	9
第一章 線分與角	9
定理一至四	
第二章 三角形	15
定理五至八	
習題二	
第三章 不等量	22
定理九至一六	
習題三	
第四章 平行線	29
定理一七至二一	
習題四	
第五章 平行四邊形	39
定理二二至三三	

## 習題五

第六章 三角形之心 ..... 47

定理三四至三八

第七章 多角形 ..... 53

定理三九至四〇

習題六

第八章 對稱形 ..... 56

定理四一至四六

第九章 證題之方法及雜例 ..... 64

習題七

第二編 圓 ..... 77

第十章 圓之基礎性質 ..... 77

定理四七至五四

第十一章 直線與圓之關係 ..... 83

定理五五至五九

習題八

第十二章 二圓之關係 ..... 89

定理六〇至六二

第十三章 關於圓之各角 ..... 95

定理六三至七二

第十四章 圓之應用及雜例.....103

習題九

第十五章 軌跡.....112

定理七三至七八

軌跡定理之應用及雜例

習題十

第十六章 作圖題.....125

作圖題一至八

作圖題之應用及雜例

習題十一

第三編 面積.....141

第十七章 等積形.....141

定理七九至八二

作圖題九至一一

習題十二至十三

第十八章 正方形矩形.....151

定理八三至九三

作圖題一二

習題十四至十五

第十九章 正方形矩形與圓.....166

定理九四至九六

第二十章 面積題證法及雜例.....159

習題十六

第四編 比例.....177

第二十一章 比及比例概論.....177

作圖題一三

比例之普通定理

習題十七

第二十二章 比例線分.....185

定理九七至一〇三

作圖題一四至一七

習題十八

第二十三章 相似多角形.....197

定理一〇四至一一四

習題十九至二十

第二十四章 面積之比.....213

定理一一五至一二〇

作圖題一八至一九



## 習題二十一

## 第二十五章 量之度數.....222

## 定理一二一至一二六

## 習題二十二

## 第五編 正多角形及圓.....235

## 第二十六章 圓內接及外切正多角形.....235

## 定理一二七至一三六

## 作圖題二〇至二三

## 習題二十三

## 第二十七章 圓之度數.....247

## 定理一三七至一四三

## 習題二十四

## 第六編 雜定理及雜例.....257

## 第二十八章 根軸及根心.....257

## 定理一四四至一四五

## 第二十九章 相似中心及相似軸.....259

## 定理一四六至一五〇

第三十章 Menelaus氏定理 Ceva 氏定理調和線束極線及  
極點.....266

定理一五一至一六〇

第三十一章 極大極小.....276

定理一六一至一六七

第三十二章 雜例.....282

軌跡解法雜例

Menelaus 氏定理 Ceva 氏定理之應用

極線極點之應用

關於三角形之計算題

極大極小例題

習題二十五

**第七編 作圖題解法.....303**

第三十三章 作圖題解法.....303

軌跡交截法

代數解析法

相似法

平行移動法 旋轉移動法

對稱法 轉換法

求作圓之數要例

習題二十六

# 平面幾何學

## 緒論

§ 1. 幾何學之目的 學者於幾何學，在初中已涉獵得其大概。然常有“幾何學究有何用”之疑問。蓋幾何學所論者為虛空圖形，不着實際，故其為用不著。夫吾人之思想必須整理，猶筋肉之必須操練然。體操之為用，盡人知之。在操場上作一小時之步行，結果未出操場一步。蓋其目的固不在乎路程之走得而在乎筋肉之操練。幾何之為用亦然。在課室中作一小時之習題，結果並無何等實用。蓋其目的亦不在乎問題之解決而在乎思想之整理。顧筋肉之操練易，思想之整理難。因思想為空虛的，必有所依着，方可作有秩序之練習。幾何學實為整理吾人思想之唯一工具。依據圖形，推求真理，以整理吾人之思想，使有條不紊，此幾何學之主要目的也。

§ 2. 幾何學之要素 體面線點 幾何學為研究圖形之學。圖形之要素，不外乎體，面，線，點。學者於初中幾何已習知之。茲不嫌重複再分別述之

空間有限部分曰體 (solid)。體有形象，有大小，有位置。但非實

質，故與物體不同。物體於形象之外尚有性質，有色有味，或堅或柔。幾何中所謂體，則舍形象、大小、位置外，絕無他物。體有三個向度 (dimensions)，為長 (length)，廣 (breadth) 及高 (height)。

體之分界曰面 (surface)。面有兩個向度，為長及廣。面無高，故面不占有空間位置。

面之分界曰線 (line)。線有一個向度，為長。

線之分界曰點 (point)。點無向度。

體、面、線、點，或分或合，統稱曰圖形 (figure)。

試就運動觀察體、面、線、點之關係。點在空間只有位置而無向度。設點在空間移動，從一個位置移至他一位置，其所經空間之跡，便有一個向度，長。故點移動成線。線有一個向度，若在空間移動，則其所經空間之跡，便又添一向度，廣。故線移動成面。面若在空間移動，則其所經空間之跡，便又添一向度，高。故面移動成體。體占有了空間一部分。設體之三個向度遞減，減小至無，此時已不復有向度，即已不復占有空間部分。然其位置固仍存在。此即所謂點也。

§ 3. 定義 用特殊名詞表特殊圖形曰定義 (definition)。

§ 4. 定義一 直線 曲線 固定一線上任意兩點之位置將此線旋轉。若此全線之位置一無改變，則此線曰直線 (straight line)。一線中無一部分為直線者曰曲線 (curve)。

直線常簡稱曰線。故以下若但云線時，常指直線而言。

§ 5. 定義二 平面 曲面 過面中任意兩點之直線若全在此面中，則此面曰平面 (plane). 一面無一部分為平面者曰曲面 (curved surface).

§ 6. 定義三 半射線 線分 折線 一端有界，一端無界之直線部分曰半射線 (half ray). 半射線一端之界曰原點 (origin). 兩端均有界之直線部分曰線分 (line-segment). 諸線分連接所成之非直線曰折線 (broken line).

§ 7. 定義四 角 共一原點之兩半射線分此兩半射線所在之平面為兩部分，此各部分皆曰角 (angle). 兩半射線曰角之兩邊 (side). 所共原點曰角之頂點 (vertex). 試就運動觀察半射線與角之關係. 設一半射線固定其原點在平面中旋轉，從一個位置轉至他一位置，其所經平面上之迹便是角. 半射線不占有平面，角則占有平面一部分. 設一角之頂點不動，而減少其所占平面部分，減至於無，此時角之兩邊合而為一，即為一半射線.

§ 8. 線分大小之比較 角大小之比較 線分與角為幾何學中兩個重要之量. 凡同類量可比較大小. 故兩線分可比較大小，兩角可比較大小. 幾何學中關於量之比較，重直接，常不假助於單位. 設有甲乙兩線分欲比較其孰大孰小. 將甲合置於乙上，使甲之第一端合於乙之第一端，然後視察其第二端之關係. 若甲之第二端亦合於乙之第二端，則此二線分相等. 若甲之第二端在乙之外，則甲大

於乙。若甲之第二端在乙之內，則甲小於乙。設有甲乙兩角，欲比較其孰大孰小，將甲之頂點合於乙之頂點上，且令其一邊相重，然後視察其第二邊之關係。若甲之第二邊亦合於乙之第二邊上，則此二角相等。若甲之第二邊在乙之外，則甲大於乙。若甲之第二邊在乙之內，則甲小於乙。

§ 9. 合同圖 兩個圖形，位置不同。然當第一圖形移置於第二圖形上，而二圖能完全密合時，則此二圖曰合同圖 (congruent figures)。

合同圖亦稱全等形。合同圖之重合部分曰對應部分。等線分及等角皆為合同圖。

§ 10. 公理 凡公眾認為真確而毫無疑義之真理無待證明者曰公理 (axiom)。

公理分二類 不專屬於幾何圖形的公理曰普通公理 (general axiom)。專屬於幾何圖形的公理曰幾何公理 (geometric axiom)。

### § 11. 普通公理

1. 全量等於其各部分之和；全量比其任何一部分大。
2. 等量加等量，和相等。
3. 等量減等量，差相等。
4. 等量的同倍數量相等。
5. 等量的同分數量相等。

6. 不等量加等量不等,原大者和亦大.
7. 不等量減等量差不等,原大者差亦大.
8. 等量減不等量差不等,所減者大差小.
9. 不等量之同倍數量不等,大量之倍量大.
10. 不等量之同分數量不等,大量之分量大.
11. 若甲量大於乙量,乙量大於丙量,則甲量大於丙量.
12. 若甲量大於乙量,丙量大於丁量,則甲、丙二量之和大於乙、丁二量之和.
13. 若甲量大於乙量,丙量小於丁量,則甲量減丙量之差大於乙量減丁量之差.
14. 等式中任何量以其等量代之,此等式依舊成立(等於等量之量相等).
15. 不等式中任何量以其等量代之,此不等式依舊成立.
16. 諸量相加,若改換其加時先後次序,其和不變.
17. 甲乙二量比較大小,或甲大於乙,或甲等於乙,或甲小於乙,三者必居其一.

## § 12. 幾何公理

- 一. 圖形可不變其形象大小而任意變其位置.
- 二. 合同圖之量必相等.
- 三. 過二點之直線有一無二. 由此更可推得數事:

(a) 二直線有二點重合或有一部分重合，則此二直線完全重合。

(b) 疊置二直線可令全線相合，且令各線上之任意一點相合

(c) 二直線只能交於一點。

四. 二點在一平面之兩旁，則其聯線必與此平面相交。

五. 在一平面內，二點在一直線之兩旁，則其聯線必與此直線相交。

六. 線分為其兩端間之最短路徑。

幾何公理，不止以上數條。以後隨時添補

§ 13. 定理 根據定義、公理等已認為真確之事而證明之真理曰定理。(theorem).

定理常分為二部分。一曰假設 (hypothesis)，一曰終決 (conclusion)。假設者，假定已知真確之事。終決者從假設根據公理或已證明之定理可證其為真確之事也。

§ 14. 系 從已證明之定理略加推想，即可斷定為真確之定理曰系 (corollary)。

§ 15. 幾何學之分類 專論同一平面中各圖形者曰平面幾何學 (plane geometry)，不專論同一平面中各圖形者曰立體幾何學 (solid geometry)。

§ 16. 圖形之表法 凡點常以  $A, B, C \dots$  等大體字母表之。



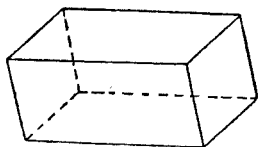
直線，半射線，線分皆以二點表之，即連書二個大字母如  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  ... 等。直線可寫其上任意二點。半射線以一原點及其上任意又一點表之。線分以兩端點表之。角以頂點冠以  $\angle$  號表之，如  $\angle A$ ,  $\angle B$  ... 等。有時數角共一頂點時，則須連書三字母冠以  $\angle$  號以資區別，如  $\angle BAC$ ，其中  $A$  為頂點； $B, C$  為二邊上各任意一點。其他圖形之表法，下文隨時添註。

§ 17. 語言之符號 凡常用之語言，為敘述簡單計，以符號代替如下：

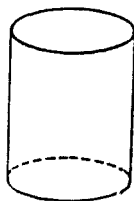
語 言	等 於	大 於	小 於	不 等 於	不 大 於	不 小 於	幾 等 於	
符 號	=	>	<	≠	≧	≦	≈	
語 言	合 同 於 即 全 等 於	相 似 於	加	減	因	故	平 行	不 平 行
符 號	≅	∝	+	-	∴	∴	∥	⊥
語 言	平 行 且 等 於	垂 直	即 為 所 求			即 為 所 證		
符 號	≡	⊥	Q. E. F.			Q. E. D.		

### 習 題 一

1. 直方體有多少面，多少線，多少點？
2. 圓柱體有多少面，多少線，多少點？

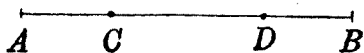


長 方 體



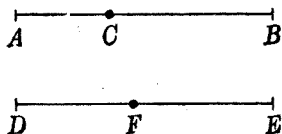
圓 柱 體

3. 線分  $AB$  上有  $C, D$  兩點. 若  $AC = DB$ , 則  $AD = CB$ .

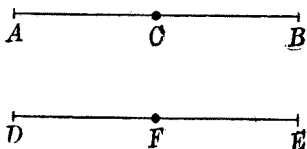


此理合於普通公理第幾條?

4. 已知圖中  $AB = DE$ , 又知  $AC < DF$ . 則  $CB, FE$  之比較如何? 且述其根據.

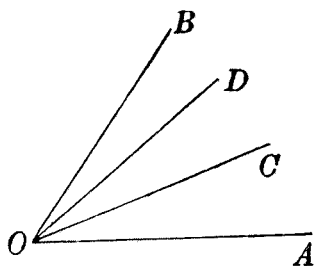


5. 已知圖中  $AB = DE$ , 又知  $AC = CB, DF = FE$ . 則  $AC, DF$  之比較如何? 何故?



6. 已知  $\angle AOD > \angle COB$ , 則  $\angle AOC > \angle DOB$ . 何故?

7. 若  $\angle AOC > \angle COD$ ,  $\angle COD > \angle DOB$ , 則  $\angle AOC > \angle DOB$ . 何故?



8. 線分  $AB$  上有  $M, N$  二點. 若已知  $AM = MB$ , 試說明  $AN > NB$ .

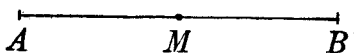


# 第一編 直線形

## 第一章 線分與角

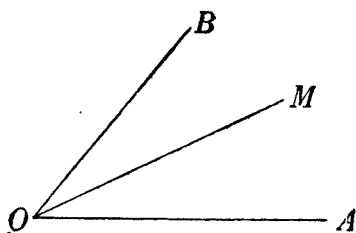
§ 18. 定義五 中點 分一線分爲相等兩份之點曰此線分之中點 (mid-point).

線分  $AB$  上一點  $M$ . 若  $AM = MB$ , 則  $M$  爲  $AB$  之中點.



§ 19. 定義六 等分線 分一角爲相等兩份之半射線曰此角之等分線 (bisector).

$\angle AOB$  中一半射線  $OM$ . 若  $\angle AOM = \angle MOB$ , 則  $OM$  爲  $\angle AOB$  之等分線.



§ 20. 幾何公理

七. 一線分必有一中點.

八. 一角必有一等分線.

§ 21. 定理一. 一線分只有一中點.



〔假設〕  $M$  爲  $AB$  之中點,  $C$  爲  $AB$  上其他任意一點.

〔終決〕  $C$  非  $AB$  之中點.

〔證〕 設  $C$  在  $MB$  上.

則  $AC > AM$  (全量比其任何一部分大).

$\therefore AM = MB$  (假設, 定義五).

$\therefore AC > MB$  (不等式中任何量以其等量代入, 此不等式依舊成立).

然  $MB > CB$  (全量比其任何一部分大).

$\therefore AC > CB$  (甲量大於乙量, 乙量大於丙量, 則甲量大於丙量).

故  $C$  非  $AB$  之中點. *Q. E. D.*

(若  $C$  在  $AM$  上, 學者試自證之)

§ 22. 定理 : 一角只有一等分線.

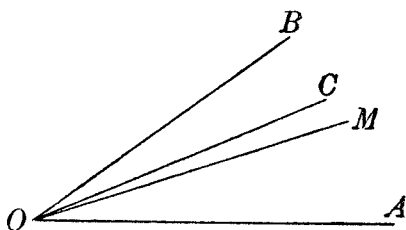
〔假設〕  $OM$  爲  $\angle AOB$

之等分線.  $OC$  爲  $\angle AOB$  內

其他任意一半射線.

〔終決〕  $OC$  非  $\angle AOB$

之等分線.



〔證〕 設  $OC$  在  $\angle MOB$  內,

則  $\angle AOC > \angle AOM$  (全量比其任何一部分大).

$\therefore \angle AOM = \angle MOB$  (假設, 定義六).

∴  $\angle AOC < \angle MOB$  (不等式中任何量以其等量代入, 此不等式依舊成立)

然  $\angle MOB > \angle COB$  (全量比其任何一部分大).

∴  $\angle AOC > \angle COB$  (甲量大於乙量, 乙量大於丙量, 則甲量大於丙量).

∴  $OC$  非  $\angle AOB$  之中點. *Q. E. D*

(若  $OC$  在  $\angle AOM$  內, 學者試自證之).

§ 23. 定義七 周角 包含完全平面之角曰周角 (perigon).

設固定半射線  $OA$  之原點  $O$ ,

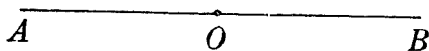
而將  $OA$  旋轉一周, 仍至  $OA$  原位  
置. 如此所成之角即周角.



§ 24. 定義八 相屬角 一周角所分成之二角曰互為相屬角 (conjugate angles).

§ 25. 定義九 直線角 二邊成一直線之角曰直線角 (straight angle).

直線  $AB$  上作一點  $O$ .



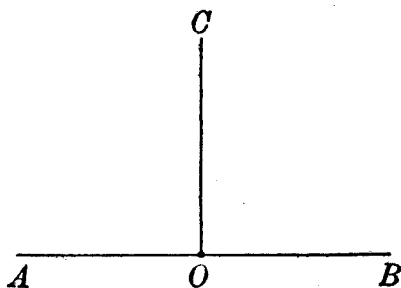
$OA, OB$  視為角之邊,  $O$  為頂點. 如是所成之上下二相屬角, 皆為直線角. 簡記為  $st\angle$ .

§ 26. 定義一〇 優角 劣角 大於直線角之角曰優角 (major angle). 小於直線角之角曰劣角 (minor angle).

從一點引二半射線，常成優劣二角，若但稱曰角，常指劣角而言。

§ 27. 定義—— 直角 直線角之半曰直角 (right angle).

在  $\angle AOB$  中作一等分線  $OC$ ，則  $\angle BOC$ ， $\angle COA$  皆為直角。簡寫作  $R\angle$ 。



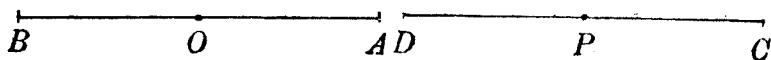
§ 28. 定義—— 鈍角 大於直角之角曰鈍角 (obtuse angle). 小於直角之角曰銳角 (acute angle).

§ 29. 定義—— 補角 餘角 二角之和為一直線角時，則此二角曰互為補角 (supplement angles). 二角之和為一直角時，則此二角曰互為餘角 (complement angles).

§ 30. 定義—— 隣角 有二角，共有頂點又共有一邊，且分居於此共有邊之兩旁，則此二角曰互為隣角 (adjacent angles).

§ 31. 定義—— 對頂角 二直線相交，其不為隣角之二角曰互為對頂角 (vertical angles).

§ 32. 定理三 凡直線角皆相等。



〔假設〕  $\angle AOB, \angle CPD$  皆爲 *st*  $\angle$ .

〔終決〕  $\angle AOB = \angle CPD$ .

〔證〕 移置  $\angle AOB$  至  $\angle CPD$  上令  $OA$  與  $PC$  相重,  $O$  合於  $P$  [幾何公理三 (b)]. 則因  $\angle AOB, \angle CPD$  皆爲直線角, 即  $AOB, CPD$  皆爲直線, 故  $OB$  與  $PD$  亦相重合 [幾何公理三 (a)]. 故  $\angle AOB, \angle CPD$  爲合同圖.

$\therefore \angle AOB = \angle CPD$  (幾何公理二) Q. E. D.

§ 33. 系一 凡直角皆相等.

§ 34. 系二 等角之補角相等.

§ 35. 系三 等角之餘角相等.

§ 36. 系四 二直線相交成四個角, 若其中一個爲直角, 則其他三個均爲直角.

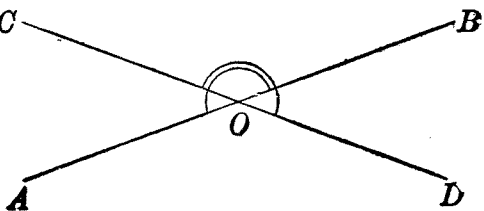
§ 37. 系五 一周角等於二直線角; 一直線角等於二直角; 一周角等於四直角.

§ 33. 定義一六 垂線 斜線 二直線相交成直角時, 此二直線曰互爲垂線 (perpendiculars), 亦曰互相垂直, 或互相直交. 二直線相交成非直角時, 則此二直線曰互爲斜線 (oblique lines), 亦曰互相斜交. 其交點曰足 (foot). 垂線之交點曰垂足 (foot of perpendicular).

§ 39. 定理四 對頂角相等.

〔假設〕  $\angle AOC$ ,  $\angle BOD$  爲對頂角.

〔終決〕  $\angle AOC$   
 $= \angle BOD$



〔證〕  $\angle AOC$ ,  $\angle BOD$  爲對頂角, 即  $AOB$ ,  $COD$  皆爲直線.  
 $\therefore \angle AOB, \angle COD$  皆爲  $st\angle$ .  $\therefore \angle AOB = \angle COD$  (定理三).  
 $\therefore \angle AOB - \angle BOC = \angle COD - \angle BOC$  (普通公理 3)  
 即  $\angle AOC = \angle BOD$ . Q. E. D.



## 第二章 三角形

§ 40. 定義一七 多角形 諸線分相接圍成之形曰多角形 (polygon). 此各線分曰多角形之邊 (side). 相接兩邊所成之角曰多角形之角 (angle). 各角之頂點曰多角形之頂點 (vertex). 一邊及其相接邊延線所成之角曰多角形之外角 (exterior angle). 不共一邊的兩頂點所聯線分曰多角形之對角線 (diagonal). 諸邊之和曰多角形之周 (perimeter).

有  $n$  個角的多角形就叫做  $n$  角形 ( $n$ -gon).

多角形之各角皆為劣角時, 此多角形曰凸多角形 (convex polygon). 多角形之各角中有優角時, 此多角形曰凹多角形 (concave polygon).

凡凸多角形常簡稱曰多角形. 故以下凡但稱多角形時, 常指凸多角形而說.

多角形之最簡單者為三角形. 三角形有三邊, 三角及三雙外角. 三角形無對角線.

§ 41. 定義一八 三角形之高與底 從三角形頂點至對邊或對邊之延線所作垂線曰三角形之高 (altitude). 其對邊曰三角形

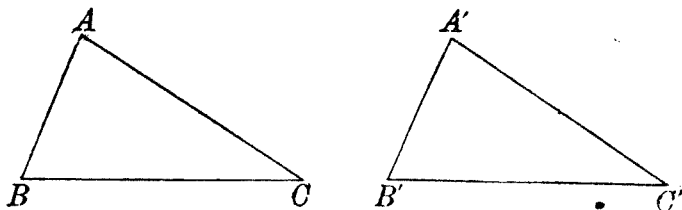
之底 (base).

§ 42. 定義一九 三角形之中線 三角形頂點及其對邊中點所聯線分曰三角形之中線 (median).

§ 43. 定義二〇 三角形之等分角線 三角形角之等分線在形內部分曰三角形之等分角線 (angle-bisector).

三角形有三個高,三個中線,三個等分角線.

§ 44. 定理五 兩三角形中,一三角形之兩邊及其所夾之角,各等於又一三角形之兩邊及其所夾之角,則此兩三角形為合同圖



〔假設〕  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A'B'C'$  中,  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $\angle A = \angle A'$ .

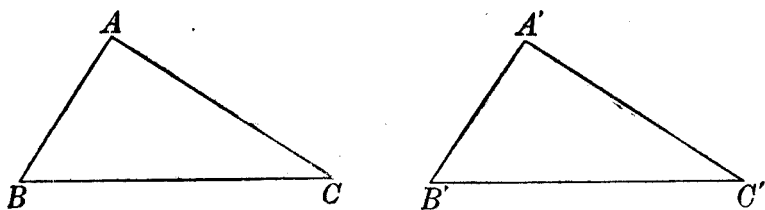
〔終決〕  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

〔證〕 移置  $\triangle ABC$  於  $\triangle A'B'C'$  上,令  $A$  與  $A'$  合,  $AB$  與  $A'B'$  相重. 則因  $\angle A = \angle A'$ ,  $\therefore AC$  與  $A'C'$  亦相重. 又  $\because AB = A'B'$ ,  $\therefore B$  與  $B'$  合.  $\because AC = A'C'$ ,  $\therefore C$  與  $C'$  合. 故  $\triangle ABC$  之三個頂點  $A, B, C$  皆與  $\triangle A'B'C'$  之三個頂點  $A', B', C'$  合, 而三邊亦合.

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ . Q. E. D.

〔註〕 本定理常簡寫為  $s. a. s. = s. a. s.$

§ 45. 定理六 兩三角形中，一三角形之一邊及其兩端之角各等於又一三角形之一邊及其兩端之角，則此兩三角形為合同圖。



〔假設〕  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  中,  $BC = B'C', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$ .

〔終決〕  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

〔證〕 移置  $\triangle ABC$  於  $\triangle A'B'C'$  上, 令  $BC$  與  $B'C'$  相重,  $B$  與  $B'$  合. 則因  $BC = B'C'$ ,  $\therefore C$  與  $C'$  亦合. 又因  $\angle B = \angle B'$ ,  $\therefore BA$  與  $B'A'$  相重.

$\angle C = \angle C'$ ,  $\therefore CA$  與  $C'A'$  相重.

故  $\triangle ABC$  之三邊  $BC, AC, AB$  皆與  $\triangle A'B'C'$  之三邊  $B'C', A'C', A'B'$  相重, 而三頂點亦合.

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  Q. E. D.

〔註〕 本定理簡寫為  $a. s. a. = a. s. a.$

§ 46. 定義二— 二等邊三角形 三角形之三邊中有二邊相等者曰二等邊三角形 (isosceles triangle). 其相等之二邊曰邊 (sides), 不等之一邊曰底 (base). 底之對角曰頂角 (vertical angle).

其他二角曰底角 (base angles).

§ 47. 定義二二 等邊三角形 三角形之三邊皆相等者曰等邊三角形 (equilateral triangle).

§ 48. 定理七 二等邊三角形底角相等.

[假設]  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ .

[終決]  $\angle B = \angle C$ .

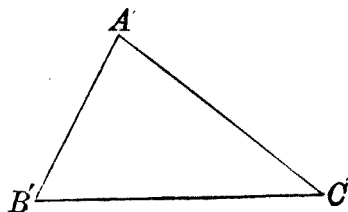
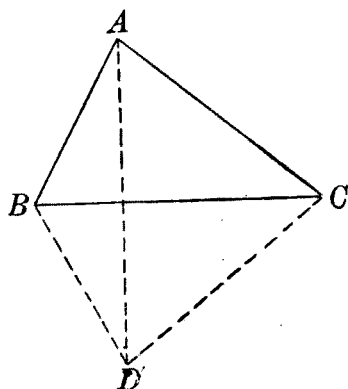
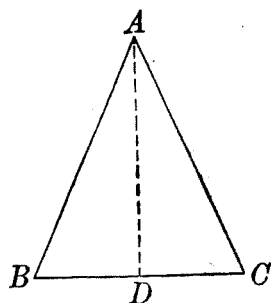
[證] 作  $\angle A$  的等分線  $AD$ . 則在  $\triangle ABD$ ,  $\triangle ACD$  中,  $AB = AC$ ,  $AD$  為重合部分,  $\angle BAD = \angle CAD$ .

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$  (s. a. s. = s. a. s.).

$\therefore \angle B = \angle C$  (合同圖之對應部分). *Q. E. D.*

§ 49. 系. 等邊三角形之各角皆相等.

§ 50. 定理八 兩三角形中,一三角形之三邊各等於又一三



角形之三邊，則此兩三角形為合同圖。

〔假設〕  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A'B'C'$  中,  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $BC = B'C'$ .

〔終決〕  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

〔證〕 從  $B$  向形外作半射線  $BD$ , 令  $\angle CBD = \angle B'$ . 從  $C$  向形外作半射線  $CD$ , 令  $\angle BCD = \angle C'$ .  $BD, CD$  交於  $D$  成  $\triangle DBC$ . 則又因  $BC = B'C'$ ,  $\therefore \triangle DBC \cong \triangle A'B'C'$  (a. s. a).  $\therefore DB = A'B'$ ,  $DC = A'C'$  (對應部分). 因  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $\therefore AB = DB$ ,  $AC = CD$  (普通公理 14). 聯  $AD$ , 得  $\triangle ABD$ ,  $\triangle ACD$  皆為二等邊三角形.  $\therefore \angle BAD = \angle BDA$ ,  $\angle CAD = \angle CDA$  (定理七).  $\therefore \angle BAD + \angle CAD = \angle BDA + \angle CDA$ , 即  $\angle BAC = \angle BDC$  (普通公理 2).  $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DBC$  (s. a. s. = s. a. s.)

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .

Q. E. D.

§ 51. 合同三角形之應用 合同三角形在平面幾何學中應

用至廣. 凡欲證兩線分相等, 或兩角相等,

常觀察此需證之線分及角是否合同三角

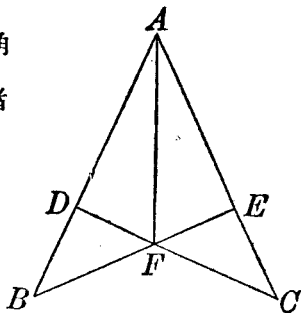
形之對應部分. 若然, 則常可應用以上諸

定理證之. 舉例如下:

〔假設〕  $AB = AC$ ,  $AD = AE$ .

$BE, CD$  交於  $F$ .

〔終決〕  $AF$  為  $\angle A$  之等分線.



〔證〕 在  $\triangle ABE, \triangle ACD$  中,  $AB = AC, AE = AD, \angle A$  爲公共,  $\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$ . (s. a. s. = s. a. s.)

$\therefore \angle ABE = \angle ACD, \angle AEB = \angle ADC$ . (對應部分)

$\therefore \angle BEC = \angle CDB$ . (等角的補角相等)

在  $\triangle BDF, \triangle CEF$  中,  $\angle BDF = \angle CEF, \angle DBF = \angle ECF$ , 又因  $AB = AC, AD = AE, \therefore DB = EC. \therefore \triangle DBF \cong \triangle ECF$  (a. s. a. = a. s. a.)

$\therefore DF = EF$  (對應部分). 於是在  $\triangle ADF, \triangle AEF$  中,  $DF = EF, AD = AE, AF$  公共,  $\therefore \triangle ADF \cong \triangle AEF$ . (s. s. s. = s. s. s.)

$\therefore \angle DAF = \angle EAF$  (對應部分). 即  $AF$  爲  $\angle A$  之等分線.  $Q. E. D.$

## 習 題 二

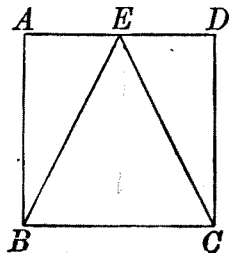
1. 二等邊三角形底角之等分角線相等

2. 二等邊三角形等邊上之中線相等.

3.  $\triangle ABC$  爲等邊三角形. 在三邊  $AB, BC, CA$  上各取點  $D, E, F$  令  $AD = BE = CF$ . 則  $\triangle DEF$  亦爲等邊三角形.

4. 四角形之四邊相等, 則其二對角線互相垂直.

5.  $ABCD$  爲正方形 (即四邊相等, 四角相等)  $E$  爲  $AD$  之中點, 則  $\angle EBC = \angle ECB$ .

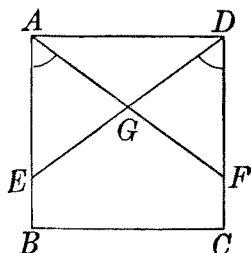


6  $ABCD$  爲正方形,  $BE=CF$ , 則

$$\angle EAF = \angle EDF$$

7.  $ABCD$  爲正方形,  $BE=CF$ ,  $AF$ ,

$DE$  交於  $G$ , 則  $AG=DG$ .



8.  $\triangle ABC$  爲等邊三角形. 在三邊

$AB, BC, CA$  上各取點  $D, E, F$  令  $AD=BE=CF$ . 聯  $AE, BF, CD$ .

$AE, BF$  交於  $G$ .  $BF, CD$  交於  $H$ .  $CD, AE$  交於  $K$ . 求證  $\triangle GHK$

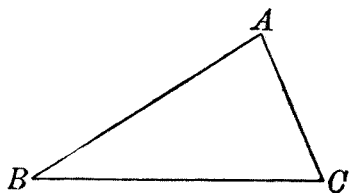
亦爲等邊三角形.

### 第三章 不等量

§ 52. 定理九 三角形三邊中任意二邊之和大於其他一邊.

〔假設〕  $\triangle ABC$

〔終決〕  $AB + AC > BC,$   
 $AB + BC > AC,$   
 $AC + BC > AB.$



〔證〕  $AB + AC$  即折線  $BAC$ , 而  $BC$  為線分.

$\therefore AB + AC > BC.$  (幾何公理六)

同理  $AB + BC > AC,$

$AC + BC > AB.$

Q. E. D.

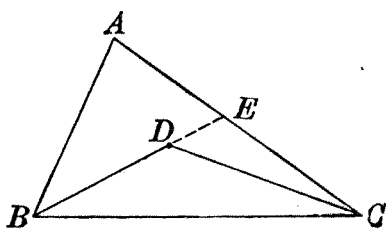
§ 53. 定理一〇 從三角形內一點至二頂點引線分所成三

角形之周比原三角形之周小.

〔假設〕  $D$  為  $\triangle ABC$

之任意一點.

〔終決〕  $DB + BC + CD$   
 $< AB + BC + CA.$





〔證〕 延長  $BD$  交  $AC$  於  $E$ .

則  $AB + AE > BE$ ,  $\therefore AB + AE + EC > BE + EC$ ,

即  $AB + AC > EB + EC$ .

又  $ED + EC > DC$ ,  $\therefore ED + EC + DB > DC + DB$ ,

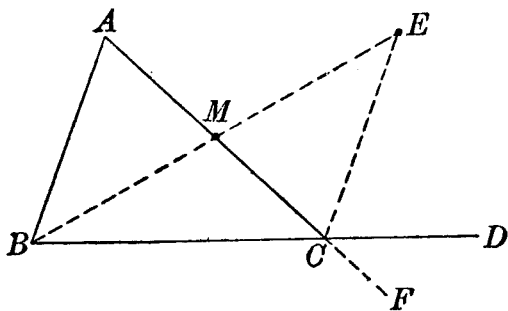
即  $EB + EC > DB + DC$ .

$\therefore AB + AC > DB + DC$ .

$\therefore AB + BC + CA > DB + BC + CD$ . Q. E. D.

§ 54. 定義二三 三角形外角之內對角 三角形任一外角不相鄰之內角曰此外角之內對角 (opposite interior angle).

§ 55. 定理一一 三角形任意一外角大於其內對角.



〔假設〕  $\angle ACD$  爲  $\triangle ABC$  之一外角.

〔終決〕  $\angle ACD > \angle A$ ,  $\angle ACD > \angle B$ .

〔證〕 在  $AC$  上取中點  $M$ . 聯  $BM$  延長至  $E$  令  $BM = ME$ .

聯  $CE$ . 在  $\triangle ABM$ ,  $\triangle CEM$  中,  $AM = MC$ ,  $BM = ME$ ,

$\angle AMB = \angle CME$ .  $\therefore \triangle ABM \cong CEM$ .  $\therefore \angle A = \angle ECM$ .

(對應部分)

但  $\angle ACD > \angle ECM$ .  $\therefore \angle ACD > \angle A$ . (普通公理 15)

同理延長  $AC$  至  $F$ , 可證  $\angle BCF > \angle B$ .

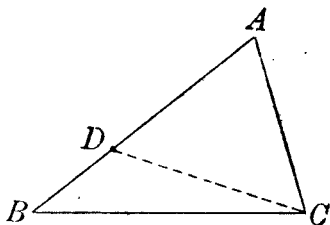
$\therefore \angle ACD = \angle BCF$ .  $\therefore \angle ACD > \angle B$ . Q. E. D.

§ 56. 定理一二 三角形二邊不等, 則其對角亦不等; 對大邊之角大於對小邊之角.

[假設]  $\triangle ABC$  中,  $AB > AC$ .

[終決]  $\angle C > \angle B$ .

[證] 在  $AB$  上取  $D$  點令  $AD = AC$ , 聯  $DC$ . 因  $D$  在  $AB$  上, 故  $CD$  在  $\angle C$  內,  $\therefore \angle C > \angle ACD$



(普通公理).

又因  $AC = AD$ ,  $\therefore \angle ACD = \angle ADC$ ,  $\therefore \angle C > \angle ADC$ .

但  $\angle ADC$  爲  $\triangle DCB$  之外角,  $\therefore \angle ADC > \angle B$ .

$\therefore \angle C > \angle B$ . Q. E. D.

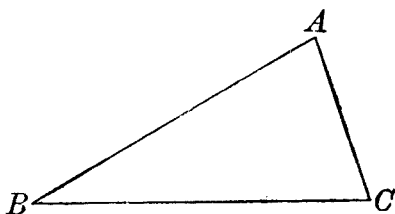
§ 57. 定理一三 三角形兩角不等, 則其對邊亦不等; 對大角之邊大於對小角之邊.

[假設]  $\triangle ABC$  中,  $\angle C > \angle B$ .

[終決]  $AB > AC$ .

〔證〕 若云  $AB = AC$ ,  
則依定理七,  $\angle B = \angle C$ , 與  
假設矛盾

若云  $AB < AC$ , 則依  
定理一二,  $\angle C < \angle B$ , 亦與  
假設矛盾.



$\therefore AB > AC$ .

Q. E. D.

§ 58. 窮舉證法 一定理中, 若其終決之反面, 能一一證其與假設矛盾時, 則其終決之為真確無疑. 如此證法名曰窮舉證法 (method of exhaustion).

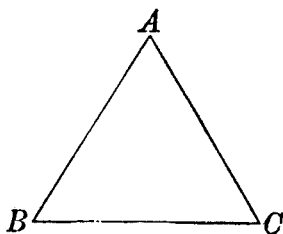
§ 59. 定理一四 若三角形之兩角相等, 則此三角形為二等邊三角形.

〔假設〕  $\triangle ABC$  中,  $\angle B = \angle C$ .

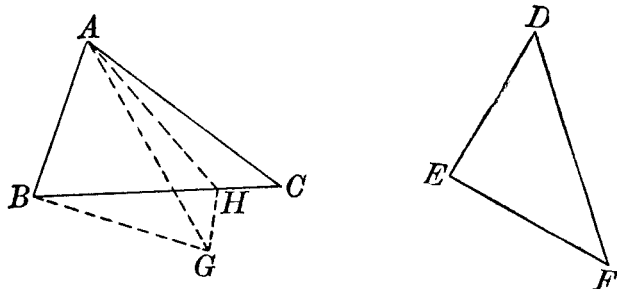
〔終決〕  $\triangle ABC$  為二等邊三角形.

〔證略. 學者試用窮舉證法自證之〕.

§ 60. 系 若三角形的三角相等,  
則此三角形為等邊三角形.



§ 61. 定理一五 兩三角形中, 一三角形之二邊各等於他三角形之二邊而其夾角不相等. 則其第三邊亦不等; 夾角大, 第三邊亦大.



(假設)  $\triangle ABC, \triangle DEF$  中,  $AB = DE, AC = DF, \angle A > \angle D$ .

[終決]  $BC > EF$ .

[證] 在  $\angle A$  內作  $AG$ , 令  $\angle BAG = \angle D$ , 且令  $AG = DF$ , 聯  $BG$ . 則因  $AB = DE, \therefore \triangle ABG \cong \triangle DEF. \therefore BG = EF$ .

因  $\angle A > \angle D, \therefore \angle A > \angle BAG, \therefore AG$  在  $\angle A$  內.

作  $\angle GAC$  之等分線  $AH$  交  $BC$  於  $H$ . 聯  $GH$ .

則因  $AC = DF. \therefore AG = AC, \therefore \triangle AGH \cong \triangle ACH$ .

$\therefore GH = CH$ .

在  $\triangle HBG$  中,  $HB + HG > BG,$  (定理九)

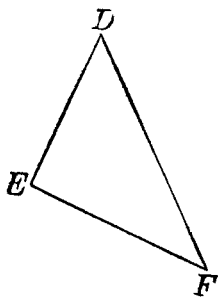
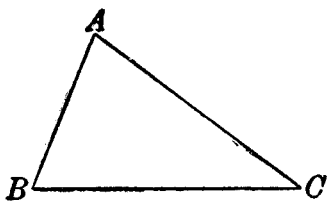
$\therefore HB + HC > BG.$  (普通公理 15)

即  $BC > BG.$

$\therefore BC > EF.$  Q. E. D.

§ 62. 定理一六 兩三角形中, 一三角形之二邊各等於他三角形之二邊而其第三邊不等, 則其夾角亦不等; 第三邊大, 夾角亦

大.



〔假設〕  $\triangle ABC, \triangle DEF$  中,  $AB = DE, AC = DF, BC > EF$ .

〔終決〕  $\angle A > \angle D$ .

〔證〕 若云  $\angle A = \angle D$ , 則因  $AB = DE, AC = DF$ ,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF, \therefore BC = EF$  將與假設矛盾.

若云  $\angle A < \angle D$ , 則因  $AB = DE, AC = DF$ ,

$\therefore BC < EF$  亦將與假設矛盾.

$\therefore \angle A > \angle D$ .

Q. E. D

### 習題三

1.  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $D$  爲  $AB$  上任意一點. 求證  $DC > DB$ .

2.  $\triangle ABC$  中,  $AB > AC$ ,  $\angle B, \angle C$  之等分線交於  $D$ . 求證  $DB > DC$ .

3. 四邊形兩對角線之和比其周小而比其半周大.
4. 二等邊三角形底上任意點與頂點所聯線分比各邊小.
5. 三角形二邊之和比第三邊上中線之二倍大.
6. 三角形三中線之和小於三角形之周.
7.  $O$  爲  $\triangle ABC$  內任意一點, 則  $\angle BOC > \angle BAC$ .
8.  $AD$  爲  $\triangle ABC$  之中線,  $E$  爲  $AD$  上任意一點.

若  $AB > AC$ , 則  $EB > EC$ .

## 第四章 平行線

§ 63. 定義二四 平行線 在同平面內，不相交之二直線曰平行線 (parallel lines).

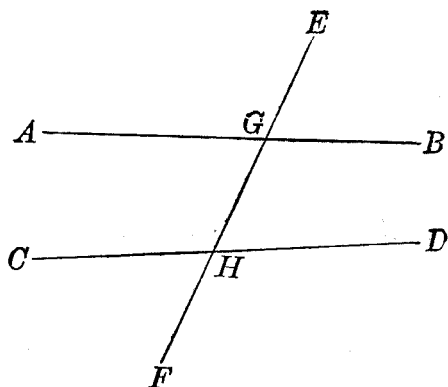
〔註〕 所謂直線，指無限長說。二線分不相交，未必平行。但當二線分兩端各延長至無限大而仍不相交，則此二線分亦曰平行。依平行線之定義，可知二直線之位置關係有二種，或平行，或相交。不平行即相交，不相交即平行。 $AB, CD$  兩線平行，寫作  $AB \parallel CD$ 。 $AB, CD$  兩線相交寫作  $AB \neq CD$ 。

§ 64. 幾何公理九 相交二直線，不能平行於同一直線。由此更可推得數事：

- (a) 一直線與一雙平行線之一平行，則必與其二亦平行。
- (b) 一直線與一雙平行線之一相交，則必與其二亦相交。
- (c) 過一直線外一點之此直線之平行線，有一無二。

§ 65. 定義二五 截線 內角 外角 同位角 內錯角  
外錯角 同旁內角 同旁外角 一直線與其他諸直線相交，則此直線曰其他諸直線之截線 (transversal)。

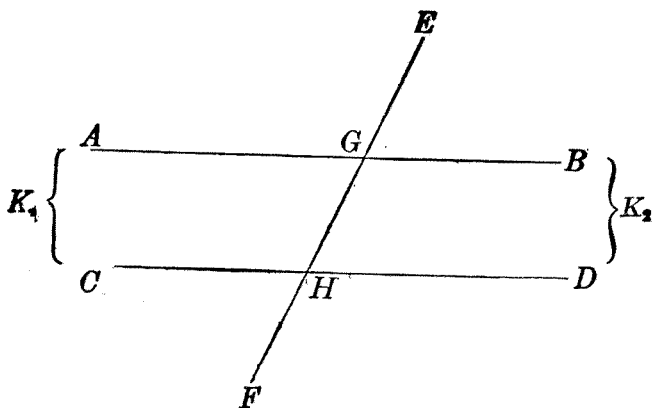
一截線與兩直線所成諸角有各種名稱。如圖  $EF$  截  $AB, CD$  於  $G, H$ 。所得諸角中，



$\angle AGF$ ,  $\angle BGF$ ,  $\angle CHE$ ,  $\angle DHE$  曰內角 (interior angles).  
 $\angle AGE$ ,  $\angle BGE$ ,  $\angle CHF$ ,  $\angle DHF$  曰外角 (exterior angles).  
 $\angle AGF$  及  $\angle DHE$ ,  $\angle BGF$  及  $\angle CHE$  曰互為內錯角 (alternate interior angles).  $\angle AGE$  及  $\angle DHF$ ,  $\angle BGE$  及  $\angle CHF$  曰互為外錯角 (alternate exterior angles).  $\angle AGE$  及  $\angle CHE$ ,  $\angle BGE$  及  $\angle DHE$ ,  $\angle AGF$  及  $\angle CHF$ ,  $\angle BGF$  及  $\angle DHF$  曰互為同位角 (corresponding angles).  $\angle AGF$  及  $\angle CHE$ ,  $\angle BGF$  及  $\angle DHE$  曰互為同旁內角 (interior angles on the same side).  $\angle AGE$  及  $\angle CHF$ ,  $\angle BGE$  及  $\angle DHF$  曰互為同旁外角 (exterior angles on the same side).

**§ 66. 定理一七** 二直線為一截線所截，若所得一雙內錯角相等，則此二直線平行。





〔假設〕  $EF$  交  $AB$  於  $G$ , 交  $CD$  於  $H$ , 而  $\angle AGF = \angle DHE$ .

〔終決〕  $AB \parallel CD$ .

〔證〕 若云  $AB \nparallel CD$  而在遠處有交點  $K$ , 則  $EF$  與  $AB, CD$  三線圍成一三角形  $GHK$ .

若  $K$  在左側如圖  $K_1$ , 則  $\angle AGF < \angle DHE$  (定理一一).

若  $K$  在右側如圖  $K_2$ , 則  $\angle AGF > \angle DHE$  (定理一一).

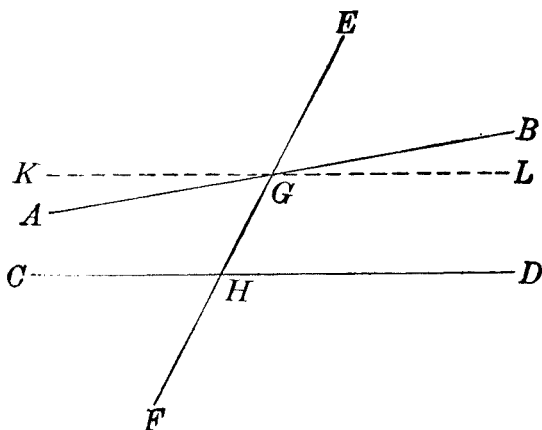
皆與假設矛盾.  $\therefore AB \parallel CD$ . Q. E. D.

§ 67. 系一 二直線為一截線所截, 若所得一雙外錯角, 或同位角相等, 則此二直線平行.

§ 68. 系二 二直線為一截線所截, 若所得一雙同旁內角或同旁外角互為補角, 則此二直線平行.

§ 69. 系三 垂直於同一直線之二直線互相平行

§ 70. 定理一八 二直線爲一截線所截,若所得一雙內錯角不等,則此二直線不平行.

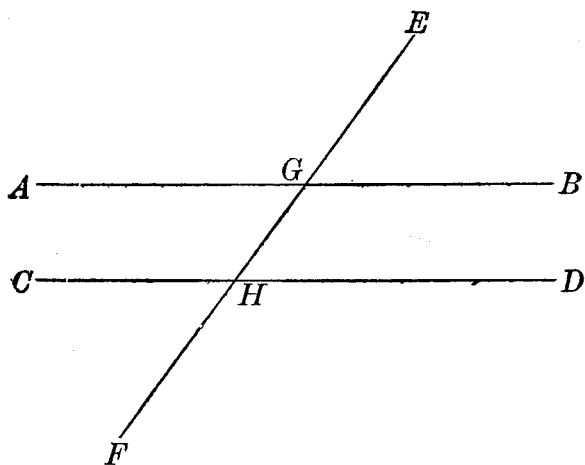


[假設]  $EF$  交  $AB$  於  $G$ , 交  $CD$  於  $H$ , 而  
 $\angle AGH \neq \angle GHD$ .

[終決]  $AB \nparallel CD$

[證] 過  $G$  作  $KL$  令  $\angle KGH = \angle GHD$ . 則  $KL \parallel CD$ .  
 因  $\angle AGH \neq \angle GHD$ ,  $\therefore \angle AGH \neq \angle KGH$ . 故  $AB$  不合於  
 $KL$ .  $\therefore AB \nparallel CD$ . (幾何公理九)  $Q. E. D.$

§ 71. 定理一九 二平行線爲一截線所截,所得各雙內錯角必相等



〔假設〕  $AB \parallel CD$ ,  $EF$  交  $AB$  於  $G$ , 交  $CD$  於  $H$ .

〔終決〕  $\angle AGF = \angle DHE$ ,  $\angle BGF = \angle CHE$ .

〔證〕 若云  $\angle AGF \neq \angle DHE$ , 則依定理  $AB \nparallel CD$ , 與假設矛盾.  $\therefore \angle AGF = \angle DHE$ . 同理  $\angle BGF = \angle CHE$ .

Q. E. D.

§ 72. 系一 二平行線爲一截線所截, 所得各雙外錯角及同位角相等.

§ 73. 系二 二平行線爲一截線所截, 所得各雙同旁內角及同旁外角互爲補角.

§ 74. 系三 一直線垂直於二平行線之一, 亦必垂直於其二.

§ 75. 定義二六 公垂線 垂直於二平行線之直線，其介於二平行線間之線分曰此二平行線之公垂線 (common perpendicular).

§ 76. 倒定理 否定理 倒否定理 二定理中，一定理之假設為又一定理之終決，一定理之終決為又一定理之假設，則此二定理曰互為倒定理 (converse theorem).

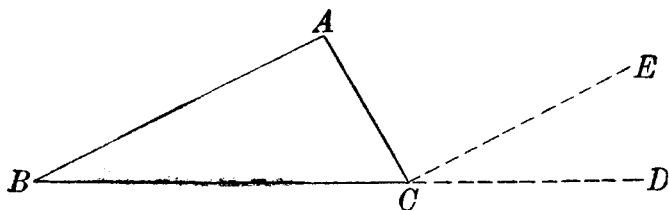
二定理中，一定理之假設為又一定理假設之反面，一定理之終決為又一定理終決之反面，則此二定理曰互為否定理 (obverse theorem).

二定理中，一定理之假設為又一定理終決之反面，一定理之終決為又一定理假設之反面，則此二定理曰互為倒否定理 (contraposition).

定理一七與定理一九互為倒定理。定理一七與定理一八互為否定理。定理一八與定理一九互為倒否定理。

互為倒定理之二定理並不同時成立。互為否定理之二定理，亦不同時成立。但互為倒否定理之二定理，卻同時成立。故定理一九即根據定理一八直接證明。其實此二定理的意義完全相同，不過說法不同而已。

§ 77. 定理二〇. 三角形三角之和等於二直角



〔假設〕  $\triangle ABC$ .

〔終決〕  $\angle A + \angle B + \angle C = 2R\angle$ .

〔證 延長  $BC$  成外角  $\angle ACD$ . 過  $C$  作  $CE$  令  $CE \parallel BA$ .

則  $\angle ACE = \angle A$  (內錯角相等),

$\angle DCE = \angle B$  (同位角相等).

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle ACE + \angle DCE + \angle ACB.$$

因  $BCD$  爲直線,  $\therefore \angle ACE + \angle DCE + \angle ACB = st\angle$ .

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = st\angle = 2R\angle.$$

Q. E. D.

§ 78. 系一 三角形之外角等於其內對角之和.

§ 79. 系二 三角形之三角中至多只有一直角或一鈍角.

§ 80. 系三 三角形之三角中,若一角爲直角,則其餘二角互爲餘角.

§ 81. 系四 兩三角形中,若有兩雙角各相等,則其第三雙角亦相等

§ 82. 系五 兩三角形中,有兩雙角各相等,及一雙等角之對

邊亦相等，則此兩三角形為合同圖(本定理簡寫為  $a.a.s. = a.a.s.$ )。

§ 83. 系六 等邊三角形之各角為  $\frac{2}{3}R\angle$ 。

§ 84. 系七 從直線外一點至此直線僅有一垂線。

§ 85. 定義二七 直角三角形 三角形三角之中有一角為直角者曰直角三角形 (right-angled triangle)。直角對邊曰斜邊 (hypotenuse)。其他二邊即曰邊 (side)。

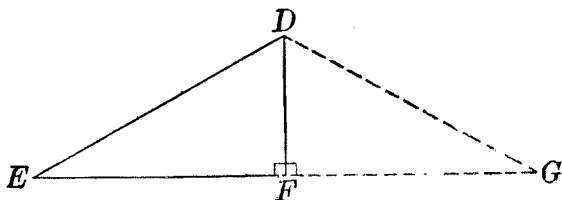
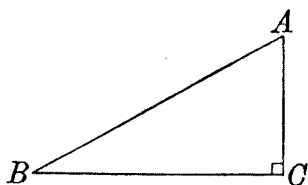
§ 86. 定義二八 鈍角三角形 三角形三角之中有一角為鈍角者曰鈍角三角形 (obtuse-angled triangle)。

§ 87. 定義二九 銳角三角形 三角形之三角均為銳角者曰銳角三角形 (acute-angled triangle)。

§ 88. 定理二一 兩個直角三角形中，有一雙邊及一雙斜邊各相等，則此兩三角形是合同圖。

〔假設〕  $\triangle ABC, \triangle DEF$  中，  
 $\angle C, \angle F$  是直角， $AB = DE$ ，  
 $AC = DF$ 。

〔終決〕  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。



〔證〕 延長  $EF$  至  $G$  令  $FG = BC$ . 聯  $DG$ . 則因  $\angle DFG = \angle C = R\angle$ ,  $DF = AC$ ,  $\therefore \triangle DFG \cong \triangle ABC$ .

$\therefore DG = AB$ . 但  $AB = DE$ ,  $\therefore DE = DG$ .

$\therefore \angle E = \angle G$ . 又  $\angle DFE = \angle DFG = R\angle$ ,  $DF$  公共,

$\therefore \triangle DFE \cong \triangle DFG$ .  $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ .  $Q. E. D.$

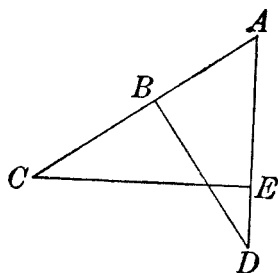
〔註〕 本定理常簡寫為  $s. s. R = s. s. R$ .

## 習 題 四

1. 圖中  $CE \perp AD$ ,  $DB \perp AC$ .

求證  $\angle C = \angle D$ .

2. 從直角三角形直角頂點  $A$  向斜邊作垂線  $AD$ , 則  $\angle BAD = \angle C$ ,  $\angle CAD = \angle B$ .



3. 二等邊三角形等邊上的兩個高相等.

4. 過二等邊三角形頂點作底之平行線, 此線等分頂角之外角.

5.  $\triangle ABC$  為二等邊三角形,  $BC$  為底. 從  $BC$  上任意一點  $D$  作  $BC$  之垂線交  $AB$ ,  $AC$  (或延線) 於  $E$ ,  $F$ . 求證  $\triangle AEF$  亦為二等邊三角形.

6. 從  $\triangle ABC$  之頂點  $A$  向  $BC$  上作二線分  $AD$ ,  $AE$ , 令

$\angle BAD = \angle C$ ,  $\angle CAE = \angle B$ . 求證  $\triangle ADE$  是二等邊三角形.

7. 三角形二外角等分線所夾之角等於第三外角之半.

8. 設  $\triangle ABC$  中  $\angle A = 2\angle B = 3\angle C$ . 求各角.

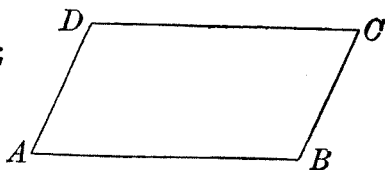
(註) 角之量法在幾何中常以直角為單位. 如(8)題中所謂求各角, 即求  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  各為直角之幾倍或幾分之幾也. 但為便利起見, 亦可以“度”, “分”, “秒”表之. “度”, “分”, “秒”各簡記為“ $^\circ$ ”, “ $'$ ”, “ $''$ ”.  $1R\angle = 90^\circ$ ,  $1^\circ = 60'$ ,  $1' = 60''$ .



## 第五章 平行四邊形

§ 89. 定義三〇 平行四邊形 兩雙對邊各互相平行之四角形曰平行四邊形 (parallelogram).

如圖  $AB \parallel DC$ ,  $AD \parallel BC$ ,  
則  $ABCD$  爲平行四邊形, 簡寫爲  
 $\square ABCD$ . 或更簡寫爲  $\square AC$ ,  
或  $\square BD$ .



平行四邊形之任意一雙對邊可爲底, 其間公垂線爲高.

§ 90. 定義三一 槲形 四角形之一雙對邊平行, 一雙對邊不平行者曰槲形 (trapezoid). 一雙平行邊曰底 (base). 一雙不平行邊曰邊 (side). 兩底間之公垂線曰高 (altitude).

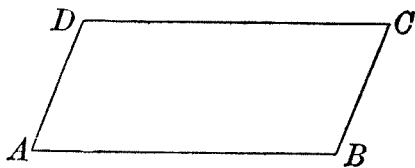
§ 91. 定理二二 平行四邊形對角相等.

[假設]  $\square ABCD$ .

[終決]  $\angle A = \angle C$ ,

$\angle B = \angle D$ .

[證] 因  $AB \parallel DC$ ,



$\therefore \angle A$  爲  $\angle D$  之補角.

因  $AD \parallel BC$ ,  $\therefore \angle C$  爲  $\angle D$  之補角.

$\therefore \angle A = \angle C$ .

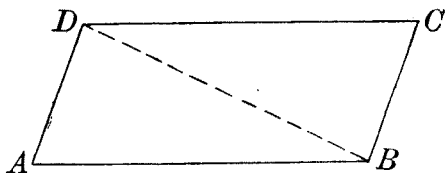
同理

$\angle B = \angle D$ .

Q. E. D.

§ 92. 系 平行四邊形中有一角爲直角,則各角皆爲直角.

§ 93. 定理二三 平行四邊形對邊相等.



〔假設〕  $\square ABCD$ .

〔終決〕  $AB = DC, AD = BC$ .

〔證〕 聯  $BD$ . 在  $\triangle ABD, \triangle CBD$  中,

$\because AB \parallel DC, \therefore \angle ABD = \angle CDB$ . (內錯角相等)

$\because AD \parallel BC, \therefore \angle ADB = \angle CBD$ . (內錯角相等)

又  $BD$  爲公共,  $\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$ .

$\therefore AB = DC, AD = BC$ . Q. E. D.

§ 94. 系 平行四邊形中,二鄰邊相等,則四邊皆相等

§ 95. 定義三二 矩形 四角爲直角之平行四邊形曰矩形

(rectangle).

§ 96. 定義三三 菱形 四邊皆相等之平行四邊形曰菱形 (rhombus).

§ 97. 定義三四 正方形 平行四邊形之四邊均相等而四角皆為直角者曰正方形 (square).

§ 98. 定理二四 四角形之兩雙對邊各相等，則此四角形為平行四邊形.

§ 99. 定理二五 四角形之一雙對邊平行且相等，則此四角形為平行四邊形.

§ 100. 定理二六 平行四邊形之對角線互相等分.

§ 101. 定理二七 四角形之二對角線互相等分，則此四角形為平行四邊形.

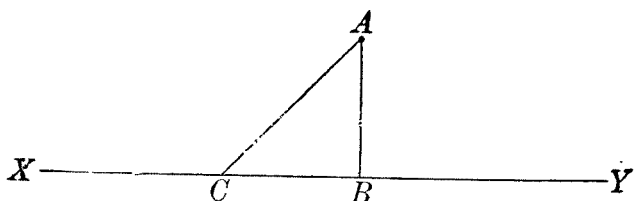
§ 102. 定理二八 矩形之二對角線相等.

§ 103. 定理二九 平行四邊形之二對角線若相等，則此平行四邊形為矩形.

§ 104. 系 直角三角形斜邊中點，與三頂點等距.

(以上諸定理，學者試自證之).

§ 105. 定理三〇 從直線外一點向此直線上所作諸線分，垂線為最小.



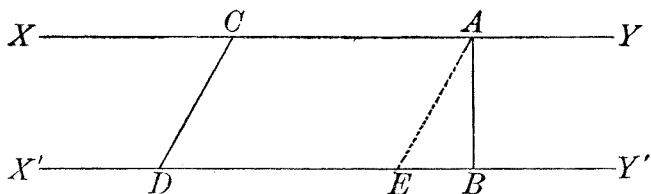
【假設】  $AB$  為從  $A$  至  $XY$  之垂線,  $AC$  為斜線.

【終決】  $AB < AC$

【證】  $\angle ABC = R\angle$ ,  $\angle ACB < R\angle$

$\therefore \angle ACB < \angle ABC$ .  $\therefore AB < AC$  Q. E. D.

§ 106. 定理三一 介於二平行線間之諸線分, 公垂線為最小.



【假設】  $XY \parallel X'Y'$ ,  $AB$  為其間之公垂線,  $CD$  為斜線.

【終決】  $AB < CD$ .

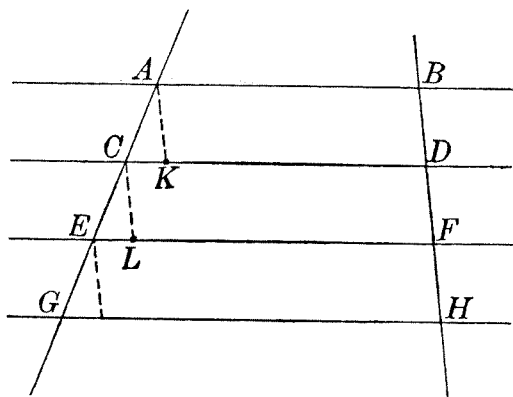
【證】 過  $A$  作  $AE \parallel CD$ . 則得  $\square AEDC$   $\therefore AE = CD$ .

但  $AB < AE$ .  $\therefore AB < CD$ . Q. E. D.

§ 107. 定義三五 距離 二點所聯線分, 曰二點間之距離 (distance between two points). 從一點至一直線所作垂線, 曰一

點與一直線之距離 (distance between a point and a line). 二平行線間之公垂線曰二平行線之距離 (distance between two parallel lines).

§ 108. 定理三二 諸平行線若將任意一截線分成相等部分, 則將其他一切截線亦分成相等部分.



〔假設〕  $AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH$ ,  $AC = CE = EG$ .

〔終決〕  $BD = DF = FH$ .

〔證〕 作  $AK, CL$  平行於  $BH$ , 則  $AKDB, CLFD$  皆為平行四邊形.  $\therefore AK = BD, CL = DF$ . 在  $\triangle ACK, \triangle CEL$  中,

$\because CD \parallel EF, \therefore \angle ACK = \angle CEL$ .

$\because AK \parallel CL, \therefore \angle CAK = \angle ECL$ .

又  $AC = CE$ .

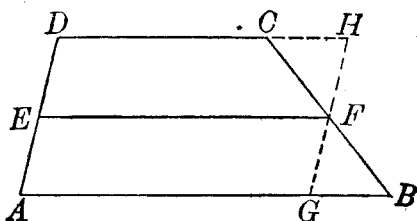
$$\therefore \triangle ACK \cong \triangle CEL, \therefore AK = CL. \therefore BD = DF.$$

同理可證  $BD = DF = FH.$  Q. E. D.

§ 109. 系一 過梯形一邊中點所作底之平行線必過又一邊之中點.

§ 110. 系二 過三角形一邊中點所作第二邊之平行線必過第三邊之中點.

§ 111. 定理三三 梯形兩邊中點所聯線分 (1) 平行於底 (2) 等於兩底之半和.



〔假設〕  $E, F$  為梯形  $ABCD$  兩邊  $AD, BC$  之中點.

〔終決〕 (1)  $EF \parallel AB \parallel DC.$

$$(2) \quad EF = \frac{1}{2}(AB + DC).$$

〔證〕 過  $F$  作  $AD$  之平行線交  $AB$  於  $G$ , 交  $DC$  之延線於  $H$ .

在  $\triangle FGB, \triangle FHC$  中, 因  $AB \parallel DH, \therefore \angle FBG = \angle FCH,$   
又  $\angle GFB = \angle HFC, BF = FC. \therefore \triangle FGB \cong \triangle FHC,$

$$\therefore GF = FH, GB = CH.$$

$\therefore AGHD$  爲平行四邊形,  $\therefore AD = GH.$

$$\text{今 } AE = ED = \frac{1}{2}AD, GF = FH = \frac{1}{2}GH, \therefore AE = GF.$$

又因  $AE \parallel GF$ ,  $\therefore AGFE$  爲平行四邊形.

$$\therefore EF \parallel AB \parallel DC, \dots\dots\dots(1) \quad Q. E. D.$$

因  $AGFE, EFHD$  皆爲平行四邊形,

$$\therefore EF = AG = DH,$$

$$\therefore 2EF = AG + DH$$

$$= AB - GB + DC + CH$$

$$= AB + DC.$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}(AB + DC), \dots\dots\dots(2) \quad Q. E. D$$

§ 112. 系 三角形兩邊中點所聯線分 (1) 平行於第三邊.(2)

等於第三邊之半.

## 習 題 五

1. 在  $\square ABCD$  四邊  $AB, BC, CD, DA$  上各取點  $E, F, G, H$

令  $AE = CG, BF = DH$ , 則  $EFGH$  亦爲平行四邊形.

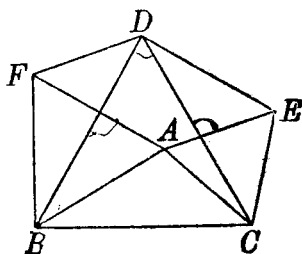
2. 若平行四邊形之兩個對角線相等. 則此平行四邊形爲矩

形

3. 在線分  $AB$  之兩旁各作  $\square ABCD$  及  $\square ABEF$ , 則  $CDFE$  亦為平行四邊形.

4. 菱形之對角線互相垂直.

5.  $\triangle ABC$  為任意三角形. 在三邊  $AB, AC, BC$  上各作正三角形  $\triangle ABF, \triangle ACE, \triangle BCD$  如圖. 則  $AEDF$  為平行四邊形.



6. 梯形  $ABCD$  之兩邊  $AB, CD$  若相等, 則  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle C$ .

7.  $D$  為  $\triangle ABC$  一邊  $BC$  之中點.  $E$  為中線  $AD$  之中點  $BE$  延線交  $AC$  於  $F$ . 則  $FC = 2AF$ .

8.  $ABCD$  為任意四邊形.  $E, F, G, H$  為順次四邊之中點. 則  $EFGH$  為平行四邊形.

9.  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ . 在  $AB$  上取  $D$ ,  $AC$  之延線上取  $E$ . 令  $BD = CE$ .  $DE$  交  $BC$  於  $F$ . 則  $F$  為  $DE$  之中點.

10. 三角形之二中線相等, 則此三角形為二邊等三角形



## 第六章 三角形之心

§ 113. 定義三六 共點線 過公共一點之諸直線曰共點線 (concurrent lines).

§ 114. 定義三七 共線點 在公共一直線上之諸點曰共線點 (colinear points).

§ 115. 定理三四 三角形之三個中線為共點線.

〔假設〕  $AA', BB', CC'$  為

$\triangle ABC$  之中線.

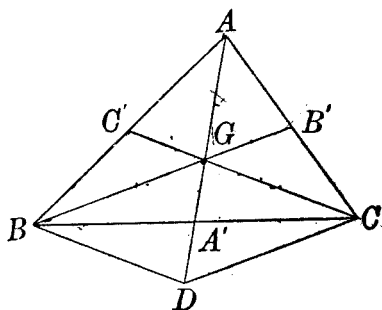
〔終決〕  $AA', BB', CC'$  共

點.

〔證〕 設  $BB', CC'$  交於  $G$ .

聯  $AG$  延長至  $D$  令  $AG = GD$ .

聯  $BD, CD$ .



在  $\triangle ABD$  中,  $AC' = C'B, AG = GD, \therefore C'G \parallel BD$ .

在  $\triangle ACD$  中,  $AB' = BC, AG = GD, \therefore B'G \parallel CD$ .

故  $BDCG$  為平行四邊形.  $\therefore BC, GD$  互相等分. 即  $GD$  過  $BC$  之中點  $A'$ .  $\therefore AD$  與  $AA'$  重合.  $\therefore AA'$  亦過  $G$  點.

$\therefore AA', BB', CC'$  共點.

Q. E. D.

§ 116. 系 三角形三中線所共之點與頂點之距離等於其與對邊中點距離之二倍.

如上圖  $AG = GD = 2GA', BG = DC = 2GB', CG = DB = 2GC'$ .

§ 117. 定義三八 重心 三角形三中線所共之點曰三角形之重心 (centre of gravity or centroid).

§ 118. 定理三五 三角形之三個等分角線共點.

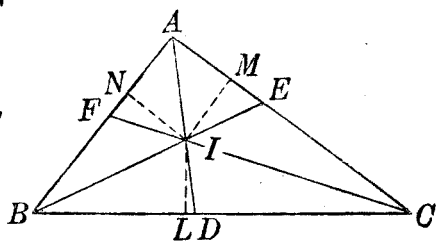
〔假設〕  $AD, BE, CF$

爲  $\triangle ABC$  之等分角線.

〔終決〕  $AD, BE, CF$

共點.

〔證〕 設  $BE, CF$  交



於  $I$ . 作  $IL \perp BC, IM \perp AC, IN \perp AB$ .

則在  $\triangle IBL, \triangle IBN$  中,

$\angle IBL = \angle IBN, \angle ILB = \angle INB (R\angle), IB$  爲公共邊,

$\therefore \triangle IBL \cong \triangle IBN, \therefore IL = IN$ .

在  $\triangle ICL, \triangle ICM$  中,

$\angle ICL = \angle ICM, \angle ILC = \angle IMC (R\angle), IC$  爲公共邊,

$\therefore \triangle ICL \cong \triangle ICM, \therefore IL = IM$

$\therefore IM = IN$ . 聯  $AI$ .

在  $\triangle IAM$ ,  $\triangle IAN$  中,

$\angle IMA = \angle INA = R\angle$ ,  $IM = IN$ ,  $AI$  爲公共邊,

$\therefore \triangle IAM \cong \triangle IAN$  (s. s. R. = s. s. R.)

$\therefore \angle IAM = \angle IAN$ . 即  $AI$  爲  $\angle A$  之等分線.

$\therefore AI$  與  $AD$  重合 (角之等分線僅有一個). 即  $AD$  亦過  $I$ .

$\therefore AD, BE, CF$  共點. Q. E. D.

§ 119. 系 三角形三等分角線所共之點與此三角形之三邊距離相等.

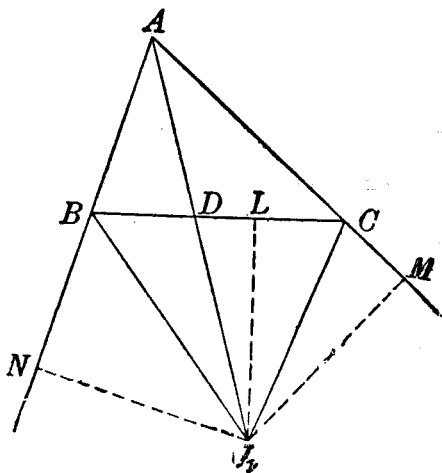
§ 120. 定義三九 內心 三角形三等分角線所共之點曰三角形之內心 (in-centre).

§ 121. 定理三六 三角形一角之等分線及其他兩外角之等分線共點.

[假設]  $AD$  爲  $\angle A$  之等分線,  $BI_1, CI_1$  爲  $\angle B, \angle C$  之外角等分線.

[終決]  $AD, BI_1, CI_1$  共點.

[證法同定理三五, 學者自證之]



§ 122. 系 三角形

一角之等分線與其他兩外角之等分線所共之點與三邊距離相等。

§ 123. 定義四〇 旁心 三角形一角之等分線與其他兩外角之等分線所共之點曰三角形之旁心 (es-centre). 一三角形有三旁心.

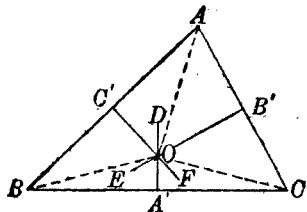
§ 124. 定義四一 垂直等分線 過線分中點之垂線曰此線分之垂直等分線 (perpendicular bisector).

§ 125 定理三七 三角形三邊之垂直等分線共點.

[假設]  $A'D, B'E, C'F$  各為  $BC, AC, AB$  之垂直等分線.

[終決]  $A'D, B'E, C'F$  共點.

[證] 設  $B'E, C'F$  交於  $O$ . 聯  $OA, OB, OC$ .



在  $\triangle AOC', \triangle BOC'$  中,  $AC' = C'B, \angle AC'O = \angle BC'O (R\angle)$ ,  $C'O$  為公共邊,  $\therefore \triangle AOC' \cong \triangle BOC'$ ,  $\therefore OA = OB$ .

在  $\triangle AOB', \triangle COB'$  中,  $AB' = B'C, \angle AB'O = \angle CB'O (R\angle)$ ,  $B'O$  為公共邊,  $\therefore \triangle AOB' \cong \triangle COB'$ ,  $\therefore OA = OC$ .

$$\therefore OB = OC.$$

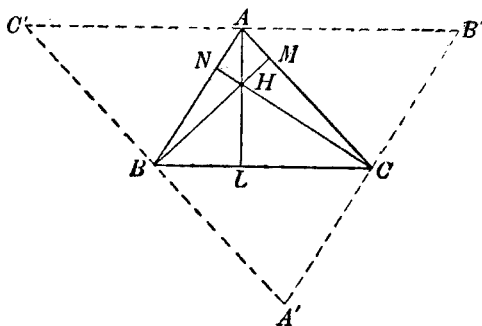
聯  $OA'$ , 在  $\triangle BOA', \triangle COA'$  中,  $OB = OC, BA' = A'C, A'O$  為公共邊,  $\therefore \triangle BOA' \cong \triangle COA'$ ,  $\therefore \angle BA'O = \angle CA'O$ .  $\therefore A'O$  合於  $A'D$  (角之等分線只有一個). 即  $A'D$  亦過  $O$  點.

$\therefore A'D, B'E, C'F$  共點. Q. E. D.

§ 126. 系 三角形三邊垂直等分線所共之點與三角形之三頂點距離相等.

§ 127. 定義四二 外心 三角形三邊垂直等分線所共之點曰三角形之外心 (circum-centre).

§ 128. 定理三八 三角形之三個高共點.



〔假設〕  $AL, BM, CN$  爲  $\triangle ABC$  之高.

〔終決〕  $AL, BM, CN$  共點.

