開明中學講義

開明算術講義

劉薰宇編

開明函授學校出版
開明書店印行

開明中學講義

開明算術講義

劉薰宇編

開明函授學校出版
開明書店印行

開明算術講義
二十四年十月初版　卅五年十二月六版
每冊定價國幣三元
編著者　劉薰宇
發行者　開明書店
代表人范洗人
印刷者　開明書店

(129 P.) H　詡

編輯例言

一. 本講義爲初級中學程度，以適合自學自修爲目標而編輯，亦可以供在校學生作課外自習之用。

二. 本講義取材範圍根據部定中學課程標準。

三. 本講義爲適合自學起見，行文講釋力求詳細明白，但亦不陷於累墜嚕囌，以要言不煩爲主旨。讀者對於書中所言，必須一一體會，不厭反覆求詳，勵行復習其效乃見。

四. 本講義設題雖未見多，但均極精要。演題乃學算進步必經之階程，讀者必須實事求是，逐題親自演算，否則進步難見；空讀講義，實屬徒勞無功。

五. 爲學貴有恆心，自學尤屬必要，算學一科向被視爲乾燥無味，但能用心精進，則其中自有妙味，讀者應於此中發見學習趣味，則自然樂於學習，不患不成矣。

六. 本講義雖算術、代數、幾何各訂分册，但有一貫之索線，須按步就班，循序漸進。

七. 本講義所附小註說明，乃算學中最精警之語，幸勿忽視，如能善於體會，不難升堂入室，爲進而修學高等算學之基礎。

八. 本講義因篇幅關係，說明容有未盡詳明，取材容有疎漏，幸海內明達有以教正之。

目　錄

第一章　緒論

第二章　整數及小數的基本四法

第三章　複名數

第四章　應用題解法

第五章　整數的性質

第六章　分數

第七章　比及比例

第八章　成數算法

第九章　利息算

第十章　開方

第十一章　近似值與省略算法

第一章 緒論

第一節 學習算術上的若干注意

算學在各學科中，自古就占有很重要的位置，到了近代物質文明發達之後，牠的地位，更加增高，一切自然科學，都要把算學作爲根基，方能成爲一種嚴密純正的科學，社會科學方面，也很有借重算學的趨勢，卽哲學心理等所謂精神科學，最近也頗採用算學的理論和方法，所以算學差不多成了一切科學的基礎了。這固然因爲近代的算學有了很大的進步之故，而算學的理論的正確和嚴密，也不失是一個重要的原因。

關於一般的算學的理論，我們現在且不談，我們先就目前所要學習的頂淺近，頂初步的算術來看一看。第一牠是算學的基本，算術中所講述的，雖則不外乎加減乘除四法的計算及其應用，而這四法卻是一切算學的根源。

其次，算術中所講述的，是普通日常生活所必需的知識，那些計算，是每人所必要的。一個人無論從事於何種職業，總脫離不了那種計算的。而且近代生存競爭愈演愈劇，經濟的戰爭，愈加複雜，緜密而複雜的計算，更加是必要了。算術就是供給此種知識，並且加以熟練，使得將來可以應付社會上種種的問題。

其次，對於思想的陶冶，也很有功效，這並不限於算術，凡

算術和算學

算術是算學中的一科目，而且是頂淺近的科目，算學所包括的範圍很大，科目很多。普通分初等算學與高等算學。算術，代數，幾何，三角等爲初等算學，解析幾何，微分，積分，微分方程式等爲高等算學。

是算學均有此種功效的；因爲算學的理論很嚴密，學習算學，思考非十分周密正確不可，因此便可以養成你一副清楚明敏的頭腦，這是很重大的功用。至於其他對於你升學的幫助，對於你增進地位的幫助等，還算不了什麼事。

但是常常有人說，算學是使人頭痛的學科，算術是討厭的東西，倘使果眞如此，那有點爲難了。可是算學的所以被人視爲畏途，卻不一定由於牠本身的過失，教授者不得其法，學習者不得其法，都是重大的原因。所以倘使你懂了學習算學的方法，對於算學便不難發生興味，而算學給你的不會是頭痛而當是欣喜了。

那麼，學習算學的方法，是怎樣的呢？這也沒有什麼特別的祕訣，頂要緊的你先要理會算學的性質，算學是重嚴密，貴正確的，所以你先得對於嚴密和正確方面致力，第一對於一個名詞，即術語的意義，要徹底了解；第二對於每一種算法的意義和方法，要根本弄清楚。前者是概念的把握，後者是方法的理解。這二者若能做到了，你對算學的學習已可算是入門了。

以上所說的是關於一般的算學的話，現在再來講一點算術的學習法。其實講起來根本的原理仍不外乎上述二點，不過我們在這裏講得更仔細一點具體一點。

算術的效力

1. 熟習日常應用諸計算。
2. 獲得生活上必要的有益知識。
3. 涵養嚴密正確的思考力。

學習算學的祕訣

1. 學習算學的根本在貴正確。
2. 嚴密的思考，是算學上進步的關鍵。
3. 對於解答問題感着興味，是算學成功的祕訣。
4. 理解術語的意義，明瞭計算的方法是算學升堂入室的大路。

1. 須充分理解根本的法則與問題且反覆練習 整數小數，分數的加減乘除四法，在小學中已經學習過的，所以不至於做不出來。但是可也有做不出，做錯，做不快等等的毛病。凡是計算，一定要做得不錯，而且快速，方才可以有進步之望。加減乘除是算術中一切算法的基礎，尤其不可忽略。所以對於問題，應當反覆練習，算得溜熟。在這講義中，因爲篇幅的關係，不能多設問題，所以對於問題，不要算出了就算完事，須得多算幾遍，弄得很熟方好。而且這裏的題目，都選了根本的，重要的；做熟了一個，別的此地所不舉的，也可以迎刃而解，所以更加有熟習之必要。俗語說，“熟能生巧”，這是一句從經驗中得來的話，希望大家不要忘記。

要使加減乘除的計算，迅速而且正確，心算的練習，是不可少的。心算熟練了之後，筆算的加減乘除，自然也精熟了。因爲各種算法，脫不了加減乘除這基本四法，而此四法的各個，再分開來看，也就成了各個數字的計算。例如 $123+456+789$ 的計算，分開來便是 $3+6+9$，和 $2+5+8$，和 $1+4+7$ 的基數的計算而已。所以把四法的心算習練熟了，是有很大幫助的。

各種術語及算法的意義須得辨別淸楚。譬如什麼叫分數?什麼叫百分比?乘上一個小數是什麼意思?用分數去除是要怎樣的?這一類的術語的概念和計算法則，要記牢，而且弄得淸楚，方可以應用自如。凡是算術上的應用問題做不出，都因爲不曾把算術中各事項的根本概念弄淸楚之故。倘使對於術語及

〔注意〕 理解術語的意義和明瞭計算的方法，是很重要的。但僅有理解是不夠的，記憶也很重要，因每當應用時，必須其立時能在腦中浮起，方可指揮如意，得心應手。所以在最初時，應下一番苦功去記熟；有了理解的記憶，與硬記不同，當較有興味。多做問題，爲練習記憶與整理思路的一大妙法。不過要知道，在記憶之前，一定得理解，否則變成硬記，便有食而不化，不能應用之病。

算法有了明白的理解，那麼卽使不勉強記牢死板板的法子，也可以自己想出方法來計算的。

上面已說過“熟能生巧”，練習問題最能幫助整理及記憶書本中的知識，所以須要勤勉。卽使做不出的問題，也須苦苦思索，以求其解，當你經了苦苦的思索而做出了時，那種欣歡也是很大的。切不可一遭到困難，就去請教別人。因爲思想是由鍛鍊而益精熟，你若偸巧，不肯用心，便要不能進步的。關於應用問題，更加須要留心，因爲那更加要求你的思索。須得用自己一人的力去衝破難關。自然，果眞千思萬慮想不出來而請教別人，那也是無法可想的事，但是你倘使留心下面所述的問題解法，對於無論怎樣的問題，總會慢慢地想得出來的。

2.　計算問題的練習　計算在算術是很重要的工作，算術的目的差不多就在計算的精確和迅速，所以練習是不可少的。關於練習方面，很有要注意的地方，現在記在下面。

A.　算式，演草，答數，說明，須要寫在一定的地位上，而且寫得很清楚，那麼看去可以一目了然。

B.　數字的大小，距離，間隔等，也要有一定。

C.　覆核二三回，或行還原的檢查。

其次，迅速也是很必要的，而要養成迅速的技能，除多作練習外，沒有別法，所以對於本講義的課題，須一一演習，再好還得演習別的題目作爲補充。

理解的重要

算術是計算的學科，所以一切事項，總是歸結於計算，而頂重要的也是在計算。但不可因此就以爲只要能做機械的計算就完事，往往有人食而不化地硬記牢死板板的計算方法，而不理會其中的意義，以至問題的觀點一變，便弄到手足無措，一點也做不出來，這是很不好的。明白計算的理路，比記牢計算的方法重要，方法忘卻了還可以自出心裁去想方法出來計算，所以我說理解比之機械的計算更加重要。

往往有人以爲計算問題，不過是機械的工作，沒有什麼多練習的必要。其實不然，計算雖是機械的工作，但因有必要，所以非練習不行。世間實際事情，很有許多要求計算的，小至一家的柴米油鹽的零用賬，大至一國財政的歲入歲出，沒有一項不是計算，那可以因爲是機械的工作而排斥之。而且對於數字本身感到興味也是一件美事，有許多的統計人員，差不多天天在數字中討生活，可知計算是無法避免的，因而有熟練的必要。

3. **應用問題解法要訣** 學習算術的每逢碰到了一個難題目，便要手足無措地不知從那裏下手，不知道着眼在什麼地方，取怎樣的一種方法。完全像黑暗中摸索一般瞎衝，甚而至於還有去硬湊答數的，那無論如何做不對，做不好的。解題的第一要點，要先定一觀點，根據了這一個觀點，一步步推測下去，以求答數。這觀點當然因了問題而不同，不可一概而論，也不是有一定的方法，但思考的大體的順序卻是有的。現在把這解問題的思考的順序寫在下面，照這樣去思索問題的解答，大概可以不致於迷路，這也可以說是解應用問題的要訣。

A. 認清題意 做題目的人，往往有只看了題目的一半，就動手做了，以爲這樣是可以達迅速的目的，那是大錯的。做題目時，至少先得把題目仔細看二三遍，認清題目的意思，題目所求的是什麼，已知的是什麼。

B. 立算式 明白了題目中的已知的和所求的，再仔細想想，如何可以用已知的算出那個所求的來，於是立一個式子。切不可在未立算式以前就亂算。

C. 演算 算式已立，須要迅速而正確地把其結果算出。

D. 檢驗 答數算出之後，再把問題看一遍，檢驗答數是否合於題目。往往有人一點也不覺到題目中所求的是日數而算出了人數來的錯誤。而且計算也許有錯誤，所以有再核一遍的

必要。

倘使能照上面所講的一一做去，一定可漸漸得着進步，進步了便可感到興味，感到了興味學習益加起勁，結果便是更加的進步。所以第一要着，是在於誠心誠意地學，一步也不可取巧偷懶。

4. 創造問題 照上面所講的去對付各種問題，如能用心練習，必能達處置裕如之境。現在要說更進一步的自己去創造問題，尋出問題來，這樣就可說算術的功效已到了最上的程度了。世間的萬事萬物中間，常有數量的關係潛伏着，對於日常瑣事，倘使下細心的觀察，必定有許多未知之點可以發見。而其中有數量的關係的，便可視爲算術的問題，而加以演算，以求其解決。最淺近的如物品的買賣，常是一種很簡易的算術題，而商業上物品的交易，常常附帶了如水脚利潤蝕耗等等，會變成極複雜的題目。所以只要能看得清楚，世間便有不少的題目可供你計算的。

有些問題，不是這簡單的算術方法所能解決，你尋到了這樣的問題，便知算術之力，是不夠的，於是就生了更求高深學問的思想，那是一個很好的求學的動機。這樣因實際的需要而去學習，一定有很大的功效，對於學問便會感到興趣。學問的進步，往往由這種需要逼成的。

我們將在下面講述算術的各種方法，希望大家都能依照了上述的法則用心去學習，那麼，自然漸漸會有進步，會感興趣，見了算學這一門功課，從此不再頭痛了。

問學習算術的方法?

答：1. 多做題目，練習心算。

2. 明白術語及算法的意義。

3. 以嚴格的精神，不許絲毫有誤。

4. 解問題時，先抓住題目的要點，而行理論的思考。

第二節 數與量

1. 命數法 1,2,3,……這些由若干個1聚集起來的數,叫做自然數。自然數和後面所說的0合起來,總稱爲整數。

從1起,順次增加1的數爲2,3,4,5,6,7,8,9,這九個數叫做基數。基數就是基本的數。

9再加1,成10,10是1的十倍。我們從這裏起,每十倍給一個名稱。

一的十倍叫十,十的十倍叫百,百的十倍叫千,千的十倍叫萬,萬的萬倍叫億,億的萬倍叫兆。

現在把自十以上每十倍的數的名稱,連一自右而左寫在下面。

兆,千 百 十 億,千 百 十 萬,千,百,十,個。
億,億,億 萬,萬,萬

這一種數的名目,通稱爲自然數的位,依次叫做個位(通稱個位,或單位),十位,百位……。個位卽是下面所說的單位之意。

從百以上的位的數只有一個時,大都是叫着一百,一千,……

命數法是給數以名稱之法

從一起每十倍,給數定一個位的名稱,使牠進了一位叫十進法。這是一種頂便利的命數法。從前古代人,也有不用十進法,而用五進,十二進,二十進的,計算上很不方便,現在都淘汰了。

中國舊來定位的名稱,有大小二法,大法卽上面所記的萬萬爲億之法,小法是十萬爲億,十億爲兆,今自右而左記各位之名稱於次:

垓,京,兆,億,萬,千,百,十,個。

這些也是每位十進的,普通說中國人口四萬萬,也說四百兆,這兆是用此地所說的小法的。此法現在已經很少人使用了,近教育部依中華書局之請求而通令廢止萬以上的億兆等名稱,改稱億爲萬萬,兆爲萬萬萬,未免萬字太多了。

把一說出來的，但有時也把一略去，而只說百，千。在十只有一個時，往往是把一略去的，但也有少數的例外，叫着一十的。

2. 數字 我們現在所用的數字，共有十個。1，2，3，4，5，6，7，8，9，這九個通稱阿刺伯數字，其源出於印度，由阿剌伯人傳入歐洲，遞化而成，是萬國共同採用的。還有個 0，其發明較晚，而其用處則甚大。

從 1 到 9 的九個表基數的數字，對於 0 特稱爲有效數字。

3. 記數法 懂了命數法，有了十個數字，我們可以記數了，無論怎樣的數目，都可以記出來的。記數法，就是用數字記數出來的方法。

記數的方法，先定數的位，個位上記個 5，就是五，十位上記個 6，就是六十，百位上記個 7，就是七百，千位上記個 1，就是一千。所以一千七百六十五的記法便是 1765。同樣，

數字是代數目的符號，中國商界所常用的湖州記，卽以 〡〢〣〤〥〦〧〨〩 代一，二，三，四，五，六，七，八，九；也是一種很好的數字。

還有一種羅馬的數字，在鐘表的面上，或書册的脊上，可以看見，那是古代的遺物，很不方便，不過也有因好奇而用着的人，今略說於次：

羅馬數字	I	V	X	L	C	D	M
	1	5	10	50	100	500	1000

從這數字可知牠是用着一種五進法的，記數的方法照次規則。

（第一） 寫着同一數字，或在某數字右方寫着比該數字爲小的數字，是表示這些數字的和。

如 III 爲 3，XX 爲 20，VI 爲 6，LXX 爲 70，DCCC 爲 800。

（第二） 某數字左方寫着一個比該數字爲小的數字，表示其差。

如 IV 爲 4，IX 爲 9，XL 爲 40，CM 爲 900。

（第三） 記幾千幾百幾十幾時，應用上記規則，而位數高的寫於左方，順次向右。

如 26 爲 XXVI，104 爲 CIV，1931 爲 MCMXXXI。

九千六百五十三	記作	9653
十二萬八千三百十五	記作	128315

當一個位上是空缺時，記上個 0，譬如八十這個數，個位的沒有，而十位是 8，所以記作 80，

二千零六十	記作	2060
十五億零六千四百	記作	1500006400

中國的文字記法，大都是直行的，所以在公署，銀行，商店中，也有用了中國字，把數目直行記載的。

如把

30,765
809,437
56,720
428
17,654,321

記作

三〇、七六五
八〇九、四三七
五六、七二〇
四二八
一七、六五四、三二一

上面的每隔三位加一逗點，是從西洋抄來的方法，因爲他們的命數法，又是每隔三位一進，給一個名稱，這逗點是爲一看就知道其數的位，爲讀數便利計而加上的。但中國的命數法，是

在重要的文書賬冊上，數字往往用特別複雜的寫法，如用壹貳叁肆伍陸柒捌玖拾佰仟以代一二三四五六七八九十百千等，那是爲防偷改竄之故，現在每逢關於銀錢的數目，常用此等難寫的字。

中國命數法中，十進之外又是萬進的，萬萬爲億，萬億爲兆，而西洋則十進之外是千進的，所以每隔三位加以標點，使容易知道數的位，這在中國不但無用，反而不方便。

讀數目時，凡所缺之位在中間，則零字須讀出，如 107 爲一百零七，20857，二萬零八百五十七，但所缺爲最後之若干位則不讀出，如 50 非五十零而爲五十，2500000 非二百五十零萬零零零零而爲二百五十萬。

每四位一進的，所以卽使在隔開三位加了逗點，也沒有什麼特別便利。

4. 數的讀法 數的讀法，先從數的個位起，個十百千萬定了位，再幾萬幾地讀出來。

如

3	8	5	6	4	2	7
百萬	十萬	萬	千	百	十	個

便是三百八十五萬六千四百二十七了。

這樣一位位數上去也很不便，習熟之後可以每四位一跳而定其位的。

如

1	2	3	4	5	6	7	8	9
億				萬				

便是一億二千三百四十五萬六千七百八十九了。

但對於十分大的數目，也可以不用讀出其位數的名稱來，只念着數字就行。

如

3 1 4 1 5 9 2 6 8 7 4 3 0 5 8 6 2 1 0 7 5

就讀作　三一四一五九二六八七四三〇五八六二一〇七五可也。

5. 量 算學的目的之一，在計量一切事物。世上的事物有的是不可計量的，如善惡，德行，品位，豪爽，放浪等等抽象性的東西，便是。但具體的事物是可以計量的。在算學，我們把那些可以計量的東西，都叫做量。量就是一種分量的意思，也就是可以計量的東西之意。例如路程的長短，氣溫的高低，米穀的多少，時間的長短，可以用幾里，幾度，幾石幾斗，幾分幾秒表出來，所以路程，氣溫，米穀，時間等，都是可以計量的量。

量可以分做二種，有的東西可以一個個數着知道的，如人可以一個個數的，桃子李子也可一個個數的。椅子幾把，桌子幾

張，鉛筆幾枝，書幾册，房子幾所等等，都是可以用手指點了數得出來的。這些量叫做不連續量。

別的一種量，是不能用手指點了數的，須要去度量了才知道。如一匹布的長短，要用了尺去量了，才知道是幾丈幾尺。一壺的水，用秤秤了，才知道幾斤幾兩；或用升量了，才知道幾升幾合。這些不能夠一個個分開來的量叫做連續量。

計量各種量時，總用着一個作爲基本的東西，數桃子是一個個地數的，量布是一尺尺地量的，這就是把一個，一尺作爲基本了。這作爲計數或度量的基本的，叫做單位。

量的大小可以用數來表示。如二籃桃子，一籃有三十個，另一籃有五十個，那麼個數的多少，可以計數而知的。二匹的布，一匹長二丈，一匹長三丈，布的長短是可以度量而知的。

這樣，度量每種量時，所得的結果，總是一個數下面附加着度量時所用的單位的名稱，如桃子五十個，布三丈，這種附有單位名稱的數，叫做名數。

對於名數，普通的數叫不名數。

名數有單名數與複名數二種，如說布一丈七尺五寸，時間一點二十五分十二秒，在一個量的名數之內，不止用一個單位的名稱時，叫複名數。若一量只用着一個單位，如布七尺，時間三十分，便叫單名數。

6. **分數和小數** 人，或是桃子李子，度量起來，把其中的最小的（上說的一人，一個），作爲單位，因爲沒有比這再小的，

〔注意〕 我們日常所遇到的數，大都是名數，不名數只是學問上的抽象的存在。當我們說到數時，總帶着物名的，例 3 日，12 小時，50 里路，8 個人等，這裏的 3, 12, 50, 8 都是名數，而一般不名數的 3, 12, 50, 8 等，只在書本上存在，當上我們口說時，這 3，這 12，已是成了一個數字，是一個數字，而非 3 或 12 的數了。這 3 或 12 的抽象的數，只在我們思考中是存在的。

所以那個量一定是用整數表出來的。但在度量布的長短,或水的輕重這樣一類連續量時,無論用了怎樣小的單位,因爲還可以有更小的量,所以要用這單位來表這個量,便得到比 1 更小的數。

所以把 1 二等分,三等分,四等分……起來,叫做二分之一($\frac{1}{2}$),三分之一($\frac{1}{3}$),四分之一($\frac{1}{4}$)……又如五分之一($\frac{1}{5}$) 的二倍,三倍等,叫五分之二($\frac{2}{5}$),五分之三($\frac{3}{5}$),……。這樣的數,叫做分數。分數就是單位的幾等分,或者這幾等分的若干倍。

寫在橫線下面的數,表示把 1 分作幾等分的,叫做分母。橫線上面的數,表示把那幾等分了的 1 再幾倍,叫做分子。例如 $\frac{3}{7}$,則 7 是分母,3 是分子,$\frac{1}{5}$ 則 5 是分母,1 是分子。

分數之中,以 10, 100, 1000……等爲分母而比 1 爲小的分數,特別叫做小數,如 $\frac{3}{10}$ $\frac{25}{100}$, $\frac{625}{1000}$ 即是小數。

$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ 等分子爲 1 的小數,稱爲小數的位,普通叫做小數的一位,二位,三位。也有把 $\frac{1}{10}$ 叫分,$\frac{1}{100}$ 叫釐,$\frac{1}{1000}$ 叫毫(或毛)的。

整數與小數混合的數,如'三又十分之七',叫做帶小數。

帶小數的記法是讀者已知的,依着各位的數字順次記下去,不過在小數部分和整數部分之間打一個點(·),這個點,叫做小數點。用了小數點之後,不用分數的記法了。

小數點的記法,記在小數左下角,如十八又十分之五記作 18.5,在直用行記載時,是點在中央的。

〔小數的意義〕 小數由上面所示,爲較 1 小之數,即其數的位較整數最小的個位尤爲小的數。這小數的位是以十退的。分,釐,毫之下有絲,忽,微,纖等名稱,但實際很少使用。

單是小數而沒有整數部分時，在小數點以前記一個 0，如 0.36，如 0.072 等。

小數和帶小數的讀法，以直念數字爲便，如 67.584 讀作六十七又小數點五八四，或六七點五八四。但小數部分很少時，也有念出分，釐，毛等的，如 1.25 讀一又二分五釐，0.625 讀六分二釐半。

〔注意〕 記小數時,往往有人略去了小數點前的 0 不記的,如 0.36 及 0.072,記作 .36 及 .072,這種略法,往往有把小數點脫落或看錯的毛病,仍以正式在小數點前記 0 爲是。

問題:

1. 解釋次記各名詞的意義:——自然數,整數,基數,數字,有效數字,名數,不名數,分數,小數,量,單位。
2. 量的大小怎樣可以知道,怎樣表示出來?
3. 數的位,是怎麼意義?
4. 小數的位,怎樣定法?
5. 說出連續量與不連續量的分別來。

第二章　整數及小數的基本四法

加減乘除是各種算法的基本，叫做基本四法，也有人叫做四則。

第一節　加法

［例］　某地有甲乙丙三個小學，甲校有學生305人，乙校有學生287人，丙校有學生418人，問某地小學學生總數爲若干？

求某地小學學生的總數，只要把甲乙丙三校的學生數305人，287人，418人，加合起來卽得。

這樣　**把二個以上的數，加合成一個數的算法叫做加法。由加法計算所得結果，叫做和。**

上例用算式記出來是

305人＋287人＋418人＝1010人。

答：某地小學學生總數一千零十人。

上記算式中的‘＋’是加法的記號，讀作加。‘＝’是表示相等的記號，讀作等於。那個式子卽是說305人加287人加418人等於1010人。

普通的小數的加減乘除各種計算，和整數是一樣的；所以併在一處講述，不另立一章，以避繁複。

和的別名，有總計，合計，總數等。

所以　**算式就是用數字及符號表示計算的種類和順序的樣式。**

加法怎樣計算，是諸君已經學習過的，現在只簡單地說述那容易誤解及應該注意的幾點。

［例 1］　求 453＋6789＋14732＋5264＋307.

算草

$$\begin{array}{rr} & 453 \\ & 6789 \\ & 14732 \\ & 5264 \\ + & 307 \\ \hline & 27545 \end{array}$$

答：27545.

〔說明〕

1.　把要加的各數並寫，使其相同的位對齊在一直線上。

2.　從右端(個位)起，從上到下加起來，即 3＋9＋2＋4＋7＝25，把 5 記在個位上，而把那個 20，加在十位上的第一個數50。再順次加下去，十位的數是 2＋5＋8＋3＋6＝24，把 4 記在十位上，而把 2 加到百位的數上去。這樣順次把百位，千位，萬位的數一一加起來。

3.　檢算可以從右端，自下而上，和原來的方向相反，再加一遍，倘使結果一致，那就行了。

計算的符號，減用‘－’，乘用‘×’，除用‘÷’等，諸君早已知悉，以後不再說述。

加法的計算，歸結於基數的連加，故要求加算的精熟，須先熟練九個基數互相連加。這可以先練習 1,2,3,4,5,6,7,8,9 各數，各個加以一到九的九個數的結果。最好用口念熟，如說一一，二；一二，三；一三，四……到九八，十七；九九，十八等。

其次再練二位數的加算，這可以先從 1 起逐次加 2。口中連續念出，直到超過 100 爲止。如

1,3,5,7,9,11,13,……101.

再念從 2 起，逐次加 2 的結果：

2,4,6,8,10,……100.

［例 2］ 求 60.5 元 +82 元 +6.709 元 +93.95 元。

算草

$$\begin{array}{r} 60.500 \\ 82.000 \\ 6.709 \\ 93.950 \\ \hline 243.159 \end{array}$$

答：243.159 元。

〔說明〕

1. 把各數相同的位對齊了寫，從右端加起。

2. 名數的計算，也和不名數一樣，只要在最後的答數上再加寫一個單位，便成名數。

名數的加法，必須是同類同單位方可，否則要弄出 5 尺 +4 丈 =9 尺（或丈）的笑話來。

再練從 1,2,3 起，逐次加 3 的結果：

1,4,7,10,13,16,19,……100;

2,5,8,11,14,17,20,……101;

3,6,9,12,15,18,21,……102.

再練從 1,2,3,4 起，逐次加 4 的結果，照樣下去，直到 1,2,3,……9 各數逐次加 9 的結果，念得溜熟之後，加法就很容易算了。

這樣習熟了之後，在計算時，只要看了數字一個個念下去即把和得出來了。這樣的算法，叫呼唱法。

每逢計算加法時，一位的數字有了幾十以上的，把幾十進到上一位，常有人把這個數寫在旁邊以防遺忘，這是很不好的習慣，要算法的精熟，最好不要用這種方法，在計算減法乘法除法也一樣。

每一計算，難保沒有錯誤，所以檢算是必要的。照原來的算法，再計算一遍也是可以的，但容易蹈襲原來的過失，所以頂好要用和原來不同的計算法。

〔注意〕 在相加的時，看見有幾個數之和爲 10 時，那麼就利用牠而計算。例如

$$\begin{array}{r} 54126 \\ 8734 \\ 13250 \\ 2987 \\ 3123 \\ \hline 82220 \end{array}$$

中個位上的 6 和 4，7 和 3；十位上 2，3，5；8 和 2，百位上的 1，7，2；9 和 1，千位上的 4 和 3，3；8 和 2 等，都一看而知其爲 10，就可利用了。

計算小數的加法時，要記着把小數點對齊，那麼各相同的位自然齊了。

加的數很多時，可以分做幾羣，各各相加，再把各羣的和加合起來。

習題 1.

計算次記加法的各式：

1.	2.	3.	4.
72	60067	71037	61824
3206	88345	239	4040
800	123	59650	82679
5057	576	87511	18392
2438	12345	40030	13600
6364	31	61004	5843
2198	735	5899	29927
9025			

加法練習上，如已熟練上述以口呼之法，最爲便利。

〔例〕

$$\begin{array}{r} 53613 \\ 1742 \\ 35321 \\ 76289 \\ 84567 \\ 57524 \\ +\quad 58826 \\ \hline 367882 \end{array}$$

呼聲

3, 5, 15, 22, 32

3, 4, 8, 18, 28

2, 8, 18, 20, 30, 38

3, 6, 7, 12, 22, 29, 37

3, 8, 18, 26, 36

如用此法來加，在檢算時，更爲便利。

〔例〕

$$\begin{array}{r} 7209 \\ 5793 \\ 464 \\ 6526 \\ +\quad 507 \\ \hline 20499 \end{array}$$

呼聲	檢算時的呼聲
9, 12, $\underline{16}$, 22, 29	7, $\underline{13}$, 17, 20, 29
2, 11, 17, 19	2, 4, 10, 19
1, 3, 10, 14, $\underline{19}$, 24	1, 6, 11, 15, 22, 24
2, 9, 14, 20	2, 8, 13, 20

上面數字下有橫線的最好不要呼出。

檢算還有一種較便利的九減法，以後將說到。

5.	6.	7.	8.
62996	11168	61811	67847
189	49	72928	6003
66643	51762	734	48271
14406	25338	8693	19354
4879	43579	54927	672
981	6954	15571	87410
28709	40794	4180	49

9.	10.	11.	12.
689042	687082	192028	27
123456	249	511329	922003
27	38675	763817	753962
3458	341214	689101	666547
14359	158492	143028	859100
987654	99886	795412	1177

13. 求上1至6的和的總數。

14. 求上7至12的和的總數。

15. 求上1至12的和的總數。

第二節　減法

［例］ 某軍所部屬的兵士共二萬八千五百人，經過一次戰事之後，戰死和失蹤的達五千一百二十八人，問某軍尚有兵士若干人?

所求的數是以全兵士28500人中減去損失的5128人，即

28500人－5128人＝23372人。

此處不載各題的答數，因爲此種計算是要求檢算的，所以沒有載答數的必要(有了答數，竟連算都不用算了)。倘使此種算法，不用檢算，那麼算十個問題，還不如用檢算而算五個題的功效大。

這樣　從一個數中，減去不比這數大的另一數所得的結果叫做差。求二數的差的算法叫減法。減去的數叫減數，原來的數叫被減數。

減法是加法的還元算法，在上例中殘存的 23372 人和損失的 5128 人合起來，成爲原來的總數 28500 人。故

差與減數的和等於被減數。

所以減法又可以看成知道了二數之和及一數而求他一數的算法。

從 5 減去 5，殘餘的是什麽也沒有了。這替牠起個名字叫零，用 0 來做記號，把 0 也算成一個數，一般可以說：

減數和被減數相等，其差爲零。

零的加法與減法

(1)　某數加零，等於原數。

例如 $5+0=5,\ 0+5=5.$

5 加 0 卽 5 上不加什麽，所以仍是 5。0 加 5 是沒有什麽的，加上了 5，所以結果得 5.

(2)　某數減零，等於原數。

例如 $5-0=5.$

減數，被減數及差的關係

1. 被減數－減數＝差。
2. 被減數＝減數＋差。
3. 被減數－差＝減數。

名數的減法，也和加法一樣，須是同種類同單位的名數，方可施行。例如 15 人－7＝8 人。這式子是不通的，因名數與不名數不能相減。又 17 元－5 角不是等於 12 元(或角)，因爲單位不同，也不能相減的。

就是從 5 減去 0，卽不減去什麽，還是原來的 5。

所以 0 對於加減和沒有一樣，因之叫無效的數字，而 0 以外的九個數字叫有效數字了。

減法怎樣計算，一定已爲諸君所熟知的，現在只簡略地說述如下：

[例 1] 求 16456-7618.

算草

$$\begin{array}{r}16456\\ -\quad 7618\\ \hline 8838\end{array}$$

答：8838.

〔說明〕

1. 照加法一樣把相同的位對齊了寫。大的被減數記在上面。

2. 以右端的個位逐一減去。第一個位上的 8，從 6 不能減，向上一位的 50 中，借下 10 來成 16，減 8 爲 8，記在個位上。

加法精熟之後，減法自然會熟的，此種算法的基本練習，爲從 100 中連減從 1 到 9 的各數，如能多作別的練習更佳。以下的十個連減的式子，若能反覆練熟，也很有幫助的。

1. 45-3-5-1-8-9-6-2-7-4.
2. 46-3-5-1-8-9-6-2-7-4-1.
3. 47-3-5-1-8-9-6-2-7-4-2.
4. 48-3-5-1-8-9-6-2-7-4-3.
5. 49-3-5-1-8-9-6-2-7-4-4.
6. 50-3-5-1-8-9-6-2-7-4-5.
7. 51-3-5-1-8-9-6-2-7-4-6.
8. 52-3-5-1-8-9-6-2-7-4-7.
9. 53-3-5-1-8-9-6-2-7-4-8.
10. 54-3-5-1-8-9-6-2-7-4-9.

在減法中，遇一位上不夠減而向上位借個 1 下來時，每有人在其旁邊打一點以防遺忘的，那也是不好的習慣，須得設法革除的。

十位上的 5 被借了 1，已是 4，4 減 1 爲 3，記在十位上。同樣計算百位，千位各數。

［例 2］ 求 17 元 −3.66 元 −2.87 元。

算草

```
     17.00
 −    3.66
 ----------
     13.34
 −    2.87
 ----------
     10.47
```

答：10.47 元。

〔說明〕

1. 小數的減法，和整數一樣，先把相同位對齊了寫。

2. 減時，也從右端逐次算去，遇不夠減時向上位借，也同整數的減法一樣的。

檢算的必要，前已說過，減法的檢算，可以根據了被減數，減數，差的關係，把差和減數加起來，看是否等於被減數，或被減

減法的檢算

1. 看減數與差的和，是否等於被減數。

2 看被減數與差的差，是否等於減數。

九減法的檢算，在減法上也可以適用，以後會說到、

減法可以應用加法的基本練習而計算，如以呼唱法爲例如次：

呼聲

```
   8163          8,5 ——13
 − 2965          9,7 ——16
 ------          1,10 ——11
   5198          5,3 ——8
```

其方法先差，次減數，又次被減數、和在 10 以上時，卽把此數加入上位的減數之中而呼出，極爲便利。練習熟後，不必一定把被減數寫在減數上面，也可以念出其差來，例如

呼聲

```
                 2,2——4
   6132          8,3——11
  92314          1,2——3
  -----          6,6——12
  86182          8,1——9
```

數中減去差,看是否等於減數卽可。

例 1 的檢算:

$$\begin{array}{r} 7618 \\ +\ 8838 \\ \hline 16456 \end{array}$$

此數與被減數合

例 2 的檢算:

$$\begin{array}{rl} 10.47 & \\ 2.87 & \\ \hline 13.34 & \text{第二回減法的被減數} \\ 3.66 & \\ \hline 17.00 & \text{最初的被減數} \end{array}$$

要這樣特別再寫一遍再行加法,很不便利。其實無須這樣的,只要在原來的減法算草上,把減數與差加合起來,看是否與被減數一致卽可。

〔注意〕

1. 小數的減法, 先把小數點對齊了寫,那麼相同的位自然齊了。

2. 從一數連減許多數時, 也可以先求這許多減數之和,再從被減數中減去之。

習題 2.

1. $\begin{array}{r} 9445 \\ 5255 \\ \hline \end{array}$

2. $\begin{array}{r} 9317 \\ 3787 \\ \hline \end{array}$

3. $\begin{array}{r} 91234 \\ 70793 \\ \hline \end{array}$

4. $\begin{array}{r} 96206 \\ 70793 \\ \hline \end{array}$

5. $\begin{array}{r} 234567 \\ 145628 \\ \hline \end{array}$

6. $\begin{array}{r} 345678 \\ 256782 \\ \hline \end{array}$

習題 2 的各題的答數不載,因這些計算是要求檢算,你充分檢算了自然無誤。若不行檢算,練習的益處很少。

加減同時練習的便法

任意取一個二位的數, 如 37, 在其傍寫了 1,2,3,4,5,6,7,8,9, 先把此等數逐次加上去,口呼 38, 40, 43, 47, 52, 58, 65, 73, 82。再從 82 中逐次減去 1,2,3,……9 等數, 口呼 81, 79, 76, 72, 67, 61, 54, 46, 37。此最後的數 37, 是一定和原來的一樣,所以自然而然地成了檢算了。把任意的二位數這樣練習,到在二十秒鐘之內,可以完成全部的計算爲止,這麼你的加減法,已可稱得熟練。

7.

1000000
789123

8.

1000000
897321

9.

10101010
2639465

10.

123454321
67898768

11.

1602996
1590438

12.

3702814
2917632

13.

42964714
35773996

14.

90269445
76438062

15.

893443925
799898998

第三節　加法減法的簡捷算法

(第一)　求二數之和或差時，有只要加上或減去一個適當的數，便容易地可以用心算求得其結果的。

[例 1]. 588+895=1483.

因爲 895=900-5, 所以在 588 上加以 900 便是多加了 5, 因之再於其中減去卽可。就是 588+900=1488, 1488-5=1483, 這二部分的計算，都須用心算，不能用心算的人，便不能得這便利了。

[例 2] 5032-996=4036.

996=1000-4, 所以若從 5032 中減了 1000, 則是比 996 多減 4, 故加 4 進去補足卽可。就是

5032-1000=4032, 4032+4=4036.

(第二)　相加得 10 的二基數(1,9,;2,8;3,7;4,6;5,5)和相加得 9 的二基數(1,8;2,7;3,6;4,5)若能見了一數，卽想得起其相對的他數時，則如次的減法，心算極易。

[例 1] 1000-836=164.

知道答數是沒有千位而以百位起的。百位的答數是加上百

位的減數 8 成 9 的數，故是 1，十位上也同樣是加上十位上的減數 3 成 9 的數，故是 6。個位上的則相加起來成 10，故是 4。因此答數爲 164。

［例 2］ $70-7.328=62.672.$

從 70 減去不到 10 的數，故答數是六十有零，所以十位上的數字是 6，以下三位的數字各是加了減數的數字 7,3,2 而成 9 的，卽 2,6,7，末位是加上減數的 8 而成 10 的數卽 2。因之答數爲 62.672。

［例 3］ $1-0.0036=0.9964.$

答數的小數一位以下的數字，是加了 0, 0, 3, 6，成 9, 9, 9, 10 的，卽 9, 9, 6, 4，所以答數是 0.9964。

（第三） 從一數連減若干數的一次計算法。

［例］ $549641-102921-47415-24325-71.$

算草

$$\begin{array}{r} 549641 \\ \hline 102921 \\ 47415 \\ 24325 \\ 71 \\ \hline 374909 \end{array}$$

〔說明〕 先把要減的數從下向上加，在個位上一連呼着 1, 11, 12，再是減法的呼聲 9,12——21，此地的 20 卽移加於次的十位數 7 上，呼聲是 2,9,11,12,14——0, 4——4。

（此地可以單呼着 0） 再百位上是 1,4,8,17——9,17——26。千位上接着呼出 2,6,13,15——4,15——19。1,3,7——7,7——14。1,2,——3,2——5。故得答數 374909。

問題：

1. 說明加法和減法的意義。
2. 說明次記各名詞：——和，差，算式，檢算。
3. 在加法中加數可否大於被加數？在減法中減數可否大於被減數？
4. 小數的加減法和整數的加減法，在計算上怎樣不同？

（第四） 加減綜錯式子的一次計算法。

［例］ 188572－20637＋97641＋384－6135.

算草

$$\begin{array}{r}188572\\79363\\97641\\384\\\underline{93865}\\459825\\\text{答:}\ 259825.\end{array}$$

〔說明〕 減數中最大的 20637 是五位數，所以若不減 20637 及 6135，而加以 100000－20637 及 100000－6135 的二數卽 79363 及 93865（此二數可照上述第二的心算方法求得），則在其總和中，是本來該減 20637 的卻加了 79363，因之是多加了 20637＋79363＝100000。

又本來該減去 6135 的地方，也是加了 93865，所以又是多加了 6135＋93865＝100000，因一共是多加了 200000，所以從結果中減去了 200000 卽爲答數。

習題 3.

用簡便法第三，計算次記各式：

1. 5175－(32＋435＋96＋129).
2. 6018－(1641＋1129＋23＋345).
3. 8016－(4161＋1291＋32＋354).
4. 459146－(109212＋44751＋23245＋17).
5. 549641－(102921＋47415＋24325＋71).

習題 3 的答數記在下面，但學者不宜算得與答數合了卽自滿足，寧可用檢算，檢驗到自己能安心，因爲這些答數中也許有字排錯了。

答： 1. 4483. 2. 2880. 3. 2178. 4. 281921.

5. 374909. 6. 17336378（從 87654321 減了上面三數之和卽可。先從上加下來，口呼 1,5,13——8,13:21 再呼 2,3,4,5——7,5:12 等）。

7. 28455313. 8. 1083894. 9. 684333. 10. 88316.

11. 80.223. 12. 12.0748.

用同法補足次記加法中橫線上的一數（不必要把問題抄過,填在空白中即可）:

6.

$$\begin{array}{r} 16411711\\ 23442414\\ 30463818\\ +\qquad\qquad\\ \hline 87654321 \end{array}$$

7.

$$\begin{array}{r} 11118971\\ 43244124\\ 40638381\\ +\qquad\qquad\\ \hline 123456789 \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{r} 189111\\ 741342\\ 421404\\ 836\\ +\qquad\qquad\\ \hline 2436587 \end{array}$$

用簡便法第四,計算次記各式:

9.　714324－41244＋11891－638.

10.　78613＋3579＋7631－1123－384.

11.　87.12＋0.301－14.285＋12.457－5.37.

12.　7.8976＋9.8723－1.0284－4.6667.

第四節　乘法

[例 1]　大豆每石價五元,問六石價若干?

這只要把六個五元加起來即可

5元＋5元＋5元＋5元＋5元＋5元＝30元。

這樣把同一個數連加幾回的,不用加法,而用別的一種簡便方法,去得求其總和的,叫做乘法。即

5元×6＝30元。

此時表要加的回數的數,如 6 叫乘數;原來要加合乘數回數的叫被乘數,如 5 元即叫被乘數;其總和叫做積。

乘法,就是求同一個數要加許多回的總和的簡便法。

某數要加幾回,也叫把某數幾倍。

〔例 2〕　米每石十四元，問三斗之價若干?

三斗是一石的十分之三，故其價也應當是十四元的十分之三，卽把十四元十等分爲一元四角，再三倍起來，爲四元二角。十四元的十等分又三倍，卽是把牠 0.3 倍。故

$$14\text{元} \times 0.3 = 4.2\text{元}。$$

其實就是把整數乘法的意義擴張一點，五石的價是一石的五倍，三斗的價便是一石的 0.3 倍，二石五斗的價是 2.5 倍。因爲五石是一石的 5 倍，三斗是一石的 0.3 倍，二石五斗是一石的 2.5 倍，故相應的價也得是 5 倍，0.3倍，2.5 倍了。

乘法如何計算，也是諸君所熟知的，今但舉例說述於次：

〔例 1〕　求 357×148.

算草

```
      357
  ×   148
  ─────────
     2856·········357×8    =  2856
    1428 ········ 357×40   = 14280      答：52836.
    357············357×100 = 35700
    ─────                    ─────
    52836                    52836
```

〔說明〕

如左側所示，看作各位先各自乘了而再加合的。

〔例 2〕　593000×2700.

在乘法中，因爲乘數所表示的是相加合的回數，所以一定是不名數。被乘數則可以是名數，也可以是不名數，看問題而定。

積是加合的結果，所以被乘數是名數，則積也是名數，被乘數是不名數，積也是不名數。

這雖極爲簡單，卻往往有人弄錯。倘能記着乘法是同一數的幾回加合的結果，便可減少誤解了。

乘法的記號，在沒有與小數點混淆之處時，也有用點〔·〕記在中間而表示的，如把 3×4×5 記作 3·4·5 是。

算草

$$\begin{array}{r}
593000\\
2700\\
\hline
4151\\
1186\\
\hline
1601100000
\end{array}$$

〔說明〕 先看做 593×27＝16011，再加上被乘數和乘數後面所有的 0，共五個。

［例 3］ 求 18.63×5.

算草

$$\begin{array}{r}
18.63\\
\times \quad 5\\
\hline
93.15
\end{array}$$

用加法算起來卽是

$$\begin{array}{r}
18.63\\
18.63\\
18.63\\
18.63\\
18.63\\
\hline
93.15
\end{array}$$

〔說明〕 和加法相比較，就可知積上的小數，打得與被乘數對齊卽可。乘數不只一位時，也相同。

［例 4］ 0.000579×35.

算草

$$\begin{array}{r}
0.000579\\
35\\
\hline
2895\\
1737\\
\hline
0.020265
\end{array}$$

〔說明〕 同上一樣，先不管小數點，在其結果上使小數點與被乘數的對齊卽可。

乘數是小數時，卽某數若以 0.1, 0.01, 0.001 乘，就是求該數的十等分，百等分，千等分之意。

乘法的基本練習，就是九九數，卽從 1 到 9 的數的以 1, 2,3,……9 乘的口訣：1, 1 得 1；1, 2 得 2……。

普通把 2, 1 得 2；3, 1 得 3；3, 2 得 6……等省略去，而實際只用 45 個呼聲，餘的 36 個不用到。但最好不要省略，而八十一個呼聲全用。因爲如 38472×6 如只用 45 個呼聲則先是二六十二，六在後，次則六七四十二，六在前，再次四六二十四，六又在後，再次六八四十八，六又在前，再次三六十八，六又在後，這樣乘數的呼出忽前忽後，很易使腦筋疲勞而計算弄錯的，所以有了六八四十八，還要有八六四十八等的口訣，也得習熟，則乘法可以精熟敏捷了。

例如　$53.4\times0.1=5.34$，　$53.4\times0.01=0.534$，

$0.42\times0.1=0.042$，　$75\times0.001=0.075$.

所以某數以 0.1, 0.01, 0.001 乘，就只要把被乘數的小數點的位置（是整數時，可看做右端有小數點），向左方移動一位，二位，三位卽可，若被乘數的數字已缺，則在左端補以適當的 0。

［例 5］　35.874×0.015.

算草

$$\begin{array}{r} 35874 \\ 0.015 \\ \hline 79370 \\ 35874 \\ 0.538110 \end{array}$$

答：0.53811.

［例 6］　1.325×3.74.

算草

$$\begin{array}{r} 1.325 \\ 3.74 \\ \hline 5300 \\ 9275 \\ 3975 \\ \hline 4.95550 \end{array}$$

答：4.9555.

〔說明〕　用小數及帶小數乘時，可先不管到小數點而行乘法，再在結果上記小數點，其位數是等於被乘數與乘數的小數部之和。此時如積的數字不足，則在其左方加適當的 0。

用 1 及 0 乘的意義

（第一）　任何數用 1 乘等於原數。

例如　$3\times1=3$，　$1.7\times1=1.7$.

（第二）　任何數用 0 乘等於 0.

例如　$3\times0=0$，　$5.9\times0=0$.

若干數連續相乘所得的結果，叫做連乘積。

例如　$2\times3\times4\times5=120$.

小數的乘法不必像加減法一般把小數點對齊，只要同整數的乘法一樣，使右端相齊卽行。

小數乘法，定小數點的位置，很易錯誤，務須留意。

那麼 120 就是 2, 3, 4, 5 的連乘積。

在乘法中，可不分別乘數與被乘數，而都叫做是積的因數。如 $3\times4=12$，就可以說 3 和 4 是 12 的因數，又如 $2\times6=12$，故 2 和 6 也是 12 的因數。

又如 $2\times3\times4\times5=120$，則 2, 3 ,4, 5 等都是 120 的因數。

在算學中，無論那個整數，至少有二個因數，因爲任何數用 1 乘等於原數，所以我們也可以把任何數看成該數和 1 的積，所以 1 和該數，卽是原數的二個因數。

在連乘積中，倘使各因數是同一時，卽說同一數連乘若干次時，特別叫做乘方。

例如 $2\times2=4$，叫做 2 的二乘方（或二次方）或平方。
$2\times2\times2=8$，叫做 2 的三乘（或次）方或立方。
$2\times2\times2\times2=16$，叫做 2 的四乘（或次）方。

凡有若干個同數相乘的，卽叫做幾乘（或次）方。

在這裏爲免去連記若干個同樣的數的相乘之繁，用一種特別的記法。卽

2×2 記作 2^2，$2\times2\times2$ 記作 2^3，$2\times2\times2\times2$ 記作 2^4。

凡有幾個同樣的數相乘，卽於該數的右角上記上這個小數字，這叫指數。指數是指明這個數的幾次的連乘的。

乘法的檢算可以把乘數被乘數交換了位置而再算一遍。倘使乘數極簡單時，則用乘數把積除，看其結果與被乘數一致否。

〔例〕

$$\begin{array}{r} 1537 \\ 492 \\ \hline 3074 \\ 13833 \\ 6148 \\ \hline 756204 \end{array}$$

檢算

$$\begin{array}{r} 492 \\ 1537 \\ \hline 3444 \\ 1476 \\ 2460 \\ 492 \\ \hline 756204 \end{array}$$

檢算還有九減法也可以用,以後會講到。

習題 4.

