Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Arbeitsblatt 10

Übungsaufgaben

Aufgabe 10.1. Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T ebenfalls eine endliche Menge ist, und dass für ihre Anzahl k die Abschätzung

$$k \leq m$$

gilt. Zeige ferner, dass T genau dann eine echte Teilmenge ist, wenn

$$k < m$$

ist.

Aufgabe 10.2. Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei

$$M \longrightarrow N$$

eine surjektive Abbildung in eine weitere Menge N. Zeige, dass dann auch N endlich ist, und dass für ihre Anzahl n die Abschätzung

$$n \leq m$$

gilt.

Aufgabe 10.3.*

Seien M und N endliche Mengen mit n Elementen. Zeige, dass für eine Abbildung

$$F \colon M \longrightarrow N$$

die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv äquivalent sind.

Aufgabe 10.4. Zeige, dass die Menge der ganzen Zahlen abzählbar ist.

Aufgabe 10.5. Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist.

Aufgabe 10.6. Zeige, dass die Menge der irrationalen Zahlen überabzählbar ist.

Aufgabe 10.7. Nehmen wir an, dass auf der Erde abzählbar unendlich viele Menschen leben würden, und dass jeder Mensch genau einen Euro besitzt. Finde eine „Umverteilungsvorschrift“, die jeden Menschen zu einem Euro-Milliardär macht.

Aufgabe 10.8. Der Barbier von Sevilla behauptet, dass er genau diejenigen Bürger von Sevilla rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Weise nach, dass er lügt.

Aufgabe 10.9.*

Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und die Menge der Abbildungen Abb $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ gleichmächtig sind.

Aufgabe 10.10. Zeige, dass die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 10.11. Wir nennen eine reelle Zahl *adressierbar*, wenn es einen endlichen Text (über einem fixierten endlichen Alphabet, das aus mathematischen oder sonstigen Symbolen besteht) gibt, der diese Zahl eindeutig beschreibt. Ist die Menge dieser Zahlen abzählbar? Was ergibt sich, wenn man das Diagonalargument aus dem Beweis zu Satz 10.13 anwendet?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.12. (3 Punkte)

Es sei M eine abzählbare Menge. Zeige, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von M abzählbar ist.

Aufgabe 10.13. (4 Punkte)

Zeige, dass die Potenzmenge einer Menge niemals abzählbar unendlich ist.

Aufgabe 10.14. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge der Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt.

Aufgabe 10.15. (4 Punkte)

Man gebe eine Folge rationaler Zahlen derart an, dass jede reelle Zahl ein Häufungspunkt dieser Folge ist.

Aufgabe 10.16. (5 Punkte)

Wir betrachten die Familie der Kochschen Schneeflocken, wobei die Grundseite des gleichseitigen Ausgangsdreiecks K_0 das Einheitsintervall sei. Zeige, dass es überabzählbar viele Punkte $a \in [0,1]$ gibt, die für jedes K_n zur Kante gehören.