〔證〕 過頂點  $A, B, C$  作對邊之平行線  $B'C', A'C', A'B'$  成  $\triangle A'B'C'$ . 則  $ABCB', BCAC', CABA'$  皆爲平行四邊形. 故  $AB' = BC = C'A$ , 即  $A$  爲  $C'B'$  之中點, 同理  $B, C$  各爲  $A'C', A'B'$  之中點. 又  $AL \perp BC$ ,  $\therefore AL \perp C'B'$ ,  $\therefore AL$  爲  $B'C'$  之垂直等分線. 同理  $BM, CN$  各爲  $A'C', A'B'$  之垂直等分線. 故  $AL, BM, CN$  爲  $\triangle A'B'C'$  三邊之垂直等分線.

$\therefore AL, BM, CN$  共點. Q. E. D.

**§ 129. 定義四三 垂心** 三角形三個高所共之點曰三角形之垂心 (orthocentre).

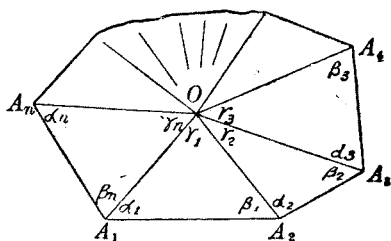
〔註〕 三角形之重心及內心必在形內，三角形之三旁心必在形外，三角形之外心及垂心有時在形內，有時在形外。銳角三角形之外心及垂心在形內；鈍角三角形之外心及垂心在形外；直角三角形之外心為斜邊之中點，其垂心即直角頂點。

## 第七章 多角形

### § 130. 定理三九 $n$ 角

形  $n$  個角之和等於直角之  
( $2n-4$ ) 倍。

〔假設〕  $A_1A_2A_3\cdots A_n$  爲  
 $n$  角形。



〔終決〕  $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \cdots + \angle A_n = (2n-4)R\angle$ 。

〔證〕 在  $A_1A_2A_3\cdots A_n$  內任取一點  $O$ 。聯  $OA_1, OA_2, OA_3, \cdots, OA_n$ 。成  $\triangle OA_1A_2, \triangle OA_2A_3, \triangle OA_3A_4, \cdots, \triangle OA_nA_1$  等  $n$  個三角形

在  $\triangle OA_1A_2$  內,  $\angle \alpha_1 + \angle \beta_1 + \angle \gamma_1 = 2R\angle$ ,

在  $\triangle OA_2A_3$  內,  $\angle \alpha_2 + \angle \beta_2 + \angle \gamma_2 = 2R\angle$ ,

在  $\triangle OA_3A_4$  內,  $\angle \alpha_3 + \angle \beta_3 + \angle \gamma_3 = 2R\angle$ ,

.....

在  $\triangle OA_nA_1$  內,  $\angle \alpha_n + \angle \beta_n + \angle \gamma_n = 2R\angle$ 。

$$\therefore \left. \begin{aligned} &\angle \alpha_1 + \angle \alpha_2 + \angle \alpha_3 + \cdots + \angle \alpha_n \\ &+ \angle \beta_1 + \angle \beta_2 + \angle \beta_3 + \cdots + \angle \beta_n \\ &+ \angle \gamma_1 + \angle \gamma_2 + \angle \gamma_3 + \cdots + \angle \gamma_n \end{aligned} \right\} = 2nR\angle$$

但  $\angle\gamma_1 + \angle\gamma_2 + \angle\gamma_3 + \cdots + \angle\gamma_n = 4R\angle$ .

$$\begin{aligned} \therefore \angle\alpha_1 + \angle\alpha_2 + \angle\alpha_3 + \cdots + \angle\alpha_n + \angle\beta_1 + \angle\beta_2 \\ + \angle\beta_3 + \cdots + \angle\beta_n = (2n-4)R\angle. \end{aligned}$$

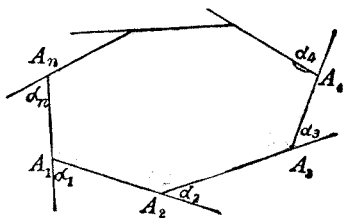
即  $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \cdots + \angle A_n = (2n-4)R\angle$ . Q. E. D

§ 131. 系 等角  $n$  角形每一角等於  $\frac{2n-4}{n}R\angle$ .

§ 132. 定理四○ 任意多

角形各外角之和等於四直角.

[假設]  $A_1A_2A_3 \cdots A_n$  為  $n$  角形.  $\angle\alpha_1, \angle\alpha_2, \angle\alpha_3, \cdots, \angle\alpha_n$  為其各外角.



[終決]  $\angle\alpha_1 + \angle\alpha_2 + \angle\alpha_3 + \cdots + \angle\alpha_n = 4R\angle$ .

[證] 設  $\angle\alpha_1, \angle\alpha_2, \angle\alpha_3, \cdots, \angle\alpha_n$  之相鄰內角各為  $\angle\beta_1, \angle\beta_2, \angle\beta_3, \cdots, \angle\beta_n$ .

$$\text{則 } \angle\alpha_1 + \angle\beta_1 = 2R\angle,$$

$$\angle\alpha_2 + \angle\beta_2 = 2R\angle,$$

$$\angle\alpha_3 + \angle\beta_3 = 2R\angle,$$

.....

$$\angle\alpha_n + \angle\beta_n = 2R\angle.$$

$$\therefore \angle\alpha_1 + \angle\alpha_2 + \angle\alpha_3 + \cdots + \angle\alpha_n$$

$$+ \angle\beta_1 + \angle\beta_2 + \angle\beta_3 + \cdots + \angle\beta_n = 2nR\angle.$$



因  $\angle\beta_1 + \angle\beta_2 + \angle\beta_3 + \cdots + \angle\beta_n = (2n - 4)R\angle.$

故  $\angle\alpha_1 + \angle\alpha_2 + \angle\alpha_3 + \cdots + \angle\alpha_n = 4R\angle. \quad Q. E. D.$

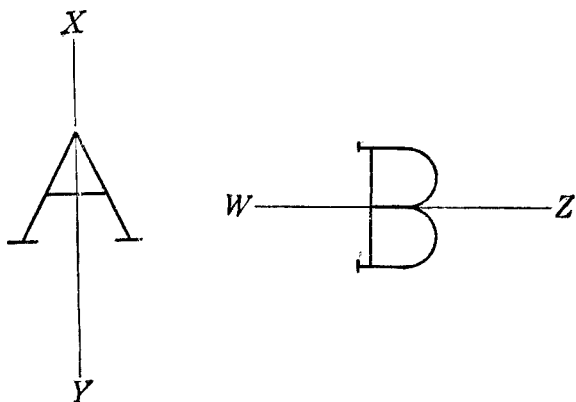
§ 133. 系 等角  $n$  角形每一外角等於  $\frac{4}{n}R\angle.$

## 習 題 六

1. 求正六角形每一內角及每一外角
2. 已知五角形之四個角各為  $105^\circ$ , 求其他一角
3. 一多角形之各角均為  $144^\circ$ , 則此形為幾角形?
4. 一凸多角形至多只有三個角是銳角. 何故?

## 第八章 對稱形

§ 134. 定義四四 軸對稱 平面中一直線分平面為二部分若以此直線為摺痕將平面之一部分摺合於又一部分而兩部分中之圖形互相合一時，則此兩圖形曰關於此直線為對稱 (symmetrical with respect to a line). 此直線曰對稱軸 (axis of symmetry). 此兩圖形視為一圖形時曰軸對稱圖形 (symmetrical figure with respect to an axis).



如圖  $A$ ,  $B$  二字皆為軸對稱圖形,  $A$  之左右兩邊關於  $XY$  為對稱,  $XY$  為其對稱軸.  $B$  之上下兩邊關於  $WZ$  為對稱,  $WZ$  為其

對稱軸。

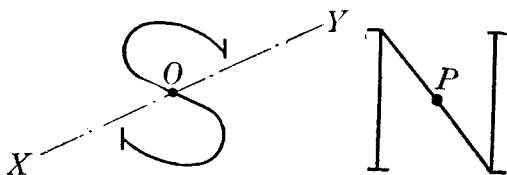
§ 135. 定義四五 中心對稱 平面中一直線上一點分直線為兩個半射線，分平面為兩個直線角。若固定此點將一直線角旋轉合於又一直線角而兩角內之圖形互相合一時，則此兩圖形曰關於此點為對稱 (symmetrical with respect to a point)。此點曰對稱中心 (centre of symmetry)。此兩圖形視為一圖形時曰中心對稱圖形 (symmetrical figure with respect to a centre)。

如圖  $S, N$  二字

皆為中心對稱圖形，

$O$  為  $S$  之對稱中心。

因過  $O$  作任意一直



線  $XY$  成兩個  $st\angle XOY$ 。若固定  $O$  而旋轉令  $OX$  合於  $OY$  而  $OY$  合於  $OX$  時兩邊圖形合一也。此兩邊圖形關於  $O$  為對稱。同樣  $P$  為  $N$  之對稱中心。

凡軸對稱圖形未必為中心對稱，凡中心對稱圖形亦未必為軸對稱，如  $A, B$  非中心對稱，而  $S, N$  非軸對稱也。然亦有既為軸對稱，又為中心對稱者。字母中如  $H, I, O, X$  等皆是。

凡兩圖形關於一軸或一中心為對稱，則此兩圖形為合同圖。

§ 136. 定理四一 兩點關於所聯線分之垂直等分線為對稱。

〔假設〕  $XY$  爲  $AA'$  之垂直等  
分線.

〔終決〕  $A, A'$  關於  $XY$  爲對  
稱.

〔證〕  $\because XY \perp AA'$ ,  $\therefore \angle XO A$   
 $= \angle XO A'$ . 故若以  $XY$  爲摺痕將  
左側之  $OA$  摺至右側時,  $OA$  與  $OA'$   
相重. 又  $\because OA = OA'$ ,

$\therefore A$  與  $A'$  合一. 故  $A, A'$  關於  $XY$  爲對稱.

Q. E. D.

〔註〕 軸對稱以  $\wedge$  記之. 如  $A$  對稱於  $A'$ , 寫作  $A \wedge A'$ .

§ 137. 系 一雙軸對稱點之聯線垂直於軸.

§ 138 定理四二 兩點關於所聯線分中點爲對稱.

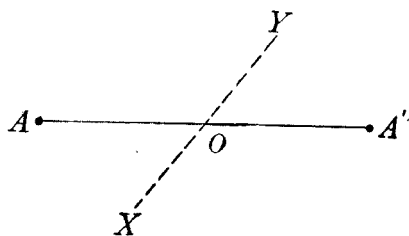
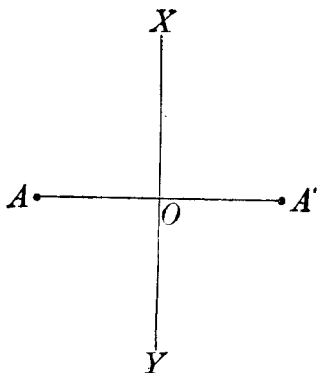
〔假設〕  $O$  爲  $AA'$  之中  
點.

〔終決〕  $A, A'$  關於  $O$   
爲對稱.

〔證〕 過  $O$  任意作一直  
線  $XY$ . 則  $\angle AO X = \angle A' O Y$ . 故若固定  $O$  旋軸令  $OX$  合於  $OY$   
時,  $OA$  必與  $OA'$  相重. 又因  $OA = OA'$ ,  $\therefore A$  合於  $A'$ .

$\therefore A, A'$  關於  $O$  爲對稱.

Q. E. D.



〔註〕 中心對稱以  $\wedge$  記之。如  $A$  對稱於  $A'$ ，寫作  $A \wedge A'$ 。

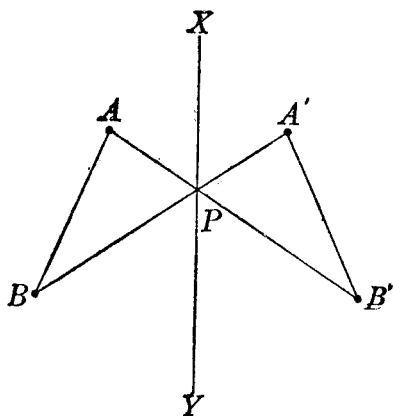
§ 139. 系 一雙中心對稱點與中心共線。

§ 140. 定理四三 兩雙點關於同軸為對稱，則此兩雙點所聯線分關於此軸為對稱。

〔假設〕  $XY$  為軸， $A \wedge A'$ ，  
 $B \wedge B'$ 。

〔終決〕  $XY$  為軸， $AB$   
 $\wedge A'B'$ ， $AB' \wedge A'B$ 。

〔證〕  $XY$  為軸， $A \wedge A'$ ，  
 $B \wedge B'$ ，故以  $XY$  為摺痕摺合時，  
 $A$  合於  $A'$ ， $B$  合於  $B'$ ， $\therefore AB$   
合於  $A'B'$ 。 $\therefore AB \wedge A'B'$ 。



又設  $AB'$  交  $XY$  於  $P$ 。聯  $PA'$ ， $PB$ 。則以  $XY$  為摺痕摺合時，  
 $\therefore A$  合於  $A'$ ， $\therefore AP$  合於  $A'P$ 。 $\therefore B$  合於  $B'$ ， $\therefore BP$   
合於  $B'P$ 。故  $\triangle ABP \cong \triangle A'PB'$ 。

$\therefore \angle APB = \angle A'PB'$ ，故  $A'PB$  亦為直線。

$\therefore AB' \wedge A'B$ 。

Q. E. D.

§ 141. 系一 兩雙點關於同軸為對稱，則過此兩雙點之一雙直線關於此軸為對稱。

§ 142. 系二 軸上任意點與一雙關於此軸之對稱點所聯線

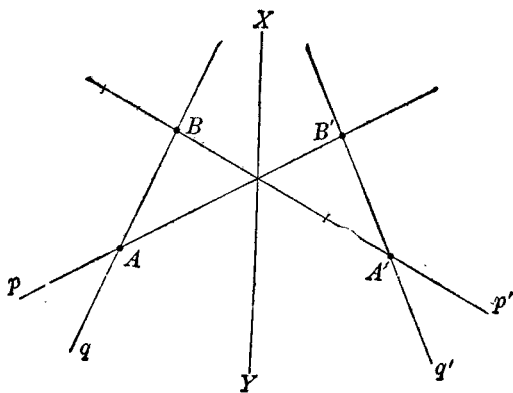
分或直線爲對稱.

§ 143. 系三 一雙軸對稱直線之交點在其軸上.

§ 144. 系四 兩多角形之各雙頂點關於同軸爲對稱, 則此兩多角形關於此軸爲對稱.

§ 145. 系五 含有相等線分之一雙直線及線分之一雙對應端點關於同軸爲對稱, 則又一端點關於此軸爲對稱.

§ 146. 定理四四 兩雙直線關於同軸爲對稱, 則此兩雙直線之交點關於此軸爲對稱.



〔假設〕  $XY$  爲軸, 直線  $p \wedge p'$ , 直線  $q \wedge q'$ ,  $p, q$  交於  $A$ ;  $p', q'$  交於  $A'$ ;  $p', q$  交於  $B$ ;  $p, q'$  交於  $B'$ .

〔終決〕  $XY$  爲軸,  $A \wedge A', B \wedge B'$ .

〔證〕 以  $XY$  爲摺痕摺合時,

$\therefore p \wedge p' \therefore p$  合於  $p'$ .  $\therefore q \wedge q', \therefore q$  合於  $q'$ .

$\therefore A$  合於  $A', \therefore A \wedge A'$

又  $\therefore p' \wedge p, \therefore p'$  合於  $p, \therefore q' \wedge q, \therefore q'$  合於  $q$ .

$\therefore B$  合於  $B', \therefore B \wedge B'$  Q. E. D

§ 147. 系一 垂直於軸之任意直線與一雙關於此軸之對稱線之交點爲對稱.

§ 148. 系二 兩多角形之各雙邊關於同軸爲對稱, 則此兩多角形關於此軸爲對稱.

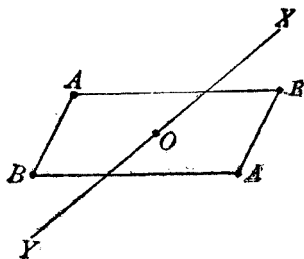
§ 149. 系三 一角之兩邊關於其等分線爲對稱. 兩邊上與頂點等距之各雙點爲對稱點.

§ 150. 系四 若相等兩角之頂點及一對應邊關於同軸爲對稱, 則又一雙對應邊關於此軸爲對稱.

§ 151. 定理四五 兩雙點關於同中心爲對稱, 則此兩雙點所聯線分或線關於此中心爲對稱.

〔假設〕  $O$  爲中心,  $A \wedge A', B \wedge B'$

〔終決〕  $O$  爲中心,  $AB \wedge A'B',$   
 $AB' \wedge A'B.$



〔證〕 過  $O$  任意作一直線  $XY$ .

將直線角  $\angle XOY$  圍繞  $O$  旋轉至  $OX$  合於  $OY, OY$  合於  $OX$  時,

$\therefore A \wedge A'$  故  $A$  合於  $A'. \therefore B \wedge B', \therefore B$  合於  $B', \therefore AB$

合於  $A'B'$ .  $\therefore AB \parallel A'B'$ .

同樣可證  $A'B' \parallel AB$ . Q. E. D.

§ 152. 系一 兩多角形之各雙頂點關於同中心為對稱, 則此兩多角形關於此心為對稱.

§ 153. 系二 一雙中心對稱線為平行線.

§ 154. 定理四六 兩雙直線關於同中心為對稱, 則其一雙交點關於此中心為對稱.

(證略. 學者自證之)

§ 155. 系一 兩多角形之各雙邊關於同中心為對稱, 則此兩多角形關於此中心為對稱.

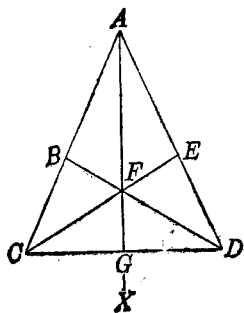
§ 156. 系二 過中心之任意直線與一雙關於此中心之對稱直線之交點關於此中心為對稱.

§ 157. 系三 一雙中線對稱線與中心等距.

§ 158. 系四 一雙中線對稱線與過中心之任意線等距.

§ 159. 稱對定理之應用 凡對稱圖形之證法, 以對稱定理證之, 較以合同三角形定理證之為易. 舉例如下:

$\triangle ACD$  為二等邊三角形. 等邊  $AC$ ,  $AD$  上取二點  $B$ ,  $E$ , 而  $AB = AE$ .  $DB$ ,  $CE$  交於  $F$ .  $AF$  延線交底  $CD$  於  $G$ . 求證





$AG \perp CD$ .

〔證〕 作  $\angle A$  之等分線  $AX$ .

以  $AX$  爲軸, 則  $AC \wedge AD$  (§ 149)

$\therefore AB = AE, \therefore B \wedge E$ . (§ 145)

$\therefore AC = AD, \therefore C \wedge D$ . (§ 145)

$\therefore BD \wedge CE$ . (§ 140)

$\therefore BD, CE$  之交點  $F$  在  $AX$  上. (§ 143)

即  $AFG$  合於  $AX$ .

已知  $C \wedge D, \therefore CD \perp AX$ . (§ 137)

即  $AG \perp CD$ . Q. E. D.

上題若以合同三角形定理證之, 則較繁. 須先證  $\triangle ACE \cong \triangle ADB$ , 依次再證  $\triangle BCF \cong \triangle EDF, \triangle ACF \cong \triangle ADF, \triangle ACG \cong \triangle ADG$  方得終決. 學者試自證之.

## 第九章 證題之方法及雜例

§ 160. 證法及例 幾何例題,千變萬化,至為複雜.故無一定方法,可以普徧應用,以資證明.唯有熟記定理,多作習題.經驗既富,任何題來,自不難得心應手,迎刃而解.其至要者即注意各題之終決.蓋終決為證題之目的,自當懸以為鵠,然後着手也.茲將終決分為數類,分別舉其着手法如次:

(1) 終決為線分相等時,着手法可為

(a) 視其是否為合同三角形之對應邊.

(b) 視其是否為平行四邊形之對邊.

(c) 視其是否與第三線分各相等.

(d) 視其兩雙端點是否關於某直線或某點為對稱.

(e) 若此二線分一端點合一時,聯其他一雙端點,視其是否兩角相等.

(f) 若此二線分成一線分時,是否可應用 § 135, 或是否為平行四邊形之對角線.

(2) 終決為兩角相等時,着手法可為

(a) 視其是否為合同三角形之對應角.

- (b) 視其是否爲<sup>行</sup>平行四邊形之對角
- (c) 視其是否與第三角各相等, 或各爲第三角之補角或餘角.
- (d) 視其是否爲二等邊三角形之底角.
- (e) 視其是否關於二平行線之內錯角外錯角或同位角
- (f) 視其兩雙邊是否關於某直線或某點爲對稱.
- (3) 終決爲甲線分大於乙線分時, 着手法可爲
- (a) 視圖中有無甲線分之等線分大於乙線分, 或乙線分之等線分小於甲線分, 或小於甲線分而大於乙線分之線分.
- (b) 若爲一個三角形之二邊時, 視其是否合於 § 57
- (c) 若爲兩個三角形之各邊時視其是否合於 § 61
- (d) 視甲線分是否等於某三角形二邊之和而乙線分爲其第三邊或等於其第三邊.
- (4) 終決爲甲角大於乙角時, 着手法可爲
- (a) 視圖中有無甲角之等角大於乙角, 或乙角之等角小於甲角, 或小於甲角而大於乙角之角.
- (b) 視乙角是否爲甲角之內對角.
- (c) 若爲一個三角形之二角時, 視其是否合於 § 56
- (d) 若爲兩個三角形之各角時, 視其是否合於 § 62
- (5) 終決爲甲線分等於乙線分之二倍時, 着手法可爲

- (a) 延長乙線分至二倍長而證其與甲線分相等.
- (b) 在甲線分上取中點而證其線分之半與乙線分相等.
- (c) 視其是否可應用等量代入法如 (1) (c), (3) (d).
- (d) 若甲線分爲三角形之一邊,視可否聯其他二邊中點而證

其所聯線分等於乙線分.

(6) 終決爲甲角等於乙角之二倍時,着手法可爲

(a) 仿 (5) (a).

(b) 仿 (5) (b).

(c) 仿 (5) (c).

(d) 視甲角是否爲二等邊三角形頂角之外角而乙角爲其內對角或等於其內對角.

(7) 終決爲兩直線平行時,着手法可爲

(a) 視其有無一雙內錯角,外錯角,或同位角相等.

(b) 視其是否可爲平行四邊形之對邊.

(c) 視其是否與第三直線各平行.

(d) 視其是否與第三直線各垂直.

(e) 視其是否一直線通過以又一直線爲一邊之三角形其他

二邊之中點.

(8) 終決爲三線共點時,着手法可爲

(a) 證其中二線之交點在第三線上.

- (b) 視其中二線之交點與第三線上某二點是否共線。
- (c) 證其中每二線分之各交點合一。
- (d) 在三線上各覓一點爲三角形視此三線是否均可爲此三角形之中線或垂線或等分線等。

- (9) 終決爲三點共線時，着手法可爲
  - (a) 聯成折線證其夾角爲直線角。
  - (b) 聯成兩線分證其各與第三線平行。
  - (c) 視其中二點之聯線與過第三點之某二直線是否共點。
- (10) 終決之關於計算角之大小者，常可以代數方程式解之。
- (11) 圖形之爲對稱者可決其軸或中心而證之。

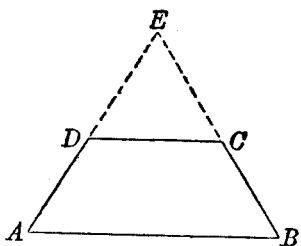
關於直線形之幾何題，要不出乎以上數類。唯稍複雜之題，非添補助線仍無從着手。故補助線之加添，實爲幾何中之要事。然亦無定法，須審察各題之情形而試之。但其要點，不外乎以下數事：

- (1) 使假設中事與終決中事接近。
- (2) 添出線分或角使可適用等量代入法。
- (3) 就假設添出線分俾適合於引用定理。
- (4) 就終決添出線分俾適合於引用定理。
- (5) 改移一部分圖形之位置俾適合於引用定理。
- (6) 改造圖形使變爲一較易證之題。

茲舉實例如下：

(例題一) 四邊形  $ABCD$  中, 已知  $AD = BC$ ,  $\angle D = \angle C$ . 求證  $\angle A = \angle B$ .

[證法一] 先看終決中  $\angle A$ ,  $\angle B$  兩角共有一邊  $AB$ . 故依上述證法 (2)  $d$ , 可視其是否可為二等邊三角形之底角. 由是作補助線延長  $AD$  及  $BC$  使交於一點  $E$ . 於是極易看出如下的證明:



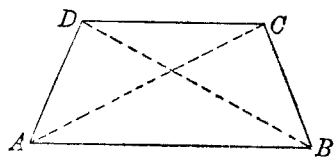
$$\because \angle ADC = \angle DCB, \therefore \angle EDC = \angle ECD,$$

$$\therefore ED = EC. \text{ 又因 } AD = BC, \therefore AD + ED = BC + EC,$$

$$\text{即 } EA = EB. \therefore \angle A = \angle B. \quad \text{Q. E. D.}$$

本證法之補助線, 即就終決添出俾適合於引用定理也.

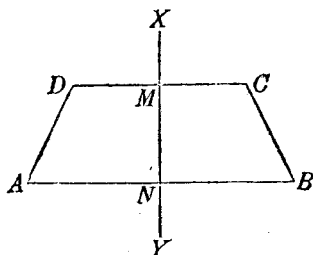
[證法二] 因已知  $AD = BC$ ,  $\angle D = \angle C$ , 然  $DC$  可為公邊. 故若添二對角線  $AC, BD$ , 則顯然可得  $\triangle ACD \cong \triangle BDC$ . 此兩三角形之合



同, 當然有用. 因終決中之  $\angle A, \angle B$  兩角, 依上述證法 (2)  $a$ , 可視有此二角之  $\triangle ABD, \triangle ABC$  之為合同圖而決之. 今從已證得之  $\triangle ACD \cong \triangle BDC$ , 可得  $BD = AC$ , 又已知  $DA = CB$ ,  $AB$  為公邊, 故  $\triangle ABD \cong \triangle ABC$ .  $\therefore \angle A = \angle B$ . Q. E. D.

本證法之補助線即就假設添出俾適合於引用定理也.

〔證法三〕 此圖顯然當為軸對稱圖。故依證法 (11) 可添一適宜之軸以證之。



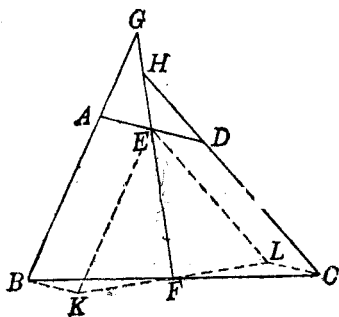
作  $DC$  之垂直等分線  $XY$  交  $DC$  於  $M$ , 交  $AB$  於  $N$ . 則以  $XY$  為軸,  $D \wedge C$ ,  $\therefore DM \wedge MC$ . 因  $\angle D = \angle C$ ,  $\therefore DA \wedge CB$ .  
 $\therefore DA = CB$ ,  $\therefore A \wedge B$ ,  $\therefore AN \wedge NB$ .

$\therefore \angle DAN = \angle CBN$ . Q. E. D.

(例題二) 四邊形  $ABCD$  中  $AB = CD$ ,  $E, F$  各為  $AD, BC$  之中點.  $FE$  之延線交  $BA$  之延線於  $G$ , 交  $CD$  之延線於  $H$ . 求證

$\angle BGF = \angle CHF$ .

〔證法一〕 本題較例題一為難. 因假設與終決似乎各不相關, 不易着手也. 故想法添出補助線俾可適用等量代入法.



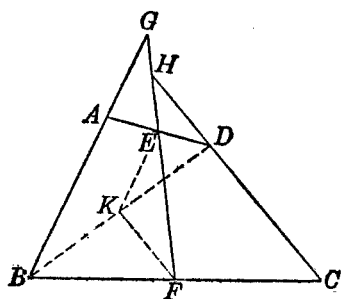
過  $E$  作  $EK \parallel GB$ ,  $EL \parallel HC$ , 則  $\angle KEF$ ,  $\angle LEF$  各為  $\angle BGF$ ,  $\angle CHF$  之同位角. 故只須證  $\angle KEF = \angle LEF$  即得. 然假設中知  $AB = DC$ ; 故作  $\square ABKE$ ,  $\square DCLE$ , 則  $EK$  必可  $= EL$  聯  $KF$ ,  $LF$ , 成  $\triangle KEF$ ,  $\triangle LEF$  有公邊  $EF$ . 故若  $KF = LF$  則可

爲合同圖而得終決。試就  $\triangle BKF$ ,  $\triangle CLF$  觀之  $BK = AE = ED = LC$ ,  $BF = FC$ , 又因  $BK \parallel AD \parallel LC$ ,  $\therefore \angle KBF = \angle LCF$ .  
 $\therefore \triangle BKF \cong \triangle LCF$ ,  $\therefore KF = LF$ ,  $\therefore \triangle EKF \cong \triangle ELF$ ,  
 $\therefore \angle KEF = \angle LEF$ .

$$\therefore \angle BGF = \angle CHF.$$

Q. E. D.

〔證法二〕 因已知  $E, F$  各爲  $AD, BC$  之中點, 故利用 § 112 之定理, 先聯一對角線  $BD$ . 取其中點  $K$ . 聯  $KE, KF$ , 則  $KE \parallel BG$ ,  $KF \parallel HC$ .  $\therefore \angle BGF = \angle KEF$ ,  $\angle CHF = \angle KFE$ . 然  $\angle KEF$ ,

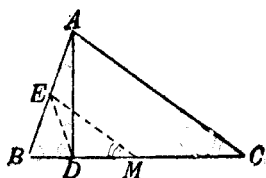


$\angle KFE$  爲一個三角形之二角, 故只須證  $KE, KF$  相等. 然  $KE = \frac{1}{2}AB$ ,  $KF = \frac{1}{2}CD$ , 而巳知  $AB = CD$ ,  $\therefore KE = KF$ ,

$$\therefore \angle KEF = \angle KFE. \therefore \angle BGF = \angle CHF. \quad \text{Q. E. D.}$$

(例題三)  $\triangle ABC$  中,  $\angle B = 2\angle C$ ,  
 $AD \perp BC$ ,  $M$  爲  $BC$  之中點.

$$\text{求證 } DM = \frac{1}{2}AB.$$



〔證法一〕 本題終決爲甲線分等於乙線分之二倍. 故依上述證法 (5) b, 取  $AB$  之中點  $E$ . 然後求證  $DM = AE$  或  $EB$ . 然因  $DM$

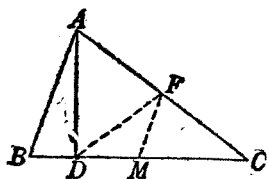


與  $AE$  或  $BE$  無直接關係，故更須添補助線以證之。因  $AD \perp BC$ ，故  $\triangle ADB$  為直角三角形。  $\therefore E$  當與三頂點等距。因聯  $ED$ ，而求證  $ED = DM$  於是依上述證法 (1) 聯  $EM$ ，而求證  $\angle DEM = \angle DME$ 。  $\therefore$  假設中尚有一事  $\angle B = 2\angle C$ ，  $\therefore EB = ED$ ，  $\therefore \angle EBD = \angle EDB$ ，又  $\therefore EM \parallel AC$ ，  $\therefore \angle EMB = \angle C$ 。  $\therefore \angle EDB = 2\angle EMD$ 。又  $\therefore \angle EDB = \angle DEM + \angle DME$ ，  $\therefore 2\angle EMD = \angle DEM + \angle DME$ ，  $\therefore \angle DEM = \angle DME$ 。

$$\therefore DM = DE = \frac{1}{2}AB. \quad \text{Q. E. D.}$$

〔證法二〕 本題終決為  $DM = \frac{1}{2}AB$ 。

$\therefore M$  為  $BC$  之中點，若取  $AC$  中點  $F$ ，聯  $FM$  則  $FM = \frac{1}{2}AB$ 。故本題終決可



改為  $DM = FM$ 。若能證得  $\angle MDF = \angle MFD$  即得。但因  $F$  為  $AC$  中點而  $\angle ADC$  為  $R\angle$ ，  $\therefore \angle FDC = \angle C$ ，又因  $AB \parallel FM$ ，  $\therefore \angle FMC = \angle B$ 。  $\therefore \angle B = 2\angle C$ ，  $\therefore \angle FMC = 2\angle FDC$ 。然  $\angle FMC = \angle FDC + \angle MFD$ 。  $\therefore \angle MDF = \angle MFD$ 。  $\therefore DM = FM$ 。

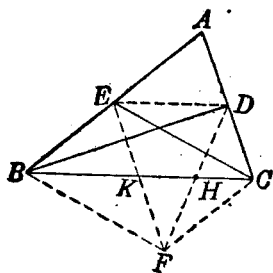
$$\therefore DM = \frac{1}{2}AB \quad \text{Q. E. D.}$$

〔例題四〕 三角形二邊不等，則大邊上之中線小於小邊上之中線。

〔假設〕  $\triangle ABC$  中,  $AB > AC$ ,  $BD$  爲  $AC$  上之中線,  $CE$  爲  $AB$  上之中線.

〔終決〕  $CE < BD$ .

〔證法一〕 作  $\square BECF$ , 則  $BF = CE$  故終決可改爲  $BF < BD$ . 聯成  $\triangle FED$ . 則因  $ED \parallel BC$ ,  $K$  爲  $EF$  之中



點( $BC$   $EF$  互相等分), 故  $H$  爲  $DF$  之中點.  $\therefore CF = EB = \frac{1}{2}AB$ ,

$CD = \frac{1}{2}AC$ , 已知  $AB > AC$ ,  $\therefore CF > CD$ . 故在  $\triangle CHF$ ,  $\triangle CHD$

中,  $HF = HD$ ,  $HC$  爲公邊,  $\therefore \angle CHF > \angle CHD$ ,  $\therefore \angle BHF < \angle BHD$ . 故在  $\triangle BFH$ ,  $\triangle BHD$  中,  $HF = HD$ ,  $HB$  爲公邊.

$\therefore BF < BD$ .  $\therefore CE < BD$ .

Q. E. D.

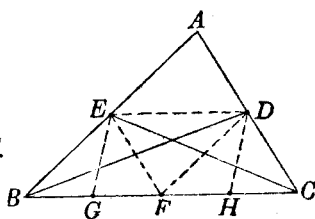
〔證法二〕 取  $BC$  之中點  $F$ . 聯  $EF$ . 則  $EF \parallel AC$  且  $EF = \frac{1}{2}AC$ , 而

$EB = \frac{1}{2}AB$ . 因  $AB > AC$ ,  $\therefore EB > EF$ .

作  $\triangle EBF$  之中線  $EG$ , 則從  $EB > EF$ ,

可得  $\angle EGB > \angle EGF$ . 作  $\square GEDH$  則  $GH = ED = \frac{1}{2}BC$ . 而  $BG$

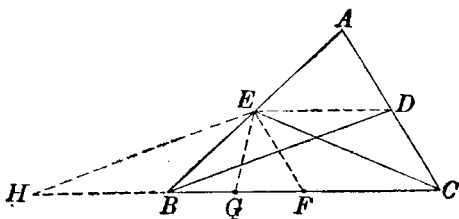
$= \frac{1}{2}BF = \frac{1}{4}BC$ .  $\therefore BH = BG + GH = \frac{3}{4}BC$ ,  $GC = BC - BG$



$= \frac{3}{4}BC$ .  $\therefore BH = GC$ . 又因  $EG \parallel DH$ ,  $\therefore \angle DHB = \angle EGB$   
 $> \angle EGC$ . 故在  $\triangle ECG$ ,  $\triangle DBH$  中,  $EG = DH$ ,  $GC = BH$ ,  
 $\angle EGC < \angle BHD$ .  $\therefore EC < BD$ . Q. E. D.

〔證法三〕 如證法

二 作  $EF$ ,  $EG$ , 證得  
 $\angle EGB > \angle EGF$  後作  
 $\square EDBH$ , 則  $EH = DB$ ,  
 $HB = ED = FC$ .

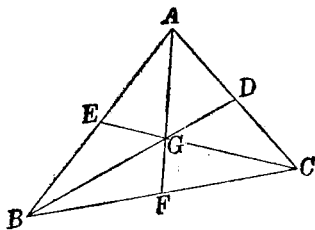


$\therefore HG = GC$ . 在  $\triangle EHG$ ,  $\triangle ECG$  中可證得  $EH > EC$ .

$\therefore EC < BD$ . Q. E. D.

以上證法皆頗費事. 然若記得重心定理及其系時, 則證之即較  
 易. 試看

〔證法四〕  $BD$ ,  $CE$  為中線 故  
 其交點  $G$  為  $\triangle ABC$  之重心. 作第三  
 中線  $AF$ , 必過  $G$  點. 在  $\triangle ABF$ ,  
 $\triangle ACF$  中,  $BF = FC$ ,  $AF$  為公邊,



$AB > AC$ ,  $\therefore \angle AFB > \angle AFC$ . 在  $\triangle GBF$ ,  $\triangle GCF$  中  $BF = FC$ ,  
 $GF$  為公邊;  $\therefore BG > GC$ . 然  $BG = \frac{2}{3}BD$ ,  $CG = \frac{2}{3}CE$ .

$\therefore CE < BD$ . Q. E. D.

以上諸例，僅見一斑。限於篇幅，未能多舉。舉一反三，是在學者。

## 習 題 七

1. 四邊形  $ABCD$  中， $E, F$  為一雙對邊  $AB, CD$  之中點， $G, H$  為對角線  $AC, BD$  之中點。求證  $EGFH$  為平行四邊形。
2. 四邊形兩雙對邊中點所聯線分互相等分。
3. 平行四邊形  $ABCD$  中， $E, F$  各為  $AB, CD$  之中點。 $AF, EC$  各交  $BD$  於  $G, H$ 。求證  $DG = GH = HB$ 。
4.  $AD$  為  $\triangle ABC$  之中線。若  $AB > AC$ ，則  $\angle BAD < \angle CAD$ 。
5.  $AD$  為  $\triangle ABC$  之等分角線。若  $AB > AC$ ，則  $BD > DC$ 。
6.  $\triangle ABC$  中， $\angle B$  之等分線與  $\angle C$  之外角等分線交於  $D$ 。過  $D$  作  $BC$  之平行線交  $AB$  於  $E$ ，交  $AC$  於  $F$ 。則  $EF = BE - CF$ 。
7. 直角三角形斜邊上之高與中線所夾之角等於兩銳角之差。
8.  $P$  為  $\triangle ABC$  內任意一點。聯  $AP, BP, CP$ ，且延長之各交  $BC, AC, AB$  於  $D, E, F$ 。則
 
$$AD + BE + CF = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).$$
9. 三角形三中線之和小於三邊之和而大於三邊和之四分之三。
10. 在  $\triangle ABC$  之各邊  $BC, AC, AB$  上向形外各作正三角形

$BCD, ACE, ABF$  則  $AD = BE = CF$ .

11. 二等邊三角形底上任意點與二邊距離之和為定長.

12. 正三角形中任意點與三邊距離之和等於此三角形之高.

13.  $\triangle ABC$  之垂心為  $H$ , 外心為  $O$ . 則  $H$  與  $A$  之距離等於  $O$  與  $BC$  距離之二倍.

14. 三角形之垂心, 重心及外心共線.

15.  $M$  為直角三角形  $ABC$  斜邊  $BC$  之中點. 從  $M$  引  $BC$  之垂線交  $\angle A$  之等分線於  $D$ . 則  $AM = MD$ .

16.  $D, E$  各為  $\triangle ABC$  二邊  $AC, BC$  之中點.  $P$  為  $AB$  上任意一點. 聯  $PD$  延長至  $F$  令  $PD = DF$ . 聯  $PE$  延長至  $G$  令  $PE = EG$ . 則  $F, C, G$  共線.

17.  $XY$  為  $\triangle ABC$   $\angle A$  之外角等分線,  $P$  為  $XY$  上任意一點. 求證  $PB + PC > AB + AC$ .

18.  $\triangle ABC$  中,  $AB > AC$ . 若過  $BC$  中點  $M$  所引直線交  $AB$  於  $P$ , 交  $AC$  延線於  $Q$  而  $AP = AQ$ . 則  $BP = CQ$ .

19.  $\triangle ABC$  中  $AB > AC$ .  $P$  為  $\angle A$  等分線上任意一點. 求證  $PB - PC < AB - AC$ .

20. 六角形之三雙對邊各平行且相等, 則聯三雙對角之三個對角線共點.



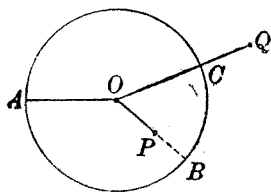
## 第二編 圓

### 第十章 圓之基礎性質

§ 161. 定義四六 圓 圓周 中心 半徑 一曲線圍成一環狀圖形，此曲線上一切點皆與形內有一定點等距。此圖形曰圓 (circle)。此曲線曰圓周 (circumference)。形內定點曰圓之中心 (center of the circle)。圓周上任意一點與中心所聯線分曰圓之半徑 (radius of the circle)。

§ 162. 幾何公理一〇 圓內一點與圓外一點所聯線分必與圓周相交。圓內二點所聯線分不與圓周相交而其兩端延線必與圓周相交。

§ 163. 定理四七 圓周上一切點與中心距離等於半徑。圓內一切點與中心距離小於半徑。圓外一切點與中心距離大於半徑。



〔假設〕  $A$  爲  $\odot O$  上一點。  $P$  爲  $\odot O$  內一點。  $Q$  爲  $\odot O$  外一點。

〔終決〕  $OA$  等於半徑； $OP$  小於半徑； $OQ$  大於半徑。

〔證〕  $A$  在圓周上， $\therefore OA$  即半徑（定義）。 $P$  在圓內，但  $O$  亦在圓內， $\therefore OP$  延線交圓周於  $B$ 。 $\therefore OP < OB$ ，即  $OP$  小於半徑。

因  $Q$  在圓外， $O$  在圓內， $\therefore OQ$  必與圓周交於  $C$ 。

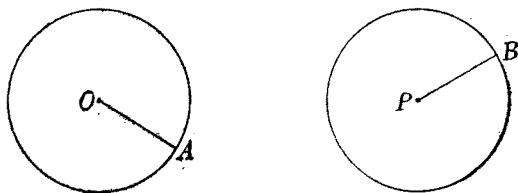
$\therefore OQ > OC$ ，即  $OQ$  大於半徑。

Q. E. D.

§ 164. 定理四八 一點與圓中心距離等於其半徑，則此點在圓周上。一點與圓中心距離小於其半徑，則此點在此圓內。一點與圓中心距離大於其半徑，則此點在此圓外。

（學者試根據上節定理用窮舉證法證之）

§ 165. 定理四九 兩圓半徑相等，則此兩圓為合同圖。



〔假設〕  $\odot O, \odot P$  中， $OA = PB$ 。

〔終決〕  $\odot O \cong \odot P$ 。

〔證〕 移置  $\odot O$  於  $\odot P$  上令  $O$  合於  $P$ 。因  $OA = PB$ ，故  $A$  必在  $\odot P$  圓周上， $B$  必在  $\odot O$  圓周上。即  $\odot O$  圓周上一切點皆在  $\odot P$  圓周上， $\odot P$  圓周上一切點皆在  $\odot O$  圓周上。

$\therefore \odot O \cong \odot P$ 。

Q. E. D.

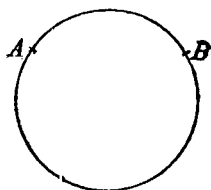


(註一) 中心及半徑，是圓之兩要素，中心決定圓之位置，半徑決定圓之大小。

(註二) 各圓之形象都相同，故圓有大小之別而無形象之別，兩圓相等，則此兩圓即合同圖，故凡合同圓常簡稱等圓。

§ 166. 定義四七 弧 半圓周 圓周之一部分曰弧 (arc). 若圓周上兩點分圓周為相等二弧時，則此二弧各為半圓周 (semi-circumference). 大於半圓周之弧曰優弧 (major arc). 小於半圓周之弧曰劣弧 (minor arc). 合成一個圓周之二弧曰互為相屬弧 (conjugate arcs).

弧之記法，常寫其兩端點而冠以 $\frown$ 號。唯優弧須寫優字，而劣弧則可省去劣字。如圖 $\frown AB$ 指上面一弧說，下面優弧，須寫作優 $\frown AB$ 。



§ 167. 定義四八 弦 直徑 圓周上兩點所聯線分曰弦 (chord). 過中心之弦曰直徑 (diameter).

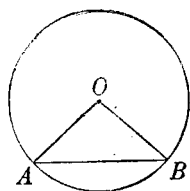
§ 168. 定義四九 弓形 扇形 一弦與一弧所圍成之形曰弓形 (segment). 兩半徑與一弧所圍成之形曰扇形 (sector).

弓形與扇形皆圓之一部分，大於半圓之弓形及扇形曰大弓形及大扇形，但稱弓形及扇形皆指小於半圓者而言。

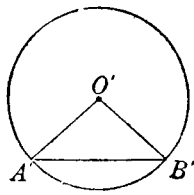
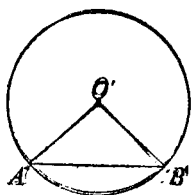
§ 169. 定義五〇 中心角 兩個半徑所夾之角曰中心角 (central angle).

在一圓周上取兩點，如圖  $\odot O$  圓周上取  $A, B$  二點便成  $\frown AB$ 。

聯  $AB$  爲弦. 聯  $OA, OB$  又成  $\angle AOB$  爲中心角. 此  $\frown AB, AB, \angle AOB$  兩兩謂之相對. 卽  $\frown AB$  對  $\angle AOB, \frown AB$  對  $AB, AB$  對  $\angle AOB$  等等.



§ 170. 定理五〇 在同圓或等圓中, 中心角相等, 則其所對之弧及弦都相等.



〔假設〕  $\odot O = \odot O', \angle AOB = \angle A'O'B'.$

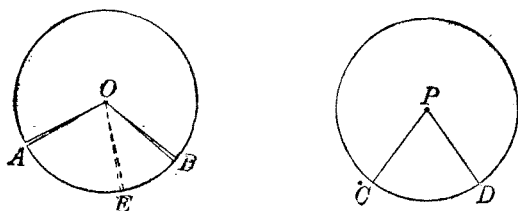
〔終決〕  $\frown AB = \frown A'B', AB = A'B'.$

〔證〕 移置  $\odot O$  於  $\odot O'$  上令  $\odot O$  合於  $\odot O'$  (等半徑圓爲合同圖). 令  $OA$  合於  $O'A'$ . 則因  $\angle AOB = \angle A'O'B'$ , 故  $OB$  合於  $O'B'$ . 故  $A$  合於  $A', B$  合於  $B'$ .  $\therefore \frown AB$  合於  $\frown A'B', AB$  合於  $A'B'.$

$\therefore \frown AB = \frown A'B', AB = A'B'. \quad Q. E. D.$

§ 171. 定理五一 在同圓或等圓中, 中心角不等則所對之弧不等; 中心角大, 所對之弧亦大.

〔假設〕  $\odot O = \odot P, \angle AOB > \angle CPD.$

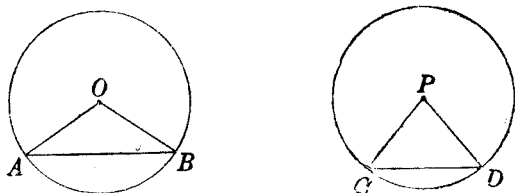


〔終決〕  $\frown AB > \frown CD$ .

〔證〕  $\because \angle AOB > \angle CPD$ , 故可在  $\angle AOB$  內作  $OE$  交  $\frown AB$  於  $E$ , 且令  $\angle AOE = \angle CPD$ .  $\therefore \frown AE = \frown CD$ . 但  $\frown AB > \frown AE$ .

$\therefore \frown AB > \frown CD$ . Q. E. D.

§ 172. 定理五二 在同圓或等圓中, 中心角不等, 則所對之弦不等; 中心角大, 所對之弦亦大.



〔假設〕  $\odot O = \odot P$ ,  $\angle AOB > \angle CPD$

〔終決〕  $AB > CD$ .

〔證〕  $\triangle OAB$ ,  $\triangle PCD$  中,  $OA = PC$ ,  $OB = PD$ ,  $\angle AOB = \angle CPD$   $\therefore AB > CD$ . Q. E. D.

§ 173. 系 在同圓或等圓中, 兩個中心優角不等, 則所對之

弦不等；中心優角大，所對之弦小。

§ 174. **定理五三** 在同圓或等圓中，弧相等則所對中心角相等。弧不等則所對中心角不等；弧大所對中心角亦大。

(證略。學者試用窮舉證法自證之)

§ 175. **系一** 在同圓或等圓中，弧相等則所對之弦相等。弧不等則所對之弦不等；弧大所對之弦亦大。

§ 176. **系二** 在同圓或等圓中，兩個優弧不等，則所對之弦不等。優弧大則所對之弦小。

§ 177. **定理五四** 在同圓或等圓中，弦相等則所對之中心角及弧皆相等。弦不等則所對之中心角及弧皆不等；弦大所對之中心角及弧亦大，而所對之優中心角及優弧小。

(證略。學者自證之)

## 第十一章 直線與圓之關係

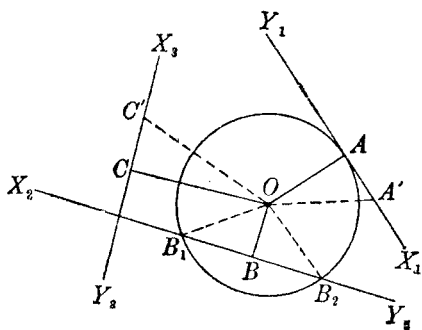
§ 178 定義五一 切線 割線 與圓周交於一點之直線曰切線 (tangent). 其所交之點曰切點 (point of tangency). 與圓周交於二點之直線曰割線 (secant).

弦即割線在圓內之一部分.

§ 179. 幾何公理一一 直線與圓周至多交於二點.

§ 180. 定理五五 一直線與一圓中心之距離等於其半徑, 則此線爲切線. 一直線與一圓中心之距離小於其半徑, 則此線爲割線. 一直線與一圓中心之距離大於其半徑, 則此線與圓不相交.

〔假設〕 從  $O$  至  $X_1Y_1$  所作垂線  $OA$  等於  $\odot O$  之半徑. 從  $O$  至  $X_2Y_2$  所作垂線  $OB$  小於  $\odot O$  半徑. 從  $O$  至  $X_3Y_3$  所作垂線  $OC$  大於  $\odot O$  半徑.



〔終決〕  $X_1Y_1$  爲  $\odot O$  之切線.  $X_2Y_2$  爲  $\odot O$  之割線.  $X_3Y_3$  與  $\odot O$  不相交.

〔證〕  $\because OA$  等於  $\odot O$  半徑,  $\therefore A$  在  $\odot O$  圓周上. 在  $X_1Y_1$  上任意取其他一點  $A'$ , 聯  $OA'$ , 則  $OA' > OA$ .  $\therefore A'$  在  $\odot O$  外.  $\therefore X_1Y_1$  上除  $A$  點外, 其他一切點皆在  $\odot O$  外. 即  $X_1Y_1$  與  $\odot O$  圓周之交點只有一點  $A$ .  $\therefore X_1Y_1$  爲  $\odot O$  之切線.

$\because OB$  小於  $\odot O$  半徑,  $\therefore B$  在  $\odot O$  內. 而  $X_2Y_2$  爲無限長之直線, 其兩端均在圓周外. 故依幾何公理一一,  $B$  之兩側必皆與圓周相交於  $B_1, B_2$  兩點. 故  $X_2Y_2$  爲  $\odot O$  之割線.

$\because OC$  大於  $\odot O$  半徑, 故  $C$  在  $\odot O$  外. 在  $X_3Y_3$  上任意取其他一點  $C'$ . 聯  $OC'$ , 則  $OC' > OC$ , 故  $OC'$  更大於  $\odot O$  半徑. 故  $C'$  亦在  $\odot O$  外. 故  $X_3Y_3$  上所有的一切點皆在  $\odot O$  外

$\therefore X_3Y_3$  與  $\odot O$  不相交. Q. E. D.

§ 181. 系一 切線與圓中心之距離等於半徑. 割線與圓中心之距離小於半徑. 與圓不相交之直線與圓中心之距離大於半徑.

§ 182. 系二 從圓周上一點所作過此點半徑之垂線是切線. 從圓周上一點所作過此點半徑之斜線是割線.

§ 183 系三 過圓周上一點之切線有一無二.

§ 184. 系四 切點與中心所聯半徑垂直於切線.

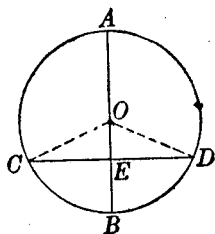
§ 185. 定理五六 垂直於弦的直徑, 等分此弦及此弦所對之相屬二弧.

〔假設〕 直徑  $AOB$  與弦  $CD$  垂直於  $E$ .

〔終決〕  $CE = ED, \frown CB = \frown BD,$

$\frown CA = \frown AD.$

〔證〕 聯  $OC, OD.$  在  $\triangle OCE, \triangle ODE$  中,  
 $OC = OD$  (半徑),  $\angle OEC = \angle OED$  (直角),  
 $OE$  共邊.



$\therefore \triangle OCE \cong \triangle ODE. \therefore CE = ED.$

又  $\angle COE = \angle EOD, \therefore \frown CB = \frown BD.$

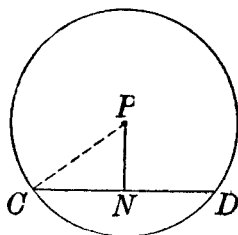
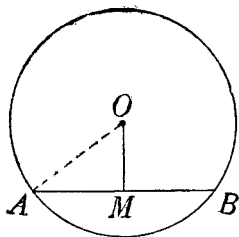
又  $\angle COA = \angle DOA, \therefore \frown CA = \frown AD.$

Q. E. D

§ 186. 系一 弦中點與中心聯線垂直於此弦.

§ 187. 系二 弦之垂直等分線必過中心.

§ 188. 定理五七 在同圓或等圓中,等弦與中心等距.



〔假設〕  $\odot O = \odot P, AB = CD, OM \perp AB, PN \perp CD$

〔終決〕  $OM = PN.$

〔證〕  $\because OM \perp AB, \therefore AM = \frac{1}{2}AB.$

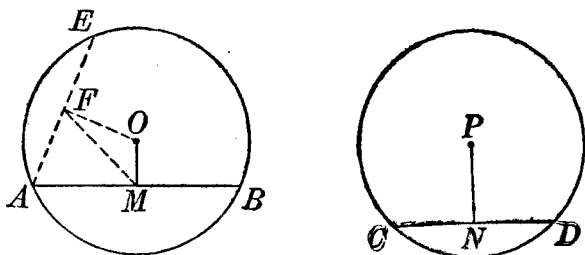
$\because PN \perp CD, \therefore CN = \frac{1}{2}CD.$

$$\therefore AB=CD \quad \therefore AM=CN.$$

聯  $OA, PC$ . 在  $\triangle OAM, \triangle PCN$  中,  $OA=PC$  (半徑),  $\angle OMA = \angle PNC = R\angle$ ,  $AM=CN$ ,  $\therefore \triangle OAM \cong \triangle PCN$

(s. s. R. = s. s. R.)  $\therefore OM=PN.$  Q. E. D.

§ 189. 定理五八 在同圓或等圓中, 兩弦不等, 則與中心距離亦不等; 弦大, 與中心距離小.



〔假設〕  $\odot O = \odot P$ ,  $AB > CD$ ,  $OM \perp AB$ ,  $PN \perp CD$ .

〔終決〕  $OM < PN$ .

〔證〕 在  $\odot O$  中作弦  $AE = CD$ , 作  $OF \perp AE$ , 則  $OF = PN$   
(等弦與中心等距)

$\therefore AB > CD$ ,  $\therefore AB > AE$ ,  $\therefore AM > AF$  (因  $AM, AF$  各為  $AB, AE$  之半). 聯  $MF$ , 則  $\angle AFM > \angle AMF$ .

又因  $\angle AFO = \angle AMO = R\angle$ ,  $\therefore \angle OFM < \angle OMF$ .

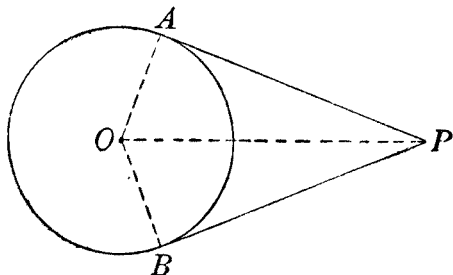
$\therefore OM < OF$ .  $\therefore OM < PN.$  Q. E. D.

§ 190. 系 在同圓或等圓中, 與中心等距之弦相等, 與中心



距離不等之弦不等，距離大者小。

§ 191. 定理五九 從圓外一點至圓之兩切線相等。



〔假設〕  $PA, PB$  切  $\odot O$  於  $A, B$ .

〔終決〕  $PA = PB$ .

〔證〕 聯  $OP, OA, OB$ . 在  $\triangle AOP, \triangle BOP$  中,  $OA = OB$ ,  
 $\angle OAP = \angle OBP = R\angle$ ,  $OP$  爲公邊,  $\therefore \triangle AOP \cong \triangle BOP$ .

$\therefore PA = PB$ . Q. E. D.

§ 192. 系 從圓外一點至圓兩切線所夾之角爲此點與中心聯線所等分。

## 習 題 八

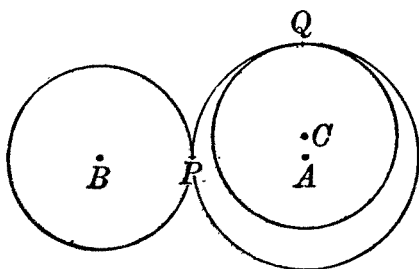
1. 弦上一切點除兩端外皆在圓內。
2. 直徑爲最大之弦。
3. 從圓周上一點  $A$  引直徑  $AB$  及任意一弦  $AC$ , 則平行於  $AC$  之半徑等分  $\widehat{BC}$ .

4. 弦  $CD$  平行於直徑  $AB$ , 則  $\sphericalangle AC = \sphericalangle BD$ .
5.  $A, B, C, D$  爲圓周上順次四點. 若弦  $AB = CD$ , 則  $AC = BD$ .
6. 從圓周上一點  $A$  引直徑  $AB$  及二弦  $AC, AD$ . 若  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD$ , 則  $\sphericalangle BC = \sphericalangle BD$ .
7. 若  $\sphericalangle AB = 2 \sphericalangle CD$ , 則弦  $AB < 2CD$ .
8. 過弦  $AB$  中點作其他任意弦  $CD$ , 則  $AB < CD$ .
9. 若兩弦  $AB, CD$  交於  $E$  而  $AE = CE$ . 則  $AB = CD$ .
10. 過直徑上任意一點作兩弦. 若兩弦與直徑所夾角相等, 則此兩弦相等.

## 第十二章 二圓之關係

§ 193. 定義五二 相切圓 相離圓 相交圓 兩圓圓周會於一點，則此兩圓曰相切圓 (tangent circles). 其相會之點曰切點 (point of tangency).

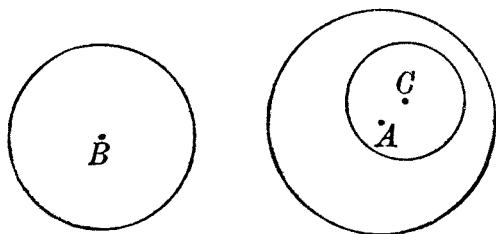
⊙ $A$ , ⊙ $B$  二圓會於一點  $P$ . ⊙ $A$ , ⊙ $C$  二圓會於一點  $Q$ . ⊙ $A$ , ⊙ $B$  及 ⊙ $A$ , ⊙ $C$  皆曰相切圓. ⊙ $A$ , ⊙ $B$  各在



形外曰外切. ⊙ $C$  在 ⊙ $A$  內曰內切.  $P, Q$  爲切點.

兩圓圓周不相會 則此兩圓曰相離圓.

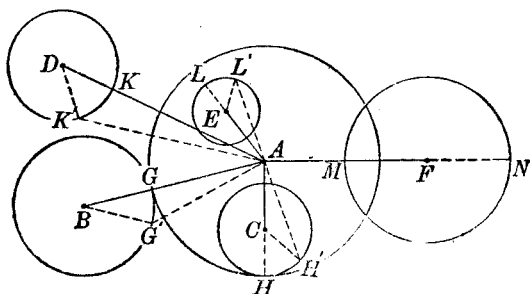
如圖 ⊙ $A$ , ⊙ $B$  及 ⊙ $A$ , ⊙ $C$  皆爲相離圓. ⊙ $A$ , ⊙ $B$  各在形外曰外離. ⊙ $C$  在 ⊙ $A$  內曰內離.



一圓有一部分在他圓之內,一部分在他圓之外,而圓周會於二點者,則此兩圓曰相交圓.

§ 194. 幾何公理一二 兩圓至多交於二點.

§ 195. 定理六〇. 兩圓中心距離等於其半徑之和, 則此兩圓外切. 兩圓中心距離等於其半徑之差, 則此兩圓內切. 兩圓中心距離大於其半徑之和, 則此兩圓外離. 兩圓中心距離小於其半徑之差, 則此兩圓內離. 兩圓中心距離小於其半徑之和而大於其半徑之差, 則此兩圓相交.



〔假設〕  $\odot A, \odot B, \odot C, \odot D, \odot E, \odot F$  半徑之長各為  $a, b, c, d, e, f$ . (1)  $AB = a + b$ . (2)  $AC = a - c$ . (3)  $AD > a + d$ . (4)  $AE < a - e$ . (5)  $a + f > AF > a - f$ .

〔終決〕 (1)  $\odot A, \odot B$  為外切圓. (2)  $\odot A, \odot C$  為內切圓. (3)  $\odot A, \odot D$  為外離圓. (4)  $\odot A, \odot E$  為內離圓. (5)  $\odot A, \odot F$  為相交圓.

〔證〕 (1) 設  $AB$  交  $\odot B$  於  $G$ , 則  $BG = b$ .  $\because AB = a + b$ ,  $\therefore GA = a$ ,  $\therefore G$  在  $\odot A$  圓周上.  $\therefore G$  為  $\odot A, \odot B$  兩圓

之相會點。在  $\odot B$  圓周上任意取其他一點  $G'$ ，聯  $AG'$ ， $BG'$ 。則  $AG' + BG' > AB$ ， $AG' + BG' > a + b$ 。  $\because BG' = b$ ， $\therefore AG' > a$ 。故  $G'$  在  $\odot A$  外。故  $\odot B$  圓周上除  $G$  外，其他一切點均在  $\odot A$  外。故  $\odot A$ ， $\odot B$  會於一點而各在形外。故  $\odot A$ ， $\odot B$  爲外切圓。

(2) 設  $AC$  延線交  $\odot C$  於  $H$ 。則  $CH = c$ 。  $\because AC = a - c$ ， $\therefore AH = a$ 。  $\therefore H$  在  $\odot A$  圓周上。  $\therefore H$  爲  $\odot A$ ， $\odot B$  兩圓之相會點。在  $\odot C$  圓周上任意取其他一點  $H'$ ，聯  $AH'$ ， $CH'$ 。則  $AH' < AC + CH' = AH$ ， $\therefore AH' = a$ 。  $\therefore H'$  在  $\odot A$  內。故  $\odot C$  圓周上除  $H$  外其他一切點均在  $\odot A$  內。故  $\odot A$ ， $\odot C$  會於一點而  $\odot C$  在  $\odot A$  內。故  $\odot A$ ， $\odot C$  爲內切圓。

(3) 設  $AD$  交  $\odot D$  於  $K$ ，則  $DK = d$ 。  $\because AD > a + d$ ， $\therefore AK > a$ 。故  $K$  在  $\odot A$  外。在  $\odot D$  圓周上任意取其他一點  $K'$ ，聯  $AK'$ ， $DK'$ ，則  $AK' + DK' > AD > a + d$ 。  $\because DK' = d$ 。  $\therefore AK > a$ 。  $\therefore \odot D$  上一切點均在  $\odot A$  外。  $\therefore \odot A$ ， $\odot D$  爲外離圓。

(4) 設  $AE$  延線交  $\odot E$  圓周於  $L$ ，則  $EL = e$ ， $\because AE < a - e$ ， $\therefore AL < a$ 。  $\therefore \odot E$  在  $\odot A$  內。在  $\odot E$  上任意取其他一點  $L'$ ，聯  $AL'$ ， $EL'$ ，則  $AL' < AE + EL' < AL < a$ ， $\therefore AL' < a$ 。  $\therefore L'$  在  $\odot A$  內。故  $\odot E$  上一切點均在  $\odot A$  內。故  $\odot A$ ， $\odot E$  爲內離圓。

(5) 設  $AF$  交  $\odot F$  於  $M$ ，則  $FM = f$ 。  $\because AF < a + f$ 。  $\therefore$

$AM < a$ .  $\therefore M$  在  $\odot A$  內. 又設  $AF$  之延線交  $\odot F$  於  $N$ , 則  $FN = f$ .  $\therefore AF > a - f$ .  $\therefore AN > a$ .  $\therefore N$  在  $\odot A$  之外.  $\therefore \odot F$  有一部分在  $\odot A$  內, 而有一部分在圓外.  $\therefore \odot A, \odot F$  爲相交圓. Q. E. D.

§ 196. 系一 外切兩圓中心距離等於其半徑之和; 內切兩圓中心距離等於其半徑之差; 外離兩圓中心距離大於其半徑之和; 內離兩圓中心距離小於其半徑之差; 相交兩圓中心距離小於其半徑之和 而大於其半徑之差.

§ 197. 系二 相切兩圓之切點與其中心共線.

§ 198. 定義五三 中心線 過兩圓中心之直線, 曰中心線 (line of centres).

§ 199. 定義五四 公切線 切於兩圓之直線曰公切線 (common tangent). 若所切之兩圓在公切線之同旁, 則此公切線曰外公切線. 若所切之兩圓在公切線之兩旁, 則此公切線曰內公切線.

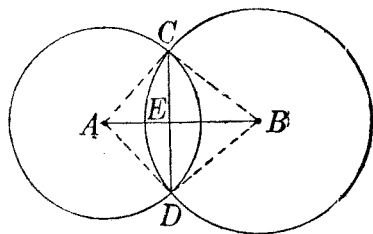
§ 200. 定義五五 公切 相交兩圓交點所聯線分曰公弦 (common chord).

§ 201. 定理六一 相交二圓之中心線爲其公弦之垂直等分線.

〔假設〕  $\odot A, \odot B$  交於  $C, D$ .

〔終決〕  $AB$  爲  $CD$  之垂直等分線。

〔證〕 聯  $AC, BC, AD, BD$   
 在  $\triangle ABC, \triangle ABD$  中  $AC = AD,$   
 $BC = BD, AB$  爲公邊.  $\therefore$

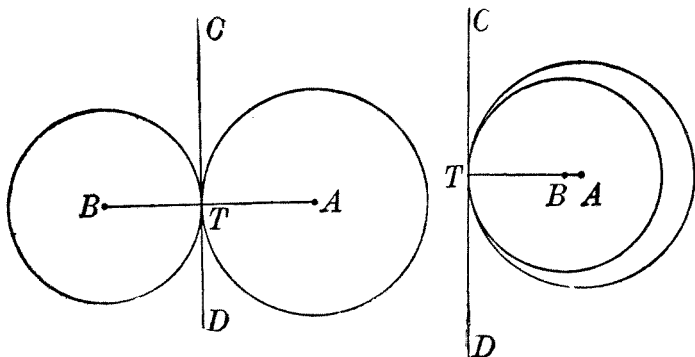


$\triangle ABC \cong \triangle ABD. \therefore \angle CAB = \angle DAB.$  在  $\triangle ACE, \triangle ADE$  中,  
 $AC = AD,$  又  $AE$  爲公邊  $\therefore \triangle ACE \cong \triangle ADE. \therefore CE = ED,$   
 $\angle AEC = \angle AED = R\angle.$

$\therefore AB$  爲  $CD$  之垂直等分線.

Q. E. D.

§ 202. 定理六二 過相切兩圓切點所作中心線的垂線爲兩圓的公切線。



〔假設〕  $\odot A, \odot B$  切於  $T. CTD \perp AB$

〔終決〕  $CD$  爲  $\odot A, \odot B$  之公切線

〔證〕  $\because \odot A, \odot B$  切於  $T$ .  $\therefore A, T, B$  共線. 即  $T$  在  $AB$  上, 或  $AB$  之延線上.

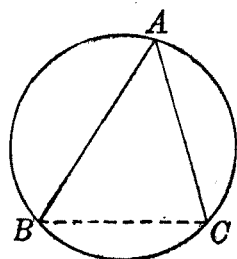
$\therefore AT \perp CD$ .  $\therefore CD$  切  $\odot A$  於  $T$ . 又  $BT \perp CD$ .  $\therefore CD$  切  $\odot B$  於  $T$ .  $\therefore CD$  爲  $\odot A, \odot B$  之公切線. Q. E. D.



## 第十三章 關於圓之各角

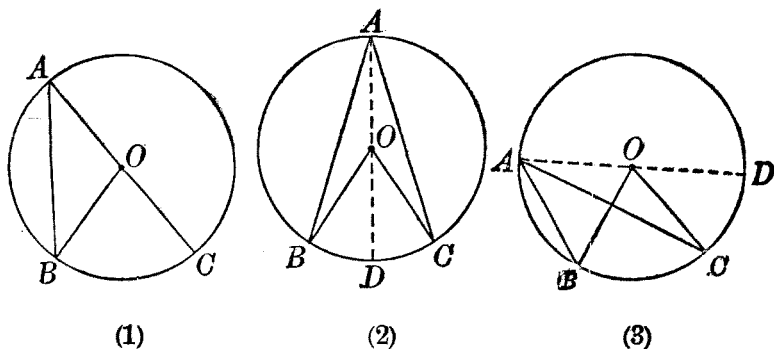
§ 233. 定義五六 圓周角 弓形角 過圓周上一點之兩弦所夾之角曰圓周角 (angle at circumference). 此兩弦他端間之弧曰此圓周角所對之弧.

如圖圓周角  $\angle BAC$  與  $\overset{\frown}{BC}$  爲相對.  $\angle A$  爲  $\overset{\frown}{BC}$  所對之圓周角.  $\overset{\frown}{BC}$  爲  $\angle A$  所對之弧.



聯  $BC$  則成弓形  $BAC$ . 此圓周角  $\angle A$  指弓形  $BAC$  而言, 亦曰弓形角 (angle in a segment).

§ 204. 定理六三 圓周角等於其所對弧所對中心角之半.



〔假設〕  $\angle BAC$  爲  $\odot O$  之圓周角.

〔終決〕  $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ .

〔證〕 (1)  $\angle BAC$  之一邊  $AC$  適爲直徑時.

則因  $OA = OB$ ,  $\therefore \angle BAC = \angle OBA$ .

然  $\angle BOC = \angle BAC + \angle OBA$ .

$\therefore \angle BOC = 2\angle BAC$ .  $\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$

(2) 中心  $O$  在  $\angle BAC$  內. 作直徑  $AOD$ .

則從 (1),  $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD$ ,  $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD$ .

$\therefore \angle BAD + \angle CAD = \frac{1}{2} (\angle BOD + \angle COD)$ .

即  $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ .

(3) 中心  $O$  在  $\angle BAC$  外. 作直徑  $AOD$ .

則從 (1),  $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD$ ,  $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD$ .

$\therefore \angle BAD - \angle CAD = \frac{1}{2} (\angle BOD - \angle COD)$ .

即  $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ .

Q. E. D.

§ 205. 系一 對同弧之圓周角相等.

§ 206. 系二 在同圓或等圓中兩弧相等, 則其所對圓周角相等. 兩圓周角相等, 則其所對弧相等.

§ 207. 系三 在同圓或等圓中, 兩圓周角不等, 則所對弧不等; 圓周角大, 所對弧亦大. 兩弧不等, 則所對之圓周角不等; 弧

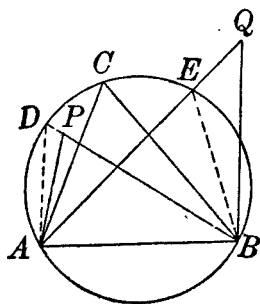
大, 所對之圓周角亦大.

§ 208. 系四 半圓周所對之圓周角爲直角; 優弧所對之圓周角爲鈍角; 劣弧所對之圓周角爲銳角. 若圓周角爲直角, 則其所對之弧爲半圓周; 若圓周角爲鈍角, 則其所對之弧爲優弧; 若圓周角爲銳角, 則其所對之弧爲劣弧.

§ 209. 定理六四 從弓形弧內一點至其弦之兩端所聯線分之夾角, 大於此弓形之弓形角; 從弓形弧外一點至其弦之兩端所聯線分之夾角, 小於此弓形之弓形角

[假設]  $P$  爲弓形  $ACB$  內任意一點,  
 $Q$  爲弓形弧外任意一點.

[終決]  $\angle APB > \angle ACB$ ,  
 $\angle AQB < \angle ACB$ .



[證] 延長  $BP$  交弓形弧於  $D$  聯  $DA$ .

則  $\angle ADB = \angle ACB$ .  $\therefore \angle APB > \angle ADB$ .  $\therefore \angle APB > \angle ACB$ .  $AQ$  交弓形弧於  $E$  聯  $BE$ . 則  $\angle AEB = \angle ACB$ .

$\therefore \angle AQB < \angle AEB$ .  $\therefore \angle AQB < \angle ACB$ . Q. E. D.

210. 定義五七 內接多角形 外接圓 一個多角形之各頂點在同一圓周上, 則此多角形曰圓內接多角形 (inscribed polygon). 此圓曰外接圓 (circumscribed circle).

§ 211 定義五八 外切多角形 內切圓 一個多角形之各

邊爲同一圓周之切線，則此多角形曰圓外切多角形(circumscribed polygon). 此圓曰內切圓 (inscribed circle).

§ 212. 定理六五 任意一三角形有一外接圓，只有一外接圓.

〔假設〕  $\triangle ABC$  爲一任意三角形.

〔終決〕 過  $A, B, C$  有一圓，只有一

圓.

〔證〕  $\triangle ABC$  三邊之垂直等分線

會於一點  $O$  爲其外心與各頂點等距，即  $OA = OB = OC$ .

故以  $O$  爲中心， $OA$  爲半徑之圓必過  $B$  與  $C$ .

故  $\triangle ABC$  有一外接圓  $\odot O$ .

又因線分之垂直等分線有一無二，故三角形之外心只有一個.

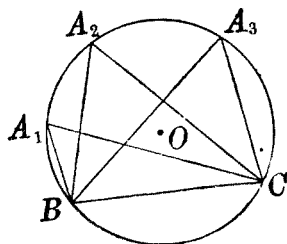
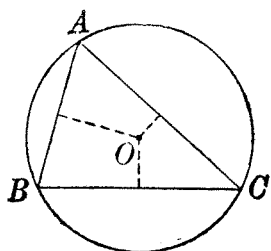
∴  $\triangle ABC$  只有一外接圓  $\odot O$ .

Q. E. D.

§ 213. 系 過不共線之三點有一圓而只有一圓.

§ 214. 定義五九 四點或四點以上諸點若在同一圓周上，則此諸點曰共圓點.

