科学消遣

姜長英編著

中國科學圖書儀器公司
印行

科學消遣

姜長英編著

中國科學圖書儀器公司
印行

科學消遣

中華民國三十八年九月初版

編著者　姜長英

發行人　楊孝述

發行所
印刷所　中國科學圖書儀器公司
上海(18)中正中路537號

分發行所　中國科學圖書儀器公司
南京 廣州 北平 漢口 重慶 杭州

基價 150　　SG3 1/1-0.15

自　　序

人的性情嗜好，各有不同，所以也各有所愛好的娛樂與消遣。　娛樂與消遣，原是人生所必需的。

我喜歡簡單有趣的小玩意兒。　有時我研究別人的發明，自已加以推廣。有時也自已出題目，自已求解答。　我對於消遣的態度是：煩忙時厭倦時，就隨手丟開。有空了高興了，可再拿來消遣。二十年來，一直如此。消遣時如有心得，常記錄下來。日久年深，也就積存了不少。　從去年春天起，我發奮將它整理出來。斷斷續續的寫，到現在才算完成。

我寫這本小書的目的有三：第一，整理多年以來的筆記，免得日後失散或遺忘。　第二，公開個人的收穫，供給同好者以消遣材料，並且希望別人加以糾正，改進及發揚。第三，我以爲這種消遣是一種良好消遣，是値得予以提倡的。關於此點，在正文第一節論消遣中，還有詳細說明。

本書的書名，或者也可用"數學消遣"。但是"數學"兩字，爲一般人士所不喜，所駭怕，也許會因而減少許多人閱此書的機會。所以才改用比較廣泛的"科學"兩字。本書的材料，什九以上是不曾在任何書本見過的。　無論讀者的職業是士農工商或黨政軍人，也無論讀者的教育程度是高中初中大學小學，一定能在本書中各自找到他所愛好的材料。

民國三十七年九月姜長英寫於上海

目　　次

壹

論　消　遣

我們做了一天或一星期工作，覺得神勞體倦，生趣索然的時候，自然需要調劑調劑，換換空氣，作點消遣。將腦筋裏的國家大計，人事糾紛，柴米油鹽，……等等，暫且丟開，去想些或作些輕便省力，富有趣味，無關得失的事。使精神與肉體，因改變運用方式，而得到鬆弛或休息。現在的人，能在工作中求快樂的，實在太少了。在他工作的餘暇，找點消遣，尋些快樂，豈不是應該的？否則，除了吃飯睡覺，就是工作，這樣的人生不也太苦了嗎？

說到消遣是應該的，於是就有人尋花問柳，呼盧喝雉，吐霧呑雲，歌舞酒肉，……的迷戀起來。對人解釋，對己寬慰，說是"逢場作戲，消遣消遣，偶一爲之，無傷大雅"。其實這是墮落，決不是消遣的正軌。社會上還有少數人，吃穿無憂，閑暇太多。他們以墮落爲消遣，天天消遣，簡直要拿消遣當作職業了。這是缺乏正當消遣所引起的社會病態。然而，怎樣才是應該有的消遣呢？

凡是正當的消遣，最少須是無害的。再積極一點，好消遣必須是有益的。一種消遣是否合於我們的需要，可以用三個尺度或條件去衡量它。這三個是：

一、　趣味化

二、　教育化

三、　平民化

第一，既然是消遣，必須使人發生興趣，引人入勝。第二，消遣宜能養神益智，有益身心。最低限度，也要對人對已，全無遺害。第三，好的消遣須要輕而易舉，不必勞師動衆，更不可勞民傷財。趣味化了，才能使人樂於參加，不致厭棄。教育化了，才能有利無弊，收安定社會之功。平民化了，才能持久，才能普遍，使人人有消遣的享受。

我們不願意拿枯燥無味的事來作消遣。我們不應該拿墮落的事來作消遣。我們也沒有力量拿高貴的娛樂來作消遣。（例如打高爾夫球應該是很好的消遣，但它需要一套球具，一片大草原。有幾個人够這種資格呢？）有了理想的消遣，人們疲勞的精神可藉以寄託，空暇的時間可藉以消磨。好消遣代替了惡劣的消遣，挽救了人們的墮落，減少了社會罪惡。所以理想的消遣，是我們所需要，也是值得提倡的。

合於上述條件的消遣很多，如：琴，棋，書，畫，騎馬，射獵，遊公園，蕩馬路，用牙牌打一回五關，隨胡琴唱幾句京戲，或伴二三知友品茗清談，或手持一卷靜讀心愛的文字，……以上種種，只要能配合你的個性，只要時地的環境相宜，都是很正當的消遣。可惜，也許是因爲世風不古，也許是人性近惡吧，社會中實行消遣的人雖多，但愛好正當消遣的，却實在有限。這確是一件遺憾的事。

本書以後各節，介紹一些消遣的新方法，也可說是新游戲。它能增益智慧，消磨時間，使急躁的人心平氣和，使粗疏的人心思細密。一個人不必找對手，可以隨時隨地獨自消遣。如有三五同好，就可比賽成績，更能增加興趣。所以這是非常理想的合於科學的消遣。有人嫌這科學消遣太“傷腦筋”，他被這句流行的俗語所誤了，同時他也誤解了的消遣的眞義。“傷”字的意思是“損害”。但“傷腦筋”並非是損害腦筋，而是“費事”，“煩惱”的代名辭。譬如處理政治上與家庭裏的糾紛，通貨膨脹時代設法保存幣值，買戶口米或其他配給物品，等等；都是很“傷腦筋”的。這些事毫無趣味而又不得不應付，所以“傷腦筋”的人是很痛苦的。

“用腦筋”或“費腦筋”與“傷腦筋”不同。在學校裏學習國，算，英文，聲，光，化，電，那一樣不用腦筋？用了腦筋，學業才會進步。世界上的事，除了睡覺，那一樣不用腦筋？不用腦筋，就容易受傷害受損失。只要用腦筋而不感到疲勞，那是有益的。還有一件事，太簡單太容易了，那就太平庸不能吸引人了。如說把一個鷄蛋放在桌子上，或是將 8 二等分了就得 4，這誰不會？還有甚麼意思？假如說把一個鷄蛋直立在桌子上，或是將 8 二等分了可以得 3 也可得 0，這就有點意思了。所以消遣的事情不能太容易太簡單，當然必須要費點腦筋。假如你消遣了相當時間，用了不少腦筋，居然參透了一個曲折有趣的問題，或是達成了某一種不容易得到的游戲目標，這時你一定會

快樂，滿足，像大考得到一百分或賽跑得到第一名一樣。假如消遣的題目稍難，或是時間不充分，或是腦筋想錯了路線，一時得不到結果，這也於你無損，毫無關係，不必懊喪。古人有兩句名言："勝固欣然，敗亦可喜"，這正是消遣者應有的態度。再假如你玩了一會之後，覺得它太容易或是太難，覺得自己興致減退或精神疲倦了，那麼，你可以隨時放手丢開，或是另換一種消遣再玩，沒有任何拘束。總之，消遣是興趣的，自由的，主動的，無關得失的，調劑腦筋，而決不損害腦筋的。消遣與那些使人煩惱而又難於擺脫的"傷腦筋"的事相比，正好像天堂比地獄一樣呢。

下文介紹一些科學消遣，希望能增强理想消遣的陣營，擴大愛好消遣者的選擇範圍。倘若科學消遣能够削弱了惡劣消遣的惡勢力，因而減少了社會裏的罪惡，這不是很好的事嗎？

貳

三數游戲

用四個7，任意安排，再加數學符號，問如何可以組成100?

這是一個常見的數學游戲題目，想起來不該太難。但是用四個7，組成3，9，14，28等數，甚覺方便，一定要組成整整一百，又似乎不大容易。假如你費了幾分鐘腦筋，結果失敗了。然後請看答案是：

$$\frac{7}{.7} \times \frac{7}{.7} = 100$$

任何人看了答案，必然會哈哈大笑，說："原來如此！實在太容易了"！其實不但四個7可以組成100，四個別的數字，也可以照樣組成100。"會者不難，難者不會"。這兩句成語眞是一點也不假。有許多難題，在點破了之後，原是只能引人一笑，不值一文錢的。

有些專講游戲消遣的書上，列了許多算式，有的限用四個4，有的限用五個5，各都要組成1，2，3，………100等數。這些游戲，給中小學生玩起來，是非常有興趣而且是有益的。

用若干個相同的數字，如1，2，………9，要組成從1到100或100以上的各整數，這裏面有三個條件：(一)是用幾個數字，(二)是用甚麼數字，(三)是那些數學符號。所用數字個數越多，配合變化越容易。用五個或更多的數字，不論那數字是幾，要組成一百以內各數，一點不難。如所用數字，只限四個，那麼只有四個4或四個9，可以成功。其他數字，就沒有這種能力。所謂這種能力，我們暫且名之為"組合力"。如限用三個數時，不論用三個幾，都不能完全組成一百以內各數。但有的組成的數多，有的組成的數少。所以說1至9各數字的"組合力"是不同的。4與9的"組合力"最强，其次是3，較差的是5，6，7，8。領導各數字的1，2，它們的組合力反是最弱的。至於所用的數學符號，常是限於算術代數裏所習用的加，減，乘，除，括弧，小數點，乘

方，開方，階乘等。

下面列着用三個 4 與三個 9 所組成的一百以內的各數。從此可以比較 4 與 9 的組合力。

$1 = \dfrac{\sqrt{4 \times 4}}{4}$	$1 = \dfrac{9}{.9} - 9$
$2 = 4 \times .4 + .4$	$2 = \dfrac{9 + 9}{9}$
$3 = 4 - \dfrac{4}{4}$	$3 = \sqrt{9} + 9 - 9$
$4 = 4 + 4 - 4$	$4 = \sqrt{9} + \dfrac{9}{9}$
$5 = 4 + \dfrac{4}{4}$	$5 = 9 - \sqrt{9} - .\dot{9}$
$6 = 4 + \dfrac{4}{\sqrt{4}}$	$6 = 9 - \sqrt{9 \times .\dot{9}}$
$7 = \sqrt{\dfrac{4}{.\dot{4}}} + 4$	$7 = 9 + .\dot{9} - \sqrt{9}$
$8 = 4 + \sqrt{4 \times 4}$	$8 = 9 - \dfrac{9}{9}$
$9 = 4 + \dfrac{\sqrt{4}}{.4}$	$9 = 9.9 - .9$
$10 = 4 + 4 + \sqrt{4}$	$10 = 9 + \dfrac{9}{9}$
$11 = \dfrac{4.4}{.4}$	$11 = 9 - .\dot{9} + \sqrt{9}$
$12 = 4 + 4 + 4$	$12 = 9 \times .\dot{9} + \sqrt{9}$
$13 = 4 + \dfrac{4}{.\dot{4}}$	$13 = 9 + .\dot{9} + \sqrt{9}$
$14 = 4 \times 4 - \sqrt{4}$	$14 = 9 - .\dot{9} + (\sqrt{9})!$

$15 = \frac{4 + \sqrt{4}}{.4}$

$16 = 4 \times \sqrt{4 \times 4}$

$17 =$

$18 = 4 \times 4 - \sqrt{4}$

$19 = 4! - \frac{\sqrt{4}}{.4}$

$20 = 4 \times 4 + 4$

$21 = 4! - \sqrt{\frac{4}{.\dot{4}}}$

$22 = \frac{44}{\sqrt{4}}$

$23 = 4! - \frac{4}{4}$

$24 = 4 \times (4 + \sqrt{4})$

$25 = 4! + \frac{4}{4}$

$26 = 4! + \frac{4}{\sqrt{4}}$

$27 = \sqrt{\frac{4}{.\dot{4}}} + 4!$

$28 = 4! + \sqrt{4 \times 4}$

$29 = 4! + \frac{\sqrt{4}}{.4}$

$30 = 4! + \sqrt{\frac{4}{.\dot{4}}}$

$15 = 9 + 9 - \sqrt{9}$

$16 = \frac{9}{.9} + (\sqrt{9})!$

$17 = 9 + 9 - .\dot{9}$

$18 = 9 + 9 \times \dot{9}$

$19 = \frac{9}{.9} + 9$

$20 = \frac{9 + 9}{.9}$

$21 = 9 + 9 + \sqrt{9}$

$22 =$

$23 = (\sqrt{9} + .9)! - .\dot{9}$

$24 = 9 + 9 + (\sqrt{9})!$

$25 = (\sqrt{9} + .\dot{9})! + .\dot{9}$

$26 = 9 \times \sqrt{9} - .\dot{9}$

$27 = 9 + 9 + 9$

$28 = .\dot{9} + 9 \times \sqrt{9}$

$29 =$

$30 = 9 \times \sqrt{9} + \sqrt{9}$

$31 =$

$32 = (4 + 4) \times 4$

$33 = 4! + \dfrac{4}{.\dot{4}}$

$34 = \dfrac{4}{.4} + 4!$

$35 = \dfrac{4! - \sqrt{.\dot{4}}}{\sqrt{.\dot{4}}}$

$36 = 4 \times \dfrac{4}{.\dot{4}}$

$37 = \dfrac{4! + \sqrt{.\dot{4}}}{\sqrt{.\dot{4}}}$

$38 = \sqrt{4} + \dfrac{4!}{\sqrt{.\dot{4}}}$

$39 =$

$40 = 4 \times \dfrac{4}{.4}$

$41 =$

$42 = 44 - \sqrt{4}$

$43 =$

$44 = 4! \times \sqrt{4} - 4$

$45 = \dfrac{4! - 4}{.\dot{4}}$

$46 = 4! \times \sqrt{4} - \sqrt{4}$

$31 =$

$32 =$

$33 = 9 \times \sqrt{9} + (\sqrt{9})!$

$34 =$

$35 = (\sqrt{9})! \times (\sqrt{9})! - .\dot{9}$

$36 = (9 + \sqrt{9}) \times \sqrt{9}$

$37 = (\sqrt{9})! \times (\sqrt{9})! + .\dot{9}$

$38 =$

$39 = (\sqrt{9})! \times (\sqrt{9})! + \sqrt{9}$

$40 = \dfrac{(\sqrt{9})!!}{(\sqrt{9})! \times \sqrt{9}}$

$41 =$

$42 = (\sqrt{9})! \times (\sqrt{9})! + (\sqrt{9})!$

$43 =$

$44 =$

$45 = 9 \times (\sqrt{9})! - 9$

$46 =$

$47 \doteq$

$48 = 44 + 4$

$49 =$

$50 = \dfrac{4!}{.\dot{4}} - 4$

$51 \doteq$

$52 = 4! \times \sqrt{4} + 4$

$53 = \dfrac{4! - .\dot{4}}{.\dot{4}}$

$54 = \dfrac{(\sqrt{4 \times 4})!}{.\dot{4}}$

$55 = \dfrac{4! + .\dot{4}}{.\dot{4}}$

$56 = (4! + 4) \times \sqrt{4}$

$57 =$

$58 = \dfrac{4!}{.4} - \sqrt{4}$

$59 = \dfrac{4! - .4}{.4}$

$60 = \dfrac{(\sqrt{4 \times 4})!}{.4}$

$61 = \dfrac{4! + .4}{.4}$

$62 = \dfrac{4!}{.4} + \sqrt{4}$

$63 = \dfrac{4!+4}{.\dot{4}}$

$47 =$

$48 = (9 - .\dot{9}) \times (\sqrt{9})!$

$49 =$

$50 =$

$51 = (\sqrt{9})! \times 9 - \sqrt{9}$

$52 =$

$53 = (\sqrt{9})! \times 9 - .\dot{9}$

$54 = (9 + 9) \times \sqrt{9}$

$55 = (\sqrt{9})! \times 9 + .\dot{9}$

$56 = \dfrac{9!}{9 \times (\sqrt{9})!!}$

$57 = (\sqrt{9})! \times 9 + \sqrt{9}$

$58 =$

$59 =$

$60 = (9 + .\dot{9}) \times (\sqrt{9})!$

$61 =$

$62 =$

$63 = 9 \times (\sqrt{9})! + 9$

$64 = 4 \times 4 \times 4$

$$65 = \frac{4! \times \sqrt{4}}{.4}$$

$$66 = \frac{44}{\sqrt{.\dot{4}}}$$

$67 =$

$68 = 44 + 4!$

$69 =$

$$70 = \frac{4! + 4}{.4}$$

$71 =$

$$72 = 4! \times \sqrt{\frac{4}{.\dot{4}}}$$

$73 =$

$74 =$

$75 =$

$76 =$

$77 =$

$$78 = \frac{4!}{.\dot{4}} + 4!$$

$79 =$

$80 = (4! - 4) \times$

$$81 = \left(\sqrt{\frac{4}{.\dot{4}}}\right)^4$$

$64 =$

$65 =$

$66 =$

$67 =$

$68 =$

$69 =$

$70 =$

$$71 = \frac{(\sqrt{9})!!}{9} - 9$$

$72 = 9 \times 9 - 9$

$73 =$

$$74 = \frac{(\sqrt{9})!!}{9} - (\sqrt{9})!$$

$75 = 9 \times 9 - (\sqrt{9})!$

$76 =$

$$77 = \frac{(\sqrt{9})!!}{9} - \sqrt{9}$$

$78 = 9 \times 9 - \sqrt{9}$

$$79 = \frac{(\sqrt{9})!!}{9} - .\dot{9}$$

$80 = 9 \times 9 - .\dot{9}$

$81 = 9 \times 9 \times .\dot{9}$

$82 =$	$82 = 9 \times 9 + .\dot{9}$
$83 =$	$83 = \dfrac{(\sqrt{9})!!}{9} + \sqrt{9}$
$84 = \dfrac{4!}{.4} + 4!$	$84 = 9 \times 9 + \sqrt{9}$
$85 =$	$85 =$
$86 =$	$86 = \dfrac{(\sqrt{9})!!}{9} + (\sqrt{9})!$
$87 =$	$87 = 9 \times 9 + (\sqrt{9})!$
$88 = 44 \times \sqrt{4}$	$88 =$
$89 =$	$89 = \dfrac{(\sqrt{9})!!}{9} + 9$
$90 = \dfrac{4}{.\dot{4} - .4}$	$90 = 99 - 9$
$91 =$	$91 =$
$92 = 4! \times 4 - 4$	$92 =$
$93 =$	$93 = 99 - (\sqrt{9})!$
$94 = 4! \times 4 - \sqrt{4}$	$94 =$
$95 =$	$95 =$
$96 = 4! \times \sqrt{4 \times 4}$	$96 = 99 - \sqrt{9}$
$97 =$	$97 =$
$98 = 4! \times 4 + \sqrt{4}$	$98 = 99 - .\dot{9}$
$99 = \dfrac{44}{.\dot{4}}$	$99 = 99 \times .\dot{9}$
$100 = 4! \times 4 + 4$	$100 = 99 + .\dot{9}$

看上面知道在一百個數中，三個 4 能組成 ~~22~~ 72 個，但三個 9 只能組成 67 個。4 比 9 的"組合力"强。~~72~~ 72 對 67 可以當作 4 和 9 "組合力"的比例。如

將∞拉來也算一個符號，$\sqrt[\infty]{4}$就變成1，要組成17，43，47，49，68，95與97等數就有了辦法。但是9並沒有沾到光。兩個"組合力"之比就成爲78對67。你願意化幾分鐘時間，求出其他各數字的"組合力"嗎？

叁

九 數 游 戲

有一種數字游戲，是用1，2，3，4，5，6，7，8，9，一共九個數字，須順序排列，不許錯亂。再添上數學符號——如加，減，乘，除，開方，小數點等等符號，使九個數字成爲一排算式，計算出來，要等於某一指定的數值。這結果的數值，可以是隨意畸零的數，也可是整齊規則的數，如100，或10000，又如333或555等。普通人覺得組成一個整齊規則的數，比較更有趣味，所以用九個數字組成100，是很常見的游戲。下面所列的是組成100，200，………到90000和111，222，………到99999等各數的方法：

$100 = 123 - 45 - 67 + 89$

$111 = 123 + 45 - 67 + 8 - 9$

$200 = 123 - 4 + 5 - 6 - 7 + 89$

$222 = 1 + 234 + 56 - 78 + 9$

$300 = 1 \times 2 + 345 + 6 \times 7 - 89$

$333 = 1 + 2 - 3 - 456 - 789$

$400 = 1 \times 23 + 456 - 7 - 8 \times 9$

$444 = 1234 + 5 - 6 - 789$

$500 = 1 - 234 - 56 + 789$

$555 = 123 + 456 - 7 - 8 - 9$

$600 = -1 - 23 - 45 + 678 - 9$

$666 = 1234 - 567 + 8 - 9$

$700 = -1 + 2 - 34 - 56 + 789$

$777 = -12 - 3 + 4 + 5 - 6 + 789$

$800 = 12 - 34 + 5 - 6 + 789$

$888 = (-1 + 23) \times 4 + 5 + 6 + 789$

$900 = (1 + 2) \times (3 + 4 + 5 \times 6) + 789$

$999 = 1 + 2 + 3 \times 4 \times 5 + (6 + 7) \times 8 \times 9$

$1000 = 1234 - (5 + 6 + 7 + 8) \times 9$

$1111 = 1 - 234 + 56 \times (7 + 8 + 9)$

$2000 = 1 - 2 + 345 \times 6 - 78 + 9$

$2222 = (12 \times 3 + 4) \times 56 - 7 - 8 - \sqrt{9}$

$3000 = 1 - 2 + 3 + 45 \times 67 - 8 - 9$

$3333 = 12 + 3456 - (7 + 8) \times 9$

$4000 = (12 - 3 - 4) \times (5 + 6 + 789)$

$4444 = - 1 \times 2345 + 6789$

$5000 = (1 + 23 - 4) \times 5 \times (67 - 8 - 9)$

$5555 = 123 \times 45 + 6 + 7 + 8 + .\dot{9}$

$6000 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times (67 - 8 - 9)$

$6666 = 123 \times (4 - 5) + 6789$

$7000 = (- 1 + 234) \times 5 \times 6 - 7 + 8 + 9$

$7777 = (1 + 2 + 34) \times 5 \times 6 \times 7 + 8 - .\dot{9}$

$8000 = (1 + 2 + 3 + 4) \times (5 + 6 + 789)$

$8888 = [1 + (2 + 3) \times 4 \times 5] \times (6 - 7 + 89)$

$9000 = - 12 - 3 \times (4 \times 5 - 6 \times 7 \times 8 \times 9)$

$9999 = 1 \times (234 \times 5 - 67 + 8) \times 9$

$10000 = (12 \times 3 + 4) \times 5 \times (67 - 8 - 9)$

$11111 = (1 \times 2 + 3)! \div .4 \times (5 \times 6 + 7) + 8 + \sqrt{9}$

$20000 = 12 \div (.3 \times .4 \times .5) \times [6 \times (7 + 8) \div 9]$

$22222 = 1 \times 2 + 3! + 4! \times (- 5 + 6!) + 7! + 8 + \sqrt{9}$

$30000 = 1 \div (.2 \times .3 \times .4) \times 5 \times 6 \times (7 + 8 + 9)$

$33333 = - 1 - 2 - 3!! \times 4 - 5 - 67 + 8! \times .9$

$40000 = - 123 + 4 - 5 \times 6 \times 7 + 8! + 9$

$44444 = 12 \times 345 - 6 - 7 + 8! - \sqrt{9}$

$$50000 = 1 \div (.2 \times .3 \times .4) \times 5! \times [6 \times (7 + 8) \div 9]$$

$$55555 = -1234 + 56789$$

$$60000 = 12 \div (.3 \times .4 \times .5) \times (6 + 7 + 8 + 9)$$

$$66666 = -(1 + 2)! + 3 \times [4! \times (-5 + 6!) + 7!] + 8 \times 9$$

$$70000 = (123 + \sqrt{4}) \times 56 \times (-7 + 8 + 9)$$

$$77777 = 12 \times (3!! + \sqrt[\infty]{4}) + 5 + 6! + 7! \times (8 + 9)$$

$$80000 = (123 + \sqrt{4}) \times 56 \div .7 \times 8 \times .\dot{9}$$

$$88888 = [(-1 \div .2)! + 3!!] \times 4 + 5! \times 6! - \sqrt[\infty]{7} + .89$$

$$90000 = 1 \div (.2 \times .3 \times .4) \times 5! \div (.6 + .7 - .8) \times 9$$

$$99999 = 1 \div (.2 \times 3! \times .4) \times 5 \div .6 \div 7 \times 8! - .\dot{9}$$

用九個數字組合成一個數，當然可能有幾種不同的方法。上面所列的，都是比較簡單的。要組合成一個兩三位的數，很是容易。但所成的數越大，越覺煩難。如有幾個同好，玩這種游戲，可先宣布一個目的數，大家一齊動筆。如題目甚難，可比賽誰先組合完成。如題目容易，可以在一預定時間內，看誰能想出最多不同的方法。

假設將 1 至 9 九個數字顚倒順序，仍可以用以前的方法，作組合成數的游戲。如：

$$3 = 98 - 76 - 5 + 4 + 3 - 21$$

$$30 = 98 - 7 - 65 + 4 + 3 - 2 - 1$$

$$300 = 987 - 654 - 32 - 1$$

$$5000 = (987 + 6 - 5 + 3 \times 4) \times (2 + 1)$$

$$30000 = (9876 + 5! + 4) \times 3 \times (2 - 1)$$

$$300000 = \sqrt{9} \div (.8 + .7) \times 6! \div (.5 \times .4 \times .3 \times .2 \times .1)$$

用 9 至 1 的九個數字，要組成一個整齊的數值，似較以前更加容易了。

肆

圓 周 率

有一本專講游戲的書上，有一個簡單有趣的題目。它要你將 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，一共十個數字，分爲二組。一是分子，一是分母，合成一分數。問應該如何分配，才能使這分數之值代表圓周率，π。它的答案是：

$$\frac{67389}{21450} = 3.141678032$$

假使我們不急於先看答案，或是看見了答案而嫌它不好不對，而要自己試演一番，這倒是一個很好的費紙費筆費時間，然而不費腦筋的消遣。每次將十個數字分配爲兩組之後，就要演一回五位的大除法。但是無須乎每次都除到七八位或十位小數。可先除到一兩位小數，看看是否有點意思。要是得不到 3.14，就該趁早放手，換一個再試。還有，兩組的分配，0 不可在萬位上。分母的萬位上，最大是 3，超過 3 是不可能的。作此游戲，有一個計算尺，可得很大的幫助。

我們知圓周率的數値平常說是 3.1416，有四位小數。用在普通計算裏，也很够準確了。我們如要再準確一些，

$$圓周率 = \pi = 3.14159265358979 3\cdots\cdots$$

它的尾巴無限長，是個無窮小數，是個超越數(無理數)。用幾個數字湊成分數而要等於它，根本是不可能的。所以題目也說得明白，只要配成一個分數代表 π，得一個近似値就行了。看上面的答案，小數前三位是對的，第四位已差了。與正確數値相比，差 0.000085………，這個答案，我們並不認爲滿意。你能够找一個更滿意，更近於 π 的結果嗎？

我在這個問題上曾經化過不少的紙筆與時間，也得到了許多好的壞的結果。現在將最好的幾個，除到十一、十二位小數，列在下面，留作成績。其餘的都已送進字紙簍去了。

$$\frac{76591}{24380} = 3.14155045119\cdots\cdots$$

$$\frac{95761}{30482} = 3.14155895282\cdots\cdots$$

$$\frac{39480}{12567} = \frac{78960}{25134} = 3.14156123677\cdots\cdots$$

$$\frac{97468}{31025} = 3.14159548751\cdots\cdots$$

$$\frac{37869}{12054} = 3.141612742658\cdots\cdots$$

$$\frac{95147}{30286} = 3.14161658855\cdots\cdots$$

$$\frac{49270}{15683} = 3.141618312822\cdots\cdots$$

$$\frac{83159}{26470} = 3.141632036267\cdots\cdots$$

上面八九個結果，每個都比前述的答案更近於圓周率。 最好的一個是3.14159548751。前面五位小數都對，與正確數值只差0.0000028……。

我們可以作一種有趣的試驗，將組成的分數加以最輕微的調動，看這分數受多少影響。 如將上列的第二個，比 π 略小的 $\frac{95761}{30482}$，改爲 $\frac{95762}{30481} = 3.141695482\cdots\cdots$。結果比 π 又太大了。 兩組數字有了一個最小的調動，使結果變化了0.0000445之多。 可見組成一個分數，要它的數值準確到四五位小數，不是很容易的。

此外我又曾試用較少的數字，也想組成 π 的近似值。 現在將結果各除到五位小數，也列在下面。結果分兩部，一部比圓周率稍小，另一部是較大的。從這裏，我們可以看出：數字越多，"組合力"也越强，越能組合得到近於所要的數值。

$$\frac{2}{1} = 2.00000 \qquad\qquad \frac{1}{.2} = 5.00000$$

$$\frac{3}{1.2} = 2.50000 \qquad \frac{12}{3} = 4.00000$$

$$\frac{34}{12} = 2.83333\cdots\cdots \qquad \frac{42}{13} = 3.23077\cdots\cdots$$

$$\frac{125}{43} = 2.90698\cdots\cdots \qquad \frac{135}{42} = 3.21429\cdots\cdots$$

$$\frac{425}{136} = 3.12515\cdots\cdots \qquad \frac{426}{135} = 3.15555\cdots\cdots$$

$$\frac{1672}{534} = 3.13109\cdots\cdots \qquad \frac{1674}{532} = 3.14661\cdots\cdots$$

$$\frac{6738}{2145} = 3.14126\cdots\cdots \qquad \frac{5762}{1834} = 3.14177\cdots\cdots$$

$$\frac{24563}{7819} = 3.14145\cdots\cdots \qquad \frac{21348}{6795} = 3.14172\cdots\cdots$$

上邊有兩處，各借用了一個小數點，這是不得已，也是美中不足。但想起了這是消遣，是游戲，所以只聲明一下，也就算了。不過本篇中有不少大小除法，難免有除錯之處，所有結果，尤其不敢說是最滿意的最後結果。愛好消遣的人們，請千萬不要推辭這糾正與改進的責任。

伍

完成等式

這裏介紹一種新的數字游戲。先把幾個數字寫成一排。這幾個數字，當然以順序排列的，1，2，3，4，……最爲自然而適當。寫了之後，在任意兩數字之間添一等號（＝）。在等號左邊或右邊的各數字當作一個數。在等號的另一邊的各數字間，自由添用數學符號。最後的目的要使等號的兩邊相等。如以最簡單的1，2，3，與1，2，3，4爲例：

$$1 = -2 + 3 \qquad 1 = 2 + 3 - 4$$

$$1 + 2 = 3 \qquad 12 = 3 \times 4$$

$$12 \div 3 = 4$$

看上面所舉兩個例子，覺得這個游戲，很是簡單容易。如有三個數字，等號可能有兩個位置。數字有四個，等號的可能位置就有四個。所以有九個數字時，就有八個放等號的可能位置。下面再舉幾個例：

$$1 = (2 - 3) \times (4 - 5)$$

$$12 = 3 + 4 + 5$$

$$(1,2,3) = (4,5)(?)$$

$$12 - 3 - 4 = 5$$

……………………………………………………

……………………………………………………

$$1 = (23 - 45) \div (67 - 89)$$

$$12 = -34 + 56 + 7 - 8 - 9$$

$$123 = 45 + 67 + 8 + \sqrt{9}$$

$$(1,2,3,4) = (5,6,7,8,9)(?)$$

$$(1,2,3,4,5) = (6,7,8,9)(?)$$

$$1 + 23 + 45 + 6! = 789$$

$$-1 \times 23 + 45 + 67 = 89$$

$$12 \times 3 + 45 + 6 - 78 = 9$$

在前一個例中，有四個等式。三個完成了，一個沒有完成。在後一個例的八個等式中，失敗了兩個。現在可以認識這個游戲，有些時候也不很容易。如使(1,2,3)等於(4,5)：

$$(1 \div .2)! \div 3 = 40 \text{ (差5)}$$

$$120 = 4! \times 5 \text{ (差3)}$$

$$122 = \sqrt{4} + 5! \text{ (差1)}$$

$$124 = 4 + 5! \text{ (差1)}$$

只差一點不能成功。又如使(1,2,3,4)等於(5,6,7,8,9)：

$$1134 = 5! + 6 + 7! \div (8 - \sqrt{9}) \text{ (差100)}$$

$$1224 = 6! \times (-.7 + .8 \times \sqrt{9}) \text{ (5尙未用，差10)}$$

$$1224 = 5! \div (-.6 + .7) + 8 \times \sqrt{9} \text{ (差10)}$$

$$1233 = -5! + 6! + 7! \div 8 + \sqrt{9} \text{ (差1)}$$

也僅有一字之差。這好像老天有意爲難一樣，眞是遺憾。但在確定它是不可能的之前，我們不可承認失敗。到現在所以還未成功者，大概因爲努力不够，功夫還不到家吧。

作這種游戲，也可以將由小而大的次序，翻轉來成爲由大而小。那麼，以前各例將變爲：

$$3 = 2 + 1 \qquad 4 = 3 + 2 - 1$$

$$3 - 2 = 1 \qquad 4! - 3 = 21$$

$$.4 \times 3 - .2 = 1$$

$$5 = 4 + 3 - 2 \times 1$$

$$54 = 3 \times 2 \div .\dot{1}$$

$$(5 + \sqrt{4}) \times 3 = 21$$

$$(5 - 4) \times (3 - 2) = 1$$

………………………………………………………

………………………………………………………

$$9 = (87 - 65) - 4 \times 3 - 2 + 1$$

$$98 = 76 + 54 - 32 \times 1$$

$$987 = 6! + 5! \times \sqrt{4} + 3 \div (.\dot{2} - .\dot{1})$$

$$(9,8,7,6) = (5,4,3,2,1)(?)$$

$$9 - 8 + 7! - (6 \times .5)!! = 4321$$

$$\sqrt{9} \times (-8 + 7) + 6 \times 54 = 321$$

$$98 - 76 + .5 \times 4 - 3 = 21$$

$$(98 - 76) \div (54 - 32) = 1$$

總看以上所舉各例，可以得到幾個結論：一排數字個數少時，作此游戲，甚爲簡單；數字多時，就漸複雜。將等號放在兩邊時，比較容易。等號靠近一排數字的中央時，這等式較難完成，有時候也許是不可能的。等號的一邊數字個數較少時，就當它是一個數，將數學符號全放在等號的另一邊。這樣比較容易成功。數字按正的順序（1，2，3，………）比按倒的順序（………3，2，1）時，大概要稍微難些。