求下記各式之積:

1. 6714×725.
2. 64795×6247.
3. 76459×4458.
4. 3.1416×785.
5. 142857×5234.
6. 3.4561×24.3.
7. 0.281×0.07147.
8. 1020304×2030405.
9. $23\times34\times45$.
10. $9.37\times3.76\times6.05$.

第五節　除法

[例]　15 乘以何數,則爲 120?

這一種　求某數(15),幾倍起來,則爲某數(120),或某數(120)中含有幾個某數(15)的算法,叫做除法。也就是

知道了二數之積及一個因數而求另一個因數之法。

所以除法是乘法的逆(還元算)。

$$120\div15=8.$$

因爲 $15\times8=120$, 所以知道上題的答數是 8, 此時求得的數叫商,去除的數叫除數,被除的叫被除數。倘使把商和除數看

習題 4 的答數也不揭出,學者須行檢算,到自己確信了不錯爲止。

除法的符號作 ÷,有時嫌其煩複,則用一劃橫線以代之,但其時須寫除數於橫線之下,被除數於橫線上,如 $120\div15$ 記作 $\frac{120}{15}$ 或用斜線,則記被除數於前,除數於後作 120/15。

被除數,除數,商的關係

1. 被除數÷除數=商(整除時),
   被除數=除數×商。
2. 被除數÷除數=商+剩餘/除數,
   被除數=除數×商+剩餘。

做一個是所求的，一個是已知的因數，則被除數與乘積相當。

除法的算法，是諸君已熟知的，今再舉例說明如下：

［例 1］ $56.4\div10=5.64,\qquad 56.4\div100=0.564,$

$56.4\div1000=0.0564.$

因爲 $5.64\times10=56.4,\qquad 0.564\times100=56.4.$

$0.0564\times1000=56.4.$

所以凡數以 10, 100, 1000……等去除時，只要把小數點的位置（如爲整數看作右端有小數點），向左方移上一位，二位，三位，……即可。此時若被除數的數已有缺位，則用 0 來補足。

［例 2］ $805\div35.$

算草

$$\begin{array}{r|l}
 & \;\;23 \\ \cline{2-2}
35 & 805 \\
 & 70\cdots\cdots\cdots 35\times20=700 \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & 105 \\
\multicolumn{1}{r}{} & 105\;\cdots\cdots 35\times3\;\;=105 \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \;\;\;\;0
\end{array}$$

答：23.

［說明］ 在被除數右端取除數可以除的 80，以 35 除之，得商 2，餘 10；次把被除數的 5 再搬下來爲 105，以 35 除，得 3。

［例 3］ $7616594\div157.$

算草

$$\begin{array}{r|l}
 & \;\;\;48513 \\ \cline{2-2}
157 & 7616594 \\
 & 628\cdots\cdots\cdots\cdots 157\times4 \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & 1336 \\
\multicolumn{1}{r}{} & 1256\;\cdots\cdots\cdots\cdots 157\times8 \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \;\;\;805 \\
\multicolumn{1}{r}{} & \;\;\;785\;\cdots\cdots\cdots\;\; 157\times5 \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \;\;\;\;\;209 \\
\multicolumn{1}{r}{} & \;\;\;\;\;157\;\cdots\cdots\cdots 157\times1 \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \;\;\;\;\;\;\;524 \\
\multicolumn{1}{r}{} & \;\;\;\;\;\;\;471\cdots\cdots\cdots 157\times3 \\ \cline{2-2}
\multicolumn{1}{r}{} & \;\;\;\;\;\;\;\;\;53
\end{array}$$

答：整商 48513，
剩餘 53.

［說明］ 照前例，先以 157 除 761，得商 4，餘 133（其實卻

是從 7616594 中減去 157 的 40000 倍 6280000 而餘 1336594)，這個剩餘，和被除數的次位 6 合成 1336，再以 157 除，得商 8 餘 80，這樣逐次下去，最後餘數 53，此 53 已不能爲 157 所除，即爲剩餘。

這樣被除數恰能爲除數除盡而無餘者，叫做整除。例 2 的除法，即爲整除。不能恰好除盡而有餘數的，這餘數叫剩餘，那個商叫整商。因爲再除下去，得出來的商便是小數了。

［例 4］　355÷113(至小數五位)。

算草

```
       3.14159
  113 |355
      |339
       ----
        160
        113
        ----
         470
         452
         ----
          180
          113
          ----
           670
           565
           ----
            1050
            1017
            ----
              33
```

答：3.14159 強。

〔說明〕　被除數的數已經用完，而再要除下去，則在餘數上加個 0，此時其商已爲小數，故於 3 之下打一小數點。

問題中指定求到小數幾位的，通常再多求一位，看那個商，如大於 5 則在上一位中加 1，如小於 5 則就捨去，這叫做四捨

［注意］　無論何數，以 1 乘得原數，故無論何數，以 1 除得原數。

無論何數，以 0 乘得 0，故 0 不能爲除數，即以 0 去除一語，是無意味的，不能計算的。

以不爲 0 的任何數除 0 仍爲 0。

以 0 除 0 是無意味的。

五入。如是捨去的，則實際的值，當比答數爲多，故寫個強字，如爲入的，則實際的數，當比答數爲少，可以寫個弱字以表之，或附以＋號－號以表之。

［例 5］ 5742÷7(到小數三位)。

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5742 \\ \hline & 820.2857 \end{array}$$

答：820.286 弱。

〔說明〕 此種簡單的除法，可以照上面的寫法計算叫做短除法，用乘法的口訣念着，卽可逐次得商，與短除法相對，普通的除法叫長除法。

倘使乘法精熟的人，卽除數是二位的數，也可以用短除法算的。

［例 6］ 257863÷12.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 257863 \\ \hline & 21488\text{……整商} \\ & \quad\ \ 7\quad\ \text{剩餘} \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 12 & 257863 \\ & 1510107 \\ \hline & 21488 \end{array}$$

倘使怕遺忘或算錯，把逐次的餘數如右式所記寫了出來(或記在被除數的上方亦可)，就沒有困難了。

小數的除法，先看除數有幾位小數，把這看作整數，就是使小數點退後幾位，同時在被除數中，使小數點退後相同的位數，再照普通的除法計算。

［例 7］ 4.685÷0.25.

算草

$$\begin{array}{r|l} & \quad 18.74 \\ \cline{2-2} 25 & 468.5 \\ & 25 \\ \cline{2-2} & 218 \\ & 200 \\ \cline{2-2} & \ \ 185 \\ & \ \ 175 \\ \cline{2-2} & \quad 100 \\ & \quad 100 \\ \cline{2-2} & \qquad\ 0 \end{array}$$

［例 8］ 784.8÷1.44.

算草

$$\begin{array}{r|l} & \qquad 545 \\ \cline{2-2} 144 & 78480 \\ & 720 \\ \cline{2-2} & \ \ 648 \\ & \ \ 576 \\ \cline{2-2} & \quad 720 \\ & \quad 720 \\ \cline{2-2} & \qquad\ 0 \end{array}$$

［例 9］ 1.6821÷1.008.

算草

$$\begin{array}{r|r}
 & 1.66875 \\ \cline{2-2}
1008 & 1682.1 \\
 & \underline{1008} \\
 & 6741 \\
 & \underline{6048} \\
 & 6930 \\
 & \underline{6048} \\
 & 8820 \\
 & \underline{8064} \\
 & 7560 \\
 & \underline{7056} \\
 & 5040 \\
 & \underline{5040} \\
 & 0
\end{array}$$

［例 10］ 5.6801÷2.31（到小數四位）。

算草

$$\begin{array}{r|r}
 & 0.2944 \\ \cline{2-2}
231 & 68.01 \\
 & \underline{462} \\
 & 2181 \\
 & \underline{2079} \\
 & 1020 \\
 & \underline{924} \\
 & 960 \\
 & \underline{924} \\
 & 36
\end{array}$$

上例 10 的計算，最後所餘之 36, 在算草上看雖是 0.0036，而實際此時的被除數因除數的退了二位小數，也是退着二位小數，故從元來的 0.6801 來看, 此 36 是 0.000036, 這才是 0.6801 以 2.31 除，到小數四位的剩餘。

除法的檢算，可以把商和除數相乘後，再加剩餘，看其結果是否與被除數相等。

$$\begin{array}{r|r}
 & 33796 \\ \cline{2-2}
268 & 9057380 \\
 & \underline{804} \\
 & 1017 \\
 & \underline{804} \\
 & 2133 \\
 & \underline{1876} \\
 & 2578 \\
 & \underline{2412} \\
 & 1660 \\
 & \underline{1608} \\
 & 52
\end{array}$$

檢算

$$\begin{array}{r}
33796 \\
\underline{268} \\
270368 \\
202776 \\
\underline{67592} \\
9057328 \\
\underline{52} \\
9057380
\end{array}$$

除法的檢算，尙有一種九減法，待後章整數之性質中再詳。

習題 5.

求次各式之商,如不能整除時,求到小數五位止:

1. 2213÷36.　　2. 106.869÷98.

3. 0.26÷32.　　4. 78.3÷6.25.

5. 0.028÷45.

求次各式之整商及剩餘:

6. 7008÷97.　　7. 1400845÷953.

8. 9789136÷5072.

用短除法算次各式,如不能整除,計算到小數三位:

9. 3÷7.　　10. 740.621÷17.

11. 3.1÷6.　　12. 7654321÷12.

第六節　乘法除法的簡捷算法

在學乘法除法的簡便算法之前,先得熟練以一位的數來乘

除法的檢算

1. 整除時可以商除被除數,看是否等於除數。

2. 整除時,看商與除數的積,是否等於被除數。

3. 不爲整除時,取商與除數的積加剩餘,看是否等於被除數。

習題 5 的答數也不揭出,學者須行檢算,以增强自信。

問題:

1. 解釋次記各名詞:——積,商,連乘積,剩餘,因數,指數,整除,整商,四捨五入,

2. 除法與乘法有何關係?

3. 乘數可以是名數否?除數可以是名數否?

4. 被乘數是名數,乘數是不名數,則積是名數抑不名數?被除數和除數都是名數時,商是名數抑不名數?

5. 某數以比 1 爲小的數乘,其積較原數大抑小?某數以比 1 小的數除,其商較原數大抑小?

6. 被減數與減數相等時,差是多少?被除數與除數相等時,商是多少?

及除的計算。此種練習，可先任意取一數順次以 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 去乘，再把其結果以 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 去除。例如取 27 一數作此種練習如次：

	27	2
	54	3
	162	4
	648	5
	3240	6
	19440	7
	136080	8
	1088640	9
2	9797760	
3	4898880	
4	1632960	
5	408240	
6	81648	
7	13608	
8	1944	
9	243	
	27	

先記 27 一數，於其右引一縱線，順次記着 2, 3, 4,……9 的乘數，把 27×2 的結果 54 記在 27 之下，54×3 再記在 54 之下。如此乘到了 9 得 9797760。

再於左方引一縱線，仍直寫 2, 3, 4,……9 等除數，再把除的結果，逐一記在原數下面到用 9 來除之結果，一定等於本來的數 27，這成了自然的檢算，倘結果不對了，或中間數發生除不盡了的數目，那一定有了算錯的地方。

現在再來講乘法和除法的簡捷算法，我們用了例子來一一說明。

[例 1]　3928×5＝19640。

5×2＝10，故要倍某數，是可以把此數 10 倍再用 2 除的（或先用 2 除之再倍亦同）。3928 的左方不必寫除數出來，就用 2 除卽可，用心算很易求得。

[例 2]　4832÷5＝966.4.

5×2＝10，故以 5 除某數，是可以把 10 除此數再 2 倍之（或先 2 倍之再用 10 除亦同）。至用來乘的數 2，自然不必寫出的。

[例 3]　2.71596×25＝67.899.

因 25×4＝100，故 25 乘某數，是可以把此數 100 倍了再用 4 除（或先用 4 除了再乘 100 亦同）。

[例 4]　68075÷25＝2723.

某數用 25 除，可以先用 100 除了再 4 倍之（或先 4 倍了再

用 100 除亦同)。

[例 5]　0.7854×125＝98.175.

因 125×8＝1000，故 125 乘某數，是可以把此數用 1000 乘再用 8 除之(或先用 8 除再 1000 乘亦同)。

[例 6]　0.61725÷125＝0.004938.

某數用 125 除，可以先用 1000 除了再 8 倍之(或先 8 倍了再用 1000 除亦同)。

[例 7]　5928×99.

因爲 99＝100－1，故某數乘以 99，可以從該數的 100 倍中減原數而得。

$$\begin{array}{r} 592800 \\ 5928 \\ \hline 586872 \end{array}$$

[例 8]　3.14159×999

＝3141.59－3.14159.

因 999＝1000－1.

$$\begin{array}{r} 3141.59000 \\ 3.14159 \\ \hline 3138.44841 \end{array}$$

[例 9]　8923×997.

997＝1000－3，所以某數的 997 倍，是可以從該數的 1000 倍減該數的 3 倍而得。

$$\begin{array}{r} 3923000 \\ 26769 \\ \hline 8896231 \end{array}$$

8923×3＝29769，可以用心算求得而記於 8923000 之下。

[例 10]　78926×495.

因 495＝500－5.

用心算求 78926×5＝394630.

(參照例 1)

$$\begin{array}{r} 39463000 \\ 394630 \\ \hline 39068370 \end{array}$$

[例 11]　78926×597.

597＝600－3，所以先用心算求 78926×6＝473556，其次的 78926×3＝236778，也可利用前的 473556 用 2 除而得。

$$\begin{array}{r} 47355600 \\ 236778 \\ \hline 47118822 \end{array}$$

[例 12]　85014×728.

(甲)
$$\begin{array}{r} 85014 \\ 728 \\ \hline 680112 \\ 6121008 \\ \hline 61890192 \end{array}$$

(乙)
$$\begin{array}{r} 85014 \\ 728 \\ \hline 595098 \\ 2380392 \\ \hline 61890192 \end{array}$$

(甲)　先用8乘85014，得680112，次求85014×72，因爲72＝8×9，故可利用已得之積而乘以9，即得6121008，依上相加即可。

(乙)　則先用7乘，再利用7乘得之積，因28＝7×4，故再用4乘。

[例 13]　78926×72864.

因 64＝8×8，72＝8×9，故先求78926×8＝631408，次記631408×8，即78926×64，又次記631408×9，即78926×72。

$$\begin{array}{r} 78926 \\ 72864 \\ \hline 631408 \\ 5051264 \\ 5682672 \\ \hline 5750864064 \end{array}$$

[例 14]　8450980＋(4771213×3).

$$\begin{array}{r} 8450980 \\ 4771213\times3 \\ \hline 22764619 \end{array}$$

用3乘下數一位，隨即加同位的上數。

[例 15]　28450980－(4771213×4).

$$\begin{array}{r} 28450980 \\ 4771213\times4 \\ \hline 9366128 \end{array}$$

用4乘下數，每位即從上數減去。

[例 16]　8568÷63.

除數容易分成一位的因數之積時，可以用因數連除。

$$\begin{array}{r|l} 7 & 8568 \\ \hline 9 & 1224 \\ \hline & 136 \end{array}$$

[例 17]　10547÷24 (到小數二位)。

(甲)
$$\begin{array}{r|l} 6 & 10547 \\ \hline 4 & 1757.83 \\ \hline & 439.45 \end{array}$$

(乙)
$$\begin{array}{r|l} 8 & 10547 \\ \hline 3 & 1318.37 \\ \hline & 439.45 \end{array}$$

每次的除也到小數二位卽可。

［例 18］ 57124835÷3000(求整商及剩餘)。

```
3)57124|835
   19041…………整商
        1835……剩餘
```

57124835及3000各以1000除之,爲57124.835及3而相除,商是不變的。

又57124用3除有剩餘1,故57124000用3000除有剩餘1000也一定的。故57124835以3000除有剩餘1835。

［例 19］ 20735÷42 (求整商及剩餘)。

```
6|20735                 整商 493,
 7|3455……5              剩餘 (4×6)+5=29.
    493……4
```

3455用7除餘數是4,而20735之有六個3455和餘數5,故剩餘的總是六個4及5之和。

［例 20］ 191103095÷288(求整商及剩餘)。

```
4|288                         4|191103095
 8|72   288=4×8×9.             8|47775773……3
    9                           9|5971971……5
                                   663552……3
```

整商 663552,

剩餘 $(3\times8\times4)+(5\times4)+3=96+20+3=119.$

［例 21］ 47712÷99.

```
100-1      481……整商
  99 | 47712
        811
         192
          93……剩餘
```

把477分爲400與77,故477中有4個99,4個1和77,故477用99除得商4,而餘數爲$77+(1\times4)=81$,因而實際上,

可以看做用 100 除而得商，再在餘數中加入此商之數，卽 77＋4＝81（不必如一般除法的把 4×99 寫出來，記下餘數卽可），次 811 以 100 除得商 8，在餘數的 11 中加 8 爲 19，次 192 以 100 除得 1，而餘數的 92 中加 1 爲 93，此爲最後之剩餘。

［例 22］　2958634÷999（到小數二位止）。

```
1000－1      2961.59
    999 | 2958634
            9606
             6153
              1594
               5950
                9550
                 559
```

以 1000 除 2958 則得商 2，餘數 958，故以 999 除得商 2，餘數 958＋2＝960，以下可以同樣計算。答數爲 2961.59。

［例 23］　47712÷98.

```
100－2    486
    98 | 47712
           851
            672
             84
```

477 之中有四個 100 和 77，卽有四個 98，四個 2 和 77。故 477 用 98 除，得商 4，餘四個 2 和 77，卽 77＋(2×4)＝85。實際上可以用 100 除了，再在餘數加商的 2 倍之數。卽以 100 除 477 得 4，而餘數 77 中加 4×2 卽爲 85。其次以 100 除 851 得 8，而於 51 中加 8×2 卽爲 67。次以 100 除 671 得 6，而於 72 中加 6×2 卽爲 84，此是最後的剩餘。

［例 24］　4687÷997（到小數三位）。

```
       1000－3      4.701            1000－3       4.701
           997 | 4687                    997 | 4687
                  6990                          6990
（甲）            1008          （乙）             1100
                   1100                             103
                    103
```

先以 1000 除 4687，得商 4，餘數爲 687＋(4×3)＝699。同樣

以 1000 除 6990, 得商 6, 餘數爲 990＋(6×3)＝1008 (甲)。到了此地知道餘數比商大，還可以用 997 除而生 1 的，故劃去了上面的 6 而改作 7。餘數是 8＋3＝11。不過此種計算如練熟後，會知道 1000 除 6990 生商 7 只缺少 10 而生商 7 後所有的餘數爲 7×3＝21, 所以去了不足的 10, 還有 11 的餘數(算草乙)。次以 1000 除 110 是商 0, 又 1000 除 1100 得商 1, 餘數是 100＋3＝103, 這是最後的剩餘。

[例 25] 153267÷596.

$$\begin{array}{r|r} 600-4 & 257 \\ \cline{2-2} 596 & 153267 \\ & 3406 \\ & 4267 \\ & 95 \end{array}$$

1532 中有二個 600 及 332, 即有二個 596, 二個 4 及 332。故 1532 以 600 除之，得商 2, 而於 332 中再加以 4×2＝8 得 340, 此即示 1532 以 596 除後之剩餘。次 3406 以 600 除得商 5, 在其餘數 406 中加以 5×4＝20, 得 426。次 4267 以 600 除得商 7, 餘數 67＋(7×4)＝95, 此即 596 除 153267 之剩餘。以上的計算均須由心算算，否則此種簡便法，亦無甚可利用。

習題 6.

用簡便法計算次題:

1. 3729×9.
2. 8326×99.
3. 4278×97.
4. 3517×11.
5. 1753×101.
6. 7751×1003.

習題 6 的答數如次，但題是要求用簡便算法，故算的方法比答數算得不錯，尤當注重。

1. 33561.
2. 824274.
3. 414966.
4. 38687.
5. 177053.
6. 7773253.
7. 93.8.
8. 133.
9. 5975.
10. 1.364.
11. 1.404.
12. 103.
13. 25968305.808.
14. 1243414.986.
15. 406960.12127.
16. 1412320。

7. 8 76×5.　　8 5.32×25.

9. 47.8×.25.　　10. 6.82÷5.

11. 35.1÷25.　　12. 12875÷125.

13. 472 85×549.8.　　14 58.327×21318

15. 7.17123×56749.　　16. 56.875×24832.

第七節　計算次序及括號

數字，用計算的符號來把牠接連起來的式子，叫做算式。例如

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10,$$

$$9-8+7-6+5-4+3-2+1,$$

$$4\times 2\times 3\times 5,\qquad 120\div 5\div 4$$

等就是算式。

一個算式計算的順序，以自左而右，照運算符號逐一推演爲原則。

算式表示計算的順序及數中間的關係，如 $3+5\times 2$ 一式，若照自左而右計算，先得 $3+5=8$，再算 $8\times 2=16$，故 $3+5\times 2$ 若依自左而右逐一計算的規則便得 16。但倘不依此規定，先算出 $5\times 2=10$，再算 $3+(5\times 2)=13$。如此，同一式子，因所守規定的不同，即計算次序的不同，在結果上顯然生了差異。因而關於計算的次序，很有建立一定規約的必要(通常在上項的計算，是有先乘除後加減的規約，以答數 13 爲不錯)。

在只有加號的算式中，其計算的次序與結果無關。

如 $3+4+5=12$，$3+5+4=12$，$5+4+3=12$ 等，無論那一

個數先加，答數一樣。所以只有加號的式子，不必有什麼規約，來規定計算的次序，任意相加卽可。

在只有加號及減號的算式中，其計算的次序與結果無關。

如 $12-3+5-8=6,\ 12-8-3+5=6$

等，結果是一樣的。但此地須留意，應照運算符號逐一推演，不可算作 $12-(3+5)=12-8=4$，再算 $4-8$ 變成不能減了。在此地如把數字前的符號，看成與該數有不能分離之關係，則雖把數字任意交換其位置，結果不會生變化（第一個數字，看作前面有加號）。

$12-3+5-8$ 換作 $5+12-8-3$ 或 $5-3+12-8$ 或 $5-8-3+12$ 均可，不過此最後一式因 $5-8$ 爲不可能，故如此變換了，反致不能計算，卻是弄巧成拙。

在只有乘號及只有乘號和除號的算式中，其結果與計算的順序無關。

如 $3\times5=15,\quad 5\times3=15;$

$$3\times5\times4=60,\ 4\times3\times5=60,\ 5\times4\times3=60;$$

$$3\times15\div5=9,\ 15\div5\times3=9$$

等，不過上記第三若作 $3\div5\times15$，則計算反而複雜，又是弄巧成拙了。

計算次序的交換，有種種可以善爲利用的地方。如把

$109+72-65+81-96-15+58-64$ 寫成

$109+81-65-15+72+58-96-64$ 卽可知其爲

$190-80+130-160=80$ 其他諸如此類甚多。

在加減乘除各種的符號相混式子中，從來有先乘除後加減的一種規約。

如 $4+2\times5-6\div2+1$ 一式，是先得把乘法，除法計算之後，再算加減的，即：

$$4+10-3+1=12.$$

若不照這規約計算，更依自左而右的原則來算，則成

$$\begin{aligned}6\times5-6\div2+1&=30-6\div2+1\\&=24\div2+1=12+1=13.\end{aligned}$$

可見兩個結果是不同的，因之可知這樣一個規約，是必要的了。上面的答數 13，是不依此規約而算出來，當然是不對的。

在算式中，因有先乘除後加減的規約，及此外的計算次序可以自由之故，我們若要使一個式子的照一定的順序計算，非得另外想出一種符號來表明牠不可。像這種符號，就稱做括號。如：

$$18+5-2\times4-12+8\div5-3$$

一式中，如欲先以 $5-2=3$ 而以 4 乘，及 $12+8=20$ 而以 5 除後再計算的，則須記作 $18+(5-2)\times4-(12+8)\div5-3$。這裏用了括號，是表示把整個括號中所包括的數，看做一個的數，因此，此式中的乘除號，更須先行計算。即：

$$\begin{aligned}&18+(5-2)\times4-(12+8)\div5-3\\&=18+3\times4-20\div5-3\\&=18+12-4-3=23.\end{aligned}$$

這條先乘除後加減的規約，實在定得不大合理，這並無何種理論上的根據而硬定下來的，所以頗有缺點。如帶分數 $1\frac{1}{2}$，其實即 $1+\frac{1}{2}$ 的簡寫，那麼 $1\frac{1}{2}\times8$，就是 $1+\frac{1}{2}\times8$，若先乘除而後加減，應當成 $1+4=5$，實際則 $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，以 8 乘是得 12 的，因此又把 $1\frac{1}{2}$ 解成 $(1+\frac{1}{2})$，謂此是帶有括號意思的式子，而指 $1\frac{1}{2}\times8$ 是 $(1+\frac{1}{2})\times8$ 之意，解釋太繁冗了。其實竟可不用此規約，而一切計算的先後均用括號去指明，最爲合理。

括號的種類有四，就是括弧如（ ），括帶如｛ ｝，括弓如〔 〕及括綫如 ——。其使用法，也略有一定，括弧用於算式之內層，其外再要加括號則用｛ ｝，如括帶外再用括號即要用〔 〕，而括綫則用於最內層。

有括號的式子，計算時常由內而外，逐次演算。於括號內的式子化成一數時，即將此括號略去，叫做去括號。

例如：

(1) $99-(135-85+31)=99-81=18.$

(2) $99-(135-\overline{85+31})=99-(135-116)$

$=99-19=80.$

(3) $(36-24)\times5-(8-2)\times10=12\times5-6\times10$

$=60-60=0.$

(4) $1+2\times[3+4\times\{5+6\times(7+\overline{8+17}\div5)\div4\}]$

$=1+2\times[3+4\times\{5+6\times(7+25\div5)\div4\}]$

$=1+2\times[3+4\times\{5+6\times12\div4\}]$

$=1+2\times[3+4\times23]$

$=1+2\times95=191.$

(5) $8-[20-\{(12\div4+2)\times3\}]$

$=8-[20-\{(3+2)\times3\}]$

式題計算上的注意

1. 先把題目全體看一遍，再決定其計算的順序。

2. 演算須依照計算的順序，逐一寫下。

3. 在括號很多的式子中，爲避免如上的反覆書寫不計算的式的部分，可以如次寫法，如上例（4）可以記作：

$(7+\overline{8+17}\div5)=12,(5+6\times12\div4)=23,[3+4\times23]=95,1+2\times95=191.$

又例（5）可以記作：

$(12\div4+2)=5,\ (5\times3)=15,\ [20-15]=5,\ 8-5=3.$

然後再在原式後記上其答數。

$$=8-[20-\{5\times 3\}]$$

$$=8-[20-15]=8-5=3.$$

習題 7.

求下列各式的結果：

1. $64-54\div 9-5\times 7+63\div 7.$
2. $\{(351-123)\div 57\times 8-13\}\times 8.02-10.7.$
3. $\{(12\times 2-6+124+36\div 3)\times(32\div 8)\}-(36\times 2).$
4. $7.6+\{(25.37+29.3404)\div(12.5-4.16)\}.$
5. $(145\times 35+2560\div 4-39\times 37)\div 3.$
6. $(19-18\div 3)\times 7-5\times\{3+2\times(7-5)\}.$
7. $\{72-(13+6-3-9)\times 9\}\times 8.$
8. $(1010\ 0-90909)\times 5-3\times 10101.$
9. $(984+42)\times 105\div(30-24)\times(99-\overline{99-1}).$
10. $9+8\times[7+6\times\{5+4\times(3+2\times 1)\}].$

習題 7 的答：

1. 32.
2. 141.68
3. 544
4. 14.16.
5. 1424.
6. 56.
7. 72
8. 20202.
9. 17955.
10. 1265.

第三章　複名數

我們要計量世間的各種東西，必須用一個量作爲標準，這叫做單位。

各種東西，用了某單位去計量而得的數，便是名數，就在這個數的底下，寫上一個單位的名稱。如說布長三丈七尺五寸，值銀四元，這裏的三丈七尺五寸和四元都是名數。其中四元只含有一個單位的名稱的，叫單名數，三丈七尺五寸含有三個單位(丈，尺，寸)的名稱，便叫做複名數。

計算各種量須有各種單位做標準，前已說過。但在每一種量的計算，只有一個單位，也不方便。因爲每一種類的量，其間大小懸殊，單位過小，不便計算大量，單位過大，不便計算小量。如問百萬丈的路程，或千分的一丈的隙縫究有多少長短，我們有點難以捉摸。所以不能用一個單位來計量全部，應當設立出大小各種的單位，用大的來計量大量，小的來計量小量。

名數和不名數間的計算規則，前在基本四法的計算中，已經講起過，今再記其主要之點於次：

加法和減法，只能在同種類的同名數間，方可行施。其他名數與不名數，或同爲名數而不是同種類的，或同種類的名數而不是同單位的，均不能相加或相減。

乘法中，只有名數×不名數，所得的積爲相同的名數，其他名數間的相乘，或以名數乘不名數(不名數×名數)，都是無意義的。

除法中，只有名數÷不名數，所得的商爲相同的名數，名數÷相同的同名數得商爲不名數，可以計算。其他不是相同名數的除法，及以名數除不名數(不名數÷名數)，均不能計算的。

在各個單位之中,自大而小,有如階段,這一個單位的階級,大者爲高級,小者爲低級。例如丈是尺的高級單位,里又是丈的高級單位,而寸,分則又是尺的低級單位了。

高級低級單位間之只差一級者,特稱爲上級下級,如丈與尺,尺與寸,寸與分等,即一方爲上級單位,一方爲下級單位。上級單位是下級單位的多少倍,這個倍數,叫做單位的進率。複名數的進率,大抵是承襲舊慣而繼續下來的,有的以十進,有的不以十進;其以十進者,稱爲十進複名數。

十進複名數因爲和我們用的數進率相同,故計算很便利。不過有許多計量的制度,承襲了傳統的習慣,不是十進制,計算非常不便,但因習俗所拘,一時也不易改革。幸我國的舊來各種制度,採用十進的頗不少,故困難亦較少。這也可知我國古來文化之進步。

當計量時,常在每一種類的單位中,指定一個單位作爲主要標準,這個單位,叫做基本單位;別的各級單位,叫做補助單位。在同種類單位中,基本單位也不固定,常因所計量的量的性質而不同,如量布帛的長短用尺做基本單位,而量道路的長短則以里做基本單位,稱柴米用斤做基本單位,稱金銀則以兩爲基本單位了。

第一節　度量衡

計算長短,容積,輕重的制度叫做度量衡制,也叫權度制。權是權衡輕重,度是度量長短。普通以測度長短爲度,計算容積爲量,秤算輕重爲衡,所以有度量衡之稱。但計算容積,就是計算體積,原是由測度長短派生出來的方法;又計算面積,也是由計算長短中派生出來的,故這些總稱之爲度,而使與計算輕重的權相對待,叫做權度,更爲妥當,但目下一般,卻通用着度量

衡這名詞。

我國政府規定的度量衡制有二：一爲標準制，二爲市用制。

1. 標準制

標準制舊名萬國權度通制，就是俗所稱的米突法。這制度起於法國，法國大革命時，把舊有封建社會的文物制度，一概摧毀，對於度量衡制也加以澈底的改革，採用劃一的十進法，計算十分便利，故已爲世界各國所通用。我國於民國四年採爲第二種的國定度量衡制，近國民政府已明令以此爲標準制。

此制長度的單位，以公尺爲基本單位，公尺俗稱米突，是 Metre 的譯音，其長爲地球經線的四千萬分之一。這米突又是這制度的基本，一切容量，重量均由此而定。標準制計量長度的各級單位及名稱如下表：

名稱	日本譯名	原名	略號	等數
公里	粁	Kilométre	Km	1000 公尺
公引	粨	Hectométre	Hm	100 公尺
公丈	粁	Décamétre	Dm	10 公尺
公尺	粎	Métre	M	〔單位〕 卽 10 公寸
公寸	粉	Décimétre	dm	0.1 公尺
公分	糎	Centimétre	cm	0.01 公尺
公釐	粍	Millimétre	mm	0.001 公尺

米突制的推行，西曆 1789 年，法國政府約各國會議於巴黎，設萬國權度公會，定米突制爲萬國通制，其米突之長，以鉑銥合金製爲標準的尺，頒之加盟各國，而又以萬國權度公會所藏之原器爲其標準。現在科學上的各種計算及單位，大抵是採用此制度的，卽實用上也漸漸經人採用了 如在運動會的田徑賽，從前中國是依照英美而用碼呎等取記錄的，現在都改用米突了。

標準制的計量容積，以公升爲基本單位，其各級單位如下表：

名　稱	日　譯	原　名	略　號	等　數
公　秉	竏	Kilolitre	Kl	1.00　公升
公　石	竡	Hectolitre	Hl	100　公升
公　斗	竍	Décalitre	Dl	.0　公升
公　升	竔	Litre	l	[單位] 卽 1 立方公寸
公　合	竕	Décilitre	dl	0.1　公升
公　勺	竰	Centilitre	cl	0.01　公升
公　撮	竓	Millilitre	ml	0.001　公升

標準制的計量輕重，以公斤爲基本單位，其各級單位如下表：

名　稱	日　譯	原　名	略　號	等　數
公　鐓		Tonne, Millier		1000　公斤
公　擔		Quintal		100　公斤
公　衡	[illegible]	Myriagramme	Mg	10　公斤
公　斤	兛	Kilogramme	Kg	[單位] 卽 10 公兩
公　兩	兡	Hectogramme	Hg	0.1　公斤
公　錢	兙	Décagramme	Dg	0.01　公斤
公　分	克	Gramme	G	0.001　公斤
公　釐	兝	Décigramme	dg	0.0001　公斤
公　毫	兣	Centigramme	cg	0.00001　公斤
公　絲	兞	Milligramme	mg	0.000001公斤

上項標準制，國民政府於民國十八年二月公布，其後由工

商部頒布各項施行細則，力謀實施，於各地設立度量衡檢定所，及在中央設立全國度量衡局，並頒發各種單位的標本器，以備仿製，後又開催度量衡推行委員會，草訂依次實施的方案，現在是在努力推行新制的時候了。新制實行後舊制將一律廢去，舊制的度量衡器的製作，售賣，使用，均將在禁止之列。

2. 市用制

與標準制同時頒布者，有市用制，取與標準制有最簡單之比率而與民間習慣相近者爲單位，其基本單位之市尺(簡作尺)等於三分之一公尺，市斤等於二分之一公斤，市升等於公升，其各級單位如次：

長度

名稱	等數
里	1500 尺
引	100 尺
丈	10 尺
尺	[單位] 卽 10 寸
寸	0.1 尺
分	0.01 尺
釐	0.001 尺
毫	0.0001 尺

容量

名稱	等數
石	100 升
斗	10 升
升	[單位] 卽 10 合
合	0.1 升
勺	0.01 升
撮	0.001 升

與萬國公制相等

重量

名稱	等數
擔	100 斤
斤	[單位] 卽 16 兩
兩	0.0625 斤
錢	以
分	下
釐	均
毫	以
絲	十
忽	退

3. 舊制

市用制，是從舊制到標準制的一座渡橋。可見政府之意，在

中國的標準制，因係採用萬國公制，故以萬國公會所製定的鉑銥公尺公斤原器爲標準。其公斤之標準，卽以一公升之純水，在其最高密度時 (4°C.) 的重量。

逐漸推行標準制徹底把舊制廢去，這是很應該的。不過傳統的勢力很大，在實際社會上，還完全通行着舊制，所以我們在此地還不得不把這舊制講講。民國四年所定第一種度量衡制爲營造尺庫平制，卽以營造尺的尺，庫平的一兩及升爲度量衡的基本單位的制度，今分述於次。

計量長度的各種單位爲：

名稱	里	丈	步	尺	寸	分
等數	180 丈	2 步	5 尺	10 寸	10 分	

附註：　計量小量時，分之下尙有釐，毫，絲，忽等名稱均以10進。里以上有 100 里叫一站，200 里叫一度的名稱。

計量容積的基本單位爲升，其各級單位及等數如次：

名稱	石	斗	升	合	勺	撮	抄	圭
等數	10斗	10升	10合	10勺	10撮	10抄	6 圭	

附註：　在石之下尙有等於 5 斗的斛，2 斛等於一石。

計量重量的基本單位有用斤，有用錢，其各級單位及等數如次：

在實際上，中國的度量衡是混亂不堪的。此地所謂尺，是營造尺。營造尺，實際卽是木匠用的泥水匠用的尺，這和裁衣用的尺，商店中用的尺，海關上用的尺，長短都不相同。故只說尺，便有許多種長短不同的尺了。

普通量布帛以尺爲基本單位，量田地以步爲基本單位，量道路以里爲基本單位。

中國的量制差不多全是十進的了。在制度上，升的大小也有一定，卽升形方而稍扁，中空，內口與內底均方四寸，內高一寸九分七釐五毫，這是規定得很精密的了，但因爲尺的大小已先有不同，故升的大小，也隨着不一致。

量米穀等，常以斛爲單位，但斛的大小也各地不同，斗及升的大小，又隨斛而不同。

名稱	引	擔	斤	兩	錢	分	釐	毫	絲	忽
等數	2 擔	100 斤	16兩	10錢	10分	10釐	10毫	10絲	10忽	

除了上述的舊制以外，在中國社會上通用的，還有英國制的英里，稱做哩，以前鐵路上使用過（現已改用公里），現在還有許多地方通用着。商店中夾用英國制的碼 (Yard) 量布匹，鐵道海關上及一部分商店中用噸衡物，藥房中的用英國制的量配藥，還有加侖，磅等，在中國通商埠頭，也很通用，中國的度量衡，眞混亂極了。

如上所述，我國的度量衡，有新定的標準制與市用制及社會上習用之舊制（營造尺庫平制），要把其中一種制度的某單位，化成另一種制度的某單位，叫做換算。換算時應當知道下面的關係：

市用制與標準制的換算是：

1 市尺＝$\frac{1}{3}$ 標準尺

1 市升＝1 標準升

1 市斤＝$\frac{1}{2}$ 標準斤

舊制與標準制的換算是：

1 尺＝0.32 標準尺

1 升＝1.0354688 標準升

1 斤＝0.596816 標準斤

衡的單位，現定用庫平的兩，但兩尙有漕平關平等名稱，重量均和庫平不同，所以實際上這個很爲嚴密的制度，也極紊亂。

稱金銀等貴重物，以錢爲基本單位，大概用戥子或天平去稱的，這種計量器具也不劃一。對於日常用品，如柴，荣，油，鹽，以斤爲基本單位，是用秤去秤的。秤的大小，又很不一致，有天平秤，司馬秤，會館秤，十八兩秤，十二兩秤，十七兩六錢秤，雙斤秤等種種的名詞，我們日常所用的秤，差不多全是不正確的。

這樣看來中國的權度制，眞是紊亂不堪，應當加以澈底的改造，所以新法的採用，新器的製作和檢定，是刻不容緩的事了。

這 $\frac{1}{3}$, 1, $\frac{1}{2}$ 叫做以標準制爲準的市尺，市升，市斤的當量。舊制的尺，升，斤的以標準制爲準的當量，是 0.32, 1.0354688 及 0.596816。

反過來說，若以市用制爲準，則標準制與舊制也各有其當量，同理以舊制爲準標準制，市用制亦各有其當量。現在將各種當量列表於次：

權度種別	長度 (尺)			容量 (升)			重量 (斤)		
制別	標準	市用	舊	標準	市用	舊	標準	市用	舊
當	1	3	3.125	1	1	0.966	1	2	1.676
	$\frac{1}{3}$	1	$1\frac{1}{24}$	1	1	0.966	$\frac{1}{2}$	1	0.838
量	0.32	0.96	1	1.035	1.035	1	0.5968	1.193	1

習題 8.

1. 已知 1 尺 = 0.32 公尺，問 1 公尺合若干尺？
2. 8 公丈 7 公尺 6 公寸合若干舊制的尺？
3. 問 1 里合若干公里？
4. 問 1 公里合舊制若干里？
5. 1.728 公里合舊制若干里？
6. 已知 1 升 = 1.0354688 公升，問 5 石 3 斗 2 升 5 合合若干公石？
7. 1 公升 = 0.9657461 升，問 18.141 公石合舊制若干石？
8. 1 斤 = 0.596816 公斤，問 1 公斤爲若干斤？
9. 1 兩合若干公分？

上表中所記的，是近似的數値，其比較稍精確的數是如次：

1 標準斤 = 1.67535829 舊斤

1 標準尺 = 3.125 舊尺

1 標準升 = 0.9657461 舊升

10. 1公斤合舊制若干兩？

第二節 貨幣 時間 角度

貨幣

用作計算貨品價格的標準及交易媒介的東西叫做貨幣，貨幣的基本單位，叫主幣，如中國的圓或兩，英國的鎊便是；補助單位叫輔幣，如角洋，銅元，先令，辨士便是。

中國幣制，向有銀圓及銀兩二種。銀兩以重計，有製成錠形或馬蹄形者，其大小輕重亦不等，有一兩，五兩，十兩，五十兩等，此外輔以散塊，叫碎銀。交易時，須用天平秤過，且成色又有高低，以碎易整，又須加火耗，所以使用上，頗爲不便。而且權銀用的天平，又有幾種，如納稅及官署中，則用庫平，海關上用關平，商界所用的又叫規銀，其比較如次：

庫銀	關銀	規銀
1兩	=0.983兩	=1.095兩
1.017兩	=1兩	=1.114兩
0.913兩	=0.898兩	=1兩

銀兩以外，現在通用着銀元，用銀角及銅元作爲輔幣，其制如次：

1圓＝10角

1角＝10分

習題 8 的答：

1. 3.125.
2. 273.75.
3. 0.576.
4. 1.736.
5. 3.
6. 5.5.
7. 17.5.
8. 1.67555829.
9. 37.301.
10. 26.8.

銀兩的符號爲 Tls (即英字 taels 之省寫)或 T，銀圓的符號爲 $，記寫銀一兩七錢六分，可記作 Tls 1.76；十七元三角五分可記作 $17.35。圓通常也寫作元。

銀圓本重庫平七錢二分，但市價從七錢到七錢幾不等，時有上落，每圓本作十角或銅元百枚，現在可換銀角十一角餘，或銅元二百六七十枚，市價也時有上落，這因市儈操縱，制度紊亂，人民極感不便。

外國貨幣

和外國通商之後，外國貨幣的計算，也屬必要的，今略述於次：

英國　1 鎊 (Pound or Sovereign)＝20 先令，略號 £,
　　　1 先令(略號 s, Shilling)＝12 辨士 (Pennies).
美國　1 圓 (Dollar)＝10 角 (Dimes)＝100 分 (Cents).
法國　1 法郎 (Franc)＝100 生丁 (Centimes).
德國　1 馬克 (Mark)＝100 分尼 (Pfennigs).
日本　1 圓 (Yen)＝100 錢 (Sen).
俄國　1 盧布 (Ruble)＝100 戈比 (Kopeks).

以上各國之貨幣，均以金爲本位，故與中國貨幣之換算，常因銀價之有漲落而時有變動，因我國無金幣不能和他們直接比較價值，所以國際匯兌上時常受人操縱，大吃其虧。

時間

太陽於南中時(卽通過子午線)到次一次南中之間的時刻，叫做一個太陽日。太陽日的長短，每天有很少的差異，不是一律的，把一年中間的太陽日，平均計算，叫做平均太陽日，這是時間單位的日。

1 日＝24 時
1 時＝60 分
1 分＝60 秒

這就是時間的制度。

地球繞太陽一周的時間叫一年，一年分爲十二個月，其中一，三，五，七，八，十，十二，共七個月是大月，每月三十一日；四，六，九，十一，這四個月爲小月，每月三十日，二月只有二十八日並叫小月，在閏年時，則有二十九日。但在算學上只說月字的，每月均以三十日計算。

因爲地球繞日一周的實際時間是 365 日 5 時 48 分 46 秒，即 3 5.242218 日，而這個零數在每一年是無法計算的，一年只能是整整的日數，365 日或多一天 366 日，所以平常以 365 日爲一年，叫做平年，而忽略其餘多的時間，等到了這略去的時間積成一日時，於年上加了一日爲 366 日，叫做閏年，這就是二月的有 28 日或 29 日之故。

這裏，規定每四年置一閏年，是依照公曆計算的，凡年數是 4 的倍數便是閏年，其中雖是 4 的倍數，同時又爲 100 的倍數時則不置閏，但如係 400 的倍數，則仍須置閏。

因地球繞日一周的時間爲 365.242218 日，每年以 365 日計，尙餘 0.242218 日，故在 400 年間所生的差爲

$$0.242218 \times 400 = 96.8872\text{ 日。}$$

中國向來用的曆法　叫陰曆，以月繞地球一周爲一月，大月三十日，小月二十九日，而中國的年及二十四節氣，又是準太陽曆的，故於十八年內置七閏月，以符季節之氣候，現在則已將此種曆法廢除，而以諸國所公用之曆爲國曆。

國曆舊名陽曆，每月之大小，頗爲參差，是因歷史關係使然（亦不是理想之曆法）。

現在蘇維埃俄羅斯所用的曆法，以 30 日爲一月，每 5 日爲一節而廢星期之制，一年爲 365 日除了十二月合 360 外餘 5 日不放入月份之內而定爲一定的祝祭日，在閏年時，又多置一日休沐日以符其數。

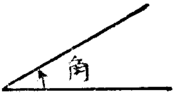
近我國教育部主改曆法以 28 日爲一月，把一年改成十三個月，每月一日爲星期日，平年有十三月另一日，閏年有十三月另二日，這一，二日叫歲餘，放在歲底不計入星期中，似較便利，但實行期則尙有待也。

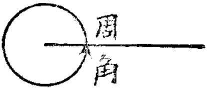
卽約其餘 97 日，當有九十七年閏年，故有如上之規定。

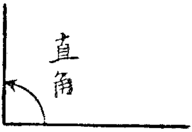
要在我國的年間求閏年，仍須由公曆的年數去求，我國民國紀元年數加 11 則和公曆之差是 1900，與上項計算上不生關係，故於民國紀元年數加 11，而視其是否爲 4 的倍數，100 的倍數，400 的倍數，可定其是否閏年。

角度

兩直線相交於一點成角，這交點叫做角的頂點，直線叫做角的邊。角的大小，以所開口之大小而定，與邊之長短無關，所以如取一直線 AB，固定其一點 A，而設想另一直線 AC，初與 AB 相併合，繼照時針的轉動相反方向而迴轉時，則其所成角逐漸增大，到迴轉過了一周，仍到原來的 AB 的位置時，叫做一周角。







把周角分爲 360 等分，取其一份，叫做度，爲角的單位，角度的補助單位及進率如次：

1 周角＝ 2 平角

1 平角＝ 2 直角

1 直角＝90 度

1 度＝60 分

1 分＝60 秒

度的略號爲一小圈記於數字右角上，如 90 度可記作 90°，分的略號爲 ′，秒的略號爲 ″，一度二十五分三十八秒可記作 1°25′38″.

第三節　複名數加減乘除

化法

複名數各級單位的換算,叫做化法,例如把 90 丈叫做半里,8 兩叫做半斤,5 合叫做半升之類,是頂簡單的化法。

凡上級單位要化成下級單位,須以進率乘,下級單位化成上級單位則以進率除,高級單位要化爲低級則須以各進率連乘,低級單位化爲高級則以各進率連除,這是化法的根本原則。

十進複名數的化法,因單位間之變化,不外乎以10或10的倍數去乘或除,故只要變換其數的小數點卽可。

如 5.8 石卽爲 58 斗亦卽 580 升;1.75 兩卽 17.5 錢卽 175 分;1865 分卽 186.5 寸卽 18.65 尺卽 1.865 丈。僅只改移了小數點的位置,單位卽改變了。

複名數的化法,不外乎高級低級單位間的變化,亦卽不外乎乘除二法,其算法又可分爲二種:把許多單位統一於一個單位之下的算法,叫做通法,而把一個單位化成許多單位的,叫做命法;今分述於次:

1. 通法

把複名數化成單名數,叫做通法;今以例示其算法於次:

[例 1] 化 3 時 17 分 45 秒爲秒數。

時	分	秒
3	17	45
×60	+180	+11820
180	197	11865
	× 60	
	11820	

答: 11865 秒。

[例 2] 5 里 72 步 4 尺爲若干丈?

```
 里        丈        步          尺
  5                  72           4
180                   5         360
---                 ---        ----
900                 360     10|364
 36.4                        ------
-----                          36.4
936.4
```

答：936.4 丈。

［例 3］ 化一斤九兩一錢五分二釐爲斤數。

9 兩 1 錢 5 分 2 釐＝9.152 兩。

```
16)9.152(0.572
   80
   ---
    115
    112
    ---
      32
      32
      --
```

答：1＋0.572＝1.572 斤。

在十進的複名數，通法極爲簡單，只要用視察以定其單位及小數點，不必重行計算。如 5 石 4 斗 7 升 3 合卽爲 5473 合，亦卽 547.3 升，54.73 斗，5.473 石。

習題 9.