§ 215. 定理六六 諸三角形邊一公共，此公共邊之對角在同旁且相等，則



此諸三角形之頂點共圓。

〔假設〕  $BC$  爲  $\triangle A_1BC, \triangle A_2BC, \triangle A_3BC, \dots$  之公共邊。  
 $A_1, A_2, A_3, \dots$  在  $BC$  之同旁，且  $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \dots$ 。

〔終決〕  $A_1, A_2, A_3, \dots, B, C$  共圓。

〔證〕  $\triangle A_1BC$  有一外接圓  $\odot O$ 。設  $A_2$  在弓形  $BA_1C$  之內，則  $\angle A_2 > \angle A_1$ ；設  $A_2$  在弓形  $BA_1C$  之外，則  $\angle A_2 < \angle A_1$  皆與假設矛盾。故  $A_2$  在  $\odot O$  圓周上。同理  $A_3, \dots$  皆在  $\odot O$  圓周上。

$\therefore A_1, A_2, A_3, \dots, B, C$  共圓。

Q. E. D.

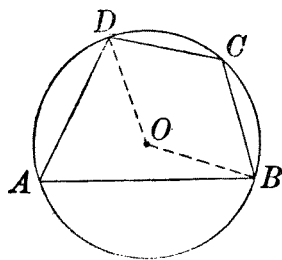
§ 216. 定理六七 圓內接四角形之對角互爲補角。

〔假設〕  $ABCD$  爲圓內接四角形。

〔終決〕  $\angle A + \angle C = 2R\angle,$

$\angle B + \angle D = 2R\angle.$

〔證〕 聯  $OB, OD$ ，則  $\angle A = \frac{1}{2} \angle BOD$ ， $\angle C = \frac{1}{2}$  優  $\angle BOD$ 。



$\therefore \angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\angle BOD + \text{優} \angle BOD)$ 。但  $\angle BOD + \text{優} \angle BOD$

爲一周角。  $\therefore \angle A + \angle C = \frac{1}{2}$  周角  $= 2R\angle$ 。

同理  $\angle B + \angle D = \frac{1}{2}$  周角  $= 2R\angle$ 。

Q. E. D.

§ 217. 定理六八 四角形對角互爲補角，則其各頂點共圓。

〔假設〕 四角形  $ABCD$  中,  $\angle A = \angle C$ .

〔終決〕  $A, B, C, D$  共圓

〔證〕 聯  $BD$ .  $\triangle ABD$  有一外接圓

$\odot O$ . 若  $C$  在  $\sim BD$  外, 則  $\angle C$  小於弓形

$DCB$  之弓形角.  $\therefore \angle A + \angle C < 2R\angle$ ; 若  $C$  在  $\sim BD$  內, 則

$\angle C$  大於弓形  $DCB$  之弓形角.  $\therefore \angle A + \angle C > 2R\angle$  皆與假

設矛盾.  $\therefore C$  在  $\odot O$  上.

$\therefore A, B, C, D$  共圓.

Q. E. D.

§ 218. 定義六〇 四角形外角之內對角 四角形相對二角之一內角為其他一外角之內對角.

§ 219. 定理六九 圓內接四角形之一外角等於其內對角.

〔假設〕  $ABCD$  為圓內接四角形,  $\angle DAE$  為一外角.

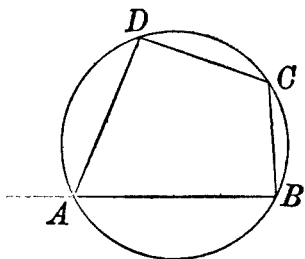
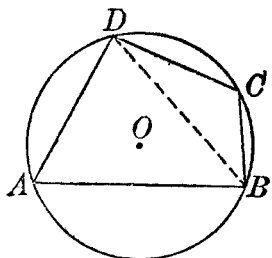
〔終決〕  $\angle DAE = \angle C$ .

〔證〕  $\angle BAD + \angle C = 2R\angle$ ,  $E$   
 $\angle BAD + \angle DAE = 2R\angle$ .

$\therefore \angle DAE = \angle C$ .

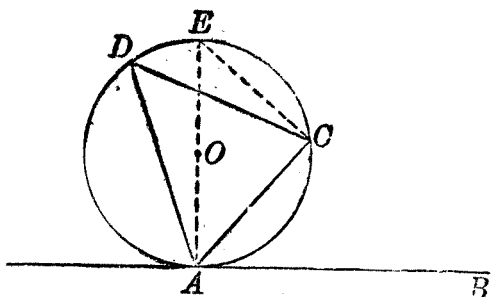
Q. E. D.

§ 220. 定理七〇 四角形之一外角等於其內對角, 則此四角形之各頂點共圓.



〔證略〕

§ 221. 定理七一 切線及過其切點之弦所夾之角等於角內弧所對之圓周角.



〔假設〕  $AB$  切  $\odot O$  於  $A$ .  $AC$  爲過  $A$  之任意弦.

〔終決〕  $\angle BAC = \angle ADC$

〔證〕 作直徑  $AOE$ . 聯  $CE$ . 則因  $\widehat{AE}$  爲半圓周,

$\therefore \angle ACE = R\angle$ .  $\therefore \angle CAE + \angle CEA = R\angle$ .

又因  $EA \perp AB$ ,  $\therefore \angle CAE + \angle CAB = R\angle$ .

$\therefore \angle CAB = \angle CEA = \angle ADC$ .

Q. E. D.

§ 222. 定理七二 過弦一端之直線, 若與此弦所成之角等於其所對之圓周角, 則此直線爲圓之切線.

〔假設〕  $\angle DAB = \angle C$ .

〔終決〕  $AD$  切  $\odot ABC$  於  $A$ .

〔證〕 作直徑  $AOE$ . 聯  $EB$ . 則

$\angle EBA$  爲  $R\angle$ .

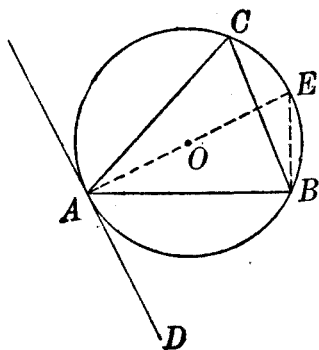
$$\therefore \angle AEB + \angle EAB = R\angle.$$

$$\because \angle DAB = \angle C = \angle AEB,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle EAB = R\angle,$$

即  $EOA \perp AD$ .

$\therefore AD$  切  $\odot ABC$  於  $A$ .



Q.E.D



## 第十四章 圓之應用及雜例

§ 223. 凡圓之定理，最適宜於證角之關係，而定理六三至七二等為用尤廣。舉例如下：

(例一) 三角形之三個高共點。(此即定理三八，前借用外心證明，今應用本章定理直接證明之)。

〔假設〕  $AD, BE, CF$  為  $\triangle ABC$  之三個高。

〔終決〕  $AD, BE, CF$  共點。

〔證〕 設  $BE, CF$  之交點為  $H$ 。  
 聯  $AH$  延長交  $BC$  於  $D'$ 。聯  $EF$ 。則因  
 $\angle AFH = R\angle, \angle AEH = R\angle$ 。

$$\therefore \angle AFH + \angle AEH = 2R\angle,$$

$$\therefore A, F, H, E \text{ 共圓。}$$

(定理六八)

$$\therefore \angle AFE = \angle AHE.$$

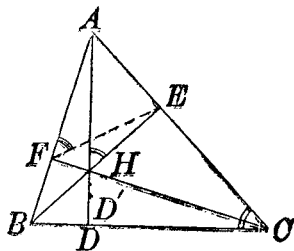
(定理六三系一)

又因  $\angle BFC = R\angle, \angle BEC = R\angle$ ,

$$\therefore \angle BFC = \angle BEC,$$

$$\therefore B, F, E, C \text{ 共圓。}$$

(定理六三)



$\therefore \angle AFE = \angle BCE$ . (定理六九)

$\therefore \angle AHE = \angle BCE$

$\therefore D', C, E, H$  共圓. (定理七〇)

$\therefore \angle HD'C + \angle HEC = 2R\angle$  (定理六七)

$\therefore \angle HEC = R\angle, \therefore \angle HD'C = R\angle$ . 即  $AD' \perp BC$ .

$\therefore AD'$  合於  $AD$ .  $\therefore AD, BE, CF$  共點. Q. E. D

(例二) 從三角形外接圓

周上任意點至三邊所作垂線

之足共線.

[假設]  $P$  為  $\triangle ABC$  外  
接圓周上任意一點.  $PD \perp BC$ ,  
 $PE \perp AC, PF \perp AB$ .

[終決]  $D, E, F$  共線.

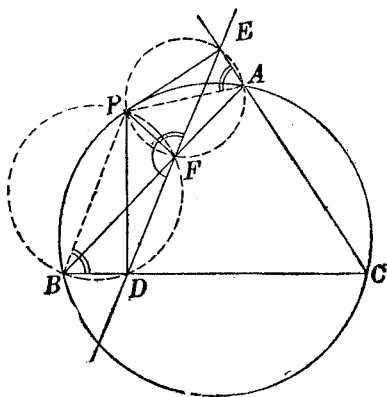
[證] 聯  $PA, PB, EF$ ,

$FD$ . 則因  $\angle PEA = R\angle, \angle PFA = R\angle, \therefore \angle PEA + \angle PFA$   
 $= 2R\angle. \therefore P, F, A, E$  共圓.  $\therefore \angle PAE = \angle PFE$ .

又因  $\angle PFB = R\angle, \angle PDB = R\angle, \therefore \angle PFB = \angle PDB$ .

$\therefore P, F, D, B$  共圓.  $\therefore \angle PFD + \angle PBD = 2R\angle$ .

$\therefore P, B, C, A$  共圓,  $\therefore \angle PAE = \angle PBD$ .

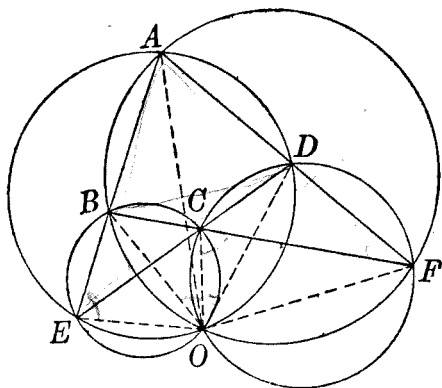


$\therefore \angle PFE = \angle PBD. \therefore \angle PFD + \angle PFE = 2R\angle,$

$\therefore EFD$  爲一直線. 即  $D, E, F$  共線  $Q. E D.$

〔註〕  $D, E, F$  所共之線名曰  $P$  點之西摩松線 (Simson's line), 以其爲 Simson 氏所發見故也. 惟據 McCay 氏言, 則謂發明此定理者, 實爲 Wallace 氏而非 Simson 氏云.

(例三) 不平行不共點之四直線交於六點成四個三角形. 此四個三角形之外接圓共點



〔假設〕  $AE, AF, ED, FB$  四直線交於  $A, B, C, D, E, F$  六點, 成  $\triangle ABF, \triangle AED, \triangle BCE, \triangle DCF$ .

〔終決〕  $\odot ABF, \odot AED, \odot BCE, \odot DCF$  共點.

〔證〕 設  $\odot BCE, \odot DCF$  之交點爲  $O$ .

聯  $AO, BO, CO, DO, EO, FO$ .

則因  $E, B, C, O$  共圓,  $\therefore \angle BEO = \angle OCF$ .

又因  $F, D, C, O$  共圓,  $\therefore \angle OCF = \angle ODF$

$\therefore \angle BEO = \angle ODF$ ,  $\therefore E, A, D, O$  共圓,

即  $\odot AED$  過  $O$  點.

又  $\angle EBO = \angle ECO = \angle AFO$ .  $\therefore F, A, B, O$  共圓,

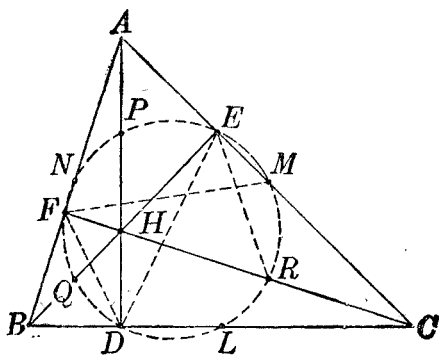
即  $\odot ABF$  過  $O$  點.

$\therefore \odot ABF, \odot AED, \odot BCE, \odot DCF$  共點. Q. E. D.

(註) 此四圓所共之點名曰密爾爾點 (Miguel point).

(例四) 任意三角形三邊之中點, 三個高之垂足, 及三頂點與垂心間線分之中點, 凡九點共圓.

(假設)  $\triangle ABC$  中,  
 $L, M, N$  各為  $BC, AC, AB$   
 之中點;  $H$  為垂心,  $D, E, F$   
 各為  $BC, AC, AB$  上之垂  
 足;  $P, Q, R$  各為  $AH, BH,$   
 $CH$  之中點.



(終決)  $D, L, R, M, E, P, N, F, Q$  共圓.

(證一) 作  $\odot DEF$ . 聯  $ED, FD, ER, FM$ .

因  $H, F, B, D$  共圓 (為何?),  $\therefore \angle FDH = \angle FBH$

因  $H, E, C, D$  共圓 (爲何?),  $\therefore \angle EDH = \angle ECH$ .

因  $B, F, E, C$  共圓 (爲何?),  $\therefore \angle FBH = \angle ECH$ .

故  $\angle FDE = \angle FDH + \angle EDH = \angle FBH + \angle ECH = 2\angle ECH$ .

因  $M$  爲直角三角形  $AFC$  斜邊  $AC$  之中點, 故  $MF = MC$ ,  
 $\therefore \angle MFC = \angle MCF$ .  $\therefore \angle FME = \angle MFC + \angle MCF$   
 $= 2\angle MCF$ . Q. C. F.

$\therefore \angle FME = \angle FDE$ ,  $\therefore M$  在  $\odot DEF$  上.

同理  $L, N$  在  $\odot DEF$  上.

因  $R$  爲直角三角形  $HEC$  斜邊  $HC$  之中點, 故  $RC = RE$ ,  
 $\therefore \angle REC = \angle RCE$ .  $\therefore \angle FRE = \angle REC + \angle RCE = 2\angle RCE$ .

$\therefore \angle FRE = \angle FDE$ .  $\therefore R$  在  $\odot DEF$  上.

同理  $P, Q$  在  $\odot DEF$  上.

$\therefore D, L, R, M, E, P, N, F, Q$  共圓. Q. E. D.

〔證二〕 聯  $PE, PM,$

$PL, PQ, LM, LE, LQ$ , 以

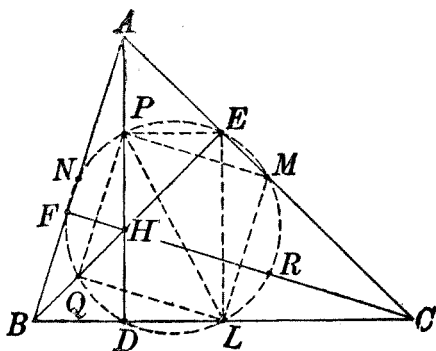
$PL$  爲直徑作圓.

則因  $\angle PDL = R\angle$ ,

$\therefore D$  在圓周上.

$P$  爲直角三角形  $AHE$

斜邊  $AH$  之中點,



$\therefore PE = PH, \therefore \angle PEH = \angle PHE = \angle BHD.$

$L$  爲直角三角形  $EBC$  斜邊  $BC$  之中點,

$\therefore LB = LE, \therefore \angle BEL = \angle EBL.$

$\therefore \angle PEL = \angle PEH + \angle BEL = \angle BHD + \angle EBL = \angle HDC = R\angle.$

$\therefore E$  在圓周上. 同樣可證  $F$  在圓周上

因  $P, M$  各爲  $AH, AC$  之中點,  $\therefore PM \parallel HC$ ;

因  $Q, L$  各爲  $BH, BC$  之中點,  $\therefore QL \parallel HC$ ;

因  $P, Q$  各爲  $AH, BH$  之中點,  $\therefore PQ \parallel AB$ ;

因  $M, L$  各爲  $AC, BC$  之中點,  $\therefore ML \parallel AB.$

$\therefore AB \perp HC, \therefore PMLQ$  爲矩形,  $\therefore \angle PML = \angle PQL = R\angle.$

$\therefore M, Q$  皆在圓周上. 同樣可證  $N, R$  皆在圓周上.

$\therefore D, L, R, M, E, P, N, F, Q$  共圓.

Q. E. D.

【證三】 作  $BC, AC,$

$AB$  之垂直等分線  $LO,$

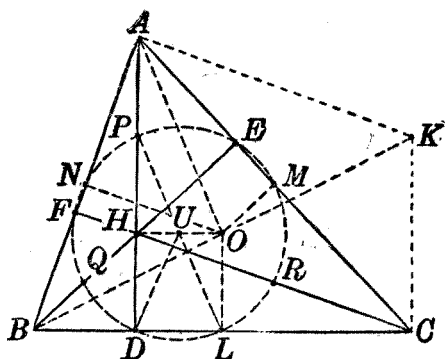
$MO, NO$  交於外心  $O.$  聯

$OH$  以  $OH$  之中點  $U$  爲

中心,  $\triangle ABC$  外接圓半徑

之半爲半徑(即  $OA$  之半)

作  $\odot U$



因  $U, P$  各爲  $HO, HA$  之中點,  $\therefore UP = \frac{1}{2}DA$ , 即等於  $\odot U$  之

半徑， $\therefore P$  在  $\odot U$  圓周上。

同理  $Q, R$  在  $\odot U$  圓周上。

聯  $BO$  延長至  $K$  令  $BO = OK$ . 聯  $AK, CK$ .

則因  $O, L$  各為  $BK, BC$  之中點.  $\therefore KC \parallel OL \parallel AD$ ,

$$OL = \frac{1}{2}KC.$$

又因  $O, N$  各為  $BK, BA$  之中點,  $\therefore KA \parallel ON \parallel CH$ .

$\therefore AHCK$  為平行四邊形.  $\therefore AH = KC$ .

$\therefore OL = \frac{1}{2}KC$ ,  $\therefore OL = \frac{1}{2}AH = PH$ . 又  $\therefore OL \parallel PH$ ,

$\therefore \angle PHO = \angle HOL$ . 又  $HU = UO$ ,  $\therefore \triangle PHU \cong \triangle OLU$ .

$\therefore UL = UP = \frac{1}{2}OA$ .  $\therefore L$  在  $\odot U$  圓周上。

同理  $M, N$  在  $\odot U$  圓周上。

既得  $\triangle PHU \cong \triangle OLU$ ,  $\therefore \angle PUH = \angle OUL$ ,  $\therefore P, U, L$

為一直線  $\therefore U$  為直角三角形  $PDL$  斜邊  $PL$  之中點.  $\therefore UD$

$= UP = \frac{1}{2}OA$ .  $\therefore D$  在  $\odot U$  圓周上。

同理  $E, F$  在  $\odot U$  圓周上。

故  $D, L, R, M, E, P, N, F, Q$  共圓。

Q. E. D.

(註)  $\odot U$  名曰  $\triangle ABC$  之九點圓 (nine-point circle). 從〔證三〕可知三角

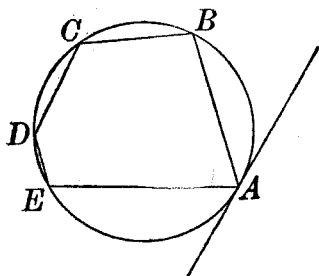
形之九點圓心，為外心垂心聯線之中點，其半徑等於外接圓半徑之中。

## 習 題 九

1. 兩圓外離, 其兩個外公切線相等.
2.  $\odot A, \odot B$  外切於  $T$ . 過  $T$  作任意一直線交  $\odot A$  於  $P$ , 交  $\odot B$  於  $Q$ . 則  $AP \parallel BQ$ .
3.  $\odot A, \odot B$  外切於  $T$ . 在過  $T$  之公切線上任意取點  $P$ . 作  $PC$  切  $\odot A$  於  $C$ , 作  $PD$  切  $\odot B$  於  $D$ . 則  $PC = PD$ .
4. 以二等邊三角形一邊為直徑所作之圓周必過其底之中點.
5. 若  $AB, CD$  兩弦平行, 則  $AC = BD$ .
6.  $\odot O, \odot P$  兩等圓交於  $A, B$  兩點. 過  $A$  作任意直線交  $\odot O$  於  $C$ , 交  $\odot P$  於  $D$ . 則  $BC = BD$ .
7.  $A, B, C, D$  為圓周上順次四點. 若  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ , 則  $BC \parallel AD$ .
8. 內接於圓之梯形, 其兩邊必相等.
9.  $\odot O, \odot P$  交於  $A, B$ . 過  $A$  作直線交  $\odot O$  於  $C$ , 交  $\odot P$  於  $D$ . 過  $B$  作直線交  $\odot O$  於  $E$ , 交  $\odot P$  於  $F$ . 則  $CE \parallel DF$ .
10.  $ABCD$  為圓外切四邊形, 則  $AB + CD = BC + AD$ .
11.  $ABCD$  為圓內接四角形, 其對角線  $AC, BD$  交於  $E$ . 求證過  $E$  所作  $\odot ABE$  之切線與  $CD$  平行.



12.  $ABCDE$  內接於圓.  $AB \parallel ED, AE \parallel BC$ . 求證  $CD$  平行於過  $A$  之切線.



13. 直角三角形  $ABC$  中, 以直角邊  $AC$  為直徑畫圓交斜邊  $BC$  於  $D$ . 過  $D$  作切線交  $AB$  於  $M$ . 求證  $M$  為  $AB$  之中點.

14.  $\triangle ABC$  中,  $\angle C$  為直角, 其內切圓切  $AB$  於  $D$ , 切  $BC$  於  $E$ .  $DE$  交  $AC$  延線於  $F$ . 則  $BD = CF$ .

15. 從二同心圓外一點  $P$ , 作外圓之切線  $PA$ , 作內圓之二切線  $PB, PC$ . 二圓之中心為  $O$ . 則  $\angle OAB = \angle OAC$ .

16. 二圓內切於  $A$ . 外圓之弦  $BC$  切內圓於  $D$ . 則  $\angle BAD = \angle CAD$ .

17.  $AOB$  為  $\odot O$  之直徑.  $C$  為任意一點,  $CA, CB$  各交圓周於  $P, Q$ . 則  $OP, OQ$  為  $\odot CPQ$  之切線.

18.  $P$  為正三角形  $ABC$  外接圓周  $\widehat{BC}$  上任意一點. 求證  $PA = PB + PC$ .

19.  $AB, CD$  為  $\odot O$  內平行二弦,  $M$  為  $CD$  中點,  $BM$  交圓周於  $E$ . 求證  $A, O, M, E$  共圓.

20.  $AA'$  為  $\odot O, \odot O'$  之公切線, 中心線  $OO'$  兩端延長各交圓周於  $B, B'$ . 則  $AB, A'B'$  成平行, 成垂直.

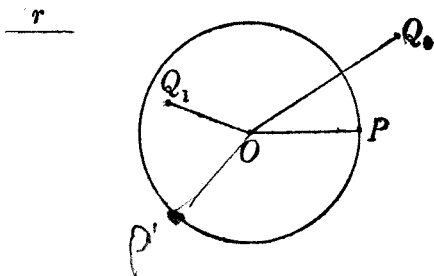
## 第十五章 軌跡

§ 224. 定義六一 點之軌跡 一圖形上之所有點均適合於某條件，而此圖形外之所有點均不適合於此條件，則此圖形曰適合於此條件之點之軌跡 (locus of points).

證某圖形為適合於某條件之點之軌跡，須證兩方面：

- (1) 證圖形上任何點適合於此條件.
- (2) 證圖形外任何點不適合於此條件，或凡適合於此條件之點必在此圖形上.

§ 225. 定理七三 與所設定點之距離等於所設定長之點之軌跡為以定點為中心定長為半徑所作之圓周.



〔已設〕 一定點  $O$ ，一定長  $r$ 。

〔條件〕 一動點  $P$ ,  $PO = r$ .

〔軌跡〕  $P$  之軌跡為以  $O$  為中心  $r$  為半徑所作之圓周.

〔證〕 (1) 在  $\odot O$  上任意一點  $P$  與中心  $O$  之距離為  $r$ . 即  $\odot O$  圓周上任何點適合於條件.

(2) 設  $Q_1$  在  $\odot O$  內, 則  $Q_1O < r$ .  $Q_2$  在  $\odot O$  外, 則  $Q_2O > r$ . 即  $\odot O$  圓周外任何點不適合於條件.

$\therefore \odot O$  圓周為  $P$  之軌跡.

Q. E. D.

§ 226. 定理七四 與所設兩定點等距之點之軌跡為此兩定點所聯線分之垂直等分線.

〔已設〕 兩定點  $A, B$ .

〔條件〕 動點  $P$ ,  $AP = BP$ .

〔軌跡〕  $P$  之軌跡為  $AB$  之垂直等分線  $XY$ .

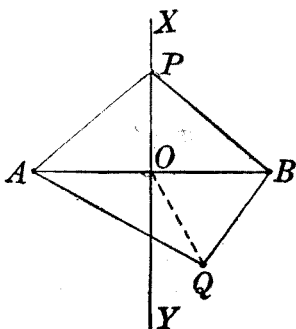
〔證〕 (1)  $P$  為  $XY$  上任意一點.

聯  $AP, BP$ . 則  $\triangle AOP \cong \triangle BOP$ ,

$\therefore PA = PB$ . 即  $XY$  上任何點適合於條件.

(2)  $Q$  為  $XY$  外任意一點. 聯  $AQ, BQ, OQ$ .  $\because OY \perp AB$

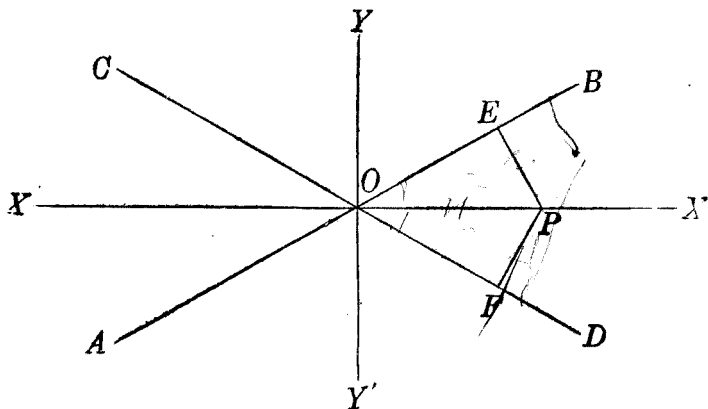
$\therefore OQ$  不  $\perp AB$ ,  $\therefore \angle AOQ \neq \angle BOQ$ . 又  $AO = OB$ ,  $OQ$  為  $\triangle AOQ, \triangle BOQ$  之公邊.  $\therefore AQ \neq BQ$ . 即  $XY$  外任何點不適合於條件



$\therefore XY$  為  $P$  之軌跡.

Q. E. D

§ 227. 定理七五 與所設相交兩定直線等距之點之軌跡為其交角之一雙等分線.



〔已設〕  $AB, CD$  兩直線交於  $O$ .

〔條件〕 從動點  $P$  作  $PE \perp AB, PF \perp CD$  而  $PE = PF$ .

〔軌跡〕  $P$  之軌跡為  $AB, CD$  交角之一雙等分線  $XX', YY'$ .

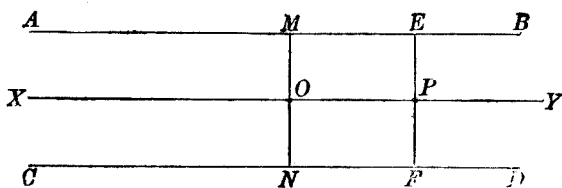
〔證〕 (1) 在  $XX'$  或  $YY'$  上任意取一點  $P$ . 作  $PE \perp AB, PF \perp CD$ . 則在  $\triangle POE, \triangle POF$  中,  $\angle PEO = \angle PFO = R\angle$ ,  $\angle POE = \angle POF$ ,  $OP$  為公邊.  $\therefore \triangle POE \cong \triangle POF$ .  $\therefore PE = PF$ . 即  $XX', YY'$  上任何點適合於所設條件.

(2) 設  $P$  為適合於條件之點. 作  $PE \perp AB, PF \perp CD$ , 聯  $PO$ . 則在  $\triangle POE, \triangle POF$  中,  $\angle PEO = \angle PFO = R\angle, PE = PF, OP$  為

公邊.  $\therefore \triangle PEO \cong \triangle PFO$ .  $\therefore \angle POE = \angle POF$ . 即  $OP$  爲  $AB, CD$  夾角之等分線. 即適合於條件之點必在  $XX'$  或  $YY'$  上.

$\therefore XX', YY'$  爲  $P$  之軌跡. Q. E. D.

§ 228. 定理七六 與所設兩平行線等距之點之軌跡爲過其公垂線中點之一個平行線.



〔已設〕 兩直線  $AB \parallel CD$ .

〔條件〕 從動點  $P$  作  $PE \perp AB, PF \perp CD$ , 而  $PE = PF$ .

〔軌跡〕  $P$  之軌跡爲過  $AB, CD$  公垂線  $MN$  之中點  $O$  所作  $AB, CD$  之平行線  $XY$ .

〔證〕 (1) 在  $XY$  上任意取一點  $P$ . 作  $PE \perp AB, PF \perp CD$ . 則因  $MN$  爲  $AB, CD$  之公垂線,  $\therefore MOPE, NOPF$  皆爲矩形.  $\therefore PE = OM, PF = ON$ .  $\because OM = ON, \therefore PE = PF$ .

即  $XY$  上任何點適合於條件.

(2) 設  $P$  爲適合於條件之點. 作  $PE \perp AB, PF \perp CD$ , 則  $PE = PF$ . 又因  $MN$  爲  $AB, CD$  之公垂線,  $\therefore PE \parallel MN, PF \parallel MN$ ,  $\therefore EPF$  爲一直線, 而  $MNFE$  爲矩形,  $\therefore EF = MN$ .

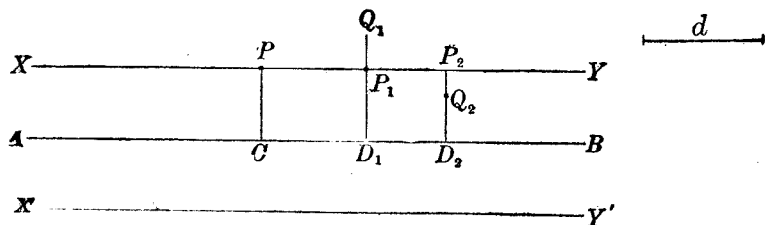
$$EP = \frac{1}{2}EF, MO = \frac{1}{2}MN, \therefore PE = OM. \therefore OP \parallel AB.$$

$\therefore P$  在  $XY$  上. 即適合於條件之點在  $XY$  上.

$\therefore XY$  為  $P$  之軌跡.

Q. E. D.

§ 229. 定理七七 與所設定直線之距離等於所設定長之點之軌跡為此定直線的一雙平行線, 各在定直線之一旁, 各與定直線之距離等於所設定長.



〔已設〕 一定直線  $AB$ , 一定長  $d$ .

〔條件〕 從動點  $P$  作  $PC \perp AB$ , 而  $PC = d$ .

軌跡)  $P$  之軌跡為  $AB$  兩旁之一雙平行線  $XY, X'Y'$  與  $AB$  之距離各等於  $d$ .

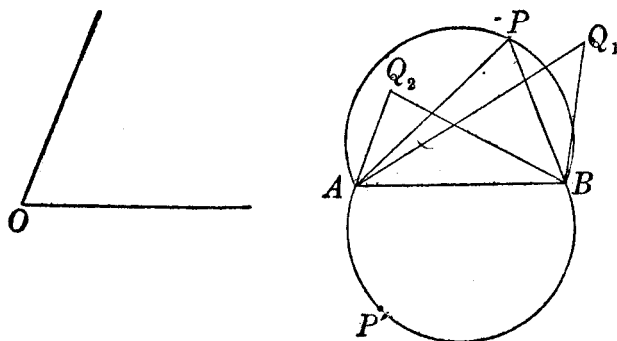
〔證〕 (1) 從  $XY$  (或  $X'Y'$ ) 上任意一點  $P$  作  $PC \perp AB$ . 則因  $XY \parallel AB$ ,  $\therefore PC$  為  $XY, AB$  之公垂線.  $\therefore PC = d$ .  $\therefore XY$  (或  $X'Y'$ ) 上任何點適合於條件.

(2) 設  $Q$  為  $XY$  及  $X'Y'$  外任意一點. 作  $QD \perp AB$ . 若  $Q$  與  $D$  在  $XY$  之兩旁如圖  $Q_1D_1$ , 則  $Q_1D_1$  必交  $XY$  於  $P_1$ .  $\therefore Q_1D_1$

$> P_1 D_1$ ,  $\therefore Q_1 D_1 > d$ , 若  $Q$  與  $D$  在  $XY$  之同旁 如圖  $Q_2 D_2$ , 則  $D_2 Q_2$  之延線必交  $XY$  於  $P_2$ .  $\therefore Q_2 D_2 < P_2 D_2$ .  $\therefore Q_2 D_2 < d$ .  
 即凡  $XY$  及  $X'Y'$  外之任何點不適合於條件.

$\therefore XY, X'Y'$  為  $P$  之軌跡. Q. E. D.

§ 230. 定理七八 從一動點至所設兩定點各作直線. 此兩線所夾之角等於所設定角. 則此動點之軌跡為以兩定點所聯線分為弦之一雙弓形弧, 其弓形角等於所設定角.



〔已設〕 二定點  $A, B$ . 一定角  $O$ .

〔條件〕 從動點作  $PA, PB$ . 而  $\angle APB = \angle O$ .

〔軌跡〕  $P$  之軌跡為以  $AB$  為弦,  $\angle O$  為弓形角所作之一雙弓形弧  $\overset{\frown}{APB}, \overset{\frown}{AP'B}$ .

〔證〕 (1) 從弓形弧上任意點  $P$  聯  $PA, PB$ . 則  $\angle APB = \angle O$ , 故弓形弧上任何點適合於條件

(2) 設  $Q$  爲  $\widehat{APB}$ ,  $\widehat{AP'B}$  外任意一點, 聯  $AQ$ ,  $BQ$ . 若  $Q$  在弓形外如圖  $Q_1$ , 則  $\angle AQ_1B < \angle O$ . 若  $Q$  在弓形內如圖  $Q_2$ , 則  $\angle AQ_2B > \angle O$ . 故弓形弧外任何點不適合於條件.

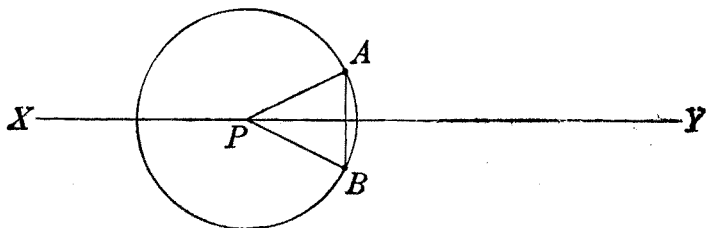
$\therefore \widehat{APB}$ ,  $\widehat{AP'B}$  爲  $P$  之軌跡. Q. E. D.

§ 231. 系 從一動點至所設兩定點各作直線. 此兩線所夾之角等於直角. 則此動點之軌跡爲以兩定點所聯線分爲直徑之圓周.

### § 232. 軌跡定理之應用及雜例

以上數節爲軌跡之基本定理. 多數軌跡題, 可應用以上諸節定理證明之. 舉例如下:—

(例一) 一動圓恆過所設兩定點, 則此動圓中心之軌跡爲兩定點所聯線分之垂直等分線.



〔已設〕 二定點  $A, B$ .

〔條件〕 動圓  $\odot P$  其圓周可過  $A, B$  二點.

〔軌跡〕  $P$  之軌跡爲  $AB$  之垂直等分線  $XY$ .

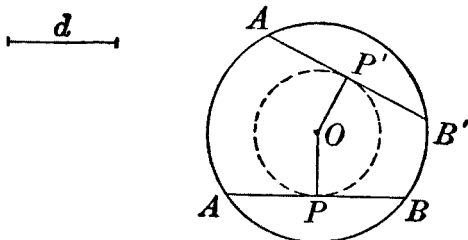


〔證〕  $\odot P$  圓周過  $A, B$  二點,  $\therefore PA=PB$ .  $\because A, B$  爲二定點.  $\therefore P$  之軌跡爲  $AB$  之垂直等分線. (定理七四)

Q. E. D.

有時題中但設條件, 須求出軌跡再證明之. 如

(例二) 求所設圓內諸等弦中點之軌跡.



〔已設〕 一定圓  $\odot O$  (圖中外圓). 一定長  $d$ .

〔條件〕 動弦  $AB=d$ . 其中點爲  $P$ .

求  $P$  之軌跡.

〔解析〕 在  $\odot O$  內任意二弦  $AB, A'B'$  各等於  $d$ . 各取中點  $P, P'$ . 聯  $OP, OP'$ . 則  $OP \perp AB, OP' \perp A'B'$ .  $\because AB=A'B'$ ,  $\therefore OP=OP'$ . 故得

〔軌跡〕  $P$  之軌跡爲  $O$  爲中心,  $O$  與  $AB$  之距爲半徑所作之圓周 (圖中內圓).

〔證〕  $O$  爲定點,  $OP$  爲定長.  $\therefore P$  之軌跡爲以  $O$  爲定點,

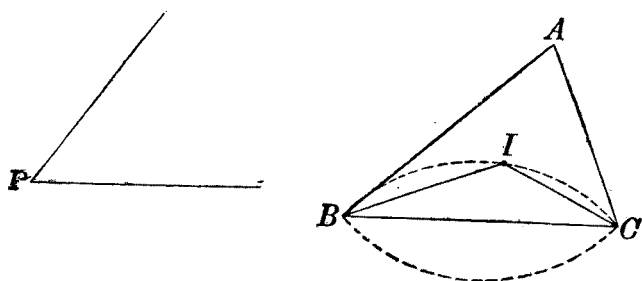
$OP$  爲半徑所作之圓周.

(定理七三)

$Q. E. D$

求軌跡時，可先解析如上例。唯解析部分可以不必寫出。有時亦可將解析部分詳細寫明，求得軌跡後，不必再證明。因證法實已包括在解析內也。如下

(例三) 一動三角形，底邊之位置大小一定，頂角之大小一定求此三角形內心之軌跡。



【已設】 定線分  $BC$ ，定角  $\angle P$ 。

【條件】 動  $\triangle ABC$ ，以  $BC$  爲底， $\angle A = \angle P$ 。  $I$  爲  $\triangle ABC$  之內心。

求  $I$  之軌跡。

【解析】  $\because I$  爲  $\triangle ABC$  之內心，故  $BI, CI$  各爲  $\angle B, \angle C$  之等分線。

$$\therefore \angle BIC = 2R\angle - (\angle IBC + \angle ICB)$$

$$= 2R\angle - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2R\angle - \frac{1}{2}(2R\angle - \angle A) \\
 &= 2R\angle - R\angle + \frac{1}{2}\angle A \\
 &= R\angle + \frac{1}{2}\angle A \\
 &= R\angle + \frac{1}{2}\angle P.
 \end{aligned}$$

今  $B, C$  是兩定點,  $\angle BIC = R\angle + \frac{1}{2}\angle P$  是定角.  $\therefore I$  之

軌跡為以  $BC$  為弦以  $\angle R + \frac{1}{2}\angle P$  為弓形角之一雙弓形弧.

(定理七八)

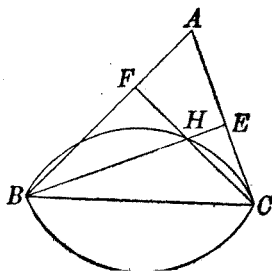
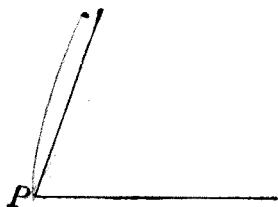
*Q. E. D.*

軌跡題之求法, 最重解析. 然有時每發生謬誤必慎重討論之.

試看

(例四) 一動三角形, 其底邊之位置及大小一定. 頂角之大小

一定. 求此三角形垂心之軌跡.



[已設] 定線分  $BC$  定角  $\angle P$ .

[條件] 動  $\triangle ABC$ ,  $BC$  為底,  $\angle A = \angle P$ .  $H$  為  $\triangle ABC$

之垂心

求  $H$  之軌跡.

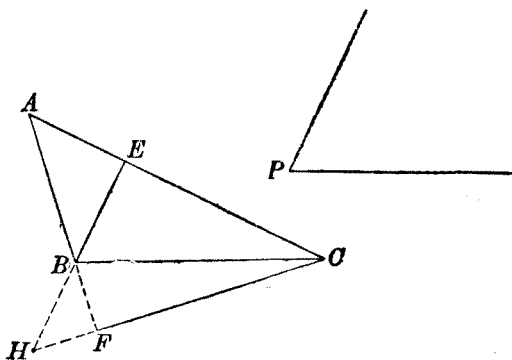
〔解析〕  $\because H$  爲  $\triangle ABC$  之垂心, 故  $BHE \perp AC$ ,  $CHF \perp AB$ . 即  $\angle AEH = R\angle$ ,  $\angle AFH = R\angle$ .

$\therefore \angle BHC = \angle EHF = 2R\angle - \angle A = 2R\angle - \angle P$ . 其大小一定.

$\therefore H$  之軌跡爲以  $BC$  爲弦, 以  $2R - \angle P$  爲弓形角之一雙弓形弧. (定理七八)  $Q. E. D.$

以上解法似乎並無錯誤. 然按諸實際所得兩弧並非真正軌跡. 茲討論之如下:

設所設定  $\angle P < R\angle$  如下圖. 則  $\angle B$  可大於  $R\angle$ . 故  $H$  在



$\triangle ABC$  形外. 而  $\angle BHC = 2R\angle - \angle O$ .  $\therefore H$  不在以  $BC$  爲弦以  $2R\angle - \angle P$  爲弓形角之一雙弓形弧上. 即適合於條件之點未必在所得圖形上. 故上法所得之一雙弓形弧非  $H$  之軌跡.



$H$  之軌跡究如何，學者試自解之。

## 習 題 十

1. 二等邊三角形底之位置一定，求頂點之軌跡。
2. 三角形底之位置一定，高之大小一定，求頂點之軌跡。
3. 一動圓半徑為定長，此動圓恆與一定圓相切，求此動圓中心之軌跡。
4. 一動圓恆切一定直線上一定點，求此圓中心之軌跡。
5. 定圓中動弦之長一定，求此動弦中點之軌跡。
6. 定圓中動弦恆與一定直線平行，求此動弦中點之軌跡。
7.  $A$  為定點， $XY$  為定直線， $P$  為  $XY$  上一動點，求  $AP$  中點之軌跡。
8.  $A$  為定點， $\odot O$  為定圓， $P$  為  $\odot O$  圓周上一動點，求  $AP$  中點之軌跡。
9.  $\triangle ABC$  中， $BC$  之位置一定，中線  $BB'$  之大小一定，求  $A$  之軌跡。
10.  $\triangle ABC$  中， $BC$  之位置一定， $\angle A$  之大小一定，求其重心之軌跡。

## 第十六章 作圖題

§ 233. 作圖題 求作一圖形令合於所設條件曰作圖題 (problem of construction).

一個圖形，決其存在爲一事，如何作法又爲一事。例如一線分必有一中點，此爲已知之事。然在線分中如何取得其無數點中之一點確能爲此線分之中點，此卻另爲一事，本書尚未講過。以前證定理時作補助線，僅知其可有此線而假定爲可作而已。

作圖題分兩部分；一部分爲已設，一部分爲求作。解決一作圖題分三步；第一步作出求作之圖形曰解法，第二步證明所作之圖合於求作之條件曰證，第三步研究解法與題中已設之關係曰討論。

§ 234. 公法 公衆認爲可解決之作圖題，無需解法者曰公法 (postulate).

§ 235. 系 從已解決之作圖題可直接推得之作圖題，亦曰系 (corollary).

§ 236. 公法一 過兩定點作一直線。

用直尺令其邊靠緊所設兩點，沿邊畫線即得。

§ 237. 系一 聯兩定點成一線分.

§ 238. 系二 延長一線分為半射線或直線.

§ 239. 公法二 以一定點為中心,一定長為半徑作一圓.

用圓規張兩足令兩足尖端距離等於定長. 以一足尖端固定於定點而旋轉,則其他一足尖端所畫之線即圓周.

§ 240. 系一 以一定點為中心,一定長為半徑作一弧.

§ 241. 系二 從一定直線上截取一線分令等於一定長.

(注意) 一切作圖題解法都根據以上公法及系, 及已解決之作圖題. 一切作圖題所許用之器具, 就只以上兩公法所用之器具, 直尺及圓規.

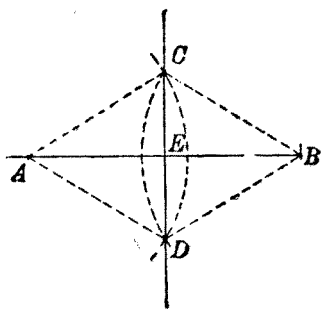
§ 242. 作圖題一 作所設線分之垂直等分線.

[已設] 一線分  $AB$ .

[求作]  $AB$  之垂直等分線.

[解法] 以  $A$  為中心, 任意長 (唯須大於  $AB$  之半) 為半徑作  $\odot A$  (公法二). 以  $B$  為中心,  $\odot A$  之半徑為半徑作  $\odot B$  (公法二). 兩圓交於  $C, D$ . 聯  $CD$  (公法一).

$CD$  即  $AB$  之垂直等分線.



Q. E. F.

[證] 聯  $CA, CB, DA, DB$ .  $\because \odot A = \odot B$ .



$\therefore CA=CB, DA=DB$ , 又  $CD$  爲  $\triangle ACD, \triangle BCD$  之公邊.

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCD$ .  $\therefore \angle ACD = \angle BCD$ . 設  $CD, AB$  之交點爲  $E$ , 則在  $\triangle CAE, \triangle CBE$  中,  $CA=CB, \angle ACE = \angle BCE, CE$  爲公邊,  $\therefore \triangle CAE \cong \triangle CBE$ .

$\therefore AE=EB, \angle AEC = \angle BEC = R\angle$ .

$\therefore CD$  爲  $AB$  之垂直等分線. Q. E. D.

〔討論〕 任何線分有一垂直等分線, 僅有一垂直等分線.

〔註〕 以後凡作圖題之解答, 從以前定理已知其爲有一無二者, 恆省去討論.

§ 243. 系一 在所設線分上取其中點.

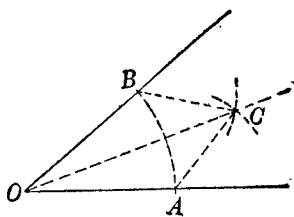
§ 244. 系二 以所設線分爲直徑作圓.

§ 245. 作圖題二 作所設角之等分線.

〔已設〕 一角  $\angle O$ .

〔求作〕  $\angle O$  之等分線.

〔解法〕 以  $O$  爲中心, 任意長爲半徑作弧交  $\angle O$  之兩邊於  $A, B$  (公法二系). 以  $A$  爲中心, 任意長 (唯須大於  $AB$  距離之半) 爲半徑作  $\odot A$  (公法二). 以  $B$  爲中心,  $\odot A$  之半徑爲半徑作弧交  $\odot A$  於  $C$  (公法二系). 聯  $OC$  (公法一系). 則  $OC$  卽  $\angle O$  之等分線. Q. E. F.

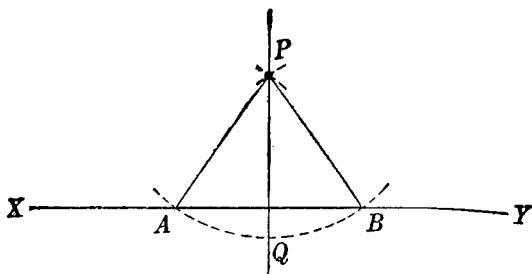


〔證〕 聯  $AC, BC$ , 則  $\triangle OAC \cong \triangle OBC$ . (S. S. S. = S. S. S.)

$\therefore \angle AOC = \angle BOC$ . 即  $OC$  為  $\angle O$  之等分線. Q. E. D.

§ 246. 系 從直線上一點作此直線之垂線.

§ 247. 作圖題三 從直線外一點作此直線之垂線.



〔已設〕 直線  $XY$  及其外一點  $P$ .

〔求作〕 一直線過  $P$  且垂直於  $XY$ .

〔解法〕 以  $P$  為中心, 任意長 (惟須大於  $P$  與  $XY$  之距離) 為半徑作圓交  $XY$  於  $A, B$  二點 (公法二). 作  $AB$  之垂直等分線  $PQ$  (作圖題一).

則  $PQ$  即所求.

Q. E. F

〔證〕  $PQ$  為  $AB$  之垂直等分線, 故為與  $A, B$  等距之點之軌跡.  $\because PA = PB$ , 故  $PQ$  必過  $P$  點. 又  $PQ \perp XY$ .

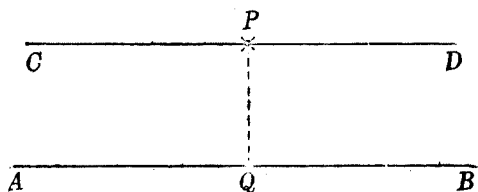
$\therefore PQ$  為所求作之線.

Q. E. D.

§ 248. 作圖題四 從直線外一點作此直線之平行線.

〔已設〕 直線  $AB$  及其外一點  $P$ .

〔求作〕 一直線過  $P$  且平行於  $AB$ .



〔解法〕 過  $P$  作  $PQ \perp AB$  (§ 247) 過  $P$  作  $CD \perp PQ$ .

則  $CD$  即所求.

Q. E. F.

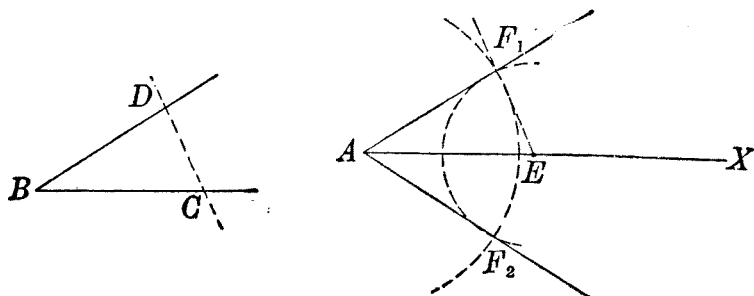
〔證〕  $AB \perp PQ, CD \perp PQ, \therefore CD \parallel AB$ . 又  $CD$  過  $P$  點.

$\therefore CD$  即為所求.

Q. E. D.

§ 249. 作圖題五 從所設半射線之原點, 作一半射線令其

所成之角等於一所設角.



〔已設〕 一半射線  $AX$  及一角  $\angle B$ .

〔求作〕 一半射線以  $A$  為原點, 與  $AX$  所成之角等於  $\angle B$ .

〔解法〕 任意作一直線截  $\angle B$  之兩邊於  $C, D$ .

在  $AX$  上截取線分  $AE = BC$ .

(公法二系二)

以  $A$  爲中心,  $BD$  之長爲半徑作  $\odot A$ .

以  $E$  爲中心,  $CD$  之長爲半徑作  $\odot E$ , 交  $\odot A$  於  $F_1, F_2$  聯  $AF_1, AF_2$ .

則  $AF_1, AF_2$  皆爲所求.

Q. E. F.

〔證〕 聯  $EF_1$ . 則  $\because AE = BC, AF_1 = BD, EF_1 = CD$ .

$\therefore \triangle AEF_1 \cong \triangle BCD. \therefore \angle EAF_1 = \angle CBD$ .

同理  $\angle EAF_2 = \angle CBD$ .

$\therefore AF_1, AF_2$  皆爲所求.

Q. E. D.

〔討論〕 本題恆有兩個解答, 在所設半射線之兩側.

§ 250. 系一 作一三角形令其兩邊及一夾角各等於所設二定長及一定角.

§ 251. 系二 作一三角形令其兩角及其間一邊各等於所設二角及一定長.

§ 252. 系三 作一三角形令其三邊各等於三個所設定長.

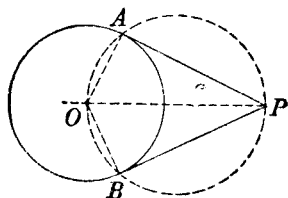
§ 253. 系四 過所設直線外一點作一直線, 令與原直線之交角等於一所設角.

〔以上四條, 學者試自解之〕

§ 254. 作圖題六 過所設點作所設圓之切線.

〔已設〕 一  $\odot O$  及一點  $P$ .

〔求作〕 一直線過  $P$  且切於  $\odot O$ .



〔解法〕 聯  $OP$ .

(公法一系)

以  $OP$  爲直徑作圓交  $\odot O$  於  $A, B$ .

(作圖題一系)

聯  $PA, PB$ . 則  $PA, PB$  皆爲所求.

Q. E. F.

〔證〕 聯  $OA, OB$ . 則因  $OP$  爲直徑,  $\therefore \angle OAP = R\angle$ .

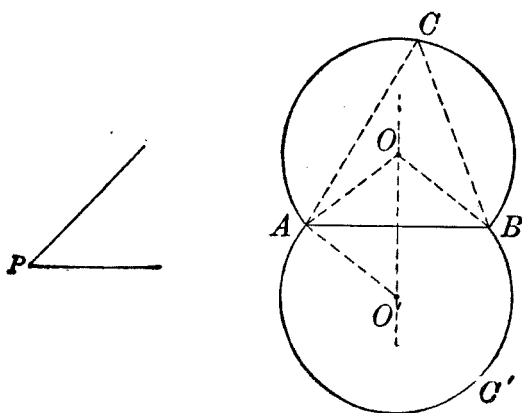
$\therefore PA$  爲切線. 又  $PA$  過  $P$  點.  $\therefore PA$  爲所求.

同理  $PB$  爲所求.

Q. E. D.

〔討論〕 若  $P$  在  $\odot O$  外, 則有兩個解答, 如上圖. 若  $P$  在  $\odot O$  圓周上, 則有一個解答, 因  $OP$  爲直徑所作之圓與  $\odot O$  內切於  $P$ , 只有一交點. 若  $P$  在  $\odot O$  內, 則  $OP$  爲直徑所作之圓與  $\odot O$  內離, 故無解答.

§ 255. 作圖題七 以所設線分爲弦作一弓形, 令弓形角等於所設定角.



〔已設〕 線分  $AB$  及一  $\angle P$ .

〔求作〕 一弓形以  $AB$  為弦, 其弓形角等於  $\angle P$ .

〔解法〕 作  $AB$  之垂直等分線  $OO'$ . (作圖題一)

過  $A$  作直線  $AO$  及  $AO'$ , 交  $OO'$  於  $O$  及  $O'$ , 令  $\angle AOO' = \angle AO'O = \angle P$ . (作圖題五系四)

以  $O, O'$  為中心,  $OA$  為半徑作弧  $ACB, AC'B$ .

則弓形  $ACB$  及弓形  $AC'B$  皆為所求. Q. E. F.

〔證〕 聯  $OB, OO'$  為  $AB$  之垂直等分線,  $\therefore OA = OB$ .

故  $\widehat{ACB}$  必至  $B$  點. 在弓形弧上任意取  $C$ , 取  $AC, BC$ , 則

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle AOO' = \angle P.$$

$\therefore$  弓形  $ACB$  為所求.

同理 弓形  $AC'B$  為所求. Q. E. D.

〔討論〕 本題恆有兩個解答. 若  $\angle P < R\angle$ , 則所得為一雙大弓形. 若  $\angle P > R\angle$ , 則所得為一雙小弓形. 若  $\angle P = R\angle$ , 則所得為一雙半圓, 即以  $AB$  為直徑所作之圓.

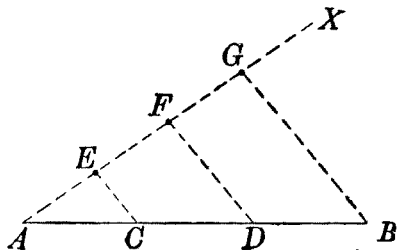
### § 256. 作圖題八 分所

設線分為三等分.

〔已設〕 一線分  $AB$ .

〔求作〕 在  $AB$  上兩點

分  $AB$  為相等三分.



〔解法〕 過  $A$  作任意半射線  $AX$ . 在  $AX$  上截取任意長  $AE$ . 在  $EX$  上截取  $F$  令  $EF = AE$ . 再在  $FX$  上截取  $FG$  令  $FG = AE$ . 聯  $GB$ . 過  $E, F$  各作  $GB$  之平行線交  $AB$  於  $C, D$ .

則  $C, D$  即所求之分點.

Q. E. F

〔證〕  $\because EC \parallel FD \parallel GB$ ,

$\because AE = EF = FG$ ,

$\therefore AC = CD = DB$ .

$\therefore C, D$  爲所求之分點.

Q. E. D.

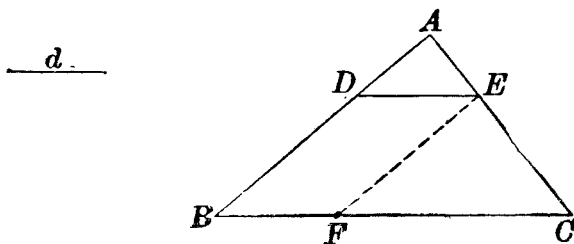
〔討論〕 本題恆有一組解答.

§ 257. 系 分所設線分爲  $n$  等分 ( $n$  爲任意整正數).

§ 258. 作圖題之應用及雜例

以上諸節爲基本作圖題. 一切作圖題之解法皆依此及公法爲根據. 茲舉例如下:

(例一) 在所設  $\triangle ABC$  內求作  $BC$  之平行線交  $AB$  於  $D$ , 交  $AC$  於  $E$ , 且令  $DE$  等於所設定長  $d$ .



〔已設〕  $\triangle ABC$  及一定長  $d$ .

〔求作〕 一直線交  $AB$  於  $D$ , 交  $AC$  於  $E$ , 令  $DE \parallel BC, DE = d$ .

〔解法〕 在  $BC$  上截取  $BF = d$ . (公法二系二)

過  $F$  作  $AB$  之平行線交  $AC$  於  $E$ . (作圖題四)

過  $E$  作  $BC$  之平行線交  $AB$  於  $D$ . (作圖題四)

則  $DE$  即所求.  $Q. E. F.$

〔證〕  $DBFE$  爲平行四邊形.

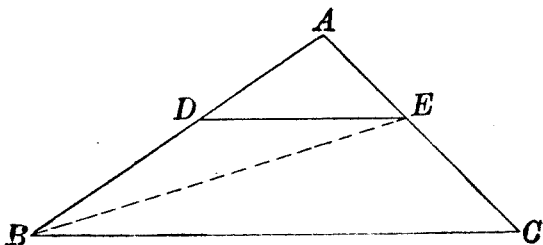
$\therefore DE = BF = d$ . 又  $DE \parallel BC$ .

$\therefore DE$  爲所求.  $Q. E. D.$

〔討論〕 若所設定長  $d \geq BC$  時, 則本題無解答.

(注意一) 凡作圖題之曲折而不易直接得解法者, 可先假定一已解好之圖形而解析之. 如

(例二) 在所設  $\triangle ABC$  內求作  $BC$  之平行線交  $AB$  於  $D$ , 交  $AC$  於  $E$ , 且令  $DE = DB$ .

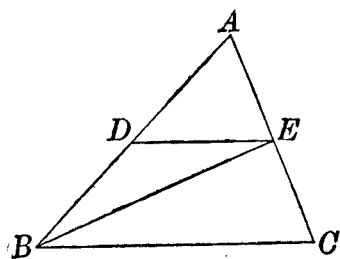


〔已設〕 一三角形  $ABC$



〔求作〕 一線分交  $AB$  於  $D$ , 交  $AC$  於  $E$ , 令  $DE \parallel BC, DE = DB$ .

本題較例一爲難, 因在未得  $DE$  之時,  $DB$  之長亦未知也. 然  $DE$  之位置, 不可任意. 雖  $BC$  之平行線可以無數, 而過上則  $DE < DB$ , 過下則  $DE > DB$ . 故



本題僅有一適當解答可知. 今假定圖中  $DE$  已爲適當之解答. 即  $DE = DB$ . 又  $DE \parallel BC$ . 試聯  $BE$  觀之. 則因  $DB = DE$ ,  
 $\therefore \angle DBE = \angle DEB$ . 又因  $DE \parallel BC$ ,  $\therefore \angle DEB = \angle EBC$ .  
 $\therefore \angle DBE = \angle EBC$ . 即可知  $BE$  爲  $\angle B$  之等分線. 然  $\angle B$  爲已設定角, 故可即得解法如下

〔解法〕 作  $\angle B$  之等分線  $BE$  交  $AC$  於  $E$ . (作圖題二)

過  $E$  作  $BC$  之平行線交  $AB$  於  $D$ . (作圖題四)

則  $DE$  即所求. Q. E. F.

〔證〕  $\because DE \parallel BC, \therefore \angle DEB = \angle EBC$ .

$\because BE$  等分  $\angle B$ , 即  $\angle EBC = \angle DBE, \therefore \angle DEB = \angle DBE$ .

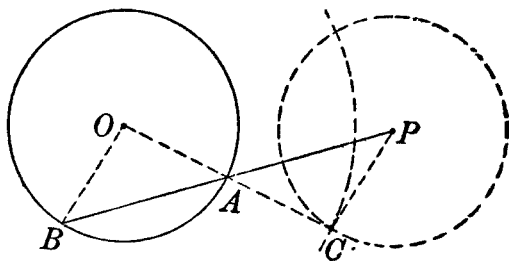
$\therefore DE = DB. \therefore DE$  即爲所求. Q. E. D.

〔討論〕 本題恆有一解答.

(注意二) 解析爲作圖題之要事. 多數作圖題, 不經解析, 不易發見解法. 唯解析部分, 自可不必寫出, 蓋解析爲發見解法之幫助,

所需要者仍為解法也。

(例三) 從所設圓外一所設點  $P$  作圓之割線交圓周於  $A, B$ , 令  $PA = AB$ .



〔已設〕  $\odot O$  及其外一點  $P$ .

〔求作〕 一割線  $PAB$  令  $PA = AB$ .

〔解法一〕 以  $P$  為中心,  $\odot O$  半徑之長為半徑作  $\odot P$ . 以  $O$  為中心,  $\odot O$  半徑二倍之長為半徑作弧交  $\odot P$  圓周於  $C$ . 聯  $OC$  交  $\odot O$  圓周於  $A$ . 聯  $PA$  延長再交  $\odot O$  圓周於  $B$ .

則  $PAB$  即所求.

Q. E. F.

〔證〕 聯  $OB, PC$ . 則  $\because OC = 2OA, PC = OA$ ,

$\therefore OB = OA = CA = CP. \therefore \angle OBA = \angle OAB, \angle CPA = \angle CAP$ .

又  $\angle OAB = \angle PAC, \therefore \angle OBA = \angle CPA$ .

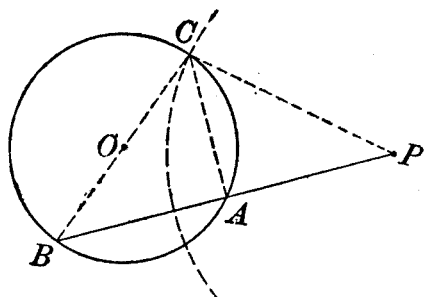
$\therefore \triangle ABO \cong \triangle APC, \therefore PA = AB$ .

$\therefore PAB$  為所求.

Q. E. D.

〔解法二〕

以  $P$  為中心， $\odot O$  半徑二倍之長為半徑作弧交  $\odot O$  圓周於  $C$ 。聯成直徑  $COB$ 。聯  $BP$  交  $\odot O$  圓周於  $A$ 。



則  $PAB$  即所求。

Q. E. F.

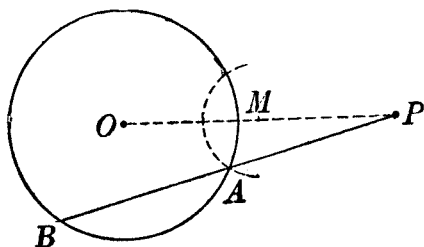
〔證〕  $PC = CB, CA \perp PB, \therefore PA = AB$ 。

$\therefore PAB$  為所求。

Q. E. D.

〔解法三〕

聯  $OP$ 。取  $OP$  中點  $M$ 。以  $M$  為中心，以  $\odot O$  半徑一半之長為半徑作弧交  $\odot O$  圓周於  $A$ 。聯  $PA$  延長至  $B$ ，令  $PA = AB$ 。



則  $PAB$  即所求。

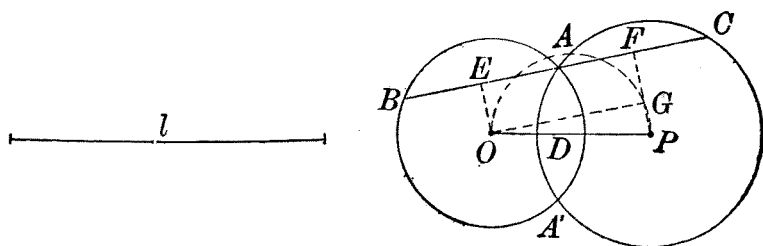
Q. E. F.

〔學者試自證之〕

〔討論〕 若  $OP$  大於  $\odot O$  半徑之三倍，則本題無解答；若  $OP$  小於  $\odot O$  半徑之三倍，則本題有兩個解答；若  $OP$  等於  $\odot O$  半徑之三倍，則本題有一個解答，即  $PO$  聯線。

(注意三) 以上三種解法,並非憑空想得到,皆由解析得來.唯解析部分未寫出而已.有時亦可將解析部分詳細寫明,而解法及證反可從略.則因解法及證已在解析中甚顯明也.

(例四) 過相交二圓之一交點作一割線,令其為兩圓所截之部分等於所設定長.



〔已設〕  $\odot O, \odot P$  交於  $A, A'$ . 一定長  $l$ .

〔求作〕 過  $A$  一直線交  $\odot O$  於  $B$ , 交  $\odot P$  於  $C$ , 令  $BC = l$ .

〔解析〕 設  $BC$  為所求之線. 從  $O, P$  各作  $BC$  之垂線  $OE, PF$ . 則  $EA = \frac{1}{2}AB, AF = \frac{1}{2}AC$ .

$\therefore EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}l$ . 作  $OG \perp PF$ , 則  $OGFE$  為平行四邊形.

$\therefore OG = EF = \frac{1}{2}l$ . 又  $\angle OGP = R\angle$ . 故  $G$  在  $OP$  為直徑所作之

圓周上. 故可先以  $OP$  為直徑作半圓在半圓內作弦  $OG = \frac{1}{2}l$ . 過  $A$  所作  $OG$  之平行線  $BC$  即所求. Q. E. F.

〔解法已見解析中,證略〕

〔討論〕 若  $l$  大於  $OP$  之二倍時,則無解答;等於  $OP$  之二倍時,有一解答;小於  $OP$  之二倍時,有二解答.

〔註〕 作圖題其他種種解法詳見第 17 章.

## 習 題 十 一

1. 在一定直線上求作一點,令與其他所設二點等距.
2. 在一圓周上求作一點,令與其他所設二點等距.
3. 過一所設點求作一直線,令與其他所設二點等距.
4. 過一所設點求作一直線,令與其他一所設點之距離等於一所設長.
5. 過一所設點求作一直線,令與所設相交二直線成等角.
6. 求作一直線,令平行於一所設直線且切一所設圓.
7. 以所設長為半徑求作一圓,令過一所設點且切一所設直線.
8. 以所設長為半徑求作一圓,令過一所設點且切一所設圓.
9. 求作一圓,令切一所設直線,且切一所設圓於其上一所設點.
10. 求作一圓,令切一所設圓,且切一所設直線於其上一所設點.
11. 過一所設點求作一直線令與所設二平行線相交,且令其

介乎二平行線間之部分等於所設長。

12. 過一所設點求作一直線令與所設圓相交，且令其圓內部分(即弦)等於所設長。

13. 過所設相交兩圓之一交點求作一直線令其為兩圓周所截部分等於所設長。

14. 過所設角  $\angle XOY$  內一點  $P$ ，求作一直線交  $OX, OY$  於  $A, B$ ，令  $AP = PB$ 。

15. 求作一割線交  $\odot O$  於  $A, A'$ ，交  $\odot P$  於  $B, B'$ ，令弦  $AA'$ ， $BB'$  各等於所設定長  $a, b$ 。

16. 求作一正方形，令其對角線等於所設長。

17. 求作一正方形，令其對角線與一邊之和等於所設長。

18. 求作一三角形，令其兩角各等於所設角，其周等於所設長。

19. 求作一三角形，令其兩邊及第三邊上之中線各等於所設三個定長。

20. 求作一梯形，令其兩底及兩對角線各等於所設四個定長。

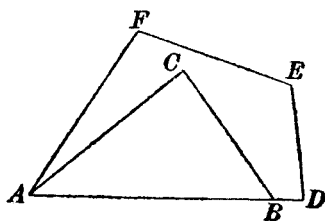
## 第三編 面積

### 第十七章 等積形

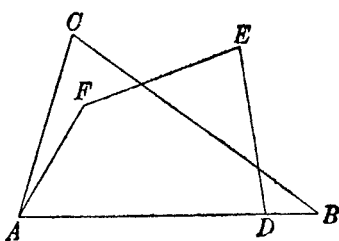
§ 259. 定義六二 面分 面積 平面之有限部分，曰面分 (plane segment). 面分之大小，曰面積 (area).

面分有種種形象，如三角形，平行四邊形，圓等皆是。兩個面分若為合同圖，則其面積相等。但面積相等之兩面分，未必為合同圖。故比較兩面分之面積，其意義雖與比較兩線分之長相同。然較為複雜。若疊置兩面分時，甲面分完全在

乙面分內，則甲面分小於乙面分。如圖  $\triangle ABC$  全在四角形  $ADEF$  內，則  $\triangle ABC < ADEF$ 。猶諸  $AB < AD$ ，



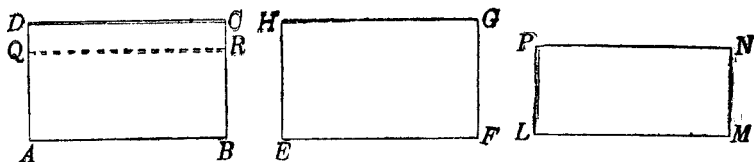
自不成問題。然任意兩面分疊置時，決無如此簡單。如下圖，當  $\triangle ABC$  與  $ADEF$  之一邊重合時， $\triangle ABC$  之一部分在  $ADEF$  之外，而  $ADEF$  之一部分卻又在  $\triangle ABC$  之外，故



兩形之究竟孰大孰小，須另有他種根據以決之。此本編之要義也。

兩面分面積相等，簡稱曰相等，或曰等積。

§ 260. 定理七九 兩個矩形中，兩雙鄰邊各相等，則此兩矩形之面積相等；一雙邊相等，其一雙鄰邊不等，則此兩矩形不等，鄰邊大者面積大。



〔假設〕  $\square ABCD$ ,  $\square EFGH$ ,  $\square LMNP$  中,  $AB = EF = LM$ ,  
 $AD = EH > LP$ .

〔終決〕  $\square ABCD = \square EFGH > \square LMNP$ .

〔證〕  $\because AB = EF, AD = EH, \angle A = \angle E = R\angle$ .

$\therefore \square ABCD \cong \square EFGH. \therefore \square ABCD = \square EFGH$ .

$\because AD > LP$ , 故可在  $AD$  上取  $Q$  令  $AQ = LP$ . 作  $QR \parallel AB$ .

則  $\square ABRQ = \square LMNP$ , 但  $\square ABCD > \square ABRQ$  (全量大於其一部分).

$\therefore \square ABCD > LMNP$ .

Q. E. D.

§ 261. 系一 兩個等積矩形之一雙邊相等，則其他各雙邊皆相等。

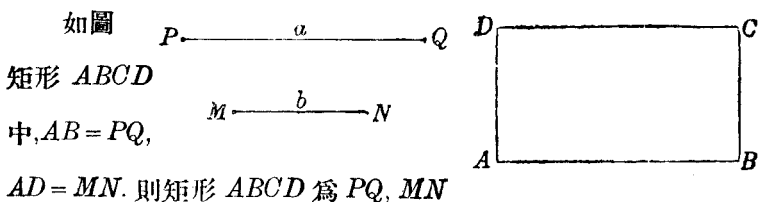
§ 262. 系二 兩個正方形中，一雙邊相等，則此兩正方形面積相等。一雙邊不等，則此兩正方形面積不等，邊大者面積大。



§ 263. 系三 兩個等積正方形之各雙邊相等.

§ 264. 定義六三 兩線分所包之矩形 以兩線分為兩鄰邊

所成之矩形,曰此兩線分所包之矩形.



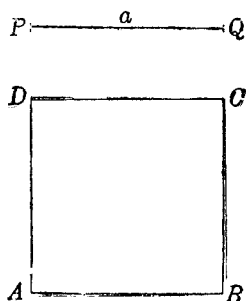
所包之矩形. 以  $PQ \cdot MN$  表之. 即  $\square ABCD = PQ \cdot MN$ .

為簡便計,常以一個小字母表線分之長.如以  $a$  表  $PQ$ , 以  $b$  表  $MN$ . 則  $\square ABCD = ab$ .

§ 265. 定義六四 以一線分為邊

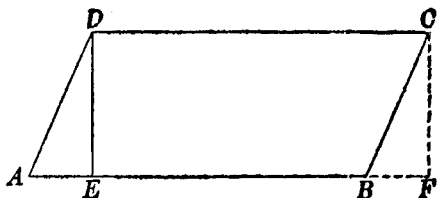
所成之正方形,曰此線分上之正方形.

如圖正方形  $ABCD$  中各邊皆等於  $PQ = a$ , 則  $ABCD$  為  $PQ$  上之正方形,或簡曰  $a$  上之正方形. 以  $\overline{PQ}^2$  或  $a^2$  表之. 即  $\square ABCD = \overline{PQ}^2 = a^2$ .



265. 定理八〇

平行四邊形等於其底及高所包之矩形.



[假設]  $DE$  為  $\square ABCD$  之高.

〔終決〕  $\square ABCD = AB \cdot DE$ .

〔證〕 從  $C$  作  $AB$  之垂線交  $AB$  延線於  $F$ .

則  $DEFC$  爲矩形而其面積爲  $DC \cdot DE$ .

在  $\triangle ADE$ ,  $\triangle BCF$  中,  $AD = BC$ ,  $DE = CF$ ,

$$\angle AED = \angle BFC = R\angle. \quad \therefore \triangle ADE \cong \triangle BCF.$$

$$\therefore \triangle ADE = \triangle BCF. \quad \therefore \triangle ADE + DEBC = \triangle BCF + DEBC.$$

$$\text{即 } \square ABCD = \square EFCD = DC \cdot DE = AB \cdot DE. \quad \text{Q. E. D.}$$

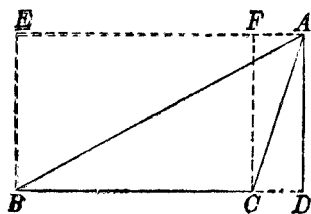
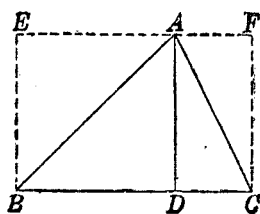
§ 267. 系一 等底等高之平行四邊形相等.

§ 268. 系二 兩平行四邊形中, 底等高不等, 則此兩平行四邊形不等; 高大者面積大.

§ 269. 系三 兩平行四邊形中, 高等底不等, 則此兩平行四邊形不等; 底大者面積大.

§ 270. 系四 等積兩平行四邊形中, 底等者高等, 高等者底等.

§ 271. 定理八一 三角形之面積等於其底及高所包矩形之半.



〔假設〕  $\triangle ABC$  中,  $AD \perp BC$ .