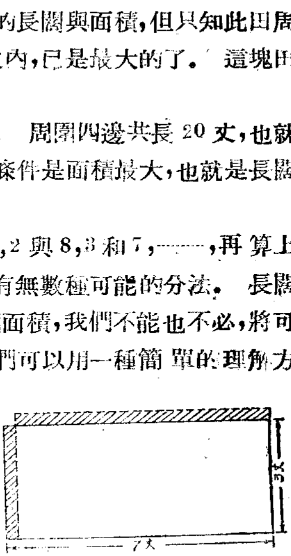
陸

最 大 相 乘 積

某人有一塊端端正正的田地。不知道此田的長闊與面積，但只知此田周圍共長 20 丈，又知田的面積，在這 20 丈範圍之內，已是最大的了。這塊田產的大小，是不難推算的。

此田既是端端正正的，它的形狀必是個矩形。周圍四邊共長 20 丈，也就是長闊共長 10 丈。這是第一個條件。第二個條件是面積最大，也就是長闊相乘要得最大的積。

將10丈分爲兩部分，一是闊一是長，如 1 與 9，2 與 8，3 和 7，……，再算上小數的分法，如 1.5 與 8.5，2.8 與 7.2…… 可以有無數種可能的分法。長闊相乘也得到無數可能的面積。要求最大的一個面積，我們不能也不必，將可能的長闊面積都算出來，再選一個最大的。我們可以用一種簡單的理解方法，來尋求答案。



第 6.1 圖

譬如這塊矩形田，闊 3 丈長 7 丈，長闊相加正是 10 丈。此田的面積是 $3 \times 7 = 21$ 方丈，這是可能的最大面積麼？要回答之前，必須先研究一下，如果長闊稍有增減，看面積會不會更大些。假使長度 7 丈稍爲縮短極少一點，如一寸，或一分，或是更少，闊度 3 丈必須放長同樣數量，才能維持 10 丈的總數見第 6.1 圖。再看長闊變動後的面積，比以前減去了 3 丈長的一條，增加了 7 丈長的一條。兩條的闊度相同，所以減的少而增的多，此田的面積必將大於 21 方丈了。假使 7 丈長稍增一些，3 丈闊稍減一些，結果與以前相反，面積必將減少，不足 21 方丈了。3 丈闊 7 丈長的矩形，當然不是此題的答案。

照上面的討論：矩形的長短兩邊之和，等於任何指定的數目。如加大長邊

縮小短邊,矩形面積必要減少。如加大短邊而縮小長邊,矩形面積必可增加。只要是兩邊一長一短,矩形面積就還有增大的可能。所以要得最大的面積,必須使長邊等於短邊。 前題的答案,應是每邊等於5丈,面積等於25方丈的正方形。

將一數分爲兩部分,將這兩分相乘得一積。要使積最大,必須將那數分爲兩等份。 這點已經證明過了。如將一數分開,但不限於分爲兩分,而是分爲三部分,或四部分,或任何幾部分,分開之後再連乘起來,也要得最大相乘積,問那數應該怎樣分法? 這是前題的推廣,是可以推廣前題的結論而得到解決的。

如將一數分爲三部分:甲、乙、丙、三部連乘之積就是甲×乙×丙。假設先使丙固定不變,而調整甲乙。 甲乙之和,是原數減丙,是一個固定的數。甲乙丙三數之積若是最大,其中丙是固定的,所以甲乙二數之積必須是最大的。 根據以前的結論,甲乙之和等於某數,甲乙之積如要最大,則必須使甲乙相等。 現在再使甲固定不變,而調整乙丙。 同前理,要使甲乙丙之積最大,必須使乙丙相等。 如甲乙丙三個大小不同,就可照此法調整,使三個的連乘積增加,調整到最後,乘積不能再增加時,甲乙丙三個必然相等,如將10分爲三部分,使三部的連乘積爲最大時,就要將10三等分了,得$3\frac{1}{3}$。用三個$3\frac{1}{3}$連乘起來,得37强,這就是最大的乘相積。

以此類推:如有一數N,被分作m部份,使這m部分連乘,以求得最大的積。N必須分爲m等分,每分是$\frac{N}{m}$。 將m個$\frac{N}{m}$連乘,所得的最大之積是$\left(\frac{N}{m}\right)^m$。

再進一步,又可得如下的問題:有一個數是N,如將它分爲兩等分,最大的之積是$\left(\frac{N}{2}\right)^2$。如將它分爲三等分,最大連乘積是$\left(\frac{N}{3}\right)^3$。 如將它分爲$m$等分,最大連乘積是$\left(\frac{N}{m}\right)^m$。$N$可以分爲$2,3,\cdots\cdots m,\cdots\cdots$等分。 有一種分法,就有一個最大連乘積。但在這許多最大乘積中,到底那一個是絕對的最大? 如要得到絕對的最大連乘積,應該將N分作幾等分?

設將N分爲x等分,又設最大連乘積是y,則x與y的關係是:

$$y=\left(\frac{N}{x}\right)^x.$$

這問題是要求 x 等於多少，才能使 y 達到一個最大值。 如果 N 數不大，可以從試驗得到所求的 x 與 y。 否則只有利用微積分的方法，才能將此題解決。

用微積分解此問題，結果是意外的簡單。結果如下：

$$將 N 分爲 x 等分, x=\frac{N}{e}.$$

$$絕對最大連乘積, y=\left(\frac{N}{x}\right)^x=(e)^{\frac{N}{e}}.$$

其中的 e 代表 2.71828……，它是自然對數的底數。

現在用實例試驗，看上面的結果靈也不靈。假設 $N=10$。 我們已知，分兩等分得最大乘積 25，分三等份得最大乘積 37。 再將幾個 x 與 y 的數字算出，列表如下：

x	1	2	3	$\frac{N}{e}=3.68$	4	5	8	10
$\frac{N}{x}$	10	5	$3\frac{1}{3}$	$e=2.718$	2.5	2	1.25	1
y	10	25	37	39.3	39	32	6	1

絕對最大乘積 $=y=(e)^{\frac{N}{e}}=(2.718)^{3.68}=39.3$。它果然是許多最大連乘積中最大的一個。但是，還有一點問題。將 10 分爲 3.68 分，得到三個 2.718 和一個 1.846。照題目的原意，將這四個連乘出來得 37 弱，並不是絕對最大乘積。

$$2.718+2.718+2.718+1.846=10$$

$$2.718\times2.718\times2.718\times1.846=37$$

可見 x 一定要是整數。 將 N 分爲 3.68 分，也就是分爲 4 分，因爲不足一分的 0.68 分，事實上也是一分。3.68 分既算不相等的 4 分，當然不能得到分 4 等分時所能得的最大連乘積了。

$x=\frac{N}{e}=\frac{10}{2.718}=3.68$，雖然理論上是對的，但事實上正確的 x 應該是 $\frac{N}{e}$ 左右的一個整數，除非 $\frac{N}{e}$ 自己就是整數。在 $N=10$ 這個實例中，正確的 x 應該是 3 或 4。看上表，知道 $x=4$ 時 $y=39$。這個就是最後的答案了。

譬如說 $N=20$，$x=\frac{20}{2.718}=7.36$。要得絕對最大連乘積，x 應該等於 7 或 8。試算如下：

$$x=7,\qquad y=\left(\frac{20}{7}\right)^7=1557.$$

$$x=8,\qquad y=\left(\frac{20}{8}\right)^8=1528.$$

所以 $x=7$ 是正確的，1557 是絕對最大連乘積。

如 $N=e$，則 $x=\frac{N}{e}=1$。這就是說 N 本身就是一分，不必再分。又如 N 小於 e，則 $x=\frac{N}{e}$ 小於 1。這也是不合事實的。凡不足一份的，都算作一分。所以 N 等於 e 或小於 e 時，$x=1$，絕對最大積 $y=N$。

柒

洗衣問題

衣服髒了要洗，這是講求衛生者的天經地義，不該有甚麼問題。但是，衣服怎樣髒了，應該怎樣洗法，用肥皂，用手揉，用槌用刷，用冷水熱水，……。這些都是値得研究的問題。下文只討論怎樣使用定量的水，而要將衣服洗得最乾淨。

洗衣服的原則，是要去掉汚垢，使衣服乾淨。髒衣服上的汚垢，可分爲好幾等。在用水洗時，有的會沉到水底，有的會浮在水面，有的會溶解在水中。還有黏牢衣服不容易洗去的汚垢，就須用機械方法或化學方法，使它變爲能沉能浮或能溶解，而脫離衣服。於是將衣服再過一兩次水，就不難將沉的浮的汚垢洗淨，能溶解的也已殘餘不多。如還要乾淨，就須多過幾遍水。在每次洗或過水之後，須將衣服取出，扭去餘水及水中所含的汚垢。但是衣服總要含水若干，不能完全扭乾。這點殘餘的水中汚垢，或是被下一次過水所冲淡減少，或是在乾燥之後，就存留在衣服上了。所以要將衣服洗淨，必須在扭時儘量扭乾，每次須水多，過水的次數也須多。這是有洗衣經驗的人都知道的。

在米珠薪桂的現在，水也很貴，用水也要打算盤，講節約，不可多用。譬如有一提桶清水，還有一條沾滿了汗漬的乾汗巾。現在要洗淨這條汗巾，限用這一桶水，有經驗的人，決不會將汗巾浸在桶裏，將寶貴的水一次用完，因爲這樣是洗不乾淨的。他必然將一桶水分作若干分，一分一分的用來洗過若干次。現在的問題是：這一桶水應該分幾分，怎樣分法，才能將汗巾洗的最乾淨。

假如汗巾上的汚垢，能沉的能浮的都不成問題，或者全部汚垢都是能溶解的，用一盆水洗汗巾時，汚垢都已溶解在水裏。洗完，將汗巾扭絞起來，裏面保留着一部份髒水或汚垢。如盆中水的數量是 a，扭過的汗巾裏含水的數

量是 k，存留在汗巾裏的汚垢必是所有汚垢的 $\frac{k}{a}$。若是水很多，即 a 很大，汗巾又扭得很乾，即 k 極小，洗一次也可以相當乾淨了。

將扭起來的汗巾，又放在第二盆清水裏。如第二盆水的數量是 b，連上汗巾裏帶來的，一共是 $b+k$。洗過完了，再扭出來。如巾內含水量還是 k，汗巾裏的汚垢被沖淡了，打了一個 $\frac{k}{b+k}$ 的折扣。拿未洗時的全部汚垢作標準，現存的只有 $\frac{k}{a}\cdot\frac{k}{b+k}$。

用一桶水洗一條汗巾。如將水分為三部分，a,b,c。先用 a 洗一次，再用 b,c 連過兩次。三次洗過完了之後，汗巾上殘存的汚垢只有 $\frac{k}{a}\cdot\frac{k}{b+k}\cdot\frac{k}{c+k}$。所以洗過的次數愈多愈乾淨。第一次用那一分來洗，是有關係的。第二次先用 b 或先用 c，是沒有關係的。要使汗巾乾淨，必須使 k 小，前面已經講過了。第二個條件就是使 $a\cdot(b+k)\cdot(c+k)$ 愈大愈好。

如這桶水全部的數量是 N，

$$N=a+b+c,$$

$$\begin{aligned}a+(b+k)+(c+k)&=a+b+c+2k,\\&=N+2k.\end{aligned}$$

N 是一個定的數量。每次扭汗巾殘餘水量 k，也是固定數量。所以 a，$b+k$，與 $c+k$ 三者的總和是一個定數量。此三者相乘，又須有最大的積。現在正好利用一下前面研究最大相乘積的結論，即是：欲得最大之積，三分必須相等。

$$a=b+k=c+k,$$

$$a=\tfrac{1}{3}(N+2k),$$

$$b=c=\tfrac{1}{3}(N+2k)-k.$$

這是將有限數量的水分為三分的方法。如要將水分作 m 分，而能將汗巾洗得最乾淨，條件如下：

$$\text{第一分水量}=\frac{1}{m}[N+(m-1)k],$$

$$以後每分水量 = \frac{1}{m}[N+(m-1)k]-k,$$

$$污垢殘存量 = \frac{k}{a}\cdot\frac{k}{b+k}\cdot\frac{k}{c+k}\cdots\cdots = \left(\frac{mk}{N+(m-1)k}\right)^m.$$

如限用定量的清水來洗一條汗巾，不限定將水分爲幾分，而要使汗巾最乾淨。此問題與最大相乘積的研究中求絕對最大連乘積，非常相似。設將定量清水分成 x 分，再設污垢殘存量是 y，則

$$y=\left[\frac{kx}{N+(x-1)k}\right]^x$$

$$y=\left[\frac{x}{\left(\frac{N}{k}-1\right)+x}\right]^x$$

設 $Y=\frac{1}{y}$ 及 $n=\frac{N}{k}-1$，上式就可變爲

$$Y=\left(\frac{n+x}{x}\right)^x$$

要使汗巾乾淨，y 必須最小，或 Y 必須最大。看 x 必須等於多少，才能達到這個目的。

上式與求絕對最大連乘積時的算式相似，所差不多，只是在分子裏多了一個 x。但也因此不能得一個簡單美麗的結果。運用微積分的方法，求出 Y 爲最大時，x 必須適合下列條件：

$$\frac{n+x}{x}=e^{\frac{n}{n+x}}$$

其中 $e=2.71828\cdots\cdots$。解上式，得 $x=\infty$。x 是無窮大時 Y 也是無窮大。這是說：將水分爲無數分(第一分最多，其餘都相等，理由見前)。將汗巾用第一份水洗了，再過水無數次，可將污垢完全洗去。如將水分爲有限的分數時，水量愈多，洗過次數愈多，扭絞的愈乾，就能使汗巾最乾淨。

洗一條汗巾，原是最平常的事，想不到其中還有這許多的麻煩！

捌

華　容　道

大約在七十年以前，在歐洲曾經盛行過一種游戲，名爲"十五謎"(Fifteen Puzzle)。這是一個正方形的棋盤，四周圍包着短圍牆，中間分劃爲十六個小方格。另外有十五個正方形的棋子，上面分別印着1,2,3,………14,15等數字。這十五個棋子，平放在棋盤上時，除了還空一小格外，恰好佔滿。只有鄰靠空格的棋子，可以移入空位，其餘的都不能動，也不許隨意取出來。這游戲的開始是先將棋子拿在手裏，隨意將棋子放進盤內，右下方的小格空着不放。此時十五個子在盤內次序是亂的。游戲的目的，是要一個一個的移動棋子，調動它們的地位，希望能排成1,2,3,………14,15的順序。最後仍要使空位在右下角。

這種游戲不大容易，所以很能消磨時間。曾有數學家們研究它的原理，發現了這游戲怎樣可以完成與怎樣不可能完成的原則。在上海也曾見過有"十五謎"出賣，只是它並未流行。我現在不再詳述這個老游戲，我是要介紹一種與它相似而又不相同的新玩意兒——"華容道"。

先預備一個長方形的盤，大約有4×7或28個小方格的面積。上部劃明二十個小方格，下部留出一塊不劃格子，如附圖。爲以後便於說明起見，小方格內註上$a,b,c,$………$s,t,$共二十個英文字母。其實眞正游戲用的盤上，是不必註字的。

有了盤，再預備大小不同的十個子。下面的表說明這十個子的名稱大小，與游戲開始時在盤上所佔的位置。

將十個子放在盤上，只有q與t兩小格是空的，曹操已在五虎上將的圍困之中。此游戲的目的是要將子一個一個的移動，使曹操突出重圍，逃入下面的曹營。請讀者費些功夫試一試。試過以後，再看答案。

用st代表在s的子向右移一步到t。用im或mq代表在im的子向下

名稱	大小	位置
曹操	四方格	*bcfg*
關公	二方格	*jk*
張飛	二方格	*ae*
趙雲	二方格	*dh*
馬超	二方格	*im*
黃忠	二方格	*lp*
兵	一方格	*n*
兵	一方格	*o*
兵	一方格	*r*
兵	一方格	*s*

a	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*
i	*j*	*k*	*l*
m	*n*	*o*	*p*
q	*r*	*s*	*t*
曹營			

移一步到 *mq*。 用此代表移動的方法，記錄放走曹操最少的八十七步如下：

im, ji, lp, ol, sk, po, lt, kp, ik, ni, rj, on,
ps, ko, jl, ik, mi, nj, sq, tr, os, kp, jk, rj,
qn, sq, ps, lt, dl, bc, ab, ia, ni, qm, sq, tr,
ks, lp, jl, ik, mi, rm, on, po, lt, kp, ik, mj,
ai, ba, jb, nf, qn, im, ae, ba, fb, nj, mn, em,
je, bf, ab, ea, me, nm, on, ps, ko, cg, bd, ac,
ea, fb, mi, nj, sq, tr, os, gk, ch, bc, jb, rj,
qn, sq, ko.

照以上的八十七步，試演一回，知道曹操之所以能夠殺出重圍，逃回曹營，都是因爲關公有意讓路，放他逃走。 這個正與三國演義中華容道的故事相合，所以我爲此游戲題了這樣一個戲劇性的名字。

玖

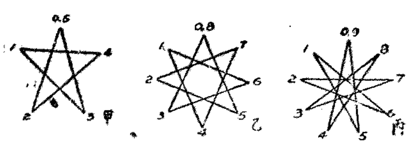
一 筆 畫 星

用筆在紙上畫一個星，這是任何人都會的。所畫的結果，大概不出第 9.1 圖中的幾種形狀。

第 9.1 圖

第 9.1 圖中的甲乙丙丁，都可以叫做星。甲是從中心向外散射出去的許多短直線，或是幾條在中點相交叉的直線。它是不能够筆不離紙的一筆畫成的。乙是一個五角星。用相似的方法可以畫三角星四角星六角星……隨便幾角星毫無困難。如星的角數是 N，每個星是由 $2N$ 直線所組成的。如畫五角星，必須十段直線。這種星可以用一筆連續畫成。用剪刀剪紙成星，常如乙式。但用筆畫時，結果常常是丙。丙是最普通的一筆連畫成功的五角星。它是五段直線組成的。又如六段直線所成的六角星丁，看起來與丙差不多，但它是兩個三角形重疊和成，決不可能一筆畫成的（如直線許可分段接畫時，這六角星是可以一筆完成的）。本文所說的星，是丙種的星。

用筆連畫首尾相連的五條直線，可成一個五角星。用同樣的方法，可以畫角數更多的星麼？畫九角星或十角星，各有幾個可能的畫法？



第 9.2 圖

在第 9.2 圖甲五角星的五個角尖上順着次序註明 1,2,3,4,5 等數字。5 在 4 之後，也在 1 之前，所以 5 也可寫作 0。畫星時，從 0 開始。如從 0 至 1，1 至 2 的畫起直線來，畫了一圈，又回到 5 或 0，結果得到一個五邊形或五角形，但不是五角星。開頭時，從 0 不畫到 1 而畫到 2，再由 2 到 4，4 到 1，……順序數過去，每到第二個角，就將直線連過去。這樣下去，筆尖在紙上繞了兩個圈子，只畫了五條直線，就把五角星很隨便的完成了。此法的要點在每數到第二個

角就連一條線。由 0 下筆，先畫到 1 與畫到 4 相同，只是反正之分，一樣畫成五邊形。由 0 到 2 與由 0 到 3，也只是反正之分，並無不同。所以畫五角星，只有這一個畫法。還有五角星的角數是 5（或 N），由 0 連線時，數到一個角與數到四個角相同（$N-1=5-1=4$），數到兩個角與數到三個角相同（$N-2=5-2=3$）。

用畫五角星的方法，也能畫多角星麽？假設試畫一個八角星。先在紙上用筆點八個點，排列成圓環形狀。順了次序註上號碼 1，2，3，………7，8 或 0。用 0 作起點，每數到一個角就連一直線，這樣只能畫成八邊形。如用畫五角星之法，每數到兩個角就連一直線，結果是 0，2，4，6 又回到 0，得一個四邊形。要完成這八角星，必須再從 1 開始畫第二個四邊形。這星與圖9.1丁的六角星相似，是兩筆畫成的。但是，一筆畫八角星是可能的。如圖9.2乙，自 0 起，每數到三個角就畫一條線。結果是 0，3，6，1，………，筆尖在紙上轉了三圈，畫了八條直線，回到起點 0。每數到第五角（$8-3=5$）就連直線，也能同樣的成功。如要每數到第四角畫一直線，0，4，或 4，0 成一條線。一定要畫四筆，才能畫成像圖一甲那樣一個星。所以一筆畫八角星，只有每數到第三角連線的一個方法。這個畫法，可簡稱爲第三角畫法。以前畫五角星的是第二角畫法。

再說九角星。用第二角畫法，可以成功。但用第三角畫法，就失敗了，因爲只畫成一個三角形。如用第四角畫法，也能成功，如圖 9.2 丙。所以畫九角星可能有兩種畫法。

如畫十角星，用第一角畫法，當然得一個十邊形。如用第二角畫法，一筆可得一個五邊形。如用第三角畫法，這十角星可以一筆成功。如用第四角畫法，一筆只能畫一個五角星。用第五角畫法畫十角星，與用第四角畫法畫八角星，結果相同，一筆只成一條直線。所以一筆畫成十角星，只有一種畫法。

根據以上的研究，可得結論如下：

如所畫星的角數是 N，所用的第 m 角畫法，一筆畫成的 N 角星，只有首尾相接的 N 條直線。完成這 N 角星，筆尖須要在紙上盤旋 m 個圈子。m 必不可將 N 除盡，並且 N 與 m 不可有公約數。

要一筆畫成六角星是不可能的，因爲 6 能被 2 與 3 除盡。如要一筆畫七

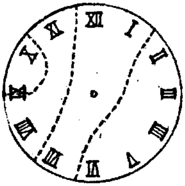
角星，可用第二角或第三角畫法，要一筆畫成十二角星，只有用第五角畫法，才能成功。 第二角，第四角，第七角三種畫法，各都能一筆完成一個十五角星。

隨便畫幾角星，用筆點幾個點子成一環形，應用以上的秘訣去畫，保證不假思索，一筆成功。這不是一種簡單有趣的游戲嗎？

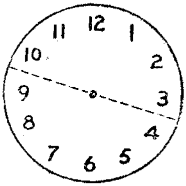
拾

破 碎 表 面

舊式鐘表的圓盤面，常是磁質的。 面上劃着羅馬數字，從 I,II,III,……到 XI,XII，代表鐘點，如第 10.1 圖。 其中的特點是：代表四點鐘不用正常的 IV（五減一），而用例外的 IIII（三加一）。 普通鐘表店的招牌，是一個大鐘表盤面，面上畫着長短兩個指針。 長針常在八九之間，短針常在三四之間。 論時間是八點十幾分鐘。 多數店家的招牌，都是如此，豈不是很有趣嗎？ 這且不談。 且說一種利用表面數字分裂組合的題目。



第 10.1 圖



第 10.2 圖

有些本書上，印有如下的問題：假如失手將表落在地上，磁表面碎爲四片，上面的數字也被分成了四組，問這表面必須怎樣碎法，各碎片上的數字總和才能相等？

這是一個有趣的問題。 惟一的答案如下：（參看第 10.1 圖）

(X + X) = XX （註：X 是 IX 之一部）

(XI + I + VIII) = XX （註：I 是 IX 之一部）

(XII + I + VII) = XX

(II + III + IIII + V + VI) = XX

此題的關鍵在 I X 可以摔碎，分成 I 與 X。 本此題意，當然還可演出許多新的問題來。

在新式鐘表上，羅馬數字漸不通用，通用的是阿剌伯數字，如第 10.2 圖。鐘表的盤面是用金屬，紙，化學製品等材料，多是摔不碎的。但我們不妨還當它能碎，碎了才會發生問題。

再說一個最簡單的例題：要將表面碎爲兩半，每個碎片上數字的總和必須相等。此題也只有一個答案：(參看第 10.3 圖)

$$(10+11+12+1+2+3)=39$$
$$(4+5+6+7+8+9)=39$$

下面列着幾個類似的破碎表面問題。讀者諸君，請不要急於看後面的答案。先自己試演一回，若能解決了，豈不更有趣嗎？

（1） 表面碎爲三塊，各塊上數字的總和都相等。

（2） 表面碎爲三塊，上面數字的總和，要成三個連續數。

（3） 表面破成四塊，分爲三組，每組數字之和都相等。

（4） 表面破成四塊，上面數字之和，成爲四個連續數。

（5） 表面分作五塊，配成四組，每組數字總和相等。

（6） 表面摔碎，分成六塊，每塊上數字總和相等。

（7） 表面摔碎，分成六塊，上面數字的總和，正好成爲六個連續數。

（8） 表面摔成紛碎，每個碎片上都有數字，每片上數字之和都是雙數。問最多有幾片？

（9） 表面碎爲許多片，每片上都有數字，每片上數字之和都是單數。問最多有幾片？

（10） 表面碎成兩大片，每片上的數字，用加(＋)減(－)以外的數學符號連絡起來，算出來要有相等的結果。

破碎表面問題答案

（1） $(11+12+1+2)=26$

$(3+4+9+10)=26$

$(5+6+7+8)=26$

（2） 此題有三個可能答案：

(*a*) $(3+4+5+6+7)=25$

$(11+12+1+2)=26$

(8 + 9 + 10) = 27

(b) (10 + 11 + 1) = 22 (註:1 是 12 之 1)

(2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 23 (註:2 是 12 之 2)

(7 + 8 + 9) = 24

(c) (10 + 1 + 5 + 6) = 22 (註:1 是 11 之 1)

(1 + 12 + 1 + 2 + 3 + 4) = 23 (註:1 是 11 之 1)

(7 + 8 + 9) = 24

(3) 此題的可能答案很多。下面列出三個:

(a) (2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 20

(9 + 10 + 1) = 20 (註:1 是 11 之 1)

(1 + 1) + (2 + 1 + 7 + 8) = 20 (註:1 是 11 之 1,12 分爲 1 與 2)

(b) (4 + 5 + 6 + 7) = 22

(3 + 8 + 10 + 1) = 22 (註:1 是 11 之 1)

(6) + (1 + 12 + 1 + 2) = 22 (註:9 倒轉變爲 6,1 是 11 之 1)

(c) (8 + 9 + 10) = 27

(9) + (7 + 11) = 27 (註:6 倒轉變爲 9)

(12 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 27

(4) 此題只有一種答案:

(12 + 1 + 2 + 3) = 18

(9 + 10) = 19

(4 + 5 + 11) = 20

(6 + 7 + 8) = 21

(5) 此題有兩個答案,但每碎片數字之和,總是 15。 11 必須碎爲 1 與 12 也必須碎爲 1 與 2。

(a) (8 + 7) = 15

(4 + 5 + 6) = 15

(1 + 2 + 3 + 9) = 15

(1 + 1) + (10 + 1 + 2) = 15

(b)　(8 + 7) = 15

(6 + 9) = 15

(5 + 10) = 15

(1 + 1) + (2 + 1 + 2 + 3 + 4) = 15

(6) 此題有兩個答案：

(a)　(10) = 10

(9 + 1) = 10　(註:1是11之1)

(8 + 1 + 1) = 10　(註:1是11之1,另一個1是12之1)

(7 + 2 + 1) = 10　(註:2是12之2)

(4 + 6) = 10

(2 + 3 + 5) = 10

此答案稍有點勉强。就是(2,3,5)碎成一塊,(4,6)碎成一塊。這在碼字離邊很遠的表面上,雖也可能,但這樣的碎法,終嫌過於奇巧了。下面一個答案,是貨眞價實的。

(b)　(12 + 1) = 13

(11 + 2) = 13

(10 + 3) = 13

(9 + 4) = 13

(8 + 5) = 13

(7 + 6) = 13

(7) 此題的惟一答案如下：

(1 + 8) = 9

(9 + 1) = 10　(註:1是11之1)

(10 + 1) = 11　(註:1是11之1)

(12) = 12

(6 + 7) = 13

(2 + 3 + 4 + 5) = 14

(8) 最多碎爲十塊。碎法如下:(1 + 7),(2),(3 + 5),(4),(6),(8),(9 + 1)(註:1是11之1),(10),(1 + 1)(註:1是11之1,另一個1是12之1),(2)(註:2是12之2)。計十塊,每塊都是雙數。

（9） 最多碎爲九塊，碎法如下：(2 + 3)，(4 + 5)，(6 + 1)（註：1是12之1)，(2 + 1)(註：2是12之2)，(7)，(8 + 1)（註：1是11之1)，(9)，(1)（註：1是10之1)，(0 + 1)(註：0是10之0，1是11之1)。計九塊，每塊都是單數。

（10） 此題有答案很多。下面列出六個。其中以末一個爲最妙，因爲除了乘號之外，未用別種符號。

(a) $1 \div .2 \times 1 \div 2 \times 3 \times 4 \times 56 = 1680$

$7 \times 8 \times \sqrt{9} \times 10 \times 1 \times 1 = 1680$

(b) $1 \times 21 \div 2 \times 3 \times 4! \times 5 = 3780$

$6 \times 7 \div 8! \times 9! \times 10 \times 1 \times 1 = 3780$

(c) $12 \times 12 \times 3 \times \sqrt{4} \times 5 = 4320$

$6 \div 7! \times 8! \times 9 \times 10 \times 1 \times 1 = 4320$

(d) $1 \times 21 \times 2 \div 3! \times 4! \times 5 \times 6 = 5040$

$7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 1 \times 1 = 5040$

(e) $1212 \times 3 \times \sqrt{4} \div .5 = 14544$

$6 \div 7! \times 8! \times \sqrt{9} \times 101 \times 1 = 14544$

(f) $3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 20160$

$9 \times 10 \times 1 \times 112 \times 1 \times 2 = 20160$

拾壹

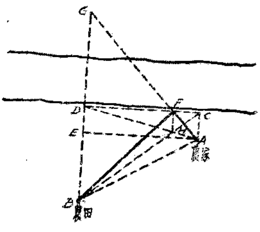
最短距離

一個人出門，除非是散步解悶，他可以漫不經心的隨意走去，否則，他必有一個目標，並且要選擇一條達到目標的路徑。選擇的標準很多，如同那條路平坦好走或汚穢難行，那條路熱鬧或幽靜，怎樣走可以利用公共車輛，怎樣走可以避免紅綠燈或大轉灣等等，都是值得考慮的。還有一個重要條件，就是要挑選一條近路。這近路就是最短距離的路，也可叫作"終南捷徑"。

出門要走近路，這是常識。由起點到終點的近路是連接兩點的直線。此線的長度是兩點間的最短距離。這也是多數人都知道的。所以如知道起點終點，而要求出最近的路線，在普通人想起來，以爲十分簡單。其實此類問題，看似平常，但並不一定容易，有時候竟然非常繁雜。

在下面列着幾個求最短距離的問題：

某農夫住家A，在一條河的南岸，相距10丈，每天要走到離家50丈的田地B裏工作。這田地也在那河的南岸，相距40丈。農夫每天清晨去工作時，必先到河邊用由西向東流的河水盥嗽梳洗；回家時也要去洗去一天的汗垢。求他應走的路線與最短距離。



第 11.1 圖

第11.1圖表示農家農田與河流的形勢。河邊的F點是農夫洗刷處。應走的路線是AF，FB。

F點的地位，可以有幾種求法如下：

(1) 比例計算法：

照題目，$AC = 10$丈，$BD = 40$丈，$AB = 50$丈。如AE與河岸CD平行，$DE = 10$丈，$BE = 30$丈。由ABE三角形，用勾股弦的算法，得AE

$= CD = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40$ 丈。 再用比例法，使 $CF : FD = AC : BD = 10 : 40$。這就 F 點將 CD 的 40 丈距離，分爲 1 比 4 的兩段。 結果，$CF = 8$ 丈，$FD = 32$ 丈。