1. 化 1 公尺 7 公寸 8 公分爲公分。
2. 化 1 丈 5 尺 6 寸 4 分爲尺。
3. 化 1 尺 9 寸 7 分爲丈。
4. 化 5 時 15 分 35 秒爲秒。
5. 化 10 里 55 步 8 尺爲丈。
6. 化 20 擔 53 斤 6 兩 8 錢爲錢。
7. 化 3 里 63 步 4 尺 5 寸爲里。
8. 化 4 時 59 分 30 秒爲分。

習題 9 的答：

1. 178 公分。
2. 15.64 尺。
3. 0.197 丈。
4. 18935 秒。
5. 1828.3 丈。
6. 328548 錢。
7. 3.1775 里。
8. 299.5 分。
9. 否，是 5.32 斤。
10. 5.172 元。

9.　5斤5兩1錢2分可寫作5.512斤否?如否,則爲若干斤?

10.　5元1角7分2釐爲若干元?

2.　命法

把單名數化成複名數叫做命法,今以例示其算法於次:

〔例 1〕　從這一回的月圓到次一回的月圓,其時間爲2551444秒,問合幾日幾時幾分幾秒?

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2551444 \\ \hline & \ \ 42524\ \text{(分)餘 4}\cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{秒} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 42524 \\ \hline & \ \ 708\ \text{(時)餘 44}\cdots\cdots\cdots\cdots 44\text{分} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 708 \\ \hline & \ \ 29\ \text{(日)餘 12}\cdots\cdots\cdots\cdots 12\text{時} \end{array}$$

答: 29日12時44分4秒。

〔例 2〕　化289.56兩爲複名數。

$$\begin{array}{r} 16)289(18\text{斤} \\ \underline{16}\phantom{(18\text{斤}} \\ 129\phantom{(18\text{斤}} \\ \underline{128}\phantom{(18\text{斤}} \\ 1\text{兩}\phantom{(18\text{斤}} \end{array}$$

0.56兩=5錢6分。

答: 18斤1兩5錢6分。

〔例 3〕　化2.0146里爲複名數。

2.0146里

$$\begin{array}{r} 0.0146 \\ \times\quad 180 \\ \hline 2.628\text{丈} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.628 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1.256\text{步} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.256 \\ \times\quad 5 \\ \hline 1.280\text{尺} \end{array}$$

0.28尺=2寸8分。

答: 2里2丈1步1尺2寸8分。

〔注意〕 在前我們已經說過,名數的加減乘除中,有種種限制(P. 48),現在我們知道了通法和命法之後,就可以把不同的單位,化成相同的單位,因之凡同種類的量,倘使因單位不同而不能計算時,則可以化成了相同的單位而計算了。在計算名數的四則時,這通法和命法是少不了的。

十進複名數的命法也極簡單，只要依了單位的名稱次第推定即可。如 0.0172 石即爲 1 升 7 合 2 勺是也。

習題 10.

1. 化 2541352 秒爲複名數。
2. 化 93649 寸爲複名數。
3. 化 0.03256 擔爲複名數，
4. 化 289.56 兩爲複名數。
5. 化 1263.326 步爲複名數。
6. 音波每秒行 331 公尺，合舊制若干丈尺寸？
7. 化 365.2422 日爲複名數。
8. 4.8765 里是否即爲 4 里 8 丈 7 步 6 尺 5 寸？如否，則爲若干？
9. 萬里長城長凡 1329696 步，合幾里幾步？
10. 銀元市價值十一角七十文，角子市價值二百三十文，而銅元則以十文計，如此一元合銅元若干枚？

複名數四則

加法

［例］ 求 5 里 67 丈 1 步 4 尺，4 里 36 丈 1 步 2 尺，6 里 127 丈 1 步 3 尺的和。

習題 10 的答：

1. 29 日 9 時 55 分 52 秒。
2. 5 里 72 步 4 尺 9 寸，
3. 3 斤 4 兩 9 分 6 釐。
4. 18 斤 1 兩 5 錢 6 分。
5. 3 里 91 丈 1 步 1 尺 6 寸 3 分。
6. 103 丈 4 尺 3 寸 7 分。
7. 365 日 5 時 48 分 46.08 秒。
8. 4 里 157 丈 1 步 2 尺 7 寸。
9. 3693 里 216 步。
10. 260 枚。

里	丈	步	尺
5	67	1	4
4	36	1	2
6	127	1	3
15	230	3	9
＋ 1	＋ 2	＋ 1	－ 5
16	－180	－ 4	4
	52	0	

答：16 里 52 丈 4 尺。

〔說明〕 把同單位的數，排在同一縱行裏，從右而左依次求各單位的和，如各單位有可以進位的，即便進入上級的單位。

減法

〔例〕 求 7 時 28 分 30 秒與 2 時 45 分 12 秒之差。

時	分	秒
7	28	30
－ 2	－45	－12
5	＋60	18
－ 1	43	
4		

答：4 時 43 分 18 秒。

〔說明〕 把同單位的數排在同一縱行，而求其差。如遇被減數小於減數時，則借一高級單位的數來，化爲低級單位而加入被減數中。

習題 11.

試算次記的加減：

1. 25 日 10 時 45 分 15 秒加 12 日 10 分 35 秒加 2 日 1 時 4 分 10 秒。

2. 5 里 89 步 4.5 尺加 1 里 90 步零 5 寸。

3. 自陽曆三月二十日起到九月二十八日止，共有幾日？

4. 從十一週中減 65.574 日，餘幾日幾時幾分幾秒？

5. 一年中晝間最長時有 14 時 32 分，最短有 9 時 42 分，其差若何?

6. 某人稱得體重爲 107 斤 13 兩，而其所穿衣服重七斤十兩六錢，問其純粹體重是若干斤?

7. 從地球到太陽的距離，冬天是 147000000 公里，夏天是 151000000 公里，問平均合中國舊制若干里?

8. 求 7.256 斤，5 斤 10 兩 4 錢，8 兩 1 錢 2 分之和。

乘法

〔例〕 問 8 日 7 時 28 分 38 秒×29=?

```
 日          時          分          秒
  8           7          28          38
                                    ×29
─────────────────────────────────────────
232         203         252         342
  9          13         56          76
─────       ───────     ────        ──────────
241 日      216 │24     812         1102 │60
            216 │ 9      18          60  │18
            ──────      ──────────   ────
                        830 │60      502
                        60  │13      480
                        ────         ─────────
                        230           22…秒
                        180
                        ────
                         50…分
```

答: 241 日 50 分 22 秒。

〔說明〕 把乘數分別乘被乘數的各級單位，並隨時用命法把低級單位化成上級單位，而加入上級單位的積中，直到問題中最高的單位爲止。

習題 11 的答:

1. 39 日 12 時。
2. 6 里 90 丈。
3. 192 日。
4. 11 日 10 時 13 分 26.4 秒。
5. 4 時 50 分。
6. 100.15 斤。
7. 258664000 里。
8. 13 斤 6 兩 6 錢 1 分 6 釐。

除法

［例］ 27里40丈8尺÷8=?

```
8) 27里    40丈    8尺 (3里72丈6尺
   24
  ────
    3里=540
        ─────
         580丈
         56
        ─────
          20
          16
         ────
           4丈=40尺        答：3里72丈6尺。
                48
                48
               ════
```

〔說明〕 除數是不名數時，去除各單位的數，若某單位不能整除，則將餘數，化爲低級單位，加入原來的低級單位中，一併計算。

［例］ 1日21時15分是7時32分30秒的若干倍?

```
    1日             7時
   24            × 60
  ──────         ───────
   24時            420分        27150) 162900 (6
   21               32                 162900
  ──────         ───────              ─────────
   45時            452分
 ×  60              60
 ────────        ────────
  2700分          27120秒
  2715               30
     60          ────────
 ─────────        27150秒
  162900秒                               答：6倍。
```

〔說明〕 複名數除複名數時，先把被除數，除數用通法化成同單位的單名數，再照普通的除法計算。

習題 12.

1. 以234乘2日18時21分50秒。
2. 以1.41乘2里71步4尺。

3. 酒每斤價 2 角 5 分 6 釐, 問 7 斤 10 兩 6 錢之價?

4. 銀 2 角買茶葉 1 兩 2 錢,問 12 元 5 角可買若干斤兩?

5. 以 6 除 7 日 21 時 15 分。

6. 問 68 里 98 步 2 尺爲 1 里 71 步 1 尺之幾倍?

7. 銀元 7 枚重 5 兩 1 錢 5 分 2 釐,問每枚重若干?

8. 柴每擔價 7 角 5 分,今有洋 13 元 8 角 7 分半,可買若干擔?

9. 一車輪周圍之長爲 6 尺 4 寸,問行路 5 里 146 丈 4 尺輪轉若干次?

10. 光每秒行 299850 公里,聲每秒行 330 公尺。今有人見電光後 12 秒鐘,聞雷鳴,問此人與落雷之地相距多少遠?

第四節 面積 體積

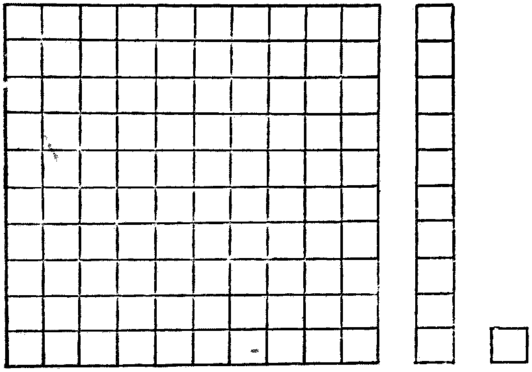
1. 面積

測量面積,須有面積的單位。面積的單位,是由長度的單位去規定的。即在長度單位上所作的正方形爲面積的單位。例如一尺上所作正方形的面積,叫一平方尺或一方尺。一寸上所作正方形的面積,叫一平方寸或一方寸。

因爲一尺等於十寸,所以一個平方尺,可以分成十個闊一寸長一尺的長方形;而這闊一寸長一尺的長方形又可以各分成長一寸闊一寸的正方形,所以一平方尺的面積,用平方寸去計算起來,有一百個平方寸。

習題 12 的答:

1. 647 日 1 時 9 分。
2. 3 里 36 步 2 尺 1 寸 9 分。
3. 1 元 9 角 6 分 1 釐 6 毫。
4. 4 斤 11 兩。
5. 1 日 7 時 32 分 30 秒。
6. 57 倍。
7. 7 錢 3 分 6 釐。
8. 18.5 擔。
9. 1635 次。
10. 約 3960 公尺。



由此可知正方形的邊長增十倍,則其面積所增的是一百倍。所以面積的各級單位，因係根據了長度的十進而來，所以是以百進的了。

標準制面積名稱表

定名	日譯	原名	略號	別名	計地積時用之		
方公里	方粁	Kilométre carré	Km^2				
方公引	方粨	Hectométre carré	Hm^2	Hectare	公頃	安百	Ha
方公丈	方籵	Décamétre carré	Dm^2	Are	公畝	安	a
方公尺	方米	Métre carré	m^2	Centiare	公釐	安釐	Ca
方公寸	方粉	Décimétre carré	dm^2				
方公分	方糎	Centimétre carré	cm^2				
方公釐	方粍	Millimétre carré	mm^2				

由下而上,均以百進。

標準制面積單位與市用制之關係,因 1 公尺等於 3 市尺,故 1 平方公尺等於 9平方市尺,因之 1 公畝即 100 平方公尺等於 900 平方市尺,即 $900 \div 6000 = \frac{3}{20} = 0.15$ 市畝。又 1 市畝 $= 6.667$ 公畝。

市用制的面積，準長度的單位而定，在計算地積時，則以六千平方市尺爲一畝，其各級單位，則沿用舊名。今記於右：

名稱	等數
頃	100 畝
畝	[單位]即 6000 方尺
分	0.1 畝
釐	0.01 畝
毫	0.001 畝

舊制的面積，也依舊制的長度單位而有方丈、方尺、方寸、方分之名，是均以百進的。

在舊制中計量地積，普通以畝爲標準單位，畝的大小，等於六十方丈。其各級單位如次。

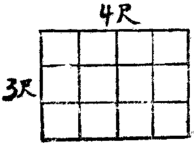
頃	畝	分	釐	毫
1=	100			
	1=	10		
		1=	10	
			1=	10

計量大面積，以方里爲單位。里長 180 丈，故每方里合 540 畝。

長方形的面積

長方形的相隣二邊，一邊叫長，他一邊叫闊。

長方形的面積，等於表長的單位之數乘表闊的單位之數(二者必須是同單位)的積，附以相當的面積單位名稱。

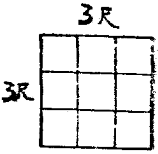


例如： 長 3 尺闊 4 尺的長方形，如圖所示，一行有 3 平方尺，而共有 4 行。故

長方形的面積＝3 平方尺×4＝12 平方尺，
或說＝(3×4) 平方尺＝12 平方尺。

正方形的面積

正方形的面積，等於一邊的平方數，附以相當的面積單位名稱。



例如： 正方形之一邊爲 3 尺，則正方形的面積＝(3×3) 平方尺
＝3^2 平方尺＝9 平方尺。

2. 體積

體積的單位，也是由長度的單位來定，即以長度單位上所作的立方體，定爲體積的單位。例如一尺上所作立方體的體積，叫做一立方尺；一寸上所作立方體的體積叫一立方寸。

因爲一尺中含有十寸，所以一個立方尺的體積剖分開來，可以成長高各一尺而闊一寸的薄片十片。再把這薄片縱剖，就可以分成長闊各一寸而高爲一尺的條子十條。再把這個條子橫斷，便可剖分長闊高都是一寸的立方體十個。所以全體可以分成 10×10×10＝1000 個小立方體，而這些小立方體，因爲長闊高都是一寸，即爲一立方寸。所以一立方尺等於一千個立方寸。

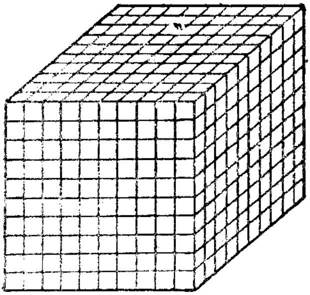
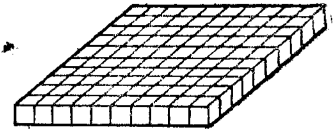
［注意］ 在計算面積時，不能說 3 尺×4 尺＝12 方尺，因爲我們早已知道，用名數爲乘數是無意義的。

問題：

1. 已知 5 尺＝1 步，則一方步是幾方尺？(1 方步＝25 方尺。)

2. 60 方丈爲畝，畝的 10 分之 1 爲分，問 1 分是若干方丈？又是幾方尺？(1 分＝6 方丈＝600 方尺。)

3. 問 5 平方尺與 5 尺平方的區別，幷求其差？(20 方尺。)

由此可知立方體的邊長增十倍，則其體積所增的是一千倍。體積的各級單位是依據了十進的長度單位而來的，故牠的各級單位是以千進的。

標準制體積名稱表

定名	日譯	原名	略號	別名			
立方公里	立粁	Kilométre cube	Km^{3}				
立方公引	立粨	Hectométre cube	Hm^{3}				
立方公丈	立籵	Décamétre cube	Dm^{3}				
立方公尺	立米	Métre cube	M^{3}	Kilolitre	公秉	竏	Kl
立方公寸	立粉	Decimétre cube	dm^{3}	Litre	公升	竔	l
立方公分	立糎	Centimétre cube	cm^{3}	Millilitre	公撮	竰	ml
立方公釐	立粍	Millimétre cube	mm^{3}				

由下而上，均以千進。

市用制的體積，也是依據其長度的單位而定的。但在計量容積時，則採用標準制，以標準制的一升爲一市升。

舊制的體積，也是依舊制的長度單位而定的，有立方尺、立方寸、立方分之名，都是以千進的。

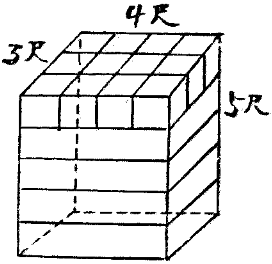
舊制計量容積，別有石、斗、升、合的各種單位，已在前面說過了。

長方體的體積

長方體的交於一點上的三邊，各叫名爲長、闊和高。

長方體的體積，等於表長闊高的長度單位(各單位須相同)數相乘之積，附以表體積的相應單位名稱。

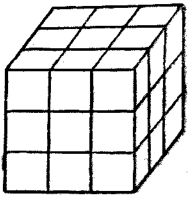
例如：　長闊及高爲3尺，4尺，5尺的立方體，若把牠的長3分，闊4分，高5分起來，則如圖所示，上段右端有一立方尺三個，卽3立方尺，故上段的體積＝3立方尺×4。∴長方體的體積＝3立方尺×4×5
＝(3×4×5)立方尺。



立方體的體積

立方體的體積等於表一邊長的數的立方，附以相當的體積單位的名稱。

例如：　一邊長3尺的立方體，其體積爲(3×3×3)立方尺＝3^3立方尺
＝27立方尺。



習題 13.

1.　舊制6方丈爲分，10分爲畝，5尺爲步，問1畝爲若干方步？

容積體積之異同

體積是從外面所見的大小，容積是中空器皿內面所能容的大小. 也就是恰能放入容器之中的物的體積，故二者可說是同一的東西。

2. 有一長方形之地，二邊之長爲 9 丈 6 尺與 5 丈 4 尺，問合幾畝？

3. 某人有田 16 畝 5 分，由 12 人耕之，問每人耕若干方步？

4. 從 1 方里 150 方丈 60 方尺中減去 380 畝 7 分 6 釐，餘若干畝？

5. 以紙糊壁；壁高 1 丈 3 尺 5 寸，闊 3 丈 1 尺 5 寸，紙闊 1 尺 7 寸半，問須紙若干丈？

6. 有一水漕，長闊各 2 尺 5 寸，高 4 寸，問容水幾何？

7. 已知 1 升之容積 31.6 立方寸。今有一方池，一邊長 8 尺，一邊長 1 丈 5 尺，水深 4 尺 5 寸，問池中水幾石幾斗？

8. 銀每立方寸重 9 兩 1 錢 8 分，今有銀 14 斤 5 兩 5 錢，問合若干立方寸？

9. 空氣每 1 立方寸之重爲 1 兩零 3 分 6 釐，問 1 室若長 3 丈，闊 1 丈 4 尺，高 1 丈 2 尺 5 寸，室內空氣重若干斤？

10. 計算泥土碎石的體積，以長闊各 1 丈而高 1 尺者爲單位，叫做方。今修築馬路，長 3 里 95 丈，闊 1 丈 2 尺，鋪碎石高 1 尺 5 寸，則需幾方，若碎石每方價 7 角 5 分，則價若干？

問題：

1. 舊制升的大小爲內口內底皆方 4 寸，內高 1 寸 9 分 7 釐 5 毫，問其容積爲若干？($4 \times 4 \times 1.975 = 31.6$ 立方寸。)

2. 問 1 公升合舊制若干立方寸？(30.52 立方寸。)

3. 問舊制 10 升爲斗，10 斗爲石，問 1 石合若干立方尺？(3.16 立方尺。)

4. 問 5 尺立方與 5 立方尺之區別，並求其差。(差 120 立方尺。)

習題 13 的答：

1. 240 方步。
2. 0.864 畝。
3. 330 方步。
4. 161 畝 7 分 5 釐。
5. 24 丈 3 尺。
6. 25 立方尺。
7. 1708 石 8 斗 6 升。
8. 25 立方寸。
9. 339937.5 斤。
10. 碎石 1143 方，價 857 元 2 角 5 分。

附外國度量衡表

外國度量衡制之最通行於我國者，爲英美及日本的度量衡。今舉其重要者列表於次：

英美度量衡制

長度表

原名	譯名	等			數
Mile	哩	1			
Rod	桿	320	1		
Yard	碼	1760	5½	1	
Foot	呎			3	1
Inch	吋				12

當量： 1 呎=0.305 公尺=0.953 營造尺
1 哩=1.609 公里=2.795 里

水量深用尋 (Fathom) 1 尋=6 呎

海程用浬 (Knot) 1 浬(英)=6080 呎
1 浬(美)=6086 呎

問題：

1. 說明次記各名詞：度，量，衡，單位，化法，命法，通法。
2. 不是同單位的名數，如何才可以相加減？
3. 不是同種類的名數如米 3 石與豆 7 升，可以相加減否？
4. 比較陽曆和陰曆的優劣。
5. 時計上 3 時正，其長短針所成的角度是幾度？
6. 外國度量衡在中國通用的原因，試考察之。
7. 複名數可以用複名數去除否？如可，有何限制，譬如以 5 尺除 6 斤可以嗎？又除得的結果是名數抑不名數？
8. 爲什麼對於一種東西的計量，一個單位是不夠的。

面積表

名稱	等				數
方哩	1				
噉	640	1			
方桿		160	1		
方碼		4840		1	
方呎				9	1
方吋		$\frac{6272}{640}$			144

當量: 1 方呎＝0.093 方公尺＝0.907 方尺
1 噉 ＝0.405 方公引＝6.586 畝
1 方哩＝2.590 方公里＝61.806 方里

體積表

立碼	1	
立呎	27	1
立吋		1728

當量: $\begin{cases}\text{1 立呎}=0.028\text{ 立公尺}\\ \quad\quad\;\;=7.864\text{ 立方尺}\end{cases}$

容量表（乾量）

原名	譯名	等			數
Bushel	嘝	1			
Pech	呌	4	1		
Gallon	嗧		2	1	
Quart	呏			4	1
Pint	哈				2

當量: (英) 1 嘝＝1.2837 立方呎
＝36.35 公升＝0.351 石
(美) 1 嘝＝1.2445 立方呎
＝35.24 公升＝0.340 石

容量表（液量）

原　名	譯名	等			數
Barrel	桶	1			
Gallon	嗧	31.5	1		
Quart	呏	126	4	1	
Pint	哈			2	1
Gill	吶				4

當量：　(英) 1 嗧＝277.274 立方吋＝4.544 公升
＝4.388 升
(美) 1 嗧＝231.0 立方吋　＝3.785 公升
＝3.656 升

常衡表

原　名	譯　名	等		數
Long Ton	重噸(英)	1		
Short Ton	輕噸(美)		1	
Pound	磅	2240	2000	1
Ounce	唡	35840	32000	16

當量：　1 唡＝28.35 公分＝0.76 兩
1 磅＝0.45　公斤＝0.76 斤

金衡表

原　名	略號	譯名	等		數
Pound	lb	磅	1		
Ounce	oz	唡	12	1	
Pennyweight	Pwt	英錢		24	1
Grain	gr	喱			24

當量：　1 磅＝0.37 公斤

藥衡表

原名	略號	譯名	等			數
Pound	lb	磅	1			
Ounce	oz	唡	12	1		
Dram	dr	打蘭		8	1	
Scruple	sc	司克路步			3	1
Grain	gr	喱				20

當量： 1 磅=0.37 公斤

日本度量衡制

長度表

名稱	等		數
里	1		
町	36	1	
間		60	1
尺			6

名稱	丈	尺	寸	分	釐	毛
進率	均以十進					

當量：$\begin{cases} 1\text{ 尺}=\frac{10}{33}\text{ 公尺} \\ 1\text{ 里}=3.93\text{ 公里} \end{cases}$

地積表

名稱	等				數
町	1				
段	10	1			
畝		10	1		
步			30	1	
合				10	1
勺					10

坪(卽步)=1 間平方=36 方尺

當量：$\begin{cases} 1\text{ 坪}=0.033\text{ 公畝} \\ 1\text{ 公畝}=30.25\text{ 坪} \end{cases}$

重量表

名稱	等				數
貫	1				
斤		1			
匁	1000	160	1		
分			10	1	
釐				10	1
毛					10

當量：
1 貫＝2.75 公斤
1 公斤＝267 匁
1 公分＝0.267 匁

容積表

名稱	石	斗	升	合	勺
進率	均以十進				

當量：
1 升＝1.8 公升
1 公升＝5.5435 合

第四章　應用題解法

世間所有事物，關係非常複雜，所以以處理日常生活上數的問題爲職志的算術科，其中所發生的問題，也不會簡單，因之解答的方法，亦不會有一定的法則。但按照各種問題的性質，加以分析的研究，則可以發見此種複雜的問題，實亦由若干根本的問題，相互錯雜而成。所以如能將這些較爲基本的問題弄清楚，應用了去解答較複雜的問題，一定可以得到很多的便利。

但問題的分類，爲一極難之事，有許多問題其所屬實不止一類，此地所設定的種類，不過爲講述的便利起見，並非說非如此不可，也並非說各類中間，有着明確的界限而各不相涉。學者等到精熟之後，自可不拘成法，獨出心裁，以求妙解。

第一　平均問題算法

〔例 1〕　某生本學期的成績：國文 75 分，英文 70 分，算學 80 分，歷史 65 分，地理 60 分，圖畫 60 分，手工 65 分，體育 77 分。

解：　$(75+70+80+65+60+60+65+77)\div 8$

$=552\div 8=69.$

許多同種類的數的平均，是把這些數的和，用這些數的個數去除所得的結果。

這裏的例 2，因取二數之差而加以平均，故平均算法又有均差算法之名，其實也不過是平均算的一種，因卽幷記於此。

這裏的例，檢算極易，故不贅說。但學習者應自爲檢算，以驗答數的是否無誤。

[例 2] 某算學教科書分上下二卷,每部價 2 元 5 角,今購上卷 4 冊下卷 6 冊,計價 12 元 3 角,問上下卷各價若干?

解: 每部價 2.5 元,故 4 部之價爲 10 元(卽上下各 4 冊之價)。

故 12.30 元 − 10 元 = 2.30 元,爲下卷 2 冊之價。

故下卷 1 冊之價爲 2.30 元 ÷ 2 = 1.15 元。

因之上卷 1 冊之價爲 2.50 − 1.15 = 1.35 元。

習題 14.

1. 某地五日間正午的溫度爲 71.7°, 71.5°, 71.3°, 71.4°, 71.9°, 求其平均溫度。

2. 甲乙二數的平均爲 3.21, 丙爲 2.64, 求甲乙丙三數的平均值。

3. 某校學生分三組旅行: 第一組 45 人,用 28 元 8 角,第二組 25 人,用 38 元 6 角,第三組 50 人,用 40 元 7 角,問各組平均每人用洋若干?總平均每人用洋若干?

4. 上酒 2 斤,每斤 3 角 5 分,中酒 3 斤,每斤 3 角,下酒 5 斤,每斤 2 角,問酒混合後每斤之價若干?

5. 每斤 1 角 1 分的糖 25 斤,每斤 9 分的糖 75 斤,今混合後每斤賣價 1 角,問每斤獲利若干?

6. 甲乙丙 3 人旅行,甲支出火車錢 6 元 9 角,乙支出雜用 3 元 7 角 5 分,丙支出輪船及人力車等 6 元 3 角,今欲平均分配其費用,問須如何?

應用問題解法要訣:

1. 仔細認淸題意,明白題中已知的及所求的。
2. 決定解題的方針。
3. 立式計算,務求簡明易解。
4. 答數算出後,須行檢算。

7. 某生除算學外 6 種功課的平均分數爲 77,加了算學的分數,7 種的平均爲 79,問算學得幾分?

8. 甲乙丙三人所有金爲 100 元,甲所有爲乙的 2 倍,乙比丙多 12 元,問各人所有若干元?

9. 某同學會中,到會者 18 人,合攝一照相,照相價目 3 張洋 4 元 5 角,添印每張洋 3 角,今每人各要 1 張,每人須出錢若干?

10. 某人每年有一定的收入,他在 5 年間每年支出 1200 元,結果負了若干債。後來整理債務,節約開支,每年支出減爲 900 元,7 年以後,把一切債還清。問他每年收入若干?

第二　歸一算法

[例 1]　白米 3 斗 5 升之價爲 4 元 3 角 4 分,問 1 石 2 斗 5 升之價爲若干?

解:　米 3 斗 5 升……價 4.34 元,

則 1 升之價爲 $4.34 \div 35 = 0.124$ 元。

故 1 石 2 斗 5 升之價爲 $0.124 \times 125 = 15.50$ 元。

答: 15 元 5 角。

[例 2]　某工事用工人 6 名,24 日可完工,問用工人 8 名,幾日可完工?

習題 14 的答:

1. 71.56°.
2. 3.02.
3. 第一組: 0.64 元,第二組 1.544 元,第三組 0.814 元,總平均 0.9003 元。
4. 2 角 6 分。
5. 5 盞。
6. 須還甲 1 元 2 角 5 分,還丙 6 角 5 分。
7. 91 分。
8. 甲 56 元,乙 28 元,丙 16 元。
9. 5 角。
10. 1025 元。

解：　用 6 工人則 24 日可成，

故用 1 工人則須 24 日×6＝144 日方可成，

今用 8 工人則要 144 日÷8＝18 日。

答：18 日。

［例 3］　1 時織 6 尺 6 寸，則 8 時可以織成之布，今欲於 6 時間中織成，問每時須織幾尺？

解：　1 時間織 6 尺 6 寸，

故 8 時所織之長爲 6.6 尺×8＝52.8 尺。

今欲於 6 時間中織成，則每時所織爲其 6 分之 1，故以 6 除之

52.8÷6＝8.8 尺。

答：8 尺 8 寸。

習題 15.

1. 一水槽以 5 管注水於其中 15 分鐘而水滿。若用 3 管注之，須幾分鐘可滿？

2. 12 工人 30 日的工資爲 252 元，問 18 人 25 日之工資該幾何？

3. 工人 6 名，4 日間食米 1 斗 2 升，今有工人 10 名，作工 10 日，問食米若干？

4 女工 6 人 1 日的工資與男工 4 人 1 日的工資相等，今雇女工 8 人，25 日付工資 48 元。問銀 54 元，雇男工 15 人，可雇幾日？

5. 某講堂中，備有長凳，如每凳坐 6 人，該室可容 540 人。若每凳坐 5 人，則可容若干人？

歸一算法即如名稱所示，把各條件歸結到一而計算。如例 1 則先算出一升之價，例 2 則算 1 工人所要之日數，例 3 算出布的全長，再求題中的所問。檢算很簡單，說明此地也略去了。

6.　雇工 600 人，於 18 日間可成之工事，若添加 300 工人，則幾日間可成?

7.　牛車一輛可裝米 20 袋，今有米以 7 輛牛車，去裝運 30 次運畢，今若改用每輛可裝 14 袋之馬車 15 輛去裝運，問幾次可以運畢?

8.　糙米 1000 石，甲場舂之，50 日可盡，乙場舂之，40 日可盡。今有米 900 石，使甲乙二場共舂幾日可盡?

9.　建築道路每 15 丈 4 尺需費 39 元 6 角 5 分 5 釐，問 2575 元可築若干丈?

10.　有一長 3 尺闊 6 尺高 2 尺 7 寸之箱，今欲造一與箱容積相等，而長闊均爲 5 尺 4 寸，問高應爲若干?

第三　還元算法

[例 1]　某數以 7 除，加上 50，把這和 5 倍，再減去 200 則爲 100，求某數。

解:　依題意則爲 (某數 $\div 7+50)\times 5-200=100$，故在未減 200 前爲 300，

未 5 倍前則爲 $300\div 5=60$，

未加 50 前則爲 $60-50=10$，

未除 7 前則爲 $10\times 7=70$.

答: 70.

算式爲　$\{(100+200)\div 5-50\}\times 7=70$.

檢算則爲　$(70\div 7+50)\times 5-200=100$ 故合。

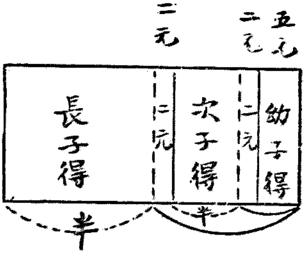
習題 15 的答:

1.　25 分。　2.　315 元。　3.　5 斗。　4.　10 日。

5.　450 人。　6.　12 日。　7.　20 次。　8.　20 日。

9　1000 丈。　10.　1 尺 6 寸 6 分。

［例 2］ 某人以所有之金分給三子，以全數之半又2元給長子，以其餘額之半又2元給次子。又以所剩5元給幼子。問此人本有若干元？



解： 給次子的是餘額之半又加2元，而所剩爲5元。若只給餘額之半則所剩有5元＋2元＝7元。

故7元亦卽餘額之半，卽給長子後所餘者爲7元×2＝14元。

此14元乃全數之半中又以2元給了長子的結果，故全數之半爲14元＋2元＝16元，因之原有金額爲16元×2＝32元。

答：32元。

習題 16.

1. 自450減某數，以5除其差，再加12於其商，再以7除之得4。求某數。

2. 某數加300，以25除，再以7乘，從積中減124則爲100，問某數爲若干？

3. 以一棒插入水中1尺8寸，再倒一頭以棒長之半插入水中，其時棒之未浸溼者尙有1尺2寸，問棒之長爲若干？

4. 錢袋中有錢若干，用去了一半。再加入7元5角。又

還原算法是將未知數用種種順序施行加減乘除各法之後，而得了最後結果，用此結果以求原數，故欲解此問題只要把先所行之加減乘除，反其順序和法則計算。

習題16的答：

1. 370.　2. 500.　3. 6尺。　4. 5元。

5. 22枚。　6. 甲450元，乙375元，丙270元。

7. 305元。

用去了現在的一半又 6 角，餘剩的是 4 元 4 角。問原來袋中有錢若干？

5. 某人有桃若干枚，以其半又 1 枚給甲，又以所餘之半又 2 枚給乙，尙餘 3 枚，求原有桃數。

6. 甲乙丙各有金若干元。今甲以 125 元給乙，乙以 135 元給丙，丙以 40 元給甲，則各人所有同爲 365 元，問各人原有金數若干元？

7. 某人以若干資金營商，得了資本金的二倍的利息，倘能再多得 85 元，則共可得銀 1000 元。問其原有的資金若干？

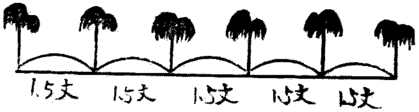
第四　栽植算法

［例 1］ 有長 60 丈之路，欲於其一傍每隔 1 丈 5 尺栽柳一株，問首尾共種幾株？

解： 60 丈的路以 1.5 丈分的段數是 $60\div1.5=40$.

但所栽的樹數比段數多 1，故 $40+1=41$.

答： 41 株。

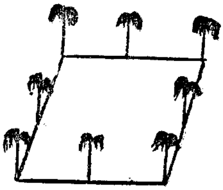


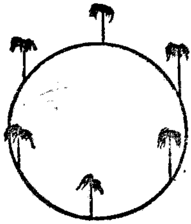
［例 2］ 在上題中，若路不爲一直線而是首尾相連的多角形或圓形，則須幾株？

解： 首尾相連之路所栽的樹數如圖所示，知其與所分的段數相等。

答： 40 株。

栽植算法，每在兩地點間以一定的間隔而種栽樹木，所求的不外兩樹的間隔，全距離，樹木的株數。解法上應注意的是樹數比樹間隔的數是多 1 或少 1。在計算年齡，日數等，用這算法的也不少。





習題 17.

1. 長 150 丈的道路，在道路的兩側，每隔二丈植柳一枝，兩端是都種的，問共栽幾枝?

2. 路長 75 丈，植柳於其兩傍，自一端起而他端止，兩樹間的距離均相等，共植 62 株，問兩株間的距離。

3. 於道路的一側植樹，桃柳相間，兩桃及兩柳間之距離，均爲 3 丈，桃與柳間之距離爲 1 丈 5 尺。只知有桃樹 583 株，柳樹 582 株，問路長若干?

4. 在 4 里 45 步之路程間，欲植電桿 100 桿，問每兩桿間的距離應爲若干丈?

5. 五月五日爲星期日，問此月有幾個星期日?

6. 要造二丈四尺長的梯子，每一段階的間隔定爲一尺二寸，問要多少横木?但兩端是不要横木的。

第五　和差算法

［例 1］　兩數之和爲 85，其差爲 25，求兩數。

解:　大數－小數＝差，所以小數＝大數－差。

今若於二數之和中減去小數，則可視爲大數減差，而加小

習題 17 的答:

1. 152 枝。　2. 2 丈 5 尺。　3. 1746 丈。

4. 7.5 丈。　5. 4.　6. 19.

數，卽其中有二個小數。故 85－25 是等於小數的 2 倍，卽小數等於 (85－25)÷2＝30。

因之大數等於 85－30＝55。

答：大數 55，小數 30.

或大小數之和中加上差，則其中有大數的 2 倍，故大數等於 (85＋25)÷2＝55，也可以算出。解此類問題常用

$$\begin{cases}(\text{和}+\text{差})\div 2=\text{大數},\\(\text{和}-\text{差})\div 2=\text{小數}\end{cases}$$

的公式。

[例 2]　一船航行於某河中，順水每時行 10 里，逆水每時行 6 里。問此河中水流之速每時若干里？船在靜水中航行每時若干里？

解：　順流而下的船速＝船在靜水中的漕速＋水的流速，

逆流而上的船速＝船在靜水中的漕速－水的流速。

故 (10 里＋6 里)÷2＝8 里……每時船在靜水中的漕速，

(10 里－6 里)÷2＝2 里……每時水的流速。

[例 3]　甲乙二人共有金 40 元 6 角，甲比乙多 12 元 4 角，問甲乙各有金若干？

解：　甲比乙多 12 元 4 角，卽甲乙的差爲 12 元 4 角。

今若甲以此差額之半卽 12.4 元÷2＝6.2 送給乙，則甲乙二人所有便相等，卽各人均有

40.6 元÷2＝20.3 元。

和差算法是知道了大小二數的和及差而求二數的算法。解此種問題只要先設法得其二數中的一數，他一數卽可迎刃而解，但知道了上記的公式，則計算更便。

例 2 原是流水問題，看其解法原理是與和差算法一樣的。

例 3 是應用均差算法（見平均算法）以解和差問題的例。

由此可知一問題的解法，常不止一種，可以隨意把住了要點，決定了方針，去求解答的。

故甲所有金爲 20.3 元＋6.2 元＝26.5 元，

乙所有金爲 20.3 元－6.2 元＝14.1 元。

習題 18.

1. 甲乙二人所有金合計爲 323 元，若甲將 26 元 5 角給乙，則二人之所有相等。問二人各有幾何？

2. 某人以其財產五萬元給二子，長子所得比次子多二萬元，問各得幾何？

3. 上下二卷的算學書 27 部，價 21 元 6 角，只知上卷比下卷貴 1 角，求上下各卷的價格。

4. 兄弟二人現在年齡之差爲 2 歲。5 年前年齡之和爲 62 歲，求二人現年齡。

5. 相距 300 哩的甲乙二車站，快車從甲站，慢車從乙站，同時出發，相向而行，於 6 時後相遇。若以同方向行車，則快車於 30 時後追及慢車，問二列車每時的速度各如何？

6. 有甲乙二列車，甲長 220 尺，乙長 200 尺，相向而行，從兩車頭相遇到兩車尾相離，需時 5 秒。若同方向進行時，則甲列車頭追及乙列車尾至甲尾離乙頭時需 30 秒鐘，問甲乙兩列車每秒鐘的速度各若干？

7. 雇男女工各 12 人，35 日付出工資 546 元，男工每日工資比女工大 3 角，問男女工每日工資各若干？

8. 東西二倉共有米 8000 石，今每日從東倉運米 25 石入西倉，40 天後，兩倉的石數相等。問兩倉原有米各幾石？

習題 18 的答：

1. 甲 188 元，乙 135 元。
2. 長子 35000 元，次子 15000 元。
3. 上 4 角 5 分，下 3 角 5 分。
4. 兄 37 歲，弟 35 歲。
5. 快車 30 哩，慢車 20 哩。
6. 甲 49 尺，乙 35 尺。
7. 男 8 角，女 5 角。
8. 5000 石，3000 石。
9. 甲 2 元 1 角，乙 1 元 6 角 5 分。
10. 42，43.

9. 甲乙二人有 20 分及 5 分鎳幣共計各 15 個。但甲所有銀幣之數與乙所有代幣之數相等，甲所有的錢則比乙多 4 角 5 分，問各有錢若干?

10. 連續的二數之和爲 85，問各數?

第六　行程算法

［例 1］　甲乙二人，自東西兩地出發，同時相向而行，甲每時行 9 里，乙每時行 8 里，3 時 48 分之後二人相會，問二地相距若干里?

解：　每 1 時二人所行之路是 9 里＋8 里＝17 里。

所以 3 時 48 分，卽 3.8 時所行之路爲

17 里×3.8＝64.6 里。

答：64.6 里。

檢算：　9 里×3.8＝34.2 里……甲所行的路程。

8 里×3.8＝30.4 里……乙所行的路程。

64.6 里……二人的全行程。

［例 2］　甲的汽車每時行 10 哩，乙的汽車每時行 12 哩，今甲比乙前 1 時動身，問乙走幾時，可追及甲?

解：　乙車比甲車每時快 12 哩－10 哩＝2 哩。甲比乙先行 1 時，故乙動身時甲車在乙車前 10 哩。

因之 10 哩÷2 哩＝5.

卽每時可追出 2 哩，5 時間卽可追到了。

答：5 時。

行程算法，是解決二人或數人以一定的速度走路的問題。題所求的是知道了時間求距離或知道距離求時間。又有求追及的時間及追的距離等。所要注意的，是二人相向而行時，以二人速度之和而接近起來，相背而行時，以二人速度之和而遠隔起來；走同一方向，則以速度之差相接近或相遠隔起來。

習題 19.

1. 兩地相隔 78 里，甲乙二人各從一地起，同時出發相向而行，甲每時行 6 里，乙每時行 7 里，問幾時後二人相會？

2. 甲汽船每時行 12 海里，乙汽船每時行 13.5 海里，今甲在乙前 6 海里，乙追之，幾時可追及？

3. 甲乙二人同時由同地相背而行，甲日行 85 里，5 日後二人相距 800 里，問乙每日行若干里？

4. 甲乙二人同時由兩地相向而行，甲日行 50 里，乙日行 60 里，至 5 日，二人相會後復距 70 里，問二地間相距若干里？

5. 東西兩地相距 224 里，甲從東向西，每時行 15 里，乙自西而東，每時行 13 里，設二人同時出發，5 時後相距若干里？又 15 時後相距若干里？

6. 上題中，若甲乙二人，同時出發，走同方向的路，甲自後追乙，問 5 時後及 120 時後相距各若干里？

7. 甲每時行 6 里 120 步，乙每時行 7 里 300 步，今同時同地出發，依同一方向進行 1 時 30 分後，乙因遺忘要件，故返身到出發地點，取物再追甲，問若干時後可以追及？

8. 從東村到西村，甲每分鐘走 50 步，乙每分鐘走 45 步，今二人同時出發，甲比乙早到 2 分鐘，問東西二地的距離若干里？

9. 甲有米 504 袋，每日消費 8 袋，乙有米 316 袋，每日消費 12 袋，幾日之後，甲所有米爲乙所有的二倍？

習題 19 的答:

1. 6 時。
2. 4 時。
3. 75 里。
4. 480 里。
5. 84 里，196 里。
6. 214 里，16 里。
7. 12 時 40 分。
8. 2 里半。
9. 8 日。
10. 第二列車在丙車站停等 10 分鐘。

10.　從甲車站開出到丁車站去的第一列車，一時平均行 30 哩，同時從丁車站開到甲車站的第二列車，平均每時行 20 哩。中間有乙，丙二車站，各站間的距離，甲乙爲 12 哩，乙丙爲 5 哩，丙丁爲 8 哩，這二列車須在乙丙二站中之一交會，問須使那一列車在那一站停等若干分鐘，較爲便捷?

第七　流水算法

[例]　有一船上下於 58.5 里之河中，上行費 6.5 小時，下行費 1.5 小時。問此船在靜水中每時漕速及水的流速。

解：　上行 58.5 里，費 6.5 時，故 1 時上航行

$$58.5\text{ 里}\div 6.5 = 9\text{ 里。}$$

即每時船的漕速－水的流速＝9 里。

又下行 58.5 里，費 1.5 時，故下行 1 時所航里數爲

$$58.5\div 1.5 = 39\text{ 里。}$$

即每時船的漕速＋水的流速＝39 里。

故本問題即是知二數和及差求二數的和差算法。

因之 (39 里＋9 里)÷2＝24 里……船在靜水中的漕速，

(39 里－9 里)÷2＝15 里……水的流速。

答：漕速 24 里，流速 15 里。

習題 20.

1.　水程 120 里，舟人順流划行，10 時可到，逆流 20 時可到。每時水的流速及船的漕速如何?

2.　某船從甲鎮到乙鎮，漕速每時 7 里，水流每時 3 里，6

在一定速度的水流之中，有一定漕速的船，航行上下，所生關於距離，時間及速度之問題，是這流水算則要解決的，實際這不過是和差算法的一種應用。因

下行的速度＝漕速＋流速……(大小之和)，

上行的速度＝漕速－流速……(大小之差)。

時可達。問從乙鎮回甲鎮須幾小時?

3. 順水行舟,13 時行 221 里,若水流每時 2 里,問回時須行幾時?

4. 在靜水中漕行每時速 5 里的甲乙二船戶,航行於水流每時 3 里的河中,甲從上流載客 20 人下行,同時乙從下流載客 13 人上行,客人的船錢均已收齊。二船在半途中相遇,於是把船中客人交換了,駛回原地,問此二船戶間關於錢應如何找付?(但二船出發相距爲 400 里,上下航一律,以時間計,每船客 1 時出錢 5 分。)

5. 長 135 里之河,甲船上行須 15 時,下行須 5 時。今有乙船上行須 30 時,問下行要若干時?

6. 每時漕速 7 里之船,上下於某河,其每時下行爲上行速度之 6 倍,問每時水流之速?

7. 沿河的南北二村,相隔 210 里,甲乙二船航行於二村之間,下行時甲要 6 時,乙要 7 時,上行時甲要 8.4 時,問乙要若干時?

8. 甲乙二船的漕速,爲每時 25 里,20 里。今甲自下流上溯,乙同時於相距 450 里之地下行,在途中相遇之後,再經過 20 時,甲船到了乙船的出發地,問水流每時若干里?

第八 全部通過算法

[例] 長 60 尺的火車,每秒行 66 尺,經過一長 402 尺的橋,問自車頭進橋至車尾出橋需時幾何?

習題 20 的答:

1. 漕速 9 里,流速 3 里。
2. 15 時。
3. 24.55 時。
4. 乙應找甲 94 元。
5. 6 時。
6. 5 里。
7. 10.5 時。
8. 10 里。

解：　車頭出橋時，車尾尙在橋上，至車尾亦出橋，則列車爲全部通過了。在車尾剛出橋時車頭是離橋已有 60 尺了。故以車頭一方看，其全行程是

402 尺＋60 尺＝462 尺。

故所需時間爲 462÷66＝7。

答：7 秒。

習題 21.

1.　火車長 80 尺，每秒行 50 尺，問全部通過 420 尺的橋需時幾秒？

2.　長 40 尺的列車全部通過 200 尺的橋，費時 4 秒，問車行每秒幾丈？

3.　有人見一列車入 240 公尺長的山洞。車頭入洞後 8 秒，車方全部入內。共經 20 秒車又完全出洞；問車每秒行若干公尺，又車長若干？

4.　有甲乙二列車，甲長 104 尺，乙長 2[illegible]0 尺，每秒甲行 36 尺，乙行 28.8 尺，相向而行時，兩列車自相遇至相離，共需幾秒鐘？

5.　上題若同方向行進，甲要全部追出乙，須時幾秒？

6.　有兩列車，一長 92 尺，一長 84 尺，相向而行自相遇至相離，歷時 2 秒；若一車追他一車，自追及至越過需時 8 秒，求二車每秒的速度。

全部通過問題的算法，其實就是行程算法，不過其中因行動的東西，本身也有長度，須一同計入行程之內，不可忽略，故有此名。所應注意的與行程算法相同；即：相向而行時，速度爲二個行進物速度之和，同一方向進行時度速是其間的差。最不可忘的是行進物自身的長度，須加入行程中一事。

習題 21 的答：

1.　10 秒。　2.　6 丈。　3.　車速每秒 20 公尺，車長 160 公尺。

4.　5 秒。　5.　55 秒。　6.　55 尺，33 尺。

第九　年齡算法

［例］　現在父年 45 歲，子年 9 歲，問幾年後父年爲子年的 3 倍?

解：　父子年齡的差是不論經過幾年都一樣的。故父年爲子年 3 倍時，二人年齡之差也是

$$45\text{ 歲} - 9\text{ 歲} = 36\text{ 歲}。$$

這時父子年齡的差恰是子年的 (3－1) 倍卽 2 倍，所以這時的子年是

$$36\text{ 歲} \div 2 = 18\text{ 歲}。$$

但子現年 9 歲，故在 18 歲－9 歲＝9 歲之後。

答：九年後。

檢算：9 年後的父年爲 45 歲＋9 歲＝54 歲。

子年爲 9 歲＋9 歲＝18 歲。

18 歲×3＝54 歲。

故 9 年的答不錯。

習題 22.

1.　父現年 36 歲，子現年 18 歲，問幾年前父年爲子年的 3 倍?

2.　現在父年 58 歲，有三子，其年齡爲 18 歲，16 歲，14 歲，問幾年後三子年齡之和與父年相等?

3.　現在 85 歲的祖父，有孫二人，長 12 歲，次 3 歲，問幾年後祖父的年齡爲二孫年齡和的 3 倍?