〔終決〕  $\triangle ABC = \frac{1}{2} AD \cdot BC$ .

〔證〕 過  $A$  作  $BC$  之平行線  $EF$ . 從  $B, C$  作  $BE \perp EF$ ,  $CF \perp EF$ . 則  $ADBE, ADCF$  皆為矩形.

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ABE, \therefore \triangle ABD = \frac{1}{2} \square ADBE$ .

又  $\triangle ACD \cong \triangle ACF, \therefore \triangle ACD = \frac{1}{2} \square ADCF$ .

$\therefore \triangle ABD \pm \triangle ACD = \frac{1}{2} (\square DE \pm \square DF),$

即  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \square BCFE$ .

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} EB \cdot BC = \frac{1}{2} AD \cdot BC. \quad Q. E. D.$

§ 272. 系一 等底等高之三角形相等.

§ 273. 系二 兩三角形中, 底等高不等, 則此兩三角形不等, 高大者面積大

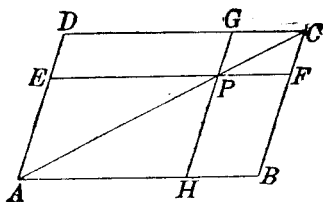
§ 274. 系三 兩三角形中, 高等底不等, 則此兩三角形不等, 底大者面積大.

§ 275. 系四 等積兩三角形中, 高等者底亦等, 底等者高亦等.

§ 276. 系五 三角形之面積等於其等底等高平行四邊形之半.

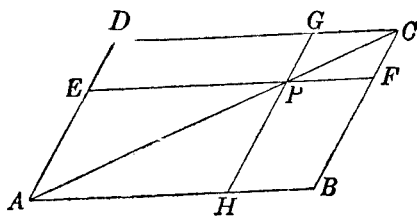
§ 277. 定義六五 平行四邊形之餘形 過平行四邊形對角線上一點，引二鄰邊之平行線，將原形分成四個平行四邊形，其中在原對角線兩側之二形曰餘形 (complements).

如圖  $P$  爲  $\square ABCD$  對角線  $AC$  上任意一點.  $EF \parallel AB$ ,  $GH \parallel AD$ . 則  $\square EG$ ,  $\square HF$  曰  $\square ABCD$  中之餘形.



§ 278. 定理八二 平行四邊形中之二餘形相等.

(假設)  $\square EG$ ,  $\square HF$  爲  $\square ABCD$  中之兩餘形.



(終決)  $\square EG = \square HF$ .

(證)  $\square ABCD$  中,  $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ ;

$\square AHPE$  中,  $\triangle AEP \cong \triangle AHP$ ;

$\square PFGC$  中,  $\triangle PGC \cong \triangle PFC$ .

$$\therefore \triangle ADC - \triangle AEP - \triangle PGC = \triangle ABC - \triangle AHP - \triangle PFC.$$

$$\text{即 } \square EG = \square HF.$$

Q. E. D.

## 習 題 十 二

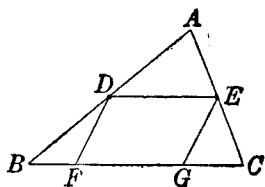
1. 兩個三角形底邊公共，頂點之聯線平行於底，則此兩三角

形等積.

2. 兩個等積三角形底邊公共,頂點在底之兩旁,則頂點所聯線分爲底所等分.

3.  $D, E$  爲  $\triangle ABC$  兩邊  $AB, AC$  之中點.  $DF \parallel EG$ , 則

$$\square DFGE = \frac{1}{2} \triangle ABC.$$



4. 順次聯一四邊形各邊中點所得新四邊形等於原四邊形之半.

5.  $P$  爲  $\triangle ABC$  中線  $AD$  上任意一點, 則  $\triangle ABP = \triangle ACP$ .

6. 梯形之面積等於兩底和與高所包矩形之半.

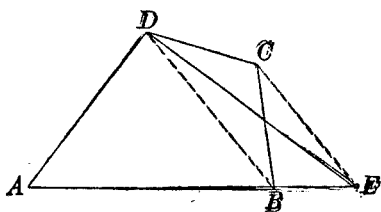
§ 279. 作圖題九 將一四角形改成一等積三角形.

[已設] 一四角形  $ABCD$ .

[求作] 一三角形令與

$ABCD$  等積.

[解法] 聯  $BD$ . 過  $C$  作  $DB$  之平行線交  $AB$  延線於  $E$ . 聯  $DE$ .



則  $\triangle DAE$  即所求.

Q. E. F

[證]  $\triangle EDB, \triangle CDB$  中,  $DB$  爲其公共底.

$\therefore CE \parallel DB, \therefore$  其高相等.  $\therefore \triangle EDB = \triangle CDB$

$\therefore \triangle ABD + \triangle EDB = \triangle ABD + \triangle CDB.$

即

$$\triangle DAE = ABCD.$$

Q. E. D.

§ 280. 系一 將一  $n$  角形改成一等積  $(n-1)$  角形 ( $n$  為任意整正數.)

§ 281. 系二 將一  $n$  角形改成一等積三角形.

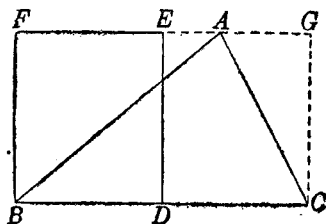
§ 282. 作圖題一〇 將一三角形改成一等積矩形.

(已設)  $\triangle ABC$ .

(求作) 一矩形令與  $\triangle ABC$

等積.

(解法) 過  $A$  作  $BC$  之平行線  $FG$ .



作  $BC$  之垂直等分線  $DE$  交  $FG$  於  $E$ , 交  $BC$  於  $D$ .

作  $BF \parallel DE$  交  $FG$  於  $F$ .

則  $\square BDEF$  即所求

Q. E. F.

(證) 作  $CG \parallel DE$  交  $FG$  於  $G$ . 則  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \square BCGF$ .

$\therefore D$  為  $BC$  之中點,  $\therefore BD = DC$ .

$\therefore \square BDEF = \square DCGE = \frac{1}{2} \square BCGF$ .

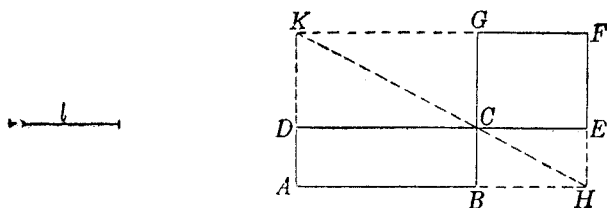
$\therefore \square BDEF = \triangle ABC$ .

Q. E. D.

§ 283. 系一 將一平行四邊形改成一等積矩形.

§ 284. 系二 將一  $n$  角形改成一等積矩形.

§ 285. 作圖題—— 將一矩形改成一等積矩形令其一邊等於所設定長.



〔已設〕  $\square ABCD$  及一定長  $l$ .

〔求作〕 一矩形令其面積等於  $\square ABCD$ , 其一邊等於  $l$ .

〔解法〕 延長  $AB$  至  $H$  令  $BH = l$ . 聯  $HC$  延長之交  $AD$  之延線於  $K$ . 作  $KF, HF$  成  $\square AHFK$ . 延長  $DC, BC$  成  $\square CEFG$ . 則  $CEFG$  即所求矩形. Q. E. F.

〔證〕 在  $\square AHFK$  中,  $\square ABCD, \square CEFG$  爲餘形.

$\therefore \square CEFG = \square ABCD$ . 又  $CE = BH = l$ .

$\therefore \square CEFG$  即所求. Q. E. D.

§ 286. 系一 將一三角形改成一等積矩形, 且令其一邊等於所設定長.

§ 287. 系二 將一  $n$  角形改成一等積矩形, 且令其一邊等於所設定長.

§ 288. 系三 將一平行四邊形改成一等積等角平行四邊形令其一邊等於所設定長.

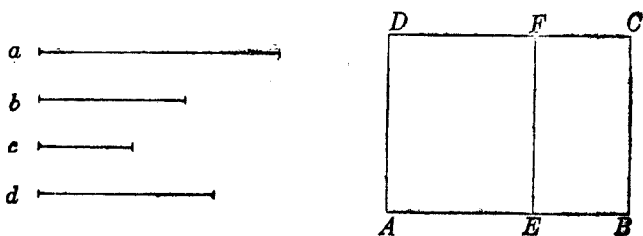
### 習 題 十 三

1. 將一三角形改成一等積新三角形而令其一角等於一所設角.
2. 作一三角形令其面積等於一所設三角形,其一邊等於所設長.
3. 作一三角形令其面積等於一所設三角形 其一邊等於所設長,其一角等於一所設角.
4. 過三角形一邊上一點,求作一直線令等分此三角形.
5. 將一三角形改成一等積二等邊三角形.
6. 作一三角形令等於兩個所設三角形之和.
7. 過任意四角形一邊上所設點作一直線等分此四角形.
8. 作一平行四邊形令等於一所設矩形,且令其二邊各等於所設二定長.
9. 過四角形頂點,求作二直線,分此四角形爲三等分.
10. 過三角形一邊上一點,求作二直線,分此三角形爲三等分.



## 第十八章 正方形矩形

§ 289. 定理八三 一線分等於二線分之和，則此線分與他線分所包矩形等於二線分各與他線分所包矩形之和。



〔假設〕 線分  $a = b + c$ ,  $d$  爲其他任意一線分。

〔終決〕  $ad = bd + cd$ .

〔證〕 作矩形  $ABCD$  令  $AB = a$ ,  $AD = d$ . 則  $\square ABCD = ad$ .

在  $AB$  上取  $E$ , 令  $AE = b$ . 則  $EB = AB - AE = a - b = c$ . 作  $EF \perp AB$  成  $\square AEFD$ ,  $\square EBCF$ . 則  $\square AEFD = bd$ ,  $\square EBCF = cd$ .

然  $\square ABCD = \square AEFD + \square EBCF$ . (全量等於其各部分之和)

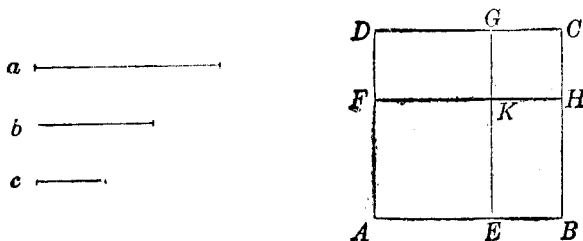
即  $ad = bd + cd$ .

Q. E. D.

§ 290. 系一 一線分等於二線分之差，則此一線分與他線分所包矩形等於二線分各與他線分所包矩形之差。

§ 291. 系二 一線分等於諸線分之和, 則此一線分與他線分所包矩形等於諸線分各與他線分所包矩形之和.

§ 292. 定理八四 一線分等於二線分之和, 則此一線分上之正方形等於二線分上正方形之和加此二線分所包矩形之二倍.



〔假設〕  $a = b + c$ .

〔終決〕  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$ .

〔證〕 作正方形  $ABCD$  令  $AB = a$ , 則  $\square ABCD = a^2$ . 在  $AB$ ,  $DC$ ,  $AD$ ,  $BC$  上各取點  $E, G, F, H$ , 令  $AE = DG = AF = BH = b$ , 則  $EB = GC = FD = HC = a - b = c$ . 聯  $FH, EG$  交於  $K$ . 則  $\square AK = b^2$ ;  $\square KC = c^2$ ;  $\square KB = BH \cdot BE = bc$ ;  $\square KD = DG \cdot FD = bc$ . 今  $\square ABCD = \square AK + \square KC + \square KB + \square KD$ .

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 + 2bc.$$

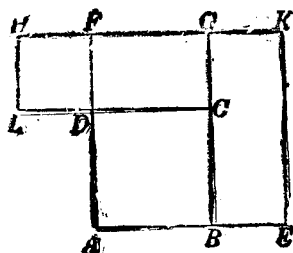
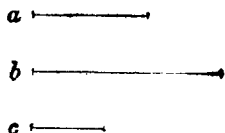
Q. E. D.

§ 293. 系一 一線分等於他線分之二倍, 則此線分上之正方形等於他線分上正方形之四倍.

§ 294. 系二 一線分等於他線分之  $n$  倍, 則此線分上之正

方形等於他線分上正方形之  $n^2$  倍。

§ 295. 定理八五 一線分等於二線分之差 則此一線分上之正方形等於二線分上正方形之和減去此二線分所包矩形之二倍。



〔假設〕  $a = b - c$ .

〔終決〕  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ .

〔證〕 設圖中  $\square ABCD = a^2$ ,  $\square AEKF = b^2$ ,  $\square DFHL = c^2$ .

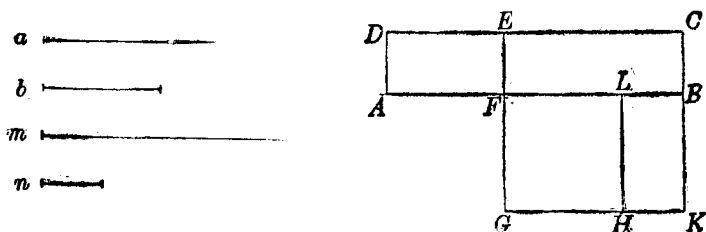
則  $FG = DC = AB = a$ ,  $\therefore HG = HF + FG = c + a = b$ ,  $\therefore \square LG = HG \cdot HL = bc$ . 又  $GK = FK - FG = b - a = c$ ,  $\therefore \square GE = KE \cdot GK = bc$ . 因  $\square AC + \square GE + \square LG = \square AK + \square LF$ ,

即  $a^2 + bc + bc = b^2 + c^2$ .

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ .

Q. E. D.

§ 296. 定理八六  $m$  為  $a, b$  兩線分之和,  $n$  為  $a, b$  兩線分之差, 則  $m, n$  所包矩形等於  $a, b$  上正方形之差。



〔假設〕  $a, b, m, n$  四線分中,  $m = a + b, n = a - b$ .

〔終決〕  $mn = a^2 - b^2$ .

〔證〕 設圖中  $\square GC = a^2, \square GL = b^2, DC = a + b = m$ .

則  $DE = DC - EC = m - a = b,$

$AD = FE = GE - GF = a - b = n,$

$HK = GK - GH = a - b = n. \quad \therefore \square AE = DE \cdot FE = bn,$

$\square HB = HL \cdot HK = bn, \square AC = DC \cdot AD = mn.$

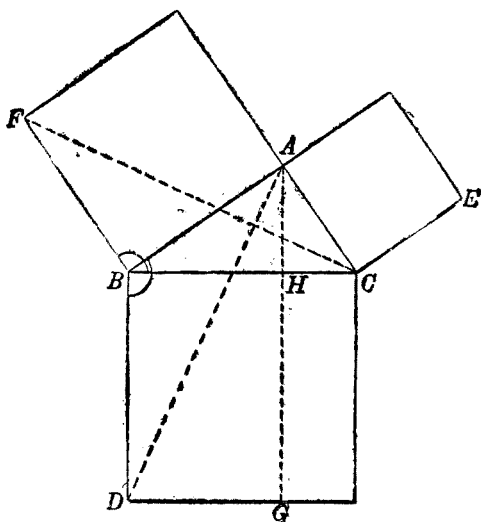
今  $\square AC = \square AE + \square FC = \square HB + \square FC = \square GC - \square GL.$

$\therefore mn = a^2 - b^2.$

Q. E. D.

〔註〕 以上諸定理適與代數乘法公式相合。如  $(a+b)m = am + bm, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。但代數式中之  $a, b, c$  等表數，數可行乘法；幾何中之  $a, b, c$  等表線分，線分與線分不能相乘。故式雖相同而意義不同。例如  $ab$  在代數中表  $a, b$  二數相乘之積，而在幾何中則表  $a, b$  二線分所包矩形。學者於此，不妨利用代數公式之形以便記憶，但不可忘幾何中之意義而視為乘法也。

§ 297. 定理八七 直角三角形斜邊上正方形等於其他二邊上正方形之和。



〔假設〕  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = R\angle$ .

〔終決〕  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

〔證〕 在  $BC, AB, AC$  上各作正方形  $\square DC, \square AF, \square AE$ .

過  $A$  作  $BD$  之平行線  $AG$  分  $\square DC$  為兩個矩形  $\square BG, \square CG$ .

聯  $AD, FC$ . 則在  $\triangle ABD, \triangle FBC$  中,  $AB = FB, BD = BC,$   
 $\angle ABD = \angle FBC$  (同為  $\angle ABC + R\angle$ ).  $\therefore \triangle ABD \cong \triangle FBC$ .

然  $\square BG = 2\triangle ABD, \square AF = 2\triangle FBC$ . (定理八一系五)

$\therefore \square BG = \square AF$ . 同理可證  $\square CG = \square AE$

$\therefore \square DC = \square BG + \square CG = \square AF + \square AE$ .

即  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ .

Q. E. D.

〔註〕本定理在歐美皆稱之為 Pythagoras' theorem (畢氏定理)，因其為畢氏所首先發見。其實在我國三代周初時商高先生早已發見此理，故當稱之曰商高定理。

§ 298. 系一 直角三角形中斜邊上之高所分斜邊一部分與全斜邊所包矩形等於此部分鄰邊上之正方形 (上圖中  $BH \cdot BC = \overline{AB} \cdot HC \cdot BC = \overline{AC}^2$ ).

$$\therefore BH \cdot BC = BH \cdot BD = \square DH = \square AF = \overline{AB}^2.$$

§ 299. 系二 直角三角形中斜邊上之高分斜邊所成兩部分所包矩形等於此高上之正方形 (上圖中  $BH \cdot HC = \overline{AH}^2$ ).

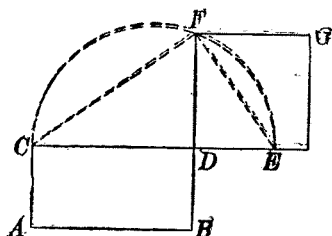
$$\therefore \overline{AB}^2 = BH \cdot BC \quad (\text{本定理系一})$$

$$= BH(BH + HC) = \overline{BH}^2 + BH \cdot HC. \quad (\text{定理八三})$$

$$\text{又 } \therefore \overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2. \quad (\text{本定理})$$

$$\therefore BH \cdot HC = \overline{AH}^2 \quad (\text{各爲 } \overline{AB}^2 - \overline{HB}^2).$$

§ 300. 作圖題一二 將一矩形改成一等積正方形.



〔已設〕 一矩形  $ABDC$ .

〔求作〕 一正方形令與  $\square ABDC$  等積.

〔解法〕 延長矩形之一邊  $CD$  至  $E$  令  $DE = DB$  以  $CE$  爲直徑作半圓周交  $BD$  之延線於  $F$  以  $DF$  爲一邊作正方形  $\square DG$  卽所求. Q. E. F.

〔證〕 聯  $FC, FE$ , 則  $\angle CFE = R\angle$ .

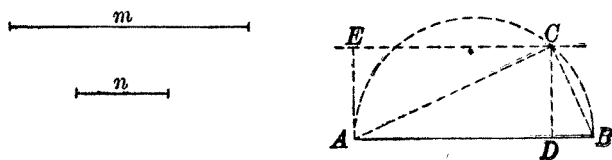
$$\begin{aligned} \therefore \overline{DF} &= \overline{CD} \cdot \overline{DE}. && \text{(定理八七系二)} \\ &= \overline{CD} \cdot \overline{DB}. \end{aligned}$$

$$\therefore \square DG = \square ABDC. \quad \text{Q. E. D.}$$

### § 301. 系 將一多角形改爲等積正方形.

〔註〕 凡直線形面分均可改爲等積正方形而正方形可從其一邊決定, 故以後凡作圖題中有已設定面積時, 恆以其等積正方形一邊之長表之. 舉例如下:

(例) 作二線分令其和等於一所設定長, 其所包矩形等於一所設定面積.



〔已設〕 二定長  $m, n$ .

〔求作〕 二線分令其和等於  $m$ , 其所包矩形等於  $n$  上之正方形.

〔解法〕 作  $AB = m$ . 以  $AB$  爲直徑畫半圓周. 從  $A$  作  $AB$  之垂線  $AE = n$ . 作  $EC \parallel AB$  交半圓周於  $C$ . 作  $CD \perp AB$ . 則  $AD, DB$  卽所求. Q. E. F.

〔證〕 聯  $AC, CB$ . 則  $\angle ACB = R\angle$ .  $\therefore AD \cdot DB = \overline{CD}^2$ .

$\therefore ADC E$  爲矩形,  $\therefore CD = AE$ .  $\therefore AD \cdot DB = \overline{AE}^2 = n^2$ .

又  $AD + DB = AB = m$ .  $\therefore AD, DB$  爲所求之二線分.  $Q. E. D.$

〔討論〕 若  $n$  大於  $\frac{1}{2}m$ , 則本題無解答.

## 習 題 十 四

1.  $\triangle ABC$  中,  $AB > AC$ ,  $AD$  爲高. 則  $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2$ .

2. 若四角形之兩對角線互相垂直, 則兩雙對邊上正方形之和相等.

3. 直角三角形之一銳角等於他一銳角之二倍, 則大銳角對邊上之正方形等於小銳角對邊上正方形之三倍.

4. 從任意點  $P$  與矩形  $ABCD$  之各頂點聯成線分, 則  $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$ .

5. 作一正方形令等於所設三正方形之和.

6. 作一正方形令等於所設正方形之半.

7. 作二線分令其和等於所設定長, 其上正方形之和等於定面積.

§ 302. 定義六六 正射影 從一點至一直線引垂線, 則此垂線之足曰此點在此直線上之正射影 (orthographic projection).



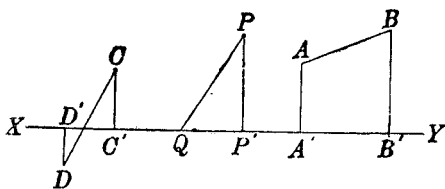
從一線分兩端至一直線各引垂線，則此兩垂足為端點之線分為原線分在此直線上之正射影。

如圖  $AA', BB', CC',$

$DD', PP'$  皆垂直於  $XY$ ,

則  $A', B', C', D', P'$  各為

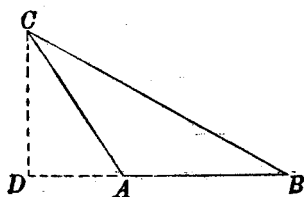
$A, B, C, D, P$  在  $XY$  上之



正射影。  $A'B', CD, P'Q$  各為  $AB, CD, PQ$  在  $XY$  上之正射影。

正射影，亦曰垂直射影，簡稱曰射影。

§ 303. 定理八八 在鈍角三角形中，鈍角對邊上正方形等於其他二邊上正方形之和加二邊中一邊及他一邊在此邊上射影所包矩形之二倍。



〔假設〕  $\triangle ABC$  中， $\angle A > 90^\circ$ ， $AD$  為  $AC$  在  $AB$  上之射影。

〔終決〕  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \cdot B \cdot AD$ 。

〔證〕 因  $AD$  為  $AC$  在  $AB$  上之射影， $\therefore CD \perp DB$ 。

$\therefore \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$  (定理八七)

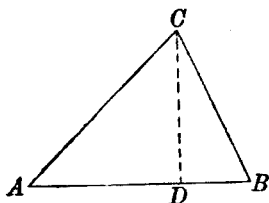
$$= \overline{CD}^2 + (\overline{AD} + \overline{AB})^2$$

$$= \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 + 2AB \cdot AD. \quad (\text{定理八四})$$

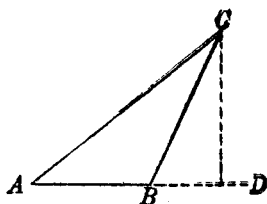
$$\therefore \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 \quad (\text{定理八七})$$

$$\therefore \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \cdot AD \quad Q. E. D.$$

§ 304. 定理八九 三角形中，銳角對邊上正方形等於其他二邊上正方形之和減去二邊中一邊及他一邊在此邊上射影所包矩形之二倍。



(圖一)



(圖二)

〔假設〕  $\triangle ABC$  中， $\angle A < R\angle$ ， $AD$  為  $AC$  在  $AB$  上之射影

〔終決〕  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \cdot AD$ .

〔證〕 因  $AD$  為  $AC$  在  $AB$  上之射影， $\therefore CD \perp AB$ .

$$\therefore \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2.$$

即  $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + (AB - AD)^2$  (如圖一)，

或  $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + (AD - AB)^2$  (如圖二)，

$$\therefore \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \cdot AD.$$

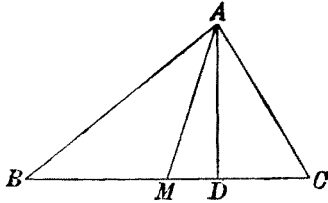
$$\therefore \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2.$$

$$\therefore \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \cdot AD. \quad Q. E. D.$$

§ 305. 系 三角形一邊上正方形等於其他二邊上正方形之

和，則此邊對角爲直角 大於其他二邊上正方形之和，則此邊對角爲鈍角；小於其他二邊上正方形之和，則此邊對角爲銳角。

§ 306. 定理九〇 三角形二邊上正方形之和等於半底上正方形與對底中線上正方形和之二倍。



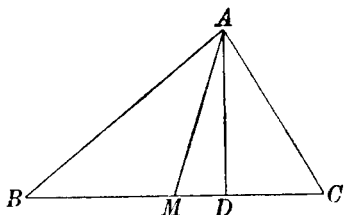
〔假設〕  $\triangle ABC$  中， $AM$  爲  $BC$  上之中線。

〔終決〕  $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$

〔證〕 (1) 設  $AM \perp BC$ ，則根據商高定理， $\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$ ，  
 $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2$   $\therefore BM = MC$ ，  
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

(2) 設  $AM$  不與  $BC$  直交，作  $AD \perp BC$ ，  
 則  $MD$  爲  $AM$  在  $BC$  上之射影。  
 $\therefore \overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + 2BM \cdot MD$  (定理八八)  
 $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - 2CM \cdot MD$  (定理八九)  
 $\therefore BM = MC$   $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$  Q. E. D.

§ 307. 定理九一 三角形二邊上正方形之差等於底邊與中線在底上射影所包矩形之二倍。



〔假設〕  $\triangle ABC$  中,  $AB > AC$ ,  $AM$  爲中線,  $MD$  爲  $AM$  在  $BC$  上之射影.

$$〔終決〕 \quad \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2BC \cdot MD.$$

〔證〕  $\because AB > AC, \therefore \angle AMB > \angle AMC.$

$\therefore \angle AMB > R\angle, \angle AMC < R\angle.$

$$\therefore \overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + 2BM \cdot MD.$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 - 2CM \cdot MD.$$

$\because BM = CM, \therefore \overline{BM}^2 = \overline{CM}^2.$

$\therefore \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2BM \cdot MD + 2CM \cdot MD$

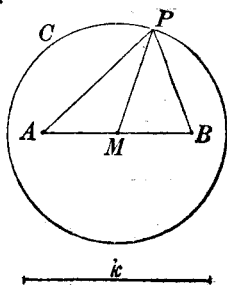
$$= 2MD \cdot BM + CM,$$

$$= 2MD \cdot BC \quad \text{Q. E. D.}$$

§ 308. 定理九二 一動點與所設二定點聯線上正方形之和等於一定面積, 則此動點之軌跡爲一圓周.

〔已設〕 二定點  $A, B$ , 及一定長  $k$ .

〔條件〕 動點  $P, \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = k^2$



〔軌跡〕  $P$  之軌跡為一圓周  $C$ , 其中心為  $AB$  之中點,  $M$  其

$$\text{半徑為 } \sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{AB^2}{4}}.$$

〔證〕  $C$  上任意取點  $P$  聯  $PA, PB, PM$ .

$$\text{則 } \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2(\overline{PM}^2 + \overline{AM}^2).$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PM}^2 &= \frac{1}{2}(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2) - \overline{AM}^2 \\ &= \frac{1}{2}(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2) - \frac{\overline{AB}^2}{4} = \frac{k^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\therefore PM = \sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}} \text{ 為定長, 又 } M \text{ 為定點.}$$

$\therefore P$  之軌跡為圓周  $C$ .

Q. E. D.

§ 309. 定理九三 一動點與所設二定點聯線上正方形之差

等於一定面積, 則此動點之軌跡為一直線.

〔已設〕 二定點  $A B$  及一

定長  $k$

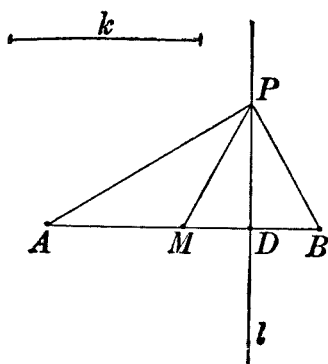
〔條件〕 動點  $P, \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2$

$$= k^2.$$

軌跡)  $P$  之軌跡為一直線  $l$ ,

與  $AB$  直交於  $D, D$  與  $AB$  中點  $M$

之距離為  $\frac{k^2}{2AB}$ .



〔證〕 (1) 設  $P$  為  $l$  上任意點, 聯  $PA, PB, PM$ .

$$\text{則 } \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 2MD \cdot AB = 2 \left[ \frac{k^2}{2AB} \right] \cdot AB = k^2$$

∴  $l$  上任何點適合於條件.

(2) 設  $P$  為適合於條件之點. 聯  $PA, PB, PM$ . 作  $PD' \perp AB$

$$\text{則 } \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 2MD' \cdot AB = k^2.$$

$$\therefore MD' = \frac{k^2}{2AB} = MD. \quad \therefore D' \text{ 合於 } D. \quad \therefore P \text{ 在 } l \text{ 上.}$$

∴ 適合於條件之點在  $l$  上.

∴  $P$  之軌跡為直線  $l$ .

Q. E. D.

## 習 題 十 五

1.  $P$  為二等邊三角形底  $BC$  上任意一點,

$$\text{則 } \overline{AB}^2 - \overline{AP}^2 = BP \cdot CP.$$

2. 平行四邊形四邊上正方形之和等於二對角線上正方形之和.

3.  $P$  為二等邊直角三角形  $ABC$  斜邊  $BC$  上任意一點,

$$\text{則 } \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = 2\overline{AP}^2.$$

4.  $A, B, C, D$  為一直線上順次四點,

$$\text{則 } AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

5.  $M$  為  $AB$  之中點,  $P$  為  $AB$  上任意點,

$$\text{則 } \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{MP}^2).$$

6.  $M$  爲  $AB$  之中點,  $P$  爲  $AB$  延線上任意點,

則  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{MP}^2)$ .

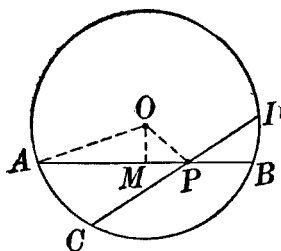
〔注意〕 本題終決與前題相同.

7.  $M$  爲  $AB$  之中點,  $P$  爲  $AB$  線外任意點, 則可得前兩題同樣終決否?

8. 5, 6 兩題終決之左節若爲  $\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2$ , 則右節當得何式?

## 第十九章 正方形矩形與圓

§ 310. 定理九四 圓內相交兩弦中，各弦為交點所分兩部分所包矩形相等。



〔假設〕  $\odot O$  內  $AB, CD$  兩弦交於  $P$ .

〔終決〕  $AP \cdot PB = CP \cdot PD$ .

〔證〕 作  $OM \perp AB$ ，則  $AM = MB$ . 聯  $OA, OP$ .

則  $AP \cdot PB = (AM + MP)(MB - MP) = \overline{AM}^2 - \overline{MP}^2$ .

又因  $\overline{OA}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{OM}^2$ ,  $\overline{OP}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{OM}^2$ .

$\therefore \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{MP}^2$ .  $\therefore AP \cdot PB = \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2$ .

同理可證  $CP \cdot PD = \overline{OC}^2 - \overline{OP}^2$ .

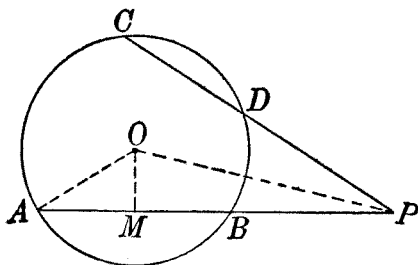
$\therefore OA = OC$ .  $\therefore AP \cdot PB = CP \cdot PD$ . Q. E. D

§ 311. 系 過圓內一定點所作任意弦，其為此定點分成兩



部分所包矩形之面積一定。

§ 3. 2. 定理九五 兩弦延長交於圓外，則各弦兩端點與交點間線分所包矩形相等。



〔假設〕  $\odot O$  內  $AB, CD$  兩弦延長線交於  $P$ 。

〔終決〕  $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ 。

〔證〕 作  $OM \perp AB$ ，則  $AM = MB$ 。聯  $OA, OP$ 。

則  $AP \cdot BP = (MP + AM)(MP - BM) = \overline{MP}^2 - \overline{AM}^2$ 。

又因  $\overline{OP}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{OM}^2$ ， $\overline{OA}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{OM}^2$ 。

$\therefore \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{AM}^2$ 。  $\therefore AP \cdot BP = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2$ 。

同理可證  $CP \cdot DP = \overline{OP}^2 - \overline{OC}^2$ 。

$\therefore OA = OC$ 。  $\therefore AP \cdot BP = CP \cdot DP$ 。 Q. E. D.

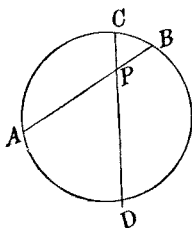
§ 313. 系一 從圓外一點作任意割線，其全割線分與圓外線分所包矩形之面積一定。

§ 314. 系二 從圓外一點所作割線之全割線分與圓外線

分所包矩形等於從此點所作切線分上之正方形。

(注意) 定理九四及九五,除兩弦交點一在內一在外外其餘均相同. 學者可注意其證法亦完全相同.

§ 315. 定理九六 二線分相交, 若各線分中為交點所分成之二部分所包矩形相等, 則此二線分之四端點共圓.



[假設]  $AB, CD$  交於  $P$ ,  $AP \cdot PB = CP \cdot PD$

[終決]  $A, C, B, D$  共圓.

[證] 過  $A, C, B$  作圓, 設圓周交  $CD$  於  $D'$ ,

則  $AP \cdot PB = CP \cdot PD'$ . (定理九四)

今  $AP \cdot PB = CP \cdot PD$ ,  $\therefore CP \cdot PD' = CP \cdot PD$ .

$\therefore PD = PD'$  (定理七九系一)  $\therefore D$  合於  $D'$ .

$\therefore A, C, B, D$  共圓. Q. E. D.

§ 316. 系 二線分延線相交, 若各線分之兩端點與交點間線分所包矩形相等, 則此二線分之四端點共圓.

## 第二十章 面積題證法及雜例

§ 317. 面積題之證法較直線形及圓為難 因直線形及圓中諸題不外乎線分與角之大小比較及點與線之位置關係，大抵可由圖中直接觀察之。其定理亦易於記憶。面積則不然。因面積大小之比較由圖中不易看出，故定理每易忘記或誤記。如定理九〇，九一等為用至廣而學者則最不易記憶，因不若直線形中“對頂角相等”或“二等邊三角形底角相等”等諸定理學者已視為當然，證題時俯拾即是也。故證面積題時，第一須將各定理熟記之。舉例如下：

(例一)  $D, E$  為  $\triangle ABC$  底  $BC$  上二點而  $BD = DE = EC$ 。

$$\begin{aligned} \text{求證 } \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \overline{AD}^2 \\ &+ \overline{AE}^2 + 4\overline{DE}^2. \end{aligned}$$

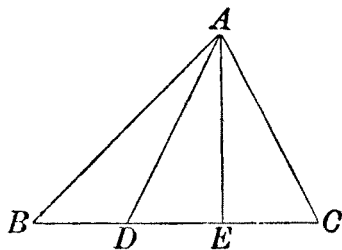
[證] 在  $\triangle ABE$  中，

$$\overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DE}^2.$$

$$\begin{aligned} \text{在 } \triangle ADC \text{ 中, } \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 &= 2\overline{AE}^2 \\ &+ 2\overline{DE}^2. \end{aligned}$$

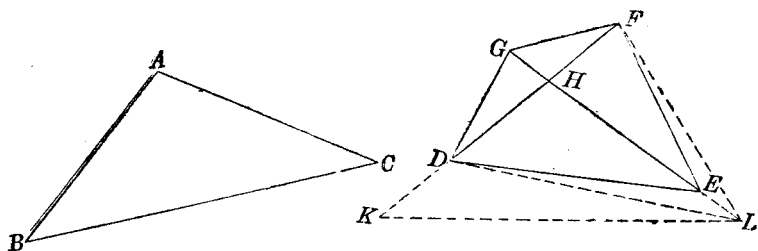
$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{AE}^2 + 4\overline{DE}^2.$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + 4\overline{DE}^2. \quad \text{Q. E. D.}$$



(注意一) 面積中關於等積形之題, 則可注意圖中等底等高三角形. 如

(例二) 三角形之二邊及其所夾角, 各等於一四角形之二對角線及其所夾角, 則此三角形與四角形等積.



[假設]  $\triangle ABC$ , 四角形  $DEFG$  中,  $AB = FD$ ,  
 $AC = GE$ ,  $\angle A = \angle DHE$ .

[終決]  $\triangle ABC = DEFG$ .

[證] 延長  $HD$ ,  $HE$  各至  $K$ ,  $L$  令  $DK = FH$ ,  $EL = GH$ ,  
 聯  $KL$ . 則  $HK = FD = AB$ ,  $HL = GE = AC$ ,  $\therefore \triangle HKL \cong \triangle ABC$ .

聯  $DL$ ,  $FL$ .  $\therefore DK = FH$ ,  $\therefore \triangle LDK = \triangle LFH$ .

$\therefore HL = GE$ ,  $\therefore \triangle LFH = \triangle EFG$ .

$\therefore \triangle LDK = \triangle EFG$ .

又  $\therefore EL = GH$ ,  $\therefore \triangle DLE = \triangle DGH$ .

$\therefore \triangle HKL = \triangle HDE + \triangle DLE + \triangle LDK$   
 $= \triangle HDE + \triangle DGH + \triangle EFG$

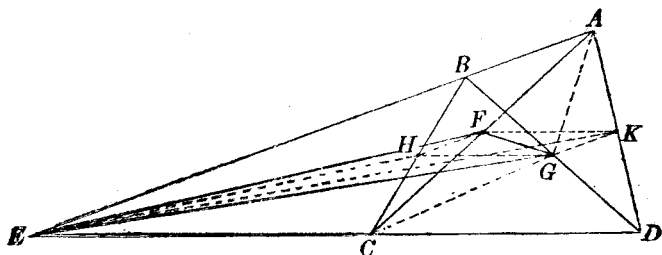
$$= DEFG.$$

$$\therefore \triangle ABC = DEFG. \quad Q. E. D.$$

(注意二) 題中涉及等高三三角形時, 平行線之應用最廣. 如

(例三)  $E$  為四角形  $ABCD$  一雙對邊  $AB, DC$  之交點.  $F, G$  各為對角線  $AC, BD$  之中點. 求證

$$\triangle EFG = \frac{1}{4} ABCD$$



[證] 在  $BC$  上取中點  $H$ . 聯  $HE, HF, HG, CG$ .

$\because H, G$  各為  $BC, BD$  之中點,  $\therefore HG \parallel ED$

$$\therefore \triangle EHG = \triangle CHG = \triangle BHG = \frac{1}{2} \triangle CGB = \frac{1}{2} \triangle CGD.$$

$$= \frac{1}{4} \triangle CBD.$$

同樣可證  $\triangle EHF = \frac{1}{4} \triangle BCA$ .

$$\therefore \triangle EFG = \triangle EHG + \triangle EHF + \triangle HFG$$

$$= \frac{1}{4} \triangle CBD + \frac{1}{4} \triangle BCA + \triangle HFG.$$

在  $AD$  上取中點  $K$ . 聯  $KE, KF, KG, AG$ .

$\therefore K, G$  各為  $AD, BD$  之中點,  $\therefore KG \parallel AE$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle EKG &= \triangle AKG = \triangle DKG = \frac{1}{2} \triangle AGD \\ &= \frac{1}{2} \triangle AGB = \frac{1}{4} \triangle ABD.\end{aligned}$$

同樣可證  $\triangle EKF = \frac{1}{4} \triangle ACD$ .

$$\begin{aligned}\therefore \triangle EFG &= \triangle EKG + \triangle EKF - \triangle KFG \\ &= \frac{1}{4} \triangle ABD + \frac{1}{4} \triangle ACD - \triangle KFG.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore 2\triangle EFG &= \frac{1}{4} \triangle CBD + \frac{1}{4} \triangle ABD + \frac{1}{4} \triangle BCA \\ &\quad + \frac{1}{4} \triangle ACD + \triangle HFG - \triangle KFG.\end{aligned}$$

$\therefore FHGK$  為  $\square$ ,  $\therefore \triangle HFG = \triangle KFG$ .

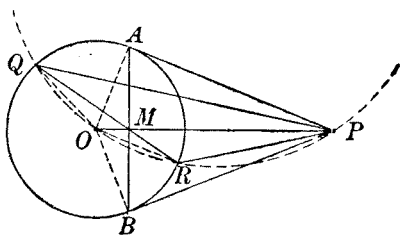
$$\begin{aligned}\therefore 2\triangle EFG &= \frac{1}{4}(\triangle CBD + \triangle ABD) + \frac{1}{4}(\triangle BCA + \triangle ACD) \\ &= \frac{1}{4}ABCD + \frac{1}{4}ABCD = \frac{1}{2}ABCD.\end{aligned}$$

$$\therefore \triangle EFG = \frac{1}{4}ABCD. \quad \text{Q. E. D.}$$

(注意三) 有時題意並不涉及面積, 然須引用面積定理證

之. 如

(例四  $PA, PB$  切  $\odot O$  於  $A, B$ .  $PO$  交  $AB$  於  $M$   $QR$  爲過  $M$  之任意弦 求證  $PO$  等分  $\angle QPR$



[證] 聯  $OA, OB, OQ, OR$ .

$\because PA, PB$  爲切線,

$\therefore \angle OAP = R\angle,$

$\angle OBP = R\angle, \therefore \angle OAP + \angle OBP = 2R\angle, \therefore A, O, B, P$  共圓.

$\therefore OM \cdot MP = AM \cdot MB.$  (定理九四)

又因  $A, Q, B, R$  共圓,  $\therefore$  同理  $QM \cdot MR = AM \cdot MB$

$\therefore OM \cdot MP = QM \cdot MR.$  (定理九六)

$\because OQ = OR,$

$\therefore \overset{\frown}{OQ} = \overset{\frown}{OR}.$  (同圓中等弦對等弧)

$\therefore \angle OPQ = \angle OPR.$  (同圓中等弧對等圓周角)

$\therefore PO$  等分  $\angle QPR.$  Q. E. D

## 習題十六

1. 梯形  $ABCD$  中,  $AD, BC$  爲底, 其對角線  $AC, BD$  交於  $E$ .

求證  $\triangle ABE = \triangle CDE$

2. 梯形二底中點所聯線分原形爲相等二份.

3.  $P, Q$  爲二同心圓外圓及內圓上各任意點, 外圓直徑  $AB$

交內圓於  $C, D$ . 求證

$$\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{QA}^2 + \overline{QB}^2$$

4.  $E$  為四角形  $ABCD$  對角線  $AC$  之中點. 求證

$$\triangle BDE = \frac{1}{2}(\triangle ABD \sim \triangle CBD).$$

5. 以梯形一不平行邊為底, 對邊中點為頂點所成三角形等於梯形之半.

6. 過平行四邊形  $ABCD$  之頂點  $A$  作直線交  $CD$  於  $E$ , 交  $BC$  延線於  $F$ , 則  $\triangle BCE = \triangle DEF$ .

7. 平行四邊形  $ABCD$  對角線  $BD$  之平行線交  $BC$  於  $P$ , 交  $CD$  於  $Q$  則  $\triangle ABP = \triangle ADQ$ .

8. 三角形各邊上正方形之三倍等於其各中線上正方形之四倍.

9.  $G$  為  $\triangle ABC$  之重心,  $P$  為任意一點. 求證

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + 3 \cdot \overline{PG}^2.$$

10.  $E, F$  為不平行四邊形  $ABCD$  兩對角線之中點. 求證

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2.$$

11. 梯形  $ABCD$  中  $AD \parallel BC$ . 求證

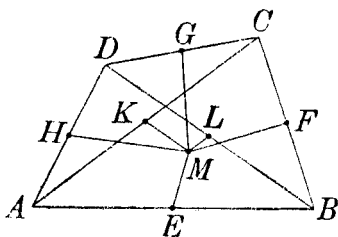
$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + 2AD \cdot BC.$$

12. 平行四邊形  $ABCD$  之對角線交於  $E$ .  $P$  為  $\triangle ABE$  內任意點. 求證  $\triangle PCD - \triangle PAB = \triangle PAC + \triangle PBD$ .



13. 梯形  $ABCD$  中,  $AD \parallel BC$ .  $AC, BD$  交於  $E$ . 過  $E$  作  $BC$  之平行線交  $AB$  於  $F$ , 交  $CD$  於  $G$ . 則  $EF = EG$ .

14.  $E, F, G, H, K, L$  各為  $AB, BC, CD, DA, AC, BD$  之中點.  $KM \parallel DB, LM \parallel AC$ . 求證  
四角形  $AEMH = BFME = CGMF = DHMG$ .



15.  $AB, CD$  為  $\odot O$  內二弦直交於  $P$ . 求證  $PA, PB, PC, PD$  上正方形之和等於直徑上之正方形.

16.  $P$  為  $\odot O$  直徑  $AB$  上任意點. 弦  $CD \parallel AB$  求證

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{DP}^2.$$

17. 外切二圓外公切線上之正方形等於二圓直徑所包之矩形.

18. 從半圓直徑  $AB$  兩端各引弦  $AC, BD$  交於  $E$ , 則

$$AC \cdot AE + BD \cdot BE = \overline{AB}^2.$$

19. 從  $\odot O$  外一點  $P$  引切線  $PA, PB$ . 弦  $AB$  中點為  $M$  過  $P$  引任意割線交圓周於  $Q, R$  則  $AM$  等分  $\angle QMR$ .

20.  $\odot A, \odot B$  為二定圓. 一動點  $P$  至  $\odot A, \odot B$  所作切線相等, 則  $P$  之軌跡為垂直於  $AB$  之直線.

21. 一動線分介乎三角形二邊之間而與底平行, 則此動線分

中點之軌跡爲一直線.

22. 交作一二等邊三角形令其底等於所設定長, 面積等於所設定面積.

23. 在  $\triangle ABC$  內求一點  $P$ , 令  $\triangle PBC = 2\triangle PAB$ , 又  $\triangle PAC = 3\triangle PAB$ .

24. 求作二線分令其和等於所設長, 其正方形之和等於定面積.

25. 求作二線分令其和等於所設長, 其正方形之差等於定面積.

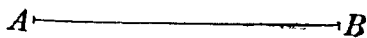
26. 求作二線分令其差等於所設長, 其正方形之和等於定面積.

## 第四編 比例

### 第二十一章 比及比例概論

§ 318 定義六七 量之比 二同類量中，一量爲他量之倍數曰此二量之比 (ratio)。第一量曰前項 (antecedent)。第二量曰後項 (consequent)

$ABCD$ ，二線分中，若  $AB$  爲  $CD$  之三倍，則曰  $AB$  對於  $CD$  之比爲 3。記作  $AB : CD = 3$ ，或  $\frac{AB}{CD} = 3$ 。式中  $AB$  爲



前項， $CD$  爲後項。若以  $CD$  爲前項，以  $AB$  爲後項，則爲  $CD : AB = \frac{1}{3}$ ，因  $AB$  既爲  $CD$  之三倍，則  $CD$  爲  $AB$  之  $\frac{1}{3}$  也。普徧言之，若  $a = nb$ ，則曰  $a : b = n$ ， $n$  或爲整數，或爲分數，且可爲無理數。

由上述定義可得以下數事：

- (1) 兩比後項相等，則前項大者比亦大。
- (2) 兩比前項相等，則後項大者比小。

(3) 比之前後項各乘或除以同數時,所得之比與原比相等.

(4) 一比之後項等於他比之前項,則此二比之積等於第一比之前項與第二比之後項之比.

§ 319. 定義六八 反比 一比等於他比之逆數,則此二比曰互爲反比.

§ 320. 定義六九 複比 一比等於其他諸比之積,則此比名曰其他諸比之複比.

§ 321. 定義七〇 二乘比 三乘比 一比等於他比之平方,則此比名曰他比之二乘比. 一比等於他比之立方,則此比名曰他比之三乘比.

§ 322. 定義七一 約量 倍量 二量之比若爲整數,則後項爲前項之約量(measure),前項爲後項之倍量(multiple). 如上節中  $CD$  爲  $AB$  之約量,  $AB$  爲  $CD$  之倍量.

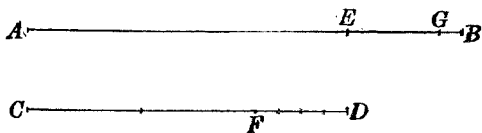
§ 323. 定義七二 公約量 二量各爲第三量之倍量,則此第三量爲二量之公約量(common measure).

若  $EF$  爲  $AB, CD$  之公約量,而  $AB = mEF, CD = nEF$  ( $m, n$  爲整數). 則  $AB : CD = m : n$ .

§ 324. 作圖題一三 求所設二線分之公約線分.

〔已設〕 二線分  $AB, CD$ .

〔求作〕  $AB, CD$  之公約線分.



〔解法〕 設  $CD < AB$ , 在  $AB$  上截取  $CD$  之倍量, 得  $AE = CD$ . 餘  $EB < CD$ , 再在  $CD$  上截取  $EB$  之倍量, 得  $CF = 2EB$ . 餘  $FD < EB$ , 再在  $EB$  上截取  $FD$  之倍量, 得  $EG = FD$ . 餘  $GB < FD$ , 再在  $FD$  上截取  $GB$  之倍量, 得  $FD = 4GB$ . 無餘. 則  $GB$  為  $AB, CD$  之公約量. Q. E. F.

〔證〕  $FD = 4GB$ .

$$\therefore EB = EG + GB = FD + GB = 4GB + GB = 5GB.$$

$$\begin{aligned} \therefore CD &= CF + FD = 2EB + FD = 10GB + 4GB \\ &= 14GB. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &= AE + EB = CD + EB = 14GB + 5GB \\ &= 19GB. \end{aligned}$$

$\therefore GB$  為  $AB, CD$  之公約量. Q. E. D.

〔討論〕 若  $FD > 4GB$  時則  $FD$  上可截取  $FH = 4GB$ , 餘  $HD < GB$ . 故可如上繼續求之. 若累次繼續求之而仍有餘量, 雖至此餘量為極小, 然仍不等於零, 則無解答.

§ 325. 系一 求所設二線分之比.

如上節  $AB = 19GB, CD = 14GB$ , 則  $AB : CD = 19 : 14$ .

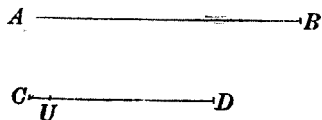
§ 326. 系二 求所設二定角之公約角.

§ 327. 系三 求所設二定角之比.

§ 328. 定義七三 可通約量 不可通約量 有公約量之二量曰可通約量 (commensurable quantity). 無公約量之二量曰不可通約量 (incommensurable quantity).

§ 329. 不可通約量之比 二量為不可通約量時, 則無公約量, 故不能得其比值. 然可得其比之近似值如下:

設  $AB$   $CD$  為不可通約二線分. 將  $CD$  分為  $n$  等分, 設所得每份之長為  $CU$ , 則  $CD = n CU$ , 而  $CU$  為  $CD$  之約量. 因  $AB, CD$



無公約量,  $\therefore CU$  不為  $AB$  之約量. 即  $AB$  不為  $CU$  之倍量. 設  $mCU < AB < (m+1)CU$ ,

$$\text{則 } AB : CD > m : n.$$

$$\text{又 } AB : CD < (m+1) : n.$$

$$\therefore \frac{m}{n} < AB : CD < \frac{m+1}{n}$$

若  $n$  為極大之數時則  $\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n} = \frac{1}{n}$  為值極小幾等於零, 故  $\frac{m}{n}$  幾等於  $\frac{m+1}{n}$ , 即  $\frac{m}{n}$  或  $\frac{m+1}{n}$  皆幾等於  $AB : CD$ . 故得  $AB : CD$  之近似值  $\frac{m}{n}$  或  $\frac{m+1}{n}$ .

§ 330. 定義七四 比例 二量之比等於其他二量之比，則此四量曰成比例 (in proportion). 此四個量曰比例量 (proportionals).

若  $a : b = m : n$ ,

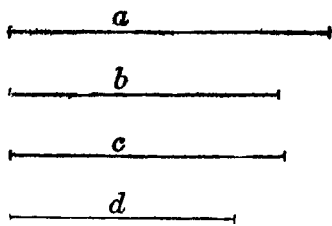
$c : d = m : n$

則  $a, b, c, d$  四線分成比例. 寫作

$a : b = c : d$ . 其中  $a, d$  曰比例式之

兩外項 (extremes);  $b, c$  曰比例式之

兩內項 (means).  $a, b, c, d$  各曰比例式之第一, 第二, 第三, 第四比例項.



§ 331. 定義七五 連比例 三個同類量中, 第一量與第二量之比等於第二量與第三量之比則此三量曰成連比例 (continued proportion).

若  $a : b = b : c$  則  $a, b, c$  成連比例. 其中  $b$  曰  $a, c$  之比例中項 (mean proportional),  $c$  曰  $a, b$  之第三比例項 (third proportional).

[註] 以上各比之量皆以線分爲例. 量之種類甚多. 僅就幾何學而論, 線分外尚有角, 等圓之弧, 面積等. 爲普遍起見, 下節, 以大體字母表任何種量, 以小體字母表不名數. 唯一比中之二項當然所表者爲同類量.

### § 332. 比例之普通定理

以下諸定理不僅適合於幾何學中之量, 故曰普通定理:

(1) 若  $A : B = C : D$ , 則  $B : A = D : C$ .

〔證〕 設  $A : B = m$ , 則  $A = mB$ .  $\therefore B = \frac{1}{m}A$ ,

$\therefore B : A = \frac{1}{m}$ .  $\because A : B = C : D$ ,  $\therefore C : D = m$ , 同樣可

得  $D : C = \frac{1}{m}$ .  $\therefore B : A = D : C$ . Q. E. D.

〔註〕 本定理名曰反比定理 (invertendo).

(2) 若  $A, B, C, D$  皆為同類量而  $A : B = C : D$ ,

則  $A : C = B : D$ .

〔證〕 設  $A : B = m$ , 則  $A = mB$ .  $\because A : B = C : D$ ,

$\therefore C : D = m, C = mD$ .  $\therefore A : C = mB : mD = B : D$ . Q. E. D.

〔註〕 本定理名曰更比定理 (alternando).

(3) 若  $A : B = C : D$ ; 則 (a)  $A + B : B = C + D : D$ ,

(b)  $B : A + B = D : C + D$ , (c)  $A + B : A = C + D : C$ ,

(d)  $A : A + B = C : C + D$ .

〔證〕 設  $A : B = m$ ,  $A = mB$ , 同樣  $C = mD$ .

$\therefore A + B : B = mB + B : B = (m + 1)B : B = m + 1$ .

$C + D : D = mD + D : D = (m + 1)D : D = m + 1$ .

$\therefore A + B : B = C + D : D \dots (a)$

$\therefore B : A + B = D : C + D \dots (b)$  (反比定理)

又  $A + B : A = mB + B : mB = (m + 1)B : mB = \frac{m + 1}{m}$ .

$C + D : C = mD + D : mD = (m + 1)D : mD = \frac{m + 1}{m}$ .



$$\therefore A + B : A = C + D : C \dots (c)$$

$$\therefore A : A + B = C : C + D \dots (d) \quad (\text{反比定理}) \quad Q. E. D.$$

〔註〕 本定理名曰合比定理 (componendo).

(4) 若  $A : B = C : D$ ; 則 (a)  $A \sim B : B = C \sim D : D$ ,

(b)  $B : A \sim B = C : C \sim D$ ,      (c)  $A \sim B : A = C \sim D : C$ ,

(d)  $A : A \sim B = C : C \sim D$ .

〔證略〕

〔註〕 本定理名曰分比定理 (dividendo).

(5) 若  $A : B = C : D$ ; 則 (a)  $A + B : A \sim B = C + D : C \sim D$ ,

(b)  $A \sim B : A + B = C \sim D : C + D$ .

〔證〕  $\because A : B = C : D$ ,

$$\therefore A + B : B = C + D : D, \quad (\text{合比定理})$$

$$\text{又 } A \sim B : B = C \sim D : D. \quad (\text{分比定理})$$

$$\therefore \frac{\frac{A+B}{B}}{\frac{A \sim B}{B}} = \frac{\frac{C+D}{D}}{\frac{C \sim D}{D}}.$$

$$\therefore A + B : A \sim B = C + D : C \sim D \dots (a)$$

$$\therefore A \sim B : A + B = C \sim D : C + D \dots (b) \quad Q. E. D.$$

〔註〕 本定理名曰合分比定理 (componendo and dividendo).

(6)  $A, B, C, D, E, F \dots$  皆為同類量, 而  $A : B = C : D$

$= E : F \dots$ , 則  $A + C + E + \dots : B + D + E + \dots = A : B$ .

〔證〕 設  $A : B = m$ , 則  $A = mB$ . 同樣  $C = mD$ ,  $E = mF$ .

$$\therefore A + C + E + \dots : B + D + F + \dots$$

$$= mB + mD + mF + \dots : B + D + F + \dots$$

$$= m(B + D + F + \dots) : (B + D + F + \dots) = m.$$

$$\therefore A + C + E + \dots : B + D + F + \dots = A : B. \quad Q. E. D.$$

〔註〕 本定理名曰加比定理 (addendo).

## 習 題 十 七

1.  $A, B, C, D$  爲同類量, 而  $A : B = C : D$ , 則

$$A \sim C : B \sim D = A : B.$$

2. 若  $A : B = P : Q$ ,  $B : C = Q : R$ , 則  $A : C = P : R$ .

3. 若  $A : B = B : C$ , 則  $A : C = (A : B)^2$ .

4. 若  $A : B = C : D$ , 則  $mA : nB = mC : nD$ .

5. 若  $A + B : A - B = P + Q : P - Q$ , 則  $A : B = P : Q$ .

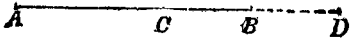
6. 若  $A : B = C : D = E : F$ , 則

$$lA + mC + nE : lB + mD + nF = A : B.$$

7. 若  $A : B = C : D$  而  $A > B$ , 則  $C > D$ .

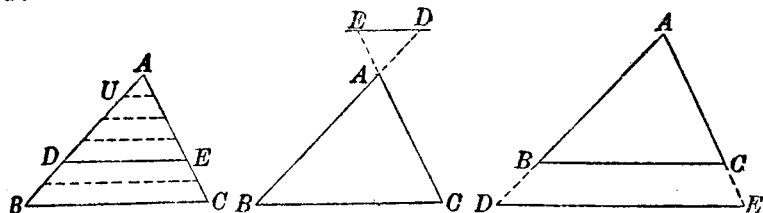
## 第二十二章 比例線分

§ 333. 定義七六 內分及外分 一線分爲其中一點分爲兩份曰內分 (divide internally). 一線分爲其延線上一點分爲兩份曰外分 (divide externally).

如圖線分  $AB$  爲  $C$  內分爲  $A$   兩份  $AC, BC$ ; 爲  $D$  外分爲兩份  $AD, BD$ .

§ 334. 定義七七 相似分割 二線分各爲一點所分 (內分或外分), 各線分上所分成兩份之比相等, 則曰此二線分分於相似 (be divided similarly).

§ 335. 定理九七 三角形一邊之平行線將其他二邊分於相似.



〔假設〕  $\triangle ABC$  中,  $DE \parallel BC$ , 交  $AB, AC$  或其延線於  $D, E$ .

〔終決〕  $AD : DB = AE : EC$

〔證〕 (1) 若  $AD, DB$  爲可通約量, 則可求得其公約線分  $AU$ . 若  $AD = m AU, DB = n AU$ , 則  $AD : DB = m : n$ . 將  $AD$  分成  $m$  等分,  $DB$  分成  $n$  等分. 過各分點作  $BC$  之平行線. 則因此諸平行線分  $AD, DB$  爲  $m, n$  等分, 故分  $AE, EC$  亦爲  $m, n$  等分.

$$\therefore AE : EC = m : n. \quad \therefore AD : DB = AE : EC. \quad Q. E. D.$$

(2) 若  $AD, DB$  爲不可通約量. 先將  $DB$  分成  $n$  等分 (令  $n$  爲極大之數), 每份之長爲  $AU$  ( $AU$  極小). 以  $AU$  爲單位量  $AD$  得  $m AU < AD < (m+1) AU$ .

$$\therefore \frac{m}{n} < \frac{AD}{DB} < \frac{m+1}{n}. \quad \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}.$$

過各分點作  $BC$  之平行線, 則此諸平行線亦分  $EC$  爲  $n$  等分, 分  $AE$  爲  $m$  等分有餘而  $m+1$  等分不足.

$$\therefore \frac{m}{n} < \frac{AE}{EC} < \frac{m+1}{n}. \quad \therefore \frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}.$$

$$\therefore AD : DB = AE : EC. \quad Q. E. D.$$

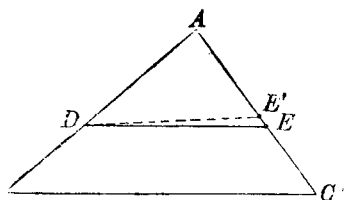
§ 336. 系  $\triangle ABC$  中,  $BC$  之平行線交  $AB, AC$  或其延線於  $D, E$ . 則  $AB : AD = AC : AE, AB : BD = AC : CE, AD : AE = DB : EC, AB : AC = AD : AE, AB : AC = BD : CE$  等等.

§ 337. 定理九八 將三角形二邊分於相似之二點之聯線平行於其第三邊.

〔假設〕  $\triangle ABC$  中,

$AD : DB = AE : EC$ .

〔終決〕  $DE \parallel BC$ .



〔證〕 從  $D$  作  $BC$  之平行  $B$  線交  $AC$  於  $E'$ . 則  $AD : DB = AE' : E'C$ . 今  $AD : DB = AE : EC$ ,

$\therefore AE' : E'C = AE : EC$ .

$\therefore AE' + E'C : E'C = AE + EC : EC$ ,

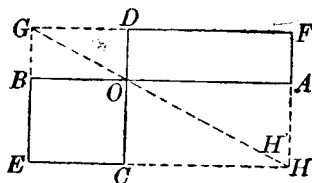
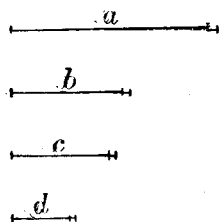
即  $AC : E'C = AC : EC$ .

$\therefore E'C = EC, \therefore E'$  合於  $E, DE'$  合於  $DE$ .

$\therefore DE \parallel BC$ .

Q. E. D.

§ 338. 定理九九 四線分成比例, 則兩外項所包矩形等於二內項所包矩形.



〔假設〕  $a, b, c, d$  四線分  $a : b = c : d$ .

〔終決〕  $ad = bc$ .

〔證〕 作  $AB, CD$  直交於  $O$ . 令  $OA = a, OB = b, OC = c, OD$

$=d$ . 作矩形  $OE, OF$ . 延長  $EB, FD$  交於  $G$ . 聯  $GO$  延長之交  $FA, EC$  之延線於  $H, H'$ .

則因  $OD \parallel HF$ ,  $\therefore GO : OH = GD : DF = OB : OA = b : a$ .

又因  $OB \parallel HE$ ,  $\therefore GO : OH' = GB' : BE' = OD : OC = d : c$ .

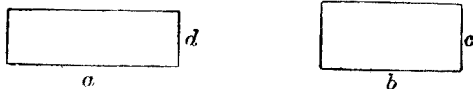
$\therefore a : b = c : d$ ,  $\therefore b : a = d : c$ ,  $\therefore GO : OH = GO : OH'$ .

$\therefore OH = OH'$ ,  $\therefore H$  合於  $H'$ .  $\therefore GH$  爲  $\square EHF G$  之對角線而  $O$  爲  $GH$  上一點.  $\therefore \square OE, \square OF$  爲  $\square EF$  之餘形.

$\therefore \square OF = \square OE$ .  $\therefore ad = bc$ . Q. E. D.

【注意】在代數中，若  $a, b, c, d$  四數成比例，則兩外項相乘積  $ad$  等於兩內項相乘積  $bc$ . 故本定理與代數公式適相符合。

§ 339 定理一〇〇 相等兩矩形之兩雙鄰邊成比例；一雙鄰邊爲外項，又一雙鄰邊爲內項。



〔假設〕  $\square ad = \square bc$ .

〔終決〕  $a : b = c : d$ .

〔證〕 設  $a : b = c : d'$ ,

則  $ad' = bc$ .

今  $ad = bc$ ,  $\therefore ad' = ad$ .

$\therefore d' = d$  (等積矩形之一雙邊相等，則其各雙邊皆等)。

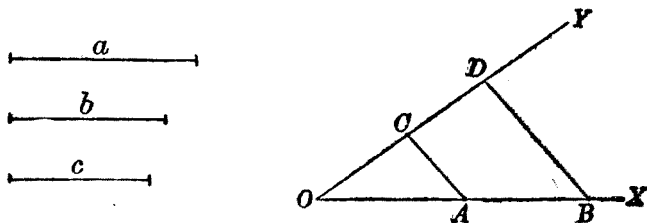
$$\therefore a : b = c : d.$$

Q. E. D.

§ 340. 系一 等積二矩形一雙邊之比等於他雙邊之反比.

§ 341. 系二 等積二三角形底與高互為反比.

§ 342. 作圖題一四 作所設三線分之第四比例項.



〔已設〕 三線分  $a, b, c$ .

〔求作〕 線分  $d$  令  $a : b = c : d$ .

〔解法〕 在任意角  $\angle XOY$  之一邊上截取  $OA = a, AB = b$ . 在  
 另一邊上截取  $OC = c$ . 聯  $AC$ . 過  $B$  作  $AC$  之平行線交又一邊於  
 $D$ . 則  $CD$  即所求之  $d$ .

Q. E. F.

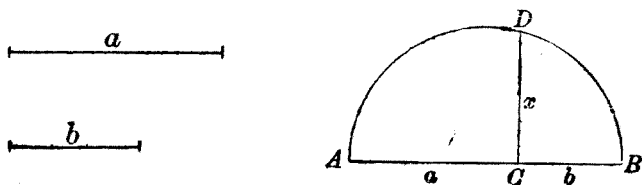
〔證〕  $\because AC \parallel BD, \therefore OA : AB = OC : CD$ .

$\therefore a : b = c : CD. \therefore CD$  即所求  $d$ .

Q. E. D.

§ 343. 系 作所設二線分之第三比例項.

§ 344. 作圖題一五 作所設二線分之比例中項.



〔已設〕 二線分  $a, b$ .

〔求作〕 線分  $x$  令  $a : x = x : b$ .

〔解法〕 在任意直線上截取  $AC = a, CB = b$ . 以  $AB$  爲直徑作半圓周. 從  $C$  作  $AB$  之垂線交半圓周於  $D$ .

則  $CD$  卽所求之  $x$ .

Q. E. F.

〔證〕  $\because \overline{CD}^2 = AC \cdot CB$ .

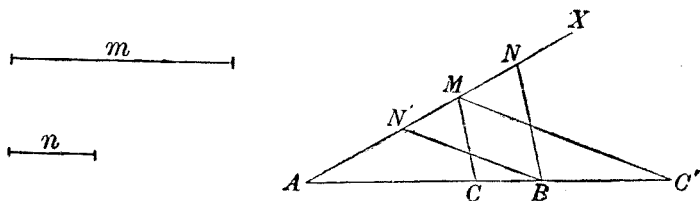
$\therefore AC : CD = CD : CB$ .

$\therefore a : CD = CD : b$ .

$\therefore CD$  爲所求之  $x$ .

Q. E. D.

§ 345. 作圖題一六 將一所設線分分爲二份令其比等於其他所設二線分之比.



〔已設〕 線分  $AB$  及  $m, n$ .

〔求作〕  $AB$  上一分點  $C$  令  $AC : CB = m : n$ .

〔解法〕 過  $A$  作任意一半射線  $AX$ . 在  $AX$  上截取  $AM = m$ ,  $MN = n$ . 聯  $NB$ . 作  $MC \parallel NB$  交  $AB$  於  $C$ . 則  $C$  卽所求點. Q. E. F.

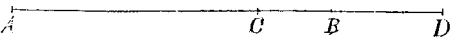
〔證〕  $\because MC \parallel NB, \therefore AC : CB = AM : MN = m : n$ .



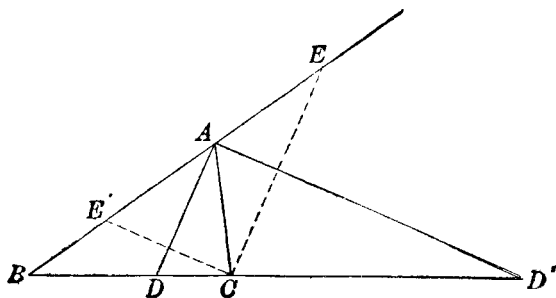
∴  $C$  爲所求分點. Q. E. D.

〔討論〕 若  $m \neq n$ , 則有兩個解答如圖  $C, C'$ .  $C$  爲  $AB$  之內分點,  $C'$  爲  $AB$  之外分點. 若  $m = n$ , 則有一個解答即  $AB$  之中點.

§ 346. 定義七八 調和分割 一線分爲其內分點及外分點所分二部分之比相等, 則曰此線分爲此二點分於調和 (be divided harmonically).

線分  $AB$  內分於  $C$ ,  外分於  $D$ , 而  $AC : CB = AD : DB$ , 則  $AB$  爲  $C, D$  分於調和. 依更比定理, 若  $AC : CB = AD : DB$ , 則  $AC : AD = CB : DB$ . ∴  $CD$  亦爲  $A, B$  分於調和. 如此一直線上互分於調和之四點  $A, C, B, D$  曰調和點列 (harmonic range).  $A, B$  與  $C, D$  互稱曰調和相屬點 (conjugate harmonical points).

§ 347. 定理一〇一 三角形一角之等分線以二鄰邊之比內分對邊, 其外角等分線以同比外分對邊.



〔假設〕  $\triangle ABC$  中,  $AD, AD'$  各為  $\angle BAC$  之內等分線及外等分線.

〔終決〕  $BD : DC = AB : AC, BD' : D'C = AB : AC.$

〔證〕 作  $CE \parallel DA$  交  $BA$  於  $E$ .

則  $\angle AEC = \angle BAD = \angle DAC = \angle ACE. \therefore AE = AC.$

在  $\triangle BCE$  中,  $DA \parallel CE, \therefore BD : DC = BA : AE.$

$$\therefore BD : DC = AB : AC.$$

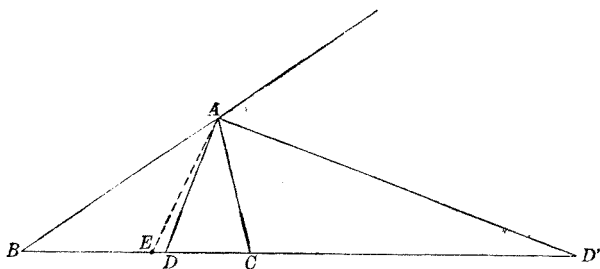
同樣作  $CE' \parallel D'A$  交  $BA$  於  $E'$ ,

可證  $BD' : D'C = AB : AC.$

Q. E. D.

§ 348. 系 三角形一角之內外等分線分對邊於調和.

§ 349. 定理一〇二 過三角形一角頂之線若以二鄰邊之比內分(或外分)其對邊,則此線為此角之等分線(或外等分線).



〔假設〕  $BD : DC = AB : AC, BD' : D'C = AB : AC.$

〔終決〕  $AD$  為  $\angle BAC$  之等分線,  $AD'$  為  $\angle BAC$  之外等分線.

〔證〕 作  $\angle BAC$  之等分線  $AE$ .

則  $BE : EC = AB : AC$ . 今  $BD : DC = AB : AC$ .

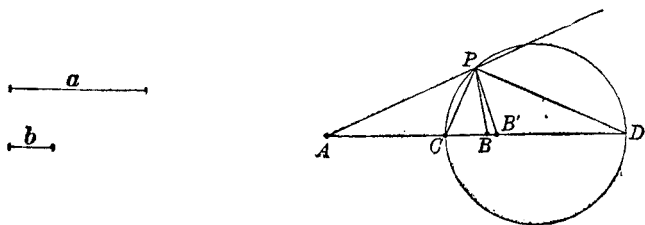
$\therefore BE : EC = BD : DC$ .  $\therefore BE + EC : EC = BD + DC : DC$ .

即  $BC : EC = BC : DC$ .  $\therefore EC = DC$ ,  $\therefore E$  合於  $D$ ,

$\therefore AE$  合於  $AD$ .  $\therefore AD$  爲  $\angle BAC$  之等分線.

同樣可證  $AD'$  爲  $\angle BAC$  之外等分線. Q. E. D.

§ 350. 定理一〇三 與兩定點距離等於定比之點之軌跡爲一圓周.



〔已設〕  $A, B$  二定點,  $a, b$  二定長.

〔條件〕 動點  $P$ ,  $PA : PB = a : b$ .

〔軌跡〕 以  $a : b$  內分  $AB$  於  $C$ , 外分  $AB$  於  $D$ .  $P$  之軌跡爲以  $CD$  爲直徑所作之圓周.

〔證〕 (1) 設  $P$  爲圓周上一點, 聯  $PA, PB, PC, PD$ . 作  $PB'$  令  $\angle CPB' = \angle APC$ , 交  $AD$  於  $B'$ .

則  $PC$  爲  $\angle APB'$  之等分線,  $\therefore AC : CB' = PA : PB'$ .

$\therefore \angle CPD = R\angle$ ,  $\therefore PD$  爲  $\angle APB'$  之外等分線.

$$\therefore AD : DB' = PA : PB', \therefore AC : CB' = AD : DB'.$$

$$\therefore AC : AD = CB' : DB'. \quad (\text{更比定理})$$

$$\therefore AC + AD : AD = CB' + DB' : DB' = CD : DB'. \quad (\text{合比定理})$$

$$\text{今 } AC : CB = AD : DB, \therefore AC : AD = CB : DB.$$

$$\therefore AC + AD : AD = CB + DB : DB = CD : DB.$$

$$\therefore CD : DB' = CD : DB. \therefore DB' = DB. \therefore B' \text{ 合於 } B.$$

故  $PB'$  合於  $PB$ .  $\therefore PC$  為  $\angle APB$  之等分線.

$$\therefore PA : PB = AC : CB = a : b.$$

$\therefore$  圓周上任何點適合於所設條件.

(2) 設  $P$  為適合於條件之點, 則  $PA : PB = a : b = AC : CB = AD : DB$ .  $\therefore PC, PD$  各為  $\angle APB$  之等分線及外等分線.

$\therefore \angle CPD = R\angle$ .  $\therefore P$  在圓周上.

$\therefore$  適合於條件之點在此圓周上.

故此所作圓周為動點  $P$  之軌跡.

Q. E. D.

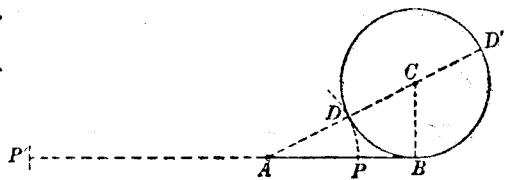
§ 351. 作圖題一七 在所設線分上求一點分所設線分為兩部分, 令此兩部分之比等於其一部分與全線分之比.