(2) 鏡面反照法：

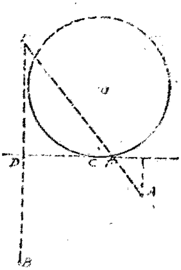
假設沿着河岸立起一面大鏡子，農夫在家門口，望見農田在鏡子裏的影像在 G 點。G 在 BD 的延長線上，$BD = DG$。 如將 G 點畫出，連直線 AG 就與河岸線 CD 相交在 F 點。

(3) 對角線法：

圖 11.1 中的 $ACDB$ 是一個梯形。 連兩條對角線相交在 H 點。由 H 畫線垂直於河岸，與 CD 的交點就是所求的 F 點。

上面的鏡面反照法，可以說明這方法的原理。 光線反照時，入射角必等於反射角，$\angle AFC = \angle BFD$。AF，FB 就是光線所走的最短路線。 這農夫每次所走的距離 $= AF + FB = \sqrt{10^2 + 8^2} + \sqrt{40^2 + 32^2} = 12.8 + 51.2 = 64$ 丈。

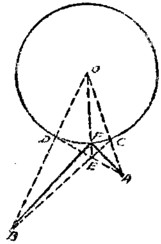
農夫住在河邊，要求來去最近路線是容易的。如他不住在河邊而在湖邊，問題就兩樣了。爲求簡單，假設湖或池塘是正圓形的。 湖的直徑與湖心地位與起點終點都已確定了，如第 11.2 圖。 O 是湖心，OC 是半徑。 A 與 B 是起點和終點。



第　11.2　圖

假設 DF 是一面大鏡子，在湖邊立着，並且和圓相切，C 是切點。BE 垂直於鏡面，被鏡平分於 D 點。 E 是 B 在鏡裏的影像。 由 A 望 E，視線在 F 點穿過鏡面。 F 與 C 兩點如適巧重疊在一處，這就是那最近路線必經之點。但看第 11.2 圖，F 與 C 並不在一處。這表示鏡面地位不對，須稍移動，但仍要保持與圓相切。 移動鏡面，再求 F 點。一次一次的試驗，直到 F 點與切點 C 相重疊時爲止。AF，FB 就是所求的最近路線。

所說的試驗法，在原理上是正確的，可惜實行時相當麻煩。即使用一條線代表鏡面，在紙作圖求解，也要試畫好幾次。此題當然也可用解析幾何與微

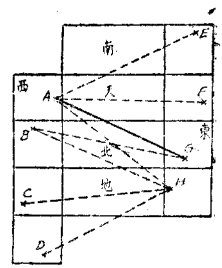


第 11.3 圖

積分的算法解決，只是繁雜非常，不合實用，反不如圖解法之便利。下面再介紹一種不必試驗的簡單圖解法：

看第 11.3 圖，A 與 B 是起點與終點。 O 點是湖的中心。 連接 OA，OB，與圓相交於 C，D 兩點。 再連 AD，BC，兩線相交於 E 點。 連 OE 與圓相交於 F。 F 點在湖邊上，正是所求的那一點。AF，FB 是最近的路線。此法非常簡單，是根據前面往返河邊的對角線法變化來的。如 OA 等於 OB，或圓湖直徑極大時，所得結果也是正確的。否則只能得近似正確的結果。當入射角或反射角(假設在 F 點有一面垂直於 OF 的鏡子)相當大時(約大於 45°)，結果雖未必正確，但誤差是極其微小的。

有一間大廳，東西長 50 尺，南北深 24 尺。廳內下有地板，上有天花板，高 24 尺。在西牆上，離天花板 3 尺離南牆 12 尺之處，爬着一個蒼蠅。在東牆上，離地板 2 尺離北牆 10 尺之處，爬着一個蜘蛛。這蜘蛛眼睛非常尖利，已看見幾丈以外的蒼蠅，想順着牆壁地板或天花板爬過捉來充飢。 那蒼蠅也感覺靈敏，預知有大禍將臨，但已嚇得翅不能飛脚不能爬，只能癱瘓在那裏等死。求蜘蛛爬行的路線與最短距離。



第 11.4 圖

這座大廳可以當作是一個厚紙板作的盒子。它的前後左右上下六面，代表大廳的南北西東四面牆與天花板與地板。紙盒的六面是可以展開攤平的。但使那面與那面相連，在那面與那面之間割開，可能有好多種變化。第 11.4 圖，南，天，北，地相連就是其中一種。如使南牆與天花板分開，結果天，北，地，南就相連了。東牆與西牆，可以隨便叫它連着那一面。

將蒼蠅與蜘蛛的位置，用筆在左右紙板上註明。在攤平的紙板上，將蒼蠅與蜘蛛所在的兩點，連成一條直線。這就是可能的最近路線。紙盒的展開，既然有許多種方法，這可能的最近路線自然不止一條。 所以最後要從若干條可能的路線中，選取一條眞正最近的路線。

第 11.4 圖，A，B，C，D 代表西牆上的蒼蠅，在紙盒展開後的幾個可能的位置。E，F，G，H 代表東牆上的蜘蛛。 東邊的一點與西邊的一點，所連的直

線，代表可能的路線。但有些路線，如 CE，很顯然不會是近的，所以也不必試驗了。現在試驗幾條可能的路線，計算它們的長短如下：

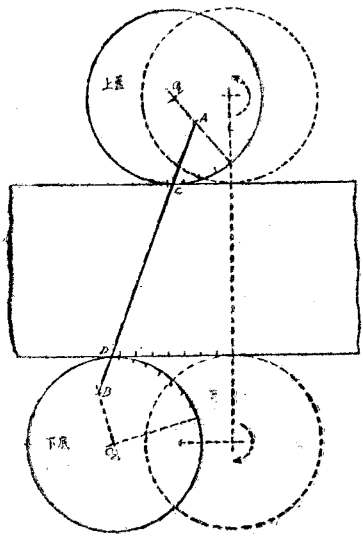
$$AE^2 = 67^2 + 30^2 = 5389$$
$$AF^2 = 75^2 + 2^2 = 5629$$
$$AG^2 = 63^2 + 34^2 = 5025$$
$$AH^2 = 55^2 + 46^2 = 5141$$
$$BG^2 = 72^2 + 19^2 = 5545$$
$$BH^2 = 64^2 + 31^2 = 5057$$
$$CH^2 = 73^2 + 2^2 = 5333$$
$$DH^2 = 64^2 + 35^2 = 5321$$

將距離算出來：$AG = \sqrt{5025} = 70.88$ 尺，其餘都是較長的。可見最短距離是 70.88 尺。蜘蛛要想速戰速決，它應該採取 AG 路線，從東牆爬上北牆，經過天花板的一角而到西牆，再從天花板而降可以吃到蒼蠅。

將以上蜘蛛捉蒼蠅的問題，稍加變化，就可得到一個新問題。有一個圓柱形的空罐頭，半徑是 5 寸(直徑 10 寸)，高是 10 寸。在頂上，圓心正南，離圓心 2 寸之處，破一小孔。一個螞蟻正在鑽進去尋求食物。在罐內底上有一粒殘餘的餅屑，正在圓心的西面，相距 3 寸。螞蟻進洞，即刻發現美味在前，不勝欣喜，使計劃從那裏爬下去享受。現在的問題就是要幫助這螞蟻，計劃一條最短的路線。

想解決此題，可以襲用前題的方法：將罐頭展開，攤在一個平面上。在螞蟻餅屑兩點之間連成一直線，就是最近的路線了。罐頭的上蓋下底，是兩個直徑 10 寸的圓。罐頭的周圍，是一圓筒，從任何一處剪開攤平，得一個高 10 寸長 10π 寸的長方形。圓蓋圓底就分別附着在這長方形的上邊與下邊，如第 11.5 圖。進行到這裏，已覺得螞蟻吃餅與蜘蛛捉蒼蠅兩題有幾點不同。在第 11.4 圖中，可以看到東牆或西牆與南天北地幾面相接觸的是一條線。東西兩點的連線，必須經過這線，否則須將東牆或西牆轉換一個地位。如由 E 連到 B 的直線，經過東牆和南牆的接觸線，但不經過西牆與北牆的接觸線。這條路線大概是不可能的。所以西牆應該轉換地位。如 B 點轉到 A，AE 連線經過了西，天與東，南兩接觸線，AE 就是一條可能的路線。再看第 11.5 圖，圓和長方形相切時，只有一點相接觸。所以上下兩圓必須要滾轉湊

合，使螞蟻餅屑兩點的連線，正巧通過上下兩個切點。這才是一條可能的路線。再者，第 11.4 圖上東西牆的地位各有四五個變化。所以可能的路線，也只有顯然可見的少數幾條，不難一一算出比較，而求得一條最近的路線。但在第 11.5 圖上，就很難作到。上下兩圓保持與長方形相切滾來滾去，各可有無數不同的位置。正巧通過兩個切點的上下連線，也可能有很多條。這些路線不像前題那樣明顯易見。要求它們的位置長短，也是較繁難的。想不到這小螞蟻不鑽方罐而鑽圓罐，竟給它無意中發現了這個難題。



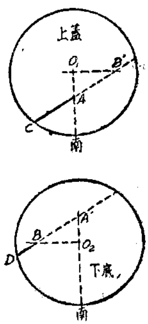
第 11.5 圖

要解此題，比較簡便的方法是用紙板作成第 11.5 圖一樣的模型來實驗。在上下兩圓板上，螞蟻與餅屑的地位 A 與 B，各釘一只針，再用一枝尺靠緊上下兩只針。如果尺的邊緣同時經過兩個切點 C 與 D 時，就可量出兩針之間的距離。兩圓的周圍與長方形的上下邊，須要畫着度數。湊合穿過兩切點的直線時，必須使圓貼着長方形轉動而不可滑動。隨時注意所畫度數，使圓邊上與直邊上的度數，保持上下相應，就可免除錯誤了。這樣的實驗幾回，可得如下的結果：將上下兩圓展開，如第 11.5 圖，以正南面為起點，上圓須向西轉 35°，下圓須向西轉 7[illegible]°，此時兩點的連線 $ACDB$ 傾斜 70°，正巧穿過上下兩切點 C 與 D。此線的長度是 16.3 寸強。這個就是最近路線與最短距離了。

上述的直線實驗法，雖然可行，但也要從幾個可能路線中比較出一個最近路線來。此外還有一個稍欠正確的簡法，又可名為平面法。此法的優點是簡單直接，一下子就求得一個近似的路線，只可惜此法在原理上毫無根據，並且還有顯然的缺點。

一個圓柱體，頂上有一點代表螞蟻，底下有一點代表餅屑。用刀像切麵包

似的將圓柱剖開，這一刀要正好切過上下兩點與圓柱的中心點。因爲三個點可以決定一個平面的位置，所以切開此圓柱也只有一個切法。刀切過的平面與圓柱表面相交的線，就代表螞蟻吃餅應該爬的路線。這個平面與圓柱的上下兩圓面的交線，是兩段互相平行的直線。兩段直線的求法可如第 11.6 圖。上面螞蟻在圓心南面 A 點，下面餅屑在圓心西面 B 點。在上面求 B' 與 B 相對 $O_2B = O_1B'$ 連 $L'A$，再延長得 AC。在下面求 A' 與 A 相對，$O_1A = O_2A'$。連 $A'B$，再延長得 BD。在圓柱體上，$ACDB$ 就是所求的路線。三段長度相加就是所求的距離。



第 11.6 圖

如一個圓柱斜着被一平面切過，被切之處，是一橢圓。所以 CD 是橢圓的一段。將圓柱展開之後，這一段雖已不是橢圓，但還不是直線。爲使距離短，應將彎曲的 CD 路線，改爲在展開面上的直線(在圓柱面上是螺旋曲線)。$ACDB$ 路線的總距離等於 $AC + CD + DB$，是三段直線的總合。這是不難計算的。如解上面螞蟻吃餅問題，$AC + CD + DB = 3.61 + 10.52 + 2.22 = 16.35$ 寸。

平面法比直線實驗簡易得多。但是前者並無理論的根據。用平面法時，圓柱的高低對於 AC 與 BD 兩段，竟不發生影響。這是一個最明顯的錯誤。話雖如此，用此簡法，居然能得到巧合的結果。雖說是偶然，也是很有意思的。

假如圓柱體是非常之高，這問題倒是簡單的。因爲 CD 的距離和柱高，事實上已無分別。所以自 A 點起背着圓心到 C，由 C 到 D，再向着圓心到 B，就是最近的路線。

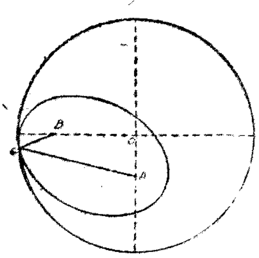
假如反過來，圓柱的高度非常之小，小到零，上蓋下底兩個圓，就非常接近，近到互相貼緊，重疊密合成爲一個圓。A，B 已成爲這圓內的兩個點。這時，題目的性質變了。螞蟻要從 A 點出發先到圓周，再到 B 點去吃餅，而要找出一條最近的路線。此題又與前面的往返河邊及往返湖邊等題相似了。

某農夫住在一個圓形孤島上的 A 點。每天他要先到島邊梳洗之後，再到 B 點去工作。歇工回家之前，也要先去島邊洗刷一回。求他往返島邊的最近路線。

這個最短距離的問題，看起來很是簡單，但解決時並不容易。對於此題，

螞蟻吃餅的平面法不能應用。 直線實驗法與往返河邊的鏡面反照法，意義相同，但都不能直接解決問題。 因爲島邊如立起圓環狀的大鏡子，在 A 點可以從幾個不同的方向，都能望見 B 點的影像。 所以先實驗得出幾個可能的路線，才能選取一個最短的。對角線法用於往返河邊是很正確的，用於往返湖邊只是近似的簡法，如用於往返島邊，也不甚正確。 當 A,B 兩點相離較遠，離島邊較近而離開圓島中心距離相似時，用對角線法的結果，差誤最多。最適於此題的正確解決法是橢圓法。

先在紙上畫一個圓代表圓島。在圓內釘兩只針代表 A,B 兩點。 用一根細紗線，將兩端分繞在兩針上，中間的紗線要相當寬鬆，而且線的長也可隨意改變。 再用一枝削尖的鉛筆，將筆尖兜緊了寬鬆的紗線，在紙面上畫去。 結果畫成一個完美的橢圓。 插針綁線的兩點，就是這橢圓的焦點。 改變紗線的長短，就可畫成大小不同套在一起的許多橢圓。 解決問題的橢圓，必須完全包在圓的裏面，還要與圓相切，見第 11.7 圖。這切點 C 決定了最近路線。 畫這橢圓時的紗線長度，$AC+CB$，就是最短距離。



第 11.7 圖

這是一種極其正確的圖解法。也能適用於往返河邊或湖邊等問題。應付此題，當然也能用解析幾何微積分等數學方法。但是算演往往繁雜非常，難得結果。反不如畫一個橢圓，來得直接了當。

以 AB 兩點爲焦點，利用某一定長的紗線，可以在一平面上畫一橢圓。連結 AB 兩點的直線，是橢圓的軸線。 如以此軸線爲中心，使橢圓旋轉，就得到一種橢圓體。如伸縮紗線的長短，就可得一套大小不同的橢圓體。 假設 A 點代表圓罐頂上的螞蟻，B 點代表圓罐底上的餅屑，在許多以 A,B 爲焦點的橢圓體中，必然有一個與頂圓相切，切點爲 C，另有一個橢圓體，與底圓相切，切點爲 D。求得 C,D 兩點之後，連 AC 與 BD。 再將圓罐展開，連 CD。$ACDB$ 是螞蟻吃餅的最近路線。$AC+CD+DB$ 就是必須爬過的最短距離。

用橢圓體法解決螞蟻吃餅問題，比以前講過的直線法與平面法，似乎更直接而合理了。

拾貳

方箱容球

一升醬油一升醋，合放一處，共有幾升？ 一升酒精一升清水，合放一處，共有幾升？ 一升黃豆一升細沙，合放一處，共有幾升？

這三個問題，大致相同，都很簡單。 但是若使毫不考慮貿然回答，多半會答得不正確。 醬油與醋性質略同，都是以水爲主體，兩樣合起來，總體積是二升。 黃豆與沙，顆粒大小懸殊，兩個放在一處，許多細沙會嵌入黃豆顆粒間的縫隙裏，所以總體積一定少於二升： 酒精與水，雖然都是液體，但兩者分子的大小是不同的，混在一起時，與沙豆混合有相似的現象。在中學物理班上，常作的一種簡易實驗：用一個試驗管，先倒進半管清水，再倒進酒精使管充滿。 將拇指捺住管口，用力搖動之後，會覺得試驗管中發生一種吸力。這就是小分子鑽進大分子間的縫隙裏，縮小所佔空間的證明了。

還有一個很好的說明，是用斗量米。將米輕輕倒進平放的斗裏，直到斗滿了，米堆了起來。然後用一個小棒，在斗口上輕輕括過，括去過多的米。 斗裏所有的，就算是一斗米了。 不過要請注意，從倒米到括米，不許使斗搖動或撞擊它，也不許攪動斗裏的米。否則，本來滿滿的一斗米，就會沉下去，淺了，好像米有缺少一樣。 可見倒下去的米，一粒一粒都是疏鬆架空的，一經震動就沉下去。 假使你用一根棒繼續將斗敲擊或將米攪動，最後米粒很堅實的一一靠緊，原來的一斗米，也許會淺下去一二升呢。

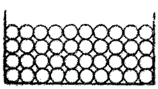
根據量米的經驗，我們知道，容器裏裝一種東西，如這東西放得鬆散雜亂，就因空隙太多而裝得少。 如將東西放得緊密整齊，就能使空隙少而多裝一些。爲了運用這個理論，我們提出了如下的“方箱容球”問題。

一個正方鋼製的保險箱，箱蓋在上面。蓋緊之後，箱內容積是 10 寸 × 10 寸 × 10 寸，共容 1000 立方寸。 又有許多正圓的玻璃球，尺寸相同，都是直徑 1 寸。將球放入箱內，放滿了，蓋緊箱蓋，不許壓碎玻璃球。 問這箱內最

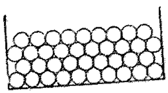
多能容多少球?

粗看這問題像是太簡單,幾乎脫口而出,回答:"能容一千個球"。在箱底安放玻璃球,每排十個,共放十排,作爲第一層,計球一百個。再在上面一層一層的疊上去,整整齊齊恰好十層將保險箱擠得滿滿的。不多不少整一千個,再也塞不進半個球了。能容一千個球,這句話一點也不錯,但是算不算最多呢?

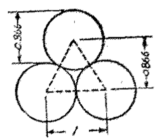
照以上的解法,箱內球數是 10 個 × 10 排 × 10 層 = 1000 個。箱底長 10 寸,球徑 1 寸,每排最多放十個球,這是絲毫不能通融的。同理,每層中只能放十排。這樣每個球若是不碰着箱子,前後左右共接觸四個球,如第 12.1 圖。



第 12.1 圖



第 12.2 圖



第 12.3 圖

如不使第二排球和第一排對正,使它們錯開半個球,每一個球插進另一排的兩球之間。第二排只有九個球,雖然比十個少了一個,但兩排卻擠緊了,希望最後能多擠進一排去。這樣下去,第三排放十個,第四排仍放九個……,如第 12.2 圖。用實物實驗一回,或用紙筆畫畫算算,我們不難知道:第一排球要佔去箱內十寸長一寸闊的一條地盤。但第二排與以後各排,每排不需一寸闊的地盤。參看第 12.3 圖,再利用勾股算法得到:$\sqrt{1^2-0.5^2}=0.866$。所以每添一排,只要闊 0.866 寸的一小條就够了。所以放完第十排時只佔了 $1+0.866\times 9=8.794$ 寸闊的箱子底。當然還可再放第十一排。放了之後,還空着 $10-9.66=0.34$ 寸闊的一狹條。球在箱底並未擠緊,還很鬆動,但這點並未違犯題意。這一層球的總數是 $10\times 6+9\times 5=105$ 個。每個球若不在邊上,周圍與六個球相接觸,這已是放一層球的最經濟方法了。蜜蜂是最講經濟的天才工程師,它建築的蜂房,也是像這樣子的。

第一層,一排正對一排的放,只放 100 個球,如一排一排交錯着放,可多放 5 個球。第二層如與第一層完全相同,上下兩層正好相對。每球正上正下

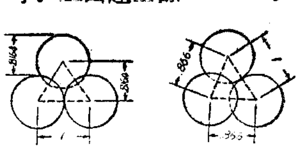
方，各只和一球相接觸。這樣放了十層，恰好裝滿。每層 100 球的，全箱 1000球。每層 105 球的，全箱 1050 球。箱內多放了許多個球，反比放一千個球時寬鬆了。這也許是你所料想不到的。

如第一層是正着放的，有 100 個球。但第二層的一排與下面的一排是錯開放的，正像前面的第 12.2 圖。所以第二層每排 9 個球，共計十排，90 個球。第三層第五層同第一層。雙數各層又同第二層一樣。每球與下面一層的兩個球相接觸，同時也觸到上面一層的兩球。放到十一層之後(算法同前)，雖然還有餘空，但已不再多加一個球了。這時箱內有球 $100 \times 6 + 90 \times 5 = 1050$ 個。所以先"正"放後"錯"放，與先"錯"後"正"的結果完全相同。

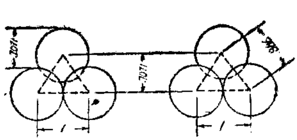
如第一層是錯放的，有 105 個球，內有 10 球的 6 排與 9 球的 5 排。第二層要交錯着放，每球與鄰層的兩個球相接觸。第一排在第一層第一排 10 球上面，只有 9 球。第二排在第一層第二排上面，却有 10 球。所以第二層的球數是 $9 \times 6 + 10 \times 5 = 104$ 個。上下共放十一層(算法同前)，單數各 105 球，雙數層各 104 球。箱內共容 $105 \times 6 + 104 \times 5 = 1150$ 個。如此的放法可以稱爲先"錯"後"錯"，比以前的"正錯"與"錯正"等放法，大有改進，超過一千之數，已有 1150 個之多了。

以上所說放第二層球的"錯"放法，從一個方向平看時，見上下兩層球是互相交錯的，但從另一個方向平看時，見兩層球仍是上下正對的。此外還可能有一種名爲"錯錯"放法。放好之後從兩個不同方向平看過去，上下兩層都是錯綜而不是對正的。

如"錯"放第一層，有球 105 個，以後各層都是"錯錯"放法，每個球是架在三個球之上，在上面也支持了上一層的三個球。第一層球佔用了保險箱高度最下面的一寸。參考第 12.4 圖，再用勾股算法，求出以後各層所需的高度只有 0.8164 寸。一層層疊上去，到十二層時，總高度已達 $1 + .8164 \times 11 = 9.9804$ 寸。上面還空餘 0.0196 寸。因爲下面每層都是"錯"放的，相當鬆動，



第　12.4　圖



第　12.5　圖

所以空餘的高度，雖尚不止此數，但也毫無用處。第二層的第一排，在第一層的第一二排之上，可有 9 球。第二排在第一層的第二三排之上，可有 10 球。如此下去，直到第十排。所以第二層的球數是 9 × 5 + 10 × 5 = 95 個。全箱的玻璃球總計 105 × 6 + 95 × 6 = 1200 個。用"正正"放法，在箱內放了 1000 個球，已是滿坑滿谷。現在居然證明了用"錯錯錯"放法可以多放進 200 個球，這不是一個使人驚奇滿意的結果嗎？1200 也許就是這問題的正確答案了。

還有"正錯錯"也是一種可能的放球法。第一層有"正"放的 100 個球。每四個球上放一個第二層的球。每球的上面與下面各有四個球與它相接觸。第一層佔高度一寸。以後各層每層所佔高度，參照第 12.5 圖，計算出來是 0.7071 寸。所以放了十三層（共佔高度 1 + .7071 × 12 = 9.4852 寸），上面還空着 0.5148 寸，無法利用。第二層有球 9 排，每排 9 球，共 81 球。箱內容球總數是 100 × 7 + 81 × 6 = 1186 個。這成績已不算壞，但比"錯錯錯"法 1200 的紀錄，稍覺遜色，因此失掉了"最多"的榮譽。

現在將所說各法的結果，列表如下：

放球法	單數層球數	雙數層球數	底層以上每層高度	層數	箱內容球數	每寸高度平均球數
正　正	100	100	1	10	1000	100
錯　正	105	105	1	10	1050	105
正　錯	100	90	0.866	11	1050	109.7
錯　錯	105	104	0.866	11	1150	120.7
正錯錯	100	81	0.7071	13	1186	128
錯錯錯	105	95	0.8164	12	1200	122.5

最後，有一句公平話不能不說。"正錯錯"之不如"錯錯錯"，是受了題目的限制，也許是冤枉的。如果製造保險箱時，使高度稍稍多了兩分，只是一粒黃豆這樣大。箱深不是 10 寸而是 10.2 寸。在這箱裏用"錯錯錯"法還是能放 1200 個球。但用"正錯錯"法，却正巧可以再多加一層，總共十四層，1267 個球。豈不就可以稱雄了嗎？

這兩個最好的放球，互爭雄長。箱的高低是很有關係的。我們可以將一個單數層與一個雙數層的球數加起，折半，再用底層以上每層高度去除。所

得商數是每寸高度平均球數，列爲上表的末一項。 從這裏，我們能推求出來，箱高不足 20 寸時，這兩法各有獲勝的可能。如箱高超過了 20 寸，“正錯錯”法一定是最好的。 如果箱的高度是無限的大，每寸高度平均球數，就直接代表各放球法的優劣。

箱的高度如是 25 寸，難道說“正錯錯”法就一定是最好麼？ 這個却又不盡然，還要看箱的長度闊度，有無變化。 譬如說，箱的長度增加半寸時（長 = 10.5 寸），“錯錯錯”又比“正錯錯”好了。

如箱的長闊高度，都是無限的長大，或者是球的直徑比起箱來，覺得非常渺小，應該將球如何安放，才能使球數最多呢？

要解答此問題，必須先求每一個球佔去多少空間。每球所佔空間愈少，在相等總空間內，愈可多放幾個球了。

$$圓球體積 = \frac{4}{3}\pi\,(半徑)^3 = \frac{1}{6}\pi\,(直徑)^3$$

如球徑一寸，體積是 0.5236 立方寸。 每球所佔空間是個長方體。它的求法如下：在某層某排裏，任何兩個相鄰的球，球心相離一寸（球徑一寸）。 任何兩鄰排的球心，距離是 1 或 0.866 寸，在乎“正”或“錯”的放法。 任何兩鄰層的球心距離，就是前表裏的每層高度。 這三個距離連乘起來，所得的體積，代表每球所佔去的空間。現在將各種放球法，計算一回，列表如下：

放球法	每球所佔空間	圓球體積	充實率	空虛率	虛實率
正　正	1 × 1 × 1　= 1	.5236	.5236	.4764	.9098
錯　正	1 × .866 × 1　= .866	.5236	.6046	.3954	.6540
正　錯	1 × 1 × .866　= .866	.5236	.6046	.3954	.6540
錯　錯	1 × .866 × .866　= .75	.5236	.6981	.3019	.4181
正錯錯	1 × 1 × .7071　= .7071	.5236	.7405	.2595	.3504
錯錯錯	1 × .866 × .8164 = .70699	.5236	.7414	.2586	.3488

最後兩種放球法，結果極爲相近。“錯錯錯”法終於榮膺冠軍，“正錯錯”法退居第二。用每球所佔空間除每球體積，得充實率。自從 1 裏減去充實率，得空虛率。 充實率與空虛率可以代表充實與空虛的程度，用充實率除空虛率，所得商數名虛實率 (voids ratio)。這是土壤力學裏的一個專門名辭。

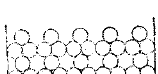
看了上面的討論，可見問論並不簡單。如容器不是正方而是長方形或是其他形狀（如圓柱形），問題就難了。又如所容的球，大小不一，再如所容的球不是圓球，而是鷄蛋是橄欖是米粒，或是極不規則的碎石子，（此時所容的東西要總體積最大，不必要個數最多）。這問題就難上加難了。這個難題在土木工程學裏是相當重要的。

我們又可以推廣研究的範圍或轉變研究的方向，把原來"方箱容球"的題目變為：

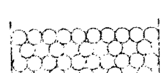
（甲） 從箱口將球裝入箱內，放到不能再滿為止。蓋箱蓋不許將球壓傷。球的安放，須要穩定。如有輕微震動，不致移動或倒塌。問須如何放法，箱內容球最少？

（乙） 像用斗量大米一樣，將許多球倒進箱內（設球是摔不碎的）。倒滿之後，將妨礙蓋箱子蓋的球都檢出去（球比米粒大，不便用棍去括箱口的米）。問箱內有球多少？

在這兩個問題中，甲題比較容易。其中有兩個條件甚為重要：（一）是要裝滿到從上面不能再裝，（二）是要放穩到不怕輕微震動。如箱與球的尺寸同前，用"正錯"法放球，可放十一層。單數層各有 100 球，雙數層各有 90 球。但為求減少球數，雙數層可以只放五排每排十球，如第 12.6 圖。這樣放法，每個球仍舊很穩當的被支持，並沒有因為球少了而陷落下去。結果是單數層各有100球，雙數層各只有50球。箱內共有球 $100\times6+50\times5=850$ 個。如再將此法加以變化。使單數層各有球 50 個支持着上面的 100 個球如第 12.7 圖。第十層是雙數層，應有 100 個球。但第十一層却不能只放 50 個球，因為放了 50 個球，還沒有裝滿，還可以再裝。放完第十層時，已佔的高度是



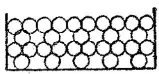
第 12.6 圖



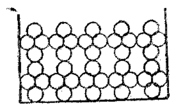
第 12.7 圖

8.794 寸（算法見前），上面還一寸多。裝滿第十一層，可有三種放法：100 個，90 個與 81 個。其中當然 81 個是最少的。這層佔 0.7071 寸的高度。裝完之後，上面還空 $10-8.794-.7071=.4989$ 寸，已滿到不能再裝了。這時箱中只有球 $50\times5+100\times5+81=831$ 個。

再看以前的"正錯錯"法，可放球十三層。　如第二層是"正"放的，擠緊了 100 個球，第一層只須有 25 個就足够支持第二層了。此 25 球，必須適當分布，使每球支持着上面四個球如第 12.8 圖。單數層各有 25 球，雙數層各有 100 球。但最上一層必要放滿，不能只放 25 球，所以須放 81 球。箱內球數是 $25\times 6+100\times 6+81=831$ 個，正巧與前法相同。用此法，第一層 25 球，第二層 100 球，第三層又是 25 球。　各球都放得十分安穩，如不激烈搖



第 12.8 圖



第 12.9 圖

動，絕不致滾動倒塌。這三層共佔高度 $1+.7071\times 2=2.4142$ 寸。如照這樣三層三層的加上去，(在技術上當然不太容易)，共裝了四個三層，佔高度 $2.4142\times 4=9.6568$ 寸。上面空地太少，已不能再放第十三層了。但第十二層不能只放 25 球，須裝滿 81 球，所以箱內只容球 $25\times 7+100\times 4+81=656$ 個。這個數目比 1000 已少去了三百幾十個。箱中已經裝滿，從上邊再也加不進了。但是，還可能再少嗎？

乙題，將球向箱內倒下，是很容易的工作。但是要將這問題求出個所以然來，卻是很難，球的大小，輕重，彈性與表面光滑程度，都要影響結果。箱的大小，彈性與裏面光滑程度，也會有關係。球和箱大小的比例，球與箱，球與球之間的摩擦，倒球的快慢，球落在箱內的地位，……等等：大概都不會沒有影響。唉呀！牽連這樣多，要想求解決，大概非要靠實際試驗不可了。

甲，乙兩題，已經够難。　如再算上箱與球的大小形狀等變化，更增加了困難的程度。遇到這樣的難題，一時想不透澈，或是無處下手，未能解決。　但只能把它暫放一旁，決不可灰心氣短。　我們喜歡有趣的難題，爲的是消遣，希望得到豁然領悟以後的快樂。一時解決不了，就暫且把它丟開，又有甚麼關係？等以後有閒暇有心情有機緣的時候，何妨舊事重提，再來消遣一回。人人持有這種態度，任何問題，都會逐漸解決的。那麼，又怕甚麼難題呢？

拾 叁

等和異積 等和等積 與等和連積

“13”是一個不受歡迎的數字。 中國人不喜歡它，西洋人也不喜歡它。

幾個中國人聚在一處吃酒，常用豁拳助興。豁拳時，揮動右手，伸出手指，同時嘴裏喊出“一定高升”，………“十全福壽”——從一到十的口號。 這些口號都是大吉大利的好口彩。 因爲人的兩隻手共有十個手指，所以口彩好的數字，也是到十爲止。古代的發明家們以爲十二容易被別數除盡，或因其他理由，看中了十二，將一年分爲十二月，將一天分爲十二時。 後人又唱出了“四季想思”，“十二月花名”等山歌，把一到十二幾個數字都唱熟了，所以也發生了好感。 大於十三的數字，不常應用，也不大被人注意，於是就覺得十三這個數的不順眼了。 結果就有了“十三點”，“十三塊六角”等代表不好的或醜惡的名辭。 西洋各國雖是很科學化的，也竟不約而同的認十三爲一個不幸運的倒霉數目，例如十三個人不同席吃飯，十三那天不利出行，不出門訪朋友。

其實，13 這數字與較小的較大的各數，有甚麼不同？爲甚麼有的被愛好，有的被遺忘，而惟有 13 被人厭惡？ 所以 13 的不被歡迎，實在是冤枉的，是被淺薄迷信的世俗所陷害了。

不但此也，13 還有別數所少有的奇妙特性——等和等積與等和連積。

“等和等積”是：三個數成爲一組。在各組中，三數之和都相等。三數之積也都相等。如三數之和是 13：

$$1+6+6=13, \qquad 1\times6\times6=36,$$

$$2+2+9=13, \qquad 2\times2\times9=36.$$

“等和連積”是：三個成爲一組。 在各組中，三數之和都相等，三數之積都成連續數。如三數之和是 13：

$$1+5+7=13, \qquad 1\times5\times7=35,$$

$$2+2+9=13, \qquad 2\times 2\times 9=36.$$

13 這個大家所不喜的數目，居然兼有以上兩種美麗的性質。 其他數目，能與它相比嗎？

等和等積與等和連積的研究，是不大容易的。 我雖然化過不少時間去消遣去研究，但還只是些初步工作，離開結論尙遠。 也許是因爲工具欠銳利，或是方向欠正確，或是功夫欠精深；總之，可引用兩句名言："革命尙未成功，同志仍須努力"。

將一個正整數 N 分爲三個正整數 a, b, 和 c, 算是一組。 三數相加，自然等於 N。 三數相乘，得積爲 P. 所以：

$$a+b+c=N,$$
$$a\times b\times c=P.$$

將 N 分開，可能得許多組，如 a_1, b_1, c_1, 與 a_2, b_2, c_2,………a_s, b_s, c_s, 等。各組三數之和都是 N. 各組三數之積是 P_1, P_2,………P_s 等。 本題的目的，就是要研究 N 與 P_1, P_2,………P_s 之間的關係。

如 a, b, c, 作爲一組，b, c, a, 或 c, b, a, 等都不能算爲不同的組。 每組中，只要有三個數，次序不關重要。 因爲相加或相乘，次序是沒有關係的。 N 可以分成許多不同的組。組的數目是 S。 N 數大，組數 S 必然增多。還有 N 數的形式是 $3m$, $3m+1$ 與 $3m+2$ 三種中的那一種，m 是單數或雙數，都與 S 有關。 用實驗歸納與級數求和等方法，求出 S 的算式。 現在略去求法，只將結果列下：

$m=$ 單數

$$N=3m, \qquad S=\tfrac{1}{4}(3m^2+1) \qquad =\frac{m-1}{4}(3m+3)+1.$$

$$N=3m+1, \quad S=\tfrac{1}{4}(3m^2+2m-1)=\frac{m-1}{4}(3m+5)+1.$$

$$N=3m+2, \quad S=\tfrac{1}{4}(3m^2+4m+1)=\frac{m-1}{4}(3m+7)+2.$$

$m=$ 雙數

$$N=3m, \qquad S=\tfrac{1}{4}(3m^2) \qquad =\frac{m}{4}(3m+0).$$

$$N = 3m + 1,\quad S = \tfrac{1}{4}(3m^2 + 2m) \quad = \frac{m}{4}(3m + 2).$$

$$N = 3m + 2,\quad S = \tfrac{1}{4}(3m^2 + 4m) \quad = \frac{m}{4}(3m + 4).$$

現在將 N 等於 3 到 14 各數時的 S，算出來列表如下：

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
形式	$3m$	$3m+1$	$3m+2$	$3m$	$3m+1$	$3m+2$	$3m$	$3m+1$	$3m+2$	$3m$	$3m+1$	$3m+2$
m	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
S	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16

例如：$N = 13$，可能得到互不相同的小組如下：

1, 1, 11.	2, 2, 9.	3, 3, 7.	4, 4, 5.
1, 2, 10.	2, 3, 8.	3, 4, 6.	
1, 3, 9.	2, 4, 7.	3, 5, 5.	
1, 4, 8.	2, 5, 6.		
1, 5, 7.			
1, 6, 6.			