年齡算法的問題，是說幾年前或幾年後，一人或數人的年齡，等於別的若干人的年齡，或其若干倍等等的問題。在這些問題中要注意二人年齡的差，無論何時，都是一定，便有解決之法了。但相比較的人數若不是相同時，則其差便不一定，這時可照行程算法的道理去想，便可得解決。

4. 現在父年爲子年的 9 倍，5 年後則爲其 5 倍，問現在父子的年齡?

5. 東西二倉，本儲同量之米，自東倉移米 300 斛入西倉，於是西倉所有米爲東倉所有的三倍半。問當初各儲若干?

6. 有甲乙二雞場，甲飼雞 640 隻，乙飼 540 隻，後遭疫病，發生了同數的死亡。剩餘的雞數甲場爲乙場的三倍，問甲乙二場各剩若干?

7. 甲桶有酒 2 斗，乙桶有酒 1 斗 2 升，今兩桶吸出等量，所餘的酒，甲適爲乙的 5 倍，問兩桶各餘酒若干?

第十　龜鶴算法

[例]　龜鶴合計 19 頭，足數共有 52 隻，問各幾頭?

解:　龜有 4 足，鶴有 2 足。

所以若 19 頭全是龜，則應有的腳數爲 $4\times19=76$，然實際足數只有 52 隻，故相差 $76-52=24$ 隻腳，因之若看做龜的地方，換一隻鶴進去，便少了腳 $4-2=2$ 隻。

現在共多 24 隻，故換進鶴 $(24\div2=12)$12 頭卽可。

因之得龜 7 頭，鶴 12 頭(答)。

別解:　全部看做鶴，則腳數多了 $52-2\times19=14$，若用一龜換出一鶴，則可加入腳 $4-2=2$ 隻，現共須加入腳 14 隻，故須換入龜 7 頭。

因之得鶴 12 頭，龜 7 頭(答)。

習題 22 的答:

1. 9 年前。　2. 5 年後。　3. 8 年後。　4. 45 歲，5 歲，

5. 540 斛。　6. 甲 150 隻，乙 50 隻。　7. 甲 1 斗，乙 2 升。

龜鶴算法是知道了龜鶴的頭數和與腳數和，而求各種類的數目。這也只要設法求得其一種的答數，他一數卽可迎刃而解，但此種問題中，因要頭數和腳數的關係而求頭數，故不能如和差問題一般只用加減法。解法的要點在假定全部均爲一種，與實際的差異如何，再看這個差，把別一種換進了若干去，便可打消。

習題 23.

1. 雞狗共 21 隻。狗的足數等於雞的足數，問雞狗各幾隻？

2. 米 50 石，用大小二種麻袋盛之，大袋裝 4 斗 5 升，小袋容 4 斗，共計 120 袋，問各若干袋？

3. 某家收穫米麥數共計 35 石，裝 80 袋，米每袋計 4 斗，麥每袋 5 斗，問米麥各若干袋？

4 某工場大工小工合計 40 人每日支出工資 100 元，設每日工資大工 3 元，小工 1 元，問大工小工各若干人？

5. 在某新聞報上登廣告，付廣告費十四元，可得地位爲五號字，二十行，每行 16 字的大小。今所擬廣告，須用二號五號二種活字，共 260 字，二號活字的大小爲五號的 4 倍，問應用五號活字幾個？

6. 一萬二千噸的戰艦與八千噸的巡洋艦，共造 10 隻，需建造費 9760 萬元。問兩種各可造幾隻？(但建造費以噸計。戰艦每噸一千元，巡洋艦每噸八百元。)

7. 有人要買五分郵票與二分半明信片各若干張，付洋 2 元 5 角，但郵局把他所要的郵票與明信片數對掉了，故找回了洋 5 角，問買了郵票，明信片各幾張來？

8. 雇工搬運物品 500 件，約定運費每件 2 角 5 分，但若中途有損毀，則每件須賠償 3 角 5 分。結果此人得了運費 114 元 8 角。問破損了若干件？

習題 23 的答：

1. 雞 14 隻，狗 7 隻。 2. 大 40 袋，小 80 袋。 3. 米 50 袋，麥 39 袋。
4. 大工 30 人，小工 10 人。 5. 五號 240 字。
6. 戰艦 6 隻，巡洋艦 4 隻。 7. 五分郵票 20 張，明信片 40 張。
8. 17 件。

第十一 過不足問題算法

［例］ 分桃給童子，每人 8 個，不足 6 個；每人 6 個，則多 8 個。問桃數及童子人數？

解： 每人 8 個，則不足 6 個，所以加進了 6 個，則恰好每人 8 個了。今因不足，每人減少 2 個，給 6 個，那時多了 8 個。由此看來，每人給 6 個比每人給 8 個所多餘的，有原來不足的 6 個及這時多餘的 8 個。

共計 $8+6=14$ 個。

即是說每人少給 2 個要多 14 個。

所以人數是 $14\div2=7$。

因之桃數是 $8\times7-6=50.$

答：桃 50 個，童子 7 人。

檢算： $7\times8=50+6,$

$50-8=7\times6.$

習題 24.

1. 某人欲於一定時間中，貯蓄一定的金額，若每月積下 8 元，則到期時，尚差 4 元，若每月存下 10 元，則到了期多 20 元。問預定貯蓄的金額爲若干？

2. 分鉛筆若干枝於兒童，其中 3 人每人 5 枝，另外的每人 4 枝，則多 5 枝，若其中的 1 人給 8 枝，另外的每人給 6 枝，則少 20 枝。問人數與鉛筆數？

3. 有桃若干個分給童子，每人給 4 個，則餘 2 個。今有比

過不足問題，爲一定數量，分配於一定人員之際，要由其多餘及不足的關係，而算出人員及數量的題目。解此種問題的要點，在把第一次分配時的餘（或不足）和第二次分配時的餘（或不足）相比較，求得全體的差，再以每人的先後所分配得的差除之，即得人數。

桃數 3 倍之李子，再分給他們，每人 13 個，不足 9 個，問桃、李數及人數？

4. 某學生於午前七時二十五分出發，若每分鐘行 50 步，則可在上課前 7 分鐘到校，若每分鐘行 35 步，則遲到 5 分。問上課的時刻及到校的距離？

5. 由某地到火車站，用汽車開每時 10 哩的速度，則於火車開出的前 15 分到站，若汽車開每時 6 哩的速度，則於火車開出後 15 分到站。今欲在火車開前 10 分到站，問汽車須每時行幾哩？

6. 棋子若干個，擺成縱橫同數的正方形，多 9 個，若縱橫再加添一行則不足 6 個，問棋子的數？

7. 雞卵若干個，每個賣錢 75 文，全體可得 950 文之利。今因每個只賣 68 文，故虧損了 380 文。問雞卵數及每個之買價？

8. 有小麥若干袋，與每袋 7 元之大麥交換後，則袋數可增 5，與每袋 10 元之米交換，則其袋數減 7。問小麥的袋數及每袋的價格？

第十二　其他的問題

以上把四則的應用問題，分做了十一類，對各類問題的算法，已經用例題來說明了。但是這種分類的方法，並非一定不易，而且所有的問題，也不能網羅盡淨。並且在這十一類中，各有相通的地方，可以併爲一起的也屬不少。因之不能說分類之

習題 24 的答：

1. 100 元。　2. 13 人，60 枝。　3. 桃 62 個，李 186 個，童 15 人。
4. 午前八時，3 里 320 步。　5. 9 哩。　6. 58 個。
7. 190 個，每個 70 文。　8. 35 袋，8 元。

外，再無別種問題，也不能說分類之間，有一定明白的限界。

現在再舉例來說述若干上面所遺漏的問題，可爲解題時思索之助，而且也有些人把這裏所舉的作爲一個特設的分類的項目。今爲簡單故，只說個大略，觸類旁通，舉一反三，有待於學習者了。

［例 1］　若干兵士排成一中空方陣，外層每邊 11 人，共三層，問有兵士若干人？

解：　如圖爲示方陣的第一層每邊 11 人時，第二層每邊只有 9 人，第三層只有 7 人。

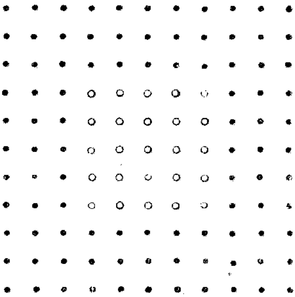
即每進一層少去兩端的 2 人。

故在第四層每邊只有 5 人。

又設陣爲實心，則所有人數即爲每邊人數的自乘，即

$$11\times 11=121.$$

因爲中空，所該減去的是每邊 5 人的一個方陣，即



$$5\times 5=25.$$

故兵士人數爲　$121-25=96.$

答：96 人。

［例 2］　甲乙二人所有金額的比較，初甲爲乙之 6 倍。其後甲得了 28 元，乙得了 200 元，於是甲所有成爲乙所有的 2 倍。問二人原有的金額？

例 1 叫方陣問題，其全人數爲一邊人數的自乘。又在方陣上縱橫各添一行，仍是一方陣，而人數只比原來的每行多 1。

但在其四圍各添一行，則每行人數須加 2。解題時須加注意。此是栽植算法的一種特別情形。

例 2 一類的問題，叫倍數變化問題。解法之要點在注意倍數變化後，其差所生的變化，以求出一個答數。此與過不足問題有相通處。

解： 乙得 200 元時，甲若仍要維持其原有倍數，

則非得 200 元 × 6 = 1200 元不可，但甲只得 28 元。

故生了 1200 元 − 28 元 = 1172 元的差額，

因之比乙的 6 倍的金額少了 6 − 2 = 4 倍。

故乙現在所有的金額為

1172 ÷ (6 − 2) = 293 元。

故乙原有 293 元 − 200 元 = 93 元，

甲原有 93 元 × 6 = 558 元。

答：甲 558 元，乙 93 元。

［例 3］ 買帽一頂，皮鞋一雙，價共 17 元 8 角，只知鞋價比帽價的 3 倍多 6 角。問鞋價？

解： 若鞋價低了 6 角，則恰為帽價的 3 倍，而所付的價錢為 17.8 元 − 0.6 元 = 17.2 元。

這又是帽價與 3 倍帽價的和即帽價的 4 倍，

故一帽的價格是 17.2 元 ÷ 4 = 4.3 元，

所以鞋價是 4.3 元 × 3 + 0.6 = 13.5 元。

答：13 元 5 角。

［例 4］ 甲有金 1500 元，乙有金 970 元，兩人出同額的資金營業後，甲所剩的金為乙的 2 倍。問出資的金額為若干？

解： 出資前二人所有金額之差為

1500 元 − 970 元 = 530 元。

這額差因所出的資金為同額，故始終不變。

因之出資後乙所剩的金額為

例 3 所示，叫頂替的算法，就是本是鞋子的價錢，因為知道其倍數的關係，即用帽子替進去，就會發見帽子若干倍的價格，以求出帽子的價格。

例 4 一類的問題，須注意二數之差為一定，由此差的關係算出其中的一數來。這類問題，與年齡問題算是相近的。

530 元÷(2－1)＝530 元。

故出資額爲　970 元－530 元＝440 元。

答：440 元。

檢算：　1500－440＝1060,

970－440＝530,

530×2＝1060, 故合。

[例 5]　甲有 68 元，乙有 46 元，甲給乙若干元，則兩人所有金數變成相等?

解：　兩人所有金額之和在分給以後也不變的。所以各人有相等金額時的金額是這和之半，卽

(68 元＋46 元)÷2＝57 元。

故甲應給乙的金額爲

68 元－57 元＝11 元。

答：11 元。

[例 6]　筆 3 枝與鉛筆 7 枝之價，計 6 角 6 分，筆 1 枝與鉛筆 4 枝之價，計 3 角 2 分。問筆、鉛筆每枝價幾何?

解：　筆 1 枝，鉛筆 4 枝……價 32 分。

故筆 3 枝，鉛筆 12 枝……價爲 32 分×3＝96 分。

而筆 3 枝，鉛筆 7 枝……價 66 分。

故鉛筆 (12－7) 枝……價爲 96 分－66 分＝30 分。

鉛筆每枝價 30÷(12－7)＝6 分。

因之筆 1 枝之價爲 32 分－6 分×4＝8 分。

答：筆價 8 分，鉛筆價 6 分。

[例 7]　甲乙二地每隔 3 分鐘有一次對開的電車，而其所

例 5 一類的問題須注意二數之和爲一定，由此和的關係以求解答。

例 6 的問題叫聯立問題，其算法也可應用例 3 的頂替法。

例 7 亦爲行程問題之一種，不過較爲複雜耳。

要時間爲 15 分鐘，今從甲地趁車到乙地，每中途可以交會着幾次電車?

解： 從甲地到乙地須時 15 分，故第一次交會的車子，是在甲地出發前 12 分鐘乙地開出的車子，最末次交會的是甲地出發後 12 分鐘乙地開出的車子。故其間有時間爲

12 分＋12 分＝24 分。

因爲每隔 3 分鐘開車，故乙地開出之車有

(24 分÷3 分)＋1＝9.

(加 1 的道理，因首次開的車爲 0 分。)

答： 9 次。

[例 8] 有一個二位數，其十位數字與個位數字交換位置後與原數之和爲 143，而原數減其倒轉數則爲 27，問原數?

解： 143 爲十位數字與個位數字的和的 11 倍。

故 143÷11＝13 爲兩數字之和。

又 27 爲其十位數字減個位數字差的 9 倍。

故 27÷9＝3 爲兩數字之差，

因之十位數字爲 (13＋3)÷2＝8，

個位數字爲 (13－3)÷2＝5.

答： 原數爲 85.

習題 25.

1. 兵士 1296 人排一中空方陣，只知其有 12 層，求外層每邊的人數。

2. 若干兵士排一中空之正方陣，外層每邊 22 人共 3 層，問有兵士若干人?

3. 若干兵排一方陣，多 49 人，縱橫各添一行，不足 38 人，求兵數。

例 8 亦爲和差算法之一種。

4. 甲乙本有同額的財產，後來甲耗去 2500 元，乙增益 2000 元，於是乙的財產成爲甲的 4 倍，問二人原有額？

5. 南軍人數爲北軍的 1.5 倍，戰爭的結果，南軍損 200 人，北軍損 400 人，其時北軍人數恰爲南軍之半，問最初兩軍人數如何？

6. 父年 48 歲，母年 43 歲，子年 23 歲。幾年前父母年齡之和爲子年的 7 倍少 5 歲？

7. 以 865 元分給三人，其分配法甲比乙多 45 元，乙比丙多 35 元，問三人各得幾何？

8. 某牧場有馬、牛、羊共 80 頭，其中馬比牛 2 倍少 5 頭，羊比馬多 10 頭，問各數？

9. 大人 5 人或童工 12 人於 26 時間所能成之工事，使大人 6 人與童工 9 人共作之，若干時間可成？

10. 兄有 5 元 5 角，弟有 1 元 3 角，後因二人得了相等額的銀錢，兄所有的成了弟所有的 3 倍，問所得的錢是若干？

11. 父子年齡之差爲 27 歲，而 5 年前則父年爲子年的 4 倍，求各人現在的年齡。

12. 甲乙兩地的距離爲 170 哩，甲地的煤價每噸 19 元，乙地每噸 25 元。而煤的運費每噸每 10 哩要 1 元 2 角，問在兩地間的路中，離甲地若干哩處，則在雙方買煤合着相等的價錢？

13. 甲有金 253 元，乙有金 179 元，因乙給了甲若干元的結果，甲所有的成了乙的 5 倍，問乙給甲的數目？

14. 甲乙二水槽中有水，甲 1800 公升，乙 240 公升，今每分鐘從甲槽流入乙槽 88 公升，問幾分鐘後，甲的水量爲乙的水量的 2 倍。

15. 甲乙二人各以 1800 元經商，甲所獲利比乙的虧蝕多 600 元，而現在所有的銀錢則甲比乙的 4 倍少 1000 元，問各人

的利得及損失?

16. 某數的 4 倍加 13 等於該數的 7 倍減 56, 問原數?

17. 某金額可買桃 30 個李 54 個,或桃 36 個李 27 個。問以此金額單買桃或李一種,各可得幾個?

18. 二數和爲 800, 以小數除大數得商 4 而餘 50, 問各數?

19. 甲乙兩地相隔 10000 公尺,每隔 5 分鐘有對開電車,今設此電車每分鐘速度 500 公尺,則從甲地的趁電車後與一對面來車相會至次一回的對面來車相會時,其間隔幾分鐘? 又到乙地共交會幾次的對面來車?

20. 甲從東市到西市,乙與丙從西市到東市。甲與乙在午前 9 時出發,丙在其後 30 分出發。甲和乙交會後 30 分鐘與丙相會。問乙丙達到東市的時刻?(各人的速度,每時甲行 4.8 公里,乙行 5.4 公里,丙行 4.6 公里。)

21. 大小兩數的和是 56, 商是 6, 求兩數。

22. 大小兩數的差是 143, 商是 12, 求兩數。

23. 有二位數,十位數字是個位數字的 3 倍,若從這數減 7, 則二位數字變成一樣,求此數。

24. 有二位數,個位數字與十位數字的和是 6,若從這數減 18, 則所得的數恰是原數的個位十位對調,求此數。

習題 25 的答:

1. 38 人。　2. 228 人。　3. 1893 人。　4. 4000 元。
5. 南軍 1800 人,北軍 1200 人。　6. 13 年前。
7. 甲 330 元,乙 285 元,丙 250 元。　8. 馬 27 頭,牛 16 頭,羊 37 頭。
9. 13 時 20 分。　10. 8 角。　11. 父 41 歲,子 14 歲。
12. 距甲地 110 哩處。　13. 107 元。　14. 5 分鐘。
15. 甲獲利 1360 元,乙損失 760 元。　16. 23.
17. 桃 42 個,李 189 個。　18. 650, 150.　19. 2.5 分,7 次。
20. 乙午後 2 時 40 分,丙午後 4 時 $9\frac{3}{23}$ 分。　21. 48, 8.
22. 156, 13.　23. 62.　24. 42.

第五章　整數的性質

（本章所說的數，都是整數）

第一節　約數及倍數

甲乙二整數，甲能以乙整除時（卽商爲整數剩餘爲 0 時），稱乙爲甲的約數。如 6 能以 3 整除，故 3 是 6 的約數，又 6 用 1，用 2，用 6 均能整除，故 1，2，6 也都是 6 的約數。其中 6 的最大約數是 6，最小約數是 1。

又甲等於乙乘某整數時（卽甲爲乙之幾倍時），稱甲爲乙的倍數。如 $6=3\times 2$，故 6 是 3 的倍數（2 倍），又 $3\times 0=0$，$3\times 1=3$，$3\times 2=6$，$3\times 3=9$，$3\times 4=12$ 等；故 0，3，6，9，12 都是 3 的倍數（0 倍，1 倍，2 倍，3 倍，4 倍等）。

$15=3\times 5$，故 15 是 3 的倍數（5 倍），又是 5 的倍數（3 倍），而 3 和 5 都是 15 的約數。卽 0 以外之數，若說甲是乙的倍數，卽是說乙是甲的約數，或卽是說甲能以乙整除。

約數及倍數的重要的性質

（第一）12 是 4 的倍數（3 倍）。12 的 2 倍爲 24，也是 4 的倍數（6 倍）；12 的 3 倍爲 36，也是 4 的倍數（9 倍）；……換言之，12 能以 4 整除，則 12 的倍數 24，36……等，也都能以 4 整除，所以

某數的倍數，卽把某數若干倍後所得的數，因之這些數有無限之多。某數的約數是有限的，故有最大的約數（卽該數本身），而倍數無限，故無最大的倍數。

某數倍數的倍數，仍是某數的倍數。

或說　某數的約數，也是該數倍數的約數。

（第二）21 是 7 的倍數（3 倍），14 也是 7 的倍數（2 倍），21+14=35 也是 7 的倍數（3+2=5 倍），換言之，21 和 14 都能以 7 整除，則 21+14=35 也能以 7 整除。所以

某數倍數的和，仍是某數的倍數。

或說　若干數所共有之約數，也是此等數的和的約數。

（第三）45 是 9 的倍數（5 倍），27 是 9 的倍數（3 倍），而 45－27=18 也是 9 的倍數（5－3=2 倍），換言之，45 和 27 都能以 9 整除，則 45－27=18 能以 9 整除。所以

某數倍數間的差，仍是某數的倍數。

或說　二數所共有的約數，也是此二數的差的約數。

倍數與約數，其實即是一種關係由二立脚地的看法，甲爲乙的倍數，即是說乙爲甲的約數。

倍數的重要性質：

$$\text{某數}\left\{\begin{matrix}\text{倍數的倍數}\\ \text{倍數的和}\\ \text{倍數的差}\end{matrix}\right\}\text{仍是某數的倍數。}$$

約數的重要性質：

$$\left.\begin{matrix}\text{某數的}\\ \text{若干數的}\\ \text{二數的}\end{matrix}\right\}\text{約數仍是}\left\{\begin{matrix}\text{某數倍數}\\ \text{若干數的和}\\ \text{二數的差}\end{matrix}\right\}\text{的約數。}$$

習題 26.

1. 說明:

凡是 10 的倍數,都是 2 和 5 的倍數。

凡是 100 的倍數,都是 4 和 25 的倍數。

凡是 1000 的倍數,都是 8 和 125 的倍數。

2. 下列各數中,那幾個是 10 的倍數?那幾個是 100 的倍數?那幾個是 1000 的倍數?

350,　7000,　840,　35100,　8594,　135000,

80,　400000,　76215,　4444400000.

3. 下列各數中,那幾個是 2 的倍數?那幾個是 4 的倍數?那幾個是 8 的倍數?

40,　100,　2000,　50,　660,　720,　8400,

90000,　61520,　7843259100.

4. 下列各數中,那幾個是 5 的倍數?那幾個是 25 的倍數?那幾個是 125 的倍數?

70,　200,　2000,　3150,　48600,　3000,

45000,　7200,　360,　51360.

5. 下列各數,那幾個是 2 的倍數?那幾個是 4 的倍數?那幾個是 8 的倍數?

$(20+2)$,　$(20+40)$,　$(30+5)$,　$(200+44)$,

$(3000+168)$,　$(100+16)$,　$(500+40)$,

$(1000+80)$,　$(6000+1)$,　$(8000+12)$.

6. 下列各數,那幾個是 5 的倍數?那幾個是 25 的倍數?那幾個是 125 的倍數?

$(40+5)$, $(200+25)$, $(1000+125)$, $(300+15)$,

這裏的習題,須應用上記約數及倍數的三種重要性質,以求解答。各問題均極容易,故不附答案。

(6000+5), (2000+500), (3100+125),
(4000+250), (679000+75), (840+35).

第二節 幾個特殊數的倍數

(第一)2的倍數

例如 654=650+4, 這裏 650 是可以 10 整除，10 是可以 2 整除的，故 650 可以 2 整除(前節第一)。又 4 也可以 2 整除，故知 654 可以 2 整除(前節第二)。

又如 455=450+5, 這裏 650 是可以 10 整除，即可以 2 整除，而 5 則不能以 2 整除，故 455 以 2 除是不能除盡的。

這樣可知某數的個位數如可以 2 整除，則該數可以2整除。若其個位數不能以 2 整除，則該數也不能以 2 整除。

從 1 到 9 的數字中能以 2 整除的是 2, 4, 6, 8, 又當個位是 0 時，則其數也能爲 2 整除。又以 2 不能整除的是 1, 3, 5, 7, 9, 故

某數的個位數字如爲 0, 2, 4, 6, 8 中之一，則該數能以 2 整除，如在 1, 3, 5, 7, 9 之中，則不能以 2 整除。

以 2 能整除的數，即 2 的倍數，叫偶數(雙數)；以 2 不能整除的數，即非 2 的倍數，叫奇數(單數)。

(第二)5的倍數

例如 650 是 10 的倍數，10 是 5 的倍數，故 650 是 5 的倍數。這樣個位的數是 0 時，其數必是 5 的倍數。

約數倍數的性質，在理解分數的計算上，極爲重要。將來進而學代數時，更有用得着的地方，故不可忽略。對此地的幾個簡單的數的倍數，更須留心記着，可以應用之處極多。

又如 1265＝1260＋5，這裏 1260 是 5 的倍數而 5 也是 5 的倍數(1 倍)，故 1265 是 5 的倍數。如此個位數字是 5 時，其數也是 5 的倍數。

又如 277＝275＋2，這裏 275 是 5 的倍數，故 277 以 5 除的剩餘是 2。所以

某數的個位數字是 0 或 5 時，該數能以 5 整除，如不是 0 或 5 則不能以 5 整除。

(第三) 4 的倍數

例如 3152＝3100＋52，這裏 3100 是 100 的倍數，100 是 4 的倍數(25 倍)，故 3100 是 4 的倍數。卽 3100 可以 4 整除，故 52 如能以 4 整除，則 3152 可以 4 整除(前節第二)。

又如 3518＝3500＋18，這裏 3500 同上面說過的一樣是可以 4 整除，而 18 以 4 除，則有剩餘 2。故 3518 以 4 除是不能整除。所以

某數的末二位的數(卽十位個位)，如能以 4 整除，則該數能以 4 整除，否則不能。

(第四) 9 的倍數

先看　10＝9＋1　＝(9 的 1 倍)＋1，

100＝99＋1　＝(9 的 11 倍)＋1，

1000＝999＋1＝(9 的 111 倍)＋1.

卽　10，　100，　1000……＝(9 的若干倍)＋1，

而　20，　200，　2000……＝(9 的若干倍)＋2.

因 200 中有二個 100，故有二個 99 多二個 1 卽 2。99 是 9 的倍數，不論多少個 99 相加仍是 9 的倍數，故 200＝(9 的若干倍)＋(1×2)＝(9 的若干倍)＋2。

同樣　30，300，3000……＝(9 的若干倍)＋3，

　　　40，400，4000……＝(9 的若干倍)＋4，

……………………

又試取一數 7584 來看，

7584＝7000＋500＋80＋4.

因　7000＝(9 的若干倍)＋7，

　　500＝(9 的若干倍)＋5，

　　80＝(9 的若干倍)＋8.

故　7584＝(9 的若干倍數)＋(7＋5＋8＋4).

那麼 7584 的能否以 9 整除，只要看 7＋5＋8＋4 的能否整除爲判，因爲 9 的若干倍，當然能以 9 整除。所以各數之和，如能以 9 整除，則該數能以 9 整除，如 7＋5＋8＋4＝24，以 9 整除餘 6，故可知 7584 以 9 除也是餘 6 的。一般

某數以 9 除所生的剩餘，與此一數的各位數字的和以 9 除所生剩餘相等。

因之　**某數各位數字之和如能以 9 整除，則該數亦能以 9 整除。若各位數字之和不能以 9 整除，則該數亦不能以 9 整除。**

(第五) 3 的倍數

9 的倍數必能以 3 整除，所以上面所述的，同樣可以適用。

如　7584＝(3 的倍數)＋(7＋5＋8＋4).

因之 7584 的能否爲 3 整除，看其各數字之和，即 7＋5＋8＋4＝24 能否爲 3 整除即可。故

某數的各位數字之和，如能以 3 整除，則該數也能以 3 整除。

習題 27.

說明下記各結論的理由 (1－8):

1. 470 是 2 及 5 的倍數。
2. 372 是 4 的倍數。
3. 735 是 5 的倍數。
4. 3900 是 4 及 25 的倍數。
5. 775 是 25 的倍數。
6. 2175 是 3 的倍數。
7. 7551 是 9 的倍數。
8. 某數減去其倒數，能以 9 整除。
9. 375682419 以 3 除的剩餘爲何? 以 9 除的剩餘爲何?
10. 123456789 以 4 除的剩餘爲何? 以 5 除的剩餘爲何?

第三節　九減法

原則 1.　以 9 除若干數的和，其剩餘等於各數以 9 除所生的各剩餘之和，再以 9 除而生之剩餘。

如三數 12345, 60067, 88475, 各以 9 除，剩餘各爲 6, 1, 5.

即　12345＝9 的倍數＋6,

60067＝9 的倍數＋1,

88475＝9 的倍數＋5.

故 12345＋60067＋88475＝9 的倍數＋(6＋1＋5)，故以 9 除 12345＋60067＋88475＝(160887) 而生的剩餘，等於各數以 9 除所生剩餘 6＋1＋5 之和，再以 9 除而生的剩餘。

用九減法以檢算加減乘除四則計算之有無錯誤，較其他的檢算爲便利，但亦有缺點，下面有說明。

原則2. 以9除二數的積,其剩餘卽等於各數以9除所生的剩餘的積,再以9除而生的剩餘。

例如12345及88475以9除的剩餘爲6及5。卽12345＝9的倍數＋6, 88475＝9的倍數＋5。

而 12345×88475＝(9的倍數＋6)×88475,
9的倍數乘88475仍是9的倍數。
故 12345×88475＝9的倍數＋(6×88475).
然 6×88475＝6×(9的倍數＋5)＝9的倍數＋(6×5).
故結局 12345×88475＝9的倍數＋(6×5).

故以9除12345×88475所生的剩餘,等於各數以9除所生剩餘6×5之積,再以9除之剩餘3。

求某數以9除所生剩餘之法。

例如7548以9除的剩餘,是7＋5＋4＋8＝24以9除的剩餘。24以9除而得的剩餘,只要在24中除去若干個9卽可。所以實際也不必計算那個7＋5＋4＋8＝24的,只要在7＋5＝12時就去了9爲3,其時也不必用減法,只把1和2相加卽可。3＋4＝7, 7＋8＝15, 1＋5＝6。這卽是7548以9除而生的剩餘。

故實際的計算是7, 12, 3, 7, 15, 6。

卽不用什麽除法或減法,而只用一種加法。

又上項計算中,如有和恰爲9時則立刻可以省略了,如上例7548中, 5＋4＝9, 故可省去,卽算7＋8＝15, 1＋5＝6, 而知其剩餘爲6的。

加法的檢算

［例］

687082	4
38675	2
158792	5
511329	3
63817	7
968438	2
2428133	5

〔說明〕 由原則1看,各數以9除而生的剩餘4,2,5,3,7,2的和,再以9除而生剩餘5;和以9除各數的和2428133所生的剩餘是否一致。倘使相符,則可相信計算大抵是不錯了。

減法的檢算

〔例〕

```
71.45   8
53.97   6
─────
17.48   2
```

〔說明〕 依原則1看,差及減數以9除而生的剩餘2及6之和8,是否和以9除被減數的7145所生的剩餘相一致(小數點可以置之度外)。

實際上減法的檢法,此法並無甚價值,仍以前述普通的檢算法爲妥。

乘法的檢算

〔例〕

```
   257813   8
     2481   6
  ───────
   257813
  2062504
 1031252
 515626
─────────
639634053   3
```

〔說明〕 依原則2,被乘數257813與乘數2481各以9除的剩餘8與6的積48,再以9除而生的剩餘3是否與原來的積639634053以9除而生的剩餘相一致。

把第二章加減乘除的習題,用九減法檢算之。

在計算中,無論是加減乘除,如算得太沒有理由,而錯誤百出時,難免有錯誤恰是9的倍數,這時用九減法去檢算,便檢不出來了。不過計算時,若加相當注意,那麼錯誤的總不過在某位數上有1,或2的不對,故用九減法,即能發見其錯誤。

在計算上把位數錯了,如123寫作1230或1023等,九減法均不能發見其錯誤,因其相差者恰爲9的倍數。

除法的檢算

〔例〕

```
       31097   | 檢算
397)12345677   |
    1191       |  1
     435       |  2
     397       |
      3867     |  2
      3573     |  6
       2947    |  8
       2779    |
        168    |
```

〔說明〕 除數 397 與整商 31097 的積加以剩餘 168, 應得是被除數 12345677, 因之依原則 1 及 2, 除數 397 與整商 31097 各以 9 除所生剩餘 1 與 2 的積 2, 再以 9 除, 剩餘爲 2, 加以剩餘 168 以 9 除而生的剩餘 6 得 8, 更以 9 除爲 8。這數是否和被除數 12345677 以 9 除而生的剩餘相符合。

〔注意〕 上所述四則計算的檢算方法,叫九減法,九減法對於減法的檢算,沒有什麼便利,對於加法的檢算比較方便,對於乘除法的檢算最便利。不過這是看以 9 除了的剩餘而檢驗,故倘使計算上的錯誤,恰是以 9 除了在剩餘上不生影響的那種差誤,此種檢算便不生效力。

第四節 質數及因數分解

一數等於若干數的連乘積時,此若干數各叫做該數的因數。

如 $24=3\times 8=4\times 6=2\times 12=2\times 2\times 2\times 3.$

所以 2, 3, 4, 8, 12 都是 24 的因數。這因數,就是約數的另一種名稱。

凡數除 1 及該數自身外,並無其他因數的,叫做質數。

如 2, 3, 5, 7 等,便是質數,而 4, 6, 8 等則有 1 及該數自身以外的因數,故爲非質數。

從1到100之間的質數凡26個，如能記牢，是很有用的。今記在下面：

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,
41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

把一個數，分解成若干數相乘積叫做因數分解。

如 $24=4\times6$, $35=5\times7$ 等即是。

但上記24的因數4和6又可分成 2×2 和 2×3。因 $24=2\times2\times2\times3$，這樣一個數的因數分解，分到了因數都成質數時，便不能再分解了，因爲質數的因數只有1和該數本身，所以分解因數的最後階段是分到各因數都成爲質數，這叫做質因數分解。通常因數分解，即指質因數分解，因爲要分到質因數，才有可用之處。

[例]　求210的質因數。

$$\begin{array}{r} 2\underline{)210} \\ 3\underline{)105} \\ 5\underline{)35} \\ 7 \end{array}$$

答：2, 3, 5, 7.

[說明]　欲求210的質因數，先以質數2除，得了個商；再以質數3除此商，得第二商；再用其次的質數去除，順次下去，到最後的商，不能復以別的數整除(即也是成了個質數)：此各個質數，即是該數之質因數。

數，若不是質數時，一定可以分解爲若干質因數之積，其方法已如上所述。但對於一數，如何可以知道其中含有那個質因數呢？如對於一個數，看出其中含有某質因數，在因數分解上，是很重要的。我們前面已講過幾個特殊的數的倍數，所以可從

要把一數分解爲質因數，須先用最小的質數去除，再用此最小的質數除其商，到不能整除時，再換較大的一個質數去除，如此接續下去，到所得的商亦爲質數時，便知已無別的數可除。

那裏去着想的。說一數是 2 的倍數，即說此數中有個 2 的因數，所以可知若一個數的末位是 0，或能以 2 整除的數，必含有因數 2。一個數的末位為 5 或 0，必含有因數 5。一個數的各位數字之和，能以 3 整除，必含有因數 3。其次的幾個質數是 7，11，13 等。某數是否含有此等因數之判別方法較煩，今述於次。

(第六) 7 的倍數

凡一數，把牠的末位割去，再減那末位的二倍，答數照同法割減，這樣繼續割減下去(遇着減數比被減數大就反減)，最後所得的數若是 7，那麼原數至少有一個質因數 7；若是 0，原數至少有兩個質因數 3 和 7。

[例 1] 問 11648 含有 7 的因數麼?

```
1164|8  …割去末位 8,
  16|   …減去 8 的 2 倍,
----
 114|8  …割去末位 8,
  16|   …減去 8 的 2 倍,
----
   9|8  …割去末位 8,
  16|   …從 8 的 2 倍反減,
----
   7    …最後所得的數。
```

所以 11648 至少有一個質因數是 7，

$$11648 = 7 \times 1664.$$

某數是否含有某數為因數，即看某數是否能以該數整除。幾個頂簡單的質數的倍數的性質，已如前述，故有否此等質因數亦易判別，今述之於次：

(1) 凡偶數即末位數字是 0 或 2 的倍數的數，有因數 2。

(2) 凡末位數字為 0 或 5，有因數 5。

(3) 凡各位數字之和能為 3 整除，有因數 3。

7 及以下的 11，13 均如上所記，不贅述。

［例 2］ 問 51597 中有 7 的因數否？

$$\begin{array}{lll}
5159 & 7 & \cdots\text{割去末位 7,} \\
\underline{\ \ 14} & & \cdots\text{減去 7 的 2 倍,} \\
514 & 5 & \cdots\text{割去末位 5,} \\
\underline{\ \ 10} & & \cdots\text{減去 5 的 2 倍,} \\
50 & 4 & \cdots\text{割去末位 4,} \\
\underline{\ \ 8} & & \cdots\text{減去 4 的 2 倍,} \\
4 & 2 & \cdots\text{割去末位 2,} \\
\underline{4} & & \cdots\text{減去 2 的 2 倍,} \\
0 & & \cdots\text{這是最後所得的數。}
\end{array}$$

所以 51597 至少有二個質因數: 3 和 7, 卽

$$51597=3\times7\times2457.$$

〔說明〕 凡一數,把牠的末位割去,再減那末位的 2 倍,實在就是從原數減去末位的 21(=3×7) 倍; 第二次割減的數,就是這次末位數的 210(=3×7×10) 倍;第三次割減的數,就是這次末位數的 2100(=3×7×100) 倍。

這樣繼續割減下去,都是 21(=3×7) 的倍數, 所餘的若是 0, 那原數就是 21 的倍數,所以必有 3 和 7 兩個質因數。所餘的若是 7, 原數就是 7 的倍數,故必有個質因數 7。

照這樣的說明, 7 以外那個與 7 相乘得原數的因數, 也可以從各次的末位數看出來, 因爲原數就是由各次末位數的 3, 7 等倍所合而成。

［例 1］

$$\begin{aligned}
11648&=3\times7\times8+3\times7\times10\times8\\
&\quad+3\times7\times100\times8-7\times1000\\
&=7\times[3\times(8+80+800)-1000]\\
&=7\times[3\times888-1000]\\
&=7\times1664.
\end{aligned}$$

上述判斷有否質因數 7 的方法,在理論上是很不錯的, 但實用上反較以 7 去除更爲煩冗, 故在實際的計算,往往是試用 7 去除, 如不能整除,卽可知無質因數 7, 上述的試驗方法,平常是不使用的。

［例 2］
$$\begin{aligned}51597&=3\times7\times7+3\times7\times10\times5\\&\quad+3\times7\times100\times4\\&\quad+3\times7\times1000\times2+0\\&=7\times[3\times(7+50+400+2000)+0]\\&=3\times7\times(7+50+400+2000)\\&=3\times7\times2457.\end{aligned}$$

(第七) 11 的倍數

凡一數，就各奇位數字之和與各偶位數字之和相減，其差爲 0 或 11 之倍數，則此數至少有一個質因數 11。

例如 37565 中諸奇位數字是 $3+5+5=13$，而偶位數字是 $7+6=13$，所以其差是 $13-13=0$，故此數含有質因數 11。

其理由是這樣的：

因爲 $11=10+1$，所以凡一個數字，後面加若干個 0，其位數是奇數，則此數必等於 11 的倍數與此數字之和，若位數是偶數，則等於 11 的倍數與此數字之差。

例如
$$\begin{aligned}5&=(11\text{ 的 }0\text{ 倍})+5,\\60&=(11\text{ 的 }6\text{ 倍})-6,\\500&=5\times100=5\times(11\text{ 的 }9\text{ 倍}+1)\\&=(11\text{ 的 }5\times9\text{ 倍})+5,\\7000&=(11\text{ 的若干倍})-7.\end{aligned}$$

因 $1000=990+11-1=(11\text{ 的 }91\text{ 倍})-1,$

故 $7000=(11\text{ 的 }91\text{ 倍}-1)\times7=(11\text{ 的 }91\times7\text{ 倍})-7,$

$30000=(11\text{ 的若干倍})+3.$

因 $10000=9999+1=(11\text{ 的 }909\text{ 倍})+1,$

故 $30000=(11\text{ 的 }909\text{ 倍}+1)\times3=11\text{ 的倍數}+3.$

由此可知
$$\begin{aligned}37565&=(11\text{ 的若干倍})+3-7+5-6+5\\&=(11\text{ 的若干倍})+(3+5+5)-(7+6).\end{aligned}$$

所以　(3+5+5)－(7+6)＝0,

則　37565 是 11 的倍數。

即其中含有質因數 11。若後面的各奇、偶位數字和的差不爲 0 或 11 的倍數，則有剩餘。

又如　719081＝(11 的倍數)－7+1－9+0－8+1

＝(11 的倍數)－(7+9+8)+(1+1)

＝(11 的倍數)－24+2

＝(11 的倍數)－22

＝(11 的倍數)－(11 的倍數)

＝(11 的倍數).

實際上，只要把從後數去的奇、偶位數字和的差是否爲 0 或 11 的倍數，即可以知原數的是否含有質因數 11。

如　856031814.

即看　8+6+3+8+4＝29,　5+0+1+1＝7,

29－7＝22 是 11 的倍數。

而實際　856031814＝77821074×11.

(第八) 13 的倍數

凡一數，把牠的末位割去，再加末位的 4 倍，得數又照同法割加，這樣繼續下去，最後所得的數，若是 13, 26 或 39；那麼原數至少有一個質因數是 13。

[例 1]　問 559 中有質因數 13 否?

$$\left.\begin{array}{l}55|9 \cdots \text{割去末位 } 9, \\ 36| \quad \cdots \text{加上 } 9 \text{ 的 } 4 \text{ 倍,}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{等於加上末位 } 9 \text{ 的} \\ (40-1)=39 \text{ 倍,}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}9|1 \cdots \text{割去末位 } 1, \\ 4| \quad \cdots \text{加上 } 1 \text{ 的 } 4 \text{ 倍,}\end{array}\right\}\text{等於加上 } 10 \text{ 的 } 39 \text{ 倍,}$$

$$13 \cdots \text{這是最後所得數。}$$

所以 559＝1300－39×10－39×9

$=13\times100-13\times3\times\ 0-13\times3\times9$

$=13\times(100-3\times10-3\times9)$

$=13\times(100-3\times\overline{10+9})$

$=13\times(100-3\times19)$

$=13\times43.$

所以 559 中至少含有一個質因數 13。

［例 2］ 問 1664 中，有沒有質因數 3?

166|4 …割去末位 5,
16| …加上 4 的 4 倍, } 卽加上末位 4 的 39 倍,
18|2 …割去末位 2,
8| …加上 2 的 4 倍, } 卽加上十位 20 的 39 倍。
26 …最後所得數。

所以 $1664=2600-39\times20-39\times4$

$=13\times(200-3\times20-3\times4)$

$=13\times(200-3\times24)=13\times128.$

所以 1664 中至少含有一個質因數 13。

［例 3］ 問 15288 中有質因數 13 否?

1528|8 …割去末位 8,
32| …加上 8 的 4 倍,
15|6|0 …割去末位 0, 無加，再割去末位 6,
24| …加上 6 的 4 倍,
39 …最後所得數。

所以 $15288=13\times(3000-3\times608)=13\times1176.$

所以 15288 至少有一個質因數 13。

分解因數的一般方法:

1. 把要分解因數的數，用最小的質數去除，整除後再以此質數除所得的商，直到不能整除爲止。

2. 一個質數已不能整除時，則再用第二個質數去除，仍如前到不能整除爲止。

3. 照樣一直下去，到所得的商，已成爲質數，不能再以別的質數除爲止。

4. 這樣累次所用的除數及最後的商，是原數的質因數。

（說明）　凡一數，把牠的末位割去，再加那末位數的 4 倍，實即就原數上加末位數的 $40-1=39(=3\times13)$ 倍；第二次割加的數，就是這次末位的 $390(=3\times13\times10)$ 倍；第三次割加的數，就是這次末位的 $3900(=3\times13\times100)$ 倍。

這樣繼續割加下去，都是 13 的倍數。若最後所得的是 13，26 或 39，實在就是 13，26 或 39 的十進倍數，那個原數也就是個 13 的倍數。所以牠至少有個 13 的質因數。那同 13 相乘得原數的因數，也可從這各次的末位數看出來，看上面的例，就可明白。

上面所說判斷質因數 13 及 7 有無的方法，叫做割加或割減法，因其割了末後的加或減而定。此種方法，對於 7 以上的質數，均可應用，不過其所加減之倍數有不同耳。但實際上，往往不如直接以質數除之爲便，故在實用上，無甚價值。求一數的質因數，仍以各個質數連續除之爲妥便。

因數分解

〔例 1〕　分解 172788 的質因數。

2)172788…末位是偶數，有質因數 2,
2)86394…末位仍是偶數，還有質因數 2,
3)43197…末位是奇數，2 不能除，試 3 可除，
7)14399…試以 3，再 5 再以 7 知可除，
11)2057…試以 7，再試 11 可除，
11)187…試以 11，仍可除，
17…17 是個質數。

$\therefore\quad 172788=2\times2\times3\times7\times11\times11\times17.$

或寫作　$2^2\times3\times7\times11^2\times17.$

如上的記法，一數中相同的因數二個以上的可以在該數的肩上，記出因數相同的數，這叫指數。

如　$5\times5\times5$ 記作 5^3，$11\times11\times11\times11=11^4$ 即是。

［例2］ 求749455的質因數。

5)749455···檢2,3均不能除,末位爲5,故5可除,
7)149891···5已不可除,試以7,可除,
7)21413···再試7,仍可除,
7)3059···再試7,仍可除,
19)437···再試7,11,13,17,到19,可除,
23···23是質數。

$$\therefore\quad 749455=5\times 7^3\times 19\times 23.$$

分解因數時,若原數或某次的商,歷用從小到大的質數試除,都不能整除,除到商已比除數爲小,就可斷定再沒有因數可以分解,而此被除數已是一個質數。

例如:233以2,3,5,7,11,13等試除,均不盡,再以17試除,得商爲13又餘,而13已小於17,故可斷定233是個質數。

［例3］ 求23628的質因數。

2)23628···末位是偶數,有質因數2,
2)11814···末位仍是偶數,還有質因數2,
3)5907···末位是奇數,2不能除,試3,可除,
11)1969···試以3,5,7均不可,11可除,
17)179···連試以11,13,均不可,再試以17,仍不可,
10···而所得商10已比17小,故可知179是質數。

$$\therefore\quad 23628=2^2\times 3\times 11\times 179.$$

習題 28.

1. 在下記各數中,指出那幾個是質數:

113, 122, 131, 203, 263, 267, 287.

2. 把下記的各數,行因數分解:

75, 132, 240, 5005, 3125, 3636, 6993.

第五節 最大公約數

試取12與18的約數,一一列記出來:

12的約數: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

18 的約數：　1,　2,　3,　6,　9,　18.

把二者相比較起來，見 1, 2, 3 及 6 是 12 及 18 所共通的約數，這叫 12 與 18 的公約數。公約數中的最大的，叫最大公約數。

二以上的數所共有的約數，叫此等數的公約數，公約數中之最大者，叫此等數的最大公約數。

例如：求 45, 15, 60 的公約數及最大的公約數則：

45 的約數：　1,　3,　5,　9,　15,　45.

15 的約數：　1,　3,　5,　15.

60 的約數：　1,　2,　3,　4,　5,　6,　10,　12,　15,　20,　30,　60.

故公約數有 1, 3, 5 及 15，而最大公約數是 15。

求最大公約數的方法：

［例 1］　求 24, 36, 48 的最大公約數。

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 24 & 36 & 48 \\ \hline 2 & 12 & 18 & 24 \\ \hline 3 & 6 & 9 & 12 \\ \hline & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

答：　$2\times2\times3=12.$

〔說明〕　先以 24, 36, 48 的公約數 2 除各數得商 12, 18, 24。再以此等數的公約數 2 除各數得商 6, 9, 12。再以此等數的公約數 3 除各數得商 2, 3, 4。

用視察法求最大公約數，如上作表，或先於較小之數中，取一大的約數，看是否爲較大之數的約數，如否，則再以較小的約數去試，至二者共通，卽爲最大公約數。

最大公約數簡寫用 G. C. M. 卽英字 Greatest Common Measure 三字冠頭字母。

此 2, 3, 4 中已無公約數，因之

$$24=(2\times2\times3)\times2,$$

$$36=(2\times2\times3)\times3,$$

$$48=(2\times2\times3)\times4.$$

故 $2\times2\times3$ 是上記三數的公約數，而且再沒有比此數更大的公約數可以求得，故 12 是最大公約數。

［例 2］ 求 22500, 210000, 66000 的最大公約數。

$$\begin{array}{r|rrr}
100 & 22500 & 21000 & 66000 \\ \hline
5 & 225 & 210 & 660 \\ \hline
3 & 45 & 42 & 132 \\ \hline
 & 15 & 14 & 44
\end{array}$$

答： $100\times5\times3=1500.$

〔說明〕 求最大公約數時，不必如求質因數一樣，以質數去除，也不必依先小後大的次序，只要看出了一個數是各數的公約數，卽可用此數去除各數，再看所得各商，再以其公約數除。這樣繼續下去，到各商除 1 以外無公約數止。然後將各除法中的除數相乘，卽是最大公約數。

兩數的最大公約數爲 1 時，稱兩數互爲質數。如 4 與 9, 27 與 16 等均是互爲質數的數。注意，互爲質數的，其本身不必要是質數，而是質數的兩數，必互爲質數。

求最大公約數的又一法：*

［例 3］ 求 554 與 2493 的最大公約數。

求若干簡單的數的最大公約數時，可用視察法。普通可以看出各數的公約數時，則用分解因數法；而在繁複的數，不容易看出其中的公約數時，則用轉除法。

```
          4
   554)2493
       2216    2
        277)554
            554        答：  277.
              0
```

〔說明〕 先以小數除大數；若有剩餘，以剩餘除前的除數，如再有剩餘，以此第二剩餘除第一剩餘：這樣輾轉相除，到剩餘爲 0 止，最後的除數，卽爲最大公約數。

此理由要加以一般普遍的說明，比較困難，今只將上例說明如次。由上的演習可知 554 是 277 的 2 倍，是 277 的倍數。又 2493 是 554 的 4 倍加 277，故是 277 的倍數加 277，結果仍是 277 的倍數。所以

$$\begin{aligned} 554 &= 277\times 2, \\ 2493 &= (277\times 2)\times 4+277 \\ &= 277\times 8+277 \\ &= 277\times 9. \end{aligned}$$

故兩數都是 277 的倍數，但 2 與 9 中沒有共通因數了，故 277 是最大公約數。

[例 4] 求 2772, 3564, 1716 的最大公約數。

```
            1                   4
    2772)3564            396)1716
         2772    3           1584    3
          792)2772            132)396
              2376    2           396
               396)792              0
                   792                   答：  132.
                     0
```

此法名轉除法，對於複雜而一時不易求得公約數的數適用之，不過最大公約數的實用，是在分數的計算上，其計算大抵簡單的多，要用到此法時，實際上是很少的。

〔說明〕 照例1的算法，2772與3564的最大公約數是396。又同樣求得396與1716的最大公約數爲132。此132即爲2772, 3564, 1716的最大公約數。

因爲132是1716的約數，同時，也是396的約數，因之即是2772和3564的約數。故是三數共通的約數即公約數。又此三數之公約數，須是2772與3564的公約數396的約數。因之又須是396與1716的約數。因之396與1716的最大公約數即是三數的最大公約數。

[例5] 求2364, 1758的最大公約數。

```
            1
6|1758)2364
   293) 394
        293   2
        101)293
            202   1
             91)101
                 91   9
                 10)91
                    90
                     1
```

答: 6.