[已設] 線分  $AB$ .

[求作]  $AB$  上一

點  $P$ , 令  $BP : AP$

$$= AP : AB.$$



〔解法〕 從  $B$  作  $AB$  之垂線  $BC$  令等於  $\frac{1}{2} AB$ . 以  $C$  爲中心,  $CB$  爲半徑作  $\odot C$ . 聯  $AC$  交  $\odot C$  於  $D, D'$ . 在  $AB$  上取  $P$  令  $AP = AD$ . 又在  $BA$  之延線上取  $P'$  令  $AP' = AD'$ . 則  $P, P'$  卽所求之內外二分點. Q. E. F.

〔證〕 聯  $BD, BD'$ . 則因  $CB \perp AB$ , 故  $AB$  爲  $\odot C$  之切線.  
 $\therefore \overline{AB}^2 = AD \cdot AD'$ .  $\therefore AD : AB = AB : AD'$ .  
 $\therefore AD : AB - AD = AB : AD' - AB$ .  $\therefore AP = AD, DD' = AB$ ,  
 $\therefore AP : AB - AP = AB : AD' - DD'$ , 卽  $AP : PB = AB : AD$ .  
 $\therefore PB : AP = AP : AB$ .

再從  $AD : AB = AB : AD'$ , 可得  $AD + AB : AB = AB + AD' : AD'$ .  
 $\therefore AP' = AD', DD' = AB, \therefore AD + DD' : AB = AB + AP' : AP'$ .  
 卽  $AD' : AB = BP' : AP'$ .

$$\therefore PB : AP' = AP' : AB.$$

$\therefore P, P'$  爲所求二分點. Q. E. D.

〔註〕 本題爲古來一著名問題, 名曰“黃金分割”, 亦曰“將一線分爲中末比”.

## 習 題 十 八

1. 二圓之外公切線以二圓半徑之比外分其聯心線分.
2. 二圓內切於  $A$ . 過  $A$  隨意作大圓之二弦  $AB, AC$  各交小圓於  $B', C'$ . 則  $AB' : B'B = AC' : C'C$ .

3. 過相切二圓(外切或內切)之切點任意作割線,則此割線爲二圓所截二弦之比等於其半徑之比.

4.  $E$  爲  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABD$  公共邊上任意一點.  $EF \parallel AC$  交  $BC$  於  $F$ .  $EG \parallel AD$  交  $BD$  於  $G$ . 則  $FG \parallel CD$ .

5.  $D, E$  各爲  $\triangle ABC$  邊  $AB, AC$  上之點.  $BE, CD$  交於  $F$ . 若  $AD : DB = AE : EC$ , 則  $BF : FE = CF : FD$ .

6. 梯形  $ABCD$  二對角線  $AC, BD$  交於  $E$ , 則  $AE \cdot DE = BE \cdot CE$ .

7. 過梯形對角線交點所作底之平行線爲此交點所等分.

8. 過圓外一點  $P$  作圓之切線  $PT$ , 及任意割線交圓於  $A, B$ . 則  $PT$  爲  $PA, PB$  之比例中項.

9.  $A, P, B, Q$  爲調和點列,  $M$  爲  $AB$  之中點, 則  $MA$  爲  $MP, MQ$  之比例中項.

10.  $\triangle ABC$  中,  $\angle A$  爲直角,  $AD \perp BC$ .  $\angle B$  之等分線交  $AD$  於  $F$ , 交  $AC$  於  $E$ . 則  $AE : EC = DF : AF$ .

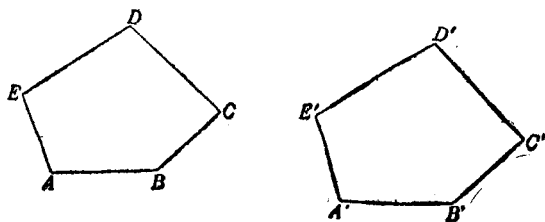
11.  $AM$  爲  $\triangle ABC$  之中線.  $MD, ME$  各爲  $\angle AMB, \angle AMC$  之等分線, 各交  $AB, AC$  於  $D, E$ . 則  $DE \parallel BC$ .

12. 過一定點求作一直線令與一定角  $\angle AOB$  交於  $A, B$  且令  $OA : OB$  等於所設定比.

## 第二十三章 相似多角形

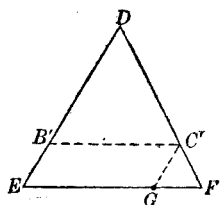
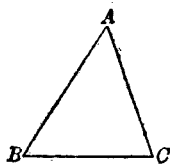
§ 352. 定義七九 互等角多角形 兩個同邊數多角形中, 順次各雙角皆相等, 則此二形曰互等角多角形 (mutually equiangular). 此各雙等角曰對應角, 二雙對應角間之邊曰對應邊.

§ 353. 定義八〇 相似多角形 兩個互等角多角形中, 各雙對應邊之比皆相等, 則此二形曰相似多角形 (similar polygons).



例如多角形  $ABC\dots E$ , 及  $A'B'C'\dots E'$  中,  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$ ,  $\dots \angle E = \angle E'$ . 又  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \dots = \frac{EA}{E'A'}$ , 則此二形相似. 記作  $ABC\dots E \sim A'B'C'\dots E'$ . 相似多角形各雙對應邊之比曰二形之相似比 (ratio of similitude).

§ 354. 定理一〇四 互等角三角形為相似形.



〔假設〕  $\triangle ABC$ ,  $\triangle DEF$  中,  $\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle E$ ,  $\angle C = \angle F$ .

〔終決〕  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

〔證〕 在  $DE$ ,  $DF$  上各取  $B'$ ,  $C'$  令  $DB' = AB$ ,  $DC' = AC$ . 聯  $B'C'$ . 因  $\angle D = \angle A$ ,  $\therefore \triangle DB'C' \cong \triangle ABC$ .

$\therefore \angle DB'C' = \angle B = \angle E$ ,  $\angle DC'B' = \angle C = \angle F$ .

$\therefore B'C' \parallel EF$ ,  $\therefore DB' : DE = DC' : DF$ .

$\therefore AB : DE = AC : DF$ .

過  $C'$  作  $C'G \parallel DE$ , 則  $EGC'B'$  爲平行四邊形.

$\therefore B'C' = EG$ , 故  $DC' : DF = EG : EF$ .

$\therefore AC : DF = B'C' : EF = BC : EF$ .

$\therefore AB : DE = AC : DF = BC : EF$ .

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

Q. E. D.

§ 355. 系一 兩個三角形中, 兩雙角各相等, 則此兩形爲相似形

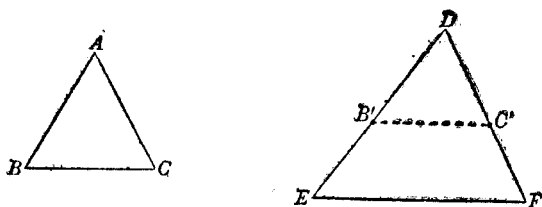


§ 356. 系二 兩個直角三角形中，一雙銳角相等，則此兩形爲相似形。

§ 357. 系三 三角形一邊之平行線與他二邊所成之三角形與原形相似。

§ 358. 系四 兩三角形之各雙邊互相平行或互相垂直，則此兩形相似。

§ 359. 定理一〇五 兩個三角形中，一雙角相等，且夾此雙角之兩雙邊成比例，則此兩形相似。



〔假設〕  $\triangle ABC, \triangle DEF$  中,  $\angle A = \angle D, AB:DE = AC:DF$ .

〔終決〕  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

〔證〕 在  $DE, DF$  上各取  $B', C'$  令  $DB' = AB, DC' = AC$ . 聯  $B'C'$ . 則因  $\angle A = \angle D, \therefore \triangle ABC = \triangle DB'C'$ .

$\therefore AB:DE = AC:DF, \therefore DB':DE = DC':DF$ .

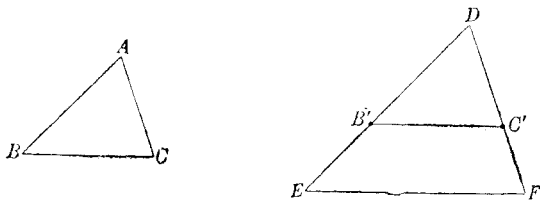
$\therefore DB':DE - DB' = DC':DF - DC',$  即  $DB':B'E = DC':C'F$ .

$\therefore B'C' \parallel EF. \therefore \triangle DB'C' \sim \triangle DEF$ .

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Q. E. D

§ 360. 定理一〇六 兩三角形中，三雙邊之比相等，則此兩形爲相似形。



〔假設〕  $\triangle ABC, \triangle DEF$  中,  $AB : DE = AC : DF = BC : EF$ .

〔終決〕  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

〔證〕 在  $DE, DF$  上各取  $B', C'$  令  $DB' = AB, DC' = AC$ . 聯  $B'C'$  則因  $AB : DE = AC : DF$ ,

$\therefore DB' : DE = DC' : DF, \angle D$  爲公共角,  $\therefore \triangle DB'C' \sim \triangle DEF$ .

$\therefore DC' : DF = B'C' : EF$ . 但  $AC : DF = BC : EF$ , 而  $DC' = AC$ ,

$\therefore B'C' = BC. \therefore \triangle DB'C' \cong \triangle ABC$  (s. s. s. = s. s. s.)

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Q. E. D.

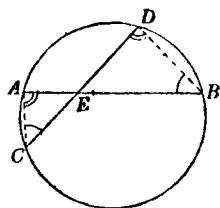
〔注意〕 § 354—§ 360 爲相似三角形之基本定理. 其爲用之廣, 如直線形中之合同三角形同. 多數等積矩形定理, 可用相似三角形證之. 舉例如下:

(例一) 圓內相交兩弦中, 各弦爲交點所分兩部分所包矩形

相等.

〔假設〕 圓內兩弦  $AB, CD$  交於  $E$ .

〔終決〕  $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ .



〔證〕 聯  $AC, BD$ . 在  $\triangle ACE, \triangle BDE$  中,  $\angle C = \angle B, \angle A = \angle D, \therefore \triangle ACE \sim \triangle BDE$ .

$$\therefore AE : DE = CE : BE.$$

$$\therefore AE \cdot BE = CE \cdot DE. \quad \text{Q. E. D.}$$

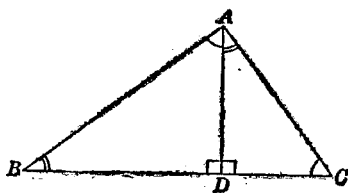
(例二) 直角三角形中, 斜邊上之高分斜邊所成兩部分所包矩形等於此高上之正方形.

〔假設〕  $\angle BAC = R\angle,$

$AD \perp BC.$

〔終決〕  $BD \cdot DC = \overline{AD}^2.$

〔證〕  $\therefore AD \perp BC,$



$$\therefore \angle B + \angle BAD = R\angle. \quad \therefore \angle BAC = R\angle,$$

$$\therefore \angle DAC + \angle BAD = R\angle. \quad \therefore \angle B = \angle DAC.$$

同理  $\angle C = \angle DAB.$

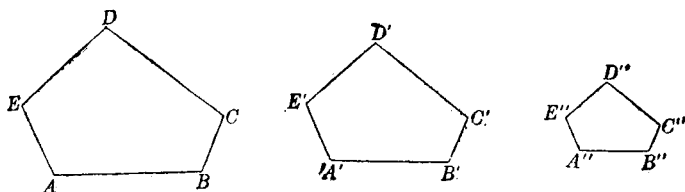
$$\triangle ABD \sim \triangle ACD, \quad \therefore BD : AD = AD : DC.$$

$$\therefore BD \cdot DC = \overline{AD}^2. \quad \text{Q. E. D.}$$

## 習 題 十 九

1.  $\triangle ABC$  中,  $\angle A$  的等分線交  $BC$  於  $M$ , 交其外接圓周於  $N$ , 則  $AB \cdot AC = AM \cdot AN$ .
2.  $AE$  爲  $\triangle ABC$  外接圓之直徑,  $AD$  爲從  $A$  至  $BC$  之高, 則  $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ .
3. 在兩個相似三角形內, 一雙對應中線之比等於其相似比.
4. 在兩個相似三角形內, 一雙對應高之比等於其他雙對應高之比.
5. 兩個相似三角形外接圓半徑之比等於其相似比.
6. 兩個相似多角形周圍之比等於其相似比.
7. 兩三角形中, 一雙底角相等, 又對底之高與底成比例, 則此兩形相似.
8. 兩三角形中, 兩雙邊第三雙邊上之中線成比例, 則此兩形相似.
9.  $P$  爲  $\odot O_1, \odot O_2$  之兩外公切線交點. 過  $P$  之割線交兩圓周於順次四點  $A_1, B_1, A_2, B_2$ . 則  $O_1 A_1 \parallel O_2 A_2, O_1 B_1 \parallel O_2 B_2$ .
10.  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ . 以  $B$  爲中心,  $BC$  爲半徑作圓再交  $AC$  或其延線於  $D$ . 則  $BC$  爲  $CA, CD$  之比例中項.

§ 361. 定理一〇七 兩個多角形各與第三形相似，則此兩形互相似。



〔假設〕  $ABC \dots E \sim A'B'C'' \dots E'$ ,

$A'B'C' \dots E' \sim A''B''C'' \dots E''$ .

〔終決〕  $ABC \dots E \sim A'B'C' \dots E'$ .

〔證〕  $\because ABC \dots E \sim A'B'C'' \dots E'$ ,

$$\therefore \angle A = \angle A'', \angle B = \angle B'', \dots \angle E = \angle E'', \text{ 又 } \frac{AB}{A''B''} = \frac{BC}{B''C''}$$

$$= \dots = \frac{EA}{E''A''}.$$

$\therefore A'B'C' \dots E' \sim A''B''C'' \dots E''$ ,

$$\therefore \angle A' = \angle A'', \angle B' = \angle B'', \dots \angle E' = \angle E'', \text{ 又 } \frac{A'B'}{A''B''} = \frac{B'C'}{B''C''}$$

$$= \dots = \frac{E'A'}{E''A''}.$$

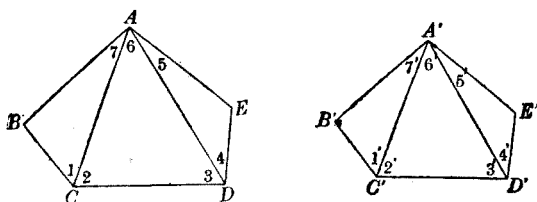
$$\therefore \angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \dots \angle E = \angle E', \text{ 又 } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$= \dots = \frac{EA}{E'A'}.$$

$\therefore ABC \dots E \sim A'B'C' \dots E'$ .

Q. E. D.

§ 362. 定理一〇八 同個數相似三角形各依相似位置合成之多角形爲相似形。



〔假設〕  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ,  $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ ,  $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$ .  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ACD$ ,  $\triangle ADE$  合成一多角形  $ABCDE$ .  $\triangle A'B'C'$ ,  $\triangle A'C'D'$ ,  $\triangle A'D'E'$  依相似位置合成一多角形  $A'B'C'D'E'$ .

〔終決〕  $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ .

〔證〕  $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ,

$$\therefore \angle B = \angle B', \angle 1 = \angle 1', \angle 7 = \angle 7',$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}. \therefore \triangle ACD \sim \triangle A'C'D', \therefore \angle 2 = \angle 2',$$

$$\angle 3 = \angle 3', \angle 6 = \angle 6', \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'}. \therefore \triangle ADE \sim \triangle A'D'E',$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 4', \angle E = \angle E', \angle 5 = \angle 5', \frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'}.$$

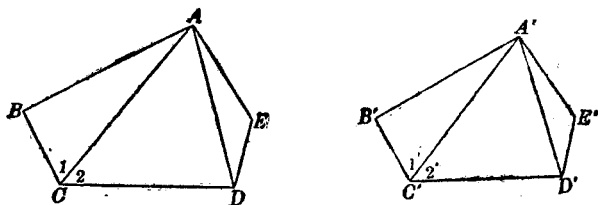
$$\therefore \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 = \angle 5' + \angle 6' + \angle 7', \text{ 即 } \angle A = \angle A'. \angle 1 + \angle 2 = \angle 1' + \angle 2', \text{ 即 } \angle C = \angle C'. \angle 3 + \angle 4 = \angle 3' + \angle 4',$$

$$\text{即 } \angle D = \angle D'. \text{ 又 } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'}$$

$$\therefore ABCDE \sim A'B'C'D'E'.$$

Q. E. D.

§ 363. 定理一〇九 聯兩個相似多角形各對應對角線所分成諸三角形為各雙相似三角形.



〔假設〕  $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ .  $AC, A'C'$ ;  $AD, A'D'$  為對應對角線.

〔終決〕  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ,  $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ ,  
 $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$ .

〔證〕  $\because ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ ,  $\therefore \angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$ ,  
 $\angle C = \angle C'$ ,  $\angle D = \angle D'$ ,  $\angle E = \angle E'$ . 又  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$   
 $= \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$ .

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .  $\therefore \angle 1 = \angle 1'$ ,  $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$ .

$\therefore \angle C - \angle 1 = \angle C' - \angle 1'$ , 即  $\angle 2 = \angle 2'$ .  $\therefore \triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ .

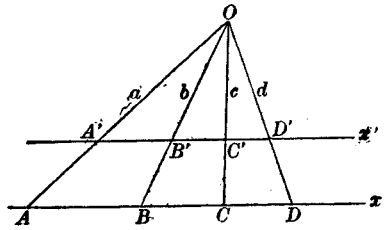
同樣可證  $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$ .

Q. E. D.

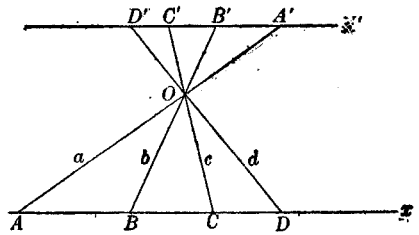
§ 364. 系 相似多角形各雙對應對角線之比等於其相似比.

§ 365. 定理一一〇 共點諸線將平行二直線分於相似.

〔假設〕  $a, b, c, d, \dots$  諸直線共有  $O$  點，截二平行線  $x, x'$  於  $A, B, C, D, \dots, A', B', C', D', \dots$  等。



〔終決〕  $AB : A'B'$   
 $= BC : B'C' = CD : C'D'$   
 $= \dots$



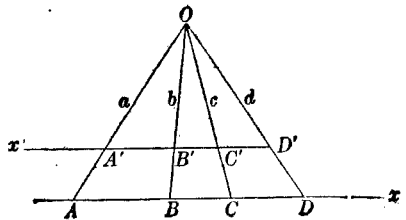
〔證〕  $\because A'B' \parallel AB,$   
 $\therefore \triangle OA'B' \sim \triangle OAB.$   
 $\therefore AB : A'B' = OB : OB'.$

$\because B'C' \parallel BC, \therefore \triangle OB'C' \sim \triangle OBC, \therefore BC : B'C' = OB : OB'.$   
 $\therefore AB : A'B' = BC : B'C'.$  同理  $BC : B'C' = CD : C'D'.$

$\therefore AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \dots. \quad Q. E. D.$

§ 366. 定理—— 不平行諸直線，將二平行線分於相似，則此諸線共點。

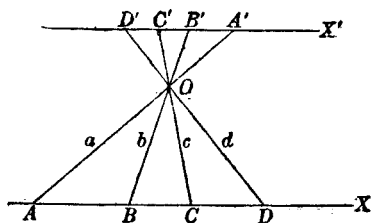
〔假設〕  $a, b, c, d, \dots$  諸不平行直線截二平行線  $x, x'$  於  $A, B, C, D, \dots, A', B', C', D', \dots$  諸點，而  $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \dots$





〔終決〕  $a, b, c, d \dots$  諸線  
共點.

〔證〕 設  $a, b$  交於  $O_1$ ,  
 $b, c$  交於  $O_2$ .



則因  $A'B' \parallel AB$ ,  $\therefore \triangle O_1A'B' \sim \triangle O_1AB$ .

$\therefore O_1B : O_1B' = AB : A'B'$ . 又因  $B'C' \parallel BC$ ,

$\therefore \triangle O_2B'C' \sim \triangle O_2BC$ .  $\therefore O_2B : O_2B' = BC : B'C'$

$\because AB : A'B' = BC : B'C'$ ,  $\therefore O_1B : O_1B' = O_2B : O_2B'$ .

$\therefore O_1B - O_1B' : O_1B' = O_2B - O_2B' : O_2B'$ , 即  $BB' : O_1B'$   
 $= BB' : O_2B'$ ,  $\therefore O_1B' = O_2B'$ .  $\therefore O_1$  合於  $O_2$ ,  $\therefore a, b, c$  共點.

同理可證  $b, c, d$  共點.

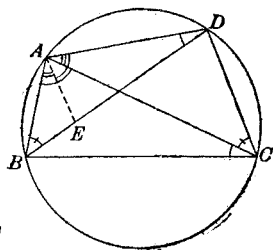
$\therefore a, b, c, d \dots$  諸線共點. Q. E. D.

§ 367. 定理一一二 圓內接四邊形二對角線所包矩形等於二雙對邊所包矩形之和.

〔假設〕  $ABCD$  內接於圓.

〔終決〕  $AC \cdot BD = AB \cdot CD$   
+  $AD \cdot BC$ .

〔證〕 作  $AE$  令  $\angle BAE = \angle CAD$ ,  
交  $BD$  於  $E$ . 在  $\triangle ABE, \triangle ACD$  中,  $\angle BAE$



$= \angle CAD, \angle ABE = \angle ACD, \therefore \triangle ABE \sim \triangle ACD. \therefore AB : AC = BE : CD, \therefore AB \cdot CD = AC \cdot BE.$  在  $\triangle ABC, \triangle AED$  中,  
 $\angle BAC = \angle EAD, \angle ACB = \angle ADE, \therefore \triangle ABC \sim \triangle AED.$

$\therefore BC : ED = AC : AD, \therefore AD \cdot BC = AC \cdot ED.$

$\therefore AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED$

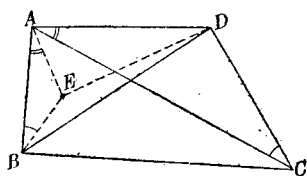
$$= AC \cdot (BE + ED) = AC \cdot BD. \quad Q. E. D.$$

【註】本定理名曰 Ptolemy 氏定理。

§ 368. 定理一一三 非圓內接四邊形兩對角線所包矩形小於二雙對邊所包矩形之和。

〔假設〕  $ABCD$  爲非圓內接四邊形。

〔終決〕  $AC \cdot BD < AB \cdot CD + AD \cdot BC.$



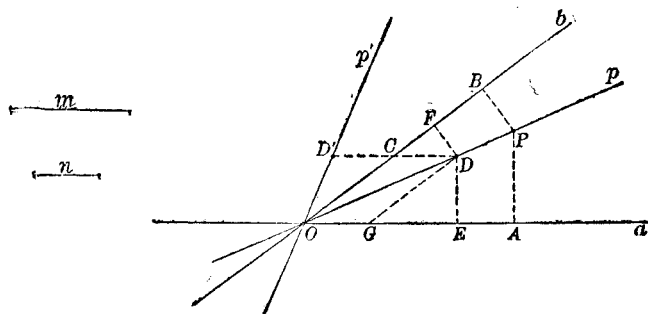
〔證〕 作  $AE, BE$  令  $\angle BAE = \angle CAD, \angle ABE = \angle ACD.$  則  $\triangle ABE \sim \triangle ACD. \therefore AB : AC = BE : CD. \therefore AB \cdot CD = AC \cdot BE.$  又  $AB : AC = AE : AD, \angle BAC = \angle EAD.$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED. \therefore BC : ED = AC : AD \therefore AD \cdot BC = AC \cdot ED. \therefore AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED = AC(BE + ED) \therefore BD < BE + ED, \therefore AC \cdot BD < AC \cdot (BE + ED)$

$\therefore AC \cdot BD < AB \cdot CD + AD \cdot BC. \quad Q. E. D.$

§ 369. 系 四角形兩對角線所包矩形等於其二雙對邊所包矩形之和，則為圓內接四邊形。

§ 370. 定理一一四 一動點與所設相交二直線距離之比等於一定比，則此動點之軌跡為過此二直線交點之一雙直線。



〔已設〕 二直線  $a, b$  交於  $O$ ，二定長  $m, n$ 。

〔條件〕 動點  $P$ ，與  $a, b$  距離之比等於  $m : n$ 。

〔軌跡〕 在  $b$  上取  $C$  令  $OC = m$ 。過  $C$  作  $a$  之平行線，在其上截取線分  $CD$  及  $CD = n$ 。則過  $OD, OD'$  之二直線  $p, p'$  為  $P$  之軌跡。

〔證〕 (1) 設  $P$  為  $p$  或  $p'$  上任意一點。作  $PA \perp a, PB \perp b, DE \perp a, DF \perp b, DG \parallel b$ 。  $\angle DGE = \angle AOB = \angle DCF$ 。  $\therefore \triangle DEG \sim \triangle DFC$ 。  $\therefore DE : DF = DG : DC = OC : DC = m : n$ 。又因  $PA : DE = OP : OD = PB : DF$ ，  $\therefore PA : PB = DE : DF = m : n$ 。故  $p$  或  $p'$  上任何點適合於條件。

(2) 設  $P$  爲適合於條件之點, 聯  $OP$  交  $CD$  於  $D'$ , 則如前作  $PA \perp a, PB \perp b, DE' \perp a, DF \perp b, D'G' \parallel b$ . 同前理可得  $PA : PB = DE' : DF = D'G' : DC = OC : CD'$ . 但  $PA : PB = m : n = OC : CD, \therefore OC : CD' = OC : CD. \therefore CD' = CD, \therefore D'$  合於  $D$ . 即  $P$  在過  $OD$  之直線  $p$  上.  $\therefore$  適合於條件之點在  $p$  或  $p'$  上.

$\therefore p, p'$  爲動點  $P$  之軌跡. Q. E. D.

## 習 題 二 十

1. 一直線切  $\odot O$  於  $T$ , 交  $\odot O$  之其他二平行切線於  $A, B$ . 則  $OT$  爲  $AT, BT$  之比例中項.
2. 二圓外切, 則其外公切線之長爲二圓直徑之比例中項.
3. 從圓周上一點至一弦所引垂線上之正方形等於從此弦兩端至過此點切線所引二垂線所包之矩形.
4.  $\triangle ABC$  中  $AB \neq AC$ . 在  $AB$  延線上取  $D$ , 在  $AC$  上取  $E$  令  $BD = CE$ . 聯  $DE$  交  $BC$  於  $F$ . 則  $EF : FD = AB : AC$ .
5. 從平行四邊形  $ABCD$  各角頂至對角線引垂線  $AE, BF, CG, DH$ , 則  $EFGH$  亦爲平行四邊形且與  $ABCD$  相似.
6. 一直線  $DEF$  與  $\triangle ABC$  之邊  $BC, AC, AB$  (或延線) 交於  $D, E, F$ , 且與  $AB, AC$  成等角, 則  $BD : CD = BF : CE$
7.  $\triangle ABC$  底  $BC$  之平行線與二邊  $AB, AC$  各交於  $D, E$ .

$BE, CD$  交於  $F$ . 則  $AF$  延線等分  $BC$ .

8.  $\odot O_1, \odot O_2$  外切於  $T$ . 過  $T$  作三割線  $A_1TA_2, B_1TB_2, C_1TC_2$  各交  $\odot O_1$  於  $A_1, B_1, C_1$ , 交  $\odot O_2$  於  $A_2, B_2, C_2$ . 則  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ .

9. 四角形  $ABCD$  中,  $\angle B = \angle D = R\angle$ . 從  $D$  引  $AC$  之垂線交  $AB$  (或延線) 於  $E$ , 則  $\triangle ADB \sim \triangle ADE$ .

10.  $\triangle ABC$  中,  $AB \cong AC$ . 在  $AB, AC$  上各取  $D, E$  使  $BD = CE$ .  $DE, BC$  延線交於  $F$ . 則  $EF : DF = AB : AC$ .

11.  $I$  為  $\triangle ABC$  之內心.  $AI$  之延線交  $\triangle ABC$  外接圓於  $D$ . 求證  $AI \cdot ID = 2Rr$ . ( $R, r$  各為  $\triangle ABC$  外接圓及內切圓半徑).

12.  $A$  為定點,  $XY$  為定直線.  $Q$  為  $XY$  上任意一點.  $P$  為  $AQ$  上一分點,  $AP : PQ$  之比值一定. 求  $P$  之軌跡.

13.  $A$  為定點,  $\odot O$  為定圓.  $Q$  為  $\odot O$  圓周上任意一點.  $P$  為  $AQ$  上一分點,  $AP : PQ$  之比值一定. 求  $P$  之軌跡.

14.  $AD$  為  $\triangle ABC$  中  $\angle A$  之等分線.  $I$  為內心. 求證  $AI : ID = AB + AC : BC$ .

15.  $M, N, P, Q$  各為四角形  $ABCD$  邊  $AB, BC, CD, DA$  上之點, 而  $AM : MB = AQ : QD, BN : NC = DP : PC$ , 則  $MQ \parallel NP$ .

16.  $I$  為  $\triangle ABC$  之內心. 過  $I$  作  $AI$  之垂線交  $AB$  於  $D$ , 交  $AC$

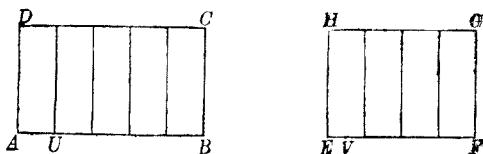
於  $E$ . 則  $ID \cdot IE = BD \cdot CE$ .

17.  $D$  爲正  $\triangle ABC$  外接圓  $\sim BC$  上任意一點.  $AB, CD$  延線交於  $E$ .  $AC, BD$  延線交於  $F$ . 則  $BC$  爲  $BE, CF$  之比例中項.

18. 從圓外一點  $P$  引切線  $PA, PB$  及割線  $PCD$ . 則  $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ .

## 第二十四章 面積之比

§ 371. 定理一一五 二矩形一邊相等, 則其面積之比等於其他邊之比.



〔假設〕  $\square AC$ ,  $\square EG$  中,  $AD = EH$ .

〔求證〕  $\square AC : \square EG = AB : EF$ .

〔證〕 (1) 若  $AB, EF$  為可通約量, 而其公約量為  $AU$ ,  
 $AB = mAU$ ,  $EF = nAU$ . 則  $AB : EF = m : n$ . 將  $AB$  分為  $m$  等  
 分,  $EF$  分為  $n$  等分. 過各分點作垂線與對邊相交, 則  $\square AC$  分成  
 $m$  個相等矩形  $AD \cdot AU$ .  $\square EG$  分成  $n$  個相等矩形  $EH \cdot AU$ .

$$\therefore \square AC : \square EG = mAD \cdot AU : nEH \cdot AU. \quad \because AD = EH,$$

$$\therefore AD \cdot AU = EH \cdot AU. \quad \therefore \square AC : \square EG = m : n.$$

$$\therefore \square AC : \square EG = AB : EF. \quad \text{Q. E. D.}$$

(2) 若  $AB, EF$  為不可通約量. 可將  $EF$  分成  $n$  等分 (令

$n$  爲極大之數). 每份之長爲  $EV$  ( $EV$  爲極小). 以  $EV$  爲單位量  $AB$ , 得  $mEV < AB < (m+1)EV$ .  $\therefore m : n < AB : EF < (m+1) : n$ .  $\therefore AB : EF \doteq m : n$ . 同前可得  $\square EG = nEH \cdot EV$ .

$mAD \cdot EV < \square AC < (m+1)AD \cdot EV$ .  $\therefore \square AC : \square EG \doteq m : n$ .

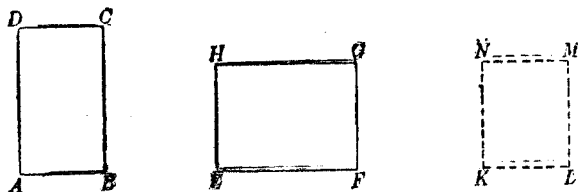
$\therefore \square AC : \square EG = AB : EF$ . Q. E. D.

〔注意〕 從比之定義, 知  $ma : mb = a : b$ . 其中  $m$  表數. 以言語表之即比之前後項各乘以 (或除以) 同數時, 其比值不變. 若  $m$  與  $a, b$  皆表線分, 則此式今亦通, 即本節定理所云也.

§ 372. 系一 等高平行四邊形之比等於其底之比; 等底平行四邊形之比等於其高之比.

§ 373. 系二 等高三角形之比等於其底之比; 等底三角形之比等於其高之比.

§ 374. 定理一一六 二矩形二邊各不相等, 則其面積之比等於其二雙邊之比之複比.



〔假設〕  $\square AC, \square EG$  中, 其各邊  $AB, AD, EF, EH$  各不相等.



〔終決〕  $\square AC : \square EG = (AB : EF) \cdot (AD : EH)$ .

〔證〕 作矩形  $KLMN$  令  $KL = AB, KN = EH$ .

則  $\square AC : \square KM = AD : KN = AD : EH$ .

$\square KM : \square EG = KL : EF = AB : EF$ .

$\therefore (\square AC : \square KM) \cdot (\square KM : \square EG) = (AD : EH) \cdot (AB : EF)$ .

即  $\square AC : \square EG = (AD : EH) \cdot (AB : EF)$ . Q. E. D.

〔注意〕 在代數中  $ac : bd = (a : b)(c : d)$ , 或  $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ ,

式中  $a, b, c, d$  皆表任何數. 若  $a, b, c, d$  皆表線分, 則此式今亦通, 即本節定理所云也.

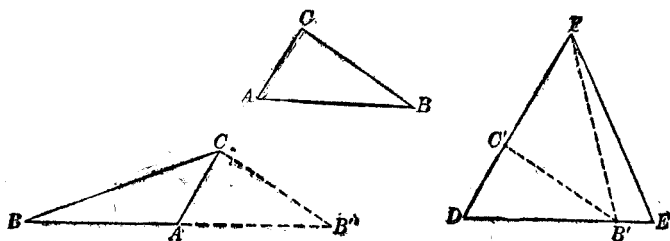
§ 375. 系一 正方形面積之比等於其邊之二乘比[即  $a^2 : b^2 = (a : b)^2$ ].

§ 376. 系二 平行四邊形面積之比等於其底之比與高之比之複比.

§ 377. 系三 三角形面積之比等於其底之比與高之比之複比.

§ 378. 定理一一七 兩個三角形有一雙角相等或互為補角, 則其面積之比等於夾此雙角兩雙邊之比之複比.

〔假設〕  $\triangle ABC, \triangle DEF$  中, (1)  $\angle A = \angle D$ , 或 (2)  $\angle A + \angle D = 2R\angle$ .



〔終決〕  $\triangle ABC : \triangle DEF = (AB : DE) \cdot (AC : DF)$ .

〔證〕 (1) 在  $DE, DF$  上各取  $B', C'$  令  $DB' = AB, DC' = AC$ .  
 聯  $B'C', FB'$ . 則因  $\angle A = \angle D$ ,  $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DB'C'$ .

又因  $\triangle DB'C' : \triangle DB'F = DC' : DF$ ,

$\triangle DB'F : \triangle DEF = DB' : DE$ .

$\therefore (\triangle DB'C' : \triangle DB'F) \cdot (\triangle DB'F : \triangle DEF)$

$= (DC' : DF)(DB' : DE)$ .

$\therefore \triangle DB'C' : \triangle DEF = (DC' : DF) \cdot (DB' : DE)$ .

$\therefore \triangle ABC : \triangle DEF = (AC : DF) \cdot (AB : DE)$ . Q. E. D.

(2) 延長  $BA$  至  $B'$  令  $BA = AB'$ . 則  $\triangle ABC = \triangle AB'C$ .

$\therefore \triangle AB'C : \triangle DEF = (AB' : DE) \cdot (AC : DF)$ .

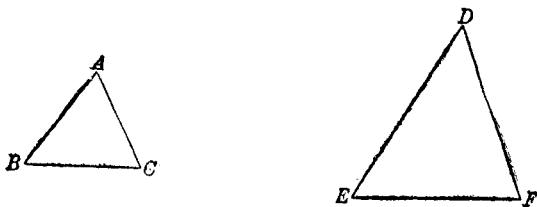
$\therefore \triangle ABC : \triangle DEF = (AB : DE) \cdot (AC : DF)$ . Q. E. D.

§ 379. 系一 兩個三角形有一雙角相等, 或互為補角, 則其面積之比等於夾此雙角兩邊所包矩形之比.

§ 380. 系二 兩個互等角平行四邊形之比等於其鄰邊所包

矩形之比.

§ 381. 定理一一八 相似三角形面積之比等於其一雙對應邊之二乘比.



〔假設〕  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

〔終決〕  $\triangle ABC : \triangle DEF = (AB : DE)^2$ .

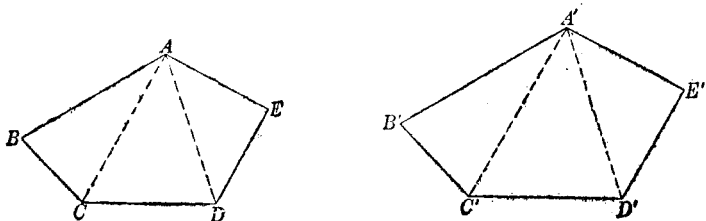
〔證〕  $\because \triangle ABC \sim \triangle DEF, \therefore \angle A = \angle D,$

$AB : DE = AC : DF. \therefore \triangle ABC : \triangle DEF$

$= (AB : DE) \cdot (AC : DF) = (AB : DE)^2. \quad Q. E. D.$

§ 382. 系 相似三角形面積之比,等於其一雙對應邊上正方形之比.

§ 383. 定理一一九 相似多角形面積之比等於其一雙對應



邊之二乘比。

〔假設〕  $ABC \dots E \rightsquigarrow A'B'C' \dots E'$ .

〔終決〕  $ABC \dots E : A'B'C' \dots E' = (AB : A'B')^2$ .

〔證〕 從一雙對應角頂  $A, A'$  作對角線  $AC, A'C'$ ;  $AD, A'D'$ ;  $\dots$  成各雙相似三角形  $\triangle ABC, \triangle A'B'C', \triangle ACD, \triangle A'C'D', \dots$ .

$$\therefore \triangle ABC : \triangle A'B'C' = (AB : A'B')^2,$$

$$\triangle ACD : \triangle A'C'D' = (AC : A'C')^2 = (AB : A'B')^2,$$

$$\triangle ADE : \triangle A'D'E' = (AD : A'D')^2 = (AB : A'B')^2.$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC + \triangle ACD + \dots : \triangle A'B'C' + \triangle A'C'D' + \dots \\ = (AB : A'B')^2. \end{aligned}$$

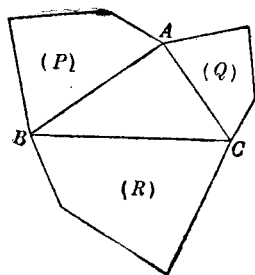
$$\therefore ABC \dots E : A'B'C' \dots E' = (AB : A'B')^2. \quad Q. E. D.$$

§ 384. 系 相似多角形面積之比等於其一雙對應邊上正方形之比。

§ 385. 定理一二〇 以直角三角形三邊為對應邊各作相似多角形，則斜邊上多角形之面積等於他二邊上多角形之和。

〔假設〕  $\triangle ABC$  中， $\angle A = R\angle$ 。以  $AB, AC, BC$  為對應邊，在其上作相似多角形  $(P), (Q), (R)$ 。

〔終決〕  $(P) + (Q) = (R)$ 。



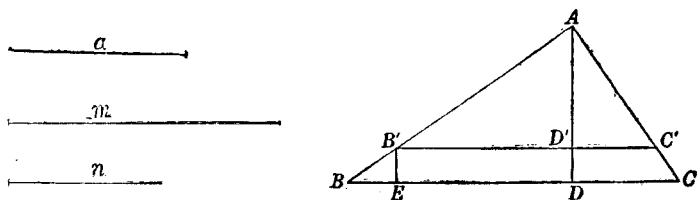
〔證〕  $\because (P) \sim (Q), \therefore (P) : (Q) = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2.$

$\therefore \frac{(P)}{\overline{AB}^2} = \frac{(Q)}{\overline{AC}^2},$  同理可得  $\frac{(P)}{\overline{AB}^2} = \frac{(R)}{\overline{BC}^2}.$

$\therefore \frac{(P)}{\overline{AB}^2} = \frac{(Q)}{\overline{AC}^2} = \frac{(R)}{\overline{BC}^2} = \frac{(P) + (Q)}{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}.$

$\because \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2. \therefore (P) + (Q) = (R). \quad Q. E. D.$

§ 386. 作圖題一八 求作一線分令與一所設線分之比等於所設二面積之比。



〔已設〕 三定長  $a, m, n.$

〔求作〕 一線分  $x,$  令  $a : x = m^2 : n^2.$

〔解法〕 作直角三角形  $ABC,$  令  $\angle A = R \angle, AB = m,$   
 $AC = n.$  作  $AD \perp BC.$  作  $BC$  之平行線交  $AB, AD, AC$  於  
 $B', D', C'$  令  $B'D' = a.$  則  $D'C'$  即所求線分  $x. \quad Q. E. F.$

〔證〕  $\overline{AB}^2 = BD \cdot BC, \overline{AC}^2 = DC \cdot BC,$

$\therefore \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BD \cdot BC : DC \cdot BC = BD : DC.$

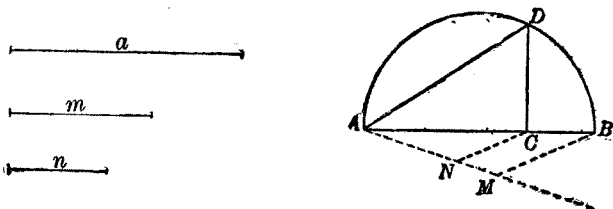
又  $\because B'C' \parallel BC, \therefore B'D' : D'C' = BD : DC,$

$\therefore B'D' : D'C' = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2. \therefore a : D'C' = m^2 : n^2.$

∴  $D'C'$  即所求線分  $x$ .

Q. E. D.

§ 387. 作圖題一九 求作一正方形令與一所設正方形之比  
等於所設二線分之比.



〔已設〕 三定長  $a, m, n$ .

〔求作〕 一線分  $x$  令  $a^2 : x^2 = m : n$ .

〔解法〕 作  $AB = a$  在  $AB$  上取  $C$  令  $AB : AC = m : n$ .

以  $AB$  為直徑作半圓. 過  $C$  作  $AB$  之垂線交半圓周於  $D$ . 聯  $AD$   
即所求線分  $x$ .

Q. E. F.

〔證〕  $\overline{AD}^2 = AB \cdot AC$ ,

∴  $\overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 : AB \cdot AC = AB : AC = m : n$ .

∴  $AD$  即所求線分  $x$ .

Q. E. D.

## 習 題 二 十 一

1.  $AD, BE$  為  $\triangle ABC$  之二中線, 其交點為  $G$ .

求  $\triangle AGB : \triangle DGE$  之比值.

2.  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = R\angle$ ,  $AD \perp BC$ . 求證

$$\triangle ABD : \triangle ABC = \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2.$$

3.  $D, E, F$  爲  $\triangle ABC$  邊  $BC, AC, AB$  上各點, 而  $BD : DC = CE : EA = AF : FB = 1 : 2$ . 求  $\triangle DEF : \triangle ABC$  之比值.

4.  $\triangle ABC$  中,  $AC = 2BC$ ,  $\angle C$  之內外等分線各交  $AB$  及其延線於  $D$  及  $E$ . 則  $\triangle BCD : \triangle ACD : \triangle ACB : \triangle DCE = 1 : 2 : 3 : 4$ .

5.  $AD$  爲直角  $\triangle ABC$  斜邊  $BC$  上之高,  $\triangle ABE, \triangle ACF$  爲正三角形. 則  $\triangle ABE : \triangle ACF = BD : DC$ .

6.  $\triangle ABC$  中,  $\angle A$  之等分線交  $BC$  於  $D$ ,  $\angle ADB, \angle ADC$  之等分線各交  $AB, AC$  於  $E, F$ . 求證  $\triangle BEF : \triangle CEF = AB : AC$ .

7.  $E$  爲圓內接四邊形  $ABCD$  對角線之交點. 求證  $AB \cdot AD : BC \cdot CD = AE : CE$ .

8.  $P$  爲  $\triangle ABC$  底  $BC$  上任意一點, 從  $P$  引  $AC, AB$  之平行線各交  $AB, AC$  於  $X, Y$ . 則  $\triangle AXY$  爲  $\triangle BPX$  及  $\triangle CPY$  之比例中項.

9.  $\triangle ABC$  中,  $\angle C$  爲直角,  $CD \perp AB$ ,  $\triangle ACD, \triangle BCD$  之內切圓半徑各爲  $r_1, r_2$ . 則  $r_1^2 + r_2^2 = (s - c)^2$ .

10.  $P$  爲  $\triangle ABC$  邊  $BC$  上任意一點, 從  $P$  引  $AC, AB$  之平行線各交  $AB, AC$  於  $Q, R$ . 則  $\triangle AQR$  爲  $\triangle BPQ, \triangle CPR$  之比例中項.

## 第二十五章 量之度數

§ 388. 單位量 一量取之爲標準以度諸同類量者曰單位量 (unit).

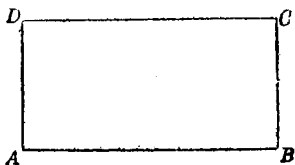
在實用方面，長之單位有里，丈，尺，……等，面積之單位有畝，分，平方尺，……等。在幾何學中，線分之單位不拘定長。唯在一題內，各線分之單位須相同，各面分之單位亦須相同且須與線分之單位相符。如線分之單位任擇一定長  $OU$ ，則面積之單位爲  $OU$  上之正方形，即  $\overline{OU}^2$ 。

§ 389. 度數 一量所含單位量之倍數曰此量之度數 (number of measure).

兩線分  $AB, CD$ ，若  $AB$  爲  $OU$  之  $m$  倍， $CD$  爲  $OU$  之  $n$  倍，則  $AB, CD$  之度數各爲  $m, n$ 。兩面分  $(P), (Q)$ ，若  $(P)$  爲  $\overline{OU}^2$  之  $p$  倍， $(Q)$  爲  $\overline{OU}^2$  之  $q$  倍，則  $(P), (Q)$  之度數各爲  $p, q$  ( $OU$  爲任擇之單位量， $m, n, p, q$  爲不名數，或整數，或分數，或爲無理數)。

§ 390. 定理一二一 矩形面積之度數等於兩邊度數之相乘積。





〔假設〕  $\square ABCD$ ,  $AB$  之度數為  $m$ ,  $CD$  之度數為  $n$ .

〔終決〕  $\square ABCD$  之度數為  $mn$ .

〔證〕 設  $AB, CD$  所取之單位為  $OU$ . 則  $AB = mOU$ ,

$CD = nOU$ . 以  $OU$  為一邊作正方形  $OUVW$ .

則  $\square ABCD : \square OUVW = (AB : OU) \cdot (AD : OW)$

$$= (mOU : OU) \cdot (nOU : OU)$$

$$= m \cdot n.$$

$$\therefore \square ABCD = mn \cdot \square OUVW.$$

但  $\square OUVW = \overline{OU}^2$  為單位.

$$\therefore \square ABCD \text{ 之度數為 } mn. \quad \text{Q. E. D.}$$

〔注意〕 量與量不能相乘,故兩線分不能相乘.本定理若簡稱謂“矩形面積等於其兩邊之相乘積”,於意義便不通.唯數與數可相乘,故如本定理所云.

§ 391. 系一 正方形面積之度數等於其一邊度數之平方;

正方形一邊之度數等於其面積度數之平方根.

§ 392. 系二 平行四邊形面積之度數等於其底及高度數

之相乘積.

§ 393. 系三 三角形面積之度數等於其底及高度數相乘積之半.

§ 394. 系四 梯形面積之度數等於其兩底半和及高度數之相乘積.

§ 395. 系五 菱形面積之度數等於其兩對角線度數相乘積之半.

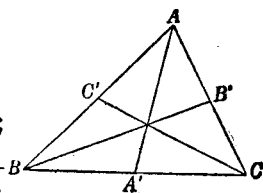
§ 396. 定理一二二 若三角形三邊之度數各為  $a, b, c$ , 則三個中線之度數各為  $\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$ .

〔假設〕  $\triangle ABC$  中,  $AA', BB', CC'$  為中線,  $BC, AC, AB$  之度數各為  $a, b, c$ .

〔終決〕  $AA', BB', CC'$  之度數各為

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2},$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$



〔證〕  $AA'$  為  $BC$  上之中線,  $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AA'}^2 + \overline{BA'}^2)$ .

$\therefore \overline{AA'}^2 = \frac{1}{2}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) - \overline{BA'}^2$ .  $\therefore \overline{AA'}^2$  之度數為  $\frac{1}{2}(c^2 + b^2)$

$$-\left(\frac{a}{z}\right)^2 = \frac{1}{4} [2(b^2 + c^2) - a^2]. \therefore AA' \text{ 之度數爲 } \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

$$\text{同理 } BB', CC' \text{ 之度數各爲 } \frac{1}{2} \sqrt{2(c^2 + a^2) - b^2}, \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Q. E. D

〔註〕 吾人常以  $m_a, m_b, m_c$  各表  $AA', BB', CC'$  之度數，故得已知三角形三

$$\text{邊求中線之公式： } m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(c^2 + a^2) - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

§ 397. 定理一二三 若三角形三邊之度數各爲  $a, b, c$ ，則

此三角形面積之度數爲

$$\frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

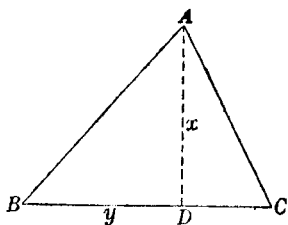
〔假設〕  $\triangle ABC$  中， $BC, AC, AB$

之度數各爲  $a, b, c$ .

〔終決〕  $\triangle ABC$  之度數爲

$$\frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

〔證〕 在一邊  $BC$  上作高  $AD$ . 設



$AD$  之度數爲  $x$ ,  $BD$  之度數爲  $y$ . 則因

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \cdot BD, \therefore b^2 = c^2 + a^2 - 2ay.$$

$$\therefore y = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

$$\text{又因 } \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2, \therefore c^2 = x^2 + y^2,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore x^2 &= c^2 - y^2 = (c+y)(c-y) \\
 &= \left(c + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right) \left(c - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right) \\
 &= \frac{2ac + c^2 + a^2 - b^2}{2a} \times \frac{2ac - c^2 - a^2 + b^2}{2a} \\
 &= \frac{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]}{4a^2} \\
 &= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2a} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} AD \cdot BC.$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 之度數爲 } \frac{1}{2} x \cdot a$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}. \quad Q. E. D.$$

〔註〕若三角形之半周度數以  $s$  表之，即  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ，則  $a+b+c = 2s$ ，

$$b+c-a = a+b+c-2a = 2s-2a = 2(s-a),$$

$$c+a-b = a+b+c-2b = 2s-2b = 2(s-b),$$

$$a+b-c = a+b+c-2c = 2s-2c = 2(s-c).$$

則  $\triangle ABC$  之度數爲  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .

吾人常以  $S$  表  $\triangle ABC$  之度數，故得已知三邊之長求面積之公式：

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

§ 398. 系  $h_a, h_b, h_c$  各表  $\triangle ABC$  中,  $BC, AC, AB$  上之高之度數, 則

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2}{b} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

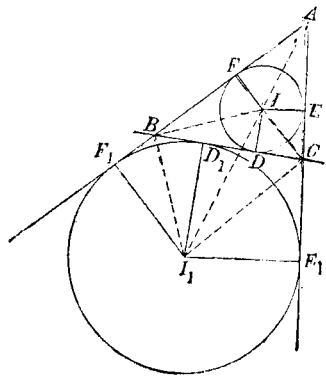
§ 399. 定理一二四 三角形三邊之度數各為  $a, b, c$  其半

周之度數為  $s$ . 則其內接圓半徑之度數為  $\frac{1}{s} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ,

其三個旁接圓半徑之度數各為  $\frac{1}{s-a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ,

$\frac{1}{s-b} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ,  $\frac{1}{s-c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .

[假設]  $\triangle ABC$  中,  $I$  為  
 內心,  $ID, IE, IF$  為  $I$  與三邊之  
 距離, 其度數為  $r$ .  $I_1$  為  $\angle A$  內  
 之旁心,  $I_1 D_1, I_1 E_1, I_1 F_1$  為  $I_1$   
 與三邊之距離, 其度數為  $r_1$ . 又  
 $\angle B, \angle C$  內之旁接圓半徑之度  
 數各為  $r_2, r_3$ .



$$\text{(終決)} \quad r = \frac{1}{s} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$r_1 = \frac{1}{s-a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$r_2 = \frac{1}{s-b} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$r_3 = \frac{1}{s-c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\text{【證】} \quad \triangle ABC = \triangle IBC + \triangle IAC + \triangle IAB$$

$$= \frac{1}{2} BC \cdot ID + \frac{1}{2} AC \cdot IE + \frac{1}{2} AB \cdot IF.$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr \\ &= \frac{1}{2} (a+b+c)r = sr. \end{aligned}$$

$$\therefore r = \frac{S}{s} = \frac{1}{s} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\text{又} \quad \triangle ABC = \triangle I_1AC + \triangle I_1AB - \triangle I_1BC$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot I_1E_1 + \frac{1}{2} AB \cdot I_1F_1 - \frac{1}{2} BC \cdot I_1D_1.$$

$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{1}{2} br_1 + \frac{1}{2} cr_1 - \frac{1}{2} ar_1 \\ &= \frac{1}{2} (b+c-a)r_1 = (s-a)r_1, \end{aligned}$$

$$\therefore r_1 = \frac{S}{s-a} = \frac{1}{s-a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\text{同理 } r_2 = \frac{S}{s-b} = \frac{1}{s-b} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$r_3 = \frac{S}{s-c} = \frac{1}{s-c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad Q. E. D.$$

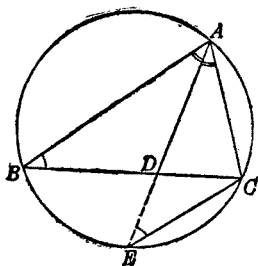
§ 400. 定理一二五 三角形三邊之度數各為  $a, b, c$ , 其半周之度數為  $s$ . 則其等分角線之度數各為  $\frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$ ,  $\frac{2\sqrt{acs(s-b)}}{a+c}$ ,  $\frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}$ .

〔假設〕  $AD$  為  $\triangle ABC$  中  $\angle A$  之等分線, 其度數為  $t_a$ , 又  $\angle B, \angle C$  之等分線度數各為  $t_b, t_c$ .

$$\text{〔終決〕 } t_a = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c},$$

$$t_b = \frac{2\sqrt{acs(s-b)}}{a+c},$$

$$t_c = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}.$$



〔證〕 延長  $AD$  交  $\triangle ABC$  之外接圓周於  $E$ . 聯  $EC$ . 則因  $\angle BAD = \angle EAC$ ,  $\angle ABD = \angle AEC$ ,  $\therefore \triangle ABD \sim \triangle AEC$ ,  $\therefore AB : AE = AD : AC$ .  $\therefore AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD(AD + DE)$   
 $= \overline{AD}^2 + AD \cdot DE = \overline{AD}^2 + BD \cdot DC.$

設  $BD, DC$  之度數各為  $x, y$ , 則  $bc = t_a^2 + xy$ .

$$\text{又 } \because BD : DC = AB : AC, \therefore \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD+DC}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC}.$$

$$\therefore BD = \frac{AB \cdot BC}{AB+AC}, \quad DC = \frac{AC \cdot BC}{AB+AC} \quad \therefore x = \frac{ac}{b+c} \quad y = \frac{ab}{b+c}.$$

$$\therefore bc = t_a^2 + xy = t_a^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)\left(\frac{ab}{b+c}\right).$$

$$\therefore t_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc \left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right].$$

$$\begin{aligned} \therefore t_a &= \sqrt{bc \left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right]} \\ &= \sqrt{bc \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}} = \frac{1}{b+c} \sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)} \\ &= \frac{1}{b+c} \sqrt{bc \cdot 2s \cdot 2(s-a)}. \end{aligned}$$

$$\therefore t_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)}.$$

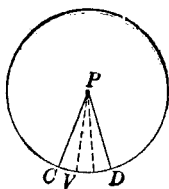
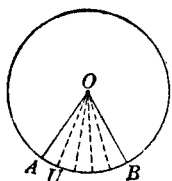
$$\text{同理 } t_b = \frac{2}{c+a} \sqrt{acs(s-b)}, \quad t_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{abs(s-c)}. \quad Q. E. D.$$

§ 401. 計算題 從一圖形中已知量之度數，求出其他未知量之度數曰計算題。

以上諸定理若終決部分不先示知，而待求時即為計算題。

§ 402. 定理一二六 在同圓或等圓中，二個中心角之比等於其所對弧之比。





〔假設〕  $\odot O = \odot P$ .

〔終決〕  $\angle AOB : \angle CPD = \frown AB : \frown CD$ .

〔證〕 (1) 若  $\frown AB, \frown CD$  爲可通約量, 而其公約量爲  $\frown AU$ ,  
 $\frown AB = m \frown AU$ ,  $\frown CD = n \frown AU$ . 則  $\frown AB : \frown CD = m : n$ .

將  $\frown AB$  分爲  $m$  等分,  $\frown CD$  分爲  $n$  等分. 過各分點作半徑將  
 $\angle AOB$  分成  $m$  等分,  $\angle CPD$  分成  $n$  等分. 每份皆等於  $\angle AOU$ .

$$\therefore \angle AOB = m \angle AOU, \angle CPD = n \angle AOU.$$

$$\therefore \angle AOB : \angle CPD = m : n.$$

$$\therefore \angle AOB : \angle CPD = \frown AB : \frown CD$$

(2) 若  $\frown AB, \frown CD$  爲不可通約量, 則可將  $\frown CD$  分成  $n$   
 等分. 令  $n$  爲極大之數, 每份之長爲  $\frown CV$  ( $\frown CV$  爲極小)

以  $\frown CV$  爲單位量  $\frown AB$ , 得  $m \frown CV < \frown AB < (m+1) \frown CV$ .

$$\therefore m : n < \frown AB : \frown CD < (m+1) : n. \therefore \frown AB : \frown CD \doteq m : n.$$

過各分點作半徑, 可得  $\angle CPD = n \angle CPV$ ,  $m \angle CPV < \frown AB$   
 $< (m+1) \angle CPV. \therefore m : n < \angle AOB : \angle CPD < (m+1) : n,$

$$\therefore \angle AOB : \angle CPD \doteq m : n.$$

$$\therefore \angle AOB : \angle CPD = \frown AB : \frown CD. \quad Q. E. D.$$

〔註〕 在實用分面常以直角之  $\frac{1}{90}$  為角之單位，以象限弧之  $\frac{1}{90}$  為弧之單位。在幾何學中角與弧之單位亦可不拘大小，唯在一題內所取單位須相同，且單位弧所對中心角須為單位角，例如在本節定理中若以  $\angle AOU$  為單位角，則  $\frown AU$  即為單位弧， $\angle AOB = m \angle AOU$ ， $\frown AB = m \frown AU$ ，則  $\angle AOB$  之度數為  $m$ ， $\frown AB$  之度數亦為  $m$ 。

§ 403. 系一 圓中心角與所對弧之度數相等。

§ 404. 系二 圓周角之度數等於其所對弧之度數之半。

§ 405. 系三 切線及過切點弦所夾角之度數等於角內弧之度數之半。

§ 406. 系四 圓內兩弦交角之度數等於此角及其對頂角所對兩弧度數之半和。

§ 407. 系五 兩割線(或切線)圓外交角之度數等於此角內兩弧度數之半差。

## 習 題 二 十 二

1.  $\triangle ABC$  中， $BC$  之度數為 10， $BC$  之平行線  $DE$  等分  $\triangle ABC$  之面積。求  $DE$  之度數。

2. 梯形二底之度數為 4, 7，其高之度數為 5，一線分平行於底而等分其面積。求其度數。

3. 梯形  $ABCD$  中， $AD, BC$  為底， $AC, BD$  交於  $O$ ；已知

$AD = 36, BC = 57, OD = 12$ , 求  $BD$ .

4. 五角形  $ABCDE$  中,  $AB, BC, CD, DE, EA$  之度數各爲  $a, b, c, d, e$ , 又對角線  $AC, AD$  之度數各爲  $f, g$ . 求其面積.

5.  $CF$  爲六角形  $ABCDEF$  之對角線, 從  $A, B, D, E$  至  $CF$  作垂線  $AA', BB', DD', EE'$ ; 已知其度數各爲  $a, b, d, e$ , 又知  $CF, FA', FE', CB', CD'$  之度數各爲  $l, m, n, p, q$ . 求此六角形之面積.

6. 三角形之三邊各等於他一三角形之三中線, 求此二三角形面積之比.

〔註〕 以下諸題中,  $h_a, h_b, h_c$  表  $\triangle ABC$  三個高之度數,  $r, r_1, r_2, r_3$  表  $\triangle ABC$  之內接圓半徑及三個旁接圓半徑之度數,  $S$  表面積.

7. 證  $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ .

8. 證  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ .

9. 證  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$ .

10. 證  $S^2 = r r_1 r_2 r_3$ .



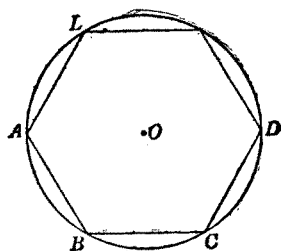
## 第五編 正多角形及圓

### 第二十六章 圓內接及外切正多角形

§ 408. 定理一二七 圓周上諸點分圓周為諸等弧，則順次聯此諸分點所成之多角形為圓內接正多角形。

〔假設〕  $\odot O$  圓周上諸點  $A, B, C, \dots, L$  而  $\frown AB = \frown BC = \dots = \frown LA$ .

〔終決〕  $ABC \dots L$  為圓內接正多角形。



〔證〕  $\because \frown AB = \frown BC = \dots = \frown LA,$

$$\therefore AB = BC = \dots = LA.$$

又  $\frown AB + \frown BC = \frown BC + \frown CD = \dots = \frown LA + \frown AB.$

即  $\frown AC = \frown BD = \dots = \frown LB,$

$\therefore$  優  $\frown AC =$  優  $\frown BD = \dots =$  優  $\frown LB.$

$\therefore \angle B = \angle C = \dots = \angle A.$

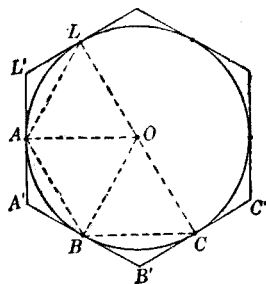
$\therefore ABC \dots L$  為圓內接正多角形。

Q. E. D.

§ 409. 定理一二八 圓周上諸點分圓周為諸等弧，則過此

諸分點之切所成之多角形爲圓外切正多角形.

〔假設〕  $\odot O$  圓周上諸點  $A, B, C, \dots, L$ , 而  $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \dots = \widehat{LA}$ .  
過  $A, B, C, \dots, L$  所作切線交於  $A', B', C', \dots, L'$  成多角形  $A'B'C' \dots L'$ .



〔終決〕  $A'B'C' \dots L'$  爲圓外切正多角形.

〔證〕 聯  $\angle B, BC, LA$ . 則  $\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC} = \dots = \widehat{LA}$

$$\therefore AB = BC = \dots = LA.$$

$\therefore \angle A'AB, \angle A'BA$  之度數等於  $\widehat{AB}$  度數之半,  
 $\angle B'BC, \angle B'CB$  之度數等於  $\widehat{BC}$  度數之半,

.....

$\angle L'LA, \angle L'AL$  之度數等於  $\widehat{LA}$  度數之半,

$$\therefore \angle A'AB = \angle A'BA = \angle B'BC = \angle B'CB = \dots \\ = \angle L'LA = \angle L'AL.$$

$$\therefore \triangle A'AB \cong \triangle B'BC \cong \dots \cong \triangle L'LA.$$

$$\therefore \angle A' = \angle B' = \dots = \angle L'.$$

$$\text{又 } A'A = A'B = B'B = B'C = \dots = L'L = L'A.$$

$$\therefore A'B + B'B = B'C + C'C = \dots = L'A + A'A,$$

$$\text{即 } A'B' = B'C' = \dots = L'A'.$$

$\therefore A'B'C' \dots L'$  爲圓外切正多角形.

Q. E. D

§ 410. 定理一二九 正多角形可內接於圓及外切於圓.

〔假設〕  $ABC \dots L$  爲正多角形.

〔終決〕  $ABC \dots L$  可內接於一圓及

外切於一圓.

〔證〕 作  $\angle A, \angle B$  之等分線交於

$O$ .  $\therefore \angle OAB = \frac{1}{2} \angle A - \frac{1}{2} \angle B = \angle OBA$ ,

$\therefore OA = OB$ . 聯  $OC$ , 則因  $\angle OBA = \angle OBC, BA = BC, OB$  爲公邊,

$\therefore \triangle OBA \cong \triangle OBC, \therefore OA = OC, \angle OCB = \angle OAB = \frac{1}{2} \angle A$

$= \frac{1}{2} \angle C = \angle OCD$ , 而  $OC$  亦爲  $\angle C$  之等分線. 聯  $OD$ , 同樣可證

$OD = OB, OD$  亦爲  $\angle D$  之等分線. 依此類推可得

$$OA = OB = OC = \dots = OL.$$

故以  $O$  爲中心,  $OA$  爲半徑所作之圓必過  $B, C, \dots, L$ .

$\therefore ABC \dots L$  內接於圓.

Q. E. D.

從  $O$  作  $AB, BC, CD, \dots, LA$  各邊之垂線  $OM, ON, OP, \dots, OQ$ ,

則因弦  $AB = BC = CD = \dots = LA$ ,

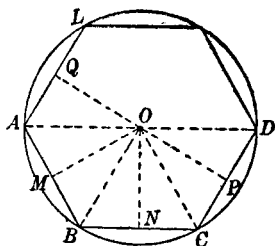
$\therefore OM = ON = OP = \dots = OQ$ . 故以  $O$  爲中心,  $OM$  爲半徑所作之

圓必過  $M, N, P, \dots, Q$ , 而  $AB, BC, CD, LA$  皆爲其切線.

$\therefore ABC \dots L$  外切於過  $M, N, P, Q$  諸點之圓.

Q. E. D.

§ 411. 系一 正多角形之外接圓與內切圓爲同心圓.



§ 412. 系二 正多角形爲軸對稱形，其各角之等分線及各邊之垂直等分線皆可爲對稱軸。

§ 413. 系三 雙數邊數之正多角形爲中心對稱形，其外接圓，內切圓所共圓心爲對稱中心。

§ 414. 定義八一 正多角形之中心半徑邊心距及中心角  
正多角形之外接圓及內切圓所共之中心曰此正多角形之中心 (centre). 其外接圓半徑曰此正多角形之半徑 (radius). 其內切圓半徑曰此正多角形之邊心距 (apothem). 相鄰兩半徑所夾之角曰此正多角形之中心角 (central angle).

§ 415. 定理一三〇 同邊數正多角形爲相似形，其半徑之比及邊心距之比皆等於其相似比。

〔略證〕 設兩形之邊數爲  $n$ ，則兩形之各角均爲  $\frac{2(n-2)}{n}R\angle$ ，故相等，又各邊之比均相等，故兩形相似。

§ 416. 定理一三一 正多角形面積之度數等於其周及邊心距之度數相乘積之半。

〔略證〕 設正多角形爲  $ABC\dots L$ ，其中心爲  $O$ 。則  $ABC\dots L = \triangle OAB + \triangle OBC + \dots + \triangle OLA$ 。

$\therefore \triangle OAB, \triangle OBC, \dots, \triangle OLA$  之度數各爲  $AB, BC, \dots, LA$  之度數與邊心距之度數相乘積之半，故  $ABC\dots L$  之度數等於  $AB + BC + \dots + LA$  之度數與邊心距之度數相乘積之半，即其周及邊心距



之度數相乘積之半。

§ 417. 定理一三二 正六角形之各邊等於其半徑。

[學者自證之]

§ 418. 定理一三三 正方形之各邊等於其邊心距之二倍。

[學者自證之]

[註] 以上二定理可易言之曰“圓內接正六角形之各邊等於半徑，外切正四角形之各邊等於半徑之二倍”。若以  $r$  表圓半徑之度數， $s_n$  表圓內接正  $n$  角形每邊之度數， $S_n$  表圓外接正  $n$  角形每邊之度數，則定理一三二可寫作  $s_6 = r$ ，定理一三三可寫作  $S_4 = 2r$ 。

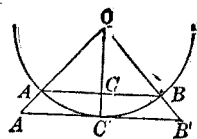
§ 419. 定理一三四 設圓半徑之度數為  $r$ ，其內接正  $n$  角形每邊之度數為  $s_n$ ，外切正  $n$  角形每邊之度數為  $S_n$  (以下諸定理中之表法同)

則

$$S_n = \frac{rs_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}, \quad (1)$$

$$s_n = \frac{rS_n}{\sqrt{r^2 + \frac{S_n^2}{4}}}. \quad (2)$$

【證】 設弦  $AB$  為  $\odot O$  內接正  $n$  角形之一邊。過  $\widehat{AB}$  之中點  $C'$  作  $\odot O$  之切線  $A'B'$  交  $OA, OB$  之延線於  $A', B'$ ，則  $A'B'$  即為  $\odot O$



外切正  $n$  角形之一邊 (證略)。

$$\because AB \parallel A'B', \therefore OAB \sim OA'B'.$$

$$\therefore AB : A'B' = OA : OA' = OC : O'C'.$$

$$\because \overline{OA'}^2 = \overline{OC'}^2 + \overline{A'C'}^2 = \overline{OC'}^2 + \left(\frac{A'B'}{2}\right)^2, \text{其度數爲 } r^2 + \left(\frac{S_n}{2}\right)^2;$$

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2, \text{其度數爲 } r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2.$$

$$\therefore OA' \text{ 之度數爲 } \sqrt{r^2 + \frac{S_n^2}{4}}, OC \text{ 之度數爲 } \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}.$$

$$\therefore s_n : S_n = r : \sqrt{r^2 + \frac{S_n^2}{4}} = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}} : r.$$

$$\therefore S_n = \frac{rs_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}, \dots (1) \quad s_n = \frac{rS_n}{\sqrt{r^2 + \frac{S_n^2}{4}}} \dots (2) \quad Q. E. D$$

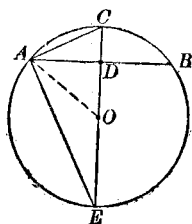
(注意) 本定理爲圓內接及外切正多角形每邊度數換算公式

$$\S 420. \text{ 系一 } S_6 = \frac{rs_6}{\sqrt{r^2 - \frac{s_6^2}{4}}} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}} = \frac{r^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}r} = \frac{2}{\sqrt{3}}r.$$

$$\S 421. \text{ 系二 } s_4 = \frac{rS_4}{\sqrt{r^2 + \frac{S_4^2}{4}}} = \frac{2r^2}{\sqrt{r^2 + \frac{4r^2}{4}}} = \frac{2r^2}{\sqrt{2}r} = \sqrt{2}r.$$

$$\S 422. \text{ 定理一三五 } s_{2n} = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - s_n})}.$$

〔證〕 設弦  $AB$  爲  $\odot O$  內接正  $n$  角形之一邊。引直徑  $COE \perp AB$ ，則  $AC$  爲  $\odot O$  內接正  $2n$  角形之一邊。



$\therefore \overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AD}^2$ ,  $\therefore OD$  之度數爲

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$$

又  $CD = OC - OD$ ,  $\therefore CD$  之度數爲  $r - \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$

又  $\overline{AC}^2 = \overline{CE} \cdot \overline{CD}$ , 故  $AC$  之度數爲

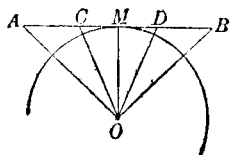
$$s_{2n} = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - s_n^2})} \quad Q. E. D.$$

§ 423. 系 若以半徑爲單位，則  $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ .

(注意) 本定理爲已知  $s_n$  求  $s_{2n}$  之公式。

§ 424. 定理一三六  $S_{2n} = \frac{2r}{S_n} \{ \sqrt{4r^2 + S_n^2} - 2r \}$ .

〔證〕 設切線  $AB$  爲  $\odot O$  外切正  $n$  角形之一邊， $M$  爲切點，則亦爲  $AB$  之中點。聯  $OA, OB, OM$ 。作  $\angle AOM, \angle BOM$  之等分



線  $OC, OD$  交  $AB$  於  $C, D$ ，則  $M$  亦爲  $CD$  之中點。又因  $\angle COD = \frac{1}{2} \angle AOB$ ，故  $CD$  即爲  $\odot O$  外切正  $2n$  角形之一邊。

$\therefore CO$  等分  $\angle AOM$ ,  $\therefore AC : CM = OA : OM$ ,

$\therefore AC + CM : CM = OA + OM : OM$ .

即  $AM : CM = OA + OM : OM$ .

$\therefore \overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{AM}^2$ ,  $\therefore OA$  之度數為  $\sqrt{r^2 + \frac{S_n^2}{4}}$ , 而

$AM = \frac{1}{2} AB$ , 其度數為  $\frac{S_n}{2}$ ,  $CM = \frac{1}{2} CD$ , 其度數為  $\frac{S_{2n}}{2}$ .

$\therefore \frac{S_n}{2} : \frac{S_{2n}}{2} = S_n : S_{2n} = \sqrt{r^2 + \frac{S_n^2}{4}} + r : r$

$\therefore S_{2n} = \frac{r S_n}{\sqrt{r^2 + \frac{S_n^2}{4}} + r} = \frac{r S_n \left( \sqrt{r^2 + \frac{S_n^2}{4}} - r \right)}{r^2 + \frac{S_n^2}{4} - r^2} = \frac{4r S_n \sqrt{r^2 + \frac{S_n^2}{4}}}{S_n^2}$

$\therefore S_{2n} = \frac{2r}{S_n} \{ \sqrt{4r^2 + S_n^2} - 2r \}$ . Q. E. D.

§ 425. 系 若以半徑為單位, 則

$$S_{2n} = \frac{2}{S_n} \{ \sqrt{4 + S_n^2} - 2 \}.$$

(注意) 本定理為已知  $S_n$  求  $S_{2n}$  之公式.

§ 426. 作圖題二〇 分所設圓周為四等分.

〔解法〕 過中心  $O$ , 作垂直二直徑  $AB$ ,

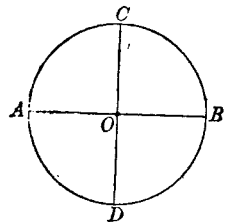
$CD$ . 則  $A, C, B, D$  即所求分點. Q. E. F.

〔證〕  $\because \angle AOC = \angle COB = \angle BOD$   
 $= \angle DOA$ .

$\therefore \frown AC = \frown CB = \frown BD = \frown DA$ .

$\therefore A, C, B, D$  為所求分點.

Q. E. D.



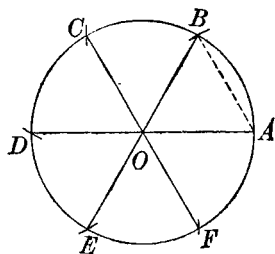
§ 427. 系一 分所設圓周爲八等分,十六等分, ...,  $2^n$  等分.