以上共得 14 小組。如 $N = 50 = 3m + 2$, $m = 16$, $S = 208$。又如 $N = 100 = 3m + 1$, $m = 33$, $S = 833$。可見 N 數大了，小組總數 S 將要多得驚人。如想照以上 $N = 13$ 之例，把各組都排列寫出來，這個工作實在太繁重了。

將 N 分開，可得 S 個不同的三數小組。將三數相乘，當然可得 S 種的積 P。這 S 個 P，可能都不相同。如 $N = 12$, $S = 12$。12 個 P 就全不相同。此性質可名爲"等和異積"。N 等於 12 或較小的數時，都有此性質。N 比 12 大而有同樣性質的，已知的有 $N = 15$ 與 $N = 18$。再大的還有嗎？除了試驗之外，怎樣去求？這都是很有趣而難以回答的問題。

S 個積 P 如不是全不相同，必然有幾個 P 是相同的。這就是所說的等和等積。如 $N = 13$ (見前)或 $N = 14$，各都有一對相同的 P。$N = 13$ 是可以得一對等積的最小的數了。N 如是較大的數，相等的 P 也許不只有一對。如 $N = 29$，就有兩對 P：

$$3 \times 12 \times 14 = 504, \qquad 5 \times 12 \times 12 = 720,$$
$$4 \times 7 \times 18 = 504. \qquad 6 \times 8 \times 15 = 720.$$

如 $N = 28$，就有四對 P：

$$2 \times 10 \times 16 = 320, \qquad 4 \times 6 \times 18 = 432,$$
$$4 \times 4 \times 20 = 320. \qquad 3 \times 9 \times 16 = 432.$$
$$4 \times 10 \times 14 = 560, \qquad 4 \times 12 \times 12 = 576,$$
$$5 \times 7 \times 16 = 560. \qquad 6 \times 6 \times 16 = 576.$$

又如 $N = 35$，就有八對相等的積。 N 數增大，等積的對數還要多。

在 S 個 P 中，既能有兩個相同，也可以有三個相同。舉例如下：

$$N = 45: \quad 4 \times 20 \times 21 = 1680,$$
$$5 \times 12 \times 28 = 1680,$$
$$7 \times 8 \times 30 = 1680.$$

當然，有四個五個或更多的 P 都相等，也是可能的。 只是現在還舉不出例子來。

看以上所舉的等積，P全是雙數的。 單數的等積，甚爲稀少難得。 下面是兩個例：

$$N = 37: \quad 5 \times 5 \times 27 = 675, \qquad N = 49: \quad 3 \times 21 \times 25 = 1575,$$
$$3 \times 9 \times 25 = 675. \qquad 5 \times 9 \times 35 = 1575.$$

上兩例，P 的末尾都是 5。 如要得尾數是 1，3，7，或 9，那更是"物以稀爲貴"了。

如希望從算式裏求解決，可寫如下式：

$$N = a_1 + b_1 + c_1, \qquad P_1 = a_1 \times b_1 \times c_1,$$
$$N = a_2 + b_2 + c_2, \qquad P_2 = a_2 \times b_2 \times c_2.$$
$$P_1 = P_2.$$

如從前式中銷去 c_1，c_2，P_1 與 P_2，可得：

$$N = \frac{a_1 b_1 (a_1 + b_1) - a_2 b_2 (a_2 + b_2)}{a_1 b_1 - a_2 b_2}$$

如從前式中銷去 c_1，c_2 與 N，可得：

$$P_1 = P_2 = \frac{a_1 b_1 a_2 b_2 [a_1 + b_1 - (a_1 + b_1)]}{a_1 b_1 - a_2 b_2}$$

算式雖然有了，但變數太多，關係複雜，仍然無從利用。 如指定 N 數，要求有多少相等的 P。 如要得三個或四個 P 相等，而求 N 或最小的 N。 這些問題，除了試驗之外，還是無法解決。

再論等和連積。

N 這個數目的末一個或個位數字或尾數，必定是 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 與 9 十個數字中的一個。 將 N 分爲 S 個三數小組。 每數的個位數字，也必是那十個中的一個。 每小組的三數，不是隨意的三個數，相加要等於 N，是有規律的。所以每小組中的三個尾數，也不是隨意配合的。 三數相乘得 P。這積的個位數，決定於三數的尾數，所以也必有它的特殊規律。

如 N 是幾十或幾百幾十，它的個位是 0。 將N分成 a, b 和 c。 a 的尾數可能是十個數字中的任何一個。 b 也是如此。 c 或第三個數，就不能如此隨便。第三個尾數必須配合前兩個，使三者總和的尾數等於 N 的尾數。 如 N 的尾數是 0，a 的個位是 1，b 的最後一字是 2，結果 c 的末尾必須是 7。 乘積 P 的末位數，自然就是 4 了。 三個尾數中，如有一個是 0，無論其餘兩個是幾，P 的尾，也必是 0。 三個尾數中，如有一個是 5，其餘兩尾數中，必有一個是雙數。所以 P 的尾數仍是 0。 這是 N 的尾數爲 0 時的特性，也是 N 爲雙數時的共同特性。 現將 N 的尾數爲 0 時 P 的尾數列表如下：

b 尾 \ P 尾 \ a 尾	0 或 5	1 或 6	2 或 7	3 或 8	4 或 9
0 或 5	0	0	0	0	0
1 或 6	0	8	4	8	0
2 或 7	0	4	4	0	2
3 或 8	0	8	0	6	6
4 或 9	0	0	2	6	2

此表只是全表的四分之一。 因它太有規則，所以能用四分之一代表全體。由表可知 P 的尾數只可能是 0, 2, 4, 6 或 8。 P 永遠是雙數。 想要兩個積成爲連續數，是絕對不可能的。 N 是其他雙數時，也有此特性。

N 是單數時，a, b, c 的尾數如有一個是 0，P 的尾數也是 0。 此點與前相同。 a, b, c 的尾數中，有一個是 5，其餘兩個如是雙數，P 的尾數還是 0。

但其餘兩個如是單數，則 P 的尾數是 5，此點與前不同。若 a, b, c, 三個有一個是雙數，P 就是雙數。只有三個都是單數時，P 才是單數。 所以單數的積是很難得的。 設 N 的尾數是 3，照以前方法，計算 P 的尾數，列所得結果如下表：

P 尾 \ a 尾 / b 尾	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	7	2	5	6	5	2	7
2	0	0	6	8	6	0	0	6	8	6
3	0	7	8	3	2	5	2	3	8	7
4	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	0	2	2	0	6	0	2	2
7	0	5	6	3	6	5	0	1	8	1
8	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2
9	0	7	6	7	0	5	2	1	2	5

在表中 0, 2, 4, 5, 6, 8 的各橫排與直行，P 的尾數有循環的規律。 但在 1, 3, 7, 9 各橫排與直行中，沒有相同的規律。 所以非全表列出不可。 雖然這四橫排直行中，P 的尾數不守循環規律，但也各有自己的對稱規律。 這是 N 等於單數時的共同特性。 看表中 P 的尾數，單雙都有。 要得兩個相連續的乘積，是可能的。所以本文開頭舉的例是：$N = 13$, $P_1 = 35$, $P_2 = 36$。再看表中，P 的尾數缺 4 缺 9，有 0, 1, 2, 3 和 5, 6, 7, 8。 所以 N 的尾數是 3 時，最多可能有四個互相連續的積。

N 的尾數是 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9 時，所得 P 的尾數，也可用此法研究。爲節省篇幅，不能各別寫出。只將總結果列成下表：

N 尾	P 尾所有	P 尾所無
0	0, 2, 4, 6, 8	1, 3, 5, 7, 9
1	0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9	2, 7
2	0, 2, 4, 8	1, 3, 5, 6, 7, 9
3	0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8	4, 9
4	0, 2, 4, 6	1, 3, 5, 7, 8, 9
5	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	
6	0, 4, 6, 8	1, 2, 3, 5, 7, 9
7	0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9	1, 6
8	0, 2, 6, 8	1, 3, 4, 5, 7, 9
9	0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9	3, 8

上表說明了：N 是雙數時，根本不能有連續乘積。N 是單數，個位數字是 1，3，7，9 時，可能有連續乘積。 只是 P 的尾數是各有所缺，最多的連續乘積不能多於四個。 N 的尾數是 5 時，P 的尾數十字俱全，所以有連續乘積的可能性最多。 並且連續乘積的個數，也可能最多，不但不以四個爲限，簡直是看不出有甚麼限制。所以只要是 N 有相當的數值，要得十個八個或更多的連續乘積，似乎是很可能的。

要得兩個連續乘積，非常容易，只要 N 是單數就行。最小的 N 是 5。 N 是 3 雖然也行，只能算是例外：

$$N=3:\quad 0\times1\times2=0,\qquad 1\times1\times1=1.$$

$$N=5:\quad 1\times1\times3=3,\qquad 1\times2\times2=4.$$

要同時得兩組兩個連續乘積，可如下例：

$$N=15:\quad 1\times6\times8=48,\qquad 1\times7\times7=49.$$

$$2\times5\times8=80,\qquad 3\times3\times9=81.$$

要求一個 N 能得三個連續乘積，甚是困難。 現在連一個例都舉不出來，不要說四個五個連續乘積了。

將以前研究 P 的尾數的結果作個統計。研究每個尾數出現的頻率，或獲得的難易。統計結果如下：

P尾頻率 / P尾 / N尾	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	合計
0	52	—	12	—	12	—	12	—	12	—	100
1	36	6	—	4	9	12	18	—	12	3	100
2	48	—	12	—	16	—	—	—	24	—	100
3	36	4	18	3	—	12	12	6	9	—	100
4	48	—	16	—	24	—	12	—	—	—	100
5	39	3	7	3	11	13	9	3	9	3	100
6	48	—	—	—	12	—	24	—	16	—	100
7	36	—	9	6	12	12	—	3	18	4	100
8	48	—	24	—	—	—	16	—	12	—	100
9	36	3	11	—	19	12	9	4	—	6	100
合　　計	427	16	109	16	115	61	112	16	112	16	1000

單數合計 $= 16 + 16 + 61 + 16 + 16 = 125$

雙數合計 $= 427 + 109 + 115 + 112 + 112 = 875$

N 的尾數爲 0，P 的尾數得 0 的機會最多，約爲 52 %。N 的尾數爲 1，P 的尾數得 0 的可能是 36 %，得 9 的可能只有 3 %。如不限定 N，P 的尾數得 0 的可能約有 42.7 %，得 1 的可能只不過 1.6 %。以 P 爲單雙而論，有 $\frac{1}{8}$ 的機會得單數，$\frac{7}{8}$ 的機會得雙數。等和等積的 P，很難得有單數，還有等和連積的難得多個連續數，其中原故，在這裏都得到了解答。

如想從算式下手，以求解決，可寫如下：

$$N = a_1 + b_1 + c_1, \qquad P_1 = a_1 \times b_1 \times c_1,$$

$$N = a_2 + b_2 + c_2, \qquad P_2 = a_2 \times b_2 \times c_2.$$

$$P_2 = P_1 + 1$$

如消去 c_1, c_2, P_1 及 P_2，得

$$N = \frac{a_1 b_1 (a_1 + b_1) - a_2 b_2 (a_2 + b_2) - 1}{a_1 b_1 - a_2 b_2}.$$

如消去 c_1, c_2 及 N，得

$$c_1 = \frac{P_1}{a_1 b_1} = \frac{a_2 b_2 [a_1 + b_1 - (a_2 + b_2)] - 1}{a_1 b_1 - a_2 b_2}.$$

算式雖有兩個，仍舊沒有甚麼大用。以上討論了不少，可惜只是一些問題的特性，還未能深入到問題的中心，獲得具體的解決方法。如要求有十個相等的乘積，N 最少須是多少？ 又如要求有十個連續乘積，N 最少須是多少？ 再如要兼有以上兩種條件，N 最少須是多少？ 像這些問題，怎樣解決？ 就算不怕麻煩，使用笨法，將數分解了，乘起來，一個一個的試驗，也不知要試到何年何月。恐怕要十年百年，才有解決的希望呢。至於巧法，還是那兩句老話"革命尚未成功，同志仍須努力"。只要大家共同努力，總有成功的那一天的。

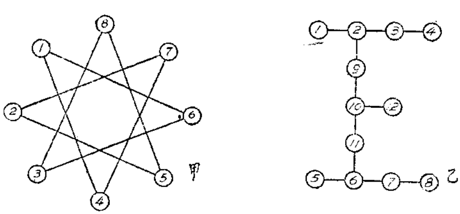
拾　肆

移棋換位(一)

"棋"是大家所熟習的。中國原有的圍棋象棋,本是極好的消遣,可惜如今並不普徧,遠不如牌戲通行。此外著名的如軍棋跳棋等,是新興的玩意,只流行於中小學校裏。本文所說的棋,只供一個人無聊時的消遣,並不是兩人對著的。但是如有兩個人或三五個人,各自玩同一個移棋游戲,將所得成績,互相競賽比較,更可以增加興趣。

移棋換位遊戲是用兩種顏色的普通棋子,如圍棋之黑白或象棋軍棋之紅藍或紅黑,先排成某種形式,再按一定的規則與路線,移動棋子,使它們變換到預定的新位置。更進一步,就是要求最簡便的移動方法。下文先舉兩個常見的移棋游戲爲例,說明移動規則及紀錄方法。然後再介紹新的移棋問題。

在紙上畫一個八角星形,星芒的尖頂上各畫一個小圈,內註 1, 2, 3,………等數字,如第 14.1 圖甲。在註 1, 3 的圓上各放一白棋子,在 5, 7 處各放一黑棋子。棋子必須放在小圈上,但不許兩子擠在一處。移動棋子時,只須推着棋子,順一直線前進,停在一個空位上。如前面還有空位,也不妨一直或轉向繼續前進,但不可跳過別子。移動棋子一次,不論遠近,統算一步。如要使左邊的兩個白子與右邊的兩個黑子,左右換位,應該如何移動?最少須走幾步?



第 14.1 圖

用文字記錄或說明棋子移動的次序方向及遠近,必須要一種代表方法。如將 7 處之子移到 5,可以寫爲 7—5。又如 8 處之子,經過 3 與 6,最後停在 1,可以 8—3—6—

1 代表。 還可再簡單化，專記起點與終點，而寫爲 8—1。 兩數字間的一短劃，也不妨省略不寫。但是，如棋位多時，只記 112，就不知是 1—12 或 11—2，會發生錯誤的。

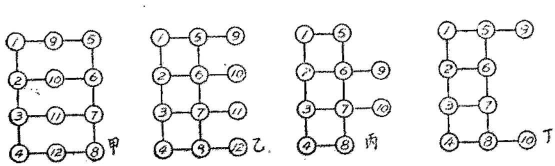
八角星例題，如頭一步先走 1 處的白子，答案是：14, 31, 56, 78, 45, 17, 61 或 16, 71, 54, 37, 65, 13, 41。 此題只求黑白左右換位，不管棋子排列的次序。只須走七步，就成功了。下面再舉一個較難的例。

畫一個英文字母 *E* 字形的圖，如第 14.1 圖乙。取八個象棋子，將紅的"車馬砲兵"順序放在 1, 2, 3, 4。 再將藍的"車馬砲兵"順序放在 5, 6, 7, 8。 如沒有象棋，可用陸軍棋的"將校尉士"。 也可用別物代替，但須分別顏色，註明甲，乙，丙，丁或 *A*, *B*, *C*, *D*，移棋的規則和前例相同。 求使紅藍棋子互換位置的最簡便的移動法。但須注意，換完之後，兩排棋子仍要有原來的次序。

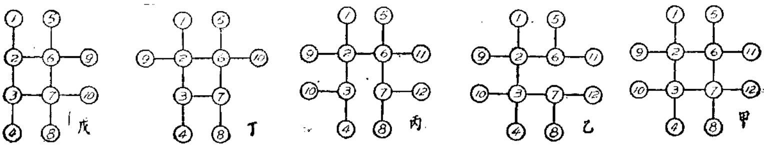
這 *E* 字題比以前的八角星難得多，最少須走 43 步才行。走法如下：

212,　62,　59,　711,　85,　118,　127,　512,　95,　26,　111,
121,　310,　49,　14,　93,　101,　312,　118,　62,　59,　125,
912,　26,　111,　121,　1112,　62,　79,　811,　58,　115,　127,
512,　95,　26,　311,　123,　1112,　62,　59,　125,　96.

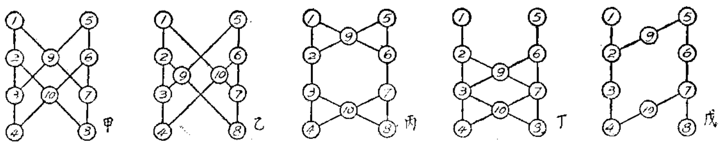
以下各圖，畫着許多移棋換位游戲的路線圖樣。 每一個都是要使左邊放在 1, 2, 3, 4 的四個棋子，與右邊放在 5, 6, 7, 8 的四個棋子互換位置。 移動規則與前面兩例相同。換位之後，須要保持棋子的原有順序。 玩這種游戲的人，先求能使棋子換位，再設法減少無用的廢步，而得最簡單的方法，數出移動的步數。 本文後面雖附着答案，但請目的在消遣的人，勿急於翻看，最少也要各自試演三遍五遍之後，再將所得成績與答案比較。所附答案，只是著者個人長時間消遣試演的結果，所以要得更簡單的移法更少的步數，當然還是可能的。



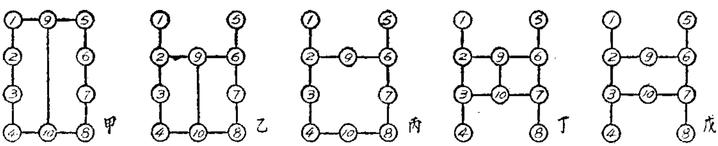
第 14.2 圖



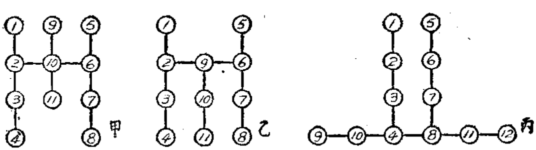
第 14.3 圖



第 14.4 圖



第 14.5 圖



第 14.6 圖

前面的三十多個移棋換位問題，各都有兩個或三四個空位，按着形像，分別類從。看所舉答案，最少的須走十四步，多的須五六十步。這種游戲的有無趣味，倒不在乎步數多少，像第 14.5, 14.6 圖中的幾題，雖只須二三十步，都是非常有意思的。

移棋換位(一)答案

第 14.2 圖甲: 812, 78, 611, 27, 19, 51, 75, 36, 1110, 82, 48, 124, 23, 102, 67, 56, 95. 共計十七步。此外走法甚多。

第 14.2 圖乙: 可用第 14.2 圖丙的的移動法，共計十四步。此圖雖比第 14.2 圖丙多着兩個的空位，但並不能使移棋法再少於十四步了。

第 14.2 圖丙: 710, 67, 29, 52, 15, 21, 72, 36, 83, 48, 34, 103, 67, 96. 共計十四步。此外走法甚多。

第 14.2 圖丁: 59, 65, 76, 87, 410, 38, 74, 63, 27, 16, 52, 91, 65, 76, 87, 108. 共計十六步。

第 14.3 圖甲: 611, 76, 312, 810, 48, 104, 27, 63, 19, 51, 95, 112, 76, 127. 共計十四步。

第 14.3 圖乙: 29, 712, 32, 810, 48, 104, 1210, 27, 63, 111, 51, 115, 97, 32, 103. 共計十五步。

第 14.3 圖丙: 712, 67, 211, 39, 510, 45, 74, 13, 81, 58, 35, 123, 97, 36, 49, 14, 101, 63, 92, 116. 共計二十步。

第 14.3 圖丁: 610, 26, 39, 42, 74, 83, 68, 26, 37, 42, 74, 83, 68, 57, 25, 76, 37, 13, 61, 102, 710, 37, 26, 93, 69, 52, 75, 37, 23, 92, 106. 共計三十一步。

第 14.3 圖戊: 69, 76, 310, 63, 96, 29, 16, 31, 42, 74, 23, 62, 57, 25, 72, 86, 38, 67, 26, 13, 61, 36, 42, 74, 63, 96, 107. 共計二十七步。

第 11.4 圖甲: 59, 65, 46, 84, 710, 68, 96, 37, 39, 103, 72, 510, 96, 15, 21, 102. 共計十六步。

第 14.4 圖乙: 39, 43, 74, 810, 97, 38, 43, 104. 以上共走八步，搬動一半棋子。再照樣搬動其餘一半，總共須走十六步。另一種移

動法是: 110, 21, 52, 69, 105. 16, 21, 92. 也須十六步。

第 14.4 圖丙: 59, 65, 76, 87, 48, 74, 37, 210, 13, 91, 72, 59, 75, 106, 37, 210, 93, 72, 59, 75, 97, 26, 32, 103. 共計二十四步。

第 14.4 圖丁: 710, 27, 19, 31, 102, 43, 84, 38, 73, 610, 57, 95, 36, 73, 27, 19, 31, 102, 73, 97. 共計二十步。

第 14.4 圖丙: 59, 65, 73, 47, 310, 24, 93, 52, 69, 75, 106, 47, 310, 24, 13, 91, 32, 43, 104, 59, 65, 76, 810, 68, 57, 96, 25, 39, 42, 103, 74, 810, 68, 56, 95, 29, 107, 410, 34, 13, 91, 52, 65, 76, 107. 共計四十五步。

第 14.5 圖甲: 510, 15, 29, 31, 42, 103, 94, 510, 69, 75, 86, 107, 48, 94, 510, 15, 29, 31, 42, 103, 94, 510, 69, 75, 86, 107, 48, 94. 共計二十八步。

第 14.5 圖乙: 69, 76, 87, 48, 310, 24, 13, 91, 62, 59, 75, 86, 107, 48, 310, 24, 13, 91, 62, 59, 75, 86, 107, 910, 29, 32, 42, 104, 98, 610, 79, 57, 95, 106. 共計三十四步。

第 14.5 圖丙: 69, 76, 87, 48, 310, 24, 13, 91, 62, 59, 75, 86, 107, 48, 310, 24, 13, 92, 69, 76, 87, 108, 410, 34, 23, 91, 62, 79, 87, 107, 48, 310, 24, 13, 91, 69, 32, 43, 104, 810, 78, 57, 95, 26, 39, 43, 104, 810, 78, 67, 96, 19, 31, 42, 103, 84, 78, 67, 96. 共計五十九步。

第 14.5 圖丁: 610, 59, 75, 86, 108, 37, 410, 24, 13, 91, 62, 79, 86, 108, 37, 410, 24, 93, 62, 59, 75, 106, 37, 93. 共計二十四步。

第 14.5 圖戊: 710, 67, 59, 75, 86, 108, 37, 410, 24, 13, 91, 62, 79, 86, 108, 37, 410, 24, 93, 62,

59, 75, 106, 37, 23, 92. 共計二十六步。

第14.6圖甲：610, 511, 79, 85, 98, 107, 510, 25, 16, 101, 310, 49, 14, 93, 111, 311, 63, 52, 115, 711, 89, 58, 115, 107, 510, 25, 36, 103, 112, 611, 511, 101, 112. 共計三十三步。

第14.6圖乙：611, 510, 79, 85, 98, 107, 510, 25, 16, 101, 310, 49, 14, 91, 103, 110, 61, 52, 105, 710, 89, 58, 95, 27, 16, 101, 610, 52, 105, 27, 36, 103, 610, 72, 107, 26, 112. 共計三十七步。

第14.6圖丙：49, 810, 74, 612, 511, 45, 36, 107, 93, 79, 1110, 127, 312, 211, 18, 101, 810, 72, 113, 1011, 610, 54, 115, 411, 36, 113, 97, 94. 128. 共計二十九步。

拾 伍

移棋換位（二）

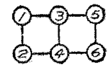
使兩個棋子，互換地位，必先將甲移開，再移乙到甲位，最後才能使甲補進乙位。最少須走三步。所以使左邊四棋子與右邊四棋子對換位置，最少須走十二步。如受空位與路線的拘束，所需步數就要加多了。假如空位只有一兩個，路線又很少，不能四通八達，移棋時常感覺前擠後擁，礙手礙脚，不能舒暢如意，必須盤旋進退，繞來繞去，才能成功。問題很多，各有妙處。如不得其法，常須多走許多步，甚至於多走了仍然不能達到移棋換位的目的。經過幾次失敗，等到摸着了竅門，自然會得心應手，水到渠成似的成功了。玩此游戲，不可心浮氣躁。失敗了也不可灰心氣餒。如覺到乏味時，就可丢在一旁，把它忘了。求消遣的人，何必自尋煩惱呢？如覺得有趣，試過幾次，一次比一次成績好，後來豁然貫通，得到極省事的走法。這時一定是暢快極了。消遣的趣味，全在於此。因此之故，消遣者不可先看答案。先看了答案，就像拾了不勞而獲的東西，不覺珍貴，趣味也就減少了。

移棋題目很多，各有巧妙不同。移棋沒有固定的方法，但也有幾個原則。在異色棋子中，先看那個換位最難。如不能一步走到，而須分走幾步時，要注意棋子所佔的地位。同色棋子要顧到順序，必須在一個三岔路口，此處是全局的關鍵。移棋要減少無用的廢步。有空位時（移棋開始之後，空位地點時常變化），須儘量利用。

遇着一個新題目，先考慮上述的幾個原則。動手移棋時，只求換位，同時要數着步數，記在紙上。走過兩次三次，有了經驗，所走步數自會減少。等得到比較好的移棋法時，須連續用同法移動幾回，然後用筆將走法記錄出來。否則，剛才走過的移棋妙法，一轉眼間就會完全忘記，正好像漁人再到桃花源時，迷失舊路一樣呢。

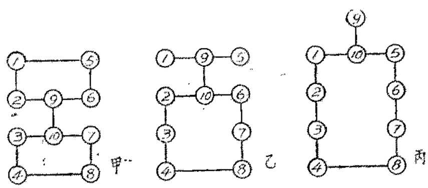
在介紹移棋換位新題之前，先舉一個例。在第 15.1 圖那棋盤上，放五個棋

子在 1, 2, 3, 5, 6。只有一個空位在 4 處。移棋目的是使在 2, 6 的兩個棋子對換位置。 只有一個空位時，記錄移棋不必記每步的起點與終點，只記起點或走那一子就足够了。 因爲各棋子都是逐步推移，不會弄錯的。此例的移法如下：2, 1, 3, 4, 6, 5, 3, 1, 2, 4, 6, 5, 共走十二步，原在 2, 6 的兩子，已經掉換過來了。不過現在 5 位是空着。如仍要空位在 4，可以再添 3, 4 兩步，共計十四步。 另一種走法是：3, 1, 2, 4, 6, 5, 3, 1, 2, 4, 3, 5, 6, 4。也是要十四步。

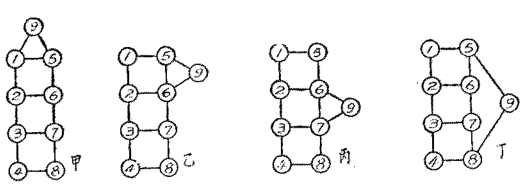


第 15.1 圖

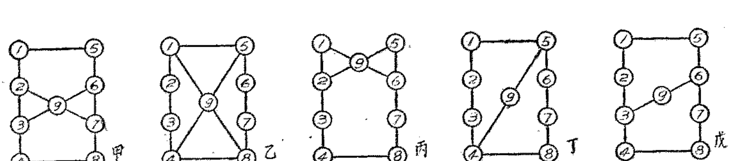
下面分類列出二十多個新題，也是要使在 1, 2, 3, 4 的四棋子與在 5, 6, 7, 8 的四棋子互換位置，並保持棋子的順序。 空位只有一兩個，路線也不多，所以步法很繁。 少的須二三十步，多的要一百多步。 所附的答案，只可作參考，因爲答案中各走法的步數，不敢說已是最少的，恐怕還有改進的可能呢。