〔說明〕 因爲2364和1758兩個數，由視察法，便知道牠們含有公約數2和3，就是含有公約數6，所以在用轉除法以前，可先用6去約小牠們，而得394和293。依轉除法求得這兩數的最大約數是1；將6和1相乘所得的6便是所求的最大公約數。

〔注意1〕 將兩數的簡單公約數約兩數，不必定要在轉除法沒有開始的時候。

〔注意2〕 如例5在轉除的時候，第一次的餘數101已是質數和除數293並不是101的倍數，這是一望而知的。因此本題只要到這一步已知394和293是互質數，只有公約數1，將1

乘 6 所得的 6 就是所求的最大公約數。

〔注意 3〕　在轉除的過程中，用一個因數去約，使計算能夠比較簡便，不一定要用兩數的公約數。但只用一個數的約數去約一數時，須用牠一數所不會含有的質因數，並且最後這個約數不可乘到公約數中去。

習題 29.

〔注意〕　最大公約數的計算，有視察法、合除法及轉除法三種。簡單的計算，可用視察法；容易求得公約數的，可用合除法；公約數不容易求得的，可用轉除法。

1.　求次記各組的公約數：

(8, 12),　(15, 20),　(50, 75),　(16, 24),　(14, 21),
(6, 12, 130).

2.　求次記各組的最大公約數(用合除法)：

(52, 96),　(60, 24, 18),　(63, 70, 28),
(84, 48, 132),　(250, 300, 510),　(124, 186).

3.　求次記各組的最大公約數(用轉除法)：

(4329, 4181),　(3312, 3456),
(3627, 6076, 9765),　(3885, 69153, 10101),
(1584, 2376, 3336),　(462, 714, 798),
(123, 171, 209 285),　(204, 216, 740, 432).

第六節　最小公倍數

取 4 和 6 把牠的倍數列記起來：

習題 29 的答：

1. 2, 4;　5;　5, 25;　2, 4, 8;　7;　2.
2. 4;　6;　7;　12;　10;　62.
3. 37;　144;　31;　777;　24;　42;　19;　4.

各種計算的檢算是必要的。第 3 題可以用合除法再算而比較其結果。

4 的倍數： 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ……

6 的倍數： 6, 12, 18, 24, 30, 36, ……

把這二者相比較，可見 12, 24, 36 (48, 60 等，其數無限)，是 4 的倍數，又是 6 的倍數，這樣兩數共通的倍數叫做兩數的公倍數，公倍數中的最小的叫最小公倍數。如 12 卽爲 4 和 6 的最小公倍數。所以

兩數以上所共通着的倍數，叫此等數的公倍數，公倍數的最小的叫最小公倍數。

又如： 3, 4, 8 的公倍數有

3 的倍數： 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ……

4 的倍數： 4, 8, 12, 16, 20, 24, ……

8 的倍數： 8, 16, 24, ……

將其倍數順次列舉起來，知道共通的倍數是 24, 48, 72……等。而其中以 24 爲最小，故 24 是 3, 4 8 三數的最小公倍數。

求最小公倍數的方法

［例 1］ 求 18, 24, 36 的最小公倍數。

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 18 & 24 & 36 \\ \hline 3 & 9 & 12 & 18 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

答： 72.

$$2\times3\times3\times2\times2=72.$$

用視察法求最小公倍數可如上記之法，先把各數的公倍數作一表格，或在心中想起其中一數的倍數，而看其是否他一數的倍數。可從小的數想起。不合則逐漸換以大數以定二者共通最小的公倍數。試用視察法求下列各組的最小公倍數：

(4, 12), (6, 9), 2, 4, 6), (12, 16).

最小公倍數的略號，用 L. C. M. 卽英字的 Least Common Multiple 的三個開頭字母。

〔說明〕　把 18, 24, 36 用共通於其兩個的質因數除之，直到每二數再沒有共通的約數。而把此等共通的質因數，和最後的商相乘，卽得最小公倍數。

$$\begin{array}{llcll}
\text{因爲} & 18=2\times3\times3 & & \text{故} & 72=18\times2\times2\\
& 24=2\times3\times2\times2 & & & 72=24\times3\\
& 36=2\times3\times3\times2 & & & 72=36\times2\\
\hline
& 2\times3\times3\times2\times2=72 & & &
\end{array}$$

所以 72 是 18, 24, 36 的共通倍數，而 4, 3, 2 的三數沒有共通的因數，所以 72 是最小公倍數。

在此種演算之中，各數若有公約數，卽不是質數，也可以先去除的，如上例可先用 6 去除。因爲用 6 除，卽是先用 2 除再用 3 除之意。但倘有一個數是不能除時，則必要用質數去除。

又在計算中，如見一列的數中有一數是他數的約數的，就可以把這數劃去，如上面的 18 是 36 的約數，18 不算進去也不妨。

用只有一數可除的質數去除，在結果上也不生錯誤，不過多耗心力罷了。

又可以整除的數，當做不能整除的，就寫於次列，則結果上所得的，成了個普通的公倍數而不是最小公倍數，卽比最小公倍數爲大的公倍數。

［例 2］　求 15, 16, 20, 24, 36 的最小公倍數。

$$\begin{array}{rrrrrr}
3) & 15 & 16 & 20 & 24 & 36\\
\hline
4) & 5 & 16 & 20 & 8 & 12\\
\hline
& & 4 & 5 & & 3
\end{array}$$

答：　$3\times4\times4\times5\times3=720.$

〔說明〕　先以 3 除，在次列中 5 是 20 的約數，8 是 16 的約數，故劃去了。次再以 16, 20 和 12 的公約數 4 除，因爲是三個數共通的，故可以不是質數的 4 除。

［例 3］　求 232 與 87 的最小公倍數。

```
              2
      87)232
         174   1
         58)87          87÷29=3,
            58   2
            29)58       232×3=696.
               58
                0              答:  696.
```

〔說明〕 先求得 87 與 232 的最大公約數 29。用此最大公約數除其中的一數 (87), 再用所得之商 (3) 乘其中的他一數得 696, 此數卽所求之最小公倍數。

87÷29=3, 故 87 是最大公約數 29 與 3 之積,

232÷29=8, 故 232 是最大公約數 29 與 8 之積,

故 29×8×3=696 是最小公倍數。

在實際的計算上,作 87÷29=3, 232×3=696 或 232÷29=8, 87×8=696 均可。

[例 4] 求 318, 424, 795 的最小公倍數。

```
            1               318÷106=3,
   318)424
        318    3            424×3=1272.
       106)318
           318          所以 318 和 424 的最小公倍數
             0          是 1272.

             1              795÷159=5,
   795)1272
        795    1            1272×5=6360.
        477)795
            477    1
            318)477
                318    2
                159)318
                    318
                      0              答:  6360.
```

甲乙二數的最大公約數與最小公倍數的關係,

$$\frac{\text{甲數}\times\text{乙數}}{\text{甲乙的最大公約數}}=\text{甲乙的最小公倍數。}$$

〔說明〕　求三個數的最小公倍數，可先求兩個的最小公倍數，再求第三數和所得的最小公倍數的爲最小公倍數。求四個以上的數最小公倍數，依此類推。

習題 30.

最小公倍數的計算，可用視察法，合除法，先求最大公約數三法。在簡易的計算時，可以用視察法；公約數易看出時，用合除法；求公約數不易特，用轉除法而先求最大公約數。

1. 用視察法說出次記各組數的公倍數：
(4, 8),　(5, 7),　(9, 12),　(4, 6, 9),　(4, 6, 8),
(3, 4, 5).

2. 求次記各組數的最小公倍數(方法任意)：
(24, 60),　(16, 24, 30),　(21, 35, 105),
(27, 55, 99, 15, 45),　(119, 210),　(482, 1687),
(143, 187, 221),　(893, 1383, 1121),
(318, 424, 795).

3. 用合除法求次記諸數的最小公倍數：
(15, 40, 60),　(60, 75, 90),　(28, 56, 84),
(80, 120, 150),　(99, 54),　(320, 240, 400),
(26, 33, 39, 44, 55),　(13, 52, 65, 78).

第七節　應用問題

〔例 1〕　米一石價 12 圓 5 角，豆一石價 5 圓，今欲以豆換米，而使代價沒有零找，問豆幾石換米幾石？求最低的石數。

習題 30 的答：

1. 8, 16, 24,……;　35, 70, 105,……;　36, 72, 108,……;
36, 72, 108,……;　24, 48, 72,……;　60, 120, 180,…….
2. 120, 240, 105, 1485, 3570, 3374, 2431, 72866121, 6360.
3. 120, 900, 168, 1200, 594, 4800, 8580, 780.

解： 交換上的價錢須相等，而且又須是最低的，故即求各石的價錢的最小公倍數。

$$\begin{array}{r|rr} 5 & 125 & 50 \\ \hline 5 & 25 & 10 \\ \hline & 5 & 2 \end{array} \qquad 5\times5\times5\times2=250.$$

即： 25 圓。

交換物的代價該爲 25 圓，故各石數爲

$25\div12.5=2$……米的石數，

$25\div5=5$……豆的石數。

答： 米 2 石，豆 5 石。

檢算： $12.5\times2=25$， $5\times5=25$.

價格相同，所以不生零找；而 2 與 5 之間沒有共通的因數，故本石數是最低限。

［例 2］ 有一長方體的木頭，長 3 尺 2 寸 5 分，闊 1 尺 7 寸 5 分，厚 7 寸 5 分。今欲把此木頭截做許多相等的小立方體，欲使立方體儘可能的大，問立方體的邊長及其個數。

解： 把長，闊，厚要分截成同樣的長，而且沒有零數，又要儘可能的大，故立方體一邊之長，即是此各一數的最大公約數。

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 325 & 175 & 75 \\ \hline 5 & 65 & 35 & 15 \\ \hline & 13 & 7 & 3 \end{array} \qquad 5\times5=25.$$

即： 2 寸 5 分。

325 分 ÷ 25 分 = 13， 即分爲 13，7，3，

175 分 ÷ 25 分 = 7， 故立方體之數爲

75 分 ÷ 25 分 = 3. $13\times7\times3=273$.

答： 立方體 273 個，邊長二寸五分。

〔注意〕 此處的 13，7，3 各由求最大公約數的運算中已知，可不必再用除法。

檢算： $(325\times75\times175)\div25^3=273$.

習題 31.

1. 除 193 餘 4，除 1087 餘 7，求此除數中之最大者。

2. 以 15 除，以 20 除均是餘 5 的數中最小者爲何？

3. 郵票縱橫的長爲 2.4 公釐，2.2 公釐，要貼成個儘可能地小的正方形，要若干張？

4. 磚長 7 寸 5 分，闊 3 寸 6 分，厚 2 寸，今要用最少之數堆成一立方體，問需磚幾何？又每邊長若干？

5. 橘子 1428 個，蘋果 510 個，柿 816 個。今欲公平地分給兒童，而要使兒童數儘可能地多，且不許有餘，也不許切開。問兒童數應爲多少？

6. 有二齒輪，其齒數爲 80 及 128。問小齒輪經若干迴轉後，則二輪的相同齒再相咬合？

7. 每隔 30 秒，1 分，3 分，25 分，45 分放的五個汽笛，問從一齊放聲後再到第二次的一齊放聲，需時幾何？

8. 有一地面縱 120 尺，橫 48 尺，今於其四角及周植桃樹。各樹間的距離須相等，而樹數須最少。問要樹若干株？

9. 甲乙丙三人跑圓形跑圈一週，甲需 1 分 52.5 秒，乙需 1 分 15 秒，丙需 2 分 5 秒。此三人同時同地點出發，問次一回

問題：

1. 說明次記各名詞：——
約數，倍數，公約數，公倍數，最大公約數，最小公倍數，因數，質數，質因數，因數分解。
2. 公約數有最小的麼？是什麼？公倍數有最大的麼？爲什麼？
3. 100 以內的質數有幾個，一一說出來。
4. 說出倍數同約數的關係，并舉其重要的性質。
5. 最大公約數如何求法，試以例說明之。
6. 說明偶數奇數的意義。
7. 如何可知一數能否以 2，3，4，5，7，9，11，25 整除，試說其規則。
8. 說明一數若能以 2 整除，又能以 3 整除，則可以 6 整除的理由。

同時再會於出發點時，各跑了幾圈?

10. 問除 492, 2241, 3195, 而餘數常為 15 之整數爲何?

11. 兩數的最大公約數爲 6, 最小公倍數爲 36; 問兩數各若干? (6 和 36 不算。)

12. 兩數的積爲 288, 最小公倍數爲 72, 求兩數。

13. 三個兩位數的最小公倍數爲 105, 一數爲 15, 求他二數。

習題 31 的答:

1. 27. 2. 65. 3. 132. 4. 12×25×45 塊, 每邊長 9 尺。

5. 三數的 G. C. M. 102 人。 6. 8 轉。 7. 3 時 45 分。 8. 14 株。

9. 甲 10 圈, 乙 15 圈, 丙 9 圈。 10. 從各數減 15, 再求其公約數。

11. 12, 18. 12. 4, 72; 8, 36. 13. 21; 35.

第六章 分數

第一節 通分與約分

前面曾經說過，計算連續的量，有要用到分數的時候。

分數是和整數相對待的名詞，聚合若干個 1 所成的數叫整數，把 1 分做幾等分，聚合若干個這些等分所成的數，叫分數。

例如三個五分之一，叫做五分之三，就是把 1 分做五等分，而取其中的三個等分。那時的五，叫做分母，3 叫做分子。分母分子用橫線隔開，記作 $\frac{3}{5}$，分子在橫線上，分母在橫線下。分母和分子，各稱爲分數的項。

$\frac{3}{5}$ 是三個 $\frac{1}{5}$，而五個 $\frac{1}{5}$ 等於 1，所以五個 $\frac{3}{5}$ 等於 3。這樣說來，分數式中的橫線，也可以當做除號看，好像分子是被除數，分母是除數，而分數就是商。所以分子可以比分母大，而那時分數就比 1 大。若使分母是 1 時，分子的數，就等於那分數的值。

分數之值，等於分母除分子。

這是分數的第一重要性質。

分數的兩項，各以同數乘之，其值不變。

分數的兩項，各以其公約數除之，其值不變。

這二項也是分數的重要性質，也是分數計算上的根本原

則。

例如：$\frac{2}{5}$的兩項，各以2乘之，成$\frac{4}{10}$，是等於原分數$\frac{2}{5}$的。因$5\times2=10$，所以$\frac{1}{10}$是$\frac{1}{5}$的一半，因之$\frac{1}{5}$是$\frac{1}{10}$的二倍。所以$\frac{1}{5}$的二倍，等於$\frac{1}{10}$的二倍又二倍卽四倍。就是$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$。

又如：$\frac{8}{12}$的兩項，各以其公約數4除之，成$\frac{2}{3}$，是等於原分數$\frac{8}{12}$的。因爲照上面說的，若於$\frac{2}{3}$的兩項各以4乘之，則得$\frac{8}{12}$是等於$\frac{2}{3}$的。

約分

例如：把$\frac{8}{12}$化爲$\frac{2}{3}$那樣，分數的值不變，而使其兩項變成比前較小的整數，叫做約分。約分的方法，卽如上所述，用比1大的公約數去除兩項。

分數的兩項，除1以外無公約數的，如$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$等，則已不能再約了。此種分數，叫不可約分數，或叫既約分數；反之，如分子分母二項有公約數的，叫做可約分數。

約分時，以同數如2除分子分母兩項，叫做用2約那分數。

〔例1〕 $\frac{\overset{4}{\cancel{160}}}{\underset{5}{\cancel{200}}}=\frac{4}{5}$ 先用10約之(把末位的0劃去)，再用4約之。

〔例2〕 $\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\times\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{5}{\cancel{15}}\times\underset{7}{\cancel{14}}}=\frac{12}{35}$ 先用2約分子的因數8和分母的因數14；次用3約分子的因數9和分母的因數15。

〔注意〕 $\frac{8}{16}$的兩項，用8約之，得$\frac{1}{2}$。這時注意不可把8

劃去了而寫個 0，因用 8 約即用 8 除，$8\div8=1$，又 $\frac{16}{8}$ 相約，等於 $\frac{2}{1}$ 即等於 2。

通分

不變分數的值，把二個以上的分數化成分母相同的分數，這化分數的方法，叫做通分。相同的分母，叫公分母。

例如於二分數 $\frac{2}{3}$ 及 $\frac{3}{4}$ 中，在 $\frac{2}{3}$ 的兩項，各以 4 乘之，$\frac{3}{4}$ 的兩項，各以 3 乘之，則各成

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12},\quad \frac{3}{4}=\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}.$$

這是各分數的值不變，而把分母化來相同了。此時 12 是公分母。

公分母不止一個，如上例的 $\frac{8}{12}$ 及 $\frac{9}{12}$ 兩項，各 2 倍，3 倍，……起來，成爲 $\frac{16}{24}$ 及 $\frac{18}{24}$，又 $\frac{24}{36}$，$\frac{27}{36}$……等，也是不會變分數的值，而使分母一致了。

此等公分母中最小的，叫此等分數的最小公分母。

若干分數的最小公分母，即此等分數約了之後（即化爲既約分數）分母的最小公倍數。

［例 1］　把 $\frac{2}{3}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{1}{8}$ 通分。

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 3 & 6 & 8 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 \end{array}\qquad 2\times3\times4=24.$$

分數數值的大小，以同母分數，最易判別。即同分母的分數，其分子大者大，分子小者小。故要看兩個分數的大小，若爲異分母的，可先用通分之法，化成同母的分數，然後看牠們的分子，那一個爲大。同分子的若干分數的大小，不化爲同分母，也可知之。即有同分子的分數，其分母愈大，則分數愈小。

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 8}{24}=\frac{16}{24},\ \frac{5}{6}=\frac{5\times 4}{24}=\frac{20}{24},\ \frac{1}{8}=\frac{1\times 3}{24}=\frac{3}{24}.$$

答：$\frac{16}{24}, \frac{20}{24}, \frac{3}{24}.$

〔說明〕 $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{8}$ 都是既約分數，所以先求得分母的最小公倍數 24，這是最小公分母。於是把各分數的分母化爲 24，先於 $\frac{2}{3}$ 中，看 $24\div 3=8$，所以分子分母各以 8 乘，其值不變，而分母爲 24 了。故亦以 8 乘其分子得 $\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$。同樣算出

$$\frac{5}{6}=\frac{20}{24},\quad \frac{1}{8}=\frac{3}{24}.$$

〔注意〕 如單言通分，須化爲以最小公分母爲分母的分數。

[例 2] 把 $\frac{20}{24}, \frac{7}{28}, \frac{7}{15}$ 通分。

$$\frac{20}{24}=\frac{5}{6},\quad \frac{7}{28}=\frac{1}{4}.$$

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 6 & 4 & 15 \\ \hline & 3 & 2 & 15 \end{array} \qquad 2\times 2\times 15=60.$$

$$\frac{5}{6}=\frac{50}{60},\quad \frac{1}{4}=\frac{15}{60},\quad \frac{7}{15}=\frac{28}{60}.$$

〔說明〕 $\frac{20}{24}$ 及 $\frac{7}{28}$ 是可以約的，故先用約分，得了 $\frac{5}{6}$ 及 $\frac{1}{4}$ 後，再照例 1 算通分。

習題 32.

1. 約次記各分數：

(1) $\frac{6}{18}$. (2) $\frac{24}{32}$. (3) $\frac{75}{125}$. (4) $\frac{275}{375}$. (5) $\frac{96}{144}$.

(6) $\frac{520}{650}$. (7) $\frac{24\times 8\times 45}{28\times 60\times 9}$. (8) $\frac{6+9}{12+18}$.

2. 把次記分數通分:

(1) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$.　　(2) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$.

(3) $\frac{6}{25}, \frac{6}{15}, \frac{7}{20}$.　　(4) $\frac{5}{12}, \frac{7}{18}, \frac{13}{24}$.

3. $\frac{2}{3}$ 與 $\frac{3}{5}$ 何者爲大?

4. 把 $\frac{4}{7}, \frac{7}{10}, \frac{7}{12}, \frac{19}{35}$ 照大小順序記出之。

分數的種類

分數的產生,本是由於要計量比 1 爲小的零星尾數而造作出來的數,故其值以比 1 小爲原則,即如 $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}$ 等分子比分母小的,是分數的本體。

但也有如 $\frac{3}{3}, \frac{9}{5}$ 等分子與分母相同或分子大於分母的分數,即其值等於 1 或大於 1 的分數。此種分數叫假分數。其值比 1 小的分數,叫眞分數。

整數與眞分數的和,如 $3+\frac{3}{5}$, 書寫時常把其加號略去而記作 $3\frac{3}{5}$, 寫整數在前面眞分數在後面,這樣的分數,叫帶分數。

假分數可化做帶分數。例如 $\frac{7}{3}=7\div 3=2\frac{1}{3}$。即把分子用分母去除,把商作爲整數部分,剩餘作爲分子而以原分母爲分母,寫成一個帶分數即可。倘使這時分子可以用分母整除的,則

習題 32 的答:

1. (1) $\frac{1}{3}$. (2) $\frac{3}{4}$. (3) $\frac{3}{5}$. (4) $\frac{11}{15}$. (5) $\frac{2}{3}$. (6) $\frac{4}{5}$. (7) $\frac{4}{7}$. (8) $\frac{1}{2}$.

2. (1) $\frac{9}{12}, \frac{10}{12}$. (2) $\frac{4}{8}, \frac{6}{8}, \frac{5}{8}$. (3) $\frac{72}{300}, \frac{120}{300}, \frac{105}{300}$. (4) $\frac{30}{72}, \frac{28}{72}, \frac{39}{72}$.

3. $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$.　　4. $\frac{7}{10}>\frac{7}{12}>\frac{4}{7}>\frac{19}{35}$.

此分數實爲整數。

例如： $\frac{6}{3}=6\div 3=2.$

反之，帶分數也可以化做假分數。

例如： $5\frac{1}{3}=\frac{5\times 3+1}{3}=\frac{16}{3}.$

卽把整數部分用分母去乘，將所得的積和分子部分的數相加作爲分子，分母仍舊。

第二節　分數的四則

加法

［例 1］ $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}+\frac{8}{9}=\left(\frac{2+5+8}{9}\right)=\frac{15}{9}=1\frac{6}{9}=1\frac{2}{3}.$

$\frac{1}{9}$ 的 2 倍，5 倍，8 倍之和，是 $\frac{1}{9}$ 的 $2+5+8=15$ 倍。把這化成帶分數 $1\frac{6}{9}$，再行約分成 $1\frac{2}{3}$。

求同分母的分數和，把各分子相加而以原分母爲分母卽得。

［例 2］ $2\frac{5}{13}+3\frac{9}{13}+\frac{7}{13}=5+\frac{21}{13}=5+1\frac{8}{13}=6\frac{8}{13}.$

帶分數的加法，把整數部分與整數部分相加，分數部分之和化爲帶分數再相加合。

［例 3］ $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\left(\frac{15}{24}+\frac{14}{24}\right)=\frac{15+14}{24}=\frac{29}{24}=1\frac{5}{24}.$

分母不同的分數，須先行通分，然後相加。

［例 4］ $2\frac{4}{5}+\frac{5}{12}+13\frac{1}{3}=15+\frac{48+25+20}{60}=15+\frac{93}{60}$

$$=\left(15+1\frac{33}{60}\right)=16\frac{33}{60}=16\frac{11}{20}.$$

式子變化時，能多用心算爲佳，如在上數例中的小字，最好略而不寫，直截記出其次的式子。

減法

[例 1]　$\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{6-2}{7}=\frac{4}{7}.$

$\frac{1}{7}$ 的 6 倍中減去 2 倍，故得 $\frac{1}{7}$ 的 $6-2=4$ 倍。

求同分母分數的差，取其分子的差爲分子，以原分母爲分母即得。

[例 2]　$13\frac{15}{29}-2\frac{11}{29}=11\frac{4}{29}.$

帶分數相減時，倘使被減數的分數部分比減數的分數部分爲大時，則先記下整數部分的差，再把分數部分的差寫下即可。

[例 3]　$5\frac{3}{7}-1\frac{4}{7}=4\frac{10}{7}-1\frac{4}{7}=3\frac{6}{7}.$

倘使被減數的分數部分比減數的分數部分爲小時，則於被減數整數部分中取 1 而加入分數部分使化爲假分數，然後照前例記下整數部分與分數部分的差。

[例 4]　$\frac{5}{12}-\frac{9}{28}=\frac{35-27}{84}=\frac{8}{84}=\frac{2}{21}.$

分母不同的分數，須先行通分後，再相減。

[例 5]　$9\frac{1}{18}-3\frac{7}{12}=9\frac{2}{36}-3\frac{21}{36}=8\frac{38}{36}-3\frac{21}{36}=5\frac{17}{36}.$

[例 6]　$1-\frac{5}{7}=\frac{7}{7}-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}.$

求 1 與眞分數之差，先將 1 化成以減數的分母爲分母的假分數，再計算這兩分數之差。

分數的加減，得了答數後，如爲可約分數，則須行約分，化之爲既約分數；如爲假分數，則須化之爲帶分數，以作答數。

［例 7］ $8-3\frac{4}{9}=7+\frac{9}{9}-3\frac{4}{9}=4\frac{5}{9}$.

習題 33.

計算次記各式:

1. $2\frac{5}{13}+3\frac{8}{13}+1\frac{7}{13}$.　　2. $6\frac{12}{25}+4\frac{8}{25}-8\frac{17}{25}$.

3. $39\frac{9}{28}-8\frac{9}{10}$.　　4 $105-25\frac{32}{99}$.

5. $\frac{8}{12}-\left(\frac{1}{9}+\frac{5}{21}\right)$.　　6. $\frac{2}{48}+\frac{5}{6}-\left(\frac{5}{14}-\frac{1}{7}\right)$.

7. $5\frac{2}{9}-2\frac{3}{4}+6\frac{7}{8}+1\frac{1}{2}+4\frac{1}{6}$.

8. $40\frac{4}{7}+14\frac{5}{21}-\left(6\frac{5}{14}+1\frac{8}{21}+8\right)$.

9. 2 里 95 丈 3 步,用里的帶分數記出來。

10. 3 日 15 時 21 分,用日的帶分數記出來。

乘法　(1) 整數乘分數

［例 1］ $\frac{5}{8}\times3=\frac{5\times3}{8}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$.

習題 33 的答:

1. $7\frac{7}{13}$.　2. $2\frac{3}{25}$.　3. $30\frac{59}{140}$.　4. $79\frac{67}{99}$.　5. $\frac{20}{63}$.　6. $1\frac{47}{336}$.

7. $15\frac{1}{72}$.　8. $39\frac{1}{14}$.　9. $2\frac{193}{360}$ 里。　10. $3\frac{307}{480}$ 日。

［註］ 某數以整數,分數,小數乘之的意義:

某數以整數乘,卽把若干個此數相加之意,如 15×3, 卽是 3 個 15 相加。

某數以分數乘,卽求某數之一部分,如 $15\times\frac{2}{5}$, 卽是把 15 分爲 5 分,而取其中的 2 分。所以結果比原數爲小。

某數以小數乘,是以分數乘的特別情形,也是求該數之一部分,如以 0.4 乘,實卽是以 $\frac{4}{10}$ 乘,其意義同分數。

$\frac{5}{8}$ 以 3 乘，即 $\frac{5}{8}$ 的 3 倍，即

$$\frac{5}{8}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}=\frac{5+5+5}{8}=\frac{5\times 3}{8}.$$

求分數與整數之積，以分子與整數之積爲分子，原分母爲分母即得。

[例 2]　$5\frac{1}{2}\times 3=15+\frac{3}{2}=16\frac{1}{2}.$

整數乘帶分數，可把此整數分乘帶分數的整數部分與分數部分，而將所得之積相加。

[例 3]　$\frac{7}{12}\times 4=\frac{7\times \cancel{4}}{\underset{3}{\cancel{12}}}=2\frac{1}{3}.$

[例 4]　$8\frac{7}{60}\times 30=240+\frac{7}{2}=243\frac{1}{2}.$

除法　(1) 整數除分數

[例 1]　$\frac{6}{7}\div 3=\frac{6\div 3}{7}=\frac{2}{7}.$

除法是乘法的逆，$\frac{2}{7}$ 的 3 倍是 $\frac{6}{7}$，故 $\frac{6}{7}$ 以 3 除當爲 $\frac{2}{7}$。

[例 2]　$\frac{5}{7}\div 3=\frac{5}{7\times 3}=\frac{5}{21}.$

某數以整數，分數，小數除的意義：

第一須注意的，除法是乘法的還原算法。12 以整數 3 除即是問 $3\times\triangle=12$ 或 $\triangle\times 3=12$，△是何數，即 3 與何數之積等於 12。這把實際上的事實比方起來，即是說 12 中有幾個 3？或把 12 分做 3 份，每份是多少？

以分數除，如以 $\frac{2}{3}$ 除 8，是問 $\frac{2}{3}\times\triangle=8$，$\triangle\times\frac{2}{3}=8$ 中的△是何數。即何數與 $\frac{2}{3}$ 的積是 8。但要照上面那麼用實際的事件去比方，卻沒有了。

以小數除，是以分數除的特別情形，可看成與分數有相同的意義。

因爲 $\frac{5}{21}\times 3=\frac{5\times 3}{21}=\frac{5}{7}$.

所以如例 1 一般分子是除數的倍數時，就可以用除數去除分子，又若不能同例 1 那樣以除數除分子時，則把除數去乘分母。

［例 3］ $28\frac{7}{11}\div 15=\frac{315}{11}\div 15=\frac{315\div 15}{11}=\frac{21}{11}=1\frac{10}{11}$.

帶分數須先化成假分數，然後再行除法。

乘法 (2) 分數乘分數

例如： $\frac{5}{7}$ 以 $\frac{3}{4}$ 乘，卽是要求 $\frac{5}{7}$ 的 $\frac{3}{4}$ 倍，再說淸楚一點，卽是 $\frac{5}{7}$ 用 4 除了的數再 3 倍起來。某數乘 $\frac{1}{3}$，卽該數的 $\frac{1}{3}$，就是把這數用 3 除了而取其 1 分，再說一遍，$\frac{5}{7}$ 的 $\frac{3}{4}$ 卽 $\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}$；$\frac{3}{5}$ 的 $\frac{1}{2}$ 卽 $\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}$，所以此地的乘頗有“的”字之意。

［例 1］ $\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{5\times 3}{7\times 4}=\frac{15}{28}$.

因爲 $\frac{5}{7}\div 4=\frac{5}{7\times 4}$, $\frac{5}{7\times 4}\times 3=\frac{5\times 3}{7\times 4}=\frac{15}{28}$。所以

求分數之積，以分子的積爲分子，以分母的積爲分母卽可。

［例 2］ $24\times\frac{7}{18}=\frac{24\times 7}{18}=\frac{4\times 7}{3}=\frac{28}{3}=9\frac{1}{3}$.

整數 24 可以看做 $\frac{24}{1}$ 的分數形式。

［例 3］ $3\frac{6}{25}\times 4\frac{4}{9}=\frac{81}{25}\times\frac{40}{9}=\frac{9\times 8}{5}=\frac{72}{5}=14\frac{2}{5}$.

帶分數須先化成假分數後再相乘。

〔注意〕 分數相乘時，其因數的順序可以任意變換。

例如： $\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}$ 或 $\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$ 都是等於 $\frac{15}{28}$ 的，又 $\frac{4}{5}\times\frac{7}{6}\times\frac{5}{8}$ 或 $\frac{7}{6}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{5}$ 或 $\frac{5}{8}\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{6}$ 都是等於 $\frac{4\times7\times5}{5\times6\times8}=\frac{7}{12}$。

除法 (2) 分數除分數

除法是乘法的逆演算，即例如： $\frac{5}{7}$ 以 $\frac{3}{4}$ 除，是求與 $\frac{3}{4}$ 相乘得 $\frac{5}{7}$ 的數。

［例 1］ $\frac{5}{7}\div\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\times\frac{4}{3}=\frac{20}{21}.$

因爲 $\left(\frac{5}{7}\times\frac{4}{3}\right)$ 以 $\frac{3}{4}$ 乘，則爲 $\frac{5}{7}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}$ 後面的兩個分數相約，爲 1，結局等於 $\frac{5}{7}$ 的。

所以，分數除分數，把除數的分子分母顚倒，以乘被除數即可。

［例 2］ $7\frac{1}{2}\div2\frac{2}{3}=\frac{15}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{45}{16}=2\frac{13}{16}.$

相除的是帶分數時，先化爲假分數，再行除法。

［例 3］ $\frac{6}{7}\div2=\frac{6}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{7}{\cancel{14}}}=\frac{3}{7}.$

除數 2 可以看成分數 $\frac{2}{1}$，再適用上項法則。所以上記法則中，用整數除，也包括在內的。

〔注意〕 在分數乘除法中，遇見有分母分子可以約分的，不妨先行約分，再計算乘除法，以求答數。如

$$\frac{7}{2}\times\frac{6}{14}\times\frac{13}{36}\div\frac{26}{56}=\frac{\cancel{7}\times\cancel{6}\times\cancel{13}}{\cancel{2}\times\underset{2}{\cancel{14}}\times\underset{6}{\cancel{36}}}\times\frac{\overset{7}{\cancel{56}}}{\underset{2}{\cancel{26}}}=\frac{7}{6}.$$

即行約分後，實際上簡便了不少。

$\frac{5}{3}\times\frac{3}{5}=1$，又 $\frac{1}{5}\times 5=1$，這樣的二數之積等於 1 時，稱其中的一數爲他數的倒數。卽 $\frac{3}{5}$ 是 $\frac{5}{3}$ 的倒數，$\frac{5}{3}$ 是 $\frac{3}{5}$ 的倒數。又 $\frac{1}{5}$ 的倒數是 5，5 的倒數是 $\frac{1}{5}$。一般把分數的兩項顚倒後所得的分數是原分數的倒數。又以某整數爲分母，1 爲分子的分數，是原整數的倒數。如用倒數一語把上記分數除法的法則記出，則如次：

一數以他數除時，以除數的倒數乘被除數卽可。

習題 34.

計算次記各式：

1. $\frac{14}{25}\times\frac{15}{16}$.
2. $1\frac{7}{9}\times\frac{3}{4}$.
3. $45\frac{5}{16}\times 2\frac{6}{25}$.
4. $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}$.
5. $\left(9\frac{5}{7}-7\frac{3}{5}+3\right)\times\frac{3}{8}\times 3\frac{3}{5}\times 5$.
6. $4\div\frac{11}{15}$.
7. $\frac{28}{39}\div\frac{21}{26}$.
8. $25\frac{3}{22}\times 1\frac{3}{11}$.
9. $4\frac{3}{4}\div 5\frac{3}{7}\div 11\frac{3}{4}$.
10. $2\frac{2}{9}\div 1\frac{3}{7}\times 2$.
11. $5\frac{5}{8}\div\left(3-1\frac{7}{10}\right)$.
12. $\left(4\frac{1}{3}+5\frac{1}{7}-\frac{1}{2}\right)\div\left(2\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\div\frac{5}{6}\right)$.

習題 34 的答：

1. $\frac{21}{40}$.　2. $1\frac{1}{3}$.　3. $101\frac{1}{2}$.　4. $\frac{1}{5}$.　5. $34\frac{73}{140}$.　6. $5\frac{5}{11}$.

7. $\frac{8}{9}$.　8. $31\frac{120}{121}$.　9. $\frac{7}{94}$.　10. $3\frac{1}{9}$.　11. $3\frac{3}{5}$.　12. $8\frac{353}{1134}$.

第三節　繁分數

3 以 7 除，可以記作 $\frac{3}{7}$ 的分數，即分子分母間所引的橫線，恰與除法的符號相當。現在再照那樣子來表示被除數，除數，不是整數的。

如 $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)\div\left(1\frac{5}{6}-\frac{4}{15}\right)$ 可寫作：$\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}{\frac{11}{6}-\frac{4}{15}}$.

即此中的粗橫線，與除號相當。這含有分數的除法，再用分數的形式來記出來的，叫做繁分數。其被除數及除數，各爲繁分數的分子及分母。

照這記法，$3\div\frac{4}{5}$ 可記作 $\dfrac{3}{\frac{4}{5}}$，$\frac{3}{4}\div5$ 可記作 $\dfrac{\frac{3}{4}}{5}$，$\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}$ 可記作 $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$，但因記爲 $\begin{array}{c}3\\ \hline 4\\ \hline 5\end{array}$ 時，則不知是指 $\frac{3}{4}\div5$ 或 $3\div\frac{4}{5}$，有混淆之虞，故每不採用繁分數的記法。

簡化繁分數

繁分數可以照尋常分數的加減乘除各法逐次計算，使化爲整數或簡分數：這就叫簡化繁分數。

[例 1]　簡化 $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}{1\frac{5}{6}-\frac{4}{15}}$.

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{4+5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2},$$

$$1\frac{5}{6}-\frac{4}{15}=1\frac{25}{30}-\frac{8}{30}=1\frac{17}{30},$$

$$\frac{3}{2}\div1\frac{17}{30}=\frac{3}{2}\times\frac{30}{47}=\frac{45}{47}.\ (\text{答})$$

先把繁分數的分子分母，計算出來，再行除法。

［例 2］ 簡化 $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\frac{1}{4}}}$.

$$4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4},\qquad 1\div\frac{17}{4}=\frac{4}{17},\qquad 4+\frac{4}{17}=\frac{72}{17},$$

$$1\div\frac{72}{17}=\frac{17}{72},\qquad 2+\frac{17}{72}=2\frac{17}{72}\ (答)$$

先從下面記的式子，順次計算。

習題 35.

簡化次記各式:

1. $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}}$.　　2. $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2\frac{2}{3}-1\frac{1}{2}}$.　　3. $\dfrac{3\frac{3}{5}-\frac{1}{6}}{3\frac{3}{5}+\frac{1}{6}}$.

4. $\dfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{1}{4}}}$.　　5. $\dfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$.

第四節　循環小數

化分數爲小數

［例 1］ 化 $\frac{3}{8}$ 爲小數。

$$8\,)\,\underline{3}$$
$$0.375$$

〔說明〕 $\frac{3}{8}$ 卽是 3 以 8 除，實行除法演算，得商 0.375。

故　　$\frac{3}{8}=0.375.$

［例 2］ 化 $\frac{2}{3}$ 爲小數。

習題 35 的答:

1. $\frac{2}{39}$.　2. $\frac{5}{7}$.　3. $\frac{103}{113}$.　4. $\frac{13}{30}$.　5. 3.

$$\begin{array}{r} 0.66\\ 3\overline{)2.0}\\ \underline{1\,8}\\ 20\\ \underline{18}\\ 2 \end{array}$$

2 被 3 除，得的商是 0.66……這樣連續除去，所得商總是 6, 永遠除不盡。所以 $\frac{2}{3}$ 用普通的小數(即若干位止的小數)不能表出來。不過 0.66……下去,取位愈多,愈近 $\frac{2}{3}$。

[例 3] $\frac{3}{11}$.

$$\begin{array}{r} 0.27\\ 11\overline{)3.0}\\ \underline{2\,2}\\ 80\\ \underline{77}\\ 3 \end{array}$$

[例 4] $\frac{5}{6}$.

$$\begin{array}{r} 0.83\\ 6\overline{)5.0}\\ \underline{4\,8}\\ 20\\ \underline{18}\\ 2 \end{array}$$

在例 3 得商 0.27 之後，剩餘是和原分子相同的 3, 故以下除去，所得的商總是反覆着 27 而已，即爲 0.272727……無論如何，沒有終止之時。

在例 4 中，得第一商 8 以後剩餘 2, 而第二位商 3 之後剩餘也是 2, 故此後的商一直是 3, 剩餘一直是 2, 永不終止，爲 0.8333……。

在小數點下,有若干數字,照同一順序,而反覆不已的,叫做循環小數。

分數化小數時行除法,經若干位的小數後,終局若非除盡,則必爲循環小數。

表示循環小數，有一簡便的方法，即在循環的數字上加一點，如 0.6 的循環記作 $0\dot{6}$, 0.8333……記作 $0.8\dot{3}$；若不止一位數循環的，則在其循環部分的首尾二數字，各記一點，如 0.272727……記作 $0.\dot{2}\dot{7}$, 0.536536……記作 $0.\dot{5}3\dot{6}$；這些點，就叫循環點，循環小數反覆的部分，叫循環節。

如上例所示，循環小數有小數的全部循環的，如 $0.\dot{6}$, $0.\dot{2}\dot{7}$ 等，也有一位或幾位小數不循環，而其次的幾位方是循環的，如 $0.8\dot{3}$：前者叫純循環小數，後者叫混循環小數。

化循環小數爲分數法

(1) 純循環小數　用循環節的數字做分子，照循環節位數的數目寫 9 字做分母，再約分，卽得。

［例 1］　化 $0.\dot{6}\dot{3}$ 爲分數。

$$0.\dot{6}\dot{3}=\frac{63}{99}=\frac{7}{11}.$$

〔說明〕　因

$$\begin{array}{l} 0.\dot{6}\dot{3}\times 100=63.636363\cdots\cdots \\ \underline{0.\dot{6}\dot{3}\times 1\quad = \ 0.636363\cdots\cdots} \end{array}$$

兩邊同減，得 $0.\dot{6}\dot{3}\times 99\ =63.$

故

$$0.\dot{6}\dot{3}=\frac{63}{99}.$$

就是 $0.\dot{6}\dot{3}$ 這循環小數，倘使 100 倍起來，在其中減去了原來的循環小數，則成爲整數的 63。這是 100 倍的 $0.\dot{6}\dot{3}$ 減去原數，卽是原循環小數的 99 倍。故得上記的分數式。

［例 2］　化 $4.\dot{2}3\dot{7}$ 爲分數。

因

$$\begin{array}{r} 0.\dot{2}3\dot{7}\times 1000 = 237.237\ 237\ 237\cdots\cdots \\ \underline{0.\dot{2}3\dot{7}= \quad 0.237\ 237\ 237\cdots\cdots} \end{array}$$

$$0.\dot{2}3\dot{7}\times 1000-0.\dot{2}3\dot{7}=237.$$

卽

$$0.\dot{2}3\dot{7}\times 999=237.$$

故

$$0.\dot{2}3\dot{7}=\frac{237}{999},$$

因之

$$4.\dot{2}3\dot{7}=4\frac{237}{999}=4\frac{79}{333}.$$

倘使知道了上面說過的方法，不必如此繁複，只要依照了法則依循環節位數的數目記 9 字作分母，以原循環節的數字作分子卽可。

(2) 混循環小數　化混循環小數爲分數，也是照同樣道理可以計算，先用例來說明。

［例 1］　化 $0.8\dot{3}$ 爲分數。

因

$$\begin{array}{rl} 0.8\dot{3}\times 100 &= 83.3333\cdots\cdots \\ 0.8\dot{3}\times 10 &= \ \ 8.3333\cdots\cdots \\ \hline 0.8\dot{3}\times(100-10) &= 83-8. \end{array}$$

故

$$0.8\dot{3}=\frac{83-8}{90}=\frac{75}{90}=\frac{5}{6}.$$

［例 2］　化 $0.4\dot{0}\dot{9}$ 爲分數。

因爲

$$\begin{array}{rl} 0.4\dot{0}\dot{9}\times 1000 &= 409.090909\cdots\cdots \\ 0.4\dot{0}\dot{9}\times 10 &= \ \ \ 4.090909\cdots\cdots \\ \hline 0.4\dot{0}\dot{9}\times(1000-10) &= 409-4. \end{array}$$

故

$$0.4\dot{0}\dot{9}=\frac{409-4}{990}=\frac{405}{990}=\frac{9}{22}.$$

從此二例，可知要化混循環小數爲分數，只須把開頭的不循環部分和連下去的一循環節去小數點及循環點，減去不循環的部分作爲分子；再照循環節的位數連記 9 字，後面再依不循環部分的位數加 0，作爲分母；再行約分即可。

［例 3］　化 $3.26\dot{1}3\dot{5}$ 爲分數。

$$3.26\dot{1}3\dot{5}=3\frac{26135-26}{99900}=3\frac{26109}{99900}=3\frac{967}{3700}.$$

［例 4］　化 $0.00\dot{3}\dot{6}$ 爲分數。

$$0.00\dot{3}\dot{6}=\frac{36}{9900}=\frac{1}{275}.$$

這裏是須把 $0.00\dot{3}\dot{6}$ 的小數第一二兩位看做 0，而是有此數的，故不是 $\frac{36}{99}$，須加留意。

循環小數的計算

在循環小數中，可以變更其循環節的位，而不改變原小數的值。例如 $0.\dot{5}3\dot{6}$ 一循環小數,我們可以記作 $0.5\dot{3}6\dot{5}$, 或 $0.53\dot{6}5\dot{3}$, 因為

$$0.\dot{5}3\dot{6}=0.536536536\cdots\cdots,$$

$$0.5\dot{3}6\dot{5}=0.5365365365\cdots\cdots,$$

$$0.53\dot{6}5\dot{3}=0.53653653653\cdots\cdots.$$

實際上是一樣的。不過把循環節移在當作於小數第二位，第三位開始罷了。即循環節是可以移動的。同樣我們還可以把循環節的位數倍加，即如 $0.\dot{5}3\dot{6}$ 也可以記作 $0.\dot{5}3653\dot{6}$ 當做循環部分是六位的循環小數。

因了上面所說的方法，若干循環小數，即使開始循環的位不同，循環部分的位數不同，我們可以用了上面的方法，不改變其數值而化之為有同位而同循環節的循環小數，這方法叫做循環小數的通位。

行通位法，只須將循環節移動及加長，循環節的位數，依各循環位數的最小公倍數；不循環位數，依各數中不循環最多者。這也叫最小通位法。

［例］ 求 $4.\dot{2}3\dot{7}$, $0.00\dot{3}\dot{6}$, $0.8\dot{3}$ 的通位。

各數中不循環位數最多者是二位。

循環節位數是 3, 2, 1 的最小公倍數，即 $3\times2=6$。故得

$$4.\dot{2}3\dot{7}=4.23\dot{7}2372\dot{3}\cdots\cdots,$$

$$0.00\dot{3}\dot{6}=0.00\dot{3}6363\dot{6}\cdots\cdots,$$

$$0.8\dot{3}=0.83\dot{3}3333\dot{3}\cdots\cdots.$$

循環小數加減法 循環小數行加減時，可照上法先將循環小數通位，然後計算。但有循環節首位應進退某數者，於其末位上亦須加減。

［例 1］ 求 $4.\dot{2}3\dot{7}$, $0.00\dot{3}\dot{6}$, $0.8\dot{3}$ 的和。

$$\begin{array}{rl}
4.\dot{2}3\dot{7} & = 4.23\dot{7}2372\dot{3} \\
0.00\dot{3}\dot{6} & = 0.00\dot{3}6363\dot{6} \\
0.8\dot{3} & = 0.83\dot{3}3333\dot{3} \\
\hline
 & \, 5.07\dot{4}2069\dot{3}
\end{array}$$

$$\therefore \quad 4.\dot{2}3\dot{7}+0.00\dot{3}\dot{6}+0.8\dot{3}=5.07\dot{4}2069\dot{3}.$$

這例的和，循環節的首位是 14，必須 1 加進於上一位，故循環節末位數原是 2，此時必須加 1 而爲 3，卽爲補足了下一循環節所進上來的數。

［例 2］　求 $0.31\dot{4}0\dot{5}$，$3.45\dot{2}$，$0.2\dot{2}\dot{1}$ 的和。

$$\begin{array}{rl}
0.31\dot{4}0\dot{5} & = 0.31\dot{4}0540\dot{5} \\
3.45\dot{2} & = 3.45\dot{2}2222\dot{2} \\
0.2\dot{2}\dot{1} & = 0.22\dot{1}2121\dot{2} \\
\hline
 & \, 3.98\dot{7}4883\dot{9}
\end{array}$$

故　$0.31\dot{4}0\dot{5}+3.45\dot{2}+0.2\dot{2}\dot{1}=3.98\dot{7}4883\dot{9}.$

這例因循環節首位沒有進上來的數，故末位也照舊。

［例 3］　求 $0.58\dot{3}-0.\dot{2}9\dot{7}=?$

$$\begin{array}{rl}
0.58\dot{3} & = 0.58\dot{3}3\dot{3} \\
0.\dot{2}9\dot{7} & = 0.29\dot{7}2\dot{9} \\
\hline
 & \, 0.28\dot{6}0\dot{3}
\end{array}$$

在這例中差內循環節首位，須向上一位借 1，方可相減，故循環節末位原是 4，亦須去 1 爲 3，卽是借去了下一循環節所減之數。

［例 4］　求 $4.\dot{2}3\dot{7}-0.4\dot{0}\dot{9}=?$

$$\begin{array}{rl}
4.\dot{2}3\dot{7} & = 4.2\dot{3}7237\dot{2} \\
0.4\dot{0}\dot{9} & = 0.4\dot{0}9090\dot{9} \\
\hline
 & \, 3.8\dot{2}8146\dot{3}
\end{array}$$

故 $$4.\dot{2}3\dot{7}-0.4\dot{0}\dot{9}=3.8\dot{2}81463\dot{3}.$$

這裏因循環節首位不要向上一位借，故末一位不減。

循環小數加減的計算，也可以先化成分數，然後計算，但還是通位法比較簡捷。

［例 1］ 求 $0.1\dot{2}+0.\dot{4}\dot{5}+0.7\dot{8}$.

$$\begin{aligned}0.1\dot{2}+0.\dot{4}\dot{5}+0.7\dot{8}&=\frac{11}{90}+\frac{45}{99}+\frac{71}{90}\\&=\frac{121}{990}+\frac{450}{990}+\frac{781}{990}=\frac{1352}{990}\\&=\frac{676}{495}=1\frac{181}{495}=1.3\dot{6}\dot{5}.\end{aligned}$$

［例 2］ 求 $2.\dot{3}-0.\dot{0}\dot{5}$.

$$2.\dot{3}-0.\dot{0}\dot{5}=2\frac{3}{9}-\frac{5}{99}=2\frac{33}{99}-\frac{5}{99}=2\frac{28}{99}=2.\dot{2}\dot{8}.$$

循環小數的乘法和除法，則以先行化爲分數，然後計算，較爲便利。

［例 3］ 求 $2\dot{3}\times0.\dot{1}4285\dot{7}$.

$$\begin{aligned}2\dot{3}\times0.\dot{1}4285\dot{7}&=2\frac{3}{9}\times\frac{142857}{999999}=\frac{21}{9}\times\frac{142857}{999999}\\&=\frac{7}{3}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{3}=0.\dot{3}.\end{aligned}$$

［例 4］ 求 $1.7\dot{5}\dot{3}\div7.\dot{5}\dot{1}$.

$$1.7\dot{5}\dot{3}\div7.\dot{5}\dot{1}=\frac{1736}{990}\div\frac{744}{99}=\frac{\overset{7}{\cancel{1736}}}{\underset{10}{\cancel{990}}}\times\frac{99}{\underset{3}{\cancel{744}}}=\frac{7}{30}=0.2\dot{3}.$$

〔注意〕 循環小數的加減乘除四法的計算，已如上述。其中先化爲分數，然後再照分數的算法計算，有時雖較繁複，然可以到處適用。即在加減法中有時雖不及將循環小數通位後即就原數計算之便捷，但在乘算及除算則非先化分數不可。在乘數

及除數不爲循環小數時，被乘數及被除數之循環小數，尙可不必化分數，就原數而行普通之乘除法，惟極繁宂。倘乘數，被乘數，除數，被除數雙方均爲循環小數，則要照平常的乘除方法計算，勢有所不能，因爲那個繁複是到了不能處理的程度了。所以循環小數化分數的計算，也是很重要，不可不留意的。

習題 35.