§ 428. 系二 作所設圓之內接正方形, 正八角形, 正十六角形, ..., 正  $2^n$  角形.

§ 429. 系三 作所設圓之外切正方形, 正八角形, 正十六角形, ..., 正  $2^n$  角形

§ 430. 作圖題二一 分所設圓周爲六等分.

〔解法〕 以圓周上任意點  $A$  爲中心, 以半徑  $AO$  爲半徑作弧交圓周於  $B$ . 再以  $B$  爲中心, 以同半徑作弧再交圓周於  $C$ . 如是繼續再得  $D, E, F$ . 則  $A, B, C, D, E, F$  卽所求之分點.



Q. E. F.

證) 聯  $OA, OB, AB, OC, OD, OE, OF$ . 因  $AB = AO = OB$ , 故  $\triangle AOB$  爲正三角形,  $\therefore \angle AOB = \frac{2}{3} R\angle$ , 同理  $\angle BOC, \angle COD, \angle DOE, \angle EOF$  皆爲  $\frac{2}{3} R\angle$ .

$$\therefore \angle FOA = 4R\angle - 5\left(\frac{2}{3} R\angle\right) = \frac{12-10}{3} R\angle = \frac{2}{3} R\angle.$$

$$\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = \angle FOA.$$

$$\therefore \text{arc } AB = \text{arc } BC = \text{arc } CD = \text{arc } DE = \text{arc } EF = \text{arc } FA.$$

$\therefore A, B, C, D, E, F$  爲所求分點. Q. E. D.

§ 431. 系一 分所設圓周爲 3 等分, 12 等分, 24 等分, ...,

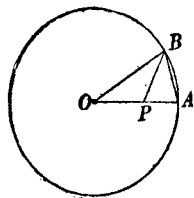
$3 \times 2^n$  等分.

§ 432. 系二 作所設圓之內接正三角形, 正六角形, 正十二角形, …, 正  $3 \times 2^n$  角形.

§ 433. 系三 作所設圓之外切正三角形, 正六角形, 正十二角形, …, 正  $3 \times 2^n$  角形.

§ 434. 作圖題二二 分所設圓周爲十等分.

〔解法〕 在任意半徑上取  $P$ , 令  $OA : OP = OP : PA$  (§ 351 中末比分法). 以  $A$  爲中心,  $OP$  爲半徑作弧交圓周於  $B$ .



則  $A, B$  卽所求二鄰點. Q. E. F.

〔證〕 聯  $BO, BP, BA$ .  $\therefore OA : OP = OP : PA$ , 而  $AB = OP$ ,  $\therefore OA : AB = AB : AP$ ,  $\angle A$  爲  $\triangle AOB$   $\triangle ABP$  之共有角,  $\therefore \triangle AOB \sim \triangle ABP$ .  $\therefore OA : AB = OB : BP$ .

然  $OA = OB$ ,  $\therefore AB = BP$ .  $\therefore OP = BP$ ,

$\therefore \angle POB = \angle PBO$  又  $\angle AOB = \angle ABP$ ,

$\therefore \angle OBA = \angle OBP + \angle PBA = 2\angle AOB$ .

又  $\angle OAB = \angle OBA = 2\angle AOB$ . 故在  $\triangle AOB$  中,

$\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 5\angle AOB = 2R\angle$ .

$\therefore \angle AOB = \frac{2}{5}R\angle = \frac{1}{10}$  周角.  $\therefore \widehat{AB} = \frac{1}{10}$  圓周.

$\therefore A, B$  爲所求二鄰點.

Q. E. D

§ 435. 系一 分所設圓周為 5 等分, 20 等分, 40 等分, ……,  
 $5 \times 2^n$  等分.

§ 436. 系二 作所設圓之內接正五角形, 正十角形, 正二十  
 角形, ……正  $5 \times 2^n$  角形.

§ 437. 系三 作所設圓之外切正五角形, 正十角形, 正二十  
 角形, ……正  $5 \times 2^n$  角形.

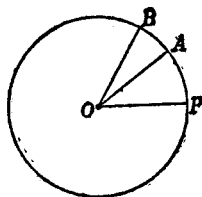
§ 438. 作圖題二三 分所設圓周為十五等分.

〔解法〕 作  $\widehat{PB} = \frac{1}{6}$  圓周. 在  $\widehat{PB}$  上

取  $A$  令  $\widehat{PA} = \frac{1}{10}$  圓周. 則  $A, B$  即所求二

鄰點.

Q. E. F.



〔證〕  $\widehat{AB} = \widehat{PB} - \widehat{PA} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right)$  圓周  $= \frac{1}{15}$  圓周.

∴  $A, B$  為所求二鄰點.

Q. E. D.

§ 439. 系一 分所設圓周為 30 等分, 60 等分, …… $15 \times 2^n$  等  
 分

§ 440. 系二 作所設圓之內接正十五角形, 正三十角形, ……  
 正  $15 \times 2^n$  角形.

§ 441. 系三 作所設圓之外切正十五角形, 正三十角形, ……  
 正  $15 \times 2^n$  角形.

## 習 題 二 十 三

1. 正多角形之中心角與其內角互為補角.
2. 正三角形之半徑等於其邊心距之二倍.
3. 圓內接正六角形之面積等於同圓內接正三角形面積之二倍.
4. 圓內接正六角形之面積為同圓內接及外切正三角形之比例中項.
5. 圓內接正六角形之面積等於同圓外切正六角形之  $\frac{3}{4}$ .
6. 正五角形對角線互分於中末比.
7. 將正五角形一頂點為中心, 對角線為半徑所作之圓, 則其內接正十角形之邊等於此五角形之邊.
8.  $AB$  是  $\odot O$  內接正六角形之一邊.  $AC$  為  $\odot O$  之切線, 其長等於  $AB$ , 且與  $AB$  分居半徑  $AO$  之兩旁.  $OC, BC$  各交圓周於  $E, F$ . 則  $EF$  為圓內接正二十四角形之一邊.



## 第二十七章 圓之度數

§ 442. 定量及變量 在某種條件之下，一量之值始終不變者曰定量。一量之值時時變更者曰變量。

例如過圓內一定點  $P$  作弦  $AB$ ，則  $AP \cdot PB$  之面積為定量。但  $AB$  之長為變量。

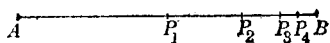
又如從弓形弧上一點  $P$  聯弓形弦  $AB$  之兩端，則  $PA, PB$  皆為變量，而  $\angle APB$  為定量。

§ 443. 極限 一變量在某種條件之下繼續改變，若 (1) 愈改變愈與某定量接近，(2) 儘管改變仍不能與此定量相等，則曰此變量無窮接近此定量而以此定量為極限。

例如在定線分  $AB$  上取  $P_1$  令  $AP_1 = \frac{1}{2} AB$ ,

再在  $P_1B$  上取  $P_2$  令  $P_1P_2 = \frac{1}{2} P_1B$ ,

再在  $P_2B$  上取  $P_3$  令  $P_2P_3 = \frac{1}{2} P_2B$ ,

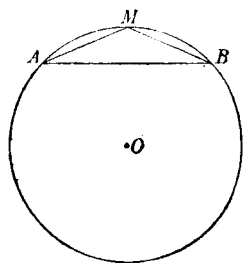


如此繼續取  $P_4, P_5, \dots, P_n$  ( $n$  為任意整正數)。則  $AP_n$  為變量，而  $n$  愈大， $AP_n$  愈與定量  $AB$  接近。然  $n$  無論如何大， $AP_n$  仍不等於  $AB$ 。即  $AP_n$  無窮接近於  $AB$  而以  $AB$  為極限。

§ 444. 幾何公理一三 圓外切多角形之周大於圓周；圓內接多角形之周小於圓周

§ 445. 定理一三七 圓內接正多角形邊數遞次倍增時，其周之長接近於圓周而以圓周為極限。

〔證〕 設  $AB$  為  $\odot O$  內接正  $n$  角形之一邊，其度數為  $s_n$ ，其周之度數為  $p_n = ns_n$ 。  $M$  為  $\widehat{AB}$  之中點，故  $AM = MB$  為  $\odot O$  內接正  $2n$  角形之一邊，其度數為  $s_{2n}$ ，其周之度數為  $p_{2n} = 2ns_{2n}$ 。



$\therefore AM + MB > AB$ ,  $\therefore 2s_{2n} > s_n$ .  $\therefore 2n \cdot s_{2n} > n \cdot s_n$

$\therefore p_{2n} > p_n$ . 但一切圓內接多角形之周恆比圓周小，設圓周之度數為  $c$ ，則  $n$  為無論何數時  $p_n < c$ .  $\therefore p_n < p_{2n} < c$ .

$$\therefore p_4 < p_8 < p_{16} < \dots < p_{2n} < c,$$

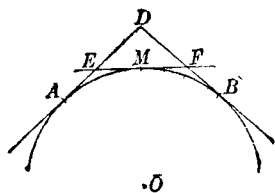
$$p_6 < p_{12} < p_{24} < \dots < p_{3 \times 2n} < c,$$

$$p_r < p_{2r} < p_{4r} < \dots < p_{2nr} < c.$$

Q. E. D.

§ 446. 定理一三八 圓外切正多角形邊數遞次倍增時，其周之長接近於圓周而以圓周為極限。

〔證〕 設  $DA, DB$  切  $\odot O$  於  $A, B$  各為  $\odot O$  外切正  $n$  角形之半邊，其度數各為  $\frac{1}{2} S_n$ .  $\therefore DA + DB$  之度數為  $S_n$ .



此多角形周之度數爲  $P_n = n \cdot S_n$ .  $M$  爲  $\widehat{AB}$  之中點  $EF$  切  $\odot O$  於  $M$ ,  $\therefore EA = EM = MF = FB$  各爲  $\odot O$  外切正  $2n$  角形之半邊, 其度數爲  $\frac{1}{2} S_{2n}$ ,

$\therefore AE + EM + MF + FB$  之度數爲  $2S_{2n}$ . 此多角形周之度數爲  $P_{2n} = 2n \cdot S_{2n}$ . 則因  $DE + DF > EF$ ,  $\therefore DA + DB > AE + EF + FB$ ,

$\therefore S_n > 2S_{2n}$ .  $\therefore nS_n > 2n \cdot S_{2n}$ , 即  $P_n > P_{2n}$ . 但一切圓外切多角形之周恆比圓周大, 設圓周之度數爲  $c$ , 則  $n$  爲無論何數時,

$$P_n > c, \quad \therefore P_n > P_{2n} > c.$$

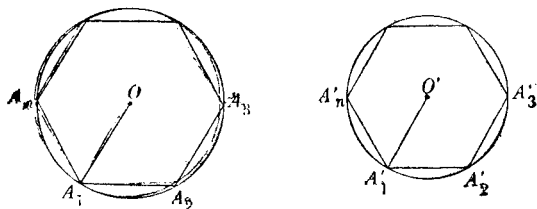
$$\therefore P_4 > P_8 > P_{16} > \dots > P_{2^n} > c,$$

$$P_3 > P_6 > P_{12} > \dots > P_{3 \times 2^n} > c.$$

$$P_r > P_{2r} > P_{4r} > \dots > P_{2^n r} > c.$$

Q. E. D.

§ 447. 定理一三九 二圓周之比等於其半徑之比.



〔假設〕 設  $\odot O, \odot O'$  之周各爲  $c, c'$ , 其半徑各爲  $R, R'$ .

〔終決〕  $c : c' = R : R'$ .

〔證〕 在  $\odot O, \odot O'$  內各作內接正  $n$  角形  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ ,

$A'_1 A'_2 A'_3 \dots A'_n$ , 其周各爲  $P, P'$ . 則因  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n, A'_1 A'_2 A'_3 \dots A'_n$

爲同邊數正多角形,  $\therefore A_1A_2A_3\cdots A_n \sim A'_1A'_2A'_3\cdots A'_n$ .

$$\begin{aligned} \therefore \frac{R}{R'} &= \frac{A_1A_2}{A'_1A'_2} = \frac{A_2A_3}{A'_2A'_3} = \cdots = \frac{A_nA_1}{A'_nA'_1} \\ &= \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1}{A'_1A'_2 + A'_2A'_3 + \cdots + A'_nA'_1} = \frac{P}{P'}. \end{aligned}$$

設  $n$  無限增大時  $P, P'$  各自接近於  $c, c'$  而各以  $c, c'$  爲極限.

$$\therefore R : R' = P : P' = c : c'.$$

$$\therefore c : c' = R : R'.$$

Q. E. D.

§ 448. 系一 二圓周之比等於其直徑之比.

§ 449. 系二 任何圓之周與直徑之比爲一定值.

§ 450. 定理一四〇 圓周與直徑之比,其定值大於 3.14159, 小於 3.14160.

〔證〕 設以圓半徑爲單位,  $s_n$  表內接正  $n$  角形各邊之度數,  $p_n$  表內接正  $n$  角形周之度數,  $S_n$  表外切正  $n$  角形各邊之度數,  $P_n$  表外切正  $n$  角形周之度數, 則從 § 421, 可得

$$s_4 = \sqrt{2} r = 1.41421356, \quad \therefore \frac{1}{2} p_4 = 2.8284271.$$

再從 § 423, 可得

$$s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_4^2}} = 0.7653694, \quad \therefore \frac{1}{2} p_8 = 3.0614675.$$

繼續從 § 423, 可得  $s_{16}, s_{32} \cdots$  各值而求得  $\frac{1}{2} p_{16}, \frac{1}{2} p_{32}, \cdots$  各值 (見下表).

又從 § 418, 知  $S_4 = 2r = 2$ ,  $\therefore \frac{1}{2} P_4 = 4$ .

再從 § 425, 可得  $S_8 = \frac{2}{S_4} \{ \sqrt{4 + S_4^2} - 2 \} = 0.82842712$ ,

$$\therefore \frac{1}{2} P_8 = 3.3137085.$$

繼續從 § 425, 可得  $S_{16}, S_{32}, \dots$  各值而求得  $\frac{1}{2} P_{16}, \frac{1}{2} P_{32}, \dots$  各值 (見下表).

茲將求出各值列表如下:

$n$	$\frac{1}{2} p_n$	$\frac{1}{2} P_n$
4	2.8284271	4.0000000
8	3.0614675	3.3137085
16	3.1214452	3.1825979
32	3.1365485	3.1517249
64	3.1403312	3.1441184
128	3.1412773	3.1422236
256	3.1415138	3.1417504
512	3.1415720	3.1416321
1024	3.1415877	3.1416025
2048	3.1415914	3.1415951

設以  $c$  表圓周之度數, 則因  $n$  為無論何數時,  $\frac{1}{2} p_n < \frac{1}{2} c < \frac{1}{2} P_n$ ,

$\therefore 3.1415914 < \frac{1}{2} c < 3.1415951$ .  $\therefore$  直徑之度數為 2.

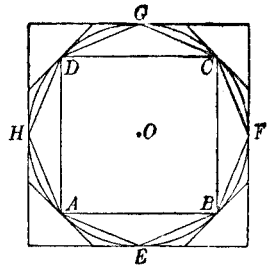
$\therefore$  圓周與直徑之比, 其值為  $\frac{1}{2} c$ , 大於 3.14159, 小於 3.1416

*Q. E. D.*

§ 451. 圓周率 圓周與直徑之比值曰圓周率常以  $\pi$  表之，即  $\pi \doteq 3.1416$  為一常數。以  $c, d, r$  各表圓周，直徑，半徑之度數，則依上述定理，可得  $c = \pi d = 2 \pi r$ 。

§ 452. 定理一四一 圓內接或外接正多角形邊數遞次倍增時，其面積接近於圓面積而以圓面積為極限。

〔證〕 設  $ABCD$  為  $\odot O$  內接正方形， $AEBFCGDH$  為  $\odot O$  內接正八角形，則  $AEB \dots H = ABCD + \triangle ABE + \triangle FBC + \dots$ 。  $\therefore AEB \dots H > ABCD$ 。若以  $A_n$  表圓內接正  $n$  角形面積之度數，則  $A_8 > A_4$ 。



同理  $A_{16} > A_8$ 。但  $n$  為無論何數時，圓面積等於  $n$  角形面積加  $n$  個小弓形。若以  $A$  表圓面積之度數，則  $A_n < A$ 。

$$\therefore A_4 < A_8 < A_{16} < \dots < A_{2^n} < A.$$

同理  $A_r < A_{2r} < A_{4r} < \dots < A_{2^n r} < A$ 。

若以  $A'_n$  表圓外切正  $n$  角形面積之度數，同樣可證

$$A'_r > A'_{2r} > A'_{4r} > \dots > A'_{2^n r} > A. \quad Q. E. D.$$

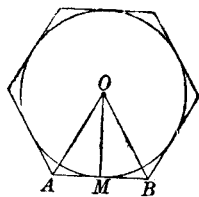
§ 453. 定理一四二 圓外切正多角形之面積等於其周與圓半徑所包矩形之半。

〔假設〕  $\odot O$  半徑之度數為  $r$ ，其外切正  $n$  角形周之度數為

$P_n$ , 面積之度數為  $A_n$ .

$$[\text{終決}] \quad A_n = \frac{1}{2} r P_n.$$

〔證〕 設  $AB$  為  $\odot O$  外切正  $n$  角形之一邊其數為  $S_n$ , 則  $P_n = n S_n$ .  $AB$  切  $\odot O$  於  $M$ ,



$\therefore OM \perp AB$ .  $\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} OM \cdot AB$ , 其度數為  $\frac{1}{2} r S_n$ . 因

正  $n$  角形之面積為  $\triangle OAB$  之  $n$  倍,

$$\therefore A_n = \frac{1}{2} r S_n \cdot n = \frac{1}{2} r \cdot n S_n = \frac{1}{2} r P_n. \quad Q. E. D.$$

§ 454. 定理一四三 圓面積等於其周與半徑所包矩形之半.

〔假設〕 設圓面積, 周, 半徑之度數各為  $A, c, r$ .

$$[\text{終決}] \quad A = \frac{1}{2} cr.$$

〔證〕 設  $B_1 B_2 B_3 \dots B_n$  為此圓之外切正  $n$  角形. 其面積及周之度數各為  $A_n, P_n$ . 則  $A_n = \frac{1}{2} r P_n$ . 但當  $n$  遞次倍增時  $A_n$  以  $A$

為極限,  $P_n$  以  $C$  為極限,  $\therefore A = \frac{1}{2} rc$ . Q. E. D.

§ 455. 系一 二圓面積之比等於其半徑或直徑之二乘比.

§ 456. 系二 圓面積與半徑上正方形面積之比一定, 其定直為  $\pi$ .

$$\therefore A = \frac{1}{2} rc, \text{ 而 } c = 2\pi r, \quad \therefore A = \frac{1}{2} r(2\pi r) = \pi r^2.$$

§ 457. 系三 扇形面積等於弧及半徑所包矩形之半.

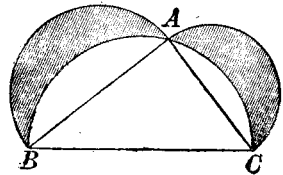
§ 458. 系四 同圓或等圓中，兩扇形面積之比等於其弧之比或中心角之比。

§ 459. 系五 扇形面積與全圓面積之比等於其中心角與周角之比。

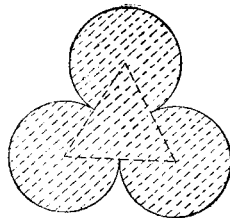
若扇形中心角為  $k$  度 ( $k^\circ$ )，則其面積之度數為  $\frac{k \pi r^2}{360}$ 。

## 習 題 二 十 四

1. 以直角三角形  $ABC$  之三邊各為直徑作半圓。則半圓周間所成兩個新月形面積之和等於  $\triangle ABC$ 。



2. 正三角形每邊之長為  $2a$ 。以各頂點為中心， $a$  為半徑各在三角形外作弧。求此三弧之共長及所圍之面積(左圖)。



又若三弧在三角形內則如何?(右圖)

3. 以前題正三角形各邊為直徑各向形外作半圓。求所成曲線形之周及半圓(左

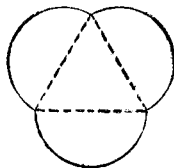
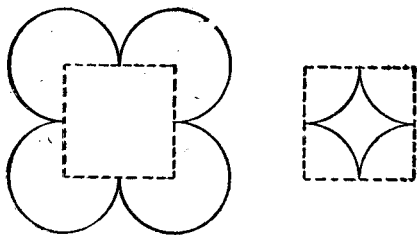




圖) 又形內時如何?(右圖)

4. 正方形每邊之長爲  $2a$ . 以各頂點爲中心,  $a$  爲半徑向形外作弧. 求所成曲線形之周及面積 (左圖).



又形內時如何? (右圖)

5. 以前題正方形各邊爲直徑各向形外作半圓. 求所成曲線形之周及面積 (左圖). 又形內時如何? (右圖)

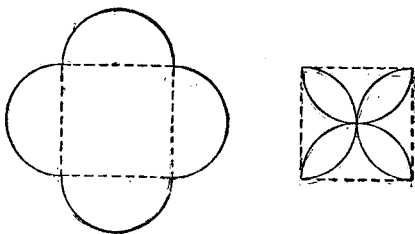
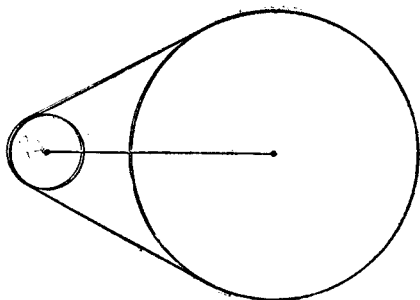
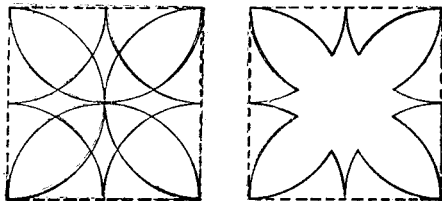


圖)

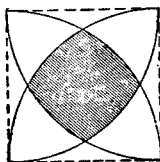
6. 二輪中心距離 14 尺. 其半徑各爲 9 尺及 2 尺. 以皮帶聯其周而轉動. 求皮帶之長及皮帶所圍平面之面積.



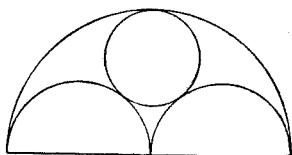
7. 右圖爲內接於邊長  $2a$  正方形之曲線形. 求其周及面積 (左圖示其作法).



8. 正方形每邊之長為  $2a$ . 以各頂點為中心,  $2a$  為半徑向形內作弧. 四弧圍成中間一曲線四邊形. 求其周及面積.

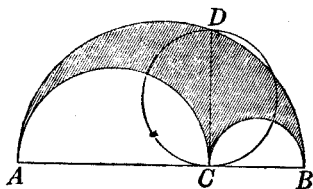


9. 圖中大半圓之半徑為  $2a$ . 小半圓之半徑為  $a$ . 求內接於此三半圓周之小圓之半徑.



10. 以圓內接正方形之各邊為直徑向形外各作半圓, 則此四個半圓周與原圓所成之新月形面積之和等於原圓面積.

11.  $C$  為  $AB$  上任意一點.  $CD \perp AB$ . 以  $AB, AC, CB$  為直徑在  $AB$  同側各作半圓周所圍成之面積等於以  $CD$  為直徑所作全圓之面積.



12. 求作一正多角形令與一所設正多角形邊數相等而面積倍之.

## 第六編 雜定理及雜例

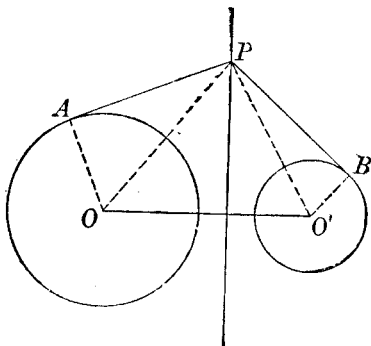
### 第二十八章 根軸及根心

§ 460. 定理一四四 一動點至二定圓所引之切線恆相等,則

此動點之軌跡為垂直於二圓中心線之一直線

[已設] 二定圓  $\odot O, \odot O'$ .

[條件] 動點  $P, PA$  切  $\odot O$  於  $A, PB$  切  $\odot O'$  於  $B, PA = PB$ .



求  $P$  之軌跡.

[解析] 聯  $OA, O'B$ . 則

$\triangle PAO, \triangle PBO'$  皆為直角三角形.  $\therefore \overline{PA}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2, \overline{PB}^2 = \overline{PO'}^2 - \overline{O'B}^2$ .  
 $\because PA = PB, \therefore \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2, \therefore \overline{PO}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{PO'}^2 - \overline{O'B}^2$ .  
 $\therefore \overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{O'B}^2$ .

今  $O, O'$  為定點,  $\overline{OA}^2 - \overline{O'B}^2$  為定面積.

$\therefore P$  之軌跡為垂直於  $OO'$  之直線, 其垂足與  $OO'$  中點之距離為  $\frac{\overline{OA}^2 - \overline{O'B}^2}{2OO'}$ .

§ 309

Q. E. F.

〔討論〕 二定圓若相離時，則  $P$  之軌跡 爲完全直線；相交時則爲其公共弦之延線；相切時則爲過切點之公切線；同心圓時爲不能。

§ 461. 定義八二 根軸 一直線爲至二定圓所引切線恆相等之點之軌跡曰此二圓之根軸 (radical axis).

§ 462. 定理一四五 三定圓中，每二定圓之根軸共三直線共點。

〔假設〕  $\odot A, \odot B, \odot C$  爲三定圓.  $a, b, c$  各爲  $\odot B \odot C; \odot C, \odot A; \odot A, \odot B$  之根軸.

〔終決〕  $a, b, c$  共點.

〔證〕 設  $a, b$  二直線交於  $O$ . 從  $O$  作三圓之切線  $OA', OB', OC'$ . 則因  $O$  在  $a$  上,  $\therefore OB' = OC'$ .

又因  $O$  在  $b$  上,

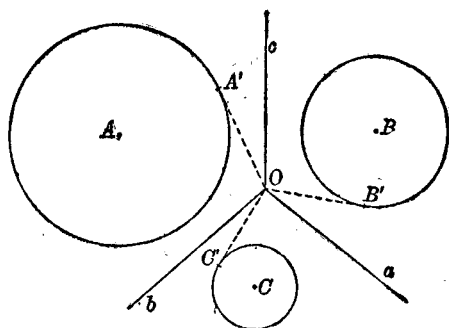
$\therefore OC' = OA'$ .

$\therefore OA' = OB'. \therefore O$  在  $c$  上

$\therefore a, b, c$  共點.

Q. E. D.

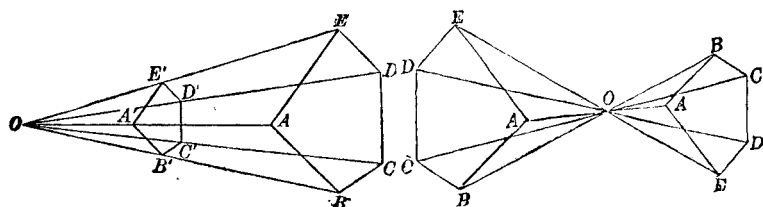
§ 463. 定義八三 三圓之根心 三圓間三根軸所共之點曰三圓之根心 (radical center).



## 第二十九章 相似中心及相似軸

§ 454. 定義八四 應位相似 二相似多形各雙對應邊置於平行位置時曰此二形應位相似 (homothetic).

§ 465. 定理一四六 二應位相似多形各雙對應頂點之聯線共點.



〔假設〕  $ABC \dots E \sim A'B'C' \dots E'$ , 但非合同形.  $AB \parallel A'B'$ ,  $BC \parallel B'C'$ ,  $\dots EA \parallel E'A'$ .

〔終決〕  $AA', BB', CC', \dots, EE'$  諸線共點.

〔證〕 設  $AA', BB'$  交於  $O_1$ ,  $BB', CC'$  交於  $O_2$ .

則因  $A'B' \parallel AB$ ,  $\therefore \triangle O_1A'B' \sim \triangle O_1AB$ ,  $\therefore O_1B : O_1B' = AB : A'B'$ .

又因  $B'C' \parallel BC$ ,  $\therefore \triangle O_2B'C' \sim \triangle O_2BC$ ,  $\therefore O_2B : O_2B' = BC : B'C'$ .

但  $ABC \dots E \sim A'B'C' \dots E'$ ,  $\therefore AB : A'B' = BC : B'C'$ ,

$\therefore O_1B : O_1B' = O_2B : O_2B'$ .  $\therefore O_1B - O_1B' : O_1B' = O_2B$

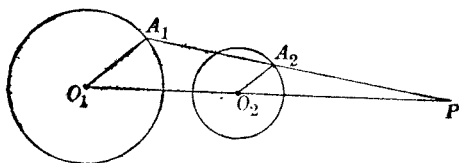
$-O_2B' : O_2B'$ , 即  $BB' : O_1B' = BB' : O_2B'$ ,  $\therefore O_1B' = O_2B'$ ,  $\therefore O_1$  合於  $O_2$ .  $\therefore AA', BB', CC'$  共點. 同理可證  $BB', CC', \dots, EE'$  共點.

$\therefore AA', BB', \dots, EE'$  共點. Q. E. D.

§ 466. 定義八五 相似中心 相似外心 相似內心 二應位相似多角形各雙對應頂點聯線所共之點曰二形之相似中心 (homothetic centre). 若二形在相似中心之同旁, 則此相似中心曰相似外心. 若二形在兩旁則曰內心.

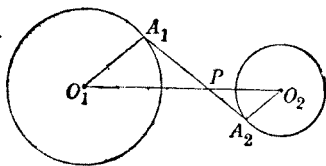
§ 467. 系 相似多角形之相似中心與兩形對應頂點距離之比等於此兩形之相似比.

§ 468. 定理一四七 不等二圓中, 同向平行半徑端點之聯線以二圓半徑之比外分中心線分; 反向平行半徑端點之聯線以二圓半徑之比內分中心線分.



〔假設〕  $\odot O_1, \odot O_2$  爲不等二圓.  $O_1A_1 \parallel O_2A_2$ .  $A_1A_2$  交  $O_1O_2$  於  $P$ .

〔終決〕  $O_1P : O_2P = O_1A_1 : O_2A_2$ .



〔證〕  $\because O_1A_1 \parallel O_2A_2$ ,  $\therefore \triangle PO_1A_1 \sim \triangle PO_2A_2$ .

$\therefore O_1P : O_2P = O_1A_1 : O_2A_2$ . Q. E. D.

§ 469. 系一 不等二圓中，各雙同向平行半徑端點之聯線共點；各雙反向平行半徑端點之聯線共點。

〔註〕 任意二圓可視為相似形，此所共之點為二圓之相似中心，同向平行半徑端點聯線所共之點為相似外心；反向平行半徑端點聯線所共之點為相似內心。

§ 470. 系二 不等二圓有兩個相似中心。

§ 471. 系三 不等二圓之兩個相似中心與二圓中心為調和點列。

§ 472. 系四 二圓公切線過相似中心。

§ 473. 系五 過二圓相似中心所作直線若與一圓不相會，或相切，或相交，則與他圓亦不相會，或相切，或相交。

§ 474. 系六 從不等二圓之相似中心所作割線與二圓之交點為兩雙平行半徑之端點。

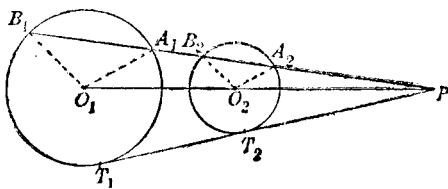
如圖  $P$  為  $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$  之相似中心。過  $P$  之割線交  $\odot O_1$  於  $A_1$ 、 $B_1$ ，交  $\odot O_2$  於  $A_2$ 、 $B_2$ 。

則  $O_1A_1 \parallel O_2A_2$ ， $O_1B_1 \parallel O_2B_2$ 。

〔註〕 四交點中， $A_1$ 、 $A_2$  及  $B_1$ 、 $B_2$  曰對應點， $A_1$ 、 $B_2$  及  $B_1$ 、 $A_2$  曰非對應點。

§ 475. 定理一四八 從二定圓相似中心作任意割線，其各雙非對應點與此相似中心距離所包矩形一定。

〔假設〕  $P$  爲  $\odot O_1$ ,  $\odot O_2$  之相似中心.  $PB_1$  爲過  $P$  之任意割線交  $\odot O_1$  於  $A_1, B_1$ , 交  $\odot O_2$  於  $A_2, B_2$ .



〔終決〕  $PA_1 \cdot PB_2 = PB_1 \cdot PA_2$  等於一定面積.

〔證〕 聯  $O_1A_1, O_1B_1, O_2A_2, O_2B_2$ . 設  $O_1A_1 = O_1B_1 = r_1, O_2A_2 = O_2B_2 = r_2$ . 則因  $O_1A_1 \parallel O_2A_2$ ,

$$\therefore PA_1 : PA_2 = O_1A_1 : O_2A_2 = r_1 : r_2.$$

$$\therefore PA_1 \cdot PB_2 : PA_2 \cdot PB_2 = r_1 : r_2, \therefore PA_1 \cdot PB_2 = \frac{r_1}{r_2} (PA_2 \cdot PB_2).$$

又因  $O_1B_1 \parallel O_2B_2$ ,  $\therefore PB_1 : PB_2 = O_1B_1 : O_2B_2 = r_1 : r_2$ .

$$\therefore PB_1 \cdot PA_2 : PB_2 \cdot PA_2 = r_1 : r_2 \therefore PB_1 \cdot PA_2 = \frac{r_1}{r_2} (PB_2 \cdot PA_2).$$

$$\therefore PA_1 \cdot PB_2 = PB_1 \cdot PA_2.$$

又因  $PA_2 \cdot PB_2$  之面積一定,  $r_1 : r_2$  爲定比.

$$\therefore PA_1 \cdot PB_2 = PB_1 \cdot PA_2 \text{ 爲定面積. } \quad Q. E. D.$$

(注意) 圖中  $P$  爲  $\odot O_1, \odot O_2$  之相似外心. 若  $P$  爲  $\odot O_1, \odot O_2$  之相似內心時, 其結果完全相同.

§ 476. 系  $PT_1T_2$  爲公切線, 則

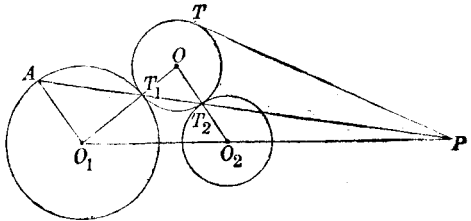
$$PA_1 \cdot PB_2 = PB_1 \cdot PA_2 = PT_1 \cdot PT_2.$$

§ 477. 定理一四九 一動圓  $O$  切二定圓  $O_1, O_2$  於  $T_1, T_2$ . 則直線  $T_1T_2$  過  $\odot O_1, \odot O_2$  之相似中心



〔假設〕  $\odot O_1, \odot O_2$

爲二定圓。一動  $\odot O$  切  
 $\odot O_1, \odot O_2$  於  $T_1, T_2$ 。  
 $T_1T_2$  交  $O_1O_2$  於  $P$ 。



〔終決〕  $P$  爲  $O_1, O_2$  之相似中心。

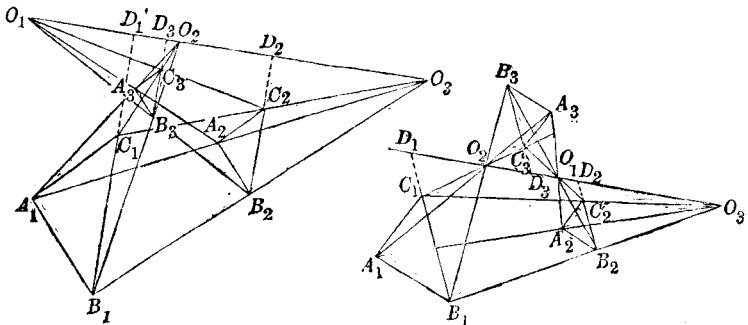
〔證〕  $T_1T_2$  交  $O_1$  於  $A$ 。聯  $O_1A$ 。

則  $\angle O_1AT_1 = \angle O_1T_1A = \angle OT_1T_2 = \angle OT_2T_1 = \angle O_2T_2P$ 。

$\therefore O_1A \parallel O_2T_2$ 。  $\therefore P$  爲  $\odot O_1, \odot O_2$  之相似中心。 Q. E. D.

§ 478. 系 從  $P$  所作動圓  $O$  之切線  $PT$  爲定長。

§ 479. 定理一五〇 三個應位相似多角形，其中每兩個之相似中心凡三點共線。



〔假設〕  $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2, \triangle A_3B_3C_3$  爲應位相似形。

$\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2$  之相似中心爲  $O_3$ ，

$\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_3B_3C_3$  之相似中心爲  $O_2$ ，

$\triangle A_2B_2C_2, \triangle A_3B_3C_3$  之相似中心爲  $O_1$ ，

〔終決〕  $O_1, O_2, O_3$  共線。

〔證〕 聯  $O_1O_2$  交  $B_1C_1$  於  $D_1$  交  $B_2C_2$  於  $D_2$ , 交  $B_3C_3$  於  $D_3$ 。

$\because B_2D_2 \parallel B_3D_3$ , 而  $B_2B_3, C_2C_3, D_2D_3$  共點  $O_1$ ,  $\therefore B_2C_2 : C_2D_2 = B_3C_3 : C_3D_3$ . 又  $B_1D_1 \parallel B_3D_3$ , 而  $B_1B_3, C_1C_3, D_1D_3$  共點  $O_2$ ,

$\therefore B_1C_1 : C_1D_1 = B_3C_3 : C_3D_3$ .  $\therefore B_1C_1 : C_1D_1 = B_2C_2 : C_2D_2$ .

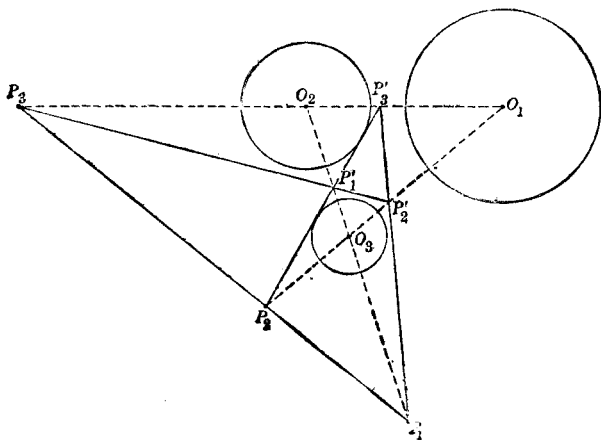
$\because B_1D_1 \parallel B_2D_2$ ,  $\therefore B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$  共點. 即  $D_1D_2$  過  $B_1B_2, C_1C_2$  之交點  $O_3$ .

$\therefore O_1, O_2, O_3$  共線

Q. E. D.

§ 480. 定義八六 相似軸 三個應位相似形三個相似中心所共之線曰三形之相似軸 (similar axis).

§ 481. 系 三個圓其中每兩個圓之相似外心凡三點共線一組相似外心及其他兩組相似內心凡三點共線。



如圖  $P_1, P_1$  各爲  $\odot O_2, \odot O_3$  之相似外心及相似內心.  $P_2, P_2$  各爲  $\odot O_3, \odot O_1$  之相似外心及相似內心.  $P_3, P_3$  各爲  $\odot O_1, \odot O_2$  之相似外心及相似內心. 則  $P_1, P_2, P_3$  共線. 又  $P_1, P_2, P_3$  共線;  $P_2, P_3, P_1$  共線;  $P_3, P_1, P_2$  共線.

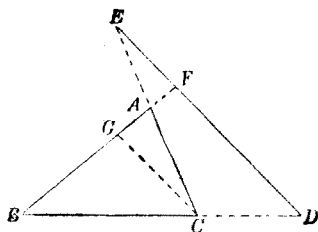
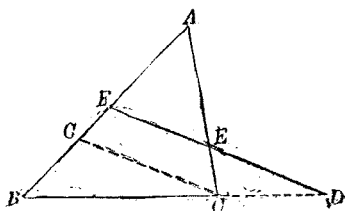
〔證法與定理同, 學者自證之〕.

## 第三十章

Menelaus 氏定理 Ceva 氏定理調和線束極線及極點

§ 482. 定理一五一 一截線交  $\triangle ABC$  之邊  $BC, AC, AB$  或其延線於  $D, E, F$ . 則

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$



【證】 作  $CG \parallel DF$ .

則  $\frac{BD}{CD} = \frac{BF}{GF}, \frac{AF}{BF} = \frac{AE}{CE}.$

故  $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{BF}{GF} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{GF}$   
 $= \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AE}{CE} = 1. \quad \text{Q. E. D.}$

§ 483. 定理一五二  $D, E, F$  各為  $\triangle ABC$  邊  $BC, AC, AB$

上一點，而  $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$ ，且其中一點在邊之延線上或三點皆在各邊之延線上，則  $D, E, F$  共線。

【證】 設直線  $DE$  交  $AB$  於  $F'$ ，

$$\text{則 } \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF'}{BF'} = 1. \quad \text{今 } \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1,$$

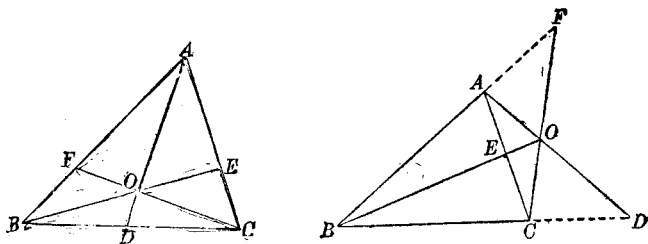
$$\therefore AF' : BF' = AF : BF. \quad \therefore F' \text{ 合於 } F.$$

$$\therefore D, E, F \text{ 共線.} \quad \text{Q. E. D.}$$

【註】 定理一五一與定理一五二互為倒定理，名曰 Menelaus 氏定理。

§ 484. 定理一五三 過  $\triangle ABC$  之頂點  $A, B, C$  作共點三直線各交對邊  $BC, AC, AB$  或其延線於  $D, E, F$ ，則

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$



【證】 設  $AD, BE, CF$  所共之點為  $O$ 。則因直線  $CF$  交  $\triangle ABD$  之邊  $AB, BD, AD$  於  $F, C, O$ ，

$$\therefore \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BC}{DC} \cdot \frac{DO}{AO} = 1.$$

又因直線  $BE$  交  $\triangle ADC$  之邊  $AD, DC, AC$  於  $O, B, E$

$$\therefore \frac{AO}{DO} \cdot \frac{DB}{CB} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$

$$\therefore \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BC}{DC} \cdot \frac{DO}{AO} \cdot \frac{AO}{DO} \cdot \frac{DB}{CB} \cdot \frac{CE}{AE} = 1.$$

$$\therefore \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1. \quad Q. E. D.$$

§ 485. 定理一五四  $D, E, F$  各為  $\triangle ABC$  邊  $BC, AC, AB$  上一點, 而  $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$ , 且其中二點在邊之延線上, 或三點皆在邊上, 則  $AD, BE, CF$  共點.

〔證〕 設  $BE, CF$  交於  $O$ ,  $AO$  交  $BC$  於  $D'$ .

$$\text{則 } \frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1. \quad \text{今 } \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1,$$

$$\therefore BD' : CD' = BD : CD. \quad \therefore D \text{ 合於 } D'.$$

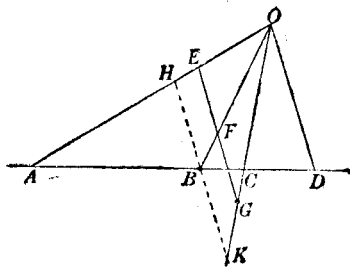
$$\therefore AD, BE, CF \text{ 共點.} \quad Q. E. D.$$

〔註〕 定理一五三及定理一五四互為倒定理, 名曰 Ceva 氏定理.

§ 486. 定理一五五 從直線外一點聯直線上調和點列成四直線. 此四直線中任意一線之平行線為其他三直線所截成二線分相等.

〔假設〕  $A, B, C, D$  為調和點列.  $OD$  之平行線  $EG$  交  $OA, OB, OC$  於  $E, F, G$ .

〔終決〕  $EF = FG$ .



〔證〕 過  $B$  作  $OD$  之平行線，交  $OA, OC$  於  $H, K$ 。

則  $\triangle ABH \sim \triangle ADO$ ,  $\therefore HB : OD = AB : AD$ 。

又  $\triangle CBK \sim \triangle CDO$ ,  $\therefore KB : OD = CB : CD$ 。

今  $A, B, C, D$  爲調和點列,  $\therefore AB : AD = CB : CD$ 。

$\therefore HB : OD = KB : OD$ .  $\therefore HB = KB$ 。

$\therefore EG \parallel OD \parallel HK$ .  $\therefore EF = FG$ . Q. E. D.

§ 487. 定理一五六 一截線與共點四直線相交，其交點若爲調和點列，則其他截線與此四直線相交之交點亦爲調和點列。

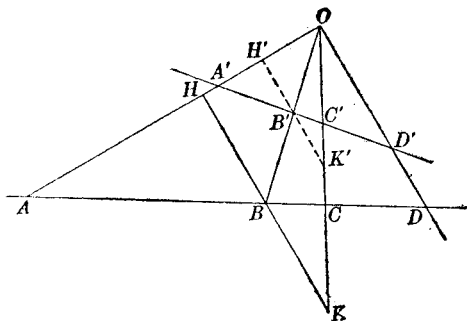
〔假設〕  $AD$  交  $OA$

$OB, OC, OD$  於  $A, B, C, D$ 。

$A'D'$  交  $OA, OB, OC, OD$

於  $A', B', C', D'$ 。  $A, B, C, D$

爲調和點列。



〔終決〕  $A', B', C', D'$

亦爲調和點列。

〔證〕 過  $B, B'$  各作  $OD$  之平行線  $HK, H'K'$ 。

因  $A, B, C, D$  爲調和點列，故  $HB = BK$ ,  $\therefore H'B' = B'K'$ 。

$\therefore \triangle A'B'H \sim \triangle A'D'O$ ,  $\therefore B'H : D'O = A'B' : A'D'$ 。

$\therefore \triangle B'C'K \sim \triangle D'C'O$ ,  $\therefore B'K' : D'O = B'C' : C'D'$ 。

$\therefore B'H = B'K'$ ,  $\therefore B'H : D'O = B'K' : D'O$ ,

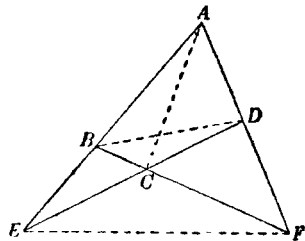
$$\therefore A'B' : A'D' = B'C' : C'D'.$$

$\therefore A', B', C', D'$  爲調和點列. Q. E. D.

§ 488. 定義八七 調和線束 共點四直線以任意一直線截之所得四個交點爲調和點列時,此四直線曰調和線束 (harmonical pencil).

如上圖  $OA, OB, OC, OD$  爲調和線束. 寫作  $O(ABCD)$ .  $OA, OC$  及  $OB, OD$  爲兩雙調和相屬線 (conjugate rays).

§ 489. 定義八八 完全四邊形 不平行四邊形四邊共交於六點曰完全四邊形 (complete quadrilateral). 不共線二點之聯線曰對角線.

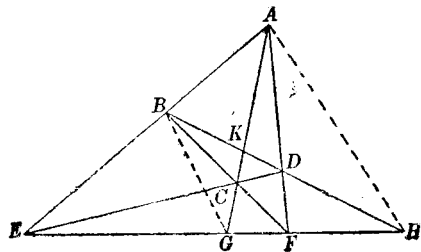


完全四邊形有六個頂點, 三個對角線如圖.

如圖  $ABCDEF$  爲完全四邊形.  $AC, BD, EF$  爲其三個對角線

§ 490. 定理一五七 完全四邊形一對角線之兩端點及此對角線與其他兩對角線之交點共四點成調和點列.

[假設]  $ABCDEF$  爲完全四邊形. 其對角線  $AC, BD, EF$  互交於  $G, H, K$ .





〔終決〕  $E, G, F, H; B, K, D, H; A, K, C, G$  皆為調和點列。

〔證〕  $BH$  截  $\triangle AEF$  之三邊  $AE, AF, EF$  於  $B, D, H$ 。

$$\therefore \frac{EB}{AB} \cdot \frac{AD}{FD} \cdot \frac{FH}{EH} = 1. \text{ 又 } FC, EC, AC \text{ 各交 } \triangle AEF \text{ 之三邊}$$

$$AE, AF, EF \text{ 於 } B, D, G, \therefore \frac{EB}{AB} \cdot \frac{AD}{FD} \cdot \frac{FG}{EG} = 1.$$

$$\therefore \frac{EB}{AB} \cdot \frac{AD}{FD} \cdot \frac{FH}{EH} = \frac{EB}{AB} \cdot \frac{AD}{FD} \cdot \frac{FG}{EG} \therefore FH : EH = FG : EG.$$

$\therefore E, G, F, H$  為調和點列。

聯  $AH$ , 則因  $E, G, F, H$  為調和點列。

故  $A(EGFH)$  為調和線束。

故  $B, K, D, H$  為調和點列。

聯  $BG$ , 則因  $E, G, F, H$  為調和點列。

$\therefore B(EGFH)$  為調和線束。

$\therefore A, K, C, G$  為調和點列。

Q. E. D.

§ 491. 定理一五八 一動點與一定點所聯線分為相交二定

直線分於調和, 則此動點之軌跡為過二定直線交點之一直線。

〔已設〕 一定點  $O$ , 二定

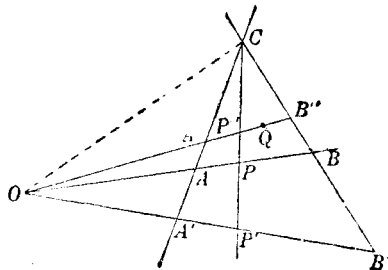
直線  $AC, BC$  交於  $C$ 。

〔條件〕 動點  $P$ ,  $OP$  為

$CA, CB$  分於調和。

〔軌跡〕  $P$  之軌跡為過

$C$  之一直線。



〔證〕  $OP$  爲  $A, B$  分於調和, 即  $O, A, P, B$  爲調和點列. 故  $C(OPB)$  爲調和線束.

(1) 設  $P$  爲  $CP$  上任意一點. 聯  $OP'$  交  $CA, CB$  於  $A', B'$ . 則  $O, A', P, B'$  爲調和點列.

故  $CP$  上任何點適合於所設條件.

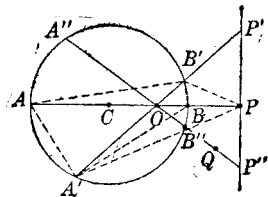
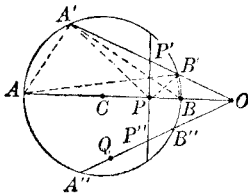
(2) 設  $Q$  爲  $CP$  外之任意一點. 聯  $OQ$  交  $CA, CP, CB$  於  $A', P', B''$  則  $O, A', P', B''$  爲調和點列. 故  $O, A'', Q, B''$  非調和點列, 即  $OQ$  不爲  $A'', B''$  分於調和.

故  $CP$  外任何點不適合於所設條件.

∴  $CP$  爲  $P$  之軌跡. Q. E. D.

〔註〕  $CP$  曰  $O$  點關於  $CA, CB$  之極線 (polar);  $O$  曰  $CP$  關於  $CA, CB$  之極點 (pole).

§ 492. 定理一五九 一動點與一定點所聯線分爲一定圓圓周分於調和, 則此動點之軌跡爲垂直於定點與定圓中心聯線之一直線.



〔已設〕 定點  $O$ , 一定圓  $\odot C$ .

〔條件〕 動點  $P$ ,  $OP$  爲  $\odot C$  圓周分於調和.

〔軌跡〕  $P$  之軌跡爲垂直於  $OC$  之一直線.

〔證〕 聯直線  $OC$  交圓周於  $A, B$ , 取  $P$  點令  $A, P, B, O$  爲調和點列. 作  $PP' \perp OC$ .

(1) 設  $P'$  爲  $PP'$  上任意一點. 聯  $OP'$  交圓周於  $A', B'$ . 聯  $A'A, A'P, A'B, B'A, B'P, B'B$ . 則因  $A, P, B, O$  爲調和點列.

故若  $BP : BO = m : n$ ,

則  $AP : AO = BP : BO = m : n$ , 因  $AB$  爲  $\odot C$  之直徑, 故  $\odot C$  上任意點與  $P, O$  距離之比等於  $m : n$ . § 350

$\therefore A'P : A'O = B'P : B'O = m : n$ .  $\therefore A'P : B'P = A'O : B'O$ ,

$\therefore PO$  爲  $\angle A'PB'$  之外角等分線. § 349

又因  $PP' \perp PO$ ,  $\therefore PP'$  爲  $\angle A'PB'$  之內等分線.

故  $O, P'$  分  $A'B'$  於調和. § 348

故  $PP'$  上任何點適合於所設條件.

(2) 設  $Q$  爲  $PP'$  外任意一點. 聯  $OQ$  交圓周於  $A'', B''$  交  $PP'$  於  $P''$ , 則  $A'', P'', B'', O$  爲調和點列, 故  $A'', Q, B'', O$  非調和點列.

故  $PP'$  外任何點不適合於所設條件.

故  $PP'$  爲  $P$  之軌跡. Q. E. D.

〔註〕  $PP'$  曰  $O$  點關於  $\odot C$  之極線 (polar);  $O$  曰  $PP'$  關於  $\odot C$  之極點 (pole).

§ 493. 系一 若  $O$  在  $\odot C$  之外則其極線過從  $O$  所作  $\odot C$

切線之切點.

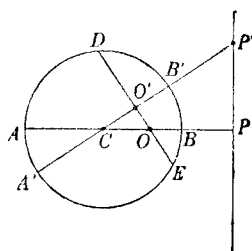
§ 494. 系二 弦關於圓之極點為過其兩端所作切線之交點

§ 495. 系三 直徑關於圓無極點.

§ 496. 定理一六〇 一直線上諸點關於一圓之極線恆過此直線關於此圓之極點.

〔假設〕  $O$  為  $PP'$  關於  $\odot C$  之極點.

$P'$  為  $PP'$  上任意一點.  $DE$  為  $P'$  關於  $\odot C$  之極線.



〔終決〕  $DE$  過  $O$  點.

〔證〕  $CP'$  交  $\odot C$  於  $A'$ ,  $B'$  交  $DE$

於  $O'$ ,  $CO$  交  $\odot C$  於  $A, B$   $\because O$  為  $PP'$  之極點,  $\therefore A, O, B, P$  為調和點列.

$$\therefore OA : OB = PA : PB.$$

$$\therefore OA + OB : OA - OB = PA + PB : PA - PB.$$

$$\text{即 } AC + CO + OB : AC + CO - OB = AC + CP + PB : AC + CP - PB. \because AC = CB, \therefore 2CB : 2CO = 2CP : 2CB.$$

$$\therefore CB : CO = CP : CB.$$

$$\therefore CO \cdot CP = \overline{CB}^2.$$

因  $DO'E$  為  $P$  之極線,  $\therefore A', O', B', P'$  為調和點列.

$$\text{故同樣可證 } CO' \cdot CP' = \overline{CB'}^2$$

但  $CB = CB'$ ,  $\therefore CO \cdot CP = CO' \cdot CP'$ .

$\therefore O, P, P', O'$  共圓.

$\therefore \angle CO'O = \angle CPP' = R\angle$ .

$\therefore O'O$  與  $DE$  相重合, 即  $DE$  過  $O$  點. Q. E. D.

§ 497. 系一 過一定點之諸直線關於一圓之極點恆在此定點關於此圓之極線上.

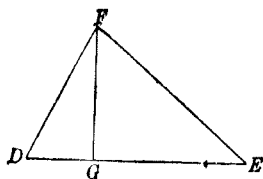
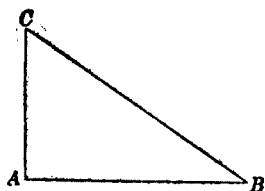
§ 498. 系二 從定圓外直線上任意一點作兩切線其切點所聯之弦必過此直線之極點.

§ 499. 系三 過圓內一點之任意弦, 其兩端所引切線之交點必在此點之極線上.

## 第三十一章 極大極小

§ 500. 定義八九 極大極小 適合於所設條件之各圖形中，其量最大者曰極大 (maximum)，最小者曰極小 (minimum)。

§ 501. 定理一六一 三角形二邊之長一定，則此二邊為直角邊之直角三角形為極大。



〔假設〕  $\triangle ABC, \triangle DEF$  中,  $AB = DE, AC = DF, \angle A = R\angle, \angle D \neq R\angle$ .

〔終決〕  $\triangle ABC > \triangle DEF$ .

〔證〕 作  $FG \perp DE$ , 則  $FG < FD$ .

$$\triangle DEF = \frac{1}{2} FG \cdot DE < \frac{1}{2} DF \cdot DE,$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} DE \cdot DF$$

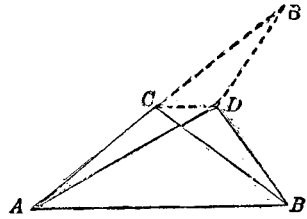
$$\therefore \triangle ABC > \triangle DEF.$$

Q. E. D.

§ 502. 定理一六二 共底等積三角形以二等邊三角形之周為極小.

〔假設〕  $\triangle ABC = \triangle ABD$ ,  $AB$  為共底,  $AC = BC, AD \neq BD$ .

〔終決〕  $AB + BC + AC < AB + BD + AD$ .



〔證〕 延長  $AC$  至  $B'$  令  $CB' = AC = CB$ . 聯  $CD, DB'$ .

因  $\triangle ABC = \triangle ABD$ ,  $\therefore CD \parallel AB$ .

$\therefore \angle B'CD = \angle CAB = \angle CBA = \angle BCD$ .

$\therefore \triangle B'CD \cong \triangle BCD$ .  $\therefore B'D = BD$ .

$\therefore AD + DB = AD + DB' > AB'$ . 然  $AB' = AC + CB' = AC + CB$ ,

$\therefore AC + BC < AD + BD$ .

$\therefore AB + BC + AC < AB + BD + AD$ .

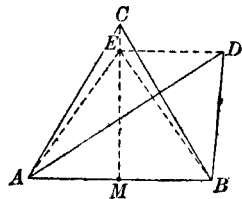
Q. E. D.

§ 503. 定理一六三 共底等周三角形, 以二等邊三角形之面積為極大.

〔假設〕  $\triangle ABC, \triangle ABD$  中,  $AB + BC + AC = AB + BD + AD$ ,  $AB$  為共底,  $AC \neq BC, AD \neq BD$ .

〔終決〕  $\triangle ABC > \triangle ABD$ .

〔證〕 作  $CM \perp AB$ . 作  $DE \parallel AB$ . 聯  $AE, BE$ .



則  $\triangle ABD = \triangle ABE$ .  $\therefore CA = CB$ ,  $\therefore EA = EB$ .

$\therefore AB + BE + AE < AB + BD + AD = AB + BC + AC$ .

$\therefore BE + AE < BC + AC$ .  $\therefore AE < AC$ .

$\therefore EM < CM$ .  $\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot CM$ ,  $\triangle ABD = \frac{1}{2} AB \cdot EM$

$\therefore \triangle ABC > \triangle ABD$ . Q. E. D.

§ 504. 系一 等周三角形中,等邊三角形面積為極大.

§ 505. 系二 等積三角形中,等邊三角形之周為極小.

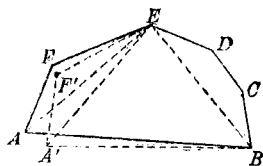
§ 506. 定理一六四 多角形除一邊外其餘各邊皆等於定長

則其面積為極大者,必為圓內接形而以不定長一邊為直徑.

〔假設〕  $ABCDEF$  為  $BC, CD, DE,$

$EF, FA$  各等於定長之各形中之最大者.

〔終決〕  $ABCDEF$  內接於以  $AB$  為直徑之圓.



〔證〕 從任意一頂點  $E$  聯  $EA, EB$ . 則  $ABCDEF = \triangle EFA + BCDE + \triangle ABE$ . 若  $\angle AEB \neq R\angle$  則可固定  $E$  點旋轉  $\triangle EFA$  至  $EF'A'$  之位置而令  $\angle A'EB = R\angle$ . 則成  $A'BCDEF' = \triangle EF'A' + BCDE + \triangle A'BE$ .  $\therefore \triangle EF'A' \cong \triangle EFA$ ,  $\triangle EA'B > \triangle EAB$ .

$\therefore A'BCDEF' > ABCDEF$ .

然  $A'BCDEF'$  中除  $A'B$  外其他各邊仍皆各等於定長.

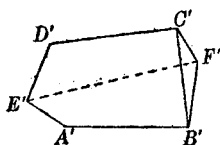
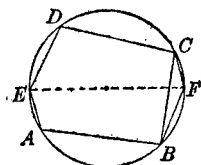
$\therefore ABCDEF$  之面積非極大與假設矛盾.



$\therefore \angle AEB = R\angle$ .  $\therefore E$  在  $AB$  爲直徑之圓周上. 因  $E$  任意一頂點, 故諸頂點皆在此圓周上.

$\therefore ABCDEF$  內接於以  $AB$  爲直徑之圓.  $Q. E. D.$

§ 507. 定理一六五 多角形各邊之長皆一定, 則內接於圓者面積爲極大.



〔假設〕  $ABCDE$  及  $A'B'C'D'E'$  中, 各雙邊皆依次相等,  $ABCDE$  內接於圓,  $A'B'C'D'E'$  不內接於圓.

〔終決〕  $ABCDE > A'B'C'D'E'$ .

〔證〕 作直徑  $EF$ . 聯  $BF, CF$ . 作  $\triangle B'C'F' \cong \triangle BCF$ . 聯  $E'F'$ . 則  $ABFE > A'B'F'E'$ ,  $EFCD > E'F'C'D'$ .

$\therefore ABFCDE > A'B'F'C'D'E'$ . 但  $\triangle BCF \cong \triangle B'C'F'$ .

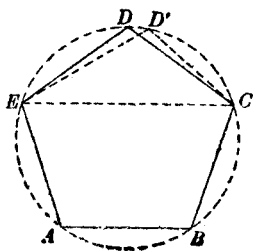
$\therefore ABCDE > A'B'C'D'E'$ .  $Q. E. D.$

§ 508. 定理一六六 周爲定長之多角形, 其面積極大者爲正多角形.

〔假設〕 多角形  $ABCDE$  周長一定, 面積極大.

〔終決〕  $ABCDE$  爲正多角形.

〔證〕 引任意相鄰二邊  $DE, DC$  之



兩端點成  $\triangle DEC$  則  $ABCDE = ABCE + \triangle DEC$ .

若  $DE \neq DC$ , 則在  $EC$  同側可作一  $\triangle D'EC$  令  $D'E = DC = \frac{1}{2}(DE + DC)$ , 而  $\triangle D'EC > \triangle DEC$ . 則得周長不變之多角形.

$$ABCD'E = ABCE + \triangle D'EC > ABCE + \triangle DEC.$$

$\therefore ABCDE$  面積非極大與假設矛盾.

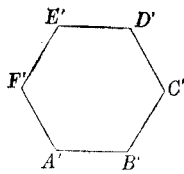
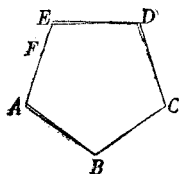
$\therefore DE = DC$ . 因  $DE, DC$  為任意相鄰二邊, 故凡相鄰二邊皆相等 即  $AB = BC = CD = DE = EA$ .

又  $ABCDE$  面積極大, 故為圓內接多角形.

$\therefore ABCDE$  為正多角形.

Q. E. D.

§ 09. 定理一六七 二正多角形周之長相等, 邊數不等, 則邊數多者面積大.



【假設】  $ABCDE$  為正五角形,  $A'B'C'D'E'F'$  為正六角形,  
 $AB + BC + CD + DE + EA = A'B' + B'C' + C'D' + D'E'$   
 $+ E'F' + F'A'$ .

【終決】  $A'B'C'D'E'F' > ABCDE$ .

【證】 在  $AE$  任作一點  $F$ , 則  $ABCDEF$  可視為一六角形而非正六角形.

$$\therefore A'B'C'D'E'F' > ABCDEF.$$

$$\text{即 } A'B'C'D'E'F' > ABCDE. \quad Q. E. D.$$

§ 510. 系一 圓面積大於與圓周等長之周之一切多角形.

§ 511. 系二 周等於定長之各形,圓之面積爲極大.

§ 512. 系三 二正多角形面積相等,邊數不等,則邊數多者

周小.

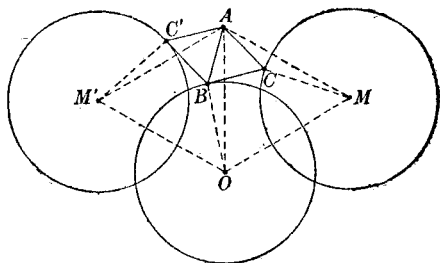
§ 513. 系四 面積相等之各形中,圓之周爲極小.

## 第三十二章 雜例

§ 514. 軌跡解法雜例 軌跡證法已見第二編. 凡軌跡之較為複雜者, 常重解析, 茲再舉數例如下:

(例一)  $\odot O$  為定圓,  $A$  為定點.  $B$  為  $\odot O$  圓周上任意一點.  $\triangle ABC$  為正三角形. 求  $C$  之軌跡.

[解析] 聯  $AO$  作正三角形  $AOM$ . 聯  $BO, CM$ . 則因  $AB = AC, AO = AM, \angle BAO = \angle CAM = (60^\circ - \angle OAC)$ .

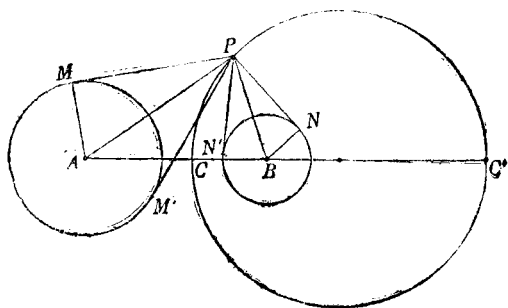


$\therefore \triangle ACM \cong \triangle ABO$ .

$\therefore MC = OB$ . 因  $A, O$  皆為定點, 故  $M$  亦為定點.  $OB$  為定圓半徑, 故  $MC$  為定長.

故  $C$  之軌跡為以  $AO$  為一邊所作正三角形  $AOM, AOM'$  之頂點  $M, M'$  為中心, 以  $\odot O$  半徑為半徑所作之二圓周.  $Q. E. F.$

(例二)  $\odot A, \odot B$  為二定圓.  $P$  為動點. 從  $P$  至  $\odot A$  作二切線  $PM, PM'$ , 至  $\odot B$  作二切線  $PN, PN'$ .  $\angle MPM' = \angle NPN'$ . 求  $P$



之軌跡.

〔解析〕 聯  $PA, PB, AM, BN$ . 則因  $\angle MPM' = \angle NPN'$ ,  
 $\therefore \angle MPA = \angle NPB$ , 又  $\angle AMP = \angle BNP = R\angle$ ,  
 $\therefore \triangle PAM \sim \triangle PBN$ .  $\therefore PA : PB = AM : BN$  即兩圓半徑之比.  
 故  $P$  之軌跡為以  $\odot A, \odot B$  之相似內心及外心所聯線分  $CC'$  為直  
 徑所作之圓周. Q. E. F.

(例三) 從動點  $P$  至四角形  $ABCD$  各頂點距離上正方形之  
 和一定. 求  $P$  之軌跡.

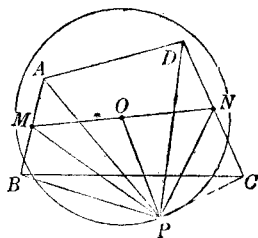
〔解析〕  $AB$  上取中點  $M, CD$  上取  
 中點  $N, MN$  上取中點  $O$ . 聯  $PM, PN, PO$ .

$$\text{則 } \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{PM}^2 + 2\overline{AM}^2,$$

$$\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 2\overline{PN}^2 + 2\overline{CN}^2,$$

$$\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 2(\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2) + 2(\overline{AM}^2 + \overline{CN}^2).$$

$$\text{又因 } \overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = 2\overline{PO}^2 + 2\overline{MO}^2.$$



$$\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 4\overline{PO}^2 + 4\overline{MO}^2 + 2\overline{AM}^2 + 2\overline{CN}^2.$$

$$\therefore 4\overline{PO}^2 = (\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2) - (4\overline{MO}^2 + 2\overline{AM}^2 + 2\overline{CN}^2).$$

因  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$  爲一定，又  $MO, AM, CN$  皆一定，

$\therefore 4\overline{PO}^2$  爲定量，故  $OP$  之長一定，但  $O$  之位置一定。故  $P$  之軌跡爲以  $O$  爲中心，定長  $OP$  爲半徑所作之圓周。 Q. E. F.

(例四)  $\triangle ABC$  之面積一定，頂點  $A$  之位置一定，頂角  $A$  之大小一定， $B$  在定直線  $l$  上移動。求  $C$  之軌跡。

〔解析〕 作  $AM \perp l$ 。

作  $\triangle MAN$  令合於條件。

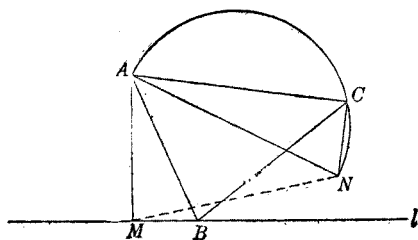
則因  $\angle MAN = \angle BAC$ ,

$$\therefore \angle MAB = \angle NAC. \quad \text{又因 } \triangle MAN = \triangle ABC,$$

$$\therefore AM \cdot AN = AB \cdot AC. \quad \therefore AM : AC = AB : AN.$$

$$\therefore \triangle ABM \sim \triangle ANC. \quad \therefore \angle ACN = \angle AMB = R\angle.$$

今  $\triangle AMN$  爲定三角形，故  $AN$  爲定線分， $\angle ACN$  爲直角。故  $C$  之軌跡爲以  $AN$  爲直徑所作之圓周。 Q. E. F.



### § 515. Menelaus 氏定理 Ceva 氏定理之應用

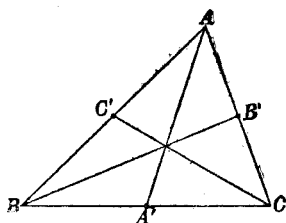
(例五) 三角形之三中線共點。

$A', B', C'$  各爲  $\triangle ABC$  邊  $BC, AC, AB$  之中點。

求證  $AA', BB', CC'$  共點。

〔證〕 因  $BA' = CA'$ ,  $AB' = CB'$ ,  
 $AC' = BC'$ ,  
 $\therefore \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = 1 \times 1 \times 1 = 1.$

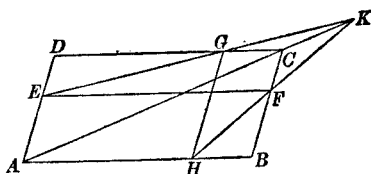
$\therefore AA', BB', CC'$  共點. *Q. E. D.*



〔註〕 本題為重心定理，第一編中已證過。但若應用 Ceva 氏定理證之如上，則便易多多矣。其他關於共點共線諸題，亦常可應用此定理或 Menelaus 氏定理證之。

(例六) 平行四邊形  $ABCD$

中， $EF, GH$  為各邊之任意平行線。



求證  $EG, AC, HF$  共點。

〔證〕 設  $EG, AC$  交於  $K$ 。則因直線  $EGK$  交  $\triangle ACD$  之各邊  $AD, DC, AC$  於  $E, G, K$ 。

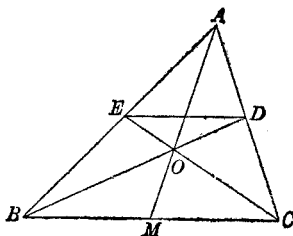
$$\therefore \frac{AE}{DE} \cdot \frac{DG}{CG} \cdot \frac{CK}{AK} = 1. \text{ 但 } AE = BF, DE = CF, DG = AH,$$

$$CG = BH, \therefore \frac{BF}{CF} \cdot \frac{AH}{BH} \cdot \frac{CK}{AK} = 1. \therefore H, F, K \text{ 共線.}$$

故  $HF$  過  $K$ 。即  $EG, AC, HF$  共點。

*Q. E. D.*

(例七)  $O$  為  $\triangle ABC$  中線  $AM$  上任意一點。  $BO, CO$  之延線各交  $AC, AB$  於  $D, E$ 。



求證  $ED \parallel BC$ .

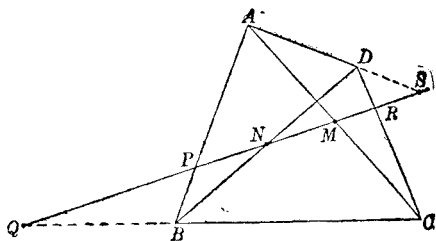
〔證〕 因  $AM, BD, CE$  共點.

$$\therefore \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{AE}{BE} = 1. \quad \text{因 } BM = MC.$$

$$\therefore \frac{CD}{AD} \cdot \frac{AE}{BE} = 1, \quad \therefore \frac{CD}{AD} = \frac{BE}{AE} \quad \therefore ED \parallel BC.$$

Q. E. D.

(例八)  $M, N$  爲四角形  $ABCD$  對角線  $AC, BD$  之中點. 直線  $MN$  交  $AB, BC, CD, AD$  於  $P, Q, R, S$ .