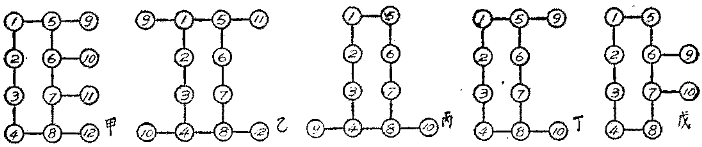
第 15.2 圖



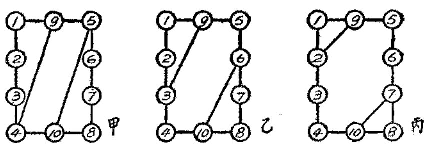
第 15.3 圖



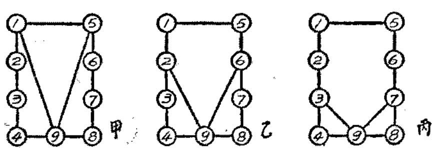
第 15.4 圖



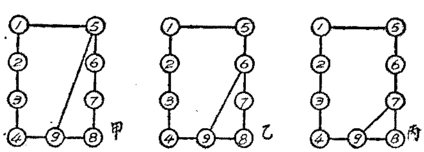
第 15.5 圖



第 15.6 圖



第 15.7 圖



第 15.8 圖

移棋換位(二)答案

第 15.2 圖甲: 610, 59, 16, 25, 91, 102, 610, 59, 15, 21, 92, 106, 29, 12, 51, 65, 96. 走以上十七步，已使上半部棋子換位。再仿此法移動下半部棋子。共計須走三十四步。

第 15.2 圖乙: 510, 15, 101, 69, 710, 86, 47, 38, 24, 103, 92, 69, 26, 310, 42, 83, 74, 68, 107, 96, 29, 310, 42, 83, 74, 68, 107, 96, 29 62, 710, 87, 48, 36, 23, 102, 96, 210, 32, 43, 84, 78, 67, 106, 210, 32, 43, 84, 78, 67, 106. 共計五十一步。

第 15.2 圖丙: 59, 610, 75, 86, 47, 38, 24, 13, 102, 51, 65, 76, 87, 48, 54, 23, 12, 91, 59, 15, 210, 31, 42, 83, 74, 68, 57, 106, 15, 91, 59, 610, 75, 86, 47, 28, 24, 13, 102, 91, 510, 65, 76, 87, 48, 34, 23, 12, 101, 59, 610, 75, 86, 47, 38, 23, 13, 102, 51, 65, 76, 87, 48, 34, 23. 12, 51, 95, 19, 210, 31, 42, 83, 74, 68, 57, 106, 15, 91, 59, 610, 76, 87, 48, 34, 23, 12, 101, 95, 110, 21, 32, 43, 84, 78, 67, 56, 105, 110, 21, 32, 43, 84, 78, 67, 56, 105. 共計一百零七步。

第 15.3 圖甲: 5, 6, 2, 3, 7, 8, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 7, 3, 4, 8, 7, 6, 2, 3, 7, 8, 4, 3, 2, 1, 9, 5, 6, 2, 1, 5, 9, 1, 2, 6, 5, 9. 共計三十八步此外走法甚多。

第 15.3 圖乙: 5, 6, 7, 3, 4, 8, 7, 6, 2, 3, 7, 8, 4, 3, 2, 1, 5, 9, 6, 2, 1, 5, 6, 7, 3, 4, 8, 7, 6, 9. 共計三十步。此外走法甚多。

第 15.3 圖丙: 6, 7, 3, 4, 8, 7, 6, 2, 3, 7, 8, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 9, 7, 3, 2, 6, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 7, 9, 6, 2, 1, 5, 6, 9. 共計三十六步。

第 15.3 圖丁： 8, 7, 6, 5, 1, 2, 6, 7, 3, 4, 8, 9, 5, 1, 2, 6, 7, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9. 共計二十四步。

第 15.4 圖甲： 7, 8, 4, 3, 9, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 9, 7, 8, 4, 3, 9, 6, 5, 1, 2, 9, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 9, 6, 7, 9. 共計四十六步。

第 15.4 圖乙： 8, 7, 6, 5, 1, 9, 8, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 5, 1, 9, 4, 3, 2, 1, 5, 9, 8, 7, 6, 5, 9. 共計四十二步。棋盤上 4 到 9 的路線，一次也沒有用過。但是多了一條路線，爲何不能利用它，減少移動次數呢？

第 15.4 圖丙： 6, 7, 8, 4, 3, 2, 1, 9, 6, 7, 8, 4, 3, 2, 9, 5, 6, 7, 8, 4, 3, 2, 1, 9, 6, 7, 8, 4, 3, 2, 1, 9, 6, 7, 8, 4, 3, 2, 9, 6, 7, 8, 4, 3, 2, 1, 9, 6, 5, 9, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 9, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 9, 1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 9. 共計七十二步。

第 15.4 圖丁： 5, 1, 2, 3, 4, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 9, 5, 6, 7, 8, 4, 9, 5, 6, 7, 8, 4, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 9, 5, 6, 7, 8, 4, 9, 5, 6, 7, 8, 4, 9. 共計四十八步。

第 15.4 圖戊： 6, 7, 8, 4, 3, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 9, 6, 7, 8, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 7, 8, 4, 3, 9, 6, 7, 8, 4, 3, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 9, 6, 7, 8, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 7, 8, 4, 3, 9, 6, 7, 8, 4, 3, 9, 6, 7, 8, 4, 3, 9. 共計八十六步。

第 1.55 圖甲： 59, 610, 711, 85, 116, 412, 311, 27, 18, 54, 63, 102, 91, 710, 85, 106, 117, 128. 共計十八步。

第 15.5 圖乙： 511, 15, 29, 31, 43, 810, 312, 73, 64, 57, 16, 112, 61, 711, 126, 47, 312, 73, 124, 68, 17, 96, 115, 21, 32, 43, 104. 共計二十七步。此外走法甚多。

第 15.5 圖丙： 49, 810, 74, 68, 57, 16, 25, 31, 42, 83, 104, 710, 47, 38, 24, 13, 52, 61, 75, 86, 47, 104, 710, 68, 57, 16, 25, 31, 42, 83, 104, 78, 67, 56, 15, 21, 32, 43, 84, 710, 68, 57,

16, 25, 31, 42, 83, 74, 107, 410, 38, 23, 12, 51, 65, 76, 87, 98, 39, 23, 12, 51, 65, 76, 84, 107, 48, 94. 共計六十八步。

第 15.5 圖丁: 59, 65, 76, 87, 410, 38, 24 13, 52, 91, 69, 75, 86, 107, 410, 38, 24, 13, 52, 91, 69, 75, 86, 107, 410. 38, 24, 13, 52, 91, 69, 75, 86, 47, 38, 24, 13, 52, 91, 69, 75, 86, 107, 410, 38, 24, 13, 52, 61, 75, 86, 107, 410, 38, 24, 13, 52, 91, 65, 76, 87, 48. 34, 23, 12, 51, 65, 76, 87, 48, 34, 23, 12, 51, 69, 75, 86, 47, 38, 24, 13, 52, 61, 75, 86, 107, 48. 34, 23, 12, 51, 65, 76, 87, 48, 34, 23, 12, 51, 95. 共計一百步。

第 15.5 圖戊: 69, 710, 86, 48, 34, 23, 12, 51, 65, 106, 810, 47, 38, 24, 13, 52, 61, 95, 76, 87, 48. 34, 23, 12, 51, 65, 79, 87, 48, 34, 23, 12, 51, 95, 76, 87, 48, 34, 23, 12, 51, 65, 79, 106, 87, 48, 34, 23, 12, 51, 65, 76, 87, 48, 4, 23, 12, 51, 65, 76, 87, 48, 34, 23, 12, 51, 65, 76, 810, 47, 38, 24, 13, 52, 61, 95, 79, 86, 48, 34, 23, 12, 51, 65, 96, 107. 共計八十六步。

第 15.6 圖甲: 510, 45, 39, 103, 84, 710, 68, 57, 69, 49, 105, 84, 78, 67, 510, 95. 19, 21, 32, 43, 104, 510, 95, 19, 21, 32, 43, 104, 510, 96, 105, 共計三十一步。

第 15.6 圖乙: 610, 56, 35, 49, 24, 12, 93, 51, 39, 43, 104, 610, 96, 15, 31, 53, 69, 75, 87, 106, 48, 64, 56, 95, 39, 43, 84, 610, 78, 57, 96, 15, 29, 31, 42, 103, 84, 78, 67, 56, 95. 共計

四十一步。

第 15.6 圖丙：710， 67， 56， 25， 39， 42， 103， 74， 610， 56， 95， 29， 12， 91， 59， 65， 86， 108， 47， 310， 24， 93， 52， 19， 21， 32， 43， 65， 76， 107， 84， 78， 610， 57， 96， 25， 19， 31， 42， 103， 84， 710， 68， 57， 96， 15， 21， 32， 43， 104. 共計五十步。

第 15.7 圖甲： 5，1，2，3，4， 9，1，5，6，7， 8，9，5，1，2， 3，4，9，1，5， 6，7，8，9，5， 1，2，3，4，9， 1，5，6，7，8， 9，5，1，2，3， 4，9. 共計四十二步。

第 15.7 圖乙： 6，7，8，9，6， 5，1，2，9，6， 7，8，9，2，3， 4，9，6，5，1， 2，3，4，9，8， 7，6，5，1，2， 9，8，7，6，5， 1，2，9，6，5， 1，2，9，6，7， 8，9，6，7，8， 9，2，1，5，6， 7，8，9，6，7， 8，9. 共計六十二步。

第 15.7 圖丙： 7，6，5，1，2， 3，4，9，7，6， 5，1，2，3，9， 7，6，5，1，2， 3，4，9，3，2， 1，5，6，7，9， 3，4，9，7，6， 5，1，2，3，4. 9，8，7，6，5， 1，2，3，4，9， 7，6，5，1，2， 3，4，9，7，6， 5，1，2，3，9， 7，8，9，4，3， 2，1，5，7，6， 9，4，3，2，1， 5，6，7，9. 共計八十四步。

第 15.8 圖甲： 5，1，2，3，4， 9，5，6，7，8， 9. 照以上的十一步連續走四遍，共計四十四步。

第 15.8 圖乙： 6，5，1，2，3， 4，9，6，7，8， 9，4，3，2，1， 5，6，9，8，7， 6，5，1，2，3， 4，9，6，7，8， 9，6，5，1，2， 3，4，9，8，7， 6，5，1，2，3， 4，9，8，7，6， 5，1，2，3，4， 9，6，5，1，2， 3，4，9，6，7， 8，9，6，7，8， 9，4，3，2，1， 5，6，7，8，9， 6，7，8，9. 共計八十四步。

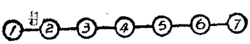
第 15.8 圖丙： 7，6，5，1，2， 3，4，9，7，6， 5，1，2，3，4， 9，7，8，9，4， 3，2，1，5，6， 7，9，4，3，2， 1，5，6，7，9， 8，7，6，5，1， 2，3，4，9，7， 6，5，1，2，3， 4，9，8，7，6， 5，1，2，3，4， 9，8，7，6，5， 1，2，3，4，9， 7，6，5，1，2， 3，4，9，7，6， 5，1，2，3，4， 9，7，8，9，4， 3，2，1，5，6，

7, 9, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 7, 9, 8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 4, 9, 7, 8, 9, 4, 3, 2, 1, 5, 6, 7, 8, 9. 共計一百二十六步.

拾 陸

移 棋 換 位（三）

用六個圓棋子，三黑三白，放着如第 16.1 圖。三個黑子放在 1，2，3. 三個白子，放在 5，6，7. 當中只有一個空位，4. 如要使左邊的黑子與右邊的白子互換位置，必須怎樣移動棋子，才能成功？最少須移動幾次？

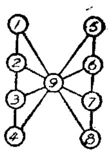


第 16.1 圖

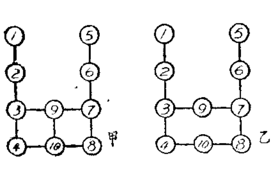
這個移棋換位問題，如用以前的移棋方法，是挛礙難通不能解決的。所以另須一套新規則：一個棋子在直線前進時，可以跳過一個與它本身顏色不同的棋子。跳過之後，如還有機會，可以繼續前進或連跳。此外，移棋的舊規則，仍可適用。所以一個棋子在跳子之前與跳過以後，都可以前進或轉灣，但正跳子時，是只許前進不許轉灣的。

棋子既然許跳，第 16.1 圖這題，就可以解決了。走法是：54，35，23，42，64，76，57，35，13，21，42，64，56，35，43. 共計十五步。記錄棋子的移動，不管它跳子不跳，仍是記每移一子的起點和終點。如僅有一個空位時，也可以只記起點不記終點。

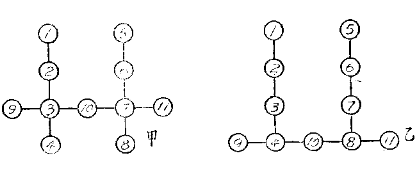
下面幾個移棋換位題目，都是須要跳的。雖然有幾題各有兩三個空位，還是非跳不可。移棋開始時要有四個棋子在 1，2，3，4. 另有四個棋子在 5，6，7，8. 游戲的目的是要用簡單的移動方法，使棋子左右換位，同時還保持原有的順序。



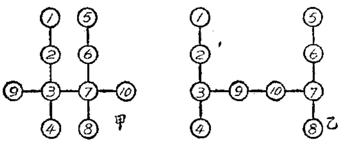
第 16.2 圖



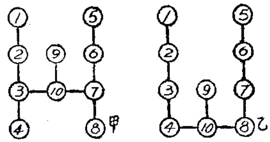
第 16.3 圖



第 16.4 圖



第 16.5 圖



第 16.6 圖

移棋換位(三)答案

第 16.2 圖: 8, 6, 3, 4, 9, 1, 2, 7, 5, 9, 3, 2, 7, 8, 9, 1, 2, 7, 6, 9, 或 7, 2, 4, 5, 7, 2, 4, 9, 1, 2, 3, 6, 5, 9, 8, 7, 2, 3, 4, 9, 各都要走二十步。

第 16.3 圖甲: 79, 810, 47, 104, 610, 58, 75, 96, 39, 83, 107, 48, 210, 14, 31, 72, 97, 49, 103, 84, 710, 58, 95, 69, 36, 93, 107. 共計二十七步。

第 16.3 圖乙: 79, 810, 37, 68, 76, 93, 59, 65, 87, 46, 28, 34, 12, 91, 29, 72, 47, 83, 64, 76, 58, 95, 69, 36, 93, 87, 48, 104. 共計二十八步。

第 16.4 圖甲: 39, 211, 110, 71, 63, 106, 57, 65, 910, 42, 34, 19, 71, 116, 1011, 210, 42, 84, 93, 108, 117. 共計二十一步。

第 16.4 圖乙: 49, 31, 83, 28, 910, 19, 101, 82, 74, 97, 610, 76, 57, 65, 49, 26, 118, 1011, 810, 32, 94, 79, 37, 28, 13, 91, 89, 112, 711, 107, 38, 113, 94. 共計三十三步。

第 16.5 圖甲: 39, 210, 72, 97, 19, 71, 63, 56, 95, 109, 610, 36, 47, 24, 17, 101, 710, 63, 92, 39, 103, 810, 38, 27, 92, 49, 104, 93. 共計二十八步。

第 16.5 圖乙: 310, 73, 69, 106, 810, 58, 105, 610, 96, 89, 108, 97, 39, 410, 94, 79, 107, 210, 12, 91, 49, 104, 210, 92, 103, 79, 610, 96, 37, 103, 79, 510, 65, 86, 98, 69, 106, 510, 85, 108, 57, 210,

92, 49, 104, 910, 79, 107, 210, 92, 49, 104, 73, 810, 98, 69, 86, 108, 37, 410, 94, 103, 79, 610, 96, 37, 103. 共計六十七步。

第 1.66 圖甲: 79, 610, 56, 35, 27, 102, 73, 610, 36, 47, 104, 210, 12, 41, 74, 27, 102, 73, 810, 38, 63, 106, 510, 85, 108, 610, 36, 47, 104, 93, 79, 810, 38, 107, 93, 79, 810, 38, 103, 97. 共計四十步。

第 16.6 圖乙: 89, 710, 67, 46, 78, 57, 65, 76, 87, 108, 310, 23, 82, 74, 107, 68, 76, 87, 48, 310, 83, 74, 107, 48, 94, 89, 710, 67, 46, 38, 103, 24, 32, 43, 810, 74, 107 410, 38, 103, 94, 89, 48, 310, 23, 82, 34, 13, 21, 32, 43, 74, 107, 410, 38, 103, 24, 32, 43, 94, 89, 48, 310, 83, 104, 98, 49, 310, 23, 82, 74, 57, 65, 106, 410, 38, 103, 810, 74, 107, 98, 49, 84, 710, 67, 46, 78, 57, 65, 76, 87, 108, 310, 23, 82, 74, 107, 410, 38, 103, 84, 98, 49, 310, 83, 74, 107, 98, 49, 84, 710, 67, 46, 38, 103, 94, 89, 710, 47, 104, 98. 共計一百二十一步。

拾柒

牙牌陣圖

西洋的撲克牌是一種賭博工具，是一種社交游戲工具，也是一種極好的個人消遣工具。 它的價值，決不因爲可用爲賭具而減少，正像刀雖可用來殺人，而人類却不可一日無刀一樣。 不用來殺人的刀，不能當作凶器；不用來賭錢的撲克牌，也不能當作賭具。抗戰以前，中國已有撲克牌。抗戰期間又由美軍來華助戰與大批中國人員赴美訓練的關係，撲克牌在中國的社會裏、學校裏、軍隊裏，都已普徧風行。 在四川曾有用中國紙和桐油印製撲克牌的，可見風行的程度了。

中國有一種國產的玩意兒，是牙牌。它可作賭博工具，它可作社交游戲工具，它也可作極好的個人消遣工具。 它雖比撲克牌稍爲簡單，但二者的性質，功用與價值，都是一樣的。 可是中國人有一種毛病，認爲遠來的和尙會唸經，外國的月亮也比中國的好些。一般人以爲舶來的撲克牌是高尙的，國產的牙牌却是下流的。這是很不公平的意見。本文介紹的是一種用牙牌的個人消遣。

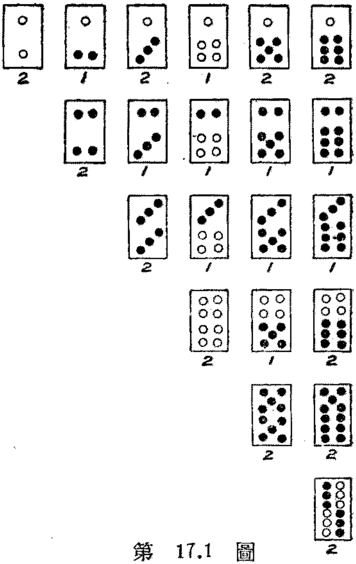
中國的牙牌俗名骨牌或天九牌，在世界各地也都有，只在形式上大同小異。牙牌的英文是 Dominoes，歐洲在十八世紀時，才有牙牌，據說是在意大利發明的。中國的牙牌，在宋徽宗宣和二年(西曆1120年)就有了。有人說是司馬溫公發明的。 如果是眞的，牙牌誕生的時代，大約在十一世紀中葉，比歐洲有牙牌還早七百年，要說世界各國的牙牌起源於中國，大概不致於錯誤吧。

幾百年來，中國牙牌的形式，曾有不少的變遷。 關於這個，民十三四年時新聞報副刊上曾見有一篇考證的文字。 現在通行的牙牌，一副有三十二張。其中二十一張是不同的，十一張是重複的，見第17.1圖：

玩牙牌的方法很多。一個人獨自消遣的玩法，如“打五關”，“拿八卦”等是

大家都知道，此外還有"參禪"、"掘井""七擒孟獲"等多種，但都是舊有的玩法，這裏不談。牙牌陣圖是一種新的個人消遣法。玩此新游戲的人，只須懂得"接龍"就行了。"接龍"又名"頂牛"是兩三個人或四五個人的游戲。它的原則是要把牌接成一串，必須一點接一點，兩點接兩點，不許錯亂。這幾乎是家喻戶曉，童叟皆知的。所以無論甚麼人，都可以不必學習，就會玩牙牌陣圖。

玩牙牌陣圖就是要把一副牌六頂六五頂五的都接起來，不是排爲一直線，而要排成種種花樣或圖案。有時候爲求圖樣整齊，也可以不用全副三十二張，而預先拿開幾張。



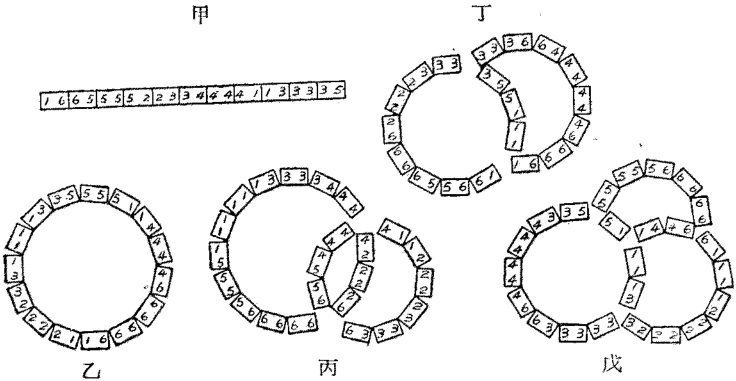
第　17.1　圖

直線是最簡單的花樣，第 17.2 圖甲，將全副牌接成一直線是可能，而且是很容易。圓環也是很簡單的花樣，第17.2 圖乙。但是，將全副牌接成一圓環是不可能的。如抽出一張"二五"，圓環就可接成了。可見要得各種圖形，有時可能，有時不可能。其中道理，倒很簡單。

	1	2	3	4	5	6
牌　　數	10	7	8	8	9	10
頭　　數	12	9	10	10	11	12

每一張牌兩頭有點子，一副牌三十二張，共六十四頭。幾張牌有甚麼點，甚麼點共多少頭，可看上表。如八張牌有三點，共有十個三頭。由上表知道，二頭與五頭都是單數的，其餘的都是雙數。每有兩牌相接，兩頭點子須相同。要接一個圓環，無論幾頭，必須全是雙數才行。所以全副牌中抽去一張"二五"，就可完成圓環了。全副牌可以接成一直線，因爲直線兩端是空的，而且這兩頭必須一個是二點，一個是五點，第 1.72 圖丙是一個雙環圖案。其中

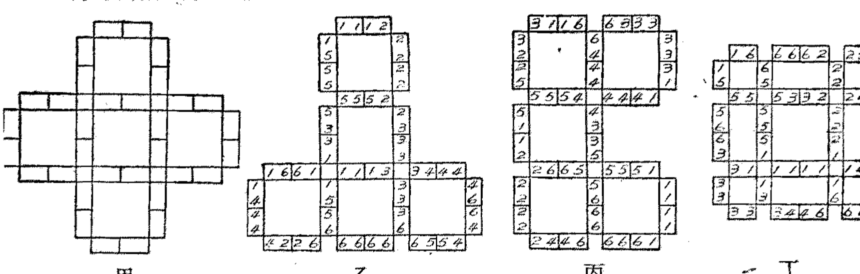
雙環交叉處，須四頭相接，也是雙數。 所以雙環與單環相同，也不能用全副牌排成。雙環稍變一下成為第 17.2 圖丁。 此圖除兩牌相接者外，有兩處是



第 17.2 圖

三牌相接的。 丁與丙不同，用全副牌排成丁是可能的，三牌相接處，必須是二點與五點。 第 17.2 圖戊比丁又多一環，除兩牌相接者外，三牌相接的有四處。 其中兩處必須是二與五。其餘兩處可以是任何點子，但兩處必須相同。 這樣接法，才能用全副牙牌排成戊圖。所說的環，如有八張牌，就可成為八角形或大方形；如有三張牌，就可成為三角形；如有四張牌，就可成為小方形或斜方形；如有五、六張牌，就可成為五角形或六角形。 能不能用一副牌排列成功的原則，是永久不變的。

玩牙牌陣圖開始時，須先計劃一個花樣，再把牌顛倒調換，排成預定陣圖，而使全副的牌首尾相接循環貫通。 如大方形六角形環數少的陣圖，比較容

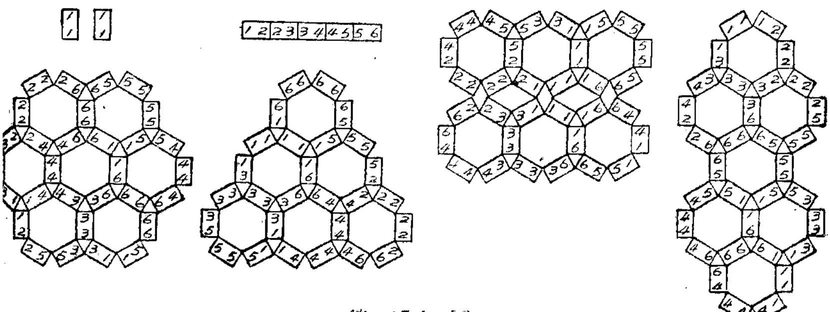


第 17.3 圖

易排。如小方形斜方形三角形的陣圖，環數很多，排起來很不容易。

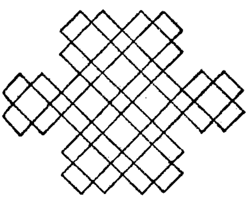
牙牌陣圖的原則，雖然簡單，但在玩過之後，才知道它確是一種很好的消遣呢。

甲　　乙　　丙　　丁

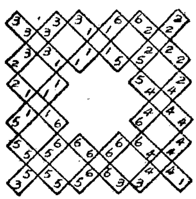


第 17.4 圖

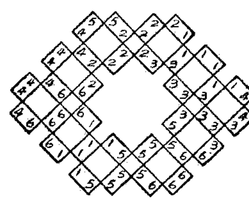
第 17.3 圖是四個大方形陣圖。第 17.4 圖是四個六角形陣圖。第 17.4 圖甲須抽出兩張牌。第 17.4 圖乙須抽出五張牌。第 17.3 圖甲的十字形是不可能



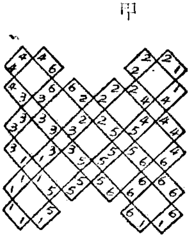
甲



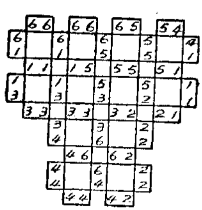
乙



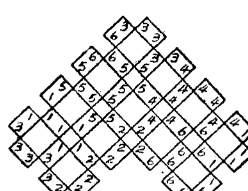
丙



丁

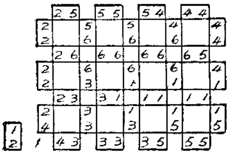


戊

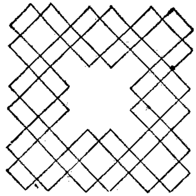


已

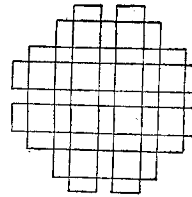
第 17.5 圖



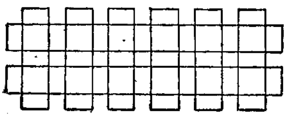
甲



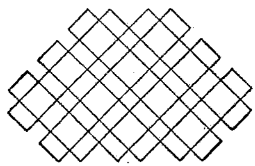
乙



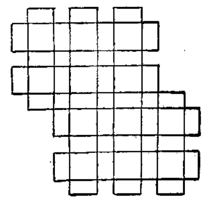
丙



丁

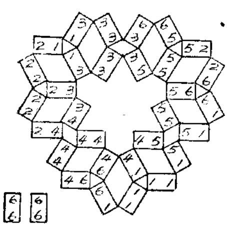


戊

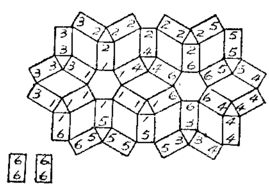


已

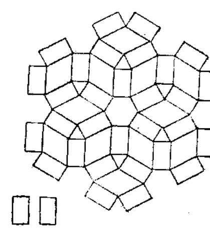
第 17.6 圖



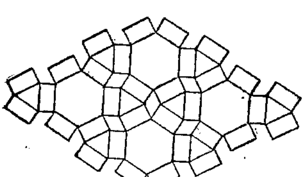
甲



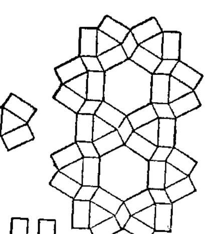
乙



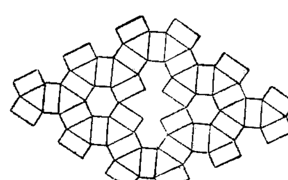
丙



丁



戊



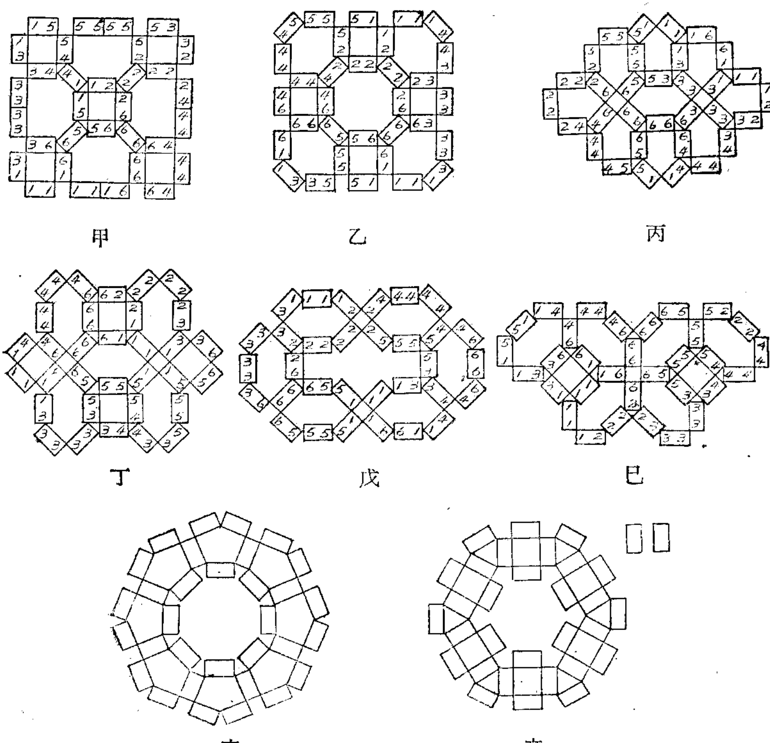
已

第 1.77 圖

的。其他幾個陣圖，都很容易排。圖中的數字，代替點子，只表示一種排法。

第 17.5 第 17.6 圖是十二個小方形陣圖。第 17.5 圖甲是一個"百吉"又名"盤長"，可惜是排不成的。第 17.5 圖乙有四個頭是空的，所以甚爲容易。其餘十個都是相當的難。第 17.6 圖甲只用三十一張牌。所抽去的一張，如是兩頭不同的牌，則更難成功。第 17.6 圖的後面五個陣圖，雖不見得比甲更難，但是還沒有紀錄。

第 17.7 圖的甲乙丙是菱形陣圖，丁戊已是三角形陣圖。丙丁戊已都還沒有紀錄。戊是一個很特別的陣圖。如所抽去的兩張牌是相同的，因爲圖中



第 17.8 圖

全是兩牌相接與四牌相接沒有單數的，所以此陣圖就不可能完成。 但所抽的牌，共有四頭，必須一頭是二，一頭是五，還有兩頭不論是幾點必要相同。如此抽去兩張，戊圖還是可能排成的。

第 17.8 圖畫着八個雜形陣圖。前六個都很好排。後兩個尙無紀錄，大概是不太容易吧。

以上各陣圖，凡有紀錄的，都可換一個方法，重新排演過。凡沒有紀錄的，那更是供給你的消遣的好材料了。

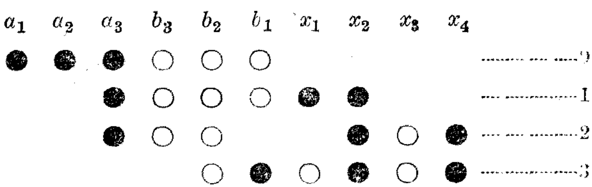
英國 P.A. Macmahon 少校著過一本 New Mathematical Pastimes。他所研究的也是一種接龍的陣圖，除了可用作消遣外，還可藉以研究連續圖案畫呢。

拾　捌

移 棋 相 間 (一)

將黑白圍棋子各若干枚，一個一個靠緊，排成一橫排。 要半段都是黑的，半段都是白的，黑白分明，不許混雜。 移動其中兩個相鄰的棋子——兩黑，兩白，或一黑一白，都可——接到橫排的一頭。 這兩子的空位，用另外兩個相鄰的棋子來補充。再另將兩個相鄰的棋子，移入新的空位。 這樣像挖肉補瘡似的繼續移下去，直到完成爲止。移棋完了之後，所有的棋子還要一個靠一個的成一橫排。 不過原來左黑右白的棋子，現在要一黑一白的相間排列了。還有，要達到這簡單的目標，移動棋子的次數，要愈少愈好。 這游戲就是"移棋相間"。

譬如三個黑子三個白子排成一線，如第 18.1 圖。 每次移動兩子，三次之後，已達到黑白相間的目的。 又如黑白各四子，照第 18.2 圖所表示的方法，完成相間必須移動四次。