化下記各循環小數爲分數:

1.　$0.\dot{5}$.　　2.　$0.\dot{3}\dot{6}$.　　3.　$1.\dot{5}2\dot{5}$.

4.　$0.00\dot{7}\dot{2}$.　　5.　$0.2\dot{3}\dot{8}$.　　6.　$0.\dot{0}0\dot{3}$.

把下記分數寫作循環小數:

7.　$\frac{52}{99}$.　　8.　$4\frac{725}{999}$.　　9.　$\frac{156}{990}$.

求下列各式的結果:

10.　$0.\dot{5}+1.\dot{1}\dot{4}-0.\dot{0}\dot{4}$.　　11.　$0.\dot{7}1528\dot{5}\times 0.\dot{2}\dot{7}$.

12.　$0.\dot{2}\dot{3}\div 0.\dot{2}87\dot{5}$.

習題 36 的答:

1.　$\frac{5}{9}$.　2.　$\frac{4}{11}$.　3.　$1\frac{175}{333}$.　4.　$\frac{2}{275}$.　5.　$\frac{118}{495}$.　6.　$\frac{1}{333}$.

7.　$0.\dot{5}\dot{2}$.　8.　$4.\dot{7}2\dot{5}$.　9.　$0.1\dot{5}\dot{7}$.　10.　$1.\dot{6}\dot{5}$.　11.　$0.\dot{1}9480\dot{5}$.

12.　$0\ \dot{8}0\dot{8}$.

問題:

1.　解釋次記各名詞:——假分數，眞分數，帶分數，旣約分數，可約分數，約分，通分。

2.　說明循環小數產生的原因及其必然性，

3.　同分母的分數的大小，如何判別？同分子分數的大小如何判別？

4.　述分數乘除法的規則，以說明除法與乘法的相同。

5.　小數是否爲分數之一種？如是，則其計算均與分數計算之規則相合否？試檢證之。

第五節 應用問題

[例 1] 某人每小時行路 $1\frac{11}{36}$ 里，問 $2\frac{3}{5}$ 小時行路若干里？

解： $1\frac{11}{36}\times 2\frac{3}{5}=\frac{47}{36}\times\frac{13}{5}=3\frac{71}{180}.$ 答： $3\frac{71}{180}$ 里。

〔說明〕 一小時所行的里數乘時間數，即該時間中所行的里數(時間不論爲分數或整數均不妨)。

[例 2] 某家每日須使用茶 $\frac{3}{16}$ 斤，問茶 $5\frac{1}{4}$ 斤，可用幾日？

解： $5\frac{1}{4}\div\frac{3}{16}=\frac{21}{4}\times\frac{16}{3}=28.$ 答： 28 日。

〔說明〕 每日所用量乘日數得總量，故總量以每日所用量除即得日數。

[例 3] 全金額的 $\frac{5}{7}$ 爲 25 元，問全金額爲若干？

解： 前述 144 頁“的”字即是乘字之意，所以本題意即是說全金額乘 $\frac{5}{7}$ 爲 25。此即已知積及一因數而求另一因數，故須用乘法的逆演算即除法，所以以 $\frac{5}{7}$ 除 25 元即可。

$25\div\frac{5}{7}=25\times\frac{7}{5}=35.$ 答： 35 元。

〔注意〕 如前所述，解問題時，計算的方法，不是因爲數的不同而有所變異。不論數是整數、是小數、是分數，算理總是一

分數應用問題，和整數的應用問題一樣，也可以把其性質相似的總括而加以分類，但此地不再一一說明，讀者須自己隨題而加思索，獲得解法。

每一個問題的解法，本無有一定的成法，各自可以獨出心裁的。所以不先分類，在解答時，更可自由思考，而發揮解題的眞本領。

樣的。故某金額的 2 倍是 20 元，則該金額由 2 除 20 元而可知，所以照此道理，這問題也只要以 $\frac{5}{7}$ 除 28 元就行。但如本解法的思考，更爲根本、便利，故須慣熟於此種思考法。

[例 4]　某數的 $\frac{4}{7}$ 與其 $\frac{3}{8}$ 的差爲 33，問該數？

解：　$\frac{4}{7}-\frac{3}{8}=\frac{11}{56}$,　$33\div\frac{11}{56}=33\times\frac{56}{11}=168.$　答：168.

〔說明〕　不論原數是什麽，其 $\frac{4}{7}$ 中減去 $\frac{3}{8}$ 卽是原數的 $\frac{11}{56}$。因之卽說原數的 $\frac{11}{56}$ 是 33。卽原數乘 $\frac{11}{56}$ 則爲 33，故以 $\frac{11}{56}$ 除 33 可得原數。

[例 5]　某人化去了他所有金錢的 $\frac{1}{5}$，又用去了所剩的 $\frac{1}{4}$，尙餘 78 元；問最初此人有金錢若干？

解：　$1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$,　$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,　$\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$;

$78\div\frac{3}{5}=78\times\frac{5}{3}=130.$　答：130 元。

〔說明〕　所有的金錢中化去了 $\frac{1}{5}$ 則還剩 $\frac{4}{5}$（所有的1倍，卽 $\frac{5}{5}$ 中減去 $\frac{1}{5}$，故 $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$）。其次再用了前面所剩的 $\frac{1}{4}$，所以這時所剩的是原來的所剩的 $\frac{4}{5}$ 中 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，因之是原來所有金錢 $\frac{4}{5}$ 的 $\frac{3}{4}$ 卽 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}$，而此數爲 78 元。故以 $\frac{3}{5}$ 除 78 卽得原來所有的金錢。

〔例 6〕　金 200 元分給甲乙二人，乙所得爲甲的 $\frac{2}{3}$，問各

得若干?

解: $1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$, $200\div\frac{5}{3}=200\times\frac{3}{5}=120$,

$200-120=80.$　答: 甲 120 元,乙 80 元。

〔說明〕 甲所得,卽甲所得的一倍。故二人所得的和,爲甲所得的 1 倍卽 $\frac{3}{3}$, 與甲的 $\frac{2}{3}$, 卽甲所得的 $\frac{5}{3}$。因之說甲的所得乘 $\frac{5}{3}$ 爲 200 元。故 200 元以 $\frac{5}{3}$ 除,卽爲甲所得。

[例 7] 有一工作,甲 7 日可成,乙 8 日可成,若甲乙合作幾日可成?

解: $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{15}{56}$, $1\div\frac{15}{56}=\frac{56}{15}=3\frac{11}{15}$.　答: $5\frac{11}{15}$ 日。

〔說明〕 甲 7 日可成,故每日所作爲工作的 $\frac{1}{7}$, 乙 8 日可成,每日所做的是 $\frac{1}{8}$, 二人共作一日,所作之工爲 $\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{15}{56}$。現在一日作工的量乘日數,則得此日數間所作工的量。所以工作的總量,以每日作工的量除之,卽得日數。所以此工作全部,卽工作的 $\frac{56}{56}$, 卽工作的 1 倍, 以每日作工量 $\frac{15}{56}$ 去除,得日數 $3\frac{11}{15}$.

〔注意〕 因不明每日作工幾小時,故 $3\frac{11}{15}$ 中的分數部分應該是幾小時是不能知道的。答數只記着帶分數就好。

[例 8] 欲乘自行車走 $3\frac{1}{2}$ 小時,去時每小時行 12 里,回時每小時行 9 里,問可行若干里才回頭?

$\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{7}{36}$, $3\frac{1}{2}\div\frac{7}{36}=\frac{7}{2}\times\frac{36}{7}=18.$　答: 18 里。

〔說明〕　去時每小時行12里，故行1里需 $\frac{1}{12}$ 小時，同樣回時行1里需 $\frac{1}{9}$ 小時。故往返1里所需的時間爲 $\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{7}{36}$ 小時，卽說有 $\frac{7}{36}$ 小時，卽可以行了1里卽回頭，今有 $3\frac{1}{2}$ 小時，則可行若干里始回，就是問 $3\frac{1}{2}$ 小時是 $\frac{7}{36}$ 小時的幾倍，故以 $\frac{7}{36}$ 除 $3\frac{1}{2}$ 卽可。

習題 37.

1.　某人旅行30里的路，用人力車行 $12\frac{5}{9}$ 里，又用馬車行 $15\frac{3}{2}$ 里，其餘的路程步行；問步行幾里？

2.　某人讀書一册，第一日讀了全書的 $\frac{1}{3}$，第二日讀了 $\frac{1}{4}$，第三日讀畢；問第三日所讀的分量是全體的幾分之幾？

3.　金2100，分給甲乙丙三人；甲占金額 $\frac{3}{7}$，乙占其所剩之 $\frac{2}{3}$，問丙所得尙有若干元？

4.　有二數，其和爲 $36\frac{5}{8}$，其差爲 $7\frac{3}{4}$，問各數？

5.　某數以 $1\frac{3}{4}$ 乘，從其積減去 $2\frac{3}{4}$，再以 $3\frac{3}{4}$ 除，再加上了 $4\frac{3}{4}$，則爲 $5\frac{3}{4}$，問某數爲若干？

6.　某人用去了他所有金的 $\frac{2}{3}$ 後，又得了4元5角，故現在所有的成了他原有金的 $\frac{1}{2}$，問最初有錢若干？

7.　某人以其財產的 $\frac{2}{5}$ 給長子，又以所餘的 $\frac{7}{12}$ 給次子，

再把所剩的給幼子，只知幼子比長子少 1500 元，問某人的全財產爲若干？

8. 某人 10 年前的年齡爲 10 年後年齡的 $\frac{3}{8}$，問此人現年幾何？

9. 某工事甲乙二人共作要 15 日做完。甲一人作要 20 日，問乙一人作要若干日？（參照例 7，以下三題同。）

10. 放水於水漕中，開甲管須 5 時間放滿，開乙管須 3 時間放滿。問兩管齊開需多少時間？

11. 甲乙二人同作一工，5 日間成全工程的 $\frac{1}{3}$，其餘由乙一人獨作 16 日而成。問此工程若由甲或乙個人獨作，各需幾日？

12. 甲乙丙三人合作一工事，8 日而成其半，後甲乙二人共作 8 日，又成其殘工的 $\frac{3}{5}$，再後甲一人以 12 日而完工。問甲乙丙一人作此工事，各需幾日？

13. 以某金額購米，可得 6 石，購麥可得 9 石。今欲以此金額購相等的米和麥，問可購幾石？（參照例 8，下題同。）

14. 有二輪車，前輪周 9.5 尺；後輪周 6.8 尺。今走路一段，只知後輪比前輪多轉 135 回，問路程若干？

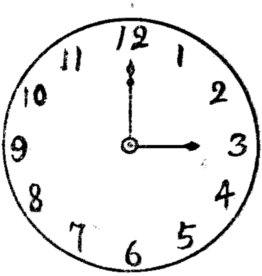
15. 攝氏寒暑表從冰點到沸點分爲 100 度，冰點 0°，沸點 100°。華氏寒暑表則從冰點到沸點分爲 180 度，以 32° 爲冰點，212° 爲沸點。問攝氏 10° 合華氏幾度？

解： 攝氏 1 度的昇降與華氏的 $\frac{180}{100}=\frac{9}{5}$ 度的昇降相當。故攝氏 10 度的昇與華氏的 $10\times\frac{9}{5}=18$ 度的昇相當；故華氏的度數是 $18°+32°=50°$. 答：50 度。

16. 在寒暑表上華氏的 68° 合攝氏幾度？

17. 列氏寒暑表,以 0° 爲冰點,80° 爲沸點,問列氏的 12° 合華氏幾度?合攝氏幾度?

18. 三時與四時之間,時鐘上的時針與分針相重疊的時刻是何時?



解: 時鐘表面劃分成 60 個間隔,每時分針(即長針)行一周,即 60 個間隔,而時針(即短針)所走的是 5 個間隔;故每 1 分鐘,分針走 $\frac{60}{60}=1$ 周,而時針走 $\frac{5}{60}$ 周。因之每分鐘分針追過時針的是 $\frac{60}{60}-\frac{5}{60}=\frac{55}{60}$ 周。

現在三時,時針在分針前 15 個間隔,故即說每分鐘追出 $\frac{55}{60}$ 周,追出 15 個間隔須若干分鐘,即以 $\frac{55}{60}$ 除 15 便得:

$$15\div\frac{55}{60}=15\times\frac{60}{55}=16\frac{4}{11}.$$

所要的時間是 $16\frac{4}{11}$ 分,故時刻是在 3 時 $16\frac{4}{11}$ 分。

19. 問三時與四時之間,時鐘是兩針成一直線的時刻?

20. 時鐘的兩針,一次重合後到再次重合須時幾分?

21. 二時後,時計的兩針成直角的時刻,是何時何分?

22. $\frac{7}{12},\frac{14}{27},\frac{35}{54}$ 各分數,以某分數除之,各得整商,求其中的最大者。

23. 求以 $\frac{7}{12},\frac{14}{27},\frac{35}{54}$ 除而得整商的分數中的最小者。

24. 地球表面約 $\frac{1}{4}$ 爲陸地，陸地約 $\frac{3}{4}$ 在北半球；問在北半球與南半球的海洋各爲陸地的若干倍？

習題 37 的答：

1. $\frac{17}{18}$ 里。 2. $\frac{5}{12}$. 3. 400 元。 4. $22\frac{3}{16}$, $14\frac{7}{16}$. 5. $3\frac{5}{7}$.

6. 27 元。 7. 10000 元。 8. 22 歲。 9. 60 日。 10. $1\frac{7}{8}$ 時。

11. 甲 40 日，乙 24 日。 12. 甲 60 日，乙 48 日，丙 40 日。

13. 3石6斗。 14. 3230尺。 16. 20度。 17. 華氏 59°，攝氏 15°.

19. 3 時 $49\frac{8}{11}$ 分。 20. 1 時 $5\frac{5}{11}$ 分。 21. 2 時 $27\frac{3}{11}$ 分。

22. $\frac{7}{108}$. 23. $\frac{70}{3}$. 24. 北半球 $1\frac{2}{3}$ 倍，南半球 7 倍。

第七章　比及比例

第一節　比

12是3的4倍，6人是3人的2倍，4尺是6尺的$\frac{2}{3}$；在這樣情形中，把二數或二同種類的量相比較，說出前一數是他數的若干倍或幾分之幾時，這兩量數間的倍數或分數的關係，叫做前一數對後一數的比。

前一數叫做比的前項，後一數叫做比的後項。上例的12對3的比是4，12是前項，3是後項。6人對3人的比是2，6人是前項，3人是後項。4尺對6尺的比是$\frac{2}{3}$，4尺是前項，6尺是後項。

甲數對乙數的比，簡略之也叫做甲數比乙數。這比的值，就是甲數被乙數除後所得的商。又可以看做前項作分子，後項作分母的分數；並且比的記法，有時也採用這種分數的記法。

若干倍或幾分之幾，若把倍的意義擴大，在分數小數也可使用倍字；如以某數的三分之一，叫某數的三分之一倍等，則幾分之幾即是幾分之幾倍。是分數的倍數，也包括在若干倍之內，而比的意義，即成了一數與他一數若干倍相當的關係了。

比只成立於不名數或同種類的名數之間。非同種類的名數，不能相比。如言米六石比柴七斤，便是無意義的。

比的值一定是不名數。

求比值時，前項後項的量如非同單位，須先化爲同單位後再計算。

$$\frac{12}{3}=4,\quad \frac{6\text{人}}{3\text{人}}=2,\quad \frac{4\text{尺}}{6\text{尺}}=\frac{2}{3}.$$

或記作

$$12:3=4,\ 6\text{人}:3\text{人}=2,\ 4\text{尺}:6\text{尺}=\frac{2}{3}.$$

凡是名數的比，一定要是同種類的名數，不是同種類的名數不能相比。例如 3 人：5 椅子，就不成一句話。

把比同除法、分數對照起來，其關係如下表所示：

比	除法	分數
前項	被除數	分子
後項	除數	分母
比值	商	分數值

由此可見，比是和除法及分數相似的東西，不過比的值一定是不名數，而除法和分數，則不一定。

比因爲和除法及分數有相同的性質，所以在計算比值也可適用同樣的算理。譬如說在除法及分數的計算上，被除數和除數，或分子與分母，用同一的數去乘或除是不變其值的，故

比的前項後項，用同一的數乘或除，其值不變。

例如： 4：5 的值爲 $\frac{4}{5}$；在其前後二項各乘以 2，爲 8:10，其值爲 $\frac{8}{10}$，亦等於 $\frac{4}{5}$.

又如 $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ 的兩項，各以 3 乘，$\frac{2\times3}{3}:\frac{1\times3}{3}=2:1$；$5:\frac{2}{3}$ 的兩項，各以 3 乘，則爲 15：2。

又 0.5：3 的兩項各 10 倍起來，則爲 5：30。

這樣，比式有爲分數及小數時，可乘以相當之數，使化爲整數。這種算法，叫做把比簡化。

比值是前項被後項除的商。

比值是以前項爲分子，後項爲分母的數值。

分數有眞假，較 1 大的叫假分數，較 1 小的叫眞分數。在比則較 1 爲小的比叫劣比，較 1 爲大的比叫優比。如 4 : 5 是劣比，15 : 2 是優比。

比的大小，卽指比值之大小，故可照分數的大小計算。

〔例 1〕　2 尺對 6 寸的比爲何？

$$2\text{尺} : 6\text{寸} = 20\text{寸} : 6\text{寸} = \frac{10}{3}.$$

卽言 2 尺爲 6 寸的幾倍，因之以 6 寸除 2 尺卽可，這裏要化成相同的單位，把 2 尺化成 20 寸，然後以 6 除之。

〔例 2〕　什麼數對 6 的比是 5？

$$6 \times 5 = 30.$$

什麼數用 6 除等於 5，卽 6 的 5 倍爲何數之意。

〔例 3〕　9 元 7 角 5 分對於某金額的比是 $\frac{5}{8}$，問金額若干？

$$9.75 \div \frac{5}{8} = 15.60. \qquad \text{答：15 元 6 角。}$$

9.75 元是多少元的 $\frac{5}{8}$？卽多少元乘以 $\frac{5}{8}$ 則爲 9.75 元，故以 $\frac{5}{8}$ 除 9.75 元卽可。

習題 38.

1.　3 斤對 8 寸可以相比麼？

2.　7 尺對 5 寸之比爲何？

3.　3 小時比 1 日之比值爲若干？

習題 38 的答：

1.　不可。　2.　$70:5=14$.　3.　$3:24=\frac{1}{8}$　4.　3.75 元。

5.　3 尺。　6.　$\frac{3}{5}$.　7.　$\frac{4}{3}$.　8.　$\frac{3}{2}$.　9.　$\frac{5}{3}$.　10.　$\frac{3}{12}$.

4. 某金額對 5 元之比是 $\frac{3}{4}$，問該金額？

5. 13 尺 2 寸對多少寸的比是 $\frac{22}{5}$？

6. 甲的 5 倍等於乙的 3 倍時，甲比乙之比值如何？

7. 甲爲乙的 $\frac{4}{5}$，乙爲丙的 $\frac{5}{3}$，問甲比丙爲若干？

8. 甲 2 小時可走到的路，乙以 3 小時可走到，問甲乙速度之比如何？

9. 兔行 5 步的距離，犬行 3 步可達，問犬 1 步的距離與兔 1 步的距離之比如何？

10. 地球表面 $\frac{1}{4}$ 爲陸地，陸地的 $\frac{3}{4}$ 在北半球，問北半球的陸地與海水面的面積之比如何？

反　比

把原比的前項後項交互換位後的比，叫原比的反比。

［例］　到某地去，用人力車 5 小時可達，用自行車 2 小時可達，問兩者的速度的比（卽同一時間內所行的距離的比）？

解：　是比較同一時間內所行的距離，試想各行 1 時間的距離，人力車行全程的 $\frac{1}{5}$，自行車走了 $\frac{1}{2}$，故其比是 $\frac{1}{5}:\frac{1}{2}$。

爲去分母，兩項各以 10 乘之，得 2：5。

卽人力車與自行車走同距離所要時間的比是 5：2，而其速度的比則是 2：5，此正恰爲時間的比的前後項相互換位而成之比。卽人力車、自行車速度的比是行某距離所要時間的反比。

甲比乙的反比，把其前後項交互換位卽得。

例如：　5：7 的反比爲 7：5，

$\frac{2}{3}:\frac{3}{5}$ 的反比爲 $\frac{3}{5}:\frac{2}{3}$.

因對於反比的區別時，又把普通的比，特稱爲正比。

第二節　比例

表示兩個比相等的式子，叫做比例。

如：　$3:4$ 與 $6:8$ 的值都等於 $\frac{3}{4}$，可記作比例式：

$$3:4=6:8.$$

又如：　12 人 : 8 人 $=3$ 元 : 5 元，也是比例式。

一個比例，一定有四項；其第一、第四項合稱外項，第二、第三項合稱內項。

$$\underset{\text{第一項}}{3}:\underset{\text{第二項}}{4}=\underset{\text{第三項}}{6}:\underset{\text{第四項}}{8}\qquad \underbrace{\text{第一項}:\underbrace{\text{第二項}=\text{第三項}}_{\text{內項}}:\text{第四項}}_{\text{外項}}$$

前記的比例式，倘使是對的，那麼等號前後的比值應相等，所以 $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ 成立了。再在等式前後各乘以 (4×8)，則變成 $3\times 8=6\times 4$，這式子當然也非成立不可，所以

凡一個比例式，其內項的積，一定等於外項的積。

又在 12 人 : 8 人 $=3$ 元 : 2 元中，看做沒有單位名的不名數，內項的積也是等於外項的積。他如混有分數的比例式：

$3\frac{1}{2}:7=3:6$，也是 $3\frac{1}{2}\times 6=21$，$7\times 3=21$，即內項的積是等於外項的積的。

解比例

〔例 1〕　$12:9=8:x$，求 x 之值。

解：　在此式中內項之積 9×8 應該等於外項的積 $12\times x$ 的，所以 $x=(9\times 8)\div 12$，

$$x=\frac{9\times 8}{12}=6.$$

答：$x=6$.

這樣，在一個比例式中，已知三項而求他一項之值，叫解比例；所求的項，叫未知項，通常以一文字 x 代之。

〔例 2〕　解 $7:9=x:2.4$.

外項的二項均知，其積爲 7×2.4，所以

$$7\times2.4=9\times x,$$

$$x=\frac{7\times2.4}{9}=\frac{7\times24}{90}=\frac{28}{15}=1\frac{13}{15}.$$

答：$x=1\frac{13}{15}$.

〔例 3〕　解 x 里：42 里＝6 時：14 時。

〔注意〕　在解比例時，式中的名數，作爲不名數看。

$$x=\frac{42\times6}{14}=18.$$　答：$x=18$ 里.

〔例 4〕　$\frac{2}{7}:\frac{1}{3}=x:105$.

$$x=\frac{\frac{2}{7}\times105}{\frac{1}{3}}=\frac{2\times105}{7}\times\frac{3}{1}=90.$$　答：$x=90$.

正比例

設有一小時行 60 里的火車，則三小時此車行 60 里的 3 倍，180 里；4 小時行其 4 倍，240 里；5 小時行 5 倍的里數；$\frac{1}{2}$ 小時行 $\frac{1}{2}$ 的里數，30 里。

卽是說火車的速度一定時，火車所行距離的多少，常和所

解比例所根據的，便是比例的內項積等於外項積這一性質。

解比例時注意未知項的 x 在內項抑在外項，再記着在內項時應怎樣，在外項時應怎樣，才可以得解。

解比例時，未知項是外項，則把內項之積以他一外項去除；未知項是內項，則把外項之積以他一內項去除卽得。

行時間的多少相一致。就是說時間倘使 2 倍 3 倍起來，火車所行的距離也從而 2 倍 3 倍起來。

這樣 跟從了甲數（譬如時間）的 2 倍 3 倍起來，而乙數（譬如距離）也是 2 倍 3 倍的，其所增減的比，常相一致，則稱甲數與乙數成比例，或叫成正比例。

就是，這時，時間的比和其相應的距離的比相等。一般成比例時，甲方的二數的比值常與乙方的二數的比值相等。

成比例的量甚多，如

1. 物價通常和其量的多少成比例。
2. 人數與工作，人數與食量等成比例。
3. 速度一定，時間和距離成比例。

反比例

例如： 12 人 18 日可完成的工作，1 人做則要 $18\times12=216$ 日，若此工作用 12 人 $\times2=24$ 人去做，則只要 216 日 $\div24=9$ 日，卽 $18\times\frac{1}{2}=9$ 日可以做成。又如用 12 人 $\times3=36$ 人去做，則要 216 日 $\div36=6$ 日，卽 18 日 $\times\frac{1}{3}=6$ 日可成。又若用 12 人 $\times\frac{1}{2}=6$ 人去做，則要 216 日 $\div6=36$ 日，卽 18 日 $\times2=36$ 日可成。用 12 人 $\times\frac{1}{3}=4$ 人去做，則要 216 日 $\div4=54$ 日，卽 18 日 $\times3=54$ 日可成。就是說工作的人數是原來的 2 倍 3 倍時，則完工的日數是原來的 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ 了。工作的人數是原來的 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$……時，完工的日數是要原來的 2 倍 3 倍了。一般工作人數變動時，完工的日數也變動；而人數變動的比和日數變動的比，常是倒數。

這樣　**一個量的變化的比,和別一個量的變化的比,常成倒數時,稱比二量成反比例。**

相互成反比例的量的例如次:

1. 一定的工事,作工人數與完工的日數成反比例。
2. 一定的路程,走的速度與所要時間成反比例。
3. 一定的物量,分配的人數和一人所得的量成反比例。
4. 一定的金錢,買物的量和物價的貴賤成反比例。

〔注意〕　二量成比例時,一方的量增大,則他方的量隨之而增大。但是一個量增大時,他一量亦隨之而增大的二量,未必卽成比例。例如小孩子長大時,年齡 2 倍起來,未必是身長、體重也都 2 倍了。

二量成反比例時,一方的量增大,則他方的量隨之而減少,那是不錯的。但不可說一個量的增大,若別一個量隨之而減少時,此二量卽成反比例。例如一定的金錢,分給二人,一個人多得了些,他一人自然少得了,但未必是一個人多得了 2 倍,他一人所得的便爲原來的一半。

生了病,通常要身體瘦弱的,但生病的日數 2 倍起來,未必瘦就瘦了 2 倍,也不定是瘦了一半;就是說這些量是不成正比例或反比例的。

解比例問題的要點:

1. 先看實際上兩量是否成比例。而且看是正比例抑反比例。
2. 作成正確的比例式。
3. 作比例式時,把未知項 x 無論作第幾項均可。只要使一方數量的比等於他方的數量的化,卽成。

如例 1, 也可立成

$$24\text{ 時}:5\text{ 時}=x\text{ 哩}:95\text{ 哩}$$

一式,或

$$x\text{ 哩}:95\text{ 哩}=24\text{ 時}:5\text{ 時},$$

均無不可。不過,普通總把未知項 x 列作第四項。

那麼，怎樣可以知道二量是成正比例或反比例呢？或怎樣可以知道不成正比例或反比例呢？那是要由專門的學術或社會的習慣而定，在算術上並不一一引舉出來的。所以只能從問題的意義，用常識去判斷。

問題解法

[例 1] 5 小時行 95 哩的火車，一晝夜行幾哩？

解： 先以 x 代所求距離的哩數，把問題中的數寫出來，如次：

時間	距離
5 時	95 哩
24 時	x 哩

再把時間和距離的關係加以思考，知道是成正比例的。所以時間的比應等於距離的比，得式如次：

$$5\text{時} : 24\text{時} = 95\text{哩} : x\text{哩},$$

$$x = \frac{24 \times \overset{19}{95}}{5} = 456.$$

答：456 哩。

[例 2] 某人運煤 28 擔，費時 3 日半，問依此比例，10 日間可運若干？

解：

煤量	日數
28 擔	3.5 日
x 擔	10 日

照這樣寫了一看，再把運煤量和日數的關係一想，就知道是成正比例的，所以得

$$3\frac{1}{2}\text{日} : 10\text{日} = 28\text{擔} : x\text{擔},$$

$$x = \frac{10 \times 28}{3\frac{1}{2}} = \frac{10 \times 28}{\frac{7}{2}} = \frac{10 \times \overset{4}{28} \times 2}{7} = 80.$$

答：80 擔。

[例 3]　5 個工人 16 日可完成的工作，8 個工人幾日可完工？

解：

人數	日數
5 人	16 日
8 人	x 日

先把問題中的數如上整理，再想對一定工作的人數和日數的關係：人數多工作速成，費時少，故爲反比例，因得

8 人：5 人＝16 日：x 日。

總之一方的量，等於他一方的反比，故作爲：

5 人：8 人＝x 日：16 日，也可以的。

$$x=\frac{5\times16}{8}=10.$$

答：10 日。

[例 4]　有兩塊面積相等的地，某一地長 15 丈、闊 12 丈，他一地長 13.5 丈；問其闊如何？

解：

長	闊
15 丈	12 丈
13.5 丈	x 丈

把數整頓之後，看面積一定，故二量成反比例。故作一方的比等於他方的反比之式，卽成：

13.5：15＝12：x（或 15：13.5＝x：12 也可以），

$$x=\frac{15\times12}{13.5}=13\frac{1}{3}.$$

答：$13\frac{1}{3}$ 丈。

在作此種反比例的比例式時，有二個式子可立，因有後面的複比例的關係，以取二個都是已知量的反比立式爲便。

習題 39.

1.　洋 1 圓可購米八升七合，問米 5 斗價幾何？

2.　職工做某事，以 15 日成其 $\frac{2}{5}$；問尙須幾日，可以完工？

3. 一晝夜快4分的鐘，於某日正午校正；問至次日的午後三時，該鐘所指者何時?

4. 用工人30人24日間可成的工事，欲於16日間完成；問再添用幾人?

5. 通常車56分和特快車36分所走的距離相同；問特快車13時30分所行之路，通常車須行若干時?

6. 木匠9日間的工資與泥水匠14日間的相等，二匠同時作工；問木匠得工資9元1角時，泥水匠得若干?

7. 1500人的守兵，備了50日的糧餉守一城地，8日後來了援兵600人；問其糧尙可支持若干日?

8. 在某河上航及下航所要時間之比爲7:5。若水的流速每時增加1里，則其時間變成2:1；問船行每時若干里?

9. 在賽跑中，甲要4分的乙要4分10秒；問在八百米賽跑時，甲可勝乙若干米?

10. 速度爲20哩與25哩的二列車，從兩站對行，會於距兩站中點$3\frac{1}{3}$哩的地點；問兩站間的距離?

11. 甲乙二數之比爲5:6，今乙數加12，則其比變成5:9，問二數?

12. 男3人的食量與女4人相當。問男22人15日間的食糧，以男5人、女8人食之，可食幾日?

習題39的答:

1. 約5.75元。
2. 22.5日。
3. 3時4分30秒。
4. 45人。
5. 21時。
6. 5.85元。
7. 30日。
8. 船行每時6里。
9. 32米。
10. 60哩。
11. 甲20，乙24.
12. 30日。

第三節 複比例

複比

[例 1] 甲作工 7 日，每日工資 4 角 5 分，乙作工 6 日，每日工資 5 角。問甲乙二人所得工資之比?

解: 計算各人所得工資，甲爲 7×45 分，乙爲 6×50 分。故其比爲 $45\times7:50\times6$。

可是，若把日數之比及工資之比各自分開了看，則是:

日數之比 $7:6$,

工資之比 $45:50$.

由此看來，各人所得總工資之比是和以此二比前項之積爲前項，後項之積爲後項的比相當。一般地說，把:

若干個比的前項之積做前項，後項之積做後項所得的新比，叫做此若干比的複比。

上記的複比，通常如次樣寫:

$\left.\begin{matrix}7:6\\45:50\end{matrix}\right\}$ 這是表 $7\times45:6\times50$ 之意，故其值卽爲

$$\frac{7\times45}{6\times50}=\frac{21}{20}.$$

[例 2] 某工事，每日工作 10 時，12 日可成的人數，與每日工作 9 時，10 日間可成的人數之比如何?

解: 一個工人工作的總時間各爲 10×12 及 10×9 時。但

對於複比，我們叫通常的比爲單比。

複比的值，等於單比之積，因之複比也叫做相乘比。

如 $\left.\begin{matrix}7:6\\45:50\end{matrix}\right\}$ 的值爲 $\frac{7\times45}{6\times50}$ 卽可看成 $\frac{7}{6}\times\frac{45}{50}$.

這裏，$\frac{7}{6}$ 及 $\frac{45}{50}$ 不外是二個單比的寫作分數形式罷了。

人數是和時數成反比的，所以此二種情形的人數的比等於其相應的時數的反比。即

$$\text{前的人數}:\text{後的人數}=(9\times10):(10\times12)$$
$$=\left\{\begin{matrix}9:10\\10:12.\end{matrix}\right.$$

由此，可知人數的比爲每日工作時數的反比及日數的反比的複比。而其値爲 3：4。

含有複比的比例式，叫複比例。對於複比例，叫通常的比例爲單比例。

［例］　解：$\left.\begin{matrix}5:8\\4:7\end{matrix}\right\}=10:x.$

解：　解法與單比例相同。即用內項積等於外項積的原則。改寫爲：

$$5\times4:8\times7=10:x,$$

$$x=\frac{8\times7\times10}{5\times4}=28.\qquad\text{答：}x=28.$$

［例 1］　雇工 25 人，6 日間給工資 150 元，雇工 30 人，8 日間須給工資幾何？

解：

人數	日數	工資
↓ 25 人	↓ 6 日	↓ 150 元
30 人	8 日	x 元

先如上一般寫好，再想工資對於他項的關係。工資和人數

複比例解法，先審察含有未知項的量，與他量所成的是正比抑是反比。依照了牠的性質，把複比例的比例式寫好。

再看未知項是在內項抑在外項，去定解法。

解法與單比例同，即：未知項在內項時，是以他一內項除外項之積；未知項在外項時，是以他一外項除內項之積。

成正比例，和日數也成正比例，用矢向下的符號以表明之。採各比的正比，寫成一個複比例式如次：

$$\left.\begin{array}{r}25:30\\6:\ \ 8\end{array}\right\}=150:x.$$

解上式：

$$x=\frac{30\times8\times150}{25\times6}=240.\qquad\text{答：240 元。}$$

［例 2］ 30 人，每日工作 9 小時 40 日可成之工事，今欲以 25 人，於 36 日間成之，問每日須作工幾小時方可？

解：

人數	時數	日數
↑ 30 人	9 時	↑ 40 日
25 人	↓ x 時	36 日

工作的全量是一定的，所以每日作工時間是與人數成反比例的。同樣和所要日數也成反比例。故取各比之反比以作成複比，使等於時間的比。

$$\left.\begin{array}{r}25:30\\36:40\end{array}\right\}=9:x.$$

解上式：

$$x=\frac{30\times40\times9}{25\times36}=12.\qquad\text{答：12 小時。}$$

［例 3］ 工兵 7 人，於 12 日間掘成長 60 尺、深 6 尺、闊 8 尺的濠溝。問工兵 21 人，於 $2\frac{1}{2}$ 日掘深 8 尺、闊 3 尺的濠溝，可掘多少長？

解：

人數	日數	深	闊	長
7 人	12 日	↑ 6 尺	↑ 8 尺	60 尺
↓ 21 人	↓ $2\frac{1}{2}$ 日	8 尺	3 尺	↓ x 尺

所求的是長若干尺。這對於人數及日數成正比例的；人數

愈多，日數愈多，可掘得愈長。這對深和闊成反比例的，深了，闊了多費工夫，就掘不長了。所以取人數與日數的比的正比，及深與闊的比的反比，作成複比，使與長的比相等，即：

$$\left.\begin{array}{r} 7:21\\ 12:2\frac{1}{2}\\ 8:6\\ 3:8 \end{array}\right\}=60:x.$$

解上式：

$$x=\frac{21\times2\frac{1}{2}\times6\times8\times60}{7\times12\times8\times3}=75.\qquad \text{答：75 尺。}$$

習題 40.

1. 兩個正方形地面，每一邊長的比爲 5：6，今每邊爲 5 的地值 1500 元，問另一地值若干元？

2. 有甲乙二立方體，各邊之比爲 5：6；甲的體積爲 150 立方尺，問乙的體積如何？

3. 一擔三簍的炭，15 簍價 10 元 5 角；問一擔半二簍的炭，20 簍價若干？

4. 6 人在 9 日吃米 2 斗 7 升。問米 4 斗 8 升，吃了 16 日，有人數若干？

5. 5 人旅行 24 日所要費用爲 180 元，問 11 人旅行幾日間，要 297 元？

6. 上等工人 3 人所作工，與次等工人 5 人工作相同，時間亦相等。今有一工事，上等工人 20 人每日作工 9 時，10 日而成其 $\frac{1}{3}$，其後由次等工人繼續作業，工人 25 人，每日作工 8 時，問這工事幾日可完成？

7. 工人 21 名，每日作工 8 時，24 日間成闊 2 丈、高 1.5

丈、長 100 丈之堤岸；照此比例，用工人 9 名，每日作工 7 時，欲成闊 1 丈、高 1.5 丈、長 150 丈之堤，須費幾日？

8.　狗兎行路的比較，狗行 2 步之時兎行 3 步；狗走 3 步的距離，兎須行 5 步。問狗走 30 分間的距離，兔須行幾分？

9.　工兵 14 人，於 24 日間掘成長 120 尺、闊 16 尺、深 12 尺的濠溝。今以 42 人在 5 日間掘闊 6 尺、深 16 尺的濠溝，問長若干？

10.　大工 4 人、童工 6 人，工作 5 日工資爲 51 元 2 角。其後有童工 2 人休工，以大工 1 人代之，又作工 6 日，問須付工資多少？但大工 2 日的工資與童工 5 日的工資相等。

第四節　比及比例的應用

連　比

把三數以上的比，一次表示出來的，叫做連比。

[例]　兄弟三人所有的財產爲 30000 元，27000 元，24000 元；求他們財產的比。

長　　次　　幼　　　今各以 3000 約之：
30000：27000：24000；　　則得 10：9：8.

這就是一個連比，寫法如上。

連比和普通的比一樣，以同數乘或除其各項，其值不變。

所以各項有公約數時，可以約之；各項中若有分數時，也可以各分母的最小公倍數去乘，以去分母。

習題 40 的答：

1.　2160 元。　2.　$259\frac{1}{5}$ 立方尺。　3.　31 元 5 角。　4.　6 人。

5.　18 日。　6.　30 日。　7.　48 日。　8.　$33\frac{1}{3}$ 分。

9.　150 尺。　10.　63 元 3 角 6 分。

[例 1] 甲數與乙數之比爲 2:3，乙數與丙數之比爲 4:5；問甲乙丙的連比如何？

解：

甲 乙 丙

$2:3$

$\quad 4:5$

因有如上述之關係，故欲求此三數之連比，只要將各比化成使乙數在二個比中的數相同卽可。

所以先問若乙仍是前比中的 3，則丙應爲若干？答此問的比例是

$$4:5=3:x.$$

$$\therefore\quad x=\frac{3\times5}{4}=\frac{15}{4}.$$

所以

甲 乙 丙

$$2:3:\frac{15}{4}.$$

爲去一分數，各項以 4 乘之，則得 $2\times4:3\times4:15$，卽答數爲 $8:12:15$。

其實，可不必如此繁瑣地計算，只要把與乙相當的數，使爲 3 與 4 的(最小)公倍數卽可。因此先把 $3\times4=12$ 作爲乙，則甲也得 4 倍，丙也得 3 倍起來，卽得 $8:12:15$ 的連比。

[例 2] 甲與乙之比爲 $2.5:3\frac{1}{3}$，乙與丙之比爲 $2\frac{1}{2}:4$；求甲乙丙的連比。

解： 如上例

甲 乙 丙

$2.5:3\frac{1}{3}$

$\quad 2\frac{1}{2}:4$

先把分數小數化爲整數的比，則可避免複雜的計算。第一個比爲 $2.5:3\frac{1}{3}$ 卽 $2\frac{1}{2}:3\frac{1}{3}$，故兩項各以分母之最小公倍數

6乘之；得15:20。又第二比爲$2\frac{1}{2}$：4，去分母則爲5：8，因之：

$$\begin{array}{ccc} 甲 & 乙 & 丙 \\ 15: & 20 & \\ & 5: & 8 \end{array}$$

今使取乙的20與5的最小公倍數20，則甲仍舊爲15，而丙須4倍8而爲32，即甲乙丙的連比爲15：20：32.

習題 41.

1. 簡化次記各連比：

   (*a*) 300：250：200.

   (*b*) $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$.

   (*c*) 12.5：5：7.5.

2. 甲乙所有金之比爲5：4，丙所有金爲甲的三分之二；求三人所有金之連比。

3. 甲乙之比爲20：25，乙丙之比爲1.6：2.4，丙丁之比爲3：5；求甲乙丙丁之連比。

4. 甲10日所作工與乙9日相等，乙8日所作工與丙7日相等；求甲乙丙一日所成工作之比。

5. 甲乙丙每日工資之比爲5：4：3；問甲作工7日，乙作工10日，丙作工12日，各人工資之比如何？

配分比例

按照所定的比，把一個數量分做幾份，叫做配分。如譬共同

習題41的答：

1. (*a*) 6：5：4.　(*b*) 4：2：1.　(*c*) 5：2：3.

2. 甲：乙：丙＝15：12：10.　3. 甲：乙：丙：丁＝8：10：15：25.

4. 甲：乙：丙＝63：72：80.　5. 甲：乙：丙＝35：40：36.

事業，依出資多寡的比例而配分其利益。如選舉，依人口的多少，而定選出議員的名額等，都須應用此種配分比例的算法。

［例 1］ 欲把120尺的銅線分成5∶3∶2的三段，問各段長若干？

解： 這是一個數120，要分成5與3與2的比。先設想一個數是$5+3+2=10$，若是要分成5∶3∶2，那麼很容易知道這就是5與3與2了。

因爲全體是120尺，不是10尺，也不是100尺，所以分割成的不是5尺，3尺，2尺，也不是50尺，30尺，20尺。但全體120與所分的各部的比，一定是各比的和10與各個比數的比相等的。所以：

第一是$10:5=120$尺$:x$尺，$x=\dfrac{5\times120}{10}=60$尺；

第二是$10:3=120$尺$:x$尺，$x=\dfrac{3\times120}{10}=36$尺；

第三是$10:2=120$尺$:x$尺，$x=\dfrac{2\times120}{10}=24$尺。

答：60尺，36尺，24尺。

［例 2］ 把金115元，照$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$的比分成三股，問各爲若干？

解： 這比是分數，須得先化爲整數，故以各分母的最小公倍數12乘之。如此，則：

$$\frac{1}{2}\times12=6,\quad \frac{2}{3}\times12=8,\quad \frac{3}{4}\times12=9.$$

配分比例解法：

須先知各份之連比，再以各連比之和爲分母各連比爲分子，以乘全數卽得各份的數。

這卽是由全體與部分的比而求部分之值的算法。

卽是：6, 8, 9 的比。因 $6+8+9=23$。所以：

第一是 $23:6=115$ 元：x 元，$x=\dfrac{6\times115}{23}=30$ 元；

第二是 $23:8=115$ 元：x 元，$x=\dfrac{8\times115}{23}=40$ 元；

第三是 $23:9=115$ 元：x 元，$x=\dfrac{9\times115}{23}=45$ 元。

答：30 元，40 元，45 元。

［例 3］　把金 1300 元分給甲乙丙三人，其所得之比須依甲比乙爲 3：2，乙比丙爲 4：3 之比；問各人的所得。

〔說明〕　此問題須先把所得之比化成甲乙丙的連比，然後再依配分比例計算。

甲　乙　丙　　　　甲　乙　丙
3：2　　　　　　故　6：4：3
　　4：3

把各比的數相加：

$$6+4+3=13.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{甲 } 13:6=1300\text{ 元}:x\text{ 元}, & 600\text{ 元} \\ \text{乙 } 13:4=1300\text{ 元}:x\text{ 元}, & 400\text{ 元} \\ \text{丙 } 13:3=1300\text{ 元}:x\text{ 元}。 & 300\text{ 元} \end{array}\right\}\text{答}$$

［例 4］　甲乙丙三人共同經商，甲出資 1000 元，使用 12 個月；乙出 900 元，使用 15 個月；丙出 350 元，使用 18 個月。今得利益 424 元，依出金多寡及使用日期長短之比例而派分；問各人的所得。

〔說明〕　各人出金的連比爲 $1000:900:350$.

又　　　出資期間的連比爲　$12:15:18$.

先作成此二個連比的複比：

$$1000\times12:900\times15:350\times18.$$

簡化之得：　　　$40:45:21.$

再照此比例把利益派分：$40+45+21=106.$

甲 $106:40=424$ 元 $:x$ 元，$x=\dfrac{40\times 424}{106}=160$ 元；

乙 $106:45=424$ 元 $:x$ 元，$x=\dfrac{45\times 424}{106}=180$ 元；

丙 $106:21=424$ 元 $:x$ 元，$x=\dfrac{21\times 424}{106}=84$ 元。

答：160 元，180 元，84 元。

習題 42.