求證 (1)  $\frac{AP}{BP} = \frac{CQ}{BQ} = \frac{CR}{DR} = \frac{AS}{DS}$  (2)  $\frac{PM}{QM} = \frac{RM}{SM} = \frac{PN}{SN} = \frac{RN}{QN}$

〔證〕 (1)  $QS$  交  $\triangle ABC$  邊  $AB, BC, AC$  於  $P, Q, M$ .

$$\therefore \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CM}{AM} = 1. \quad \because AM = CM, \quad \therefore \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{CQ} = 1.$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{CQ}{BQ}. \quad \text{又 } QS \text{ 交 } \triangle BCD \text{ 邊 } BC, CD, BD \text{ 於 } Q, R, N.$$

$$\therefore \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CR}{DR} \cdot \frac{DN}{BN} = 1. \quad \because BN = DN, \quad \therefore \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CR}{DR} = 1,$$

$$\therefore \frac{CQ}{BQ} = \frac{CR}{DR}. \quad \text{同樣在 } \triangle ACD \text{ 中可證 } \frac{CR}{DR} = \frac{AS}{DS}.$$



$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{CQ}{BQ} = \frac{CR}{DR} = \frac{AS}{DS}$$

(2)  $AC$  交  $\triangle PQB$  邊  $PQ, QB, PB$  於  $M, U, A$ .

$$\therefore \frac{PM}{QM} \cdot \frac{QC}{BC} \cdot \frac{BA}{PA} = 1. \quad \text{又 } AC \text{ 交 } \triangle RSD \text{ 邊 } RS, SD, RD$$

於  $M, A, C. \quad \therefore \frac{RM}{SM} \cdot \frac{SA}{DA} \cdot \frac{DC}{RC} = 1.$

$$\therefore \frac{PM}{QM} \cdot \frac{QC}{BC} \cdot \frac{BA}{PA} = \frac{RM}{SM} \cdot \frac{SA}{DA} \cdot \frac{DC}{RC}$$

$$\therefore \frac{CQ}{BQ} = \frac{AS}{DS} \quad \therefore \frac{CQ}{CQ - BQ} = \frac{AS}{AS - DS}, \quad \text{即 } \frac{QC}{BC} = \frac{SA}{DA}$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{CR}{DR} \quad \therefore \frac{AP}{AP + BP} = \frac{CR}{CR + DR}, \quad \text{即 } \frac{PA}{BA} = \frac{RC}{DC}$$

$$\therefore \frac{PM}{QM} = \frac{RM}{SM}$$

又  $BD$  交  $\triangle PSA$  邊  $PS, SA, PA$  於  $N, D, B$ .

$$\therefore \frac{PN}{SN} \cdot \frac{SD}{AD} \cdot \frac{AB}{PB} = 1$$

$$\therefore \frac{RM}{SM} \cdot \frac{SA}{DA} \cdot \frac{DC}{RC} = \frac{PN}{SN} \cdot \frac{SD}{AD} \cdot \frac{AB}{PB}$$

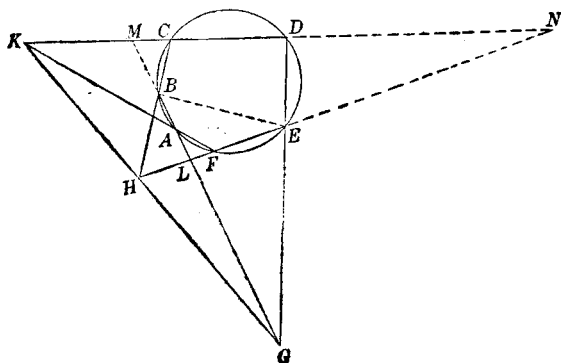
$$\therefore \frac{SA}{DA} \cdot \frac{DC}{RC} \cdot \frac{AD}{SD} \cdot \frac{PB}{AB} = \frac{SA}{SD} \cdot \frac{DC}{RC} \cdot \frac{PB}{AB} = \frac{PA}{PB} \cdot \frac{DC}{RC} \cdot \frac{PB}{AB}$$

$$= \frac{PA}{AB} \cdot \frac{DC}{RC} = \frac{RC}{DC} \cdot \frac{DC}{RC} = 1.$$

$$\therefore \frac{SA}{DA} \cdot \frac{DC}{RC} = \frac{SD}{AD} \cdot \frac{AB}{PB} \quad \therefore \frac{RM}{SM} = \frac{PN}{SN}$$

同樣可證  $\frac{PN}{SN} = \frac{RN}{QN} \quad \therefore \frac{PM}{QM} = \frac{RM}{SM} = \frac{PN}{SN} = \frac{RN}{QN} \quad Q. E. D.$

(例九) 圓內接六角形三雙對邊之交點為共線點.



[證] 圓內接六角形  $ABCDEF$  邊  $AB, DE$  交於  $G$ ;  $BC, EF$  交於  $H$ ;  $CD, FA$  交於  $K$ . 延長  $AB, CD, EF$  互交於  $L, M, N$  成  $\triangle LMN$ .  $BC$  截其各邊  $LM, MN, NL$  於  $B, C, H$ .

$$\therefore \frac{LB}{MB} \cdot \frac{MC}{NC} \cdot \frac{NH}{LH} = 1 \dots\dots\dots (1)$$

又  $DE$  截其各邊  $LM, MN, NL$  於  $G, D, E$ ,

$$\therefore \frac{LG}{MG} \cdot \frac{MD}{ND} \cdot \frac{NE}{LE} = 1 \dots\dots\dots (2)$$

又  $AF$  截其各邊  $LM, MN, NL$  於  $A, K, F$ ,

$$\therefore \frac{LA}{MA} \cdot \frac{MK}{NK} \cdot \frac{NF}{LF} = 1 \dots\dots\dots(3)$$

聯  $BE$ , 則  $LA \cdot LB = LF \cdot LE$ ,

$$\therefore \frac{LF}{LA} \cdot \frac{LE}{LB} = 1 \dots\dots\dots(4)$$

同理  $\frac{MA}{MD} \cdot \frac{MB}{MC} = 1 \dots\dots\dots(5)$

$$\frac{NC}{NF} \cdot \frac{ND}{NE} = 1 \dots\dots\dots(6)$$

從 (1), (2), (3), (4), (5), (6) 作相乘比, 得

$$\frac{NH}{LH} \cdot \frac{LG}{MG} \cdot \frac{MK}{NK} = 1.$$

今  $H, G, K$  各在  $\triangle LMN$  邊  $LN, LM, MN$  之延線上.

$\therefore H, G, K$  共線. Q. E. D.

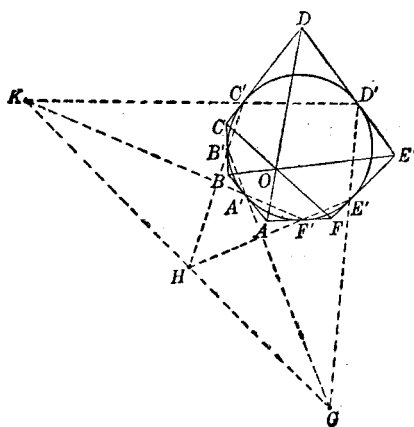
〔註〕 本例名曰 Pascal 氏定理.

§ 516. 極線極點之應用

用

(例一○) 圓外接六角形

形各雙對頂點之聯線為共點線.



〔證〕  $ABCDEF$  為圓

外切六角形, 其各邊  $AB, BC,$

$CD, DE, EF, FA$  切圓於  $A', B', C', D', E', F'$ .

$A'B', D'E'$  交於  $G, B'C', E'F'$  交於  $H, C'D', F'A'$  交於  $K$ .

$A$  爲  $A'F'$  之極點,  $D$  爲  $C'D'$  之極點,

故  $AD$  之極點爲  $A'F', C'D'$  之交點  $K$ .

同理  $BE$  之極點爲  $A'B', D'E'$  之交點  $G$ ,

$CF$  之極點爲  $B'C', E'F'$  之交點  $H$ .

故  $KG$  之極點爲  $AD, BE$  之交點  $O$ ,

$GH$  之極點爲  $BE, CF$  之交點  $O'$ .

然從上例知  $KG, GH$  爲一直線, 故  $O'$  合於  $O$ .

$\therefore AD, BE, CF$  共點.

Q. E. D.

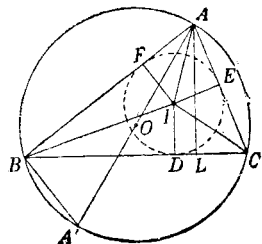
(註) 本例名曰 Brianchon 氏定理.

### § 517. 關於三角形之計算題

(例一一)  $Rr = \frac{abc}{4s}$  [ $a, b, c$  爲  $\triangle ABC$  三邊之度數,  $R, r$  爲

其外接圓及內切圓半徑,  $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ].

[證]  $O$  爲  $\triangle ABC$  之外心.  $I$  爲  $\triangle ABC$  之內心.  $AOA' = 2R$ .  $ID = IE = IF = r$ . 作  $AL \perp BC$ . 則因  $\angle ABA' = R\angle = \angle AIC$ , 又  $\angle AA'B = \angle C$ ,  $\therefore \triangle A'AB \sim \triangle ACL$ .



$$\therefore AA' : AB = AC : AL \quad \therefore AB \cdot AC = 2R \cdot AL.$$

$$\therefore R = \frac{bc}{2AL} = \frac{bc \cdot BC}{2AL \cdot BC} = \frac{abc}{4\Delta ABC}.$$

$$\text{又因 } \Delta ABC = \Delta IBC + \Delta IAC + \Delta IAB$$

$$= \frac{1}{2} ID \cdot BC + \frac{1}{2} IE \cdot AC + \frac{1}{2} IF \cdot AB$$

$$= \frac{1}{2} r(a+b+c) = rs.$$

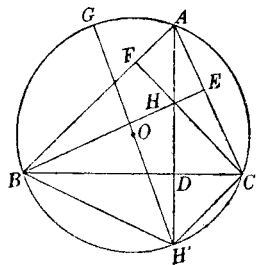
$$\therefore r = \frac{\Delta ABC}{s}.$$

$$\therefore Rr = \frac{abc}{4\Delta ABC} \cdot \frac{\Delta ABC}{s} = \frac{abc}{4s}. \quad \text{Q. E. D.}$$

(例一二)  $H$  爲  $\Delta ABC$  之垂心,  $AH, BH, CH$  之度數各爲

$$x, y, z. \text{ 則 } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{xyz}.$$

[證]  $H$  爲  $\Delta ABC$  之垂心,  $O$  爲其外心. 延長  $AHD$  交  $\odot ABC$  於  $H'$ . 作直徑  $H'OG$ . 聯  $BH', CH'$ . 則  $BH' = BH = y, CH' = CH = z, H'D = HD$ .



$$\therefore BH' \cdot CH' = H'G \cdot H'D.$$

$$\therefore yz = 2R \cdot HD. \text{ 同理 } xz = 2R \cdot HE, \quad xy = 2R \cdot HF.$$

$$\therefore \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2R(a \cdot HD + b \cdot HE + c \cdot HF)}{xyz} \\
 &= \frac{2R(BC \cdot HD + AC \cdot HE + AB \cdot HF)}{xyz} \\
 &= \frac{2R(2\triangle HBC + 2\triangle HAC + 2\triangle HAB)}{xyz} \\
 &= \frac{2R \cdot 2\triangle ABC}{xyz}
 \end{aligned}$$

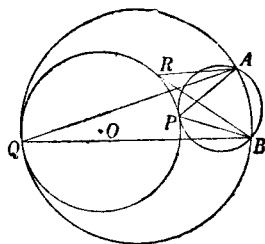
然從例一一已證得  $R = \frac{abc}{4\triangle ABC}$ .

$$\therefore \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{xyz}.$$

Q. E. D.

### § 518. 極大極小例題

(例一三)  $A, B$  爲定圓  $O$  外二定點.  $\odot ABP$  與  $\odot O$  外切於  $P$ .  $\odot ABQ$  與  $\odot O$  內切於  $Q$ . 則  $\odot O$  周上一切點爲  $A, B$  所張之角, 其中以  $\angle APB$  爲最大,  $\angle AQB$  爲最小.



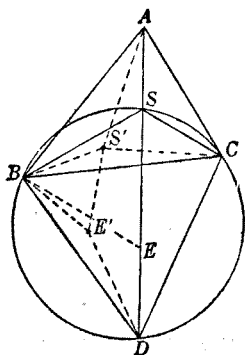
[證] 設  $R$  爲  $\odot O$  周上任意一點. 則因  $\odot ABP$  與  $\odot O$  外切, 故  $R$  在  $\odot ABP$  外,  $\therefore \angle ARB < \angle APB$ . 又因  $\odot ABQ$  與  $\odot O$  內切, 故  $R$  在  $\odot ABQ$  內,  $\therefore \angle ARB > \angle AQB$ .

$\therefore \angle APB$  爲最大,  $\angle AQB$  爲最小.

Q. E. D.

(例一四)  $\triangle ABC$  內一點  $S$ , 當  $\angle BSC = \angle CSA = \angle ASB = 120^\circ$  時,  $SA + SB + SC$  為極小.

〔證〕  $AS$  延線交  $\odot BCS$  於  $D$ . 聯  $BD$ ,  $CD$ .  $\because \angle BSC = 120^\circ, \therefore \angle BDC = 60^\circ$ .  
 又  $\angle DBC = \angle DSC = 180^\circ - \angle ASC$   
 $= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .



$\therefore \triangle BCD$  為正三角形. 作  $BE$  令  $\angle DBE = \angle CBS$  交  $AD$  於  $E$ . 則  $\angle SBE = \angle CBD = 60^\circ$ . 又  $\angle BSD = \angle BCD = 60^\circ, \therefore \triangle BES$  為正三角形,  
 $\therefore BS = SE$ . 又  $BE = BS, BD = BC, \therefore \triangle BCS \cong \triangle BDE$ .  
 $\therefore SC = ED. \therefore SA + SB + SC = AS + SE + ED = AD$

在  $\triangle ABC$  中任意取其他一點  $S'$ . 聯  $S'A, S'B, S'C$ . 作  $BE'$  令  $\angle DBE' = \angle CBS', BE' = BS'$ . 聯  $S'E', E'D$ . 則  $\angle E'BS' = \angle DBC = 60^\circ, \therefore \triangle BE'S'$  為正三角形.  $\therefore S'B = S'E'$ .  
 又  $\triangle BCS' \cong \triangle BDE', \therefore SC = E'D$ .

$\therefore S'A + S'B + S'C = S'A + S'E' + E'D > AD$ .

$\therefore SA + SB + SC < S'A + S'B + S'C$ .

$\therefore SA + SB + SC$  為極小.

Q. E. D.

(例一五)  $G$  為  $\triangle ABC$  之重心, 則  $\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2$  為極小.

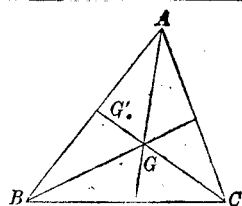
〔證〕 設  $G'$  為其他任意一點. 則

$$\overline{G'A}^2 + \overline{G'B}^2 + \overline{G'C}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + 3\overline{GG'}^2$$

(按此爲面積例題之一,學者試自證之).

$$\text{故 } \overline{G'A}^2 + \overline{G'B}^2 + \overline{G'C}^2 > \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2$$

$$\therefore \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 \text{ 爲極小. } Q.E.D.$$



(例一六) 定圓內接三角形中以正三角形面積爲極大.

〔證〕 設  $\triangle ABC$  爲任意三角形.

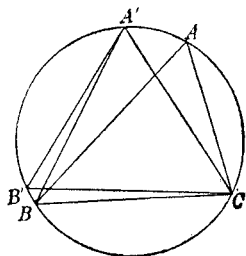
$AB \neq AC$ . 在優  $\widehat{BC}$  上取中點  $A'$ . 聯

$A'B, A'C$ . 則  $\triangle ABC < \triangle A'BC$  (因

$BC$  爲共底而  $\triangle A'BC$  之高大). 設

$A'B \neq BC$ , 則再在優  $\widehat{A'C}$  上取中點

$B'$ . 聯  $A'B', CB'$ . 則同上  $\triangle A'BC < \triangle A'B'C$ .



故若三角形之有二邊不等者決非最大形.

故最大者必三邊相等.

$\therefore$  正三角形面積爲極大.

Q. E. D.

## 習 題 二 十 五

1. 二圓平行直徑兩端聯線必過此二圓之相似中心.
2. 從  $\odot O_1, \odot O_2$  之相似中心  $P$ , 作割線交二圓於  $A_1, B_1$  及  $A_2, B_2$ . 再過  $P$  作切線切二圓於  $T_1, T_2$ . 則  $T_1, T_2, A_2, B_1$  共圓.  $T_1, T_2, B_2, A_1$  共圓.



3. 從二圓相似中心作任意二割線, 則一割線上之非對應點與他割線上之非對應點共圓.

(注意) 本題共有四組共圓點.

4.  $\triangle ABC$  中,  $AB \neq AC$ .  $AB, AC$  上各取  $D, E$  令  $BD = EC$ .  $DE, BC$  延線交於  $F$ . 則  $FD : FE = AC : AB$ .

5.  $\triangle ABC$  中, 在  $AB$  上取  $B'$ , 在  $AC$  延線上取  $C'$  令  $BB' = CC'$ .  $B'C'$  交  $BC$  於  $D$ . 則  $AB \cdot B'D = AC \cdot C'D$ .

6.  $AB$  爲圓之直徑. 從  $A$  作弦  $AP_1, AP_2, AP_3$  各交  $AB$  之垂線於  $Q_1, Q_2, Q_3$ . 則  $AP_1 \cdot AQ_1 = AP_2 \cdot AQ_2 = AP_3 \cdot AQ_3$ .

7.  $A$  爲定點,  $XY$  爲定直線.  $Q$  爲  $XY$  上任意一點.  $P$  爲  $AQ$  上一點而  $AQ \cdot AP$  之面積一定. 則  $P$  之軌跡爲一圓周.

8.  $A$  爲定點,  $\odot O$  爲定圓.  $Q$  爲  $\odot O$  圓周上任意一點.  $P$  爲  $AQ$  上一點而  $AQ \cdot AP$  之面積一定. 求  $P$  之軌跡.

9.  $A$  爲定點,  $XY$  爲定直線.  $B$  爲  $XY$  上任意一點.  $\triangle ABC$  爲正三角形. 求  $C$  之軌跡.

10.  $A$  爲定點,  $\odot O$  爲定圓.  $B$  爲  $\odot O$  圓周上任意一點.  $\triangle ABC$  爲正三角形. 求  $C$  之軌跡.

11.  $AB, A'B'$  爲  $\odot O$  之二直徑.  $P, Q$  分  $AB$  於調和.  $P', Q'$  分  $A'B'$  於調和. 則  $P, Q, P', Q'$  共圓.

12.  $D, E, F$  爲  $\triangle ABC$  內接圓與各邊  $BC, AC, AB$  之切點.

聯  $EF$  延長之交  $BC$  之延線於  $D'$ . 則  $B, D, C, D'$  爲調和點列.

13.  $I$  爲  $\triangle ABC$  之內心,  $I_1$  爲  $\triangle ABC$   $\angle A$  內之旁心.  $AI_1$  交  $BC$  於  $D$ . 則  $A, I, D, I_1$  爲調和點列.

14. 圓內接正方形與同圓半圓內接正方形面積之比等於  $5:2$ .

15. 同圓或等圓內接三角形面積之比等於其三邊度數相乘積之比.

16.  $\triangle ABC$  中,  $AC > BC$ ,  $AD, BE$  爲高. 則  $AC + BE > BC + AD$ .

17.  $\triangle ABC$  中,  $\angle A$  爲直角,  $AD$  爲高. 則  $AD + BC > AB + AC$ .

18. 一動點至一定圓所作二切線之夾角恆等於至他一定圓所作二切線之夾角. 求此動點之軌跡.

19.  $\triangle ABC$  中,  $D, E$  各在  $AB, AC$  上, 而  $DE \parallel BC$ .  $BE, CD$  交於  $F$ . 則  $AF$  過  $BC$  之中點.

20. 前題之  $AF$  交  $DE$  於  $H$ , 交  $BC$  於  $K$ . 則  $A, H, F, K$  爲調和點列.

21.  $P, Q$  爲  $\triangle ABC$  邊  $AB, AC$  上各一點, 而  $AP = AQ$ .  $\triangle ABC$  之中線  $AM$  交  $PQ$  於  $O$ . 則  $PO : OQ = AC : AB$ .

22.  $O$  爲  $\triangle ABC$  內任意一點. 作  $\angle BOC, \angle AOC, \angle AOB$  之

等分線  $OP, OQ, OR$  各交  $BC, AC, AB$  於  $P, Q, R$ . 則

$$\frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = 1.$$

23. 以  $\odot O$  之半徑  $OA$  爲直徑作小圓. 從  $OA$  上任意點作垂線交大圓周於  $P$ , 小圓周於  $Q$ . 則  $\overline{AP}^2 = 2 \overline{AQ}^2$ .

24. 若四角形同時可內接於一圓及外切於他圓, 則其對邊上對於內圓切點之聯線互爲垂線.

25. 二等邊三角形底邊  $BC$  之平行線交  $AB$  於  $D$ , 交  $AC$  於  $E$ . 求證  $\overline{BE}^2 - \overline{EC}^2 = BC \cdot DE$ .

26.  $M, N$  爲四角形  $ABCD$  兩對角線  $AC, BD$  之中點.  $MN$  之延線交  $AB$  於  $P$ , 交  $CD$  於  $Q$ . 求證  $\triangle ABQ = \triangle CDP = \frac{1}{2} ABCD$ .

27. 過三角形重心引任意直線分原形爲一個四角形及一個三角形, 則四角形之面積較三角形爲大.

28. 圓內接矩形中, 以正方形之面積爲最大.

29. 二圓交於  $A, B$ . 過  $A$  作二割線  $ACD, AEF$  各交二圓於  $C, D, E, F$ , 且與  $AB$  成等角, 則  $CD = EF$ .

30.  $AM$  爲  $\triangle ABC$  之中線,  $AD$  爲  $\angle A$  之等分線. 從  $C$  作  $AD$  之垂線交  $AD$  於  $P$ , 交  $AM$  於  $Q$ . 則  $QD \parallel AC$ .

31.  $O$  爲  $\triangle ABC$  中線  $AD$  之中點.  $BO, CO$  之延線各交  $AC, AB$  於  $E, F$ . 求證  $\frac{AE}{CE} = \frac{AF}{BF} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{EO}{BO} = \frac{FO}{CO} = \frac{1}{3}$ .

32. 從  $\triangle ABC$  各角頂至對邊引共點三線  $AD, BE, CF$ . 若  $CE = \frac{1}{4} AC, AF = \frac{1}{4} AB$ , 則  $BD = \frac{9}{10} BC$ .

33. 一動點與相交二定直線距離之和爲一定長, 求此動點之軌跡.

34. 一動點與相交二定直線距離之差爲一定長, 求此動點之軌跡.

35. 四角形  $ABCD$  內一點  $O$ ,  $OA + OB + OC + OD$  爲極小. 則  $O$  爲對角線  $AC, BD$  之交點.

36. 聯矩形各邊上一點成一四角形. 當此四角形各邊與矩形對角線平行時, 其周爲最小.

37. 一直線截三角形之三邊  $AB, AC, BC$  於  $D, E, F$ . 若  $BD = CE$ , 則  $AB : AC = EF : DF$ .

38.  $A', B', C'$  各爲  $\triangle ABC$  邊  $BC, AC, AB$  之中點.  $H$  爲  $\triangle ABC$  之垂心.  $A'', B'', C''$  各爲  $AH, BH, CH$  之中點. 求證  $A'A'', B'B'', C'C''$  共點.

39.  $\square ABCD$  中, 從  $A, C$  向  $BD$  上作垂線  $AM, CN$ , 從  $B, D$  向  $AC$  上作垂線  $BP, DQ$ ,  $M, N, P, Q$  各爲垂足. 則  $MQNP$  亦爲平行四邊形, 且與原形  $ABCD$  爲相似形.

40. 從線分  $AB$  之兩端  $A, B$  各作垂線  $AC, BD$ .  $AD, BC$  交於  $E$ . 作  $EF \perp AB$ , 垂足爲  $F$ . 則  $\angle AFC = \angle BFD$ .

41. 四角形  $ABCD$  中, 若  $\angle A, \angle C$  兩角等分線之交點在  $BD$  上, 則  $\angle B, \angle D$  兩角等分線之交點在  $AC$  上.

42.  $l, m, n$  爲  $\triangle ABC$  之三個高, 則

$$2R(l+m+n) = bc + ca + ab.$$

43.  $\triangle ABC$  三邊之長  $a, b, c$  成等差級數,  $b$  爲中項, 則  $6Rr = ac$ .

(可應用例一一證之)

44. 設從  $\triangle ABC$  外心  $O$  至  $BC, AC, AB$  之距離各爲  $l, m, n$ , 則  $4\left(\frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n}\right) = \frac{abc}{lmn}$ .

45.  $P$  爲正方形  $ABCD$  外接圓上任意點. 求證  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 2(\text{圓直徑})^2$ .

46.  $A$  爲定圓  $O$  內一定點,  $AB, AC$  爲任意二垂直線分交  $\odot O$  於  $B, C$ . 求證  $BC$  中點之軌跡爲一圓.

47. 在  $AB$  爲直徑之半圓內, 兩弦  $AD, BE$  交於  $F$ . 求證  $AF \cdot AD + BF \cdot BE = \overline{AB}^2$ .

48. 弧形橋洞離水面高 18 尺, 水面闊 60 尺. 求此橋洞弧半徑之長.

49.  $\triangle ABC$  內三個高  $AD, BE, CF$  交於  $H$ . 求證  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 2(AD \cdot AH + BE \cdot BH + CF \cdot CH)$ .

50. 過  $\triangle ABC$  重心  $G$  作任意直線分原形爲一三角形及一

四角形，則四角形面積大於三角形之面積。

51. 四角形  $ABCD$ ，對邊  $BA, CD$  交於  $E$ ， $AD, BC$  交於  $F$ ，對角線  $AC, BD$  交於  $O$ 。過  $O$  作  $BC$  之平行線交  $AF$  於  $G$ ，交  $EF$  於  $H$ 。則  $OG = GH$ 。

52.  $ABCD$  為圓內接四角形，從外接圓  $\sphericalangle AB$  中點  $E$  聯  $EC$  交  $BD$  於  $F$ ， $ED$  交  $AC$  於  $G$ 。則  $EF : EG = ED : EC$ 。

53.  $ABCD$  為圓外切四角形，各邊切圓於  $A', B', C', D'$ 。求證  $AC, BD, A'C', B'D'$  會於一點。

54. 從半圓直徑  $AB$  兩端點引  $AB$  之垂線  $AC, BD$ 。從半圓周上任意點  $E$  引切線交  $AC$  於  $C$ ，交  $BD$  於  $D$ 。從  $E$  作  $EG \perp AB$ ， $EG, BC$  交於  $F$ 。則  $F$  為  $EG$  之中點。

55. 上題中求證  $AD, BC, EG$  共點。

56. 兩圓內切於  $A$ ， $AB$  為內圓之直徑。從內圓圓周上任意一點  $P$  引  $AB$  之垂線交外圓圓周於  $P'$ 。則  $AP : AP'$  為定值。

57. 圓內弦  $CD \perp$  直徑  $AB$ 。  $E$  為  $CD$  上任意點。  $AE, BE$  延線各交圓周於  $F, G$ 。求證  $CF : DF = CG : DG$ 。

58. 一截線截  $\odot O$  於  $A, B$ ，截  $\odot O'$  於  $A', B'$  而  $AB = A'B'$ 。從  $A$  作  $\odot O$  切線  $AT$ 。從  $A'$  作  $\odot O'$  切線  $A'T$  與  $AT$  交於  $T$ 。則  $AT : A'T = r : r'$  ( $r, r'$  各為  $\odot O, \odot O'$  之半徑)。

59.  $\triangle ABC$  為正三角形。  $D$  為  $AB$  上任意點。以  $AD, DB$  為

邊各向形外再作正三角形  $ADE, DBF$ .  $\triangle ABC, \triangle ADE, \triangle BDF$  之重心各爲  $G, H, K$ . 求證  $\triangle GHK$  亦爲正三角形.

60.  $\triangle ABC$  中,  $D$  爲  $AB$  上點,  $F$  爲  $AB$  延線上點而  $AD = BF$ . 又  $E$  爲  $AC$  上點,  $G$  爲  $AC$  延線上點而  $AE = CG$ .  $BG, CF$  交於  $H$ . 求證  $\triangle HFG = \triangle HBC + \triangle ADE$ .

61. 直角  $\triangle ABC$  中,  $\angle A$  爲直角,  $AD$  爲高.  $DE \perp AB, DF \perp AC$ . 求證  $\triangle BEF : \triangle CEF = (AB : AC)^4$ .

62. 直角  $\triangle ABC$  中,  $A$  爲直角. 以  $AB, AC$  爲邊各向形外作正方形  $ABDE, ACFG$ .  $BF, CD$  各交  $AC, AB$  於  $H, K$ . 求證  $\overline{AH}^2 = \overline{AK}^2 = BH \cdot CK$

63.  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  內接於同圓, 則  $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = (AB : A'B')(AC : A'C')(BC : B'C')$ .

64.  $\odot O$  內接正六角形  $ABCDEF$ .  $AC$  交  $OB$  於  $A'$ .  $A'D$  交  $OC$  於  $B'$ .  $B'E$  交  $OD$  於  $C'$ .  $C'F$  交  $OE$  於  $D'$ .  $D'A$  交  $OF$  於  $E'$ .... 則  $OA' = \frac{1}{2}r, OB' = \frac{1}{3}r, OC' = \frac{1}{4}r, OD' = \frac{1}{5}r, OE' = \frac{1}{6}r, \dots$  ( $r$  爲  $\odot O$  之半徑).

65.  $\triangle ABC$  之內切圓, 切  $BC, AC, AB$  於  $X, Y, Z$ . 求證  $AX, BY, CZ$  共點.

66. 四角形  $ABCD$  邊  $AB, BC, CD, DA$  上各點  $E, F, G, H$ . 若  $AC, EF, GH$  共點, 則  $BD, EH, FG$  亦共點.

67. 定三角形內接矩形面積極大等於原三角形面積之半.

68.  $\triangle ABC$  底  $BC$  上一點  $P$ . 從  $P$  作  $PD \perp AB, PE \perp AC$ . 則當  $BP = PC$  時,  $PD \cdot PE$  面積為極大

69.  $\triangle ABC$  中,  $AM$  為中線,  $AD$  為  $\angle A$  之等分角線. 從  $B$  作  $AD$  之垂線交  $AM$  於  $E$ , 交  $AD$  於  $F$ . 則  $MF \parallel AC, ED \parallel AB$ .

70.  $P$  為定角  $\angle XOY$  內一定點. 過  $P$  作一直線交  $OX, OY$  於  $A, B$ . 則當  $OA = OB$  時,  $PA \cdot PB$  面積為極小.



## 第七編 作圖題解法

### 第三十三章 作圖題解法

§ 519. 軌跡交截法 凡作圖題之可先決一點者，通常可用軌跡交截法解之。茲爲便利計，將需用之軌跡列舉如下：

軌跡 1. 與一定點距離爲定長之點之軌跡爲以定點爲中心，定長爲半徑所作之圓周。 (定理七三)

軌跡 2. 與二定點等距之點之軌跡爲二定點所聯線分之垂直等分線。 (定理七四)

軌跡 3. 與相交二定直線等距之點之軌跡爲其交角之一雙等分線。 (定理七五)

軌跡 4. 與平行二定直線等距之點之軌跡爲過其公垂線中點之一平行線。 (定理七六)

軌跡 5. 與一定直線距離爲定長之點之軌跡爲此直線兩旁之一雙平行線。 (定理七七)

軌跡 6. 一角之大小一定其二邊各過一定點，則此角頂點之軌跡爲以二定點所聯線分爲弦，兩側之一雙弓形弧。 (定理七八)

軌跡 7. 與二定點距離平方之和等於定面積之點之軌跡爲一圓周. (定理九二)

軌跡 8. 與二定點距離平方之差等於定面積之點之軌跡爲一直線. (定理九三)

軌跡 9. 與二定點距離之比爲定比之點之軌跡爲一圓周. (定理一〇三)

軌跡 10. 與二相交定直線距離之比爲定比之點之軌跡爲一雙直線. (定理一一四)

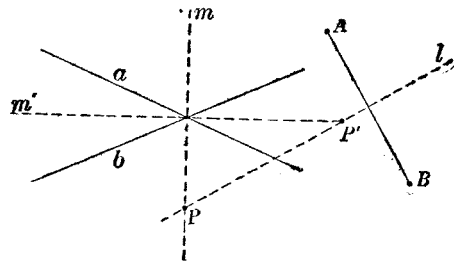
以上諸條爲軌跡之最重要者. 尤適用於解作圖題. 茲舉例如下:

(例一) 求作一點令與所設二定點等距, 又與所設二定直線等距.

$A, B$  爲所設二定點.

$a, b$  爲所設二定直線.  $P$

爲所求之點. 因  $P$  與  $A, B$  等距, 故  $P$  必在  $AB$  之垂



直等分線  $l$  上(軌跡 2). 又因  $P$  與  $a, b$  等距, 故  $P$  必在  $a, b$  交角之等分線  $m$  或  $m'$  上(軌跡 3). 故得解法如下:

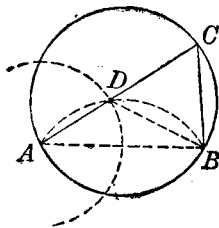
[解法] 聯  $AB$ . 作  $AB$  之垂直等分線  $l$ . 作  $a, b$  交角之垂直

等分線  $m, m'$ , 交  $l$  於  $P, P'$ .  $P, P'$  卽所求之點. (證略) Q. E. F.

〔討論〕 本題有二解答. 但若  $l$  平行於  $m$  或  $m'$  時, 則僅有一解答. 又若  $a, b$  為平行線時, 則根據 (軌跡 4) 作之僅有一解答. 又若  $a \parallel b$  而  $AB$  為  $a, b$  之公垂線時, 則無解答.

(例二) 定圓周上有二定點  $A, B$ . 求在此圓周上再取一點  $C$ , 令  $AC - BC$  等於定長  $d$ .

〔解析〕 設  $C$  為所求之點. 在  $AC$  上取  $D$  令  $CD = CB$ . 則  $AC - BC = AC - DC = AD = d$ . 故  $D$  在以  $A$  為中心,  $d$  為半徑之圓周上 (軌跡 1). 又因  $CD = CB$ ,



$$\begin{aligned}\therefore \angle CDB = \angle CBD &= \frac{1}{2} [\angle CDB + \angle CBD] \\ &= \frac{1}{2} [180^\circ - \angle C] = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle C.\end{aligned}$$

$$\therefore \angle ADB = 180^\circ - \angle CDB = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle C) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C.$$

因  $\angle C$  之大小一定, 故  $\angle ADB$  之大小一定. 故  $D$  在  $AB$  為弦  $90^\circ + \frac{1}{2} \angle C$  為圓周角之弓形弧上 (軌跡 6). 故可先得  $D$  點. 延長

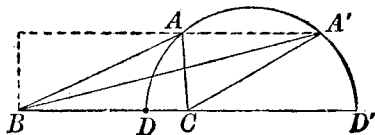
$AD$  交所設圓周於  $C$ . 即所求解答. (解法及證略) Q. E. F.

(例三) 已知三角形之底及高, 又知其二邊之比作此三角形.

設已知之底為  $a$ , 高為  $h_a$ ,

二邊之比為  $m : n$ .

〔解法〕 先作  $BC = a$ . 在

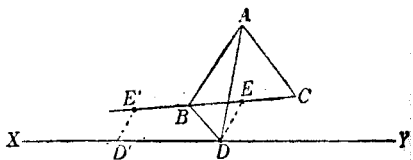


$BC$  上取內、外分點  $D, D'$  令  $BD : DC = BD' : D'C = m : n$ . 以  $DD'$  爲直徑作半圓周. 再作  $BC$  之平行線令與  $BC$  距離爲  $h_a$  交半圓周於  $A, A'$ . 則  $\triangle ABC, \triangle A'BC$  皆爲所求. (證略)  $Q. E. F.$

(例四)  $A, B, C$  爲三定點,  $XY$  爲定直線. 求在  $XY$  上作一點  $D$  令  $\triangle ABD = \frac{1}{2} \triangle ABC$

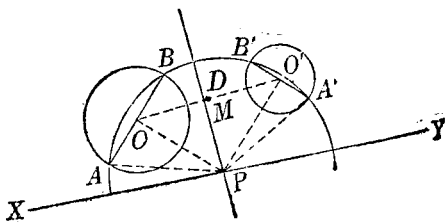
[解析] 設  $D$  爲所求之點. 因  $\triangle DAB = \frac{1}{2} \triangle ABC$ ,

$\therefore D$  與  $AB$  之距離爲  $C$  與  $AB$  距離之半. 故爲定長. 故  $D$  之軌跡爲  $AB$  之一雙平行線(軌跡 5). 故在  $BC$  上取  $E, E'$  令  $BE = BE' = \frac{1}{2} BC$ . 過  $E, E'$  作  $AB$  之平行線交  $XY$  於  $D, D'$ , 卽解答.  $Q. E. F.$



(例五)  $\odot O, \odot O'$  爲二定圓,  $XY$  爲定直線. 求作一圓, 其圓周等分  $\odot O, \odot O'$  二圓周 其中心在  $XY$  上.

[解析] 設  $\odot P$  爲所求之圓, 其圓周交  $\odot O$  於  $A, B$ , 交  $\odot O'$  於  $A', B'$ . 則  $AB, A'B'$  各爲  $\odot O, \odot O'$  之直徑. 聯  $PO, PO',$



$PA, PA'. PO \perp AB, PO' \perp A'B'.$

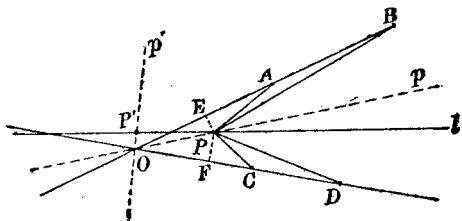
$\therefore \overline{PO'}^2 - \overline{PO}^2 = (\overline{PA'}^2 - \overline{O'A'}^2) - (\overline{PA}^2 - \overline{OA}^2) = \overline{OA}^2 - \overline{O'A'}^2$  爲定值.

故  $P$  之軌跡為垂直於  $OO'$  之一直線  $DP$  (軌跡 8). 在  $OO'$  上取中點  $M$ , 則  $\overline{PO'}^2 - \overline{PO}^2 = 2 OO' \cdot DM$ .  $\therefore 2 OO' \cdot DM = \overline{OA}^2 - \overline{OA'}^2$ .

$\therefore DM = \frac{\overline{OA}^2 - \overline{OA'}^2}{2 OO'}$  為定長. 故可先求得  $D$  從  $D$  作  $OO'$  之垂線交  $XY$  於  $P$ .  $P$  即所求圓之中心. (解法及證略) Q. E. F.

(例六)  $AB, CD$  為二定線分. 求在一定直線  $l$  上作一點  $P$  令  $\triangle PAB = \triangle PCD$ .

[解析] 設  $P$  為所求之點. 作  $PE \perp AB$ ,  $PF \perp CD$ .



$\therefore \triangle PAB = \triangle PCD \therefore PE : PF = CD : AB$  為定比. 即  $P$  與  $AB, CD$  兩直線距離之比一定. 故可過  $AB, CD$  之交點  $O$  作  $P$  之軌跡  $p, p'$  與  $l$  交於  $P, P'$ , 即所求之點 (軌跡 10). Q. E. F.

§ 520. 代數解析法 有多數作圖題可用代數方程式解法解之. 以下數條, 為代數式作圖法之根據 (式中  $a, b, c, d, \dots$  為已知長,  $x$  為所求之長,  $m, n$  為整正數)

1.  $x = a \pm b$ . (公法二)

2.  $x = ma + nb$ . (公法二)

3.  $x = \frac{a}{m}$ . (作圖題八)

4.  $x = \frac{bc}{a}$ , 或  $a : b = c : x$ . (作圖題一一, 或一四)

$$5. \quad x = \frac{b^2}{a}, \text{ 或 } a : b = b : x. \quad (\text{同 } 4)$$

$$6. \quad x = \sqrt{ab}. \quad (\text{作圖題一二, 或一五})$$

$$7. \quad x = \frac{b^2d}{a^2}. \quad (\text{作圖題一八})$$

$$8. \quad x = a\sqrt{\frac{b}{c}}. \quad (\text{作圖題一九})$$

$$9. \quad x = \sqrt{na}. \quad (\text{同 } 6)$$

(因  $x = \sqrt{na} = \sqrt{na^2} = \sqrt{(na, a)}$ )

$$10. \quad x = \sqrt{a^2 \pm b^2}. \quad (\text{應用商高定理})$$

$$11. \quad x = \sqrt{ab \pm cd}.$$

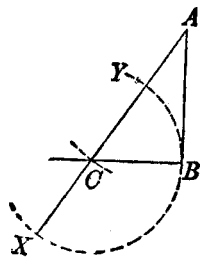
[先求  $\sqrt{ab} = y, \sqrt{cd} = z$  (6). 則  $\sqrt{ab \pm cd} = \sqrt{y^2 \pm z^2}$ ].

$$12. \quad x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}.$$

此爲二次方程式  $x^2 - ax + b^2 = 0$  之二根.

解法如下：作直角三角形  $ABC$ ,  $\angle B$  爲直角,  $AC = \frac{a}{2}$ ,  $AB = b$ . 以  $C$  爲中心,  $CB$  爲半徑作圓交  $AC$  於  $X, Y$ . 則  $AX, AY$  即所求之長  $x$ .

Q. E. F.



$$[\text{證}] \quad \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2 = \frac{a^2}{4} - b^2.$$

$$\therefore BC = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}.$$

$$\therefore AX = AC + CX = AC + BC = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2},$$

$$AY = AC - CY = AC - BC = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

$\therefore AX, AY$  爲所求之長  $x$ .

Q. E. D.

(例一) 已知二線分之和, 及其所包矩形之面積. 求作此二線分.

[解析] 設二線分爲  $x, y$ , 其和等於  $a$  其所包矩形等於  $b^2$ .

則  $x + y = a, \dots\dots\dots(1)$

$$xy = b^2. \dots\dots\dots(2)$$

依代數法解之, 從 (1)  $y = a - x$ , 代入 (2)

$$x(a - x) = b^2, x^2 - ax + b^2 = 0.$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2},$$

$$y = a - x = a - \left[ \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} \right] = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}.$$

故從根據 12 之作法所得之  $AX, AY$  卽所求之二線分. Q. E. F.

(例二) 已知二線分之差爲  $a$ , 其所包矩形等於  $b^2$ . 求此二線分.

[解析] 設所求二線分之長爲  $x, y$ . 則須適合於兩個方程式

$$x - y = a, \dots\dots\dots(1)$$

$$xy = b^2. \dots\dots\dots(2)$$

式中  $a, b$  爲已設之量,  $x, y$  爲未知之量. 故可用代數法解方程組如下:

$$\text{從 (1), } x = a + y.$$

$$\text{代入 (2), } (a + y)y = b^2. \text{ 即 } y^2 + ay - b^2 = 0.$$

依二次方程式根之公式, 得

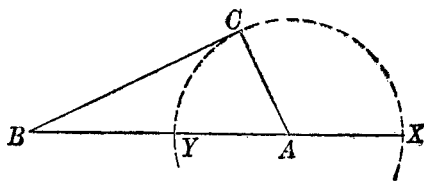
$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}.$$

$$\text{但線分可常視爲正, } \therefore y = \frac{\sqrt{a^2 + 4b^2} - a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{a}{2}.$$

$$x = a + y = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} + \frac{a}{2}.$$

依此可得解法如下:

〔解法〕 作直角三角形  $ABC$ , 令  $\angle C = R\angle$ ,  $CA = \frac{a}{2}$ ,  $CB = b$ .



$$\text{則 } \overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2.$$

$$\therefore AB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}.$$

以  $A$  爲中心,  $AC$  爲半徑作圓交  $BA$  於  $X, Y$ .

$$\text{則 } BX = AB + AX = AB + AC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} + \frac{a}{2} = x,$$



$$BY = AB - AY = AB - AC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} - \frac{a}{2} = y.$$

∴  $BX, BY$  即所求二線分. Q. E. F.

$$\text{〔證〕 } BX - BY = XY = 2AC = 2 \times \frac{a}{2} = a.$$

$$\begin{aligned} BX \cdot BY &= (BA + AX)(BA - AY) = (BA + AC)(BA - AC) \\ &= \overline{BA}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 = b^2. \end{aligned}$$

∴  $BX, BY$  即所求二線分. Q. E. D.

(例三) 求作二線分令其所包矩形及各線分上正方形之和各等於定面積.

〔已設〕 二定長  $a, b$ .

〔求作〕 二線分  $x, y$ , 令  $xy = a^2, \dots\dots\dots (1)$

$$x^2 + y^2 = b^2. \dots\dots\dots (2)$$

〔解析〕

(2)加(1)之二倍,得 $(x+y)^2 = b^2 + 2a^2$ , ∴  $x+y = \sqrt{b^2 + 2a^2}$  (3)

(2)減(1)之二倍,得 $(x-y)^2 = b^2 - 2a^2$ , ∴  $x-y = \sqrt{b^2 - 2a^2}$  (4)

(3)加(4),得  $2x = \sqrt{b^2 + 2a^2} + \sqrt{b^2 - 2a^2}$ ,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} [\sqrt{b^2 + 2a^2} + \sqrt{b^2 - 2a^2}] \\ &= \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

(3)減(4),得  $2y = \sqrt{b^2 + 2a^2} - \sqrt{b^2 - 2a^2}$ ,

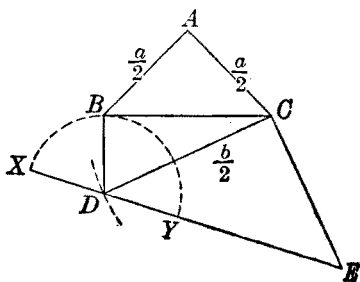
$$y = \frac{1}{2} [\sqrt{b^2 + 2a^2} - \sqrt{b^2 - 2a^2}]$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

依此可得解法如下：

〔解法〕 作  $R\triangle ABC$  令  
 $AB = AC = \frac{a}{2}$ ,  $\angle A = R\angle$ . 則  
 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$ .

作  $BD \perp BC$ , 以  $C$  為中心,  $\frac{b}{2}$  為



半徑作弧交  $BD$  於  $D$ . 聯  $DC$ , 則  $\overline{BD}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{BC}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$ .

作  $CE \perp CD$ , 且令  $CE = CB$ . 聯  $DE$ . 則  $\overline{DE}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2$   
 $= \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$ . 以  $D$  為中心,  $DB$  為半徑作圓交  $DE$  於  $X, Y$ .

則  $EX = DE + DX = DE + DB$

$$= \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2} = x,$$

$EY = DE - DY = DE - DB$

$$= \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2} = y.$$

$\therefore EX, EY$  即所求之二線分.

Q. E. F.

以上解法, 根據解析所得結果按步作圖. 故其實已無待乎再證

明下面之證,表示其決無不合,照理已可省去.

$$\begin{aligned}
 \text{〔證〕 } EX \cdot EY &= (ED + DX)(ED - DY) \\
 &= (ED + DB)(ED - DB) \\
 &= \overline{ED}^2 - \overline{DB}^2 \\
 &= (\overline{DC}^2 + \overline{CE}^2) - (\overline{DC}^2 - \overline{BC}^2) \\
 &= \overline{CE}^2 + \overline{BC}^2 = 2 \overline{BC}^2 \\
 &= 2(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) = 2(2 \overline{AB}^2) \\
 &= 4 \overline{AB}^2 = 4\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{又 } \overline{EX}^2 + \overline{EY}^2 &= (ED + DX)^2 + (ED - DY)^2 \\
 &= (ED + DB)^2 + (ED - DB)^2 \\
 &= \overline{ED}^2 + \overline{DB}^2 + 2 \overline{ED} \cdot \overline{DE} + \overline{ED}^2 + \overline{DB}^2 - 2 \overline{ED} \cdot \overline{DB} \\
 &= 2(\overline{ED}^2 + \overline{DB}^2) \\
 &= 2(\overline{DC}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DC}^2 - \overline{BC}^2) \\
 &= 2(2 \overline{DC}^2) + 4 \overline{DC}^2 = 4\left(\frac{b}{2}\right)^2 = b^2.
 \end{aligned}$$

∴  $EX, EY$  即所求之二線分.

Q. E. D.

(例四) 在定三角形  $ABC$  內求作  $AC$  之平行線交  $AB$  於  $M$ , 交  $BC$  於  $N$ , 且令  $BM - CN$  等於一定長  $d$ .

〔解析〕 設  $AB = c, BC = a, BM = x$ . 則因  $MN \parallel AC$ ,

∴  $\triangle BMN \sim \triangle BAC$ , ∴  $BM : BN = BA : BC$ .

即  $BM:(BC - NC) = BA:BC$ .

又因  $BM - CN = d$ ,

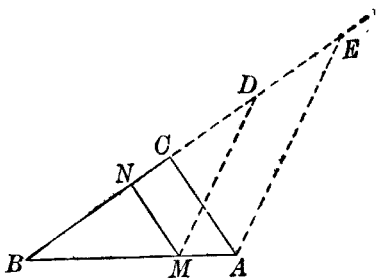
$\therefore CN = BM - d = x - d$ . 以各

量代入比例式,得  $x:(a - (x - d))$

$= c:a$ .  $\therefore ax = c(a + d - x)$

$ax + cx = c(a + d)$ ,

$$\therefore x = \frac{c(a + d)}{a + c}.$$



〔解法〕 在  $BC$  延線上取  $E$  及  $D$  令  $CE = AB = c$ ,  $CD = d$ .  
聯  $EA$ . 過  $D$  作  $EA$  之平行線交  $AB$  於  $M$ , 作  $MN \parallel AC$  即所求.

Q. E. F.

〔證〕  $\because DM \parallel EA$ ,  $\therefore MB:BD = AB:BE$

即  $MB:BC + CD = AB:BC + CE$ , 即  $x:a + d = c:a + c$ ,

$$\therefore x = \frac{c(a + d)}{a + c}.$$

$\because MN \parallel AC$ ,  $\therefore NC:NB = MA:MB$ .

即  $NC:a - NC = c - x:x$

$\therefore xNC = (a - NC)(c - x) = a(c - x) - NC(c - x)$ .

$\therefore [x + (c - x)]NC = a(c - x)$ .

$$\begin{aligned} \therefore NC &= \frac{a(c - x)}{c} = \frac{a}{c} \left[ c - \frac{c(a + d)}{a + c} \right] \\ &= a \left[ \frac{(a + c) - (a + d)}{a + c} \right] = \frac{a(c - d)}{a + c}. \end{aligned}$$

$$\therefore MB - NC = \frac{c(a+d)}{a+c} - \frac{a(c-d)}{a+c} = \frac{ac+cd-ac+ad}{a+c} = d. \quad Q. E. D.$$

(例五)  $AB$  爲定圓  $O$  之一定直徑. 求在圓周上取一點  $M$ , 從  $M$  作切線  $MC$  交  $AB$  延線於  $C$  令  $MA : MC = 2 : 1$ .

[解析] 設  $M$  爲所求之點. 作

$MD \perp AB$ . 令  $OA = OB = OM = r$ ,  $OD = x$ .

則  $\overline{MD}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OD}^2 = r^2 - x^2$ . 又因  $MC$  爲切

線,  $\therefore \angle OMC = R\angle$ ,  $\therefore \overline{MD}^2 = OD \cdot DC$ ,

$$\therefore DC = \frac{\overline{MD}^2}{OD} = \frac{r^2 - x^2}{x}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{MC}^2 &= \overline{MD}^2 + \overline{DC}^2 = r^2 - x^2 + \left(\frac{r^2 - x^2}{x}\right)^2 = (r^2 - x^2) \left[1 + \frac{r^2 - x^2}{x^2}\right] \\ &= (r^2 - x^2) \frac{r^2}{x^2}. \end{aligned}$$

$$\text{又 } \overline{MA}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{AD}^2 = r^2 - x^2 + (r+x)^2.$$

$$\text{因 } MA = 2MC, \quad \therefore \overline{MA}^2 = 4 \overline{MC}^2.$$

$$\therefore r^2 - x^2 + (r+x)^2 = 4 \frac{r^2}{x^2} (r^2 - x^2).$$

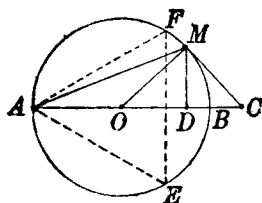
$$\therefore x^2(r^2 - x^2 + r^2 + 2rx + x^2) = 4r^2(r^2 - x^2),$$

$$2rx^2(r+x) = 4r^2(r+x)(r-x).$$

$$\therefore r \neq 0, r+x \neq 0, \quad \therefore x^2 = 2r(r-x), x^2 + 2rx - 2r^2 = 0$$

$$\text{從可解得 } x = -r \pm \sqrt{3}r^2 = \sqrt{3}r - r.$$

$$\therefore AD = r + x = \sqrt{3}r.$$



〔解法〕 作  $\odot O$  內接正三角形  $AEF$ . 在  $AB$  上取  $D$  令  $AD = AE$ . 作  $DM \perp AB$  交圓周於  $M$ , 則  $M$  即所求點.  $Q. E. F.$

(例六)  $P$  為定角  $XOY$  內一定點. 求過  $P$  作一直線交  $OX, OY$  於  $M, N$  而令  $OM, ON$  之差為定長  $k$ .

〔解析〕 作  $PA \parallel OY, PB \parallel OX$ .

令  $PA = a, PB = b, OM = x, ON = y$ .

則  $\triangle NBP \sim \triangle PAM$ .

$\therefore NB : PA = BP : AM$ .

即  $ON - OB : PA = PB : OM - OA$ .  $\therefore y - a : a = b : x - b$ .

$\therefore (x - b)(y - a) = ab, \therefore xy - ax - by = 0, \dots\dots\dots(1)$

又  $x - y = k, \dots\dots\dots(2)$

從 (2),  $y = x - k$  代入 (1) 得  $x(x - k) - ax - b(x - k) = 0$ .

$\therefore x^2 - (a + b + k)x + bk = 0$ .

$\therefore x = \frac{a + b + k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a + b + k}{2}\right)^2 - bk}$  為已知長, 故可在

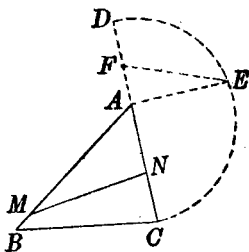
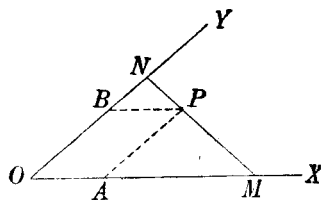
$OX$  上求得  $M$  點. 聯  $MP$  交  $OY$  於  $N$  即得.

(解法及證略)

$Q. E. F.$

(例七) 求作一直線平分定三角形之面積及周.

〔解析〕 設  $\triangle ABC$  為定三角形,  $MN$



爲所求直線.  $\triangle AMN = \frac{1}{2} \triangle ABC$ ,

$$AM + AN = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).$$

令  $AM = x$ ,  $AN = y$ ,  $AB + AC + BC = c + b + a = 2s$ .

則因  $\frac{\triangle AMN}{\triangle ABC} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} = \frac{xy}{bc} = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore xy = \frac{1}{2}bc, \dots (1)$

又  $x + y = s. \dots \dots (2)$

解之得  $x = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{bc}{2}}$ ,  $y = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{bc}{2}}$ .

〔解法〕 延長  $CA$  至  $D$  令  $AD = \frac{1}{2}AB$ .

以  $CD$  爲直徑作半圓周.

作  $AE \perp CD$  交半圓周於  $E$ .

$E$  爲中心  $\frac{1}{2}s$  即  $\frac{1}{4}(AB + AC + BC)$  爲半徑作弧交  $CD$  於  $F$ .

在  $DC$  上取  $N$  令  $FN = FE$ . 在  $AB$  上取  $M$  令  $AM = EF + AF$ . 聯

$MN$  卽所求之直線.

Q. E. F.

〔證〕  $\overline{AF}^2 = \overline{EF}^2 - \overline{AE}^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - AC \cdot AD = \frac{s^2}{4} - AC \cdot \frac{AB}{2}$   
 $= \frac{s^2}{4} - \frac{bc}{2}$ .

$\therefore AM = EF + AF = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{bc}{2}}$ ,

$AN = FN - AF = EF - AF = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{bc}{2}}$ .

$$\therefore AM + AN = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{bc}{2}} + \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{bc}{2}} = \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = s.$$

$$\begin{aligned} AM \cdot AN &= \left( \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{bc}{2}} \right) \left( \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - \frac{bc}{2}} \right) \\ &= \left( \frac{s}{2} \right)^2 - \left( \frac{s^2}{4} - \frac{bc}{2} \right) = \frac{bc}{2}. \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle AMN = \frac{1}{2} \triangle ABC. \quad Q. E. D.$$

(例八) 已知二線分上正方形之差及其所包矩形，求此二線份之長。

設二定面積為  $a^2, b^2$ ，所求二定長為  $x, y$ 。

$$\text{則} \quad x^2 - y^2 = a^2, \dots (1)$$

$$xy = b^2. \dots (2)$$

$$[\text{解析}] \quad \text{令 } y = mx, \text{ 則 } x^2 - m^2x^2 = a^2, \dots (3)$$

$$mx^2 = b^2. \dots (4)$$

$$\therefore \frac{x^2(1-m^2)}{m \cdot x^2} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \therefore b^2(1-m^2) = a^2m.$$

$$b^2m^2 + a^2m - b^2 = 0.$$

$$m = \frac{-a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4}}{2b^2} \quad \text{代入 (4)}$$

$$x^2 = \frac{b^2}{m} = \frac{2b^4}{-a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4}}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{2b^4(-a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4})}{(-a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4})(-a^2 \mp \sqrt{a^4 + 4b^4})} \\
 &= \frac{2b^4(-a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4})}{(-a^2)^2 - (a^4 + 4b^4)} \\
 &= \frac{2b^4(-a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4})}{-4b^4} \\
 &= \frac{1}{2}(a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4}).
 \end{aligned}$$

代入(1)

$$\begin{aligned}
 y^2 = x^2 - a^2 &= \frac{1}{2}(a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4}) - a^2 \\
 &= \frac{1}{2}(-a^2 \pm \sqrt{a^4 + 4b^4}).
 \end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{a^4 + 4b^4} > a^2$ , 故取正號, 得

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{a^4 + 4b^4} + a^2)$$

$$y = \frac{1}{2}(\sqrt{a^4 + 4b^4} - a^2).$$

以上結果不適宜於作圖, 因四次項在幾何中無意義也. 故改造之如下:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{a^4 + 4b^4} + a^2) \\
 &= \sqrt{\frac{a^4}{4} + b^4} + \frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4 + b^4} + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \left(\text{令 } \frac{a}{\sqrt{2}} = c\right)$$

$$= \sqrt{c^4 + b^4} + c^2$$

$$= \sqrt{\left(c^2 + \frac{b^4}{c^2}\right)c^2 + c^2}$$

$$= c \left[ \sqrt{c^2 + \left(\frac{b^2}{c}\right)^2} + c \right] \quad \left(\text{令 } \frac{b^2}{c} = d\right)$$

$$= c[\sqrt{c^2 + d^2} + c].$$

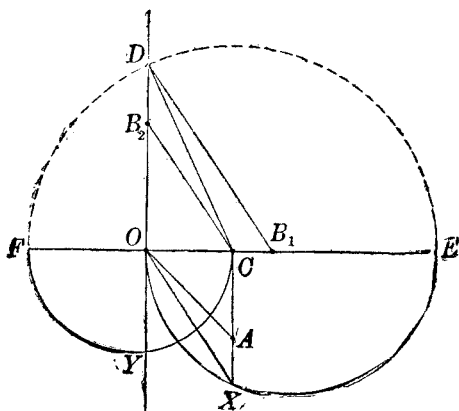
同樣可得

$$y^2 = c[\sqrt{c^2 + d^2} - c].$$

〔解法一〕 作  $EF, DY$  直交於  $O$ . 作  $\angle YOE$  之等分線  $OA = a$ .

作  $AC \perp OE$  ( $OC = CA, 2\overline{OC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{OA}^2 = a^2, \therefore OC$

$= \frac{a}{\sqrt{2}} = c$ ). 在  $OE, OD$  上各取  $B_1, B_2$  令  $OB_1 = OB_2 = b$ . 聯  $CB_2$ .



作  $B_1D \parallel CB_2$  交  $OD$  於  $D$  ( $OC : OB_1 = OB_2 : OD$ ,  $\therefore OD = \frac{OB_1 \cdot OB_2}{OC} = \frac{b^2}{c} = d$ ). 聯  $CD$  ( $\overline{CD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$ ,  $\therefore CD = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2} = \sqrt{c^2 + d^2}$ ). 以  $C$  爲中心,  $CD$  爲半徑作圓交  $EF$  於  $E, F$  ( $OE = CE + OC = CD + OC = \sqrt{c^2 + d^2} + c$ .  $OF = CF - OC = CD - OC = \sqrt{c^2 + d^2} - c$ ).

以  $OE$  爲直徑作半圓交  $CA$  於  $X$ . 聯  $OX$ .

以  $FC$  爲直徑作半圓交  $DY$  於  $Y$ .

則  $OX, OY$  卽所求

Q. E. F.

$$\begin{aligned}
 \text{〔證〕 } \overline{OX}^2 - \overline{OY}^2 &= OE \cdot CO - OF \cdot OC \\
 &= OC(OE - OF) \\
 &= OC[CE + OC - (CF - OC)] \\
 &= OC[2OC + CD - CD] \\
 &= 2\overline{OC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 = a^2.
 \end{aligned}$$

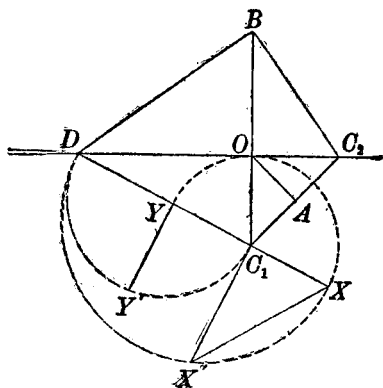
$$OX \cdot OY = \sqrt{OE \cdot OC} \cdot \sqrt{OF \cdot OC}$$

$$= \sqrt{OE \cdot OF} \cdot OC$$

$$= OD \cdot OC = OB_1 \cdot OB_2 = b^2.$$

Q. E. D.

〔解法二〕 作  $DC_2, BC_1$   
 直交於  $O$ . 作  $\angle C_1OC_2$  之等分  
 線  $OA = \frac{a}{2}$ . 過  $A$  作  $OA$  之垂  
 線  $C_1C_2$  交  $BC_1, DC_2$  於  $C_1,$   
 $C_2$  ( $AC_1 = AC_2 = OA = \frac{a}{2}$ ,  
 $C_1C_2 = a, OC_1 = OC_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} = c$ ).  
 在  $BC_1$  上取  $B$  令  $OB = b$ . 聯



$C_2B$ . 作  $BD \perp BC_2$  交  $DC_2$  於  $D$  ( $\overline{OB}^2 = OD \cdot OC_2, OD = \frac{\overline{OB}^2}{OC_2} = \frac{b^2}{c}$   
 $= d$ ). 聯  $DC_1$ . 以  $C_1$  為中心,  $C_1O$  為半徑作圓交  $DC_1$  於  $X, Y$ . 以  
 $DX, DC_1$  為直徑作半圓周. 作  $DX$  之垂線  $C_1X', YY'$ . 聯  $XX'$ .  
 則  $XX', YY'$  即所求. Q. E. F.

$$\begin{aligned}
 \text{〔證〕 } \overline{XX'}^2 - \overline{YY'}^2 &= DX \cdot C_1X - DY \cdot C_1Y \\
 &= DX \cdot OC_1 - DY \cdot OC_1 \\
 &= OC_1(DX - DY) \\
 &= OC_1 \cdot XY = 2\overline{OC_1}^2 \\
 &= \overline{OC_1}^2 + \overline{OC_2}^2 = \overline{C_1C_2}^2 = a^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{XX'} \cdot \overline{YY'} &= \sqrt{DX \cdot C_1X} \cdot \sqrt{DY \cdot C_1Y} \\
 &= \sqrt{DX \cdot DY} \cdot \sqrt{C_1X \cdot C_1Y}
 \end{aligned}$$

$$= DO \cdot OC_2$$

$$\left[ \begin{array}{l} \because DO \text{ 爲 } \odot C_1 \text{ 之切線} \\ \text{又 } C_1X = C_1Y = OC_1 = OC_2 \end{array} \right]$$

$$= \overline{OB}^2 = b^2.$$

Q. E. D.

(例九)  $x = \frac{a^{n+1}}{b^n}$  ( $n$  爲任意正整數).

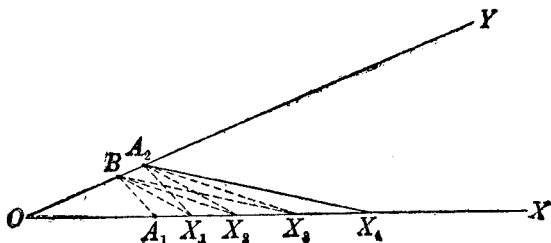
(注意)  $a, b$  爲二已知線分. 故  $n > 3$  時  $a^{n+1}$  在幾何中已無意義. 然  $\frac{a^{n+1}}{b^n}$  則爲一次式, 故  $x$  仍可以一線分表之, 而本題仍不失爲一作圖題.

$$\text{〔解析〕 } \frac{a^{n+1}}{b^n} = a \cdot \frac{a^n}{b^n} = a \left( \frac{a}{b} \right)^n.$$

$$\text{設 } a \cdot \frac{a}{b} = x_1, \quad a \left( \frac{a}{b} \right)^2 = X_1 \frac{a}{b} = X_2, \quad a \left( \frac{a}{b} \right)^3 = X_2 \frac{a}{b} = X_3,$$

$$\dots\dots, \quad a \left( \frac{a}{b} \right)^n = a \left( \frac{a}{b} \right)^{n-1} \cdot \frac{a}{b} = X_{n-1} \left( \frac{a}{b} \right) = X.$$

〔解法一〕 作任意角  $XOY$ . 在  $OX$  上取  $A_1$  令  $OA_1 = a$ . 在  $OY$  上取  $A_2, B$  令  $OA_2 = a, OB = b$ . 聯  $BA_1$ . 作  $A_2X_1 \parallel BA_1$  交  $OY$



於  $X_1$ . 則得  $OX_1 = \frac{OA_1 \cdot OA_2}{OB} = \frac{a^2}{b} = x_1$ . 聯  $BX_1$ . 作  $A_2X_2 \parallel BX_1$

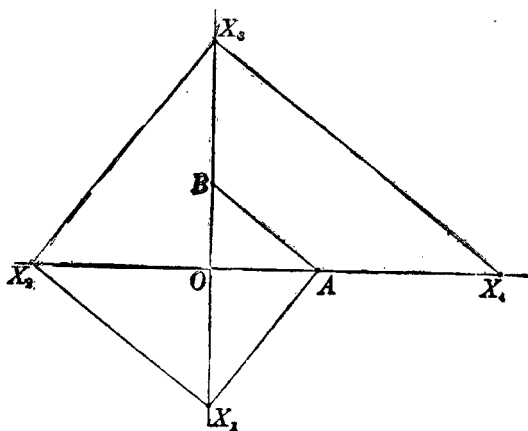
交  $OX$  於  $X_2$ . 則得  $OX_2 = \frac{OX_1 \cdot OA_2}{OB} = x_2$ . 聯  $BX_2$  作  $A_2X_3 \parallel BX_2$

交  $OX$  於  $X_3$ . 則得  $OX_3 = \frac{OX_2 \cdot OA_2}{OB} = x_3$ . 如上繼續求之可在  $OX$

上求得  $X_4, X_5 \dots X_{n-1}, X$  諸點. 令  $OX_4 = x_4 = \frac{a^5}{b^4}$ ,  $OX_5 = x_5 = \frac{a^6}{b^5}$ ,

$\dots$ ,  $OX_{n-1} = x_{n-1} = \frac{a^n}{b^{n-1}}$ ,  $OX = x = \frac{a^{n+1}}{b^n}$ . Q. E. F.

〔解法二〕 作  $X_1X_3, X_2X_4$  直交於  $O$ . 在  $OX_3, OX_4$  上取  $B, A$  令  $OB = b, OA = a$ . 作直角  $BAX_1$  交  $OX_1$  於  $X_1$ . 則  $\overline{OA}^2 = OB \cdot OX_1$ ,  $\therefore OX_1 = \frac{\overline{OA}^2}{OB} = \frac{a^2}{b} = x_1$ . 作直角  $AX_1X_2$  交  $OX_2$



於  $X_2$ . 則  $\overline{OX_1}^2 = OA \cdot OX_2$ ,  $\therefore OX_2 = \frac{\overline{OX_1}^2}{OA} = \frac{x_1^2}{a} = \frac{a^3}{b^2} = x_2$ . 作直角

$AX_2X_3$  交  $OX_3$  於  $X_3$ . 則同上  $OX_3 = \frac{\overline{OX_2}^2}{OX_1} = \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{a^5}{b^3} = x_3$ . 如上繼

續作直角可求得  $X_4, X_5, \dots, X_{n-1}$ .  $X$  諸點令  $OX_4 = x_4 = \frac{a^7}{b^4}$ ,  $OX_5$

$= x_5 = \frac{a^9}{b^5}$ ,  $\dots, OX_{n-1} = x_{n-1} = \frac{a^n}{b^{n-1}}$ ,  $OX = x = \frac{a^{n+1}}{b^n}$ . Q. E. F.

(例一〇) 過定三角形  $ABC$  內一定點  $P$  求作一直線平分此三角形之面積.

[解析一] 設  $MPN$  爲所求之直線.  $\triangle AMN = \frac{1}{2} \triangle ABC$ . 過  $P$  作  $AC$  之平行線  $FG$ . 作  $\square AFGH = \frac{1}{2} \triangle ABC$ . 則因  $\square AFGH = \triangle AMN$ .

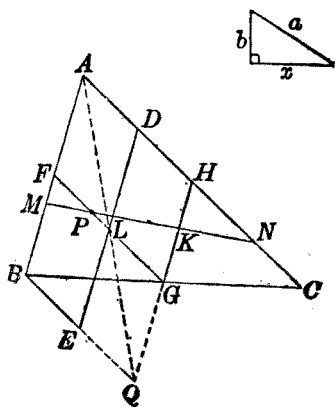
$\therefore \triangle GPK = \triangle FPM + \triangle HNK$ .

然  $\triangle GPK \sim \triangle FPM \sim \triangle HNK$ ,

$\therefore \triangle GPK : \triangle FPM : \triangle HNK = \overline{PG}^2 : \overline{PF}^2 : \overline{HN}^2$ .

$\therefore \overline{PG}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{HN}^2$ . 令  $PG = a, PF = b, HN = x$ .

則  $a^2 = b^2 + x^2$ ,  $\therefore x = \sqrt{a^2 - b^2}$ , 故若  $\square AFGH$  可作時, 本題即可解決.



〔解法〕 在  $AC$  上取  $D$  令  $AD = \frac{1}{4}AC$ . 作平行四邊形  $BADE$  ( $\square BADE = \frac{1}{2}\triangle ABC$ ). 過  $P$  作  $FG \parallel AC$  交  $DE$  於  $L$ .  $AL, BE$  延線交於  $Q$ . 作平行四邊形  $ABQH$ ,  $QH$  交  $FG$  於  $G$  ( $\square AFGH = \square ABED = \frac{1}{2}\triangle ABC$ ). 令  $PG = a, PF = b$ , 以  $a$  為斜邊,  $b$  為一直角邊作直角三角形, 得其他一邊之長  $x$  ( $x^2 = a^2 - b^2$ ). 在  $HC$  上取  $N$  令  $HN = x$ . 聯  $NP$  交  $AB$  於  $M$ . 則  $MPN$  即為所求直線.

Q. E. F.

〔解析二〕 設  $MPN$  為所求之直線. 則

$$\triangle AMN = \frac{1}{2}\triangle ABC.$$

$$\therefore AM \cdot AN = \frac{1}{2}AC \cdot AB = \frac{1}{2}bc.$$

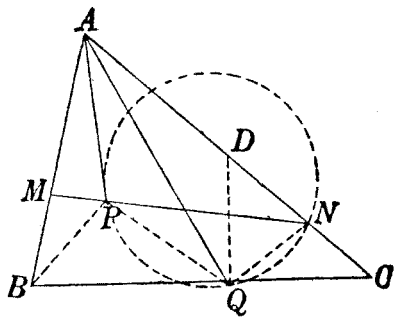
在形內作  $AQ$  令  $\angle NAQ$

$$= \angle MAP, \text{ 又令 } AQ = \frac{bc}{2AP}.$$

$$\text{則 } AP \cdot AQ = \frac{bc}{2} = AM \cdot AN, \therefore AP : AN = AM : AQ.$$

$\therefore \triangle AMP \sim \triangle AQN. \therefore \angle AMP = \angle AQN, \angle MNQ = \angle MAQ$   
即  $\angle PNQ$  為已知角. 由此即可求得  $N$ .

〔解法〕 聯  $PB$ , 從  $AC$  中點  $D$  作  $DQ$  令  $\angle ADQ = \angle APB$ . 從  $A$  作  $AQ$  令  $\angle CAQ = \angle BAP$ .  $AQ, DQ$  交於  $Q$ . 以  $PQ$  為弦,





$\angle BAQ$  爲弓形角作弓形弧交  $AC$  於  $N$ . 聯  $NP$  交  $AB$  於  $M$ , 則  $MNP$  卽所求. Q. E. F.

〔證〕  $\angle MNQ = \angle MAQ$ ,  $\therefore A, M, Q, N$  共圓.

$\therefore \angle AMP = \angle AQN$ . 又因  $\angle MAP = \angle QAN$ .

$\therefore \triangle AMP \sim \triangle AQN$ .  $\therefore AM : AQ = AP : AN$ .

$\therefore AM \cdot AN = AP \cdot AQ$ .

又因  $\angle BAP = \angle QAD$ ,  $\angle APB = \angle ADQ$ ,

$\therefore \triangle ABP \sim \triangle AQD$ .  $\therefore AB : AQ = AP : AD$ .

$\therefore AP \cdot AQ = AB \cdot AD = AB \cdot \frac{AC}{2} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$

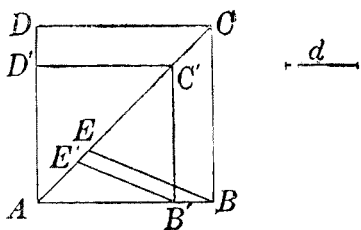
$\therefore AM \cdot AN = \frac{1}{2} AB \cdot AC$ .  $\therefore \triangle AMN : \triangle ABC = AM \cdot AN : AB \cdot AC$ ,

$\therefore \triangle AMN = \frac{1}{2} \triangle ABC$ .  $\therefore MN$  爲所求. Q. E. D.

§ 521. 相似法 有許多作圖題不易求其解答, 往往可利用

相似形各對應邊成比例而解之. 舉例如下:

(例一) 作一正方形, 令其對角線減去一邊之差等於一定長  $d$ .



〔解法〕 先作任意一正方形  $AB'C'D'$ . 在對角線  $AC'$  上

取  $E'$  令  $C'E' = B'C'$ . 聯  $E'B'$ . 於是在  $AC'$  上取  $E$  令  $AE = d$ . 從

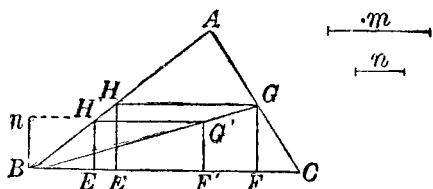
$E$  作  $E'B'$  之平行線交  $AB'$  於  $B$ , 作  $BC \parallel B'C'$ , 作  $CD \parallel C'D'$ . 則  $ABCD$  即所求正方形. Q. E. F.

〔證〕  $\because BE \parallel B'E', \therefore \triangle ABE \sim \triangle AB'E',$

$$\triangle CBE \sim \triangle C'B'E'. \therefore \frac{CE}{C'E'} = \frac{CB}{C'B'} = \frac{BE}{B'E'} = \frac{AB}{AB'}$$

$\therefore AB' = B'C' = C'E', \therefore AB = BC = CE. \therefore ABCD$  為正方形.  $AC - BC = AC - CE = AE = d.$  Q. E. D.

(例二) 在所設三角形  $ABC$  內作一內接矩形令其二邊之比等於定比  $m:n$ .



〔解法〕 作  $BC$  之平行線令其與  $BC$  之距離為  $n$  交  $AB$  於  $H'$ . 作矩形  $E'F'G'H'$  令  $E'F' = m$ . 聯  $BG'$  交  $AC$  於  $G$ . 作  $GF \perp BC, GH \parallel BC, HE \perp BC$ . 則  $EFGH$  即所求. Q. E. F.

〔證〕  $\because H'G' \parallel HG, \therefore \triangle BH'G' \sim \triangle BHG.$

$\therefore H'G' : HG = BG' : BG,$  又  $\because G'F' \parallel GF,$

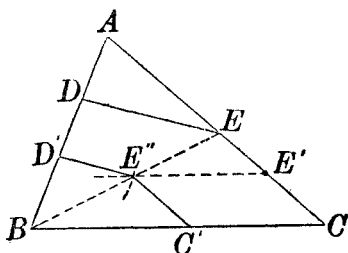
$\therefore \triangle BG'F' \sim \triangle BGF. \therefore G'F' : GF = BG' : BG.$

$\therefore H'G' : HG = G'F' : GF. \therefore HG : GF = H'G' : G'F' = m:n.$

Q. E. D.

(例三) 在所設三角形  $ABC$  之邊  $AB, AC$  上作  $D, E$  令  $BD = DE - EC$ .