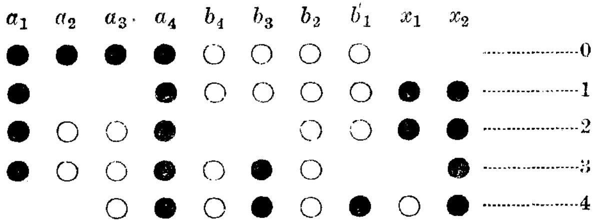


$n = 3, \quad a_1\, b_1\, a_3$

第 18.1 圖

移棋相間是一種有歷史的游戲。 在中國與外國曾有不少人研究過它(註)。 在六七十年前，移棋相間歐洲流行，據說是從日本傳過去的，所以也認爲發源地在日本。其實已在中國也早就有這游戲了。現代文學家俞平伯

(註)姜長英著移棋相間，載交大季刊第二十二期，民國二十五年十二月出版．



$n=4,\quad a_2\ b_4\ b_1\ a_1$

第 18.2 圖

的祖父，俞曲園著過一部春在堂隨筆其中有一段說：

> “長洲褚稼軒堅瓠集，有移棋相間之法，……余試之良然，而內子季蘭復推廣之，自十一子以至二十子”。

褚人穫字稼軒是康熙時人。他著的堅瓠集中有一段“移棋相間”，內說：

> “幼時，見友人胡礪之將黑白棋子各三枚左右分列，三移則黑白相間。余因問曰：“多亦可移乎”？ 礪之曰：“自三以至十外，皆可移。多一子則多一移”。余歸試之，自三以至於十，果相間不亂。今已三十餘年，偶雨窗復試，忘其大半。因繹數四，始得就”。

俞曲園學自褚稼軒的堅瓠集。褚稼軒學自胡礪之。胡礪之玩移棋相間，不知是他自己發明，還是從別人學來。可惜他沒有著作留傳下來，給後人作追溯的參考。褚從胡學習的時候，當在順治末年，大約在西曆 1660 年以前，到現今已將二百九十年了。那時歐洲還沒有移棋相間，日本也未必有。如沒有更早的紀錄，則不妨承認胡礪之是移棋相間的創始者了。

說過歷史，再說移棋方法。第 18.1，18.2 圖表示黑白各三子與各四子的移法，既明顯，又簡單。棋子增多了，移法也漸複雜。用圖畫表示移法，雖然明顯，但嫌麻煩不便。所以須用數字記錄移法，代替圖畫。用一個數字代表一個棋子的位置。如用 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 按次序代表 n 個黑子在開始時從左到右所佔的位置。用 $b_n, b_{n-1}, \cdots\cdots b_1$ 按次序代表從左到右白子的位置。用 $x_1, x_2\cdots\cdots$ 代表開始時右邊的空位。一橫排棋子的位置，排列如下：

$$a_1\ a_2\ a_3\cdots\cdots a_{n-1}\ a_n\ b_n\ b_{n-1}\cdots\cdots b_3\ b_2\ b_1\ x_1\ x_2\cdots\cdots$$

用這種記錄方法，可以推求出移棋的規律。如將規律弄清楚了，無論黑白棋子各有幾十幾百，要使黑白相間，只須按照規律移棋，那是非常容易的。

第 18.1 圖，有黑白各三子。$n=3$。用 $a_1\,a_2\,a_3$ 代表左邊黑子三個位置，$b_3\,b_2\,b_1$ 代表右邊白子三個位置，$x_1\,x_2\,x_3\,x_4$ 代表白子右邊開始時沒有子的四個空位。第一次移動在 $a_1\,a_2$ 的兩子。第二次移動在 $b_1\,x_1$ 的兩子，最後移動在 $a_3\,b_3$ 的兩子。記錄這三次移動，可以寫：

$$n=3,\quad a_1\,a_2,\ b_1\,x_1,\ a_3\,b_3.$$

用同法記錄第 18.2 圖，黑白各四子時的移棋相間法，是：

$$n=4,\quad a_2\,a_3,\ b_4\,b_3,\ b_1\,x_1,\ a_1\,a_2.$$

上面用數字記錄移棋的方法，比畫圖簡單，但還可以再簡單化。每次移動棋子兩枚，一左一右。記錄時，只記左首的棋位，那右首相鄰的位置，可以省略不記。第 18.1，18.2 兩圖的移棋法，可記如下：

$$n=3,\quad a_1\,b_1\,a_3.$$

$$n=4,\quad a_2\,b_4\,b_1\,a_1.$$

用一個數字，代表一次移動。這比畫圖記錄簡單多了。

黑白各三子的移法，是例外，可以不論。四子以上的移棋相間法，都合一種規律，現在將四子到十五子的移法寫明如下：

$$\begin{array}{rl}
n=4, & a_2 \mid b_4 \mid b_1\ a_1\\
n=5, & a_2 \mid b_3\ a_5 \mid b_1\ a_1\\
n=6, & a_2 \mid b_5\ a_4\ b_4 \mid b_1\ a_1\\
n=7, & a_2 \mid b_4\ a_5\ b_5\ a_7 \mid b_1\ a_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
n=8, & a_2\ b_4\ a_6 \mid b_8 \mid b_5\ a_5\ b_1\ a_1\\
n=9, & a_2\ b_4\ a_6 \mid b_7\ a_9 \mid b_5\ a_5\ b_1\ a_1\\
n=10, & a_2\ b_4\ a_6 \mid b_9\ a_8\ b_8 \mid b_5\ a_5\ b_1\ a_1\\
n=11, & a_2\ b_4\ a_6 \mid b_8\ a_9\ b_9\ a_{11} \mid b_5\ a_5\ b_1\ a_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
n=12, & a_2\ b_4\ a_6\ b_8\ a_{10} \mid b_{12} \mid b_9\ a_9\ b_5\ a_5\ b_1\ a_1\\
n=13, & a_2\ b_4\ a_6\ b_8\ a_{10} \mid b_{11}\ a_{13} \mid b_9\ a_9\ b_5\ a_5\ b_1\ a_1\\
n=14, & a_2\ b_4\ a_6\ b_8\ a_{10} \mid b_{13}\ a_{12}\ b_{12} \mid b_9\ a_9\ b_5\ a_5\ b_1\ a_1\\
n=15, & a_2\ b_4\ a_6\ b_8\ a_{10} \mid b_{12}\ a_{13}\ b_{13}\ a_{15} \mid b_9\ a_9\ b_5\ a_5\ b_1\ a_1
\end{array}$$

黑子或白子的個數是 n。n 數可以列爲 $4m$，$4m+1$，$4m+2$ 與 $4m+3$ 四種形式。$m=1$，則 N 是 4，5，6 或 7。$m=2$，則 n 是 8，9，10，或 11。上面寫出的移棋方法，就是根據 m，n 等於 4，5，6，與 7 算一大組，n 等於 8，9，10，與 11 另算一大組；都是每四個一大組，分開排列的。

所列移動次數，恰好等於 n，如 $n=4$，須移四次。 n 增加一個，移棋也要多加一次。

將移棋的記錄用線隔開，成爲前、中、後三部，即可發現移棋相間並不玄妙，其中的規律是很明顯的。 前部與後部移法，在同一大組中，完全一樣。前部移法是 $a\ b$ 相間的，移動次數是 $1+2(m-1)$。 a 與 b 所附數目，是 2，4，6，8，……都是雙數。 第一移 a_2 除外，將以後的 $-b-a$ 算一小組，前後兩小組的數字，相差是 4。 後部移法是 $b\ a$ 相間的，移動次數比前部多一次。a 和 b 所附數字如 9，5，1 等都是單數。將 $-b-a$ 算一小組，前後兩小組的數字，相差也是 4。 每小組中 a，b 的數字，在前部相差 2，但在後是相等的。如用括弧將小組分開，例如黑白各十五子的移法，可以寫成：

$$n=15\quad \underbrace{a_2(b_4\,a_6)(b_8\,a_{10})}_{\text{前部}}\Big|\underbrace{b_{12}\,a_{13}\,b_{13}\,a_{15}}_{\text{中部}}\Big|\underbrace{(b_9\,a_9)(b_5\,a_5)(b_1\,a_1)}_{\text{後部}}$$

中部移法也有相當的規則。 移動次數可能是一、二、三或四次，在乎 n 的形式。a，b 所附數字，在某一個移法中，似無規律。 但如比較幾大組移法，不難發見 a，b 的數字是隨 m 變的。 m 增加 1，則 a 與 b 的數字，一概都增加 4。

把以上所說的總結起來，可得移棋方法如下：

前部移法： $a_2\,(b_4\,a_6)\,(b_8\,a_{10})\cdots\cdots(b_{4m-4}\,a_{4m-2})$。

中部移法： $n=4m$， b_n。

$n=4m+1$， $b_{n-2}\quad a_n$。

$n=4m+2$， $b_{n-1}\quad a_{n-2}\quad b_{n-2}$。

$n=4m+3$， $b_{n-3}\quad a_{n-2}\quad b_{n-2}\quad a_n$。

後部移法： $(b_{4m-3}\,a_{4m-3})\cdots\cdots(b_9\,a_9)\,(b_5\,a_5)\,(b_1\,a_1)$。

以上所列的是移棋相間的基本法則。不管黑白各有多少棋子，依法移動，可以即刻完成。

$m=1$ 或 n 是 4，5，6 或 7，移棋相間的方法，必須依照上法，雖有變化。但是，如 m 大於 1 或 n 大於 7，則移棋相間也不限於上法。黑白棋子數目愈多，移法的變也愈複雜。假使前述的基本法則叫第一法，現在將另外一種移法或第二法，列去如下：

前部移法：　$a_2\ (b_5\ a_5)\ (b_9\ a_9)\cdots\cdots(b_{4m-3}\ a_{4m-3})$。

中部移法：　同第一法。

後部移法：　$(a_{4m-2}\ b_{4m-4})\cdots\cdots(a_{10}\ b_8)\ (a_6\ b_4)\ b_1\ a_1$。

這第二法的中部移法，與第一法完全相同。此外的移法也與第一法大有關係。將第一法後部移法的末兩移（即 $b_1\ a_1$）除外，以小組爲單位，前後顛倒一下，在每小組中，仍保持 b 先 a 後的順序。把已顛倒過的各小組寫在 a_2 後邊，正巧是第二法的前部移法。將第一法前部移法的第一移(即 a_2) 除外，使移法前後顛倒，再每兩移算一小組，用括弧分開。每小組中的順序，已變爲 a 先 b 後了。將已顛倒的移法，寫在 $b_1\ a_1$ 的前邊，正巧是第二法的後部移法。

下面再列出一種完全不同的第三法：

前部移法：　$a_2\ (b_6\ a_6)\ (b_{10}\ a_{10})\cdots\cdots(b_{4m-2}\ a_{4m-2})$。

中部移法：　$n=4m$，　b_4

$n=4m+1$，　b_3　a_n

$n=4m+2$，　?　?　?

$n=4m+3$，　?　?　?　?

後部移法：　$(b_{4m-1}\ a_{4m-3})\cdots\cdots(b_{11}\ a_9)\ (b_7\ a_5)\ b_1\ a_1$。

此法最大的特點，是中部移法不隨 m 變化。尤其是 $n=4m$ 時，中部移法是固定不變的 b_4。$n=4m+2$ 與 $n=m+3$ 時，中部移法雖只有三四移，可惜還不知應該怎樣移動，只得用問號(?)代替了。

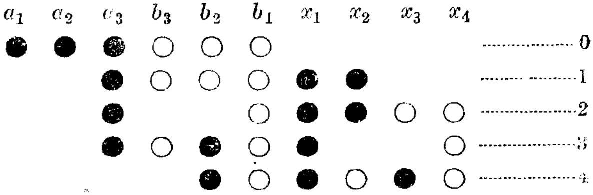
除以上三法之外，一定還有很多不同的移棋法呢。

拾玖

移棋相間（二）

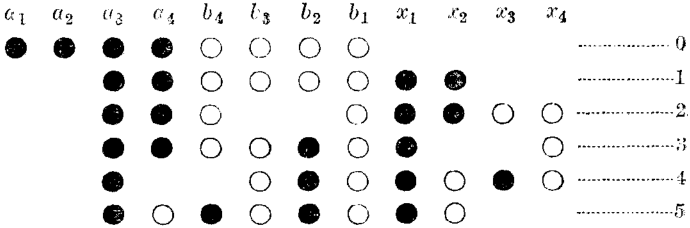
前文所說的移棋相間，是將棋子兩個兩個的移動，所以可名爲"移二"。每次所移動的兩個棋子，照它們原有的左右次序，填入新位置。這是一種正規的，最基本的，移棋相間遊戲。此外還有很多不同的玩法。

如使每次所移動的兩子，先左右顚倒之後，再放入新位。幾次移動後，還要使棋子連續的黑白相間的一橫排。這種移棋相間，名爲"倒移二"。倒移二須比普通移二多移動一次，如黑白各有 n 子，則須移棋 $n+1$ 次。現在舉第 19.1，19.2 兩圖爲例：



$n=3$，　$a_1\ b_3\ x_2\ a_3$.

第 19.1 圖



$n=4$，　$a_1\ b_3\ x_2\ a_4\ x_3$.

第 19.2 圖

將 $n=3$ 與 $n=4$ 的倒移二移動法用數字記錄出來。互相比較之下，不難發現，兩個移法的前三移是一樣的。如再將 n 大於 4 的倒移二移法多寫出一些來，就很容易求出一種移動規律了。

$n=3$,	a_1	b_3	x_2	a_3.								
$n=4$,	a_1	b_3	x_2	$\boxed{a_4}$	x_3.							
$n=5$,	a_1	b_4	a_4	b_3	x_2	a_3.						
$n=6$,	a_1	b_4	a_4	b_3	$\boxed{a_6}$	x_2	a_3.					
$n=7$,	a_1	b_4	a_5	b_7	a_4	b_3	x_2	a_3.				
$n=8$,	a_1	b_4	a_5	b_7	a_4	$\boxed{a_8}$	b_3	x_2	a_3.			
$n=9$,	a_1	b_4	a_5	b_8	a_8	b_7	a_4	b_3	x_2	a_3.		
$n=10$,	a_1	b_4	a_5	b_8	a_8	b_7	$\boxed{a_{10}}$	a_4	b_3	x_2	a_3.	
$n=11$,	a_1	b_4	a_5	b_8	a_9	b_{11}	a_8	a_7	a_4	b_3	x_2	a_3.
$n=12$,	a_1	b_4	a_5	b_8	c_9	b_{11}	a_8	$\boxed{a_{12}}$	b_7	a_4	b_3	x_2 a_3.

n 可分爲 $4m+1$，$4m+2$，$4m+3$ 與 $4m$ 四種形式，n 又可分爲 $2p+1$ 與 $2p+2$ 兩種形式。倒移二的移法，可分爲前後兩部。前部共移 p 次，是 a, b 相間的。第一移是 a_1 第二移是 b_4。以後 a 與 b 所附數字，比以前的 a 與 b 都要多 4。後部移法共移 $p+2$ 或 $p+3$ 次。後部的第二移後，如 n 是雙數的，都有 a_n 一移，這是很特別的，所以在記錄裏用線把它圈起來。除了這個特點，再除了最後兩移（$x_2\,a_3$）之外，b, a 相間與所附數字相差爲 4 等性質，都與前部相同。全部移法的規律，十分明顯整齊。只有一處例外，這是 $n=4$ 時，最後一移不是 a_3 而是 x_3。

現在將倒移二的法則寫明如下：

前部移法：
$$\left.\begin{aligned} n=2p+1=4m+1 \\ n=2p+2=4m+2 \end{aligned}\right\} a_1\, b_4\, a_5\, b_8 \cdots\cdots a_{2p-3}\, b_{2p-1},$$

$$\left.\begin{aligned} n=2p+1=4m+3 \\ n=2p+2=4m \phantom{{}+3} \end{aligned}\right\} a_1\, b_4\, a_5\, b_8 \cdots\cdots b_{2p-2}\, c_{2p}.$$

後部移法： $n=2p+1=4m+1$，　$a_{2p}\,b_{2p-1}\cdots\cdots a_4\,b_3\,x_2\,a_3$。

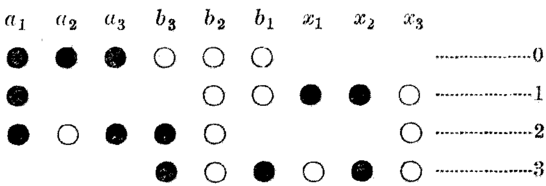
$n=2p+2=4m+2$，　同上，但在第二移後加 a_n 一移。

$n=2p+1=4m+3$，　$b_{2p+1}\,a_{2p+2}\cdots\cdots a_4\,b_3\,x_2\,a_3$。

$n=2p+2=4m$，　同上，但在第二移後加 a_n 一移。

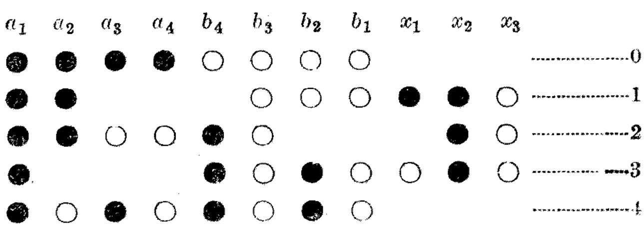
上述的倒移二法，只算是一種代表。此外可能有很多移法，棋子空位數目，也可以不用四個($x_1\,x_2\,x_3\,x_4$)，只要兩個就够了。(參看第132雜題(四))總而言之，倒移二比正規的移二，有更多的變化。

移棋時，每次移動的棋子，不是兩個，而是左右相連的三子，這種移棋，可名"移三"。每次移動三子，若干次後，也能使黑白棋子相間，例如第19.3圖與第19.4圖。



$n=3$，　$a_2\,b_1\,a_1$。

第 19.3 圖



$n=4$，　$a_3\,b_2\,a_2\,x_1$。

第 19.4 圖

棋子數目(n)，或單或雙，移三的方法互不相同。如 n 是單數，移動只須 n 次。移法簡單，可記錄如下：

$n=3$，　$a_2\quad b_1\quad a_1$

$n=5$，　$a_4\quad b_2\quad a_2\quad b_3\quad a_1$

$n=7$, a_6 b_2 a_4 b_4 a_2 b_5 a_1

$n=9$, a_8 b_2 a_6 b_4 a_4 b_6 a_2 b_7 a_1

在全部 n 次移動中，a 與 b 是間的。所以移 a 的 $\frac{n+1}{2}$ 次，移 b 的 $\frac{n-1}{2}$ 次。再看所附的數字，第一個 a 是 a_{n-1}，以後的要每次減 2。 倒數第二個 a 是 a_2，末一個是 a_1，所以這次只減 1。第一個 b 是 b_2，以後的每次要加 2。倒數第二個 b 是 b_{n-3}，末一個 b 是 b_{n-2}，所以這次只加 1。 知道這個秘密，n 等於單數的移三，移動 n 次就可完成了。

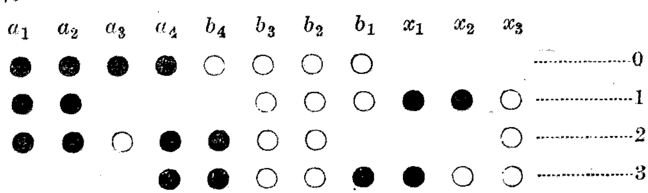
n 如是雙數，移三之法，就不相同。 $n=4$，移法已見於第 19.4 圖，只須移動 4 次。但是，$n=6$ 時，却不能移動 6 次得到成功。其中緣故，很難解釋。只可認 $n=4$ 可以移 4 次完成的是例外了。如放寬移動次數，爲 $n+1$ 次，雙數移三也可以倣照單數移三之法來完成。以下就是幾個例：

$n=6$, a_2 b_1 a_5 b_3 a_4 b_4 a_1。

$n=8$, a_2 b_1 a_7 b_3 a_5 b_5 a_4 b_6 a_1。

$n=10$, a_2 b_1 a_9 b_3 a_7 b_5 a_6 b_7 a_4 b_8 a_1。

移三是每次移三子，最後要棋子一黑一白相間。 如果最後的目標是二黑二白相間，這就是"移三成雙"。 要移三成雙，n 當然是雙數，最少須移 $n-1$ 次，才能完成。舉例如第 19.5 圖。 n 等於 6, 8, 10, 12 的移法記錄，也列在下面。



$n=4$, a_3 b_1 a_1。

第 19.5 圖

$n=4$, a_3 b_1 a_1。

$n=6$, a_6 b_2 a_2 b_4 a_1。

$n=8$, a_7 b_1 a_5 b_4 a_3 b_5 a_1。

$n=10$, a_{10} b_2 a_5 b_6 a_8 b_4 a_2 b_8 a_1。

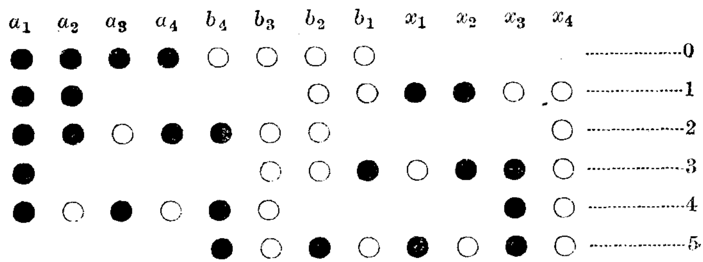
$n=12$， a_{11} b_1 a_9 b_4 a_7 b_5 a_5 b_8 a_3 b_9 a_1。

以上移法，各都要移 $n-1$ 次。如 $n=12$，即須移 11 次，才能完成。 但是，有另一種移法。

$n=12$， a_{11} b_1 a_9 b_6 a_2 b_8 a_7 b_9 a_5 a_1。

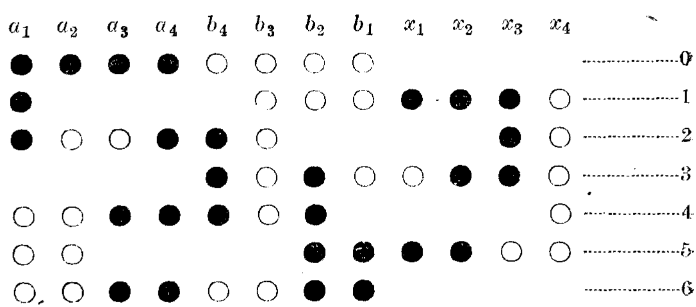
只要 10 次，也就是 $n-2$ 次。 可見說移三成雙最少須移 $n-1$ 次，是有問題的。

每次移動相連的四子，結果得一黑一白相間，名爲"移四"。每次移動四子，最後成二黑二白相間，名爲"移四成雙"。各舉一例如第 19.6 圖與第 19.7 圖。



$n=4$， $a_3\,b_1\,a_2\,b_2\,a_1$。

第 19.6 圖



$n=4$， $a_2\,b_2\,a_1\,\overleftarrow{b_1}\,a_3\,x_1$。

第 19.7 圖

$n=5$， $n=6$ 的移四法如下：

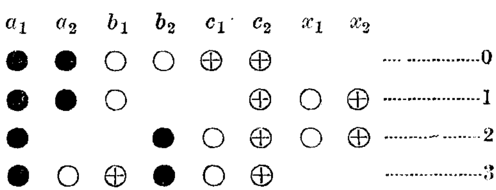
$n=5$， $a_3\,b_2\,a_4\,b_1\,a_2\,b_2\,a_1$。

$n = 6$, $a_4\,b_2\,a_2\,b_3\,a_4\,b_4\,a_1$.

上面所列的不多，不能歸納出一種可以普徧應用的移棋方法。 但可以知道移四與移三相似，n 是單數或雙數，移棋次數是不同的。如 $n = 4$ 與 $n = 6$，移四須 $n + 1$ 次移動。$n = 5$，則移四須移動 $n + 2$ 次。

移四成雙只有一個例，移了 $n + 2$ 或 6 次。記錄第四次移動是 $\overleftarrow{b_1}$，上面有向左的小箭頭，它代表向左移動。 移棋開始時，所有棋子連成一線，毫無間斷。第一次移動，向左向右，原無一定。 本文以向右移爲標準，記錄時無需另外說明。 移棋開始之後，每次移動不管向左向右，只須補入空位，所以也不必註明方向。只有在結束以前，棋子又連成一線沒有空位的時候，再有移動，有時須說明方向。 如移棋相間(一)第 18.1 圖的第二次移動，仍向右移，記錄時不必加註。 如上第 19.7 圖的第四次移動，必須向左，這和標準方向相反，所以要加註向左的箭頭。

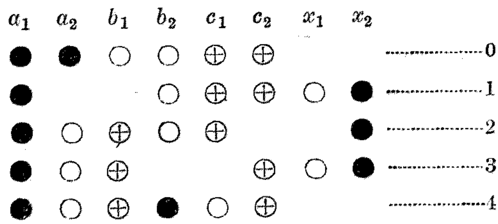
玩移棋相間，所用的棋子須分黑白兩色(如圍棋子分黑白，或象棋子分紅藍)。 如棋子分三種顏色，黑白紅(可用象棋子，翻轉棋子，也算一色)，也能玩移棋相間的游戲。 將黑白紅三色棋子各 n 個，先黑子繼白子後紅子，排成一線。 每次移動相連的幾子，若干次後，仍得連續的一橫排，而黑白紅三色棋子已是相間排列了。如每次移動二子，這是“三色移二”。 如將每次所移的兩子，先左右顚倒了再補入空位，這是“三色倒移二”。第 19.8 圖表示 $n = 2$ 的三色移二。第九圖表示 $n = 2$ 的三色倒移二。



$n = 2$, $b_2\,a_2\,x_1$.

第 19.8 圖

記錄棋位之法是：用 $a_1\,a_2 \cdots\cdots a_n$ 代表黑子，$b_1\,b_2 \cdots\cdots b_n$ 代表白子，$c_1\,c_2 \cdots\cdots c_n$ 代表紅子，$x_1\,x_2 \cdots\cdots$ 代表開始時的空位。順序都是由左而右的。現在把 $n = 2$，$n = 3$ 的移法列出來。



$n=2$, $a_2\ c_2\ b_2\ x_1$.

第 19.9 圖

三色移二：

$n=2$, $b_2 \quad a_2 \quad x_1$.

$n=2$, $a_2 \quad b_2 \quad x_1$.

$n=3$, $b_3 \quad a_3 \quad b_2 \quad a_2 \quad c_1 \quad b_2 \quad x_1$.

三色倒移二：

$n=2$, $a_2 \quad c_2 \quad b_2 \quad x_1$.

$n=3$, $a_3 \quad c_2 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_3 \quad a_2 \quad b_1 \quad a_1$.

上面移法的例子太少了，移法雜亂，沒有系統，看不出一點頭緒來。各例中移動次數，也許已是最少的了。n數稍增加，移動次數就須增加很多，但還看不出有何關係。三色倒移二比三色移二，須要較多的移動，這大概是不錯的。

三色移棋相間開始的時候，棋子顏色的順序，由左向右是黑、白、紅。移棋完成，棋子已相間了，顏色的順序，仍是黑、白、紅。只有三色倒移二，$n=3$一例的結果，三色次序為紅、白、黑。

關於棋子顏色的次序，以前並未注意過。在玩移棋相間時，可以指定完成後須有怎樣的次序。例如$n=3$，黑白紅三色移二，結果必須黑紅白相間。移法是：

$n=3$，黑白紅 ⟶ 黑紅白，$a_3\ c_1\ a_2\ b_3\ a_3\ c_2\ a_2\ c_3\ a_1$。又如結果要紅黑白相間，移法是：

$n=3$，黑白紅 ⟶ 紅黑白，$a_3\ c_2\ a_2\ c_1\ b_1\ b_3\ a_2\ b_1\ a_1$。這樣一來，移棋相間的遊戲，就更加複雜了。

貳 拾

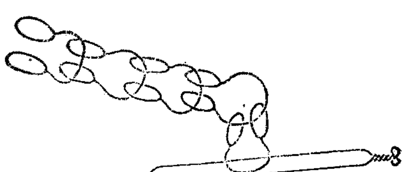
九 連 環

九連環是一種中國小玩意兒，這是大家都知道的。它是在何朝代甚麼人發明的，一時難以考證。不過它流傳到西洋至少已有四百多年了。九連環在外國名為 Chinese Rings，公元 1550 年已經有過關於它的記述。此後在各國流行，曾有不少科學家研究它，發現了這小玩意兒的數學原理。在中國，幾百年幾千年前的玩意兒，常不被人重視而失傳了。幸而流傳下來的，到現在仍舊是不足輕重的玩意兒而已。

九連環有九個(或隨便幾個)粗銅絲圓環，連環套在一個雙折的銅絲柄上。要將九個環從柄上取下，或再套回柄上，須要將幾個環，拿上拿下，拿下拿上的，翻來復去很多次，才能達到目的。玩得熟練的人，拿九連環在手裏，可以不用眼睛看，只需不多幾分鐘，就可解下或裝上了。類似九連環的玩意兒也很多，不過都沒有那麼複雜。多數的不需一分鐘就可解決了。但也有極巧妙的，如不知關鍵，即使玩上半天，也未必能參透其中奧妙呢。

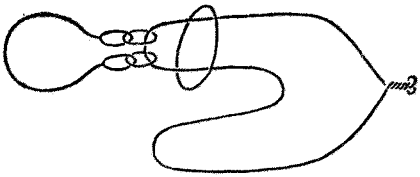
九連環一類的玩具，市上能看見的，常是那幾種。這是因為製造玩具者的手藝，全憑師傳，極少創作的緣故。民國五六年時，作者曾在河北保定的府馬號商場中買過一件。以後在別處不曾見過同樣的。那玩具的構造如第 20.1 圖。

圖的左邊有五個（自然不限於五個）"環"互相連成一串不能分開。圖的右邊是一個柄，與末一個環連套在一塊。玩的目的就是要將環從柄上解下或再裝上。此物的外表雖與九連環不同，其實是九連環的變形，所以玩法也完全一樣。

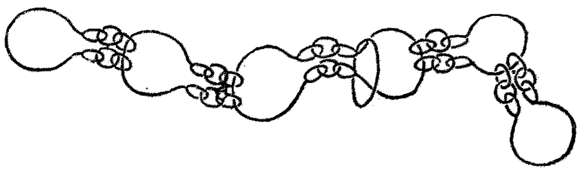


第 20.1 圖

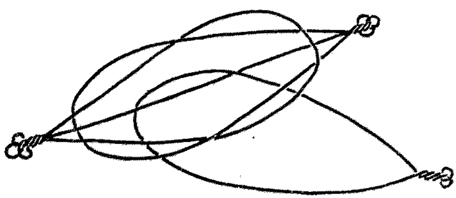
作者的一個親戚賀誠甫先生，是研究數學的，也是此道的愛好者。他不但到各處搜求新鮮花樣的玩意兒，還要預備鉗子買銅絲，親自動手，設計製造，結果收獲很多，下面舉出三個，作爲代表。



第 20.2 圖



第 20.3 圖



第 20.4 圖

第 20.2，20.3 兩圖所代表的玩意兒很相似。玩的目的都是要將套在中間的圓環解下來或裝上去。第 20.4 圖那玩意兒尤其巧妙。有兩根銅絲形成未抽緊的結，中間再連一根橫桿。另有一環形柄，就套在這橫桿上。要將此柄解下，似乎是不可能的。但是如果摸到了訣竅，只須費幾秒鐘功夫就够了。

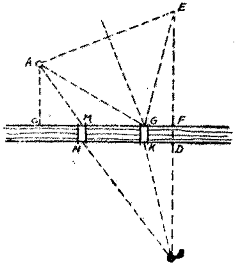
貳　壹

造　　橋

某村當中有一條由西而東的大河，闊 9 丈，將全村隔成南北兩半。往來過河，須要擺渡，村人都覺不便。 大家想造一條貫通南北的大橋，就組織起來募集造橋費用。村西北離河邊 33 丈，住着一位張百萬，在他南面 105 丈，偏東 72 丈，又有一位李善人，兩個都是見義勇爲的人，很慷慨的各捐半數。村人爲要紀念這工程的贊助者，想選一個橋址，必須使張李二人從家裏走到橋的距離相等。這橋應該在那裏？（此題是同學楊彭基君講的）

假設張百萬捐了造橋經費的三分之二，李善人担任了三分之一。 村人要使由橋口到張李兩家的距離與他們捐輸的錢數成反比，捐錢多的離橋近。那麼，橋址應該在那裏？

這兩題都不甚難。讀者且慢往下看，自己先試求解決。如能解決了，再與下文對照，豈不更妙？



第　21.1　圖

照題的意思，先畫一個準確的地圖，表示張李二家與大河的位置如第 21.1 圖，張百萬在 A 點，李善人在 B 點，$AC = 33$ 丈，$CF = 72$ 丈，$FD = 9$ 丈，$BD = 63$ 丈。 延長 BDF 到 E 點，使 $EF = BD$。連接 AE。畫 AE 線的垂直二等分線，與河北岸 CF 交於 G 點。對岸一點是 K。 GK 就是橋的位置。這個證明是簡單的：因爲 $AG = EG$，而 $EG = BK$，所以 $AG = BK$。結果 $CG = 56$ 丈，$DK = 16$ 丈，$AG = BK = 65$ 丈。

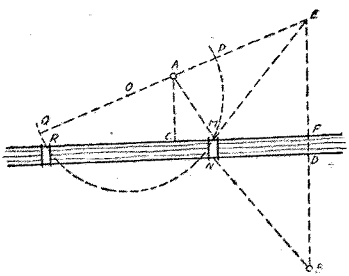
如張李二人捐欵比例是 2 比 1，由張家到橋與由李家到橋，兩個距離的比例應該是 1 比 2。 這回不使用上面那種幾何作圖的解法，只得用代數方法求解與。

假設橋的位置在 MN, $CM = x$。利用勾股弦和 $2AM = BN$ 的關係,得到如下的方程式:

$$2\sqrt{33^2 + x^2} = \sqrt{63^2 + (72 - x)^2}.$$

解此方程式得: $x = 22.6$ 丈,或 $x = -70.6$ 丈,用第一個答案,如第 21.2 圖中所畫, $CM = 22.6$ 丈, $DN = 49.4$ 丈, $AM = 40$ 丈, $BN = 80$ 丈。第二個答案有負號,這代表橋址可在 C 點以西 70.6 丈。橋造在這裏,全村的人都不方便,張李二善士過橋也要多走寃枉路。所以只有第一個答案,才能決定適宜的橋址。

此題也可用幾何作圖法解決,不過須要解析幾何來證明。在第二圖上先畫 AC, $BDFE$ 等線與第 21.1 圖一樣。連 AE,在上面取一點 P,使 $2AP = EP$。延長 EA 到 Q,使 $2AQ = EQ$。求 PQ 的中點 O。用 O 點爲圓心, OP 或 OQ 爲半徑,作弧交大河北岸 CF 線於 M 與 R 兩點。這兩點就是兩個答案,與用代數法所得的,自然相同。$PMRQ$ 這圓是用解析幾何求來的。由圓上任何一點,到 A 與到 E,兩距離之比是 1 比 2,所以 $2AM = EM = BN$, MN 就是橋的位置。R 點雖也是答案,並不合用,前節已經說明了。



第 21.2 圖

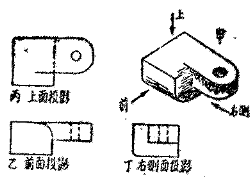
這樣的題目,可算是簡單有趣的。假如河面闊度不同,祇要兩岸筆直,這問題還是容易的。又如河道不直,而是彎曲的,這就難了。再如急公好義的不祇兩個人,再用老條件決定橋址是不可能的。村人如一定要紀念幾位善士的義舉,只可在適中地點造橋,然後再刻碑以垂永久了。

貳　貳

投　影　畫

投影畫是藝術畫以外的一種圖畫。這種圖畫的學習，在大學的工科與理科裏，是一個重要的科目。在有些中學與職業學校裏，也有這種訓練。這科目能够訓練對於空間與物體的想像力。一切工程都需要有投影畫為工作的根據。

投影畫有很多種，一種正投影是最普通也是很容易學的。光線照着一個物體，將它的影子投到一個平面上。如光線是平行射來(如太陽光)，平面與光線垂直，這影子就算是那物體的正投影。同時假設光線有 X 射線一樣的透射力，投影畫上不只能畫出那物體的前面，背面與內部也能同時代表出來。光線照得着或看得見的地方畫實線，看不見的地方畫虛線。用投影畫法代表一個物體，只有一個投影，如果不能詳盡，那麼需要幾個投影：前面，上面，側面或其他方向的投影。如第 22.1 圖甲那樣一件東西，可以用第 22.1 圖乙丙丁三個投影完全表現出來。



第　22.1　圖

一。有一種物體，它的前面，上面與側面三投影，完全相同。最簡單的例是圓球。從任何方向看球體，所見的都是一個圓，而且圓徑相同。所以球體的前面上面側面三投影，是完全相等的三個圓。此外最好的例子是正立方體。正立方體有六個面，各為正方形，每面與鄰面相垂直。把一個正立方體平放在桌上，把它的一個垂直面當作正面，它的前面上面側面三投影，是相等的三個正方形。以上兩例，是很容易明白的。此外，有同樣性質的物體，是很多的。一個物體，它的前面上面與右側面三投影，是完全相同的三個三角形。你能想像得出這物體的形狀與地位嗎?