1. 甲出資 400 元，乙出資 250 元，丙出資 320 元，共同經商獲利 388 元。今欲依出資之比而分配其利益，問各得若干？

2. 欲依照戶數的比例從甲乙丙丁四村徵收銀 1520 元，今知甲村有人家 560 戶，乙村有 420 戶，丙村有 544 戶，丁村有 376 戶；問各村出多少？

3. 有金 940 元分給甲乙丙三人，甲的 5 倍與乙的 3 倍，丙的 4 倍相等，問各得若干？

4. 甲乙丙三人合資營業，甲出 1600 元，用 5 個月；乙出 2000 元，用 6 個月；丙出 1800 元，用 7 個月。共得利益 337.41 元，問依出資久暫爲比而分配之，各得若干？

習題 42 的答：

1. 甲 160 元，乙 100 元，丙 128 元。
2. 甲 448 元，乙 336 元，丙 435.2 元，丁 300.8 元。
3. 甲 240 元，乙 400 元，丙 300 元。
4. 甲 82.8 元，乙 124.2 元，丙 130.41 元。
5. 甲 180 元，乙 240 元，丙 160 元。
6. 硝石 750 斤，木炭 150 斤，硫黃 100 斤。
7. 甲到丙 4 角 8 分，甲到丁 5 角 4 分，甲到乙 8 角 1 分。

5. 金580元分給甲乙丙三人，只知甲的 $\frac{1}{3}$ 與乙的 $\frac{1}{4}$ 相等，乙的 $\frac{1}{3}$ 與丙的 $\frac{1}{2}$ 相等；問各得幾何？

6. 普通的火藥以硝石15，木炭3，硫黃2的比例混成之。今欲造火藥1000斤，問各需幾斤？

7. 從甲地到乙地90里，有汽船往來。兩地之間距甲40里及60里處，有丙丁二碼頭。某次共有搭客100人，於丙碼頭走上了45人，丁碼頭走上了35人，其餘則赴乙地，共得船錢56元7角。今設從甲地到各地的船錢是照里程計算的，且對於50里以上的乘客，則要打一個七五折；問從甲到各地的船錢是多少？

連鎖比例

[例] 甲種茶2斤之價，等於乙種茶3斤之價；乙種茶4斤之價，等於丙種茶5斤之價。今知甲種茶7斤之價爲10元5角，問丙種13斤之價是多少？

這樣一個題目，其中夾雜着許多相等的數量關係，計算起來，極爲複雜。我們先把題中各事項整理一下，把要求的未知項先記下來，再把各相等的值並列左右，而使同種類的斜斜相對，如次：

x元	丙13斤
丙5斤	乙4斤
乙3斤	甲2斤
甲7斤	10.5元

這裏左右並列的都是等價的東西，同種類的量是斜斜相對立的。

題中要求丙13斤的價爲若干，而只知甲7斤的價是10.5

元，故如能求得丙 13 斤的價與甲若干斤相當，卽可以求解答。

現在丙與乙的關係是知道的，乙與甲的關係也知道，故先求丙 13 斤相當於乙的幾斤，再求此乙的幾斤相當於甲的若干卽可。

故第一先問：丙 5 斤與乙 4 斤相等，丙 13 斤與乙若干相等？得比例式：

$$5:4=13:x,\quad x=\frac{13\times3}{5}.$$

卽丙 13 斤與乙的 $\frac{13\times4}{5}$ 斤相當。

再問此與甲的若干斤相當？因乙 3 斤等於甲 2 斤的價，故又得比例式：

$$3:2=\frac{13\times4}{5}:x,\quad x=\frac{13\times4\times2}{5\times3}.$$

卽丙的 13 斤與乙的 $\frac{13\times4}{5}$ 斤卽甲的 $\frac{13\times4\times2}{5\times3}$ 斤相當。

現在已知甲 7 斤爲 10.5 元，問 $\frac{13\times4\times2}{5\times3}$ 斤是若干元？

$$7:\frac{13\times4\times2}{5\times3}=10.5:x,$$

$$x=\frac{13\times4\times2\times10.5}{5\times3\times7}=10.4.$$

卽丙 13 斤之價爲 10.4 元。

這樣，我們由幾個連續的單比例，把問題解答了。不過這個計算極爲繁冗，很不方便。我們再仔細看這計算，取最後的

$$x=\frac{13\times4\times2\times10.5}{5\times3\times7}$$

一式來看，在形式上彷彿 x 與 10.5 元之比是等於 $\frac{13}{5}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{7}$ 各比的相乘比似的。

或把各數均看作了不名數，而可說與 x 與 13 的比是與 $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{10.5}{7}$ 的相乘比相等似的。

因此想出了一個比較簡單的計算法。卽把題中事項整理起來，先記下未知量，再記下與未知量等價的量於同行的右側，再於次行左側記其相同的量，再於其右方記其相等價的異量：如此等價値的量都在同一行的左右，而相同的量則斜相對立。

金 x 元	丙 13 斤
丙 5 斤	乙 4 斤
乙 3 斤	甲 2 斤
甲 7 斤	金 10.5 元

再把左列(有未知項的)各連乘積除右列各連乘積卽得。

這一種解法，叫連鎖比例，今再舉例於次。

[例 1] 3 匹馬可換羊 45 隻，羊 12 隻可換牛 4 頭；問有馬 64 匹可換牛若干頭？

解：

牛 x 頭	馬 64 匹
馬 3 匹	羊 45 隻
羊 12 隻	牛 4 頭

先設未知項爲 x，將等價的量並列在右，同種類的量斜列在左。次列記其餘諸量，凡等價的都在同一行，同種類都不同行，而斜相對峙。再以有未知數之一列除其他一列，卽得：

$$x=\frac{64\times45\times4}{3\times12}=320.$$

答：320 頭。

[例 2] 有上中下三種米，上米 3 升的價等於中米 3 升 2 合的價，中米 4 升的價等於下米 4 升 5 合。下米 2 斗 5 升價銀 3 元 7 角 5 分，問上米 7 石 2 斗價若干？

解：

銀 x 元	上米 720 升
上米 3 升	中米 3.2 升
中米 4 升	下米 4.5 升
下米 25 升	銀 3.75 元

$$x=\frac{720\times3.2\times\overset{1.5}{\cancel{4.5}}\times3.75}{\cancel{3}\times4\times25}$$

$$=720\times3.2\times1.5\times3.75\div100=129.60\text{ 元。}$$

答：129 元 6 角。

習題 43.

1. 酒 3 升的價，等於茶 4 斤的價；茶 5 斤的價，等於糖 8 斤的價；糖 15 斤的價，等於米 1 斗 2 升的價。問酒 1 斗 2 升的價，與米多少的價相等？

2. 火車行 18 哩時，馬車行 3 哩；馬車行 5 哩時，人力車行 4 哩；脚踏車的速度是人力車的 2 倍。問火車走 10 哩時，脚踏車行幾哩？

3. 280 米的賽跑中，甲若許乙先行 14 米，則無勝負。570 米的賽跑中，乙若許丙先行 24 米，也無勝負。問在 1000 米的賽跑中，甲許丙先行 80 米，其勝負如何？

4. 甲乙丙丁四工人能力之比，甲：乙爲 2：3，乙：丙爲 4：5，又丙 7 日所成的工，丁 5 日作成。問丁 72 日作成的工，甲需幾日作成？

5. 雞 4 隻換鴨 3 隻，鴨 7 隻換鵝 2 隻，鵝 9 隻換鶴 5 隻；若雞每隻價 0.54 元，求鶴每隻價若干？

習題 43 的答：

1. 20.48 升。　2. $2\frac{2}{3}$ 哩。　3. 甲勝 10 米。

4 189 日。　5. 4.536 元。

混合比例

［例 1］ 每斗 1 元 3 角的米與每斗 1 元 2 角的米，照 3：5 的比混合後，每斗應作賣價幾何，則不生贏虧？

解： 因混合之比爲 3：5，所以可看成 3 斗與 5 斗，或 6 斗與 1 石，均無不可。但以看做 3 斗和 5 斗的計算爲最便捷。

現在每斗 1 元 3 角的米 3 斗價，爲： 1.30 元 × 3 = 3.90 元。

又每斗 1 元 2 角的米 5 斗價，爲： 1.20 元 × 5 = 6.00 元。

價錢的合計爲： 3.90 元 + 6.00 元 = 9.90 元。

全體斗數爲： 3 斗 + 5 斗 = 8 斗。

故一斗的平均價爲： 9.90 ÷ 8 = 1.2375.

答： 每斗 1.2375 元。

［例 2］ 每斤 6 角的茶與每斤 8 角 5 分的茶相混，造成每斤 8 角的茶，問應用怎樣的比？

此種問題的解法，照次記之形式：

	每斤價	損　益	比　數
上　茶	85 分	5 分損	20 4
混合茶	80 分		
次　茶	60 分	20 分益	5 1

〔說明〕 照上列的形式，先記出各品及每斤價格，再依混合茶之價與原價相比較，而記下每斤的損益。卽設本爲 8 角 5

將若干種價值不同的物品，各取若干，混合起來，研究其間所生的關係的，叫做混合比例的算法。有時也叫均中比例，是指算出其平均價的。這一類的問題不外四種，卽：

1. 求各物混合後的平均價。
2. 定一平均價，求各物混合的比。
3. 混合量及平均價爲已定，求各物在總量中所占量數。
4. 混合成某平均價之各物品，已知其中一種的實量，求他量。

分一斤的茶，若以 8 角一斤出賣則損虧 5 分；又本爲 6 角一斤的茶，若以每斤 8 角出賣則益 2 角。於是現在欲把二者相混合，而每斤賣 8 角，使兩者出適當的斤數，不生損益卽可。這只要是斤數等於各每斤損益額的比例卽可。

卽是使損 5 分的出 20 斤，益 20 分的出 5 斤，卽損益之額各爲 1 元，故相抵消。其比爲 20：5，簡約之則爲 4：1。

答：8 角 5 分之茶 4 與 6 角之茶 1 之比。

［例 3］　今有每斤價 2 角 8 分之酒 9 斤，欲減價出賣作每斤 2 角 4 分，問混入水若干卽可？

解：　在解本問題時，水的價錢作 0 計算，先照例 2 求其比數。

	每斤價	損　益	比　數
酒	28 分	4 分損	24　6
混水酒	24 分		
水	0	24 分益	4　1

照此比數混合起來卽可，故酒 9 斤所該混入之水可以比例求得之：

$$6:1=9\text{ 斤}:x\text{ 斤},\ x=\frac{9\times1}{6}=1.5\text{ 斤}。$$

答：1.5 斤。

別解：　照下列方法計算亦可。

	每斤價	損　益	混合量
酒	28 分	4 分損	9 斤
混水酒	24 分		
水	0	24 分益	x 斤

$4\times9=36$ 分(損)，　$36\div24=1.5$，　卽 $x=1.5$ 斤。

[例 4] 每斤 9 分、10 分、12 分的醬油,欲混合之而每斤賣 11 分,問須依怎樣的比而相混?

	每斤價	損　益	比	數	
上　物	12 分	1 分損	1	2	3
混合物	11 分				
中　物	10 分	1 分益	1		1
次　物	9 分	2 分益		1	1

答: 上：中：次＝3：1：1.

計算損益與前例同。比混合物價低的有二種,故可設想爲該中次兩數分別品與上物相混而成 11 分之價者。因之上與中爲 1：1, 上與下爲 2：1,二者混合,便是上 3,中 1,下 1 之比。

[例 5] 咖啡有每斤價 3 角半、4 角、4 角半三種,欲依合成每斤價 3 角 8 分之物 25 斤,問各取若干斤?

此問題先照上例計算出各種類的比數。

	每斤價	損　益	比		數	
上　物	45 分	7 分損	3		3	1
中　物	40 分	2 分損		3	3	1
混合物	38 分					
次　物	35 分	3 分益	7	2	9	3

問題:

1. 說明次記名詞的意義:——比,比例,內項,外項,未如項,正比,反比,複比,單比,連比,解比例。
2. 比例式的最重要性質是什麼?解比例式所根據的是什麼?
3. 對於名數的比,有何限制?
4. 說明比値,商,分數値的關係。
5. 混合比例與配分比例有什麼不同?
6. 舉出成反比例正比例的若干事實的例來。
7. 解比例所用的算法,能逃出加減乘除四則否?

卽：1：1：3 的比卽可。把 25 照此比分配，依配分比例法而算出斤數。

$$1+1+3=5.$$

$$5:1=25\text{ 斤}:x\text{ 斤},\ x=\frac{1\times25}{5}=5\text{ 斤};$$

$$5:3=25\text{ 斤}:x\text{ 斤},\ x=\frac{3\times25}{5}=15\text{ 斤}。$$

答：4 角半的 5 斤，4 角的 5 斤，3 角 5 分的 15 斤。

〔注意〕 上面所計算是分開爲二次各照定價做成混合物的，所以在例 4 中的先以 1：1 的比作混合物，然後再以 2：1 的比作混合物，在這裏前者與後者之比是 1+2：1：1＝3：1：1，所以 3：1：1 的比，是依了前後的比 1：1 與 2：1 而得的。但此前後的比，與混合價値無關，故如把前比二倍起來使成 2：2，再與後比相加則連比成 4：2：1，或後比 2 倍起來成 4：2，則連比成 5：1：2，這都是可以的。在例 5 中，也同樣適用。所以混合物在三種以上時，混合的比不止一法，卽是不定的。但答數任取其一卽可，所取的當然擇最便於計算的。

習題 41.

1. 甲種茶每斤 1 元 2 角，乙種茶每斤 2 元。今欲混成 1 元 5 角之茶 200 斤，問各取幾斤？

2. 有甲乙二種銀塊，甲百分中含純銀 91，乙百分中含純銀 86. 今欲造百分中合純銀 90 的銀 100 兩，問各取若干兩？

3. 甲桶中爲純酒，乙桶中爲酒 1 水 3 的混合物，丙桶爲純水。今欲造半酒半水的混合物 3 石 6 斗，問各取若干？

4. 甲酒 2 升與乙酒 3 升之價爲 7 元 2 角，甲酒 3 升與乙酒 4 升之價爲 10 元 1 角 4 分。今欲作每升價 1 元 5 角之酒 3 斗 8 升，問各取若干？

5. 某船的頭等客票每人 270 元，二等 190 元，三等 36

元。某次收入票價 12880 元;只知頭等客爲二等客的 3 倍,三等客爲二等客的 8 倍,求各等的人數。

6. 金的混合物的合金,有所謂 16K, 18K 者,卽謂 24 分中含有 16 分或 18 分的純金。今欲成 19K 的金三兩,問取純金及 16K, 18K 各若干?

7. 每升值 1 元 4 角、1 元 5 角、1 元 7 角的酒,用怎樣的比相混,則成每斤價 1 元 5 角 5 分?

習題 44 的答:

1. 甲 125 斤,乙 75 斤。　2. 甲 80 兩,乙 20 兩。
3. 甲 14.4 斗,乙 14.4 斗,丙 7.2 斗。
4. 甲 2 斗 2 升 8 合,乙 1 斗 5 升 2 合。
5. 頭等 30 人,二等 10 人,三等 80 人。
6. 純金 1 兩, 16K 1 兩 5 錢, 18K 5 錢。
7. 15 : 6 : 13.

第八章　成數算法

(第一)成數和比的關係

定價 9 角的書,減了 9 分,以 8 角 1 分賣出;定價 6 角的書,減了 9 分,以 5 角 1 分賣出;二方同是減去 9 分,也可以說所減的價是相同的,但照定價與賣價的比(或減去的價的比)來比,則後者所減的爲多。

又如賣出每疋 3 元的布賺了 3 角,和 5 元的布賺 3 角;所賺雖同是 3 角,而就後者所賺的比說起來,比前者爲少。

這樣是　**把原價和所賺的或減去的(或減後的賣價)相比較,而看那個比的大小,叫做成數。**

第一　9 分÷90 角 $=\frac{9}{90}=0.1$,

第二　9 分÷60 角 $=\frac{9}{60}=0.15$,　故後者爲大。

第三　3 角÷ 3 元 $=\frac{3}{30}=0.1$,

第四　3 角÷ 5 元 $=\frac{3}{50}=0.06$.　故後者爲小。

就是,此地用一個大的數作標準,看那個小的數對大的數的比是多少,便說小的數占大的數的幾成。

這個比值,用十進法的小數表出來,叫做成數。

中國的成數,以十分之一爲單位;所謂十足卽是示成數的話,其他在日常用語上,如十分好看,十全等,都是示成數的。又如說十中八九,十不得一,更是表明了以十爲整個而八,九,一爲其部分了,卽比的前項後項都是表出的。

這時大的數叫母數，小的數叫子數。所以成數就是子數對母數的比値。

成數通常比 1 爲小，普通以 0.1 爲單位，就叫 1 成，或叫一分。通常沿用着小數的單位名稱：分釐毫。如 0.1, 0.15, 0.06, 就叫做 1 分，1 分 5 釐，6 釐。同小數的位是一致的。

(第二) 百分法

歐美慣例以分母爲 100 的分數表成數，卽以 $\frac{1}{100}$ 爲成數的單位，故名此法爲百分法。成數就叫百分率，$\frac{1}{100}$ 用記號 % 表之，讀作 Percent。故我們所說的 1 分就是 10%, 6 釐就是 6%。

(第三) 成數算法

[例 1]　某人以 8000 元營商，損虧了 2000 元，問他損失的成數。

2000 元 ÷ 8000 元 = 0.25.

答：　二成半 (2 分 5 釐或 25%)。

子數 ÷ 母數 = 成數(百分率)………………公式 1

[例 2]　礱糙米爲白米，要生的折減是 12%；問糙米 5 斗，礱爲白米，折減若干？

5 斗 × 0.12 = 0.6.　　　　答：　6 升。

母數 × 成數(百分率) = 子數……………公式 2

[例 3]　某人以他的月薪的 1 分 5 釐作貯蓄，只知他每月貯金 9 元，問他的月薪是多少？

解：　所問的是若干元的一分五釐等於九元，卽若干元 × 0.15 是 x 元，所以

9 元 ÷ 0.15 = 60 元。　　　　答：　60 元。

子數÷成數(百分率)=母數………………公式 3

由上面的例，可知母數、子數、成數三種中，知道了二種，必能算出其第三種。

習題 45.

1. 一人承受遺產四萬元，五年後增至五萬六千元；問他財產加增的成數?

2 某人因負債 15120 元而破產，但他所有財產尚值 9828 元；問債額尚可攤得若干成?

3. 某校共有學生 400 人，其中有女生 32 人。問男生、女生各占總數百分之幾? 又女生佔男生百分之幾?

4. 某處金沙中，含純金 0.14%；問金沙 50 擔，可得純金若干?

5. 定價 5 角之書，如買 10 册，可減價一成；問十册需價若干?

6. 某銀鑛之鑛石，含有七釐之純銀；問鑛石 360 斤，可提煉純銀若干?

公式的意義：

公式是公共通用的式子之意，卽在此式子中，無論以何種數值代入，只要照樣計算，便可求得答數。所以知道了公式之後，計算時不必再去理會其間的意義，只要行機械的算法，便可求得答數。因爲這式子已經把所要的理論應用了而得出來，故有了公式，計算便很方便。

成數算法三公式與比的關係：

子數÷母數=成數……前項÷後項=比值，

母數×成數=子數……後項×比值=前項，

子數÷成數=母數……前項÷比值=後項。

所以，由此也可以知道成數卽是比的別名，而母數與後項、子數與前項是相當的。

上記的公式，只要明白了此種算法的理路，卽使不硬記，也會記着的。

7. 某人的財產 20% 爲房產，40% 爲田產，20% 爲有價證券，餘爲現金。只知他有現金 8512 元，問他的財產總額。

8. 某人買煤若干噸，每噸獲利 1 元 9 角 8 分，適占原價的一分二釐；問原價每噸若干元？

（第四）母子和與母子差

百分法計算中的問題，所求的往往不是母數或子數，而是其和或差。今一一說明於次：

母子和即母數與子數的和。如原價 1 元之物，欲得利一分，則賣價應爲母數 1 元與子數 1 角的和，即 1 元 1 角。

母子差即母數與子數的差。如原價 1 元之物，減價一成出售，應爲母數 1 元與子數 1 角之差，即 9 角。

［例 1］ 某農家昨年收穫量爲 85 石，今年的收成比昨年好，約可增收 1 分 2 釐；問某農今年可收若干石？

解： (1) 85石 × 0.12 = 17石， 85石 + 17石 = 102石。

(2) 由題意，本年的收成比昨年的 1 倍再多 0.12 倍，故合計是去年的 (1 + 0.12) 倍。因之：

85石 × (1 + 0.12) = 102石。 答： 102 石。

母數 × (1 + 成數) = 母子和 ……………… 公式 4

［例 2］ 定價 2 元 8 角的商品，減價 15%，計實價若干？

解： (1) 2.8元 × 0.15 = 0.42元……減價，

2.8元 − 0.42元 = 2.38元……實價。

(2) 由題意：減去定價的 15%，故實價是定價的 1 − 0.15 = 0.85。因之：

習題 45 的答：

1. 4 分。 2. 6 分 5 釐(六成五)。 3. 男生 92%，女生 8%，女生占男生的 8.7% 弱。 4. 7 斤。 5. 4 元 5 角。 6. 25.2 斤。 7. 42560 元。 8. 16 元 5 角。

$$2.8\text{元}\times(1-0.15)=2.38\text{元}。$$

答:　2元3角8分。

$$\text{母數}\times(1-\text{成數})=\text{母子差}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad\text{公式 5}$$

[例 3]　煤價今年比去年漲上一分二釐,售每擔18元4角8分;問去年每擔價若干?

解:　此問題與例1並看,可知18元4角8分是貴了12%後的售價,所以比價是其1倍加0.12倍,故即等於某數的1.12倍是18.48元,問某數爲何?

$$18.48\text{元}\div(1+0.12)=16.5\text{元}。\qquad\text{答: 16元5角。}$$

$$\text{母子和}\div(1+\text{成數})=\text{母數}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad\text{公式 6}$$

[例 4]　買某物,減去10%付3元1角5分,問其定價。

解:　本題與例2相比較,則知

$$\text{定價}\times(1-0.1)=3.15\text{元}。$$

故　$\text{定價}=3.15\text{元}\div(1-0.1)=3.5\text{元}。$

答:　3元5角。

$$\text{母子差}\div(1-\text{成數})=\text{母數}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad\text{公式 7}$$

[例 5]　每石9元5角的麥,以10元6角4分出售;問獲利的成數?

解:　(1) 求利益的成數,須先求得獲利的額子,即:

$$10.64\text{元}-9.5\text{元}=1.14\text{元}。$$

把利益與本金9.5之比,用公式1可知成數是

$$1.14\text{元}\div9.5\text{元}=0.12.$$

公式4—7是:

知道了成數、母數以求母子和或差,及:

知道了成數、母子和或差以求母數的公式,而其中公式4和5是基本的公式,別的均可由此化出。

(2) 把這個問題照公式 4 看，則成

9.5元 × (1 + 成數) = 10.64元。

故　10.64元 ÷ 9.5元 = 1 + 成數，

10.64元 ÷ 9.5元 = 1.12 = (1 + 成數)；

因之　1.12 − 1 = 0.12……卽所求的成數。

答：　1分2釐。

習題 46.

1. 貨物 357 元，漲價 1 分 1 釐，應賣得若干元?

2. 某公司有資本 1500000 元，一年中用去資本 34%，又提出資本之 7% 作爲紅利分給股東；問尚餘資本金若干?

3. 某人賣書獲利 $33\frac{1}{3}\%$，若每册原價 1.8 元，問售價若干?

4. 某校入學試驗，錄取 150 人。落第者占投考人數的二分五釐，問投考人數若干?

5. 一人每年收入 4650 元，第一年用去八成，第二年用去七成半，第三年六成二五；問三年間積存若干元?

6. 一人買書，減價二成，付出 2 元 4 角，問原價?

7. 糙米搗成精白米，耗去的糠粃數 3 斗 6 升，計占糙米的 1 分 8 釐，問原有糙米多少?搗成白米多少?

8. 農人賣猪及羊，共得 6105 元。已知賣猪所得銀爲賣羊的 6 分 5 釐，求賣羊所得銀數。

(第五) 賺賠

營業有贏餘叫賺，虧本叫賠。計算賺賠常以資本金額爲標準而算其成數。

習題 46 的答：

1. 396.27 元。 2. 885000 元。 3. 2.4 元。 4. 200 人。 5. 3836.25 元。
6. 3 元。 7. 原有糙米 2 石，搗成白米 1 石 6 斗 4 升。 8. 3700 元。

資本或物之原價爲母數，賺額或賠額爲子數。賺額或賠額對於資本或物之原價的成數，特稱爲賺率或賠率。賣物而賺，則其賣價爲母子和；賣物而賠，則其賣價爲母子差。

[例 1]　機器兩架，原價各 425 兩；若第一架售銀 500 兩，第二架售銀 400 兩，求其賺率及賠率。

解：　第一架賺額：500兩 − 425兩 = 75 兩。

第二架賠額：425兩 − 400兩 = 25 兩。

所以第一架的賺率是 75兩 ÷ 425兩 = 0.176；

第二架的賠率是 25兩 ÷ 425兩 = 0.0588.

[例 2]　買船一艘用 2545 元，其後售出賠 1 分 2 釐，問售價？

解：　2545元 × (1 − 0.12) = 2239.6 元。　答：　2239.6 元。

[例 3]　買屋一宅，價 4380 元，問以何價出售，則可獲利一分半？

解：　4380元 × (1 + 0.15) = 5037 元。　答：　5037 元。

[例 4]　賣馬一匹，賠二分，計 45.75 元，求馬的原價。

解：　45.75 元 ÷ (1 − 0.2) = 57.188 元。　答：　57.188 元。

[例 5]　賣屋二所，各 450 元，其中一所賺一分二釐，一所賠一分二釐；問原價各若干？

$$\left.\begin{array}{l}450\text{元}\div(1+0.12)=401\frac{11}{14}\text{元}\cdots\cdots\text{賺者原價}\\450\text{元}\div(1-0.12)=501\frac{3}{22}\text{元}\cdots\cdots\text{賠者原價}\end{array}\right\}\text{答}$$

(第六) 佣金

某種交易，經人介紹，對介紹人所給報酬叫做佣金。

如商業上的掮客，契約上的中人均取佣金。如經手人、如拍賣行所收手續費，也是佣金。

物價爲母數，佣金爲子數，佣金對於物價的成數叫佣率。凡佣金計入總額時買物者之出款爲母子和，賣物者之入款爲母子差。

〔例 1〕 賣屋一所，價 3560 元，佣金 89 元，求佣率。

89元÷3560元＝0.025.

答： 二釐五毫。

〔例 2〕 有拍賣行代客拍賣貨物,得價 579.6 兩，言明就中取佣金三釐，問物主得若干?

579.6 兩×(1－0.03)＝562.212 兩。

答： 562.212 兩。

〔例 3〕 一商人托行家買進貨物,言明付佣金 2 釐 5 毫,共付 9225 元;問貨物的原價?

9225 元÷(1＋0.025)＝9000 元。

答： 9000 元。

〔例 4〕 買賣房產通例成 3 破 2 (買主出佣金 3 釐賣主出佣金 2 釐)。今有一房屋價 12640 元，中人有四個，問各分得佣金多少?

解： 佣金買主出 3 釐，賣主出 2 釐，故共計 5 釐，四份均分此數卽得

12640元×0.05÷4＝158 元。

答： 各得 158 元。

(第七) 折扣

賣物者按照定價減收若干，叫做折扣。其減收的成數，叫折扣率。

如賣定價 100 元之物，祇收 90 元，我國叫做九折，外國叫做扣去 10%。如收 85 元則叫八五折，而外國叫做扣去 15%。

即我國以賣價爲子數，而外國以扣去之價爲子數。此所言的成數即是折扣率。折扣算法，以物的定價爲母數，現價爲子數，扣去之數爲母子差。

[例 1]　定價 45 元之物，欲以 36 元買得之，須打幾折？

36 元÷45 元＝0.8.　　答：打八折。

[例 2]　某人購腳踏車一架，値 180 元；後以七折售去，問得若干元？

180元×0.7＝126 元。　　答：126 元。

[例 3]　某人有舊照相器具一副，以六折半出售，得價139元 1 角，問原價若干元？

139.1 元÷0.65＝214 元。　　答：214 元。

連折扣

在商業有於原價打一折扣後，就所得數再打一折扣的，叫連折扣。

連折扣有打二次者，也有打二次以上的。對於連折扣，叫普通的折扣爲單折扣。

普通商人所謂幾折幾扣即連折扣。如言七折八扣，即以100元之物，先七折成 70 元，再八折成 56 元。故七折八扣實與五折六相同。凡連折扣均等於其折扣之積的折扣。

[例]　甲乙二商所賣貨物，同爲 3645 元之定價。甲商願以九折出售，乙商則願以九四折再打九六扣，問各價幾何？

甲商價：　3645×0.9＝3280.5 元。

乙商價：　3645×0.94×0.96＝3289.238 元。

(第八) 百分法的其他應用

凡按照母數定一成數而計算的，都是百分法的應用，其種

類很多。如國家的賦稅：田賦爲土地稅，應以地價之高下而定徵額；所得稅以年歲收入之多少而定；營業稅以資本額而徵收。由國家徵收的還有關稅，是依貨物的原價而徵收，其成數依貨物之性質而有等差。

百分法的其他用途：在商業，有匯兌與保險，今只說其意義，實際的算法，很爲煩複，此地不說。

匯兌，即是把金銀從甲地劃匯到乙地。即匯銀者於甲地把金額及匯費交於銀行，領取匯票，由銀行將匯票寄交乙地的取銀者，到乙地的銀行支款。此所付的匯費照理應是匯款的一種成數，但因各地市面上的情形不同，所以匯費也不一定。

匯兌的種類，有普通匯兌、電匯及郵匯。電匯是以電報通知收款人，取其速也。郵匯則爲郵局所經營。

保險是一種商業，其保險率即是計算的成數，係根據統計而定，成數定後計算甚簡單。保險有人壽保險與財產保險種種，其實際上的計算，各家公司均有不同，此地也不多說述。不過計算的理論，仍依據百分法的。

習題 47.

1. 一商家買棉花一宗，售去其九分之五時，已足其所出之本金；問賺率幾何？

2. 一人購呢 120 丈，每丈價 $13\frac{1}{3}$ 元。先以其三分之一出售賺 $66\frac{2}{3}$ 元，次以其三分之一出售賺 $53\frac{1}{3}$ 元，再後的出售，反賠了 40 元。問統扯賺率如何？

3. 茶商買茶葉 8 箱，每箱 78 斤，每斤價銀 5 角 3 分；後因霉爛棄其十分之一而售其餘，尚獲利二分。問每斤之賣價？

4 購雞卵 2500 個，每百個價銀 2.35 元。今碎其千分之二十四，而售其餘，欲獲利一分，問每個平均須售價幾何？

5. 有絲行代客買絲 45 包，每包價銀 568 元，若買主共出絲價及佣金 26199 元，賣主淨得 25176 元，問兩方所出佣金之率如何?

6. 某人代客賣貨物一宗，佣率一分二釐半，賣主淨得 3281.25 元，問貨物的賣價。

7. 某人托客置產，說明佣率一分二釐半，共付出 45337.5 元，問產的實價。

8. 某物照定價九折賣出尙可賺二分，若依定價賣之，其賺率當若何?

9. 某商購貨物一宗，定價足銀 4365 兩；今以九八銀 102 兩當足銀 100 兩付款，則此人所付較應付之數實少幾何?

10. 某物品每個照定價出售可賺 2 元。又此物品 5 個打八八折出售，與 8 個打八五折出售所得的利益金相等。問每個的定價及原價如何?

習題 47 的答:

1. 0.44……. 2. 5%. 3. 約 7 角 7 分 3 釐。 4. 約 2 分 6 釐 8 毫。
5. 買主出 0.025，賣主出 0.015. 6. 3750 元。 7. 40300 元。 8. $\frac{1}{3}$.
9. 17.64 兩。 10. 定價 10 元，原價 8 元。

第九章　利息算

第一節　單利

在銀錢貸借時，借債人對於債主，除還給所借銀錢以外，再加若干的報酬，叫做利息。

債主借給借債人的金額，叫做本銀。利息的多少，當然與本銀成比例的，而且和借用期間的長短也成比例。

依所借期間爲比例而計算利息的，叫做單利。

單位期間的利息，通常是以對於本銀的成數而定，這個成數叫做利率。

用作期間的單位的，通常有三，即年，月，日，因之利率也有三種分別。

以一年爲一期，利息對於本銀的成數，叫做年利率，或作年息。以一月爲一期，利息對於本銀的成數，叫做月利率，或作月息。以一日爲一期，利息對於本銀的成數，叫做日利率，或作日息。

在銀錢貸借時,其利率及期間的單位,均由雙方當時說定,並無一定的規則。大抵以一年爲期者,年恆作十二月;以一月爲期者,月恆作三十日。貸借立約之日,慣例不計利息。

利息算中的本銀與利息與成數算中的母數與子數相當。

利息

[例 1] 本銀800元,年息七釐,問三年六個月的利息幾何?

解: 一年的利息是 800×0.07, 所問三年六個月,卽三年半的利息,是此數的 3.5 倍,卽:

$$800\text{ 元}\times0.07\times3.5=196\text{ 元。}$$

答: 196 元。

或說一年的利息是本銀的 0.07 倍,故三年半的利息是本銀的 (0.07×3.5) 倍,卽:

$$800\text{ 元}\times(0.07\times3.5)=196\text{ 元。}$$

求利息的一般公式如次:

$$\left.\begin{aligned}&\text{本銀}\times\text{利率}\times\text{期數}=\text{利息}\\ \text{或}\quad&\text{本銀}\times(\text{利率}\times\text{期數})=\text{利息}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\text{公式 }1$$

[例 2] 月利率一釐,本銀 2400 元,從一月二十二日起借至四月三十日止,有利息若干?

解: 本銀爲 2400, 利率爲 0.01, 期限爲 $9+28+31+30=98$ 日,卽$\frac{98}{30}$月,故由公式 1 得:

中國慣用的所謂月息一分,實與月利率一釐相當。月息一分的意思,是洋一元出借一月,得利息洋一分之意,對於本銀卽是百分之一,以成數講是一釐。所謂月息一分是與年息一分二釐相等。而中國慣用的年息一分的分,卻就是成數上的分釐之分。

$$2400\times0.01\times\frac{98}{30}=78.4\text{ 元。}$$

答： 78 元 4 角。

從上面的公式，可以說知道了本銀，利率和期數三者，便可把利息求得。其實，本銀，利率，期數，利息四者之中，知道了三者，所餘的一項，當然可以求得，是很明白的。今只將各公式記在下面，不另舉例。

利息÷(利率×期數)＝本銀…………… 公式 2

利息÷(本銀×期數)＝利率…………… 公式 3

利息÷(本銀×利率)＝期數…………… 公式 4

本利和

［例 1］ 銀 350 元，年息一分，三年間的本利和是多少？

解： 本利和＝本銀＋利息，故：

350 元＋(350 元×0.1×3)＝455 元。

本是可以的。但說利息是本銀的 0.1×3 倍，所以本利合計是本銀的 1 倍加上 (0.1×3) 倍，即 (1＋0.1×3) 倍，因之：

350 元×(1＋0.1×3)＝455 元。

答： 455 元。

本銀×(1＋利率×期數)＝本利和…… 公式 5

［例 2］ 銀 450 元，以日利率 0.025% 存入銀行，從四月十日到六月三十日止，本利和若干？

解：　期數的日數是 20＋31＋30＝81 日。故：

$$450\text{ 元}\times\left(1+\frac{0.025}{100}\times 81\right)=459.1125\text{ 元}。$$

［例 3］　年息一分二釐，二年四個月得本利和 284 元，問本銀與利息各若干？

解：　本銀 1 元的本利和是 $1+0.12\times 2\frac{1}{3}$，因~~之~~本銀是

$$384\text{ 元}\div\left(1+0.12\times 2\frac{1}{3}\right)=300\text{ 元}。$$

故利息是 384 元－300 元＝84 元。

因此又可知：

本利和÷(1＋利率×期間)＝本銀……公式 6

習題 48

1.　年息九釐，本銀 1000 元，問二年五個月的利息若干？

月日計算法，已如前說，月作 30 日，年作 12 月，但實際上卻有種種。今分記於次：

(1) 日的計算有三：

(a　兩去，即借入日與付還日均不計息。

(b　一去，即前述的借入日不計，付還日計，或借入日計，付還日不計。

(c)　兩入，即借入日與付還日均計息。

這裏當然是 (b) 最妥當，但存款於銀行及錢店等，大都依 (a) 的。

(2) 月的計算，也有種種，某月某日借入，某月某日付還之中，有：

(a) 不問日子，借入月與付還的月，均算一月。

(b) 日子在十五日前或後而定，即在十五日以前借的算一個月息，以後的則算半個月息。付還也是同樣，在十五日以前算半個月息，在十五日後算全月的息。

(c) 與 (a) 相反，兩頭的月都不算。

(d) 不足一月的日數，以一月為 30 日而計算作月的分數。普通的貸借從 (a) 的算法很多，但 (d) 是妥當的算法，不過較為煩冗，如題中不曾有何指定，須依此法計算。

2. 本銀 2000 元，月息 0.012，七個月的本利和是多少？

3. 年利率六釐，四年二個月得利息 71.25 元，問其本銀是多少？

4. 本銀 65 元，八年得利息 26 元，則年利率如何？

5. 年利率七釐，本銀 1500 之利息爲 630 元，其年數如何？

6. 月利率一釐，本銀 40 元，於一月一日借起，得利息一元，問還銀是幾月幾日？

7. 有酒商，買酒三石五斗，十個月後賣去，得 123.2 元；計其利息，合年息一分二釐。求酒每石的原價。

8. 以銀 520 元，出借一年，前六個月之利息比後六個月多 5.2 元，前六個月之利率爲年八釐，則後六個月之利率如何？

9. 以年利率八釐貸銀，至本利相等，期間如何？

10. 趙錢二家互通貸借，約定年息一分。本年往來各項如次：

二月十日，趙付錢 250 元。
四月十日，趙又付錢 800 元。
八月十五日，錢付趙 100 元。
九月二十日，錢付趙 250 元。
十一月一日，錢付趙 500 元。

問在年底清算時，錢應付趙若干？但年作 360 日，月作 30 日計算。

利息算的簡捷法

利息算的簡捷法很多，今只述最普通的一種，叫做六釐法。

習題 48 的答：

1. 217.5 元。 2. 2168 元。 3. 285 元。 4. 5%. 5. 6 年。 6. 三月十六日。 7. 32 元。 8. 年利率六釐。 9. 十二年半。 10. 錢應付本息合計 250 元。

卽以年利率六釐爲本位而計算。第一因爲普通實際上的利率，以六釐左右爲多，而年利率六釐的計算又頂便利之故。

因年利率 0.06, 故月利率是 0.005，所以一個月的利息，是：

$$\text{本銀} \times 0.005 = \text{本銀} \times \frac{1}{200}.$$

所以倘使期間是成月數的，計算就簡單了。若干月中的利息，是等於：

$$\text{本銀} \times \frac{1}{200} \times \text{月數} = \frac{\text{本銀} \times \text{月數}}{2} \times \frac{1}{100}.$$

故可以月數爲單位而表期間。以本銀乘月數，以 2 除，再退下小數二位，卽是年息六釐的利息了。

[例 1]　本銀1000元，年息六釐，一年三個月的利息是多少？

解：　照上法，利息等於：

$$1000 \times 15 \div 2 \times \frac{1}{100} = 75\ \text{元。}$$

這裏年利率不是 6 釐的，也可以依其比而求得。如年利率是 8 釐，則是就照 6 釐算的利息上，再加該數的 $\frac{1}{3}\left(\text{因 } 0.08 = 0.06 + \frac{0.06}{3}\right)$ 卽可。如年利率是 5 釐，則就照6釐算的利息中減去其 $\frac{1}{6}\left(\text{因 } 0.05 = 0.06 - \frac{0.06}{6}\right)$ 卽可。如年利率是 7 釐半，卽就照 6 釐算的利息中加其 $\frac{1}{4}\left(\text{因 } 0.075 = 0.06 + \frac{0.06}{4}\right)$ 卽可。

[例 2]　本銀 2540 元，年利率 7 釐 5 毫，問一年三個月的利息是多少。

254)
×15
12700
2540
2)381.00
4)190.50 …此卽十五個月的照 6 釐算的利息。
47.625…6 釐息的 $\frac{1}{4}$。
238.125…0.06 的利及其 $\frac{1}{4}$ 的和，卽是 0.075 的息。

答： 238.125 元。

期間不是成整個數的月數，而一年以 360 日計的，也可以用六釐法。

因年利率 6 釐時，一日的利率是 $\frac{6}{100}\times\frac{1}{360}=\frac{1}{6000}$，因之利息是：

$$\text{本銀}\times\frac{1}{6000}\times\text{日數}=\frac{\text{本銀}\times\text{日數}}{6}\times\frac{1}{1000}.$$

卽將本銀與日數相乘再以 6 除後，把這結果退下小數三位，卽是年利率六釐的利息。

［例 3］ 本銀 1345 元，年利率五釐四毫，74 日間的利息若干？

1345 …本銀
×74 日數
5380
9415
6)99530 | 99530 以 6 除，退下小數三位，卽以年利
16.5883 … | 率 6 釐算的利息。
1.65883… | 因 $0.054=0.06-\frac{0.06}{10}$，故從六釐的利中減
14.93 | 其 $\frac{1}{10}$ 卽是年利率 0.054 的利息。

答： 14.93 元。

一年以 360 日計的利息中，減去 $\frac{1}{73}$，卽得一年以 365 日計的利息。又一年以 365 日計的利息中，加其 $\frac{1}{72}$，卽得一年作 360 日

計的利息。因爲：

$$\frac{1}{360}\times\left(1-\frac{1}{73}\right)=\frac{1\times72}{360\times73}=\frac{1}{5\times73}=\frac{1}{365}.$$

$$\frac{1}{365}\times\left(1+\frac{1}{72}\right)=\frac{1\times73}{365\times72}=\frac{1}{5\times72}=\frac{1}{360}.$$

所以一年作 360 日，或 365 日算出的利息，要互相變更，也是很容易的。

第二節　複利

如前所述，金錢貸借的期間，普通是很短的。故長期借款時，通常每半年或一年，結算利息。此時因情形之不同也可以由雙方同意改訂利率的。不過利息的交付，頗爲麻煩。就中借主將此利息併入本銀，再照前一樣的利率計算利息，較爲普通。這一種算法，叫複利法。

〔例 1〕 本銀 355 元，年息六釐，每年結利一次，滾入本銀計息。問到三年末，本利合計若干？

解： 年息是 0.06，故第一年終的本利和是本銀 1 倍與利 0.06 倍，即本銀的 1.06 倍。即 355 元×1.06 是第一年底的本利和，又即是第二年的本銀。第二年的年利率仍是 0.06，故第二年底的本利和是 355 元×1.06 的又 1.06 倍，即 355元×1.06×1.06，這又是第三年的本銀。到了第三年底的本利是 355 元 ×1.06×1.06 又是 1.06 倍，即是：

355 元×1.06×1.06×1.06.

而　1.06×1.06×1.06＝1.191016,

355 元×1.191016＝422.81068 元。

答： 422 元 8 角 1 分。

這原是從單利的公式：

本利和＝本銀×(1＋利率×時期)。

算出來的：　卽第一期的本利和＝本銀×(1＋利率)，

第二期的本利和＝本銀×(1＋利率)×(1＋利率)，

第三期的本利和＝本銀×(1＋利率)×(1＋利率)×(1＋利率)，

………………………

所以　第 n 期的本利和

$$=本銀\times\underbrace{(1+利率)\times\cdots\cdots\times(1+利率)}_{n個}。$$

因此在複利法得公式：

$$本利和=本銀\times(1+利率)^{期數}\cdots\cdots\cdots\cdots 公式7$$

〔例 2〕　本銀若干，以年息五釐存放，每半年計算利息滾入本銀。放五年後要得本利和 1000 元 問最初的存放款項應爲多少？

解：　年利率 0.05，故半年的利率是 0.025，而利息的期數，卽利息滾入本銀的回數，恰是 10 回，故與前例相同。在最初的本銀，乘以 1.025 連續十回，卽可得其本利和的 1000 元。1.025 的 10 次相乘得 1.2800845 強，故最後的本利和 1000 是在本銀上乘 1.2800845 而得的。因之所求本銀等於

$1000\div1.2800845=781.198$ 強。

答：　781.198 元。

這裏也有一個公式，就是：

$$本銀=本利和\div(1+利率)^{期數}\cdots\cdots\cdots\cdots 公式8$$

〔例 3〕　年利率四釐，每半年複利，問本銀 1000 元，二年的利息若干？

解：　複利息是從本利和中把本銀減去卽可。年息四息，則半年爲二釐，而二年有四期，故：

1000 元 $\times(1+0.02)^4-1000$ 元 $=82.432$ 元。

或說本利和是本銀的 $(1+0.02)^4$ 倍，其中減本銀的 1 倍，即得利息，故複利息是：

$1000\times\{1+0.02)^4-1\}=82.432$ 元。

答：　82.432 元。

這裏便有這一個公式：

$$\text{本銀}\times\{(1+\text{利率})^{\text{期數}}-1\}=\text{複利息}\cdots\cdots\text{公式}9$$

〔例 4〕　月利率一釐，每期三個月，一年的複利息爲 2.762 元，問其本銀爲若干？

解：　每期 3 個月，故一年有四期，而每期之利率爲

$0.01\times3=0.03.$

故知本銀 $\times\{(1+0.03)^4-1\}=2.762$ 元。

因之本銀 $=2.762$ 元 $\div\{(1+0.03)^4-1\}=22$ 元。

答：　22 元。

這裏的公式是：

$$\text{複利息}\div\{(1+\text{利率})^{\text{期數}}-1\}=\text{本銀}\cdots\cdots\text{公式}\,10$$

複利表

從上面的例，可以知道，在複利的計算上，求本利和對本銀的比，有把一個數（如例 1 的 1.06，例 2 的 1.025）自乘不少回數的必要。此種計算，甚爲繁複，所以在實際的計算上，是應用把此種計算已算出而作成的表，就是複利表。

這裏所載的複利表，是以本銀 1 爲單位，而表出其本利和（也就是本利和對本銀的比）。從每期利率二釐起到五釐，每差五毫，均有記載，五釐以上則每差一釐均有記載，到一分爲止。期數則從 1 期到 15 期。

複利表

本銀一的本利和

利率 期數	2 釐	2 釐 5 毫	3 釐	3 毫 5 釐	4 釐	4 釐 5 毫
1	1.02	1.025	1 03	1.035	1.04	1.045
2	1.0404	1.05063	1.0609	1 07123	1.0816	1.09203
3	1.06121	1.07689	1.09273	1.10872	1.12486	1.14117
4	1.08243	1.10381	1.12551	1.14752	1.16986	1.19252
5	1.10408	1.13141	1.15927	1.18769	1.21665	1.24618
6	1.12616	1.15969	1.19405	1.22926	1.26532	1.30226
7	1.14869	1.18869	1.22987	1.27228	1.31593	1.36086
8	1.17166	1.21840	1.26677	1.31681	1.36857	1.42210
9	1.19509	1.24886	1.30477	1.36290	1.42331	1.48610
10	1.21899	1.28009	1.34392	1.41060	1.48024	1.55297
11	1.24337	1.31209	1.38423	1.45997	1.58945	1.62285
12	1.26824	1 34489	1.42576	1.51107	1.60103	1.69588
13	1.29361	1.37851	1.46853	1.56396	1.66507	1.77220
14	1.31948	1.41297	1.51259	1.61869	1.73168	1.85194
15	1.34587	1.44830	1.55797	1.67535	1.80094	1.93528

利率 期數	5 釐	6 釐	7 釐	8 釐	9 釐	1 分
1	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.1
2	1.1025	1.1236	1.1449	1.1664	1.1881	1.21
3	1.15763	1.19102	1.22504	1.25971	1.29503	1.331
4	1.21551	1.26248	1.31080	1.36049	1.41158	1.4641
5	1.27628	1.33823	1.40255	1.46933	1.53862	1.61051
6	1.34010	1.41852	1.50073	1.58687	1.67710	1.77156
7	1.40710	1.50363	1.60578	1.71382	1.82804	1.94872
8	1.47746	1.59385	1.71819	1.85093	1.99256	2.14359
9	1.55133	1.68948	1.83846	1.99900	2.17189	2.35795
10	1.62889	1.79085	1.96715	2.15893	2.36736	2.59374
11	1.71034	1.89830	2.10485	2.33164	2.58043	2.85312
12	1.79586	2.01220	2.25216	2.51817	2.81266	3.13843
13	1.88565	2.23293	2.40985	2.71962	3.06580	3.45227
14	1.97993	2.36090	2.57853	2.93719	3.34173	3.79750
15	2.07893	2.49656	2.75903	3.17217	3.64248	4.17725

上面的例題，如用表去計算，那麼可以省卻許多計算的煩勞。現在再舉若干例於次：

［例 5］　本銀 800 元，年息 6 釐，以每半年期的複利計算。幾年之後，本利和達 1000 元?

解：　本利和對本銀的比是：

$$1000\text{ 元}\div 800\text{ 元}=1.25.$$

又看每期間利息是 3 釐，看表中，3 釐的一列，自上而下看去，在第 7 期末是 1.22……，第 8 期末是 1.26……，故第 7 期卽三年半達不到 1000元，而第 8 期卽四年是超過了 1000 元。故答以三年半多，四年不到卽可。

［例 6］　以半年爲期的複利計算，借出銀要於 7 年後的本利和成爲本銀的二倍，則須年利率若何方可?

解：　每期半年，故 7 年有 14 期，看表上，在 14 期的一行，自左向右過去，在 5% 的一列上是 1.979……差不多是 2 了，而 6% 的一列上則爲 2.36……比 2 大得多。故一期(半年)的利率須 5% 強，因之定年利率一分強卽可。

［例 7］　本銀 350 元，年息五釐半，以半年爲期的複利計算，至第五年末，本利合計若干?