〔解法〕 在  $AB$  上任意取一點  $D'$ .  $AC$  上取  $E'$  令  $BD' = CE'$ .  
 作  $E'E'' \parallel BC$ . 以  $D'$  爲中心  $D'B$  爲半徑作弧交  $E'E''$  於  $E''$ . 聯  $BE''$  交  $AC$  於  $E$ . 作  $ED \parallel E'D'$ .  
 則  $D, E$  卽所求.



Q. E. F.

〔證〕 作  $E''C' \parallel AC$ . 則因  $E'E'' \parallel C'C \therefore C'CE'E''$  爲平行四邊形.  $\therefore E''C' = E'C = D'B = D'E''$ .

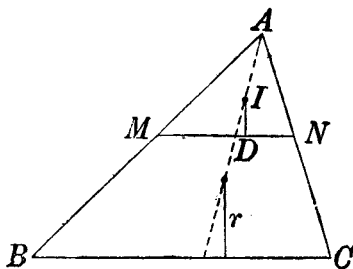
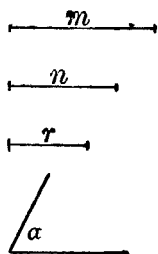
因  $D'E'' \parallel DE, C'E'' \parallel CE, \therefore \triangle BD'E'' \sim \triangle BDE,$

$$\triangle BC'E'' \sim \triangle BCE. \therefore \frac{BD}{BD'} = \frac{DE}{D'E''} = \frac{BE}{BE''} = \frac{EC}{E''C'}$$

$\therefore BD = DE = EC.$

Q. E. D.

(例四) 已知三角形二邊之比及其所夾角, 及內接圓半徑之長, 求作此三角形.



〔已設〕 定長  $m, n, r$ , 及定角  $\angle\alpha$ .

〔求作〕  $\triangle ABC$  令  $AB : AC = m : n$ ,  $\angle A = \angle\alpha$ , 其內接圓半徑等於  $r$ .

〔解法〕 先作  $\triangle AMN$  令  $\angle A = \angle\alpha$ ,  $AM = m$ ,  $AN = n$ . 則  $\triangle AMN$  必為所求  $\triangle ABC$  之相似形.

次作  $\triangle AMN$  之內接圓半徑  $ID$ , 則  $ID$  與  $r$  之比為  $\triangle AMN$  與  $\triangle ABC$  之相似比.

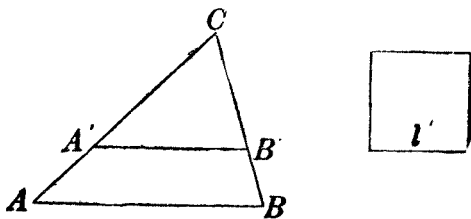
$$\therefore ID : r = m : AB = n : AC.$$

故可在  $AM, AN$  上求得  $B, C$ . 聯  $BC$

則  $\triangle ABC$  即所求.

Q. E. F.

(例五) 已知三角形之二角及面積, 求作此三角形.



〔已設〕 定角  $\alpha, \beta$ , 定長  $l$ .

〔求作〕  $\triangle ABC$  令  $\angle A = \angle\alpha$ ,  $\angle B = \angle\beta$ ,  $\triangle ABC = l^2$ .

〔解法〕 先作任意  $\triangle A'B'C$  令  $\angle A' = \angle\alpha'$ ,  $\angle B' = \angle\beta'$ . 則  $\triangle A'B'C$  為所求  $\triangle ABC$  之相似形. 次將  $\triangle A'B'C$  改為等積正方形  $l'^2$ , 則  $\triangle A'B'C : \triangle ABC = l'^2 : l^2$ .

但  $\triangle A'B'C : \triangle ABC = \overline{CA'}^2 : \overline{CA}^2 = \overline{CB'}^2 : \overline{CB}^2$

$$\therefore l^2 : l'^2 = \overline{CA'}^2 : \overline{CA}^2 = \overline{CB'}^2 : \overline{CB}^2.$$

$$\therefore l' : l = CA' : CA = CB' : CB.$$

故可在  $CA', CB'$  上求得  $A, B$ . 聯  $AB$ .

則  $\triangle ABC$  即所求.

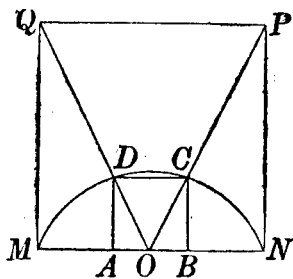
Q. E. F.

(注意) 凡已知三角形二邊之比及夾角, 或已知三角形之二角者皆可作其相似形, 故若更知其一任何量時, 皆可仿以上二例作之.

(例六) 在所設弓形內求作一內接正方形, 令其一邊合於弓形弦, 其他二頂點在弓形弧上.

〔解法〕 以弓形弦  $MN$  為一邊作正方形  $MNPQ$ . 取  $MN$  之中點  $O$ , 聯  $OP, OQ$  交弓形弧於  $C, D$ . 則  $C, D$  即所求正方形之二頂點.  $\square ABCD$  即所求.

Q. E. F.



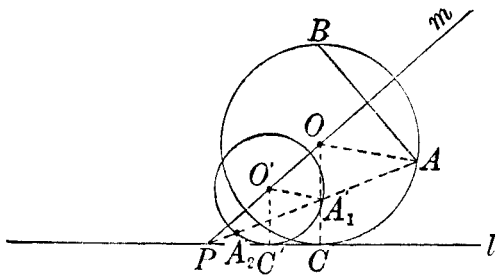
(證略)

(例七) 求作一圓令過二所設點及切一所設直線.

〔已設〕 二定點  $A, B$ , 一定直線  $l$ .

〔求作〕 一圓過  $A, B$ , 且與  $l$  相切

〔解法〕 作  $AB$  之垂直等分線  $m$  交  $l$  於  $P$ . 在  $m$  上取任意



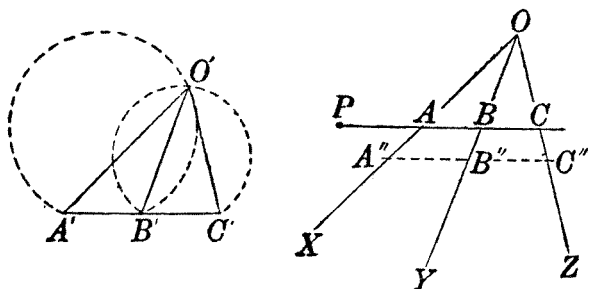
點  $O'$  為中心,  $l$  之垂線  $O'C'$  為半徑作  $\odot O'$ . 聯  $AP$  交  $\odot O'$  於  $A'$ . 從  $A$  作  $A'O'$  之平行線交  $m$  於  $O$ . 以  $O$  為中心,  $OA$  為半徑作  $\odot O$  即所求. Q. E. F.

〔證〕 作  $OC \perp l$ . 則  $\triangle POC \sim \triangle PO'C'$ ,  $\therefore OC : O'C' = PO : PO'$ . 又  $OA \parallel O'A'$ ,  $\therefore \triangle POA \sim \triangle PO'A'$ ,  $\therefore OA : O'A' = PO : PO'$ .  $\therefore OC : O'C' = OA : O'A'$ .  $\therefore O'C' = O'A'$ ,  $\therefore OC = OA$ . 又  $m$  為  $AB$  之垂直等分線,  $\therefore OB = OA$ .

$\therefore \odot O$  為所求. Q. E. D.

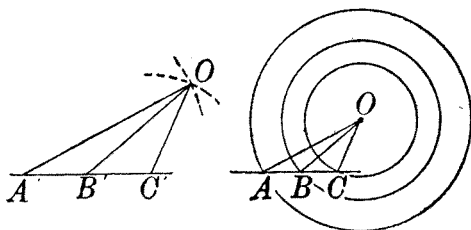
〔討論〕 若  $A, B$  在  $l$  之兩旁時, 則本題無解答. 若  $A, B$  在同旁而其聯線平行於  $l$  時, 則有一個解答, 普通則有兩個解答. 因如圖  $PA$  交  $\odot O'$  於兩點  $A'_1, A'_2$ . 故以  $A'_2$  代  $A'_1$  同樣尚可得一解答也.

(例八)  $OX, OY, OZ$  為所設共點之三直線,  $P$  為所設點. 求過  $P$  作直線交  $OX, OY, OZ$  於  $A, B, C$  而令  $AB = BC$ .



〔解法〕 在任意線分  $A'C'$  上取中點  $B'$ . 以  $A'B'$  爲弦,  $\angle XOY$  爲弓形角作弓形. 以  $B'C'$  爲弦,  $\angle YOZ$  爲弓形角作弓形. 兩弓形交於  $O'$ . 在  $OX, OY, OZ$  上取  $A'', B'', C''$  令  $OA'' = O'A', OB'' = O'B', OC'' = O'C'$ . 過  $P$  作  $A''B''C''$  之平行線  $PABC$  卽所求. (證略) Q. E. F.

(例九) 作所設三同心圓之割線  $ABC$  交外圓於  $A$ , 中圓於  $B$ , 內圓於  $C$ , 令  $AB = BC$ .



〔解法〕 在任意直線上取三點  $A', B', C'$  令  $A'B' = B'C'$ . 作與  $A', B'$  距離之比等於  $OA : OB$  之點之軌跡 (軌跡 10) 又與  $B', C'$  距離之比等於  $OB : OC$  之點之軌跡

二軌跡交於  $O'$ . 聯  $O'A', O'B'$ .

於是從  $O$  作外圓半徑  $OA$ , 中圓半徑  $OB$  令  $\angle AOB = \angle A'O'B'$ .  
聯  $AB$  延長之交內圓於  $C$ . 直線  $ABC$  即所求. (證略)  $Q. E. F.$

(例一〇) 已知三角形之三個高, 求作三角形.

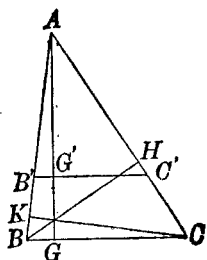
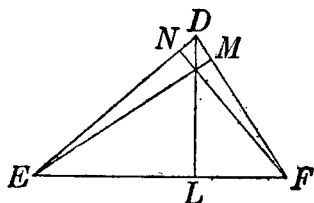
〔解法一〕 設  $l, m, n$  爲所設三個高之長. 先作三角形  $DEF$  令  $EF = l, DF = m, DE = n$ . 在  $\triangle DEF$  內作三個高  $DL, EM, FN$ . 再作三角形  $AB'C'$  令  $B'C' = DL, AC' = EM, AB' = FN$ . 在  $\triangle AB'C'$  內再作高  $AG' \perp B'C'$

延長至  $G$  令  $AG = EF = l$ . 過  $G$  作  $B'C'$  的平行線交  $AB'$  於  $B$ , 交  $AC'$  於  $C$ . 則  $\triangle ABC$  即所求之三角形.  $Q. E. F.$

〔證〕 作  $BH \perp AC, CK \perp AB$ .

$$\text{則因 } \triangle ABC = \frac{1}{2} AG \cdot BC = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} CK \cdot AB,$$

$$\begin{aligned} \therefore AG : BH : CK &= \frac{1}{BC} : \frac{1}{AC} : \frac{1}{AB} \\ &= \frac{1}{B'C'} : \frac{1}{AC'} : \frac{1}{AB'} \\ &= \frac{1}{DL} : \frac{1}{EM} : \frac{1}{FN}. \end{aligned}$$





$$\text{又因 } \triangle DEF = \frac{1}{2} DL \cdot EF = \frac{1}{2} EM \cdot DF = \frac{1}{2} FN \cdot DE,$$

$$\therefore EF : DF : DE = \frac{1}{DL} : \frac{1}{EM} : \frac{1}{FN}.$$

$$\therefore AG : BH : CK = EF : DF : DE = l : m : n$$

但因  $AG = l$ ,  $\therefore BH = m, CK = n$ .

故  $\triangle ABC$  即所求之三角形.

Q. E. D.

(注意) 以上解法, 似甚巧妙, 然並不普徧. 因若當  $m + n \leq l$  時, 上述作法, 不能成立. 然三角形之兩個高之和並不定須大於第三個高. 則當  $m + n \leq l$  時, 本題依舊有解答. 故上述解法之非為圓滿之法可以顯見. 然從上述解法, 可知其根據實為“三角形三邊之比等於其各對應高之反比.” 故從已知三個高即可知三邊之比, 而得其相似形. 故本題實為求已知三線分之反比線分而已. 則固可用他種較好方法求之. 茲舉一較好之法如下:

〔解法二〕 從任意圓  $\odot O$

外任意點  $P$  至  $\odot O$  作三線分

$PL = l, PM = m, PN = n$ .  $PL$

$PM, PN$  各交  $\odot O$  於又一點

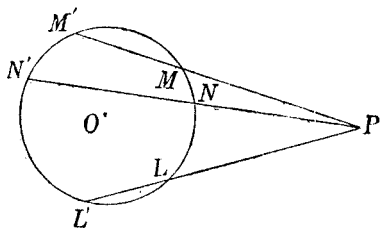
$L', M', N'$ . 作  $\triangle A'B'C'$  令

$B'C' = PL', A'C' = PM', A'B' = PN'$ . 則  $\triangle A'B'C'$  即所求  $\triangle ABC$

之相似形.

Q. E. F.

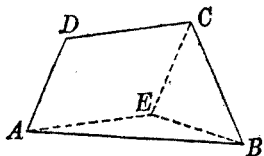
( $\triangle ABC$  之作法及證略)



§ 522. 平行移動法 旋轉移動法 圖形諸部分相隔離, 作圖無從着手發生困難, 有時可用平行或旋轉移動法以接近之. 以下例一至例八為用平行移動法, 例九至例一二為用旋轉移動法. 茲依序述如次.

(例一) 已知四角形之四個角及一雙對邊, 求作此四角形.

[解析] 設  $ABCD$  為所求四角形  $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$  為已知角,  $AB, CD$  為已知邊. 作  $AE \perp DC$  (即將  $DC$  平行移動至  $AE$ ). 聯  $CE, EB$ . 則  $\angle BAE = \angle A - \angle DAE = \angle A - (180^\circ - \angle D) = \angle A + \angle D - 180^\circ$  為已知角. 又  $AB, AE$  為已知邊.  $\therefore \triangle ABE$  為可作形. 又因  $\angle A, \angle B$  為已知角, 故  $AD, BC$  之方向一定.  $EC \parallel AD$ . 故可得  $EC, BC$  之交點  $C$ . 作成  $\square AECD$  得  $D$ . 即得解答. Q. E. F.



(例二) 已知三角形三中線, 求作此三角形.

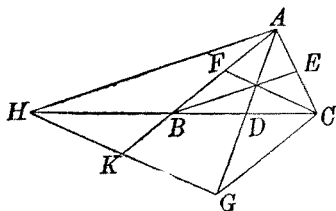
[解析] 設  $AD, BE, CF$  為  $\triangle ABC$  之三中線.

從  $A$  作  $AH \parallel EB$ , 交  $CB$  於  $H$ .

$\therefore AE = EC, \therefore AH = 2BE,$

$HB = BC$ . 從  $C$  作  $CG \parallel AB$ , 交  $AD$  於  $G$ .  $\therefore BD = DC, \therefore \angle G = 2\angle D, AB = GC$ . 聯  $HG$  交  $AB$  於  $K$ , 則因  $BK \parallel CG, HB = BC,$

$\therefore BK = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}AB = BF \therefore KG = HK = FC. \therefore HG$



$= 2FC$ .  $\therefore \triangle AGH$  之三邊各為已知三中線之二倍為可作形。

$B$  為  $\triangle AGH$  之重心，即可求得  $\triangle ABC$ 。

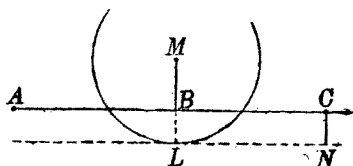
Q. E. F.

〔解法及證略〕

(例三)  $A, M, N$  為三定點。求過  $A$  作一直線令  $M, N$  分居此直線之兩旁且與此直線距離之和等於一定長  $k$ 。

〔解析〕 設  $ABC$  為所求之直線。  $MB + NC = k$ 。

將  $CN$  平行移動至  $BL$  與  $MB$  接成一直線，則  $ML = k$ 。又  $\because BLNC$  為矩形， $\therefore \angle MLN$  為直角。故  $NL$  為以  $M$  為中心， $k$  為半徑之圓之切線。因得解法如下：



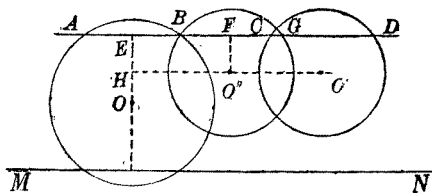
〔解法〕 以  $M$  為中心， $k$  為半徑畫圓。從  $N$  作  $\odot M$  之切線  $NL$ 。過作  $LN$  之平行線  $ABC$  即所求。（證略）

Q. E. F.

(例四)  $\odot O, \odot O'$  為二定圓， $MN$  為定直線。求作  $MN$  之平行線令所截  $\odot O, \odot O'$  之二弦之和等於定長  $k$ 。

〔解析〕 設  $AD$  為所求之直線。  $AB + CD = k$ 。

又  $AD \parallel MN$ 。將  $\odot O'$  平行移動至  $\odot O''$  令  $C$  合於



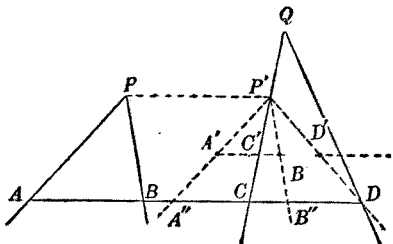
$B, D$  合於  $G$ ，則  $AG = k$ 。作  $OE \perp AB, O'F \perp BG$ 。則  $EF = \frac{1}{2}k$ 。

$O'O''$  交  $OE$  於  $H$ ，則  $OHO' = EF = \frac{1}{2}k$ 。因得解法如下：

〔解法〕 從  $O$  作  $MN$  之垂線，從  $O'$  作  $MN$  之平行線，二線交於  $H$ 。  $O'H$  上取  $O''$  令  $HO'' = \frac{1}{2}k$ 。 以  $O''$  為中心， $\odot O'$  之半徑為半徑作  $\odot O''$  交  $\odot O$  於  $B$ 。 過  $B$  作  $MN$  之平行線  $AD$ ，即所求。  
(證略) Q. E. F.

(例五)  $\angle APB, \angle CQD$  為二定角。 求作一定方向之直線交二角之各邊於  $A, B, C, D$  令  $AB = CD$ 。

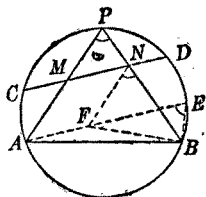
〔解法〕 依所設定方向作  $PP'$  交  $QC$  於  $P'$ 。 作  $P'A'' \parallel PA$ ,  $P'B'' \parallel PB$ 。 作  $PP'$  之任意一平行線  $A'D'$  交  $P'A''$  於  $A'$ ,  $P'C$  於  $C'$ ,  $P'B''$  於  $B'$ 。 在  $A'D'$  上



取  $D'$  令  $A'B' = C'D'$ 。 聯  $P'D'$  交  $QD$  於  $D$ 。 過  $D$  作  $PP'$  之平行線  $AD$  即所求。(證略) Q. E. F.

(例六)  $AB, CD$  為圓內二定弦。 求在  $\widehat{CD}$  上作點  $P$  令  $PA, PB$  在  $CD$  上截取部分等於定長  $k$ 。

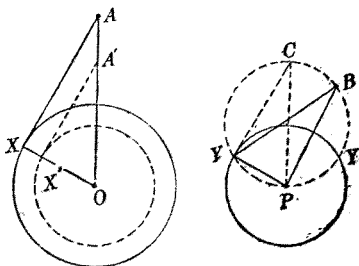
〔解析〕 設  $P$  為所求之點。  $MN = k$ 。 作  $AE \parallel CD$ ,  $NF \parallel PA$  則  $AF = MN = k$ 。 又  $\angle FNB = \angle APB = \angle AEB$ 。 因得解法如下：



〔解法〕 作  $AE \parallel CD$ 。 在  $AE$  上取  $F$  令  $AF = k$ 。 作  $\odot FBE$  交  $CD$  於  $N$ 。 聯  $BN$  交  $\widehat{CD}$  於  $P$  即得。 Q. E. F.

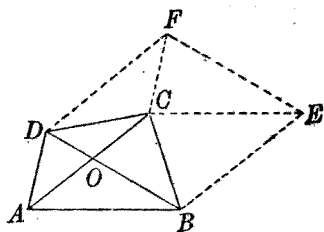
(例七)  $\odot O, \odot P$  爲二定圓,  $A, B$  爲二定點. 求作二圓之平行半徑  $OX, PY$  令  $\angle OAX = \angle PBY$ .

〔解法〕 聯  $OA$ . 在  $OA$  上取  $A'$  令  $OA : OA'$  等於  $\odot O$  半徑 :  $\odot P$  半徑. 從  $P$  作  $PC$  令  $PC \parallel OA'$ . 作  $\odot PBC$  交  $\odot P$  於  $Y$ . 聯  $PY$  作  $OX \parallel PY$ .  $OX, PY$  即所求. (證略) Q. E. F.



(例八) 已知四角形之任意二邊及二對角線之長, 又知二對角線之夾角, 求作此四角形.

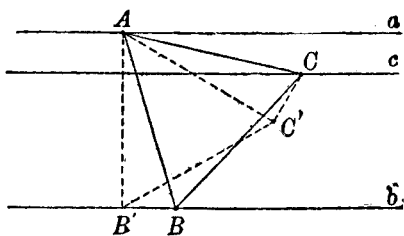
〔解析〕 設  $ABCD$  爲所作之四角形 令  $AB$  平行移動至  $CE$ ,  $AD$  平行移動至  $CF$ . 聯  $DF, FE, BE$  則  $\triangle CEF \cong \triangle ABD$ .  $ACFD, ABEC, DBEF$  皆爲平行四邊形.  $\therefore BE$



$= AC, FE = DB, \angle DFE = \angle AOB$  皆爲已知量 故可先作  $\square DBEF$ . 又因  $CE = AB, CF = AD$ .  $\therefore$  從  $C$  至  $\square DBEF$  各頂點之距離即爲原四角形  $ABCD$  各邊之長. 故任意知其二邊之長, 即可決得  $C$  點而得解答. (解法略) Q. E. F.

(例九) 在已設三平行線上各取一點  $A, B, C$  令  $\triangle ABC$  爲正三角形.

〔解析〕 設  $\triangle ABC$  爲  
所求之正三角形. 將  $AB$  依  
 $A$  點旋轉至與所設三直線垂  
直交  $b$  於  $B'$ . 同時  $AC$  亦依  
 $A$  點旋轉至  $AC'$  且令  $AC'$



$= AB'$ . 則因  $AB = AC, AB' = AC'$ , 又  $\angle BAB' = \angle CAC'$ . 故  $\triangle ABB' \cong \triangle ACC'$ .  $\therefore \angle AC'C = \angle AB'B = R\angle$ . 因得如下之解法:

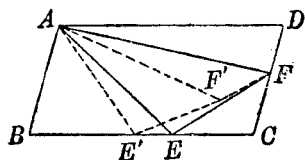
〔解法〕 作  $a, b$  之公垂線  $AB'$ . 以  $AB'$  爲一邊作正三角形  $AB'C'$ . 從  $C'$  作  $AC'$  之垂線交  $c$  於  $C$ . 聯  $AC$ . 作  $AB$  令  $\angle CAB = 60^\circ$  交  $b$  於  $B$ . 聯  $BC$ . 則  $\triangle ABC$  卽所求. Q. E. F.

〔證〕  $\angle CAB = 60^\circ = \angle C'A'B'$ ,  $\angle CC'A = R\angle = \angle BB'A$ , 又  $AC' = AB'$ ,  $\therefore \triangle ACC' \cong \triangle ABB'$ .  $\therefore AC = AB$ . 又  $\angle CAB = 60^\circ$ .  $\therefore \triangle ABC$  爲正三角形. Q. E. D.

(注意) 上述解法中,  $AB'$  並非必須爲  $a, b$  之公垂線任意一截線交  $a, b$  於  $A, B'$  均可. 只須作  $C'C$  時令  $\angle AC'C = \angle AB'B$  其他完全無異.

(例一〇) 在平行四邊形  $ABCD$  之二邊  $BC, DC$  上各取點  $E, F$ , 令  $\triangle AEF$  與所設三角形相似.

〔解法〕 在  $BC$  上任取  $E'$ . 作  $\triangle AE'F'$  令與所設三角形相似. 作  $F'F$



令  $\angle AF'F = \angle AE'C$  交  $CD$  於  $F$ . 作  $AE$  令  $\angle FAE = \angle F'AE'$  交  $BC$  於  $E$  則  $\triangle AEF$  即所求. Q. E. F.

〔證〕  $\because \angle FAE = \angle F'AE' \therefore \angle FAF' = \angle EAE'$ , 又  $\angle AF'F = \angle AE'E$ ,  $\therefore \triangle FAF' \sim \triangle EAE'$ .  $\therefore AF : AE = AF' : AE'$ . 又  $\angle FAE = \angle F'AE'$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle AE'F'.$$

$\therefore \triangle AEF$  與所設三角形相似. Q. E. D.

(例一一) 求作四角形  $ABCD$ , 已知  $AB, AD, \angle B, \angle D$  及  $BC : CD$ .

〔解析〕 設  $ABCD$  爲所求之四角形. 聯  $AC$  以  $BC$  爲一邊作  $\triangle A'BC$  令相似於  $\triangle ADC$ . 則  $BA' : AD = BC : DC$  爲已知比.

$\because AD$  爲已知長,  $\therefore BA'$  爲已知長. 又

$\angle ABA' = 4R\angle - (\angle ABC + \angle A'BC) = 4R\angle - (\angle B + \angle D)$  爲已知角. 又  $AB$  亦爲已知.  $\therefore$  可先作得  $\triangle ABA'$ .

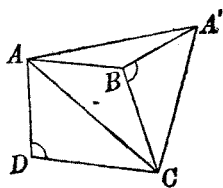
又因  $\angle ABC$  爲定角, 故  $BC$  之方向一定.

又  $AC : A'C = CD : BC$  爲定比. 故可應用軌跡 9 求得  $C$  之軌跡與  $BC$  交於  $C$ . 於是再可求得  $D$ , 而得所求之四角形  $ABCD$

(解法及證略)

Q. E. F.

(例一二) 過相交二定圓  $O, O'$  之一交點  $A$ . 求作一割線  $BAC$



令  $BA, AC$  二弦之差等於定長  $d$ .

(解析) 設  $BAC$  爲所求之線.

作  $OD \parallel OE \perp BC$ . 則  $AD = \frac{1}{2} AB$ ,

$AE = \frac{1}{2} AC$ .  $\therefore AD - AE = \frac{1}{2} (AB$

$- AC) = \frac{1}{2} d$ . 在  $AD$  上取  $F$  令  $AF$

$= AE$ , 則  $DF = AD - AF = AD - AE = \frac{1}{2} d$ .

故可做照 § 258 例四, 得如下之解法

(解法) 固定  $A$  點旋轉  $\odot O'$  兩直角至  $\odot O''$ . 聯  $OO''$ . 以  $OO''$  爲直徑作  $\odot OGO''$ . 作弦  $O''G = \frac{1}{2} d$ . 過  $A$  作  $O''G$  之平行線交  $\odot O, \odot O'$  於  $B, C$ . 則  $BAC$  卽所求之直線. Q. E. F.

(證) 聯  $OG$  交  $BC$  於  $D$ , 則因  $BC \parallel GO''$   $\angle OGO'' = R\angle$ ,  $\therefore GD \perp BC$ ,  $\therefore AB = 2AD$ . 作  $O''F \parallel O'E \perp BC$ . 則  $\triangle AO''F \cong \triangle AO'E$ ,  $\therefore AF = AE$ .  $\therefore AC = 2AE = 2AF$ .

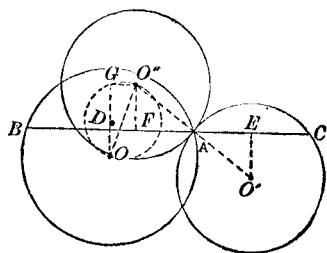
$\therefore AB - AC = 2AD - 2AF = 2(AD - AF) = 2DF$ .

但  $DFO''G$  爲矩形,  $\therefore DF = O''G = \frac{1}{2} d$

$\therefore AB - AC = 2DF = d$

$\therefore BAC$  爲所求之直線. Q. E. D.

§ 523. 對稱法 轉換法 作圖題有甚多須利用對稱定理解者如例一至例八, 亦有用轉換法解者如例九例十.

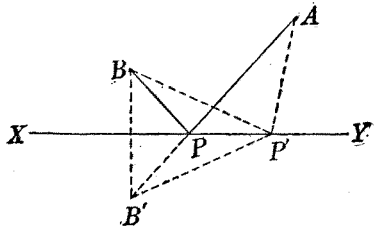




(例一)  $A, B$  爲定直線  $XY$  同側二定點. 求在  $XY$  上作一

點  $P$  令  $AP+PB$  爲最小.

〔解法〕 作  $B$  關於  $XY$  之對稱點  $B'$ . 聯  $AB'$  交  $XY$  於  $P$ .  $P$  卽所求點. Q. E. F.



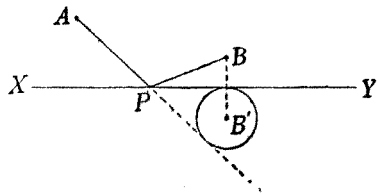
〔證〕 設  $P'$  爲  $XY$  上其他一點. 則  $AP'+P'B' > AB' = AP$

$+PB'$ .  $\because P'B = P'B', PB = PB', \therefore AP'+PB' > AP+PB$ . 卽  $AP+PB$  爲最小. Q. E. F.

(例二)  $A, B$  爲定直線  $XY$  同側二定點. 求在  $XY$  上作一

點  $P$  令  $\angle APX = 2\angle BPY$ .

〔解法〕 作  $B$  關於  $XY$  之對稱點  $B'$ . 以  $B'$  爲中心, 作  $XY$  之切圓  $\odot B'$ . 從  $A$  作  $\odot B'$  之切線交  $XY$  於  $P$ .  $P$  卽所求點.

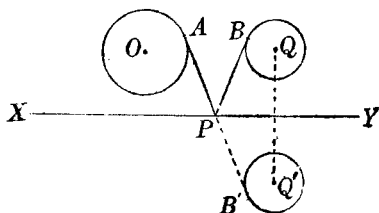


(證略) Q. E. F.

(例三)  $\odot O, \odot Q$  爲定直線  $XY$  同側二定圓. 求在  $XY$  上作

一點  $P$  令從  $P$  至  $\odot O, \odot Q$  所作切線與  $XY$  成等角.

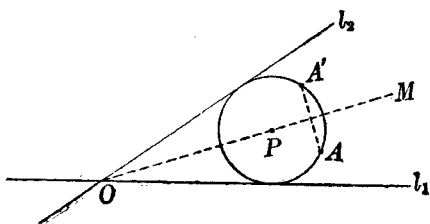
〔解法〕 作  $\odot Q$  關於  $XY$  之對稱形  $\odot Q'$ . 作  $\odot O, \odot Q'$  之公切線  $AB'$  交  $XY$  於  $P$ .  $P$  即所求點. (證略)  $Q. E. F.$



本題有四解答

(例四) 作一圓令過所設一定點  $A$ , 且切二定直線  $l_1, l_2$ .

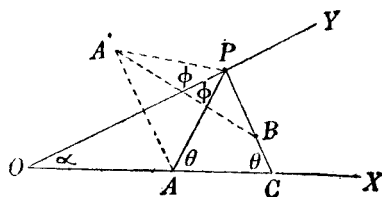
〔解析〕 設  $l_1, l_2$  交於  $O$ ,  $OM$  為交角之等分線.  $P$  為所求圓之中心. 則因  $l_1, l_2$  同切  $\odot P$ , 故  $P$  必在  $OM$  上.  $\odot P$  既過  $A$  點, 則亦必



過  $A$  關於  $OM$  之對稱點  $A'$ . 故可先作  $OM$ , 繼作  $A'$ . 於是可作一圓令過  $A, A'$  兩定點, 再切  $l$  或  $l'$  一直線即得.  $Q. E. F.$

(例五)  $A$  為定角  $XOY$  邊  $OX$  上一定點  $B$  為角內一定點. 求在  $OY$  上作一點  $P$ , 令  $PB$  延線交  $OX$  於  $C$  而  $PA = PC$ .

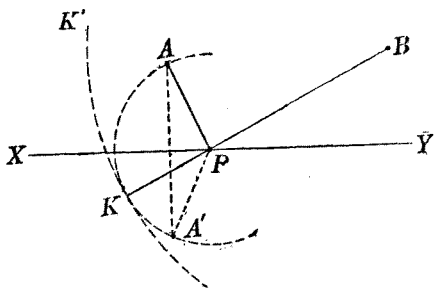
〔解析〕 設  $P$  為所求之點.  $PA = PC$ , 則  $\angle PAC = \angle PCA$ . 名  $\angle XOY$  為  $\alpha$ ,  $\angle PAC = \angle PCA$  為  $\theta$ ,  $\angle OPA$  為  $\phi$ . 則  $\angle OPC = \phi + \angle APC = \phi + (180^\circ - 2\theta)$



$= \phi + 180^\circ - 2(\alpha + \phi) = 180^\circ - 2\alpha - \phi$ . 故  $\angle OPC + \phi = 180^\circ - 2\alpha$  爲已知角. 故若取  $A$  關於  $OY$  之對稱點  $A'$ , 聯  $PA'$ , 則  $\angle A'PB = \angle A'PO + \angle OPC = \phi + \angle OPC = 180^\circ - 2\alpha$ . 故以  $A'B$  爲弦,  $180^\circ - 2\alpha$  爲弓形角作弓形弧即得與  $OY$  之交點  $P$ , 卽爲所求.  $Q. E. F.$

(例六)  $A, B$  爲二定點,  $XY$  爲定直線. 求在  $XY$  上取點  $P$  令  $AP + PB$  等於定長  $k$ .

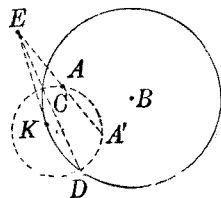
[解析] 設  $P$  爲所求之點. 延長  $BP$  至  $K$  令  $PK = PA$ . 則  $BK = BP + PA = k$  爲所設之長. 以  $B$  爲中心  $k$  爲半徑作弧  $KK'$ . 作  $A$  關於  $XY$  之對稱點  $A'$ .



則  $P$  必爲過  $A, A'$  且切  $\sim KK'$  之圓之中心可知. 故若知過二定點且切一定圓之圓之作法, 本題卽得解決. 但此爲一普通作圖題, 茲述其解法如下:

[補助作圖題] 求作一圓令過二定點  $A, A'$ , 且一定圓  $B$ .

[解法] 過  $A, A'$  作任意一圓交  $\odot B$  於  $C, D$ . 聯  $AA', CD$  交於  $E$ . 從  $E$  作  $EK$  切  $\odot B$  於  $K$ .  $\odot AA'K$  卽所求



因照作法,  $\overline{EK}^2 = \overline{EC} \cdot \overline{ED} = \overline{EA} \cdot \overline{EA'}$ .

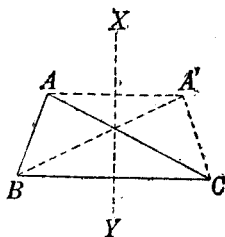
$Q. E. F.$

$\therefore EK$  切  $\odot AA'K$  於  $K$ .  $\therefore EK$  爲二圓之公切線其切點爲  $K$ .  $\therefore \odot B, \odot AA'K$  切於  $K$ . Q. E. D.

(例七) 已知三角形之二邊及此二邊對角之差, 作此三角形.

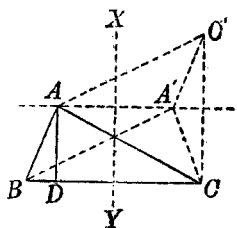
[解析] 設  $\triangle ABC$  爲所求之三角形,  $AC, AB$  爲已知長,  $\angle B - \angle C$  爲已知角度.

以  $BC$  之垂直等分線  $XY$  爲軸作  $A$  之對稱點  $A'$ . 聯  $AA', BA', CA'$ . 則因  $B, C$  互爲對稱點, 故  $\triangle A'BC \cong \triangle ABC$  關於  $XY$  爲對稱而爲合同形.  $\therefore \angle ABA = \angle ABC - \angle A'BC = \angle ABC - \angle ACB$  爲已知角. 又  $A'B = AC$  爲已知長. 故可先作  $\triangle ABA'$ , 以  $AA'$  之垂直等分線  $XY$  爲軸, 作  $B$  之對稱點  $C$  卽得 (證略) Q. E. F.



(例八) 已知三角形之底, 高及兩底角之差, 求作此三角形.

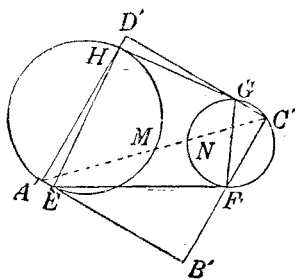
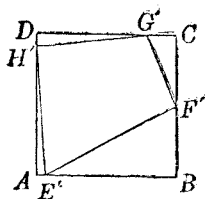
[解析] 設  $\triangle ABC$  爲所求之三角形, 底  $BC$  及高  $AD$  爲已知長,  $\angle B - \angle C$  爲已知角度. 以  $BC$  之垂直等分線  $XY$  爲軸, 作  $A$  之對稱點  $A'$ . 以  $AA'$  爲軸作  $C$  之對稱點  $C'$ . 聯  $A'B, A'C, A'C', AC', CC'$ . 則



$AB = A'C = A'C', A'B = \angle C = AC', \therefore AB'A'C'$  爲  $\square$ .  $\therefore \angle BAC' = 2R\angle - \angle ABA' = 2R\angle - (\angle ABC - \angle A'BC) = 2R\angle - (\angle B - \angle C)$  爲已知角. 又因  $CC' = 2AD$  爲已知長, 故  $C'$  爲已知點. 故

可先作  $R\triangle BCC'$ ，再以  $BC'$  爲弦作弓形令弓形角等於  $2R\angle - (\angle B - \angle C)$  而得  $A$  點。(證略) Q. E. F.

(例九) 在一所設正方形內求作一內接四角形令與一所設四角形相似。



[已設] 正方形  $ABCD$ , 四角形  $EFGH$ .

[求作] 四角形  $E'F'G'H'$  其頂點各在  $ABCD$  各邊上且與  $EFGH$  相似。

[解法] 先作  $EFGH$  之外接正方形如下：以  $EH, FG$  各爲直徑作圓。在形內半圓周上各取中點  $M, N$ 。聯  $MN$  延長之交外半圓周於  $A', C'$ 。聯  $A'E, C'F$  延長之交於  $B'$ 。聯  $A'H, C'G'$  延長之交於  $D'$  則  $A'B'C'D'$  爲正方形。

既得  $EFGH$  之外接正方形  $A'B'C'D'$ ，於是可用比例法在  $AB$  上取  $E'$  令  $AE' : A'E = AB : A'B'$ 。

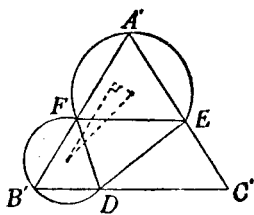
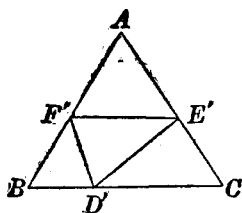
同樣再在各邊上取  $F', G', H'$ 。聯  $E'F', F'G', G'H', H'E'$ 。

則  $E'F'G'H'$  卽所求。

Q. E. F.

(學者自證之)

(例一〇) 在一所設三角形內作一內接三角形令與他所設三角形為合同形。



[已設] 二三角形  $ABC, DEF$ .

[求作]  $\triangle D'E'F'$  內接於  $\triangle ABC$  且與  $\triangle DEF$  合同。

[解法] 先作  $\triangle DEF$  之外接三角形  $A'B'C'$  令合同於  $\triangle ABC$  如下：作弓形  $FA'E, FB'D$  令其弓形角各等於  $\angle A, \angle B$ 。過  $F$  作直線令為兩弓形弧所截之部分等於  $AB$  (§ 258 例四)。聯  $A'E, B'D$  延長之交於  $C'$ 。

則得  $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ 。

於是可在  $BC$  上取  $D'$  令  $BD' = B'D$ 。同樣在  $AB, AC$  上取  $F', E'$ 。聯成  $\triangle D'E'F'$  即所求。 Q. E. F.

(證略)

[討論] 參閱 § 258 例四。

§ 524 求作圓之數要例 凡圓常以三條件決之。茲舉要例如下：

(例一) 過三定點.

〔解法〕 卽三定點爲頂點所成三角形之外接圓. 若三定點共線時無解答, 否則有一解答.

(例二) 切三定直線

〔解法〕 卽三定直線所成三角形之內切圓及旁切圓. 故普通可有四解答. 若二直線平行時, 有二解答. 三直線平行時無解答. 三直線共點時, 則四圓合一成一點.

(例三) 過二定點切一定直線

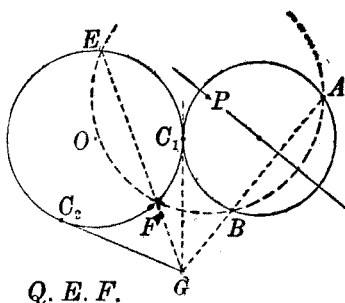
〔解法〕 見相似法例七.

(例四) 過一定點切二定直線

〔解法〕 見對稱法例四.

(例五) 過二定點切一定圓.

〔解法〕 設  $\odot O$  爲定圓,  $A, B$  爲定點. 在  $AB$  之垂直等分線上取任意點  $P$  作  $\odot P$  令過  $A, B$  且交  $\odot O$  於  $E, F$ .  $EF, AB$  交於  $G$ . 從  $G$  作  $\odot O$  之切線  $GC_1, GC_2$ . 則過  $A, B, C$  ( $C_1$  或  $C_2$ ) 所作之圓卽所求.



〔證〕 因  $\overline{GC}^2 = GE \cdot GF = GA \cdot GB$ ,

$\therefore GC$  爲  $\odot O$  及  $\odot ABC$  之公切線

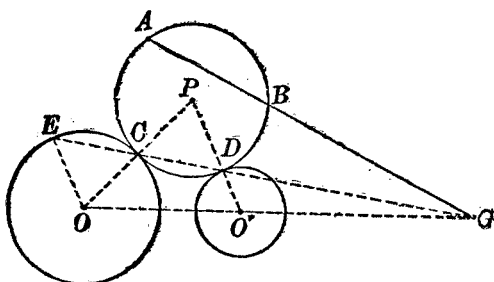
∴  $\odot ABC$  切  $\odot O$  於  $C$ .

Q. E. D.

〔討論〕 本題普通有二解答, 若一定點在定周上, 則有一解答; 若二定點一在圓內一在圓外時, 則無解答.

(例六) 過一定點, 切二定圓.

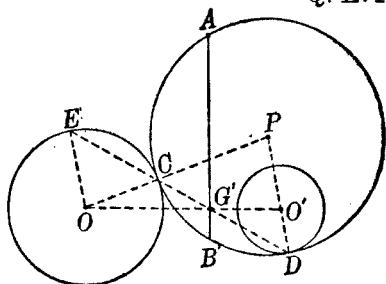
〔解析〕 設  $A$  爲定點,  $\odot O, \odot O'$  爲定圓.  $\odot P$  爲所求之圓, 切  $\odot O$  於  $C$ , 切  $\odot O'$



於  $D$ . 聯  $CD$  交  $OO'$  於  $G$ , 交  $\odot O$  於又一點  $E$ . 聯  $OE, OP, O'P$ . 因  $C, D$  爲切點, 故  $OP, O'P$  過  $C, D$  故  $\angle OEC = \angle OCE = \angle PCD = \angle PDC = \angle O'DG$ . ∴  $OE \parallel O'D$ . ∴  $G$  爲  $\odot O, \odot O'$  之相似中心. 聯  $AG$  交  $\odot P$  於又一點  $B$ , 則  $GA \cdot GB = GC \cdot GD$ . 因  $C, D$  爲一雙非對應點, 故  $GC \cdot GD$  爲定值, 故  $GA \cdot GB$  爲定值. 故可求得  $B$  點. 即可依上例解之.

Q. E. F.

〔討論〕 本題普通有四解答. 因例五可有二解答. 然二圓有兩個相似中心. 故同樣如右圖從相似內心  $G'$  可別得一點  $B'$ , 又可得二解答.





(例七) 過一定點,切一定直線及一定圓.

[解析] 設  $\odot P$  為所求之圓,

過所設定點  $A$ , 切所設定直線  $GC$

於  $C$ , 切所設定圓  $\odot O$  於  $D$ . 聯  $OP$ .

因  $D$  為切點, 故在  $OP$  上. 聯  $CD$  延

長之交  $\odot O$  於  $E$ . 聯  $EO$  延長之交

$\odot O$  於  $F$ , 交  $CG$  於  $G$ . 則因  $\angle GED = \angle ODE = \angle PDC = \angle PCD$ ,

$\therefore EG \parallel PC \perp GC$ .  $\therefore EF$  為直徑,  $\therefore \angle EDF = R\angle = \angle EGC$ .

$\therefore G, F, D, C$  共圓  $\therefore ED \cdot EC = EF \cdot EG$ .

聯  $EA$  交  $\odot P$  於又一點  $B$ . 則  $EA \cdot EB = EC \cdot ED$ .

$\therefore EA \cdot EB = EG \cdot EF$ .

故可先從  $O$  作  $GC$  之垂線  $EOFG$ . 再在  $EA$  上求  $B$  令  $EB$

$= \frac{EF \cdot EG}{EA}$ . 於是可依例三或例五解之.

Q. E. F.

[討論] 本題普通有二解答與例三例五同.

(例八) 切二定直線及一定圓.

設  $m, n$  為定直線,  $\odot O$  為

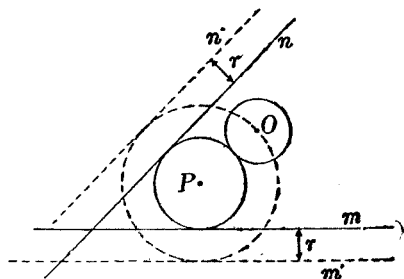
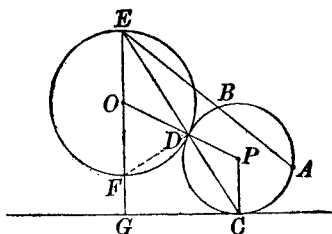
定圓, 其半徑為  $r$ .

[解法] 作  $m, n$  之平行

線  $m', n'$  令其間距離為  $r$ . 依

照例四作  $\odot P$  過  $O$  點切直線

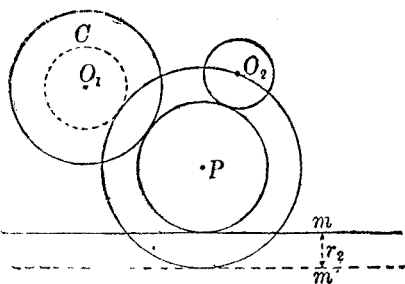
$m', n'$  即所求圓之同心圓. Q. E. F.



〔討論〕 本題普通有四解答. 因例四可有二解答. 而  $m, n$ , 之其他一側尚有一雙距離為  $r$  之平行線, 又可得二解答也.

(例九) 切一定直線及二定圓.

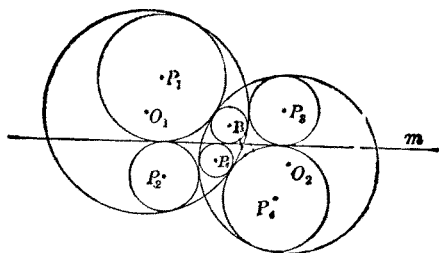
〔解法〕 設  $\odot O_1, \odot O_2$  為所設二定圓其半徑各為  $r_1, r_2, m$  為所設定直線. 以  $r_1 - r_2$  (或  $r_1 + r_2$ ) 為半徑作  $O_1$  之同心圓  $C$ . 作  $m$  之平行線  $m'$  令其與  $m$  之距離為



$r_2$  依照例七作  $\odot P$  令過  $O_2$  點切  $\odot C$  及切直線  $m'$  即所求圓之同心圓.

Q. E. F.

〔討論〕 本題最多可有六解答. 如下圖當  $m$  與  $\odot O_1$ , 與  $\odot O_2$  互交時.



(例一〇) 切三定圓.

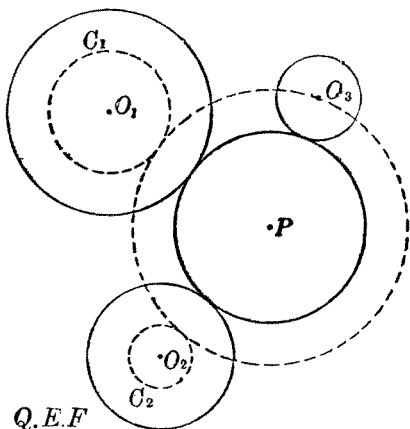
〔解法〕  $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$

爲所設三定圓。其半徑各爲  $r_1, r_2, r_3$ 。以  $r_1 - r_3$  (或  $r_1 + r_3$ )

半徑作  $\odot O_1$  之同心圓  $C_1$ 。以  $r_2 - r_3$  (或  $r_2 + r_3$ ) 爲半徑作爲

$\odot O_2$  之同心圓  $C_2$ 。依照例六作  $\odot$  令過  $O_3$  點且切  $\odot C_1$

及  $\odot C_2$  卽所求圓之同心圓。Q.E.F



〔討論〕 本題最多可有八解答。圖僅示三定圓全在  $\odot P$  外之一種，三定圓可全在  $\odot P$  內又一種，二圓在  $\odot P$  外一圓在  $\odot P$  內有三種，二圓在  $\odot P$  內一圓在  $\odot P$  外又有三種；共計有八種也。

## 習題二十六

1. 作一圓令過一定點而與二同心圓相切。
2. 作一圓令與一定直線及二同心圓相切。
3. 已設定圓直徑兩端二切線求作第三切線令介乎二切線間之部分等於定長。
4. 已設一定點  $P$  及二平行線  $XY, X'Y'$ 。求在  $XY, X'Y'$  內作一線分令等於定長，且從  $P$  至此線分所作垂線過其中點。
5. 已知三角形之頂角及底邊爲頂角等分線所分二部分之

長,求作此三角形.

6.  $P$  爲  $\angle XOY$  內一定點. 求過  $P$  作一直線交  $OX, OY$  於  $A, B$  令  $PA : PB$  等於定比.

7.  $P$  爲  $\angle XOY$  內一定點. 求在  $OX, OY$  上各取點  $A, B$  令  $PA = PB$  且  $\angle APB$  爲直角.

8.  $AB, CD$  爲不平行而未相交之二線分.  $P$  爲一定點. 求過  $P$  作一直線與  $AB, CD$  之延線共點.

9.  $AB, CD$  爲不平行而未相交之二線分. 求作一直線令等分  $AB, CD$  延線之夾角.

10. 求在一定直線上取一點令與一定角二邊之距離之差爲定長.

11. 過定圓周上二定點作二平行弦令其和等於定長.

12. 以所設弓形弧上一定點爲頂點作正三角形令內接於此弓形.

13. 過二定點求作一圓令與一定圓相交所得之公共弦與一定直線平行.

14. 在定圓內作一內接直角三角形令其二直角邊各過一定點.

15. 過定圓內一定點求作一弦令此弦爲定點所分兩部分之差爲定長.

16.  $P, Q$  爲二定點.  $XY, X'Y'$  爲二定平行線. 求過  $P$  作一直線交  $XY, X'Y'$  於  $A, B$  令  $QA = QB$ .
17. 在定圓內作一內接直角三角形令其一邊過一定點, 一銳角等於一定角.
18.  $AB, CD$  爲圓內二定弦. 求在  $CD$  上取一點  $E$ , 令  $AE, BE$  延長交圓周於  $F, G$  而  $FG$  爲定長.
19.  $P, Q$  爲二定點;  $XY, X'Y'$  爲二定平行線. 求作一菱形令一雙對邊在  $XY, X'Y'$  上而又一雙對邊過  $P, Q$ .
20. 在三角形底邊上求作一點令與其他二邊距離之和爲定長.
21. 在所設三角形內求作一內接正方形.
22. 過相交二圓一交點求作一直線令其被二圓所截二弦之比等於一定比.
23. 過所設點  $P$  求作一直線交所設圓周於  $A, B$  令  $PA : PB$  爲定比.
24. 在  $\triangle ABC$  內求作一點  $P$ , 令
- $$\triangle PAB : \triangle PAC : \triangle PBC = 1 : 2 : 3.$$
25. 在三角形內求作一點令與三邊距離之比等於  $1 : 2 : 3$ .
26. 過一定點求作一直線, 令與其他二定點距離之比等於  $1 : 2$ .

27.  $P$  爲定角  $\angle XOY$  內一定點. 求在  $OX$  上取一點  $A$ , 令  $AP$  等於  $A$  與  $OY$  之距離.

28.  $P$  爲定角  $\angle XOY$  內一定點. 求作一圓令與  $OX, OY$  相切, 且過  $P$  點.

29. 在所設三角形內求作一內接三角形令其三邊各與三直線平行.

30. 在所設梯形內求作一底之平行線令其爲二對角線三等分.

31. 在所設扇形內求作一內接正方形.

32. 在所設三角形內求作底之平行線令等分此三角形之面積.

33. 在所設三角形內求作底之垂線令等分此三角形之面積.

34. 在所設三角形內求作底之平行線令等分此三角形之周.

35. 在所設三角形內求作底之垂線令等分此三角形之周.

36. 在同心二圓內求作大圓弦令其等於爲小圓所截弦之二倍.

37. 在一所設正方形內作內接正方形令與所設其他一正方形爲合同形.

38. 在所設扇形內求作一內接三角形令與一所設三角形爲合同形.

39.  $A, B$  爲定直線  $XY$  同旁二定點. 求在  $XY$  上取一點  $P$  令  $\angle APX = \angle BPY$ .

40.  $A, B$  爲定直線  $XY$  兩旁二定點. 求在  $XY$  上取一點  $P$  令  $\angle APX = \angle BPX$ .

41.  $P, Q$  爲定角  $\angle XOY$  內二定點. 求在  $OX, OY$  上各取  $M, N$  令折線  $PMNQ$  之長爲最小.

42.  $A, B$  爲定直線  $XY$  同旁二定點. 求在  $XY$  上取一點  $P$ , 令  $\angle APX, \angle BPY$  之差等於一定角.

43. 在二定圓內公切線上求作一點令從此點至二圓所作二切線之夾角等於所設角.

44. 在定圓內求作一直徑令一定弦在此直徑上之射影等於定長.

45. 過一定點求作一直線令爲所設三平行線所截部分之差等於所設定長.

46.  $A, B$  爲所設二平行線外二定點. 求作二平行線之公垂線  $MN$  令折線  $AMNB$  之長爲最小.

47. 過定圓周上二定點求作二平行弦令其差等於定長.

48. 已設二同心圓及一定點  $A$ . 求在二圓周上各取點  $X, Y$ , 令  $XY$  等於定長,  $\angle XAY$  等於定角.

[註] 以下各題中,  $A, B, C$  表  $\triangle ABC$  之三角;  $a, b, c$  表其各對邊;  $m_a, m_b, m_c$  表各對應中線;  $h_a, h_b, h_c$  表各對應高.

求作  $\triangle ABC$ , 已知:

49.  $A, h_a, b : c.$

50.  $A, a, b : c.$

51.  $A, a + b, a + c.$

52.  $A, B, a \pm b.$

53.  $a : b, a : c, m_a + m_b + m_c.$

54.  $A, m_b, m_c.$

55.  $A, a : b, a + b + c.$

56.  $A, b : c, 3a + 2h_a.$

57.  $h_a, h_b, m_c.$

58.  $m_a, m_b, h_c.$

59.  $A, m_a, h_a.$

60.  $A, m_a, b + c.$

61. 在所設正方形內求作一內接正方形令等於一定正方形.

62. 在所設扇形內求作一內接三角形令與一定三角形爲合同形.

63. 以所設正方形一邊上一定點爲頂點求作一內接正三角形.

64.  $P, Q$  爲  $\angle XOY$  內二定點. 求在  $OX, OY$  作點  $A, B$  令  $PA + AB + BQ$  爲最小.



65. 已知梯形之二底及高, 並其二對角線之夾角. 求作此梯形.
66. 求過定角內一定點作一直線令與定角兩邊所成三角形之周等於定長.
67.  $P$  爲  $\triangle ABC$  內一定點. 求過  $P$  作直線交  $AB, AC$  於  $X, Y$  令  $BX + XY + YC$  等於定長.
68. 求作所設三角形之外接三角形令與一定三角形相似且面積爲最大.
69. 求作所設三角形之內接三角形令與一定三角形相似且面積爲最小.
70. 在所設三角形內作一內接三角形令其面積爲最小.



## 英漢名詞對照表

### A

Acute angle 銳角.....	12
Acute-angled triangle 銳角三角形..	36
Addendo 加比定例.....	184
Adjacent angles 隣角.....	12
Alternando 更比定理.....	182
Alternate exterior angles 外錯角...30	
Alternate interior angles 內錯角...30	
Altitude 高 .....	15,39
Angle 角.....	3,15
Angle at circumference 圓周角.....	95
Angle-bisector 等分角線.....	16
Angle in segment 弓形角.....	95
Antecedent 前項.....	177
Apothem 邊心距.....	238
Arc 弧.....	79
Area 面積.....	141
Axiom 公理.....	4

### B

Base 底 .....	17,39
Base angles 底角.....	18
Bisector 等分線 .....	9
Breadth 廣 .....	2
Broken line 折線 .....	3

### C

Center of the circle 圓之中心.....	77
Central angle 中心角.....	79, 238
Centre 中心 .....	238
Centre of gravity or centroid 重心 .....	48
Centre of symmetry 對稱中心 .....	57
Chord 弦.....	79
Circle 圓.....	77
Circum-centre 外心.....	51
Circumference 圓周.....	77
Circumscribed circle 外接圓.....	97
Circumscribed polygon 圓外切多角 形.....	98
Collinear points 共線點 .....	47
Commensurable quantity 可通約 量.....	180
Common chord 公弦 .....	92
Common measure 公約量.....	178
Common perpendicular 公垂線.....	34
Common tangent 公切線 .....	92
Complement 餘形 .....	146
Complement angles 餘角 .....	12
Complete quadrilateral 完全四邊形	

.....	270
Componendo 合比定理 .....	183
Componendo and dividendo 合分比 定理 .....	183
Conclusion 終決.....	6
Concurrent lines 共點線.....	47
Congruent figures 合同圖 .....	4
Conjugate angles 相屬角 .....	11
Conjugate arcs 相屬弧 .....	79
Conjugate harmonical points 調和 相屬點 .....	191
Conjugate rays 調和相屬線.....	270
Consequent 後項.....	177
Continued proportion 連比例.....	181
Contraposition 倒否定理 .....	34
Converse theorem 倒定理 .....	34
Convex polygon 凸多角形.....	15
Corresponding angles 同位角 .....	30
Corollary 系 .....	6,125
Curve 曲線 .....	2
Curved surface 曲面.....	3

## D

Definition 定義 .....	2
Demensions 向度 .....	2
Diagonal 對角線 .....	15
Diameter 直徑 .....	79
Distance between two parallel lines 二平行線之距離.....	43
Distance between a point and a line 點與一直線之距離.....	43
Distance between two points 二點	

間之距離.....	42
Divide externally 外分.....	185
Divided harmonically 調和分割...	191
Divide internally 內分.....	185
Divided similarly 相似分割.....	185
Dividendo 分比定理 .....	183

## E

Equilateral triangle 等邊三角形...	18
Es-centre 旁心 .....	50
Exterior angle 外角.....	15
Exterior angles 外角 .....	30
Extremes 外項 .....	181

## F

Figure 圖形.....	2
Foot 足 .....	13
Foot of perpendicular 垂足.....	13

## G

General axiom 普通公理 .....	4
Geometric axiom 幾何公理.....	4

## H

Half ray 半射線.....	3
Harmonical pencil 調和線束.....	270
Harmonic range 調和點列 .....	191
Height 高.....	2,15,19
Homothetic 應位相似 .....	259
Homothetic centre 相似中心 .....	260
Hypotenuse 斜邊.....	34
Hypothesis 假設.....	6

**I**

In-centre 內心 .....49  
 Incommensurable quantity 不可通  
 約量 .....180  
 In proportion 成比例 .....181  
 Inscribed circle 內切圓 .....98  
 Inscribed polygon 圓內接多角形...97  
 Interior angles 內角 .....30  
 Interior angle on the same side 同  
 旁內角.....30  
 Invertendo 反比定理.....182  
 Isosceles triangle 二等邊三角形 ...17

**L**

Length 長.....2  
 Line 線.....2  
 Line of centres 中心線.....92  
 Line-segment 線分.....3  
 Locus of points 點之軌跡.....112

**M**

Major angle 優角.....11  
 Major arc 優弧.....79  
 Maximum 極大 .....276  
 Mean proportional 比例中項 .....181  
 Means 內項.....181  
 Measure 約量 .....178  
 Median 中線.....16  
 Method of exhaustion 窮舉證法 ...25  
 Mid-point 中點 .....9  
 Minimum 極小 .....276

Minor angle 劣角.....11  
 Minor arc 劣弧.....79  
 Miquel point 密爾點.....106  
 Multiple 倍量.....178  
 Mutually equiangular 互等角多角  
 形 .....197

**N**

Necessary and sufficient properties  
 必需性及足夠性 .....123  
 N-gon n-角形 .....15  
 Nine-point circle 九點圓 .....109  
 Number of measure 量之度數.....222

**O**

Oblique line 斜線.....13  
 Obtuse angle 鈍角 .....12  
 Obtuse-angled triangle 鈍角三角形  
 .....36  
 Obverse theorem 否定理 .....34  
 Opposite interior angle 內對角.....23  
 Origin 原點.....3  
 Orthocentre 垂心.....52  
 Orthographic projection 正射影...158

**P**

Parallel lines 平行線 .....29  
 Parallelogram 平行四邊形.....39  
 Perigon 周角.....11  
 Perimeter 周.....15  
 Perpendicular bisector 垂直等分線  
 .....50  
 Perpendiculars 垂線 .....13

Plane 平面 .....	3	Simson's line 西摩松線 .....	105
Plane geometry 平面幾何學 .....	6	Solid 體 .....	1
Plane segment 面分 .....	141	Solid geometry 立體幾何學 .....	6
Point 點 .....	2	Square 正方形 .....	41
Point of tangency 切點 .....	83, 89	Straight angle 直線角 .....	11
Polygon 多角形 .....	15	Straight line 直線 .....	2
Postulate 公法 .....	125	Supplement angles 補角 .....	12
Problem of construction 作圖題 .....	125	Surface 面 .....	2
Proportionals 比例量 .....	181	Symmetrical figure with respect to a centre 中心對稱圖形 .....	57
<b>R</b>		Symmetrical with respect to a line 關於此直線為對稱 .....	56
Radical axis 根軸 .....	258	Symmetrical figure with respect to an axis 軸對稱圖形 .....	56
Radical center 根心 .....	258	Symmetrical with respect to a point 關於此點為對稱 .....	57
Radius 半徑 .....	238	<b>T</b>	
Radius of the circle 圓之半徑 .....	77	Tangent 切線 .....	83
Ratio 比 .....	177	Tangent circles 相切圓 .....	89
Ratio of similitude 相似比 .....	197	Theorem 定理 .....	6
Rectangle 矩形 .....	41	Third proportional 第三比例項 .....	181
Right angle 直角 .....	12	Transversal 截線 .....	29
Right-angled triangle 直角三角形 .....	36	Trapezoid 梯形 .....	39
<b>S</b>		<b>V</b>	
Secant 割線 .....	83	Vertex 頂點 .....	3, 15
Sector 扇形 .....	79	Vertical angle 頂角 .....	17
Segment 弓形 .....	79	Vertical angles 頂角 .....	12
Semicircumference 半圓周 .....	79		
Side 邊 .....	3, 15, 39		
Similar axis 相似軸 .....	264		
Similar polygons 相似多角形 .....	197		

## 漢英名詞對照表

<b>0010<sub>3</sub></b>			
立			
75~體幾何學 solid geometry.....6			
<b>0022<sub>7</sub></b>			
旁			
33~心 ex-centre.....50			
高 height.....2, 15, 39			
<b>0023<sub>1</sub></b>			
應			
20~位相似 homothetic.....259			
<b>0024<sub>9</sub></b>			
底 base.....17, 39			
??~角 base angles.....18			
<b>0028<sub>6</sub></b>			
廣 breadth.....2			
<b>0762<sub>9</sub></b>			
調			
26~和線束 harmonical pencil...270			
~和相屬線 conjugate rays.. 270			
~和相屬點 conjugate harmonical points.....191			
~和點列 harmonic range.....191			
~和分割 divided harmonically 191			
<b>1010<sub>0</sub></b>			
二			
10~平行線之距離 distance between		two parallel lines.....48	
		61~點間之距離 distance between	
		two points.....42	
		88~等邊三角形 isosceles triangle...17	
		<b>1010<sub>1</sub></b>	
		正	
		00~方形 square.....41	
		24~射影 orthographic projection 158	
		<b>1010<sub>7</sub></b>	
		互	
		88~等角多角形 mutually equian-	
		gular.....197	
		<b>1023<sub>2</sub></b>	
		弦 chord.....79	
		<b>1040<sub>9</sub></b>	
		平	
		10~面 plane.....3	
		~面幾何學 plane geometry.....6	
		21~行線 parallel lines.....29	
		~行四邊形 parallelogram.....39	
		<b>1050<sub>6</sub></b>	
		更	
		21~比定理 alternando.....182	
		<b>1060<sub>9</sub></b>	
		西	

- 00~摩松線 Simson's line.....105  
 面 surface.....2  
 25~積 area.....141  
 80~分 plane segment.....141  
**1060<sub>9</sub>**  
 否  
 30~定理 obverse theorem .....34  
**1062<sub>0</sub>**  
 可  
 37~通約量 commensurable quantity  
 ..... 180  
**1090<sub>0</sub>**  
 不  
 10~可通約量 incommensurable quan-  
 tity .....180  
**1128<sub>6</sub>**  
 頂  
 27~角 vertical angle .....17  
 61~點 vertex .....3, 15  
**1223<sub>0</sub>**  
 弧 arc .....79  
**1720<sub>7</sub>**  
 弓  
 12~形 segment.....79  
 ~形角 angle in segment .....95  
**2010<sub>4</sub>**  
 垂  
 26~線 perpendicular .....13  
 33~心 orthocentre.....52  
 40~直等分線 perpendicular bisector  
 .....50  
 60~足 foot of perpendicular .....13  
**重**  
 33~心 centre of gravity or centroid  
 .....48  
**2026<sub>1</sub>**  
 倍  
 60~量 multiple.....178  
**2090<sub>3</sub>**  
 系 corollary .....6, 125  
**2124<sub>7</sub>**  
 優  
 12~弧 major arc.....79  
 27~角 major angle.....11  
**2171<sub>0</sub>**  
 比 ratio.....177  
 22~例中項 mean proportional ...181  
 ~例量 proportionals .....181  
**2220<sub>0</sub>**  
 倒  
 10~否定理 contraposition.....34  
 30~定理 converse theorem.....34  
**2224<sub>7</sub>**  
 後  
 11~項 consequent.....177  
**2245<sub>3</sub>**  
 幾  
 21~何公理 geometric axiom....4  
**2320<sub>0</sub>**  
 外  
 11~項 extremes.....181  
 27~角 exterior angle.....15, 30



- 33~心 circum-centre.....51  
 50~接圓 circumscribed circle.....97  
 80~分 divide externally.....185  
 84~錯角 alternate exterior angles  
 .....30  
**2693<sub>2</sub>**  
 線 line .....2  
 80~分 line-segment.....3  
**2720<sub>7</sub>**  
 多  
 27~角形 polygon.....15  
**2722<sub>0</sub>**  
 向  
 00~度 dimension .....2  
**2722<sub>7</sub>**  
 角 angle .....15  
**2724<sub>7</sub>**  
 假  
 07~設 hypothesis.....6  
**2792<sub>0</sub>**  
 約  
 60~量 measure .....178  
**2793<sub>3</sub>**  
 終  
 35~決 conclusior .....6  
**2821<sub>1</sub>**  
 作  
 60~圖題 problem of construction 125  
**3021<sub>1</sub>**  
 完  
 80~全四邊形 complete quadrilateral  
 ..... 270  
**3022<sub>7</sub>**  
 扇  
 12~形 sector .....79  
**窮**  
 77~舉證法 method of exhaustion 25  
**3077<sub>2</sub>**  
 密  
 10~爾點 Miquel point.....106  
**3080<sub>1</sub>**  
 定  
 16~理 theorem .....6  
 80~義 definition .....2  
**3260<sub>0</sub>**  
 割  
 26~線 secant .....83  
**3300<sub>0</sub>**  
 必  
 10~需性及足夠性 necessary and suf-  
 ficient properties .....123  
**3322<sub>7</sub>**  
 補  
 27~角 supplement angles.....12  
**3410<sub>0</sub>**  
 對  
 11~頂角 vertical angles .....12  
 21~稱中心 centre of symmetry...57  
 27~角線 diagonal .....15  
**3530<sub>0</sub>**  
 連  
 21~比例 continued proportion...181  
**3630<sub>2</sub>**  
 邊 side.....3, 15, 39

33~心距 apothem.....	238
<b>4001<sub>7</sub></b>	
<b>九</b>	
61~點圓 nine-point circle.....	109
<b>4010<sub>7</sub></b>	
<b>直</b>	
21~徑 diameter .....	79
26~線 straight line.....	2
~線角 straight angle .....	11
27~角 right angle.....	12
~角三角形 right-angled triangle	
.....	36
<b>4022<sub>7</sub></b>	
<b>內</b>	
11~項 means .....	181
27~角 interior angles .....	30
33~心 in-centre .....	49
34~對角 opposite interior angle...	23
47~切圓 inscribed circle.....	98
80~分 divide internally.....	185
84~錯角 alternate interior angles	30
<b>4191<sub>4</sub></b>	
<b>極</b>	
40~大 maximum .....	276
90~小 minimum .....	276
<b>4325<sub>9</sub></b>	
<b>截</b>	
26~線 transversal .....	29
<b>4480<sub>1</sub></b>	
<b>共</b>	
26~線點 colinear points .....	47
61~點線 concurrent lines.....	47

**4600<sub>9</sub>****加**

21~比定例 addendo.....184

**4690<sub>9</sub>****相**

28~似比 ratio of similitude .....197

~似多角形 similar polygons...197

~似中心 homothetic centre ...260

~似軸 similar axis.....264

~似分割 divided similarly.....185

47~切圓 tangent circles .....

77~屬弧 conjugate arcs .....

~屬角 conjugate angles .....

**4712<sub>9</sub>****切**

26~線 tangent.....83

61~點 point of tangency .....83, 89

**4793<sub>2</sub>****根**

33~心 radical center .....

55~軸 radical axis .....

**4892<sub>7</sub>****梯**

12~形 trapezoid .....

**5030<sub>6</sub>****中**

26~線 median.....16

33~心 centre.....238

~心線 line of centres.....92

~心角 central angle .....79, 238

~心對稱圖形 symmetrical figure

with respect to a centre.....57

- 61~點 mid-point .....9
- 5202<sub>1</sub>**  
折
- 26~線 broken line.....3
- 5320<sub>0</sub>**  
成
- 21~比例 in proportion.....181
- 5506<sub>0</sub>**  
軸
- 34~對稱圖形 symmetrical figure  
with respect to an axis .....56
- 5560<sub>0</sub>**  
曲
- 10~面 curved surface.....3
- 26~線 curve .....2
- 6010<sub>1</sub>**  
量
- 30~之度數 number of measure...222
- 6060<sub>1</sub>**  
圖
- 12~形 figure .....2
- 6080<sub>1</sub>**  
足 foot.....13
- 6080<sub>0</sub>**  
圓 circ'le.....77
- 23~外切多角形 circumscribed poly-  
gon .....98
- 30~之中心 center of the circle.....77  
~之半徑 radius of the circle.....77
- 40~內接多角形 inscribed polygon  
.....97
- 77~周 circumference.....77
- ~周角 angle at circumference...95
- 6133<sub>0</sub>**  
點 point .....2
- 30~之軌跡 locus of points .....112
- 77~與一直線之距離 distance betwe-  
en a point and a line .....43
- 7124<sub>1</sub>**  
反
- 21~比定理 invertendo.....182
- 7129<sub>0</sub>**  
原
- 61~點 origin .....3
- 7173<sub>2</sub>**  
長 length.....2
- 7521<sub>0</sub>**  
體 solid.....1
- 7722<sub>0</sub>**  
同
- 00~旁外角 exterior angles on the  
same side .....30  
~旁內角 interior angle on the  
same side .....30
- 20~位角 corresponding angles ....30
- 周** perimeter.....15
- 27~角 perigon.....11
- 7777<sub>0</sub>**  
凹
- 27~多角形 concave polygon.....15
- 7777<sub>2</sub>**  
關
- 08~於此直線爲對稱 symmetrical  
with respect to a line .....56  
~於此點爲對稱 symmetrical with

- respect to a point.....57
- 7777<sub>7</sub>**  
凸  
27~多角形 convex polygon .....15
- 7925<sub>9</sub>**  
隣  
27~角 adjacent angles .....12
- 8022<sub>1</sub>**  
前  
11~項 antecedent .....177
- 8022<sub>7</sub>**  
分  
21~比定理 dividendo .....183
- 8060<sub>1</sub>**  
合  
21~比定理 componendo .....183  
77~同圖 congruent figures.....4  
80~分比定理 componendo and dividendo .....183
- 普  
37~通公理 general axiom .....4
- 8073<sub>9</sub>**  
公  
10~弦 common chord.....92  
16~理 axiom.....4  
20~垂線 common perpendicular...34  
27~約量 common measure.....178  
34~法 postulate .....125  
47~切線 common tangent.....92
- 8141<sub>7</sub>**  
矩  
12~形 rectangle .....4<sup>1</sup>
- 8490<sub>9</sub>**  
斜  
26~線 oblique lines.....18  
36~邊 hypotenuse .....84
- 8511<sub>7</sub>**  
鈍  
10~三角形 obtuse-angled triangle 36  
27~角 obtuse angle .....12
- 8811<sub>6</sub>**  
銳  
27~角 acute angle .....12  
~角三角形 acute-angled triangle  
.....36
- 8822<sub>7</sub>**  
第  
10~三比例項 third proportional..181
- 8834<sub>1</sub>**  
等  
36~邊三角形 equilateral triangle..18  
80~分線 bisector .....9  
~分角線 angle-bisector.....16
- 8579<sub>4</sub>**  
餘  
12~形 complement .....146  
27~角 complement angles.....12
- 9042<sub>7</sub>**  
劣  
12~弧 minor arc.....79  
27~角 minor angle.....11
- 9050<sub>9</sub>**  
半

---

21~徑 radius.....	238	60~圓周 semicircumference.....	79
24~射線 half ray .....	3	n 角形 n-gon.....	15