二. 有一個物體，它的前面投影是一個大正方形當中套着一個小正方形。它的上面投影也是大小相套的兩正方形，與前面投影，完全相同。請讀者推想這是怎樣的一件物體，它的側面投影是怎樣的。（此題是同學楊彭基君講的）

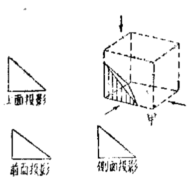
三. 某物體的前面投影與上面投影完全相同，都是大小相套的兩個圓。這件東西的形狀位置，你能想得出來嗎?

四. 某物體的前面投影是一個尖朝上的正三角形，由上面的尖到底邊，還有一條垂直線。上面投影也是如此，完全相同。請讀者將此物體的側面投影補畫出來。

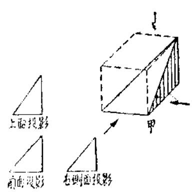
投影畫問題答案

一. 用一個正立方體將它前面的左下角切下一塊，如第22.2圖甲。所切下的一角，就是本題的答案。照圖中的位置，它的前面，上面與右側面投影都是同樣的直角三角形。

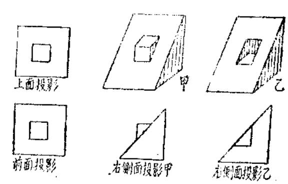
此題還有一個答案是第22.3圖甲。此物體也是從正立方體切出來的，它的前面上面與右側面三個投影，也都是相同的直角三角形。



第 22.2 圖



第 22.3 圖

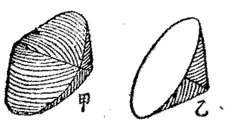


第 22.4 圖

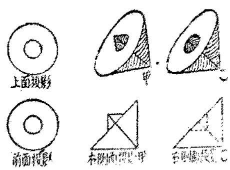
二. 將一個正立方體放平放正，用刀順着它的前下邊，後上邊與兩側面的對角線，將它切成相等的兩半。留着下半不動，使上半仍舊貼緊下半，但是縮小了很多，成第22.4圖甲。或是拿去上半，只留下半，在斜面正中挖去像下半個立方體那樣一塊，如第22.4圖乙。像甲或乙的物體，它們的三面投影將如第22.3圖，正合題意。如甲或乙的後下邊，沒有稜角而是圓角，結果也是一樣。

三. 前面投影是一個圓，上面投影仍是一個圓，這物體不一定是一個圓

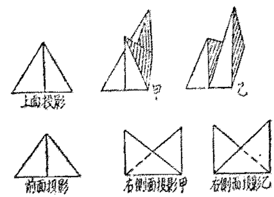
球，用薄鐵片作一個圓管，將它插進一塊豆腐乾裏。將嵌進鐵管的豆腐乾取出，沿了柱軸前後平放在桌上。它是一個圓柱體。再用鐵管由上向下，切斷平放的圓柱，嵌在管內的一塊豆腐乾就像第 22.5 圖甲。它前面和上面投影都是圓，它的側面投影是有交叉對角線的正方形。順着一條對角線，再用刀將甲切爲兩半，留下一半如第 22.5 圖乙。這半塊的前面與上面投影，仍舊都是圓。如將甲側面一個對角線的稜角弄圓，此物體就扁了，很像一個桃核。乙是它的一半，像半個桃核。不論是整個或半個桃核，前面上面兩投影仍舊都是圓的。



第　22.5　圖



第　22.6　圖



第　22.7　圖

第 22.5 圖乙的橢圓平面中間再突起半個桃核形體，如第 22.6 圖甲。如不是突出一塊，而是窪進一塊，此物體很像挖去蛋黃的半塊鹹鴨蛋，第 22.6 圖乙。甲與乙的前面與上面投影相同，各都是套在一起的兩個圓。

四。合於題意的物體是第 22.7 圖的甲或乙，每個都是兩個三角錐體所拼成的。

貳　叁

魔　　孔

在夜晚遠望一幢摩天大廈，像一座山峯似的矗立在帶有星月光輝的天空裏。因爲光線不足，整個建築看來是黑越越的，只有若干房間還未熄燈，燈光從窗孔透露出來，就好像在黑板上挖了許多透明窟窿一樣。譬如說這大廈是十層樓，每層有一排十個窗洞或房間。在這一百個窗孔中，有些個是亮的，此外就是一片漆黑。有一個科學家住在這一百個房間中的某一間裏。雖不知住那一間，但知他努力研究，每晚必定深夜工作。現在問題來了。假如不許走進樓裏直接去訪問，你能够確定他住在那一個房間麼？

這個問題雖有趣味，但並不難。只要你一連幾晚去觀察窗孔，如能發現有一個窗每晚都是亮的，那必就是所要尋求的研究室了。

根據以上所說的，可以創製成一種簡單有趣的游戲。用一張紙板代表那一座大樓。在紙板上挖空了若干小孔代表透露燈光的窗洞。小孔的數量位置代表一次觀察的結果。每個窗洞裏，都可能有科學家在工作。再用一張紙板，上面也挖了若干小孔，代表另一次觀察的結果。將兩片紙板重疊起來，有許多小孔被遮沒了。只有兩次都亮的少數窗洞。仍舊敞開着。用第三四張有孔的紙板代表第三四次觀察結果。將紙板一張一張的加疊上去。透光的窗孔，漸漸減少，最後只賸下一個，代表那永明不暗的研究室。

現在將問題稍加變化。假使已有了少數幾張挖有小孔的紙板，每張紙板可以有不同的位置，所以可代表幾次的觀察結果。科學家可能在任何一個窗洞裏，但僅利用這幾張紙板，要能測出研究室的所在。因要完成這種目的，每張紙板上所挖小孔的數量位置，看似散亂不整毫無規則，但非要經過精密計劃不可。

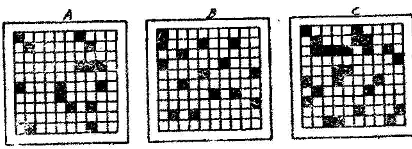
這種游戲，名爲魔窗或魔孔。

大約在民國二十六七年間，上海曾經流行過一種兒童玩具。那是長方形

的紙片，四五張成爲一套。每張上印着幾個子鼠丑牛等生肖圖樣，與挖透的圓孔。玩的人問着紙上有沒有另一人所屬的生肖的圖樣，將幾張疊起之後，就能猜中他所屬的地支。這就是一種最簡單的魔孔游戲。用四五張紙片，只能在十二地支中猜中一個，用紙太多，能猜的數目太少了。

在下面介紹了一種用三張紙板能猜一百個數的魔孔游戲。

拿三張同樣大小，正方形的紙板，在上邊分別註明"A"，"B"與"C"。在每張中間畫同樣大小縱橫各十格（十一條線）的正方格子，共得一百小方格。在 A，B 兩張的反面，也要畫格子。第三張 C 上，只畫正面就行了。按照附圖，在適當的地方挖空，成爲許多小窗孔。計在 A 板，B板上各挖去 15 小格，在 C板上挖去 25 小格。



第　23.1　圖

作完紙板，還須填表。在一百小格中，每格先要指定一個數目。爲求簡便，如最上一層由左到右是 1，2，3，………9，10。第二層是 11 到 20。以下類推。用紙板 A 填 A 表。使 A 板正面向上，A 字在上邊，將挖空的各小格所露出的數目填入表中第一行。使紙板順時針向轉 90°（A 字在右邊）後，再填表中第二行。繼續轉動紙板，填表的第三行（A 字在下邊）與第四行（A 字在左邊）。將紙板翻轉，使反面向上，A 字在上邊，填第五行。使紙板順時針向轉 90°，180° 與 270°，填第六，七，八各行。用 B 板填 B 表與填 A 表一樣。每表八行，每行 15 個數。

用 C 板填 C 表，填法相同，只是不用反面，所以 C 表只有四行，每行 25 個數。如要省事，第四行可以不要，因爲前三行所不見的數目，都在第四行裏。紙板 C 的反面，也可以用，所得的表是 D 表。C，D 兩表，效用相同，有一個就足够了。填好的各表如下（D 表略）：

A　表

1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	3	14	4	15	2	1
7	10	9	16	10	17	8	6
12	11	23	22	13	21	26	12
18	19	25	24	19	23	28	20
37	44	36	28	32	27	35	46
38	45	42	30	33	29	41	47
39	53	46	31	34	37	45	58
51	67	50	34	52	40	49	61
55	70	62	48	56	43	67	64
59	71	63	56	60	64	68	72
65	73	64	57	66	65	69	74
76	77	83	82	73	81	82	78
78	79	89	90	75	89	88	80
92	85	94	91	93	95	91	84
98	87	100	96	99	100	97	86

B　表

1	2	3	4	5	6	7	8
1	7	17	5	10	3	12	1
11	9	19	8	13	6	14	2
15	10	21	22	16	24	30	4
18	12	23	27	20	29	36	19
23	25	35	34	28	37	38	23
31	28	48	47	34	44	43	26
37	32	51	52	40	56	55	39
45	46	56	55	41	59	60	42
50	49	64	69	46	62	61	45
53	54	70	73	58	75	67	57
66	67	78	76	63	78	73	64
68	74	83	89	65	82	81	72
80	79	86	91	71	97	85	77
82	93	90	92	87	99	88	95
84	96	100	94	89	100	91	98

魔孔已作好了，玩法如下：一個人拿着三片紙板，使旁人心中默想一百以內的一個任意數目，查看三個表，並說出這數出現在表的那幾行裏。第一個人就能利用紙板，猜出別人心中的數目。

譬如說 A 表第一行，B 表第二行，C 表第三行中有某數。 如要簡單些，可說：“A-1，B-2，C-3”。 再簡單些不妨說：“1, 2, 3”。 猜數者須使A板正

放，A 字在上；使 B 板正放，B 字先在上再轉 90°；使 C 板的 C 字先在上再轉 180°，將三紙板上下疊齊之後(上下順序無關)，只餘一個小孔未被蔽閉。它的地位代表 7，也就是所要猜的數目。又如說："6, 8, 3" 須使 A 板反放，A 字先在上，再轉 90°，使 B 板反放，B 字先在上，再轉 270°，紙板 C 的放法，與前例相同。疊起三邊就知所要的數目是 95。總之各紙板的位置，必須與作表時一致。

有些數目(都在對角線上)如 1, 10, 12, 19, 等，在 A 表與 B 表上各都出現兩次。如說："3, 4, 3"，也可說："6, 5, 3"。隨便怎樣說，都能猜得那數是 89。

C　表

1	2	3	4
1	3	2	4
6	5	7	9
12	10	8	13
16	14	11	20
17	18	15	26
22	19	30	32
23	21	34	33
24	28	39	37
25	31	43	41
27	35	47	42
29	36	50	49
40	38	56	53
44	46	57	55
45	48	61	63
51	52	72	65
54	59	74	66
58	60	76	70
62	64	77	73
67	68	78	80
71	69	79	82
86	75	84	83
90	81	85	87
93	88	89	91
94	92	95	96
99	97	100	98

魔孔這玩意兒，作時有些費事，但作好之後，玩起來十分簡單，連小學生也會。可是猜多少數目須用幾張紙板，每張板上須挖幾個孔，在甚麼地方，等等都是問題。要想解決，恐怕非要有中學以上的程度不可。其實問題並不算難(雖然在十多年前還覺得不大容易)。讀者們如有興趣，請參看民國二十一年出版天津南大周刊副第二十期或民國二十二年出版的科學世界第二卷第二期.

如一張紙板，將全部數目或小格子遮去一半露出一半。第二張將所露出的再遮去一半，露出全部的 $\frac{1}{4}$。加上第三張，露出的只有 $\frac{1}{8}$ 了。這樣的魔孔，每紙板有兩個可能位置(正放，倒放或正放，反放)。三張能猜 8 ($= 2^3$) 個數。四張能猜 16 ($= 2^4$)個數，要猜一百個數，須用七張紙板($2^7 = 128$)。能猜十二生肖的那玩意兒，就屬於這一類。

如一張紙板，將全部數目遮去 $\frac{3}{4}$，露出 $\frac{1}{4}$。第二張再遮去所露出的 $\frac{3}{4}$，露出的已是全部的 $\frac{1}{16}$。這種魔孔，每紙板須有四個位置(方形紙板，平轉四個方

向)。用三張能猜 64 ($=4^3$)個數。用四張能猜 256 ($=4^4$)個數。要猜一百個數,須要四張紙板。

如每張紙板遮去 $\frac{7}{8}$,露出 $\frac{1}{8}$。每紙板須八個可能位置(方形板,正面反面各有四個方向。圓形板,平轉八個方向)。三張能猜 512 ($=8^3$)個數。四張能猜 4096 ($=8^4$)個數。要猜一百個數,兩張不够用,非要三張紙板不可。

前文所介紹的魔孔游戲,A B 兩板各有八個位置。所以單憑這兩張,可以猜出 64 ($=8^2$)個數。要猜一百個數,尙差 36 個。其中有在對角線上的 20 個數,是不使用 A, B 一類紙板猜的。因此第三張紙板 C 是可能有四個位置的那一種。所以這個玩意兒,可以說是混合式的魔孔。A 板,B 板上各應有 $\frac{20}{4}+\frac{80}{8}=15$ 個孔。C 板上應有 $\frac{100}{4}=25$ 個孔。

任何玩意兒或科學研究,在起初時常是起於偶然。研究者只是爲了興趣爲了愛好,毫無功利思想,不一定指望他的研究會怎樣造福人類。許多研究可能始終沒有實用價值。但也有許多研究,後來居然有用,或者竟然大大有用。這種的實例,是多得不勝枚擧的。

魔孔這種玩意兒除了可供人消遣之外,現在覺得還有些實際的功用。將來在保險鎖,無線電通訊,秘密電碼與中文打字機上參用魔孔的原則,是很有可能的。

假設有一萬個小格。再作四個金屬圓盤,各有一千個小孔。每盤平轉一周,可有十個位置,用數字 0, 1, 2, 3,……8, 9 代表。第一盤遮去一萬小格的 $\frac{9}{10}$,露出一千。第二盤又遮去一千的 $\frac{9}{10}$,露出一百。將四個盤疊在一處,露出的只餘一個小格了。代表四個盤位置的是四個數字,也可說是一個四位的數目。任何一個四位數目,代表一萬小格中的一個。這不是與中文電報書一樣嗎? 如在一萬小格中各放一顆中文鉛字,知道一個四位數字,撥好圓盤就露出一顆鉛字來。利用機械方法將這露出的鉛字印在紙上,不就是一種與電報合作的中文打字機嗎?

貳　肆

雜　題　(一)

下面是幾個數字雜題，雖不太難，但也不十分簡單。要求解決，總須消磨一些時間，用一點心思。請讀者們不要急於翻看後面的解答。因爲一個人不靠別人幫助，自已費了腦筋或勞力，解決了一個難題或完成了一件工作，才是最快樂的事呢。

(一)有 a, b 兩個正整數，兩數之差比兩數平方之差，還差 100. 求此兩數。

(二)有 a, b 兩個正整數，兩數之和再加兩數平方之和，總和是 5000. 求此兩數。

(三)a, b 是兩個正整數，兩數之差乘兩數平方之差，等於 5000. 求 a 與 b.

(四)a, b 是兩個正整數，兩數之和乘兩數平方之和，等於 5000. 求 a 與 b.

(五)有三個正整數，a, b, c. 三數平方之和再加三數之和，等於 100. 求 a, b 與 c.

(六)有三個正整數 a, b, c. 三數平方之和減去三數之和，還餘 100. 求 a, b 與 c.

(七)a, b, c 三個都是正整數。三數的連乘積等於三數之和的 10 倍。求此三數，而三數之和必須是最小的。

(八)a, b, c 三個都是正整數。三數的連乘積與三數之和相比，相差爲 10。求此三數，而三數之和必須是最小的。

(九)有三個正整數 a, b, c, 三數之積再加三數之和，恰好等於 100. 求 a, b 與 c.

雜 題 (一) 答 案

(一)按照題意，a 與 b 的關係是：

$$(a^2 - b^2) - (a - b) = 100.$$

將方程式的左半邊加以變化，得：

$$(a-b)(a+b-1)=100.$$

從此可知 100 可以分成兩個因數，一是 $(a-b)$，一是 $(a+b-1)$。 兩個因數相差：$(a+b-1)-(a-b)=2b-1$。

a 與 b 都是正整數，所以 $(2b-1)$ 是奇數或單數。

將 100 分成兩個因數，可有很多分法如下：

$$\begin{aligned}100 &= 1\times 100,\\ 100 &= 2\times 50,\\ 100 &= 4\times 25,\\ 100 &= 5\times 20,\\ 100 &= 10\times 10.\end{aligned}$$

上面第二第五，兩個因數都是雙數，所以不合用。 其餘三個，兩個因數一雙一單，所以相差是單數，是合用的。 使這個差數等於 $(2b-1)$，就可求出 b。然後再求去 a. 所以此題可有三組答案如下：

$$\begin{cases}a=51\\ b=50\end{cases}\quad (51^2-50^2)-(51-50)=2611-2500-1=100.$$

$$\begin{cases}a=15\\ b=11\end{cases}\quad (15^2-11^2)-(15-11)=225-121-4=100.$$

$$\begin{cases}a=13\\ b=8\end{cases}\quad (13^2-8^2)-(13-8)=169-64-5=100.$$

（二）此題須用解決第五、六兩題的方法幫助着，才好着手。 可得兩組答案：

$$\begin{cases}a=5\\ b=70\end{cases}\quad (5+70)+(5^2+70^2)=75+25+4900=5000.$$

$$\begin{cases}a=49\\ b=50\end{cases}\quad (49+50)+(49^2+50^2)=99+2401+2500=5000.$$

（三）　$(a-b)(a^2-b^2)=5000.$

$$(a-b)^2(a+b)=5000.$$

可見 5000 可以分為兩個因數，其中一個必須是個平方數。而且這因數開平方後，必須比第二個因數小，還要兩個同是單數或同是雙數。 因為不如此，

a 與 b 就得不出正整數了。

將 5000 可能分成如下的因數：

$$5000 = (1)^2 \times 5000$$
$$5000 = (2)^2 \times 1250$$
$$5000 = (5)^2 \times 200$$
$$5000 = (10)^2 \times 50$$
$$5000 = (25)^2 \times 8$$
$$5000 = (50)^2 \times 2$$

這六個之中，只有第二與第四個是合格的。括弧裏的是$(a-b)$，後邊的因數是$(a+b)$。從此就可求出 a 與 b 了。所以有兩組答案：

$$\begin{cases} a = 626 \\ b = 624 \end{cases} \quad (626-624)(626^2-624^2) = (2)(391876-389376) = 5000.$$

$$\begin{cases} a = 30 \\ b = 20 \end{cases} \quad (30-20)(30^2-20^2) = (10)(900-400) = 5000.$$

(四)此題的答案是：

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 15 \end{cases} \quad (5+15)(5^2+15^2) = 20\,(25+225) = 5000.$$

(五)照題意列成下列方程式：

$$(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c) = 100$$
$$a\,(a+1)+b\,(b+1)+c\,(c+1) = 100$$

上式說明 100 可以分裂爲三個數，每個都是兩連續數之積。先研究一下兩連續數相乘之後有甚麼特性。將 1 乘 2，2 乘 3，………。結果如下：

$$\left.\begin{array}{l} 1\times 2 = 2 \\ 2\times 3 = 6 \\ 3\times 4 = 12 \\ 4\times 5 = 20 \\ 5\times 6 = 30 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 6\times 7 = 42 \\ 7\times 8 = 56 \\ 8\times 9 = 72 \\ 9\times 10 = 90 \\ 10\times 11 = 110 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 11\times 12 = 132 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$$

每個積都是雙數。每個的各位數字，總是 2, 6 或 0。4 和 8 是沒有的。

現在從右邊試選三個乘積，使三個的總和凑成 100。 這只有一個辦法如下：

$$1 \times 2 + 6 \times 7 + 7 \times 8 = 2 + 42 + 56 = 100.$$

a, b 與 c，每個都是兩連續數中的較小的。所以：$a = 1$, $b = 6$, $c = 7$.

$$(1^2 + 6^2 + 7^2) + (1 + 6 + 7) = 1 + 36 + 49 + 14 = 100.$$

(六)此題與第五題相似。可得下式：

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) = 100$$

$$a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) = 100.$$

解決方法，也與前題一樣。只是 a, b 與 c，每個都是兩連續數中的較大的。所以 $a = 2$, $b = 7$, $c = 8$.

$$(2^2 + 7^2 + 8^2) - (2 + 7 + 8) = 4 + 49 + 64 - 17 = 100.$$

(七)先求能够適合下列方程式的三個正整數：

$$abc = 10(a + b + c),$$

$$a = \frac{10(b + c)}{bc - 10}.$$

能够滿足上式的 a, b, c，可能有很多組。如：3, 5, 16 是一組，2, 10, 12 是一組，還有 3, 4, 35 等等很多組。其中的一組，能使三數總和最小的一組，就是本題的答案。

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \\ c = 9 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &4 \times 5 \times 9 = 180. \\ &4 + 5 + 9 = 18. \end{aligned}$$

(八)

$$abc = a + b + c + 10$$

$$a = \frac{b + c + 10}{bc - 1}.$$

此題與第七題相似，要先求出滿足上式的許多組 a, b, c. 然後可選出 $(a + b + c)$ 最小的一組爲答案。

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &2 \times 3 \times 3 = 18. \\ &2 + 3 + 3 = 8. \end{aligned}$$

(九)本題就是要解決下式:

$$abc + (a + b + c) = 100$$

$$c = \frac{100 - (a + b)}{ab + 1}$$

可得四組答案如下:

(a)　$a = 1 \quad b = 9 \quad c = 9$

$$1 \times 9 \times 9 + (1 + 9 + 9) = 81 + 19 = 100.$$

(b)　$c = 1 \quad b = 4 \quad c = 19$

$$1 \times 4 \times 19 + (1 + 4 + 19) = 76 + 24 = 100.$$

(c)　$a = 1 \quad b = 3 \quad c = 24$

$$1 \times 3 \times 24 + (1 + 3 + 24) = 72 + 28 = 100.$$

(d)　$a = 1 \quad b = 1 \quad c = 49$

$$1 \times 1 \times 49 + (1 + 1 + 49) = 49 + 51 = 100.$$

貳 伍

雜 題 (二)

下面是幾個新奇有趣的雜題，難易都有。後面附着詳解。有兩題是由別書摘來的，只給答數，將解法略去了。讀者們，請先思索一番，再翻看答案，必能增加不少興趣。

(一)有竹竿十根。它們的長度是：5 尺，4 尺，6 尺，5 尺，5 尺，3 尺，7 尺，4 尺，4 尺和 5 尺。將竹竿頭對頭接起來，要排成一個正方形，問每邊長幾尺？

*　　*　　*

(二)甲乙丙丁四人走路，各有各的速度與習慣。甲每天走 55 里，達到目的地後才休息，乙每天走 70 里，但每走三天必要休息一天。丙丁每天都能走 100 里，但是丙是每走兩天停兩天，丁是每走一天停一天。四人約好，自清晨起，同時動身，作長距離走路比賽。前後共賽四次，路程是 500 里，600 里，1000 里與 1200 里。求每次比賽的名次。

*　　*　　*

(三)一個學生每天上午七點二十五分從家裏出門去上學。有一天，他每分鐘走 35 步，到校時已遲了 5 分鐘。第二天，他每分鐘走 50 步，到校後過了 7 分鐘才上課。求上課的時間，與學校離家的距離。(此題曾見於夏丏尊葉聖陶合著開明書店出版的文心)

*　　*　　*

(四)半夜裏，甲乙丙三個賊合夥到桃園裏去偷大蜜桃。他們很順利，偷到了一大籃，抬着桃子到了土地廟裏。三人都睡覺欲乏，預備清早分贓。甲賊心中有事，等乙丙都睡着了，輕輕起來。他分偷來的桃子爲三份，將分剩下的一只自己吃了。又將三份中的一份，私自隱藏起來，這才安心去睡。乙賊在夢中想起一個主意，翻身起來，看甲丙正在好睡。他輕輕的將籃裏桃子分

爲三份，剩下一只，拿來吃了。將三份中的一份私藏妥當，又回原地睡了，不一會，丙賊醒了，看甲乙還未醒。他也不約而同的去分桃子爲三份，吃了剩下的一只，也私藏了一份，然後再回去很暢快的又睡了一覺。天亮了，三人都睡足了起來，很高興的去分贓。每人都裝着若無其事，都看別人像不知不覺，心中暗自得意。將桃子分作三份，各取一份。分剩下一只爛桃子，三人都謙讓不要，只得很大方的扔了。問他們共偷多少桃子？每人各得多少？(此題是同學蘇廣祥君講的)

* * *

(五)一個人對圍棋國手說，"下圍棋是須要計算的。現在我請教你一個棋子問題……"。說着，他就抓了兩把黑棋子，又抓了兩把白棋子，混在一起。隨後將黑白雜亂的棋子分成東西兩堆，用手指着說，"你看！東邊這堆裏黑子佔$\frac{1}{7}$，在西邊黑子佔$\frac{5}{8}$"。隨手他把兩堆棋子併在一處，再從新分爲南北兩堆。他繼續向國手說，"現在南邊這堆裏黑子有$\frac{4}{9}$，在北邊黑子有$\frac{2}{5}$。請你算算這裏一共是多少棋子？幾個黑的幾個白的？"

* * *

(六)趙大在銀行門口，正遇到王二張三李四從銀行取款出來。王二說："老趙，我有一個題目給你消遣消遣。我方才取了人民幣 100 元，其中10元的 5 元的 1 元的都有，共計鈔票 20 張。請問每種有多少張"？張三說："我也有一個題目，一切與老王的一樣，但我比他多 1 元錢"。李四說："我也給你同樣的題目，只是我比老王多一張鈔票"。趙大笑着說："謝你們美意，但這都不難。我也回敬一個問題：前年我去買一本價值法幣 100 萬元的書給了店員 20 張鈔票，其中有十萬的(關金 5000 元)四萬的(關金 2000 元)與一萬的三種，(每元關金合法幣 20 元)我付了錢，拿着書，掉頭就走。那店員在後面把我叫回，請你們說，這是爲甚麼"？

* * *

(七)有人問賣蛋的老頭兒："你有多少蛋"？"大約有四五百只"。那人追問"到底多少只"？老頭兒說："我的蛋可以分爲鮮蛋鹹蛋兩組，也可分爲鷄蛋鴨蛋兩組。如分爲甲乙兩組，甲組的$\frac{1}{4}$比乙組的$\frac{1}{9}$多 2 只。如分爲丙丁

兩組，丙組的$\frac{1}{7}$比丁組的$\frac{1}{6}$多6只”。那人又問：“那一組代表那種蛋呢”？老頭兒說：“有百分之五的鷄蛋是醃鹹了的。你能算清楚了，我把這些蛋全部送給你”。

*　　　*　　　*

(八)王先生看見張先生的三個孩子：三民，四維，五權。頂大的也不過十五六歲，都很强健英俊。王先生非常喜歡，問道：“小弟弟們幾歲了”？張先生道：“我替他們回答。老王！你是喜歡繞額子的小玩意兒的。我將他們的出生年分月分都告訴你。只是彎曲隱藏的說出，讓你慢慢去消遣，好嗎”？王先生表示歡迎。張先生接着說道：“照西洋算法，一個人不到生日，不算足歲。這三個孩子，巧得很，都是生在小月(每月三十天)的。在民國三十年五月一日，三民的歲數是四維的二倍。四維的歲數是五權的三倍。在三十二年十月一日，三民的歲數是五權的三倍。四維的歲數是五權的二倍。在三十五年七月一日，五權的歲數是三民的一半，四維的歲數是三民的三分之二”。(此題曾見於民國二十年的某外國報，有題無解。現經編譯改造如上)。

*　　　*　　　*

(九)甲乙二人，由丙往丁，同時出發，同時到達。甲徒步，每分鐘行30丈。乙騎馬，每分鐘行54丈；只是每行10分鐘，必要下馬休息5分鐘，每次上馬下馬，又各費時5分鐘，求丙丁兩處的距離。(此題見於王邦珍著商務印書館出版的算術原理)。

雜題（二）答案

(一)將十根竹竿的長度加起來，得總長48尺。用4來除，得12尺。這好像就是答案。其實不然。因爲事實上如不將竹竿折斷，不能够將十根竹竿排成每邊12尺的正方形。所以本題是不可能的。

(二)路程500里，甲$9\frac{1}{11}$天走到，乙$9\frac{1}{7}$天走到，丙丁都是9天走到。所以丙丁二人都算第一名，甲第三，乙第四。

路程600里，甲走$10\frac{10}{11}$天，乙走$10\frac{4}{7}$天，丙走10天，丁走11天。所以

丙第一,乙第二,甲第三,丁第四。

路程 1000 里,甲走 $18\frac{2}{11}$ 天,乙走 $18\frac{2}{7}$ 天,丙走 18 天,丁走 19 天。 競走優勝者的順序是丙,甲,乙,丁。

路程 1200 里,甲走 $21\frac{9}{11}$ 天是第一名,乙走 $22\frac{6}{7}$ 天第三,丙走 22 天第二,丁是第四名走了 23 天才到。

(三)答案詳見"文心"。答數爲:上課時間是八點鐘。學校離家 1400 步。

(四)如用 x 代表天亮時每人分得的桃數,y 代表所偷桃子總數,

$$y=\left\{\left[(3x+1)\frac{3}{2}+1\right]\frac{3}{2}+1\right\}\frac{3}{2}+1$$

$$y=\frac{81}{8}x+\frac{65}{8}=10x+8+\frac{x+1}{8}$$

y 必須是整數,因此 x 必須是 7 或 15, 23,………。 y 必然是 79 或 160, 241,………。 79 只大密桃,很可以裝一大籃。 如有 160 只或二百多只,那就裝不下了。所以三賊共偷了 79 只桃子。甲得 34 只,乙得 25 只,丙得 19 只。

(五)設 x 是黑白棋子的總數,y 是黑棋子數。 再設 A 是東堆的棋子數,西堆的棋子數是 $(x-A)$。B 是南堆的棋子數,北堆的棋子數是 $(x-B)$。

$$東堆裏黑棋子數=\frac{1}{7}A$$

$$西堆裏黑棋子數=\frac{5}{8}(x-A)$$

$$y=\frac{1}{7}A+\frac{5}{8}(x-A)$$

$$南堆裏黑棋子數=\frac{4}{9}B$$

$$北堆裏黑棋子數=\frac{2}{5}(x-B)$$

$$y=\frac{4}{9}B+\frac{2}{5}(x-B)$$

$$y=\frac{1}{7}A+\frac{5}{8}(x-A)=\frac{4}{9}B+\frac{2}{5}(x-B)$$

$$x=\frac{1215\,A+112\,B}{567}.$$

$$x-A=\frac{648\,A+112\,B}{567}.$$

$$x-B=\frac{1215\,A-455\,B}{567}.$$

棋子的數目,必然是整數。所以 A 是 7 的倍數,B 是 9 的倍數,$(x-A)$是 8 的倍數,$(x-B)$是 5 的倍數。設 $A=7m$, $B=9n$, $x-A=8p$, 與 $x-B=5q$. m, n, p, q 都是正整數。

$$x-A=8p=\frac{648\times 7m+112\times 9n}{567}$$

$$p=m+\frac{2n}{9}.$$

由上式可知 n 必須是 9 的倍數,最少等於 9。m 可以是任何正整數。

$$x-B=5q=\frac{1215\times 7m-455\times 9n}{567}$$

$$q=3m-\frac{13n}{9}.$$

由上式可知 n 必須是 9 的倍數,最少等於 9。 m 須是大於 $\frac{13n}{3\times 9}$ 的任何整數。如 $n=9$, m 最少等於 5。如 $n=18$, m 最少等於 9。所以上面兩個式子中,後者可以決定一切。

如: $n=9$, $m=5$, 則 $p=7$, $q=2$, $x=91$.