解：　每期的利率是 0.055÷2＝0.0275。這在表中是沒有

例 5 的計算，對本銀 1，第七期末的本利和是 1 2298……，這是卽第八期的本銀。因之次一期所生的利息有 1.2667……－1.2298……＝0.0369……。然實際只要 1.25…－1.2298…＝0.02…卽可，故第八期以後只要 6 個月×$\frac{0.02}{0.0369}$＝約 3 個月借出了卽可，故仔細說來，借 3 年半又三個月卽可。但實際上決沒有這樣計算的必要，只說三年半多，四年不足卽可。從 7 期末的 1.22……及 8 期末的 1.26……也可知道 1.25 是與 8 期的數近，故其精密的時期是近於四年，而遠於三年半的。

例 6 要精密計算，在算術上是不可能的，但實際上並無此必要。

例 7 要仔細計算，只要把 355 元乘 1.0275 十次卽可。這樣計算起來結果是得 459 元弱，同上面的答數大致是相符的。

的。但 0.0275 恰在 0.025 與 0.03 的中間。而期數是 10 期。所以看本銀 1 的 10 期上的本利和，利率 0.025 的是 1.2800 強，利率 0.03 的是 1.3439 強，因之若把利率 0.0275 時的本利和看作在 1.2800 與 1.3439 的中間(實在是並不在中間，現在假定其如此)，則因：

$$\{1.2800+1.3439\}\div 2=1.312.$$

故 $$350\text{ 元}\times 1.312=459.20.$$

答： 約 459 元。

〔注意〕 使用上述的複利法。第一全個期間是用同樣的利率，但實際上長期間用同樣利率繼續貸借關係是很少的，故實際上複利法很少用到。又第二複利法是不拘本銀多少，均計利息，而實際上如在銀行等，對於大數的銀錢進出時，往往有 400 元以下，500 元以下，或 100 元以下不計利息的規定，對於小額的銀錢，也是不到 1 元不計利息，及利息的不滿一分的不計等，故在實際上，世間並不行着這複利法的。

所以對於複利法的計算，只要簡單地算得其大概即可。很仔細精確算，在實用上仍是沒有什麼價值的。因此應用上可以如前數例一般，用了表去計算的，因為所得的結果，大體是不會錯。今再舉一例：

〔例 8〕 本銀 355 元，以年息六釐五毫，存於銀行，以一年期的複利計算(1 元不滿不計算，利息不滿 1 分不計)。問第三年底的本利和。

解： 正式的計算，是須用每年的單利法的。

	355 元	
(算草)	0.065	
	1.775	
	21.30	
	23.075	…第一年的利息(5 釐不計)，
	355	…本銀，
	378.07	…第一年末本利和，即第二年的本銀，但此中 378 元是計息的，故以 0.065 乘，
	0.065	
	1.890	
	22.68	
	24.570	…第二年的利息，
	378.07	…第二年的本銀，
	402.64	…第二年末的本利和，即第三年的本銀，但此中不滿一元的 0.64 元不計息，故以 0.065 乘 402 元，
	0.065	
	2.010	
	24.12	
	26.130	…第三年的利息，
	402.64	…第三年的本銀，
	428.77	…第三年的本利和，即所求。

這問題中，除去了一元未滿不計利息，及利息不滿一分不計的限制，便成了普通的複利法，而其計算是：

$$355\text{ 元}\times 1.065\times 1.065\times 1.065 = 355\text{ 元}\times 1.20795$$
$$= 428.822\text{ 元強。}$$

這樣費了力去計算的，比眞的答數多了洋五分。但照例7一般，從複利表中取 6 釐的三期 1.19102 與 7 釐的三期 1.22504 相加折半得 1.208 而計算（即以代 $1.065^3 = 1.207949625$，總是不確實的，故小數三位已夠）其結果是

$$355\text{ 元}\times 1.208 = 428.84\text{ 元。}$$

這比眞答數相差洋 7 分，比前雖錯多些，但計算較簡單，故在概算時，可用此法爲便利。

習題 49.

下列題 1—6 利用複利表計算：

1. 本銀 550 元,年利率 5%,以半年爲期的複利計算,三年半後的本利和如何?

2. 本銀 300 元,年息五釐五毫,以一年期複利計算,十年後的本利合計若干?

3. 年利率四釐,半年期的複利,三年後本利和爲 640 元,問現在若干元?

4. 年利率五釐,一年期的複利,十年後的本利和爲 1000 元,問本銀若干?

5. 本銀 900 元,一年期的複利,滿四年後本利合計爲 1093.90 元,問年利率?

6. 年利率一分,半年期的複利,幾年後本利合計爲本銀的二倍?

7. 本銀 135 元,以年息 5.5% 存入銀行。存款章程每半年計算利息滾入本銀,但對不滿一元的本銀不計息及利息不滿洋一分的不計,問二年之終,本利和若干?

8. 郵政儲金,年息四釐,儲洋一百二十五元,三年半後,本利共若干?

第三節 利息算的應用

公債及股票

中央政府,或地方政府,有時需要多額金錢,向公衆募集借款,這叫做公債。政府對於應募者,給付一種證券,這叫做公債票。

公債票面所記載的銀數,叫做額銀,公債的利息,依此票價爲準,照一定成數計算,另有支息的小券,附在債票上,到了付

習題 49 的答:

1. 653.78 元弱。 2. 約 513 元。 3. 568 元强。 4. 約 614 元。
5. 0.05. 6. 7 年餘。 7. 150.41 元。 8. 142.5 元。

息日期，可以憑票支取。公債的利息是單利法，每月每三月或半年付息一次。

公債票可以抵押買賣，其市價常因時局金融及政府的信用而時有漲落。

經營事業，設立公司，分資本爲若干股，招人分認，出資者叫做股東，公司收到了股銀，便給股東以股票。公司每年按股分給官利紅利一次或二次。其官利之利率各期相等，紅利之利率視公司本期營業決算之狀況而定。其利息算法也是用單利的。

股票也可以抵押買賣，其市價也有漲落，看時局及金融與公司的信用而定。

今示計算公債及股票問題的例於次：

［例 1］　額面銀百元的五釐公債票，以九十五元買進三張，每半年付息一次，問合利率多少？

解：　半年的利息是：

$$100\times3\times0.05\times\frac{1}{2}=7.5\text{ 元。}$$

又合利率(100 元×0.05)÷95 元＝0.0526 強。

答：利息七元五角，
利率五釐二毫六絲。

［例 2］　某公司的股票每股五十元，先收二十五元。某人有十股，今此公司在半年期的決算中，可分配年利一分六釐的利息。問此人分得錢多少？

公債票，股票等，可以抵押買賣，是有價値的證券，都可叫做有價證券。此種證券的市價，時有上落，與額面可以有很大的差異。股票如公司營業發達，每期有五六分的紅利，則額面 50 元的股票卽以 100 元或 150 元買進，也還有二分多的利息可圖。

公司的股本，有時並不要完全收足，只收二分之一，或四分之一卽可開始營業，計算利息當然以已收的資本額爲準，不照票面額。

解： 股分的利息，是照已收的資本計算的，故如次：即每股應派得

$$25\text{ 元}\times 0.16\times\frac{1}{2}=2\text{ 元},$$

$$2\text{ 元}\times 10=20\text{ 元}。$$ 答： 20 元。

銀行計算

銀行爲流通金融的機關，其所營業務可有種種，今舉其重要者。

1. 貼現及放款

記載交付一定金額的證劵，叫做票據。其中有一種叫期票，是要到了指定的日期，才得交付。故收款人如在未到期前要換現銀用，則可將此期票，向銀行貼現。就是銀行從該期票的額銀中，扣去了到滿期日數的利息付給現銀，這也叫銀行折扣。扣去的利息，通常以額銀的年利率計算，其時特稱爲折扣率。

［例 3］ 某人以二個月的期票，向銀行貼現，額銀 450 元，折扣年利率六釐，求現值。

$$\text{二個月的利率爲 }6\%\times\frac{1}{6}=1\%,$$

$$\text{貼現}=450\text{ 元}\times 1\%=4.5\text{ 元},$$

$$\text{現值}=450\text{ 元}-4.5\text{ 元}=445.5\text{ 元}。$$

若期票不足取信於銀行，或借款較大，那須財產作抵押品，叫做押款。押款的利息，可於期滿時與本銀同付，不必先扣。計算與單利法同。

2. 存款

銀行存款，有定期活期二種。定期存款於存入時訂定期限，未到期時不能支取本息。利率的高低各銀行不同，大概，存一年七釐，存二年七釐半，存三年八釐，四年八釐半，五年以上九釐。都照複利計算。

活期存款，隨時可以提用，使用時可開支票。故支票雖爲票據之一，卻與現銀同樣使用。此種存款利率甚低，亦有不計利者，有照每日市面而定者，頗不一致。其計利者，大概每半年結算一次。

3.　儲蓄

儲蓄存款，由特種銀行辦理。也有活期儲蓄和定期儲蓄二種。

活期儲蓄，不拘期限，存款隨時可以支付。利息每月或三月或半年結算一次，以複利法計算。利率大抵年四釐。

定期儲蓄，於存入時約定期限，利息每半年結算一次，按照複利法計算。年利率各不同，大約存半年的5釐，一年六釐，二年六釐半，三年七釐，四年七釐半，五年八釐，存十年以上者一分。其他有零存整付，整存整付，整存零付等等辦法。

［例 4］　某銀行的儲蓄章程上，有到期可取一千元的應存的銀數及期限如次，問各期限的年利率。但以每半年的複利計算。

1年	933.51元
2年	863.07元
3年	790.31元
4年	716.79元
5年	643.93元
6年	589.66元
7年	522.21元
8年	475.92元
9年	415.52元
10年	376.89元

(1)　解：　每半年結算一次，故一年爲二期。故

$$933.51\times(1+\text{利率})^2=1000.$$

$$\therefore\quad(1+\text{利率})^2=\frac{1000}{933.51}=1.07122.$$

查複利表3.5%爲1.071225.

故年利率爲$3.5\%\times2=0.07$.

(2) 同樣 $(1+\text{利率})^4=\dfrac{1000}{863.07}=1.15853.$

查複利表 $(1+0.035)^4=1.147523,$

$(1+0.04)^4=1.169859.$

故年利率約 $\dfrac{0.035+0.04}{2}\times 2=0.075.$

(3) 同樣 $(1+\text{利率})^6=\dfrac{1000}{790.31}=126153.$

查複利表 $(1+0.04)=1.26532.$

故年利率爲 $4\%\times 2=0.08.$

其他均可照樣類推，讀者試自己應用推算一遍，再推算下述的答數是否眞確，卽：一年七釐，二年七釐半，三年八釐，四年八釐半，五年至六年九釐，七年至八年九釐半，十年及十年以上一分。

關於此種計算，實際各銀行間也頗不一律，故此地只說了個大概，不再贅述。

第十章 開 方

第一節 開平方

平方根

例如 $5^2=25$。說 25 是 5 的二乘，二乘也叫自乘，也叫平方，前已講過。但上面的關係，如以 5 爲主而說之，則叫做 5 是 25 的平方根。一般：

甲數的平方爲乙數時，稱甲爲乙的平方根。

表平方根用符號 $\surd$ 或 $\sqrt{\ }$，如 $\sqrt{9}$ 表示 9 的平方根，$\sqrt{25}$ 表示 25 的平方根。

求某一數的平方根，叫做開平方。其計算法叫開平方法。

從 1 到 10 各數的平方如次：

$$1^2=1,\quad 2^2=4,\quad 3^2=9,\quad 4^2=16,$$
$$5^2=25,\quad 6^2=36,\quad 7^2=49,\quad 8^2=64,$$
$$9^2=81,\quad 10^2=100.$$

因之：

$$\sqrt{1}=1,\quad \sqrt{4}=2,\quad \sqrt{9}=3,\quad \sqrt{16}=4,$$
$$\sqrt{25}=5,\quad \sqrt{36}=6,\quad \sqrt{49}=7,\quad \sqrt{64}=8,$$
$$\sqrt{81}=9,\quad \sqrt{100}=10.$$

是很容易知道的。

百以下的數，在上所舉之外者，其平方根的第一位，也依照了該數的大小而就可以知道。

例如 40 的平方根，必定在 6 與 7 之間，即是 6＋(小數)。因爲 $6^2=36$, $7^2=49$, 而 40 是在 36 與 49 之間的緣故。

要求一般的整數的平方根，先須明白：(1)平方根的位，(2)兩數和的平方，方可開始講解。

平方根的位

整數從個位起，每二位分爲一區，其區數等於平方根的位數。

例如 34969, 以每二位分爲一區成 3 |49| 69, 故其平方根是三位數，即最高位是百位。

因爲　$1^2=1$,　$10^2=100$,　$100^2=10000$…….

故 1 以上不到 100 的一位或二位的整數的平方根，是 1 以上不到 10 的數，即個位數。

又 100 以上 10000 未滿的 (即三位或四位的) 整數的平方根，是 10 以上而不到 100 的數，即是二位數。

其他準此。

兩數和的平方

甲乙兩數和的平方，等於甲的平方，甲乙積的二倍及乙的平方三者之和。

這用式子記出來便是：

$$(\text{甲}+\text{乙})^2=\text{甲}^2+(2\times\text{甲}\times\text{乙})+\text{乙}^2.$$

例如：　$(30+5)^2=30^2+2\times30\times5+5^2.$

這理由從乘法的法則或從乘法的運算上去看，都很容易明

瞭的。即 35×35 的運算是：

$$\begin{array}{rr} & 30+5 \\ \times & 30+5 \\ \hline & (30\times 5)+5^2 \\ & 30^2+(30\times 5) \\ \hline & 30^2+(2\times 30\times 5)+5^2 \end{array}$$

可知運算是守着上記法則的。

開平方的算法

根據上面說的兩點事實，便可以得到開平方的算法，今舉例說明如下：

［例 1］　求 2209 的平方根。

解：　先看 22|09 的區分，知道了其根是個十位數。

第一區分中的 22 是在 4^2 與 5^2 之間，故根的十位的數字是 4。這樣再把 41^2, 42^2, 43^2 等計算出來，與 2209 相比較，看此數實際是四十幾，以求正確的答數。但這樣計算，很是麻煩複雜，故實際上的計算如次：

算草

$$\begin{array}{rl} & 22\,|\,09(47 \\ & 16 \\ \hline 87) & 609 \\ & 609 \\ \hline \end{array}$$

答：47.

開平方的算法，依次記順序：

1. 行每二位的區分，以知根的位數。

2. 看第一個區分，知道了根的第一位數字，減去其平方。

3. 把減後的剩餘併入第二區分，試以根的第一位數的二十倍除，以知根的次一位數字。

4. 減去根的第一字二十倍加第二位後再以根的第二位乘的數。

5. 如有剩餘，再併入第三區分，把已求得的根的部分，看做一數，再照上法反覆計算即可。

開平方法，在代數中要講述的，詳細的理由可看開明代數講義。

〔說明〕　如前所述,根的十位是個 4, 故止從第一區分中減去了 4^2 即 16 (其實即 40^2 的 1600), 把所餘的併入第二區分,成 609。

現在假定根的個位數字是 a, 則

$$\begin{aligned}2209 &= (40+a)^2\\ &= 40^2+(2\times40\times a)+a^2.\end{aligned}$$

是前面已說過的,故

$$\begin{aligned}609 &= 2\times40\times a+a^2\\ &= 80\times a+a^2=(80+a)\times a.\end{aligned}$$

因之試以 40 的 2 倍 80 除 609, 得整數的商 7, 於是設想這 7 是根的個位數,在 80 上加以 7, 得 87, 以 87 與 7 相乘而從 609 減,恰好無餘。

這樣恰是減了 $40^2+(2\times40\times7)+7^2$ 即 47^2 而無餘,故 2209 的平方根即是 47。

[例 2]　求 419904 的平方根。

算草

```
           41|99|04(648
           36
      124)599
           496
     1288)10304
          10304
              0
```

〔說明〕　先把該數區分,知道了根有三位。看第一區分是 41, 故知根的首位爲 6, 於是減去 $6^2=36$, 把剩餘併入第二區分得 599, 用 $6\times20=120$ 去試除,得 4, 減去 $(120+4)\times4=496$; 把這剩餘再併入第三區分得 10304。

現設根的末位是 a, 則

$$419904=(640+a)^2$$

$$=640^2+2\times640\times a+a^2.$$

故 $$10304=2\times640\times a+a^2$$

$$=(1280+a)\times a.$$

因之以 $64\times20=1280$ 試除10304得8，於是假定此8爲根的末位。於1280加8，再以8乘其和而以10304減之，恰好減完。

故這數中減了 $640^2+2\times640\times8+8^2$ 卽 648^2 之後，恰無剩餘，卽此數恰爲 648^2，故648卽所求之平方根。

小數的平方根

小數的平方根，也是可從小數點起，每隔二位作一區分而知其位數。

例如 0.0625，區分起來是 0.06|25，首位數在第一區分，故平方根的首位，是小數第一位。

又 0.00007225，區分起來是 0.00|00|72|25，首位數在第三區分，故平方根的首位，是小數第三位。

所以首位在第幾區分，卽示平方根首位是小數第幾位。

這裏只要注意了：

$$1^2=1,\ 0.1^2=0.01,\ 0.01^2=0.0001,$$

就可容易理會的。

[例 1] 求 0.498436 的平方根。

算草

```
        0.49|84|36(0.706
          49
1406       |8436           答：0.706.
           |8436
```

〔說明〕 從小數點起，每隔二位行區分，知平方根從小數

一位起，運算全與整數相同。

在第二區分中，記了 84, 以 7×20＝140 去除，沒有整商，故小數第二位是 0, 因之添入第三區分爲 8436而以70×20＝1400去除，得整商 6, 卽假定小數第三位爲 6 而計算。

凡平方根數字中有 0 的，均與此例同。

〔例 2〕 求 19.0422 的平方根。

算草

```
          19.04│22(4.363
          16
      83 │304
         │249
      866 │5222
          │5196
      8723 │32600
           │26169
      87267 │643100
            │610869
               32231
```

〔說明〕 這是開不盡的數，若非恰等於某數平方的數，開平方是開不盡的。普通的數，大概是開不盡的。倘照這樣每次添二位的 0 而計算下去，則平方根的位數，可以求到小數無論幾位。

分數的平方根

要把分數開平方，將分數化爲小數，然後計算。

例如要計算 $\sqrt{\frac{5}{7}}$，則先化 $\frac{5}{7}$ 爲 0.7142857142…… 再計算 $\sqrt{0.7142857142\cdots\cdots}$，而求得答數 0.84515…….

又從 $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3\times 3}{5\times 5}=\frac{9}{25}$，反過來想，若要把 $\frac{9}{25}$ 開平方，卽

$\sqrt{\frac{9}{25}}$,卻不妨作爲$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}$那麼樣計算。

所以　**分數開平方，也可以求分子分母各自的平方根。** 然在分母開不盡時,則當用前法。

［例 1］　$\sqrt{\frac{256}{625}}=\frac{\sqrt{256}}{\sqrt{625}}=\frac{16}{25}.$

［例 2］　$\sqrt{\frac{15}{64}}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{64}}=\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{3.87298\cdots}{8}=0.48412.$

習題 50.

求次記各數的平方根 (1－9):

1.　89401.

2.　21.427.

3.　3.1416.

4.　64.827.

5.　1829.623849.

6.　$\frac{32}{81}$.

7.　$\frac{4}{15}$.

8.　$8\frac{5}{6}$.

9.　$\frac{3}{8}$.

10.　有正方形地一塊,其面積爲 2304 方尺,問其每邊之長。

第二節　開立方

立方根

例如 $4^3=64$, 這稱 64 爲 4 的三乘,或叫立方。現倘使問什麼數的三乘是 64, 卽是說 64 的立方根是什麼，便須有另外的

習題 50 的答:

1.　299.

2.　4.62893.

3.　1.77245.

4.　8.05152.

5.　42.7741.

6.　$\frac{5.65685}{9}=0.62853.$

7.　$\sqrt{0.26666\cdots}=0.51639.$

8.　$\sqrt{8.833\cdots}=2.97209.$

9.　0.61237.

10.　$\sqrt{2304}$ 卽 48 尺.

一種算法，這一種算法，叫做開立方。

甲數的立方等於乙數時，稱甲爲乙的立方根。

表示立方根用記號$\sqrt[3]{\ }$或$\sqrt[3]{\quad}$，例如$\sqrt[3]{8}$爲 8 的立方根，$\sqrt[3]{64}$爲 64 的立方根。

求某一數的立方根，叫做開立方，其計算法叫做開立方法。

從 1 到 10 各數的立方如次：

$1^3=1$,　$2^3=8$,　$3^3=27$,　$4^3=64$

$5^3=125$,　$6^3=216$,　$7^3=343$,　$8^3=512$,

$9^3=729$,　$10^3=1000$.

這些非記住不可，如果記住之後，那麽碰到了這些數的立方根，一看就知道了。即

$\sqrt[3]{1}=1$,　$\sqrt[3]{8}=2$,　$\sqrt[3]{27}=3$,　$\sqrt[3]{64}=4$,

$\sqrt[3]{125}=5$,　$\sqrt[3]{216}=6$,　$\sqrt[3]{343}=7$,　$\sqrt[3]{512}=8$,

$\sqrt[3]{729}=9$,　$\sqrt[3]{1000}=10$.

千以下的數，其立方根的第一位，也根據了這裏而可知道。

例如 500 的立方根必在 7 與 8 之間，即是 7+（小數），因 $7^3=343$, $8^3=512$, 而 500 是在 343 與 512 之間的緣故。

要求一般的整數的立方根，先須明白：(1)立方根的位，(2)兩數和的立方；方可開始講解。

立方根的位

整數從個位起，每三位分爲一區，其區數等於立方根的位數。

例如 22906304，以每三位分爲一區成了 22|906|304，故其立方根爲三位數，即最高位是百位。

因爲　$1^3=1,\ 10^3=1000,\ 100^3=1000000,\cdots\cdots.$

故 1 以上不到 1000 的(一位到三位的)整數的立方根，是 1 以上不到 10，即是個位的數。

又 1000 以上不到 1000000 (即四位到六位)的整數的立方根，是 10 以上不到 100，即是二位的數。

其他準此。

兩數和的立方

甲乙二數和的立方，等於四者之和：

(1) 甲的立方，(2) 甲的平方與乙的積的三倍，(3) 甲與乙的平方的積的三倍，(4) 乙的立方。

用式子記出來則如次：

$(甲+乙)^3=甲^3+(3\times 甲^2\times 乙)+(3\times 甲\times 乙^2)+乙^3.$

例如：$(20+5)^3=20^3+3\times 20^2\times 5+3\times 20\times 5^2+5^3.$

這理由以乘法的法則，或以乘法的運算上去看都很容易明瞭的。即：

$$\begin{array}{r}
20+5 \\
\times\quad 20+5 \\
\hline
(20\times 5)+5^2 \\
20^2+(20\times 5)\qquad\quad \\
\hline
20\ +(2\times 20\times 5)+5^2 \\
\times\qquad 20+5\qquad \\
\hline
20^2\times 5+(2\times 20\times 5^2)+5^3 \\
20^3+(2\times 20^2\times 5)+(20\times 5^2)\qquad\quad \\
\hline
20^3+(3\times 20^2\times 5)+(3\times 20\times 5^2)+5^3
\end{array}$$

可知運算是守着上記法則的。

開立方的算法

根據了上面所說的二個事實，便可以得到開立方的算法，今舉例說明如下：

[例 1] 求 238328 的立方根。

解： 先看 238|328 的區分，知這數的立方根是個十位數，第一區分中的 238 在6^3與7^3之間，故知根的十位的數字是 6。以後，再記算了 61^3, 62^3, 63^3 等數使與 238328 相比較，看此數是六十幾，以求正確的答數，也是可以。但這樣計算，很是煩冗複雜，故實際上可如次樣子而計算：

算草

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{r}{238|328\ (62} \\
\multicolumn{2}{r}{216} \\ \cline{2-2}
3\times 60^2=10800 & 22328 \\
3\times 60\times 2=360 & \\
2^2=\quad 4 & \\ \cline{1-1}
11164\times 2= & 22328 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 0
\end{array}
$$

答：62.

〔說明〕 如上所述，根的十位是個 6，故第以第一區分中減去 $6^3=216$（其實卽 $60^3=216000$），把剩餘的 22 併入第二區分，得 22328。

現在假定根的個位數字是 a，則

$$238328=(60+a)^3$$
$$=60^3+(3\times 60^2\times a)+(3\times 60\times a^2)+a^3.$$

是前面已說過的，故：

$$22328=3\times 60^2\times a+3\times 60\times a^2+a^3$$
$$=\{(3\times 60^2)+(3\times 60\times a)+a^2\}\times a.$$

因之試以 60^2 的三倍，10800 除 22328，得整數的商 2，再假定 2 是根的個位數字，把 $3\times 60\times 2=360$ 及 $2^2=4$ 加入

10800 得 11164。以 2 乘此數，從 22328 減之，恰無餘剩，卽是說此數中減了 $60^3+(3\times60^2\times2)+(3\times60\times2^2)+2^3$ 卽 62^3 恰好減完。故知 238328 的立方根是 62。

［例 2］　求 48627125 的立方根。

算草

$$
\begin{array}{rl}
 & 48|627|125\ (365 \\
 & 27 \\
\hline
3\times30^2=2700 & 21627 \\
3\times30\times6=540 & \\
6^2=\quad 36 & \\
\hline
3276\times6= & 19656 \\
\hline
3\times360^2=388800 & 1971125 \\
3\times360\times5=5400 & \\
5^2=\quad 25 & \\
\hline
394225\times5= & 1971125 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

答：365.

〔說明〕　先把該數區分，知道了根有三位。看第一區分是 48，故知根的首位爲 3，於是減去 $3^3=27$，把剩餘併入第二區分得 21627，用 $3\times30^2=2700$，試除此數得 8，試用後知 8 太大，改用 7，以試尙太大，改用 6。於是在 2700 中加以 $3\times30\times6$ 及 6^2 卽 540 及 36 而爲 3276，以 6 乘之得 19656，從 21627 減此數，再把剩餘添入第三區分得 1971125。

現設根的個位數爲 a，則

開立方算法須依次記順序：

1. 行每隔三位的區分，以知根的位數。
2. 看第一區分，知道了根的首位數字，減去其立方。
3. 把減後的剩餘併入第二區分，試以根的首位的平方三倍除之，以定次一位的數字。
4. 於根的首位平方的三倍，加根的首位乘第二位又三倍之，再加根第二位的平方，從第二區分減這三者之和用第二位根乘的數。
5. 若有剩餘再併入第三區分，把先已求得的根視爲一個數，再照上法反覆計算卽可。

開立方法在代數當中要講到的，詳細的理由，可看開明代數講義。

$$48627125=(360+a)^3$$

$$=360^3+(3\times360^2\times a)+(3\times360\times a^2)+a^3.$$

故 $$1971125=(3\times360^2\times a)+(3\times360\times a^2)+a^3$$

$$=\{(3\times360^2)+(3\times360\times a)+a^2\}\times a.$$

因之試以 $3\times360^2=388800$ 除 1971125 得 5，於是假定此 5 爲立方根的個位數字，於 388800 上加 $3\times360\times5=5400$ 及 $5^2=25$ 得 394225，以 5 乘此數，從 1971125 中減之，剩餘適爲 0；則就是說這數中減去了

$$360^3+(3\times360^2\times5)+(3\times360\times5^2)+5^3,\text{ 即 }365^3$$

之後，恰是無餘，故 365 卽是所求的立方根。

小數的立方根

小數的立方根，也是可從小數點起，每隔三位作一區分而知其位數。

例如 0.021952，區分起來是 0.021|952，首位在第一區分，故知立方根的首位，是小數第一位。

又如 0.00000921618，區分起來，0.000|009|216|18，首在第二區分，故立方根的首位是小數第二位。

所以首位在第幾區方，卽示立分根的首位是小數第幾位。

這理由只要注意了：

$$1^3=1,\ 0.1^3=0.001,\ 0.01^3=0.000001,\cdots\cdots$$

就可容易明白的。

［例 1］ 求 0.224755712 的立方根。

算草

$$\begin{array}{rrl}
 & 0.224|755|712 & (0.608\\
 & 21\overset{*}{6} & \\
\hline
3\times60^2=1080000 & 8755712 & \\
3\times600\times8=\quad 14400 & & \\
8^2=\quad 64 & & \\
\hline
1094464\times8= & 8755712 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

答：608。

〔說明〕 從小數點起，每隔三位行區分，知立方根從小數第一位起，運算全與整數相同。

但最初的剩餘 8 併入第二區分後，爲 8755，以 3×60^2 即 10800 去除，不能得整商，故小數第二位是 0，因之即再併入第三區分而得 8755712，以 3×600^2 即 1080000 去除，得商 8，推定小數的第三位是 8，照已知的方法計算。

又因 $3\times60^2=10800$，故 3×600^2 只要在原有的結果下面添二個 0 即可。

求立方根中間如有 0 時，均可照此例計算。

[例 2] 求 2.71828 的立方根。

算草

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2.718|28\ (1.3956 \\
 & 1 \\
3\times10^2=300 & 1718 \\
3\times10\times3=\ \ 90 & \\
3^2=\ \ \ 9 & \\
399\times3= & 1197 \\
\hline
3\times130^2=50700 & 521280 \\
3\times130\times9=\ \ 3510 & \\
9^2=\ \ \ 81 & \\
\hline
54291\times9= & 488619 \\
\hline
3\times1390^2=5796300 & 32661000 \\
3\times1390\times5=\ \ 20850 & \\
5^2=\ \ \ 25 & \\
\hline
5817175\times5= & 29085875 \\
\hline
3\times13950^2=583807500 & 3575125000 \\
3\times13950\times6=\ \ 251100 & \\
6=\ \ \ 36 & \\
\hline
584058636\times6= & 3504351816 \\
\hline
 & 70773184
\end{array}
$$

答：1.3956 強。

〔說明〕 把剩餘併入第二區分後，1718 以 $3\times10^2=300$ 除，得整商 5，以此推定根的第二位是 5，照已知的方法計算知 5 太大，故以 4 減之，4 尚嫌大，乃易以 3。次第三區分中併入了上

的剩餘爲 521280，以 $3\times130^2=50700$ 除，得整商 10，因根的第三位數字最大只能是 9，故推定爲 9 而計算。

這例是開立方開不盡的，卽不是恰等於某數立方的數，故開立方開不盡，普通的數開立方大概開不盡的。以次每回添三個 0 下去而計算，求立方根到小數的無論幾位都可以。

分數的立方根

要把分數開立方，先把分數化爲小數，然後計算。

例如要計算 $\sqrt[3]{\frac{9}{49}}$ 可計算 $\sqrt[3]{0.183673469381\cdots\cdots}$ 而其答數爲 0.5684……。

又從 $\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2\times2\times2}{5\times5\times5}=\frac{2^3}{5^3}=\frac{8}{125}$，反過來想，若要把 $\frac{8}{125}$ 開立方，卽 $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ 卻不妨作爲 $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{2}{5}$ 那麼樣計算。所以：

分數開立方，也可以由求分子分母各自的立方根而得之。

但此方法限於分母能開盡時使用，今示其例：

[例 1] $\sqrt[3]{\frac{125}{512}}=\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{512}}=\frac{5}{8}$.

[例 2] $\sqrt[3]{\frac{15}{343}}=\frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{343}}=\frac{2.4662\cdots\cdots}{7}=0.3523\cdots\cdots$.

習題 51.

求次記各數的立方根 (1—10)：

1. 9261.

2. 2515456.

3 147197952.

4. 20910518875.

5. 5359.375. 6. 3.1416.

7. 0.021253033. 8. $\frac{7}{10}$.

9. $\frac{7}{125}$ 10. $5\frac{1}{6}$.

習題 51 的答:

1. 21. 2. 136. 3. 528. 4. 2755.

5. 17.5. 6. 1.465. 7. 0.276.

8. $\sqrt[3]{\frac{7}{10}}=\sqrt[3]{0.7}=0.887$.

9. $\sqrt[3]{\frac{7}{125}}=\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{1.912}{5}$

$=0.382\cdots\cdots$

10. $\sqrt[3]{5\frac{1}{6}}=\sqrt[3]{5.166}=1.728$.

第十一章

近似值與省略算法

一 近似值

三個人分洋一元，每人得三角三分三釐三毫……，但實際上，並無毫的這一種貨幣，無論計算上分得怎樣的細，事實上卻只能分到釐位，所以毫位以下不計，而作爲三角三分三釐，這叫做毫位以下抹脫。或把三毫以下的算作上一位的一，而作爲三角三分四釐，這叫做毫位以下趕進。這二者都是不計毫位以下的算法。

要表示一數的曾經抹脫的，在後面加個強字或餘字；要表示趕進的，加個弱字。如在上例，則說三角三分三釐強，或三角三分四釐弱。

凡逢複雜煩多的數值可用抹脫或趕進的方法，造出簡單的數值以代替，這叫做原數的近似值。

在某位數以下不計時，有用該位的數字在 4 以下（卽 4,3,2,1,0 中之一）者抹脫而在 5 以上（卽 5,6,7,8,9 中之一）者趕進的方法。這叫做在該位四捨五入。例如把 8.4637 的小數第三位以下四捨五入起來則爲 8.46，小數二位以下四捨五入起來則爲 8.5，小數全部四捨五入起來則爲 8。這因爲要使略去若干位後的數，近於眞的數值之故。

實際上我們所用到的數，大都是近似值。稱東西的幾斤幾

兩，決不會恰恰到了兩爲止的，甲地到乙地的路幾里，決不會一點無零餘的，說時間幾點幾分，也大都是個近似値。而且實在也只要近似値就夠了。你去賣菜，倘若要稱到三斤一兩二錢九分……而計價錢，豈不太麻煩而且無謂？譬如說南京到上海 540 里 69 丈 1 步，你爲什麼能量得這樣準確，又有什麼必要。問你早上幾點鐘起來，如說七點鐘二十八分三十二秒又四分之一，還不如說七點半直截了當。所以有些地方，不但可以用近似値，而且必要用近似値的。

我們實際上使用的數値，大都是近似値。說南京到上海540里，並不可想做這是絕對正確，一分一釐也不差的，這是個近似値。

近似値和眞的數値的差，叫做誤差。但說上面的 540 里的近似値的誤差是多少，要詳細知道牠，那是不行。倘使早知道了 540 里是近似値，而誤差是多少，那麼開頭就可以不說什麼近似値，而把眞的數値說出來好了。知道了正確的誤差，自然知道眞的數値，因之眞的數値不知道，誤差也是無從知道其詳細的。或者眞的數値是知道的，但恰要用近似値，那是因爲沒有用眞的數値的必要，所以這時也不需知道精細的誤差之理。無論如何，在用近似値的地方，而要詳細知道其誤差是不合理的。

所以上面所說的 540 里是近似値，誤差不知道，眞的數値也不知道。但是說眞的數是 500 里或 600 里全不知道卻也不成話。固然誤差多少是不知道，也沒有知道的必要。但這誤差在 1 里以內或在半里以內，說誤差決不比這數大，卻是有知道的必要。這個數叫做近似値的誤差的界限。

上面的 540 里倘使在計算時，不到里的數單是抹脫或趕進的，那麼這誤差的界限是 1 里。因爲這誤差不滿 1 里，而再要精確一點卻是不知道的。又倘是把不滿里的數四捨五入而計算出

來的，那麼誤差的界限是半里，因爲眞的值在 539.5 里以上而 540.5 里以下的。雖不知比 540 里是多或少，總之與 540 里的差是在半里之內的。

一般把不到某位的數單是抹脫或趕進時，近似值誤差的界限是這位上的 1，把不到某位的數四捨五入時，誤差的界限是這位的 1/2。

上面的 540 里，倘使不到的里數，單是抹脫的，那麼眞的值也許是 540 里以上的 541 里（如爲 540.999 里那樣），所以須要明白這可以有 1 里的誤差。倘不到里的單是趕進，那麼眞的值也許是 540 里以下的 539 里(如爲 539.001 里那樣)也須要知道這可以有 1 里的誤差。倘使不到里的是用四捨五入法的，那麼眞的數值是 539.5 里以上 540.5 里未滿，故其與最大(540.5 里)最小(539.5 里)的差也各是半里。卽誤差的界限小，則其間可以有的誤差的值也小，這就說近似值比較精密。

上記的 540 里若是只把不到里的數抹脫的算法，而眞的數倘是 540.1里，那誤差是 0.1 里。又 540 里倘是用四捨五入，而眞的數假定是 540.4 里，那麼誤差是 0.4 里,所以誤差界限的大小，與誤差的眞的大小，不一定相適合，就是誤差界限大的，也可以有近於比較正確的數值。這裏比較的正確與比較的精密意義不同，正確指誤差本身而言，精密指誤差的界限而言。現在上面所說的都是假定，眞的誤差是多少，本不知道（而且原無知道的必要），而誤差的界限是必要的，因爲知道的精密總較不知道的正確爲優，

二　省略算法

例如求 4.635785×2.41083 的積到小數二位止（求到小數二位止之意，是這數有小數二位。而對於其眞的積的誤差界限

是 0.01 的那樣的數。(就是說比眞的積大也好，小也好，只要和眞的相差不到這數末位的 1，卽不到 0.01 便可之意)。這問題，若照普通的乘法計算起來(如後式)，計有十一位小數。但問題中只要小數二位，故答數是 11.17，或 11.18 卽可。因之爲得出其餘的九個數字的計算大半是徒勞的。爲要免去此種徒然的勞力而想出來的一種算法，叫做省略算法。

```
      4. 635785
      2. 41083
      13907355
     37086280
    4635785
 1 8543140
 9 271570
11.17608955155
```

以下述加減乘除四則上省略算最簡便的若干方法，但對於其原理，則不加說明。因其中有些固可很簡單說明，但也有很不易說明的。一面這講義的篇幅有限，而計算上是實用比理論更重，所以止示實地的應用。

加法

[例 1]　求 2.376426，9.753142，1.972395，

上例：4.635785×2.41083 的眞的値是 11.17……，故求到小數二位的値，答數以 11.17 比 11.18 好，因爲到末位的數字都對的是比較好，這一種想法是不行的。這因爲還不懂近似値的意義之故。旣然用了近似値，只要精密的程度一樣，不論數字合不合是無關的。在這例中，已知眞的値近 11.176，或 11.18 比之 11.17 是較近於正確。數字的合不合與精密合度無關係，與正確的程度也無關係。單要求數字的相合是無意義的。又例如求 2.73508135 與 5.12491867 的和，到小數二位，其時眞的和爲 7.86000002，這到了最後一位的數的相加，也影響到小數第二位的數字，故如要求小數第二位的數的相合，計算一點也不能省略，只能照普通的加法計算。其實很可不必如此。

0.028817, 4.315760, 6.079000, 0.954998 的和，到小數三位。

算草

$$\begin{array}{r} 2.3764 \\ 9.7531 \\ 1.9723 \\ 0.0288 \\ 4.3157 \\ 6.0790 \\ 0.9549 \\ \hline 25.480\cancel{2} \\ 1 \end{array}$$

答 25.481.

〔說明〕 取各數至所要的末位再下一位（本例到小數第四位），照普通的方法相加，把其加得的結果（本例爲 25.4802）的末一位趕進（本例爲 25.481），就是答數。

〔例 2〕 求 2.176543, 5.400872, 0.007365, 8.815679 的和，到小數二位。

算草

$$\begin{array}{r} 2.176 \\ 5.400 \\ 0.007 \\ 8.815 \\ \hline 16.39\cancel{8} \\ 1 \end{array}$$

答 16.40.

〔例 3〕 求 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}$，到小數四位。

算草

$$\begin{array}{r} 0.33333 \\ 0.20000 \\ 0.14285 \\ 0.11111 \\ 0.09090 \\ 0.07692 \\ \hline 0.9551\cancel{1} \\ 1 \end{array}$$

答 0.9552.

減法

〔例 1〕 求 3.65247 與 1.28276 之差，到小數二位。

算草
3.65
1.28
2.37……答

〔說明〕 取被減數、減數各到所要的位數，照普通的減法計算卽可。

〔例 2〕 求 $\frac{7}{18}-\frac{5}{13}$，到小數五位。

算草
0.38888
0.38461
0.00427……答

乘法

〔例 1〕 求 9.21472636×65.21097463，到小數第三位止。

算草甲
9.21472636………被乘數
3647901.56………乘數把數字順序倒寫
55288356…9214726×6 看下面的說明
4607360 … 921472×5
184294……92147×2
9214 …… 9214×1
828 …… 92×9
63…………9×7
60090115…………上記部分積的和
1…………上記末二位趕進

答 600.902……使答的末位爲小數第三位，而記小數點。

乘法例 1 的計算甲比乙少乘一位，較簡單。又甲乙二演算中，9.21472636 的末二位數字 36 及 65.21097463 的末三位數 463，在計算中均不用到。

算草乙 65.21097463……把這作爲被乘數，則：
636274129…便是乘數把數字順序倒寫
5868987··6521097×9
1304218…652109×2
65210…65210×1
26084……6521×4
4564……65×7
130……65×2
36……6×6
60090115…………上記部分積的和
1…………上記末二位趕進

〔說明〕 先把被乘數記下（當然，其中任何一列都可以看做被乘數），在所要位數的再下二位（本例是小數五位）的數字下，記乘數的個位的數字，其他乘數的數字，照平常記載的順序反一方向記下（看上面的算草）。

次由乘數的右端起，以乘數各有效數字乘被乘數。此時，在乘數數字直上的數字以右的被乘數各數字，不必相乘（卽在上例算草甲中，乘數右端數 6 乘被乘數的一部 9214726，其次乘數的左一個數字 5 乘被乘數的一部 921472，次 2 乘 92147，次 1×9214，次 0 跳出而 9×92，最後 7×9）。這樣乘得各結果（部分積），使其末位的數字，並列在一縱線上，而求其和（本例的 60090115）。再把其末二位趕進（本例的 600902）。最後記上小數點，就是答數。

〔例 2〕 4.635785×2.41083（到小數二位）。

算草 4.635785
80142
92714………46357×2
18540……… 4635×4
463…………463×1
32……………4×8
11.1749
1 答 11.18.

［例 3］ 8.2362×0.79635 (到小數四位)。

算草

```
 8. 236200
   536970
 ─────────
  5765340……823620×7
   741258…… 82362×9
    49416………8236×3
     2469………823×3
      410………82×5
 ─────────
 6. 558893
       1          答 6.5589.
```

除法

［例 1］ 395546827059÷15268437，到個位止。

算草

```
                   25906……答
        ─────────────────
1526843|7)3955468|27059
          3053686……1526843×2
          ───────
           901782
           763420 …… 152684×5
          ───────
           138362
           137412………15268×9
           ──────
              950
              912…………152×6
              ───
               38
```

〔說明〕 先求商的位數（這是用心算求，在本例是以 15268437 除 395546827059，故照普通的除法，第一以 1526843 除 3955468，得商的第一數字，以後每一次撥下被除數的一個數字者四次，故商的位數爲 5，卽商是個 5 位數）。次從除數的左端取不比商的位數（本例是 5）9 倍爲小的數（本例是 5×9

例 2 與前例同，記被乘數 4635785。又在小數二位的再次二位的 7 字下面記乘數的個位數字 2，再把數的順序倒寫過去，241083，到末了的字因爲知道是不必計算的，所以不寫了。

例 3 也是這樣子，被乘數是 8.2362，而乘數的個位數字須記在小數四位再次二位的數字下面，故在後加上二個 0，而在那下面記那乘數的個位數字，也是沒有的，記個 0。

＝45，故在除數左端取 1，取 15，均不足，要取 152 方可)，再在其右取比商的位數少的 1 個數的數字(本例即在 152 之右端再取 4 個數字即 6843 而成爲 1526843)。這是省略算的第一除數。

次從被除數左端取不比此第一除數小的數(在本例即是 3955468，不比 152643 小的)。

次以第一除數來除這數，得商的一位數字(本例即以 1526843 除 3955468 得商 2)，這是商的第一數字。再把除數的末一數字抹脫，以除上記部分除法的剩餘；再得商一位(本例即以 152684 除 901782 得商 5)，這是所求的商的第二數字。再把除數的末一數字抹脫，以除上面的剩餘，再得商一位(本例即以 15268 除 138362 得 9)，這是所求的商的第三數字。依次照這樣下去，求得商所要的數字爲止(即在本例 1526 除 950 得 0，以 152 除 950 得 6，這時已得商五位即 25906 故止)，於是求得了答數。

這雖然是被除數、除數均爲整數而商爲止於個位的例，但無論怎樣的除法，均可類推的。

在這例中除數的末位 7 及被除數的末五位 27059 是在計算上都不用到的。

[例 2] 求 2.4494897427÷1.414213562，到小數五位。

```
                    1.73205 ·····答
1.4142135|62) 2.4494897427
               14142135······14142135×1
               10352762
                9899491 ······ 1414213×7
                 453271
                 424263·········141421×3
                  29008
                  28284 ········· 14142×2
                    724
                    705 ············ 141×5
                     19
```

〔說明〕 本例是以 1.4……除 2.4……，故照普通的除法看，商的第一位有效數字是從個位起的，所以到小數五位止，共有商 6 位。這一點明白了，其他的被除數、除數的小數點可以不管，照前例同整數的相除一樣，求商的第一個數字到第六個數字即可。

於是照前面一樣，商的位數 6 的 9 倍爲 54，從除數左端取不比 54 小的 141 (當然把小數點看作不存在的)，再在取商的位數 6－1 的 5 個數 42135，於是把 14142135 作爲第一除數，去除不比此數小的 2.4494897，得出第一個商的數字 1 來，剩餘是 10352762，以第一除數抹脫了末個數字的 1414213 來除，得商 7，這是商的第二個數字。這樣依次下去，得出商的六個數字。

因商的小數是五位，所以把小數點照那樣記上，即爲答數。

〔例 3〕 3.1415926535÷4.5731，至小數六位止。

```
                0.686972……答
        4.5731)3.1415926535
               2.74386 ……… 45731×6
               397732
                365848 ……… 45731×3
                 318846
                 274386………45731×6
                  44460
                  41157 ……… 4573×9
                   3303
                   3199…………457×7
                    104
                     90 ………… 45×2
                     14
```

〔說明〕 本例是以 4.5 …除 3.1…，故商的第一個有效數字是從小數第一位起的，因之到小數六位止，有數字六位。這旣明白，以後的計算，可以照前例一樣施行。

在此於除數左端取不比商的位數 9 倍卽 54 小的數 457，再在其右方取 6-1=5 個數字，但實際上這裏只有二個了，要取只能在下面加 0，成 457310000。但這時可不用省略算法，在開頭時，不妨照普通的除法一樣計算。

照普通的除法，得了商的一位 0.6，以前還有五位，這時再看看可否用省略算法——卽從除數左端取了不小於 5×9=45 的 45，再於其左端取 5-1=4 個數字，但實際只有三個，故仍照普通的除法，再除一次得次一位的商。於是商爲 0.68，而以後尙有 4 位。這裏再以除數左端取不比 4×9=36 小的 45，再於其右端取 4-1=3 位的數字，爲 45731，恰好是省略算的第一除數，這個除數是和眞的除數一樣的。

照普通的除法，商的第三個數字，是以 45731 除剩餘的 31884，再從上面撥下個 6 來的 318846 而求得的。這裏也照此計算得商的第三個數字 6 及剩餘 44460，這一段也是和普通的除法一樣的。

次把除數的末一位消脫，以 4573 除上面的剩餘 44460，得商 9，剩餘 3303。再以 457 除此剩餘 3303，得商 7 及剩餘 104。再以 45 除 104 得商 2，已得了六位小數的商了。

總之，在如這例那樣除數比較簡單時，省略算法所能給我們的便利較少。

[例 4] 求 16.452037÷56.73281，到小數四位。

算草

```
                 0.2899…………答
56.732|81)16.4520|37
          11.3464…………56732×2
            51056
            45384…………5673×8
             5672
```

【說明】 與例 2 同樣，先看出商的第一位有效數字是小數

第一位，所以商是個四位數。於是定第一除數爲 56732 及被除數 164520，以 56732 除 164520 得商 2 及餘 51056；以 5673 除 51056 得商 8 及剩餘 5672；以 567 除 5672 時，得出的商來不是從 1 到 9 的任何數而是 10，這時候，把以後的各位商的數字，均記作 9 卽可。所以答數是 0.2899。

習題 52

用省略算法，求次各結果到指定位數的小數：

1. $3.7084298+9.94987436+0.019607843+5.29150262+6.85565459+7.39682815.$ (小數四位)

2. $$1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{1}{1\times2\times3\times4\times5\times6}+\frac{1}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}+\frac{1}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}.$$ (小數四位)

3. $85.7375-38.9017.$ (小數三位)

4. $1.41421356\times1.73205081.$ (小數三位)

5. $2.64575131\times3.31662479.$ (小數四位)

6. $68.7934601\times10.34544802.$ (小數四位)

7. $0.4858879\times0.008343313.$ (小數七位)

8. $5.47722558\div1.73205081.$ (小數五位)

9. $1.8171206\div1.259921.$ (小數三位)

10. $1\div3.14159265368919.$ (小數十位)

習題 52 的答：

1. 33.2219. 2. 1.7183. 3. 46.836. 4. 2.450.

5. 8.7750. 6. 711.6991. 7. 0.0040539. 8. 3.16227.

9. 1.442. 10. 0.3183098862.