Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2023/24**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 7

Übungsaufgaben

Aufgabe 7.1.*

Für die Zahl 1000000π soll eine rationale Approximation gefunden werden, die vom wahren Wert um höchstens $\frac{1}{1000}$-stel abweicht. Wie gut muss eine Approximation für π sein, dass man daraus eine solche gewünschte Approximation erhalten kann?

Aufgabe 7.2. Was hat die Din-Norm für Papier mit Wurzeln zu tun?

Aufgabe 7.3. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 7.4.*

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen x_1, x_2, x_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe 7.5. Es sei $c \in \mathbb{R}_+$ eine positive reelle Zahl und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{c}$ mit dem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Es sei $u \in \mathbb{R}_+$, $d = c \cdot u^2$, $y_0 = ux_0$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{d}$ mit dem Startwert y_0. Zeige

$$y_n = ux_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7.6. Bestimme für die Folge

$$x_n := \frac{2}{3n+5}$$

und

$$\epsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots,$$

ab welchem (minimalen) n die Abschätzung

$$x_n \leq \epsilon$$

gilt.

Aufgabe 7.7. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige, dass die Folge genau dann gegen x konvergiert, wenn es für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n - x| \leq \frac{1}{k}$ gilt.

Aufgabe 7.8.*

Negiere die Aussage, dass eine Folge x_n in $\mathbb{R}$ gegen x konvergiert, durch Umwandlung der Quantoren.

Aufgabe 7.9. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{n^2}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 7.10. Jemand sagt zur Folge $x_n := \frac{n}{2n}$. „Der Zähler und der Nenner gehen hier beide gegen unendlich. Doch der Nenner geht deutlich schneller gegen unendlich, deshalb konvergiert die Folge gegen 0“. Beurteile diese Argumentation.

Aufgabe 7.11. Man untersuche ob die folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt sind oder nicht.

(1) $\mathbb{N}$,
(2) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{13}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$,
(3) $]-5, 2]$,
(4) $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\right\}$,
(5) $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\right\} \cup \{0\}$,
(6) $\mathbb{Q}_-$,
(7) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$,
(8) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geq 4\}$,
(9) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 7.12. Es sei $x > 1$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die Folge $x_n := x^n$ nicht beschränkt ist.

Aufgabe 7.13.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 7.14.*

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt.

Aufgabe 7.15.*

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Aufgabe 7.16. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

Aufgabe 7.17.*

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei durch

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist}, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

definiert.

(1) Bestimme x_{117} und x_{127}.
(2) Konvergiert die Folge in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 7.18. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt ($n \geq 1$).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.19. (3 Punkte)

Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 7 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 7.20. (5 Punkte)

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode) zur Berechnung von rationalen Approximationen der Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl mittels der Heron-Folge.

• Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die natürliche Zahlen enthalten können.

• Der Computer kann natürliche Zahlen miteinander vergleichen (und abhängig vom Vergleichsergebnis zu Befehlen springen).

• Er kann die Summe von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann das Produkt von zwei Speicherinhalten ausrechnen und in einen weiteren Speicher schreiben.

- Er kann Speicherinhalte ausdrucken und vorgegebene Texte ausdrucken.
- Es gibt einen Haltebefehl.

Die Anfangskonfiguration sei

$$(a, b, c, d, e, 0, 0, \ldots)$$

mit $b, c, e \neq 0$. Dabei ist a/b die Zahl, von der die Quadratwurzel berechnet werden soll, $x_0 = c$ ist das Startglied und d/e ist die gewünschte Genauigkeit. Das Programm soll die Heron-Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ausrechnen und ausdrucken (und zwar wird der Zähler und der Nenner hintereinander ausgedruckt) und es soll anhalten, wenn das zuletzt ausgedruckte Folgenglied x_n die Eigenschaft

$$\left| x_n^2 - \frac{a}{b} \right| \leq \frac{d}{e}$$

erfüllt.

Achtung! Alle Operationen sind innerhalb von $\mathbb{N}$ auszuführen!

Aufgabe 7.21. (3 Punkte)

Bestimme für die Folge

$$x_n := \frac{2n+1}{3n-4}$$

und

$$\epsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000},$$

ab welchem (minimalen) n die Abschätzung

$$\left| x_n - \frac{2}{3} \right| \leq \epsilon$$

gilt.

Aufgabe 7.22. (6 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die durch

$$y_n := \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}$$

definierte Folge gegen x konvergiert.

Tipp: reduziere zuerst auf $x = 0$.

Aufgabe 7.23. (4 Punkte)

Zeige, dass die reelle Folge

$$\left(\frac{n}{2^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Tipp: Finde eine geeignete Abschätzung für 2^n mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes.

Aufgabe 7.24. (5 Punkte)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen und sei die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $z_{2n-1} := x_n$ und $z_{2n} := y_n$. Zeige, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Abbildungsverzeichnis