又如: $n=9$, $m=6$, 則 $p=8$, $q=5$, $x=106$.

再如: $n=18$, $m=9$, 則 $p=13$, $q=1$, $x=167$.

棋子總數若是 91 個,其中有 40 黑子 51 白子。x 的數值也可能是 106 或 167 或更大些,但是抓四把棋子,不可能有這許多。兩把抓 40 個黑子,又兩把抓 51 個白子,總共 91 個棋子,這不但是很可能,而且也是唯一的答案。

(六)王二的鈔票是:十元的四張,五元的十一張,一元的五張。 或十元的

八張，五元的二張，一元的十張。

張三的鈔票是：十元的一張，五元的十八張，一元的一張。或十元的五張，五元的九張，一元的六張。

李四的鈔票是：十元的三張，五元的十三張，一元的五張。或十元的七張，五元的四張，一元的十張。

以上三題，都很容易。先假定一元票的張數，使其餘的錢數是五或十的倍數。一元票不可以沒有，也不可以太多。如多過十張一元的，其餘幾張即使全是十元的，也未必能湊滿 100 元了。將一元票假定了之後，再用普通"鷄兎同籠"的方法求得五元十元的鈔票張數。

趙大的問題，難用上法。可用代數方法，解釋如下：假定 x, y 與 z 分別代表十萬票，四萬票與一萬票的張數，則

$$10x + 4y + z = 100,$$

$$x + y + z = 20.$$

兩式相減，得

$$9x + 3y = 80,$$

$$y = \frac{80}{3} - 3x.$$

鈔票的張數，x, y, 與 z,都須是正整數。但從上式看出，三個同時都是整數，是不可能的。可知趙大用二十張鈔票付 100 萬元的書價，不是有餘，便是不足。店員叫回趙大，一定是爲這個。(參看中華書局出版許蒓舫編古算法之新研究，百鷄術章。)

(七)設 x 代表蛋的總數。如 $4A$ 代表甲組的蛋數，則 $9(A-2)$是乙組的蛋數。

$$x = 4A + 9(A-2)$$

又如 $7B$ 代表丙組的蛋數，則 $5(B-6)$是丁組的蛋數。

$$x = 7B + 5(B-6)$$

$$x = 4A + 9(A-2) = 7B + 5(B-6)$$

$$A = \frac{12}{13}(B-1)$$

如m是任何正整數，而 $A = 12m$,則

$$B = 13m + 1.$$

$$x = 156m - 18.$$

$m = 1$, 則 $x = 138$

$m = 2$, 則 $x = 294$

$m = 3$, 則 $x = 450$

$m = 4$, 則 $x = 616$

………… …………

x 有很多可能的數值。 但是賣蛋的老頭兒說有四五百只蛋，所以只有 $m = 3$, $x = 450$ 是對的。各組的蛋數如下：

甲組 $= 4A = 144$

乙組 $= 9(A-2) = 306$

丙組 $= 7B = 280$

丁組 $= 5(B-6) = 170$

然後再解決那一組代表那一種蛋。

老頭兒說有 5% 的鷄蛋是鹹蛋，95% 的鷄蛋是鮮蛋。在甲乙丙丁四組之中，只有丙組可能是鷄蛋。

$$\text{鹹鷄蛋} = 280 \times \frac{5}{100} = 14 \text{ 只}$$

$$\text{鮮鷄蛋} = 280 \times \frac{95}{100} = 266 \text{ 只}$$

丙組既是鷄蛋，丁組必然是鴨蛋，鮮鷄蛋已有 266 只，所以甲組的 144 只，必不是鮮蛋，一定是鹹蛋。其中有 14 只鹹鷄蛋，還有 130 只是鹹鴨蛋。 算起來鮮鴨蛋有 40 只，再加上 266 只鮮鷄蛋，合成乙組。現在全部已算淸了。將結果列表如下：

	鹹蛋	鮮蛋	共計
鷄蛋	14	266	280(丙)
鴨蛋	130	40	170(丁)
共計	144(甲)	306(乙)	450

(八)設 x, y 與 z 分別代表張五權在三個時候的年歲。 張氏三弟兄的年歲可以列成下表：

	三　　民	四　　維	五　　權
民國 30 年 5 月 1 日	$6x$	$3x$	x
民國 32 年 10 月 1 日	$3y$	$2y$	y
民國 35 年 7 月 1 日	$2z$	$\frac{3}{4}z$	z

設 A, B, C 代表三民四維五權三人由三十五年五月一日到三十二年十月一日所增加的歲數。D, E, F 代表三人由三十年五月一日到三十五年七月一日所增加的歲數。三個人在三個時期的年歲，可以再列一表：

三　　民	四　　維	五　　權
$6x$	$3x$	x
$3y = 6x + A$	$2y = 3x + B$	$y = x + C$
$2z = 6x + D$	$\frac{3}{4}z = 3x + E$	$z = x + F$

根據三民與五權年歲的關係：

$$3y = 6x + A = 3(x + C),$$

$$x = \frac{3C - A}{3}.$$

$$2z = 6x + D = 2(x + F),$$

$$x = \frac{2F - D}{4}.$$

消去 x：

$$x = \frac{3C - A}{3} = \frac{2F - D}{4},$$

$$12C - 6F = 4A - 3D.$$

根據四維與五權年歲的關係：

$$2y = 3x + B = 2(x + C),$$

$$x = 2C - B.$$

$$\frac{4}{3}z = 3x + E = \frac{4}{3}(x + F),$$

$$x = \frac{4F - 3E}{5}.$$

消去 x: $$x = 2C - B = \frac{4F - 3E}{5},$$

$$10C - 4F = 5B - 3E.$$

從民國三十年五月一日到三十二年十月一日，經過的時間是二年又五個月。每人所增加的歲數，如過了兩次生日，就長了兩歲。但也可能過了三次生日，那就要長三歲。所以 A, B, C，都可能是 2 或 3。從三十年五月一日到三十五年七月一日，經過了五年零兩個月。同理，一個人可能增加了五歲或六歲。所以 D, E, F，則可以代表 5 或 6。

用 $12C - 6F = 4A - 3D$，可以求出 C, F, A, D 所代表的歲數，以下是用試驗法來求解決：

如：$C = 2,\ F = 5,$ 則 $12C - 6F = -6$

$C = 2,\ F = 6,\quad 12C - 6F = -12$

$C = 3,\ F = 5,\quad 12C - 6F = 6$

$C = 3,\ F = 6,\quad 12C - 6F = 0$

如：$A = 2,\ D = 5,$ 則 $4A - 3D = -7$

$A = 2,\ D = 6,\quad 4A - 3D = -10$

$A = 3,\ D = 5,\quad 4A - 3D = -3$

$A = 3,\ D = 6,\quad 4A - 3D = -6$

所以要使 $12C - 6F = 4A - 3D$，只有 $C = 2, F = 5, A = 3$ 與 $D = 6$。

再用 $10C - 4F = 5B - 3E$ 的關係來求 C, F, B, E，也用試驗法如下：

如：$C = 2,\ F = 5,$ 則 $10C - 4F = 0$

$C = 2,\ F = 6,\quad 10C - 4F = -4$

$C = 3,\ F = 5,\quad 10C - 4F = 10$

$C = 3,\ F = 6,\quad 10C - 4F = 6$

如：$B = 2,\ E = 5,$ 則 $5B - 3E = -5$

$B = 2,\ E = 6,\quad 5B - 3E = -8$

$B = 3,\ E = 5,\quad 5B - 3E = 0$

$B = 3,\ E = 6,\quad 5B - 3E = -3$

所以要使 $10C - 4F = 5B - 3E$，只有 $C = 2, F = 5, B = 3, E = 5$。

綜合以上的結果，幸而沒有衝突。結果是：$A=3$，$B=3$，$C=2$，$D=6$，$E=5$，$F=5$。再求得三人的年歲如下：

	三　民	四　維	五　權
30年5月1日	6	3	1
32年10月1日	9	6	3
35年7月1日	12	8	6

張先生說三弟兄都是生在小月的。一年中的小月，有四月六月，九月和十一月。$A=3$，$D=6$。這代表三民由三十年五月一日到三十二年十月一日長了三歲，到三十五年七月一日長了六歲。所以他的生日必在五月以後七月以前，一定是六月。$B=3$，$E=5$。這說明四維在同時間長了三歲和五歲。所以他的生日必在十一月以前七月之後，一定是九月。$C=2$，$E=5$。所以從五月一日到十月一日，五權不曾過生日。他一定是生在十一月，但也可能是生在四月的。這因張先生的題目稍欠嚴密，究竟是四月或十一月，還是要問他的。

(九)詳解見"算術原理"。答數是：乙在途中休息一次，丙丁相距 1012.5 丈。休息二次，距離是 1350 丈。休息三次，距離是 1687.5 丈。

貳陸

雜題（三）

（一）用方格紙裁成一正方形，大小隨便。 設每邊格數是 n，方紙內共有 n^2 個小方格。順着格子的線，將方紙剪成大小形狀互不相同的小塊。 問最多可得幾塊？

*　　　　*　　　　*

（二）與前題一樣，用一張方格紙剪成的正方形，也順着格子的線，將方紙分割成小塊，但每小塊必須是正方形。問最少可得幾塊？

*　　　　*　　　　*

（三）三個人分三張圓紙。三圓的直徑是，一尺，二尺與三尺。分割圓紙須用弧線，分割開的塊數要最少。問如何分法？

*　　　　*　　　　*

（四）矩形紙三張，長闊尺數是 1×2，2×3，3×4。 三個人商議分這幾張紙，要每人所得的面積形狀都相同。 三張整紙，不能分配，非用刀剪不可。 但必要分割成最少的塊數，還希望分割線最短。 請讀者代他們解此難題。

*　　　　*　　　　*

（五）屋子裏有三件圓東西：一是大圓桌，直徑六尺；二是大面盆，直徑一尺半；三是大月餅盒，直徑一尺。拿一件放平，靠緊東北角的牆壁。 圓的邊緣上有一點，離東牆八寸，離北牆九寸。你知道這件東西是桌，是盆，還是盒？（此題曾見於好多種書上）

*　　　　*　　　　*

（六）山頂上有一座八角亭，周圍都裝着玻璃門窗。 暴風雨來了，進亭避雨。從西窗向外看，見大雨點往左下方打來。傾斜度是 60°（以地平線為標準）。從東北面的窗看時，見雨點傾斜 30° 往右下方落下。求風的方向。

*　*　*

(七)從屋裏天花板上垂下來一個電燈,沒有吊錘(俗名葫蘆),電線的長度是固定的。屋子的一邊有一只書桌,就在這邊牆上,釘了一只釘,釘上繫一段線,線的另一頭繫着一只小鈎。釘的位置與線的長度,也都是固定的。將電燈拉過來,用小鈎鈎住電線,要書桌上亮,所以要使電燈愈低愈好,這是一個尋常問題。但是那小鈎應該鈎在電線的那一處呢?(我的弟弟姜長蕃在民國二十年首先提出了這個問題)

*　*　*

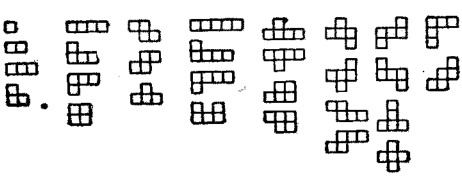
(八)製造圓柱形的罐頭,必須要怎樣才最經濟?(此題曾見於廣東國民大學出版的三十六年六月份工程學報復刊第一期林聖柱所著的容積與表面之關係。)

*　*　*

(九)在東門外靠城根有一只兎子,正在左右張望,看有沒有敵人。在兎子的正東 100 步的地方有一只獵狗,正在用銳利的目光與嗅覺搜尋食物。一東一西兩個動物恰巧同時互相看見了。兎子知道大難當前,卽刻向北飛逃,想逃進離它 60 步的兎子洞。獵狗恐怕錯過美味,立卽向兎子追趕過去。兎的速度只有狗速的一半。這狗能够捉到兎子嗎?(H.E. Licks 作的 Recreations in Mathematics 與民國二十二年十二月出版的交大周刊第六卷第六期上是我君的獵人與犬一文,都曾介紹此題。)

雜題(三)答案

(一)分的塊數要多,每小塊所佔小方格必須要少。各小塊必須互不相同,所以先要知道各小塊有多少可能的形狀。佔一至五小方格的小塊可能的變化如第 26.1 圖。

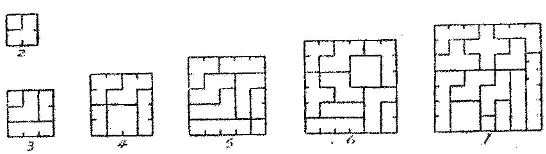


第　26.1　圖

又可以列成下表：

每小塊所佔小方格數		1	2	3	4	5
普通方格紙	小塊種數	1	1	2	7	18
	小方格數	1	2	6	28	90
黑白方格紙	小塊種數	2	1	4	10	36
	小方格數	2	2	12	40	180

要將每邊 n 格的正方形，分割成最多大小形狀不同的小塊。塊數多少，可以預算。如 $n = 5$，正方形裏共有 n^2 或 25 個小方格。將它分成一格的一塊，二格的一塊，三格的二塊，共已佔去 $1 + 2 + 6$ 或 9 小方格。還餘 $25 - 9$ 或 16 小方格，恰好分爲四格的四塊。共得 $1 + 1 + 2 + 4$ 或 8 塊。再如 $n = 7$，$n^2 = 49$。將它分成一格的，二格的，三格的，四格的小塊，共 $1 + 1 + 2 + 7$ 或 11 小塊，共佔 $1 + 2 + 6 + 28$ 或 37 小方格。所餘 $49 - 37$ 或 12 小方格，再可分爲五格的二塊，已得 $11 + 2$ 或 13 小塊，還剩二小方格。這二小方格不能算作一塊，只能補在一塊三格的上成爲五格的，或分補在二塊四格的上成爲二塊五格的，也可使二塊五格的成爲六格的。總之，最多的塊數是 13，不能再增加了，見第 26.2 圖。



第 26.2 圖

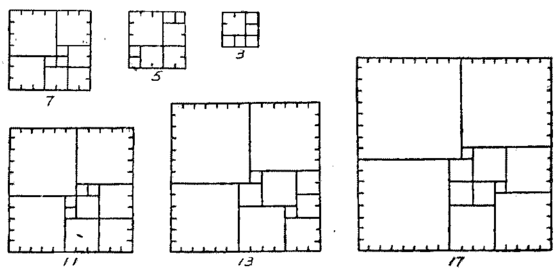
又如 $n = 15$，$n^2 = 225$。把這大正方形剪成從一格到五格的共 $1 + 1 + 2 + 7 + 18$ 或 29 小塊，共佔 $1 + 2 + 6 + 28 + 90$ 或 127 小方格，多餘小方格 $225 - 127$ 或 98 個，可再分成六格的 16 小塊。還餘二小格，已不能使塊數增加，總計可得 $29 + 16$ 或 45 個不同的小塊。

最多塊數雖然可以預算，但是分割的方法，須要拚湊，並且有很多種不同的拚湊法。現在將分割 n 在 10 以下的正方形，所得最多塊數，列表如下：

正方形每邊格數 (n)		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
最多塊數	普通方格紙	1	2	4	5	8	10	13	16	19	23
	黑白方格紙	1	3	4	7	9	12	15	18	22	25

如不用普通的方格紙,而用像外國棋盤一樣,黑白相間的方格紙,這問題將有甚麼改變呢? 因爲黑白相間的關係,凡是單數方格的小塊,形狀變化,都可加倍。雙數方格的小塊,也多了一些變化。所以可能分割成不同的塊數,也可以稍多了。關於這些數字,也列入以上兩表裏,可以互相比較。

(二)下面的圖表示着幾個分割大正方形爲最少數小正方形的方法。並且還列成一表。



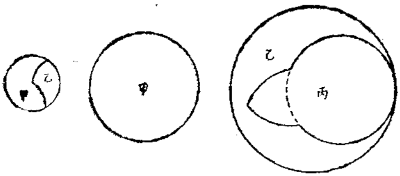
第　26.3　圖

正方形每邊格數 (n)	1	2	3	5	7	11	13	17	19	23
最　少　方　塊　數	1	4	6	8	9	11	11	12	13	13

按照以上的圖與表,還不能研究出來一種通用的法則。所能看得出的是:如大正方形每邊的格數是 n,小方塊中有一塊每邊是 $\frac{n+1}{2}$ 格,有兩塊每邊是 $\frac{n-1}{2}$ 格。大正方形愈大,分割的方法也愈多。

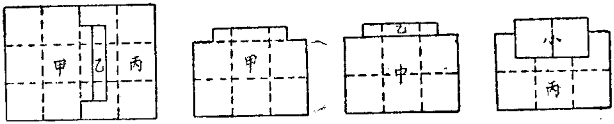
如 $n=2$,一大方可分爲四小方。n 如是雙數,照樣可分爲四小方。 如 $n=3$,一大方可分爲六小方。n 如是 3 的倍數,照樣可分爲六小方。所以,n 如不是質數,分割方法與每邊格數等於 n 的最小的一個質因數時相同。因此在以上圖與表中,n 都是質數。

(三)三圓直徑的比例是 1∶2∶3。三圓面積的比例是 1∶4∶9。三圓面積的總和是小圓的 $1+4+9$ 或 14 倍。三人平分，每人應得 $4\frac{2}{3}$ 個小圓面積。一個圓可以很容易的用圓弧分爲三等分或六等分。將小圓分爲二塊，一是 $\frac{1}{3}$，一是 $\frac{2}{3}$。如分取中圓的 $\frac{1}{6}$，這小塊的面積是 $4\times\frac{1}{6}$ 或 $\frac{2}{3}$ 個小圓面積。第 26.4 圖代表三人分圓的方法，三個圓共分作五塊，甲得兩塊，乙得兩塊，丙獨得一塊。



第 26.4 圖

(四)此題解法，須如第 26.5 圖。



第 26.5 圖

三矩形的面積是 2，6 與 12 方尺。總計是 $2+6+12$ 或 20 方尺。每人應得 $6\frac{2}{3}$ 方尺。照圖將大矩形分割成三塊，連中，小兩矩形，共是五塊。分割線總長是 $3+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+2=6\frac{1}{3}$ 尺。中矩形與乙拼合，小矩形與丙拼合，連從大矩形切下一大塊甲，就是大小形狀相同的三份。如將大矩形分爲兩塊，小矩形分爲三塊，分割線總長雖只有 5 尺，但是塊數已有六塊，太多了，所以不合。

(五)設圓的直徑是 $2x$，圓上一點到兩牆的距離是 a 與 b。利用勾股弦的關係可得：

$$(x-a)^2+(x-b)^2=x^2$$

解此式，得

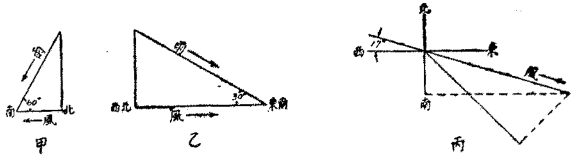
$$x=a+b\pm\sqrt{2ab}$$

用 8 寸與 9 寸代入上式，求得圓徑，

$$\text{直徑}=2x=58\text{ 寸或 }10\text{ 寸}$$

可見廣東月餅盒子才是正確答案。

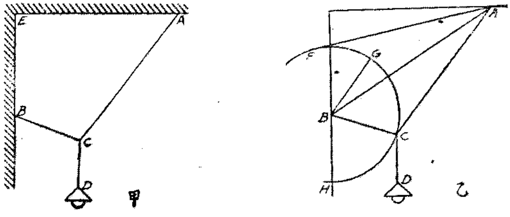
(六)西北風。說得正確一點，風是從正西偏北 17° 那方向吹來的。此題的解法如第 26.6 圖。



第 26.6 圖

如圖，先畫兩個直角三角形甲、乙，代表兩點下落的斜度與方向，兩三角形的高須相等，底邊代表地平線。再畫代表東西南北的十字標線。在圖上畫兩三角形的底邊，長短與方向，都要準確。再如第 26.6 圖丙，畫兩條垂直線，得一交點。從十字標線的中心連到此點的線，代表眞正風向。風向的角度，就可量出來了。

(七)此題用圖畫表示出來就是第 26.7 圖甲。其中 A 與 B 是固定的，BC 是線，ACD 是電線。求 C 點的地位，結果電燈燈才可最底。用微積分的方法，求解此題，雖然可以，但是太繁了，難合實用，所以要另想辦法。



第 26.7 圖

假設線 BC，小鈎 C，與電線 ACD 都不計重量，再假設電線是非常柔軟，小鈎在電線上滑動，沒有絲毫摩擦力，那麼，因爲電燈受地心吸力的關係，小鈎將在電線上滑動，自然調整到一點，使電燈達到最低位置。這時節，AC 與 CD 兩部電線上的拉力必相等而被 BC 線上之力所平衡。所以 $\angle ACB$ 必然等於 $\angle BCD$ 或 $\angle CBE$。

根據角度關係來求C點，這幾何問題倒不十分簡單。第26.7圖乙所代表的近似法，是很簡易實用的。用B爲圓心BC爲半徑作圓弧，這是C點的軌跡。連AB，由A點作AF與圓弧相切。作BG使$\angle ABG$等於$\angle BAF$。作$\angle GBH$的二等分線BC，交圓弧於C點，這就是小鈎鈎着電線之點。A點離開B點愈高愈遠，用此法求得的結果，也是愈準確。

(八)本題之所謂經濟，就是要罐頭裝得多而費料少，或是罐頭的容積大而面積小。設圓罐頭的半徑是r，高是h，容積是V，面積是A，則

$$V = \pi r^2 h$$

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

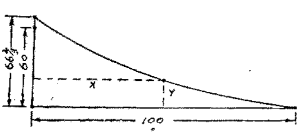
要使容積最大而面積最小，運用微積分得到半徑與高的關係是

$$h = 2r.$$

這是說圓罐的高度必須等於直徑，才能又裝得多而又省材料。

(九)兎子一直向北跑。狗在開始時向西跑，以後兎子向北移動了，狗要向兎追趕，必然要漸漸轉變方向。所以狗所跑的路線不是直線而是曲線，如第26.8圖。這曲線的方程式可以求出來，是

$$y = \frac{x^{1+n}}{2(1+n)a^n} - \frac{a^n x^{1-n}}{2(1-n)} + \frac{an}{1-n^2}$$



第 26.8 圖

其中的n是兎速與狗速之比，a是開始時狗兎間的距離。在這題中，$n = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$，$a = 100$。狗的路線方程式變成

$$y = \frac{1}{30} x^{\frac{3}{2}} - 10 x^{\frac{1}{2}} + \frac{200}{3}.$$

$$x = 0, \quad y = 66\tfrac{2}{3}\text{步}$$

假使北邊沒有兎子洞，兎子跑了$66\frac{2}{3}$步遠，就要被狗追到。幸而跑了60步之後，就進了洞，兎子得救了！兎子進洞之時，狗離開理想上得兎的地方還有$6\frac{2}{3} \times 2$或$13\frac{1}{3}$步，離開兎洞約有7步。眼看着兎子安然入洞，獵狗白跑一趟，勞而無功，一定是非常惱喪的。

但是，假如獵狗熟習地理，知道洞的所在，它當走直線趕到洞口。它跑過的距離是$\sqrt{100^2 + 60^2}$或116.6步，此時兎跑了58.3步，離洞還有1.7步。

這獵狗一定可得到一頓豐盛的大餐了。

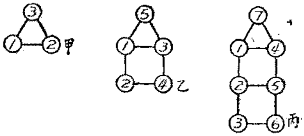
兎向北跑，狗向兎追，兎跑了 $66\frac{2}{3}$ 步就被狗趕上。 這問題在 Sam Loyd 的 Cyclopedia of Puzzles 書上有另一種解法。 先設兎向西跑，跑 100 步就被狗趕上。 再設兎向東跑，跑 $33\frac{1}{3}$ 步被狗碰着。 兎向北能跑的距離是以上兩數的平均值，就是 $(100+33\frac{1}{3})\times\frac{1}{2}=66\frac{2}{3}$ 步。

貳柒

雜　題　(四)

(一)前面移棋換位游戲是用左右各四子，使它們互換位置，保持順序，必須移動許多次，才能成功。　現在請讀者玩幾種棋子少一點的移棋換位遊戲。

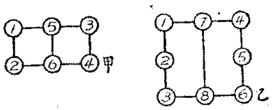
第27.1圖的甲，乙，丙，是要將左右各子，二子，三子互換位置。甲是無可再簡單了，只要走1，2，3，三步就成了。　甲圖左右如添一子就是乙，左右再添一子就是丙，如左右各四子就是前移棋換位(二)的第15.3圖甲。現在的乙，丙兩題，應該怎樣走？



第　27.1　圖

*　　*　　*

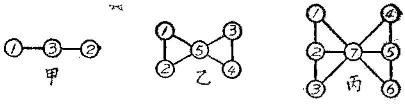
(二)第27.2圖甲，乙是移棋換位(一)第14.5圖甲的簡化題目。甲題只要走六步，16，31，63，25，42，54．非常容易。乙題的走法，請讀者研究。



第　27.2　圖

*　　*　　*

(三)前移棋換位(三)第16.2圖減少棋子數目，就得下面第27.3圖甲，乙，丙。甲題只要走三步，1，2，3。乙題也很容易，只要八步，4，1，2，5，3，4，1，5。丙題如何走法，請先自己試試，再看後面的答案。



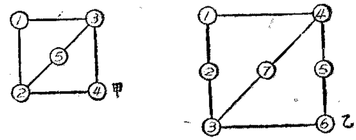
第　27.3　圖

*　　*　　*

(四)前移棋換位(二)第15.4圖丁減少子數，得下面第27.4圖甲乙。甲題的走法是：3，4，2，5，3，1，2，5，共計八步。　乙題很難，一定要多化一點時間

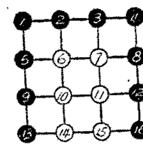
才有解決的希望。

*　　*　　*



第　27.4　圖

(五)如第 27.5 圖先畫一個棋盤。用十個棋子分別放在棋盤上 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16 等處。先挑選一子，將它拿起，放在置定的一個空位上，再拿一子跳過一子，放在空位上。將被跳的子拿開，就算被吃掉了。自起初移動一子之後，要連跳九次，連着吃去九子，求移動棋子的方法。



第　27.5　圖

此題會見於 H.E. Dudeney: Amusements in Mathematics 與陳懷書的數學遊戲大觀(商務出版)等書。書上列出如下的答案：

先將 8 處之子移到 10，然後再 911, 19, 135, 168, 412, 1210, 31, 19, 911。接連吃掉了九子，只餘最後一子在 11 處。

但是，除此之外，還有其他方法嗎？

*　　*　　*

(六)前題所說的書中，還有一個題目如下：在地上畫一排十個方格，各註號數如第27.6圖。四個男子分別立在左首四格裏。四個女子分別立在中間

a_1	a_2	a_3	a_4	b_4	b_3	b_2	b_1	x_1	x_2

第　27.6　圖

四格裏。右首 x_1, x_2 兩格暫時空着。相鄰的兩人可以移動，先左右調換了，再走進空格。像這樣移動五次之後，八個人仍舊成不間斷的一排，並且要一男一女的相間排列着。書上列出的移動法如下：

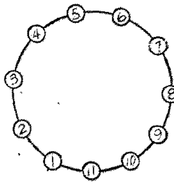
$$a_2\,a_3,\ b_3\,b_2,\ b_1\,x_1,\ b_4\,b_3,\ a_1\,a_2.$$

此外還有不同的方法嗎？　此題就是移棋相間，須參看移棋相間(二)的例移二。

*　　*　　*

(七)前題所徵引的書中，另有一個移棋換位的遊戲，畫十一個小圈，內註號碼，排成環形，如第 27.7 圖。放五個黑棋子分別放在 1, 2, 3, 4, 5。在 6,

7，8，9，10 各放一個白棋子。棋子移動時，可以移入相鄰的空位，也可以跳過一個異色鄰子而到空位。移棋目的是要求最簡單的移動法，使黑白棋子左右換位。注意，棋子上並無記號，所以換位以後棋子的順序是無關重要的。

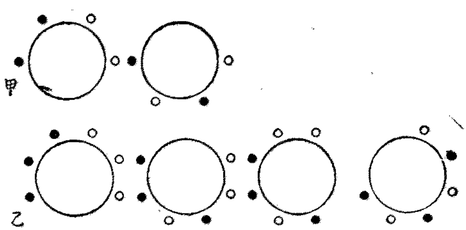


第 27.7 圖

原書所列答案是二十六次移動可達目的。其實這移棋次數，未必是最少的。讀者還能想出更好的答案嗎?

＊　　　　＊　　　　＊

（八）以前所講過的移棋相間游戲，都須要將棋子列成一橫排。但是將棋子列成環形，也是很有意思的。如第 27.8 圖甲代表黑白各二子的移二法。乙代表黑白各三子的移二法。用圖畫記錄移棋法，雖然明瞭，但很不好。最好是用記位法。移棋開始時，棋子排成一環，下面留兩空位。將棋位註上號數，從左下方第一子起，1，2，3，……到第二個空位爲止。如右甲圖是 1 至 6，在乙圖是 1 至 8。黑白棋子的數目各爲 n，第 27.8 圖甲乙可以寫如：



第 27.8 圖

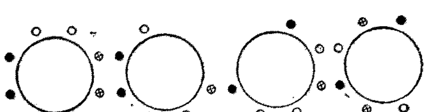
$$n=2 \qquad 2\,3.$$

$$n=3 \qquad 3\,4,\quad 5\,6,\quad 2\,3.$$

黑白各二子時，只有一種移法。子數增多時，移法的變化很多。黑白各四子或五子時，應該如何移棋，請各人自己試試。

＊　　　　＊　　　　＊

（九）用三種顏色棋子，如黑白紅，也能作環形移棋相間的游戲。如第 27.9 圖就是一列。



第 27.9 圖

$n=2$　4 5，　2 3，　5 6。